



Technische Universiteit Delft  
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica  
Delft Institute of Applied Mathematics

**De Dekpuntstelling van Brouwer  
(Brouwer's Fixed Point Theorem)**

Verslag ten behoeve van het  
Delft Institute for Applied Mathematics  
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE  
in  
TECHNISCHE WISKUNDE**

door

**ARNOUT DAM**

**Delft, Nederland  
Juni 2009**





BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

**“De Dekpuntstelling van Brouwer”  
 (“Brouwer’s Fixed Point Theorem”)**

ARNOUT DAM

**Technische Universiteit Delft**

**Begeleider**

Dr. M. H. A. Haase

**Overige commissieleden**

Drs. A. Verweij /  
Dr. J. G. Spandaw

Dr. J. A. M. van der Weide

...

...

Juni, 2009

Delft



# Inhoudsopgave

|          |                                              |           |
|----------|----------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Inleiding</b>                             | <b>7</b>  |
| 1.1      | Indeling . . . . .                           | 8         |
| <b>2</b> | <b>Achtergrond</b>                           | <b>9</b>  |
| 2.1      | Geschiedenis . . . . .                       | 9         |
| 2.2      | Brouwer . . . . .                            | 9         |
| 2.3      | Intuitionisme . . . . .                      | 10        |
| 2.4      | De Dekpuntstelling . . . . .                 | 10        |
| <b>3</b> | <b>Voorkennis</b>                            | <b>11</b> |
| 3.1      | Gebruikte begrippen en notatie . . . . .     | 11        |
| <b>4</b> | <b>Stellingen</b>                            | <b>13</b> |
| 4.1      | De Stelling van Weierstrass . . . . .        | 13        |
| 4.2      | Stone-Weierstrass . . . . .                  | 16        |
| 4.3      | De Inverse Functiestelling . . . . .         | 18        |
| 4.4      | Substitutie in meerdere dimensies . . . . .  | 19        |
| <b>5</b> | <b>Bewijs voor <math>n=1</math></b>          | <b>21</b> |
| 5.1      | Bewijs met Tussenwaardestelling . . . . .    | 21        |
| 5.2      | Methode van Gröger . . . . .                 | 22        |
| <b>6</b> | <b>De Dekpuntstelling van Brouwer</b>        | <b>23</b> |
| 6.1      | Hulpstelling . . . . .                       | 23        |
| 6.2      | De stelling van Brouwer . . . . .            | 27        |
| <b>7</b> | <b>Toepassing</b>                            | <b>29</b> |
| 7.1      | Een tweede-orde randwaardeprobleem . . . . . | 29        |
|          | <b>Literatuur</b>                            | <b>31</b> |

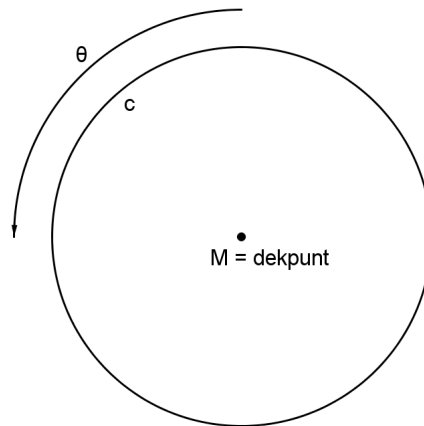


# Hoofdstuk 1

## Inleiding

De Dekpuntstelling van Brouwer zegt dat een compacte en convexe verzameling die op zichzelf wordt afgebeeld door een continue afbeelding, ten minste één vast punt bevat. Dit punt wordt ook wel dekpunt genoemd. We kunnen ons dit voorstellen door een rotatie  $\theta$  van een cirkel  $c$  om zijn middelpunt  $M$ , zie hiervoor onderstaande figuur. De verzameling is dan de cirkel en de afbeelding de rotatie om het middelpunt. Uiteraard blijft het middelpunt zelf, als enige punt, daarbij op dezelfde plaats. Dit is dus het dekpunt van de cirkel onder rotatie als afbeelding.

In dit verslag zal de Dekpuntstelling van Brouwer besproken worden en een bewijs daarvan. De meeste bewijzen van deze stelling zijn gebaseerd op methoden uit de combinatorische of algebraïsche topologie. Het bewijs wat in dit verslag aan de orde komt, is echter een analytisch bewijs waarbij gebruik gemaakt wordt van enkele belangrijke resultaten uit de analyse. Het is gebaseerd op het bewijs van Konrad Gröger, zie [1]; een uitgewerkte versie hiervan is te vinden in dit verslag. Gröger gebruikte hiervoor elementen uit het (nogal omslachtige) bewijs van John Milnor, dat overigens verder niet behandeld zal worden.



Figuur 1.1: Grafische voorstelling van een dekpunt.

## 1.1 Indeling

Voordat het daadwerkelijke bewijs aan de orde komt, zullen er enkele inleidende hoofdstukken volgen. In Hoofdstuk 2 zal daarom kort worden ingegaan op de persoon achter de stelling: L.E.J. Brouwer. Omdat veel begrippen uit het bewijs onbekend worden verondersteld, worden deze begrippen in Hoofdstuk 3 geïntroduceerd. Daarna zullen er in Hoofdstuk 4 enkele belangrijke stellingen behandeld worden die in het bewijs gebruikt worden. Speciale aandacht zal daarbij uitgaan naar de stelling van Stone-Weierstrass.

De stelling van Brouwer is geldig voor  $n$  dimensies. Het is nuttig om eerst een eenvoudig geval te bekijken, namelijk  $n=1$ . In Hoofdstuk 5 zal dit aan bod komen. Daarna volgt in Hoofdstuk 6 het algemene bewijs. Tot slot zal in Hoofdstuk 7 een toepassing van de stelling van Brouwer geïntroduceerd worden.



## Hoofdstuk 2

# Achtergrond

De Dekpuntstelling van Brouwer zal in het vervolg van dit verslag uitvoerig aan de orde komen. Uit de titel blijkt al dat deze stelling vernoemd is naar Brouwer. Maar wie was Brouwer eigenlijk? In dit hoofdstuk zal deze vraag behandeld worden om zo iets meer te weten te komen over de persoon achter deze stelling. Hierbij wordt kort ingegaan op de geschiedenis van de wiskunde.

### 2.1 Geschiedenis

Rond 1900 was de wiskunde nog hoofdzakelijk gebaseerd op de klassieke logica die afstamt van Aristoteles. De gehele wiskunde was opgebouwd door middel van axioma's. Twee hoofdstromingen in die tijd waren het Logicisme en het Formalisme. Het Logicisme, vertegenwoordigd door onder andere Frege en Russell, beschouwde de wiskunde als onderdeel van de logica: alle wiskundige waarheden kunnen afgeleid worden van logische principes. De Formalisten, waaronder Hilbert, stelden de wiskunde als een consistent systeem opgebouwd uit axioma's. Voor beide stromingen waren symbolen van groot belang, als elementen van hun systemen.

### 2.2 Brouwer

In deze tijd leefde de Nederlandse wiskundige en filosoof: Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Hij was de grondlegger van de moderne topologie. Brouwer werd bekend doordat hij niet alleen inging tegen de gevestigde wiskunde, maar de hele filosofie van de wiskunde in twijfel trok. In 1907 promoveerde hij op zijn proefschrift: 'Over de grondslagen van de wiskunde' aan de universiteit van Amsterdam. Hierin stelde hij dat de wiskunde onafhankelijk is van de logica waarmee hij inging tegen grote wiskundigen als Hilbert en Russell. De axiomatische methode was volgens hem onbruikbaar om de wiskunde mee op te bouwen. Daarom ontwierp hij een nieuwe wiskunde: het Intuïtionisme, waarmee hij het debat aanging met het Formalisme. Dit wordt ook wel omschreven als de Grondslagenstrijd.

