



Een mathematisch model van
niet-permanente sedimentatie
uit een suspensie

F.J.M. Bongenaar

R/1972/5H

Vloeistofmechanica

Afd. Weg- en Waterbouwkunde
Technische Hogeschool Delft

H. J. G. e. v. t.

31-X-1972

Een mathematisch model van
niet permanente sedimentatie
uit een suspensie

door F. J. M. Bongenaar

afstudeeronderzoek van janu-
ari tot oktober 1972, o.l.v.
prof. ir. W. C. Bisschoff van
Gleenskerck

Inhoudsopgave

	blz.
beschrijving van de symbolen	4
I inleiding	7
II afleiding van de procesvergelijkingen	9
II-1 aannamen	9
II-2 afleiding van de continuïteitsvergelijkingen	11
II-3 afleiding van de bewegingsvergelijkingen	14
A krachten op de moot	14
B impulsiebalans van de moot	17
II-4 beschrijving van de evenwichtsconcentratie	22
II-5 beschrijving van het concentratieverloop	31
II-6 resumé	34
III pogingen tot verbetering van het vergelijkingenstelsel	35
III-1 verwerking van een slipfactor in de basisvergelijkingen	35
III-2 de diffusietheorie	45
IV de verwerking van het vereenvoudigde proces in een computerprogramma en de bespreking van de resultaten hiervan	56
IV-1 het vereenvoudigen van het vergelijkingenstelsel	56
IV-2 de verwerking van de vergelijkingen in een computerprogramma voor een concreet geval	68
IV-3 de verwerking en de bespreking van de resultaten	73

Bijlagen

	bijl.
- het stroomdiagram -----	1.
- de programmatekst -----	2.
- de beschrijving van het computer programma -----	3.
- verloop van de bodempligging in de tijd voor verschillende ΔX , voor $ds=0$ -----	4.
- concentratie - en wettewichtsconcentratieverloop in de tijd voor verschillende ΔX , voor $ds=0$ -----	5.
- verloop van de bodempligging in de tijd voor verschillende ΔX , voor $ds=5$ -----	7.
- concentratie - en wettewichtsconcentratieverloop in de tijd voor verschillende ΔX , voor $ds=5$ -----	8.
- verloop van de bodempligging in de tijd voor verschillende ΔX , voor $ds=45$ -----	9.
- concentratie - en wettewichtsconcentratieverloop in de tijd voor verschillende ΔX , voor $ds=45$ -----	10.

Referenties:

	ref.
Hsu Hieh - Ching ; Chu Ping - Cheng : Study of river- bed degradation and aggradation by the method of characteristics . okt. '64 -----	[1.]
M. A. Velikanov : Principle of the gravitation theory of the movements of sediments ; Bulletins of the academy of sciences of the U.S.S.R. , Geophysical series , vol. 4 , 1954 -----	[2.]
H. A. C. Breusers : de transportfaktor in hellende bui- zen . Rapport CHD -----	[3.]
W. W. Sayre ; J. C. Chang : A laboratory investigation of open channel dispersion processes for dissolved, sus- pended and floating dispersants ; U.S. Geol. Survey, Prof. Paper 433 E , 1968 -----	[4.]

Wiskundige Dienst T.H. Delft: Inleiding tot het
gebruik van Algol-60 op de IBM 360/65 -----[5]
J.A. Kaast: Numerieke Analyse A1 -----[6]

beschrijving van de symbolen

x	horizontale coördinaat in langsricting
y	verticale coördinaat
x'	horizontale coördinaat in dwarsrichting
$x(x, t)$	bodemligging A.o.v. de x -as
$\bar{x}(x, t)$	bodemligging A.o.v. de evenwichtsligging
t	tydscoördinaat
$h(x, t)$	watervdiepte
$V(x, y, t) = v(x, y, t) + v'(x, y, t)$	: de horizontale snelheid van het mengsel in langsricting, gesplitst in een in de tijd langzaam veranderend deel - v - en een turbulent deel - v' -, waarbij $\bar{v}'(x, y) = 0$
$V_w(x, y, t) = v_w(x, y, t) + v'_w(x, y, t)$	: als boven, voor resp.
$V_s(x, y, t) = v_s(x, y, t) + v'_s(x, y, t)$	: de hor. snelheid van het water en van het sediment
$W_w(x, y, t) = w_w(x, y, t) + w'_w(x, y, t)$	: als boven, voor resp.
$W_s(x, y, t) = w_s(x, y, t) + w'_s(x, y, t)$	: de vert. snelheid van het water en van het sediment
$\bar{v}(x, t) = 1/h \int_0^h v(x, y, t) dy$	:
$\bar{v}_w(x, t) = 1/h \int_0^h v_w(x, y, t) dy$	: de horizontale snelheid, gemiddeld over de hoogte, van resp. het mengsel, water en sediment
$\bar{v}_s(x, t) = 1/h \int_0^h v_s(x, y, t) dy$	:
$\bar{w}_w(x, t) = 1/h \int_0^h w_w(x, y, t) dy$	: de verticale snelheid, gemiddeld over de hoogte, van resp. het water en het sediment
$\bar{w}_s(x, t) = 1/h \int_0^h w_s(x, y, t) dy$	:
w	$= -(w_s - w_w)$: de constante valsnelheid van een deeltje, positief in negatieve y -richting. In feite is dit de vert. slipsnelheid.

- $C(x, y, t) = C(x, y, t) + C'(x, y, t)$: de concentratie - d.i. de vol. delen sediment per vol. eenheid van het mengsel - gesplitst in het langzaam in de tijd veranderende deel C en het turbulente deel C' , waarbij $\bar{C}'(x, y) = 0$
- $\bar{C}(x, t) = 1/h \int_0^h C(x, y, t) dy$: gem. conc. in dwarsprofiel
- $C_e(x, t)$ evenwichtconc. van het dwarsprofiel
- $\bar{C}_T$ conc. %d getransp. hoeve. mengsel, dus van q ddt
- ρ_w dichtheid water
- ρ_b " bodem
- ρ_s " suspensiemateriaal
- $\bar{\rho}_m(x, t)$ gemiddelde dichtheid van een ruimtelijk volume, dus van $h dx$
- $\rho_T(x, t)$ dichtheid van de getransp. hoeve. mengsel, dus van q ddt
- $\Delta = (\rho_s - \rho_w) / \rho_w$
- $q(x, t) = \bar{v} h$: hoeveelheid mengsel per tijds-eenh. en eenh. v. breedte
- $s(x, t) = \bar{C}_T q$: hoeveelheid suspensiemateriaal per tijdseenheid en eenh. van breedte, dat getransporteerd wordt
- $p_d(x, y, t)$ waterdruk
- $\tau(x, y, t)$ schuifspanning
- τ_0 wrijving van stromend water over de bodem
- τ_K wrijving s.g.v. het opnemen en stilleggen van korrels aan de bodem
- $\tau_b = \tau_0 + \tau_K$
- τ_* wrijving s.g.v. slepen van korrels over de bodem
- $\tau_{tot} = \tau_0 + \tau_K + \tau_*$
- $\gamma_b(x, t)$ bodemhelling, $\sin \gamma_b = \gamma_b$, $\cos \gamma_b = 1$
- γ_{be} evenwichtshelling van de bodem
- C_R Chexygetal

K	constante van Velikanov
K_1 t/m K_4	rekengrootheden bij methode Runge-Kutta
p	concentratie van de korrels in de bodem
$m, m_1, \dots$	aanduiding voor massa's
α	wenredigheidscoëff in de beschrijving van het concentratieverloop
β	$\equiv \bar{v}_s / \bar{v}$: slipcoëff.
λ	$\equiv g h \gamma_b / \bar{v}_w^2$: wenredigheidsfactor
b	wenredigheidsfactor
β'	$\equiv 4 w x / \gamma_b \sqrt{g h \gamma_b}$
B	$= 2,3026 \log 3,35 h/a$
a	$= 0,277 d$
d	ruwheidsmaat voor de bodem; hoogte ribbel of diameter korrel.
A	constante in form. voor K van Velikanov

I Inleiding

Een waterloop heeft d.g.v. turbulente bewegingen de mogelijkheid vaste deeltjes in suspensie te brengen en te houden. Deze gesuspenderde deeltjes worden dan d.g.v. de hoofdbeweging van het water getransporteerd en dragen zo bij tot het sedimenttransport van de stroom. Een andere vorm van sedimenttransport is het "bodemtransport", het springende, rollende en schuivende transport van vaste deeltjes over de bodem. Het onderzoek naar het bodemtransport is reeds ver gevorderd. Van het "suspensie-transport" in niet permanente toestand is slechts weinig bekend, evenals de verhouding tussen deze twee vormen van transport. Maar dat het suspensie-transport onder bepaalde omstandigheden een belangrijk deel, zo niet het belangrijkste deel van het totale sedimenttransport kan uitmaken, lijdt geen twijfel.

De volumehoeveelheid vaste deeltjes (ofwel korrels) per volume-eenheid van het mengsel - die wij als de concentratie zullen definiëren - ~~kan en wil~~ welke de stroom kan en wil hebben, heeft onder gelijkblijvende stroomcondities een constante waarde, de "evenwichtsconcentratie". Deze is behalve van de stroomcondities ook nog afhankelijk van vorm, grootte, e.d. van de korrels. Een te lage concentratie zal de stroom willen aanvullen, en te hoge concentratie zal hij willen verlagen, tot de evenwichtsconcentratie is bereikt. Bij een voortdurend veranderende stroom, zal de evenwichtsconcentratie

ook voortdurend veranderen. De werkelijke concentratie van een dwarsprofiel zal deze verandering trachten te volgen, maar heeft daar tijd voor nodig. Hij zal dus voortdurend najlen, des vrijwel nooit gelijk zijn aan de evenwichtconcentratie.

Twee onderzoekers op ons probleemgebied, de chinezen Hsu Hsieh - Ching en Chu Peng - Cheng [1] hebben een mathematisch model opgesteld van het niet-permanente suspensietransport en dit aangepakt met de methode van de karakteristieken. Echter hebben zij hierbij aangenomen, dat de concentratie voortdurend gelijk is aan de evenwichtconcentratie. Wij zullen in onze beschouwing van het probleem rekening houden met het najlen van de concentratie t.o.v. de evenwichtconcentratie, hetgeen de oplossing aanmerkelijk moeilijker zal blijken te maken. Met name het vinden van de vergelijking, die de aanpassing van de concentratie aan de evenwichtconcentratie beschrijft, is een belangrijk deel van dit onderzoek.

II Afleiding van de procesvergelijkingen

In dit deel worden de vergelijkingen, die het proces beschrijven afgeleid. Dit zijn de continuïteitsvergelijkingen voor het mengsel, de karrels en het water, de bewegingsvergelijking voor het mengsel, de beschrijving van de evenwichtsconcentratie en de beschrijving van de concentratie A.O.V. de evenwichtsconcentratie. Op de laatste afleiding na is dit eerder gebeurd in [7], maar deze afleiding is zo summier weergegeven, waarbij bovendien de gedane vereenvoudigende aannamen niet expliciet zijn vermeld, dat een herhaling van deze afleiding noodzakelijk bleek. Wij beginnen onze afleidingen dan ook met het geven van de vereenvoudigende aannamen

II-1 Aannamen

1^o Aangenomen is dat de bergende breedte gelijk is aan de stroomvoerende breedte en de snelheid en concentratie constant zijn in dwarsrichting, met als gevolg dat we de hele beschouwing per eenheid van breedte kunnen opzetten. Indien we de bergende breedte ongelijk zouden nemen aan de stroomvoerende breedte, zou er een ingaand en uitgaand suspensietransport zijn in zijdelings richting. De zouden dan direct in moeilijkheden komen, omdat beide transporten een concentratie hebben die niet gelijk is aan de gemiddelde concentratie, terwijl we niet weten, hoe groot zij wel is.

2° Aangenomen wordt, dat de snelheid en de concentratie constant zijn over de hoogte. Hiermee wordt de beschouwing één dimensionaal

3° Aangenomen wordt in eerste instantie, dat er geen slip is, d.w.z. dat de korrelsnelheid gelijk is aan de snelheid van de waterdeeltjes.

De aannamen 2° en 3° geven een aanmerkelijke vereenvoudiging van het schuifspanningsbeeld. De interacties tussen korrels, water en bodem zijn hiërme aanmerkelijk vereenvoudigd, hetgeen in het vervolg zal blijken.

4° Beschouwd wordt alleen het suspensie-transport, dus het bodemtransport wordt in de beschouwing weggelaten. Omdat suspensie-transport zonder bodemtransport eigenlijk niet voorkomt, levert dit wel de nodige moeilijkheden op bij de verificering van het resultaat

5° De korrels waaruit de bodem bestaat en die welke in suspensie zijn, hebben allemaal gelijke eigenschappen. Dus dezelfde grootte, vorm, e.d.

II-2 Afleiding van de continuïteitsvergelijkingen

De situatie wordt weer gegeven in figuur 1.

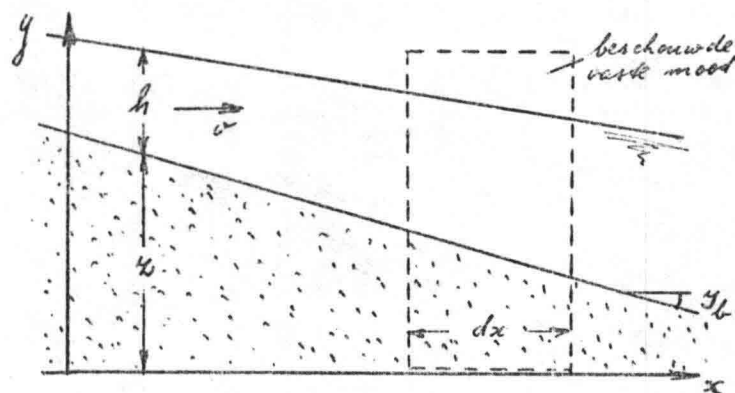


fig. 1.

We stellen de massabalans op voor een vaste mood dx

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{massa in mood}) dt = \text{Ing.} - \text{Uitg. hoeveelheid massa}$$

Dit geldt zowel voor het hele mengsel als voor de aparte hoeveelheden karrels en water. Dus voor het mengsel geldt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}_m h dx + \rho_b z dx) = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}_m \bar{v} h) dx \quad \text{-----} \quad (1.)$$

Voor de karrels geldt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{c} h dx \rho_s + \rho z dx \rho_s) = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{c} \bar{v} h \rho_s) dx \quad \text{-----} \quad (2.)$$

En voor het water geldt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ (1-\bar{c}) h dx p_w + (1-p) z dx p_w \} = -\frac{\partial}{\partial x} \{ (1-\bar{c}) \bar{v} h p_w \} dx \dots\dots\dots (3.)$$

Bedenken we nu dat

$$p_m = \bar{c} p_s + (1-\bar{c}) p_w$$

met $\Delta \equiv (p_s - p_w) / p_w$ wordt dit dan

$$p_m = p_w (1 + \bar{c} \Delta) \dots\dots\dots (4.)$$

Evenzo geldt:

$$p_b = p_w (1 + p \Delta) \dots\dots\dots (5.)$$

Hiermee worden $\frac{\partial p_m}{\partial x} = p_w \Delta \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}$ en $\frac{\partial p_m}{\partial x} = p_w \Delta \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}$

Bedenken we verder, dat dx , p_b , p_w , Δ en p constant zijn, dan kunnen we voor (1.), (2.) en (3.) resp. schrijven:

mengsel:

$$p_w \frac{\partial}{\partial x} \{ (1 + \Delta \bar{c}) h \} + p_w (1 + \Delta p) \frac{\partial z}{\partial x} = -p_w \frac{\partial}{\partial x} \{ (1 + \Delta \bar{c}) \bar{v} h \} \dots\dots\dots (6.)$$

korrels:

$$p_s \frac{\partial}{\partial x} \{ \bar{c} h \} + p_s p \frac{\partial z}{\partial x} = -p_s \frac{\partial}{\partial x} \{ \bar{c} \bar{v} h \} \dots\dots\dots (7.)$$

water:

$$p_w \frac{\partial}{\partial x} \{ (1 - \bar{c}) h \} + p_w (1 - p) \frac{\partial z}{\partial x} = -p_w \frac{\partial}{\partial x} \{ (1 - \bar{c}) \bar{v} h \} \dots\dots\dots (8.)$$

Vanzelfsprekend moeten de const. vgl. van de korrels en het water samen de const. vgl. van het mengsel opleveren. (7.) + (8.) geeft inderdaad (6.). Dit betekent dat boven slechts twee lineaire onafhankelijke vgl.-en staan. We reduceren daarom bovengstaande drie vgl.-en tot twee, door resp. te nemen $(7.)/\rho_s + (8.)/\rho_w$ en $(7.)/\rho_s$. Deze zien er als volgt uit:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial x} = - \frac{\partial q}{\partial x} \text{ ----- (9.)}$$

← mengselvolume!

en

$$\frac{\partial h \bar{c}}{\partial x} + \rho \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial(\bar{c} \cdot \bar{v}h)}{\partial x} = - \frac{\partial s}{\partial x} \text{ ----- (10.)}$$

← korrelvolume!

opm: Indien $\bar{c}$ en $\frac{\partial z}{\partial x}$ gelijk nul zijn, reduceren deze twee vgl.-en tot de ene const. vgl. zoals we die bij lange golven tegenkwamen.

II-3 De afleiding van de bewegingsvergelijking

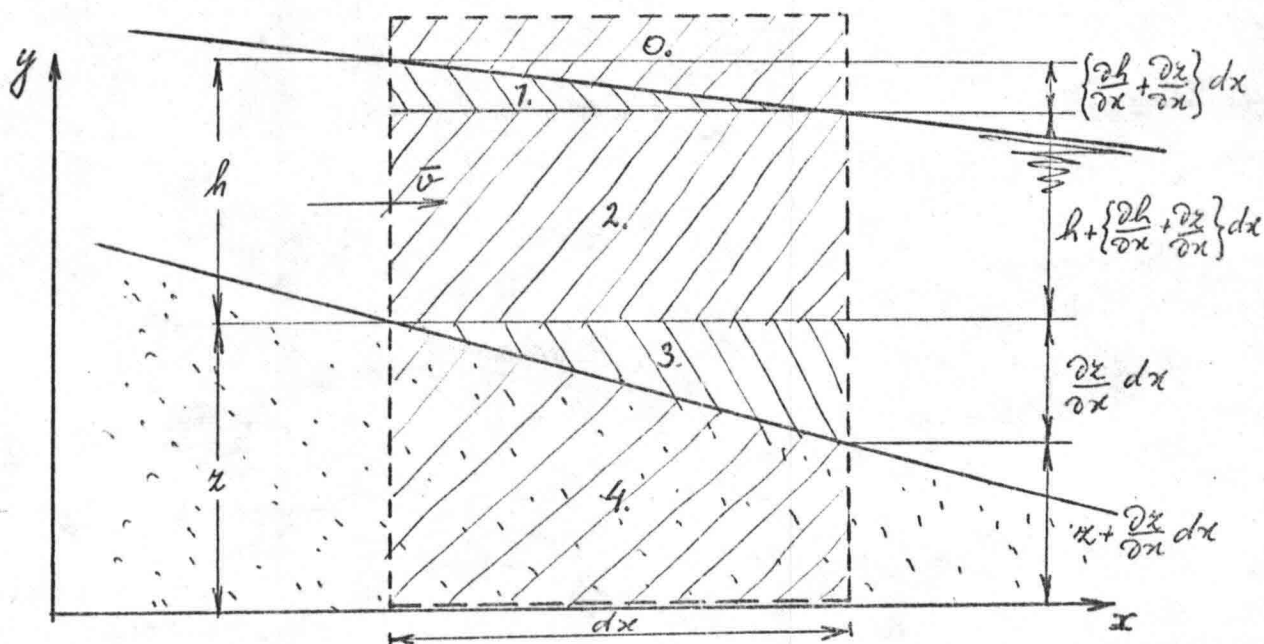


Fig. 2

A: Krachten op de moed

We verdelen de moed dx , die we gaan beschouwen in de parten 0, 1, 2, 3 en 4. We bekijken van ieder ~~de moed~~ part, welke horizontale krachten er op werken. (zie fig. 2)

Van part 0. kunnen we zeggen, dat op alle zijvlakken slechts de atmosferische druk werkzaam is. De resulterende kracht stellen we nul.

Van part 1 weten we, dat voor zeer kleine hellingen, de waterdruk op het zijvlakje maal het oppervlak van dat vlakje gelijk is aan de horizontale ontbondene van de atmosferische druk op het bovenvlak maal het oppervlak van het bovenvlak. Dus ook dit part levert geen resulterende kracht.

