

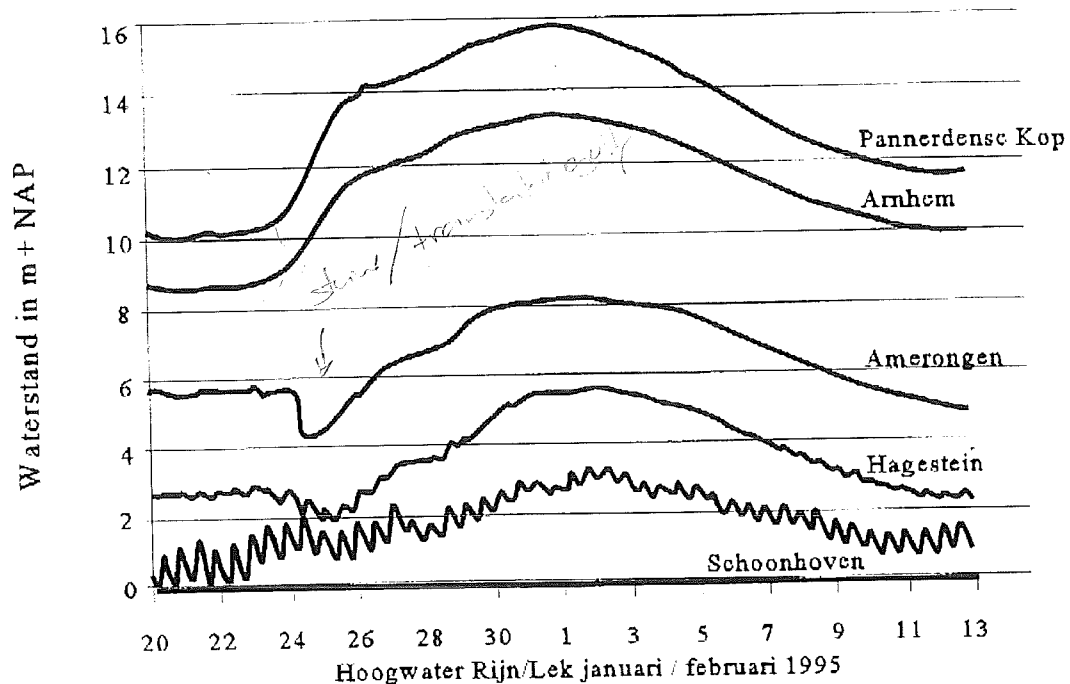
CTwa3310

Stroming in waterlopen

Collegehandleiding

Januari 2000

Prof.dr.ir. J.A. Battjes



Copy Ad Remmers

1-bundel met oefeningen

Stroming in waterlopen

prof.dr.ir. J.A. Battjes

Technische Universiteit Delft
Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen
Subfaculteit Civiele Techniek
Sectie Vloeistofmechanica

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
	1.1 Onderwerp	1
	1.2 Doel	2
	1.3 Aanpak	2
	1.4 Indeling	4
	1.5 Voorkennis en werkvorm	4
	1.6 Literatuur	5
	1.7 Vragen en opgaven	6
2	Basisvergelijkingen voor lange golven	7
	2.1 Open waterlopen	7
	2.1.1 Notatie en balansgebied	7
	2.1.2 Continuïteitsvergelijking	8
	2.1.3 Bewegingsvergelijking	9
	2.1.4 Samenvatting	12
	2.1.5 Gereduceerde vergelijkingen	12
	2.1.6 Schematisaties	14
	2.2 Gesloten leidingen	17
	2.2.1 Inleiding	17
	2.2.2 Constitutieve vergelijkingen	17
	2.2.3 Massabalans	19
	2.2.4 Bewegingsvergelijking	20
	2.2.5 Samenvatting	21
	2.3 Vragen en opgaven	23
	Appendix Herkomst en betekenis advectione termen in de bewegingsvergelijkingen	24
3	Classificatie en analyse van lange golven	25
	3.1 Typen lange golven	25
	3.2 Een voorwaarde voor de "lange-golf" - benadering	29
	3.3 Schatting van termen	33
	3.4 Oplossingsmethoden	35
	3.5 Analyseren van uitkomsten	36
	3.6 Vragen en opgaven	37
4	Elementaire golfvergelijking	39
	4.1 Inleiding	39
	4.2 Enkelvoudige golf in open water	39
	4.3 Elementaire golfvergelijking	43
	4.4 Algemene oplossing	44
	4.5 Relatie tussen variaties in debiet en waterstand	46
	4.6 Oplossing bij willekeurige beginsituatie	47
	4.7 Lopende en staande periodieke golven	51
	4.8 Vragen en opgaven	56

5	Translatiegolven	61
5.1	Lage translatiegolven	61
5.2	Hoge translatiegolven	67
5.3	Vragen en opgaven	72
6	Karakteristiekenmethode	75
6.1	Inleiding	75
6.2	Formulering	76
6.3	Karakteristieken	80
6.4	Beginvoorwaarden	83
6.5	Randvoorwaarden	86
6.6	Bijzondere gevallen	89
6.7	Golfvorming bij eenzijdige voortplanting	93
6.8	Drukgolven in gesloten leidingen	97
6.9	Vragen en opgaven	104
7	Systemen met discrete berging, traagheid en weerstand	107
7.1	Uitgangspunten	107
7.2	Formulering	109
7.3	Linearisering van kwadratische weerstand	114
7.4	Systeem met discrete berging en weerstand	116
7.5	Systeem met discrete berging, weerstand en traagheid	120
7.6	Complexe rekenwijze	122
7.7	Vragen en opgaven	124
	Appendix Résumé complexe rekenregels	127
8	Harmonische golven	131
8.1	Inleiding	131
8.2	Complexe representatie van lopende golven	131
8.3	Formulering en basisoplossing	134
8.4	Enkelvoudige lopende golf	137
8.5	Partiële terugkaatsing bij abrupte profielverandering	140
8.6	Golven in éénzijdig gesloten bekken	142
8.7	Voortplanting in willekeurige sectie	146
8.8	Voortplanting in netwerken	148
8.9	Niet-lineaire effecten	149
8.10	Vragen en opgaven	151
	Appendix A: cosh en sinh van een complex argument	153
	Appendix A: Berekening complexe voortplantingsconstante	154
	Appendix C: Berekening middenstandsverhang door weerstand	156

9	Hoogwatergolven	159
	9.1 Inleiding	159
	9.2 Gereduceerde vergelijkingen	161
	9.3 Quasi-eenparige benadering	163
	9.4 Invloed van variabelverhang	165
	9.5 Diffusiemodel van hoogwatergolven	167
	9.6 Discussie hoogwatergolven	172
	9.7 Vragen en opgaven	174
10	Stroming bij kunstwerken	177
	10.1 Inleiding	177
	10.2 Benaderingen	178
	10.3 Stroombeelden	179
	10.4 Debiet-waterstandrelaties	181
	10.5 Verdeling van snelheid en druk	184
	10.5.1 Inleiding	184
	10.5.2 Continuïteitsvergelijking en stroomfunctie	185
	10.5.3 Snelheidspotentiaal	187
	10.5.4 Vierkantennet	188
	10.6 Vragen en opgaven	191
	Appendix Kinematica en dynamica van ideale-vloeistofstroming	193
11	Transportprocessen	199
	11.1 Inleiding	199
	11.2 Balansvergelijking (algemene vorm)	200
	11.3 Moleculaire diffusie	202
	11.4 Advectie en moleculaire diffusie	206
	11.5 Turbulente diffusie	207
	11.6 Vertikaal transport in open waterlopen	211
	11.7 Horizontaal transport in open waterlopen	214
	11.7.1 Inleiding	214
	11.7.2 Tweedimensionaal horizontaal transport (gebied II)	216
	11.7.3 Eéndimensionaal horizontaal transport (gebied III)	222
	11.7.4 Résumé van balansvergelijkingen en coëfficiëntwaarden	224
	11.8 Vragen en opgaven	225
	Formules Stroming in waterlopen	231

1 Inleiding

1.1 Onderwerp

Veel natuurlijke of technische systemen voor stroming van water zijn gekenmerkt door lengte-afmetingen die zeer veel groter zijn dan de dwarsafmetingen. Denk b.v. aan rivieren, kanalen, getijgeulen of pijpleidingen. Korthedshalve vatten wij die hier samen onder de verzamelnaam “waterlopen” (of “leidingen”). De beschrijving en de berekening van stromingen in zulke systemen is het onderwerp van dit vak. Stromen met een vrij oppervlak, zoals in **open waterlopen**, komen veruit het meest aan bod, maar incidenteel gaan we ook in op stromen onder druk in **gesloten leidingen**.

Stationaire stromen in leidingen zijn behandeld in het tweedejaarsvak Vloeistofmechanica (CTme2100), zowel in gesloten als open leidingen. Stationaire stromen doen zich voor als de randvoorwaarden (b.v. bovenafvoer, benedenstroomse waterstand) langdurig niet variëren in de tijd. In een open waterloop kan een stationaire stroming uniform zijn of geleidelijk variërend in de stroomrichting, met een z.g. verhanglijn (zie CTme2100). Het vak "Stroming in waterlopen" sluit hier op aan en breidt het uit naar **niet-stationaire stromen**.

Bij in de tijd variërende randvoorwaarden zal de stroming tijdsafhankelijk zijn. Denk aan hoogwatergolven op rivieren, die (met vertraging) het tijdsafhankelijk verloop van de aanvoer van regen- of smeltwater uit het stroomgebied weerspiegelen, of de getijbeweging in estuaria en rivieren, die daar een reactie is op de variabele getijstanden in zee. De beschrijving en berekening van zulke **niet-stationaire stromen** is het hoofdbestanddeel van dit vak (Hoofdstukken 2 t/m 9). Het merendeel van de hier te behandelen stromingen behoort tot de z.g. **lange golven**, zo genoemd omdat hun lengten vele malen groter zijn dan de waterdiepte. We kunnen dan uitgaan van hydrostatische druk en profielgemiddelde snelheden, wat de berekeningen sterk vereenvoudigt.

Ten behoeve van peil- en/of debietregeling worden regelwerken in waterlopen gebouwd, z.g. kunstwerken, met name stuwen en inlaatwerken. Die scheiden de waterloop in compartimenten, met aan weerszijden van het kunstwerk verschillende waarden van peil en/of debiet. Deze fungeren als (in te stellen) randvoorwaarden voor het verloop van waterstanden en debieten in de compartimenten aan weerszijden van het kunstwerk. Voor het waterloopkundig en constructief ontwerpen van dergelijke constructies moet de stroming erdoor/over/onder kunnen worden berekend, evenals de drukken die door de stroming op de constructie worden uitgeoefend. Dit onderwerp van **stroming bij kunstwerken** wordt ingeleid in Hoofdstuk 10, als aanzet voor meer uitvoerige behandeling in vervolgvakken over waterbouwkundige constructies.

Waterlopen voeren als regel niet zuiver water af maar tevens daarin opgeloste of zwevende stoffen. Kennis daarvan kan van grote praktische betekenis zijn i.v.m. problemen van waterkwaliteit, sedimentatie etc. Het **transport van meegevoerde stoffen** in open waterlopen is het derde en laatste onderwerp dat hier wordt behandeld (Hoofdstuk 11).

1.2 Doel

Het leren onderkennen van de te behandelen tijdsafhankelijke stromingsproblemen is van belang voor de civiel ingenieur in relatie met het ontwerpen, (ver)bouwen en beheren van waterbouwkundige (kunst)werken in getijdegebieden, rivieren en kanalen. Daarbij moet de ingenieur inzicht hebben in de eigenschappen van de verschijnselen en in staat zijn problemen te schematiseren, (benaderende) berekeningen uit te voeren en resultaten van metingen respectievelijk berekeningen te interpreteren. Ook moet hij de consequenties van ingrepen kunnen voorzien (kwalitatief) en berekenen (kwantitatief).

Het vak “Stroming in waterlopen” richt zich op het beschrijven en analyseren van de verschijnselen (overzicht en inzicht) en geeft een inleiding in de oplossingsmethoden (gereedschap). In de praktijk staan als gereedschap voor de berekening van stromen in waterlopen numerieke programmapakketten ter beschikking. In vervolgvakken wordt uitvoerig ingegaan op de numerieke schema’s daarin en op het werken daarmee. Dit vak “Stroming in waterlopen” gaat daaraan vooraf en legt de nadruk op kwalitatief inzicht en schatting van belangrijke effecten. Het doel daarbij is tevens een basis te leggen voor een kritisch gebruik van numerieke modellen.

Het doel van dit vak kan daarom als volgt worden samengevat:

- * kwalitatieve kennis opdoen van diverse typen niet-stationaire stromen in open of gesloten leidingen die in de civiele techniek van belang zijn;
- * inzicht krijgen in de betekenis van verschillende mechanismen voor de dynamica van die stromen;
- * attitude ontwikkelen van het per geval maken van een (kwalitatieve) probleemanalyse met schatting van belangrijke effecten;
- * kennis opdoen van verschillende mathematische benaderingen, rekenmethoden en oplossingen en van hun beperkingen;
- * het zelf kunnen uitvoeren van benaderende berekeningen voor geschematiseerde situaties.

1.3 Aanpak

Met uitzondering van Hoofdstuk 10 (Stroming bij kunstwerken) gaat de aandacht hier vooral uit naar niet-stationaire stromen met een vrij oppervlak en een lengteschaal die vele malen groter is dan de diepte, z.g. **lange golven**. Bovendien beperken we ons tot zijdelings ingesloten stromingen in z.g. **waterlopen**. Getijden en stromen in rivieren (w.o. hoogwatergolven) zijn hier goede voorbeelden van (in tegenstelling tot scheepsgolven of windgolven, bijvoorbeeld, want daarvan is de lengte niet vele malen groter dan de diepte). Omdat zulke stromen worden geleid door de bedding waarin zij lopen valt hun **hoofdstroomrichting** vrijwel samen met de **asrichting** van de betreffende waterloop of leiding. Die richting wordt hier als gegeven beschouwd en is dus niet een te berekenen onbekende (zoals wel het geval is bij stroming in zeeën, waarvan de richting niet a priori bekend is).

Voor de langgerekte verschijnselen die we hier beschouwen zijn de stroomlijnen nauwelijks gekromd in het verticale vlak en kunnen we dus uitgaan van een in verticale richting **hydrostatische drukverdeling**. Anders gezegd: alle punten van elke vertikaal hebben op elk tijdstip een gemeenschappelijk piëzometrisch niveau, liggend in de momentane, lokale waterspiegel (als we de atmosferische druk gelijk stellen aan nul).

In bochten zijn de stroomlijnen significant gekromd in het horizontale vlak en zal het piëzometrisch niveau en dus ook de waterspiegel overdwars variëren, oplopend van de binnenbocht naar de buitenbocht. Voor de lokale beschouwing van bochtstromen is dit essentieel (zie het vak Rivierwaterbouwkunde), maar voor de grootschalige beschouwingen waar het ons hier om gaat kunnen we er van af zien. M.a.w., we gaan er van uit dat de drukverdeling niet alleen vertikaal maar ook overdwars hydrostatisch is. **Alle punten van elk dwarsprofiel hebben op elk tijdstip dan een gemeenschappelijk piëzometrisch niveau, liggend in de waterspiegel** (die in deze benadering horizontaal wordt verondersteld in dwarsrichting). De hoogte hiervan boven een horizontaal referentievlak $z = 0$ geven we weer met h . Deze wordt dus behandeld als uitsluitend afhankelijk van de stroomafwaartse positie (met coördinaat s langs de as van de leiding) en tijd (t), ofwel $h = h(s, t)$.

Omdat h per dwarsdoorsnede constant wordt verondersteld geldt hetzelfde voor de gradiënt ervan in de stroomrichting (de helling van de waterspiegel), die bepalend is voor de aandrijvende krachten. We kunnen daarom geschikt werken met **over het dwarsprofiel geïntegreerde transportgrootheden**. Het debiet Q (in plaats van de lokale snelheid u in elk punt van het dwarsprofiel) is daar het meest sprekende voorbeeld van. Dergelijke grootheden variëren behalve in de tijd (t) slechts met de plaats van (niet in!) het dwarsprofiel, ofwel met de stroomafwaartse positie (s).

Samenvattend hebben we twee afhankelijk variabelen h en Q die we moeten bepalen als functies van de twee onafhankelijke variabelen s en t :

$$h = h(s, t)$$

$$Q = Q(s, t)$$

We spreken hier van een **ééndimensionaal model**, omdat naast de tijd (t) slechts één ruimtecoördinaat (s) voorkomt als onafhankelijke variabele.

Bovengenoemde benadering gaat niet op voor **stroming bij kunstwerken**. In de onmiddellijke omgeving daarvan, zeg tot op enkele diepten aan weerszijden, is de stroming snel variërend. Daar gaat de benadering van hydrostatische druk niet op en kan een ééndimensionaal model niet worden gebruikt. Daar moeten we lokaal een **driedimensionaal model** gebruiken, of in eenvoudige gevallen een **tweedimensionaal model**.

De stroming bij kunstwerken varieert meestal zo snel in de plaats dat ten opzichte daarvan de variatie in de tijd er niet toe doet. Lokaal is de beweging als **quasi-stationair** te beschouwen,

d.w.z. dat op elk moment de stroming beschouwd kan worden als volledig ingespeeld op de instantaan geldende randvoorwaarden, ook al variëren die (langzaam) in de tijd. Een stationair, twee-dimensionaal model (in het verticale vlak) wordt behandeld in Hoofdstuk 10.

Voor de behandeling van het transport van meegevoerde stoffen (Hoofdstuk 11) wordt er van uit gegaan dat dit transport de waterbeweging niet beïnvloedt. Dit is in benadering het geval bij lage concentraties. Deze benadering gaat dus uit van een bekende stroming, al dan niet tijdsafhankelijk. In gevallen waar het transport van meegevoerde stoffen de beweging wel significant beïnvloedt gebeurt dit meestal via de dichtheid. Het probleem wordt daardoor veel gecompliceerder dan in de hier gevolgde benadering (zie het vervolgvak “Dichtheidsstromen en interne golven”).

1.4 Indeling

De basisvergelijkingen die we als uitgangspunt nemen voor de analyse en berekening van lange golven worden gepresenteerd in Hoofdstuk 2. Vervolgens worden in Hoofdstuk 3 enkele kenmerkende lange-golf verschijnselen kwalitatief beschreven en kwantitatief geanalyseerd zodat zichtbaar wordt welke processen dominant zijn en welke van ondergeschikte betekenis. Hierop voortbouwend worden in de daarop volgende hoofdstukken diverse benaderende formuleringen, methoden en oplossingen aangedragen, globaal gesproken in de volgorde van toenemende invloed van wrijving. Begonnen wordt met lange golven met verwaarloosbare invloed van wrijving, om te eindigen met hoogwatergolven op rivieren waarvoor wrijving dominant is. Daartussen komen havenoscillaties en getijden aan bod waarin wrijving niet dominant is maar in het algemeen ook niet verwaarloosbaar. Na behandeling van de lange golven volgt in Hoofdstuk 10 een beschouwing over stroming bij constructies en in Hoofdstuk 11 het transport van meegevoerde stoffen.

1.5 Voorkennis en werkvorm

In dit vak wordt voortgebouwd op voorkennis uit de vakken Algemene Mechanica I (CTme1021) en II (CTme2020), de wiskunde uit de eerste twee jaren en het tweedejaarsvak Vloeistofmechanica (CTme2100).

De studiestof voor dit vak is gegeven in deze handleiding. Die is tamelijk beknopt gehouden; voor meer details, verdergaande uitwerkingen etc. zijn boeken te raadplegen waarvan de meest relevante in een volgende paragraaf zijn genoemd.

Enkele verplichte oefeningen vormen een integraal onderdeel van het vak.

De gehele cyclus van onderwijs, (zelf)studie en oefeningen wordt in een korte periode van één blok van acht weken doorlopen, af te sluiten met een tentamen. Het is belangrijk vanaf het begin deze drie samenhangende componenten tot hun recht te laten komen.

1.6 Literatuur

Stroming en (lange) golven in open water

- Chanson, H. The hydraulics of open channel flow. Arnold, Londen, 1999
 Chow, V.T. Open-Channel Hydraulics. McGraw-Hill, New York, 1959
 French, R.H. Open-Channel Hydraulics. McGraw-Hill, New York, 1985
 Hanif Chaudhry, M. Open-Channel Flow. Prentice Hall, 1993
 Henderson, F.M. Open-Channel Flow. McMillan, New York, 1966
 Jansen, P. Ph. e.a. Principles of River Engineering. Pitman, London, 1979
 Stoker, J.J. Water Waves. Interscience Publishers, New York, 1957
 Whitham, G.B. Linear and Nonlinear Waves. Wiley, New York, 1974

Numerieke methoden voor stroming en (lange) golven in open water

- Abbott, M.B. Computational hydraulics, elements of the theory of free-surface flow. Pitman, Londen, 1979
 Abbott, M.B. en D.R. Basco. Computational fluid dynamics: an introduction to engineers. Longman, 1989
 Cunge, J.A., F.M. Holly en A. Verwey. Practical aspects of computational river hydraulics. Pitman, Londen, 1980
 Stelling, G.S. en N. Booij. Computational modelling flow and transport. Lecture Notes CTwa4340, Delft, 1999
 Vreugdenhil, C.B. Computational hydraulics: an introduction. Springer Verlag, Berlin, 1989
 Vreugdenhil, C.B. Numerical methods for shallow-water flow. Kluwer, Dordrecht, 1994

Getijberekeningen in ondiep water

- Dronkers, J.J. Tidal computations in rivers and coastal waters. North Holland, Amsterdam, 1964

Transportprocessen in open water

- Fischer, H.B. e.a. Mixing in inland and coastal waters. Academic Press, New York, 1979
 Rutherford, J.C. River Mixing. John Wiley & Sons, New York, 1994
 Singh, V.P. en Hager, W. Environmental Hydraulics. Kluwer, Dordrecht, 1996

Stroming in drukleidingen (incl. waterslag)

- Fox, J.A. Transient flow in pipes, open channels and sewers, Chichester 1989.
 Hanif Chaudhry, M. Applied hydraulic transients, New York, 1979.
 Wylie, E.B. and Victor L. Streeter Fluid Transients, New York, 1978.
 Jaeger, C. Fluid transients in hydro-electric engineering practice, Glasgow and London, 1977.

1.7 Vragen en opgaven

1. Wat is de kenmerkende eigenschap van lange golven?
2. Noem een aantal stromingsverschijnselen die deze eigenschap in voldoende mate hebben.
3. Noem een aantal stromingsverschijnselen die deze eigenschap niet hebben.
4. Wat wordt verstaan onder een z.g. één dimensionaal model?
5. Ga na welke veronderstellingen ten grondslag liggen aan één dimensionale modellen.
6. Welke zijn de twee onafhankelijke variabelen in de hier te behandelen één dimensionale modellen?
7. En welke zijn de twee afhankelijke variabelen daarin?

2 Basisvergelijkingen voor lange golven

In dit hoofdstuk worden de basisvergelijkingen afgeleid die we zullen gebruiken in analyses en berekeningen van niet-stationaire stromen, eerst in open waterlopen en vervolgens in gesloten leidingen. In beide gevallen gaat het om een massabalans en een impulsbalans voor een gehele dwarsdoorsnede.

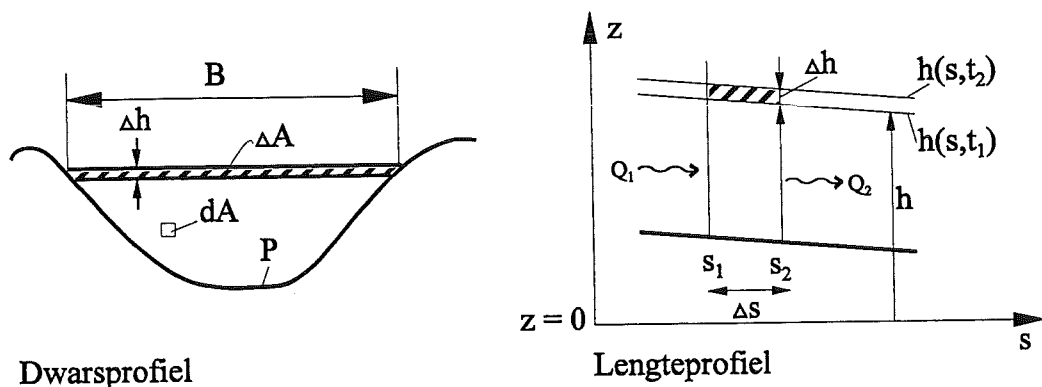
2.1 Open waterlopen

2.1.1 Notatie en balansgebied

In de al eerder (Hoofdstuk 1) omschreven ééndimensionale lange-golfbenadering gaan we uit van een **hydrostatische drukverdeling** in elke dwarsdoorsnede met een overdwars horizontaal veronderstelde waterspiegel. Dit komt er op neer dat op elk ogenblik alle punten van elke dwarsdoorsnede hetzelfde piëzometrisch niveau hebben, gelegen in de lokale waterspiegel (als we de atmosferische druk gelijk stellen aan nul), op een hoogte h boven een willekeurig te kiezen referentievlak $z = 0$. De grootte h is dus tevens de waterstand boven het horizontale referentievlak, en moet niet verward worden met de diepte, die we met d zullen aanduiden. De eventuele bodemhelling wordt klein verondersteld.

Eindige storingen van de waterstand krijgen het symbool δh , of, in een verkorte schrijfwijze, ζ . Infinitesimale storingen waarvan de waarde in een te beschouwen limiet naar nul gaat worden met Δh aangeduid.

We voeren een s -as in die globaal samenvalt met de lengteas van de beschouwde leiding (eventueel hellend) of met de projectie daarvan op het horizontale vlak (s -as horizontaal). Per geval waar het onderscheid van belang is zal dit worden aangegeven.



Figuur 2.1 Balansgebied open waterloop met berging

Als balansgebied nemen we een korte moot (lengte Δs) van een open waterloop met een willekeurige dwarsdoorsnede. Zie Figuur 2.1, waarin ook de betekenis van enkele symbolen is aangegeven. De totale oppervlakte van het natte dwarsprofiel wordt weergegeven door A . Het kan zijn dat slechts een deel van het dwarsprofiel effectief bijdraagt aan het

stroomafwaarts transport, het z.g. stroomvoerend profiel. De oppervlakte daarvan wordt weergegeven met A_s . In een hierna te geven beschouwing over "schematisatie" wordt het onderscheid tussen beide toegelicht.

2.1.2 Continuïteitsvergelijking

Bij open waterlopen zijn als gevolg van de vrije waterspiegel de drukvariaties zeer beperkt. De daardoor veroorzaakte dichtheidsvariaties zijn zeer klein vanwege de hoge compressiemodulus van water. Daarom kan het water als **onsamendrukbaar** worden benaderd. De massabalans reduceert dan tot een **volumebalans**, ook vaak **continuïteitsvergelijking** genoemd. Om die af te leiden beschouwen we de verandering van het volume water in het balansgebied gedurende een kort tijdsinterval van $t = t_1$ tot $t = t_2 = t_1 + \Delta t$.

De **volumestroom** (per eenheid van tijd, af te korten als p.e.v. tijd) ofwel het **debiet** is

$$Q = \iint u \, dA = UA_s \quad (2.1)$$

waarin u de lokale stroomsnelheid is en dA een infinitesimaal elementje van het oppervlak van het stroomvoerend profiel. De laatste vergelijking moet gelezen worden als een definitie van U , de over het stroomvoerend oppervlak van het dwarsprofiel (A_s) gemiddelde snelheid. Merk op dat Q (evenals h) slechts van s en t afhangt: $Q = Q(s, t)$.

De netto instroom van volume naar het balansgebied, in een tijdsinterval met duur Δt , is

$$Q_1 \Delta t - Q_2 \Delta t = (Q_1 - Q_2) \Delta t = -\Delta Q \Delta t.$$

Stel dat dit positief is, dus meer instroom dan uitstroom. Het verschil wordt in het balansgebied geborgen, wat bij onsamendrukbaarheid neer komt op een vergroting van het volume water in het balansgebied, stel $\Delta V = \Delta A \Delta s$ (zie Figuur 2.1). Gelijktelling van **berging** aan **netto instroom** levert

$$\Delta A \Delta s = -\Delta Q \Delta t$$

Na deling door Δt en Δs geeft dit in de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$ en $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad \text{bij boundary } Q \text{ is niet constant.} \quad (2.2)$$

Omdat $\Delta A = B \Delta h$ (zie Figuur 2.1), waarin B de z.g. **bergende breedte** is, kan dit geschreven worden als

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (2.3)$$

B zal in het algemeen variëren met de plaats (s) en met de waterstand (h). Via h kan B dus ook in de tijd variëren: $B = B(s, h(t))$.

2.1.3 Bewegingsvergelijking

Formulering van de tweede wet van Newton leidt tot een z.g. **bewegingsvergelijking**. De gedaanten daarvan kunnen onderling ogenschijnlijk nogal verschillen, o.a. doordat een formulering wordt gebruikt in termen van versnellingen of in de vorm van een impulsbalans. Het verschil en het verband tussen beide typen formuleringen kan worden verduidelijkt aan de hand van het eenvoudige voorbeeld van een massa m met snelheid $\vec{v}$, onderworpen aan een resulterende uitwendige kracht $\vec{F}$. Daarvoor is de impulsbalans te schrijven als $d(m\vec{v})/dt = \vec{F}$. Als de massa behouden is geldt $dm/dt = 0$ en is de impulsbalans te herschrijven tot $m d\vec{v}/dt = \vec{F}$ ofwel $d\vec{v}/dt = \vec{F}/m$, een z.g. versnellingsvergelijking. Ongeacht welke formulering wordt gebruikt spreken we van een z.g. bewegingsvergelijking. In een Appendix aan dit Hoofdstuk wordt dit uitgewerkt en toegelicht.

Naast verschillen in formulering zijn er verschillen in de fysische processen die een rol spelen. In alle gevallen gaat het echter om een **balans tussen traagheid, aandrijvende kracht en weerstand**, waarbij elk hiervan nog weer uit verschillende bijdragen kan bestaan. Het is belangrijk dit steeds te onderkennen en bij het opschrijven of lezen van een vergelijking na te gaan welke betekenis de verschillende termen hebben. Ook is het belangrijk per geval na te gaan of de één dan wel de ander dominant is of juist verwaarloosbaar.

Een bewegingsvergelijking is eenvoudig op te stellen door uit te gaan van de vergelijking van Euler voor de versnelling in de stromingsrichting (Du_s/Dt) van een deeltje in een ideale (wrijvingsloze) vloeistof met constante dichtheid (zie CTme2100):

$$\frac{Du_s}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(gz + \frac{p}{\rho} \right)$$

ofwel

$$\frac{Du_s}{Dt} = -g \frac{\partial h}{\partial s} \quad (2.4)$$

Hierin is $h = z + p/\rho g$ de hoogte (boven het referentievlak $z = 0$) van het **piëzometrisch niveau**, dat in geval van hydrostatische druk, zoals hier is verondersteld, samenvalt met de waterspiegel (we stellen de atmosferische druk gelijk aan nul).

Het rechterlid in (2.4) is de **aandrijvende kracht** in s-richting per eenheid van (p.e.v.) massa als gevolg van het **verhang** (de helling) van de waterspiegel; het stelt de z.g. **verhangkracht** voor. Merk op dat hierin de gezamenlijke werking van de **zwaarte** en van de **druk** tot uiting komt, ongeacht of de s-as horizontaal wordt gekozen of hellend. Dit is van belang en zal

daarom apart worden toegelicht.

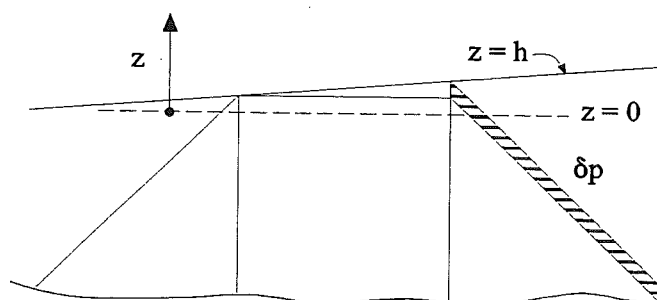
De aandrijvende kracht voor de *horizontale* beweging, zeg in x-richting, is uitsluitend de *horizontale* drukgradiënt, met een resulterende kracht in de x-richting die p.e.v. volume gelijk is aan $-\partial p / \partial x$ (zie CTme2100). Bij hydrostatische druk, met een hoogte van de waterspiegel t.o.v. een horizontaal vlak gelijk aan h , geldt in de gehele vertikaal (zie Figuur 2.2):

$$p = \rho g(h-z) \quad (2.5)$$

Hieruit volgt voor de horizontale drukgradiënt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.6)$$

Omdat h in het rechterlid onafhankelijk is van z is het linkerlid van (2.6) dat ook. Dat is ook te zien in Figuur 2.2: bij een hellende waterspiegel zijn de hydrostatische drukken aan weerszijden van een verticale kolom weliswaar verschillend, maar het drukverschil in horizontale richting niet (zie Figuur 2.2); wiskundig uitgedrukt: $\partial(\delta p) / \partial z = 0$.



Figuur 2.2 Hydrostatische drukverdelingen en netto horizontale drukkracht

Als we niet de horizontale bewegingscomponent bekijken, maar één langs een (bodem)helling, zoals we zullen doen bij de behandeling van hoogwatergolven in rivieren, dan draagt de component van de zwaartekracht in deze richting bij, maar ook dan is de resultante van zwaartekracht en en drukkracht op elk vloeistofdeeltje evenredig aan de gradiënt van het piëzometrisch niveau (zie 2.4).

De waarde van de verhangkracht is voor alle deeltjes in een dwarsprofiel gelijk, zodat (2.4) ook geldt voor de verandering van de over het dwarsprofiel gemiddelde snelheid U , althans bij verwaarlozing van wrijving.

Stel nu de totale **weerstand** die de stroming ondervindt over de lengte Δs van de beschouwde moot gelijk aan $\Delta W = \tau P \Delta s$, waarin P de weerstand leverende omtrek (perimeter) is, en τ de daarover gemiddelde weerstand p.e.v. oppervlakte, overeenkomend met een effectieve

(bodem)schuifspanning. De weerstand p.e.v. stromende massa is dan gelijk aan $\Delta W/(\rho A_s \Delta s) = \tau/\rho R$ waarin $R = A_s/P$, de z.g. **hydraulische straal** van het stroomvoerend profiel. Toevoeging hiervan aan (2.4), geschreven voor de gemiddelde snelheid U , levert

$$\frac{DU}{Dt} + g \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\tau}{\rho R} = 0 \quad (2.7)$$

Dit is de gezochte **balans tussen traagheid, aandrijving en weerstand**.

We gaan deze vergelijking verder uitwerken, o.a. door de totale versnelling (DU/Dt) te splitsen in de lokale bijdrage ($\partial U/\partial t$) en de advectione bijdrage ($U \partial U/\partial s$) (zie CTme2100). De gemiddelde (bodem)schuifspanning is te schrijven als

$$\tau = c_f \rho |U|U \quad (2.8)$$

waarin c_f een dimensieloze weerstandscoefficiënt is. (Deze coëfficiënt en die van Chézy (C) zijn in elkaar uit te drukken volgens $C = (g/c_f)^{1/2}$ ofwel $c_f = g/C^2$.) Door substitutie hiervan gaat (2.7) over in

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} + g \frac{\partial h}{\partial s} + c_f \frac{|U|U}{R} = 0 \quad (2.9)$$

N.B. In het voorgaande is afgezien van een (meestal) kleine correctie in de advectione term die het gevolg is van een niet-uniforme snelheidsverdeling over het dwarsprofiel.

Evenals de volumebalans kan de bewegingsvergelijking worden geschreven in termen van het debiet Q . We kunnen dit bereiken door substitutie van $Q = UA_s$ in (2.9) en uitwerken met gebruikmaking van (2.2), met het resultaat

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q^2}{A_s} \right) + g A_s \frac{\partial h}{\partial s} + c_f \frac{|Q|Q}{A_s R} = 0 \quad (2.10)$$

In feite is dit (op een factor ρ na) een impulsbalans. De eerste term hierin stelt de toeneming voor p.e.v. tijd van de impulsvoorraad (ρUA_s ofwel ρQ), de tweede de netto uitstroom van impuls door meevoering (afkomstig van de impulsflux $\rho U^2 A_s$ ofwel $\rho Q^2/A_s$), de derde de verhangkracht en de vierde de totale weerstand, alles gedeeld door ρ en p.e.v. lengte. Merk op dat de impulsbalans hier is verkregen uit de versnellingsvergelijking; we hadden hem uiteraard ook direct kunnen opstellen. (Zie de appendix aan dit hoofdstuk.)

De diverse bijdragen aan de bewegingsvergelijking zijn niet in alle gevallen even belangrijk. Per geval zullen we nagaan welke termen dominant zijn en welke verwaarloosd kunnen worden voor een globale berekening (zie hierna). In het algemeen geldt dat de weerstand van geringere betekenis is naarmate de bewegingen sneller variëren. Bij voldoende langzaam variërende bewegingen is juist de traagheid verwaarloosbaar (hiervan is al gebruikt gemaakt in de verticale en dwarse richting).

2.1.4 Samenvatting

De continuïteitsvergelijking (2.3) en de bewegingsvergelijking (2.10) vormen de basis voor analyses en berekeningen van lange-golfverschijnselen. Zij staan bekend als de **vergelijkingen van De Saint-Venant** (1871), of ook als de (ééndimensionale) **ondiepwatervergelijkingen** (omdat het water ondiep is verondersteld t.o.v. de lengteschaal van de waterbeweging). Zij worden voor het overzicht hier gezamenlijk herhaald:

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q^2}{A_s} \right) + g A_s \frac{\partial h}{\partial s} + c_f \frac{|Q|Q}{A_s R} = 0$$

Deze vergelijkingen vormen een gekoppeld stelsel voor twee onbekenden (waterstand h en debiet Q) als functie van plaats (s) en tijd (t). De geometrische profiel-grootheden A_s , B en R en de weerstandsfactor c_f worden voor een gegeven waterloop verondersteld op een bekende manier met de plaats (s) en met de waterstand (h) te variëren, zodat wiskundig gezien zij als bekende hoewel in het algemeen variabele coëfficiënten zijn te beschouwen. Bij voldoende begin- en randvoorwaarden is het stelsel dan te integreren. Zoals hierboven al is opgemerkt worden daarvoor in de praktijk standaard numerieke pakketten voor gebruikt.

2.1.5 Gereduceerde vergelijkingen

In vervolghoofdstukken komen diverse vereenvoudigingen van de ondiepwatervergelijkingen aan de orde die ieder voor zich zijn toegesneden op een bepaalde categorie van lange golven (zoals getijden, hoogwatergolven etc.) door het weglaten of benaderen van individuele termen in de vergelijkingen. Hier worden enkele verdergaande vereenvoudigingen besproken waarbij niet meer sprake is van golfverschijnselen.

Stationaire stroom

Een triviale vereenvoudiging is die van de stationaire stromen, waarbij h en Q dus niet met de tijd variëren ($\partial h / \partial t = 0$ en $\partial Q / \partial t = 0$). Uit de continuïteitsvergelijking (2.3) volgt dan dat Q ook onafhankelijk is van de plaats ($\partial Q / \partial s = 0$). Daardoor reduceert de bewegings-

vergelijking, voor de berekening van h als functie van s , tot de verhanglijnvergelijking van Bélanger (zie CTme2100, ook al is die daar in andere vorm geschreven). Is de stroming niet alleen stationair maar ook uniform dan loopt de waterspiegel evenwijdig aan de bodem, met (constante) helling i_b , zodat dan $\partial h / \partial s = -i_b$, en reduceert de bewegingsvergelijking tot de bekende uitdrukking voor eenparige stroom (sub “e”):

$$Q = Q_e = A_s \sqrt{g R i_b / c_f} \quad \text{ofwel} \quad U = U_e = \sqrt{g R i_b / c_f} \quad (= C \sqrt{R i_b}) \quad (2.11)$$

Kombergingsbenadering

In een tweede soort vereenvoudiging is de beweging weliswaar niet stationair, maar zijn de horizontale snelheden in een beperkt gebied verwaarloosbaar klein waardoor zowel de traagheid als de weerstand geen rol spelen. Dit doet zich bijvoorbeeld voor in een kom die geheel gesloten is op één punt of een paar punten na waar een debiet in- en uit kan stromen. We gaan dat na voor het geval van een kanaal of bekken dat aan één zijde (zeg $s = 0$) gesloten is en waarin vanaf het andere, open einde b.v. een getij binnendringt.

Ter plaatse van het gesloten einde van het bekken geldt $Q(0,t) = 0$ voor alle t . De weerstandsterm valt daarom weg uit de bewegingsvergelijking voor het punt $s = 0$ omdat die term evenredig is met $Q|Q|$. De lokale afgeleide $\partial Q / \partial t$ is de verandering van Q p.e.v. tijd op een vaste plaats. Omdat in $s = 0$ steeds geldt $Q = 0$ is daar $\partial Q / \partial t = 0$. De afgeleide $\partial Q / \partial s$ daarentegen hoeft niet gelijk te zijn aan nul want ter plaatse van de ondoorlatende doorsnede geldt weliswaar $Q = 0$ maar op enige afstand hiervan hoeft dat niet te gelden. Sterker nog, omdat geldt $\partial Q / \partial s + B \partial h / \partial t = 0$ (continuïteit) kan $\partial Q / \partial s$ alleen nul zijn wanneer $\partial h / \partial t = 0$, m.a.w. op de tijdstippen van hoog of laag water (in $s = 0$). De advectieve term in de bewegingsvergelijking is echter $\partial(Q^2 / A_s) / \partial s$; omdat dit evenredig is met $Q \partial Q / \partial s$ is dit gelijk aan nul waar $Q = 0$.

Ter plaatse van de ondoorlatende doorsnede reduceert de bewegingsvergelijking dus tot $\partial h / \partial s = 0$. De waterspiegel is daar steeds horizontaal. In een voldoende kleine omgeving van deze doorsnede kunnen we de s -variatie van h dus verwaarlozen, en stellen dat daar geldt $h(s,t) = h_k(t)$ (sub k voor “kort” bekken, of “kom”).

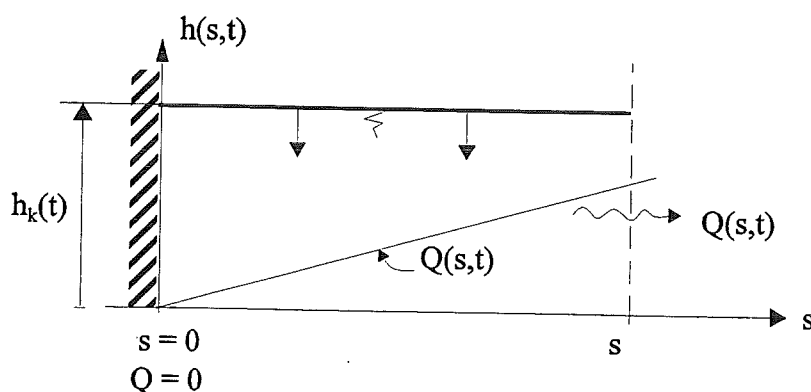
Omdat h in het korte bekken op elk moment niet met s varieert (nog wel met t) kan de continuïteitsvergelijking (2.3) in dat gebied gemakkelijk naar s worden geïntegreerd, wat bij constante bergende breedte B en met de randvoorwaarde $Q = 0$ in $s = 0$ leidt tot

$$Q(s,t) = \frac{dh_k(t)}{dt} B s \quad (2.12)$$

In deze benadering neemt het debiet dus lineair toe (in absolute waarde) met de afstand uit de gesloten rand (zie Figuur 2.3). Meer in het algemeen wordt de continuïteitsvergelijking voor een kom met bergend oppervlak A_k , waterniveau h_k en netto instroom Q :

$$Q = A_k \frac{dh_k(t)}{dt} \quad (2.13)$$

Het bovenstaande is de z.g. **kombergingsbenadering**, zo geheten omdat de dynamica geen rol speelt in de kom maar uitsluitend de berging daarin van belang is. Deze benadering wordt in Hoofdstuk 7 toegepast voor berekening van een aantal gevallen waarbij de kom op verschillende manieren is aangesloten aan het (getijde)gebied erbuiten.



Figuur 2.3 Kort bekken met horizontale waterspiegel, gelijkmatig dalend bij uitstroom ($Q>0$)

2.1.6 Schematisaties

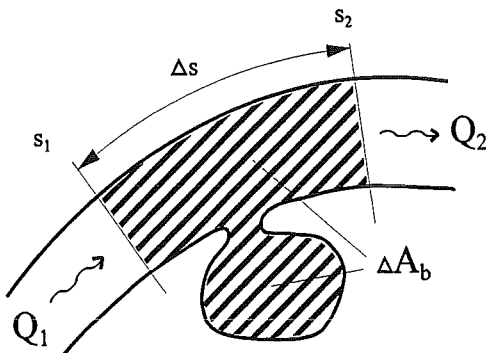
In het voorgaande is uitgegaan van een gegeven, enkelvoudig profiel en een gegeven waarde voor de weerstandsfactor. De praktijk is echter niet zo eenvoudig, vooral niet in geval van een natuurlijke open waterloop. Het **schematiseren** daarvan kan problemen geven. Het kan zijn dat het dwarsprofiel bestaat uit delen die onderling nogal verschillen in vorm, afmeting en functie. Enkele voorbeelden:

- (a) In Nederland zijn de rivieren voorzien van stroomgeleidende kribben. De kribvakken (tussen de kribben) kunnen wel water bergen maar bij lage waterstand dragen ze niet bij aan de stroomafwaartse transporten.
- (b) Voor zijdelings aan de doorgaande geul aangesloten bekkens zoals grindgaten, voormalige rivierarmen, havens etc. geldt hetzelfde.
- (c) Bij hoge waterstanden staan de eventueel aanwezige uiterwaarden onder water. In de kribvakken vindt dan wel stroomafwaarts transport plaats, maar bij veel geringere diepte en hogere weerstand dan in de hoofdgeul, het laatste deels door begroeiing en gebouwen in de uiterwaarden, wat moeilijkheden oplevert in het schematiseren.

Het is van belang in schematisaties zowel de **bergende functie** als de **transportfunctie** van de waterloop zo goed mogelijk weer te geven. Ze moeten niet worden vereenzelvigd. Voor de bergende functie gaat het om het oppervlak van de vrije waterspiegel, terwijl de transportfunctie juist wordt bepaald door (het oppervlak van) de dwarsprofielen.

Het bergend vermogen van waterlopen speelt een belangrijke rol in het dempen van de hoogte en de voortplantingssnelheid van getijden en hoogwatergolven. Berging vindt bij open waterlopen plaats aan het vrije oppervlak. De effectieve **bergende oppervlakte** (A_b) moet daarom zo goed mogelijk in rekening worden gebracht, ongeacht of gebieden die eraan bijdragen ook een stroomvoerende functie hebben. Hierbij kan onderscheid worden gemaakt tussen berging die vrijwel continu langs de waterloop is verdeeld, zoals in kribvakken, en discrete berging.

Als voorbeeld van **discrete berging** nemen we het geval van een vak waarin een (haven)bekken voorkomt dat zijdelings in open verbinding staat met de waterloop (zie Figuur 2.4). Slechts de waterloop zelf vervult de functie van stroomafwaarts transport, maar het gehele vrije oppervlak (gearceerd in de figuur), inclusief dat van het bekken, draagt bij aan de berging, zodat de gehele oppervlakte ervan (A_b) in de volumebalans in rekening moet worden gebracht.



Figuur 2.4 Boveraanzicht riviervak met discrete berging in bekken

De volumebalans voor dit vak luidt daarom

$$A_b \langle \Delta h \rangle = (Q_1 - Q_2) \Delta t \quad (2.14)$$

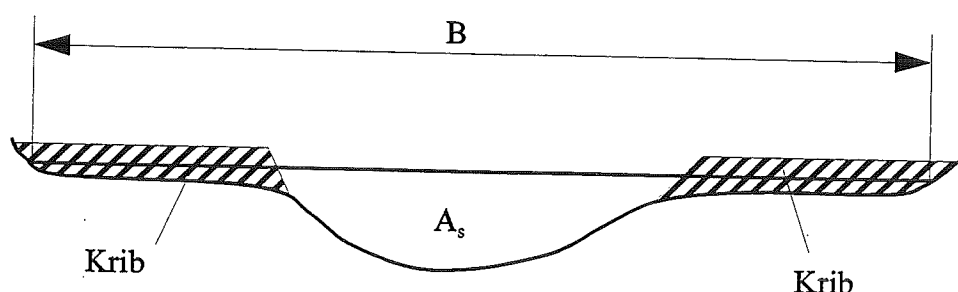
waarin $\langle \Delta h \rangle$ de over het bergend oppervlak gemiddelde stijging is van de waterspiegel. In de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$ ontstaat

$$A_b \frac{d\langle h \rangle}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad (2.15)$$

In situaties zoals in de Nederlandse (beneden)rivieren, gekenmerkt door een enkelvoudige geul met aanliggende kribvakken (zie Figuur 2.5), is het bergend oppervlak naast de stroomvoerende geul vrijwel **continu** over de lengte van de rivier verdeeld en is de oppervlakte ervan evenredig aan de lengte van het beschouwde riviervak (Δs) en aan de z.g. **bergende breedte**:

$$\Delta A_b = B \Delta s \quad (2.16)$$

Substitutie hiervan in (2.15) geeft in de limiet voor $\Delta s \rightarrow 0$ opnieuw de al eerder afgeleide continuïteitsvergelijking (2.3), maar bovenstaande afleiding laat duidelijk zien dat de daarin voorkomende breedte de bergende breedte is en niet die van het stroomvoerend profiel.



Figuur 2.5 Dwarsdoorsnede rivier met hoofdgeul en kribvakken

Het is in toepassingen niet altijd duidelijk wat de best te gebruiken waarde is van de weerstandsfactor c_f . De weerstand is niet uitsluitend het gevolg van de (vaak niet bekende) bodemruwheid ten gevolge van de korrels, ribbels en duinen, maar ook van meer grootschalige profielvariaties, kribben, bochten, brugpijlers en andere obstakels, zodat formules zoals die van Manning, Strickler of White-Colebrook (zie CTme2100) niet zonder meer gebruikt kunnen worden. De optimale waarde van c_f kan het beste worden bepaald via ijking aan metingen. Daarbij speelt ook de schematisatie van de dwarsprofielen een rol omdat fouten daarin doorwerken in de schatting van de weerstandsfactor (zie b.v. dat de weerstandsterm in (2.10) de verhouding $c_f/A_s R$ bevat; een fout in A_s of R kan dus gecompenseerd worden in c_f). De waarden van c_f liggen veelal tussen 0.003 en 0.006 (overeenkomend met C-waarden (Chézy) van $57 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ respectievelijk $40 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$).

2.2 Gesloten leidingen

2.2.1 Inleiding

Waar we hier korthedshalve spreken van “gesloten leidingen” bedoelen we in feite “geheel gevulde gesloten leidingen”, ofwel “stroming onder druk”. De vergelijkingen voor niet-stationaire bewegingen in dergelijke leidingen worden hier behandeld in aansluiting op die voor open leidingen omdat ze daarmee een grote gelijkenis vertonen. In beide gevallen gaat het om balansen voor over de hele dwarsdoorsnede geïntegreerde grootheden, wat in beide gevallen resulteert in éénimensionale modellen die wiskundig van dezelfde categorie zijn, met lopende golven als oplossingen.

In open waterlopen vindt berging plaats aan het vrije oppervlak. Dat gaat gepaard met drukvariaties in de vloeistof van meestal slechts enkele meters waterkolom. De dichtheid kan daarbij constant worden verondersteld. Met de variatie van het waterpeil (a.g.v. berging) varieert ook het oppervlak van het stroomvoerend (dwars)profiel, en wel recht evenredig daaraan ($\Delta A_s = B_s \Delta h$).

Bij geheel gevulde waterleidingen is er geen vrije waterspiegel, dus is de daarmee verband houdende berging afwezig. Er is dan slechts berging mogelijk door compressie of rek van het stromende medium en/of van de buiswand. Desondanks is bij voldoende **langzaam variërende stromen** de compressie of rek van vloeistof en wand nog te verwaarlozen. De berging in de leiding wordt dan verwaarloosd, wat leidt tot de z.g. “**starre kolom**” - benadering.

Snelle variaties van de stroomsnelheid, zoals bij het plotseling openen of sluiten van afsluiters of het plotseling starten of stoppen van een pomp, gaan gepaard met grote variaties van de druk (“**waterslag**”). Voor zulke situaties moet de **samendrukbaarheid van de vloeistof** en/of de **rek van de buiswand** in de beschouwingen worden betrokken. Voor beide hebben we dan aanvullende, **constitutieve vergelijkingen** nodig. In het volgende wordt dit uitgewerkt, waarbij we ons beperken tot vloeistoffen waarin de dichtheid uitsluitend van de druk afhangt (niet van temperatuur, zoutgehalte etc.).

2.2.2 Constitutieve vergelijkingen

Het gaat er om verbanden te leggen tussen de druk (p) en respectievelijk

- de dichtheid van de vloeistof (ρ)
- het oppervlak van het dwarsprofiel (A)

Dit gebeurt via constitutieve vergelijkingen voor vloeistof en buiswand. We zullen daarvoor lineair-elastische modellen gebruiken.

Relatie tussen de druk en de dichtheid voor vloeistoffen

De compressiemodulus van de vloeistof (K) is gedefinieerd door :

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{K} \quad (2.17)$$

Voor water geldt onder normale omstandigheden $K = 2.2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 = 2.2 \text{ GPa}$, vrijwel onafhankelijk van de druk of de temperatuur. (Indien in een vloeistof gasbelletjes aanwezig zijn dan daalt de effectieve waarde van K voor het geheel sterk omdat een gas al gauw een factor 10^4 meer samendrukbaar is dan een vloeistof.)

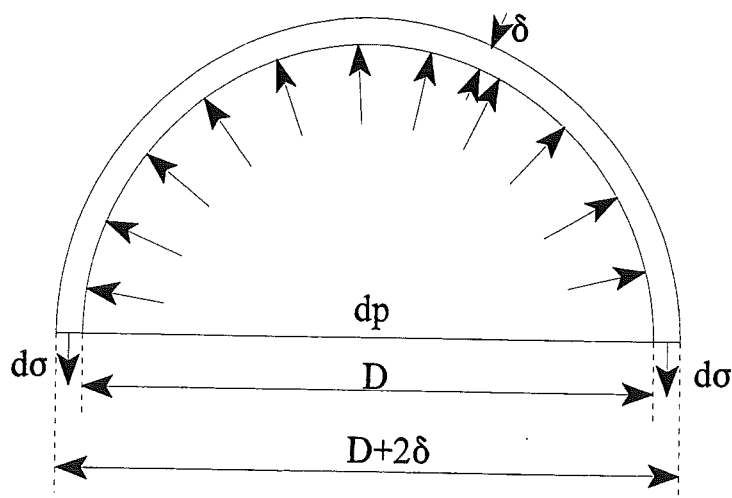
Via (2.17) kunnen partiële afgeleiden van ρ naar t en s worden uitgedrukt in $\partial p / \partial t$ en $\partial p / \partial s$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{dp}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial \rho}{\partial s} &= \frac{dp}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Het dwarsprofiel A in relatie met de druk p

Beschouw een cirkelvormige leiding met een inwendige diameter D en een uniforme, relatief kleine wanddikte δ (dus $\delta \ll D$; zie Figuur 2.6, waarin de wanddikte overdreven groot is weergegeven). Stel dat een kleine drukverhoging dp in de vloeistof een verhoging van de trekspanning in de buiswand geeft gelijk aan $d\sigma$. Verwaarloost men de traagheid van de vloeistof en van de buiswand dan is er sprake van evenwicht, waaruit volgt (zie Figuur 2.6):

$$2\delta \cdot d\sigma = D \cdot dp$$



Figuur 2.6 Dwarsdoorsnede drukleiding (definitieschets)

De toename van de trekspanning $d\sigma$ gaat vanwege de elasticiteit van de buiswand (elasticiteitsmodulus E) gepaard met een toename van de omtrek ($P = \pi D$) en dus ook van de diameter (D), die volgens de wet van Hooke kunnen worden uitgedrukt als :

$$\frac{dD}{D} = \frac{dP}{P} = \frac{d\sigma}{E} \quad (2.19)$$

zodat

$$\frac{dD}{D} = \frac{D}{2\delta} \frac{dp}{E}$$

Omdat A evenredig is met D^2 geldt

$$\frac{dA}{A} = 2 \frac{dD}{D}$$

zodat

$$\frac{dA}{dp} = \frac{D}{\delta E} A$$

Daarmee kunnen de partiële afgeleiden van A naar t en s worden uitgedrukt in $\partial p / \partial t$ en $\partial p / \partial s$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{dA}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{D}{\delta E} A \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial A}{\partial s} &= \frac{dA}{dp} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{D}{\delta E} A \frac{\partial p}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2.3 Massabalans

De massabalans voor een leiding luidt

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho Q) = 0 \quad (2.21)$$

Uitschrijven geeft

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + \rho U \frac{\partial A}{\partial s} + \rho A \frac{\partial U}{\partial s} + U A \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0 \quad (2.22)$$

Hierin substitueren we nu de vergelijkingen (2.18) en (2.20) voor de variatie van p en A met p . Dit geeft na delen door A :

$$\left\{ \frac{\rho}{K} + \frac{\rho D}{E \delta} \right\} \frac{\partial p}{\partial t} + \left\{ \frac{\rho}{K} + \frac{\rho D}{E \delta} \right\} U \frac{\partial p}{\partial s} + \rho \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (2.23)$$

We definiëren nu een grootte c door :

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{K} + \frac{\rho D}{E \delta} \quad (2.24)$$

Na substitutie hiervan gaat (2.23) over in :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial s} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (2.25)$$

Zoals later zal blijken is c de voortplantingssnelheid van een drukgolf in een geheel met vloeistof gevulde leiding.

De invloed van de elasticiteit van vloeistof en buiswand komt tot uiting in de voortplantingssnelheid c (zie vgl. 2.24). In een oneindig starre buis ($E \rightarrow \infty$) geldt $c = \sqrt{K/\rho}$, de geluidssnelheid (snelheid van compressiegolven) in de vloeistof, ca 1400 m/s. Door de elasticiteit van de buiswand is de feitelijke voortplantingssnelheid in de pijpleiding kleiner (vaak circa 1000 m/s). In de benadering van een onsamendrukbare vloeistof ($K \rightarrow \infty$) in een starre leiding ($E \rightarrow \infty$) daarentegen geldt $c \rightarrow \infty$. In deze benadering zou een storing in de druk zich dus instantaan over de gehele leiding doen gelden. De continuïteitsvergelijking gaat daarbij over in $\partial U / \partial s = 0$; vandaar de naam “starre kolom”-benadering waarvan in dit geval sprake is. Deze benadering is bruikbaar bij voldoende langzame variaties van de stroming.

2.2.4 Bewegingsvergelijking

De continuïteitsvergelijking moet worden aangevuld met de bewegingsvergelijking (zie verg. 2.9):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} + g \frac{\partial h}{\partial s} + c_f \frac{|U|U}{R} = 0 \quad (2.26)$$

Voor een cirkelvormige buis substitueren we hierin $R = \frac{1}{4} D$ en gebruiken we voor c_f b.v. de uitdrukking van White-Colebrook (zie CTme2100).

In de vergelijkingen voor stromen in open water (zie par. 2.1) komt de druk niet voor in de continuïteitsvergelijking, omdat daar onsamendrukbaarheid kon worden verondersteld (berging aan het vrije oppervlak), en komt de druk slechts voor in de bewegingsvergelijking, in combinatie met de zwaartekrachtsterm. Daarom was het mogelijk de werking van beide gezamenlijk weer te geven via één variabele, de hoogte van het piëzometrisch niveau, als enige onbekende naast de snelheid U of het debiet Q .

In het geval van stromen in gesloten leidingen kunnen we niet uitsluitend met het piëzometrisch niveau werken omdat de druk daar afzonderlijk voorkomt in de continuïteits-

vergelijking (zie 2.23). Daarom elimineren we h door deze in de bewegingsvergelijking (2.26) te vervangen door $p/\rho g + z$. Stel dat de positieve s -richting een hoek (β) maakt met de vertikaal opwaartse richting. Dan geldt

$$g \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \beta$$

waardoor de bewegingsvergelijking (2.26) overgaat in

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \beta + c_f \frac{|U|U}{R} = 0 \quad (2.27)$$

2.2.5 Samenvatting

Massabalans:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial s} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (2.25)$$

Bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \beta + c_f \frac{|U|U}{R} = 0 \quad (2.27)$$

Hierin is

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{K} + \frac{\rho D}{E \delta} \quad (2.24)$$

Deze vergelijkingen vormen een gekoppeld stelsel voor de twee onbekenden druk (p) en snelheid (U) als functie van plaats (s) en tijd (t). Zij vormen de basis voor de z.g. **"waterslagberekeningen"**. Die berekeningen zijn o.a. nodig voor drinkwaterleidingen, drukleidingen voor turbines etc., waar als gevolg van pompafslag, plotseling sluiten of openen van een klep etc. spectaculaire drukgolven kunnen voorkomen met grote drukfluctuaties. Daarbij moeten overdrukken worden beperkt, o.a. gezien de beperkte sterkte van het leidingnetwerk. De onderdrukken die zich daarbij eveneens kunnen voordoen kennen een ondergrens gelijk aan de dampdruk van de betreffende vloeistof. Wanneer de druk tot onder dit niveau zou "willen" dalen ontstaan dampbellen in de vloeistof (**cavitatie**), met als gevolg o.m. een hoge compressibiliteit van het mengsel en dus een lage voortplantings-snelheid van drukgolven. Er kan zelfs lokaal een vrije waterspiegel ontstaan. Bovenstaand stelsel vergelijkingen zal voor die situaties moeten worden uitgebreid.

2.3 Vragen en opgaven

1. Wat is een debiet? Welke dimensie heeft het?
2. Wat houdt het begrip berging in?
3. Waar vindt de berging (vooral) plaats in geval van open leidingen?
4. En waar in geval van gevulde gesloten leidingen?
5. Ga na wat een belangrijke consequentie is van het verschil in berging van beide gevallen.
6. Leid een volumebalans af voor een riviervak van eindige lengte met een zijdelings aangesloten havenbekken.
7. Leid een volumebalans af (in differentiaalvorm) voor een riviervak met kribben.
8. Leid een volumebalans af (in differentiaalvorm) voor uitsluitend het stroomvoerend gedeelte van een riviervak met kribben.
9. Leid een volumebalans af (in differentiaalvorm) voor een open leiding waarbij met het infiltreren van water in de ondergrond rekening moet worden gehouden, met een intensiteit van b.v. q per eenheid van bodemoppervlak en tijd.
10. Stel een massabalans op voor vloeistof in een drukleiding.
11. Bereken de snelheid van drukgolven in een met zuiver water gevulde stalen pijpleiding ($E = 2.2 \times 10^{11}$ Pa) met een diameter die 50 keer groter is dan de wanddikte. (Antw.: 1211 m/s)
12. Doe hetzelfde voor een kunststofleiding ($E = 3 \times 10^9$ Pa). (Antw.: 242 m/s)
13. Wat stelt de z.g. verhangkracht voor?
14. Heeft deze (bij benadering of exact) voor alle punten in een dwarsdoorsnede dezelfde waarde? Waarom zou dat zo zijn, en onder welke voorwaarde?
15. Uit welke bijdragen kan de verhangkracht bestaan?
16. Bedenk en omschrijf situaties waarin deze bijdragen afzonderlijk gelijk zijn aan nul.
17. Ga de dimensies na van de termen in verg. 2.7.

18. Idem 2.10
19. Idem 2.25.
20. Idem 2.26
21. Ga de betekenis na van de diverse termen in de bewegingsvergelijking in de gedaante van een versnellingsvergelijking respectievelijk een impulsbalans (zie Appendix).

APPENDIX

Herkomst en betekenis van de advectione termen in de bewegingsvergelijkingen

De bewegingsvergelijking kan verschillende gedaanten hebben, o.a. die van
 (a) een **vergelijking voor de versnelling** van een deeltje (Lagrange-beschrijving), waarin o.a. de z.g. **advectione versnelling** voorkomt;
 (b) een **balansvergelijking voor impuls** in een ruimtelijk vast gebied (Euler-beschrijving), waarin o.a. **advectione (meevoering) van impuls** door de grenzen van het balansgebied voorkomt.

De twee gedaanten zijn via de massabalans tot elkaar te herleiden. Dit kan worden verduidelijkt aan de hand van het eenvoudige voorbeeld van een massa M met snelheid $\vec{v}$, onderworpen aan een resulterende uitwendige kracht $\vec{F}$. Daarvoor is de impulsbalans te schrijven als $d(M\vec{v})/dt = \vec{F}$. Als de massa behouden is geldt $dM/dt = 0$ en is de impulsbalans te herschrijven tot $Md\vec{v}/dt = \vec{F}$ ofwel $d\vec{v}/dt = \vec{F}/M$, een z.g. versnellingsvergelijking.

We passen deze gedachtengang nu toe op een moot van een open leiding (waarbij we voor het gemak van deze toelichting stellen dat $A_s = A$), met lengte Δs , en we beginnen met de Eulerse formulering.

Eulerse massabalans

Massavoorraad $\Delta M = m \Delta s$ waarin m = massa p.e.v. lengte = ρA

Massaflux $S = \rho UA$

Massabalans $\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial s} = 0$ ofwel $\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho UA}{\partial s} = 0$

(N.B. Als ρ = constant is het zinvol een volumestroom (het debiet) te definiëren volgens $Q = UA$ en gaat de massabalans over in de volumebalans

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad \text{ofwel} \quad B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0)$$

Eulerse impulsbalans

$$\text{Impulsvoorraad } \Delta I = U \Delta M = \rho U A \Delta s$$

$$\text{Impulsflux (advection) } \rho U^2 A = \rho Q U = \rho Q^2 / A$$

$$\text{Impulsbalans } \frac{\partial \rho U A}{\partial t} + \frac{\partial \rho Q^2 / A}{\partial s} = \Sigma F = -\rho g A \frac{\partial h}{\partial s} - c_f \frac{\rho |Q| Q}{A R}$$

Omdat deze vergelijking de verandering (p.e.v. tijd) beschrijft van de impulsvoorraad p.e.v. lengte (eerste term) heet de bewegingsvergelijking in deze gedaante de *impulsbalans (vergelijking)*. De tweede term daarin is de advectione bijdrage aan de verandering van de impuls p.e.v. lengte van de leiding, ofwel het verschil tussen instroom en uitstroom van impuls door twee dwarsdoorgangen op een eenheid van lengte achter elkaar (totale impulsoverdracht is $\iint (p + \rho u^2) dA$; de bijdrage van de druk staat hierboven in het rechterlid). Het rechterlid is de uitwendige kracht in s-richting p.e.v. lengte.

Van Eulerse impulsbalans naar versnellingsvergelijking

Door toepassing van de productregel kan het linkerlid van de impulsbalans worden geschreven als

$$U \frac{\partial \rho A}{\partial t} + \rho A \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial \rho A U}{\partial s} + \rho A U \frac{\partial U}{\partial s} = \Sigma F$$

De som van de eerste en de derde term is nul vanwege het behoud van massa (zie boven). Dit is equivalent aan de substitutie van $dM/dt = 0$ in de impulsbalans van een deeltje. Hieruit volgt

$$\rho A \frac{\partial U}{\partial t} + \rho A U \frac{\partial U}{\partial s} = \Sigma F$$

ofwel

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} - c_f \frac{|U| U}{R}$$

De som van de twee termen in het linkerlid is de materiële (totale) afgeleide van de snelheid U , ofwel de versnelling van de waterdeeltjes (DU/Dt). Daarom noemen we de bewegingsvergelijking in deze vorm een *versnellingsvergelijking*. De eerste term ($\partial U/\partial t$) is de lokale versnelling, nl. de variatie van de snelheid met de tijd in een vast punt. De tweede term heeft in deze versnellingsvergelijking de betekenis van advectione versnelling, ofwel de variatie van de stroomsnelheid in de ruimte (als gevolg van de verplaatsing van de waterdeeltjes (met snelheid U) in een gebied waarin de snelheid varieert ($\partial U/\partial s$)). Het rechterlid is de uitwendige kracht p.e.v. massa: de resultante van aandrijving (door de verhangkracht) en de weerstand.

3 Classificatie en analyse van lange golven

In dit hoofdstuk gaan we achtereenvolgens in op:

- * typen lange golven
- * een voorwaarde voor de "lange-golf"- benadering
- * schatting van termen
- * overzicht oplossingsmethoden
- * analyseren van uitkomsten

3.1 Typen lange golven

Lange golven komen voor in een aantal typen, elk van verschillende oorsprong en met verschillen in de dynamica. Met dit laatste wordt bedoeld dat bepaalde deelprocessen, b.v. weerstand, in het ene type onbelangrijk zijn en in een ander type dominant. In het algemeen geldt dat hoe sneller een verschijnsel verloopt, destemee de traagheid overheerst over de wrijving, en meer in balans is met de aandrijving (verhangkracht). In volgende hoofdstukken zullen we hier nog veel op terugkomen.

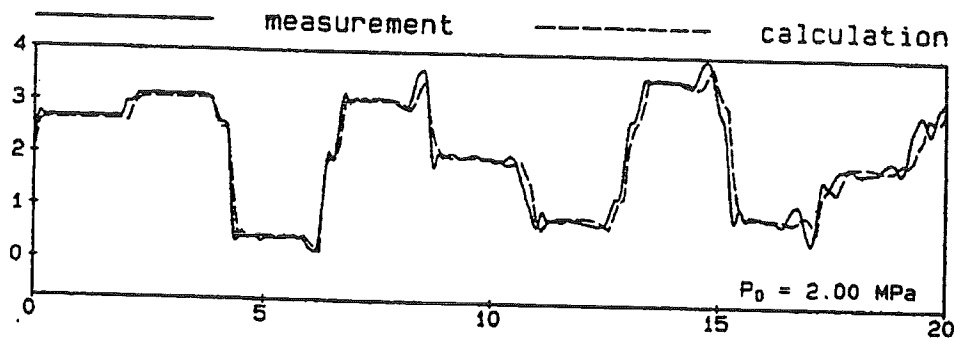
Alvorens op de dynamica in te gaan geven we een korte beschrijving van de oorsprong en het karakter van de hier te behandelen typen lange golven, nl.

- * translatiegolven in open en gesloten leidingen
- * oscillaties in havens of meren (z.g. seiches)
- * getijden in oceanen, zeeën, estuaria en (beneden)rivieren
- * hoogwatergolven op rivieren

Translatiegolven

Bij schutsluizen, irrigatiewerken, waterkrachtwerken, stuwen etc. ontstaan vaak snelle variaties in debiet als gevolg van het snel manipuleren (of kapot gaan!) van een afsluiter, een regelklep, een pomp etc. Zulke debietveranderingen (δQ) gaan gepaard met variaties in druk (δp) of waterstand (δh). Deze storingen lopen als z.g. **translatiegolven** het aangrenzend leidinggedeelte in: een verhoging van druk of waterstand bij debietvergroting en een verlaging bij debietvermindering. Dit geldt zowel voor gesloten als voor open leidingen. Figuur 3.1 geeft een voorbeeld van snelle drukvariaties in een gesloten leiding (waterslag), waarin de diverse druksprongen overeenkomen met reflecties en andere oorzaken waar wij nu niet op in gaan. Let op de tijdschaal van het fenomeen, in het bijzonder op de korte duur van de drukvariaties ($1 \text{ ms} = 1 \text{ milliseconde} = 10^{-3} \text{ s}$).

Omdat translatiegolven meestal snel in de tijd verlopen is de weerstand op korte termijn van ondergeschikte betekenis en is de dynamica overwegend bepaald door een balans tussen traagheid en aandrijving. Op langere termijn zal de weerstand uiteraard wel van belang zijn en dempt de beweging uit.



Figuur 3.1 Drukgolven in gesloten leiding (bron: Tijsseling, 1993). De druk (in MPa) is vertikaal uitgezet tegen de tijd (in ms) horizontaal

Translatiegolven in schutsluizen en scheepvaartwegen kunnen hinder veroorzaken voor varende maar vooral voor afgemeerde schepen (troskrachten!). Hun intensiteit mag dus niet te hoog zijn, wat is te bereiken door beperking van de snelheid van de variaties (geleidelijke i.p.v. abrupte opening en sluiting van kleppen en schuiven).

