Invloed van turbulentie op het snelheidsprofiel van brandingsstromen

Th. van Doorn

R1974/8/H

Vloeistofmechanica
Afd. Weg- en Waterbouwkunde
Technische Hogeschool Delft

38

I N V L O E D V A N T U R B U L E N T I E O P H E T S N E L H E I D S P R O F I E L V A N B R A N D I N G S S T R O M E N

Delft oktober 1974

Th. van Doorn

Afstudeerverslag

Technische Hogeschool Delft
Afdeling Weg- en Waterbouwkunde
Vakgroep Vloeistofmechanika

Korte samenvatting:

In dit afstudeerwerk is getracht de intensiteit van de turbulente horizontale uitwisseling van hoeveelheid beweging in de brandingszone te schatten, met als voornaamste doel het beter kunnen berekenen van de variatie met de afstand uit de kust van de snelheid van een brandingsstroom, opgewekt door scheef invallende golven. Er wordt een verband gelegd tussen deze uitwisseling en de door de golven in de brandingszone geïnjekteerde energieflux. De verkregen resultaten worden toegepast in rekenmodellen voor situaties met regelmatige en met onregelmatige golven en vergeleken met metingen.

INHOUD

Hoofdstuk 1

INLEIDING

Onder een brandingsstroom verstaan we de gemiddelde waterbeweging in langsrichting van de kust in en nabij de brandingszone als gevolg van scheef op een strand invallende golven (fig. 1.1).

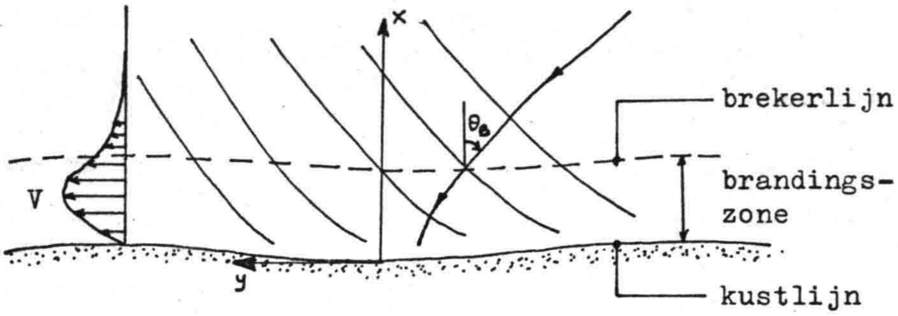


fig. 1.1 Scheef invallende golven op een strand veroorzaken een brandingsstroom V.

Sinds de introduktie van het koncept van de radiation stress kunnen redelijke kwantitatieve voorspellengen omtrent deze waterbeweging gemaakt worden. Er is echter behoefte aan nog meer gedetailleerde en fundamentele kennis van mechanismen van verschillende processen die zich in de brandingszone afspelen of zich af kùnnen spelen. Brandingsstromen zorgen voor netto transport van water en van alles wat daarin aanwezig kan zijn, zoals sediment, zand voor by-pass en afvalstoffen. De aanwezigheid van brandingsstromen is van groot belang bij konstrukties in de kuststrook. Hieruit blijkt direkt het belang van de kennis van de variatie met de afstand uit de kust van de snelheid van een brandingsstroom. Het voornaamste doel van dit werk is om deze variatie beter dan tot nu toe te kunnen berekenen.

Informatie omtrent de benodigde basiskennis van de hydrodynamika wordt gegeven in hoofdstuk 2. Ten gevolge van fluktuerende beweging (turbulentie, orbitaalbeweging) in een medium treden veranderingen op in impulstransport. Impulstransporten zijn equivalent met spanningen. De gemiddelde beweging van dat medium kan worden beïnvloed door het surplus aan impulsoverdracht ten gevolge van deze fluktuerende beweging. Voor zover deze fluktuerende beweging geheel of gedeeltelijk uit oppervlaktegolven bestaat kan de extra impulsoverdracht als gevolg daarvan worden uitgedrukt in zgn. "radiation stresses". Dit zijn over de vertikaal geïntegreerde en daarna over

de tijd gemiddelde horizontale transporten van horizontale impulsie als gevolg van de golfbeweging alleen. Brandingsstromen worden aangedreven door gradiënten in radiation stresses. Het blijkt, dat deze gradiënten voornamelijk bepaald worden door variaties in de golfenergiestroom. Reduktie in golfenergie is meetbaar als een afname van de golfhoogte. Empirische gegevens omtrent deze makroskopische eigenschap stellen ons reeds in staat de aandrijving van brandingsstromen te berekenen. Een eenvoudige impulsbalans is die waarin de aandrijving evenwicht maakt met de bodemwrijving en met de "weerstand" als gevolg van de turbulentie. Indien de turbulentie en de daarmee gepaard gaande menging wordt verwaarloosd kunnen diskontinuïteiten optreden in een berekend snelheidsprofiel, omdat dan gemiddelde snelheden in vertikale vlakken onafhankelijk van elkaar worden verondersteld. In het geval van een brandingsstroom opgewekt door scheef invallende regelmatige golven kan er zo in de berekening een markante diskontinuïteit optreden t.p.v. de brekerlijn, als gevolg van de abrupte verandering in energieflux.
De invloed van de turbulentie op het snelheidsprofiel van brandingsstromen wordt bepaald door turbulente horizontale uitwisseling van hoeveelheid beweging. Deze zijdelingse impulstransporten (equivalent met spanningen, genoemd: Reynolds-spanningen) zorgen voor een koppeling van naast elkaar gelegen waterkolommetjes waardoor het snelheidsprofiel een vloeiend verloop krijgt. Voor een realistische beschrijving van het brandingsstroomprofiel blijkt het dus nodig om de turbulentie in de brandingszone nader te beschouwen.

Bestaande modellen ter berekening van het effekt van de turbulentie hebben, blijkens de bespreking in hoofdstuk 3, vooral op fysische gronden ernstige bezwaren. In feite wordt bij geen van de theoretische modellen (Bowen, 1969; Thornton, 1969; Longuet-Higgins, 1970) de turbulentie in de brandingszone zelf beschouwd. Bij die modellen wordt a priori van een turbulentie viskositeit uitgegaan. Het zal echter blijken, dat de te gebruiken turbulentie viskositeiten niet te voorspellen zijn. Dit geldt ook voor de funktionele vormen van turbulentie viskositeiten die n.a.v. metingen van de verspreiding van tracers binnen de brandingszone worden voorgesteld door Harris e.a. (1963) en Inman e.a. (1971).

Vanzelfsprekend moet een bewegingsvergelijking voor de beschrijving van de brandingsstroom goed geformuleerd worden. In zijn meest algemene vorm is dit (voor Newtonse vloeistoffen) een Navier-Stokes vergelijking, waarvan echter geen algemene oplossing bestaat. Een numerieke oplossing is met bekende begin- en randvoorwaarden in principe wel mogelijk, maar dit zou een enorm computergeheugen vereisen, vanwege de kleine schalen die in de turbulentie voorkomen als gevolg van de niet lineaire termen in de bewegingsvergelijking. Een exakte fysische beschrijving is ook niet nodig, omdat we toch geïnteresseerd zijn in tijds-gemiddelde effekten, die veel geleidelijker variëren. Vanwege het stochastische karakter van de turbulentie zijn we inderdaad aangewezen op statistische methoden bij de behandeling van de bewegingsvergelijking. Hierbij ontstaan echter altijd meer onbekenden dan vergelijkingen (het closure probleem). Dit hiaat moet opgevuld worden. De grootte van de fluktuaties is inmiddels niet precies meer bekend; hun effekt moeten we dus benaderen of "modelleren" in termen van grootheden die we wèl kunnen bepalen. Daarmee moeten we zover gaan, dat het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden. Zo bewegen we ons bij de bestudering van de turbulentie tussen enerzijds een gedetailleerde fysische beschrijving en anderzijds de wens voor een abstraktere, elegantere en beter toegankelijke modellering. Hiertoe wordt in dit verslag getracht de turbulentie op haar relevante eigenschappen te beoordelen; tevens wordt daarbij beoogd meer inzicht te geven in de mechanismen van energie-overdrachten en energiedissipatie.
In hoofdstuk 4 wordt verslag gegeven van pogingen om het interne mechanisme van de turbulentie gedetailleerd te beschrijven. Omdat daarbij nog geen bevredigende "closure" aannamen gedaan kunnen worden, is naar een andere benadering gezocht waartoe de volgende gedachten een basis vormen.

Niet-brekende golven kunnen over zeer grote afstanden lopen zonder belangrijke enrgiedissipatie. Dit is vooral duidelijk bij deining, die afkomstig kan zijn van een ver weg gelegen windveld. Pas in de brandingszone wordt alle golfenergie over relatief zeer korte afstand gedissipeerd, vnl. door de turbulentie, die doorgaans hevig is (grote Reynolds getallen). Vaak is in de brandingszone een "wilde boel" waar te nemen, een beeld van een bloemkoolachtig oppervlak en opstijgende luchtbellen. Proeven met kleurstof bevestigen ook dat er een intensieve menging is, zowel horizontaal als vertikaal. Daarbij is de verspreiding in de richting loodrecht op de kust, maar binnen de brandingszone snel en effektief. De oorsprong van de turbulentie in de brandingszone is typisch een heel andere dan in een afschuifbeweging. In de laatste wordt de turbulentie door gemiddelde snelheidsgradiënten in stand gehouden. In de branding daarentegen wordt de turbulentie gevoed door de brekende golven en is niet direkt afhankelijk van gemiddelde snelheidsgradiënten. Het ligt dus voor de hand om in een turbulentiemodel de turbulentie eigenschappen nauw van de energiedissipatie in de golven te laten afhangen. Met de hier genoemde aspekten als basis wordt in hoofdstuk 5 een nieuw turbulentiemodel ontwikkeld waarmee een uitdrukking voor de turbulente uitwisseling van hoeveelheid beweging wordt gevonden.

Het verkregen model wordt toegepast op situatie met invallende regelmatige (hoofdstuk 6) en onregelmatige golven (hoofdstuk 7). In dit verslag wordt voor wat de golfbeweging betreft uitgegaan van bestaande beschrijvingen. Mogelijke verbeteringen daarvan zijn hier niet zo essentieel omdat het vooral gaat om de vergelijking tussen berekeningen zonder en mèt inachtneming van horizontale turbulente impulstransporten (of kortweg "menging").

Bij een onderzoek naar mogelijkheden om turbulentie-kenmerken te meten bleek dat de ter beschikking staande apparatuur geen voor bevredigende interpretatie geschikte gegevens kon leveren. Daarom is in dit stadium van experimenteel onderzoek afgezien.
In hoofdstuk 8 wordt naast een samenvatting van dit verslag ook een aantal aanbevelingen voor verder fundamenteel onderzoek gegeven.

Voor een snelle oriëntering volgt hier een overzicht van vindplaatsen van uitgangspunten en belangrijkste vergelijkingen:

paragraaf	omschrijving	vergelijking	pagina
2.5	uitgangspunten	-	24
2.5.2	horizontale impulsbalans	2.100	29
5.8	turbulentiemodel	5.26	100
6.1	d.v. brandingsstroomsnelheid regelmatige golven	6.16	105
7.2	d.v. brandingsstroomsnelheid onregelmatige golven	7.30	124

Hoofdstuk 2

BASISVERGELIJKINGEN

2.1 Inleiding

Na eerst de keuze tussen een Euler en een Lagrange beschrijving te hebben gemaakt, wordt het snelheidsveld gespecificeerd. Daarna worden de behoudswetten opgesteld, met behulp waarvan de beweging van het water beschreven kan worden. Voor de eenvoud wordt daarbij uitgegaan van de lineaire golftheorie. Met deze beschrijving volgt dan de onderhavige kwantitatieve probleemstelling. Eén en ander is in dit hoofdstuk nogal uitvoerig behandeld met de voornaamste redenen om vooral t.a.v. de turbulentie de relevante termen in de bewegingsvergelijking te onderkennen èn om in latere hoofdstukken eenvoudig te kunnen verwijzen.

D.m.v. de aanduiding "uitgangspunt n " (n=1, 2 ...) wordt in onderstaande tekst aangegeven wat de verschillende kondities en/of aannamen zijn.

2.2 Specifikatie van het snelheidsveld

De eerste keuze die gemaakt moet worden t.a.v. de vloeistofbeweging is of we een Euler of een Lagrange beschrijving toepassen. Vanwege het belang dat we stellen in de "menging" in en nabij de brandingszone zijn we geïnteresseerd in de werkelijke transportprocessen die daar plaats vinden, dus de beschrijving van de beweging van de "afzonderlijke" deeltjes. Dit gebeurt in een Lagrange systeem d.m.v. de vektorfunktie $\underline{X}$ $(\underline{X}_0, t)$, die als een komplete beschrijving de koördinaten van alle mogelijke (vloeistof-)deeltjes geeft voor elk tijdstip t. Voor de parameter $\underline{X}_0$ nemen we de initiële waarde van $\underline{X}$ op tijd $t = t_0$, dus $\underline{X}_0 = \underline{X}\ (\underline{X}_0 \ . \ t_0)$ (zie bv. Lumley, 1970; Monin en Yaglom, 1971). Reeds velen pasten een Lagrange-frame toe, onder wie Taylor (1921), Pierson (1961, Lagrange bewegingsvergelijkingen voor zwaartekrachtsgolven), Okubo (1970, "oceanic mixing"), Tamai (1972, diffusie als gevolg van interakties van onregelmatige golven) en Monin (1972).

In een Euler systeem wordt de beweging beschreven door het snelheidsveld $\underline{u} = \underline{u}\ (\underline{X}, t)$ d.w.z. door de snelheidsvektoren op alle mogelijke ruimtelijke punten $\underline{X}$ ten tijde t. Het sluit aan bij metingen die in een vast punt van de vloeistof worden verricht.

Een Euler beschrijving is in de meeste gevallen verreweg het eenvoudigst en in hetgeen volgt ook toegepast. In sommige gevallen zijn hieruit de Lagrange eigenschappen te bepalen.

De Lagrange snelheid is als volgt gedefinieerd:

$$\underline{V}(\underline{X}_o,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\underline{X}(\underline{X}_o,t) \tag{2.1}$$

en dus

$$\underline{X}(\underline{X}_o,t) = \underline{X}_o + \int_{t_o}^{t} \underline{V}(\underline{X}_o,t')\,dt'. \tag{2.2}$$

De relatie tussen Lagrange en Euler beschrijving is gelegen in de identiteit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{X}(\underline{X}_o,t) = \underline{u}\left\{\underline{X}(\underline{X}_o,t),t\right\}, \tag{2.3}$$

d.w.z.: snelheid van een deeltje = snelheid van de vloeistof op het punt waar het deeltje zich toevallig bevindt.

(2.1), (2.2) en (2.3) kunnen samen verkort geschreven worden als:

$$\underline{V} = \underline{u}\left(\underline{X}_o + \int_0^t \underline{V}(\underline{X}_o,t')\,dt', t\right), \tag{2.4}$$

waarin $t_0 = 0$ gekozen is.

De versnelling van een deeltje $= \frac{d\underline{u}}{dt}$, waarbij $\frac{d}{dt}$ de "totale afgeleide" of "meebewegende afgeleide" is; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\underline{u}\,.\nabla)$, (2.5)
dus uitgedrukt in Euler termen.

De transformatie van Euler vergelijkingen naar Lagrange vergelijkingen geschiedt door de onafhankelijke veranderlijke $(\underline{X}_\bullet, t)$ te vervangen door $(\underline{X}, t)$ en de (onbekende) $\underline{u}$ $(\underline{X}, t)$ naar de nieuwe onbekende $\underline{X}$ $(\underline{X}_0, t)$ te transformeren m.b.v. (2.3).
Deze transformatie is in algemene zin een onopgelost probleem.
Soms kan een benadering in een Lagrange-frame voordelen geven vanwege het verdwijnen van advektietermen, omdat de vloeistofdeeltjes dan zelf gevolgd worden. Corrsin en Karweit (1971) geven hiervan en van de transformatie naar een Euler vorm van de oplossing een fraai voorbeeld.

Wat betreft een periodieke golfbeweging leert een Taylor-ontwikkeling van het rechter lid van (2.4), dat Euler en Lagrange snelheden in eerste orde benadering aan elkaar gelijk zijn. Dit is ook logisch, want als we in een Lagrange beschouwing een Taylor-ontwikkeling toepassen op een deeltje dat zich in een bepaald punt bevindt, is het eigenlijk weer een Euler beschouwing.
In 2^o orde benadering geldt:

$$\underline{V} = \underline{u}\,(\underline{X}_o,t) + \int_0^t \underline{V}\,dt\,.\,\nabla\underline{u}\,(\underline{X}_0,t). \tag{2.6}$$

Zie bijv. Longuet-Higgins (1953).

In de lineaire golftheorie zijn Euler en Lagrange snelheden gelijk aan elkaar. Echter het verschil tussen Euler en Lagrange gemiddelde snelheid (oftewel Stokes-snelheid) is

$$\underline{u}_{STOKES} = \overline{\int_0^t \underline{u}\,dt\,.\,\nabla\underline{u}}, \tag{2.7}$$

waarin $\underline{u}$ nu een 1^o orde benadering is, zodat $\underline{V} = \underline{u}$.

Deze Stokes-snelheid hangt af van gradiënten in $\underline{u}$ en is in het algemeen niet gelijk aan nul.

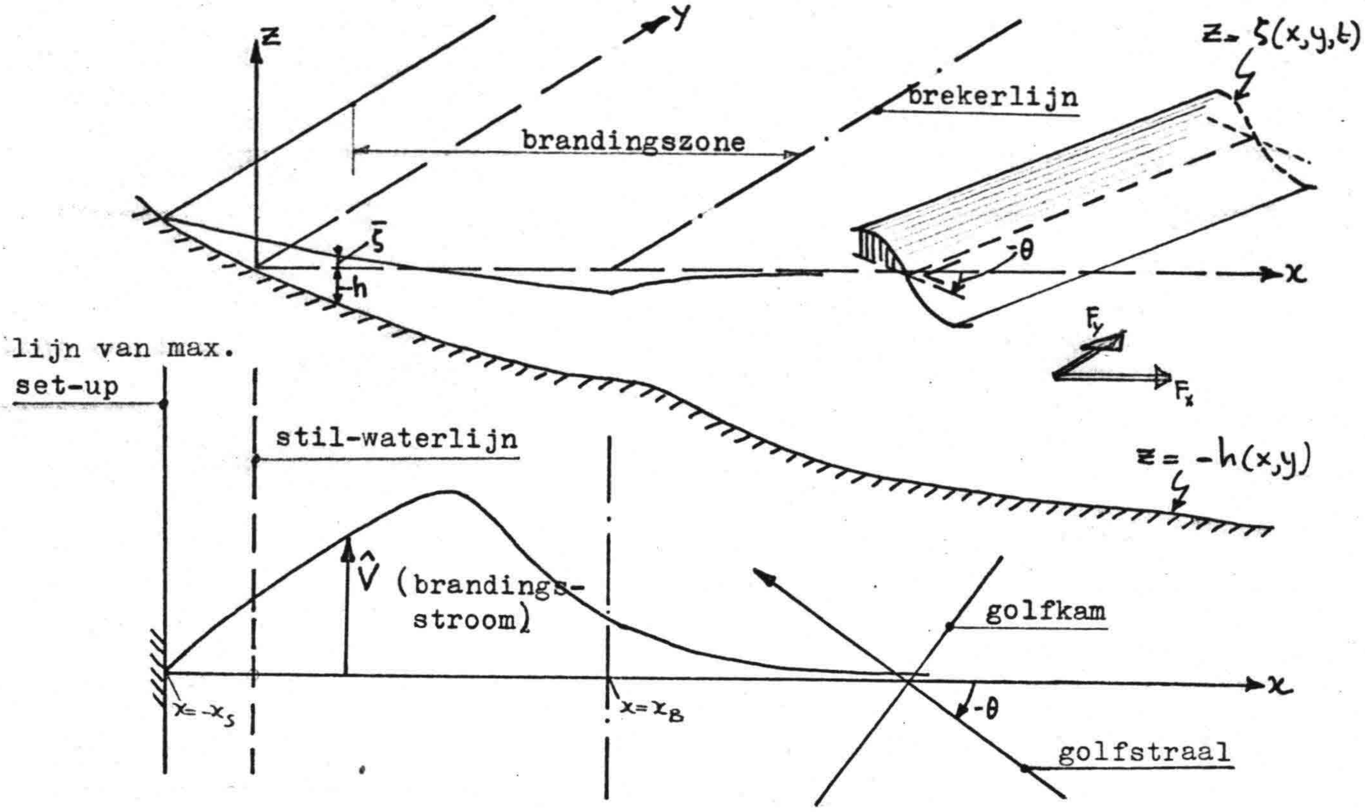


fig. 2.1
Schematisch overzicht kuststrook (definitie-schets)
$\underline{F} = (F_x, F_y)$ = over de tijd gemiddelde energieflux in de golven p.e.v. tijd en p.e.v. lengte
$h + \bar{\zeta} = h'$ is de gemiddelde waterdiepte

De snelheid in een vast punt als funktie van de tijd wordt gegeven door :

$$\underline{u}(x,y,z,t) = \underline{U}(x,y,z) + \underline{u}_w(x,y,z,t) + \underline{\tilde{u}}(x,y,z,t) \qquad (2.8)$$

waarin $\underline{U} = (U, V, W)$ = over de tijd gemiddelde snelheid = $\underline{\bar{u}}$

$\underline{u}_w = (u_w, v_w, w_w)$ = orbitaal snelheid. Tijdsgemiddelde hiervan : $\underline{\bar{u}}_w = 0$

$\underline{\tilde{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ = turbulentie snelheid. Tijdsgemiddelde hiervan : $\overline{\underline{\tilde{u}}} = 0$

$\underline{u}_w + \underline{\tilde{u}} = \underline{u}'$ = fluktuerende snelheid (2.8a)

Voor de u, v en w resp. x, y en z-komponenten worden ook de tensornoteringen u_1, u_2, u_3 en x_1, x_2, x_3 gebruikt.
De gemiddelde snelheid in een punt m.b.t. de tijd wordt als volgt gedefinieerd:

$$\bar{u}_i(\underline{x}) \equiv \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u_i(\underline{x}, t+t_0)\,dt = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} u_i(\underline{x},t)\,dt \; ; \; i=1,2,3 \qquad (2.9)$$

waarin τ een tijd voorstelt en t_0 een begintijdstip van middelen.

Praktisch gezien kan een middeling over een oneindig lange tijd niet gebeuren en verder willen we ook niet erg langzame variaties in de stroming als turbulentie aanmerken. Daarom nemen we als tijd waarover middeling plaats vindt een eindig tijdsinterval en wel een geheel aantal perioden (golfperiode = T), zeg nT waarin n geheel en positief. nT moet nu groot zijn t.o.v. de tijdschalen van turbulentie τ_1 en brandingszweving τ_2 ("surf-beat"), maar klein t.o.v. de tijdschaal van erg langzame veranderingen in het golfveld τ_3 .

Hiermee wordt $\bar{u}_i(\underline{x}) = \frac{1}{nT}\int_0^{nT} u_i(\underline{x}, t_0 + t)\, dt = U_i(\underline{x})$. (2.10)

Om de definitie (2.9) zowel als de praktisch te hanteren definitie (2.10) zinvol te doen zijn, moet $\bar{u}_i(\underline{x})$ onafhankelijk van t_0 zijn,

dus moet $\frac{\partial U_i}{\partial t_0} = 0$, (2.11)

of te verwaarlozen klein.

We beschouwen dus alleen stationaire stromen.

De gemiddelde waterbeweging waar we in dit verslag in geïnteresseerd zijn is de over de hoogte gemiddelde horizontale stroomsnelheid

$$\hat{U}_\alpha \equiv \frac{1}{h+\bar{\zeta}} \int_{-h}^{\bar{\zeta}} U_\alpha \, dz \quad , \quad \alpha = 1,2 \; . \tag{2.12}$$

$\hat{...}$ betekent middeling over de vertikaal.

h = stil-waterdiepte; $z=-h(x,y)$ is de vergelijking van de (starre) bodem. De positie van het vrije oppervlak $z = \zeta(x,y,t)$. De gemiddelde waterdiepte bedraagt $h' = h + \bar{\zeta}$.

2.3 Enkele resultaten van de lineaire potentiaaltheorie voor korte golven

In het volgende wordt ervan uitgegaan dat de lineaire (1^0 orde) oplossing voor langkammige lopende periodieke zwaartekrachtsgolven in water van konstante diepte een voldoend nauwkeurige beschrijving van het golfbeeld geeft (uitgangspunt 1). Met "orde" wordt hier de orde van de golfhelling bedoeld. De uitwijking van het vrije oppervlak kan hierin gegeven worden door $\zeta = a(\underline{x}) \sin(\omega t - \psi)$, (2.13)

waarin $a(\underline{x})$ de lokale amplitude, ω de hoekfrequentie van de golf en ψ een ruimtelijke fasefunktie is. We gaan uit van golfvoortplanting in een willekeurige horizontale richting. $\psi = \underline{k} \cdot \underline{x}$, waarin de "golfgetal-vektor" $\underline{k} = (k_x , k_y) = \nabla \psi$. (2.14)

$\underline{k}$ is dus gericht langs een golfstraal, zie fig. 2.2.

k = lokaal golfgetal = $|\underline{k}|$.

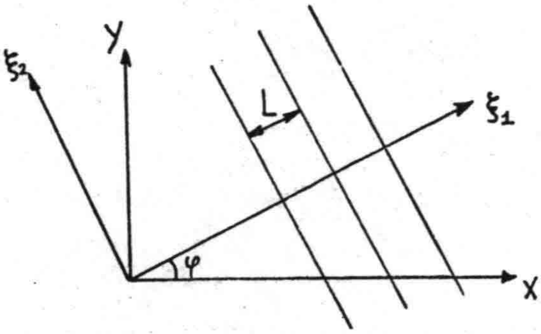


fig. 2.2a
lopende golf (x-y vlak)
ξ_1 en ξ_2 zijn hoofdassen, resp. parallel en loodrecht op de golfvoortplantingsrichting

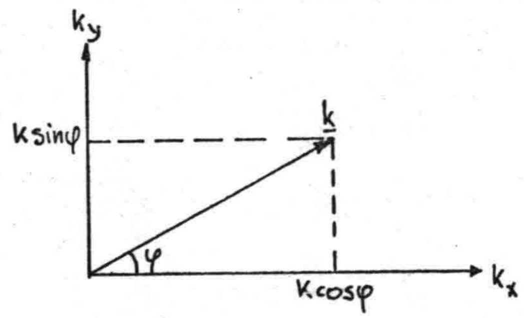


fig. 2.2b
lopende golf (golfgetal-ruimte)

De elementaire oplossing (2.13) kan opgevat worden als een enkele golfkomponent uit een meer komplex golfveld.

Dispersie relatie: $\omega^2 = gk \tanh kh.$ (2.15)

De fasesnelheid $\underline{c}$ is de voortplantingssnelheid van konstante fase in de richting van $\underline{k}$

$\underline{c} = \frac{\omega}{k}\, \underline{e}$, waarin $\underline{e} = \frac{\underline{k}}{k}$

een eenheidsvektor in de voortplantingsrichting is.

De grootte van de fasesnelheid is

$$c = |\underline{c}| = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} \tanh kh. \qquad (2.16)$$

Battjes (1968) geeft aan wat de hierbij gemaakte fouten kunnen zijn.

Horizontale orbitaalsnelheid:

$$\underline{q} = (u_w , v_w) = \omega a \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(\omega t - \psi)\ (e_1 , e_2). \qquad (2.17)$$

Vertikale orbitaalsnelheid:

$$w_w = \omega a \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(\omega t - \psi). \qquad (2.18)$$

Druk: $$p = -\rho g z + \rho g a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(\omega t - \psi). \qquad (2.19)$$

Gemiddelde (golf-)energie inhoud p.e.v. oppervlak:

$$E = E_p + E_k = 2E_p = \rho g \overline{\zeta^2} = \frac{1}{2}\rho g a^2, \qquad (2.20)$$

waarin E_p en E_k resp. de gemiddelde potentiële en kinetische energie p.e.v. opp. is.   is een tweede-orde grootheid, waarbij voor ζ een eerste orde benadering voldoende is.

De gemiddelde energie overdracht in de golven p.e.v. tijd en p.e.v. lengte:

$$\underline{F} = E n c\, \underline{e}, \qquad (2.21)$$

waarin $n = \frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh 2kh}$. (2.22)

De grootte van $\underline{F}$ is $F = |\underline{F}| = Enc$, (2.23)
uiteraard p.e.v. kamlengte.

2.4 Balansvergelijkingen

Hydrodynamische behoudswetten stellen ons in staat de waterbeweging te bepalen. Van de 7 onbekenden: 3 snelheidskomponenten, druk, dichtheid, sliniteit en temperatuur zullen de laatste 2 alsmede dichtheidsvariaties niet beschouwd worden.
Men kan behoudswetten opstellen voor een met de vloeistof meebewegend materieel volume dan wel balansvergelijkingen voor een vast volume, waarbinnen een grootheid of eigenschap niet onveranderd behoeft te blijven. In overeenstemming met het Euler systeeem wordt in de volgende paragrafen de laatste beschouwingswijze gebruikt.
Met (2.5) wordt het verband gelegd tussen de totale tijdsafgeleide en de Euler-termen (lokale tijdsafgeleide en advektie-term). Dit wordt hier nader toegelicht.

Algemeen geldt voor de snelheid van verandering van een hoeveelheid:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V} Q\, dV = \iiint_{V} \frac{\partial Q}{\partial t}\, dV + \iint_{O} Q\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dO, \qquad (2.24)$$

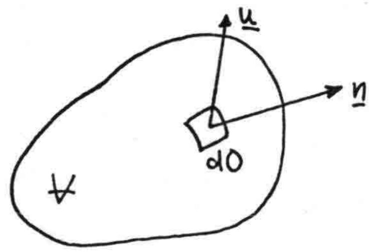


fig. 2.3

waarin Q = hoeveelheid p.e.v. volume;
O is het buiten-oppervlak van het volume
$\underline{n}$ is de naar buiten gerichte eenheids-normaalvektor.

In de zienswijze van Lagrange luidt (2.24):
snelheid van verandering = verandering binnen volume + verandering door verplaatsing van het buitenoppervlak.
In de zienswijze van Euler betekent het rechterlid van (2.24):
verandering binnen bolume + netto hoeveelheid die het volume verlaat door het buitenoppervlak.

Volgens divergentietheorema van Gauss geldt:

$$\iint_O Q\,\underline{u}\cdot\underline{n}\;dO = \iiint_V \operatorname{div}(Q\underline{u})\,dV\;, \tag{2.25}$$

zodat

$$\frac{d}{dt}\iiint_V Q\,dV = \iiint_V \left\{\frac{\partial Q}{\partial t} + \operatorname{div}(Q\underline{u})\right\} dV\,. \tag{2.26}$$

2.4.1 massabalans

Twee benaderingswijzen worden besproken.

a. Behoud van massa: $$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,dV = 0\,. \tag{2.27}$$

Met (2.26) : $$\iiint_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{u})\right) dV = 0\,. \tag{2.28}$$

Dit geldt voor elk (vast) volume V in de vloeistof, dus ook (indien de integrand een kontinue funktie van de plaats is) voor elk punt in de vloeistof: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{u}) = 0.$ (2.29)

O.a. Phillips (1969) laat zien hoe hieruit de massabalans p.e.v. horizontaal oppervlak ontstaat. (2.29) wordt geïntegreerd over de hoogte. Na gebruikmaking van Leibniz's theorema voor het differentiëren van een integraal en substitutie van de kinematische randvoorwaarden (2.31) en (2.32) ontstaat:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\zeta+h) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{-h}^{\zeta}\rho u_\alpha\,dz = 0\,,\quad \alpha = 1,2\,. \tag{2.30}$$

Hierbij is uitgegaan van een homogene vloeistof $(\nabla\rho = 0)$.
De kinematische randvoorwaarden zijn

$$z = \zeta(x,y,t)\quad : \quad \frac{d\zeta}{dt} = w_\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + u_{\beta_\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\beta} \tag{2.31}$$

$$z = -h(x,y)\quad : \quad w_{-h} + u_{\beta_{-h}}\frac{\partial h}{\partial x_\beta} = 0\quad , \tag{2.32}$$

waarin β = 1,2 en de aanhangsels ζ en -h betekenen: op $z = \zeta$ resp. $z = -h$.

b. Vergelijking (2.30) kan eenvoudiger en op een direktere wijze verkregen worden door in de Eulerse beschouwing meteen de massabalans op te stellen voor een kontrole-volume van bodem tot boven het vrije oppervlak en met een horizontale doorsnede van 1 * 1 m^2 (fig. 2.4) $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-d}^{\zeta}\rho\,dz + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{-d}^{\zeta}\rho u_\alpha\,dz = 0$, hetgeen hetzelfde is als (2.30).

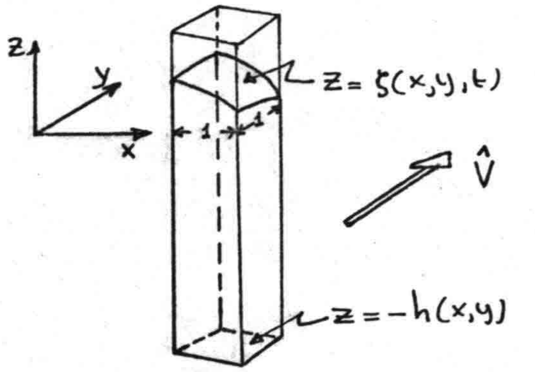


fig. 2.4
kontrole-volume

Middeling over de tijd van (2.30) levert

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho\left(\bar{\zeta}+h\right)+\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\,m_{\alpha}=0, \tag{2.33}$$

waarin m_α het totale massatransport p.e.v. breedte is:

$$m_{\alpha}\equiv\overline{\int_{-h}^{\zeta}\rho u_{\alpha}\,dz}=$$

$$=\int_{-h}^{\bar{\zeta}}\rho U_{\alpha}\,dz+\overline{\int_{-h}^{\zeta}\rho u'_{\alpha}\,dz}=\rho\hat{U}_{\alpha}(h+\bar{\zeta})+\overline{\int_{-h}^{\zeta}\rho u_{w\alpha}\,dz}=M_{\alpha}+m_{w\alpha} \tag{2.34}$$

Hierin is M_α het massatransport van de gemiddelde stroom en $m_{w\alpha}$ is het massatransport t.g.v. de golfbeweging. De turbulentie levert geen bijdrage.

Tot in de tweede orde geldt : $m_w=|\underline{m}_w|=\dfrac{\omega a^2}{2\tanh kh}=E/c$ (2.35)

De volgende uitgangspunten worden nu geponeerd:

② de (Newtonse) vloeistof is onsamendrukbaar ($\nabla.\underline{u}=0$) en homogeen (ρ konstant; is reeds gebruik van gemaakt);

③ scheef invallende periodieke zwaartekrachtsgolven, die op grote afstand uit de kust ook cylindrisch zijn;

④ kwasi-stationaire beweging;

⑤ dieptelijnen recht en evenwijdig;

⑥ bodem vast, ondoorlatend en helling zo klein, dat reflektie te verwaarlozen is;

⑦ tijdsgemiddelden variëren niet in x_2-ri. (// kust); in dit verslag worden dus geen rip-currents en aanverwante problemen beschouwd.

Uit (2.33) volgt voor $\alpha=1$: $M_1+m_{w1}=0$ en met (2.34) en (2.35) volgt:

$$\hat{U}=\frac{E}{\rho c\,(h+\bar{\zeta})}\cos\theta. \tag{2.36}$$

In ondiep water (brandingszone) kan $\hat{U}$ vergelijkbaar met orbitaalsnelheid worden: $\hat{U} \approx \dfrac{\frac{1}{8}\rho g H^2}{\rho\sqrt{gh'}\cdot h'} \approx \frac{1}{8}\gamma^2\sqrt{gh'}$ waarin $\gamma = H/h'$

terwijl volgens de lineaire theorie:

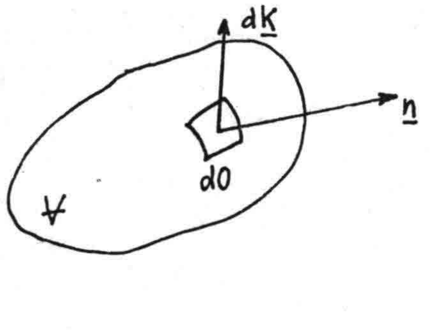
$$|\underline{u}_{w_{max}}| \approx \tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{gh'} \approx \frac{4}{\gamma}\cdot\hat{U}.$$

2.4.2 impulsbalans algemeen

De 2° wet van Newton luidt: $K_i = \dfrac{d}{dt}\iiint\limits_{V}\rho u_i \, dV,$ (2.37)

waarin K_i de komponent is in de i-richting van de som van de werkzame krachten.

$$K_i = \underbrace{\iiint\limits_{V}\rho G_i \, dV}_{\text{volume-krachten}} + \underbrace{\iint\limits_{O}\sigma_{ij} n_j \, dO}_{\text{oppervlakte-krachten}} \qquad (2.38)$$



oppervlakte elementje: $n_j dO$
oppervlakte krachtje : $dK_i = \sigma_{ij} n_j dO$

fig. 2.5

G_i zijn volumekrachten (p.e.v. massa). Deze kunnen bv. zijn:
- zwaartekrachtsversnelling $\underline{g} = (0, 0, -g) = -\nabla(gz)$ (2.39)
- schijnversnellingen (centripetaal en Coriolis). Deze zijn het gevolg van het feit dat het stromingsveld gespecificeerd is in een assenstelsel dat met de aarde meedraait. Er kan aangetoond worden dat deze versnellingen voor ons doel verwaarloosbaar zijn.

σ_{ij} vormen de komponenten van de spanningstensor $\underline{\Sigma}$ en worden gegeven door

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\eta D_{ij}. \qquad (2.40)$$

$p\delta_{ij}$ zijn normaaldrukken, $-p = 1/3\ \sigma_{ii}$
D_{ij} = deformatie (vervormingssnelheid)-tensor $= \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$ (2.41)
η = dynamische molekulaire viskositeit.
We kunnen aantonen dat de invloed van de viskositeit op de overall beweging te verwaarlozen is.

Het rechter lid van (2.37) kan weer in Euler termen geschreven worden: $\iiint\limits_{V} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \, dV + \iint\limits_{O} \rho u_i u_j n_j \, dV$,

zodat de Euler zienswijze volgt:

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \, dV = \iiint\limits_{V} \rho \, G_i \, dV + \underbrace{\iint\limits_{O} (\sigma_{ij} - \rho u_i u_j) n_j \, dD}_{\text{netto toename impuls}} \qquad (2.42)$$

of, met (2.25):

$$\underbrace{\iiint\limits_{V} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \, dV}_{\text{verandering v. impulsie}} = \underbrace{\iiint\limits_{V} \rho \, G_i \, dV}_{\text{resultante v. volumekrachten}} + \underbrace{\iiint\limits_{V} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - \rho u_i u_j) \, dV}_{\text{divergentie impulsie flux}} \qquad (2.43)$$

Voor een punt in de vloeistof kan dit m.b.v. (2.29) geschreven worden als:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + G_i , \qquad (2.44a)$$

of:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} . \nabla) \underline{u} = \frac{1}{\rho} \nabla . \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{G} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) + \nu \nabla^2 \underline{u} \, . \qquad (2.44b)$$

De laatste term in (2.44b) wordt verwaarloosd.

De vertikale en horizontale impulsbalans stellen we nu weer op voor vaste kontrole-volumen. I.p.v. (2.42) c.q. (2.43) wordt direkt opgeschreven:

verandering van impuls in volume = resultante van de uitwendige krachten + netto instroming van impuls p.e.v. tijd.

2.4.3 vertikale impulsbalans

Het kontrole-volume met een eenheids-(horizontaal) oppervlak reikt van een niveau z tussen bodem en vrij oppervlak tot boven dit oppervlak.

De gemiddelde druk $\bar{p}(z)$ volgt uit het tijdsgemiddelde van de vertikale impulsbalans (zonder invloed viskositeit; $\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}$):

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_z^{\zeta} \rho w \, dz} = \overline{p(x,y,z,t)} - \overline{\rho g (\zeta - z)} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \overline{\int_z^{\zeta} \rho u_\beta w \, dz} + \overline{\rho w^2_z} \quad \beta = 1,2 \qquad (2.45)$$

In een homogeen golfveld is de derde term in het rechter lid gelijk aan nul. Voor flauwe hellingen en horizontaal langzaam veranderende golfbeweging is de term te verwaarlozen (Dorrestein, 1961; Longuet-Higgins en Stewart, 1962, p. 496; Wei, 1973).

Eventueel aanwezige vertikale versnellingen in de gemiddelde beweging worden ook verwaarloosd. Ze kunnen van belang worden wanneer de golfgroepen niet lang zijn t.o.v. de diepte, bv. in het geval van een aanzienlijke "ademing" of "zweving" nabij de kust (surf beat).
Voor de stationaire toestand volgt uit (2.45):

$$\bar{p} + \overline{\rho w^2} = \rho g (\bar{\zeta} - z) \equiv p_o. \qquad (2.46)$$

d.w.z.: de gemiddelde flux van vertikale impulsie door een horizontaal vlak=gewicht van het water erboven. (p_o is hydrostatische druk).
Er geldt dus: $\bar{p} - p_o = -\rho\overline{w^2} = -\rho\overline{w_w^2} - \rho\overline{\tilde{w}^2}.$ (2.47)

Op de bodem ($z = -h$) is w van de orde $u\frac{\partial h}{\partial x}$ (assenstelsel zie fig. 2.1) en dus $\overline{w^2}_{w-h}$ is $\mathcal{O}(ka\frac{\partial h}{\partial x})^2$, hetgeen verwaarloosd wordt. Machten van de kleine parameter ka (golfsteilheid) geven de orde van benadering aan. De grootte-orde van $\overline{\tilde{w}^2}_{-h}$ is onbekend, maar mede gezien het ontstaan van de turbulentie in de brandingszone (vnl. vanuit het vrije oppervlak) wordt niet verwacht dat het effekt van deze term op de gemiddelde druk meer is dan van de orbitaalbeweging en wordt daarom ook verwaarloosd. Dan volgt:

$$\bar{p}_{-h} = \rho g (\bar{\zeta} + h). \qquad (2.48)$$

d.w.z. gemiddeld een hydrostatische druk bij de bodem.

2.4.4 horizontale impulsbalans

Hiervoor wordt weer het kontrole-volume van fig. 2.4 beschouwd.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{\zeta} \rho u_\alpha \, dz = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{\zeta} (\rho u_\alpha u_\beta - \sigma_{\alpha\beta})\, dz - \tau_{b\alpha} + p_{-h}\frac{\partial h}{\partial x_\alpha}, \qquad (2.49)$$

waarin $\tau_{b\alpha}$ = α – komponent (horizontaal) van de schuifspanning die het water op de bodem uitoefent, p.e.v. horizontaal opp. Bij flauwe hellingen is dit vrijwel gelijk aan de α-komponent van de tangentiaalspanning aan de bodem.

Middeling over de tijd van (2.49) geeft:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{\zeta} (\rho u_\alpha u_\beta - \sigma_{\alpha\beta})\, dz + \bar{p}_{-h}\frac{\partial h}{\partial x_\alpha} - \bar{\tau}_{b\alpha} \qquad (2.50)$$

Deze impulsbalans kan dienen als basis voor elke, over de hoogte

gemiddelde, kwasi-stationaire beweging (dus ook niet-eenparig). Desgewenst kunnen nog schuifspanningen aan het oppervlak worden toegevoegd en kan voor $\sigma_{\alpha\beta} = -p\,\delta_{\alpha\beta}$ (2.51)
geschreven worden, dus onder verwaarlozing van viskeuze schuifspanning ($2\eta\, D_{\alpha\beta}$).

Na een overzicht van uitdrukkingen voor impulstransporten t.g.v. een fluktuerende beweging zal een gemakkelijk hanteerbare vorm voor (2.50) worden opgesteld.

impulstransporten t.g.v. fluktuerende beweging

In de impulsbalans voor de gemiddelde beweging (2.50) is te onderkennen de bijdrage van de fluktuerende beweging tot de gemiddelde horizontale impulsieflux. Dit kan worden gegeven door een 2^o orde "impulsieflux-tensor" $S'_{\alpha\beta}$ (de dimensie is $[MT^{-2}]$ = kracht p.e.v. lengte = Newton/meter.)

$$S'_{\alpha\beta} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho u'_\alpha u'_\beta + p\,\delta_{\alpha\beta})\, dz} - \tfrac{1}{2}(h+\bar{\zeta})^2\,\delta_{\alpha\beta} - \frac{m'_\alpha m'_\beta}{\rho(h+\bar{\zeta})} \tag{2.52}$$

De hoofdletter S staat voor "stress" en de accenten voor de fluktuerende beweging (hier: orbitaalbeweging en turbulentie). Impulstransporten zijn equivalent met spanningen. "Pressure" staat in de vloeistofmechanika voor isotrope spanning, zodat hier de benaming "stress" gebruikt wordt, omdat deze geen isotropie impliceert.

Voor m'_α zie (2.34).

De 2^o term in het rechterlid is het impulstransport wanneer de fluktuaties er niet zijn, hetgeen zich in stilstaand water uit in een hydrostatische drukverdeling: $p_o(z) = -\rho g\,(z-\bar{\zeta})$, (zie (2.46).

$$-\int_{h}^{\bar{\zeta}} p_o\,\delta_{\alpha\beta}\,dz = -\int_{-h}^{\bar{\zeta}} \rho g\,(\bar{\zeta}-z)\,\delta_{\alpha\beta}\,dz = -\tfrac{1}{2}\rho g\,(\bar{\zeta}+h)^2\,\delta_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\rho g\,h'^2\,\delta_{\alpha\beta} \tag{2.53}$$

De bijdrage van de golven tot $S'_{\alpha\beta}$ wordt "radiation stress" genoemd. Deze benaming kan gebruikt worden voor de veranderingen in impulstransporten in een medium, als gevolg van bv. daarin aanwezige elektromagnetische-, akoestische-, oppervlakte- of interne golven. Wij bekijken alleen oppervlakte golven. Per definitie is nu: radiation stress is de bijdrage van de golven tot het tijdsgemiddelde van het over de vertikaal geïntegreerde horizontale transport van horizontale impulsie. Voor het statistisch stationaire en homogene golfveld geldt:

$$S_{\alpha\beta} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho u_{w\alpha} u_{w\beta} + p\,\delta_{\alpha\beta})\,dz} - \tfrac{1}{2}\rho g (h+\bar{\zeta})^2 \delta_{\alpha\beta} - \frac{m_{w\alpha} m_{w\beta}}{\rho(h+\bar{\zeta})} \tag{2.54}$$

(Longuet-Higgins en Stewart 1960, 1962 en 1964; Lundgren, 1963). Nu is $u'_\alpha = u_{w\alpha} + \tilde{u}_\alpha$ en $m'_\alpha = m_{w\alpha}$, zodat voor (2.52) geschreven kan worden

$$S'_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}, \tag{2.55}$$

waarin $R_{\alpha\beta}$ de over de hoogte geïntegreerde Reynolds-spanningen zijn:

$$R_{\alpha\beta} = -\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho\,(\tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta - \tilde{w}^2 \delta_{\alpha\beta})\,dz} \tag{2.56}$$

In (2.55) is gebruik gemaakt van het feit dat de golf- en turbulentie-snelheden ongekorreleerd zijn:

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} (u_{w\alpha}\tilde{u}_\beta + u_{w\beta}\tilde{u}_\alpha)\,dz} \approx \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \overline{(u_{w\alpha}\tilde{u}_\beta + u_{w\beta}\tilde{u}_\alpha)}\,dz = 0$$

De laatste term in (2.54) is $\mathcal{O}(a^4 . (\frac{k}{\omega})^2) = \mathcal{O}((ak)^2 * (\frac{a}{\omega})^2)$, zie ook (2.35).

Alhoewel deze term dus van de 4° orde in golfamplitude is en daarom in de hier toegepaste 2° orde benadering verwaarloosd wordt, is dit in werkelijkheid in ondiep water niet altijd geoorloofd.

Blijven we verder in 2° orde benadering werken voor de radiation stress, dan kan voor (2.54) met (2.53) geschreven worden:

$$S_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \overline{\rho u_{w\alpha} u_{w\beta}}\,dz + \int_{-h}^{\bar{\zeta}} (\bar{p} - p_0)\,\delta_{\alpha\beta}\,dz + \overline{\int_{\bar{\zeta}}^{\zeta} p\,\delta_{\alpha\beta}\,dz}. \tag{2.57}$$

Door $p = \rho g(\zeta - z)$ te stellen voor $\bar{\zeta} \leqslant z \leqslant \zeta$ wordt

$$\overline{\int_{\bar{\zeta}}^{\zeta} p\,dz} = \frac{1}{2}\rho g(\overline{\zeta^2} - \bar{\zeta}^2) = \frac{1}{2}\rho g\,\overline{\zeta'^2}, \text{ waarin } \zeta' = \zeta - \bar{\zeta}. \tag{2.58}$$

Met (2.47) en door substitutie van (2.58) in (2.57) ontstaat

$$S_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \rho\,(\overline{u_{w\alpha} u_{w\beta}} - \overline{w_w^2}\,\delta_{\alpha\beta})\,dz + \frac{1}{2}\rho g\,\overline{\zeta'^2}\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{2.59}$$

$S_{\alpha\beta}$ vormen de komponenten van een symmetrische 2° orde tensor S. Deze "impulsie-flux tensor" wordt m.b.t. de hoofdassen (ξ_1, ξ_2) respektievelijk parallel aan en loodrecht op de golfvoortplanting gegeven door de matrix:

$$S = (S_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} E\left(\frac{1}{2} + \frac{2kh'}{\sinh 2kh'}\right) & 0 \\ 0 & E\frac{kh'}{\sinh 2kh'} \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} 2n-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & n-\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

waarin $h' = h + \bar{\zeta}$. S_{11} en S_{22} zijn dus de hoofdspanningen in resp. loop- en kamrichting van de golven.

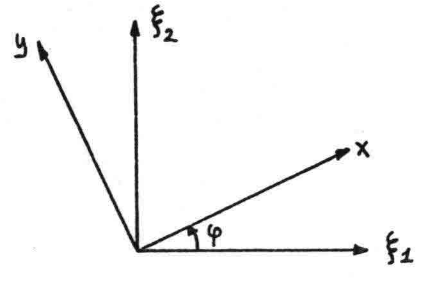
De radiation stress is nu tot in z'n laagste, d.i. de tweede orde benaderd. Deze wordt gevonden m.b.v. een eerste orde golf-oplossing, bv. $\zeta = a \sin(\omega t - \underline{k}.\underline{x})$, zie (2.13).

De komponenten in een t.o.v. (ξ_1, ξ_2) in het horizontale vlak gedraaid assenstelsel (χ_1, χ_2) volgen uit de tensor transformatie:

$$S_{\chi_i\chi_j} = \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta} \frac{\partial\chi_i}{\partial\xi_\alpha} \frac{\partial\chi_j}{\partial\xi_\beta} \quad (i,j = 1 \text{ of } 2 \,;\, \alpha,\beta = 1,2) \quad (2.61)$$

Bij een assenrotatie volgens fig. 2.6 is de flux van y-impulsie door een vlak x = konstant:

$$S_{xy} = \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial\xi_\alpha} \frac{\partial y}{\partial\xi_\beta} = S_{11}\cos\varphi(-\sin\varphi) + S_{22}\sin\varphi\cos\varphi \quad (2.62)$$



$$x = \xi_1\cos\varphi + \xi_2\sin\varphi$$
$$y = -\xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi$$

fig. 2.6 assenrotatie

Opmerking: de afspraak t.a.v. de indices in de gebruikte tensoren is overeenkomstig hetgeen in de spanningsleer gebruikelijk is. De eerste index geeft de richting van de flux (of: de richting van de normaal op het vlakje waarop de spanning werkt) en de tweede index geeft de richting van de impulsie-komponent (of: spanningskomponent)

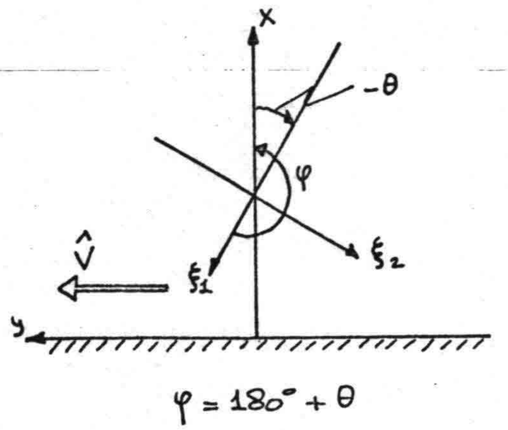


fig. 2.7[a]

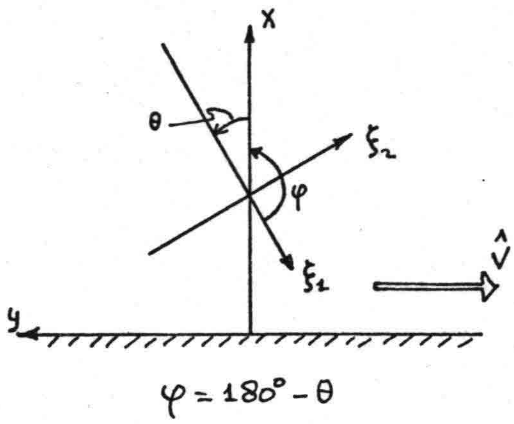


fig. 2.7[b]

assenstelsels in kuststrookmodel

θ = positieve golfinvalshoek op de kust

De gradiënten $\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}$ (Newton/meter^2, een soort schuifspanning dus) blijken in het hier beschouwde model (assenstelsel volgens fig. 2.7) de (enige) aandrijvende krachten voor de brandingsstroom te zijn.

Voor de opwekking van een positieve brandingsstroom moet de invalshoek van de golven negatief zijn $(-\theta)$, zie fig. 2.7.
Uit (2.62) en fig. 2.7 volgt:

$$\begin{aligned} S_{yx} = S_{xy} &= S_{11} \cos\theta \sin\theta + S_{22}(-\sin\theta\cos\theta) \\ &= (S_{11} - S_{22}) \cos\theta \sin\theta = E n \cos\theta \sin\theta . \end{aligned} \tag{2.63}$$

Verder is

$$S_{xx} = S_{11} \cos^2\theta + S_{22} \sin^2\theta \tag{2.64}$$

en

$$S_{yy} = S_{11} \sin^2\theta + S_{22} \cos^2\theta . \tag{2.65}$$

We keren nu terug naar de impulsbalans voor de gemiddelde beweging (2.50). Deze kan met de decompositie van de snelheid volgens (2.8) en met (2.34), (2.48) en (2.52) als volgt worden geschreven:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\left(U_\alpha + \frac{m_{w\alpha}}{\rho h'}\right)\left(M_\beta + m_{w\beta}\right) + S'_{\alpha\beta}\right] + \rho g h' \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_\alpha} + \bar{\tau}_{b\alpha} = 0 . \tag{2.66}$$

Er wordt verondersteld dat U_α niet van de diepte afhangt.
Als boven, worden produkten van massatransporten verwaarloosd en ook $U_\alpha M_\beta$. Substitutie van (2.55) levert dan:

$$\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho g h' \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_\alpha} + \bar{\tau}_{b\alpha} = 0 . \tag{2.67}$$

2.3.4 energiebalans

Voor de beschrijving van het golfveld en de overdracht van energie van golfbeweging naar turbulentie wordt de energiebalans opgesteld. Hiermee wensen we de golfenergie minstens tot in zijn laagste orde, d.i. tot in 2^o orde in golfamplitude te bepalen. De energiebalans wordt in één orde hoger opgeschreven.

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{\partial E'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \hat{U}_\alpha E' + F_\alpha' \right\} = Q. \tag{2.68}$$

In het te beschouwen geval van stationaire beweging is $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$.
Q is een bronfunktie en geeft de toename van E' p.e.v. tijd en p.e.v. oppervlak. Hierin is zowel energiedissipatie als energie-overdracht in besloten.
E' en F_α' zijn resp. de gemiddelde energie-inhoud p.e.v. oppervlak en de gemiddelde energie-flux van de fluktuerende beweging

$$E' = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \tfrac{1}{2}\rho\left(u_\alpha' u_\alpha' + w'^2\right) dz} + \tfrac{1}{2}\rho g \overline{\zeta'^2} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \tfrac{1}{2}\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_i \, dz} + E = \tilde{E} + E \tag{2.69}$$

$$F_\alpha' = \overline{\int_{-h}^{\zeta} u_\alpha' \left\{ \tfrac{1}{2}\rho u_i' u_i' + p + \rho g \left(z - \bar{\zeta}\right) \right\} dz} \tag{2.70}$$

In vgl. (2.68) komen geen invloeden voor van massatransporten van de fluktuerende beweging, welke in dit verband minstens 4^o orde zijn. Phillips (1969, par. 3.6) heeft een volledige energiebalans (behoudens molekulaire diffusie) voor de fluktuerende beweging afgeleid en geeft aan dat wanneer $(a/h)^2 \ll 1$ is een vorm als (2.68) ontstaat.
Energiedissipatie kan zijn t.g.v. molekulaire viskositeit alléén, turbulentie en/of bodemwrijving. De energiedissipatiefunktie D wordt gedefinieerd als de lokale gemiddelde golfenergiedissipatiesnelheid p.e.v. oppervlak. De dissipatiesnelheid van de totale fluktuerende beweging wordt aangeduid met ϵ'.
Dat molekulaire viskositeit hier een rol kan spelen ondanks het feit, dat voor de golfbeweging de vloeistof effektief als niet-viskeus mocht worden beschouwd blijkt wanneer we kijken naar het vermogen dat geleverd wordt door volume- en oppervlaktekrachten (zie ook (2.38)):

$$\iiint_V u_i \rho G_i \, dV + \iint_O u_i \sigma_{ij} n_j \, dO = \iiint_V \left\{ u_i \rho G_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i \sigma_{ij}\right) \right\} dV$$

p.e.v. volume is dit vermogen:

$$u_i\rho G_i+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\sigma_{ij}) = u_i\left(\rho G_i+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)+\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\rho u_i u_i\right)+\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,. \tag{2.71}$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho u_i u_i\right)$ is de toename van de kinetische energie p.e.v. volume en $\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ is het geleverde vermogen bij de deformatie van het vloeistofelementje; dit resulteert geheel in toename van inwendige energie.

Met (2.40) : $\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = (-p\delta_{ij}+2\eta D_{ij})\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

en met $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$:

$$\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2\eta D_{ij}D_{ij}, \tag{2.72}$$

hetgeen essentieel niet-negatief is. Mechanische energie wordt - irreversible - in warmte omgezet. T.o.v. andere termen in (2.68) wordt deze term voor zover het alleen de golfbeweging betreft verder verwaarloosd.

