Frijters 1993

Lengte-effecten

een studie naar het lengte-effect
bij dijken voor het mechanisme overlopen

Lengte-effecten

een studie naar het lengte-effect
bij dijken voor het mechanisme overlopen

Voorwoord

Dit is het afstudeerrapport gemaakt voor mijn afstuderen bij de vakgroep waterbouwkunde van de faculteit der civiele techniek in de periode die loopt van half november 1992 tot en met half juni 1993. Ik wil mijn begeleiders, de heren Meermans, Volker en Vrijling hartelijk danken voor hun inspirerende begeleiding gedurende deze periode. Verder wil ik de Dienst Weg- en Waterbouwkunde Delft bedanken voor de geboden faciliteiten.

Martijn Frijters
Delft, 18-06-93

Inhoudsopgave

Lijst van figuren v

Lijst van tabellen vi

Samenvatting vii

1 **Inleiding** 1

2 **Literatuur op het gebied van lengte-effecten** 5
2.1 inleiding 5
2.2 de economische optimalisatie van dijkringen 5
2.3 discrete modellen 8
2.3.1 inleiding 8
2.3.2 een discreet seriesysteem met correlatie 8
2.3.3 een exacte oplossing 12
2.4 een continu model 13
2.5 het programma Dijkring 14
2.5.1 inleiding 14
2.5.2 de berekening van de dijktafelhoogte in verband met waterstand en golven . . 15
2.5.3 de berekening van de kans op overbelasting 16

3 **Een statistisch model voor de hoogte van een dijk** 18
3.1 inleiding 18
3.2 correlatie 18
3.3 ensemble en tijd of lengte 19
3.4 stationaire processen 19
3.5 ergodische eigenschap 20
3.6 normaal verdeelde processen 23
3.7 controle van het model 24
3.7.1 inleiding 24
3.7.2 semi-variogram analyse 24
3.7.3 resultaten van het onderzoek van Grondmechanica Delft 25
3.7.4 vergelijking van het semi-variogram met het statistische model voor de kruinhoogte 26
3.7.5 periodiciteit in het proces 27

4 **Lengte-effect in de sterkte** 30
4.1 inleiding 30
4.2 classificering van de staarten van een verdeling 30
4.3 de staarten van een kansdichtheidsfunctie 32

4.4 de kansdichtheidsfunctie voor de belasting 33
4.5 de kansdichtheidsfunctie voor de sterkte 34
4.6 de convolutieintegraal voor de verschillende verdelingen voor de sterkte 35
4.7 resultaten 37
4.8 meerdere trekkingen 39
4.9 conclusies 43

5 **Lengte-effect in de belasting** 45
5.1 inleiding 45
5.2 overlopen 45
5.3 golfoverslag en faalkansvergroting ten gevolge van het windrichtingseffect . . 46
5.4 berekening golfoverslag overgangsgebied 47
5.5 berekeningen gemaakt met het programma Dijkring 49
5.5.1 inleiding 49
5.5.2 gegevens 49
5.5.3 berekeningen 50
5.5.4 bestaande situatie aan de Waal 53
5.6 conclusies 55

6 **Conclusies en aanbevelingen** 56

Literatuurlijst

Appendix 1: correlatie

Lijst van figuren

1	figuur 1.1	dijkringen in Nederland	1
	figuur 1.2	faalmechanismen	2
	figuur 1.3	foutenboom	2
2	figuur 2.1	bedreiging van een polder door twee takken van dezelfde rivier	5
	figuur 2.2	bedreiging van een polder door twee rivieren	6
	figuur 2.3	onder- en bovengrenzen en de Ditlevsengrenzen van de faalkans van de dijk als functie van de lengte	10
	figuur 2.4	verloop van de Ditlevsengrenzen van de faalkans als functie van de dijkvaklengte	10
	figuur 2.5	de faalkans van de dijk als functie van de lengte voor de Ditlevsengrenzen	11
	figuur 2.6	sterkte en belasting voor een zeedijk	11
	figuur 2.7	sterkte en belasting voor een PAC	12
	figuur 2.8	niveaudoorgangenprobleem	14
	figuur 3.1	ensemble, lengte of tijd en amplitude	19
	figuur 3.2	amplitude van een Poissonproces met kansdichtheidsfunctie	21
	figuur 3.3	correlatiefunctie en de grafische bepaling van de correlatielengte	22
	figuur 3.4	het verloop van de voorwaardelijke variantie als functie van λ	24
	figuur 3.5	bepaling van het invloedsbereik door de raaklijn aan het variogram	25
	figuur 3.6	hoogtemeting	26
	figuur 3.7	histogram en normal probability plot	27
	figuur 3.8	semi-variogram	28
	figuur 3.9	correlatiecoëfficiënt bestaande uit een periodieke en een niet periodieke component	29
	figuur 3.10	de voorwaardelijke variantie als functie van λ	29
4	figuur 4.1	belasting exponentieel verdeeld	33
	figuur 4.2	sterkte normaal verdeeld	34
	figuur 4.3	normale verdeling en tweezijdig afgekapte normale verdeling met hetzelfde gemiddelde en standaardafwijking	34
	figuur 4.4	normale verdeling en $\cos^2$ verdeling met hetzelfde gemiddelde en standaardafwijking	35
	figuur 4.5	normale verdeling en uniforme verdeling met hetzelfde gemiddelde en standaardafwijking	35
	figuur 4.6	normale verdeling en exponentiële verdeling met hetzelfde gemiddelde en standaardafwijking	36
	figuur 4.7	twee vormen van de autocorrelatiefunctie	37
	figuur 4.8	schematisatie van de autocorrelatiefunctie	37
	figuur 4.9	schematisatie van de autocorrelatiefunctie van de sterkte en de belasting voor meerdere trekkingen	39
	figuur 4.10	opschuiven van de normale verdeling voor een extreme waarde verdeling voor minima	40
	figuur 4.11	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een uniforme verdeling voor verschillende σ	41
	figuur 4.12	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een normale verdeling voor verschillende σ	41
	figuur 4.13	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een tweezijdig afgekapte verdeling voor verschillende σ	42
	figuur 4.14	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een $\cos^2$ verdeling voor verschillende σ	42

	figuur 4.15	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een exponentiële verdeling voor verschillende σ	43
5	figuur 5.1	falen door overlopen door één bedreiging	45
	figuur 5.2	faaldomein van een dijkring met twee onafhankelijke bedreigingen	45
	figuur 5.3	dijkring in het overgangsgebied	46
	figuur 5.4	bij een meer of een dijkring met rondom water kunnen circa 8 onafhankelijke bedreigingen worden onderscheiden: $P(F) \approx 8*p$	46
	figuur 5.5	systeem van waterkeringen belast door zee, rivier en golfaanval	47
	figuur 5.6	schematisering van tijdsfluctuaties	48
	figuur 5.7	faalcontouren voor noorderwind voor het zee-regime. Voor andere richtingen dan noord is het vlak verticaal	48
	figuur 5.8	faalcontouren voor noorderwind voor het overgangs-regime. Voor andere richtingen dan noord is het vlak verticaal	48
	figuur 5.9	faalcontouren voor noorderwind voor het rivier-regime. Voor andere richtingen dan noord is het vlak verticaal	48
	figuur 5.10	faalcontour van het systeem voor windrichting noord	49
App.	figuur A.1	dichtheid van de tweedimensionale verdeling; oorsprong in (μ_1, μ_2)	
	figuur A.2	lijnen van gelijke dichtheid; oorsprong in (μ_1, μ_2)	
	figuur A.3	vormen van de contourellipsen voor enkele combinaties van ρ, σ_1 en σ_2	
	figuur A.4	de regressielijnen en een contourellips	

Lijst van tabellen

4	tabel 4.1	classificatie van de staarten van verdelingen	32
	tabel 4.2	faalkansen voor de verschillende verdelingen	38
	tabel 4.3	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een uniforme verdeling voor verschillende σ	41
	tabel 4.4	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een normale verdeling voor verschillende σ	41
	tabel 4.5	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een tweezijdig afgekapte verdeling voor verschillende σ	42
	tabel 4.6	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een $\cos^2$ verdeling voor verschillende σ	42
	tabel 4.7	faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een exponentiële verdeling voor verschillende σ	42
5	tabel 5.1	berekening 3 met een kans op overbelasting van $8.873*10^{-5}$	51
	tabel 5.2	berekening 4	51
	tabel 5.3	berekening 7	52
	tabel 5.4	berekening 9	53
	tabel 5.5	kruinhoogte en kans op overbelasting voor de grof geschematiseerde situatie	54
	tabel 5.6	kruinhoogte en kans op overbelasting voor de nauwkeurig geschematiseerde situatie	54

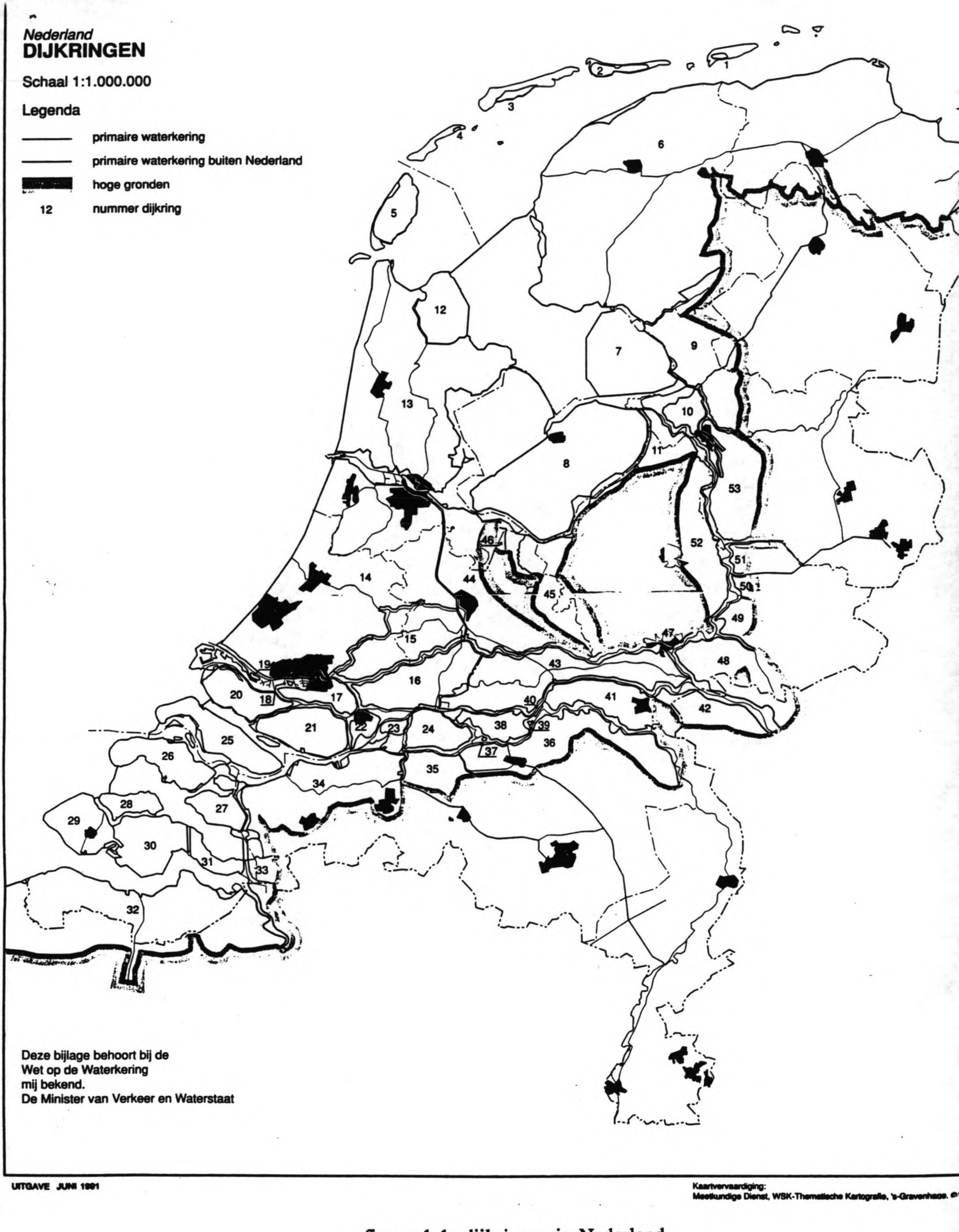
Samenvatting

Het onderwerp van dit rapport is een onderzoek naar het lengte-effect bij dijken voor het mechanisme overlopen. Het lengte-effect houdt in dat de faalkans van een ringdijk groter is dan faalkans van het dijkvak met de maximale faalkans, omdat belasting en sterkte langs de waterkering kunnen variëren waardoor de belasting als het ware vaker de gelegenheid heeft de sterkte te overtreffen. Het lengte-effect zoals hierboven beschreven kan zowel aan de belastingzijde als aan de sterktezijde optreden.

In hoofdstuk 3 is een statistisch model voor de hoogte van een dijk opgezet. Dit statistische model gaat ervan uit dat de dijkhoogte beschreven kan worden door een ergodisch proces. Dit houdt in dat de samenhang tussen twee punten kleiner wordt naarmate de daartussen liggende afstand groter wordt, zodat zij op een grote afstand volkomen onafhankelijk van elkaar worden. Met behulp van een door Grondmechanica Delft uitgevoerde analyse van metingen van Westerschelde dijkskruinen is dit model gecontroleerd. Het blijkt dat de kruinhoogte voor wat betreft zettingen en onnauwkeurigheden in aanleg, beschreven kan worden door een ergodisch proces. Dit gaf aanleiding om (in hoofdstuk 4) een dijk te beschouwen als een reeks van onafhankelijke trekkingen uit de kansdichtheidsfunctie van de sterkte. Omdat de verdeling van de kruinhoogte onbekend is, zijn meerdere verdelingen met elkaar vergeleken, en dan voornamelijk in het gebied van de staarten van de verdelingen. Fysisch lijkt het aannemelijk dat de staart van de verdeling voldoet aan de classificatie gemiddeld-kort, volgens de classificatie van de staarten van verdelingen door Schuster. De normale verdeling en de $\cos^2$-verdeling voldoen bijvoorbeeld aan deze classificatie.

De standaardafwijking van de sterkte blijkt een grote invloed te kunnen hebben op het lengte-effect. Bij kleine standaardafwijkingen zoals gemeten op de genoemde Westerschelde dijken is het lengte-effect aan de sterktezijde voor verdelingen met een gemiddeld-korte staart klein. Verder blijkt ook de correlatielengte invloed te hebben op het lengte-effect.

Het lengte-effect aan de belastingzijde is in hoofdstuk 5 onderzocht. Uit een studie van Vrouwenvelder (1988) blijkt dat het windrichtingseffect een lengte-effect van een factor tien kan veroorzaken. Het programma Dijkring blijkt dit lengte-effect bijna volledig mee te nemen onder de voorwaarde dat zorgvuldig geschematiseerd wordt en goed naar de laagste kruinhoogten gekeken wordt.



figuur 1.1: dijkringen in Nederland

1 Inleiding

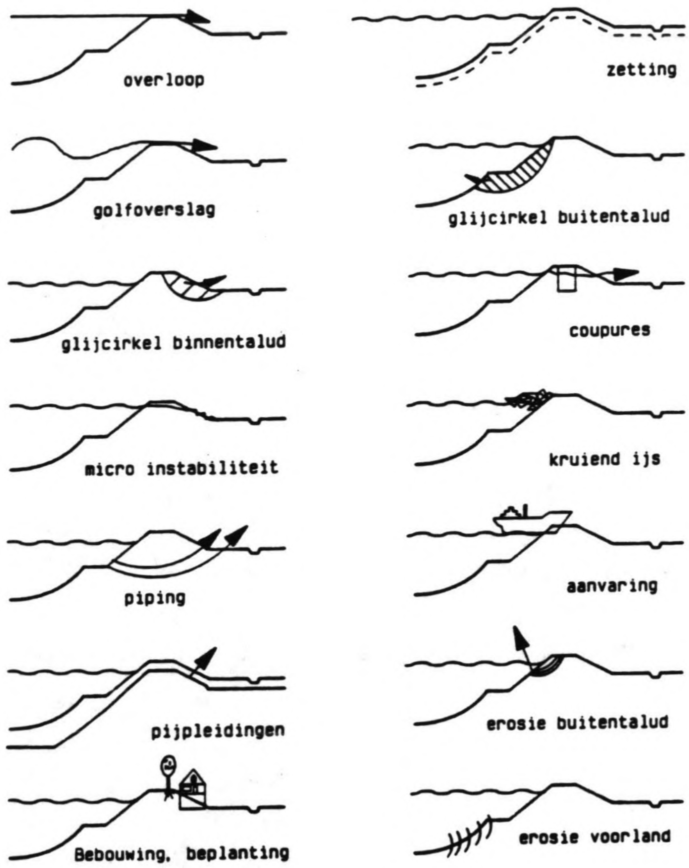
De landsdelen die door het buitenwater worden bedreigd, zijn in de conceptwet op de Waterkering opgedeeld in 53 gebieden, dijkringen genaamd (zie figuur 1.1). Onder een dijkring wordt verstaan:

"een gebied dat door een stelsel van waterkeringen beveiligd moet zijn tegen overstroming, in het bijzonder bij hoge stormvloed, bij hoog oppervlaktewater van één van de grote rivieren, bij hoogwater van het IJsselmeer, of een combinatie daarvan" (literatuur 5).

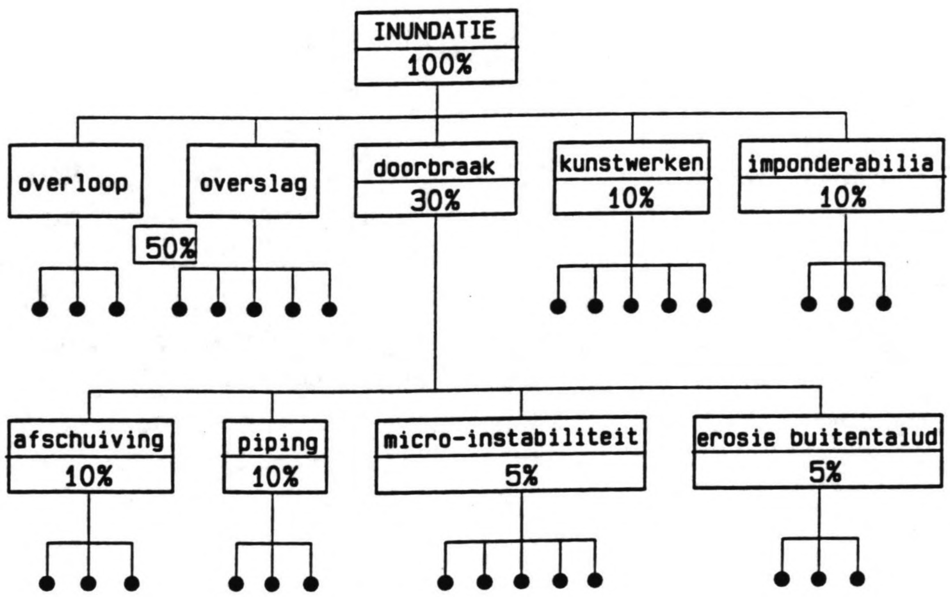
Het gevaar van overstroming kan van meerdere kanten komen en daarom is een gesloten verdedigingssysteem nodig: een ringdijk. Het stelsel van waterkeringen waaruit een ringdijk bestaat is een aaneenschakeling van dijken (zee-, rivier- en meerdijken), grondkerende constructies (boulevards of kademuren), duinen, kunstwerken (spuisluizen, schutsluizen, etc.) en hoge gronden. De aaneenschakeling maakt de ringdijk tot een seriesysteem, wat wil zeggen dat het falen van één onderdeel leidt tot falen van het gehele seriesysteem. Voor een dijkring betekent dit dat de ringdijk als regel zwakker is dan de zwakste schakel; de doorbraak van een dijkvak of het falen van een sluis is voldoende om een overstroming te veroorzaken.

Omdat een dijk faalt zodra voor tenminste één dijkvak de belasting de sterkte overtreft, neemt de kans op falen toe naarmate de dijk langer is (behalve in het geval van volledige afhankelijkheid van de dijkvakken). Dit wordt het lengte-effect genoemd. Het lengte-effect betekent dat de faalkans van een dijkring groter is dan de faalkans van het dijkvak met de maximale faalkans, omdat sterkte en belasting langs de waterkering kunnen variëren, waardoor de belasting als het ware vaker de gelegenheid heeft de sterkte te overtreffen. Omdat de sterkte en de belasting onafhankelijk van elkaar zijn (bij het mechanisme afschuiven is voorzichtigheid gepast) kunnen het lengte-effect in de sterkte en het lengte-effect in de belasting onafhankelijk van elkaar beschouwd worden.

In deze alinea wordt één mechanisme beschouwd en er wordt vanuitgegaan dat voor een dijktracé de belasting en de sterkte ieder door één parameter vastgelegd worden. Een dijktracé wordt vanuit de van nature aanwezige situatie opgedeeld in dijkvakken. Voor een dijkvak geldt dan dat dit een gedeelte van de dijk is met uniforme eigenschappen en omstandigheden. Over de lengte van de dijk zijn de oriëntatie, dwarsdoorsnede en voorland constant. Na deze opdeling rest de vraag of een dergelijk dijkvak wel als één dijkvak mag worden beschouwd, met andere woorden, dient een dijkvak weer verder opgedeeld te worden om de sterkte op de juiste manier weer te kunnen geven? Dit zal onderzocht worden door een dijkvak onder te verdelen in segmenten. Als een dijkvak wordt opgedeeld in veel korte segmenten dan zullen de parameters van ieder dijksegment een grote onderlinge afhankelijkheid in de sterkte en de belasting vertonen. Door de opdeling in kleine elementen is het mogelijk om nauwkeurig te werk te gaan. Dit vraagt echter veel gegevens en veel rekenwerk. Hetzelfde dijkvak kan worden onderverdeeld in lange segmenten door een aantal kleine segmenten samen te nemen. Voor de sterkte van een lang dijksegment kan de sterkte van één van de korte segmenten als maatgevend



figuur 1.2: faalmechanismen



figuur 1.3: foutenboom

worden beschouwd. Hoeveel de nauwkeurigheid hierbij afneemt is onbekend. Verder is het onbekend hoe door toepassing van een correctie op de sterkte, dit verlies aan nauwkeurigheid optimaal kan worden tegengegaan.

Het bovenstaande geldt voor één mechanisme. Omdat er bij ieder mechanisme een andere lengte hoort waarbij door variatie van belasting en sterkte de situatie noopt tot opsplitsen in dijkvakken, kan voor ieder mechanisme een andere optimale lengte bepaald worden. De correctie, en daarmee de modellering van het lengte-effect, kan dus per mechanisme bepaald worden, en zoals zal blijken is dit ook gewenst.

Omdat een waterkering meerdere faalmechanismen kent, zal in de nu volgende paragrafen een samenvatting gegeven worden van de problemen die optreden bij het modelleren van dijkringen volgens de Appendices van de Leidraad Benedenrivieren (literatuur 6) en de Algemene leidraad voor het ontwerpen en toetsen van waterkeringen (literatuur 10). Voor de gebruikte begrippen wordt verwezen naar de opgenomen begrippenlijst.

Elke waterkering kent een aantal faalmechanismen (zie figuur 1.2). De gebeurtenis van falen van een stelsel van n waterkeringen met m faalmechanismen kan genoteerd worden als:

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} F_{ij} \qquad (1.1)$$

waarin: F_{ij}= de gebeurtenis dat element i faalt volgens mechanisme j

U= vereniging van gebeurtenissen: de gebeurtenis F treedt op als tenminste één van de gebeurtenissen F_{ij} optreedt.

Omdat er bij ieder mechanisme een andere lengte hoort waarbij nog afhankelijkheid optreedt, moet er voor ieder mechanisme een verschillend aantal elementen beschouwd worden. Het is dus doelmatiger om de volgorde in (1.1) om te keren: er wordt uitgegaan van m mechanismen en er wordt per mechanisme een aantal elementen onderscheiden. Hieruit volgt:

$$F = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} F_{ij} \qquad (1.2)$$

In figuur 1.3 is een elementaire foutenboom weergegeven voor het falen van een waterkeringsstelsel.

Wanneer voor de gezamenlijke mechanismen een bepaalde faalkans als aanvaardbaar maximum wordt genomen, dan kan een begroting opgesteld worden voor de verdeling van deze faalkans over de verschillende faaloorzaken en de verschillende elementen. Omdat de mechanismen en de elementen meestal niet volledig afhankelijk dan wel volledig onafhankelijk zijn, ontstaat er een ingewikkelde som. Deze kan benaderd worden door te veronderstellen dat alle faalmechanismen ongecorreleerd zijn. Met behulp van deze veronderstelling kan de faalkans berekend worden als de som van alle faalkansen. Op deze manier ontstaat een bovengrens. Alleen in het geval van duidelijke volledige afhankelijkheid wordt de ondergrens toegepast. Voor de verdeling van de totale faalkans over de mechanismen volgt:

$$P(F) = \sum_{j=1}^{m} P(\bigcup_{i=1}^{n} F_{ij}) \qquad (1.3)$$

Voor de verdeling van de faalkans over de verschillende elementen kan worden uitgegaan van deelverzamelingen van elementen. In deze deelverzamelingen worden de elementen dan als volledig gecorreleerd beschouwd. Voor elk van de deelverzamelingen wordt dan eerst de maximale kans bepaald, waarna gesommeerd wordt over de deelverzamelingen. Hieruit volgt:

$$P(F) = \sum_{j=1}^{m} [\sum_{r=1}^{n(j)} \max_{i \in K_{jr}} P(F_{ij})] \qquad (1.4)$$

waarin: K_{jr} = een deelverzameling met volledig gecorreleerde elementen voor mechanisme j.

Naast een probabilistisch probleem is de verdeling van de faalkans over de verschillende mechanismen ook een economisch probleem. Mechanismen waarvan de faalkans met relatief weinig kosten en verlies aan maatschappelijke waarden kan worden gereduceerd, kunnen zonder bezwaar op een lage streefwaarde worden gesteld, terwijl de dure onderdelen zo hoog mogelijk moeten worden begroot. Deze economische optimalisatie zal in § 2.2 uiteengezet worden.

Uit deze inleiding blijkt dat er bij de beschouwing van dijkringen een drietal met elkaar samenhangende problemen te onderscheiden zijn. Ten eerste is het aantal elementen dat per mechanisme moet worden onderscheiden onbekend. Ten tweede is er een probabilistisch probleem omdat de mate van afhankelijkheid tussen de mechanismen onbekend is en ten derde is het onduidelijk hoe de waterkeringselementen geconstrueerd moeten worden opdat er een economisch en/of maatschappelijk optimum gevonden wordt.

In dit rapport zal het eerste probleem onderzocht worden:

Het doel van dit rapport is het geven van een richtlijn voor het aantal waterkeringselementen dat in een dijkring moet worden onderscheiden. Het onderzoek zal zich beperken tot het bepalen van de optimale lengte van de dijkvakken voor het mechanisme overlopen.

In hoofdstuk 2 zal de literatuur op het gebied van lengte-effecten samengevat worden. Er wordt beschreven welke methoden er gebruikt zijn om het lengte-effect te modelleren en welke problemen daarbij optreden.

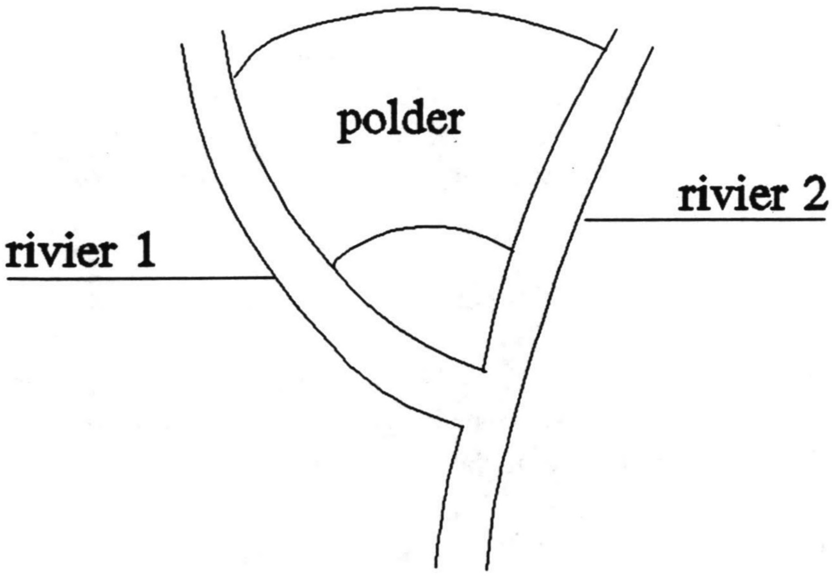
In hoofdstuk 3 zal een statistisch model voor de hoogte van een dijk opgezet worden. Dit model zal gecontroleerd worden aan de hand van een rapport van Grondmechanica Delft waarin gemeten hoogten van dijkskruinen worden geanalyseerd. In dit hoofdstuk zal veel gewerkt worden met het begrip correlatie en zal duidelijk worden wat het begrip correlatielengte inhoudt voor de hoogte van een dijk.

In hoofdstuk 4 zullen drie onderwerpen onderzocht worden. Ten eerste zullen de staarten van verdelingen onderzocht worden om te bepalen hoe belangrijk de vorm van de staart is. Ten tweede zal de gevoeligheid van de in hoofdstuk 3 gevonden correlatielengte op het lengte-effect onderzocht worden, door te werken met extreme waarde verdelingen voor minima. Tenslotte zal door bij deze berekeningen de standaardafwijking van de sterkte te variëren de gevoeligheid van deze parameter op het lengte-effect onderzocht worden.

In hoofdstuk 5 wordt eerst een samenvatting gegeven worden van literatuur met betrekking tot aan de belastingzijde optredend lengte-effect. Vervolgens wordt met behulp van het programma Dijkring het lengte-effect dat optreedt aan de belastingzijde onderzocht. Omdat Dijkring behalve overlopen ook overslag meeneemt in de berekeningen zal dit mechanisme ook betrokken worden in de beschouwingen.

In hoofdstuk 6 tenslotte worden de conclusies getrokken en de aanbevelingen gedaan.

Omdat in dit rapport veel gewerkt zal worden met het begrip correlatie is nog een appendix toegevoegd. In deze appendix zal uiteengezet worden hoe voor normale verdelingen met het begrip correlatie gerekend dient te worden en wat dit begrip voorstelt.



figuur 2.1: bedreiging van een polder door twee takken van dezelfde rivier

2 Literatuur op het gebied van lengte-effecten

2.1 Inleiding

Een ringdijk faalt zodra voor tenminste één dijkvak de belasting de sterkte overtreft. Dit houdt in dat naarmate een ringdijk langer is en daarmee meer kunstwerken en dijkvakken bezit, de kans op falen van een ringdijk toeneemt (behalve in het geval van volledige afhankelijkheid van de dijkvakken). Dit wordt het lengte-effect genoemd. Dit lengte-effect uit zich op de volgende manier: de faalkans van een dijkring is groter dan de faalkans van het dijkvak met de maximale faalkans, omdat sterkte en belasting langs de waterkering kunnen variëren, waardoor de belasting als het ware vaker de gelegenheid heeft de sterkte te overtreffen. Het lengte-effect kan zoals hierboven beschreven zowel aan de belastingzijde als aan de sterktezijde optreden.

In de volgende paragrafen zal de literatuur op het gebied van lengte-effecten besproken worden. In § 2.2 wordt er teruggekomen op de in hoofdstuk 1 genoemde economische optimalisatie. Vervolgens zullen in § 2.3 discrete modellen besproken worden. Deze modellering is uitgevoerd door de toenmalige TAW 10. In § 2.4 zal er een onderzoek uitgevoerd door Grondmechanica Delft naar een continu model met betrekking tot piping samengevat worden en in § 2.5 tenslotte, wordt het door de Dienst Weg en Waterbouw samengestelde programma Dijkring besproken.

