



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Het tellen van alternerendetekenmatrices
(Engelse titel: Counting Alternating Sign Matrices)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Sven Hugo Cornets de Groot

Delft, Nederland
December 2014



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Het tellen van alternerendetekenmatrices”
(Engelse titel: “Counting Alternating Sign Matrices”)

Sven Hugo Cornets de Groot

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. F.J. van de Bult

Overige commissieleden

Dr. B. van den Dries

Dr. D.C. Gijswijt

December, 2014

Delft

INHOUDSOPGAVE

1. Voorwoord	6
2. Abstract	7
3. Inleiding	7
4. Alternating Sign Matrix en square ice	10
4.1. Six-vertex model	10
4.2. Square ice	10
5. Half-integral Laurentpolynomen	19
6. q -getallen	22
7. Gewichten toekennen	25
8. Yang-Baxtervergelijking	26
8.1. Eerste bewijs	26
8.2. Uitbreiding zes-knopen model	31
8.3. Tweede bewijs	36
9. Eigenschappen van de state sum	40
9.1. Waarde van de labels	40
9.2. Symmetrie van de state sum	41
9.3. n^2 specificaties van de parameters waar de state sum versimpelt	44
9.4. De state sum is een polynoom in q^{x_0}	46
10. Uitdrukking voor de state sum	47
11. Verband tussen state sum en het aantal ASM's	51
12. Uitrekenen van de state sum	54
12.1. Uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$	54
12.2. Cauchy-determinant	56
12.3. Eerste bewijs	56
12.4. Bewijs met Dodgson condensatie	58
12.5. Hulpdeterminant	62
12.6. Finale uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$	67
13. Aantal Alternating Sign Matrices	71
14. Geval $x = 2$	72
14.1. Uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$	72
15. Errata in het artikel van Kuperberg	79
Referenties	80

1. VOORWOORD

Beste lezer,

Voor u ligt het verslag van mijn bacheloreindproject, geschreven ter voltooiing van de bachelor Technische Wiskunde aan de TU Delft.

Studenten mochten zelf het onderwerp kiezen waarover ze hun bacheloreindproject wilden houden. Ik heb altijd een voorliefde gehad voor de analyse en de lineaire algebra. Voor het vak Geschiedenis en Filosofie van de Wiskunde heb ik een artikel van Jakob Bernoulli bestudeerd, waarin hij een voorloper van de wet van de grote aantallen bewees. Het doorgronden van een bewijs beviel mij heel goed. Om deze redenen bekeek ik direct de projecten die de vakgroep Analyse aanbood.

Zo kwam ik terecht bij Fokko van de Bult, die mijn begeleider zou worden. Het onderwerp dat ik heb uitgekozen, was het bestuderen van een bewijs van Greg Kuperberg [3]. Dit bewijs behandelt het aantal $n \times n$ alternerendetekenmatrices. Veel theorie die Kuperberg in zijn bewijs geeft, is voor mensen uit het vakgebied te begrijpen met één kort zinnetje toelichting. Voor een bachelorstudent Technische Wiskunde blijkt achter dat ene zinnetje veel meer theorie te zitten dan op het eerste oog lijkt.

Dit verslag is geschreven met behulp van L^AT_EX. Fokko heeft me hierin veel nieuwe dingen bijgebracht, maar ook [10] is me van grote hulp geweest bij het maken van alle plaatjes in dit verslag.

Graag wil ik Fokko bedanken voor de hulp die hij mij heeft geboden bij het tot stand komen van dit verslag. Bij wekelijkse besprekingen heb ik altijd een stuk verslag bij hem ingeleverd waarop hij verhelderende toelichting gaf. Ook heeft hij altijd geduldig dingen uitgelegd die ik niet begreep of waar ik op vastliep. Ook wil ik mijn ouders en mijn huisgenoten bedanken, die mij de afgelopen drie maanden tot steun zijn geweest.

Tenslotte wens ik u veel plezier met het lezen van dit verslag.

Sven Hugo Cornets de Groot
januari 2014

2. ABSTRACT

Dit bacheloreindproject is een analyse van het bewijs dat Greg Kuperberg [3] gaf over het vermoeden van de wiskundigen Mills, Robbins en Rumsey [1] dat het aantal $n \times n$ Alternating Sign Matrices gelijk is aan

$$A(n) = \frac{1!4!7! \dots (3n-2)!}{n!(n+1)!(n+2)! \dots (2n-1)!}$$

Er bestaat een bijjectie tussen de ASM's en square ice, een speciaal geval van het six-vertex model. De formule wordt bewezen door de state sum van een square ice met bepaalde gewichten uit te rekenen. Deze gewichten zijn half-integral Laurent-polynomen met als variabelen q -getallen. Om de state sum uit te rekenen is de Yang-Baxtervergelijking nodig en worden twee determinanten uitgerekend.

3. INLEIDING

De drie wiskundigen William Mills, David Robbins en Howard Rumsey [1] stelden in 1982 een vermoeden op over het aantal $n \times n$ alturnerendetekenmatrices. De Engelse naam voor alturnerendetekenmatrix is Alternating Sign Matrix. We leggen eerst uit wat een Alternating Sign Matrix is, voordat we het vermoeden zullen noemen.

Definitie 3.1. Een Alternating Sign Matrix (ASM) is een vierkante matrix met de volgende eigenschappen:

- (1) De elementen zijn 0, 1 of -1 .
- (2) De som van de elementen van elke rij en elke kolom is 1.
- (3) De niet-nul elementen in elke rij en kolom alturneren van teken. Er zullen dus nooit twee 1-en of (-1) -en naast elkaar staan in een ASM.

De naam Alternating Sign Matrix vindt zijn oorsprong in eigenschap 3, namelijk dat het teken van de elementen in elke rij en elke kolom alterneert.

Voorbeeld. Er zijn zeven 3×3 Alternating Sign Matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mills, Robbins en Rumsey vermoedden dat er een formule bestond voor het aantal $n \times n$ Alternating Sign Matrices:

Stelling 3.2. *Er zijn*

$$A(n) = \frac{1!4!7! \dots (3n-2)!}{n!(n+1)!(n+2)! \dots (2n-1)!}$$

$n \times n$ Alternating Sign Matrices.

De drie wiskundigen konden de formule nagegaan voor $n = 1, 2, \dots, 10$. Zij konden het vermoeden echter niet bewijzen voor $n \geq 11$. Wel presenteerden ze in hun verslag numerieke resultaten die het vermoeden onderbouwden.

In 1992 lukte het Doron Zeilberger wel om het vermoeden [2] te bewijzen. In 1995 publiceerde ook Greg Kuperberg een bewijs voor dit vermoeden [3]. Kuperberg bewijst dit vermoeden door de 1-optelling zoals gedefinieerd in Definitie 11.1 uit te rekenen. Voor de 1-optelling zien we dat de formule voor $n = 3$ klopt. Immers:

$$\sum_{\text{ASM's}} 1^{\#(-1)} = 7 = \frac{1!4!7!}{3!4!5!}$$

Kuperberg noemt in zijn artikel ook nog de 2-optelling. De formule voor de 2-optelling is in dit verslag apart uitgerekend, in sectie 14 zullen we zien dat de 2-optelling gelijk is aan $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Voor $n = 3$ zien we dat deze formule klopt:

$$\sum_{\text{ASM's}} 2^{\#(-1)} = 8 = 2^{\frac{3 \cdot 2}{2}}$$

Het bewijs van Kuperberg staat aan de basis van veel meer theorie en kennis over ASM's. We zullen kort ingaan op mogelijke uitbreidingen van dit verslag en andere gerelateerde theorie.

Om de 1-optelling uit te rekenen, berekent Kuperberg de zogenaamde state sum van een square ice model, zoals gedefinieerd in Definitie 4.2 en 4.3. Het square ice model dat nodig is om de 1-optelling uit te rekenen, heeft een vaste randvoorwaarde. Een ASM heeft veel symmetrieklassen [4]. Een voorbeeld daarvan zijn de verticaal symmetrische ASM's. Dit zijn $(2n+1) \times (2n+1)$ -matrices waarbij de elementen symmetrisch zijn na spiegeling door de middelste kolom. De square ice die bij dit soort matrices hoort heeft een andere randvoorwaarde dan onze square ice [4], waardoor ook de state sum verandert. Zoveel symmetrieklassen er zijn, zoveel verschillende square ice modellen, met verschillende randvoorwaarden, zijn er.

Uit de formule van Stelling 1 blijkt dat het aantal $n \times n$ ASM's heel snel groeit als n groter wordt. Zo zijn er voor $n = 10$ al $1,3 \cdot 10^{11}$ ASM's. Met Lemma 4.9 zien we dat er op de bovenste rij van een ASM precies één 1 staat. Op die manier verder beredenerend zien we dat er op de onderste rij van een ASM ook precies één 1 staat. Op de een na bovenste - en de een voor onderste rij kunnen maximaal twee 1-en staan. Het is de vraag hoe een willekeurige $n \times n$ ASM eruit ziet, met n groot. Het blijkt dat de elementen bepaald gedrag vertonen, aan de randen en in de hoeken staan bijvoorbeeld voornamelijk nullen [5].

Er is overlap tussen ASM's en Descending Plane Partitions (DPP's) Een DPP van orde n is een tweedimensionale rangschikking van getallen van de vorm [6]:

$$\begin{array}{ccccccccccc} D_{11} & D_{12} & D_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & D_{1,\lambda_1} \\ & D_{22} & D_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & D_{2,\lambda_2+1} \\ & & D_{33} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & D_{3,\lambda_3+2} \\ & & & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ & & & & & & & & & D_{tt} \dots D_{t,\lambda_t+t-1} \end{array}$$

Zodat:

- (1) De getallen aan het begin van elke rij en de lengte van de rij voldoen aan:

$$D_{11} > \lambda_1 \geq D_{22} > \lambda_2 \geq \dots \geq D_{t-1,t-1} > \lambda_{t-1} \geq D_{tt} > \lambda_t$$
- (2) De getallen in de rijen zijn dalend.
- (3) De getallen in de kolommen zijn strikt dalend.

Voorbeeld. Er zijn zeven Descending Plane Partitions van orde 3:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ & & & & & & & & 2 & & \end{array}$$

Voor A een ASM definiëren de wiskundigen Roger Behrend, Philippe di Francesco en Paul Zinn-Justin [6] de volgende statistieken :

- (1) $\nu(A) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq i' \leq n \\ 1 \leq j' < j \leq n}} A_{ij} A_{i'j'}$
- (2) $\mu(A) = \#(-1) \text{ in } A$
- (3) $\rho(A) = \#0 \text{ links van de } 1 \text{ in de eerste rij van } A$

Voor D een DPP definiëren ze dezelfde statistieken:

- (1) $\nu(D) = \# \text{ elementen in } D \text{ waarvoor geldt: } D_{ij} > j - i$
- (2) $\mu(D) = \# \text{ elementen in } D \text{ waarvoor geldt: } D_{ij} \leq j - i$
- (3) $\rho(D) = \# \text{ elementen in } D \text{ waarvoor geldt: } D_{ij} = n$

In [6] bewijzen deze wiskundigen dat:

$$\begin{aligned} & |\{A \in \text{ASM}(n) : \nu(A) = p, \mu(A) = m, \rho(A) = k\}| \\ &= |\{D \in \text{DPP}(n) : \nu(D) = p, \mu(D) = m, \rho(D) = k\}| \end{aligned}$$

Voor alle n, p, m, k . Dit betekent dat alle telproblemen met betrekking tot ASM's equivalent zijn met telproblemen met betrekking tot DPP's. Er zijn bijvoorbeeld evenveel $n \times n$ ASM's als DPP's van orde n . In bovenstaande voorbeelden zien we dit, en ook zijn alle statistieken van de ASM evengroot als de statistieken van de corresponderende DPP.

Een ander gevolg van bovenstaande is dat de genererende functies van ASM's en DPP's aan elkaar gelijk zijn:

$$\begin{aligned} Z_{ASM}(n, x, y, z) &= \sum_{A \in \text{ASM}(n)} x^{\nu(A)} y^{\mu(A)} z^{\rho(A)} \\ &= \sum_{D \in \text{DPP}(n)} x^{\nu(D)} y^{\mu(D)} z^{\rho(D)} = Z_{DPP}(n, x, y, z) \end{aligned}$$

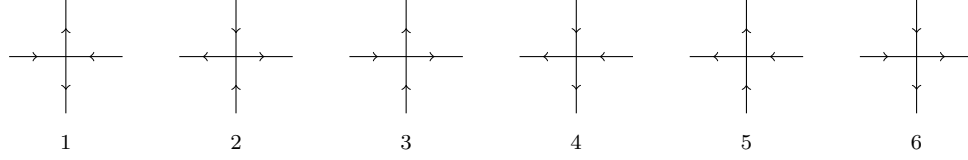
Een groot doel is om de genererende functies van ASM's te kennen. Als deze bekend is, kan men bijvoorbeeld differentiëren naar y , om het gemiddeld aantal (-1) -en te berekenen. Omdat $\mu(A)$ het aantal (-1) -en in A een ASM is, zien we dat de 1-optelling en de 2-optelling gelijk zijn aan respectievelijk $Z_{ASM}(n, 1, 1, 1)$ en $Z_{ASM}(n, 1, 2, 1)$. We zijn dus al goed op weg!

4. ALTERNATING SIGN MATRIX EN SQUARE ICE

In deze sectie zullen we het model uitleggen waar het bewijs van Greg Kuperberg op gebaseerd is. Kuperberg maakt gebruik van een correspondentie tussen een $n \times n$ ASM en een $n \times n$ gerichte graaf. De elementen uit de ASM bepalen de richting van de takken van de graaf. Zo'n vierkante, gerichte graaf heet een toestand van een square ice. Square ice is een speciaal geval van het zogenaamde six-vertex model. We zullen nu uitleggen wat het six-vertex model inhoudt.

4.1. Six-vertex model. In het six-vertex model wordt een gerichte graaf G beschouwd zodat er bij elke knoop vier takken zijn, waarvan er twee takken naar de knoop toe gericht zijn en twee takken van de knoop af gericht. De gerichte takken worden in het vervolg pijlen genoemd.

Definitie 4.1. In het six vertex model kunnen de knopen op zes manieren georiënteerd zijn, een knoop kan zes staten hebben:



Definitie 4.2. Een graaf G kan meerdere orientaties hebben. Laat G' één specifieke orientatie van G zijn. G' wordt een *staat* van G genoemd. Aan de knopen v in staat i wordt een gewicht $w(i, v)$ toegekend. Het *gewicht* van G' is het product van alle gewichten van de knopen:

$$\text{gewicht van } G' = \prod_{v \in G'} w(i, v)$$

De *state sum* van G is het totale gewicht van alle staten van G :

$$\text{state sum van } G = \sum_{\text{alle } G'} \prod_{v \in G'} w(i, v)$$

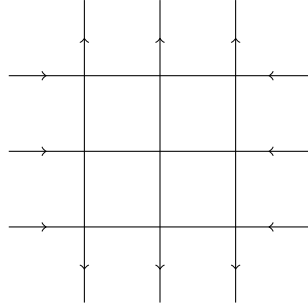
We gaan nu een speciaal geval van het six-vertex model beter bekijken. In dit speciale geval wordt een gerichte, vierkante graaf bekeken waarvan de pijlen aan de buitenkant van de graaf een vaste orientatie hebben.

4.2. Square ice.

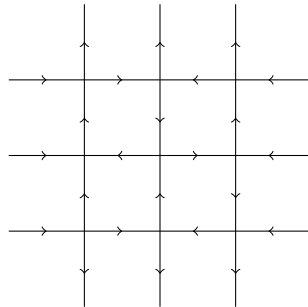
Definitie 4.3. Het six-vertex model toegepast op een $n \times n$ vierkant grid G met pijlen die aan de zijkanten naar binnen wijzen en aan de boven- en onderkant naar buiten heet het *square ice model* of *square ice*. Het square ice model is dus de verzameling van alle orientaties van G . In het vervolg noemen we een element uit het square ice model (G' , een staat van G) een *square ice toestand*.

Voorbeeld.

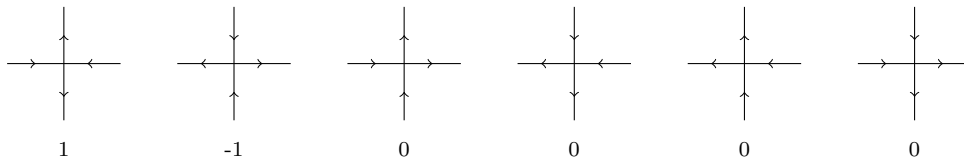
- (1) Het 3×3 vierkante grid G met pijlen die aan de zijkanten naar binnen wijzen en aan de boven- en onderkant naar buiten (een square ice graaf G) ziet er als volgt uit:



- (2) In de volgende graaf zien we een voorbeeld van een square ice toestand. Elke knoop heeft twee pijlen naar binnen en naar buiten. De pijlen aan de zijkanten wijzen naar binnen en aan de boven- en onderkant wijzen ze naar buiten.



Definitie 4.4. We kennen op de volgende manier een element van een ASM toe aan een staat van een knoop v uit een square ice :



Dit is een functie $s : \text{square ice} \rightarrow \text{ASM}$.

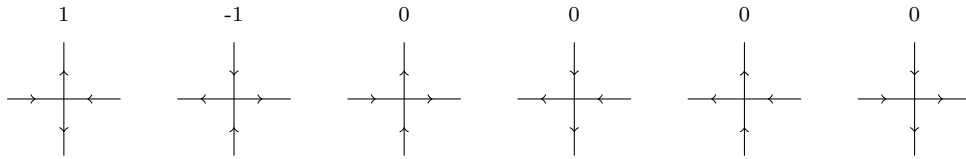
Voorbeeld. Onder deze toekenning zien we dat de square ice toestand uit het vorige voorbeeld correspondeert met de volgende ASM:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opmerking. Merk op dat elke square ice toestand daadwerkelijk correspondeert met een ASM. Het is duidelijk dat de elementen van de corresponderende matrix 0, 1 of -1 zijn. De niet-nul elementen in elke rij en kolom veranderen ook van teken. Als er een knoop in staat 1 is, dan kan op dezelfde rij pas weer een knoop in staat 1 komen nadat er een knoop in staat 2 is geweest. De pijlen moeten omklappen.

Hetzelfde geldt in dezelfde kolom. Voor een knoop in staat 2 geldt ook hetzelfde. De som van de elementen van elke rij en elke kolom is 1, omdat er in elke rij en elke kolom één knoop meer is in staat 1 dan in staat 2. De knopen in staat 2 worden ingesloten door knopen in staat 1. Dit komt omdat een knoop in staat 2 niet aan de buitenkant van de graaf (met of zonder nullen ertussen) kan staan. De pijlen moeten nog een keer omklappen, door een knoop in staat 1.

Definitie 4.5. We kennen op de volgende manier een staat van een knoop v uit een square ice toe aan een element van een ASM :



Dit is een functie $a : ASM \rightarrow \text{square ice}$. Hoe de keuze van een staat van een knoop moet worden gemaakt als het element van de ASM nul is, staat in de volgende opmerking uitgelegd.

Opmerking. Hier is het niet direct duidelijk dat een ASM correspondeert met een square ice toestand. Welke staat van een knoop moet bijvoorbeeld gekozen worden als het element van een ASM 0 is? Als de staat van de knoop op de volgende manier wordt toegekend aan het element 0, dan correspondeert een ASM met een square ice toestand.

- Er komt een knoop in staat 3 als er links en boven de nul geen niet-nul elementen staan, of als de nul boven zich een -1 heeft en onder zich een 1 en links geen niet-nul elementen, of als de nul links van zich een -1 heeft en rechts van zich een 1 en boven zich geen niet-nul elementen.
- Er komt een knoop in staat 4 als er rechts en onder de nul geen niet-nul elementen staan, of als de nul boven zich een 1 heeft en onder zich een -1 en rechts geen niet-nul elementen, of als de nul links van zich een 1 heeft en rechts van zich een -1 en onder zich geen niet-nul elementen.
- Er komt een knoop in staat 5 als er rechts en boven de nul geen niet-nul elementen staan, of als de nul boven zich een -1 heeft en onder zich een 1 en rechts geen niet-nul elementen, of als de nul links van zich een 1 heeft en rechts van zich een -1 en boven zich geen niet-nul elementen.
- Er komt een knoop in staat 6 als er links en onder de nul geen niet-nul elementen staan, of als de nul boven zich een 1 heeft en onder zich een -1 en links geen niet-nul elementen, of als de nul links van zich een -1 heeft en rechts van zich een 1 en onder zich geen niet-nul elementen.

Als we dan eerst de knopen in staat 1 en staat 2 toekennen aan de 1-en en (-1) -en uit de ASM, en op bovenstaande manier de rest invullen, dan sluiten de orientaties van de pijlen van de knopen goed op elkaar aan, en ook de orientaties van de pijlen aan de rand kloppen. Bijvoorbeeld, als het element in rij i en de eerste kolom een nul is, dan staan er links geen niet-nul elementen, dus dan is de corresponderende knoop in staat 3 of staat 5. De orientatie van de eerste pijl op de i^e lijn van het vierkante grid is dus een pijl naar binnen. Dat is in overstemming met de richting van de pijl in een square ice toestand.

Nu we weten hoe we een element van een ASM naar een staat van de knoop van een square ice kunnen sturen met de functie a en een staat van de knoop van een square ice naar een element van een ASM met de functie s , kunnen we een relatie formuleren tussen de ASM's en square ice.

Stelling 4.6. *De functie $a : \text{ASM} \rightarrow \text{square ice}$ is bijectief.*

Bewijs. Als we twee verschillende ASM's onder a transleren, krijgen we twee verschillende square ice toestanden. Als we de functie s toepassen op twee verschillende square ice toestanden, krijgen we twee verschillende ASM's. Dit betekent dat de functie a en s beide injectief zijn.

Verder zien we ook dat als we de functie s toepassen op een willekeurige graaf G , een square ice toestand, dat we dan een ASM krijgen. Als we daarna de functie a toepassen op deze ASM, krijgen we de graaf G terug waar we mee begonnen. We zien dus dat $a(s(G)) = a \circ s(G) = G$.

Hieruit volgt dat a surjectief is. Immers, neem een willekeurige square ice toestand G . We weten dan dat $a(s(G)) = G$. Dit geldt voor elke willekeurige G , dus elk element uit square ice heeft een ASM als origineel (namelijk $s(G)$). Omdat a injectief en surjectief is, volgt nu dat a bijectief is. $\square$

Omdat a bijectief is volgt dat er evenveel $n \times n$ ASM's zijn als $n \times n$ square ice toestanden. Daarom is ook de sommatie over de ASM's hetzelfde als de sommatie over de square ice toestanden. Kuperberg geeft zijn bewijs door de bijectie tussen de ASM's en een square ice te gebruiken. Daarna bekijkt hij een $n \times n$ square-ice graaf G . Vervolgens kent hij aan alle staten van knopen van G gewichten toe. Nadat hij dit heeft gedaan kan hij de state sum van G uitrekenen. Dit is de som over alle toestanden van G van het product van de gewichten van de knopen. Door de gewichten allemaal 1 te maken, kan hij precies uitrekenen hoeveel toestanden van G er zijn. Daar volgt dan het aantal $n \times n$ ASM's uit.

Nu bewijzen we enkele lemma's over de hoeveelheid knopen in verschillende staten in een square ice toestand en over de volgorde van de staten van knopen in een square ice toestand. Het volgende lemma gaat over de square ice toestand van een permutatiematrix. Dit is een matrix met op elke rij en in elke kolom één 1. De rest van de elementen is nul. Een permutatiematrix is ook een ASM.

Lemma 4.7. *In een $n \times n$ square ice toestand, behorend bij een permutatiematrix zijn er n knopen in staat 1 en nul knopen in staat 2. Er zijn evenveel knopen in staat 3 als in staat 4, en er zijn evenveel knopen in staat 5 als in staat 6.*

Bewijs. Om dit lemma te bewijzen moeten we twee dingen aantonen. Eerst bewijzen we dat het lemma geldt voor de square ice toestand behorend bij de $n \times n$ eenheidsmatrix. Daarna merken we op dat elke willekeurige permutatiematrix verkregen kan worden door paarsgewijze verwisselingen van rijen van de eenheidsmatrix. Als tweede nemen we aan dat het lemma geldt voor de square ice toestand van een willekeurige $n \times n$ permutatiematrix B . Dan bewijzen we dat het lemma ook geldt voor de square ice toestand van de matrix die wordt verkregen na een verwisseling van twee rijen. Omdat de $n \times n$ eenheidsmatrix een $n \times n$ permutatiematrix is, waarvoor het lemma geldt, zien we dat het lemma geldt voor elke willekeurige $n \times n$ permutatiematrix (er wordt inductie gevoerd op de $n \times n$ eenheidsmatrix).

De $n \times n$ eenheidsmatrix ziet er als volgt uit:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Er zijn n knopen in staat 1, er zijn 0 knopen in staat 2. Ook zijn er 0 knopen in staat 3 en 4. De knopen die boven de 1-en staan zijn allemaal in staat 5. De knopen die onder de 1-en staan zijn allemaal in staat 6. Dit betekent dat er $\frac{n(n-1)}{2}$ knopen in staat 5 en 6 zijn. Het lemma geldt dus voor de identiteitsmatrix.

Laat nu B een willekeurige permutatiematrix. We nemen aan dat het lemma geldt voor B . We bewijzen dat het lemma ook geldt voor de permutatiematrix die we verkrijgen na het verwisselen van twee rijen:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & & & \\ & A & 0 & B & 0 & & C & & \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & E & \\ 0 & & 0 \end{array}} & & & & & \\ D & & \vdots & & \vdots & & F & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \\ G & & 0 & H & 0 & & I & & \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & & & \\ & A & 0 & B & 0 & & C & & \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & E & \\ 0 & & 0 \end{array}} & & & & & \\ D & & \vdots & & \vdots & & F & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \\ G & & 0 & H & 0 & & I & & \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \end{array} \right)$$

Merk op dat de square ice toestand behorend bij bovenstaande matrices bijna niet verandert. In de delen $A, B, \dots, I$ veranderen geen knopen van staat. De 1-en en de (-1) -en blijven daar allemaal op hun plek staan, dus de staat van de knopen blijft hetzelfde. Alleen in de rijen en kolommen die zijn omsloten door lijnen verandert de staat van de knopen. Op de i^e rij, de bovenste rij waarvan een deel omsloten wordt door de lijnen, verandert niks buiten de lijnen. De knopen tussen de rand en de 1 (tussen A en D) blijven knopen tussen de rand en de 1, dus die behouden hun horizontale orientatie. Aan de verticale orientaties is niks veranderd. De knopen tussen 1 en de rand (tussen C en F) blijven knopen tussen 1 en de rand. Die behouden hun horizontale orientatie en ook aan de verticale orientaties verandert niks. Een gelijkaardig argument voor de $(i+m)^e$ rij, de onderste rij waarvan een deel omsloten wordt door de lijnen.