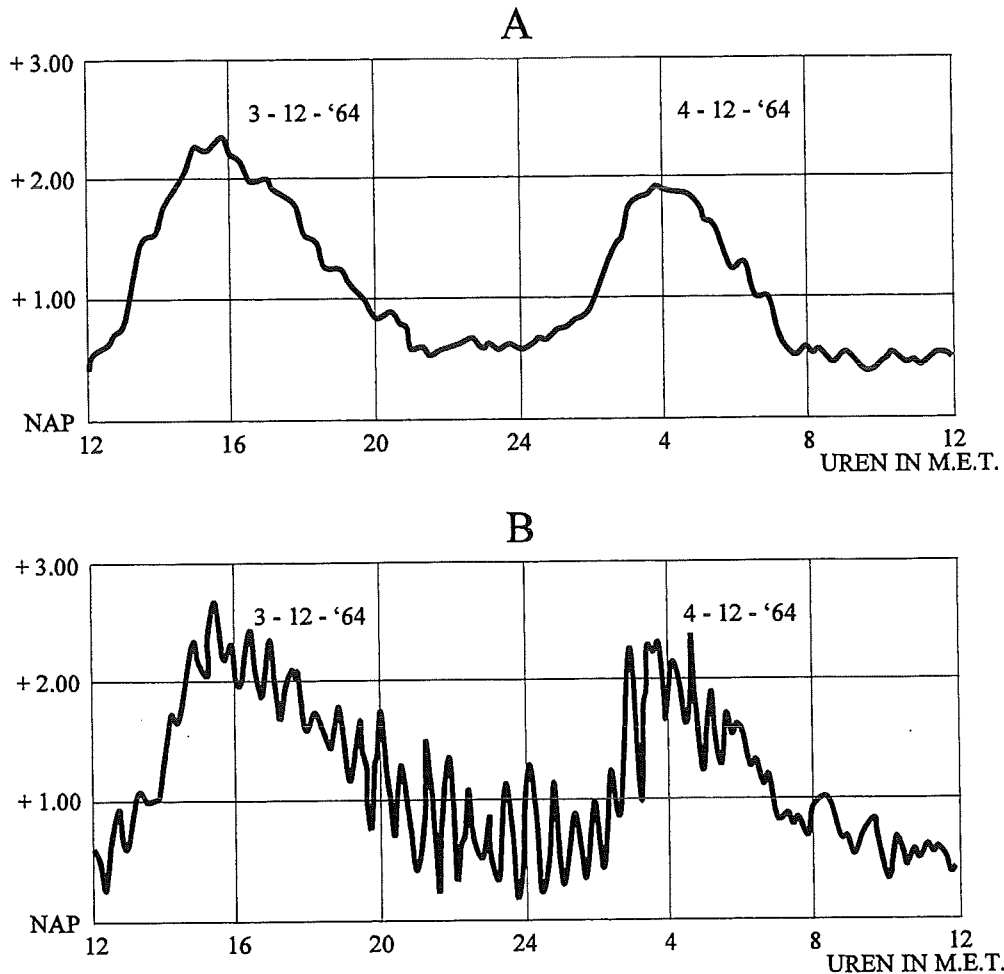
Seiches

Schommelingen van water of andere vloeistoffen in een drinkglas, badkuip of andere “gesloten bekkens” zijn voor iedereen gemakkelijk waarneembaar. Zulke schommelingen komen ook in allerlei natuurlijke systemen en op allerlei schalen voor. Zij worden in het meer van Genève al sinds lange tijd af en toe waargenomen, waar zij “seiches” werden genoemd, een naam die later een veel ruimere betekenis heeft gekregen en nu vooral betrekking heeft op staande golven of schommelingen in gesloten bekkens zoals meren, of bekkens met een open verbinding naar zee, in het bijzonder havenbekkens.

Kenmerkend voor seiches is dat het **eigentrillingen** zijn, met perioden die door de afmetingen van het systeem worden bepaald. Een zwakke excitatie kan dus al voldoende zijn om een significante respons te genereren, mits die excitatie energie bevat in de eigenfrequentie van de haven en van voldoende lange duur is om het systeem op te kunnen slingeren. Het systeem raakt dan in **resonantie**. Op deze manier kan het water in havenbekkens merkbaar in trilling geraten in respons op schommelingen in atmosferische druk die op zee lage, nauwelijks waarneembare golven veroorzaken. Figuur 3.2 geeft hiervan een voorbeeld voor de buitenhaven van IJmuiden, waar bij de Noordersluis seiches zijn geregistreerd met een periode van ca. 35 minuten en een top-dalhoogte van ruim 1.2 m, terwijl een gelijktijdige registratie in open zee slechts zwakke rimpelingen laat zien, met een hoogte van ca. 0.20 m. (Dit systeem is te vergelijken met een open orgelpijp.)

Zoals we zullen zien is de wrijving in geval van seiches in havens meestal van ondergeschikte betekenis, deels omdat zij vrij snel verlopen en deels vanwege de grote diepte (zie de weerstandsterm in de bewegingsvergelijking, waar $A_s R$ in de noemer staat). De grootste bijdrage aan de demping ligt in de uitstraling van golfenergie door de havenmond

terug naar zee.



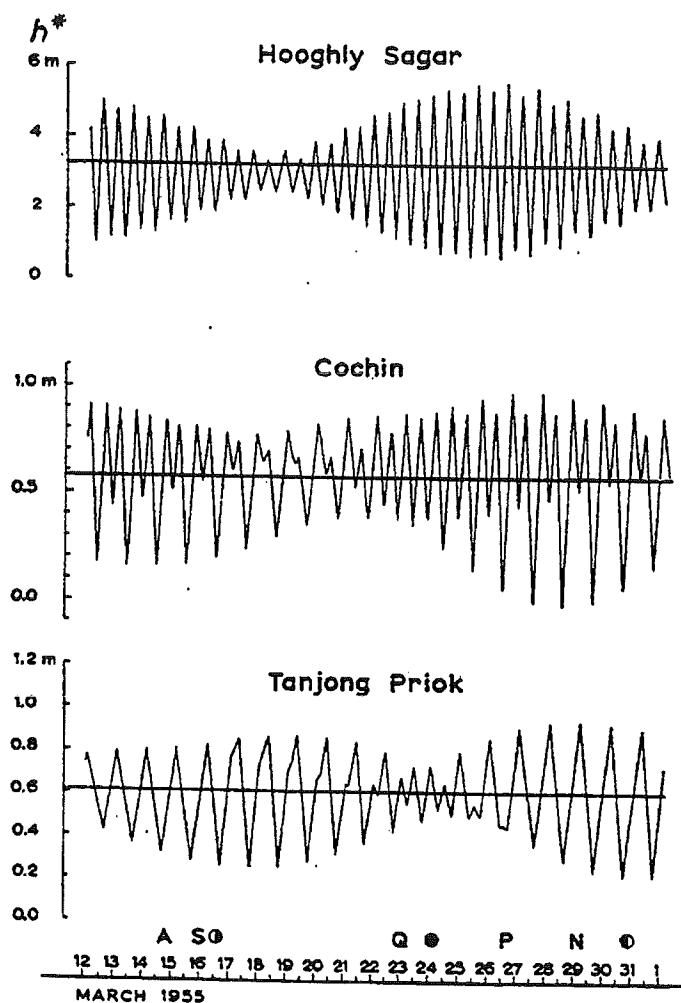
Figuur 3.2 Registraties van waterpeil (in m boven NAP) voor de kust bij Katwijk (A) en in de buitenhaven te IJmuiden bij de Noordersluis (B)

Seiches hebben in de meeste gevallen ongewenste effecten. Zij kunnen storend zijn voor de scheepvaart. In het geval van de stormvloedkering in de Nieuwe Waterweg dragen seiches significant bij aan de ontwerpbelasting op de deuren.

In tegenstelling tot door de mens veroorzaakte translatiegolven is aan de oorzaak van seiches niets te veranderen. Enige verbetering kan in principe worden gezocht in optimale vormgeving van de havenmond, maar de nautische eisen leggen daar beperkingen op. Bovendien kan men door aanpassing van de geometrie van de havenbekkens weliswaar de eigenfrequentie veranderen, maar dat hoeft niet op voorhand een verbetering te zijn, omdat van de oorzakelijke factoren zeer weinig bekend is. Wel kan men zo proberen de opslingerfactoren te minimaliseren.

Getijden

Getijden worden veroorzaakt door variaties in tijd en plaats van de **zwaartekracht** uitgeoefend door zon en maan, in combinatie met de aardrotatie. Op wereldschaal gezien zijn de oceaantijden schommelingen in de oceaانبekkens. Op kleinere schaal zijn zij dat ook in de randzeeën zoals de Noordzee. Vanuit oceaen en randzee lopen getijgolven estuaria en rivieren in waar zij, afhankelijk van vorm en afmetingen, kunnen opslingeren (tot ca. 15 m top-dalhoogte in de Bay of Fundy, Nova Scotia, Canada) dan wel uitdempen. In de meeste plaatsen op aarde is het **halfdaags** (Engels: semi-diurnal; in Nederland ook vaak dubbeldaags genoemd) maansgetij M_2 dominant, waarvan de periode de helft is van die van de maan-dag, nl. 12 uur en 25 minuten. In een aantal gebieden, o.a. in Z.O.-Azië, is het **enkeldaags** getij O_1 of K_1 dominant, met een periode van ca. 24 uur (zie Figuur 3.3).



Figuur 3.3 Van beneden naar boven: enkeldaags, gemengd en halfdaags getij in drie stations in Z.O. Azië (bron: Dronkers, 1964)

Voor getijden in oceanen is de wrijving van geen betekenis, wegens de grote diepten, maar in de randzeeën en zeker in nog ondiepere wateren zoals de Waddenzee is wrijving minstens even belangrijk als de traagheid, in welk geval beide in rekening moeten worden gebracht.

Getijden zijn zeer belangrijk voor veel waterbouwkundige ingenieurs; een goed begrip van hun oorsprong en dynamica is daarom noodzakelijk. Vooral wanneer het gaat om ingrepen in getijdegebieden, zoals afsluitingen van zeegaten, is het van belang de effecten daarvan te kunnen begrijpen en te berekenen.

Hoogwatergolven

Verhoogde regenval en/of sneeuwsmelt in het stroomgebied van een rivier geeft met enige vertraging een verhoogde afvoer en een daarmee gepaard gaande verhoogde waterstand in die rivier, een z.g. **hoogwatergolf**. Figuur 3.4 geeft een voorbeeld van enkele peilregistraties gemaakt tijdens het hoogwater in de Rijn, Lek en Waal van januari/februari 1995. In de registraties van de meest zeewaarts gelegen stations is de getijdebeweging te zien, en in die van Amerongen ook een abrupte waterstandsverlaging op 24 januari als gevolg van het trekken van de stuw aldaar, voorafgaand aan het hoogwater, waardoor aan bovenstroomse zijde een negatieve translatiegolf ontstaat.

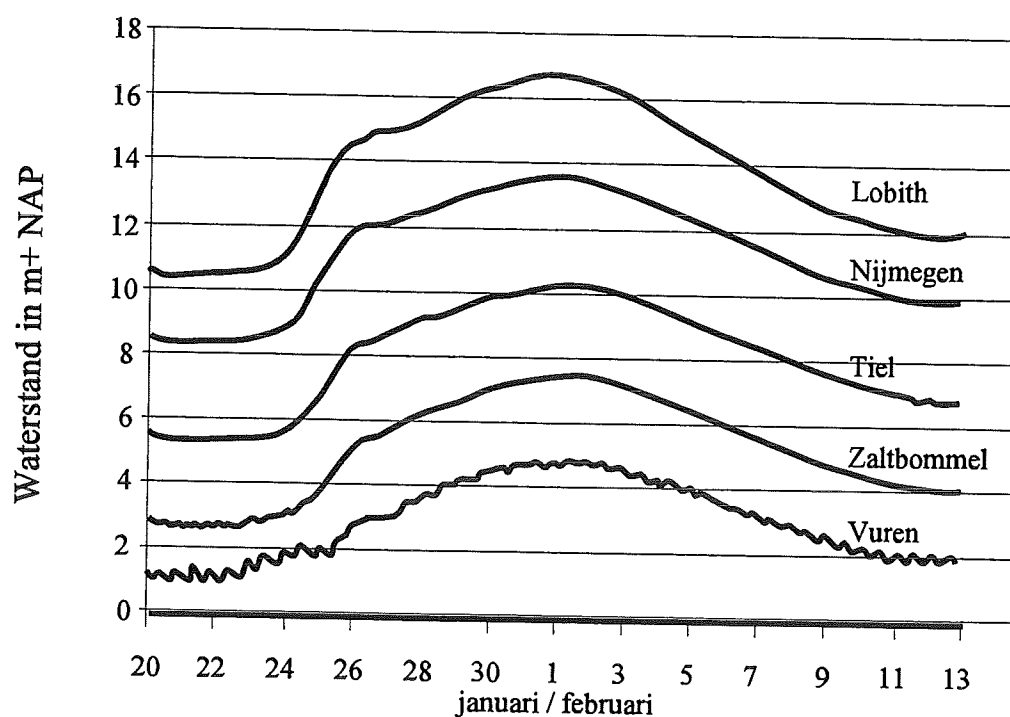
Hoogwatergolven in benedenrivieren strekken zich vaak over diverse etmalen uit en verlopen dan vele malen langzamer dan translatiegolven en ook nog veel langzamer dan getijden. Vaak zijn de variaties zo langzaam dat de traagheid onbelangrijk is, en de aandrijving vrijwel in balans is met de weerstand.

3.2 Een voorwaarde voor de "lange-golf" - benadering

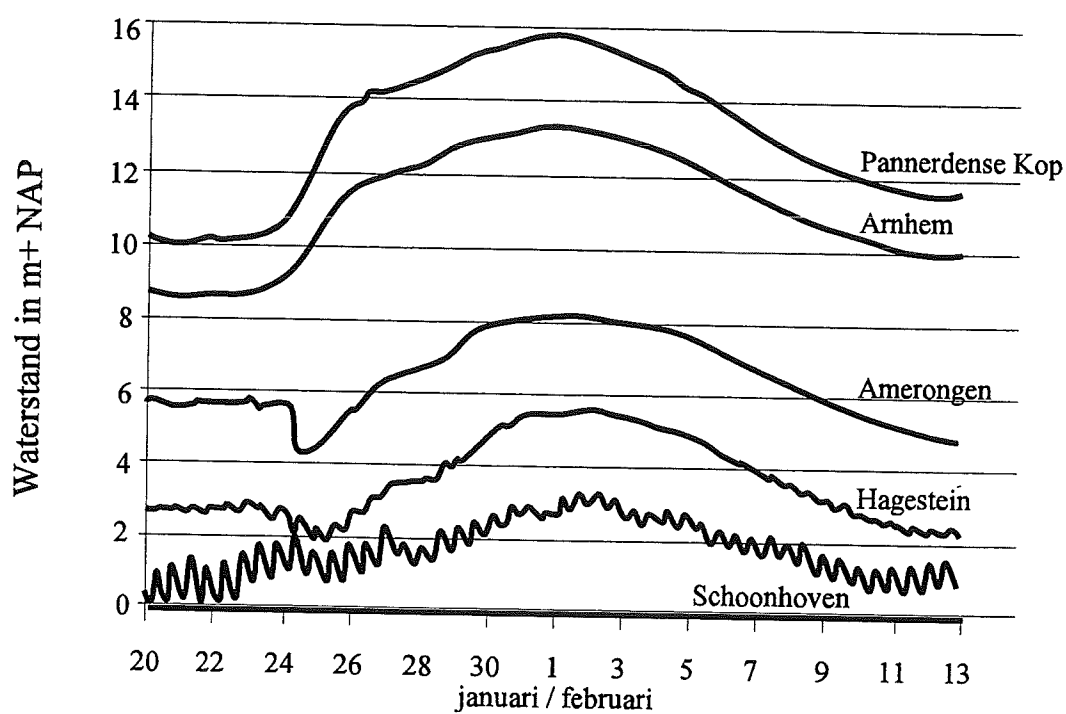
"Lange golven" hebben een lengteschaal die vele malen groter is dan de diepte, en in waterlopen ook vele malen groter dan de breedte. Als gevolg hiervan kan in elke dwarsdoorsnede de **druk als hydrostatisch** worden beschouwd. Anders gezegd: de verticale en dwarsgerichte versnellingen hebben een verwaarloosbare invloed op de drukverdeling. De wiskundige modellering van lange golven is op deze basisveronderstelling gebaseerd. We zullen hier een globaal criterium afleiden voor de geldigheid van deze benadering uitgedrukt in (o.m.) de frequentie van de beweging.

Als de druk hydrostatisch zou zijn dan zou het piëzometrisch niveau over de gehele diepte (d) constant zijn, en in de vrije waterspiegel liggen (atmosferische druk gelijk aan nul gesteld). Neem nu een vertikaal waarin de momentane waterstand lokaal is verhoogd met een waarde ζ t.o.v. de ongestoorde toestand. Bij hydrostatische druk zou het piëzometrisch niveau over de gehele diepte met dezelfde waarde ζ zijn gestegen t.o.v. de ongestoorde toestand (zie Figuur 3.5). Als gevolg van verticale versnellingen ($a_z = Dw/Dt$) hoeft dit echter niet het geval te zijn, zoals volgt uit de vergelijking van Euler in verticale richting:

Waterstandsverloop Bovenrijn / Waal



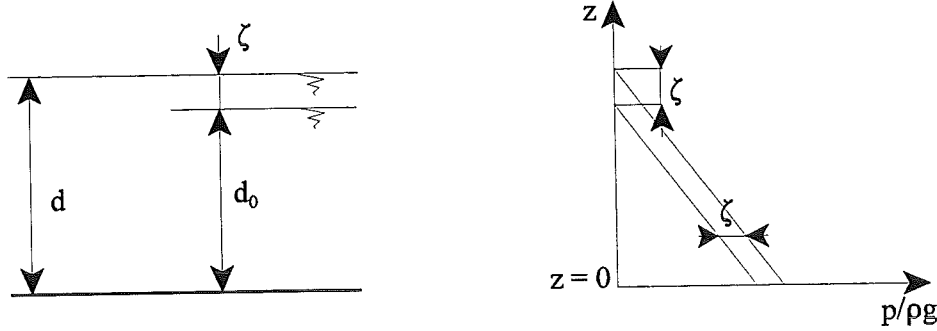
Waterstandsverloop Nederrijn / Lek



Figuur 3.4 Peilregistraties tijdens hoogwater 1995

$$a_z = -g \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3.1)$$

Voor de veronderstelling van hydrostatische druk over de gehele vertikaal moet niet slechts $\partial h / \partial z$ klein zijn, ofwel de verticale versnelling klein t.o.v. g , maar geldt de stringentere



Figuur 3.5 Hydrostatische drukverdelingen

voorwaarde dat over de gehele diepte de afwijking van een constant piëzometrisch niveau relatief klein moet zijn. M.a.w., het verschil (zeg $h_o - h_b$) tussen de h -waarde aan het oppervlak en die aan de bodem moet verwaarloosbaar zijn t.o.v. de vertikaal uniforme stijging in geval van hydrostatische druk: $|h_o - h_b| \ll |\zeta|$. De waarde van dit verschil volgt uit (3.1) als

$$h_o - h_b = \int_0^d \frac{\partial h}{\partial z} dz = -\frac{1}{g} \int_0^d a_z dz$$

Om dit verder uit te werken gaan we uit van het geval van een sinusvormige beweging met frequentie ω en amplitude van de oppervlakte-uitwijking $\hat{\zeta}$, zoals $\zeta = \hat{\zeta} \cos \omega t$. Uitgedrukt in amplituden (weergegeven met een dakje) gaat bovenstaande voorwaarde over in

$$\int_0^d \hat{a}_z dz \ll g \hat{\zeta} \quad (3.2)$$

Omdat de verticale bewegingen naar beneden uitdempen is het linkerlid in ieder geval kleiner dan $\hat{a}_{z,0} d$, waarin $\hat{a}_{z,0}$ de amplitude is van de verticale versnelling aan het vrije oppervlak (gelijk aan $\omega^2 \hat{\zeta}$). Een voldoende voorwaarde voor de geldigheid van (3.2) is dus

$$\hat{a}_{z,0} d \ll g \hat{\zeta} \quad (3.3)$$

Met $\hat{a}_{z,0} = \omega^2 \hat{\zeta}$ geeft dit de volgende **voorwaarde voor hydrostatische druk**:

$$\frac{\omega^2 d}{g} \ll 1 \quad (3.4)$$

N.B. Zoals we verder nog uitgebreid zullen zien hebben lage lange golven in water met een vrij oppervlak bij benadering een loopsnelheid $c = \sqrt{gd}$ (zie ook het tweedejaarsvak Vloeistofmechanica, CTme2100). Substitueren we dit met $c = L/T = L\omega/2\pi$ in (3.4) dan gaat de voorwaarde voor de lange-golfbenadering over in

$$L \gg 2\pi d$$

ofwel: de golflengte moet vele malen groter zijn dan de diepte. Vandaar de naam “**lange golven**”.

We gaan nu na wat de voorwaarde (3.4) betekent voor de belangrijkste typen beweging die we hier zullen behandelen.

Voor **getijden** nemen we als voorbeeld het halfdaags getijd (M_2), met een periode van 12h en 25 minuten ($\omega = 1.405 \times 10^{-4}$ rad/s, onthouden!), in de diepste oceaantrog die op aarde voorkomt ($d = 10^4$ m). Voor deze combinatie geldt $\omega^2 d/g = 2 \times 10^{-5}$, zodat zelfs bij deze extreme diepte de druk in een getijgolf nauwelijks afwijkt van de hydrostatische. In ondieper water is dat uiteraard in nog mindere mate het geval. In getijden is de druk dus bij zeer goede benadering hydrostatisch, en kunnen we in berekeningen het lange-golfmodel gebruiken.

Hoogwatergolven op rivieren variëren meestal aanzienlijk langzamer dan getijden, en de diepten zijn relatief klein, zodat de druk daarvoor zeker als hydrostatisch kan worden aangenomen.

Seiches hebben veel kortere perioden dan getijden, maar zijn ook slechts van belang in water van veel geringere diepten dan die in de oceanen. Voor een seiche met een zeer korte periode van 1 minuut ($\omega \approx 0.1$ rad/s) in water van 20 m diepte is $\omega^2 d/g$ toch nog slechts ca. 0.02, en is de lange-golfbenadering dus uitstekend van toepassing. Voor seiches van (veel) langere periode, zoals normaal het geval is, neemt de waarde van $\omega^2 d/g$ kwadratisch af met toenemende periode, en deze is voor al zulke gevallen dus verwaarloosbaar.

Translatiegolven kunnen zo snel verlopen dat ze zich als een schokgolf voordoen, zoals in een watersprong. Daar is lokaal de lange-golftheorie niet geldig, maar wel aan weerszijden ervan; dat is voldoende voor de berekeningen zolang we af zien van de details in de overgang.

Voor golven met perioden van enkele seconden zoals scheepsgolven of windgolven wordt aan de voorwaarde (3.4) niet voldaan in de meeste van belang zijnde diepten. Neem een windgolf met een periode van ca. 6 s ($\omega \approx 1$ rad/s) in een diepte van 10 m. Daarvoor geldt $\omega^2 d/g \approx 1$ zodat de druk in dit geval zelfs niet bij benadering hydrostatisch is. Golven waarvoor aan (3.4) niet is voldaan worden “korte golven” genoemd. Zij blijven hier buiten beschouwing.

3.3 Schatting van termen

We gaan nu wat dieper in op het relatieve belang van verschillende termen in de lange-golfvergelijkingen.

Als uitgangspunt nemen we de bewegingsvergelijking in de vorm van een versnellingsvergelijking (2.9):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} + g \frac{\partial h}{\partial s} + c_f \frac{U|U|}{d} = 0 \quad (3.5)$$

Bij benadering hebben we de hydraulische straal ($R = A_s/P$) vervangen door de gemiddelde diepte ($d = A_s/B_s$). Dit is geoorloofd voor relatief platte dwarsprofielen.

We gaan globaal de relatieve grootte-orde van de termen na. Dit hoeft niet precies te gebeuren; het gaat erom inzicht te krijgen in de parameters die bepalen welke bijdragen in een gegeven situatie belangrijk zijn en welke kunnen worden verwaarloosd, en waarom.

We beginnen met de **advectieve versnelling** ($U\partial U/\partial s$) in verhouding tot de lokale versnelling ($\partial U/\partial t$), eerst voor een prismatische leiding. Laat L een kenmerkende lengteschaal zijn van de beweging (bijv. een golflengte, als die bestaat). Dan is $U\partial U/\partial s$ van de grootte-orde U^2/L . Evenzo geldt dat $\partial U/\partial t$ van de grootte-orde U/T is als T een kenmerkende tijdschaal is van de beweging (bijv. een golfperiode, als die bestaat). Dan is de verhouding van de advectieve tot de lokale versnelling van de grootte-orde $(U^2/L)/(U/T) = UT/L$.

Voor golven zijn L en T aan elkaar gekoppeld via de voortplantingssnelheid c en geldt dat $UT/L \approx U/c$, wat voor lange golven met $c = \sqrt{gd}$ gelijk is aan $U/\sqrt{gd}$, het getal van Froude.

In het algemeen geldt dat naarmate bij een gegeven diepte (dus c) de hoogte van de golf afneemt, ook de stroomsnelheid U afneemt, het getal van Froude kleiner en kleiner wordt en de advectieve versnelling dus meer en meer verwaarloosbaar wordt t.o.v. de lokale versnelling. **Voor relatief lage golven ($|\zeta| \ll d$) kunnen we de advectieve versnelling daarom buiten beschouwing laten.** De versnelling wordt dan in grootte-orde evenredig met de stroomsnelheid (de advectieve versnelling is evenredig met het kwadraat ervan); we zeggen dat de versnellingsterm is gelineariseerd. Wiskundig betekent dit een belangrijke vereenvoudiging.

In havenoscillaties en getijden buiten de kustzone zijn de stroomsnelheden zelden meer dan ca. 0.5 m/s. Als daarbij de diepte meer is dan 10 m dan is $Fr < 0.05$ en is de advectieve versnelling verwaarloosbaar t.o.v. de lokale. In zeegaten, estuaria, wadgeulen etc. zijn de snelheden veelal in de orde van 1 m/s en kan de advectieve term van meer betekenis zijn. Het laatste geldt ook voor ondiepe getijdegebieden, waar de snelheden weliswaar geringer zijn maar de diepten eveneens. In dergelijke stromen is de advectieve term in het algemeen weliswaar niet dominant maar voor nauwkeurige berekeningen evenmin verwaarloosbaar.

Voorgaande schattingen gingen uit van waterbeweging in prismatische leidingen, waarbij de lengteschaal niet van buiten wordt opgelegd maar via de voortplantingssnelheid afhangt van de tijdschaal. Bij niet-prismatische leidingen kunnen profielvariaties lokaal een lengteschaal opleggen. Bij abrupte profielvariaties is de lengteschaal klein waardoor de balans omslaat en de advectieve versnelling lokaal dominant wordt. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de overgang tussen een reservoir en een leiding (pijpleiding of open waterloop, zie Hoofdstuk 7), en in nog sterkere mate bij kunstwerken (zie Hoofdstuk 10). In die omgeving is de lokale versnelling verwaarloosbaar, wat inhoudt dat de lokale stroming op elk moment vrijwel geheel is aangepast aan de momentane randvoorwaarden, zoals de waterstanden aan weerszijden van een kunstwerk, ook al variëren die in de tijd.

We nemen vervolgens de **weerstand** onder de loep, in verhouding tot de lokale traagheid. We gaan voorlopig uit van een oscillerende beweging (b.v. getij of seiche) waarin de snelheid U oscilleert met een frequentie ω en een amplitude $\hat{U}$. De lokale versnelling is dan van de grootte-orde $\omega \hat{U}$ terwijl de weerstandsterm in (3.5) van de orde $c_f \hat{U}^2/d$ is. De gezochte verhouding, zeg σ , is dan gegeven door

$$\sigma = c_f \frac{\hat{U}}{\omega d} \quad (3.6)$$

Waarden hiervan voor enkele realistische gevallen staan in bijgaande Tabel, voor een aangenomen maar wel representatieve waarde $c_f = 0.004$.

Type	T	ω	d	$\hat{U}$	σ
Oceaangetij	745 min	$1,4 \cdot 10^{-4}$ rad/s	$4 \cdot 10^3$ m	0,3 m/s	$2 \cdot 10^{-3}$
Seiche	20 min	$5 \cdot 10^{-3}$ rad/s	20 m	0,5 m/s	$2 \cdot 10^{-2}$
Getij in randzee	745 min	$1,4 \cdot 10^{-4}$ rad/s	50 m	0,5 m/s	$3 \cdot 10^{-1}$
Getij in geul	745 min	$1,4 \cdot 10^{-4}$ rad/s	15 m	1,0 m/s	$2 \cdot 10^0$
Getij in wad	745 min	$1,4 \cdot 10^{-4}$ rad/s	1 m	0,7 m/s	$2 \cdot 10^1$
Hoogwatergolf	4500 min	$2,3 \cdot 10^{-5}$ rad/s	5 m	1,5 m/s	$5 \cdot 10^1$

Tabel 3.1

Behalve seiches en getijden zijn ook hoogwatergolven in de Tabel opgenomen. Ook al zijn die niet periodiek, ze hebben wel een kenmerkende tijdschaal, die in Nederlandse benedenrivieren in de orde van ettelijke etmalen ligt. In Tabel 3.1 is als tijdschaal voor hoogwatergolven een duur gekozen van ca. drie etmalen, ofwel ca. 6x de periode van het halfdagse getij.

Uit deze Tabel is duidelijk dat weerstand momentaan geen rol van betekenis speelt in seiches, dominant is voor hoogwatergolven, en bij getijden van wisselend belang is, afhankelijk van de diepte. De civiel ingenieur heeft met getijden vooral te maken in kustgebieden. Weerstand en traagheid (lokale versnelling) moeten in het algemeen beide in rekening worden gebracht in getijberekeningen voor zulke gebieden.

Translatiegolven hebben vaak een tijdschaal in de orde van minuten of minder, zodat daarvoor de momentane weerstand onbelangrijk is. Ook al is de weerstand momentaan van ondergeschikte betekenis, cumulatief kan de invloed ervan wel van belang zijn omdat de werking ervan altijd gelijkgericht is, nl. dempend. Over lange duur moet ook een lokaal verwaarloosbare weerstand daarom toch in rekening worden gebracht.

3.4 Oplossingsmethoden

Volledige vergelijkingen

De volledige ééndimensionale lange-golfvergelijkingen (vergelijkingen van De Saint-Venant) vormen de basis voor een groot aantal in de praktijk gebruikte numerieke programma's voor berekening van niet-stationaire stromen in waterlopen (b.v. "DUFLOW", ontwikkeld door IHE, RWS-RIKZ en TUD, en "SOBEK", ontwikkeld door RWS-RIZA en WL). Met "volledig" wordt bedoeld dat er geen vereenvoudigingen zijn aangebracht door eventuele kleine termen op voorhand te verwaarlozen. In principe zijn dergelijke programma's daarom geschikt voor alle soorten lange-golfverschijnselen, mits die als ééndimensionaal zijn te modelleren. Numerieke integratiemethoden die in dergelijke pakketten worden gehanteerd, en de problemen die zich daarbij kunnen voordoen, komen uitgebreid aan bod in een desbetreffend vervolgvak (CTwa4340).

Vereenvoudigde vergelijkingen

Voor verkrijging van inzicht en voor het maken van eenvoudige berekeningen en schattingen zijn diverse benaderingen ontwikkeld, elk gericht op een verschillende klasse van problemen waarvan op voorhand bekend is welke termen klein zijn. Door die te verwaarlozen ontstaat een vereenvoudigd stelsel vergelijkingen waarvoor in veel gevallen oplossingen in gesloten vorm zijn af te leiden, al dan niet met aanvullende benaderingen. In dit vak krijgt juist deze aanpak de aandacht omdat het gaat om het ontwikkelen van inzicht. In de volgende hoofdstukken komen aan de orde:

- elementaire golfvergelijking: advectione versnellingen verwaarloosbaar, geen weerstand; van toepassing op lage, snel verlopende verschijnselen zoals translatiegolven en seiches
- methode van de karakteristieken: incl. advectione versnelling; vooral geschikt voor hoge translatiegolven; eventueel met weerstand
- harmonische methode: geen advectione versnelling, gelineariseerde weerstand; voor periodieke staande en lopende golven zoals seiches en getijden
- diverse benaderingen voor hoogwatergolven; traagheid verwaarloosd

3.5 Analyseren van uitkomsten

Uitkomsten van berekeningen moeten worden geanalyseerd om ze zinvol te kunnen gebruiken. Datzelfde geldt voor uitkomsten van metingen. Beide soorten van analyse van uitkomsten gaan voor een deel op dezelfde manier. Daarom worden in dit hoofdstuk metingen en berekeningen gezamenlijk beschouwd. Het gaat daarbij om een koppeling tussen de basisvergelijkingen en de beschikbare uitkomsten, ongeacht of deze door meten dan wel door berekeningen (b.v. met een numeriek computerprogramma) zijn verkregen. Het doel daarbij kan per geval verschillend zijn, maar vaak gaat het om:

- inzicht:** de grootte en variatie van de termen (absoluut en relatief) in de tijd nagaan;
- ijking:** parameters schatten uit meetresultaten (bv. weerstandsfactor);
- controle:** door berekening nagaan of de termen gezamenlijk aan de balans voldoen.

Voor zo'n analyse werken we met een leidinggedeelte van een behoorlijke lengte, een z.g. **vak**, met een lengte vele malen groter dan de dwarsafmetingen. Om dat te kunnen doen gebruiken we de balansvergelijkingen niet in differentiaalvorm maar in differentievorm voor een eindige lengte van $s = s_1$ tot $s = s_2 = s_1 + \Delta s$. We zullen daarbij veronderstellen dat het dwarsprofiel en de weerstandsfactor niet in de stroomrichting (met s) variëren.

Voor de continuïteitsvergelijking is een differentievergelijking (in s) beschikbaar (zie Hoofdstuk 2):

$$A_b \frac{d\langle h \rangle}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad (3.7)$$

Hierin stelt $\langle \rangle$ middeling voor over de beschouwde vaklengte.

Voor de impulsbalans is in Hoofdstuk 2 de differentiaalvorm gegeven (2.10):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q^2}{A_s} \right) + gA_s \frac{\partial h}{\partial s} + c_f \frac{|Q|Q}{A_s R} = 0 \quad (3.8)$$

Integratie hiervan over een eindige lengte Δs , uitgaand van een binnen het vak constante waarde van A_s , geeft

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} \Delta s + \frac{1}{A_s} (Q_2^2 - Q_1^2) + gA_s (h_2 - h_1) + c_f \frac{\langle |Q|Q \rangle}{A_s R} \Delta s = 0 \quad (3.9)$$

Dit delen we door gA_s om alle termen uit te drukken als bijdragen aan het verval:

$$\frac{1}{gA_s} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \Delta s + \frac{1}{gA_s^2} (Q_2^2 - Q_1^2) + (h_2 - h_1) + c_f \frac{\langle |Q|Q \rangle}{gA_s^2 R} \Delta s = 0 \quad (3.10)$$

De vergelijkingen (3.7) en (3.10) kunnen worden gebruikt in analyses van meet- of rekenuitkomsten, zoals ook gebeurt in Oefening I. De bedoeling daarvan is dat voor een gegeven stel uitkomsten voor Q en h als functies van t , in een aantal dwarsdoorsneden (vakgrenzen), het verloop van de waarden van de individuele termen in de vergelijkingen wordt nagegaan in verhouding tot elkaar, en tot het verval, en in relatie tot de totale balans. Dit geeft inzicht in en vertrouwdheid met de vergelijkingen.

3.6 Vragen en opgaven

1. Maak een samenvatting van dit Hoofdstuk.
2. Wat verstaan we onder lange golven?
3. Leid een voorwaarde af voor de geldigheid van de z.g. lange-golf benadering.
4. Noem een aantal golfverschijnselen die tot de categorie van de lange golven worden gerekend.
5. Ga voor elk daarvan na in hoeverre de z.g. lange-golfbenadering daarop van toepassing is.
6. Bedenk voor elk daarvan enkele kenmerkende waarden van de meest relevante grootheden (diepte, stroomsnelheid, tijdschaal etc.) en ga schattenderwijs na hoe de verhoudingen van de termen in de bewegingsvergelijking liggen (voor horizontale bewegingen).
7. Wat verstaan we onder z.g. translatiegolven?
8. Komen deze zowel in open als in gesloten leidingen voor?
9. Zijn zij in het algemeen van natuurlijke oorsprong of het gevolg van menselijk handelen?
10. Beredeneer waarom de weerstand bij translatiegolven van ondergeschikte betekenis is.
11. Wat zijn z.g. seiches?
12. Wat is in het algemeen de oorsprong van seiches?
13. Horen seiches primair tot de categorie lopende golven of tot die van de staande golven of tot geen van beide?
14. Seiches in een gegeven bekken kunnen niet elke willekeurige frequentie hebben. Waarom niet?

15. Welk mechanisme bepaalt in overwegende mate de demping van seiches?
16. Noem een aantal mogelijke hinderlijke effecten van seiches.
17. Is in getijden de weerstand in alle gevallen van betekenis? Voor welke in ieder geval niet? En voor welke juist wel?
18. Het hoofdgetij in de Noordzee is het z.g. M_2 -getij, met een periode van ca. 12 uur en 25 minuten. Heeft het (hoofd)getij op alle plaatsen in de wereld dezelfde periode? Waarom niet?
19. Onder welke voorwaarde is de z.g. advectionele versnelling verwaarloosbaar?
20. Werk oefening I (nog eens) helemaal uit.

4 Elementaire golfvergelijking

4.1 Inleiding

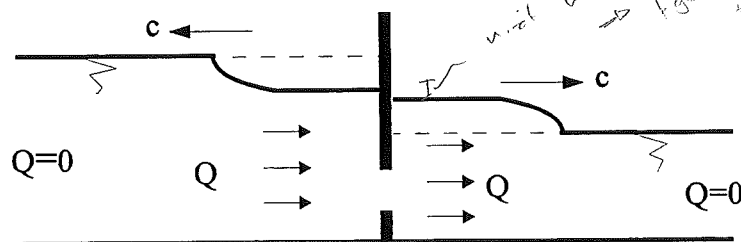
In dit hoofdstuk gaan we uit van een sterk gereduceerd stelsel vergelijkingen, namelijk voor de beschrijving van **lage, lange golven zonder weerstand**. We beginnen met een open waterloop, horizontaal, met een in axiale richting constant dwarsprofiel. In theorie hoeft de waterloop niet rechtlijnig te zijn, maar korthedshalve spreken we toch van een prismatische leiding. De s-coördinaat wordt vervangen door een eveneens axiale x-coördinaat.

Na de behandeling van golven in open water gaan we kort in op drukgolven in gesloten leidingen.

In beide gevallen brengen we berging en (lokale) traagheid in rekening en verwaarlozen we de advectieve termen en de weerstand. Een voorwaarde hiervoor is niet alleen dat de golven laag zijn maar ook dat de ongestoorde stroomsnelheid laag is.

4.2 Enkelvoudige golf in open water

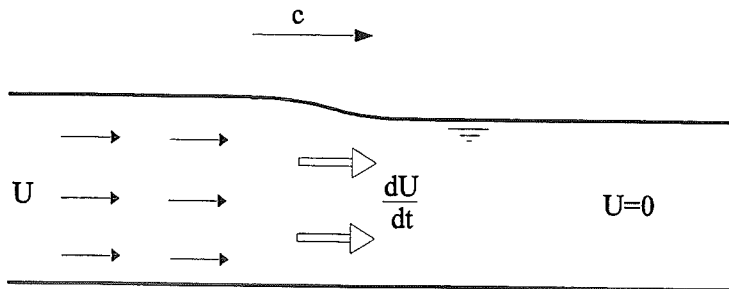
Voorafgaand aan de introductie van een algemene golfvergelijking behandelen we voor het inzicht eerst een relatief eenvoudig basisgeval, nl. een overgang tussen twee gebieden met elk een uniforme maar onderling verschillende stroming, die zich zonder vormverandering en met een vooralsnog onbekende maar constante snelheid c voortplant. (Dat dit mogelijk is wordt hierna bewezen.) We beginnen met een kwalitatieve beschrijving en nemen daarvoor het geval van storingen die zich voortplanten als gevolg van het openen van een schuif in een kering tussen twee kanaalpanden met verschillend peil, waarin aanvankelijk het water in rust is (Figuur 4.1). Als gevolg van het verval ontstaat er een debiet door de opening. Water wordt onttrokken aan het bovenstroomse deel, wat zich daar uit in een spiegeldaling over een steeds langer wordend traject, en toegevoegd aan het benedenstroomse deel waar een waterstandsverhoging het stille gebied inloopt.



(a)

Figuur 4.1 Storingen in een kanaal a.g.v. openen van een schuif

We zien nu af van het bestaan van de kering met de opening en concentreren ons op de golfvoortplanting als zodanig, te beginnen met de benedenstroomse kant waar sprake is van toevoeging van debiet en het ontstaan van een waterstandsverhoging (Figuur 4.2).



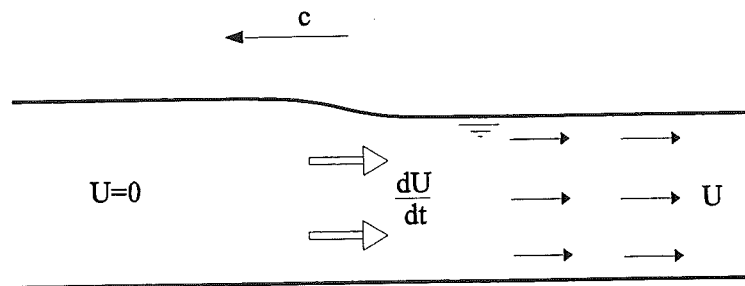
Figuur 4.2 Versnellingen ($\Rightarrow$), stroomsnelheden ($\longrightarrow$) en loopsnelheid in een positieve golf

In het golffront is dank zij de helling van de waterspiegel een verhangkracht werkzaam (bij hydrostatische druk is deze constant over de gehele diepte) die het water eronder versnelt in de richting van hoge naar lage waterspiegel, in de figuur naar rechts, aangegeven met een dubbele pijl. Het water is aanvankelijk in rust. Tijdens het passeren van de golf zal het naar rechts worden versneld en een steeds hogere snelheid naar rechts krijgen. Is het front voorbij en is de waterspiegel weer horizontaal dan is de verhangkracht nul en blijft de inmiddels opgebouwde impuls behouden, ofwel de snelheid constant (we zien af van weerstand).

Als gevolg van het snelheidsverschil over het front neemt de horizontale afstand tussen vloeistofdeeltjes aan weerszijden van het front af. M.a.w., tijdens de passage van het front wordt het water in lengterichting samengedrukt en als gevolg van volumebehoud (onsamendrukbaarheid) wijkt het daarbij uit naar boven. Bekijken we de zaak Eulers, met twee ruimtelijk vaste dwarsprofielen aan weerszijden van het front, dan zien we links instroom maar rechts geen uitstroom, dus netto instroom in de tussenruimte, die geborgen wordt in de verhoging van de waterspiegel en het naar rechts lopen van de golf.

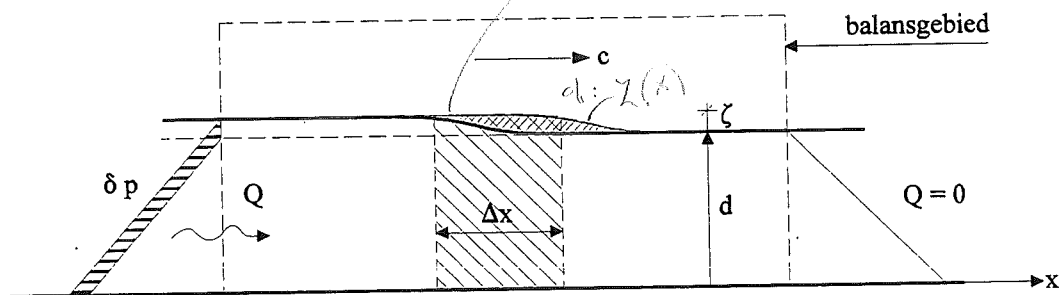
De tot nu besproken golf ontstaat door een debietvergroting (van nul tot iets), en geeft een waterstandsverhoging bij passage door een vast punt. (De golf loopt in de richting van de hogere naar de lagere waterspiegel.) We noemen dat een positieve golf. In de gasdynamica, waarbij berging van massa kan plaats vinden via compressie, spreekt men in analoge gevallen van een compressiegolf.

Aan de bovenstroomse zijde van de schuif van Figuur 4.1 wordt water onttrokken, wat resulteert in een negatieve golf (in de gasdynamica: expansiegolf). Merk op dat in deze negatieve golf de versnellingen tegengesteld gericht zijn aan de looprichting van de golf zelf (zie Figuur 4.3). Bij aanvankelijke snelheid nul ontstaat dus een tegen de looprichting van de golf gerichte stroomsnelheid.



Figuur 4.3 Versnellingen ($\Rightarrow$), stroomsnelheden ($\longrightarrow$) en loopsnelheid in een negatieve golf

Na deze kwalitatieve beschrijving gaan we kwantificeren. We kunnen dit doen vanuit de al opgestelde continuïteits- en bewegingsvergelijkingen, maar we beginnen even opnieuw en stellen balansen op voor het volume water en de impuls in een ruimtelijk vast balansgebied dat het bewegende golffront bevat gedurende een tijdsinterval met duur Δt . (Zie ook CTme2100, lopende watersprong.) Dit is een meer directe aanpak, beperkt tot golfvoortplanting met constante snelheid, zonder vormverandering (stationair in een meebewegend assenstelsel).



Figuur 4.4 Enkelvoudige lopende golf met balansgebied

Volumebalans. Deze drukt uit dat de ingestroomde hoeveelheid vloeistof (a.g.v. het debiet Q) wordt geborgen aan het vrije oppervlak, over een bergende breedte B , in een verhoging (ζ) die zich met snelheid c uitbreidt (in Figuur 4.4 fijn gearceerd):

$$\text{instroom} = Q \Delta t = \text{berging} = B \zeta \Delta x = B \zeta c \Delta t$$

ofwel

Handwritten note: $\Delta t = \Delta x / c$ gehoupen

$$Q = Bc\zeta \quad (\text{tweedimensionaal: } U = \frac{c}{d}\zeta) \quad (4.1)$$

Impulsbalans. In de totale impulsoverdracht (F) verwaarlozen we de bijdrage van de meevoering van impuls t.o.v. de bijdrage van de hydrostatische druk, wat geoorloofd is omdat we lage golven beschouwen ($Fr^2 \ll 1$). De resulterende drukkracht is het product van het hydrostatisch drukverschil ($\delta p = \rho g\zeta$) maal het werkzaam oppervlak (A_s). Deze zet het water over de gehele diepte in beweging, m.a.w. de geleverde impuls wordt geborgen in de gehele vertikaal (in Figuur 4.4 grof gearceerd). De balans wordt:

$$\text{geleverde impuls} \approx (\rho g\zeta A_s)\Delta t = \text{berging} = (\rho A_s \Delta x)U = \rho Q \Delta x = \rho Q c \Delta t$$

ofwel

$$Q = \frac{gA_s}{c}\zeta \quad (\text{tweedimensionaal: } U = \frac{g}{c}\zeta) \quad (4.2)$$

Eliminatie van Q (tweedimensionaal: U) uit (4.1) en (4.2) geeft voor de voortplantingssnelheid

$$c = \sqrt{\frac{gA_s}{B}} \quad (\text{tweedimensionaal: } c = \sqrt{gd}) \quad (4.3)$$

Bovenstaande relaties zullen we in het vervolg nog veel nodig hebben. Het is daarom van belang de afleiding (en de beperkingen) goed na te gaan. Let wel: ze zijn alleen geldig voor onvervormde voortplanting van lage, lopende golven!

N.B. Substitutie van $c = \sqrt{gd}$ in (4.1) laat zien dat $\zeta/d = U/c = U/\sqrt{gd} = Fr$, het getal van Froude. Voor “lage” golven, in de betekenis van $\zeta/d \ll 1$, geldt dus ook $Fr \ll 1$, en omgekeerd. Zie ook par. 3.3, waar dit al was gebruikt.

Voorbeeld

Als gevolg van het heffen van een schuif loopt een positieve golf, met een verhoging van de waterspiegel van 0.2 m, een kanaal binnen met stilstaand water, een diepte van 5 m en een breedte $B = B_s = 150$ m. Bereken het debiet en de stroomsnelheid onder deze golf. Antwoord: $c = \sqrt{gd} = 7$ m/s; $Q = Bc\zeta = 210$ m³/s en $U = Q/A_s = 0.28$ m/s. (Ook te berekenen als $U = (\zeta/d)c = 0.04 \cdot 7$ m/s = 0.28 m/s of als $U = (g/c)\zeta = 0.28$ m/s.)

4.3 Elementaire golfvergelijking

We gaan nu voor een willekeurige situatie vergelijkingen opstellen en analyseren voor lage, lange, wrijvingsloze golven in prismatische leidingen, te beginnen in open waterlopen. Het zal blijken dat de enkelvoudige golf van de voorafgaande paragraaf een belangrijke bouwsteen vormt in de oplossingen.

Open waterlopen

De continuïteitsvergelijking is gegeven door (2.3), die we hier nog eens weergeven:

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

De bewegingsvergelijking (2.10) reduceert op grond van bovengenoemde vereenvoudigingen tot

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g A_s \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4.5)$$

Passend bij de al uitgesproken benadering van lage golven gaan we de invloed daarvan op de waarden van A_s en B verwaarlozen. Wiskundig gezien zijn dit dan constante coëfficiënten. Het belangrijke van de gemaakte vereenvoudigingen is dat (4.4) en (4.5) dan **lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten** zijn, die ten opzichte van niet-lineaire vergelijkingen of vergelijkingen met variabele coëfficiënten relatief eenvoudig zijn op te lossen.

Elimineren van Q via differentiatie van (4.4) naar t en van (4.5) naar x geeft

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{g A_s}{B} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (4.6)$$

Merk op dat deze vergelijking van de 2e orde is als gevolg van het in rekening brengen van **berging** (via 4.4) en lokale **traagheid** (via 4.5). Door het samenspel hiervan in ruimte en tijd ontstaat (4.6), die, zoals we zullen zien, voortplanting van golven beschrijft.

We doen nog even alsof we nog geen uitdrukking kennen voor een voortplantingssnelheid, en definiëren nu een grootheid c als

$$c \equiv \sqrt{\frac{g A_s}{B}} \quad (4.7)$$

In twee-dimensionale stromen (geen zijdelingse variatie) kunnen we de verhouding A_s/B vervangen door de diepte d , in welk geval (4.7) overgaat in

$$c = \sqrt{gd} \quad (4.8)$$

N.B. Deze uitdrukking kan uiteraard in het algemeen worden gebruikt mits d de diepte is gemiddeld over de bergende breedte (A_s/B), dus niet de (grotere) gemiddelde diepte in het stroomvoerend profiel ($d_s = A_s/B_s$).

Door substitutie van (4.7) gaat (4.6) over in

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (4.9)$$

Eliminatie van h in plaats van Q levert een identieke vergelijking op in termen van Q in plaats van h .

Drukleidingen

Voor drukleidingen gaan we uit van de continuïteitsvergelijking (2.26) en de bewegingsvergelijking (2.28). We verwaarlozen daarin de advectione termen en de weerstand. Eenzelfde bewerking als hierboven is gegeven leidt ook dan tot (4.9), met p in de plaats van h (had ook andersom gekund) maar met c gegeven door de uitdrukking (2.25):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{waarin} \quad \frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{K} + \frac{\rho D}{E\delta} \quad (4.10)$$

Algemene golfvergelijking

Een differentiaalvergelijking met de gedaante van (4.9) of (4.10) staat bekend als "de" **golfvergelijking** (in één dimensie) omdat de meest elementaire vorm van golfvoortplanting hiermee wiskundig wordt beschreven. De naam "snaarvergelijking" wordt ook wel gebruikt omdat trillingen in een snaar door vergelijkingen van eenzelfde gedaante worden beschreven.

Hoewel de golfvergelijking zowel op lange golven in open water als op (axiale) drukgolven in gesloten leidingen van toepassing is gaan we ons in dit hoofdstuk concentreren op open water. De methoden en resultaten zijn overdraagbaar naar gesloten leidingen.

4.4 Algemene oplossing

Zonder afleiding stellen we nu dat de algemene oplossing van (4.9) bestaat uit de som van een willekeurige functie van $(x+ct)$ en een andere, eveneens willekeurige functie van $(x-ct)$:

$$h = h_-(x + ct) + h_+(x - ct) \quad (4.11)$$

Eenzelfde uitdrukking als (4.11) geldt voor Q in termen van Q_+ en Q_- .

De golfvergelijking (4.9) is lineair. Om te bewijzen dat (4.11) eraan voldoet kunnen we daarom volstaan met te bewijzen dat h_+ en h_- afzonderlijk eraan voldoen. We beperken ons eerst tot h_+ . Deze hangt uitsluitend af van $x - ct$, welke grootte we aanduiden met X_+ (dus $X_+ = x - ct$). Daarmee geldt $h_+ = h_+(X_+)$, en omdat $\partial X_+ / \partial x = 1$ en $\partial X_+ / \partial t = -c$ volgt hieruit

$$\frac{\partial h_+}{\partial t} = \frac{dh_+}{dX_+} \frac{\partial X_+}{\partial t} = -ch'_+ \quad \text{respectievelijk} \quad \frac{\partial^2 h_+}{\partial t^2} = c^2 h''_+ \quad (4.12)$$

waarin het accent een (gewone) differentiatie aangeeft (van h_+ naar X_+). Evenzo geldt

$$\frac{\partial h_+}{\partial x} = \frac{dh_+}{dX_+} \frac{\partial X_+}{\partial x} = h'_+ \quad \text{respectievelijk} \quad \frac{\partial^2 h_+}{\partial x^2} = h''_+ \quad (4.13)$$

Substitutie van bovenstaande uitdrukkingen in (4.9) laat zien dat elke willekeurige functie $h_+(X_+) = h_+(x - ct)$ aan de golfvergelijking (4.9) voldoet. Voor h_- en dus voor de som $h = h_+ + h_-$ geldt hetzelfde (lineaire superpositie).

We gaan nu de betekenis na van de oplossing, eerst alleen voor h_+ . De functie h_+ hangt slechts via $X_+ = (x - ct)$ van x en t af. Dus zien we geen verandering in de lokale, instantane waarde van h_+ als we in de loop van de tijd $(x - ct)$ constant houden, wat inhoudt dat we ons met een snelheid c in de positieve x -richting verplaatsen. M.a.w.: een punt van constante h_+ verplaatst zich met snelheid c in de **positieve** x -richting (vandaar de notatie h_+). Omdat c in de hier gevolgde benadering in alle punten dezelfde waarde heeft, onafhankelijk van h , verandert het aanvankelijke lengteprofiel van de verstoring h_+ niet in de tijd; het verschuift slechts, zonder vormverandering. We spreken hier van **onvervormde voortplanting** met een **voortplantingssnelheid** c . (Hiermee is bewezen wat in par. 4.2 was aangenomen.)

Voor $h_-(X_-)$ geldt analoog dat dit profiel zonder vormverandering in negatieve x -richting opschuift met snelheid c .

De eigenschap van onvervormde voortplanting (per lopende golf) is ook anders te formuleren, op een manier die we later meer zullen gebruiken. Daarvoor is het begrip **meebewegende afgeleide** van belang. Stel een waarnemer verplaatst zich met snelheid V in x -richting. De verandering die hij in een tijdje Δt waarneemt in de lokale waarde van een grootte zoals h is

$$\Delta h = \frac{\partial h}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial h}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial h}{\partial x} V \Delta t \quad (4.14)$$

De waargenomen verandering van h p.e.v. tijd is de z.g. bewegende afgeleide van $h(x,t)$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.15)$$

Dit passen we toe op h_+ en h_- . Uit (4.12) en (4.13) volgt

$$\frac{\partial h_+}{\partial t} + c \frac{\partial h_+}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

Het linkerlid is blijkbaar de meebewegende afgeleide van h_+ naar t voor een waarnemer die zich verplaatst met snelheid c . Deze afgeleide is gelijk aan nul. De waarnemer ziet dus geen verandering in de momentane, lokale waarde van h_+ . Elk punt van constante h_+ verschuift dus met snelheid c . Deze snelheid hangt niet van de (laag veronderstelde) lokale storing af. De golf plant zich dus onvervormd voort.

Een schrijfwijze die equivalent is aan (4.16) is

$$\frac{dh_+}{dt} = 0 \quad \text{mits} \quad \frac{dx}{dt} = c \quad (4.17+)$$

In feite wordt hiermee de *partiële* differentiaalvergelijking (4.16), waarin sprake is van *één* *afhankelijke* variabele (h_+) en *twee* *onafhankelijke* variabelen (x, t), vervangen door een stelsel (4.17+) van *twee* *gewone* differentiaalvergelijkingen voor *twee* *afhankelijke* variabelen (h_+ en x) met *één* en *dezelfde* *onafhankelijke* variabele, nl. de tijd t . Voor h_- geldt evenzo

$$\frac{dh_-}{dt} = 0 \quad \text{mits} \quad \frac{dx}{dt} = -c \quad (4.17-)$$

Dit type formulering wordt in hoofdstuk 6 gebruikt, maar dan toegepast op andere functies.

Het voorgaande geldt voor de oplossingen h_+ en h_- van de golfvergelijking afzonderlijk. We zien hieruit dat **de algemene oplossing van de golfvergelijking bestaat uit de superpositie van twee tegen elkaar in lopende golven, elk zonder vormverandering** (zie vergelijking 4.11). Wanneer deze beide aanwezig zijn verandert hun superpositie natuurlijk wel van vorm. Of zo'n superpositie zich daadwerkelijk voordoet (of beide componenten aanwezig zijn) wordt bepaald door de begin- en randvoorwaarden.

4.5 Relatie tussen variaties in debiet en waterstand

We gaan nu opnieuw in op de relatie tussen (veranderingen in) debiet en waterstand. Dit is in par. 4.2 al aan de orde geweest, als inleiding, waarbij we op voorhand uitgingen van een enkele golf die een gebied met stilstaand water inliep. We gaan het nu formuleren voor een willekeurige (maar voldoende lage) storing van een willekeurige aanvangstoestand, uitgaande van de golfvergelijking.

Voor de golf h_+ geldt (4.16). Substitutie hiervan in de continuïteitsvergelijking (4.4) geeft

$$\frac{\partial Q_+}{\partial x} - Bc \frac{\partial h_+}{\partial x} = 0 \quad (4.18)$$

Integratie hiervan naar x , voor constante B en c (verondersteld), geeft $Q_+ - Bch_+ = \text{constant} = Q_0 - Bcd_0$, ofwel, uitgedrukt in de veranderingen t.o.v. de referentiesituatie (Q_0, d_0):

$$\delta Q_+ = Bc \delta h_+ \quad (4.19+)$$

(zie par. 4.2). Voor golven die zonder vormverandering lopen in de negatieve x -richting geldt analoog

$$\delta Q_- = - Bc \delta h_- \quad (4.19-)$$

In feite zeggen (4.19+) en (4.19-) hetzelfde, nl. dat een verhoging van de waterstand die in een zekere richting loopt gepaard gaat met een evenredige vergroting van het debiet in diezelfde richting, met Bc als evenredigheidsfactor.

In twee-dimensionale situaties (geen zijdelingse variaties) kunnen we schrijven $Q = BdU$, dus bij (vrijwel) constante diepte (d) ook $\delta Q = Bd \delta U$, en reduceren de vergelijkingen (4.19) (beide in één samengescreven) tot

$$\delta U_{\pm} = \pm \frac{c}{d} \delta h_{\pm} \quad \text{ofwel} \quad \delta U_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{g}{d}} \delta h_{\pm} \quad \text{of ook} \quad \delta U_{\pm} = \pm \frac{g}{c} \delta h_{\pm} \quad (4.20)$$

Merk de overeenstemming op tussen deze uitdrukkingen en die in par. 4.2.

Het is belangrijk te beseffen dat de betrekkingen gegeven in (4.19) en (4.20) elk alleen gelden voor golven die lopen in één richting (zonder vormverandering). Voor het totaal dat ontstaat uit superpositie van golven die in tegengestelde richting lopen gaan zij niet op. Zulke combinaties komen in de volgende paragraaf aan bod.

4.6 Oplossing bij willekeurige beginsituatie

Oneindig lang kanaal

We gaan nu uit van een oneindig lange horizontale waterloop met constant profiel waarin op een zeker (aanvangs)tijdstip, zeg t_0 , een storing aanwezig is met gegeven waarden van ζ en Q als functie van x :

$$\zeta_0(x) \equiv \zeta(x; t_0) \quad \text{en} \quad Q_0(x) \equiv Q(x; t_0) \quad (4.21)$$

We willen met de theorie uit de voorgaande paragrafen het verdere verloop berekenen van ζ

en Q . Daartoe denken we voor alle $t > t_0$ de storing opgebouwd uit twee delen die in tegengestelde richting lopen, zodat voor alle (x, t) geldt:

$$\zeta = \zeta_+ + \zeta_- \quad \text{en} \quad Q = Q_+ + Q_- = Bc(\zeta_+ - \zeta_-) \quad (4.22)$$

In de tweede vergelijking voor Q is gebruik gemaakt van (4.19). Uit (4.22) volgt

$$\zeta_+ = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{Q}{Bc} \right) \quad \text{en} \quad \zeta_- = \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{Q}{Bc} \right) \quad (4.23)$$

(Voor Q_+ en Q_- gelden soortgelijke uitdrukkingen.) De waarden in de rechterleden van (4.23) zijn voor het tijdstip $t = t_0$ bekend als functie van x (substitueer $\zeta_0(x)$ voor ζ en $Q_0(x)$ voor Q). Daarmee zijn $\zeta_+(x, t_0)$ en $\zeta_-(x, t_0)$ dus ook bekend. Door deze oppervlakteprofielen met snelheid c in positieve respectievelijk negatieve x -richting te transleren, zonder vormverandering, is het verloop van ζ_+ en ζ_- bekend als functie van x voor elk (later) tijdstip, en via (4.19) Q_+ en Q_- dan eveneens. Via (4.22) zijn $\zeta(x, t)$ en $Q(x, t)$ dan ook bekend voor willekeurige t .

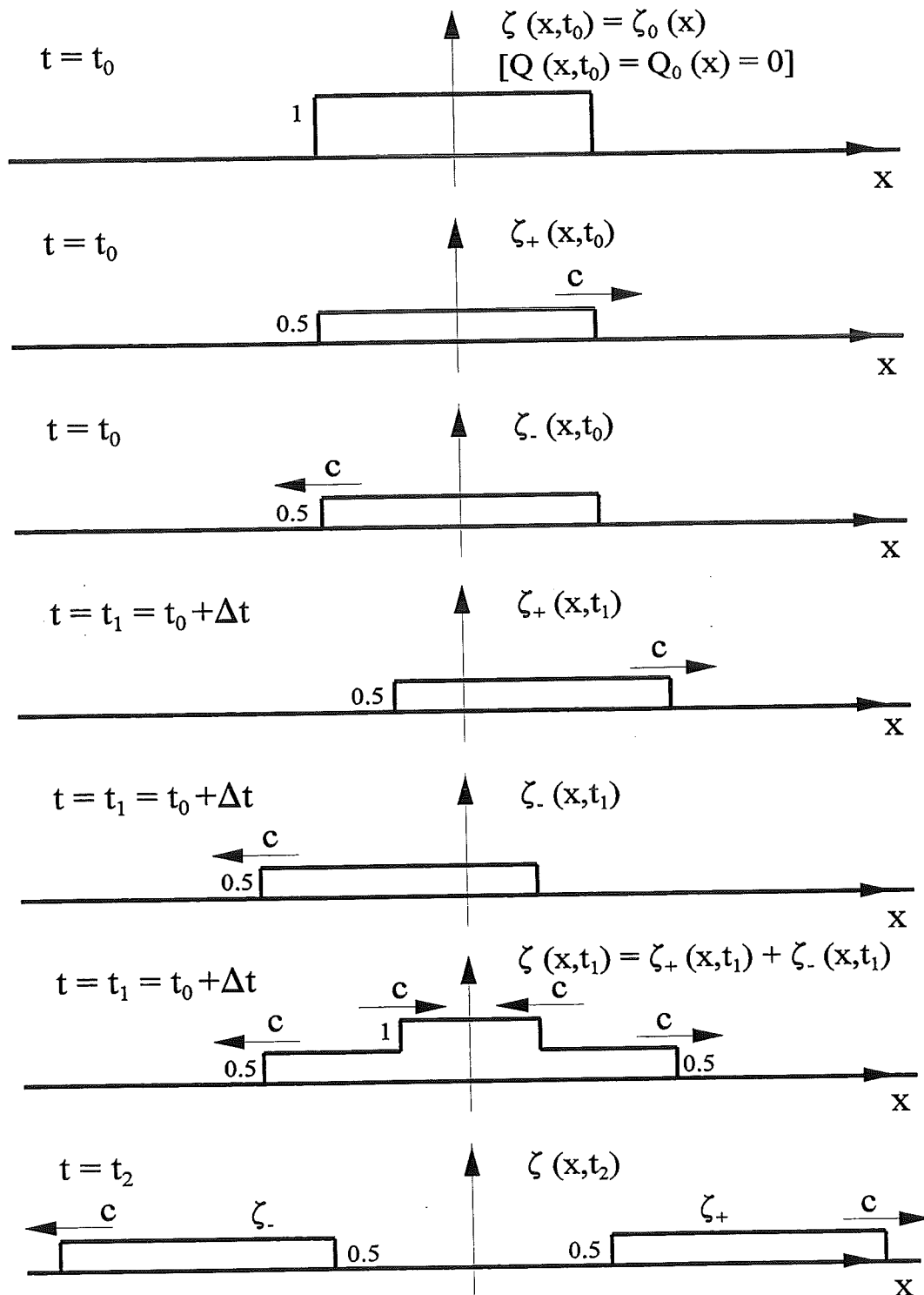
Uit (4.23) volgt dat, wanneer er aanvankelijk een storing is van de waterstand bij snelheid nul, ζ_+ en ζ_- in elk punt aanvankelijk aan elkaar gelijk zijn, elk de helft van de oorspronkelijke oppervlakte-uitwijking in het beschouwde punt. Figuur 4.5 geeft hiervan een uitgewerkt voorbeeld.

Het hier gebruikte principe om een willekeurige tijdsafhankelijke toestand te beschrijven als de som van twee storingen, die ieder voor zich gemakkelijk zijn te volgen, wordt in de z.g. methode van de karakteristieken (Hoofdstuk 6) verder uitgebouwd en wordt dan ook geschikt voor niet-lage golven. Voor de hier behandelde methode geldt dat niet, maar deze geeft al wel inzicht in het principe.

Golfvoortplanting in één richting

Wanneer aanvankelijk voor alle x geldt dat $\zeta_0 = Q_0/Bc$ dan volgt uit (4.23) dat $\zeta_- = 0$ op $t = t_0$. Dit geldt dan ook op andere tijdstippen, ofwel $Q - Bc\zeta = 0$ voor alle t (zolang er geen randstoringen zijn). Slechts de golf ζ_+ is dan aanwezig, lopend in positieve richting. Er treedt dan geen vormverandering op. (Als gevolg van de hier niet in rekening gebrachte advection term en weerstand zal in werkelijkheid wel vervorming en damping optreden. Dit komt in vervolghoofdstukken aan de orde.)

Numerieke berekeningen van ééndimensionale systemen hebben altijd betrekking op trajecten van eindige lengte, dus met twee randen, ook als in werkelijkheid het kanaal doorloopt. Dan moet de golf ter plaatse van de rekenrand ongestoord kunnen wegllopen en niet op kunstmatige manier geheel of gedeeltelijk worden teruggekaatst. Ter plaatse van de rand moet daarom als randvoorwaarde de betrekking worden opgelegd die geldt voor eenzijdige voortplanting van golven vanuit het rekenaltraject naar de rand. Bij voortplanting in positieve


 Figuur 4.5 Beweging vanuit stilstand ($Q=0$) en initiële lokale waterstandsverhoging

x-richting naar een open rand $x = x_r$ moet daarom als randvoorwaarde worden opgelegd: $Q - Bc\zeta = 0$. (Bij voortplanting in negatieve richting, naar de andere rand, moet ter plaatse van die rand gelden: $Q + Bc\zeta = 0$.) In Hoofdstuk 6 (Karakteristieken) komen we dit soort randvoorwaarden opnieuw tegen, maar daar gaan we niet steeds uit van lage golven en lineaire vergelijkingen.

Kanaalpand met gesloten einde(n)

Stel nu dat de waterloop ergens een gesloten einde heeft, buiten het gebied van de aanvanke-lijke storing. In die doorsnede geldt $Q = 0$, wat gezien (4.22) inhoudt dat daar geldt $\zeta_- = \zeta_+$. De inkomende golf wordt ter plaatse van de gesloten rand dus 100% teruggekaatst. De superpositie van de aankomende golf en de tegengesteld lopende, teruggekaatste golf leidt ter plaatse van de rand tot een totaal debiet gelijk aan nul, wat overeenkomt met de opgelegde randvoorwaarde, en een verdubbeling van de oppervlakteuitwijkingen. We spreken hier van **volledige, positieve terugkaatsing**. (Het woord "positief" heeft betrekking op de oppervlakte-uitwijking; het debiet wordt in feite negatief teruggekaatst, om te voldoen aan de voorwaarde $Q = 0$ ter plaatse.)

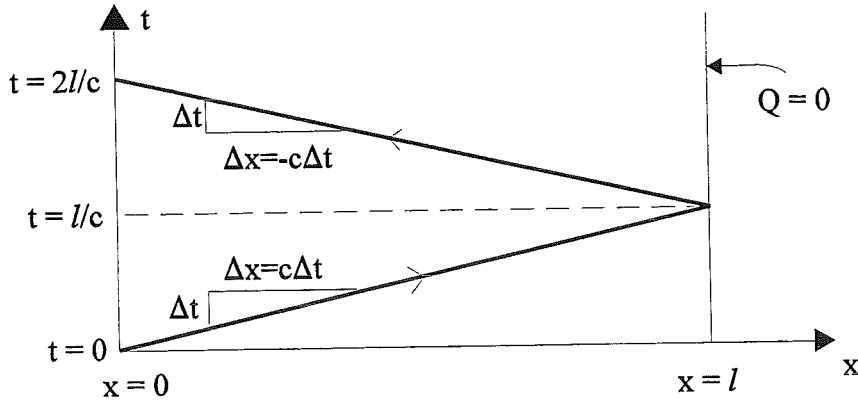
Kanaalpand met open einde met constant peil

Stel nu dat het kanaalpand aan een open einde overgaat in een groot, diep reservoir waarvan de vrije waterspiegel niet wordt beïnvloed door de stroming in het kanaal. Ter plaatse van de overgang naar het reservoir moet het kanaalpeil dan gelijk zijn aan dat van het reservoir, ofwel $\zeta = 0$. (In berekeningen wordt een rand waar de waterstand wordt opgelegd, al dan niet in de tijd variërend, een "waterstandsrand" genoemd.) Ter plaatse moet dus gelden $\zeta = \zeta_+ + \zeta_- = 0$, ofwel $\zeta_- = -\zeta_+$. Er treedt **volledige, negatieve terugkaatsing** op. Uit (4.22) volgt dat ter plaatse van deze z.g. waterstandsrand het inkomende debiet positief wordt teruggekaatst ($Q_- = Q_+$), waardoor het totale debiet daar wordt verdubbeld.

De voortplanting van bovenomschreven golven, de initiële en de teruggekaatste, is inzichtelijk te maken met een z.g. **x-t diagram** (Figuur 4.6). Stel dat op $x = 0$ en $t = 0$ een storing binnenloopt in een prismatisch kanaalpand dat aan de andere zijde ($x = l$) is gesloten en waarin aanvankelijk het water in rust is. De voortplanting van het front wordt weergegeven door een lijn in het x-t vlak vanaf het beginpunt, met helling $dx/dt = c$, dus door een rechte lijn, want c is constant in de huidige benadering. Na een tijd gelijk aan l/c , de z.g. **looptijd**, bereikt het front het gesloten einde waar het volledig wordt teruggekaatst. Het front van de teruggekaatste golf wordt weergegeven door een lijn met helling $dx/dt = -c$. Na een totale tijd $2l/c$ vanaf het begin is het front op de plaats waar het begon, waar het eventueel weer wordt teruggekaatst (of dit gebeurt hangt af van de randvoorwaarde daar).

Vooraf in geval van abrupte veranderingen in de randvoorwaarden is de toestand die in het kanaal ontstaat in de loop van de tijd op deze manier zichtbaar te maken. In het algemeen is de situatie ingewikkelder doordat er aanvankelijk al beweging kan zijn, de randvoorwaarden niet sprongsgewijs variëren maar continu, en er vervorming en demping optreden vanwege de

(hier verwaarloosde) kwadratische termen. Een meer volledige methode wordt behandeld in Hoofdstuk 6 (methode van de karakteristieken).



Figuur 4.6 *x-t diagram voor kanaalpand van eindige lengte, gesloten in $x=l$*

4.7 Lopende en staande periodieke golven

Oneindig lang kanaal

We beperken ons nu tot periodieke golven, en wel met een sinusvormig profiel met amplitude van ζ gelijk aan $\hat{\zeta}$, golfperiode T en golflengte $L = cT$. Wanneer deze golven in positieve x -richting lopen is het oppervlakteprofiel te schrijven als

$$\zeta_+(x,t) = \hat{\zeta} \cos\left(2\pi \frac{x-ct}{L}\right) \quad (4.24)$$

Kortheidshalve voeren we de z.g. (hoek)frequentie in volgens $\omega = 2\pi/T$ en het z.g. golfgetal volgens $k = 2\pi/L$. Deze stellen de verandering van de fase voor p.e.v. tijd (rad/s) respectievelijk p.e.v. lengte (rad/m). Daarmee gaat (4.24) over in

$$\zeta_+ = \hat{\zeta} \cos(kx - \omega t) \quad (4.25a)$$

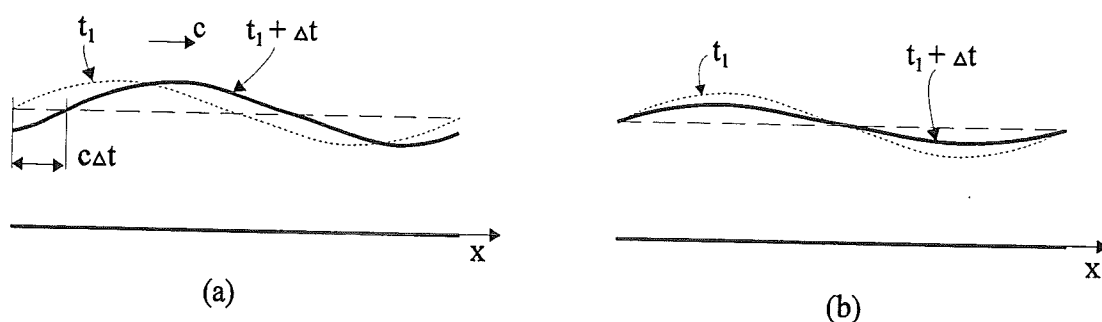
Het bijbehorend debiet is

$$Q_+ = Bc\hat{\zeta} \cos(kx - \omega t) \quad (4.25b)$$

Deze vergelijkingen beschrijven **lopende golven**: vormvaste profielen waarvan o.a. de maxima en minima en de nulpunten met constante snelheid bewegen (zie Figuur 4.7a). Immers, een waarnemer die zich met een snelheid $dx/dt = c = \omega/k$ verplaatst ziet geen

verandering in de lokale waarde van de fase ($kx - \omega t$) en dus ook niet in die van ζ_+ of Q_+ . Voor de z.g. **fasesnelheid** geldt dus $c = \omega/k$ ($= L/T$).