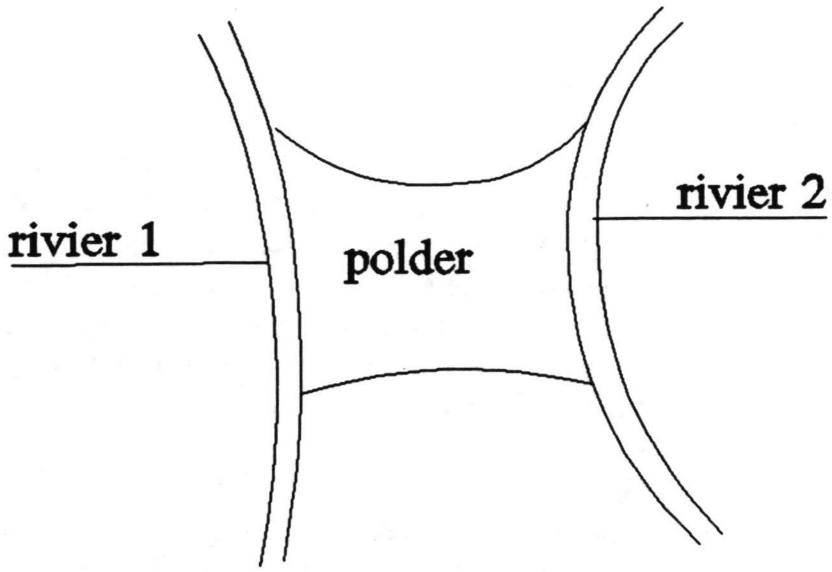
2.2 De economische optimalisatie van dijkringen

De verschillende dijkvakken van een ringdijk geven a priori niet dezelfde faalkans. Wanneer de ringdijk een zuiver seriesysteem is, betekent dit dat het dijkvak met de hoogste faalkans maatgevend is. Economisch gezien is dit ongewenst want in het geval van het zuivere seriesysteem is er geen overdimensionering indien alle elementen even sterk zijn, ofwel indien in geval van overlopen alle dijkvakken tegelijk overstromen. Wanneer een polder bedreigd wordt met overlopen ligt de inundatiekans tussen de volgende grenzen:

$$\max Pf_i \leq Pf_{polder} \leq \sum Pf_i \tag{2.1}$$

met Pf_i = kans op falen van element i.

Als voorbeeld wordt een polder beschouwd die alleen door het mechanisme overlopen bedreigd wordt. Wanneer de polder van twee zijden bedreigd wordt, en wanneer het falen van de beide dijken volledig gecorreleerd is doordat de belasting gevormd wordt door twee takken van dezelfde rivier (zie figuur 2.1), is er sprake van de ondergrens. In dit



figuur 2.2: bedreiging van een polder door twee rivieren

geval is de meest economische oplossing dus die situatie waarin $Pf_1 = Pf_2$. Anderzijds is het mogelijk dat de faalkans van een ringdijk gelijk is aan de som van de faalkansen van de dijkvakken van de ringdijk. In dit geval kan het dus juist niet economisch zijn om alle dijkvakken zo te construeren dat zij eenzelfde faalkans bezitten. Het is goedkoper om in dit geval het dijkvak dat bij aanleg veel kosten met zich meebrengt onder te dimensioneren en het dijkvak dat goedkoop aan te leggen is over te dimensioneren. Volledige onafhankelijkheid wordt in het voorgaande voorbeeld bereikt indien de polder bedreigd wordt door twee rivieren (zie figuur 2.2). Economisch gezien is het in deze situatie het gunstigst indien de verhouding van de faalkansen van beide dijkvakken gelijk is aan de verhouding van de kosten die gemaakt moeten worden voor de respectievelijke dijkvakken, zodat de kans op falen van de ringdijk voldoet aan een gestelde norm. Dit zal hieronder worden verduidelijkt. Voor de kans op inundatie is uitgegaan van:

$$Pf_{inundatie} = Pf_1 + Pf_2 \tag{2.2}$$

De contante waarde van het risico voor een oneindig lange planningsperiode en een beschermde waarde S in het beschouwde gebied wordt gegeven door:

$$c.w. = \frac{(Pf_1 + Pf_2)\,S}{p} \tag{2.3}$$

waarin p= reële rentevoet.

De investering die in de twee dijken gedaan kan worden om het risico te verminderen is een functie van de aanleghoogten h_1 en h_2:

$$I = I_0 + I_1 h_1 + I_2 h_2 \tag{2.4}$$

De totale kosten zijn nu:

$$K = I_0 + I_1 h_1 + I_2 h_2 + \frac{S}{p}(Pf_1 + Pf_2)$$

$$= I_0 + I_1 h_1 + I_2 h_2 + \frac{S}{p}\left(e^{-\left(\frac{h_1 - A}{B}\right)} + e^{-\left(\frac{h_2 - C}{D}\right)}\right) \tag{2.5}$$

De keuze van h_1 en h_2 dient een kostenminimum op te leveren:

$$\frac{\delta K}{\delta h_1} = \frac{\delta K}{\delta h_2} = 0 \tag{2.6}$$

Uit (2.5) en (2.6) volgt na herleiden:

$$Pf_1 = \frac{I_1 p B}{S} \text{ en } Pf_2 = \frac{I_2 p D}{S} \tag{2.7}$$

De verhouding van de totale faalkansen wordt dan gegeven door:

$$\frac{Pf_1}{Pf_2} = \frac{I_1 B}{I_2 D} \tag{2.8}$$

Uit het voorbeeld blijkt dat een gebied steeds in zijn geheel moet worden bekeken, waarbij de dijkhoogten uiteindelijk kunnen volgen uit een optimaliseringsproces. Hierbij kunnen economische, cultureel-landschappelijke of andere criteria het proces beïnvloeden.

Analoog aan de bovenstaande berekening voor twee onafhankelijke dijkvakken belast door één mechanisme, kan er ook een berekening gemaakt worden voor één dijkvak belast door twee mechanismen. Daarmee kan dan de begroting bepaald worden zoals weergegeven in figuur 1.3. In het onderstaande zal dit uitgewerkt worden voor de als onafhankelijk aangenomen mechanismen overlopen en piping. Voor overlopen wordt er weer uitgegaan van falen zodra de waterstand gelijk is aan de kruinhoogte. Voor het mechanisme piping wordt er uitgegaan van een belasting gevormd door een potentiaalverschil, en een sterkte gevormd door de lengte van de kwelweg. Voor de lengte van de kwelweg wordt de eenvoudige formule van Bligh gehanteerd:

$$L_k = c_B \Delta H \tag{2.9}$$

waarin c_B= coëfficiënt afhankelijk van de grondsoort volgens Bligh. Verder wordt ervan uitgegaan dat het potentiaalverschil alleen bepaald wordt door de buitenwaterstand h, en dat de binnenwaterstand gelijk is aan nul meter. In deze berekening kunnen dan de hoogte van de dijk en de breedte aan de voet van de dijk in één dwarsdoorsnede met elkaar vergeleken worden. De kans op falen van het dijkvak wordt weergegeven door:

$$P_{falen\ dijkvak} = P_{overlopen} + P_{piping} \tag{2.10}$$

waarin: $$P_{overlopen} = e^{-\frac{h-A}{B}}$$

$$P_{piping} = e^{-\frac{\frac{1}{c_B}L_k - A}{B}}$$

De totale kosten zijn:

$$K = I_0 + hI_1 + L_k I_2 + \frac{S}{p}(P_{overlopen} + P_{piping})$$

$$= I_0 + hI_1 + L_k I_2 + \frac{S}{p}\left(e^{-\frac{h-A}{B}} + e^{-\frac{\frac{1}{c_B}L_k - A}{B}}\right) \tag{2.11}$$

Een kostenminimum door een goede keuze van h en L_k wordt gevonden voor:

$$\frac{\delta K}{\delta h} = \frac{\delta K}{\delta L_k} = 0 \tag{2.12}$$

Voor de optimale faalkansen wordt gevonden:

$$P_{overlopen} = \frac{I_1 p B}{S} \tag{2.13}$$

$$P_{piping} = \frac{I_2 c_b B p}{S} \qquad (2.14)$$

en de verhouding van de optimale faalkansen is dus:

$$\frac{P_{overlopen}}{P_{piping}} = \frac{I_1}{I_2 c_B} \qquad (2.15)$$

2.3 Discrete modellen

2.3.1 Inleiding

De kans op falen door overlopen van een ringdijk bestaande uit n dijkvakken, geeft als onder- en bovengrens (zie ook: § 2.2):

$$\max(\, Pf_i) \le Pf_{ringdijk} \le \sum_{i=1}^{n} Pf_i \qquad (2.1)$$

met Pf_i = de kans op falen van dijkvak i.

In geval van volledige afhankelijkheid van de dijkvakken in sterkte- en belastingseigenschappen overstromen alle dijkvakken tegelijkertijd (omdat alle dijkvakken even sterk zijn en op identieke wijze worden belast), en vereenvoudigt de ondergrens tot de faalkans van één enkel dijkvak. De bovengrens vereenvoudigt in de situatie waarin de sterkte- en de belastingseigenschappen van de dijkvakken volledig onafhankelijk van elkaar zijn. De bovengrens van de faalkans van de ringdijk is dan gelijk aan:

P(bezwijken n vakken) = 1-[1-P(bezwijken 1 vak)]^n
Dit is bij benadering gelijk aan: n*P(bezwijken 1 vak).

De faalkans van een ringdijk is dan bij benadering gelijk aan n maal de faalkans van een enkel dijkvak. De onder- en bovengrenzen zijn vereenvoudigd tot:

$$Pf_i \le Pf_{ringdijk} \le n * Pf_i \qquad (2.16)$$

met Pf_i = kans op falen van een dijkvak.

2.3.2 Een discreet seriesysteem met correlatie

De boven- en de ondergrenzen kunnen worden vernauwd wanneer rekening gehouden wordt met de mate van afhankelijkheid tussen de sterkte-eigenschappen en de belastingeigenschapen van de dijkvakken. Wanneer er sprake is van *lineaire* afhankelijkheid, correlatie genaamd, kan deze in rekening gebracht worden door in geval van een seriesysteem de kansinsluitingsformules van Ditlevsen te gebruiken. Deze formules gaan uit van lineaire afhankelijkheid en van normale verdelingen als kansdichtheidsfuncties. In deze paragraaf zal uiteengezet worden hoe er met correlatie en de formules van Ditlevsen gerekend kan worden.

Een dijk kan onderverdeeld worden in dijkvakken, die alle een kans op falen hebben. In geval van het mechanisme overlopen is deze kans op falen afhankelijk van de (stochastische) constructieparameter kruinhoogte en van de (stochastische) parameter waterstand. Wanneer de dijk over zijn totale lengte opgevat wordt als een systeem van achter elkaar geschakelde dijkvakken, faalt het systeem als voor tenminste één dijkvak de belasting de sterkte overtreft. Naarmate de dijk langer is zal men een grotere kans verwachten dat dit het geval is. Hoeveel groter deze kans is zal bepaald worden door de mate van correlatie tussen de betrouwbaarheidsfuncties.

De kruinhoogten van dicht bij elkaar gelegen dijkvakken kunnen sterk gecorreleerd zijn, terwijl die van dijkvakken die verder uit elkaar liggen, minder verband met elkaar kunnen hebben. Ook de belastingsparameter waterstand zal gecorreleerd zijn over de lengte, maar de afstand waarover nog correlatie optreedt zal naar verwachting één tot twee orden groter zijn. De mate waarin de betrouwbaarheidsfuncties van twee moten verband met elkaar hebben, als functie van de afstand daartussen, wordt gegeven door de autocorrelatiefunctie. De correlatiecoëfficiënt tussen de betrouwbaarheidsfuncties van de elementen i en j is gedefinieerd als:

$$\rho_{ij} = \frac{cov(Z_i, Z_j)}{\sigma(Z_i)\,\sigma(Z_j)} \tag{2.17}$$

waarin ρ_{ij} = correlatiecoëfficiënt tussen de betrouwbaarheidsfuncties Z_i en Z_j van de elementen i en j.

$cov(Z_i, Z_j)$ = covariantie tussen de betrouwbaarheidsfuncties Z_i en Z_j van de elementen i en j.

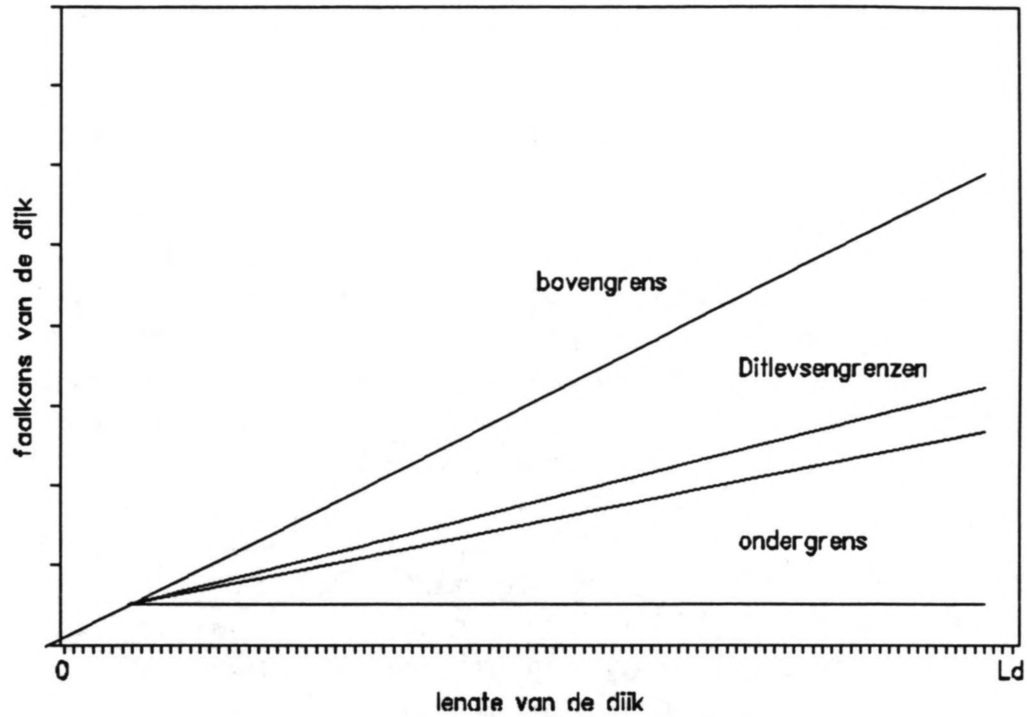
$\sigma(Z_i)$ = de standaardafwijking van de betrouwbaarheidsfunctie Z_i

$\sigma(Z_j)$ = de standaardafwijking van de betrouwbaarheidsfunctie Zj

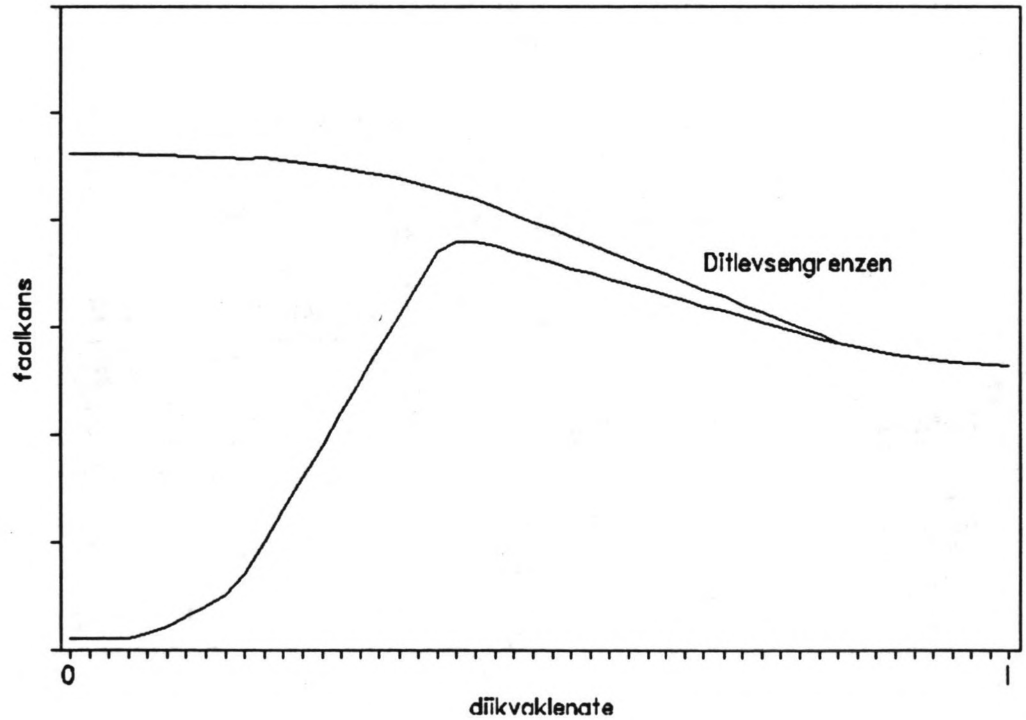
In het diktaat f30, probabilistisch ontwerpen in de waterbouw, wordt een uitdrukking afgeleid voor de covariantie tussen de betrouwbaarheidsfuncties i en j. Onder de aanname dat $\rho\,(S_i, R_j)=0$ wordt de correlatiecoëfficiënt tussen de betrouwbaarheidsfuncties van de vakken i en j volgens deze afleiding gegeven door:

$$\rho\,(Z_i, Z_j) = \frac{\rho\,(R_i, R_j)\,\sigma\,(R_i)\,\sigma\,(R_j) + \rho\,(S_i, S_j)\,\sigma\,(S_i)\,\sigma\,(S_j)}{\sigma\,(Z_i)\,\sigma\,(Z_j)} \tag{2.18}$$

Wanneer de autocorrelatiefunctie naar nul zou naderen voor een grote afstand tussen twee



figuur 2.3: onder- en bovengrenzen en de Ditlevsengrenzen van de faalkans van de dijk als functie van de lengte



figuur 2.4: verloop van de Ditlevsengrenzen van de faalkans als functie van de dijkvaklengte

beschouwde dijkvakken, hebben de betrouwbaarheidsfuncties van twee ver uiteenliggende plaatsen geen verband meer met elkaar.

In het onderzoek uitgevoerd door de TAW 10 is er in eerste instantie uitgegaan van een zeer kleine standaardafwijking voor de belasting. In formule (2.18) wordt de correlatiecoëfficiënt tussen de betrouwbaarheidsfuncties dan gelijk aan de correlatiecoëfficiënt van de sterkte van de vakken i en j. Voor de correlatie in de sterkte is uitgegaan van de formule:

$$\rho(R_i, R_j) = e^{-\left(\frac{l\Delta i}{d_c}\right)^2} \tag{2.19}$$

waarin: l = lengte van een dijkvak

$\Delta i = i - j$

d_c = correlatielengte.

Voor deze correlatiefunctie zijn er, na het aannemen van waarden voor l en d_c, berekeningen gemaakt met de kansinsluitingsformules van Ditlevsen. Volgens Ditlevsen geldt bij benadering:

$$P(Z_i<0 \text{ en } Z_j<0) = \phi(-\beta_j)\phi(-\beta^*_i) + \phi(-\beta_j)\phi(-\beta^*_j) \tag{2.20}$$

waarin: Φ = de verdelingsfunctie voor de normale verdeling

β_i = de betrouwbaarheidsindex behorende bij $Z_i < 0$ (idem voor j)

$$\beta^*_i = \frac{\beta_i - \rho\beta_j}{\sqrt{1-\rho^2}} \tag{2.21}$$

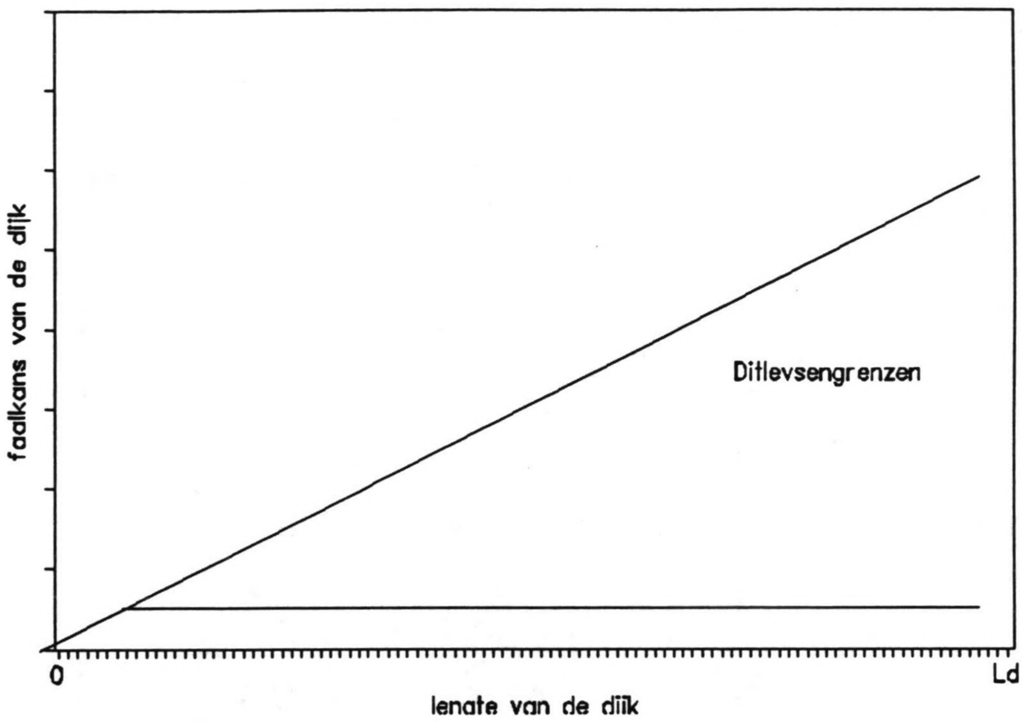
De onder- en bovengrenzen volgens Ditlevsen volgen nu uit:

$$\Sigma(P_i - \sum_{j<i} P_{ij}) \leq P(F) \leq \Sigma(P_i - \max_{j<i} P_{ij}) \tag{2.22}$$

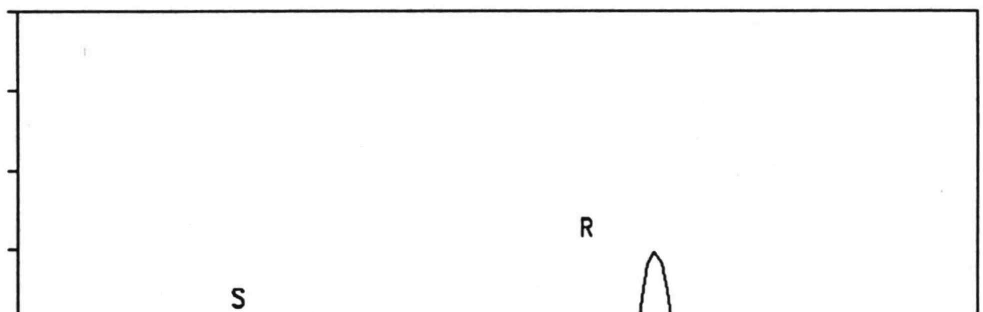
waarin $P_{ij} = P(Z_i < 0 \text{ en } Z_j < 0)$

De faalkans als functie van de lengte voor de elementaire onder- en bovengrens en de Ditlevsen-grenzen verloopt in dit geval als in figuur 2.3. Uit deze figuur blijkt dat voor een met toenemende lengte naar nul verlopende autocorrelatiefunctie de onder- en bovengrenzen met behulp van de kansinsluitingsformules van Ditlevsen voldoende te vernauwen zijn. Het verloop van de Ditlevsen onder- en bovengrenzen voor de seriefaalkans voor een dijklengte L als functie van de dijkvaklengte wordt gegeven in figuur 2.4. Deze figuur illustreert dat de keuze voor de lengte van een dijkvak arbitrair is.

In het tweede geval is er uitgegaan van een niet naar nul verlopende autocorrelatiefunctie. Er is gesteld dat $\rho(S_i, S_j) = 1$ (voor alle dijkvakken geldt dezelfde stormvloedstand). De autocorrelatiefunctie wordt (bij de veronderstelling dat voor alle dijkvakken de standaardafwijkingen van de kruinhoogten en van de stormvloedstanden gelijk zijn):



figuur 2.5: Ditlevsengrenzen van de faalkans van de dijk als functie van de lengte



figuur 2.6: belasting en sterkte voor een zeedijk

$$\rho(Z_i, Z_j) = \frac{e^{-\left(\frac{1\Delta i}{d_c}\right)^2} \sigma^2(R) + \sigma^2(S)}{\sigma^2(Z)} \tag{2.23}$$

De betrouwbaarheidsfuncties blijven hierbij ook over grote afstand gecorreleerd door de stormvloedstand. In dit geval wordt de faalkans van de dijk als functie van de lengte weergegeven door figuur 2.5. Uit deze figuur blijkt dat voor een niet naar nul verlopende autocorrelatiefunctie de boven- en ondergrens niet met de kansinsluitingsformules van Ditlevsen te vernauwen zijn.

Er volgen nu twee voorbeelden van het lengte-effect. Het eerste heeft betrekking op twee dijkvakken die voor één jaar beschouwd worden en het tweede voorbeeld betreft één dijkvak dat voor twee verschillende jaren beschouwd wordt.

Voorbeeld 1:
In dit eerste voorbeeld worden voor een zeedijk en een pomp accumulatiecentrale (PAC) twee dijkvakken beschouwd. Voor zowel de zeedijk als de PAC geldt dat de dijkvakken zo gekozen zijn dat ze onafhankelijk zijn in de sterkte ($\rho(R_i, R_j) = 0$). De correlatiecoëfficiënt (2.18) wordt door de volledige correlatie in het hoogwater (de correlatiecoëfficiënt van de belasting is één) voor de beide dijkvakken dan gegeven door:

$$\rho_{dijkvak1,dijkvak2} = \frac{\sigma^2(HW)}{\sigma^2(Z)} \tag{2.24}$$

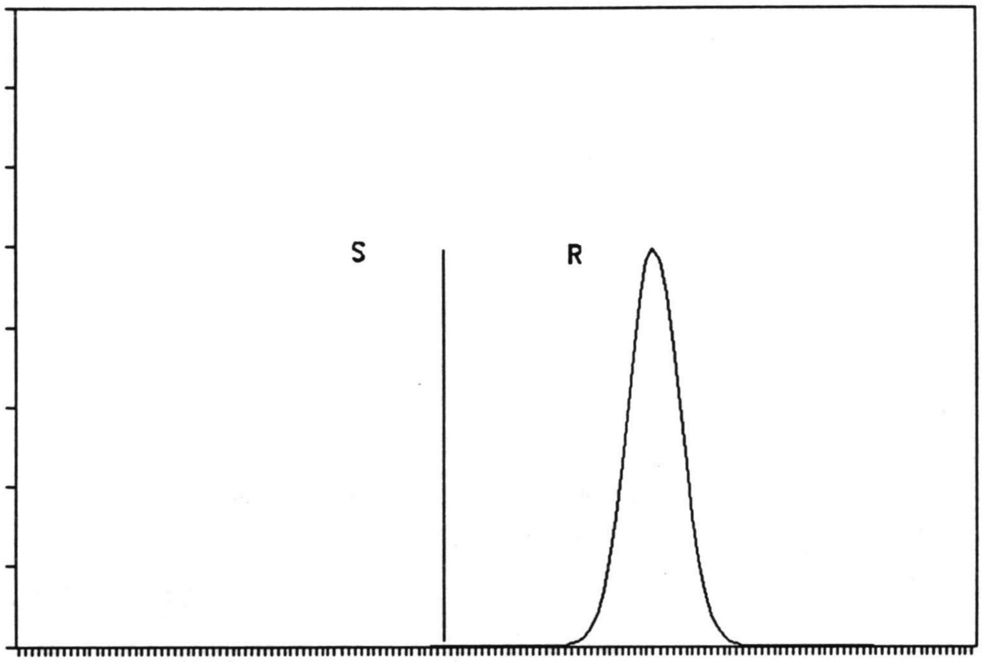
Wanneer de sterkte en de belasting van de zeedijk weergegeven worden door figuur 2.6 dan zal de correlatiecoëfficiënt een waarde hebben die dicht bij één ligt.

Omdat voor de PAC dezelfde overwegingen gelden voor de correlatie van de sterkte en de belasting zal ook de correlatiecoëfficiënt van de PAC gegeven worden door:

$$\rho_{dijkvak1,dijkvak2} = \frac{\sigma^2(HW)}{\sigma^2(Z)} \tag{2.24}$$

Wanneer de sterkte en de belasting van de PAC weergegeven worden door figuur 2.7 dan zal de correlatiecoëfficiënt een waarde hebben die dicht bij nul ligt.

Voorbeeld 2:
In dit tweede voorbeeld worden weer de zeedijk en de PAC beschouwd maar nu één enkel dijkvak voor twee jaren. Voor de zeedijk geldt dat de correlatie van het hoogwater voor de verschillende jaren nul is (het hoogwater heeft ieder jaar weer een nieuwe kans de sterkte te overtreffen). De correlatie van de sterkte in de verschillende jaren zal (afgezien van bijvoorbeeld zetting) groot zijn en wordt hier gelijk aan één gesteld. Dit geeft voor de zeedijk de volgende correlatiecoëfficiënt:



figuur 2.7: belasting en sterkte voor een PAC

$$\rho_{jaar1,jaar2} = \frac{\sigma^2(h)}{\sigma^2(Z)} \tag{2.25}$$

Omdat voor de zeedijk de standaardafwijking van de sterkte klein is (zie figuur 2.6), zal de waarde van de correlatiecoëfficiënt dicht bij nul liggen.

Ook voor de PAC wordt een correlatiecoëfficiënt als formule (2.25) gevonden. De correlatie in het hoogwater voor de verschillende jaren is weliswaar groot, maar door de kleine standaardafwijking valt deze term toch weer weg uit formule (2.18). De waarde van de correlatiecoëfficiënt zal voor de PAC dicht bij één liggen door de relatief grote standaardafwijking van de sterkte ten opzichte van die van de belasting (zie figuur 2.7).

2.3.3 Een exacte oplossing

Een exacte oplossing is mogelijk wanneer er verondersteld wordt dat de dijkvakken van een waterkering onderling onafhankelijk zijn, maar wel getrokken uit één populatie. De kans dat een dijkvak hoger is dan H is gelijk aan:

$$P(H>h) = 1-\Phi_h(H) \tag{2.26}$$

waarin Φ_h = de normale verdeling van de kruinhoogten.
De kans dat alle n dijkvakken van het beschouwde dijktracé hoger zijn dan H is gelijk aan:

$$P(h_1>H \text{ en } h_2>H \text{ en} \ldots h_n>H) = \prod_{j=1}^{n}(1-\Phi_h(H)) = (1-\Phi_h(H))^n \tag{2.27}$$

De kans dat ten minste één dijkvak uit n dijkvakken lager is dan H is dan gelijk aan:

$$P(h_{min}<H) = 1-(1-\Phi_h(H))^n \tag{2.28}$$

Dit is de extreme waarde verdeling van de minimale dijkvakhoogte. De kansdichtheidsfunctie wordt dan gegeven door:

$$f_{h_{min}} = n\phi_h(H)\,\Phi_h^{n-1}(H) \tag{2.29}$$

Wanneer de kansdichtheidsfunctie van de stormvloeden bekend is kan door middel van integratie de overstromingskans van het hele dijktracé bestaande uit n dijkvakken berekend worden:

$$P_{overstroming} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} n\phi_h(H)\,\Phi_h^{n-1} f_{hw}(h)\, dH dh \tag{2.30}$$

waarin $f_{hw}(h)$ = de kansdichtheidsfunctie van de stormvloeden.
Deze integraal is uitsluitend numeriek op te lossen. Het berekeningsresultaat geeft zelfs voor kleine en weinig verschillende standaardafwijkingen van de sterkte verschillende resultaten. Dit geeft aan dat het lengte-effect zelfs bij een betrekkelijk kleine spreiding

van de dijkvakhoogte niet verwaarloosbaar is.

2.4 Een continu model

De variatie van belasting en sterkte in de lengterichting van een dijk zal in werkelijkheid een continu verloop hebben. Vanuit de theorie van de stochastische processen is een directe continue benadering van het berekenen van de bovengrens van de seriefaalkans mogelijk. In deze benadering worden de sterkte en de belasting en daarmee de betrouwbaarheidsfunctie Z opgevat als een continu veranderende stochastische variabele in de lengterichting van de dijk: $Z = Z(x)$. Zo'n continu veranderende functie wordt een stochastisch proces genoemd. Analoog aan de discrete benadering kan worden verondersteld dat de realisatie van Z op elke x-locatie getrokken is uit dezelfde populatieverdeling en dat de correlatie tussen twee realisaties van Z op x en $x+h$ uitsluitend afhangt van de afstand h. Zo'n proces heet dan stationair. Deze theorie is toegepast op het mechanisme piping. Er volgt nu een korte samenvatting van een uitgewerkte methode en de gevonden resultaten van een onderzoek uitgevoerd door Grondmechanica Delft (literatuur 1).

