Toepassing van 2-D modellen voor water- en sedimentbeweging bij zandsluitingen

Deel I: Hydraulisch deel

door P.W. Besselink

Technische Hogeschool Delft
Afdeling der Civiele Techniek
Vakgroepen:
Vloeistofmechanica en
Kustwaterbouwkunde

TOEPASSING VAN 2-D MODELLEN VOOR

WATER- EN SEDIMENTBEWEGING BIJ ZANDSLUITINGEN

door

P.W. BESSELINK

Deel I: Hydraulisch deel

Afstudeerverslag
Technische Hogeschool Delft
Afdeling der Civiele Techniek

Juli 1985

Voorwoord

Voor U ligt het verslag van mijn afstudeeronderzoek waarmee mijn studie aan de T.H.-Delft is afgerond.
Dit onderzoek is verricht voor de vakgroep Kustwaterbouwkunde van Prof. E.W. Bijker en de vakgroep Vloeistofmechanica onder verantwoordelijkheid van Prof. C.B. Vreugdenhil.

Bij het onderzoek ben ik begeleid door

- Prof. dr. ir. C.B. Vreugdenhil
- Ir. J. Voogt
- Ir. J. van de Graaff

Met de begeleiding, het geven van goede adviezen en opbouwende kritiek hebben zij belangrijk bijgedragen aan de totstandkoming van dit rapport.

Ik ben Rijkswaterstaat, in het bijzonder de Deltadienst en de Dienst Informatieverwerking, zeer erkentelijk voor het beschikbaar stellen van de benodigde faciliteiten.
Het personeel, met name J. Willemse, A. Staakman, G. Stelling en J. Dijkzeul wil ik bedanken voor hun hulp en interesse getoond tijdens mijn onderzoek.

Delft, juli 1985
P.W. Besselink

Samenvatting

In het kader van het onderzoek naar zandsluitingen wordt de hierbij optredende sluitgatstroming en het zandverlies door het sluitgat bepaald.

- Deel I: Hydraulisch deel

  Als aanvulling op de kwalitatieve resultaten van modelonderzoek, verricht door Luxemburg in 1982, wordt nu met een wiskundig model de stroming door een sluitgat berekend.
  Er is gebruik gemaakt van het door Rijkswaterstaat ontwikkelde 2-D stromingsmodel WAQUA. Dit is een diepte-gemiddeld- en tijdsafhankelijk model dat gebaseerd is op de 2-D ondiepwater-vergelijkingen.
  Er wordt ingegaan op de invloed van de bodemwrijving, viscositeit en randvoorwaarden.
  De problemen betreffende de weergave van neerstromingen komen aan de orde waarbij ook resultaten van het 2-D model DUCHESS van de T.H.-Delft betrokken worden.

- Deel II: Morfologisch deel

  Hierin wordt een zandverliesberekening opgezet, gebruikmakend van het in deel I bepaalde snelheidsveld.

Inhoud blz.

blz.

Notatie

b	breedte rekengebied	(m)
B	sluitgatbreedte	(m)
c	voortplantingssnelheid	(m/s)
C	Chezy coëfficient	($m^{1/2}/s$)
D	obstakeldiameter	(m)
f	frekwentie	(1/s)
	ook: Coriolis parameter	(1/s)
g	versnelling van de zwaartekracht	(m/s^2)
h	waterdiepte	(m)
H	waterspiegelniveau	(m)
k	Nikuradse ruwheid	(m)
ℓ	obstakellengte	(m)
	ook: lengte rekengebied	(m)
L	karakteristieke lengte	(m)
	ook: damlengte	(m)
M	roosterpunten in x-richting	(-)
n	Manning constante	($s/m^{1/3}$)
nst	aantal tijdstappen	(-)
N	roosterpunten in y-richting	(-)
q	specifiek debiet	(m^2/s)
r	kromtestraal stroomlijnen	(m)
R	parameter voor menggebied	(-)
Re	Reynolds getal	(-)
Ri	Riemann invariant	(m/s)
Sh	Strouhal getal	(-)
t	tijd	(s)
T	insteltijd stationaire toestand	(s)
u	diepte-gemiddelde snelheid in x-richting	(m/s)
u_c	convectiesnelheid wervel	(m/s)
u_x	schuifspanningssnelheid	(m/s)
U	karakteristieke stroomsnelheid	(m/s)
Uo	snelheid hoofdstroming	(m/s)

v	diepte-gemiddelde snelheid in y-richting	(m/s)
x	horizontale coördinaat	(m)
y	horizontale coördinaat	(m)
z	vertikale coördinaat	(m)
z_b	bodemniveau	(m)
Δt	tijdstap	(s)
Δx	maaswijdte in x-richting	(m)
Δy	maaswijdte in y-richting	(m)
α	gewichtscoëfficient in randvoorwaarde	(s),(s^2)
β	contractiecoëfficient	(-)
δ	karakteristieke breedte menggebied	(m)
ε	uitwisselingscoëfficient	(m^2/s)
ϕ	hoek tussen τ_b en τ_{sb}	(-)
θ	richtingshoek scheidingslijn	(-)
κ	constante van Von Kármán	(-)
λ	golflengte	(m)
ρ	dichtheid van water	(kg/m^3)
τ_b	bodemschuifspanning	(N/m^2)
τ_{rb}	bodemschuifspanning in radiale richting	(N/m^2)
τ_{sb}	bodemschuifspanning in tangentiële richting	(N/m^2)
τ_w	windschuifspanning	(N/m^2)
τ_{xx} τ_{xy} τ_{yy}	zijdelingse spanningen	(N/m^2)
σ	Courant getal	(-)

1. INLEIDING

1.1. Afsluitingen Algemeen

Er kan om tal van redenen besloten worden tot het afsluiten van waterlopen (estuaria, rivieren). Zo zijn er afsluitingen voltooid ten behoeve van:

- landaanwinning (Zuiderzeewerken)
- kustverkorting (Deltaplan)
- zoetwaterreservoirs (Haringvlietdam).

In het algemeen worden de volgende afsluitingsmethoden onderscheiden:

- plotselinge sluiting (caisson sluiting)
- geleidelijke sluiting (steen- of zandsluiting)

Bij een geleidelijke sluiting kan gewerkt worden volgens de uitbouwmethode (vanaf één of twee zijden naar het midden van het sluitgat toewerken), de opbouwmethode (laag voor laag over de gehele sluitgatlengte) of een combinatie van beide.
De geschiktste methode is afhankelijk van de omstandigheden, de kosten en de beschikbare tijd.

1.2. Zandsluitingen

Als de te verwachten stroomsnelheden tijdens de sluiting niet te hoog oplopen kan een zandsluiting als goedkoopste sluitingsmethode in aanmerking komen.
Het benodigde zand wordt meestal door zandzuigers gewonnen en vervolgens als zand-watermengsel via een persleidingenstelsel naar het stort gevoerd. Aldus wordt de kop van de sluitdam uitgebouwd en het sluitgat verkleind.

Het volume van de sluitdam wordt bepaald door de optredende taluds, de benodigde kruinhoogte en de kruinbreedte.
Het talud van de dam en het stort wordt bepaald door de korreldiameter van het gespoten zand en de stroming door het sluitgat. Het onderwatertalud blijkt steiler te zijn dan het talud in de getijzone. Bij reeds uitgevoerde zandsluitingen bestonden taluds van 1:10 à 1:30 tot zelfs 1:80 à 1:100 voor ondiepe geulen (Luxemburg, 1982).
De vereiste kruinhoogte van de sluitdam is afhankelijk van de optredende waterstanden. De keuze van de ontwerpwaterstand hangt samen met de gevolgen van een eventuele doorbraak.
De kruinbreedte wordt vaak gedicteerd door de minimaal benodigde werkbreedte.

1.3. De Compartimenteringswerken

Aktueel zijn de plannen om de Krammer en het Tholense Gat in het oostelijk deel van de Oosterschelde af te sluiten (fig. 1.1).

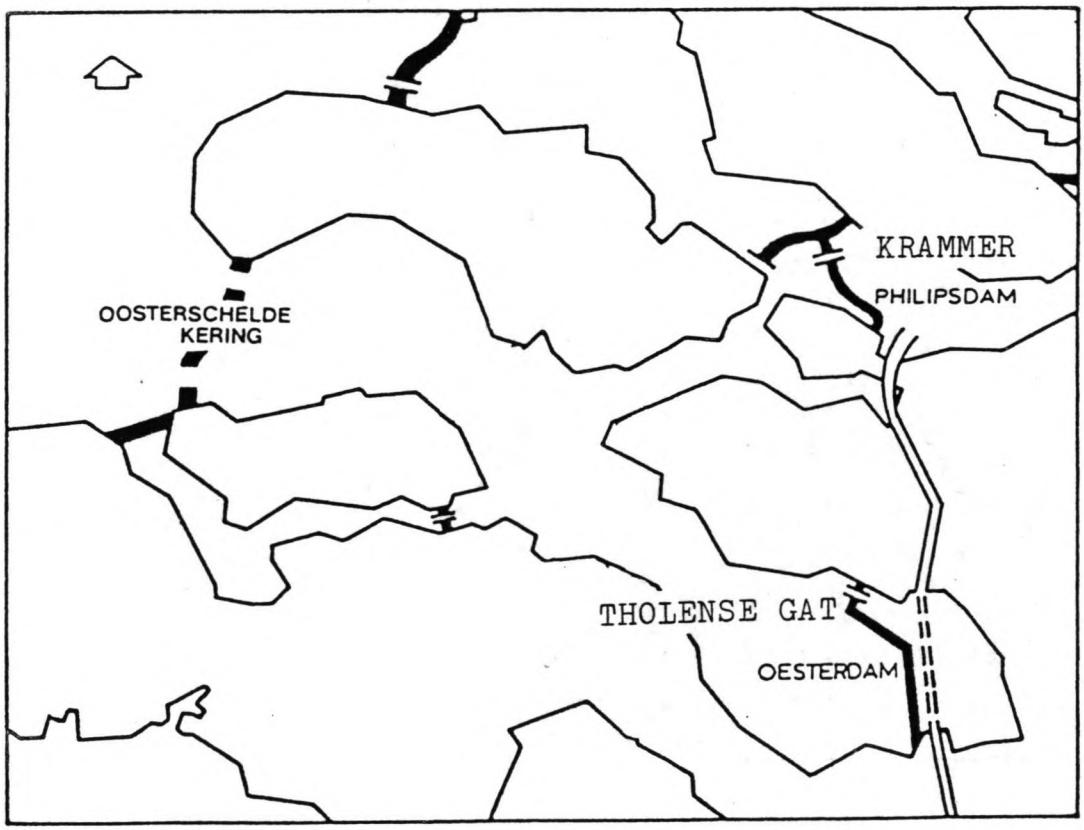


Fig. 1.1 Situering Compartimenteringswerken

Het doel van deze dammen, de Philipsdam en de Oesterdam is meerledig; namelijk het creëren van een:

- zoet/zout scheiding
- getijvrij Schelde-Rijn Kanaal
- voldoende getij in de Oosterschelde.

Het plan om de genoemde getijgeulen zoveel mogelijk met zand af te sluiten was aanleiding tot onderzoek en samenwerking tussen Rijkswaterstaat en de T.H.-Delft.

1.4. Overzicht Onderzoek Zandsluitingen aan de T.H.-Delft

Doel van het zandsluitingsonderzoek is:

- in een vroeg stadium (al voor de aanbesteding van het werk) een goede indruk krijgen van de benodigde zandproduktie, het zandverlies en de sluitingsduur;
- het optimaliseren van de uitvoeringstechniek.

Het blijkt dat de gebruikelijke zandverliesberekening, met een empirisch karakter, in veel gevallen tekort schiet.
Er moet daarom een zandverliesberekening opgezet worden waarin de fysische eigenschappen van het transportproces uitgangspunt zijn.

Tot nu toe is het op de T.H.-Delft verrichte onderzoek vooral gericht op wat er gebeurt met het zand-water mengsel dat uit een pijpleiding over het bovenwaterstort van een zanddam stroomt en vervolgens de waterlijn bereikt.

Luxemburg gaat uit van de hypothese dat bij de waterlijn al het zand direct in suspensie gaat en in de heersende stroming wordt meegevoerd. In een modelproef analyseert hij de stroming rond de kop van een dam (Luxemburg, 1982).

Mastbergen onderzoekt de hypothese dat het zand-water mengsel als een dichtheidsstroom langs het onderwaterstort stroomt. Hij onderzoekt het mechanisme waarmee dunne geconcentreerde zandlaagjes kunnen afstromen (het zogeheten korreldispersie mechanisme) en leidt theoretische verbanden af tussen concentraties en taludhellingen, snelheden en debieten (Mastbergen, 1983). In een eenvoudig model wordt het verschijnsel kwalitatief experimenteel onderzocht (Mastbergen, 1984).

Lantsheer en Neerings gaan, na enkele algemene studies naar de aanleg van de Philipsdam, verder in op deze theorie en onderzoeken experimenteel het verband tussen concentraties en evenwichtshellingen voor zandwater "slurries", welke goed overeenstemmen met de theorie, en het verband tussen debieten en hellingen, welke minder goed overeenstemmen (Lantsheer en Neerings, 1984).

Momenteel vindt experimenteel onderzoek plaats naar het gedrag van zandwater slurries onder water.
Zowel op de T.H. als op het W.L. vindt nader onderzoek plaats naar het gedrag van zand-water dichtheidsstromen.

Op dit moment (mei 1985) zijn de resultaten van het onderzoek nog ontoereikend om het zand-water mengsel op een fysisch juiste manier in de zandverliesberekening in te voeren.

2. SLUITGATSTROMING

2.1. Inleiding

In dit hoofdstuk worden enkele aspecten van stroming door een sluitgat beschreven. Die stroming kan veroorzaakt worden door rivierafvoer of getij.
Het sluitgat wordt begrensd gedacht door twee dammen. Uitgaande van een loodrechte aanstroming kan uit symmetrie-overwegingen volstaan worden met een half-symmetrische stroming langs één van de sluitdammen.

Bij de aanstroming in de richting van het sluitgat treedt versnelling op. De stroming laat los van de dam en er treedt contractie op waarbij de begrenzing wordt gevormd door een scheidingslijn, analoog aan de vrije stroomlijn die optreedt bij uitstroming door een opening in een vat. Bij sluitgatstroming is het medium stilstaand water in plaats van lucht.

Voor een stationaire stroming loodrecht op een vertikale wand is de vorm van de vrije stroomlijn te bepalen met behulp van de tweedimensionale potentiaaltheorie.
Het turbulente karakter en de bij zandsluitingen aanwezige taluds maken een aanvulling noodzakelijk die door Luxemburg (1982) al beschreven is.

2.2. Potentiaalstroming Scheidingslijn

In Lamb, Hydrodynamics (1932) wordt, met behulp van de potentiaaltheorie, de gedaante van de vrije stroomlijn beschreven bij uitstroming door een opening in de wand van een groot vat.
Luxemburg gebruikte de analytische oplossing van deze lijn ook in het geval van stroming langs een half oneindige vertikale wand.

Met betrekking tot de potentiaal stroming gelden de gebruikelijke aannamen:

- de stroming is wrijvingsarm (vrijwel horizontaal)
- inwendige wrijving wordt verwaarloosd (viscositeit is nul)
- de stroming is rotatievrij (vorticiteit is nul).

Wat betreft de vorm van de wand (sluitdam) geldt: de wand is vertikaal, oneindig lang en van geringe dikte.

Voor de scheidingslijn volgt dan:

$$x = \frac{4B}{2 + \pi} \sin^2(1/2\,\theta) \qquad (2.1)$$

$$y = \frac{2B}{2 + \pi} (\ln \tan (1/4\pi - 1/2\,\theta) + \sin\theta) \qquad (2.2)$$

Zie fig. 2.1.

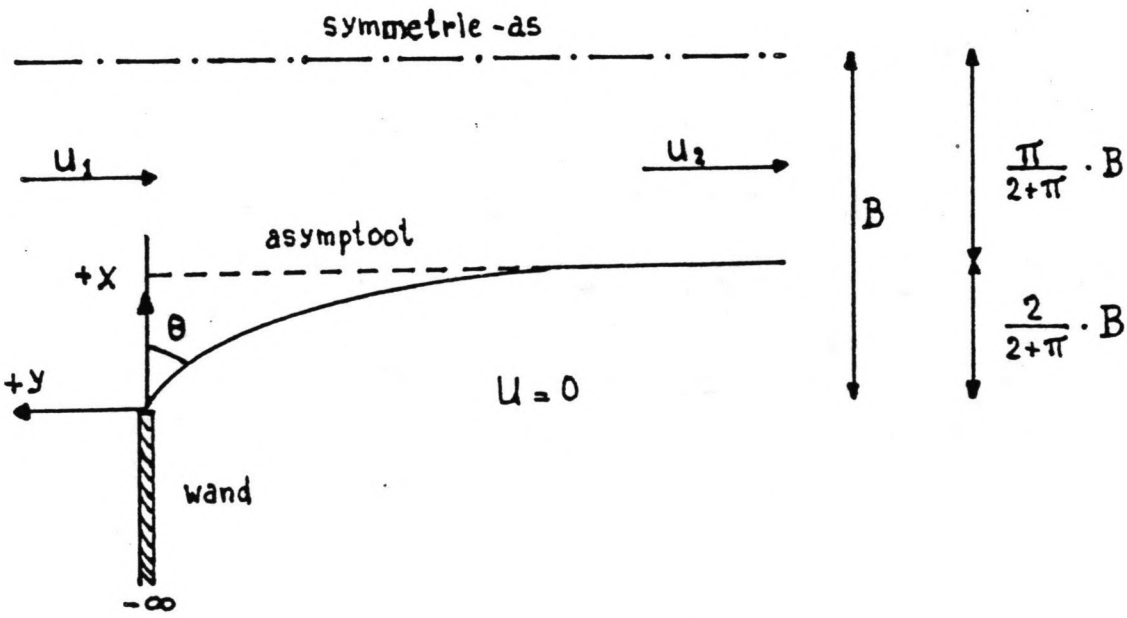


Fig. 2.1 Definitie schets

$$0 < x < \frac{2B}{2+\pi}$$

$$-\infty < y < 0$$

$$0 < \theta < 1/2\pi$$

θ is de hoek tussen de positieve x-as en de richting van de scheidingslijn in het betreffende punt.

Enkele eigenschappen van de scheidingslijn:

- vormt de begrenzing tussen stilstaand en stromend water
- er heerst een constante snelheid langs de lijn
- de normaalsnelheid is nul
- de vorm is onafhankelijk van de aanstroomsnelheid
- de x- en y-coördinaten zijn evenredig met de sluitgatbreedte B.
- de contractiecoëfficient $\beta = \frac{\pi}{2+\pi} \simeq 0.61$

  (op $y = -\infty$ vindt uitstroming plaats over 0.61 B)

2.3. Potentiaalstroming Contractiecoëfficient

De constatering dat de contractiecoëfficient β constant is voor elke geometrie gaat alleen op indien de dam zich tot in het oneindige uitstrekt. In de praktijk betekent dit dat de damlengte groot genoeg moet zijn in verhouding tot de breedte van het sluitgat.

Betz (1963) beschrijft het verband tussen de contractiecoëfficient en de geometrie door gebruik te maken van potentiaaltheorie en conforme afbeeldingen.

Als:

L = damlengte
B = sluitgatbreedte
U_1 = aanstroomsnelheid
U_2 = eindsnelheid

dan geldt volgens Betz:

$$\frac{B}{B + L} = \frac{U_1}{U_2} + \frac{2}{\pi} \left(1 - \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2\right) \arctan\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \qquad (2.3)$$

Uit continuïteitsoverwegingen moet gelden:

$$U_1.(B + L) = U_2.(\beta B) \qquad (2.4)$$

Dus:

$$\frac{U_1}{U_2} = \beta \left(\frac{B}{B + L}\right) \qquad (2.5)$$

Invullen in (2.3) levert:

$$\frac{B}{B + L} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1 - \beta}\right) \left(1 - \left(\frac{\beta B}{B + L}\right)^2\right) \arctan \left(\frac{\beta B}{B + L}\right) \quad (2.6)$$

β is een functie van B en L en blijft onafhankelijk van de aanstroomsnelheid.

Het verband wordt duidelijker in grafiekvorm:

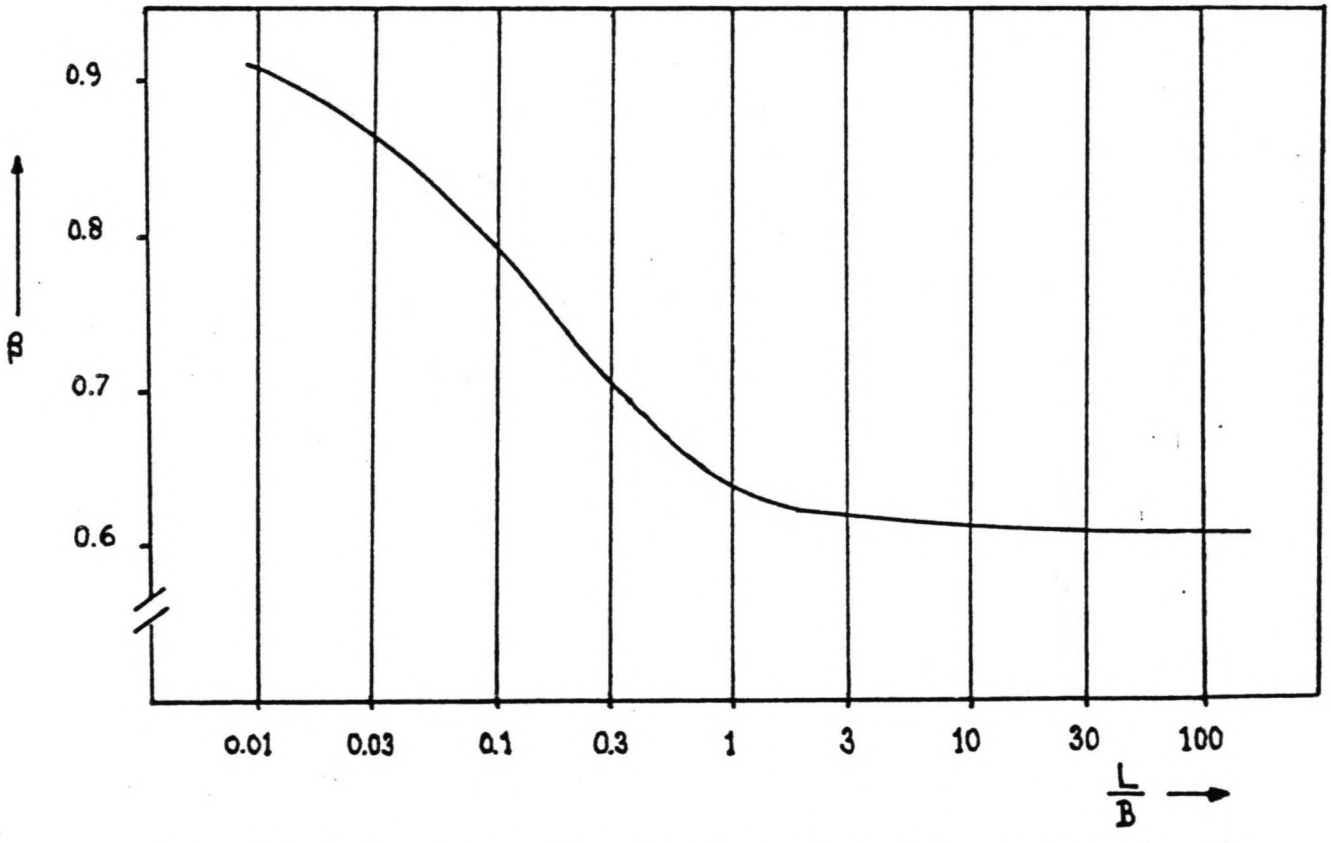


Fig. 2.2 De contractiecoëfficient is afhankelijk van de verhouding damlengte - sluitgatbreedte.

Uit figuur 2.2 volgt dat als $\frac{L}{B} \to \infty$, de contractiecoëfficient naar 0.61 nadert. Dit is in overeenstemming met de theorie volgens Lamb.

Verder blijkt dat de aanname "L oneindig lang" vervangen kan worden door "L > B" waarbij β nog maar weinig varieert.
Als $L/B \to 0$ (geen dam en geen contractie) dan nadert β naar 1.

2.4. Het Menggebied

Een scherpe scheidingslijn zoals beschreven in hoofdstuk 2.2, ontstaat alleen bij uitstroming van bijvoorbeeld water in lucht. Is het instromend medium ook water dan is er geen sprake meer van een stabiele grens tussen stilstaand en stromend water. Dit is ook het geval bij stroming door een sluitgat. Door turbulentie verplaatsen de waterdeeltjes zich daar ook in zijdelingse richting. De overgang tussen hoofdstroom en stilstaand water verloopt daardoor geleidelijker. Het overgangsgebied, met snelheidsgradienten loodrecht op de hoofdstroom wordt doorgaans het menggebied genoemd.

Het blijkt dat de snelheidsverdeling in een dergelijk menggebied beschreven kan worden door een errorfunctie. De locatie van het menggebied en de snelheidsverdeling blijken onafhankelijk van de aanstroomsnelheid.
Er kan aangetoond worden dat, uit behoudsoverwegingen, het menggebied gepaard moet gaan met een retourstroming (neer) in het schaduwgebied van de dam (zie fig. 2.3).

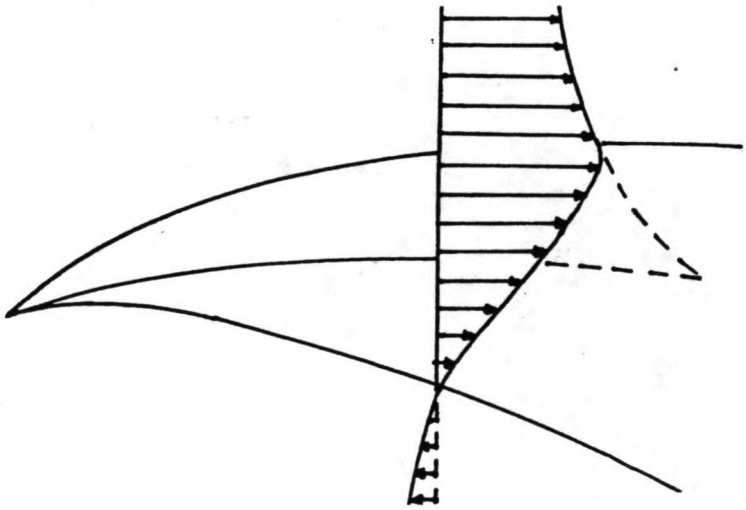


Fig. 2.3 Snelheidsverdeling in menggebied
(-------: volgens potentiaaltheorie)

Luxemburg (1982) bepaalde de breedte van het menggebied met behulp van de theorie van straalstromen en toetste die theorie met modelproeven. Het bleek dat de locatie niet overeenstemde met de theorie en dat het menggebied breder was dan verwacht. Met een aangepaste theorie waren de resultaten wel met elkaar in overeenstemming. In hoofdstuk 5.3. wordt gebruik gemaakt van deze resultaten.

In hoofdstuk 2.5. wordt beschreven door welke termen deze dwarsuitwisseling wordt gerepresenteerd in de bewegingsvergelijkingen.

2.5. Zijdelingse spanningen

De in hoofdstuk 2.4. beschreven impulsuitwisseling door het theoretische scheidingsvlak kan uitgedrukt worden als een schuifspanning die op datzelfde vlak werkt. In de bewegingsvergelijkingen wordt dit proces weergegeven door de zogeheten zijdelingse spanningen.

Uit de Navier-Stokes vergelijkingen voor drie dimensies zijn twee dimensionale bewegingsvergelijkingen af te leiden waarin:

- middeling plaats vindt over de diepte;
- een hydrostatische drukverdeling wordt verondersteld;
- het turbulente karakter van de stroming in rekening is gebracht.

De 2-D lange golfvergelijking is geldig voor in de tijd langzaam variërende stroming in vlakke en ondiepe gebieden.
In x-richting luidt de algemene vorm van de bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) - fhv + gh\frac{\partial}{\partial x}(h + z_b) +$$

$$-\frac{\tau_{wx}}{\rho} + \frac{\tau_{bx}}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h\tau_{xx}}{\rho}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h\tau_{xy}}{\rho}\right) = 0 \qquad (2.7)$$

u	diepte-gemiddelde snelheid in x-richting
v	diepte-gemiddelde snelheid in y-richting
h	waterdiepte
z_b	bodemligging t.o.v. horizontaal vlak
f	Coriolis parameter
τ_w	windschuifspanning
τ_b	bodemschuifspanning
τ_{xx} τ_{xy}	zijdelingse spanningen

Van de drie schuifspanningstermen, bodemschuifspanning, windschuifspanning (beide werkend op een horizontaal vlak) en zijdelingse schuifspanning (werkend op een vertikaal vlak), is de laatste het moeilijkst te bepalen.

De grootte van de zijdelingse spanningen wordt bepaald door:

- viskeus deel
- turbulent deel
- convectie stuk

De laatste bijdrage ontstaat als de convectietermen over de diepte worden geïntegreerd en dient dus als compensatie voor het feit dat de werkelijke stroomsnelheid wél over de diepte varieert.

Ten opzichte van de turbulente spanningen kunnen de viskeuze spanningen buiten de viskeuze sublaag verwaarloosd worden.
Bij het hier beschreven type problemen, met ruwe bodem, is die sublaag verwaarloosbaar klein, zodat alleen de turbulente en de convectie bijdrage van belang zijn.

2.6. Zijdelinge Uitwisseling

Zijdelings impulstransport wordt mogelijk gemaakt door een dwarsgradiënt in de zijdelingse spanningen. Dus in de bewegingsvergelijkingen door de termen:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}) \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy})$$

Voor een goede schatting van de zijdelingse spanningen is een inzicht vereist in de verschillende bijdragen aan die spanningen. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van onderzoek door Lean en Weare (1979).
De grootte van de termen zal plaatsafhankelijk zijn. Omdat we de uitwisseling tussen hoofdstroom en neerstroming willen beschrijven, beperken we ons tot het menggebied.

Het menggebied kan opgevat worden als een grenslaag waar de gradiënten in dwarsrichting groter zijn dan in langsrichting. Als de x-richting de hoofdstroomrichting is dan komt de belangrijkste bijdrage van

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy})$$

τ_{xy} is uit te drukken in het produkt van een zijdelingse uitwisselingscoëfficient ε en de snelheidsgradiënt in dwarsrichting:

$$\tau_{xy} = \rho\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \tag{2.8}$$

Zijdelingse uitwisseling is mogelijk door:

- turbulentie

  1) snelheidsgradiënt in menggebied tussen hoofd- en neerstroming;
  2) aan de bodem opgewekte turbulentie, gepaard gaande met een snelheidsgradiënt in de dwarsrichting;

- convectie

  3) secundaire stromingen: door gekromde stroomlijnen ontstaat een dwarsstroming (vergelijk spiraalstroming in een rivierbocht).

Ad 1:

De snelheidsverdeling in het menggebied gedraagt zich dwars op de hoofdstroom als een errorfunctie:

$$U = U_o \left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{y}{x}\left(1/2\,R\right)^{1/2}\right)\right) \qquad (2.9)$$

U_o snelheid van de hoofdstroom

x hoofdstroomrichting gemeten vanuit de oorsprong van het menggebied (de kop van de dam)

$R = \frac{Ux}{\varepsilon}$: een dimensieloze constante; de breedte van het menggebied is een functie van R

Uit de definitie van R volgt:

$$\varepsilon = \frac{Ux}{R} \tag{2.10}$$

Gemiddeld over de doorsnede geldt:

$$U = 1/2\, U_o \tag{2.11}$$

Dus

$$\varepsilon \sim 1/2\, \frac{U_o x}{R} \tag{2.12}$$

Met

$$\frac{\partial U}{\partial y} \sim \left(\frac{R}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot \frac{U_o}{x} \tag{2.13}$$

Volgt voor τ_{xy} [(2.12) en (2.13) invullen in 2.8)]

$$\tau_{xyl} \sim \rho U_o^2 \cdot \frac{1}{2} (2\pi R)^{-1/2} \tag{2.14}$$

Ad 2.

Aan de bodem vindt turbulente menging plaats. Als we veronderstellen dat dit mengmechanisme (voor de impuls van het water) identiek is aan het transportmechanisme voor massa (merkstof oid.) dan kan gebruik gemaakt worden van de experimenteel gevonden ε :

$$\varepsilon \sim 0.16\ hu_x \tag{2.15}$$

waarin: u_x is de schuifspanningssnelheid en ε is diepte-gemiddeld. Voor u_x geldt in het menggebied:

$$u_x \sim \frac{\sqrt{g}}{C} \cdot {}^{1/2}U_o \tag{2.16}$$

Uit (2.8), (2.13), (2.15) en (2.16) volgt voor τ_{xy} in het menggebied:

$$\tau_{xy2} \sim 0.03\rho \frac{(gR)^{1/2}.U_o^2}{C} \cdot \frac{h}{x} \tag{2.17}$$

Ad 3.

Behalve door de turbulente mengprocessen kan impulsuitwisseling ook plaatsvinden door secundaire stromingen. De grootte van die uitwisseling hangt af van de kromming van de stroomlijnen. Onderzoek door Rozovskii (1957) naar bochtstroming in een kanaal, uitgaande van een (waargenomen) logaritmisch snelheidsprofiel, levert voor τ_{xy}:

$$\tau_{xy} \sim -\rho.\frac{h}{r} \cdot \frac{U^2}{\kappa^3} \cdot \frac{\sqrt{g}}{C} \left(0.8 - 0.4 \frac{\sqrt{g}}{\kappa C}\right) \tag{2.18}$$

r is kromtestraal stroomlijnen

κ is constante van Von Kármán (=0,4)

Met $U=1/2U_o$ en verwaarlozing van de tweede term:

$$\tau_{xy3} \sim -3.1\rho \frac{h}{r} \cdot \frac{\sqrt{g}}{C} \cdot U_o^2 \qquad (2.19)$$

Het minteken wijst erop dat deze term, in vergelijking met de voorgaande processen, een tegengesteld gedrag vertoont. Er is energieoverdracht van de circulatie- naar de hoofdstroming zodat als aandrijving van de neer alleen de turbulente spanningen overblijven (Flokstra, 1977).

Als τ_{xy1} vergeleken wordt met τ_{xy2} en τ_{xy3} dan blijkt dat, met gangbare waarden voor R en C, de bijdrage van het menggebied (τ_{xy1}) al snel overheerst.

$$\frac{\tau_{xy1}}{\tau_{xy2}} = \frac{C}{0.15R\sqrt{g}} \cdot \frac{x}{h} \qquad (2.20)$$

$\tau_{xy1} > \tau_{xy2}$ als:

$$\frac{x}{h} > 0.15 \frac{R\sqrt{g}}{C} \qquad (2.21)$$

$$\frac{\tau_{xy1}}{\tau_{xy3}} = 0.06 \frac{rC}{h(Rg)^{1/2}} \qquad (2.22)$$

$\tau_{xy1} > \tau_{xy3}$ als:

$$\frac{r}{h} > 15.5 \frac{(Rg)^{1/2}}{C} \tag{2.23}$$

Voor R = 300 en C = 50 $m^{1/2}/s$ begint τ_{xy1} te overheersen als:

$$\frac{x}{h} > 3 \tag{2.24}$$

en

$$\frac{r}{h} > 16 \tag{2.25}$$

Samengevat zal de aandrijving van de neerstroming voornamelijk bepaald worden door τ_{xy1}, oftewel door turbulentie ten gevolge van het horizontale snelheidsverschil tussen hoofdstroom en neer.

3. MODELLERING VAN SLUITGATSTROMING

3.1. Inleiding

Naast (of in plaats van) hydraulisch modelonderzoek kan het zinvol zijn gebruik te maken van een wiskundig model ten einde een stroming volledig te beschrijven. Het resultaat van een dergelijke berekening kan als basis dienen voor verdere berekeningen. Bij sluitgatstroming is het resultaat van een diepte-gemiddelde berekening (in elk roosterpunt snelheid en waterdiepte) bijzonder geschikt als basis voor een sedimenttransport-berekening (zie Morfologisch Deel).

In het algemeen hangt de keuze van een wiskundig model nauw samen met de te beschrijven stroming:

- de toepassing van een diepte-gemiddeld model legt beperkingen op ten aanzien van stroming en geometrie.
- de aard van sluitgatstroming stelt eisen aan het stromingsmodel.

In hoofdstuk 2 zijn de kenmerken van stroming door een sluitgat beschreven. Karakteristiek is het optreden van een neerstroming in het schaduwgebied van de dam, aangedreven door de hoofdstroming en daarvan gescheiden door een menggebied. Met deze kennis kan het wiskundig model op zijn toepasbaarheid worden beoordeeld.

3.2. Eisen t.a.v. Stroming en Geometrie

Uitgangspunt voor de berekening zijn de lange golfvergelijkingen in twee dimensies. Voor de hiermee te beschrijven stromingen en golfverschijnselen gelden de volgende beperkingen:

- grote tijdschaal: de tijdschaal waarop stromings- of waterstandsveranderingen zich afspelen moet zodanig groot zijn dat vertikale versnellingen ten opzichte van de zwaartekracht te verwaarlozen zijn (hydrostatische drukverdeling) en ook groot genoeg ten opzichte van de tijdschaal van de turbulente snelheidsfluctuaties;

- kleine bodemhelling: waardoor de hydrostatische druk en het logaritmisch snelheidsprofiel gehandhaafd blijft. Bij grote bodemhelling gaat de snelheidsverdeling afwijken van het logaritmisch profiel. Bij taluds vanaf 1:7 à 8 laat de stroming los van de bodem;

- geringe drie-dimensionale effecten: door secundaire stroming varieert de richting van de snelheid over de vertikaal. De bij bochtstroming optredende spiraalstroming veroorzaakt afwijkingen in de richting en grootte van de bodemschuifspanning.

Samengevat: in aanmerking komt een langzaam in de tijd variërende stroming (een getij- of stationaire stroming).
De flauwe taluds bij zandsluitingen (hoofdstuk 2.2) rechtvaardigen een twee-dimensionale aanpak. De grootste afwijkingen ten gevolge van secundaire stroming zullen optreden in de neerstroom waar de stroomlijnen sterk gekromd zijn.

3.3. Eisen t.a.v. Numeriek Model

Een getrouwe weergave van een circulerende stroming stelt specifieke eisen aan het wiskundig model en de keuze van de modelparameters. Voor de berekening van een betrouwbaar stroombeeld zijn de volgende aspecten van belang:

- "No-Slip" voorwaarde op vaste wanden

  De tangentiële snelheid langs de wand moet gelijk aan nul gesteld worden. Toepassing van een No-Slip voorwaarde maakt vorticiteitsproductie langs de randen mogelijk. De aanwezigheid van vorticiteit in een vloeistof is noodzakelijk voor het optreden van circulatiestromingen. No-Slip geeft aanleiding tot een snelle verandering in de stroomsnelheid over een afstand loodrecht op de wand. Door deze grenslaagvorming wordt vorticiteit opgewekt aan de rand.

- Convectietermen

De convectietermen moeten in de berekening worden meegenomen. Voor de verspreiding van aan wanden opgewekte vorticiteit blijkt het convectief transport een belangrijke rol te spelen. Bij berekeningen zonder de convectietermen ontstaat geen neerstroming (Lean en Weare, 1979).

- Zijdelingse spanningen

Zijdelingse spanningen moeten in rekening worden gebracht. Het blijkt dat het vóórkomen van zijdelingse spanningen in de bewegingsvergelijkingen noodzakelijk is voor een juiste weergave van circulerende stromingen en loslaatverschijnselen. De orde van grootte van deze termen is stromingsafhankelijk en moet voor elk stromingsprobleem bepaald worden (hoofdstuk 2.6). In hoofdstuk 3.4 wordt besproken op welke manier de zijdelingse spanningen in rekening gebracht kunnen worden.

- Randvoorwaarden op open randen

Met open randen worden de in- en uitstroomranden van het rekengebied bedoeld. De ligging van deze randen wordt niet door de geometrie van het model bepaald, in tegenstelling tot de vaste randen die bepaald worden door de natuurlijke begrenzingen. De volgende factoren kunnen van invloed zijn op de situering van open randen:

- eisen met betrekking tot het aantal rekenpunten;
- het al dan niet beschikbaar zijn van randvoorwaarden (metingen);
- de invloed van rand en randvoorwaarden op de oplossing.