In een lopende golf zijn ζ en Q in fase (zie 4.25: beide evenredig met de cosinus van dezelfde fasehoek). Met andere woorden: waar ζ een maximum heeft (golftop) is Q ook maximaal.



Figuur 4.7 Lopende (a) en staande (b) golven in oneindig lang kanaal

Voor een in tegengestelde richting lopende golf geldt analoog

$$\zeta_- = \hat{\zeta} \cos(kx + \omega t) \quad (4.26a)$$

en

$$Q_- = -Bc\hat{\zeta} \cos(kx + \omega t) \quad (4.26b)$$

Hier zijn ζ en Q in tegenfase: onder de top (maximum van ζ) van een naar links lopende golf is het debiet minimaal (maximaal in absolute grootte maar naar links gericht, dus negatief).

Wanneer de golven ζ_+ en ζ_- beide tegelijk aanwezig zijn, met dezelfde amplitude, en in fase waar $x = 0$, geldt voor hun superpositie

$$\zeta = \zeta_+ + \zeta_- = 2\hat{\zeta} \cos kx \cos \omega t = \hat{\zeta}_{st} \cos kx \cos \omega t \quad (4.27a)$$

en

$$Q = 2Bc\hat{\zeta} \sin kx \sin \omega t = Bc\hat{\zeta}_{st} \sin kx \sin \omega t \quad (4.27b)$$

Dit is een **staande golf**, omdat hierin het profiel niet in de ruimte verplaatst (loopt) maar slechts in de tijd op en neer “ademt” (zie Figuur 4.7b). De golf is plaatsvast. Er zijn plaatsen waar de oppervlakte-uitwijking altijd nul is, de z.g. **knopen** (waar $\cos kx = 0$), en er zijn plaatsen waar de lokale amplitude van de oppervlakte-uitwijking maximaal is, de z.g. **buiken** (waar $\cos kx = \pm 1$).

In een staande golf zijn ζ en Q uit fase met een hoek $\pi/2$ (kwart cyclus), zowel in x als in t .

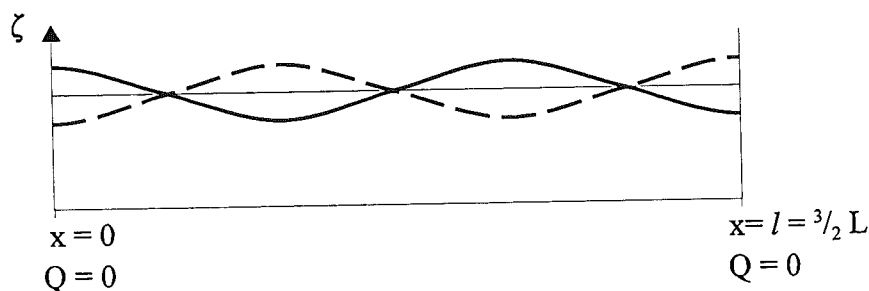
In de hier beschouwde situatie van een oneindig lang kanaal zijn zowel lopende als staande golven mogelijk, en is er geen beperking aan de waarden van k , ω of de plaats van buiken en knopen. (Het punt $x = 0$ is willekeurig; er is immers ook niet een referentiepunt waarvan de ligging een bijzondere betekenis heeft.)

Half-oneindig kanaal met één gesloten gesloten einde

Bij een half-oneindig kanaal met een gesloten einde, zeg in $x = 0$, is niet (voortdurend) een periodieke lopende golf mogelijk, want die voldoet niet voor alle t aan de randvoorwaarde $Q = 0$ in $x = 0$. Wanneer een golf het kanaal binnenloopt zal hij tegen het gesloten einde volledig terugkaatsen. Na de vereiste inspeeltijd ontstaat een periodieke situatie met een staande golf waarvan de positie is gefixeerd, met een nulpunt van het debiet en dus een buik van de oppervlakte-uitwijking in $x = 0$, zoals beschreven door (4.27). Voor de waarden van golflengte (of golfgetal) en periode (of frequentie) gelden geen beperkingen.

Bekken met twee gesloten einden

In geval van een bekken van eindige lengte, zeg van $x = 0$ tot $x = l$, dat aan weerszijden gesloten is, moet steeds zijn voldaan aan de randvoorwaarden $Q = 0$ in $x = 0$ en $Q = 0$ in $x = l$. Om hieraan te voldoen moet $\sin kl = 0$ zijn, dus $kl = n\pi$, waarin $n = 1, 2, 3$, etc., ofwel $l = nL/2$ (een heel aantal halve golflengten, ofwel een even aantal kwart golflengten). Dit betekent een staande golf met buiken (van ζ) ter plaatse van beide gesloten einden (zie Figuur 4.8). De waarde van n is gelijk aan het aantal knopen in het bekken. De bijbehorende (eigen)frequenties zijn $\omega_n = n\pi c/l$ ($n = 1, 2, \dots$). Deze vormen een discrete (aftelbare) verzameling. (ω_1 geeft de “grondtoon”, met een periode $T_1 = 2l/c$; de overige zijn hiervan de **harmonischen**; zij vormen de “boventonen”.)



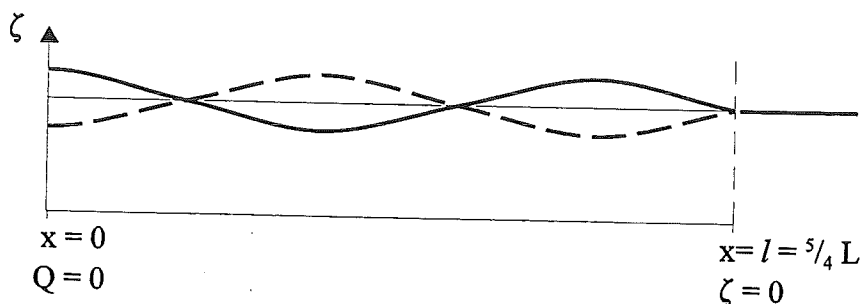
Figuur 4.8 Staande golf in gesloten bekken voor $n = 3$

Merk op dat vanwege de twee randvoorwaarden periodieke oplossingen slechts mogelijk zijn voor een **discreet** stel golflengten: de halve golflengte moet een geheel aantal keren in de lengte van het bekken passen. Omdat we het hebben over vrije golven hoort bij elke golflengte slechts één periode; daarom zijn de toegelaten waarden van de frequentie ook

discreet. We spreken hier van **eigentrillingen**. (Er is geen externe forcering die bij gegeven golflengte een andere frequentie kan opleggen.)

Bekken in verbinding met reservoir

Is het bekken aan één eind (zeg $x = 0$) gesloten, zodat daar geldt $Q = 0$, en aan het andere eind (zeg $x = l$) in open verbinding met een groot reservoir, waarvoor voortdurend geldt $\zeta = 0$, dan is evenmin een periodieke lopende golf mogelijk. Een staande golf kan aan de randvoorwaarden voldoen wanneer ζ een buik heeft ter plaatse van het gesloten eind en een knoop in het open eind (zie Figuur 4.9). Dit houdt in $\cos kl = 0$, dus $kl = \pi/2 + n\pi$, waarin $n = 0, 1, 2, 3$, etc., ofwel $l = (2n + 1)L/4$ (een oneven aantal kwartgolflengten). De waarde van n is gelijk aan het aantal knopen in het bekken (exclusief de knoop aan de open rand).



Figuur 4.9 Staande golf in bekken in verbinding met reservoir voor $n=2$

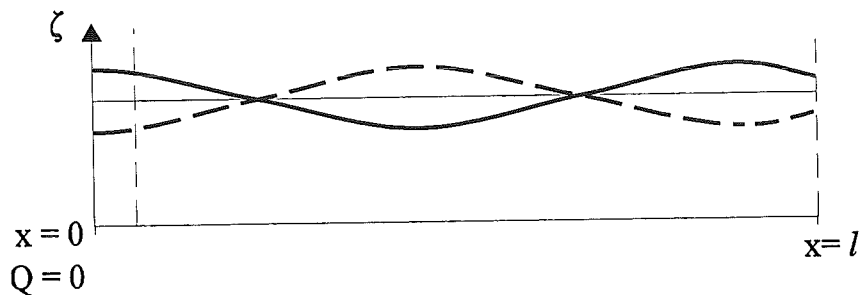
De bijbehorende (eigen)frequenties zijn $\omega_n = (\frac{1}{2} + n)\pi c/l$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Ook hier is sprake van eigentrillingen. De “grondtoon” komt overeen met de situatie van een bekkenlengte gelijk aan een kwartgolflengte (periode $T_1 = 4l/c$).

Bekken in verbinding met zee met getij

Het kan zijn dat het bekken gesloten is aan één eind (zeg $x = 0$), en aan het andere eind (zeg $x = l$) in open verbinding staat met een zee met getij (zie Figuur 4.10) met een willekeurige frequentie (t.o.v. de eigenfrequenties van het half-open bekken). Er is dan sprake van een **geforceerde beweging**. De verhouding van de amplitude aan het gesloten eind tot de amplitude aan de zeewaartse rand is gelijk aan $1/|\cos kl|$. Dit gaat naar oneindig als $\cos kl$ nadert tot nul (**resonantie**: de aan de open rand opgelegde frequentie is dan gelijk aan één van de eigenfrequenties voor een eenzijdig open bekken).

Kombergingsbenadering

Wanneer in voorgaande situatie de bekkenlengte vrij klein is t.o.v. de golflengte (zie Figuur 4.10 linkergedeelte, $l \ll L$) dan is het faseverschil over die lengte gering ($kl \ll 2\pi$) zodat $\cos kl \approx 1$. De amplituden aan beide einden verschillen dan niet veel in waarde. (Een verhouding l/L van ca. $1/20$ komt overeen met een afwijking van ca. 5% in de amplituden aan



Figuur 4.10 Staande golf in bekken in verbinding met een zee met getij

beide einden.) Voor praktische doeleinden kan men de waterspiegel in het gehele (korte) bekken dan als horizontaal behandelen. In zo'n kort bekken kunnen we dus afzien van het golfkarakter (geen faseverschillen tussen verschillende punten) en slechts de berging beschouwen die in het bekken plaats vindt. Dit is de z.g. **kombergingsbenadering**, die leidt tot een sterk vereenvoudigd vergelijkingstelsel (zie Hoofdstuk 2 voor een bespreking en Hoofdstuk 7 voor toepassingen).

Voorbeeld 1

Een eenzijdig gesloten bekken staat aan het open einde in verbinding met een reservoir. De afmetingen zijn $B = 600 \text{ m}$, $B_s = 300 \text{ m}$, $d_s = 6 \text{ m}$ (de diepte in het stroomvoerend profiel) en $l = 6 \text{ km}$. In het bekken treedt een eigentrilling op met één knoop in het inwendige. De amplitude van de oppervlakte-uitwijking van de staande golf aan het gesloten einde is 0.5 m . Bereken:

- De periode
- De amplitude van het debiet in de mond
- De amplitude van de snelheid in de mond

- Uit het gegeven aantal knopen volgt dat de bekkenlengte gelijk is aan $3/4$ golflengte, ofwel $L = cT = 4/3 * 6000 \text{ m} = 8000 \text{ m}$. Verder is $c = \sqrt{gA_s/B} = \sqrt{gd_s B_s/B} = 5.42 \text{ m/s}$ waaruit volgt $T = L/c = 8000 \text{ m}/(5.42 \text{ m/s}) = 1475 \text{ s}$ (antw.)
- In de mond is $x = l$ en is $\hat{Q} = Bc\hat{\zeta}_{st} \sin kl$ (zie 4.27). Omdat $l = 3/4 L$, dus $kl = 3\pi/2$, is $\sin kl = -1$, zodat in dit geval in de mond $\hat{Q} = Bc\hat{\zeta}_{st}$ waarin $\hat{\zeta}_{st}$ de amplitude is van de oppervlakte-uitwijking van de staande golf in de buiken, met de waarde 0.5 m . Dus volgt dat in de mond $\hat{Q} = (600 \text{ m})(5.42 \text{ m/s})(0.5 \text{ m}) = 1627 \text{ m}^3/\text{s}$ (antw.)
- $\hat{U} = \hat{Q}/A_s = \hat{Q}/(B_s d_s) = (1627 \text{ m}^3/\text{s})/(1800 \text{ m}^2) = 0.90 \text{ m/s}$ (antw.)

Voorbeeld 2

Hetzelfde bekken als in het voorgaande voorbeeld staat nu aan het open eind in verbinding met een zee waarin een M_2 -getij heerst met een amplitude van 1.5 m (getijverschil 3 m). Ga na hoe de respons van het bekken is en bereken de amplitude van de stroomsnelheid in de mond en halverwege het bekken.

M_2 -getij dus $T = 12 \text{ h } 25' = 44700 \text{ s}$ ($\omega = 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$; zie H. 3). De waarde van c is dezelfde als in Voorbeeld 1, dus 5.42 m/s. (Dit geldt zolang we de weerstand verwaarlozen. Meestal moet die voor getijbewegingen in rekening worden gebracht; zie par. 3.3, Tabel 3.1. Methoden daarvoor komen in H. 8 aan bod.) Dus $L = cT = 242 \text{ km}$, ofwel ca. 30 x dus meer dan 20 x de bekkenlengte. Er is daarom sprake van een relatief kort bekken, waarbinnen de waterspiegel op elk moment vrijwel horizontaal is. De kombergingsbenadering is van toepassing. Voor het debiet als functie van de afstand uit het gesloten eind geldt dan (2.12) ofwel

$$Q(x,t) = Bx \frac{dh_k}{dt} \quad \text{met amplitude} \quad \hat{Q}(x) = Bx \omega \zeta_{st}$$

Omdat het bekken in open verbinding staat met de zee kunnen we de waterstand in het bekken gelijk stellen aan die erbuiten, dus met dezelfde amplitude. Hieruit volgt voor de amplitude van het debiet in de mond

$$\hat{Q}(l) = (600 \text{ m})(6000 \text{ m})(1.4 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s})(1.5 \text{ m}) = 756 \text{ m}^3/\text{s}, \text{ waarbij een stroomsnelheid hoort}$$

$$\hat{U}(l) = (756 \text{ m}^3/\text{s})/(1800 \text{ m}^2) = 0.42 \text{ m/s}$$

Omdat Q hier evenredig is met de afstand uit het gesloten einde (x) zijn de waarden van debiet en snelheid halverwege het bekken de helft van de hierboven gegeven waarden in de mond.

4.8 Vragen en opgaven

1. Maak een samenvatting van dit Hoofdstuk.
2. Waaruit bestaat het z.g. lineariseren van de vergelijkingen? Onder welke voorwaarde geeft dit een redelijke benadering van de werkelijkheid (of althans van de oplossingen van de niet-gelineariseerde vergelijkingen)?
3. Ga na waarom een geringe berging leidt tot een hoge golfvoortplantingssnelheid.
4. Bereken de golfvoortplantingssnelheid van lage golven zonder weerstand in een breed water met een diepte van 4000 m (oceaan), 50 m (randzee) respectievelijk 5 m (estuarium). (Antw.: 198 m/s, 22.1 m/s, 7.00 m/s)

5. Bereken de bijbehorende golflengte voor het M_2 -getij respectievelijk een golf veroorzaakt door een aardbeving, met een periode van 10 minuten. Ga eerst na of de laatste in alle drie gevallen als een lange golf mag worden beschouwd. (Antw.: 8855 km, 988 km, 313 km respectievelijk 119 km, 13.3 km en 4.20 km)
6. Leid een betrekking af tussen variatie in debiet en waterstand voor een golf die zich zonder vormverandering voortplant in een open leiding.
7. Leid een betrekking af tussen variatie in druk en snelheid voor een golf die zich zonder vormverandering voortplant in een gesloten leiding (onder druk).
8. Een gemaal begint met het uitslaan van water op een uitwateringskanaal met een diepte van 4 m en een breedte van 50 m; het debiet is $40 \text{ m}^3/\text{s}$. Bereken de snelheid van de golf die als gevolg hiervan het kanaal inloopt. (Antw.: $c = 6.26 \text{ m/s}$)
9. Bereken ook de verhoging van de waterstand die optreedt in het kanaal. (Antw.: $\zeta = 0.13 \text{ m}$)
10. In een "oneindig" lang, zeer breed en prismatisch kanaal met een diepte van 5 m zijn de volgende waarden van stroomsnelheid U en oppervlakte-uitwijking ζ gegeven op $t = 0$:
 $x < 0$: $U = 0$, $\zeta = 0.50 \text{ m}$
 $x > 0$: $U = 0.50 \text{ m/s}$, $\zeta = 0$
 Bereken en teken de waarden van U en ζ als functie van x op het tijdstip $t = 10 \text{ s}$.
 (Antw.: $x < -70 \text{ m}$: $\zeta = 0.50 \text{ m}$, $U = 0$; $-70 \text{ m} < x < 70 \text{ m}$: $\zeta = 0.07 \text{ m}$, $U = 0.60 \text{ m/s}$;
 $x > 70 \text{ m}$: $\zeta = 0$, $U = 0.50 \text{ m/s}$)
11. Als in vraag 10, maar nu met de volgende beginvoorwaarden:
 $-100 \text{ m} < x < 0$: $U = 0$, $\zeta = 0.50 \text{ m}$
 $0 < x < 100 \text{ m}$: $U = 0.50 \text{ m/s}$, $\zeta = 0$
 Overige punten: $U = 0$ en $\zeta = 0$
 Bereken en teken de toestand (U en ζ) als functie van x op de tijdstippen $t = 10 \text{ s}$ en 20 s .
12. Schets het verloop van de functies $\cos(\omega t - kx)$ respectievelijk $\cos \omega t \cos kx$ voor kx tussen -2π en $+2\pi$ voor $\omega t = 0, \pi/6, \pi/2, \pi$ en 2π . Ga na dat de eerstgenoemde functie een lopende golf voorstelt met (fase)snelheid ω/k .
13. De volgende paren vergelijkingen zijn gegeven:
 (1) $Q = a \sin \omega t \sin kx$ en $\zeta = b \cos \omega t \sin kx$
 (2) $Q = a \cos \omega t \cos kx$ en $\zeta = b \cos \omega t \cos kx$
 (3) $Q = a \cos \omega t \cos kx$ en $\zeta = b \sin \omega t \sin kx$

(4)	$Q = a \sin \omega t \sin kx$	en	$\zeta = b \sin \omega t \sin kx$
(5)	$Q = a \sin (\omega t - kx)$	en	$\zeta = b \sin (\omega t + kx)$
(6)	$Q = a \sin (\omega t - kx)$	en	$\zeta = b \sin (\omega t - kx)$
(7)	$Q = a \sin (\omega t - kx)$	en	$\zeta = b \cos (\omega t - kx)$

Stel dat Q het debiet is en ζ de oppervlakte-uitwijking van een lange golf, ga dan van elk van deze paren na of ze aan de lineaire lange-golfvergelijkingen voldoen. Welke systematiek kun je ontdekken? Voorzover ze voldoen, geef een uitdrukking voor de verhouding a/b .

14. Kan in een éézijdig of tweezijdig gesloten bekken een periodieke lopende golf bestaan?
15. Waarom is voor een periodieke beweging in een tweezijdig gesloten bekken slechts een beperkt aantal frequenties (de z.g. eigenfrequenties) mogelijk? Waarom geldt hetzelfde voor een éézijdig gesloten bekken dat aan het open eind is aangesloten op een groot, diep reservoir?
16. Ga na hoe de eigenfrequenties van een prismatisch bekken worden beïnvloed door variaties van de bergende breedte, de stroomvoerende breedte, de diepte en de lengte. Welke hiervan heeft de grootste invloed?
17. Bereken de langste drie eigenperioden van een éézijdig gesloten prismatisch bekken met een lengte van 30 km, een stroomvoerend oppervlak van $6 \times 10^3 \text{ m}^2$ en een bergende breedte van 600 m. (Antw.: $T_1 = 12116 \text{ s}$, $T_2 = 4038 \text{ s}$, $T_3 = 2423 \text{ s}$).
18. Teken voor de middelste hiervan een lengteprofiel van de oppervlakte-uitwijkingen en van de debieten op een moment waarop $\omega t = \pi/4$ (in verg. 4.27), voor een willekeurige amplitude. Ga het verband tussen beide na inclusief de tekens.
19. Hetzelfde als in de vragen 17 en 18, nu voor een tweezijdig gesloten bekken. (Antw.: $T_1 = 6058 \text{ s}$, $T_2 = 3029 \text{ s}$, $T_3 = 2019 \text{ s}$)
20. Bereken de verhouding (r) van de amplitude van de oppervlakte-uitwijking aan het gesloten eind respectievelijk het open eind van een bekken met de afmetingen als in vraag 17, maar nu voor een gedwongen beweging met een periode $T = 3$ uur en $T = 6$ uur. (Antw.: $r = 5.26$ resp. 1.57) Interpreteer de uitkomsten. Leg daarbij een relatie met de eerder berekende eigenfrequenties en bijbehorende lengteprofielen van het vrije oppervlak.
21. Neem de situatie van vraag 17 voor het geval $T = 6$ uur en met het extra gegeven dat de amplitude van de oppervlakte-uitwijking aan het gesloten eind 1 m bedraagt. Bereken de amplitude van het debiet op de volgende afstanden vanaf het gesloten

einde: $x = 1$ km, 2 km, 3 km, 5 km en 10 km (antw.: oplopend van $175 \text{ m}^3/\text{s}$ in $x = 1$ km tot $1720 \text{ m}^3/\text{s}$ in $x = 10$ km). Maak een schets van het verloop met x . Interpreteer de uitkomsten in relatie tot de kombergingsbenadering.

5 Translatiegolven

In dit hoofdstuk worden translatiegolven behandeld, d.w.z. min of meer pulsvormige (in tegenstelling tot oscillerende) lopende storingen in debiet en waterstand. Een enkelvoudige translatiegolf vormt een verbinding tussen twee min of meer uniforme maar onderling verschillende stromingsregimes. We gaan er van uit dat translatiegolven zo snel verlopen dat de weerstand daarin lokaal geen rol speelt (zie Tabel 3.1).

Aansluitend aan het voorgaande hoofdstuk beginnen we met relatief lage translatiegolven, waarvoor we de advectione termen verwaarlozen. Dit komt overeen met de uitgangspunten die in H. 4 zijn gebruikt. Het verschil is dat we hier uitsluitend translatiegolven behandelen (en b.v. niet harmonische schommelingen in bekkens), en meer op technische en natuurlijke verschijnselen ingaan.

Na behandeling van lage translatiegolven komen enkele effecten aan bod die zich voordoen in hoge translatiegolven, waarvoor de advectione termen in rekening worden gebracht.

5.1 Lage translatiegolven

Basismodel

Lage translatiegolven doen zich voor in een waterloop bij een niet te sterke verandering van het debiet respectievelijk de waterstand. Een voorbeeld is een schutgolf in een sluiskolk of in het aangrenzend scheepvaartkanaal als gevolg van het nivelleren van een sluiskolk. De golfhoogte van deze translatiegolven wordt bewust relatief klein gehouden, door geschikte programmering van de schuiven waarmee het debiet wordt gereguleerd, om hinder voor afgemeerde en varende schepen te beperken. Daarom kan in deze translatiegolven de advectione versnellingsterm worden verwaarloosd. De (lineaire) theorie van het voorgaande hoofdstuk is dus een bruikbaar model voor deze lage translatiegolven, met als belangrijk resultaat dat **per lopende golf** geldt

$$\delta Q = Bc \delta h \quad (5.1a)$$

Hierin is δh de door de golf veroorzaakte waterstandsverhoging (die ook negatief kan zijn), en is δQ de debietvariatie, positief gerekend in de looprichting van de golf. De voortplantingssnelheid c is gegeven door

$$c = \sqrt{\frac{g A_s}{B}} \quad (5.2a)$$

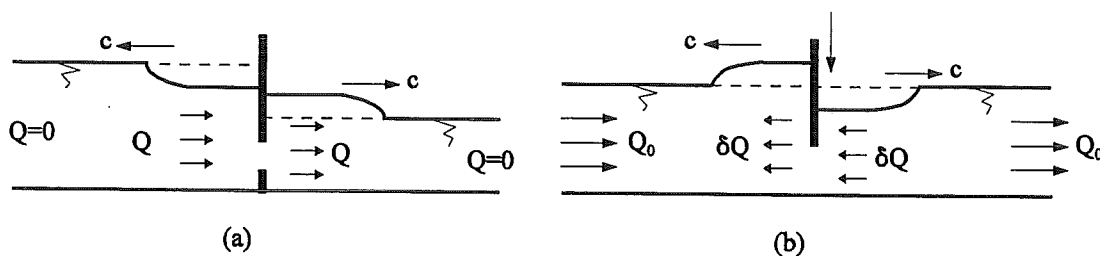
In twee-dimensionale stromen met (ongestoorde) diepte d reduceert dit tot

$$\delta U = \frac{\delta h}{d} c = \sqrt{\frac{g}{d}} \delta h = \frac{g}{c} \delta h \quad (5.1b)$$

respectievelijk

$$c = \sqrt{gd} \quad (5.2b)$$

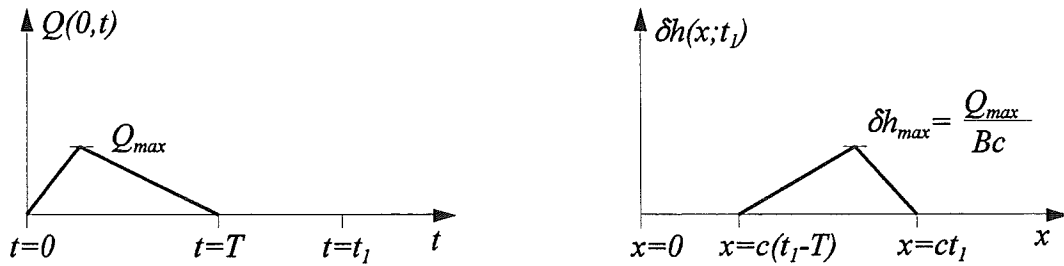
In Figuur 5.1 zijn twee gevallen geschetst van de opwekking van translatiegolven. Het eerste (a) betreft het abrupt openen van een schuif tussen een sluiscolk en het aangrenzend kanaalvak, met aanvankelijk stilstaand water en verval. Het tweede (b) betreft het abrupt gedeeltelijk sluiten van een kering in stromend water. In beide gevallen is de steilheid van het goffront te beperken door geleidelijk te openen respectievelijk te sluiten. Merk op dat bij een negatieve translatiegolf de daardoor geïnduceerde stroomsnelheid tegengesteld is gericht aan de looprichting (zie vergelijking 4.20-).



Figuur 5.1 Translatiegolven a.g.v opening schuif in stilstaand water met verval (a) en sluiting kering in stromend water (b)

Oplossing bij gegeven randvoorwaarde

Stel nu dat we de oppervlakte-uitwijkingen en stroomsnelheden moeten berekenen in een kanaalpand dat in $x = 0$ grenst aan een gemaal dat vanaf een tijdstip $t = 0$ water uitslaat op het kanaal volgens een tijdsafhankelijk verloop $Q(0,t)$ zoals geschetst in Figuur 5.2. (Het getekende verloop is niet realistisch maar is gekozen als illustratie.) Uit dit gegeven volgt met gebruikmaking van (5.1) meteen de waterstandsvariatie ter plekke. Zodra een variatie in debiet en dus in waterstand zich voordoet bij de sluisdeur gaat deze met snelheid c het kanaal in lopen. Daarom is op elk tijdstip t de variatie van debiet en waterstand in het kanaal, dus als functie van x , een letterlijke weerspiegeling van de variaties van deze grootheden in $x = 0$ als functie van t (zie Figuur 5.2).



Figuur 5.2 Translatiegolf in kanaal a.g.v. éézijdige debietvariatie

In situaties met een vrij verval, zoals in Figuur 5.1, is niet het debiet gegeven als functie van de tijd maar het oppervlak van de doorstroomopening $A(t)$, te regelen door bediening van schuiven of kleppen. Het bijbehorend debiet is dan bij gegeven A afhankelijk van het momentane verval over de opening, zeg $h_1 - h_2$, volgens een klassieke afvoerformule $Q = \mu A \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$. Dit is overigens niet voldoende voor de berekening van Q bij gegeven μA , want de waarden van h_1 en h_2 zijn zelf ook van Q afhankelijk, via (5.1). Maar in totaal is het aantal vergelijkingen juist voldoende voor de bepaling van debiet en waterstanden op elk moment, voor gegeven verloop van $\mu A(t)$.

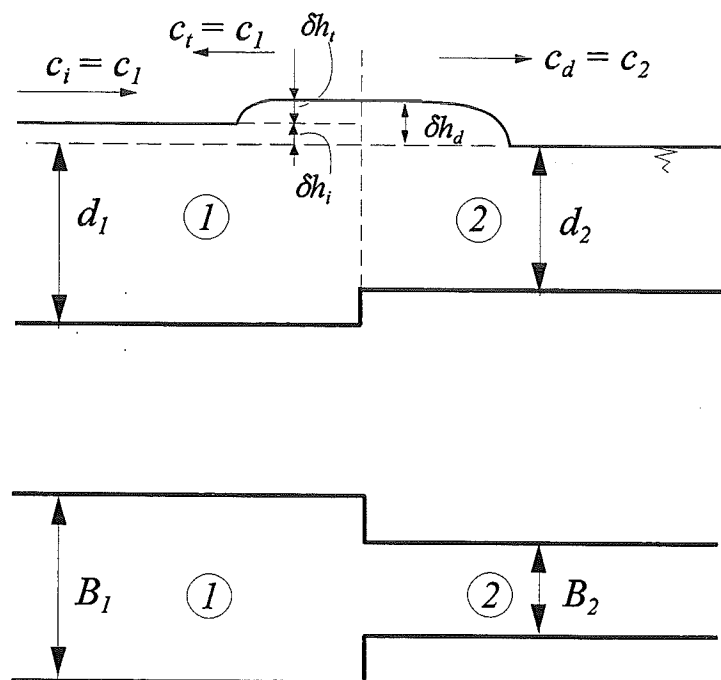
Voorbeeld

Een schuif in een kering tussen een reservoir en een kanaal ($A_s = 80 \text{ m}^2$, $B = 30 \text{ m}$) wordt plotseling geopend tot een effectief doorstroomoppervlak $\mu A = 4 \text{ m}^2$. Aanvankelijk is het peil in het kanaal 3 m lager dan in het reservoir. Bereken het debiet door de schuif en de stroomsnelheid in het kanaal die daardoor ontstaat.

Antwoord: $Q/\zeta = Bc = \sqrt{gA_s B} = 153 \text{ m}^2/\text{s}$. Voor het debiet geldt $Q = \mu A \sqrt{2g\Delta h}$, waarin Δh het verval is over de schuif. Aanvankelijk is dit $\Delta h_o = 3 \text{ m}$, maar vanwege de translatiegolf is de feitelijke waarde iets kleiner. Aanvankelijk zien we af van dat verschil en berekenen we een eerste schatting van het debiet als $Q_o = \mu A \sqrt{2g\Delta h_o} = 30.7 \text{ m}^3/\text{s}$. Daarmee komt overeen een eerste schatting van de hoogte van de translatiegolf gelijk aan $\zeta_o = Q_o/Bc = 0.20 \text{ m}$. Dit is ca 7% van Δh_o , zodat Q ca. 3.5% kleiner zal zijn dan Q_o ofwel ca. $29.7 \text{ m}^3/\text{s}$. (Een exacte berekening geeft een vierkantsvergelijking in Q waarvan de oplossing vrijwel dezelfde is als de hier gegeven schatting.) Bij $Q = 29.7 \text{ m}^3/\text{s}$ hoort een stroomsnelheid in het kanaal gelijk aan $Q/A_s = 0.37 \text{ m/s}$.

Partiële reflectie

Stel vervolgens dat het profiel van het kanaal ergens abrupt verandert, waarbij de waarden van het stroomvoerend oppervlak (A_s) en de bergende breedte (B) van ($A_{s,1}$, B_1) overgaan in ($A_{s,2}$, B_2) (en de gemiddelde diepte $d = A_s/B$ van d_1 in d_2), zoals aangegeven in Figuur 5.3. Hoe beïnvloedt dat de voortplanting van een translatiegolf? We kunnen in het algemeen niet een ongestoorde voortplanting verwachten. Stel b.v. dat het profiel nauwer wordt, dan zal een positieve reflectie optreden in het kanaalpand van waaruit de golf kwam, terwijl in het aansluitende pand er een doorgaande golf zal zijn.



Figuur 5.3 Translatiegolven bij verandering dwarsprofiel

Het gaat nu om de bepaling van de debieten en waterstandsvarianties van deze drie golven:

- * inkomend: δQ_i , δh_i in het kanaalpand 1 met $A_{s,1}$, B_1
- * teruggekaatst: δQ_t , δh_t in het kanaalpand 1 met $A_{s,1}$, B_1
- * doorgaand: δQ_d , δh_d in het kanaalpand 2 met $A_{s,2}$, B_2

Merk op dat we drie golven onderscheiden maar slechts twee kanaalgedeelten, en daarom ook twee paren waarden (A_s , B): die in het vak vanwaar de golf binnenkomt en waarheen hij

terugkaatst, en die van het vak van de doorgaande golf. In de uitwerking gaan we uit van lage storingen, en verwaarlozen we de invloed daarvan op de loopsnelheid van de golven. Met andere woorden, waarden van c worden berekend uit de ongestoorde diepten volgens

$$c_1 = \sqrt{gA_{s,1}/B_1} = \sqrt{gd_1} \quad \text{en} \quad c_2 = \sqrt{gA_{s,2}/B_2} = \sqrt{gd_2}.$$

Uit oogpunt van continuïteit van debiet en waterstand volgen twee voorwaarden ter plaatse van de abrupte overgang (zie Figuur 5.3):

$$\delta h_i + \delta h_t = \delta h_d \quad (5.3)$$

$$\delta Q_i + \delta Q_t = \delta Q_d \quad \text{ofwel} \quad B_1 c_1 (\delta h_i - \delta h_t) = B_2 c_2 \delta h_d \quad (5.4)$$

(Q positief gerekend bij stroming in de richting van kanaalpand 1 naar kanaalpand 2.) Uit (5.4) volgt dat de Bc-verhouding bepalend is. We definiëren daarom

$$\gamma \equiv \frac{B_2 c_2}{B_1 c_1} = \sqrt{\frac{A_{s,2} B_2}{A_{s,1} B_1}} \quad (5.5)$$

Verder drukken we de hoogten van de teruggekaatste en van de doorgelaten golf uit in die van de invallende:

$$r_t \equiv \frac{\delta h_t}{\delta h_i} \quad \text{en} \quad r_d \equiv \frac{\delta h_d}{\delta h_i} \quad (5.6)$$

Daarmee gaan (5.3) en (5.4) over in

$$1 + r_t = r_d \quad \text{respectievelijk} \quad 1 - r_t = \gamma r_d \quad (5.7)$$

waaruit volgt

$$r_t = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \quad \text{en} \quad r_d = \frac{2}{1 + \gamma} = 1 + r_t \quad (5.8)$$

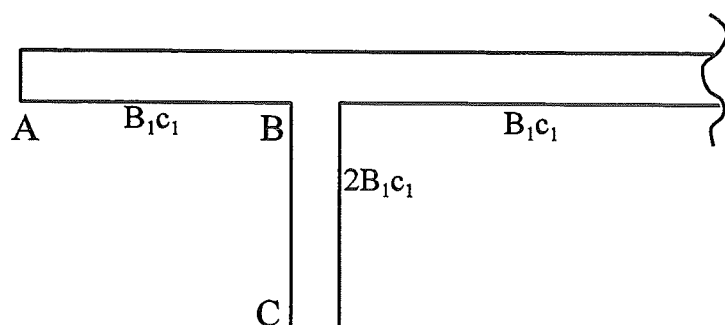
Merk op:

1. Er treedt geen reflectie op wanneer Bc bij de overgang niet verandert.
2. Bij verkleining van Bc is de reflectie positief, bij vergroting negatief.
3. Voor $B_2 c_2 \ll B_1 c_1$ (sterke profielverkleining) is de (positieve) reflectie vrijwel 100% en is (dus) de doorgaande golf vrijwel twee keer hoger dan de inkomende (maar het doorgaand debiet is gering omdat $B_2 c_2$ relatief klein is).

Bovenstaande methode kan zonder problemen ook worden toegepast bij splitsingspunten, met dit verschil dat er dan vier of meer golven in het geding zijn. (Werk dit zelf uit.)

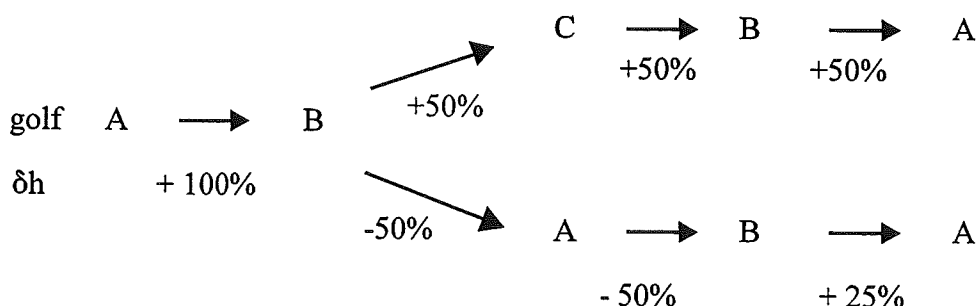
Voorbeeld

Een praktijkvoorbeeld van hinderlijke invloed van reflecties deed zich voor bij de sluis te Born. Zoals geschetst in Figuur 5.4 bevindt zich op enige afstand van de sluis (punt A) aan het doorgaande kanaal een insteekhaven (BC) met gesloten einde. De looptijd van translatiegolven van de sluis naar het splitsingspunt (B) is 3 minuten, evenals die van het splitsingspunt naar het eind van de haven (C). De waarde van Bc is in het kanaal $250 \text{ m}^2/\text{s}$ en in de haven $500 \text{ m}^2/\text{s}$. De schutgolf heeft een maximaal debiet van ca. $60 \text{ m}^3/\text{s}$ (het verval is 11 m) zodat de maximale waterstandsverhoging ter plaatse van de sluis (punt A) zonder reflecties 0.24 m bedraagt.



Figuur 5.4 Situatie bij sluis te Born

Als gevolg van de gelijke looptijd tussen A en B en tussen B en C kunnen reflecties die bij deze punten optreden elkaar versterken. Dit is in het volgende schema uitgewerkt voor de situatie dat er op $t = 0$ een (kort durende) waterstandsverhoging met een waarde van 100% vanaf de sluis het kanaal inloopt. (Opgave: bereken zelf de waarden van r_i en r_d bij nadering van het splitsingspunt vanuit A en vanuit C.) Na 9 minuten lopen er twee positieve golven van B naar A met een hoogte van 50% respectievelijk 25% van de oorspronkelijke, zodat op het moment dat deze in A terugkaatsen (na 12 minuten) er momentaan een waterstandsverhoging optreedt van theoretisch 1.5 keer de oorspronkelijke, ofwel ca. 0.35 m .



N.B. Golven met een lengteschaal die veel groter is dan de dwarsafmeting van een kanaal, rivier etc. gaan gemakkelijk “een hoekje om”. In schaalmodellen van riviergedeelten is daar wel gebruik van gemaakt door een lang gedeelte waar de aandacht niet specifiek naar toe ging, maar waarin wel de golfvoortplanting op schaal moest worden gereproduceerd, in de laboratoriumhal in zigzagvorm te bouwen, om in de hal te passen. Voor golven met relatief kleine lengteschaal gaat dit niet op. (We kunnen wel om een hoek horen maar niet zien.)

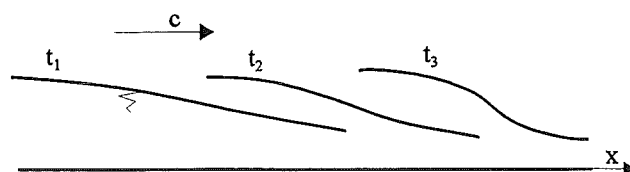
5.2 Hoge translatiegolven

We gaan nu in op hogere translatiegolven en gaan daarvoor enkele gevolgen na van het niet verwaarlozen van de advectione termen in de bewegingsvergelijking. Door het niet-lineaire karakter hiervan is de wiskundige behandeling veel gecompliceerder dan voor lineaire vergelijkingen, zoals die in Hoofdstuk 4 en in de voorgaande paragraaf zijn behandeld. Daarom worden hier slechts enkele aspecten van de voortplanting van deze golven belicht. (In Hoofdstuk 6 wordt een meer volledige theorie behandeld, die gebruik maakt van z.g. karakteristieken.)

Golfvervorming

In het voorgaande is uitgegaan van lage golven, waarbij de invloed daarvan op de loopsnelheid van de golven is verwaarloosd. Als gevolg hiervan is onvervormde voortplanting mogelijk (bij constant profiel en zonder demping). Wat gebeurt er met lange golven waarvan de hoogte niet is te verwaarlozen? Voor dat type golven zijn in de literatuur verschillende benaderingen afgeleid, die allemaal inhouden dat voortplanting van dergelijke golven gepaard gaat met **vervorming**.

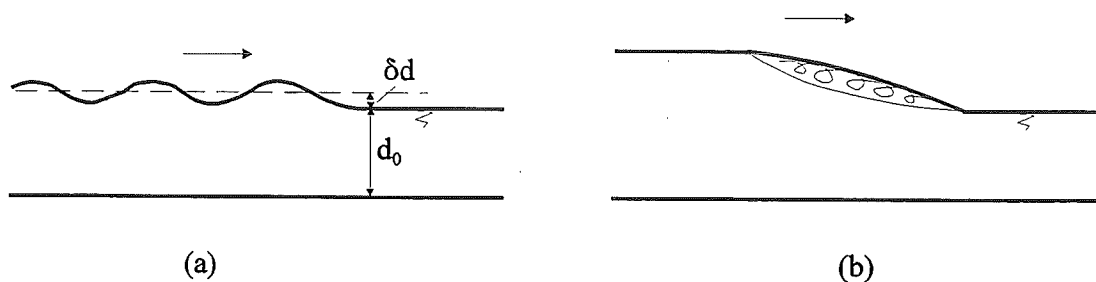
Het verschijnsel van golfvervorming als gevolg van niet verwaarloosbare hoogte is zonder een formele afleiding (zie daarvoor Hoofdstuk 6) plausibel te maken door de benadering $c = \sqrt{gd}$ lokaal toe te passen op een langzaam variërende lange golf. Daaruit volgt dat de voortplantingssnelheid groter is naarmate de diepte groter is. Anders gezegd: waar de golf hoger is loopt hij harder dan waar hij lager is. Door het in rekening brengen van de invloed van de stroomsnelheid op de golfsnelheid t.o.v. de bodem ($U \pm c$ in plaats van $\pm c$) wordt dit effect nog sterker. Er treedt dus vervorming op, en wel zo dat een positief front steiler wordt (zie Figuur 5.5) en een negatief front flauwer.



Figuur 5.5 Golfvervorming bij positief front

Omdat een positieve golf steeds steiler wordt zal deze op de duur het karakter van een schokgolf (Engels: bore) kunnen krijgen. Dit hoeft overigens niet altijd te gebeuren. Immers, de beschikbare voortplantingsafstand is misschien onvoldoende. Weerstand zal de schokhoogte doen afnemen en daardoor de ontwikkeling van een schok tegengaan. (Het is een misvatting te denken dat bodemwrijving de oorzaak is van het ontstaan van de schokgolf, zoals in populaire literatuur wel eens wordt gesuggereerd; weerstand was in bovenstaande theorie immers ook buiten beschouwing gebleven, en toch leidde dat tot de voorspelling van schokgolven.) Bovendien is de veronderstelling van hydrostatische druk niet meer van toepassing wanneer het front steil wordt, waardoor de lange-golf theorie eigenlijk geen uitspraken kan doen over de beweging in dit stadium. (Het niet-hydrostatisch zijn van de druk heeft een stabiliserende werking, zelfs zo dat in theorieën die dat in rekening brengen wel vormvaste golven mogelijk zijn, zoals trouwens ook wordt waargenomen.)

Er doen zich twee typen schokgolven in lange golven voor. Bij voldoende lage relatieve spronghoogten ($\delta d/d_0 < \text{ca. } 0.28$) is het front golvend (undular bore), en bij hogere sprongen is er sprake van een watersprong (turbulent bore) (zie Figuur 5.6).



Figuur 5.6 Golvende schokgolf (a) en turbulente schokgolf of watersprong (b)

Vloedsprong

Schokgolven kunnen ontstaan als gevolg van manipulaties met technische regelwerken, maar ook als gevolg van natuurlijke processen. Van de laatste categorie is vooral de z.g.

vloedsprong ("tidal bore") bekend. Die doet zich op een aantal plaatsen in de wereld voor bij opkomend getij, vooral bij springtij, in de gedaante van een front met als meest spectaculaire vorm een hoge lopende watersprong. Figuur 5.7 geeft een beeld van de vloedsprong in de Qiang Tang (vroeger geschreven als Tsien-Tang) rivier in China. Hier wordt als voorbeeld de "Severn bore" kort beschreven.



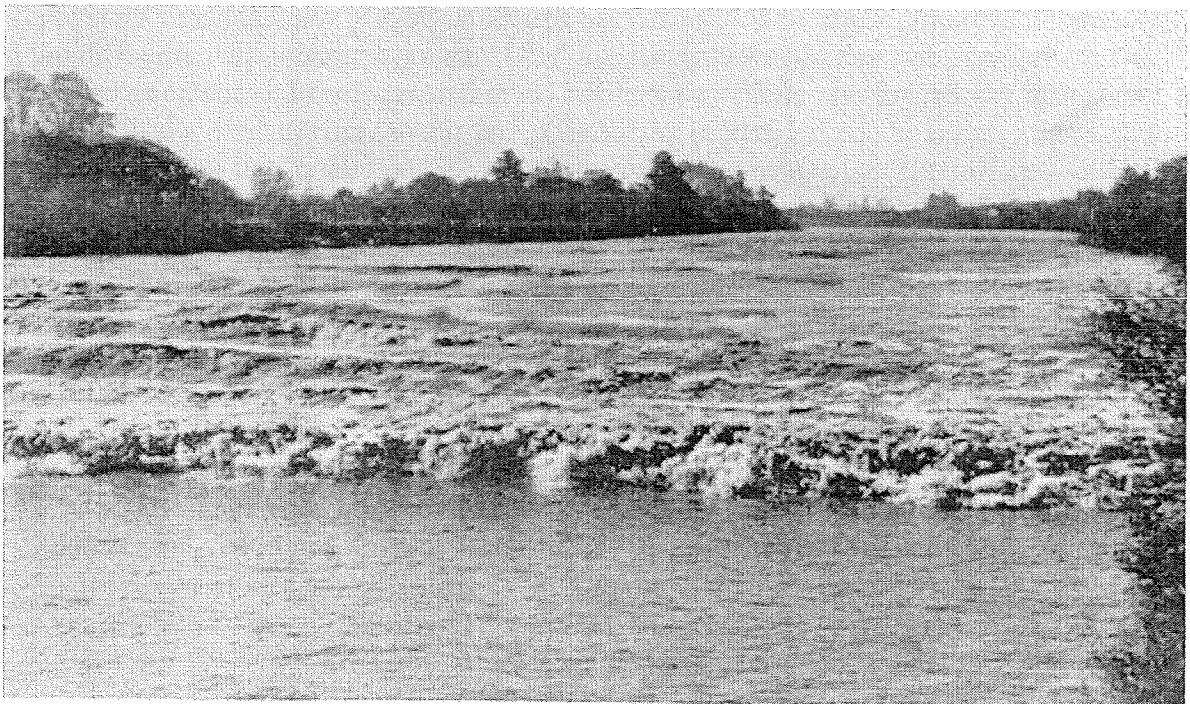
Figuur 5.7 Vloedsprong in de Qiang Tang (bron: Thorade, 1931)

De rivier de Severn mondt uit in het Kanaal van Bristol. Het getij, dat van de Atlantische Oceaan binnenkomt, wordt in het Kanaal van Bristol als gevolg van resonantie en profielvernauwing versterkt met ongeveer een factor 3. Als gevolg daarvan is de getijbeweging in het Kanaal van Bristol zeer sterk, tot meer dan 10 m hoogteverschil tussen hoog water en laag water (variërend met het getij in de oceaan). Het sterke verticale getij wordt landinwaarts vervormd, hetgeen op de Severn tot gevolg heeft dat in een aantal getijden rondom springtij (totaal ongeveer 250 keer per jaar) een vloedsprong ontstaat bij opkomend water. Deze loopt over de volle breedte van de rivier naar binnen met een snelheid van enige meters per seconde. Afhankelijk van het getij en de lokale condities, vooral de diepte, is het front golvend (undular bore) (Figuur 5.8a) of turbulent (lopende watersprong) (zie Figuur 5.8b). Een individuele vloedsprong in de Severn heeft een levensduur van ruim 2 uur en legt ca. 30 km af.

Het al dan niet optreden van een vloedsprong is behalve van de sterkte van het getij vooral afhankelijk van het verloop van breedte en diepte. Door baggerwerken is in veel riviermonden de diepte zo groot geworden dat een aanvankelijk regelmatig optredende vloedsprong geheel is verdwenen (o.a. in de Seine).



Figuur 5.8a Vloedsprong in de Severn met golvend front (bron: Rowbotham, 1970)

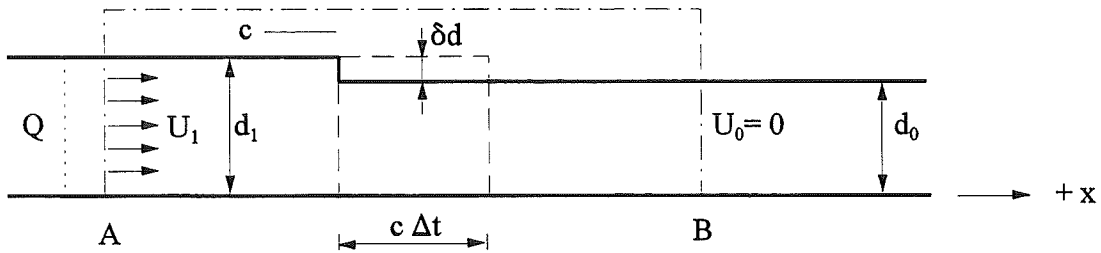


Figuur 5.8b Vloedsprong in de Severn met turbulent front (bron: Rowbotham, 1970)

Schokgolf

Tot slot van dit hoofdstuk gaan we uit van de toestand waarin een schokgolf zich al heeft gevormd als overgang tussen twee gebieden met een uniforme toestand, en gaan we de loopsnelheid daarvan berekenen. Voor een lage golf is dit al behandeld in H. 4. Voor de eenvoud beperken we ons tot een twee-dimensionale situatie (geen zijdelingse variaties).

We gaan uit van een schokgolf die een gebied van rust binnenloopt ($U_0 = 0$) met ongestoorde diepte d_0 . Achter het front is de stroming eenparig met diepte $d_1 = d_0 + \delta d$ en snelheid U_1 (zie Figuur 5.9).



Figuur 5.9 Schokgolf met balansgebied

De lange-golftheorie is op het steile front niet van toepassing, maar wel op de gebieden aan weerszijden, waarvan de parameters (Q en d) aan elkaar worden gekoppeld via balansvergelijkingen “over de schok heen”.

De volumebalans p.e.v. breedte voor het gebied AB dat het golffront insluit geeft

$$U_1 d_1 = c(d_1 - d_0) = c \delta d \quad (5.9)$$

en de impulsbalans (zie par. 4.2)

$$\frac{1}{2} \rho g d_1^2 + \rho U_1^2 d_1 - \frac{1}{2} \rho g d_0^2 = \rho U_1 d_1 c \quad (5.10)$$

Eliminatie van U_1 en uitwerken geeft

$$c = \sqrt{g \frac{d_0 + d_1}{2} \frac{d_1}{d_0}} \quad (5.11)$$

Merk op dat dit de snelheid is waarmee de golf een gebied van stilstaand water binnenloopt (want $U_0 = 0$ gesteld). We kunnen dit veralgemeniseren door te zeggen: dit is de golfsnelheid ten opzichte van het water ervoor. Wanneer dit stroomt, met snelheid U_0 , dan is de golfsnelheid ten opzichte van de bodem gelijk aan $U_0 + c$. Omdat $d_1 > d_0$ volgt uit (5.11) dat $c > \sqrt{g d_0}$ (en zelfs $c > \sqrt{g d_1}$). We zien hieruit dat c in deze benadering groter is dan

volgens de lineaire benadering, en wel destemeer naarmate de golfhoogte toeneemt. Wanneer we de relatieve golfhoogte $\epsilon = \delta d/d_0$ invoeren dan is (5.11) te schrijven als

$$c = \sqrt{gd_0(1+\frac{1}{2}\epsilon)(1+\epsilon)} \quad (5.12)$$

Voor lage waarden van ϵ , en met weglating van termen van orde (ϵ^2), is dit te benaderen met

$$c \approx \sqrt{gd_0(1+3\epsilon/2)} \approx (1+3\epsilon/4)\sqrt{gd_0} = (1+\frac{3}{4}\frac{\delta d}{d_0})\sqrt{gd_0} \quad (5.13)$$

Wanneer ϵ nadert tot nul ($d_1 \rightarrow d_0$) vinden we de bekende uitdrukking $c = \sqrt{gd_0}$ terug die geldt bij verwaarlozing van de invloed van de golfhoogte op c (zoals in H. 4).

5.3 Vragen en opgaven

1. Maak een samenvatting van dit Hoofdstuk.
2. Werk de antwoorden uit op de vragen 8 t/m 11 van Hoofdstuk 4 als je dat nog niet hebt gedaan.
3. Wat verstaan we onder translatiegolven?
4. A_s en B van een kanaal gaan ergens abrupt over van 150 m^2 en 50 m naar 250 m^2 respectievelijk 80 m . Een lage translatiegolf nadert de overgang vanuit het nauwere naar het ruimere kanaalvak. Bereken de verhouding van de hoogten van teruggekaatste en doorgelaten translatiegolven en van de bijbehorende debieten. (Antw.: $r_t = -0.24$, $r_d = 0.76$; debietverhoudingen (in absolute waarde) zijn 0.24 resp. 1.24)
5. Doe hetzelfde voor nadering vanuit tegenovergestelde richting. (Antw.: $r_t = 0.24$, $r_d = 1.24$; debietverhoudingen (in absolute waarde) zijn 0.24 resp. 0.76)
6. Een irrigatiekanaal ($A_s = 100 \text{ m}^2$, $B = 30 \text{ m}$) staat via een inlaatwerk in verbinding met een diep reservoir. De schuif van het inlaatwerk wordt bij een initieel verval van 4 m plotseling geheven waardoor er een effectieve afvoeropening (μA , waarin μ de afvoercoëfficiënt is en A het netto doorstroomoppervlak van de opening) ontstaat van 5 m^2 . Bereken het debiet en de hoogte van de translatiegolf die daardoor ontstaat in het kanaal voor twee gevallen:
 (a) met verwaarlozing van de invloed van de translatiegolf op het verval
 (b) met deze invloed in rekening gebracht
 (Antw. (a): $Q = 44.3 \text{ m}^3/\text{s}$, $\zeta = 0.258 \text{ m}$; (b): $Q = 42.9 \text{ m}^3/\text{s}$, $\zeta = 0.250 \text{ m}$)

7. Verifieer de percentages in het schema horend bij Figuur 5.4.
8. Als we spreken van “lage” respectievelijk “hoge” translatiegolven, wat bedoelen we dan?
9. Waardoor vervormen translatiegolven met niet-verwaarloosbare hoogte?
10. Hoe onderscheiden positieve en negatieve golven zich van elkaar voor wat betreft de vervorming?
11. Welke invloed heeft weerstand op de vervorming van translatiegolven?
12. Noem enkele factoren die de vorming van een vloedspiong bevorderen.
13. Waarom komen er nu op veel minder plaatsen in de wereld dan een halve of een hele eeuw geleden vloedspriegen voor?
14. Leid een uitdrukking af voor de snelheid (t.o.v. de bodem) van een schokgolf (“bore”) tussen twee gebieden van uniforme stroming met diepten en stroomsnelheden d_1 en U_1 respectievelijk d_2 en U_2 . Ga na of de uitdrukking reduceert tot verg. (5.11) van de handleiding voor het geval de benedenstroomse snelheid gelijk is aan nul.
15. Een stalen drukleiding verandert ergens abrupt van diameter en wanddikte. Een drukgolf nadert deze overgang. Bereken de verhoudingen van drukvariaties en snelheden in de teruggekaatste en doorgelaten drukgolven ten opzichte van die van de inkomende.

6 Karakteristiekenmethode

6.1 Inleiding

Golfverschijnselen, ook die in dit hoofdstuk worden behandeld, hebben als kenmerk dat informatie door het beschouwde systeem loopt met eindige snelheid. Een lokale ingreep in het systeem, zoals het heffen van een schuif of het starten of stoppen van een pomp, of een onbedoelde storing, bereikt pas na eindige tijd andere punten. Inzicht hierin is van wezenlijk belang, zowel voor een goed beheer van dergelijke systemen als voor methoden van berekening. De z.g. methode van de karakteristieken is hiervoor het aangewezen hulpmiddel.

De verplaatsing van een storing in een ééndimensionaal systeem, zeg langs de x -as, in de loop van de tijd t , kan in het x,t -vlak worden weergegeven als een lijn waarvan de lokale richtingscoëfficiënt (dx/dt) de snelheid is waarmee de storing zich daar en dan voortplant. Dergelijke lijnen heten **karakteristieken**. Zij geven dus weer hoe de informatie door het systeem loopt. Dat is de belangrijkste reden om de methode hier te behandelen.

De bewegingsvergelijking en de continuïteitsvergelijking voor ééndimensionale lange-golf problemen vormen een stelsel eerste orde partiële differentiaalvergelijkingen (DVen) voor twee afhankelijke variabelen, de z.g. **toestandsgrootheden**, bijv. (h,Q) , als functie van twee onafhankelijke variabelen, x en t . Voor voldoende beginvoorwaarden en randvoorwaarden is de oplossing bepaald. Voor het paar (h,Q) bestaat deze uit een verzameling waarden van $h(x,t)$ en $Q(x,t)$, die kunnen worden voorgesteld als een oppervlak in de (h,x,t) -ruimte respectievelijk de (Q,x,t) -ruimte, de zgn. *integraaloppervlakken*. Deze “hangen” als het ware boven het x,t -vlak, opgehangen aan de begin- en randvoorwaarden.

Bij eindige-differentiemethodes voor het integreren van partiële DVen worden van tevoren punten gekozen in het rekengebied in het x,t -vlak, bijv. volgens een rechthoekig rooster, en wordt vervolgens in die punten de oplossing bepaald. In de hier te behandelen methode van de karakteristieken gebeurt dat niet. Daar wordt gerekend langs de karakteristieken.

Op basis van de volledige vergelijkingen, inclusief niet-lineaire termen zoals de advectione versnelling, is de golfvoortplantingssnelheid mee afhankelijk van de toestandsgrootheden, die niet van te voren bekend zijn. De ligging van de karakteristieken moet dan als deel van de voortgaande oplossing worden bepaald. Voor lage golven zijn de niet-lineaire termen te verwaarlozen. In die benadering is de golfvoortplantingssnelheid niet afhankelijk van de toestandsgrootheden, en is de loop van de karakteristieken dus van te voren bepaald, wat de oplossing uiteraard vergemakkelijkt. Dit is hetzelfde onderscheid als dat tussen lage en hoge translatiegolven uit het voorafgaande hoofdstuk.

Wiskundig gezien is het bijzondere van karakteristieken dat daarlangs de twee *partiële* DVen overgaan in twee *gewone* DVen, elk met effectief slechts één onafhankelijke variabele. In feite hebben we zoiets al gezien in Hoofdstuk 4. Daar werd een lage maar overigens willekeurige initiële storing opgesplitst in twee golfcomponenten die in tegengestelde richting lopen en die zich onafhankelijk van elkaar bewegen. Elk daarvan werd in Hoofdstuk 4

beschreven met een partiële DV (zie 4.16) die overging in een gewone DV (zie 4.17) mits dx/dt een voorgeschreven waarde had ($\pm c$), in het x - t vlak voorgesteld door een richting, leidend tot lijnen in dit vlak met deze voorgeschreven helling (zie Figuur 4.6). Dat zijn in feite karakteristieken.

Na bovenstaande inleiding, die bedoeld is om een globaal idee te geven van de methode van de karakteristieken, gaan we over tot de wiskundige formulering ervan in de volgende paragraaf. Daarna worden enkele afzonderlijke aspecten toegelicht en volgen toepassingen. Om aan te sluiten aan de voorgaande hoofdstukken beginnen we met open waterlopen, maar de principes van de methode van de karakteristieken zijn onverkort toepasbaar op drukgolven in gesloten leidingen. Aan het eind van dit hoofdstuk zal dat onderwerp aan de orde komen.

6.2 Formulering

Voor de eenvoud beperken we ons tot twee-dimensionale bewegingen boven een horizontale bodem, met stroomsnelheid (U) en diepte (d) als afhankelijke variabelen. De continuïteitsvergelijking luidt

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial U d}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

en de bewegingsvergelijking (voorlopig zonder weerstand)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial d}{\partial x} = 0 \quad (6.2)$$

In plaats van de diepte d voeren we tijdelijk als vervangende toestandsgrrootheid c in, die we hier definiëren (zonder er al een fysische betekenis aan te geven) als

$$c = \sqrt{gd} \quad (6.3)$$

Door substitutie hiervan in (6.1) (na deze met g te hebben vermenigvuldigd) en in (6.2) gaan deze over in

$$2 \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} + 2U \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (6.4)$$

en

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (6.5)$$

Door deze bij elkaar op te tellen ontstaat

$$\frac{\partial(U+2c)}{\partial t} + (U+c)\frac{\partial(U+2c)}{\partial x} = 0 \quad (6.6+)$$

Kortheidshalve definiëren we nu

$$R^+ = U+2c \quad (6.7+)$$

waarmee (6.6+) kan worden geschreven als

$$\frac{\partial R^+}{\partial t} + (U+c)\frac{\partial R^+}{\partial x} = 0 \quad (6.8+)$$

Het linkerlid is een meebewegende afgeleide van R^+ naar t , voor een waarnemer met snelheid $dx/dt = U + c$ (zie ook par. 4.4 vanaf verg. 4.14 t/m 4.17+). Een representatie equivalent aan (6.8+) is dus

$$\frac{dR^+}{dt} = 0 \quad (6.9+)$$

mits

$$\frac{dx}{dt} = U + c \quad (6.10+)$$

We gaan eenzelfde bewerking uitvoeren met wisseling van teken. Door (6.4) van (6.5) af te trekken ontstaat

$$\frac{\partial(U-2c)}{\partial t} + (U-c)\frac{\partial(U-2c)}{\partial x} = 0 \quad (6.6-)$$

We definiëren nu

$$R^- = U-2c \quad (6.7-)$$

zodat

$$\frac{dR^-}{dt} = 0 \quad (6.9-)$$

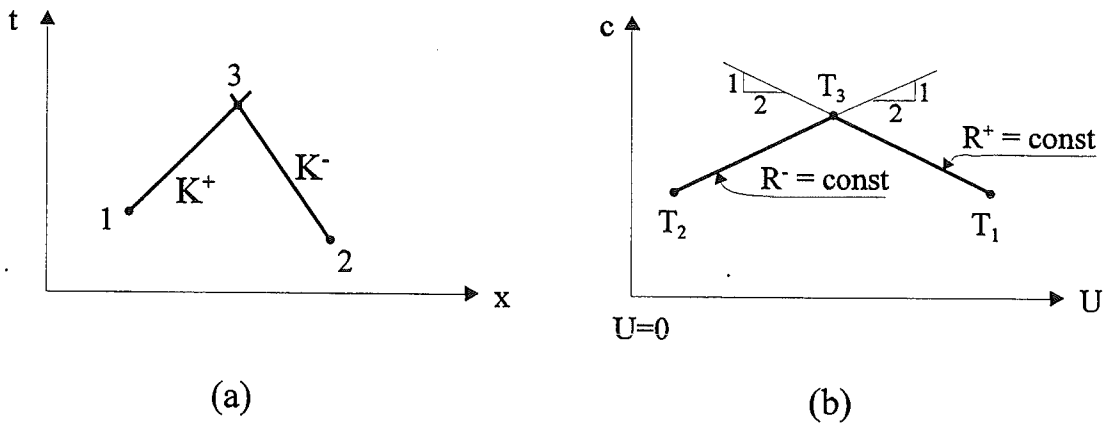
mits

$$\frac{dx}{dt} = U - c \quad (6.10-)$$

De snelheden $U \pm c$ noemen we de **karakteristieke snelheden**, en lijnen in het x,t -vlak waarvoor $dx/dt = U \pm c$ noemen we positieve respectievelijk negatieve **karakteristieken**, aan te duiden met het label (niet een grootte) K^+ respectievelijk K^- . De z.g. karakteristieke relaties (6.9) en (6.10) houden in dat R^+ en R^- constant zijn langs K^+ respectievelijk K^- . Zij ($R^\pm$) heten **Riemann invarianten**.

Voor de toepassingen is de clou van de methode van de karakteristieken als volgt.

Stel dat in twee dicht bij elkaar gelegen punten in het x,t -vlak (punten 1 en 2 in Figuur 6.1a) de toestand bekend is, d.w.z. de waarden van de afhankelijke variabelen U en c (of U en d). In het U,c -vlak van Figuur 6.1b, een z.g. **toestandsdiagram**, zijn deze twee toestanden weergegeven als de twee punten T_1 en T_2 (willekeurig gekozen). Dan zijn in de punten 1 en 2 de afgeleiden dx/dt ook bekend (volgens 6.10 $\pm$). Dat zijn snelheden langs de x -as, overeenkomend met richtingen in het x,t -vlak. We kunnen dan in het x,t -vlak vanuit de punten 1 en 2 een klein eindje in de betreffende richtingen gaan, voortgaand in de tijd, zodanig dat de twee lijnstukken elkaar snijden, in dit voorbeeld $dx/dt = U + c$ vanuit punt 1 en $dx/dt = U - c$ vanuit punt 2 (we nemen subkritische stroming aan, dus $|U| < c$).



Figuur 6.1 (a): x,t -diagram (b): U,c -toestandsdiagram

Langs deze lijnstukken in het x,t -vlak is R^+ respectievelijk R^- constant. Voor het snijpunt (punt 3) geldt dus

$$R_3^+ = R_1^+ \quad \text{en} \quad R_3^- = R_2^- \quad (6.11)$$

ofwel

$$U_3 + 2c_3 = U_1 + 2c_1 \quad \text{en} \quad U_3 - 2c_3 = U_2 - 2c_2 \quad (6.12)$$

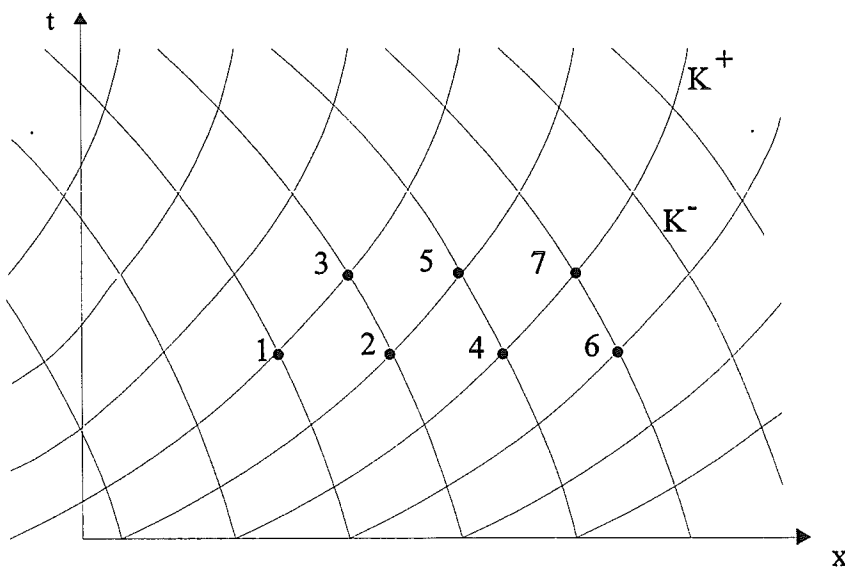
Uit deze eenvoudige lineaire algebraïsche vergelijkingen zijn U en c in het nieuwe punt 3 direct op te lossen:

$$U_3 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) + (c_1 - c_2) \quad \text{en} \quad c_3 = \frac{1}{4}(U_1 - U_2) + \frac{1}{2}(c_1 - c_2) \quad (6.13)$$

Grafisch kan de toestand in punt 3 (T_3) worden geconstrueerd als het snijpunt van de twee lijnstukken $R^+ = \text{constant}$ en $R^- = \text{constant}$, door de punten T_1 respectievelijk T_2 ; zie figuur 6.1b.

Let wel: de *ligging* van de punten in het x,t -vlak wordt met de *karakteristieken* bepaald, de *toestand* in die punten in het *toestandsdiagram* (uit de Riemann invarianten). In verschillende punten in het x,t -vlak kan heel goed dezelfde toestand heersen (denk aan uniforme stroming), wat voor al deze verschillende punten in het x,t -vlak overeenkomt met slechts één punt in het toestandsdiagram.

De berekening kan op dezelfde manier als voor punt 3 worden voortgezet vanuit andere punten dan 1 en 2, mits U en c daar bekend zijn. Voor de punten in Figuur 6.2 bijv. kan de toestand in 3 worden bepaald uit die in 1 en 2 (zoals hierboven), die in 5 uit die in 2 en 4, enz. Zo voortschrijdend kan de oplossing voor U en c in het betreffende interval van x en t worden bepaald. In de volgende paragrafen wordt dit uitgewerkt. Daarbij gaan we uit van een iets andere formulering dan de bovenstaande.



Figuur 6.2 x,t -vlak met enkele karakteristieken

Zoals hierboven aangegeven komen de vergelijkingen $R^\pm = U \pm 2c = \text{constant}$ overeen met rechte lijnen in het U,c -vlak (zie Figuur 6.3a). Uitgedrukt in de grootheden (U,d) komen de vergelijkingen $R^\pm = U \pm 2\sqrt{gd} = \text{constant}$ overeen met parabolen in het U,d -vlak, een ander toestandsdiagram (zie Figuur 6.3b).