Met piping wordt het proces van terugschrijdende interne erosie van een zandpakket onder een ondoorlaatbare waterkering bedoeld. Wanneer de zandlaag achter een waterkering bedekt is met een ondoorlatende laag van klei of van klei en veen, moet het optreden van het mechanisme piping noodzakelijkerwijs vooraf gegaan worden door het opbarsten van deze ondoorlatende laag. Zonder dit opbarsten zal er geen piping kunnen optreden.

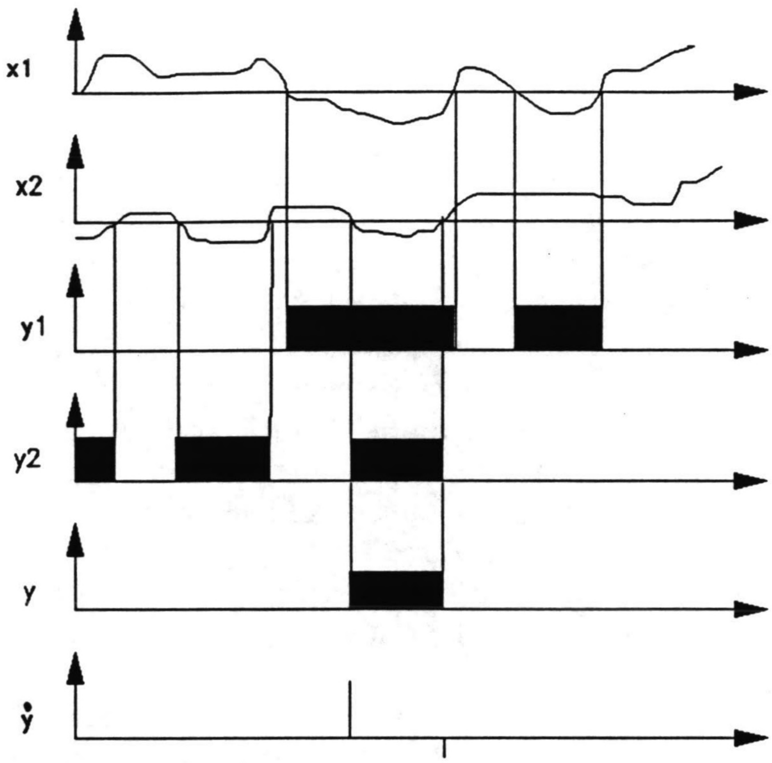
De uitgevoerde berekeningen berusten op de volgende uitgangspunten:

1. De kans op optreden van opbarsten is afhankelijk van de weerstand tegen opbarsten en van het waterstandsverschil over de waterkering. Er zijn gebieden die meer of minder gevoelig zijn voor opbarsten, met andere woorden: de weerstand tegen opbarsten varieert in de lengterichting van de kering. De variatie in de opbarstgevoeligheid is gemodelleerd met behulp van een statistisch model voor de parameters die een rol spelen bij opbarsten.

2. De kans op het optreden van erosie is afhankelijk van de weerstand tegen erosie van de zandlaag onder de waterkering. Ook deze varieert in de lengterichting van de waterkering en is gemodelleerd met behulp van een statistisch model voor de parameters die een rol spelen.

3. Piping zal optreden indien zowel opbarsten als erosie op een bepaalde locatie optreden. De theorie om de kans hierop te bepalen is afgeleid van de theorie van onderschrijdingskansen bij stationaire Gaussische processen.

De methode maakt gebruik van de theorie voor samenvallende onderschrijdingsgebieden



figuur 2.8: niveaudoorgangen probleem

bij *gecorreleerde* processen. Er wordt uitgegaan van een betrouwbaarheidsfunctie voor opbarsten:

$$Z_d(x) = d(x) - \frac{H\gamma_w}{\gamma_k} \tag{2.31}$$

en een betrouwbaarheidsfunctie voor het erosiemechanisme:

$$Z_H(x) = H_{crit}(x) - H \tag{2.32}$$

Met behulp van eerste orde tweede moment analyses kunnen de kansen

$$P(Z_H(0) < 0) \text{ en } P(Z_d(0) < 0)$$

worden berekend. Uitgaande van de theorie voor stochastische processen kan de kans op tenminste één keer opbarsten bij een gegeven potentiaal $H = \xi$ opgevat worden als een niveau-onderschrijdingsgebeurtenis. Voor twee processen dienen de gezamenlijke niveaudoorgangen bepaald te worden. De kans hierop wordt gedefinieerd als de kans dat in een interval [0,T] tenminste één t bestaat, in een omgeving waarvan $x_1(t) < \epsilon_1$ en $x_2(t) < \epsilon_2$, waarin $x_i(t)$ het stochastische proces. Het niveaudoorgangen probleem is weergegeven in figuur 2.8.

In appendix II en III van: Lengte-effecten bij het mechanisme piping onder waterkeringen (literatuur 1) worden formules afgeleid voor een niveau-onderschrijdingsgebeurtenis en voor gezamenlijke niveaudoorgangen bij twee processen. Bij het afleiden van deze uitdrukkingen is ervan uitgegaan dat de doorgangen zich als een Poisson-impulsreeks gedragen. Met behulp van de kruiscorrelatiecoëfficiënt tussen de beide betrouwbaarheidsfuncties wordt er een uitdrukking gevonden voor de kans op tenminste één samenvallend opbarstgevoelig en erosiegevoelig gebied.

Het resultaat van een voorbeeldberekening van de bovenbeschreven methode geeft een met de lengte bijna lineair toenemend verloop van de kans op piping. De keuzes van de autocorrelatieafstanden voor de grondparameters zijn hierbij gevoelsmatig gemaakt.

2.5 Het programma Dijkring

2.5.1 Inleiding

In deze paragraaf wordt het programma "Dijkring" (literatuur 9) besproken. Dit programma, dat samengesteld is door de Dienst Weg- en Waterbouw van Rijkswaterstaat, is bedoeld als hulpmiddel bij het gedeelte van de Leidraad Benedenrivieren (literatuur 5) waarin aangegeven staat hoe de kruinhoogten bepaald kunnen worden, rekening houdend met overslaand of overstromend water. In het programma Dijkring wordt door middel van integratie het lengte-effect in de belasting verdisconteerd.

2.5.2 De berekening van de dijktafelhoogte in verband met waterstand en golven.

De kans dat ergens langs de waterkeringen rondom een dijkring overbelasting van de dijk optreedt ten gevolge van overslaand of overstromend water wordt de dijkringfrequentie genoemd. Onder de kans op overbelasting van een dijkring wordt verstaan: "de kans dat ergens langs een dijkring water over een kruin stroomt of door golven meer water over een kruin slaat dan het dijkvak gezien zijn constructie kan verdragen" (literatuur 9).

De waterstanden in het Noordelijk Deltabekken worden bepaald door rivierafvoeren, zeestanden, zeespiegelrijzing en lokale opwaaiing. Voor het bepalen van de dijktafelhoogte is naast de bovenstaande gegevens ook de golfoploop van belang. Voor het bepalen van de golfoploop is het nodig om onder andere te beschikken over windgegevens.
Het gaat om de volgende parameters:

Q_R:	afvoer Bovenrijn/Maas	[m^3/s]
H_H:	hoogwaterstand Hoek van Holland	[m+ NAP]
R:	windsector	[30 graden]
u:	windsnelheid	[m/s]

Met behulp van een toetsingsmodel kan de dijkringfrequentie worden berekend, na invoeren van de dijkhoogten in het model. Het toetsingsmodel ontleent zijn naam aan het feit dat achteraf kan worden getoetst of de vereiste frequentie is bereikt. Voor het toetsingsmodel zijn de multi-dimensionale kansverdelingen benodigd.

Ter bepaling van de dijkhoogten die bij toetsing de vereiste dijkringfrequentie opleveren, zijn twee verschillende benaderingsmethodenmethoden uitgewerkt:

1. de belastinggevallenmethode, waarbij de dijken zo worden ontworpen dat enkele maatgevend geachte belastingen (gedefinieerd door Q_R, H_H, R en u) geen overbelasting veroorzaken.
2. de frequentiemethode, een vereenvoudiging van het toetsingsmodel, waarbij de in rekening te brengen wind functioneel is gekoppeld aan de waterstanden te Hoek van Holland.

In het onderstaande zal de belastinggevallenmethode kort worden beschreven.

In de belastinggevallenmethode wordt uitgegaan van een combinatie van:

- een rivierafvoer
- een waterstand bij Hoek van Holland
- een windsnelheid

Voor zestien windrichtingen geeft dit zestien combinaties. Deze zestien combinaties vormen een belastinggeval. De berekening van de kruinhoogten verloopt in drie stappen en wel als volgt: ten eerste wordt met behulp van evenstandslijnen de waterstand ter plaatse van een dijkvak bepaald uit de rivierafvoer en de waterstand bij Hoek van Holland. Ten tweede wordt voor alle zestien windrichtingen de golfgroei voor het dijkvak uitgerekend, resulterend in een golf met een bepaalde hoogte en periode. De golfgroei is afhankelijk van de windsnelheid, de geometrie van het voorland en van de in de eerste stap uitgerekende waterstand. De waterstand en de golfhoogte direct vóór het dijkvak zijn nu bekend voor iedere windrichting, en met behulp van golfoverslagformules kan tenslotte de benodigde kruinhoogte uitgerekend worden. Hiervoor is een zogenaamd golfoverslag-criterium nodig. Dit is de hoeveelheid golfoverslag uitgedrukt in l/s/m die toegestaan kan worden voor het dijkvak. Deze golfoverslag is afhankelijk van het dwarsprofiel en de bekleding van het dijkvak. Op de bovenbeschreven manier worden per belastinggeval zestien kruinhoogten uitgerekend, waarvan de hoogste maatgevend is.

Met het programma Dijkring kan (onder andere) de bovenbeschreven berekening uitgevoerd worden. De kruinhoogten die uitgerekend worden zijn slechts een indicatie. Of deze hoogten juist zijn volgt uit een berekening van de kans op overbelasting. Ook andere combinaties van kruinhoogten dan die gevonden volgens de belastinggevallenmethode kunnen een kans op overbelasting geven die een gewenste waarde heeft. In feite zijn er voor een beschouwde dijkring oneindig veel combinaties van kruinhoogtes die allemaal tot eenzelfde kans op overbelasting kunnen leiden. Het voordeel hiervan is dat voor het vinden van een optimale set kruinhoogten ook de kosten van dijkversterkingen van de afzonderlijke dijkvakken beschouwd kunnen worden, of de wenselijkheid om bepaalde dijkvakken niet of beperkt te verhogen bijvoorbeeld in verband met maatschappelijke of ecologische waarden.

Het programma geeft tevens een indicatie van de kansbijdrage per dijkvak. Omdat deze dijkvakken wanneer ze gelegen zijn aan dezelfde rivier altijd via de waterstand gecorreleerd blijven, zijn de dijkvakken niet volledig onafhankelijk van elkaar. Wanneer er bijvoorbeeld van tien dijkvakken één een bijdrage van 50% levert aan de kans op overbelasting, dan is het niet zo dat door verhoging van dit vak de totale kans tot 50% teruggebracht kan worden. Andere vakken zullen de bijdrage, althans voor een gedeelte, overnemen. Verhoging van een dijkvak wordt dus pas effectief, wanneer alle andere van dit dijkvak afhankelijke dijkvakken ook verhoogd worden. Om rekening te houden met de afhankelijkheid zijn dus meerdere berekeningen met het programma nodig, waarin de kruinhoogten gevarieerd worden.

2.5.3 De berekening van de kans op overbelasting.

In het toetsingsmodel van het programma Dijkring wordt bij gegeven kruinhoogten de kans per jaar dat ten minste één dijkvak van de dijkring overbelast wordt ten gevolge van golfoverslag of overloop berekend. Voor het berekenen van de totale kans op overbelasting dient eerst de kans op overbelasting bij een gegeven rivierafvoer berekend worden. Deze berekening verloopt als volgt: voor alle combinaties van rivierafvoer, windrichting en waterstand in Hoek van Holland wordt nagegaan wat de laagste windsnelheid is waarbij tenminste één dijkvak overbelast wordt. Deze laagste windsnelheid wordt berekend door per dijkvak de windsnelheden als functie van de plaatselijke waterstand en windrichting uit te rekenen waarbij juist overbelasting optreedt. Daarna worden voor alle combinaties van rivierafvoer en waterstand in Hoek van Holland de plaatselijke waterstanden uitgerekend. Gegeven de windrichting is dan de genoemde laagste windsnelheid bekend. Wanneer de laagste windsnelheid bekend is kan de voorwaardelijke kans dat bij een gegeven rivierafvoer voor tenminste één dijkvak overbelasting optreedt uitgerekend worden door integratie over de waterstanden in Hoek van Holland en de windrichtingen.

Wanneer de voorwaardelijke kans op overbelasting gegeven de rivierafvoer berekend is, kan de rivierafvoer in rekening gebracht worden, waarbij rekening gehouden wordt met de afvoertoppen. Op deze wijze wordt de totale kans op overbelasting gevonden.

In de bovenbeschreven berekeningen is er door integratie over de betreffende parameters rekening gehouden met de invloed van meer dan één bedreiging, zoals stormvloed op zee, windinvloed en een hoge rivierafvoer. Het lengte-effect in de belasting is hiermee verdisconteerd.

3 Een statistisch model voor de hoogte van een dijk

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zal een statistisch model voor één variabele, te weten de hoogte van een dijk, beschreven worden. In eerste instantie was de opzet om uit te gaan van een Random-Walk proces. Voor een Random-Walk proces geldt dat vanaf een punt, de standaardafwijking van de kansverdeling van de hoogte als functie van de lengte, toeneemt met de wortel uit de lengte. Op het eerste gezicht is dit een logische aanname. Hoe groter de afstand vanaf een bekend punt, hoe groter de onzekerheid, en hoe breder de kansverdeling. Dit betekent echter wel dat de hoogte van een dijk die aangelegd is op 5.0 m, met toenemende afstand vanaf een bepaald gemeten punt, een steeds grotere kans heeft op een hoogte van bijvoorbeeld 3.0 m. Uiteindelijk is het zelfs mogelijk dat de dijkhoogte negatief wordt. Dit is uiteraard onjuist. Dit zou ondervangen kunnen worden door de beschouwde afstanden niet te groot te maken. Er is echter voor een andere oplossing gekozen, die het bezwaar van het Random-Walk proces niet heeft. Het uitgangspunt is een standaardafwijking die vanaf een bepaald punt (praktisch) niet meer toeneemt. Dit kan gemodelleerd worden met behulp van een negatieve e-macht: $\sigma=\sigma_0(1-\exp(-a\lambda))$. Het aardige is, dat voor een stochastisch proces met bepaalde eigenschappen het bovengenoemde uitgangspunt ook bewezen kan worden. In de paragrafen 3.3 tot en met 3.6 zullen deze eigenschappen toegelicht worden en zal dit model uitgewerkt worden. In §3.7 zal dit model vervolgens gecontroleerd worden aan de hand van het rapport: "Statistische karakterisering van gemeten fluctuaties van dijkhoogten" (concept). Dit door Grondmechanica Delft opgestelde rapport is een analyse van gemeten hoogten van dijkskruinen van drie trajecten langs de Westerschelde. Ten eerste echter, zal in §3.2 ingegaan worden op de in dit hoofdstuk veel gebruikte begrippen correlatiefunctie en correlatiecoëfficiënt.

3.2 Correlatie

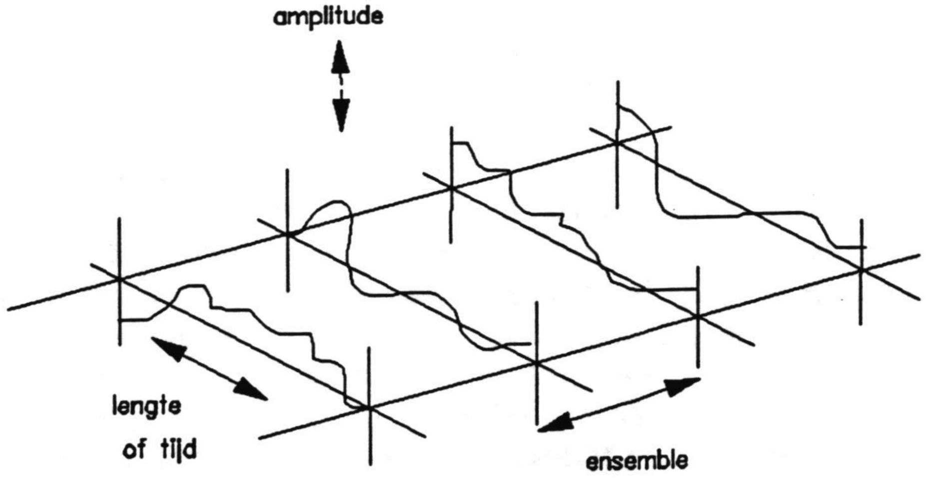
In dit hoofdstuk zal er veel gebruik gemaakt worden van de begrippen autocorrelatiefunctie en correlatiecoëfficiënt. Om verwarring te voorkomen volgt hier een korte toelichting op beide begrippen. De autocorrelatiefunctie φ van de stochastische variabele X als functie van de afstand l_2-l_1 is gedefinieerd als de verwachtingswaarde van het produkt $x(l_1)$ en $x(l_2)$

$$\varphi_{xx}(l_1,l_2) = E_x[x(l_1)*x(l_2)] \tag{3.1}$$

ofwel:

$$\varphi_{xx}(l_1,l_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, f(x_1, x_2, l_1, l_2)dx_1 dx_2 \tag{3.2}$$

In het geval dat $\mu_x(l)=0$ voor elke l is de autocorrelatiefunctie gelijk aan de autocovariantie



figuur 3.1: ensemble, lengte of tijd en amplitude

tussen de amplitudes op de plaatsen l_1 en l_2. Omdat de covariantie een maatstaf voor de samenhang is, geeft de autocorrelatiefunctie aan hoe 'snel' het proces fluctueert. Als $l_1=l_2$ gaat de covariantie over in de variantie van het proces:

$$\varphi_{xx}(l_1,l_2) = \sigma_x^2(l) \text{ als } \mu_x(l) = 0 \text{ en } l_1 = l_2 = l$$

De correlatiecoëfficiënt is gedefinieerd als:

$$\rho = \frac{E[x(l)\ x(l+\lambda)]}{\sqrt{var[x(l)]var[x(l+\lambda)]}} = \frac{\varphi_{xx}(\lambda)}{\varphi_{xx}(0)} \tag{3.3}$$

Om de correlatiecoëfficiënt uit te rekenen wordt de correlatiefunctie genormeerd op σ^2. De reden hiervoor is uiteraard dat voor $\lambda=0$ een correlatiecoëfficiënt van 1 gevonden dient te worden.

3.3 Ensemble en tijd of lengte

Een toevalsvariabele kan beschouwd worden als de uit komst van een experiment. Herhaling van dit experiment levert onder invloed van toevalsfactoren telkens weer andere uitkomsten op en de verzameling van mogelijke uitkomsten van het experiment wordt de populatie genoemd. De populatie is te karakteriseren door een kansverdeling. Op soortgelijke wijze kan een stochastisch signaal beschouwd worden als het resultaat van een proces. Als de golfhoogte op een bepaald punt in zee gedurende een uur waargenomen wordt, en dit wordt herhaald, dan wordt een nieuw signaal gevonden. De verzameling van mogelijke signalen, die door telkens een proces te herhalen verkregen wordt, heet het ensemble.

Er is een duidelijk onderscheid tussen variaties over het ensemble en variaties over de tijd of lengte. Met variaties over het ensemble worden de variaties tussen de verschillende signalen uit het ensemble bedoeld, terwijl onder variatie in de tijd of lengte de variatie in de signaalamplitude op verschillende tijdstippen binnen eenzelfde signaal uit het ensemble wordt verstaan. Dit is weergegeven in figuur 3.1. In §3.5 zal blijken dat in veel gevallen wordt uitgegaan van de veronderstelling dat uit de gedragingen van één signaal in de tijd of lengte, de eigenschappen van het ensemble kunnen worden afgeleid.

3.4 Stationaire processen

Er wordt van een stationair proces gesproken wanneer de statistische eigenschappen van het proces onafhankelijk zijn van de tijdparameter t of de plaatsparameter l. Verder moet gelden dat de correlatiefunctie alleen afhankelijk is van het verschil tussen t_1 en t_2 of l_1 en l_2 en dus niet van de absolute waarden van t_1 en t_2 of l_1 en l_2. Bij het bepalen van de statistische eigenschappen van een stationair proces is de lengte of periode waarover het proces wordt beschouwd dus niet van belang, omdat deze eigenschappen bij verschuiving van de tijd- of lengteschaal onveranderd blijven. Omdat in dit hoofdstuk een statistisch model voor de hoogte als functie van de lengte van een dijk beschreven wordt, zal de tijdparameter verder buiten beschouwing blijven.

Voor een stationair proces geldt voor het gemiddelde:

$$\mu_x = E[x(l_1)] = E[x(l_1+l)] \tag{3.4}$$

voor de variantie:

$$\sigma_x^2 = var[x(l_1)] = var[x(l_1+l)] \tag{3.5}$$

en voor de autocorrelatiefunctie φ:

$$\varphi_{xx}(l_2 - l_1) = \varphi(l_1,l_2) = \varphi(l_1+l,\ l_2+l) \tag{3.6}$$

De definitie van de autocorrelatiefunctie (zie (3.1)) kan nu worden geschreven als:

$$\varphi_{xx}(\lambda) = E[x(l)*x(l+\lambda)]\ voor\ elke\ l \tag{3.7}$$

Twee belangrijke eigenschappen van de correlatiefunctie van stationaire processen zijn:

1. de autocorrelatiefunctie is een symmetrische functie van λ:

$$\varphi_{xx}(\lambda) = \varphi_{xx}(-\lambda) \tag{3.8}$$

2. het maximum van $\varphi_{xx}(\lambda)$ ligt bij $\lambda_x=0$ en is gelijk aan de variantie van het proces, als $\mu=0$:

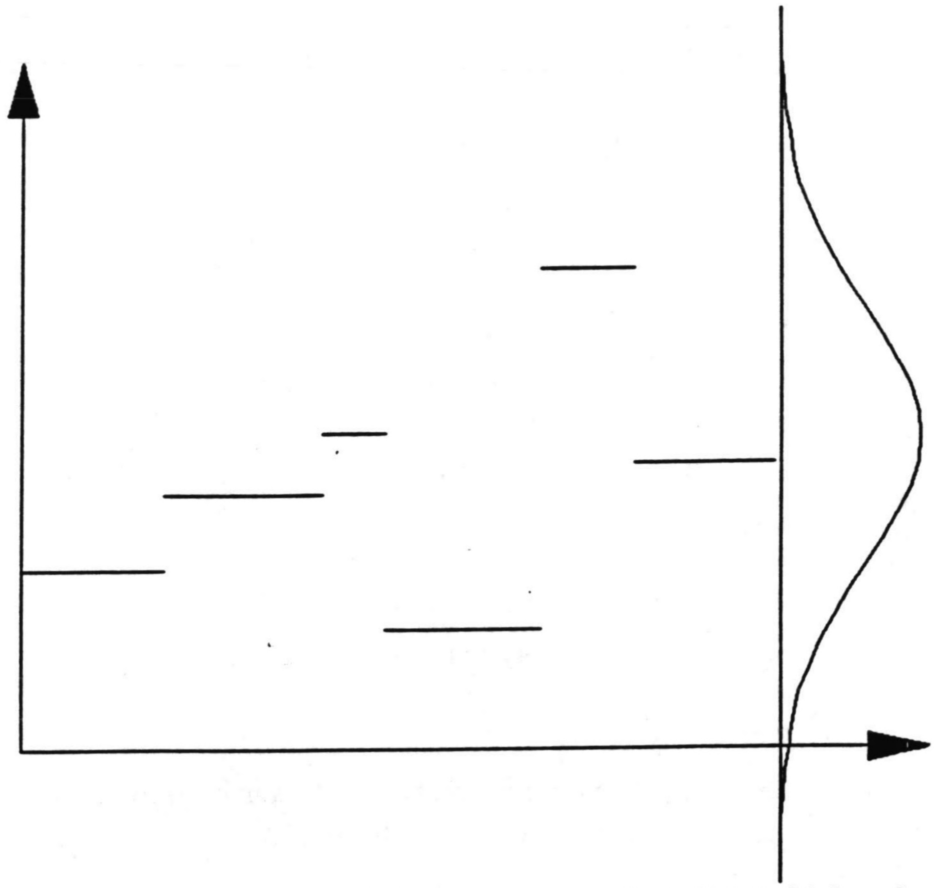
$$\sigma_x{}^2 = \varphi_{xx}(0) \geq \varphi_{xx}(\lambda)\ voor\ elke\ \lambda \tag{3.9}$$

Voor $\lambda = 0$ volgt immers uit (3.7):

$$\varphi_{xx}(0) = E_x[x^2(l)] = \sigma_x{}^2\ als\ \mu_x = 0 \tag{3.10}$$

3.5 Ergodische eigenschap

In §3.3 is duidelijk gemaakt dat een signaal te beschouwen is als een trekking uit een ensemble. Door het proces of het experiment waaruit het signaal ontstaat te herhalen wordt een groot aantal signalen verkregen en kunnen de eigenschappen van het ensemble vastgesteld worden. In het stationaire geval speelt het daarbij geen rol op welke plaats al deze signalen beginnen en mogen er dus telkens verschillende waarnemingslengtes gekozen worden. De vraag ligt dan voor de hand of in plaats van een groot aantal signalen ook verschillende waarnemingslengtes van één enkel signaal als onafhankelijke trekkingen uit het ensemble aangemerkt mogen worden. Het voordeel daarvan is, dat het experiment dan slechts éénmaal uitgevoerd behoeft te worden om de gewenste informatie over het ensemble te krijgen. Signalen, waarvoor dit



figuur 3.2: amplitude van een Poissonproces met kansdichtheidsfunctie

inderdaad mogelijk is, voldoen aan de ergodische eigenschap en er wordt dan van een ergodisch signaal gesproken.

De betekenis van de ergodische eigenschap kan duidelijk gemaakt worden met behulp van de correlatiefunctie. De correlatiefunctie is een maatstaf voor de samenhang tussen twee punten van een proces, die op een afstand λ van elkaar verwijderd zijn. In veel gevallen zal de samenhang tussen beide punten kleiner worden naarmate de daartussen liggende afstand groter wordt, zodat zij op grote afstand volkomen onafhankelijk van elkaar worden:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi_{xx}(\lambda) = 0 \tag{3.11}$$

Als aan deze voorwaarde voldaan is en het signaal een zeer lange afstand voortduurt, kan deze periode in gedachten verdeeld worden in een groot aantal deelintervallen en het verloop van het signaal in elk van deze intervallen zal dan nagenoeg onafhankelijk zijn van het verloop in de overige intervallen. Met andere woorden: het verloop van één enkel langdurig signaal kan beschouwd worden als een reeks van onafhankelijke trekkingen uit het ensemble en in plaats van een groot aantal signalen te bestuderen kan volstaan worden met het observeren van één enkel signaal over een voldoende grote lengte. Hieruit volgt dus dat een stationair signaal dat voldoet aan de voorwaarde (3.11) een ergodisch signaal is.

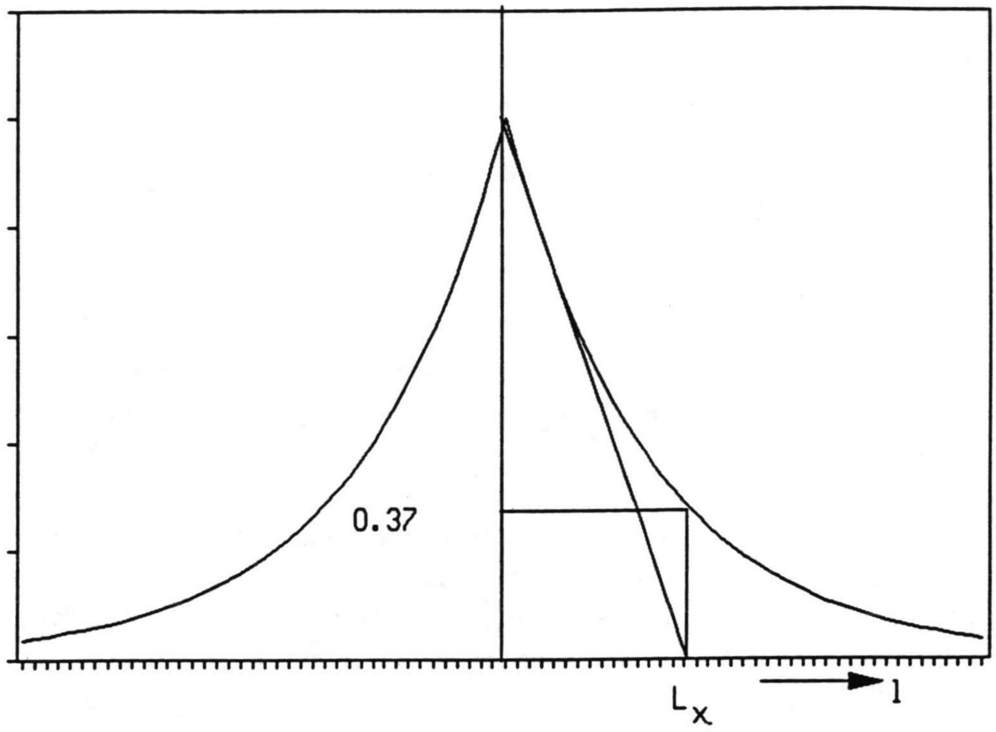
In het onderstaande volgt een eenvoudig voorbeeld van een stapvormig proces dat de ergodische eigenschap bezit. Een proces x(l) heeft op elke willekeurige plaats een amplitude x, die te beschouwen is als een trekking uit een willekeurige kansverdeling F(x) met gemiddelde μ en variantie σ^2. Op willekeurige plaatsen, die verdeeld zijn volgens een Poissonproces met intensiteit υ treedt een plotselinge verandering op in de amplitude. Voor een Poissonproces geldt dat het interval zo klein is dat een gebeurtenis niet meer dan 1 maal op kan treden. Verder geldt dat de kans p op het optreden van die gebeurtenis in een bepaald interval voor alle deelintervallen hetzelfde is en dat de gebeurtenissen onafhankelijk van elkaar optreden. Het proces neemt dan een nieuwe amplitude aan uit de kansverdeling f(x), onafhankelijk van de voorgaande waarde. Tussen twee achtereenvolgende plaatsen blijft de amplitude constant. Het verloop van dit proces is weergegeven in figuur 3.2.

Voor het bepalen van de autocorrelatiefunctie $\varphi_{xx}(l_1, l_2)$ dient onderscheid gemaakt te worden tussen de gevallen waarbij in het interval $[l_1,l_2]$ wel en waarbij in het interval $[l_1,l_2]$ geen veranderingen optreden. Als er geen verandering optreedt is $x(l_2)$ gelijk aan $x(l_1)$; treedt er wel een verandering op, dan is $x(l_2)$ onafhankelijk van $x(l_1)$. Wordt de kans dat geen verandering optreedt gelijkgesteld aan p, dan geldt:

$$\varphi_{xx}(l_1\ ,l_2) = E_x[x(l_1)\ x(l_2)] = pE_x[(x^2(l_1)]+(1-p)E_x[x(l_1)]E_x[(l_2)]$$

$$= p(\mu_x^2 + \sigma_x^2) + (1-p)\mu_x^2 = p\sigma_x^2 + \mu_x^2 \tag{3.12}$$

Volgens het Poissonproces geldt voor de kans dat geen verandering optreedt in het interval (l_1,l_2):



figuur 3.3: correlatiefunctie en de grafische bepaling van de correlatielengte

$$p = e^{-\nu(l_2 - l_1)} \quad als \ l_2 > l_1$$

$$p = e^{-\nu(l_1 - l_2)} \quad als \ l_1 > l_2 \tag{3.13}$$

zodat voor de correlatiefunctie geldt:

$$\varphi_{xx}(l_1,l_2) = \sigma^2 e^{-\nu(l_2-l_1)} + \mu^2 \tag{3.14}$$

De autocorrelatiefunctie heeft dus een exponentieel verloop en is alleen afhankelijk van de afstand tussen l_1 en l_2. Voor $\mu=0$ nadert de waarde naar nul als l_2-l_1 groter wordt, met andere woorden: de samenhang wordt dan steeds kleiner. Vergelijking (3.14) heeft dan (namelijk als $\mu_x=0$) twee parameters, namelijk de variantie σ^2_x en υ. Meestal wordt in plaats van de parameter υ de reciproke ingevuld; dit wordt de correlatielengte L_x genoemd. De formule luidt dan:

$$\varphi_{xx}(l_2-l_1) = \sigma_x^2 e^{\frac{-|l_2-l_1|}{L_x}} \tag{3.15}$$

De correlatielengte is een maat voor de snelheid waarmee het proces varieert. Als l_2-l_1 groter wordt dan L_x, wordt de correlatiefunctie kleiner dan de fractie $e^{-1} \approx 0,37$ van de variantie, oftewel als l_2-l_1=L_x wordt het proces nagenoeg onafhankelijk van de uitgangswaarde. Hoe kleiner dus L_x, des te sneller varieert het proces. In het voorbeeld van figuur 3.2 is dit eenvoudig in te zien; omdat υ het gemiddeld aantal sprongen per lengte-eenheid is (want υ is de intensiteit van het Poissonproces waarbij een verandering optreedt), is L_x de gemiddelde afstand tussen twee opeenvolgende sprongen gedurende welke het proces constant blijft. Grafisch kan de ligging van L_x gevonden worden als het snijpunt van de raaklijn aan de correlatiefunctie in het punt l_2-l_1=0 met de lengte-as, zoals in figuur 3.3 is aangegeven. De grafische bepaling van L_x is hetzelfde als de bovenstaande manier (waarbij uit gegaan wordt van nagenoeg onafhankelijk voor een correlatiefunctie kleiner dan e^{-1}) omdat de afgeleide van de correlatiefunctie in het punt l_2-l_1=0 gelijk is aan $-\sigma_x^2/L_x$.