Op de j^e kolom, de linkerkolom waarvan een deel omsloten wordt door de lijnen, verandert ook niks buiten de lijnen. De knopen tussen de de bovenkant en 1 (tussen A en B) blijven knopen tussen de bovenkant en 1, dus die behouden hun verticale orientatie. Aan de horizontale orientaties is niks veranderd. De knopen tussen 1 en de onderkant (tussen G en H) blijven knopen tussen 1 en de onderkant. Die behouden hun verticale orientatie en ook aan de horizontale orientaties verandert niks. Een gelijkaardig argument voor de $(j+k)^e$ kolom, de rechterkolom waarvan een deel omsloten wordt door de lijnen.

We nemen nu aan dat het lemma geldt voor de square ice toestand van de matrix aan de linkerkant. Er zijn dus n knopen in staat 1, er zijn 0 knopen in staat 2, b knopen in staat 3 en 4 en c knopen in staat 5 en 6. We bekijken in welke staat de knopen binnen de lijnen aan de linkerkant zijn:

$\#$ staat 1 = 2
 $\#$ staat 2 = 0
 $\#$ staat 3 = $\#1$ in $(E + F) + \#1$ in $(E + H)$
 $\#$ staat 4 = $\#1$ in $(B + E) + \#1$ in $(D + E)$
 $\#$ staat 5 = $\#1$ in $D + \#1$ in H
 $\#$ staat 6 = $\#1$ in $B + \#1$ in F

Nu bekijken we in welke orientaties de knopen binnen de lijnen aan de rechterkant zijn:

$\#$ staat 1 = 2
 $\#$ staat 2 = 0
 $\#$ staat 3 = $\#1$ in $F + \#1$ in H
 $\#$ staat 4 = $\#1$ in $B + \#1$ in D
 $\#$ staat 5 = $\#1$ in $(D + E) + \#1$ in $(E + H)$
 $\#$ staat 6 = $\#1$ in $(B + E) + \#1$ in $(E + F)$

Aan de staat van de knopen in de delen $A, B, \dots, I$ verandert niks. De enige staten die veranderd zijn, zijn de staten van de knopen binnen de lijnen. We zien, na deze veranderingen dat er aan de rechterkant n knopen in staat 1 zijn, 0 knopen in staat 2, $b - (2 \cdot (\#1 \text{ in } E))$ knopen in staat 3 en 4 en $c + (2 \cdot (\#1 \text{ in } E))$ knopen in staat 5 en 6. We zien dus dat als het lemma geldt voor de square ice toestand van een willekeurige permutatiematrix B , dan geldt het ook voor de square ice toestand van de matrix die wordt verkregen na de verwisseling van twee rijen. Omdat de eenheidsmatrix een permutatiematrix is waar het lemma voor geldt, en elke permutatiematrix B verkregen kan worden daar een aantal keer twee rijen te verwisselen, volgt dat het lemma geldt voor elke permutatiematrix. $\square$

Het lemma over de square ice toestand van een permutatiematrix kunnen we goed gebruiken om het volgende lemma over een willekeurige square ice toestand te bewijzen.

Lemma 4.8. *In een $n \times n$ square ice toestand zijn er n meer knopen in staat 1 dan in staat 2. Er zijn evenveel knopen in staat 3 als in staat 4, en er zijn evenveel knopen in staat 5 als in staat 6.*

Bewijs. Om dit lemma te bewijzen merken we op dat een willekeurige $n \times n$ square ice toestand correspondeert met een $n \times n$ ASM. Daarna laten we zien dat een willekeurige $n \times n$ ASM kan worden omgebouwd tot een willekeurige $n \times n$ permutatiematrix. We leggen uit welke tussenstappen hier voor nodig zijn. Ook laten we zien dat als het lemma geldt voor de square ice toestand behorend bij de matrix na de tussenstap, dat het lemma dan ook geldt voor de square ice toestand behorend bij de matrix voor de tussenstap. Als we dat hebben gedaan, en we weten dat het lemma geldt voor een willekeurige $n \times n$ permutatiematrix, zien we dat het lemma geldt voor een de square ice toestand van een willekeurige $n \times n$ ASM en dus voor een willekeurige $n \times n$ square ice toestand (er wordt inductie gevoerd op een willekeurige permutatiematrix).

Laat A een willekeurige $n \times n$ ASM. Daarin staat a keer een (-1) . Eerst bewijzen we dat als er a keer een (-1) in de ASM staat, dat er $n + a$ keer een 1 in staat. We weten dat de tekens van de elementen elkaar afwisselen op een rij en dat de som van elke rij 1 is. Dus als er a_i keer een (-1) staat in rij i , dan staat er $a_i + 1$ keer een 1. Zo zien we dat er in totaal $\sum_{i=1}^n a_i = a$ keer een (-1) staat in A . Er staat $\sum_{i=1}^n (a_i + 1) = a + n$ keer een 1 in A . Hieruit volgt ook dat in de square ice orientatie die bij een ASM hoort, er a knopen in orientatie 2 zijn, en $n + a$ knopen in orientatie 1.

We bekijken nu de (-1) die het meest rechtsonder staat. Deze (-1) staat op de i^e rij en de j^e kolom. Rechts van de (-1) staat nog precies één 1, op de i^e rij en de $(j + k)^e$ kolom. Onder de (-1) staat nog precies één 1, op de $(i + m)^e$ rij en de j^e kolom.

Het element op de $(i + m)^e$ rij en de $(j + k)^e$ kolom is een 0. Dit kan immers geen (-1) zijn, want we bekijken de (-1) die het meest rechtsonder staat. Het kan ook geen 1 zijn, want dan zou er tussen de 1 op de i^e rij en de $(j + k)^e$ kolom en de 1 op de $(i + m)^e$ rij en de $(j + k)^e$ kolom nog een (-1) moeten staan. Maar dat kan niet, want de (-1) die we bekijken staat het meest rechtsonder.

Als we de (-1) en de 1-en vervangen door een 0, en de 0 rechtsonder in het vierkant door een 1 houden we nog steeds een ASM. Aan de som van de i^e en de $(i + m)^e$ rij verandert niks. De elementen veranderen ook nog steeds netjes van teken. Hetzelfde geldt voor de j^e en de $(j + k)^e$ kolom. We krijgen dan een ASM met $a - 1$ keer een (-1) en $n + a - 1$ keer een 1.

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & A & & 1 & & B & & \vdots & C \\ & & & & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & \boxed{\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ & \boxed{E} & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{array}} & 0 & \cdots & 0 \\ & D & & & & & & & F \\ & & & & & & & & \\ \cdots & & & \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & & & & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & & 0 & \\ & G & & \vdots & & H & & \vdots & I \\ & & & 0 & & & & 0 & \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccccccc} & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & A & & 1 & & B & & \vdots & C \\ & & & & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & \boxed{\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & \boxed{E} & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{array}} & 0 & \cdots & 0 \\ & D & & & & & & & F \\ & & & & & & & & \\ \cdots & & & \boxed{\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & & 0 & \\ & G & & \vdots & & H & & \vdots & I \\ & & & 0 & & & & 0 & \end{array} \right)$$

Merk op dat de square ice toestand behorend bij bovenstaande matrices bijna niet verandert. In de delen $A, B, \dots, I$ veranderen geen knopen van staat. De 1-en en de (-1) -en blijven daar allemaal op hun plek staan, dus de staten blijven hetzelfde. Alleen in de rijen en kolommen die zijn omsloten door lijnen verandert de staat van de knopen. Op de i^e rij, de bovenste rij waarvan een deel omsloten wordt door de lijnen, verandert niks buiten de lijnen. De knopen tussen de 1 en de (-1) (tussen A en D) hadden eerst een horizontale orientatie naar links, maar nu zijn dat knopen geworden tussen 1 en de rand, dus ze hebben nog steeds een horizontale orientatie naar links. Aan de verticale orientatie is niks veranderd. De knopen tussen 1 en de rand (tussen C en F) blijven knopen tussen 1 en de rand. Ze behouden dus hun horizontale orientatie en ook aan de verticale orientaties verandert niks. Een gelijkaardig argument voor de $(i + m)^e$ rij, de onderste rij waarvan een deel omsloten wordt door de lijnen.

Op de j^e kolom, de linkerkolom waarvan een deel omsloten wordt door de lijnen, verandert ook niks buiten de lijnen. De knopen tussen de 1 en de (-1) (tussen A en B) hadden eerst een verticale orientatie naar beneden. Nu zijn dat knopen geworden tussen 1 en de rand, dus ze hebben nog steeds een verticale orientatie naar beneden. Aan de horizontale orientaties is niks veranderd. De knopen tussen 1 en de onderkant (tussen G en H) blijven knopen tussen een 1 en de onderkant. Ze behouden hun verticale orientatie en ook aan de horizontale orientatie verandert niks. Een gelijkaardig argument voor de $(j+k)^e$ kolom, de rechterkolom waarvan een deel omsloten wordt door de lijnen.

We nemen nu aan dat het lemma geldt voor de square ice toestand van de matrix aan de rechterkant. Er zijn $n+a-1$ knopen in orientatie 1, $a-1$ knopen in orientatie 2, b knopen in orientatie 3 en 4, c knopen in orientatie 5 en 6. We bekijken in welke staat de knopen binnen de lijnen aan de rechterkant zijn:

$$\begin{aligned} \# \text{ staat 1} &= 1 \\ \# \text{ staat 2} &= 0 \\ \# \text{ staat 3} &= \#1 \text{ in } (E+F) + \#1 \text{ in } (E+H) \\ \# \text{ staat 4} &= \#1 \text{ in } (B+E) + \#1 \text{ in } (D+E) \\ \# \text{ staat 5} &= \#1 \text{ in } D + \#1 \text{ in } H \\ \# \text{ staat 6} &= \#1 \text{ in } B + \#1 \text{ in } F \end{aligned}$$

Nu bekijken we in welke staat de knopen binnen de lijnen aan de linkerkant zijn:

$$\begin{aligned} \# \text{ staat 1} &= 2 \\ \# \text{ staat 2} &= 1 \\ \# \text{ staat 3} &= \#1 \text{ in } F + \#1 \text{ in } H \\ \# \text{ staat 4} &= \#1 \text{ in } B + \#1 \text{ in } D \\ \# \text{ staat 5} &= \#1 \text{ in } (D+E) + \#1 \text{ in } (E+H) \\ \# \text{ staat 6} &= \#1 \text{ in } (B+E) + \#1 \text{ in } (E+F) \end{aligned}$$

Aan de staat van de knopen in de delen $A, B, \dots, I$ verandert niks. De enige staten die veranderd zijn, zijn de staten van de knopen binnen de lijnen. We zien, na deze veranderingen dat er aan de linkerkant $n+a$ knopen in staat 1 zijn, a knopen in staat 2, $b - (2 \cdot \#1 \text{ in } E)$ knopen in staat 3 en 4 en $c + (2 \cdot \#1 \text{ in } E)$ knopen in staat 5 en 6. We zien dus dat als het lemma geldt voor de square ice toestand van de matrix aan de rechterkant, dan geldt het ook voor de square ice toestand van de matrix aan de linkerkant.

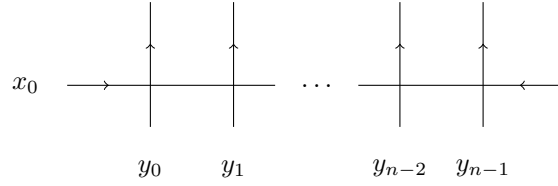
Als we deze stap a keer doen, dan zijn alle (-1) -en weg en hebben we een permutatiematrix.

Nu we dit hebben bewezen zijn we klaar. We weten dat het lemma geldt voor de square ice toestand van elke permutatiematrix. We hebben ook gezien dat als het lemma voor de square ice toestand van een permutatiematrix geldt, dat het dan ook (na een aantal tussenstappen) geldt voor elke willekeurige square ice toestand (van elke willekeurige ASM). Dus het lemma geldt voor elke willekeurige square ice toestand. $\square$

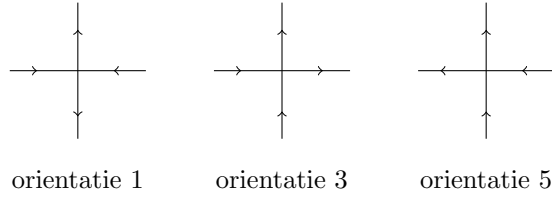
Het laatste lemma dat we in deze sectie zullen bewijzen is een lemma over de volgorde van de staat van de knopen op de bovenste rij van de graaf G . We zien dat die altijd een vaste volgorde hebben:

Lemma 4.9. *In een $n \times n$ square ice toestand zijn in de bovenste rij eerst i knopen in orientatie 3. Daarna is er één knoop in orientatie 1, waarna er nog $n - i - 1$ knopen in orientatie 5 zijn.*

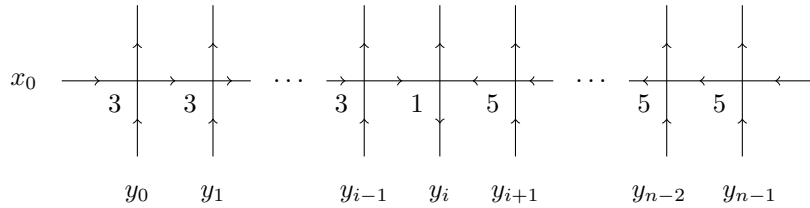
Bewijs. We weten dat in de bovenste rij een aantal pijlen vast is. De pijlen boven de knopen wijzen naar boven, de pijlen aan de buitenkant wijzen naar binnen.



Het is te zien dat in de knoop linksboven alleen een knoop in orientatie 1 of in orientatie 3 kan staan. Als de knoop linksboven in orientatie 1 staat, kunnen daarna op de rest van de rij alleen nog maar knopen in orientatie 5 staan. Als de knoop



linksboven in orientatie 3 staat, kan de knoop daar rechts van weer in orientatie 3 staan, of in orientatie 1. De knoop rechtsboven moet in orientatie 1 of orientatie 5 staan, dus er volgt dat er eerst i knopen in orientatie 3 zijn, $0 \leq i < n - 1$, daarna één knoop in orientatie 1 en daarna $n - i - 1$ knopen in orientatie 5.



□

Dit lemma toont ons direct aan dat er in de bovenste rij geen -1 kan staan. Immers, dan zou er een knoop in staat 2 in de bovenste rij moeten zijn, maar dat kan dus niet.

5. HALF-INTEGRAL LAURENTPOLYNOMEN

Nu we de opbouw van het bewijs van Greg Kuperberg en een aantal lemma's over de staten van knopen in een square ice toestand kennen, is de volgende logische stap om gewichten aan de knopen van een square ice toe te gaan kennen. Echter, de gewichten zijn geen getallen of polynomen, maar half-integral Laurentpolynomen in de variabele q^x . In deze sectie zullen eerst een aantal eigenschappen van algemene half-integral Laurentpolynomen genoemd en bewezen worden. In de volgende sectie worden eigenschappen van half-integral Laurentpolynomen in q^x , zogenaamde q -getallen, bewezen.

Definitie 5.1. Een half-integral Laurentpolynoom is een polynoom dat geheel-tallige of halftallige exponenten heeft. Ook kunnen de exponenten positief of negatief zijn (een polynoom heeft alleen positieve exponenten). Het verschil tussen twee exponenten moet geheeltallig zijn.

Voorbeeld.

- (1) $x^3 + x + \frac{1}{x^2}$ is een half-integral Laurentpolynoom. De exponenten zijn geheeltallig, en ze zijn positief en negatief. Het verschil tussen twee exponenten is geheeltallig.
- (2) $x^{1.5} + x$ is geen half-integral Laurentpolynoom. De exponenten zijn geheeltallig of halftallig, maar het verschil tussen de twee exponenten is hier $\frac{1}{2}$ en dat is niet geheeltallig.
- (3) $q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}$ is een half-integral Laurentpolynoom in q^x . De exponenten zijn respectievelijk $\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{2}$. Ze zijn dus halftallig en positief of negatief en het verschil tussen de exponenten is geheeltallig.

Definitie 5.2. Laat $L(x)$ een half-integral Laurentpolynoom zijn. De leidende term van $L(x)$ is de term met de hoogste graad. De trailing term is de term met de kleinste graad.

Voorbeeld. Laat $L(x) = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$. De leidende term van $L(x)$ is x^3 en de trailing term is $\frac{1}{x^2}$.

Nu noemen we een lemma waarin wordt bewezen dat elk half-integral Laurentpolynoom in een algemene vorm kan worden opgeschreven.

Lemma 5.3. $L(x)$ is een half-integral Laurentpolynoom, dan slechts dan als $L(x) = x^{-\frac{n}{2}} p(x)$, $n \in \mathbb{N}$ met $p(x)$ een polynoom dat alleen maar gehele exponenten heeft.

Bewijs. $\implies$ Laat $L(x) = x^a + x^b + \dots + x^c$, met $a > b > \dots > c$. De graad van de trailing term is c . Laat $n = |2c|$.

Als n even is, hebben we te maken met een geheeltallig half-integral Laurentpolynoom. Dan geldt dat $L(x) = x^{-\frac{n}{2}} (x^{a+\frac{n}{2}} + x^{b+\frac{n}{2}} + \dots + x^{c+\frac{n}{2}}) = x^{-\frac{n}{2}} p(x)$. Omdat $\frac{n}{2} \geq -c$ is, en $a, b, \dots, c, \frac{n}{2}$ geheeltallig zijn, is $p(x)$ een polynoom met alleen met geheeltallige termen.

Als n oneven is, hebben we te maken met een halftallig half-integral Laurentpolynoom. Dan geldt dat wederom dat $L(x) = x^{-\frac{n}{2}} (x^{a+\frac{n}{2}} + x^{b+\frac{n}{2}} + \dots + x^{c+\frac{n}{2}}) = x^{-\frac{n}{2}} p(x)$. Omdat $\frac{n}{2} \geq -c$ is, en $a, b, \dots, c, \frac{n}{2}$ halftallig zijn, is $p(x)$ een polynoom met alleen met geheeltallige termen. $\square$

$\Leftarrow$ Dit is triviaal.

Voorbeeld.

- (1) $L(x) = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$ is te schrijven als $L(x) = x^{-\frac{4}{2}} (x^5 + x^3 + 1)$.

- (2) $L(x) = x^{3.5} + x^{1.5} + \frac{1}{x^{2.5}}$ is te schrijven als $L(x) = x^{-\frac{5}{2}}(x^6 + x^4 + 1)$.

De Laurentpolynomen vormen een ring. De vermenigvuldiging en optelling van twee Laurentpolynomen is dus weer een Laurentpolynoom. We onderzoeken nu of de optelling van half-integral Laurentpolynomen weer een half-integral Laurentpolynoom is.

Lemma 5.4.

- (1) *De optelling van twee half-integral Laurentpolynomen met geheeltallige exponenten is een half-integral Laurentpolynoom met geheeltallige exponenten.*
- (2) *De optelling tussen twee half-integral Laurentpolynomen met halftallige exponenten is een half-integral Laurentpolynoom met halftallige exponenten.*

Bewijs.

- (1) Laat $L_1(x)$ en $L_2(x)$ twee half-integral Laurentpolynomen met geheeltallige exponenten. Dan geldt dat $L_1(x) = x^{-\frac{n_1}{2}} p_1(x)$ en $L_2(x) = x^{-\frac{n_2}{2}} p_2(x)$ (Lemma 5.3). n_1 en n_2 zijn allebei even. Stel $n_1 = \min\{n_1, n_2\}$. Dan geldt dat $n_1 = n_2 - 2k$ met $k \geq 0$. Substitutie geeft dan dat:

$$\begin{aligned} L_1(x) + L_2(x) &= x^{-\frac{n_2-2k}{2}} p_1(x) + x^{-\frac{n_2}{2}} p_2(x) \\ &= x^{-\frac{n_2}{2}} x^k p_1(x) + x^{-\frac{n_2}{2}} p_2(x) \\ &= x^{-\frac{n_2}{2}} p_3(x) + x^{-\frac{n_2}{2}} p_2(x) \\ &= x^{-\frac{n_2}{2}} (p_3(x) + p_2(x)) \end{aligned}$$

Met $p_3(x) = x^k p_1(x)$. We zien dat $p_3(x)$ weer een polynoom met gehele exponenten is omdat alle termen uit $p_1(x)$ vermenigvuldigd worden met $x^k, k \geq 0$. Volgens Lemma 5.3 is $L_1(x) + L_2(x)$ weer een half-integral Laurentpolynoom met geheeltallige exponenten (omdat n_2 even is). Dit bewijs gaat goed als $n_1 < n_2$. Als $n_2 < n_1$, herhaal dan bovenstaand bewijs met alle 1-en en 2-en omgedraaid. Als $n_1 = n_2$ geldt bovenstaand bewijs ook met $k = 0$.

- (2) Zie het bewijs van (1), maar dan met de notie dat n_1 en n_2 oneven zijn.

□

Opmerking. De optelling van een half-integral Laurentpolynoom met geheeltallige exponenten en een half-integral Laurentpolynoom hoeft geen half-integral Laurentpolynoom te zijn. Bijvoorbeeld is $x^{\frac{1}{2}} + x$ geen half-integral Laurentpolynoom (het verschil tussen de exponenten is niet geheeltallig) maar $x^{\frac{1}{2}}$ en x zijn afzonderlijk wel half-integral Laurentpolynomen.

De vermenigvuldiging gaat volgens het volgende lemma wel goed.

Lemma 5.5. *Het product tussen twee half-integral Laurentpolynomen is een half-integral Laurentpolynoom.*

Bewijs. Laat $L_1(x) = x^{-\frac{n_1}{2}} p_1(x)$ en $L_2(x) = x^{-\frac{n_2}{2}} p_2(x)$. Dan geldt dat:

$$\begin{aligned} L_1(x) \cdot L_2(x) &= x^{-\frac{n_1}{2}} p_1(x) \cdot x^{-\frac{n_2}{2}} p_2(x) \\ &= x^{-\frac{n_1+n_2}{2}} p_1(x) p_2(x) \end{aligned}$$

We zien dat $L_1(x) \cdot L_2(x)$ volgens Lemma 5.3 weer een half-integral Laurentpolynoom is met $n = n_1 + n_2$ en met $p_1(x)p_2(x)$ een polynoom met geheeltallige exponenten. □

Uit bovenstaand bewijs volgt dat als twee half-integral Laurentpolynomen met geheeltallige exponenten vermenigvuldigd worden, dan is $n = n_1 + n_2$ even en heeft het product dus weer geheeltallige exponenten. Als twee half-integral Laurentpolynomen met halftallige exponenten vermenigvuldigd worden, dan is $n = n_1 + n_2$ weer even, en heeft het product dus geheeltallige exponenten. Als een half-integral Laurentpolynoom met halftallige exponenten wordt vermenigvuldigd met een half-integral Laurentpolynoom met geheeltallige exponenten, dan is $n = n_1 + n_2$ oneven. Dit product heeft dus halftallige exponenten.

Als laatste bewijzen we een verband tussen de graad van de leidende term en de trailing term van twee half-integral Laurentpolynomen en hun quotient. Hiervoor definiëren we eerst een formule om de graad van de leidende of de trailing term te berekenen.

Definitie 5.6. Laat L een half-integral Laurentpolynoom zijn. Dan is $gr_{leidend}(L)$ de graad van de leidende term van L en $gr_{trailing}(L)$ is de graad van de trailing term van L .

Lemma 5.7. Laat L_R en L_Q twee half-integral Laurentpolynomen zijn en laat $\frac{L_R}{L_Q}$ het quotient tussen deze twee polynomen, aangenomen dat $\frac{L_R}{L_Q}$ een half-integral Laurentpolynoom is. Dan geldt dat:

- (1) $gr_{leidend}(\frac{L_R}{L_Q}) = gr_{leidend}(L_R) - gr_{leidend}(L_Q)$.
- (2) $gr_{trailing}(\frac{L_R}{L_Q}) = gr_{trailing}(L_R) - gr_{trailing}(L_Q)$.

Bewijs.

- (1) We bekijken eerst $L_P(x) = x^{-\frac{n_1}{2}} p_1(x)$ en $L_Q = x^{-\frac{n_2}{2}} p_2(x)$. Dan geldt dat:

$$\text{Leidende term van } L_P = c \cdot x^{-\frac{n_1}{2} + a} \quad a = \max\{x^a \in p_1(x)\}$$

$$\text{Leidende term van } L_Q = d \cdot x^{-\frac{n_2}{2} + b} \quad b = \max\{x^b \in p_2(x)\}$$

$$\text{Leidende term van } L_P L_Q = c \cdot d \cdot x^{-\frac{n_1+n_2}{2} + (a+b)}$$

De leidende term van $L_P L_Q$ is het product van de leidende term van L_P en de leidende term van L_Q . De machten tellen hierbij op. We zien dus dat $gr_{leidend}(L_P) + gr_{leidend}(L_Q) = gr_{leidend}(L_P L_Q)$. Noem nu $L_P = \frac{L_R}{L_Q}$, en $L_P L_Q = L_R$. Dan geldt dat:

$$gr_{leidend}(\frac{L_R}{L_Q}) = gr_{leidend}(L_R) - gr_{leidend}(L_Q)$$

- (2) Zie het bewijs van (1), maar vervang alle $gr_{leidend}$ door $gr_{trailing}$.

□

6. q -GETALLEN

Nu zijn alle lemma's over algemene half-integral Laurentpolynomen bewezen die in het vervolg van het bewijs nodig zijn. We zijn nu bijna op het punt aanbeld waar we gewichten gaan toekennen aan de staat van een knoop. De gewichten die we aan knopen willen toekennen zijn q -getallen, half-integral Laurentpolynomen in q^x . Eerst definiëren we de q -getallen en daarna bewijzen we er een aantal lemma's over.

Definitie 6.1. Laat h een complex getal. Definieer $q = e^h$. Door de waarde van h te variëren kunnen we de waarde van q beïnvloeden. Er geldt dat $q^x = e^{hx}$. Verder is:

$$[x] = \frac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$$

We noemen $q^x = e^{hx}$ zodat we door de keuze van h in de waarde van $[x]$ kunnen variëren.

Lemma 6.2. Als q vast is, dan zijn $[x]$ en $[x-1]$ half-integral Laurentpolynomen in q^x met halftallige exponenten.