Part 2 met de er op werkende spanningen is weer-
gegeven in figuur 3

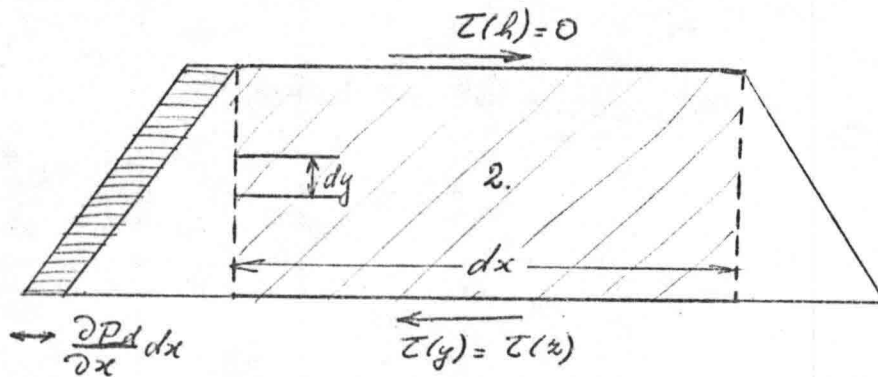


fig. 3

Verwaarlozen we de tweede orde termen, dan wordt
de resulterende kracht op part 2. :

$$R_2 = - \int_x^{x+h} \frac{\partial P_d}{\partial x} dx dy - T(x) dx \text{ ----- (11.)}$$

Part 3 met de er op werkende spanningen is weer-
gegeven in figuur 4. Hierin is te zien, dat P_d maal

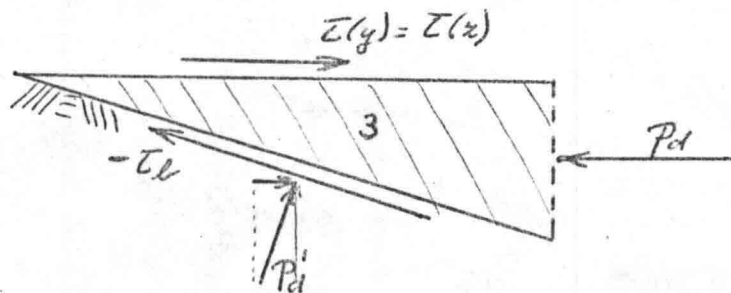


fig. 4

het opp. van het zijvlak eenwicht maakt met de
hor. ontbondene van P_d maal het opp. van de bodem
($dx / \cos \gamma_b$). Verder is in deze figuur te zien, dat
de resulterende kracht op part 3 is :

$$R_3 = T(x) \cdot dx + T_b \cos \gamma_b \frac{dx}{\cos \gamma_b} = T(x) dx + T_b dx \text{ ----- (12.)}$$

Hierin is T_b de gezamenlijke actie van korrels en water aan de bodem. T_b bevat dus zowel de kracht die door het slepende mengsel op de bodem wordt uitgeoefend, als de kracht veroorzaakt door een diepte dat botst en stil gaat liggen, of dat wordt opgenomen en gaat mee bewegen.

Het krachten spel in part 4 verloopt als volgt. T_b wordt door hor. korrelschuifspanningen naar diepere lagen overgedragen. Ook de verschillen in water- en gronddruk aan weerszijden van dit part worden naar diepere lagen overgedragen door hor. korrelschuifspanningen, zodat de grondmassa in evenwicht is. Een gedeelte van de wateroverdruk wordt gebruikt om een grondwaterstroom te veroorzaken, welke wij hier echter buiten beschouwing laten.

De resulterende kracht op de beschouwde moot is dus:

$$\Sigma K = R_2 + R_3 = - \int_x^{x+h} \frac{\partial P_d}{\partial x} dx dy + T_b dx \text{ ----- (13)}$$

Men geldt bij rechte stroomlijnen voor P_d :

$$P_d = \bar{p}_m g \{ (h+z) - y \} \text{ ----- (14)}$$

en dus

$$\frac{\partial P_d}{\partial x} = \bar{p}_m g \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \right) + g \{ -y + (h+z) \} \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial x} \text{ ----- (15)}$$

Hiermee wordt

$$- \int_x^{x+h} \frac{\partial P_d}{\partial x} dx dy = - dx h \bar{p}_m g \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \right\} - g dx \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial x} \text{ ---- (16)}$$

We kunnen nu voor ΣK schrijven :

$$\Sigma K = -\bar{\rho}_m g h dx \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{h}{\bar{\rho}_m} \frac{\partial \bar{\rho}_m}{\partial x} \right\} + \tau_b dx \dots\dots (17)$$

B: Impulsiebalans van de moort

B1: Beschouwing volgens Euler : Beschouwing van een vast volume

In dit geval beschouwen we de vaste moort van fig. 2 en stellen we voor deze moort de "impulsiebalans" op. Deze zegt:

$\Sigma K d\mathcal{A}$ = Toename van de impulsie in de moort - resulterend instromend impulsie transport

ofwel in symbolen:

$$\Sigma K d\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} (h dx \bar{\rho}_m \bar{v}) d\mathcal{A} + \frac{\partial}{\partial x} (h \bar{\rho}_m \bar{v} \bar{v} d\mathcal{A}) dx \dots\dots (18)$$

Na deling door $dx d\mathcal{A}$ en splitsing van de termen wordt dit:

$$\frac{\Sigma K}{dx} = \bar{v} \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} (\bar{\rho}_m h) + \bar{\rho}_m h \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mathcal{A}} + \bar{\rho}_m \bar{v} h \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}_m \bar{v} h) \dots (19)$$

Men is volgens de cont. vgl. (zie (1) op blz. 11) :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}_m \bar{v} h) = - \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} (\bar{\rho}_m h) - \rho_b \frac{\partial x}{\partial \mathcal{A}} \dots\dots\dots (1)$$

Dit gecombineerd met (19.) levert :

$$\frac{\Sigma K}{dx} = \bar{\rho}_m h \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\rho}_m \bar{v} h \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \rho_b \bar{v} \frac{\partial z}{\partial t} \text{-----} (20.)$$

ofwel

$$\Sigma K = \bar{\rho}_m g h dx \left\{ \frac{1}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\rho_b}{\bar{\rho}_m g h} \frac{\bar{v}}{\partial t} \right\} \text{-----} (21.)$$

B2: Beschouwing volgens Lagrange: Beschouwing van een vaste massa.

Nu beschouwen we de massa, die zich op een bepaald tijdstip t_1 in de toestand van fig. 2 bevindt en we onderzoeken de toename van de hoeveelheid impulsie van deze vaste massa in het daaropvolgende tijdverloop dt . Daarvan geldt, dat die gelijk is aan de som van de uitwendige krachten (vgl. (17.)). m.k.a.w.:

$$\Sigma K = \frac{d(m\bar{v})}{dt} \text{-----} (22.)$$

We beschouwen een vaste hoeveelheid massa, d.w.z. $d(m) = 0$. Hiermee wordt

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} \text{-----} (23.)$$

Wij gaan nu onze vaste massa in drie parten verdelen, nl. een part, dat na verloop van dt nog stroomt, een part, dat in verloop van dt is gaan stromen (bij

erosie) of niet meer stroomt (bij sedimentatie) en een part, dat na dat nog stilligt (zie fig. 5).

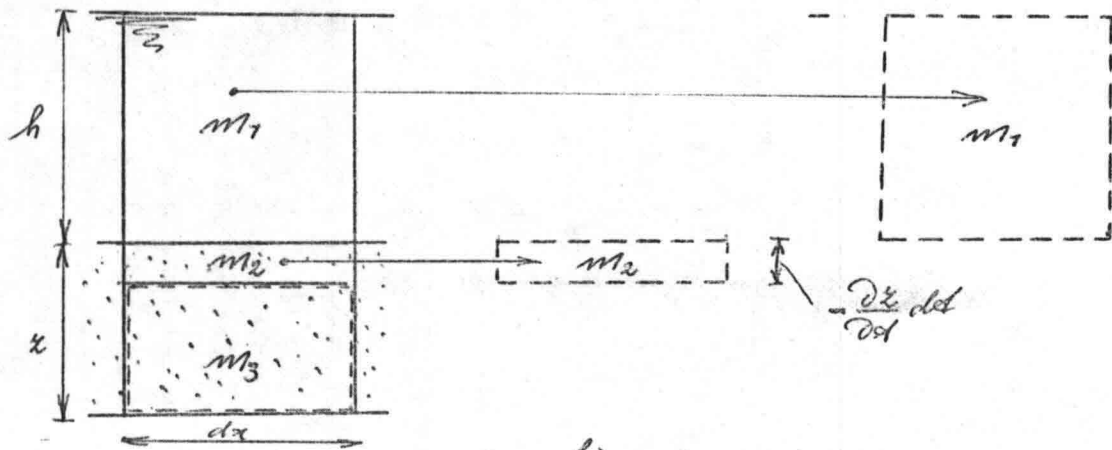


fig. 5

De verandering van impulsie van de totale massa is nu gelijk aan de som van de verandering van impulsie van deze afzonderlijke massa's m_1 , m_2 en m_3 . Hiermee wordt (22.) met toepassing van (23.):

$$\sum K = m_1 \frac{d\bar{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\bar{v}_2}{dt} + m_3 \frac{d\bar{v}_3}{dt} \quad \text{-----} \quad (24.)$$

wa is :

$$m_1 \frac{d\bar{v}_1}{dt} = \bar{\rho}_m h dx \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\rho}_m h dx \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad \text{----} \quad (25.)$$

$$m_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial t} = \rho_b \left(-\frac{\partial z}{\partial t} dt \right) dx \frac{\bar{v}-0}{dt} = -\rho_b \bar{v} dx \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{-----} \quad (26.)$$

$$m_3 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial t} = \rho_b \left(z + \frac{\partial z}{\partial t} dt \right) dx \cdot 0 = 0$$

Dit levert ons met (24.) weer (21.) op, waarmee we dus op hetzelfde resultaat uitkomen als bij de methode van Euler.

Tenslotte levert de combinatie van vgl. (17) en (27) ons de bewegingsvgl. voor het mengsel.:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{1}{2} h \frac{1}{\bar{\rho}_m} \frac{\partial \bar{\rho}_m}{\partial x} - \frac{\tau_b}{\bar{\rho}_m g h} - \frac{\rho_b}{\bar{\rho}_m} \frac{\bar{v}}{g h} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (27)$$

In deze vgl. zit de nog niet verder uitgewerkte bodemwrijving τ_b . In ons één-dimensionale model zonder slip is deze uitwerking erg goed mogelijk, en wel als volgt:

In zo'n model heeft een korrel of een melheid $\bar{v}$ of hij ligt stil op de bodem. Bij afzetting van een korrel op de bodem wordt dus een hoeveelheid impulsie, groot massa korrel $\cdot \bar{v}$, afgegeven aan de bodem. Deze vorm van wrijvingsverlies zullen we τ_k noemen. De gesommende hoeveelheid impulsie die in een tijdje dt op deze manier naar de bodem afloeit is beschreven in vgl. (26). We kunnen dus zeggen:

$$\tau_k dx = -\rho_b \bar{v} dx \frac{\partial x}{\partial t} \quad (28)$$

Men zal de totale wrijving aan de bodem, welke we τ_b genoemd hebben, opgebouwd zijn uit de boven beschreven korrelactiviteit en de normale wrijving van een stromende suspensie over een vaste bodem, te noemen τ_o , welke we kunnen beschrijven met de formule:

$$\tau_o = -\bar{\rho}_m g \frac{\bar{v} |\bar{v}|}{C_d^2} \quad (29)$$

Met (28) en (29) kunnen we dus voor τ_b schrijven:

$$\tau_b = -\rho_b \bar{v} \frac{\partial x}{\partial t} - \bar{p}_m g \frac{\bar{v} |\bar{v}|}{c_h^2} \text{-----} (30)$$

of in iets andere vorm:

$$-\frac{\tau_b}{\bar{p}_m g h} = \frac{\rho_b}{\bar{p}_m} \frac{\bar{v}}{g h} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\bar{v} |\bar{v}|}{c_h^2 h} \text{-----} (31)$$

Hiermee kunnen we onze bew. vgl. (27.) als volgt herschrijven:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{h}{\bar{p}_m} \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial x} + \frac{\bar{v} |\bar{v}|}{c_h^2 h} = 0 \text{---} (32.)$$

Als we nu overgaan van $\bar{p}_m$ op $\bar{c}$, door toepassing van vgl. (4.), dan wordt ten slotte onze bew. vgl.:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{1}{2} h \frac{\Delta}{1+\bar{c}\Delta} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\bar{v} |\bar{v}|}{c_h^2 h} = 0 \text{----} (33.)$$

Dit uiteindelijke resultaat lijkt erg veel op de bew. vgl. zoals we die bij de lange golven tegen kwamen. $\partial h / \partial x$ en $\partial x / \partial x$ geven samen namelijk de $\gamma_{p.m.}$. Er is een extra verhangsterm bijgekomen, veroorzaakt door de concentratieverandering in x -richting.

II - 4 De beschrijving van de evenwichtsconcentratie

Wij zullen, evenals in [1] is gedaan, voor de evenwichtsconcentratie de uitdrukking van Velikanov gebruiken. Deze ziet er als volgt uit:

$$C_e = \frac{K}{g w} \frac{\bar{\sigma}^3}{h} \text{-----} (34)$$

Deze vergelijking bevat de dimensionele constante K . Een uitdrukking voor deze constante hebben we kunnen afleiden uit een uiteenzetting van de principes van de gravitatietheorie van de beweging van sediment door Velikanov [2.]. Daarom volgt nu een beschrijving en bewerking van een gedeelte van deze theorie.

Velikanov gaat uit van een uniforme stroom. Hierin wordt een verticale watersnelheid w_v opgewekt, doordat er korrels zakken. Stellen we de continuïteitsvergelijking op in verticale richting (in hor. richting is de stroom uniform!), dan geldt:

$$-w_s c \, dx \, dt = w_w (1-c) \, dx \, dt \text{-----} (35)$$

waarin w_s en w_w resp. het in de tijd langzaam variërende deel van de verticale deelsnelheid en verticale watersnelheid zijn

(Voor de betekenis van de symbolen bovendien blz. 4 en 5.)

In woorden vertaald, zegt vgl. 35, dat het instromend

korrelvolume gelijk moet zijn aan het uitstromend watervolume, omdat het totale volume gelijk blijft. Nu geldt:

$$w_s = w_w - w \quad \text{-----} \quad (36.)$$

waarmee (35.) wordt:

$$(w - w_w) c \, dx \, dt = w_w (1 - c) \, dx \, dt \quad \text{-----} \quad (37.)$$

ofwel

$$w c = w_w \quad \text{-----} \quad (38.)$$

Met (36.) en vermenigvuldiging met c wordt (38.):

$$w_s c = -w c (1 - c) \quad \text{-----} \quad (39.)$$

Voor evenwicht geldt, dat het gemiddelde in de tijd van het product van de totale verticale snelheid en de concentratie gelijk aan nul is. In symbolen:

$$\overline{W_s \cdot C} = 0 \quad \text{-----} \quad (40.)$$

waarin W_s de totale vert. sediment-snelheid is, welke is te splitsen in het langzaam veranderende deel w_s en het turbulente deel w_s' waarbij $\overline{w_s'} = 0$

en C de totale concentratie, welke is te splitsen in het langzaam veranderende deel c en het turbulente deel c' , waarbij $\overline{c'} = 0$

(40) Is dus ook te schrijven als volgt:

$$\overline{w_s c} + \overline{w_s c'} + \overline{w_s' c} + \overline{w_s' c'} = 0 \text{ ----- (41)}$$

ofwel

$$\overline{w_s c} = - \overline{w_s' c'} \text{ ----- (42)}$$

Stellen we nu dat in eerste benadering w_s' gelijk zal zijn aan w_w' , dan levert (42.) met (39) ons op:

$$\overline{w_w' c'} = w c (1-c) \text{ ----- (43)}$$

In woorden vertaald, staat hier dat in een evenwichtssituatie de turbulente fluctuaties gemiddeld genomen een transport in opwaartse richting van suspensiemateriaal in stand houden, groot genoeg om het meerwaartse transport d.g.v. de volsmelheid op te heffen. Deze vergelijking zullen we later nog eens tegenkomen.

Als we (43) vermenigvuldigen met het relatieve gewicht per vol. eenheid en de laagdikte dy verkrijgen we

$$g(p_s - p_w) \overline{w_w' c'} dy = g(p_s - p_w) w c (1-c) dy \text{ ----- (44)}$$

Hier staat een energievergelijking. Rechts staat de hoeveelheid potentiële energie, die vrijkomt per Δy -eenheid, door het uitkakkingsmechanisme. Links staat een hoeveelheid turbulente energie. Blijkbaar wordt pot. energie omgezet in turbulente energie en zo toegevoegd aan de energiehoud van het stromende water.

Maken we nu deze energiebalans voor het water compleet, dan hebben we nog het verlies aan pot. energie van het water:

$$\rho_w g (1-c) \sigma_w Y_b dy \text{ ----- (45)}$$

en de weerstandsenergie (in algemene vorm)

$$\rho_w V_w \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (1-c) V_w W_w \right\} dy \text{ ----- (46)}$$

welke we kunnen vereenvoudigen tot

$$\rho_w \sigma_w \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (1-c) \overline{\sigma'_w \omega'_w} \right\} dy \text{ ----- (47)}$$

Samen leveren (44.), (45.) en (47.) ons de energiebalans van het water:

$$g(1-c) \sigma_w Y_b = \sigma_w \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (1-c) \overline{\sigma'_w \omega'_w} \right\} + \Delta g w c (1-c) \text{ ---- (48)}$$

Als integreren nu deze vergelijking over de hoogte, waarbij we c h.o.v. τ verwaarlozen. We krijgen dan de energiebalans voor een moed van een uniforme stroom

$$\int_0^h g \sigma_w Y_b dy = g Y_b h \bar{\sigma}_w \text{ ----- (49)}$$

$$\int_0^h \Delta g w c dy = \Delta g w h \bar{c} \text{ ----- (50)}$$

Stellen we nu voor de weerstandskern, dat :

$$\overline{v_w' w_w'} = \frac{\tau_y}{\rho_w} \text{ ----- (51)}$$

en

$$\frac{\tau_y}{\rho_w} :: v_w^2, \text{ lijk } \frac{\tau_y}{\rho_w} = f v_w^2 \text{ ----- (52)}$$

dan wordt daarmee :

$$\int_0^h v_w \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \overline{v_w' w_w'} \right\} dy = \int_0^h v_w \frac{\partial}{\partial y} (v_w^2 f) dy = b \bar{v}_w^3 \text{ ----- (53)}$$

waarin b een evenredigheidsfactor is

(49.), (50.) en (53.) gesubstitueerd in (48.) leveren ons de aanslotte de energiebalans van de moed :

$$g \frac{1}{2} h \bar{v}_w = 4 g w h \bar{c} + b \bar{v}_w^3 \text{ ----- (54.)}$$

Deze vergelijking is de bewegingsvergelijking van een eenparige stroom indien we $\bar{c} = 0$ nemen. De weerstandskern $b \bar{v}_w^3$ immers is in feite $\tau_0 / \rho_w \cdot \bar{v}_w$, zodat (54.) wordt $g \frac{1}{2} h = \tau_0 / \rho_w$, een ons wel bekende vergelijking

We moeten (54.) als volgt beschouwen. Een gedeelte van de potentiële energie, die vrijkomt door het verval bij een eenparige, sedimentolragende stroom, wordt verbruikt door opgewekte weerstand en turbulente bewegingen, welke aanslotte afloeiwt als warme e.d., een ander gedeelte wordt gebruikt om sedi-

men doeltjes in suspensie de handen

We substitueren nu in (54.) de factor λ , welke we definiëren als :

$$\lambda = \frac{g h y_b}{\bar{v}_w^2} \text{ ----- (55.)}$$

Dan wordt (54.)

$$\tau = \frac{b}{\lambda} + \frac{\Delta w}{\bar{v}_w y_b} \bar{c} \text{ ----- (56.)}$$

We stellen, dat λ zal afhangen van $\bar{c}$. Noem λ voor $\bar{c}=0$ λ_0 , dan volgt uit ~~(56.)~~ (56.)

$$\lambda_0 = b \text{ ----- (57.)}$$

Men postuleert Velikanow, dat λ constant is voor een stroom, die de evenwichtsconcentratie bezit. Dus dat in die situatie $\lambda = \lambda_{ev}$ is constant. Proeven blijken dit postulaat te rechtvaardigen.