Wanneer aan de ergodische voorwaarde voldaan is en het proces over een zeer grote lengte optreedt, kan verondersteld worden dat deze lengte in een groot aantal deelintervallen verdeeld is. Het verloop van het proces in elk van deze intervallen zal dan nagenoeg onafhankelijk zijn van het verloop in de overige intervallen. Met andere woorden: het verloop van een enkel langdurig proces kan beschouwd worden als een reeks van onafhankelijke trekkingen. Deze gedachte ligt ten grondslag aan de exacte oplossing zoals beschreven in §2.3.3. Het berekeningsresultaat gaf zelfs voor kleine en weinig verschillende standaardafwijkingen van de sterkte verschillende uitkomsten. Dit gaf aan dat het lengte-effect zelfs bij een betrekkelijk kleine spreiding van de dijkvakhoogte niet verwaarloosbaar is. Op een mogelijke verklaring hiervoor en op het vermoeden dat een beschrijving van de dijkhoogte door een ergodisch proces niet volledig is, wordt teruggekomen in §3.7.5.

3.6 Normaal verdeelde processen

Er wordt van normaal verdeelde processen gesproken als de multidimensionale kansverdeling van $x(l_1)$, $x(l_2)$, ...$x(l_n)$ een multinormale verdeling is voor alle waarden van l_1, l_2, ...l_n. Wanneer eenvoudshalve wordt aangenomen dat de verwachtingswaarden $E[x(l)]=0$ voor alle l dan blijkt de multinormale verdeling volledig bepaald te zijn door de covariantiematrix M. Hierin geeft het element m_{ij} de covariantie aan tussen $x(l_i)$ en $x(l_j)$ (i,j=1,2...n) en voor i=j gaat dit over in de variantie van $x(l_j)$. In formule:

$$m_{ij} = E[x(l_i)x(l_j)] = \varphi_{xx}(l_i,l_j) \tag{3.16}$$

In het stationaire geval is alleen de waarde $\lambda=l_i-l_j$ relevant en hieruit volgt: de statistische eigenschappen van stationaire, normaal verdeelde processen met gemiddelde nul zijn volledig bepaald door de autocorrelatiefunctie. Deze bevat dus alle statistische informatie over het verloop van een dergelijk proces. Voor de tweedimensionale verdeling geldt dan:

$$var[x(l)] = var[x(l+\lambda)] = \varphi_{xx}(0) \tag{3.17}$$

en:

$$\rho = \frac{E[x(l)x(l+\lambda)]}{\sqrt{var[x(l)]var[x(l+\lambda)]}} = \frac{\varphi_{xx}(\lambda)}{\varphi_{xx}(0)} \tag{3.3),(3.18}$$

Ingevuld in de formule van de tweedimensionale verdeling geeft dit:

$$f(x_1,x_2;\lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varphi_{xx}^2(0)-\varphi_{xx}^2(\lambda)}}\exp(-\frac{\varphi_{xx}(0)}{2[\varphi_{xx}^2(0)-\varphi_{xx}(\lambda)]}[x_1^2-2x_1x_2\frac{\varphi_{xx}(\lambda)}{\varphi_{xx}(0)}+x_2^2]) \tag{3.19}$$

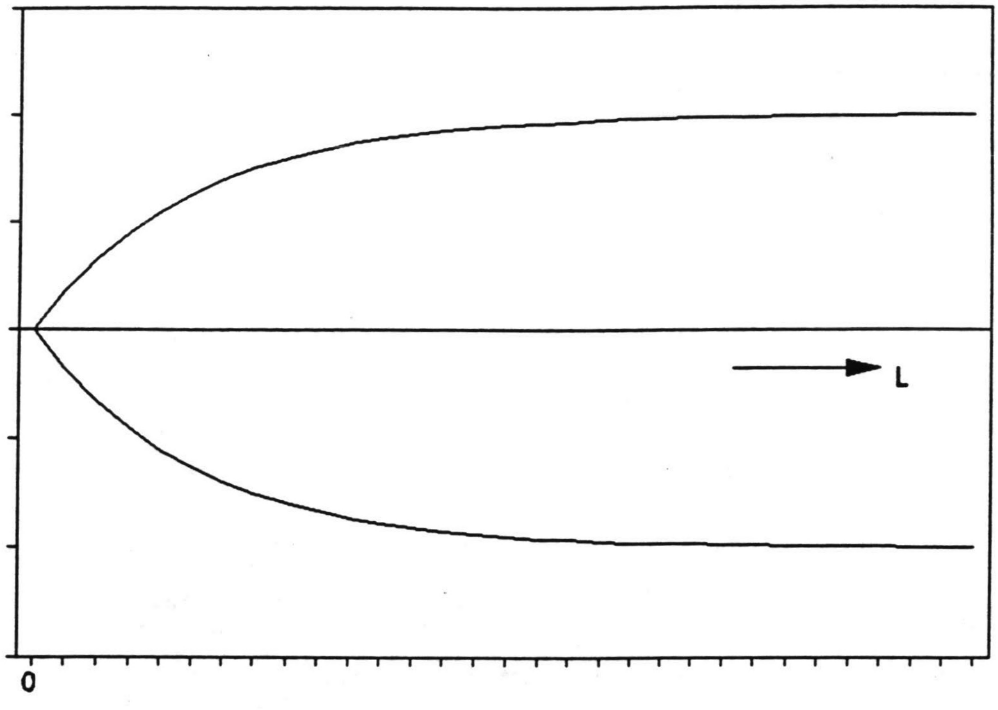
Hierin heeft x_1 betrekking op een willekeurige plaats l en x_2 op $l+\lambda$. De voorwaardelijke verwachting van x_2 functie van de onafhankelijke variabele x_1 (dit is de regressiefunctie van x_2 als functie van x_1) is dan gelijk aan:

$$E[x_2|x_1] = \frac{\varphi_{xx}(\lambda)}{\varphi_{xx}(0)}x_1 \tag{3.20}$$

en de variantie van deze voorwaardelijke verwachting luidt:

$$var(x_2|x_1) = \varphi_{xx}(0)(1-\frac{\varphi_{xx}^2(\lambda)}{\varphi_{xx}^2(0)}) = \sigma_x^2(1-\rho^2) \tag{3.21}$$

Onder de voorwaarde dat de hoogte van een dijk beschreven kan worden als een stationair, normaal verdeeld proces met ergodische eigenschap, is het verloop van de variantie dus bekend. Wanneer voor de correlatiecoëfficiënt de in de literatuur veel gebruikte negatieve e-macht gekozen wordt:



figuur 3.4: het verloop van de voorwaardelijke variantie als functie van λ

$$\rho = e^{-\frac{\lambda}{L_x}} \tag{3.22}$$

dan geeft figuur 3.4 het verloop van de voorwaardelijke variantie als functie van λ.

3.7 Controle van het model

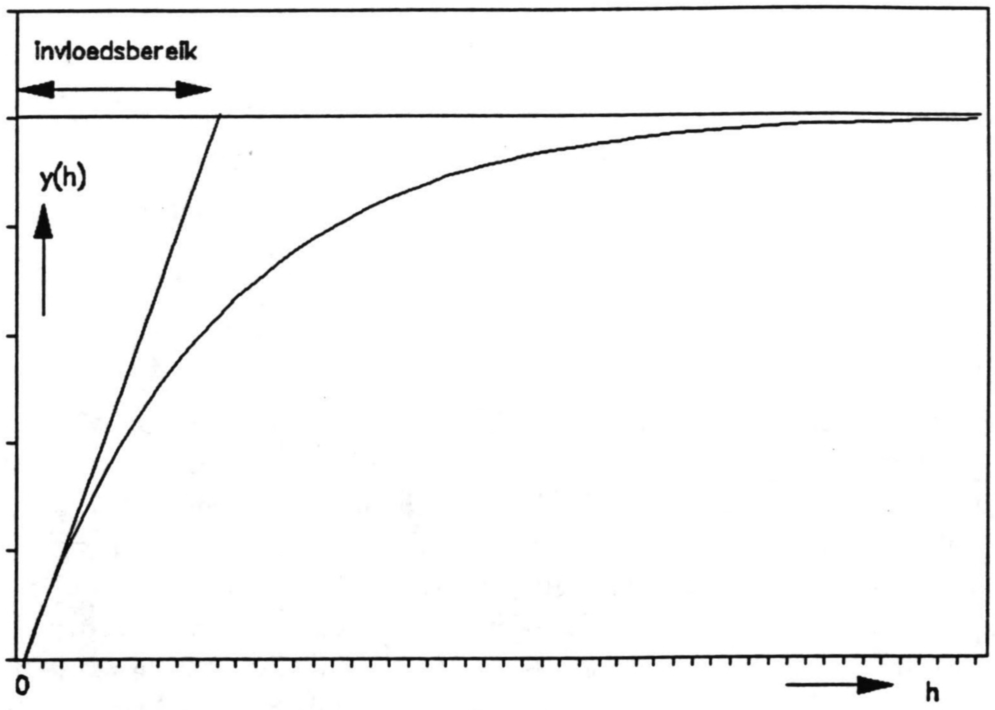
3.7.1 Inleiding

In de vorige paragrafen is een model afgeleid dat het verloop van de variantie van de kansverdeling van de hoogte als functie van de lengte van een dijk beschrijft. Dit model kan gecontroleerd worden aan de hand van het rapport "Statistische karakterisering van gemeten fluctuaties van dijkhoogten" (concept). Dit rapport beschrijft analyses uitgevoerd op hoogtemetingen van dijkskruinen op trajecten langs de Westerschelde. Deze hoogtemetingen zijn uitgevoerd door de meetkundige dienst van de DWW. Ed Calle van Grondmechanica Delft heeft deze gegevens statistisch geanalyseerd door onder andere een experimenteel semi-variogram te bepalen. Vervolgens is er een theoretisch variogram door het experimentele variogram gefit. Om te analyseren of het theoretische variogram voldoet is gebruik gemaakt van de techniek die bekend staat onder de naam "cross-validation". Dit is een techniek die neerkomt op het voorspellen van bekende data met behulp van het theoretische model. Het verschil tussen de gemeten en de voorspelde waarden is dan een maat voor de nauwkeurigheid van het theoretische model. Bij het bepalen van het theoretische model is uiteraard geen gebruik gemaakt van het gedeelte van de data dat voorspeld zou worden. Door cross-validation voor alle data uit te voeren kan gecontroleerd worden of het model een goede schatter voor de waarden is. Op deze techniek zal hier verder niet worden ingegaan. Wel zal, voordat de resultaten van het onderzoek gepresenteerd en vergeleken worden, in de volgende paragraaf worden ingegaan op de techniek waarmee de analyses uitgevoerd zijn: de variogramanalyse.

3.7.2 Semi-variogramanalyse

De semi-variogramanalyse komt oorspronkelijk uit de mijnbouwkunde. Daar was karakterisering van ruimtelijke correlatie van ertsgradaties nodig ten behoeve van het maken van voorspellingen omtrent de te verwachten ertsinhoud (en de spreiding ervan) van een te ontginnen blok in een ertshoudende afzetting. In het volgende zal een variogramdefinitie gegeven worden voor een één-dimensionale stochastische grootheid.

Voor twee numerieke waarden, $z(x)$ en $z(x+h)$, op de plaatsen x en $x+h$ wordt de variabiliteit tussen deze twee waarden gekarakteriseerd door de variogramfunctie $2\gamma(x,h)$. De variabiliteit is



figuur 3.5: bepaling van het invloedsbereik door de raaklijn aan het variogram

hierbij gedefinieerd als de verwachting van de gekwadrateerde verschillen tussen twee metingen. Deze variogramfunctie is gedefinieerd als de verwachting van de random variabele $[Z(x)-Z(x+h)]^2$ oftewel:

$$2\gamma(x,h) = E\{[Z(x) - Z(x+h)]^2\} \tag{3.23}$$

In z'n algemeenheid is dit variogram $2\gamma(x,h)$ een functie van zowel het punt x als de afstand h. De schatting van dit variogram vereist dus meerdere realisaties, $[z_k(x), z_k(x+h)]$, $[z_{k'}(x), z_{k'}(x+h)],\ldots,[z_{k''}(x), z_{k''}(x+h)]$, van het paar random variabelen $[Z(x),Z(x+h)]$. In de praktijk is er slechts één zo'n realisatie $[z(x),z(x+h)]$ voorhanden, en wel het gemeten stel waarden op de punten x en x+h. Om dit probleem te omzeilen, wordt de intinsieke hypothese geïntroduceerd. Deze hypothese zegt dat de variogramfunctie $2\gamma(x,h)$ alleen afhankelijk is van de afstand h en niet van de plaats x. (Dit kan vergeleken worden met de van de plaatsparameter onafhankelijke verwachtingswaarde en variantie bij een stationair proces, zie §3.4.) Het is nu mogelijk het variogram $2\gamma(h)$ te schatten uit de data. Een schatter $2\gamma^*(h)$ is het rekenkundig gemiddelde van de gekwadrateerde verschillen tussen twee metingen $[z(x_i),z(x_i+h)]$ op twee punten op de afstand h, in formule:

$$2\gamma^*(h) = \frac{1}{N(h)}\sum_{i=1}^{N(h)}[z(x_i)-z(x_i+h)]^2 \tag{3.24}$$

waarin N(h) is het aantal paren $[z(x_i),z(x_i+h)]$ op afstand h. Formule (3.24) wordt het experimentele variogram genoemd.

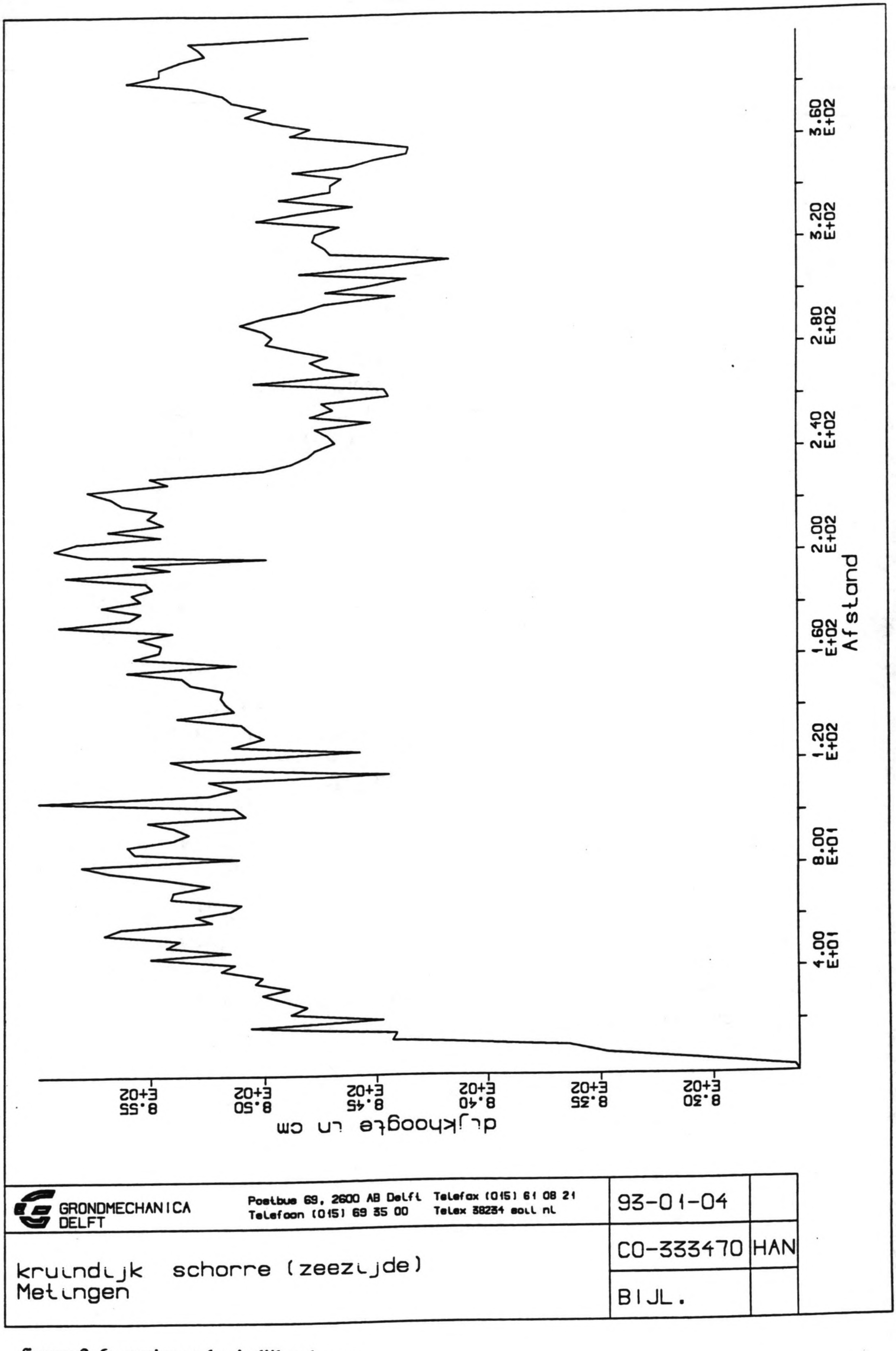
De intinsieke hypothese is de hypothese van tweede orde stationariteit van de verschillen $[Z(x)-Z(x+h)]$. Fysisch betekent dit dat de variabiliteit tussen twee waarden z(x) en z(x+h) constant is en daarmee onafhankelijk van x. Indien z(h) een zwak stationair proces is, dat wordt gekarakteriseerd door een verwachtingswaarde μ_z, een variantie σ_z^2 en een autocorrelatiefunctie $\varrho_z(h)$, dan is de relatie tussen het variogram en deze parameters:

$$\gamma(h) = \sigma^2(1-\rho(h)) \tag{3.25}$$

Wanneer de autocorrelatiefunctie uitdempt tot nul bereikt het semivariogram een constante waarde onafhankelijk van h, de zogenaamde sill-variantie, gelijk aan σ_z^2. Uit het semi-variogram kan het invloedsbereik geschat worden. Het invloedsbereik is die waarde van de afstand tussen twee punten waarbij nog substantiële onderlinge correlatie aanwezig is. Deze afstand kan bepaald worden door de raaklijn aan het variogram in het punt h=0 door te trekken tot het punt waar deze lijn de sill-variantie snijdt, zie figuur 3.5. Dit snijpunt geeft dan de afstand die invloedsbereik genoemd wordt. (Vergelijk dit met de grafische bepaling van de correlatielengte in figuur 3.3).

3.7.3 Resultaten van het onderzoek van Grondmechanica Delft

De hoogtemetingen zijn uitgevoerd op een drietal trajecten langs de Westerscheldedijk op Zuid-



figuur 3.6: metingen kruindijk schorre

Beveland. Eén van deze metingen is weergegeven in figuur 3.6. De resultaten van de hoogtemetingen zijn ten eerste uitgezet in een histogram en in een "normal probability plot" analyse. In een "normal probability plot" worden de gegevens gesorteerd naar hoogte uitgezet tegen de cumulatieve frequentie. De cumulatieve frequentie in de plot is zodanig geschaald dat een normale verdeling een rechte lijn zal vormen. De resultaten van één traject van het histogram en de "normal probability plot" zijn gegeven in figuur 3.7. De theoretische variogrammodellen die door de experimentele variogrammen gefit zijn, zijn de volgende:
het sferische model:

$$\gamma_h = s(1{,}5(\frac{h}{a}) - 0{,}5(\frac{h}{a})^3) \quad voor\ h<a \tag{3.26}$$

$$\gamma_h = s \qquad voor\ h>a$$

en het exponentiële model:

$$\gamma_h = s(1-e^{(\frac{-3h}{a})}) \tag{3.27}$$

waarin:

	γ_h=	semivariantie volgens het model
	s=	sill
	h=	lag-waarde (afstand tussen twee punten waarvoor de semivariantie geldt)
	a=	invloedsbereik.

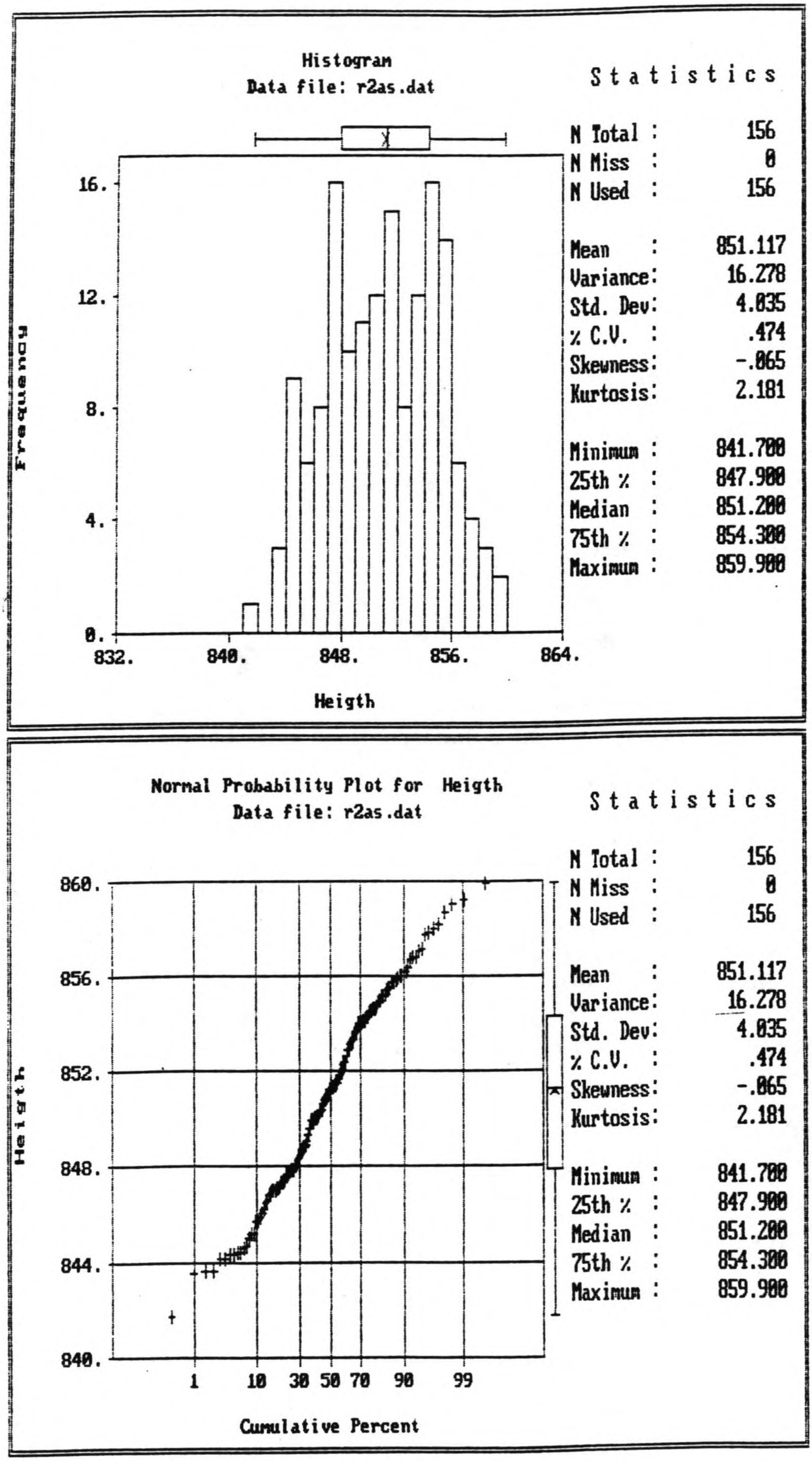
Met behulp van de cross validation techniek is onder andere het volgende resultaat gevonden: de sill = 20 cm^2 en de invloedslengte = 50 m. In formule (3.27) ingevuld geeft dit:

$$\gamma_h = 20(1-e^{(\frac{-3h}{50})}) \tag{3.28}$$

In de conclusie van het rapport wordt gesteld dat de hoogteligging van de kruin van de dijk niet alleen gekarakteriseerd kan worden door een amplitude van fluctuaties (sill) en een snelheid van fluctuaties (invloedslengte). Er zijn op de beschouwde dijktrajecten duidelijke veranderingen in dijkhoogten waar te nemen die niet aan onnauwkeurigheden toe te schrijven zijn. Wat precies de aard van die variaties is, is met deze hoeveelheid metingen niet te zeggen. (Hierop wordt nog teruggekomen in §3.7.5). Voor de duidelijk onbedoelde relatief kleine veranderingen wordt een invloedslengte van 40-60 m gevonden en een sill van 16-20 cm^2. In figuur 3.8 is een van de semi-variogrammen weergegeven.

3.7.4 Vergelijking van het semi-variogram met het statistische model voor de kruinhoogte

Nadere beschouwing van het exponentiële model voor de variogramanalyse en de formules (3.21) en (3.22) geeft sterke overeenkomsten te zien voor wat betreft de vorm van beide functies. Formule (3.22) ingevuld in (3.20) geeft:



figuur 3.7: histogram en normal probability plot

$$var(x_2|x_1) = \sigma^2(1-e^{(\frac{-2\lambda}{L_x})}) \tag{3.29}$$

en het exponentiële model voor het theoretische variogram heeft als formule:

$$\gamma_h = s(1-e^{(\frac{-3h}{a})}) = \sigma^2(1-e^{(\frac{-3h}{a})}) \tag{3.30}$$

Het enige verschil tussen beide modellen wordt gevormd door een constante factor in de correlatielengte.

In het statistische model voor de kruinhoogte is in §3.6 een normale verdeling aangenomen voor de kruinhoogte. Uit de resultaten van de normal probability plot (zie figuur 3.7) blijkt dat deze aanname op het eerste gezicht niet onjuist is. Het derde centrale moment van de data is praktisch nul (een derde moment van nul betekent een symmetrische verdeling). Het vierde centrale moment dat de slankheid van de kansverdeling weergeeft is 2.18. Dit betekent een vrij platte, weinig gepiekte verdeling. Dit komt niet zo goed overeen met de normale verdeling, welke een vierde moment van 3 heeft.

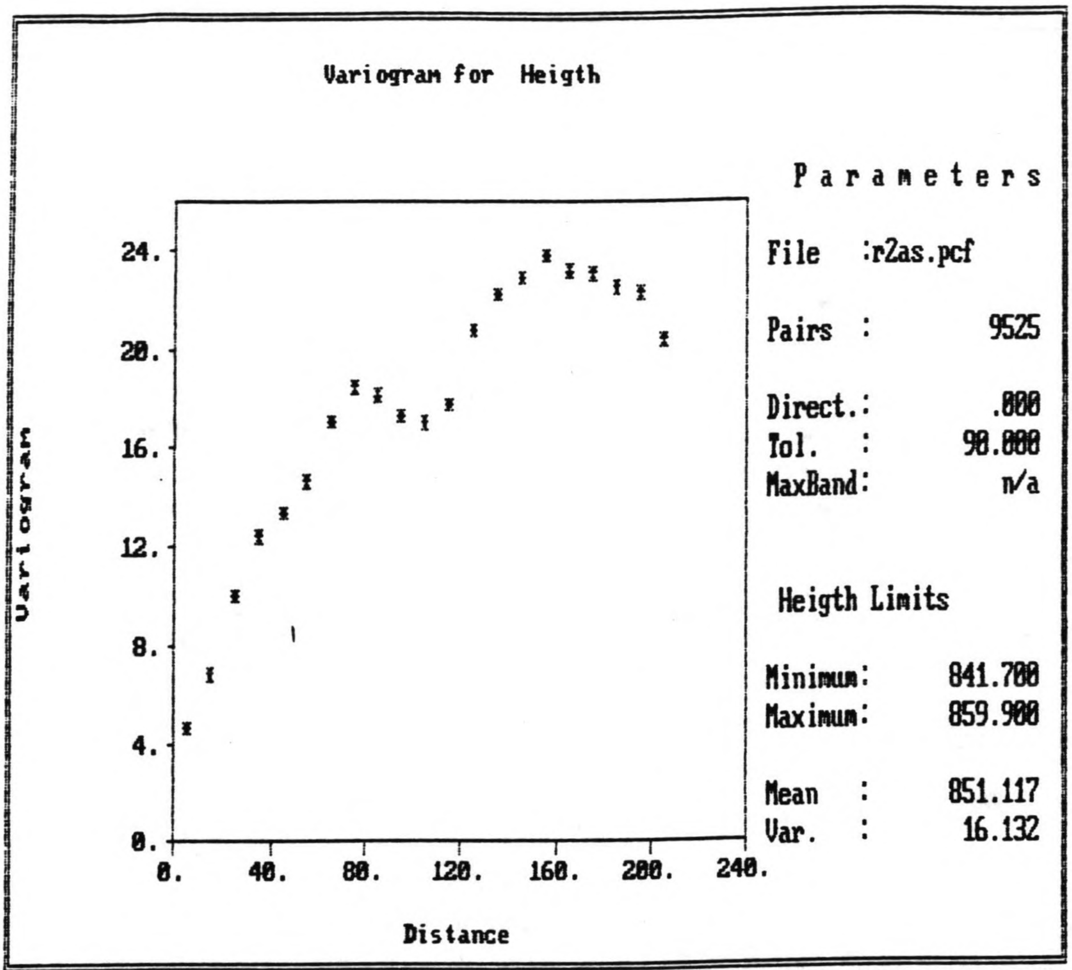
3.7.5 Periodiciteit in het proces

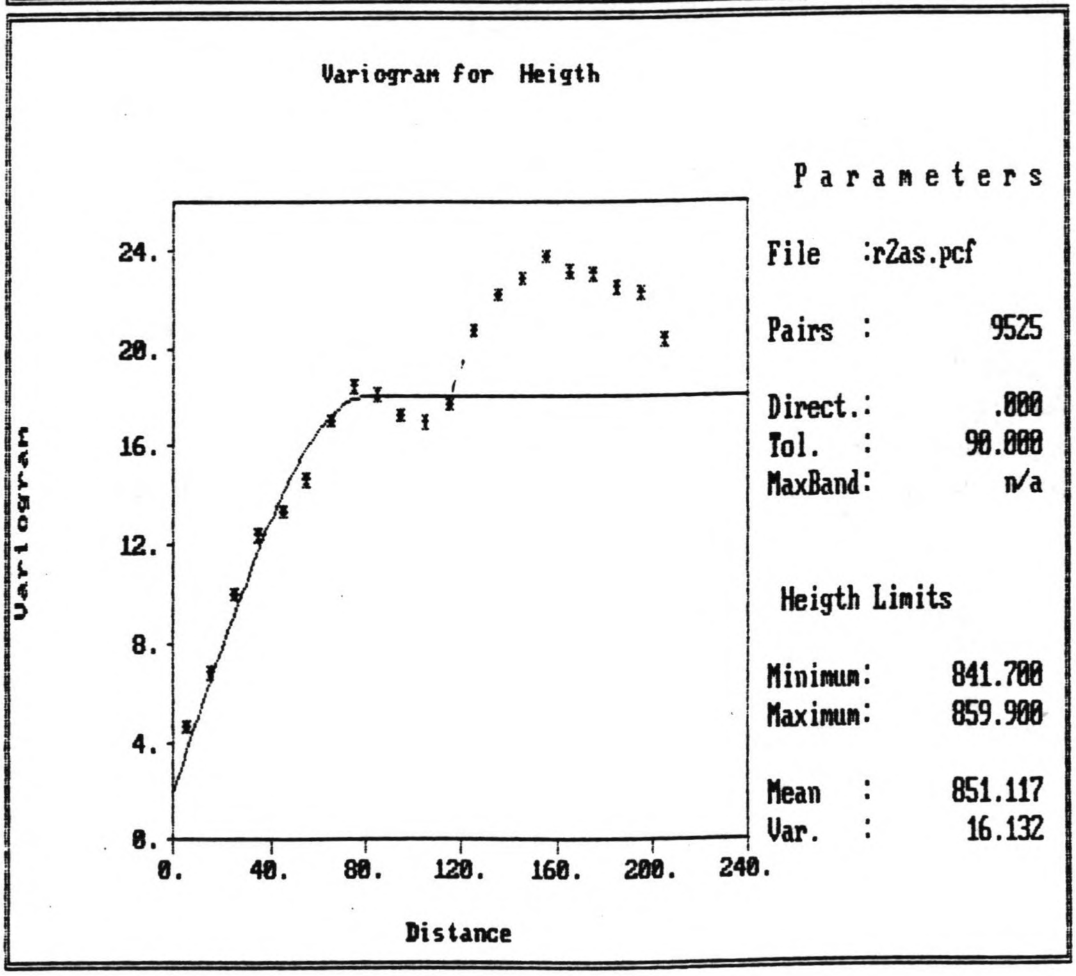
In deze paragraaf zal worden teruggekomen op de duidelijk waarneembare, maar niet verklaarde variaties in de dijkhoogten (zie figuur 3.6). Van deze variaties zegt Grondmechanica Delft: "zo op het oog zit er over de fluctuaties nog een of andere golfbeweging, maar het aantal waarnemingen is te klein om daar een uitspraak over te doen". Vooropgesteld wordt dat in deze paragraaf deze stelling niet tegengesproken zal worden. De golfbeweging zal slechts gebruikt worden om te laten zien dat het werken met een correlatiefunctie als functie van λ tot inzichtelijker resultaten kan leiden dan het werken met een theoretisch semi-variogram als functie van λ.