In het model ontstane ongewenste golven of andere verstoringen worden uitgedempt door de bodemwrijving en kunnen door de open randen het gebied uit mits daar de juiste randvoorwaarden zijn opgelegd.
Bij sluitgatstroming speelt de demping door bodemwrijving een nog kleinere rol dan bij de gebruikelijke toepassing in grote en relatief ondiepe gebieden. Voor het relatief diepe en kleine sluitgatmodel zal demping van de beginvoorwaarden vrijwel uitsluitend door de open randen moeten geschieden, zodat de keuze van de randvoorwaarden zorgvuldig moet geschieden.
Een ongeschikte randvoorwaarde kan de convergentiesnelheid nadelig beïnvloeden of zelfs het hele stromingspatroon drastisch wijzigen.
Of een randvoorwaarde al dan niet geschikt is, wordt bepaald door de mate van reflectie en hangt samen met de ligging van de open rand in de stroming. Zo is een zwak-reflecterende randvoorwaarde die gebaseerd is op de één-dimensionale karakteristieken theorie, niet bruikbaar in "gestoord" gebied, waar nog een snelheidsgradiënt in dwarsrichting heerst of waar de stroming scheef invalt (zie bijlage 3 en 4). Mogelijke oplossingen zijn: de uitstroomrand verplaatsen; dezelfde randvoorwaarde aan de instroomrand opleggen of een ander type randvoorwaarde gebruiken.

- Plaats van de benedenstroomse rand

Bij sluitgatstroming moet de benedenstroomse rand zodanig ver wegliggen dat de stroming in de nabijheid van de dam niet beïnvloed wordt. In het algemeen moet de rand daarvoor buiten het verstoorde gebied liggen of moet de geschikte randvoorwaarde op te leggen zijn (zie voorgaande).
Als vuistregel geldt dat het gebied met circulerende stroming zich uitstrekt tot acht maal de obstakellengte (hier: damlengte).

Bij een zandsluitingsmodel is de obstakellengte moeilijk te definiëren in verband met de flauwe taluds van de zanddam. Daarom zou de plaats van de benedenstroomse rand experimenteel gekozen moeten worden, zodanig dat de invloed op de stroming verdwenen is.

- Maaswijdte van het rekenrooster

De maaswijdte van het rekenrooster bepaalt in hoeverre stromingsdetails nog weergegeven kunnen worden.
Als vuistregel geldt dat een neerstroming goed beschreven kan worden als minstens vijf rekenpunten in de circulatiezone liggen (Vreugdenhil, 1980).
Als gevolg van de ruimtelijke discretisatie, dus afhankelijk van de roosterafmetingen, kunnen numeriek gegenereerde neren ontstaan, ook al worden de zijdelingse spanningen niet in rekening gebracht. Deze neerstroming hoeft echter niet met het werkelijke stroombeeld overeen te komen (Lean en Weare, 1979). Voor een nauwkeurige oplossing dient de invloed van deze numerieke diffusie klein te zijn. Door de stapgrootte Δx en Δy te verkleinen in gebieden met grote snelheidsgradiënten kan dit nummerieke effect beperkt worden.
De vereiste stapgrootte kan ook bepaald worden door de geometrie van het rekengebied. Bijvoorbeeld door de noodzaak bodemligging of gebiedsgrenzen in detail te beschrijven.
Bij de uiteindelijke afweging moet ook het kostenaspect betrokken worden. De door roosterverfijning extra te verkrijgen informatie moet opwegen tegen de extra rekenkosten.

- Insteltijd stationaire stroming

In het algemeen zal de insteltijd bij neerstromingen (en dus ook bij sluitgatstroming) bepaald worden door de tijd die nodig is voor het tot stand komen van een volledig ontwikkelde neer. Deze tijd is vaak veel langer dan de tijd die nodig is voor het uitdempen van verstoringen die ontstaan door het opstarten van de berekening en waaraan andere stromingsproblemen hun insteltijd ontlenen.
De benodigde insteltijd is sterk afhankelijk van de neerafmetingen en indirect van de obstakellengte.
Als de aandrijvende kracht van de neerstroming door een viscositeitscoëfficient kan worden gekarakteriseerd (diffusiebenadering) dan geldt als schatting voor de insteltijd:

$$T \sim \frac{\ell^2}{\varepsilon} \qquad (3.1)$$

ℓ : obstakellengte
ε : viscositeitscoëfficient

In hoofdstuk 3.4 wordt nader op de viscositeitscoëfficient ingegaan.

Er zijn omstandigheden denkbaar waarbij geen stationaire neerstroming bereikt wordt: als de stroming te snel van richting verandert (getijstroming) of als de stroming zodanig turbulent is dat een kritiek Reynolds getal wordt overschreden.

3.4. Weergave Zijdelingse Spanningen

In het voorgaande is gewezen op het belang van de zijdelingse spanningen bij de berekening van neerstroming. Er zijn verschillende manieren om de zijdelingse spanningen in rekening te brengen. Analoog aan de wijze waarop het turbulente karakter van een stroming vaak wordt beschreven, kan een uitdrukking worden gebruikt die een evenredigheid veronderstelt met de diepte-gemiddelde snelheidsgradiënt. De evenredigheidsconstante is de uitwisselingscoëfficient ε, ook wel eddy viscosity genoemd.
ε is een verzamelterm die invloeden van turbulentie en convectie bevat zoals in hoofdstuk 2.6 al is beschreven. Aangezien ε een stromingseigenschap is kan deze van plaats tot plaats variëren. Dit in tegenstelling tot de constante moleculaire viscositeit die een vloeistofeigenschap is.
Volgens de eddy viscosity methode worden de zijdelingse spanningen in de bewegingsvergelijkingen als volgt weergegeven:

In x-richting:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\tau_{xx}}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\tau_{xy}}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\,\varepsilon_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\,\varepsilon_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (3.2)$$

In y-richting:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\tau_{yy}}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\tau_{xy}}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(h\,\varepsilon_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h\,\varepsilon_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (3.3)$$

De grootte van ε kan empirisch worden bepaald en zodanig gekozen worden dat de resultaten van de berekening overeenstemmen met prototype- of modelmetingen.

In veel rekenmethodes wordt extra viscositeit ingevoerd om de numerieke stabiliteit te verbeteren. Deze methodes zijn alleen geschikt voor de weergave van neerstromingen als de som van numerieke- en extra toegevoegde viscositeit klein blijft ten opzichte van de werkelijke viscositeit.
Meestal wordt in een berekening gebruik gemaakt van een constante eddy viscosity in x- en y-richting. Bij complexe stroombeelden gaat deze vereenvoudiging eigenlijk niet op omdat de impulsuitwisseling richtingsafhankelijk is.
In het geval van sluitgatstroming is het zinvol om ε zodanig te kiezen dat de grootste (belangrijkste) term correct wordt weergegeven. In een grenslaagsituatie is dat de term

$$\frac{\partial}{\partial y}(h\tau_{xy})$$

als de x-as hoofdstroomrichting is.

Uitgaande van bovenstaande representatie en de resultaten van hoofdstuk 2.6 wordt de orde van grootte van ε bepaald in hoofdstuk 5.3.

4. BESCHRIJVING WAQUA MODEL

4.1. Algemeen

Bij dit onderzoek is gebruik gemaakt van het standaardprogramma WAQUA, geschikt voor lange golven in twee dimensies. In het stromingsmodel worden diepte-gemiddelde snelheden en waterstanden berekend.
Het oorspronkelijke WAQUA model is door Rijkswaterstaat op diverse punten gewijzigd en uitgebreid (Stelling, 1983). Dit heeft geleid tot een stabiele en efficiënte berekeningsmethode met als belangrijkste voordeel een geringe numerieke viscositeit.
De huidige versie, MINI-WAQUA geheten, is geschikt voor de berekening van sluitgatstroming omdat de numerieke viscositeit vrijwel ontbreekt waardoor circulatiestromingen goed weergegeven kunnen worden. Verder blijkt het model te beschikken over goed functionerende randvoorwaarden op open randen en bevat het een aan de waterbeweging gekoppelde transportvergelijking die de mogelijkheid biedt tot vervolgberekeningen.

Om WAQUA zinvol te kunnen gebruiken worden in dit hoofdstuk enkele aspecten van het model besproken.

4.2. Oplossingsmethode

De basisvergelijkingen van het model zijn de bewegingsvergelijkingen in x- en y-richting en de continuïteitsvergelijking voor de waterbeweging. De onbekenden in de vergelijkingen zijn de diepte-gemiddelde snelheden in beide coördinaatrichtingen en de waterstand als functie van x, y en t.
Voor het oplossen van de differentiaalvergelijkingen wordt gebruik

gemaakt van een impliciete methode van het "alternating direction implicit" type. Deze methode onderscheidt zich van een volledig impliciete methode omdat niet gerekend wordt met één groot stelsel vergelijkingen dat alle roosterpunten bevat.
Bij de ADI-methode wordt per kolom en per rij een afzonderlijk stelsel vergelijkingen opgelost. Dit is mogelijk door de afgeleiden dwars op de rekenrichting expliciet te behandelen.
De in twee richtingen gesplitste berekening kan in één tijdstap uitgevoerd worden als de tijdstap ook in twee stukken wordt gesplitst. Tijdens de eerste stap wordt in x-richting langs rijen gerekend, u en H worden impliciet berekend terwijl de y-differenties expliciet worden behandeld.
In de tweede stap wordt dit hersteld door in y-richting te rekenen en nu de y-differenties impliciet te nemen en de afgeleiden in x-richting expliciet. v en H worden impliciet berekend langs kolommen.

De ADI-methode vindt vooral toepassing bij grote rekengebieden met veel roosterpunten. Bij volledig impliciete methoden leidt uitbreiding van het aantal roosterpunten tot een snelle toename van de hoeveelheid rekenwerk.

Door een goede behandeling van de convectietermen in MINI-WAQUA (Stelling, 1983), behoudt de ADI-methode het voordeel van impliciete methoden, namelijk dat de berekening stabiel is onafhankelijk van de tijdstap. De grootte van de tijdstap beïnvloedt wel de nauwkeurigheid van de berekening.

4.3. Ruimtelijke Schematisatie

Het rekengebied wordt geschematiseerd in een rechthoekig- en zogeheten versprongen rooster (staggered grid) met uniforme maaswijdte. Fig. 4.1 toont de opbouw van het WAQUA rooster.

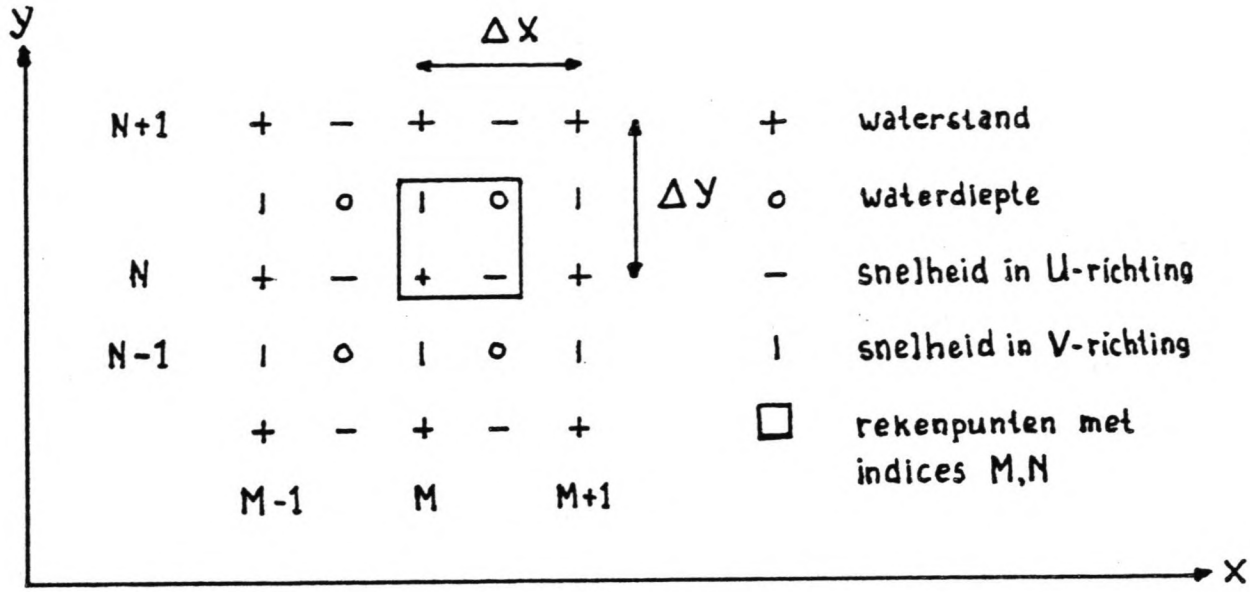


Fig. 4.1 WAQUA rooster.

- De waterdiepte in punt (M,N) wordt bepaald door gebruik te maken van de bodemligging in punt ($M \pm 1/2$, $N \pm 1/2$).
- De randen van het model worden tot trapjeslijnen geschematiseerd.
- Gesloten randen gaan door snelheidspunten zodat de normaalsnelheid nul kan worden gesteld.
- Open randen waar de waterstanden wordt opgelegd gaan door waterstandspunten.

Een versprongen rooster biedt voordelen ten opzichte van een niet-versprongen rooster.
Bij een traditionele schematisatie bevat elk roosterpunt drie onbekende grootheden: de waterstand, de snelheid in u-richting en de snelheid in v-richting.
Bij toepassing van centrale differenties blijkt het echter niet noodzakelijk om in elk roosterpunt deze variabelen te definiëren.
Door onderscheid te maken tussen waterstands- en snelheidspunten kan het aantal rekenpunten worden verminderd.

Combinatie van roosters van waterstands- en snelheidspunten die ten opzichte van elkaar verschoven zijn levert weer het traditionele rooster op.

Het versprongen rooster is efficient omdat het aantal onbekenden met een factor vier wordt verminderd zodat met een kwart van de rekentijd kan worden volstaan.

De schematisatie heeft geen gevolgen voor de nauwkeurigheid van de numerieke oplossing indien de convectietermen verwaarloosd kunnen worden. In het algemeen is het versprongen rooster minder nauwkeurig voor de berekening van deze termen omdat de benadering hiervan nu met dubbele stapgrootte plaatsvindt. Dit geldt echter niet voor MINI-WAQUA waar veel aandacht aan de convectietermen is besteed.

Bij lange golven in een groot gebied zijn de convectietermen van weinig belang zodat toepassing van een versprongen rooster zinvol is.

Bij stroming rond een dam, met versnellings- en vertragingsgebieden, spelen de convectietermen wel een rol. Bij dit type stroming hangt het voordeel van een versprongen rooster af van de mogelijkheid de convectietermen nauwkeurig weer te geven.

4.4. Randvoorwaarden op Open Randen

Op elke open rand moeten waterstanden of snelheden worden opgelegd.

- waterstandsrand

$$H = f(t) \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u_{//} = 0 \tag{4.2}$$

- snelheidsrand

$$u_{\perp} = f(t) \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(u_{//}) = 0 \quad \text{(aan instroomrand als } \varepsilon \neq 0) \tag{4.4}$$

In hoofdstuk 3.3 is gewezen op het belang van de open randen met betrekking tot het uitdempen van ongewenste verstoringen.
Door het opleggen van de juiste randvoorwaarden krijgt de open rand een niet-reflecterend karakter. Een dergelijke randvoorwaarde heeft als voordeel dat de invloed ervan lokaal is terwijl het toevoegen van extra viscositeit (een ander dempingsmechanisme) de fysica van het hele binnengebied beïnvloedt.
Juist bij het weergeven van neerstroming is het van belang dat de numerieke- en de eventueel extra toegevoegde viscositeit klein blijven ten opzichte van de werkelijke viscositeit.

Het zwak-reflecterende karakter van een open rand wordt in het WAQUA model bereikt door een karakteristieke relatie of de zogeheten "Riemann invariant" in de randvoorwaarde op te nemen.
In WAQUA kan de tijdsafgeleide van de Riemann invariant aan de oorspronkelijke randvoorwaarde worden toegevoegd (Zie Stelling, 1983).
Op een snelheidsrand verandert (4.3) dan als volgt:

$$u_{\perp} + \alpha \frac{\partial}{\partial t}(Ri) = f(t) \tag{4.5}$$

$Ri = u \pm 2\sqrt{gh}$

α : gewichtscoëfficient (dimensie : s)

In geval van stationaire stroming is (4.5) alleen van toepassing gedurende de insteltijd T. Voor $t > T$ gaat (4.5) over in de oorspronkelijke randvoorwaarde (4.3).
De convergentiesnelheid naar de stationaire oplossing (en dus ook de insteltijd) wordt bepaald door de grootte van α en de plaats waar deze wordt voorgeschreven.

De randvoorwaarde in deze vorm gedraagt zich als een opgedrongen verstoring van de rand. Er bestaat een relatie tussen α en het dempingsverloop van de verstoring. Dit is als volgt in te zien:

Als oplossing van het homogene deel van differentiaalvergelijking (4.5) voor u geldt:

$$u = \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) \tag{4.6}$$

De coëfficient α bepaalt blijkbaar de dempingstijd van de opgelegde verstoring.

De zwak-reflecterende randvoorwaarde kan ook op de waterstandsrand worden opgelegd. Vergelijking (4.1) krijgt dan de volgende vorm:

$$H + \alpha \frac{\partial}{\partial t}(Ri) = f(t) \tag{4.7}$$

α : gewichtsfactor (dimensie : s^2)

Door de plaats en de grootte van α te variëren kan de effektiefste demping bepaald worden.

5. INRICHTING SLUITGATMODEL

5.1. Inleiding

In dit hoofdstuk worden de belangrijkste invoerparameters van het wiskundig model bepaald.
De geometrische en de hydraulische randvoorwaarden worden ontleend aan het hydraulisch model dat in 1982 door Luxemburg is opgezet.
De schaal van het hydraulisch model (1:75) zal alleen gebruikt worden om een directe vergelijking te kunnen maken met de resultaten van dat onderzoek, met name de gemeten snelheden, de breedte van het menggebied en de neerstroming (zie hoofdstuk 6.6).
Nadat toetsing en optimalisatie heeft plaatsgevonden, zal de berekening tenslotte op prototype schaal worden uitgevoerd. De resultaten hiervan dienen als basis voor een zandverliesberekening (zie Morfologisch Deel).

5.2. Hydraulisch Model Luxemburg

Het onderzoek van Luxemburg is uitgevoerd in het Laboratorium van Vloeistofmechanica aan de T.H.-Delft.
In een stroomgoot werd de stationaire stroming door een half-symmetrisch sluitgat nagebootst.
De belangrijkste gegevens zijn verzameld in Tabel 5.1 en Figuur 5.1.

		model	prototype
lengte	m	8.50	638
breedte	m	2.60	195
waterdiepte	m	0.133	10.0
damtalud	-	1:10	1:10
ribbelhoogte	m	8.10^{-4}	0.06
Nikuradse ruwheid	m	4.10^{-4}	0.03
instroomdebiet	m^3/s	25.10^{-3}	1220
instroomsnelheid	m/s	0.072	0.625

Tabel 5.1 Overzicht model- en prototype parameters

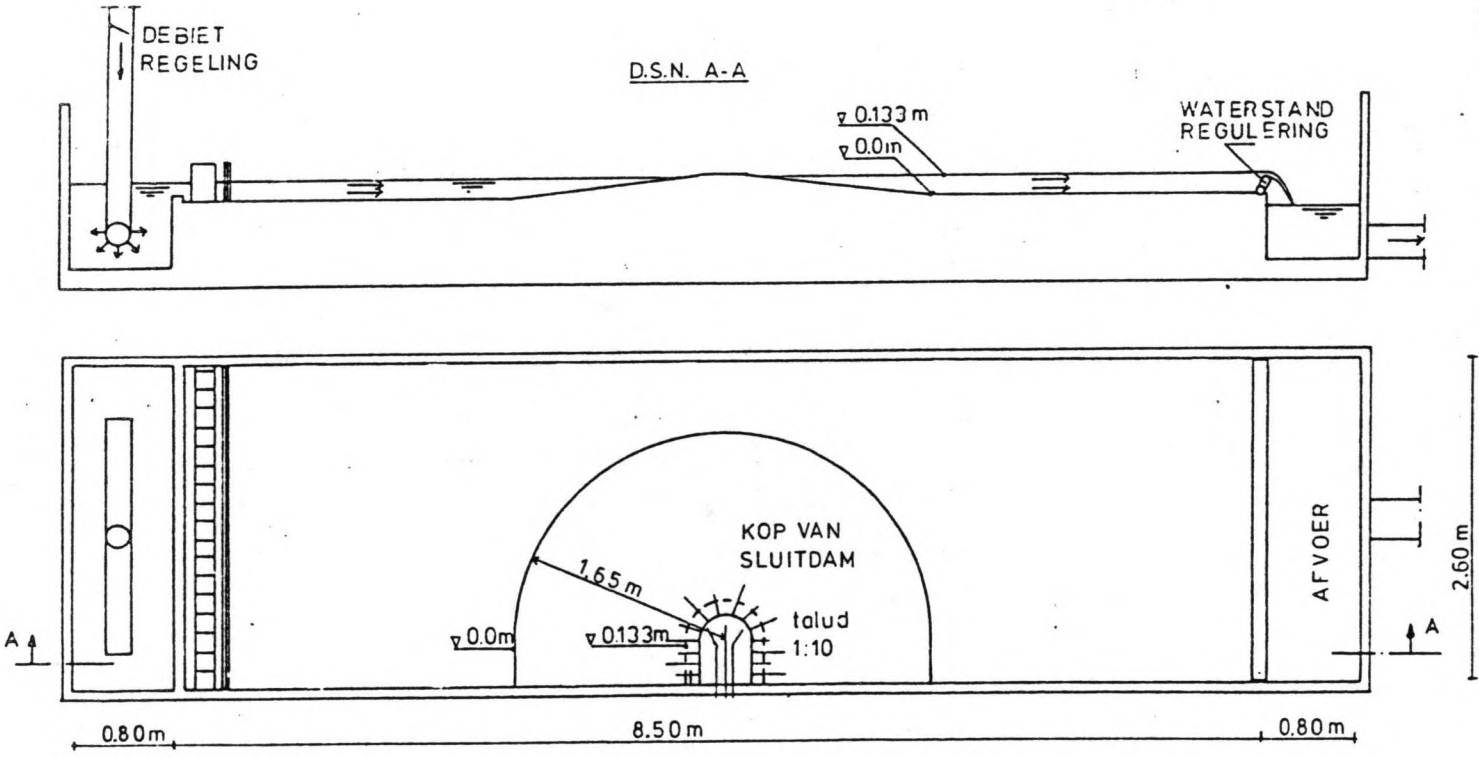


Fig. 5.1 Inrichting Hydraulisch Model (Luxemburg, 1982)

- het model is niet samengetrokken, schaal 1:75;
- het model heeft een vaste en horizontale bodem;
- bodem en dam zijn uitgevoerd in afgestreken cement;
- de plaats van de dam is halverwege de stroomgoot;
- de aanstroming is loodrecht op de dam.

De verrichte metingen in het model verschaffen informatie over het stromingspatroon rond de kop van de dam.
Stroomsnelheden zijn gemeten met stroomrichtingsmeters en met video-opnamen van oppervlaktedrijvers.
Met behulp van de video-opnamen zijn ook enkele stroomlijnen vastgesteld.
De uitwisseling in het menggebied is bestudeerd door kleurstof aan de stroming toe te voegen.

Deze metingen zullen gebruikt worden om de resultaten van de numerieke berekening te verifiëren (zie hoofdstuk 6).

5.3. Keuze Modelparameters

In eerste instantie worden de invoerparameters bepaald voor de berekening op schaal 1:75. De parameters voor de prototype berekening kunnen hieruit met behulp van schaalregels worden afgeleid.

- Stapgrootte Δx en Δy

  Kies de x-as in de lengterichting van het model en de y-as in de breedterichting.
  De maximale roosterafstand Δy wordt bepaald door de neerstroming die achter de dam zal ontstaan. De neerafmeting in y-richting kan geschat worden als globaal de obstakellengte, dus minimaal de damlengte tot aan de waterlijn (~ 0.75m, zie fig. 5.1).

In deze richting moet de neer door minimaal vijf roosterpunten beschreven worden (zie hoofdstuk 3.3). Hieruit volgt:

$$\Delta y = 0.15 \text{ m} \tag{5.1}$$

Bovenstaande vuistregel, toegepast in x-richting, leidt tot een veel grotere stapgrootte Δx. Een goede weergave van de geometrie van de dam legt echter beperkingen op aan de stapgrootte. Daarom wordt Δx gelijk aan Δy gekozen:

$$\Delta x = 0.15 \text{ m} \tag{5.2}$$

Het aantal roosterpunten in x- en y-richting bedraagt:

$$M = 58 \tag{5.3}$$

$$N = 18 \tag{5.4}$$

Het totaal aantal rekenpunten blijft binnen redelijke grenzen met betrekking tot de benodigde rekentijd.

- Tijdstap Δt

De grootte van Δt moet in samenhang met de maaswijdte bepaald worden. Uit oogpunt van de numerieke nauwkeurigheid wordt aan het Courant getal (σ) de volgende beperking opgelegd:

$$\sigma < 10 \tag{5.5}$$

Hierbij is σ gebaseerd op de karakteristieke voortplantingssnelheid. Er moet rekening gehouden worden met de dubbele stapgrootte van het versprongen rooster en met scheef door het model lopende golven. Vergelijking (5.5) levert dan:

$$1/2\sqrt{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \sqrt{gh} < 10 \tag{5.6}$$

De bereikbare tijdstap is afhankelijk van de grootste waterdiepte: $h = 0.133$ m en $\Delta x = 0.15$ m levert na invulling in (5.6): $\Delta t < 1.8$ s.
Eerdere berekeningen met het vergelijkbare 2-D model DUCHESS (T.H.-Delft) bleken echter alleen stabiele resultaten op te leveren indien $\Delta t < 0.5$ s (zie bijlagen). Op grond daarvan is in eerste instantie gerekend met een tijdstap:

$$\Delta t = 0.3 \text{ s} \tag{5.7}$$

Voor het Courant getal geldt dan:

$$\sigma = 1.6 \tag{5.8}$$

In hoofdstuk 7 wordt nader ingegaan op de invloed van Δt op de numerieke oplossing.

- Insteltijd T

De berekening wordt beëindigd als de stationaire toestand is bereikt. Het is bekend dat het instellen van de neerstroming veel tijd vergt. Een eerse schatting voor de insteltijd met behulp van (3.1) levert, met $\ell = 0.75$ m en $\varepsilon = 12.10^{-4}$ (zie (5.24)): $T = 0.75^2/12.10^{-4} \sim 470$ s. Met de invoergegevens uit dit hoofdstuk blijkt de stationaire toestand na ± 600 s bereikt te zijn. Daarom:

$$T = 600 \text{ s} \tag{5.9}$$

Het aantal tijdstappen bedraagt:

$$nst = 2.000 \tag{5.10}$$

- Controlepunten

Het stationair zijn van de stroming wordt vastgesteld met behulp van controlepunten. Op deze plaatsen kan het snelheids- en waterstandsverloop in de tijd worden weergegeven.
De elf controlepunten liggen verspreid over het rekengebied (zie fig. 5.2).

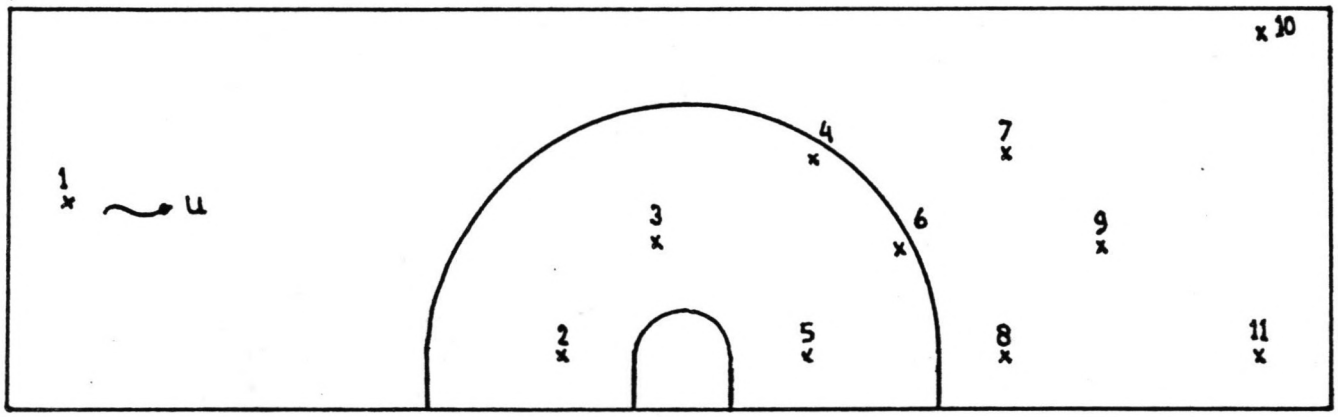


Fig. 5.2 Ligging controlepunten

- Rand-/beginvoorwaarden

Aan de bovenstroomse rand van het rekengebied wordt de snelheid opgelegd, de twee lange zijden worden gevormd door gesloten randen en benedenstrooms wordt de waterstand opgelegd.

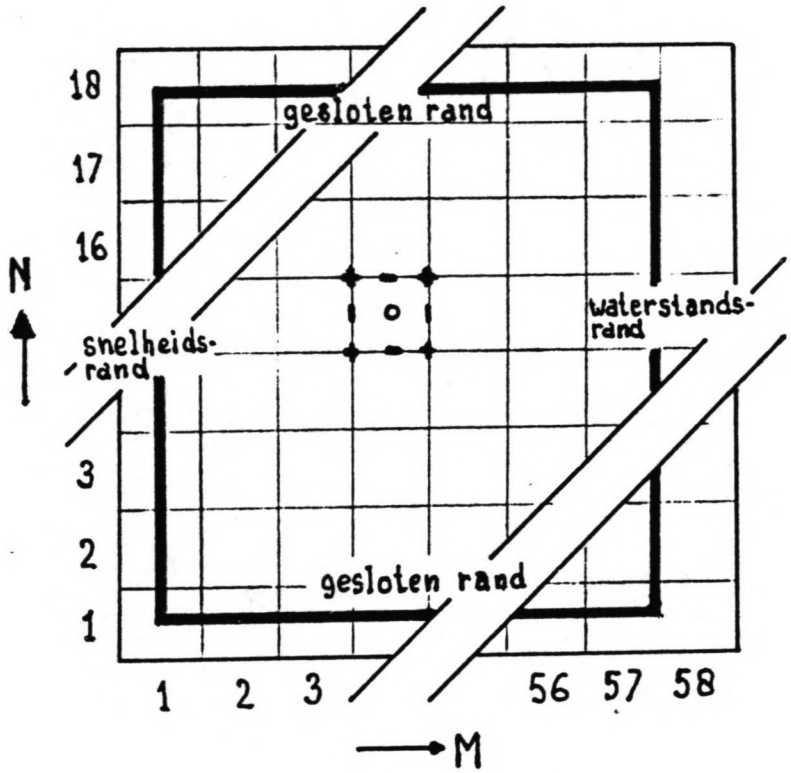


Fig. 5.3 Begrenzingen rekengebied

- Instroomrand

$$u = 0.072 + 10 \frac{\partial}{\partial t} (Ri) \ (m/s) \qquad (5.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (5.12)$$

De zwak reflecterende randvoorwaarde, met $\alpha = 10$, wordt aan de bovenstroomse rand opgelegd. Hierdoor blijkt de oplossing snel naar de stationaire toestand te convergeren. In hoofdstuk 7 wordt ingegaan op de invloed van α op het verloop van de oplossing.
Om de golfverschijnselen die optreden door het starten van de berekening zoveel mogelijk te beperken wordt de instroomsnelheid geleidelijk (in tien tijdstappen) opgevoerd tot 0.072 m/s.

- Uitstroomrand

$$H = 0.132 \text{ m} \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{5.14}$$

De waterstand H wordt uitgedrukt ten opzichte van de horizontale bodem van het model.

- Gesloten randen

$$v = 0 \tag{5.15}$$

$$u = 0 \tag{5.16}$$

De waterlijn langs de kruin van de dam stelt zich in via een droogvalprocedure. In principe bestaat de kruin uit actieve rekenpunten waarvan de bodemligging bekend moet zijn. Na controle worden hooggelegen (droge) punten weer uit de berekening genomen.

De berekening wordt gestart met als beginwaterstand:

$$H(t=0) = 0.133 \text{ m} \tag{5.17}$$

- Bodemwrijving

Uitgaande van een hydraulisch ruwe bodem kan de Chezy-coëfficient uitgedrukt worden in de waterdiepte en de equivalente zandruwheid van Nikuradse. Volgens Strickler geldt:

$$C = 25 \left(\frac{h}{k}\right)^{1/6} \qquad (5.18)$$

Met h = 0.133 m en k = 4.10^{-4}m dan:

$$C \sim 65 \ m^{1/2}/s$$

De bodemwrijving wordt in het programma ingevoerd door middel van de Manning-coëfficient. De weerstandsformule van Manning luidt:

$$C = \frac{1}{n} h^{1/6} \qquad (5.19)$$

waarin: n is Manning-coëfficient (dimensie $s/m^{1/3}$).

Uit (5.18) en (5.19) volgt voor n:

$$n = 0.04 \ k^{1/6} \qquad (5.20)$$

k = 4.10^{-4}m levert:

$$n = 0.011 \ s/m^{1/3} \qquad (5.21)$$

Aangezien de k-waarde van het hydraulisch model niet erg nauwkeurig te bepalen is, moet de invloed van de bodemwrijving op de numerieke resultaten nader onderzocht worden.

- Eddy viscosity

Met de resultaten van hoofdstuk 2.6 en 3.4 kan de invoerparameter ε bepaald worden.
De orde van grootte van de zijdelingse spanningen is vast te stellen door de benodigde karakteristieke grootheden in te vullen in (2.14), (2.17) en (2.19).

$$\tau_{xy1} \sim \frac{1}{2} (2\pi R)^{-1/2} \cdot \rho U_o^2 \qquad (2.14)$$

$$\tau_{xy2} \sim 0.03 \frac{(gR)^{1/2}}{C} \cdot \frac{h}{x} \cdot \rho U_o^2 \qquad (2.17)$$

$$\tau_{xy3} \sim -3.1 \frac{h}{r} \cdot \frac{\sqrt{g}}{C} \cdot \rho U_o^2 \qquad (2.19)$$

Voor het bepalen van die grootheden in het menggebied onderscheiden we, in navolging van Luxemburg, twee gebieden (fig. 5.4).

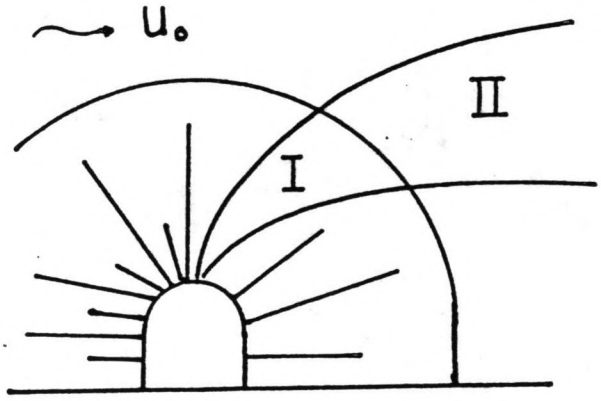


Fig. 5.4 Onderverdeling menggebied

De door Luxemburg waargenomen breedte van gebied II is groter dan volgens de theorie wordt verwacht. Overeenstemming met de theorie wordt wel verkregen indien de constante R in vergelijking (2.9) wordt aangepast. In plaats van de in de straalstroomtheorie gebruikelijke R = 300 wordt in gebied II R = 132 gekozen. De karakteristieke grootheden van het menggebied zijn verzameld in tabel 5.2.

	GEBIED I	GEBIED II
R (-)	300	132
h (m)	0.05	0.10
x (m)	1	2
C ($m^{1/2}$/s)	57	65
U_o (m/s)	0.2	0.2
U (m/s)	0.1	0.1
r (m)	2	2
L (m)	2	2
δ (m)	0.2	0.4

Tabel 5.2 Karakteristieke grootheden

U is een maat voor de snelheid in hoofdstroomrichting.

De karakteristieke lengteschalen r, L en δ zijn als volgt gedefinieerd:

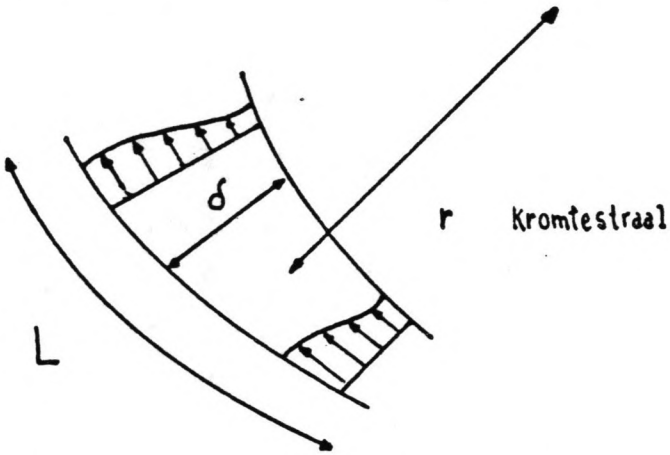


Fig. 5.5 Definitieschets menggebied

Als de benodigde grootheden uit tabel 5.2 worden ingevuld in (2.14), (2.17) en (2.19) dan levert dat tabel 5.3 op.

$\tau_{xyi}/\rho U_o^2$	GEBIED I	GEBIED II
i = 1	0.012	0.017
2	0.001	0.001
3	-0.004	-0.007
Totaal	0.009	0.011

Tabel 5.3 Bijdragen aan de zijdelingse spanningen in het menggebied

In een eddy viscosity benadering wordt de belangrijkste schuifspanningsterm als volgt uitgedrukt:

$$\tau_{xy} = \rho\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \qquad (2.8)$$

Met behulp van het voorgaande geldt als orde van grootte van ε :

$$\varepsilon_I \sim (0.009U_o^2).\ \frac{\delta}{U} \qquad (5.22)$$

Met δ = 0.2 m en U = 1/2 U_o = 0.1 m/s: $\varepsilon_I \sim 7.10^{-4}$ m^2/s

$$\varepsilon_{II} \sim (0.011U_o^2).\ \frac{\delta}{U} \qquad (5.23)$$

Met δ = 0.4 m en U = 0.1 m/s: $\varepsilon_{II} \sim 17.10^{-4}$ m^2/s

In eerste instantie wordt de gemiddelde waarde van ε_I en ε_{II} ingevoerd:

$$\varepsilon = 12.10^{-4}\ m^2/s \qquad (5.24)$$

De invloed van ε op het menggebied wordt in hoofdstuk 7 nader onderzocht.

- Geostrofische versnelling

De invloed van de aardrotatie wordt buiten beschouwing gelaten door de breedtegraad ϕ gelijk aan nul te stellen. Voor de Coriolis-parameter geldt dan:

$$f = 2\Omega\sin\phi = 0 \qquad (5.25)$$

Dit is geoorloofd aangezien de geostrofische versnelling pas een rol speelt bij afmetingen in de orde van enkele kilometers.