T.g.v. niet lineaire interaktie tussen golven en een niet-uniforme stroom wordt de golfenergie beïnvloed [Longuet-Higgins en Stewart 1960, 1961, 1964; Phillips 1969] . In analogie met de spanningsleer voor elastische stoffen, waar spanning * vervorming p.e.v. tijd = vermogen p.e.v. volume ($N/m^2 * 1/sec = Nm/m^3\,sec.$), is hier:

radiation stress * vervormings- c.q. afschuifsnelheid = vermogen p.e.v. oppervlak ($Nm^{-1} * 1/sec = Nm/m^2\,sec$).

De interaktie is van dien aard, dat de radiation stress S p.e.v. horizontaal oppervlak en p.e.v. tijd een arbeid verricht tegen de gemiddelde afschuifsnelheid Γ $\left(\Gamma = (\Gamma_{\alpha\beta});\ \Gamma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{U}_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\right)$:

$$S.\Gamma = S_{\alpha\beta}\frac{\partial\hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha}\,.$$

Afhankelijk van het teken van deze term wordt er energie aan de golven onttrokken of toegevoerd.

Dezelfde redenering geldt voor de interaktie tussen de totale fluktuerende beweging (golfbeweging én turbulentie) en de stroom, hetgeen de term $S'_{\alpha\beta}\frac{\partial\hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha}$ oplevert.

Met het bovenstaande wordt de energiebalans (2.68), minstens tot in 3^o orde:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\hat{U}_\alpha E' + F_\alpha'\right\} + S_{\alpha\beta}' \frac{\partial \hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha} = -\epsilon' . \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned} F_\alpha' &= \overline{\int_{-h}^{\zeta} (u_{w\alpha} + \tilde{u}_\alpha)\left\{\tfrac{1}{2}\rho\left(u_{wi}u_{wi} + \tilde{u}_i\tilde{u}_i\right) + p_w + \tilde{p} + \rho g\left(z - \bar{\zeta}\right)\right\} dz} \\ &= \overline{\int_{-h}^{\zeta} u_{w\alpha}\left\{\cdots\right\} dz} + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_\alpha\left\{\cdots\right\} dz} \\ &= F_\alpha + \tilde{F}_\alpha , \end{aligned} \tag{2.74}$$

indien golven en turbulentie ongekorreleerd zijn.

$\underline{F}$ is de energieflux van de golfbeweging (zie ook fig. 2.1):

$$\underline{F} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \underline{u}_w \left(p + \rho g\left(z - \bar{\zeta}\right) + \tfrac{1}{2}\rho\left|\underline{u}_w\right|^2\right) dz} \tag{2.75}$$

en ook:
$$\underline{F} = \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \underline{u}_w \left(p + \rho g\left(z - \bar{\zeta}\right)\right) dz + \mathcal{O}(a^3). \tag{2.76}$$

$$\tilde{\underline{F}} \approx \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \overline{\tilde{\underline{u}}\left(\tfrac{1}{2}\rho\left|\tilde{\underline{u}}\right|^2 + \tilde{p}\right)} dz . \tag{2.77}$$

Substitutie van (2.69), (2.55) en (2.74) in (2.73) levert:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\hat{U}_\alpha E + F_\alpha\right) + S_{\alpha\beta}\frac{\partial \hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\hat{U}_\alpha \tilde{E} + \tilde{F}_\alpha\right) - R_{\alpha\beta}\frac{\partial \hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha} = -\epsilon' . \tag{2.78}$$

Daar golf- en turbulentie grootheden geheel ongekorreleerd zijn verondersteld, komen in deze vergelijking geen interaktietermen van zulke grootheden voor. Vergelijking (2.78) is ook in de vorm van de volgende twee vergelijkingen te schrijven:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\hat{U}_\alpha E + F_\alpha\right) + S_{\alpha\beta}\frac{\partial \hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha} = -D \tag{2.79}$$

$$-D + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\hat{U}_\alpha \tilde{E} + \tilde{F}_\alpha\right) - R_{\alpha\beta}\frac{\partial \hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha} = -\epsilon' . \tag{2.80}$$

$-\epsilon'$ = gemiddelde van momentane viskeuze dissipatie van energie van de fluktuerende beweging, p.e.v. horizontaal oppervlak; $\epsilon' = \rho\epsilon$.

In paragraaf 4.5 wordt (2.80) nader toegelicht. Daaruit blijkt, dat

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\hat{U}_\alpha \tilde{E} + \tilde{F}_\alpha\right) - R_{\alpha\beta}\frac{\partial \hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha}$$ = gemiddelde van momentane produktie

van kinetische energie van de turbulentie + overdracht van turbulentie-energie door advektie en $\tilde{\underline{u}}\ \tilde{p}$ interaktie. Eigenlijk moet er nog bij: + overdracht door molekulaire diffusie, maar dat hebben we hier verwaarloosd.

Verder blijkt, dat dit geheel, in het geval $\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = 0$ evenwicht moet maken met $(\epsilon' - D)$, vandaar (2.80).

(2.79) is nu de energiebalans voor de golven tot in $O(a^3)$, waarmee de variatie in golfenergie E bepaald kan worden. Er geldt:

$$\underline{F} = \underline{c}_g E, \tag{2.81}$$

zie ook (2.21).

Dynamisch gezien is $\underline{c}_g$ de energietransportsnelheid in de lopende golf in een wrijvingsloze vloeistof bij de afwezigheid van $\hat{\underline{U}}$.

Kinematisch gezien is $\underline{c}_g$ de groepssnelheid = snelheid van punten met konstant faseverschil:

$$c_{g\alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial k_\alpha} = \left(\frac{1}{2} + \frac{kh'}{\sinh 2kh'}\right) c_\alpha = n c_\alpha \tag{2.82}$$

Met (2.81) wordt (2.79):

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E\left(\hat{U}_\alpha + c_{g\alpha}\right)\right] + S_{\alpha\beta}\frac{\partial \hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha} = -D \tag{2.83}$$

Zonder (golf-)energiedissipatie, hetgeen vaak een goede benadering is buiten de brandingszone, staat hier dat de divergentie van de energieflux precies gekompenseerd wordt door de arbeid verricht door de radiation stress tegen de afschuifstroom. Alhoewel de interakties 3° orde effekten zijn, mogen zij, omdat de energieoverdracht $\propto \frac{|\hat{\underline{U}}|}{c}$ blijkt te zijn, niet verwaarloosd worden wanneer $|\hat{\underline{U}}|\ O(c)$ wordt.

Buiten de brandingszone blijkt de verwaarlozing van de interaktie een goed uitgangspunt te zijn. Binnen de brandingszone moeten we in feite vgl. (2.78) gebruiken, maar ook (2.83) is geldig.

We kunnen er dan van afzien hoe energie wordt gedissipeerd. Indien we voor ons doel ook hier uitgaan van $|\hat{\underline{u}}| << c$,
dan is dus ook $|\hat{\underline{u}}| << c_g$ zodat (2.83) in alle gevallen reduceert tot:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} E c_{g\alpha} = -D. \tag{2.84}$$

Doordat we nu de golven en de daardoor opgewekte stroom als het ware geheel ontkoppeld hebben, wordt in deze benadering de energie-inhoud van de golven niet beïnvloed door de stroom.
Zo men dat wil, kan de beïnvloeding door de stroom die in werkelijkheid wel plaats vindt berekend worden bv. volgens Longuet-Higgins (1961).

2.5 Opstuwing en brandingsstroom t.g.v. regelmatige golven

De uitgangspunten voor de berekening staan vermeld: ① op p. 8, ② t/m ⑦ op p. 12, terwijl ⑧ op p. 28 verschijnt.
Bekende resultaten uit theorieën over set-down en set-up kunnen zonder meer in de rekenmodellen van hoofdstuk 5 e.v. ingevoerd worden. Alhoewel dat in dit verslag niet uitgevoerd wordt, omdat het niet essentieel is voor een demonstratie van de werking van die modellen, wordt in deze paragraaf voor de volledigheid toch aangegeven hoe het lokale gemiddelde waterniveau berekend kan worden. Er blijkt ook wat de invloed van de turbulentie hierop is.

2.5.1 set-down en set-up

Uit de horizontale impulsbalans in x-richting volgen set-down buiten en set-up binnen de brandingszone vanwege het feit, dat gradiënten in de radiation stress $\frac{dS_{xx}}{dx}$ gekompenseerd moeten worden door gradiënten in het gemiddelde waterniveau [Longuet-Higgins en Stewart, 1962, 1963, 1964; Lundgren 1963; Bowen, Inman en Simmons 1968].
Uit (2.67) met $\alpha = 1, \bar{\tau}_{b1} \approx 0$ en afgeleiden naar y gelijk aan nul stellend:

$$\rho g h' \frac{\partial \bar{\zeta}}{dx} + \frac{dS_{xx}}{dx} - \overline{\frac{dR_{xx}}{dx}} = 0, \tag{2.85}$$

waarin $R_{xx} = -\int_{-h}^{\zeta} \rho \tilde{u}^2 \, dz$.

Buiten de brandingszone wordt een rotatievrije beweging verondersteld en energiedissipatie verwaarloosd. Volgens (2.81) is:

$$F_\alpha = c_{g\alpha} E \qquad \text{dus } F_x = E c_g \cos\varphi = -E c_g \cos\theta, \tag{2.86}$$

F_x is de gemiddelde energieflux p.e.v. tijd in de richting van de kust en p.e.v. kustlengte (!). Voor φ en θ, zie figuur 2.7, p. 19. Hiermee wordt de energiebalans (2.84):

$$E c_g \cos\theta = E n c \cos\theta = \text{konstant} . \tag{2.87}$$

De invalshoek θ wordt als volgt bepaald:

Uit (2.14) volgt: $\nabla \times \underline{k} = 0$ en met uitgangspunt (7) (p. 12):

$\frac{\partial k_y}{\partial x} = \frac{\partial k_x}{\partial y} = 0$, zodat het golfgetal in y-richting onafhankelijk is van x:

$$k_y = k \sin\theta \quad = \text{konstant langs een golfstraal} = k_0 \sin\theta_0 . \tag{2.88}$$

$c = \frac{\omega}{k}$, zie (2.16) zodat:

$$\sin\theta / c = \sin\theta_0 / c_0 \quad \text{(Snellius)} . \tag{2.89}$$

Voor loodrechte golfinval ($\theta = 0$) levert een integratie van (2.85) - zonder de term $\frac{dR_{xx}}{dx}$ - [Longuet-Higgins en Stewart 1962] :

$$\bar{\zeta} = - \frac{ka^2}{2 \sinh 2kh'} \tag{2.90a}$$

$$= -\frac{1}{4g} \left(\frac{\omega a}{\sinh kh'} \right)^2 = -\frac{1}{4g} \left(\underline{u}_{wb} \right)^2_{max} = -\frac{1}{2g} \overline{\left(\underline{u}_{wb} \right)^2} \tag{2.90b}$$

waarin $\left(\underline{u}_{wb} \right)_{max}$ de amplitude van de orbitaalsnelheid aan de bodem volgens de lineaire theorie is.

Mei e.a. (1968) hebben op een erg omslachtige manier de set-down ook bepaald in geval van scheef invallende golven. Zij vinden dezelfde uitdrukking als (2.90), maar dan met de lokale golfkondities gerelateerd aan de diep-water kondities:

$$\bar{\zeta} = - \frac{ka^2}{2(\sinh 2kh' + 2kh') \tanh kh'} \; \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta} . \tag{2.91}$$

Uit (2.87) volgt:

$$\left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{n_0 c_0 \cos\theta_0}{n c \cos\theta} \quad \text{(rechte, evenwijdige dieptelijnen)}$$

hetgeen met:

$$\frac{n_o c_o}{nc} = \frac{\frac{1}{2} c_o}{\left(\frac{1}{2} + \frac{kh'}{\sinh 2kh'}\right) c_o \tanh kh'} = \frac{\sinh 2kh'}{(\sinh 2kh' + 2kh') \tanh kh'}$$

(de index o refereert naar diep water), weer (2.90) oplevert.

In beide gevallen wordt dus dezelfde uitdrukking gevonden en het is aardig om te zien dat de set-down bij scheef invallende golven veel eenvoudiger is te bepalen en wel in duidelijke parallel met die voor loodrechte inval.

Bij hun afleiding van de radiation stress splitsen Longuet-Higgins en Stewart (1964) S_{xx} in 3 delen: $S_{xx} = S_{xx}^{(1)} + S_{xx}^{(2)} + S_{xx}^{(3)}$, waarin

$$S_{xx}^{(1)} = \int_{-h}^{\xi} \rho u^2 dz \quad \text{en} \quad S_{xx}^{(2)} + S_{xx}^{(3)} = \int_{-h}^{0} (\bar{p} + \rho g z) dz + \int_{0}^{\xi} p\,dz = (n - \tfrac{1}{2}) E$$

$= nE$

(de bijdrage van de druk, schrijf S_{xx_d})

(de bijdrage tot het impulstransport door de werkelijke impulsie, schrijf S_{xx_i})

Voor (2. 90) is dan te schrijven:

$$\bar{\xi} = -\frac{S_{xxd}}{\rho g h'} . \tag{2.92}$$

Het is duidelijk, dat wanneer (2. 92) geldt voor $\theta = 0$, dat ook geldt voor $\theta \neq 0$, immers de uitdrukking voor S_{xx_d} is onafhankelijk van θ . Weliswaar is de uitdrukking voor S_{xx} voor $\theta \neq 0$ verschillend van die voor S_{xx} voor $\theta = 0$, maar de energiebalans en de wet van Snellius kompenseren dit. De volgende analoge afleiding voor beide gevallen toont dit aan.

We gaan uit van: $$\rho g\, h' \frac{d\bar{\xi}}{dx} = -\frac{d}{dx} S_{xx} \tag{2.93}$$

$\underline{\theta = 0.}$

(x, y) zijn hoofdassen.

Volgens (2. 60): $S_{xx} = E\left\{(n - \frac{1}{2}) + n\right\} = S_{xxd} + S_{xx_i}$.

Energiebalans (2. 87) : $E\,nc$ = konstant, zodat

$S_{xx_i}\, c$ = konstant,

$$\frac{dS_{xx_i}}{dx} = -\frac{S_{xx_i}}{c} \frac{dc}{dx}$$

$$\text{en} \quad \frac{dS_{xx}}{dx} = \frac{dS_{xxd}}{dx} - \frac{S_{xx_i}}{c} \frac{dc}{dx} . \tag{2.94}$$

$\underline{\theta \neq 0.}$

(ξ_1, ξ_2) zijn hoofdassen

Volgens (2.64): $S_{xx} = E\left\{(n - \frac{1}{2}) + n\cos^2\theta\right\} = S_{\xi_1 \xi_1 d} + S_{\xi_1 \xi_1 i} \cos^2\theta$.

Om te vergelijken met loodrechte inval schrijven we hiervoor

$S_{xx_d} + S_{xx_i} \cos^2\theta$, omdat de uitdrukkingen hetzelfde zijn.

De energiebalans (2.87) $E_n c \cos\theta$ = konstant en

Snellius (2.89): $\frac{\sin\theta}{c}$ = konstant,

leveren samen $S_{xx_i} \sin 2\theta$ = konstant.

Hieruit volgt: $$\frac{d S_{xx_i} \cos^2\theta}{dx} = - S_{xx_i} \cdot \frac{1}{\tan\theta} \frac{d\theta}{dx} . \qquad (2.95)$$

Uit (2.101) volgt: $$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{c} \tan\theta \frac{dc}{dx} , \qquad (2.96)$$

zodat $$\frac{dS_{xx_i}}{dx} \cos^2\theta = - \frac{S_{xx_i}}{c} \frac{dc}{dx} ,$$

waarmee $$\frac{dS_{xx}}{dx} = d\frac{S_{xx_d}}{dx} - \frac{S_{xx_i}}{c} \frac{dc}{dx} ,$$

hetzelfde resultaat als (2.94) , afgezien van het feit dat de lokale energie-inhoud van de golven een andere waarde heeft.

De afleiding voor zowel $\theta = 0$ als voor $\theta \neq 0$ verloopt verder als volgt. Door differentiëren van $c = c_0 \tanh kh'$ vindt men:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{dc}{dh'} \frac{dh'}{dx} = \frac{c}{h'} \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n}\right) \frac{dh'}{dx} = \frac{c}{h'} \frac{S_{xx_d}}{S_{xx_i}} \frac{dh'}{dx} . \qquad (2.97)$$

Substitutie van (2.97) in (2.94) en (2.94) in (2.93) geeft

$$\rho g h' \frac{d\bar{\zeta}}{dx} = - \frac{dS_{xx_d}}{dx} + \frac{S_{xx_d}}{h'} \frac{dh'}{dx} = - h' \frac{d}{dx} \left(\frac{S_{xx_d}}{h'}\right),$$

waarmee $$\bar{\zeta} = - \frac{S_{xx_d}}{\rho g h'}$$

($h' \neq 0$ en $\bar{\zeta} \to 0$ op diep water),

hetgeen (2.92) en (2.90) bewijst voor zowel loodrecht als scheef invallende golven.

Vanwege de afname van S_{xx} binnen de brandingszone vertoont het gemiddelde waterniveau in het beschouwde assenstelsel een negatieve gradiënt $\frac{d\bar{\zeta}}{dx}$, hetgeen opstuwing betekent (zie ook fig. 2.1, pag. 2.7). Bij berekeningen binnen de brandingszone treedt een belangrijke moeilijkheid op om een adequate beschrijving te vinden voor de golven na breking. De lineaire theorie voldoet zeker niet, maar hogere orde theorieën voldoen ook niet, omdat ze alle slechts gelden hoogstens tot aan het punt van breken. Daar we voorlopig alleen geïnteresseerd zijn in een beschrijving tot in 2^o orde in amplitude, wordt verwacht dat beschrijving m.b.v. radiation stress tot in deze orde in de bewegingsvergelijking voldoet. In de afleiding van de radiation stress echter is verondersteld dat de gemiddelde potentiële energie $\left(\frac{1}{2}\rho g\,\overline{\zeta^2}\right)$ = gemiddelde kinetische energie $\left(= \int_{-h}^{\zeta} \frac{1}{2}\rho \underline{u}^2\,dz\right) = \frac{1}{2}E$.

Stellig is dit in de brandingszone niet juist. In plaats van de eigenlijk benodigde grootheden in de radiation stress in te vullen (druk- en snelheidsfluktuaties van de golfbeweging) wordt nu gebruik gemaakt van de vaak gedane aanname, dat na breken de golfhoogte afneemt in een konstante verhouding met de gemiddelde waterdiepte [Bowen e.a. 1968],

$$H = \gamma\,(h + \bar{\zeta}) = \gamma h', \text{ voor } x < x_B \text{ en } dh/dx \geq 0. \tag{2.98}$$

Deze aanname is tevens ons uitgangspunt (8) .
Dit is eigenlijk een heuristische beschrijving van de golfhoogte, die goed voldoet voor "spilling" brekers op monotoon flauw oplopende stranden, waarbij de golfenergie zeer geleidelijk afneemt. (2.98) bepaalt nu met $E = \frac{1}{8}\rho g H^2$ de lokale energie-inhoud van de golven. (2.98) wordt daarna ingevuld in de uitdrukking voor de radiation stress volgend uit de lineaire theorie.
Wat er nu dus eigenlijk wordt gedaan is, dat de totale golfenergiedissipatie bepaald wordt uit de afname in potentiële energie, waarbij de afname in kinetische golfenergie hieraan gelijk gesteld wordt. Vooral kort na het breken zal deze laatste afname waarschijnlijk minder zijn dan de eerste.
Verder wordt geen rekening gehouden met de energie die in de turbulentie gaat zitten en waarvan de invloed tot uitdrukking komt in de term $-\frac{dR_{xx}}{dx}$ in vgl. (2.85). In het geval van een homogene turbulentie levert deze term inderdaad geen bijdrage.
Voor loodrechte golfinval volgt zo een set-up met een gemiddeld verhang $\propto$ lokale bodemhelling:

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dx} = -C\,\frac{dh}{dx}, \tag{2.99}$$

waarin $C = \frac{3/8\,\gamma^2}{1 + 3/8\,\gamma^2}$ voor een bepaalde situatie een konstante faktor is en waarbij $\frac{dh}{dx} \geq 0$ moet zijn.
Voor $x < 0$ zetten we de stil-waterdiepte h analytisch voort met een negatieve waarde.
Bij scheve golfinval is de uitdrukking voor S_{xx} te schrijven als $(S_{xx})_{\theta \neq 0} = (S_{xx})_{\theta = 0} - E n \sin^2\theta$ en afgezien van de grootte van E is dit dus $E n \sin^2\theta$ kleiner dan bij loodrechte inval. Hierdoor is ook C in (2.99) geen konstante meer, maar neemt t.g.v. refraktie toe

in de richting van de kust. Deze effekten zijn gering maar kunnen, evenals effekten van interaktie van golven en stroom berekend worden. Zie bv. Thornton 1969, paragraaf III D1.

Een betere beschrijving in de brandingszone van het interne snelheidsveld en de afname van de golfhoogte, in kombinatie met de energiedissipatie is nodig voor een nauwkeurige berekening van opstuwing en brandingsstroom. Führböter (1970 en 1971) berekende afname golfenergie uit afname golfhoogte als gevolg van het verlies aan potentiële energie door het weer opstijgen van tijdens het breken ingesloten lucht. Dit heeft dezelfde bezwaren als die verbonden aan de toepassing van (2.98) , maar daarbij komen nu nog meer onbekende faktoren, zoals de verrichte arbeid voor het insluiten van lucht en de luchtbellenkoncentratie.

Divoky, Le Méhauté en Lin (1970) gebruiken voor de berekening van de afname van de golfhoogte een energiedissipatiemodel, gebaseerd op de aanname dat het gedrag van een spilling breker hetzelfde is als dat van een lopende watersprong.
Divoky en Hwang (1970) gebruiken ook dit model maar berekenen simultaan de set-up. De aanname is dat de energiedissipatiesnelheid in een spilling breker een konstante fraktie is van die in een watersprong met dezelfde hoogte als de brekende golf. Weer wordt $E = 2 *$ potentiële energie gesteld (maar dan berekend met Cnoïdale golftheorie). Het resultaat is een set-up met een convex verloop. Er zijn geen aanwijzingen, dat dit model signifikant betere resultaten levert dan het veel eenvoudiger model m.b.v. (2.98).

2.5.2 brandingsstroom

De horizontale impulsbalans (2.67) geldend voor een kwasi-stationaire beweging, nu toegepast in y-richting ($\alpha = 2$) en waarbij aangenomen wordt dat de tijdsgemiddelden niet variëren in y-richting, luidt:

$$-\frac{dS_{xy}}{dx} + \frac{dR_{xy}}{dx} - \bar{\tau}_{by} = 0 \qquad (2.100)$$

De eerste term, de gradiënt van de gemiddelde flux in x-ri. door de golven van y-impulsie van de golven, p.e.v. horizontaal oppervlak is de aandrijvende kracht voor de brandingsstroom. Deze maakt, onder al de gedane aannamen, evenwicht met de schuifspanning aan de bodem $\bar{\tau}_{by}$

("bodemwrijving") en met de resulterende schuifspanning t.g.v. turbulente horizontale uitwisseling van turbulente horizontale impulsie $\frac{dR_{xy}}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_{-h}^{\zeta} \rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}}\, dz.$

Op dit punt is het interessant om nog eens na te gaan hoe de twee eerste termen in de bewegingsvergelijking zijn gekomen.
De versnellingsterm in de impulsvergelijking is met (2.5) $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + d\underline{u}$, waarin de operator $d = (\underline{u}\,.\,\nabla)$ de invloed van de advektie weergeeft. $\underline{u} = \underline{U} + \underline{u}' = \underline{U} + \underline{u}_w + \tilde{\underline{u}}$. $d = (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}) = D + d'$, met $d' = d_w + \tilde{d}$.
Dan volgt

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + d\underline{u} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + D\underline{U} + D\underline{u}' + d'\underline{U} + d'u'. \tag{2.101}$$

Na middeling over de tijd blijft hiervan over:

$$\overline{\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + D\underline{U} + d'\underline{u}'} \tag{2.102}$$

De y-komponent van (2.102) is onder toepassing van de inkompressibiliteitsvoorwaarde in homogene vloeistof

$$\frac{\partial V}{\partial t} + DV + \frac{\partial}{\partial x}\overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'^2} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{v'w'} = \text{kracht in y-richting p.e.v. massa} = K_y/\rho. \tag{2.103}$$

Met onze uitgangspunten is $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ en $\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} = 0$. Afgeleiden naar z verdwijnen na integratie over de hoogte. Zo reduceert (2.102) tot de over de vertikaal geïntegreerde vorm $U\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x}$

Het blijkt dus dat $\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x}$ het gemiddelde effekt is van de advektie in x-richting van fluktuerende y-impulsie.

$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u_w v_w}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tilde{u}\tilde{v}}}{\partial x}$. De term $\frac{\partial \overline{u_w v_w}}{\partial x}$ levert $\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}$. Deze $\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}$ (in ons model is $\frac{\partial S_{yy}}{\partial y} = 0$),
zorgt dus weliswaar voor de aandrijving van de brandingsstroom, maar is eigenlijk geen krachtterm zoals bv. de bodemwrijving. Maar, nogmaals, het gemiddelde effekt van advektie in x-richting van y-impulsie t.g.v. de golfbeweging alleen. Indien we een bepaald volume water beschouwen, over de grenzen waarvan gradiënten bestaan in S_{xy}, wordt daarin een netto stroom veroorzaakt, die weer wordt beïnvloed door de term $\frac{\partial \overline{\tilde{u}\tilde{v}}}{\partial x}$.
Zo'n volume kan zijn een moot water van de brandingszone, begrensd door de kustlijn, de brekerlijn en vlakken // x-as op een loodrechte afstand van bv. 1 meter, waarover straks meer.

De als diffusie op te vatten divergentieterm $-\frac{dR_{xy}}{dx}$ kan uitgebreid worden met molekulaire diffusie t.g.v. viskeuze schuifspanning, wanneer $2\eta D_{\alpha\beta}$ meegenomen wordt in $\sigma_{\alpha\beta}$ in vergelijking (2.50). Dan ontstaat:

$$-\frac{d}{dx}\int_{-h}^{\overline{\zeta}} \left(\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}} - \eta\frac{dV}{dx}\right) dz, \tag{2.104}$$

als totale zijdelingse (of inwendige) wrijving.

De schuifspanningen t.g.v. molekulaire viskositeit zijn verwaarloosbaar, maar dienen hier mee voor het kwalificeren van de Reynolds-spanningen (zie hoofdstuk 3).

De met (inwendige) schuifspanningen equivalente impulstransporten betekenen effektief horizontale menging.

Bij integratie van (2.100) over de gehele brandingszone, van de strandlijn $x = -x_S$ (zie fig. 2.1, p. 7) tot $x = x_B + \Delta$, waarin Δ voorlopig arbitrair, maar zodanig dat turbulente impulsuitwisseling voor $x = x_B + \Delta$ verwaarloosbaar is, verdwijnt de bijdrage van $\frac{dR_{xy}}{dx}$ in de overall impulsbalans:

$$\int_{x=-x_S}^{x=x_B+\Delta} \frac{d}{dx}(R_{xy})dx = R_{xy}\Big|_{x=-x_S}^{x=x_B+\Delta} = 0.$$

Zolang Δ maar klein is, is horizontale menging slechts binnen de brandingszone werkzaam ter beïnvloeding van het snelheidsprofiel van de brandingsstroom.

Met $\Delta \approx 0$ volgt dan:

$$\int_{x=-x_S}^{x=x_B} \frac{dS_{xy}}{dx}\, dx + \int_{x=-x_S}^{x=x_B} \overline{\tau}_{by} = 0$$

zodat
$$(S_{xy})_{x=x_B} = -\int_{x=-x_S}^{x=x_B} \overline{\tau}_{by}'. \tag{2.105}$$

Indien aangenomen wordt dat buiten de brekerzone energiedissipatie verwaarloosbaar is (dus bodemwrijving ook) volgt uit (2.67) met $\alpha = 2$ en $\frac{\partial}{\partial y} \ldots = 0$: $\frac{dS_{yx}}{dx} = 0$ voor $x > x_B$, zodat met (2.63)

$$S_{xy} = \text{konstant} = \tfrac{1}{4} E_0 \sin 2\theta_0 \quad \text{voor } x > x_B. \tag{2.106}$$

S_{xy} heeft het teken van de invalshoek θ van de golven (zie fig. 2.7, p. 19).

In het algemeen geldt met gebruikmaking van de wet van Snellius (2.89), en met (2.86) en (2.63):

$$S_{xy} = -F_x \frac{\sin\theta}{c} = -F_x \frac{\sin\theta_0}{c_0} \tag{2.107}$$

Longuet-Higgins (1972) toont aan dat dit en daarmee ook (2.120) een exakte relatie is, geheel onafhankelijk van het gebruik van de lineaire theorie. (2.107) geldt zelfs in de brandingszone.
S_{xy} is dus evenredig met dé energieflux F_x . Het min-teken is het gevolg van de keuze van de x-richting in ons assenstelsel.
Met (2.84): $\frac{\partial F_{-x}}{\partial(-x)} = -D$, maar ook $\frac{\partial F_x}{\partial x} = -D$ volgt:

$$\frac{d S_{xy}}{dx} = - \frac{dF_x}{dx} \frac{\sin \theta_0}{c_0} = D \frac{\sin \theta_0}{c_0} . \tag{2.108}$$

Met D = 0 voor $x > x_B$ geeft dit weer (2.106). De in deze benadering voor $x > x_B$ van x onafhankelijke "golfspanning" evenwijdig aan de kust p.e.v. kustlengte (total lateral thrust, zie Longuet-Higgins, 1970a) moet volgens (2.105) evenwicht maken met de totale bodemschuifspanning in de brandingszone. Verder blijkt uit (2.108) dat de aandrijvende kracht recht evenredig is met de lokale gemiddelde energiedissipatie p.e.v. tijd en oppervlak, waarbij buiten beschouwing gelaten wordt hoé die energie wordt gedissipeerd. Zonder energiedissipatie, overeenkomstig rotatievrije beweging (waarin overigens de viskositeit nog niet verwaarloosd hoeft te worden) wordt dus geen stroom opgewekt.

Voor de bodemweerstand wordt in dit verslag uitgegaan van de volgende relatie tussen momentane schuifspanning die het water op de bodem uitoefent en momentane watersnelheid buiten de grenslaag:

$$\underline{\tau}_b = C_f \; \rho \underline{u} \, |\underline{u}| , \tag{2.109}$$

waar C_f een (konstante) koëfficiënt is voor turbulente grenslagen. Battjes (1972), Longuet-Higgins (1970a, 1972) en Thornton (1969) komen hiermee tot een tijdsgemiddelde y-komponent in de gelineariseerde vorm

$$\bar{\tau}_{by} = K \rho \, |\underline{u}_{wb}|_{max} \, \hat{V} . \tag{2.110}$$

Hierin is $|\underline{u}_{wb}|_{max}$ de amplitude van de horizontale orbitaalsnelheid bij de bodem en K een nieuwe koefficiënt voor de bodemschuifspanning waarin verwerkt de C_f uit (2.109) en invloeden van andere faktoren zoals bv. de keuze van de hoogte waarop $|\underline{u}_w|_{b\,max}$ en V genomen worden. We nemen aan dat K konstant is. Volgens Longuet-Higgins (1970, 1972) is $\frac{\pi}{2} K \approx C_f$ van een grootte-orde van 0.01.

Indien we <u>buiten de brandingszone</u> de energiedissipatie in de grenslaag bij de bodem niet verwaarlozen, kan de daar opgewekte stroom als volgt worden berekend.

Vereenvoudigd (2.100) tot $\dfrac{dS_{xy}}{dx} = -\overline{\tau}_{by}$ en (2.111a)

met (2.122) wordt dit $\dfrac{\sin\theta_0}{c_0} D = -\overline{\tau}_{by}$. (2.111b)

$$D = \overline{\underline{u}_b \; \underline{\tau}_b} = C_f \rho \overline{\underline{u}_b^2 \; |\underline{u}_b|} \approx C_f \rho \overline{\underline{u}_{wb}^2 \cdot |\underline{u}_{wb}|}$$

en $\overline{\tau}_{by} = C_f \rho \overline{v_b |\underline{u}_b|} \approx C_f \rho \overline{(V + v_w)_b \; |\underline{u}_{wb}|}$,waarbij

is verondersteld, net zoals bij de afleiding van (2.110) is gebeurd, dat V klein is t.o.v. de orbitaalsnelheid, er ongeveer loodrecht op staat en dat er een turbulente grenslaag aanwezig is. (2.111b) wordt hiermee:

$$\frac{\sin\theta_0}{c_0} C_f \rho \overline{\underline{u}_{wb}^2 \; |\underline{u}_{wb}|} = - C_f \rho \overline{(V + v_w)_b \; |\underline{u}_{wb}|}.$$

Stel $\underline{u}_w = |\underline{u}_w|_{max} \sin \omega t$, dan is $\overline{|\underline{u}_{wb}|} = \frac{2}{\pi} |\underline{u}_{wb}|_{max}$,

$\overline{v_{wb} \; |\underline{u}_{wb}|} = 0$ en

$\overline{u_{wb}^2 \; |\underline{u}_{wb}|} = \frac{4}{3\pi} |\underline{u}_{wb}|^3_{max}$.

$|\underline{u}_{wb}|_{max}$ volgens de lineaire theorie $= \dfrac{\omega a}{\sinh kh'}$,

zodat hiermee $V_b = -\dfrac{2}{3} \dfrac{\sin\theta_0}{c_0} \left(\dfrac{\omega a}{\sinh kh'}\right)^2$. (2.112)

De zo berekende V_b (hetgeen nog niet $= \hat{V}$ behoeft te zijn) is toevallig $= \dfrac{\sin\theta_0}{c_0} \cdot \dfrac{4}{3} g \overline{\zeta}$, waarin $\overline{\zeta}$ de set-down volgens (2.90) is.

Deze set-down is echter berekend onder verwaarlozing van energie-dissipatie, zodat de waarde van a in (2.90) een andere is dan in (2.112). De laatste moet berekend worden m.b.v. (2.84):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tfrac{1}{2} \rho g a^2 n c \cos\theta\right) = -\frac{4}{3\pi} C_f \rho \left(\frac{\omega a}{\sinh kh'}\right)^3. \qquad (2.113)$$

Het kan wél zijn dat de hieruit volgende demping voor golven in de richting van de kust over oplopende stranden een orde kleiner is dan de verandering in golfhoogte volgens (2.87).

Binnen de brandingszone geldt onder verwaarlozing van horizontale menging (2.111a) $\frac{d\,S_{xy}}{dx} = -\bar{\tau}_{by}$, waarin

$$\frac{d\,S_{xy}}{dx} = \frac{d}{dx}\,En\cos\theta = \frac{\sin\theta_0}{c_0}\frac{d}{dx}\,En\,c\cos\theta = \frac{\sin\theta_B}{c_B}\frac{d}{dx}\,En\,c\cos\theta$$

en $\bar{\tau}_{by} = K\rho\,|\underline{u}_{wb}|_{max}\,\hat{V}$ (vergelijking 2.110).

Zo ontstaat een (eenvoudige) algebraïsche vergelijking. Fysisch betekent deze ontaarding van de differentiaalvergelijking, dat kolommetjes water (mét hun snelheid) in x-richting onafhankelijk van elkaar zijn geworden, zodat in die richting diskontinuïteiten kunnen gaan optreden. Er wordt gesteld $\cos\theta \approx \cos\theta_B$, $H = \gamma h'$ en voor de andere golfparameters worden ondiep-water benaderingen uit de lineaire theorie ingevuld:

$$n = 1,\ c = \sqrt{gh'}\ \text{en}\ |\underline{u}_{wb}|_{max} = |\underline{u}_w|_{max} = \frac{1}{2}H\sqrt{\frac{g}{h'}} = \frac{1}{2}\gamma\sqrt{gh'}.$$

Dit geeft voor de gemiddelde y-komponent van de lokale schuifspanning die het water op de bodem uitoefent:

$$\bar{\tau}_{by} = -\frac{5}{4}\rho\,|\underline{u}_w|^2_{max}\,\sin\theta_B\cos\theta_B\left(\frac{h'}{h_B'}\right)^{1/2}\frac{dh'}{dx} \tag{2.114a}$$

$$= -\frac{5}{16}\rho g\gamma^2\sin\theta_B\cos\theta_B\,\frac{h'^{3/2}}{h_B'^{1/2}}\,\frac{dh'}{dx}\,. \tag{2.114b}$$

Uiteraard levert een integratie van $\bar{\tau}_{by}$ over de brandingszone weer $(S_{xy})_{x=x_B}$ op (zie ook (2.105)), dat volgens (2.106) $= \frac{1}{4}E_0\sin 2\theta_0$. De enige nog (experimenteel) te bepalen parameter is

$$\gamma = H/_{h'} = H_B/_{h_B'} = \left(\frac{H_0^2}{2h_B'^2}\,\frac{\sin 2\theta_0}{\sin 2\theta_B}\right)^{1/2}.$$

(de laatste uitdrukking is natuurlijk alleen geldig voor $\theta \neq 0$).
Voor de brandingsstroom volgt dan (zie ook Battjes, 1972):

$$\hat{V} = -\frac{5}{8}\frac{\gamma}{k}\sqrt{\frac{g}{h_B'}}\,\sin\theta_B\cos\theta_B\,h'\frac{dh'}{dx} \tag{2.115}$$

en inclusief set-up volgens (2.99):

$$\hat{V} = -\frac{5}{8k}\,\frac{\gamma}{1+{}^3/_8\gamma^2}\,\sqrt{\frac{g}{h_B'}}\,\sin\theta_B\cos\theta_B\,h'\,\frac{dh}{dx}. \qquad (2.1.16)$$

(2.1.15) en (2.1.16) gelden voor $x < x_B$ en $\frac{dh}{dx} \geqslant 0$.
Indien voor $x > x_B$ dissipatie verwaarloosd wordt, is in dit model $\hat{V} = 0$ voor $x > x_B$. Wordt de dissipatie voor $x > x_B$ niet verwaarloosd, dan geldt (2.1.12). Voor de waarde die deze stroom net zeewaarts van de brekerlijn zou hebben is het logisch dezelfde benaderingen in te voeren als dat voor de brandingsstroom is gedaan (alhoewel het helemaal niet zeker is of we wel V_b(voor $x > x_B$) $\approx \hat{V}$ mogen stellen). In dat geval is de verhouding van de berekende brandingsstroomsnelheid t.p.v. de brekerlijn $(\hat{V}_B)$: stroomsnelheid t.g.v. energiedissipatie buiten de brandingszone en berekend t.p.v. de brekerlijn $(\hat{V}'_B)$

$$\frac{\hat{V}_B}{\hat{V}'_B} = \frac{(2.129)_{x=x_B}}{(2.126)_{x=x_B}} = \frac{15}{4K}\,\frac{1}{\gamma(1+{}^3/_8\gamma^2)}\,\cos\theta_B\left(\frac{dh}{dx}\right)_B.$$

Met een afname van γ van $\approx 25\%$ neemt deze verhouding toe met $\approx 50\%$. Voor bv. $K = 0.01$, $\cos\theta_B \approx 1$ en $\left(\frac{dh}{dx}\right)_B = \frac{1}{10}$ à $\frac{1}{50}$ bedraagt deze verhouding voor γ achtereenvolgens 1.2 (eigenlijk behorend bij de verhouding H_B/h_B voor plunging brekers), 1, 0.8 en 0.6 resp. ongeveer 20 à 4, 27 à 5.5, 40 à 8 en 60 à 12.
In het vervolg verwaarlozen we $\hat{V}'$.

De zo berekende brandingsstroom is $\propto h'\frac{dh}{dx}$ en vertoont in dit model een diskontinuïteit zowel in grootte als in z'n gradiënt in x-ri. t.p.v. de brekerlijn. In fig. 2.8 zijn op vertrokken schaal drie strandprofielen getekend met volgens bovenstaand model de vorm van de bijbehorende brandingsstroomprofielen.

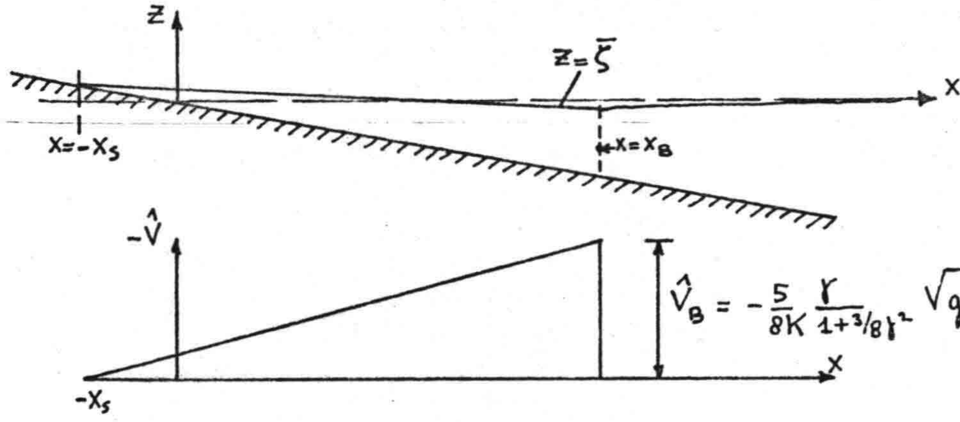


fig. 2.8 a
$\frac{dh}{dx}$ = konstant

$$\hat{V}_B = -\frac{5}{8K}\frac{\gamma}{1+3/8\,\gamma^2}\sqrt{g h'_B}\,\sin\theta_B \cos\theta_B \left(\frac{dh}{dx}\right)_{x=x_B} \qquad (2.117)$$

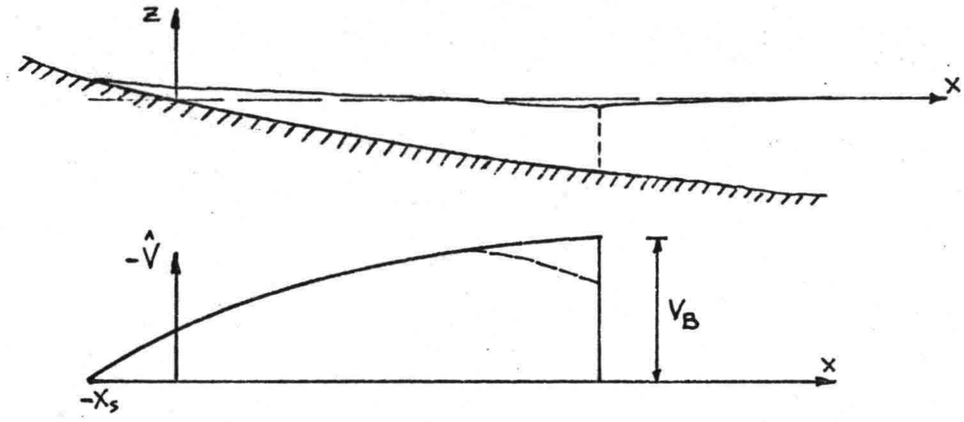


fig. 2.8 b
$\frac{dh}{dx} > 0$ maar niet konstant

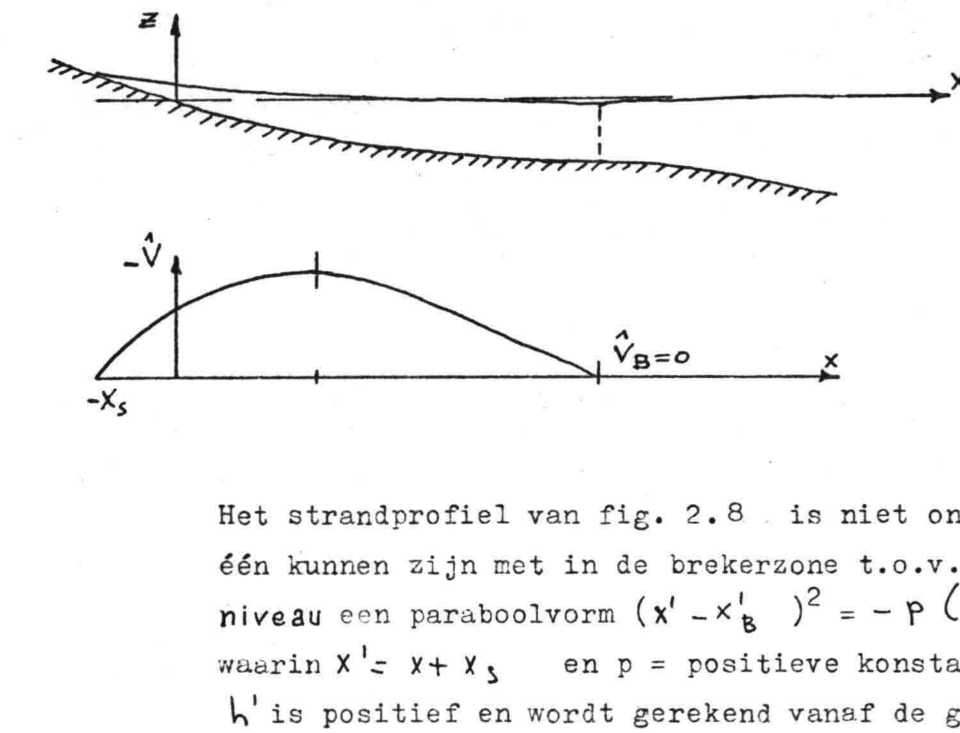


fig. 2.8 c
$\frac{dh}{dx} = 0$ voor $x = x_B$
> 0 voor $x < x_B$

Het strandprofiel van fig. 2.8 is niet onrealistisch en zou er één kunnen zijn met in de brekerzone t.o.v. het gemiddelde waterniveau een paraboolvorm $(x' - x'_B)^2 = -p\,(h' - h'_B)$, waarin $x' = x + x_s$ en p = positieve konstante $= x_B'^2 / h'_B$.
h' is positief en wordt gerekend vanaf de gemiddelde waterlijn naar beneden. De aanname $H = \gamma h'$ is hier, kort na het breken, waarschijnlijk minder goed. Laten we dit staan, dan is

$$V \propto h' \frac{dh'}{dx} = \frac{2}{p}\,(x' - x'_B)\left[\frac{1}{p}(x' - x'_B)^2 - h'_B\right].$$

De nulpunten hiervan zijn voor $x' \leqslant x'_B$ $x'_{1,2} = 0, x'_B$ en het maximum ligt op $x' = \left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) x'_B$ d.i. daar waar $h' = 2/3\, h'_B$.

Keren we tot slot van dit hoofdstuk terug naar de kwantitatieve probleemstelling dan zien we dat het erom gaat een oplossing te vinden voor de impulsbalans (2.100), dus met inbegrip van horizontale turbulente impulsuitwisseling, hetgeen tot uitdrukking komt in de term

$$\frac{d}{dx} \int_{-h}^{\bar{\zeta}} -\rho \overline{\tilde{u}\,\tilde{v}} \; dz \, .$$

De t.p.v. de brekerlijn optredende diskontinuïteiten in de snelheidsprofielen en snelheidsgradiënten (in x-richting) van in rekenmodellen zonder horizontale menging berekende brandingsstromen zullen daardoor opgeheven worden en tevens zal er vereffening optreden in de met die modellen berekende profielen.

Hoofdstuk 3

BESTAANDE TURBULENTIEMODELLEN VOOR DE BRANDINGSZONE

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een overzicht en bespreking gegeven van literatuur betreffende de menging in de kuststrook. De hierbij naar voren komende bezwaren maken een meer fundamentele aanpak wenselijk.

We onderscheiden vier benaderingswijzen van het probleem:

1. Geheel theoretisch.
   Het is duidelijk, dat in het huidige stadium van relatief geringe kennis van brekende golven een puur theoretische benadering niet mogelijk is vanwege de vele mogelijke relevante korrelaties en het stochastische karakter van de bewegingen in de brandingszone.

2. Theoretisch model waarin bepaalde aannamen en koëfficiënten voorkomen, die door vergelijking met het fysisch gebeuren gerechtvaardigd c.q. bepaald moeten worden. In deze modellen wordt vaak gebruik gemaakt van het zgn. "eddy-viscosity" concept, dat in par. 3.2 besproken wordt.

3. Een gedachte is ook om te zoeken naar analogieën in turbulentie-transporten, d.w.z. dat verschillende transporten bv. van impuls, warmte, materie of turbulentie energie beschreven worden door dezelfde d.v. + b.v.w.^{n} + r.v.w.^{n}. Dit valt gedeeltelijk onder 1. of 2. maar is verder een schakel naar 4. Indien zo'n analogie bestaat is een parameter die het ene transport bepaalt (bv. koëff. voor scalardiffusie) uit te drukken in een parameter die het andere transport bepaalt (bv. koëff. voor diffusie van impulsie). Zie bv. Hinze (1959) par. 5-3.

4. Experimenteel.
   Metingen van bv. snelheden, koncentraties van passieve kleurstoffen of radio-aktieve tracers kunnen dienen voor rechtstreekse interpretatie of - eventueel via 3. - voor het theoretische model van 2. Uit de metingen kunnen bv. kruisspektra van de $\tilde{u}\tilde{v}$-korrelatie gemaakt worden om daarmee karakteristieken voor de Reynolds-spanningen te bepalen (Mc Bean e.a., 1971).

In paragraaf 3.3 worden t.a.v. de essentiële punten van turbulente menging in de brandingszone achtereenvolgens de bijdragen van de volgende auters besproken:

Bowen (1969) Thornton (1969) Longuet-Higgins (1970)	modellen van het type 2. (paragraaf 3.3.1)
Harris e.a. (1963) Inman e.a. (1971)	behoren in principe tot 4. (paragraaf 3.3.2)

3.2 Turbulentie-viskositeit

In de term (2.104): $-\frac{d}{dx}\int_{-h}^{\xi}\left(\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}} - \eta\frac{dV}{dx}\right)dz$

is $\eta\frac{dV}{dx} = \rho\nu\frac{dV}{dx}$ de schuifspanning t.g.v. molekulaire viskositeit. Gezien de term (2.104) in de bewegingsvergelijking ligt het voor de hand om te veronderstellen, dat de turbulentie-impulstransporten op een dergelijke manier werken als de viskeuze spanning. Deze gedachte geldt algemeen voor een impulsbalans p.e.v. volume. Een model dat bij de behandeling van de turbulentie veel gebruikt wordt is het concept van de turbulentie-viskositeit, oorspronkelijk van Boussinesq, 1877. De met spanningen equivalente impulstransporten worden daarbij op analoge wijze als de viskeuze spanningen geschreven als:

$$\tau \equiv -\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = \rho\,\nu_t\,\frac{\partial V}{\partial x}. \qquad (3.1)$$

Hierin is ν_t de kinematische turbulentie-viskositeit (of bv. koëfficiënt voor turbulent impulstransport). De dimensie ervan is blijkbaar $[L^2T^{-1}]$. ν_t is essentieel positief vanwege de gemiddeld negatieve $\tilde{u}\tilde{v}$ korrelatie bij positieve $\frac{\partial V}{\partial x}$ (meer hierover in hoofdstuk 5).

De funktie en betekenis van dit concept wordt toegelicht aan de hand van de gedachtengang die bij vergelijking (2.103) is geuit. Uit de advektie-term $\overline{(\underline{u}.\nabla)\underline{u}}$ is $\frac{\partial\overline{\tilde{u}\tilde{v}}}{\partial x}$ af te splitsen als turbulentie advektie-term op terbulentie-schaal. Dit wordt nu naar het rechterlid van (2.103) c.q. (2.44) gebracht en daarmee wordt deze advektie-term als een kracht beschouwd die op de hoofdbeweging werkt. Dit is eigenlijk de interpretatie van de werking van de zgn. Reynolds-spanningen $-\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$. Gradiënten hierin zorgen voor een netto beïnvloeding van de gemiddelde beweging.

De voorgestelde analoge behandeling van impulstransporten t.g.v. molekulaire viskositeit en turbulentie heeft de volgende konsekwenties. Er wordt gedeeltelijk afgezien van het mechanisme van de turbulentie zelf. Enerzijds biedt dat voordelen, omdat we eigenlijk slechts geïnteresseerd zijn in gemiddelde effekten, maar anderzijds wordt de afhankelijkheid van (gradiënten in) de Re-spanningen van de overall beweging onrecht aangedaan, omdat deze invloed nu door een lokale grootheid, nl. de lokale gradiënt in de gemiddelde snelheid, gedacht wordt te zijn bepaald. Men moet goed zien, dat ν_t géén eigenschap van het fluïdum is, het is alleen effektief bij (turbulente) stroming en is als zodanig op te vatten als een eigenschap van de stroming. De molekulaire viskositeit (in het vervolg aangeduid met viskositeit) is juist wel een eigenschap van het fluïdum en niet van stroming (alhoewel het impulstransport t.g.v. de viskositeit wel van de stroming afhankelijk is, getuige de term $\nu\nabla^2 u_i$ in de impulsbalans, zie (2.44b)). De gerezen moeilijkheid wordt echter weer de hand gereikt door ν_t uit te drukken in karakteristieken van de overall beweging.

Omdat $\nu_t [L^2 T^{-1}]$ dus als een eigenschap van de turbulente <u>beweging</u> is op te vatten lijkt het aannemelijk voor haar karakterisering op dimensionele gronden een snelheids- en een lengteschaal van de turbulentie te gebruiken, zodat $\nu_t = c * L * \mathcal{U}$ (3.2)
gesteld kan worden, binnen de klasse van problemen waarin voor elk van die schalen er één kenmerkend is.
Hierin is c een evenredigheidskonstante,
L een kenmerkende (lokale) turbulentie-lengteschaal en
$\mathcal{U}$ een kenmerkende (lokale) turbulentie-snelheidsschaal.

Het probleem van de turbulente stroming is nu wat de invloed van de turbulentie betreft voor de berekening teruggebracht tot het veel gemakkelijker te behandelen probleem van molekulaire diffusie. Zie Tennekes en Lumley (1972, par. 1.4). Enkele benodigde manipulaties en de konsekwenties daarvan om hiertoe te komen, zijn boven aangegeven. Er is een Euler-beschrijving gegeven van impulstransporten, waarbij de fiffusieve aktie van de turbulentie gedacht wordt voldoende te worden beschreven d.m.v. ν_t , in dit licht met de benaming "eddy diffusivity" of koëfficiënt van "eddy diffusion".

Omdat de uitwisseling (interaktie) van bv. impulsie, wervelsterkte, turbulentie energie en skalaire grootheden zoals koncentratie en warmte, met de omgeving steeds anders is, bestaan er voor al deze gevallen verschillende "eddy" diffusie koëfficiënten (resp. bv. ν_t of ϵ_m, ϵ_ω, ϵ_q, ϵ_k en ϵ_θ).

Voor de volledigheid wordt een meer volledige uitdrukking voor τ_{ij} als turbulentie-spanningstensor gegeven:

$$\tau_{ij} = -\rho\,\overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_j} = -\tfrac{1}{3}\rho\,\overline{\tilde{u}_k\tilde{u}_k}\,\delta_{ij} + \rho\,\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right). \qquad (3.3)$$

De vraag rijst in hoeverre het eddy viscosity concept nu in ons geval van een turbulente brandingsstroom bruikbaar is. Hier volgt een korte kwalitatieve beschouwing. In de eerste plaats blijkt, dat de viskeuze termen moeten kunnen worden verwaarloosd, anders is ν_t niet meer te "modelleren", omdat er dan, mede door niet-lineaire interakties, geen onderscheid gemaakt kan worden in lengte- en/of tijdschalen van turbulentie en viskositeit. Aangezien de laminaire grenslagen, waar dit een rol zou kunnen spelen, te verwaarlozen zijn in de beschouwing van de gemiddelde beweging levert dit voor die gemiddelde beweging geen problemen. Het Reynolds-getal $\frac{\nu_t}{\nu} \approx \frac{\mathcal{U}L}{\nu}$ wordt verondersteld groot te zijn. In de tweede plaats moet ν_t lokaal gezien wel konstant blijven en daarvoor is nodig dat het gemiddelde snelheidsveld niet of nauwelijks verandert m.a.w. dat $\frac{\partial V}{\partial t}$ in (2.103) klein is t.o.v. de veranderingen in het beeld van de turbulentie. Nu zal op een bepaalde plaats in de brandingszone steeds bij het passeren van een brekende golf dat beeld zeker wijzigen, maar aangezien we uitgegaan zijn van een tijdsmiddeling die erg groot is t.o.v. de golfperiode worden deze veranderingen uitgemiddeld. $\frac{\partial V}{\partial t}$ werd gelijk aan nul en de verwachting is daarom dan ook dat het concept in dat geval, maar dan ook uitdrukkelijk alleen voor de berekening van het op die manier gemiddelde snelheidsprofiel, wel bruikbaar is.

Ten derde moet bij gebruik van de eddy viscosity direkt de eis gesteld worden, dat de lengteschaal van de wervels die belangrijk zijn bij de diffusie van het lokale gradiënt-type, klein moeten zijn t.o.v. de lengteschaal van de verandering van die gradiënt. In ons geval is $\frac{\partial V}{\partial x} = \mathcal{O}\left(\frac{V_B}{x_B}\right)$, zodat $L \ll x_B$ moet zijn.

Vooruitlopend op de besprekingen in par. 3.3 en het gebruik van een turbulentie-viscositeit in hoofdstuk 5, kan hier resumerend het volgende gezegd worden.

Een uitdrukking voor ν_t op basis van momentane beschouwingen kan niet voldoen en de voor de menging kenmerkende lengteschaal van de wervels moet klein zijn t.o.v. de breedte van de brandingszone. Omgekeerd kunnen met dit concept vanwege het op kleine tijd- en lengteschaal snel veranderende snelheidsveld geen verschijnselen op die kleine schalen worden beschreven.

3.3 Bespreking van enkele bestaande modellen voor menging in de brandingszone

3.3.1 Bowen (1969).

Voor de bewegingsvergelijking in y-richting komt Bowen, uitgaande van de ondiepwatervergelijkingen van Stoker (1957) tot de vorm $\frac{1}{\rho h'}\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = R_y$, waarin Ry eerst een wrijvingsterm en later een viskeuze en dissipatieve term wordt genoemd. Deze termen hebben wel met elkaar te maken, maar werken, door elkaar gebruikt, erg verwarrend. De laatste uitdrukking hoort niet in een bewegingsvergelijking thuis. De tweede uitdrukking is misleidend, omdat Bowen geen gebruik maakt van viskeuze schuifspanningen (in de bew. vgl.: gradiënten daarvan = molekulaire diffusie), maar wel (indirekt) van turbulentie-schuifspanningen (gradiënten daarin = turbulente diffusie).
Voor de bodemwrijving neemt Bowen $R_{y_1} = -C_f' \frac{\hat{V}}{h'}$, waarin C_f' met dimensie $[LT^{-1}]$ onbekend is, maar konstant genomen wordt.