In 1912 hield Brouwer zijn inaugurele rede met als titel: 'Intuïtionisme en Formalisme'. Onder zijn studenten bevond zich de wiskundige Hermann Weyl, tevens aanhanger van het Intuïtionisme. Brouwer maakte naam als wiskundige en werd internationaal bekend door tal van publicaties. Intussen ging het debat tussen intuïtionisten en formalisten voort en bereikte in 1928 een hoogtepunt toen Brouwer door Hilbert uit de redactie van het gezaghebbende wiskundige tijdschrift 'Mathematische Annalen' werd gezet. Dit trok Brouwer zich erg aan en hij deed afstand van zijn Intuïtionische Programma.

Figuur 2.1: L.E.J. Brouwer.



## 2.3 Intuïtionisme

Brouwer verwierp de stelling van Kant dat de Euclidische ruimte ‘a priori’ gegeven is. Men kon alleen uitgaan van de menselijke ervaring van de tijd. Met dit principe legde hij de basis van de intuïtionistische wiskunde. Hierin bestaan wiskundige objecten alleen als ze in de loop van de tijd kunnen worden geconstrueerd. Daarom wordt het ook wel constructieve wiskunde genoemd. Een wiskundig bewijs is dan alleen geldig als zo’n constructie mogelijk is. Hiermee verwierp Brouwer het principe van de uitgesloten derde (‘tertium non datur’) en zo elk bewijs vanuit het ongerijmde.

## 2.4 De Dekpuntstelling

In 1912 bewees Brouwer zijn vastepuntstelling in het algemene geval. Hij deed dat overigens niet als eerste. Eerder was al het geval  $n=3$  bewezen. (Het geval  $n=1$  is eenvoudig en wordt elders in dit verslag bewezen.) Deze bewijzen waren overigens niet constructief maar indirect, dat wil zeggen: vanuit het ongerijmde. Daarom kwamen ze niet overeen met Brouwers Intuïtionisme. Een methode om een dekpunt te construeren, bestond toen nog niet. Later werd overigens wel zo’n methode gevonden.

Er bestaan veel bewijzen van de Dekpuntstelling van Brouwer. De meeste zijn gebaseerd op de combinatorische topologie of de algebraïsche topologie. In dit verslag zal echter een analytisch bewijs van deze stelling worden gegeven. De Dekpuntstelling van Brouwer werd bekend doordat hij de basis vormde voor andere vastepuntstellingen. Deze hebben veelal toepassingen binnen de wiskunde. Een voorbeeld hiervan wordt elders in dit verslag gegeven.

# Hoofdstuk 3

## Voorkennis

In dit hoofdstuk zal het kader geschetst worden waarbinnen de stelling van Brouwer en zijn bewijs moeten worden gezien. De stelling van Brouwer is een topologische stelling, dus enige kennis van de topologie is vereist. Voor een goed begrip van de stelling zullen hierna dan ook enkele topologische begrippen en definities worden behandeld die onbekend worden verondersteld. Deze voorkennis zal ons helpen om het bewijs goed te begrijpen.

### 3.1 Gebruikte begrippen en notatie

We beschouwen vanaf nu topologische ruimten. Een topologische ruimte is een verzameling met een zodanige structuur dat er continue afbeeldingen (functies) op kunnen worden gedefinieerd. Om dergelijke afbeeldingen draait het in de stelling van Brouwer. Om het nog specifieker te maken, beschouwen we als voorbeeld van zo'n topologische ruimte de metrische ruimte  $\mathbb{R}^n$ . Dit is de  $n$ -dimensionale reële ruimte. Hierna volgt de definitie.

**Metrische ruimte:** Een verzameling  $M$ , waarvan we de elementen punten zullen noemen, is een metrische ruimte als er bij elk paar punten  $p$  en  $q$  in  $M$  (notatie:  $\forall p, q \in M$ ) een getal  $d(p, q)$  gevonden kan worden, bijgenoemd de afstand van  $p$  tot  $q$ , zo dat

- (a)  $d(p, q) > 0$  als  $p \neq q$ ;  $d(p, p) = 0$ ,
- (b)  $d(p, q) = d(q, p)$ ,
- (c)  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ ,  $\forall r \in M$ .

In de metrische ruimte  $\mathbb{R}^n$  wordt deze afstandsfunctie gedefinieerd door:

$$d(p, q) = |p - q| := \left( \sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Een deelverzameling  $M$  van  $\mathbb{R}^n$  zullen we beschrijven door  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

**De bol:** Een deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$  is de  $n$ -dimensionale bol met straal  $r$ :

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}.$$

Met  $|x|$  bedoelen we de Euclidische norm, zoals hierboven beschreven. Deze bol zullen we in het vervolg aanduiden met  $B_1$ . De index geeft de straal van de bol aan en laten we meestal weg als het de eenheidsbol betreft. Zo is  $B_{1+t}$  de bol met straal  $1+t$ . De rand van de bol  $B$  bestaat uit alle punten  $x \in B$  met  $|x| = 1$ . Deze rand is uiteraard een deelverzameling

van  $B$  en duiden we aan met  $\partial B$ . Deze begrippen zullen we later in het bewijs tegenkomen.

Voor het begrip open van een deelverzameling hebben we nog de  $\epsilon$ -bol nodig. De  $\epsilon$ -bol met middelpunt  $p$  is de verzameling van alle punten  $q$  waarvoor geldt:  $d(p, q) < \epsilon$ .

**Open:** Een deelverzameling  $E \subset M$  met  $M \subset \mathbb{R}^n$  is open als voor elk punt  $x \in E$  er een  $\epsilon > 0$  bestaat zodat  $y \in E$  voor alle  $y$  met  $|x - y| < \epsilon$ . Het complement van een open verzameling,  $M \setminus E$  of  $E^c$ , is gesloten.

**Compact:** Een deelverzameling  $M \subset \mathbb{R}^n$  is compact als elke open overdekking van  $M$  een eindige deelovertrekking bevat. Met een open overdekking van  $M$  bedoelen we dat er een verzameling  $\{G_\alpha\}$  van open deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$  bestaat zodat  $M \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ . Er moeten dus eindig veel indices  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  bestaan zodat  $M \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$ .

Er bestaat een stelling die zegt dat  $M$  compact is dan en slechts dan als  $M$  gesloten en begrensd is. Een voorbeeld van een compacte verzameling is de bol  $B$ .

Nu hebben we nog een stelling nodig die iets zegt over continue afbeeldingen op compacte verzamelingen.

**Stelling 3.1.** *Stel  $f$  is een continue afbeelding van een compacte deelverzameling  $M \subset \mathbb{R}^n$  op een deelverzameling  $N \subset \mathbb{R}^n$ . Dan is  $f(M)$  compact.*

**Convex:** Een deelverzameling  $M \subset \mathbb{R}^n$  is convex als voor twee willekeurige punten  $x, y \in M$  het lijnstuk tussen die punten geheel in  $M$  ligt. Met andere woorden, er moet gelden:

$$\forall x, y \in M, \quad \forall t \in (0, 1) : \quad (1 - t)x + ty \in M.$$

**Retractie:** Een retractorie is een continue afbeelding van een verzameling  $M$  naar een deelverzameling van  $M$  die elk punt van de deelverzameling invariant laat. In het bijzonder beschouwen we de retractorie van de bol  $B$  naar de rand  $\partial B$ , genoteerd door  $C(B, \partial B)$ .