Bewijs.

$$[x] = \frac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(q^x)^{-\frac{1}{2}}(q^x - 1)}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$$

Volgens Lemma 5.3 is dit een half-integral Laurentpolynoom in q^x met $n = 1$ en $p(q^x) = \frac{(q^x - 1)}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$

$$[x-1] = \frac{q^{\frac{x-1}{2}} - q^{-\frac{x-1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{q^{\frac{x}{2}} q^{-\frac{1}{2}} - q^{-\frac{x}{2}} q^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(q^x)^{-\frac{1}{2}}(q^x q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}})}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$$

Volgens Lemma 5.3 is dit een half-integral Laurentpolynoom in q^x met $n = 1$ en $p(q^x) = \frac{(q^x q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}})}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$. Omdat n voor beide polynomen 1 is, hebben $[x]$ en $[x-1]$ halftallige exponenten. $\square$

We bewijzen vijf identiteiten voor de q -getallen die ons later van pas zullen komen.

Lemma 6.3. Er geldt:

$$[1] = 1$$

Bewijs. Invullen geeft:

$$[1] = \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = 1$$

$\square$

Lemma 6.4. *Er geldt:*

$$[-a] = -[a]$$

Bewijs. Invullen geeft:

$$[-a] = \frac{q^{-\frac{a}{2}} - q^{\frac{a}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = - \left(\frac{q^{\frac{a}{2}} - q^{-\frac{a}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) = -[a]$$

□

Lemma 6.5. *Er geldt:*

$$[x_a - y_b][x_b - y_a] - [x_a - y_a][x_b - y_b] = [x_a - x_b][y_b - y_a]$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} & [x_a - y_b][x_b - y_a] - [x_a - y_a][x_b - y_b] \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right)^2 \left(\left(q^{\frac{x_a - y_b}{2}} - q^{-\frac{x_a - y_b}{2}} \right) \left(q^{\frac{x_b - y_a}{2}} - q^{-\frac{x_b - y_a}{2}} \right) - \left(q^{\frac{x_b - y_b}{2}} - q^{-\frac{x_b - y_b}{2}} \right) \left(q^{\frac{x_a - y_a}{2}} - q^{-\frac{x_a - y_a}{2}} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right)^2 \left(q^{\frac{x_b - x_a + y_a - y_b}{2}} + q^{\frac{x_a - x_b + y_a + y_b}{2}} - q^{\frac{x_a - x_b + y_a - y_b}{2}} - q^{\frac{x_b - x_a + y_0 - y_a}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right)^2 \left(q^{\frac{x_b - x_a}{2}} - q^{-\frac{x_b - x_a}{2}} \right) \left(q^{\frac{y_a - y_b}{2}} - q^{-\frac{y_a - y_b}{2}} \right) \\ &= [x_b - x_a][y_a - y_b] = [x_a - x_b][y_b - y_a] \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid geldt vanwege Lemma 6.4.

□

Lemma 6.6. *Er geldt:*

$$[a][b] - [a + 1][b - 1] = [a - b + 1]$$

Bewijs. Dit lemma bewijzen we met behulp van van Lemma 6.5. Neem $x_a = a + 1, x_b = b, y_a = 0, y_b = 1$. Dan geldt dat:

$$\begin{aligned} & [a][b] - [a + 1][b - 1] \\ &= [x_a - y_b][x_b - y_a] - [x_a - y_a][x_b - y_b] \end{aligned}$$

Lemma 6.5 geeft:

$$\begin{aligned} &= [x_a - x_b][y_b - y_a] \\ &= [a - b + 1][1] \end{aligned}$$

Lemma 6.3 geeft:

$$= [a - b + 1]$$

□

Lemma 6.7. *Als $x = y + z$ geldt er:*

$$[z - 1][x][y - 1] = [z][x - 1][y - 1] + [z][x][y] + [z - 1][x - 1][y] - [2][z][x - 1][y]$$

Bewijs. Om dit lemma te bewijzen moeten we bewijzen dat:

$$[z - 1][x][y - 1] - [z - 1][x - 1][y] = [z][x - 1][y - 1] + [z][x][y] - [2][z][x - 1][y]$$

We zien dat :

$$\begin{aligned} & [z - 1][x][y - 1] - [z - 1][x - 1][y] \\ &= [z - 1]([x][y - 1] - [x - 1][y]) \end{aligned}$$

Lemma 6.6 met $a = y - 1, b = x$ geeft:

$$= [z - 1][y - x]$$

$x = y + z$ geeft:

$$= [x - y - 1][-z]$$

Lemma 6.6 met $a = x - 2, b = y$ geeft:

$$= [-z]([y][x - 2] - [x - 1][y - 1])$$

Lemma 6.6 met $a = x - 1, b = 2$ geeft:

$$\begin{aligned} &= [-z]([y]([2][x - 1] - [x][1]) - [x - 1][y - 1]) \\ &= [-z]([2][y][x - 1] - [x][y][1] - [x - 1][y - 1]) \end{aligned}$$

Lemma 6.3 en 6.4 geven:

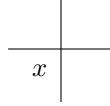
$$\begin{aligned} &= -[z]([2][y][x - 1] - [x][y] - [x - 1][y - 1]) \\ &= [z][x - 1][y - 1] + [x][y][z] - [2][z][x - 1][y] \end{aligned}$$

Hiermee is het lemma bewezen. □

7. GEWICHTEN TOEKENNEN

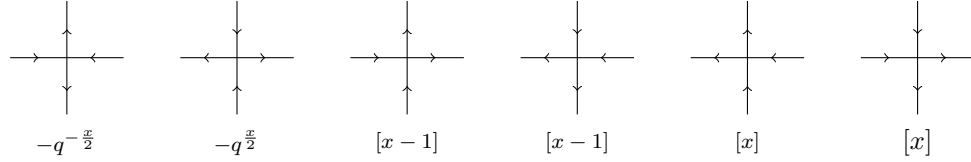
We weten nu alles over q -getallen wat we nodig hebben voor het bewijs. We kunnen eindelijk gewichten gaan toekennen aan de staat van een knoop. In een $n \times n$ square ice toestand zijn n^2 knopen. Aan deze knopen geven we een label x . In sectie 9 zullen we zien dat deze label afhangt van de positie van de knoop in het grid.

Definitie 7.1. Elke knoop uit een square ice toestand heeft een label x . Dit label staat linksonder:



Herinner dat een knoop zes staten kan hebben.

Definitie 7.2. Aan de staat van een knoop met label x in respectievelijk staat $1, 2, \dots, 6$ worden de volgende gewichten toegekend:



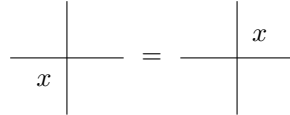
Deze knoop met zijn gewicht wordt een R -matrix genoemd en genoteerd door $R(x)$.

Merk op dat $-q^{-\frac{x}{2}} = -(q^x)^{-\frac{1}{2}}$ en $-q^{\frac{x}{2}} = -(q^x)^{\frac{1}{2}}$ beide half-integral Laurentpolynomen zijn in q^x . Dit in combinatie met Lemma 6.2 geeft dat alle gewichten half-integral Laurentpolynomen in q^x zijn.

Lemma 7.3. *De gewichten zijn invariant onder rotatie van 180 graden.*

Bewijs. Voor de gewichten behorend bij een knoop in staat 1 en staat 2 zien we dat een rotatie van 180 graden niks aan de staat verandert. De pijltjes blijven gelijk. Een rotatie van 180 graden bij een knoop in staat 3 levert een knoop in staat 4 op. Deze staten hebben hetzelfde gewicht. Evenzo levert een rotatie van 180 graden bij een knoop in staat 4 een knoop in staat 3 op. De gewichten van knopen in staat 3 en 4 zijn dus ook invariant onder rotatie van 180 graden. Hetzelfde verhaal geldt voor knopen in staat 5 en 6. $\square$

Gevolg. Uit Lemma 7.3 volgt dat een knoop met een label in de hoek linksonder, hetzelfde gewicht heeft als een knoop met hetzelfde label in de hoek rechtsboven.



8. YANG-BAXTERVERGELIJKING

Nu we gewichten aan de verschillende staten van de knopen hebben gegeven kunnen we een belangrijke stelling over de toestanden van verschillende grafen bewijzen. Deze stelling heet de Yang-Baxtervergelijking. Deze stelling zullen we op twee manieren bewijzen. Het eerste bewijs is een eigen bewijs en wordt gegeven door de stelling na te rekenen. Het tweede bewijs is het bewijs volgens het artikel Kuperberg, waar het six-vertex model wordt uitgebreid.

Stelling 8.1 (Baxter). *Als $x = y + z$, dan voldoen de R -matrices $R(x)$, $R(y)$ en $R(z)$ aan de vergelijking*

Alvorens de stelling te bewijzen leggen we eerst uit wat het precies betekent. Er zijn twee grafen te zien, met elk drie knopen met labels x , y en z . Bovendien geldt ook $x = y + z$. Er zijn zes takken buiten de graaf en er zijn drie takken binnen de graaf. Alle takken buiten de graaf aan de linkerkant corresponderen met takken buiten de graaf aan de rechterkant. Ze hebben dezelfde richting. De takken die met elkaar corresponderen zijn in het volgende plaatje genummerd:

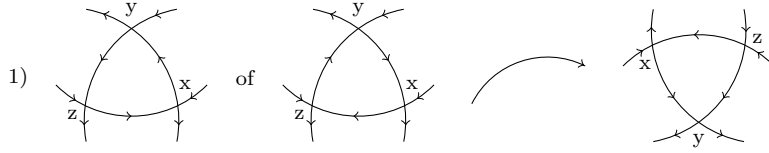
De richting van de pijl bij tak i is aan beide kanten hetzelfde. Als aan de linkerkant pijl 1 naar binnen gericht staat, dan staat pijl 1 ook naar binnen gericht aan de rechterkant. Er zijn $2^6 = 64$ mogelijke orientaties voor pijlen aan de buitenkant. De Yang-Baxtervergelijking zegt vervolgens dat voor *alle* 64 orientaties, de state sum van de graaf aan de linkerkant gelijk is aan de state sum van de graaf aan de rechterkant. Herinner dat als we een orientatie van de 6 buitenste takken hebben, dan is de state sum gelijk aan de som over alle orientaties van de graaf (dus in dit geval over alle orientaties die de binnenste takken kunnen hebben) van het product van de gewichten van de knopen (zie Definitie 4.2).

8.1. Eerste bewijs.

Bewijs. We moeten voor alle 64 orientaties van de buitenste takken controleren of de state sum aan beide kanten gelijk is. Merk op dat de state sum 0 is als er bij een knoop niet precies twee takken naar binnen en twee takken naar buiten georiënteerd zijn. Dit is het geval als er bij de buitenste takken niet precies 3 takken naar binnen en drie takken naar buiten georiënteerd zijn. Dus in $64 - \binom{6}{3} = 64 - 20 = 44$ gevallen is de state sum aan beide kanten gelijk aan 0.

Nu moeten we nog 20 gevallen beschouwen. Merk op dat de rechterkant een rotatie van 180 graden van de linkerkant is. Door Lemma 7.3 weten we dat een rotatie van

180 graden de gewichten invariant laat, en dus niks aan de state sum verandert. Dus de 20 gevallen waar er drie pijlen naar binnen gericht zijn en drie naar buiten bij de buitenste takken reduceren tot 10 gevallen. Voor deze 10 gevallen zullen we bewijzen dat de state sum aan beide kanten hetzelfde is. Om een logische volgorde aan deze 10 gevallen te geven, zodat we ook zeker weten dat alle gevallen bekeken zijn, hebben we binair afgeteld. Als we de nummering van de pijlen aanhouden, een pijl naar binnen een 1 geven, en een pijl naar buiten een 0, zijn de eerste tien gevallen de volgende: 111000, 110100, 110010, 110001, 101100, 101010, 101001, 011100, 011010, 011001. Om het bewijs helder te houden, hebben we de gevallen in omgekeerde volgorde opgeschreven, vergelijking 1 hoort bij 011001 enzovoort. Om te bewijzen dat deze gevallen aan elkaar gelijk zijn, schrijven we steeds eerst de state sum van de linker kant op, en deze herschrijven tot de state sum van de rechterkant. Alleen in geval 1 en geval 9 stellen we direct de state sum van beide kanten aan elkaar gelijk, en werken deze vergelijking verder uit.



Geeft de vergelijking:

$$\begin{aligned} -q^{-\frac{y}{2}} \cdot -q^{-\frac{z}{2}}[x-1] - q^{-\frac{x}{2}}[y][z] &= -q^{-\frac{x}{2}}[y-1][z-1] \\ -q^{-\frac{x}{2}}[y-1][z-1] &= q^{-\frac{y+z}{2}}[x-1] - q^{\frac{x}{2}}[y][z] \end{aligned}$$

$x = y + z$ geeft:

$$\begin{aligned} -q^{-\frac{x}{2}}[y-1][z-1] &= q^{-\frac{x}{2}}[x-1] - q^{\frac{x}{2}}[y][z] \\ [x][y-1][z-1] &= [x][y][z] - [x][x-1] \end{aligned}$$

We lossen dit verder op, Lemma 6.7 geeft:

$$\begin{aligned} [x][y-1][z-1] &= [z][x-1][y-1] + [z][x][y] + [z-1][x-1][y] - [2][z][x-1][y] \\ &= [x][y][z] - [x][x-1] + [x-1]([y-1][z] + [y][z-1] - [2][y][z] + [x]) \end{aligned}$$

$x = y + z$ en Lemma 6.4 geven:

$$= [x][y][z] - [x][x-1] + [x-1]([y][z-1] - [2][y][z] + [y+z] - [y-1][-z])$$

Lemma 6.6 met $a = y - 1, b = -z$ geeft:

$$= [x][y][z] - [x][x-1] + [x-1]([1][y][z-1] - [2][y][z] - [y][-z-1])$$

Lemma 6.3 en Lemma 6.4 geven:

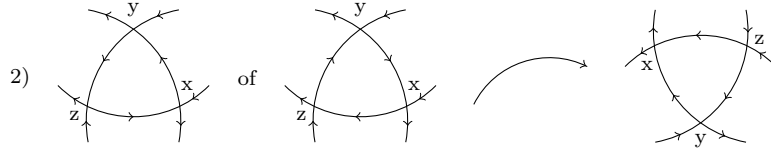
$$= [x][y][z] - [x][x-1] + [x-1]([1][y][z-1] + [y]([1][z+1] - [2][z]))$$

Lemma 6.6 met $a = 1, b = z + 1$ geeft:

$$= [x][y][z] - [x][x-1] + [x-1]([1][y][z-1] + [y][-z+1])$$

Lemma 6.4 geeft:

$$\begin{aligned} &= [x][y][z] - [x][x-1] + [x-1]([1][y][z-1] - [y][z-1]) \\ &= [x][y][z] - [x][x-1] \end{aligned}$$



Geeft:

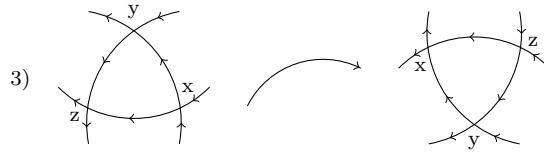
$$\begin{aligned} & -q^{-\frac{y}{2}}[x-1][z] - q^{-\frac{x}{2}} \cdot -q^{\frac{z}{2}}[y] \\ & = -q^{-\frac{y}{2}}[x-1][z] + q^{-\frac{x+z}{2}}[y] \end{aligned}$$

$x = y + z$ geeft:

$$= -q^{-\frac{y}{2}}([x-1][z] - [x-z])$$

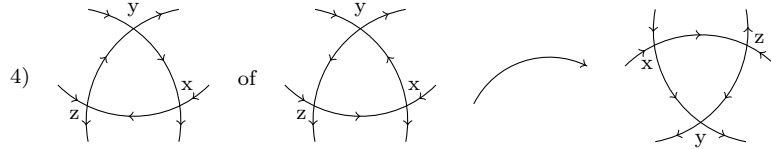
Lemma 6.6 met $a = x-1, b = z$ geeft:

$$= -q^{-\frac{y}{2}}[x][z-1]$$



Geeft:

$$[x][y][z-1] = [x][y][z-1]$$



Geeft:

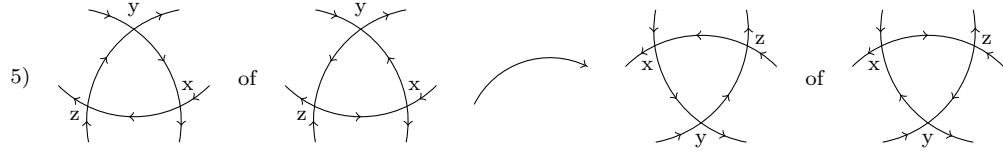
$$\begin{aligned} & -q^{-\frac{z}{2}}[x-1][y] - q^{-\frac{x}{2}} \cdot -q^{\frac{y}{2}}[z] \\ & = -q^{-\frac{z}{2}}[x-1][y] + q^{-\frac{x+y}{2}}[z] \end{aligned}$$

$x = y + z$ geeft:

$$= -q^{-\frac{z}{2}}([x-1][y] - [x-y])$$

Lemma 6.6 met $a = x-1, b = y$ geeft:

$$= -q^{-\frac{z}{2}}[x][y-1]$$

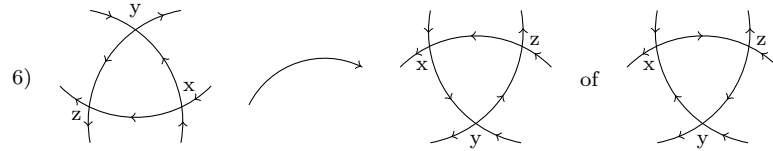


Geeft:

$$\begin{aligned} & [x-1][y][z] - q^{-\frac{x}{2}} \cdot -q^{\frac{y}{2}} \cdot -q^{\frac{z}{2}} \\ &= [x-1][y][z] - q^{\frac{-x+y+z}{2}} \end{aligned}$$

$x = y + z$ twee keer gebruiken geeft:

$$\begin{aligned} &= [x-1][y][z] - q^{\frac{-x+x}{2}} \\ &= [x-1][y][z] - q^{\frac{-(y+z)+x}{2}} \\ &= [x-1][y][z] - q^{\frac{x}{2}} \cdot -q^{-\frac{y}{2}} \cdot -q^{-\frac{z}{2}} \end{aligned}$$



Geeft:

$$-q^{\frac{y}{2}}[x][z-1]$$

Lemma 6.6 met $a = x-1, b = z$ geeft:

$$= -q^{\frac{y}{2}}([x-1][z] - [x-z])$$

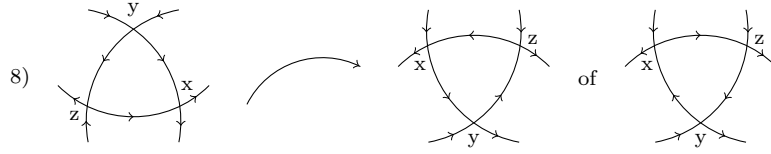
$x = y + z$ twee keer gebruiken geeft:

$$\begin{aligned} &= -q^{\frac{y}{2}}([x-1][z] - [y]) \\ &= -q^{\frac{y}{2}}[x-1][z] + q^{\frac{x-z}{2}}[y] \\ &= -q^{\frac{y}{2}}[x-1][z] - q^{\frac{x}{2}} \cdot -q^{-\frac{z}{2}}[y] \end{aligned}$$



Geeft:

$$[x][y-1][z] = [x][y-1][z]$$



Geeft:

$$-q^{\frac{z}{2}}[x][y-1]$$

Lemma 6.6 met $a = x - 1, b = y$ geeft:

$$= q^{\frac{z}{2}}([x - y] - [x - 1][y])$$

$x = y + z$ geeft:

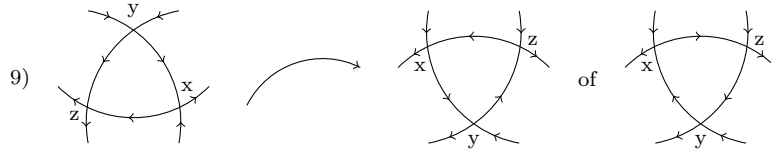
$$= q^{\frac{z}{2}}([z] - [x - 1][y])$$

$$= q^{\frac{z}{2}}[z] - q^{\frac{z}{2}}[x - 1][y]$$

$x = y + z$ geeft:

$$= q^{\frac{x-y}{2}}[z] - q^{\frac{z}{2}}[x - 1][y]$$

$$= -q^{\frac{z}{2}}[x - 1][y] - q^{\frac{x}{2}} \cdot -q^{-\frac{y}{2}}[z]$$



Geeft de vergelijking:

$$-q^{\frac{x}{2}}[y-1][z-1] = [x-1] \cdot -q^{\frac{y}{2}} \cdot -q^{\frac{z}{2}} - q^{\frac{x}{2}}[y][z]$$

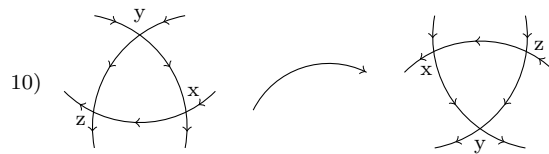
$$-q^{\frac{x}{2}}[y-1][z-1] = [x-1]q^{\frac{y+z}{2}} - q^{\frac{x}{2}}[y][z]$$

$x = y + z$ geeft:

$$-q^{\frac{x}{2}}[y-1][z-1] = [x-1]q^{\frac{x}{2}} - q^{\frac{x}{2}}[y][z]$$

$$[x][y-1][z-1] = [x][y][z] - [x][x-1]$$

Dit is uitgewerkt in de eerste vergelijking



Geeft:

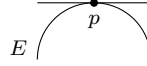
$$[x-1][y-1][z-1] = [x-1][y-1][z-1]$$

□

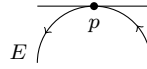
8.2. Uitbreiding zes-knopen model. Zoals eerder gezegd, heeft Kuperberg in zijn artikel een ander bewijs gegeven dan het vorige. Hij bewijst de Yang-Baxtervergelijking door het zes-knopen model uit te breiden. Dit doet hij op de volgende manier:

Definitie 8.2.

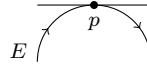
- Bekijk een gebogen tak E , met een horizontale raaklijn in een punt p die concaaf is in p (de lijn tussen 2 willekeurige punten van E ligt onder de tak).



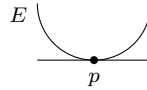
- (1) Als de tak naar links georiënteerd is, krijgt p een multiplicatief gewicht van $-q^{\frac{1}{2}}$.



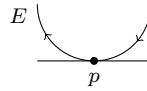
- (2) Als de tak naar rechts georiënteerd is, krijgt p een multiplicatief gewicht van 1.



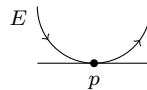
- Bekijk een gebogen tak E , met een horizontale raaklijn in een punt p die convex is in p (de lijn tussen 2 willekeurige punten van E ligt boven de tak).



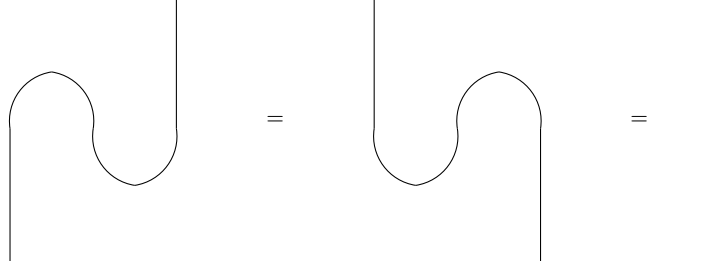
- (1) Als de tak naar links georiënteerd is, krijgt p een multiplicatief gewicht van $-q^{-\frac{1}{2}}$.



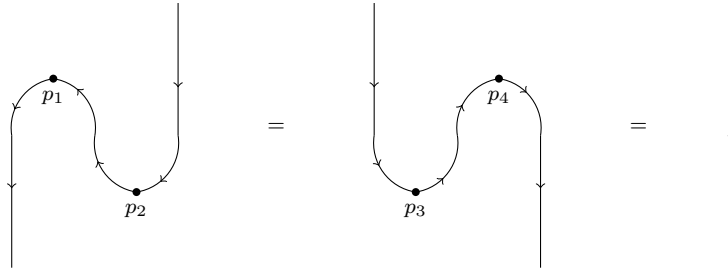
- (2) Als de tak naar rechts georiënteerd is, krijgt p een multiplicatief gewicht van 1.



Lemma 8.3. *Als het zes-knopen model wordt uitgebreid met bovenstaande definitie, geldt de volgende identiteit:*

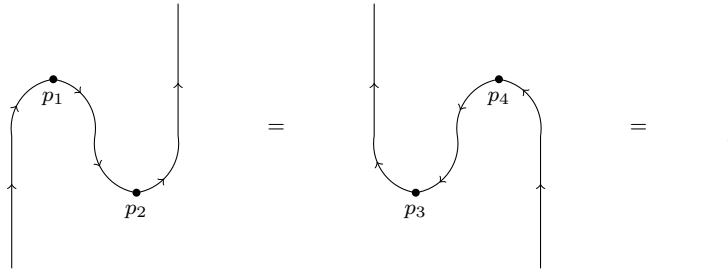


Bewijs. Deze identiteiten gelden als de state sum van elk figuur hetzelfde is. Merk op dat onder de uitbreiding de state sum van de rechte verticale lijn altijd 1 is. Bij de verticale lijn horen immers geen horizontale raaklijnen en het product van nul dingen is 1. Om de state sum van elk figuur te berekenen, bekijken we eerst het gewicht van de figuren bij een orientatie naar beneden:



Met bovenstaande orientatie zien we met behulp van Definitie 8.2 dat $p_1 = -q^{-\frac{1}{2}}$, $p_2 = -q^{\frac{1}{2}}$, $p_3 = p_4 = 1$. Dus de gewichten van de figuren bij een orientatie naar beneden zijn respectievelijk $-q^{-\frac{1}{2}} \cdot -q^{\frac{1}{2}} = 1$, $1 \cdot 1 = 1$ en 1. De gewichten van de bovenstaande figuren behorende bij de orientatie naar beneden zijn dus aan elkaar gelijk.