Bowen verwaarloost de variatie van θ binnen de brandingszone, zodat zowel $\cos\theta = \cos\theta_B$ (hetgeen ook voor (2.114) - (2.116) is gebeurd) als $\sin\theta = \sin\theta_B$. Dit laatste impliceert volgens Snellius dat c (voor $x < x_B$) $= c_B$. Daarom is $\frac{dS_{xy}}{dx}$ (in (2.114) - (2.116)) $= \frac{5}{4}\sqrt{\frac{h'}{h'_B}} * \frac{dS_{xy}}{dx}$ (Bowen).

Omdat in $\bar{\tau}_{by} = K\rho\,|u_{wb}|_{max}\,\hat{V}$ (vgl. 2.110), $|u_{wb}|_{max} = \frac{1}{2}\gamma\sqrt{gh'}$ is gesteld is het resultaat van Bowen met $R_y = R_{y_1}$ nét als in vgl. (2.116) dat $\hat{V} \propto \sin\theta_B \cos\theta_B\, h' \frac{dh}{dx}$ en verder is $\frac{\hat{V}_{(2.119)}}{\hat{V}_{(Bowen)}} = \frac{5}{2}\frac{C_f'}{K}\frac{1}{\gamma\sqrt{gh'_B}}$.

Om in het onderhavige randwaardenprobleem de diskontinuïteiten op de brekerlijn op te kunnen heffen, wordt de orde van de vergelijking met één verhoogd, waardoor een extra integratiekonstante ontstaat. Dat betekent, dat er een kromming geïntroduceerd wordt, naast die, welke eventueel door $h'\frac{dh}{dx}$ bepaald wordt. Dit gebeurt d.m.v. de term $R_{y_2} = A_h \frac{d^2\hat{V}}{dx^2}$, waarin A_h volgens Bowen een konstante "horizontale" eddy-viscosity, zowel binnen als buiten de brandingszone, is. Bowen besteedt op papier verder geen aandacht aan de herkomst en de eventuele samenstellende faktoren van deze A_h . Wat met "horizontale" eddy viscosity bedoeld wordt is niet duidelijk. Er kan gedoeld worden op de horizontale menging; dan is er niets op tegen. Wanneer gedacht werd aan twee dimensionale horizontale wervels, is een kommentaar zoals gegeven wordt bij de bespreking van Longuet-Higgins (1970) relevant. Een konstante eddy viscosity is zeer onwaarschijnlijk, omdat dan volgens (3.2) zowel tijd- als lengteschaal over het gehele beschouwde gebied konstant zouden moeten zijn. In de richting van de kust zal de lengteschaal zeker kleiner moeten worden en in het mathematische model waar $x = -x_s$ de kustlijn is waar voorbij (d.w.z. $x < -x_s$) geen water komt, moet de lengteschaal $L \to 0$ wanneer $x \to -x_s$.

In feite is A_h geen konstante eddy viscosity, volgens het concept van paragraaf 3.2, zie (3.1). Dit komt omdat Bowen niet uitgaat van de term $\frac{d}{dx}\int_{-h}^{\bar{\zeta}} -\rho\,\overline{\tilde{u}\tilde{v}}\,dz$ $\left(= \frac{dR_{xy}}{dx}\right.$ in de impulsbalans (2.100)).

Met een konstante eddy-viscosity ν_{t_c} gaat deze term p.e.v. massa en met de aanname dat V uniform over de vertikaal is verdeeld, over in

$$\frac{d}{dx}\left(h'\nu_{t_c}\frac{d\hat{V}}{dx}\right) = \nu_{t_c}\left(h'\frac{d^2\hat{V}}{dx^2} + \frac{d\hat{V}}{dx}\frac{dh'}{dx}\right).$$

Bowen deelt de over de vertikaal geïntegreerde impulsbalans door h', zodat hiermee i.p.v. $A_h\frac{d^2\hat{V}}{dx^2}$ gevonden zou worden: $\nu_{t_c}\left(\frac{d^2\hat{V}}{dx^2} + \frac{1}{h'}\frac{dh'}{dx}\frac{d\hat{V}}{dx}\right)$, hetgeen als "koëfficiënt" vóór $\frac{d^2V}{dx}$ geen konstante, maar een variabele term op zou leveren die in de brandingszone twee keer ontploft : in negatieve richting voor $x' \to 0$ en in positieve richting voor $x' \to x'_B$ (aannemende dat dan $\frac{d^2\hat{V}}{dx^2} \to 0$).

De konstante horizontale eddy viscosity zal daarom zó uitgelegd moeten worden als was er gebruik gemaakt van het klassieke concept, met een eddy viscosity zodanig dat $\frac{1}{\rho h'}$ *(gradiënt (in x-ri.) van over de vertikaal geïntegreerde Re-spanningen), de term $A_h\frac{d^2\hat{V}}{dx^2}$ oplevert. De werkelijke ν_t zou dan na de bepaling van het snelheidsveld gevonden kunnen worden met de d.v.

$$\frac{d\nu_t}{dx}\left(\frac{d\hat{V}}{dx}\right) + \nu_t\left(\frac{d^2\hat{V}}{dx^2} + \frac{1}{h'}\frac{dh'}{dx}\frac{d\hat{V}}{dx}\right) = A_h\frac{d^2\hat{V}}{dx},$$

waarbij ν_t wel konstant over de vertikaal is verondersteld.

Voor $\frac{d}{dx}\hat{V}\left(x' = x'_{\hat{V}max}\right) = 0$ is $\nu_t = A_h$. Zeker op het interval $(x'_{\hat{V}max}, x'_B)$ volgt het onwaarschijnlijke resultaat dat $\frac{d\nu_t}{dx} < 0$

Zie hiervoor ook fig. 3.1. ν_t zelf is altijd positief.

Voor $x \to x_B$ (stel $\frac{d\hat{V}}{dx} \approx$ konstant, $\frac{d^2\hat{V}}{dx^2} \approx 0$ en konstante bodemhelling) is $\frac{d\nu_t}{dx} \approx -\frac{\nu_t}{x'}$.

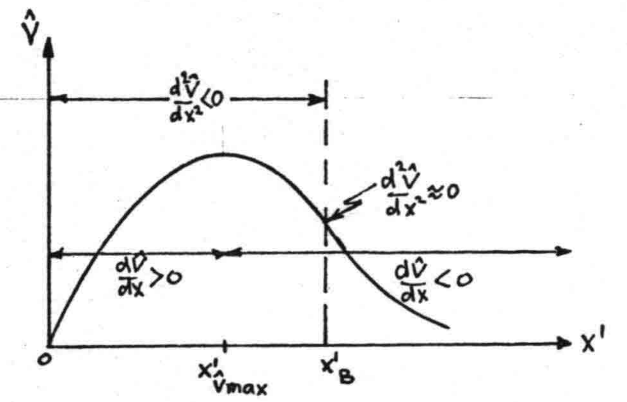


fig. 3.1 krommingen en hellingen in een brandingsstroomprofiel.
$x' = x + x_s$ (x_s = punt van maximum set-up)

ν_t zou, zeker op genoemd interval, dus af moeten nemen in de richting van x'_B of wel toe moeten nemen in de richting van de kust, hetgeen geheel tegen de verwachting is.

Het maximum van het theoretische brandingsstroomprofiel dat onder verwaarlozing van horizontale menging t.p.v. de brekerlijn ligt, zal bij gebruik van een konstante eddy viscosity in het model mét menging minder landwaarts verschuiven dan wanneer ν_t in landwaartse richting afneemt, omdat de menging nabij de brekerlijn dan relatief onderschat is. Nu het blijkt, dat ν_t in het model van Bowen de hiervoor beschreven tendens heeft, zal dit effekt nog sterker zijn. Inderdaad signaleert Bowen dat zijn maxima te dicht bij de brekerlijn liggen en suggereert dat invloeden van Corioliskracht en interaktie tussen golven en brandingsstroom dit zouden kunnen verbeteren. De richting van de brandingsstroom in de proeven van Galvin en Eagleson (1965) in het Hydrodynamics Laboratory van MIT waar Bowen zijn theoretische profielen mee vergelijkt, was weliswaar zodanig gericht dat de Coriolisversnelling in de richting van de kust werkte, maar het blijkt dat de grootte ervan enkele ordes kleiner is dan de overige termen in de bewegingsvergelijking (zie bv. Krauss, 1973). Voor de mogelijke invloeden van interaktie gebruiken we de energiebalans voor de golven (2.83):

$$\underset{①}{\frac{\partial}{\partial x}\left[E\hat{U}\right.} + \underset{②}{\left.Ec_{gx}\right]} + \underset{③}{S_{xx}\frac{\partial \hat{U}}{\partial x}} + \underset{④}{S_{xy}\frac{\partial V}{\partial x}} = \underset{⑤}{-D} \qquad (3.4)$$

In de tot nu toe gedane afleiding zijn alleen de termen ② en ⑤ meegenomen.

De invloed van (4) is d.m.v. de ---- lijn schetsmatig in fig. 3.2 weergegeven.

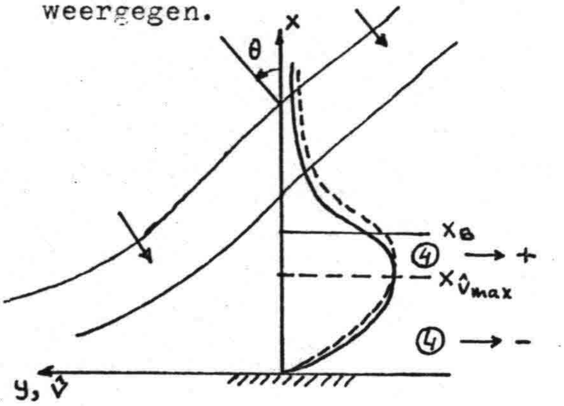


fig. 3.2
De invloed van $S_{xy} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}$ op het brandingsstroomprofiel.

Bij positieve θ is S_{xy} positief en $\hat{V}$ negatief. $S_{xy} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}$ is positief voor $x > x_{\hat{V}_{max}}$, zodat in dat gebied wat meer energie aan de golven wordt onttrokken, ten gunste van de stroom, dan alleen uit (2) = (5) zou blijken. Voor $0 < x < x_{\hat{V}_{max}}$ is de term negatief, resulterend in een tegengesteld effekt. Echter de totale golfenergie moet gedissipeerd zijn op de kustlijn, zodat er in het laatste gebied aannemende dat de set-up niet veel verandert, weinig verschil zal optreden. Zo het maximum van $\hat{V}$ zou verplaatsen, zou het hierdoor in zeewaartse richting zijn.
Indien we voor de termen van (3.4) in de brandingszone de ondiepwaterbenaderingen invoeren (voor $\hat{U}$ zie (2.36)) en we stellen bv. $\gamma = 1$, $\cos\theta \approx \cos\theta_B \approx 1$, $\sin\theta \approx \sin\theta_B = \frac{1}{2}$, $\frac{dh}{dx} = \frac{1}{10}$ dan volgt (1) : (2) : (3) : $|(4)| \approx \frac{1}{8}$: 1 : $\frac{1}{80}$: $\frac{1}{80}$. Na (2) heeft (1) dus de meeste invloed, maar ook hierdoor zou het maximum van $\hat{V}$ alleen maar zeewaarts kunnen verplaatsen.
Alles bij elkaar lijkt het dus veel aannemelijker om de verklaring van een mogelijke foutieve ligging van $\hat{V}_{max}$ in het model van Bowen te zoeken in het gebruik van de konstante A_h .

Overigens heeft het gebruik van een konstante A_h op fysische gronden nog een andere niet plausibele konsekwentie. Horizontale menging zorgt, uitgaande van de situatie waarin die verwaarloosd is, voor een herverdeling van de impuls binnen de brandingszone op een zodanige manier dat het impuls-"tekort" nabij de kustlijn aangevuld wordt. d.w.z. dat het water daar gemiddeld met een grotere snelheid meegesleept wordt. Het is duidelijk dat een additionele term $A_h \frac{d^2\hat{V}}{dx^2}$ in de bewegingsvergelijking, met een konstante A_h , dit niet weer kan geven. Dat klopt ook met de resultaten van Bowen. Hieronder (fig. 3.3) is fig. 2 uit zijn artikel gedeeltelijk overgenomen, met daarin tevens het snelheidsprofiel waarbij menging is verwaarloosd (II).

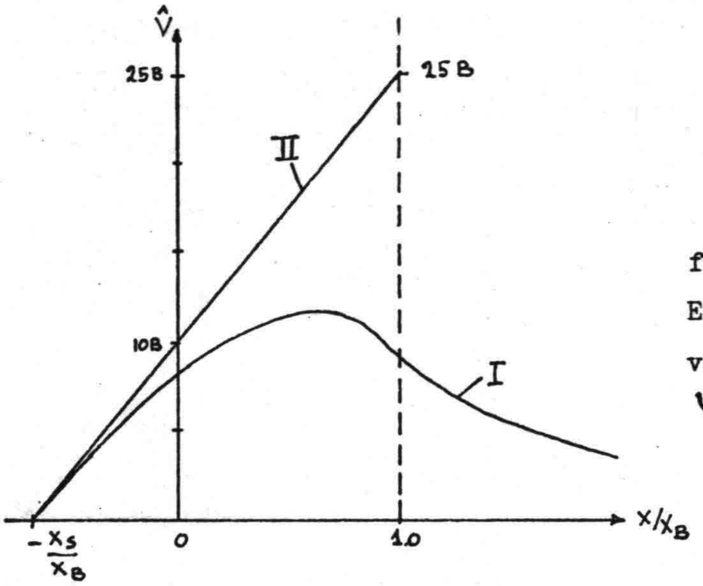


fig. 3.3
Een brandingsstroomprofiel volgens Bowen (1969) voor $\Psi = 9$ en $C = 0.4$ (I)

$$B * \Psi = \frac{1}{4}\,\frac{g\gamma^2}{C_f'}\,\sin\theta_B\cos\theta_B\, m^2\, x_B'\,(1-C)^2$$

hierin zijn Ψ, C_f', θ, C resp. θ, c, α en K in de formules van Bowen.

$h' = m\,x'$; $m = (1-C)\tan\beta$

$\tan\beta = \frac{dh}{dx}$ = konstant.

Zonder menging volgt $\frac{\hat{V}^{II}}{B*\Psi} = \frac{x'}{x_B'}\,\frac{1}{(1-C)^2}$. Voor $C = 0.4$ en $\Psi = 9$ is $\hat{V}_B^{II} = 25\,B$

Het blijkt dus dat het profiel volgens Bowen (I) geheel onder het profiel II (zonder menging) ligt.

Bowen vindt in het geval mét menging voor $\frac{d\hat{V}^I}{dx'}$ een uitdrukking die bv. voor het geval $\Psi = 9$ te schrijven is als

$$\frac{d\hat{V}^I}{dx} = (-0{,}067\, I_0 + 1) * \frac{d\hat{V}^{II}}{dx}\,.$$

Het argument van de gemodificeerde Bessel-funktie I_0 is $\propto (x')^{1/2}$. I_0 is definiet positief en $I_0 \rightarrow 1$ voor $x' \rightarrow 0$, zodat op het punt van maximale set-up $\left|\frac{d\hat{V}^I}{dx}\right|$ zelfs reeds kleiner is dan $\left|\frac{d\hat{V}^{II}}{dx}\right|$.

Deze resultaten bevestigen de bedoelde ongeloofwaardigheid.

Thornton (1969, 1970)

Thornton gaat voor de berekening van de brandingsstroom uit van de radiation stress volgens (2.   . Dit levert:

$$S_{xy} = \left(En - \frac{E^2}{\rho c^2 h'}\right) \sin\theta \cos\theta . \tag{3.5}$$

Met de ondiep-water-benaderingen $H = \gamma h'$ en $c = \sqrt{gh'}$ geeft dit

$$S_{xy} = \frac{1}{8} \rho g . \gamma^2 h'^2 \left(1 - \frac{1}{8}\gamma^2\right) \sin\theta \cos\theta . \tag{3.6}$$

Een tweede korrektie behelst het niet verwaarlozen van de variatie van cos θ binnen de brandingszone : cos $\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c_B}\right)^2 \sin^2\theta_B$. (3.7)

De invloed van horizontale menging wordt in het model gebracht door turbulentie-schuifspanningen aan de gemiddelde beweging te relateren m.b.v. (3.1). Daarna wordt gebruik gemaakt van Prandtl's mengweg-theorie (1925) om een uitdrukking voor ν_t te vinden. Op deze plaats is het goed om nog eens na te gaan wat Prandtl deed om mede aan de hand daarvan te kunnen nagaan wat de benadering van Thornton waard is. Voor dit doel zullen we werken in hetzelfde assenstel als Thornton en met een positieve brandingsstroom $V = \hat{V}(x)$ (fig. 3.4a).

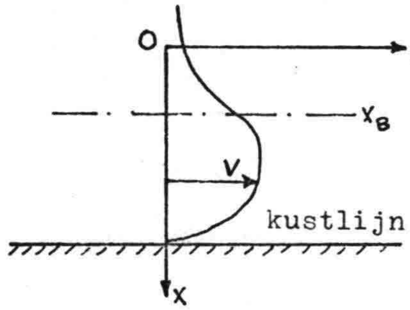


fig. 3.4a

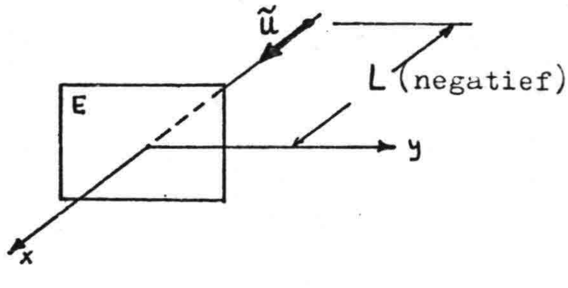


fig. 3.4b

Het uitgangspunt van Prandtl was de hypothese om naar analogie met de kinetische gastheorie ν_t te schrijven als een produkt van een "mengweg" en een karakteristieke turbulente snelheid : $\nu_t = L * \mathcal{U}$. (3.8)
In het algemeen zijn L en $\mathcal{U}$ plaats-afhankelijk. Uit een fenomenologische beschrijving in een 2-dimensionale stroom (hier met gemiddelde V indien de wand een vlak was door de rechte kustlijn evenwijdig aan het yOz-vlak) van transporten t.g.v. turbulente beweging door een vlak E // V, volgt dat het gemiddelde transport in de pos. x-richting van y-impulsie door een eenheidsoppervlak // V p.e.v. tijd $\approx \overline{\rho \tilde{u} L}\, \frac{dV}{dx}$.   . Hierin is L als een soort gemiddelde mengweg in x-ri.

(voor impulsie) te beschouwen en is negatief als een vloeistofpakketje t.o.v. E uit negatieve x-ri. komt (zie fig. 3.4b). Dan is $\tilde{u}$ juist positief, dus $\overline{\tilde{u}L}$ is altijd negatief. De veroorzaakte schuifspanning $\tau_{xy} = -\rho\overline{\tilde{u}L}\ \frac{dV}{dx}$, (3.9)

zodat met (3.1) $\nu_t = -\overline{\tilde{u}L}$ (3.10)

als herleiding van (3.8) ontstaat.

Bij de afleiding van dit gradiënt-transport-model is aangenomen, dat de impulsie ρu van een "punt" tijdens zijn beweging over de afstand L niet verandert en dat L klein genoeg is opdat

$V(x+L)-V(x) \approx L\frac{dV}{dx}$, waarbij dan ook nog de bijdragen van golfbeweging en turbulentie tot het impulsverschil in y-ri. tussen de plaatsen x en x + L zijn verwaarloosd. Op dit punt aangekomen zouden we eigenlijk al van het gradiënt-transport-model volgens bovenstaande afleiding af moeten stappen, ware het niet dat een dergelijk model óók ontstaat op andere gronden (zie hoofdstuk 5). De gemiddelde snelheid V alsmede de "mengweg" L "bestaan" in ons geval van golven + turbulentie + (sekundaire) stroom niet op die manier zoals dat nodig is voor het gradiënt-transport-model.

Een <u>tweede</u> hypothese van Prandtl was om $\mathcal{U} = L\ \frac{dV}{dx}$ (3.11)

te stellen. In het 2-dimensionale geval stelde hij nl. $\tilde{v} \approx \tilde{u}$

en $\tilde{v} \propto L\ \frac{dV}{dx}$, (3.12)

zodat $\tilde{u} \approx \tilde{v} \propto -L\ \left|\frac{dV}{dx}\right|$ (3.13)

Omdat voor L nog niets is voorgeschreven kunnen we een evenredigheidskonstante in (3.13) = 1 kiezen. $\mathcal{U}$ is bv. de r.m.s. turbulente snelheid in x-ri., u^*.

De hypothesen van Prandtl veronderstellen een permanente stroom, waarvan de lokale gradiënt eigenlijk op ieder moment ± hetzelfde is. In het snel veranderende golfveld is dat niet zo en daarom is de mengweg-hypothese voor ons geval eigenlijk een beschouwing op veel te kleine tijdschaal, waarvan op het eind van par. 3.2 reeds gezegd is dat die niet kan voldoen.

Er zijn ernstige bezwaren tegen het gradiënt-type transport (zie bv. Tennekes en Lumley, 1972, par. 2.3), dus ook tegen Prandtl's hypothese, en alhoewel het in bepaalde gevallen (misschien ook om andere redenen) een bruikbare benadering geeft, zijn er sterke twijfels de eraan ten grondslag liggende gedachte hier toe te passen

Een algemenere uitdrukking i.p.v. (3.9) is $\tau_{xy} = c\rho u^* L' \frac{dV}{dx}$ (3.14)

zodat $\nu_t = c\,u^* L'$, (3.15)

waarin c een onbekende evenredigheidskonstante $\mathcal{O}$ (1) is.
L' zou een afstand (in x-ri.) voor kunnen stellen tot waar de korrelatie van $\tilde{u}$ met haar omgeving zich uitstrekt.
Dit wordt geschreven om aan te duiden dat $\overline{\tilde{u}L}$ van de orde u^*L' is. u^* en L' zijn eigenschappen van de stroom, veranderen van plaats tot plaats en van geval tot geval. De koëfficiënt c kan nog karakteristiek zijn voor een bepaald geval.

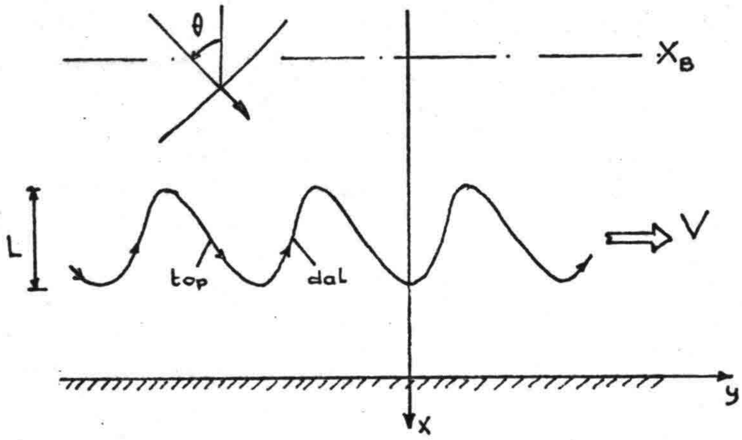
Thornton gaat af op de tweede hypothese (3.12) en laat dan met (3.1), (3.10) volgen.
Het eerste bezwaar is dat, zoals reeds in de inleiding betoogd is, de turbulentie in de brandingszone een geheel andere oorsprong heeft dan die in een afschuifbeweging, zoals hierboven is verondersteld. De turbulentie wordt niet door de stroom V opgewekt. In een "afschuifstroom" houdt $\frac{dV}{dx}$ de wervelsterkte in stand. De karakteristieke grootte hiervan, $\frac{\mathcal{U}}{L}$, is dan van dezelfde grootte-orde als $\frac{dV}{dx}$. Dit komt ook tot uitdrukking in (3.11), echter zonder een evenredigheidskonstante $\mathcal{O}$ (1). In het geval van onze brandingsstroom is er echter geen reden om dit aan te nemen, waardoor met bovenstaande gedachtengang niets gezegd kan worden over de grootte van c in (3.14). Verder impliceert bovenstaande benadering een goede korrelatie tussen $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$. Immers

$\tau_{xy} = \text{koëff.}\ \mathcal{O}(1)\rho u^* L' \frac{dV}{dx}$ geeft met $\frac{u^*}{L'} = \text{koëff.}\ \mathcal{O}(1)\frac{dV}{dx}$,

$\tau_{xy} = \text{koëff.}\ \mathcal{O}(1)\rho (u^*)^2$ en met $u^* \approx v^*$(dat is wel zeer aannemelijk) $\tau_{xy} = \text{koëff.}\ \mathcal{O}(1)\rho u^* v^*$.
Omdat $\tau_{xy} = -\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ zou de korrelatie-koëfficiënt $\frac{-\overline{\tilde{u}\tilde{v}}}{u^* v^*}$ dus $\mathcal{O}$ (1) moeten zijn. Evenals bij het voorgaande is er geen aanleiding om dit te moeten veronderstellen. In hoofdstuk 5 volgt een andere benadering voor de korrelatie tussen $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$.

Een tweede en ernstig bezwaar ligt in de uitwerking van dit model. Thornton stelt: "For the case of superposed waves and currents, it is natural to consider the length (L) over which (hor.) momentum is transferred as equivalent to the (hor.) water particle excursion due to the wave motion (ξ_h) and the velocity fluctuation $\tilde{u}$ equal to that of the water particles in the waves (u_w)".
De toevoegingen tussen haakjes zijn in dit verslag voor de duidelijkheid aangebracht, omdat Thornton dit bedoeld heeft. Thornton spreekt er niet over, dat dit alleen zou gelden in de brandingszone. Er wordt

niet getracht een relatie te vinden met kenmerken van brekende golven. De lengte waarop Thornton doelt is die voor de golf-impulsie. De golfsnelheden zijn al verwerkt in de radiation stress. Bij de afleiding daarvan is de georganiseerde golfbeweging geïsoleerd van de turbulentie door uit te gaan van het ongekorreleerd zijn van golf- en turbulente snelheden. De rotatievrije golfbeweging veroorzaakt in onze benadering geen menging. Maar als we in een Lagrange beschouwing de deeltjes volgen, blijkt dat bij de aanwezigheid van een stroom V, hetgeen kennelijk nodig is voor de aanname van Thornton, t.g.v. de golfbeweging alléén toch een beïnvloeding van V over een afstand L optreedt (fig. 3.5) .



schematische voorstelling van "orbitaal"-beweging bij de aanwezigheid van een stroom V (niet op schaal).

fig. 3.5

Echter ξ_h en $q_w = (u_w, v_w)$ zijn in quadratuur, zodat $q_w = 0$ t.p.v. ξ_{hmax} . Dit heeft ook tot gevolg, dat $\overline{\xi_h(\underline{x},t)\, q_w(\underline{x},t)} = 0$. Daarom neemt Thornton het tijdsgemiddelde van de modulus van dit produkt. In ondiep water geeft dat voor de komponenten in x-ri.

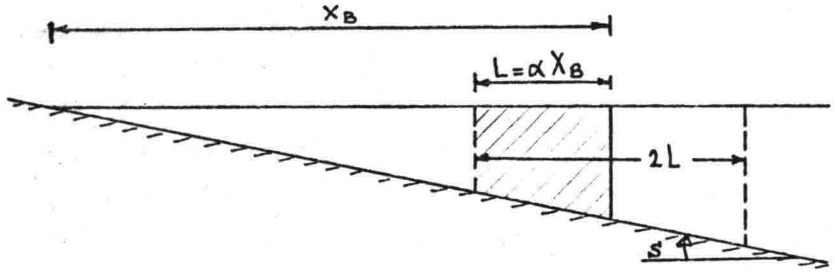
$$\nu_t = \xi_{hmax} \cdot q_{wmax} \cdot \frac{2}{\pi} \cos^2\theta = \frac{a}{kh} \cdot \frac{\omega a}{kh} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos^2\theta = \frac{H^2}{8\pi^2} \frac{gT}{h} \cos^2\theta = \frac{\gamma^2 gh}{4\pi\omega} \cos^2\theta \quad (3.16)$$

Thornton voert geen evenredigheidskonstante in. Toepassing van dit concept buiten de brandingszone geeft te grote waarden voor de eddy viscosity [Bowen en Inman, 1972]. De formulering zou verder moeten gelden bij aanwezigheid van een stroom, maar als V kleiner wordt bij kleinere θ neemt ν_t toe. Zouden we bij $\theta = 0$ wanneer in dit model geen brandingsstroom aanwezig is ook geen menging mogen aannemen (Thornton's model is immers "for the case of superposed waves and currents")?

Al met al redenen om op fysische en theoretische gronden weinig vertrouwen in dit model te hebben. Dat wil nog niet zeggen, dat het model in bepaalde gevallen geen bevredigend resultaat zou kunnen geven. Bijvoorbeeld wanneer min of meer "toevallig" snelheids- en lengteschaal van de turbulentie resp. ongeveer ξ_{hmax} en q_{wmax} zijn.

Longuet-Higgins (1970)

In het eerste artikel (1970a) wordt een suggestie gedaan voor een ruwe schatting van het effekt van horizontale menging op de snelheid t.p.v. de brekerlijn $\hat{V}_B = \hat{V}(x_B)$. Daartoe wordt aangenomen, dat de hoeveelheid impulsie $h.\hat{V}(x)^{II}$, die zich, in het geval dat er geen menging zou zijn binnen het gearceerde trapezium van fig. 3.6 bevindt zich volledig mengt over een afstand $2L$ als aangegeven,



ruwe schatting van $\hat{V}_B$. s is konstant.

fig. 3.6

Dus $\int_{x_B(1-\alpha)}^{x_B} h\,\hat{V}^{II}(x)\,dx = h_B\,\hat{V}^{I}(x_B) * 2L$, waarin $\hat{V}^{II}(x) = \frac{h}{h_B} V_B^{I}$ en $h = sx$.

Hieruit volgt $V_B^{I} = \beta\, V_B^{II}$, met $\beta = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{6}$. (I: mét menging; II: zonder menging). De ondergrens is voor $L \rightarrow 0$, dus $\alpha \rightarrow 0$ en $\beta \rightarrow 1/2$; de bovengrens voor $\alpha = 1$ en $\beta = 1/6$.

De bovengrens $V_B^{I} = \frac{1}{2} V_B^{II}$ is logisch en is reeds in de inleiding genoemd. De ondergrens van $\beta = \frac{1}{6}$ ontstaat door te denken dat de snelheid hierbij over $2L = 2x_B$ konstant is en dat hetzelfde debiet wordt afgevoerd als in het geval zonder menging. De voorspelling van de ondergrens hadden we ook kunnen doen door uit waarnemingen te konkluderen, dat altijd praktisch alle afvoer geschiedt binnen een afstand van $2x_B$ uit de kust.

Aan het einde van bovengenoemd artikel wordt een gemiddelde waarde van $\beta = 0.2$ verondersteld, waarbij voorzichtig opgemerkt wordt dat horizontale menging wel enige invloed gehad zal hebben. Voor deze waarde echter is $\alpha = 0.83$, zodat met bovenstaand model juist een aanzienlijke menging zou volgen. Met dit model wordt het probleem van de turbulentie niet geraakt.

In het eerste artikel wordt gesuggereerd, dat $\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\bar{\zeta}} -\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}}\,dz$ de vorm $\frac{\partial}{\partial x}\left(N^{*}\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}\right)$ zou hebben, hetgeen impulsuitwisseling voor zou moeten stellen t.g.v. horizontale turbulente wervels, met "eddy coefficient" N^{*}. In het tweede artikel (1970b) wordt echter in termen van dit verslag $N^{*}=\rho\nu_t h'$ genomen, waarin $\rho\nu_t$ nu een horizontale eddy viscosity wordt genoemd.

Onderstaand worden vijf minder plezierige aspekten van het model, voorgesteld door (3.17), besproken. De accenten bij x en h worden weggelaten.

1° Op grond van de dimensie-formule (3.4) is $\nu_t = L * \mathcal{U}$. De konstante ontstaat nu door $L \propto x$ en $\mathcal{U} \propto \sqrt{gh}$ te nemen. In plaats van een konkrete lengte- en snelheidsschaal in te voeren, worden slechts evenredigheden aangenomen. L wordt vergeleken met de mengweg in de volgens Longuet-Higgins analoge situatie van een vlakke plaatstroming. Weliswaar kan de brandingszone als een grenslaag tussen zee en land worden beschouwd (Battjes, 1974, p. 54), maar dat geldt dan t.a.v. de golfbeweging en niet voor de turbulentie. Het vlak door de rechte kustlijn loodrecht op het x-y vlak zou dan de vlakke plaat zijn. Prandtl nam inderdaad aan, dat in de turbulente grenslaag L evenredig was met de afstand tot de dichtsbijzijnde wand. Als verschil van een brandingsstroom met deze situatie wordt wel gewezen op de aanwezigheid van gradiënten van radiation stresses, maar niet op het feit dat de dichtsbijzijnde wand nu de bodem is.

$\mathcal{U}$ wordt vergeleken met de orbitaalsnelheid. Alhoewel er praktisch geen analogie is met een afschuifstroom waarin de turbulentie-intensiteit vaak van de orde 0.1 * de gemiddelde snelheid is, gebruikt Longuet-Higgins toch dit gegeven om daarmee te stellen dat $\mathcal{U}$ waarschijnlijk $\leqslant 0.1 * |\underline{u}_w|_{max} \approx 0.1 * \frac{1}{2}\gamma\sqrt{gh}$.
In (Longuet-Higgins, 1972) wordt nog een beroep gedaan op de suggestie van Inman, Tait en Nordstrom (1971, p. 3504) dat de menging met de orbitaal-snelheden samenhangt waarmee de faktor 0.1 dan ≈ 1 zou kunnen worden. Die suggestie lijkt redelijk, omdat een oppervlakteverschijnsel beschouwd wordt waarbij kleurstof snel mengt tijdens transport in een brekend golffront. We zijn hier echter geïnteresseerd in het gemiddelde effekt en voor die beschrijving biedt de hulp van deze suggestie geen solaas. Zoals ook bij de bespreking van het model van Thornton bleek, moeten in onze Euler-beschrijving turbulentie en golfbeweging goed

gescheiden worden. Een deeltje dat zuiver periodiek beweegt veroorzaakt netto geen menging.

2^o De gedachte komt op dat Longuet-Higgins kennelijk ook direkt van een gradiënt transportmodel gebruik heeft gemaakt, gezien het zonder meer poneren van $-\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = \rho \nu_t \frac{dV}{dx}$ en de vergelijking die hij maakt met een vlakke plaatstroming. Bezwaren hiertegen zijn al geuit. Aangezien als "lengteschaal" voor de wervels de afstand tot de kust maal K (konstante van von Kármán ≈ 0.4) genomen wordt (ook buiten de brandingszone), zouden de wervels dus afmetingen van de orde x_B krijgen. Zoals reeds vermeld (eind par. 3.2), voldoet dit niet aan de voorwaarden voor gradient type transport. We weten echter niet wat Longuet-Higgins precies gedacht heeft.

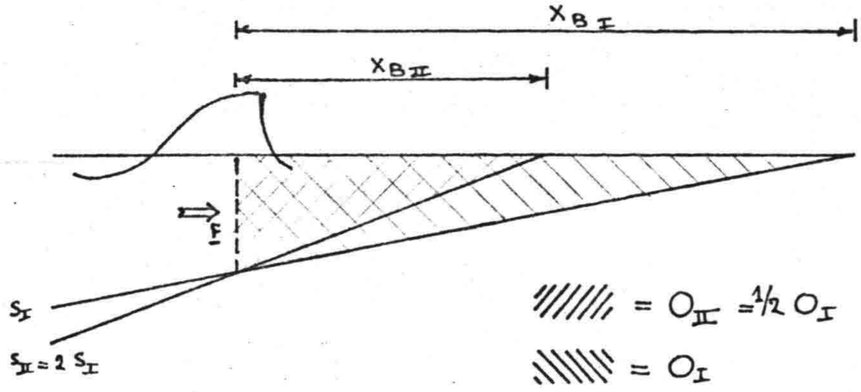
3^o Hetgeen Longuet-Higgins meerdere keren noemt en wat ook in het bovenstaande verwerkt is, is zijn aanname dat horizontale wervels verantwoordelijk zijn voor de menging (zo ook onderstreept op p. 52. Dit is niet aannemelijk en ook niet in overeenstemming met zijn analogie met een vlakke plaatsstroming, alwaar i.v.m. een negatieve korrelatie tussen $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$ de wervels t.o.v. de ri. van V "achteroverliggen", met hun as in de richting van de hoofd "reksnelheid" (zie hoofdstuk 5).

4^o De vorm van ν_t wordt: $\nu_t = N \times \sqrt{gh}$, (3.17)
waarin N een dimensieloze konstante. De grenzen van N worden met hetgeen onder 1^o en 2^o over L en $\mathcal{U}$ is gezegd:
$\nu_t = L\mathcal{U} \leqslant K \times 0.1 \; \frac{1}{2}\gamma\sqrt{gh}$, waarin volgens het eerste artikel $\frac{1}{2}\gamma = 0.41$ gekozen wordt, zodat $0 < N < 0.016$. (3.18)
In plaats van de faktor 0.1 is later ook nog 1 genoemd (zie onder 1^o), maar vergelijking met metingen van Galvin en Eagleson (1965) levert een berekende waarde voor N tussen 0.0024 en 0.0096. Het lijkt mij niet zinvol om een formule voor ν_t te hebben met zo'n kleine evenredigheidsfaktor erin.

5^o Middeling van $\nu_t = N \times \sqrt{gh}$ over de brandingszone geeft

$$\langle \nu_t \rangle = \frac{1}{x_B}\int_0^{x_B} \nu_t \, dx = \frac{2}{5} N \, x_B \sqrt{g h_B} . \tag{3.19}$$

In fig. 3.7 zijn schematisch twee strandprofielen I en II getekend, waarbij $S_{II} = 2 \times S_I$. Er wordt verondersteld dat $h_{BI} = h_{BII}$ en $H_{BI} = H_{BII}$.



vergelijking gemiddelde eddy viscosity voor 2 strandprofielen

fig. 3.7

Indien N een konstante zou zijn, zou $\langle \nu_t \rangle_{II} = \frac{1}{2} \langle \nu_t \rangle_I$.

De verwachting is echter, dat $\langle \nu_t \rangle_{II}$ groter zal zijn dan $\langle \nu_t \rangle_I$, omdat eenzelfde energiestroom $\underline{F}$ die door de brekerlijn in de brandingszone geïnjekteerd wordt in een 2 * zo klein volume moet worden gedissipeerd, waardoor turbulente menging sterker wordt, hetgeen weer tot uiting moet komen in ν_t .
We verwachten i.p.v. $\langle \nu_t \rangle \propto N\,s^{-1}$ dus eerder iets in de geest van: $\langle \nu_t \rangle \propto N'\,s^m$, waarin N' wel een konstante voorstelt en de macht $m > 0$ is, waaruit dan gekonkludeerd zou moeten worden dat N afhangt van s tot een macht groter dan 1.

3.3.2

Onderstaand komen twee artikelen aan de orde, beide met het opschrift: "Mixing in the Surf Zone", waarin aan de hand van metingen van verspreiding van kleurstof en/of radio-aktieve tracer schattingen en voorstellen voor een bepaalde vorm van een "eddy"-diffusie koëfficiënt worden gedaan. Deze metingen zijn van groot belang voor het inzicht in de twee belangrijke mechanismen van menging in de brandingszone:

1° menging vnl. in de richting $\perp$ kust t.g.v. de turbulentie in brekende golven. De uitbreiding van de kleurvlek is een maat voor de diffusie;

2° een vnl. advektief proces waarbij de kleurstof wordt meegenomen door brandingsstroom en muistromen. De beweging van het zwaartepunt van de wolk is maat voor advektie.

Wij zijn hier natuurlijk vnl. geïnteresseerd in de diffusie in x-ri. ($\perp$kust) Deze diffusie geschiedt veel sneller dan die in y-ri.
Alvorens in te gaan op resultaten van deze uitgebreide onderzoeken wordt eerst getracht in algemene zin een antwoord te vinden op de vraag in hoeverre we van die resultaten gebruik zouden kunnen maken. Indien er een analogie bestaat tussen turbulent transport van turbulente impulsie en turbulent transport van bv. konservatief kleurstof is op basis daarvan misschien een goede aanname te doen voor de kinematische turbulentie viskositeit. Dat wil overigens nog niet zeggen dat we dan ook de grootte zouden kennen.

Er is een analogie te verwachten (zie par. 3.1 punt 3) indien de d.v. voor verandering van impulsie p.e.v. massa (zie bv. (2.49) en (2.50))

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i' u_j'} + \overline{F}_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \tag{3.20}$$

en de d.v. voor verandering van hoeveelheid "neutraal drijvende" materie p.e.v. massa $\phi = \overline{\phi} + \phi' = \overline{\phi} + \phi_w + \tilde{\phi}$

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j' \phi'} + \overline{F}_\phi \tag{3.21}$$

analoog zijn. In (3.20) en (3.21) zijn de molekulaire viskositeitstermen verwaarloosd. F_ϕ
is de lokale verandering van ϕ t.g.v. een bron (bv. suppletie) of put (bv. chemische reaktie). Het blijkt dat impulstransport, in tegenstelling tot ϕ-transport, wordt beïnvloed door drukgradiënten. In

ons model variëren tijdsgemiddelden niet in y-ri., dus $\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = 0$.
Het is nauwelijks denkbaar dat $\bar{F}_i$ $(=-\frac{\partial}{\partial x_i}(g z))$ en $\bar{F}_\phi$ m.b.v. dezelfde funktie kunnen worden beschreven. Wel kunnen beide afwezig zijn, zoals bij de vergelijking van horizontale impulsuitwisseling met verspreiding van konservatieve stof die niet aangevuld wordt. In dat geval is dus $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \neq 0$ (dit kan ook als $\bar{F}_\phi \neq 0$), $\bar{\phi}$ is dus geen tijdsgemiddelde en het proces van de verspreiding van ϕ is niet ergodisch. We moeten $\bar{\phi}$ opvatten als mathematische verwachting:

$$\bar{\phi} \equiv E\left\{ \underset{\sim}{\phi}(\underline{x},t) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\underline{x},t)\, f(\phi,\underline{x},t)\, d\phi , \tag{3.22}$$

waarin f de kansdichtheidsfunktie is en $\sim$ duidt op een stochastische variabele. Voor $\bar{\phi}$ kunnen we pas y-onafhankelijkheid invoeren wanneer de plotselinge injektie van ϕ gebeurt via een lijnbron in y-ri. Een dergelijke injektie is niet bekend in de literatuur. De balans voor ϕ behoudt dus afgeleiden naar y:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \phi = 0 \tag{3.23}$$

Voor het kontrole-volume van fig. 2.4 geldt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \phi \, dz = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int_{-h}^{\zeta} u_\alpha \phi \, dz \qquad \alpha = 1,2 \quad , \tag{3.24}$$

hetgeen direkt volgt (geen flux van ϕ door bodem en oppervlak), maar ook door integratie van (3.23) waarin de r.v.w.^{n} (2.31) en (2.32) worden verwerkt. Middeling van (3.24) volgens (3.22), waarbij de verwachtingswaarde $E\{\dots\}$ door $\overline{\dots}$ voorgesteld wordt levert

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\int_{-h}^{\zeta} \phi \, dz} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{\int_{-h}^{\zeta} u_\alpha \phi \, dz} \ . \tag{3.25}$$

We wensten een uitdrukking voor de term $-\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ uit (3.20), of eigenlijk $\frac{d R_{xy}}{dx} = -\frac{d}{dx}\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho \tilde{u}\tilde{v}\, dz}$ uit (2.100). Indien er nu een analogie bestaat met de term $-\tilde{u}\tilde{\phi}$ uit (3.21), of eigenlijk $-\frac{\partial}{\partial x}\overline{\int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}\tilde{\phi}\, dz}$ uit (3.25) en dit is uit metingen te bepalen, hebben we ondanks het feit dat de d.v. niet hetzelfde is voor de twee gevallen (en rand- c.q. beginvoorwaarden zeker niet) toch een hoopvolle analogie.
Indien de advektie-term $U_j \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j}$ verwaarloosd wordt (hetgeen echter geen noodzaak is), net zoals dat in de impulsbalans is gebeurd, volgt uit (3.21)

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tilde{u}_j \tilde{\phi}}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_{w_j} \phi_w}) \ . \tag{3.26}$$

De verwachtingswaarde van de term $(u_{w_j}\, \phi_w)$ is nul.
Dit in tegenstelling tot de impulsvergelijking waar $(u_{w_\alpha}\, u_{w_\beta})$ bijdrage tot de radiation stress levert.

Het transport door turbulente diffusie van ϕ in de richting x_j: $-\overline{\tilde{u}_j \tilde{\phi}}$ is volgens Boussinesq ook te schrijven als een gradiënt-type transport: $-\overline{\tilde{u}_j \tilde{\phi}} = \epsilon_{\phi_j} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j}$, waarin ϵ_{ϕ_j} skalars zijn, die in de te bespreken artikelen als konstanten in de afzonderlijke richtingen worden beschouwd. Dit moet voor de waterlaag waarin ze bepaald worden op z'n minst een goede grootte-orde geven. Er wordt alleen $j = \alpha = 1,2$ beschouwd. Volgens (3.3) is $-\overline{\tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta} = \nu_t \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} \right)$, $\alpha \neq \beta$. Voor een onsamendrukbare vloeistof en konstante waarden van de eddy diffusie koëfficiënten geeft dit

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \overline{\tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta} = -\nu_t \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial x_\beta} \overline{\tilde{u}_\beta \tilde{\phi}} = -\epsilon_{\phi_\beta} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_\beta \partial x_\beta}, \text{zodat}$$

dan t.a.v. de termen $\frac{\partial}{\partial x} \overline{\tilde{u}\tilde{v}} = -\nu_t \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial}{\partial x} \overline{\tilde{u}\tilde{\phi}} = -\epsilon_{\phi_x} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2}$ een volledige analogie bestaat.

Onder de veronderstelling dat het diffusieproces inderdaad met konstante diffusie-koëfficiënten beschreven kan worden en indien de oplossing van de d.v. voor de verspreiding van ϕ bekend is, zijn ϵ_{ϕ_x} en ϵ_{ϕ_y} te bepalen door gemeten koncentratie-verdelingen met die oplossing te vergelijken. Wij zijn dan speciaal geïnteresseerd in ϵ_{ϕ_x}. Uit het bovenstaande blijkt dat de volgende problemen zich voordoen:

1° er is geen volledige analogie tussen de twee d.v.'s. Het ϕ-diffusie proces is niet ergodisch en het verkrijgen van gemiddelde waarden zou moeten geschieden door de proef vele malen te herhalen onder dezelfde omstandigheden, want in een stochastisch proces is de verwachtingswaarde = ensemble gemiddelde. In de natuur is dit nauwelijks haalbaar. In de praktijk worden ook ruimte-gemiddelden genomen (Okubo, 1970), maar dat geeft op de relatief kleine schaal waarop wij werken geen informatie. Een grove benadering kan ook worden verkregen door de momentane koncentratieverdeling in meerdere punten van één of meerdere raaien door het "zwaartepunt" van de ϕ-wolk op verschillende tijdstippen te meten en per tijdstip "gladde" krommen door de verzameling van meetwaarden te bepalen. In geval van radiaal symmetrische diffusie kan ook middeling over de stralen toegepast worden.

2° Er zijn oplossingen bekend van de klassieke diffusievergelijking

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \epsilon_{\phi_j} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_j^2}, \tag{3.27}$$

maar (nog) niet van (3.23). Voor ons is $j = \alpha = 1,2$ van belang. Er is géén y-onafhankelijkheid en de invloed van de term

$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u_{w_\alpha}\phi_w)$ uit (3.23), die wél in de metingen tot uiting komt zit er niet in. Vooral bemonstering in een gebied met grote ϕ gradiënten, dus bv. als de "wolk" merkstof niet groot is t.o.v. de horizontale orbitaalas, kan hierdoor aanzienlijke afwijkingen geven.

(3.27) wordt ook wel de versie volgens Fick (1855; alleen molekulaire diffusie met konstante diffusie koëfficiënt) genoemd. Om in het volgende naar oplossingen van (3.27) te kunnen refereren worden ze hier gegeven voor het geval van homogene diffusie vanuit een plotselinge injektie, zonder advektie door gemiddelde stroom.

$$\phi(x_1,\dots,x_j,t) = \frac{Q}{(4\pi t)^{n/2}\left(\prod_j \epsilon_{\phi_j}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\sum_j \frac{x_j^2}{\epsilon_{\phi j}}\right) . \qquad (3.28)$$

n = aantal dimensies

a) $\bar{\phi}$ wordt bepaald als gemiddelde koncentratie. Dan geldt voor Q :

Q = hoeveelheid ingebrachte tracer,

voor n = 1 p.e.v. oppervlak $\perp$ diffusierichting

en voor n = 2 p.e.v. lengte $\perp$ vlak van diffusie

b) Q is de totale hoeveelheid ingebrachte tracer. Dan geldt voor $\bar{\phi}$:

$\bar{\phi}$ = hoeveelheid per lengte-, oppervlakte- of volume-eenheid voor n gelijk aan resp. 1, 2 of 3.

In geval van isotrope diffusie (n = 2 of 3) is $\epsilon_{\phi_1} = \dots = \epsilon_{\phi_j} = \epsilon_\phi$, zodat met $r^2 = \sum_j x_j^2$,

$$\bar{\phi}(r,t) = \frac{Q}{(4\pi\,\epsilon_\phi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\epsilon_\phi t}\right) . \qquad (3.29)$$

(3.28) is qua vorm gelijk aan de (simultane) k.d.f. van de n-dimensionale Gaussische verdeling waarvoor geldt dat de verdelingsfunktie $F(x_1\to\infty,\dots n\to\infty,t) = Q$ en de varianties van de koncentratie-verdelingen

$$\sigma_{x_j}^2 = 2\epsilon_{\phi_j} t \,[L^2], \text{ zodat } \prod_j \sigma_{x_j} = \left(\prod_j \epsilon_{\phi_j}\right)^{1/2}(2t)^{n/2} . \qquad (3.30)$$

In geval van kontinue lozing kan $\bar{\phi}$ verkregen worden door met inachtneming van de lozingsintensiteit $(Q' = Q/t)$ de bovenstaande fundamentele oplossingen over de tijd te integreren.

3° In de artikelen van Harris e.a. en Inman e.a. worden inderdaad konstante eddy-diffusiekoëfficiënten gebruikt. In par. 3.3.1 is reeds betoogd dat dit voor het hier te behandelen probleem niet voldoet. Daar komt bij dat de oplossingen met konstante $\epsilon_{\phi\alpha}$ volgens Fick, (3.28) t/m (3.30) pas voldoende tijd na het loslaten van de tracer aannemelijk wordt omdat dan de "wolk" pas groot kan zijn t.o.v. de karakteristieke afmetingen van de wervels. Turbulente diffusie hangt nl. af van tijd- en lengteschalen van de wervels. De meest effektieve menging geschiedt door wervels met afmetingen van de grootte orde van de wolk, zodat de "sterkte" van menging (en indien dat uitgedrukt wordt in $\epsilon_{\phi\alpha}$, geldt dat t.a.v. deze koëfficiënten) aanvankelijk toeneemt met de afmeting van de wolk of wel met de tijd na lozing. Ook op theoretische gronden is aan te tonen dat de Gauss-modellen pas na voldoende tijd kunnen optreden. De dispersie van deeltjes is in een Lagrange-systeem te beschrijven d.m.v. tijdsintegratie van de snelheid. Indien deze integratie samen te stellen is uit veel integralen over tijdsintervallen τ; als verder al deze tijdsintegralen (nagenoeg) stochastisch onafhankelijk zijn en zonder overheersende bijdragen, dan verwachten we volgens de centrale limietstelling een Gaussisch proces voor de dispersie. Indien t de totale integratietijd is, moet dus $\tau \ll t$ zijn, terwijl tevens τ enkele malen de turbulentie-tijdschaal moet bedragen. Wij zijn juist wel geïnteresseerd in kortere tijden, in elk geval zo kort dat menging in x-ri. nog niet ver gevorderd is. Het belang van dit aspekt in de brandingszone waar de wervels door de geometrie beperkt zijn, is niet bekend.

4° In werkelijkheid zijn we in dit stadium geïnteresseerd in

$$-\frac{d}{dx}\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho \tilde{u} \tilde{v}\, dz}$$, dus hier gaat het eigenlijk om (3.25). Waarneming aan het oppervlak zal waarden van diffusie koëfficiënten geven die (veel) groter zijn dan de over de vertikaal gemiddelden. Bij een spilling breker waarbij een soort lopende watersprong boven het niveau van het golfdal de tracer over grote afstanden transporteert is dit vooral duidelijk. Verder geven de voor konstante laagdikte geldende oplossingen (3.28) t/m (3.30) geen direkt uitsluitsel voor het probleem van veranderende diepte in de brandingszone.

Resumerend kan gezegd worden dat er voor de omschrijving van de gezochte ν_t zonder verdere analyse, niet veel verwacht kan worden

van de hierboven beschreven methode om konstante diffusie koëfficiënten te bepalen. Het levert hoogstens gemiddelden in een bepaalde richting op die, indien waarnemingen vnl. aan het oppervlak zijn verricht, een behoorlijke overschatting van over de vertikaal gemiddelde waarden kunnen geven. Natuurlijk blijven metingen van diffusie van tracers belangrijk, vooral voor de kennis van het proces van menging in de brandingszone en om een inzicht te kunnen krijgen in de belangrijke parameters.
Tevens geeft het een idee over de grootte-orde van de eddy-diffusivity $\epsilon_{\phi x}$ maar een duidelijke relatie met de gezochte turbulentie viskositeit ν_t is er nog niet.

Harris, Jordaan, McMurray, Verwey en Anderson (1963).

Reeds in 1960 werden kwalitatieve en kwantitatieve waarnemingen gedaan van koncentratieveranderingen met tijd en afstand tot een lozingspunt zowel bij natuurlijke stranden (zuidkust Natal) als in modellen. Ondanks de ruime opzet van het onderzoek bevat het artikel helaas te weinig informatie voor de interpretatie van de resultaten voor ons probleem. Dit geldt vooral t.a.v. de golfparameters H en T, de brekerplaats en invalshoek van de golven.

Kwalitatieve waarnemingen bij loodrechte golfinval vermelden een snelle verspreiding van in de branding aangebrachte kleurstof, waarbij de lengteschaal van de wervels wordt omschreven met: "of the order of a few feet". Dat is dan dezelfde orde-grootte als de diepte. Bij scheve golfinval gaf kleurstof aan de brandingsstroom het beeld van een evenwijdig aan de kust stromende rivier die net iets breder was dan de brandingszone. In de meeste gevallen heeft die "rivier" een duidelijke begrenzing van de zeekant (maar die toch minder markant is als er hoge brekers zijn), hetgeen volgens de auteurs het gevolg zou kunnen zijn van wat zij "convergentie" noemen. De waarnemingen van de kleurstofbeweging geschieden inderdaad aan het oppervlak, waar een netto landwaarts gericht massatransport aanwezig is. Het drie dimensionale model was een golfbak van $\sim 21 * 12$ m met zandbodem. De lengteschaal hierin was 1 : 36.

Er wordt als resultaat van proeven in een golfgoot ($b * h * l \approx 23 * 35 * 600$, in cm; model-lengteschaal 1:72; talud 1:15) gesuggereerd dat de (konstante) eddy diffusie koëfficiënt evenredig was met H^2/T . Meetresultaten zelf worden niet gegeven. Waarschijnlijk wordt met H de golfhoogte op de brekerplaats bedoeld.

Uit proeven met loodrechte golfinval in prototype bleek de koncentratieverandering ondanks enorme spreiding het best aan het 2-dimensionale mathematische model (3.28b) te voldoen. Wel is er een toeneming van ϵ_ϕ met de tijd gekonstateerd, doch dit heeft men bij loodrechte golfinval niet kunnen kwantificeren. Het is opvallend dat koncentraties op een bepaald punt gemeten op een aantal tijdstippen na elkaar sterk in grootte kunnen variëren, zie fig. 3.8. Dit kan een indikatie zijn dat de golfbeweging grote invloed heeft gehad.

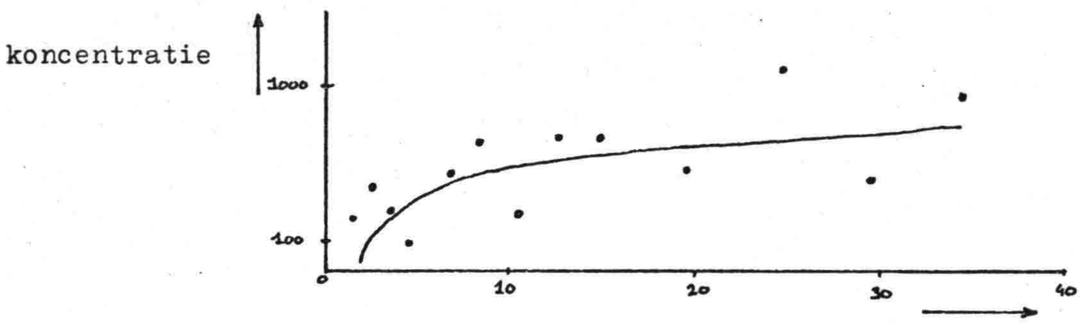


fig. 3.8 (gedeelte van fig. 6(a) van Harris e.a. (1963)). prototype waarneming en vergelijking met theorie (getrokken lijn) van koncentratieverandering na kontinue lozing op een afstand (in y-ri.!) van 9 m van het lozingspunt, bij loodrechte golfinval. Breedte van de brandingszone is onbekend maar is waarschijnlijk < 20 m.

M.b.v. dergelijke figuren wordt via "curve-fitting" een konstante ϵ_ϕ bepaald. Deze ϵ_ϕ wordt daarna weer vergeleken met $H^2/_T$, waarin H waarschijnlijk weer H_B voorstelt. Funktionaal is deze vorm hetzelfde als wel eens wordt aangenomen voor de diffusiekoëfficiënt op diep water (Bowen, Inman, 1972). De door Harris e.a. gegeven theoretische verklaring voor $\epsilon_\phi \propto H^2/_T$ is vreemd, alhoewel er toch een poging in de goede richting gedaan wordt om ϵ_ϕ aan de energiedissipatie te relateren. Er worden echter dimensiefouten gemaakt en er wordt een periodiciteit in de turbulentie verondersteld gelijk aan de golfperiode. De gemiddelde wervelafmeting wordt gerelateerd aan de orbitaalbeweging ... "which is a function of wave height" (golflengte en diepte worden niet genoemd) en wordt $\approx H$ gekozen. De grootte-orde van deze keuze lijkt wel redelijk. De energiedissipatiesnelheid $[L^2T^{-3}]$ is volgens de auteurs evenredig met H/T $[LT^{-1}]$.
Daarna wordt gesteld: "The eddy diffusivity D (ϵ_ϕ in dit verslag)

is therefore proportional to H^2/T ". Er wordt vervolgens een tabel gegeven met resultaten van 5 prototype tests die in onderstaande fig. 3.9 zijn samengevat, maar waar de voorgestelde verhouding niet uit blijkt.