**Relatief open:** Een deelverzameling  $E$  van  $M \subset \mathbb{R}^n$  is relatief open in  $M$  dan en slechts dan als er een open deelverzameling  $G$  van  $\mathbb{R}^n$  bestaat zodat  $E = M \cap G$ .

Een voorbeeld van een relatief open verzameling is het lijnstuk  $(0, 1) \times \{0\}$ . Deze verzameling is open in  $\mathbb{R} \times \{0\}$ , maar niet in  $\mathbb{R}^2$ .

**Samenhangend:** Een deelverzameling  $M \subset \mathbb{R}^n$  is samenhangend dan en slechts dan als voor alle verzamelingen  $U, V$  relatief open in  $\mathbb{R}^n$ , met  $U \cap V = \emptyset$  geldt: als  $M = U \cup V$ , dan  $M = U$  (en  $V = \emptyset$ ) of  $M = V$  (en  $U = \emptyset$ ).

Ook voor het begrip samenhangend geldt dat het beeld van een samenhangende verzameling onder een continue afbeelding weer samenhangend is.

# Hoofdstuk 4

## Stellingen

In dit hoofdstuk zullen we enkele belangrijke stellingen behandelen die we in het bewijs van de stelling van Brouwer nodig hebben. Speciale aandacht zullen we hierbij geven aan de stelling van Weierstrass en de generalisatie van Stone.

### 4.1 De Stelling van Weierstrass

In het bewijs zullen we een generalisatie van de benaderingsstelling van Weierstrass nodig hebben. Deze staat ook wel bekend als de stelling van Stone-Weierstrass. Hiertoe zullen we eerst de stelling van Weierstrass behandelen. Deze zegt dat een continue functie benaderd kan worden door een rij polynomen.

**Stelling 4.1** (Weierstrass). *Stel,  $f$  is een continue complexe functie op  $[a, b]$ , dan bestaat er een rij polynomen  $P_n$  zo dat*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

*uniform op  $[a, b]$ . Als  $f$  reëel is, kan  $P_n$  reëel genomen worden.*

**Bewijs** We mogen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat  $[a, b] = [0, 1]$ . Als de stelling geldt voor dit interval, geldt hij immers voor elk interval via een eenvoudige transformatie. We kunnen ook aannemen dat  $f(0) = f(1) = 0$ . Immers, als de stelling waar is voor dit geval, neem dan een functie  $g(x)$  met

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Hieruit volgt dat  $g(0) = g(1) = 0$ . Nu is  $g$  de limiet van een uniform convergente rij polynomen en omdat  $f - g$  een polynoom is, geldt dat ook voor  $f$ . Stel verder dat  $f(x) = 0$  buiten het interval  $[0, 1]$ . Dan is  $f$  uniform continu op  $\mathbb{R}$ .

Definieer nu de functie

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.1)$$

waarbij we  $c_n$  zodanig kiezen dat

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.2)$$

We zijn nu geïnteresseerd in de grootte van  $c_n$ . We maken de volgende afchatting:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n dx \\ &\geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2) dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Er volgt nu uit (4.2) dat

$$c_n < \sqrt{n}. \quad (4.3)$$

Hierbij hebben we gebruikt dat  $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$  op  $[0, 1]$ . De functie  $(1-x^2)^n - 1 + nx^2$  is immers nul op  $x = 0$  en zijn afgeleide is positief op  $(0, 1)$ .

(We kunnen  $c_n$  zelfs exact berekenen. We vinden dan de volgende uitdrukkingen voor  $c_n$ :

$$\frac{1}{c_n} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{en} \quad c_n = \frac{(2n+1)!}{2 \cdot 4^n (n!)^2} \quad \text{voor } n = 1, 2, 3, \dots)$$

Voor willekeurige  $\delta > 0$  volgt nu uit (4.3) dat

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \quad (\delta \leq |x| \leq 1), \quad (4.4)$$

zodat  $Q_n(x) \rightarrow 0$  uniform op  $\delta \leq |x| \leq 1$ . Definieer nu de functie

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t)Q_n(t)dt \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (4.5)$$

Door de aannames die we voor  $f$  hebben gedaan, volgt nu door een eenvoudige substitutie dat

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt = \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt,$$

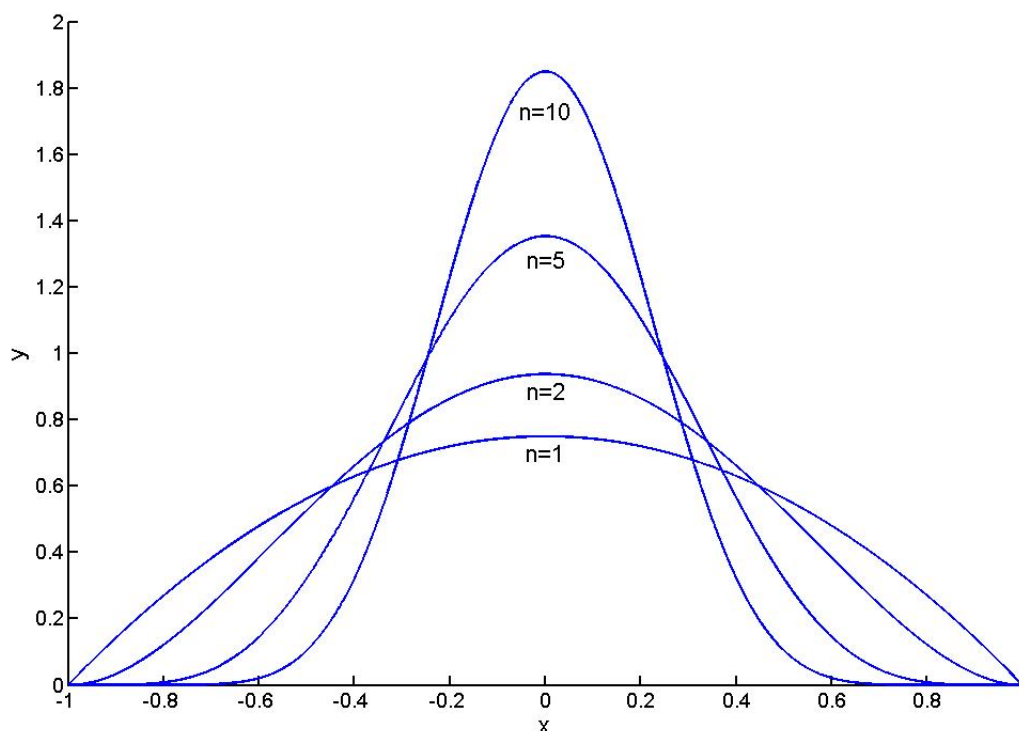
en deze laatste integraal is zeker een polynoom in  $x$ . Dus  $\{P_n\}$  is een rij van polynomen die reëel zijn als  $f$  reëel is.

Omdat  $f$  uniform continu is, kunnen we voor een willekeurige  $\epsilon > 0$  een  $\delta > 0$  kiezen zodanig dat

$$|y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon/2.$$

Zij nu  $M = \sup_{|x| \leq 1} |f(x)|$ . Gebruik makend van (4.2), (4.4) en het feit dat  $Q_n(x) \geq 0$ , zien we dat voor  $0 \leq x \leq 1$  geldt:

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 [f(x+t) - f(x)]Q_n(t)dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)dt \\ &\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \epsilon/2 \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt + 2M \int_{\delta}^1 Q_n(t)dt \\ &\leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \epsilon/2 \\ &< \epsilon \end{aligned}$$



Figuur 4.1: De grafiek van  $Q_n$  voor enkele waarden van  $n$ .

als  $n$  groot genoeg is. Hiermee is het bewijs van de stelling geleverd. In Figuur (4.1) is de grafiek van  $Q_n$  geschetst voor enkele waarden van  $n$ .