Nu bekijken we het gewicht van de figuren bij een orientatie naar boven:



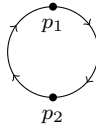
Met deze orientatie zien we dat $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = -q^{-\frac{1}{2}}$ en $p_4 = -q^{\frac{1}{2}}$. Dus de gewichten van de figuren bij een oriëntatie naar boven zijn respectievelijk $1 \cdot 1 = 1$, $-q^{-\frac{1}{2}} \cdot -q^{\frac{1}{2}} = 1$ en 1. De state sum van elk figuur is de som van de gewichten bij alle mogelijke orientaties. Er volgt dus dat de state sum van elk figuur gelijk is aan $1 + 1 = 2$. $\square$

Een gevolg van dit lemma is dat lijnen met twee horizontale raaklijnen zoals in het plaatje vervangen kunnen worden door een verticale lijn met state sum 1. Onder de uitbreiding geldt ook een lemma voor een cirkel:

Lemma 8.4. *Als het zes-knopen model wordt uitgebreid via Definitie 8.2, wordt de state sum van een cirkel gelijk aan $-[2]$.*

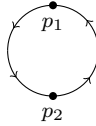
$$\bigcirc = -[2]$$

Bewijs. Om de state sum van deze cirkel te berekenen bekijken we eerst het gewicht van de cirkel bij een orientatie met de klok mee:



Bij deze orientatie geldt $p_1 = 1$ en $p_2 = -q^{-\frac{1}{2}}$, dus het gewicht van de cirkel bij deze orientatie is $-q^{-\frac{1}{2}}$.

Nu berekenen we het gewicht van de cirkel bij een orientatie tegen de klok in:



We zien dat $p_1 = -q^{\frac{1}{2}}$ en $p_2 = 1$, dus het gewicht van de cirkel bij deze orientatie is $-q^{\frac{1}{2}}$. De state sum van de cirkel is de som van de gewichten bij elke orientatie. We zien voor de state sum dat:

$$-q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}} = -(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}) = \frac{q^{\frac{2}{2}} - q^{-\frac{2}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = -[2]$$

□

Herinner uit Definitie 7.2 dat een knoop met label x en zijn gewicht, dat afhankelijk van de staat van de knoop is, een R -matrix genoemd wordt en genoteerd wordt met $R(x)$. Naast de identiteiten voor de cirkel en de rechte lijn herschrijven we ook $R(x)$ in deze uitbreiding van het zes-knopen model.

Lemma 8.5. *Als het zes-knopen model wordt uitgebreid met Definitie 8.2, kan de R -matrix $R(x)$ als volgt herschreven worden:*

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ x \\ \diagdown \diagup \end{array} = [x] \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} + [x-1] \begin{array}{c} \left(\right. \\ \left. \right) \end{array}$$

Bewijs. Om te bewijzen dat deze uitdrukking klopt moeten we deze uitdrukking voor alle mogelijke staten van $R(x)$ nagaan. Echter, aan beide kanten staat alleen een uitdrukking ongelijk aan 0 als er twee pijlen naar de knoop toe gaan, en twee pijlen van de knoop af. Dit levert zes gevallen waar twee pijlen naar de knoop toe gaan, en twee van de knoop af. Deze zes gevallen zijn precies de staten van een knoop waar in Definitie 7.2 gewichten aan zijn toegekend. We moeten dus per staat kijken of de herschreven R -matrix hetzelfde gewicht oplevert als het gewicht dat in Definitie 7.2 aan die staat is toegekend. Merk op dat als op een lijnstuk de pijlen tegengesteld zijn, dan is het gewicht 0.

$$(1) \quad \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ x \\ \diagdown \diagup \end{array} = [x] \begin{array}{c} \frown \bullet \smile \\ \smile \bullet \frown \end{array} + [x-1] \begin{array}{c} \left(\right. \\ \left. \right) \end{array}$$

Geeft de vergelijking:

$$\begin{aligned} & [x] \cdot -q^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 + [x-1] \cdot 1 \cdot 1 \\ &= -q^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) + \frac{q^{\frac{x-1}{2}} - q^{-\frac{x-1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(-q^{\frac{x-1}{2}} + q^{-\frac{x+1}{2}} + q^{\frac{x-1}{2}} - q^{-\frac{x-1}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) \left(q^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{-\frac{x}{2}} - q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{-\frac{x}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot -q^{-\frac{x}{2}} = -q^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \end{array} = [x] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} + [x-1] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right)$$

Geeft de vergelijking:

$$\begin{aligned} & [x] \cdot 1 \cdot -q^{\frac{1}{2}} + [x-1] \cdot 1 \cdot 1 \\ &= -q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) + \frac{q^{\frac{x-1}{2}} - q^{-\frac{x-1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(-q^{\frac{x+1}{2}} + q^{-\frac{x-1}{2}} + q^{\frac{x-1}{2}} - q^{-\frac{x-1}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) \left(q^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{x}{2}} - q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{x}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot -q^{\frac{x}{2}} = -q^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \end{array} = [x] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} + [x-1] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right)$$

Geeft de vergelijking: $0 + [x-1] \cdot 1 \cdot 1 = [x-1]$.

$$(4) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \end{array} = [x] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} + [x-1] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right)$$

Geeft de vergelijking: $0 + [x-1] \cdot 1 \cdot 1 = [x-1]$.

$$(5) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \end{array} = [x] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} + [x-1] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right)$$

Geeft de vergelijking: $[x] \cdot -q^{\frac{1}{2}} \cdot -q^{-\frac{1}{2}} + 0 = [x]$.

$$(6) \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \end{array} = [x] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} + [x-1] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right)$$

Geeft de vergelijking: $[x] \cdot 1 \cdot 1 + 0 = [x]$.

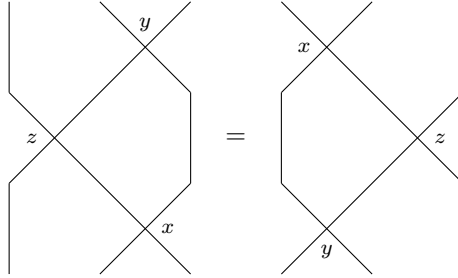
□

8.3. Tweede bewijs. Nu we het six-vertex model hebben uitgebreid en nieuwe identiteiten voor rechte lijnen, cirkels en de gewichten van de knopen hebben gevonden, kunnen we het bewijs uit het artikel van Kuperberg opschrijven.

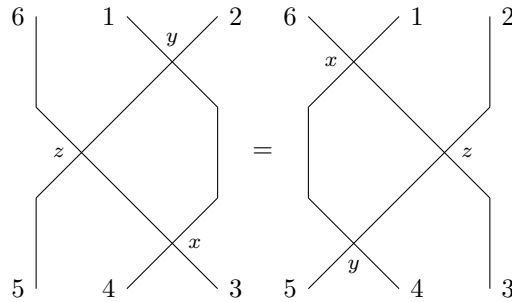
Stelling 8.6 (Baxter). *Als $x = y + z$, dan voldoen de R -matrices $R(x)$, $R(y)$ en $R(z)$ aan de vergelijking*



Bewijs. Als we de Yang-Baxtervergelijking een beetje herschikken krijgen we het volgende plaatje.



Merk op dat het rechterplaatje een draaiing van 180 graden is van het linkerplaatje. Wederom blijft de orientatie van de buitenste takken bewaard. In onderstaand plaatje is precies weergegeven welke takken bij elkaar horen.



Binnen dit plaatje kunnen we de identiteit voor $R(x)$ uit Lemma 8.5 heel goed toepassen.

De linkerkant van de vergelijking kan met behulp van Lemma 8.5 worden herschreven tot de volgende som:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = [x][y][z] \text{ Diagram 2} + [x][y][z-1] \text{ Diagram 3} \\
 & + [x][y-1][z] \text{ Diagram 4} + [x][y-1][z-1] \text{ Diagram 5} + [x-1][y][z] \text{ Diagram 6} \\
 & + [x-1][y][z-1] \text{ Diagram 7} + [x-1][y-1][z] \text{ Diagram 8} + [x-1][y-1][z-1] \text{ Diagram 9}
 \end{aligned}$$

The diagrams are as follows:

- Diagram 1: A hexagon with vertices labeled x (bottom), y (top), and z (left). The left and right sides are vertical lines. The top and bottom edges are crossed by diagonal lines.
- Diagram 2: A vertical line on the left and a pair of connected circles on the right.
- Diagram 3: A vertical line on the left and a figure-eight shape on the right.
- Diagram 4: Two vertical lines on the left and a pair of connected circles on the right.
- Diagram 5: A vertical line on the left and a figure-eight shape on the right.
- Diagram 6: A vertical line on the left and a circle on the right.
- Diagram 7: A vertical line on the left and a figure-eight shape on the right.
- Diagram 8: A vertical line on the left and a pair of connected circles on the right.
- Diagram 9: A vertical line on the left and a figure-eight shape on the right.

Met behulp van Lemma 8.3 en Lemma 8.4 zien we dan dat de som voor de linkerkant reduceert tot:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = [x][y][z] \text{ Diagram 2} + [x][y][z-1] \text{ Diagram 3} \\
 & + [x][y-1][z] \text{ Diagram 4} + [x][y-1][z-1] \text{ Diagram 5} - [2][x-1][y][z] \text{ Diagram 6} \\
 & + [x-1][y][z-1] \text{ Diagram 7} + [x-1][y-1][z] \text{ Diagram 8} + [x-1][y-1][z-1] \text{ Diagram 9}
 \end{aligned}$$

The diagrams are as follows:

- Diagram 1: Same as Diagram 1 in the previous equation.
- Diagram 2: A vertical line on the left and a pair of connected circles on the right.
- Diagram 3: A vertical line on the left and a diagonal line on the right.
- Diagram 4: Three vertical lines on the left and a pair of connected circles on the right.
- Diagram 5: A vertical line on the left and a pair of connected circles on the right.
- Diagram 6: Three vertical lines on the left and a pair of connected circles on the right.
- Diagram 7: A vertical line on the left and a pair of connected circles on the right.
- Diagram 8: A vertical line on the left and a pair of connected circles on the right.
- Diagram 9: A vertical line on the left and a diagonal line on the right.

De cirkel die in de de vijfde term van de som stond is vervangen door $-[2]$.

De rechterkant van de vergelijking kan met behulp van Lemma 8.5 worden herschreven tot de volgende som:

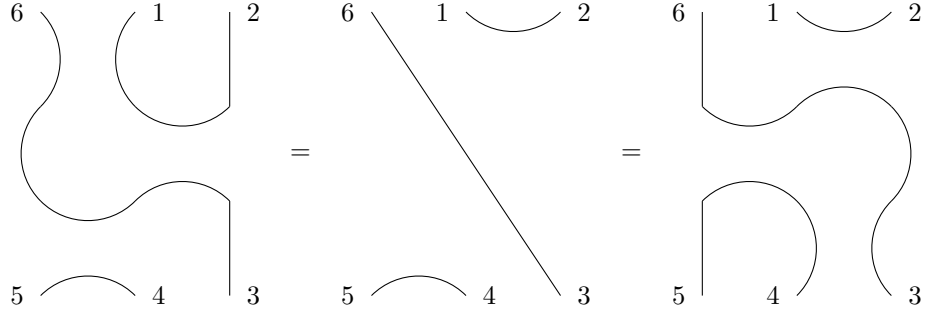
$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \diagup y \\ | \\ \diagdown z \\ | \\ \diagup x \\ | \end{array} = [x][y][z] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + [x][y][z-1] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \\
 & + [x][y-1][z] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + [x][y-1][z-1] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + [x-1][y][z] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \\
 & + [x-1][y][z-1] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + [x-1][y-1][z] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + [x-1][y-1][z-1] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array}
 \end{aligned}$$

Met behulp van Lemma 8.3 en Lemma 8.4 zien we dat de som voor de rechterkant reduceert tot:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \diagup y \\ | \\ \diagdown z \\ | \\ \diagup x \\ | \end{array} = [x][y][z] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + [x][y][z-1] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \\
 & + [x][y-1][z] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + [x][y-1][z-1] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} - [2][x-1][y][z] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \\
 & + [x-1][y][z-1] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + [x-1][y-1][z] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + [x-1][y-1][z-1] \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array}
 \end{aligned}$$

De cirkel die in de de vijfde term van de som stond is vervangen door $-[2]$.

Aan de linker- en de rechterkant zijn de tweede, derde en achtste term (met term wordt plaatje bedoeld) aan elkaar gelijk. Voor de tweede term werken we de gelijkheid uit, voor de derde en achtste term gaat het bewijs op een gelijkaardige manier. Herinner de nummering van de takken en dat corresponderen takken dezelfde oriëntatie behouden. Dan krijgen we het volgende voor de tweede term:



In de vergelijking vallen dus de tweede, derde en achtste term tegen elkaar weg. Merk op dat de eerste, vijfde, zesde en zevende term aan de linkerkant gelijk zijn aan de vierde term aan de rechterkant van de vergelijking. Evenzo geldt dat de eerste, vijfde, zesde en zevende term aan de rechterkant gelijk zijn aan de vierde term aan de linkerkant. Als we dit buiten haakjes halen krijgen we de volgende vergelijking:

$$a \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| + b \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| = b \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| + a \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right|$$

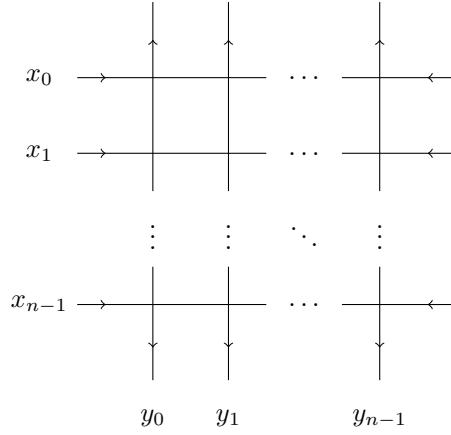
Hier geldt dat $a = [x][y-1][z-1]$ en $b = [x][y][z] - [2][x-1][y][z] + [x-1][y][z-1] + [x-1][y-1][z]$. Er geldt gelijkheid als $a = b$ en dit is zo, want dat is precies de identiteit die in Lemma 6.7 bewezen is. We zien dus dat het de linkerkant en de rechterkant voor elke oriëntatie aan elkaar gelijk zijn. Daarmee is de Yang-Baxtervergelijking bewezen via de uitbreiding van het six-vertex model.

□

9. EIGENSCHAPPEN VAN DE STATE SUM

We hebben nu de Yang-Baxtervergelijking bewezen. Nu gaan we een $n \times n$ square ice graaf G beter bekijken. Als we van deze graaf G de state sum kunnen uitrekenen en daarna een verband leggen tussen de state sum en het aantal ASM's, kunnen we het bewijs voltooien. De knopen met label x krijgen een gewicht, afhankelijk van de staat waarin ze zijn. Om de state sum uit te kunnen rekenen, moeten we waarden toekennen aan deze labels.

9.1. Waarde van de labels. We gaan nu de lijnen van de $n \times n$ square ice graaf G labelen met $2n$ parameters: $X = x_0, \dots, x_{n-1}$ voor de horizontale lijnen en $Y = y_0, \dots, y_{n-1}$ voor de verticale lijnen. De orientatie van de lijnen ligt al een klein beetje vast. De horizontale lijnen zijn aan de buitenkant altijd naar binnen georiënteerd, de verticale lijnen zijn aan de buitenkant altijd naar buiten georiënteerd. De graaf G ziet er dus als volgt uit:



De theorie die tot nu toe is opgebouwd gaat alleen over knopen met labels. Nu gaan we plotseling de lijnen labelen. We definiëren de volgende relatie tussen het labelen van lijnen en het labelen van knopen.

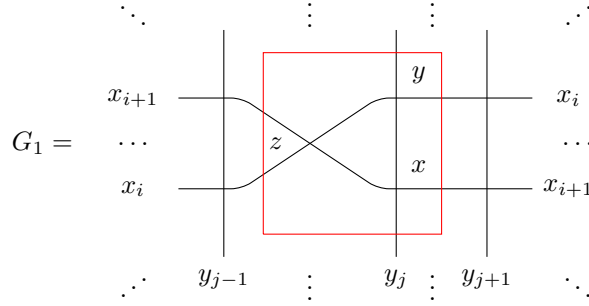
Definitie 9.1. Voor de labels van de lijnen van de graaf G geldt:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} | \\ \hline x \\ \hline | \\ y \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} | \\ \hline x - y \\ \hline | \end{array}
 \end{array}$$

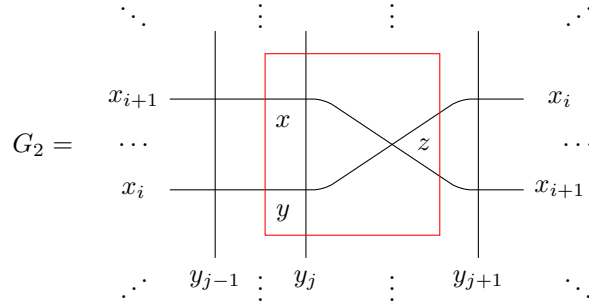
Merk op dat met deze definitie de gewichten van de knopen voor elke toestand van de graaf G bekend zijn. We gaan nu drie eigenschappen van de state sum aantonen. De eerste eigenschap is dat de state sum symmetrisch is in de x_i 's en de y_j 's.

9.2. Symmetrie van de state sum. Laat $Z(n; X, Y)$ de state sum van de graaf G zijn. Het is dus de som over alle mogelijke toestanden van de graaf van het product van de gewichten van de knopen. We willen bewijzen dat de state sum symmetrisch is in de x_i 's en de y_j 's. Om dat te kunnen bewijzen, hebben we het volgende lemma nodig:

Lemma 9.2. *Laat G een square-ice graaf zijn. Laat G' een vaste square ice toestand van G zijn. Laat*



En



grafen zijn, waarbij alle knopen buiten het rode vierkant in dezelfde staat zijn als de corresponderende knopen van G' , met $x = x_{i+1} - y_j$, $y = x_i - y_j$ en $z = x_{i+1} - x_i$. De grafen zijn verkregen door bij G' respectievelijk tussen lijnen y_{j-1} en y_j en lijnen y_j en y_{j+1} de lijnen x_i en x_{i+1} te kruisen. Dan geldt dat de state sum van G_1 gelijk is aan de state sum van G_2 .

Bewijs. We willen controleren dat de som over alle orientaties van G_1 van het product van de gewichten van de knopen hetzelfde is als de som over alle orientaties van G_2 van het product van de gewichten van de knopen. G_1 en G_2 zijn modificaties van G' . Omdat G' een vaste toestand van G is, is de orientatie van de knopen van G_1 en G_2 buiten het rode vierkant hetzelfde. Alleen binnen het rode vierkant kan de orientatie verschillen. De graaf binnen het rode vierkant van G_1 noemen we V_1 en de graaf binnen het rode vierkant van G_2 noemen we V_2 . De state sum van G_1 is het product van de gewichten van de knopen buiten het vierkant, vermenigvuldigd met de state sum van V_1 . De state sum van G_2 is het product van de gewichten van de knopen buiten het vierkant, vermenigvuldigd met de state sum van V_2 . We hebben het hier over de state sum van V_1 of V_2 omdat deze meer dan één orientatie kunnen hebben, als de pijlen bijvoorbeeld georiënteerd zijn zoals in vergelijking 5 in het bewijs van Stelling 8.1.

Omdat de staat van de knopen buiten het rode vierkant van G_1 en G_2 hetzelfde is, moeten we dus eigenlijk bewijzen dat $\text{state sum}(V_1) \cdot a = \text{state sum}(V_2) \cdot a$ met a is het product van de gewichten van de knopen buiten het vierkant. Er is dus een gelijkheid als de state sum van V_1 hetzelfde is als de state sum van V_2 . Omdat de orientatie buiten het rode vierkant bij G_1 en G_2 hetzelfde is, is de orientatie van de pijlen die het rode vierkant ingaan ook hetzelfde bij G_1 en G_2 . Ook geldt dat $x = y + z$. Er is dus aan de voorwaarde voor de Yang-Baxtervergelijking voldaan, dus volgens Stelling 8.1 is de state sum van V_1 gelijk aan de state sum van V_2 . Daaruit volgt direct dat de state sum van G_1 hetzelfde is als de state sum van G_2 .

Als laatste is het belangrijk om op te merken dat $x = x_{i+1} - y_j$ bij G_2 op de juiste plek staat, zoals gedefinieerd in Definitie 7.2 (linksonder). Bij G_1 staat het label x in de rechter bovenhoek van de knoop. Echter, volgens het gevolg na Lemma 7.3 is het gewicht van de knoop met het label in de hoek rechtsboven hetzelfde als het gewicht van de knoop met het label in de hoek linksonder (waar het volgens Definitie 7.2 zou moeten staan). Hetzelfde geldt voor de labels y bij G_1 en z bij G_2 .

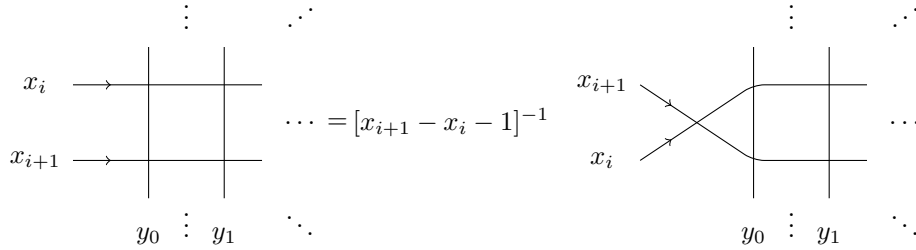
Dit lemma geldt voor $0 \leq j < n$. In het geval dat $j = 0$, geldt het bewijs met de lijn y_{j-1} weggedacht. Dat verandert niks aan de argumentatie voor het bewijs. In het geval dat $j = n - 1$, geldt het bewijs met de lijn y_{j+1} weggedacht. Ook dat verandert niks aan de argumentatie.

□

Nu we Lemma 9.2 bewezen hebben, kunnen we de symmetrie van de state sum bewijzen.

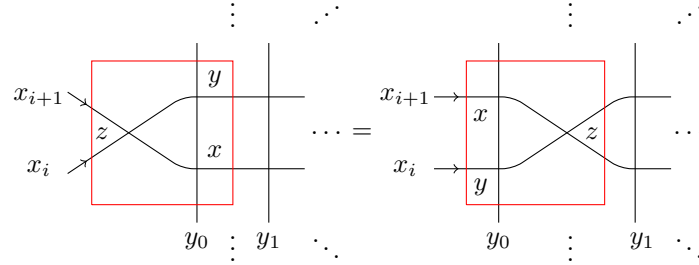
Lemma 9.3. *De functie $Z(n; X, Y)$ is symmetrisch in de x_i 's en de y_j 's.*

Bewijs. We bewijzen eerst dat de functie $Z(n; X, Y)$ symmetrisch is in de i^e en de $(i + 1)^{ste}$ horizontale lijn, $0 \leq i < n - 1$. Als eerste introduceren we een nieuwe knoop, die gelabeld kan worden met $x_{i+1} - x_i$. Stel dat de state sum aan de



linkerkant gelijk is aan $Z(n; X, Y)$. Door het toevoegen van een nieuwe knoop aan de rechterkant, met een vaste orientatie (de pijlen die nog niet zijn getekend moeten allebei van de knoop afgaan, anders is het gewicht van de knoop 0), is de state sum van de graaf aan de linkerkant gelijk aan $[x_{i+1} - x_i - 1] \cdot Z(n; X, Y)$. Door vervolgens te delen door $[x_{i+1} - x_i - 1]$, staat er aan beide kanten $Z(n; X, Y)$.

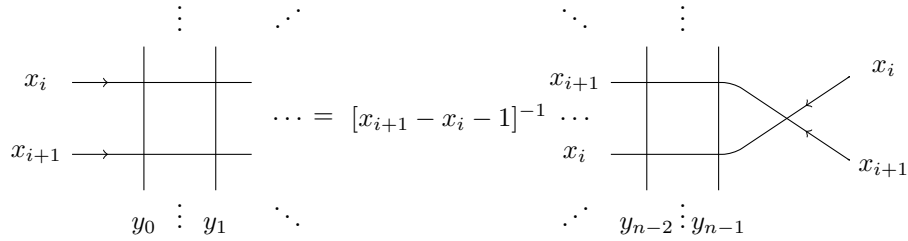
Volgens Lemma 9.2 geldt nu voor elke vaste toestand van de graaf dat de state sum van de onderstaande vergelijking aan beide kanten hetzelfde is:



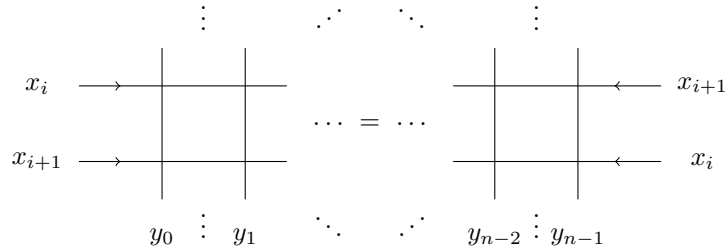
Met $x = x_{i+1} - y_0$, $y = x_i - y_0$, en $z = x_{i+1} - x_i$.

Omdat het voor elke vaste orientatie van de graaf geldt, geldt het ook voor de som over alle orientaties van de graaf, en dus voor $Z(n; X, Y)$. We mogen de extra knoop volgens Lemma 9.2 dus naar rechts verplaatsen zonder dat dit iets verandert aan de waarde van $Z(n; X, Y)$.

Herhaaldelijk toepassen van Lemma 9.2 geeft uiteindelijk dat:



De waarde van de state sum aan de rechterkant is nog steeds $[x_{i+1} - x_i - 1] \cdot Z(n; X, Y)$. Als de extra knoop aan de rechterkant wordt weggehaald, krijgen we de originele graaf terug, maar met x_i en x_{i+1} omgedraaid. Hieruit volgt dat de state sum $Z(n; X, Y)$ symmetrisch is in x_i en x_{i+1} .



We weten nu dat $Z(n; X, Y)$ symmetrisch is in x_i en x_{i+1} , $0 \leq i < n - 1$. Het is bekend dat de permutatiegroep S_n , (dit zijn alle permutaties (rangschikkingen) van de elementen uit de verzameling $\{0, 1, \dots, n - 1\}$), voortgebracht wordt door de verwisselingen $(i, i + 1)$. Hieruit volgt direct dat $Z(n; X, Y)$ symmetrisch is in de x_i 's. Door het bovenstaande bewijs te beschouwen met alle pijltjes in de plaatjes de andere kant op (dit verandert niks aan de factor waarmee de state sum vermenigvuldigd wordt en waar door wordt gedeeld) en overal waar x_i staat y_i te lezen, blijkt dat de state sum ook in de y_j 's symmetrisch is. $\square$

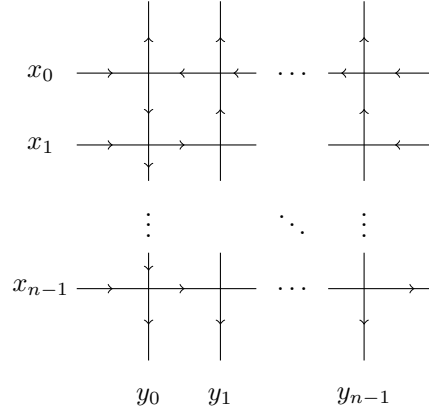
9.3. n^2 specificaties van de parameters waar de state sum versimpelt. We hebben de symmetrie van de state sum bewezen. Ondanks de symmetrie is de state sum een hele grote uitdrukking. De som over alle toestanden van een square ice G van het product van de gewichten van de knopen levert veel termen op, zeker als n groot is. Herinner Lemma 4.9 waarin is bewezen dat de staat van de knopen op de bovenste rij van een square ice toestand een vaste volgorde heeft. In het volgende lemma zullen we zien dat er n^2 specificaties van de parameters zijn waar de state sum van een $n \times n$ square ice graaf reduceert tot de state sum van een $(n-1) \times (n-1)$ square ice graaf.