Met (57.) wordt (56.)

$$\tau = \frac{\lambda_0}{\lambda} + \frac{\Delta w}{\bar{v}_w y_b} \bar{c} \text{ ----- (58.)}$$

Nemen we nu voor

$$\begin{aligned} \bar{v}_w &= C_h \sqrt{g h y_b} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{g} \frac{1}{\log e} \left\{ \log \left(3,35 \frac{h}{a} \right) \right\} \sqrt{g h y_b} \\ &= \frac{\sqrt{g h y_b}}{\lambda} \cdot 2,3026 \log 3,35 \frac{h}{a} \text{ ----- (59.)} \end{aligned}$$

Stellen we hierin

$$B = 2,3026 \log 3,35 \frac{h}{a} \text{ ----- (60.)}$$

$$\begin{array}{ll} \text{waarbij} & a = 0,274 d \text{ ----- (61.)} \\ \text{en} & d = \text{diameter korrel of} \\ & \text{hoogte ribbel} \end{array}$$

Met (59.) en (60.) wordt (58.)

$$\tau = \frac{d_0}{a} + \frac{\Delta \omega \kappa}{B \sqrt{g h \gamma_b} \gamma_b} \bar{c} \text{ ----- (62.)}$$

Stel hierin :

$$\beta' = \frac{\Delta \omega \kappa}{\gamma_b \sqrt{g h \gamma_b}} \text{ ----- (63.)}$$

Daarmee wordt (62.)

$$B \left(1 - \frac{d_0}{a} \right) = \beta' \bar{c} \text{ ----- (64.)}$$

~~B~~ Schrijven we dit met $\bar{c} = c_e$ en $a = d_{ev}$, dan

$$B \left(1 - \frac{d_0}{d_{ev}} \right) = \beta' c_e \text{ ----- (65.)}$$

B en d_{ev} zijn evenals d_0 constanten voor een bepaald stromingstoestand of ruwheid, dus

$$A \equiv B \left(1 - \frac{d_0}{d_{ev}} \right) \text{ is constant ----- (66.)}$$

Hierna wordt:

$$\beta' c_e = A \quad \text{--- (67)}$$

Substitueer hierin (63) met daarin, dat

$$\bar{v}_w = \frac{B}{\chi} \sqrt{gh Y_b} \quad \text{--- (46)}, \quad \text{dus}$$

$$Y_b = \frac{\bar{v}_w^2 \chi^2}{B^2 gh} \quad \text{--- (68)}$$

$$\text{dus} \quad \beta' = \frac{\Delta B^3}{\chi^2} \frac{gh}{\bar{v}_w^3} \quad \text{--- (69)}$$

en stellen we bovendien dat er (in hor. richting) geen slip is, dus dat $\bar{v}_w = \bar{v} = \bar{v}_s$ dan gaat (67) over in:

$$c_e = \frac{A \chi^2}{\Delta B^3} \frac{\bar{v}^3}{gh} \quad \text{--- (70)}$$

Vergelijken we dit met (34.) dan zien we

$$K = \frac{A \chi^2}{\Delta B^3} \quad \text{--- (71)}$$

Uit de resultaten van de proeven, waarmee Velikanov zijn bovengenoemde postulaat verdedigde, is een waarde voor A op te maken, nl.

$$A = 0,38 \quad \text{--- (72)}$$

We weten dat A varieert met de ruwheid, maar er is niets naders te zeggen over deze variatie, zodat we moesten hopen, dat deze niet al te groot is. Bovendien is in de afleiding uitgegaan van een uniforme

stroom. Over de grootteorde van de fout, die we maken door resultaat (34.) ook voor ons niet uniforme model te gebruiken, valt eveneens weinig te zeggen. We zullen in het vervolg de variatie in de stromings-toestand zoo klein mogelijk houden om de geldigheid van (34.) zo groot mogelijk te doen zijn.

II-5 De beschrijving van het concentratieverloop

In deel I, blz. 7 en 8, werd reeds gesteld, dat hij een voortdurend veranderende stroom de concentratie nooit of vrijwel nooit gelijk zal zijn aan de evenwichtconcentratie. In [7] wordt deze ongelijkheid verwaarloosd, in dit onderzoek wordt hij mede in beschouwing genomen. In dit deel wordt in eerste instantie min of meer intuïtief de geleidelijke aanpassing van de concentratie aan de evenwichtconcentratie beschreven. Later, in deel III, wordt een poging tot verbetering ondernomen. Uiteindelijk zal toch het resultaat van dit deel gebruikt worden voor verdere berekeningen.

Het lijkt aannemelijk, dat de aanpassing van de concentratie aan de evenwichtconcentratie afhankelijk zal zijn van het verschil van deze twee. Dit verschil zullen we c' noemen, dus

$$c' = \bar{c} - c_e \quad \text{-----} \quad (43)$$

We zullen hier een lineaire afhankelijkheid aannemen. We kunnen dan schrijven:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial A} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \left(= \frac{d\bar{c}}{dA} \right) = \alpha c' \quad \text{-----} \quad (44)$$

Hierin wordt α constant verondersteld. Dat α niet constant is, zal duidelijk zijn. Maar er valt het nu toe niets zinnigs over te zeggen.

Later in het onderzoek is gebleken dat het logischer is het concentratieverloop anders te formuleren. Beter is om alleen de concentratieverandering s.g.v. het neerslaan en opnemen van sediment per tijds-eenheid evenredig te stellen aan c' (De concentratie kan immers in een niet permanente stromings-toestand ook veranderen door variaties in $\bar{v}$, h en $\bar{c}$). De benaming van de conc. per tijds-eenh. s.g.v. het opnemen van sediment is :

$$- \frac{P \frac{\partial \bar{c}}{\partial t}}{h} \text{ ----- (75.)}$$

dus onze vgl. wordt :

$$- \frac{P \frac{\partial \bar{c}}{\partial t}}{h} = \alpha c' \text{ ----- (76.)}$$

ofwel, na subst. van (73.)

$$P \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -\alpha h (c - c_e) \text{ ----- (77.)}$$

Substitueren we dit in vgl. (10) van blz. 13, dan zien we dat we (74.) hebben omgebouwd tot een continuïteitsvergelijking, nl :

$$\frac{\partial (h \bar{c})}{\partial t} + \frac{\partial (h \bar{v} \bar{c})}{\partial x} = \alpha h c' \text{ ----- (78.)}$$

Het verschil tussen beide benaderingen wordt aangegevend, indien we de volgende bewerking uitvoeren:

$$\frac{1}{h} \left\{ - (9) \bar{c} + (10) - \frac{P \bar{c}}{P} (77.) \right\} \quad \text{Dit levert de vergelijking :}$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \lambda (\bar{c} - c_e) \frac{p - \bar{c}}{p} \quad \text{--- (79)}$$

Het verschil met (74.) is dus de factor $(p - \bar{c})/p$, welke voor kleine $\bar{c}$ ongeveer gelijk is aan 1

Het zou logischer geweest zijn c' wettelijk te stellen aan de afname van de concentratie, maar A.g.v. de oorspronkelijke formulering (74.) is dit niet gebeurd. Het gevolg hiervan is, dat λ nu een negatieve waarde heeft.

We kunnen voor een eenvoudig model van het meerslagmechanisme een schatting voor λ maken. Stellen we, dat gedurende dt , dat gedeelte van de overconcentratie c' meerslaakt, dat in die tijd de bodem kan bereiken - dat is dus $w dt c'$ - en de rest weer verdeeld wordt over de hele hoogte, dan is na dt de overconcentratie c' :

$$c'_{t+dt} = \frac{hc'_{t_1} - w dt c'_{t_1}}{h} = c'_{t_1} - \frac{w}{h} dt c'_{t_1} \quad \text{--- (80)}$$

Per tijdseenheid is de verandering dus $-\frac{w}{h} c'$. Hieruit volgt, dat voor dit model geldt:

$$\lambda = -\frac{w}{h} \quad \text{--- (81)}$$

Hieruit blijkt reeds, dat zelfs voor dit simpele model λ al niet constant is.

II - 7 Resume'

Het vergelijkingstelsel dat het proces beschrijft is nu compleet. Vervangen we cond. vgl (10.) door vergelijking (79.) dan ziet ons stelsel er als volgt uit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial x} = 0 \quad \text{-----} \quad (9)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{h \Delta}{1 + c_d} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\bar{v} |\bar{v}|}{c_h^2 h} = 0 \quad \text{----} \quad (33.)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \alpha (\bar{c} - c_e) \frac{p - \bar{c}}{p} \quad \text{-----} \quad (79.)$$

$$p \frac{\partial z}{\partial t} = -\alpha h (\bar{c} - c_e) \quad \text{-----} \quad (77.)$$

$$c_e = \frac{K}{g w} \frac{\bar{v}^3}{h} \quad \text{-----} \quad (34.)$$

Dit stelsel bestaat uit 5 vergelijkingen en bevat 5 ~~onbekende~~ variabelen nl. $\bar{v}$, h , $\bar{c}$, c_e en z . In theorie dus een oplosbaar geheel. Praktisch echter niet. Vereenvoudigingen zullen dit stelsel verwerkbaar moeten maken. Dit zal gebeuren in deel IV. Eerst echter zal in deel III gepoogd worden verbeteringen aan te brengen in dit stelsel

III Pogingen tot verbetering van het vergelijkingensysteem

Voor de afleiding van het vergelijkingensysteem hebben we ter vereenvoudiging aannamen gedaan (zoals is beschreven in II-1, blz. 9), waarvan er enkele zeer grof zijn. Het zal zelden of nooit voorkomen, dat er geen slip optreedt of geen bodemtransport is, terwijl de één-dimensionale beschouwing ook erg grof is. Bovendien is onze " α -vergelijking" (vgl. 44) meer op intuïtie gebaseerd dan op een theorie.

In dit deel doen we eerst een poging de slip en het bodemtransport te vangen in een slipcoëfficiënt β . Daarna volgt de bespreking van de diffusie- en convectietheorie, toegepast op het transport van sediment, met als doel een vervanging te vinden voor de α -vergelijking.

III - 1 Verwerking van een slipfactor in de basisvergelijkingen

In dit deel blijven we uitgaan van de één-dimensionale beschouwing. We stellen ons een model voor, waarin de karrelsnelheid in horizontale richting, gemiddeld over de hoogte, kleiner is dan de watersnelheid, gemiddeld over de hoogte. Of in symbolen

$$\bar{v}_s < \bar{v}_w \text{ ----- (82.)}$$

Omdat juist bij de bodem de korrelsnelheid kleiner zal zijn dan de watersnelheid en het transport met deze kleinere snelheid wel "bodem-transport" wordt genoemd, vangen we met deze relatie (82.) dus in feite het bodemtransport. Wel bestaat voor ons model dit transport uit hetzelfde materiaal, als waaruit het suspensie-transport bestaat, i.e. m. aanname 5° op blz. 10

Door deze "slip" zal er ook verschil zijn tussen de concentratie van vaste stof in een ruimtelijke hoeveelheid mengsel - bijv. hdx -, welke we $\bar{c}$ noemen en de concentratie van vaste stof in een getransporteerde hoeveelheid mengsel - bijv. gdz -, welke we $\bar{c}_T$ zullen noemen. Eveneens zal de snelheid van het mengsel $\bar{v}$, gedefinieerd door :

$$\bar{v} \equiv \frac{q}{h} \quad \text{-----} \quad (83.)$$

nu afwijken van de watersnelheid $\bar{v}_w$ en de deeltjessnelheid $\bar{v}_s$. Ook de dichtheid van het getransporteerde mengsel, $\bar{\rho}_T$, zal afwijken van die van het ruimtelijk mengsel $\bar{\rho}_m$

We definiëren nu onze slipfactor β als

$$\beta(x, d) = \beta \equiv \frac{\bar{v}_s}{\bar{v}} \quad \text{-----} \quad (84.)$$

β zal waarschijnlijk niet constant zijn. Hij zal in het vervolg echter wel als een constante beschouwd worden. Bij kleine variaties in de snelheden zal de gemaakte fout zeker klein blijven.

Men geldt ook, dat de hoeveelheid karrels in het getransporteerde mengsel, gelijk is aan de hoeveelheid karrels van het ruimtelijke mengsel, die niet die ruimte worden getransporteerd. Ofwel in symbolen

$$\bar{c}_T \cdot q = \bar{v}_s \cdot h \bar{c} \quad \text{-----} \quad (85)$$

M.b.v. (84.) en (83.) vinden we dan dat ook

$$\frac{\bar{c}_T}{\bar{c}} = \beta \quad \text{-----} \quad (86)$$

Ook voor $\bar{v}_w$ kunnen we een uitdrukking vinden:

$$q = \bar{v} h = \bar{c} \bar{v}_s h + (1 - \bar{c}) \bar{v}_w h \quad \text{-----} \quad (87)$$

Hieruit volgt

$$\bar{v}_w = \frac{\bar{v} - \bar{c} \bar{v}_s}{1 - \bar{c}} \quad \text{-----} \quad (88)$$

Dit wordt met (84.)

$$\bar{v}_w = \bar{v} \frac{1 - \beta \bar{c}}{1 - \bar{c}} \quad \text{-----} \quad (89)$$

Evenzo kunnen we voor $\bar{p}_T$ schrijven

$$p_T = \bar{c}_T p_s + (1 - \bar{c}_T) p_w \quad \text{-----} \quad (90)$$

met (86.) en $A = (p_s - p_w)/p_w$ wordt dit dan

$$\rho_T = \rho_w (1 + \beta \bar{c} \Delta) \text{ ----- (91)}$$

Bekijken we nu een ter illustratie een grondwaterstroming. Hier hebben de korrels een snelheid 0, dus de maximale slip, d.w.z. β is 0. Dan wordt blijkens (86.) $\bar{c}_T = 0$, d.w.z. transport van zuiver water. $\bar{c}$ is gewoon het korrelpercentage van het grondmassief, dus ligt 0,65. De watersnelheid $\bar{v}_w$ is volgens (89.) $\bar{v} / (1 - \bar{c})$, dus ligt $\approx 3\bar{v}$. De ρ_T is volgens (91.) gelijk aan ρ_w

We herzien nu ons vergelykingsstelsel, zoals afgeleid in deel I, en verwerken deze nieuwe symbolen er in. Vgl. (1) wordt nu

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_m h dx + \rho_b z dx) dt = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_T \bar{v} h) \text{ ----- (92)}$$

Substitueren we hierin (91), (4) en (5), dan

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ (1 + \bar{c} \Delta) h \} + (1 + p \Delta) \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \{ (1 + \beta \bar{c} \Delta) \bar{v} h \} \text{ ----- (93)}$$

Vgl. (2) wordt nu

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{c} h dx \rho_s + p z dx \rho_s) = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_s \bar{c} \bar{v}_s h) dx dt \text{ ----- (94)}$$

en na substitutie van (84) en deling door $\rho_s dx dt$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{c} h) + p \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\beta \bar{c} \bar{v} h) \text{ ----- (95)}$$

Vgl. (3.) wordt nu

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ (1-\bar{c}) h dx \rho_w + (1-p) x dx \rho_w \} = - \frac{\partial}{\partial x} \{ \rho_w (1-\bar{c}) \bar{v} h \} dx \dots (96)$$

Na substitutie van (89) en deling door $\rho_w dx$ wordt dit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ (1-\bar{c}) h \} + (1-p) \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \{ (1-\beta \bar{c}) \bar{v} h \} \dots (97)$$

(95.) + (97.) geeft

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} h) \dots (98)$$

Met een constante β wordt (95.)

$$\frac{\partial (\bar{c} h)}{\partial t} + p \frac{\partial z}{\partial t} = - \beta \frac{\partial (\bar{c} \bar{v} h)}{\partial x} \dots (99)$$

We zien dat er in (99) s.o.v. (10.) de slipcoëff. β verschijnt, terwijl (98) s.o.v. (9.) niet is veranderd

We bezien nu opnieuw de bewegingsvgl. en we herzien de impulsbeschouwing volgens Lagrange als volgt. We nemen weer de drie parten als in fig. 5 maar bezien nu van ieder part afzonderlijk de impulsveranderingen van het sediment en het water. Dan wordt (24.) nu

$$\begin{aligned} \Sigma K = & \left[m_1 \frac{d\dot{v}_1}{dt} \right]_w + \left[m_1 \frac{d\dot{v}_1}{dt} \right]_s + m_2 \left[m_2 \frac{d\dot{v}_2}{dt} \right]_w + \left[m_2 \frac{d\dot{v}_2}{dt} \right]_s + \\ & + \left[m_3 \frac{d\dot{v}_3}{dt} \right]_w + \left[m_3 \frac{d\dot{v}_3}{dt} \right]_s \dots (100) \end{aligned}$$

Hierin zijn de laatste twee termen weer nul en :

$$\left[m_1 \frac{d\bar{v}_1}{d\bar{x}} \right]_w = \rho_w h dx (1-\bar{c}) \frac{d\bar{v}_w}{d\bar{x}} \quad \text{--- (101)}$$

$$\left[m_1 \frac{d\bar{v}_1}{d\bar{x}} \right]_s = \rho_s h dx \bar{c} \frac{d\bar{v}_s}{d\bar{x}} \quad \text{--- (102)}$$

$$\left[m_2 \frac{d\bar{v}_2}{d\bar{x}} \right]_w = \rho_w \left(-\frac{\partial \kappa}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \right) dx (1-p) \frac{\bar{v}_w}{d\bar{x}} \quad \text{--- (103)}$$

$$\left[m_2 \frac{d\bar{v}_2}{d\bar{x}} \right]_s = \rho_s \left(-\frac{\partial \kappa}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \right) dx p \frac{\bar{v}_s}{d\bar{x}} \quad \text{--- (104)}$$

Als geven (101.) en (102.) samen

$$m_1 \frac{d\bar{v}_1}{d\bar{x}} = \rho_w h dx \left\{ (1-\bar{c}) \frac{d\bar{v}_w}{d\bar{x}} + \frac{\rho_s}{\rho_w} \bar{c} \frac{d\bar{v}_s}{d\bar{x}} \right\} \quad \text{--- (105)}$$

Als toepassing van (84.) en β constant wordt

$$\frac{d\bar{v}_s}{d\bar{x}} = \frac{d(\beta \bar{v})}{d\bar{x}} = \beta \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \quad \text{--- (106)}$$

Als toepassing van (89.) en β constant wordt

$$\frac{d\bar{v}_w}{d\bar{x}} = \frac{d}{d\bar{x}} \left\{ \bar{v} \frac{1-\beta \bar{c}}{1-\bar{c}} \right\} = \frac{1-\beta \bar{c}}{1-\bar{c}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} + \bar{v} \frac{1-\beta}{(1-\bar{c})^2} \frac{d\bar{c}}{d\bar{x}} \quad \text{--- (107)}$$

Als (106.) en (107.) wordt (105.) :

$$m_1 \frac{d\bar{v}_1}{d\bar{x}} = \rho_w h dx \left\{ (1-\beta \bar{c}) \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} + \bar{v} \frac{1-\beta}{1-\bar{c}} \frac{d\bar{c}}{d\bar{x}} + \frac{\rho_s}{\rho_w} \bar{c} \beta \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_w h dx \left\{ \frac{d\bar{\sigma}}{dx} (1 - \beta \bar{c} + \frac{\rho_s}{\rho_w} \beta \bar{c}) + \bar{\sigma} \frac{(1 - \beta)}{(1 - \bar{c})} \frac{d\bar{c}}{dx} \right\} \\
&= \rho_w h dx \left\{ (1 + \beta \bar{c} \Delta) \frac{d\bar{\sigma}}{dx} + \bar{\sigma} \frac{(1 - \beta)}{(1 - \bar{c})} \frac{d\bar{c}}{dx} \right\} \text{-----} (108)
\end{aligned}$$

Verder geven (103.) en (104.) samen

$$m_2 \frac{d\bar{\sigma}_2}{dx} = -\rho_w \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} dx \left\{ \bar{\sigma}_w (1 - \beta) + \bar{\sigma}_s \beta \frac{\rho_s}{\rho_w} \right\} \text{-----} (109)$$

Na toepassing van (84.) en (89.) en enige bewerkingen verkrijgen we duslotte

$$m_2 \frac{d\bar{\sigma}_2}{dx} = -\rho_w \bar{\sigma} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} dx \left(\frac{1 - \beta \bar{c}}{1 - \bar{c}} + \beta \rho \Delta + \frac{\rho (3 - 1)}{1 - \bar{c}} \right) \text{-----} (110)$$

Voor het verkrijgen van de som van de krachten werken we vgl. (17.). Deze wordt dan :

$$\Sigma K = -\bar{\rho}_m g h dx \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{h}{\bar{\rho}_m} \frac{\partial \bar{\rho}_m}{\partial x} \right\} + T_{\text{tot}} dx \text{-----} (111)$$

De T_{tot} , die in deze formule verschijnt is de totale wrijving aan de bodem, dus de som van de normale waterwrijving T_0 , de wrijving t.g.v. het stilleggen van karrels T_K en de wrijving t.g.v. het slepen van de karrels over de bodem T_* . Deze laatste wrijving veroorzaakt de slip. In symbolen :

$$T_{\text{tot}} = T_0 + T_K + T_* \text{-----} (112)$$

Onze bewegingsvgl. vinden we nu door samen voe-

ging van de vgl. (708.), (710.), (711.) en (712.), waar-
bij we $\bar{p}_m$ in (711.) schrijven volgens (4).

$$\begin{aligned} & \frac{1+\beta\bar{c}\Delta}{1+\bar{c}\Delta} \frac{1}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{1+\beta\bar{c}\Delta}{1+\bar{c}\Delta} \frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{h\Delta}{1+\bar{c}\Delta} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \frac{\bar{c}_0 + \bar{c}_k + \bar{c}_*}{\rho_w(1+\bar{c}\Delta)g h} - \left\{ \frac{\frac{1-\beta\bar{c}}{1-\bar{c}} + \beta p\Delta}{1+\bar{c}\Delta} \right\} \frac{\bar{v}}{hg} \frac{\partial z}{\partial x} - \\ & \frac{\gamma(\beta-1)}{(1-\bar{c})(1+\bar{c}\Delta)} \frac{\bar{v}}{hg} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1-\alpha}{(1-\bar{c})(1+\bar{c}\Delta)} \frac{\bar{v}}{g} \left\{ \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right\} = 0 \dots\dots (713.) \end{aligned}$$

Dit is een erg ingewikkelde vergelijking, maar hij is
nog wel voor vereenvoudiging vatbaar. We kunnen met
een analoge redenering als die voor de afleiding van
(28.) en (29.) nu stellen dat:

$$\tau_k dx = m_2 \frac{d\bar{v}_2}{dx} \dots\dots\dots (714.)$$

en

$$\tau_0 = -\bar{p}_m g \frac{\bar{v}|\bar{v}|}{c_h^2} \dots\dots\dots (29.)$$

Erg vaag blijft echter de term met τ_* . We kun-
nen ook $\bar{c} \ll 1$ stellen en $\bar{c}$ verwaarlozen t.o.v. 1.