5.4. Overzicht

			Schaal-model	Proto-type	
*	Δx	stapgrootte in x-richting	0.15	11.25	m
*	Δy	stapgrootte in y-richting	0.15	11.25	m
*	M	roosterpunten in x-richting	58	58	-
*	N	roosterpunten in y-richting	18	18	-
	ℓ	lengte rekengebied	8.48	636	m
	b	breedte rekengebied	2.55	191	m
*	Δt	tijdstap	0.3	2.4	s
*	T	rekenduur	600	4800	s
	nst	aantal tijdstappen	2000	2000	-
	σ	Courant getal	1.6	1.5	-
		instroomdebiet	$24.5.10^{-3}$	1195	m^3/s
*	u	instroomsnelheid	0.072	0.625	m/s
*	α	coëfficient boven R.V.	10	78	s
*	H	benedenwaterstand	0.132	9.925	m
*	H	beginwaterstand	0.133	10.0	m
		damtalud	1:10	1:10	-
		ribbelhoogte	8.10^{-4}	0.06	m
	k	Nikuradse ruwheid	4.10^{-4}	0.03	m
	C	Chezy coëfficient	45 à 65	45 à 65	$m^{1/2}/s$
*	n	Manning coëfficient	0.011	0.022	$s/m^{1/3}$
*	ε	eddy viscosity	12.10^{-4}	0.8	m^2/s
*	f	Coriolis parameter	-	-	1/s

(* : invoerparameter)

Bij de omrekening naar prototype grootheden is bij benadering gebruik gemaakt van de volgende schalen:

lengteschaal	75
breedteschaal	75
snelheidsschaal	$\sqrt{75}$
tijdschaal	$\sqrt{75}$

6. RESULTATEN

6.1. Inleiding

In dit hoofstuk worden de resultaten van de prototype-berekening gepresenteerd.
Er is gebruik gemaakt van de parameters zoals samengevat in hoofdstuk 5.4. Bij deze keuze vertonen de resultaten de meeste overeenstemming met de metingen van Luxemburg en blijkt de berekening effectief te verlopen.
Om dit te kunnen vaststellen is een serie berekeningen op modelschaal voorafgegaan waarmee de invloed van verschillende invoerparameters is onderzocht. De resultaten van die berekeningen worden in hoofdstuk 7 gepresenteerd. De prototype-parameters zijn verkregen door gebruik te maken van schaalregels.
Figuur 6.1 geeft een overzicht van het gebruikte rekengebied.

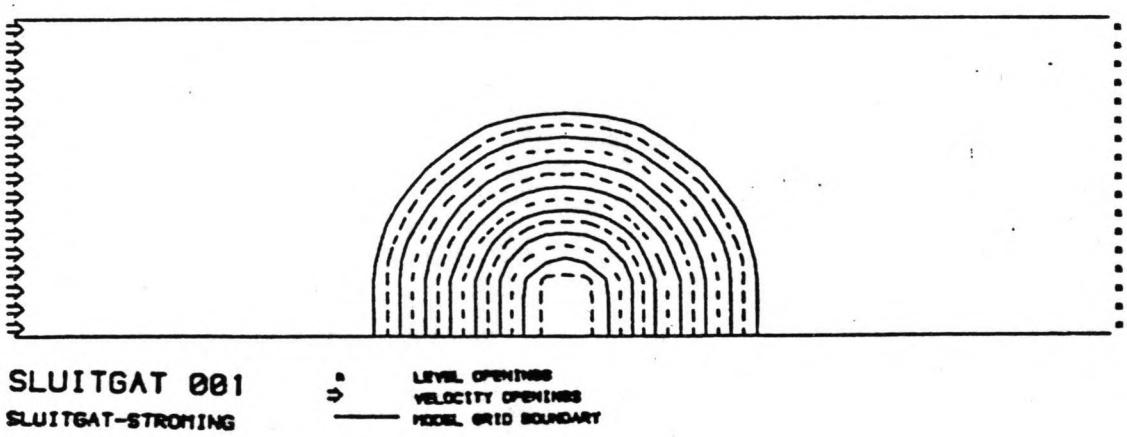


Fig. 6.1 Dieptelijnen en begrenzingen rekengebied.

6.2 Snelheidsveld

Het snelheidsveld behorende bij de stationaire toestand is weergegeven in fig. 6.2. De maximum snelheid treedt op nabij de kruin: U = 1,9 m/s.
In het versnellingsgebied bedraagt de snelheid plm. 1,3 m/s.
In de retourstroming treden snelheden op van maximaal 0,3 m/s, met boven het talud nog lagere snelheden: tot maximaal 0,2 m/s.

Zoals verwacht (zie hoofdstuk 3.3) strekt de circulatiestroming zich uit tot aan de benedenrand van het model. Alhoewel de benedenrand dicht bij het obstakel ligt, wordt de stroming nabij de dam er niet door beïnvloed: de neerstroming loopt ongehinderd door de rand (fig. 6.4).

De geleidelijke ontwikkeling van de neerstroming is in fig. 6.5 weergegeven.

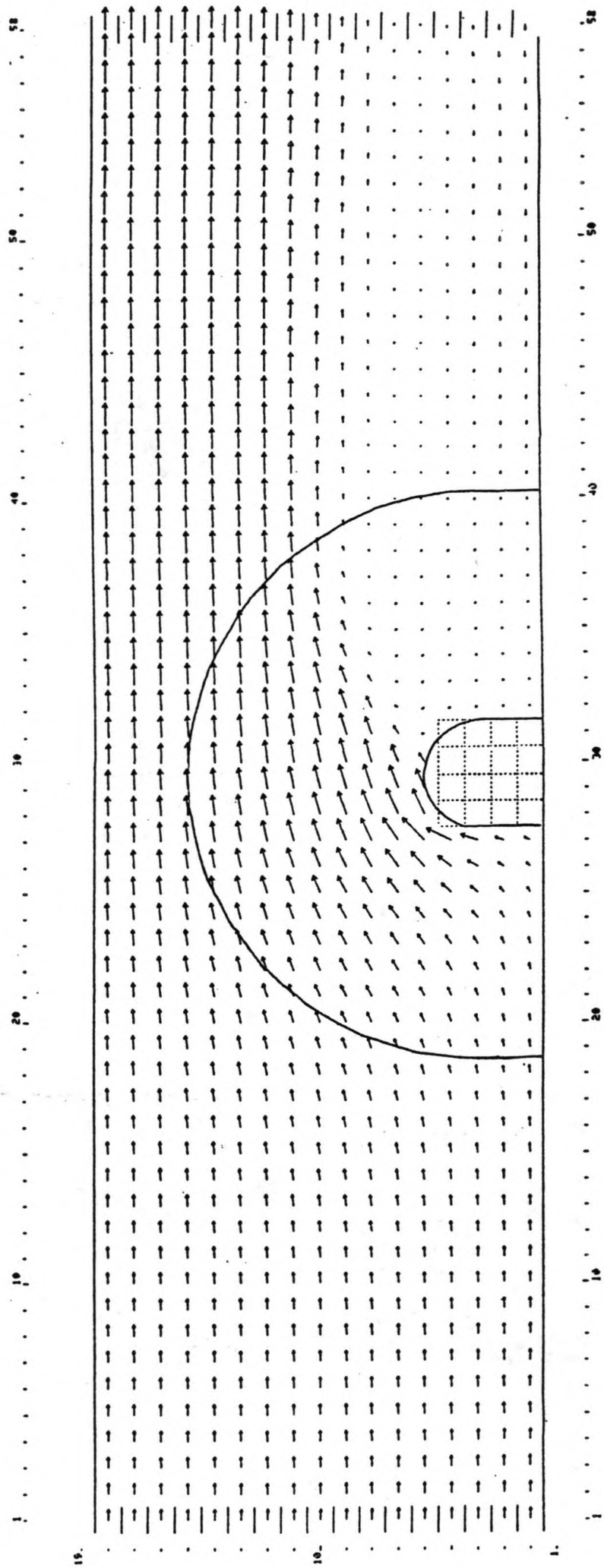


Fig. 6.2 Stromingspatroon in stationaire toestand t=80 min.

(⟼ 2 m/s)

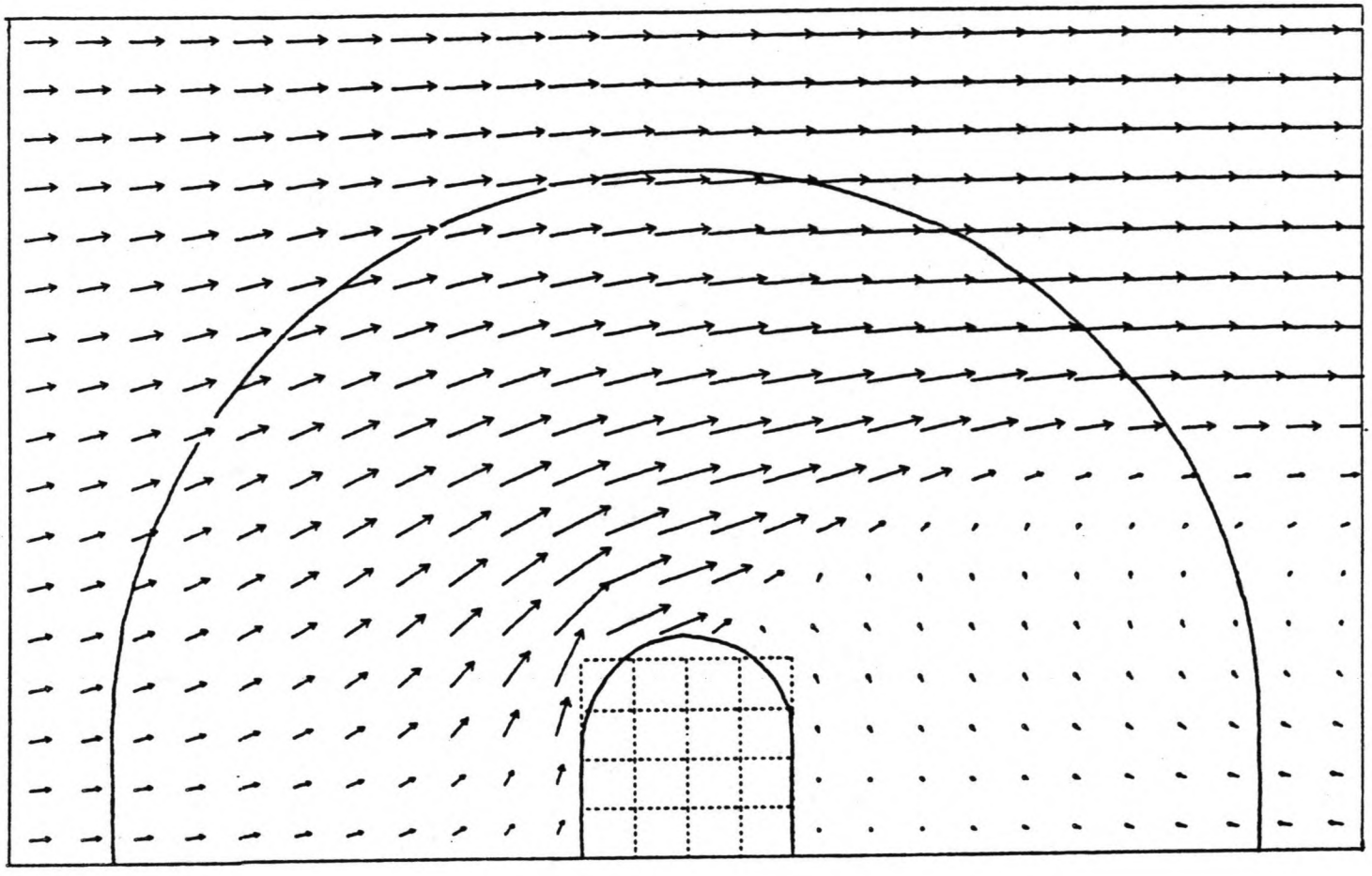


Fig. 6.3 Detail damvak ⟶ 2 m/s

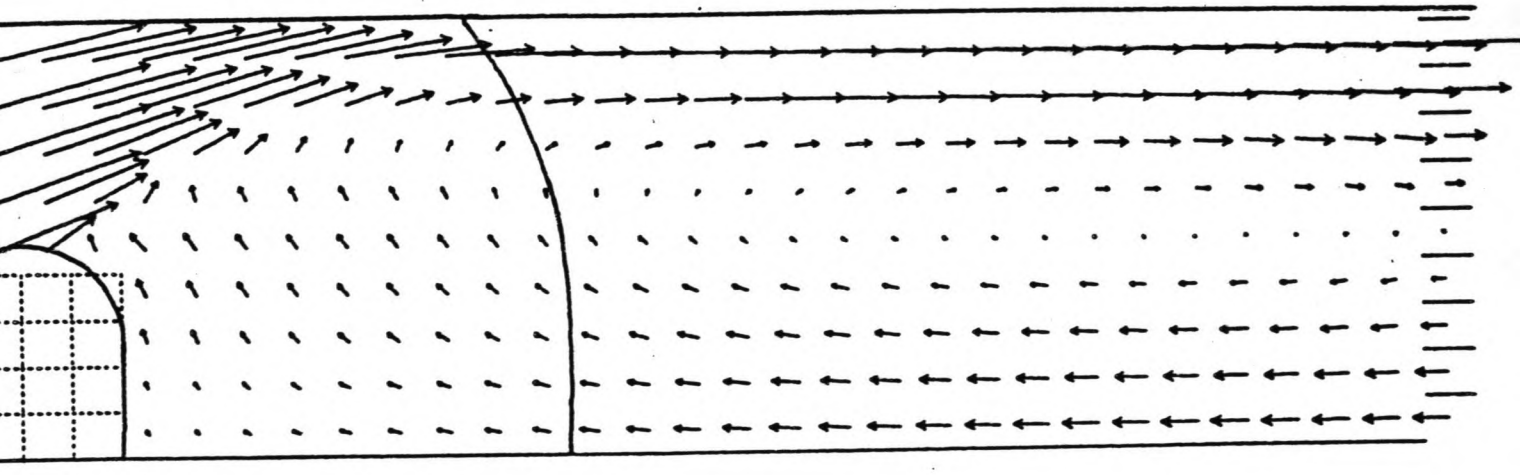
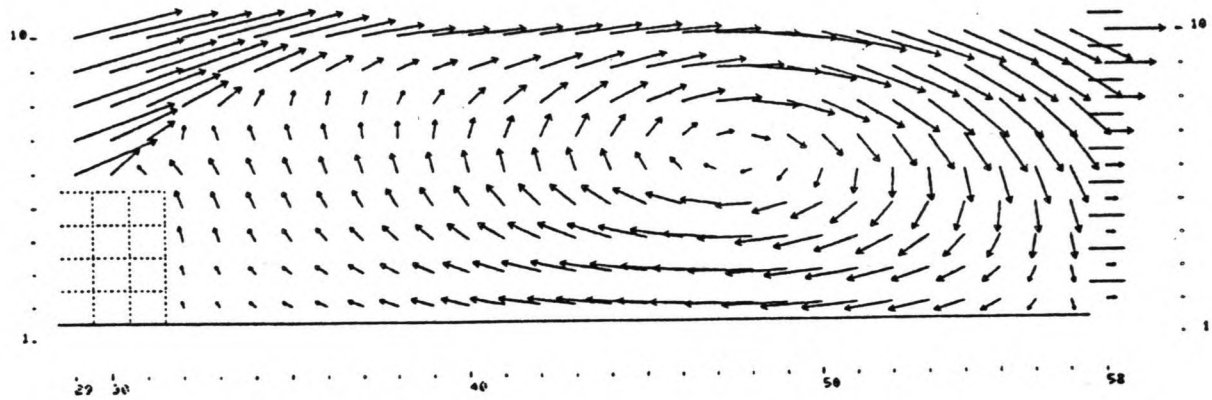
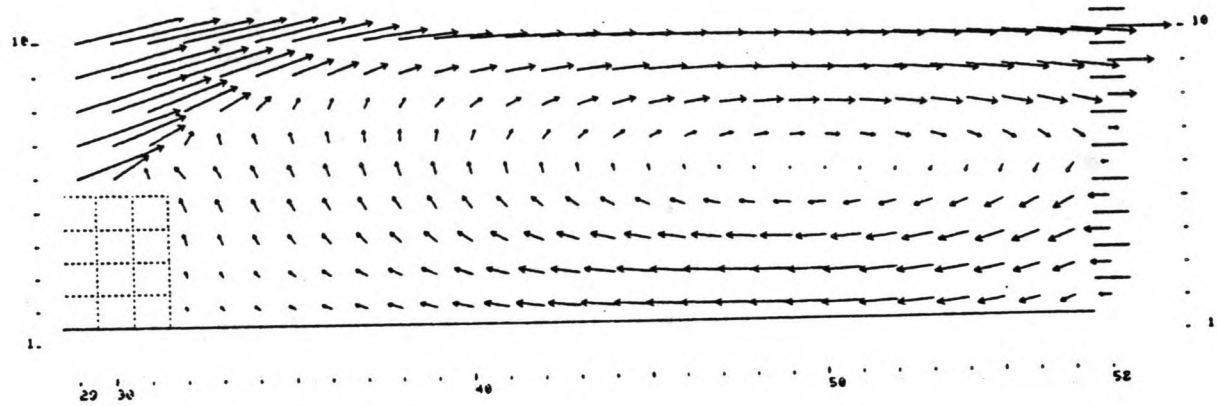


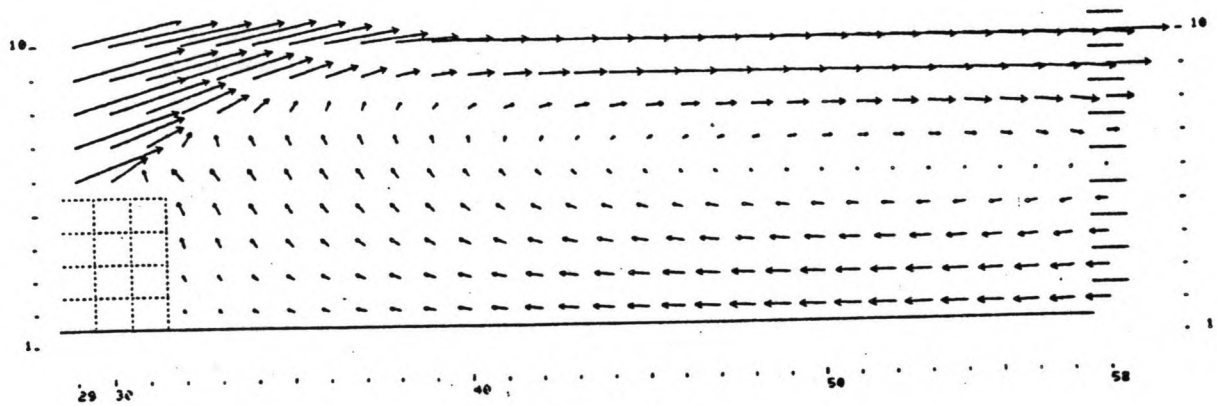
Fig. 6.4 Detail neerstroming ⟶ 0.50 m/s



t = 5 min.



t = 10 min.



t = 15 min.

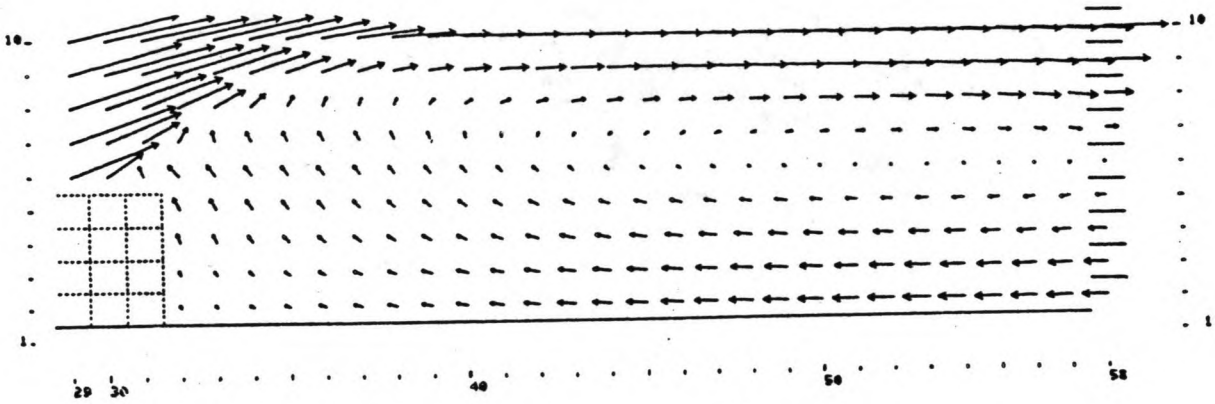


Fig. 6.5 Ontwikkeling neerstroming ⟼ 0.50 m/s

6.3. Stationaire Toestand

De stationaire toestand wordt aangetoond met het waterstands- en snelheidsverloop in enkele controlepunten. De ligging van deze punten is in fig. 5.2 aangegeven.

Als voorbeeld van het waterstandsverloop is controlepunt 9 weergegeven in fig. 6.6. Door het starten van de berekening wordt een translatie golf opgewekt met een periode van plm. 1 minuut. De amplitude van deze verstoring is na een twintigtal perioden vrijwel uitgedempd.

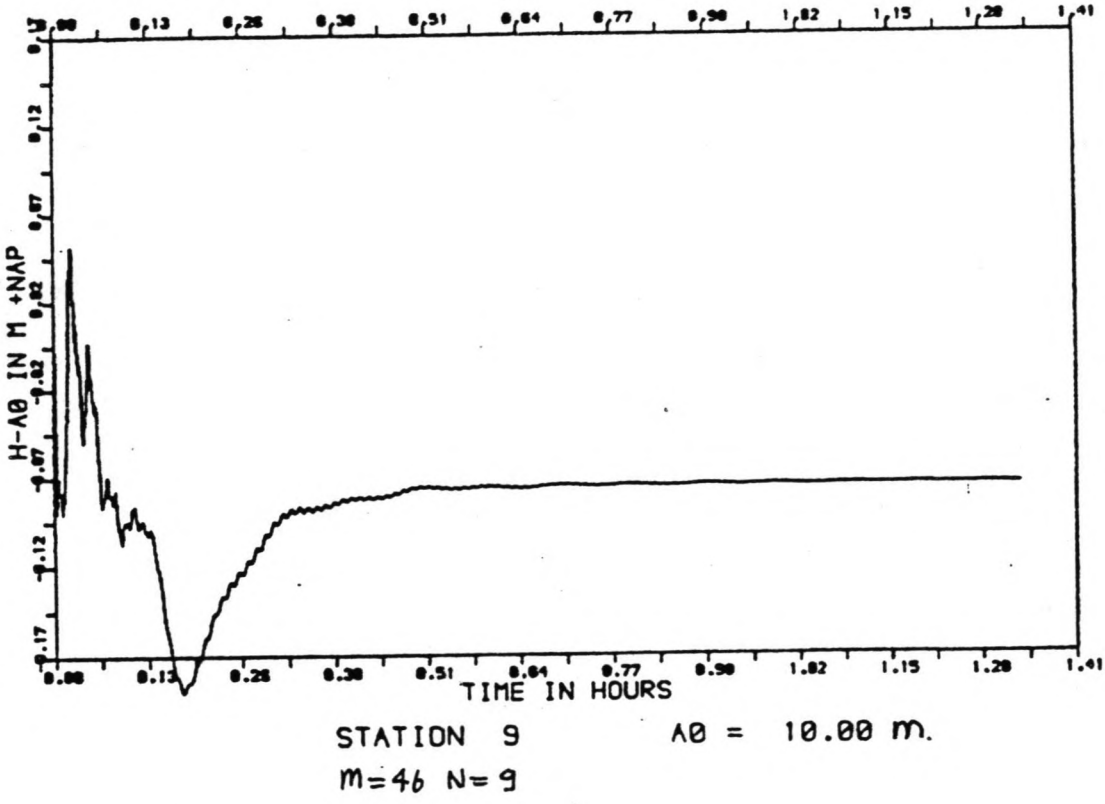


Fig. 6.6 Waterstandverloop in controlepunt 9.

Het snelheidsverloop in controlepunt 8 t/m 10 is weergegeven in fig. 6.7. De stations liggen benedenstrooms van de dam. Fig. 6.7 toont aan dat de stationaire toestand zich heel geleidelijk instelt.

Het verloop van de waterstand en de snelheid wordt beïnvloed door de randvoorwaarden op de open randen (zie hoofdstuk 7).

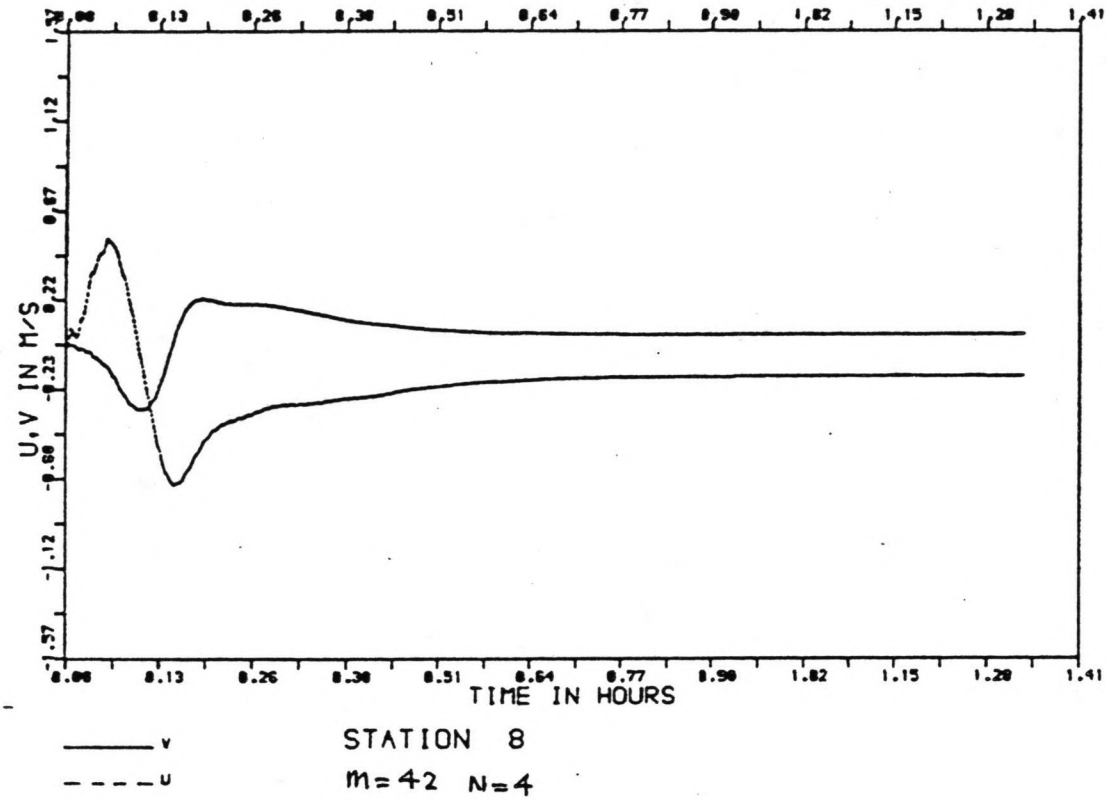


Fig. 6.7.a

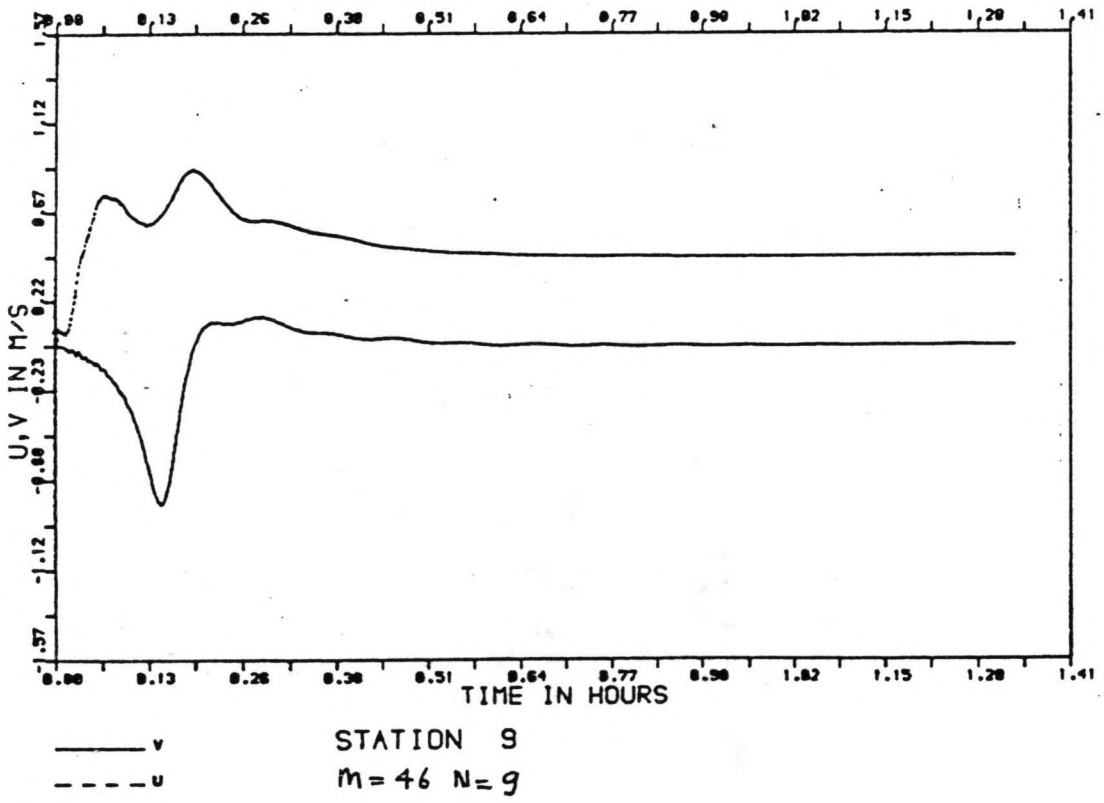


Fig. 6.7.b

Fig. 6.7.a t/m 6.7.d Snelheidsverloop in controlepunten

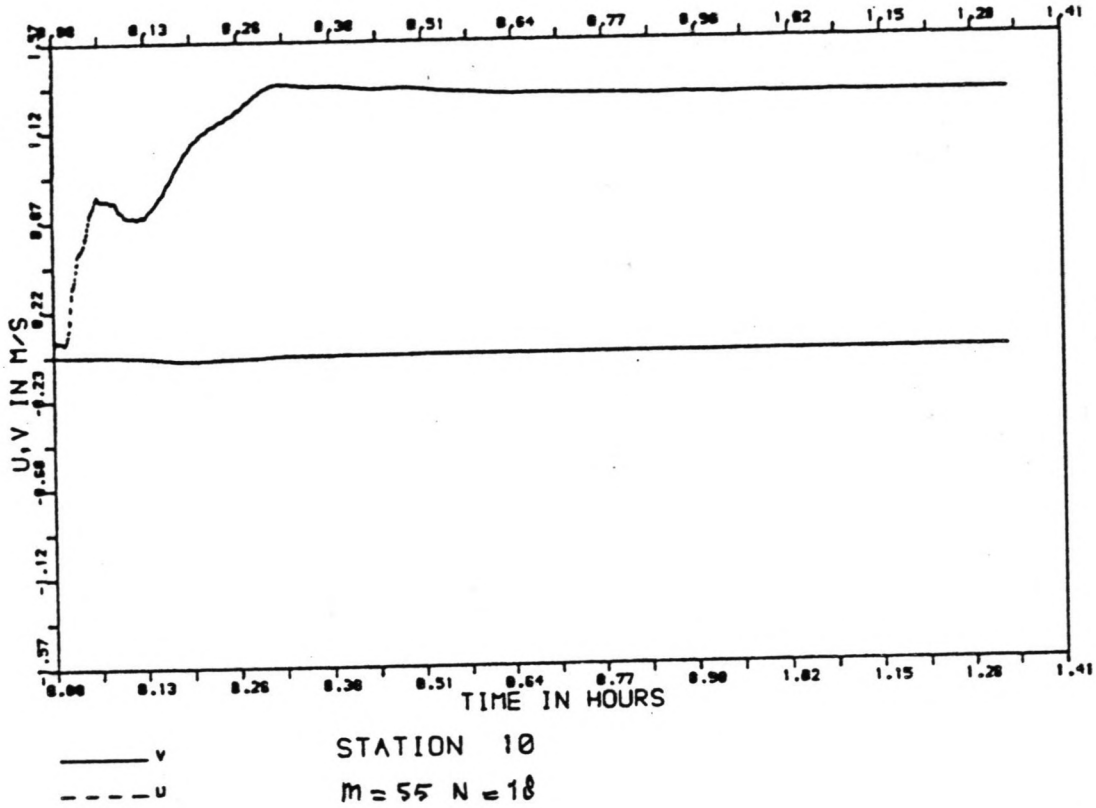


Fig. 6.7.c

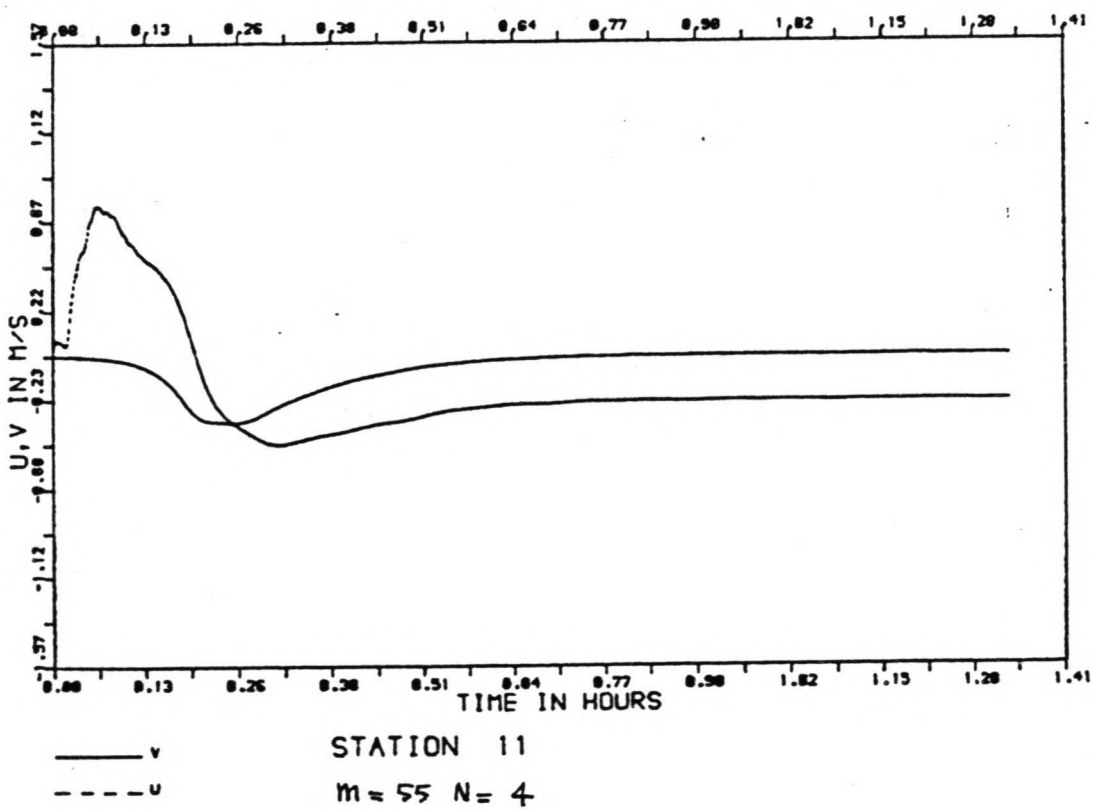


Fig. 6.7.d

6.4. Menggebied

Figuur 6.8 toont de ligging van het menggebied. In navolging van Luxemburg wordt het menggebied begrensd gedacht door de lijnen $U = U_{max}$ en $U = 0.16\ U_{max}$. Hierin is U_{max} de hoogste snelheid per raai M.

Volgens de theorie van de snelheidsverdeling in het menggebied wordt de symmetrie-as dan gevormd door de lijn $U = 0.7\ U_{max}$.

Deze lijn stelt dus ook de in hoofstuk 2.2 besproken theoretische scheidingslijn voor.

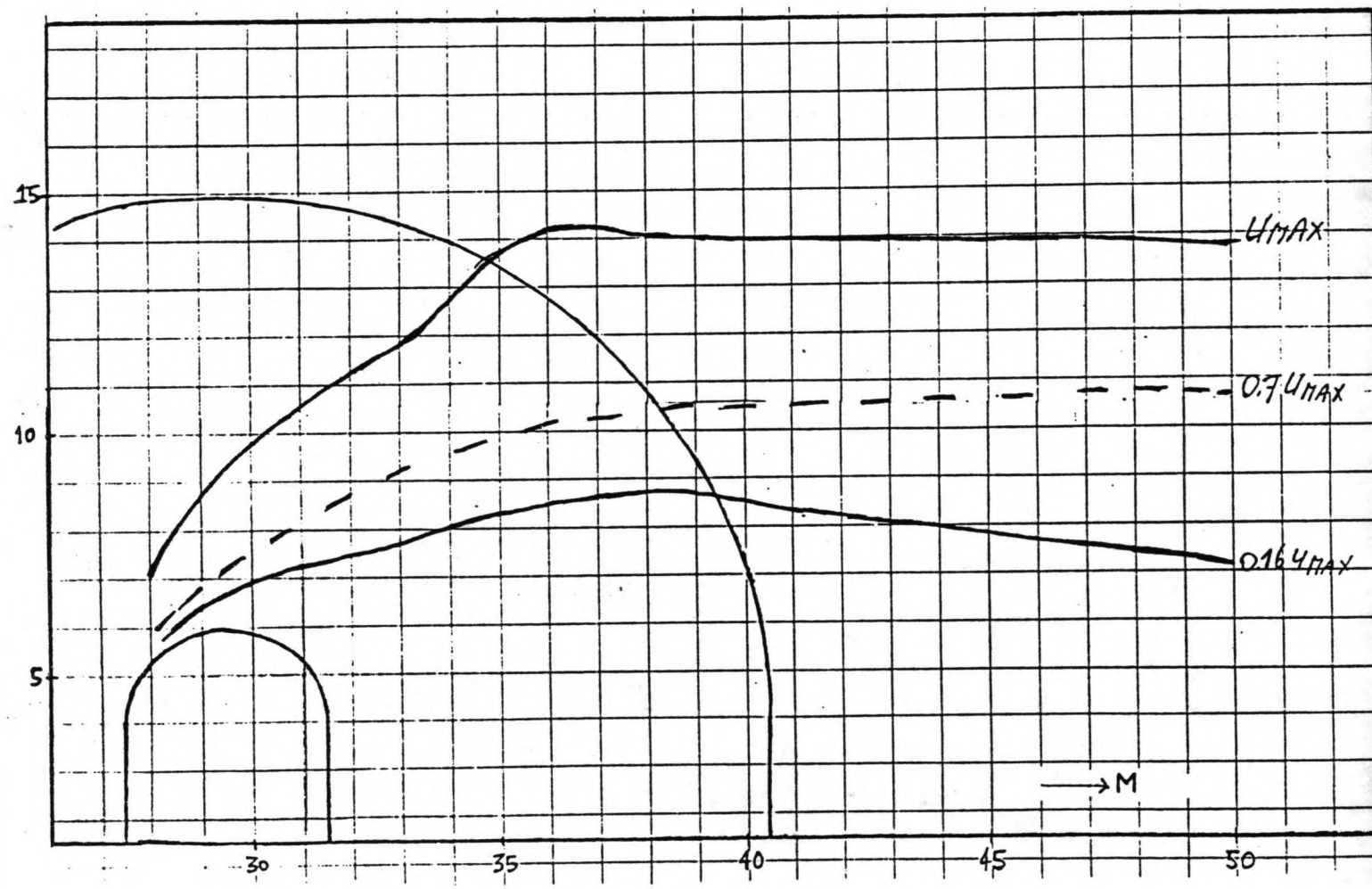


Fig. 6.8. Locatie menggebied

6.5. Stroombanen

Met behulp van de snelheidsvectoren uit het snelheidsveld van hoofdstuk 6.2 en door gebruik te maken van continuïteit langs stroombanen, kunnen stroomlijnen worden vastgesteld.
Het verloop van enkele stroomlijnen in het damvak is weergegeven in fig. 6.9.