Lemma 9.4. *Als $x_i = y_j + 1$, dan*

$$Z(n; X, Y) = -q^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{k \neq j} [x_i - y_k] \right) \left(\prod_{k \neq i} [x_k - y_j] \right) Z(n-1; X \setminus x_i, Y \setminus y_j)$$

Bewijs. We nemen aan dat $i = j = 0$. Als $i, j \neq 0$, dan kunnen wegens de symmetrie van $Z(n; X, Y)$ in de x_i 's en de y_j 's x_i met x_0 verwisseld worden en y_j met y_0 , waardoor het ook voor x_i en y_j geldt.

We hebben nu dat $x_0 = y_0 + 1$. De knoop die linksboven in de graaf is, moet volgens Lemma 4.9 in staat 1 of staat 3 zijn. Merk op dat de label van deze knoop gelijk is aan $x_0 - y_0$. Het gewicht van deze knoop met orientatie 3 wordt dan $[x_0 - y_0 - 1]$. Maar omdat $x_0 = y_0 + 1$ wordt dat gewicht gelijk aan 0. Het product van de gewichten van alle knopen is daarom voor alle grafen die linksboven orientatie 3 hebben gelijk aan 0. Onder de voorwaarde $x_0 = y_0 + 1$ hebben dus alleen de toestanden van de graaf met linksboven een knoop in orientatie 1 invloed op de state sum. Volgens Lemma 4.9 moet de rest van de knopen op de bovenste rij orientatie 5 hebben. De rest van de knopen op de linkerkolom moet orientatie 6 hebben.



Merk op dat het gewicht van de knoop met label $x_0 - y_0$ gelijk is aan $-q^{-\frac{x_0 - y_0}{2}} = -q^{-\frac{1}{2}}$. Het gewicht van knoop $x_0 - y_k, k \neq j = 0$ is gelijk aan $[x_0 - y_k]$. Het gewicht van knoop $x_k - y_0, k \neq i = 0$ is gelijk aan $[x_k - y_0]$. Daarom geldt dat het product van de gewichten van de bovenste- en de linkerknopen gelijk is aan $-q^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{k \neq j} [x_i - y_k] \right) \left(\prod_{k \neq i} [x_k - y_j] \right)$ met in dit geval $i = j = 0$. Omdat deze knopen in elke orientatie van de graaf, waarbij het product van de gewichten van de knopen niet 0 is, deze vaste orientatie hebben, kunnen ze in elke term van de state sum buiten haakjes gehaald worden. Wat overblijft in elke term van de state sum is het product van de gewichten van de rest van de knopen. Maar door de orientatie

van de pijlen is dit product opnieuw een state sum (de pijlen aan de zijanten staat naar binnen gericht, de pijlen aan de boven- en onderkant staan naar buiten gericht), maar dan van grootte $n - 1$, zonder parameters x_0 en y_0 . Het overblijfsel is dus $Z(n - 1; X \setminus x_i, Y \setminus y_j)$, met $i = j = 0$. Hiermee is het lemma bewezen. $\square$

9.4. De state sum is een polynoom in q^{x_0} . Nu weten we dat de state sum symmetrisch is, en we kennen n^2 specificaties van de parameters waar de state sum versimpelt. Als laatste eigenschap willen we het volgende lemma bewijzen:

Lemma 9.5. *De grootte $Z'(n) = q^{\frac{nx_0}{2}} Z(n; X, Y)$ is een polynoom in q^{x_0} met een graad van hoogstens $n - 1$.*

Bewijs. Om de state sum $q^{\frac{nx_0}{2}} Z(n; X, Y)$ te verkrijgen vermenigvuldigen we alle gewichten van knopen in de eerste rij met $q^{\frac{x_0}{2}}$. Zoals we weten van Lemma 4.9 is er in de bovenste rij één knoop in staat 1 (in kolom y_i), zijn er i knopen in staat 3 en $n - i - 1$ knopen in staat 5.

Het nieuwe gewicht van de knoop met staat 1, vermenigvuldigd met $q^{\frac{x_0}{2}}$ wordt:

$$-q^{\frac{(-x_0+y_i)}{2}} q^{\frac{x_0}{2}} = -q^{\frac{y_i}{2}}$$

Dit gewicht is dus onafhankelijk van x_0 . Het nieuwe gewicht van de knopen met staat 3, vermenigvuldigd met $q^{\frac{x_0}{2}}$ wordt:

$$[x_0 - y_k - 1] q^{\frac{x_0}{2}} = \frac{q^{\frac{(x_0-y_k-1)}{2}} - q^{\frac{(-x_0+y_k+1)}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \cdot q^{\frac{x_0}{2}} = \frac{q^{x_0} q^{\frac{(-y_k-1)}{2}} - q^{\frac{(1+y_k)}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$$

In het nieuwe gewicht van een knoop met staat 3 komt q^{x_0} lineair voor (zonder machten). Hetzelfde geldt voor het nieuwe gewicht van een knoop met staat 5.

$$[x_0 - y_k] q^{\frac{x_0}{2}} = \frac{q^{\frac{(x_0-y_k)}{2}} - q^{\frac{(-x_0+y_k)}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \cdot q^{\frac{x_0}{2}} = \frac{q^{x_0} q^{-\frac{y_k}{2}} - q^{\frac{y_k}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$$

We nemen alle getallen $q^{x_i}, 1 \leq i \leq n - 1$ en $q^{y_j}, 0 \leq j \leq n - 1$ vast. $Z'(n)$ is de som over alle mogelijke orientaties van de graaf van het product van de nieuwe gewichten van de knopen van de graaf. Deze gewichten zijn of constant (zonder q^{x_0}) of van de vorm $c \cdot q^{x_0} + d$.

Laat G' een willekeurige toestand van een $n \times n$ square ice zijn. De bovenste rij is de enige rij waarin de parameter x_0 voorkomt (alle gewichten van knopen die niet uit de bovenste rij komen zijn dus constant). Er is altijd één knoop in orientatie 1. Dit gewicht is ook constant. Dan blijven er $n - 1$ knopen over in orientatie 3 of orientatie 5. Daarvan zijn de gewichten van de vorm $c \cdot q^{x_0} + d$. Het product van de gewichten van de knopen van G' is dus een polynoom in q^{x_0} van graad $n - 1$. Dus $Z'(n)$, de som over alle toestanden van de graaf van de gewichten van de knopen, is ook een polynoom in q^{x_0} van graad hoogstens $n - 1$.

□

10. UITDRUKKING VOOR DE STATE SUM

We kennen nu een simplificatie van de state sum in n^2 specificaties van de parameters, en we weten dat de state sum een polynoom is in q^{x_0} , mits vermenigvuldigd met $q^{\frac{nx_0}{2}}$. Met behulp van deze twee eigenschappen en de volgende definitie kunnen we een uitdrukking voor de state sum bewijzen:

Definitie 10.1. Met behulp van Lagrange interpolatie kan via n punten een uniek polynoom gevonden worden dat graad hoogstens $(n-1)$ heeft en door deze n punten gaat. Dit unieke polynoom heet het Lagrange interpolatiepolynoom

Stelling 10.2 (Izergin, Korpin). [7] [8]

De state sum $Z(n; X, Y)$ wordt gegeven door:

$$Z(n; X, Y) = \frac{(-1)^n \left(\prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{(y_i - x_i)}{2}} \right) \prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}{\left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} \det M$$

met

$$M_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}, 0 \leq i, j \leq n-1$$

Bewijs. We noemen de uitdrukking voor de state sum die we willen bewijzen $Z'(n; X, Y)$. Gedurende het bewijs beschouwen we $Z(n; X, Y)$ en $Z'(n; X, Y)$ als een polynoom in q^{x_0} . Om deze stelling te bewijzen kunnen we Definitie 10.1 goed gebruiken. Door Lemma 9.4 en Lemma 9.5 kennen we n specificaties van de parameters waar de state sum $Z(n; X, Y)$ versimpelt en weten we dat $q^{\frac{nx_0}{2}} Z(n; X, Y)$ graad hoogstens $n-1$ heeft. Als we kunnen bewijzen dat $Z'(n; X, Y)$ ook tot hetzelfde versimpelt bij dezelfde specificaties van de parameters en als we kunnen bewijzen dat $q^{\frac{nx_0}{2}} Z'(n; X, Y)$ ook op zijn meest graad $n-1$ heeft, dan volgt door de Lagrange interpolatie dat $Z'(n; X, Y)$ het enige, unieke polynoom is met deze simplificaties, met deze graad. Daaruit volgt dan dat $Z(n; X, Y) = Z'(n; X, Y)$ en daarmee is de stelling dan bewezen. We moeten dus bewijzen dat Lemma 9.4 en Lemma 9.5 gelden voor $Z'(n; X, Y)$.

Controle Lemma 9.4: Om te kijken of $Z'(n; X, Y)$ tot hetzelfde reduceert als $Z(n; X, Y)$ in n specificaties van de parameters, hoeven we alleen Lemma 9.4 te controleren. Dus als $x_i = y_j + 1$, dan moet gelden:

$$Z'(n; X, Y) = -q^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{k \neq j} [x_i - y_k] \right) \left(\prod_{k \neq i} [x_k - y_j] \right) Z'(n-1; X \setminus x_i, Y \setminus y_j)$$

Wegens de symmetrie in de x_i 's en de y_j 's hoeven we dit alleen te controleren voor $i = j = 0$.

Neem aan dat $x_0 = y_0 + 1$. Dan moet dus gelden dat:

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n \left(\prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{(y_i - x_i)}{2}} \right) \prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}{\left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} \det M \\ &= -q^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{k \neq 0} [x_0 - y_k] \right) \left(\prod_{k \neq 0} [x_k - y_0] \right) \\ & \cdot \frac{(-1)^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} q^{\frac{(y_i - x_i)}{2}} \right) \prod_{1 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}{\left(\prod_{1 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{1 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} \det M' \end{aligned}$$

met

$$M'_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}, 1 \leq i \leq n-1$$

We gaan deze vergelijking termsgewijs aantonen. Merk op dat:

$$\begin{aligned} & (-1)^n \left(\prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{(y_i - x_i)}{2}} \right) = (-1)^n q^{\frac{(y_0 - x_0)}{2}} q^{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)}{2}} \\ &= -q^{-\frac{1}{2}} (-1)^{n-1} q^{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)}{2}} = -q^{-\frac{1}{2}} (-1)^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} q^{\frac{(y_i - x_i)}{2}} \right) \end{aligned}$$

Verder zien we dat de termen $[x_0 - y_k - 1], 1 \leq k \leq n-1$, in de teller wegvallen tegen de termen $[y_0 - y_k]$ in de noemer, vanwege $x_0 = y_0 + 1$. Ook vallen de termen $[x_k - y_0 - 1], 1 \leq k \leq n-1$, in de teller weg tegen de termen $[x_k - x_0]$. Na dit wegvallen krijgen we dus:

$$\begin{aligned} & \frac{\prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}{\left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} \\ &= \frac{\left(\prod_{k \neq 0} [x_0 - y_k] \right) \left(\prod_{k \neq 0} [x_k - y_0] \right) [x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1] \left(\prod_{1 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1] \right)}{\left(\prod_{1 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{1 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} \end{aligned}$$

We laten nu even de eis $x_0 = y_0 + 1$ los. We moeten nu als laatste aantonen dat

$$[x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1] \det M = \det M'$$

Voor $0 \leq i, j < n$ definiëren we M_i^j als de matrix M na het verwijderen van de i^e rij en de j^e kolom. Merk op dat $M' = M_0^0$. We berekenen $\det(M)$ via de ontwikkeling naar de eerste rij. Dan krijgen we:

$$\begin{aligned} & [x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1] \det M \\ &= (-1)^{1+1} \frac{[x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1]}{[x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1]} \det M_0^0 + \dots + (-1)^{1+n} \frac{[x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1]}{[x_0 - y_{n-1}][x_0 - y_{n-1} - 1]} \det M_{n-1}^{n-1} \\ &= \det M_0^0 - \frac{[x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1]}{[x_0 - y_1][x_0 - y_1 - 1]} \det M_1^1 + \dots + (-1)^{1+n} \frac{[x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1]}{[x_0 - y_{n-1}][x_0 - y_{n-1} - 1]} \det M_{n-1}^{n-1} \end{aligned}$$

In $\det(M)$ zat een pool voor $x_0 = y_0 + 1$. Deze pool hebben we nu opgeheven met de voorfactor, dus we nemen weer aan dat $x_0 = y_0 + 1$. Omdat $[x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1] = 0$, zijn alle termen van $[x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1] \det M$ gelijk aan 0, behalve de eerste term $\det M_0^0$. Nu zien we in dat $[x_0 - y_0][x_0 - y_0 - 1] \det M = \det M_0^0 = \det M'$, en dat is het laatste wat we moesten controleren. We zien dus dat Lemma 9.4 geldt voor $Z'(n; X, Y)$.

Controle Lemma 9.5: We noemen P de teller van $Z'(n; X, Y)$, Q wordt de noemer en D wordt de determinant. Voor deze controle wordt de determinant niet uitgerekend via de cofactor expansie, maar met behulp van de formule van Leibniz:

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$$

Hier is S_n wederom de permutatiegroep. Dit zijn alle permutaties (rangschikkingen) van de elementen uit de verzameling $\{0, 1, \dots, n-2, n-1\}$. Verder is $\operatorname{sgn}(\sigma)$ het teken van een permutatie. Als voor een permutatie een even aantal verwisselingen nodig is, bijvoorbeeld zijn bij de permutatie $(1, 0, 3, 2, 4, 5, \dots, n-2, n-1)$ twee verwisselingen nodig (0 met 1 en 2 met 3), dan $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. Als er een oneven aantal verwisselingen nodig is, dan $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

Deze formule drukt dus de som uit van alle mogelijke producten van elementen uit de matrix in een verschillende rij en een verschillende kolom, met bijbehorend teken.

Merk op dat P een half-integral Laurentpolynoom is met halftallige exponenten. Volgens Lemma 6.2 zijn alle termen $[x_i - y_j]$ en $[x_i - y_j - 1]$ half-integral Laurentpolynomen met halftallige exponenten. Dus $[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]$ is een half-integral Laurentpolynoom met geheeltallige exponenten voor $0 \leq i, j < n$, dus ook $\prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]$ is een half-integral Laurentpolynoom met geheeltallige exponenten, volgens de tekst na Lemma 5.5. Omdat dit voor alle $0 \leq i, j < n$ nog met één term $q^{\frac{y_j}{2}}$ of $q^{-\frac{x_i}{2}}$ (een half-integral Laurentpolynoom met halftallige exponenten) wordt vermenigvuldigd is P dus een half-integral Laurentpolynoom met halftallige exponenten.

We hebben nu $D = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n M_{i, \sigma(i)})$. Laat D' een term van D zijn. Omdat alle termen $[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]$ (half-integral Laurentpolynomen met geheeltallige exponenten) uit de noemer van D' in de teller van P staan, vallen deze tegen elkaar weg en blijft PD' een half-integral Laurentpolynoom met halftallige exponenten. Omdat dit voor alle termen D' geldt, en omdat volgens Lemma 5.4 de som van half-integral Laurentpolynomen met halftallige exponenten weer een half-integral Laurentpolynoom is, is PD een half-integral Laurentpolynoom.

We bekijken $M_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}$ beter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]} &= \left(\frac{(q^{\frac{x_i - y_j}{2}} - q^{-\frac{x_i - y_j}{2}}) \cdot (q^{\frac{x_i - y_j - 1}{2}} - q^{-\frac{x_i - y_j - 1}{2}})}{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{q^{x_i - y_j - \frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} + q^{-x_i + y_j + \frac{1}{2}}}{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{q^{x_i} \cdot q^{-y_j - \frac{1}{2}} + q^{-x_i} \cdot q^{y_j + \frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Als $q^{x_i} = q^{x_j}$, $0 \leq j < i < n$, dan zijn rij i en rij j van de matrix M exact hetzelfde. Dit betekent dat de determinant dan 0 is. $q^{x_i} = q^{x_j}$ is dus een nulpunt van $\det(M)$, dus ook een nulpunt van PD . Dus PD is deelbaar door $q^{x_i} - q^{x_j}$. Merk op dat:

$$q^{x_i} - q^{x_j} = q^{\frac{x_i + x_j}{2}} \left(q^{\frac{x_i - x_j}{2}} - q^{\frac{x_j - x_i}{2}} \right) = q^{\frac{x_i + x_j}{2}} \cdot [x_i - x_j] \cdot (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})$$

We zien PD ook deelbaar is door $[x_i - x_j], 0 \leq j < i < n$, dus het is ook deelbaar door $\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]$. Met het inzicht dat:

$$\frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]} = \left(\frac{q^{-y_j} \cdot q^{x_i - \frac{1}{2}} + q^{y_j} \cdot q^{-x_i + \frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2} \right)^{-1}$$

Volgt dat $q^{y_i} = q^{y_j}, 0 \leq i < j < n$ ook een nulpunt van $\det(M)$ is. Met een gelijkwaardig argument geldt dus dat PD ook deelbaar is door $\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]$. Hieruit volgt dat Q een deler is van PD , dus $\frac{P}{Q}D$ is een half-integral Laurentpolynoom. Het is dus een half-integral Laurentpolynoom in q^{x_0} .

Nu willen we de graad van het half-integral Laurentpolynoom in q^{x_0} berekenen. Eerst onderzoeken we de leidende term in PD' met wederom D' een term uit $\det(M)$. De formule $\prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{(y_i - x_i)}{2}}$ levert de term $q^{-\frac{x_0}{2}}$. In D' zit één term van de vorm $\frac{1}{[x_0 - y_j][x_0 - y_j - 1]}, 0 \leq j < n$. Dat is de enige term in D' waar een q^{x_0} in voorkomt. Deze term valt weg tegen de overeenkomstige term in $\prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]$. Daardoor blijven er $n - 1$ termen over van de vorm $[x_0 - y_j]$ en $n - 1$ termen van de vorm $[x_0 - y_j - 1]$. In totaal zijn er dan $2n - 2$ termen van de vorm $q^{\frac{x_0}{2}}$ en even zoveel termen van de vorm $q^{-\frac{x_0}{2}}$ in het restant van $\prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]$. Als we de machten bij elkaar optellen is de graad van de leidende term van PD' met D' willekeurig $-\frac{1}{2} + \frac{(2n-2)}{2} = \frac{(2n-3)}{2}$ en de graad van de trailing term is $-\frac{1}{2} - \frac{(2n-2)}{2} = \frac{(1-2n)}{2}$. Omdat dit geldt voor alle D' , heeft PD (de som van alle PD') leidende term met graad op zijn meest $\frac{(2n-3)}{2}$ en trailing term met graad op zijn minst $\frac{(1-2n)}{2}$.

In Q zijn er $n - 1$ termen van de vorm $q^{\frac{x_0}{2}}$ en $q^{-\frac{x_0}{2}}$. De graad van de leidende term in Q is dus $\frac{(n-1)}{2}$ en de graad van de trailing term is $-\frac{(n-1)}{2}$.

Nu geldt volgens Lemma 5.7 dat:

$$gr_{leidend}\left(\frac{P}{Q}D\right) = gr_{leidend}(PD) - gr_{leidend}(Q)$$

en

$$gr_{trailing}\left(\frac{P}{Q}D\right) = gr_{trailing}(PD) - gr_{trailing}(Q)$$

Zo krijgen we dus dat de leidende term van $\frac{P}{Q}D$ op zijn meest graad $\frac{(n-2)}{2}$ heeft en de trailing term op zijn minst graad $-\frac{n}{2}$. Nu volgt dat $q^{\frac{n x_0}{2}} \frac{P}{Q}D$ leidende term op zijn meest $(n - 1)$ heeft en trailing term op zijn minst 0. Daaruit volgt dat $q^{\frac{n x_0}{2}} Z'(n; X, Y)$ een polynoom in q^{x_0} is met graad op zijn meest $n - 1$ (zonder negatieve exponenten).

$Z'(n; X, Y)$ voldoet aan Lemma 9.4 en Lemma 9.5, dus de state sum $Z(n; X, Y) = Z'(n; X, Y)$.

□

11. VERBAND TUSSEN STATE SUM EN HET AANTAL ASM'S

We hebben nu door Stelling 10.2 een uitdrukking gekregen voor de state sum. In deze sectie zullen we een verband leggen tussen de state sum en het aantal Alternating Sign Matrices. Tot nu toe hebben we het gehad over de state sum $Z(n; X, Y)$. Het verband tussen de state sum en het aantal ASM's geldt voor een speciale waarde van de parameters X en Y , namelijk $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ en $Y = (0, 0, \dots, 0)$. We krijgen dan de volgende state sum waarvoor we het verband willen leggen:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n) = Z(n; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0)$$

De gewichten van de verschillende staten van knopen bij de state sum waarde $Z(n; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0)$ zijn respectievelijk $-q^{-\frac{1}{4}}, q^{\frac{1}{4}}, -[\frac{1}{2}], -[\frac{1}{2}], [\frac{1}{2}]$ en $[\frac{1}{2}]$. We nemen aan dat er in elke toestand van de graaf $n + a$ knopen in staat 1, a knopen in staat 2 en $n^2 - n - 2a$ knopen in staat 3, 4, 5 of 6 zijn. We weten uit Lemma 4.8 dat er in elke toestand van de graaf evenveel knopen in staat 3 als in staat 4 zijn, we nemen aan dat dit er in totaal $2b$ zijn. We weten ook dat er in elke toestand van de graaf evenveel knopen in staat 5 en staat 6 zijn, we nemen aan dat dit er in totaal $2c$ zijn. We hebben dus dat $2b + 2c = n^2 - n - 2a$. We zien dat:

$$\begin{aligned} Z_{\frac{1}{2}}(n) &= \sum_{\text{orientaties van de graaf}} \text{product van het gewicht van de knopen} \\ &= \sum_{\text{orientaties}} \left(-q^{-\frac{1}{4}}\right)^{n+a} \left(-q^{\frac{1}{4}}\right)^a \cdot -\left[\frac{1}{2}\right]^b \cdot -\left[\frac{1}{2}\right]^b \left[\frac{1}{2}\right]^c \left[\frac{1}{2}\right]^c \\ &= \sum_{\text{orientaties}} (-1)^n q^{\frac{n}{4}} (-q^{-\frac{1}{4}})^a (-q^{\frac{1}{4}})^a \left[\frac{1}{2}\right]^{n^2-n-2a} \\ &= \sum_{\text{orientaties}} (-1)^n q^{-\frac{n}{4}} \left[\frac{1}{2}\right]^{n^2-n} x^a \end{aligned}$$

Met $x = [\frac{1}{2}]^{-2}$. Volgens Stelling 4.6 is de sommatie over de matrices hetzelfde als de sommatie over de orientaties van de graaf. Dus er geldt dat:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n) = \sum_{\text{matrices}} (-1)^n q^{-\frac{n}{4}} \left[\frac{1}{2}\right]^{n^2-n} x^a$$

We hebben nu een nieuwe uitdrukking voor de state sum. Om het verband tussen deze state sum en het aantal $n \times n$ ASM's uit te kunnen drukken hebben we eerst nog een definitie nodig:

Definitie 11.1. Als x een getal is, dan is de x -optelling $A(n; x)$ de sommatie over het gewicht van alle $n \times n$ ASM's, waar het gewicht van een individuele matrix x^k is, als k het aantal keer is dat een -1 in de matrix staat.

$$A(n; x) = \sum_{\text{ASM's}} x^{\#(-1)}$$

We hebben aangenomen dat $\#(-1) = a$. Er geldt dus dat:

$$A(n; x) = \sum_{\text{matrices}} x^a$$

Als we de uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ en $A(n; x)$ met elkaar combineren, zien we dat:

$$(1) \quad A(n; x) = (-1)^n q^{\frac{n}{4}} \left[\frac{1}{2} \right]^{n-n^2} Z_{\frac{1}{2}}(n)$$

Merk op dat:

$$A(n; 1) = \sum_{\text{matrices}} 1^a = \sum_{\text{matrices}} 1 = \text{aantal } n \times n \text{ ASM's}$$

Als we kunnen zorgen dat $x = 1$, en de state sum $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ kunnen uitrekenen, dan weten we wat $A(n; 1)$ is en hebben we Stelling 3.2 bewezen. We hebben gezien dat $x = [\frac{1}{2}]^{-2}$. Voor x bestaat ook een andere uitdrukking:

Lemma 11.2. $[\frac{1}{2}]^{-2} = [2] + 2$

Bewijs. Uitschrijven geeft:

$$\begin{aligned} [\frac{1}{2}]^{-2} &= \frac{1}{\left(\frac{q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{q^{\frac{1}{4}} + q^{-\frac{1}{4}}} \right)^2} = (q^{\frac{1}{4}} + q^{-\frac{1}{4}})^2 \\ &= q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} + 2 = \frac{q^1 - q^{-1}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} + 2 = [2] + 2 \quad \square \end{aligned}$$

Dus $x = [2] + 2$. Herinner uit Definitie 6.1 dat $q^x = (e^h)^x$. We moeten h zo kiezen, dat $x = 1$. Dit is zo als we $h = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{3}$ met $\sqrt{-1} = i$ nemen.

Lemma 11.3. Als $h = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{3}$, dan is $x = 1$.

Bewijs. Uitschrijven geeft:

$$\begin{aligned} x &= [2] + 2 = q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} + 2 = e^{\frac{4\pi i}{6}} + e^{-\frac{4\pi i}{6}} + 2 \\ &= -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 = 1 \quad \square \end{aligned}$$

We kunnen onder deze keuze voor h vergelijking (1) nog iets versimpelen.

Lemma 11.4. Als $h = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{3}$, dan is $[\frac{1}{2}] = 1$.