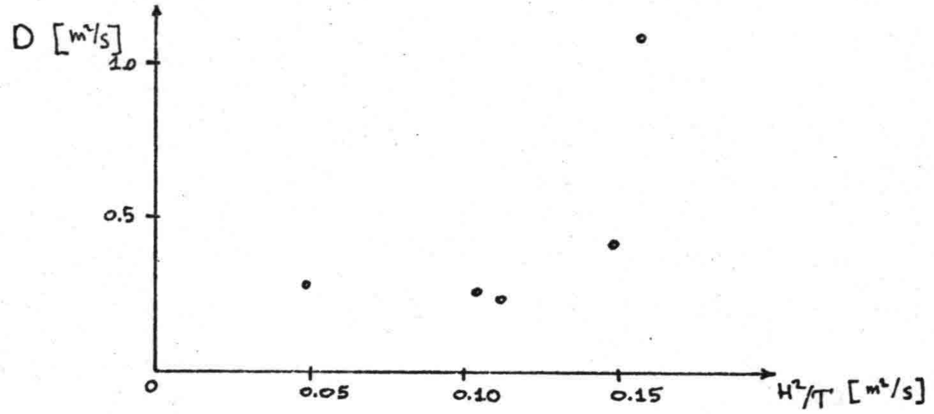


fig. 3.9
waarden van D (ϵ_ϕ) door Harris e.a. uit hun prototype waarnemingen bepaald en hier op hun suggestie uitgezet tegen H^2/T.

Door de auteurs wordt zelf nog een figuur gegeven met modelresultaten (D uitgezet tegen H^2/T) waarin o.a. bij een waarde $H^2/T \approx 2 * 10^{-3}$ m^2/s vier waarden van D (op in totaal 10 proefresultaten) tussen $1.2 * 10^{-3}$ m^2/s en $5 * 10^{-2}$ m^2/s voorkomen.

Er wordt dus geenszins overtuiging gewekt dat $D \propto \frac{H^2}{T}$ (3.31) zou zijn.

Inman, Tait en Nordstrom (1971)

Ook hier werden, overigens zonder referentie aan het vorig artikel, in de brandingszone metingen gedaan aan diffusie van konservatieve vloeistof ten einde inzicht te verkrijgen in de twee genoemde belangrijke mechanismen van menging. Dit gebeurde langs drie natuurlijke stranden:

1. El Moreno Beach, nw-kust van Gulf of California, Mexico
2. Silver Strand Beach, Coronado, California (geen bepaling ϵ_{ϕ_x})
3. Scripps Beach, La Jolla, California.

ad 1. 1/3 - 1 m hoge windgolven $X_B \sim 4$-7 m, strandhelling ~ 0.12 was hier zo klein dat alleen monsters uit het midden van de kleurstofwolk genomen zijn.

ad 2,3. 1-2 m hoge deining $X_B \sim$ 60-100 m, strandhelling ~ 0.02

Ook hier werd steeds een snelle menging in "on-offshore" richting waargenomen, terwijl direkt na lozing de menging weer bij benadering als 2-dimensionaal en enige tijd daarna als 1-dimensionaal kon worden beschouwd. De dispersie bleek zich ook nu weer praktisch niet tot buiten de brandingszone uit te strekken. Er moet op gegewezen worden dat deze konklusies volgen uit oppervlaktewaarnemingen. Het is niet bekend hoe en waar geïnjekteerd en bemonsterd is en of de diepte van bemonstering invloed had op de resultaten. Vanwege het eventuele belang voor ons van de resultaten van Inman o.a., worden hier enkele punten uit hun berekeningen genoemd, die nadelige invloed kunnen hebben op de uitkomsten.

In de eerste plaats moet opgemerkt worden dat Q uit (3.28) niet geïnterpreteerd wordt zoals bij die formule onder a) genoemd. Omdat zowel de injektiemethode als de interpretatie van de koncentratiemetingen onbekend zijn, kan daarover niet meer gezegd worden dan dat (3.28) voor n = 2 geldt voor een konstante laagdikte, waarbij Q de in die laag geïnjekteerde hoeveelheid merkstof is. Het effekt van een oplopende bodem is een relatief snellere toename van de koncentratie in de richting van de kust.
De auteurs gebruiken een tijd t_o , de "time to one-dimensional diffusion" waarmee bedoeld wordt de tijd die nodig is om vanaf het tijdstip van inbrengen van tracer, op de randen van de brandingszone een koncentratie te bereiken die gelijk is aan de koncentratie op een afstand van één standaard afwijking vanaf het midden van een onbegrensde Gaussische verdeling.
Op dat moment is die standaardafwijking $X_B/_2$, zodat uit (3.30) volgt

$$\epsilon_{\phi_x} = \frac{(X_B/2)^2}{2t_o} \tag{3.32}$$

en niet $\epsilon_{\phi_x} = \frac{(X_B/2)^2}{4t_o}$ zoals Inman e.a. vermelden. Dit laatste wordt vnl. voor de smalle brandingszone bij El Moreno gebruikt.

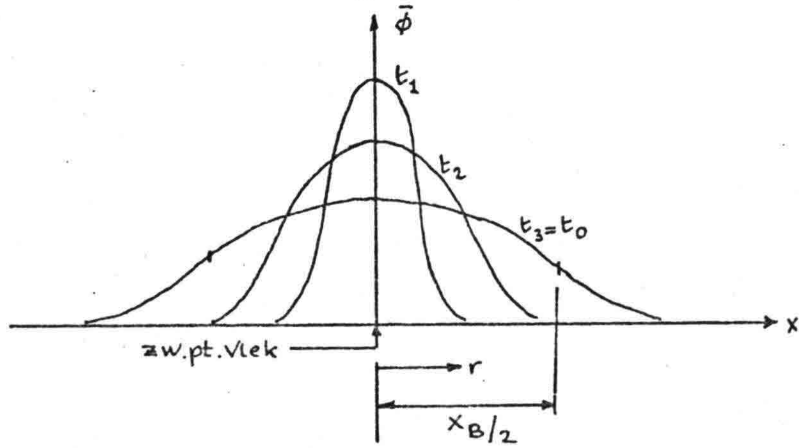


fig. 3.10 definitie t_o van Inman e.a. (1971)

Na een korrektie van de integratiegrenzen in formule (6) van Inman e.a. (nl. $a = X_o$ i.p.v. $a = X_o / (2\epsilon_{\phi_x} t)^{1/2}$; $X_o = X_B/2$) wordt, rekening houdend met de begrenzing in x-ri., hun formule (7) gevonden voor een genormaliseerde vorm $\bar{\phi}'$ (x, y, t) van de 2-dim. verdeling $\bar{\phi}$ (x, y, t) (n=2 in (3.28)). Voor grote t geldt

$$\bar{\phi}'(x,y,t) \approx \bar{\phi}(x,y,t)\left[\frac{2X_o}{\sqrt{4\pi\epsilon_{\phi_x} t}}\right]^{-1} = \frac{Q}{2X_o\sqrt{4\pi\epsilon_{\phi_y} t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\epsilon_{\phi_x} t} - \frac{y^2}{4\epsilon_{\phi_y} t}\right),$$

terwijl vanwege de begrenzing in x-ri. hierin ook $\frac{x^2}{4\epsilon_{\phi_x} t} \to 0$, zodat de vorm nadert tot de 1-dim. onbegrensde verdeling $\bar{\phi}(y, t')$, verkregen uit (3.28) met n=1 en waarin voor dat doel Q vervangen moet worden door Q/X_B. Echter op het tijdstip $t = t_o$ is exp $\left(-\frac{x^2}{4\epsilon_{\phi_x} t}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2X_o^2}\right)$, zodat deze term in de richting van de randen niet verwaarloosd mag worden ($x = x_o$: $\exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0.61$) en de diffusie nog niet binnen een paar procent nauwkeurig 1-dimensionaal is. Dit is misschien ook de oorzaak van het verschil dat Harris e.a. (1963) vonden voor de benodigde tijd om tot 1-dimensionale diffusie te komen (nl. in de orde van 10 min.).
Op zichzelf is dit voor de bepaling van door Inman e.a. "gedefinieerde" ϵ_{ϕ_x} niet van belang maar toont wel aan dat de keuze van t_o arbitrair is. Er wordt niet vermeld hoe t_o is gemeten.
Toch blijft de empirische relatie

$$\epsilon_{\phi_x} \approx \frac{(H_{rms})_B X_B}{T} \qquad (3.33)$$

bestaan en wordt voor El Moreno zelfs nog beter wanneer ϵ_{ϕ_x} volgens (3.32) wordt bepaald. De vorm (3.33) kan geschreven worden als $= \frac{H_B}{L_B} X_B \sqrt{g h_B}$. Hierin zou $\sqrt{g h_B}$ een snelheidsschaal kunnen zijn. Dat is wel konsistent met de hele opzet, omdat menging aan het oppervlak waargenomen, vnl. bepaald wordt door de snelheidsschaal van de passerende turbulente watermassa in het golffront en dat is de fasesnelheid $\sqrt{gh}$, waarvan het gemiddelde over de brandingszone $\frac{2}{3}\sqrt{g h_B}$ is. Het is dus wel te verwachten dat de over de vertikaal gemiddelde horizontale menging overschat is.

Voor de bespreking van (vreemde) pogingen van Inman e.a. om (3.33) fysisch te verklaren, zie Longuet-Higgins (1972).

Het is gebleken, dat de theoretische modellen vooral op fysische gronden ernstige bezwaren hebben. In feite wordt bij geen van die beschouwde modellen de turbulentie in de brandingszone zelf beschouwd. Er werd a priori uitgegaan van het turbulentie viskositeitsconcept. In hoofdstuk 5 zal blijken, dat de te gebruiken turbulentie viskositeiten niet goed te voorspellen zijn. Dit geldt ook voor de funktionele vormen die n.a.v. metingen werden voorgesteld. Tevens zijn

de pogingen om die vormen theoretisch te verklaren onbevredigend en bevatten foutieve verklaringen. De noodzaak blijkt nu duidelijk voor een meer fundamenteel onderzoek naar de relatie tussen de kenmerken van de brekende golven en de turbulentie in de brandingszone. Een poging daartoe is gedaan door Horikawa en Kuo (1966). Het heeft echter geen zin om daar op deze plaats iets over te zeggen, omdat de gedane aannamen onhoudbaar zijn.
In het volgende hoofdstuk zullen pogingen besproken worden die gedaan zijn om het interne mechanisme van de turbulentie gedetailleerd te beschrijven, met het doel om de afhankelijkheid van de Re-spanningen van de overall beweging vast te stellen. Dit heeft niet tot een oplossing geleid, maar wel tot verdieping van het inzicht. In hoofdstuk 5 wordt daarna een nieuwe aanpak van het probleem besproken.

Hoofdstuk 4

TRANSPORTVERGELIJKINGEN VOOR TURBULENTIE

4.1 Inleiding

Samenhangend met de golfenergiedissipatie in de brandingszone is het onderhavige probleem van turbulente uitwisseling van hoeveelheid beweging ("menging"). De brekende golven wekken turbulentie op en via de turbulentie wordt energie gedissipeerd. Ten einde een beter inzicht te verkrijgen in het mechanisme dat verantwoordelijk is voor de relatief grote energiedissipatie en voor de in deze studie belangrijke turbulente impulstransporten in de brandingszone zijn pogingen gedaan om, voor zover dat zinvol leek, de turbulentie m.b.v. transportvergelijkingen te beschrijven. Daarvan wordt in dit hoofdstuk een overzicht gegeven. De relaties die er moeten bestaan tussen de bovengenoemde processen hebben we getracht hiermee op te sporen. Het gaat hierbij vnl. om de intensiteit en de verdeling van de Re-spanningen, de turbulentie-energie en haar dissipatie uit te drukken in parameters die het veld van de brekende golven bepalen.
In de modellen die in het vorige hoofdstuk besproken zijn is dat onvoldoende gebeurd. Vaak zijn daarbij voor de lengte- en snelheidsschalen van de turbulentie die van de golfbeweging ingevuld. Verder is enkele malen gebruik gemaakt van de aan het zgn. gradiënt-transportmodel ten grondslag liggende gedachte. Dit model kan in bepaalde gevallen nog wel betrouwbare uitkomsten geven maar de opbouw ervan is voor ons doel niet toepasbaar. Wellicht is de beste benadering die welke de turbulentie ook werkelijk als een stochastisch vektor-veld behandelt (zie bv. Lumley, 1970).
Vanwege het essentieel 3-dimensionaal, niet lineair en niet rotatievrij zijn van de beweging, wordt eigenlijk enig ad hoc model voor de oplossing van de vergelijkingen voor de turbulentie uitgesloten.
De mogelijkheden van het verzamelen van de benodigde informatie over de turbulentie in de brandingszone (bv. Laser-Doppler snelheidsmeting) om dit met statistische methoden te behandelen zijn op het moment dat deze studie gedaan wordt, in ons land nog onvoldoende. Daarom wordt toch geprobeerd een turbulentiemodel te formuleren waarin het "closure" probleem (meer onbekenden dan vergelijkingen) opgelost wordt door in een zo vroeg mogelijk stadium geschikte aannames te doen omtrent relaties tussen de variabelen.

Het resultaat van de beschouwingen in dit hoofdstuk is, dat het gebruik van het eddy-viscosity concept onder bepaalde voorwaarden in het huidige stadium toch redelijk lijkt, waarin dan voor de snelheidsschaal een gemiddelde turbulentie-intensiteit genomen kan worden. Deze intensiteit wordt bepaald in hoofdstuk 5, nadat de energiebalans voor de fluktuerende beweging tot een zeer simpele vorm is teruggebracht. Er is nog geen uitsluitsel hoe de lengteschaal bepaald zou moeten worden, maar ook daarvoor wordt in het volgende hoofdstuk een plausibele aanname gedaan.

4.2 Drie typen turbulentie-modellen

In par. 3.2 is reeds het concept van de turbulentie-viskositeit geïntroduceerd als een relatie tussen de onbekende Re-spanningen en het gemiddelde snelheidsveld. Zie de vergelijkingen (3.1), (3.2) en (3.4). Indien deze turbulentie-viskositeit ook uitgedrukt kan worden in bekende variabelen is het closure probleem opgelost. Hierover gaan de eerste twee modellen. Het derde type model ziet af van de beschrijving d.m.v. een "effektief" turbulent transport en gaat uit van differentiaal vergelijkingen voor de gewenste turbulente transporten zelf. Een overzicht van gepubliceerde modellen is te vinden in Launder en Spalding (1972) en in het DHL rapport W152 (1973).

1. Voor-beelden van <u>algebraïsche formules voor</u> ν_t zijn die van Prandtl (1925) (mengweghypothese) en die van Von Kármán (1930) (gelijkvormigheidshypothese). Prandtl ontleende aan de kinetische gastheorie de beschrijving $\nu_t = L\mathcal{U}$ (zie bv. Borghouts, 1970), waarin $\mathcal{U} = L\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|$ werd gesubstitueerd, zodat $\tau = \rho\nu_t \frac{\partial V}{\partial x} = \rho L^2 \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| \frac{\partial V}{\partial x}$.
(zie ook (3.10) en (3.13)). Het is niet redelijk dat $\nu_t = 0$, wanneer $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$. Prandtl deed een voorstel voor L ($\propto$ afstand tot de dichtstbijzijnde wand), terwijl Von Kármán L berekende uit evenredigheid met $\frac{\partial V}{\partial x} \Big/ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ (lijkt beter, is echter minder flexibel d.w.z. minder goed bij metingen aan de passen en geeft moeilijkheden in buigpunten van snelheidsprofielen).
Verder kunnen alle formuleringen van ν_t m.b.v. één lengteschaal en één snelheidsschaal, wanneer die eenvoudig te bepalen zijn, onder de modellen van dit type gerangschikt worden. In hoofdstuk 3 zijn al enkele bezwaren genoemd tegen de grondgedachten van het gradiënt-transportmodel, die hier in z'n algemeenheid in vier punten worden samengevat (zie Tennekes en Lumley, 1972).

1°. Stel dat het model (3.10) of het daaruit afgeleide model (3.15):
$\tau_{xy} = c\rho u^* L \frac{\partial V}{\partial x}$, met $\nu_t = c u^* L$, "goed" is. Vaak variëren u^* en L en dus ν_t zodanig, dat dit model onhandelbaar zou worden. Het is duidelijk dat dit model alleen toepasbaar is wanneer er één snelheids- en één lengteschaal te onderkennen zijn. Het model bevat $-\overline{\tilde{u}\tilde{v}} \sim u^{*2}$ en $\frac{\partial V}{\partial x} \sim \frac{u^*}{L'}$ (zie p. 49). u^* moet $\approx$ konstant zijn en L ook, of moet eenvoudig van de geometrie afhangen. In werkelijkheid zijn er vele schalen waarop de turbulentie werkzaam is. Het lokale model bevat geen korrelatie met andere gebeurtenissen in plaats en tijd. De analogie met de kinetische gastheorie zegt echter dat L overeenkomt met de grotere wervels. In feite wordt dus alleen impulsoverdracht t.g.v. deze grotere wervels bekeken. Dit lijkt fysisch overigens redelijk.

2°. L moet veel kleiner zijn dan de ruimtelijke verandering in $\frac{\partial V}{\partial x}$. Stel de lokale schaal $\mathcal{L} \equiv \frac{\partial V}{\partial x} / \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. Uit de tekst onder (3.11) blijkt dat de Taylor-reeks voor de beschrijving van het y-impulsietekort op het niveau $x+L$ na de term met de eerste afgeleide wordt afgekapt. Dus moet $\frac{L}{2} \ll \mathcal{L}$ zijn, maar de grote wervels (zie onder 1°) hebben juist vaak afmetingen van de orde van de makroskopische schaal van de stroom, zodat L vaak $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ zal zijn. Het op genoemd punt afbreken van de reeks is dan voorbarig.

3°. In het omschreven y-impulsie tekort
$\Delta M = \rho\left(V(x+L) - V(x)\right) + \rho\left(\tilde{v}(x+L,t) - \tilde{\ }(x,t)\right)$ wordt de laatste term $(\equiv \rho\,\Delta\tilde{v})$ weggelaten en dus wordt de gemiddelde flux ervan in x-ri.: $\overline{\rho\tilde{u}\,\Delta\tilde{v}}$ verwaarloosd. Op schaal L kan $\Delta\tilde{v}$ best aanzienlijk zijn, zodat die term niet a priori verwaarloosd zou moeten worden. In ons geval van een te verwachten rel. zwakke korrelatie tussen $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$ en dus zeker tussen $\tilde{u}$ en $\Delta\tilde{v}$ zal dit bezwaar niet relevant zijn. De bijdrage van de golfbeweging, alhoewel deze wel invloed heeft op L , wordt hier buiten beschouwing gelaten; "golfspanningen" worden apart berekend.

4°. Modellering van Re-spanningen volgens de kinetische gastheorie is in principe niet juist vanwege het feit, dat daarin de korrelatie koëff. van $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$ $\mathcal{O}(10^{-6})$ is en in afschuifstromen $\mathcal{O}(1)$.

De reden dat het gradiënt-transportmodel vaak redelijke resultaten geeft blijkt in die gevallen te komen door :

a. een relatief goede $\tilde{u}\tilde{v}$ korrelatie
b. de verhouding van de tijdschalen van de gemiddelde beweging en van de turbulentie die door de gem. beweging in stand gehouden wordt, is $\mathcal{O}(1)$.
c. hoort bij a. en b.: het van belang zijn van slechts één lengteschaal en één snelheidsschaal.

2. Modellen die algemener toegepast kunnen worden zijn die waarbij de turbulentie-viskositeit bepaald wordt door de oplossing van d.v.'s voor één of meerdere eigenschappen van de turbulente beweging. Klassieke voorbeelden zijn Prandtl (1945) en Kolmogorov (1942). Zij stelden ook voor dat het karakter van de turbulentie goed beschreven kon worden door twee onafhankelijk variabelen. Voor de snelheidsschaal namen zij $(\tilde{k})^{1/2}$ = (gemiddelde kinetische turbulentie-energie p.e.v. massa)$^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\,\overline{\tilde{u}_i\tilde{u}_i}\right)^{1/2}$.
Prandtl gebruikte een voorgeschreven lengteschaal L, zodat

$$\nu_t = c_1 L (\tilde{k})^{1/2}. \tag{4.1}$$

Het probleem is nu dus verplaatst naar de bepaling van $\tilde{k}$ en L. $\tilde{k}$ kan worden bepaald uit een transport-d.v. voor de energie, waar dan wel voldoende benaderingen in aangebracht moeten worden. De lengteschaal L is veel moeilijker te bepalen. Kolmogorov stelde voor de frekwentie f van de energierijke wervels (in 't vervolg aangeduid met ERW) ook met d.v.'s te bepalen, waarmee dan ook $L = (\tilde{k})^{1/2}/f$ bekend zou zijn.

Een lengteschaal zou gedefinieerd kunnen worden als een Eulerse transversale òf longitudinale integraal-schaal, resp.

$$L_g = \int_0^\infty g(r)\,dr \quad \text{en} \quad L_f = \int_0^\infty f(r)\,dr \tag{4.2}$$

waarin de transversale resp. longitudinale korrelatiekoëfficiënt

$$g(r) = \frac{\overline{(\tilde{u}_n)_A(\tilde{u}_n)_B}}{\sqrt{(\overline{\tilde{u}_n^2})_A}\sqrt{(\overline{\tilde{u}_n^2})_B}} \quad \text{en} \quad f(r) = \frac{\overline{(\tilde{u}_r)_A(\tilde{u}_r)_B}}{\sqrt{(\overline{\tilde{u}_r^2})_A}\sqrt{(\overline{\tilde{u}_r^2})_B}} \tag{4.3}$$

(zie bv. Rotta, 1951 en Hinze, 1959).

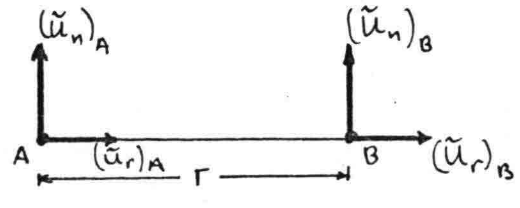


fig. 4.1
Betreft korrelatiekoëfficiënten f(r) en g(r)

In homogene turbulentie is $\sqrt{(\overline{\tilde{u}_n^2})_A} = \sqrt{(\overline{\tilde{u}_n^2})_B} = \sqrt{(\overline{\tilde{u}_r^2})_A} = \sqrt{(\overline{\tilde{u}_r^2})_B} = u_n^*$.

Rotta (1972a, par. 3.4.3 en 1972b) geeft een "bewegingsvergelijking" voor L of eigenlijk voor $\tilde{k}L$. Gezien enerzijds het gebruik van een turbulentieviskositeit en anderzijds deze verschrikkelijk ingewikkelde vergelijking, waar evenzeer op min of meer fenomenologische gronden "closure-aannamen" gedaan worden is deze werkwijze voor ons specifieke probleem, waar zelfs de energievergelijking nog een groot probleem is, niet adekwaat.

Daarbij komt, dat een lengte-schaal vergelijking nogal gekunsteld is.

De energievergelijking voor turbulentie in onsamendrukbare vloeistof bevat voor de dissipatie (p.e.v. massa) door de turbulente beweging de term

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)}, \tag{4.4}$$

welke om redenen die hieronder in het kort samengevat en in hoofdstuk 5 nader toegelicht zullen worden, geschreven kan worden als

$$\epsilon = c_2 \frac{\tilde{k}^{3/2}}{\ell}, \tag{4.5}$$

waarin c_2 een dimensieloze evenredigheidskonstante en ℓ een lengteschaal voor de ERW is.

(4.5) volgt uit een beschouwing van de energiehuishouding om redenen van

- grote Reynolds-getallen
- de hoeveelheid gedissipeerde energie is onafhankelijk van de viskositeit (energie-kaskade)
- isotropie op kleine ($\equiv$ dissipatie-) schaal
- niet in de laatste plaats: dimensies.

ℓ hoeft niet hetzelfde te zijn als L uit (4.1), hetgeen tot extra moeilijkheden kan leiden. Indien (4.1), (4.2) en (4.5) gezamenlijk gebruikt worden is de toepassing van een lengteschaal vergelijking nog minder plausibel. Neem aan dat $\ell \approx L$.

Harlow en Nakayama (1968) en daarna nog vele anderen bepaalden ϵ uit een transportvergelijking voor de dissipatie. Hiermee is L volgens (4.5) te bepalen ((4.5) is ook als definitie van L te beschouwen) of zo men wil direkt ν_t volgens

$$\nu_t = c_2 \frac{\tilde{k}^2}{\epsilon}. \tag{4.6}$$

De vergelijking voor ϵ is veel eenvoudiger dan die voor L, heeft duidelijke fysische betekenis en bovendien is er het voordeel dat ϵ direkt in de vergelijking voor $\tilde{k}$ voorkomt.

3. Een derde type turbulentiemodel is dat welke gebruik maakt van

transportvergelijkingen voor de Reynolds-spanningen zélf, i.p.v. de hypothese van de turbulentie-viskositeit. Deze vergelijkingen zijn op verschillende plaatsen in de literatuur te vinden (bv. Rotta, (1951 en 1972a), Hinze 1959). In algemene vorm resulteert

$$\underset{①}{\frac{\partial \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}}{\partial t}} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \underset{②}{\left(\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}\right)} + \underset{③}{\overline{\tilde{u}_j \tilde{u}_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \underset{④}{\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}} =$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_k} \Big[\underset{⑤}{\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_k}} + \underset{⑥}{\overline{\frac{1}{\rho} \left(\delta_{jk} \tilde{u}_i + \delta_{ik} \tilde{u}_j \right) \tilde{p}}} - \underset{⑦}{\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}} \Big]$$

$$+ \underset{⑧}{\overline{\frac{1}{\rho} \tilde{p} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)}} + \underset{⑨}{2 \nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}}} . \qquad (4.7)$$

In feite zouden we de vergelijkingen voor de fluktuerende beweging (golfbeweging èn turbulentie) eerst over de hoogte moeten integreren en daarna middelen. We doen nu voorlopig net alsof de brandingsstroom gemiddeld over lange tijd een rivier is die aangedreven wordt door de "total longshore thrust" (zie tekst bij (2.108)) en waarin op één of andere wijze zoveel turbulentie opgewekt wordt, als korrespondeert met die in de brekende golven en waarvoor de benodigde energie van buitenaf toegevoerd wordt, maar niet in de eerste plaats inwendig door "shear". Er wordt een andere verklaring voor de "produktie" gevonden. Voor het gemak doen we ook alsof er een twee-dimensionale stroming in het x-y vlak (!) is. Met nog enkele in paragraaf 4.4 te noemen veronderstellingen kunnen we de gedachten van Monin (1965) en Glushko (1965) voor een groot deel volgen. Hun analyse is zeer overzichtelijk weergegeven door Vreugdenhil (1973a en 1973b). Het blijkt dat onder bepaalde veronderstellingen, die in par. 4.4 genoemd worden, het eddy viscosity concept $\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = -\nu_t \frac{\partial V}{\partial x}$, met ν_t volgens (4.1) uit (4.7) teruggevonden wordt. Indien we met de gedane aannamen toch het voor ons belangrijkste mechanisme, nl. de invloed van de turbulentie op het gemiddelde snelheidsprofiel van brandingsstromen, kunnen beschrijven, doemt er een hoopvol beeld op. Dan blijft er het punt van de bepaling van L, volgens één van de onder 1. of 2. genoemde methoden òf, zoals in hoofdstuk 5 zal blijken volgens nog een andere beschouwing èn het punt van de bepaling van $\tilde{k}$ m.b.v. de energievergelijking voor de fluktuerende beweging. De energievergelijking voor de turbulentie ontstaat o.a. door kontraktie in (4.7)

$$\frac{\partial \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}}{\partial t} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i} + 2 \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_k} + 2 \overline{\frac{\tilde{p}}{\rho} \tilde{u}_k} - \nu \frac{\partial \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}}{\partial x_k} \right]$$

$$+ 2 \nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}} = 0 , \qquad (4.8)$$

waarbij volgens de inkompressibiliteitsvoorwaarde $\overline{\tilde{p}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}} = 0$.
De energiedissipatie p.e.v. massa, (4.4) is om dezelfde reden te schrijven als:

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i}\right)} = \nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}} + \nu \frac{\partial^2 \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k}}{\partial x_k \partial x_i} . \tag{4.9}$$

Substitutie van (4.9) in (4.8) levert na delen door 2 de algemene vorm van de vergelijking voor de turbulentie-energie in onsamendrukbare vloeistof:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_k} + \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\tfrac{1}{2}\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_k} + \frac{\overline{\tilde{p}\tilde{u}_k}}{\rho} - \nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k}}{\partial x_i}\right] + \epsilon = 0 . \tag{4.10}$$

Aannemende dat op de schaal van de dissipatie de turbulentie isotroop is geldt:

$$\nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}} \approx \epsilon ,$$

zodat i.p.v. (4.10) de volgende energievergelijking ontstaat:

$$\underset{①}{\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t}} + \underset{②}{U_k \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_k}} + \underset{③}{\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\underset{⑤}{\tfrac{1}{2}\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_k}} + \underset{⑥}{\overline{\frac{\tilde{p}}{\rho}\tilde{u}_k}} - \underset{⑦}{\nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_k}}\right] + \underset{⑨}{\epsilon} = 0 . \tag{4.11}$$

4.3 Produktie van turbulentie

In het algemeen is een transportvergelijking als volgt opgebouwd: traagheid + produktie+ diffusie (+ evt. herverdeling over de komponenten)+ dissipatie = 0.

De betekenis van de termen in (4.7) c.q. (4.11), wordt meestal als volgt aangeduid (de vergelijking is in een Euler-frame geschreven p.e.v. massa):

1. verandering in de tijd van $\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}$, c.q. van de gemiddelde kinetische energie van de turbulentie.
2. advektie door gemiddelde stroom; ook op te vatten als een divergentie $\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j})$ van de Re-spanningen en kan dan bij de divergentietermen 5, 6 en 7 ondergebracht worden.

3,4. "produktie" van Re-spanningen (ook normaalspanningen, dus turbulentie-energie) door interaktie van Re-spanningen met de gemiddelde beweging.

5, 6 en 7 vormen samen een divergentie (diffusie)-term, waarin de binnen een bepaald gebied werkende overdrachten van Re-spanningen worden weergegeven. 5 en 6 zouden turbulente diffusie genoemd kunnen worden. 7 wordt wel omschreven met: de arbeid die viskeuze schuifspanningen bij turbulente verplaatsing leveren, maar vanwege de vorm waarin deze term in (4.7) staat kan hij misschien beter molekulaire diffusie genoemd worden (vergelijk met (3.27)).

8. overdracht tussen de verschillende spanningskomponenten door de drukfluktuaties.
9. dissipatie door molekulaire viskositeit.

De reden waarom het bovenstaande nog eens zo uitvoerig is opgeschreven, is dat we ons nu afvragen waardoor de produktie van Re-spanningen c.q. turbulentie-energie wordt beschreven. De termen 3 en 4 zijn hier in ons geval zeker niet verantwoordelijk voor: er is een relatief zwakke (sekundaire) stroom en veel turbulentie. Al meerdere keren is gesteld dat de turbulentie in de brandingszone niet door "shear" in de gemiddelde stroom wordt opgewekt, dus de termen 3 en 4 moeten relatief erg klein zijn. Eigenlijk bestaat de gemiddelde snelheid momentaan helemaal niet en het is dus ook niet realistisch om 3 en 4 te betitelen als het gemiddelde van momentane produktie. Deze gedachte geldt in principe ook voor pure afschuifbeweging. Het lijkt veel redelijker om als "produktie"-termen te nemen het gemiddelde van het produkt van de momentane waarden van $\tilde{u}_i \tilde{u}_j$ met de momentane snelheidsgradiënten. Wallace e.a. (1973) deden dit speciaal voor de energievergelijking $(i = j)$.

Ogenschijnlijk treden er dan moeilijkheden op in de traditionele beschouwing. De "produktie"-termen komen niet voor in de vergelijking van de totale energie (c.q. de vergelijking voor de verandering van $(u_i u_j)$), maar wél, met tegengesteld teken, in de energievergelijking van de gemiddelde beweging. Vanwege de gemiddeld negatieve korrelatie tussen $\tilde{u}_i$ en $\tilde{u}_j$ bij positieve $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ betekent de term energiewinst voor de turbulentie en kan zodoende gekarakteriseerd worden als omzetting van energie van gemiddelde beweging in turbulentie-energie.

In onderstaand schema komt deze gedachte nog eens tot uiting. Het gaat hierbij om de divergentie in de vergelijking voor de totale energie (zie Schönfeld, 1973) met uitzondering van divergentietermen met de invloed van druk of viskositeit: $\nabla_k \frac{1}{2} u_i u_i u_k$. Na de Reynolds-dekompositie $u_i = U_i + \tilde{u}_i$ en na middeling ontstaan de vier termen in kolom I, waarbij is aangegeven hoe dit verdeeld wordt over resp. de energievergelijking van de gemiddelde beweging (kolom II) en die van de turbulentie (kolom III).

	I totale energie gemiddeld	II energie gemiddelde beweging	III energie turbulentie
$\frac{1}{2} u_i u_i u_k \rightarrow$	$\nabla_k \frac{1}{2} U_i U_i U_k$	$\nabla_k \frac{1}{2} U_i U_i U_k$ (a)	
	$\nabla_k U_i \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k}$	$\nabla_k U_i \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k}$ (b)	
	$\nabla_k \frac{1}{2} U_k \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}$		$\nabla_k U_k \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}$ (d)
	$\nabla_k \frac{1}{2} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_k}$		$\nabla_k \frac{1}{2} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_k}$ (e)
		$-\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k} \nabla_k U_i$ (c)	$+\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k} \nabla_k U_i$ (f)
nul $\rightarrow$	nul		
			(e)+(f) = $\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k \nabla_k (U_i + \tilde{u}_i)}$

Hiermee is nog niet gezegd dat (f) de enige produktie is en in ons geval is dat zeker niet zo.

De voorgestelde nieuwe produktietermen (gemiddelde van momentane produktie) zijn, zoals reeds in woorden is gezegd:

A. in de vergelijking voor de Re-spanningen (4.7)

$$\overline{\tilde{u}_j \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i + \tilde{u}_i)} \quad \text{en} \quad \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (U_j + \tilde{u}_j)} \tag{4.12}$$

$$\text{i.p.v.} \; \overline{\tilde{u}_j \tilde{u}_k} \frac{\partial}{\partial x_k} U_i \quad \text{en} \quad \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k} \frac{\partial}{\partial x_k} U_j .$$

De termen (4.12) ontstaan door het samennemen van de termen 3, 4 en 5 in (4.7) met inachtneming van de inkompressibiliteitsvoorwaarde.

B. op analoge wijze in de turbulentie-energievergelijking (4.11)

$$\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i + \tilde{u}_i)}, \; \text{i.p.v.} \; \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k} \frac{\partial}{\partial x_k} U_i \tag{4.13}$$

door het samennemen van de termen 3 en 5 of door het samennemen van (e) en (f) in het bovenstaande schema. De term (c) kunnen we gemakkelijk laten verdwijnen door te schrijven

$$(b) + (c) = U_i \nabla_k \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k} .$$

De uiterst lastig te verklaren en te beschrijven snelheids-triplekorrelaties (de termen 5 in (4.7) en (4.11) en de term (e) in het schema) zijn nu als zodanig verdwenen en daarvoor is in de plaats gekomen een fysisch goed te begrijpen term nl. het gemiddelde van momentaan verrichte vervormingsarbeid door de turbulentiespanningen. Dit wil natuurlijk niet zeggen dat we de nu ontstane produktietermen ook zouden kunnen berekenen. Het gaat hier om de kwalificering van het probleem.

De energievergelijking
in de vorm

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k}(U_i + \tilde{u}_i)} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[U_k \tilde{k} + \overline{\frac{\tilde{p}}{\rho} \tilde{u}_k} - \nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_k} \right] + \epsilon = 0 \qquad (4.14)$$

Deze energiebalans drukt dus uit dat de verandering p.e.v. tijd van $\tilde{k}$ gemiddeld in "evenwicht" is met de turbulentie-energie die momentaan geproduceerd, overgedragen (de divergentietermen zijn nu advektie, overdracht door druk-snelheids korrelatie en molekulaire diffusie) en gedissipeerd wordt. Wanneer (4.11) (breng term 2 ook binnen de divergentie) en (4.14) geïntegreerd worden over een volume op de grenzen waarvan de termen binnen de divergentie nul zijn is de gemiddelde produktie voor de twee vergelijkingen hetzelfde (Wallce e.a., 1972) en is de traditionele verklaring van energie-uitwisseling tussen gemiddelde beweging en turbulentie herkregen, maar dan geldend over dat volume. De grenzen moeten dan vaste wanden zijn óf in een laminair stromend gebied liggen of het geldt bij benadering bij een glad vrij oppervlak. Ons geval voldoet hier dus wat het oppervlak betreft beslist niet aan, maar dat is juist gelegen in het feit dat de produktie van turbulentie-energie geschiedt vanuit oppervlak en dit wordt nu beschreven door de term (4.13).

Met behulp van (4.11) en onze aannamen van een twee dimensionale stroming in het x-y vlak (gemiddelde stroom in y-richting) zou er alleen sprake zijn van produktie van turbulentie komponenten in y-ri. Dit blijkt wanneer we de vergelijkingen voor de kinetische energie van de afzonderlijke komponenten opstellen, bv. door in (4.7) achtereenvolgens te stellen: i=j=1, i=j=2 en i=j=3 (zie (4.17), (4.18) en (4.19)). Een herverdeling van deze produktie over de komponenten van de turbulentie-spanningstensor zou door term 8 (interaktie druk met snelheidsgradiënten) gegeven worden (Rotta, 1951). De kwalitatieve motivering van Rotta is dat aangezien de druk-snelheidskorrelaties de isotropie bevorderen, deze korrelaties evenredig zijn met de afwijking van isotropie, hetgeen leidt tot (4.16). Een verdeling op deze wijze zal ook in ons geval een rol spelen, zij het een ondergeschikte. Het mechanisme dat we verwachten, nl. dat er momentaan in alle richtingen produktie van turbulentie zal optreden, wordt er niet door beschreven. Met (4.12) c.q. (4.13) volgt wel direkt een produktie in alle richtingen en zal in ons geval waar $\frac{\partial V}{\partial x}$ relatief klein is min of meer isotroop verlopen.

4.4 Motivering van de turbulentie-viskositeit m.b.v. de transport-vergelijkingen voor Reynolds-spanningen.

Met verwijzing naar hetgeen bij het derde type turbulentiemodel in par. 4.2 is gezegd, doen we een aantal aannamen overeenkomstig Vreugdenhil (1973a), met uitzondering van de verwaarlozing van onze nieuwe produktietermen (in genoemde lit. valt dat onder de diffusietermen):

a. stationaire beweging met te verwaarlozen advektie door de gemiddelde beweging, d.w.z. de traagheidstermen 1 en 2 in (4.7) c.q. (4.11) zijn verwaarloosbaar.

b. twee dimensionale stroming in x_2 richting (fig. 4.2), waarin $\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{(\dots)} = \frac{\partial}{\partial x_3}\overline{(\dots)} = 0$ en $U_1 = U_3 = 0$.

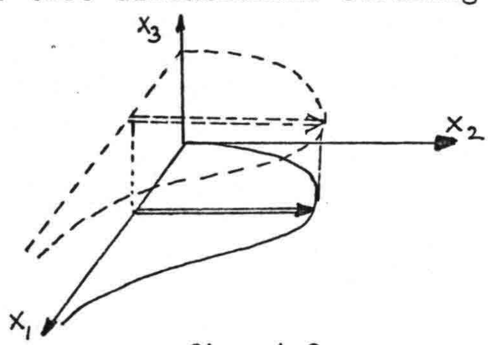


fig. 4.2

c. het getal van Reynolds, bv. ν_t/ν, wordt verondersteld zo groot te zijn dat molekulaire diffusie (term 7 in (4.7)) verwaarloosd kan worden en dissipatie alleen op kleine schaal plaatsvindt. Op die kleine schaal wordt isotropie verondersteld, zodat

$$\nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_k}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_k}} = \nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_k}\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_k}} = \nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_k}\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_k}} = \frac{1}{3}\,\epsilon \tag{4.15}$$

en $\nu \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}} = 0 \quad (i \neq j)$

d. de door Rotta (1951) voorgestelde uitdrukking voor de druk-snelheidsgradiënt-korrelaties:

$$\overline{\frac{\tilde{p}}{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}\right)} = -c_3 \frac{(\tilde{k})^{1/2}}{\ell_1} \left(\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \frac{2}{3} \tilde{k}\, \delta_{ij}\right), \tag{4.16}$$

waarin ℓ_1 "eine die durchschnittliche Grösse der Turbulenzelemente kennzeichnende Länge ist", wordt verondersteld ook in ons geval van relatief geringe anisotropie bruikbaar te zijn.

e. de dissipatie kan volgens (4.5) geschreven worden: $\epsilon = c_2 \tilde{k}^{3/2}/\ell$.

Met de veronderstellingen a, b en c ontstaan uit (4.7) de volgende zes vergelijkingen:

$$i=1,\ j=1:\ 2\overline{\tilde{u}_1 \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_k}} - \frac{2}{\rho}\overline{\tilde{p}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}\right)} + \frac{2}{3}\epsilon = 0 \tag{4.17}$$

$$i=2,\ j=2:\ 2\overline{\tilde{u}_2 \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k}(U_2+\tilde{u}_2)} - \frac{2}{\rho}\overline{\tilde{p}\left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}\right)} + \frac{2}{3}\epsilon = 0 \tag{4.18}$$

$$i=3,\ j=3:\ 2\overline{\tilde{u}_3 \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_k}} - \frac{2}{\rho}\overline{\tilde{p}\left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_3}\right)} + \frac{2}{3}\epsilon = 0 \tag{4.19}$$

$$i=1,\ j=2:\ \overline{\tilde{u}_2 \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_k}} + \overline{\tilde{u}_1 \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k}(U_2+\tilde{u}_2)} - \overline{\frac{\tilde{p}}{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1}\right)} = 0 \tag{4.20}$$

$$i=1,\ j=3:\ \overline{\tilde{u}_3 \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_k}} + \overline{\tilde{u}_1 \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\tilde{p}}{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_1}\right)} = 0 \tag{4.21}$$

$$i=2,\ j=3:\ \overline{\tilde{u}_3 \tilde{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k}(U_2+\tilde{u}_2)} + \overline{\tilde{u}_2 \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\tilde{p}}{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_2}\right)} = 0 \tag{4.22}$$

Deze vergelijkingen zijn voor wat betreft onze nieuw gedefinieerde produktietermen afwijkend van het stelsel van Vreugdenhil (1973a).

De brekende golven produceren turbulentie-spanningen d.m.v. de termen

$$\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}}$$

We veronderstellen dat de vrijkomende energie gelijk wordt verdeeld over de energiekomponenten van de turbulentie. We beschouwen nu een gebied als aangegeven in fig. 4.3 waarbij we veronderstellen dat de divergentietermen geïntegreerd over dit volume nul zijn. Binnen dit volume wordt nu door de golven p.e.v. oppervlak een vermogen geleverd = D. (zie (2.78)-(2.80)). Voor ons doel is het verder goed om binnen dit volume homogeniteit te veronderstellen, zodat we voor het gemiddelde resultaat de integratie weer achterwege kunnen laten.

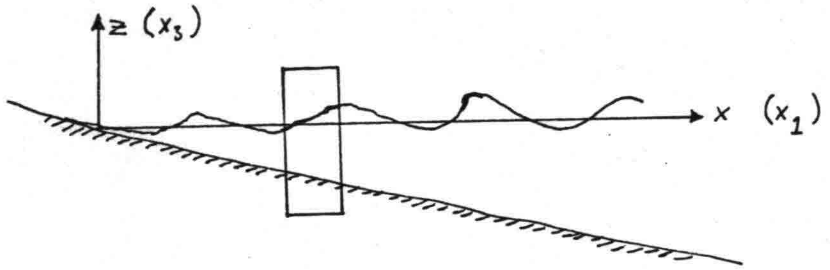


fig. 4.3

Dat gemiddelde resultaat is in onderstaande vergelijkingen weergegevan waar nu ook (4.16) is ingevuld. D en ϵ gelden hierin nu p.e.v. massa:

$$i=1,\ j=1: \qquad c_3 \frac{\tilde{k}^{\frac{1}{2}}}{\ell_1}\left(\overline{\tilde{u}_1^2} - \tfrac{2}{3}\tilde{k}\right) + \tfrac{2}{3}\epsilon - \tfrac{2}{3}D = 0 \tag{4.23}$$

$$i=2,\ j=2: \quad 2\overline{\tilde{u}_2\tilde{u}_1}\frac{\partial U_2}{\partial x_1} + c_3 \frac{\tilde{k}^{\frac{1}{2}}}{\ell_1}\left(\overline{\tilde{u}_2^2} - \tfrac{2}{3}\tilde{k}\right) + \tfrac{2}{3}\epsilon - \tfrac{2}{3}D = 0 \tag{4.24}$$

$$i=3,\ j=3: \qquad c_3 \frac{\tilde{k}^{\frac{1}{2}}}{\ell_1}\left(\overline{\tilde{u}_3^2} - \tfrac{2}{3}\tilde{k}\right) + \tfrac{2}{3}\epsilon - \tfrac{2}{3}D = 0 \tag{4.25}$$

$$i=1,\ j=2: \quad \overline{\tilde{u}_1^2}\frac{\partial U_2}{\partial x_1} + c_3 \frac{\tilde{k}^{\frac{1}{2}}}{\ell_1}\overline{\tilde{u}_1\tilde{u}_2} = 0 \tag{4.26}$$

$$i=1,\ j=3: \qquad c_3 \frac{\tilde{k}^{\frac{1}{2}}}{\ell_1}\overline{\tilde{u}_1\tilde{u}_3} = 0 \tag{4.27}$$

$$i=2,\ j=3: \quad \overline{\tilde{u}_3\tilde{u}_1}\frac{\partial U_2}{\partial x_1} + c_3 \frac{\tilde{k}^{\frac{1}{2}}}{\ell_1}\overline{\tilde{u}_2\tilde{u}_3} = 0 \tag{4.28}$$

Uit (4.27) en (4.28) volgt $\overline{\tilde{u}_1\tilde{u}_3} = \overline{\tilde{u}_2\tilde{u}_3} = 0$
Een maat voor de anisotropie volgt uit (4.26)

$$-\frac{\overline{\tilde{u}_1\tilde{u}_2}}{\overline{\tilde{u}_1^2}} = \frac{1}{c_3}\,\frac{\partial U_2/\partial x_1}{\tilde{k}^{\frac{1}{2}}/\ell_1}. \tag{4.29}$$

Hieruit volgt $\quad -\overline{\tilde{u}_1\tilde{u}_2} = \nu_t \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}, \qquad (4.30)$

met $\nu_t = \frac{\ell_1}{c_3} \frac{\overline{\tilde{u}_1^2}}{\tilde{k}^{\frac{1}{2}}}$.

De energievergelijking (som van (4.23), (4.24) en (4.25))geeft nu $2\overline{\tilde{u}_2\tilde{u}_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = 2(\epsilon - D)$, hetgeen geheel overeenkomstig de verwachting is. Voor ons doel is het goed om te stellen dat $\epsilon \approx D$, waarmee uit (4.23) volgt: $\overline{\tilde{u}_1^2} = \frac{2}{3}\tilde{k}$ (zoals bij isotropie). Voor pure afschuifstroom, waarbij D niet in (4.23)-(4.25) voor zou komen geldt met (4.5) $\overline{\tilde{u}_1^2} = c_4 \tilde{k}$, waarin $c_4 = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2} \frac{c_2}{c_3} + \frac{2}{3}\right)$, zodat we veilig kunnen stellen: $\overline{\tilde{u}_1^2} = c_5 \tilde{k}$.

Daarmee is $\nu_t = c_6 \, \ell \, \tilde{k}^{\frac{1}{2}}$, (4.31)

waarin $c_6 = \frac{\ell}{\ell_1} \frac{c_5}{c_3}$.

Onder bepaalde voorwaarden geldt dus het eddy-viscosity concept (4.30) met ν_t volgens (4.31), vergelijk (4.1).

4.5 Nogmaals de energiebalans van de fluktuerende beweging.

De fluktuerende beweging bestaat uit golfbeweging en turbulentie: $\underline{u}' = \underline{u}_w + \underline{\tilde{u}}$; $u_i' = u_{w_i} + \tilde{u}_i$.

De kinetische energie van de fluktuerende beweging p.e.v. massa

$$k' = k_w + \tilde{k} \quad \text{, waarin } k_w = \frac{1}{2}(u_w^2 + v_w^2 + w_w^2)$$

en $\tilde{k} = \frac{1}{2}\overline{(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2)}$.

De formeel te bewandelen weg ter verkrijging van een over de vertikaal geïntegreerde en daarna gemiddelde energiebalans voor de fluktuerende beweging bevat logischerwijze achtereenvolgens de stappen:

1. stel de energiebalans op voor een punt
2. integreer de vergelijking over de hoogte
3. middelen over de tijd

De eerste twee stappen kunnen gekombineerd worden tot de energiebalans voor een kontrole-volume van fig. 2.4, maar dan is de preciese struktuur van de bijdragen aan het vrije oppervlak niet zonder meer duidelijk.

De balans (4.11) geldt ook, wanneer we i.p.v. de slangetjes accenten schrijven. Dan ontstaat:

$$\frac{\partial k'}{\partial t} = -\tilde{u}_i\tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i + \tilde{u}_i + u_{w_i}) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{\tilde{p}}{\rho}\tilde{u}_j} + U_j\tilde{k} - \nu\frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}\right) - \epsilon$$

$$-\overline{u_{w_i}u_{w_j}}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\left(k_w + \frac{p_w}{\rho}\right)u_{w_j}}) + U_j k_w\right] \qquad (4.32)$$

Er wordt gesteld dat turbulentie en golfbeweging niet gekorreleerd zijn, hetgeen overigens niet wil zeggen dat ze ook onafhankelijk van elkaar zijn.
We kompleteren deze vergelijking met de bijdrage van de potentiële energie. Stel $k \equiv k' + g\,(z-\zeta)$.

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k'}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\,\big(k + g\,(z-\zeta)\big) =$$

$$= \frac{\partial k'}{\partial t} + (U + u_w + \tilde{u})_j \frac{\partial}{\partial x_j}\big(k + g\,(z-\zeta)\big).$$

Gemiddeld levert $\tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\big(g(z-\zeta)\big)$ niets op. Dit in (4.32) en met verwaarlozing van molekulaire diffusie levert

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i + \tilde{u}_i)} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{\tilde{p}}{\rho}\tilde{u}_j} + U_j \tilde{k}\right) - \epsilon$$

$$- \overline{u_{w_i} u_{w_j}}\, \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\left(k_w + \frac{p_w}{\rho} + g\,(z-\zeta)\right)u_{w_j} + U_j\big(k_w + g(z-\bar{\zeta})\big)}\right]. \quad (4.33)$$

Phillips (1969) geeft het resultaat van het tijdsgemiddelde van de over de hoogte geïntegreerde energiebalans, dat in (2.78) gesplitst is in golf- en turbulentie-bijdragen. De toelichting hierop volgt nu, m.b.v. (4.33) en na alles wat er in de vorige paragraaf over "produktie" is gezegd. Uit (2.78) (met $U_\alpha = \hat{U}_\alpha$):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\tilde{F}_\alpha - \frac{1}{\rho}R_{\alpha\beta}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{\int_{-h}^{\zeta}\left(\tfrac{1}{2}\tilde{u}_i\tilde{u}_i\tilde{u}_\alpha + \frac{\tilde{p}}{\rho}\tilde{u}_\alpha\right)dz} + \overline{\int_{-h}^{\zeta}\tilde{u}_\alpha\tilde{u}_i\frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha}\,dz}$$

(in de laatste integraal levert i=3 niets op)

$$\approx \overline{\int_{-h}^{\zeta}\tilde{u}_\alpha\tilde{u}_i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(U_i + \tilde{u}_i)\,dz} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{\int_{-h}^{\zeta}\frac{\tilde{p}}{\rho}\tilde{u}_\alpha\,dz}.$$

= gemiddelde van momentane produktie van turbulentie-energie + divergentie (overdracht) van energie door $\tilde{p}\ \tilde{u}$ interaktie

Beschouwen we nu weer de totale energiebalans (2.78), dan zien we de overeenkomst met de termen van (4.33) in het stationaire geval.
Vergelijking (2.80):

$$+D - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\hat{U}_\alpha \tilde{E} + \tilde{F}_\alpha\right) + R_{\alpha\beta}\frac{\partial \hat{U}_\beta}{\partial x_\alpha} - \epsilon' = 0\,, \quad (4.34)$$

waarin $\epsilon' = \rho\epsilon$,
toont een balans (gemiddeld) tussen het door de golven geleverde vermogen en de turbulentie-energie die momentaan geproduceerd,

overgedragen (d.m.v. druk-snelheids-interaktie, en advektie) en gedissipeerd wordt.

Nu is de energievergelijking niet lokaal op te lossen omdat we de relevante korrelaties die een rol spelen bij energie-overdracht van golven naar turbulentie niet kennen. De min of meer heuristische beschrijvingen die in de literatuur gegeven worden lijken niet van toepassing op dit ingewikkelde probleem van brekende golven. Spektrale beschrijving lijkt de aangewezen weg, ware het niet dat we voor een eerste aanpak van de energiebalans nog meer aannamen c.q. verwaarlożingen kunnen doen.
De energiebalans van de golven hadden we gereduceerd tot vergelijking (2.84): $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F_\alpha = -D$. Het ligt nu voor de hand om de totale energiebalans (4.34) te vereenvoudigen tot $D - \epsilon' = 0$, omdat de bijdrage van de interaktie van Re-spanningen met de gemiddelde stroom tot de turbulentie-energie verwaarloosbaar zijn.
We hebben dan $\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\epsilon$, (4.35)
met de restriktie dat deze vergelijking pas na integratie over een "voldoend" groot gebied mag worden toegepast, omdat we de lokale overdrachten niet kennen. M.a.w. binnen het integratiegebied moet de turbulentie voldoende homogeen zijn.
De mogelijkheid van een oplossing is er in dit stadium dus wel van afhankelijk of we deze schematisatie kunnen maken.

Het blijkt nu, dat we tijdens pogingen om het interne mechanisme van de turbulentie gedetailleerd te beschrijven zoveel vereenvoudigingen hebben aangebracht, dat we met (4.35) terug zijn gekomen op de uitdrukking die ook zonder de vóór-afleiding van dit hoofdstuk op te stellen is.

Hoofdstuk 5

TURBULENTIE MODEL

5.1 Overzicht

In de vorige hoofdstukken is voor een deel reeds de weg gebaand naar een model dat nu stap voor stap opgebouwd wordt. Het is gebleken, dat beschrijving van de turbulente horizontale impulstransporten m.b.v. het koncept van de turbulentie-viskositeit: $-\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = \rho\nu_t \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}$ onder bepaalde voorwaarden een bruikbare benadering lijkt, echter niet op grond van de mengwegtheorie en bijbehorend gradiënt-transport-model. Enkele van de voorwaarden zijn genoemd op het eind van par. 3.2 en volgen uit de aannamen die in par. 4.4 gedaan zijn. Het is nodig dat we slechts één snelheidsschaal en één lengteschaal kunnen definiëren. De lengteschaal binnen de brandingszone moet klein zijn t.o.v. de breedte van de brandingszone, maar mag evenals de tijdschaal waarop het probleem beschouwd wordt ook weer niet te klein zijn. Op kleine schaal moet immers rekening gehouden worden met traagheidstermen en bijdragen van turbulente en molekulaire diffusie waardoor het concept onbruikbaar wordt.

Uit een beschouwing over de energiehuishouding in de brandingszone maken we een schatting van de turbulentie-intensiteit ($\propto$ karakteristieke turbulentie snelheid w). Het wordt aannemelijk gemaakt dat de lokale diepte een karakteristieke lengtemaat voor de turbulentie is. Het blijkt dat de met deze lengte- en snelheidsschaal gevormde turbulentie-viskositeit: $\nu_t = c * w * h(x)$ konsistent is met de door de brandingsstroom veroorzaakte gemiddelde anisotropie. Alhoewel het resultaat funktioneel hetzelfde is als dat volgt uit de mengwegthorie, is de aanpak een geheel andere.
Op de grens van de brandingszone is de brandingsstroom te beschouwen als een turbulente afschuifstroom zonder begrenzing. We moeten hier dus rekening houden met het intermitterend karakter van de turbulentie, waardoor op de brekerlijn geen diskontinuïteiten kunnen voorkomen.

5.2 Energiehuishouding in de brandingszone

In ons geval van intense turbulentie (groot getal van Reynolds) en een relatief zwakke (sekundaire) stroom, is als duidelijke bovengrens van de gemiddelde impulstransporten $-\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ aan te wijzen:

$$\rho w^2 \equiv \frac{1}{3} \rho \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i} \,. \qquad (5.1)$$

Met (5.1) wordt de karakteristieke turbulentie snelheid w gedefinieerd, die we eerst zullen trachten te bepalen. De relatie tussen de gezochte Re-spanningen en w^2 volgt uit een beschouwing over de anisotropie van de brandingsstroom.
Ons uitgangspunt dat de beweging quasi stationair is, geldt ook voor de turbulentie. Gemiddeld verandert het turbulentie-niveau dus niet, we zeggen dan dat de turbulentie in energetisch evenwicht is. De turbulentie wordt in hoofdzaak opgewekt door het breken van de golven. Hierdoor ontstaat een sterke menging die nog geholpen wordt door orbitaalbeweging, opstijgende luchtbellen, up-rush en de massatransportprofielen. We nemen daarom aan, dat in aanzienlijke gebieden de turbulentie homogeen is en daar geldt dan dat het geleverde vermogen aan de turbulentie (="produktie") gelijk is aan de dissipatie van turbulentie energie. Nu zal stellig over de gehele brandingszone de turbulentie gemiddeld niet homogeen zijn. Bij een plunging breker zal het turbulentie-niveau nabij het breekpunt wat hoger zijn dan verder in de richting van de kust. In de "swash zone" zal de turbulentie i.h.a. weer wat toenemen. Bij spilling brekers ligt het iets anders en e.e.a. is ook nog afhankelijk van de topografie en de breedte van de brandingszone. We bepalen ons nu bij een monotoon oplopend strand en stellen, dat het voor een eerste verkenning voldoende is om homogeniteit over de gehele brandingszone aan te nemen. Hiermee voldoen we zeker aan de eis die bij de vereenvoudiging van de energiebalans is gesteld.