Er wordt verondersteld dat het stochastische proces dat de hoogte van een dijk beschrijft bestaat uit een (ergodische) niet-periodieke component en een periodieke component. Om dit stochastische proces te begrijpen moet er bedacht worden dat dit proces dan dus bestaat uit twee processen, die in hun onderlinge relatie beschouwd moeten worden. Om deze onderlinge relatie in rekening te brengen dient er gewerkt te worden met de kruiscorrelatiefunctie en een gemiddelde van nul. Met behulp van de kruiscorrelatiefunctie zal nu eerst de correlatiefunctie van een samengesteld proces afgeleid worden uit de eigenschappen van de deelprocessen. Stel dat het proces z(l) dat de hoogte van een dijk beschrijft gelijk is aan:

$$z(l) = x(l) + y(l) \tag{3.31}$$

Voor de autocorrelatiefunctie geldt dan (zie ook (3.1)):





figuur 3.8: variogram

$$\varphi_{zz}(\lambda) = E[z(l)z(l+\lambda)]$$

$$= E\{[x(l)+y(l)][x(l+\lambda)+y(l+\lambda)]\}$$

$$= E[x(l)x(l+\lambda)] + E[y(l)y(l+\lambda)] + E[x(l)y(l+\lambda)] + E[y(l)x(l+\lambda)]$$

$$\varphi_{zz}(\lambda) = \varphi_{xx}(\lambda) + \varphi_{yy}(\lambda) + \varphi_{xy}(\lambda) + \varphi_{xy}(-\lambda) \tag{3.32}$$

Voor $\lambda=0$ geeft (3.32) de variantie van z(l) en gaat de formule over in:

$$\varphi_{zz}(0) = \varphi_{xx}(0) + \varphi_{yy}(0) + 2\varphi_{xy}(0) \tag{3.33}$$

Dit is hetzelfde als de optelregel van varianties.

Wanneer x(l) en y(l) onderling ongecorreleerd zijn, is de kruiscorrelatie voor elke λ gelijk aan nul en gaat (3.32) over in:

$$\varphi_{zz}(\lambda) = \varphi_{xx}(\lambda) + \varphi_{yy}(\lambda) \tag{3.34}$$

In woorden: de correlatiefunctie van de som van onafhankelijke processen is gelijk aan de som van de correlatiefuncties van de afzonderlijke processen. Van deze eigenschap zal in het volgende gebruik gemaakt worden. Voor de correlatiefunctie van de (ergodische) niet-periodieke component wordt weer uitgegaan van de negatieve e-macht. Voor de periodieke component wordt uitgegaan van een sinusvormig proces:

$$x(l) = A\sin\omega(l+l_0) \tag{3.35}$$

Dit is een zuiver periodiek proces dat zich na elke periode $2\pi/\omega$ op identieke wijze herhaalt. De variantie van dit proces luidt:

$$var[x(l)] = E[x^2(l)] = A^2\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2\omega(l+l_0)\frac{1}{2\pi/\omega}dl_0 = \frac{1}{2}A^2 \tag{3.36}$$

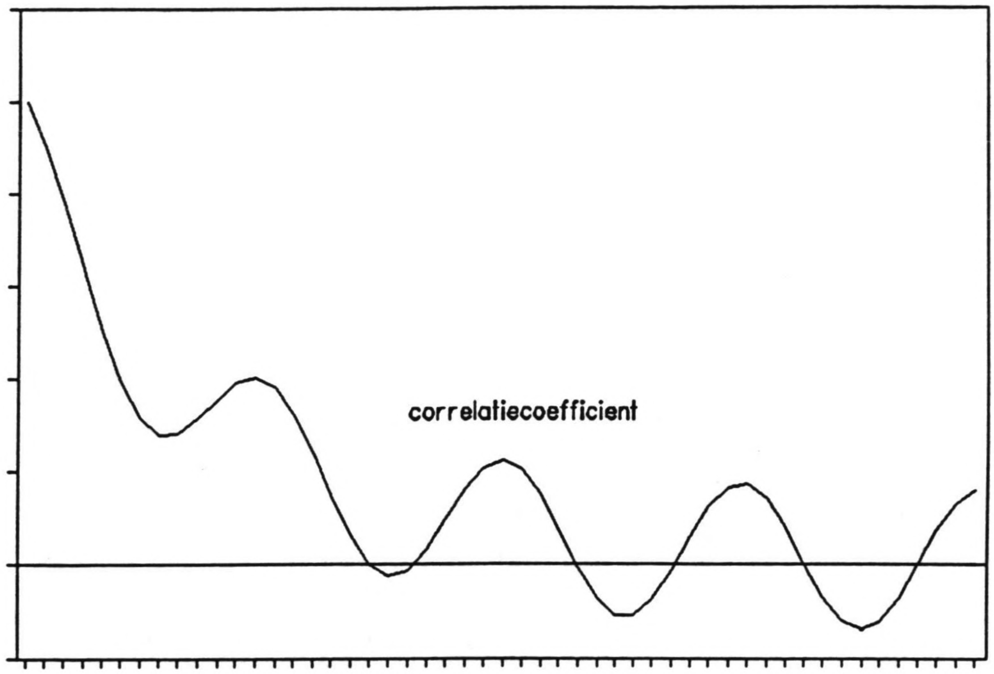
en de autocorrelatiefunctie van dit proces luidt:

$$\varphi_{xx}(\lambda) = E[A\sin\omega(l+l_0)A\sin\omega(l+l_0+\lambda)]$$

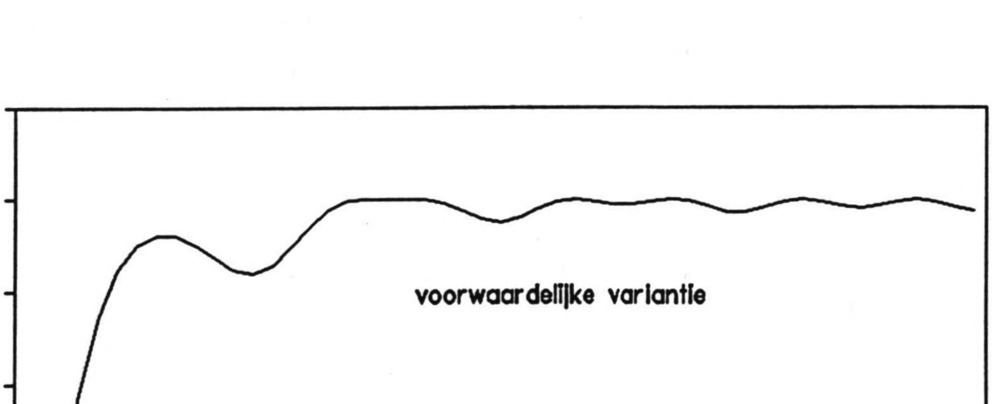
$$= A^2\int_0^{2\pi/\omega} \sin\omega(l+l_0)\sin\omega(l+l_0+\lambda)\frac{1}{2\pi/\omega}dl_0$$

$$= \frac{A^2\cos\omega\lambda}{2} \tag{3.37}$$

De correlatiefunctie van een sinusvormig proces is dus eveneens sinusvormig met dezelfde periodelengte als het proces zelf. Wanneer er vanuit gegaan wordt dat het stochastische proces dat de hoogte van een dijk beschrijft, uit een (ergodische) niet-periodieke component en een periodieke component bestaat die onafhankelijk zijn, dan kan de correlatiecoëfficiënt geschreven



figuur 3.9: correlatiecoëfficiënt bestaande uit een periodieke en een niet-periodieke component



figuur 3.10: de voorwaardelijke variantie als functie van λ

worden als:

$$\rho = \frac{\sigma^2 e^{-\frac{\lambda}{L_x}} + \frac{1}{2}A^2\cos\omega\lambda}{(\frac{1}{2}A^2 + \sigma^2)} \tag{3.38}$$

Deze formule is weergegeven in figuur 3.9. Om de correlatiecoëfficiënt te vergelijken met het semi-variogram van figuur 3.8 wordt (3.38) ingevuld in de formule van de voorwaardelijke variantie (3.21). Dit geeft:

$$var(x_2|x_1) = \sigma^2(1-\rho^2) \tag{3.21}$$

Dit resultaat is weergegeven in figuur 3.10. In de figuren 3.9 en 3.10 is te zien dat de negatieve e-macht niet meer dan een ruiscomponent is in het totale proces. Deze niet-periodieke component sterft voor voldoende grote λ uit en de periodieke component blijft over. Op deze manier is het dus mogelijk aan de hand van de correlatiefunctie de periodiciteit die in een proces verborgen zit, op te sporen.

Wanneer er voldoende waarnemingen beschikbaar zouden zijn om een periodiciteit in het proces aan te tonen, dan geeft het werken met correlatiefuncties een inzichtelijker resultaat dan wanneer er in het theoretische variogrammodel van (3.26) of (3.27) een periodieke component ingebracht wordt.

4 Lengte-effect in de sterkte

4.1 Inleiding

In hoofdstuk 3 is uit de gemeten hoogten van de dijkskruinen van drie trajecten langs de Westerschelde duidelijk geworden dat de kansdichtheidsfunctie voor de hoogte van een dijk redelijk voldoet aan de klokvorm van de normale verdeling. De klokvorm is minder sterk gepiekt, en voldoet redelijk in het domein $[-2\sigma,2\sigma]$. Over het gebied buiten dit domein, de staart van de kansdichtheidsfunctie, kunnen echter geen uitspraken gedaan worden. Deze staart is echter juist het gebied dat belangrijk is bij berekeningen voor de kans op falen. Daarom zullen in dit hoofdstuk de staarten van verschillende verdelingen met elkaar vergeleken worden, om te onderzoeken of de vorm van de staart van belang is. Deze verdelingen zullen vergeleken worden door de kans op falen met behulp van de convolutieintegraal uit te rekenen in het 10^{-4} quantiel. Er zullen vijf verdelingen vergeleken worden, te weten: de uniforme-, de normale- de tweezijdig afgekapte normale-, de $\cos^2$-, en de exponentiële verdeling. Door de standaardafwijking van de sterkte te variëren zal de invloed van deze parameter op het lengte-effect onderzocht worden. Verder zal door te werken met extreme waarde verdelingen voor minima de gevoeligheid voor de correlatielengte onderzocht worden. Het zal blijken dat voornamelijk de exponentiële verdeling sterk afwijkt van de andere vier verdelingen. De eerste vier verdelingen komen redelijk met elkaar overeen. De exponentiële verdeling geeft dermate grote faalkansen dat op fysische gronden overwogen kan worden, deze te verwerpen als mogelijke verdeling voor de sterkte. Voordat met behulp van de convolutieintegraal de kans op falen uitgerekend zal worden, zullen de mogelijke verschillen van de staarten van kansdichtheidsfuncties duidelijk gemaakt worden aan de hand van een classificering.

4.2 Classificering van de staarten van een verdeling

In deze paragraaf wordt een samenvatting gegeven van het artikel "Classification of probability laws by tail behavior" door E.F. Schuster (literatuur 11). In de statistiek is het gebruikelijk om drie soorten staarten van verdelingen te onderscheiden, te weten kort, gemiddeld en lang. In de extreme waarde theorie worden deze het gelimiteerde type, het exponentiële type en het Cauchy type genoemd. In 1979 heeft Parzen een methode uitgewerkt om deze types te onderscheiden. De methode werkt als volgt: er wordt gekeken naar het resultaat van de zogenaamde dichtheids-quantielfunctie f(Q(u)) voor u naderend naar nul of één. Het gedrag van de rechterstaart van de kansdichtheidsfunctie f (of de verdeling F met quantielfunctie $Q=F^{-1}$) wordt geclassificeerd volgens de waarde van rechterstaart exponent α_0, welke intuïtief gedefinieerd is volgens:

$$f(Q(u)) \sim (1-u)^{\alpha_0} \tag{4.1}$$

De waarden van de staartexponent parameter α_0: $\alpha_0<1$, $\alpha_0=1$ en $\alpha_0>1$ corresponderen met de volgende classificering: (a) korte staart of gelimiteerde type, (b) gemiddelde staart of exponentiële type en (c) lange staart of Cauchy type.

Om de bovenstaande methode toe te lichten heb ik deze methode uitgewerkt voor de exponentiële verdeling. Voor de exponentiële verdeling geldt voor de kansdichtheidsfunctie:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \tag{4.2}$$

en voor de verdelingsfunctie:

$$F(x) = 1-e^{-\lambda x} = u \tag{4.3}$$

Omschrijven geeft:

$$e^{-\lambda x} = 1-u \leftrightarrow -\lambda x = \ln(1-u)$$

$$\leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u) = \ln(1-u)^{-\frac{1}{\lambda}} = Q(u) \tag{4.4}$$

$$\rightarrow f(Q(u)) = \lambda e^{-\lambda \ln(1-u)^{-\frac{1}{\lambda}}} = \lambda(1-u)^1 \rightarrow \alpha_0 = 1 \tag{4.5}$$

In het artikel worden nog twee formules gedefinieerd voor α_0 en α_1, respectievelijk de rechter en de linker staart exponent. Volgens de bovengenoemde methode worden zowel de normale verdeling als de exponentiële verdeling ingedeeld in de gemiddelde of exponentiële klasse. Het is echter bekend dat de exponentiële verdeling een langere rechterstaart heeft dan de normale verdeling, omdat de exponentiële verdeling als een e-macht naar nul tendeert en de normale verdeling als een e-macht in het kwadraat. Daarom is de classificatie verfijnd door de verdelingen met een gemiddelde staart verder onder te verdelen in gemiddeld-kort, gemiddeld-gemiddeld en gemiddeld-lang. In deze uit 5 klassen bestaande onderverdeling, heeft de exponentiële verdeling een langere rechterstaart dan de normale verdeling. De verdere verfijning is gemaakt met behulp van de volgende formule (voor voorwaardelijk faaltempo):

$$h(x) = \frac{f(x)}{(1-F(x))} \tag{4.6}$$

Er geldt:

$$h_1 = \lim_{u\rightarrow 1^-} \frac{(1-u)}{f(Q(u))} = \lim_{u\rightarrow 1^-} \frac{1}{h(Q(u))} \tag{4.7}$$

De verfijnde classificering geeft met formule (4.7) de volgende vijf categorieën:
$\alpha_0 < 1$: kort
$\alpha_0 = 1$, $h_1 = 0$: gemiddeld kort,
$\alpha_0 = 1$, $0 < h_1 < \infty$: gemiddeld-gemiddeld,
$\alpha_0 = 1$, $h_1 = \infty$: gemiddeld lang,
$\alpha_0 > 1$: lang

Dit geeft de volgende tabel van verdelingen met hun classificatie:

Verdeling	linkerstaart	rechterstaart
normaal	gemiddeld-kort	gemiddeld-kort
exponentieel	kort	gemiddeld-gemiddeld
Cauchy	lang	lang
uniform	kort	kort
Rayleigh	kort	gemiddeld-kort
extreme-waarde	gemiddeld-gemiddeld	gemiddeld-kort
Pareto	kort	lang
lognormaal	kort	gemiddeld-lang

tabel 4.1: classificatie van de staarten van verdelingen

4.3 De staarten van een kansdichtheidsfunctie

Om de kans op falen van een constructie uit te rekenen dienen de kansdichtheidsfuncties van de sterkte en de belasting bekend te zijn. Wanneer de betrouwbaarheidsfunctie gedefinieerd is als:

$$Z = R - S \tag{4.8}$$

waarin: R= de sterkte
S= de belasting

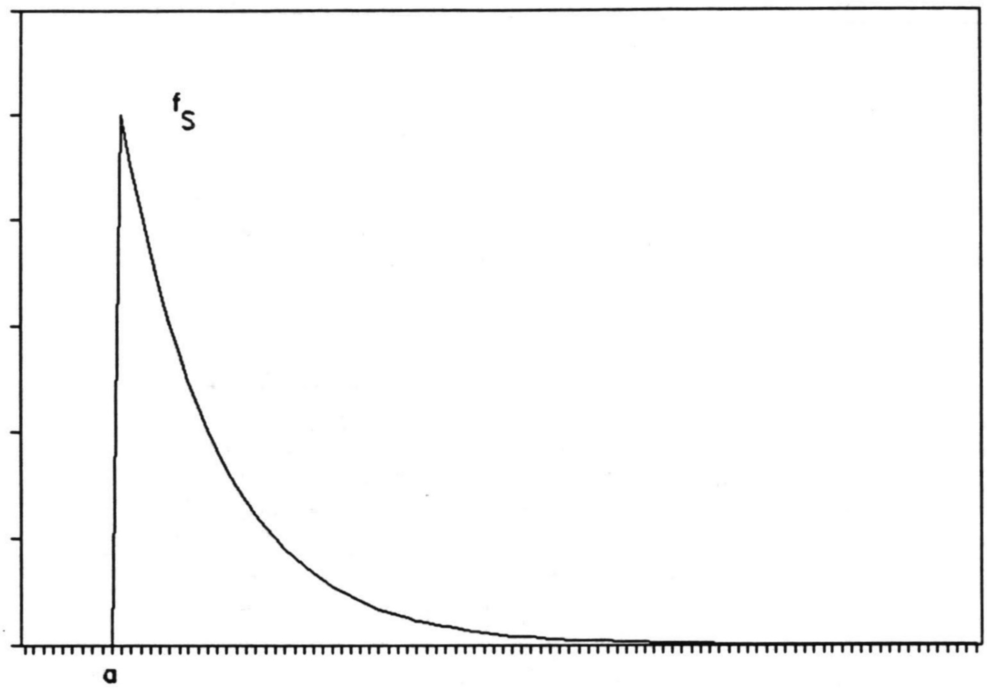
dan is de kans op falen:

$$Pr(Z<0) = \int_{-\infty}^{0} f_Z(x)dx \tag{4.9}$$

waarin: f_Z= kansdichtheidsfunctie van Z
x= integratievariabele.

Het probleem bij het bepalen van de faalkans is het feit dat de verdelingsfunctie van Z meestal niet exact te bepalen is. Toch zijn er technieken waarmee het mogelijk is om de faalkans te berekenen of te benaderen. Er geldt:

$$Pr(Z<0) = Pr(R<S) = \int_{0}^{\infty} (1-F_S(x))\, f_R(x)\; dx \tag{4.10}$$



figuur 4.1: belasting exponentieel verdeeld

waarin: $F_S =$ kansverdeling van $S = \int_{-\infty}^{x} f_S(y)\, dy$

$f_S =$ kansdichtheidsfunctie van S
$f_R =$ kansdichtheidsfunctie van R.
Voor de afleiding van deze integraal wordt verwezen naar literatuur 3.

De kansverdeling van de belasting (de hoogwaterstanden) is meestal een bekende grootheid, bepaald op basis van grote aantallen waarnemingen van extreme hoogwaterniveaus. De kansverdelingsfunctie die voor de statistische beschrijving gekozen wordt is meestal een Gumbel-verdeling of een exponentiële verdeling. De verdeling van de sterkte (de hoogte van een dijk) is onbekend. Het is redelijk om te veronderstellen dat in het domein $[-2\sigma, 2\sigma]$ de kansdichtheidsfunctie van de sterkte beschreven wordt door een normale verdeling. De histogrammen van de metingen zoals beschreven in hoofdstuk 3 gaven een redelijke overeenkomst te zien met de 'klokvorm' van de normale verdeling. Over de staart van de verdeling kunnen echter geen uitspraken gedaan worden, en dat is nu juist het gebied dat voor de kans op falen belangrijk is. Daartoe zal in dit hoofdstuk het belang van de staarten onderzocht worden. Het belang van de staarten kan onderzocht worden door de convolutieintegraal voor verschillende verdelingen voor de sterkte te bepalen. Door de uitkomsten te vergelijken wordt dan een indruk verkregen van het belang van de staart van een verdeling. Deze vergelijkingen zullen gemaakt worden voor verschillende standaardafwijkingen voor de sterkte voor verdelingen met en zonder staart en voor verdelingen met verschil in dikte in de staart.

4.4 De kansdichtheidsfunctie voor de belasting

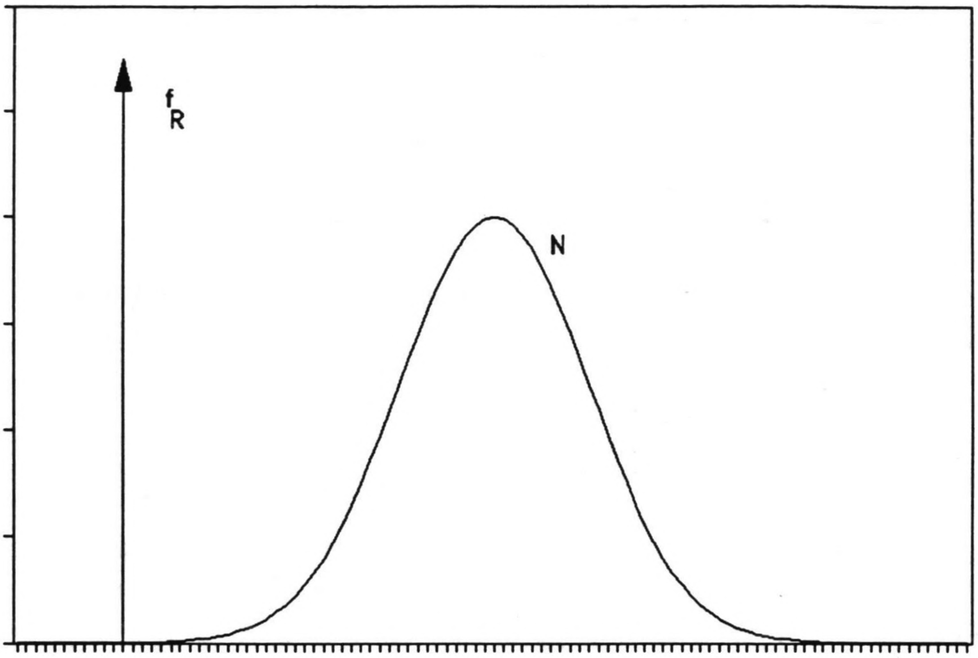
Voor de kansdichtheidsfunctie voor de belasting zal er gewerkt worden met een negatief-exponentiële kansdichtheidsfunctie. De kansdichtheidsfunctie heeft de volgende vorm (zie figuur 4.1):

$$f_S(x) = \lambda e^{-\lambda(x - a)} \qquad (4.11)$$

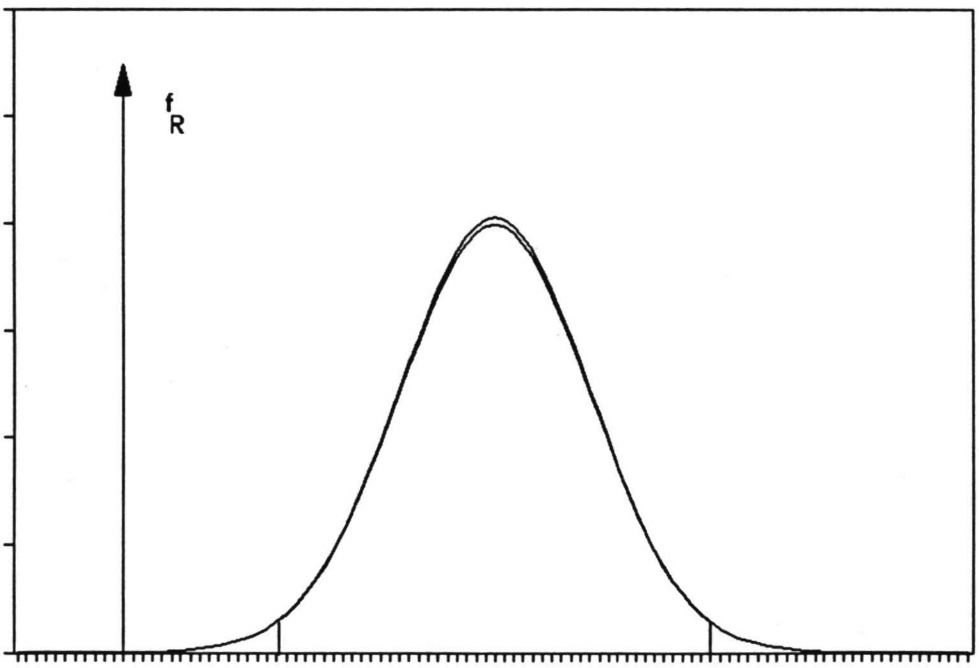
en de bijbehorende verdelingsfunctie luidt:

$$F_S(x) = 1 - e^{-\lambda(x-a)} \qquad (4.12)$$

waarin: $a + 1/\lambda =$ het gemiddelde
$1/\lambda =$ de standaardafwijking
Bij deze verdeling is a de ondergrens van de kansdichtheidsfunctie. Deze heeft de waarde 1.96 gekregen. Er is voor gekozen om met een decimeringshoogte van 0,7m te werken. Dit betekent dat elke 0,7m dijkhoogte overeenkomt met een factor 10 in faalkans. Een decimeringshoogte van 0,7m komt overeen met een nepereringshoogte van 0,7/ln(10) = 0,304m. De parameter λ heeft dan een waarde van $1/0{,}304 \approx 3{,}3$.



figuur 4.2: sterkte normaal verdeeld



figuur 4.3: normale verdeling en afgekapte normale verdeling met hetzelfde gemiddelde en standaardafwijking

4.5 De kansdichtheidsfunctie voor de sterkte

Voor de kansdichtheidsfuncties voor de sterkte zal er gewerkt worden met een normale verdeling, een tweezijdig afgekapte normale verdeling, een $\cos^2$-verdeling, een uniforme verdeling en een exponentiële verdeling. De kansdichtheidsfuncties hebben de volgende vorm:
*de normale verdeling (zie figuur 4.2):

$$f_R(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \tag{4.13}$$

*de tweezijdig afgekapte normale verdeling (zie figuur 4.3 voor tweezijdig afgekapte normale verdeling en normale verdeling ter vergelijking):

$$f_R(x) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\phi(\frac{a-\mu}{\sigma})} \quad \textit{voor } a \le x \le b, \textit{ elders } 0 \tag{4.14}$$

In deze formule geeft a de ondergrens van de verdeling en b de bovengrens van de verdeling weer.
*de $\cos^2$-verdeling (zie figuur 4.4 voor $\cos^2$ verdeling en normale verdeling ter vergelijking):

$$f_R(x) = \frac{c_1}{\sigma}(1 + \cos(c_2\frac{x-\mu}{\sigma})) \quad \textit{voor } \mu-\frac{\pi\sigma}{c_2} \le x \le \mu+\frac{\pi\sigma}{c_2}, \textit{ elders } 0 \tag{4.15}$$

waarin voor de $\cos^2$ verdeling:

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{12}-\frac{1}{2\pi^2}}$$

$$c_2 = 2\pi c_1 = \sqrt{\frac{\pi^2}{3}-2}$$

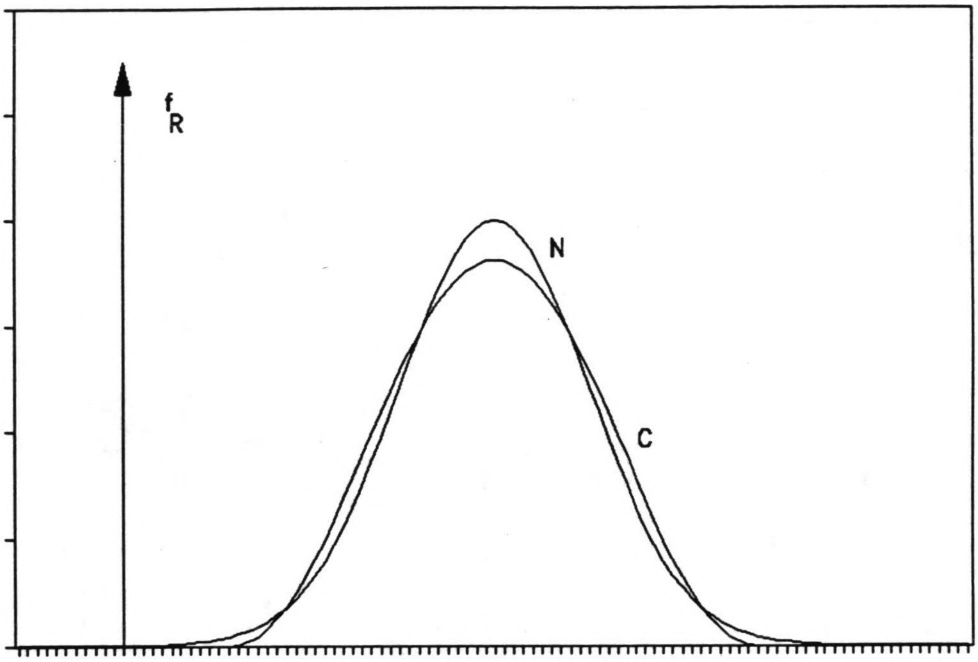
*de uniforme verdeling (zie figuur 4.5 voor uniforme verdeling en normale verdeling ter vergelijking):

$$f_R(x) = \frac{1}{b-a} \quad \textit{voor } a \le x \le b, \textit{ elders } 0 \tag{4.16}$$

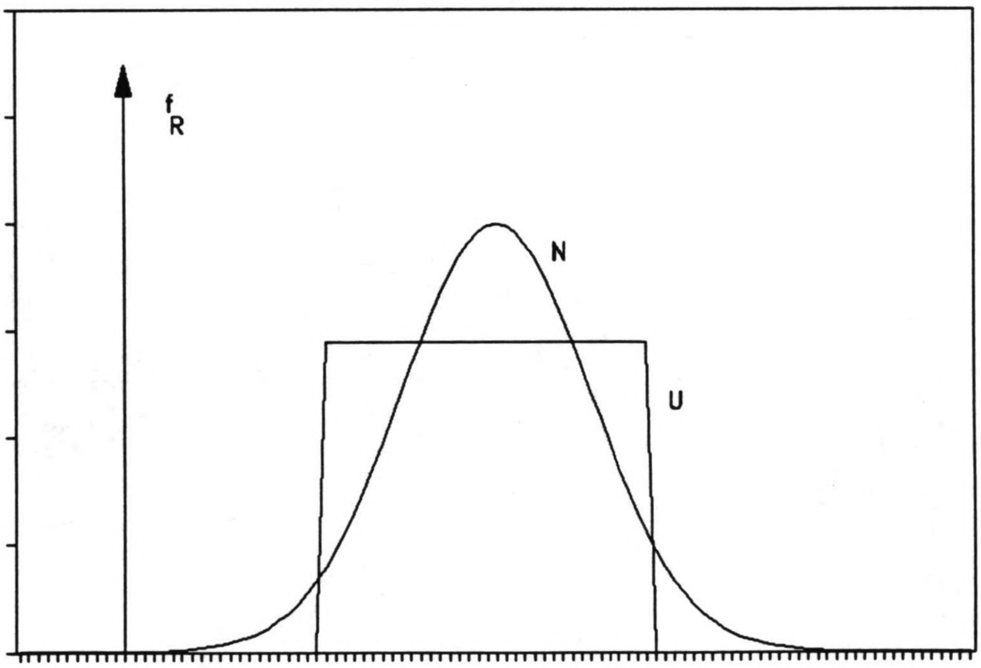
*de exponentiële verdeling (zie figuur 4.6 voor exponentiële verdeling en normale verdeling ter vergelijking):

$$f_R(x) = \lambda e^{\lambda(x-b)} \tag{4.17}$$

Omdat de $\cos^2$ verdeling waarschijnlijk onbekend is volgt hier een korte toelichting.



figuur 4.4: normale verdeling en $\cos^2$ verdeling met hetzelfde gemiddelde en standaardafwijking



figuur 4.5: normale verdeling en uniforme verdeling met hetzelfde gemiddelde en standaardafwijking

De $\cos^2$ verdeling kan door de volgende goniometrische formule omgeschreven worden tot een formule waar het kwadraat niet meer inzit:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos2\alpha) \tag{4.18}$$

Door het eerste en tweede moment van de formule (4.15) uit te rekenen en te eisen dat daar respectievelijk μ en σ uitkomen worden de waarden van de coëfficiënten c_1 en c_2 gevonden. De kansdichtheidsfunctie is symmetrisch rond het gemiddelde μ. De kansdichtheidsfunctie heeft dezelfde klokvorm als de normale verdeling maar dan minder sterk gepiekt. Het vierde centrale moment dat de welving of slankheid van een kansverdeling weergeeft bedraagt:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)^4 f(x)dx = \frac{\sigma^4\pi c_1}{c_2^{\,5}}(-8\pi^2 + 48 + \frac{2\pi^4}{5}) = 8.0\frac{\sigma^4\pi c_1}{c_2^{\,5}} \tag{4.19}$$

De gestandaardiseerde coëfficiënt γ_2 bedraagt:

$$\gamma_2 = E[(\frac{x-\mu}{\sigma})^4] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = 8.0\frac{\pi c_1}{c_2^{\,5}} \tag{4.20}$$

Invullen van de waarden van c_1 en c_2 geeft:

$$\gamma_2 = 2{,}4 \quad \text{(benadering)} \tag{4.21}$$

Ter vergelijking: de waarde van deze coëfficiënt voor de uniforme verdeling is 1,8 (exact) en voor de normale verdeling 3,0 (exact).