Het constant zijn van $R^\pm$ houdt het volgende verband in tussen variaties van diepte en snelheid:

$$\delta U \pm 2\delta(\sqrt{gd}) = 0 \quad \text{ofwel} \quad \delta u \pm \sqrt{\frac{g}{d}} \delta d = 0 \quad \text{langs } K^\pm \quad (6.15)$$

Dit kan ook worden geschreven als

$$\delta d = \mp \sqrt{\frac{d}{g}} \delta U = \mp \frac{c}{g} \delta U \quad \text{mits} \quad \frac{dx}{dt} = U \pm c, \quad \text{waarin } c = \sqrt{gd} \quad (6.15)$$

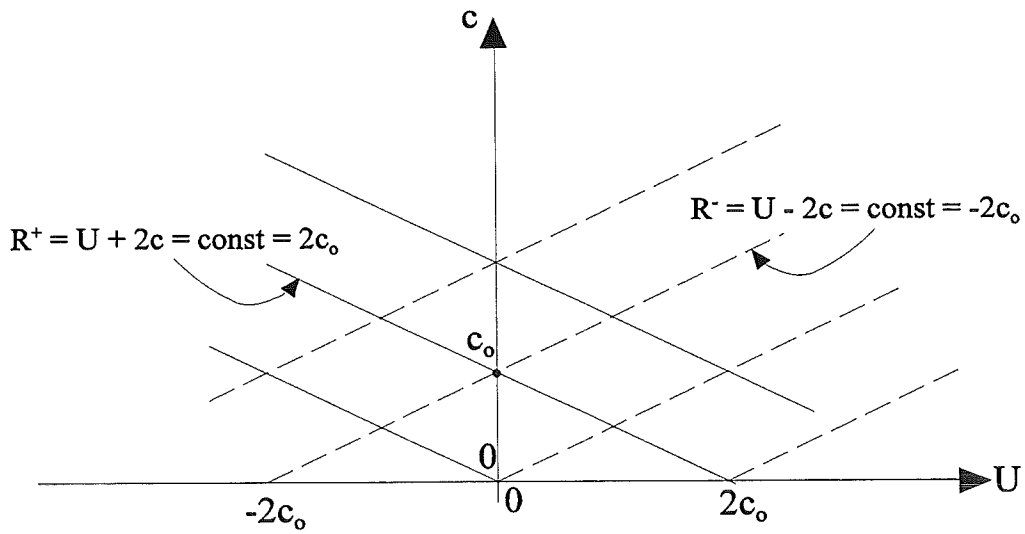
(Voor eindige variaties geldt dit niet omdat c met d varieert.) Voor lage storingen van een toestand met ongestoorde diepte d_0 wijkt de feitelijke diepte slechts weinig af van de oorspronkelijke; zie het gearceerde gebied in het U,d -vlak aangegeven in Figuur 6.3b. In dat kleine diepte-interval kunnen we de feitelijke diepte (niet zijn afgeleiden) vervangen door d_0 , en zijn de parabolen $R^\pm = U \pm 2\sqrt{gd} = \text{constant}$ als rechtlijnig te beschouwen, met een richtingscoëfficiënt gegeven door $dd/dU = \delta d/\delta U = \sqrt{d_0/g} = c_0/g$. Als we ook uitgaan van een laag getal van Froude is U in de karakteristieke snelheden te verwaarlozen t.o.v. c . Algebraïsch is dit uit te drukken in de volgende benadering van (6.15):

$$\delta d = \mp \sqrt{\frac{d_0}{g}} \delta U = \mp \frac{c_0}{g} \delta U \quad \text{mits} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_0, \quad \text{waarin } c_0 = \sqrt{gd_0} \quad (6.17)$$

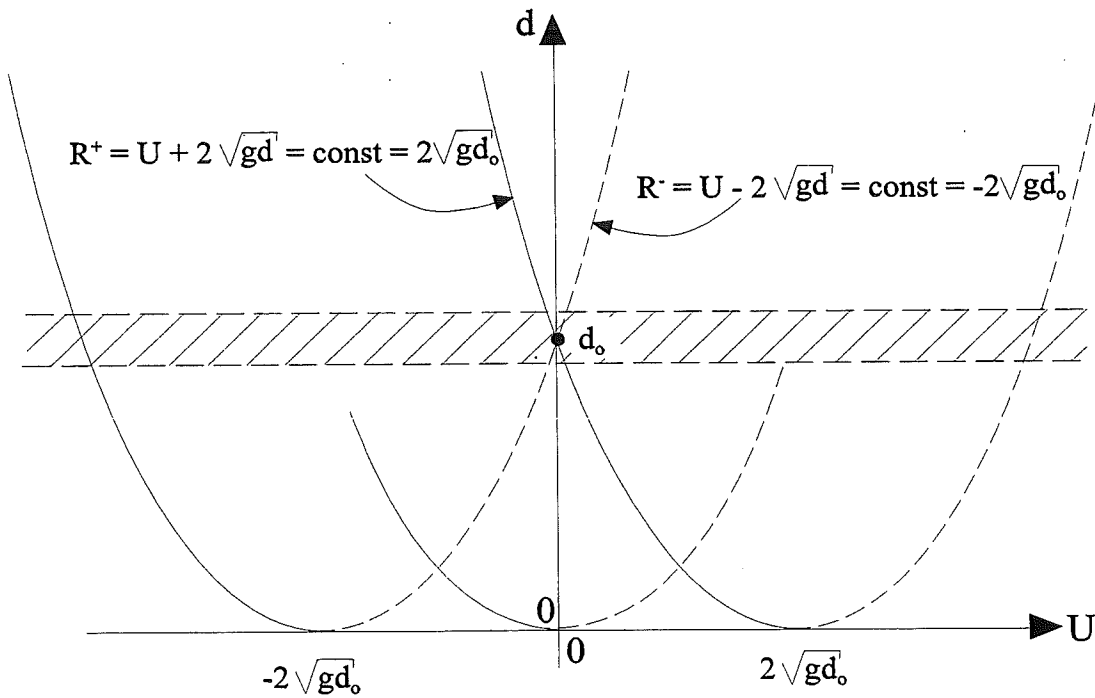
Deze benadering is alleen van toepassing op lage storingen.

6.3 Karakteristieken

De karakteristieke snelheden komen overeen met richtingen in het x,t -vlak, de z.g. **karakteristieke richtingen**. In elk punt van het x,t -vlak zijn er twee van zulke richtingen, overeenkomend met $dx/dt = U \pm c$. Deze kunnen grafisch worden weergegeven door in een aantal punten van het x,t -vlak twee lijnstukjes te tekenen met de lokale karakteristieke richting (als U en c bekend zijn). (Eigenlijk genereren we daarmee een lijnelementenveld zoals wordt gebruikt bij integratie van gewone DV'en; zie het vak Modelvorming.)



(a)



(b)

Figuur 6.3 a: U, c -vlak met (rechte) lijnen $R^\pm = U \pm 2c = \text{constant}$
 b: U, d -vlak met (parabolische) lijnen $R^\pm = U \pm 2\sqrt{gd} = \text{constant}$

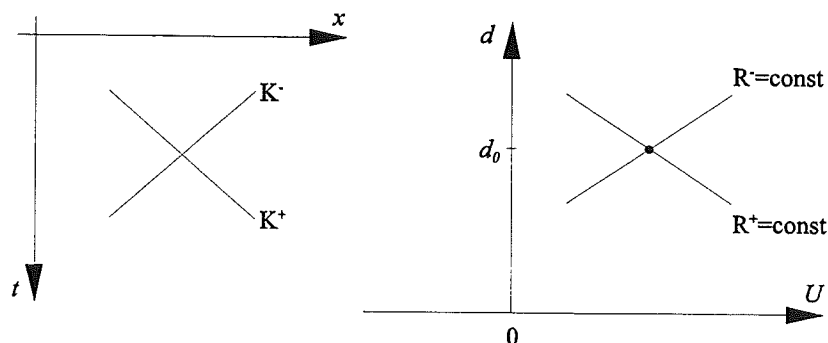
De twee korte lijnstukken getekend in Figuur 6.1a zijn delen van karakteristieken. Merk op dat de informatie over de stroming in de punten 1 en 2 via de karakteristieken punt 3 bereikt. Dus: **de karakteristieken zijn paden waarlangs de informatie loopt**. Dit is van groot belang voor een goed begrip van golfvoortplanting en (dus) voor het goed opleggen van randvoorwaarden in berekeningen of in praktijksituaties van peil- en debietregeling. (Het heeft weinig zin een schuif te heffen als het effect daarvan niet op de gewenste tijd op de gewenste plaats merkbaar wordt.)

Voor subkritische stroming ($|U| < c$) hebben de beide families van karakteristieken (K^+ en K^-) een richtingscoëfficiënt (dx/dt) van tegengesteld teken, bepaald door dat voor c : $dx/dt > 0$ voor K^+ en $dx/dt < 0$ voor K^- . In subkritische stromen gaat informatie dus zowel stroomopwaarts als stroomafwaarts. Voor superkritische stroming ($|U| > c$) zijn de tekens van de richtingscoëfficiënten van beide families bepaald door dat van U , en zijn zij dus gelijk, en wel positief als $U > 0$ en negatief als $U < 0$. Anders gezegd: in superkritische stromen gaat de informatie altijd stroomafwaarts.

Merk op dat de karakteristieke snelheden zowel van de stroomsnelheid als van de invloed van de storing op de waterdiepte afhangen. Zij moeten dus als deel van de oplossing worden bepaald. Als gevolg van variatie van U en d zijn de karakteristieken gekromd. Voor lage storingen gelden de benaderingen (6.16) en zijn de karakteristieken recht, onafhankelijk van de lokale storing.

Voor de grafische weergave en uitwerking maken we nog een nieuwe, praktische tekenafspraken.

Het ligt voor de hand om in de figuren de positieve U -richting in het toestandsdiagram en de positieve x -richting in het x,t -diagram gelijk te kiezen (beide naar rechts of beide naar links). Verder ligt het voor de hand om in het toestandsdiagram de diepte (dan wel de voortplantingssnelheid c) naar boven te laten toenemen. Dan is het handig om in het x,t -vlak de tijd t naar beneden te kiezen (zie Figuur 6.4). Daarmee wordt bereikt dat de positieve



Figuur 6.4 Oriëntatie x,t -diagram en U,d -diagram

respectievelijk negatieve karakteristieken (K^+ resp. K^-) in het x,t -vlak ongeveer parallel lopen aan de lijnen in het toestandsdiagram waarlangs R^+ resp. R^- constant is (i.t.t. min of meer haaks erop, zoals in Figuur 6.1), wat vergissingen in de toepassingen helpt voorkomen.

6.4 Beginvoorwaarden

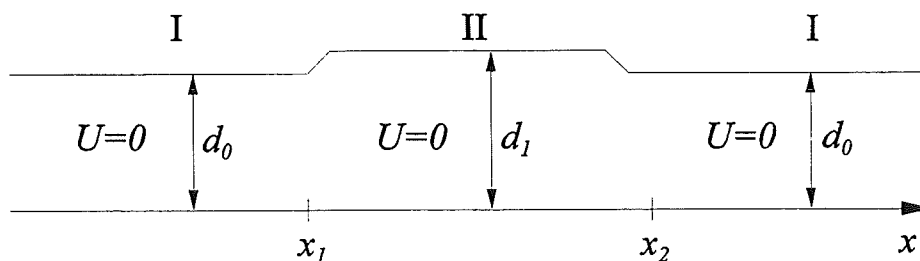
Tot hier toe zijn we er steeds van uit gegaan dat de toestand (U en c) bekend was in een reeks van nabije punten in het x,t -vlak, zoals de punten 1,2,4 en 6 in Figuur 6.2. De informatie die nodig is om dit proces te starten en gaande te houden moet ergens vandaan komen. Daartoe zijn **beginvoorwaarden** en **randvoorwaarden** nodig.

Ons startpunt is gegeven door de twee eerste-orde partiële DVen (6.1) en (6.2) met t en x als onafhankelijk variabelen. Voor een ondubbelzinnige oplossing hiervan zijn twee voorwaarden nodig in t en twee in x . Deze moeten aan bepaalde eisen voldoen om tot een goed gesteld probleem te komen. Randvoorwaarden (in x) worden behandeld in par 6.5. Hier gaan we uitsluitend in op de voorwaarden in t .

We gaan uit van **causaliteit**, wat inhoudt dat toekomstige condities geen invloed hebben op eerdere. Daarom moeten beide voorwaarden in t aan het **begin** van het beschouwde tijdvak worden opgelegd, dus **twee beginvoorwaarden**, bijv. één voor U en één voor c (of d). Deze leggen de aanvankelijke toestand vast in het gehele rekentraject, d.w.z. in het gehele beschouwde leidinggedeelte.

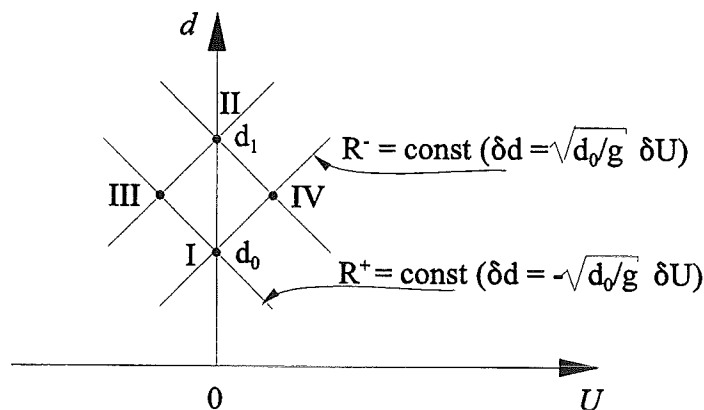
Als illustratie werken we een voorbeeld uit van een z.g. beginwaardenprobleem, geheel bepaald door de beginwaarden, waarbij in het beschouwde interval van plaats en tijd (nog) geen invloed merkbaar is van randpunten (begin of einde van de leiding). We gaan uit van een zeer lange, prismatische waterloop waarin de storingen kunnen weggelopen naar $\pm \infty$ zonder terugkaatsing (zie Figuur 6.5).

We nemen hetzelfde probleem als in Figuur 4.5, nl. een aanvankelijk constante, geringe waterstandsverhoging van eindige lengte (zeg van x_1 tot x_2) met aanvankelijk overal snelheid nul. We hanteren de benaderingen gegeven in (6.16).



Figuur 6.5 Begintoestand

Deze beginvoorwaarde is schematisch aangegeven in het toestandsdiagram van Figuur 6.6, gemerkt als toestand I (ongestoord) en II (lokale verhoging).



Figuur 6.6 U,d -toestandsdiagram

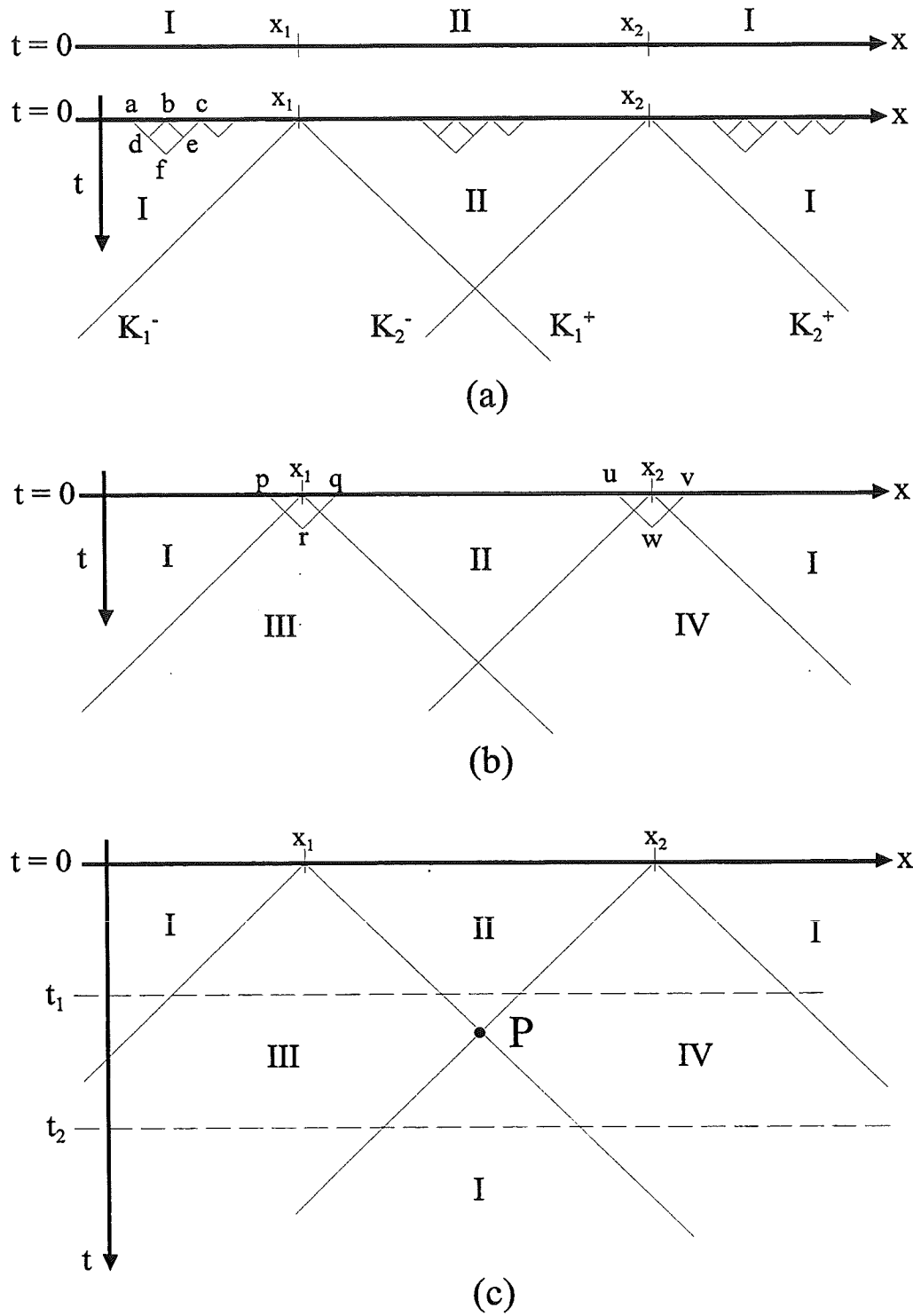
We gaan de beginvoorwaarden stap voor stap invoeren. In het x,t -vlak van Figuur 6.7a zijn vanuit het op $t = 0$ ongestoorde gebied $x < x_1$ enkele positieve en negatieve karakteristieken getekend, beginnend in de punten a, b en c. Omdat in deze punten op $t = 0$ dezelfde toestand heerst (I) geldt deze toestand ook in de snijpunten (d, e en f). Dit voortzettend is duidelijk dat in het gehele gebied links van de karakteristiek K_1^- de ongestoorde toestand I heerst. Hetzelfde geldt voor het gebied rechts van K_2^+ .

Uit eenzelfde detailbewerking in het middengedeelte is te zien dat in het driehoekige gebied tussen $t = 0$ en de karakteristieken K_1^+ en K_2^- nog steeds de daar aanvankelijke toestand II heerst. De invloed van de zones met aanvankelijk toestand I is daar nog niet doorgedrongen.

Voor het overzicht zijn in Figuur 6.7b de tot nu verkregen resultaten kort aangegeven, met weglating van de detailpunten a, b etc.

We gaan verder met een punt r, buiten de gebieden waar de begintoestand nog heerst (zie Figuur 6.7b), dat het snijpunt is van twee karakteristieken beginnend in de punten p en q. De toestand in r wordt dus bepaald uit die in p (toestand I) en q (toestand II). Grafisch is dit uitgewerkt in het toestandsdiagram van Figuur 6.6, waar is te zien dat in punt r een nieuwe toestand heerst (III). Op eenzelfde manier volgt dat in punt w, snijpunt van twee karakteristieken vanuit de punten u en v, een nieuwe toestand heerst (IV) (zie Figuur 6.6).

Dit voortzettend ontstaat het beeld dat geschetst is in Figuur 6.7c, bestaande uit twee storingen die elk onvervormd zich uit het oorspronkelijke gebied verwijderen (besloten tussen de karakteristieken K_1^- en K_2^- respectievelijk K_1^+ en K_2^+). Aanvankelijk overlappen deze elkaar, maar na enige tijd niet meer, waarna zij in het midden een gedeelte achterlaten van toenemende lengte, waarin geen storing meer aanwezig is (toestand I).


 Figuur 6.7 Voortschrijdende karakteristieken in x,t -vlak

Dit voorbeeld laat zien hoe het principe van de karakteristieken kan worden gebruikt om een beginwaardenprobleem op te lossen. De oplossing zelf is niet nieuw. Die is immers al gegeven in Hoofdstuk 4, Figuur 4.5. (De methode van karakteristieken is krachtiger, want die kan ook hoge storingen aan, maar we beginnen eenvoudig.)

Opgave 1: ga na dat de toestanden III en IV ontstaan uit I en II op een manier die overeenkomt met de betrekkingen (4.23) gegeven in Hoofdstuk 4.

Opgave 2: schets het lengteprofiel van de oppervlakte-uitwijking op de twee tijdstippen t_1 en t_2 , aangegeven in Figuur 6.7c, en vergelijk deze met die in Figuur 4.5.

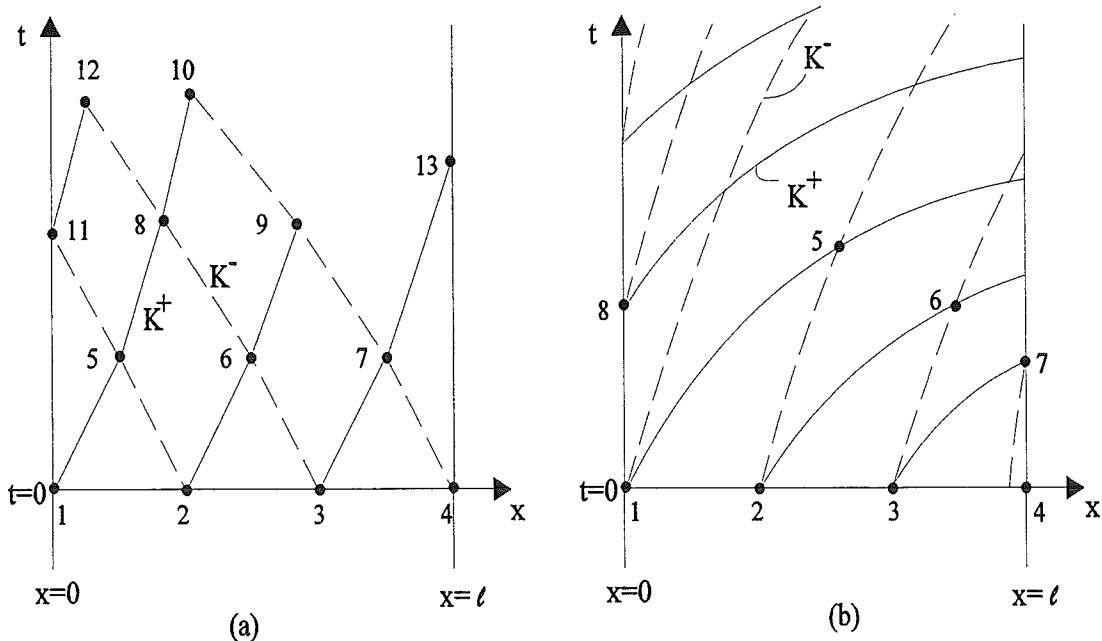
Tenslotte merken we bij dit voorbeeld op dat de (aanvangs)toestand in een punt zoals x_1 in Figuur 6.5 en 6.7 uitsluitend de toekomstige toestand kan beïnvloeden in het domein tussen de positieve en de negatieve karakteristieken vanuit dit punt (domein III in Figuur 6.7). We noemen dat het **invloedsgebied** van x_1 . Omgekeerd geldt dat de toestand in een punt, bijv. P in Figuur 6.7c, uitsluitend afhangt van de eerdere toestanden in de punten gelegen tussen de beide in de tijd teruggaande karakteristieken vanuit dat punt, bijv. de toestanden op $t = 0$ in de punten op het interval (x_1, x_2) (zie Figuur 6.7c). Men noemt dit het **afhankelijkheidsgebied**.

6.5 Randvoorwaarden

Een randvoorwaarde schrijft de waarde van één van beide onbekenden voor, of een functie van beide (b.v. een relatie tussen diepte en snelheid bij een regelwerk) aan het begin of het eind van het beschouwde leidinggedeelte ("rand" van het rekentraject), als functie van de tijd vanaf het aanvangstijdstip waarop de beginwaarden zijn gegeven. De stromingscondities bepalen aan welke rand(en) deze voorwaarden moeten worden opgelegd. We gaan dat na.

Laat de waarden van U en d (dus c) op $t = 0$ gegeven zijn in een traject van $x = 0$ tot $x = l$ (de beginvoorwaarden). De initiële karakteristieke richtingen in elk punt van dit traject zijn dan bekend, zodat de constructie van een net van karakteristieken kan beginnen. Uitgaande van **subkritische stroming**, waarbij de karakteristieke snelheden $U + c$ en $U - c$ van teken verschillen, geeft dit een beeld als in Figuur 6.8a, waarin we op $t = 0$ vier punten hebben genomen op het traject van $x = 0$ tot $x = l$. (In "serieuze" berekeningen zal men al gauw meer punten willen gebruiken.) Op de boven omschreven manier kunnen de ligging van en de toestanden in de punten 5 t/m 10 hieruit worden bepaald (zie par. 6.2).

Merk op dat we in elk initieel punt (1 t/m 4) twee beginvoorwaarden tot onze beschikking hebben, genoeg voor twee karakteristieken door deze punten en voor het bepalen van de oplossing in het gehele min of meer driehoekige gebied met de punten 1, 4 en 10 als hoekpunten. Randvoorwaarden voor $t > 0$ langs $x = 0$ en/of $x = l$ hebben geen invloed op de oplossing in dit gebied. (Het invloedsgebied van de randen ligt buiten deze "driehoek".)



Figuur 6.8 Karakteristieken bij gegeven begin- en randvoorwaarden; (a) subkritische stroming; (b) superkritische stroming ($U > 0$). K^+ getrokken lijn, K^- streeplijn.

Om toch verder te komen zetten we de negatieve karakteristiek uit punt 2 via punt 5 door tot de rand $x = 0$ (Figuur 6.8a). Dit levert punt 11, met een bekende waarde van R^- (nl. $R_{11}^- = R_2^- = R_5^-$). Om de toestand daar te kunnen bepalen is een tweede relatie nodig. Die kan niet geleverd worden door een positieve karakteristiek, want zulke karakteristieken kunnen punt 11 niet bereiken vanuit het domein waarin informatie beschikbaar is ($x > 0$). Daarom moet één voorwaarde gegeven zijn op de rand $x = 0$, en ook niet meer dan één. (Een tweede randvoorwaarde daar zou lokaal het probleem overbepaald maken, met drie relaties voor slechts twee onbekenden.) Voor de rand $x = l$ geldt mutatis mutandis hetzelfde. Conclusie: **in subkritische stromen is één randvoorwaarde nodig aan bovenstroomse zijde en één aan benedenstroomse zijde.**

In alle punten op de rand $x = 0$ zijn zo twee relaties bekend tussen de toestandsgrootheden, nl. een Riemann invariant via een negatieve karakteristiek uit het binnengebied, en een randvoorwaarde. Vanuit deze randpunten zijn vervolgens + karakteristieken bepaald waarmee de constructie van de oplossing kan voortgaan (punt 12 etc.).

De invloed van de bovenstroomse randvoorwaarde begint langs de + karakteristiek 1-5-8-10 etc. het gebied binnen te lopen. Pas wanneer deze karakteristiek de benedenstroomse rand bereikt ondergaat het gehele traject deze invloed.

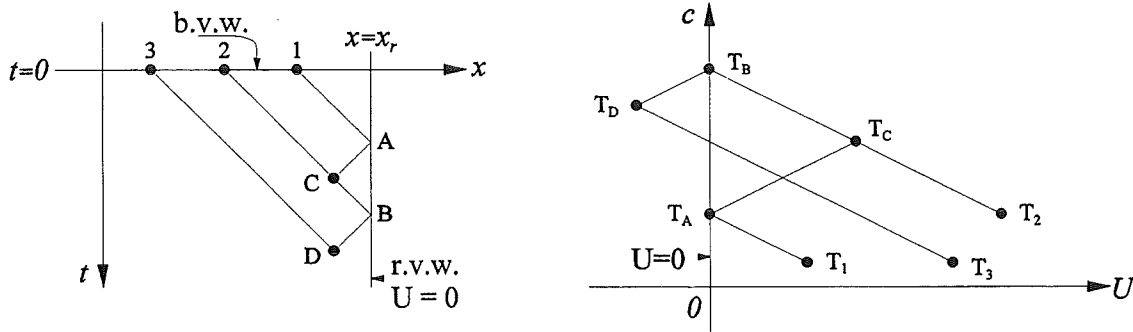
In Figuur 6.8b is uitgegaan van **superkritische stroming** met $U > 0$. In dit geval is $dx/dt > 0$ voor beide families van karakteristieken. Voor de getekende punten 5 en 6 geeft dit geen bijzonderheden t.o.v. Figuur 6.8a. In tegenstelling tot de subkritische situatie is de bovenstroomse rand ($x = 0$) nu echter niet met een - karakteristiek te bereiken vanuit het gebied $x > 0$. Stel dat we toch de toestand aan die rand willen kennen, dan moet deze informatie dus geheel komen uit twee randvoorwaarden ter plaatse. Dus: **in superkritische stroom moeten twee randvoorwaarden aan bovenstroomse zijde worden opgelegd** (stroomsnelheid en diepte).

Wat nu aan de benedenstroomse rand? De + karakteristiek uit 3 snijdt de benedenstroomse rand, zeg in punt 7; dit levert de waarde van R^+ voor dat punt. Ergens tussen de punten 3 en 4 is er vanuit $t = 0$ een - karakteristiek te starten, met een eveneens uit de beginvoorwaarden bekende waarde van R^- , die ook door punt 7 gaat (zie Figuur 6.8b). M.a.w., in 7 zijn zowel R^+ als R^- bekend. De toestand is er bepaald. Een benedenstroomse randvoorwaarde is niet nodig en zou het probleem lokaal zelfs overbepaald maken.

Stel nu dat er vanaf een zeker tijdstip toch een benedenstroomse randvoorwaarde wordt opgelegd, b.v. een bijna gehele of totale sluiting, wat dan? Dan wordt de stroming daar subkritisch en gaan er - karakteristieken vanaf de benedenstroomse rand het gebied in. Waar die aan de grens met het superkritische gebied komen ontmoeten zij twee karakteristieken die uit dat gebied komen. De oplossing wordt in zulke punten meerwaardig, wat inhoudt dat er een discontinuïteit (schokgolf, bore) ontstaat. Daar zijn in totaal vijf onbekenden: diepte en stroomsnelheid aan weerszijden en de loopsnelheid van de schok. Voor de bepaling daarvan staan drie betrekkingen ter beschikking uit de drie karakteristieken die in het beschouwde punt samenkomen, en twee vergelijkingen voor het behoud van massa en impuls over de schok heen. Die vervangen de differentiaalvergelijkingen 6.1 en 6.2 voor behoud van massa en impuls, die ter plaatse van de schok niet gelden (zie vergelijkingen 5.8 en 5.9, met dit verschil dat die zijn afgeleid voor het geval van voortplanting in stilstaand water). Er is weer precies genoeg informatie om het probleem ondubbelzinnig op te kunnen lossen.

We illustreren nu en detail hoe de randvoorwaarden worden ingevoerd, om te beginnen aan één rand, en met de benadering van *a priori* gegeven karakteristieke richtingen ($dx/dt = \pm c_0$). We gaan als voorbeeld uit van de situatie van een willekeurige begintoestand (zie de punten 1, 2 en 3 in figuur 6.9 met bijbehorende willekeurig gekozen toestanden T_1 , T_2 en T_3), die in een punt $x = x_r$ op het tijdstip $t = 0$ wordt onderbroken door het abrupt sluiten van een kering. Dat geeft de randvoorwaarde $U = 0$ in $x = x_r$ voor $t > 0$.

We gaan uit van punt 1, met bekende (begin)toestand T_1 , en trekken vandaar een positieve karakteristiek tot aan de rand $x = x_r$, zeg tot punt (eigenlijk: tijdstip) A. De nog onbekende toestand T_A ligt in het toestandsdiagram dus ergens op de getekende lijn $R^+ = \text{constant}$ door het punt T_1 . Maar op het tijdstip t_A geldt de randvoorwaarde $U = 0$ in $x = x_r$. De toestand in A



Figuur 6.9 Invoering randvoorwaarde

moet ook hieraan voldoen, en is in het toestandsdiagram dus te vinden als het snijpunt van de lijn $R^+ = \text{constant}$ vanuit T_1 en de lijn $U = 0$. Dit geeft T_A . Voor B gaat het op dezelfde manier.

Nu de toestanden in de randpunten bekend zijn kunnen we verder rekenen, het gebied in (punt C). Gebruik makend van de gegeven T_2 (uit de beginvoorwaarden) en de berekende T_A is T_C te bepalen. Voor punt D volgt de toestand uit T_3 (ook bekend uit de beginvoorwaarden) en T_B (berekend). Zo gaat het verder, inclusief invloeden van de andere rand.

6.6 Bijzondere gevallen

Voortplanting in één richting

Stel dat via een regelwerk in een open waterloop een ingreep in het systeem wordt gedaan, bijv. het (gedeeltelijk) heffen van een stuw. Dan gaan zowel stroomopwaarts als stroomafwaarts golven het systeem inlopen. Zolang zich geen veranderingen voordoen in dwarsprofiel of weerstand treedt geen terugkaatsing op en is er aan weerszijden van het regelwerk sprake van golfvoortplanting in één richting, een z.g. enkelvoudige golf. Dit bijzonder geval is van praktisch belang en wordt hier apart bekeken.

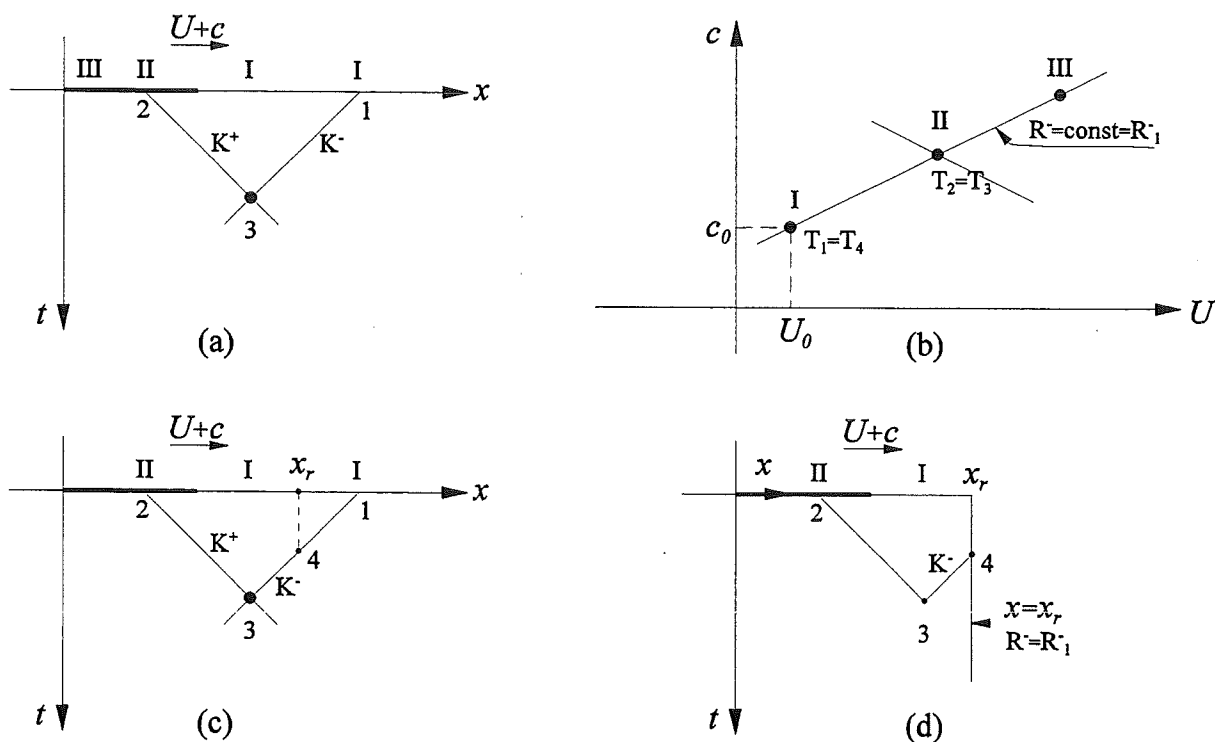
We gaan uit van een storing die zich voortplant in de positieve x-richting, naar rechts in Figuur 6.10a. De storing hoeft niet uniform te zijn; in de figuur zijn op $t = 0$ schetsmatig drie toestanden I, II en III aangegeven. Bij voortplanting in één richting en zonder demping moeten diezelfde toestanden zich een tijdje later opnieuw voordoen, in dezelfde opvolging, maar opgeschoven in de richting van de voortplanting. Voor het getekende punt 3, liggend op een +karakteristiek vanuit een ander punt 2, houdt dit in dat daar dezelfde toestand moet heersen als in punt 2 (toestand II). Bovendien moet punt 3 dezelfde R^+ hebben als punt 1, waar de (ongestoorde) toestand I heerst. Dat kan alleen als de toestanden I en II overeenkomen met dezelfde waarde van R^+ , zoals getekend in Figuur 6.10b. Dit geldt voor alle soortgelijke punten. We komen zo tot de uitspraak dat er op $t = 0$ sprake is van

golfvoortplanting in uitsluitend de positieve x-richting wanneer

$$R^- = \text{constant voor alle } x \text{ op } t = 0 \quad (6.17)$$

(Bij voortplanting in negatieve x-richting geldt dit uiteraard voor R^+ .) Dit komt overeen met de voorwaarde dat aanvankelijk $\delta U = c \delta d/d$, dus $\delta Q = Bc \delta d$, ofwel dat aanvankelijk $Q - Bc\zeta$ onafhankelijk is van x , wat we in Hoofdstuk 4 al hadden gezien (par. 4.6).

Bij voortgang in de tijd zal de storing verplaatsen en eventueel vervormen, maar ook dan zullen in alle punten dezelfde waarde van R^- gelden, gegeven door (6.17) (damping verandert dit; zie hieronder). Pas als de golf een punt bereikt waar de diepte en/of de breedte (Bc) van de waterloop veranderen treedt partiële terugkaatsing op en gaat de waarde van R^- variëren.



Figuur 6.10 Lopende storing met absorberende rand

Absorberende rekenrand

In berekeningen is altijd sprake van een lokaal interessegebied, bijv. in de omgeving van een kunstwerk. Als de aangrenzende trajecten prismatisch zijn zal er geen terugkaatsing in optreden en kunnen de lokaal opgewekte storingen onvervormd daarin wegllopen. Die zones zijn voor de berekening van de lokale effecten niet interessant. Men zal het rekendomein daarom altijd beperken tot het interessegebied, ook al loopt de leiding in feite verder door. Dat brengt een kunstmatige grens met zich mee, een z.g. (reken)rand. De daar op te leggen

randvoorwaarde (in geval van subkritische stroming één aan bovenstroomse zijde en één aan benedenstroomse zijde) moet hetzelfde effect sorteren als wanneer de leiding niet zou zijn afgebroken en de golven zonder abrupte verandering zouden hebben doorgelopen. Men noemt dat een **absorberende rand**. (Bij schaalmodellen speelt dezelfde problematiek een rol.)

We gaan opnieuw uit van de storing die is aangegeven in Figuur 6.10a, maar nu op $t=0$ beperkt tot het vette lijnstuk (waarin o.a. de toestanden II en III). Deze loopt een ongestoord gebied in, waar $d = \text{constant} = d_0$ en $U = \text{constant} = U_0$ (toestand I).

Stel dat we in de situatie van Figuur 6.10 het rekengebied willen afbreken in $x = x_r$, zoals aangegeven in Figuur c. Ook dan moet in punt 3 de toestand II ontstaan. Dat is het geval mits langs K^- die punt 3 bereikt dezelfde waarde van R^- geldt als zonder afbreking. M.a.w., we moeten voorschrijven dat R^- in het snijpunt 4 dezelfde waarde heeft als in punt 1, d.w.z. $R_4^- = R_1^- = U_0 - 2c_0$. Voor de toestand in 3 doet het er dan niet toe dat K^- niet in punt 1 begint maar pas op de rand, in punt 4, zoals aangegeven in Figuur d, mits we dezelfde waarde van R^- opleggen in het randpunt.

Het voorgaande geldt uiteraard voor elk tijdstip (niet alleen punt 4). M.a.w., om een absorberende rand te effectueren moet ter plaatse daarvan de waarde van de binnenkomende Riemann invariant worden opgelegd, onafhankelijk van wat er in het rekengebied gebeurt. In het voorbeeld hierboven was die waarde constant in de tijd gesteld (omdat U_0 en c_0 constant waren verondersteld, zowel in x als in t). Als de toestand in het buitengebied in de tijd varieert, bijv. met het getij, dan zal toch de daarbijbehorende waarde van R^- op de rand moeten worden opgelegd. Daarmee wordt bereikt dat het getij het interessegebied kan binnendringen (wat moet) terwijl uittrekkende storingen niet op een onnatuurlijke manier op de rekenrand worden gereflecteerd.

N.B. Het voorgaande geldt alleen voor subkritische stroming. Bij superkritische stroming zijn twee randvoorwaarden nodig aan bovenstroomse zijde en is geen randvoorwaarde nodig aan de benedenstroomse zijde (par. 6.4).

Uitwendige krachten

Eventuele uitwendige horizontale krachten zoals weerstand, of de horizontale component van de drukkracht bij een niet-horizontale bodem, kunnen als volgt in rekening worden gebracht. We voegen de resultante van de uitwendige krachten p.e.v. massa die werken op het water (in x -richting), zeg F , toe aan het rechterlid van (6.2), dus via (6.5) en (6.6) aan dat van (6.9±):

$$\frac{dR^\pm}{dt} = F \quad \text{mits} \quad \frac{dx}{dt} = U \pm c \quad (6.18)$$

(Eigenlijk is de benaming “invariant” hier dus niet meer van toepassing op R .) Bij eindige maar kleine tijdstapjes is dit te benaderen met

$$\Delta R^{\pm} = F \Delta t \quad (6.19)$$

Uitgaand van de situatie in Figuur 6.1a moet dit worden toegevoegd aan de rechterleden van (6.11):

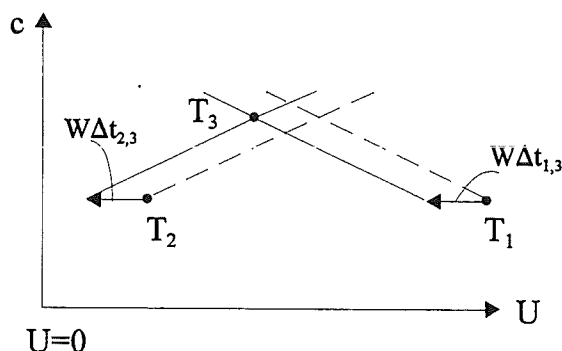
$$R_3^{+} = R_1^{+} + \Delta R \quad \text{en} \quad R_3^{-} = R_2^{-} + \Delta R \quad (6.20)$$

ofwel

$$U_3 + 2c_3 = U_1 + 2c_1 + (F \Delta t)_{1,3} \quad \text{en} \quad U_3 - 2c_3 = U_2 - 2c_2 + (F \Delta t)_{2,3} \quad (6.21)$$

Hieruit kunnen U en c in het nieuwe punt (3) weer eenvoudig algebraïsch worden bepaald, mits de waarde van F in de betreffende intervallen bekend is.

In het toestandsdiagram komt bovenstaande bewerking neer op het verschuiven van lijnen $R^{\pm} = \text{constant}$, zodanig dat $\Delta R^{\pm} = \Delta U \pm 2\Delta c = F \Delta t$ (we beperken ons even tot het U, c -vlak). Wanneer we die verschuiving in het U, c -vlak aanbrengen langs lijnen $c = \text{constant}$ (“horizontaal”) geldt $\Delta c = 0$ en dus $\Delta U = F \Delta t$, wat met voortschrijdende tijd ($\Delta t > 0$) en positieve F neerkomt op een “horizontale” verschuiving in de richting van toenemende U (versnellend). In het U, d -vlak geldt precies hetzelfde mits we bij de verschuiving de diepte constant houden en alleen de snelheid aanpassen.



Figuur 6.11 Invloed weerstand in U, c -toestandsdiagram

In geval van weerstand W geldt $F = -W = -c_f U|U|/d$, en is F tegengesteld van teken aan U . Zowel bij positieve als bij negatieve U heeft dit tot gevolg dat de verschuiving plaats vindt in de richting van $U = 0$, ofwel de snelheden nemen hierdoor af in absolute waarde. De beweging dempt hierdoor op de duur uit (zie Figuur 6.11).

6.7 Golfvervorming bij eenzijdige voortplanting

We behandelen nu een voorbeeld van storingen van eindige hoogte (niet per sé lage), waarvoor we de invloed van de stroomsnelheid en de diepte op de karakteristieke richtingen in rekening brengen en we geen benaderingen maken in de Riemann invarianten. We nemen daarvoor opnieuw het illustratieve en relevante voorbeeld van het binnenlopen van een golf vanaf een zeker tijdstip, zeg $t = 0$, aan één zijde, zeg $x = 0$, in een lang traject ($x > 0$) met een aanvankelijk uniforme toestand. We geven de ongestoorde diepte weer met d_0 en de snelheid met U_0 ; gemakshalve nemen we $U_0 = 0$ (een waarde ongelijk aan 0 is in principe even goed mogelijk, maar dat zou in essentie niets toevoegen). Fysisch is dit hetzelfde geval als hierboven is behandeld, maar omdat we nu de effecten van de eindige hoogte van de storing in rekening brengen op de voortplanting zal er in de oplossing vervorming optreden (zie Hoofdstuk 5).

We gaan de voortplanting na van de storing en van het bijbehorend verloop van diepte en stroomsnelheid. Het kanaalpand wordt verondersteld zo lang te zijn dat we in het beschouwde tijdsinterval nog geen invloed merken van de randvoorwaarde aan het andere einde. Welke randvoorwaarde we opleggen bij $x = 0$ is voor de essentie niet belangrijk. Gemakshalve gaan we hier uit van een gegeven snelheid $U(0,t)$. Deze kan zowel positief als negatief zijn, overeenkomend met instroom respectievelijk uitstroom.

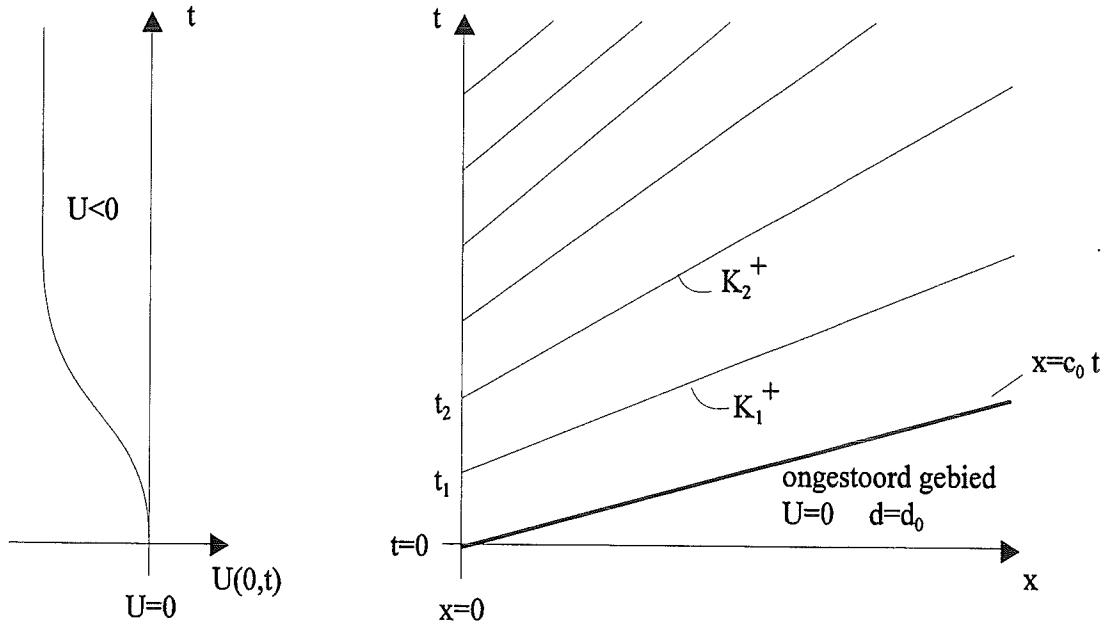
In Figuur 6.12 links is $U(0,t)$ getekend voor een aanvankelijk in sterkte toenemende uitstroomsnelheid ($U < 0$), die later constant wordt. Het bijbehorende x,t -vlak met karakteristieken is gegeven in Figuur 6.12 rechts.

Omdat alle $-$ karakteristieken beginnend op $t = 0$ (niet getekend) uitgaan van het gebied van uniforme toestand hebben zij alle een gemeenschappelijke waarde van R^- (nl. $R^- = U_0 - 2c_0 = \text{constant}$, hier gelijk aan $-2c_0 = -2\sqrt{gd_0}$). Omdat deze $-$ karakteristieken het gehele domein bestrijken waarin we geïnteresseerd ($x > 0$, $t > 0$) geldt deze gemeenschappelijke waarde van R^- in alle punten van dit domein. Daarom geldt in al deze punten

$$U - 2c = -2c_0 \quad \text{ofwel} \quad U = 2\sqrt{gd} - 2\sqrt{gd_0} \quad (6.22)$$

Nu we dit via de $-$ karakteristieken weten hoeven we deze voor het vervolg van de berekening niet meer afzonderlijk te gebruiken, en kunnen we volstaan met de $+$ karakteristieken. Men spreekt in dit soort gevallen van een enkelvoudige golf (Engels: simple wave).

Langs elke $+$ karakteristiek is $R^+ = U + 2c = \text{constant}$. Verder is in het hele gebied $R^- = U - 2c = \text{constant}$. M.a.w., zowel $U + 2c$ als $U - 2c$ zijn constant langs elke $+$ karakteristiek, en dan geldt hetzelfde voor U en c (dus d) afzonderlijk. Langs elke $+$ karakteristiek heerst dus dezelfde toestand. (Er is geen snijding door een $-$ karakteristiek met een andere R^- , die de toestand langs de $+$ karakteristiek zou kunnen doen veranderen.)



Figuur 6.12 Variërende uitstroomsnelheid bij $x = 0$ (links) en x,t -diagram met + karakteristieken (rechts)

Omdat U en c beide constant zijn langs elke + karakteristiek hebben alle punten van elke + karakteristiek ook dezelfde waarde van $U + c$, d.w.z. deze + karakteristieken zijn recht (zie Figuur 6.12). Met gebruikmaking van (6.22) volgt dat de richting ervan gegeven is door

$$\frac{dx}{dt} = U + c = 3c_0 - 2c_0 = 3\sqrt{gd} - 2\sqrt{gd_0} \quad (6.23)$$

Dit is in dit geval dus tevens de snelheid waarmee punten van constante U en c (en d) zich verplaatsen. Welke waarden dat zijn wordt bepaald door de begin- en randvoorwaarden.

De + karakteristiek $x = c_0 t$ (vet getekend in Figuur 6.12) vormt de begrenzing van het ongestoorde gebied ($x > c_0 t$), waar de begintoestand heerst. De storingen komen binnen uit de rand $x = 0$, vanaf $t = 0$.

Stel we beginnen een + karakteristiek K_1^+ in een willekeurig punt $x = 0$, $t = t_1$. De waarden van U en c in dat punt noemen we U_1 en c_1 . Omdat (6.22) ook in punt 1 geldt moeten zij voldoen aan

$$U_1 - 2c_1 = -2c_0 \quad \text{ofwel} \quad c_1 = \frac{1}{2}U_1 + c_0 \quad (6.24)$$

Dit geeft één vergelijking voor twee onbekenden. De resterende vergelijking wordt gegeven door de randvoorwaarde tussen U en c in $x = 0$ op $t = t_1$. Uit deze twee vergelijkingen zijn U_1 en c_1 te bepalen (d_1 is dan dus ook bepaald). (Hierboven was gemakshalve U_1 zelf al als randvoorwaarde opgelegd, maar dat is dus niet essentieel.) Omdat U en c (of d) niet variëren langs K^+ zijn de waarden van U_1 en c_1 (of d_1) tevens de waarden van U en c (of d) in alle punten van K^+ . Daarmee is dan ook de richting van K^+ bepaald, nl. $dx/dt = U + c = U_1 + c_1 = 3/2 U_1 + c_0$.

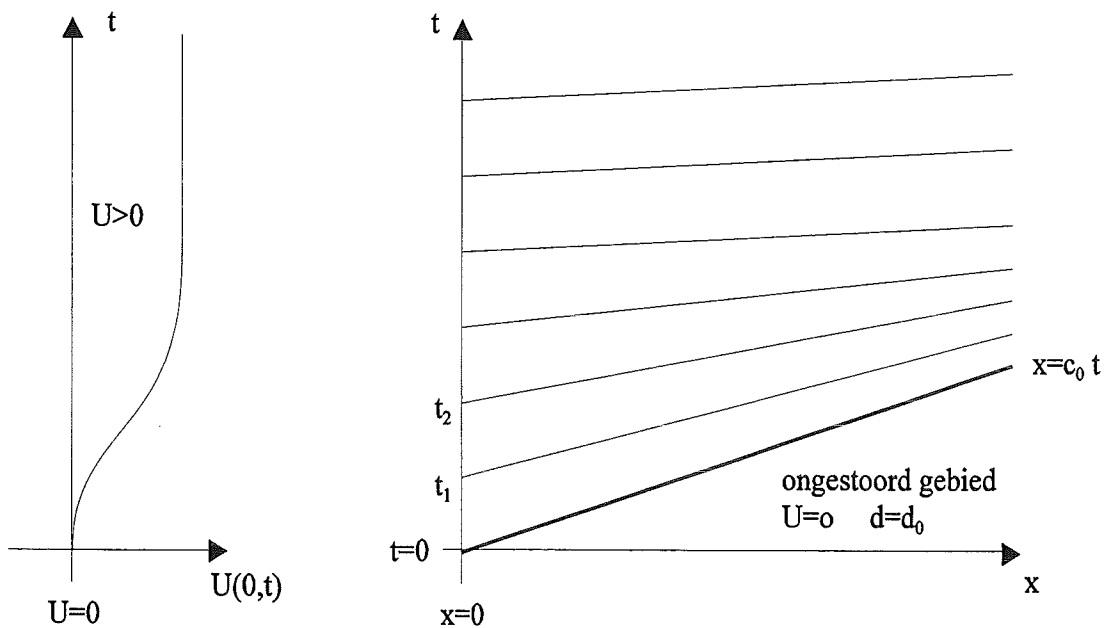
Op bovenomschreven manier zijn voor alle $+$ karakteristieken de bijbehorende waarden van U en c (dus d) en van de karakteristieke richting $U + c$ te bepalen, en daarmee de gehele oplossing.

In aansluiting op de kwalitatieve argumenten van H. 5 toont (6.23) golfvervorming aan, en nu exact (binnen het kader van de hier gepresenteerde theorie). Immers, (6.23) zegt dat (en hoe sterk) de voortplantingssnelheid van punten van constante diepte (en stroomsnelheid) toeneemt met de lokale diepte. We gaan de consequenties daarvan na, voor een negatieve respectievelijk positieve golf, die ontstaat bij uitstroom respectievelijk instroom uit/in een gebied.

Bij **uitstroom**, zoals in Figuur 6.12, is $U_1 < 0$, dus $c_1 < c_0$ (zie 6.24), dus $d_1 < d_0$, en is er een **negatieve golf** (zie ook Figuur 5.1). Zolang U sterker negatief wordt neemt $U + c$ af en divergeren de karakteristieken K^+ die in dat tijdsinterval beginnen (Figuur 6.12). Het golffront wordt dus flauwer (bekijk bijvoorbeeld een lengteprofiel van d op $t = \text{constant}$, en ga na of/hoe dat verandert als de tijd verloopt). Wanneer na verloop van tijd $U(0,t)$ constant wordt gehouden gaan de $+$ karakteristieken weer parallel lopen (zie Figuur 6.12) en blijft de diepte constant (maar kleiner dan aanvankelijk).

Een soortgelijke situatie van **instroom** is getekend in Figuur 6.13. In een willekeurig punt $x = 0$, $t = t_1$ geldt dan $U_1 > 0$, dus $c_1 > c_0$ en $d_1 > d_0$. Er is dan een **positieve golf**. Wanneer in een zeker tijdsinterval U toeneemt, zoals getekend in Figuur 6.13, geldt hetzelfde voor $U + c$ en convergeren de $+$ karakteristieken die in dat tijdsinterval beginnen vanuit de bovenstroomse rand ($x = 0$): het golffront wordt steiler. (Ga dat na door een lengteprofiel van d te bepalen op twee verschillende tijdstippen.) Op de duur gaan deze karakteristieken elkaar snijden. In de snijpunten wordt de oplossing meerwaardig. Daar ontstaat een discontinuïteit (schokgolf, bore, lopende watersprong), zoals we in kwalitatieve zin al hadden gezien en besproken in Hoofdstuk 5, o.m. met betrekking tot vloedspongen (zie Figuren 5.7 en 5.8).

In het bovenstaande is gemakshalve als randvoorwaarde in $x = 0$ de stroomsnelheid gegeven verondersteld. Stoker (1957) behandelt in detail het geval van een horizontaal translerend vertikaal schot; een bijzonder geval hiervan, nl. een schot dat met grote snelheid terugwijkt, komt overeen met een dambreuk; hij werkt de oplossing voor dat geval algebraïsch uit.



Figuur 6.13 Variërende instroomsnelheid $x = 0$ (links) en x,t -diagram met + karakteristieken (rechts)

Meestal zal de randvoorwaarde echter ofwel een debiet zijn (bij een gemaal) of een relatie tussen debiet en waterstand (bij een schuif e.d.). Samen met de bekende waarde van R geeft dit voldoende informatie om het probleem op te kunnen lossen, alleen zal de uitwerking wat ingewikkelder worden dan hierboven waarin gemakshalve de snelheid U werd voorgeschreven. De hierboven gegeven uitdrukkingen zijn echter niet afhankelijk van het karakter van de op te leggen randvoorwaarde.

6.8 Drukgolven in gesloten leidingen

We gaan nu kort in op toepassingen van de karakteristiekenmethode op drukgolven in gesloten leidingen, waarvoor de methode van de karakteristieken zeer geschikt is.

De continuïteitsvergelijking voor stroming in een drukleiding luidt

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (6.25)$$

De x-as is gekozen langs de as van de leiding, en c is gedefinieerd door

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{K} + \frac{\rho D}{E \delta} \quad (6.26)$$

Bij verwaarlozing van weerstand, en ons beperkend tot de dynamische druk (statische druk en zwaartekracht voorlopig buiten beschouwing latend), luidt de bewegingsvergelijking

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho U^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (6.27)$$

De karakteristieke relaties voor gesloten leidingen worden verkregen uit de continuïteitsvergelijking en de bewegingsvergelijking via eenzelfde bewerking als voor open water, met het resultaat:

$$\frac{dR_p^\pm}{dt} = 0 \quad \text{langs} \quad \frac{dx}{dt} = U \pm c \quad (6.28)$$

waarin

$$R_p^\pm = p \pm \rho c U \quad (6.29)$$

In plaats van de dynamische druk p en de snelheid U kunnen we ook werken met het piëzometrisch niveau h en de snelheid U, en definiëren

$$R_h^\pm = \frac{R_p^\pm}{\rho g} = h \pm \frac{c}{g} U \quad (6.30)$$

Voor deze geldt analoog

$$\frac{dR_h^\pm}{dt} = 0 \quad \text{mits} \quad \frac{dx}{dt} = U \pm c \quad (6.31)$$

Deze karakteristieke betrekkingen rechtvaardigen de interpretatie dat c de snelheid is van voortplanting van drukgolven door het systeem, t.o.v. de vloeistof.

N.B. Onder verwaarlozing van een term van de grootte-orde U/c geldt (6.31) ook wanneer we de statische druk en de zwaartekracht in rekening brengen. Het verschil met de formulering in termen van de druk komt hieruit voort dat in de statische toestand h constant is maar de druk varieert met de hoogte van het beschouwde punt.

Door substitutie van de uitdrukkingen voor $R^\pm$ gaan (6.28) en (6.31) over in

$$\frac{dp}{dU} = \mp \rho c \quad \text{respectievelijk} \quad \frac{dh}{dU} = \mp \frac{c}{g} \quad \text{mits} \quad \frac{dx}{dt} = U \pm c \quad (6.32)$$

Hoewel we de variaties van p en D in rekening hebben gebracht in de continuïteitsvergelijking zijn de feitelijke variaties daarvan zeer gering (voor vloeistoffen in redelijk starre leidingen) en kunnen we de waarde van p en D in bovenstaande uitdrukkingen als constant beschouwen. Daarmee wordt c onafhankelijk van de waarden van de toestandsgrootheden en zijn in het U, h -toestandsdiagram de lijnen van constante $R^\pm$ recht (ook in U, p - of Q, h - of Q, p -toestandsdiagrammen). Dan geldt (6.32) ook voor eindige variaties van de toestandsgrootheden (niet noodzakelijkerwijs infinitesimale):

$$\delta p = \mp \rho c \delta U \quad \text{respectievelijk} \quad \delta h = \mp \frac{c}{g} \delta U \quad \text{mits} \quad \frac{dx}{dt} = U \pm c \quad (6.33)$$

N.B. In open water geldt voor infinitesimale variaties $\delta d \pm (c/g)\delta U = 0$ langs de karakteristieken $K^\pm$ (zie verg. 6.15). Aan het vrije oppervlak van open water is $\delta p = 0$, waardoor daar geldt $\delta d = \delta h$ en dus ook $\delta h \pm (c/g)\delta U = 0$ langs de karakteristieken $K^\pm$, dezelfde relatie als (6.33) voor drukleidingen. In deze vorm gegoten zijn de karakteristieke betrekkingen dus “universeel” (voor infinitesimaal kleine variaties).

Als gevolg van de geringe berging van vloeistoffen in een redelijk starre leiding, zoals van staal of beton, is de waarde van c betrekkelijk groot, veelal in de ordegrrootte van 10^3 m/s. Ten opzichte daarvan is de stroomsnelheid U verwaarloosbaar en geldt in goede benadering $dx/dt = \pm c$. Bovendien hebben pijpleidingen normaal gesproken een constant profiel (in onbelaste toestand) en varieert c niet met de plaats. Omdat c bovendien onafhankelijk is van de toestand zijn de karakteristieke richtingen voor deze golven als constant te benaderen, onafhankelijk van de plaats en de stromingscondities. De bijbehorende karakteristieken zijn rechtlijnig en kunnen vooraf worden geconstrueerd, onafhankelijk van de oplossing (dit geldt in open water alleen voor lage storingen).

Vanwege de hoge waarde van c leiden matige variaties in stroomsnelheid al gauw tot zeer grote drukvariaties, zowel verhogingen als verlagingen (al gauw 100 m waterkolom bij een snelheidsvariatie van 1 m/s; zie verg. 6.33). Dit verschijnsel noemt men **waterslag**. Het is een bijzonder punt van aandacht in het ontwerp van drukleidingen.

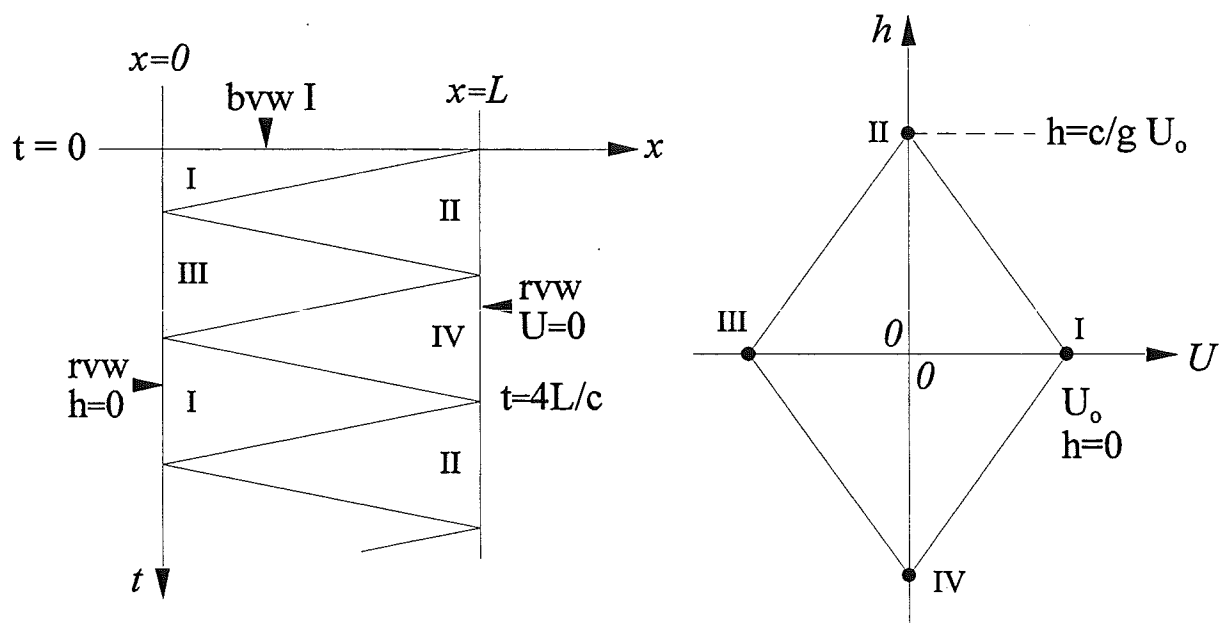
Wanneer in bepaalde punten of dwarsdoorsneden de vloeistofdruk onder de dampspanning zou dreigen te komen ontstaan er dampbellen (**cavities**), soms kleine bellen in de vloeistof, soms grote die de hele dwarsdoorsnede beslaan (kolomscheiding). Vooral wanneer die zich impulsief sluiten wordt een intensief geluid geproduceerd. Cavities kan schade aanbrengen aan de pijpwand.

Na deze inleiding gaan we over tot een aantal toepassingen die zonder veel uitleg worden gepresenteerd. Ga zelf in alle gevallen na welke verschijnselen je ongeveer mag verwachten en hoe het probleem is aangepakt, i.h.b. hoe de begin-en randvoorwaarden zijn ingevoerd. Ga de gegeven oplossingen na, interpreteer die en maak ze vervolgens ook zelf.

Voorbeeld 1 Abrupte afsluiting, geen verliezen

Gegeven: rechte pijp tussen twee reservoirs, lengte L . Aanvangstoestand: eenparige stroom. Op $t = 0$ wordt aan het benedenstroomse einde een afsluiter ineens geheel gesloten. Wrijving en snelheidshoogte-effecten bij in- en uitstroom worden verwaarloosd (dus ter plaatse van een open eind is het piëzometrisch niveau in de pijp steeds gelijk te stellen aan het aangrenzende reservoirpeil, dat we als referentieniveau nemen).

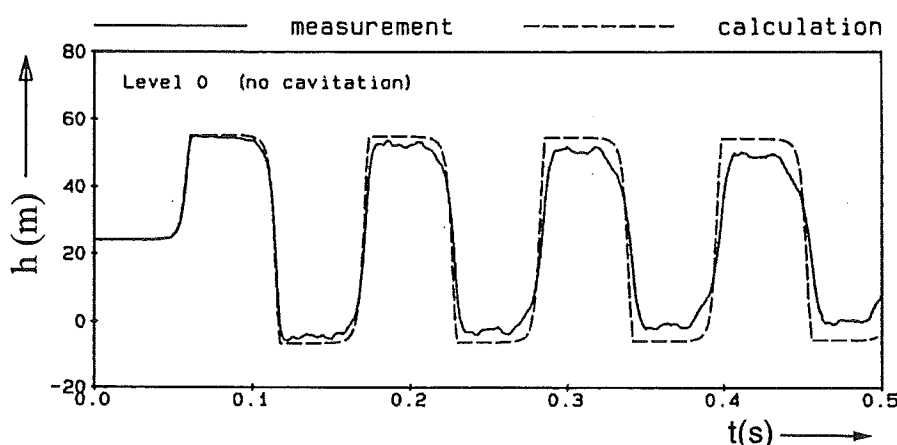
- Beginvoorwaarden (bvw) voor $t = 0$ en $0 \leq x \leq L$: $U = \text{constant} = U_0$, $h = 0$
- Randvoorwaarden (rvw) voor $t > 0$: in $x = 0$: $h = 0$; in $x = L$: $U = 0$
- Oplossing: zie Figuur 6.14 voor x,t -diagram en toestandsdiagram.



Figuur 6.14 x,t -diagram en h,U -toestandsdiagram bij abrupte sluiting benedenstrooms

Interpretatie: de aanvankelijke stroming (toestand I) wordt abrupt gestopt door de afsluiter. Ter plaatse wordt de vloeistof samengedrukt en vindt drukverhoging plaats (II). Het front waar de overgang plaats vindt plant zich stroomopwaarts voort en bereikt op $t = L/c$ het reservoir in $x = 0$. Daar is $h = \text{constant}$, waardoor de golf daar 100% negatief terugkaatst (III). Die negatieve golf komt op $t = 2L/c$ aan bij de afsluiter en wordt daar 100% teruggekaatst (IV). De maximale en minimale drukken zijn een waarde $\rho c U_0$ hoger respectievelijk lager dan de aanvankelijke (in piëzometrisch niveau uitgedrukt: $\delta h = \pm c U_0/g$).

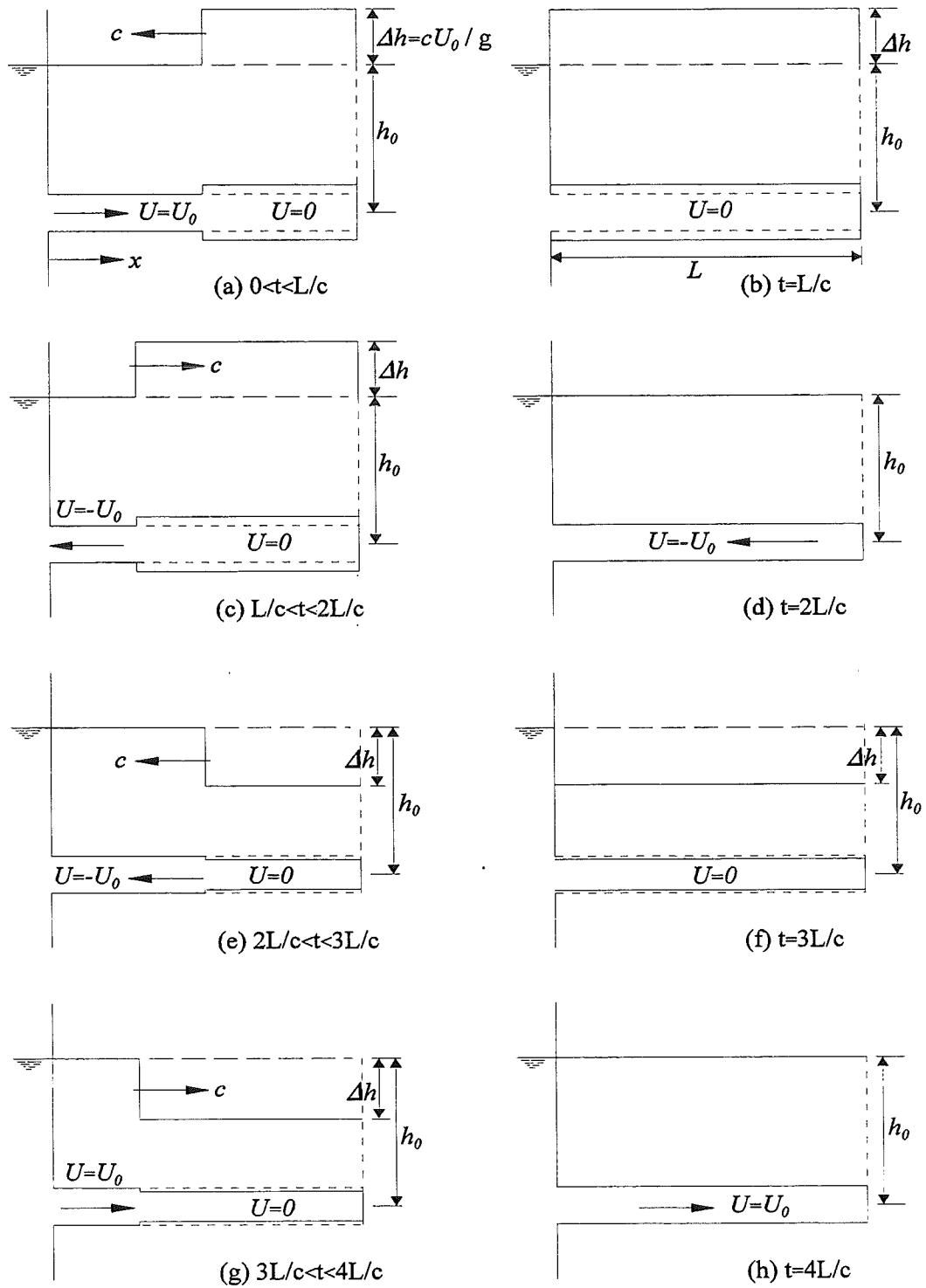
Er stelt zich een periodieke toestand in met periode $4L/c$. Zie Figuur 6.15 voor drukmetingen in een punt van een pijp (de vragen 14 en 15 aan het eind van dit Hoofdstuk bevatten de gegevens). De gemeten beweging dempt geleidelijk uit a.g.v. verliezen (de berekeningsresultaten zijn verkregen zonder wrijving). Figuur 6.16 toont een reeks momentopnamen van lengteprofielen, waaruit o.m. de positie van het golffront is te zien. In elk vast punt varieert in deze benadering de druk bloksgewijs: een tijdje constant, dan abrupt een andere waarde.



Figuur 6.15 Gemeten drukken (Simpson, 1986) en rekenresultaten (Tijsseling, 1993); Figuur ontleend aan Tijsseling (1993)

Voorbeeld 2 Geleidelijke sluiting

De hoge drukvariaties die zich voordoen bij abrupte sluiting (zie Figuur 6.15) zijn te matigen door geleidelijk te sluiten. Dan is aanvankelijk δU geringer (in absolute waarde) en dus ook δp . Naarmate de sluiting vordert en de snelheid in de pijp bij de afsluiter daardoor afneemt zal de druk daar weliswaar willen toenemen, maar de negatieve drukken die van het open eind terugkomen, als gevolg van negatieve terugkaatsing op het constante reservoirpeil, kunnen dat matigen, waardoor de resulterende drukvariaties toch beperkt kunnen blijven. Een voorwaarde hiervoor is dat de afsluiter nog niet geheel mag zijn gesloten wanneer de teruggekaatste golf daar aankomt ($t = 2L/c$), anders treedt toch de maximale drukopbouw op (gelijk aan $\rho c U_0$) vanaf het moment van totale sluiting tot aan het tijdstip $t = 2L/c$.