De bewegingsvgl. wordt dan:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{h\Delta}{1+\bar{c}\Delta} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\bar{v}|\bar{v}|}{c_h^2 h} - \\ & - \frac{\tau_*}{\rho_w g h} + (1-\beta) \frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + (1-\beta) \frac{\bar{v}^2}{g} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (715.) \end{aligned}$$

We zien dus drie extra termen verschijnen v.o.v. vgl. (33.), waarvan de eerste de nodige moeilijkheden oplevert, omdat we zo weinig van T_* weten.

De vraag komt op welke waarde we aan β moeten toekennen. Om deze vraag te kunnen beantwoorden is een onderzoek van ir. Breusers [3] bestudeerd. Dit onderzoek bevat gegevens over de transportfactor β in hellende buizen (van $0-90^\circ$) voor verschillende snelheden, concentraties en korrelgroottes. Voor ons is van belang de β bij kleine snelheden (tot $\pm 1 \text{ m/sec}$) voor een helling van 0° , kleine korreldiameters (tot $0,2 \text{ mm}$) en zeer kleine concentraties ($\pm 0,1 \%$). Onder deze omstandigheden wordt echter in bovenbedoeld rapport geen onderzoek gedaan. Onder de omstandigheden, waarin deze proeven plaatsvonden is er vrijwel uitsluitend sprake van "bodem transport". Voor ons probleem zijn deze resultaten dan ook niet bruikbaar. Het wachden is op een onderzoek naar de slipcoëff. onder omstandigheden, waarin suspensie-transport bestaat.

Hoe groot de invloed is van de slip in ons model, is, behalve door gebrek aan kennis omtrent de grootte van β , moeilijk te bepalen door de term met T_* . Vergroting van de kennis omtrent deze invloed vereist een diepgaande studie in de energiewisseling van water- en sedimentdeeltjes aan elkaar en aan de bodem. Hiervoor zal een één dimensionale beschouwing niet volstaan. Bovendien is de kans groot, dat we hier ook het terrein gaan betreden van het bodemtransport.

Al met al zullen wij, bij gebrek aan beter, $\beta=1$
 kiezen, zoodaende alle bovengenoemde moeilijkheden
 omzeilend. Wel geloof ik, dat kennis omtrent het
 bovengenoemde in zake onontbeerlijk is voor een
 goed inzicht in het suspensie-transport.

III - 2 De diffusietheorie

Zoals in de inleiding van dit hoofdstuk is gezegd, bedoelt dit deel een vervanging te leveren voor de λ -vergelijking (77). We wensen een vergelijking te vinden, die de concentratieverandering in langsrichting en tijd beschrijft, die meer gebaseerd is op een theoretische beschouwing, dan de λ -vgl. Omdat diffusie het zich vermengen van met elkaar in aanraking zijnde stoffen d.g.v. relatieve bewegingen, zoals warmtebeweging en turbulente beweging, is, en wij in feite met deze reële vermenging te maken hebben in ons probleem, mogen wij verwachten, dat uit de diffusietheorie een voor ons bruikbare vergelijking is te destilleren.

De ééndimensionale diffusievergelijking, die de spreiding van opgeloste stoffen en gesuspendeerde stoffen in de langsrichting van een kanaal beschrijft, ziet er als volgt uit:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad \text{-----} \quad (116.)$$

waarbij voor verschillende omstandigheden uitdrukkingen voor K_x bekend zijn. Als we deze vergelijking (116.) permanent maken en integreren krijgen we:

$$K_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \bar{v} \bar{c} + \text{const} \quad \text{-----} \quad (117.)$$

Met $\bar{c} = c_0$ voor $\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = 0$ wordt dit:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\bar{v}}{K_x} (\bar{c} - c_e) \text{ ----- (118)}$$

Dere vgl. lijkt erg veel op de permanent gemaakte δ -vgl., zoals wij die met vgl. (44) gaven. Daarom leek het nuttig om ons te verdiepen in de diffusietheorie. De meest heldere en complete uiteenzetting hierover is die van Sayre en Chang [4], welke we hier dan ook als leidraad zullen volgen.

De algemene diffusievergelijking luidt in Ricci-notatie:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{c' v_i'} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{c'' v''} \text{ ----- (119)}$$

waarin de accenten op de schrikkelende beweging duiden, de dubbelaccenten op de warmtebeweging en de "gemiddelde strepen" op het tijds-gemiddelde. Definieren we nu:

$$E_{M_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} \equiv - \overline{c'' v_i''} \text{ ----- (120)}$$

$$E_{T_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} \equiv - \overline{c' v_i'} \text{ ----- (121)}$$

waarin E_{M_i} en E_{T_i} respectievelijk de coëff. van moleculaire en schrikkelende diffusiviteit zijn. Stel dat E_{M_i} en E_{T_i} onafhankelijk van elkaar zijn. We mogen ze dan opstellen. Noem de som E_i , dan

$$E_i = E_{M_i} + E_{T_i} \text{ ----- (122)}$$

Schrijven we (119.) nu in de gebruikelijke coördinaten, met toepassing van (120.), (121.) en (122.), met bovendien de horizontale over de tijd gemiddelde snelheid in dwarsrichting — in de richting van de x' -as — gelijk aan nul, dan wordt deze vergelijking voor opgeloste stoffen:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + v_w \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} + w_w \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon_x \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon_y \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\epsilon_{x'} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x'} \right] \text{-----} (123.)$$

en voor gesuspendeerde stoffen:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + v_s \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} + w_s \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon_{x_s} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon_{y_s} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\epsilon_{x'_s} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x'} \right] \text{-----} (124.)$$

We stellen nu ter vereenvoudiging van (123.) $w_w = 0$ en ϵ_x , ϵ_y en $\epsilon_{x'}$ onafhankelijk van x . Bovendien realiseren we ons dat voor opgeloste stoffen de snelheid gelijk is aan die van het water, dus ook aan die van het mengsel. m. a. w. $v_w = v$. Hiermee wordt (123.):

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} = \epsilon_x \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon_y \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\epsilon_{x'} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x'} \right] \text{-----} (125.)$$

Voor gesuspendeerde stoffen doen we iets identieks. Ook hier stellen we $w_w = 0$, waarmee $w_s = -w$ wordt (immers $w_s = w_w - w$ --- (36.)). Ook ϵ_{x_s} , ϵ_{y_s} en $\epsilon_{x'_s}$ stellen we onafhankelijk van x . Dan wordt (124.):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_s \frac{\partial c}{\partial x} - w \frac{\partial c}{\partial y} = \varepsilon_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\varepsilon_{x'}' \frac{\partial c}{\partial x'} \right] \dots (126)$$

We houden ons nu eerst bezig met vgl. (125.), dus met de opgeloste stoffen, omdat deze wat eenvoudiger is dan (126.) door het ontbreken van de vert. valsnelheid w en dus van het neerslagmechanisme. Bexien we vgl. (125.) gaed, dan zien we dat het een continuïteitsvgl. voorstelt, voor een elementje $dx \, dy \, dx'$. Een continuïteitsvgl. echter, waarin in rekening gebracht is de invloed van de transportverschillen aan de zijvlakjes van de turbulente en moleculaire bewegingen (het rechter lid). Bovendien is het een continuïteitsvgl. voor een uniforme stroom, d.w.z. op de concentratie na uniform. Dit zou betekenen dat we hier te doen hebben met een vergelijking vergelijkbaar met (70.), echter uitgebreid met de invloed van de turbulentie, beteken voor een uniforme stroom en met een neerslag gelijk nul (opgeloste stoffen). We gaan om (125.) geschikter te maken voor ons model trachten hem te integreren over de hoogte en de breedte. We gaan hem dus beschouwen voor een moot. We zien dat de laatste twee termen van (125.) alleen transportverschillen beschrijven binnen de moot. Daarbij verdwijnt er niets uit het mengsel in die richtingen (hetgeen zou kunnen gebeuren door neerslag, $b \neq b_s$, e.d.), dus na integratie over de hoogte en de breedte vallen die termen weg. Voordat we (125.) gaan integreren voeren we eerst nog enkele afspraken in. We splitsen c en c' als volgt:

$$v = v(x, y, x) = \bar{v}(x, x) + v^*(x, y, x) = \bar{v} + v^* \dots \dots (127)$$

$$c = c(x, y, x) = \bar{c}(x, x) + c^*(x, y, x) = \bar{c} + c^* \dots \dots (128)$$

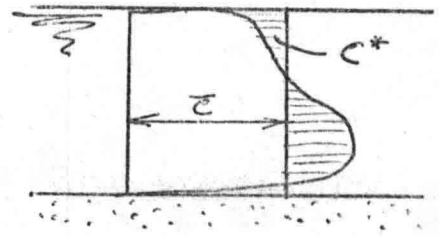
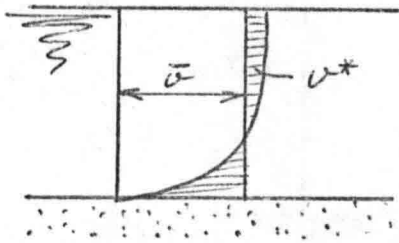


fig. 6

waarbij

$$\int_0^h v^* dy = 0 \quad \text{en} \quad \int_0^h c^* dy = 0 \dots \dots (129)$$

Bovendien schrijven we $v \frac{\partial c}{\partial x}$ als $\frac{\partial (vc)}{\partial x}$, wat voor een uniforme stroom identiek is. Het al deze afspreek leveret (125.) geïntegreerd dus:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial c}{\partial x} dy + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial (vc)}{\partial x} dy = \frac{1}{h} \int_0^h \epsilon_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} dy \dots \dots (130.)$$

waarbij stilzwijgend is aangenomen, dat de veranderlijken in breedterichting constant zijn, waardoor integratie in die richting niets doet veranderen. Alleen is nu (130.) beschouwd per eenheid van breedte.

Substitueren we nu (127.) en (128.) in (130.) dan

$$\frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial (\bar{c} + c^*)}{\partial x} dy + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial \{(\bar{v} + v^*)(\bar{c} + c^*)\}}{\partial x} dy = \frac{1}{h} \int_0^h \epsilon_x \frac{\partial^2 (\bar{c} + c^*)}{\partial x^2} dy \dots \dots (131.)$$

Dit wordt na uitsplitsing en verwisseling van de volgorde integreren - differentiëren :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \bar{c} dy + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h c^* dy + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^h \bar{c} \bar{v} dy + \int_0^h \bar{c} v^* dy \right. \\ \left. + \int_0^h c^* \bar{v} dy + \int_0^h c^* v^* dy \right\} = \frac{1}{h} \int_0^h \epsilon_x \frac{\partial^2 (\bar{c} + c^*)}{\partial x^2} dy \quad \text{----- (132.)} \end{aligned}$$

Dit wordt met (129.) en de definities voor $\bar{v}$ en $\bar{c}$:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{c} \bar{v})}{\partial x} = - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h c^* v^* dy + \frac{1}{h} \int_0^h \epsilon_x \frac{\partial^2 (\bar{c} + c^*)}{\partial x^2} dy \quad \text{--- (133.)}$$

We definiëren nu :

$$\frac{1}{h} \int_0^h \epsilon_x \frac{\partial^2 (\bar{c} + c^*)}{\partial x^2} dy \equiv K_T \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad \text{----- (134.)}$$

Dere beschrijft de diffusie in x -richting A.g.v. de turbulentie. K_T is de coëff. van turbulente diffusiviteit.

Verder wordt gepostuleerd de evenredigheid tussen $\int c^* v^*$ en $\partial \bar{c} / \partial x$, naar analogie van (120.) en (127.), hetgeen als zeer discutabel moet worden gezien.

Dere evenredigheid luidt

$$K_c \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \equiv - \frac{1}{h} \int_0^h c^* v^* dy = - \overline{c^* v^*} \quad \text{----- (135.)}$$

Omdat dere skun de transport A.g.v. de convectie beschrijft, wordt K_c de coëff. van convectieve diffusiviteit genoemd. We stellen dere onafhankelijk van x . Definieren we nu nog :

$$K_x \equiv K_c + K_T \text{ ----- (136)}$$

dan wordt (133) nu, met $\bar{c} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0$ t.g.v. de uniformiteit:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_c \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + K_T \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} = K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \text{ ----- (137)}$$

Dit is dezelfde vergelijking als (116). Maar we weten nu wat deze vgl. voor opgeloste stoffen voorstelt. In feite is het de continuïteitsvergelijking voor de opgeloste stoffen voor een uniforme stroom, uitgebreid met de invloed van het transport door turbulentie en t.g.v. het niet constant zijn van v en c over de hoogte. Of anders gezegd: Er is in deze vergelijking rekening gehouden met het feit, dat het transport niet wordt veroorzaakt door $\bar{v} \bar{c}$ maar door $\overline{VC}$. En $\overline{VC} = \bar{v} \bar{c} + \overline{v^* c^*} + \overline{v' c'} (+ \overline{v'' c''})$. De invloed van de tweede en derde term in het rechterlid van deze vgl. op de concentratieverdeling wordt weergegeven door de eerste en tweede term van het middelste lid van vgl. (137) (zie hiervoor ook de verschillende hiervoor gegeven definities.)

Er zijn verschillende onderzoekers bezig geweest met het onderzoek naar K_c . Voor ons is dit verder niet urgent. Beter is nu direct over te stappen naar de gesuspendeerde stoffen.

Voor gesuspendeerde stoffen hadden we vgl. (126.) Gaan we deze uitwerken, dan valt als bij de opgeloste stoffen de term voor de x' -richting weg. In tegenstelling tot de opgeloste stoffen, mogen we nu

niet meer stellen, dat de beweging in y -richting geen invloed heeft op de gemiddelde concentratie, vanwege het neerslagmechanisme. Na integratie, als voor (125.), wordt (126.):

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{v}_s \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_T \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + K_C \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} [w c + e_y \frac{\partial c}{\partial y}] dy \quad (138.)$$

Voor deze vgl. voor gesuspenderde stoffen kunnen we hetzelfde concluderen als boven gedaan is voor vgl. (137.). In feite is (138.) dus de continuïteits- vgl. voor de korrels, overeenkomend met vgl. (70.), alleen voor een uniforme stroom met daarin begrepen de invloed van het transport t.g.v. de turbulente bewegingen en het transport veroorzaakt door de afwijking van hun gemiddelden van snelheid en concentratie. We zien in (138.) een extra term verschijnen t.g.v. (137.). Dit is de invloed van het neerslagmechanisme van gesuspenderde stoffen. Hierover nu de volgende beschouwing.

Het is niet moeilijk in te zien dat $w c + e_y \frac{\partial c}{\partial y}$ het resulterend transport van korrels door een horizontaal laagje op hoogte y weergeeft. Het is nl. de som van het transport t.g.v. de valnelheid en die t.g.v. de turbulente bewegingen. Dit transport zal nul zijn indien:

$$w c + e_y \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad \text{-----} \quad (139.)$$

Als we dit anders schrijven komt het ons bekender voor. Verwerken we nl. (727.) hier weer in, dan:

$$w c - \overline{w_s' c'} = 0 \quad \text{-----} \quad (140.)$$

en dit is, op een factor $(1-\bar{c})$ na en $w_s' = w_w'$, dezelfde vgl als vgl. (43.). Ook daar stelde het evenwicht in transport voor.

Integreren we de toename van dit transport over de hoogte, dan krijgen we achtereenvolgens

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h \partial (wc + \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y}) &= \frac{1}{h} \left[wc + \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right] \Big|_0^h \\ &= \frac{1}{h} \left[wc + \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right]_h - \left[wc + \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right]_0 \quad \text{----- (141.)} \end{aligned}$$

De eerste term van het laatste lid stelt voor het transport door het opp. ($= s_0$) gedeeld door h , dus s_0/h , de tweede term stelt voor het transport uit de moort naar de bodem ($= p \frac{\partial z}{\partial t}$), gedeeld door h , dus $p/h \frac{\partial z}{\partial t}$. We kunnen dus voor (141.) schrijven:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \partial (wc + \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y}) dy = \frac{s_0}{h} - \frac{p}{h} \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{----- (142.)}$$

Hiervan wordt (73d.):

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{v}_s \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_{x_s} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{s_0}{h} - \frac{p}{h} \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{----- (143.)}$$

Rekapitulatie en Conclusie

1^e) Vgl. (116.), de vergelijking naar aanleiding waarvan wij ons onderzoek van de diff. theorie startten, is vgl. (143.) met de neerslag gelijk 0. Dus (116.) geldt alleen voor de evenwichtssituatie. Glij is dus voor ons niet te gebruiken.

2^e) De extra term in (143.), welke de invloed van ster-

bulentie en afwijking van v en c van hun gemiddelden beschrijft, bevat een zeer discutabel evenredigheidsaanname (135). Bovendien wordt (zie [4]) de evenredigheidsfactor K_{x_3} afgeleid voor de evenwichtssituatie (geen neerslag.), met daarbij nog zeer grove aannamen. Het meenemen van deze invloed kan dan ook in deze vorm niet als een verbetering worden gezien, en, totdat er een betere beschrijving van deze invloed gevonden is, zal deze moeten worden verwaarloosd.

3e) De injectie aan de bovenzijde s_0 hadden we ook in de afleiding van de basisvgl. kunnen meenemen. Dat hebben we daar niet gedaan en ook nu zullen we hem verder achterwege laten.

4e) Het wat voorstellingsvermogen is (143) "niet uniform" te maken. Hij wordt dan:

$$\frac{\partial(h\bar{c})}{\partial x} + p \frac{\partial x}{\partial t} = - \frac{\partial(\bar{v}_s h \bar{c})}{\partial x} + K_{x_3} h \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + s_0 \text{ ----- (144.)}$$

We zien, dat het inderdaad een uitbreiding is van vgl (10.), of, nog beter, van vgl. (95.) (met $\bar{v}_s = \beta \bar{v}$)

5e) Uit (77) en (142.) en $s_0 = 0$ kunnen we afleiden dat:

$$dh(\bar{c} - c_e) = \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} \left[\omega c + E_y \frac{\partial c}{\partial y} \right] dy \text{ ----- (145.)}$$

Deze vgl. zegt o.a. dat de neerslag afhankelijk is van de concentratiegradiënt, van E_y en van de concentratie aan de bodem. Van geen van deze drie veranderlijken kunnen we iets zinnigs zeggen, hetgeen de onderhavige problemen illustreert.

Concluderende kunnen we stellen, dat ons onderzoek

van de diffusietheorie geen wezenlijke bijdrage heeft geleverd aan ons vergelijkingenstelsel. Wel heeft het ons inzicht in de factoren welke meespelen in het hele proces vergroot. Bovendien heeft deze studie mij duidelijk gemaakt, dat een vervangende vgl voor de α -vgl. gevonden zal moeten worden via een tweedimensionaal model. Het min of meer parallel lopen van de diffusietheorie en de gravitatie-theorie van Velikanov, en het op betere theoretische gronden gebaseerd zijn van deze laatste, heeft bij mij de hoop gevestigd, dat bestudering van deze theorie wellicht meer resultaat zal opleveren.

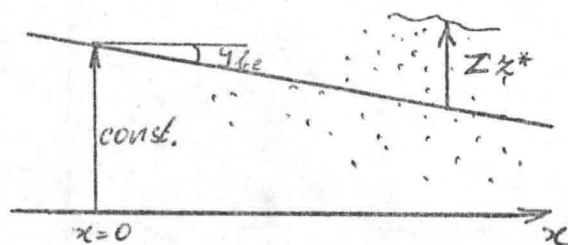
IV De verwerking van het vereenvoudigde proces in een computerprogramma en de bespreking van de resultaten hiervan

IV-1 Het vereenvoudigen van het vergelijking-systeem.

Om dit vereenvoudigen - door verwaarlozing van de ene term t.o.v. een ander - systematisch te kunnen doen herschrijven we ons stelsel, gegeven op blz. 34, door alle termen te splitsen in een veranderlijk deel van de orde $O(1)$ en een constante schaalfactor. Hiertoe schrijven we onze veranderlijken als volgt:

$$\left. \begin{aligned} h &= H h^* \\ \bar{v} &= V v^* \\ \bar{c} &= C c^* \\ \bar{x} &= \text{const} - Y_{be} \cdot x + Z z^* \quad (\text{zie fig. 7}) \\ c_e &= C_e c_e^* \end{aligned} \right\} \quad (146.)$$

fig. 7



In (146.) zijn dus H, V, C, Y_{be}, Z en C_e constanten en h^*, v^*, c^*, z^* en c_e^* veranderlijken van de orde $O(1)$.