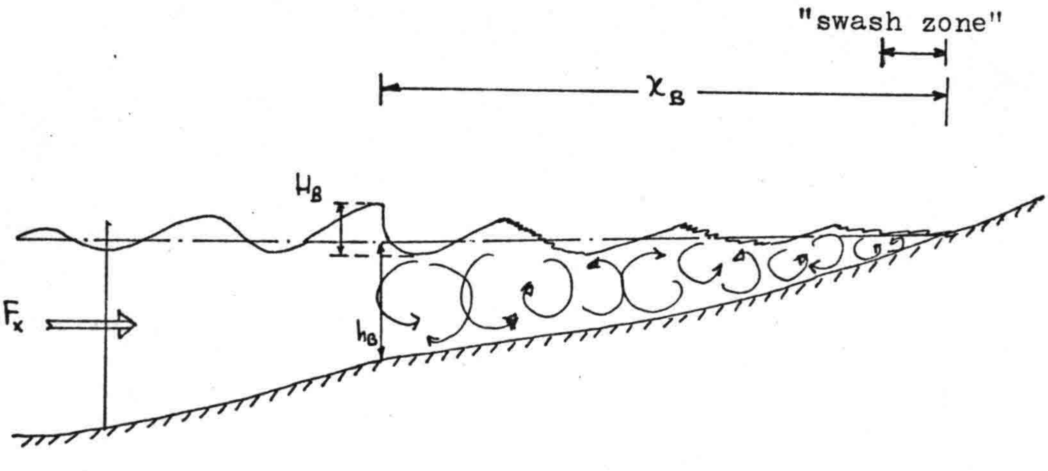


fig. 5.1
wervels in de brandingszone

De schatting die we nu maken van de energiedissipatie p.e.v. tijd en massa is (zie ook (4.5) met de daarbij genoemde redenen)

$$\epsilon = c_0 \frac{w^3}{\ell}, \tag{5.2}$$

waarin c_0 orde 1 is.

ℓ is een karakteristieke lengtemaat van de turbulente formaties die de belangrijkste hoeveelheid turbulentie energie bevatten, de energie-rijke wervels (ERW). De snelheidsschaal w is een maat voor de snelheid in de ERW. Deze grotere wervels zijn het meest effektief in transportprocessen en ontvangen hun energie vrijwel direkt van de "hoofdbeweging" d.i. de op grote schaal aanwezige oorzaak van de turbulentie. De lengteschaal ℓ zou gedefinieerd kunnen worden als een integraal-schaal volgens (4.2) en (4.3). Het niet lineaire mechanisme van de turbulentie (tot uiting komend in niet lineaire termen in de bewegingsvergelijking) zorgt voor het ontstaan van steeds kleinere wervels, d.w.z. wervels van een bepaalde afmeting, ontstaan als gevolg van instabiliteit van één orde grotere wervels (wervelcascade) en daarbij wordt energie overgedragen naar beweging op kleinere schaal, hetgeen doorgaat totdat de afmeting van de wervels zo klein wordt dat door de viskositeit dissipatie van hun kinetische energie direkt plaatsvindt (energiecascade).

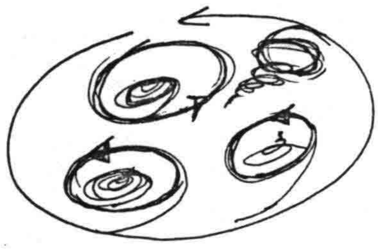


fig. 5.2
wervelcascade

Bij een groot getal van Reynolds $\frac{w\ell}{\nu}$ is de beweging op grote schaal onafhankelijk van de viskositeit en het proces van dissipatie. Omgekeerd is de tijdschaal van de beweging op kleine schaal dan relatief zo klein dat we kunnen veronderstellen dat deze beweging onafhankelijk is van de beweging op grote schaal en daarmee van de uitwendige omstandigheden. Zij is dan alleen afhankelijk van de snelheid waarmee energie via het cascadeproces uit en door de beweging op grote schaal wordt aangevoerd én van ν. De tijdschaal van de warmtebeweging is erg klein t.o.v. de tijdschaal $\frac{\ell}{w}$ van de grote wervels waardoor zij in staat is snel op veranderingen in de hoofdbeweging te reageren, zodat zelfs in het geval dat er geen balans is tussen produktie en dissipatie er toch bij benadering een lokaal evenwicht is tussen de toegevoerde energie p.e.v. tijd en de dissipatiesnelheid.
In deze "universal equilibrium range" wordt de turbulentie alleen door de parameters ϵ en ν bepaald (1^o hypothese van Kolmogorov). Voor het bestaan hiervan moet het Reynoldsgetal $\frac{w\ell}{\nu}$ groot genoeg zijn opdat

"lokale isotropie" aanwezig kan zijn (lokaal wil zeggen: op de kleine schaal), want als op de dissipatieschaal nog anisotropie aanwezig is zijn de parameters ϵ en ν alléén niet voldoende.
Er is inderdaad een duidelijke experimentele overtuiging, dat ook in sterk anisotrope stroming de range van de grote golfgetallen (kleine wervels) bij benadering isotroop is.
Bij een voldoend groot Reynolds-getal is er in de equilibrium range van het turbulentie energie-spektrum een deel dat niet door het direkte dissipatiemechanisme, dus alléén door ϵ bepaald wordt; dit is de zgn. inertial subrange (2° hypothese van Kolmogorov). De energieflux in dit deel van het spektrum is dus:

a. konstant over de frekwenties c.q. golfgetallen en
b. gelijk aan ϵ.

We kunnen nu stellen dat de energie p.e.v. massa die door de ERW aan de kleinere wervels p.e.v. tijd wordt overgedragen $\propto w^2 \cdot \frac{w}{\ell}$ is. De energiedissipatiesnelheid ϵ is dan ook van deze orde, vandaar (5.2). We kunnen ook zeggen, dat de relatieve snelheid van verandering (afname) van kinetische energie van de turbulentie $\left(-\frac{1}{w^2}\frac{dw^2}{dt}\right)$ van dezelfde orde is als de "frekwentie" van de ERW, dus $-\frac{1}{w^2}\frac{dw^2}{dt} \sim \frac{w}{\ell}$, waarin $-\frac{dw^2}{dt} \sim \epsilon$, dus $\epsilon \sim \frac{w^3}{\ell}$.

De grote wervels verliezen natuurlijk ook direkt energie t.g.v. viskeuze dissipatie op een tijdschaal $\frac{\ell^2}{\nu}$, zodat deze viskeuze energiedissipatie p.e.v. tijd van de orde $\frac{\nu w^2}{\ell^2}$ is. Nu is $\frac{\nu w^2}{\ell^2} \ll \frac{w^3}{\ell}$ wanneer $Re = \frac{w\ell}{\nu} \gg 1$ en daar gaan we van uit.

Dat bij grote Reynolds-getallen de veronderstelde statistische onafhankelijkheid en het dynamisch evenwicht het meest duidelijk zijn, blijkt wanneer we de "Kolmogorov-microschalen" voor lengte, tijd en snelheid, gevormd met de parameters ϵ en ν (resp. $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$, $\tau = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}$ en $v = (\nu\epsilon)^{1/4}$ waarmee $\eta v/\nu = 1$!) vergelijken met de "macro-schalen" ℓ, $t = \frac{w}{\ell}$ en w van de turbulentie. Het invullen van $\epsilon \sim \frac{w^3}{\ell}$ levert

$$\eta/\ell \sim Re^{-3/4}, \quad \tau/t \sim Re^{-1/2} \quad \text{en} \quad \frac{v}{w} \sim Re^{-1/4},$$

waaruit volgt dat η, τ en v maar vooral η bij grote Re veel kleiner zijn dan resp. ℓ, t en w.

Een aannemelijke en illustratieve verklaring van het cascade-proces is bv. te vinden in Tennekes en Lumley (1972), chap. 3 en 8. Het blijkt dat er gemiddeld meer wervelstrekking dan -indrukking is, waarmee turbulente wervelsterkte en de daarmee gepaard gaande energie-overdracht van grote naar kleine schalen plaats vindt, tot de schaal van de dissipatie. Wervels van een bepaalde grootte-orde worden in de richting van de hoofddilatatie van de momentaan en lokaal aanwezige anisotrope struktuur van de grotere wervels uitgerekt en zolang de invloed van de viskositeit nog verwaarloosbaar is, behouden ze (gemiddeld) hun draaimoment en worden dus dunner in het vlak waarin ze hun circulatie hebben en gaan naar een grotere repetentie d.i. kleinere golflengte.

5.3 Illustraties

De schatting (5.2) is een algemene uitdrukking en een zeer sterk middel bij de behandeling van de turbulentie. Als voorbeeld kunnen de volgende twee typisch verschillende situaties dienen. In par. 5.4 (p. 89) wordt teruggekeerd naar de toepassing op de brandingszone.

1. turbulente grenslaag-stroming.

Hier hebben we te maken met een duidelijke hoofdstroom ("afschuifstroom"), met anisotrope en inhomogene turbulentie. We beschouwen turbulente grenslagen die voorkomen bij eenparige stroming door ronde buizen, tussen 2 evenwijdige platen (beide stromen gedreven door konstante gradiënten in het piëzometrisch niveau in de richting van de hoofdstroom, zeg x-richting), grenslagen van ± konstante dikte langs een enkele vlakke plaat en Couette-stroming (konstante schuifspanning in y-ri.).

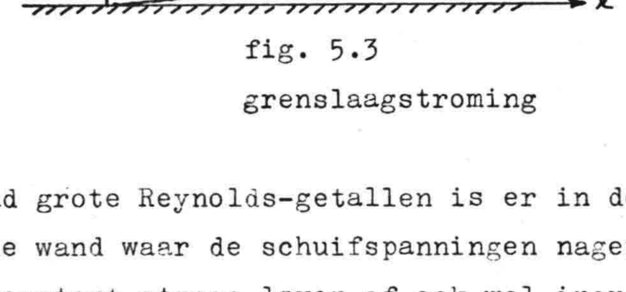


fig. 5.3
grenslaagstroming

Bij voldoend grote Reynolds-getallen is er in de grenslagen een deel dicht bij de wand waar de schuifspanningen nagenoeg konstant zijn. Dit is de constant-stress layer of ook wel inertial sublayer in analogie met de inertial subrange in het energiespektrum maar nu ruimtelijk gezien (Tennekes en Lumley, 1972). Uit de geïntegreerde bewegingsvergelijkingen volgt, dat hiervoor moet gelden: $y \ll \dfrac{\tau_w}{\left\| \frac{dP}{dx} \right\|}$.

τ_w is de gemiddelde schuifspanning aan de wand

$$\frac{\tau_w}{\rho} \approx -\overline{\tilde{u}\tilde{v}} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} \qquad (5.3)$$

Deze relatie is exakt in het geval van een vlakke Couette-stroming waar de impuls van de stroom i.p.v. door de konstante drukgradiënt $\frac{dP}{dx}$ in stand gehouden wordt door eenparige beweging van één van de vlakke platen in z'n eigen vlak. In bedoelde laag zijn slechts één lengte- en één snelheidsschaal relevant en hier geldt:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y}, \tag{5.4}$$

waarin κ de konstante van Von Kármán en u_* de "schuifspanningssnelheid" is. $u_* \equiv (\tau_w/\rho)^{1/2}$ (5.5)

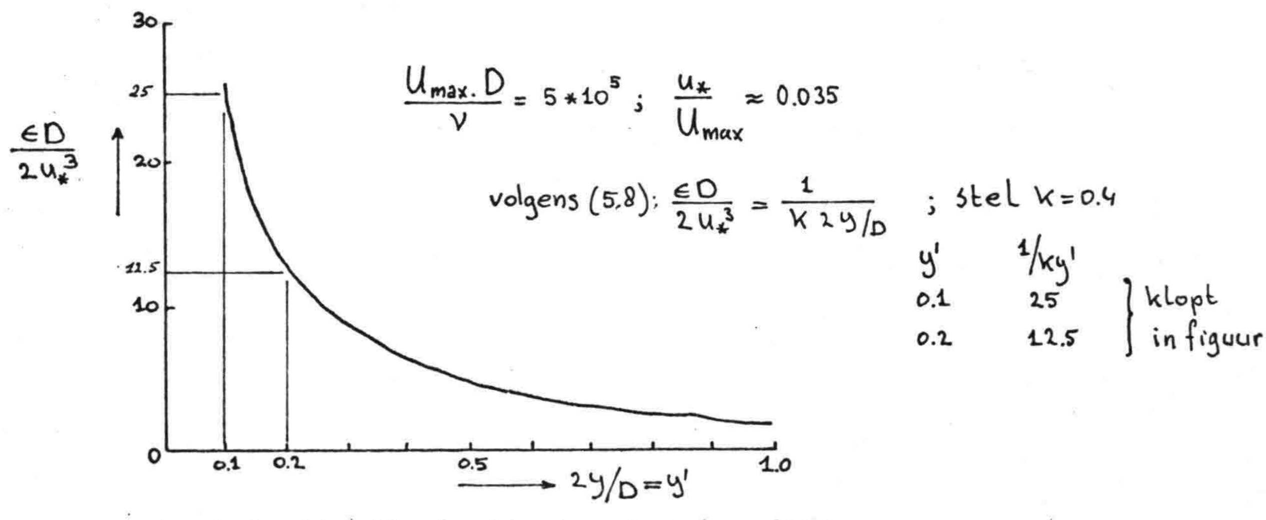
Het profiel van de gemiddelde snelheid is logaritmisch. Voor die waarden van y waarvoor de bijdrage van de viskositeit tot de gemiddelde schuifspanning verwaarloosbaar is ($\frac{yU}{\nu} \gg 1$, dus niet té dichtbij de wand) is dan $-\overline{\tilde u \tilde v} = u_*^2$. De produktie p.e.v. tijd van turbulentie, d.w.z. van haar kinetische energie is

$$-\overline{\tilde u \tilde v}\,\frac{dU}{dy} = \frac{u_*^3}{\kappa} \tag{5.6}$$

De produktie is zeer inhomogeen. In de beschouwde laag de divergentietermen in de energievergelijking voor bv. een 2-dim. grenslaag:

$$\underbrace{\overline{\tilde u \tilde v}\,\frac{dU}{dy}}_{\text{produktie}} + \underbrace{\epsilon}_{\text{dissipatie}} + \frac{d}{dy}\underbrace{\overline{\tfrac{1}{2}(\tilde u^2 + \tilde v^2 + \tilde w^2)\tilde v + \frac{\tilde p}{\rho}\tilde v}}_{\text{diffusie}} = 0 \tag{5.7}$$

(volgt uit (4.11)) gewoonlijk verwaarloosd, zodat voor de viskeuze dissipatie van turbulente kinetische energie, $\epsilon \approx \frac{u_*^3}{\kappa y}$ (5.8) geschreven kan worden. De geldigheid van deze betrekking blijkt bv. uit fig. 5.4; deze figuur is overgenomen uit Hinze (1959, fig. 7-42). De hierin voorkomende ϵ is gemeten, uitgaande van (4.4).



turbulentie-dissipatie in stroming door een ronde buis (D=diameter)

fig. 5.4

We zien dus dat met karakteristieke snelheid $w = u_*$ en karakteristieke lengte $\ell = \kappa y$ in dit geval ook de vorm $\epsilon \sim \frac{w^3}{\ell}$ ontstaat.

Zelfs in het overige turbulente deel van de grenslaag voldoet de schatting (5.2), wanneer we de turbulente grenslaag als geheel beschouwen. We doen dit nu voor de zgn. "core-region" in kanaal- en buisstroming.

In hoofdstuk 4 is duidelijk geworden dat het voorlopig niet zinvol is om te proberen de energievergelijking voor de fluktuerende beweging op te lossen. In een lokale beschouwing zouden dan ook invloeden van advektie en diffusie meegenomen moeten worden. Op pag. 5.2 is besproken dat het wel zinvol is om, met de veronderstelling van gemiddeld homogene turbulentie, de energiebalans voor de gehele brandingszone op te stellen. In het voorbeeld van de grenslaag, waar we overigens in staat zijn lokale grootheden vrij nauwkeurig te bepalen, geeft een dergelijke overall-beschouwing ook een goed inzicht. Het resultaat van de beschouwing van de spektrale energie-overdracht was de schatting $\epsilon = c_0 \frac{w^3}{\ell}$.

Dit is onafhankelijk van de aanwezigheid van "produktie", dus is, zoals gezegd, ook geldig wanneer er geen balans tussen produktie en dissipatie is. Als het turbulentie-niveau door voortdurende produktie (hier $\overline{\tilde{u}\tilde{v}} \frac{dU}{dy}$) gehandhaafd blijft en ϵ is als $O(\frac{w^3}{\ell})$ geschat, dan moet dus ook de produktie $O(w^3/\ell)$ zijn.

Zoals bekend is het schuifspanningsverloop lineair:

$$-\overline{\tilde{u}\tilde{v}} + \nu \frac{dU}{dy} = \frac{\tau_w}{\rho} \left(1 - \frac{y}{h}\right), \tag{5.9}$$

waarbij $y = h$ de hartlijn van kanaal of ronde buis is.

$\nu \frac{dU}{dy}$ is verwaarloosbaar. $\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ is dus $O(u_*^2)$.

De diffusietermen in bv. (5.7) zijn nu niet te verwaarlozen.

$\overline{\tilde{k}}$ en $\tilde{p}/\rho$ zullen ook $O(u_*^2)$ zijn omdat de turbulentie-energie door $\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ "gemaakt" wordt. Omdat de grote wervels $O(h)$ zijn, zijn nu alle termen in (5.7) $O(\frac{u_*^3}{h})$. Ook zo blijkt dus dat de produktie, zoals boven reeds aangegeven (met $\ell = h$), $O(\frac{u_*^3}{h})$ is. Dit is van groot belang, want hiermee wordt bv. de zgn. "velocity-defect law" voor de "core-region" gevonden. Voor de core-region volgt een indikatie van de geldigheid van (5.2) ook uit fig. 5.4 en uit metingen van ruimtelijke korrelaties die J. Laufer in een 2-dim. kanaal uitgevoerd heeft (hij deed dat niet in ronde buizen waar fig. 5.4 voor geldt), zie Hinze (1959) p.533. De integraalschaal L_g (zie

(4.2) en (4.3)) in y en z richting waren ongeveer gelijk aan elkaar en 0.2 à 0.3 $*$ h. Uit fig. 5.4 volgt dat de gemiddelde waarde van $\frac{\epsilon h}{u_*^3}$ voor y/h tussen 0.5 en 1.0, 3.25 is. Stellen we in $\epsilon = c_0 \frac{w^3}{\ell}$, $w = u_*$, dan volgt $\ell = c_0 \frac{h}{3.25} \approx c_0 * 0.3\, h$.
Wanneer we w volgens (5.1) bepalen, dan volgt uit de gemeten waarde van $\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}$ in dezelfde proef $w^3 = 0.76\, u_*^3$, zodat $\ell = c_0 \cdot \frac{0.76}{3.25} h \approx c_0 * 0.23\, h$. Het blijkt dus, dat een lengteschaal gedefinieerd volgens $\ell = c_0 w^3/\epsilon$, waarin w zo realistisch mogelijk en $c_0 = 1$ gekozen wordt, waarden oplevert die zeer goed overeenkomen met de transversale integraalschaal.

2. roervat

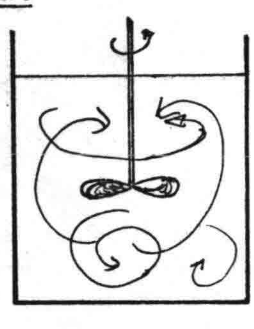


fig. 5.5 roervat (ongeveer een kubus met volume ℓ^3)

Veronderstel vanwege de sterke menging homogene turbulentie. Haar intensiteit is te schatten door het geleverde vermogen gelijk aan de energiedissipatiesnelheid ϵ te stellen. Indien het geleverde vermogen 1 kW$[ML^2T^{-3}]$ is, dan: $1\,kW = \rho * \frac{w^3}{\ell} * \ell^3$, waarin w de gevraagde karakteristiek voor de intensiteit is.

Als het roeren ophoudt is het initiale verval van de turbulentie-energie te berekenen met: $\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2} w^2\right) = \frac{w^3}{\ell}$.

Opm. turbulentie-intensiteit $\equiv \sqrt{\overline{\tilde{u}_1^{\,2}} + \overline{\tilde{u}_2^{\,2}} + \overline{\tilde{u}_3^{\,2}}}$ (5.10)

De gemiddelde kinetische energie van de turbulentie $\tilde{k} = \frac{1}{2}\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}$.
Met (5.1) volgt: $\tilde{k} = \frac{1}{2}\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_i} = \frac{3}{2} w^2$ en intensiteit =
$$\sqrt{2\tilde{k}} = w\sqrt{3} \qquad (5.11)$$

5.4 De lengteschaal van de turbulentie in de brandingszone

Hieronder wordt aangetoond dat de afmeting van de grote, energierijke wervels van de grootte-orde van de plaatselijke diepte zal zijn, zie fig. 5.1. In deze paragraaf zullen we het assenstelsel van fig. 5.3 gebruiken. Stel de turbulentie primair isotroop d.w.z. er zijn geen Re-spanningen en dus wordt het brandingsstroomprofiel $U(y)$ ook niet door de turbulentie beïnvloed. Bij een initiële gradiënt treedt er rek op en wel in de richting van de hoofddilatatie. Hierdoor ontstaan wervels met horizontale as, waarvan de dwarsafmetingen door de diepte worden beperkt. De vervorming geeft op haar beurt weer anisotropie, dus Reynolds-spanningen, waardoor $\frac{dU}{dy}$

Het bovenstaande wordt toegelicht aan de hand van het voorbeeld van grenslaag-stromingen. Deze kunnen vaak voor wat de gemiddelde snelheid betreft als twee-dimensionaal worden beschouwd, maar er treden drie-dimensionale "rollen" van achteroverliggende wervels in op (fig. 5.6), zie ook Tennekes en Lumley (1972, p. 41). Er moet wel bij vermeld worden, dat deze wervels meestal niet "zichtbaar" zijn vanwege de vele superposities van turbulente bewegingen.

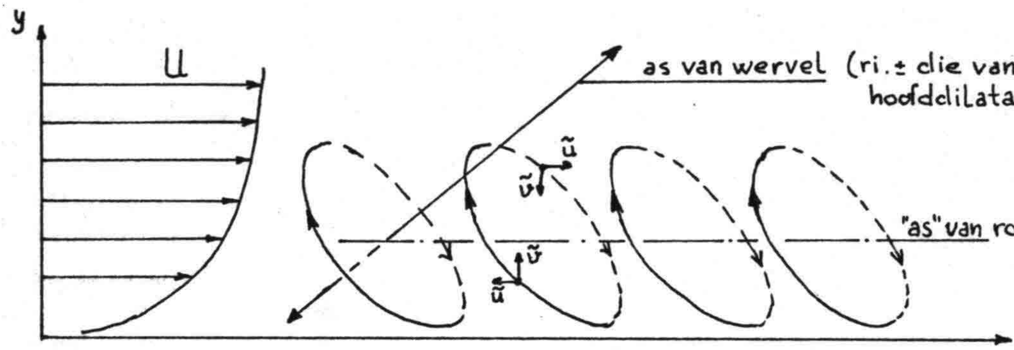


fig. 5.6 wervels in grenslaag stroming

Bij deze wervels treedt een negatieve korrelatie tussen $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$ op. In een turbulente stroom met $\frac{dU}{dy} > 0$ en dus gemiddeld positieve schuifspanningen (=Re-spanningen $= -\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$) is dat ook noodzakelijk. Immers een positieve $\tilde{v}$ zal gemiddels een x-impulsie tekort meenemen.

Oftewel: bij positieve $\tilde{v}$ komen gemiddeld meer negatieve waarden van $\tilde{u}$ voor dan positieve en andersom, zodat $\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ negatief zal zijn. Negatieve Re-spanningen $-\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ zou betekenen, dat er gemiddeld energie-overdracht van turbulentie naar hoofdstroom plaats zou hebben. Dat is in strijd met de tweede hoofdwet van de thermodynamika ,die wijst op het irreversibele proces van energie-overdracht van geordende naar ongeordende beweging.

Gemiddeld zullen de wervels in de brandingszone geen afmeting hebben die groter is dan de plaatselijke diepte. Indien dat wel het geval zou zijn, zouden die wervels een vertikale as moeten hebben. Horizontale wervels werden wèl voorgesteld door Longuet-Higgins (zie p. 53) en waarschijnlijk ook door Bowen (zie p. 42). M.b.v. fig. 5.7 wordt aangetoond, dat zulke wervels niet verantwoordelijk zijn voor de beïnvloeding van $U(y)$.

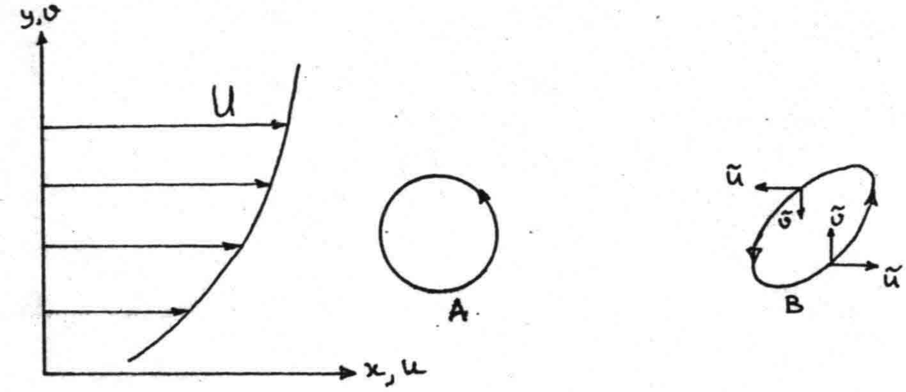


fig. 5.7

"Langs" de wervel die een cirkelbeweging maakt in een afschuifstroom (A in fig. 5.7) is gemiddeld geen impulsoverdracht: $\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = 0$.
"Langs" de wervel B die vanwege de gradiënt van de gemiddelde snelheid $\frac{dU}{dy}$ uit de eventueel aanwezige cirkelbeweging zou moeten ontstaan, zou een positieve korrelatie tussen $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$ moeten optreden, hetgeen gemiddeld niet waar is.

Nu is de brandingsstroom t.a.v. de turbulentie niet als hoofdbeweging te beschouwen, maar de gemiddelde beïnvloeding van de brandingsstroom door de turbulentie geschiedt wel door positieve Re-spanningen bij positieve gradiënt van de gemiddelde snelheid. De "afschuifbeweging" van de brandingsstroom is wel in staat initiaal aanwezige ongeveer ronde kleurstof-vlekken "uit te rekken" op de manier zoals dat in figuur 5.8 is weergegeven. Deze figuur is gegeven door Bouwmeester (1972, fig. 26). Dit lijkt veel op de dispersie in een afschuifstroom (fig. 5.9).

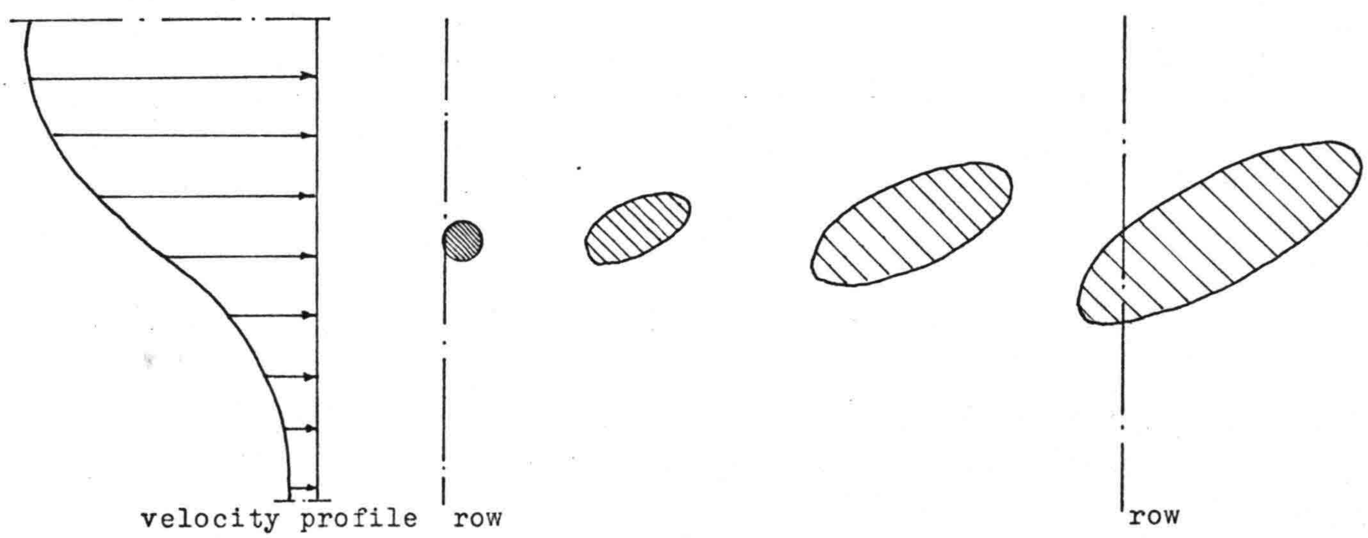


fig. 5.8
dispersie in een brandingsstroom volgens Bouwmeester, 1972.

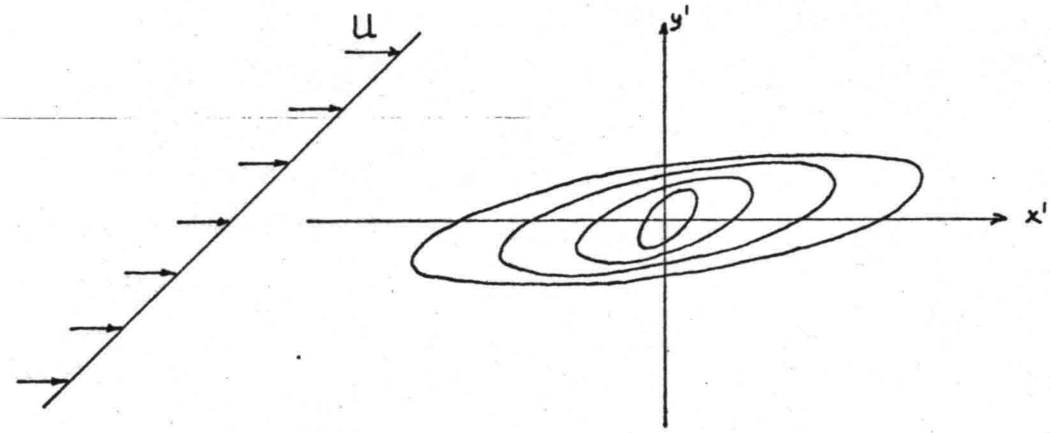


fig. 5.9
dispersie in een uniforme afschuifstroom (Corssin, 1953; overgenomen uit Tennekes en Lumley, 1972). De hoofdas van de ellipsen draait in de richting van de x-as. Assenstelsel x'-y' beweegt met zwaartepunt van de "vlek" mee.

De beperkende faktor voor de lengteschaal van de turbulentie in de brandingszone bij flauw oplopende stranden is de lokale diepte vandaar dat $\ell = \mathcal{O}(h(x))$, zie fig. 5.1, gekozen wordt.

5.5 De snelheidsschaal

Het geleverde vermogen aan de brandingszone laten we volgen uit de lineaire golftheorie, omdat het hier gaat om het afschatten van grootte ordes , zodat geen hogere orde theorieën gebruikt behoeven te worden. Het uitgangspunt 7 (zie p. 12) dat tijdsgemiddelden niet variëren in de richting evenwijdig aan de kust (y-ri., zie fig. 2.1) betekent dat er geen netto massatransporten door de brekerlijn plaatsvinden, dus er is ook geen "entrainment". We veronderstellen nu dat het geleverde vermogen aan de brandingszone geheel gebruikt wordt voor de "produktie" van turbulentie. De energie die verbruikt wordt voor bv. arbeid verricht tegen de oppervlaktespanning, samendrukken van lucht (stel dat het proces adiabatisch verloopt), direkte dissipatie verwaarlozen we daarbij dus t.o.v. de turbulentie-produktie. De energiebalans (4.35) voor de gehele brandingszone wordt dan:

$$\int_0^{x_B} \frac{dF_x}{dx}\, dx = F_{x_B} = -\rho \int_0^{x_B} \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \epsilon \, dz\, dx . \qquad (5.12)$$

F_{x_B} is de gemiddelde energieflux t.p.v. de brekerlijn, p.e.v. tijd in de richting van de kust en p.e.v. kustlengte. $F_{x_B} = \left[-E\, c_g \cos\theta\right]_B$, zie (2.86).

$$-F_{x_B} = \frac{1}{8}\rho g H_B^2 \, n c_w \cos\theta_B = c''' \frac{1}{8}\rho g H_B{}^2\sqrt{gH_B} \quad , \tag{5.13}$$

omdat $\cos\theta_B \approx 1$, $n \approx 1$ en c_w = fasesnelheid van de golven $\approx \sqrt{g h_B} \approx \gamma^{-1/2}\sqrt{gH_B}$. De koëfficiënt c''' bevat hier dus, zo men dat zou willen afzonderen, o.a. de faktor $\gamma^{-1/2}$.
Hier is voor de fasesnelheid het symbool c_w i.p.v. c (zie hoofdstuk 2) gebruikt ter vermijding van verwarring met de evenredigheidskonstanten.
Met $\ell = h(x)$ wordt (5.2): $\epsilon = c_0 \frac{w^3}{h(x)}$, waarin de karakteristieke turbulentiesnelheid w homogeen is verondersteld, zodat (5.12) levert:

$$c''' \frac{1}{8}\rho g^{3/2} H_B{}^{5/2} = \rho c_0 w^3 X_B .$$

X_B is de breedte van de brandingszone.
w^2 was gedefinieerd als 1/3 deel van de gemiddelde kinetische turbulentie-energie en hiervoor volgt nu dus:

$$w^2 = \frac{1}{4} c'' g \, H_B{}^{5/3} X_B{}^{-2/3} , \tag{5.14}$$

waarin $c'' = \left(\frac{c'''}{c_0}\right)^{2/3} = \mathcal{O}(1)$ omdat c''' en c_0 beide $\mathcal{O}(1)$ zijn.
Hiermee is dus de snelheidsschaal w ook bepaald:

$$w = \frac{1}{2} c''^{1/2} g^{1/2} H_B{}^{5/6} X_B{}^{-1/3} . \tag{5.15}$$

5.6 Verband tussen $\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ en w^2

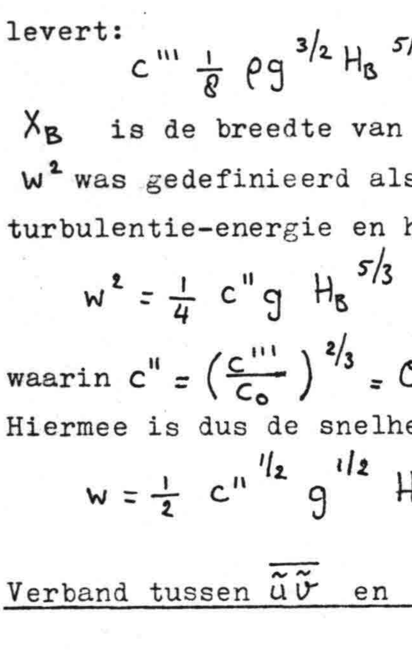


fig. 5.10

definitie-schets; voor de brandingsstroom stellen we $V = \hat{V}$

1. In door pure afschuifbeweging gedreven turbulentie (grenslaag, zie fig. 5.10) kan volgens (3.1) voor de turbulentie-schuifspanningen geschreven worden:

$$\tau_{12} = \tau_{21} = -\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = \rho \, \nu_t \frac{dV}{dx} , \tag{5.16}$$

waarin de turbulentie-viskositeit ν_t te schrijven is als produkt van karakteristieke lengte (ℓ) en -snelheid (w) van de turbulentie: $\nu_t = c_1 * \ell * w$. (5.17)
De redenen van deze mogelijkheid zijn genoemd op p. 4.4 ad a, b en c.
ad c: Uitgangspunt is de relevantie van slechts één lengte- en snelheidsschaal voor de turbulentie.
ad a: Vanwege de goede $\tilde{u}$-$\tilde{v}$ korrelatie is de korrelatie-koëfficiënt $R_{12} = -\frac{\overline{\tilde{u}\tilde{v}}}{u^* v^*} = \mathcal{O}(1)$ (u^* en v^* zijn r.m.s. waarden van resp. $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$).
$\tau_{12} = -R_{12}\rho \, u^* v^*$ en omdat u^* en v^* van dezelfde grootte-orde zijn geldt

$$\tau_{12} = c_2 \, \rho \, (u^*)^2 , \tag{5.18}$$

waarin c_2 hier $\mathcal{O}(1)$ is.

Het rechterlid van (5.16) met ν_t volgens (5.17) waarin voor w, u^* gesubstitueerd wordt is hiermee konsistent, omdat:

ad b: de verhouding van de tijdschalen van gemiddelde beweging en turbulentie $\mathcal{O}(1)$ is (zie ook p. 3.13): $\frac{dV}{dx} = c_3 \frac{u^*}{\ell}$,

zodat $\tau_{12}\ \rho\ \nu_t \frac{dV}{dx} = c_1 c_3\ \rho\ (u^*)^2$, (5.19)

waarin nu $c_1 c_3$, net als c_2 in (5.18) ook $\mathcal{O}(1)$ is.

(5.16) en (5.17) volgen dus niet op basis van een gradiënt-transportmodel.

2. In ons geval van veel turbulentie en een zwakke (sekundaire) stroom (V, fig. 5.10) gelden de bovengenoemde punten a en b niet. De turbulentie wordt (bijna) niet door de brandingsstroom V opgewekt. De (kleine) gradiënt in het snelheidsprofiel beïnvloedt de turbulentie wel en zorgt voor anisotropie in de turbulentie en dus voor (kleine) Reynolds spanningen $-\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$. De anisotropie wordt in stand gehouden door de gemiddelde "vervormingssnelheid" $\frac{dV}{dx}$. Anisotropie is ook te vertalen met: tekort aan isotropie. De tendens dat de varianties van de turbulente snelheidskomponenten gelijk worden aan elkaar wordt in het Engels "return to isotropy" genoemd. De mate van anisotropie wordt nu bepaald door de verhouding van de tijdschaal van de turbulentie (d.i. de tijdschaal van "return to isotropy") tot de tijdschaal van de vervormende (gemiddelde) beweging. Deze verhouding kan, afhankelijk van de benaderingswijze, ook uitgedrukt worden zoals hieronder is aangegeven.

$$\text{Maat voor anisotropie} = -\frac{\overline{\tilde{u}\tilde{v}}}{w^2} \propto \frac{\text{tijdschaal turbulentie}}{\text{tijdschaal sekundaire stroom}} =$$

$$= \frac{\text{"frekwentie" van de sek. stroom}}{\text{"frekwentie" van de turbulentie}} = \frac{\text{"shear" in sek. stroom}}{\text{"shear" in turbulentie}} = \frac{dV/dx}{w/\ell}\ . \quad (5.20\text{ a})$$

zodat $-\overline{\tilde{u}\tilde{v}} \propto w\ell \frac{dV}{dx}$ (5.20b)

Uit (5.20b) met $\ell = h(x)$ volgt

$$-\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = c' * w * h \frac{dV}{dx}\ , \quad (5.21)$$

zodat $\nu_t \equiv c' * w * h,$ (5.22)

waarin w de snelheidsschaal van de turbulentie (zie (5.15)), h de lokale diepte en c' een evenredigheidskonstante $\mathcal{O}(1)$ is.

De uitdrukking voor ν_t levert ons nu een over de hoogte gemiddelde waarde op. (5.22) is ook hier weer verkregen op dimensionele gronden en niet op basis van een gradiënt-transportmodel, zodat we de bezwaren zoals die ten aanzien van zo'n model geuit zijn op p. 68 , ook niet zijn tegengekomen. De lengteschaal ℓ mag nu dus wel $\mathcal{O}\left(\frac{dV}{dx} \Big/ \frac{d^2V}{dx^2}\right)$ zijn en aan behoud van impuls wordt ook voldaan.

Opvallend is de overeenkomst van (5.16) en (5.17) met (5.21) en (5.22), terwijl we toch met twee typisch verschillende situaties te maken hebben. Dit komt omdat in het eerste geval $-\overline{\tilde{u}\tilde{v}} \approx w^2$ én $\left|\frac{dV}{dx}\right| \approx \frac{w}{\ell}$ terwijl in het tweede geval $-\overline{\tilde{u}\tilde{v}} \ll w^2$ én $\left|\frac{dV}{dx}\right| \ll \frac{w}{\ell}$, in ongeveer "gelijke mate", vanwege de algemene uitdrukking (5.20).
Parallel aan de formulering van het eerste geval geldt daarbij, dat $R_{12}' \equiv -\frac{\overline{\tilde{u}\tilde{v}}}{u^* v^*}$ en $c_2' = \tau_{12}'/\rho w^2$ (vgl. (5.18)) van dezelfde grootte-orde zijn, alhoewel nú erg klein.
$c_3' \equiv \frac{dV}{dx} \Big/ \frac{w}{\ell}$ (vgl. (5.19)) is van diezelfde grootte-orde, immers uit (5.20) volgt $-\overline{\tilde{u}\tilde{v}} \approx c_3' \, w^2$.
In: $\tau_{12} = -\rho\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = c_2'\rho w \frac{\ell}{c_3'} \frac{dV}{dx}$ is $\frac{c_2'}{c_3'}$ dus $\mathcal{O}(1)$ hetgeen hetzelfde is als het stelsel (5.21) en (5.22).

5.7 Intermittency

Op de grens aan de zeezijde van de brandingszone is de brandingsstroom te beschouwen als een turbulente afschuifstroom zonder vaste begrenzing. Turbulentie laat zich op "vrije" randen gemiddeld niet scherp begrenzen. Voorbeelden hiervan zijn: het buitenste gedeelte van turbulente grenslagen (grenslagen zowel langs een vaste wand of tussen twee vloeistoflagen) en de randen van zogstromen en vrije stralen (pluimen). In al deze gevallen moeten we rekening houden met het intermitterend karakter van de turbulentie.
De viskositeit zorgt voor diffusie van wervelsterkte en dus voor de voortplanting in de rotatievrije vloeistof van het echte turbulentie front. Hierbij moet wel direkt gesteld worden dat in ons model waarin tijdsgemiddelden niet variëren in y-ri. (// kust), geen "entrainment" optreedt (gemiddelde uitbreiding turbulentiegebied, zie hiervoor bv. Phillips, 1972). De grote wervels van de orde van de ERW, doen het oppervlak kronkelen. Door drukgradiënten wordt deze beweging ook in de rotatievrije omgeving gebracht, zodat de ERW toch bepalen over welke afstand naburige vloeistof wordt meegenomen. In ons geval helpt ook de orbitaalbeweging om de turbulentie buiten de brandingszone te brengen.
Het mechanisme van de intermittency is zeer ingewikkeld. Mollo-Christensen (1973) geeft "the state of the art" op dat moment.

Hierin wordt een overzicht gegeven van theorieën waaruit blijkt dat intermitterend opgewekte turbulentie het gevolg is van "bursts" van lokale instabiliteiten. Voor ons geval is het op het ogenblik voldoende om in te zien dat op een bepaalde plaats wervels (d.i. turbulentie) met onregelmatige tussenpozen door de brekerlijn kunnen "uitbreken". In de richting // aan de kust kan dat op onregelmatige afstanden gebeuren. Dit impliceert dat er energie wordt overgedragen uit de brandingszone naar de "burst". Dát betekent dat er arbeid wordt verricht op het gebied van de"burst"en dat duidt op interaktie van spanning en vervorming. M.a.w. we kunnen die "burst" van turbulentie beschouwen als een "burst" van turbulentie-impulstransport. Zonder expliciet over "bursts" te spreken kunnen we ook zeggen dat door de turbulente stroom binnen de brandingszone wervels aangedreven worden die het water erbuiten meeslepen. Het is ook te verwachten, dat er t.a.v. de turbulentie buiten de brandingszone zich een typisch verschillende situatie voordoet bij loodrecht invallende golven (géén brandingsstroom in ons model) en bij scheef invallende golven (wel een brandingsstroom, maar ongeveer dezelfde turbulentie-intensiteit binnen de brandingszone). Metingen die gedaan zullen moeten worden om de grootte van de turbulentie-intensiteit en haar verdeling te leren kennen zullen bij loodrechte golfinval, binnen de brandingszone, wel representatief zijn voor scheve golfinval maar met de metingen erbuiten zal dat waarschijnlijk niet het geval zijn.

Gemiddeld zal het verloop van de turbulentiekenmerken en -eigenschappen vloeiend zijn. Drie dingen zijn zeker:

1^o de werkelijke toedracht van de verschijning en de bijdrage tot de Re-spanningen buiten de brandingszone is erg moeilijk

2^o ν_t wordt buiten de brandingszone kleiner

3^o het verloop van ν_t heeft weinig invloed op het snelheidsprofiel!

Als voorbeeld om te zien hoe hiermee gerekend kan worden nemen we een vlakke vrije straal.

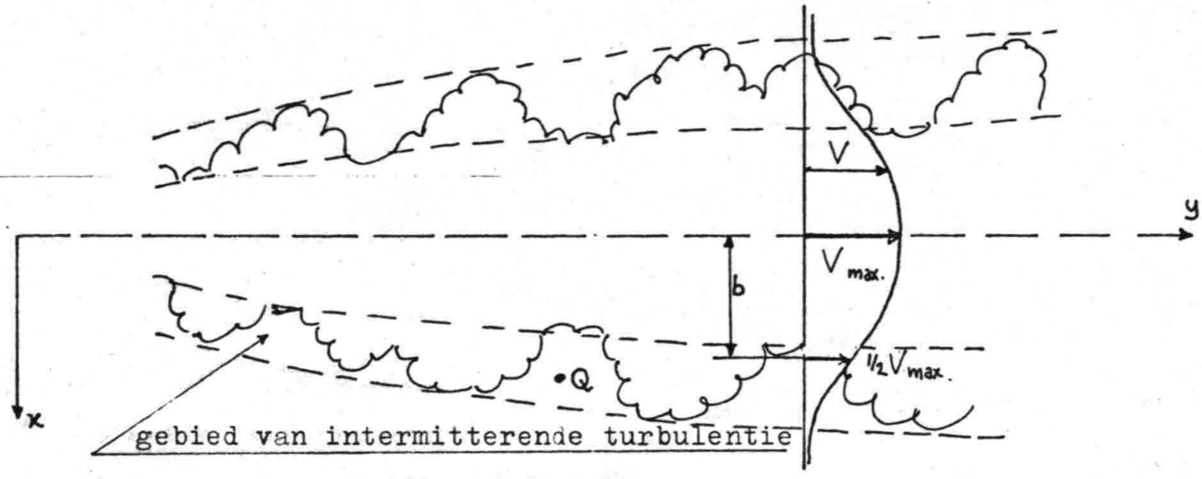


fig. 5.11

momentopname vrije straal

De randen van zo'n straal en van de brandingszone lijken wel een beetje op elkaar (niet: het stroomopwekkingsmechanisme en de "entrainment"). Het snelheidsprofiel van een brandingsstroom in ons model lijkt wel op die van een vlakke wandstraal (zie fig. 5.12 en bv. [Rajaratnam, 1972])

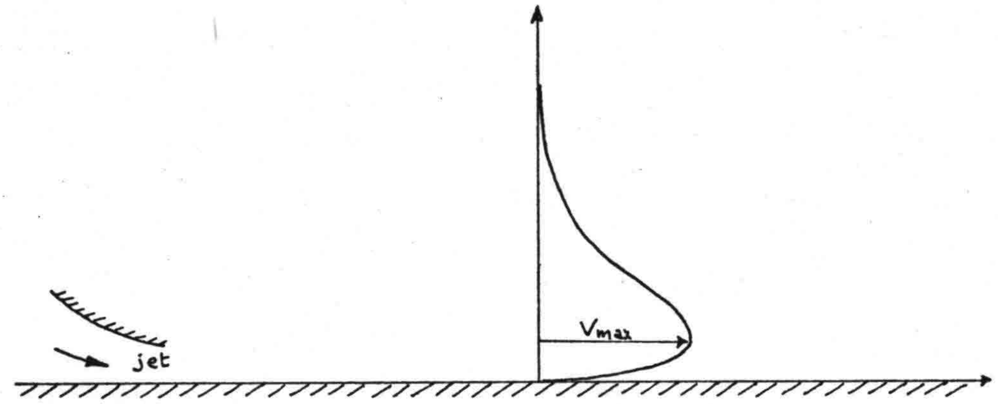


fig. 5.12

snelheidsprofiel in vlakke wandstraal

In het centrale deel van de straal van fig. 5.11 is de turbulentie stationair en zal de turbulentie viskositeit ν_t ongeveer konstant zijn: $\nu_t \approx \nu_{t_0}$. In het grensgebied wordt de turbulentie steeds meer intermitterend. Een punt Q zal zich niet steeds in turbulent gebied bevinden; er zijn daar dus niet voortdurend Re-spanningen, zodat ν_t gemiddeld kleiner wordt en indien de omgevingsvloeistof in rust is, naar nul gaan.

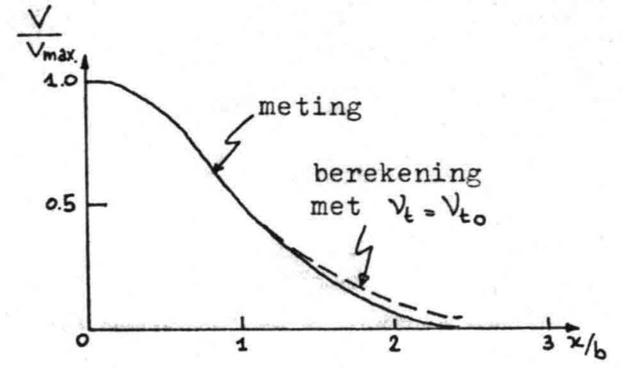


fig. 5.12a

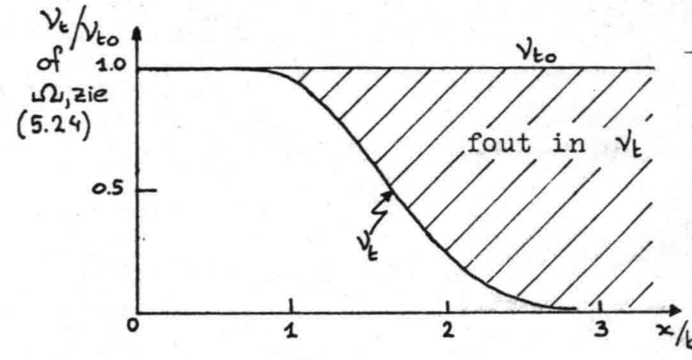


fig. 5.12b

fig. 5.12
voorbeeld snelheidsprofiel en verdeling ν_t in vlakke vrije straal voor bepaalde waarde van y; voor b, zie fig. 5.11.

De metingen van het snelheidsprofiel, zoals die met een getrokken lijn in fig. 5.12a weergegeven zijn, (Bradbury en Riley, 1967), worden goed benaderd door een Gauss-verdeling. Dit geldt ook voor ronde vrije stralen en zogstromen (Hinze, 1959). Betere benaderingen bestaan hiervoor ook (Townsend, 1956; Hinze, 1959; Bradbury, 1965; Rotta, 1972). Indien nu in bv. een gradiënt-type diffusiemodel gerekend wordt met ν_t = konstant = ν_{t_0} voor alle waarden van y, zie fig. 5.12b, dan wordt een snelheidsverdeling gevonden die maar weinig afwijkt van de meting (streeplijn in fig. 5.12a). Stel nu:

a. , dat het gemiddelde effekt van de Re-spanningen beschreven kan worden door de netto turbulente impulstransporten te vermenigvuldigen met de relatieve fraktie van de tijd dat een vast punt (bv. Q in fig. 5.11) zich in turbulent gebied bevindt. Dit laatste beschouwen we als de definitie van de (dimensieloze) "intermittency factor" Ω:

$$\Omega = \frac{\text{tijd gedurende welke turbulentie in bepaald punt optreedt}}{\text{totale tijd}} \qquad (5.23)$$

Wijzig nu het verloop van ν_t op rationele manier bv.

$$\nu_t = \Omega \, \nu_{t_0} \, , \qquad (5.24)$$

waarbij Ω = 1 in de as van de straal en een verloop heeft zoals met ν_t is aangegeven in fig. 5.12b. Hiermee kan de getrokken lijn van de metingen in fig. 5.12a geheel bedekt worden. Het blijkt dus

b. dat de grote fout in ν_t die gemaakt wordt wanneer met $\nu_t = \nu_{t_0}$ gerekend wordt, zoals in fig. 5.12b met een gearceerd gebied is aangegeven, slechts een geringe invloed heeft op het berekende snelheidsprofiel. Dit is het gevolg van het feit dat $\frac{\partial V}{\partial x}$ aan de randen snel kleiner wordt.

In verband met het statistische aspekt van de intermittency lijkt een Gauss-verdeling voor Ω aannemelijk bv.

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\substack{\text{nader te bepalen}\\ \text{dim.loze ondergrens (in x-ri.)}}}^{\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\tau^2\right) d\tau, \tag{5.25}$$

Zie Hinze, (1959, p. 446). Het kan zijn dat met deze Ω moeilijk te rekenen is, maar zoals we gezien hebben kunnen we desgewenst ook iets eenvoudigers aannemen, omdat de fout in de verdeling van de gemiddelde snelheid gering blijft.

Naar analogie van het bovenstaande kunnen we in het geval van een brandingsstroom als volgt te werk gaan:

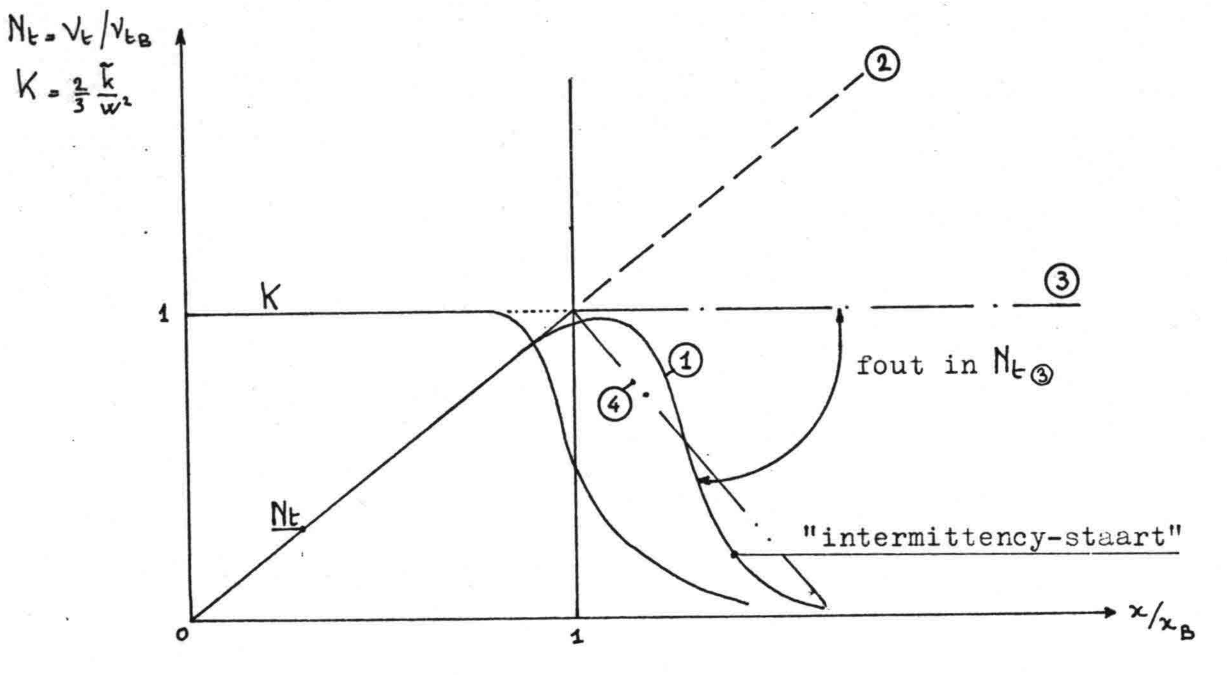


fig. 5.13
variaties van turbulentie-energie en -viskositeit met de afstand uit de kust. B duidt op de brekerplaats.

Het is goed om op dit moment afstand te doen van de definitie van Ω (5.23). Afgezien van de werkelijke oorzaak van het optreden van een gemiddelde stroming buiten de brandingszone, gebruiken we Ω verder voor de beschrijving van ν_t in het model gevormd door het stelsel (5.21) en (5.22). Hierin kunnen dan bv. ook invloeden van orbitaalbeweging en eventueel aanwezige variabiliteit in brekerplaats (binnen het kader van invallende regelmatige golven) op de verdeling van de Re-spanningen verdiskonteerd worden.
Stel dat het verloop ① van $N_t = \nu_t/\nu_{t_B}$ "juist" is. ②, ③ en ④ zijn andere, stellig foutieve aannamen. In geval ③ is de fout

aangegeven.

(2) is wel een zéér grove benadering. Longuet-Higgins (1970 b) nam $\nu_t \propto x\sqrt{gh}$, zowel binnen als buiten de brandingszone. Overeenkomstig hiermee, alhoewel nu een lineaire variatie van ν_t met de afstand uit de kust, zou het verloop (2) zijn.

We kunnen nu door berekening nagaan, wat de invloed van de aanname van de "intermittency-staart" op het snelheidsprofiel van de brandingsstroom is. In het volgende hoofdstuk blijkt, dat deze invloed inderdaad gering is, zodat we met weinig kennis omtrent het "werkelijke" verloop van ν_t toch een goede voorspelling van het brandingsstroomprofiel kunnen doen.