4.6 De convolutieintegraal voor verschillende verdelingen voor de sterkte

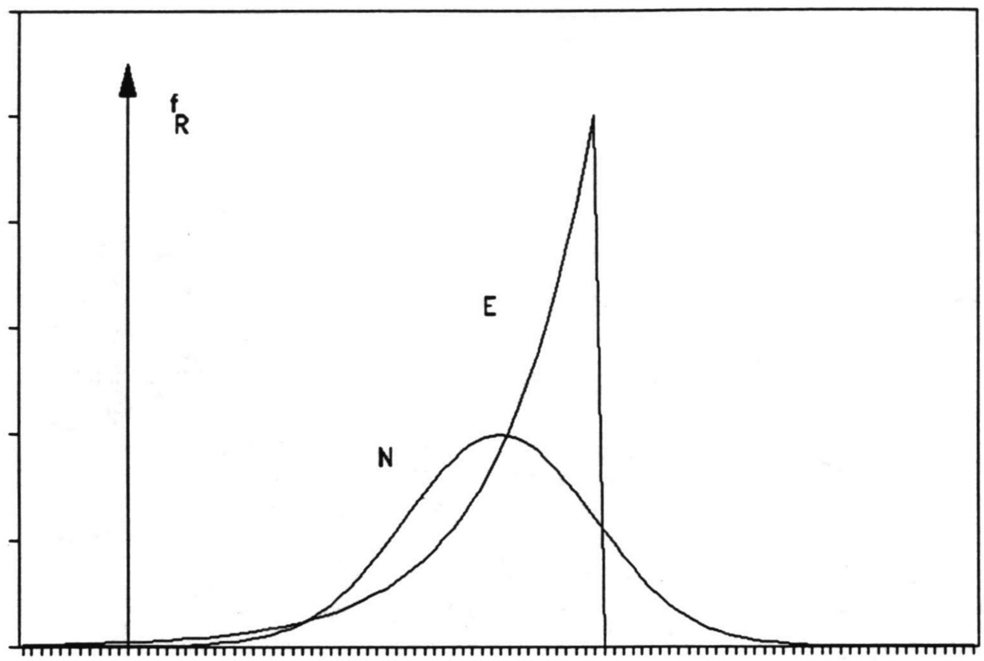
Voor een normale verdeling voor de sterkte en een negatief-exponentiële verdeling voor de belasting ziet de convolutieintegraal er als volgt uit:

$$Pr(R<S) = \int_0^{\infty}(1-F_S(r))\, f_R(r)dr \tag{4.3}$$

$$= \int_a^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\, e^{-\lambda(x-a)}dx \tag{4.22}$$

$$= \int_a^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \lambda x + \lambda a)}dx$$

Deze integraal is te schrijven als:



figuur 4.6: normale verdeling en exponentiële verdeling met hetzelfde gemiddelde en standaardafwijking

$$Pr(R<S) = e^{(\lambda a - \lambda\mu + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2})} \int_a^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-(\mu-\lambda\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dx \tag{4.23}$$

Voor verschillende waarden voor σ is nu de kans op falen uit te rekenen.

Wanneer de sterkte gekarakteriseerd wordt door een tweezijdig afgekapte normale verdeling geldt de volgende convolutieintegraal:

$$P(R<S) = \int_a^b e^{-\lambda(x-c)} \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\phi(\frac{a-\mu}{\sigma})} dx \tag{4.24}$$

Deze integraal is analytisch niet op te lossen en daarom is er numeriek geïntegreerd.

Wanneer de sterkte gekarakteriseerd wordt door een $\cos^2$ verdeling geldt de volgende convolutieintegraal:

$$Pr(R<S) = \int_{a-\frac{\pi\sigma}{c_2}}^{a+\frac{\pi\sigma}{c_2}} e^{-\lambda(x-b)}\left(\frac{c_1}{\sigma}+\frac{c_1}{\sigma}\cos(c_2\frac{x-a}{\sigma})\right)dx \tag{4.25}$$

Deze integraal kan opgelost worden door partieel te integreren tot dezelfde integraal weer gevonden wordt. De oplossing van de integraal met ingevulde grenzen ziet er als volgt uit:

$$Pr(R<S) = \frac{c_1}{\lambda\sigma}\left(e^{-\lambda(a-\frac{\pi\sigma}{c_2}-b)} - e^{-\lambda(a+\frac{\pi\sigma}{c_2}-b)}\right) + \frac{c_1\lambda\sigma}{\lambda^2\sigma^2+c_2^2}\left(e^{-\lambda(a+\frac{\pi\sigma}{c_2}-b)} - e^{-\lambda(a-\frac{\pi\sigma}{c_2}-b)}\right) \tag{4.26}$$

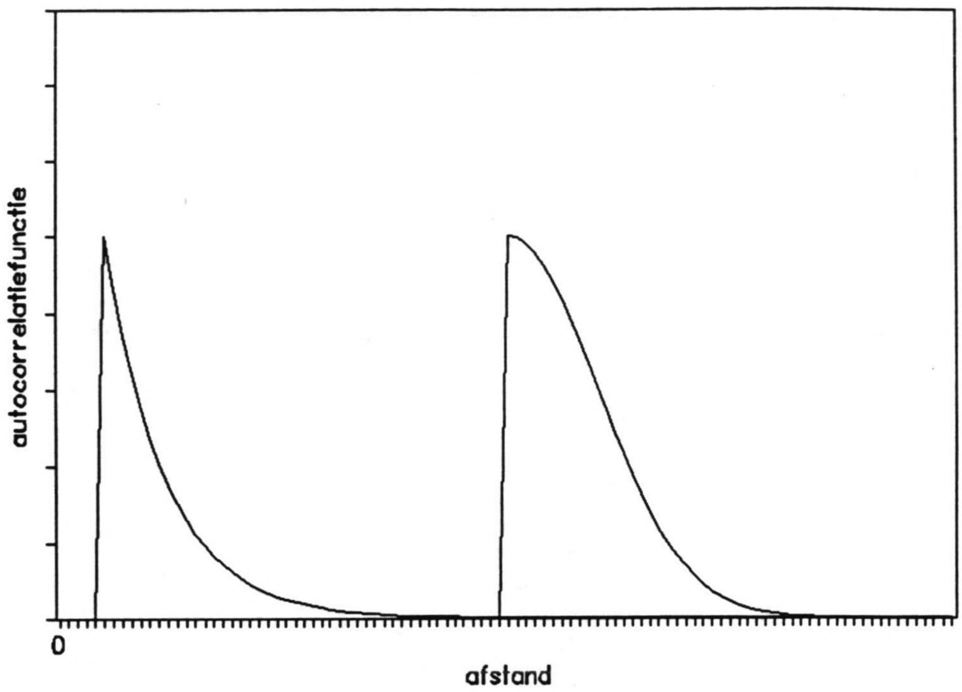
Wanneer de sterkte gekarakteriseerd wordt door een uniforme verdeling geldt de volgende convolutieintegraal:

$$Pr(R<S) = \int_0^{\infty}(1-F_S(r))\, f_R(r)dr \tag{4.3}$$

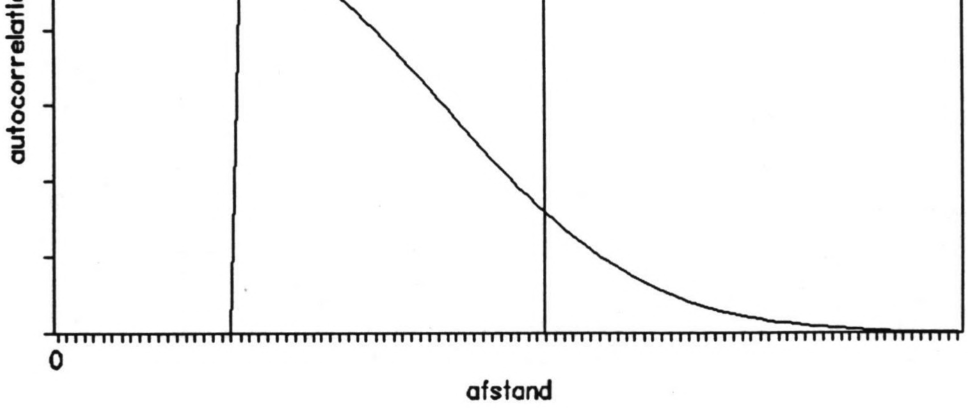
$$= \int_a^b e^{-\lambda(x-d)}\frac{1}{b-a}dx \tag{4.27}$$

Oplossen van deze integraal en invullen van de grenzen geeft:

$$Pr(R<S) = -\frac{1}{\lambda(b-a)}\left(e^{-\lambda(b-d)} - e^{-\lambda(a-d)}\right) \tag{4.28}$$



figuur 4.7: twee vormen van de autocorrelatiefunctie



figuur 4.8: schematisatie van de autocorrelatielengte

Wanneer de sterkte gekarakteriseerd wordt door een exponentiële verdeling ziet de convolutie integraal er als volgt uit:

$$Pr(R<S) = \int_b^{\infty} e^{-\lambda(x-a)}\,\gamma e^{\gamma(x-b)}dx \tag{4.29}$$

Oplossen van deze integraal en invullen van de grenzen geeft:

$$Pr(R<S) = \frac{\gamma}{\gamma-\lambda}\left(e^{\lambda(a-b)}-e^{\gamma(a-b)}\right) \tag{4.30}$$

Er lijkt een probleem te zijn voor het geval dat $\gamma=\lambda$. De integraal opnieuw uitrekenen voor dit geval geeft echter:

$$\int_a^b e^{-\lambda(x-a)}\lambda e^{\lambda(x-b)}dx = \lambda(b-a)e^{\lambda(a-b)} \tag{4.31}$$

De gegeven oplossingen van de convolutieintegralen geven de kans op falen van een dijk voor één trekking uit de kansdichtheidsfunctie voor de sterkte. In hoofdstuk 3 is duidelijk geworden dat de autocorrelatiefunctie een van de vormen heeft zoals weergegeven in figuur 4.7 waarbij de rechter figuur geldt voor een continu proces. Voor één trekking uit de kansdichtheidsfunctie voor de sterkte is de autocorrelatiefunctie dan geschematiseerd zoals weergegeven in figuur 4.8. In de figuur is de lengte van het blok de correlatielengte waar onderzoek naar gedaan is in het in hoofdstuk 3 besproken rapport "Statistische karakterisering van gemeten fluctuaties van dijkhoogten". In §4.7 worden de resultaten voor één trekking besproken. In §4.8 zullen meerdere trekkingen gedaan worden waarmee de gevoeligheid voor de correlatielengte onderzocht zal worden.

4.7 Resultaten

Bij het maken van de berekeningen zijn de sterkte en de belasting zodanig ten opzichte van elkaar gepositioneerd dat een deterministische dijkhoogte een kans van falen heeft ter grootte van 10^{-4}. Invullen in de negatief-exponentiële kansdichtheidsfunctie voor de belasting geeft een deterministische dijkhoogte van 4.75m. Vervolgens is deze deterministische dijkhoogte aangehouden als verwachting van de sterkte. Bij deze verwachting is de standaardafwijking van de sterkte gevarieerd van 0.05m tot en met 0.30m. Een standaardafwijking van 0.05m komt overeen met de standaardafwijking van de meetresultaten van de Westerschelde dijken, zoals besproken in hoofdstuk 3. De standaardafwijking van 0.30m is dezelfde als de standaard-afwijking van de kansdichtheidsfunctie van de hoogwaterstanden. Voor de afgekapte normale verdeling is gewerkt met dezelfde grenzen als de $\cos^2$ verdeling.

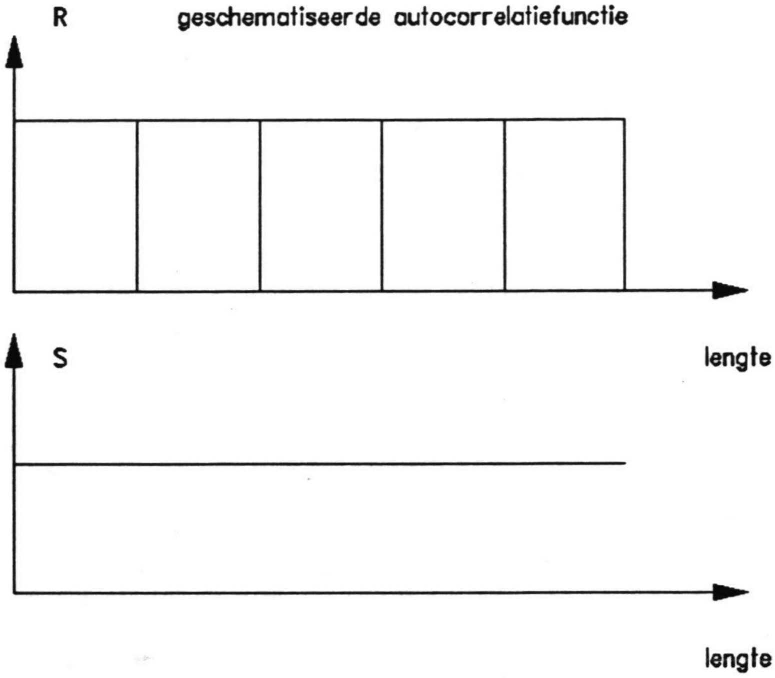
De verwachting vóór het maken van de berekeningen was dat de onzekerheid in de sterkte, bij een standaardafwijking van 0.05m, de kans op falen in het 10^{-4} gebied niet zou beïnvloeden door de veel grotere onzekerheid in de belasting. Het hierbij horende resultaat zou een nauwelijks hogere faalkans ongeacht de verdeling voor de sterkte moeten geven. Voor wat betreft de standaardafwijking van 0.30m voor de sterkte was de verwachting dat deze wel een significante invloed uit zou oefenen op de faalkans. Dit, omdat de standaardafwijking van de sterkte bij deze berekeningen even groot is als de standaardafwijking van de van de belasting. Verder werd verwacht dat de verschillen tussen de verdelingen in dit geval groot zouden zijn gezien de totaal verschillende vorm van de kansdichtheidsfuncties van de sterkte. De resultaten van de berekeningen zijn weergegeven in tabel 4.2.

σ_R	normaal	afgekapt normaal	$\cos^2$	uniform	exponentieel
0.0	1	1	1	1	1
0.05	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
0.10	1.06	1.06	1.06	1.06	1.08
0.20	1.25	1.23	1.24	1.24	1.79
0.30	1.64	1.58	1.60	1.57	3.64

tabel 4.2: faalkansen voor de verschillende verdelingen ($*10^{-4}$)

Uit de tabel is af te lezen dat de verwachtingen met betrekking tot een standaardafwijking van 0.05m en 0.10m voor de sterkte volledig overeenkomen met de meetresultaten; er zijn geen verschillen tussen de verschillende verdelingen voor de sterkte en de faalkans wordt nauwelijks beïnvloed door de standaardafwijking van de sterkte. Ter indicatie: het verschil in dijkhoogte tussen de faalkansen 1.10^{-4} en $1.06.10^{-4}$ bij een deterministische dijkhoogte bedraagt 0.02m. De resultaten bij een standaardafwijking van 0.30m voor de sterkte geven een iets verrassender beeld te zien. De faalkans is bij een normale verdeling voor de sterkte weliswaar met 64% toegenomen, maar de normale verdeling, de afgekapte normale verdeling, de $\cos^2$ verdeling en de uniforme verdeling geven nauwelijks verschillen te zien voor een standaardafwijking van 0.30m. De verwachting was dat deze verdelingen zich bij zo'n grote onzekerheid in de sterkte ten opzichte van de belasting, verschillend zouden gedragen.

De toegenomen faalkans van 64% bij de normale verdeling komt overeen met 0.15m in dijkhoogte. Zelfs de exponentiële verdeling wijkt ondanks zijn totaal andere vorm, voor kleine standaardafwijkingen niet af van de andere verdelingen. Voor standaardafwijkingen van 0.20m en 0.30m geeft deze verdeling andere resultaten te zien; de standaardafwijking van de sterkte wordt dan even groot als de standaardafwijking van de belasting en dan neemt de faalkans sterk toe. De toename is veel groter dan bij de andere verdelingen. Dit komt doordat de staart van de verdeling als een e-macht naar nul gaat in plaats van een e-macht in het kwadraat zoals bij de normale verdeling. De staart is hierdoor veel dikker en dit resulteert onmiddellijk een veel grotere faalkans.



figuur 4.9: schematisatie van de autocorrelatiefunctie van de sterkte en de belasting voor meerdere trekkingen

De $\cos^2$ verdeling geeft in het 10^{-4} quantiel een goede benadering van de normale verdeling te zien. Verder is de $\cos^2$ verdeling aan de onder- en de bovenzijde begrensd. Dit is fysisch aannemelijker dan de normale verdeling, omdat deze verdeling de kans op een dijkhoogte die een meter hoger of lager is dan de aanleghoogte niet uitsluit. Verder geven ook de meetresultaten zoals besproken in hoofdstuk drie een beeld dat met de $\cos^2$ verdeling overeen kan komen; de klokvorm is duidelijk aanwezig, de verdeling is symmetrisch en de verdeling is minder sterk gepiekt dan de normale verdeling. Tenslotte blijkt uit een eenvoudige controle dat de onder- en bovengrens van de $\cos^2$ verdeling redelijk overeenkomen met het gemeten minimum en maximum van de waarnemingen. Het minimum van de waarnemingen van figuur 3.7 bedraagt 841,7cm. Het gemiddelde en de standaardafwijking van de waarnemingen bedraagt respectievelijk 851,1cm en 4,035cm. De ondergrens van een $\cos^2$ verdeling met deze waarden voor de parameters μ en σ bedraagt:

$$ondergrens = a - \frac{\pi\sigma}{c_2} = 840{,}0cm$$

Het maximum van de waarnemingen bedraagt 859,9cm. De bovengrens van de $\cos^2$ verdeling bedraagt:

$$bovengrens = a + \frac{\pi\sigma}{c_2} = 862{,}3cm$$

Voor de ondergrens geeft de $\cos^2$ verdeling een waarde die iets aan de veilige kant is.

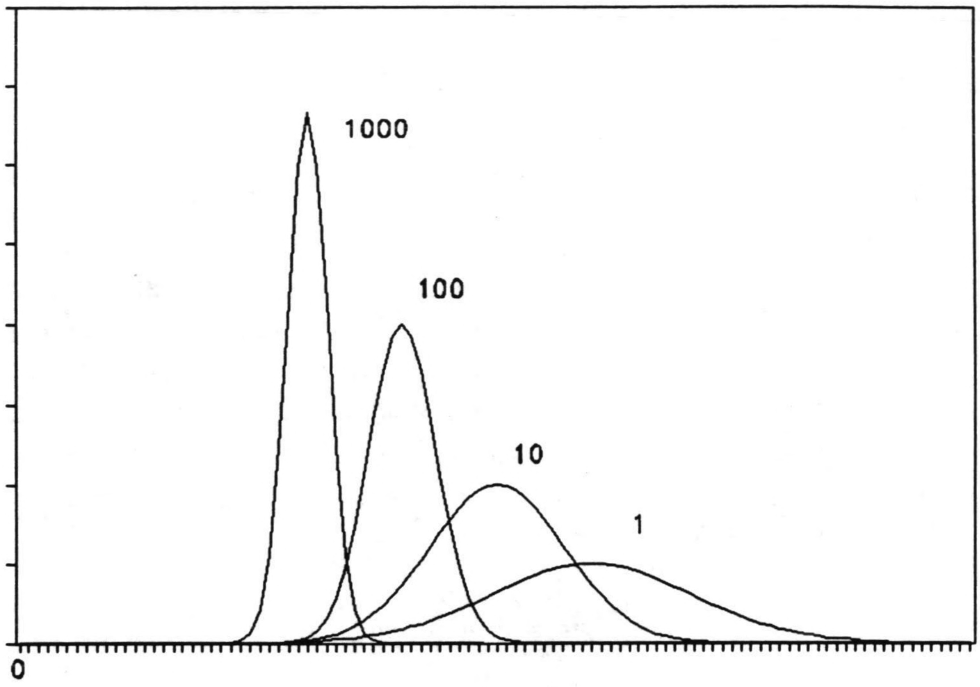
Voor de afgekapte normale verdeling geldt hetzelfde als voor de $\cos^2$ verdeling zoals beschreven in bovenstaande alinea. Het probleem bij de afgekapte normale verdeling is dat onbekend is wáár de verdeling afgekapt dient te worden.

4.8 Meerdere trekkingen

Het bovenstaande geldt voor één trekking uit de kansdichtheidsfunctie voor de sterkte. Wanneer er meerdere onafhankelijke trekkingen gedaan worden dan dient er voor de sterkte gewerkt te worden met de extreme waarde verdeling voor minima. Zoals besproken in hoofdstuk drie bedraagt de invloedslengte (de lengte waarover nog correlatie optreedt) ongeveer 50m. Wanneer op een dijk metingen gedaan worden om de 50m dan zijn deze hoogtemetingen voor wat betreft onnauwkeurigheden in aanleg en plaatselijke zettingen dus onafhankelijk van elkaar. De schematisatie die bij deze berekening gemaakt is voor de autocorrelatiefunctie van de sterkte en de belasting staat weergegeven in figuur 4.9. De extreme waarde verdeling voor de minima is als volgt te bepalen: het gaat om de laagste waarde van N trekkingen uit een verdeling $F_X(x)$, waarbij $F_X(x)$ gedefinieerd is als:

$$F_X(x) \equiv Pr(X \leq x) \tag{4.32}$$

De kans dat een trekking groter is dan x is dan gelijk aan:



figuur 4.10: opschuiven van een normale verdeling voor een extreme waarde verdeling voor minima

$$Pr(X>x) = 1-F_X(x) \tag{4.33}$$

De kans dat N trekkingen groter zijn dan x is gelijk aan:

$$Pr(X_1>x \text{ en } X_2>x \text{ en...en } X_N>x) = \prod_{i=1}^{N}(1-F_X(x)) = (1-F_X(x))^N \tag{4.34}$$

Hieruit volgt de kans dat ten minste één trekking uit N trekkingen kleiner is dan x:

$$Pr(X_{\min}\leq x) = 1-(1-F_X(x))^N = F_E(x) \tag{4.35}$$

Dit is de extreme waarde verdeling voor minima. De kansdichtheidsfunctie luidt:

$$f_E = N\, f_X(x)(1-F_X(x))^{N-1} \tag{4.36}$$

Het bovenstaande uitwerken voor de uniforme verdeling geeft:

$$f(x) = \frac{1}{B-A} \tag{4.37}$$

$$Pr(X>x) = 1-\frac{x-A}{B-A} \tag{4.38}$$

$$F_E(x) = 1-(1-\frac{x-A}{B-A})^N \tag{4.39}$$

$$f_E(x) = \frac{N}{B-A}(1-\frac{x-A}{B-A})^{N-1} \tag{4.40}$$

Op analoge wijze kan voor de andere verdelingen de extreme waarde verdeling voor minima uitgerekend worden. Dit geeft de volgende formules:
voor de exponentiële verdeling:

$$f_E(x) = N\gamma e^{\gamma(x-b)}(1-e^{\gamma(x-b)})^{N-1} \tag{4.41}$$

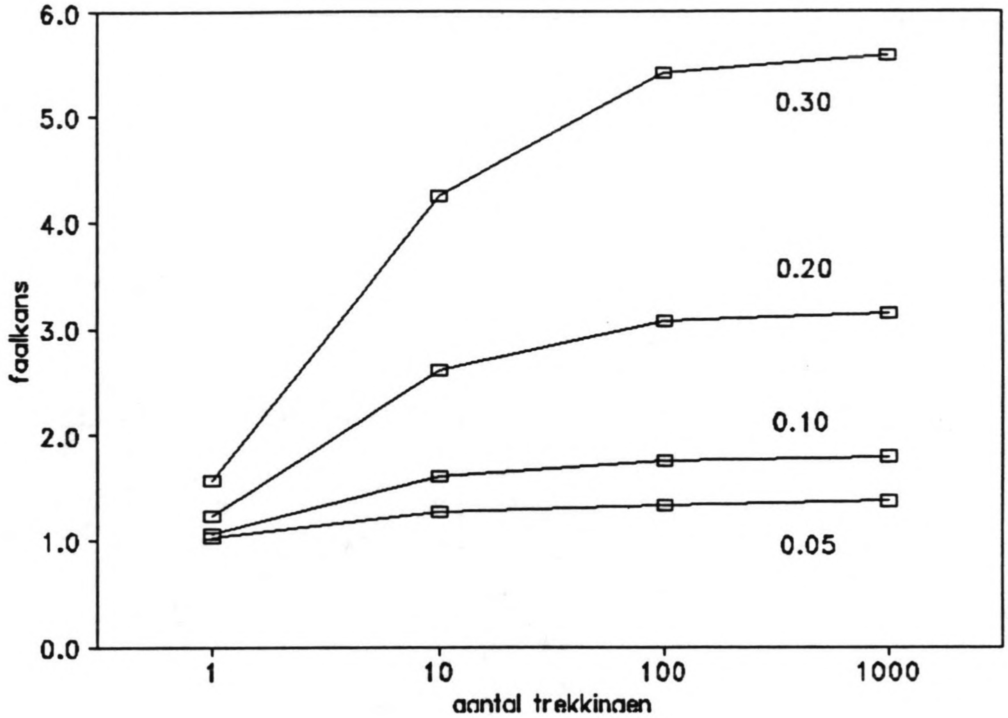
voor de $\cos^2$ verdeling:

$$f_E(x) = N(\frac{c_1}{\sigma}+\frac{c_1}{\sigma}\cos(c_2\frac{x-a}{\sigma}))(\frac{1}{2}+\frac{c_1}{\sigma}a-\frac{c_1}{\sigma}x-\frac{c_1}{c_2}\sin(c_2\frac{x-a}{\sigma}))^{N-1} \tag{4.42}$$

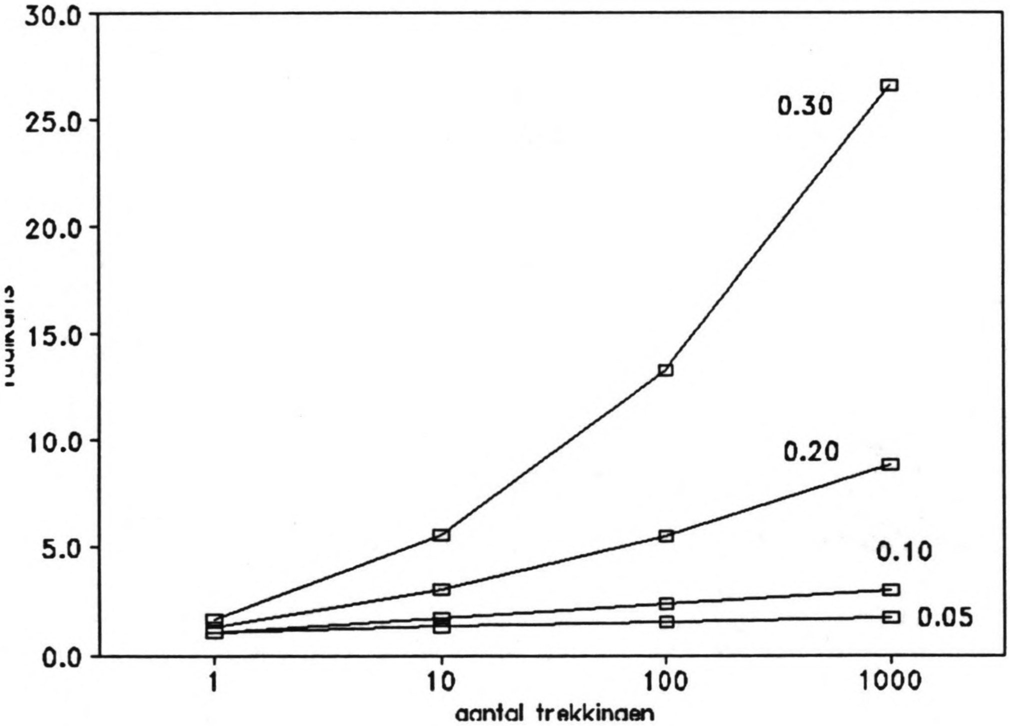
voor de normale verdeling (zie ook figuur 4.10):

$$f_E(x) = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}(1-\phi(x))^{N-1} \tag{4.43}$$

en voor de afgekapte normale verdeling:



figuur 4.11: faalkansen (*10^{-4}) voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een uniforme verdeling voor standaardafwijkingen van 0.05, 0.10, 0.20 en 0.30



figuur 4.12: faalkans (*10^{-4}) voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een normale verdeling voor standaardafwijkingen 0.05, 0.10, 0.20 en 0.30

$$f_E(x) = \frac{\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\phi(\frac{a-\mu}{\sigma})} \left(1 - \frac{\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})-\phi(\frac{a-\mu}{\sigma})}{\phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\phi(\frac{a-\mu}{\sigma})}\right)^{N-1} \tag{4.44}$$

Voor de afgekapte normale verdeling is net als bij één trekking voor de onder- en bovengrens weer gewerkt met dezelfde grenzen als de $\cos^2$ verdeling. Ruimere grenzen zullen grotere faalkansen geven en nauwere grenzen zullen kleinere faalkansen geven.