Verder stellen we :

$$\left. \begin{aligned} A &= T_h A_h^* = T_v A_v^* = T_c A_c^* = T_z A_z^* \\ x &= X_h x_h^* = X_v x_v^* = X_c x_c^* = X_z x_z^* \end{aligned} \right\} \text{--- (147.)}$$

waarin $T_h, T_v, T_c, T_z, X_h, X_v, X_c$ en X_z weer constanten zijn en waarlijk $A_h^*, A_v^*, A_c^*, A_z^*, x_h^*, x_v^*, x_c^*$ en x_z^* zodanig gekozen zijn, dat de veranderlijke differentiaalquotienten als $\partial h^* / \partial x^*, \partial h^* / \partial A^*, \partial v^* / \partial x^*$, enz. van de orde $\mathcal{O}(1)$ zijn.

Hiermee worden dus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial A} &= \frac{H}{T_h} \frac{\partial h^*}{\partial A_h^*} & ; & \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{H}{X_h} \frac{\partial h^*}{\partial x_h^*} \\ \frac{\partial v}{\partial A} &= \frac{V}{T_v} \frac{\partial v^*}{\partial A_v^*} & ; & \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V}{X_v} \frac{\partial v^*}{\partial x_v^*} \\ \frac{\partial c}{\partial A} &= \frac{C}{T_c} \frac{\partial c^*}{\partial A_c^*} & ; & \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{C}{X_c} \frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} \\ \frac{\partial z}{\partial A} &= \frac{Z}{T_z} \frac{\partial z^*}{\partial A_z^*} & ; & \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -Y_{be} + \frac{Z}{X_z} \frac{\partial z^*}{\partial x_z^*} \end{aligned} \right\} \text{--- (148.)}$$

We stellen nu $\frac{\partial v^*}{\partial x}$ en $\frac{\partial h^*}{\partial x}$ van dezelfde grootteorde men als $\frac{\partial v^*}{\partial A}$ en $\frac{\partial h^*}{\partial A}$. Dan wordt:

$$X_h = X_v \equiv X_z \quad \text{en} \quad T_h = T_v \equiv T_z \quad \text{--- (149.)}$$

Hiermee herschrijven we nu het vgl. stelsel van blz. 37.

(g.) wordt:

$$\frac{H}{T_g} \frac{\partial h^*}{\partial x_g^*} + \frac{Z}{T_x} \frac{\partial z^*}{\partial x_x^*} + \frac{VH}{X_g} \frac{\partial (v^* h^*)}{\partial x_g^*} = 0 \quad \text{----- (750)}$$

ofwel, na deling door H/T_g :

$$\frac{\partial h^*}{\partial x_g^*} + \frac{Z}{H} \frac{T_g}{T_x} \frac{\partial z^*}{\partial x_x^*} + \frac{VT_g}{X_g} \frac{\partial (v^* h^*)}{\partial x_g^*} = 0 \quad \text{----- (751)}$$

(33.) wordt:

$$\begin{aligned} \frac{V}{g T_g} \frac{\partial v^*}{\partial x_g^*} + \frac{V^2}{g X_g} v^* \frac{\partial v^*}{\partial x_g^*} + \frac{H}{X_g} \frac{\partial h^*}{\partial x_g^*} - y_{be} + \frac{Z}{X_x} \frac{\partial z^*}{\partial x_x^*} + \\ + \frac{1}{2} \frac{H a c}{(1 + c c^* \Delta) X_c} h^* \frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} + \frac{V^2}{c_h^2 H} \frac{v^* |v^*|}{h^*} = 0 \quad \text{----- (752)} \end{aligned}$$

ofwel na deling door $V^2/g X_g$:

$$\begin{aligned} \frac{X_g}{T_g V} \frac{\partial v^*}{\partial x_g^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial x_g^*} + \frac{H g}{V^2} \frac{\partial h^*}{\partial x_g^*} - \frac{g X_g}{V^2} y_{be} + \\ + \frac{g X_g}{V^2} \frac{Z}{X_x} \frac{\partial z^*}{\partial x_x^*} + \frac{1}{2} \Delta \frac{1}{(1 + c c^* \Delta)} \frac{H g}{V^2} \left\{ \frac{X_g}{X_c} c \right\} h^* \frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} + \\ + \frac{g X_g}{c_h^2 H} \frac{v^* |v^*|}{h^*} = 0 \quad \text{----- (753)} \end{aligned}$$

Of met het getal van Froude $F = \frac{V^2}{g H}$:

$$\frac{X_g}{T_g V} \frac{\partial v^*}{\partial x_g^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial x_g^*} + \frac{1}{F} \frac{\partial h^*}{\partial x_g^*} - \frac{1}{F} \frac{X_g}{H} y_{be} + \frac{1}{F} \frac{X_g}{H} \frac{Z}{X_x} \frac{\partial z^*}{\partial x_x^*} +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta \frac{1}{(1 + Cc^*)} \frac{1}{F} \frac{K_g}{K_c} C h^* \frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} + \frac{g K_g}{Ch^2 H} \frac{v^* |v^*|}{h^*} = 0 \quad \text{----- (154.)}$$

(79.) wordt:

$$\frac{VC}{K_c} v^* \frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} + \frac{c}{T_c} \frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} = \alpha (c c^* - c_e c_e^*) \frac{P - C c^*}{P} \quad \text{----- (155.)}$$

ofwel na deling door c/T_c :

$$\frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} + \frac{VT_c}{K_c} v^* \frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} = \frac{\alpha T_c}{c} (c c^* - c_e c_e^*) \frac{P - C c^*}{P} \quad \text{----- (156.)}$$

(34.) wordt:

$$C_e c_e^* = \frac{K}{g_w} \frac{V^3}{H} \frac{v^{*3}}{h^*} \quad \text{----- (157.)}$$

(77.) wordt:

$$\frac{PZ}{T_x} \frac{\partial z^*}{\partial x_z^*} = -\alpha H h^* (C c^* - C_e c_e^*) \quad \text{----- (158.)}$$

ofwel na deling door PZ/T_x :

$$\frac{\partial z^*}{\partial x_z^*} = - \frac{\alpha H T_x C}{PZ} h^* (c^* - \frac{C_e}{C} c_e^*) \quad \text{----- (159.)}$$

Wk hebben nu dus ons vgl. stelsel (9.), (33.), (79.), (77.) en (34.) vervangen door vgl. stelsel (152.), (154.), (156.), (157.) en (159.), waarin alle termen bestaan uit een veranderlijke van de orde $O(1)$ en een constan- te schaalfactor, m.a.w. stelsel (9.), (33.), nu is "genormaliseerd". De ene term is nu d.o.v. de andere

verwaarloosbaar, indien de schaalfactor van die ene term veel kleiner is dan die van die andere term.

Het geval dat wij nu gaan beschouwen is het "semi-permanente" geval. Dit is het geval, waarbij de veranderingen in de tijd worden verwaarloosd t.o.v. de veranderingen in langsrichting. Echter wordt wel rekening gehouden met de veranderingen op lange termijn, welke veroorzaakt worden door de veranderingen van de bochtligging. Voor vgl. (g.) betekent dit:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ van dezelfde orde van grootte en beide} \\ \text{veel kleiner } (\ll) \text{ dan } \bar{v} \frac{\partial h}{\partial x} \text{ en } h \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \end{array} \right\} \dots (160.)$$

Voor (33.) betekent dit:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \ll \frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \dots \dots \dots (161.)$$

en voor (79.):

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \ll \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \dots \dots \dots (162.)$$

alt. b.v. vgl. (151.) kunnen we nu ~~voor~~ (160.) vertalen in

$$\frac{Z}{H} \frac{T_2}{T_z} = 1 \dots \dots \dots (163.)$$

en

$$\frac{VT_2}{K_2} = \frac{1}{\delta} \quad \text{met } \delta \ll 1 \dots \dots \dots (164.)$$

ch. b.v. vgl. (154.) kunnen we (167.) verdalen in :

$$\frac{K_g}{T_g V} \ll 1, \text{ maar dat vonden we reeds in vgl. (164.)}$$

(162.) verdaald met behulp van (156.) geeft:

$$\frac{VT_c}{K_c} = \frac{1}{\epsilon} \quad \text{met } \epsilon \ll 1 \quad \text{----- (165.)}$$

Ook voor de andere termen kunnen we bepalen of we ze al dan niet verwaarlozen d.o.v. weer andere termen. Wij stellen het navolgende

$$\frac{\bar{\sigma}}{g} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} \text{ is van dezelfde orde als } \frac{\partial h}{\partial x}, \text{ als } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ en als de weersstandsterm}$$

Dit levert met vgl. (154) achtereen volgens

$$F=1, \text{ ofwel } \frac{V^2}{gH} = 1 \quad \text{----- (166.)}$$

$$\frac{K_g}{H} Y_{be} = 1, \text{ ofwel } Y_{be} = \frac{H}{K_g} \quad \text{----- (167.)}$$

$$\frac{K_g}{H} \frac{Z}{K_z} = 1, \text{ ofwel } Y_{be} = \frac{Z}{K_z} \quad \text{----- (168.)}$$

$$\frac{g K_g}{C_h^2 H} = 1, \text{ ofwel } Y_{be} = \frac{g}{C_h^2} \quad \text{----- (169.)}$$

We substitueren nu even (139.) in (137.). We verkrijgen dan :

$$\frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} + \frac{VT_c}{x_c} c^* \frac{\partial c^*}{\partial x_c^*} = - \frac{P - Cc^*}{P} \frac{P Z T_c}{C H T_x} \frac{\partial x^*}{\partial x_c^*} \quad (170)$$

Stellen we nu

$$C \ll 1, \text{ dus ook } C \ll P \quad (171)$$

dan volgt uit (170.), rekening houdend met (165.)

$$\frac{P Z T_c}{C H T_x} = \frac{V T_c}{x_c} \quad \text{ofwel} \quad \frac{V H T_x C}{x_c P Z} = 1 \quad (172)$$

met (165.) krijgen we dan:

$$\frac{H T_c C}{Z T_c P} = \varepsilon \quad (173)$$

Bekijken we nu de 6de term van (154.). Deze is t.o.v. de 2de te verwaarlozen indien:

$$\frac{1}{2} \Delta \frac{1}{(1 + Cc^* \Delta)} \frac{1}{F} \frac{x_2}{x_c} C \ll 1 \quad (174)$$

met (166.) en (171.) en de substitutie van (144) in (145.):

$$x_2 = \delta \frac{V H T_x}{Z} \quad (175)$$

hetgeen met (172.) geeft

$$\frac{x_2}{x_c} = \delta \frac{P}{C} \quad (176)$$

wordt:

$$\frac{1}{2} \Delta \frac{1}{(1+C_c^* \Delta)} \frac{1}{F} \frac{X_g}{X_c} C \approx \frac{1}{2} \Delta \delta p \ll 1$$

waarmee dus (174.) is aangestaan en de 6^{de} term d.o.v. de 2^{de} te verwaarlozen is.

Verder kunnen we voor (157.) nog stellen:

$$C_e = \frac{K}{g w} \frac{V^3}{H} \text{-----} (177)$$

We stellen ook C van dezelfde orde van grootte als C_e , dus dan:

$$C = C_e = \frac{K}{g w} \frac{V^3}{H} \text{-----} (178)$$

Uit vgl. (156.) volgt dan, met (165.) en (177.):

$$\frac{V T_c}{X_c} = \alpha \frac{T_c}{C} C, \text{ ofwel } \frac{V}{X_c} = \alpha \text{-----} (179)$$

Opmer.: We hebben 12 constante schaalfactoren ingevoerd, nl. $V, H, Z, C, C_e, T_{ge}, T_g, T_z, T_c, X_g, X_x$ en X_c .

Tenslotte hebben we 11 vgl. gevonden, nl. (163.), (164.), (165.), (166.), (167.), (168.), (169.), (172.), (177.), (178.) en (179.). Niet een keuze voor T_{ge} (hijv. de evenwichts-bodemhelling, zoals we hem verderop zullen definiëren), kunnen we dus in principe uit 12 vgl. de 12 ~~ste~~ schaalfactoren oplossen. Wij zullen dat echter niet doen, om de hoeveelheid werk te beperken. Wij bekijken uitsluitend, welke termen we op grond van deze theorie kunnen verwaarlozen.

Verwaarlozen we alle termen die veel kleiner zijn

dan een andere term uit de vgl. en gaan we weer over op onze oorspronkelijke symbolen, dan wordt ons vereenvoudigde vgl. stelsel:

$$\frac{\partial(\bar{\sigma}h)}{\partial x} = 0 \text{ ----- (180.)}$$

$$\frac{\bar{\sigma}}{g} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \gamma_{be} + \frac{\sigma|\bar{\sigma}|}{c_h^2 h} = 0 \text{ ----- (181.)}$$

$$\bar{\sigma} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \alpha (\bar{c} - c_e) \text{ ----- (182.)}$$

$$\bar{\sigma} \frac{\partial x}{\partial t} = -\alpha h (\bar{c} - c_e) \text{ ----- (183.)}$$

$$c_e = \frac{K}{g_w} \frac{\bar{\sigma}^3}{h} \text{ ----- (34.)}$$

waarin

$$\bar{z} = x + \gamma_{be} x + \text{constante} \text{ ----- (183.)}$$

Bovendien stellen we γ_{be} gelijk aan de evenwichtshelling van de bodem, d.w.z. de bodemhelling in de situatie, waarbij $c = c_e$ en $h = h_e$

dan is $\bar{\sigma} h = q$ en daarmee wordt (34.)

$$c_e = \frac{K}{g_w} \frac{q^3}{h^4} \text{ ----- (184.)}$$

We stellen nu

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \gamma_{be} = -\gamma_b(x, t) = -\gamma_b \text{ ----- (185.)}$$

Med (1785.), $\bar{v} = q/h$ en (1780.) wordt (1787.) :

$$-\frac{q^2}{gh^3} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - \gamma_b + \frac{q^2}{C_h^2 h^3} = 0 \quad \text{--- (1786.)}$$

Als we $\partial h / \partial x$ expliciet schrijven wordt (1786.)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \gamma_b \left\{ \frac{h^3 - \frac{q^2}{\gamma_b C_h^2}}{h^3 - \frac{q^2}{\gamma}} \right\} \quad \text{--- (1787.)}$$

een vergelijking welke ons wel bekend is uit de verhanglijnen theorie :

Ons vergelijkingensysteem wordt dus tenslotte :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \gamma_b \left\{ \frac{h^3 - \frac{q^2}{\gamma_b C_h^2}}{h^3 - \frac{q^2}{\gamma}} \right\} \quad \text{--- (1787.)}$$

$$v = \frac{q}{h} \quad \text{--- (1783.)}$$

$$c_e = \frac{\kappa}{g w} \frac{v^3}{h} \quad \text{--- (1784.)}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\alpha}{v} (c - c_e) \quad \text{--- (1782.)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\alpha}{p} h (c - c_e) \quad \text{--- (1781.)}$$

Men volgt een globale beschrijving van het verloop van het rekenproces. Ter illustratie is een stroomschemaatje bijgevoegd. (fig. 8).

De volgende rand- en beginvoorwaarden worden ingevoerd:

De bodemligging op $x=0 \rightarrow \bar{x}(x, 0)$

De constante concentratie bovenstrooms $\rightarrow c(0, t)$

Het constante waterniveau benedenstrooms (x_n)

$$\rightarrow h(x_n, t) + \bar{x}(x_n, t)$$

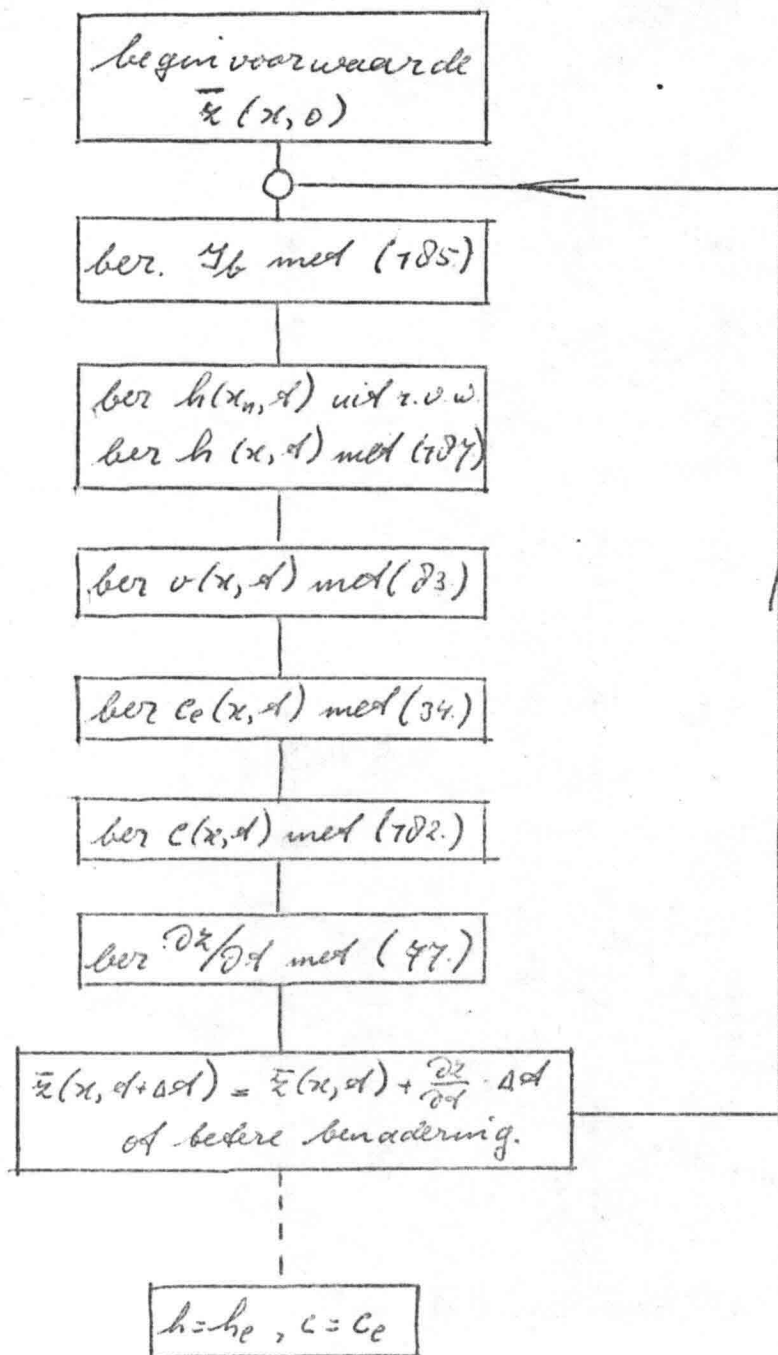


fig. 8

stroomschema

Met de geg. bodemligging op $t=0$ wordt $Y_b(x, t)$ berekend en dus, met gebruikmaking van het vaste waterniveau benedenstrooms ($x=x_n$), de waterdiepte op die plaats $x=x_n (=h(x_n, 0))$. Nu kan met de methode van teruggaande integratie van Runge-Kutta vgl. (187) geïntegreerd worden, wat ons het verloop van $h(x, t)$ oplevert voor $t=0$.

Omdat q constant is (zie (180)) en gegeven is nu ook $v(x, 0)$ ~~en~~ te berekenen met (83). Vervolgens kunnen we $c_0(x, 0)$ berekenen met (34).

M.b.v. de randvoorwaarde voor c en de methode van Runge-Kutta kan nu vgl. (182) geïntegreerd worden, wat ons het verloop van de concentratie oplevert.

M.b.v. (74) kunnen we vervolgens de bodemophoging per tijdseenheid bepalen. Dit levert ons dus $\partial z/\partial t(x, 0)$. Hiermee kunnen we met de methode van Euler, of de methode van Runge de nieuwe bodemligging op een tijdstip Δt later benaderen. Dat levert ons dan $\bar{z}(x, \Delta t)$.

Met deze nieuwe bodemligging kan het proces opnieuw worden doorlopen en de variabelen voor het tijdstip Δt later worden bepaald. Het uiteindelijke resultaat zal moeten zijn, dat de waterdiepte gelijk is aan de evenwichtsdiepte ($h=h_e$), de concentratie overal gelijk en gelijk aan de evenwichtskoncentratie ($c=c(0, t)=c_0$) en de bodembelling gelijk aan de evenwichtsbodemhelling ($Y_b=Y_{be}$).

IV-2 De verwerking van de vergelijkingen in een computerprogramma voor een concreet geval.