Een speciaal geval van deze stelling hebben we nodig voor de stelling van Stone-Weierstrass en behandelen we als gevolg.

**Gevolg 4.2.** Voor elk interval  $[-a, a]$  bestaat er een rij reële polynomen  $P_n$  zo dat  $P_n(0) = 0$  en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = |x|$$

uniform op  $[-a, a]$ .

**Bewijs** Volgens de stelling van Weierstrass bestaat er een rij  $\{P_n^*\}$  van reële polynomen die uniform convergeert naar  $|x|$  op  $[-a, a]$ . In het bijzonder geldt dat  $P_n^*(0) \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ . De volgende polynomen gedefinieerd door

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

voldoen aan de eisen.

## 4.2 Stone-Weierstrass

De stelling van Weierstrass kan uitgebreid worden naar continue functies op een compacte verzameling. Hiervoor hebben we enkele definities nodig.

**Definitie** Een familie  $\mathcal{A}$  van complexe functies gedefinieerd op een verzameling  $E$  is een algebra als  $\mathcal{A}$  gesloten is onder optelling, vermenigvuldiging en scalaire vermenigvuldiging. Als  $f \in \mathcal{A}$  wanneer  $f_n \in \mathcal{A}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) en  $f_n \rightarrow f$  uniform op  $E$ , dan is  $\mathcal{A}$  uniform gesloten. Zij nu  $\mathcal{B}$  de verzameling van alle limietfuncties van uniform convergente rijen in  $\mathcal{A}$ . Dan is  $\mathcal{B}$  de uniforme afsluiting van  $\mathcal{A}$ , notatie  $\overline{\mathcal{A}}$ . Er geldt bovendien dat  $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$ .

De verzameling van alle polynomen bijvoorbeeld, is een algebra. De stelling van Weierstrass zegt nu dat de verzameling van alle continue functies op  $[a, b]$  de uniforme afsluiting is van de verzameling van alle polynomen op  $[a, b]$ .

Zij nu  $\mathcal{A}$  een familie van functies op een verzameling  $E$ . We zeggen dan:  $\mathcal{A}$  *scheidt punten* op  $E$  als bij elk paar verschillende punten  $x_1, x_2 \in E$  een functie  $f \in \mathcal{A}$  bestaat zo dat  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Als voor elk punt  $x \in E$  een functie  $g \in \mathcal{A}$  bestaat zo dat  $g(x) \neq 0$ , dan zeggen we dat  $\mathcal{A}$  *in geen enkel punt verdwijnt van*  $E$ .

**Stelling 4.3.** *Stel,  $\mathcal{A}$  is een algebra van functies op een verzameling  $E$ ,  $\mathcal{A}$  scheidt punten op  $E$  en  $\mathcal{A}$  verdwijnt in geen enkel punt van  $E$ . Stel verder dat  $x_1$  en  $x_2$  verschillende punten zijn in  $E$  en  $c_1$  en  $c_2$  willekeurige constanten. Dan bevat  $\mathcal{A}$  een functie  $f$  zodanig dat*

$$f(x_1) = c_1 \quad \text{en} \quad f(x_2) = c_2.$$

Nu hebben we de benodigde stellingen en definities voor Stones generalisatie van de stelling van Weierstrass.

**Stelling 4.4** (Stone-Weierstrass). *Laat  $\mathcal{A}$  een algebra van reële continue functies op een compacte verzameling  $K$ . Als  $\mathcal{A}$  punten scheidt op  $K$  en als  $\mathcal{A}$  in geen enkel punt van  $K$  verdwijnt, dan bestaat de uniforme afsluiting  $\mathcal{B}$  van  $\mathcal{A}$  uit alle reële continue functies op  $K$ .*

Het bewijs bestaat uit vier stappen.

**STAP 1** Als  $f \in \mathcal{B}$ , dan  $|f| \in \mathcal{B}$ .

**Bewijs** Zij

$$a = \sup_{x \in K} |f(x)| \tag{4.6}$$

en zij  $\epsilon > 0$  gegeven. Dan bestaan er volgens Gevolg (4.2) reële getallen  $c_1, \dots, c_n$  zo dat

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i y^i - |y| \right| < \epsilon \quad (-a \leq y \leq a). \tag{4.7}$$

Omdat  $\mathcal{B}$  een algebra is, is de functie

$$g = \sum_{i=1}^n c_i f^i$$



een element van  $\mathcal{B}$ . Nu volgt uit (4.6) en (4.7) dat

$$|g(x) - |f(x)|| < \epsilon \quad (x \in K). \quad (4.8)$$

Omdat  $\mathcal{B}$  uniform gesloten is, volgt hieruit dat  $|f| \in \mathcal{B}$ .

**STAP 2** Als  $f \in \mathcal{B}$  en  $g \in \mathcal{B}$ , dan is  $\max\{f, g\} \in \mathcal{B}$  en  $\min\{f, g\} \in \mathcal{B}$ .

Met de functie  $\max\{f, g\}$  bedoelen we de functie  $h$  gedefinieerd door

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } f(x) \geq g(x), \\ g(x) & \text{als } f(x) < g(x), \end{cases}$$

en  $\min\{f, g\}$  is analoog gedefinieerd.

**Bewijs** We maken gebruik van de volgende gelijkheden:

$$\max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \quad (4.9)$$

$$\min\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}. \quad (4.10)$$

Omdat  $\mathcal{B}$  een algebra is, geldt  $f+g \in \mathcal{B}$  en  $f-g \in \mathcal{B}$ . Uit Stap 1 volgt dan dat  $|f-g| \in \mathcal{B}$ . Nu concluderen we dat  $\max\{f, g\} \in \mathcal{B}$  en  $\min\{f, g\} \in \mathcal{B}$ . Dit kunnen we uitbreiden naar een eindige verzameling functies: als  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{B}$ , dan  $\max\{f_1, \dots, f_n\} \in \mathcal{B}$  en  $\min\{f_1, \dots, f_n\} \in \mathcal{B}$ .

**STAP 3** Gegeven een reële functie  $f$  die continu is op de verzameling  $K$ , een punt  $x \in K$ , en  $\epsilon > 0$  willekeurig, dan bestaat er een functie  $g_x \in \mathcal{B}$  zo dat  $g_x(x) = f(x)$  en

$$g_x(t) > f(t) - \epsilon \quad (t \in K). \quad (4.11)$$

**Bewijs** Omdat  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  en  $\mathcal{A}$  voldoet aan de voorwaarden van Stelling (4.3), voldoet  $\mathcal{B}$  hier ook aan. Voor elke  $y \in K$  kunnen we dus een functie  $h_y \in \mathcal{B}$  vinden zo dat

$$h_y(x) = f(x) \quad \text{en} \quad h_y(y) = f(y). \quad (4.12)$$

Vanwege de continuïteit van  $h_y$ , bestaat er een open verzameling  $J_y$  waar  $y$  in ligt, zo dat

$$h_y(t) > f(t) - \epsilon \quad (t \in J_y). \quad (4.13)$$

Omdat  $K$  compact is, bestaat er een eindige deelloverdekking van  $K$ . We kunnen dus eindig veel punten  $y_1, \dots, y_n$  vinden zo dat

$$K \subset J_{y_1} \cup \dots \cup J_{y_n}. \quad (4.14)$$

Voor al deze punten  $y_i$  geldt nu dat  $h_{y_i}(t) > f(t) - \epsilon$  waarbij  $t \in J_{y_i}$ . Definieer nu

$$g_x = \max\{h_{y_1}, \dots, h_{y_n}\},$$

dan is  $g_x \in \mathcal{B}$  door Stap 2 en gebruik makend van (4.12) tot (4.14) vinden we dat  $g_x(t) > f(t) - \epsilon$ .