Figuur 6.16 Momentopnamen van de leiding na abrupte sluiting benedenstrooms
Toestand op $t = 0$ is dezelfde als op $t = 4L/c$ (figuur h)

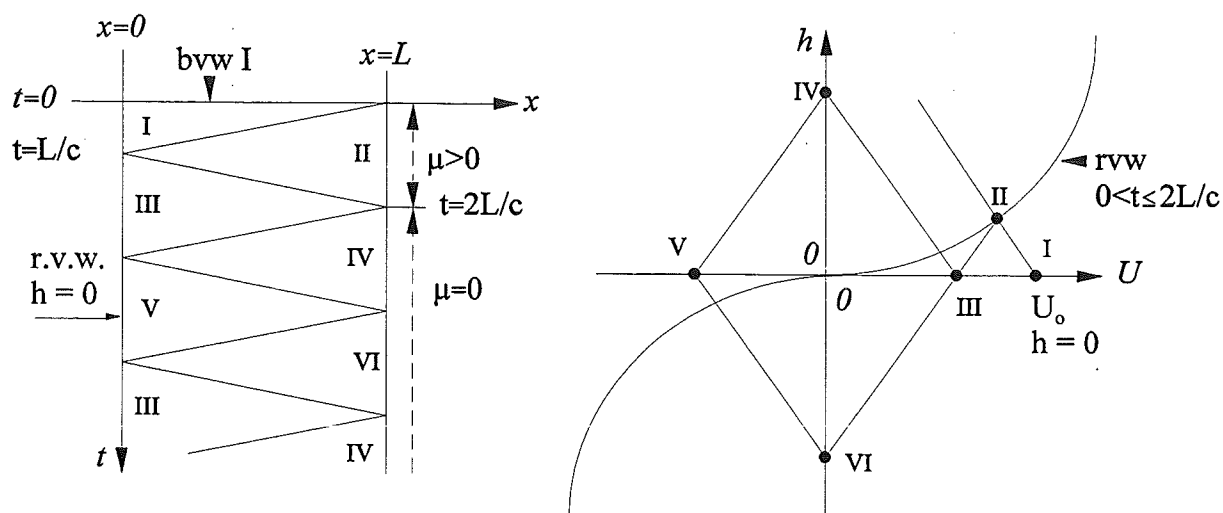
We gaan dat na op basis van een eenvoudige modellering van de stroom door de afsluiter, nl. via een contractiecoëfficiënt μ met vertragsverlies. Gemakshalve gaan we uit van symmetrie tussen uitstroom en instroom:

$$h = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) \frac{|U| U}{2g} \quad \text{voor } x = L \quad (6.34)$$

($h = 0$ in het reservoirpeil). In het toestandsdiagram (Figuur 6.17) is dit weer te geven als twee gespiegelde halve parabolen. De coëfficiënt μ heeft de waarde 1 bij geheel open afsluiter ($h = 0$ bij eindige U) en de waarde 0 bij gesloten afsluiter ($U = 0$ bij eindige h).

Stel dat de afsluiter op $t = 0$ abrupt gedeeltelijk wordt geopend en op $t = 2L/c$ geheel :

- Beginvoorwaarden voor $t = 0$ en $0 \leq x \leq L$: $U = \text{constant} = U_0$, $h = 0$
- Randvoorwaarden in $x = 0$: $h = 0$ (reservoirpeil) voor $t > 0$; in $x = L$: verg. (6.34) met $0 < \mu < 1$ voor $0 < t \leq 2L/c$ en $\mu = 0$ (dus $U = 0$) voor $t > 2L/c$
- Oplossing: zie Figuur 6.17 voor x,t -diagram en toestandsdiagram.



Figuur 6.17 x,t -diagram en h,U -toestandsdiagram bij geleidelijke sluiting benedenstrooms

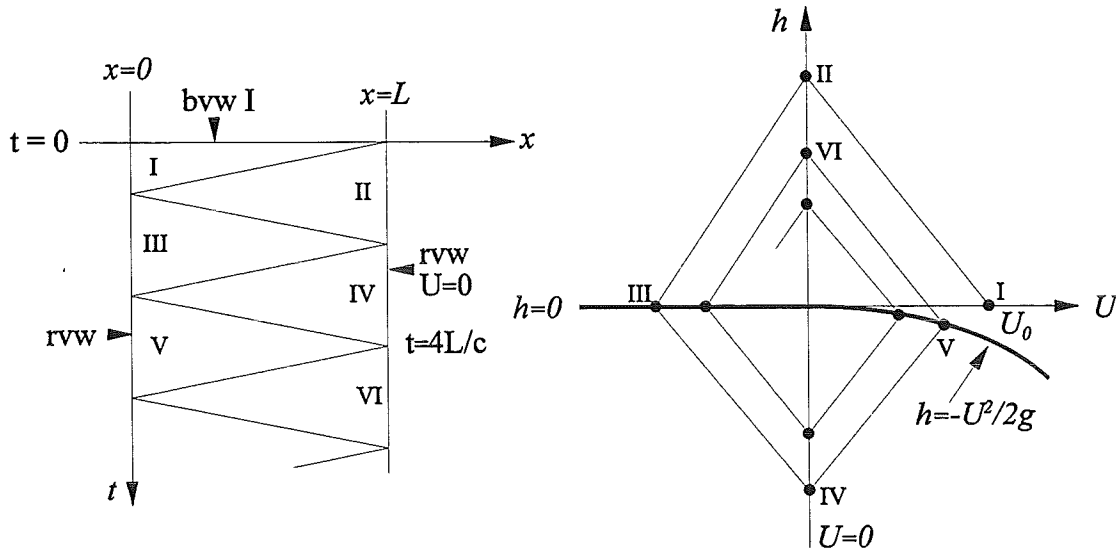
Merk op dat na de totale sluiting ook nu een periodieke toestand ontstaat, met periode $4L/c$, maar met geringere uitslagen dan bij totale sluiting ineens. De waarden daarvan zijn dus onder controle te houden door een voldoende geleidelijke sluiting.

Voorbeeld 3 Abrupte afsluiting met (uittree)verliezen

Teruggaand naar het geval van abrupte afsluiting in $x = L$ brengen we nu uittreeverliezen in rekening via de rvw bij $x = 0$, zonder afsluiting. Dit geeft inzicht in de invloed van (vertrags)verliezen op de beweging.

- Beginvoorwaarden voor $t = 0$ en $0 \leq x \leq L$: $U = \text{constant} = U_0$, $h = 0$

- Randvoorwaarden voor $t > 0$: in $x = 0$: $h = 0$ (reservoirpeil) als $U < 0$ (uitstroom) en $h = -U^2/2g$ als $U > 0$; in $x = L$: $U = 0$
- Oplossing: zie Figuur 6.18 voor het x,t -diagram en het toestandsdiagram..



Figuur 6.18 x,t -diagram en U,c -toestandsdiagram voor abrupte sluiting met uittreeverlies in $x = 0$

Ook hier ontstaat een oscillatie met een periode van $4L/c$, maar als gevolg van de uittreeverliezen vindt voortgaande damping plaats.

Invloed wandwrijving

Formeel kan wandwrijving in rekening worden gebracht op de manier genoemd in par. 6.6 (Figuur 6.11), maar dat moet in een groot aantal punten van de leiding gebeuren en is daardoor bewerkelijk. Het effect op de vervallen en op de damping is evengoed en rekenkundig veel gemakkelijker in te voeren door te doen alsof de wandweerstand is geconcentreerd in de eindpunten en deze weerstand dus via de randvoorwaarden in rekening is te brengen, zoals hierboven is gedaan voor de uittreeverliezen. Men hoeft daarvoor slechts de hier gebruikte uitdrukking (6.34) aan te passen.

Slotopmerking

Uit de voorbeelden is duidelijk dat twee tijdschalen een rol spelen: enerzijds de tijdschaal τ_e van de excitatie door externe invloeden zoals de duur van de sluiting van een klep, of (ander uiterste) een getijperiode, anderzijds de interne (systeem)tijdschaal τ_s die in dit geval bepaald wordt door de looptijd van de golven in het systeem ($\tau_s = L/c$). De verhouding hiervan bepaalt het dynamisch gedrag van het systeem.

- Voor $\tau_e \ll L/c$ (relatief snelle excitatie) zijn dynamische effecten belangrijk en moeten compressiegolven in rekening worden gebracht.
- Voor $\tau_e \gg L/c$ zijn de invloeden van de randvoorwaarden vrijwel instantaan (relatief

gesproken) over de gehele lengte merkbaar via frequent heen en weer lopende drukgolven, en reageert de vloeistofkolom als één quasi-starre massa; compressiegolven kunnen dan buiten beschouwing blijven (geen berging, dus starre-kolom benadering).

6.10 Vragen en opgaven

1. Maak een samenvatting van dit Hoofdstuk.
2. Omschrijf de clou van de methode van de karakteristieken.
3. Wat is een karakteristiek?
4. Wat is het belang van karakteristieken?
5. Hoeveel karakteristieke richtingen zijn er in een willekeurig punt van een leiding, uitgaand van de lange-golfvergelijkingen?
6. Door welke grootheden worden de karakteristieke richtingen bepaald?
7. Hoe groot is het relatieve belang van de stroomsnelheid voor de karakteristieke snelheden in open water in vergelijking met drukleidingen?
8. Hebben de twee karakteristieke snelheden in een punt van een open leiding in alle gevallen eenzelfde teken of kunnen zij/zullen zij van teken verschillen? Waardoor wordt dit bepaald?
9. Wat is het belang van de antwoorden op de voorafgaande vraag voor de vaststelling van randvoorwaarden?
10. Wat is het belang van de antwoorden op vraag 8 voor de vaststelling van beginvoorwaarden?
11. Werk in x,t -diagrammen en toestandsdiagrammen zelf alle oplossingen uit die in dit hoofdstuk zijn gepresenteerd.
12. Kies in die oplossingen enkele tijdstippen en teken de daarbij horende lengteprofielen van snelheid en diepte of piëzometrisch niveau.
13. Kies in die oplossingen enkele vaste punten in de leiding en teken de daarbij horende variaties in de tijd van snelheid en diepte of piëzometrisch niveau.
14. De pijp waarvan resultaten zijn getoond in Figuur 6.16 is van staal ($E = 119.5 \text{ GPa}$), diameter $D = 19.05 \text{ mm}$, wanddikte 1.588 mm , 36 m lang, gevuld met water ($K = 1.95$

GPa). Bereken c en $4L/c$ en vergelijk de uitkomsten met de meetgegevens in de Figuur.

15. De gemeten drukken getoond in Figuur 6.16 zijn opgetreden na abrupte sluiting bij een aanvangssnelheid van 0.239 m/s. Bereken de te verwachten drukhoogtevariëaties en vergelijk deze met de gemeten waarden.
16. Werk oefening II (nog eens) uit.
17. Voor het (veel voorkomende) probleem uit par. 6.8 van de handleiding is gegeven dat de ongestoorde diepte 5 m is, de aanvankelijke snelheid nul en dat voor $t > 0$ de stroomsnelheid in $x = 0$ gegeven is door

$$\begin{aligned} 0 < t < T/2: & \quad U(0,t) = U_m [\sin(\pi t/T)]^2 \\ t > T/2: & \quad U(0,t) = U_m \end{aligned}$$
 met $T = 30$ s en $U_m = -0.7$ m/s.
 Werk dit probleem uit m.b.v. de methode van de karakteristieken:
 - (a) Uitgaand van de begintoestand, bereken en teken enkele positieve en negatieve karakteristieken en bepaal de toestand in het gebied $x > c_0 t$. Interpreteer de uitkomsten t.a.v. U en c (of d). Wat kun je concluderen t.a.v. de kromming van de karakteristieken?
 - (b) Uitgaand van de randvoorwaarde in $x = 0$, bereken en teken enkele positieve en negatieve karakteristieken en bepaal de toestand in het gebied $x < c_0 t$. Doe dit voor enkele tijdstippen zowel voor $t < T/2$ als voor $t > T/2$. Interpreteer de uitkomsten t.a.v. U en c (of d). Wat kun je concluderen t.a.v. de kromming van de karakteristieken?
 - (c) Ga voor de gekozen aanvangstijdstippen na hoe U en c (of d) variëren met x (lengteprofielen voor $t = \text{constant}$).
18. Als vraag 17, nu voor $U_m = +0.7$ m/s.
19. Is het gebied $x > c_0 t$ onder alle voorwaarden en voor alle tijden ongestoord?
20. Is de voortplantingssnelheid van de schokgolf t.o.v. het water ervoor groter dan, gelijk aan of kleiner dan c_0 ? Wat betekent dit voor het antwoord op vraag 19?
21. Als vraag 17, maar nu is in $x = 0$ niet de stroomsnelheid U gegeven maar de volgende betrekking tussen de afvoer p.e.v. breedte (q) en het verval tussen het kanaal en een in $x < 0$ aanwezig diep reservoir waarvan het peil 2 m boven het ongestoorde kanaalpeil ligt:

$$q = Ud = \mu a \sqrt{2g\Delta h}$$

Het effectieve stroomprofiel per eenheid van breedte tussen reservoir en kanaal is $\mu A/B_s = \mu a$ en varieert als volgt met de tijd:

$$\begin{aligned} t < 0: & \quad \mu a = 0 \\ 0 < t < T/2: & \quad \mu a = \mu a_m [\sin(\pi t/T)]^2 \\ t > T/2: & \quad \mu a = \mu a_m \end{aligned}$$

waarin $\mu a_m = 0.5 \text{ m}$.

22. Als vraag 17, maar nu is in $x = 0$ niet de stroomsnelheid gegeven maar het debiet p.e.v. breedte, dat als volgt varieert met de tijd:

$$\begin{aligned} t < 0: & \quad q = 0 \\ 0 < t < T/2: & \quad q = q_m [\sin(\pi t/T)]^2 \\ t > T/2: & \quad q = q_m \end{aligned}$$

waarin $q_m = 3.5 \text{ m}^2/\text{s}$.

23. Heeft de weerstand invloed op de karakteristieke richtingen (snelheden)?
24. Heeft de weerstand invloed op de differentiaalvergelijkingen die gelden langs de karakteristieken?
25. Verzin een voorbeeld van een stroming en maak daarvoor een berekening met de methode van de karakteristieken waarbij je de wandweerstand in rekening brengt (voor enkele tijdstappen), geconcentreerd in een randpunt.

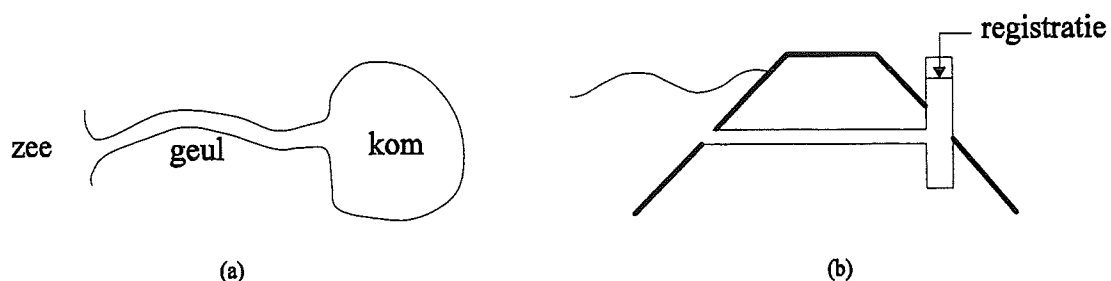
7 Systemen met discrete berging, traagheid en weerstand

7.1 Uitgangspunten

In de voorgaande hoofdstukken is in de meeste gevallen de weerstand buiten beschouwing gebleven en zijn slechts berging en traagheid in rekening gebracht. Waterstand en debiet zijn daarbij beschouwd als simultaan optredende continue functies van x en t , wat leidde tot gekoppelde partiële DVen met golfachtige oplossingen. In sommige gevallen kan een ruwere schematisatie worden gemaakt, nl. wanneer er sprake is van deelgebieden van zodanig kleine afmetingen t.o.v. de kenmerkende golflengte ($l \ll L$), of met looptijden die klein zijn t.o.v. de kenmerkende golfperiode, dat het golfkarakter in dat gebied er eigenlijk niet meer toe doet. Denk b.v. aan de getijdebeweging in een haven. Daarbij kan het waterpeil in de haven als constant in de ruimte worden benaderd en hoeft dit slechts als functie van de tijd te worden gemodelleerd. Op analoge manier kan in een voldoende kort stroomkanaal de berging worden verwaarloosd en (daarom) het debiet als ruimtelijk constant worden behandeld, dus slechts variërend in de tijd. Daardoor kan de variatie ervan worden beschreven met een gewone DV in plaats van een partiële, wat de analyse sterk vereenvoudigt.

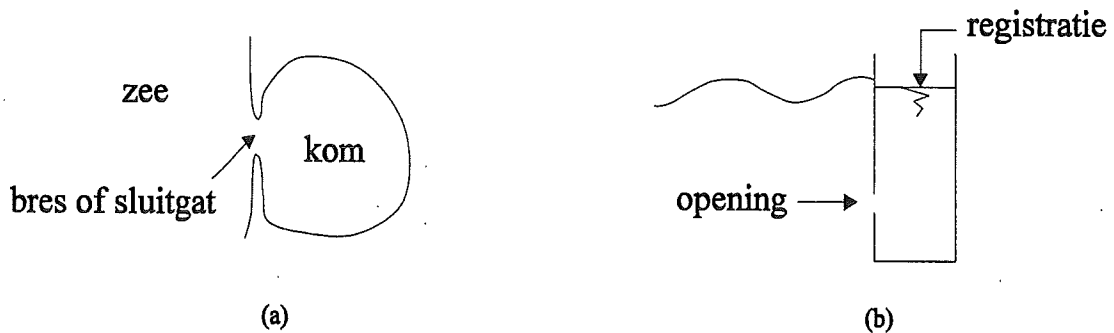
Omdat we hier afzonderlijke ruimtelijke gebieden beschouwen waarin we afzien van de continue variatie van een afhankelijke grootheid in de ruimte spreken we van **discrete modellen**, in tegenstelling tot de tot nu behandelde continue modellen. Deze benadering vormt het onderwerp van dit hoofdstuk, als tussenstap tussen de behandeling van golfvoortplanting (continue systemen) zonder weerstand (Hoofdstukken 4, 5 en 6) en met weerstand (Hoofdstukken 8 en 9).

In de discrete modellering van waterloopkundige systemen worden deelgebieden (z.g. systeemelementen of deelsystemen) onderscheiden waarin uitsluitend berging van belang is en traagheid en weerstand verwaarloosd worden, dan wel waarin juist de berging verwaarloosbaar is en weerstand en/of traagheid in rekening worden gebracht. Vergelijk dit met het klassieke model van een massa-veersysteem waarin de massa als star wordt benaderd en de veer als massaloos. Anders gezegd: alle kinetische energie wordt aan de massa toegedacht en alle potentiële (elastische) energie aan de veer.



Figuur 7.1 Kom (a) of peilput (b) met leidingvormige verbinding naar buitengebied

We beschouwen een vrijwel geheel gesloten bekken of kom van willekeurige vorm, via een nauwe verbinding aangesloten op een buitengebied waarin de waterstand op een gegeven manier in de tijd varieert. Een voorbeeld hiervan is een kom in een getijdegebied waarin het getij doordringt via een geul (Figuur 7.1a) of via een korte opening, b.v. een bres in een dijk na een doorbraak of een sluitgat in een dam tijdens een proces van afsluiting (Figuur 7.2a). Een toepassing van een geheel andere schaal is een peilput of peilkelder, d.w.z. een verticale schacht van b.v. 1 m diameter waarvan het interieur via een pijpleiding (Figuur 7.1b) of een gaatje in de wand (Figuur 7.2b) in verbinding staat met het buitengebied. De bedoeling hiervan is dat langzame variaties in buitenwaterstand (getij, rivierstand, seiches) vrijwel onverminderd doordringen zodat ze kunnen worden geregistreerd zonder ongewenste hoogfrequente storingen zoals van scheepsgolven of windgolven, die door de relatief kleine opening worden uitgefilterd.



Figuur 7.2 Kom (a) of peilput (b) met opening naar buitengebied

We beschouwen de kom (of put, maar we laten die verwijzing verder weg) met de bijbehorende verbinding als het totale systeem. Het wordt vanuit het buitenwater aangeslagen. Zowel kom als verbinding worden verondersteld klein te zijn t.o.v. de betreffende golflengte (verhouding $< \text{ca. } 1/20$, zie par. 4.7, Figuur 4.10).

Afgezien van een nauwe opening is de **kom** een gesloten deelsysteem waaraan uitsluitend een **bergende functie** wordt toegedacht; dat leidt tot de z.g. **kombergingsbenadering**.

De **verbinding** is een deelsysteem waaraan uitsluitend een **transportfunctie** wordt toegedacht, met weerstand en eventueel ook traagheid, maar geen berging; dat levert de z.g. **starre-kolombenadering**.

In analogie met het massa-veersysteem kunnen we zeggen dat alle potentiële (zwaarte-) energie aan de kom wordt toegeschreven en (als we traagheid in rekening brengen) alle kinetische energie aan de verbinding. Op basis hiervan is ook direct de eigenfrequentie van dergelijke systemen te berekenen (methode van Rayleigh; zie CTme2020).

7.2 Formulering

Kombergingsbenadering

Doordat de kom kort is en gesloten (afgezien van een lokale opening) zijn traagheid en weerstand in de kom verwaarloosbaar (zie de discussie hierover aan het eind van par. 2.1.5) en is de waterstand in de kom (h_k) als horizontaal te beschouwen, slechts variërend in de tijd. De variatie van de snelheid binnen de kom doet er dan niet toe. Als we het instromend debiet weergeven met Q en het bergend oppervlak in de kom met A_k dan luidt de volumebalans voor de kom:

$$Q = A_k \frac{dh_k}{dt} \quad (7.1)$$

Merk op hoe hierdoor het model vereenvoudigt: we hebben in de kom slechts met één variabele te maken (h_k), die bovendien slechts een functie is van de tijd en niet tevens van de plaats.

Starre-kolombenadering

De verbinding heeft als belangrijkste functie het transport van water tussen kom en buitengebied. Berging in de verbinding is niet essentieel en zal worden verwaarloosd. In geval van een gesloten verbinding, zoals een gevulde pijpleiding, duiker of opening in een wand bij een peilschacht, is in de verbinding berging zo wie so niet mogelijk (wanneer we compressibiliteit verwaarlozen). In geval van een verbinding met een vrij oppervlak zullen we aannemen dat de afmetingen zo klein zijn dat de vrije-oppervlakteberging daarin verwaarloosd kan worden t.o.v. die in de kom. In de genoemde voorbeelden van een bres of sluitgat in een dijk of dam gaat dit goed op.

Voor de uitwerking gaan we voorlopig uit van een leidingvormige verbinding met lengte l (zie Figuur 7.1). Uit de algemene ééndimensionale continuïteitsvergelijking

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7.2)$$

volgt dat bij verwaarlozing van berging in de verbinding $\partial Q / \partial x = 0$, ofwel dat Q daarin slechts als functie van t hoeft te worden beschouwd. (In een prismatische leiding, waarvoor $\partial A / \partial x = 0$, houdt $\partial Q / \partial x = 0$ tevens in $\partial U / \partial x = 0$, wat inhoudt dat het water door de verbinding beweegt zonder rek in lengterichting; vandaar de naam “starre-kolombenadering”.)

We gaan de benadering $\partial Q / \partial x = 0$ gebruiken in de uitwerking van de bewegingsvergelijking, waarbij we de overgang tussen de zee of de kom en de geul afzonderlijk behandelen van de verbindingsgeul zelf. Dit is toegelicht in Figuur 7.3.

De bewegingsvergelijking voor de stroming *in de verbindingsgeul* (dus niet de overgangen aan beide einden) luidt

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A_s} \right) + gA_s \frac{\partial h}{\partial x} + c_f \frac{|Q|Q}{A_s R} = 0 \quad (7.3)$$

We gaan deze integreren over de gehele lengte van de verbinding, zeg van $x = 0$ aan het zeewaartse einde in de verbinding tot $x = l$ aan de landzijde; zie Figuur 7.3. (De overgangen zijn in feite vloeiend; we gaan hier uit van een te schatten representatieve waarde van de lengte.) We gaan uit van een prismatische leiding en verwaarlozen niet alleen $\partial Q/\partial x$ maar (in de verbinding) ook $\partial A_s/\partial x$, waardoor de tweede term (de advection) wegvalt en de lokale traagheidsterm en de weerstandsterm beide niet met x variëren. Het laatste geldt dan ook voor het verhang, $\partial h/\partial x$. De integratie over x wordt daardoor triviaal, resulterend in

$$l \frac{dQ}{dt} + gA_s [h(l) - h(0) + \Delta H_w] = 0 \quad (7.4)$$

Hierin is ΔH_w het weerstandsverval, gegeven door

$$\Delta H_w = c_f \frac{|Q|Q}{gA_s^2 R} l = c_f \frac{l}{R} \frac{|U|U}{g} \quad (7.5)$$

Verg. (7.4) geldt *in* de verbinding. Nu moeten we nog de overgangen tussen de verbinding en de zee respectievelijk de kom in rekening brengen. Daarvoor maken we onderscheid tussen de waterstanden $h(0)$ en $h(l)$ aan de einden van de verbinding, maar wel er in, en de waterstanden in de zee (h_z) respectievelijk de kom (h_k) (zie Figuur 7.3).

In de overgangen tussen verbindingsgeul en de zee of de kom is sprake van ruimtelijk sterke variaties, waardoor we de stroming daar als quasi-stationair kunnen benaderen, d.w.z. wel variërend in de tijd maar op elk moment bepaald door de momentane waterstand aan weerszijden. (Vergelijk met stroming uit een reservoir door een kleine opening, CTme2100.)

Ter plaatse van de instroom (zeezijde bij vloed, komzijde bij eb) is sprake van een kort versnellingsgebied en hanteren we daar Bernoulli. (N.B. De termen “vloed” en “eb” slaan op de stroom, en moeten niet verward worden met “hoog water” respectievelijk “laag water”.) We verwaarlozen de snelheidshoogte in de zee of in de kom. Dan is de spiegeldaling gelijk aan de snelheidshoogte in de verbinding. Merk op dat deze spiegeldaling niet een energieverlies is, maar uiting is van omzetting van potentiële in kinetische energie.

Aan de uitstroomzijde gaat deze kinetische energie verloren. Daardoor ligt de waterspiegel in de leiding op hetzelfde niveau als in het ontvangende water (de kom bij vloed en de zee bij eb), overeenkomend met een vertragsverlies $\Delta H_v = U^2/(2g)$.

Voor beide gevallen van vloed en eb geldt voor het totale verval tussen zee en kom:

$$h_z - h_k = h(0) - h(l) + \Delta H_v \quad \text{waarin} \quad \Delta H_v = \frac{|U|U}{2g} \quad (7.6)$$

Substitutie hiervan in (7.4) geeft voor het totale verval tussen zee en kom:

$$h_z - h_k = \frac{l}{gA_s} \frac{dQ}{dt} + W \quad (7.7)$$

Hierin is W het totale verlies, in dit geval de som van het vertragsingsverlies ΔH_v en het wrijvingsverlies ΔH_w :

$$W = \frac{|U|U}{2g} + c_f \frac{l}{R} \frac{|U|U}{g} \quad (7.8)$$

ofwel, kort geschreven via invoering van een dimensieloze verliescoëfficiënt $\chi = 1/2 + c_f l/R$:

$$W = \left(\frac{1}{2} + c_f \frac{l}{R} \right) \frac{|U|U}{g} = \chi \frac{|Q|Q}{gA_s^2} \quad (7.9)$$

Het verval (linkerlid in verg. (7.7)) versnelt de vloeistofmassa in de verbinding (1e term in het rechterlid) en overwint verliezen (2e term). Als illustratie hiervan geeft Figuur 7.3 schetsmatig enkele lengteprofielen over de verbinding voor drie fasen, van maximum vloedstroom tot aan de kentering.

Figuur 7.3a geldt voor het moment van **maximum vloedstroom**. Op dat moment geldt $dQ/dt = 0$ en gedraagt de stroom zich momentaan als een stationaire stroom, waarbij het gehele verval tussen buiten en binnen opgaat aan wrijvings- en vertragsingsverliezen.

Door de stijging van het peil in de kom zal zich na enige tijd een moment voordoen waarop het verval tussen buiten en binnen nul is (Figuur 7.3b). Er staat dan nog steeds een vloedstroom, maar die wordt flink vertraagd omdat in de verbinding zowel de bodemweerstand als het verhang ($\partial h/\partial x > 0$) tegenwerken. (Deze situatie, met stroming tegen het verhang in ("tegen de helling op"), is uiteraard alleen mogelijk dank zij de traagheid.)

Op het moment van verval nul (Figuur 7.3b) keert het verval van teken om, waarna het van binnen naar buiten is gericht. De vertraging van de vloed wordt daardoor nog versterkt en na enige tijd komt het moment van **kentering**, d.w.z. dat de snelheid van richting omkeert en dus even nul is. (N.B. Het gaat hier om de dieptegemiddelde snelheid. In feite treedt kentering het eerst in bij de bodem, want daar zijn de snelheden het laagst.) Op dat moment is de weerstand nul en wordt het verval tussen zee en kom uitsluitend besteed aan het op gang brengen van de **ebstroom** in de verbinding (Figuur 7.3c). De ebcyclus verloopt analoog.

Gekoppeld stelsel

De vergelijkingen (7.1) en (7.7) worden voor het overzicht hier herhaald, waarbij we de uitdrukking voor W nu uitschrijven (7.9):

$$Q = A_k \frac{dh_k}{dt} \quad (7.10)$$

$$h_z - h_k = \frac{l}{gA_s} \frac{dQ}{dt} + \chi \frac{|Q|Q}{gA_s^2} \quad (7.11)$$

Dit is een gekoppeld stelsel van twee eerste-orde gewone DVen voor de twee afhankelijken h_k en Q . Bij bekende waarden van de zeewaterstand $h_z(t)$, de geometrische grootheden en de verliesfactor χ en bekende beginwaarden van h_k en Q zijn deze vergelijkingen te integreren, bijv. met Powersim of met een Runge-Kutta routine.

We kunnen één van beide afhankelijken elimineren. Het gemakkelijkst is dat voor Q . Door substitutie van (7.10) in (7.11), waarbij we afzien van eventuele variaties van A_k met h_k , ontstaat de volgende vergelijking voor h_k :

$$\frac{l}{g} \frac{A_k}{A_s} \frac{d^2 h_k}{dt^2} + \frac{\chi}{g} \frac{A_k^2}{A_s^2} \left| \frac{dh_k}{dt} \right| \frac{dh_k}{dt} + h_k = h_z \quad (7.12)$$

Dit is een gewone, tweede-orde DV voor $h_k(t)$ (geen partiële, want h_k hangt uitsluitend van t af, niet ook van x), met (bij benadering) constante coëfficiënten. Deze is te integreren bij gegeven geometrie, c_f en zeewaterstand $h_z(t)$ en gegeven beginwaarden van h_k en dh_k/dt , bijv. met een Runge-Kutta routine.

Vergelijking (7.12) komt overeen met die voor een enkelvoudig **gedempt massa-veersysteem**, met in dit geval kwadratische damping (de tweede term) in plaats van lineaire. Een dergelijk systeem kent **eigentrillingen** die plaats vinden met de z.g. **eigenfrequentie** ω_o , die bij afwezigheid van damping ($\chi = 0$) de waarde heeft (zie CTme1021, CTme2020)

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{A_s}{A_k}} \quad (7.13)$$

Wanneer een dergelijk systeem abrupt wordt aangeslagen gaat het in zijn eigenfrequentie trillen (het homogene deel van de oplossing, als reactie op de begintoestand). Als gevolg van de damping nemen deze eigentrillingen in sterkte af en is na een zekere inspeeltijd de invloed van de begintoestand verdwenen. Bij willekeurige aanvankelijke binnenwaterstand en periodieke forcering (buitenwaterstand) zal na dat inspeelinterval de respons ook periodiek zijn, met dezelfde periode (niet-homogene oplossing). We hebben dan uitsluitend de **periodieke oplossing** of z.g. stationaire toestand (zo genoemd omdat de cycli niet in de tijd

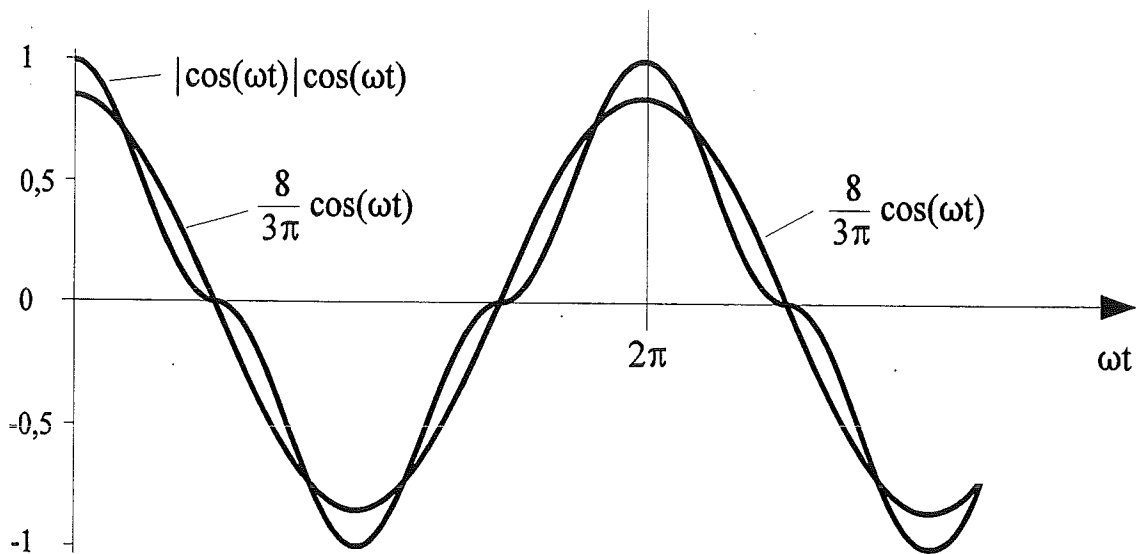
veranderen, hoewel binnen elke cyclus de toestand met de tijd varieert).

Vanwege de modulusfactor in de dempingsterm is de DV (7.12) niet lineair. In numerieke berekeningen is dat geen probleem. Hier willen we voor het inzicht en de gemakkelijke hanteerbaarheid ook analytische oplossingen. Daarvoor wordt eerst de weerstandsterm benaderd met een lineaire uitdrukking, door de tijdsafhankelijke modulusfactor te vervangen door een geschikt te kiezen constante. We doen dat voor de (niet-homogene) periodieke oplossing, uitgaande van een bij benadering sinusvormige beweging. Het resultaat zal ook uitvoerig worden gebruikt in het volgende hoofdstuk, over getijberekeningen.

7.3 Linearisering van kwadratische weerstand

De weerstand is evenredig aan $|Q|Q$, zeg $W = \lambda_1 |Q|Q$, waarbij $\lambda_1 = \chi/gA_s^2$ (zie verg.7.9). Stel dat het debiet sinusvormig varieert in de tijd:

$$Q = \hat{Q} \cos \omega t \quad (7.14)$$



Figuur 7.4 Kwadratische weerstand en lineaire benadering

Figuur 7.4 geeft een schets van de bijbehorende $|Q|Q/\hat{Q}^2 = |\cos \omega t| \cos \omega t$, dus op een constante factor na het verloop van de weerstand, als functie van t .

De modulusfactor veroorzaakt vervormingen t.o.v. een sinusprofiel. Daar willen we van af. We gaan de weerstand benaderen als evenredig aan Q , zeg $W \approx \lambda_2 Q$ in plaats van $W = \lambda_1 |Q|Q$. Het precieze verloop in de tijd is hiermee niet goed weergegeven. Dat wordt geaccepteerd mits de dempende invloed van de weerstand zo goed mogelijk wordt behouden. Daarom bepalen we λ_2 zodanig dat de energie die per cyclus (met een duur T , de periode)

verloren gaat door de weerstand in beide gevallen gelijk is:

$$\int_0^T W Q \, dt = \int_0^T \lambda_1 |Q| Q^2 \, dt = \int_0^T \lambda_2 Q^2 \, dt \quad (7.15)$$

Substitutie van (7.14) en uitwerken geeft

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\int_0^T |\cos \omega t| \cos^2 \omega t \, dt}{\int_0^T \cos^2 \omega t \, dt} \hat{Q} = \frac{\int_0^{T/4} \cos^3 \omega t \, dt}{\int_0^{T/4} \cos^2 \omega t \, dt} \hat{Q} = \frac{8}{3\pi} \hat{Q} \quad (7.16)$$

Met bovenstaand resultaat (7.16) voor λ_2 wordt de gelineariseerde uitdrukking voor W :

$$W = \frac{8}{3\pi} \chi \frac{\hat{Q}}{g A_s^2} Q \quad (= \frac{8}{3\pi} \chi \frac{\hat{U}}{g} U) \quad (7.17)$$

In het werken met de gelineariseerde weerstand als benadering is in het algemeen $\hat{Q}$ niet a priori bekend. De oplossing kan dan iteratief worden bepaald. (In de hier gegeven toepassing blijkt dat niet nodig te zijn omdat daarvoor een expliciete oplossing kan worden gevonden.)

Door gebruikmaking van de gelineariseerde weerstand volgens (7.17) ontstaat de volgende lineaire DV voor h_k in de plaats van (7.12):

$$\frac{l}{g} \frac{A_k}{A_s} \frac{d^2 h_k}{dt^2} + \tau \frac{dh_k}{dt} + h_k = h_z \quad (7.18)$$

Hierin is kortheidshalve een parameter τ gebruikt, gedefinieerd als

$$\tau = \frac{8}{3\pi} \chi \frac{A_k}{g A_s^2} \hat{Q} = \frac{8}{3\pi} \chi \frac{A_k}{A_s} \frac{\hat{U}}{g} \quad (7.19)$$

Vergelijking (7.18) impliceert dat τ een tijdschaal is van het systeem (relaxatietijd), die o.m. bepalend is voor de inspeelduur bij verandering in excitatie. Vanwege de oorspronkelijk kwadratische weerstand hangt deze af van een (nog onbekende) amplitude van het debiet of de stroomsnelheid.

Vergelijking (7.18) is niet alleen lineair maar heeft ook constante coëfficiënten. Dat houdt in dat de respons op een sinusvormige forcering ook sinusvormig is, met dezelfde frequentie.

We gaan het waterpeil nu schrijven als een ongestoord, horizontaal niveau (h_o) en een daarop gesuperponeerde fluctuatie (ζ), ofwel $h_z = h_o + \zeta_z$ en $h_k = h_o + \zeta_k$. Wanneer we dit substitueren in (7.18) valt h_o er uit en houden we een identieke vergelijking over, nu voor de ζ 's :

$$\frac{l}{g} \frac{A_k}{A_s} \frac{d^2 \zeta_k}{dt^2} + \tau \frac{d\zeta_k}{dt} + \zeta_k = \zeta_z \quad (7.20)$$

Uitgaand van een gegeven sinusvariatie van ζ_z gaan we uit deze vergelijking de bijbehorende sinusvormige respons ζ_k berekenen, voor de eenvoud eerst voor het geval van verwaarloosbare traagheid.

7.4 Systeem met discrete berging en weerstand

Voor korte verbindingen, zoals een bres of een sluitgat in een dijk, of een opening in de wand van een peilschacht (zie Figuur 7.2), is de traagheid van het water in de verbinding verwaarloosbaar t.o.v. de weerstandsterm. In dat geval gaat bovendien het uittreeverlies domineren boven de wrijving ($\chi \rightarrow 1/2$ als $l/R \rightarrow 0$). Dit vereenvoudigde geval behandelen we eerst, een z.g. **sluitgatberekening**. Voor deze categorie reduceert (7.20) tot

$$\tau \frac{d\zeta_k}{dt} + \zeta_k = \zeta_z \quad (7.21)$$

Door verwaarlozing van de traagheid is de DV van de eerste orde geworden (was tweede). Een consequentie van verwaarlozing van de traagheid is dat het debiet in de verbinding nul is zodra het verval nul is, waar uit volgt dat de binnenwaterstand een extreme waarde bereikt (hoog water of laag water) op de momenten waarop het verval over de verbinding van teken wisselt. Dat is ook te zien aan (7.21).

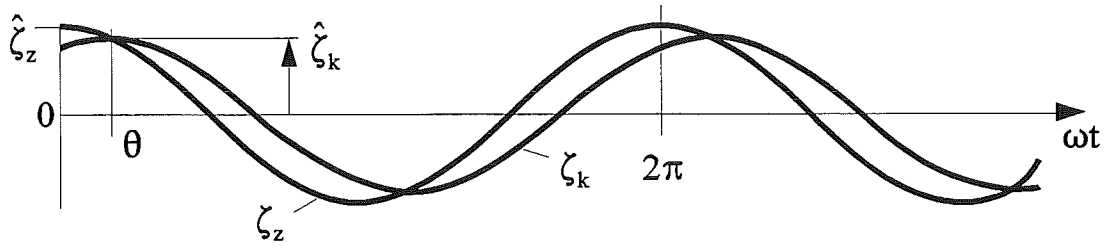
We gaan nu de niet-homogene, geforceerde oplossing zoeken van de DV (7.21) voor ζ_k , horend bij een sinusvormig variërende buitenwaterstand ζ_z met gegeven amplitude en frequentie:

$$\zeta_z = \hat{\zeta}_z \cos \omega t \quad (7.22)$$

Voor de periodieke oplossing van (7.21) horend bij de forcering (7.22) kunnen we schrijven

$$\zeta_k = \hat{\zeta}_k \cos (\omega t - \theta) = r \hat{\zeta}_z \cos (\omega t - \theta) \quad \text{waarin} \quad r = \hat{\zeta}_k / (\hat{\zeta}_z) \quad (7.23)$$

De amplitudeverhouding r en de fase(vertraging) θ zijn voorlopig onbekend en moeten worden berekend uit de gegeven grootheden op basis van (7.21).



Figuur 7.5 Sinusvormig verloop buiten- en binnenwaterstand

Om inzicht te krijgen in hun onderlinge relatie is in Figuur 7.5 het getij binnen en buiten getekend voor willekeurige amplituden en faseverschuiving, maar wel zodanig dat de binnenwaterstand extreem is ($\zeta_k = \hat{\zeta}_k$) op de momenten waarop de twee getijkrommen elkaar snijden (zie de discussie hierboven). Op die momenten (bijv. $\omega t = \theta$) geldt dus $\zeta_k = \hat{\zeta}_k = \hat{\zeta}_z \cos \theta$, waaruit volgt

$$r = \cos \theta \quad (7.24)$$

Hiermee is één relatie afgeleid tussen de twee afhankelijken r en θ .

Voor de bepaling van de totale oplossing substitueren we de veronderstelde uitdrukkingen voor ζ_z en ζ_k ((7.22) en (7.23)) in de DV (7.21) en werken dit uit, met het resultaat (zie ook Handleiding Modelvorming, CTow1090, H. 6):

$$\tan \theta = \omega \tau \quad (7.25)$$

zodat

$$r = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \quad (7.26)$$

Hiermee is de oplossing in principe bepaald. Het blijkt dat de dimensieloze parameter $\omega \tau$ bepalend is voor de onderlinge verhoudingen. Dat is begrijpelijk, en zelfs te verwachten, want τ is een systeemtijdschaal. De mate waarin het systeem reageert op een periodieke forcering met frequentie ω wordt dan bepaald door $\omega \tau$ (zie ook Modelvorming, CTow1090).

Is $\omega \tau \ll 1$ dan is de forcering relatief langzaam. Het systeem kan dan quasi-statisch reageren. De respons is dan vrijwel 100% ($\zeta_k \approx \zeta_z$) en het weerstandstandsverval (de eerste term in (7.21), met grootte-orde $\omega \tau \hat{\zeta}_k$), onbetekenend t.o.v. elk van beide andere termen. De amplitudeverhouding is dan vrijwel 1 en er is nauwelijks fasevertraging. Dit doet zich voor bij voldoende ruime opening t.o.v. het bergend oppervlak in de kom, c.q. langzame en zwakke excitatie (zie de uitdrukking voor τ).

Toenemende waarde van $\omega\tau$ (dus ook θ) betekent toenemende invloed van weerstand, dalende respons en meer naijling.

De tijdschaal τ bevat o.m. de amplitude van het debiet. Om die uit te drukken in de amplitude van de binnenwaterstandsfluctuatie substitueren we (7.23) in de volumebalans (7.10), met het resultaat

$$\hat{Q} = A_k \omega \hat{\zeta}_k \quad (7.27)$$

Daaruit volgt voor $\omega\tau$:

$$\omega\tau = \frac{8}{3\pi} \chi \left(\frac{A_k}{A_s} \right)^2 \frac{\omega^2 \hat{\zeta}_k}{g} \quad (7.28)$$

De onbekenden (r en θ) zijn hierboven uitgedrukt in $\omega\tau$, die echter zelf de onbekende binnenamplitude $\hat{\zeta}_k$ bevat. Iteratie is nodig wanneer we de oplossing willen gebruiken in bovenstaande vorm. We kunnen de oplossing echter expliciet maken omdat substitutie van $\hat{\zeta}_k = r \hat{\zeta}_z$ in (7.28) en van het resultaat in (7.26) een vierkantsvergelijking in r^2 oplevert. Die is op te lossen. We definiëren daarom in de plaats van $\omega\tau$ een verwante grootheid die uitsluitend onafhankelijke variabelen bevat ($\hat{\zeta}_z$ in plaats van $\hat{\zeta}_k$):

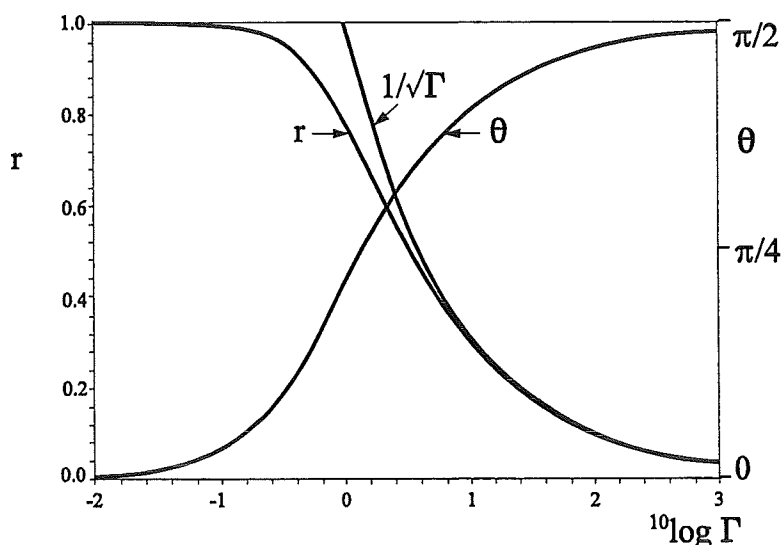
$$\Gamma \equiv \frac{\omega\tau}{r} = \frac{8}{3\pi} \chi \left(\frac{A_k}{A_s} \right)^2 \frac{\omega^2 \hat{\zeta}_z}{g} \quad (7.29)$$

Merk op dat Γ een dimensieloze combinatie is van alle onafhankelijke variabelen in het probleem (in de sluitgatbenadering, dus zonder traagheid).

Substitutie van (7.29) in (7.26) en uitwerken van de resulterende vierkantsvergelijking geeft als expliciete oplossing:

$$r = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \Gamma} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\Gamma^2}} \quad (7.30)$$

Figuur 7.6 geeft het verloop van r en θ volgens (7.30) als functie van Γ (zie Figuur 6.1 Handleiding Modelvorming, CTow1090).



Figuur 7.6 Amplitudeverhouding en fasevertraging voor systeem met discrete berging en weerstand

De waarde van Γ is een maat voor de relatieve grootte van de weerstandsterm (evenals die van $\omega\tau$, maar nu met $\hat{\zeta}_z$ in plaats van $\hat{\zeta}_k$). Voor $\Gamma \ll 1$ is de weerstand onbetekenend t.o.v. de getij-amplitude op zee. De respons is dan vrijwel 100%, zonder fasevertraging. Bij benadering geldt

$$r \approx 1 - \frac{1}{2}\Gamma^2 \quad \text{en} \quad \theta \approx \Gamma \quad \text{voor} \quad \Gamma < \text{ca. } 0.1 \quad (7.31)$$

Voor $\Gamma \gg 1$ geldt het tegendeel. Dan is de weerstand relatief groot (of: snelle en/of sterke excitatie), is de binnenamplitude zeer klein t.o.v. de buitenamplitude en gaat de fasevertraging naar 90° . Voor grote Γ geldt de benadering

$$r = \cos \theta \approx \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \quad \text{voor} \quad \Gamma > \text{ca. } 10 \quad (7.32)$$

Zie de getekende asymptoot in Figuur 7.6.

Voorgaande resultaten zijn o.a. te gebruiken om de getijbeweging in een kom met een kleine opening te berekenen (dijkdoorbraak, sluitgat).

Voorbeeld 1

Gegeven: M_2 getij, $\hat{\zeta}_z = 1 \text{ m}$, kom met $A_k = 100 \text{ km}^2$, sluitgat met $A_s = 3000 \text{ m}^2$

Gevraagd: $\hat{\zeta}_k$ en θ

Oplossing: een kom met de gegeven oppervlakte zal een lengte hebben van ca. 10 km, klein t.o.v. de golflengte van het getij, dus kombergingsbenadering OK. Sluitgat, kort, $\chi = 1/2$.

Invullen geeft $\Gamma = 0.92 \rightarrow r = 0.81$, dus amplitude van het getij in de kom is 0.81 m en de

fasevertraging is $\theta = \arccos r = 0.63 \text{ rad} = 36^\circ$.

Voorbeeld 2

Zelfde als voorbeeld 1, maar nu met een korte verbindingsgeul ($A_s = 3000 \text{ m}^2$, $R = 6 \text{ m}$, $c_f = 0.004$, $l = 600 \text{ m}$) i.p.v. een sluitgat in een dijk.

Oplossing: $\chi = \frac{1}{2} + c_f l/R = 0.9$ ofwel $1.8 \times$ groter dan in voorbeeld 1. Dus $\Gamma = 1.8 \times 0.92 = 1.66 \rightarrow r = 0.67$, dus amplitude van het getij in de kom is 0.67 m en de fasevertraging is $\theta = \arccos r = 0.84 \text{ rad} = 48^\circ$.

7.5 Systeem met discrete berging, weerstand en traagheid

We keren nu terug naar de situatie van een kom die in verbinding staat met een in hoogte fluctuerend buitenwater via een leiding (Figuur 7.1) van enige lengte, enerzijds kort t.o.v. de golflengte van het getij, zodat de starre-kolom benadering kan worden toegepast, anderzijds wel zo lang dat zowel de traagheid van het stromende water als de weerstand in rekening moet worden gebracht. We herhalen de DV die dan geldt, met gelineariseerde weerstand:

$$\frac{l}{g} \frac{A_k}{A_s} \frac{d^2 \zeta_k}{dt^2} + \tau \frac{d\zeta_k}{dt} + \zeta_k = \zeta_z \quad (7.33)$$

Dit is de standaardvergelijking voor de gedwongen beweging van een **lineair, gedempt massa-veersysteem** (zie CTme2020) met dempingsfactor τ en **eigenfrequentie** (in afwezigheid van damping) gegeven door:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{A_s}{A_k}} \quad (7.34)$$

De oplossing van (7.33) voor de amplitudeverhouding r en de faseverschuiving θ bij harmonische excitatie is nu niet alleen afhankelijk van $\omega\tau$ maar ook van de verhouding ω/ω_o , die bepalend is voor het dynamisch gedrag. De oplossing is standaard (zie o.a. CTme2020), gegeven door

$$\frac{\zeta_k}{\zeta_z} = r = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_o^2)^2 + (\omega\tau)^2}} \quad (7.35)$$

en

$$\tan \theta = \frac{\omega\tau}{1 - \omega^2/\omega_o^2} \quad (7.36)$$

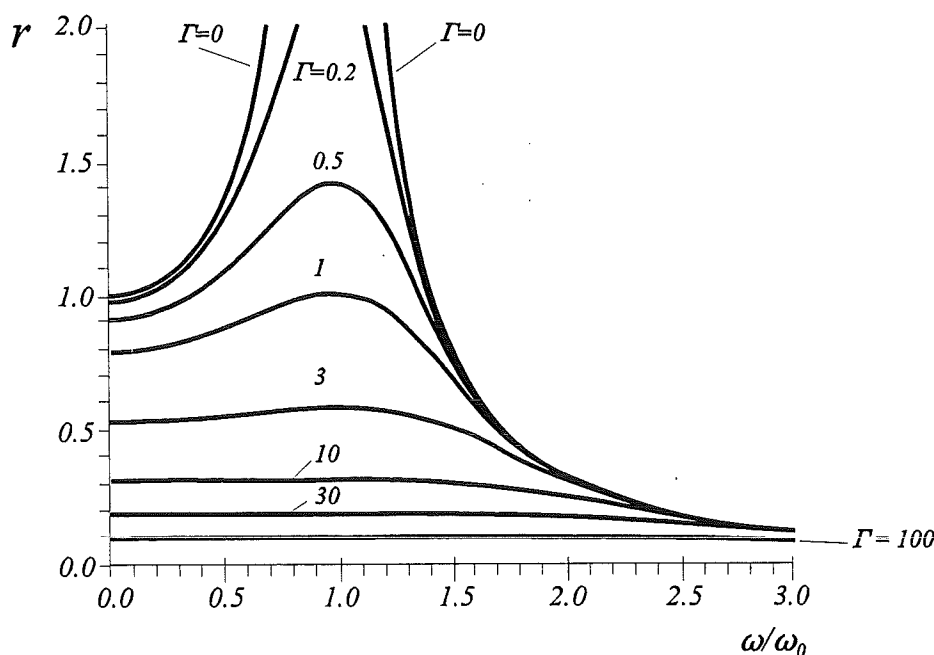
Deze formulering is weer impliciet omdat τ een functie is van de onbekende $\hat{\zeta}_k$, evenals in het geval van het berging-weerstand model (met verwaarloosde traagheid), en is op dezelfde manier en met dezelfde Γ expliciet te maken, met het resultaat:

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} \Gamma} \sqrt{-(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^4 + 4\Gamma^2}} \quad (7.37)$$

en

$$\tan \theta = \frac{\Gamma r}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \quad (7.38)$$

Voor $\omega/\omega_0 \ll 1$ (langzame excitatie) gaat de oplossing over in die voor het berging-weerstandmodel (verwaarloosde traagheid), behandeld in par. 7.4.



Figuur 7.7 Amplitudeverhouding voor systeem met discrete berging, traagheid en weerstand

Figuur 7.7 geeft het verloop van r met ω/ω_0 voor enkele waarden van Γ . Deze grafiek bevat in compacte vorm veel nuttige informatie voor praktische toepassingen, en toont in een oogopslag in hoeverre de traagheid nog een rol speelt.

Voorbeeld

Gegeven: M_2 getij, $\hat{\zeta}_z = 1$ m, kom, $A_k = 100$ km², $A_s = 3000$ m², $R = 6$ m, $l = 5$ km, $c_f = 0.004$ (als voorbeeld 2 in par. 7.4, maar nu met een langere geul).

Gevraagd: $\hat{\zeta}_k$ en θ met en zonder traagheid.

Oplossing: kombergingsbenadering is OK (zie voorbeeld 1 par. 7.4). Geul relatief kort dus starre-kolombenadering is OK.

Substitutie van de gegevens geeft $\chi = 3.83$, dus bodemwrijving overheerst t.o.v.

vertragingsverlies; begrijpelijk gezien de lengte van de verbinding. Verder is $\Gamma = 7.22$, $\omega_o = 2.4 \cdot 10^{-4}$ rad/s, $\omega/\omega_o = 0.577$, $(\omega/\omega_o)^2 = 0.333$, dus traagheid zal zwak effect hebben (zie Figuur 7.7). Uitkomst met traagheid (via 7.37): $r = 0.37$, dus $\hat{\zeta}_k = 0.37$ m en $\theta = 76^\circ$. Zonder traagheid (via 7.37 met $\omega/\omega_o = 0$ gesteld, of direct via 7.30): $r = 0.36$, dus $\hat{\zeta}_k = 0.36$ m, en $\theta = 69^\circ$. Traagheid heeft blijkbaar nauwelijks effect op de amplitude maar meer op de fase.

Merk op hoe de grotere lengte van de geul het getij in de kom dempt (vergelijk bovenstaande uitkomst met die in het voorbeeld van par. 7.4).

7.6 Complexe rekenwijze

Als voorbereiding op het volgende Hoofdstuk gaan we de hier behandelde oplossing voor het berging-weerstandsmodel nog eens afleiden, maar dan met gebruikmaking van de complexe representatie en rekenwijze voor sinusvormige functies. Dat heeft als voordelen dat amplitude en fase in één variabele zijn gecombineerd en dat de DV overgaat in een algebraïsche vergelijking waaruit de tijd weg valt, en die ook grafisch goed is uit te beelden. (In een Appendix aan dit hoofdstuk wordt als opfrisser een résumé gegeven van rekenregels voor complexe getallen die we daarbij nodig hebben. Het is misschien nuttig (nodig) dat eerst goed te bestuderen.)

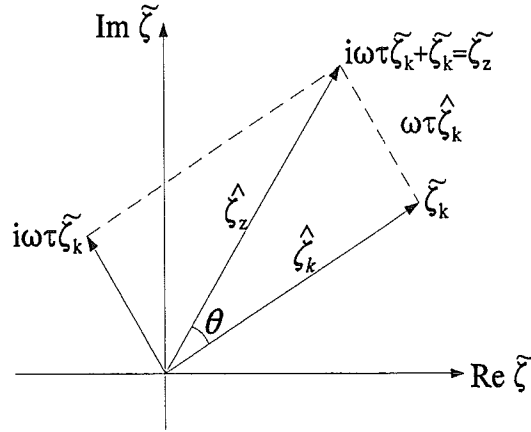
We herhalen de DV waarvan we opnieuw de oplossing willen bepalen (7.21):

$$\tau \frac{d\zeta_k}{dt} + \zeta_k = \zeta_z \quad (7.39)$$

We representeren beide (co)sinusvormig in de tijd variërende functies ζ als het reële deel van een complexe grootte volgens

$$\zeta_z(t) = \text{Re} [\tilde{\zeta}_z e^{i\omega t}] \quad \text{en} \quad \zeta_k(t) = \text{Re} [\tilde{\zeta}_k e^{i\omega t}] \quad (7.40)$$

Voor willekeurig gekozen modulus en argument hebben we $\tilde{\zeta}_k$ geplot in het complexe vlak (zie Figuur 7.8). Vermenigvuldiging met $\exp[i\omega t]$ betekent een met de tijd voortgaande draaiing met hoeksnelheid ω . Het reële deel van het product (ofwel de projectie op de reële as) varieert dus (co)sinusvormig in de tijd, met amplitude gelijk aan de modulus van $\tilde{\zeta}_k$, ofwel $\hat{\zeta}_k = |\tilde{\zeta}_k|$. Deze draaiing en projectie hoeven we ons er slechts bij te denken en niet uit voeren. M.a.w., in het rekenen kunnen we de factor $\exp[i\omega t]$ weglaten, evenals het voorvoegsel “Re”.



Figuur 7.8

Voor het bepalen van de oplossing van $\tilde{\zeta}_k$ uit de DV (7.39) hebben we nog de afgeleide van $\tau\zeta_k(t)$ naar de tijd nodig:

$$\tau \frac{d\zeta_k(t)}{dt} = \text{Re} [i\omega\tau\tilde{\zeta}_k e^{i\omega t}] \quad (7.41)$$

De grootheid $i\omega\tau\tilde{\zeta}_k$ is eveneens uitgezet in het complexe vlak (zie Figuur 7.8). Hij staat haaks op $\tilde{\zeta}_k$ vanwege de vermenigvuldiging met i (wat een draaiing over 90° inhoudt) en is een factor $\omega\tau$ keer groter (of kleiner, al naar gelang). Substitutie van bovenstaande in de DV (7.39) levert na deling door $\exp[i\omega t]$:

$$i\omega\tau\tilde{\zeta}_k + \tilde{\zeta}_k = \tilde{\zeta}_z \quad (7.42)$$

We zien hier het voordeel van de complexe representatie: de DV (7.39) gaat over in een algebraïsche vergelijking (7.42).

De (vector)som van de twee complexe termen in het linkerlid van (7.42) is in Figuur 7.8 afgebeeld als de resultante van twee vectoren. Deze moet volgens (7.42) gelijk zijn aan $\tilde{\zeta}_z$. De amplitudeverhouding resp. het faseverschil hadden we r resp. θ genoemd. De Figuur laat zien dat die voldoen aan

$$\tan \theta = \omega\tau \quad \text{en} \quad r = \tilde{\zeta}_k / \tilde{\zeta}_z = \cos \theta = 1 / \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \quad (7.43)$$

Dit zijn (vanzelfsprekend) dezelfde uitkomsten als in par. 7.4. Het rekenen met complexe grootheden heeft als voordeel dat de algebra veel beknopter is, en dat de geometrische relaties in het complexe vlak de onderlinge relaties direct zichtbaar maken. Zo laat Figuur 7.8 expliciet zien dat het weerstandsverval 90° uit fase is met de binnenwaterstand, dat $\tan \theta = \omega\tau$, en dat $r = \cos \theta$.

We kunnen de oplossing ook geheel bepalen via complexe algebra, in plaats van meetkundig, en definiëren daarvoor de complexe responsfactor

$$\tilde{r} \equiv \tilde{\zeta}_k / \tilde{\zeta}_z \quad (7.44)$$

Uit (7.42) volgt dat deze moet voldoen aan

$$\tilde{r} \equiv \frac{\tilde{\zeta}_k}{\tilde{\zeta}_z} = \frac{1}{1 + i\omega\tau} \quad (7.45)$$

De modulus hiervan ($1/\sqrt{1+(\omega\tau)^2}$) is de verhouding tussen de amplituden van de binnen-en buitenwaterstandsfluctuaties, ofwel de eerder gebruikte factor r :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = |\tilde{r}| = \left| \frac{\tilde{\zeta}_k}{\tilde{\zeta}_z} \right| = \frac{|\tilde{\zeta}_k|}{|\tilde{\zeta}_z|} = \frac{\hat{\zeta}_k}{\hat{\zeta}_z} = r \quad (7.46)$$

Het argument van $\tilde{r}$, gelijk aan $-\arctan \omega\tau$, is de faseverschuiving die we eerder $-\theta$ hadden genoemd. Voor θ geldt dus $\tan \theta = \omega\tau$ ofwel $\cos \theta = 1/\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$, dezelfde waarde als voor r .

Opgave: leid met bovenstaande methode de oplossing (verg. 7.35 en 7.36) af van het berging-weerstands-traagheidsmodel van par. 7.5 (verg. 7.33).

7.7 Vragen en opgaven

1. Maak een samenvatting van dit Hoofdstuk.
2. Wat houdt de z.g. kombergingsbenadering in?
3. Onder welke voorwaarde(n) is die geldig?
4. Kijk vanuit vraag 3 nog eens naar de uitkomsten van vraag 21 bij Hoofdstuk 4.
5. Is een variatie van de diepte in de kom van invloed op de geldigheid van de kombergingsbenadering? Nooit? Altijd? In sommige gevallen?
6. En de waarde van de bodemweerstandsfactor c_f ?
7. Wat houdt de z.g. starre-kolombenadering in?

8. Onder welke voorwaarde(n) is die geldig?
9. Maak vanuit deze vragen over kombergings- en starre kolom-benadering (nog eens) goed studie van de gegevens voor Oefening III, i.h.b. die voor de basisberekening, Bijlagen 1A, 1B en 2 D.
10. Verklaar waarom in een systeem met discrete berging en weerstand de maximale en minimale binnenwaterstanden optreden op de momenten waarop het verval over de verbinding naar het buitengebied nul is.
11. Welk fysisch criterium wordt gehanteerd in de linearisering van de weerstand in oscillerende stromen? Waarom?
12. Welk fysisch verschijnsel wordt met de linearisering prijsgegeven (niet gemodelleerd)?
13. Ga goed de herkomst en betekenis na van de dimensieloze parameters $\omega\tau$ en Γ .
14. Bewijs (7.30), gegeven de oplossing (7.26) en de definitie $\Gamma = \omega\tau/r$.
15. Bewijs (7.37), gegeven (7.35) en de definitie $\Gamma = \omega\tau/r$.
16. Ga zonder berekening na waarom de amplituderresponsfactor r vrijwel 1 is voor kleine Γ en naar nul gaat voor grote Γ .
17. Via een vlotter in een peilbuis met een diameter van 1 m moeten havenoscillaties (seiches) met een periode van 10 minuten en een amplitude van 50 cm kunnen worden gemeten met een demping van ten hoogste 5% (r ten minste 0.995). Bereken de minimaal noodzakelijke diameter van de opening in de wand (antw.: ca. 5 cm).
18. Bereken de demping die daarbij optreedt van windgolven met een amplitude van eveneens 50 cm, maar met een periode van 8 s (antw.: ca. 98%, dus r ca. 0.02).
19. Beredeneer hoe een vergroting met b.v. 20% van elk van de volgende parameters afzonderlijk het debiet in de mond ongeveer zal beïnvloeden:
 $\bullet B_s \quad \bullet d \quad \bullet A_s \quad \bullet c_f \quad \bullet l \quad \bullet A_k \quad \bullet \zeta_z \quad \bullet \omega$
 Verifieer je taxatie door gebruikmaking van een analytische oplossing. (Hoeveel berekeningen zijn hiervoor nodig? Minder dan het aantal gevarieerde parameters!)

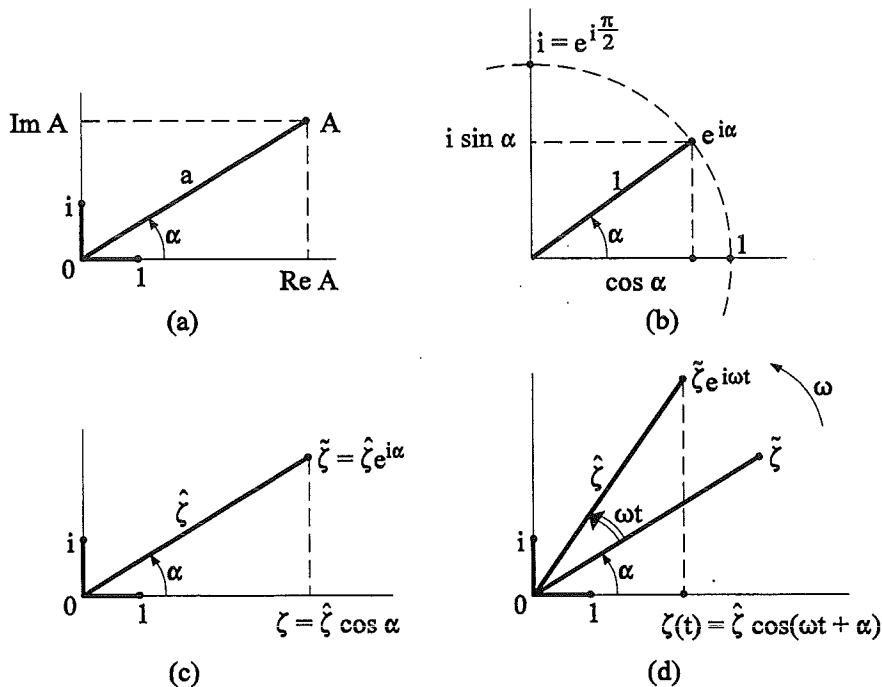
20. Gegeven is een vrijwel rechthoekige getijkom met een bergend oppervlak van 10 km x 20 km, via een geul in verbinding staand met een zee waarin het M_2 -getij dominant is, met een gemiddeld tijverschil (hoogwaterstand - laagwaterstand) van 2 m. De geul is 10 km lang en heeft bij gemiddelde zeestand een (overdwars) gemiddelde diepte van ca. 9 m, een stroomvoerend oppervlak van ca. $5 \times 10^3 \text{ m}^2$ en een bergende breedte van 600 m. Verwaarloos voorlopig de traagheid in de geul. De gegeven antwoorden zijn voor een c_f van ca. 0.004.
- (a) Bereken de amplitude van de binnenwaterstand. (Antw.: $\hat{\zeta}_k = 0.27 \text{ m}$)
 - (b) Bereken het faseverschil tussen buiten- en binnenwaterstand (Antw.: $\theta = 76^\circ$)
 - (c) Bereken de amplitude van het debiet in de geul (Antw.: $\hat{Q} = 7.6 \times 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$)
 - (d) Maak in één figuur een schets van het verloop in de tijd van de buiten- en binnenwaterstand en van het debiet in de geul; interpreteer wat je ziet.
 - (e) Breng ook traagheid in rekening en bereken de eigenfrequentie van het systeem. (Antw.: $\omega_0 = 1.58 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$).
 - (f) Ga na in hoeverre het in dit geval verantwoord is de traagheid in de geul te verwaarlozen.
 - (g) Bereken de amplitude van de binnenwaterstand en het faseverschil tussen de binnen- en buitenwaterstand waarbij je de traagheid in de geul in rekening brengt. (Antw.: $\hat{\zeta}_k = 0.27 \text{ m}$ (vrijwel onveranderd) en $\theta = 87^\circ$). Ga na waarom θ toeneemt door het in rekening brengen van traagheid in de verbindingsgeul.
21. We gaan door op vraag 20. Stel dat gegeven is $\zeta_z(t) = \hat{\zeta}_z \cos(\omega t - \alpha)$ met $\hat{\zeta}_z = 1 \text{ m}$ en $\alpha = 212^\circ$. Bereken de bijbehorende complexe $\tilde{\zeta}_z$; teken deze in het complexe vlak en bereken het reële deel en het imaginaire deel ervan. (Antw.: $\text{Re} \tilde{\zeta}_z = -0.85 \text{ m}$, $\text{Im} \tilde{\zeta}_z = 0.53 \text{ m}$)
22. Gebruik de gegevens en antwoorden uit vraag 20 met verwaarloosde traagheid om de complexe grootte $1 + i\omega\tau$ te berekenen en in het complexe vlak te tekenen. Bereken met gebruikmaking van deze uitkomst en het antwoord voor $\tilde{\zeta}_z$ uit vraag 21 direct (met verg. (7.45)) de complexe $\tilde{\zeta}_k$, en daaruit $\hat{\zeta}_k$ en de bijbehorende fase. Maak daarbij ook een schets in het complexe vlak. Ga na of de uitkomsten (amplitude en fase) consistent zijn met de onder 20 a en b berekende uitkomsten.

APPENDIX Résumé complexe rekenregels

Voor de **imaginaire eenheid** geldt $i = \sqrt{-1}$. Een **complexe grootte** A bestaat uit een reëel deel en een imaginair deel, en kan grafisch worden afgebeeld als een punt in het **complexe vlak** (zie Figuur a). De projectie ervan op de reële as heet $\text{Re } A$, het **reële deel** van A , en de projectie op de imaginaire as heet $\text{Im } A$, het **imaginaire deel** van A , waarbij geldt

$$A = \text{Re } A + i \text{Im } A$$

Zowel $\text{Re } A$ als $\text{Im } A$ zijn reëel.



De verbinding van de oorsprong naar A is als een vector te interpreteren. De grootte daarvan is $|A|$, de **modulus** van A , korthedshalve te schrijven als a , en de hoek ingesloten met de reële as is $\arg A$, het **argument** van A , korthedshalve te schrijven als α . Blijkbaar geldt

$$a \equiv |A| = \sqrt{(\text{Re } A)^2 + (\text{Im } A)^2} \quad , \quad \alpha \equiv \arg A = \arctan \frac{\text{Im } A}{\text{Re } A}$$

$\text{Re } A = a \cos \alpha$ en $\text{Im } A = a \sin \alpha$, zodat

$$A = a(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Met gebruikmaking van de gelijkheid van Euler (te bewijzen via de reeksontwikkelingen van de exp, sin en cos-functies), namelijk

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

is dit te schrijven als

$$A = a e^{i\alpha} = |A| e^{i \arg A}$$

Enkele rekenregels voor twee complexe grootheden $A = a e^{i\alpha}$ en $B = b e^{i\beta}$:

$$\operatorname{Re}(A \pm B) = \operatorname{Re} A \pm \operatorname{Re} B$$

$$AB = (a e^{i\alpha})(b e^{i\beta}) = ab e^{i(\alpha+\beta)} \text{ ofwel } |AB| = |A| |B| \text{ en } \arg(AB) = \arg A + \arg B$$

$$\text{Idem } |A/B| = |A|/|B| \text{ en } \arg(A/B) = \arg A - \arg B$$

$$A^n = (a e^{i\alpha})^n = a^n e^{in\alpha} \text{ dus } |A^n| = |A|^n \text{ en } \arg A^n = n \arg A$$

Voorbeeld:

(1) Bepaal de modulus en het argument van $A = 1/\sqrt{(b + ci)}$, b en c reëel.

Oplossing: $A = (b + ci)^{-1/2}$ dus $|A| = |(b + ci)^{-1/2}| = |b + ci|^{-1/2} = (b^2 + c^2)^{-1/4}$, en $\arg A = \arg(b + ci)^{-1/2} = -1/2 \arg(b + ci) = -1/2 \arctan(c/b)$.

(2) Stel $A = |3 - 4i|^{-1/3}$ en $B = i^{2/3}A$, gevraagd $|A|$, $\arg A$, $|B|$ en $\arg B$.

Oplossing: $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ dus $|A| = 5^{-1/3} = 0.585$
 $\arg A = (-1/3) [\arctan(-4/3)] = (-1/3)(-53^\circ) = 17.7^\circ$ (maar pas op: 1/3-machtswortel is drievoudig; de twee andere wortels zijn $17.7^\circ + 120^\circ = 137.7^\circ$ resp. $17.7^\circ + 240^\circ = 257.7^\circ$)

$$|B| = |i^{2/3}A| = |i|^{2/3}|A|. \text{ Maar } |i| = 1 \text{ dus } |B| = |A| = 0.585$$

$\arg B = \arg(i^{2/3}A) = \arg i^{2/3} + \arg A = (2/3)\arg i + \arg A = 60^\circ + 17.7^\circ = 77.7^\circ$ en idem voor de twee andere wortels.