Bewijs. Uitschrijven geeft:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \right] &= \frac{q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{q^{\frac{1}{4}} + q^{-\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i)} = 1 \quad \square \end{aligned}$$

Dus als we $h = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{3}$ kiezen, dan is $x = 1$ en vergelijking (1) reduceert tot:

$$(2) \quad A(n; 1) = (-1)^n q^{\frac{n}{4}} Z_{\frac{1}{2}}(n)$$

Om Stelling 3.2 te bewijzen hoeven we alleen nog $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ uit te rekenen. Helaas kan dat nog niet. De termen $[x_i - x_j]$ en $[y_i - y_j]$ zijn altijd nul als de x_i 's gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$ en de y_j 's aan 0. Dan wordt de noemer van $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ gelijk aan 0, en we kunnen niet delen door 0. Hier is gelukkig een oplossing voor. Als we een hele kleine wijziging

aanbrengen in de waarde van de parameters X en Y , is de noemer niet meer gelijk aan 0. Vanaf nu willen we $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ uitrekenen met:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = Z(n; \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon, \dots, \frac{1}{2} + n\epsilon, 0, -\epsilon, -2\epsilon, \dots, (1-n)\epsilon)$$

Als we hier een uitdrukking voor hebben gevonden en de limiet van ϵ naar 0 nemen, kunnen we $A(n; 1)$ uitrekenen.

12. UITREKENEN VAN DE STATE SUM

In deze sectie zullen we de state sum uitrekenen. Hiervoor zullen we eerst de uitdrukking voor $Z(n; X, Y)$ uit Stelling 10.2 herschrijven tot een uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$. Daarna moeten we, om de determinant van de matrix M uit te rekenen, nog twee lemma's over hulpdeterminanten bewijzen. De eerste hulpdeterminant lijkt veel op de Cauchy-determinant. Het bewijs hiervoor gaat op twee manieren. De eerste manier is volgens het artikel van Kuperberg, de tweede manier is een eigen bewijs, met behulp van Dodgson-condensatie. Nadat ook een tweede hulpdeterminant is bewezen, kan $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ eindelijk uitgerekend worden.

12.1. Uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$.

We willen $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = Z(n; \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon, \dots, \frac{1}{2} + n\epsilon, 0, -\epsilon, -2\epsilon, \dots, (1-n)\epsilon)$ uitrekenen. Dit doen we met behulp van de uitdrukking voor $Z(n; X, Y)$ uit Stelling 10.2. Herinner dat:

$$Z(n; X, Y) = \frac{(-1)^n \left(\prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{(y_i - x_i)}{2}} \right) \prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}{\left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} \det M$$

met

$$M_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}$$

Bij de parameterkeuze voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ zien we dat $x_i = \frac{1}{2} + (i+1)\epsilon$ en $y_j = -j\epsilon$. We willen deze parameters invullen in onze uitdrukking voor $Z(n; X, Y)$. Voordat we dit doen geven we nog twee uitdrukkingen die ons bij het invullen van pas zullen komen. Hierbij definiëren we $s = q^\epsilon$.

$$\begin{aligned} [k\epsilon + \frac{1}{2}][k\epsilon - \frac{1}{2}] &= \frac{\left(q^{\frac{k\epsilon + \frac{1}{2}}{2}} - q^{-\frac{k\epsilon + \frac{1}{2}}{2}} \right)}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left(q^{\frac{k\epsilon - \frac{1}{2}}{2}} - q^{-\frac{k\epsilon - \frac{1}{2}}{2}} \right)}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right)^2 \left(q^{k\epsilon} - q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} + q^{-k\epsilon} \right) \\ &= \left(\frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i - (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i)} \right)^2 \left(q^{k\epsilon} - (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i) + q^{-k\epsilon} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}i} \right)^2 (s^k + 1 + s^{-k}) = \frac{(s^k + 1 + s^{-k})}{-3} \end{aligned}$$

De termen $[x_i - x_j]$ en $[y_i - y_j]$ worden van de vorm $[k\epsilon]$ met $k = i - j$. We zien dat:

$$[k\epsilon] = \frac{\left(q^{\frac{k\epsilon}{2}} - q^{-\frac{k\epsilon}{2}} \right)}{\sqrt{3}i} = \frac{s^{\frac{k}{2}} - s^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{-3}}$$

Omdat de term $[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]$ van de vorm $[(i+j+1)\epsilon + \frac{1}{2}][(i+j+1)\epsilon - \frac{1}{2}]$ wordt, zien we dat voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ geldt dat:

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]} \\ &= \frac{1}{[(i+j+1)\epsilon + \frac{1}{2}][(i+j+1)\epsilon - \frac{1}{2}]} \\ &= \frac{-3}{s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)}} \end{aligned}$$

Als we bij de term $\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]$ indexen i en j overal verwisselen krijgen we dat:

$$\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] = \prod_{0 \leq j < i < n} [y_j - y_i]$$

Omdat de termen $[x_i - x_j]$ en $[y_j - y_i]$ respectievelijk van de vorm $[(i-j)\epsilon]$ en $[(-j-i)\epsilon] = [(i-j)\epsilon]$ worden, kunnen we de noemer van $Z(n; X, Y)$ herschrijven tot:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right) &= \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [y_j - y_i] \right) \\ &= \prod_{0 \leq j < i < n} [(i-j)\epsilon]^2 = \prod_{0 \leq j < i < n} \left(\frac{s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}}}{\sqrt{-3}} \right)^2 \\ &= \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{\left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2}{-3} \end{aligned}$$

Er zijn hier $\binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ termen -3 . De term $\prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{y_i - x_i}{2}}$ reduceert tot:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{y_i - x_i}{2}} &= \prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{-i\epsilon - (i+1)\epsilon - \frac{1}{2}}{2}} = \prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{-2i\epsilon - \epsilon - \frac{1}{2}}{2}} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} s^{-i} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{-\frac{1}{4}} = s^{-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot s^{-\frac{n}{2}} \cdot q^{-\frac{n}{4}} = s^{-n^2} \cdot q^{-\frac{n}{4}} \end{aligned}$$

Als we alle nieuwe termen substitueren in $Z(n; X, Y)$ krijgen we:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = \frac{(-1)^n s^{-\frac{n^2}{2}} q^{-\frac{n}{4}} \prod_{0 \leq i, j < n} \left(\frac{s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)}}{-3} \right)}{\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{\left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2}{-3}} \det M$$

met

$$M_{i,j} = \frac{-3}{s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)}}$$

We kijken nu nog wat er gebeurt met de termen -3 en -1 .

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{-3} \right)^{\frac{n^2}{2}}}{\left(\frac{1}{-3} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}}} &= (-1)^n \left(\frac{1}{-3} \right)^{n^2} \left(\frac{1}{-3} \right)^{\frac{-n^2+n}{2}} = (-1)^n \left(\frac{1}{-3} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= (-1)^n (-3)^{-\frac{n(n+1)}{2}} = (-1)^{n-\frac{n(n+1)}{2}} 3^{-\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= (-1)^{\frac{-n(n-1)}{2}} 3^{-\frac{n(n+1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 3^{-\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

Met deze informatie hebben we een definitieve term voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = \frac{q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 3^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq i, j < n} (s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)})}{\prod_{0 \leq j < i < n} \left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2} \det M$$

met

$$M_{i,j} = \frac{-3}{s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)}}$$

12.2. Cauchy-determinant. Om de state sum $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ uit te kunnen rekenen, moeten we ook de determinant van de matrix M kunnen uitrekenen. Het eerste lemma dat we moeten bewijzen om deze determinant te kunnen berekenen is het lemma van Cauchy. Eerst voeren we nog wat nieuwe notatie in:

Definitie 12.1.

$$[x]_t = \frac{t^{\frac{x}{2}} - t^{-\frac{x}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}$$

Lemma 12.2. $[x]_t$ zijn half-integral Laurentpolynomen in t^x met halftallige exponenten.

Bewijs.

$$[x]_t = \frac{t^{\frac{x}{2}} - t^{-\frac{x}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(t^x)^{-\frac{1}{2}}(t^x - 1)}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}$$

Volgens Lemma 5.3 is dit een half-integral Laurentpolynoom in t^x met $n = 1$ en $p(t^x) = \frac{(t^x - 1)}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}$. Omdat $n = 1$, zijn de exponenten halftallig. $\square$

Merk op dat $[x]_q = [x]$. Dat betekent dat alle lemma's die voor $[x]$ zijn bewezen, ook gelden voor $[x]_q$ en dus ook voor $[x]_t$ (lees in de bewijzen t in plaats van q).

Het volgende lemma kan op twee manieren bewezen worden. De eerste manier is het bewijs van Kuperberg, de tweede manier is een bewijs dat gebruik maakt van Dodgson condensatie.

Lemma 12.3 (Cauchy). *Laat $X = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ en $Y = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ variabelen en laat:*

$$T(n; X, Y)_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j]_t}, 0 \leq i, j < n$$

Dan geldt:

$$\det(T(n, k; t)) = \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t\right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t\right)}{\prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j]_t}$$

12.3. Eerste bewijs.

Bewijs. We noemen $D = \det T(n, k; t)$. Noem $P = \prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j]_t$ en $Q = \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t\right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t\right)$. Dan staat er $D = \frac{Q}{P}$. Merk op dat P een half-integral Laurentpolynoom is. Elke afzonderlijke term van P is een half-integral Laurentpolynoom met halftallige exponenten. Er zijn n^2 termen in P . Als er een even aantal half-integral Laurentpolynomen wordt vermenigvuldigd, levert dat een half-integral Laurentpolynoom op met geheeltallige exponenten (zie de tekst onder Lemma 5.5).

We berekenen D weer op de manier zoals in het bewijs van Stelling 10.2. We hebben dus $D = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) \prod_{i=1}^n T(n; X, Y)_{i, \sigma(i)}$. Laat D' een term van D zijn. Omdat alle termen uit de noemer van D' ook in de teller van P staan, vallen deze tegen elkaar weg. PD' blijft een half-integral Laurentpolynoom. PD' heeft $n^2 - n$ termen. Als n even is, dan is elke PD' een half-integral Laurentpolynoom met geheeltallige exponenten. Als n oneven is, dan is elke PD' een half-integral Laurentpolynoom met halftallige exponenten. Omdat dit voor alle termen PD' geldt, en de som van half-integral Laurentpolynomen met geheeltallige of halftallige exponenten weer

een half-integral Laurentpolynoom met geheel-tallige of half-tallige exponenten is (Lemma 5.4), is PD een half-integral Laurentpolynoom. We weten dat:

$$T(n; X, Y)_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j]_t} = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{t^{\frac{x_i - y_j}{2}} - t^{-\frac{x_i - y_j}{2}}} = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{(t^{x_i})^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{y_j}{2}} - (t^{x_i})^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{y_j}{2}}}$$

Als $t^{x_i} = t^{x_j}$, $0 \leq j < i < n$, dan zijn rij i en rij j van de matrix T exact hetzelfde. Dit betekent dat de determinant dan 0 is. $t^{x_i} = t^{x_j}$ is dus een nulpunt van $\det(T)$, dus ook een nulpunt van PD . Dus PD is deelbaar door $t^{x_i} - t^{x_j}$. Merk op dat:

$$t^{x_i} - t^{x_j} = t^{\frac{x_i + x_j}{2}} \left(t^{\frac{x_i - x_j}{2}} - t^{-\frac{x_i - x_j}{2}} \right) = t^{\frac{x_i + x_j}{2}} \cdot [x_i - x_j]_t \cdot (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$$

Dus PD is ook deelbaar door $[x_i - x_j]_t$, $0 \leq i < j < n$, dus het is ook deelbaar door $\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t$. Met het inzicht dat

$$T(n; X, Y)_{i,j} = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{(t^{y_j})^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{x_i}{2}} - (t^{y_j})^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{x_i}{2}}}$$

Volgt dat $t^{y_i} = t^{y_j}$, $0 \leq i < j < n$ ook een nulpunt van $\det(T)$ is. Met een gelijkaardig argument geldt dus dat PD ook deelbaar is door $\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t$. Hieruit volgt dat Q een deler is van PD , dus $\frac{P}{Q}D$ is een half-integral Laurentpolynoom. In alle variabelen t^{x_i} en t^{y_j} is het een half-integral Laurentpolynoom.

Nu willen de graad van het half-integral Laurentpolynoom in t^{x_i} en t^{y_j} berekenen. Eerst onderzoeken we de graad van de leidende term van PD' , gezien als half-integral Laurentpolynoom in t^{x_i} , met wederom D' een term uit $\det(T)$. Pak i vast. In D' zit één term van de vorm $\frac{1}{[x_i - y_j]_t}$, $0 \leq j < n$. Dat is de enige term in D' waar een t^{x_i} in voorkomt. Deze term valt weg tegen de overeenkomstige term in $\prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j]_t$. Daardoor blijven er $n - 1$ termen over van de vorm $[x_i - y_j]_t$. In totaal zijn er dan $n - 1$ termen van de vorm $t^{\frac{x_i}{2}}$ en even zoveel termen van de vorm $t^{-\frac{x_i}{2}}$ in PD' . De graad van de leidende term van PD' met D' willekeurig is dus $\frac{n-1}{2}$ en de graad van de trailing term is ook $\frac{n-1}{2}$. Omdat dit geldt voor alle D' heeft PD (de som van alle PD') leidende term met graad op zijn meest $\frac{n-1}{2}$ en trailing term met graad op zijn minst $\frac{n-1}{2}$. In Q zijn er $n - 1$ termen van de vorm $t^{\frac{x_i}{2}}$ en $t^{-\frac{x_i}{2}}$. De graad van de leidende term in Q is dus $\frac{n-1}{2}$ en de graad van de trailing term is $-\frac{n-1}{2}$.

Nu geldt volgens Lemma 5.7 dat:

$$gr_{leidend}\left(\frac{P}{Q}D\right) = gr_{leidend}(PD) - gr_{leidend}(Q)$$

en

$$gr_{trailing}\left(\frac{P}{Q}D\right) = gr_{trailing}(PD) - gr_{trailing}(Q)$$

We krijgen nu dat de graad van de leidende term op zijn meest 0 is, en de graad van de trailing term op zijn minst 0. Dat betekent dat $\frac{P}{Q}D$ een polynoom in t^{x_i} van graad 0 is. Als we in het bovenstaande verhaal x_i vervangen door y_j , krijgen we dat $\frac{P}{Q}D$ een polynoom in t^{y_j} van graad 0 is. $\frac{P}{Q}D$ is dus een polynoom van graad 0 in alle variabelen. Dat betekent dat $\frac{P}{Q}D = c$, met $c \in \mathbb{R}$.

Omdat $\frac{P}{Q}D$ constant is voor alle $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, is het ook constant bij de specialisatie $x_i = y_i, \forall i$. Bekijk de term $D'' = \frac{1}{[x_0 - y_0]_t [x_1 - y_1]_t \dots [x_{n-1} - y_{n-1}]_t}$ van D . Dit is de enige term zodat PD' geen termen meer heeft van de vorm

$[x_i - y_i]$, met D' een term van D (die zijn dan allemaal tegen elkaar weggevallen). Als $x_i = y_i, \forall i$, dan is $PD' = 0, \forall D' \neq D''$. De term PD'' is bij deze specialisatie dus hetzelfde als PD en reduceert tot het volgende:

$$PD'' = PD = \prod_{0 \leq i, j < n, i \neq j} [x_i - y_j]_t = \prod_{0 \leq i, j < n, i \neq j} [x_i - x_j]_t$$

Als $x_i = y_i, \forall i$, reduceert Q tot het volgende:

$$\begin{aligned} Q &= \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t \right) \\ &= \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [x_i - x_j]_t \right) \\ &= \prod_{0 \leq i, j < n, i \neq j} [x_i - x_j]_t \end{aligned}$$

We zien dus dat onder de gekozen specialisatie, $x_i = y_i, \forall i$, geldt dat als $D' \neq D''$, dan $PD' = 0$. De enige term die overblijft is $\frac{P}{Q}D''$, maar die term is gelijk aan 1. We zien dus dat $\frac{P}{Q}D = 1$ onder deze specialisatie. Maar omdat $\frac{P}{Q}D$ constant is, geldt het dus voor alle waarden van x_i 's en y_j 's. Uit het feit dat $\frac{P}{Q}D = 1$, volgt dat $D = \frac{Q}{P}$ en dat is precies wat we wilden bewijzen. □

12.4. Bewijs met Dodgson condensatie.

Bewijs. We willen bewijzen dat als $T(n; X, Y)_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j]_t}, 0 \leq i, j < n$, dan:

$$\det(T(n; k, t)) = \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t \right)}{\prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j]_t}$$

Dit bewijs gaat met inductie. Bovenstaande formule is onze inductieveronderstelling. Dit bewijs is een speciaal geval van inductie. Normaal wordt aangenomen dat de inductieveronderstelling geldt voor een zekere n , en dan wordt bewezen dat het geldt voor $n + 1$. Nu is er een extra eis: er wordt aangenomen dat de inductieveronderstelling geldt voor $n - 1$ en n , daarna bewijzen we dat het geldt voor $n + 1$.

Eerst controleren we het voor $n = 0$: Merk op dat als we determinantformule van Leibniz gebruiken, dat $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$. Als A een 0×0 -matrix is, is de determinant gelijk aan het lege product, dus de determinant is dan 1. We zien dus dat:

$$\det(T(0; k, t)) = \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i < 0} [x_i - x_j]_t \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < 0} [y_i - y_j]_t \right)}{\prod_{0 \leq i, j < 0} [x_i - y_j]_t} = 1$$

Voor $n = 1$ merken we op dat $T(1; k, t) = \left(\frac{1}{[x_0 - y_0]} \right)$. De determinant hiervan is dus $\frac{1}{[x_0 - y_0]}$. Ook uit de formule voor de determinant volgt dit. Immers:

$$\det(T(1; k, t)) = \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i < 1} [x_i - x_j]_t \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < 1} [y_i - y_j]_t \right)}{\prod_{0 \leq i, j < 1} [x_i - y_j]_t} = \frac{1}{[x_0 - y_0]}$$

Voor $n = 2$ merken we op dat:

$$T(2; k, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{[x_0 - y_0]_t}, \frac{1}{[x_0 - y_1]_t} \\ \frac{1}{[x_1 - y_0]_t}, \frac{1}{[x_1 - y_1]_t} \end{pmatrix}$$

We berekenen de determinant van deze matrix via het gegeven dat $\det \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = ad - bc$. We zien dat:

$$\begin{aligned} \det(T(2; k, t)) &= \frac{1}{[x_0 - y_0]_t} \frac{1}{[x_1 - y_1]_t} - \frac{1}{[x_0 - y_1]_t} \frac{1}{[x_1 - y_0]_t} \\ &= \frac{[x_1 - y_0]_t [x_0 - y_1]_t - [x_0 - y_0]_t [x_1 - y_1]_t}{[x_0 - y_0]_t [x_0 - y_1]_t [x_1 - y_0]_t [x_1 - y_1]_t} \end{aligned}$$

Lemma 6.5 geeft:

$$\begin{aligned} &= \frac{[x_1 - x_0]_t [y_0 - y_1]_t}{[x_0 - y_0]_t [x_0 - y_1]_t [x_1 - y_0]_t [x_1 - y_1]_t} \\ &= \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i < 2} [x_i - x_j]_t \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < 2} [y_i - y_j]_t \right)}{\prod_{0 \leq i, j < 2} [x_i - y_j]_t} \end{aligned}$$

De formule klopt dus voor $n = 0, n = 1$ en $n = 2$. Nu nemen we aan dat de formule geldt voor een zekere $n - 1$ en n . We willen bewijzen dat het ook geldt voor $n + 1$.

Om dit te bewijzen maken we gebruik van de *Desnanot-Jacobi identiteit* [9]. Laat voor alle $0 \leq i, j < n$ en een $n \times n$ -matrix M gelden dat M_i^j de matrix M is zonder de i^e rij en de j^e kolom. Evenzo geldt voor alle $0 \leq i, j, p, q < n$ dat $M_{i,j}^{p,q}$ de matrix M is zonder de i^e en j^e rij, en zonder de p^e en q^e kolom. De identiteit is dan de volgende:

$$\det M = \frac{\det(M_0^0) \det(M_{n-1}^{n-1}) - \det(M_0^{n-1}) \det(M_{n-1}^0)}{\det(M_{0,n-1}^{0,n-1})}$$

Noem $T(n+1; k, t) = T$. T is dus een $(n+1) \times (n+1)$ -matrix. Voor $T(n+1; k, t)$ is de formule dus:

$$\det T = \frac{\det(T_0^0) \det(T_n^n) - \det(T_0^n) \det(T_n^0)}{\det(T_{0,n}^{0,n})}$$

Behalve $T(n+1; k, t)$ zijn alle matrices in de bovenstaande uitdrukking $n \times n$ of $(n-1) \times (n-1)$ -matrices. Daar weten we dus de waarde van de determinant van, door de inductieveronderstelling. We berekenen alle termen afzonderlijk. Noem

$$\begin{aligned} a &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} [x_i - x_j]_t, & b &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} [y_i - y_j]_t \\ c &= \prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t, & d &= \prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t \\ e &= \prod_{1 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t, & f &= \prod_{1 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t \end{aligned}$$

Dan geldt dat:

$$\begin{aligned}\det(T_0^0) &= \frac{ab}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} [x_i - y_j]_t} \\ \det(T_n^n) &= \frac{cd}{\prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j]_t} \\ \det(T_0^n) &= \frac{ad}{\prod_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j < n} [x_i - y_j]_t} \\ \det(T_n^0) &= \frac{bc}{\prod_{0 \leq i < n, 1 \leq j \leq n} [x_i - y_j]_t} \\ \det(T_{0,n}^{0,n}) &= \frac{ef}{\prod_{1 \leq i, j < n} [x_i - y_j]_t}\end{aligned}$$

Dit combineren geeft dat:

$$\begin{aligned}\det(T_0^0) \det(T_n^n) &= \frac{abcd}{\left(\prod_{0 \leq i, j \leq n} [x_i - y_j] \prod_{1 \leq i, j < n} [x_i - y_j]\right) / ([x_n - y_0]_t [x_0 - y_n]_t)} \\ \det(T_0^n) \det(T_n^0) &= \frac{abcd}{\left(\prod_{0 \leq i, j \leq n} [x_i - y_j] \prod_{1 \leq i, j < n} [x_i - y_j]\right) / ([x_0 - y_0]_t [x_n - y_n]_t)}\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$\det(T_0^0) \det(T_n^n) - \det(T_0^n) \det(T_n^0) = \frac{abcd([x_n - y_0]_t [x_0 - y_n]_t - [x_0 - y_0]_t [x_n - y_n]_t)}{\prod_{0 \leq i, j \leq n} [x_i - y_j]_t \prod_{1 \leq i, j < n} [x_i - y_j]_t}$$

Er geldt dat:

$$\begin{aligned}\frac{ac}{e} &= \frac{\left(\prod_{1 \leq j < i \leq n} [x_i - x_j]_t \prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t\right)}{\left(\prod_{1 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t\right)} = \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i \leq n} [x_i - x_j]_t\right)}{[x_n - x_0]_t} \\ \frac{bd}{f} &= \frac{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} [y_i - y_j]_t \prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t\right)}{\left(\prod_{1 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t\right)} = \frac{\left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} [y_i - y_j]_t\right)}{[y_0 - y_n]_t}\end{aligned}$$

Met deze gegevens zien we dat:

$$\begin{aligned}& \frac{\det(T_0^0) \det(T_n^n) - \det(T_0^n) \det(T_n^0)}{\det(T_{0,n}^{0,n})} \\ &= \frac{\frac{\left(\prod_{0 \leq j < i \leq n} [x_i - x_j]_t\right) \left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} [y_i - y_j]_t\right)}{[x_n - x_0]_t [y_0 - y_n]_t} ([x_n - y_0]_t [x_0 - y_n]_t - [x_0 - y_0]_t [x_n - y_n]_t)}{\prod_{0 \leq i, j \leq n} [x_i - y_j]_t}\end{aligned}$$

Lemma 6.5 geeft:

$$\begin{aligned}& \frac{\frac{\left(\prod_{0 \leq j < i \leq n} [x_i - x_j]_t\right) \left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} [y_i - y_j]_t\right)}{[x_n - x_0]_t [y_0 - y_n]_t} ([x_n - x_0]_t [y_0 - y_n]_t)}{\prod_{0 \leq i, j \leq n} [x_i - y_j]_t} \\ &= \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i \leq n} [x_i - x_j]_t\right) \left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} [y_i - y_j]_t\right)}{\prod_{0 \leq i, j \leq n} [x_i - y_j]_t}\end{aligned}$$

Zo zien we uiteindelijk dat:

$$\begin{aligned} \det T(n+1; k, t) &= \frac{\det (T_0^0) \det (T_n^n) - \det (T_0^n) \det (T_n^0)}{\det (T_{0,n}^{0,n})} \\ &= \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i \leq n} [x_i - x_j]_t \right) \left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} [y_i - y_j]_t \right)}{\prod_{0 \leq i, j \leq n} [x_i - y_j]_t} \end{aligned}$$

We hebben dus bewezen dat als de inductieveronderstelling klopt voor zekere $n-1$ en n , dat het dan ook klopt voor $n+1$. Daarmee is het lemma bewezen.

□

12.5. Hulpdeterminant. Nu we de Cauchy-determinant uit Lemma 12.3 kunnen uitrekenen, gaan we nog één hulpdeterminant berekenen. Als we deze determinant kennen, kunnen we eindelijk de determinant van matrix M uitrekenen die in de state sum $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ staat. Om deze laatste hulpdeterminant te kunnen berekenen hebben we nog één hulplemma nodig.