**STAP 4** *Gegeven een reële functie  $f$ , continu op  $K$ , en  $\epsilon > 0$ , dan bestaat er een functie  $h \in \mathcal{B}$  zo dat*

$$|h(x) - f(x)| < \epsilon \quad (x \in K). \quad (4.15)$$

Omdat  $\mathcal{B}$  uniform gesloten is, is deze laatste stap equivalent met de conclusie van de stelling.

**Bewijs** Beschouw nu de functies  $g_x$ , voor elke  $x \in K$ , die we in Stap 3 gedefinieerd hebben. Omdat  $g_x$  continu is, bestaan er open verzamelingen  $V_x$  waar  $x$  in ligt, zo dat

$$g_x(t) < f(t) + \epsilon \quad (t \in V_x). \quad (4.16)$$

Omdat  $K$  compact is, bestaan er eindig veel punten  $x_1, \dots, x_n$  zo dat

$$K \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}. \quad (4.17)$$

Definieer nu de functie  $h = \min \{g_{x_1}, \dots, g_{x_n}\}$ . Uit Stap 2 volgt dat  $h \in \mathcal{B}$  en gebruik makend van (4.11) vinden we dat

$$h(t) > f(t) - \epsilon \quad (t \in K), \quad (4.18)$$

en uit (4.16) en (4.17) volgt dat

$$h(t) < f(t) + \epsilon \quad (t \in K). \quad (4.19)$$

Nu volgt uit (4.17) en (4.18) dat  $|h(t) - f(t)| < \epsilon$  met  $t \in K$  (4.15).

### 4.3 De Inverse Functiestelling

Een andere belangrijke stelling die we nodig hebben in het bewijs van de stelling van Brouwer, is de inverse functiestelling. Deze stelling zegt dat een continu differentieerbare afbeelding  $f$  inverteerbaar is in een omgeving van een punt  $x$  als de lineaire transformatie  $f'(x)$  inverteerbaar is.

**Stelling 4.5** (Inverse Functiestelling). *Stel,  $f$  is een  $C^1$ -afbeelding van een open verzameling  $E \subset \mathbb{R}^n$  naar  $\mathbb{R}^n$ ,  $f'(a)$  is inverteerbaar voor een  $a \in E$  en  $f(a) = b$ . Dan geldt:*

1. *Er bestaan open verzamelingen  $U$  en  $V$  in  $\mathbb{R}^n$  zo dat  $a \in U$ ,  $b \in V$ ,  $f$  is injectief op  $U$  en  $f(U) = V$ ,*
2. *Als  $g$  de inverse van  $f$  is, gedefinieerd door  $g(f(x)) = x$  voor  $x \in U$ , dan is  $g \in C^1(V)$ .*

Merk op dat de inverse van  $f$  bestaat omdat  $f$  injectief is op  $U$ .

Het bewijs van deze stelling zullen we hier niet behandelen. In het bewijs zal het vooral gaan om deel 1.

## 4.4 Substitutie in meerdere dimensies

In deze paragraaf schenken we aandacht aan de methode van substitutie in meerdere dimensies voor integralen. Wat is het effect hiervan op de integraal? We geven de volgende stelling:

**Stelling 4.6** (Substitutie in meerdere dimensies). *Stel,  $T$  is een injectieve  $C^1$ -afbeelding van een open verzameling  $E \subset \mathbb{R}^n$  naar  $\mathbb{R}^n$  zo dat  $J_T(x) \neq 0$  voor alle  $x \in E$ . Als  $f$  een continue functie is op  $\mathbb{R}^n$  waarvan de drager compact is en in  $T(E)$  ligt, dan*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x))|J_T(x)|dx. \quad (4.20)$$

Merk op dat  $J_T$  de Jacobiaan van  $T$  is. Uit de aanname dat  $J_T(x) \neq 0$  volgt dat  $T^{-1}$  continu is op  $T(E)$ , dus de integrand van de rechter integraal van (4.20) heeft een compacte drager in  $E$ . De drager van een functie  $f$  op  $\mathbb{R}^n$  is de afsluiting van de verzameling van alle punten  $x \in \mathbb{R}^n$  waarvoor geldt  $f(x) \neq 0$ .



## Hoofdstuk 5

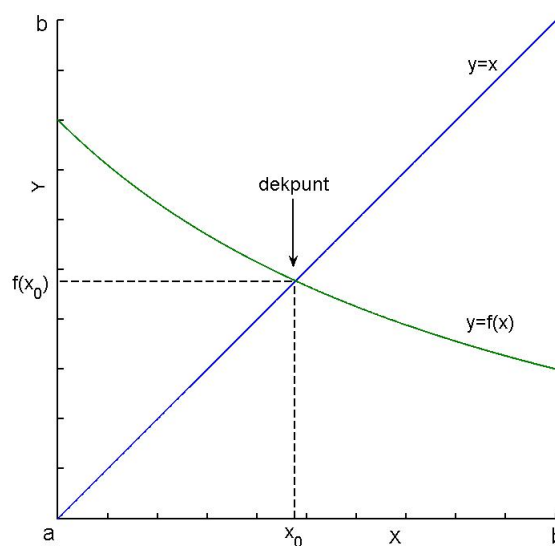
# Bewijs voor $n=1$

Om een indruk te krijgen van het bewijs van de stelling van Brouwer, is het nuttig om eerst het geval  $n=1$  te bekijken. Eerst geven we het (bekende) bewijs met de Tussenwaardestelling. Helaas is dit bewijs in het algemeen niet geldig. Daarom zullen we nog een andere methode bekijken, die wel algemeen toegepast kan worden. We noemen dit de methode van Gröger, omdat hij het bewijs gegeven heeft wat in dit verslag besproken wordt, zie [1]. Hier volgt eerst de stelling van Brouwer.

**Stelling 5.1** (Brouwer). *Stel,  $M \subset \mathbb{R}^n$  is compact en convex en  $f : M \rightarrow M$  is een continue afbeelding, dan bestaat er een  $x_0 \in M$  zodanig dat  $f(x_0) = x_0$ .*

### 5.1 Bewijs met Tussenwaardestelling

Neem de verzameling  $M = [a, b]$ , deze is compact en convex. Stel dat  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  een continue functie is. Als  $f(a) = a$  of  $f(b) = b$  zijn we klaar en hebben we ons vaste punt gevonden. In het andere geval is  $f(a) > a$  en  $f(b) < b$ . Dit geval wordt weergegeven door Figuur (5.1).



Figuur 5.1: Grafische voorstelling van een dekpunt voor  $n=1$ .

Definieer nu de functie  $g(x) = x - f(x)$ , dan is  $g(a) < 0$  en  $g(b) > 0$ . Nu gebruiken we de Tussenwaardestelling:

**Stelling 5.2** (Tussenwaardestelling). *Stel,  $f$  is een continue reële functie op het interval  $[a, b]$ . Als  $f(a) < f(b)$  en  $c$  is een getal zodat  $f(a) < c < f(b)$ , dan bestaat er een punt  $x \in (a, b)$  zo dat  $f(x) = c$ .*

We hebben dus  $g(a) < 0 < g(b)$ . Volgens stelling (5.2) bestaat er nu een  $x \in (a, b)$  zo dat  $g(x) = 0$ . Voor deze  $x$  geldt dat  $f(x) = x$  en we hebben ons vaste punt.