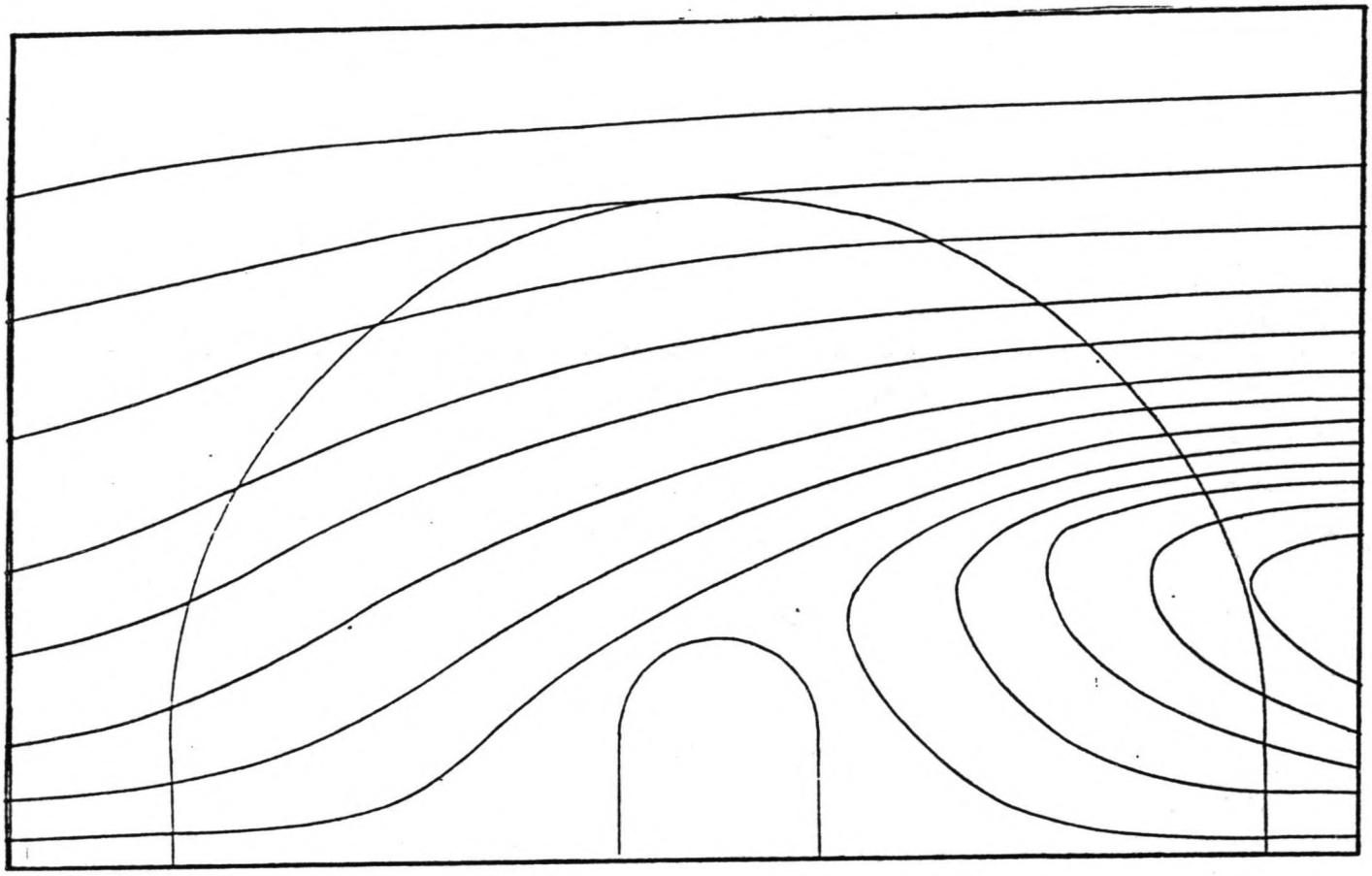


Fig. 6.9. Stroomlijnen

De debietverdeling door het sluitgat kan nu bepaald worden (fig. 6.10 en 6.11). Ondanks de hoge snelheden die nabij de kruin optreden is het debiet in het ondiepe deel van het sluitgat gering.

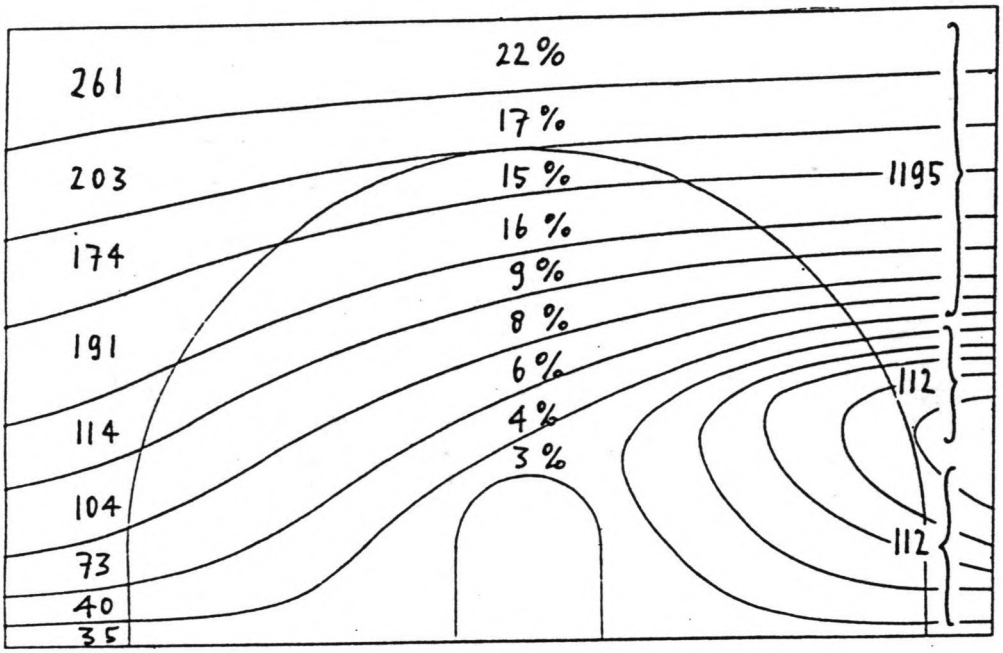


Fig. 6.10 Debietverdeling (m^3/s)

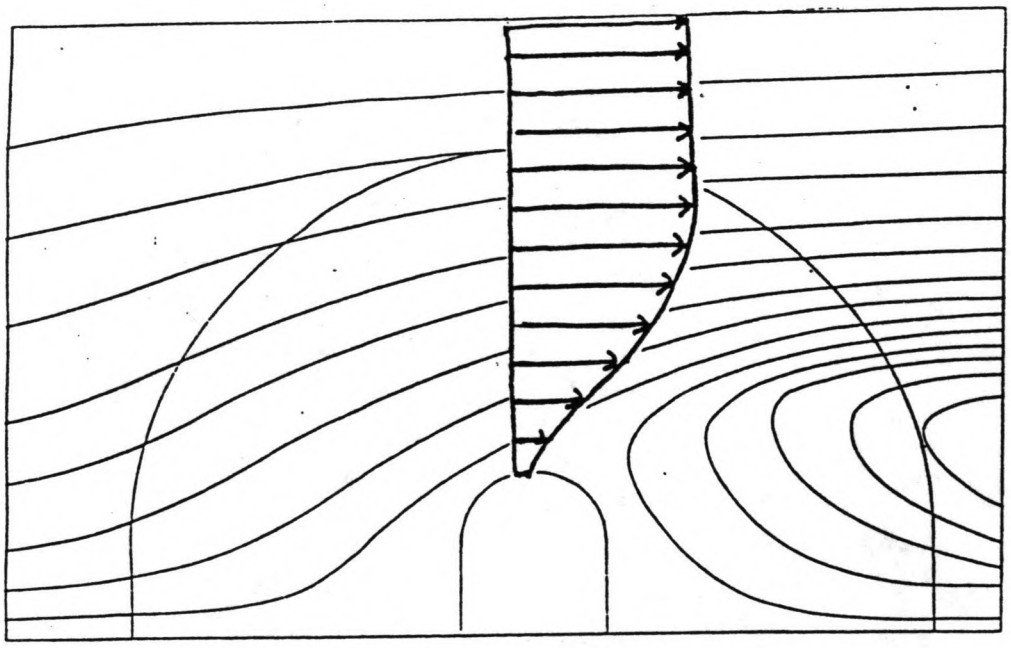


Fig. 6.11 Debietverdeling per eenheid van breedte ($\longmapsto$ 5 m^2/s)

6.6. Vergelijking met Metingen

De metingen van Luxemburg worden vergeleken met de resultaten van de numerieke berekening die op modelschaal is uitgevoerd met de invoervariabelen uit hoofdstuk 5.4.

De beschikbare snelheden zijn verzameld in fig. 6.12.

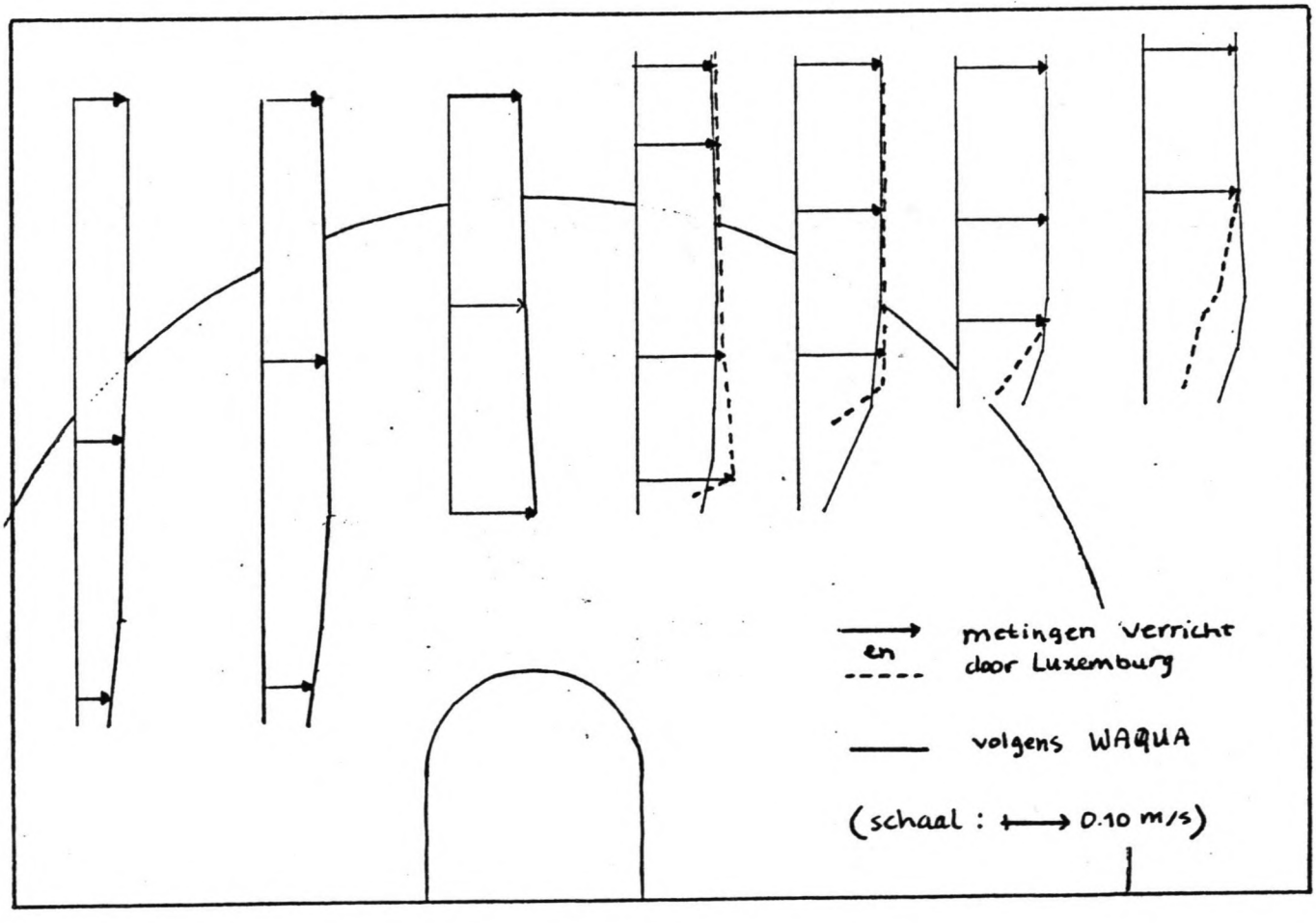


Fig. 6.12 Vergelijking snelheden (modelschaal)

Bij het vergelijken van de resultaten moet er rekening mee worden gehouden dat de snelheidsmetingen zijn verricht met stroomrichtingsmeters 2,5 cm onder de waterspiegel.

Uitgaande van een logaritmisch snelheidsprofiel zouden de gemeten snelheden iets hoger uit moeten vallen dan de berekende dieptegemiddelde waarden.
Om deze reden lijken de berekende snelheden in het versnellingsgebied 3 à 10% te hoog.

Het berekende snelheidsverloop in het menggebied is niet helemaal overeenkomstig de metingen. Het menggebied dat uit de berekening volgt, is breder dan het waargenomen menggebied.

De snelheden van de neerstroming zijn door Luxemburg bepaald uit drijvermetingen omdat dergelijke lage snelheden niet met stroomrichtingsmeters geregistreerd konden worden. De op deze wijze gemeten snelheden zijn wat groter dan de met WAQUA berekende snelheden. Dit verschil kan voor een deel verklaard worden uit het feit dat met drijvermetingen oppervlaktesnelheden bepaald worden.

De ligging van beide menggebieden is weergegeven in fig. 6.13 en 6.14.
Het door Luxemburg waargenomen menggebied is gebaseerd op drijvermetingen. Hiermee worden incidentele snelheden gemeten die in turbulente stroming kunnen afwijken van de tijdsgemiddelde snelheid. Hierdoor is het mogelijk dat de begrenzingen van het menggebied in fig 6.13 afwijken van de gemiddelde toestand.

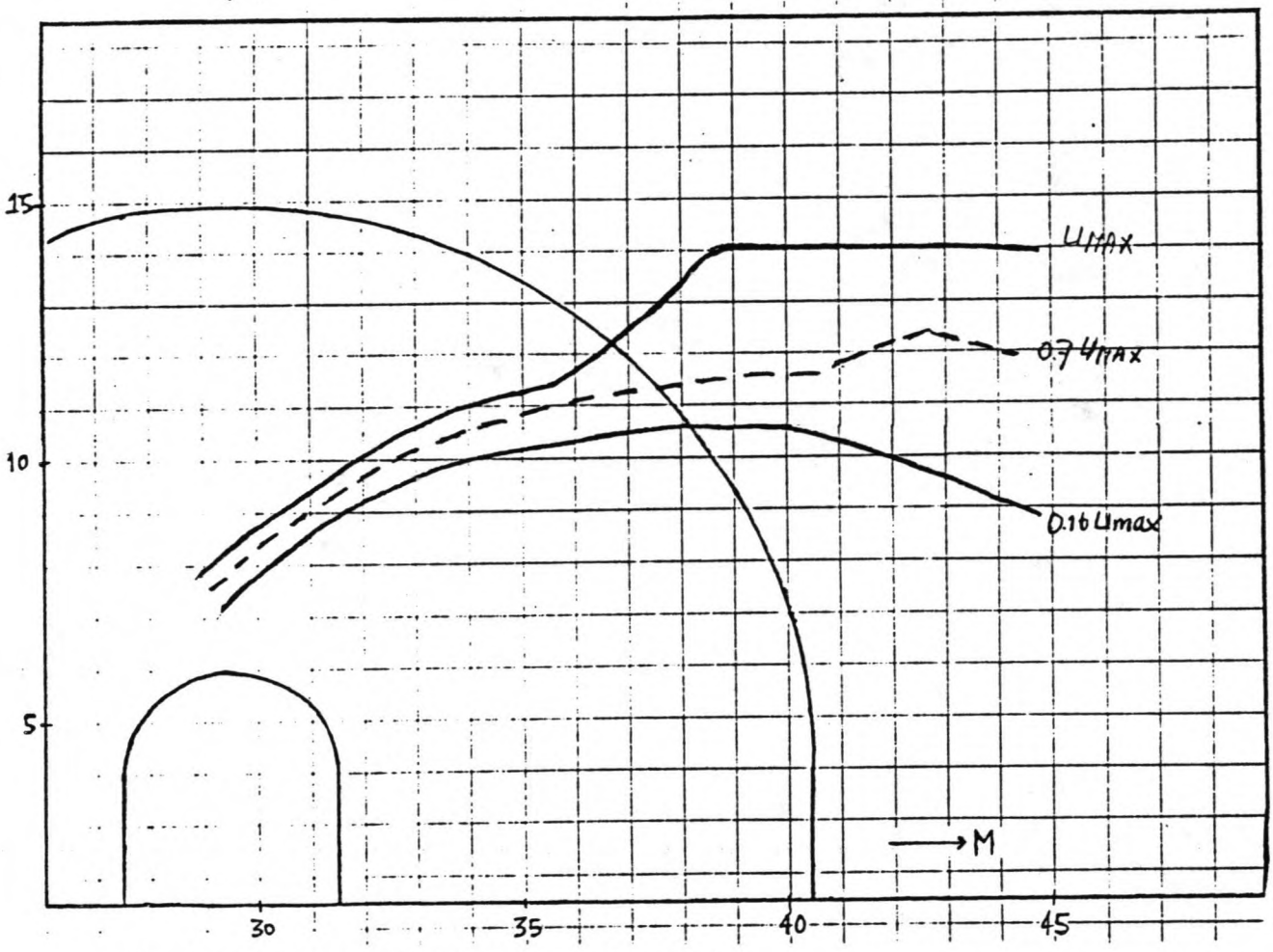


Fig. 6.13 Menggebied hydraulisch model

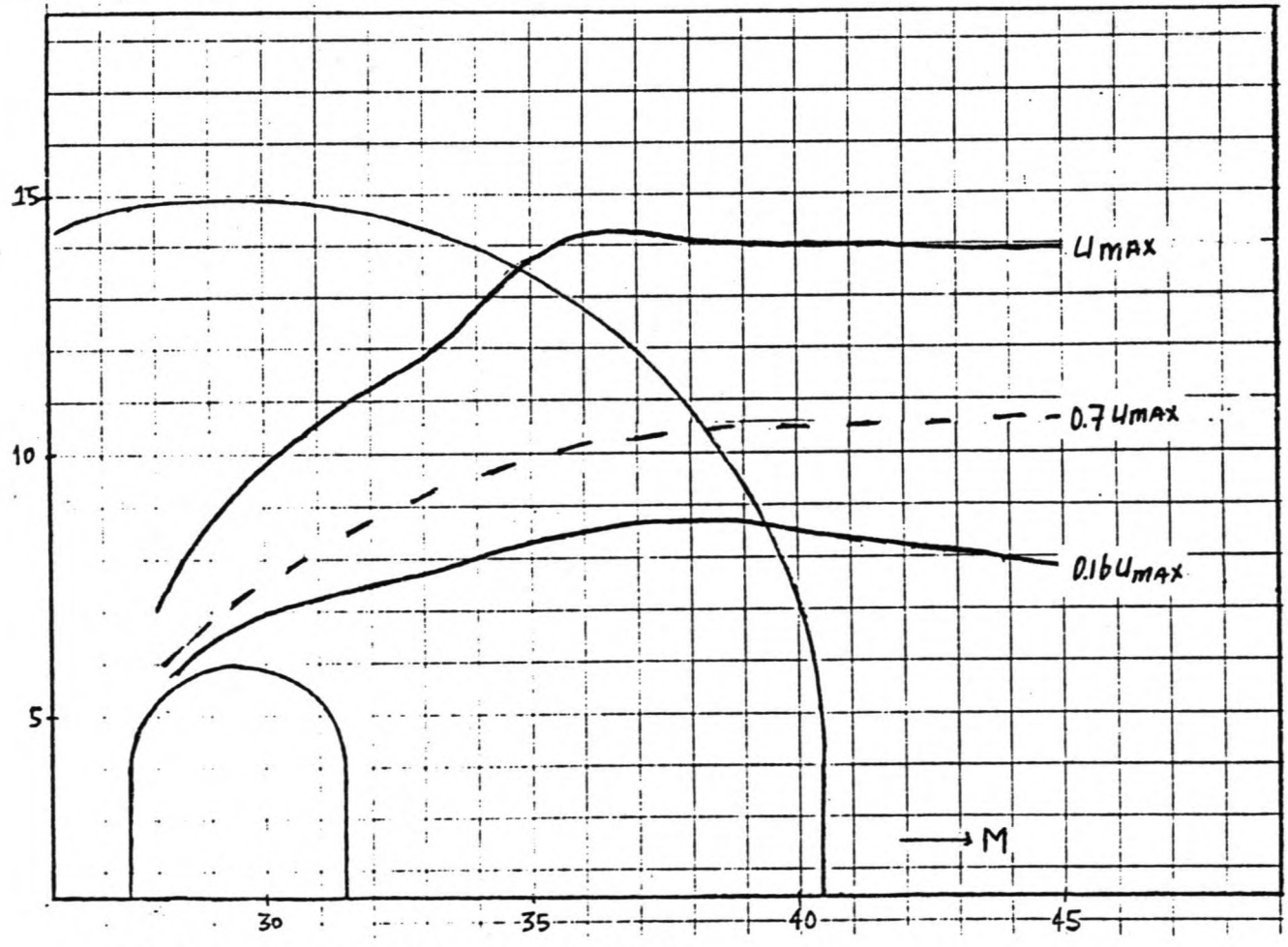


Fig. 6.14 Menggebied numeriek model

Wat opvalt bij vergelijking van fig. 6.13 en 6.14 is dat vooral het begin van het menggebied slecht wordt weergegeven.
Verder blijkt het gemeten menggebied in zijn geheel binnen de begrenzingen van het berekende menggebied te vallen.
Alleen de bovengrenzen $U = U_{max}$ vallen samen vanaf M = 39.
De berekende theoretische scheidingslijn verloopt iets lager dan de gemeten lijn $U = 0.7\ U_{max}$.

De toegepaste roosterschematisatie blijkt te grof voor een nauwkeurige weergave van het begin van het menggebied. De waargenomen breedte in fig. 6.13 is nog kleiner dan de gebruikte stapgrootte.
In de berekening wordt de snelheidsgradient uitgesmeerd over meerdere roosterpunten.

Zonder roosterverfijning is dit resultaat niet te verbeteren.

Tenslotte worden de stroomlijnen vergeleken in fig. 6.15.
De waargenomen stroomlijnen zijn door Luxemburg bepaald met behulp van oppervlaktedrijvers.
Het is niet geheel duidelijk of de stroomlijnen uit fig. 6.15 bepaald zijn uit één of meerdere drijverbanen. De stroomlijnen met een warrig verloop lijken gebaseerd op incidentele drijverbanen waarmee geen gemiddelde toestand wordt beschreven.

De stroming in het versnellingsgebied vertoont nog wel overeenkomsten maar in het schaduwgebied verschilt het stromingspatroon aanzienlijk: in het model van Luxemburg zijn twee plaatsvaste neren te onderscheiden. De grote neerstroming wordt door de veel kleinere neer op afstand van de kruin gehouden.
Deze kleinere neer is overigens, ook over een langere periode, duidelijk waar te nemen op video opnamen van de modelproef.

De oorzaak van het afwijkende stromingspatroon moet hoogstwaarschijnlijk weer gezocht worden in de ruimtelijke schematisatie en met name de schematisatie van de geometrie van de kruin.

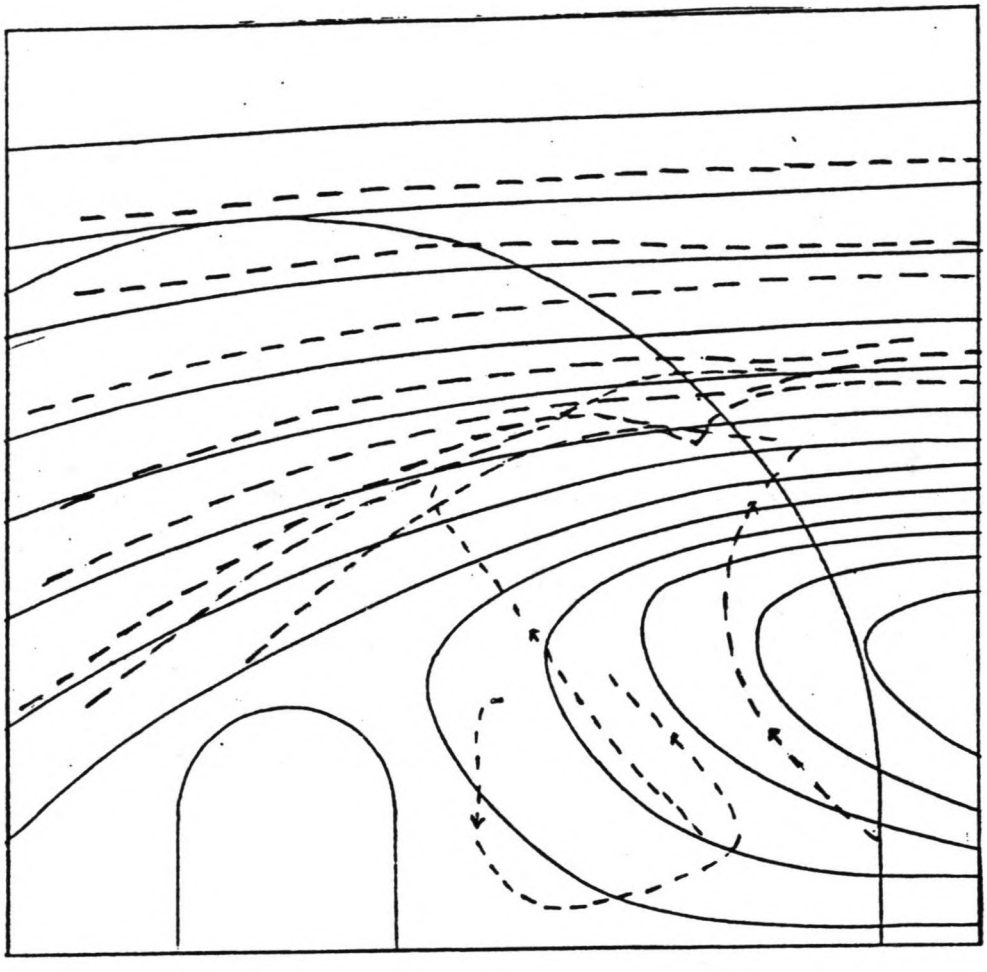


Fig. 6.15 Vergelijking stroomlijnen ——— volgens WAQUA
------ volgens Luxemburg

Het is bovendien mogelijk dat de voor het menggebied bepaalde viscositeit veel te groot is voor het gebied waar de secundaire neer zou moeten ontstaan.

In hoofdstuk 7 wordt de gevoeligheid van de oplossing nagegaan door enkele invoerparameters te variëren.
Er wordt aangetoond dat variatie van deze parameters niet leidt tot betere resultaten.

7. INVLOED MODELPARAMETERS

7.1. Tijdstap

In de oorspronkelijk WAQUA-berekening is gekozen voor Δt = 0.3s, gebaseerd op ervaring met het T.H. Programma DUCHESS (zie bijlagen) en om de resultaten van beide programma's te kunnen vergelijken. Om de numerieke nauwkeurigheid van de oplossing te controleren zijn met WAQUA ook berekeningen uitgevoerd met tijdstappen Δt =0.15 0.6 1.2 en 2.4s.

De oplossing blijkt onafhankelijk van de tijdstap indien Δt kleiner is dan 0.3s (zie fig. 7.1).

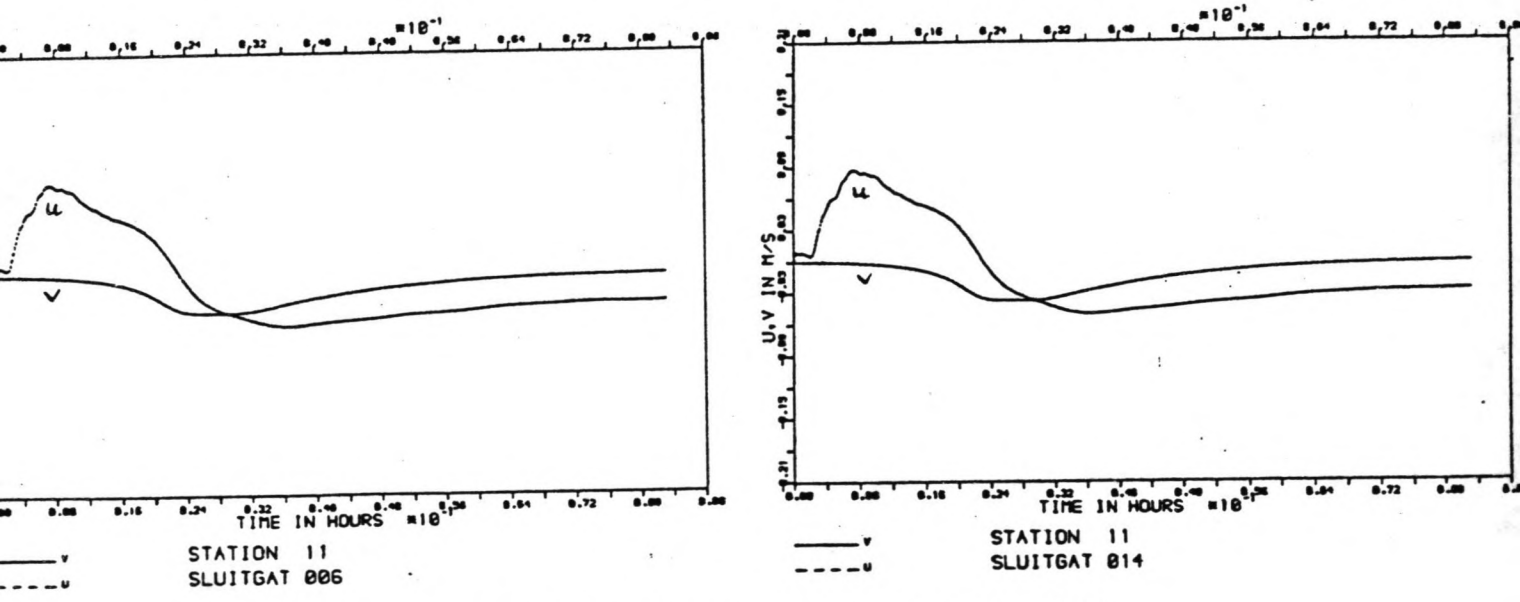
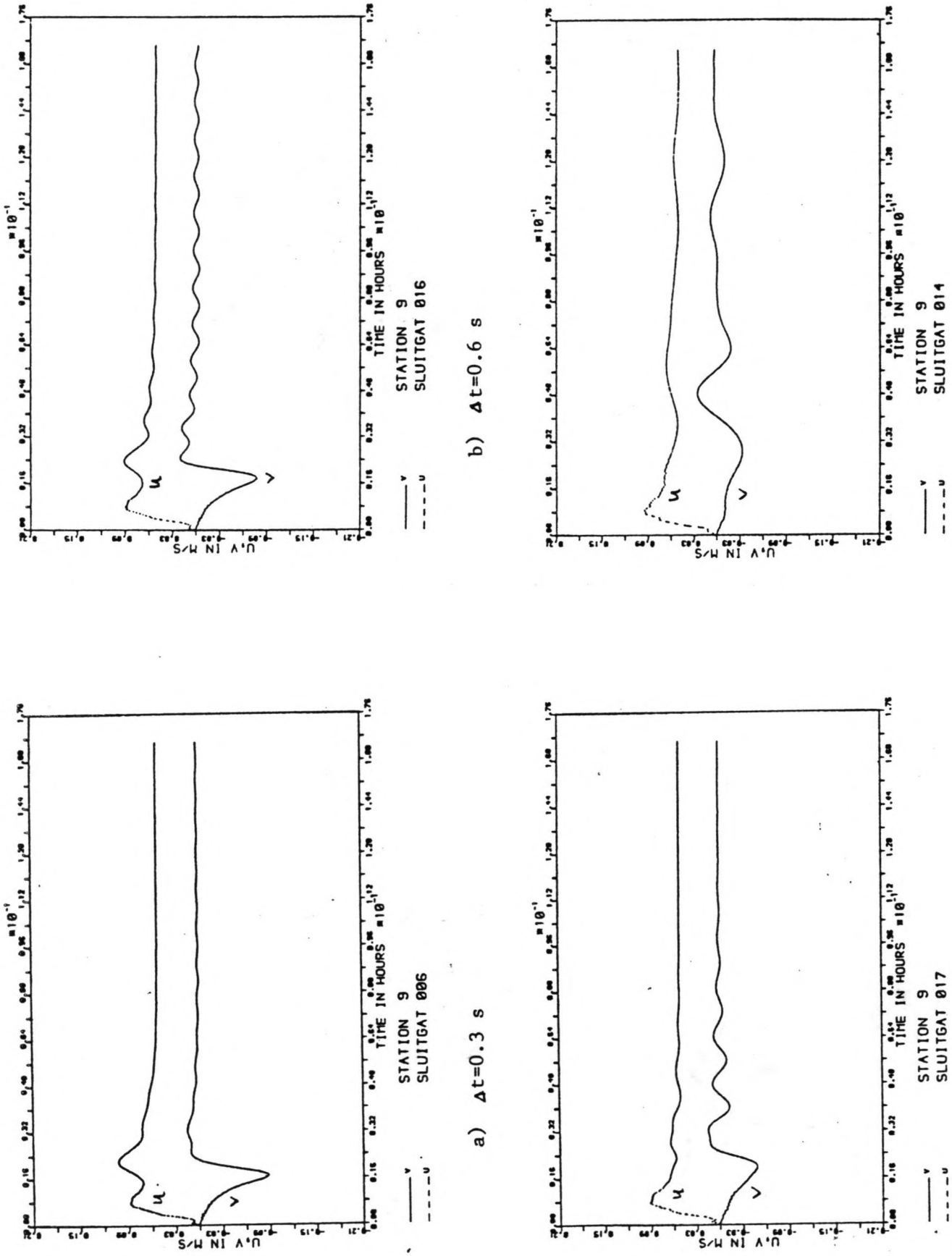


Fig. 7.1 Invloed tijdstap a) Δt = 0.3s b) Δt = 0.15s
(Voor de ligging van de controlepunten, zie fig. 5.2)

Voor grotere tijdstappen blijkt het verloop van de oplossing wel tijdstapafhankelijk (fig. 7.2).



a) Δt=0.3 s

b) Δt=0.6 s

c) Δt=1.2 s

d) Δt=2.4 s

Fig. 7.2. Invloed tijdstap

De periode van de optredende verstoringen is afhankelijk van de gebruikte tijdstap: T = 45s voor Δt = 0.6s en T = 60s als Δt = 1.2s. De amplitude van de verstoring is na verloop van tijd uitgedempt. Uit fig. 7.2 blijkt ook dat de uiteindelijke stationaire toestand in alle gevallen gelijk is.
Ook voor de berekening van een stationaire neerstroming blijkt de tijdstap te fungeren als een iteratieparameter: de tijdstap bepaalt in hoeveel stappen de eindtoestand wordt bereikt zonder het eindresultaat te beïnvloeden.
In fig. 7.2-d is na 250 tijdstappen de eindtoestand van de oorspronkelijk berekening (fig. 7.2-a) nog niet bereikt: met grotere tijdstappen moet langer doorgerekend worden.

Gezien het voorgaande lijkt het nauwkeurigheidscriterium (5.6), dat leidde tot een maximale tijdstap van 1.8s aan de voorzichtige kant.

7.2. Randvoorwaarden op Open Randen

Aangezien de invloed van de wrijving gering is in het relatief diepe model, spelen de open randen een belangrijke rol bij het uitdempen van verstoringen.
Het toevoegen van dissipatie in de vorm van extra viscositeit, een ander dempingsmechanisme, is bij neerstromingen niet de aangewezen methode omdat hiermee ook de neerstroming en de breedte van het menggebied wordt beïnvloed (zie hoofdstuk 7.5).

In het model krijgen de open randen een zwak-reflecterend karakter door toepassing van de volgende randvoorwaarden:

- bovenstrooms:

$$u + \alpha_{bov} \frac{\partial}{\partial t} (u - 2\sqrt{gh}) = 0.072 \text{ (m/s)} \qquad (7.1)$$

- benedenstrooms:

$$H + \alpha_{ben} \frac{\partial}{\partial t} (u + 2\sqrt{gh}) = 0.132 \text{ (m)} \qquad (7.2)$$

In de stationaire toestand valt de tijdsafgeleide weg uit het rechterlid. Bij stationaire stroming wordt de uiteindelijke oplossing dus niet door deze termen beïnvloed.

Fig. 7.3 toont het waterstands- en snelheidsverloop bij volledig reflecterende open randen ($\alpha_{bov} = 0$; $\alpha_{ben} = 0$). Hieruit blijkt dat met deze randvoorwaarden geen stationaire oplossing wordt verkregen. De vaste waterstand aan de benedenrand veroorzaakt een staande golf in het model met een periode van 33 seconden. Dit is de eigen trillingstijd behorende bij de lengte van het rekengebied.

$$(T = \frac{\lambda}{c} \sim \frac{4L}{\sqrt{gh}} \sim \frac{4.8,5}{\sqrt{9.81.0,13}} \sim 30s)$$

De oscillatie van de waterstand resulteert in een snelheidsvariatie met dezelfde periode (zie fig. 7.3 - c).
Dit gaat gepaard met een periodiek loslaten van wervels nabij de kruin. Deze wervels bewegen zich in benedenstroomse richting en verdwijnen door de benedenrand (zie fig. 7.4).
Bij de gegeven reflecterende randvoorwaarden blijkt dit verschijnsel niet uit te dempen.