De afbeelding van $e^{i\alpha}$ in het complexe vlak is een punt op de eenheidsafstand uit de oorsprong, want $|e^{i\alpha}| = 1$, onder een hoek α met de reële as, want $\arg(e^{i\alpha}) = \alpha$ (zie Figuur b). Wanneer α alle waarden doorloopt van 0 tot 2π beschrijven de afbeeldingen van $e^{i\alpha}$ de eenheidscirkel. Vermenigvuldiging van een reëel of complex getal met $e^{i\alpha}$ betekent

toevoeging van een hoek α aan het argument, ofwel draaiing van de voerstraal naar de oorsprong over een hoek α . Voor de reële eenheid geldt: $1 = e^0 (= \cos 0 + i \sin 0)$ en voor de imaginaire eenheid: $i = e^{i\pi/2} (= \cos \pi/2 + i \sin \pi/2)$. Vermenigvuldiging met $\pm i$ betekent dus een draaiing over $\pm 90^\circ$.

Het voorgaande gaan we toepassen op (co)sinusvormige functies.

Een grootheid $\zeta = \hat{\zeta} \cos \alpha$ is te schrijven als het reële deel van een complexe grootheid, zeg $\tilde{\zeta}$, met modulus gelijk aan $\hat{\zeta}$ en met argument gelijk aan α :

$$\zeta = \text{Re } \tilde{\zeta} = \text{Re } [|\tilde{\zeta}| e^{i \arg \tilde{\zeta}}] = \text{Re } [\hat{\zeta} e^{i\alpha}] = \hat{\zeta} \text{Re } [e^{i\alpha}] = \hat{\zeta} \cos \alpha$$

Grafisch is dit weer te geven als de projectie van de complexe $\tilde{\zeta}$ op de reële as (Figuur c). Deze complexe presentatie is compact omdat zowel de amplitude ($\hat{\zeta}$) als de fase (α) erin besloten liggen.

Een in de tijd variërende grootheid $\zeta(t) = \hat{\zeta} \cos (\omega t + \alpha)$ kan op dezelfde manier compact in complexe vorm worden weergegeven via een bijhorende complexe grootheid $\tilde{\zeta} = \hat{\zeta} \exp(i\alpha)$, met modulus gelijk aan de amplitude van $\zeta(t)$ en met argument gelijk aan de fasehoek van $\zeta(t)$ op $t = 0$, α :

$$\zeta(t) = \hat{\zeta} \cos (\omega t + \alpha) = \hat{\zeta} \text{Re } [\exp (i(\omega t + \alpha))] = \text{Re } [\hat{\zeta} \exp (i\alpha) \exp (i\omega t)] = \text{Re } [\tilde{\zeta} \exp (i\omega t)]$$

Het argument van $\tilde{\zeta} \exp (i\omega t)$ neemt in de tijd toe met een constante snelheid (ω). De complexe grootheid $\tilde{\zeta} \exp (i\omega t)$ is daarom te zien als een met hoeksnelheid ω ronddraaiende vector (de complexe $\tilde{\zeta}$) met lengte $\hat{\zeta}$ en starthoek (fase op het moment $t = 0$) gelijk aan α (Figuur d). De projectie ervan op de reële as geeft de momentane waarde van de "oorspronkelijke" $\zeta(t) = \hat{\zeta} \cos (\omega t + \alpha)$.

Voorbeeld

Gegeven $x(t) = a \cos (\omega t - \alpha)$ met $a = 2 \text{ m}$ en $\alpha = 160^\circ$. Gevraagd de complexe representatie.

Oplossing: $x = \text{Re } [\tilde{x} \exp(i\omega t)]$ waarin $\tilde{x}$ complex is. Dan geldt

$|\tilde{x}| = a = 2 \text{ m}$ en $\arg \tilde{x} = -160^\circ \approx -2.8 \text{ rad}$ dus $\tilde{x} = (2 \text{ m}) \exp(-2.8i)$ en $x(t) = \text{Re } [2 \text{ m} \exp(i(\omega t - 2.8))]$. (Maak zelf een plot in het complexe vlak.)

Voorbeeld

Gegeven $x = \text{Re } [X \exp(i\omega t)]$ met $\text{Re } X = 0.9 \text{ m/s}$ en $\text{Im } X = -0.6 \text{ m/s}$. Gevraagd: de maximumwaarde van x en de waarde van x op $\omega t = 0, \pi/4$ resp. $\pi/2$.

Oplossing: de maximum waarde is $\hat{x} = |X| = \sqrt{(\text{Re}X)^2 + (\text{Im}X)^2} = 1.08 \text{ m/s}$.

Verder geldt $\arg X = \arctan (\text{Im } X)/(\text{Re } X) = \arctan [-0.6 \text{ m/s}]/(0.9 \text{ m/s}) = -33.7^\circ$ ofwel $x = (1.08 \text{ m/s}) \cos (\omega t - 33.7^\circ)$. Dit geeft voor $\omega t = 0, \pi/4$ respectievelijk $\pi/2$: $x = 0.9 \text{ m/s}$ (logisch, want dit is juist de gegeven waarde van $\text{Re } X$), $x = 0.94 \text{ m/s}$ resp. 0.6 m/s . (Maak zelf een bijbehorende grafiek en (re)construeer de uitkomsten op die manier.)

Door de complexe weergave wordt de tijdvariatie afgesplitst via de vermenigvuldigingsfactor $\exp(i\omega t)$, terwijl de amplitude en fase zijn verenigd in één complexe grootte $\tilde{\zeta}$. Dit vergemakkelijkt algebraïsche bewerkingen, o.a. bij differentiëren en integreren.

Voor differentiatie van $\zeta(t) = \hat{\zeta} \cos(\omega t + \alpha)$ geldt

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = \text{Re} \frac{d}{dt}[\tilde{\zeta} \exp(i\omega t)] = \text{Re} [i\omega \tilde{\zeta} \exp(i\omega t)]$$

Differentiëren van een (co)sinusfunctie naar de tijd komt in de complexe weergave dus neer op vermenigvuldiging van $\tilde{\zeta}$ met $i\omega$, ofwel met een draaiing van $\tilde{\zeta}$ over 90° in het complexe vlak, en vermenigvuldiging van de modulus met ω .

Bij forcering $x = \hat{x} \cos(\omega t + \alpha)$ van een lineair systeem kan een respons horen

$y = \hat{y} \cos(\omega t + \beta)$, met een amplitudeverhouding $r = \hat{y}/\hat{x}$ en faseverschuiving $\gamma = \beta - \alpha$.

In complexe notatie zouden we schrijven $x(t) = \text{Re} [\tilde{x} \exp(i\omega t)]$ en $y(t) = \text{Re} [\tilde{y} \exp(i\omega t)]$,

waarin $\tilde{x} = \hat{x} \exp(i\alpha)$, $\tilde{y} = \hat{y} \exp(i\beta)$. Daarbij hoort een complexe **responsfactor** $\tilde{r} = \tilde{y}/\tilde{x}$, met modulus $|\tilde{r}| = |\tilde{y}/\tilde{x}| = |\tilde{y}|/|\tilde{x}| = \hat{y}/\hat{x} = r$, de amplitude-verhouding, en met argument $\arg \tilde{r} = \arg (\tilde{y}/\tilde{x}) = \arg \tilde{y} - \arg \tilde{x} = \beta - \alpha$, de faseverschuiving γ .

8 Harmonische golven

8.1 Inleiding

Dit hoofdstuk gaat over lage, **periodieke** lange golven en trillingen (geen inspeelverschijnselen) zoals **getijden en seiches**. Naast berging en traagheid wordt nu ook weerstand in rekening gebracht. Hoofddoel is het verkrijgen van **inzicht in de dynamica van de golfbeweging** inclusief de effecten van weerstand. Door het gebruik van lineaire benaderingen van de vergelijkingen worden relatief eenvoudige oplossingen verkregen in de vorm van complexe e-machten ofwel gedempte harmonische functies (gedempte sinus- en cosinusfuncties).

Het verloop van amplituden en fasen in getijden en seiches blijkt met deze lineaire benadering redelijk te kunnen worden berekend, maar niet de vervorming van het golfprofiel, die het gevolg is van niet-lineaire invloeden, zoals variatie van het doorstroomprofiel met de waterstand. De lineaire oplossingen geven inzicht en zijn geschikt voor sterk vereenvoudigende berekeningen in voorstudies. Zij zijn niet bedoeld voor gedetailleerde, precieze berekeningen; die kunnen beter met numerieke methoden worden uitgevoerd op basis van de volledige (niet gelineariseerde) vergelijkingen.

De aanpak in dit hoofdstuk bouwt voort op die van het vorige hoofdstuk voor wat betreft de gelineariseerde weerstand en het gebruik van complexe rekenwijzen. Uitwerkingen van en toelichtingen op de complexe algebra die hier wordt gebruikt zijn gegeven in twee Appendices, om de loop van de afleiding zelf niet te onderbreken. Daarbij worden naast algebraïsche uitdrukkingen ook meetkundige afbeeldingen gebruikt. Als voorbereiding gaan we eerst in op de beschrijving van lopende golven met complexe grootheden, anticiperend op de uitkomsten van een formele afleiding uit de basisvergelijkingen.

8.2 Complexe representatie van lopende golven

We gaan uit van een prismatische open waterloop met daarin een in positieve x-richting lopende sinusvormige golf met periode T, frequentie (faseverandering p.e.v. tijd) $\omega = 2\pi/T$, golflengte L, golfgetal (faseverandering p.e.v. lengte) $k = 2\pi/L$, fasesnelheid $c = L/T = \omega/k$ en plaatsafhankelijke amplitude $\hat{\zeta}$:

$$\zeta(x,t) = \hat{\zeta}(x) \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (8.1)$$

In complexe vorm kan (8.1) worden geschreven als

$$\zeta(x,t) = \text{Re} [\tilde{\zeta}(x) \exp(i\omega t)] \quad (8.2)$$

waarin

$$\tilde{\zeta}(x) = \hat{\zeta}(x) \exp(i(-kx + \alpha)) \quad (8.3)$$

Merk op dat door de complexe representatie **scheiding van de variabelen x en t** plaatsvindt (zie vergelijking (8.2)): x en t komen nu slechts voor in afzonderlijke factoren van een product, en niet meer gecombineerd in het argument van een cos-functie. Dat vergemakkelijkt de oplossing.

Evenals in Hoofdstuk 7 bevat de complexe grootheid $\tilde{\zeta}$ zowel de amplitude als de fase van ζ , maar in plaats van constant zijn deze nu een functie van de plaats (x). Voor elke waarde van x is $\tilde{\zeta}$ een punt in het complexe $\tilde{\zeta}$ -vlak (Figuur 8.1a). Conform (8.2) wordt de tijdsvariatie van ζ in een vast punt ($x = \text{constant}$) verkregen door de betreffende vector met hoeksnelheid ω te draaien (vermenigvuldigen met $\exp(i\omega t)$) en te projecteren op de reële as; zie Figuur 8.1a.

Door opeenvolgende waarden van x te doorlopen, te beginnen in $x = 0$, wordt in het $\tilde{\zeta}$ -vlak een kromme gegenereerd, een z.g. **hodograaf**. Bij constante amplitude ($\hat{\zeta}$) is dit een cirkel (Figuur 8.1b). Een bijzonder geval van variërende amplitude is exponentiële afname met x , zoals voorkomt in systemen met lineaire weerstand (evenredig aan de amplitude), zeg $\hat{\zeta}(x) = \hat{\zeta}(0) \exp(-\mu x)$. Daarvoor gaat (8.3) over in

$$\tilde{\zeta}(x) = \hat{\zeta}(0) \exp(-\mu x) \exp(i(-kx + \alpha)) = \tilde{\zeta}(0) \exp(-px) \quad (8.4)$$

Hierin zijn $\tilde{\zeta}(0)$ en p complexe constanten, gegeven door

$$\tilde{\zeta}(0) = \hat{\zeta}(0) \exp(i\alpha) \quad (8.5)$$

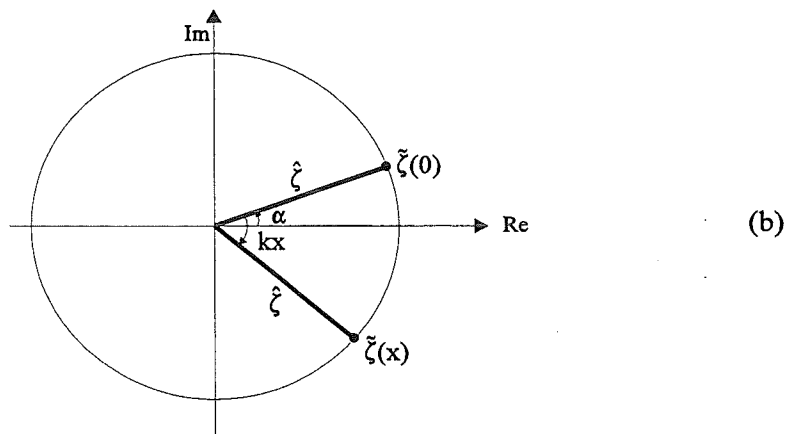
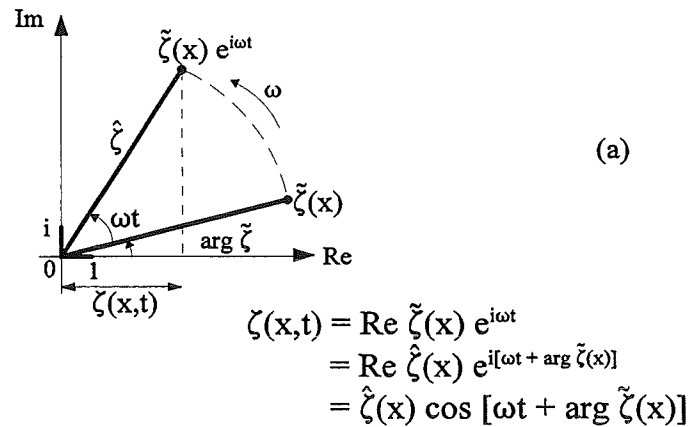
en

$$p = \mu + ik \quad (8.6)$$

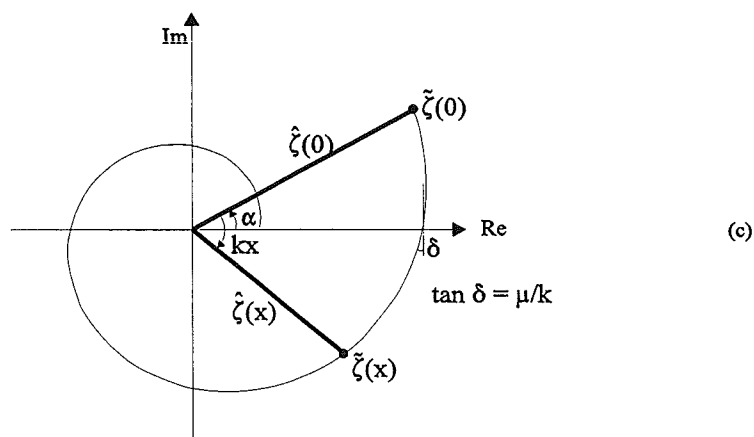
De eerste hiervan, $\tilde{\zeta}(0)$, bevat in compacte vorm de informatie over de *aanvangswaarden* (in $x = 0$) van (reële) amplitude ($\hat{\zeta}(0)$) en fase (α), de tweede (p) bevat de informatie over de *variatie* met x van amplitude (dempingsconstante μ) en fase (golfgetal k).

Bij exponentiële damping wordt de hodograaf een logaritmische spiraal, gekenmerkt door een constante convergentiehoek (zie Figuur 8.1c). Dat is als volgt te zien. Bij voortplanting over een infinitesimaal afstandje Δx treedt een faseverschuiving $k\Delta x$ op, overeenkomend met een draaiing van de voerstraal naar de oorsprong van de hodograaf over een hoekje $k\Delta x$. De amplitude, voorgesteld door de lengte van de voerstraal, reduceert in een verhouding gelijk aan $[1 - \exp(-\mu\Delta x)]$, wat voor $\Delta x \rightarrow 0$ kan worden benaderd met $\mu\Delta x$. De hoek waarmee de spiraal convergeert is dus gelijk aan $\arctan \mu/k$, onafhankelijk van de positie langs de spiraal.

De grootheid p heeft de dimensie van één per lengte (SI-eenheid: m^{-1}), en μ en k dus ook. De dempingsconstante μ is de relatieve amplitude-reductie per eenheid van lengte, terwijl k de faseverandering is per eenheid van lengte.



Hodograaf van $\tilde{\zeta}(x) = \hat{\zeta} e^{i(\alpha - kx)}$ bij constante $\hat{\zeta}$ en k



Hodograaf van $\tilde{\zeta}(x) = \hat{\zeta}(0) e^{-\mu x} e^{i(\alpha - kx)}$ waarin $\tan \delta = \mu/k$
(getekend voor $\tan \delta = \mu/k = 0.2$)

Figuur 8.1 Complexe vlak met hodografen

De frequentie ω , de dempingsconstante μ en het golfgetal k zijn niet onafhankelijk omdat de golfbeweging aan de voorwaarden van behoud van volume en impuls moet voldoen. We hebben daarvoor twee onafhankelijke vergelijkingen tot onze beschikking zodat we slechts één van de drie parameters vrij kunnen kiezen. We nemen daarvoor de frequentie, en gebruiken de vergelijkingen om de bijbehorende oplossingen te vinden voor μ en k . Als k bij gegeven frequentie eenmaal bekend is dan volgt c uit $c = \omega/k$.

8.3 Formulering en basisoplossing

We gaan in dit hoofdstuk uit van een toestand die onder invloed van een periodieke randvoorwaarde inmiddels geheel periodiek is geworden, na een inspeelperiode waarin de invloed van beginvoorwaarden nog merkbaar is. De periodieke bewegingen worden als benadering sinusvormig verondersteld. De daarvoor te gebruiken methode heet “**harmonische methode**”. Deze is ontwikkeld door de Staatscommissie Lorentz, die de opdracht had te voorspellen hoe (o.a.) de getijden in de Waddenzee zouden veranderen door de aanleg van de Afsluitdijk.

We nemen de ééndimensionale continuïteitsvergelijking en gelineariseerde bewegingsvergelijking als uitgangspunt (advectione termen weggelaten, weerstand gelineariseerd zoals in Hoofdstuk 7, geen invloed van de oppervlakte-uitwijking op de geometrie van het dwarsprofiel). Uitgedrukt in de oppervlakte-uitwijkingen (ζ) en het debiet (Q) luiden deze

$$B \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (8.7)$$

en

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g A_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \kappa Q = 0 \quad (8.8)$$

Hierin is κ een factor in de gelineariseerde uitdrukking voor de weerstand, met de dimensie van één per tijd (SI-eenheid: s^{-1}), gegeven door

$$\kappa = \frac{8}{3\pi} c_f \frac{\hat{Q}}{A_s R} = \frac{8}{3\pi} c_f \frac{\hat{U}}{R} \quad (8.9)$$

(zie ook vergelijking 7.17).

In de hierna volgende behandeling wordt κ als een gegeven constante beschouwd. Hierbij worden twee kanttekeningen geplaatst. Ten eerste is in berekeningen de waarde van κ niet gegeven omdat die afhangt van de nog onbekende $\hat{U}$ of $\hat{Q}$. Daarom moet iteratief worden gewerkt. Ten tweede zal de amplitude van snelheid of debiet met de plaats variëren, en strikt genomen doet κ dat dus ook. Dit legt een beperking op aan de toegelaten vaklengten om κ

daarin nog als constant te mogen beschouwen; bij te grote vaklengten wordt de weerstand niet goed weergegeven.

Zoals gezegd slaat “gelineariseerd” niet alleen op de weerstandsterm maar ook op het weglaten van de advectieve term en op de benadering dat meetkundige grootheden zoals A_s , B en R , evenals de weerstandscoefficiënt c_f , onafhankelijk worden verondersteld van de momentane waterstand en stroomsnelheid. Dit houdt een beperking in tot relatief lage golven. Wanneer daaraan in te geringe mate wordt voldaan zal men zijn toevlucht moeten nemen tot numerieke methoden om de vergelijkingen te integreren, zoals in praktische toepassingen so wie so de regel is.

Na eliminatie van Q uit (8.7) en (8.8) (hierbij ons beperkend tot een prismatische waterloop, waarvoor $\partial A_s / \partial s = 0$) ontstaat

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (8.10)$$

waarin c_o de golfvoortplantingssnelheid is in afwezigheid van weerstand:

$$c_o = \sqrt{\frac{gA_s}{B}} \quad (8.11)$$

Vergelijking (8.10) heeft het karakter van de golfvergelijking (zie H. 4) met daaraan een gelineariseerde weerstandsterm toegevoegd; men noemt dit type de **telegraafvergelijking**. We kunnen dus een oplossing verwachten bestaand uit twee tegengesteld lopende golfcomponenten, elk gedempt in hun looprichting.

Bij harmonische bewegingen met frequentie ω en amplitude van ζ gelijk aan $\hat{\zeta}$ is de grootteorde van de traagheidsterm ($\partial^2 \zeta / \partial t^2$) in (8.10) gegeven door $\omega^2 \hat{\zeta}$ en die van de weerstandsterm ($\kappa \partial \zeta / \partial t$) door $\omega \kappa \hat{\zeta}$, zodat de verhouding van weerstand tot traagheid in grootte-orde gegeven is door

$$\sigma \equiv \frac{\kappa}{\omega} = \frac{8}{3\pi} c_f \frac{\hat{U}}{\omega R} \quad (8.12)$$

Afgezien van de factor $8/3\pi$ is dit de parameter die we in Hoofdstuk 3 al gebruikten, waarvan in Tabel 3.1 enkele representatieve waarden zijn gegeven.

We zoeken nu harmonische oplossingen en stellen daarom

$$\zeta(x,t) = \text{Re} [\tilde{\zeta}(x) \exp(i\omega t)] \quad \text{en} \quad Q(x,t) = \text{Re} [\tilde{Q}(x) \exp(i\omega t)] \quad (8.13)$$

De (bekende) tijdsvariatie $[\exp(i\omega t)]$ wordt hiermee letterlijk tijdelijk opzij gezet en we gaan voorlopig verder met uitsluitend $\tilde{\zeta}(x)$ en $\tilde{Q}(x)$ als onbekenden. Voor de bepaling daarvan substitueren we (8.13) in (8.10), met als resultaat

$$\frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dx^2} + \frac{\omega^2 - i\omega\kappa}{c_0^2} \tilde{\zeta} = 0 \quad (8.14)$$

ofwel, na substitutie van $\kappa = \sigma\omega$ en van $k_0 = \omega/c_0$, het golfgetal in afwezigheid van weerstand:

$$\frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dx^2} + k_0^2(1 - i\sigma)\tilde{\zeta} = 0 \quad (8.15)$$

Dit is is een gewone (niet een partiële) DV met constante coëfficiënten. Zo'n vergelijking heeft (reële, imaginaire of complexe) e-machten als elementaire oplossing. Daarom substitueren we

$$\tilde{\zeta}(x) = \exp(Px) \quad (8.16)$$

in (8.15). Dat levert een algebraïsche (vierkants)vergelijking op in de onbekende P (zie Appendix B voor details) met twee tegengestelde wortels P_1 resp. P_2 , die we hier gemakshalve met p en $-p$ aanduiden. De algemene oplossing van (8.15) is daarmee te schrijven als

$$\tilde{\zeta}(x) = C_1 \exp(-px) + C_2 \exp(px) = \tilde{\zeta}_1(x) + \tilde{\zeta}_2(x) \quad (8.17)$$

Na substitutie hiervan in de continuïteitsvergelijking (8.7) wordt de bijbehorende oplossing voor $\tilde{Q}$ gevonden:

$$\tilde{Q}(x) = \frac{i\omega B}{p} [C_1 \exp(-px) - C_2 \exp(px)] = \frac{i\omega B}{p} (\tilde{\zeta}_1 - \tilde{\zeta}_2) \quad (8.18)$$

De twee complexe constanten C_1 en C_2 (elk een amplitude en een fase) moeten uit de twee randvoorwaarden voor amplituden en fasen worden bepaald. Als één van beide gelijk is aan nul is er sprake van één lopende golf (zie hierna voor de uitwerking). In het algemeen zal er wel ergens terugkaatsing optreden en is er sprake van twee tegen elkaar in lopende, in hun looprichting uitdempende golven.

Zonder weerstand zou P gelijk zijn aan $P = \pm ik_0$ (zie Appendix B), waarin k_0 het golfgetal is bij afwezigheid van weerstand ($k_0 = \omega/c_0$). De invloed van de weerstand wordt verdisonteerd via een dimensieloze evenredigheidsfactor die wordt bepaald door σ , de verhouding van weerstand tot traagheid (zie Appendix B). Algebraïsch is het echter handiger om niet met σ te blijven werken maar met een daardoor bepaalde "weerstandshoek" δ , gedefinieerd als

$$\tan 2\delta \equiv \sigma = \frac{8}{3\pi} c_f \frac{\hat{U}}{\omega R} \quad (8.19)$$

Na enige algebra (zie Appendix B) is het resultaat voor het reële deel (dempingsmodulus μ) en het imaginaire deel (golfgetal k) van p :

$$\text{Im } p = k = \frac{k_o}{\sqrt{\cos 2\delta}} \cos \delta = \frac{k_o}{\sqrt{1 - \tan^2 \delta}} \quad (8.20)$$

en

$$\text{Re } p = \mu = \frac{k_o}{\sqrt{\cos 2\delta}} \sin \delta = k_o \frac{\tan \delta}{\sqrt{1 - \tan^2 \delta}} = k \tan \delta \quad (8.21)$$

N.B. Omdat $\mu/k = \tan \delta$ is δ juist de convergentiehoek van de hodograaf van $\exp(\pm px)$, zie Figuur 8.1c.

Door deze uitdrukkingen voor p te substitueren in $i\omega B/p$, de (complexe) factor in de uitdrukking voor het debiet (verg. (8.18)), gaat deze na enig herleiden over in

$$\frac{i\omega B}{p} = Bc \cos \delta \exp(i\delta) \quad (8.22)$$

waarin $c = \omega/k$ (de fasesnelheid van een lopende golf met frequentie ω en golfgetal k). Bij de algemene oplossing voor $\tilde{\zeta}$ volgens

$$\tilde{\zeta}(x) = \tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_2 = C_1 \exp(-px) + C_2 \exp(px) \quad (8.23)$$

hoort dus een debiet volgens

$$\tilde{Q}(x) = Bc \cos \delta \exp(i\delta) (\tilde{\zeta}_1 - \tilde{\zeta}_2) \quad (8.24)$$

waarin $p = \mu + ik$ en μ en k zijn bepaald door (8.21) resp. (8.20).

Hiermee is de formele oplossing voltooid. Uitwerkingen en interpretaties worden gegeven in de volgende paragrafen.

8.4 Enkelvoudige lopende golf

Voor de interpretatie van de oplossing gaan we de tijdfactor terughalen, als in (8.13):

$$\zeta(x,t) = \text{Re} [\tilde{\zeta}(x) \exp(i\omega t)] \quad (8.25)$$

Voorlopig beschouwen we alleen ζ_1 :

$$\zeta_1(x,t) = \text{Re} [\tilde{\zeta}_1(x) \exp(i\omega t)] = \text{Re} [C_1 \exp(-px) \exp(i\omega t)] \quad (8.26)$$

Na substitutie van $p = \mu + i k$ en uitschrijven van C_1 in modulus en argument wordt dit

$$\zeta_1(x,t) = \text{Re} [|C_1| \exp(-\mu x) \exp(i(\omega t - kx + \arg C_1))] \quad (8.27)$$

ofwel

$$\zeta_1(x,t) = \hat{\zeta}(x) \cos(\omega t - kx + \arg C_1) \quad \text{waarin} \quad \hat{\zeta}(x) = |C_1| \exp(-\mu x) \quad (8.28)$$

Het bijbehorende debiet is

$$Q_1(x,t) = Bc\hat{\zeta}(x) \cos\delta \cos(\omega t - kx + \arg C_1 + \delta) \quad (8.29)$$

De oplossing gegeven door (8.28) en (8.29) houdt het volgende in:

- $\arg C_1$ is de aanvangsfase van ζ_1 in $x = 0$.
- De fase varieert met x en t als $\omega t - kx$, dus het betreft een golf lopend in positieve x -richting, met fasesnelheid $c = \omega/k$.
- k ($= \text{Im } p$) is het golfgetal (faseverandering per eenheid van lengte).
- $|C_1|$ is de amplitude van ζ_1 in $x = 0$ (maximum van ζ_1 als functie van t in $x = 0$).
- $|C_1| \exp(-\mu x)$ is de amplitude van $\zeta_1(x,t)$ (maximum van ζ_1 als functie van t in x).
- De amplitude dempt in positieve x -richting, dus in de golflooprichting.
- μ ($= \text{Re } p$) is de dempingsconstante.
- Het debiet is bij gegeven oppervlakte-uitwijking een factor $\cos\delta$ kleiner dan zonder weerstand ($\delta = 0$). Dit komt doordat bij gegeven aandrijvende kracht (gradiënt oppervlakte-uitwijking) de versnellingen lager zijn dan zonder weerstand en de snelheden en debieten dus ook.
- Het debiet loopt bij gegeven oppervlakte-uitwijking een hoek δ in fase voor vergeleken met de toestand zonder weerstand ($\delta = 0$). Dit komt doordat als gevolg van de lagere snelheden de beweging eerder reageert op veranderingen in de aandrijvende kracht (gradiënt oppervlakte-uitwijking).

Wanneer we niet van ζ_1 uitgaan maar van ζ_2 dan blijven bovenstaande resultaten geldig behalve dat de golf in negatieve x -richting loopt. **De algemene periodieke oplossing bestaat dus uit twee in tegengestelde richting lopende, exponentieel uitdempende golven.** De randvoorwaarden bepalen welke combinatie zich voordoet. (Beginvoorwaarden spelen geen rol omdat we a priori uitgaan van een ingespeelde, periodieke toestand. Het inspeelverschijnsel van een golf die een ongestoord gebied binnenloopt blijft hier buiten beschouwing.) In de volgende paragrafen werken we enkele gevallen uit.

De fasesnelheid van beide lopende golven is (onafhankelijk van de richting, want er is geen netto stroom):

$$c = \frac{\omega}{k} = c_o \sqrt{1 - \tan^2 \delta}$$

(8.30)

We zien hieruit dat de weerstand niet alleen de amplituden reduceert maar ook de fasesnelheid.

Voorbeeld: neem het M₂-getij (T = 12 h en 25 min = 745 min = 44700 s) met $\hat{U} = 1.2$ m/s respectievelijk een seiche met een periode van 1 uur en $\hat{U} = 0.6$ m/s, beide in een geul in een estuarium met een diepte d = 12 m, hydraulische straal R = 11 m, stroomvoerende breedte B_s = 350 m (A_s = 4.2 x 10³ m²), bergende breedte B = 2B_s = 700 m, c_f = 4 x 10⁻³. Zie Tabel 8.1 voor de bijbehorende waarden van diverse parameters.

Grootheid	Vergelijking	Getij	Seiche
T	-	745 minuten	60 minuten
ω	-	1.405 * 10 ⁻⁴ rad/s	1.745 * 10 ⁻³ rad/s
Ū	-	1.2 m/s	0.6 m/s
c _o	c _o = √gA _s /B	7.7 m/s	7.7 m/s
k _o	k _o = ω/c _o	1.8 * 10 ⁻⁵ rad/m	2.3 * 10 ⁻⁴ rad/m
L _o	L _o = c _o T = 2π/k _o	343 km	28 km
σ	σ = $\frac{8}{3\pi} c_f \frac{\hat{U}}{\omega R}$	2.64	0.106
δ	½ arctan σ	34.6°	3.02°
tan δ	-	0.69	0.053
√1 - tan ² δ	-	0.72	1.00 (0.998...)
k	k _o / √1 - tan ² δ	2.5 * 10 ⁻⁵ rad/m	2.3 * 10 ⁻⁴ rad/m
μ	k tan δ	1.8 * 10 ⁻⁵ m ⁻¹	1.2 * 10 ⁻⁵ m ⁻¹
c	c = c _o √1 - tan ² δ	5.5 m/s	7.7 m/s
L	L = 2π/k = cT	247 km	28 km

Tabel 8.1

De amplituden van waterstand en debiet reduceren per afgelegde afstand Δx met een factor $\exp(-\mu\Delta x)$. Over een afstand $\Delta x = 10$ km komt dit voor het getij neer op $\exp(-0.18) \approx 0.84$ en voor de seiche op $\exp(-0.12) \approx 0.89$. De relatieve demping ($\tan \delta = \mu/k$), zeg maar de demping over een golflengte, is voor de seiche veel lager dan voor het getij (ongeveer een factor 13). Toch is de amplitudereductiefactor over eenzelfde afstand (10 km) voor de seiche (0.89) niet veel verschillend van die voor het getij (0.84). Dat komt omdat een afstand van 10 km slechts ca. 4% is van de golflengte van het getij en ca. 36% van die van de seiche.

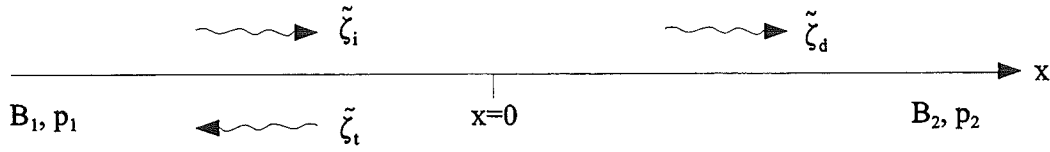
De lineaire benadering van de weerstand geldt alleen als over het beschouwde traject, bijv. een riviergedeelte, de amplitude van het debiet niet teveel varieert. In bovenstaande twee gevallen is daar redelijk aan voldaan omdat de amplitudereductie minder is dan 20% over een afstand van 10 km. Die afstand is dus nog wel acceptabel. Een veel langere voortplantingsafstand zou in kleinere trajecten moeten worden onderverdeeld, met lengten van b.v. 10 km. Veel korter hoeft niet en veel langer mag niet.

In dit voorbeeld wordt de fasesnelheid van de seiche vrijwel niet door de weerstandsinvloed gereduceerd, maar die van het getij met ca. 30% (zie Tabel 8.1). Deze reductie komt bovenop de reductie veroorzaakt door de grote bergende breedte die voor beide geldt (via c_0). Zou de bergende breedte gelijk zijn geweest aan de stroomvoerende breedte dan zou c_0 gelijk zijn geweest aan $\sqrt{gA_s/B} = \sqrt{gd} \approx 11$ m/s. Doordat $B > B_s$ is de feitelijke waarde van c_0 kleiner in de verhouding $\sqrt{B_s/B}$, in dit voorbeeld een factor $1/\sqrt{2}$ ofwel eveneens ca. 0.7. Door de gezamenlijke werking van grote bergende breedte (twee keer de stroomvoerende breedte) en weerstand is de uiteindelijke waarde van de voortplantingssnelheid van het getij slechts ca. 50% van $\sqrt{gd}$ (desondanks een golflengte van bijna 250 km). In rivieren is de invloed van de weerstand nog (veel) sterker (zie Tabel 3.1). Als bij hoog water de uiterwaarden onder water staan, waardoor er een zeer grote bergende breedte beschikbaar is, wordt de voortplantingssnelheid van de hoogwatergolven zeer laag. Deze kan zelfs tot onder de stroomsnelheid dalen (zie Hoofdstuk 9).

8.5 Partiële terugkaatsing bij abrupte profielverandering

We gaan nu in op de golfbeweging bij de abrupte overgang tussen twee lange prismatische vakken of secties. Dit probleem wordt op dezelfde manier aangepakt als de reflectie en transmissie van lage translatiegolven (zie Hoofdstuk 5).

Twee lange, prismatische vakken met gegeven waarden van A_s , B en c_0 , die in beide vakken verschillen, grenzen aan elkaar in $x = 0$ (zie Figuur 8.2). In vak 1 ($x < 0$) komt uit het “oneindige” een in positieve x -richting lopende golf met frequentie ω en gegeven amplitude en fase (in een bepaald punt, dat er verder niet toe doet). In $x = 0$ wordt deze gedeeltelijk teruggekaatsd, en in vak 2 loopt de golf door, zij het met andere waarden. Er komen geen golven binnen uit het “oneindige” in vak 2. Hiermee hebben we voldoende randvoorwaarden (twee) en is het probleem bepaald.



Figuur 8.2 Partiële reflectie en transmissie bij abrupte overgang

Uit de gegevens is per vak een (eerste) schatting te maken van μ en k (dus van p). We stellen voor de inkomende golf en voor de teruggekaatste golf, beide in vak 1:

$$\tilde{\zeta}_i(x) = C_i \exp(-p_1 x), \quad \tilde{\zeta}_t(x) = C_t \exp(p_1 x) \quad (8.31)$$

en voor de doorgaande golf in vak 2:

$$\tilde{\zeta}_d(x) = C_d \exp(-p_2 x) \quad (8.32)$$

Voor de bijbehorende debieten geldt dan

$$\tilde{Q}_i(x) = (i\omega B_1/p_1) C_i \exp(-p_1 x), \quad \tilde{Q}_t(x) = -(i\omega B_1/p_1) C_t \exp(p_1 x) \quad (8.33)$$

en

$$\tilde{Q}_d(x) = (i\omega B_2/p_2) C_d \exp(-p_2 x) \quad (8.34)$$

In het aansluitpunt $x = 0$ gelden de aansluitvoorwaarden $\tilde{\zeta}(\uparrow 0) = \tilde{\zeta}(\downarrow 0)$ en $\tilde{Q}(\uparrow 0) = \tilde{Q}(\downarrow 0)$, waaruit volgt

$$C_i + C_t = C_d \quad (8.35)$$

en

$$\frac{i\omega B_1}{p_1} (C_i - C_t) = \frac{i\omega B_2}{p_2} C_d \quad (8.36)$$

Kortheidshalve definiëren we een (complex) verhoudingsgetal $\tilde{\gamma}$ dat een maat is voor de verandering in de benodigde vakgrootheden:

$$\tilde{\gamma} = \frac{i\omega B_2/p_2}{i\omega B_1/p_1} = \frac{B_2 c_2}{B_1 c_1} \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \exp[i(\delta_2 - \delta_1)] \quad (8.37)$$

Verder definiëren we de (complexe) terugkaatsings- of reflectiecoëfficiënt en de (complexe) transmissiecoëfficiënt als

$$\tilde{r}_t \equiv \tilde{\zeta}_t(0)/\tilde{\zeta}_i(0) = C_t/C_i \quad \text{en} \quad \tilde{r}_d \equiv \tilde{\zeta}_d(0)/\tilde{\zeta}_i(0) = C_d/C_i \quad (8.38)$$

Dan volgt uit (8.35) en (8.36):

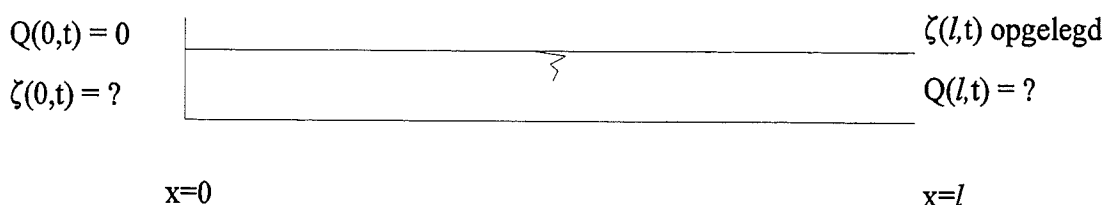
$$\tilde{r}_t = \frac{1-\tilde{\gamma}}{1+\tilde{\gamma}} \quad \text{en} \quad \tilde{r}_d = \frac{2}{1+\tilde{\gamma}} = 1 + \tilde{r}_t \quad (8.39)$$

Deze uitkomsten zijn qua structuur identiek aan die voor (lage) translatiegolven (zie Hoofdstuk 5), maar het verschil daarmee is dat $\tilde{\gamma}$ hier niet alleen van de Bc-verhouding afhangt maar ook van de dimensieloze weerstandsfactor van beide vakken (in Hoofdstuk 5 was de weerstand op voorhand buiten beschouwing gelaten). Bovendien is $\tilde{\gamma}$ complex en zijn $\tilde{r}_t$ en $\tilde{r}_d$ dat dus ook, wat inhoudt dat er faseverschillen optreden. Als de weerstandshoek δ niet verandert ter plaatse van de overgang is $\tilde{\gamma}$ gelijk aan B_2c_2/B_1c_1 , dus reëel, en treedt er geen faseverschil op. In dat geval zijn de resultaten niet alleen in structuur maar ook in waarde identiek aan die voor het geval zonder weerstand.

Afgezien van de details laten bovenstaande resultaten zien dat een verandering van profiel- of weerstandsfactoren aanleiding geeft tot terugkaatsing. **Het totale golfbeeld in elk vak van een systeem bestaande uit aan elkaar geschakelde vakken moet in het algemeen worden beschreven als de som van een inkomende en een teruggekaatste golf, elk gedempt in de looprichting.** Amplitude en fase van elk zijn te bepalen uit de randvoorwaarden aan de begrenzingen van het beschouwde systeem en uit de interne aansluitvoorwaarden. We gaan dit uitwerken voor het geval van volledige terugkaatsing.

8.6 Golven in éénzijdig gesloten bekken

We gaan nu de harmonische golfbeweging na in een éénzijdig (in $x = 0$) gesloten bekken met lengte l (zie Figuur 8.3), voor het geval van een opgelegde oppervlakte-uitwijking aan de mond (in $x = l$) (vergelijk met Figuur 4.10). De twee randvoorwaarden hier zijn dus: $Q(0,t) = 0$ (dus ook $\tilde{Q}(0) = 0$) en $\zeta(l,t) =$ bekende sinusfunctie (amplitude en fase), te vertalen in een bekende (complexe) waarde van $\tilde{\zeta}(l)$.



Figuur 8.3 Golfbeweging in éénzijdig gesloten bekken

De periodieke oplossing bestaat weer uit de som van twee in tegengestelde richting lopende golven, een invallende en een (aan het gesloten einde) teruggekaatste. In tegenstelling tot de voorafgaande paragraaf lopen de *inkomende* golven hier in *negatieve x-richting* (keuze asenstelsel, met $x = 0$ aan het gesloten einde, positief in de richting van de monding):

$$\zeta(x) = \zeta_i(x) + \zeta_t(x) = C_i \exp(px) + C_t \exp(-px) \quad (8.40)$$

Daarbij hoort

$$\tilde{Q}(x) = \frac{i\omega B}{p} [-C_i \exp(px) + C_t \exp(-px)] \quad (8.41)$$

In $x = 0$ geldt voor het debiet

$$\tilde{Q}(0) = \frac{i\omega B}{p} [-C_i + C_t] = 0 \quad (8.42)$$

waaruit volgt $C_t = C_i$, zodat

$$\zeta(0) = \zeta_i(0) + \zeta_t(0) = C_i + C_t = 2C_i \quad (8.43)$$

(totale terugkaatsing). Hieruit volgt voor de oppervlakte-uitwijking in een willekeurig punt

$$\zeta(x) = C_i [\exp(px) + \exp(-px)] = \cosh(px) \zeta(0) \quad (8.44)$$

ofwel, uitgedrukt als verhouding tot de waarde in $x = l$:

$$\tilde{r}(x) \equiv \frac{\zeta(x)}{\zeta(l)} = \frac{\cosh(px)}{\cosh(pl)} \quad (8.45)$$

Het bijbehorend debiet is

$$\tilde{Q}(x) = -\frac{i\omega B}{p} \sinh(px) \zeta(0) = -\frac{i\omega B}{p} \frac{\sinh(px)}{\cosh(pl)} \zeta(l) \quad (8.46)$$

(zie Appendix A voor de betekenis van de cosh en sinh van een complex argument).

Hiermee is de oplossing in wezen bepaald: bij gegeven amplitude en fase van $\zeta(l, t)$ (in de mond), ω , B , l en de gegevens nodig voor p (iteratief) zijn ζ en $\tilde{Q}$ bekend als functie van x .

De rest is uitwerking.

De verhouding van de amplitude van ζ aan het gesloten einde tot die in het open einde, de z.g. **versterkingsfactor** r , is (zie Appendix A voor de complexe algebra)

$$r(0) = \frac{\hat{\zeta}(0)}{\hat{\zeta}(l)} = \frac{1}{|\cosh(pl)|} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(\mu l) + \cos^2(kl)}} \quad (8.47)$$

Deze verhouding wordt bepaald door de twee z.g. dimensieloze vakconstanten μl (die de demping over de vaklengte bepaalt) en kl (het faseverschil tussen beide einden in een lopende golf). Als deze twee bekend zijn is $\tan \delta = \mu/k$ ook bekend, waaruit bij gegeven kl de waarde van $k_0 l$ is te berekenen; verder is $\sigma = \tan 2\delta$ dan ook bekend. Deze omrekening is gebruikt in de grafiek van Figuur 8.4, die de versterkingsfactor r geeft als functie van $k_0 l$ (niet kl , dus zonder weerstandsinvloed) voor een aantal waarden van σ ($= \tan 2\delta$). Het voordeel hiervan is dat de invloed van de weerstand, die niet a priori bekend is, in slechts één van de twee onafhankelijke parameters in Figuur 8.4 voorkomt, in tegenstelling tot een plot met μl kl als onafhankelijken.

Zonder weerstand is het rechterlid van (8.47) gelijk aan $1/|\cos(kl)|$, zoals in Hoofdstuk 4 al was gezien, en treedt resonantie op voor $\cos(kl) = 0$. Figuur 8.4 geeft in compacte vorm nuttige informatie voor bepaling van opslinging of demping in eenzijdig gesloten bekkens, en kan zowel voor getijden als voor seiches worden toegepast, ook al verschillen de betreffende frequenties, golflengten en systeemafmetingen aanzienlijk.

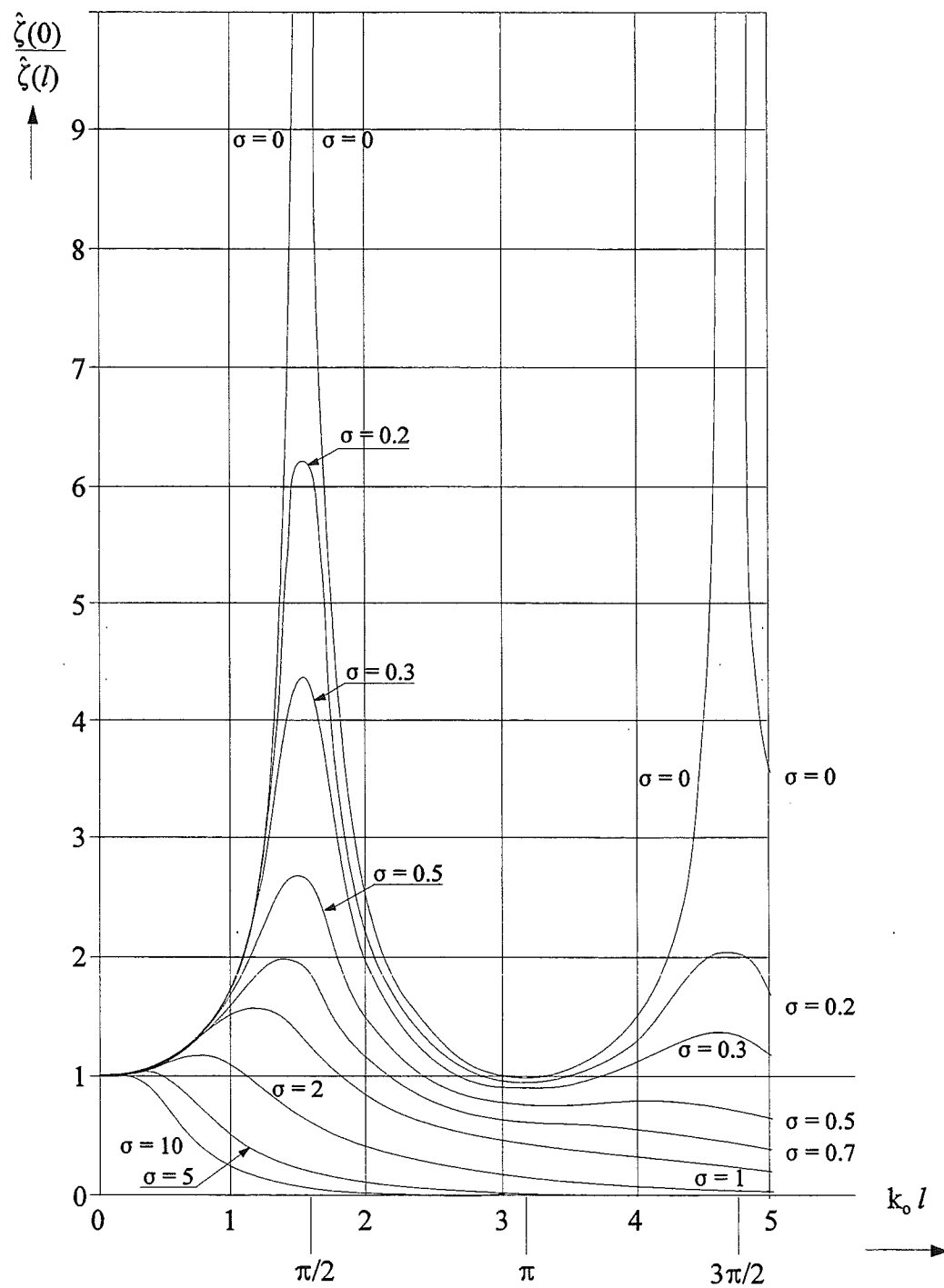
De amplitude van het debiet in het open einde volgt uit (8.46). Substitutie hierin van (8.22) geeft

$$\hat{Q}(l) = |\hat{Q}(l)| = Bc\hat{\zeta}(0) \cos \delta \sqrt{\sinh^2(\mu l) + \sin^2(kl)} \quad (8.48)$$

Via (8.44) kan dit worden uitgedrukt in de gegeven amplitude van de oppervlakte-uitwijking aan het open eind:

$$\frac{\hat{Q}(l)}{Bc\hat{\zeta}(l) \cos \delta} = \sqrt{\frac{\sinh^2(\mu l) + \sin^2(kl)}{\sinh^2(\mu l) + \cos^2(kl)}} \quad (8.49)$$

Door de sinus- en cosinusfuncties is het debiet in de mond niet een monotone functie van de bekkenlengte (evenmin als de amplitudeverhouding r).



Figuur 8.4 Versterking/verzwakking in eenzijdig gesloten bekken

De hier genoemde verschijnselen speelden een belangrijke rol bij de afsluiting van de voormalige Zuiderzee. Vóór de afsluiting was de bekkenlengte meer dan een halve golflengte van het M_2 -getij (faseverschil van Den Helder tot de kust bij het Gooi ca. 200°) en was het getij sterk gedempt, met een snelle fasevariatie en een minimumamplitude bij Urk, waar de amplitude ca. 10% was van die bij Den Helder. Met de afsluiting werd de bekkenlengte ca. $1/4$ golflengte (!) en werd het getij in de Waddenzee tegen de Afsluitdijk ca. 10% sterker dan bij Den Helder. Dit leidde tot een verhoging van de debieten door de zeegaten tussen de waddeneilanden, variërend van ca. 25% in het Zeegat van Texel tot vrijwel nihil voorbij Terschelling.

8.7 Voortplanting in willekeurige sectie

We gaan nu de golfvoortplanting na in een deel of sectie van een open waterloop met willekeurige combinaties van randvoorwaarden aan de twee zijden $x=0$ en $x=l$. Het kan een kanaalpand voorstellen dat we inééns van eind tot eind modelleren, of een beperkt deel (sectie of vak) van een lang, onvertakt systeem of van een netwerk van geulen zoals in de Waddenzee of de Westerschelde.

We hebben twee DVen tot onze beschikking waaruit we twee betrekkingen tussen grootheden kunnen afleiden. Van de vier grootheden $\zeta(0)$, $Q(0)$, $\zeta(l)$ en $Q(l)$ aan de sectie-einden kunnen er twee als randvoorwaarde zijn opgelegd; dan zij de overige twee daaruit te berekenen. Er kunnen verschillende combinaties van randvoorwaarden zijn. Een veel voorkomende combinatie is: Q voorgeschreven bovenstrooms (rivierzijde) en ζ benedenstrooms (zeezijde). De hier gegeven berekeningen en resultaten zijn voor een situatie waarin het debiet gemiddeld nul is of althans verwaarloosbaar, omdat anders de gebruikte linearisering van de weerstand niet opgaat.

De algemene vergelijkingen voor de golfbeweging in een prismatisch vak dienen als uitgangspunt:

$$\zeta(x) = C_1 \exp(-px) + C_2 \exp(px) = \check{\zeta}_1(x) + \check{\zeta}_2(x) \quad (8.50)$$

en

$$Q(x) = \frac{i\omega B}{p} [C_1 \exp(-px) - C_2 \exp(px)] = \frac{i\omega B}{p} [\check{\zeta}_1(x) - \check{\zeta}_2(x)] \quad (8.51)$$

We werken kortheidshalve de factor buiten de haken in (8.51) weg door een bij het debiet horende hulplengte in te voeren volgens

$$\check{Z}(x) = \frac{p}{i\omega B} \check{Q}(x) \quad (8.52)$$

Daarmee wordt (8.51):

$$\tilde{Z}(x) = C_1 \exp(-px) - C_2 \exp(px) = \tilde{\zeta}_1(x) - \tilde{\zeta}_2(x) \quad (8.53)$$

Kortheidshalve schrijven we $\tilde{Z}_0$ voor $\tilde{Z}(0)$, etc. Dan geldt

$$\tilde{\zeta}_0 = C_1 + C_2 \quad \text{en} \quad \tilde{Z}_0 = C_1 - C_2 \quad (8.54)$$

zodat de te bepalen integratieconstanten nu zijn uit te drukken in de grootheden in $x = 0$:

$$C_1 = \frac{1}{2}(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{Z}_0) \quad \text{en} \quad C_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\zeta}_0 - \tilde{Z}_0) \quad (8.55)$$

Door substitutie hiervan in (8.50) en (8.53) kunnen de waarden aan het andere einde ($x = l$) hierin worden uitgedrukt:

$$\tilde{\zeta}_l = \frac{1}{2}(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{Z}_0)\exp(-pl) + \frac{1}{2}(\tilde{\zeta}_0 - \tilde{Z}_0)\exp(pl) \quad (8.56)$$

$$\tilde{Z}_l = \frac{1}{2}(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{Z}_0)\exp(-pl) - \frac{1}{2}(\tilde{\zeta}_0 - \tilde{Z}_0)\exp(pl) \quad (8.57)$$

ofwel

$$\tilde{\zeta}_l = \tilde{\zeta}_0 \cosh(pl) - \tilde{Z}_0 \sinh(pl) \quad (8.58)$$

$$\tilde{Z}_l = -\tilde{\zeta}_0 \sinh(pl) + \tilde{Z}_0 \cosh(pl) \quad (8.59)$$

We gaan nu weer van de hulplengte Z terug naar het debiet Q . Ook voeren we aparte symbolen (letters) in voor bepaalde complexe vakconstanten (functies van pl):

$$L = O = \cosh(pl) \quad M = -\frac{p}{i\omega B} \sinh(pl) \quad N = -\frac{i\omega B}{p} \sinh(pl) \quad (8.60)$$

Daarmee gaan (8.58) en (8.59) over in de volgende z.g. **vierpoolvergelijkingen**:

$$\tilde{\zeta}_l = L \tilde{\zeta}_0 + M \tilde{Q}_0 \quad \text{en} \quad \tilde{Q}_l = N \tilde{\zeta}_0 + O \tilde{Q}_0 \quad (8.61)$$

Hier staan symbolisch de gezochte twee relaties tussen de vier waterstanden en debieten aan beide einden van het vak. Twee hiervan moeten bekend zijn, dan zijn de overige twee

eveneens bepaald (bij gegeven vakconstanten L t/m O).

N.B. De vakconstanten zijn bekende functies van de complexe pl . Omdat $pl = \mu l + ik l$ kunnen zij worden uitgeschreven (zie Appendix A met uitdrukkingen voor hyperbolische functies met complex argument) in termen van functies van μl (een maat voor de relatieve demping over de vaklengte) en kl (het faseverschil over de vaklengte bij een enkele lopende golf). (In berekeningen kan de gelijkheid $LO - MN = 1 + 0i$ als controle worden gebruikt.) Omdat al deze factoren afhangen van de amplitude van de snelheid (of het debiet) zal in de praktijk iteratie nodig zijn. De vaklengte mag niet te groot zijn, want de veronderstelling is dat het debiet daarover niet al te sterk varieert.

Bijzonder geval

Neem weer het bekken dat aan één eind, zeg in $x = 0$, gesloten is (par. 8.6). Daarvoor geldt $Q(0,t) = 0$ ofwel $\tilde{Q}(0) = 0$, waarmee (8.61) geeft

$$\zeta_l = L \zeta_0 = \zeta_0 \cosh(pl) \quad (8.62)$$

in overeenstemming met (8.44), en

$$\tilde{Q}_l = N \zeta_0 = -\zeta_0 \frac{i\omega B}{p} \sinh(pl) \quad (8.63)$$

in overeenstemming met (8.46).

8.8 Voortplanting in netwerken

De hier omschreven aanpak is ook toe te passen op een aangesloten reeks van afzonderlijke vakken. Een bijzonder geval hiervan is een serieschakeling. Dat doet zich voor in geval van een lang, ééndimensionaal systeem dat in kortere vakken is verdeeld omdat anders de veronderstelling dat dwarsprofiel, ruwheid en amplitude van het debiet per vak constant zijn onvoldoende opgaat. Ook kan er sprake zijn van een vertakte structuur (een boomstructuur of een echt netwerk met gesloten kringen).

In al deze gevallen zijn er randvoorwaarden in de uitwendige randpunten, waar het systeem van secties op zijn omgeving aansluit, en gelden aansluitvoorwaarden in de inwendige knooppunten, zoals die hier al zijn toegepast bij de berekening van partiële terugkaatsing (par. 8.5), en eerder in Hoofdstuk 5. Per vak gelden de twee vierpoolvergelijkingen. In totaal zijn er dan juist voldoende vergelijkingen om het stelsel op te kunnen lossen.

De getijberekeningen van de Staatscommissie Lorentz voor de afsluiting van de Zuiderzee waren gebaseerd op een netwerk van 26 vakken, met randvoorwaarden voor de waterstand volgens het M_2 -getij in de Noordzee buiten de vier meest westelijke zeegaten van de

Waddenzee, en met een randvoorwaarde $Q = 0$ voor het meest zuidelijke “vak” (36.5 km breed en 10 km lang) tegen de kust van Amsterdam tot Nijkerk. De voorspellingen van de Commissie zijn door metingen bevestigd, inclusief de op voorhand niet verwachte versterking van de getijstromen in de zeegaten.

In navolging van deze Commissie zijn in Nederland, en later ook in andere landen, zeer veel getijberekeningen uitgevoerd volgens de harmonische methode en zijn allerlei verfijningen aangebracht. Ook is de methode uitgebreid (door Mazure) voor het geval van een netto afvoer, voor toepassing op benedenrivieren (zie Dronkers, 1964). Voor praktische toepassingen is de harmonische methode inmiddels verdrongen door numerieke integratie van de volledige, niet-lineaire lange-golfvergelijkingen gebaseerd op eindige differenties of eindige elementen. Voor het inzicht en voor globale berekeningen blijft het echter een nuttige methode.

8.9 Niet-lineaire effecten

In deze paragraaf stippen we enkele niet-lineaire effecten aan, om daar enig begrip van te krijgen en ook voor het inzicht in de beperkingen van het lineaire model.

We kunnen twee soorten niet-lineariteit onderscheiden:

- * termen die niet lineair zijn in de afhankelijke variabelen, zoals de advection term en de kwadratische-met-modulus-term van de weerstand, beide in de bewegingsvergelijking, en
- * z.g. geometrische niet-lineariteiten, die het gevolg zijn van de invloed van de afhankelijke variabelen, in ons geval vooral de variaties in de diepte, op eigenschappen van het dwarsprofiel zoals stroomvoerend oppervlak, hydraulische straal en bergende breedte.

In tegenstelling tot een lineair systeem is de respons van een systeem met niet-lineariteiten op een sinusvormige excitatie zelf niet sinusvormig, maar worden er harmonischen (boventonen) opgewekt, en ontstaat ook een netto gemiddeld effect.

Neem bijv. de kwadratische advection term in de bewegingsvergelijking, $\partial(Q^2/A_s)/\partial x$. Wanneer Q in de tijd varieert als $\cos \omega t$ dan varieert Q^2 als $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$. De kwadratering induceert zowel een constante bijdrage (frequentie 0) als een hogere harmonische, met frequentie 2ω . Een product zoals $|U|U$, dat in de weerstandsterm voorkomt, induceert oneven hogere harmonischen, met frequenties 3ω , 5ω etc. Als gevolg hiervan zal de respons van een systeem waarin dit soort termen voorkomen, op een excitatie evenredig met $\cos \omega t$, het karakter hebben van

$$b_0 + b_1 \cos(\omega t + \alpha) + b_2 \cos(2\omega t + \beta) + b_3 \cos(3\omega t + \gamma) + \dots \quad (8.64)$$

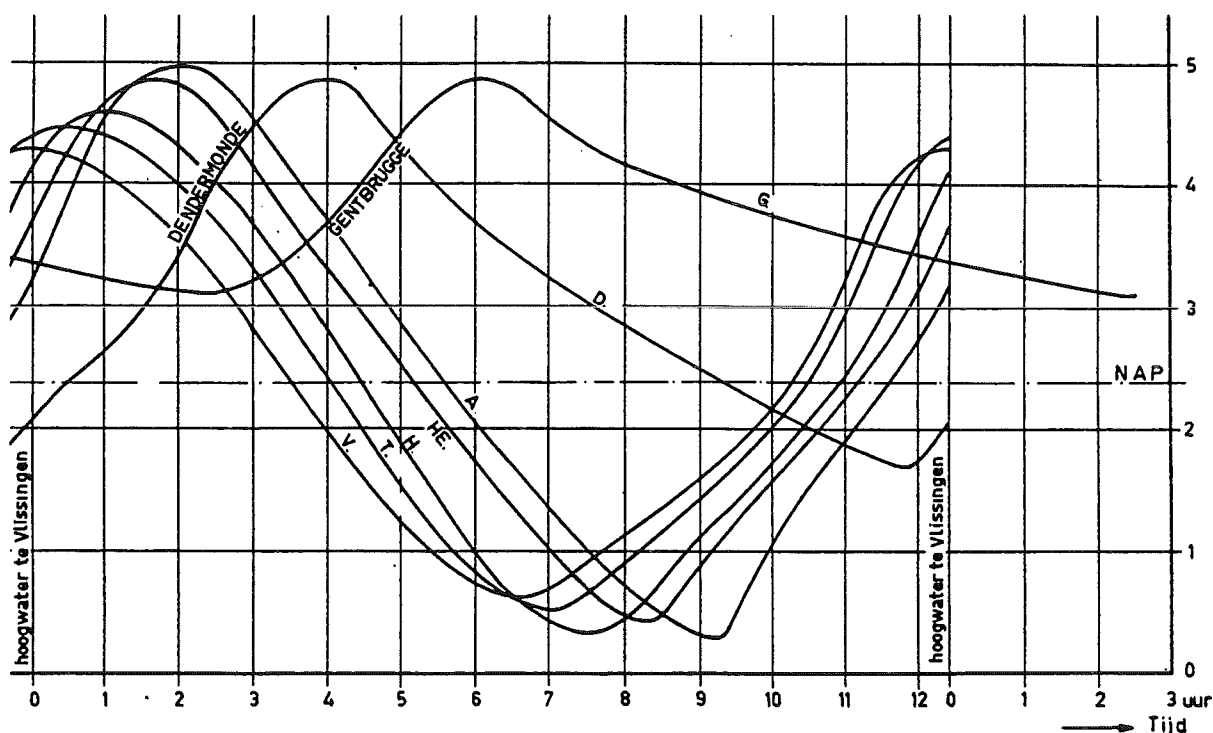
Als b een waterstand voorstelt komt b_0 overeen met een verandering van de middenstand (de

over de tijd gemiddelde waterstand). Deze zal in het algemeen met de plaats variëren. Er ontstaat daardoor een z.g. **middenstandsverhang**, ook al is het gemiddelde debiet nul.

De som van de overige termen (basiscomponent plus alle harmonischen) is een periodieke functie met basisfrequentie ω , maar door de aanwezigheid van de harmonischen is deze niet sinusvormig maar vervormd. Niet-lineariteit veroorzaakt dus **vervorming**, waarbij de resulterende profielvorm behalve van de amplituden ook van de faseverschuiving tussen de componenten afhangt.

Niet-lineaire effecten nemen toe met toenemende verhouding van amplitude tot waterdiepte. Zij manifesteren zich daardoor vooral in ondiep water. Het hoofdmaansgetij M_2 b.v. genereert in ondiep water “boventonen” met dubbele, drievoudige, viervoudige etc. frequentie (M_4 , M_6 etc.), de z.g. “**ondiepwatergetijden**”.

Figuur 8.5 toont gemeten getijkrommen (waterstanden als functie van de tijd) voor een aantal stations langs de (Wester)schelde, van de zeewaartse rand bij Vlissingen via Terneuzen, Hansweert, Hedwigpolder en Antwerpen tot in de bovenloop bij Dendermonde en Gentbrugge. Duidelijk is te zien hoe de getijkromme naar binnen meer en meer van een sinusvorm afwijkt, en gemiddeld hoger komt te liggen. Ook is te zien hoe de amplitude naar binnen eerst toeneemt om daarna stroomopwaarts af te nemen.



Figuur 8.5 Getijkrommen (Wester)schelde

In ondiep-water getijdegebieden spelen de geometrische niet-lineariteiten een belangrijke rol. Stroom en waterstand zijn voor een belangrijk deel in fase (vanwege het deels lopende karakter van de dempende getijgolf): vloed(stroom) valt grotendeels samen met waterstanden hoger dan de middenstand, en eb(stroom) met lagere waterstanden. Tijdens de vloedfase zijn de diepten en dwarsprofielen daarom gemiddeld groter dan tijdens de ebfase. Dit betekent een asymmetrie, waardoor eb langer gaat duren dan vloed.

Doordat ebstroom gemiddeld plaats vindt bij geringere diepte dan vloedstroom zijn bij eenzelfde Q de ebsnelheden hoger. Voor de weerstand geldt dit in nog sterkere mate (verhang in absolute grootte evenredig met U^2/d , dus bij gegeven Q met $1/d^3$). De hogere weerstand bij eb dan bij vloed komt overeen met een sterker verhang. De middenstand loopt daardoor naar binnen op, ook bij afwezigheid van een netto debiet. Een benadering hiervoor is uitgewerkt in Appendix C.

Bij een numerieke integratie van de volledige DVen inclusief alle niet-lineariteiten krijgt men deze effecten “vanzelf” mee. Bij analytische modellen, zoals behandeld in dit hoofdstuk, moeten ze afzonderlijk worden afgeleid. Dat leidt al gauw tot een lange en ondoorzichtige algebraïsche uitdrukkingen (zie b.v. Dronkers, 1964).

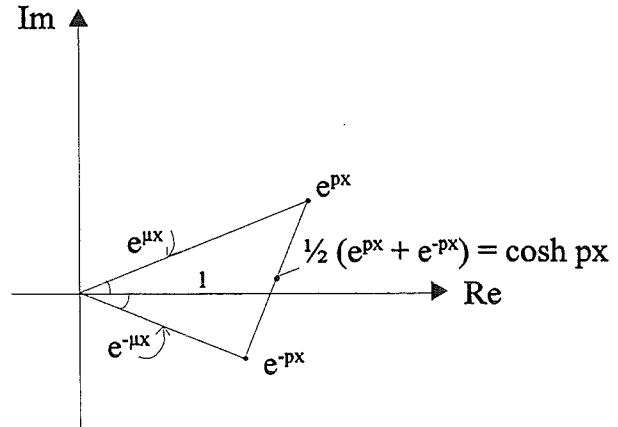
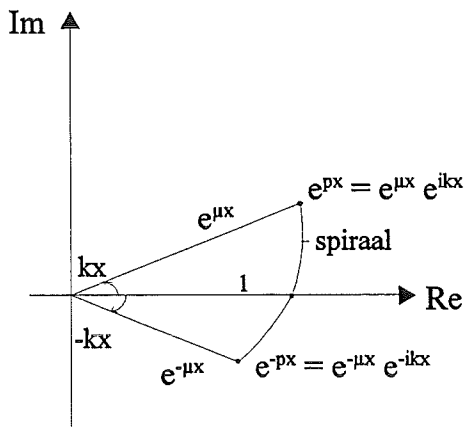
8.10 Vragen en opgaven

1. Maak een samenvatting van dit hoofdstuk.
2. Noem ten minste drie oorzaken waardoor de lange-golfvergelijkingen niet lineair zijn.
3. Ga na waarom een niet-lineair stelsel vergelijkingen geen harmonische respons geeft op een harmonische excitatie. In welke opzichten wijkt het gedrag van de respons af van een harmonische oplossing?
4. Ga na dat vergelijking (8.8), met inachtneming van de definitie van κ in vergelijking (8.9), voor het geval van de starre-kolombenadering overgaat in vergelijking (7.10), rekening houdend met de definities van W en χ (en met verwaarlozing van het uittreeverlies).
5. Noem twee verschillende invloeden van de weerstand op de golfvoortplanting.
6. Ga de betekenis en de dimensie na van het z.g. golfgetal k .
7. Van een getijbeweging in een geul is gegeven dat de dempingsfactor μ gelijk is aan $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$, het golfgetal $k = 1.5 \mu$ en de integratieconstanten (zie verg. (8.17)) zijn $C_1 = (1.2 \text{ m}) \exp(i\pi/6)$ en $C_2 = (0.8 \text{ m}) \exp(-i\pi/4)$. Plot de waarden van deze constanten in het complexe vlak en construeer voor een reeks van positieve waarden

van x de hodograaf voor elk van beide golfcomponenten en van de resulterende waterstand.

8. Als in aanvulling op vraag 7 gegeven is dat het om het M_2 -getij gaat en dat $B = 500$ m, maak dan een hodograaf voor het debiet van elk van beide lopende-golfcomponenten en van het totale debiet.
9. Bereken zelf de waarden verzameld in Tabel 8.1, uitgaande van de erboven vermelde gegevens.
10. Bereken het golfgetal k en de dempingsfactor μ voor de geul en bijbehorende gegevens uit vraag 20, Hoofdstuk 7. (Antw.: $k = 2.51 \cdot 10^{-5}$ r/m en $\mu = 1.97 \cdot 10^{-5}$ /m)
11. Ga met gebruikmaking van deze uitkomst(en) na in hoeverre de starre-kolom-benadering hier van toepassing is (zie vraag 20, Hoofdstuk 7). (Antw.: $\cos kl = 0.97 \approx 1$ dus OK)
12. Stel nu dat de geul aan de binnenzijde ($x = 0$) is afgesloten. Bereken eerst met Figuur 8.3 en daarna met de vergelijkingen de amplitude van de waterstand aan het gesloten eind en van het debiet in de mond voor hetzelfde getij als in Hoofdstuk 7, vraag 20 (M_2 , buitenamplitude 1 m.) (N.B.: De uitkomsten van vraag 10 zijn niet meer geldig.) (Antw.: $l = 10$ km, $L \approx 400$ km dus kombergingsbenadering OK voor de geul met als uitkomst $\hat{\zeta}(0) = \hat{\zeta}(l) = 1$ m, $\hat{Q}(l) = \omega A_k \hat{\zeta}(l) = 843$ m³/s en $\hat{U}(l) = 0.17$ m/s)
13. Bereken eerst met Figuur 8.4 en daarna met de vergelijkingen de amplitude van de waterstand aan het gesloten eind van dezelfde (afgesloten) geul als in vraag 12, nu voor een seiche met een periode van 45 minuten en een amplitude van de fluctuaties in de waterstand aan het open eind ($x = l$) van 0.3 m. (N.B. De uitkomsten van vraag 10 zijn niet meer geldig!) (Antw.: $\hat{\zeta}(0) = 0.36$ m)
14. De Fundy Bay heeft een lengte van ca. 270 km. De breedte ervan varieert niet sterk; de diepte in feite wel maar voor deze opgave stellen we die constant op ca. 75 m, en voor c_f nemen we ca. 0.0025. Gebruik Figuur 8.4 voor het maken van een schatting van de amplitude van het M_2 -getij aan het gesloten einde als gegeven is dat die aan het open einde ca. 2.5 m bedraagt. (Antw.: ca. 9 m, ofwel een getijverschil van ca. 18 m)
15. Bereken met Figuur 8.4 de versterkingsfactor van een seiche met een periode van 20 minuten in een eenzijdig gesloten havenbekken met een lengte van 3 km en een diepte van 15 m, als de amplitude in de mond 0.25 m bedraagt. (Antw.: ca. 3.7). Ga na in hoeverre de amplitude hier invloed heeft op de versterkingsfactor en vergelijk dat met de situatie in vraag 14.
16. Verklaar waardoor bij een zuiver oscillerende beweging (gemiddeld debiet gelijk aan nul) in een open waterloop er toch een gemiddeld verhang kan ontstaan.