Lemma 12.4. *Laat $T(n) = T(n; 1, 2, \dots, n, 0, -1, -2, \dots, 1 - n)$. Dan is:*

$$T(n)_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j]_t} = \frac{1}{[i + j + 1]_t}$$

en

$$\det T(n) = \frac{\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t^2}{\prod_{0 \leq i, j < n} [i + j + 1]_t}$$

Bewijs. Uit Lemma 12.3 volgt dat:

$$\begin{aligned} \det T(n) &= \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [j - i]_t \right)}{\prod_{0 \leq i, j < n} [i + j + 1]_t} \\ &= \frac{\left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t \right) \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t \right)}{\prod_{0 \leq i, j < n} [i + j + 1]_t} \\ &= \frac{\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t^2}{\prod_{0 \leq i, j < n} [i + j + 1]_t} \end{aligned}$$

□

Nu we dit weten kunnen de volgende hulpdeterminant uitrekenen:

Lemma 12.5. *Laat S de matrix met:*

$$S(n; s, t)_{i,j} = \frac{s^{\frac{(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{(i+j+1)}{2}}}{t^{\frac{(i+j+1)}{2}} - t^{-\frac{(i+j+1)}{2}}}, 0 \leq i, j < n$$

Dan geldt dat:

$$\det (S(n; s, t)) = \frac{1}{(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^n} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t^2 \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{(j-i)}{2}}}{[i + j + 1]_t} \right)$$

Bewijs. We noemen de uitdrukking voor de determinant die we willen bewijzen $\det' S(n; s, t)$. De opbouw van dit bewijs gaat als volgt: eerst tonen we aan dat $\det(S(n; s, t))$ en $\det'(S(n; s, t))$, beide vermenigvuldigd met $s^{\frac{n^2}{2}}$, polynomen in s zijn met graad n^2 . Daarna laten we zien dat $\det(S(n; s, t))$ en $\det'(S(n; s, t))$ door dezelfde factoren deelbaar zijn. Als we dan weten dat het twee polynomen van dezelfde graad zijn, die deelbaar zijn door dezelfde factoren, weten we dat $\det(S(n; s, t))$ en $\det'(S(n; s, t))$ met een multiplicatieve constante van elkaar verschillen of hetzelfde zijn. Door te laten zien dat de leidende term van $\det(S(n; s, t))$ en $\det'(S(n; s, t))$ aan elkaar gelijk zijn, hebben we het lemma bewezen.

De grootheid $s^{\frac{n^2}{2}} \det(S(n; s, t))$ heeft graad n^2 als een polynoom in s . We berekenen $\det(S(n; s, t))$ via de formule van Leibniz:

$$\det (S(n; s, t)) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$$

zoals in het bewijs van Stelling 10.2. We zien dat elke term uit deze sommatie het product is van n elementen uit de matrix, één uit elke rij en één uit elke kolom. De matrix $S(n; s, t)$ is als volgt opgebouwd:

$$\begin{pmatrix} \frac{s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} & \frac{s^{\frac{2}{2}} - s^{-\frac{2}{2}}}{t^{\frac{2}{2}} - t^{-\frac{2}{2}}} & \frac{s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}} - t^{-\frac{3}{2}}} & \cdots & \frac{s^{\frac{n}{2}} - s^{-\frac{n}{2}}}{t^{\frac{n}{2}} - t^{-\frac{n}{2}}} \\ \frac{s^{\frac{2}{2}} - s^{-\frac{2}{2}}}{t^{\frac{2}{2}} - t^{-\frac{2}{2}}} & \frac{s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}} - t^{-\frac{3}{2}}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{s^{\frac{(2n-2)}{2}} - s^{-\frac{(2n-2)}{2}}}{t^{\frac{(2n-2)}{2}} - t^{-\frac{(2n-2)}{2}}} \\ \frac{s^{\frac{n}{2}} - s^{-\frac{n}{2}}}{t^{\frac{n}{2}} - t^{-\frac{n}{2}}} & \cdots & \cdots & \frac{s^{\frac{(2n-2)}{2}} - s^{-\frac{(2n-2)}{2}}}{t^{\frac{(2n-2)}{2}} - t^{-\frac{(2n-2)}{2}}} & \frac{s^{\frac{(2n-1)}{2}} - s^{-\frac{(2n-1)}{2}}}{t^{\frac{(2n-1)}{2}} - t^{-\frac{(2n-1)}{2}}} \end{pmatrix}$$

Elke term uit de sommatie heeft, na uitvermenigvuldigen, leidende term $c \cdot s^{\frac{n^2}{2}}$ en trailing term $d \cdot s^{-\frac{n^2}{2}}$. Daarom zien we dat de graad van de leidende term in $s^{\frac{n^2}{2}} \det(S(n; s, t))$ gelijk is aan n^2 en de graad van de trailing term aan 0. Dus $s^{\frac{n^2}{2}} \det(S(n; s, t))$ is een polynoom in s met graad n^2 .

Ook willen we bewijzen dat $s^{\frac{n^2}{2}} \det'(S(n; s, t))$ graad n^2 heeft als een polynoom in s . Merk op dat $\det'(S(n; s, t))$ een half-integral Laurentpolynoom met halftallige exponenten is in s . Als we het product $\left(\prod_{0 \leq i, j < n} s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{(j-i)}{2}}\right)$ uitwerken, zien we dat de graad van de leidende term $\frac{n^2}{2}$ is. De graad van de trailing term is $-\frac{n^2}{2}$. Als we $\det'(S(n; s, t))$ vermenigvuldigen met $s^{\frac{n^2}{2}}$, dan wordt de graad van de leidende term n^2 en de graad van de trailing term wordt 0. Daaruit volgt dat $s^{\frac{n^2}{2}} \det'(S(n; s, t))$ een polynoom van graad n^2 in s is. We hebben nu bewezen dat $s^{\frac{n^2}{2}} \det(S(n; s, t))$ en $s^{\frac{n^2}{2}} \det'(S(n; s, t))$ polynomen in s zijn van graad n^2 .

We willen nu de factoren bepalen waardoor $\det(S(n; s, t))$ deelbaar is. Eerst herschrijven we de elementen van de matrix. We zien voor $0 \leq k < n$ dat:

$$S(n; t^k, t)_{i,j} = \frac{t^{\frac{k(i+j+1)}{2}} - t^{-\frac{k(i+j+1)}{2}}}{t^{\frac{(i+j+1)}{2}} - t^{-\frac{(i+j+1)}{2}}} = [k]_{t^{i+j+1}}$$

Merk op dat de volgende identiteit geldt:

$$\begin{aligned} [x]_t &= \frac{t^{\frac{x}{2}} - t^{-\frac{x}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} = \frac{t^{-\frac{x}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{t^x - 1}{t - 1} \\ &= t^{-\frac{(x-1)}{2}} \sum_{n=0}^{x-1} t^n = \sum_{n=0}^{x-1} t^{n - \frac{(x-1)}{2}} \end{aligned}$$

Bij de overgang van de tweede naar de derde stap wordt gebruik gemaakt van de partiële som van de meetkundige reeks. Dit geldt voor alle x , dus ook voor $x = k$ en voor alle t , dus ook voor $t = t^{i+j+1}$. Zo zien we dat:

$$[k]_{t^{i+j+1}} = \sum_{l=0}^{k-1} A(t^{l - \frac{(k-1)}{2}})_{i,j}$$

Met $A(z)_{i,j} = z^{i+j+1}$. Deze matrix A heeft rang 1 voor alle z , omdat alle kolommen een veelvoud z van elkaar verschillen. We zien dus dat de matrix $S(n; t^k, t)$ de som is van k matrices van de vorm $A(z)$. Een stelling uit de lineaire algebra zegt ons dat $\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$. Hieruit volgt direct dat $\text{rang}(S(n; t^k, t)) \leq k \cdot \text{rang}(A(z)) = k$.

Als een $n \times n$ -matrix rang $\leq n$ heeft, is de determinant 0. Hieruit volgt dat $s = t^k$ een nulpunt van de determinant is. We weten dat als $\text{rang}(S) \leq k$, dat de dimensie van de kern van $S \geq n - k$. De kern van S is de verzameling vectoren, die de matrix afbeeldt op de nulvector. We zien dus dat $\text{Ker}(S) = \{x : Sx = 0\}$. Het is dus de eigenruimte behorend bij $\lambda = 0$. De geometrische multipliciteit van een eigenwaarde is de dimensie van de eigenruimte behorend bij die eigenwaarde. De geometrische multipliciteit van $\lambda = s - t^k = 0$ is dus groter of gelijk aan $n - k$. We weten ook dat de geometrische multipliciteit kleiner of gelijk is aan de algebraïsche multipliciteit, het aantal keren dat de eigenwaarde een wortel van het karakteristiek polynoom is. We zien dus dat de algebraïsche multipliciteit van $\lambda = 0$ groter of gelijk is aan $n - k$. We weten dat:

$$P(\lambda) = \det(S - \lambda I)$$

Als $\lambda = s - t^k = 0$, zien we dat $\det(S - \lambda I) = \det(S(n; s, t))$ in ieder geval $n - k$ keer $(s - t^k)$ als wortel heeft. Dus $\det(S(n; s, t))$ is deelbaar door $(s - t^k)^{n-k}$ voor alle $0 \leq k < n$.

Evenzo zien we dat:

$$\begin{aligned} S(n; t^{-k}, t)_{i,j} &= [-k]_{t^{i+j+1}} = -[k]_{t^{i+j+1}} \\ &= -\sum_{l=0}^{k-1} A(t^{l-\frac{(k-1)}{2}})_{i,j} = \sum_{l=0}^{k-1} A(t^{l-\frac{(k-1)}{2}})_{i,j} \end{aligned}$$

Met $A(z)_{i,j} = -z^{i+j+1}$. Ook deze matrix heeft rang 1 voor alle z . Dus de matrix $S(n; t^{-k}, t)$ is de som van k matrices van de vorm $A(z)$. Door in het bovenstaande bewijs t^k te vervangen door t^{-k} , zien we dat $\det(S(n; t^k, t))$ ook deelbaar is door $(s - t^{-k})^{n-k}$ voor alle $1 \leq k < n$. Het werkt ook voor $k = 0$, maar dat geval hebben we al bewezen, omdat $(s - t^0) = (s - t^{-0})$. We zien dus dat $\det(S(n; s, t))$ deelbaar is door n^2 termen, namelijk $(s - t^k)^{n-k}$ voor alle $0 \leq k < n$ en $(s - t^{-k})^{n-k}$ voor alle $1 \leq k < n$.

Nu willen we bewijzen dat $\det'(S(n; s, t))$ dezelfde deelbaarheden heeft. Daartoe bekijken we de enige term in $\det'(S(n; s, t))$ waar s in voorkomt:

$$\begin{aligned} &\prod_{0 \leq i, j < n} s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{(j-i)}{2}} \\ &= \prod_{0 \leq i, j < n} s^{-\frac{1}{2}} (s \cdot t^{\frac{(i-j)}{2}} - t^{\frac{(j-i)}{2}}) \\ &= \prod_{0 \leq i, j < n} s^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{(i-j)}{2}} (s - t^{j-i}) \end{aligned}$$

Alle termen $(s - t^{j-i})$ zijn precies de termen $(s - t^k)$ en $(s - t^{-k})$ waar de determinant gedeeld kan worden. Merk op dat dit n^2 termen zijn. We zien dus dat $s^{\frac{n^2}{2}} \det(S(n; s, t))$ en $s^{\frac{n^2}{2}} \det'(S(n; s, t))$ beide een polynoom van graad n^2 zijn, en dezelfde deelbaarheden hebben. De deelbaarheden zijn zelf ook een polynoom van graad n^2 . Daaruit volgt dat $\det(S(n; s, t))$ en $\det'(S(n; s, t))$ op een multiplicatieve factor na aan elkaar gelijk zijn.

We berekenen voor $\det(S(n; s, t))$ en $\det'(S(n; s, t))$ de leidende term. Als deze aan elkaar gelijk zijn, zien we dat $\det(S(n; s, t)) = \det'(S(n; s, t))$. We berekenen eerst de leidende term van $\det(S(n; s, t))$. Hiervoor berekenen we de determinant van $S(n; s, t)$ opnieuw, maar nu laten we de negatieve machten van s weg, deze hebben geen invloed op de leidende term.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{s^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} & \frac{s^{\frac{2}{2}}}{t^{\frac{2}{2}} - t^{-\frac{2}{2}}} & \frac{s^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}} - t^{-\frac{3}{2}}} & \cdots & \frac{s^{\frac{n}{2}}}{t^{\frac{n}{2}} - t^{-\frac{n}{2}}} \\ \frac{s^{\frac{2}{2}}}{t^{\frac{2}{2}} - t^{-\frac{2}{2}}} & \frac{s^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}} - t^{-\frac{3}{2}}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{s^{\frac{(2n-2)}{2}}}{t^{\frac{(2n-2)}{2}} - t^{-\frac{(2n-2)}{2}}} \\ \frac{s^{\frac{n}{2}}}{t^{\frac{n}{2}} - t^{-\frac{n}{2}}} & \cdots & \cdots & \frac{s^{\frac{(2n-2)}{2}}}{t^{\frac{(2n-2)}{2}} - t^{-\frac{(2n-2)}{2}}} & \frac{s^{\frac{(2n-1)}{2}}}{t^{\frac{(2n-1)}{2}} - t^{-\frac{(2n-1)}{2}}} \end{pmatrix}$$

Nu halen we uit elke rij i de gemeenschappelijke factor $s^{\frac{i}{2}}$ weg:

$$= s^{\frac{n(n+1)}{4}} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} & \frac{s^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{2}{2}} - t^{-\frac{2}{2}}} & \frac{s^{\frac{2}{2}}}{t^{\frac{3}{2}} - t^{-\frac{3}{2}}} & \cdots & \frac{s^{\frac{(n-1)}{2}}}{t^{\frac{n}{2}} - t^{-\frac{n}{2}}} \\ \frac{1}{t^{\frac{2}{2}} - t^{-\frac{2}{2}}} & \frac{s^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{3}{2}} - t^{-\frac{3}{2}}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{s^{\frac{(n-1)}{2}}}{t^{\frac{(2n-2)}{2}} - t^{-\frac{(2n-2)}{2}}} \\ \frac{1}{t^{\frac{n}{2}} - t^{-\frac{n}{2}}} & \cdots & \cdots & \frac{s^{\frac{(n-2)}{2}}}{t^{\frac{(2n-2)}{2}} - t^{-\frac{(n-1)}{2}}} & \frac{s^{\frac{(n-1)}{2}}}{t^{\frac{(2n-1)}{2}} - t^{-\frac{(2n-1)}{2}}} \end{pmatrix}$$

Nu halen we uit elke kolom j de gemeenschappelijke factor $s^{\frac{(j-1)}{2}}$ weg:

$$= s^{\frac{n(n+1)}{4}} s^{\frac{n(n-1)}{4}} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} & \frac{1}{t^{\frac{2}{2}} - t^{-\frac{2}{2}}} & \frac{1}{t^{\frac{3}{2}} - t^{-\frac{3}{2}}} & \cdots & \frac{1}{t^{\frac{n}{2}} - t^{-\frac{n}{2}}} \\ \frac{1}{t^{\frac{2}{2}} - t^{-\frac{2}{2}}} & \frac{1}{t^{\frac{3}{2}} - t^{-\frac{3}{2}}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{t^{\frac{(2n-2)}{2}} - t^{-\frac{(2n-2)}{2}}} \\ \frac{1}{t^{\frac{n}{2}} - t^{-\frac{n}{2}}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{t^{\frac{(2n-2)}{2}} - t^{-\frac{(n-1)}{2}}} & \frac{1}{t^{\frac{(2n-1)}{2}} - t^{-\frac{(2n-1)}{2}}} \end{pmatrix}$$

$$= s^{\frac{n^2}{2}} \det \left(\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} \right) T(n) \right)$$

Met $T(n)$ gedefinieerd zoals in Lemma 12.4. We zien dus dat $\det \left(\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} \right) T(n) \right)$ de multiplicatieve factor van de leidende term is. We zien dat:

$$\det \left(\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} \right) T(n) \right) = \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} \right)^n \det(T(n))$$

$$= \frac{1}{(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^n} \cdot \frac{\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t^2}{\prod_{0 \leq i, j < n} [i + j + 1]_t}$$

Dus de leidende term van $\det(S(n; s, t))$ is dus:

$$\frac{1}{(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^n} \cdot \frac{\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t^2}{\prod_{0 \leq i, j < n} [i + j + 1]_t} s^{\frac{n^2}{2}}$$

Nu willen we de leidende term van $\det'(S(n; s, t))$ berekenen. De enige term waar s in voorkomt in $\det'(S(n; s, t))$ is:

$$\begin{aligned} & \prod_{0 \leq i, j < n} s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{(j-i)}{2}} \\ &= \prod_{0 \leq i, j < n} s^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{(i-j)}{2}} (s - t^{j-i}) \end{aligned}$$

Alle $t^{\frac{(i-j)}{2}}$ vallen tegen elkaar weg, dus de leidende term is hier $s^{\frac{n^2}{2}}$. Daaruit volgt dat de leidende term van $\det'(S(n; s, t))$ gelijk is aan:

$$\frac{1}{(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^n} \cdot \frac{\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t^2}{\prod_{0 \leq i, j < n} [i + j + 1]_t} s^{\frac{n^2}{2}}$$

We hebben dus gezien dat $\det(S(n; s, t))$ en $\det'(S(n; s, t))$ allebei een polynoom in s van graad n^2 zijn, mits vermenigvuldigd met $s^{\frac{n^2}{2}}$. We hebben ook alle deelbaarheden van beide polynomen bepaald, deze zijn voor $\det(S(n; s, t))$ en $\det'(S(n; s, t))$ hetzelfde. Ook hebben we gezien dat de leidende term van beide polynomen hetzelfde is. Hieruit volgt dus dat $\det(S(n; s, t)) = \det'(S(n; s, t))$. Hiermee is het lemma bewezen.

□

12.6. **Finale uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$.** De state sum die we willen uitrekenen is:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = \frac{q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} 3^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq i, j < n} (s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)})}{\prod_{0 \leq j < i < n} \left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2} \det M$$

met

$$M_{i,j} = \frac{-3}{s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)}}$$

In het volgende lemma leggen we een verband tussen de matrix M en de matrix $S(n; s, s^3)$.

Lemma 12.6. *Er geldt dat:*

$$M_{i,j} = -3 \cdot S(n; s, s^3)_{i,j}$$

Bewijs. Merk op dat:

$$\begin{aligned} & (s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)}) \left(s^{\frac{(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{(i+j+1)}{2}} \right) \\ &= s^{\frac{3(i+j+1)}{2}} + s^{\frac{(i+j+1)}{2}} + s^{-\frac{(i+j+1)}{2}} - s^{\frac{(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{3(i+j+1)}{2}} \\ &= s^{\frac{3(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{3(i+j+1)}{2}} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= -\frac{3}{s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)}} \\ &= -3 \frac{s^{\frac{(1+j+1)}{2}} - s^{-\frac{(i+j+1)}{2}}}{s^{\frac{3(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{3(i+j+1)}{2}}} = -3 \cdot S(n; s, s^3)_{i,j} \end{aligned}$$

□

Hieruit volgt dat $\det(M) = (-3)^n \det(S(n; s, s^3))$. Met behulp van Lemma 12.5 kunnen we $\det(S(n; s, s^3))$ uitrekenen.

$$\det(S(n; s, s^3)) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}})^n} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_s^2 \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{\frac{1}{2}} s^{\frac{3(i-j)}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{3(j-i)}{2}}}{[i+j+1]_s^3} \right)$$

We gaan de termen van $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ en $\det(S(n; s, s^3))$ allemaal uitwerken.

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq i, j < n} (s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)}) &= \prod_{0 \leq i, j < n} \left(\frac{s^{\frac{3(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{3(i+j+1)}{2}}}{s^{\frac{(1+j+1)}{2}} - s^{-\frac{(i+j+1)}{2}}} \right) \\ &= \prod_{0 \leq i, j < n} \left(\frac{(s^{\frac{3(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{3(i+j+1)}{2}}) / (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}{s^{\frac{(1+j+1)}{2}} - s^{-\frac{(i+j+1)}{2}} / (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})} \right) = \prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[3(i+j+1)]_s}{[i+j+1]_s} \end{aligned}$$

Verder geldt dat:

$$\prod_{0 \leq j < i < n} \left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2 = \prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_s^2 \cdot (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})^2$$

Omdat deze term in de noemer staat, hebben we hier $\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1)$ termen $\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}$. We gaan nu de termen van $\det(S(n; s, s^3))$ herschrijven:

$$\frac{1}{(s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}})^n} = \frac{1}{[3]_s^n \cdot (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})^n}$$

We hebben hier n termen $\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}$. Verder geldt dat:

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_{s^3}^2 &= \prod_{0 \leq j < i < n} \left(\frac{s^{\frac{3(i-j)}{2}} - s^{-\frac{3(i-j)}{2}}}{s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}}} \right)^2 \\ &= \prod_{0 \leq j < i < n} \left(\frac{(s^{\frac{3(i-j)}{2}} - s^{-\frac{3(i-j)}{2}})/(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}{(s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}})/(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})} \right)^2 = \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s^2}{[3]_s^2} \end{aligned}$$

Als laatste zien we dat:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{\frac{1}{2}} s^{\frac{3(i-j)}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{3(i-j)}{2}}}{[i+j+1]_{s^3}} \right) &= \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{\frac{3(i-j)+1}{2}} - s^{-\frac{3(i-j)+1}{2}}}{\frac{s^{\frac{3(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{3(i+j+1)}{2}}}{s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}}}} \right) \\ &= \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}}) \cdot (s^{\frac{3(i-j)+1}{2}} - s^{-\frac{3(i-j)+1}{2}})}{s^{\frac{3(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{3(i+j+1)}{2}}} \right) \\ &= \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}}) \cdot (s^{\frac{3(i-j)+1}{2}} - s^{-\frac{3(i-j)+1}{2}})/(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}{s^{\frac{3(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{3(i+j+1)}{2}}/(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})} \right) \\ &= \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}})[3(i-j)+1]_s}{[3(i+j+1)]_s} \right) \end{aligned}$$

Merk op dat we nu nog n^2 termen $(s^{\frac{3}{2}} - s^{-\frac{3}{2}})$ hebben staan. Als we die delen door de $(n(n-1)) + n = n^2$ termen $\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}$ wordt dat $[3]_s$.

Dit alles met elkaar combineren geeft ons de volgende uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$:

$$\begin{aligned} Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) &= \frac{q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 3^{-\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i, j < n} [3(i+j+1)]_s \right)}{\left(\prod_{0 \leq i, j < n} [i+j+1]_s \right) \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_s^2 \right)} \\ &\quad \cdot \frac{(-3)^n}{[3]_s^n} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s^2}{[3]_s^2} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[3]_s [3(i-j)+1]_s}{[3(i+j+1)]_s} \right) \end{aligned}$$

Deze uitdrukking kunnen we wat vereenvoudigen. De termen met een 3 reduceren tot:

$$3^{-\frac{n(n+1)}{2}} (-3)^n = 3^{-\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^n = (-1)^n \frac{1}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}} = (-1)^n \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{1}{3}$$

De termen $\prod_{0 \leq i, j < n} [3(i+j+1)]_s$ vallen in de teller en de noemer tegen elkaar weg. We zien ook dat alle termen met $[3]_s$ tegen elkaar wegvallen:

$$\frac{1}{[3]_s^n} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{1}{[3]_s^2} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} [3]_s \right) = \frac{1}{[3]_s^n} \cdot \frac{1}{[3]_s^{2 \frac{n(n-1)}{2}}} \cdot [3]_s^{n^2} = 1$$

We houden de volgende uitdrukking over:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s^2}{3[i-j]_s^2} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right)$$

Deze uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ kunnen we nog verder uitwerken. Met behulp van de volgende twee lemma's wordt een nieuwe uitdrukking voor enkele termen van $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ bewezen:

Lemma 12.7.

$$\begin{aligned} & (-1)^n \left(\prod_{n=i>j \geq 0} \frac{[3(i-j)]_s}{[i-j]_s} \right) \left(\prod_{i=n \geq j \geq 0} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) \left(\prod_{j=n>i \geq 0} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) \\ &= \left(\prod_{i=n} \frac{\prod_{j=1}^{3i+1} [j]_s}{\prod_{j=1}^{n+i} [j]_s} \right) \left(\prod_{i=0}^n \frac{1}{\prod_{j=n+1+i} [j]_s} \right) \end{aligned}$$

Bewijs. Uitschrijven geeft:

$$\begin{aligned} & (-1)^n \left(\prod_{n=i>j \geq 0} \frac{[3(i-j)]_s}{[i-j]_s} \right) \left(\prod_{i=n \geq j \geq 0} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) \left(\prod_{j=n>i \geq 0} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{[3]_s [6]_s [9]_s \dots [3n]_s}{[1]_s [2]_s [3]_s \dots [n]_s} \right) \left(\frac{[1]_s [4]_s [7]_s \dots [3n+1]_s}{[n+1]_s [n+2]_s [n+3]_s \dots [2n+1]_s} \right) \left(\frac{[-2]_s [-5]_s [-8]_s \dots [-3n+1]_s}{[n+1]_s [n+2]_s [n+3]_s \dots [2n]_s} \right) \\ &= \left(\frac{[3]_s [6]_s [9]_s \dots [3n]_s}{[1]_s [2]_s [3]_s \dots [n]_s} \right) \left(\frac{[1]_s [4]_s [7]_s \dots [3n+1]_s}{[n+1]_s [n+2]_s [n+3]_s \dots [2n+1]_s} \right) \left(\frac{[2]_s [5]_s [8]_s \dots [3n-1]_s}{[n+1]_s [n+2]_s [n+3]_s \dots [2n]_s} \right) \\ &= \left(\frac{[1]_s [2]_s [3]_s [4]_s [5]_s [6]_s \dots [3n-1]_s [3n]_s [3n+1]_s}{[1]_s [2]_s [3]_s \dots [2n-1]_s [2n]_s} \right) \left(\frac{1}{[n+1]_s [n+2]_s [n+3]_s \dots [2n]_s [2n+1]_s} \right) \\ &= \left(\prod_{i=n} \frac{\prod_{j=1}^{3i+1} [j]_s}{\prod_{j=1}^{n+i} [j]_s} \right) \left(\prod_{i=0}^n \frac{1}{\prod_{j=n+1+i} [j]_s} \right) \end{aligned}$$

Bij de derde gelijkheid vallen de factoren (-1) uit de termen $[-2]_s, [-5]_s \dots [-3n+1]_s$ met behulp van Lemma 6.4 weg tegen de n termen -1 . $\square$

Lemma 12.8.

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s}{[i-j]_s} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) = (-1)^n \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{3i+1} [j]_s}{\prod_{j=1}^{n+i} [j]_s} \right)$$

Bewijs. Om dit te bewijzen hoeven we alleen het volgende te bewijzen:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s}{[i-j]_s} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{3i+1} [j]_s}{\prod_{j=1}^{n+i} [j]_s} \right)$$

We bewijzen dit met inductie. Bovenstaande uitdrukking is onze inductieveronderstelling. Eerst controleren we het voor $n = 1$ en $n = 2$. Voor $n = 1$ staat er:

$$1 \cdot \frac{[1]_s}{[1]_s} = \frac{[1]_s}{[1]_s}$$

Voor $n = 2$ staat er:

$$-\frac{[3]_s}{[1]_s} \cdot \frac{[1]_s [4]_s [-2]_s [1]_s}{[1]_s [2]_s [2]_s [3]_s} = \frac{[3]_s}{[1]_s} \cdot \frac{[1]_s [4]_s [2]_s [1]_s}{[1]_s [2]_s [2]_s [3]_s} = \frac{[1]_s}{[1]_s [2]_s} \cdot \frac{[1]_s [2]_s [3]_s [4]_s}{[1]_s [2]_s [3]_s}$$

Dit klopt ook. Bij de eerste gelijkheid wordt gebruik gemaakt van Lemma 6.3. Nu nemen we aan dat de inductieveronderstelling geldt voor n . We bewijzen nu dat

het geldt voor $n + 1$.