Voor deze extreme waarde verdelingen voor de minima kunnen vervolgens weer de convolutieintegralen bepaald worden. De convolutieintegralen zijn numeriek opgelost. De resultaten voor respectievelijk 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit de extreme waarden verdeling voor minima van de sterkte staan weergegeven in de onderstaande tabellen en de genoemde figuren:

voor de uniforme verdeling (zie figuur 4.11):

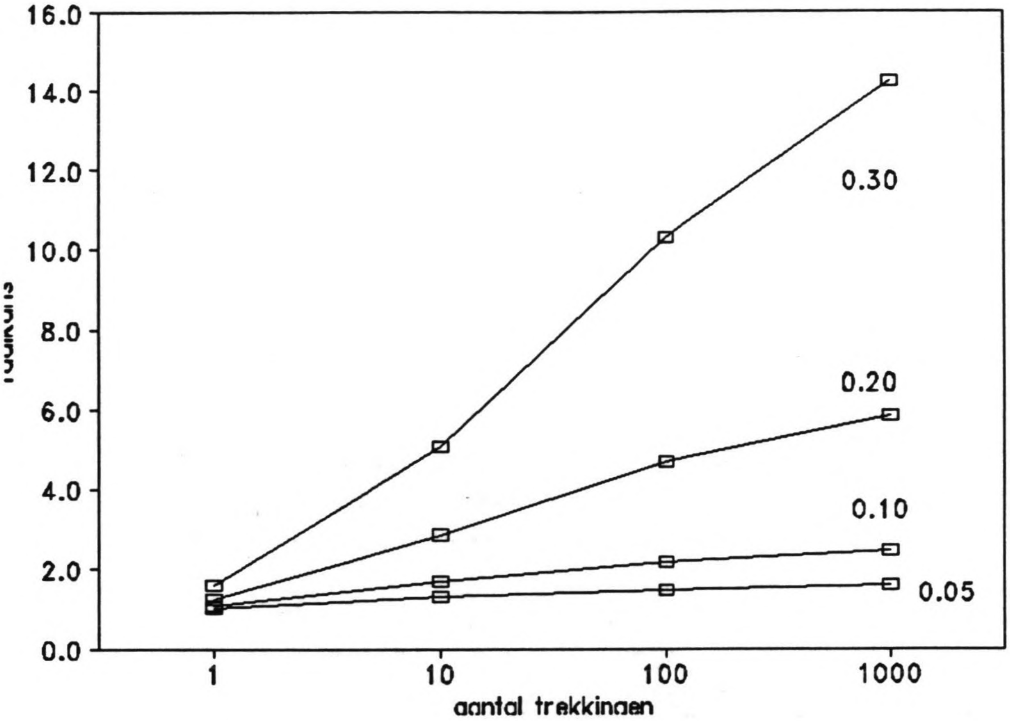
σ_R	1	10	100	1000
0.05	1.02	1.27	1.33	1.37
0.10	1.06	1.61	1.76	1.79
0.20	1.24	2.60	3.07	3.14
0.30	1.57	4.23	5.40	5.57

tabel 4.3: faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit de sterkte voor verschillende standaardafwijkingen ($*10^{-4}$)

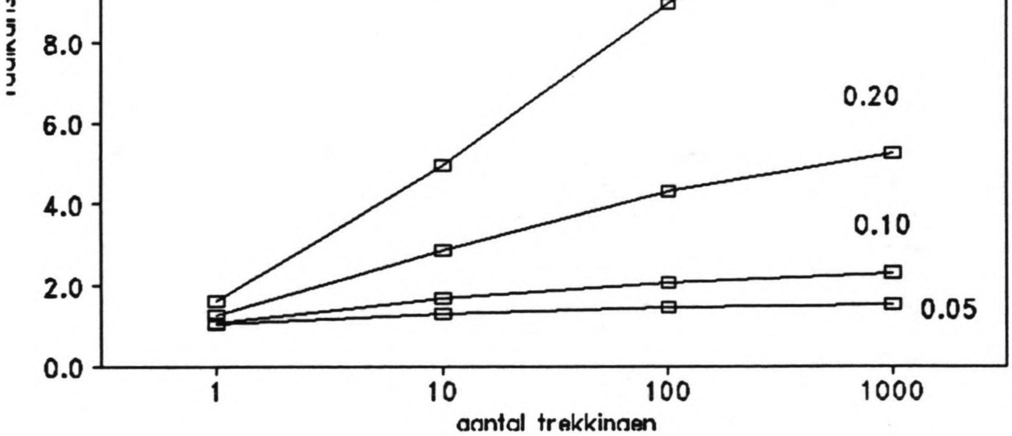
voor de normale verdeling (zie figuur 4.12):

σ_R	1	10	100	1000
0.05	1.02	1.30	1.52	1.72
0.10	1.06	1.70	2.32	2.94
0.20	1.25	3.00	5.48	8.77
0.30	1.64	5.53	13.27	26.55

tabel 4.4: faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit de sterkte voor verschillende standaardafwijkingen ($*10^{-4}$)



figuur 4.13: faalkans (*10^{-4}) voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een tweezijdig afgekapte normale verdeling voor standaardafwijkingen van 0.05, 0.10, 0.20 en 0.30



figuur 4.14: faalkans (*10^{-4}) voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een $\cos^2$ verdeling voor standaardafwijkingen van 0.05, 0.10, 0.20 en 0.30

voor de afgekapte normale verdeling (zie figuur 4.13):

σ_R	1	10	100	1000
0.05	1.02	1.29	1.48	1.57
0.10	1.06	1.67	2.17	2.45
0.20	1.23	2.86	4.68	5.82
0.30	1.58	5.07	10.30	14.22

tabel 4.5: faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit de sterkte voor verschillende standaardafwijkingen ($*10^{-4}$)

voor de $\cos^2$ verdeling (zie figuur 4.14):

σ_R	1	10	100	1000
0.05	1.02	1.29	1.44	1.51
0.10	1.06	1.67	2.07	2.29
0.20	1.24	2.84	4.31	5.24
0.30	1.60	4.96	8.99	12.00

tabel 4.6: faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit de sterkte voor verschillende standaardafwijkingen ($*10^{-4}$)

voor de exponentiële verdeling (zie figuur 4.15):

σ_R	1	10	100	1000
0.05	1.02	1.41	2.05	3.00
0.10	1.08	2.10	4.45	9.50
0.20	1.79	7.30	32.36	141.15
0.30	3.64	20.12	177.18	974.33

tabel 4.7: faalkansen voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit de sterkte voor verschillende standaardafwijkingen ($*10^{-4}$)

Voor alle verdelingen voor de sterkte neemt de faalkans toe bij toenemende standaardafwijking en bij een toenemend aantal trekkingen. De begrensde kansdichtheidsfuncties schuiven naar de ondergrens, totdat er in de limiet een spijker net naast de asymptoot (de ondergrens) ligt. Een

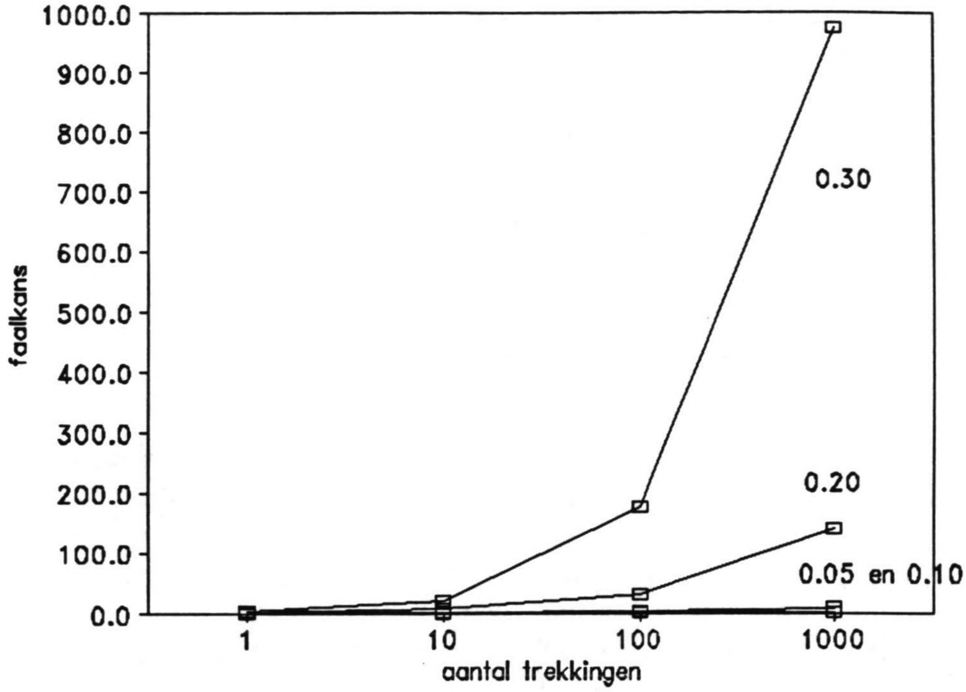


fig 4.15: faalkans (*10^{-4}) voor 1, 10, 100 en 1000 trekkingen uit een exponentiële verdeling voor standaardafwijkingen van 0.05, 0.10, 0.20 en 0.30

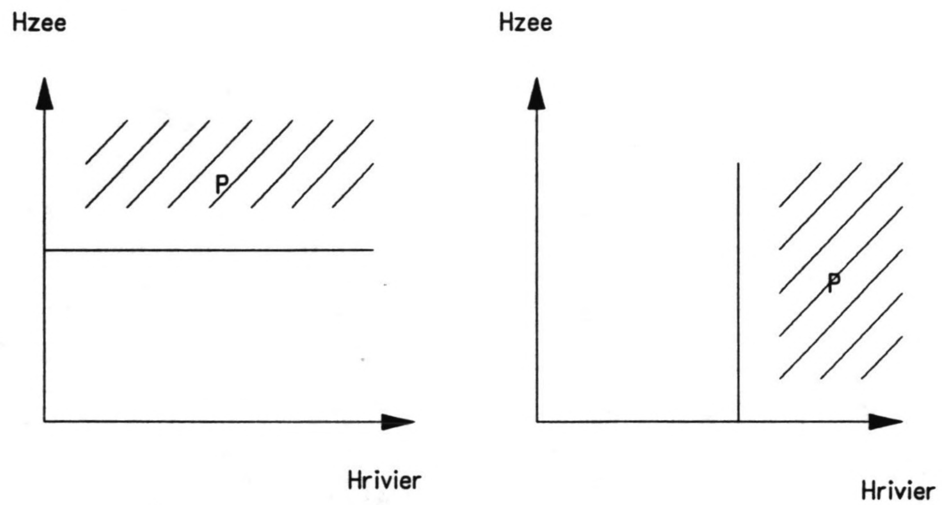
eenvoudige berekening liet zien dat voor 1000 trekkingen de uniforme en de afgekapte normale verdeling exact op de ondergrens zitten de $\cos^2$ verdeling bijna op zijn ondergrens zit. De normale verdeling en de exponentiële verdeling zijn niet aan de onderzijde begrensd en de extreme waarde verdeling van beide blijft opschuiven bij een steeds groter aantal trekkingen. Hierin verschillen de normale verdeling en de exponentiële verdeling (doordat zij een staart hebben) duidelijk van de andere verdelingen. Vooral de exponentiële verdeling geeft hierdoor veel grotere faalkansen te zien. De resultaten van de normale verdeling komen redelijk overeen met de resultaten zoals gevonden in het collegedictaat f30.

4.9 Conclusies

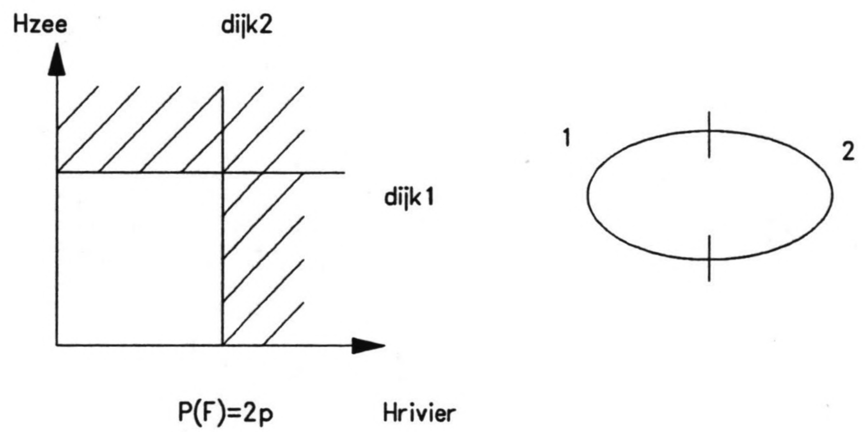
De vraag of een verdeling een staart heeft of dat hij afgekapt moet zijn kan met deze berekeningen uiteraard niet beantwoord worden. Wel kan geconcludeerd worden dat als de verdeling van de hoogte van een dijk een staart heeft dat de vorm van de staart dan belangrijk is. Dit kan geconcludeerd worden uit het grote verschil in uitkomsten tussen de normale verdeling en de exponentiële verdeling, zoals weergegeven in de tabellen 4.4 en 4.7. Het verschil tussen de exponentiële verdeling en de normale verdeling voor wat betreft de staart blijkt ook uit tabel 4.1. De normale verdeling heeft een staart die geclassificeerd wordt als gemiddeld-kort en de exponentiële verdeling heeft een staart die gemiddeld-gemiddeld genoemd wordt. De uniforme verdeling, de $\cos^2$ verdeling en de tweezijdig afgekapte normale verdeling zijn alle drie begrensd en daarom wordt hun staart geclassificeerd als kort. Uit de tabellen 4.3 tot en met 4.6 komt ook dit verschil met de normale verdeling naar voren, alhoewel minder duidelijk dan het verschil tussen de normale en de exponentiële verdeling. Wanneer de verdeling van de hoogte van een dijk een begrensde staart heeft (wat fysisch best aannemelijk is) dan lijkt de vraag naar de vorm van de verdeling minder belangrijk dan bij een verdeling mét staart. Wel van belang is de plaats waar de verdeling afgekapt wordt. Bij de afgekapte normale verdeling is er gewerkt met dezelfde grenzen als bij de $\cos^2$ verdeling om deze verdelingen onderling te kunnen vergelijken. Wanneer de grenzen van de afgekapte normale verdeling ruimer gekozen worden dan neemt de faalkans toe. Dit is logisch omdat deze verdeling dan steeds verder op kan schuiven bij meerdere trekkingen uit de sterkte en omdat hij steeds meer op de normale verdeling gaat lijken; hoe ruimer de grenzen van de afgekapte normale verdeling, hoe meer hij op de normale verdeling met staarten gaat lijken.

De $\cos^2$ verdeling en de afgekapte normale verdeling lijken de beste overeenkomsten met de metingen uitgevoerd op de Westerschelde dijken te geven. Verder zijn deze verdelingen omdat zij aan de onder- en bovenzijde begrensd zijn, fysisch de meest logische.

Uit de figuren 4.11 tot en met 4.15 blijkt dat de standaarafwijking van de sterkte grote invloed kan hebben op de kans op falen en daarmee op het lengte-effect. Voor een standaardafwijking van 5cm, welke overeenkomt met de gemeten standaardafwijking van de Westerschelde dijken is het lengte-effect echter klein. Uit deze figuren blijkt verder dat het lengte-effect ook gevoelig is voor de correlatielengte. Naarmate meer trekkingen gedaan worden (wat beschouwd kan worden als het verkleinen van de geschematiseerde correlatielengte zoals weergegeven in de figuren 4.8 en 4.9) neemt de kans op falen toe en daaruit blijkt de gevoeligheid van het lengte-effect voor de correlatielengte. Deze gevoeligheid blijkt groter voor grotere standaardafwijking. Dit is te verklaren door te bedenken dat een grotere standaardafwijking een grotere onzekerheid betekent.



figuur 5.1a en 5.1b: falen door overlopen door één bedreiging



figuur 5.2: faaldomein van een dijkring met twee onafhankelijke bedreigingen

5 Lengte-effect in de belasting

5.1 Inleiding

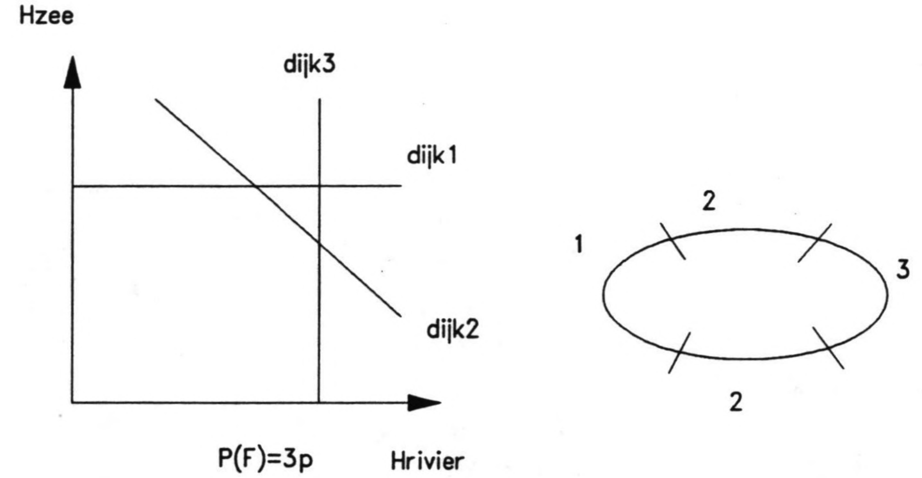
In dit hoofdstuk zal het lengte-effect dat optreedt aan de belastingzijde onderzocht worden. In de paragrafen 5.2, 5.3 en 5.4 zal het rapport "Veiligheidsfilosofie voor het ontwerpen van een primaire waterkering rond een dijkring" (literatuur 12) grotendeels letterlijk worden weergegeven. Na §5.2 waar op het mechanisme overlopen ingegaan wordt, zal in §5.3 golfoverslag en faalkansvergroting ten gevolge van het windrichtingseffect worden besproken. In §5.4 zal nog een berekening van golfoverslag in het overgangsgebied worden weergegeven. Het mechanisme overslag is bewust meegenomen in de beschouwingen, ondanks het feit dat de doelstelling zich beperkt tot het mechanisme overlopen. Dit is gedaan omdat het programma Dijkring berekeningen maakt voor beide mechanismen. De berekeningen gemaakt met dit programma worden besproken in §5.5. In §5.6 tenslotte zullen de conclusies besproken worden. In de paragrafen 5.3 en 5.4 zal blijken dat de kans op falen van een dijkring ongeveer tien maal de faalkans van een individueel dijksegment bedraagt. In de berekeningen met behulp van het programma Dijkring kan dezelfde factor gevonden worden. Wanneer de doorgerekende situaties echter zorgvuldig geschematiseerd worden dan bedraagt deze factor niet meer dan twee. Met het programma Dijkring blijkt het lengte-effect aan de belastingzijde bijna volledig onderkend te worden.

5.2 Overlopen

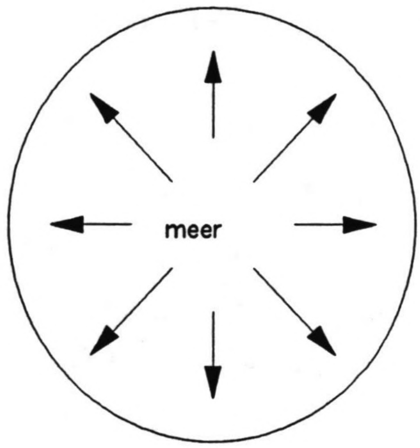
De onder- en de bovengrens van de kans op falen door overlopen van een ringdijk bestaande uit n dijkvakken wordt (volgens formule 2.1) gegeven door:

$$\max Pf_i \leq Pf_{ringdijk} \leq \sum_{i=1}^{n} Pf_i \qquad (2.1)$$

met Pf_i= de kans op falen van dijkvak i.
Indien de waterstand rond de dijkring afhangt van een enkele stochast (rivierafvoer of zeestand) dan is sprake van volledige correlatie van de gebeurtenissen "falen van dijkvak i". Het faaldomein van een dijkring gelegen aan zee wordt weergegeven in figuur 5.1a en het faaldomein van een dijkring slechts bedreigd door een rivier in figuur 5.1b. Indien de waterstand afhangt van meerdere parameters en dit niet op iedere locatie in gelijke mate (zoals in het overgangsgebied) dan wordt de faalkans groter dan het maximum van Pf_i. In figuur 5.2 is een situatie geschetst voor het geval van een dijkring met twee onafhankelijke bedreigingen. Indien de verschillende elementen allemaal dezelfde faalkans bezitten is de faalkans van het systeem afhankelijk van de vorm van het faaldomein. Het faaldomein bestaat hierbij uit al die combinaties H_zee en H_rivier waarvoor het systeem faalt. Voor een dijkring gelegen in het overgangs-



figuur 5.3: dijkring in het overgangsgebied



figuur 5.4: bij een meer of een dijkring met rondom water kunnen circa 8 onafhankelijke bedreigingen worden onderscheiden: $P(F) \approx 8*p$

gebied ziet het faaldomein eruit zoals geschetst in figuur 5.3.

5.3 Golfoverslag en faalkansvergroting ten gevolge van het windrichtingseffect

Golfoverslag wordt bepaald door de windsnelheid en de windrichting. Onder bepaalde omstandigheden is de faalkans van het systeem gelijk aan de faalkans van het zwaarst belaste element met de grootste faalkans. Deze omstandigheden zijn:
-alle elementen hebben dezelfde oriëntatie en geometrie;
-wind en waterstand zijn volledig gecorreleerd.

Als hier niet aan voldaan wordt treedt een vorm van een seriesysteem op. Neem als voorbeeld een meer (zie figuur 5.4) met een waterstand die onafhankelijk is van de wind (opwaaing wordt dus buiten beschouwing gelaten). De kans op falen van de gehele ring is dan circa 8 maal de faalkans van een enkel element (dijksegment) wanneer 8 onafhankelijke richtingen onderscheiden worden. In de volgende berekening zal deze faalkansvergroting ten gevolge van het windrichtingseffect verder uitgewerkt worden.

De gegevens voor de berekening zijn de volgende:
1. een rondlopende kering zoals gegeven in figuur 5.4
2. de rondlopende kering wordt geschematiseerd tot 64 even grote rechte dijksegmenten
3. het jaarmaximum van de windsnelheid voor elk van de 64 richtingen heeft een Gumbel-verdeling volgens:

$$F_V(v) = e^{-e^{-\frac{v-u}{0.78\sigma}}} \tag{5.1}$$

waarin:
$u = 20.0$ m/s = snelheid die gemiddeld een keer in een jaar wordt overschreden.
$\sigma = 2.8$ m/s = standaardafwijking.

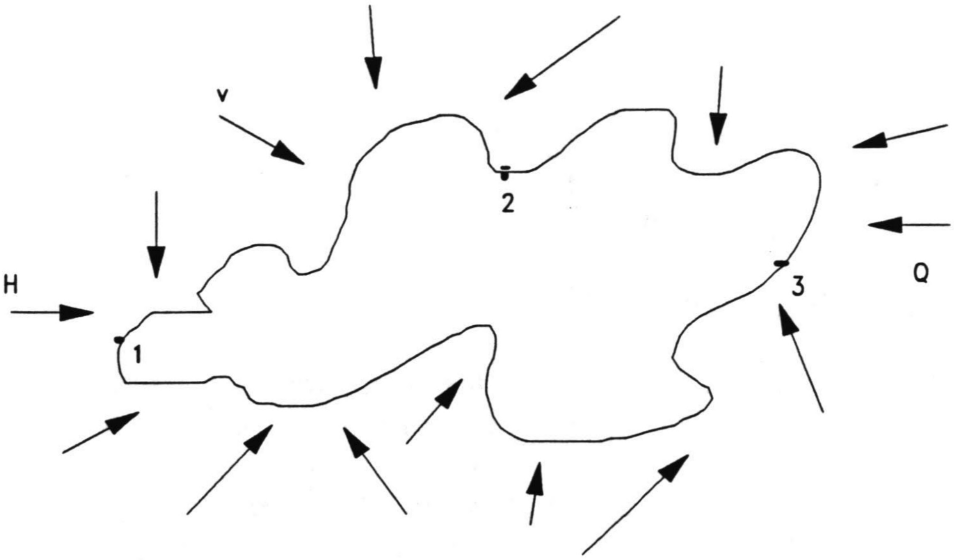
Voor kleine overschrijdingskansen geldt bij goede benadering:

$$1-F_V(v) = e^{-\frac{v-u}{0.78\sigma}} \tag{5.2}$$

Merk op dat hierbij de windroos uniform is verondersteld.
4. De golfoploop Δh wordt gegeven door:

$$\Delta h = A + B\,v\cos\alpha \tag{5.3}$$

A en B zijn constanten die hier niet ter zake doen; α is de hoek van de wind met de normaal op het dijksegment.
5. de dijkhoogte $\Delta h_0 = A + Bv_0$ met $v_0 = 40.5$ m/s



figuur 5.5: systeem van waterkeringen belast door zee, rivier en golfaanval

De faalkans van het gehele systeem is gelijk aan 64 maal de kans dat uit enigerlei richting de windsnelheid hoger is dan 40.5 m/s:

$$P_F(systeem) = 64 * e^{-\frac{40.5-20}{0.78*2.8}} = 64*10^{-4} \quad (5.4)$$

Een enkel dijksegment wordt door verschillende richtingen bedreigd. Voor falen bij wind uit richting i luidt de betrouwbaarheidsfunctie:

$$Z = \Delta h_0 - \Delta h \quad (5.5)$$

$$Z = A + Bv_0 - A - Bv\cos\alpha \quad (5.6)$$

Falen treedt dan op als v > $v_0/\cos\alpha_i$. Voor falen door wind uit de verschillende richtingen , geldt:

$$P_F(dijksegment) = \Sigma P(v > \frac{v_0}{\cos\alpha_i}) = \Sigma\, e^{-\frac{v_0/\cos\alpha_i - u}{0.78\sigma}} \quad (5.7)$$

Als richtingen worden genomen: $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = \pm 360°/64$, $\alpha_3 = \pm 720°/64$, enzovoort. Het resultaat is:

$$P_F(dijksegment) = 10^{-4}(1+2*(0.91+0.72+0.45+0.33+0.09+...)) \quad (5.8)$$

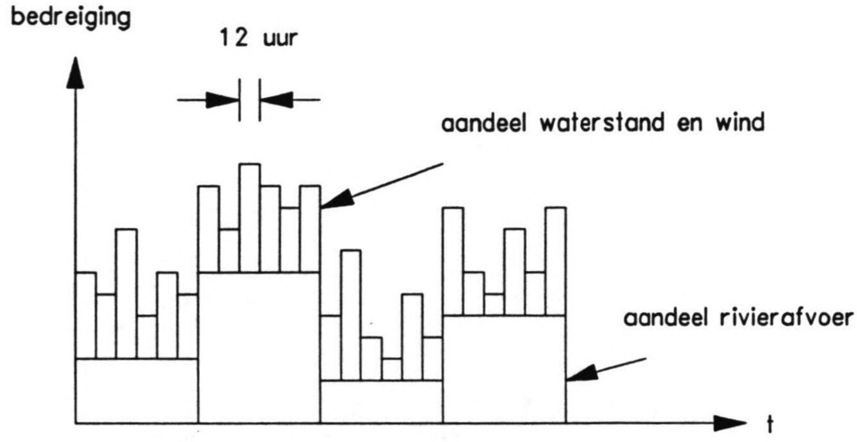
$$P_F(dijksegment) = 6*10^{-4} \quad (5.9)$$

Hiermee volgt dat P_F(systeem) = 10.6*P_F(dijksegment). Uiteraard is dit resultaat afhankelijk van de gekozen uitgangspunten. Het gekozen aantal van 64 is alleen van invloed op de numerieke nauwkeurigheid. In §5.5 is met het programma Dijkring een soortgelijke som gemaakt.

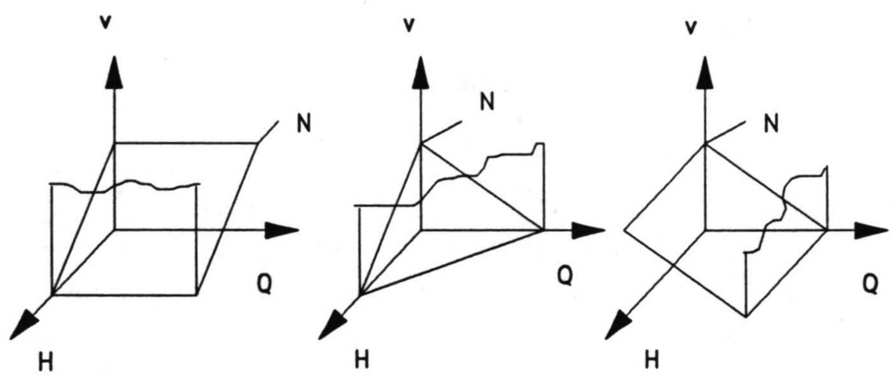
5.4 Berekening golfoverslag overgangsgebied

In figuur 5.5 is een geschematiseerd overgangsgebied weergegeven. Bij (1) liggen dijksegmenten die uitsluitend door de zee worden bedreigd, bij (3) door de rivier, terwijl bij (2) beide bedreigingen aanwezig zijn. In alle drie de regimes liggen dijksegmenten op alle windrichtingen. Elk dijksegment is daarbij slechts gevoelig voor golfaanval loodrecht op de dijk. Bovendien komt in elk regime nog een haventje voor, waarbij de wind geen invloed heeft. In totaal worden 16 windrichtingen onderscheiden. Het aantal dijksegmenten komt daarmee op 3*(16+1)=51. Als ieder dijksegment individueel ontworpen wordt op een faalkans van 10^{-4}, dan geldt voor de faalkans van het systeem:

$$10^{-4} \leq P(F) \leq 51*10^{-4} \quad (5.10)$$



figuur 5.6: schematisering van tijdsfluctuaties



figuur 5.7, 5.8 en 5.9: faalcontouren voor noorderwind voor de drie regimes. Voor andere richtingen dan noord is het vlak verticaal

Met behulp van het TNO-programma RWSDIJK is nagegaan hoe groot de faalkans in werkelijkheid is. Samenvattend komt de methode waarop dit programma berust op het volgende neer:

Een winter halfjaar wordt onderverdeeld in 24 perioden van gemiddeld 8 dagen (zie figuur 5.6). Binnen zo'n periode wordt de rivierafvoer constant verondersteld. Naarmate de rivierafvoer hoger is, is de periode korter. De rivierafvoer in opeenvolgende perioden geldt als onafhankelijk. Binnen een periode van constante rivierafvoer fluctueren waterstand op zee, windsnelheid en windrichting elke 12 uur. Deze drie grootheden zijn onderling gecorreleerd. Opeenvolgende trekkingen worden als onafhankelijk beschouwd. De kans op falen per jaar is dan te schrijven als:

$$P_F = 24 * \int_0^{\infty} [1-(1-P_{F|Q})^{2n}]\, f_Q(q)\, dq \tag{5.11}$$

$$P_{F|Q} = \sum_{i=1}^{16} [\iint_{Z<0} f_{HV|R}(h,v)dhdv]\; P_R(i) \tag{5.12}$$

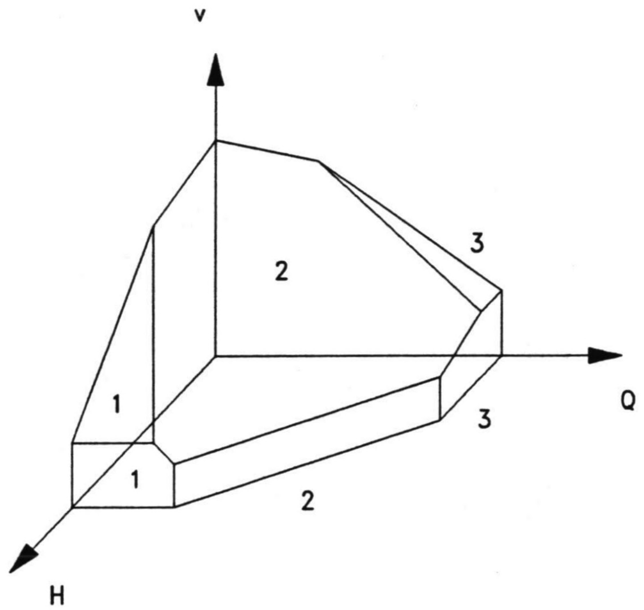
waarin:

$f_Q(q)$	=momentane kansdichtheidsfunctie van de rivierafvoer Q
$f_{HV\|R}(h,v)$	=gezamenlijke momentane kansdichtheidsfunctie voor waterstand H en windsnelheid v bij gegeven windrichting R
$P_R(i)$	=kans op windrichting i
n	=aantal dagen dat rivierafvoer Q aanhoudt
$Z<0$	=faaldomein van de dijk als functie van H en V, bij gegeven Q en R

Voor iedere dijk dient dus een faaldomein bekend te zijn in de ruimte die wordt opgespannen door Q, H, V en R. Beschouw eerst een dijkregime 1 dat op het noorden ligt. In figuur 5.7 is het faaldomein getekend. Aangezien de dijk in het zee-regime ligt, is het faaldomein een vlak dat evenwijdig aan de Q-as loopt. Voor wind uit het noorden is het vlak schuin, voor de andere windrichtingen verticaal. Verondersteld was immers dat alleen golfaanval loodrecht op de dijk van belang was. Meer realistisch zou dus zijn om hier een waaier van vlakken te veronderstellen, zoals mogelijk in het programma Dijkring (zie §5.5). Op de invloed hiervan wordt nog teruggekomen.