APPENDIX A cosh en sinh van een complex argument



$$\text{Re cosh}(px) = \frac{1}{2}(\cos kx)(e^{\mu x} + e^{-\mu x}) = \cos kx \cosh \mu x$$

$$\text{Im cosh}(px) = \frac{1}{2}(\sin kx)(e^{\mu x} - e^{-\mu x}) = \sin kx \sinh \mu x$$

$$\cosh px = \cos kx \cosh \mu x + i \sin kx \sinh \mu x$$

$$\begin{aligned} |\cosh px|^2 &= \cos^2 kx \cosh^2 \mu x + \sin^2 kx \sinh^2 \mu x \\ &= \cos^2 kx (\sinh^2 \mu x + 1) + \sin^2 kx \sinh^2 \mu x \\ &= \sinh^2 \mu x + \cos^2 kx \end{aligned}$$

$$\arg \cosh(px) = \arctan \frac{\text{Im cosh}(px)}{\text{Re cosh}(px)} = \arctan(\tan kx \tanh \mu x)$$

Idem:

$$\text{Re sinh}(px) = \frac{1}{2}(\cos kx)(e^{\mu x} - e^{-\mu x}) = \cos kx \sinh \mu x$$

$$\text{Im sinh}(px) = \frac{1}{2}(\sin kx)(e^{\mu x} + e^{-\mu x}) = \sin kx \cosh \mu x$$

$$\sinh px = \cos kx \sinh \mu x + i \sin kx \cosh \mu x$$

$$\begin{aligned} |\sinh px|^2 &= \cos^2 kx \sinh^2 \mu x + \sin^2 kx \cosh^2 \mu x \\ &= \cos^2 kx \sinh^2 \mu x + \sin^2 kx (\sinh^2 \mu x + 1) \\ &= \sinh^2 \mu x + \sin^2 kx \end{aligned}$$

$$\arg \sinh(px) = \arctan \frac{\text{Im sinh}(px)}{\text{Re sinh}(px)} = \arctan(\tan kx \coth \mu x)$$

APPENDIX B Berekening complexe voortplantingsconstante

Substitutie van

$$\tilde{\zeta}(x) = \exp(Px)$$

in

$$\frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dx^2} + k_o^2(1-i\sigma)\tilde{\zeta} = 0 \quad (8.67)$$

geeft een vierkantsvergelijking voor P

$$P^2 + k_o^2(1-i\sigma) = 0 \quad (8.68)$$

Deze vierkantsvergelijking heeft twee tegengestelde complexe wortels, zeg p en -p, waarbij we stellen

$$p = ik_o \sqrt{1-i\sigma} \quad (8.69)$$

Om p in zijn reële deel (μ) en zijn imaginaire deel (k) te splitsen blijkt het handig te zijn om niet met de dimensieloze weerstand-traagheid verhouding σ te (blijven) werken maar om in de plaats daarvan een hoek in te voeren die eveneens een maat is voor de relatieve grootte van de weerstand. In verband met de wortelvorm in (8.69) definiëren we een hoek δ door

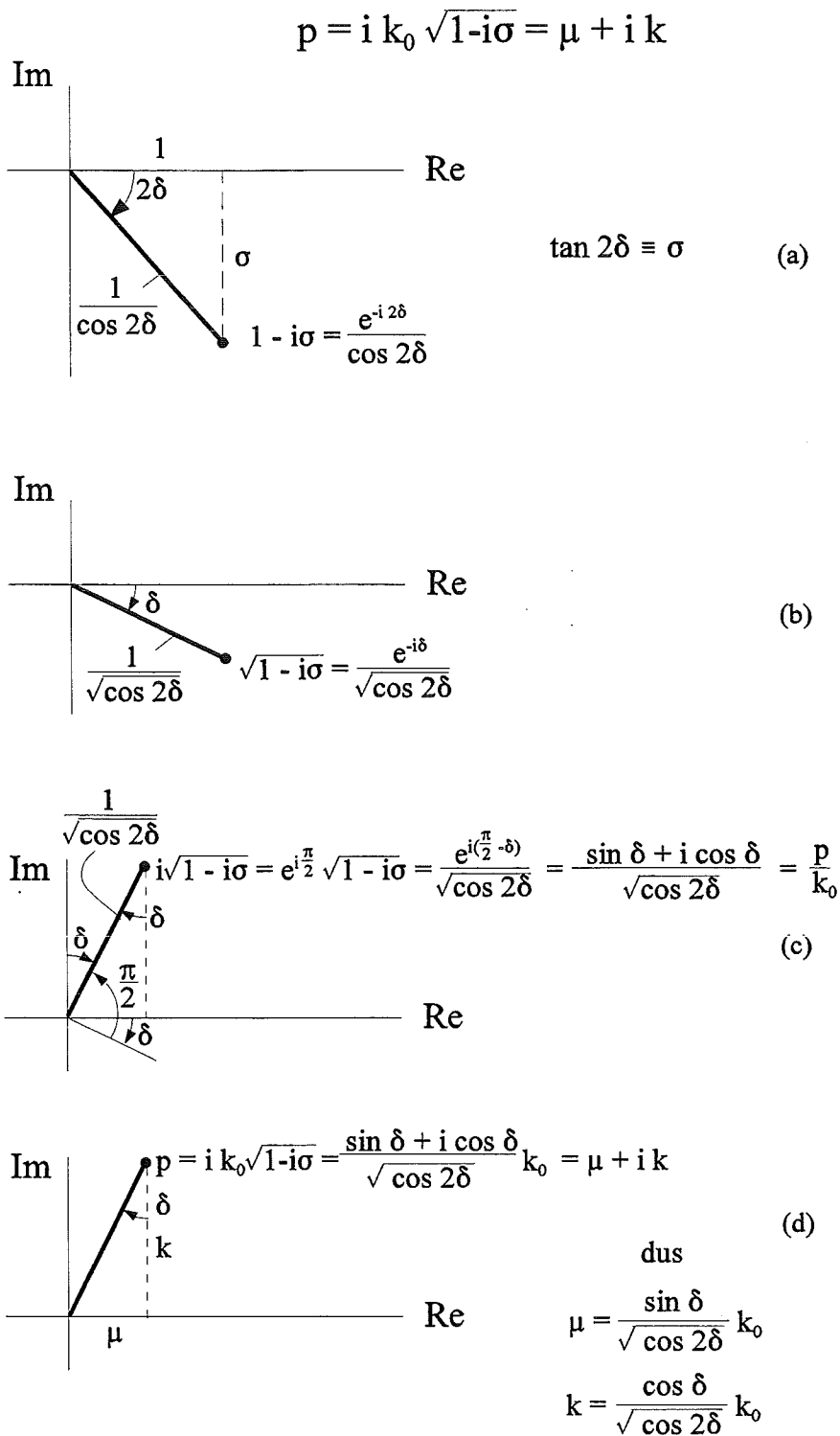
$$\tan 2\delta \equiv \sigma = \frac{8}{3\pi} c_f \frac{\hat{U}}{\omega R} \quad (8.70)$$

Hiermee zijn herleidingen uitgevoerd van (8.69) voor de splitsing van p, stap voor stap grafisch weergegeven in Figuur 8.6. Uitgaand van een gegeven waarde van σ wordt eerst $1-i\sigma$ geplot en worden modulus en argument daarvan bepaald (Figuur a). Daaruit wordt de vierkantswortel getrokken (Figuur b). Dat levert p/ik_o . Dit wordt met i vermenigvuldigd, dus over 90° gedraaid (Figuur c). Het resultaat is gelijk aan p/k_o . Vermenigvuldiging hiervan met k_o levert de gezochte waarde van p en dus van μ en k:

$$\text{Im } p = k = \frac{k_o}{\sqrt{\cos 2\delta}} \cos \delta = \frac{k_o}{\sqrt{1-\tan^2 \delta}} \quad (8.71)$$

en

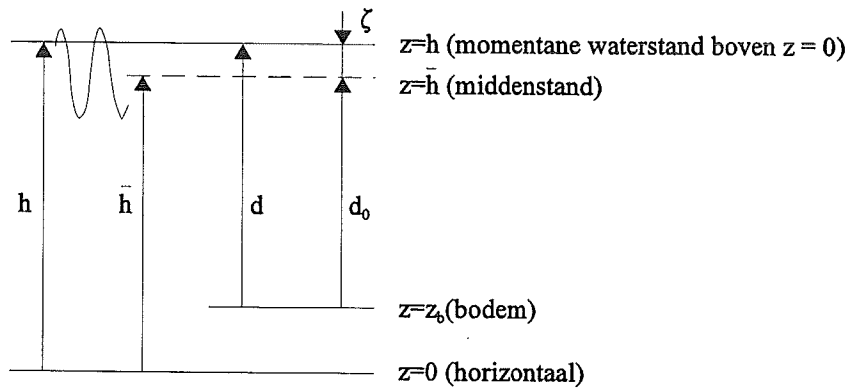
$$\text{Re } p = \mu = \frac{k_o}{\sqrt{\cos 2\delta}} \sin \delta = k_o \frac{\tan \delta}{\sqrt{1-\tan^2 \delta}} = k \tan \delta \quad (8.72)$$



Figuur 8.6

APPENDIX C Berekening middenstandsverhang door weerstand

We maken een benaderende berekening voor het middenstandsverhang, gebruik makend van uitkomsten van de harmonische methode. We schrijven de momentane hoogte van de waterstand boven het horizontale referentievlak $z = 0$ als $z = h(x,t) = \bar{h}(x) + \zeta(x,t)$, waarbij een overstreping een middeling betekent over de getijperiode. M.a.w., $\bar{h}$ is de gemiddelde waarde van h en $\bar{\zeta} = 0$. De momentane diepte is $d = h - z_b$ en de over de tijd gemiddelde waarde daarvan is $\bar{d}$, maar om dubbele overstrepingen te vermijden schrijven we dat als d_0 . Daarmee geldt voor de momentane diepte $d(x,t) = d_0(x) + \zeta(x,t)$. Zie Figuur 8.7.



Figuur 8.7 Definitieschets

De bijdrage van de weerstand aan het momentane verhang is

$$\frac{\partial h_w}{\partial x} = - \frac{8}{3\pi} c_f \frac{\hat{Q}Q}{gA_s^2 R} \quad (8.73)$$

In de lineaire benadering werden het oppervlak, de breedte en de diepte als constanten benaderd, onafhankelijk van de waterstand. We maken daarop nu een eerste correctie door de invloed van variabele waterstand in rekening te brengen, waarbij we de stroomvoerende breedte nog constant houden. Zodoende substitueren we $A_s = B_s d = B_s(d_0 + \zeta)$ in (8.73), waarin B_s als constant wordt benaderd. Tevens vervangen we de momentane hydraulische straal R door de momentane diepte. Na middeling van (8.73) krijgen we dan het volgende resultaat voor de bijdrage van de weerstand aan het middenstandsverhang:

$$\frac{d\bar{h}_w}{dx} = - \frac{8}{3\pi} c_f \frac{\hat{Q}}{gB_s^2} \overline{Q/d^3} \quad (8.74)$$

(Dit lijkt op het weerstandsverhang voor eenparige stromen, $i_w = c_f U^2/gd = c_f q^2/gd^3$; zie CTme2100.)

Hoewel $\overline{Q} = 0$ hoeft dit niet te gelden voor $\overline{Q/d^3}$. We maken de volgende benadering, gebruik makend van de veronderstelling dat $|\zeta| \ll d_0$:

$$\overline{Q/d^3} = \overline{Q/(d_0 + \zeta)^3} = d_0^{-3} \overline{Q/(1 + \zeta/d_0)^3} \approx d_0^{-3} \overline{Q(1 - 3\zeta/d_0)} = -3\overline{Q\zeta}/d_0^4 \quad (8.75)$$

Voor sinusvormige variaties van ζ en Q in de tijd bij vaste x , volgens

$$\zeta = \hat{\zeta} \cos(\omega t - \alpha) \quad \text{en} \quad Q = \hat{Q} \cos(\omega t - \beta) \quad (8.76)$$

volgt (na een beetje gonio)

$$\overline{Q\zeta} = \frac{1}{2} \hat{Q} \hat{\zeta} \cos(\alpha - \beta) \quad (8.77)$$

Dit laat expliciet zien dat het middenstandsverhang door weerstand het gevolg is van het geheel ($\alpha - \beta = 0$) of gedeeltelijk ($\alpha - \beta \neq 0$ en $\neq \pi/2$) in fase zijn van debiet en waterstand, zoals in lopende golven. Alleen wanneer deze twee precies 90° uit fase zijn, zoals in een staande golf, is dit gemiddeld product gelijk aan nul en levert deze term geen bijdrage aan het gemiddeld verhang.

Substitutie van (8.77) en (8.75) in (8.74) geeft

$$\frac{\overline{dh_w}}{dx} = \frac{4}{\pi} c_f \frac{\hat{Q}^2}{gB_s^2 d_0^3} \frac{\hat{\zeta}}{d_0} \cos(\alpha - \beta) = \frac{4}{\pi} \left(c_f \frac{\hat{U}^2}{g d_0} \right) \frac{\hat{\zeta}}{d_0} \cos(\alpha - \beta) \quad (8.78)$$

(De uitdrukking tussen haken is het weerstandsverhang voor een eenparige stroom met snelheid $\hat{U}$.) Wanneer we hierin de uitdrukkingen substitueren voor een enkelvoudige, gedempte lopende golf (vergelijkingen (8.27) (8.28) en (8.29)) dan volgt na enig herleiden:

$$\frac{\overline{dh_w}}{dx} = \frac{4}{\pi} c_f \cos \delta \cos 2\delta \frac{B}{B_s} \left(\frac{\hat{\zeta}}{d_0} \right)^3 \quad (8.79)$$

Bij afnemende waarden van $\hat{\zeta}/d_0$ wordt dit snel zeer klein vanwege de derde macht, maar bij getijvoortplanting in ondiep water kan deze verhouding wel zo groot zijn dat de weerstand een significante invloed heeft op het middenstandsverhang.

9 Hoogwatergolven

9.1 Inleiding

Een hoogwatergolf op een benedenrivier wordt gekenmerkt door een langzame stijging en daling van de waterspiegel in enkele dagen, met bijv. 0.5 m per dag (zie Figuur 9.1; ook Figuur 3.4). Een overeenkomstige toeneming van de profielgemiddelde stroomsnelheid met enige dm/s in 24 uur, wat niet irreëel weinig is, komt overeen met een versnelling van ca. $2 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$, ca 500 keer kleiner dan de weerstands- of de verhangkracht per eenheid van massa ($g\partial h/\partial s$). De traagheidsterm in de bewegingsvergelijking is dus verwaarloosbaar (zie ook overzicht Tabel 3.1). Er is vrijwel evenwicht tussen de verhangkracht en de weerstand.

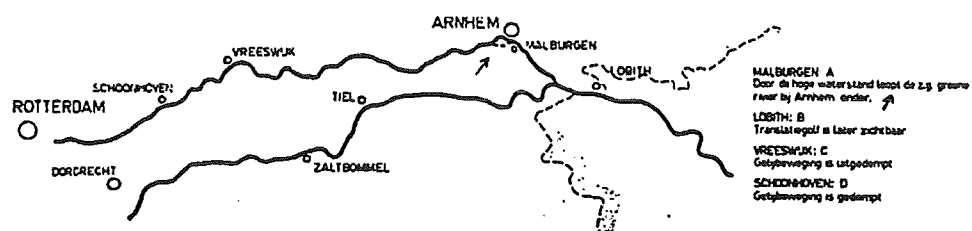
Hoewel voor hoogwatergolven in (beneden-)rivieren de traagheidsterm in het algemeen klein is t.o.v. de weerstandsterm wordt voor deze omstandigheden de traagheidsterm soms in rekening gebracht, en wel omdat er zich sneller verlopende storingen kunnen voordoen, gesuperponeerd op de langzamer verlopende hoogwatergolf. Voorbeelden hiervan zijn translatiegolven als gevolg van manipulaties met stuwen, de voortplanting van het getij op een benedenrivier, en de respons van het water op een dijkdoorbraak (zie Figuur 9.1). Bovendien is in een hoogwatergolf zelf de traagheidsterm niet altijd verwaarloosbaar, m.n. op bovenrivieren in tropische en subtropische gebieden.

Om bovengenoemde redenen, en omdat het niet handig is om voor elke situatie een daarop toegesneden model te moeten gebruiken, worden in de praktijk de berekeningen van een hoogwatergolf inclusief eventuele storingen meestal gebaseerd op het volledige stelsel vergelijkingen van De Saint-Venant, ofwel de ééndimensionale lange-golfvergelijkingen. Omdat daarbij de traagheid wordt meegenomen spreekt men wel van een "dynamic wave"-benadering ter onderscheiding van de hierna te behandelen benaderingen van de z.g. "kinematic wave" waarin de traagheid wordt verwaarloosd. (In de voorgaande hoofdstukken werd traagheid in alle gevallen in rekening gebracht en hoefde dit onderscheid niet te worden gemaakt.)

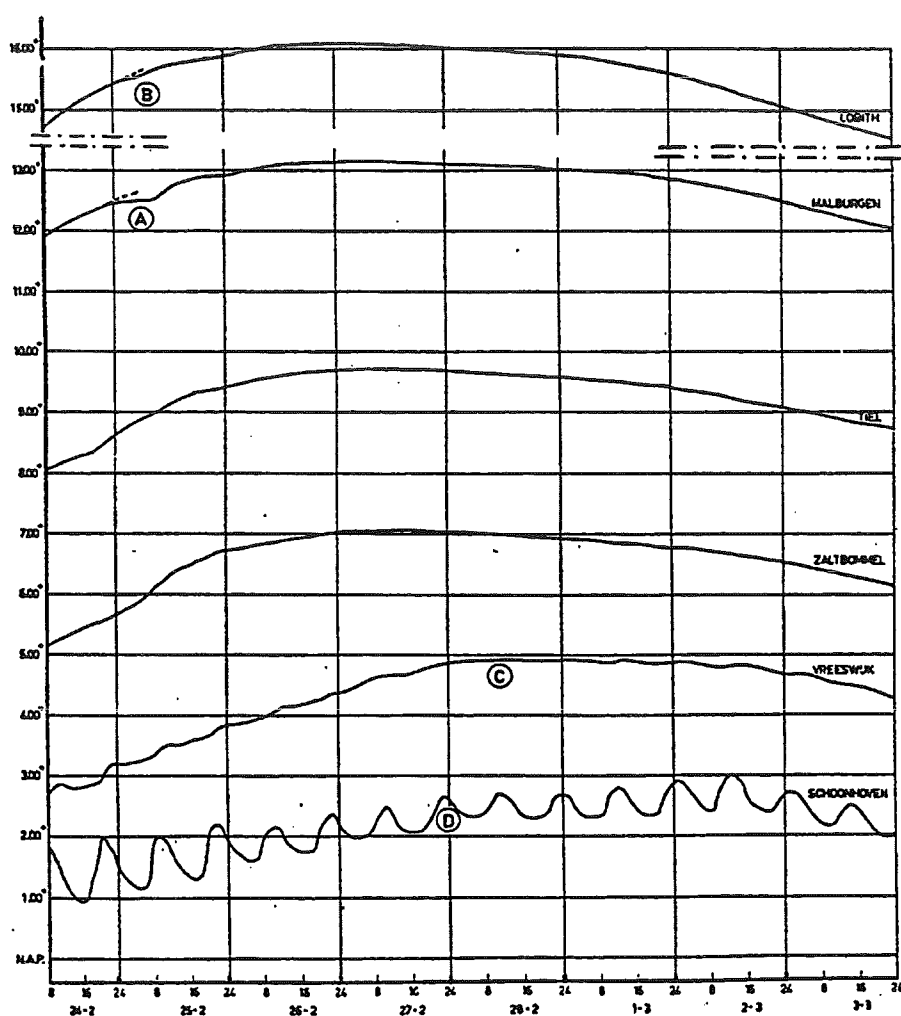
In Nederland zijn o.a. de numerieke pakketten DUFLOW en SOBEK beschikbaar voor één-dimensionale berekeningen (inclusief traagheid) van niet-stationaire stromen (en transport van meegevoerde stoffen; zie H. 11), hetzij in enkele waterlopen, vertakte systemen of netwerken.

Een gevolg van het werken met het algemene stelsel is dat men schijnbaar zonder moeite een volledige oplossing verkrijgt. In dit hoofdstuk worden enkele vereenvoudigde modellen geïntroduceerd, waarbij de traagheid wordt verwaarloosd, met bijhorende analytische oplossingen. Die zijn onmisbaar voor het verwerven van inzicht in deze verschijnselen, zoals nodig is om uitkomsten van numerieke modellen naar waarde te kunnen schatten en goed te kunnen interpreteren.

Hoofdstuk 9: Hoogwatergolven



HOOGWATER VOORJAAR 1970



Figuur 9.1 Peilregistraties tijdens hoogwater 26 feb - 3 maart 1970

9.2 Gereduceerde vergelijkingen

In deze paragraaf presenteren we diverse benaderingen van de volledige vergelijkingen.

De continuïteitsvergelijking houdt de standaardvorm:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{ofwel} \quad B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (9.1)$$

In de bewegingsvergelijking verwaarlozen we de traagheid, waardoor deze reduceert tot

$$\frac{\partial h}{\partial x} + c_f \frac{Q^2}{gA_s^2 R} = 0 \quad \text{ofwel} \quad -\frac{\partial h}{\partial x} = c_f \frac{Q^2}{gA_s^2 R} \equiv i_w \quad (9.2)$$

Dit is een **evenwichtsvergelijking: de verhangkracht is in balans met de weerstand**. We spreken hier van een **quasi-statische benadering**. (In de weerstandsterm is $|Q|Q$ vervangen door Q^2 omdat de stroom toch niet van richting verandert in de hier beschouwde situaties; de positieve x-richting is in de stroomrichting.)

De belangrijkste consequentie van de verwaarlozing van de traagheid is dat "dynamische" golfvoortplanting (in twee richtingen) niet meer mogelijk is. Wiskundig gezien volgt dit uit het feit dat het stelsel van de eerste orde is in t (alleen in x nog van de tweede orde).

Als we het debiet uitschrijven gaat (9.2) over in

$$Q = A_s \sqrt{g R i_w / c_f} \quad (9.3)$$

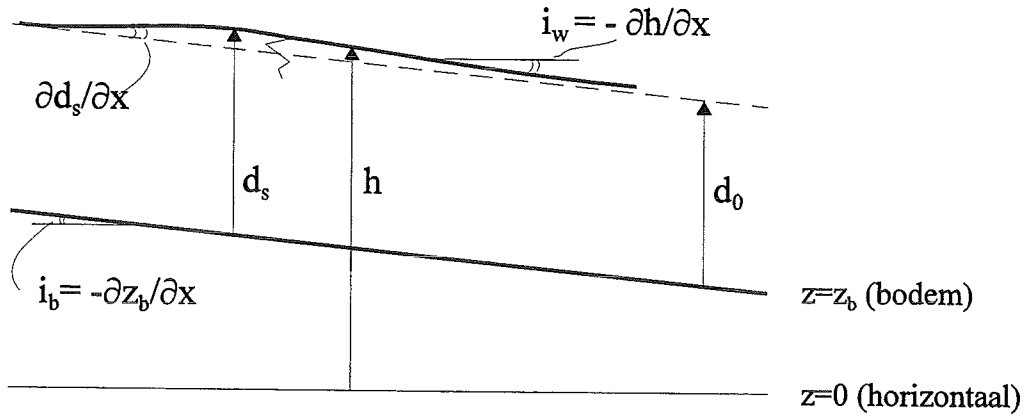
ofwel

$$U = \sqrt{g R i_w / c_f} \quad (= C \sqrt{R i_w}, \text{ waarin } C \text{ de Chezy-coëfficiënt is, } C = \sqrt{g/c_f}) \quad (9.4)$$

Dit zijn de bekende uitdrukkingen voor ruimtelijk langzaam variërende, stationaire stromen. Dat is logisch omdat we de traagheid, hoewel niet nul, verwaarloosd hebben. De veranderingen van het verhang verlopen zo langzaam dat de watermassa die kan volgen en de snelheid op elk moment vrijwel geheel aan het momentane verhang is aangepast.

Bij de behandeling van translatiegolven in kanalen, getijden en seiches in voorgaande hoofdstukken was er niet een duidelijk dominante stroomrichting of bodemhelling, en was er geen reden daaraan afzonderlijk aandacht te geven. Bij hoogwatergolven in rivieren is wel een voorkeursrichting gedefinieerd en heeft het wel zin de bodemhelling apart te verdisconteren. Daarom wordt de verhangterm ($\partial h / \partial x$) uitgedrukt als som van bodemhelling ($i_b = -\partial z_b / \partial x$) en gradiënt van de stroomvoerende diepte ($\partial d_s / \partial x$) (zie Figuur 9.2) volgens

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial d_s}{\partial x} - i_b \quad (9.5)$$



Figuur 9.2 Lengteprofiel rivier met verhang in hoogwatergolf

De bewegingsvergelijking (9.2) gaat dan over in:

$$\frac{\partial d_s}{\partial x} - i_b + c_f \frac{Q^2}{gA_s^2 R} = 0 \quad \text{ofwel} \quad \frac{\partial d_s}{\partial x} = i_b - i_w \quad (9.6)$$

Deze DV voor de diepte (Q is hierin een gegeven constante) is de verhanglijnvergelijking van Bélanger (zie CTme2100) wanneer we daarin de invloed van de advectieve versnelling verwaarlozen ($Fr^2 \ll 1$), zoals hier a priori is gedaan.

Bij eenparige afstroming geldt $\partial d_s / \partial x = 0$ en $i_w = i_b$, en reduceert de uitdrukking voor het debiet tot

$$Q = Q_e = A_s \sqrt{gRi_b / c_f} \quad \text{en geldt} \quad U = U_e = \sqrt{gRi_b / c_f} \quad (= C \sqrt{Ri_b}) \quad (9.7)$$

Het subscript "e" duidt op eenparige stroom (zie ook verg. 2.11). Met substitutie hiervan is (9.6) te schrijven als

$$Q = \sqrt{\frac{gA_s^2 R}{c_f}} \sqrt{i_b - \frac{\partial d_s}{\partial x}} = Q_e \sqrt{1 - \frac{1}{i_b} \frac{\partial d_s}{\partial x}} \quad (9.8)$$

Bij zeer flauwe hoogwatergolven is de dieptegradiënt weliswaar niet nul maar toch klein t.o.v.

de bodemhelling, en is de beweging vrijwel eenparig. Die benadering wordt eerst uitgewerkt, in par. 9.3. Daarna gaan we in op de effecten van variaties in het verhang a.g.v. de dieptegradiënt (par. 9.4 en 9.5). Tenslotte geeft par. 9.6 een overzicht van verschijnselen en uitkomsten.

Voorafgaand aan de hierna te geven gedetailleerde analyses wijzen we op een essentiële relatie. Voor een (hoogwater)golf, lopend met snelheid $dx/dt = c_{HW}$, houdt de continuïteitsvergelijking (9.1) een verband in tussen variaties in debiet en waterstand (zoals we eerder al zagen), nl.

$$\delta Q = B c_{HW} \delta h \quad (9.9)$$

Om bij gegeven toeneming van het debiet de bijkomende peilvariaties te beperken (hoogwaterbestrijding!) is dus zowel een voldoende bergend vermogen nodig (grote B) als een voldoende grote waarde van de golfvoortplantingssnelheid, te bereiken (zoals we hierna zullen zien) door voldoende grote diepte en lage weerstand. Dit is onontkoombaar. Immers, het aankomend water dat niet stroomafwaarts kan worden afgevoerd (vanwege te lage c_{HW}) moet worden geborgen, en als dat niet zijdelings kan (door te geringe B) dan in de hoogte.

9.3 Quasi-eenparige benadering

Wanneer de invloed van de hoogwatergolf op het momentane verhang klein is t.o.v. het verhang bij eenparige stroom, ofwel t.o.v. de bodemhelling, dus wanneer

$$\left| \frac{\partial d}{\partial x} \right| \ll i_b \quad (9.10)$$

dan kunnen we bij benadering de invloed ervan in de bewegingsvergelijking verwaarlozen en het verhang van de waterspiegel vervangen door de bodemhelling. In die benadering geldt (9.7), die we hier herhalen voor het overzicht en omdat die juist hier van toepassing is:

$$Q = Q_e = A_s \sqrt{g R i_b / c_f} \quad \text{en} \quad U = U_e = \sqrt{g R i_b / c_f} \quad (= C \sqrt{R i_b}) \quad (9.11)$$

De beweging wordt in deze benadering op elk tijdstip beschreven als een (quasi-)eenparige toestand ($Q = Q_e$). Voor gegeven dwarsprofiel, c_f en i_b hangt Q daarin via de algebraïsche vergelijking (9.11) van het lokale waterpeil af, maar niet van de afgeleiden daarvan. We kunnen ook zeggen dat Q afhangt van de lokale diepte of van het oppervlak van het dwarsprofiel. Dit brengen we tot uiting in de continuïteitsvergelijking (9.1):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{waarin} \quad Q = Q_e(A) \quad (9.12)$$

Dit is te herschrijven tot

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{dQ_e}{dA} \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (9.13)$$

Het linkerlid hiervan heeft de gedaante van de totale of meebewegende afgeleide van A. De vergelijking laat zien dat punten van constante A (dus ook van constante diepte d_s en van constant debiet Q) in de hoogwatergolf bewegen met voortplantingssnelheid dQ_e/dA :

$$\frac{dA}{dt} = 0, \quad \frac{dd_s}{dt} = 0, \quad \frac{dQ}{dt} = 0, \quad \text{mits} \quad \frac{dx}{dt} = c_{HW} = \frac{dQ_e}{dA} = \frac{1}{B} \frac{dQ_e}{dh} \quad (9.14)$$

Deze snelheid c_{HW} is dus de voortplantingssnelheid van de hoogwatergolf. Deze is eenwaardig, en uitsluitend stroomafwaarts gericht. Het ontbreken van een tweede golfvoortplantingssnelheid is het gevolg van de verwaarlozing van de traagheid. Men spreekt hier van z.g. **kinematische golven**, zo genoemd omdat de dynamica daarin geen rol speelt.

Vergelijking (9.14) laat zien dat de waarde van de voortplantingssnelheid is te bepalen uit gemeten Q,h-krommen. Om een waarde ervan te berekenen substitueren we $A_s = B_s d_s$ en, als goede benadering voor brede, relatief ondiepe profielen, $R = d_s$ in (9.11):

$$Q_e = B_s d_s \sqrt{gd_s i_b / c_f} = B_s \sqrt{gi_b / c_f} d_s^{\frac{3}{2}} \quad \text{en} \quad U_e = \sqrt{gd_s i_b / c_f} \quad (9.15)$$

Wanneer we de variatie van B_s en c_f met de diepte verwaarlozen geeft dit

$$\frac{dQ_e}{dh} = \frac{dQ_e}{dd_s} = \frac{3}{2} B_s \sqrt{\frac{gi_b d_s}{c_f}} = \frac{3}{2} B_s U_e \quad (9.16)$$

waaruit volgt

$$c_{HW} = \frac{3}{2} \frac{B_s}{B} U_e \quad (9.17)$$

De voortplantingssnelheid van de hoogwatergolf volgens verg. (9.17) is van de orde van de stroomsnelheid, dus veel lager dan die van golven met significante traagheid. Voor $B_s < 2B/3$ geldt zelfs $c_{HW} < U$!

In vergelijking (9.15) varieert Q_e met $d_s^{3/2}$, aannemend dat c_f niet met de diepte varieert. In feite neemt de weerstandsfactor af met toenemende diepte (afnemende relatieve ruwheid). Wanneer we uitgaan van variatie van c_f met de diepte volgens Strickler of Manning ($c_f \sim d_s^{-1/3}$) varieert U_e evenredig met $d_s^{2/3}$ en Q_e met $d_s^{5/3}$. Uitwerking van (9.14) geeft dan

$$c_{HW} = \frac{5}{3} \frac{B_s}{B} U \quad (9.18)$$

In het algemeen kunnen we de voortplantingssnelheid van een hoogwatergolf schrijven als $c_{HW} = \alpha(B_s/B)U$ waarin de coëfficiënt α een waarde heeft van $3/2$ à $5/3$, ofwel ca. 1.6, afhankelijk van hoe in het model de weerstand varieert met de diepte.

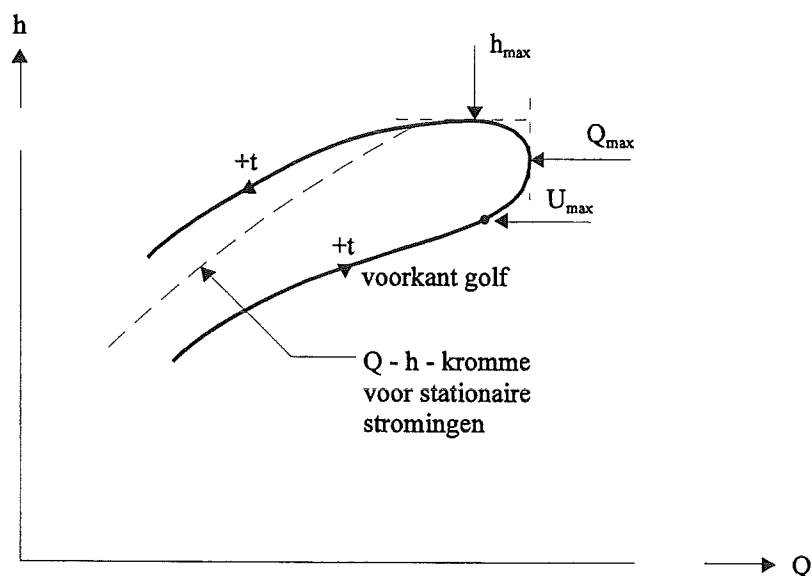
Het feit dat het in deze benadering mogelijk is punten van constante diepte te (blijven) volgen (zie 9.14), met een snelheid die slechts van de diepte afhangt, houdt o.m. in dat volgens dit model geen topvervlakking optreedt en de golf niet in lengte toeneemt. Daarentegen treedt wel vervorming op van de hoogwatergolf, omdat U en dus c_{HW} volgens (9.14) een toenemende functie is van de waterdiepte d_s . Van twee delen van de golf met verschillende hoogte zal in het hogere deel, met een grotere waterdiepte, een grotere waarde van c_{HW} heersen. Hogere delen van de hoogwatergolf planten zich dus sneller voort dan de lagere delen. Het front van de golf wordt daardoor steiler.

Na verloop van tijd zal volgens dit model het verhang in het front van de golf zo zijn toegenomen dat de verwaarlozing ervan t.o.v. het bodemverhang ($|\partial d_s / \partial x| \ll i_b$) niet meer op gaat. Het model is dan niet meer consistent omdat de consequenties ervan in strijd raken met een basisveronderstelling. In de volgende paragraaf gaan we de invloed van de variaties in het verhang (d.w.z. de invloed van de dieptegradiënt) kwalitatief na en in paragraaf 9.5 leiden we er een vereenvoudigd model voor af, het z.g. diffusiemodel.

9.4 Invloed van variabel verhang

Als gevolg van variaties in de diepte ($\partial d_s / \partial x \neq 0$) is de voorflank (stijgende tak) van een hoogwatergolf steiler (t.o.v. de horizontaal) dan de achterflank (dalende tak) (zie Figuur 9.2). Anders gezegd: in de voorflank is het verhang groter dan de bodemhelling en in de achterflank kleiner. Daarom is het debiet *bij een zelfde waterstand* groter tijdens opkomend water dan tijdens zakkend water. Dit verschijnsel heet **hysteresis**. De afvoer is dan niet meer uitsluitend een functie van de waterstand (voor een gegeven rivier en een gegeven dwarsprofiel). Dit blijkt ook uit z.g. **afvoerkrommen**, d.w.z. krommen die per lokatie langs de rivier een verband laten zien tussen afvoer en waterstand (Figuur 9.3).

Uit het voorgaande volgt ook dat de maximale afvoer in een hoogwatergolf eerder optreedt dan de hoogste waterstand (zie Figuur 9.3).



Figuur 9.4 Voorbeeld Q-h kromme met hysteresis

Door de hysteresis is het niet zonder meer mogelijk om uit metingen van de lokale waterstand betrouwbare schattingen te maken van de afvoer, tenzij bij vrijwel stationaire stromen. Bij niet-stationaire toestand kan men nog wel bij benadering een correctie berekenen uit de lokale peilregistratie. Om die correctie te berekenen gaan we weer uit van (9.8):

$$Q = Q_e \sqrt{1 - \frac{1}{i_b} \frac{\partial d_s}{\partial x}} \quad (9.19)$$

Door lokaal onvervormde voortplanting aan te nemen kan de dieptegradiënt $\partial d_s / \partial x$ worden geschat als $-(\partial d_s / \partial t) / c_{HW} = -(\partial h / \partial t) / c_{HW}$, waarmee verg. (9.19) overgaat in

$$Q = Q_e \sqrt{1 + \frac{1}{i_b} \frac{1}{c_{HW}} \frac{\partial h}{\partial t}} \quad (9.20)$$

Hierin is c_{HW} te schatten m.b.v. (9.17) of (9.18) en is Q_e de afvoer bij de gegeven diepte en eenparige afstroming. Vergelijking (9.20) wordt de formule van Jones genoemd (zie bv. Henderson, 1966). Het praktische voordeel daarvan is dat lokale metingen van het peil en de variatie daarvan in de tijd voldoende zijn voor de berekening van het debiet inclusief een correctie voor variatie van het verhang. Als voorbeeld maken we de volgende schattingen voor de Nederlandse Rijntakken:

Stel $U \approx 1$ m/s, $B_s / B \approx 2/3$, dan is volgens (9.17) $c_{HW} \approx 1$ m/s. Stel verder $i_b \approx 10^{-4}$ en $\partial h / \partial t \approx 0.5$ m/d dan volgt

$$\frac{\partial h / \partial t}{i_b c_{HW}} \approx \frac{0.5 \text{ m}}{24 \text{ uur}} \frac{1 \text{ uur}}{3600 \text{ s}} \frac{1}{10^{-4}} \frac{1}{1 \text{ m/s}} \approx 0.06$$

Hieruit volgt dat $Q \approx 1.03 Q_e$. De gegeven waarden zijn niet onrealistisch voor de Nederlandse Rijntakken. Daar is het hysteresisverschijnsel dus zwak en is de quasi-eenparige benadering bruikbaar. In minder "flauwe" omstandigheden gaat dit echter niet op. We gaan daarom nog even door met het nagaan van de invloed van de dieptegradiënt en het modelleren daarvan.

9.5 Diffusiemodel van hoogwatergolven

Een consequentie van de hystere in de $Q(t) - h(t)$ betrekking is **afvlakking** van de hoogwatergolven. Dit is gemakkelijk in te zien. Neem twee dwarsdoorsneden met dezelfde diepte, één ergens op de voorflank en één op de achterflank. Benedenstrooms (in de voorflank) is het verhang groter dan bovenstrooms van de top (zie schets lengteprofiel, Figuur 9.2). Daarom is het uitstromend debiet door de benedenstroomse doorsnede groter dan het instromend debiet door de bovenstroomse doorsnede (zie schets afvoerkromme, Figuur 9.3). Het volume water tussen deze twee doorsneden van gelijke diepte neemt dus af, wat afvlakking van de golf inhoudt.

Voor de modellering van dit proces nemen we (9.19) als uitgangspunt. Op grond van de veronderstelling dat $|\partial d_s / \partial x| \ll i_b$ is die te benaderen als

$$Q = Q_e \sqrt{1 - \frac{1}{i_b} \frac{\partial d_s}{\partial x}} \approx Q_e \left(1 - \frac{1}{2i_b} \frac{\partial d_s}{\partial x}\right) \quad (9.21)$$

De laatste term in het rechterlid geeft een gelineariseerde correctie op het debiet voor variaties in het verhang. Vanwege de kwadratische weerstand varieert het debiet bij evenwicht in principe met de vierkantswortel uit het verhang. Daardoor werkt een relatief kleine verandering in het verhang ($\partial d_s / \partial x$ t.o.v. i_b) maar half zo sterk door in de relatieve variatie van het debiet.

We zien aan (9.21) dat het volumetransport (het debiet) voor een deel (de laatste term) evenredig is met de gradiënt van de diepte, d.w.z. met de gradiënt van de berging van volume per eenheid van oppervlak. Dat is juist het karakter van **diffusief transport**. Een bekend voorbeeld van diffusie is de geleiding van warmte, ofwel warmtetransport van gebieden van hogere naar gebieden van lagere temperatuur, bij benadering evenredig aan de temperatuurgradiënt, waardoor ruimtelijke temperatuurverschillen afnemen. In Hoofdstuk 11 wordt op dergelijke processen uitvoeriger in gegaan.

Voor substitutie in de continuïteitsvergelijking (9.1) berekenen we uit (9.21)

$$\frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{B} \frac{dQ_e}{dd_s} \frac{\partial d_s}{\partial x} - \frac{Q_e}{2i_b B} \frac{\partial^2 d_s}{\partial x^2} \quad (9.22)$$

waarbij we in de differentiatie van de laatste term in (9.21) Q_e als constant benaderen (linearisering). De factoren voor de twee diepte-afgeleiden in het rechterlid van (9.22) zijn de eerder gedefinieerde voortplantingssnelheid c_{HW} (zie 9.14) en de z.g. **diffusiecoëfficiënt**, hier met K weergegeven:

$$K = \frac{Q_e}{2i_b B} \quad (9.23)$$

Substitutie hiervan in de continuïteitsvergelijking (9.1), waarin we bovendien $\partial h/\partial t$ vervangen door $\partial d_s/\partial t$, geeft

$$\frac{\partial d_s}{\partial t} + c_{HW} \frac{\partial d_s}{\partial x} - K \frac{\partial^2 d_s}{\partial x^2} = 0 \quad (9.24)$$

De combinatie van de eerste twee termen geeft de verplaatsing (advectie) weer van de watermassa, met snelheid c_{HW} , evenals in de quasi-eenparige benadering (9.14); de derde term voegt daar het effect van diffusie (afvlakken, uitsmeren) aan toe. Daarom heet dit type vergelijking de **advectie-diffusievergelijking**. Deze is van de eerste orde in t , heeft dus één beginvoorwaarde nodig, en van de tweede orde in x , en heeft dus twee randvoorwaarden nodig voor een goed gesteld probleem.

De diffusievergelijking is oorspronkelijk afgeleid voor warmtegeleidingsproblemen (zonder advectie), maar speelt in veel vakgebieden een belangrijke rol. Voor diverse begin- en randvoorwaarden zijn analytische oplossingen van de (advectie-)diffusievergelijking bekend. Eén daarvan wordt hier gepresenteerd, zonder afleiding. Het gaat meer om een illustratie van het karakter van de oplossing, en dus van de kwalitatieve invloed van de dieptegradiënt.

Omdat c_{HW} en K met d_s variëren is vergelijking (9.24) niet lineair. Voor de eenvoud volstaan we met een benadering van constante c_{HW} en K , waarvoor we de waarden nemen horend bij de evenwichtstoestand waarvan de beschouwde hoogwatergolf een (zwak veronderstelde) storing is. We kiezen het volgende geschematiseerde probleem als illustratie:

Beginvoorwaarde : op het tijdstip $t = 0$ wordt in een aanvankelijk uniforme stroming, met $U(x,0) = U_0$ en $d_s(x,0) = d_0$, op de plaats $x = 0$ over een geringe, verwaarloosbare lengte instantaan een hoeveelheid water toegevoegd met een volume gelijk aan V (dus een volume V/B per eenheid van breedte, wat de betekenis heeft van een toegevoegd oppervlak in het

lengteprofiel). Dit extra volume water vormt op $t = 0$ een in $x = 0$ geconcentreerde storing van de dan aanwezige eenparige stroming en komt na $t = 0$ tot afstroming. (Opmerking: bij een abrupte toevoeging (theoretisch zelfs instantaan) is aanvankelijk de benadering van een lage, lange golf niet geldig, maar daar zien we hier van af.)

Randvoorwaarden: voor alle t heerst op voldoende grote afstand van $x = 0$ de ongestoorde toestand, dus $d \rightarrow d_0$ en $U \rightarrow U_0$ voor $x \rightarrow \pm \infty$.

Oplossing

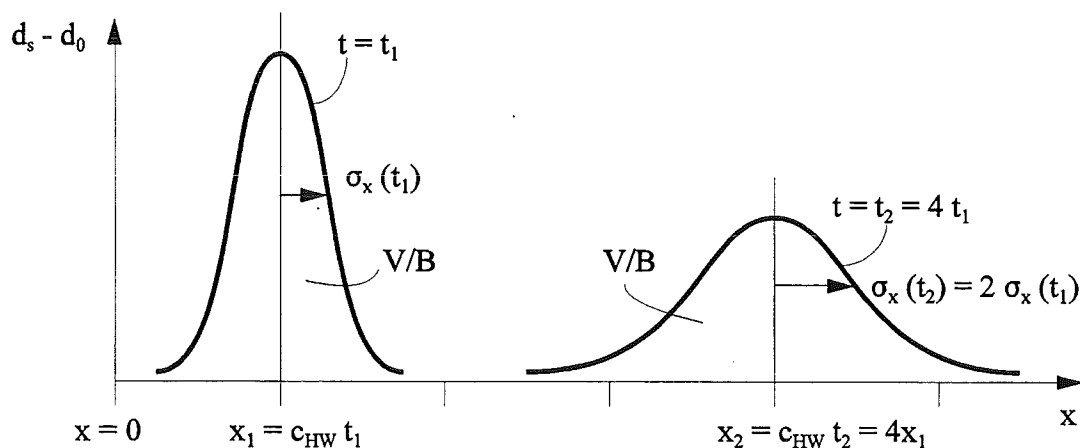
Zonder afleiding wordt hier de oplossing gegeven van verg. (9.24) met constante c_{HW} en K en met bovenstaande beginvoorwaarde en randvoorwaarden:

$$d_s(x,t) = d_0 + \frac{V/B}{\sqrt{2\pi} \sigma_x(t)} \exp \left[-\frac{(x - c_{HW}t)^2}{2\sigma_x^2(t)} \right] \quad (9.25)$$

waarin

$$\sigma_x(t) = \sqrt{2Kt} \quad (9.26)$$

Dat deze oplossing aan de DV voldoet kan worden aangetoond door terugsubstitutie. De oplossing is als functie van x voor twee tijdstippen $t = t_1$ en $t = t_2 = 4t_1$ geschetst in Figuur 9.4.



Figuur 9.4 Oplossing diffusiemodel bij geconcentreerde lozing in $x = 0$, $t = 0$

Als interpretatie worden de volgende opmerkingen gemaakt (zie Figuur 9.4):

- a. De ongestoorde waterdiepte is d_0 en de andere term in het rechterlid van (9.25) geeft de hoogwatergolf weer. Het lengteprofiel daarvan heeft op elk tijdstip de gedaante van een Gauss-kromme.
- b. De maximale verhoging op een zeker moment treedt op bij $x = c_{HW} t$ (de exp-functie is daar gelijk aan 1). De top van de beschouwde golf plant zich dus voort met snelheid c_{HW} die, zoals opgemerkt, van de orde van de stroomsnelheid is, in tegenstelling tot (de grotere) voortplantingssnelheid van golven waarin de traagheid essentieel is (dynamic wave). N.B. In de afleiding van de oplossing (9.25) is c_{HW} constant verondersteld; in feite neemt die toe met de stroomsnelheid en dus met de diepte.)
- c. De momentane maximumhoogte van de hoogwatergolf (als functie van x) neemt in de tijd af evenredig met $1/\sigma_x$, ofwel met $1/\sqrt{t}$. De golf vlakt dus af. (In Figuur 9.4 is $t_2 = 4t_1$, dus $\sigma_x(t_2) = 2\sigma_x(t_1)$.)
- d. Een maat voor de lengte van de hoogwatergolf (in het lengteprofiel, dus als functie van x op een willekeurig moment $t = \text{constant}$) is de "standaard-afwijking" σ_x van de Gaussfunctie (de afstand tussen de plaats van het maximum en die van de buigpunten in het profiel, zie Figuur 9.4). Deze neemt in de tijd toe evenredig met $\sqrt{t}$; de golf wordt dus steeds langer.
- e. Het totale volume water behorend bij de vergrote waterdiepte op een willekeurig moment is

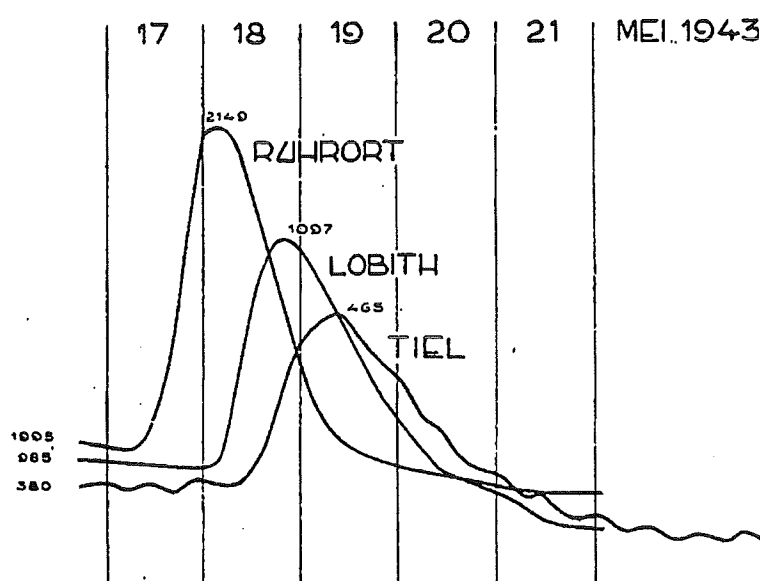
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp \left[-\frac{(x - c_{HW}t)^2}{2\sigma_x^2} \right] dx = V \quad (9.27)$$

(De integraal van $-\infty$ tot $+\infty$ over een Gauss(kansdichtheids)kromme is gelijk aan 1.) Dus het totale volume blijkt steeds gelijk te zijn aan het op $t = 0$ toegevoegde volume V . (Dit is een controle-berekening: het model was immers gebaseerd op volume-behoud; diffusie herverdeelt alleen maar, zonder iets toe te voegen of weg te nemen.) Wegens volumebehoud compenseert de toeneming van σ_x in de tijd (evenredig met $\sqrt{t}$) de topvervlakking (evenredig met $1/\sqrt{t}$).

- f. De waterstand gegeven door (9.25) verloopt in een vaste plaats ($x = \text{constant}$) met de tijd niet volgens een Gauss-kromme omdat tijdens de passage langs een vast punt de golf inzakt (σ_x neemt toe). Wanneer de achterflank het punt passeert is deze daardoor flauwer dan de voorflank was toen die hetzelfde punt passeerde. M.a.w.: het wassen van het water duurt korter dan het vallen.

Figuur 9.5 (bron: Wemelsfelder, De Ingenieur nr. 42, 1947, p. B103-B105) geeft drie peilregistraties van de Rijn/Waal die een hoogwatergolf tonen die het gevolg was van een

dambreuk (veroorzaakt door een geallieerd bombardement), waarna een waterhoeveelheid van ca. $110 \times 10^6 \text{ m}^3$ uit een reservoir in de Möhne (Ruhrgebied) in korte tijd de Rijn instroomde. De voortplanting, de topvervlakking, de verbreding van het profiel en de asymmetrie tussen stijgende en dalende tak zijn goed waar te nemen. Een kwantitatieve analyse van deze hoogwatergolf is gemaakt door Schönfeld (De Ingenieur nr. 4, 1948, p. B1-B17), die daar voor het eerst de diffusie-oplossing heeft gegeven. Daarbij bleek deze oplossing de waargenomen verschijnselen behoorlijk goed weer te geven, vooral de snelheid van de hoogwatergolf.



Figuur 9.5 Peilregistraties in de Rijn/Waal tijdens passage hoogwatergolf na doorbraak van de Möhne-dam (bron: Wemelsfelder, 1947)

Het hierboven gegeven model is niet bedoeld voor praktijktoepassingen, maar om inzicht te geven in de voortplanting en demping van hoogwatergolven. Belangrijke punten zijn:

- de relatief geringe voortplantingssnelheid (van de orde van de stroomsnelheid);
- de belangrijke invloed daarop van de verhouding van bergende tot stroomvoerende breedte (groter dan bij “traagheidsgolven”)
- afvlakking (verlaging top en verlenging bereik) evenredig met ongeveer $\sqrt{t}$;
- in een vaste doorsnede snellere stijging dan daling.

In werkelijkheid is de situatie gecompliceerder dan hier aangenomen, niet alleen m.b.t. de beginvoorwaarde, maar ook omdat B en B_s variëren met de waterstand, B vaak zeer sterk (denk aan overstromingen bij hoog water).

9.6 Discussie hoogwatergolven

We komen nu terug op enkele algemene aspecten van hoogwatergolven, te beginnen met afvoerkrommen en het verschijnsel van hysteresis daarin.

In de eenparige toestand is er voor elke rivier een eenwaardig verband tussen Q en h . Dit is met een stippellijn aangegeven in Figuur 9.3. We hebben gezien en verklaard dat in niet-eenparige stromen de afvoer voor een gegeven diepte bij wassend water groter is dan bij vallend water. Hoe langzamer de veranderingen zich voltrekken, hoe dichter de waarden bij die voor de eenparige afstroming terecht zullen komen.

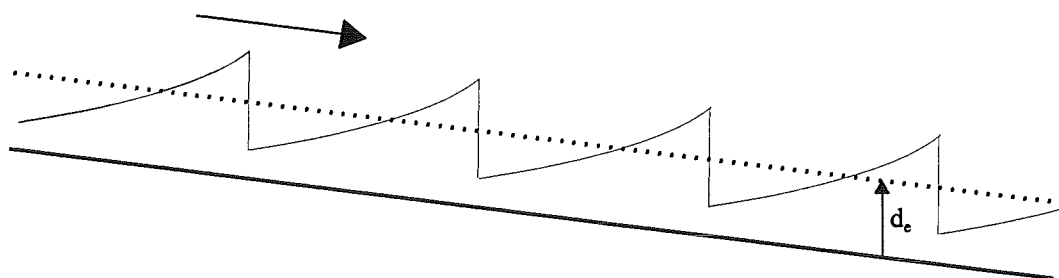
Men wil vaak een afvoer schatten door slechts de waterstand te meten (wat eenvoudig is) en dan gebruik te maken van eerder gemeten afvoerkrommen (die veel moeilijker te meten zijn). Dit geeft alleen een goede benadering als

- * er tijdens de meting van afvoeren geen duidelijke hoogwatergolven aanwezig zijn; en
- * de afvoerkromme alleen wordt gebruikt voor een stationaire stroming.

Een correctie op de bepaling van Q uit h bij niet-stationaire stroom is mogelijk via het in rekening brengen van $\partial h / \partial t$ (formule van Jones (9.20)).

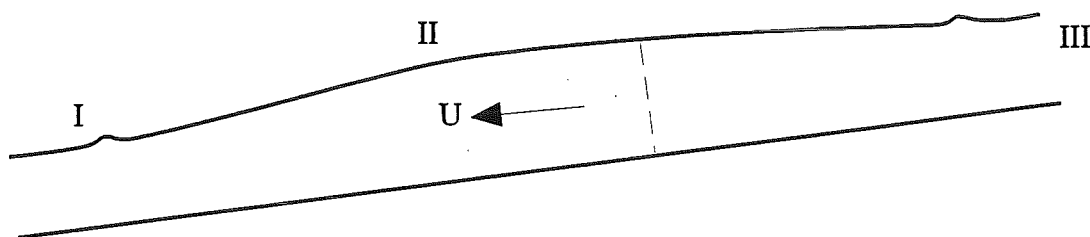
Tot slot wordt kort terugverwezen naar de in par. 9.1 genoemde mogelijkheid om met de algemene DVn te werken, dus inclusief de traagheidsterm. Dat stelsel heeft twee families van karakteristieken, overeenkomend met golfvoortplanting in twee richtingen, met snelheden $c = U \pm \sqrt{gA_s/B}$. Bij subkritische stromen zijn deze golfvoortplantingsrichtingen stroomafwaarts en stroomopwaarts. In tegenstelling tot deze z.g. "dynamic waves" heeft het door weerstand overheerste stelsel dat ontstaat bij verwaarlozing van de traagheid slechts één familie van karakteristieken, overeenkomend met de zich in één richting bewegende "kinematic wave", met een karakteristieke snelheid $c_{HW} = \alpha (B_s/B)U$ (waarin $\alpha = 3/2$ à $5/3$), die veel lager is dan die van de dynamic waves.

N.B. Als de voortplantingssnelheid van de "kinematic wave" tenminste gelijk is aan die van de stroomafwaartse "dynamic wave", ofwel als $\alpha(B_s/B)U \geq U + \sqrt{(gA_s/B)}$, dan is de stroming instabiel. Er ontstaan dan z.g. rolgolven, een reeks min of meer gelijkvormige storingen die zich stroomafwaarts verplaatsen. Elk daarvan bestaat uit een watersprong aan benedenstroomse zijde, overgaand in een min of meer geleidelijk verlopend deel met een stroomopwaarts dalende waterspiegel tot aan de watersprong waarmee de volgende, stroomopwaarts gesitueerde rolgolf begint (zie Figuur 9.6). Uit de hierbovengenoemde voorwaarde volgt dat dit verschijnsel zich alleen kan voordoen wanneer het getal van Froude van de evenwichtsstroming, $Fr = U/\sqrt{(gA_s/B)}$, minstens gelijk is aan $1/(\alpha B_s/B - 1)$. Als $B_s = B$ en $\alpha = 3/2$ is de minimumwaarde $Fr = 2$. Rolgolven komen daarom alleen voor in steile waterlopen (S-type verhanglijnen, zie CTme2100) omdat alleen daarin de evenwichtsstroming superkritisch is.



Figuur 9.6 Principeschets van rolgolven

De samenhang tussen de “dynamic waves” en de “kinematic wave” kan worden verduidelijkt aan de hand van Figuur 9.7, waarin schematisch drie gebieden zijn aangeduid:



Figuur 9.7 Principeschets hoogwater met storingen

I. Een zone stroomafwaarts van een hoogwatergolf. Lage storingen komen in dit gebied voor; wrijving is daar nog niet belangrijk. De voortplantingssnelheid is die van een “dynamic wave”. Deze snelle golven, de z.g. “forerunners”, lopen steeds verder voor de bulk van de hoogwatergolf uit, maar hun hoogte is onbetekenend. Praktisch zijn zij in de meeste gevallen van geen betekenis, maar in numerieke modellen wel omdat zij bepalen hoe snel informatie door het systeem loopt.

II. De bulk van de aan vervorming onderhevige hoogwatergolf, inclusief de top, met de relatief geringe voortplantingssnelheid c_{HW} .

III. Een zone stroomopwaarts van de hoogwatergolf. Hier zijn storingen te vinden die bij de hoogwatergolf behoren, maar die zich tegen de stroomsnelheid in hebben voortgeplant (stroomopwaartse “dynamic waves”). Deze zijn in de praktijk onbetekenend.

In Figuur 9.1 is in de registraties bij Lobith en Malburgen (zie B respectievelijk A) een

storing zichtbaar. Deze “knik” in het waterstandsverloop wordt veroorzaakt door het plotseling vollopen van de z.g. groene rivier nabij Arnhem (grote berging). De storing plant zich (o.m.) tegen de hoogwatergolf in voort, zoals blijkt uit de aanwezigheid ervan in Lobith. (Er zal zich vanuit Malburgen ook een translatiegolf voortplanten met de hoogwatergolf mee, maar die is in de registraties niet overtuigend zichtbaar.)

Tot slot wordt de opmerking herhaald dat in de natuur en in een algemeen model voor lange golven de onderscheiden verschijnselen gecombineerd kunnen voorkomen. Bij het analyseren en interpreteren van resultaten is het gewenst de verschillende invloeden te onderscheiden.

9.7 Vragen en opgaven

1. Maak een samenvatting van dit hoofdstuk.
2. Wat is het verschil tussen een z.g. dynamisch model en een kinematisch model voor (hoogwater)golven?
3. Wat verstaan we onder de z.g. quasi-statische benadering?
4. Wat is de voorwaarde voor de geldigheid van de quasi-statische benadering?
5. Maak voor enkele kenmerkende tijdstippen een globale schatting van $\partial h / \partial t$ op basis van de peilschaalregistraties in Figuur 3.4 of Figuur 9.1 van de handleiding.
6. Aannemende dat op elk ogenblik de stroming vrijwel eenparig is, bereken de globale waarden van de versnelling die overeenkomen met de uitkomsten van de vorige vraag en vergelijk deze met de verhangkracht per eenheid van massa (zie de termen in een versnellingsvergelijking). Interpreteer de uitkomst in het licht van vraag 4.
7. Hoewel de traagheid in hoogwatergolven veelal verwaarloosbaar is wordt deze in de praktijk in numerieke programma's vaak wel in rekening gebracht. Noem enkele (twee of drie) redenen hiervoor.
8. Wat verstaan we onder een z.g. quasi-eenparige benadering?
9. Noem een belangrijke consequentie van de quasi-eenparige benadering voor het wiskundig karakter van de vergelijkingen voor hoogwatergolven en voor de overeenkomstige fysica van de golfvoortplanting.
10. Ga op basis van de peilschaalregistraties in Fig. 3.4 of Fig. 9.1 na in hoeverre de quasi-eenparige benadering opgaat, zowel uit $\partial h / \partial t$ (via de formule van Jones) als via direct te meten vervallen tussen twee peilstations op verschillende tijdstippen.

11. Bewijs dat in de quasi-eenparige benadering van een hoogwatergolf (diepte-gradiënt verwaarloosd) theoretisch geen topvervlakking optreedt.
12. Bewijs dat er wel vervorming optreedt.
13. Verklaar waarom er theoretisch wel topvervlakking optreedt wanneer de diepte-gradiënt in rekening wordt gebracht (beweging nog wel als quasi-statisch benaderd).
14. Verklaar het hysteretisch karakter van afvoerkrommen bij passage van hoogwatergolven.
15. Onder welke voorwaarde is de voortplantingssnelheid van een hoogwatergolf lager dan de stroomsnelheid?
16. Door een dambreuk stroomt op een plaats $x = 0$ gedurende een te verwaarlozen tijdsduur (zeg op een tijdstip $t = 0$) een hoeveelheid van 10^6 m^3 water in een tot dan eenparig stromend riviertje met bodemhelling $i_b = 1.5 \times 10^{-4}$, weerstandsfactor $c_f = 5 \times 10^{-3}$, diepte $d = 3 \text{ m}$, stroomvoerende breedte B_s = bergende breedte $B = 50 \text{ m}$.
 - (a) Bereken de diffusiecoëfficiënt K voor de berekening van de hoogwatergolf (op basis van de ongestoorde toestand) (antw.: $K = 8.9 \times 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$).
 - (b) Bereken de maximale hoogte van de hoogwatergolf op het tijdstip $t = 5$ uur en de plaats hiervan (antw.: max. hoogte is 0.45 m , optredend in $x = \text{ca. } 25 \text{ km}$).
 - (c) Is de in vraag (b) bedoelde hoogte tevens de maximale hoogte in het betreffende punt, als functie van de tijd? (Antw. : nee)

10 Stroming bij kunstwerken

10.1 Inleiding

In voorgaande hoofdstukken is ingegaan op de voortplanting van diverse soorten lange golven in open waterlopen zonder obstructies. In dit hoofdstuk nemen we de stroming bij kunstwerken onder de loep.

De kunstwerken waar het hier om gaat komen voor in rivieren, irrigatiekanalen e.d., met een primaire **functie** van:

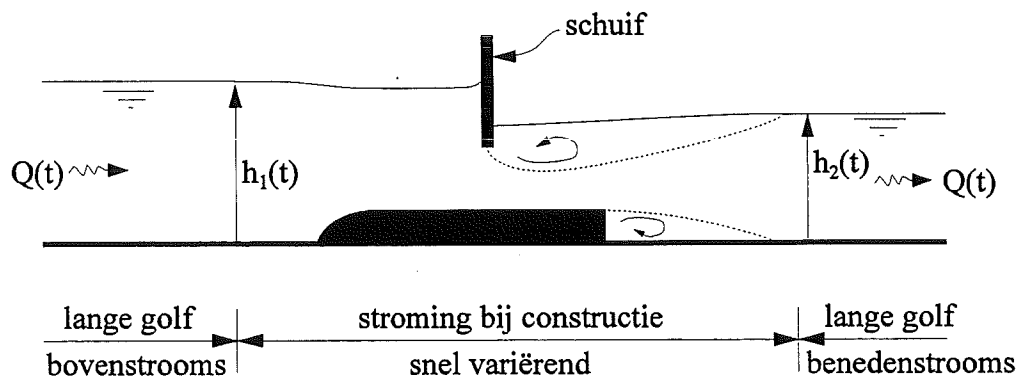
- **debietmeting** (bijv. meetstuwen in irrigatiekanalen) en/of
- **debietregeling** (inlaatwerken, verdeelwerken in irrigatiekanalen en rivieren) en/of
- **peilregeling** (stuwen in rivieren of irrigatiekanalen).

Zij vervullen een schakelfunctie tussen de rivier- of kanaaltrajecten aan weerszijden.

De stroming bij kunstwerken wordt gekenmerkt door **sterke ruimtelijke variaties**, nl. over de lengteschaal van het kunstwerk, dus over de lengteschaal van de diepte zelf. Vertikale snelheden en verticale versnellingen zijn daardoor belangrijk. De druk is niet hydrostatisch en de lange-golfvergelijkingen gaan daar niet op.

Aan weerszijden van het kunstwerk, vanaf een afstand van hooguit enkele keren de diepte, heerst de vrijwel parallelle, horizontale stroming die met de lange-golfbenadering is te beschrijven. Het kunstwerk bepaalt de aansluitvoorwaarden die ter plaatse gelden voor de (lange-golf)toestand in de trajecten aan weerszijden..

Het bovenstaande is geïllustreerd in Figuur 10.1 voor het geval van een onderspuier met vlakke schuif boven een drempel.



Figuur 10.1 Stroming bij onderspuier en in aanliggende trajecten

In dit hoofdstuk behandelen we enkele **stromingsaspecten** van deze typen kunstwerken, zowel het interne stromingsveld als de overall-relatie tussen debiet en waterstand(en). Het doel is het krijgen van inzicht en het kunnen berekenen van belangrijke stromings-eigenschappen. We gaan eerst na welke benaderingen bruikbaar zijn.

10.2 Benaderingen

De relatief korte lengteschaal van de lokale stroming bij een kunstwerk laat sterke vereenvoudigingen toe in de algemene vergelijkingen voor de waterbeweging, ongeveer zoals we in Hoofdstuk 7 hebben gebruikt.

De **berging is verwaarloosbaar** in het korte traject waarvan hier sprake is. Op elk moment kan het debiet daarom als ruimtelijk constant worden benaderd ($\partial Q/\partial s = 0$). (Zie Hoofdstuk 7, waar deze benadering voor een prismatische leiding overging in $\partial U/\partial s = 0$, de z.g. starre-kolombenadering.)

Vanwege het korte traject is dynamisch gezien sprake van relatief snelle variaties in de ruimte. In de bewegingsvergelijkingen (nu niet alleen die in de stroomrichting!) wordt als gevolg daarvan van de **lokale versnelling** ($\partial \bar{u}/\partial t$) **verwaarloosbaar** t.o.v. de advectione (evenals in de korte verbindingen uit Hoofdstuk 7). Een criterium daarvoor is als volgt te formuleren.

Laat L een kenmerkende lengteschaal zijn van het kunstwerk (die zal in grootte-orde gelijk zijn aan de diepte), T de tijdschaal van de variaties van de toestand in de tijd (b.v. de getijperiode), en U een kenmerkende stroomsnelheid. De tijd die een deeltje nodig heeft om het kunstwerk te passeren is dan van de grootte-orde L/U . Als dit klein is t.o.v. T , ofwel wanneer de externe toestand voldoende langzaam varieert in de tijd, is de stroming in/door het kunstwerk als vrijwel stationair te beschouwen. Hiervoor moet dus gelden $L \ll UT$. De lokale versnellingen ($\partial u/\partial t \sim U/T$) zijn dan verwaarloosbaar t.o.v. de advectione ($u\partial u/\partial s$ en $u\partial u/\partial n$, beide $\sim U^2/L$). In dit hoofdstuk gaan we dit als uitgangspunt hanteren.

Door de **verwaarlozing van berging en lokale traagheid** verdwijnt de tijd uit de vergelijkingen. Beginvoorwaarden zijn niet nodig. De beweging is als het ware zonder geheugen, en op elk moment geheel aangepast aan de op dat moment geldende randvoorwaarden. We noemen deze benadering **quasi-stationair**. Met andere woorden: ook al zijn de waterstanden en stromen bovenstrooms en benedenstrooms van het kunstwerk niet stationair, als hun tijdsvariatie langzaam genoeg is kunnen we toch de stroming bij het kunstwerk op elk moment behandelen alsof deze stationair is, bepaald door de momentane randvoorwaarden, met de daarvoor bekende methoden (zie CTme2100).

Het relatief kort zijn van de afstanden waarover de hier te behandelen snelheidsvariaties zich voordoen impliceert ook dat de **wandweerstand verwaarloosbaar** is. Bij vertragende stromen kunnen er natuurlijk wel significante (interne) **vertragsingsverliezen** optreden. Deze zijn belangrijk voor de relatie tussen debiet en waterstand.

10.3 Stroombeelden

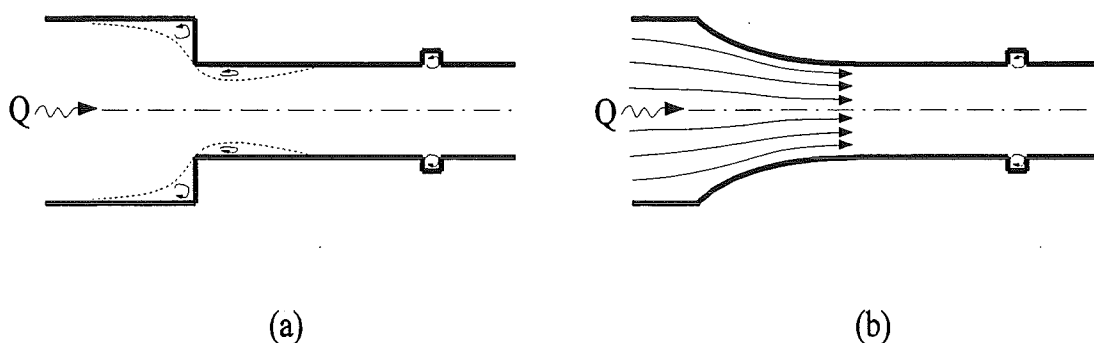
Meet-en regelwerken veroorzaken alle een lokale **beperking van het doorstroomprofiel**.

Daardoor is de strooming in het algemeen in drie hoofdzones te onderscheiden:

- instroomgedeelte aan bovenstroomse zijde, met **versnellende stroom**
- minimum doorsnede, de z.g. **keel** met lokaal **maximale snelheden**
- uitstroomgedeelte aan benedenstroomse zijde, met **vertragende stroom**

Dit onderscheid is belangrijk omdat uit ervaring bekend is dat versnellende stromen en vertragende stromen zich heel verschillend gedragen.

De **instroom** is overwegend versnellend. Toch kunnen er op kleinere schaal daarbinnen nog wel vertragsingsverliezen optreden, nl. ter plaatse van abrupte profielvernauwingen, sponningen e.d. Bij hoekige profielveranderingen of afrondingen met te kleine straal treden loslating en contractie op gevolgd door lokale vertraging (Figuur 10.2a). Dat geeft wervelvorming en daarmee gepaard gaande onrustige strooming en energieverliezen. Om dit te voorkomen kunnen profielvernauwingen afgerond worden zodanig dat de stroom blijft aanliggen (Figuur 10.2b). Afhankelijk van de ontwerpeisen kan men de hogere kosten hiervan al dan niet accepteren. (Als er voldoende verval beschikbaar is hoeft daar niet zuinig mee te worden omgegaan.)



Figuur 10.2 Invloed van (gebrek aan) stroomlijning op instroom

Voorbij de nauwste doorsnede, waar de snelheden maximaal zijn, ligt het traject van de vertragende **uitstroom**. Het debiet moet daar in verticale en/of horizontale zin worden gespreid, afhankelijk van de insnoering, totdat het volle profiel van de benedenstroomse waterloop weer wordt benut en de snelheden zijn teruggebracht tot waarden die acceptabel zijn uit het oogpunt van scheepvaart en erosie van bodem en oevers. In dit traject treden vertragsingsverliezen op.

Het stroombeeld aan uitstroomzijde varieert sterk met de vormgeving en met de waterstanden. Dit wordt in Figuur 10.3 geïllustreerd aan de hand van een scherpe overlaat (vaak als meetstuw gebruikt) en een onderspuier met vlakke schuif. In de Figuren a en c is de afvoer gestuwd: de stroom is overal subkritisch; de benedenwaterstand heeft invloed op de strooming bovenstrooms. Figuren b en d zijn voor de tegengestelde situatie van vrije of ongestuwde of volkomen afvoer, waarbij de benedenwaterstand zo laag is dat deze geen invloed bovenstrooms uitoefent.

In de figuren a, b en c is ergens een hoge-snelheidsstraal die in een dikkere laag van lage-snelheidswater schiet. Op de overgang tussen beide ontstaan wervels die menging tussen beide lagen tot gevolg hebben, waardoor de snelle laag wordt vertraagd en dus in dikte toeneemt (spreiding van het debiet over een grotere doorsnede) terwijl de langzame laag geleidelijk aan impuls van de snelle onderlaag overneemt, tot de snelheidsverschillen vrijwel zijn genivelleerd (lukt niet helemaal, vanwege de bodemwrijving). Dergelijke overgangszones noemt men **menglagen**. Zij zijn een belangrijke bron van turbulentie.

Wanneer de strooming overal subkritisch is en men uitloopverliezen zoveel mogelijk wil beperken kan dit gebeuren door geleidelijke profielverwijding, via een z.g. **diffusor**, hetzij in het verticale vlak (via een hellende bodem(plaat)) of in het horizontale vlak. Een eenvoudige variant van laatstgenoemde is te vinden in de spitse achterzijden van pijlers tussen schuiven van een in- of uitlaatwerk. Voor maximaal effect moet de strooming blijven aanliggen. De wanden van de diffusor mogen dan niet sterker divergeren t.o.v. de richting van de aankomende strooming dan ca. 1:7 (daarbij is het verlies ca. 15% van het verlies bij abrupte verwijding). Dat maakt het kunstwerk lang en kostbaar. Een divergentiehoek van ca. 1:4 brengt de uitloopverliezen al terug tot zo'n 30% van de waarde bij abrupte verwijding en kan daarmee een redelijk compromis zijn. Korte afrondingen, die aan bovenstroomse zijde effectief zijn, hebben aan benedenstroomse zijde geen zin, althans niet voor reductie van vertragsingsverlies.