5.8 Resulterend turbulentiemodel en vergelijking met andere modellen

Het resultaat van de beschouwingen in dit hoofdstuk is het volgende turbulentie-model

$$\tau_{12} \equiv -\rho\,\overline{\tilde{u}\tilde{v}} = \rho\,\nu_t\,\frac{d\hat{V}}{dx} \tag{5.26a}$$

$$\text{met}\quad \left.\begin{aligned} \nu_t &= c' * w * h && \text{voor } x \leqslant x_B \\ \nu_t &= \Omega\,\nu_{tB} && \text{voor } x > x_B \end{aligned}\right\}, \tag{5.26b}$$

waarin w volgens (5.15) en $\Omega = \Omega(x)$ een nog nader te bepalen c.q. voor te schrijven funktie is. De grens x_B kan in verband hiermee ook nog verlegd worden om een rationeel, vloeiend verloop voor ν_t te krijgen.

Van de andere mogelijkheden die het stelsel (5.26b) kunnen vervangen wordt i.v.m. het gebruik ervan in de hoofdstukken 6 en 7 gegeven:

$$\left.\begin{aligned} &\nu_t = \Omega\,\nu_{tB} && \text{voor } x \geqslant 0 \\ \text{waarin}\ &\Omega = c' * w * h/\nu_{tB} && \text{voor } x \leqslant x_B \end{aligned}\right\} \tag{5.26c}$$

Het is nu zinvol om het verkregen model te vergelijken met de funktionele vormen van de in hoofdstuk 3 besproken modellen, behalve dat van Bowen. De relevantie hiervan strekt zich alleen uit over het gebied binnen de brandingszone. In tabel 5.1 is een overzicht van de verschillende vormen voor de eddy viscosity ν_t gegeven.

(1) referentie	(2) voorgestelde vorm voor eddy viscosity ν_t	(3) variatie van ν_t met afstand c.q. diepte uit de kust; stel $h = sx$	(4) $\langle \nu_t \rangle$ Gemiddelde van ν_t over brandingszone	(5) α zie tekst
1. Harris e.a. (1963) natuurmetingen	$\propto H_B^2/T$	—	$\propto \gamma s \frac{H_B}{L_B} x_B \sqrt{g h_B}$	1
2. Thornton (1970) theoretisch	$\frac{H^2}{8\pi^2} \frac{gT}{h} \cos^2\theta \approx \frac{\gamma^2 hg}{4\pi w}$	$\propto h$	$\frac{\gamma^3}{16\pi^2} s (H_B/L_B)^{-1} x_B \sqrt{g h_B}$	1
3. Longuet-Higgins (1970) theoretisch	$N x \sqrt{gh}$	$\propto h^{3/2}$	$2/5\, N x_B \sqrt{g h_B}$	1/2
4. Inman e.a. (1971) natuurmeting	$\approx \frac{H_B x_B}{T}$ $(H_B = H_{rms_B})$	—	$\approx \frac{H_B}{L_B} x_B \sqrt{g h_B}$	1/2
5. (5.26)	$\frac{1}{2} c g^{1/2} H_B^{5/6} x_B^{-1/3} h$	h (indien turbulentie homogeen)	$\frac{1}{4} c \gamma^{5/6} s^{4/3} x_B \sqrt{g h_B}$	$2^{1/3}$

tabel 5.1

Ter vergelijking zijn in de 4° kolom gemiddelden van ν_t over de brandingszone gegeven (zie ook (3.19)), waarbij in alle vormen de faktor $x_B \sqrt{g h_B}$ voorkomt. De heel duidelijk hieruit blijkende verschillen c.q. tegenstrijdigheden behoeven weinig betoog. Het voorbeeld van fig. 3.7 levert koëfficiënten α op, gedefinieerd door $\langle \nu_t \rangle_{II} = \alpha \langle \nu_t \rangle_I$, die in de 5° kolom worden gegeven. Opvallend is, dat alléén het nieuwe in dit hoofdstuk gepresenteerde model een waarde voor $\langle \nu_t \rangle_{II}$ oplevert die volgens de verwachting (zie p. 54) groter is dan $\langle \nu_t \rangle_I$. Naast de meer gefundeerde fysische achtergronden wekt dit model ook t.a.v. deze "gelijkvormigheidsbeschouwing" het meeste vertrouwen. Als dit model inderdaad als beste aangenomen kan worden blijkt, zoals reeds op p. 54 werd aangegeven dat de koëfficiënt N van Longuet-Higgins afhankelijk is van s tot een macht groter dan 1 ($^4/_3$).
Het nieuwe model spreekt niet tegen dat volgens Inman e.a. (1971) uit metingen op twee natuurstranden bleek dat $\langle \nu_t \rangle$ en $\frac{H_B x_B}{T}$ van dezelfde orde van grootte waren.
Bij El Moreno Beach waren H_B/L_B en $\frac{1}{4} s^{4/3}$ van dezelfde grootte-orde. Bij Scripps Beach was H_B/L_B $\mathcal{O}(10)$ maal groter dan $\frac{1}{4} s^{4/3}$ maar waarschijnlijk zijn de waarden voor de over de hoogte gemiddelde eddy diffusivity hier nogal overschat (zie par. 6.4).
Vanzelfsprekend is de keuze om $\frac{H_B x_B}{T}$ te vergelijken met 9 uit metingen bepaalde waarden nogal arbitrair. Vermenigvuldigen we $\frac{H_B x_B}{T}$ bv. met $\frac{s}{\sqrt{H_B/L_0}}$, een dimensieloze faktor die bij Scripps Beach 0.3-0.4 was en bij El Moreno Beach 1-1.5, dus in beide gevallen $\mathcal{O}(1)$, ontstaat een vorm die op een faktor $s^{1/3}$ na funktioneel hetzelfde is als het model van (5.26). De faktor $\frac{s}{\sqrt{H_B/L_0}}$ is te

herkennen als de "surf similarity parameter" van Battjes (Battjes, 1974).

Hoofdstuk 6

REGELMATIGE GOLVEN MET MENGING

6.1 Mathematische formulering

Voor de definitie-schetsen wordt naar de figuren 2.1 en 2.7 en voor de uitgangspunten naar p. 24 verwezen.

In de bewegingsvergelijking (2.100):

$$-\underset{①}{\frac{d}{dx} S_{xy}} + \underset{②}{\frac{d}{dx} R_{xy}} - \underset{③}{\bar{\tau}_{by}} = 0 \qquad (6.1)$$

worden de volgende uitdrukkingen gebruikt:

Radiation Shear-stress, (2.63) : $S_{xy} = En \cos\theta \sin\theta$ (6.2)

"Bodemwrijving" , (2.110): $\bar{\tau}_{by} = K\rho \, |\underline{u}_{wb}|_{max} \, \hat{V}$ (6.3)

Reynolds-spanningen , (5.26) :

$$R_{xy} = -\int_{-h}^{\bar{\zeta}} \rho \overline{\tilde{u}\tilde{v}} \, dz = \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \rho \nu_t \frac{d\hat{V}}{dx} \, dz = \rho \nu_t h' \frac{d\hat{V}}{dx} \; . \qquad (6.4)$$

In deze uitdrukkingen worden dezelfde benaderingen ingevuld als in het geval van regelmatige golven zonder menging (zie p. 34).

$E = \frac{1}{8}\rho g H^2$; $n \approx 1$; $H = \gamma h'$, met $h' = h + \bar{\zeta}$; $\cos\theta \approx \cos\theta_B$ voor $x \leqslant x_B$ (de index B betekent: ter plaatse van de brekerlijn).

De topografie wordt via de stil-waterdiepte h in het model gebracht.

De restrikties zijn volgens de uitgangspunten ⑤ (p. 12) en ⑧, zie (2. 98), rechte en evenwijdige dieptelijnen en $\frac{dh}{dx} \geqslant 0$.

In het geval van brandingsruggen waarbij ook $\frac{dh}{dx} < 0$ is, zal op rationele of experimentele basis een keuze voor de op de verschillende plaatsen in te voeren h c.q. γ gemaakt moeten worden.

Alhoewel set-up en set-down volgens par. 2.5.1 te bepalen zijn, zal er hier verder niet mee gerekend worden. We kunnen ook stellen, dat we er wel mee rekenen, maar dat we de oorsprong kiezen op de lijn van de maximale set-up (zie fig. 2.1) en de gemiddelde waterdiepte $h' = h + \bar{\zeta}$ met weglating van het accent via h in ons model invoeren.

Voor de termen in (6.1) volgt nu:

① $-\frac{d}{dx} S_{xy} = -\frac{\sin\theta_B}{c_B} \frac{d}{dx} E c \cos\theta$, zie (2.108) en (2.114)

$$-\frac{d}{dx} S_{xy} = \begin{cases} -\frac{5}{16}\rho\gamma^2 g \sin\theta_B \cos\theta_B \frac{dh}{dx} \frac{h^{3/2}}{h_B^{1/2}} & \text{voor } x \leqslant x_B \quad (6.5a) \\ 0 & \text{voor } x > x_B \quad (6.5b) \end{cases}$$

② $\frac{d}{dx} R_{xy} = \frac{d}{dx} \left[\rho \nu_t h \frac{d\hat{V}}{dx} \right]$.

$\nu_t = \Omega\, \nu_{tB}$. Uit (5.26c) volgt $\Omega = c' * w * h \,/\nu_{tB} =$
$= h/h_B$ (w homogeen) voor $x \leqslant x_B$. (6.6)

De turbulentie-intensiteit wordt bepaald door w , (5.15):

$$w = \tfrac{1}{2}\, c''^{1/2}\, g^{1/2}\, H_B^{5/6}\, x_B^{-1/3} = \tfrac{1}{2}\, c''^{1/2}\, \gamma^{5/6} (g h_B)^{1/2}\, \bar{S}^{1/3}, \qquad (6.7)$$

waarin $\bar{S} \equiv h_B / x_B$. c' en c'' zijn beide $\mathcal{O}(1)$.

③ $$|\underline{u}_{wb}|_{max} = \tfrac{1}{2}\gamma (gh)^{1/2}, \text{ zodat } -\bar{\tau}_{by} = -K\rho \tfrac{1}{2}\gamma (gh)^{1/2}\, \hat{V}. \qquad (6.8)$$

De vergelijking (6.1) wordt genormaliseerd m.b.v. de dimensieloze variabelen: $V = \hat{V}/V_o$, $X = x/x_B$, $H = h/h_B$ en $Nt = \nu_t / \nu_{tB}$. (6.9)

V_o wordt gedefinieerd als de brandingsstroomsnelheid die in de berekening zonder menging volgens par. 2.5.2 t.p.v. de brekerlijn gevonden zou worden, zie fig. 2.8a en (2.117):

$V_o = \hat{V}_B$ (zonder menging en zonder set-up).

(2.115) is hiermee te schrijven als:

$$\hat{V} \text{ zonder menging } = \frac{h}{h_B} * \frac{dh/dx}{(dh/dx)_B} \begin{cases} V_o \text{ voor } 0 < h \leqslant h_B & (6.10a) \\ 0 \text{ voor } h > h_B & (6.10b) \end{cases}$$

$$V_o = -\frac{5}{8}\frac{\gamma}{K}(g h_B)^{\frac{1}{2}} \sin\theta_B \cos\theta_B \left(\frac{dh}{dx}\right)_B \qquad (6.11)$$

Het invullen van (6.5) t/m (6.9) en (6.11) in (6.1) levert voor $\theta_B \neq 0$:

$$M \frac{d}{dX}\left[Nt\, H \frac{dV}{dX}\right] - H^{1/2} V = \begin{cases} -H^{3/2} \dfrac{dH/dX}{(dH/dX)_{H=X=1}} & \text{voor } 0 < X \leqslant 1 \quad (6.12a) \\ 0 & \text{voor } X > 1 \quad (6.12b) \end{cases}$$

waarin $M = \dfrac{c\,\bar{S}^{7/3}}{K\gamma^{1/6}}$, (6.13)

met $c = c'(c'')^{1/2}$. $c'' = (c'''/c_o)^{2/3}$ zie (5.14), zodat $c = c'(c'''/c_o)^{1/3}$.

Hierin zijn c', c'', c''' en c_o alle $\mathcal{O}(1)$ dus ook is $c = \mathcal{O}(1)$.

Met betrekking tot de macht van γ in (6.12), kan opgemerkt worden dat deze $-1/3$ i.p.v. $-1/6$ zou worden indien, zoals bij (5.13) is vermeld uit c''' de faktor $\gamma^{-1/2}$ afgezonderd zou zijn; d.w.z. M wordt dan in iets meerdere mate afhankelijk van γ .

Met $\nu_t = \Omega\, \nu_{tB}$ wordt $Nt = \Omega = H$ voor $0 < X \leqslant 1$.

Voor $X > 1$ zijn er verschillende gedaanten van Ω te onderzoeken.

De eerste term in (6.12) geeft de invloed van de horizontale menging. De tweede term vertegenwoordigt de bodemwrijving en het rechterlid de aandrijving. Indien M de fiktieve waarde $M = 0$ (geen menging) zou hebben, dan volgt

$$V = \begin{cases} H \dfrac{dH/dX}{(dH/dX)_{X=1}} & \text{voor } 0 < X \leqslant 1 \\ 0 & \text{voor } X > 1 \,, \end{cases} \tag{6.14}$$

hetgeen indentiek is met het stelsel (6.10) en (6.11), zodat de dimensieloze snelheid geschreven kan worden als $V = \hat{V}/(\hat{V}_B)_{M=0}$, (6.15)
waarin $(\hat{V}_B)_{M=0} = V_0$.

Voor de eenvoud en overzichtelijkheid worden alleen brandingsstromen berekend in situaties waar het gemiddelde waterniveau een lineaire variatie vertoont met de afstand uit de kust. De berekening van brandingsstromen langs stranden met konstante bodemhelling onder verwaarlozing van de verandering van het gemiddelde waterniveau als gevolg van de golfbeweging, verloopt identiek hiermee. We stellen dus $\frac{dh}{dx}$ = konstant = s . Omdat dan $h = sx$, geldt $H = X$.
Hiermee vereenvoudigt (6.12) tot

$$\boxed{M \frac{d}{dX}\left(\Omega\, X \frac{dV}{dX}\right) - X^{1/2} V = \begin{cases} -X^{3/2} & \text{voor } 0 < X \leqslant 1 \quad (6.16a) \\ 0 & \text{voor } X > 1 \quad (6.16b) \end{cases}}$$

,waarin $M = \frac{c\, s^{7/3}}{K \gamma^{1/6}}$ en $\Omega = X$ voor $0 < X \leqslant 1$, terwijl voor $X > 1$ de volgende vier vormen van Ω onderzocht zullen worden:

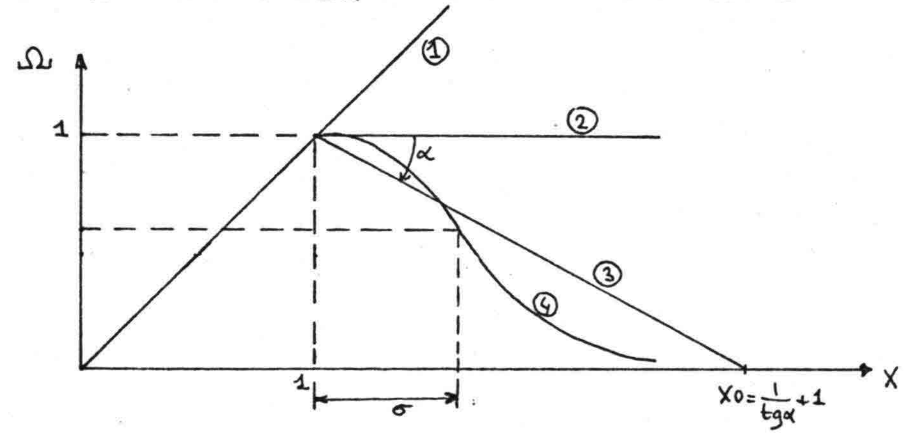


fig. 6.1
vier verschillende gedaanten van $\Omega(X)$ voor $X > 1$

① $\Omega = X$
② $\Omega = 1$
③ Ω verloopt lineair van 1 ($X = 1$) naar 0 ($X = X_0$).

$$\Omega(X) = 1 - tg\,\alpha\,(X - 1), \tag{6.18}$$

voor verschillende waarden van $tg\,\alpha$.

$$④\ \Omega(X) = \exp\left(-(X-1)^2/2\sigma^2\right), \tag{6.19}$$

voor verschillende waarden van σ. ($\frac{d^2\Omega}{dX^2} = 0$ voor $X = 1 + \sigma$)

Randwaardenprobleem

Lineaire, tweede orde differentiaalvergelijkingen (6.16) (zolang $\Omega \neq 0$ en $M \neq 0$ zijn) beschrijven een randwaardenprobleem waarin de randvoorwaarden zijn:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & X = 0 : V = 0 \\ 2. & X \to \infty : V \to 0 \end{array}\right\} \qquad (6.17)$$

ad 1. Het mathematische model is een beschrijving van de gemiddelde waterbeweging; $X = 0$ is de gemiddelde waterlijn, waar voorbij ($X < 0$) geen water komt en is dus te beschouwen als een vaste wand, waarlangs de "no-slip condition" heerst. Het in ons geval verdwijnen van de waterdiepte voor $X \to 0$ impliceert natuurlijk ook dat in die richting $V \to 0$.

ad 2. Indien $\Omega = 0$ voor eindige X, zeg X_0, zoals bij verloop ③ in fig. 6.1, zal er een diskontinuïteit optreden in de gradiënt dV/dX t.p.v. $X = X_0$, hetgeen fysisch niet plausibel is, maar zolang de fout als gevolg hiervan binnen de gewenste nauwkeurigheid blijft is dit aanvaardbaar.

We kunnen opmerken dat de voorwaarde op oneindig impliceert dat voor $X \to \infty$ ook $dV/dX \to 0$.

Het stelsel (6.16) wordt als volgt beschreven (voor $M \neq 0$):

$$\begin{cases} X^2 \dfrac{d^2V}{dX^2} + 2X \dfrac{dV}{dX} - \dfrac{X^{1/2}}{M} V = -\dfrac{X^{3/2}}{M} & 0 < X \leqslant 1 \qquad (6.20a) \\[2ex] \Omega X \dfrac{d^2V}{dX^2} + \left(\Omega + X \dfrac{d\Omega}{dX}\right) \dfrac{dV}{dX} - \dfrac{X^{1/2}}{M} V = 0 & X > 1 . \qquad (6.20b) \end{cases}$$

De "inwendige" koppeling tussen (6.16a) of (6.20a) en (6.16b) of (6.20b) t.p.v. $X = 1$ geschiedt d.m.v. de voorwaarde dat zowel V als dV/dX daar kontinu zijn. Dit geldt niet voor $\dfrac{d^2V}{dX^2}$; de aandrijving grijpt in dit model plotseling aan en er kan wel met een knik, zij het een onrealistische, in het Ω verloop gerekend worden.

Een analytische oplossing voor (6.16) is erg moeilijk, omdat zowel $X = 0$ als ∞ (dit laatste zolang $\Omega \neq 0$) irreguliere singuliere punten voor de homogene vergelijkingen zijn. De oorzaak ligt in de term $X^{1/2}$, die in $X = 0$ niet analytisch (d.w.z. in konvergerende Taylor reeks te ontwikkelen) is. Juist in deze punten liggen onze randvoorwaarden. De oplossing in de omgeving van gewone punten kan m.b.v. reeksen, zij het op zeer bewerkelijke wijze, waar toch een computer voor "nodig" is, gevonden worden. (Een partikuliere oplossing van (6.20a) is $V_{part.} = X + 2MX^{1/2} + \frac{3}{2}M^2$.)

Mede gezien de gewenste algemene toepasbaarheid, ook in het geval van onregelmatige golven, is een numerieke oplossing de aangewezen weg.

6.2 Numerieke berekening

De vergelijkingen (6.16), d.i. hetzelfde als (6.20), met randvoorwaarden (6.17) en de vier bovengenoemde vormen van Ω voor $X > 1$ zijn geprogrammeerd in ALGOL-60 voor berekening op een IBM 360/65. Verwerking kan geschieden door zowel de "in-core"-als de "batch" versie van de Delftse Algol compiler (release 1-6-1973), in het eerste geval uiteraard zonder plotprocedures.

In bijl. 1 van hoofdstuk 7 zal de source listing van een programma voor onregelmatige golven met menging gegeven worden. Het gedeelte daarin betreffende de numerieke integratie van de d.v. is programmatisch vrijwel identiek aan het programma voor regelmatige golven en wordt daarom nu weggelaten.

Numerieke integratie van (6.16) geschiedt m.b.v. een vierde orde Runge-Kutta methode. Het stelsel (6.16) wordt vervangen door het equivalente systeem van gekoppelde eerste orde d.v.'s:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dV}{dX} = Z && (6.21a)\\ &F(X,V,Z) = \frac{d^2V}{dX^2} = \frac{dZ}{dX} = -\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dX}\right)Z + \frac{V}{M\Omega X^{1/2}}\left[-\frac{X^{1/2}}{M\Omega}\right]. && (6.21b)\end{aligned}\right.$$

De term tussen [ ], afkomstig van de aandrijvingsterm, verdwijnt voor $X>1$. Voor F wordt een funktie-procedure geschreven, bij het aanroepen waarvan $\Omega = \Omega(X)$ bekend moet zijn. De gebruikte Runge-Kutta formules voor (6.21), zijn (zie ook fig. 6.2):

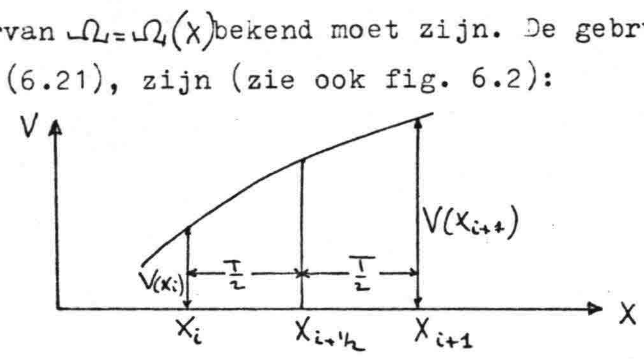


fig. 6.2

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= Z &&; \quad m_1 = F(X, V, Z)\\ k_2 &= Z + T * m_1/2 &&; \quad m_2 = F(X+T/2, V+T*k_1/2, Z+T*m_1/2)\\ k_3 &= Z + T * m_2/2 &&; \quad m_3 = F(X+T/2, V+T*k_2/2, Z+T*m_2/2)\\ k_4 &= Z + T * m_3 &&; \quad m_4 = F(X+T, V+T*k_3, Z+T*m_3),\end{aligned}\right\} \quad (6.22)$$

waarmee

$$\left.\begin{aligned} V(X_{i+1}) &= V(X_i) + T*(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 + O(T^5)\\ Z(X_{i+1}) &= Z(X_i) + T*(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)/6 + O(T^5)\end{aligned}\right\} \quad (6.23)$$

De termen $(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$ en $(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)/6$ zijn op te vatten als gemiddelde gradiënten $\frac{dV}{dX}$ resp. $\frac{dZ}{dX}$ in het interval $[X_i, X_{i+1}]$.

De randvoorwaarden (6.17) liggen in twee verschillende punten, zodat de numerieke integratie niet eenduidig gestart kan worden. Bij een lineaire 2e orde d.v. voldoet er slechts één integraalkromme aan de 2 integratievoorwaarden, zodat er met elke beginbenadering toch een kromme vastgelegd wordt. In $X=0$ kunnen we niet starten vanwege het delen door nul. Daarom starten we in $X = X_0 =$ "groot" met $V=0$ en met een willekeurig (kleine) waarde voor dV/dX en "schieten in" op $V=0$ in $X = X_n = 0$. Vanwege het lineair zijn van de d.v., zijn alle lineaire kombinaties van oplossingen wéér oplossingen, zodat in principe na twee keer proberen met verschillende dV/dX in het beginpunt X_0 d.m.v. lineaire interpolatie de juiste startwaarde voor dV/dX gevonden wordt:

$$Zo_j = \frac{Zo_{j-1} * Vn_{j-2} - Zo_{j-2} * Vn_{j-1}}{Vn_{j-2} - Vn_{j-1}} . \qquad (6.24)$$

Z_0 is de startwaarde voor dV/dX in $X=X_0$ en de index j is in principe $j=3$. V_n is de genormaliseerde snelheid, gevonden na n stappen in $X = X_n = 0$.

Omdat de Runge-Kutta formule voor m_4 in de laatste uit te voeren stap $X=X_n = X_{n-1} + T = 0$ zou bevatten, kan deze methode niet voor integratie naar $X=0$ gebruikt worden, zie (6.21b). Daarom wordt de funktiewaarde V_n in $X = X_n = 0$ berekend met

$$V_n = V_{n-1} + T * Z_{n-1} , \qquad (6.25)$$

waarbij de procesfout $\mathcal{O}(T)^2$ is.

Bij gegeven Ω en M is de nauwkeurigheid van de oplossing vnl. afhankelijk van de keuze van X_0, (6.25) en de toe te laten van nul verschillende waarde van V_n. Door proberen kan een bepaalde nauwkeurigheid bereikt worden.

Het programma kan gebruikt worden voor willekeurige waarden van M.

Afhankelijk van:
- de keuze van het startpunt X_0 in kombinatie met de gegevan funktie $\Omega(X)$
- de keuze van de waarden voor Z_0
- de waarde van M,

kan zich voordoen:

a. numerieke instabiliteit

b. ontaarding d.v.

c. delen door nul bij het "inschieten" volgens (6.24)

Voorbeelden:

ad a. Neem het verloop van $\Omega(X)$ volgens (6.19), daarmee wordt

(6.21b): $$\frac{d^2V}{dX^2} = \frac{dz}{dX} = -\left(\frac{1}{X} - \frac{(X-1)}{\sigma^2}\right)z + \frac{V}{\Omega X^{1/2} M} \quad \text{voor } X > 1 . \tag{6.26}$$

$\Omega(X)$ kan in de omgeving van X_0 erg klein zijn. Een foute startwaarde z_0, die in grootte maar erg klein behoeft te zijn, kan enorm worden versterkt (delen door Ω in (6.26)), zodat op de computer weldra een "overflow" ontstaat. Naarmate M kleiner is, gaat het slechter.

ad b. Voor kleine M, geldt voor kleine X : $V \approx X$, zodat $X^{1/2}V \approx X^{3/2}$.
Hiermee degenereert (6.16) ($X < 1$ en $\Omega = X$) tot:

$$M \frac{d}{dX}\left(X^2 \frac{dU}{dX}\right) = 0 \text{, dus } \frac{d^2V}{dX^2} = -\frac{2}{X}\frac{dV}{dX} .$$

Voor kleine X neemt $\left|\frac{d^2V}{dX^2}\right|$ sterk toe en dus in volgende punten $\frac{dV}{dX}$ ook, terwijl dit ≈ 1 zou moeten blijven. Ook hierdoor kan V weer "ontploffen".

ad c. In een bepaald geval kan een keuze van een te kleine $|z_{0_1}|$ tot gevolg hebben dat V voor $X > 1$ zeer klein blijft en V voor $X > 1$ vrijwel ongevoelig is voor waarden van $|z_{0_j}|$ die niet vele orden groter zijn dan $|z_{0_1}|$, zodat voor verschillende z_0 toch dezelfde V in $X=0$ gevonden wordt.

Bovenstaande moeilijkheden worden in het programma d.m.v. tests opgespoord, waarna in de gevallen a en c met een verbeterde startprocedure opnieuw kan worden begonnen. Hierdoor kan $j > 3$ worden. Vanzelfsprekend is het niet zinvol om i.v.m. de onbekende vorm van $\Omega(X)$ alle mogelijke startprocedures uit te zoeken. In elk afzonderlijk geval zal dat opnieuw bekeken moeten worden.
In geval b wordt met de ontaarde d.v. verder gerekend. Volgens het gegeven voorbeeld betekent dat berekening van het snelheidsprofiel zonder menging.

6.3 Resultaten van de berekening

Het is gebleken dat het snelheidsprofiel zeer weinig beïnvloed wordt door de vorm van $\Omega(X)$, tenzij $\Omega(X)$ de (genormaliseerde) snelheid naar nul dwingt voor waarden van X, die weinig groter dan 1 zijn. Het resultaat van een berekening voor 10 verschillende waarden van M, waarin $\Omega = 1$ voor $X > 1$ is genomen, wordt getoond in fig. 6.3. Later blijkt, dat 0.1 in een bepaald geval een realistische waarde is voor de parameter M, die de relatieve invloed van de menging weergeeft. In onderstaande tabel wordt voor $M = 0.1$ een vergelijking gemaakt tussen de resultaten bij verschillende gedaanten van $\Omega(X)$ voor $X > 1$.

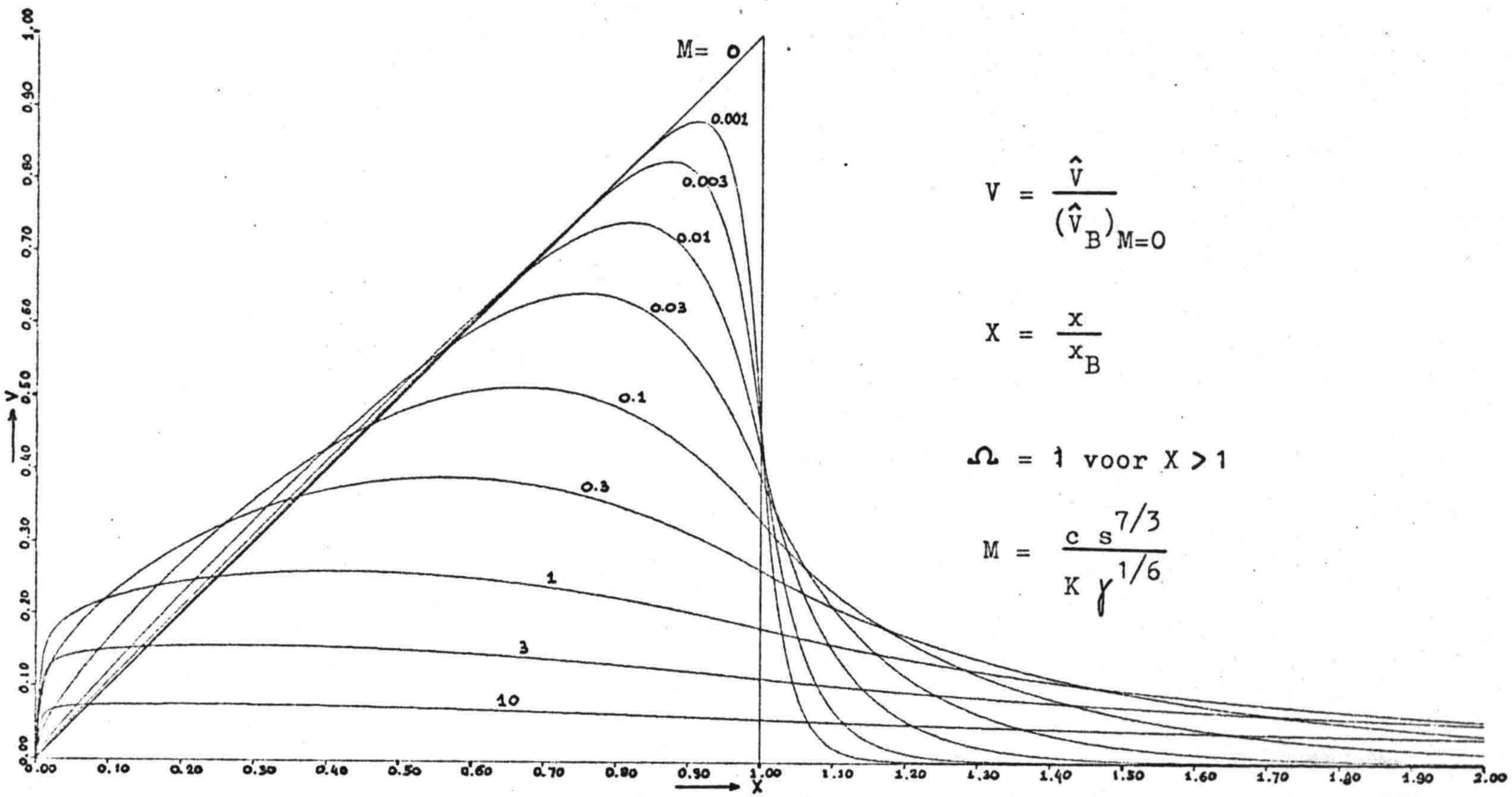
$\Omega(X)$ voor $X>1$ (1)	(2) $X_{V_{max}}$	(3) V_{max}	(4) $V_{X=1}$	(5) $V_{X=1.5}$	(6) $V_{X=2.0}$
$\Omega = H = X$	0.65	0.50	0.30	0.06	0.02
$\Omega = 1$	0.66	0.51	0.32*)	0.06	0.01
(6.18) met $tg\alpha$=0.1	0.66	0.51	0.33	0.06	0.01
" 0.5	0.66	0.51	0.33	0.06	0.01
" 1	0.67	0.52	0.34	0.06	-
" 2	0.68	0.53	0.36	-	-
(6.19) met σ =5	0.66	0.51	0.32	0.06	0.01
" 3	0.66	0.51	0.32	0.06	0.01
" 1	0.66	0.51	0.32	0.06	0.01
" 0.5	0.66	0.51	0.33	0.06	0.004
" 0.15	0.68	0.52	0.36	-	-

tabel 6.1. Resultaten voor M=0.1
*) met kleinere stapgrootte wordt dit 0.33.

Het bleek vanwege de geringe verschillen weinig zinvol om de snelheidsprofielen hier in grafiekvorm te geven.
De grootste spreiding in V treedt volgens de verwachting op buiten, maar dichtbij de brandingszone. Dat gebied kunnen we aangeven met $1<X<$ ca 1.2. Daar hebben de verschillende vormen van Ω de meeste invloed op het snelheidsprofiel vanwege de nog niet erg kleine dV/dX. Voor kleinere waarden van M liggen de snelheidsprofielen voor verschillende "intermittency"-vormen nog dichter bij elkaar.

Opvallend is de (toevallige) overeenkomst tussen de profielen van fig. 6.3 en die van Longuet-Higgins (1970 b). I.p.v. (6.16a):
$M\frac{d}{dX}\left(X^2\frac{dV}{dX}\right)-X^{1/2}V=-X^{3/2}$ voor $0<X\leqslant 1$ vindt Longuet-Higgins
$P\frac{d}{dX}\left(X^{5/2}\frac{dV}{dX}\right)-X^{1/2}V=-X^{3/2}$. De term tussen haken verschilt een faktor $X^{1/2}$ en dat blijkt weinig effekt op het resultaat te hebben. De oplossing van de d.v. van Longuet-Higgins is echter analytisch zeer eenvoudig omdat de homogene vgl. een lineaire d.v. van Euler is ($X^{1/2}$ wordt eruit gedeeld). De bezwaren tegen het model zijn in hoofdstuk 3 besproken. Het grootste verschil met het model van Longuet-Higgins zit in de parameter M die $\propto S^{7/3}$ is, terwijl $P\propto S$ is! ($P=\frac{2SN}{\gamma K}$, met N volgens (3.18)).

De opmerking van Longuet-Higgins (1970 b, p. 6795) over het verschil



Berekende brandingsstroomprofielen t.g.v. regelmatige golven

fig. 6.3

in de gevoeligheid van $\hat{V}$ voor variaties van M resp. de bodemschuifspanningskoëfficiënt K kan hier zonder meer worden overgenomen: $\hat{V}$ is <u>veel</u> gevoeliger voor K dan voor M. $\hat{V} = V_* V_0$ is bij benadering $\propto \frac{1}{K}$.

6.4 Vergelijking met empirische gegevens

Empirische verifikatie van het rekenmodel zal in de eerste plaats gericht moeten zijn op de parameter $M = \frac{c\,s^{7/3}}{K\gamma^{11/6}}$, waarin de koëfficiënt $c = \mathcal{O}(1)$ behoort te zijn (zie 6.13).
$c = c'(c'')^{1/2} = c'(c'''/c_0)^{1/3}$ waarin c_0, c''', c'' en c' koëfficiënten van $\mathcal{O}(1)$ zijn uit resp. (5.2), (5.13), (5.14) en (5.21). Al deze koëfficiënten moeten afzonderlijk bepaald worden en $c'(c'''/c_0)^{1/3}$ kan gemakkelijk van 1 afwijken. Zolang echter de randvoorwaarden van het fysische model redelijk overeenstemmen met die, die voor het theoretische model gesteld zijn, mag de afwijking niet meer dan één ordegrootheid zijn.

De experimentele resultaten van laboratoriumproeven van Galvin en Eagleson (1965) betreffende brandingsstromen op een vlak strand (s =0.11), zijn reeds besproken door Longuet-Higgins (1970b). Het blijkt dat de meeste waargenomen snelheidsprofielen liggen tussen de profielen volgens fig. 6.3 waarvoor geldt M=0.1 en M=0.4.
De hierbij volgens (6.13) berekende waarden van c zijn resp. $c \approx 0.2$ en $c \approx 0.8$, dus inderdaad $c = \mathcal{O}(1)$.

Bij het Waterloopkundig Laboratorium in de Voorst zijn brandingsstroomprofielen gemeten, o.m. die welke vermeld staan in het WL rapport M1148, zie fig. 6.4. Het strand heeft een vaste bodem en heeft t.p.v. de brandingszone een helling 1:35. Het onderzoek was niet gericht op het mechanisme van de brandingsstroom, maar op de invloed van open palenrijen op stromingen nabij de kust. In de "ijkfase", zonder palenrijen, zijn voor ons doel geschikte gegevens van een brandingsstroom, opgewekt door regelmatige golven, verzameld. Tabel 6.2 geeft berekende waarden van over een aantal raaien (!) gemiddelde snelheden. Het zo verkregen snelheidsprofiel is uitgezet in fig. 6.4d.

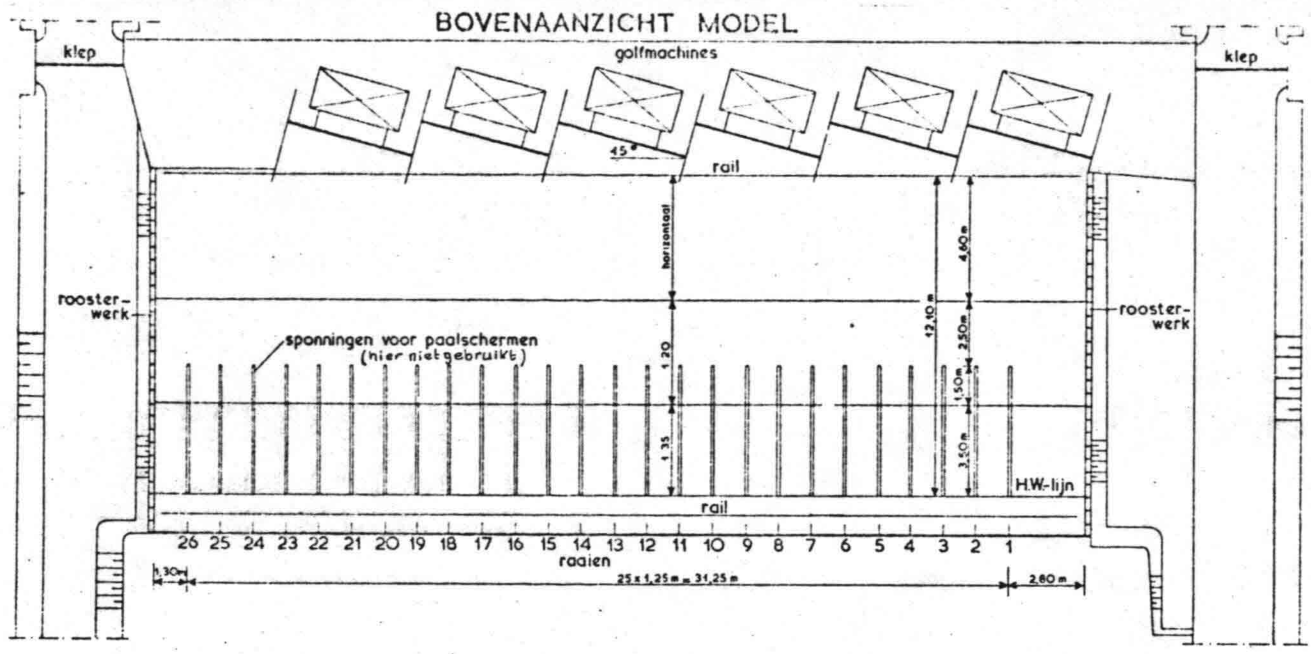


fig. 6.4a

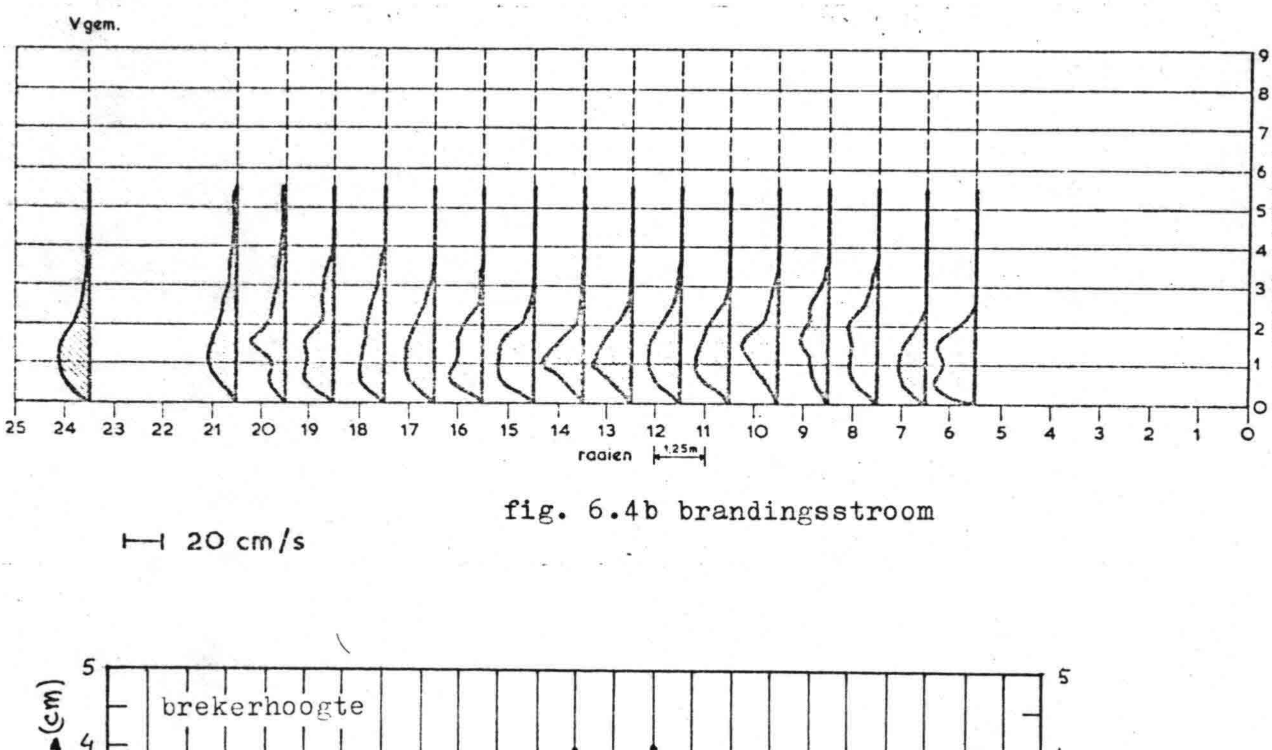


fig. 6.4b brandingsstroom

20 cm/s

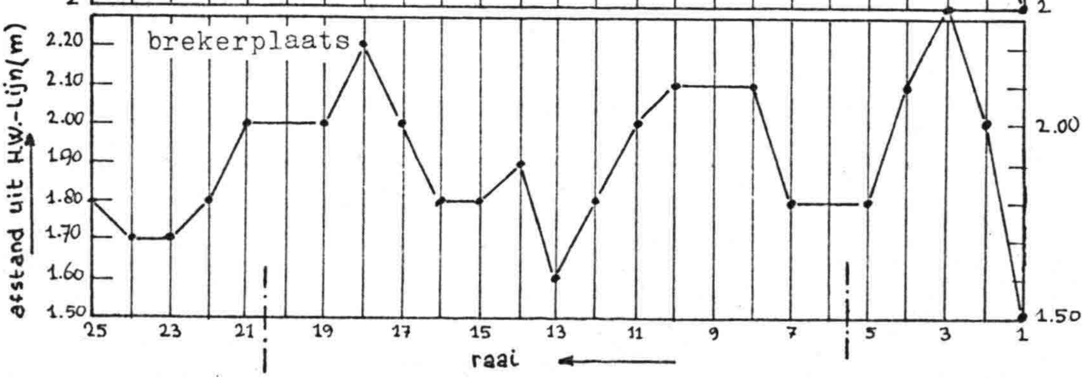


fig. 6.4c

fig. 6.4
brandingsstroom op modelstrand (uit WL rapport M1148; overgenomen met toestemming van opdrachtgever, R.W.S.).

afstand uit H.W. lijn (m)	$\bar{v}$ (cm/s)	s (cm/s)	$s/\bar{v}$ (%)
0,5	11,1	3,8	34
1,0	14,1	3,8	27
1,5	14,2	2,5	18
2,0	8,2	2,5	30
2,5	4,0	2,7	67
3,0	1,9	1,7	89
3,5	0,7	1,1	157
4,0	0,2	0,6	300
4,5	0,2	0,6	300
5,0	0,2	0,6	300
5,5	—	—	—
6,0	—	—	—

tabel 6.2

behoort bij fig. 6.4

Ijking:

meting met drijvers

$\bar{v}$ = gemiddelde snelheid van raai 5,5...20,5

s = standaardafwijking snelheden raai 5,5...20,5

$s/\bar{v}$ = variatiecoëfficiënt

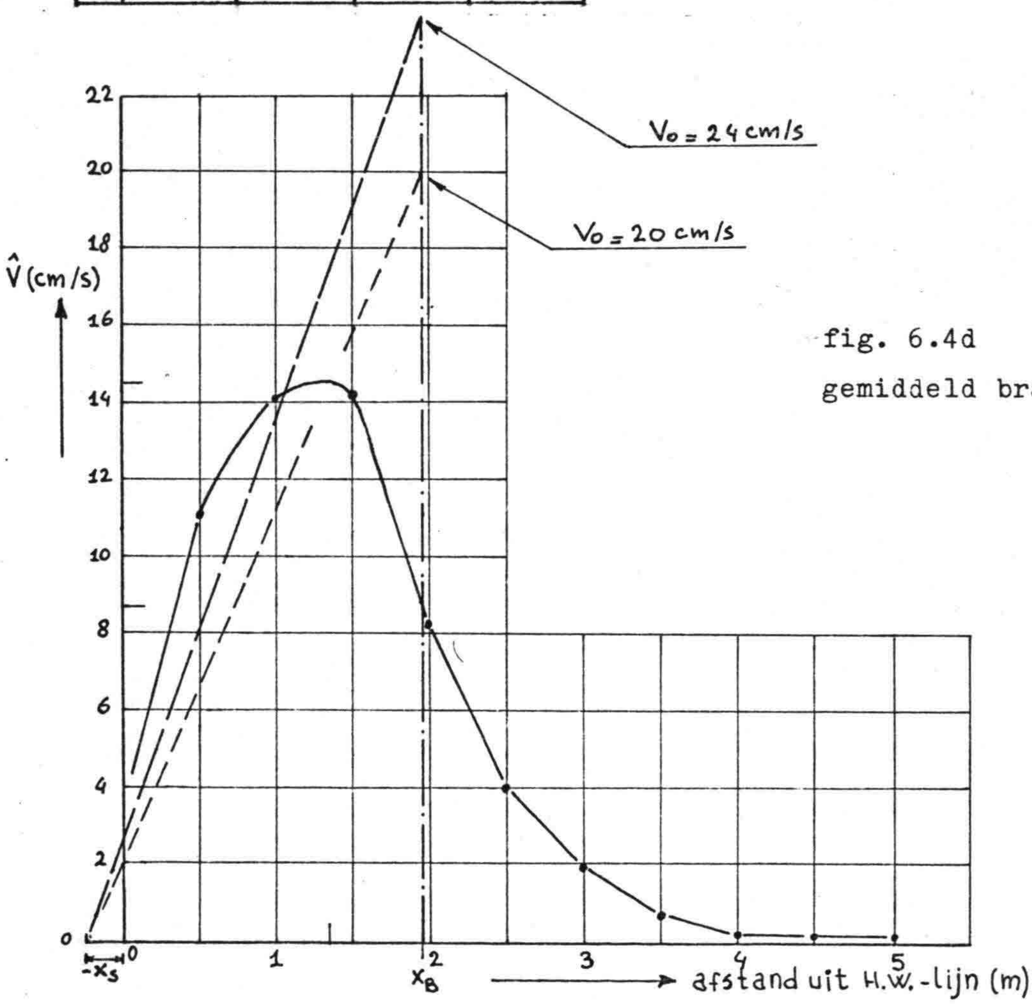


fig. 6.4d
gemiddeld brandingsstroomprofiel

De invalshoek van de golven t.p.v. de gemiddelde brekerlijn ($X_B = 1.95$ m) is $\theta_B = -8.5^\circ$. De brekende golven waren van het type "spilling". Vervolgens wordt genomen: $\gamma = \frac{H_B}{h_B} = \frac{3.5 * 10^{-2}}{\frac{1}{35} * 1.95} = 0.63$ en $K = \frac{2}{\pi} * 0.01$, waarmee volgens (6.11): $V_o = 0.200$ m/s.

$\hat{V}_{max} = 0.145$ m/s (zie fig. 6.4d).

$\frac{\hat{V}_{max}}{V_o} = 0.725$. Uit fig. 6.3 volgt daarvoor dat $M \approx 0.014$.

De koëfficiënt c in $M = \frac{c s^{7/3}}{K_L^{1/6}}$ wordt hiermee $c = 0.35$, dus weer $c = \mathcal{O}(1)$.

Het maximum van het snelheidsprofiel voor M=0.014 in fig. 6.3 treedt op voor X=0.79. Uit fig. 6.4d volgt $\frac{x_{\hat{V}max}}{x_B} = \frac{1.35}{1.95} = 0.69$.
Indien de set-up hierin meebetrokken wordt: $\frac{x_{\hat{V}max} + X_S}{x_B + X_S} = \frac{1.59}{2.19} = 0.73$.
Opstuwing van de gemiddelde waterstand is niet gemeten, maar kan benaderd worden m.b.v. (2.115): $\bar{\zeta}_{max} \approx \frac{5}{16} \gamma H_B$,
zodat $x_S = 35 * \frac{5}{16} * 0,63 * 3.5 * 10^{-2} = 0.24$ m.
Uit de ligging van het gemeten snelheidsprofiel t.o.v. het profiel zonder menging waarvoor $V_0 = 0.20$ (zie fig. 6.4d) volgt dat V_0 waarschijnlijk ≈ 20% te laag is berekend. Stel dat K 20% kleiner is, daarmee wordt V_0 : $V_0 = 0.240$ m/s en $\frac{\hat{V}_{max}}{V_0} = 0.605$ Uit fig. 6.3 volgt dan M=0.04, terwijl het bijbehorende maximum optreedt voor X=0.72.
Het lijkt dus erg aannemelijk dat $V_0 = 0.240$ m/s. De snelheid t.p.v. de brekerlijn: $\hat{V}_B = 0.086$ m/s. komt ook goed overeen met hetgeen uit fig. 6.3 gevonden wordt voor V_B: $\frac{\hat{V}_B}{V_0} = 0.36$, terwijl $V_B = 0.37$.
Koëfficiënt c wordt nu: $c = 0.85$. De vormen van berekende en gemeten profielen stemmen ook redelijk overeen.
We kunnen stellen dat het rekenmodel tot zover geheel aan de verwachtingen heeft voldaan.
Een vergelijking van het model van Longuet-Higgins met deze laboratoriummetingen levert een waarde van zijn numerieke "konstante" N: $N = \frac{P \gamma K}{2 s} = 0.00098$. Dit is ± 5 resp. 10 maal zo klein dan de beide grenzen voor N die gevonden zijn uit de genoemde laboratoriumproeven van Galvin en Eagleson (zie p. 3.17 ad 4°), waarvoor s=0.11.
Dit is in overeenstemming met de suggestie van p. 5.20 dat N evenredig is met $s^{4/3}$. Dat zou nl. op het strand met helling $1/35$ voor N een ongeveer 6 maal zo kleine waarde opleveren als op het strand met s=0.11.

Direkte verifikatie van het turbulentiemodel is op dit moment nog niet mogelijk door gebrek aan gegevens van turbulentiemetingen in en nabij de brandingszone. Wel is het mogelijk om door vergelijking met waarnemingen van bv. de verspreiding van kleurstof de koëfficiënten in het turbulentiemodel (5.15), (5.21) en (5.22) op hun grootte-orde te checken.

In tabel 6.3 staan gegevens vermeld van waarnemingen waaruit door de verschillende auteurs schattingen zijn gemaakt van de menging in de brandingszone. De kolommen 2, 3, 4, 6 en 7 zijn ook gedeeltelijk gegeven door Bowen en Inman (1972). In kolom 7 staan waarden voor de diffusie-koëfficiënt A_H vermeld zoals die door de auteurs zelf zijn voorgesteld. Bij Harris e.a. (1963) ontbreken gegevens over x_B, h_B, T

en γ. De waarden hiervoor zijn zo goed mogelijk uit de overige metingen en aanduidingen geschat. Voor al hun metingen is $\gamma=1$ aangenomen. Bij Inman e.a. (1971) ontbreekt h_B, maar Inman e.a. (1972) geven waarden voor die metingen, die ook hier gebruikt worden.

Uit (5.22) en (5.15) volgt: $\nu_t = \frac{1}{2} c' (c'')^{1/2} g^{1/2} H_B^{5/6} x_B^{-1/3} h(x).$ (6.27)

Het gemiddelde van ν_t over de brandingszone bij een strand met konstante helling is

$$\frac{1}{2} \nu_{tB} = \frac{1}{4} c g^{1/2} H_B^{5/6} x_B^{-1/3} h_B = \frac{1}{4} c \gamma^{5/6} (g h_B)^{1/2} \bar{s}^{1/3} h_B, \qquad (6.28)$$

waarin $\bar{s} = h_B/x_B$ en $c = c'(c'')^{1/2} = \mathcal{O}(1)$.

kolom: 1 onderzoekers	2 evt. proefnr.	3 x_B [m]	4 h_B [m]	5 γ	6 $\sqrt{g h_B}$ [m/s]	7 A_H [m²/s]	8 $\frac{1}{2}\nu_{tB}/c$ zie (6.28)	9 $c = A_H/(8)$
Inman e.a. (1971)								
Scripps (tabel 1,2)	129	83	.80	.70	2.8	5.9	.088	67
	109	80	.60	.70	2.4	2.8	.053	53
	112	68	.60	.71	2.4	2.0	.057	35
	107	70	.66	.70	2.5	2.0	.066	30
El Moreno (tabel 1,2)	55	5.5	.45	1.27	2.1	.30	.13	2,4
	97	4.7	.45	1.76	2.1	.12	.17	.69
	95	4.8	.40	1.50	2.0	.11	.12	.90
	104	4.8	.35	.94	1.8	.12	.06	1.9
	93	3.8	.30	1.26	1.7	.08	.07	1.2
Harris e.a. (1963)								
Veld (tabel 1)	1	18	1.4	1	3.7	1.1	.55	2.0
	2	14	1.1	1	3.3	.24	.39	.62
	3	12	.9	1	3.0	.26	.28	.92
	4	16	1.2	1	3.4	.42	.43	.97
	5	8	.6	1	2.4	.28	.15	1.8
laboratorium (fig. 8)		.70	.068	1	.82	.0051	.0064	0.80
		.80	.072	1	.84	.0054	.0068	0.80
		.80	.072	1	.84	.0050	.0068	0.74
		.50	.043	1	.65	.0051	.0031	1.7
		.60	.056	1	.74	.0028	.0047	.59
		.50	.045	1	.66	.0023	.0033	.69
		.50	.041	1	.63	.0019	.0028	.67
		.30	.027	1	.51	.0022	.0016	1.4
		.50	.043	1	.65	.0012	.0031	.39
		.35	.032	1	.56	.0007	.0020	.35
Thornton Lab (Galvin, Eagleson '65)	II-4	.52	.043 (H_B=0.04)	.95	.65	.0029	.0029	1.0
veld (Ingle '66)		70	1.55 (H_B=1.37)	.78	3.8	1.4	.38	3.7

tabel 6.3

In kolom (8) staan de berekende waarden $\frac{1}{2}\nu_{t_B}/c$ vermeld.
In kolom (9) wordt de koëfficiënt c berekend uit de verhouding $A_H/\frac{1}{2}\nu_{t_B}/c$. Waar H_B en h_B beide gegeven zijn (Thornton), is niet met de opgegeven γ gerekend.
Behalve in de eerste vier gevallen, blijkt c dus steeds $O(1)$ te zijn. De grote waarden bij Scripps Beach (faktor 10 te groot) kunnen aan de te grote waarden voor A_H gewijd zijn. Deze mogelijkheid is reeds besproken in par. 3.3.2 en werd ook in par. 5.8 genoemd. Het kan zijn dat de opgegeven A_H geen gemiddelde waarde over de brandingszone of dat bij deze brede brandingszone twee afzonderlijke brekergebieden optreden (niet vermeld door auteurs).

Als we bv. proefnr. 107 vergelijken met proefnr. 55 dan moet het zeer merkwaardig genoemd worden dat een ± 3 * zo grote energieflux F_{x_B} in proefnr. 107, geïnjekteerd in een brandingszone met een $\pm$ 20* zo groot(!) vertikaal oppervlak, een gemiddelde "eddy diffusivity" oplevert, die $\pm$ 7 * groter is dan bij proefnr. 55. We zouden eerder verwachten dat $(A_H)_{107} < (A_H)_{55}$, nogmaals: als A_H een over de gehele brandingszone gemiddelde waarde voorstelt.