## 5.2 Methode van Gröger

We bekijken weer het interval  $[a, b]$ . Stel nu dat er geen  $x_0 \in [a, b]$  bestaat waarvoor geldt  $f(x_0) = x_0$ , dus er zijn geen vaste punten. We bekijken dus de verzameling  $\{x \in [a, b] : x \neq f(x)\}$ . Deze verzameling kunnen we als een vereniging van twee disjuncte verzamelingen schrijven op de volgende manier:

$$\{x \in [a, b] : x \neq f(x)\} = \{x \in [a, b] : x > f(x)\} \cup \{x \in [a, b] : x < f(x)\} \subset [0, 1].$$

We laten nu zien dat  $\{x \in [a, b] : x \neq f(x)\}$  niet samenhangend is en hieruit volgt een tegenspraak.

## Hoofdstuk 6

# De Dekpuntstelling van Brouwer

We komen nu toe aan de behandeling van het bewijs voor het algemene geval van de stelling van Brouwer. Het bewijs is gebaseerd op het bewijs van Gröger, zie bron. De Dekpuntstelling van Brouwer zegt dat als  $M \subset \mathbb{R}^n$  compact en convex is en  $f : M \rightarrow M$  een continue afbeelding, dan bestaat er een  $x_0 \in M$  zodanig dat  $f(x_0) = x_0$ .

### 6.1 Hulpstelling

Om de stelling van Brouwer te bewijzen, hebben we eerst een andere, belangrijke stelling nodig. Deze stelling zegt dat er geen continue afbeelding  $R$  bestaat van de eenheidsbol  $B$  in  $\mathbb{R}^n$  naar de rand daarvan  $\partial B$ , die de punten op de rand invariant laat. Zo'n afbeelding wordt ook wel een retractie genoemd. De stelling luidt als volgt:

**Stelling 6.1.** *Er bestaat geen afbeelding  $R$  zodanig dat:*

$$R \in C(B, \partial B), \quad \forall x \in \partial B : Rx = x. \quad (6.1)$$

Het bewijs geven we vanuit het ongerijmde, dat wil zeggen: we gaan er vanuit dat er wel zo'n afbeelding  $R$  bestaat en proberen zo tot een tegenargument te komen. Het bewijs bestaat uit drie stappen die we in het vervolg zullen behandelen.

#### STAP 1

Het doel van deze stap is om de afbeelding  $R$  te vervangen door een geschikte, gladde retractie. Deze kiezen we continu differentieerbaar. Deze eigenschap van differentieerbaarheid zullen we in de volgende stappen nodig hebben. Hiervoor breiden we  $R$  continu uit naar  $\mathbb{R}^n$  door de volgende afbeelding

$$Rx := \frac{x}{|x|} \quad \text{als} \quad |x| > 1. \quad (6.2)$$

Merk op dat  $|Rx| = 1$ . Met behulp van de stelling van Weierstrass kunnen we  $R$  benaderen door een rij polynomen. Deze zijn zeker differentieerbaar. We kiezen  $R_1 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  zo dat

$$|R_1x - Rx| < 1 \quad \text{als} \quad |x| \leq 2. \quad (6.3)$$

Nu kunnen we een nieuwe functie  $R_2$  maken als lineaire combinatie van  $R$  en  $R_1$ , die we als volgt definiëren:

$$R_2x := (1 - \varphi(|x|)) Rx + \varphi(|x|) R_1x \quad \text{voor} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (6.4)$$

waarbij  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$  een continue functie is op  $\mathbb{R}$  zodanig dat

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq \varphi(t) \leq 1, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } t \leq 3/2, \\ 0 & \text{als } t \geq 2. \end{cases} \quad (6.5)$$

De functie  $R_2$  is nu continu differentieerbaar. Dit volgt uit de keuze van  $R_1x$  en uit het feit dat  $Rx$  continu en differentieerbaar is, behalve in het punt  $x = 0$ . Dit punt wordt echter vermeden door de lineaire combinatie van deze twee functies als hierboven te kiezen. Deze lineaire combinatie is zeker ook continu differentieerbaar.

Dus  $R_2 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  en we vinden gebruik makend van (6.4) en (6.5):

$$R_2x = Rx = \frac{x}{|x|} \quad \text{als } |x| \geq 2 \text{ en}$$

$$\begin{aligned} |R_2x| &= |(1 - \varphi(|x|)) Rx + \varphi(|x|) R_1x| \\ &= |Rx + \varphi(|x|)(R_1x - Rx)| \\ &\geq |Rx| - |\varphi(|x|)(R_1x - Rx)| \\ &= |Rx| - \varphi(|x|)|R_1x - Rx| \\ &> |R_1x - Rx| - \varphi(|x|)|R_1x - Rx| \\ &= |R_1x - Rx|(1 - \varphi(|x|)) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

als  $|x| < 2$ . Nu kunnen we  $P \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  definiëren door

$$Px := \frac{R_2(2x)}{|R_2(2x)|} \quad \text{voor } x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.7)$$

Immers, uit  $|R_2x| > 0$ . Hieruit volgt dat  $|Px| = 1$  voor  $x \in \mathbb{R}^n$  en  $Px = \frac{x}{|x|}$  voor  $|x| \geq 1$ . Dus  $Px$  is een retractie van de bol naar de rand. Deze afbeelding zullen we in de volgende stappen gebruiken.

## STAP 2

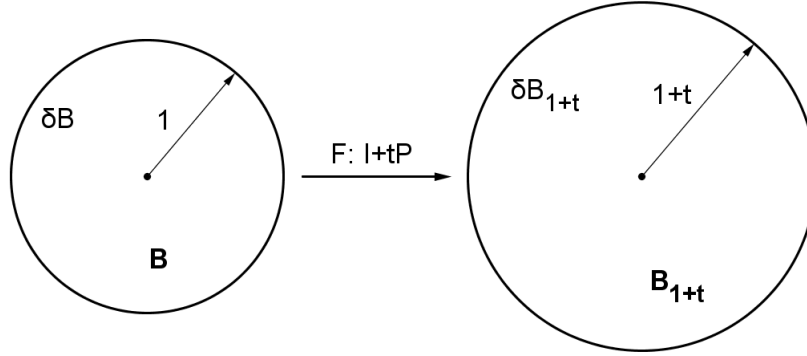
We gaan nu een afbeelding  $F$  rond  $P$  construeren die de eenheidsbol  $B$  projecteert op een iets grotere bol met straal  $1+t$  waarbij  $t > 0$ . Uit Stap 1 volgt dat  $P$  continu differentieerbaar is, dus  $P$  is in het bijzonder Lipschitz continu. Herinner dat de functie  $f$  Lipschitz continu is als er een constante  $M$  bestaat zodanig dat

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6.8)$$

Deze Lipschitz constante  $M$  vinden we als volgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_0^1 f'(y + t(x - y))(x - y) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f'(y + t(x - y))| dt \cdot |x - y| \\ &= M|x - y|. \end{aligned}$$



Figuur 6.1: De afbeelding  $F$ .