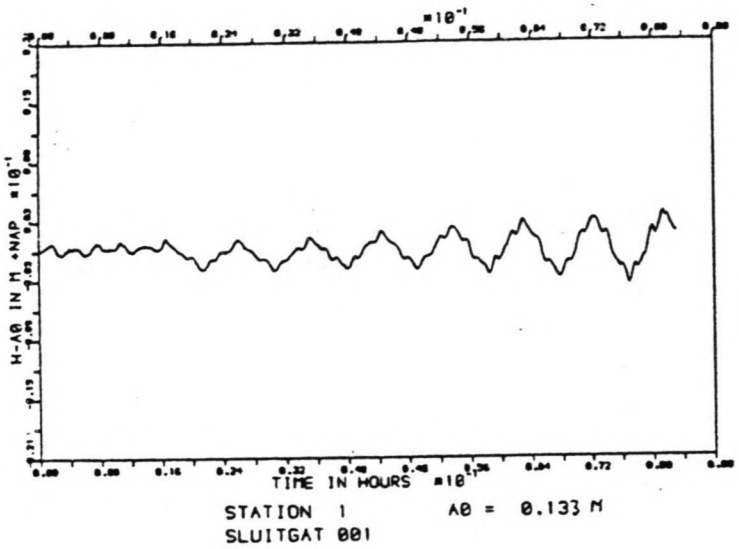


Fig. 7.3 - a
Waterstandsverloop nabij bovenrand: Staande golf in het model.
T = 33s

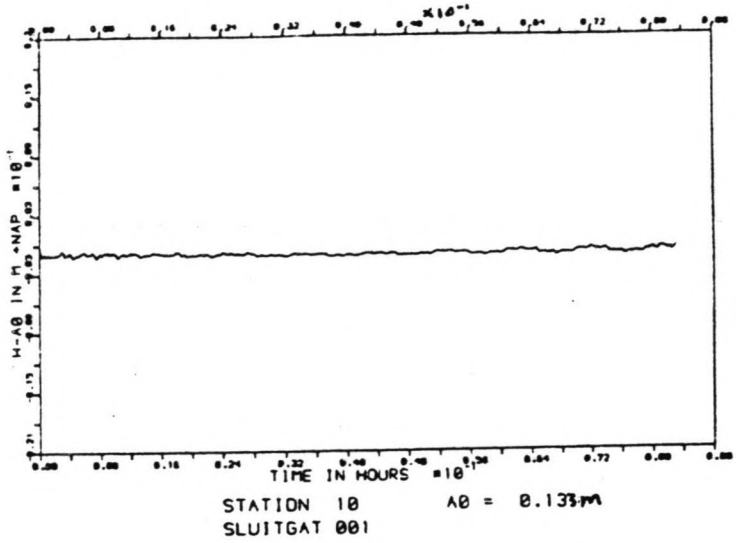


Fig. 7.3 - b
Waterstandsverloop nabij benedenrand: (knoop)

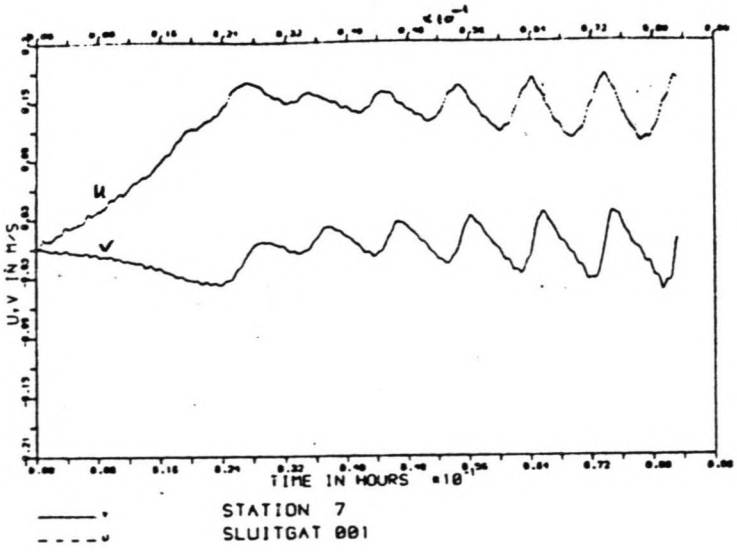
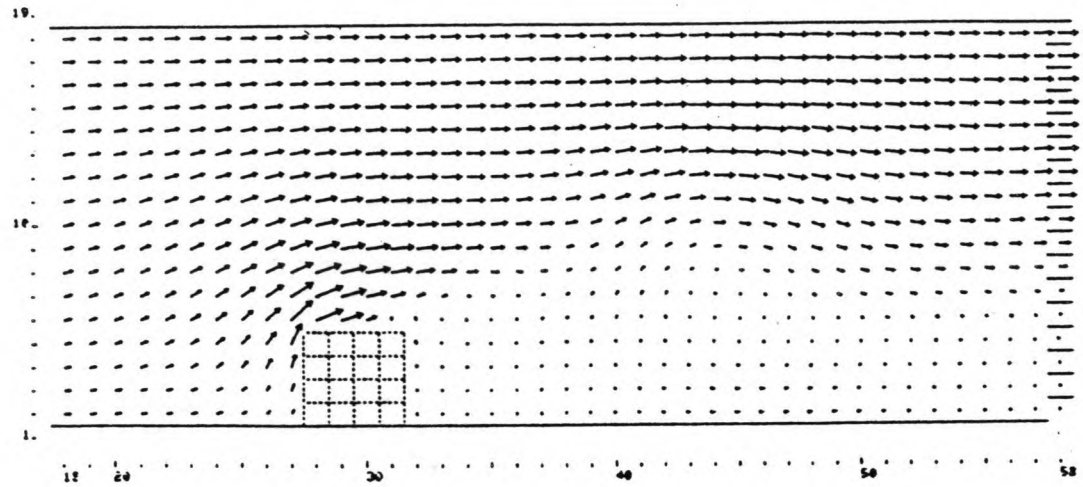
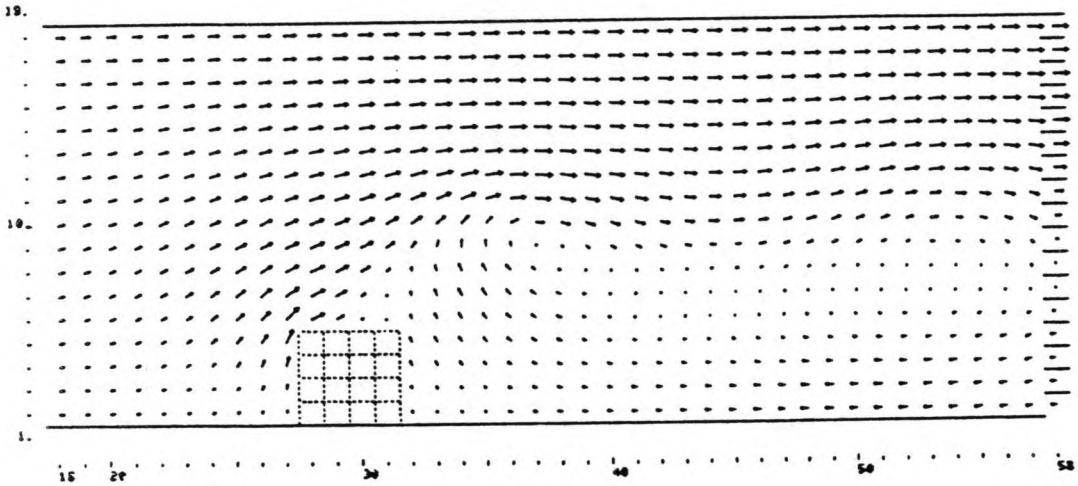


Fig. 7.3 - c
Snelheidsverloop periodiek, in fase met fig. 7.3 - a
T = 33s

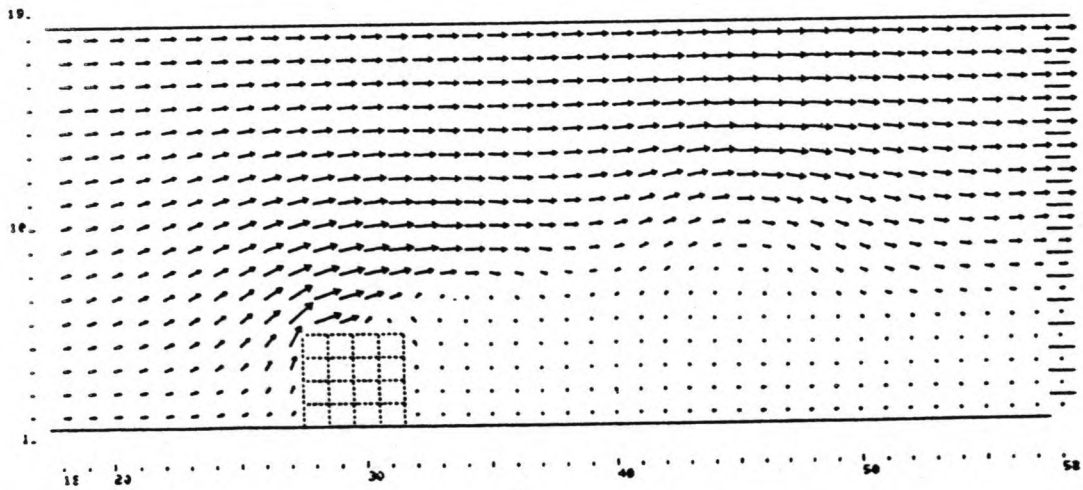
Fig. 7.3 Waterstands- en snelheidsverloop bij: $\alpha_{bov} = 0$; $\alpha_{ben} = 0$



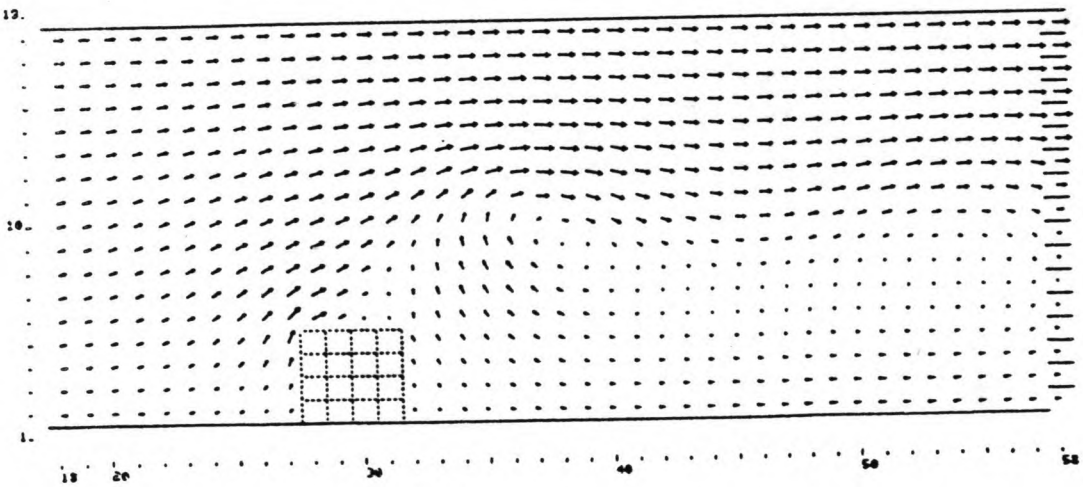
t = 234s



t = 252s



t = 270s

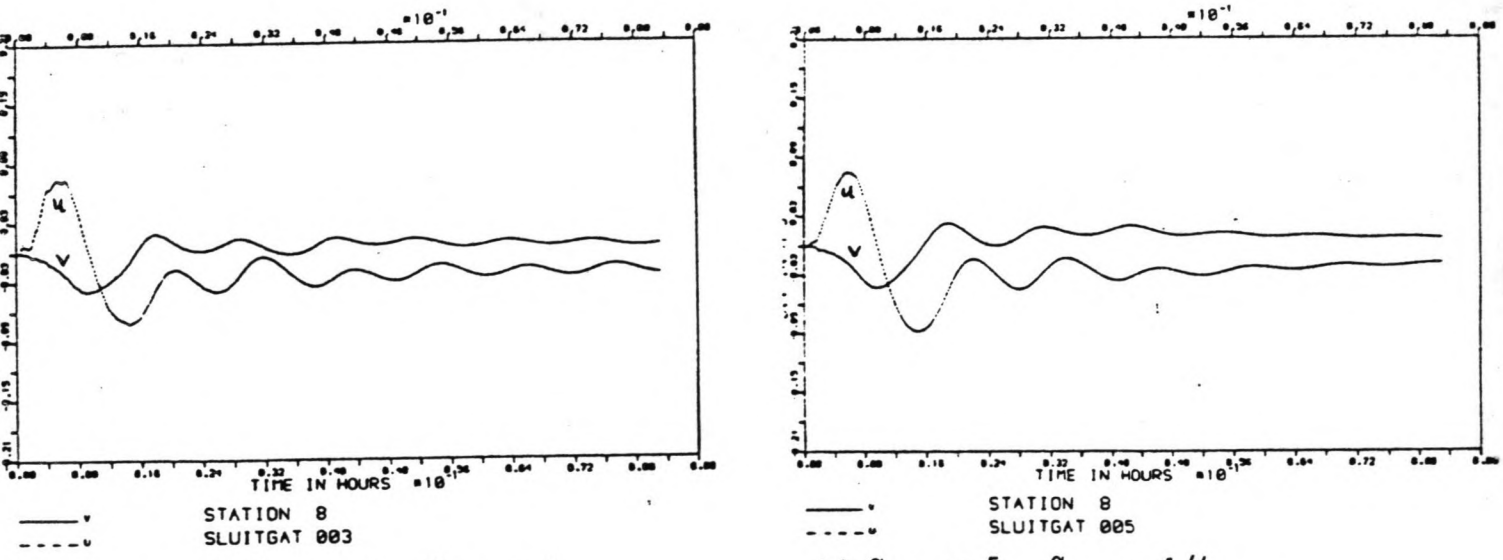


t = 288s

Fig. 7.4 Stromingspatroon α bov = 0; α ben = 0

In fig. 7.5 is het effect van zwak reflecterende randen weergegeven. Duidelijk blijkt dat het verloop van de oplossing afhangt van de keuze van α. Een geringe α heeft een "slappe" demping van de verstoring tot gevolg.
In het snelheidsverloop van fig. 7.5 a t/m e zijn twee delen te onderscheiden.
Het eerste deel wordt bepaald door het uitdempen van de verstoring die is opgewekt door het starten van de berekening (zwaartekrachtsgolf).
Het laatste deel beschrijft het langdurige instelproces van de neerstroming (diffusie).

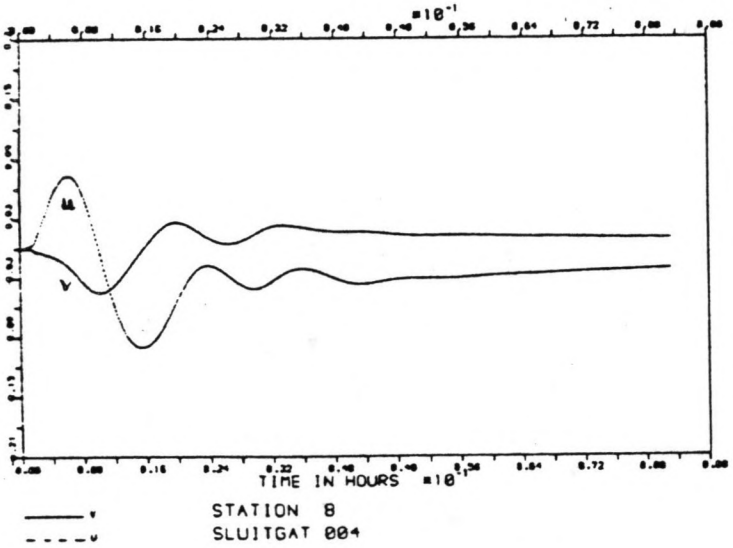
De keuze van α_{ben} heeft geen invloed op het uiteindelijke uitstromingspatroon, maar wel op de convergentiesnelheid, en dus op de tijd waarin de stationaire toestand wordt bereikt.



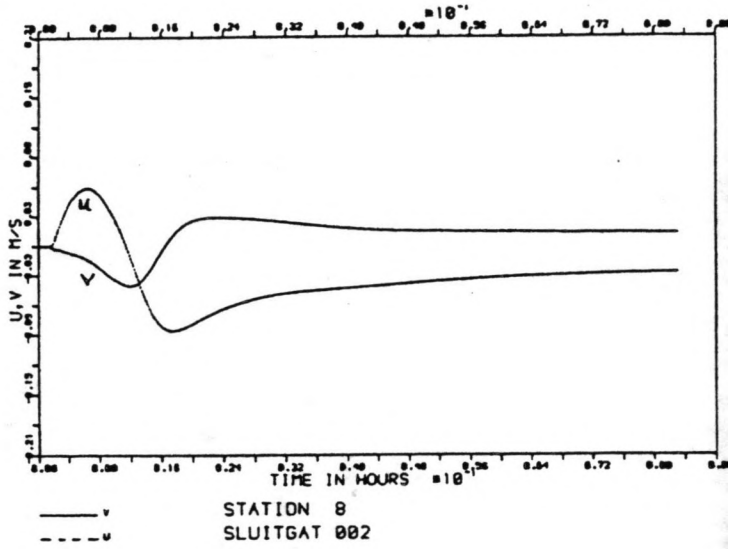
a) $\alpha_{bov} = 5 \quad \alpha_{ben} = 0$

b) $\alpha_{bov} = 5 \quad \alpha_{ben} = 1/4$

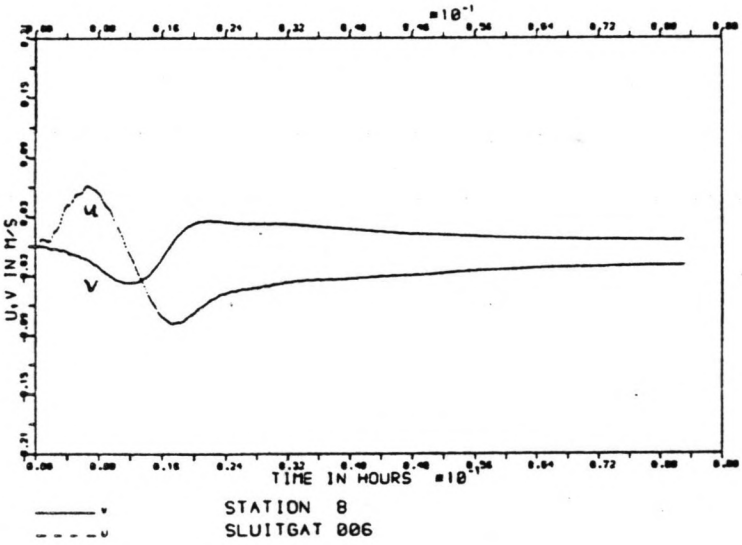
Fig. 7.5 Invloed gewichtscoëfficient α



c) $\alpha_{bov} = 5 \quad \alpha_{ben} = 1/2$



d) $\alpha_{bov} = 5 \quad \alpha_{ben} = 5$



e) $\alpha_{bov} = 10 \quad \alpha_{ben} = 0$

Fig. 7.5 Invloed gewichtscoëfficient α

Uit fig. 7.6 blijkt de invloed van α_{ben} op de convergentiesnelheid van de oplossing.

In fig. 7.6 - a, met $\alpha_{ben} = 5$, is na 600s nog geen stationaire toestand bereikt.

In fig. 7.6 - b, met $\alpha_{ben} = 0$, convergeert de oplossing veel sneller

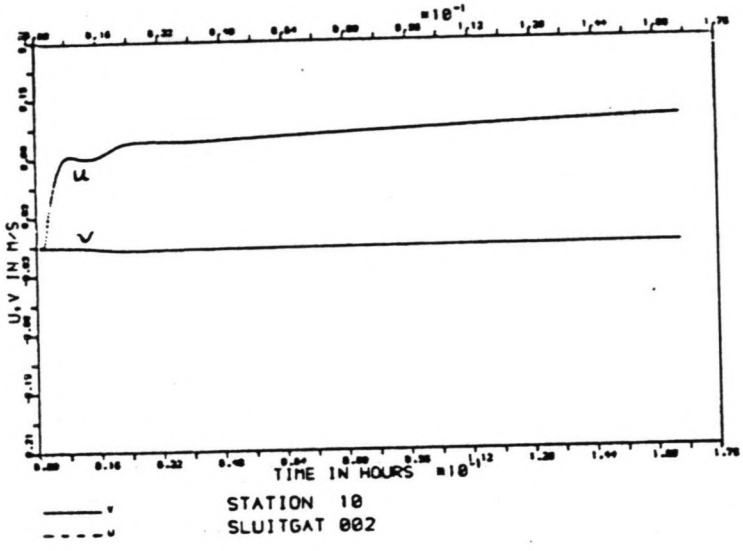


Fig. 7.6 - a

$\alpha_{ben} = 5$

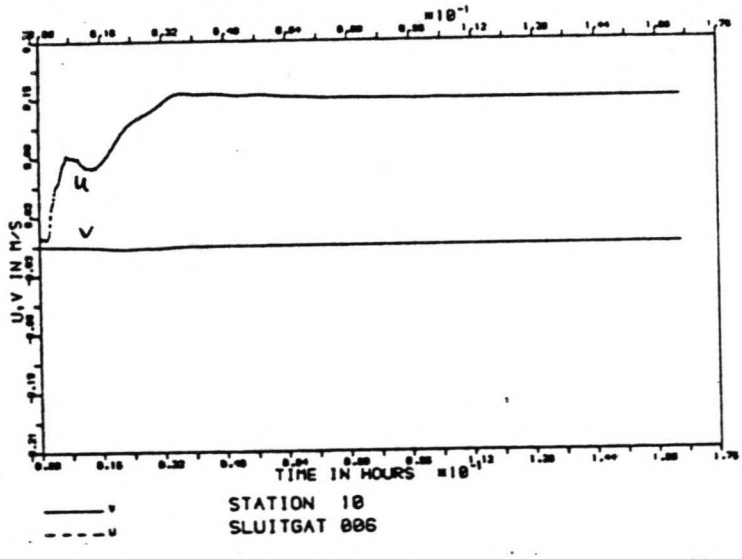


Fig. 7.6 - b

$\alpha_{ben} = 0$

Fig. 7.6 Invloed α_{ben} op convergentiesnelheid

Als $\alpha_{ben} \neq 0$ dan zal de tijdsafgeleide

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t} (u \pm 2\sqrt{gh})$$

gedurende een lange tijd een rol spelen. Dit heeft een lange insteltijd tot gevolg.

Uit dit oogpunt kan in het algemeen gesteld worden dat α gelijk aan nul moet worden gekozen op plaatsen waar langdurige tijdsafhankelijke processen zijn te verwachten.

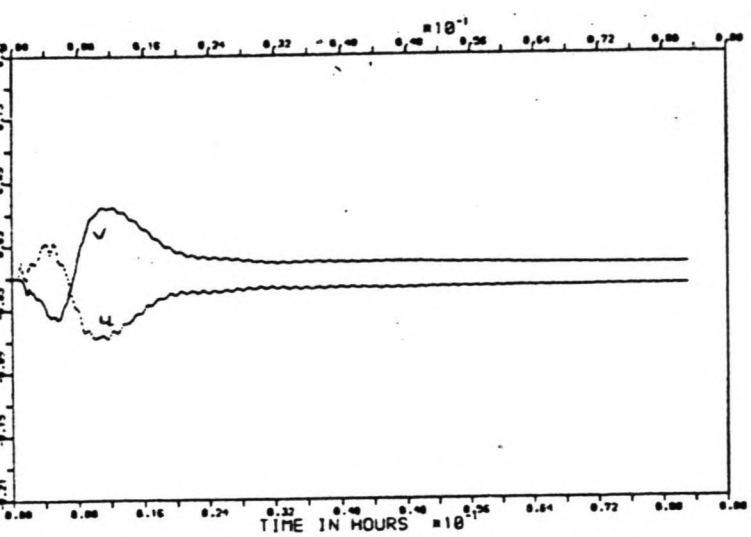
In het geval van sluitgatstroming moet de demping in voldoende mate aan de bovenstroomse rand worden opgelegd.
Een effectieve demping blijkt te ontstaan bij $\alpha_{bov} = 10$ (vergelijk fig. 7.5).

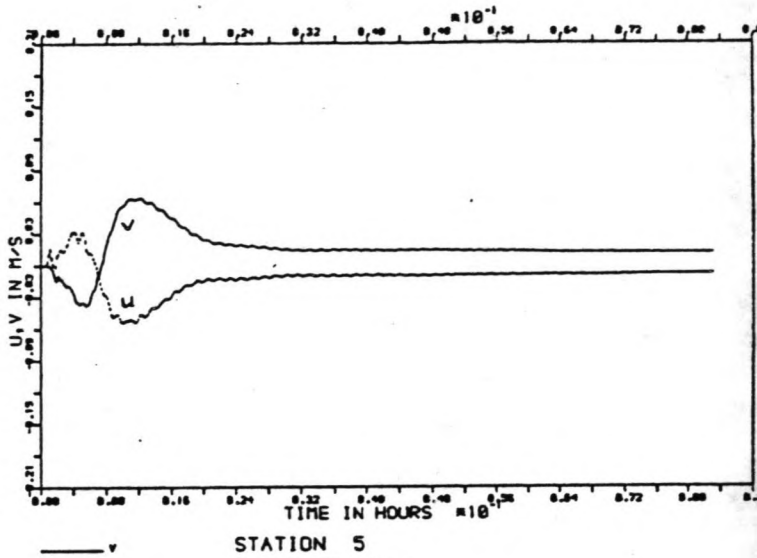
7.3. Modelafmetingen

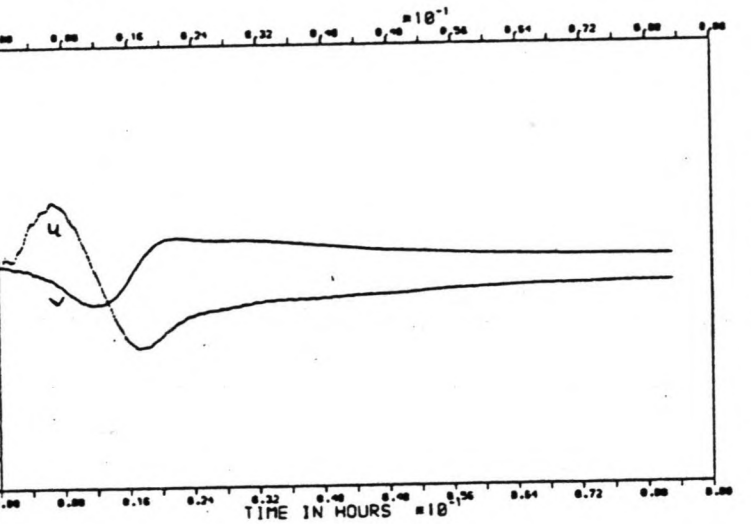
Om de invloed van de modellengte te bepalen is een berekening uitgevoerd met een verlengd model. Daartoe is de benedenrand 2.55m ($17\Delta x$) naar rechts verplaatst.

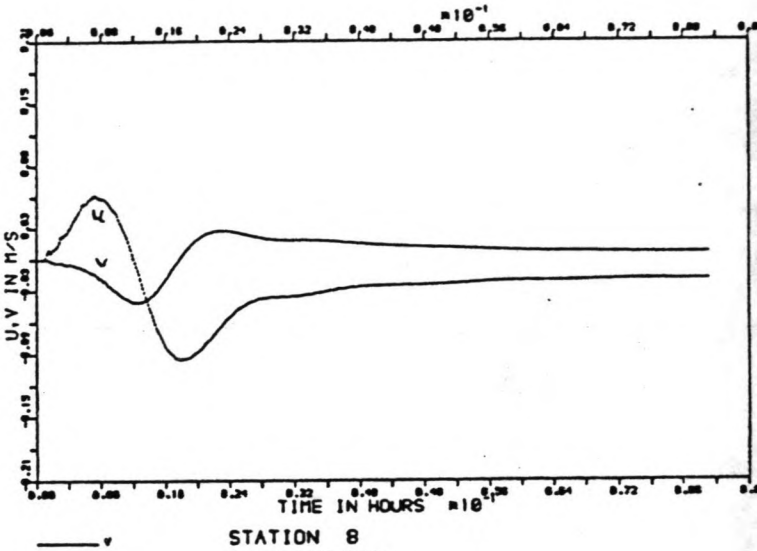
Fig. 7.7 laat zien dat de veranderde ligging van de benedenrand geen invloed heeft op het snelheidsverloop in de controlepunten nabij de dam.

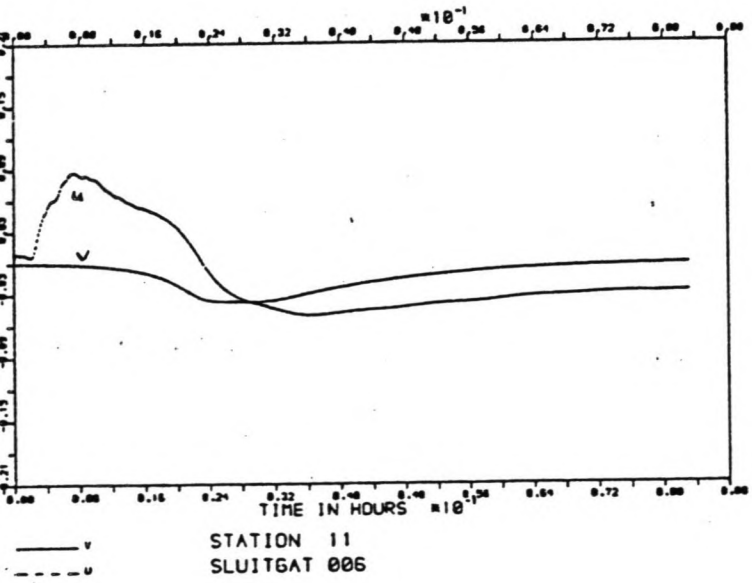
Het stromingspatroon bij de benedenrand verandert echter wel. De rand ligt nu in de buurt van het punt waar de stroming moet gaan aanliggen (~ 8x obstakellengte).

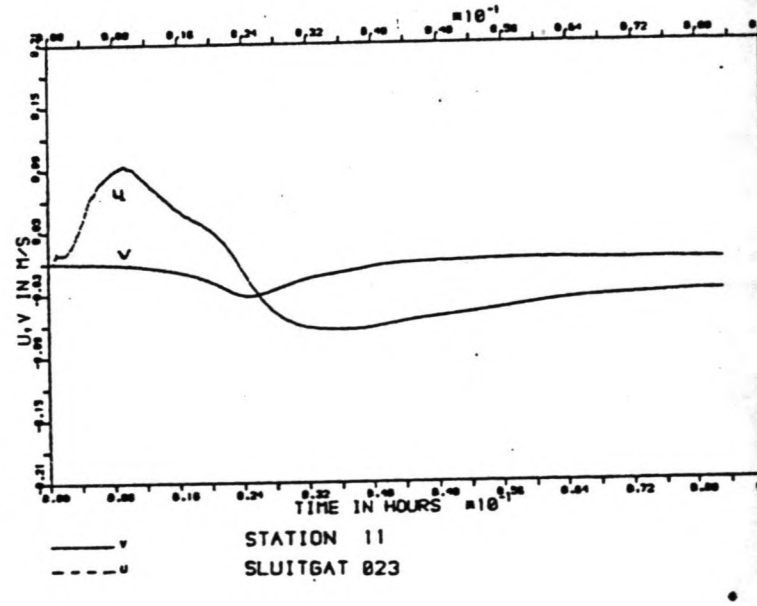












a) oorspronkelijk model

b) verlengd model

Fig. 7.7 Invloed modellengte

In fig. 7.8 is te zien dat de neer smaller wordt en dat de stroming schever invalt.

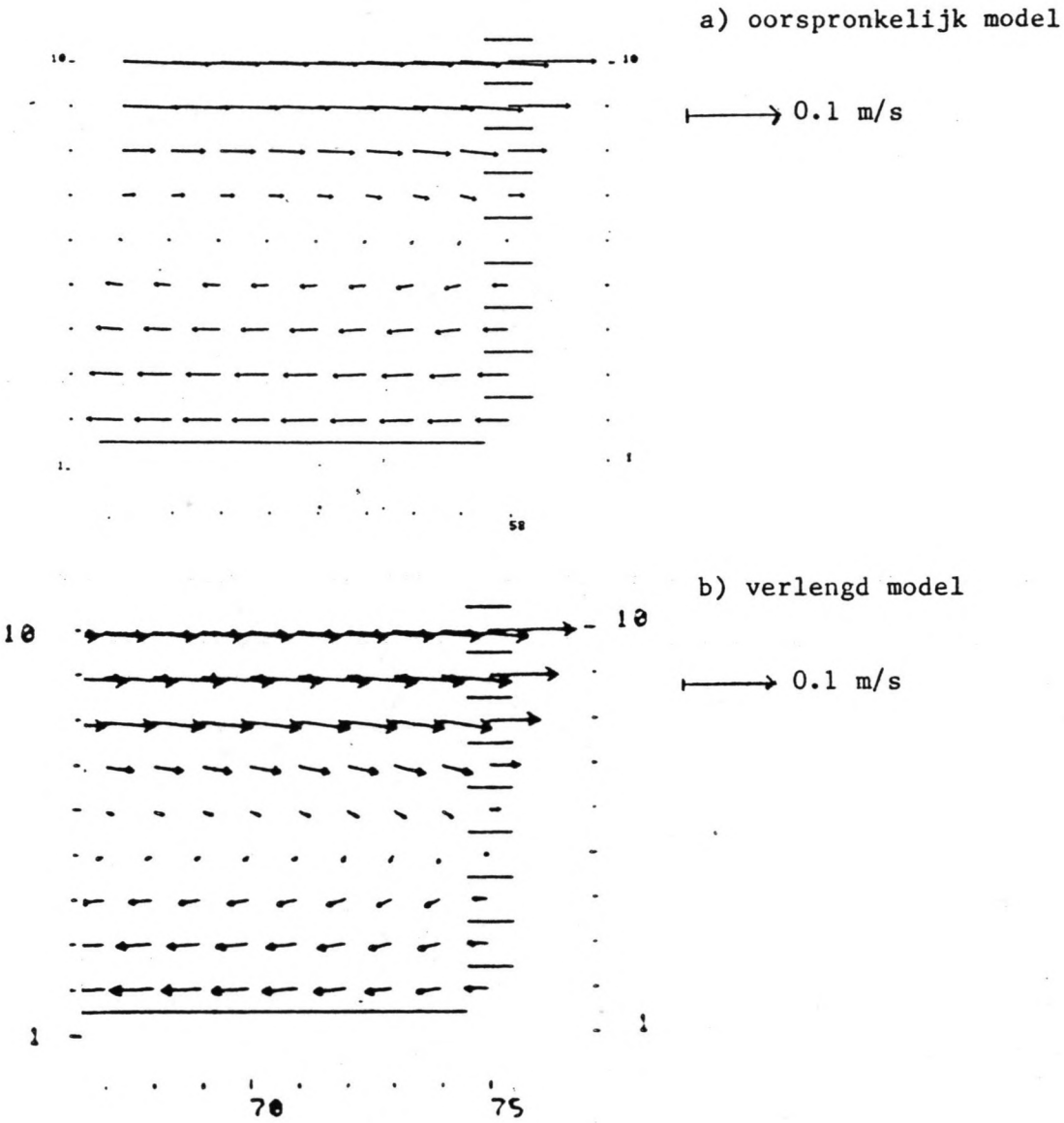


Fig. 7.8 Detail stroming nabij benedenrand

De verandering van het stromingspatroon is lokaal en beïnvloedt de stroming in het damvak blijkbaar niet.

7.4. Bodemwrijving

Het is van belang de gevoeligheid van de oplossing na te gaan voor verandering van de bodemwrijving.
De werkelijk optredende bodemwrijving is in het hydraulisch model niet exact te bepalen aangezien deze afhankelijk is geweest van de bodemafwerking.

Er is een berekening uitgevoerd met een equivalente zandruwheid $k = 14.10^{-4}$m. De oorspronkelijke ruwheid is met een factor 3.5 vergroot. Dit is het ruwheidsverschil tussen afgestreken beton en beton dat niet is afgewerkt.

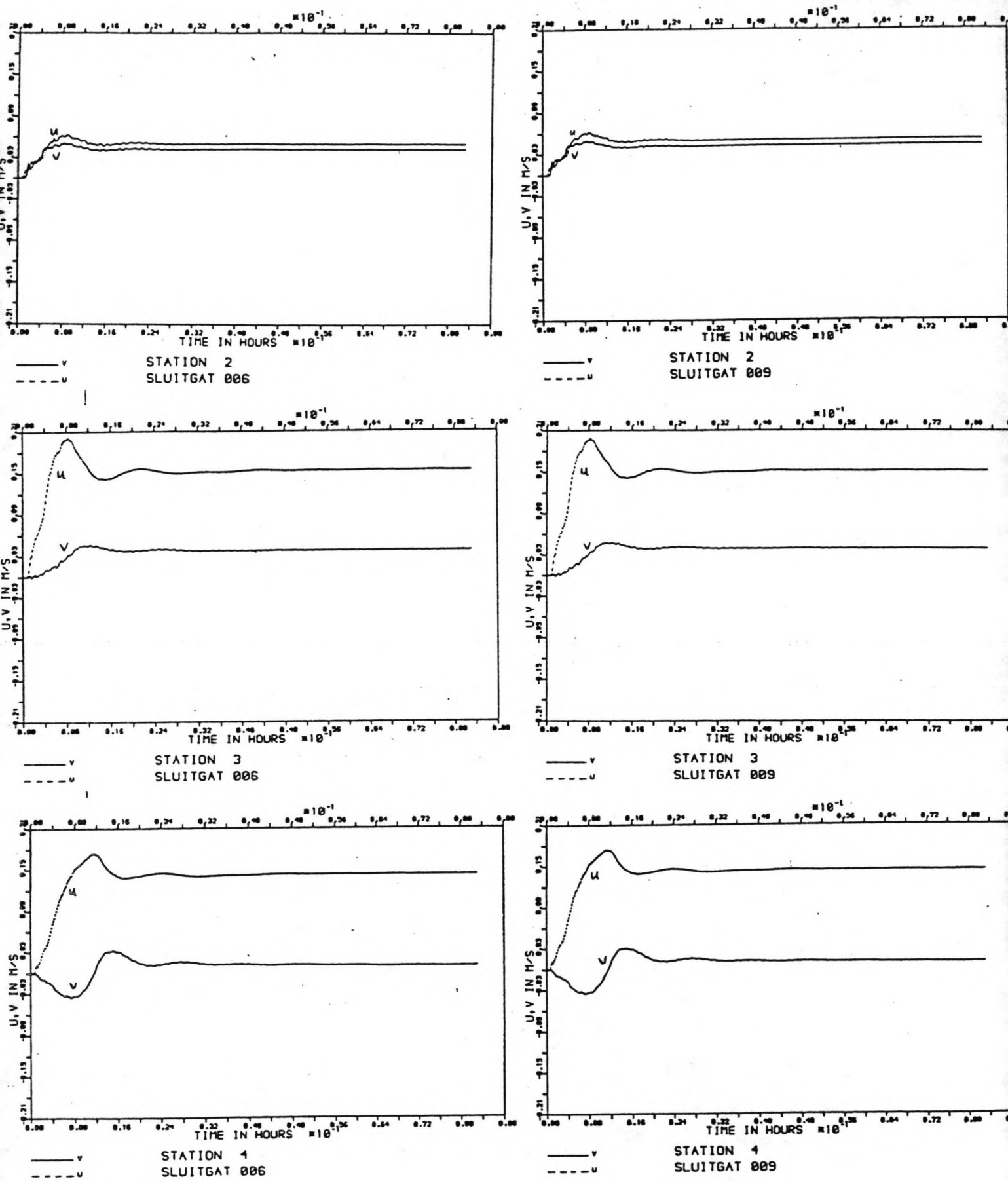
De nieuw in te voeren Manning coëfficient volgt uit (5.6):

$$n = 0.04\ (14.10^{-6})^{1/6} = 0.013\ m^{1/3}/s.$$

De Chezy coëfficient verandert van 50 à 65 naar 40 à 55 $m^{1/2}/s$.

In fig. 7.9 - a en b worden de resultaten van deze berekening vergeleken met de oorspronkelijke. Uit het snelheidsverloop in de controlepunten blijkt dat verandering van de bodemwrijving geen invloed heeft op de resultaten. Dit geldt niet alleen voor de stationaire eindtoestand maar ook voor het verloop van de oplossing en de insteltijd.

De resultaten van de berekening blijken niet gevoelig voor veranderingen in de grootte van de bodemwrijving.



a) C = 50 à 65 $m^{1/2}/s$

b) C = 40 à 55 $m^{1/2}/s$

Fig. 7.9 Invloed bodemwrijving

7.5 Viscositeit

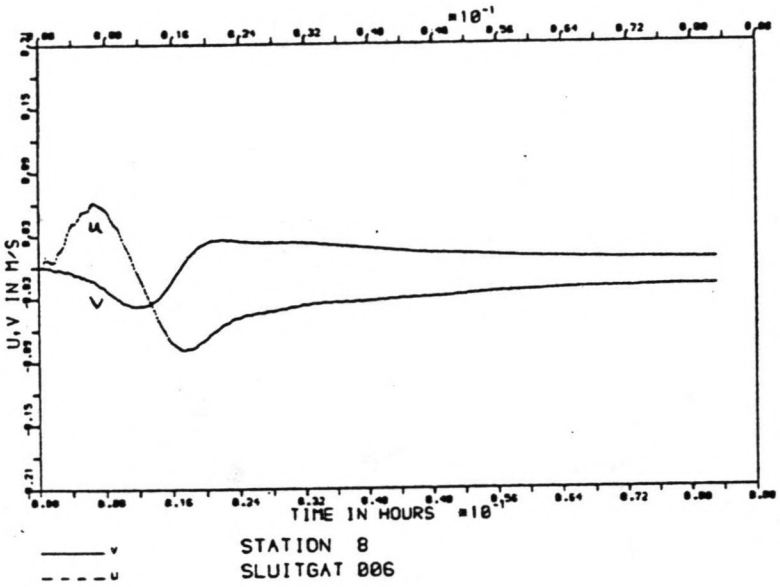
In hoofdstuk 5.3 is de eddy viscosity bepaald, gebaseerd op karakteristieke grootheden die in het menggebied optreden:
$\varepsilon = 12.10^{-4}$ m^2/s (modelschaal).
Gezien de beperkte theoretische achtergrond (hoofdstuk 2.6) is het noodzakelijk om de gevoeligheid van de oplossing voor viscositeitsveranderingen te onderzoeken.

Er zijn berekeningen uitgevoerd met $\varepsilon = 12.10^{-5}$, 6.10^{-4}, 24.10^{-4} en 120.10^{-4} m^2/s.