Hoofdstuk 7

ONREGELMATIGE GOLVEN MET MENGING

7.1 Inleiding

Voor de natuurlijke situatie met windgolven moeten we nu de daaraan inherente variabiliteiten invoeren.
Bij de berekening van snelheden in brandingsstromen t.g.v. invallende regelmatige golven is er van uitgegaan, dat alle golven braken op dezelfde afstand uit de kust. Het niet in rekening brengen van turbulente horizontale uitwisseling van hoeveelheid beweging in het overigens als "niet-viskeus" en in een Eulers frame opgestelde model had een (berekende) diskontinuïteit t.p.v. de brekerlijn tot gevolg. In brandingszones van onregelmatige golven is er een essentieel verschil, omdat hier niet een brekerlijn is te definiëren ter plaatse waarvan alle golven breken. Gemiddeld gezien zal er met de afstand uit de kust een geleidelijke variatie optreden in het percentage gebroken of brekende golven hetgeen, ook zonder inachtneming van turbulentie-wrijving, een vloeiend verlopend snelheidsprofiel tot gevolg heeft. Het relatieve effekt van turbulente menging, bv. uitgedrukt in reduktie van de maximale snelheid in het brandingsstroomprofiel, zal daarom minder zijn. Hoeveel minder is niet bekend; de verwachting die er hieromtrent algemeen heerst, wordt wel uitgedrukt in bewoordingen als "veel minder" of "effekt zal gering zijn" (Battjes, 1974). Het doel van dit hoofdstuk is om aan de hand van uitgevoerde berekeningen enig inzicht in het genoemde effekt te verschaffen. Indien turbulente impulstransporten niet in de berekening worden betrokken, worden de naast elkaar liggende waterkolommetjes als het ware weer als ongekoppeld beschouwd, zodat lokale snelheden dan ook weer uit een algebraïsche vergelijking volgen. Maar evenals in het geval van regelmatige golven, is het effekt van turbulente impulstransporten niet a priori te verwaarlozen wanneer de lengteschaal van de turbulentie van dezelfde grootte-orde is als de ruimtelijke verandering van de zo verkregen snelheidsgradiënten. Dit is vooral te verwachten bij invallende onregelmatige golven met een energiespektrum dat smal is in richting en frekwentie, zodat de top van het brandingsstroomprofiel nog vrij geprononceerd is.
Voor theorie betreffende de berekening van brandingsstromen (en set-up) opgewekt door brekende onregelmatige golven, maar zonder invloed van de turbulentie daarop, wordt verwezen naar Battjes (1972) en Battjes (1974). Het laatste is verschenen na het gereedkomen van de berekeningen voor dit verslag. Uit deze theorie zullen we in het kort de belangrijkste punten aangeven c.q. citeren, die in de volgende

paragraaf mathematisch geformuleerd zullen worden.

De berekening vereist specifikatie van lokale radiation stresses. Deze kunnen worden uitgedrukt in termen van het 2-dimensionale energiespektrum $G(\omega,\theta)$ van de uitwijking van het gemiddelde vrije oppervlak. Uitgaande van diep-water kondities, kan dit spektrum buiten de brandingszone bepaald worden met bestaande berekeningsmethoden betreffende refraktie en shoaling, eventueel met inbegrip van een geschikte dissipatiefunktie. Binnen de brandingszone voldoen deze berekeningen niet meer vanwege het sterk niet-lineaire mechanisme in de brekende golven. In analogie met brekende regelmatige golven (Bowen e.a. 1968) lijkt het echter alleszins redelijk om aan te nemen dat de radiation stresses ook in de brandingszone berekend kunnen worden uit het lokale spektrum van de onregelmatige golven. En wel uit het geïntegreerde spektrum, dat binnen de brandingszone een bovengrens heeft vanwege het feit dat de optredende golfhoogte, die bepalend is voor de totale energie, door de diepte aan een maximum is gebonden. De basis-aanname die door Battjes gedaan kan ongeveer als volgt worden omschreven:

Bij elke diepte kan een bovengrens voor de golfhoogte (H_B) gedefinieerd worden, die niet door individuele golven van het random golfveld overschreden kunnen worden en dat die golfhoogten die in afwezigheid van breken groter dan H_B zouden zijn, door het breken gereduceerd worden tot de waarde H_B. M.a.w. er wordt aangenomen dat de energie die korrespondeert met de hoogte die de lokale brekerhoogte te boven gaat wordt gedissipeerd.

We beschouwen onregelmatige golven die zich voortplanten in water van langzaam afnemende diepte, zodat de waarde H_B ook geleidelijk afneemt. Omdat het breken van een individuele golf in een random golfveld kwalitatief gelijkvormig is met het breken van een individuele golf in een periodieke golftrein wordt de bovengrens H_B ontleend aan een brekingskriterium voor regelmatige golven. Er worden alleen spillingbrekers beschouwd.

Voor de duidelijkheid bepalen we ons tot een smal spektrum (smal in frekwentie en richting). Dan kunnen de golven als lang-kammig worden aangenomen en behoeft alleen de lokale golfhoogteverdeling in de berekening te worden betrokken. De enige gegevens die we dan van het spektrum op diep water nodig hebben zijn de totale energie E, de gemiddelde periode $(\overline{T})$ en de gemiddelde voortplantingsrichting $(\overline{\theta_0})$.

De gemiddelde verdeling over de afstand uit de kust van de turbulentie-viskositeit is natuurlijk veel moeilijker te schatten dan bij regelmatige golven. Ook nu wordt de golfenergie, via de door het breken van de golven opgewekte turbulentie uiteindelijk in warmte omgezet. De hoogste golven breken het meest ver van de kust. Het is echter niet redelijk om aan te nemen dat er gemiddeld een homogene turbulentie met lengteschaal = $\mathcal{O}$ (lokale diepte) aanwezig is vanaf de kustlijn tot aan bv. het punt $x_{H\,0.1\%}$, waar 0.1% van de golven de waarde $H_B(x_{H\,0.1\%})$ overschrijdt. We kunnen het effekt hiervan weer proberen te benaderen d.m.v. een rationele wijziging van een berekende turbulentie-viskositeit.

7.2 Mathematische formulering

De bewegingsvergelijking (6.1) blijft van kracht (wordt niet beinvloed door het onregelmatig zijn van de golven). De radiation stresses in onregelmatige golven worden zoals gezegd berekend volgens de theorie van Battjes. Deze berekening verloopt als volgt:

a. als brekingskriterium voor regelmatige golven wordt gekozen

$$H_B = 0.14\, L \tanh\left(\frac{\gamma}{0.88}\ \frac{2\pi h}{L}\right). \tag{7.1}$$

In relatief ondiep water $\left(\frac{h}{L} \ll 1\right)$ nadert dit tot $H_B = \gamma h$. (7.2)

(7.1) wordt nu toegepast als brekingskriterium voor individuele golven in een onregelmatig golfveld.

b. Voor de fiktieve golfhoogten $\underline{H}_f$ (d.i. in "afwezigheid" van breking) wordt een Rayleigh-verdeling aangenomen:

$$F_f(H) \equiv P_r\left\{\underline{H}_f \leqslant H\right\} = 1 - \exp\left(-H^2/\overline{H_f^2}\right) \quad \text{voor } H \geqslant 0 \tag{7.3}$$

$$= 0 \qquad \text{voor } H < 0$$

Hierin wordt $\overline{H_f^2}$ gedefinieerd door

$$E_f = \frac{1}{8}\rho g\, \overline{H_f^2} \quad \left(= \frac{1}{8}\rho g\, H_{f_{rms}}^2\right) \tag{7.4}$$

waarin E_f de fiktieve golfenergie voorstelt die theoretisch aanwezig zou zijn indien golfbreking niet optrad.

c. Door het breken wordt de fiktieve golfhoogteverdeling "afgeroomd". De werkelijke golfhoogteverdeling F(H) wordt nu benaderd door de fiktieve verdeling af te kappen bij $H=H_B$, zie figuur 7.1.

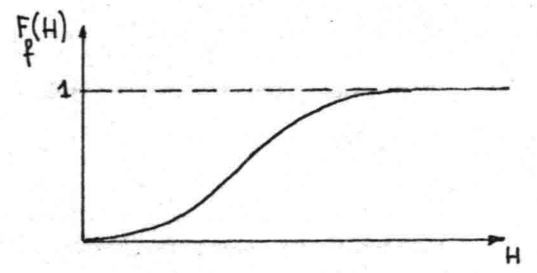


fig. 7.1a Rayleigh-verdeling

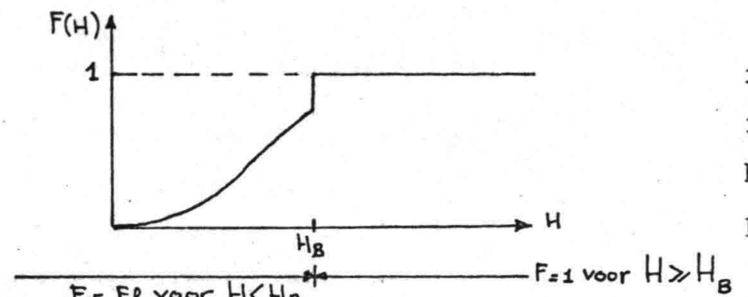


fig. 7.1b gekapte Rayleigh-verdeling

fig. 7.1
fiktieve en benaderende golfhoogteverdeling in een vast punt.

d. Met het bovenstaande kan de lokale gemiddelde golfenergie p.e.v. opp. berekend worden uit $E = \frac{1}{8} \rho g \, H_{rms}^2$ (7.5)

waarin

$$H_{rms}^2 = \overline{H^2} = E\{\underline{H}^2\} = F_f(H_B)\,\overline{H_f^2}. \quad (7.6)$$

De overschrijdingskans voor de fiktieve golfhoogte wordt gedefinieerd door

$$Q_f(H) \equiv Pr\{\underline{H}_f > H\} = \exp\left(-H^2/\overline{H_f^2}\right) \quad \text{voor } H \geqslant 0, \quad (7.7)$$

waarmee (7.6) geschreven kan worden als

$$H_{rms}^2 = \overline{H^2} = \left(1 - Q_f(H_B)\right) * \overline{H_f^2}. \quad (7.8)$$

$Q_f(H_B)$ (schrijf $Q_f(H_B) = Q_B$) = de fraktie van de golven die breekt. Deze laatste vergelijking zegt dat het afkappen van de bovenste fraktie Q_B van de fiktieve golfhoogteverdeling een relatieve reduktie van de (fiktieve) m.s. golfhoogte (= relatieve reduktie in energie t.g.v. breken) geeft gelijk aan Q_B.

e. Er wordt aangenomen, dat er ten gevolge van het breken een reduktie van de fiktieve radiation stresses plaats vindt in dezelfde verhouding als de totale energie

$$S_{xy} = \frac{E}{E_f} S_{xyf}. \quad (7.9)$$

Voor de berekening wordt als randvoorwaarde een in richting en frekwentie smal energie-dichtheidsspektrum op diep water gebruikt: $G_0(\omega, \theta_0)$. Met dit spektrum korrespondeert de rms golfhoogte H_0 gedefinieerd door het nulde-orde moment m_0 van het diep-water frekwentiespektrum volgens

$$m_0 = \frac{E_0}{\rho g} = \int_0^\infty S_0(\omega)\, d\omega = \frac{1}{8} H_0^2, \tag{7.10}$$

waarin $$S_0(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} S_0(\omega, \theta_0)\, d\theta_0 . \tag{7.11}$$

De gemiddelde periode van de golven is $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$.
Een richting en spektrum behoeft niet te worden gegeven; de gemiddelde invalshoek op diep water ($\bar{\theta}_0$) is voldoende. In plaats van H_0 en $\bar{T}$ kan ook de golfsteilheid H_0/L_0 gegeven worden $(L_0 = g\bar{T}^2/2\pi)$.

De transformatie van golven die in de richting van de kust lopen wordt berekend uit alleen shoaling en refraktie (geen golfopwekking of golfenergie dissipatie anders dan door breken).

$$E_f = K_R^2\, K_s^2\, E_0, \tag{7.12}$$

waarin K_R = refraktie-koëfficiënt $= \left(\frac{\cos\bar{\theta}_0}{\cos\theta}\right)^{1/2}$ (7.13)

en K_S = shoaling-koëfficiënt $= \left(\frac{n_0 c_0}{nc}\right)^{1/2}$, (7.14)

zie (2.87)e.v.

Opm.: c_0 betekent hier de fase-snelheid op diep water; $c_0 = g/\bar{\omega}$
De verandering van θ wordt weer met de wet van Snellius (2.89) berekend: $\frac{\sin\theta}{c} = \frac{\sin\bar{\theta}_0}{c_0}$

In het volgende worden de termen uit (6.1) geëvalueerd:

1 De "aandrijving" kan als volgt worden geschreven:

$$-\frac{dS_{xy}}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(E n c \cos\theta \sin\theta\right) = -\frac{\sin\bar{\theta}_0}{c_0}\cdot\frac{1}{8}\rho g \frac{d}{dx}\left(H_{rms}^2\, n c \cos\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{32}\rho g \sin 2\bar{\theta}_0\, H_0^2 \frac{d}{dx} F_f(H_B), \tag{7.15}$$

waarin n volgens (2.82) en $n_0 = \frac{1}{2}$

Opm.:
De "total lateral thrust" is ook nu weer $\int_{x=0}^{\text{diep water}} \frac{dS_{xy}}{dx} = \frac{1}{4} E_0 \sin 2\bar{\theta}_0$, vergelijk (2. 106).

3 Middeling van de y-komponent van de momentane schuifspanning aan de bodem (2.109) levert nu i.p.v. (2.110)

$$\bar{\tau}_{by} = C_f \rho\, \hat{V}\, |\overline{\underline{u}_{wb}}| . \tag{7.16}$$

Ook nu gebruiken we weer een eerste orde benadering,

$$|\overline{\underline{u}_{wb}}| = |\overline{\underline{u}_{wb\,max} * \sin\omega t}| = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\omega}{\sinh kh}\right]_{\omega=\bar{\omega}}^{*} \bar{H} . \tag{7.17}$$

Het onderschrift "max" duidt op de maximale waarde per golf. Uit de afgekapte Rayleigh verdeling (fig. 7.1b) kan berekend worden dat i.p.v. $\bar{H}$ veilig H_{rms} genomen kan worden. Dan volgt voor $\bar{\tau}_{by}$,

$$\bar{\tau}_{by} = C_f \, \rho \, \frac{1}{\pi} \; \frac{2\pi/T}{\sinh kh} \; H_{rms} \; \hat{V} = \frac{K\rho}{\sinh kh} \; \frac{\pi H_{rms}}{T} \; \hat{V}, \tag{7.18}$$

waarin als voorheen $K = \frac{2}{\pi} C_f$. (7.19)

(2) Deze term wordt op dezelfde manier geschreven als in hoofdstuk 6. We moeten nu echter een andere keuze maken voor wat daar als breedte van de brandingszone (x_B) en brekerhoogte (H_B) genomen is. Er wordt verondersteld dat het turbulentiemodel zoals dat afgeleid is voor invallende regelmatige golven nu ook geldt vanaf x=0 tot aan het punt x_{Bf}, waar de berekende waarden H_B en $H_{f\,rms}$ gelijk zijn aan elkaar. Deze keuze is vrij arbitrair, maar zolang er niet meer bekend is van de werkelijke verdeling van de energie en de lengteschaal van de turbulentie zullen we een aanname moeten doen, waarmee we echter wel een juiste grootte-orde van het effekt van turbulente menging moeten weergeven. We weten ook dat het snelheids-profiel niet zo erg gevoelig is voor de juiste verdeling van ν_t.
Bij de bovengenoemde keuze hebben de volgende gedachten een rol gespeeld. Beschouw een regelmatige golftrein met dezelfde energie-inhoud E_0 op diep water als de onregelmatige golftrein. Verandering hierin tot aan het punt van breken kan ook met (7.12) berekend worden, zodat de energie-inhoud van de regelmatige golven gelijk is aan E_f en ook geldt $H_{f\,rms} = H_{regelmatig}$. De brekerhoogte en de brekerlijn voor regelmatige golven zouden dan bepaald worden door de waarden van en de plaats waar $H_{f\,rms} = H_B$. Hieruit volgt ook de energieflux in de golven en daaruit weer de gemiddelde kinetische energie van de binnen de brandingszone homogeen veronderstelde turbulentie. Op de plaats $x = x_{Bf}$ geldt $Q_B = \exp(-1) \approx 0.37$; 37% van de passerende golven in de onregelmatige golftrein is daar brekende of gebroken. De gemiddelde energieflux door het vlak $x = x_{Bf}$ is dus minder dan in de regelmatige golftrein.
Het is wellicht zinvol om bij brede brandingszones in beperkte (maar niet te kleine!) gebieden een gemiddelde waarde voor w^2 te bepalen uit de in zo'n gebied gedissipeerde golfenergie. Voor de berekening van het brandingsstroomprofiel kan daaruit dan een vloeiend verloop afgeleid worden. Voor een eerste verkenning berekenen we de gemiddelde turbulentie-energie in het gebied $0 < x < x_{Bf}$, uit de daarin geïnjekteerde energieflux. Hiervoor wordt o.m. de gemiddelde golfenergie t.p.v. x_{Bf} gebruikt.

Volgens (7.5): $E(x_{B\ell}) = \frac{1}{8}\rho g H^2_{rms}(x_{B\ell})$. (7.20)

Noteer verkort: $H_{rms}(x_{B\ell}) \equiv H_{B\ell}$ (7.21)

en ook $h(x_{B\ell}) \equiv h_{B\ell}$. (7.22)

Voor $x > x_{B\ell}$ wordt $\Omega = 1$ genomen. Deze Ω heeft nu dus tevens de funktie om het effekt van de turbulente menging op de brandingsstroomsnelheid te beschrijven in het gebied $x > x_{B\ell}$, waar we geen schatting van de turbulentie-energie uit de daar gedissipeerde golfenergie hebben gemaakt. Voor de term 2 volgt nu (vergelijk (6.6) en (6.7):

$$\frac{d}{dx}\left[\rho \nu_t h \frac{d\hat{V}}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2} c\, g^{1/2} H_{B\ell}^{5/6} x_{B\ell}^{-1/3} h^2 \frac{d\hat{V}}{dx}\right] \text{ voor } x \leqslant x_{B\ell} \quad (7.23a)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2} c\, g^{1/2} H_{B\ell}^{5/6} x_{B\ell}^{-1/3} h_{B\ell}\, h \frac{d\hat{V}}{dx}\right] \text{voor } x > x_{B\ell} \quad . \quad (7.23b)$$

Eenvoudigheidshalve gaan we weer uit van een konstante gradiënt in de gemiddelde diepte of wel een konstante bodemhelling s met verwaarlozing van set-up.

Genormaliseerde grootheden worden gedefinieerd voor

diepte : $D = h/H_0$ (7.24)

stroomsnelheid : $W = -\hat{V}/\left(\frac{\gamma}{2K}\ s\ \frac{\pi H_0}{T}\right) \equiv \hat{V}/V_{norm}$ (7.25)

golfhoogte : $H^* = H/H_0$ (7.26)

golflengte : $L^* = L/L_0$ (7.27)

golfgetal : $k^* = k\ L_0$ (7.28)

De afstand uit de kust: $x = \frac{h}{s} = \frac{DH_0}{s}$. (7.29)

Substitutie van (7.15), (7.18) en (7.23) t/m (7.29) in (6.1) levert

$$\boxed{M\frac{d}{dD}\left[\ \Omega\ .\ D\frac{dW}{dD}\right] - \frac{H^*_{rms}}{\sinh(k^* D\, H_0/L_0)} W = -G\frac{d}{dD} F_\ell(H_B),} \quad (7.30)$$

waarin $M = \frac{c\, s^{7/3}}{(2\pi)^{1/2} K} * \frac{H_{B\ell}^{*\ 5/6}}{D_{B\ell}^{\ 1/3}} * \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{-1/2}$, (7.31)

$$G = \frac{1}{8\pi}\ \frac{\sin 2\bar{\theta}_0}{\gamma(H_0/L_0)}, \quad (7.32)$$

en $\Omega \begin{cases} = D & \text{voor } D \leqslant D_{B\ell} \\ = 1 & \text{voor } D > D_{B\ell} \end{cases}$. (7.33)

Indien M de fiktieve waarde M=0 zou hebben, ontaardt de d.v. (7.30) in een algebraïsche vergelijking waaruit direkt de lokale (genormaliseerde) stroomsnelheden W berekend kunnen worden (deze snelheden worden geschreven als W_0)

$$W_0 = \frac{G \sinh(kh)}{H^*_{rms}}\ \frac{d}{dD}\ F_\ell(H_B)\ . \quad (7.34)$$

Deze vgl. volgt natuurlijk ook direkt uit de bewegingsvgl. waarin de invloed van de turbulente menging verwaarloosd is.

In erg ondiep water nadert $H_{rms} \rightarrow \gamma h$, zodat de golfenergie-dissipatie in onregelmatige golven volgens dit model nadert tot die welke (zonder menging) aangenomen wordt voor regelmatige golven. Voor $h \rightarrow 0$ benadert het brandingsstroom-profiel van onregelmatige golven dat voor regelmatige golven. Indien de ondiep-water benaderingen in de bewegingsvergelijking (zonder menging) gesubstitueerd worden ontstaat

$$W_0 = 5/2 \sin \overline{\theta}_0 \frac{h}{H_0} \quad \text{voor } h \rightarrow 0. \tag{7.35}$$

De normaliseringsfaktor voor regelmatige golven, met dezelfde energiedichtheid op diep water als de onregelmatige en die alle t.p.v. h_{Bf} breken zou volgens (6.11) zijn:

$$V_0 = -\frac{5}{8} \frac{\gamma}{K} \left(g\, h_{Bf}\right)^{1/2} s \sin \theta_{Bf} \cos \theta_{Bf}, \tag{7.36}$$

d.i. de snelheid op de brekerlijn $x = x_{Bf}$ bij verwaarlozing van menging. Evenals voor het verkrijgen van (7.35) is gebeurd, wordt de cosinus-variatie binnen de brandingszone verwaarloosd, terwijl $\cos \theta_{Bf} = 1$ wordt gesteld. Uit (7.36) volgt

$$V_0 = 5/2 * D_{Bf} * \sin \overline{\theta}_0 * \left(-\frac{\gamma}{2K} s \frac{\pi H_0}{T}\right), \tag{7.37}$$

dus $V_0 = 5/2 * D_{Bf} * \sin \overline{\theta}_0 *$ (normaliseringsfaktor V_{norm} voor de stroomsnelheid bij onregelmatige golven), zie (7.25).

Dit geeft dan tevens een indikatie van de fout die gemaakt wordt wanneer niet de windgolf variabiliteit in rekening wordt gebracht (afgezien van menging). Indien we deze fout als verhouding van maxima weergeven volgt:

$$\frac{\hat{V}_{max}\,(\text{onregelm.})}{\hat{V}_{max}\,(\text{regelm.})} = \frac{W_{max} * V_{norm}}{V_0} = \frac{W_{max}}{2.5 * D_{Bf} * \sin \overline{\theta}_0}. \tag{7.38}$$

Het wordt nog eens herhaald dat hierbij uitgegaan is van een Rayleigh-verdeling (7.3) voor de hoogten van de onregelmatige golven.

7.3 Numerieke berekening en resultaten

Zoals eerder gesteld wordt als randkonditie een in richting en frekwentie smal energie-spektrum in diep water gekozen. Hiervan behoeven slechts de golfsteilheid H_0/L_0 en de gemiddelde invalshoek $\overline{\theta}_0$ gegeven te worden.

De d.v. (7.30) is op analoge wijze geprogrammeerd als dat gebeurd is voor (6.16), zodat de aantekeningen die daarbij gemaakt zijn ook nu geldig zijn. Het "source program" wordt gegeven in bijlage 1 en spreekt voor zich.

(7.30) wordt vervangen door het volgende equivalente systeem eerste orde d.v.'s:

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dD} = Z & (7.39a) \\ \dfrac{d^2W}{dD^2} = \begin{cases} -\dfrac{2}{D} z + \dfrac{H^*_{rms}}{MD^2 \sinh(kh)} W - \dfrac{G}{MD^2} \dfrac{d}{dD} F_f(H_B) \text{ voor } D < D_{Bf} & (7.39b) \\ -\dfrac{1}{D} z + \dfrac{H^*_{rms}}{MD_{Bf} D \sinh(kh)} W - \dfrac{G}{MD_{Bf} D} \dfrac{d}{dD} F_f(H_B) \text{ voor } D \geqslant D_{Bf} & (7.39c) \end{cases} \end{cases}$$

Hierin kan niet gerekend worden met M=0 (verwaarlozing van turbulente menging), maar voor dit geval wordt $W_0 = (W)_{M=0}$ rechtstreeks volgens (7.34) berekend. Het programma bestaat uit 2 delen. In het eerste deel worden in elk punt de dimensieloze waarden berekend van: kh (m.b.v. Newton-Raphson iteratieprocedure), H_B, $H_{f_{rms}}$, $F_f(H_B)$, $\frac{d}{dD} F_g(H_B)$, H_{rms} en W_0.
Numerieke differentiatie geschiedt in het startpunt aan de zeekant met een voorwaartse differentie en in alle andere punten met centrale differenties. In het tweede deel, na de "programma separatie" wordt de d.v. numeriek geïntegreerd. Als startwaarde van W voor grote $D(D_0)$ wordt de waarde van W_0 genomen, die berekend is in $D = D_0$.
Resultaten van berekeningen zijn weergegeven in de figuren 7.2 t/m 7.9.

De figuren 7.2 en 7.3 geven berekende brandingsstroomprofielen onder verwaarlozing van turbulente menging, voor konstante waarden van H_0/L_0 (resp. 0.03 en 0.06) en verschillende waarden van $\bar{\theta}_0$ (achtereenvolgens 15°, 30°, 45°, 60°, 75° en 85°).
N.B. De hoofdletter D in de plots staat voor de (niet dimensieloze) lokale diepte h!
Voor een bespreking van deze profielen wordt verwezen naar Battjes (1974).

Figuur 7.4 laat voor konstante waarden van H_0/L_0 en $\bar{\theta}_0$ (resp. 0.03 en 45°) profielen zien waarbij volgens (7.30) met verschillende waarden van M wel gerekend is met turbulente horizontale uitwisseling van impulsie.

De figuren 7.5 t/m 7.9 geven elk voor een andere waarde van $\bar{\theta}_0$, maar dezelfde waarden van H_0/L_0 (0.03) en M (steeds 0 en 0.6) een vergelijking tussen berekening met en zonder menging.
Opgemerkt wordt dat de waarden M = 0.6 niet erg realistisch zijn zodat deze figuren slechts voor onderlinge vergelijking gebruikt kunnen worden.

Hierna volgt nog een vergelijking van snelheidsprofielen van brandingsstromen opgewekt door regelmatige en onregelmatige golven waarbij turbulente menging verwaarloosd is, alsmede een vergelijking van snelheidsprofielen voor onregelmatige golven mèt en zonder menging.

1. Vergelijking van berekende brandingsstroomprofielen t.g.v. regelmatige en onregelmatige golven, waarbij turbulente menging verwaarloosd is (fig. 7.10)

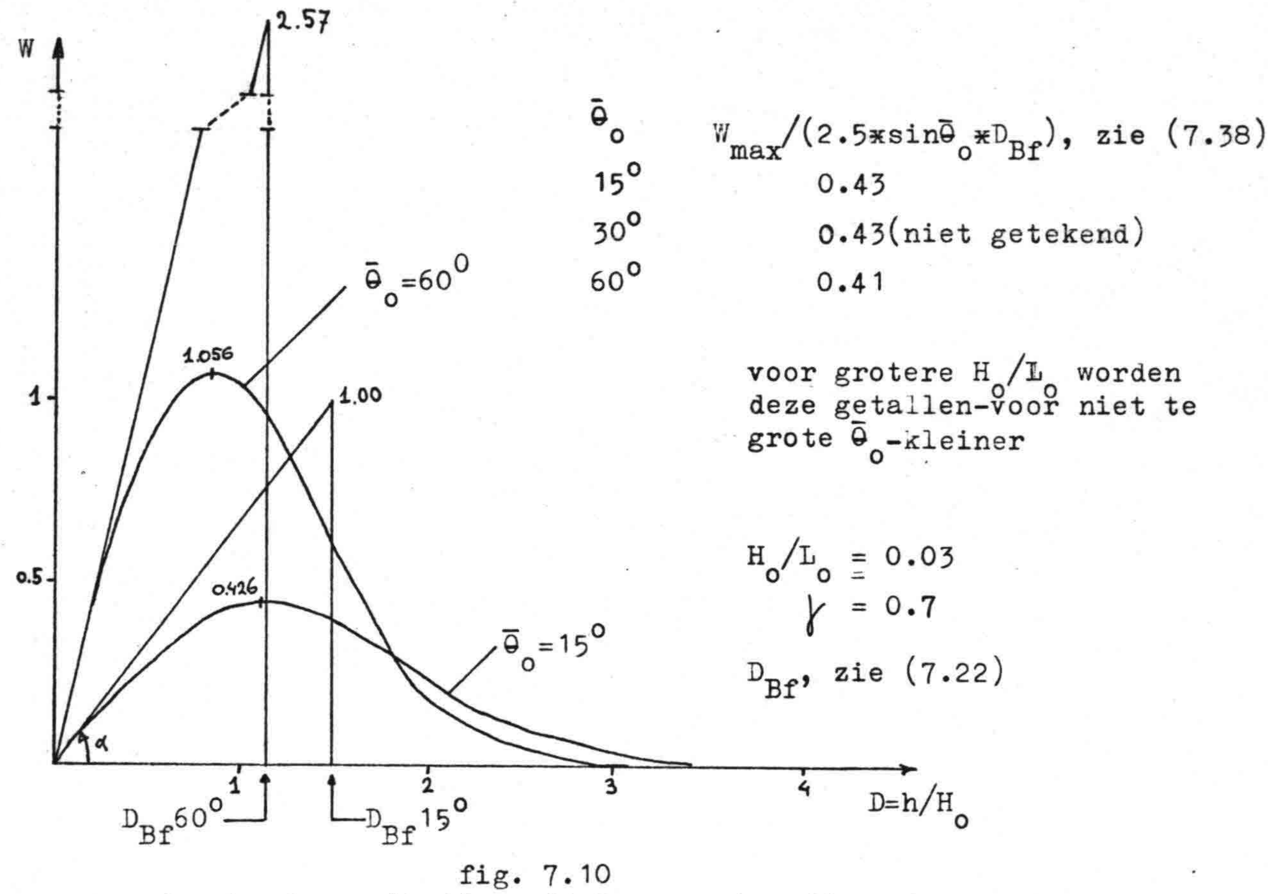


fig. 7.10
berekende snelheidsprofielen van brandingsstromen t.g.v. scheef invallende regelmatige en onregelmatige golven op een strand met konstante bodemhelling, waarbij turbulente menging verwaarloosd is.

Zoals op p. 125 is vermeld nadert het brandingsstroomprofiel t.g.v. onregelmatige golven voor $h \to 0$ het "overeenkomstige" profiel t.g.v. regelmatige golven. Voor de gemeenschappelijke tangent in het punt $D = 0$ geldt $tg\alpha = 2.5 * \sin\bar{\Theta}_o$. (7.40)

2. Vergelijking van berekende brandingsstroomprofielen t.g.v. onregelmatige golven, zonder en mèt menging.

M wordt gegeven door: M = berekende koëfficiënt $* \frac{c s^{7/3}}{K}$, zie (7.31)

Bij regelmatige golven hadden we: $M_{reg.} \approx \frac{c s^{7/3}}{K_\gamma^{1/6}}$, zie (6.16)

Stel H_o/L_o = 0.03 en γ = 0.7, dan wordt: $M_{onreg.} = 1.6 * \frac{c s^{7/3}}{K}$.

Bij s = 0.11 (Galvin en Eagleson, 1965) vonden we $M_{reg.}$ = 0.2.
De "overeenkomstige" waarde voor $M_{onreg.}$ wordt dan: $M_{onreg.} \approx 0.32$.
Uit fig. 7.4 ($\bar{\theta}_0 = 45^\circ$) volgt dan dat $W_{0_{max}}$ met 20% gereduceerd wordt.

We hebben nu:

a. onregelmatige i.p.v. regelmatige golven $\qquad W_{0_{max}} \approx 0.4 * V_0 \qquad$ (7.41)

b. regelmatige golven met menging i.p.v.
" " zonder " $\qquad V_{max} \approx 1/2 * V_0 \qquad$ (7.42)

c. onregelmatige golven met menging i.p.v.
" " zonder " $\qquad W_{max} \approx 0.8 * W_{0_{max}} = (1 - \frac{1}{2} * 0.4) * W_{0_{max}}. \qquad$ (7.43)

Deze uitdrukkingen leiden tot het volgende globale berekeningsresultaat (ook voor andere gevallen als van dit voorbeeld):
De invloed van turbulente menging op het maximum in het snelheidsprofiel van brandingsstromen t.g.v. onregelmatige golven komt tot uiting in een reduktie van dat maximum en kan geschreven worden als:

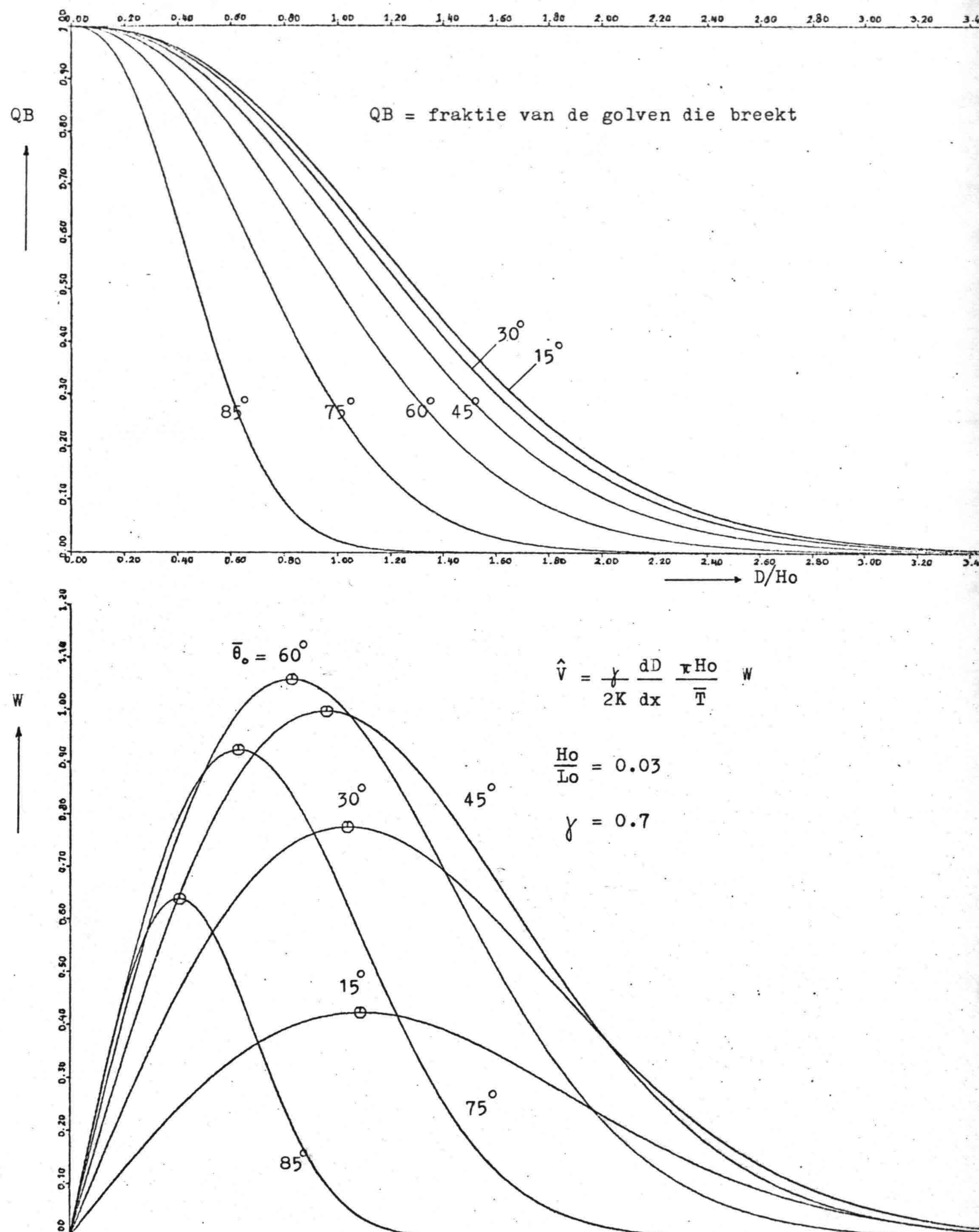
$$rf_c \approx 1 - rf_b * rf_a , \qquad (7.44)$$

waarin:

rf_c = reduktiefaktor $\frac{W_{max}}{W_{0_{max}}}$, vergelijk (7.43)

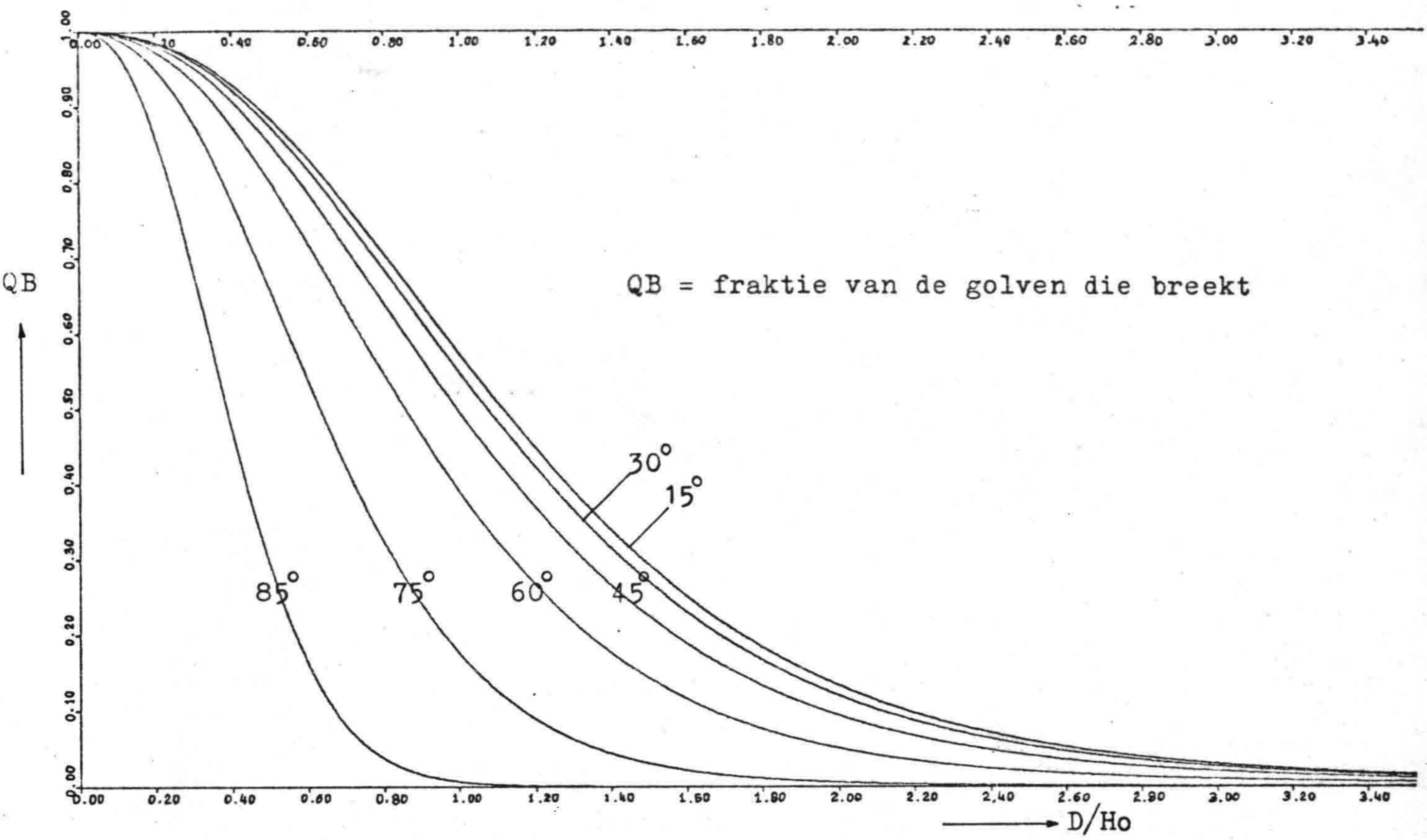
rf_b = reduktiefaktor $\frac{V_{max}}{V_0}$, vergelijk (7.42). Dit is het effekt van turbulente menging op het brandingsstroomprofiel t.g.v. regelmatige golven

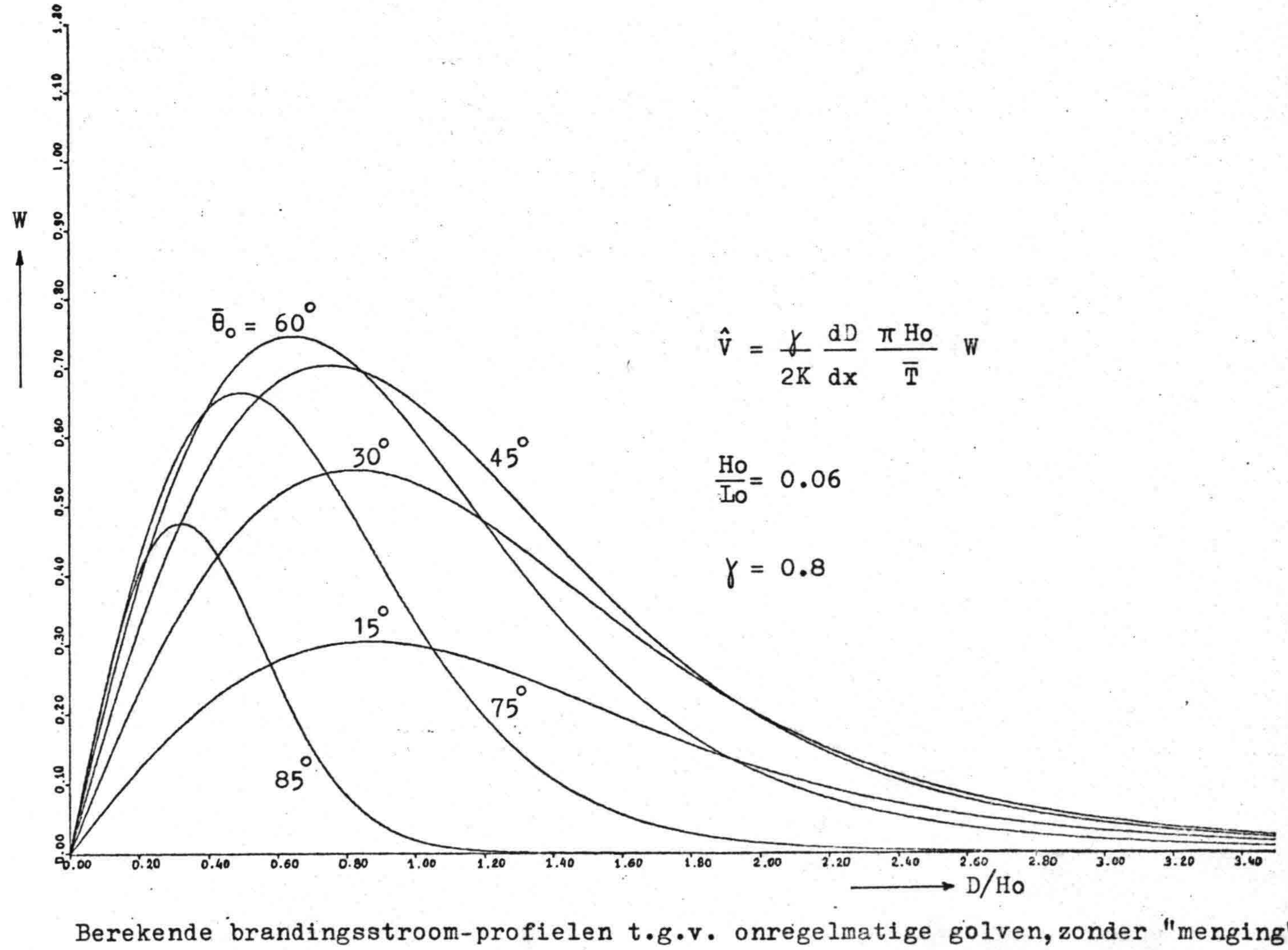
rf_a = reduktiefaktor $\frac{W_{0 max}}{V_0}$, vergelijk (7.41). Dit is het effekt van het onregelmatig zijn der golven.



Berekende brandingsstroom-profielen t.g.v. onregelmatige golven, zonder "menging"

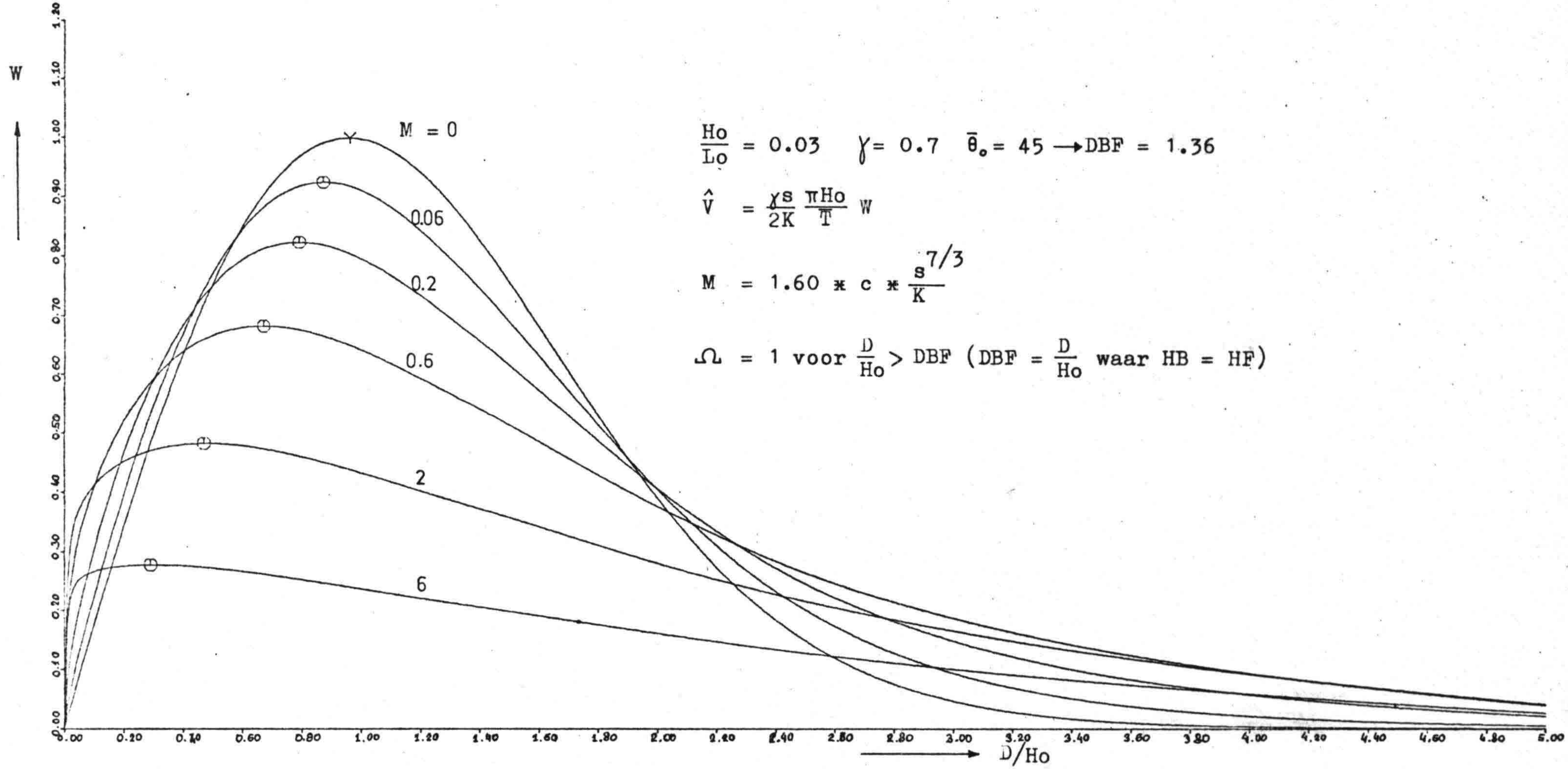
fig. 7.2





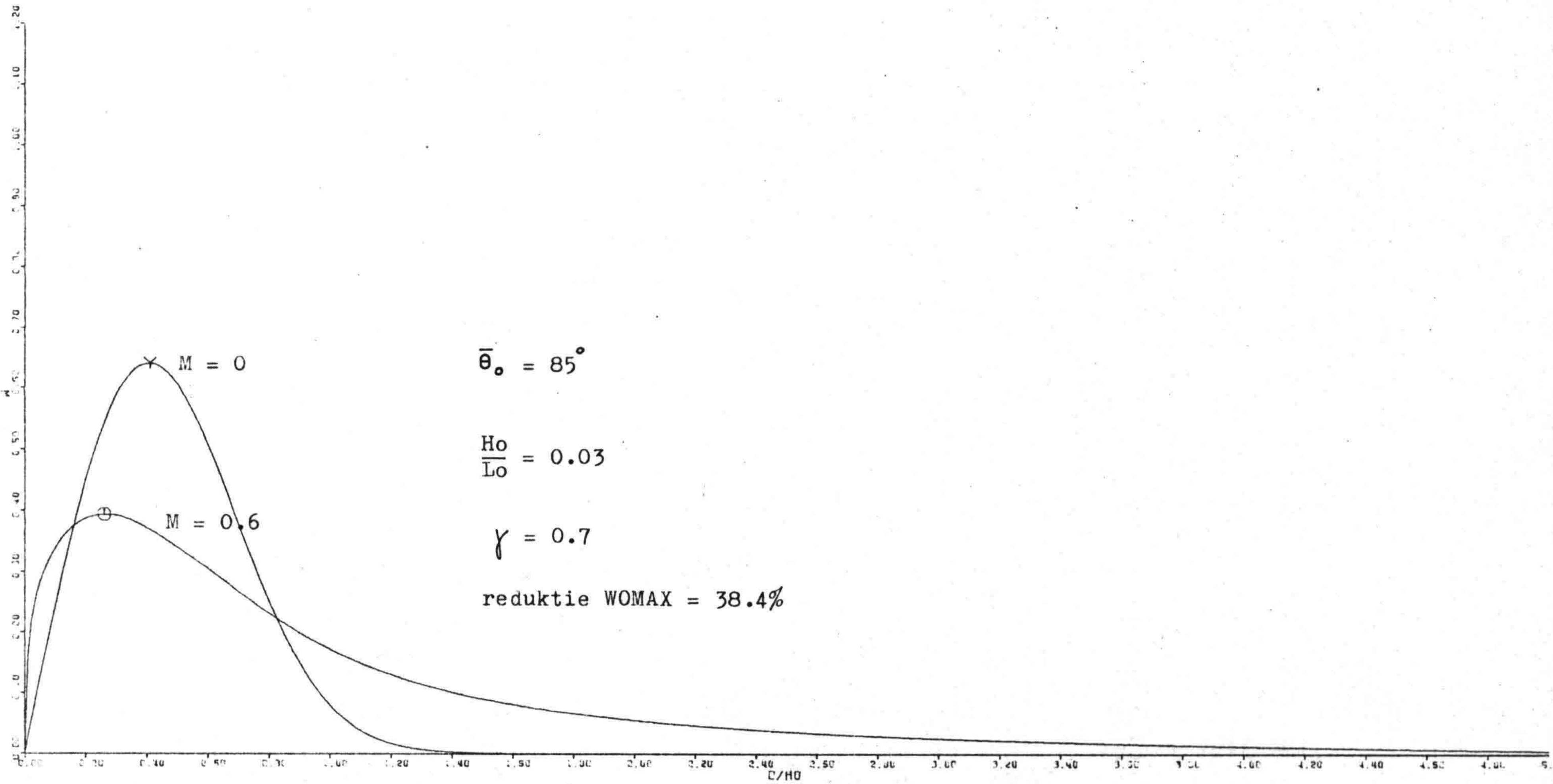
Berekende brandingsstroom-profielen t.g.v. onregelmatige golven, zonder "menging"

fig. 7.3



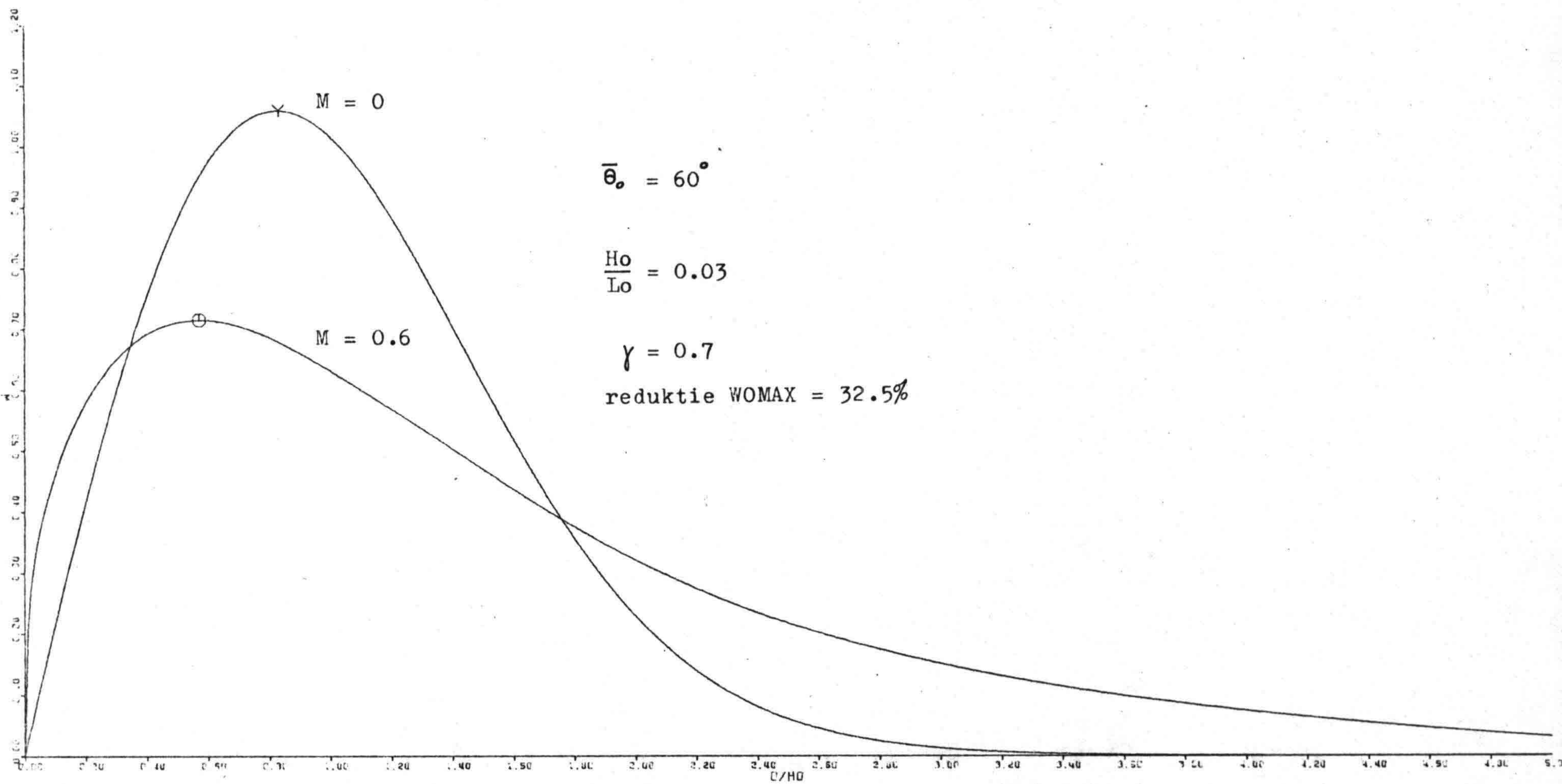
Berekende brandingsstroom-profielen t.g.v. onregelmatige golven, inklusief "menging"

fig. 7.4



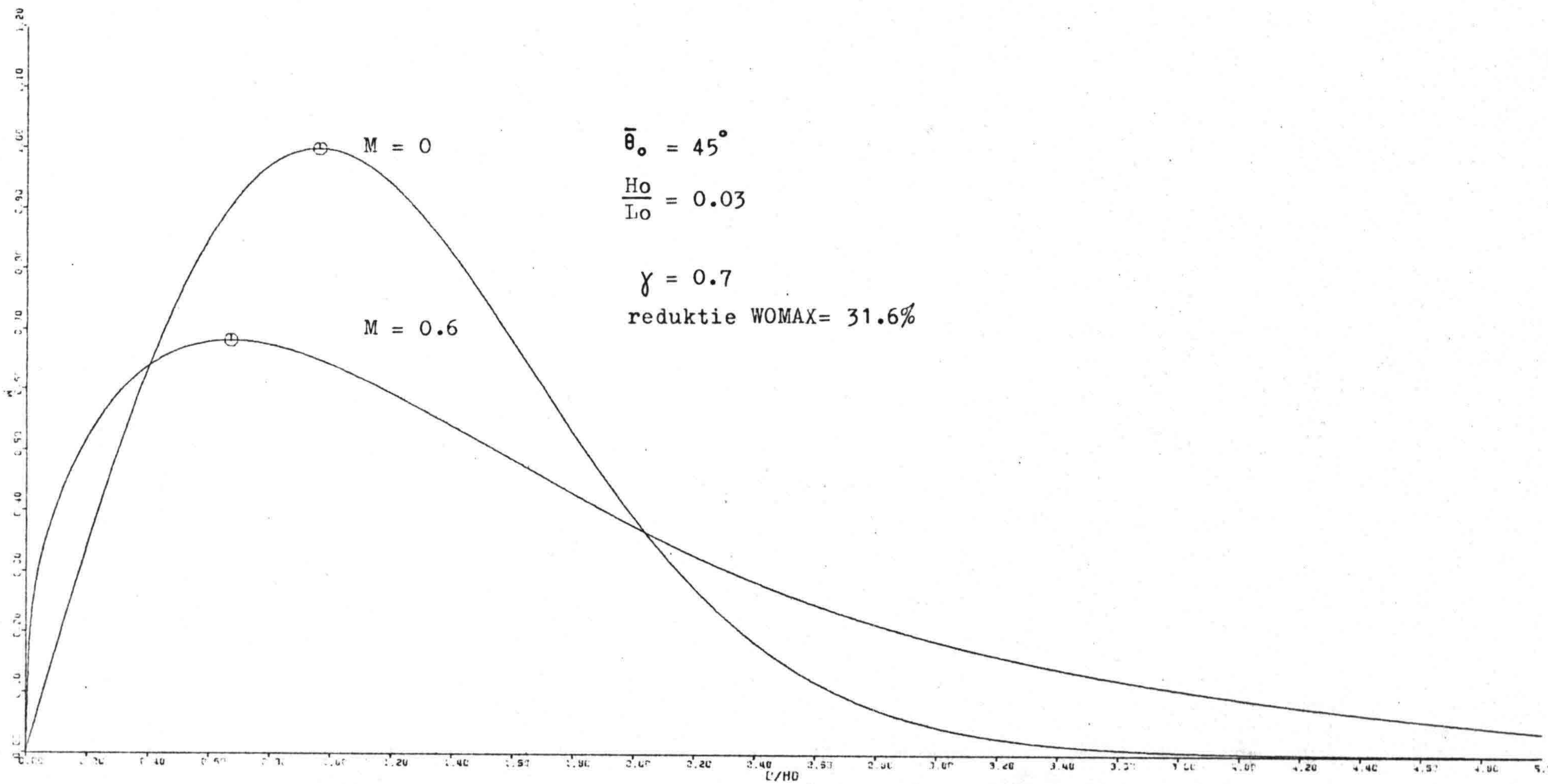
Berekende brandingsstroom-profielen voor onregelmatige golven, met en zonder "menging"