We definiëren nu de afbeelding  $F$  als volgt:

$$F_t := I + tP \quad \text{waarbij } 0 \leq t < \frac{1}{M}. \quad (6.9)$$

Deze afbeelding is weergegeven in Figuur (6.1). We gaan bewijzen dat voor deze afbeelding geldt:

$$F(B) = (I + tP)B = B_{1+t}, \quad (6.10)$$

waarbij  $I$  de identiteitsafbeelding is. Herinner dat  $B_{1+t} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1+t\}$ . We bekijken nu voor willekeurige punten  $x$  wat het beeld is onder de projectie. Hieruit concluderen we het volgende:

$$x \in B \Rightarrow |F(x)| = |x + tPx| \leq |x| + t|Px| \leq 1+t, \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} x \notin B \Rightarrow |F(x)| &= |x + tPx| = \left| x + t \frac{x}{|x|} \right| \\ &= \left( 1 + \frac{t}{|x|} \right) |x| = |x| + t > 1+t. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dus, alle punten die zich binnen de bol  $B$  bevinden, worden ook binnen de bol  $B_{1+t}$  afgebeeld. Het omgekeerde is ook waar. Als  $y$  in de bol  $B_{1+t}$  ligt, dan bevindt zich het origineel van  $y$  in  $B$ . Bovenstaande levert dus de volgende equivalentie

$$x \in B \Leftrightarrow F(x) \in B_{1+t}. \quad (6.13)$$

In het bijzonder bestaat er een 1-1-afbeelding van de rand  $\partial B$  van  $B$  naar de rand van  $B_{1+t}$ , dat is  $\partial B_{1+t}$ . We hebben:

$$\begin{aligned} x \in \partial B &\Rightarrow |x| = 1, \\ |F(x)| &= |x + tPx| = \left( 1 + \frac{t}{|x|} \right) |x| = 1+t \\ &\Rightarrow F(x) \in \partial B_{1+t}, \\ F(y) \in \partial B_{1+t} &\Rightarrow |y + tPy| = 1+t, \\ 1+t &= |y + tPy| = \left( 1 + \frac{t}{|y|} \right) |y| = |y| + t \\ &\Rightarrow y \in \partial B. \end{aligned}$$

De keuze van  $t$  impliceert dat  $t|P'(x)| < 1$  voor alle  $x \in B$ . Dus is ook  $|-tP'| < 1$ . Nu is  $I + tP'$  inverteerbaar met

$$(I + tP')^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-tP')^n. \quad (6.14)$$

Hierbij gebruiken we dat voor alle  $x \in \mathbb{R}^n$  geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{als } |x| < 1.$$

Dus  $I + tP'(x)$  is een isomorfisme en  $\det(I + tP'(x)) > 0$  voor  $x \in B$ . Immers, voor  $t = 0$  geldt:  $\det(I + tP') = \det(I) = 1 > 0$  en vanwege de tussenwaardstelling is  $\det(I + tP')$  positief.

We bewijzen nu dat  $F(B) = (I + tP)B$  een relatief open deelverzameling van  $B_{1+t}$  is.  $F$  is een  $C^1$ -afbeelding van  $B$  naar  $B_{1+t}$ .  $F'$  is inverteerbaar voor willekeurige  $x_0 \in B$  en  $y_0 = F(x_0) = x_0 + tPx_0 \in B_{1+t}$ . Dan bestaan er volgens de Inverse Functiestelling open verzamelingen  $U$  en  $V$  in  $\mathbb{R}^n$  zo dat  $x_0 \in U$ ,  $y_0 \in V$  en  $F : U \rightarrow V$  bijectief is.

Er geldt nu dat

$$y_0 \in (V \cap B_{1+t}) \subset F(U \cap B) \subset F(B).$$

Neem nu  $y \in V \cap B_{1+t}$ , dan is er een  $x \in U$  met  $F(x) = y$ , want  $y \in B_{1+t} \Rightarrow x \in B$ . Dus voor alle  $x \in B$  bestaan er open verzamelingen  $V_x$  in  $\mathbb{R}^n$  zodanig dat

$$F(x) \in (V_x \cap B_{1+t}) \subset F(B). \quad (6.15)$$

Er volgt nu uit (6.15) dat

$$F(B) = \left( \bigcup_{x \in B} V_x \right) \cap B_{1+t},$$

dus  $F(B) = (I + tP)B$  is relatief open in  $B_{1+t}$ .

Nu is de verzameling  $(I + tP)B$  compact, want  $B$  is compact en  $(I + tP)$  een continue afbeelding. Dus is  $(I + tP)B$  gesloten. Verder is de verzameling  $B_{1+t}$  samenhangend, want  $B$  is samenhangend. Hieruit volgt dat  $(I + tP)B$  geen zuivere deelverzameling is van  $B_{1+t}$ , dus  $(I + tP)B = B_{1+t}$ .

### STAP 3

De afbeelding  $F = (I + tP)$  is injectief, want als  $x + tPx = y + tPy$ , dan geldt

$$|x - y| = t|Px - Py| \leq tM|x - y|$$

en hieruit volgt dat  $x = y$ . We maken nu gebruik van de substitutieregels voor integralen in meerdere dimensies. Er volgt dat

$$\begin{aligned} (1+t)^n \int_B dy &= \int_{B_{1+t}} dy = \int_{(I+tP)B} dy = \int_B \det(I + tP'(x)) dx \\ &= t^n \int_B \det P'(x) dx + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k, \end{aligned} \quad (6.16)$$

waarbij  $a_0, \dots, a_{n-1}$  bepaalde reële getallen zijn. De laatste gelijkheid volgt uit het feit dat  $\det(I + tP'(x))$  een  $n^e$ -graads polynoom in  $t$  is. De coëfficiënt van  $t^n$  is dan  $\det P'(x)$ . Er volgt uit (6.16) dat

$$\int_B \det P'(x) dx = \int_B dy \neq 0. \quad (6.17)$$

Dus  $\det P'(x) \neq 0$  voor alle  $x \in B$ . Maar uit  $|Px|^2 = 1$  volgt na differentiëren  $P'(x)^T Px = 0$ . Dus de vector  $Px$  is in de kern van de matrix  $P'(x)^T$ . Hieruit volgt dat  $P'(x)^T$  niet inverteerbaar is, dus  $\det P'(x)^T = 0$ . Nu hebben we de gevraagde tegenspraak.

## 6.2 De stelling van Brouwer

Een onmiddellijk gevolg van Stelling (6.1) is de Dekpuntstelling van Brouwer:

**Stelling 6.2** (Brouwer). *Elke continue afbeelding  $T$  van  $B$  naar zichzelf bevat tenminste één vast punt.*

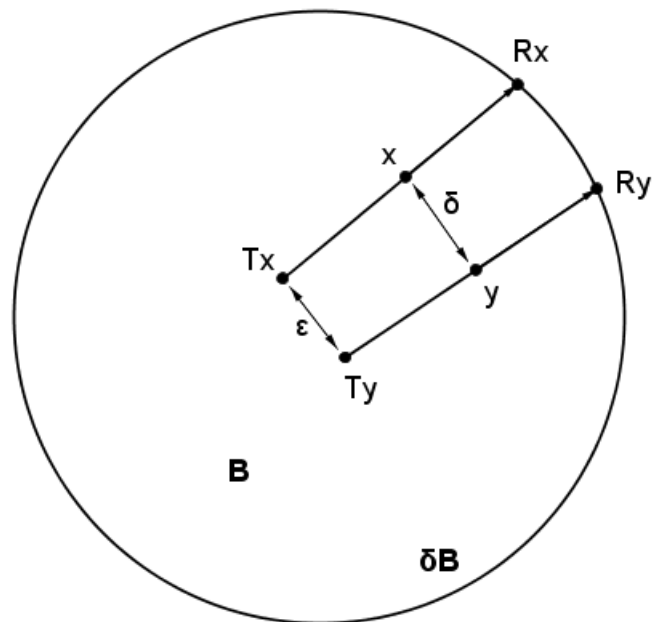
Het bewijs van deze stelling volgt weer uit het ongerijmde. Stel, we hebben  $Tx \neq x$  voor alle  $x \in B$ . Nu definiëren we de afbeelding

$$Rx = Tx + t(x - Tx), \quad \text{met } t \geq 1, \quad |Rx| = 1. \quad (6.18)$$