De concrete situatie, waarvoor we ons vergelijkingenstelsel gaan oplossen, ziet er als volgt uit:

Een goot heeft een constante afvoer van water - zandmengstel van q m³/se m' breedte. Bovenstrooms van $x = x_0$ wordt een constante hoeveelheid sediment s m³/s m' aangevoerd en een constante hoeveelheid sediment ds m³/s m' aan het wateroppervlak geïngedeerd. Op $x = x_n$ wordt een vast waterniveau gehandhaafd. We verdelen onze goot in n gelijke moten tussen $x = x_0$ en $x = x_n$. In ieder dwarsprofiel i hebben we nu een

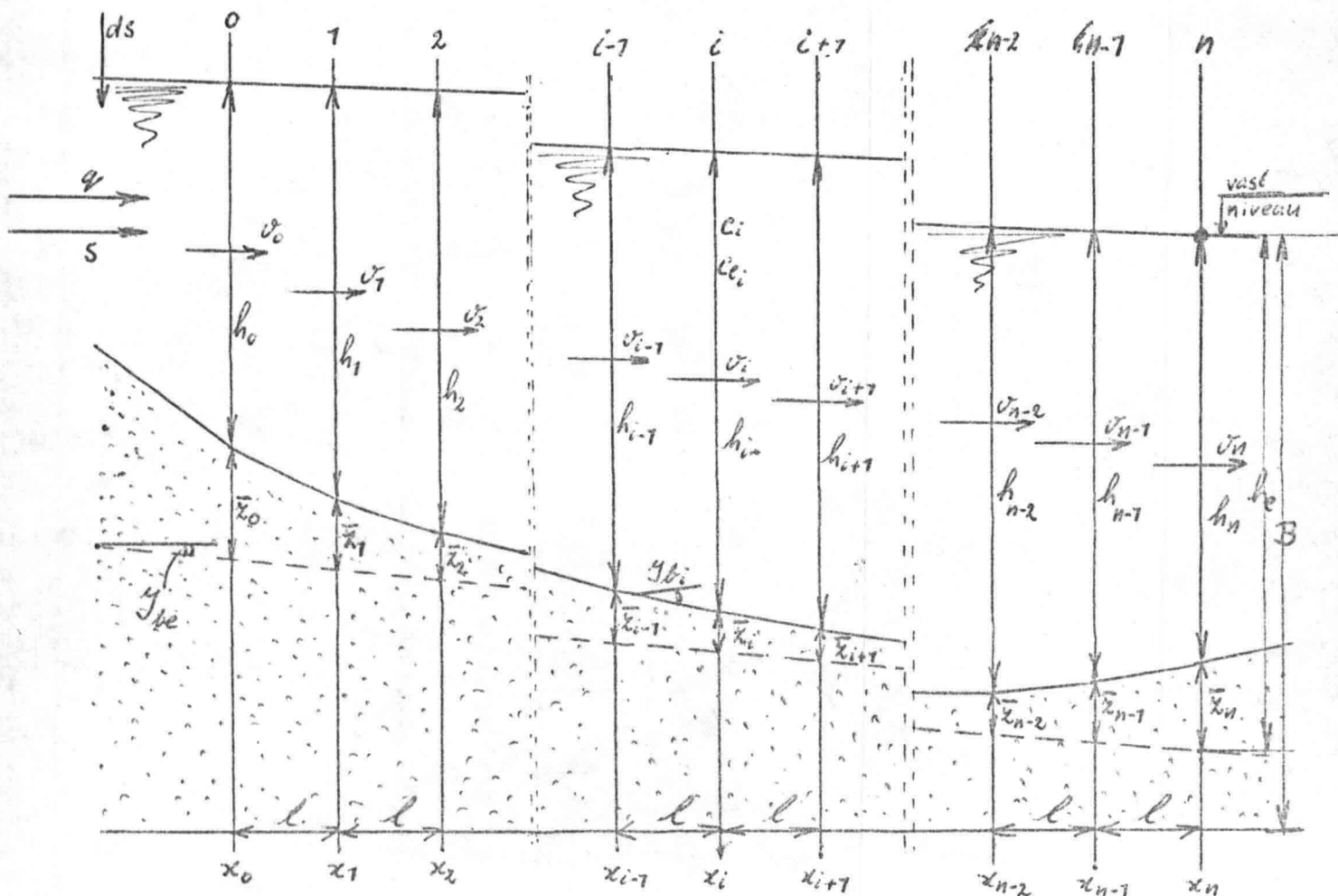


fig. 9.

$x_i, h_i, \sigma_i, \bar{x}_i, c_i, c_{e_i}, \gamma_{b_i}$ en $(\partial x / \partial t)_i$, waarbij i loopt van 0 t/m n . Deze grootheden (op x_i na) variëren in de tijd. γ_{b_i} is niet de bodemhelling in dwarsprofiel i , maar de bodemhelling tussen dwarsprofiel $i-1$ en i . In het nu volgende geven we de ingevoerde gegevens en tevens de vgl. waarmee andere grootheden kunnen worden bepaald.

De keuze van de waarden van de verschillende grootheden wordt ingegeven door in de toekomst te nemen laboratoriumproeven in een beekgoot. De lengte van die goot is verkend 30 m en de breedte 0,5 m. We nemen daarom $x_0 = 0$ en $x_n = 30$ m. We verdelen de goot in 60 meter, waarmee $n=60$ wordt. De wateraanvoer zal 30 l/s bedragen, wat neer komt op een $q = 0,06 \text{ m}^3/\text{s m}$. De constante sedimentaanvoer s zal 5 l/h exclusief porien bedragen, ofwel $s = 2,78 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s m}$. De constante sedimentinjectie ds zal achtereenvolgens voor de verschillende proeven 0, 5 en 45 bedragen. De korrel diameter ($= d_{50}$) van het aangevoerde sediment is 10^{-4} m. Het lijf heeft een valsnelheid w gelijk aan 10^{-2} m/s. Het poriengetal p kiezen we 0,7. De randwaarde c_0 berekenen we volgens

$$c_0 = \frac{s + ds}{q} \quad \text{--- (188)}$$

en l volgens

$$l = \frac{x_n - x_0}{n} \quad \text{--- (189)}$$

h_e is de diepte in de evenwichts situatie. In die situatie is c overal gelijk aan c_0 en c_e , ofwel (184) levert dit:

$$c = c_0 = c_e = \frac{K}{g_w} \frac{q^3}{h_e^4} \quad \text{--- (190.)}$$

opvol :

$$h_e = \sqrt[4]{\frac{K q^3}{g_w c_0}} \quad \text{--- (191.)}$$

In die evenwichtssituatie u zijn van vgl. (181.)
 $\frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial x}$ en $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ gelijk aan 0. Dan volgt hieruit voor

y_{be} :

$$y_{be} = \frac{v_e |v_e|}{c_h^2 h_e} \quad \text{waarin } v_e = q/h_e \quad \text{--- (192.)}$$

dus

$$y_{be} = \frac{q^2}{c_h^2 h_e^3} \quad \text{--- (193.)}$$

Uit fig. 9 blijkt dat de randvoorwaarde van het constante waterniveau op $x = x_n$ te vertalen is in :

$$h_n = h_e - \bar{x}_n \quad \text{--- (194.)}$$

Eerder lidden we een vgl. voor K af. Dit leverde ons vgl. (77). Substitueren we hierin (72.), (60.), $K = 0,4$ en $\Delta = 7,65$ dan wordt dit :

$$K = 37 \left\{ 70 \ln \left(3,35 \frac{h}{a} \right) \right\}^{-3} \quad \text{--- (195.)}$$

Deze vgl is afh. van h . In iedere situatie zal K dan ook opnieuw worden berekend. a wordt beschreven met

bepalen. De eerste manier heeft als voordeel dat makkelijk een begin-bodemligging eenvoudig aan de wettichheidsbodemligging kan worden ingevoerd. Een nadeel is echter, dat de werkelijke situering van de bodem (in het $x-y$ stelsel) pas bekend is nadat h_e is berekend. Deze berekening van h_e geschiedt in het programma. Met de tweede manier wordt het mogelijk de verlangde bodemligging t.o.v. de x -as in te voeren.

Over de waarde van d valt weinig exacts te zeggen. De orde van grootte is $\sim w/h$, dus ongeveer 0.05. Daarom zijn in eerste instantie de programma's voor iedere d_s zowel voor $d = -0,1$ als voor $d = -0,01$ afgedraaid.

De tijdstap Δt , die moest worden ingevoerd is min of meer experimenteel bepaald. Vanzelfsprekend moet hij gekozen worden afhankelijk van d en d_s , omdat deze hoofdzakelijk de snelheid van het proces bepalen. Δt varieert dan ook tussen 1 uur (voor $d = -0,1$ en $d_s = 45$) en 40 uur (voor $d = -0,01$ en $d_s = 0$).

In de bijlagen 1, 2 en 3 is een gedetailleerde beschrijving van het computerprogramma gegeven.

IV-3

De verwerking en de bespreking van de resultaten

Zoals eerder is vermeld, is het programma afgedraaid voor verschillende waarden van ds , nl $ds=0$, $ds=3$ en $ds=43$. Omdat van α weinig meer bekend was dan de orde van grootte, was het de bedoeling elk van deze drie gevallen voor 2 α 's af te draaien, nl $\alpha = -0,1$ en $\alpha = -0,01$, om te doen de de invloed van deze constante na te gaan. Bij bestudering van de eerste resultaten bleek dat de variabelen uit de programma's met gelijke ds en verschillende α 's op plaats xx en tijdstip tt een groot of nagenoeg een groot waren. cll. a. w., de variabelen, beschouwd als functie van xx en tt , bleken onafhankelijk te zijn van α . Een direct praktisch gevolg hiervan is, dat een geval met gelijke begin- en randvoorwaarden niet meer voor verschillende α 's afgedraaid behoeft te worden. Daarom is het geval met $ds=43$ slechts afgedraaid voor $\alpha = -0,1$. Voor de gevallen $ds=0$, $ds=3$ en $ds=43$ zijn $\bar{x}$, $\bar{c}$ en c_e uitgerekt tegen α en tt voor verschillende xx in de bijlagen 4, 5, 7, 8, 9 en 10. In grafiek 4 en 7 is een geringe afwijking van het verloop van x voor verschillende α 's te constateren. In de grafieken op bijlage 5 en 8 is echter geen verschil te constateren.

Een verklaring voor bovenstaand verschijnsel is gezocht en gevonden in het vgl. stelsel van blz. 64 te herschrijven deze, door deling van de vgl. en door α . Het α onafhankelijk van x en tt wordt het nieuwe stelsel dan:

$$\frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial(x)} = 0 \text{ ----- (199)}$$

$$\frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial(x)} + \frac{\partial h}{\partial(x)} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial(x)} - \frac{1}{\alpha} \gamma_{be} + \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{v}|\bar{v}|}{c_h^2 h} = 0 \text{ ----- (200.)}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial(x)} = \frac{1}{\bar{v}} (\bar{c} - c_e) \text{ ----- (201.)}$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial(x)} = -h (\bar{c} - c_e) \text{ ----- (202.)}$$

$$c_e = \frac{K}{g w} \frac{\bar{v}^3}{h} \text{ ----- (34.)}$$

Beschouwen we nu ook $\bar{v}$, h , $\bar{z}$, $\bar{c}$ en c_e als afhankelijk van x en x' , dus $\bar{v}(x, x')$, $h(x, x')$ enz. en stellen we $x = x'$ en $x' = x'$, dan wordt ons stelsel

$$\frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial x'} = 0 \text{ ----- (203.)}$$

$$\frac{\bar{v}}{g} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x'} + \frac{\partial h}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x'} - \frac{1}{\alpha} \gamma_{be} + \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{v}|\bar{v}|}{c_h^2 h} = 0 \text{ ----- (204.)}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial x'} = \frac{1}{\bar{v}} (\bar{c} - c_e) \text{ ----- (205.)}$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x'} = -h (\bar{c} - c_e) \text{ ----- (206.)}$$

$$c_e = \frac{K}{g w} \frac{\bar{v}^3}{h} \text{ ----- (34.)}$$

Dit stelsel blijkt onafhankelijk te zijn van x ,
indien in vgl. (204) de twee laatste termen te verwaar-
lozen zijn t.o.v. één van de andere termen, dus

$$-Y_{se} + \frac{\sigma \rho l}{c_h^2 h} \ll \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \quad \text{--- (207)}$$

Of dit zo is kunnen we eenvoudig toetsen aan
de berekeningsresultaten: $\partial \bar{z} / \partial x$ is van de orde van
grootte van 0.003, Y_{se} van 10^{-4} en $\sigma \rho l / c_h^2 h$ van
 $0.6 \cdot 10^{-4}$. Dus $\partial \bar{z} / \partial x$ is een faktor 75 groter. Hiermee
zijn deze termen inderdaad te verwaarlozen en wordt
ons stelsel onafhankelijk van x .

Om het proces onafhankelijk van x te laten zijn,
moeten natuurlijk ook de rand- en beginvoorwaar-
den gelijk worden genomen in xx en $x\bar{x}$. In de ge-
vallen met $ds=0$ en $ds=s$ was er een constante $\partial \bar{z} / \partial x$
in de beginvoorwaarde van de bodemligging, dus
 $\partial \bar{z} / \partial xx$ was afhankelijk van x . Dit geeft een geringe
verstoring. De randvoorwaarde voor de waterspiegel
is een constante waterspiegelhoogte op $x=30$. Deze
voorwaarde is dus ook niet gegeven als functie
van xx . Maar ook dit geeft slechts een geringe
verstoring. Blijven we nl. dat in vgl. (204) ook
 $\bar{v}/g \partial \bar{z} / \partial (xx)$ een faktor 100 kleiner is dan $\partial \bar{z} / \partial (xx)$
dan gaat vgl. (200.) over in.

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 0 \quad \text{--- (208)}$$

ofwel

$$h + \bar{z} = \text{constant} = h_e \quad \text{--- (209)}$$

De randvoorwaarde voor $x=30$ geldt dus blijkbaar bij benadering voor de hele goot, waarmee hij onafhankelijk wordt van d .

Verificatie van (209.) toont inderdaad aan, dat de maximale afwijking van $(h_0 - \bar{z})$ t.o.v. h 0,6 mm bedraagt.

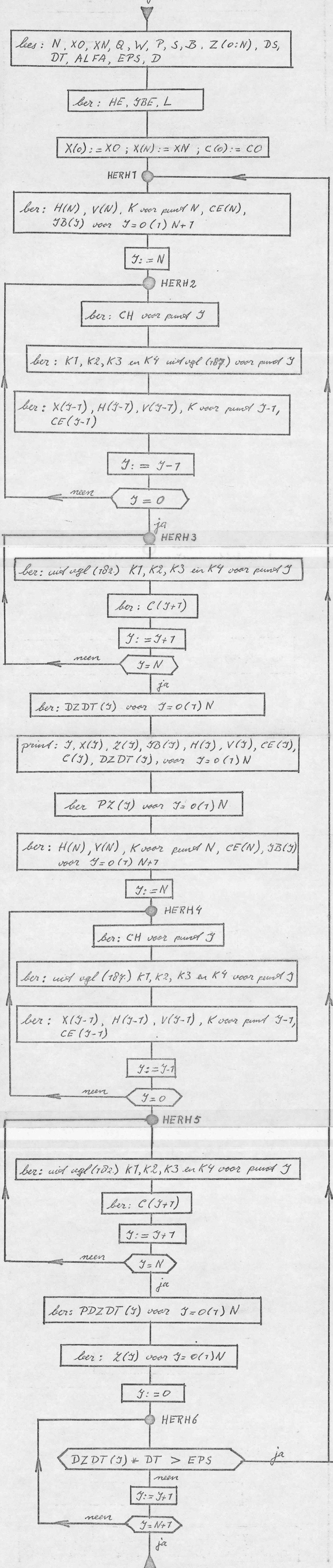
In hoeverre dit mathematische model voldoet, zal onderzocht moeten worden aan de hand van de toekomstige meetresultaten van de laboratoriumproef met de bezuiggoet. O.a. zal deze proef ons meer te weten doen komen over α , bijv. over de grootte van deze factor of over de variatie in α of met de tijd. Een bepaling van α zou bijv. als volgt kunnen geschieden:

Let het meetresultaat van het verloop van $\bar{z}$ op een plaats x (bijv. $x=10$ m) niet tegen α voor verschillende waarden van α , bijv. voor $\alpha = -0.01, -0.025, -0.05, -0.1$. We verkrijgen dan evenvele lijnen, welke respectievelijk het verloop van $\bar{z}$ met de tijd weergeven voor $-\alpha x = 0.1, 0.25, 0.5, 1.0$ (voor $x=10$ m). Komt het verloop van $\bar{z}$ voor één van deze waarden van $-\alpha x$ overeen met het verloop van $\bar{z}$ voor dierzelfde waarde van $-\alpha x$ van het mathematisch model, dan is de waarde van α behorend bij die waarde van $-\alpha x$ een eerste benadering. Deze waarde moet gecorrigeerd worden door deze procedure te herhalen voor andere waarden van x . Komt bijv. de lijn voor $-\alpha x = 0.5$ overeen met de lijn voor $-\alpha x = 0.5$ van het mathematisch model, dan is voor x is 10 m, $\alpha = -0.05$ een eerste benadering.

Er rest ons nog de verplichting te controleren of de verwaarlozingen gedaan ter vereenvoudiging van de

vergelijkingen in onze situatie slechts zijn gedaan.
 Zo verwaarloosden we $\partial h / \partial x$ en $\partial x / \partial t$ o.o.v. $\partial^2 h / \partial x^2$
 Hier tussen blijft inderdaad een verhoudingsfaktor
 te liggen van 200, hetgeen een verwaarlozing alles-
 zins rechtvaardigt. Ook de verhoudingsfactoren
 tussen $1/9 \partial^2 h / \partial x^2$ en $\partial h / \partial x$ en tussen $\partial^2 x / \partial t^2$ en
 $\partial x / \partial t$ rechtvaardigen de gedane verwaarlozingen
 Deze factoren zijn nl. resp. van de orde van groot-
 te van 10^{-4} en $3 \cdot 10^{-3}$.