fig. 7.5



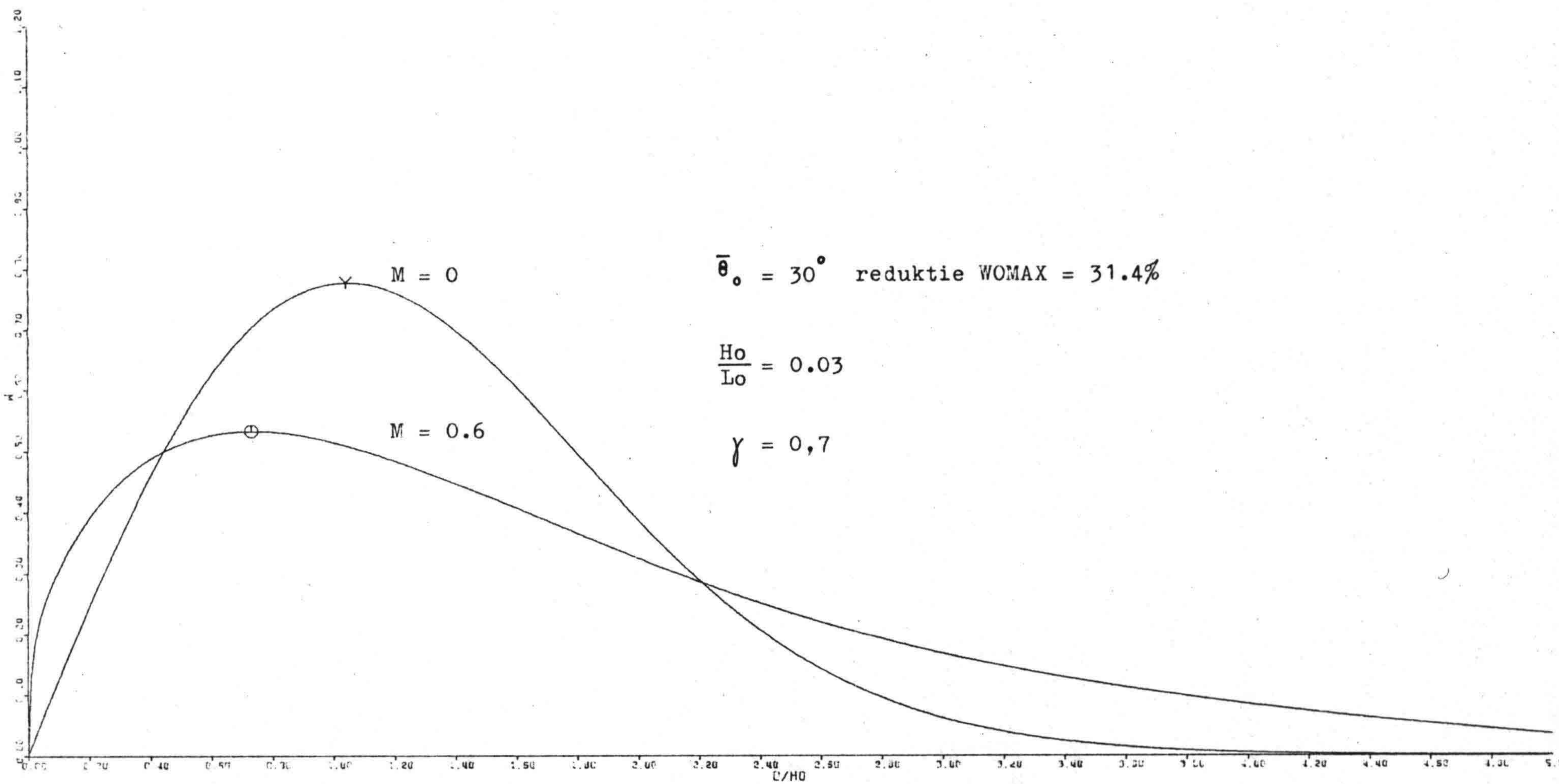
Berekende brandingsstroom-profielen voor onregelmatige golven, met en zonder "menging"

fig. 7.6



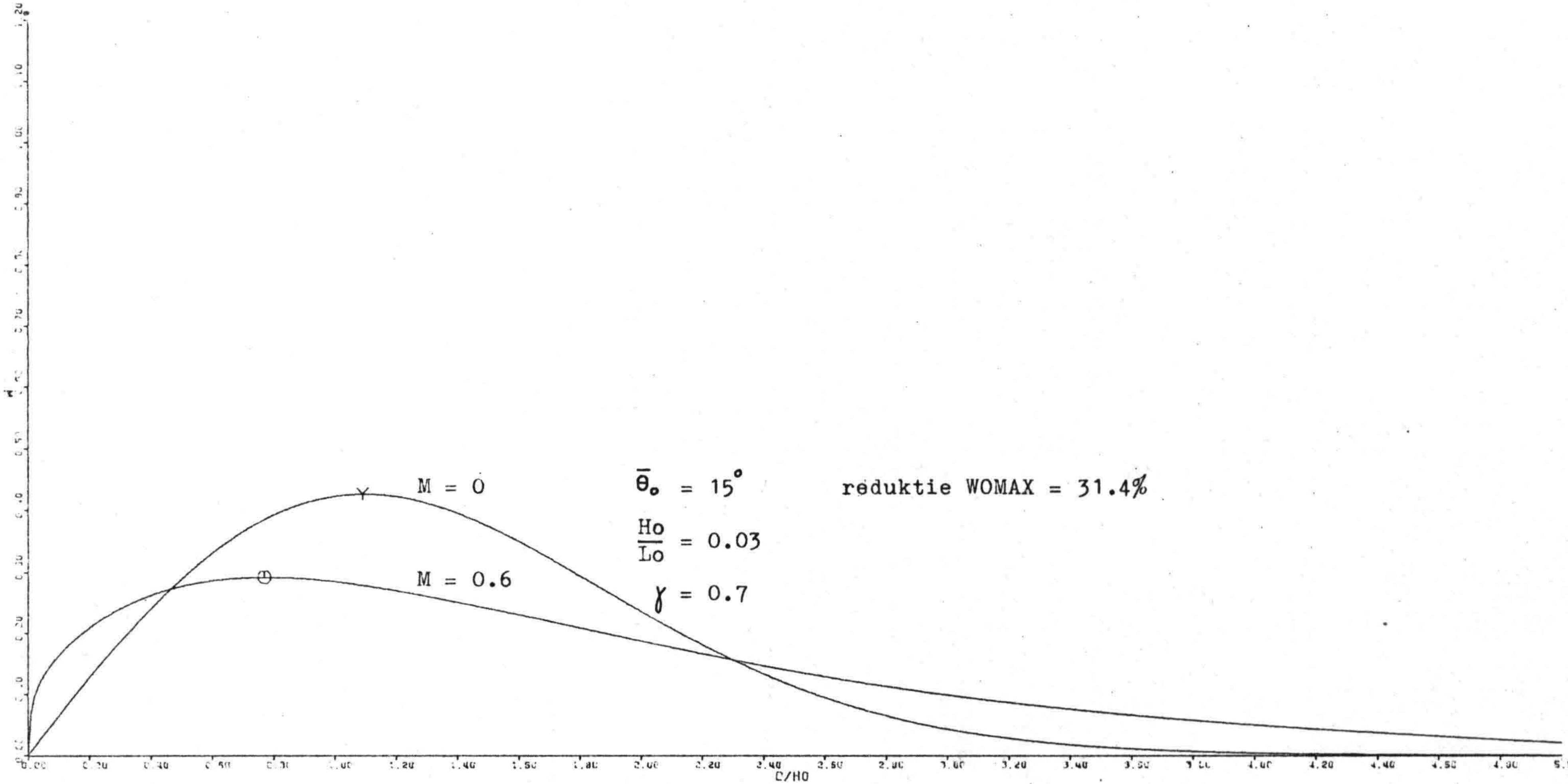
Berekende brandingsstroom-profielen voor onregelmatige golven, met en zonder "menging"

fig. 7.7



Berekende brandingsstroom-profielen voor onregelmatige golven, met en zonder "menging"

fig. 7.8



Berekende brandingsstroom-profielen voor onregelmatige golven, met en zonder "menging"

fig. 7.9

Hoofdstuk 8

SAMENVATTING EN AANBEVELINGEN VOOR VERDER ONDERZOEK

8.1 Samenvatting

In dit verslag wordt het probleem behandeld van de invloed van turbulentie op de waterbeweging in en nabij de brandingszone, met als voornaamste doel het beter kunnen berekenen van de variatie met de afstand uit de kust van een brandingsstroom aangedreven door scheef op een strand invallende golven.

Hoofdstuk 2 bevat informatie omtrent de benodigde basiskennis van de hydrodynamika, terwijl hierin tevens besproken wordt hoe de waterbeweging beschreven kan worden in het geval van invallende regelmatige golven onder verwaarlozing van het effekt van de turbulentie. Een aldus berekend snelheidsprofiel van brandingsstromen kan diskontinuïteiten bevatten, omdat gemiddelde snelheden in vertikale vlakken onafhankelijk van elkaar zijn verondersteld. Om het brandingsstroomprofiel realistisch te beschrijven, moet horizontale menging als gevolg van de turbulentie in de berekening worden betrokken. De menging wordt beschreven door turbulente horizontale uitwisseling van hoeveelheid beweging. Het snelheidsprofiel wordt daardoor vereffend, vooral nabij de brekerlijn.

Tegen bestaande modellen ter berekening van het effekt van de turbulentie bleken bij nadere bestudering vooral op fysische gronden ernstige bezwaren te bestaan (hoofdstuk 3). In feite wordt bij geen van de theoretische modellen de turbulentie zelf beschouwd. Er wordt a priori van een turbulentie viskositeits-model uitgegaan; de te gebruiken turbulentie viskositeiten zijn echter niet goed te voorspellen. Dit geldt ook voor de funktionele vormen van de "eddy"-diffusie koëfficiënten die n.a.v. metingen van de verspreiding van tracers binnen de brandingszone worden voorgesteld.

De brekende golven wekken turbulentie op en via de turbulentie wordt energie gedissipeerd. Ten einde een beter inzicht te verkrijgen in dit proces, zijn pogingen gedaan om het interne mechanisme van de turbulentie gedetailleerd te beschrijven (hoofdstuk 4). Hoewel in het huidige stadium van weinig kennis en weinig beschikbare relevante gegevens omtrent de turbulentie in de brandingszone daarbij geen bevredigende "closure" aannamen gedaan kunnen worden, biedt de behandeling wel enig inzicht m.b.t. de produktie van turbulentie en het gebruik van een turbulentie viskositeit.

In hoofdstuk 5 wordt een nieuw turbulentiemodel ontwikkeld. De dissipatieve eigenschappen van de turbulentie worden beoordeeld uitgaande van een binnen de brandingszone homogene turbulentie. Dit laatste is geen noodzakelijke beperking; indien de verdeling van de turbulentie beter bekend is, kan het model ook nog toegepast worden. Op basis van de door de golven in de brandingszone geïnjekteerde energieflux is een schatting gemaakt van de intensiteit van de turbulente snelheidsfluktuaties in de brandingszone. Deze intensiteit en de gemiddelde snelheidsgradiënt bepalen tesamen de turbulente uitwisseling van hoeveelheid beweging. Het resulterende model staat open voor verbeteringen van parameters die het golf- en turbulentieveld bepalen.

Op de grens aan de zeezijde van de brandingszone heeft de brandingsstroom geen vaste begrenzing. We moeten o.m. rekening houden met het intermitterend karakter van de turbulentie. Het hier optredende mechanisme is zeer ingewikkeld en er is geen deduktief model voor ontwikkeld. Echter het verloop van de in zeewaartse richting afnemende turbulente impulstransporten blijkt weinig invloed op het snelheidsprofiel te hebben, tenminste zolang er nabij de brekerlijn niet een vrij sterke begrenzing is.

De verkregen resultaten worden toegepast in rekenmodellen voor situaties met regelmatige (hoofdstuk 6) en onregelmatige golven (hoofdstuk 7). In beide gevallen wordt de relatieve invloed van horizontale menging weergegeven door een enkele parameter waarin een koëfficiënt uit het turbulentiemodel voorkomt die weliswaar experimenteel bepaald dient te worden, maar die van de orde 1 behoort te zijn. Met een koëfficiënt van deze orde vertonen berekende en gemeten snelheidsprofielen in het geval van regelmatige golven goede overeenkomst. Vergelijking van berekende turbulentieviskositeiten met empirische gegevens bevestigt de verwachting t.a.v. de genoemde koëfficiënt. In het geval van onregelmatige golven zijn geen berekende en gemeten snelheidsprofielen van brandingsstromen vergeleken. Berekeningen hebben echter wel tot een plausibel resultaat geleid.

8.2 Aanbevelingen voor verder onderzoek

Ten aanzien van verder fundamenteel onderzoek worden nog enkele opmerkingen gemaakt over implikaties van dit werk.

1. De markante voordelen van de Laser-Doppler snelheidsmeting (zoals: zeer plaatselijke meting, geen verstoring van de waterbeweging, meten van richting, kan meer dimensionaal meten, kan zeer lage snelheden maar ook zeer snelle fluktuaties meten) bieden de mogelijkheid van spektrale kontrole van de afgeleide snelheids-, lengte- en/of tijdschalen van de turbulentie. Verder kunnen natuurlijk de gemiddelde turbulente impulstransporten worden bepaald bv. door het integreren van het cospectrum van snelheidskomponenten. Ook het gebied buiten de brandingszone (bij regelmatige golven) is zeer interessant. Daarbij moet goed onderscheid gemaakt worden tussen loodrechte en scheve golfinval. In het laatste geval rijzen er echter aanzienlijke problemen t.a.v. een meetopstelling omdat niet door een golvend oppervlak heen gemeten kan worden.

2. Met de gedetailleerde snelheidsmetingen kunnen ook meer gegevens verzameld worden omtrent de verdelingen over de vertikaal van de gemiddelde snelheid en van turbulentie energie en dissipatie. Deze zullen in het geval van spilling brekers stellig anders zijn dan bij plunging brekers. Kennis hieromtrent is van groot belang voor bijv. zand- en slibtransporten.

3. In dit verslag is gewerkt vanuit een Eulerse zienswijze. Indien energiedissipatie buiten de brandingszone wordt verwaarloosd, wordt daar ook geen stroom berekend. Een bepaald waterdeeltje kan zich gedeelten van een golfperiode binnen en buiten de brandingszone bevinden, waardoor de gemiddelde langssnelheid die het deeltje binnen de brandingszone ondervindt ook erbuiten gebracht wordt. Het is nu zeer interessant om met een Lagrange beschouwing na te gaan in hoeverre het snelheidsprofiel door de golfbeweging zelf wordt beïnvloed.

4. In dit verslag is steeds uitgegaan van een monotoon oplopend strand. T.a.v. de aandrijving is dit een stringentere beperking dan voor het turbulentiemodel. Het geheel is niet zonder meer toepasbaar op een topografie met één of meer brandingsruggen (fig. 8.1).
Golven die op een dergelijke rug breken nemen na passage van de rug

niet plotseling maar geleidelijk een ongebroken karakter aan. De aandrijving neemt dus ook geleidelijk af.

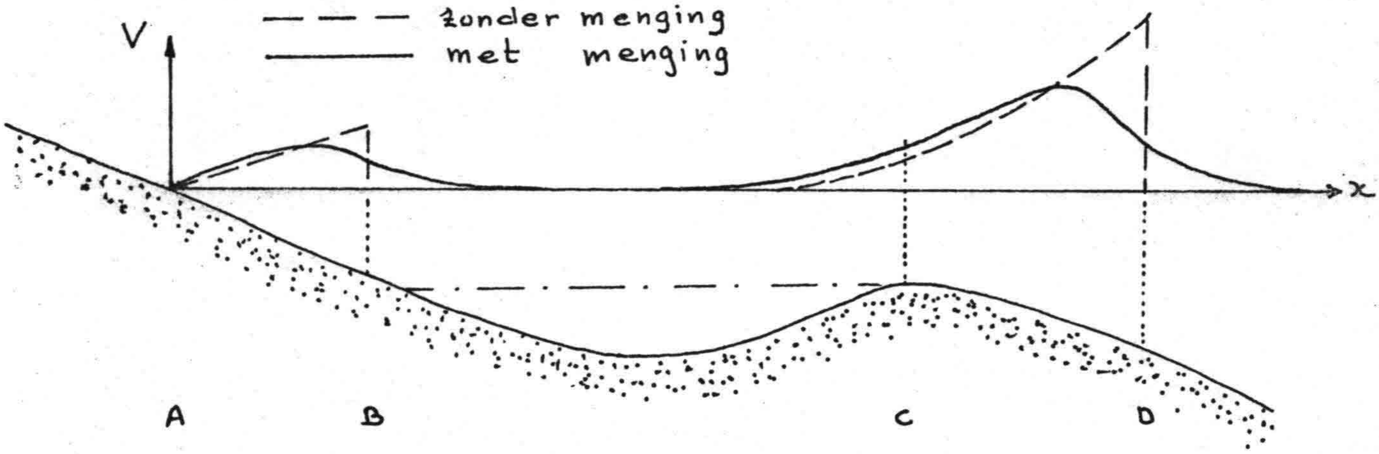


fig. 8.1

schets van brandingsstroomprofielen t.g.v. scheef invallende regelmatige golven op een kust met een brandingsrug

Tussen de twee brekerzones kunnen vormen voor de turbulentie viskositeit aangenomen worden zoals in hoofdstuk 5 is besproken. Een grove benadering is bv. een konstante of lineair van naar B verlopende turbulentie viskositeit.
Vanwege het veel voorkomen van situaties zoals in fig. 8.1, is verder onderzoek naar het mechanisme van de aandrijving bij een dergelijke brandingsrug en de invloed van de turbulentie op het snelheidsprofiel van dergelijke brandingsstromen nodig.

BIJLAGE 1 - ALGOL PROGRAMMA, voor de berekening van het snelheidsprofiel van brandingsstromen t.g.v. onregelmatige golven met "menging", voor willekeurige $\bar{\Theta}_o$ in kombinatie met willekeurige waarden voor de relatieve sterkte van menging (M).


```
 0   'BEGIN''REAL'D,W,Z,T,K1,K2,K3,K4,M1,M2,M3,M4,
 2            A,DBF,HBF,E,KD,
 2            DWOMAX,WOMAX,DWMAX,WMAX,DSTAR,WSTAR,ZSTAR,
 2            FACT,SO,GAMMA,DO,PI,TETAO,S2,G,KOD,K2D,NN,HF2,TGH
 2   ;      'INTEGER'I,N,J,R,ISTAR,L,LL,P,PP
 3   ;      'BOOLEAN'MASK,MAXO
 4   ;      'REAL''ARRAY'VO,ZZO(/1:5/);
 5          'COMMENT'
 5          DBF AND HBF ARE DEPTH AND RMS-WAVEHEIGHT WHERE HB(BREAKING
 5          CRITERION)=HF(FICTITIOUS WAVEHEIGHT)
 5          WO AND W ARE THE VELOCITIES WITHOUT AND WITH TURBULENT MOMENTUM
 5          EXCHANGE;
 5      SETTING(1,132,60);
 6      INREAL(0,SO);
 7      OUTSTRING(1,'('HO/LO=')');AFIX(1,1,3,SO);        LINE(1,1);
10      INREAL(0,GAMMA);
11      OUTSTRING(1,'('GAMMA=')');AFIX(1,1,2,GAMMA);     LINE(1,1);
14      INREAL(0,DO);
15      OUTSTRING(1,'('    DO=')');AFIX(1,2,2,DO);       LINE(1,1);
18      PI:=3.14159265;
19      E:=0.63212055883;
20      T:=0.010;
21      N:=DO/T;
22      ININTEGER(0,PP);
23      ININTEGER(0,LL);
24   'BEGIN''REAL''ARRAY'FACT(/1:PP/),M(/1:LL/),
26      SIH,FFHB,DFFHB,HRMS,HB,HF,WO,WW,ZZ,MM1(/O:N/);
26   'REAL''PROCEDURE'F(D,W,Z);'VALUE'D,W,Z;'REAL'D,W,Z;
29          'BEGIN''REAL'MD2,AA;
31          'IF'D<DBF'THEN''BEGIN'
33          MD2:=D*D*M(/L/);AA:=2;
35                                'END''ELSE''BEGIN'
38          MD2:=D*DBF*M(/L/);AA:=1          'END';
41          F:=-AA*Z/D+W*HRMS(/I/)/(MD2*SIH(/I/))-G*DFFHB(/I/)/MD2;
42          'END'PROCEDURE F;
43   'REAL''PROCEDURE'TANH(X);'VALUE'X;'REAL'X;
46            'BEGIN''REAL'EX,EMX;
48              EX:=EXP(X);EMX:=EXP(-X);
50              TANH:=(EX-EMX)/(EX+EMX)
51            'END';
52   'REAL''PROCEDURE'SINH(X);'VALUE'X;'REAL'X;
55              SINH:=(EXP(X)-EXP(-X))/2;
56   'PROCEDURE'HYP(X,SINH,TANH);'VALUE'X;'REAL'X,SINH,TANH;
59            'BEGIN''REAL'EX,EMX,MIN,PLUS;
61              EX:=EXP(X);EMX:=EXP(-X);
63              PLUS:=EX+EMX;MIN:=EX-EMX;
65              SINH:=MIN/2;
66              TANH:=MIN/PLUS;
67            'END';
68   'REAL''PROCEDURE'Q(X);'VALUE'X;'REAL'X;
71              Q:=X*TANH(X)-KOD;
72   'PROCEDURE'NEWRAPKD(K,KDI,Q,ALARM);
73          'VALUE'K;'INTEGER'K;'REAL'KDI;'REAL''PROCEDURE'Q;
77          'LABEL'ALARM;
```

```
            'BEGIN''REAL'KD0,KD1,TH;
                 'INTEGER'J;
         KD0:='IF'I=N'THEN'KOD'ELSE'KD;
         J:=0;
ITER: J:=J+1;
         TH:=TANH(KD0);
         KD1:=KD0-Q(KD0)/(TH+KD0*(1-TH*TH));
'IF'Q(KD1+5*'-10)*Q(KD1-5*'-10)>0'THEN''BEGIN'
         KD0:=KD1;
         'IF'J<K'THEN''GOTO'ITER;
         OUTSTRING(1,'('TOO MUCH ITERATIONS; D=')');
AFIX(1,3,0,I*T);
         'GOTO'ALARM
                                           'END''ELSE'KDI:=KD1;
            'END'PROCEDURE NEWRAPKD;
PLOTS(1,PP*12+5);
FACTOR(0.3937007874);
INARRAY(0,FACT);
INARRAY(0,M);
'IF'PP>1'THEN'OUTSTRING(1,'('TETAO SUCC.')')'ELSE'OUTSTRING(1,'('TETAO='
)');
'FOR'P:=1'STEP'1'UNTIL'PP'DO'AFIX(1,4,0,180.00/FACT(/P/));
OUTSTRING(1,'('WITH M=')');
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'LL'DO'AFIX(1,2,3,M(/L/));
'IF'PP>1'THEN'OUTSTRING(1,'('FOR EACH TETAO')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('OMEGA=1 FOR D>DBF')');
'FOR'P:=1'STEP'1'UNTIL'PP'DO'
'BEGIN'
   'IF'P=1'THEN'PLOT(5.0,8.0,-3)'ELSE'PLOT(30.0,0.0,-3);
   AXIS(0.0,00.0,'('D/HO')',-4,25.0,00.00,0.00,0.20);
   AXIS(0.0,00.0,'(' W   ')',+4,12.0,90.00,0.00,0.10);
   LINE(1,3);
   MAXO:='TRUE';
   TETAO:=PI/FACT(/P/);
   'IF'PP>1'THEN''BEGIN'
   OUTSTRING(1,'(' TETAO=')');AFIX(1,2,0,180.00/FACT(/P/));LINE(1,1);
   'END';
   S2:=SIN(TETAO)**2;
   G:=SIN(2*TETAO)/(8*PI*GAMMA*SO);
   DBF:=-1;
   I:=N;
   D:=DO;
   'COMMENT'
                IN THIS LOOP COMP. OF KD,HB,HF,FFHB,HRMS IN EACH POINT I;
NEXTI:
         KOD:=2*PI*D*SO;
         NEWRAPKD(100,KD,Q,ALARM);
         HYP(KD,SIH(/I/),TGH);
         K2D       :=2*KD;
         NN        :=1+K2D/SINH(K2D);
         HB  (/I/) :=TANH(GAMMA*KD/.88)*TGH/(7*SO);
         HF2       :=SQRT((1-S2)/(1-TGH*TGH*S2))/(NN*TGH);
         HF(/I/)   :=SQRT(HF2);
         FFHB(/I/):=1-EXP(-HB(/I/)*HB(/I/)/HF2);
```

```
        HRMS(/I/):=SQRT(FFHB(/I/)*HF2);
        'IF'DBF<0&FFHB(/I/)<=E'THEN'
           'BEGIN'
              A:=(E-FFHB(/I/))/(FFHB(/I+1/)-FFHB(/I/));
              DBF:=D+A*T;
              HBF:=HRMS(/I/)+A*(HRMS(/I+1/)-HRMS(/I/));
              OUTSTRING(1,'('   DBF=')');AFIX(1,1,6,DBF);
              OUTSTRING(1,'('HBF=')');AFIX(1,1,6,HBF);
              OUTSTRING(1,'('M=F*C*S**(7/3)/CF , WHEREIN F=')');
              FLO(1,6,2,SQRT(PI/2)*HBF**(5/6)/(2*DBF**(1/3)*SQRT(SO)));
              LINE(1,1);
           'END';
        I:=I-1;
        D:=D-T;
        'IF'I>0'THEN''GOTO'NEXTI;
FFHB(/0/):=WO(/0/):=HB(/0/):=0;
'COMMENT'
                COMP. OF DIFF. DFFHB IN EACH POINT I  ;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N-1'DO'
DFFHB(/I/):=(-FFHB(/I-1/)+FFHB(/I+1/))/(2*T);
DFFHB(/N/):=(+3*FFHB(/N/)-4*FFHB(/N-1/)+FFHB(/N-2/))/(2*T);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'
WO(/I/):=G*SIH(/I/)*DFFHB(/I/)/HRMS(/I/);
'IF'MAXO'THEN''BEGIN'
      'IF'WO(/I/)<WO(/I-1/)'THEN''BEGIN'
      WOMAX:=WO(/I-1/);DWOMAX:=T*(I-1);
      MAXO:='FALSE'              'END'
               'END'
'END';
OUTSTRING(1,'('DWOMAX=')');AFIX(1,2,2,DWOMAX);LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'(' WOMAX=')');AFIX(1,2,4, WOMAX);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'500'DO'
PLOT(5*I*T,10*WO(/I/),2);
MARK(5*DWOMAX,10*WOMAX,0.20,9,0.0,-1);
'COMMENT'
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&PROGSEP&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
;
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'LL'DO'
'BEGIN'
PLOT(0.0,0.0,3);
   LINE(1,3);
   MASK:='FALSE';
   J:=1;
   R:=0;
   Z:=ZZO(/1/):=-'-08;
OVER:
   I:=N;
   D:=DO;
   W:=WW(/N/):=WO(/N/);
AGAIN:
   K1:=Z;
   M1:=MM1(/I/):=F(D,W,Z);        'IF'ABS(M1)>'+70'THEN''GOTO'OVERFLOWTEST;
   K2:=Z-T*M1/2;
   M2:=F(D-T/2,W-T*K1/2,Z-T*M1/2);
```

```
    K3:=Z-T*M2/2;
    M3:=F(D-T/2,W-T*K2/2,Z-T*M2/2);
    K4:=Z-T*M3;
    M4:=F(D-T,W-T*K3,Z-T*M3);
    I:=I-1;
    W:=WW(/I/):=W-T*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
    Z:=ZZ(/I/):=Z-T*(M1+2*M2+2*M3+M4)/6;
    D:=D-T;
              OVERFLOWTEST:
       'IF'ABS(W)>'+70|ABS(Z)>'+70|ABS(M1)>'+70'THEN'
       'BEGIN'
              'IF'R<=10'THEN''BEGIN'
              R:=R+1;
              OUTSTRING(1,'('BACK')');AFIX(1,2,0,R);LINE(1,1);
              Z:=ZZO(/J/):='IF'W>0'THEN'ZZO(/J/)*'-10'ELSE'ZZO(/J/)*'+10;
              'GOTO'OVER      'END''ELSE''BEGIN'
              OUTSTRING(1,'('TOO MUCH TRIALS(11) D=')');AFIX(1,2,3,D);
              LINE(1,1);
              OUTSTRING(1,'('                   W=')');OUTREAL(1,W);
              LINE(1,1);
              OUTSTRING(1,'('                   Z=')');OUTREAL(1,Z);
              'GOTO'EXIT               'END'
       'END'OVERFLOWTEST;
     'COMMENT' TEST DEGENERATION D.E. ;
       'IF'J>=3'THEN''BEGIN'
       'IF'Z>0&D<DBF&W/D<Z'THEN''BEGIN'
              MASK:='TRUE';
              ISTAR:=I;
              DSTAR:=D;
              WSTAR:=W;
              ZSTAR:=Z;
              VO(/J/):=0;
              'GOTO'OUTPUT        'END'
     'END' DEGEN. TEST;
     'IF'I>1'THEN''GOTO'AGAIN;
  MM1(/1/):=F(D,W,Z);
  VO(/J/):=W-T*Z+T*T*MM1(/1/)/2;
  'IF'ABS(VO(/J/))<0.0005|J=5'THEN''GOTO'OUTPUT'ELSE'
  'BEGIN'
       J:=J+1;
       Z:=ZZO(/J/):='IF'J=2'THEN'
       ('IF'VO(/J-1/)>0'THEN'ZZO(/1/)*'-05'ELSE'ZZO(/1/)*'+05)
       'ELSE''IF'
       VO(/J-2/)¬=VO(/J-1/)'THEN'
       (ZZO(/J-1/)*VO(/J-2/)-ZZO(/J-2/)*VO(/J-1/))/(VO(/J-2/)-VO(/J-1/))
       'ELSE''IF'VO(/J-1/)>0'THEN'
       ZZO(/J-1/)*'-10'ELSE'ZZO(/J-1/)*'+10;
       'GOTO'OVER
  'END';
       'COMMENT'
       AFTER OUTPUT FIRST DETERMINATION MAX. VELOCITY;
  OUTPUT:
              I:='IF'MASK'THEN'ISTAR'ELSE'1;
       MAX:   'IF'WW(/I+1/)>WW(/I/)&I<N'THEN''BEGIN'I:=I+1;'GOTO'MAX'END'
              'ELSE''BEGIN'WMAX:=WW(/I/);DWMAX:=I*T'END';
```

```
         'IF'MASK'THEN''BEGIN'
         PLOT(5*(ISTAR+1)*T,10*WW(/ISTAR+1/),3);
         'FOR'I:=ISTAR+1'STEP'1'UNTIL'500'DO'
         PLOT(5*I*T,10*WW(/I/),2);
                         'END''ELSE'
         'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'500'DO'
         PLOT(5*I*T,10*WW(/I/),2);
         MARK(5*DWMAX,10*WMAX,0.20,1,0.0,-1);
         'IF'LL=1'THEN''BEGIN'
HEAD:
         OUTSTRING(1,'(' DWMAX=')');AFIX(1,2,2,DWMAX);OUTSTRING(1,'('=')');
         AFIX(1,1,3,DWMAX/DWOMAX);OUTSTRING(1,'('*DWOMAX')');LINE(1,1);
         OUTSTRING(1,'('  WMAX=')');AFIX(1,2,4,WMAX);
         OUTSTRING(1,'('REDUCTION WOMAX=')');AFIX(1,2,2,100*(WOMAX-WMAX)/
         WOMAX);OUTSTRING(1,'('%')');LINE(1,1);
         'IF'MASK'THEN''BEGIN'
         OUTSTRING(1,'(' DSTAR=')');AFIX(1,2,3,DSTAR);LINE(1,1);
         OUTSTRING(1,'(' WSTAR=')');AFIX(1,2,6,WSTAR);
         OUTSTRING(1,'('WSTAR/DSTAR=')');FLO(1,6,2,WSTAR/DSTAR);
         OUTSTRING(1,'('IS LESS THEN Z=')');FLO(1,6,2,ZSTAR);
         OUTSTRING(1,'('COMP. OF W FOR D<DSTAR IS STOPPED')');
         LINE(1,1);
                         'END';
         LINE(1,2);
         'IF'LL>1'THEN''GOTO'LIST;
OUTSTRING(1,'('    D         FFHB        DFFHB           HB            HF
  HRMS           WO                W                  Z               M1  ')');
         LINE(1,1);
         OUTSTRING(1,'('
                                   J=')');AFIX(1,2,0,J);
         LINE(1,1);BLANK(1,2);
         AFIX(1,1,0,0);BLANK(1,7);
         AFIX(1,1,0,0);BLANK(1,21);
         AFIX(1,1,0,0);BLANK(1,9);
         OUTSTRING(1,'('&')');BLANK(1,9);
         AFIX(1,1,0,0);BLANK(1,6);
         AFIX(1,1,0,0);BLANK(1,7);
         FLO(1,6,2,VO(/J/));
         'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'30,35'STEP'5'UNTIL'N-10,N-9'STEP'1'UNTIL'N
         'DO''BEGIN'
LINE(1,1);
AFIX(1,2,3,I*T);
AFIX(1,1,6,FFHB(/I/));
FLO(1,6,2,DFFHB(/I/));
AFIX(1,1,6,HB (/I/));
AFIX(1,2,6,HF(/I/));
AFIX(1,1,6,HRMS(/I/));
FLO(1,6,2,WO(/I/));
         'IF'MASK'THEN''BEGIN'
         'IF'I<ISTAR'THEN''GOTO'NEXT'END';
         FLO(1,6,2,WW(/I/));
         FLO(1,6,2,ZZ(/I/));
         FLO(1,6,2,MM1(/I/));
NEXT: 'END';
'GOTO'EXIT
```

```
                          'END''ELSE''IF'L=1'THEN''BEGIN'
OUTSTRING(1,'('    D          FFHB        DFFHB           HB              HF
  HRMS          WO    ')');
        LINE(1,2);BLANK(1,2);
        AFIX(1,1,0,0);BLANK(1,7);
        AFIX(1,1,0,0);BLANK(1,21);
        AFIX(1,1,0,0);BLANK(1,9);
        OUTSTRING(1,'('&')');BLANK(1,9);
        AFIX(1,1,0,0);BLANK(1,6);
        AFIX(1,1,0,0);
        'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'30,35'STEP'5'UNTIL'N-10,N-9'STEP'1'UNTIL'N
        'DO''BEGIN'
LINE(1,1);
AFIX(1,2,3,I*T);
AFIX(1,1,6,FFHB(/I/));
FLO(1,6,2,DFFHB(/I/));
AFIX(1,1,6,HB (/I/));
AFIX(1,2,6,HF(/I/));
AFIX(1,1,6,HRMS(/I/));
FLO(1,6,2,WO(/I/));
             'END'
                                                     'END';
LINE(1,3);
OUTSTRING(1,'('      M=')');AFIX(1,2,3,M(/L/));LINE(1,1);
'GOTO'HEAD;
LIST:
OUTSTRING(1,'('    D           W                  Z                 M1')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('J=')');
AFIX(1,2,0,J);
LINE(1,1);
AFIX(1,2,3,0.00);FLO(1,6,2,VO(/J/));
        'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'30,35'STEP'5'UNTIL'N-10,N-9'STEP'1'UNTIL'N
        'DO''BEGIN'
        LINE(1,1);
        'IF'MASK'THEN''BEGIN'
        'IF'I<ISTAR'THEN''GOTO'NEXT2'END';
        AFIX(1,2,3,I*T);
        FLO(1,6,2,WW(/I/));
        FLO(1,6,2,ZZ(/I/));
        FLO(1,6,2,MM1(/I/));
NEXT2:'END';
EXIT: 'END';
ALARM:'END';
LASPLO;
        'END'
        'END'
```

BIJLAGE 2 - SYMBOLENLIJST

De belangrijkste van de gebruikte symbolen staan hieronder vermeld. Sommige symbolen hebben meer dan één betekenis; uit het verband zal duidelijk zijn welke betekenis bedoeld wordt.
In onderstaande tekst staat "gemiddelde", indien zonder verdere aanduiding steeds voor "over de tijd gemiddelde".
Vektor grootheden zijn onderstreept.
In deze lijst zijn niet de symbolen uit het computerprogramma (bijlage 1) opgenomen.

a	amplitude van $\zeta(t)$
A_h	eddy viscosity (Bowen)
c	fase snelheid
c_g	groep snelheid
C	koëfficiënt (vgl. 2.99)
C_f	weerstandskoëfficiënt (vgl. 2.109)
D	gemiddelde dissipatie van golfenergie p.e.v. tijd en p.e.v. oppervlak
$\mathcal{D}$	genormaliseerde diepte (vgl. 7.24)
D_{ij}	vervormingssnelheid-tensor
$\underline{e}$	eenheidsvektor in de voortplantingsrichting
E	gemiddelde golfenergie p.e.v. oppervlak
$\tilde{E}$	gemiddelde turbulentie-energie p.e.v. oppervlak
E'	gemiddelde energie van de fluktuerende beweging, p.e.v. oppervlak, $E' = \tilde{E} + E$
$E\{\underset{\sim}{x}\}$	verwachtingswaarde van $\underset{\sim}{x}$
$\underline{F}$	gemiddelde horizontale energieflux in de golven, p.e.v. tijd en p.e.v. kamlengte
F	$\lvert\underline{F}\rvert$
$\underline{\tilde{F}}$	gemiddelde energieflux van de turbulentie
$\underline{F}'$	gemiddelde energieflux van de fluktuerende beweging, $\underline{F}' = \underline{F} + \underline{\tilde{F}}$
$F(x)$	verdelingsfunktie van $\underset{\sim}{x}$
$\underline{g}$	$-\nabla(gz)$, versnelling van de zwaartekracht
$\mathcal{G}$	zie vgl. 7.32
h	stil-waterdiepte
h'	gemiddelde waterdiepte, $h' = h + \bar{\zeta}$
H	golfhoogte, voor regelmatige golven is gebruikt: $H = 2a$; voor onregelmatige golven geldt $H = H_z$, waarin H_z = "zero-upcrossing wave height" volgens PIANC

H	in hoofdstuk 6: genormaliseerde diepte, $H = h/h_B$ (vgl. 6.9)
H^*	genormaliseerde golfhoogte, $H^* = H/H_0$ (vgl. 7.26)
$\underline{k}$	golfgetal-vektor
k	$\lvert\underline{k}\rvert$, golfgetal,
k^*	genormaliseerd golfgetal, $k^* = k L_0$ (vgl. 7.28)
k	gemiddelde van kinetische en potentiële energie van de fluktuerende beweging p.e.v. massa
k'	gemiddelde kinetische energie van de fluktuerende beweging p.e.v. massa,
k_w	gemiddelde kinetische energie v.d. golfbeweging p.e.v. massa, $k_w = \frac{1}{2}\,\overline{(u_w^2 + v_w^2 + w_w^2)}$
$\tilde{k}$	gemiddelde kinetische turbulentie-energie p.e.v. massa, $\tilde{k} = \frac{1}{2}\,\overline{(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2)}$
K	bodemschuifspanningskoëfficiënt (vgl. 2.110)
K_R	refraktie-koëfficiënt (vgl. 7.13)
K_S	shoaling-koëfficiënt (vgl. 7.14)
ℓ	turbulentie lengteschaal (vgln. 4.5 en 5.2)
L	kenmerkende (lokale) turbulentie lengteschaal
L	golflengte
L^*	genormaliseerde golflengte, $L^* = L/L_0$ (vgl. 7.27)
$\underline{m}$	gemiddelde horizontale massa transport p.e.v. breedte (vgl. 2.34)
$\underline{m}_w$	bijdrage van de golven tot $\underline{m}$
$\underline{M}$	bijdrage van de gemiddelde stroom tot $\underline{m}$
M	dimensieloze koëfficiënt die de relatieve sterkte van menging aangeeft (vgln. 6.13 en 7.31)
n	c/c_g ; zie ook vgl. 2.22
N_t	genormaliseerde turbulentie-viskositeit (vgl. 6.9)
N	dimensieloze konstante (vgl. 3.17)
p	druk (t.o.v. atmosferische druk)
p_0	hydrostatische druk
Pr	probability
q_w	horizontale deeltjes snelheid t.g.v. golfbeweging
Q	bronfunktie in de energiebalans (vgl. 2.68)
Q	hoeveelheid tracer (vgl. 3.28 e.v.)
$Q(x)$	overschrijdingskans van $\underset{\sim}{x}$ (vgl. 7.7 e.v.)
Q_B	$Q_f(H_B)$, berekende fraktie van de golven die op een bepaald punt brekende zijn
$R_{\alpha\beta}$	over de hoogte geïntegreerde Reynolds-spanningen (vgl. 2.56), (α = 1,2; β = 1, 2)

R_{12}	korrelatiekoëfficiënt $-\overline{(\tilde{u}\tilde{v})}/(u^* v^*)$
Re	getal van Reynolds
R_y	"wrijvings-term" van Bowen (1969)
s	bodemhelling
$\bar{s}$	h_B / x_B
$S'_{\alpha\beta}$	bijdrage van de fluktuerende beweging tot de gemiddelde flux in x_α -richting van x_β -impulsie ($\alpha = 1, 2; \beta = 1, 2$)
$S_{\alpha\beta}$	bijdrage van de golven tot $S'_{\alpha\beta}$; $S_{\alpha\beta}$ vormen de komponenten van de "radiation stress" tensor
t	tijd
T	golfperiode, tijdsinterval tussen twee opeenvolgende neergaande nuldoorgangen van $\zeta(t)$
T	stapgrootte bij numerieke integratie
τ	tijdsinterval of tijdschaal
$\underline{u}$	(u, v, w), of in tensornotatie: (u_1, u_2, u_3), deeltjessnelheid
$\underline{u}_w$	(u_w, v_w, w_w) of (u_{w1}, u_{w2}, u_{w3}), orbitaalsnelheid
$\underline{\tilde{u}}$	$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ of $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$, turbulente snelheid
$\underline{u}'$	$\underline{u}_w + \underline{\tilde{u}}$
u^*, v^*	r.m.s. waarden van resp. $\tilde{u}$ en $\tilde{v}$
u_*	"schuifspanningssnelheid"
w	karakteristieke turbulentie-snelheid ($\propto$ turbulentie intensiteit)
$\underline{U}$	(U, V, W) of (U_1, U_2, U_3)
$\mathcal{U}$	kenmerkende (lokale) turbulentie snelheidsschaal
V	in hoofdstuk 6: genormaliseerde snelheid, $V = \hat{V}/V_0$ (vgl. 6.9)
V_0	berekende brandingsstroomsnelheid t.g.v. regelmatige golven t.p.v. de brekerlijn indien menging wordt verwaarloosd.
$\underline{V}$	Lagrange snelheid
W	genormaliseerde stroomsnelheid (vgl. 7.25)
$\underline{x}$	koördinaat vektor
x (of x_1)	horizontale koördinaat, indien van toepassing loodrecht op de dieptelijnen, positief zeewaarts
X	in hoofdstuk 6: genormaliseerde x-koördinaat (vgl. 6.9)
y (of x_2)	horizontale koördinaat, indien van toepassing evenwijdig aan de dieptelijnen
z (of x_3)	vertikale koördinaat, gemeten vanaf het ongestoorde waterniveau
Z	dV/dX (vgl. 6.21)

Griekse symbolen

γ	verhouding tussen golfhoogte en gemiddelde waterdiepte in de brandingszone
δ_{ij}	Kro eker delta, $\delta_{ij} = 1$ als $i=j$ $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$
ϵ	energiedissipatie p.e.v. tijd en p.e.v. massa (vgln. 4.4, 4.5 en 5.2)
ϵ_ϕ	"eddy"-diffusie koëfficiënt voor de verspreiding van ϕ
ζ	uitwijking van het vrije oppervlak boven de stil water lijn, d.i. de z-koördinaat van het vrije oppervlak
ζ'	$\zeta - \bar{\zeta}$
η	dynamische molekulaire viskositeit
θ	golfinvalshoek op de kust (zie fig. 2.1 en fig. 2.7)
κ	konstante van Von Kármán
ν	kinematische molekulaire viskositeit, $\nu = \eta / \rho$
ν_t	turbulentie viskositeit
(ξ_1, ξ_2)	horizontale koördinaten, in de golfvoortplantingsrichting resp. loodrecht daarop
ξ_h	horizontale orbitale uitwijking
ρ	massadichtheid
σ_{ij}	vormen de komponenten van spanningstensor (vgl. 2.40)
σ	in hoofdstuk 3: vgl. 3.30 ; in hoofdstuk 6: vgl. 6.19
$\underline{\tau}_b$	bodemschuifspanning
τ	Reynolds-spanningen (vgln. 3.1, 3.3 en 5.16)
ϕ	neutrale materie
φ	golfvoortplantingsrichting m.b.t. x -as
ω	hoekfrekwentie
Ω	"intermittency-factor"

Afkortingen

d.v.	differentiaalvergelijking
r.v.w.^{n}	randvoorwaarden
b.v.w.^{n}	beginvoorwaarden
k.d.f.	kansdichtheidsfunktie
m.b.v.	met behulp van
ms	mean square
r.m.s.	ook rms: root-mean-square
p.e.v.	per eenheid van
t.p.v.	ter plaatse van

"Subscripts"

b	betekent: t.p.v. de bodem ($z = -h$)
B	betekent: t.p.v. de brekerlijn in hoofdstuk 7: grootheid ter plaatse waar $H = H_B$ volgens (7.1)
f	betekent: fiktieve grootheid die berekend is zonder rekening te houden met het breken der golven
Bf	betekent: grootheid t.p.v. x_{Bf}, waar de berekende waarden H_B en H_{frms} gelijk zijn aan elkaar
$max.$	maximum of maximaal
w	betekent: golf

Andere symbolen

$\approx$	ongeveer gelijk aan
$\langle x \rangle$	middeling over de brandingszone
$\overline{x}$	middeling over de tijd (behalve voor $\overline{\underline{S}}$)
$\hat{x}$	middeling over de vertikaal
$\equiv$	per definitie van
$\underline{x}$	vektor grootheid
$\underset{\sim}{x}$	stochastische variabele
x'	fluktuatie van x om z'n gemiddelde waarde
$\mathcal{O}$	grootte-orde symbool
$\propto$	evenredig met
∇	nabla operator $\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

BIJLAGE 3 - LITERATUUR

Bakker, W.T. (1970), Littoral drift in the surf zone, Report WWK 70-16, Rijkswaterstaat, Directorate for Hydraulic Research, Department for Coastal Research.

Batchelor, G.K. (1967), An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press.

Battjes, J.A. (1968), Over refractie van watergolven, De Ingenieur, 80, 21, p. B39-B46.

Battjes, J.A. (1972), Radiation stresses in short-crested waves, Jnl. of Marine Res. 30, 1, p. 56-64.

Battjes, J.A. (1972), Dynamica van golven bij stranden, rapport CT.KK3, Postdoctorale cursus kustdynamica en kustverdediging, T.H. Delft.

Battjes. J.A. (1972), Set-up due to irregular waves, Proc. 13th Conf. Coastal Eng., Vancouver, B.C., Vol. III, p. 1993-2004.
Also: Communications on Hydraulics, Report 72-2, Delft University of Technology.

Battjes, J.A. (1974), Computation of set-up, Longshore currents, run-up and overlopping due to wind-generated waves, proefschrift, T.H. Delft.

McBean, G.A., Stewart, R.W. and Miyake, M. (1971), The turbulent energy budget near the surface, Jnl. of Geoph. Res., 76, 27, p. 6540-6549.

Borghouts, A.N. (1970), Warmteleer en kinetische gastheorie, Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft.

Bouwmeester, R.J.B. (1972), Longshore current measurements in the coastal station of the Inst. of Hydro-Eng., Gdansk, during the summer 1972, T.H. Delft, afd. W. & W.

Bowen, A.J., Inman, D.L. and Simmons, V.P. (1968), Wave 'Set-Down' and Set-Up, Jnl. of Geoph.Res., 73, 8, p. 2569-2577.

Bowen, A.J. (1969), The generation of longshore currents on a plane beach, Jnl. of Marine Res., 27, 2, p. 206-215.

Bowen, A.J. and Inman, D.L. (1972), Nearshore mixing due to waves and wave-induced currents, in Symposium on the Physical Processes Responsible for the Disposal of Pollution in the Sea with Special Reference to the Nearshore Zone, No. 34, Aarhus.

Bradbury, L.J.S. (1965), The structure of a self-preserving turbulent plane jet, Jnl. of Fluid Mech., 23, p. 31-64.

Bradbury, L.J.S. and Riley, J. (1967), The spread of a turbulent plane jet issuing into a parallel moving airstream, Jnl. of Fluid Mech., 27, p. 381-394.

Corrsin, S. (1953), Remarks on turbulent heat transfer, Proc. of the Iowa Thermodynamics Symposium, p. 5-30, State University of Iowa, Iowa City.

Corrsin, S. and Karweit, M.J. (1971), The mixing of scalar stripes by an isotropic ensemble of single velocity modes, in Lecture Notes in Physics, 12, Statistical Models and Turbulence; Proc. of a Symposium held at the University of California, San Diego (La Jolla), July 15-21, 1971; Springer Verlag, 1972.

Delft Hydraulics Laboratory (1973), Report W152, Computational methods for the vertical distribution of flow in shallow water.

Divoky, D. and Hwang, L. (1970), Breaking wave setup and decay on gentle slopes, Proc. 12th Conf. Coastal Eng., Washington D.C., Vol. I, p. 377-412.

Divoky, D., Le Méhauté, B. and Lin, A. (1970), Breaking waves on gentle slopes, Jnl. of Geoph. Res., 75, 12, p. 1681-1692.

Dorrestein, R. (1961), On the deviation of the average pressure at a fixed point in a moving fluid from its "hydrostatic" value, Appl. Sci. Res., A, 10, p. 384-392.

Führböter, A. (1970), Air entrainment and energy dissipation in breakers, Proc. 12th Conf. Coastal Eng., Washington, D.C., Vol. I, p. 391-398.

Een iets uitgebreider artikel hierover:

Führböter, A. (1971), Ueber die Bedeutung des Lufteinschlages für die Energieumwandlung in Brandungszonen, die Küste, 21, p. 34-42.

Hetzelfde artikel in:

Mitteilungen des Franzius-Instituts für Grund- und Wasserbau der Technischen Universität Hannover, 36, p. 1-16.

Galvin, C.J. (1967), Longshore current velocity: A review of theory and data, Rev. Geoph., 5, 3, p. 287-304.

Galvin, C.J. (1968), Breaker type classification on three laboratory beaches, Jnl. of Geoph. Res., 73, 12, p. 3651-3659.

Galvin, C.J. (1972), Wave breaking in shallow water, in Waves on Beaches, Ed. R.E. Meyer, Academic Press, New York, p. 413-456.

Galvin, C.J. and Eagleson, P.S. (1965), Experimental study of longshore currents on a plane beach, U.S. Army C.E.R.C., Techn. Mem. 10.

Glushko, G.S. (1965), Turbulent boundary layer on a plane plate in an incompressible fluid, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mech., 4, p. 13-23.

Harlow, F.H. and Nakayama, P.I. (1968), Transport of turbulence energy decay rate, Los Alamos Sci. Lab., University of California, Report LA-3854.

Harris, T.F.W., Jordaan, J.M., McMurray, W.R., Verwey, C.J. and Anderson, F.P. (South African Council for Sci. and Ind. Res.) (1963), Mixing in the surf zone, Int. Jnl. of Air and Water Pollution, Vol. 7, p. 649-667, Pergamon Press 1963.

Hinze, J.O. (1959), Turbulence, McGraw-Hill.

Horikawa, K. and Kuo, C. (1966), A study on wave transformation inside surf zone, Proc. 10th Conf. Coastal Eng., Tokyo, Vol. I, p. 217-233.

Ingle, J.O. (1966), The movement of beach sand, Elsevier, Amsterdam

Inman, D.L., Tait, R.J. and Nordstrom, C.E. (1971), Mixing in the surf zone, Jnl. of Geoph. Res., 76, 15, p. 3494-3514.

Kármán, Th. von (1930), Mechanische Aehnlichkeit und Turbulenz, Nachr. der Akad. der Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 58.

Kolmogorov, A.N. (1942), Equations of turbulent motion of an incompressible turbulent fluid, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Phys., 6, 1-2, p. 56-58 (Transl. by Spalding, D.B. (1968), Imperial College London. ON/6).

Krauss, W. (1973), Methods and Results of Theoretical Oceanography I, Gebrüder Borntraeger, Berlin, Stuttgart.

Longuet-Higgins, M.S. (1953), Mass transport in water waves, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, 245, 903, p. 535-581.

Longuet-Higgins, M.S. (1970a, b), Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, Jnl. of Geoph. Res., 75, 33, part 1: p. 6778-6789, part 2: p. 6790-6801.

Longuet-Higgins, M.S. (1972), Recent progress in the study of longshore currents, in Waves on Beaches, Ed. R.E. Meyer, Academic Press, New York, p. 203-248.

Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W. (1960), Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents, Jnl. of Fluid Mech., 8, p. 565-583.

Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W. (1961), The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, Jnl. of Fluid Mech., 10, p. 529-549.

Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W. (1962), Radiation stress and mass transport in gravity waves, with applications to "surf-beats", Jnl. of Fluid Mech., 13, p. 481-504.

Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W. (1963), A note on wave set-up, Jnl. of Marine Res., 21, p. 4-10.

Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W. (1964), Radiation stresses in water waves; a physical discussion, with applications, Deep-Sea Res., 11, p. 529-562.

Launder, B.E. and Spalding, D.B. (1972), Mathematical models of turbulence, Academic Press, London.

Lumley, J.L. (1970), Stochastic tools in turbulence, Academic Press, New York.

Lundgren, H. (1963), Wave thrust and energy level, Proc. IAHR Congress, London, p. 147-151.

Mei, C.C. (1973), A note on the averaged momentum balance in two-dimensional water waves, Jnl. of Marine Res., 31, 2, p. 97-104.

Mei, C.C., Thalpa, G.A., Eagleson, P.S. (1968), An asymptotic theory for water waves on beaches of mild slope, Jnl. of Geoph. Res., 73, 14, p. 4555-4560.

Mollo-Christensen, E. (1973), Intermittency in large-scale turbulent flows, in Annual Revier of Fluid Mech., 5, p. 101-118

Monin, A.S. (1965), The structure of the atmospheric boundary layer, Izv. Acad. Sci. USSR, Atmospheric and Oceanic Physics, 1, 3, p. 153-157.

Monin, A.S. (1972), Lagrangian description of stationary waves, Soviet Physics Doklady, 17, 4.

Monin, A.S. and Yaglom, A.M. (1971), Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.

Munk, W.H. (1949), The solitary wave theory and its application to surf problems, in Annals of the New York Academy of Sci, 51, art. 3, p. 376-424.

Okubo, A. (1970), Oceanic mixing, Johns Hopkins University, Chesapeake Bay Inst., Techn. Rep. 62, Ref. 70-1.

Opdam, H.J. (1971), Experimentele fluoresceïne metingen betreffende de invloed van golven en getij op de stroming langs de kust, Studie-rapport W.W.K. 71-5, R.W.S.

Phillips, O.M. (1969), The dynamics of the upper ocean, Cambridge University Press.

Phillips, O.M. (1972), The entrainment interface, Jnl. of Fluid Mech., 51, 1, p. 97-118.

Pierson, W.J. (1961), Models of random seas based on the Lagrangian equations of motion, Techn. Report -285/03), College of Engineering, New York University.

Prandtl, L. (1925), Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, Ztschr. f. angew. Math. und Mech., 5, p. 136-139.

Prandtl, L. (1945), Ueber ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz, Nachr. von der Akad. der Wiss. in Göttingen, p. 6-19.

Rajaratnam, N. (1972), Plane turbulent compound wall jets, Jnl. of Hydr. Res., 10, 2, p. 189-203.

Rotta, J. (1951), Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, Zeitschrift für Physik, 129, p. 547-572.

Rotta, J. (1972a), Turbulente Strömungen, B.G. Teubner, Stuttgart.

Rotta, J. (1972b), Recent attempts to develop a generally applicable calculation method for turbulent shear flow layers, Proc. Turbulent Shear Flows, AGARD Conf., 93, London.

Schönfeld, J.C. (1973), Energievergelijking voor de turbulentie, in Turbulentie i.v.m. transportverschijnselen, Waterloopkundig Laboratorium, intern colloquium.

Stoker, J.J. (1957), Water waves, Interscience, New York.

Tamai, N. (1972), Diffusion due to random waves, Proc. of the Japan Soc. of Civil Eng., 203, p. 79-91.

Taylor, G.I. (1921), Diffusion by continuous movements, Proc. London Math. Soc., Series 2,20, p. 196-211.

Tennekes, H. and Lumley, J.L. (1972), A first course in turbulence, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.

Thornton, E.B. (1969), Longshore current and sediment transport, Techn. Rep. 5, Dept. of Coastal and Oceanographic Eng., University of Florida, Gainesville, Florida.

Thornton, E.B. (1970), Variation of longshore current across the surf zone, Proc. 12th Conf. Coastal Eng., Washington, D.C., Vol. I, p. 291-308.

Townsend, A.A. (1961), Turbulence, in Handbook of Fluid Dynamics, Ed. V.L. Streeter, McGraw-Hill.

Vreugdenhil, C.B. (1973a), Toepasbaarheid en generalisering van de turbulentie-viscositeit, in Turbulentie i.v.m. transportverschijnselen, Waterloopkundig Laboratorium, intern colloquium.

Vreugdenhil, C.B. (1973b), Turbulence: extended methods, in Computational methods for the vertical distribution of flow in shallow water, Delft Hydraulics Laboratory, Report W152, p.27-59.

Wallace, J.M., Brodkey, R.S., Nychas, S.G., Taraba, J.L. (1973), Turbulent energy production, dissipation, and transfer, The Physics of Fluids, 16, 11, p. 2010-2011.

Waterloopkundig Laboratorium (1973), Invloed van open palenrijen op stromingen nabij de kust, Rapport M1148.

Wieringa, J. (1972), Verslag turbulentie-discussiegroep I, K.N.M.I., Afd. MO-B, Werkgroep Grenslagenstructuur, 72-22.