Dit is een retractie van  $B$  op de rand, zie Figuur (6.2). De afbeelding  $R$  is continu, want  $T$  is continu en  $R$  is een lineaire combinatie van continue afbeeldingen. Het blijkt dat  $t$  een functie van  $x$  is en deze functie kunnen we als volgt berekenen

$$\begin{aligned} 1 = |Rx|^2 &= |Tx + t(x - Tx)|^2 \\ &= |Tx|^2 + t^2|x - Tx|^2 + 2t(x - Tx)Tx \\ &\Rightarrow |x - Tx|^2 \cdot t^2 + 2(x - Tx)Tx \cdot t + |Tx|^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Maar nu volgt er uit Stelling (6.1) dat de afbeelding  $R$  die we hebben gedefinieerd, niet kan bestaan. Daarmee is Stelling (6.2) bewezen.

Figuur 6.2: De afbeelding  $R$ .

# Hoofdstuk 7

## Toepassing

In dit hoofdstuk zal een voorbeeld van een (indirecte) toepassing van de stelling van Brouwer worden gegeven. Met behulp van deze stelling kunnen we aantonen dat er oplossingen bestaan voor een differentiaalvergelijking. De toepassing is indirect, omdat de vastepuntstelling die hierbij nodig is een generalisatie van de stelling van Brouwer is, namelijk de vastepuntstelling van Schaeffer. Dit hoofdstuk is geen complete verhandeling, maar meer een inleiding op het probleem om te laten zien welke toepassingen de stelling van Brouwer heeft. Voor meer details, zie [3].

### 7.1 Een tweede-orde randwaardeprobleem

We gaan laten zien dat er een oplossing  $y = y(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  bestaat voor het volgende tweede-orde randwaardeprobleem met Dirichlet randvoorwaarden:

$$\begin{aligned}y'' &= f(s, y, y') \\ y(0) &= y(1) = 0\end{aligned}$$

waarbij  $f = f(s, u, p) : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een continue functie is (niet per se lineair) met de volgende eigenschappen:

1. Er is een  $M > 0$  zodanig dat:  $|u| > M \Rightarrow uf(s, u, 0) > 0$ ,
2. Er bestaan reële getallen  $A, B > 0$  zó dat als  $0 \leq s \leq 1$  en  $|u| \leq M$ , dan  $|f(s, u, p)| < Ap^2 + B$  voor alle  $p \in \mathbb{R}$ .

Om de vastepuntstelling te kunnen gebruiken, moeten we de oplossing van het randwaardeprobleem beschouwen als een vast punt van een of andere functie. We zullen nu zien hoe dit werkt.

We richten onze aandacht op de differentiaalvergelijking  $y'' = f(s, y, y')$ . Nu stellen we ons de linkerkant voor, niet als tweede afgeleide van  $y$ , maar als het resultaat van een operatie op een functie die de tweede afgeleide tot gevolg heeft. De operator die we  $L$  zullen noemen, werkt dus als volgt:  $Lv = v''$  waarbij  $v = v(s)$  een functie is op  $[0, 1]$ . De differentiaalvergelijking kan nu geschreven worden als:

$$Ly = y'' = f(s, y, y'). \quad (7.1)$$

Herinner dat  $f$  continu is, zodat  $Lv$  ook continu moet zijn. We zijn dus geïnteresseerd in die functies  $v$  die continu zijn en waarvan de tweede afgeleide bestaat. Dus we willen dat  $v \in C^2[0, 1]$ , de verzameling van continue, tweemaal differentieerbare functies. Omdat het beeld  $Lv = v''$  een

continue functie is, is het bereik van  $L$  de lineaire ruimte  $C[0, 1]$ . We kunnen  $L$  dus schrijven als een functie:  $L : C^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ .

Veronderstel nu dat  $L$  een isomorfisme is met inverse  $L^{-1}$ , dan kunnen we (7.1) herschrijven als:  $y = L^{-1}f(s, y, y')$ . Dit is een vaste-puntprobleem, omdat we een functie  $T$  kunnen definiëren door:

$$T(y) = L^{-1}f(s, y, y') = y. \quad (7.2)$$

Een oplossing van (7.1) wordt nu beschreven door  $y = T(y)$ , dat is een vast punt van  $T$ . We hebben dus een manier gevonden om (7.1) te schrijven als een vaste-puntprobleem. Echter, de functie  $L$  zoals we die gedefinieerd hebben, heeft geen inverse. En stel dat we een oplossing vinden, dan voldoet die nog niet aan de Dirichlet randvoorwaarden. Om dit op te lossen, beschouwen we de deelverzameling  $C_0^2[0, 1] \subset C^2[0, 1]$  die bestaat uit alle functies die aan de randvoorwaarden voldoen. Zij nu

$$L : C_0^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]. \quad (7.3)$$

De verzameling  $C_0^2[0, 1]$  is een vector deelruimte van  $C^2[0, 1]$ , dus  $L$  is nog steeds een lineaire functie. Maar nu is (7.3) een lineair isomorfisme; er bestaat een continue inverse functie  $L^{-1} : C[0, 1] \rightarrow C_0^2[0, 1]$ . Als we nu een functie  $y \in C_0^2[0, 1]$  vinden die voldoet aan (7.2), hebben we de oplossing van het randvoorwaardeprobleem. Voor deze  $y$  geldt namelijk:  $y'' = f(s, y, y')$  en  $y(0) = y(1) = 0$  omdat  $y$  in de lineaire deelruimte zit.

De inverse  $L^{-1}$  van (7.3) hangt af van de Greense functie  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  die we als volgt definiëren:

$$G(s, t) = \begin{cases} (t-1)s & \text{voor } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(s-1) & \text{voor } 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Gegeven een  $v \in C[0, 1]$ , definieer

$$L^{-1}v(t) = \int_0^1 G(s, t)v(s)ds.$$

Dit kunnen we als volgt herschrijven:

$$w(t) = L^{-1}v(t) = (t-1) \int_0^t sv(s)ds + t \int_t^1 (s-1)v(s)ds.$$

Voor deze functie  $w$  geldt:  $w(0) = w(1) = 0$ , dus aan de Dirichlet randvoorwaarden is voldaan. Tweemaal differentiëren van  $w$  geeft:

$$\begin{aligned} w'(t) &= \int_0^t sv(s)ds + \int_t^1 (s-1)v(s)ds \\ w''(t) &= v(t) \end{aligned}$$

voor alle  $t$ . Dit is de oplossing van het randvoorwaardeprobleem.

# Literatuur

- [1] K. Gröger: *A simple proof of the Brouwer Fixed Point Theorem*, Math. Nachr. 102:293-295, 1981.
- [2] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis* - 3rd ed., McGraw-Hill (1964), ISBN 0-07-054235-X.
- [3] R. F. Brown: *A topological introduction to nonlinear analysis*, Birkhäuser (1993), ISBN 0-8176-3706-0.
- [4] W. P. van Stigt: *Brouwer's Intuitionism*, Elsevier Science (1990), ISBN 0-444-88384-3.
- [5] C. Vuik, P. van Beek, F. Vermolen, J. van Kan: *Numerieke Methoden voor Differentiaalvergelijkingen*, Delft Institute of Applied Mathematics (2005).