Uit fig. 7.10 en 7.11 blijkt de invloed van ε op de stabiliteit van de oplossing.
De oplossing voor $1/10\varepsilon$ (12.10^{-5} m^2/s) vertoont een warrig snelheidsverloop (fig. 7.10 - b). Er treedt geen convergentie naar de stationaire toestand op zoals in de oorspronkelijke berekening (fig. 7.10 - a).
Bij toepassing van $1/2\varepsilon$ blijkt de oplossing na ± 300s instabiel te worden (fig.7.11 - b).

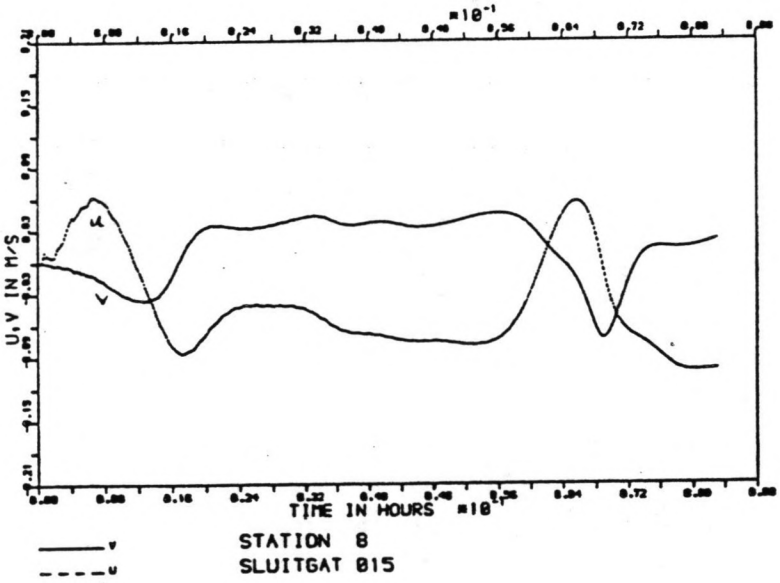
Bij de berekeningen met vergrote viscositeit wordt wél een stationaire toestand bereikt. De eindtoestand is afhankelijk van de gebruikte viscositeit en wijkt af van de oorspronkelijke oplossing. Het menggebied wordt breder naarmate de viscositeit groter wordt. De ligging van de theoretische scheidingslijn ($U = 0.7\ U_{max}$) verandert echter niet.

De invloed van de viscositeit op het menggebied is weergegeven in fig. 7.12.
In fig. 7.13 zijn de bijbehorende snelheidsvelden gegeven. De viscositeit beïnvloedt de afmeting van de neerstroming.



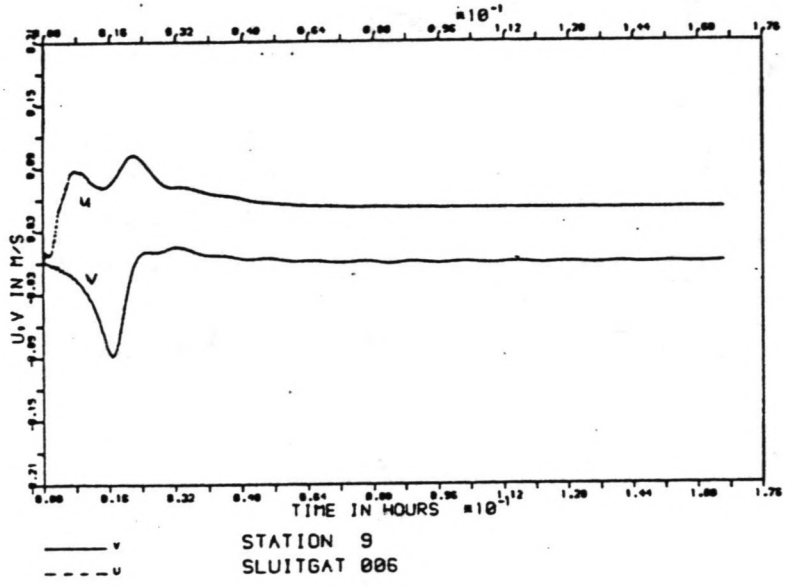
a) $\varepsilon = 12.10^{-4}$ m^2/s

oorspronkelijke berekening



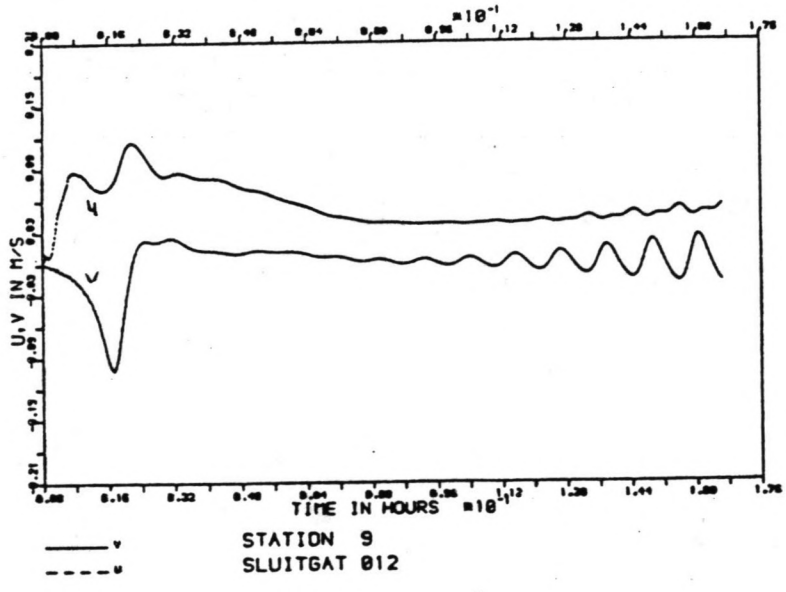
b) $\varepsilon = 12.10^{-5}$ m^2/s

Fig. 7.10 Vergelijking $\varepsilon = 12.10^{-4}$ en 12.10^{-5} m^2/s



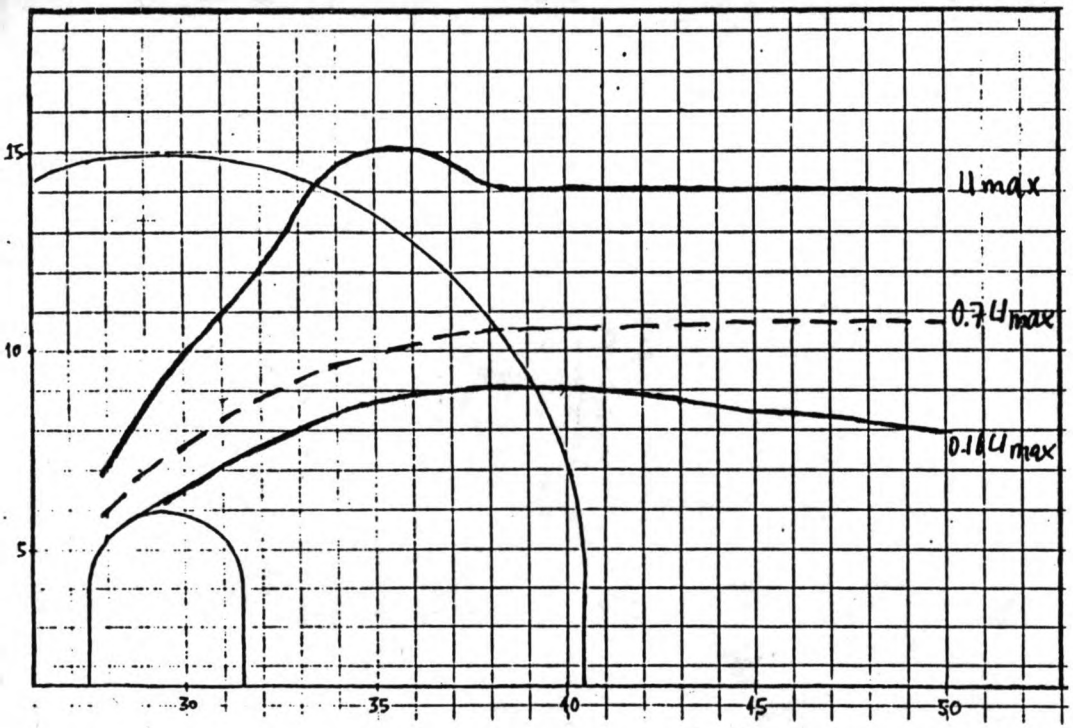
a) $\varepsilon = 12.10^{-4}$ m²/s

oorspronkelijke berekening

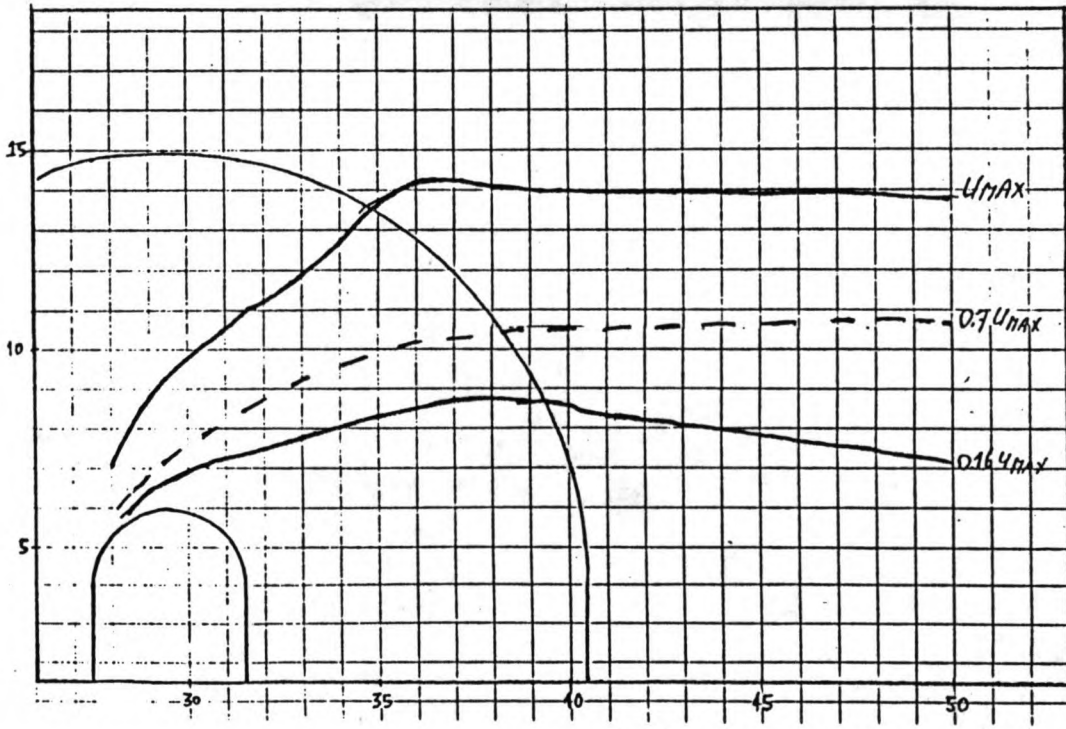


b) $\varepsilon = 6.10^{-4}$ m²/s

Fig. 7.11 Vergelijking $\varepsilon = 12.10^{-4}$ en 6.10^{-4} m²/s



$\varepsilon = 6.10^{-4}\ m^2/s$



$\varepsilon = 12.10^{-4}\ m^2/s$

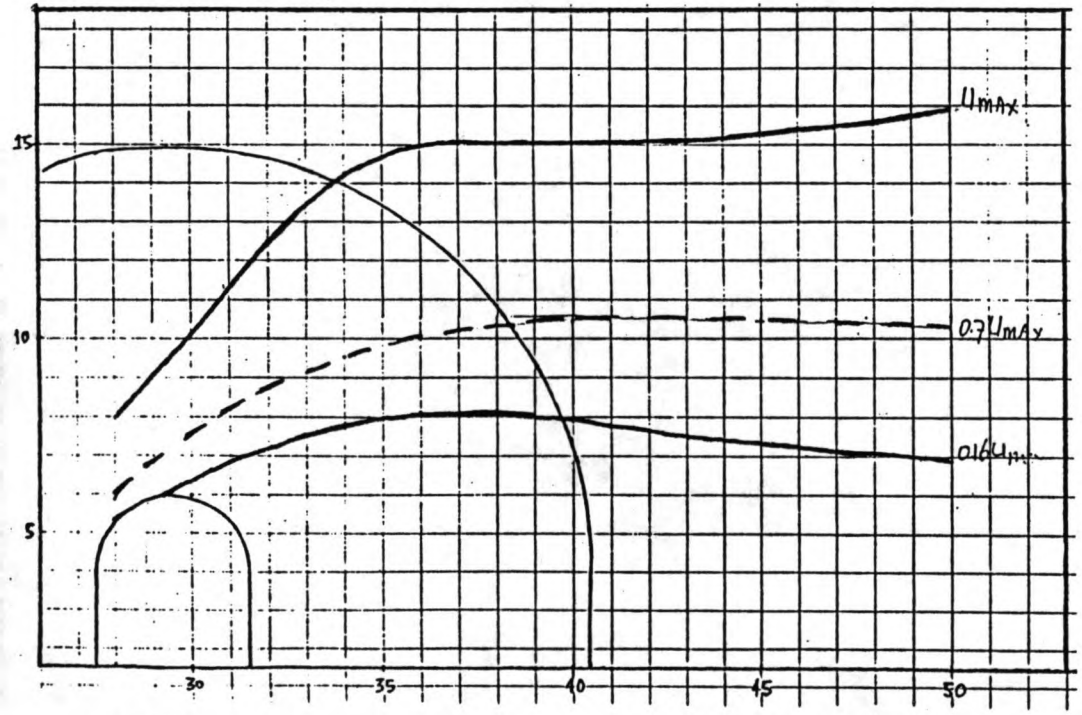
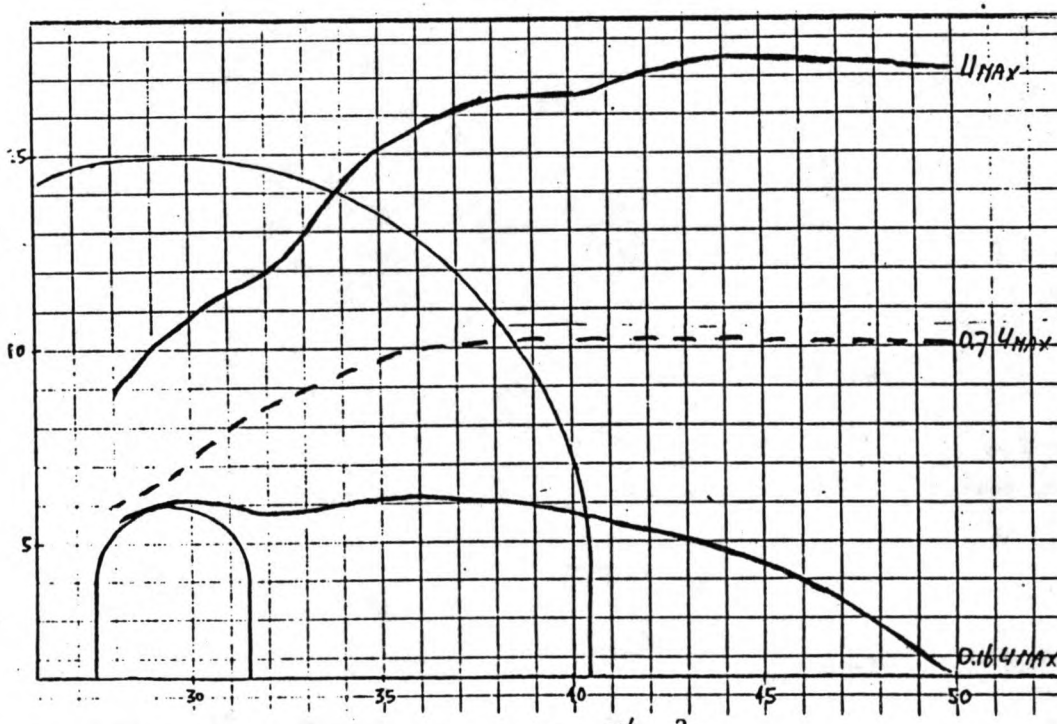
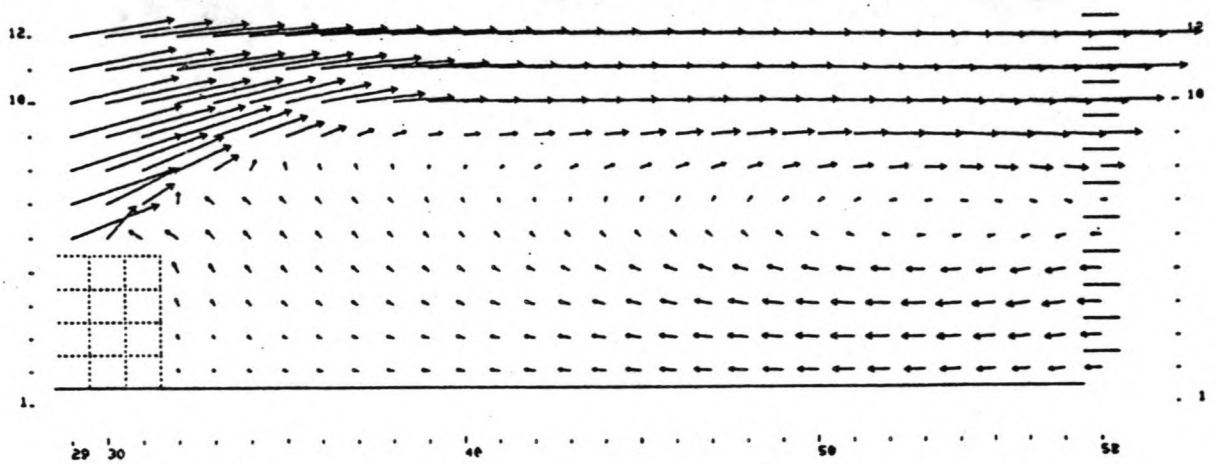


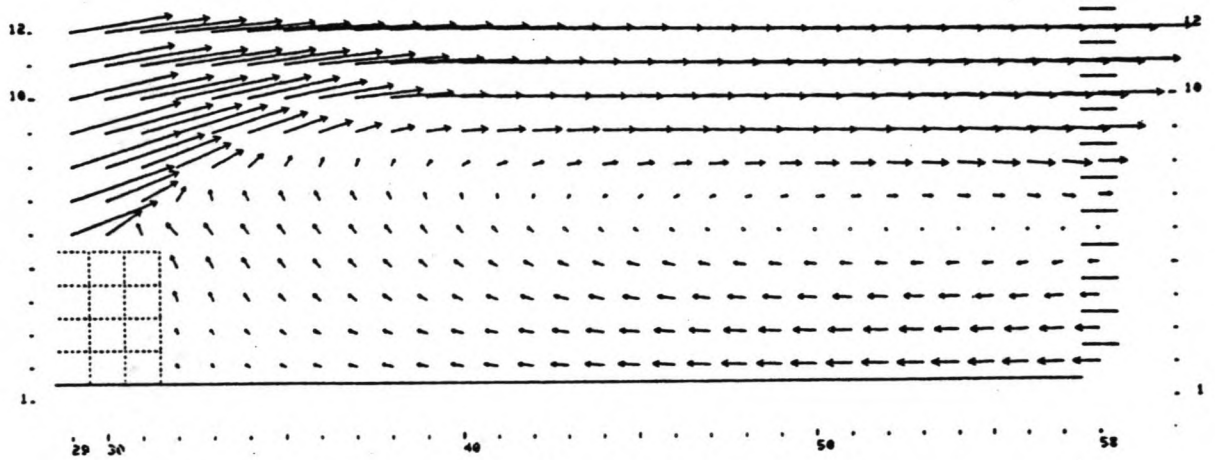
Fig. 7.12 Y



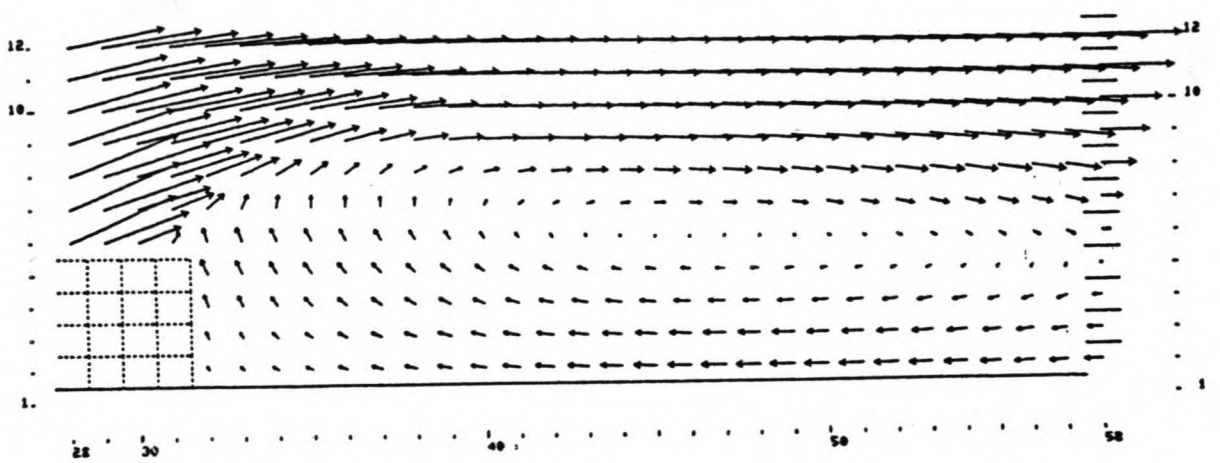
$\varepsilon = 120.10^{-4}\ m^2/s$



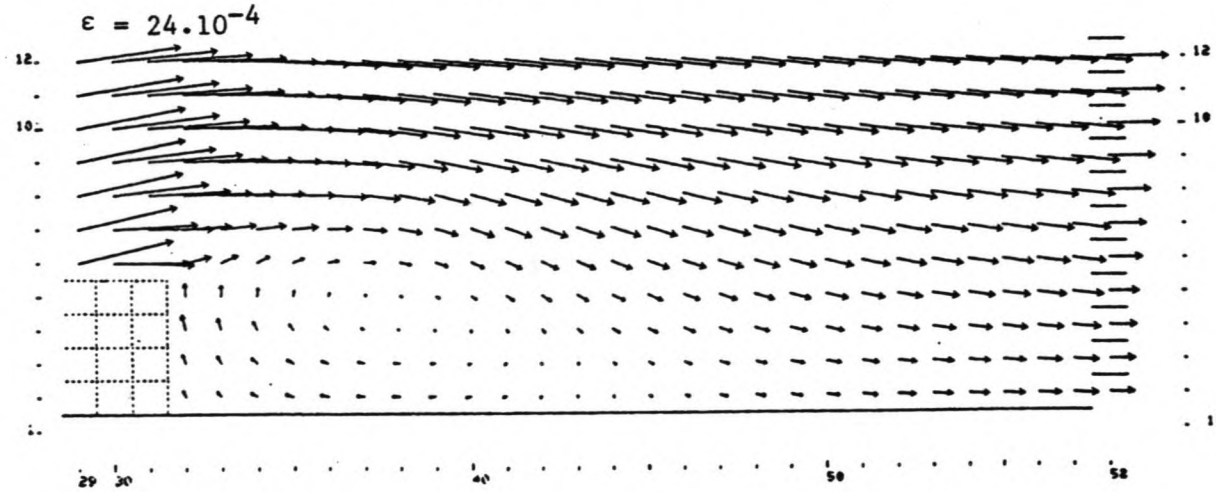
$\varepsilon = 6.10^{-4}$



$\varepsilon = 12.10^{-4}$



$\varepsilon = 24.10^{-4}$



$\varepsilon = 120.10^{-4}$

Fig. 7.13 Invloed van ε op neerstroming ($\longmapsto$ 0.11 m/s)

8. RICHTING EN GROOTTE VAN DE BODEMSCHUIFSPANNING

8.1. Invloed van Secundaire Stroming

Bij een diepte-gemiddelde berekening als WAQUA kunnen drie-dimensionale effecten niet worden meegenomen.
Er wordt aangenomen dat de richting van de bodemschuifspanning correspondeert met die van de diepte-gemiddelde snelheid. In hoeverre die aanname gerechtvaardigd is hangt af van de aanwezigheid van secundaire stromingen.
Bij sluitgatstroming spelen secundaire stromingen een rol. Door de kromming van de stroomlijnen treedt een spiraalstroming op. Daardoor varieert de richting van de horizontale snelheidsvector over de diepte. De bijbehorende schuifspanningsvector roteert ook over de vertikaal.
Als secundaire stromingen een rol spelen hoeft de richting van de bodemschuifspanning dus niet dezelfde te zijn als die van de diepte-gemiddelde snelheid. Bovenstaande aanname gaat dus niet helemaal op. Voor de schuifspanningsverdeling blijkt de exacte snelheidsverdeling over de vertikaal benodigd (in grootte en richting).

De invloed van secundaire stroming op de bodemschuifspanning wordt bekeken volgens Van Bendegom (1978) en Rozovskii (1957). De horizontale snelheidsvector wordt ontbonden in de tangentiële en de radiale richting.

8.2. Tangentiële Richting

De tangentiële snelheidsverdeling over de hoogte heeft een logaritmisch verloop:

$$u(z) = \frac{u_x}{k} \ln \frac{z}{z_o} \qquad (8.1)$$

Voor de tangentiële bodemschuifspanning geldt dan:

$$\tau_{sb} = \rho g \cdot \frac{U^2}{C^2} \tag{8.2}$$

(U is de met WAQUA berekende diepte-gemiddelde snelheid)

8.3. Radiale Richting

Het snelheidsprofiel in radiale richting vertoont een vrijwel lineair verloop met nabij de bodem een snelle afname van de snelheid.

Rozovskii benadert het snelheidsverloop als volgt:

$$U_r(z) = \frac{1.5}{\kappa^2} \cdot U \cdot \frac{h}{r} \cdot \left(2 \cdot \frac{z}{h} - 1\right) \tag{8.3}$$

Rozovskii kiest $\kappa = 0.5$ voor bochtstroming.

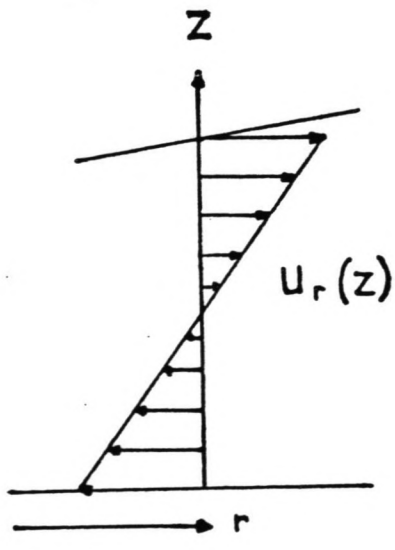


Fig. 8.1 Snelheidsverdeling in radiale richting

Hoewel de diepte-gemiddelde snelheid in deze richting nul is, kunnen de snelheden bij de bodem en aan het oppervlak aanzienlijk zijn:

$$U_r \text{ .max} = \pm 6U \frac{h}{r}$$

De radiale bodemschuifspanning is (naar Van Bendegom):

$$\tau_{rb} = -2\rho gh \left(\left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa C}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa C}\right)^3 \right) \frac{U^2}{gr} \qquad (8.4)$$

8.4. Afwijking Bodemschuifspanning

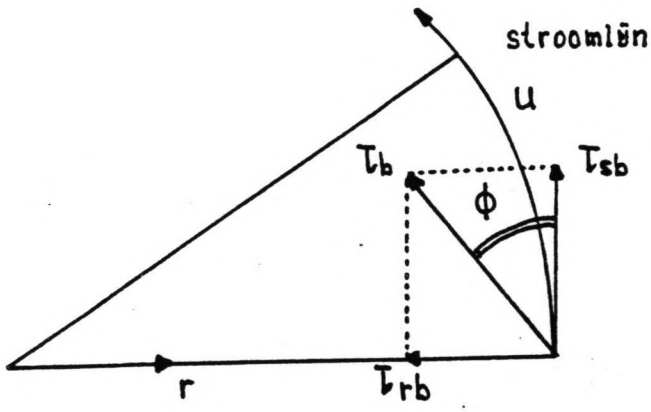


Fig. 8.2 Definitie schets

τ_{sb} bodemschuifspanning WAQUA

τ_{rb} bodemschuifspanning t.g.v. secundaire stroming

τ_b werkelijk optredende bodemschuifspanning

ϕ is de afwijking van de bodemschuifspanningsrichting

$$\phi = \arctan \frac{\tau_{rb}}{\tau_{sb}} \tag{8.5}$$

$$\frac{\tau_{rb}}{\tau_{sb}} = \frac{2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C}\right) \cdot \frac{h}{r} \tag{8.6}$$

De hoek ϕ is vooral afhankelijk van de factor "h/r". De invloed van de Chezy-waarde is gering. Met k = 0.5 en C = 60 $m^{1/2}/s$ volgt uit (8.6):

$$\frac{\tau_{rb}}{\tau_{sb}} \sim 7 \frac{h}{r} \tag{8.7}$$

Aangezien de stroomlijnen bekend zijn, kan nu de werkelijke richting van de bodemschuifspanning bepaald worden. De interessante gebieden zijn die met een grote factor h/r: het versnellingsgebied bovenstrooms en de neerstroming in het schaduwgebied van de dam (de neer wordt ook gezien als een bochtstroming).

Fig. 8.3 toont de orde van grootte van de bochtstraal van de stroomlijnen.

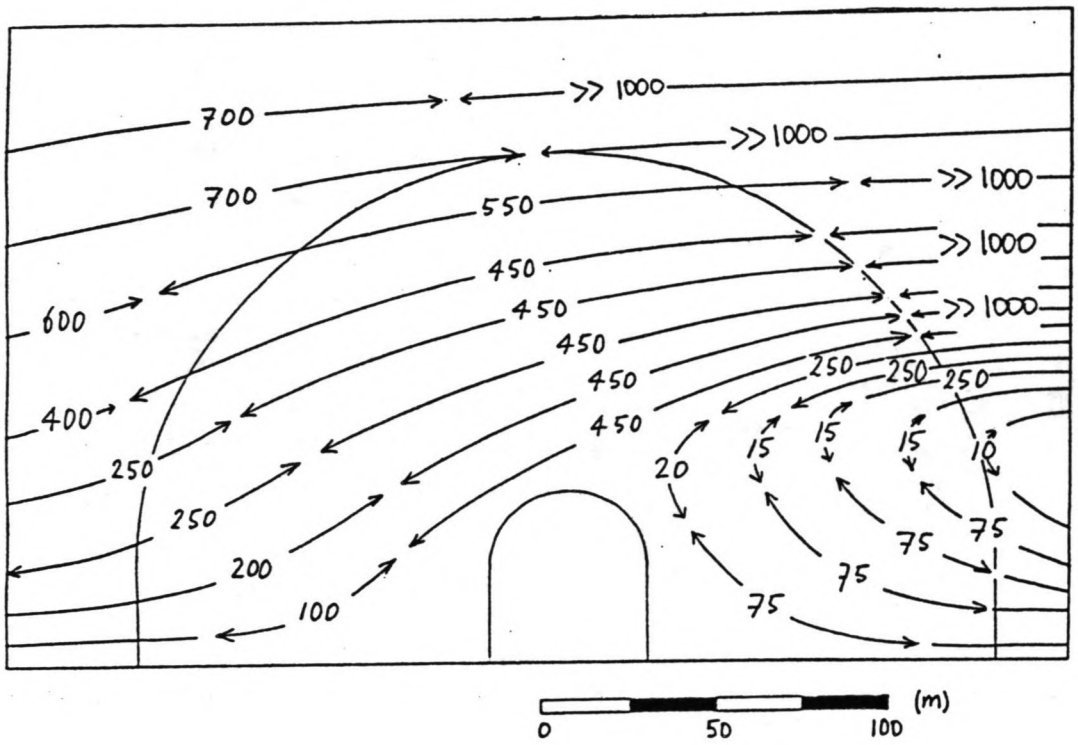


Fig. 8.3 Kromtestraal van de stroomlijnen (in meters)

Met behulp van fig. 8.3 en (8.7) kan de hoek ϕ bepaald worden. Fig. 8.4 toont kenmerkende waarden voor ϕ.

In het versnellingsgebied is de hoek ϕ en ook de spreiding van ϕ kleiner dan in het schaduwgebied. Daar varieert ϕ sterk van plaats tot plaats, tot zelfs 82°. De werkelijk optredende bodemschuifspanning bedraagt dan 7 maal de tangentiële component.

$$\tau b = \frac{1}{\cos\phi} \cdot \tau sb$$

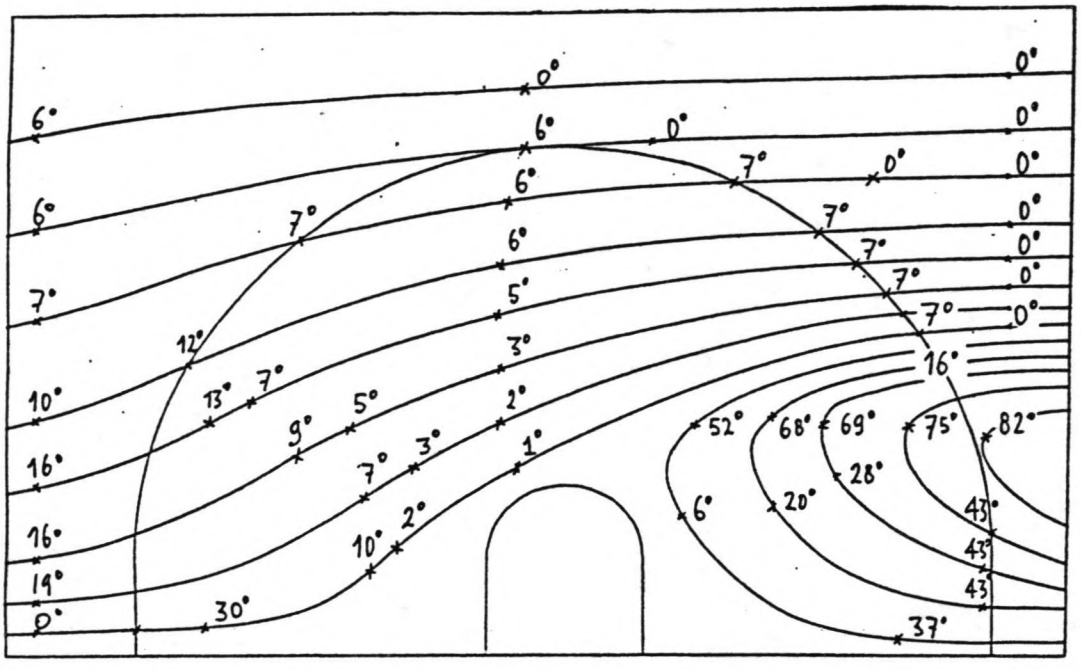


Fig. 8.4 Afwijking van de bodemschuifspanningsrichting (ϕ)

8.5. Gevolg Afwijking (Bodem)schuifspanning

De voorgaande paragrafen kunnen als volgt samengevat worden: ten gevolge van kromming van de stroomlijnen wijkt de richting van de bodemschuifspanning af van de richting van diepte-gemiddelde snelheid. Daardoor is de werkelijk optredende bodemschuifspanning groter dan op basis van de gemiddelde snelheid verwacht zou worden. Dit effect speelt alleen in het circulatiegebied een rol van betekenis.
Hierdoor wordt het transport van sediment in de circulatiezone naar binnen gericht.

De bodemschuifspanning speelt een belangrijke rol bij transport van sediment, zowel in de vorm van bodemtransport als in de vorm van zwevend transport.
In zandtransportformules komt de bodemschuifspanning voor in de opwoelparameter waarmee de uitwisseling van sediment van bodem naar stroming wordt beschreven.
De richting van bodemtransport correspondeert, bij een horizontale bodem, met de richting van de bodemschuifspanning (op het talud wijkt deze richting af. Dit komt door de ontbondene van de zwaartekracht langs de bodem, die loodrecht op de stroomlijn een rol gaat spelen).
Voor de transportrichting van zwevend sediment is de horizontale snelheidsverdeling over de hele vertikaal van belang.

Het is duidelijk dat voor een juiste voorspelling van het sedimenttransport en de bodemverandering in het circulatiegebied, een diepte-gemiddelde aanpak niet toereikend is.
Door de lage snelheden in dit gebied zijn de bodemschuifspanningen hier gering. De afwijking van de bodemschuifspanning is hierdoor slechts van geringe invloed op het totale zandtransport.
In het Morfologisch Deel zal inderdaad blijken dat de neerstroming slechts een geringe bijdrage levert aan het totale transport van sediment in het sluitgat.

9. CONCLUSIES

Zowel in het hydraulisch model als in het numeriek model wordt de stroming beïnvloed door de randen. In beide gevallen is het model te klein geweest om een vrije neerstroming te laten ontwikkelen. Een breder model en in elk geval een meer stroomopwaarts gelegen dam zou tot betere resultaten hebben geleid.

Als we de resultaten vergelijken dan blijkt dat de berekende snelheden in het versnellingsgebied goed overeenkomen met de metingen. Daarentegen is het menggebied boven het talud te breed en wijken de stroomlijnen in het schaduwgebied af van de drijvermetingen.
De verwachting is dat op deze laatste twee punten verbetering mogelijk is bij toepassing van een kleinere roosterafstand en een beter turbulentie-model.

Samengevat: terwijl het resultaat van de berekening op enkele punten afwijkt van de metingen, vertonen met name de hogere snelheden voldoende overeenkomst. Daarom wordt genoegen genomen met deze resultaten als basis voor een verdere zandtransportberekening. De dieptegemiddelde grootheden zijn hiervoor bijzonder geschikt.
Het feit dat slechts een stationair stroombeeld in de vervolgberekening kan worden ingevoerd is geen bezwaar en verdient in de eerste fase van het onderzoek zelfs de voorkeur.

De keuze van een diepte-gemiddelde aanpak blijkt gerechtvaardigd met name door de flauwe taluds die bij zandsluitingen optreden. De invloed van secundaire stroming blijft beperkt tot de circulatiezone waar de invloed op het totale zandtransport gering zal zijn.

Bij de berekeningen hebben we te maken gekregen met de problematiek betreffende de weergave van neerstromingen.
De achtergrond hiervan is fundamenteel en gelegen in de ruimtelijke

discretisatie. Deze is namelijk altijd te grof om de eerste fase van het ontstaan van een wervel (microschaal) te kunnen weergeven.
Door de geringe invloed van de bodemwrijving in het kleine en relatief diepe model worden hoge eisen gesteld aan de randvoorwaarden op open randen.

Uit het voorgaande is duidelijk dat het weergeven van een circulatiestroming in een dergelijk sluitgatmodel als een zware test mag gelden voor een numeriek model.
Het WAQUA model en met name de daar gebruikte zwak-reflecterende randvoorwaarde voldoet hierbij beter dan het DUCHESS model.
Bij de berekening van neerstromingen is verificatie (met metingen of vergelijkbare berekeningen) en een gevoeligheidsanalyse noodzakelijk, zeker als de berekening een voorspellend karakter heeft.

Literatuur

Bendegom van, L. (1978), Rivieren en rivierwerken, college diktaat T.H.-Delft, Afdeling Civiele Techniek

Betz, A. (1963), Konforme Abbildung, Berlin, Springer-Verlag

Ethembabaoglu, S. (1973), On the fluctuating flow characteristics in the vicinity of gate slots. University of Trondheim

Flokstra, C. (1977), The closure problem for depth averged two-dimensional flow, IAHR Congres Baden-Baden, A106, 247-256

Lamb, H. (1932), Hydrodynamics, 6th edition, Cambridge

Lantsheer, C. en Neerings, H. (1984), Zandsluiting Philipsdam, afstudeerverslag T.H.-Delft, Afdeling Civiele Techniek

Lantsheer, C. en Neerings, H. (1984), Onderzoek zandslurries I en II, afstudeerverslag T.H.-Delft, Afdeling Civiele Techniek

Lean, G.H. en Weare, T.J. (1979), Modelling two-dimensional circulating flow, ASCE volume 105, 17-26

Luxemburg, W.H.J. (1982), Onderzoek zandtransport mechanisme bij zandsluitingen, afstudeerverslag T.H.-Delft, Afdeling Civiele Techniek

Luxemburg, W.H.J. (1982), Ervaring zandsluitingen, afstudeerverslag T.H.-Delft, Afdeling Civiele Techniek

Mastbergen, D.R. (1983), Dynamica van een laminaire korreldispersiestroming langs een talud, afstudeerverslag T.H.-Delft, Afdeling Civiele Techniek

Mastbergen, D.R. (1984), Laboratorium onderzoek van korreldispersiestroming bij zandsluitingen, afstudeerverslag T.H.-Delft, Afdeling Civiele Techniek

Naudascher, E. (1981), Flow induced vibrations. Fluid engineering unit, Cranfield Institute of Technology

Rozovskii, I.L. (1957), Flow of water in bends of open channels, Academy of Sciences of the Ukranian SSR, Kiev, USSR

Stelling, G.S. (1983), On the construction of computational methods for shallow water flow problems, proefschrift T.H.-Delft

Vreugdenhil, C.B. (1980), Waterloopkundige berekeningen II, college diktaat T.H.-Delft, Afdeling Civiele Techniek

Bijlagen Sluitgatberekeningen met het DUCHESS Model blz.