Op dezelfde wijze kunnen ook dijken op het noorden in de andere regimes worden ontworpen, met faaldomeinen als aangegeven in de figuren 5.8 (overgangsgebied) en 5.9 (rivierregime). Andere windrichtingen verlopen analoog.

Ggegeven de aldus ontworpen 51 dijksegmenten is nagegaan wat de kans is op het falen van het systeem. Bepaald dient daartoe te worden het faaldomein van het systeem. In principe komt het erop neer dat bij een gegeven combinatie van Q, R, H en V alle 51 dijksegmenten gecontroleerd moeten worden. Zodra de beschouwde combinatie in het faaldomein van een van de 51 secties terecht komt, treedt falen op van het systeem. In figuur 5.10 is aangegeven hoe het faaldomein voor de windrichting noord eruit ziet voor de dijkring. De verticale vlakken zijn



figuur 5.10: faalcontour van het systeem voor windrichting noord

afkomstig van de haventjes, de schuine van de dijksegmenten die gevoelig zijn voor golfaanval. Duidelijk zijn ook de drie regimes waar te nemen.

Het resultaat van de berekening is:

$$P(F) = 12.3 * 10^{-4} \tag{5.13}$$

Als commentaar op dit resultaat het volgende:

De gevonden factor 12.3 is uiteraard afhankelijk van de keuzes die bij deze som zijn gemaakt. In een realistisch geval zou de factor lager kunnen uitvallen omdat niet voor alle regimes alle oriëntaties aanwezig zullen zijn. Ook de veronderstelling dat iedere dijksectie maar gevoelig is voor wind uit een richting werkt verhogend op de factor 12.3 omdat wanneer een sectie vanuit meerdere richtingen zou worden aangevallen de faalkans van de sectie groter en daarmee de factor 12.3 kleiner zou zijn. Hier staat weer tegenover dat er meer dan een tussenregime definieerbaar is, en in werkelijkheid verschillende dijkprofielen, voorlandgeometrie en strijklengten aanwezig zullen zijn.

Samenvattend geldt dat de kans op falen voor een dijkring in een overgangsgebied getaxeerd moet worden op 10-20 maal de faalkans van een individueel dijksegment.

5.5 Berekeningen met het programma Dijkring

5.5.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zal onderzocht worden welke variabelen een rol spelen bij het lengte-effect en hoe groot de invloed van deze variabelen is. De volgende variabelen zijn onderzocht: de kruinhoogte, het aantal dijkvakken, de ligging van de vakken ten opzichte van de windrichting, de strijklengte en de invloed van de zee. Het bovenstaande is onderzocht door in het programma Dijkring verschillende situaties in te voeren en deze onderling te vergelijken. Voor meer informatie over het programma Dijkring wordt verwezen naar de literatuurstudie, hoofdstuk 2, paragraaf 5 en naar literatuur 9. Het zal blijken dat de strijklengte, de ligging van het vak boven- of benedenstrooms en de oriëntatie van het vak op de windrichting een lengte-effect kunnen veroorzaken met een grootte van 1.5 à 2 maal de kans op overbelasting.

5.5.2 Gegevens

De volgende gegevens zijn als default waarden aangehouden bij alle berekeningen:

met betrekking tot het profiel van het buitentalud
-een ongebroken talud 1:3

met betrekking tot wind:
-alle mogelijke windrichtingen, verdeeld in een windroos van 16 maal 22.5°
-een maximum windsnelheid van 60m/s

met betrekking tot waterstand:
-een maximum waterstand van 10,0m

met betrekking tot overslag:
-een overslagcriterium van 1 l/s/m

In de belastinggevallenmethode voor de bepaling van de hydraulische randvoorwaarden (waterstand en golfaanval) wordt uitgegaan van een combinatie van:
-een rivierafvoer
-een waterstand bij Hoek van Holland
-een windsnelheid
Voor zestien windrichtingen geeft dit zestien combinaties. Deze zestien combinaties vormen een belastinggeval. Er is in alle berekeningen gewerkt met het belastinggeval met een gebiedsfrequentie van 1/4000.

In het programma Dijkring bestaat de mogelijkheid om per dijkvak 9 strijkrichtingen in te voeren, welke dan weer onderverdeeld kunnen worden in maximaal 9 strijkvakken van variërende lengte en diepte. In §5.3 is alleen gewerkt met de loodrechte strijkrichting. In §5.4 is er verder verfijnd door met 9 strijkrichtingen per dijkvak te rekenen. De in de tabellen weergegeven kruinhoogten zijn kruinhoogten uitgerekend met behulp van de belastinggevallenmethode en geven een indicatie van de geëiste kruinhoogte.

5.5.3 **Berekeningen**

In eerste instantie zijn berekeningen gemaakt voor dijkvakken gesitueerd in Sliedrecht. De dijkvakken zijn bij deze berekeningen georiënteerd op het zuidoosten. Voor Sliedrecht geldt bij benadering de volgende waterstandsoverschrijdingslijn (literatuur 6):

$$P(H>\xi) = e^{(-\frac{\xi-H_0}{a})} = e^{-\frac{\xi-2.10}{0.20}} \qquad (5.14)$$

In berekening 1 gaf het programma voor 1 dijkvak zonder strijklengte (geen golfoploop) een kruinhoogte van 3.76m en een kans op overbelasting van $2.5*10^{-4}$ (=1/4000). Invullen in formule (5.1) geeft dezelfde waarden.

In berekeningen 2 en 3 zijn dezelfde situaties doorgerekend, maar nu met een strijklengte van 300m voor ieder dijkvak zodat de golfbelasting ook invloed krijgt. De resultaten gaven voor 1 dijkvak een kruinhoogte van 3.97m en een kans op overbelasting van $8.873*10^{-5}$. Voor 5 dijkvakken staan de resultaten in tabel 5.1.

strijklengte in m	kruinhoogte in m	indicatie bijdrage dijkvak in %
300	3.97	99.7
300	3.97	0
300	3.97	0
300	3.97	0
300	3.97	0

tabel 5.1: berekening 3 met een kans op overbelasting van $8.873*10^{-5}$

De kans op overbelasting neemt ten opzichte van berekening 2 af. Hieruit blijkt dat de afname van de kans op overbelasting door de grotere kruinhoogte, groter is dan de toename van de kans op overbelasting ten gevolge van de strijklengte van 300m voor ieder vak.

In berekening 4 hebben 3 van de 5 dijkvakken een strijklengte van 300m, terwijl de andere twee dijkvakken geen strijklengte gekregen hebben. De resultaten staan in tabel 5.2.

strijklengte in m	kruinhoogte in m	indicatie bijdrage dijkvak in %
300	3.97	35.0
300	3.97	0
300	3.97	0
0	3.76	65.0
0	3.76	0

tabel 5.2: berekening 4

De kans op overbelasting bij berekening 4 bedraagt $2.5*10^{-4}$. Uit de berekeningen 2, 3 en 4 blijkt dat het al dan niet aanwezig zijn van de strijklengte een behoorlijke invloed op de kruinhoogte heeft. Wanneer er, zoals in berekening 4, dijkvakken met en zonder strijklengte aanwezig zijn, dan is de kans op overbelasting gelijk aan de kans op overbelasting voor het geval er geen strijklengte aanwezig is.

In de nu volgende berekeningen zijn de dijkvakken georiënteerd op het noordwesten in plaats van op het zuidoosten. In berekening 5 is gerekend met 5 dijkvakken met een strijklengte van 300m. Dit geeft voor alle dijkvakken een hoogte van 4.42m en de bijbehorende kans op overbelasting bedraagt $1.14*10^{-4}$. De oriëntatie van de dijkvakken op het noordwesten zorgt voor een beduidend grotere kruinhoogte dan bij berekening 3, waar de dijkvakken op het zuidoosten georiënteerd waren. Wanneer in dezelfde situatie als in berekening 6 de kruinhoogte vastgesteld wordt op 3.76m (dus alsof er geen strijklengte aanwezig is, zie berekening 1) dan neemt de kans op overbelasting sterk toe tot $1.315*10^{-3}$. Het rekenen zonder strijklengte terwijl die in werkelijkheid wel aanwezig is kan dus leiden tot een vergroting van de kans op overbelasting met ruim een factor 10.

In de berekeningen 7 en 8 is bekeken wat de invloed is van het verkeerd inschatten van de lengte van een strijkvak. In beide berekeningen is er gewerkt met strijklengtes van respectievelijk 500, 400 en 3 maal 300m. In berekening 8 echter zijn alle kruinhoogtes vastgesteld op 4.42m, dus alsof de strijklengte voor alle vakken 300m bedraagt. De resultaten van berekening 7 staan in tabel 5.3.

strijklengte in m	kruinhoogte in m	indicatie bijdrage dijkvak in %
500	4.64	4.5
400	4.54	6.7
300	4.42	88.9
300	4.42	0
300	4.42	0

tabel 5.3: berekening 7

Voor de berekeningen 7 en 8 bedragen de respectievelijke kansen op overbelasting $1.14*10^{-4}$ en $2.18*10^{-4}$. Het verkeerd inschatten van de strijklengte in berekening 8 blijkt bijna een factor twee in kans op overbelasting uit te maken voor vakken georiënteerd op het noordwesten.

De berekeningen 7 en 8 zijn ook gemaakt voor vakken georiënteerd op het zuidwesten. In dat geval bleek er geen invloed van het verkeerd inschatten van de strijklengte op de kans op overbelasting te zijn; de kans op overbelasting bleef gelijk.

In de nu volgende som is gewerkt met drie dijkvakken gesitueerd in Rotterdam met respectievelijke strijklengtes 0, 100 en 200m. Wanneer deze drie dijkvakken georiënteerd worden op het zuidoosten wordt het resultaat zoals weergegeven in tabel 5.4, berekening 9 gevonden.

strijklengte in m	kruinhoogte in m	indicatie bijdrage dijkvak in %
0	4.74	101.5
100	4.74	0
200	4.74	0

tabel 5.4: berekening 9

De kans op overbelasting voor berekening 9 bedraagt $1.505*10^{-4}$. Gezien het feit dat ondanks de verschillende strijklengtes alle drie de dijkvakken dezelfde kruinhoogte hebben, ontstaat het vermoeden dat bij deze oriëntatie op de windrichting (zuidoost) de strijklengte geen invloed heeft op de kans op overbelasting. Dit vermoeden werd bevestigd door alle kruinhoogten één voor één met 10cm te verlagen. In alle berekeningen steeg de kans op overbelasting tot $2.301*10^{-4}$ maar dit gebeurde ongeacht de voor het vak aanwezige strijklengte.

Tot nu toe hebben de berekeningen betrekking gehad op de oriëntatie van het vak, wel of geen strijklengte en het inschatten van de strijklengte. Deze berekeningen betreffen niet het lengte-effect, waar bijvoorbeeld in §5.3 en §5.4 sprake van is. In de nu volgende berekeningen zal het lengte-effect aan de orde komen.

In berekening 10 is een soortgelijke som gemaakt als besproken in §5.3. Er is een ronde dijkring bestaande uit 16 vakken doorgerekend. Na de kruinhoogteberekening gaf het programma een kans op overbelasting van $1.92*10^{-4}$ voor de dijkring. De faalkans per vak bleek te variëren van $1.97*10^{-5}$ voor het vak georiënteerd op het zuidwesten tot $1.73*10^{-4}$ voor het vak georiënteerd op het zuidoosten. In dit geval varieert P_F(systeem) dus van 1.1 - 9.7 * P_F(dijksegment). Het lengte-effect varieert dus afhankelijk van de keuze van het vak met een factor 1 tot 10 maal de kans op overbelasting van het vak. Wanneer deze dijkring vereenvoudigd wordt tot een ring bestaande uit vier vakken: één NO, één ZO, één ZW en één NW dan bedraagt de kans op overbelasting $1.77*10^{-4}$. Door deze vereenvoudiging waarbij zowel naar de kruinhhoogten als naar de oriëntatie gekeken is blijkt de "werkelijke" kans op overbelasting praktisch benaderd te zijn.

5.5.4 Bestaande situatie aan de Waal

Tenslotte is een bestaande situatie in het programma Dijkring ingevoerd. Deze situatie betreft de zogenaamde benedenwaarden van de gemeente Brakel, gelegen aan de Waal tussen de Dijkringstations Gorkum en Herwijnen. In deze berekeningen is onderzocht in hoeverre de schematisatie van het voorland invloed heeft op de kans op overbelasting en hoe groot het lengte-effect is wanneer een kleiner aantal vakken beschouwd wordt. Van de rivierkaart is tweemaal dezelfde situatie opgemeten en ingevoerd in Dijkring. De eerste maal is de bestaande situatie zeer grof geschematiseerd. De tweede maal is alles zeer nauwkeurig opgemeten; alle weggetjes, verhogingen en andere oneffenheden in het terrein zijn meegenomen in de berekening. In de tabellen 5.5 en 5.6 staan de berekeningsresultaten weergegeven. De eerste kolom van tabel 5.5 en 5.6 geeft de met behulp van de belastinggevallenmethode uitgerekende kruinhoogte, de tweede kolom geeft de werkelijke, van de kaart afgelezen kruinhoogten.

Uit de kansen op overbelasting welke zijn weergegeven in de laatste rijen van beide tabellen, blijkt dat er nauwelijks verschil bestaat tussen de grof en de nauwkeurig geschematiseerde situatie. Dezelfde resultaten zijn gevonden voor eenzelfde berekening gemaakt bij Rotterdam.

berekende kruinhoogte	werkelijke kruinhoogte
8.04	7.00
7.90	6.85
7.98	6.75
7.83	6.85
7.85	7.50
7.72	7.55
7.81	7.20
$P_f=2.27*10^{-4}$	$P_f=2.47*10^{-4}$

tabel 5.5: kruinhoogte en kans op overbelasting voor de grof geschematiseerde situatie

berekende kruinhoogte	werkelijke kruinhoogte
8.06	7.00
7.89	6.85
8.02	6.75
7.87	6.85
7.81	7.50
7.71	7.55
7.81	7.20
$P_f=2.22*10^{-4}$	$P_f=2.34*10^{-4}$

tabel 5.6: kruinhoogten en kans op overbelasting voor een nauwkeurig geschematiseerde situatie

Deze nauwkeurig geschematiseerde situatie kan vereenvoudigd worden door slechts enkele vakken te beschouwen en de bijbehorende kans op overbelasting te vergelijken met die van tabel 14. De kans op overbelasting varieert dan van $7.92*10^{-5}$ tot $1.55*10^{-4}$. Dit komt overeen met een lengte-effect met een grootte van 1.5 tot 3. Wanneer er goed naar de kruinhoogte gekeken wordt (laagste kruinhoogte altijd meenemen !) dan wordt het lengte-effect niet groter dan een factor 2.

5.6 Conclusies

In de paragrafen 5.3 en 5.4 is gebleken dat het lengte-effect ten gevolge van het windrichtingseffect een faalkansvergroting met een factor 10 kan bedragen. Dit betekent dat P_F(systeem)=10*P_F(dijksegment). Verder is duidelijk geworden dat de kruinhoogte meer invloed heeft op de kans op overbelasting dan de strijklengte bij de doorgerekende situaties. In de berekeningen met het programma Dijkring kan dezelfde factor gevonden worden (laatste berekening §5.5.3). Wanneer echter zorgvuldig geschematiseerd wordt en de laagste kruinhoogten worden meegenomen dan wordt het lengte-effect niet groter dan een factor twee. Het programma Dijkring blijkt het lengte-effect aan de belastingzijde bijna volledig mee te nemen door volledige integratie over alle variabelen.

Voor het benedenrivierengebied kan een dijkvak gedefinieerd worden als een vak met uniforme eigenschappen en omstandigheden waarbij over de lengte van een dijkvak de oriëntatie, dwarsdoorsnede, hoogte en voorland constant zijn. Zodra één van deze variabelen verandert (waarbij vooral de hoogte belangrijk is, veranderingen van meer dan 10 cm dienen altijd meegenomen te worden), dient een nieuw dijkvak gedefinieerd te worden.

6 Conclusies en aanbevelingen

De hoogte van een dijk blijkt beschreven te kunnen worden door een ergodisch proces. Dit houdt in dat de samenhang tussen twee punten kleiner wordt naarmate de daartussen liggende afstand groter wordt, zodat zij op een grote afstand volkomen onafhankelijk van elkaar worden. De correlatielengte voor de onbedoelde variaties in dijkhoogte, te weten de onnauwkeurigheden in aanleg en de zettingen, bedraagt 50 meter voor drie onderzochte Westerschelde dijken. Bij dit onderzoek werden ook variaties in dijkhoogten opgemerkt met een grotere correlatielengte dan 50 meter maar het aantal metingen was te gering om daar een uitspraak over te doen. Het verdient aanbeveling om dergelijke metingen van dijkskruinen nogmaals te verrichten. Deze metingen zouden dan over een groter traject uitgevoerd dienen te worden zodat ook uitspraken gedaan kunnen worden over variaties in dijkhoogten met een correlatielengte tot ongeveer 500 meter. Verder lijkt het dan verstandig om deze metingen uit te voeren op echte rivierdijken. Eventueel kan ook enig onderzoek gedaan worden naar periodiciteit in het proces zoals waarmee gewerkt in hoofdstuk 3, hoewel daar op fysische gronden geen aanleiding toe lijkt. Voor wat betreft de terminologie verdient het aanbeveling om de verschillen tussen de begrippen correlatielengte, fluctuatieschaal en invloedsbereik te kennen. Deze begrippen worden door elkaar gebruikt maar hebben niet exact dezelfde betekenis. Vanmarcke (literatuur 2) heeft het begrip fluctuatieschaal eenduidig gedefinieerd.

Omdat de dijkhoogte beschreven kan worden door een ergodisch proces kan het verloop voor één enkel signaal beschouwd worden als een reeks van onafhankelijke trekkingen uit het ensemble. Omdat de verdeling van de kruinhoogte onbekend is, zijn meerdere verdelingen met elkaar vergeleken, en dan voornamelijk in het gebied van de staarten van de verdelingen. Fysisch lijkt het aannemelijk dat de staart van de verdeling voldoet aan de classificatie gemiddeld-kort, volgens de classificatie van de staarten van verdelingen door Schuster. De normale verdeling en de $\cos^2$ verdeling voldoen bijvoorbeeld aan deze classificatie.

De standaardafwijking van de sterkte kan een grote invloed hebben op het lengte-effect. Bij kleine standaardafwijkingen (<0.05m) treedt echter nauwelijks lengte-effect aan de sterktezijde op. Het verdient aanbeveling om verder onderzoek te doen naar de standaardafwijking van de hoogte van rivierdijken. Verder blijkt het lengte-effect ook gevoelig te zijn voor de bovengenoemde correlatielengte. Ook hier is verder onderzoek naar aan te bevelen.

Het lengte-effect in de belasting blijkt in de berekeningen welke in hoofdstuk 5 staan weergegeven een factor 10 te bedragen. Het programma Dijkring blijkt dit lengte-effect aan de belastingzijde bijna volledig mee te nemen zolang bij het schematiseren goed naar de kruinhoogte gekeken wordt. Omdat het programma Dijkring alleen gebruikt kan worden in het benedenrivierengebied verdient het aanbeveling om een eenvoudig model op te zetten waarmee het lengte-effect af te schatten is voor dijken die niet in het benedenrivierengebied liggen.

Tenslotte verdient het aanbeveling om onderzoek te doen naar het rekenen met correlatie bij niet normale verdelingen. In appendix I is uiteengezet wat het begrip correlatie inhoudt voor normale verdelingen. Hoe dit werkt voor niet normale verdelingen is onbekend.

Samenvattend kan gesteld worden dat de doelstelling, het geven van een richtlijn voor het aantal waterkeringselementen dat in een dijkring dient te worden onderscheiden, gehaald is. Voor het benedenrivierengebied kan een dijkvak gedefinieerd worden als een vak van een dijk met uniforme eigenschappen en omstandigheden waarbij over de lengte van een dijkvak de oriëntatie, dwarsdoorsnede, hoogte en voorland constant zijn. Zodra een van deze variabelen verandert (waarbij vooral de hoogte belangrijk is, veranderingen van meer dan 10 cm dienen altijd meegenomen te worden), dient een nieuw dijkvak gedefinieerd te worden. In het onderzoek is het profiel van de dijk niet gevarieerd. Het verdient aanbeveling om dit nog te onderzoeken.

Literatuurlijst

1. Lengte-effecten bij het mechanisme piping onder waterkeringen. CO-294460/21 februari 1991 door E.Calle/P. Waarts.

2. Berekening van fluctuatieschalen uit een lengteprofielmeting van een grondlichaam. CO-294460/17. April 1989 door E.Calle.

3. B3 collegedictaat: Probabilistisch ontwerpen door A.C.W.M. Vrouwenvelder en J.K. Vrijling.

4. TAW 10 interimrapportage: Probabilistisch ontwerpen van waterkeringen. Oktober 1985 diverse auteurs.

5. Leidraad voor het ontwerpen van rivierdijken. Deel 2 - benedenrivierengebied. September 1989.

6. Leidraad voor het ontwerpen van rivierdijken. Deel 2 - benedenrivierengebied, appendices. September 1989.

7. Elementaire Statistiek. Maart 1989 door J. van Soest

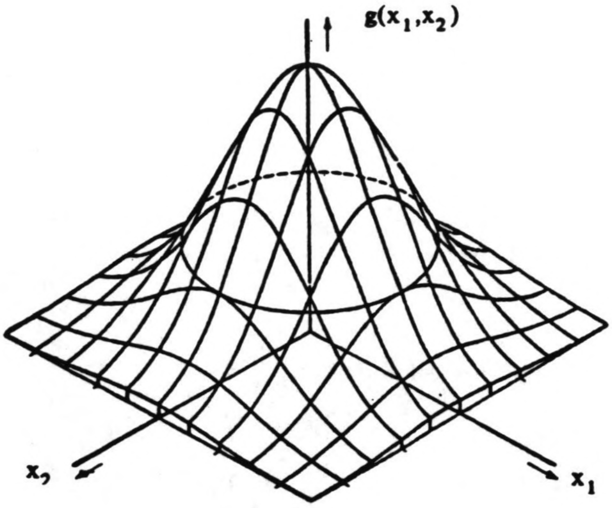
8. f30 collegedictaat: Probabilistisch ontwerpen in de waterbouw. Vrijling/Meermans 1992.

9. Gebruikershandleiding programma Dijkring versie 3.2 door J. Niemeijer, december 1989.

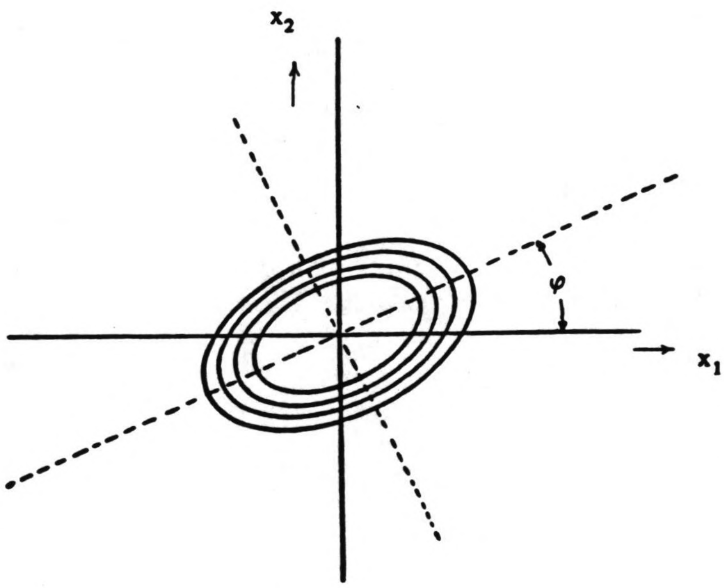
10. Algemene leidraad voor het ontwerpen en toetsen van waterkeringen. Vrouwenvelder/Waarts/Quelerij, december 1989.

11. Classification of probability laws by tail behavior. E.F.Schuster. Journal of the American Statistical Association, december 1984, volume 79, pp 936-939.

12. Veiligheidsfilosofie voor het ontwerpen van een primaire waterkering rond een dijkring. A.C.W.M. Vrouwenvelder, augustus 1988.



figuur A.1: dichtheid van de tweedimensionale normale verdeling; oorsprong in (μ_1, μ_2).



figuur A.2: lijnen van gelijke dichtheid (contourellipsen); oorsprong in (μ_1, μ_2).

Appendix I: correlatie

De mate van (lineaire) samenhang tussen de stochastische variabelen X_1 en X_2 wordt gegeven door de correlatiecoëfficiënt:

$$\rho(X_1,X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sigma_1\sigma_2},\ kortweg\ \rho \tag{A.1}$$

Wegens het feit dat het E-symbool gezien kan worden als een lineaire operator toe te passen op stochastische variabelen, is

$$Cov(X_1,X_2) = E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) = E(X_1X_2-\mu_1X_2-\mu_2X_1+\mu_1\mu_2) = EX_1X_2-\mu_1\mu_2 \tag{A.2}$$

Voor het geval dat $\rho=0$ geldt dat $Cov(X_1,X_2)=0$ en daaruit volgt dat: $E\,X_1X_2 = \mu_1\mu_2$. In zo'n geval heten X_1 en X_2 ongecorreleerd.

Onafhankelijke stochastische variabelen zijn ongecorreleerd; ongecorreleerde stochastische variabelen zijn niet noodzakelijk onafhankelijk tenzij ze gezamenlijk normaal verdeeld zijn. Een gebruikelijke misvatting omtrent de betekenis van de correlatiecoëfficiënt is dat uit $\rho=0$ geconcludeerd wordt dat er geen verband tussen X_1 en X_2 bestaat, terwijl alleen aangetoond is dat er geen lineair verband is. Als bijvoorbeeld de verdeling van X_1 symmetrisch is om 0 en $X_2=x_1^2$, dan is $\rho(X_1, X_2)=0$ terwijl er wel degelijk verband is tussen X_1 en X_2. Een andere misvatting stelt correlatie gelijk met causaliteit. Als ρ een waarde heeft die dicht bij -1 of +1 ligt, zodat de correlatie tussen X_1 en X_2 groot is, betekent dit dat er een zekere mate van lineaire afhankelijkheid tussen X_1 en X_2 bestaat, maar het betekent niet dat er dus een oorzakelijk verband tussen X_1 en X_2 moet bestaan.

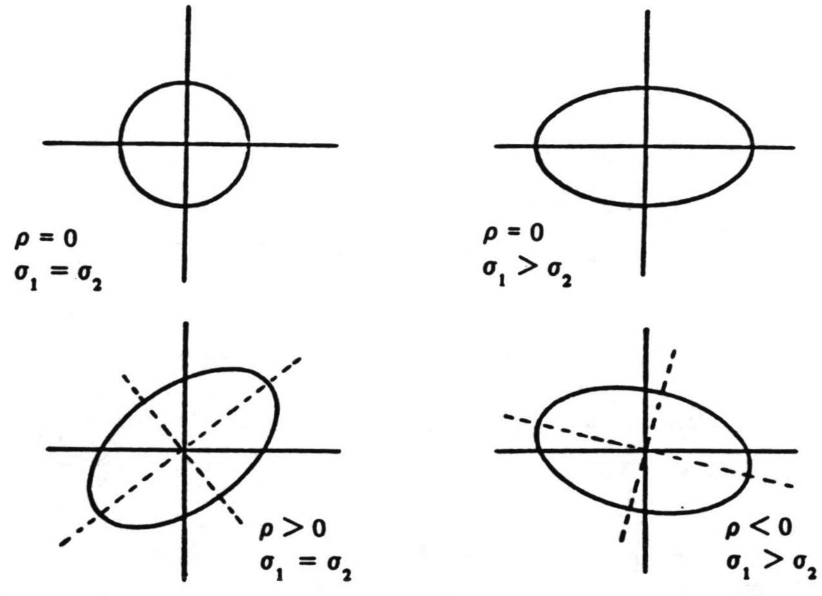
De tweedimensionale normale verdeling met parameters μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 en ρ ziet er als volgt uit:

$$g(X_1,X_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2})^2\}] \tag{A.3}$$

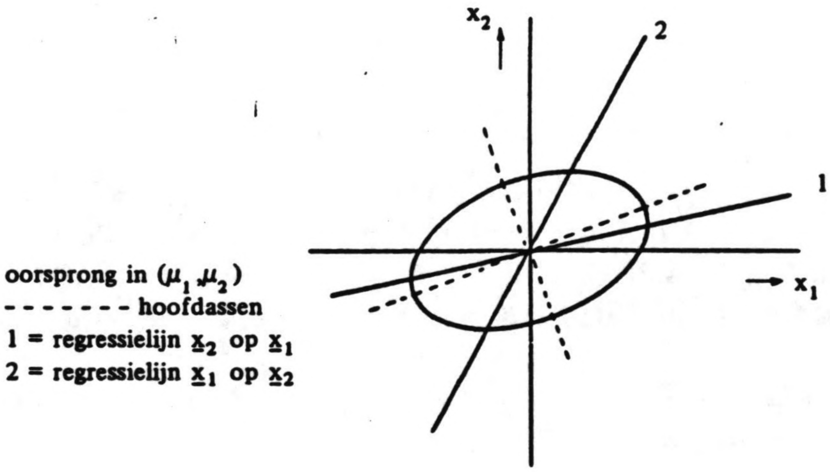
Deze verdeling is een veelvuldig voorkomend model voor tweedimensionale verschijnselen. Voor de dichtheid van de binormale verdeling zie figuur A.1. Lijnen van gelijke dichtheid worden contourellipsen genoemd. Deze zijn geschetst in figuur A.2. In figuur A.3 zijn enkele vormen van de contourellipsen weergegeven voor enkele combinaties van ρ, σ_1 en σ_2.

De conditionele dichtheid van X_2 gegeven $X_1=x_1$ in het geval dat X_1 en X_2 binormaal verdeeld zijn wordt gegeven door:

$$g(x_2|x_1) = \frac{g(x_1,x_2)}{g_1(x_1)} = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\}^2]$$



figuur A.3: vormen van de contourellipsen voor enkele combinaties van ρ, σ_1 en σ_2.



figuur A.4: de regressielijnen en een contourellips.

$$= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}(x_2-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_2-\mu_1)))^2] \tag{A.4}$$

Dit is de dichtheid van een normale verdeling met gemiddelde:

$$\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1) \tag{A.5}$$

en variantie:

$$\sigma_2^2(1-\rho^2) \tag{A.6}$$

Formule A.5 is tevens de regressielijn van X_2 op X_1. In figuur A.4 zijn beide regressielijnen weergegeven. De beide regressielijnen snijden elkaar in (μ_1, μ_2) en voor $|\rho| \neq 1$ maken ze een hoek θ met elkaar waarvoor geldt:

$$\tan\theta = \frac{1-\rho^2}{\rho}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \tag{A.7}$$

Voor $\rho=1$ en $\tan\theta=0$ zijn de regressielijnen identiek. Voor $\rho=0$ zijn de variabelen stochastisch onafhankelijk, de regressielijnen zijn parallel aan de coordinaatassen en de standaardafwijkingen van de regressielijnen zijn gelijk aan de marginale standaardafwijkingen. In figuur A.4 is verder te zien dat de regressielijn van X_2 op X_1 door het centrum van de verticale koorden van de ellips gaat, terwijl de regressielijn van X_1 op X_2 door het centrum van de horizontale koorden gaat. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat de regressielijnen bepaald worden door de som van de kwadraten van de verticale en horizontale afwijkingen te minimaliseren. In de regressie-analyse is men dan op zoek naar een vergelijking van de vorm:

$$X_2 = \alpha + \beta_1 X_1 + \epsilon \tag{A.8}$$

Uitgangspunt hierbij is dat de meetfouten ϵ onderling onafhankelijk en normaal verdeeld zijn met gemiddelde nul en variantie σ^2.

Hoe het bovenstaande werkt voor niet-normale verdelingen is onbekend. Het is mogelijk om de niet-normale verdelingen te transformeren tot normale verdelingen maar wat er dan met het uitgangspunt met betrekking tot de meetfout ϵ gebeurt is onbekend.