Stroomdiagram




```
SC      SOURCE STATEMENT
00000   'BEGIN'
00000   'PROCEDURE' SETTING(D,P,Q); 'VALUE' D,P,Q; 'INTEGER' D,P,Q; 'CODE';
00004   'PROCEDURE' PAGE(D); 'VALUE' D; 'INTEGER' D; 'CODE';
00008   'PROCEDURE' BLANK(D,N); 'VALUE' D,N; 'INTEGER' D,N; 'CODE';
00012   'PROCEDURE' LINE(D,N); 'VALUE' D,N; 'INTEGER' D,N; 'CODE';
00016   'PROCEDURE' FIX(D,M,N,X); 'VALUE' D,M,N,X; 'INTEGER' D,M,N; 'REAL' X; 'CODE';
00021   'PROCEDURE' FLO(D,M,N,X); 'VALUE' D,M,N,X; 'INTEGER' D,M,N; 'REAL' X; 'CODE';
00026   'INTEGER' I,N;
00027   'REAL' X0,XN,HN,HE,CO,CE,IB,IBE,Q,K,CH,L,A,D,W,P,ALFA,EPS,DT,K1,K2,K3,
00027   K4,S,DS,B;
00028   ININTEGER(O,N);
00029   'BEGIN'
00029   'REAL' 'ARRAY' Z(/O:N/);
00030   'REAL' 'PROCEDURE' F2(C,CE,ALFA,V); 'REAL' C,CE,ALFA,V;
00032   'BEGIN' F2:=ALFA/V*(C-CE);
00033   'END';
00034   'REAL' 'PROCEDURE' F1(H,IB,Q,CH); 'REAL' H,IB,Q,CH;
00036   'BEGIN' F1:=IB*(H**3-Q**2/(IB*CH**2))/(H**3-Q**2/9.8);
00037   'END';
00038   'REAL' 'PROCEDURE' F3(ALFA,H,C,CE,P); 'REAL' ALFA,H,C,CE,P;
00040   'BEGIN' F3:=-ALFA*H*(C-CE)/P;
00041   'END';
00042   INREAL(O,X0); INREAL(O,XN); INREAL(O,Q); INREAL(O,W);
00046   INREAL(O,P); INREAL(O,S); INREAL(O,B);
00049   INARRAY(O,Z);
00050   INREAL(O,DS); INREAL(O,DT); INREAL(O,ALFA); INREAL(O,EPS);
00054   INREAL(O,D);
00055   A:=0.274*D; CO:=(S+DS)/Q;
00057   HE:=0.3; K:=37*(10*LN(3.35*HE/A))**(-3);
00059   HE:=SQRT(SQRT(K*Q**3/(9.8*W*CO))); K:=37*(10*LN(3.35*HE/A))**(-3);
00061   HE:=SQRT(SQRT(K*Q**3/(9.8*W*CO))); K:=37*(10*LN(3.35*HE/A))**(-3);
00063   HE:=SQRT(SQRT(K*Q**3/(9.8*W*CO))); K:=37*(10*LN(3.35*HE/A))**(-3);
00065   CH:=7.8*LN(3.35*HE/A);
00066   IBE:=Q**2/(CH**2*HE**3);
00067   L:=(XN-X0)/N;
00068   SETTING(1,92,64);
00069   LINE(1,20); BLANK(1,8);
00071   OUTSTRING(1,('CONCENTRATIEVERLOOP EN VERANDERING BODEMLIGGING MET DE
00071   PLAATS EN DE TIJD'));
00072   LINE(1,2); BLANK(1,18); OUTSTRING(1,('T.G.V. SEDIMENTATIE VOOR DS=
00073   ')); FLO(1,4,2,DS); OUTSTRING(1,('EN ALFA='));
00077   FIX(1,1,2,ALFA);
00078   LINE(1,5); BLANK(1,23); OUTSTRING(1,('K')); BLANK(1,9);
00082   OUTSTRING(1,('CH')); BLANK(1,6); OUTSTRING(1,('HE')); BLANK(1,8);
00086   OUTSTRING(1,('IBE')); LINE(1,1); BLANK(1,18);
00089   FLO(1,4,2,K); FIX(1,2,2,CH); FIX(1,1,4,HE); FLO(1,4,2,IBE);
00093   'BEGIN'
00093   'REAL' 'ARRAY' X(/O:N/),H(/O:N/),V(/O:N/),CE(/O:N/),C(/O:N/),
00093   DZDT(/O:N/), IB(/O:N+1/),PDZDT(/O:N/),PZ(/O:N/);
00094   X(/O/):=X0; X(/N/):=XN; C(/O/):=CO;
00097   HERH1: H(/N/):=HE-Z(/N/);
00098   V(/N/):=Q/H(/N/);
00099   K:=37*(10*LN(3.35*H(/N/)/A))**(-3);
00100   CE(/N/):=K*V(/N/)**3/(9.8*W*H(/N/));
00101   'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
00101   'BEGIN' IB(/I/):=IBE+(Z(/I-1/)-Z(/I/))/L;
00102   'END';
00103   IB(/O/):=IB(/1/); IB(/N+1/):=IB(/N/);
00105   I:=N; HERH2: CH:=7.8*LN(3.35*H(/I/)/A);
00107   K1:=L*F1(H(/I/),0.5*(IB(/I/)+IB(/I+1/)),Q,CH);
00108   K2:=L*F1(H(/I/)-0.5*K1,IB(/I/),Q,CH);
00109   K3:=L*F1(H(/I/)-0.5*K2,IB(/I/),Q,CH);
00110   K4:=L*F1(H(/I/)-K3,0.5*(IB(/I-1/)+IB(/I/)),Q,CH);
00111   X(/I-1/):=X(/O/)+(I-1)*L;
00112   H(/I-1/):=H(/I/)-1/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
00113   V(/I-1/):=Q/H(/I-1/);
00114   K:=37*(10*LN(3.35*H(/I-1/)/A))**(-3);
00115   CE(/I-1/):=K*V(/I-1/)**3/(9.8*W*H(/I-1/));
00116   I:=I-1; 'IF' I=0 'THEN' 'GO TO' HERH2;
00118   HERH3: K1:=L*F2(C(/I/),CE(/I/),ALFA,V(/I/));
00119   K2:=L*F2(C(/I/)+0.5*K1,0.5*(CE(/I/)+CE(/I+1/)),ALFA,
00119   0.5*(V(/I/)+V(/I+1/)));
00120   K3:=L*F2(C(/I/)+0.5*K2,0.5*(CE(/I/)+CE(/I+1/)),ALFA,
00120   0.5*(V(/I/)+V(/I+1/)));
00121   K4:=L*F2(C(/I/)+K3,CE(/I+1/),ALFA,V(/I+1/));
00122   C(/I+1/):=C(/I/)+1/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
00123   I:=I+1; 'IF' I=N 'THEN' 'GO TO' HERH3;
00125   'FOR' I:=0 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
00125   'BEGIN' DZDT(/I/):=F3(ALFA,H(/I/),C(/I/),CE(/I/),P);
00126   'END';
00127   PAGE(1); BLANK(1,2); OUTSTRING(1,('I')); BLANK(1,5);
00131   OUTSTRING(1,('X')); BLANK(1,4); OUTSTRING(1,('Z')); BLANK(1,11);
00135   OUTSTRING(1,('IB')); BLANK(1,11); OUTSTRING(1,('H')); BLANK(1,8);
00139   OUTSTRING(1,('V')); BLANK(1,7); OUTSTRING(1,('CE')); BLANK(1,10);
00143   OUTSTRING(1,('C')); BLANK(1,11); OUTSTRING(1,('DZDT'));
00146   LINE(1,2);
00147   'FOR' I:=0 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
00147   'BEGIN' FIX(1,2,0,I); FIX(1,2,1,X(/I/)); FLO(1,4,2,Z(/I/));
00150   FLO(1,4,2,IB(/I/)); FIX(1,1,4,H(/I/)); FIX(1,1,4,V(/I/));
00153   FLO(1,4,2,CE(/I/)); FLO(1,4,2,C(/I/)); FLO(1,4,2,DZDT(/I/));
00156   LINE(1,1);
00157   'END';
00158   'FOR' I:=0 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN' PZ(/I/):=Z(/I/)+DZDT(/I/)*DT;
00159   'END';
00160   H(/N/):=HE-PZ(/N/);
00161   V(/N/):=Q/H(/N/);
00162   K:=37*(10*LN(3.35*H(/N/)/A))**(-3);
00163   CE(/N/):=K*V(/N/)**3/(9.8*W*H(/N/));
00164   'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
00164   'BEGIN' IB(/I/):=IBE+(PZ(/I-1/)-PZ(/I/))/L;
00165   'END';
00166   IB(/O/):=IB(/1/); IB(/N+1/):=IB(/N/);
00168   I:=N; HERH4: CH:=7.8*LN(3.35*H(/I/)/A);
00170   K1:=L*F1(H(/I/),0.5*(IB(/I/)+IB(/I+1/)),Q,CH);
00171   K2:=L*F1(H(/I/)-0.5*K1,IB(/I/),Q,CH);
00172   K3:=L*F1(H(/I/)-0.5*K2,IB(/I/),Q,CH);
00173   K4:=L*F1(H(/I/)-K3,0.5*(IB(/I-1/)+IB(/I/)),Q,CH);
00174   X(/I-1/):=X(/O/)+(I-1)*L;
00175   H(/I-1/):=H(/I/)-1/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
00176   V(/I-1/):=Q/H(/I-1/);
00177   K:=37*(10*LN(3.35*H(/I-1/)/A))**(-3);
00178   CE(/I-1/):=K*V(/I-1/)**3/(9.8*W*H(/I-1/));
00179   I:=I-1; 'IF' I=0 'THEN' 'GO TO' HERH4;
00181   HERH5: K1:=L*F2(C(/I/),CE(/I/),ALFA,V(/I/));
00182   K2:=L*F2(C(/I/)+0.5*K1,0.5*(CE(/I/)+CE(/I+1/)),ALFA,
00182   0.5*(V(/I/)+V(/I+1/)));
00183   K3:=L*F2(C(/I/)+0.5*K2,0.5*(CE(/I/)+CE(/I+1/)),ALFA,
00183   0.5*(V(/I/)+V(/I+1/)));
00184   K4:=L*F2(C(/I/)+K3,CE(/I+1/),ALFA,V(/I+1/));
00185   C(/I+1/):=C(/I/)+1/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
00186   I:=I+1; 'IF' I=N 'THEN' 'GO TO' HERH5;
00188   'FOR' I:=0 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
00188   'BEGIN' PDZDT(/I/):=F3(ALFA,H(/I/),C(/I/),CE(/I/),P);
00189   'END';
00190   'FOR' I:=0 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
00190   'BEGIN' Z(/I/):=Z(/I/)+1/2*DT*(DZDT(/I/)+PDZDT(/I/));
00191   'END';
00192   I:=0;
00193   HERH6: 'IF' DZDT(/I/)*DT>EPS 'THEN' 'GOTO' HERH1;
00194   I:=I+1; 'IF' I=N+1 'THEN' 'GOTO' HERH6;
00196   'END';
00197   'END';
00198   'END';
```

De beschrijving van het computerprogramma

In deze bijlage zullen de symbolen enigszins veranderen, door aanpassing aan de computertaal. De voornaamste veranderingen zijn, dat kleine letters veranderen in hoofdletters en dat indices nu als hoofdletter of cijfer direct achter het hoofdsymbool wordt aangesloten. Zo wordt bijvoorbeeld nu HE, CO nu CO enz. Andere veranderingen spreken voor zich. Zo wordt bijvoorbeeld nu ALFA, DZDT wordt DZDT enz.

We gaan nu over tot de gedetailleerde beschrijving van het programma aan de hand van het invoerprogramma (bijlage 2) met verwijzing naar het stroomdiagram (bijlage 1.)

De nummering voor de programmatekst op bijlage 2 geeft het aantal gepasseerde statements aan (= de programmatekst tussen ;;), de nummering achter de tekst is de regelaanduiding en deze geeft tevens het nummer van de ponskaart aan (iedere regel in de tekst is één ponskaart). Deze laatste nummering, dus SED 01A00, SED 02A00, enz. zullen wij in deze bespreking gebruiken om aan te geven over welk programma onderdeel we het hebben. We zullen de aanduiding wel afkorten, dus 1A, 2A enz.

In de regels 1A t/m 4A worden een aantal "niet-standaard uitvoerprocedures" gedeclareerd. Hier voor de betekenis hiervan ref. [5], blz. 20 t/m 22. Deze procedures worden verderop in het programma aangeroepen (bijv. bij regel 35A en 36A). Hiermee

kunnen we zorgen voor een overzichtelijke output (= uitvoer)

In de regels 8A 4/m 10A worden alle te gebruiken symbolen geïndeclareerd, op de array's (= getallenreeksen) na. Deze kunnen pas worden geïndeclareerd als de lengte ervan — dus de geheugenruimte, die gereserveerd moet worden — aan de machine bekend is. Deze lengte wordt bepaald door N. Deze wordt dan ook eerst ingegeven (in regel 10A 10). De declaraties van de array's vindt plaats voor $Z(0, N)$ in regel 11A, voor de andere array's in de regels 47A en 48A. Declaraties kunnen alleen plaats vinden direct na de opening van een nieuw block. Vandaar de regels 10A 20 met 28B en 46A met 24B

In de regels 12A 4/m 20A worden resp. de vgl. (182) (187) en (77) in de vorm van proceduredeclaraties ingevoerd. In feite stellen we met deze declaraties: $\partial h / \partial x = F1$, $\partial c / \partial x = F2$ en $\partial z / \partial x = F3$. Het voordeel van deze werkwijze is dat in het verdere programma, wanneer de $\partial h / \partial x$, $\partial c / \partial x$ of $\partial z / \partial x$ berekend moet worden op een bepaalde plaats (met bepaalde veranderlijken) slechts de functie aangeroepen hoeft te worden, met achter het symbool van de functie tussen haakjes de elementen van de functie voor die plaats, corresponderend met de tussen haakjes geplaatste elementen uit de declaratie. Roepen we bijv. aan $F2(A, B, C, D)$, dan wordt $\partial c / \partial x (= F2)$ berekend volgens regel 13A, waarin voor de C de A wordt ingevuld, voor de CE de B, voor de ALFA de C en voor V de D. Dit is o.a. gebeurd in regel 67A. Daar zijn enkele in te vullen elementen arrayelementen.

Hier in de regels 13 en 14 A en op andere plaatsen in het programma zijn onnodig de programma-haakjes 'begin' en 'end' geplaatst. Deze kunnen zonder meer worden weggelaten. Die andere plaatsen zijn: 16 en 17 A, 19 en 20 A, 54 en 55 A, 76 en 77 A, 90 en 91 A, 96 en 97 A, 19 en 20 B, 22 en 23 B.

In de regels 27 A t/m 25 A10 wordt opdracht gegeven tot het maken van de verschillende rand- en beginvoorwaarden en andere constanten, zoals ze beschreven zijn op de blz. 69 t/m 72. Deze getallen staan in de volgorde van maken op de getallenkaarten.

In de regels 26 A worden m.b.v. de vgl. (61.) en (788.) A en CO berekend.

In de regels 27 A t/m 28 A20 wordt in een klein iteratieproces m.b.v. vgl. (791.) en (795.) HE en K berekend (K voor wuwrichtstoestand) en in de regel 29 A m.b.v. vgl. (796.) CH (ook voor de wuwrichtstoestand)

Zoals eerder vermeld zijn CH en K afhankelijk van H en dus van X en T. Omdat deze waarden direct worden verwerkt en daarna niet meer nodig zijn, zijn ze niet als array ingevoerd en zodanig zijn ze dus ook geen extra geheugenruimte op. De waarde van CH en K wordt dus iedere keer zodra ze nodig is voor de dan geldende omstandigheden berekend en na gebruik "vergeten". Dit gebeurt o.a. in de regels 51 A10, 57 A, 64 A10 en 93 A10

In de regel 30 A wordt m.b.v. vgl. (793.) JBE bere-

kend en in regel 31A met behulp van vgl (189) de maatlength L

In de regels 32A t/m 34 A wordt x omgerekend door $\bar{x}$ met behulp van vgl. (197). Deze regels zijn dus alleen nodig als x is ingevoerd en kunnen worden weggelaten indien direct $\bar{x}$ is ingevoerd. als gegeven (zie blz. 41 e.v.). Op bijlage 2 zijn ze weggelaten.

In de regel 35A wordt een bladindeling geraagd van 64 regels met ieder 92 posities. Deze opdracht werkt niet foutloos. De machine drukt de laatste 2 regels door de bladvouw heen af. Maar de correcte en oplossing van dit euvel is verder niet gezocht.

In de regels 36A t/m 45A worden de bladindeling en de tekst van de eerste bladzijde van de "output" geprogrammeerd. Hierbij worden de gegevens (ingelezen) waarden van DS en ALFA en de berekende waarden van K en CH in evenwichtstoestand en HE en TBE afgedrukt

In de regels 47A en 48A worden, zoals boven reeds is vermeld, de overige array's gedeclareerd en in regel 49A worden beginwaarden aan enkele array's toegekend.

Het programmadiel, dat tot nu toe is besproken, wordt slechts één maal doorlopen, de rest van het programma wordt voor iedere tijdschep DT één maal doorlopen en gedeeld van dit programmadiel verder nog voor iedere S. Dit is duidelijk te zien in het stroomdiagram (bijlage 1)

In het nu volgende programmadiet, van regel 50A t/m 89A worden alle onbekende arrayelementen bepaald en de opdracht tot afdrukken van alle arrayelementen gegeven (m.u.v. PDZDT en PZ) te volgen dit gedeelte weer op de voet.

In de regels 50A t/m 52A worden $H(N)$, $V(N)$ en $CE(N)$ m.b.v. resp. vgl. (794.), (83.) en (34.) berekend.

In de regels 54A en 56A worden met behulp van vgl. (785.) $YB(0)$ t/m $YB(N+1)$ berekend.

In de regels 57A t/m 66A worden voor $Y=N$ tot $Y=0$ $K(Y-1)$, $H(Y-1)$, $V(Y-1)$ en $CE(Y-1)$ berekend, door voor iedere Y dit gedeelte te doorlopen. Hierbij wordt voor de berekening van $H(Y-1)$ gebruik gemaakt van de Runge-Kutta methode ([6], blz. 72 t/m 74), welke is aangepast om er mee in neg. x-richting te kunnen integreren. Bovendien is voor de andere variabelen dan H in de berekening van $K1$ t/m $K4$ in de functieprocedure $F1$ de waarde ingevuld, die de desbetreffende variabele op die plaats heeft, m.u.v. de CH -waarde. De CH -waarde, die wordt genomen, is die van punt $X(Y)$. (zie regel 57A). Een verbetering behoeft het feit, dat $X(Y)$ hier berekend wordt. Het gebeurt het namelijk voor iedere tijdstap opnieuw, terwijl $X(Y)$ (vanzelfsprekend) onafhankelijk is van T . Het gebeurt zelfs nog eens voor iedere tijdstap in regel 05B. Dit enkel kan worden verholpen door de regels 62A en 5B weg te laten en een dergelijke regel in tussen te voegen na regel 49A (bijv als regel 49A10)

In de regels 67A t/m 74A wordt voor $Y=0$ tot $N-1$

$C(Y+1)$ berekend. Dit gebeurt als voor $H(Y-1)$, alleen nu met een positieve integratierichting.

In de regels 45 A t/m 47 A wordt $DZDT(Y)$ berekend van $Y=0$ t/m N m.b.v. F3

In de regels 48 A t/m 49 A worden de primitiefdrachten gegeven van de waarden van $Y, X(Y), Z(Y), YB(Y), H(Y), V(Y), CE(Y), C(Y)$ en $DZDT(Y)$ voor $Y=0$ t/m $Y=N$

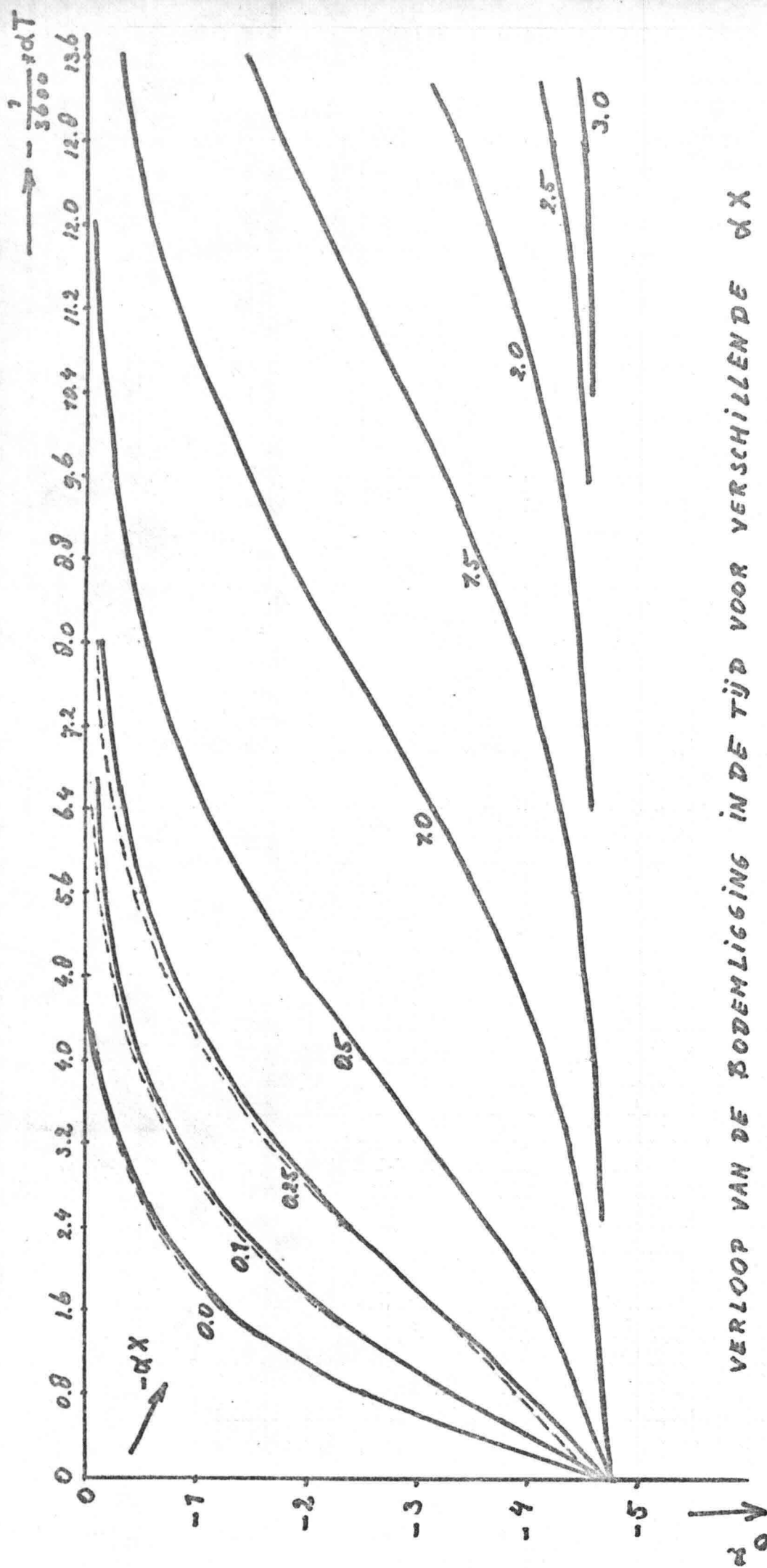
Het nu volgende laatste programma-deel (regel 90 A t/m 23 B) dient uitsluitend om de nieuwe waarde van $Z(Y)$ te bepalen. Dit geschiedt met de benaderingsmethode van Heun [6], blz 69 en 70). Voor deze methode moet de bodemopheffing per tijdseenheid ($DZDT$) voor het nieuwe tijdstip geschat worden. Deze schatting ("predictor") noemen we $PDZDT$. Deze schatting wordt verricht in de regels 90 A t/m 20 B. Hij verloopt als volgt: Schat met de methode van Euler de nieuwe bodemligging ("predictor"). We noemen deze PZ . Dit geschiedt in de regels 90 A en 91 A. Bereken bij deze bodemligging, op dezelfde manier als boven gebeurde in de regels 50 A t/m 49 A de waarden van YB, H, V, CE en C . Dit zijn de regels 92 A t/m 17 B. Hiermee nu kunnen we de waarden van $PDZDT$ bepalen. Dat gebeurt in de regels 18 B t/m 20 B

We kunnen nu de methode van Heun toepassen om een betere schatting van Z te verkrijgen ("corrector"). Deze bepaling geschiedt in de regels 21 B t/m 23 B.