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq j < i < n+1} \frac{[3(i-j)]_s}{[i-j]_s} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n+1} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s}{[i-j]_s} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) \\
&\quad \cdot (-1)^n \left(\prod_{n=i > j \geq 0} \frac{[3(i-j)]_s}{[i-j]_s} \right) \left(\prod_{i=n \geq j \geq 0} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) \left(\prod_{j=n > i \geq 0} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right)
\end{aligned}$$

De eerste drie termen komen voor in de inductieveronderstelling. Substitutie geeft:

$$\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{3i+1} [j]_s}{\prod_{j=1}^{n+i} [j]_s} \right) (-1)^n \left(\prod_{n=i > j \geq 0} \frac{[3(i-j)]_s}{[i-j]_s} \right) \\
&\quad \cdot \left(\prod_{i=n \geq j \geq 0} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right) \left(\prod_{j=n > i \geq 0} \frac{[3(i-j)+1]_s}{[i+j+1]_s} \right)
\end{aligned}$$

Lemma 12.7 geeft dat:

$$\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{3i+1} [j]_s}{\prod_{j=1}^{n+i} [j]_s} \right) \left(\prod_{i=n} \frac{\prod_{j=1}^{3i+1} [j]_s}{\prod_{j=1}^{n+i} [j]_s} \right) \left(\prod_{i=0}^n \frac{1}{\prod_{j=n+1+i} [j]_s} \right) \\
&= \left(\prod_{i=0}^n \frac{\prod_{j=1}^{3i+1} [j]_s}{\prod_{j=1}^{n+1+i} [j]_s} \right)
\end{aligned}$$

We zien dat het de inductieveronderstelling ook geldt voor $n + 1$. Hiermee is het lemma bewezen. $\square$

Nu we Lemma 12.8 hebben bewezen, kan $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ tot het volgende worden herschreven:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = (-1)^n q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s}{3[i-j]_s} \right) \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{3i+1} [j]_s}{\prod_{j=1}^{n+i} [j]_s} \right)$$

Om $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ uit te rekenen hoeven we alleen nog maar $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ uit te rekenen.

13. AANTAL ALTERNATING SIGN MATRICES

Herinner dat $A(n; 1)$ het aantal $n \times n$ ASM's is. We hebben de volgende formule afgeleid:

$$A(n; 1) = (-1)^n q^{\frac{n}{4}} Z_{\frac{1}{2}}(n)$$

We zijn nu op het punt aanbeland dat we $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ kunnen uitrekenen. Dit doen we door $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = Z_{\frac{1}{2}}(n)$ uit te rekenen. Merk op dat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} s^{-\frac{n^2}{2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (q^\epsilon)^{-\frac{n^2}{2}} = 1$$

Verder geldt dat:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [j]_s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{j-1} s^{n - \frac{(j-1)}{2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{j-1} (q^\epsilon)^{n - \frac{(j-1)}{2}} = \sum_{n=0}^{j-1} 1 = j$$

Met deze informatie zien we dat:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s}{3[i-j]_s} \right) = \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{3(i-j)}{3(i-j)} = 1$$

Dit alles combineren geeft dat:

$$\begin{aligned} Z_{\frac{1}{2}}(n) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) \\ &= (-1)^n q^{-\frac{n}{4}} \frac{1 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot \dots \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (3n-3) \cdot (3n-2))}{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n) \cdot \dots \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1))} \\ &= (-1)^n q^{-\frac{n}{4}} \frac{1!4!7! \dots (3n-3)!(3n-2)!}{n!(n+1)! \dots (2n-1)!} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned} A(n; 1) &= (-1)^n q^{\frac{n}{4}} Z_{\frac{1}{2}}(n) \\ &= (-1)^n q^{\frac{n}{4}} (-1)^n q^{-\frac{n}{4}} \frac{1!4!7! \dots (3n-3)!(3n-2)!}{n!(n+1)! \dots (2n-1)!} \\ &= (-1)^{2n} \frac{1!4!7! \dots (3n-3)!(3n-2)!}{n!(n+1)! \dots (2n-1)!} \\ &= \frac{1!4!7! \dots (3n-3)!(3n-2)!}{n!(n+1)! \dots (2n-1)!} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat het aantal $n \times n$ Alternating Sign Matrices gelijk is aan $\frac{1!4!7! \dots (3n-3)!(3n-2)!}{n!(n+1)! \dots (2n-1)!}$ en daarmee is Stelling 3.2 bewezen.

14. GEVAL $x = 2$

Als laatste willen we de 2-optelling $A(n; 2)$ uitrekenen. Herinner uit Definitie 11.1 dat:

$$A(n; 2) = \sum_{\text{matrices}} 2^{\#(-1)}$$

Vergelijking (1) onder Definitie 11.1 geeft ons een andere uitdrukking voor $A(n; x)$, namelijk:

$$(3) \quad A(n; 2) = (-1)^n q^{\frac{n}{4}} \left[\frac{1}{2} \right]^{n-n^2} Z_{\frac{1}{2}}(n)$$

Herinner van Lemma 11.2 dat $x = [2] + 2$. Herinner uit Definitie 6.1 dat $q^x = (e^h)^x$. We moeten nu h zo kiezen, dat $x = 2$. Dit is zo als we $h = \pi\sqrt{-1}$ met $\sqrt{-1} = i$ nemen.

Lemma 14.1. *Als $h = \pi\sqrt{-1}$, dan is $x = 2$.*

Bewijs. Uitschrijven geeft:

$$\begin{aligned} x &= [2] + 2 = q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} + 2 \\ &= e^{\frac{\pi i}{2}} + e^{-\frac{\pi i}{2}} + 2 = i - i + 2 = 2 \end{aligned} \quad \square$$

We kunnen onder deze keuze voor h vergelijking (4) nog iets versimpelen.

Lemma 14.2. *Als $h = \pi\sqrt{-1}$, dan is $\left[\frac{1}{2} \right] = 2^{-\frac{1}{2}}$.*

Bewijs. Uitschrijven geeft:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \right] &= \frac{q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{q^{\frac{1}{4}} + q^{-\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i + (\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \square$$

Met deze informatie zien we dat vergelijking (3) reduceert tot:

$$\begin{aligned} A(n; 2) &= (-1)^n q^{\frac{n}{4}} (2^{-\frac{1}{2}})^{n-n^2} Z_{\frac{1}{2}}(n) \\ (4) \quad &= (-1)^n q^{\frac{n}{4}} 2^{\frac{n(n-1)}{2}} Z_{\frac{1}{2}}(n) \end{aligned}$$

We moeten nu alleen nog $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ uitrekenen. Om dezelfde reden als voor het geval $x = 1$ kan dat niet direct, en rekenen we $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ uit door de limiet van ϵ naar 0 te nemen van $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ met:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = Z(n; \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon, \dots, \frac{1}{2} + n\epsilon, 0, -\epsilon, -2\epsilon, \dots, (1-n)\epsilon)$$

14.1. Uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$. Wederom herschrijven we de uitdrukking voor $Z(n; X, Y)$ uit Stelling 10.2 tot een uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$. Herinner dat:

$$Z(n; X, Y) = \frac{(-1)^n \left(\prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{(y_i - x_i)}{2}} \right) \prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}{\left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} \det M$$

met

$$M_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}$$

Om dit om te schrijven, rekenen we eerst $[k\epsilon + \frac{1}{2}][k\epsilon - \frac{1}{2}]$ en $[k\epsilon]$ uit met onze nieuwe keuze voor h . Schrijf $s = q^\epsilon$. We zien dat:

$$\begin{aligned} [k\epsilon + \frac{1}{2}][k\epsilon - \frac{1}{2}] &= \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \right)^2 \left(q^{k\epsilon} - q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} + q^{-k\epsilon} \right) \\ &= \left(\frac{1}{i - -i} \right)^2 \left(q^{k\epsilon} - (i) - (-i) + q^{-k\epsilon} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2i} \right)^2 (s^k + s^{-k}) = \frac{(s^k + s^{-k})}{-4} \end{aligned}$$

Verder geldt dat:

$$[k\epsilon] = \frac{\left(q^{\frac{k\epsilon}{2}} - q^{-\frac{k\epsilon}{2}} \right)}{2i} = \frac{s^{\frac{k}{2}} - s^{-\frac{k}{2}}}{2i}$$

Omdat de term $[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]$ van de vorm $[(i+j+1)\epsilon + \frac{1}{2}][(i+j+1)\epsilon - \frac{1}{2}]$ wordt, zien we dat voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ geldt dat:

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]} \\ &= \frac{1}{[(i+j+1)\epsilon + \frac{1}{2}][(i+j+1)\epsilon - \frac{1}{2}]} \\ &= \frac{-4}{s^{i+j+1} + s^{-(i+j+1)}} \end{aligned}$$

Omdat de termen $[x_i - x_j]$ en $[y_j - y_i]$ van de vorm $[(i-j)\epsilon]$ worden, kunnen we de noemer van $Z(n; X, Y)$ herschrijven tot:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left(\prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right) &= \prod_{0 \leq j < i < n} [(i-j)\epsilon]^2 \\ &= \prod_{0 \leq j < i < n} \left(\frac{s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}}}{2i} \right)^2 \\ &= \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{\left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2}{-4} \end{aligned}$$

De term $\prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{y_i - x_i}{2}}$ reduceert wederom tot:

$$\prod_{i=0}^{n-1} q^{\frac{y_i - x_i}{2}} = s^{-n^2} \cdot q^{-\frac{n}{4}}$$

Als we alle nieuwe termen substitueren in $Z(n; X, Y)$ krijgen we:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = \frac{(-1)^n s^{-\frac{n^2}{2}} q^{-\frac{n}{4}} \prod_{0 \leq i, j < n} \left(\frac{s^{i+j+1} + s^{-(i+j+1)}}{-4} \right)}{\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{\left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2}{-4}} \det M$$

met

$$M_{i,j} = \frac{-4}{s^{i+j+1} + s^{-(i+j+1)}}$$

We kijken nu nog wat er gebeurt met de termen -4 en -1 .

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n \left(\frac{1}{-4}\right)^{n^2}}{\left(\frac{1}{-4}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}} &= (-1)^n \left(\frac{1}{-4}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{-4}\right)^{-\frac{n^2+n}{2}} = (-1)^n \left(\frac{1}{-4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= (-1)^n (-4)^{-\frac{n(n+1)}{2}} = (-1)^n \frac{1}{4^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\
&= (-1)^{-\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{4^{\frac{n(n+1)}{2}}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{4^{\frac{n(n+1)}{2}}}
\end{aligned}$$

Met deze informatie hebben we een definitieve uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = \frac{q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 4^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq i, j < n} (s^{i+j+1} + s^{-(i+j+1)})}{\prod_{0 \leq j < i < n} \left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2} \det M$$

met

$$M_{i,j} = \frac{-4}{s^{i+j+1} + s^{-(i+j+1)}}$$

In het volgende lemma leggen we een verband tussen de matrix M en de matrix $S(n; s^2, s^4)$ zoals gedefinieerd in Lemma 12.5.

Lemma 14.3. *Er geldt dat:*

$$M_{i,j} = -4 \cdot S(n; s^2, s^4)$$

Bewijs. Merk op dat:

$$\begin{aligned}
&(s^{i+j+1} + s^{-(i+j+1)})(s^{\frac{2(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{2(i+j+1)}{2}}) \\
&= s^{\frac{4(i+j+1)}{2}} - 1 + 1 - s^{-\frac{4(i+j+1)}{2}} \\
&= s^{\frac{4(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{4(i+j+1)}{2}}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned}
M_{i,j} &= -\frac{4}{s^{i+j+1} + s^{-(i+j+1)}} \\
&= -4 \frac{s^{\frac{2(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{2(i+j+1)}{2}}}{s^{\frac{4(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{4(i+j+1)}{2}}} = -4 \cdot S(n; s^2, s^4)_{i,j}
\end{aligned}$$

□

Hieruit volgt dat $\det(M) = (-4)^n \det(S(n; s^2, s^4))$. Met behulp van Lemma 12.5 kunnen we $\det(S(n; s^2, s^4))$ uitrekenen.

$$\det(S(n; s^2, s^4)) = \frac{1}{(s^{\frac{4}{2}} - s^{-\frac{4}{2}})^n} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_{s^4} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{\frac{2}{2}} s^{\frac{4(i-j)}{2}} - s^{-\frac{2}{2}} s^{\frac{4(j-i)}{2}}}{[i+j+1]_{s^4}} \right)$$

Als we de termen van $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$ en $\det(S(n; s^2, s^4))$ allemaal op gelijkaardige manier uitwerken zoals in sectie 12.6 zien we dat:

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq i, j < n} \left(s^{i+j+1} + s^{-(i+j+1)} \right) &= \prod_{0 \leq i, j < n} \left(\frac{s^{\frac{4(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{4(i+j+1)}{2}}}{s^{\frac{2(1+j+1)}{2}} - s^{-\frac{2(i+j+1)}{2}}} \right) \\ &= \prod_{0 \leq i, j < n} \left(\frac{(s^{\frac{4(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{4(i+j+1)}{2}}) / (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}{s^{\frac{2(1+j+1)}{2}} - s^{-\frac{2(i+j+1)}{2}} / (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})} \right) = \prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[4(i+j+1)]_s}{[2(i+j+1)]_s} \end{aligned}$$

Verder geldt dat:

$$\prod_{0 \leq j < i < n} \left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2 = \prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_s^2 \cdot (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})^2$$

Omdat deze term in de noemer staat, hebben we hier $\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1)$ termen $\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}$. We gaan nu de termen van $\det(S(n; s^2, s^4))$ herschrijven:

$$\frac{1}{(s^{\frac{4}{2}} - s^{-\frac{4}{2}})^n} = \frac{1}{[4]_s^n \cdot (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})^n}$$

We hebben hier n termen $\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}$. Verder geldt dat:

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_{s^4}^2 &= \prod_{0 \leq j < i < n} \left(\frac{s^{\frac{4(i-j)}{2}} - s^{-\frac{4(i-j)}{2}}}{s^{\frac{4}{2}} - s^{-\frac{4}{2}}} \right)^2 \\ &= \prod_{0 \leq j < i < n} \left(\frac{(s^{\frac{4(i-j)}{2}} - s^{-\frac{4(i-j)}{2}}) / (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}{(s^{\frac{4}{2}} - s^{-\frac{4}{2}}) / (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})} \right)^2 = \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[4(i-j)]_s^2}{[4]_s^2} \end{aligned}$$

Als laatste zien we dat:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{\frac{2}{2}} s^{\frac{4(i-j)}{2}} - s^{-\frac{2}{2}} s^{-\frac{4(i-j)}{2}}}{[i+j+1]_{s^4}} \right) &= \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{\frac{4(i-j)+2}{2}} - s^{-\frac{4(i-j)+2}{2}}}{\left(\frac{s^{\frac{4(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{4(i+j+1)}{2}}}{s^{\frac{4}{2}} - s^{-\frac{4}{2}}} \right)} \right) \\ &= \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(s^{\frac{4}{2}} - s^{-\frac{4}{2}}) \cdot (s^{\frac{4(i-j)+2}{2}} - s^{-\frac{4(i-j)+2}{2}})}{s^{\frac{4(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{4(i+j+1)}{2}}} \right) \\ &= \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(s^{\frac{4}{2}} - s^{-\frac{4}{2}}) \cdot (s^{\frac{4(i-j)+2}{2}} - s^{-\frac{4(i-j)+2}{2}}) / (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}{s^{\frac{4(i+j+1)}{2}} - s^{-\frac{4(i+j+1)}{2}} / (s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})} \right) \\ &= \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(s^{\frac{4}{2}} - s^{-\frac{4}{2}}) [4(i-j) + 2]_s}{[4(i+j+1)]_s} \right) \end{aligned}$$

Merk op dat we nu nog n^2 termen $(s^{\frac{4}{2}} - s^{-\frac{4}{2}})$ hebben staan. Als we die delen door de $(n(n-1)) + n = n^2$ termen $\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})}$ wordt dat $[4]_s$.

Dit alles met elkaar combineren geeft ons de volgende term voor $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$:

$$\begin{aligned} Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) &= \frac{q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 4^{-\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i, j < n} [4(i+j+1)]_s \right)}{\left(\prod_{0 \leq i, j < n} [2(i+j+1)]_s \right) \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_s^2 \right)} \\ &\quad \cdot \frac{(-4)^n}{[4]_s^n} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[4(i-j)]_s^2}{[4]_s^2} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[4]_s [4(i-j) + 2]_s}{[4(i+j+1)]_s} \right) \end{aligned}$$

Deze uitdrukking kunnen we wat vereenvoudigen. De termen met een 4 reduceren tot:

$$4^{-\frac{n(n+1)}{2}}(-4)^n = 4^{-\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^n = (-1)^n \frac{1}{4^{\frac{n(n-1)}{2}}} = (-1)^n \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{1}{4}$$

De termen $\prod_{0 \leq i, j < n} [4(i+j+1)]_s$ vallen in de teller en de noemer tegen elkaar weg. We zien ook dat alle termen met $[4]_s$ tegen elkaar wegvallen:

$$\frac{1}{[4]_s^n} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{1}{[4]_s^2} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} [4]_s \right) = \frac{1}{[4]_s^n} \cdot \frac{1}{[4]_s^{2\frac{n(n-1)}{2}}} \cdot [4]_s^{n^2} = 1$$

We houden de volgende uitdrukking over:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[4(i-j)]_s^2}{4[i-j]_s^2} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[4(i-j)+2]_s}{[2(i+j+1)]_s} \right)$$

We gaan nu de limiet van ϵ naar 0 nemen van $Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon)$. Net zoals in sectie 13 geldt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} s^{-\frac{n^2}{2}} = 1$$

En ook geldt dat:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [j]_s = j$$

Met deze informatie zien we dat:

$$\begin{aligned} Z_{\frac{1}{2}}(n) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) \\ &= q^{-\frac{n}{4}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{(4(i-j))^2}{4(i-j)^2} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right) \\ &= q^{-\frac{n}{4}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} \frac{4(i-j)}{(i-j)} \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right) \\ &= q^{-\frac{n}{4}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot 4^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right) \end{aligned}$$

Deze uitdrukking voor $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ kunnen we met behulp van de volgende twee lemma's vereenvoudigen:

Lemma 14.4.

$$4^n \left(\frac{2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-2) \cdot (4n+2)}{(2n+2) \cdot (2n+4) \cdot \dots \cdot (4n+2)} \right) \left(\frac{2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-6) \cdot (4n-2)}{(2n+2) \cdot (2n+4) \cdot \dots \cdot (4n)} \right) = 1$$

Bewijs. Dit is niet direct duidelijk. We bewijzen het lemma met inductie. Bovenstaande uitdrukking is onze inductieveronderstelling (IV). Eerst controleren we het voor $n = 1$ en $n = 2$. Voor $n = 1$ staat er:

$$4 \cdot \frac{2 \cdot 6}{4 \cdot 6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{96}{96} = 1$$

Voor $n = 2$ staat er:

$$16 \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 8} = \frac{46080}{46080} = 1$$

We nemen aan dat de inductieveronderstelling geldt voor zekere n . We bewijzen nu dat het geldt voor $n + 1$.

$$\begin{aligned}
& 4^{n+1} \left(\frac{2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n+2) \cdot (4n+6)}{(2n+4) \cdot \dots \cdot (4n+4) \cdot (4n+6)} \right) \left(\frac{2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-2) \cdot (4n+2)}{(2n+4) \cdot \dots \cdot (4n+2) \cdot (4n+4)} \right) \\
&= \frac{4 \cdot (4n+6) \cdot (4n+2) \cdot (2n+2)^2}{(4n+4) \cdot (4n+6) \cdot (4n+2) \cdot (4n+4)} \cdot IV \\
&= \frac{4(2n+2)^2}{(4n+4)^2} \cdot 1 = \frac{(4n+4)^2}{(4n+4)^2} \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Het geldt dus ook voor $n + 1$. Hiermee is het lemma bewezen. $\square$

Lemma 14.5.

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot 4^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right) = (-1)^n$$

Bewijs. Om dit te bewijzen hoeven we eigenlijk alleen het volgende te bewijzen:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 4^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right) = 1$$

We bewijzen dit met inductie. Bovenstaande uitdrukking is onze inductieveronderstelling. Eerst controleren we het voor $n = 1$ en $n = 2$. Voor $n = 1$ staat er:

$$1 \cdot \frac{2}{2} = 1$$

Voor $n = 2$ staat er:

$$-\frac{4}{1} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot (-2) \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} = 1$$

Dit klopt ook. Nu nemen we aan dat de inductieveronderstelling geldt voor n . We bewijzen nu dat het geldt voor $n + 1$.

We krijgen:

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot 4^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i, j < n+1} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right) \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 4^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right) \\
&\quad \cdot (-1)^n \cdot 4^n \left(\prod_{i=n \geq j \geq 0} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right) \left(\prod_{j=n > i \geq 0} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right)
\end{aligned}$$

In de eerste drie termen herkennen we de inductieveronderstelling. Substitutie geeft:

$$= (-1)^n 4^n \left(\prod_{i=n \geq j \geq 0} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right) \left(\prod_{j=n > i \geq 0} \frac{(4(i-j)+2)}{2(i+j+1)} \right)$$

Uitschrijven geeft:

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^n 4^n \left(\frac{2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-2) \cdot (4n+2)}{(2n+2) \cdot (2n+4) \cdot \dots \cdot (4n+2)} \right) \left(\frac{-2 \cdot -6 \cdot \dots \cdot -(4n-6) \cdot -(4n-2)}{(2n+2) \cdot (2n+4) \cdot \dots \cdot (4n)} \right) \\
 &= 4^n \left(\frac{2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-2) \cdot (4n+2)}{(2n+2) \cdot (2n+4) \cdot \dots \cdot (4n+2)} \right) \left(\frac{2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-6) \cdot (4n-2)}{(2n+2) \cdot (2n+4) \cdot \dots \cdot (4n)} \right)
 \end{aligned}$$

Uit Lemma 14.4 volgt dat deze vergelijking gelijk is aan 1. Hiermee is het lemma bewezen. □

Nu we Lemma 14.5 hebben bewezen, kan $Z_{\frac{1}{2}}(n)$ tot het volgende worden herschreven:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n) = q^{-\frac{n}{4}} (-1)^n$$

Als we dit substitueren in vergelijking (5) zien we dat:

$$\begin{aligned}
 A(n; 2) &= (-1)^n q^{\frac{n}{4}} 2^{\frac{n(n-1)}{2}} Z_{\frac{1}{2}}(n) \\
 &= (-1)^n q^{\frac{n}{4}} 2^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n}{4}} (-1)^n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}
 \end{aligned}$$

Hiermee is een uitdrukking van de 2-optelling gevonden. Er is geen directe toepassing van $A(n; 2)$, zoals die er wel is voor $A(n; 1)$. Echter, dit is een elegante formule, en het komt maar weinig voor dat een dergelijk telprobleem een (simpele) formule als oplossing heeft.

15. ERRATA IN HET ARTIKEL VAN KUPERBERG

In het artikel van Greg Kuperberg [4] zit een aantal fouten. We noemen ze hier:

- (1) De vergelijking in Lemma 6 klopt niet:

$$Z(n; X, Y) = -q^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{k \neq i} [x_i - y_k] \right) \left(\prod_{k \neq j} [x_k - y_j] \right) Z(n-1; X \setminus x_i, Y \setminus y_j)$$

moet zijn:

$$Z(n; X, Y) = -q^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{k \neq j} [x_i - y_k] \right) \left(\prod_{k \neq i} [x_k - y_j] \right) Z(n-1; X \setminus x_i, Y \setminus y_j)$$

- (2) In hoofdstuk 2 over determinanten staat een verkeerde uitdrukking voor de state sum:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = \frac{q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} 3^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq i, j < n} (s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)})}{\prod_{0 \leq j < i < n} \left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2} \det M$$

moet zijn:

$$Z_{\frac{1}{2}}(n; \epsilon) = \frac{q^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{n^2}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 3^{-\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq i, j < n} (s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)})}{\prod_{0 \leq j < i < n} \left(s^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{(i-j)}{2}} \right)^2} \det M$$

- (3) De definitie voor $[x]_t$ klopt niet:

$$[x]_t = \frac{t^{\frac{x}{2}} - t^{-\frac{x}{2}}}{t - t^{-1}}$$

moet zijn:

$$[x]_t = \frac{t^{\frac{x}{2}} - t^{-\frac{x}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}$$

- (4) De uitdrukking in Lemma 10 klopt niet:

$$\det (S(n; s, t)) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^n} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_t^2 \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{(j-i)}{2}}}{[i+j+1]_t} \right)$$

moet zijn:

$$\det (S(n; s, t)) = \frac{1}{(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^n} \left(\prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_t^2 \right) \left(\prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{(i-j)}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{(j-i)}{2}}}{[i+j+1]_t} \right)$$

REFERENCES

- [1] W.H. Mills, D.P. Robbins en H. Rumsey, *Alternating-sign matrices and descending plane partitions*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 34:340-359, 1983
- [2] D. Zeilberger: *Proof of the alternating-sign matrix conjecture*, Electronic Journal of Combinatorics, Volume 3, Issue 2, R13, 1-84, 1996
- [3] G. Kuperberg: *Another proof of the alternating sign matrix conjecture*, International Mathematics Research Notices, No. 3, 139-150, 1996
- [4] G. Kuperberg, *Symmetry Classes of Alternating-Sign Matrices under One Roof*, The Annals of Mathematics, Second Series, Volume 156, No.3, 835-866, November 2002
- [5] J. Propp, *The Many Faces of Alternating-Sign Matrices*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings, 43-58, Juli 2001
- [6] R.E. Behrend, P. di Francesco, P. Zinn-Justin, *On the Weighted Enumeration of Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Volume 119, Issue 2, 331-363, Februari 2012
- [7] A.G. Izergin, *Partition function of a six-vertex model in a finite volume*, Soviet Phys. Dokl., 32:878-879, 1987
- [8] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov en A.G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993
- [9] D.M. Bressoud, *Three alternating sign matrix identities in search of bijective proofs*, Advances in Applied Mathematics, Volume 27, Issues 2-3, 289-297, Augustus 2001
- [10] T. Tantau, *The TikZ and PGF Packages*, Institut für Theoretische Informatik, Universität zu Lübeck, November 2012