.1. Inleiding

Het standaardprogramma DUCHESS voor de berekening van lange golf problemen is ontwikkeld aan de T.H.-Delft. DUCHESS staat voor "Delft University Computer program for 2-D Horizontal Estuary and Sea Surges". Het is de nieuwe versie van het oude TIDES model.
Evenals WAQUA is DUCHESS gebaseerd op de 2-D ondiepwatervergelijkingen. Er wordt gebruik gemaakt van een versprongen rooster en de berekening verloopt volgens het ADI principe.
De grootheden die hiermee berekend worden zijn de waterstand en het specifiek debiet (m^2/s) in x- en y-richting.

Het belangrijkste verschil tussen DUCHESS en WAQUA is gelegen in de afhandeling van de convectieve termen. Hierdoor is het WAQUA-schema neutraal stabiel en ontbreekt numerieke viscositeit.

DUCHESS biedt de mogelijkheid om extra numerieke demping toe te voegen. Hierdoor krijgt de berekening een meer impliciet karakter waardoor de nauwkeurigheid van de oplossing wordt beïnvloed. In de berekeningen is hiervan geen gebruik gemaakt.

Voor het sluitend maken van de diepte-gemiddelde bewegingsvergelijkingen wordt ook gebruik gemaakt van een eddy viscosity benadering. Het programma biedt de mogelijkheid om de viscositeit in te voeren als functie van het lokale debiet. Evenals bij WAQUA is gekozen voor een constante viscositeit.

Op gesloten randen is gebruik gemaakt van de no-slip voorwaarde.
De waterlijn aan de kruin van de dam stelt zich in via een droogvalprocedure.

De zwakreflecterende randvoorwaarde in DUCHESS wijkt af van de in WAQUA gebruikte randvoorwaarde op open randen.
In DUCHESS wordt gebruik gemaakt van een zwakreflecterende randvoorwaarde waarin de waterstand op open randen gekoppeld wordt aan de stroomsnelheid.
In de berekening is de benedenrand zwakreflecterend, tenzij anders vermeld.

In diverse controlepunten kan het verloop van de waterstand en het specifiek debiet worden vastgelegd. De ligging van deze stations is onveranderd gebleven (zie fig. B-1).

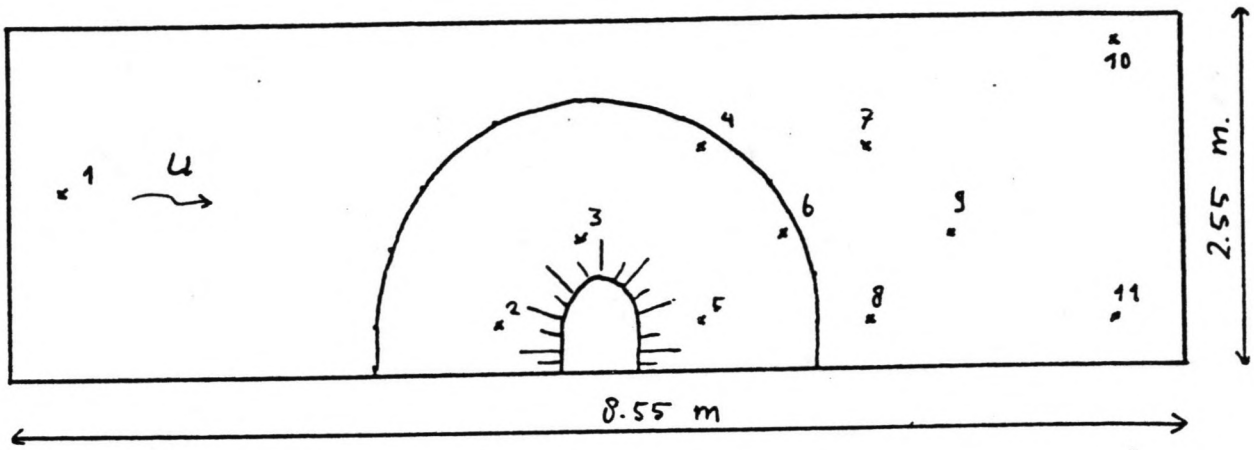


Fig. B-1 Overzicht rekengebied en controlepunten

De DUCHESS-berekeningen vinden op modelschaal plaats.
De gebruikte modelparameters zijn:

stapgrootte	= 0.15 m
aantal roosterpunten	= 1.044
tijdstap	= 1 0.5 0.25 s
rekenduur	= 240 s
bovenstrooms debiet	= 96.10^{-4} m^2/s
beginwaterstand	= 0.133 m
eddy viscosity	= 12.10^{-4} m^2/s

Ter controle van de bodemschematisatie zijn enkele dieptelijnen geplot en weergegeven in fig. B-2.

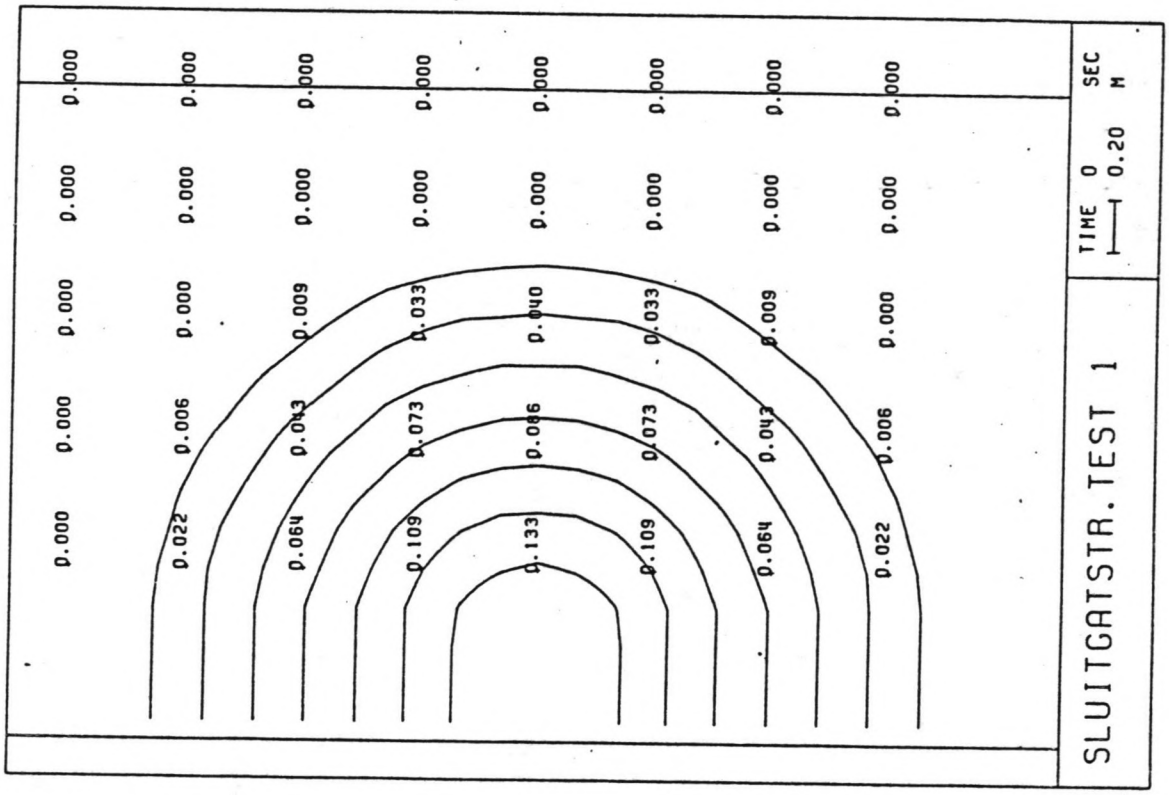
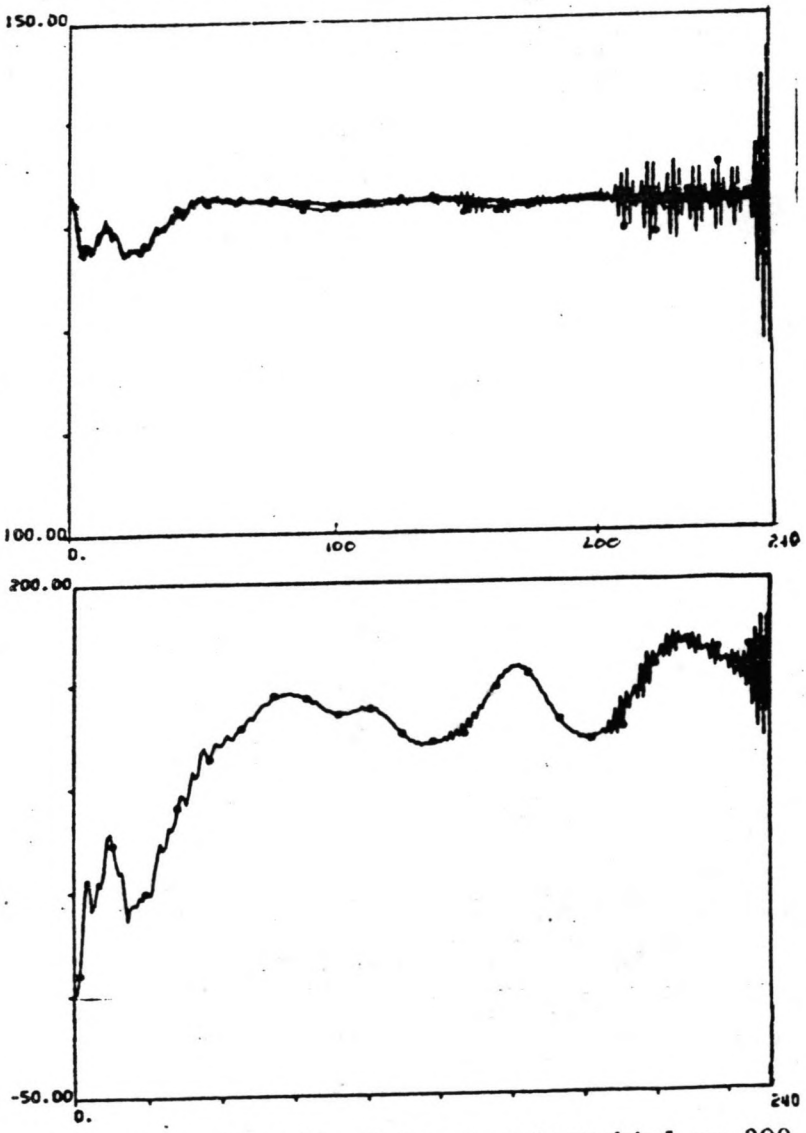


Fig. B-2 Controle bodemschematisatie

B.2. Invloed tijdstap

Uitgaande van het nauwkeurigheidscriterium $\sigma < 10$ wordt in eerste instantie gerekend met $\Delta t = 1s$.

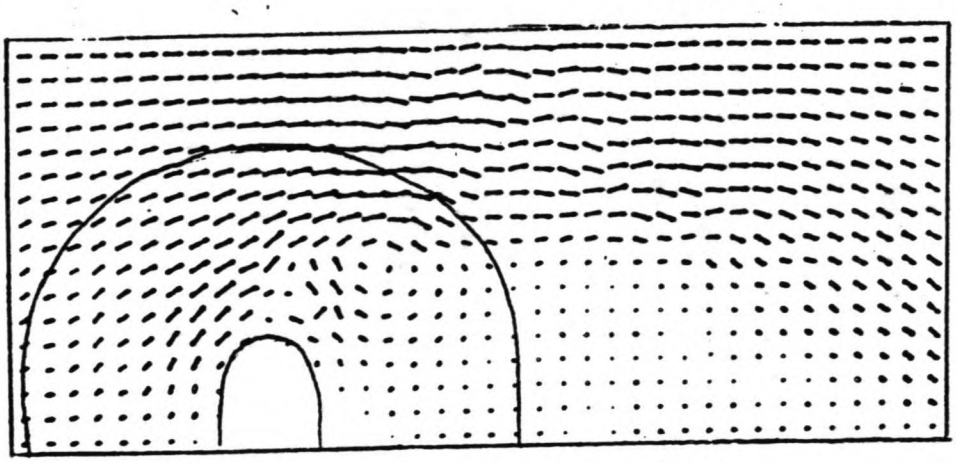
Toepassing van $\Delta t = 1s$ leidt na plm. 200 tijdstappen tot instabiliteit in zowel debiet als waterstand (zie fig. B-3). Kleine verstoringen worden niet uitgedempd maar groeien aan in de tijd. De instabiliteit wordt al aangekondigd door verstoringen in de buurt van t = 150s.



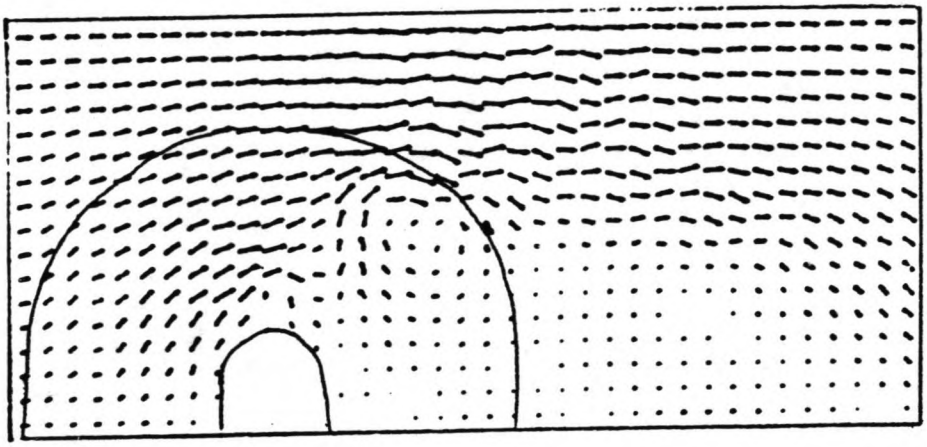
Waterstand in controlepunt 7:
H (mm)

Specifiek debiet in controlepunt 7:
q (in 10^{-4} m^2/s)

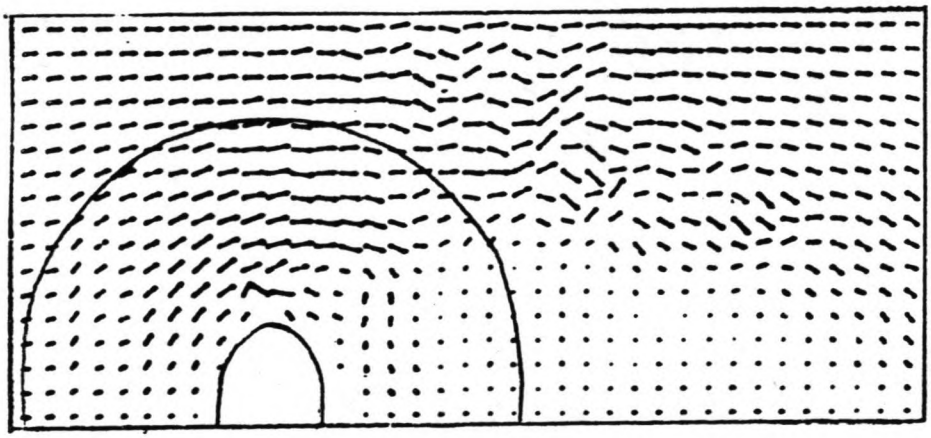
Fig. B-3 $\Delta t = 1s$. Oplossing instabiel na 200 s.



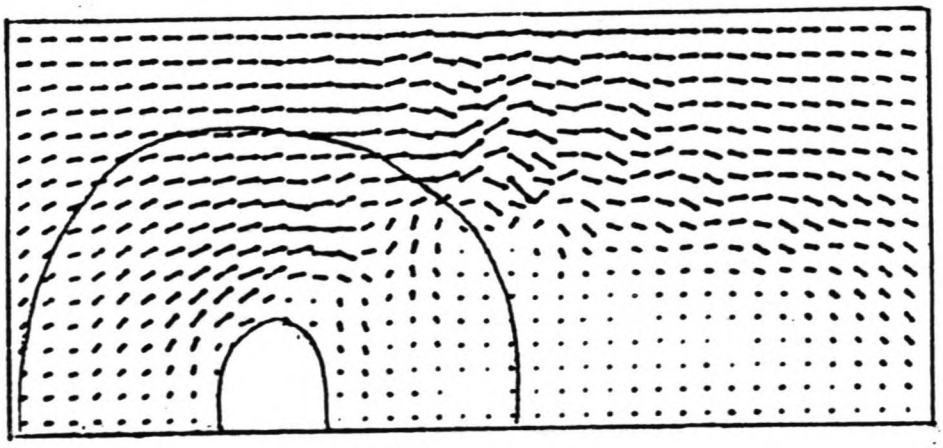
t = 210 s



t = 220 s



t = 230 s



t = 240 s

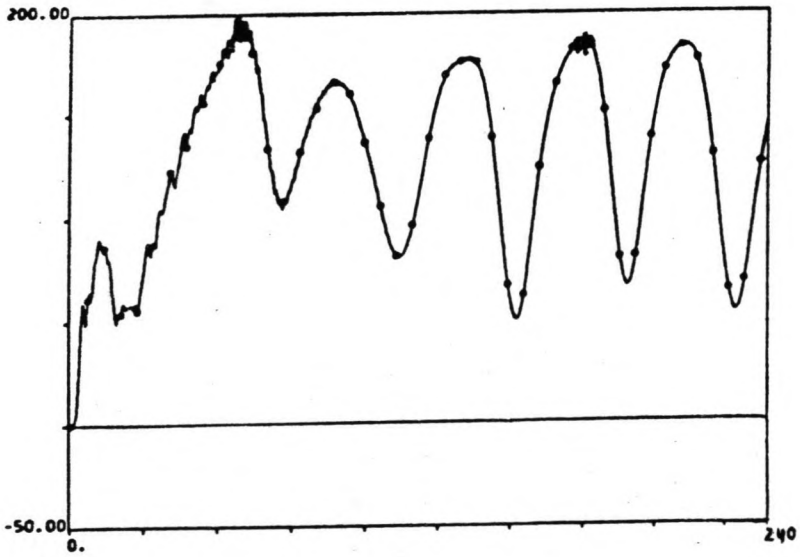
Fig. B-4 Snelheidsvectoren behorende bij instabiele oplossing;

Δt = 1s. ($\longmapsto$ 0.4 m/s)

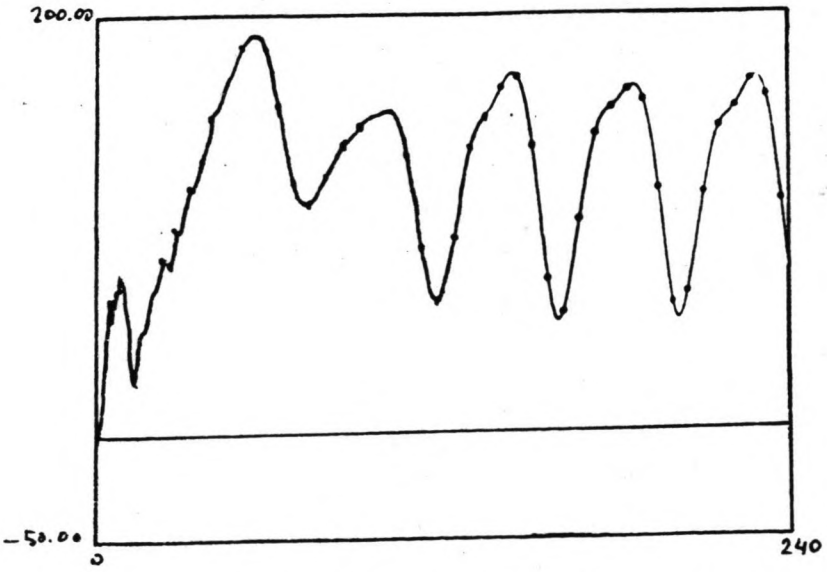
In fig. B-4 zijn de bijbehorende snelheidsvelden weergegeven. Benedenstrooms van de dam variëren de snelheidsvectoren sterk in grootte en richting.

De tijdstap Δt = 1s blijkt bij de gegeven schematisatie te groot. Daarom is Δt vervolgens verkleind.

Het resultaat van de berekening met gehalveerde tijdstap Δt = 1/2s is te zien in fig. B-5-a. Hoewel er nog geen instabiliteit optreedt, is het mogelijk dat de kleine verstoringen aan de top bij t = 60 en t = 200 s, later met grotere amplitude terugkomen als wordt doorgerekend.
Verkleining van de tijdstap lijkt noodzakelijk voor een ongestoord (glad) verloop van de oplossing.

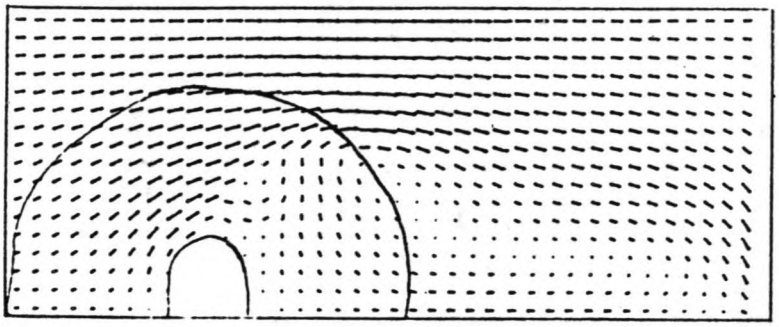


a) Δt = 1/2 s
q in 10^{-4} m^2/s

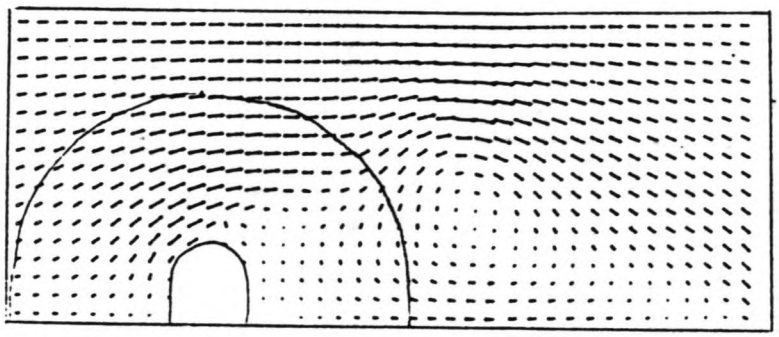


b) Δt = 1/4 s
q in 10^{-4} m^2/s

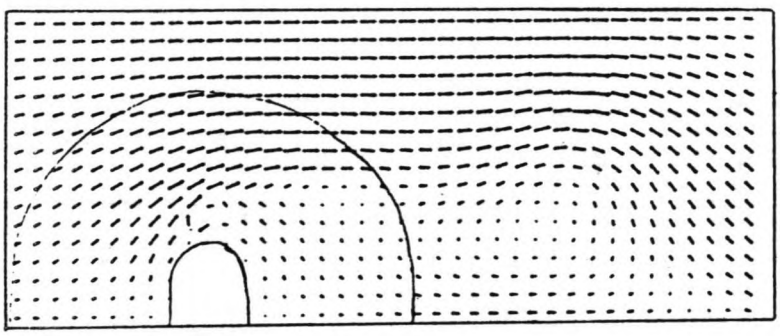
Fig B-5. Specifiek debiet in controlepunt 4 voor Δt = 1/2 s en Δt = 1/4 s.



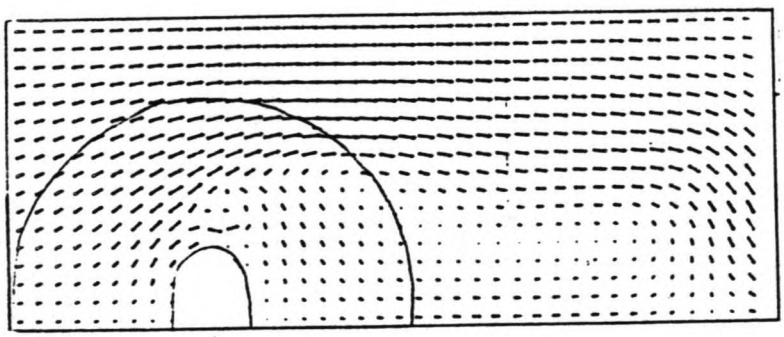
t = 150 s



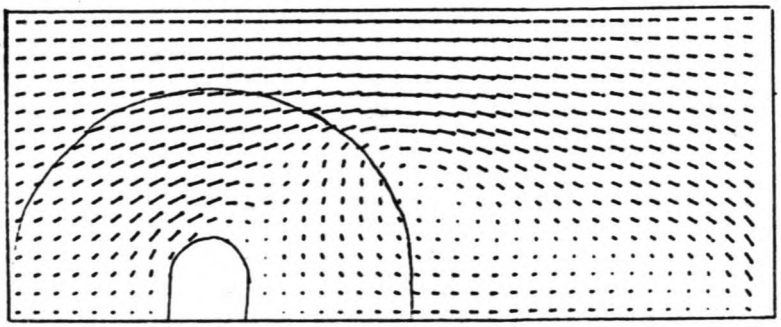
t = 160 s



t = 170 s



t = 180 s



t = 190 s

Fig. B-6 Δt = 1/4 s (⟼ 0.4 m/s)

Cyclus van 40 s.

Toepassing van een tijdstap Δt = 1/4 s levert het q-verloop van fig. B-5-b op. Qua stabiliteit voldoet deze oplossing.
Hoewel bovenstrooms een stationair debiet is opgelegd, ontstaat na 200 s een periodieke oplossing met periode T = 39 s.

De verandering in het stromingspatroon gedurende één periode is weergegeven in fig. B-6.
Deze figuur toont het beeld van een wervel die bij de kruin wordt gevormd, aangroeit en vervolgens loslaat. Dit beeld herhaalt zich met een periode van plm. 39 s.
Opvallend is het zeer warrige patroon van de snelheidsvectoren vlak bij de kruin van de dam, juist waar de wervels gevormd worden. Dit onregelmatige patroon is iets wat bij geen van de WAQUA-berekeningen optreedt.
Wat verder in de figuur opvalt bij t = 150 en t = 190 s, is de sterke retourstroming die de hoofdstroming zelfs gedeeltelijk blokkeert en daarmee loslaten van de wervels lijkt te veroorzaken.
Bovenstrooms van de dam zijn nauwelijks veranderingen in de stroming waar te nemen.

Dit resultaat wijkt op een essentieel punt af van de metingen van Luxemburg: in het hydraulisch model ontstond een plaatsvast menggebied en een stationaire stroming.

Het niet-stationaire karakter lijkt veroorzaakt te worden door een te geringe dissipatie: een te lage viscositeit en dus een te hoog Reynolds getal. Het is bekend dat in zeer turbulente stroming, boven een bepaald Reynolds getal, een wervelstraat kan ontstaan achter een obstakel.
Een berekening met dezelfde ε levert met WAQUA echter een stationair resultaat op. Dit zou er op kunnen wijzen dat het DUCHESS-model mogelijk een negatieve viscositeit bezit.
De zwakreflecterende benedenrand blijkt de verstoringen niet te kunnen dempen.

B.3. Zwak-reflecterende Randvoorwaarde

In DUCHESS is de zwak-reflecterende randvoorwaarde gebaseerd op de 1-D karakteristieken theorie. Hierin wordt de waterstand gekoppeld aan de stroomsnelheid.

Om uitgaande golven ongestoord het rekengebied uit te laten lopen wordt alleen aan de invoerkant een voorwaarde opgelegd.
Voor een inlopende golf geldt de karakteristieke relatie:

$$u_i + 2\sqrt{gh} = \text{constant} \qquad \text{(B-1)}$$

h_i is de waterdiepte $(H-z_b)$ in punt i, gelegen in het rekengebied.
u_i is de stroomsnelheid in punt i, loodrecht op de open rand.

Deze relatie is geldig langs de hele karakteristiek, dus ook in een fictief buitengebied. Stel u_o en h_o zijn grootheden in het buitengebied, dan moet gelden:

$$u_i + 2\sqrt{gh_i} = u_o + 2\sqrt{gh_o} \qquad \text{(B-2)}$$

Indien $u_o \sim 0$ dan geldt bij benadering:

$$u_i = 2\sqrt{g}.(\sqrt{h_o} - \sqrt{h_i}) \qquad \text{(B-3)}$$

Gebruikmakend van het merkwaardig product:

$h_o - h_i = (\sqrt{h_o} - \sqrt{h_i})(\sqrt{h_o} + \sqrt{h_i})$, dan volgt uit B-3:

$$u_i = 2\sqrt{g}.\left(\frac{h_o - h_i}{\sqrt{h_o} + \sqrt{h_i}}\right) \qquad \text{(B-4)}$$

Bij gelijke bodemligging kan u_i uitgedrukt in de waterstand H.

$$u_i = 2\sqrt{g} \cdot \frac{Ho - Hi}{\sqrt{h_o} + \sqrt{h_i}} \qquad \text{(B-5)}$$

Als geldt: $h_o - h_i \ll h_i$ dan volgt uit (B-5):

$$u_i = \sqrt{g} \cdot \frac{Ho - Hi}{\sqrt{h_i}} \qquad \text{(B-6)}$$

Uitgedrukt in het specifiek debiet:

$$q_i = \sqrt{gh_i}\ (Ho - Hi) \qquad \text{(B-7)}$$

Ho is de vast gekozen waterstand op de open rand.
H_i is de waterstand in de roosterpunten vlak voor de open rand. Deze stelt zich zo in dat aan q_i voldaan wordt. Op deze wijze wordt de waterstand vlak voor de open rand gekoppeld aan de stroomsnelheid.

Omdat de zwak-reflecterende randvoorwaarde (B-7) gebaseerd is op de 1-D karakteristieken theorie, ontstaan problemen als er geen loodrechte stroming optreedt of als er een snelheidsgradient in dwarsrichting ontstaat.

In het geval van de sluitgatberekeningen ligt de benedenrand niet in ongestoord gebied, zie fig. B-7.

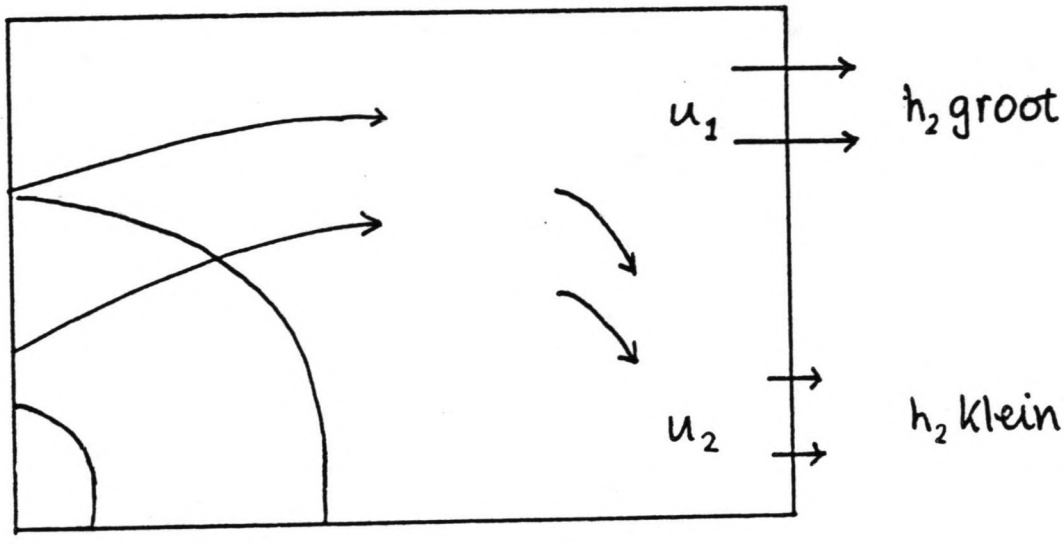


Fig. B-7 Benedenrand in gestoord gebied

Aangezien $u_1 > u_2$, volgt uit (B-7): $H_1 > H_2$. Er ontstaat een dwarsverhang waardoor de stroming wordt afgebogen. Er is geen negatieve uitstroming mogelijk: wervels kunnen niet passeren en hun baan wordt ook voor de rand afgebogen. In fig. B-6 is dit uitstromingspatroon duidelijk waar te nemen.

In hoeverre de benedenrandvoorwaarde ook het stromingspatroon in het damvak beïnvloedt zal onderzocht worden door de berekening te herhalen met respectievelijk een vaste beneden waterstand en een verlengd rekengebied.

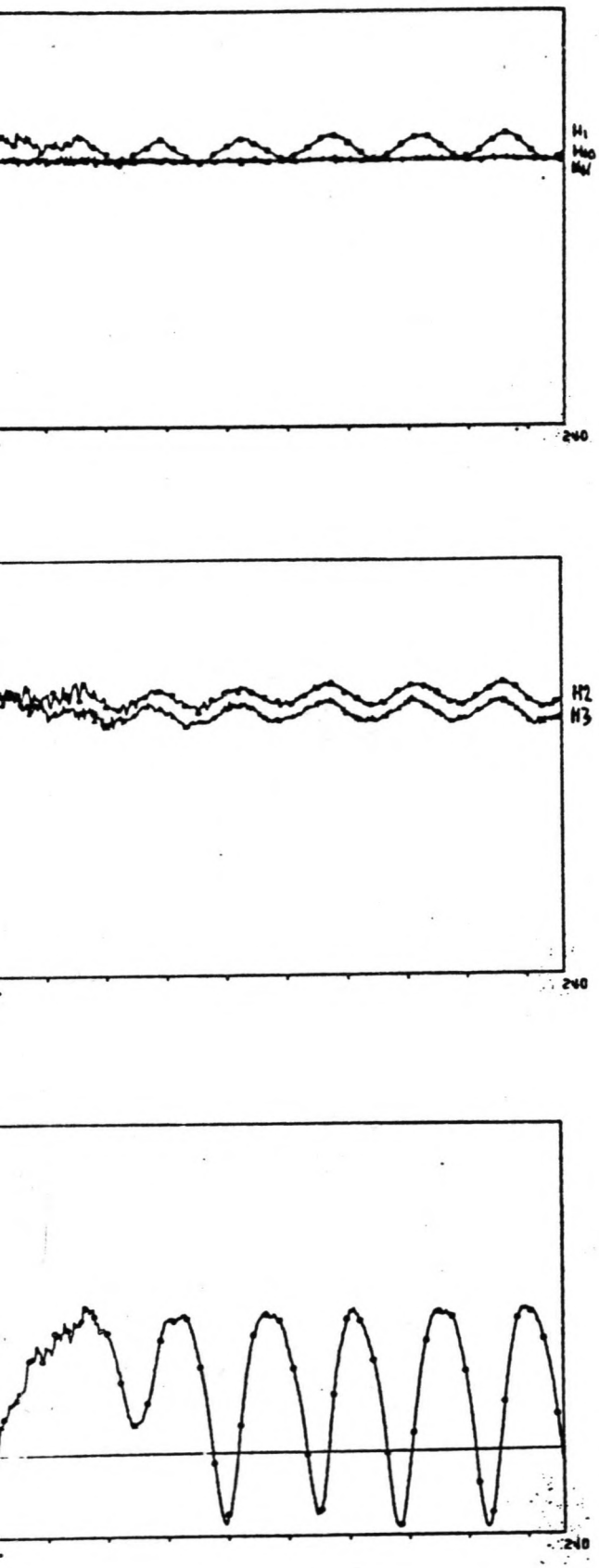
B.4. Invloed Benedenrandvoorwaarde

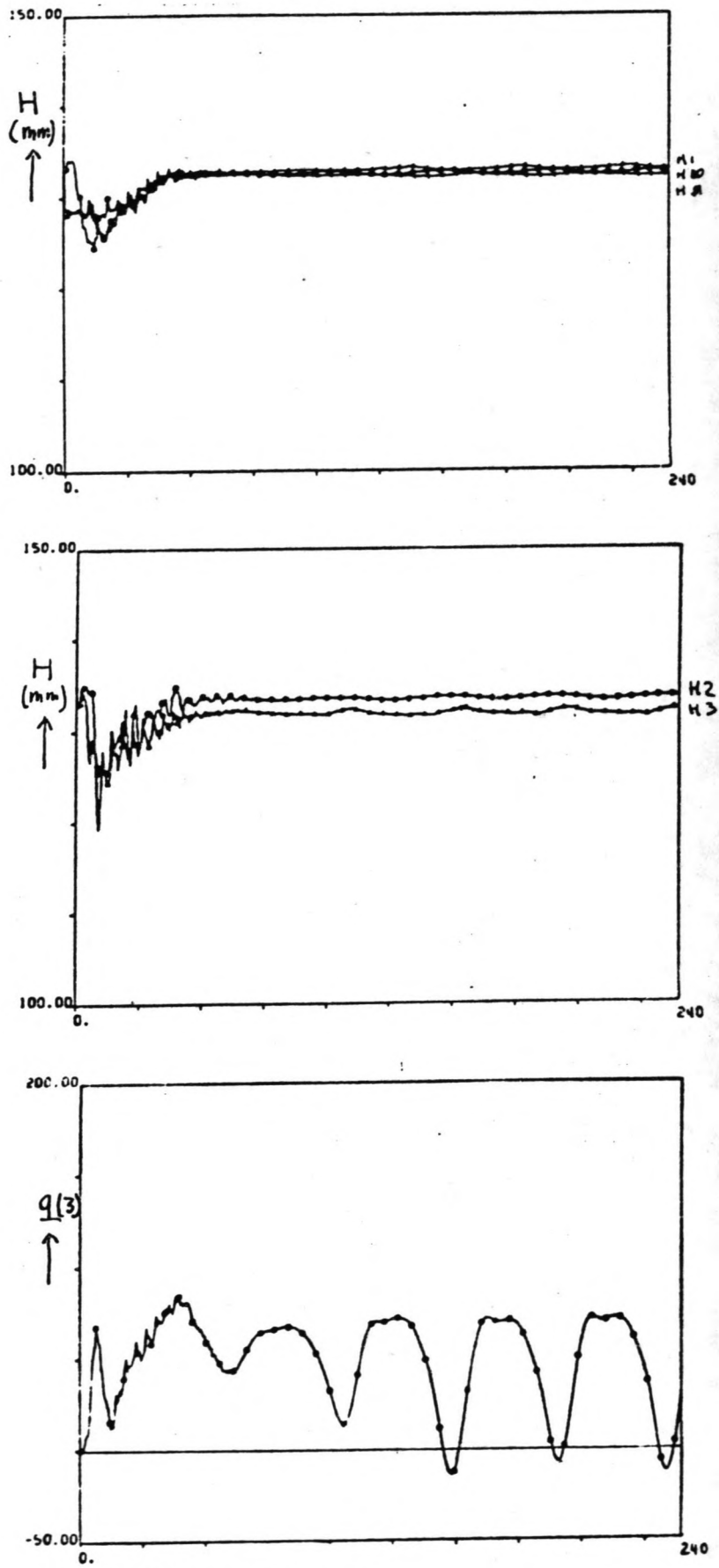
De resultaten van een berekening met vaste benedenwaterstand worden vergeleken met die van de oorspronkelijke berekening (zwak-reflecterende benedenrand).