Of met deze nieuwe waarden van $\bar{x}$ het proces vanaf HERH1 opnieuw wordt doorlopen is afhankelijk gesteld van de grootte van de ophoging in de tijdsperiode DT. Is deze klein genoeg, kleiner dan het getal EPS op iedere plaats, dan mag de berekening worden gestopt. Dit wordt bepaald in de regels 24B t/m 26B

Het hele proces is in grote lijnen ook in het stroomdiagram te volgen. Ter coördinatie zijn de labels uit het programma ook in het stroomdiagram opgenomen.

Opmerking: In de eerste versie van het programma was het afbreukmechanisme in de regels 24B t/m 26B anders geformuleerd. Toen mocht de berekening worden gestopt indien $|\bar{x}|$ klein genoeg was, bijv. kleiner dan 1 mm. Dit zou geen moeilijkheden opleveren, ware het niet dat in dieselzelfde versie de berekening van h_0 in het iteratieproces van de regels 27A t/m 28A20 niet ver genoeg werd doorgezet, en daardoor een te kleine h_0 werd verkregen. Omdat deze h_0 gebruikt wordt om $\bar{z}=0$ op de evenwichtsligging van de bodem te projecteren, werkte deze fout door in deze projectie van $\bar{z}=0$. Daardoor kwam de evenwichtsligging van de bodem op $\bar{z} = -0,5$ cm te liggen (zie bijlage 4), in werd $|\bar{x}|$ nooit kleiner dan ~~0,5~~ 0,5 cm. De machine stopte dan ook pas nadat de rekentijd was verstreken. Na dit gebeuren is het iteratieproces verder doorgezet en een nieuw afbreukmechanisme ingevoerd.

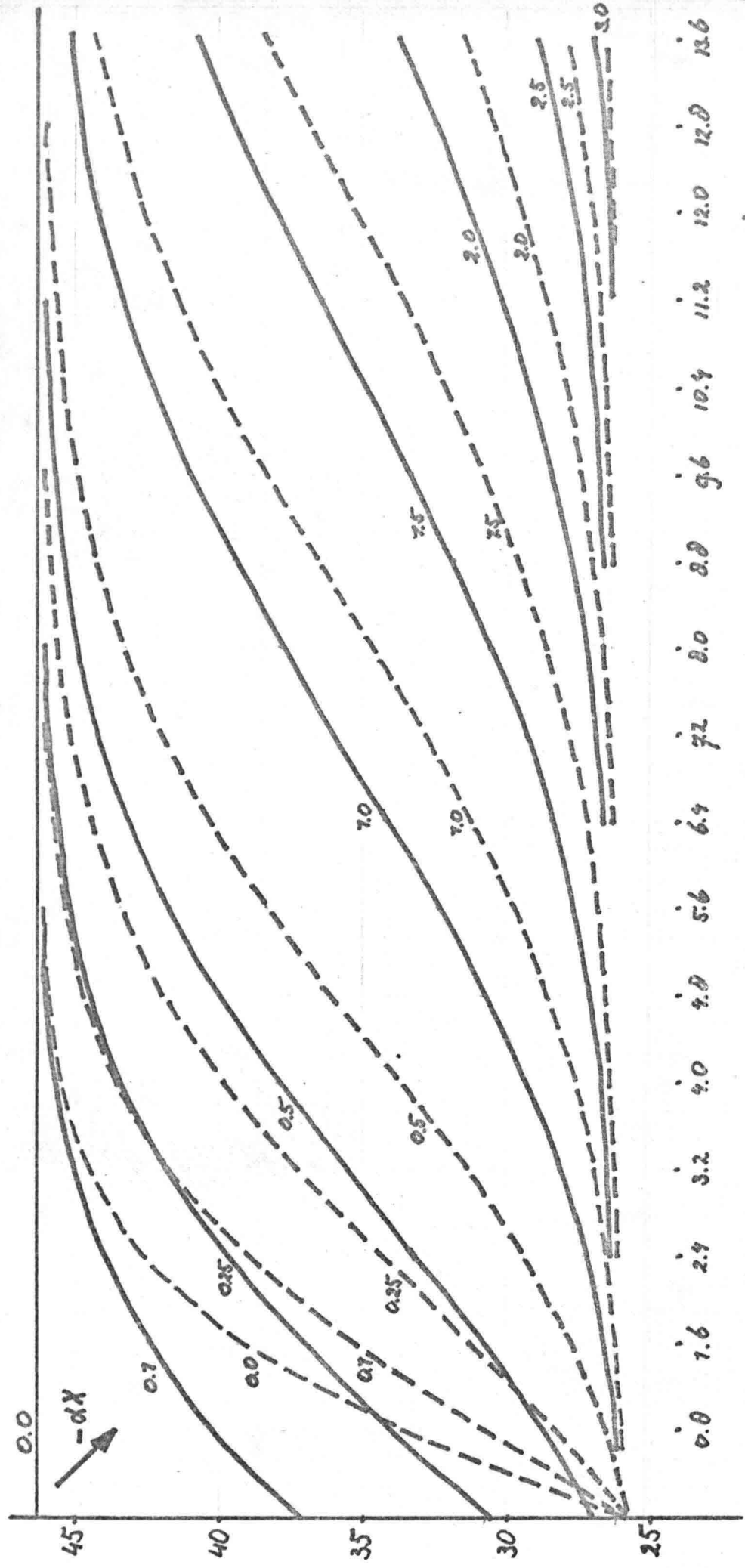


VERLOOP VAN DE BODEMLIGGING IN DE TIJD VOOR VERSCHILLENDE αX

$$DS=0$$

UITGEZET MET RESULTATEN VAN $\alpha = -0.1$
OPMERKINGEN VAN $\alpha = -0.01$

→ C en CE * 10⁶

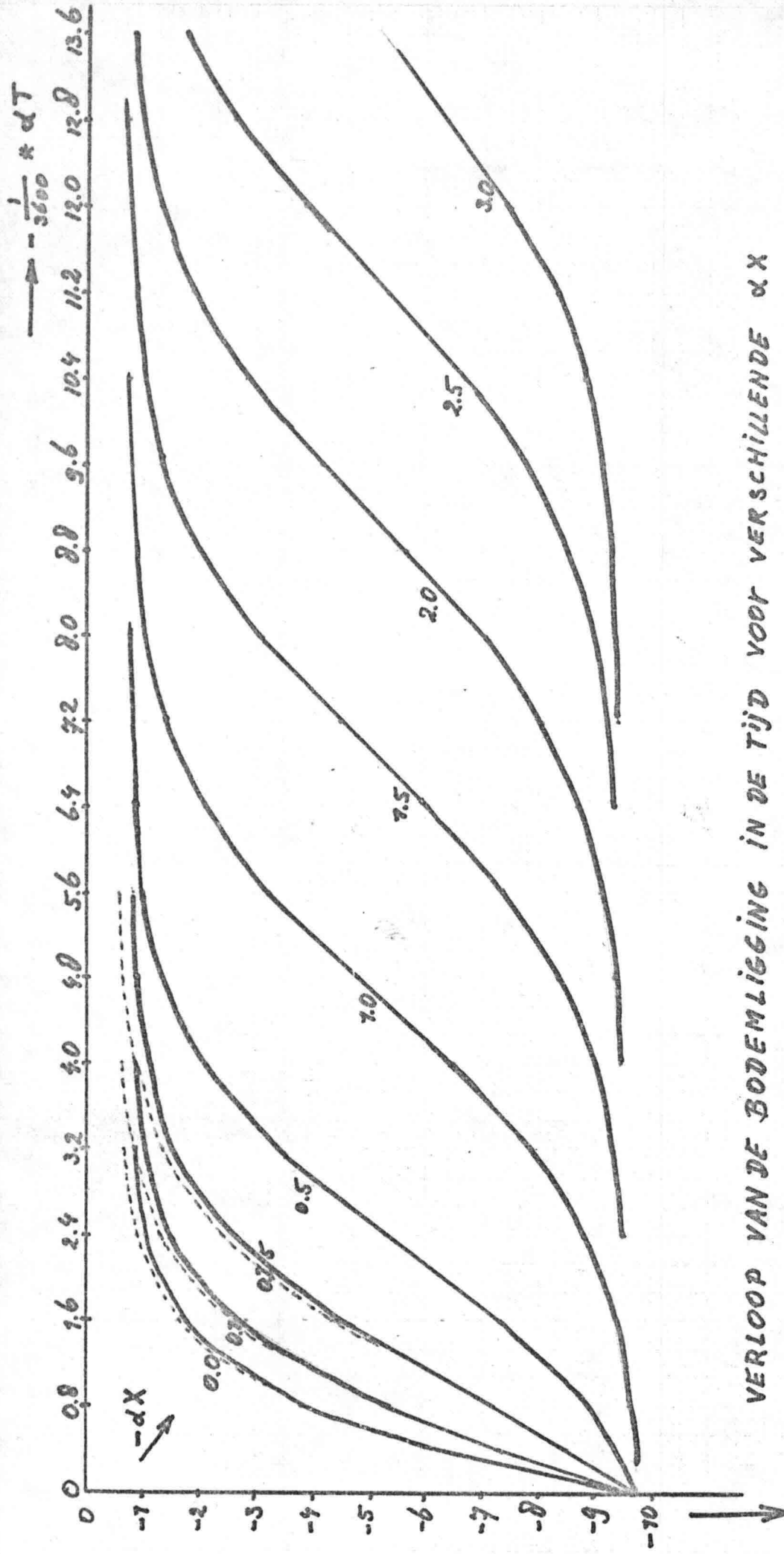


→ $-\frac{1}{3600} \cdot \alpha T$

CONCENTRATIE- EN EVENWICHTSCONCENTRATIEVERLOOP IN DE TIJD VOOR VERSCHILLENDE αX

DS = 0

— = C
 --- = CE

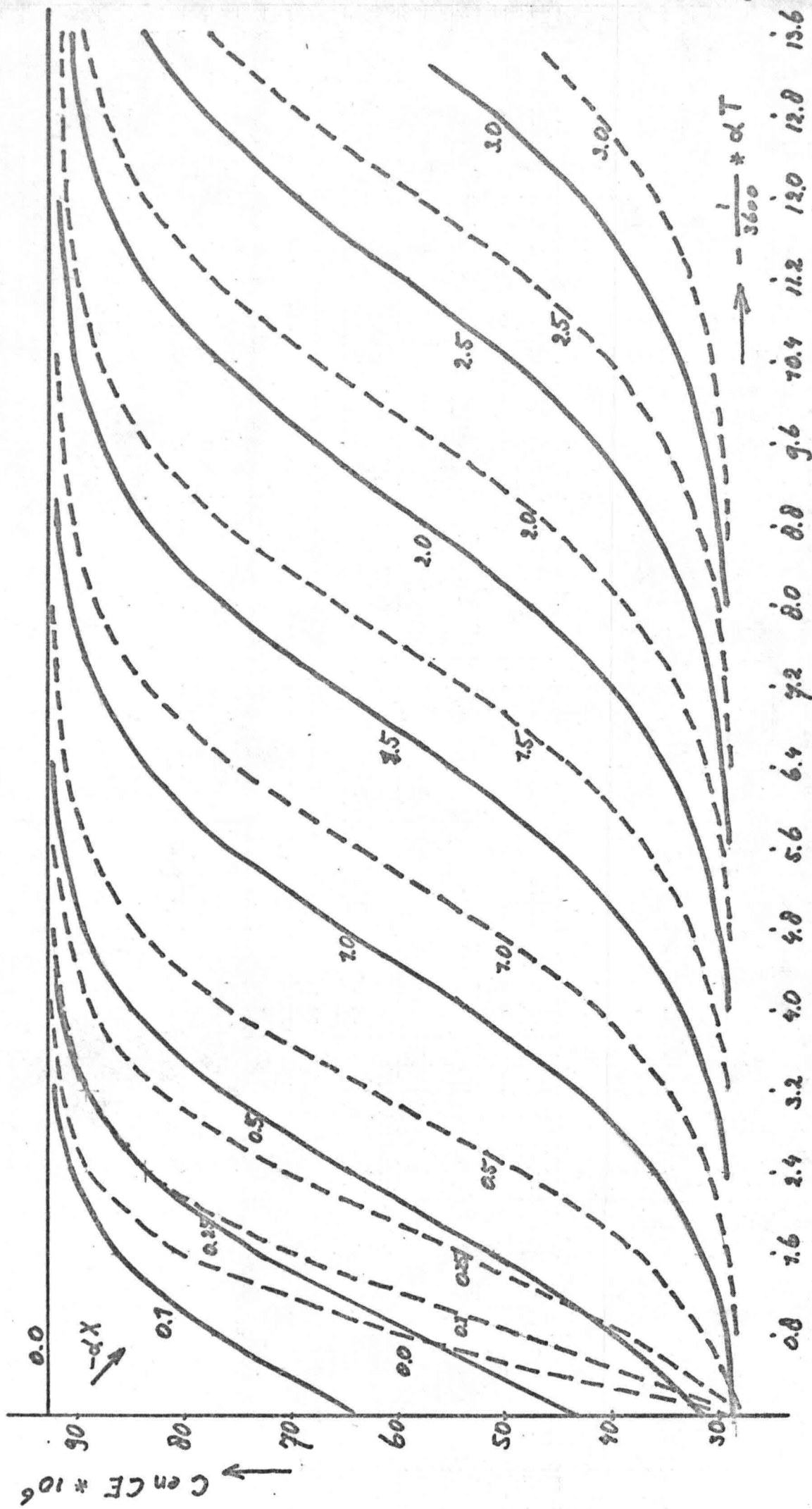


VERLOOP VAN DE BODEMLIGGING IN DE TIJD VOOR VERSCHILLENDE α

$DS = 3$

WITGEZET MET RESULTATEN VAN $\alpha = -0.1$
 ARCERING VAN $\alpha = -0.07$

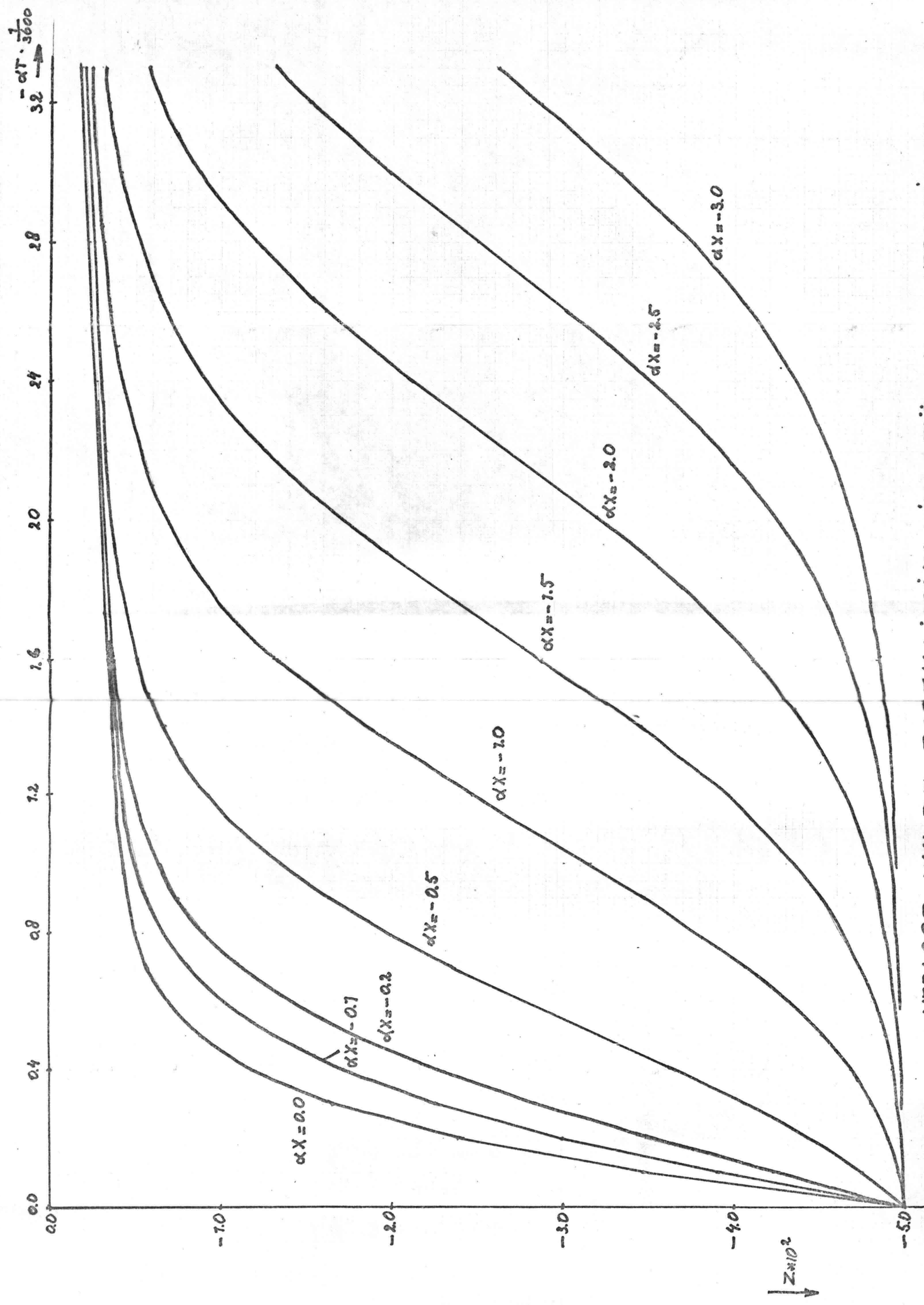
$-N \cdot 10^2$



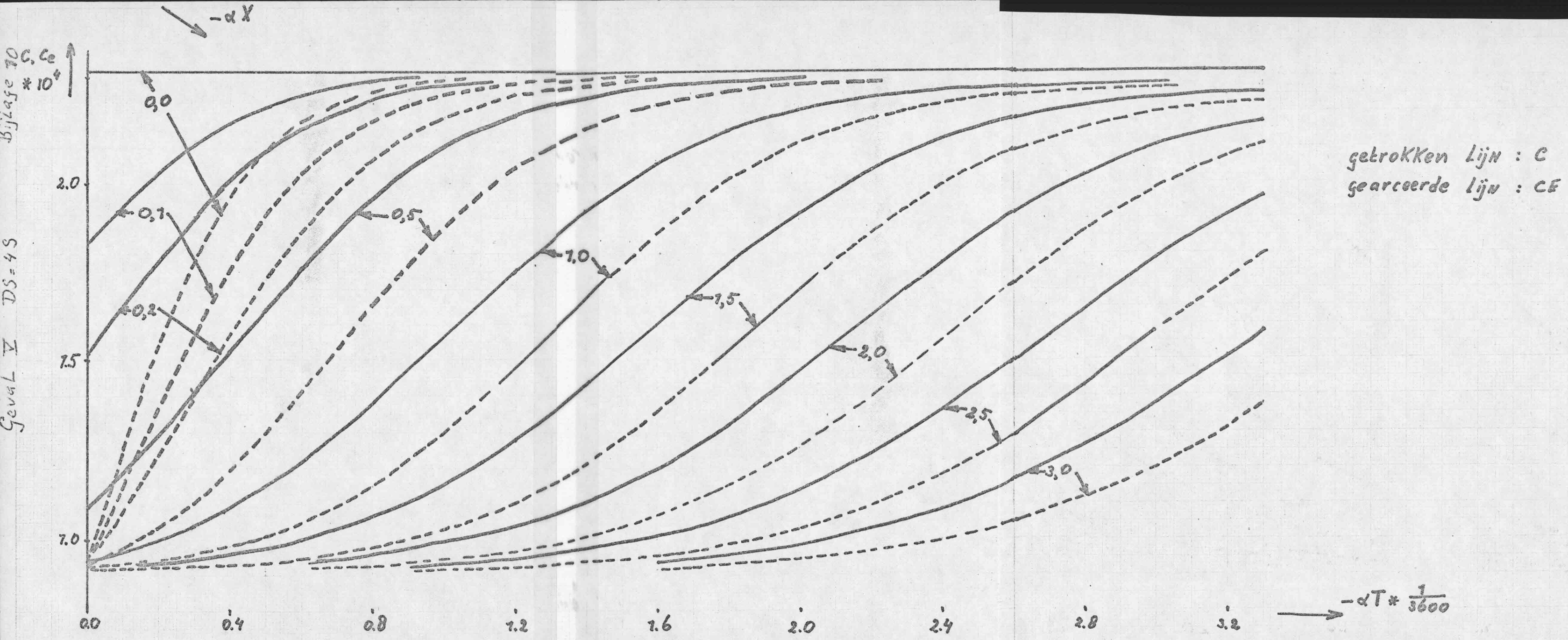
CONCENTRATIE - EN EVENWICHTSCONCENTRATIEVERLOOP IN DE TIJD VOOR VERSCHILLENDE αX

$DS = S$

— = C
 --- = C_E



VERLOOP VAN DE BODEMLIGGING IN DE TIJD VOOR VERSCHILLENDE αX



Concentratie- en Evenwichtsconcentratieverloop in de tijd voor verschillende $-\alpha X$