In fig. B-8-a is het resultaat weergegeven van de berekening met vaste benedenwaterstand.
Net als bij WAQUA ontstaat een staande golf in het model die niet zichtbaar uitdempt. In controlepunt 1 (bovenstrooms) varieert de waterstand met een periode van 35s. In de punten 10 en 11 (benedenstrooms) is het waterspiegelniveau constant.
Verder blijkt uit de figuur dat de waterstandsvariatie gevolgd wordt door het snelheidsverloop (zie controlepunt 4). De snelheid loopt iets achter in fase met de waterstand. De periode van de snelheidsvariatie is dus ook 35s.

Fig. B-8-b toont het resultaat van de oorspronkelijke berekening (met zwak-reflecterende benedenrand).
Hieruit blijkt dat nog steeds een tijdsafhankelijke verstoring aanwezig is, ondanks de benedenrandvoorwaarde. Ditmaal is de periode T = 39s.
In tegenstelling tot fig. B-8-a loopt nu de snelheid in fase vooruit op de waterstand. In dit geval lijkt de waterspiegelvariatie veroorzaakt te worden door de periodieke snelheidsveranderingen.

Omdat snelheids- en waterstandvariatie met elkaar samenhangen, hoeft slechts één van beide gedempt te worden om een stationaire toestand te verkrijgen.

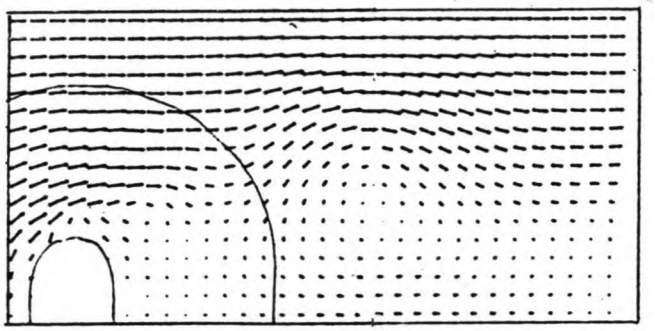




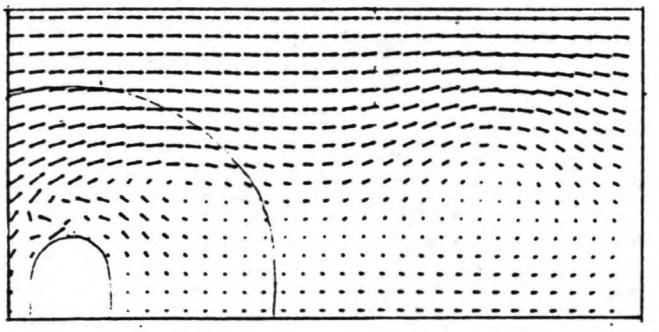
a) vaste benedenwaterstand

b) zwak-reflecterende benedenrand

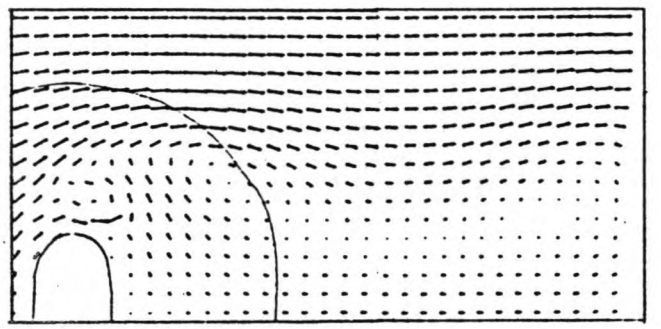
Fig. B-8 H- en q-verloop voor verschillende benedenrandvoorwaarden



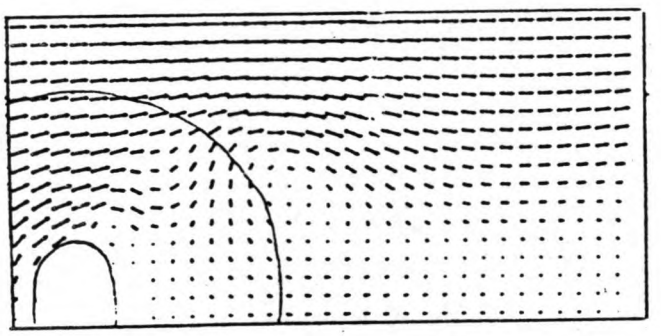
t = 190 s



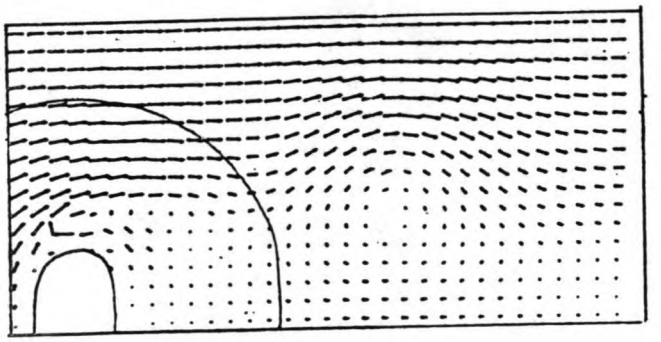
t = 200 s



t = 210 s

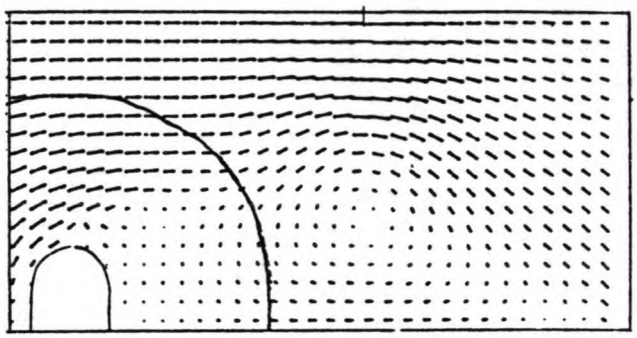


t = 220 s

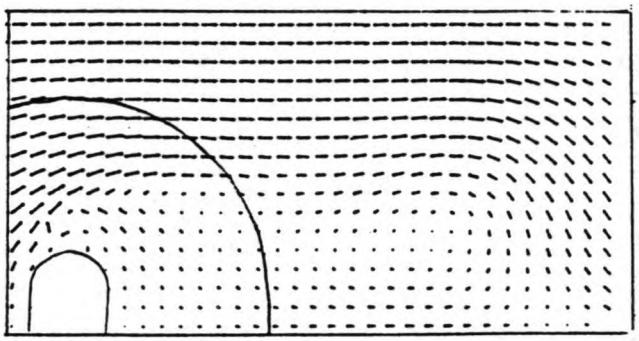


t = 230 s

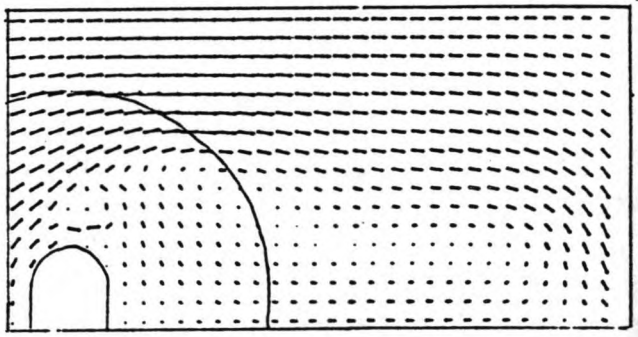
a) vaste benedenwaterstand



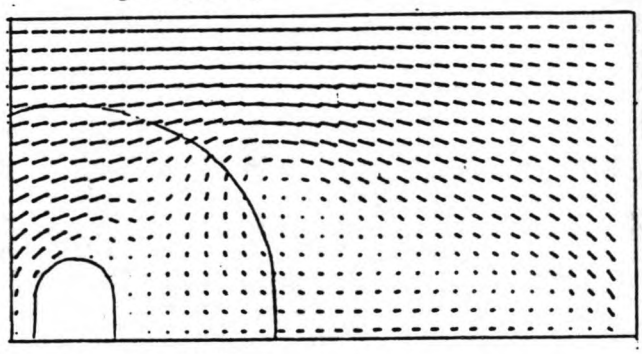
t = 200 s



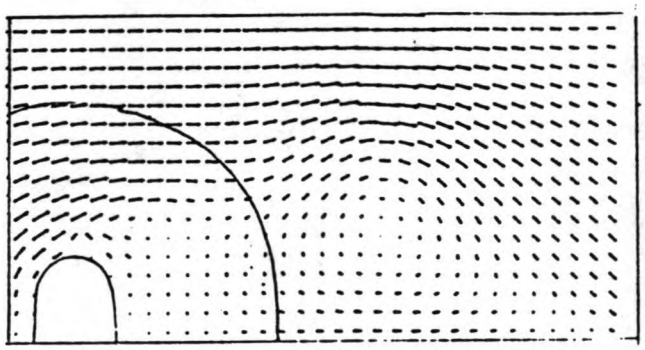
t = 210 s



t = 220 s



t = 230 s



t = 240 s

b) zwak-reflecterende benedenrand

Fig. B-9 Invloed van de benedenrandvoorwaarde op het stromingspatroon

In fig. B-9 zijn voor beide berekeningen enkele snelheidsvelden weergegeven.
Het type randvoorwaarde blijkt de stroming in de buurt van de rand te beïnvloeden.
Bij een zwak-reflecterende rand buigt de stroming voor de rand af, hetgeen leidt tot een positieve uitstroming (zie fig. B-9 en bijlage B.3).
Bij een vaste benedenwaterstand ontstaat een heel ander uitstromingspatroon. Nu zijn wel negatieve snelheden mogelijk: een neer kan de benedenrand passeren (fig. B-9-a). Hierdoor kan een oneindig groot gebied gesimuleerd worden met een klein rekengebied.
Overigens vertonen de snelheidsvelden van beide berekeningen grote overeenkomsten. Ook bij een vaste benedenwaterstand zijn de kruinsnelheden zeer onregelmatig, treedt een sterke retourstroming op en ontwikkelt zich een wervelstraat.
De benedenrandvoorwaarde beïnvloedt het stromingspatroon in het damvak blijkbaar niet.

De optredende staande golf maakt toepassing van een vaste benedenwaterstand alleen mogelijk als aan de bovenstroomse rand een goed werkende zwak-reflecterende randvoorwaarde kan worden toegepast.

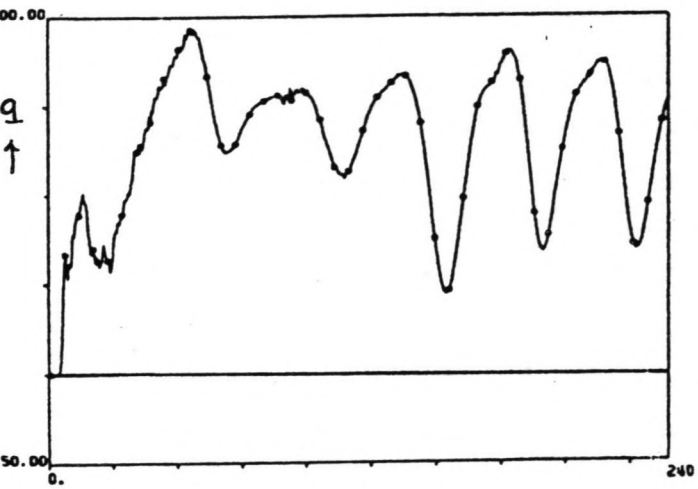
B.5. Invloed Modelafmetingen

De invloed van de ligging van de benedenrand op het verloop van de oplossing wordt nu onderzocht.
Het model wordt 2.55 m verlengd. De afstand dam - benedenrand wordt zo verdubbeld. De totale modellengte bedraagt nu 11.10 m. Het aantal rekenpunten is 1350. De benedenrand is zwak-reflecterend.

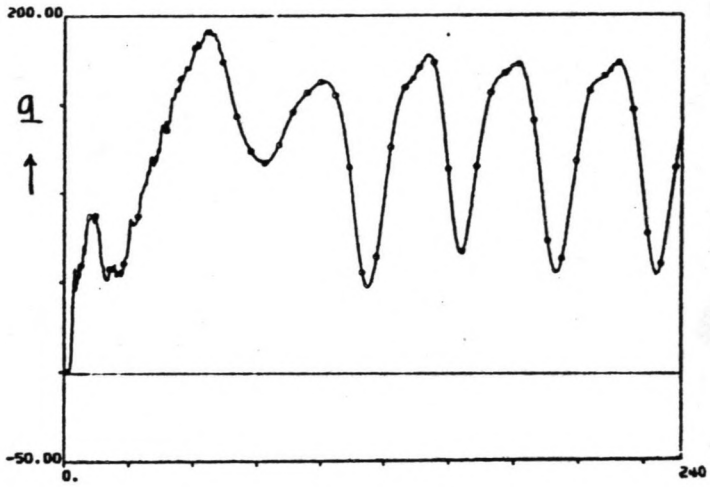
Fig. B-10 toont de resultaten van deze berekening en die van de oorspronkelijke berekening.
Als we deze resultaten vergelijken dan blijken de oplossingen vrijwel identiek te verlopen. Ook nu is een periodieke oplossing het resultaat, met een periode T = 39 s.
De controlepunten 2 en 6 liggen in het damvak: blijkbaar heeft de plaats van de benedenrand geen invloed op de damvakstroming.

In fig. B-11 treffen we weer het karakteristieke beeld aan: een neer wordt nabij de kruin gevormd en verplaatst zich richting benedenrand. Doordat het model benedenstrooms is verlengd, zijn in fig. B-11 twee neren te onderscheiden.
De frekwentie van de neer lijkt onafhankelijk van de modellengte terwijl de baan die het centrum van de neer aflegt wel verandert. In het verlengde model is die baan min of meer recht, in het oorspronkelijke model buigt deze af voor de rand (zie fig. B-13).

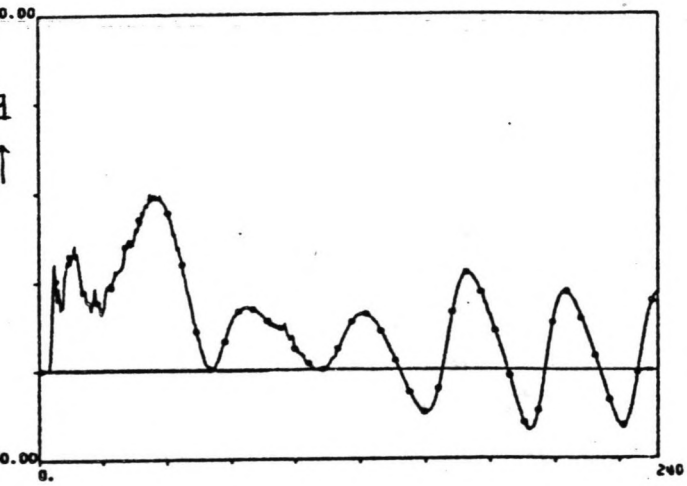
Vergelijking van fig. B-11 en B-12 toont aan dat de stroming in de buurt van de dam niet is veranderd als gevolg van de verplaatste benedenrand (met uitzondering van de kruinsnelheden in het ondiepste deel van het sluitgat).



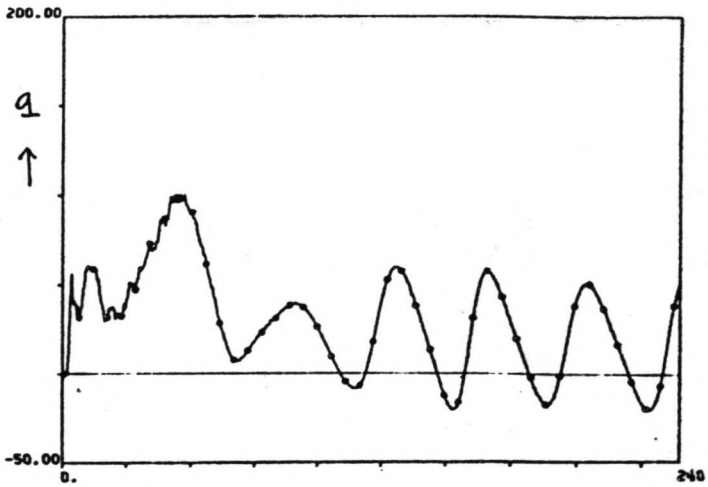
Station 2



Station 2



Station 6



Station 6

a) Verlengd model

b) Oorspronkelijk model

Fig. B-10. q-verloop voor verschillende modelafmetingen
(q in 10^{-4} m^2/s)

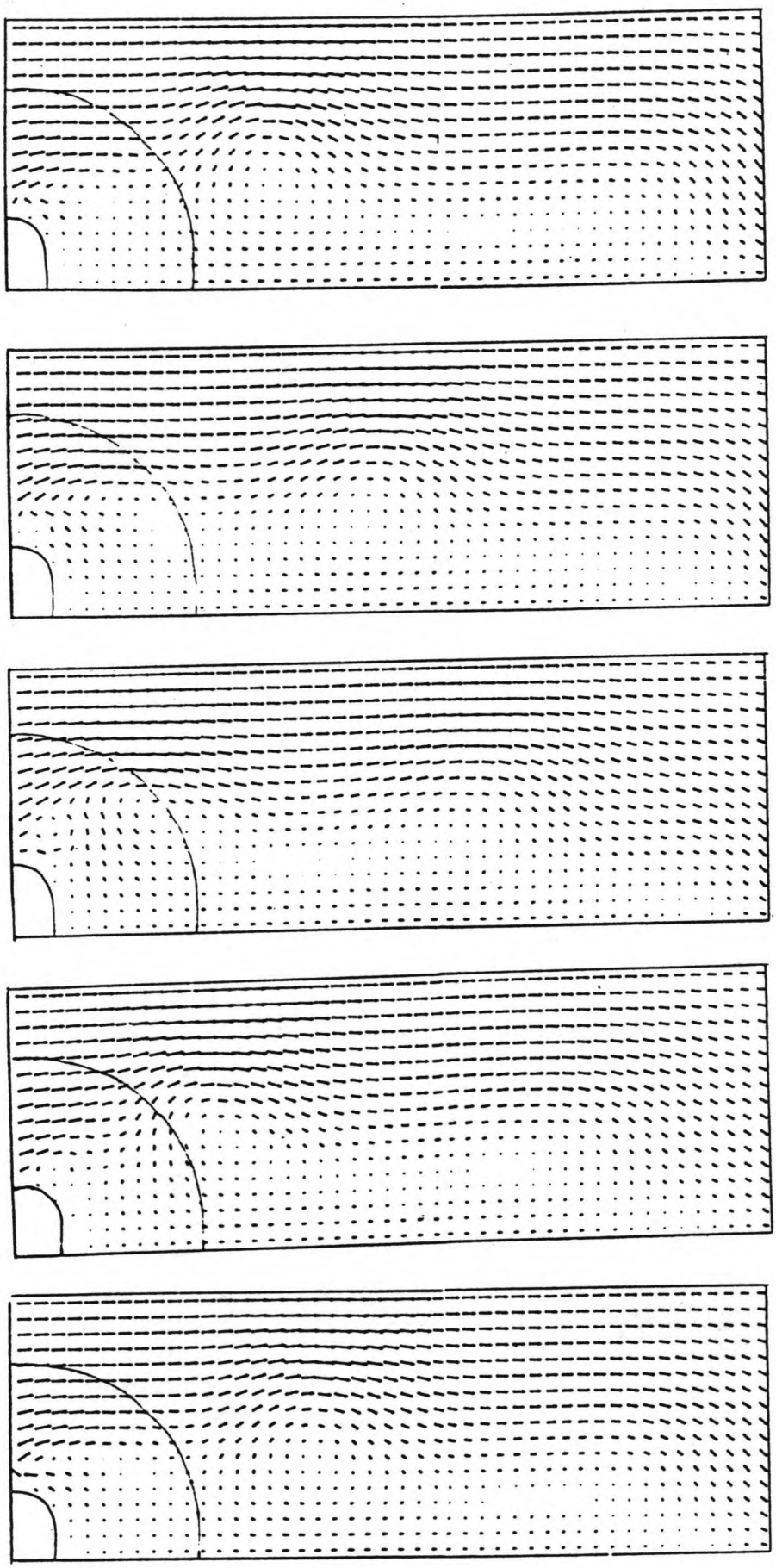
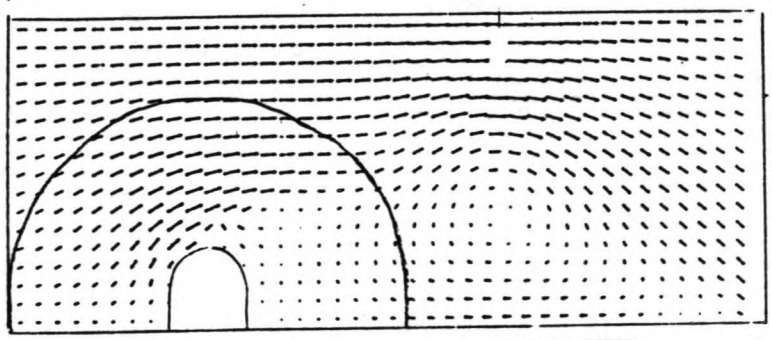


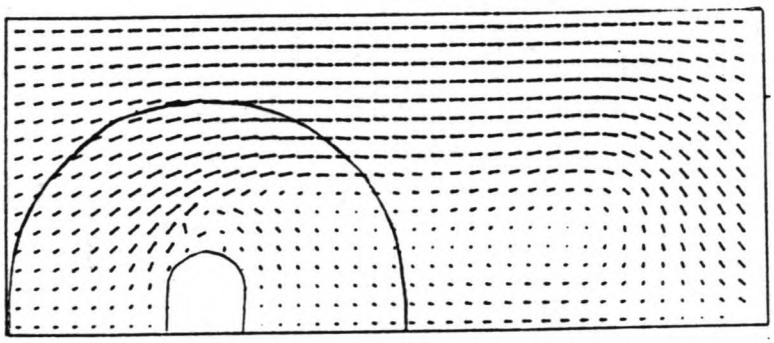
Fig. B-11 Verlengd model (⟼ 0.4 m/s)

$\Delta t = 1/4$ s

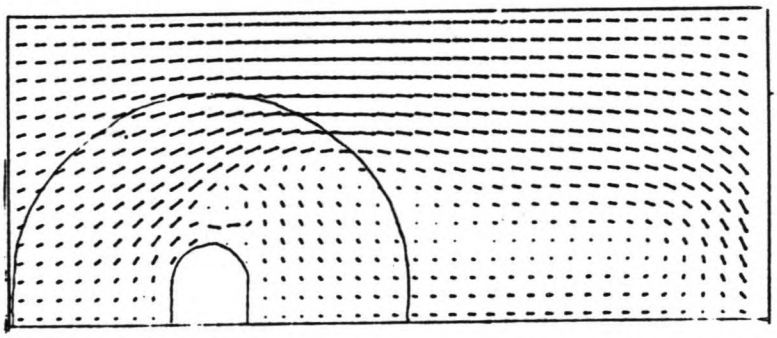
Benedenrand zwak-reflecterend



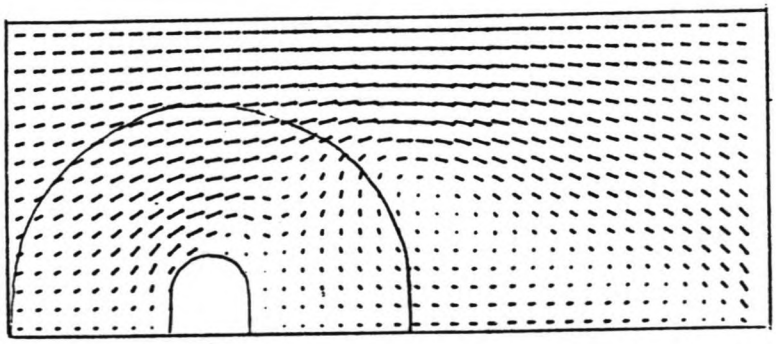
t = 200 s



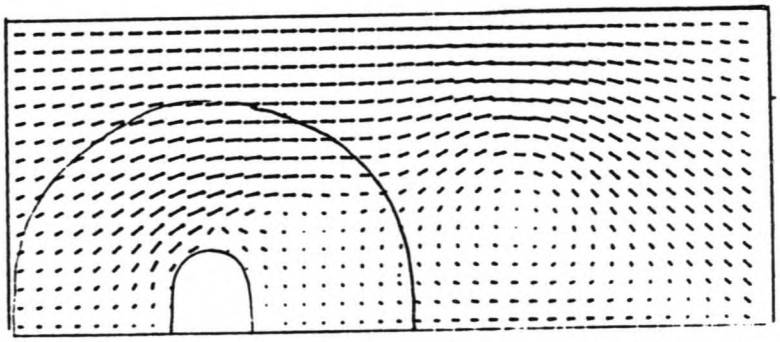
t = 210 s



t = 220 s



t = 230 s

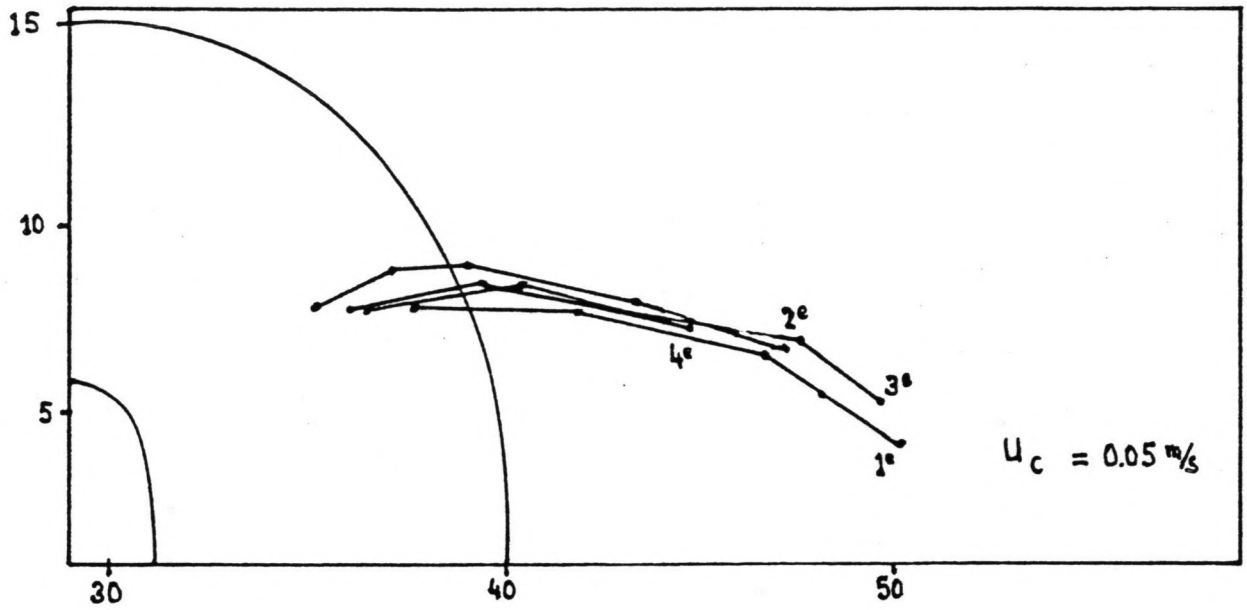


t = 240 s

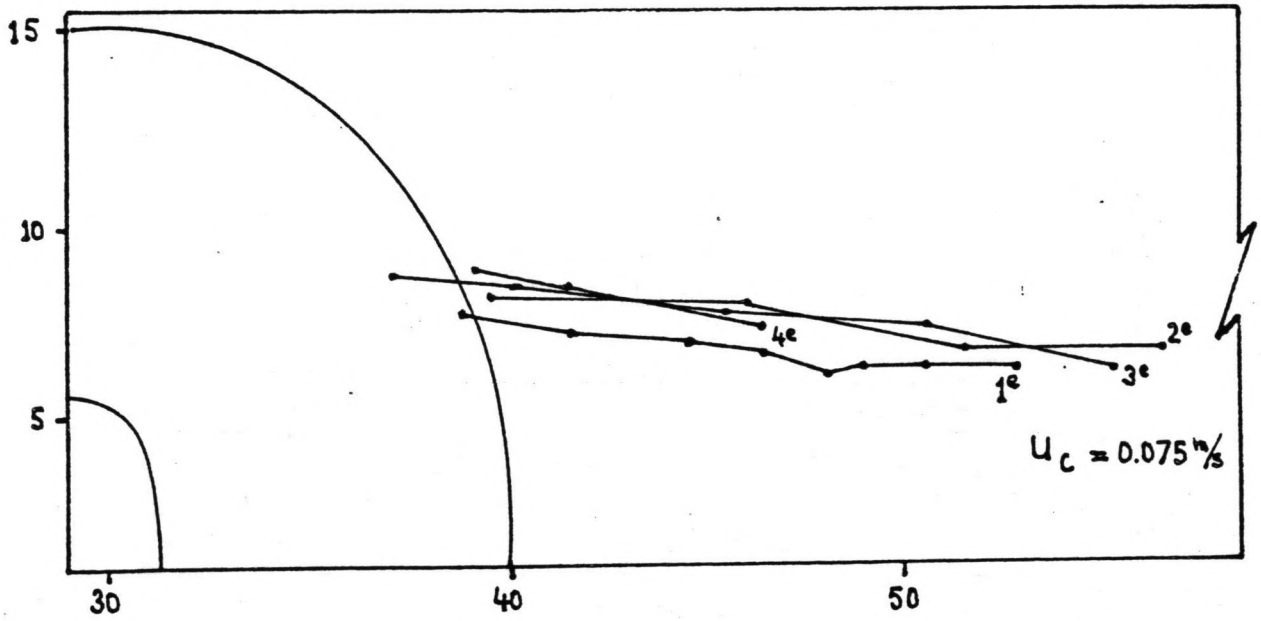
Fig. B-12 Oorspronkelijk model (⟷ 0.4 m/s)

Δt = 1/4 s

Benedenrand zwak-reflecterend



Oorspronkelijk model



Verlengd model

Fig. B-13. Baan van het centrum van de neren

Als een zwak-reflecterende randvoorwaarde wordt toegepast, en er geen staande golf optreedt, bestaat er blijkbaar geen relatie meer

tussen de eigen frekwentie van het model en de loslaatfrekwentie van de wervels. Deze frekwentie lijkt onafhankelijk van de modellengte.

In de volgende bijlagen wordt nagegaan of het periodieke karakter mogelijk een fysische achtergrond heeft.

B.6. Reynolds Afhankelijke Loslaatfrekwentie

Het is bekend dat bij stationaire aanstroming van een obstakel een wervelstraat kan ontstaan die o.a. gekarakteriseerd kan worden met een loslaatfrekwentie.

Beschouw in het algemeen een stroming rond een obstakel (bijvoorbeeld een cylinder).
Bij een dergelijke stroming rond een lichaam vindt voortdurend versnelling en vertraging van de vloeistof plaats. Op een niet altijd te voorspellen plaats kan dan loslating optreden. In dit loslaatpunt ontstaan wervels die zich vervolgens met een zekere snelheid verwijderen. Men spreekt dan van zog-vorming achter het obstakel (E. Naudascher, 1981).

De frekwenties die door een stationaire stroming worden veroorzaakt blijken evenredig te zijn met de aanstroomsnelheid (U) en omgekeerd evenredig met de karakteristieke afmeting van het obstakel (D).

$$f \propto \frac{U}{D} \qquad \text{(B-8)}$$

De evenredigheidsconstante is het zogeheten Strouhal getal (Sh), eigenlijk een dimensieloze uitdrukking voor de overheersende frekwentie.

$$Sh = f \cdot \frac{D}{U} \qquad \text{(B-9)}$$

Ook krachten die door de stroming op het lichaam werken vertonen dezelfde frekwentie.

Voor enkele obstakels is in fig. B-14 het Strouhal getal uitgezet tegen het Reynolds getal, waarin viscositeitseffecten van de vloeistof kunnen worden uitgedrukt.

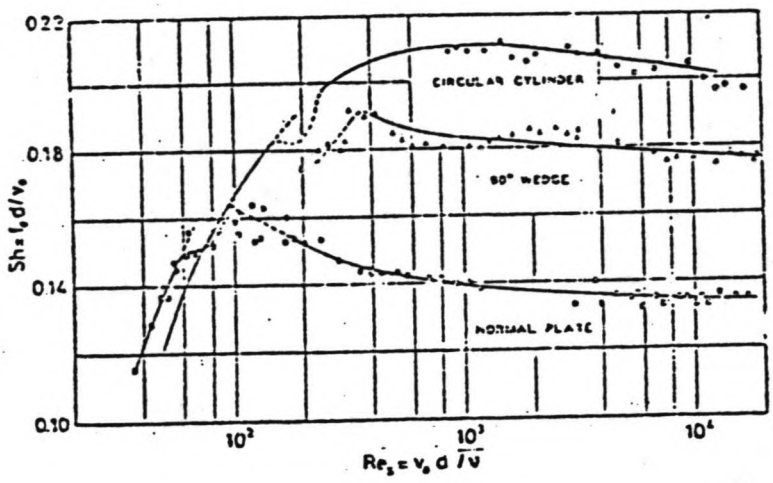


Fig. B-14 Strouhal getal als functie van Reynolds
(E. Naudascher, 1981)

Afhankelijk van het Reynolds getal van de stroming en het obstakeltype geldt voor het Strouhal getal:

$$Sh = 0.12 \text{ à } 0.21 \qquad \text{(B-10)}$$

Met fig. B-14 kunnen de DUCHESS resultaten getoetst worden aan de theorie om te zien of daarmee de waargenomen loslaatfrekwentie kan worden verklaard.

In verband met het flauwe talud van de dam (1:10) is de effectieve obstakelafmeting moeilijk vast te stellen. Wel kan gesteld worden: D is minimaal 2 x 0.75 = 1.50m (rekening houdend met de half-symmetrische aanstroming).
De aanstroomsnelheid bedraagt 0.072 m/s en de ingevoerde viscositeit $\varepsilon = 12.10^{-4}$ m^2/s.

Dan volgt voor het Reynolds getal: Re ~ 80 en voor het Strouhal getal (m.b.v. fig. B-14) Sh ~ 0.16.

Voor de loslaatfrekwentie f geldt:

$$f = Sh.\frac{U}{D} = 0.16 \cdot \frac{0.072}{1.50} \sim 8.10^{-3} \ (1/s)$$

Dit betekent een periode T ~ 125s: veel groter dan de waargenomen T ~ 40s.

Het is nog mogelijk dat de werkelijke viscositeit in de DUCHESS-berekening kleiner is dan 12.10^{-4} m^2/s (negatieve numerieke viscositeit).
Uit fig. B-14 blijkt dat een groter Reynolds getal aanleiding kan geven tot een groter Strouhal getal. Toepassing van het maximale Strouhal getal Sh = 0.21 leidt echter toch nog tot een loslaat-periode T = 100s.

Samenvattend lijkt het er niet op dat de waargenomen wervels een "zog-achtig" karakter hebben.

Een andere oorzaak van het ontstaan van een wervelstraat is mogelijk instabiliteit van het menggebied. Deze mogelijkheid wordt in bijlage B.7 nagegaan.

B.7. Instabiel Menggebied

Bij een turbulente stroming boven een bepaald kritiek Reynoldsgetal groeien kleine verstoringen in het menggebied aan tot wervels. Door dit "oprollen" van het menggebied ontstaat een onregelmatig wervelpatroon.
De aanwezigheid van vaste begrenzingen benedenstrooms van een obstakel verschaft de stroming een terugkoppelingsmechanisme dat nieuwe verstoringen kan beïnvloeden.
Een bepaalde frekwentie kan selectief worden versterkt zodat een regelmatig - in plaats van wanordelijk oscillerend stromingspatroon onstaat.

Hoewel in het sluitgatmodel vrije uitstroming plaats vindt, is al eerder opgemerkt dat de zwak-reflecterende randvoorwaarde bij DUCHESS geen neerpassage toestaat. Met betrekking tot de neerstroming lijkt de benedenrand wel als vaste wand of -begrenzing te functioneren (zie bijvoorbeeld fig. B-6, B-9 en B-11).

De verstoringen worden teruggezonden met een snelheid die veel groter is dan de gemiddelde convectiesnelheid van de neer (E. Naudascher, 1981).
Terugkoppeling met een faseverschil van 1/4 periode zal versterking van de bijbehorende frekwentie tot gevolg hebben. Andere frekwenties worden zo uitgefilterd.
Na verloop van tijd zal de stroming in een veel smallere frekwentieband oscilleren: een frekwentie die bepaald wordt door de benedenstroomse geometrie.

De frekwentie die zo optreedt is als volgt uit te drukken (E. Naudascher, 1981 en S. Ethembabaoglu, 1973):

$$f = \frac{u_c}{\lambda} \qquad \text{(B-11)}$$

u_c : gemiddelde voortplantingssnelheid van de wervels

λ : golflengte van de sinusvormige verstoringen

L : afstand oorsprong - rand

$$L = (n + 1/4)\lambda \qquad \text{(B-12)}$$

n : 0, 1, 2 ...

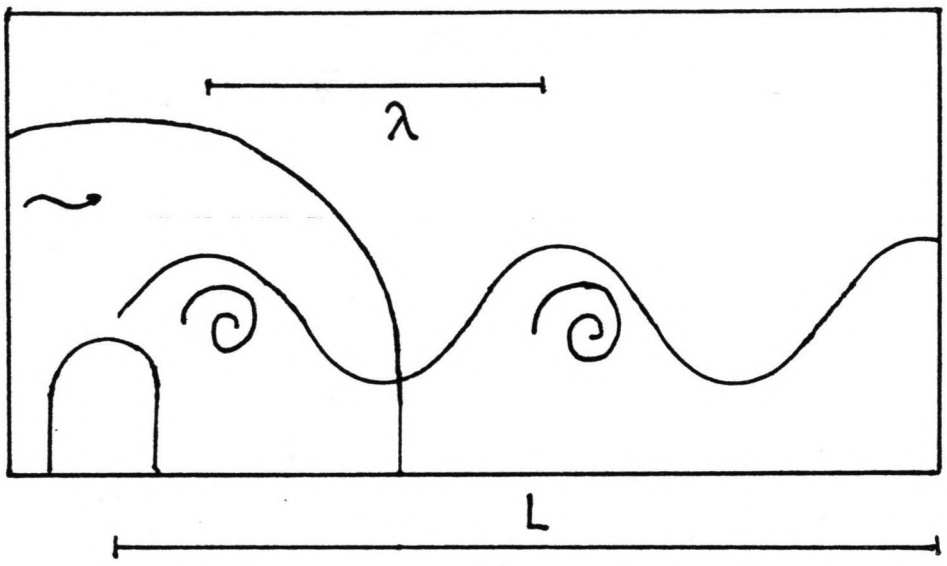


Fig. B-15 Definitie λ en L (n=2)

Uit (B-11) en (B-12) volgt:

$$f = (n + 1/4)\,\frac{u_c}{L} \qquad \text{(B-13)}$$

$$T = \frac{1}{n + 1/4} \cdot \frac{L}{u_c} \qquad \text{(B-14)}$$

u_c, de convectiesnelheid van de wervels, wordt bepaald door stromingsparameters en geometrie (de relatieve golflengte λ/L en het snelheidsprofiel van de aanstroming).

u_c is te bepalen uit de snelheidsvelden, door de verplaatsing van het centrum van de wervels op te tekenen (zie fig. B-13). Dan volgt voor het

oorspronkelijk model : u_c = 0.05 m/s L = 4.20 m

verlengd model : u_c = 0.075 m/s L = 6.75 m

Invullen van n=2 in (B-14) blijkt voor het oorspronkelijke model T ~ 37s op te leveren en voor het verlengde model T ~ 40s.
De bij n=2 behorende golflengten zijn respectievelijk λ = 1.90 m en 3.00 m. De laatste golflengte is te controleren in fig. B-11 en blijkt overeen te stemmen met de h.o.h.-afstand tussen beide neren (± 20 roosterpunten).

Met deze theorie lijkt de waargenomen periodiciteit (T ~ 39s) te verklaren.
Op grond van het geringe aantal berekeningen dient echter nog het nodige voorbehoud in acht genomen te worden en kan hieromtrent eigenlijk geen harde uitspraak gedaan worden.
Zo blijft bijvoorbeeld nog de vraag waarom niet de basisfrekwentie n=0 optreedt (de hierbij behorende trillingstijden zijn dan 336s en 360s). De oorzaak zou gelegen kunnen zijn in het feit dat het opwekken van hogere harmonischen minder energie kost.