10.4 Debiet-waterstandrelaties

De benadering van quasi-stationaire beweging (zie par. 10.2) houdt in dat het debiet door het kunstwerk afhangt van de momentane waterstanden via de z.g. **debiet-waterstandrelatie**:

$$Q(t) = f[h_1(t), h_2(t), \text{geometrie}(t)] \quad (10.1)$$

Hierin is Q het debiet, zijn h_1 en h_2 de waterstanden aan weerszijden van het kunstwerk, waar de strooming weer (vrijwel) parallel is (zie Figuur 10.1), en duidt "geometrie" op de vorm en afmetingen van het kunstwerk en van de momentane doorstroombrofielen. Bij regelwerken zijn deze in te stellen en daarmee tijdsafhankelijk.

Debiet-waterstandsrelaties hebben een theoretische grondslag, nl. toepassing van de vergelijking van Bernoulli over het versnellingstraject en van de impulsbalans over het vertragingstraject. Maar er is altijd sprake van onbekende waarden of invloeden van:

- bodemweerstand bovenstrooms (aankomende stroming niet met uniforme energie)
- wandweerstand van het kunstwerk
- contractiecoëfficiënten
- coëfficiënten voor vertragsingsverliezen

Daarom moeten de waarden van evenredigheidscoëfficiënten door ijking worden vastgesteld. Bovendien worden in de theoretische betrekkingen uiteindelijk vaak extra benaderingen gebruikt die het gebruik vergemakkelijken (b.v. bovenstrooms energieniveau vervangen door niveau van de waterspiegel, dat direct meetbaar is), wat ook correcties vereist.

Voor grote aantallen kunstwerken en stromingstypen zijn gebruiksformules met definities van coëfficiënten en ijkwaarden in handboeken verzameld. (N.B. Men kan werken met een groot aantal coëfficiënten, elk voor een specifiek deelaspect, maar vaak worden ze samengenomen in één waarde. Let per geval op de definitie horend bij de opgegeven ijkwaarde!)

Voor **vrije afstroming** over lange overlaten is met Bernoulli de volgende relatie tussen debiet p.e.v. breedte (q) en bovenstroomse energiehoopte boven de kruin (E_k) af te leiden (me2100):

$$q = d_g \sqrt{g d_g} = \frac{2}{3} E_k \sqrt{\frac{2}{3} g E_k} \quad (10.2)$$

Hierin is d_g de grensdiepte ("critical depth") in een parallelstroming met vrij oppervlak, gelijk aan $(2/3)E_k$. In feite moet het rechterlid nog met een correctiefactor worden vermenigvuldigd, zeg m , om voor fouten in de theorie (bijv. geen wrijvingsloosheid) te compenseren. Een (gemakshalve) vervanging van E_k door h_k , het bovenstroomse waterpeil boven de kruin, houdt een verwaarlozing in van de snelheidshoogte bovenstrooms, en kan gecompenseerd worden via een andere vermenigvuldigingsfactor, zeg m' . Wanneer men bovendien de formule toepast op een korte overlaat dan moet ook nog eens voor effecten van kromming van de stroomlijnen worden gecorrigeerd, bijv. via een factor m'' (zoals die van Rehbock, zie CTme2100). Tenslotte moet q over de breedte worden geïntegreerd om Q te krijgen, wat wordt vervangen door vermenigvuldiging van q met de breedte B (lengte in dwarsrichting van de kruin). Om invloeden van zijdelingse variaties en zijdelingse contractie in rekening te brengen is dan weer een correctie nodig, zodat uiteindelijk ontstaat

$$Q = m''' \frac{2}{3} B h_k \sqrt{\frac{2}{3} g h_k} \quad (10.3)$$

wat in handboeken voor praktijkgebruik vaak nog verder wordt gereduceerd tot

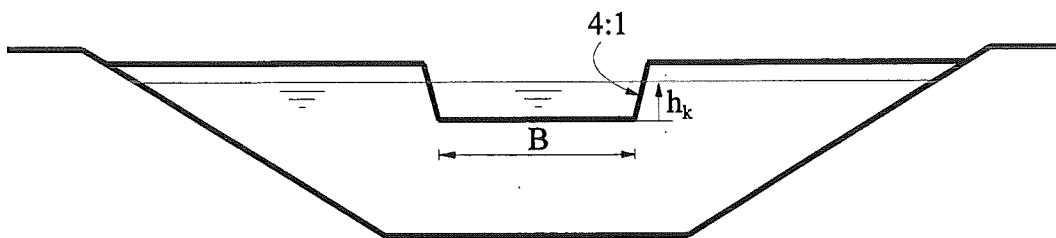
$$Q = M B (h_k)^{3/2} \quad (10.4)$$

waarin M niet alleen m''' bevat maar ook de factor $(2/3)^{3/2} g^{1/2} = 0.54..g^{1/2}$ (dit is ca. $1.70 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$)

en dus dimensiedragend is, en daarmee afhangt van het gebruikte eenhedenstelsel (desondanks wordt de eenheid vaak weggelaten).

De z.g. “afvoercoëfficiënt” m''' bevat alle genoemde effecten. Hij kan bij gegeven geometrie na ijking worden bepaald als functie van de waterstand, bijv. via h_k/a , waarin a de hoogte is van de kruin boven het bovenstrooms bodemniveau. (N.B. Ook B kan met h_k variëren.)

In stuwen met een rechthoekig doorstroomprofiel dat smaller is dan het bovenstroomse neemt de zijdelingse contractie toe met de waterstand. In de Cipoletti meetstuw, een scherpe overlaat, wordt dit gecompenseerd via een trapeziumvormig doorstroomprofiel boven de kruin met naar buiten hellende zijden onder een hoek van 1:4 met de vertikaal (Figuur 10.4), waardoor bij vaste B de effectieve waarde van m''' in (10.3) vrijwel onafhankelijk wordt van de waterstand, met een waarde van ca. 1.09 (wanneer voor B de breedte van de kruin wordt genomen, niet die van de waterspiegel daarboven). De factor M in (10.4) wordt daarmee gelijk aan ca. $0.59 \text{ g}^{1/2}$ ofwel ca. $1.86 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$.



Figuur 10.4 Cipoletti meetstuw: aanzicht in dwarsprofiel

Voor **gestuwde afvoer** (overal subkritische strooming) is ook de benedenwaterstand van invloed, zie (10.1). Men kiest dan een plaats bovenstrooms van het kunstwerk en een plaats benedenstrooms ervan of erin, waar de waterstanden, zeg h_1 en h_2 , gemeten kunnen worden en geschikt zijn voor de bepaling van het debiet. Het debiet wordt daarin uitgedrukt via toepassing van Bernoulli in het versnellingsgebied (tot aan de keel) en eventueel ook (wanneer h_2 de benedenstroomse waterstand is) de impulsbalans in het vertragsingsgebied. Vaak worden nog enkele extra benaderingen toegepast, meestal beperkt tot zwakke stromen (lage getallen van Froude). Met een te ijken afvoercoëfficiënt m kan het debiet dan worden geschreven in een generieke vorm als

$$Q = mBd\sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (10.5)$$

Hierin zijn B en d de nominale breedte (in dwarsrichting) en hoogte van het doorstroom-

profiel in een gedefinieerde keeldoorsnede, die beide op een bekende manier van h_1 en/of h_2 kunnen afhangen. Bij een meetstuw zal men voor nauwkeurige debietmeting h_2 willen meten (ongeveer) in de keel, omdat dan het te meten verval maximaal is. In dat geval kan men d gelijkstellen aan de hoogte van het gemeten peil h_2 boven de kruin. Voor een onderspuier kan men voor d de hoogte van de doorstroomopening onder de schuif nemen (waarbij het effect van eventuele contractie in de afvoercoëfficiënt wordt verwerkt, mits zo geijkt!). In alle gevallen moeten de te gebruiken kunstwerken gelijkvormig zijn aan die waarvoor de ijking is uitgevoerd, en moeten de peilschalen ook op overeenkomstige plaatsen zijn aangebracht, om schaal- en modeffecten te voorkomen.

Hierboven zijn enkele expliciete varianten gegeven van de meer algemeen geldende debiet-waterstandrelatie (10.1). Ongeacht of deze vereenvoudigde relaties gelden of niet, altijd kan er bij een gegeven kunstwerktype een relatie als (10.1) worden bepaald, gemengd theoretisch/empirisch. Deze dient als aansluitvoorwaarde in de berekeningen van de waterbewegingen in de lange trajecten aan weerszijden van het kunstwerk.

10.5 Verdeling van snelheid en druk

10.5.1 Inleiding

Als laatste gaan we in op de interne verdeling van snelheid en druk in de bewegende vloeistof. Dit kan zowel van belang zijn voor de berekening van het debiet, nl. wanneer er voor dat doel geen geschikte doorgangen zijn met rechte stroomlijnen, als voor de berekening van de druk die het stromende water uitoefent op het kunstwerk, wat met name voor de bewegende delen daarvan van belang is, zoals schuiven.

Door toepassing van de impulsbalans op een gebied dat het kunstwerk in zijn geheel omvat (of een geschikt deel daarvan) kan de totale horizontale kracht op het kunstwerk (of op een element daarvan) worden berekend (zie CTme2100). Maar hoe zit het met de lokale drukken?

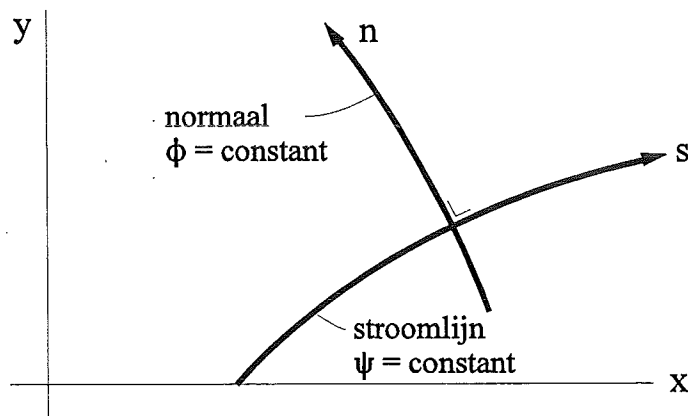
Om de gedachten te bepalen nemen we als voorbeeld de vlakke verticale schuif van een onderspuier met gestuwde afvoer (Figuur 10.3c).

Aan benedenstroomse zijde is alleen het water van de dekneer in aanraking met de schuif. In neren is de druk vrijwel hydrostatisch. Zowel de drukverdeling als de totale belasting (kracht en moment) op de achterzijde van de schuif zijn bij gegeven benedenwaterstand dan probleemloos te berekenen. Dit geldt voor allerlei kunstwerktypes met loslating aan benedenstroomse zijde van de schuif.

Aan bovenstroomse zijde gaat het voorgaande niet op. Het langsstromende water versnelt en daarom zal de druk niet hydrostatisch zijn. De drukverdeling kan met Bernoulli worden bepaald als we de snelheidsverdeling kennen. Daarvoor gebruiken we een grafische methode, ontwikkeld op een nogal theoretische, enigszins formele basis die we eerst behandelen.

De methode gaat uit van een twee-dimensionale stroming van **uniforme energie** (zoals de stroming uit een reservoir met stilstaand water) van een **wrijvingsloze vloeistof**. In een kort versnellingstraject speelt interne wrijving geen rol van betekenis en kan de vloeistof wel als wrijvingsloos worden benaderd. Vanwege de bodemweerstand bovenstrooms zal de energie in feite niet uniform zijn (deeltjes dicht bij de bodem bewegen langzamer dan die meer naar het oppervlak, bij hetzelfde piëzometrisch niveau), maar het effect daarvan op de stroombelasting blijkt niet groot te zijn, zodat we de theorie voor uniforme energie(hoogte) toch kunnen hanteren.

De theorie geldt voor twee-dimensionale (2D) stromen, zoals in een vertikaal vlak haaks op een lange schuif. Om dit te benadrukken gebruiken we een Cartesisch x,y-assenstelsel (bijv. x-as horizontaal, in de gemiddelde stroomrichting en y-as vertikaal, in plaats van de z-as) en daarnaast de natuurlijke coördinaten s,n in de richting van de stroom respectievelijk haaks daarop, langs de normaal (Figuur 10.5).



Figuur 10.5 Assenstelsels in twee-dimensionale stroom

In een Appendix aan dit hoofdstuk staan volledige afleidingen. Hier geven we slechts de belangrijkste uitkomsten met een toelichting, gevolgd door een voorbeeld van toepassingen.

10.5.2 Continuïteitsvergelijking en stroomfunctie

Onder de veronderstelling van een **onsamendrukbare vloeistof** is er volumebehoud, wat voor een 2D-stroming met snelheidscomponenten u_x en u_y inhoudt (zie Appendix):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (10.6)$$

Het linkerlid is de z.g. **divergentie** van de snelheid in het x,y-vlak; deze moet blijkbaar gelijk

zijn aan nul.

Uitdrukkingen zoals $\partial u_x / \partial x$ stellen de **reksnelheid** voor, d.w.z. de relatieve lengtevergroting per eenheid van tijd. Vanwege onsamendrukbaarheid moet rek in één richting (bijv. $\partial u_x / \partial x$, als dit positief is) worden gecompenseerd door compressie in de andere richting (of richtingen, in 3D-stromen), zoals wordt uitgedrukt in verg. (10.6).

Voor 2D-bewegingen kan aan de voorwaarde van onsamendrukbaarheid (wiskundig: divergentievrijheid) worden voldaan door de invoering van een z.g. **stroomfunctie** $\psi(x,y)$, zodanig gedefinieerd dat

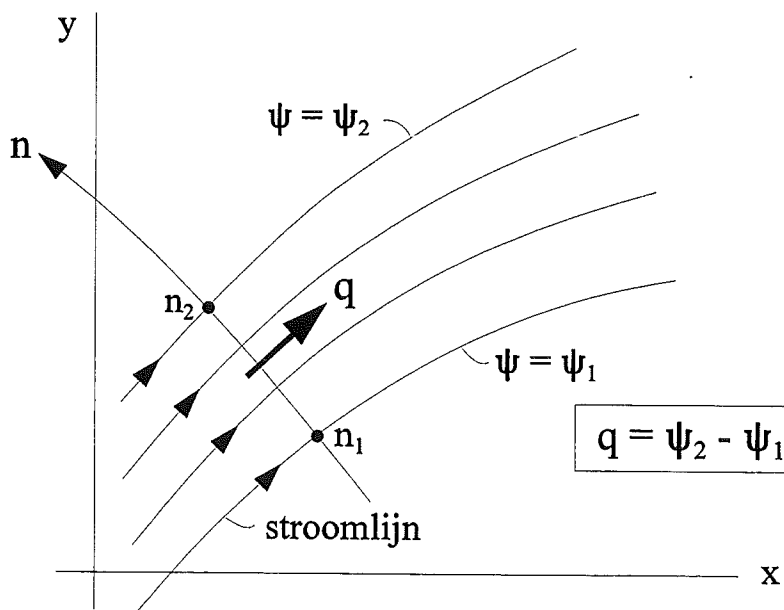
$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{en} \quad u_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.7)$$

Hiermee wordt identiek aan (10.6) voldaan, zoals door substitutie van (10.7) onmiddellijk is te zien. (Een dergelijke stroomfunctie bestaat niet in een driedimensionale stroom.)

Wanneer we niet x,y-coördinaten gebruiken maar het s,n-stelsel krijgen we i.p.v. (10.7):

$$u_s = \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad \text{en} \quad u_n = - \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (10.8)$$

Omdat $u_n = 0$, per definitie, geldt $\partial \psi / \partial s = 0$, dus: **de waarde van de stroomfunctie is constant langs stroomlijnen** (Figuur 10.5, 10.6).



Figuur 10.6 Stroomstrook met debiet $q = \psi_2 - \psi_1$

Voor het debiet p.e.v. breedte (q) tussen twee stroomlijnen 1 en 2, waarlangs $\psi = \psi_1$ respectievelijk $\psi = \psi_2$ (zie Figuur 10.6), geldt

$$q = \int_{n_1}^{n_2} u_s \, dn = \int_{n_1}^{n_2} \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dn = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (10.9)$$

Met andere woorden: het verschil in waarden van ψ horend bij twee stroomlijnen is juist gelijk aan het debiet (per eenheid van breedte!) dat tussen die stroomlijnen wordt afgevoerd (Figuur 10.6). Daarom heet ψ "stroomfunctie".

10.5.3 Snelheidspotentiaal

Naast rek kan er ook **draaiing** of **rotatie** van vloeistofdeeltjes optreden. In stationaire stromen met uniforme energie is de rotatie echter gelijk aan nul (zie Appendix voor het bewijs). Toelichting: bewegingen met uniforme energie kunnen gedacht worden te zijn ontstaan uit een rusttoestand, zoals in een reservoir. Daar is de rotatie nul. Zolang er op de deeltjes geen koppel werkt, bijv. door interne wrijving, zal de rotatie nul blijven ook wanneer de deeltjes inmiddels wel bewegen (transleren, niet roteren).

Als de rotatie overal gelijk is aan nul spreken we van een **rotatievrije stroming**. Het belang van deze eigenschap is het volgende: **in een rotatievrije stroom is de snelheid af te leiden van een snelheidspotentiaal** (zoals een conservatieve kracht is af te leiden van een krachtpotentiaal; deze voorwaarden en relaties zijn wiskundig analoog). Formeel is de snelheid de gradiënt van de potentiaal, zeg $\phi = \phi(x,y)$:

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad (10.10)$$

ofwel

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (10.11)$$

Wanneer we niet x,y -coördinaten gebruiken maar het s,n -stelsel krijgen we i.p.v. (10.11):

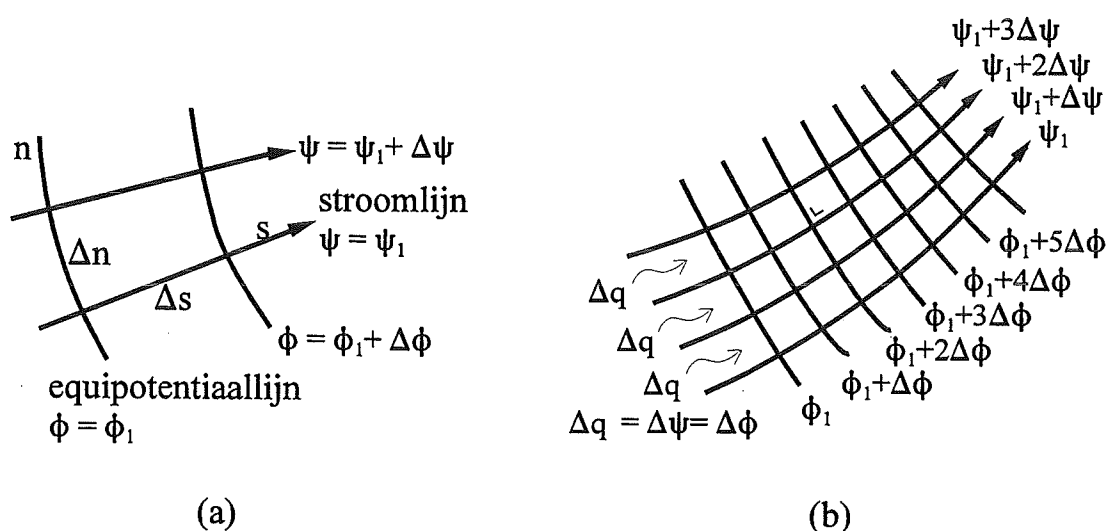
$$u_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad \text{en} \quad u_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (10.12)$$

Omdat $u_n = 0$, per definitie, geldt $\partial \phi / \partial n = 0$, dus: **de waarde van de potentiaal is constant langs de normaal op de stroomlijnen** (Figuur 10.5). De normalen op de stroomlijnen zijn dus **equipotentiaallijnen**. (Dit volgt ook direct uit het gegeven dat de snelheid de gradiënt is van de potentiaal.)

10.5.4 Vierkantennet

We hebben gezien dat stroomlijnen lijnen zijn van constante ψ en de normalen daarop lijnen van constante ϕ . Lijnen van constante ψ en lijnen van constante ϕ snijden elkaar dus onder een rechte hoek. Zij vormen een **orthogonaal stelsel**.

Twee stroomlijnen, op afstand Δn van elkaar, en twee equipotentiaallijnen, op afstand Δs van elkaar, sluiten een vierhoekig gebiedje in met (in het algemeen) kromme zijden maar rechte hoeken (Figuur 10.7a). In de limiet voor $\Delta s \rightarrow 0$ en $\Delta n \rightarrow 0$ heeft het de vorm van een rechthoek.



Figuur 10.7

Laat $\Delta\psi$ het verschil zijn tussen de stroomfunctiewaarden horend bij de twee stroomlijnen, en $\Delta\phi$ het verschil tussen de potentiaalwaarden horend bij de twee equipotentiaallijnen. Dan geldt

$$u_s = \frac{\partial\phi}{\partial s} \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \quad \text{en} \quad u_n = \frac{\partial\psi}{\partial n} \approx \frac{\Delta\psi}{\Delta n} \quad (10.13)$$

zodat $\Delta\phi/\Delta s = \Delta\psi/\Delta n$ of, anders geschreven:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} = \frac{\Delta s}{\Delta n} \quad (10.14)$$

Kies nu een reeks stroomlijnen met voor alle paren van opeenvolgende stroomlijnen dezelfde

$\Delta\psi (= \Delta q)$, en een reeks equipotentiaallijnen met voor alle paren dezelfde $\Delta\phi$. Alle rechthoekige deelgebiedjes hebben dan $\Delta\psi$ en $\Delta\phi$ gemeenschappelijk, en dus ook de verhouding $\Delta s/\Delta n$. Zij zijn dan **gelijkvormig** (in de limiet $\Delta s \rightarrow 0$ en $\Delta n \rightarrow 0$). Kiezen we bovendien $\Delta\phi = \Delta\psi (= \Delta q)$ dan geldt voor elk vierhoekig gebiedje $\Delta s = \Delta n$, en sluit het stelsel lijnen vierkantjes in: het vormt een z.g. **vierkantennet** (Figuur 10.7b). Omgekeerd: als we de afmetingen kiezen zodanig dat voor elk vierhoekig deelgebiedje geldt $\Delta s = \Delta n$, m.a.w. als we vierkantjes vormen met een netwerk van stroomlijnen en equipotentiaallijnen, dan geldt ook $\Delta\phi = \Delta\psi (= \Delta q)$, met eenzelfde waarde voor alle vierkantjes. Dit is de basis voor de toepassing van het vierkantennet.

Een vierkantennet kan proberenderwijs (met potlood en gom) grafisch worden geconstrueerd in elk gegeven gebied waarvan de rand op een bekende manier deels uit stroomlijnen bestaat en deels uit equipotentiaallijnen. Als extra controle kan gebruik worden gemaakt van de eigenschap dat de diagonalen van de vierkantjes eveneens een vierkantennet moeten vormen.

Het debiet tussen twee stroomlijnen is constant, zodat de snelheid omgekeerd evenredig is aan de afstand tussen twee (dichtbij elkaar gelegen) stroomlijnen ($u_s = \Delta q/\Delta n = \Delta\psi/\Delta n$). Voor de berekening van de drukverdeling langs de schuif (of van de druk in welk ander punt van de strooming dan ook) gaan we er van uit dat er één punt is waar de snelheid gegeven is of te berekenen uit de randvoorwaarden. Dan kan de snelheid in andere punten worden berekend uit de lengten Δs en Δn die in de figuur zijn te meten en is ook de snelheidshoogte ($u^2/2g$) bekend van punt tot punt. Uit het gegeven van uniforme energiehoopte ($H = \text{constant}$ en gegeven) kan dan de lokale hoogte van het piëzometrisch niveau worden bepaald ($h = H - u^2/2g$) en vervolgens de druk ($p = \rho g(h - z)$).

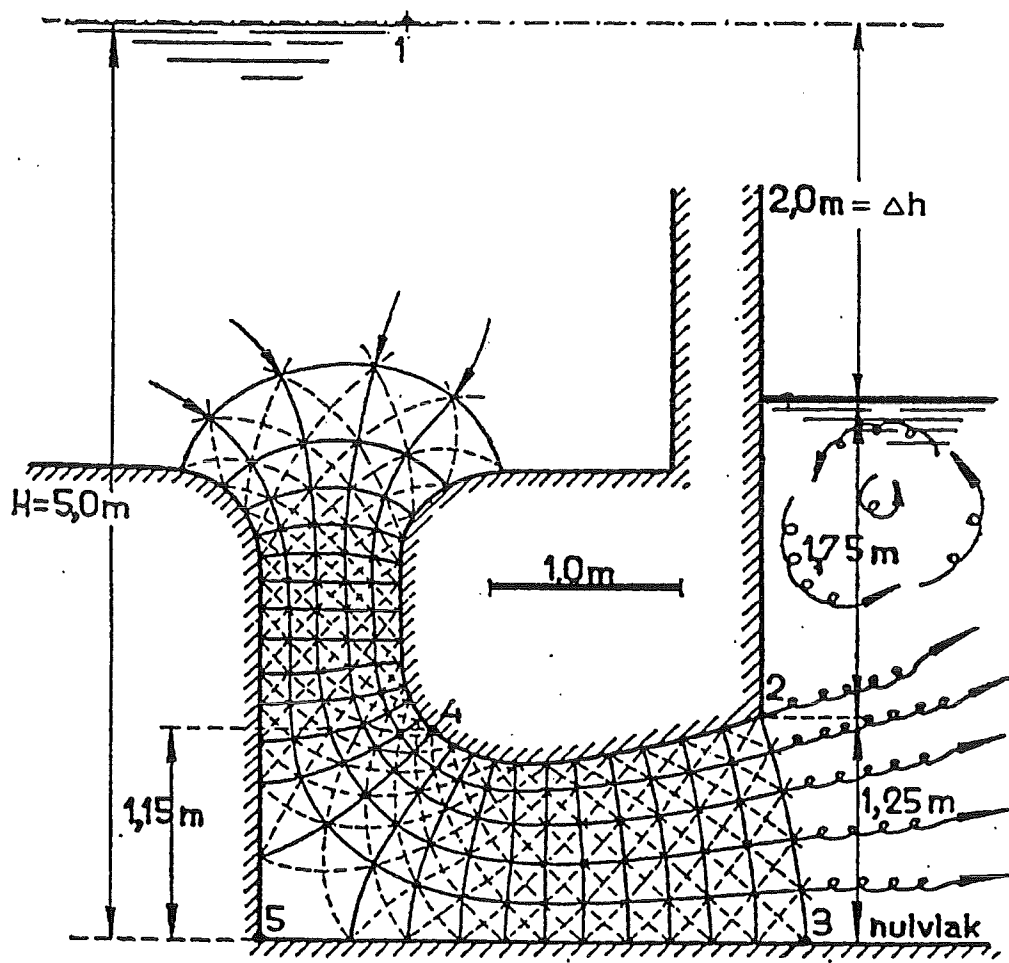
Als voorbeeld nemen we de toepassing van een vierkantennet voor de berekening van het debiet door en de drukverdeling in een verbinding tussen twee reservoirs met een verval $\Delta h = 2.0$ m. Gezien de gestroomlijnde vormgeving mogen verliezen worden verwaarloosd tot aan de uitstroming in het lage reservoir.

Het proberenderwijs getekende vierkantennet (met diagonalen) is (verkleind) gegeven in Figuur 10.8. De grootte van de snelheid in het bovenste uittreepunt (2) volgt uit het gegeven van uniforme energie:

$$H = 5 \text{ m} = h_2 + \frac{u_2^2}{2g} = 1.25 \text{ m} + 1.75 \text{ m} + \frac{u_2^2}{2g}$$

ofwel $u_2 = \sqrt{2g(H - h_2)} = 6.26 \text{ m/s}$. De waarde van Δn_2 wordt via lengtemeting in de figuur bepaald op 0.22 m. Dus is $\Delta q = u_2 \Delta n_2 = 1.41 \text{ (m}^3/\text{s)/m}$. De overige stroomstroken hebben dezelfde Δq , zodat in totaal $q = 5\Delta q = 7.05 \text{ (m}^3/\text{s)/m}$.

In elk gewenst punt kunnen Δn en Δs worden gemeten zodat $u (= u_s)$ daar kan worden berekend. De resultaten voor de punten 1 t/m 5 zijn verzameld in bijgaande tabel, inclusief de berekening van de drukhoogten.



Figuur 10.8

punt	z (m)	Δn (m)	u (m/s)	$u^2/2g$ (m)	h^* (m)	$p/\rho g$ ** (m)
1	5.00	∞	0	0	5.00	0
2	1.25	0.22	6.26	2.00	3.00	1.75
3	0	0.32	4.29	0.92	4.08	4.08
4	1.15	0.11	12.52	8.00	-3.00	-4.15
5	0	-	0	0	5.00	5.00

$$* \quad h = H - u^2/2g$$
$$^{**} \quad p/\rho g = h - z$$

Opmerkingen:

1. De druk is minimaal (in het voorbeeld zelfs lager dan atmosferisch) waar de snelheid het grootst is, d.w.z. waar de vierkantjes het kleinst zijn (punt 4).
2. Het hoekpunt van een inspringende hoek is een stuwpunt (punt 5); daar is geen vierkant mogelijk. Dat speelt geen rol omdat (a) dat gebiedje zo klein gemaakt kan worden als gewenst door verfijning van het net en (b) de snelheid in die omgeving niet snel varieert omdat het een stuwpunt betreft.
3. Bij een uitspringende hoek (niet in dit voorbeeld) is theoretisch de versnelling ∞ en de druk $-\infty$.
4. Wegens de kromming van de stroomlijnen in de uitstroomopening is het piëzometrisch niveau langs een normaal daar niet constant (vergelijk h_2 met h_3). Wanneer we desalniettemin het piëzometrisch niveau in de doorgang 2 - 3 bij benadering constant zouden veronderstellen dan zou in alle punten van die doorgang de snelheid gelijk zijn aan $\sqrt{2g(H - h_2)}$ ofwel 6.26 m/s, en zouden we het debiet schatten op $q = 1.25 \text{ m} \times 6.26 \text{ m/s} = 7.82 \text{ m}^2/\text{s}$, ofwel ruim 10% te hoog.

Bovenstaand voorbeeld illustreert duidelijk dat het vierkantennet in een bepaald gebied uitsluitend wordt bepaald door de vorm en ligging van de stroomlijnen en de equipotentiaallijnen die het gebied insluiten (langs de rand van het gebied). De absolute druk noch het verval noch het debiet zijn daarop van invloed. Die komen pas aan de orde bij de berekening van snelheden en drukken.

Zonder hier op de details in te gaan wordt opgemerkt dat de potentiaal en de bijbehorende snelheden in een willekeurig, gegeven gebied ook kunnen worden bepaald door gebruik te maken van de analogie tussen elektrische stromen en vloeistofstromen, waarbij de elektrische spanning analoog is aan de snelheidspotentiaal. Een vlakke elektrische geleider (z.g. teledeltos-papier) wordt geknipt in de vorm van het gebied van de potentiaalstroom. De zijdelingse randen ervan zijn dan automatisch stroomlijnen. Tussen de twee equipotentiaalranden aan bovenstroomse en benedenstroomse zijde wordt een elektrisch spanningsverschil aangebracht. In elk gewenst punt in het gebied kan de resulterende elektrische potentiaal worden gemeten, waaruit vervolgens de stroomsnelheden en de druk kunnen worden berekend op dezelfde manier als bij het grafisch geconstrueerde vierkantennet.

10.6 Vragen en opgaven

1. Maak een samenvatting van dit hoofdstuk.
2. Ga na waarom ook bij aanwezigheid van lange golven de strooming door/over een kunstwerk op elk moment als stationair kan worden benaderd.

3. Een inlaatwerk heeft een reeks van rechthoekige doorstroomopeningen tussen pijlers. Ga kwalitatief na hoe het debiet bij gegeven verval afhangt van de mate van stroomlijning van de pijlers aan bovenstroomse en/of benedenstroomse zijde. Maak een kwantitatieve schatting met geschatte waarden van afmetingen en contractie- en verliescoëfficiënten voor het geval zonder enige stroomlijning en voor het geval van maximale stroomlijning.
4. Een Cipoletti stuw heeft een lengte van de kruin (B) van 1 m; bij ongestuwde afvoer wordt gemeten dat het bovenstroomse waterpeil op 0.4 m boven de kruin staat. Bereken het debiet Q (antw.: $0.47 \text{ m}^3/\text{s}$).
5. Een onderspuier boven een vlakke bodem heeft een verticale schuif die aan de achterzijde vlak is en aan de voorzijde van onderen is afgerond met een kwart cirkelboog (straal gelijk aan de dikte van de schuif), waardoor (laten we aannemen) geen contractie optreedt. De dikte van de schuif is 1 m, de opening eronder is 0.6 m (gemeten aan de vlakke achterzijde). De diepte bovenstrooms is 3 m.
Voor een situatie van vrije afstroming:
 - 5.1 Bereken het debiet p.e.v. breedte (q) (antw.: $4.20 \text{ (m}^3/\text{s)/m}$)
 - 5.2 Bereken m.b.v. een impulsbalans de totale horizontale kracht p.e.v. breedte (K), door het water op de schuif uitgeoefend (antw.: 18.8 kN/m)
 - 5.3 Teken een vierkantennet en bereken daarmee de drukverdeling op de schuif en daaruit de totale horizontale kracht. Vergelijk de uitkomst met het resultaat van 5.2. (antw.: uitkomst moet uiteraard overeenstemmen met dat in 5.2; eventuele fout afhankelijk van nauwkeurigheid in tekening vierkantennet en berekening K uit drukfiguur)
 - 5.4 Doe hetzelfde voor een zelfgekozen andere afronding, maar wel zo dat geen contractie optreedt. Ga na in hoeverre deze situatie verschilt van de vorige.
 - 5.5 Herhaal 5.1 t/m 5.3, nu voor het geval van een gestuwde afvoer (met een verdrongen watersprong), waarbij de benedenwaterstand tegen de schuif gelijk is aan 2 m (antw.: $q = 2.71 \text{ (m}^3/\text{s)/m}$ en $K = 14.7 \text{ kN/m}$)

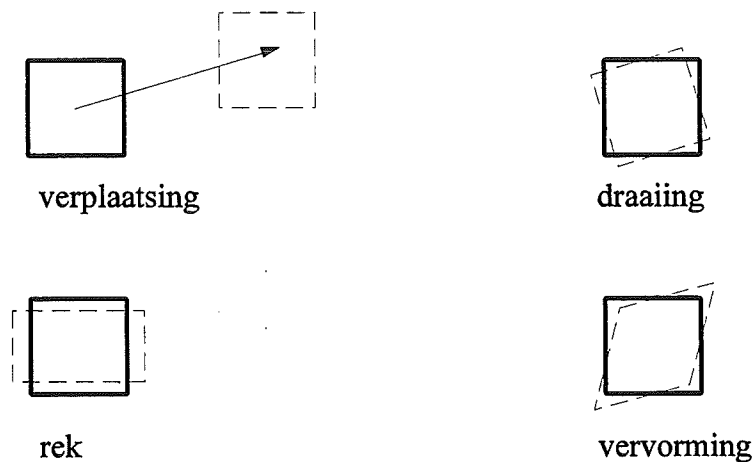
APPENDIX Kinematica en dynamica van ideale-vloeistofstroming

Kinematica van vloeistofstroming

Bij de beweging van een infinitesimaal pakketje vloeistof (een "deeltje") kunnen we onderscheid maken tussen

- verplaatsing (translatie)
- draaiing (rotatie)
- rek (dilatie)
- vervorming (deformatie)

Deze bewegingsvormen zijn geïllustreerd in Figuur A.1



Figuur A.1

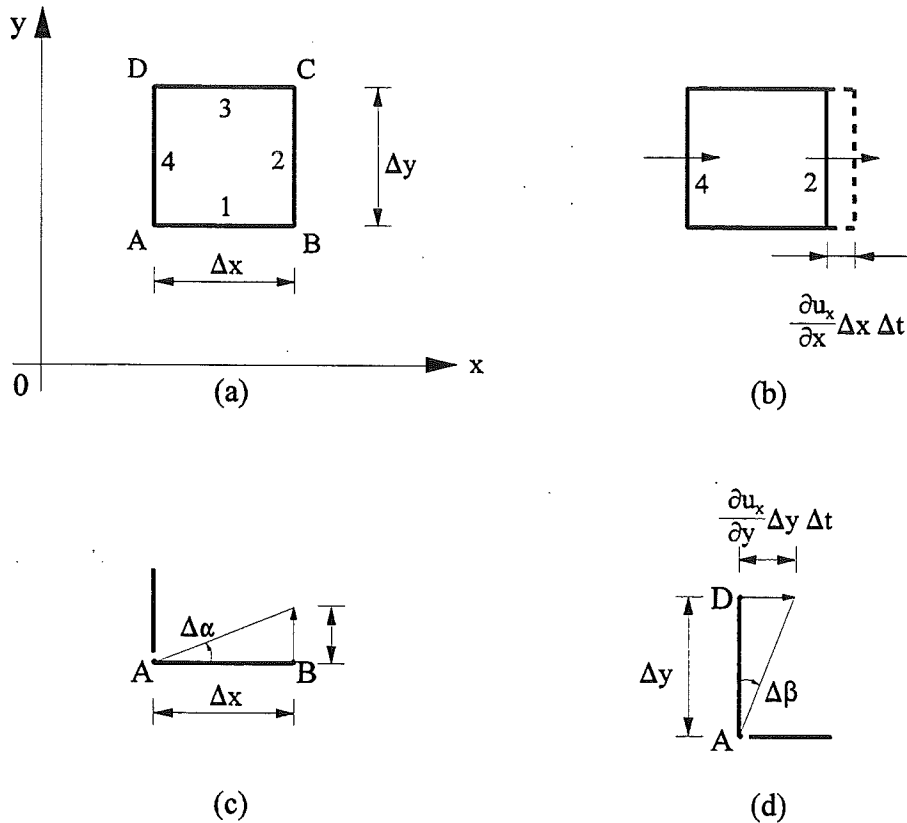
De **verplaatsing** van het massacentrum van een vloeistofdeeltje per eenheid van (p.e.v.) tijd noemen we de lokale stroomsnelheid $\vec{u}$. In een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ schrijven we voor de snelheid:

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z \quad (\text{A.1})$$

De overige drie van bovengenoemde bewegingscomponenten worden bepaald door de variatie van $\vec{u}$ in de ruimte, ofwel, wanneer we ons beperken tot een infinitesimaal vloeistofdeeltje, door de afgeleiden van $\vec{u}$ naar de plaats ($\vec{r}$) in een punt. Deze afgeleiden gezamenlijk vormen een matrix:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} \\
 & \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} \\
 & \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

We gaan de draaiing, rek en vervorming uitdrukken in termen van deze afgeleiden van de snelheid. Daarbij gaan we de beweging na van verschillende punten van een deeltje dat op een tijdstip $t = t_1$ de vorm heeft van een rechthoekig parallellepipedum met zijden ter lengte Δx , Δy en Δz en met volume ΔV . We bekijken daarvoor één zijvlak, evenwijdig aan het x,y -vlak (Fig. A.2a).



Figuur A2

Rek. We bepalen eerst de reksnelheid in de x -richting (Fig. A.2b); die is het gevolg van een verschil in snelheid in x -richting van de twee tegenover elkaar gelegen zijvlakken 2 en 4:

$$u_{x_2} - u_{x_4} \cong \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x \quad (\text{A.3})$$

De relatieve reksnelheid in de x-richting is dus gelijk aan $\partial u_x / \partial x$. Voor de y- en z-richting gelden analoge uitdrukkingen. De relatieve reksnelheden worden dus gegeven door de termen van de hoofddiagonaal van de matrix (A.2).

De reksnelheid gegeven door (A.3) veroorzaakt een volumevergroting p.e.v. tijd gelijk aan $\{(\partial u_x / \partial x) \Delta x\} \Delta y \Delta z = (\partial u_x / \partial x) \Delta V$. Voor de y- en z-richting gelden analoge uitdrukkingen. De totale relatieve volumevergroting p.e.v. tijd is dus gegeven door

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{\partial(\Delta V)}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{A.4})$$

De uitdrukking in het rechterlid hiervan heet de divergentie (div) van de snelheid in het beschouwde punt. Deze kan ook worden geschreven in termen van de ∇ -operator ("nabla-operator"), gedefinieerd door (zie CTme2100):

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

en wel als het inwendig product van ∇ en $\vec{u}$:

$$\text{div } \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

Wanneer de vloeistof als onsamendrukbaar wordt beschouwd is er sprake van behoud van volume. In die benadering is de vloeistofsnelheid dus divergentievrij:

$$\text{div } \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Dit is de z.g. continuïteitsvergelijking (in infinitesimale vorm). Het is een partiële differentiaalvergelijking waaraan moet worden voldaan in het gehele gebied waar de vloeistof zich bevindt.

Draaiing. De draaiing van een vloeistofdeeltje om zijn massacentrum wordt naar richting en grootte beschreven door een hoeksnelheidsvector ($\vec{\omega}$). De draaiing in of evenwijdig aan het x,y-vlak (d.w.z. om de z-as) wordt beschreven door de z-component van $\vec{\omega}$; de waarde daarvan stellen we gelijk aan de gemiddelde hoeksnelheid van de diagonalen van het vierkante zijvlak geschetst in Fig.A.2 (AC of BD).

Bekijk eerst de draaiing van de zijde AB (Fig. A.2c):

$$u_{y_B} - u_{y_A} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x$$

In een tijdsduur Δt draait AB dus over een hoek $\Delta\alpha \approx (\partial u_y / \partial x) \Delta t$; de hoeksnelheid ervan is $d\alpha/dt = \partial u_y / \partial x$. Idem voor AD (Fig. A.2d): $\Delta\beta \approx (\partial u_x / \partial y) \Delta t$ en $d\beta/dt = \partial u_x / \partial y$.

De diagonaal AC, d.w.z. de bissectrice van hoek BAD, draait in de duur Δt over een hoek gelijk aan $\frac{1}{2}(\Delta\alpha - \Delta\beta)$, d.w.z. met een hoeksnelheid (ω_z) gegeven door

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.7z})$$

Evenzo geldt:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad \text{en} \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (\text{A.7x,y})$$

De vergelijkingen (A.7) drukken de drie componenten van de hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$ uit in termen van de snelheidsgradiënten in de matrix (A.2) buiten de hoofddiagonaal. Evenals in het geval van de divergentie is ook hier een compacte schrijfwijze mogelijk in termen van de nabla-operator, maar nu in de vorm van het uitwendig product tussen ∇ en $\vec{u}$:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u} \quad (\text{A.8})$$

Een stroming waarvoor overal $\vec{\omega} = 0$ heet **rotatievrij**. Daarvoor geldt dus $\nabla \times \vec{u} = 0$, ofwel

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{A.9})$$

Wanneer aan deze voorwaarden wordt voldaan is er een in de ruimte variërende scalaire functie te definiëren, de z.g. **snelheidspotentiaal** $\phi = \phi(x, y, z, t)$, zodanig dat de snelheid $\vec{u}$ de gradient is van ϕ :

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad (\text{A.10})$$

ofwel

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{A.11})$$

Het bewijs van deze stelling wordt hier niet gegeven. Voor het bewijs van het omgekeerde, nl. dat een snelheidsveld, gelijk aan de gradiënt van een scalaire potentiaal, altijd rotatievrij is, substitueren we (A.11) in de uitdrukkingen (A.7) voor de componenten van $\vec{\omega}$. Voor ω_x b.v. geeft dit

$$2\omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{q.e.d.})$$

Omdat rotatievrije stromen altijd een snelheidspotentiaal hebben noemen wij ze **potentiaalstromen**.

De (scalaire) snelheidspotentiaal is een sterk hulpmiddel in de bepaling van het (vectoriële) snelheidsveld van een stroming.

Vervorming. Als maat voor de snelheid van vervorming van het beschouwde vloeistofdeeltje nemen we de afnemings van de hoek BAD (of de toeneming van hoek ABC) p.e.v. tijd (zie Fig. A.2a). Deze is gegeven door

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Als gevolg van de moleculaire viscositeit (met coëfficiënt η) verzet de vloeistof zich tegen deze voortgaande vervorming; dit resulteert in viskeuze schuifspanningen zoals

$$\tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.12})$$

Voor een eenparige parallelle stroming in de x-richting is $\partial u_y / \partial x = 0$ en reduceert (A.12) tot de uitdrukking voor de viskeuze schuifspanning $\tau = \eta \partial u / \partial n$ zoals gegeven in CTme2100.

Dynamica van ideale-vloeistof stromingen

In veel situaties is de grootte van de viskeuze weerstand zeer klein t.o.v. de traagheid en de drukgradiënt in de vloeistof. Dit doet zich b.v. voor waar geen wandinvloed aanwezig is (zoals in windgolven) of in sterk versnelde stromen, buiten de directe (viskeuze) wandinvloed. In zulke z.g. wrijvingsarme stromen gaan we in eerste benadering de weerstand geheel verwaarlozen: we gaan uit van het model van een ideale vloeistof, waarvoor de vergelijking van Euler geldt (zie CTme2100):

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla h \quad (\text{A.13})$$

Hierin is $D\bar{u}/Dt$ de totale versnelling, en h de hoogte van het piëzometrisch niveau boven het vergelijkingsvlak $z = 0$:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (\text{A.14})$$

(N.B.: h is hier niet constant over de vertikaal!) Uitgeschreven in componenten t.o.v. het natuurlijk assenstelsel (s -as langs stroomlijn) wordt (A.13):

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} \quad (\text{A.14s})$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_n}{\partial s} = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u_s^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n} \quad (\text{A.14n})$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial b} \quad (\text{A.14b})$$

Voor stationaire stromen reduceert (A.14s) tot de vergelijking van Bernoulli:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{u_s^2}{2g} \right) = \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Dit houdt in dat H constant is langs een stroomlijn (in stationaire, wrijvingloze stromen).

Stationaire stromen onder invloed van zwaartekracht en druk (geen weerstand) die beginnen vanuit rust hebben een **uniforme energie**; alle stroomlijnen beginnen immers met dezelfde H . De resulterende stroming is ook **rotatievrij**. Drukkracht en zwaartekracht oefenen namelijk geen koppel uit op vloeistofdeeltjes. Omdat deze aanvankelijk niet roteren gaan zij dat ook niet doen. Het formele bewijs van rotatievrijheid, uitgaande van uniforme energie, is als volgt.

Uniforme energiehogte houdt in dat niet alleen $\partial H/\partial s = 0$ maar ook $\partial H/\partial n = 0$:

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(h + \frac{u_s^2}{2g} \right) = \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{1}{g} u_s \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0$$

Uit een vergelijking hiervan met (A.14n) voor $\frac{\partial u_n}{\partial t} = 0$ (stationaire stromen) volgt dan

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} = \frac{\partial u_n}{\partial s}$$

Dit is juist de voorwaarde voor rotatievrijheid in het s,n -vlak, q.e.d.

11 Transportprocessen

11.1 Inleiding

Het onderwerp van dit hoofdstuk is het transport van een opgeloste of zwevende stof (of andere grootheden zoals warmte) in open waterlopen. Het behoeft geen betoog dat dit een onderwerp is van grote praktische betekenis in verband met de zorg voor een goede waterkwaliteit.

Een gedetailleerde maar toch overzichtelijke behandeling van transportprocessen in open water wordt gegeven door Fischer e.a. (1979) en Rutherford (1994).

De behandeling van transportprocessen in dit hoofdstuk is gebaseerd op de veronderstelling dat de beschouwde stof een verwaarloosbare invloed heeft op de vloeistofstroming. Dit gaat natuurlijk niet altijd op omdat de massadichtheid van het water beïnvloed kan worden; een bekend voorbeeld hiervan is de invloed van het zoutgehalte. In estuaria bijv. (mondingsgebieden van rivieren in zee) kan dit de stroming zeer sterk beïnvloeden, vooral de verticale verdeling. In dit inleidende hoofdstuk wordt echter uitgegaan van een constante dichtheid, onafhankelijk van de concentratie van de meegevoerde stof.

Met toenemende schaal waarop de transporten worden beschouwd zijn de volgende transportmechanismen te onderscheiden:

- **moleculaire diffusie:** tijd-gemiddelde waarde van fluctuerende micro-transporten door de z.g. warmtebeweging van de moleculen.
- **advectie** of meevoering, ook convection genoemd: transport met (massacentrum van) infinitesimaal vloeistofpakketje mee (met stroomsnelheid $\bar{u}$).
- **turbulente diffusie:** tijd-gemiddelde waarde van fluctuerende advectione transporten door turbulente bewegingen van kleine vloeistof "pakketjes".
- **dispersie:** menging als gevolg van verticale en dwarse gradiënten in gemiddelde snelheid en gemiddelde concentratie (dit komt naar voren bij integratie over de diepte of over het hele dwarsprofiel).

Hoe groter de beschouwde schaal, des te sterker zijn de transportprocessen.

We beginnen met een algemene formulering van de balansvergelijking, die geldt ongeacht welk transport we beschouwen. Daarna worden specifieke keuzes gemaakt.

11.2 Balansvergelijking (algemene vorm)

Stel dat een grootheid "X" (zout, sediment,.....) wordt getransporteerd in een driedimensionale stroming. Zonder in dit stadium er op in te gaan welke van de in par. 11.1 genoemde fysische transportprocessen van belang zijn geven we het totale transport van X in een punt naar richting en intensiteit weer met een transportvector $\vec{T}$. De absolute waarde hiervan (T) stelt de hoeveelheid van X voor die per eenheid van (p.e.v.) tijd en p.e.v. oppervlakte wordt getransporteerd in de richting van $\vec{T}$ (door een vlak haaks op $\vec{T}$).

Neem nu een vlak waarvan we de twee zijden het label "–" resp. "+" geven. Laat $\vec{e}_N$ een eenheidsvector zijn haaks op dit vlak, wijzend van – naar +. De overdracht van X p.e.v. tijd door een klein deel van dit vlak met oppervlak ΔA , in de richting van – naar +, is dan gelijk aan

$$\vec{T} \cdot \vec{e}_N \Delta A = T_N \Delta A \quad (11.1)$$

Dit passen we toe in het opstellen van een balans voor de voorraad van X in een klein ruimtelijk vast (Eulers) balansgebied G met ribben Δx , Δy , Δz en volume ΔV .

P.e.v. tijd gaat door het zijvlak $x = x_1$ van G naar binnen: $T_{x1} \Delta y \Delta z$ (zie (11.1)), en door $x = x_2$ naar buiten: $T_{x2} \Delta y \Delta z$. Door deze twee zijvlakken gaat dus netto naar binnen:

$$(T_{x1} - T_{x2}) \Delta y \Delta z \approx \left(- \frac{\partial T_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z = - \frac{\partial T_x}{\partial x} \Delta V \quad (11.2)$$

Voor de overige vier zijvlakken gelden analoge uitdrukkingen. Het totaal transport naar binnen is dus

$$- \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} \right) \Delta V = - (\text{div } \vec{T}) \Delta V = - (\nabla \cdot \vec{T}) \Delta V \quad (11.3)$$

We zien hieruit dat de **divergentie van een transportvector** het **netto uitgaande transport** door een gesloten oppervlak rondom een infinitesimaal volume voorstelt, gedeeld door dat volume.

Aan de eventuele productie van X kunnen verschillende processen bijdragen, voorgesteld door de z.g. **brontermen**. De som ervan is de netto **productie** p.e.v. volume en p.e.v. tijd ("P").

De volumeconcentratie van X geven we aan met "c" (die hier dus een heel andere betekenis heeft dan in de voorafgaande hoofdstukken!). Dan is $c \Delta V$ de **voorraad** van X in G, en $(\partial c / \partial t) \Delta V$ de toeneming ervan p.e.v. tijd.

De **balans** voor de voorraad van X in G luidt na substitutie van bovenstaande resultaten:

$$\frac{\partial c}{\partial t} \Delta V = - (\nabla \cdot \vec{T}) \Delta V + P \Delta V \quad (11.4)$$

ofwel

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{T} = P \quad (11.5)$$

Als X een **behouden** grootheid is zijn de brontermen gelijk aan nul en reduceert de balansvergelijking tot

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{T} = 0 \quad \text{ofwel} \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} = 0 \quad (11.6)$$

Dit is de **standaardvorm van alle behoudsvergelijkingen**.

Voorbeeld: massabalans van een compressibele vloeistof. Daarvoor is $c = \rho$, $\vec{T} = \rho \vec{u}$ en $P = 0$ (behoud van massa). De behoudsvergelijking voor de massa van de vloeistof is dus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (11.7)$$

N.B. Door de divergentie van de massastroom $\rho \vec{u}$ uit te schrijven ontstaat

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (11.8)$$

De som van de eerste twee termen is juist gelijk aan de materiële afgeleide van ρ (de totale afgeleide van ρ voor een bewegend vloeistofdeeltje), zodat

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (11.9)$$

In een onsamendrukbare vloeistof is $D\rho/Dt = 0$ (wat niet inhoudt dat $\partial\rho/\partial t = 0$ of $\nabla\rho = 0$; denk aan gelaagdheid) en moet dus ook gelden $\nabla \cdot \vec{u} = 0$; het snelheidsveld moet dan divergentievrij zijn (zie Hoofdstuk 10).

11.3 Moleculaire diffusie

In open waterlopen met turbulente stroming is de moleculaire diffusie van ondergeschikte betekenis. De formulering ervan staat echter model voor die van turbulente diffusie en dispersie en wordt in het volgende daarom wel behandeld.

Moleculaire diffusie is het gemiddeld transport als gevolg van warmtebewegingen van de moleculen. In een isotroop medium (zoals water) vindt het transport van een stof met concentratie c door moleculaire diffusie plaats in de richting van de sterkste afneming van de concentratie, d.w.z. het is tegengesteld gericht aan de gradiënt van c . In goede benadering kunnen we de waarde van het transport evenredig stellen aan die van de gradiënt van c . Als evenredigheidsfactor voeren we de z.g. (coëfficiënt van) moleculaire diffusiviteit in (ϵ):

$$\vec{T} = - \epsilon \nabla c \quad (11.10)$$

De dimensie van ϵ is (lengte)²/(tijd) (m²/s in het SI).

De behoudsvergelijking (11.6) in geval van transport door moleculaire diffusie alleen is

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (\epsilon \nabla c) = 0 \quad (11.11)$$

In geval van een homogene vloeistof (ϵ constant) reduceert dit tot

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon \nabla^2 c = \epsilon \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right] \quad (11.12)$$

Dit is de standaard **diffusievergelijking** in drie dimensies.

Om inzicht te krijgen in de aard van mogelijke oplossingen hiervan beperken we ons voorlopig tot een **ééndimensionale situatie** (bijv. warmtegeleiding in een dunne draad), waarbij het transport uitsluitend in één richting plaatsvindt, zeg de x -richting:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (11.13)$$

Hierin heeft c de betekenis van voorraad p.e.v. lengte (volume-concentratie geïntegreerd over het dwarsoppervlak). Stel nu m.b.t. (11.13) dat op $t = t_0$ een hoeveelheid m wordt geloosd in een punt $x = x_0$, terwijl verder op $t = t_0$ voor alle $x \neq x_0$ geldt $c = 0$ (beginvoorwaarde). Stel verder $c \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \pm \infty$ (randvoorwaarden). De bijbehorende oplossing van (11.13) voor $c(x,t)$ wordt hier zonder afleiding gegeven. Deze luidt

$$c(x,t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi\epsilon(t-t_0)}} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4\epsilon(t-t_0)} \right] \quad (11.14)$$

(te bewijzen door terugsubstitutie) ofwel, korter geschreven,

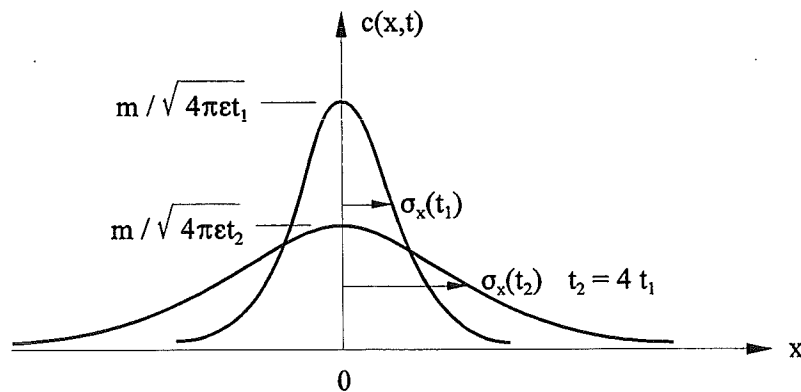
$$c(x,t) = \frac{m}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2} \right] = m \Phi_x(x-x_0, t-t_0) \quad (11.15)$$

waarin $\Phi_x(x-x_0, t-t_0)$ symbool is voor een **Gauss-dichtheidskromme** langs de x-as, met oppervlak (integraal over x van $-\infty$ tot $+\infty$) gelijk aan de eenheid, maximum gelijk aan $1/(\sqrt{2\pi}\sigma_x)$ in $x = x_0$ en een "standaardafwijking" (gemeten langs de x-as) met de waarde

$$\sigma_x = \sqrt{2\epsilon(t-t_0)} \quad (11.16)$$

De variatie van c met x verloopt in de tijd dus als een reeks in elkaar zakkende Gauss-krommen met maximum evenredig aan $D^{1/2}$ en met "standaardafwijking" σ_x evenredig aan $D^{1/2}$, waarin D de verstreken duur is sinds de lozing ($D = t - t_0$) (Figuur 11.1). De totale voorraad van X is daarbij constant in de tijd:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x,t) dx = m \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(x-x_0, t-t_0) dx = m \quad (11.17)$$



Figuur 11.1

We zien uit deze oplossing dat de concentratiepiek zich zijdelings uitbreidt evenredig met $\sqrt{\epsilon t}$. Dit geldt algemeen voor diffusieprocessen, zoals volgt uit inspectie van (11.12) of (11.13), en ook uit een dimensiebeschouwing. (Zie ook Hoogwatergolven, Hoofdstuk 9.)

Voor tweedimensionale diffusie geldt

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad (11.18)$$

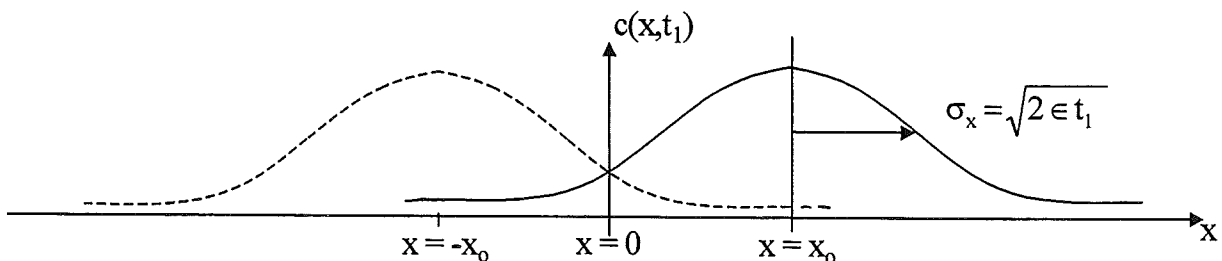
De oplossing hiervan bij injectie van een hoeveelheid m op $t = 0$ in het punt $x = 0, y = 0$, bij overige begin- en randvoorwaarden conform het 1D-geval, is de 2D Gauss-functie:

$$c(x,y,t) = \frac{m}{4\pi\epsilon t} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{4\epsilon t} \right) = m \Phi_x(x,t) \Phi_y(y,t) \quad (11.19)$$

waarin $\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{2\epsilon t}$. Voor dit isotrope geval is de concentratie constant langs cirkels met het injectiepunt als middelpunt. De concentratie-piek breidt zich in radiale richting uit evenredig met $\sqrt{\epsilon t}$ (zoals in het ééndimensionale geval), maar omdat dit in twee richtingen gebeurt neemt het grondvlak van de Gauss-"hoed" toe evenredig met t , en neemt het maximum dus af evenredig met $1/t$ (behoud totale hoeveelheid).

In het voorgaande zijn voor twee gevallen oplossingen gegeven van de diffusievergelijking voor de concentratie die het gevolg is van een instantane lozing in een punt, in een onbegrensd groot gebied. In gevallen waarbij de lozing gespreid plaats vindt in tijd en/of ruimte kan zo'n lozing worden opgedeeld in een aantal aansluitende pulslozingen van korte duur en kleine afmetingen; elk van die pulsen geeft een elementaire oplossing zoals (11.14) of (11.19). Superpositie daarvan geeft de totale oplossing. Deze procedure is mogelijk doordat de diffusievergelijking lineair is in de concentratie.

De invloed van ondoorlatende gebiedsgrenzen wordt ook in rekening gebracht d.m.v. superpositie. We laten dit hier zien in het ééndimensionale geval, eerst voor een halfoneindig lange geleider $x > 0$, met lozing op $t = 0$ in het punt $x = x_0$ (zie Figuur 11.2). Door het eindpunt $x = 0$ kan geen transport plaats vinden, dus moet daar gelden $T_x = 0$ ofwel $\partial c / \partial x = 0$. Bovenstaande Gauss-oplossing (11.14) voldoet daar niet aan.



Figuur 11.2 Concentratieverdeling met spiegeling t.o.v. $x = x_0$ op een tijdstip $t = t_1$

Denk nu eerst dat de geleider wel oneindig lang is, met de bijhorende oplossing (11.14). Dan is er ter plaatse van het eindpunt $x = 0$ een uitgaand transport $T_x(0)$ (want $\partial c / \partial x \neq 0$). We kunnen het gedeelte van de oplossing (11.14) in $x < 0$ om het punt $x = 0$ terugvouwen naar $x > 0$ (spiegelen in $x = 0$) en optellen bij het deel van de oplossing dat daar al gold. Het teruggevouwen deel levert in het punt $x = 0$ een even groot maar tegengesteld gericht transport op als het oorspronkelijke, zodat het totaal voldoet aan de randvoorwaarde dat $T_x = 0$ in $x = 0$. Het totaal voldoet ook aan de diffusievergelijking, want deze is lineair en laat superpositie van oplossingen toe.

Het terugvouwen komt in het gebied $x > 0$ overeen met het effect van een denkbeeldige bron in $x = -x_0$, dus het spiegelbeeld van de oorspronkelijke t.o.v. $x = 0$. Figuur 11.2 laat dit zien. Wiskundig uitgedrukt:

$$c(x,t) = m[\Phi_x(x-x_0,t) + \Phi_x(x+x_0,t)] \quad \text{voor } x > 0 \quad (11.20)$$

In woorden uitgedrukt: de uit het begrensde traject stekende staart van de complete Gausskromme wordt in het traject teruggevouwen. Bij lozing in het eindpunt zelf ($x_0 = 0$) resulteert

$$c(x,t) = 2m\Phi_x(x,t) \quad \text{voor } x > 0 \quad (11.21)$$

ofwel de helft van de Gausskromme op de andere gevouwen, wat dezelfde concentratie geeft als een lozing van dubbele sterkte in $x = 0$ in een oneindig traject (in het halfoneindige traject kan het immers niet weg naar $x < 0$).

Als de geleider een eindige lengte heeft, van $x = 0$ tot $x = L$ (tweede eindpunt), dan moet ook daaromheen gespiegeld worden om het totale transport nul te krijgen. Maar de spiegelbeelden van de oorspronkelijke bron t.o.v. beide uiteinden moeten zelf ook weer gespiegeld worden, etc. M.a.w.: we moeten nu aan beide einden de uit-stekende staarten van de oorspronkelijke Gausskromme terugvouwen tot in het traject $0 \leq x \leq L$. Dit is te formuleren via een in principe oneindige rij gespiegelde bronnen. De concentratie in elk punt is dan de som van een oneindig aantal termen, elk een waarde uit de oorspronkelijke Gausskromme op toenemende afstand uit het maximum daarvan, dus van verder weg in de staart. De reeks die ontstaat voor de totale concentratie convergeert daarom snel.

Voor lozing van een hoeveelheid m op $t = 0$, in één randpunt $x = 0$ in een geleider van lengte L , wordt de oplossing met veelvoudige spiegelingen

$$c(x,t) = 2m[\Phi_x(x,t) + \Phi_x(x-2L,t) + \Phi_x(x+4L,t) + \dots] \quad (11.22)$$

Kort na de lozing is de Gausskromme nog zeer gepiekt ($\sigma_x \ll L$) en is uitsluitend de eerste term voldoende. Naarmate de tijd verstrijkt zakt de Gausskromme uit (σ_x neemt toe) en worden volgende termen belangrijker. Tegelijk worden de verschillen in concentratie in het

traject minder en minder. De concentratie is al vrijwel uniform, op enkele procenten na, op het moment waarop $\sigma_x = \sqrt{2\epsilon t} = L$ (substitueer maar in verg. 11.22), ofwel na een duur $t = L^2/2\epsilon$. De limietwaarde van de uniforme concentratie is $c_\infty = m/L$.

11.4 Advectie en moleculaire diffusie

We gaan nu een situatie beschouwen waarin het transport niet alleen door diffusie plaatsvindt maar tegelijk door meevoering of advection. De vector voor het volumetransport van de stromende vloeistof is juist de stroomsnelheid $\vec{u}$; bij een concentratie c van meegevoerde stof is het advectief stoftransport p.e.v. oppervlak dus gegeven door $\vec{u}c$. Het transport door advection ($\vec{u}c$) en moleculaire diffusie ($-\epsilon\nabla c$) gezamenlijk is

$$\vec{T} = \vec{u}c - \epsilon\nabla c \quad (11.23)$$

Substitutie hiervan in de behoudsvergelijking $\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{T} = 0$ levert

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}c) - \nabla \cdot (\epsilon\nabla c) = 0 \quad (11.24)$$

Dit is de z.g. **advectie-diffusie vergelijking**. Deze beschrijft variaties in concentratie die het gevolg zijn van meevoering (advection) en verspreiding (diffusie).

Voor een onsamendrukbare ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) en homogene ($\nabla \epsilon = 0$) vloeistof reduceert (11.24) tot

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla c - \epsilon \nabla^2 c = 0 \quad (11.25)$$

of, in termen van de materiële afgeleide ($D/Dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$, zie CTme2100):

$$\frac{Dc}{Dt} = \epsilon \nabla^2 c \quad (11.26)$$

De gedaante hiervan is analoog aan die van de diffusievergelijking (11.12) zonder advection. Vergelijking (11.26) drukt uit dat in een referentie die met de vloeistof mee beweegt er alleen diffusie waarneembaar is (kan alleen als de snelheid horizontaal niet varieert!).

De reductie tot één dimensie (x) geeft

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_x \frac{\partial c}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0 \quad (11.27)$$

(Deze vergelijking is van dezelfde gedaante als de advection-diffusie vergelijking die in Hoofdstuk 9 naar voren kwam in de beschrijving van hoogwatergolven.) De oplossing hiervan voor het geval van instantane lozing van een hoeveelheid m in $x = 0$ op $t = 0$, met de randvoorwaarden $c \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \pm \infty$, luidt

$$c(x,t) = \frac{m}{\sigma_x} \Phi\left(\frac{x - u_x t}{\sigma_x}\right) \quad \text{met} \quad \sigma_x = \sqrt{2\epsilon t} \quad (11.28)$$

Op elk moment is dit een Gausskromme als functie van x met een maximum waar $x - u_x t = 0$. Het effect van advection is slechts de verplaatsing van de totale voorraad door de ruimte; de diffusie spreidt uit zonder de totale hoeveelheid te veranderen.

In een vaste doorsnede ($x = \text{constant}$) verloopt c niet symmetrisch in de tijd t.o.v. $t = x/u_x$, als gevolg van het feit dat de concentratiewolk afvlakt terwijl hij de beschouwde doorsnede passeert. In een vast punt verloopt de stijgende tak daarom steiler dan de dalende tak. (Zie ook de opmerkingen hierover in Hoofdstuk 9 (Hoogwatergolven) en Figuur 9.5.) De maximale concentratie treedt daarom eerder op dan $t = x/u_x$. De asymmetrie neemt echter af met toenemende afstand van het lozingspunt. In een vast punt op voldoende grote afstand ($x \gg \epsilon/u_x$) treedt de maximale concentratie bij benadering op als $t = x/u_x$.

Kwantitatieve oplossingen voor deze vergelijkingen worden verder behandeld na introductie van turbulente diffusie en dispersie (waarbij de vergelijking dezelfde gedaante heeft als hierboven, maar met veel grotere en ook variabele diffusiviteit).

11.5 Turbulente diffusie

Turbulentie wordt gekenmerkt door onregelmatig fluctuerende, wervelende bewegingen van "pakketjes" vloeistof. De snelheid varieert daarbij in elk punt in de tijd naar richting en grootte. Hetzelfde geldt dan voor het transport van meegevoerde stof.

Het is niet uitvoerbaar de onregelmatige turbulente fluctuaties in detail te berekenen. Voor praktische toepassingen is dat ook niet nodig en kunnen we vaak volstaan met kennis van de gemiddelde waarden van fluctuerende grootheden, i.h.b. van de turbulente transporten.

Alvorens een rekenmodel daarvoor op te zetten gaan we in kwalitatieve zin na hoe een netto transport kan ontstaan als gevolg van turbulente fluctuaties. (In feite is dit analoog aan de moleculaire diffusie als gevolg van de warmtebewegingen van de moleculen.) Als voorbeeld nemen we het verticale transport van zeer fijn sediment in suspensie in een open waterloop waarin de gemiddelde snelheid horizontaal is maar waarin verticale turbulente snelheidsfluctuaties voorkomen. Verder gaan we er van uit dat de gemiddelde concentratie ($\bar{c}$) afneemt met toenemende afstand (z) boven de bodem, en (voorlopig) dat het sediment zo fijn is dat het de waterbeweging volgt. Door het afnemen van $\bar{c}$ naar boven voert een opwaartse snelheidsfluctuatie *gemiddeld genomen* meer sediment mee naar boven door een

bepaald horizontaal vlakje dan dat een neerwaartse snelheidsfluctuatie sediment meeneemt naar beneden door datzelfde vlakje. Gemiddeld genomen is er dan een netto transport, en wel in de richting van afnemende waarde van de gemiddelde concentratie.

We gaan dit nu meer formeel uitwerken en scheiden de momentane waarde van alle fluctuerende grootheden zoals u , p , c etc. in een gemiddelde en een fluctuatie rondom dat gemiddelde (het eerst gedaan door Reynolds). Voor c bijv.:

$$c(t) = \bar{c} + c'(t) \quad (11.29)$$

Hierin is $\bar{c}$ het gemiddelde van $c(t)$ over een interval (t_1, t_2) dat veel fluctuaties bevat maar dat kort duurt t.o.v. veranderingen in de randvoorwaarden (b.v. het getij):

$$\bar{c} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt \quad (11.30)$$

(Op die langere tijdschaal kan $\bar{c}$ dus nog wel met t variëren.)

Het bepalen van het gemiddelde is een lineaire bewerking, dus als a een constante is geldt $\overline{ac(t)} = a\bar{c}$. Ook lineaire superpositie is van toepassing: $\overline{c_1(t) + c_2(t)} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2$.

Het gemiddelde van (11.29) geeft successievelijk

$$\bar{c} = \overline{\bar{c} + c'} = \bar{c} + \bar{c'} \quad (11.31)$$

waaruit volgt $\bar{c'} = 0$. Hetzelfde geldt vanzelfsprekend voor alle andere fluctuerende grootheden.

Neem nu het product van twee fluctuerende grootheden, bijv. de concentratie c van zwevend sediment en de verticale snelheid ervan, u_z (afgezien van de valsnelheid, die we later toevoegen), zodat cu_z het momentaan vertikaal advectioneel transport van sediment voorstelt. De gemiddelde waarde daarvan is

$$\overline{cu_z} = \overline{(\bar{c} + c')(\bar{u}_z + u'_z)} = \bar{c}\bar{u}_z + \overline{cu'_z} + \overline{c'\bar{u}_z} + \overline{c'u'_z} \quad (11.32)$$

of

$$\overline{cu_z} = \bar{c}\bar{u}_z + \overline{c'u'_z} \quad (11.33)$$

Zonder turbulentie zou het gemiddeld transport gelijk zijn aan $\bar{c}\bar{u}_z$, maar de turbulentie geeft een gemiddelde bijdrage gelijk aan $\overline{c'u'_z}$. Als dit ongelijk is aan nul heten c en u_z **gecorrleerd**. De correlatie ontstaat (in dit voorbeeld) dank zij een z -variatie van $\bar{c}$. Als $\partial\bar{c}/\partial z < 0$ (afnemende concentratie met toenemende hoogte boven de bodem), dan zal een

opwaartse snelheidsfluctuatie ($u'_z > 0$) in het algemeen gepaard gaan met een grotere c dan gemiddeld ($c' > 0$), en omgekeerd, zodat het product $c'u'_z$ gemiddeld genomen positief zal zijn: $\overline{c'u'_z} > 0$ als $\partial\bar{c}/\partial z < 0$.

Om het turbulente transport uit te kunnen rekenen moeten er eigenlijk extra vergelijkingen worden geformuleerd voor de fluctuerende grootheden of hun gemiddelde, maar als dat gebeurt dienen zich weer nieuwe onbekenden aan. Deze keten wordt ergens afgebroken via een z.g. **sluitingshypothese**, waarmee een verband wordt gelegd tussen de onbekende turbulente grootheden en de gemiddelde beweging. Daarvoor gebruiken we hier het z.g. **mengweglengtemodel** van Prandtl (1925). Het idee is dat lokale stromingseigenschappen, zoals de sedimentconcentratie, met turbulente wervels worden verplaatst en zo in een andere plaats afwijkingen (fluctuaties) veroorzaken van de daar heersende gemiddelde waarde. De grootte-orde van de afwijking wordt geschat uit de variatie van de gemiddelde waarde over een afstand overeenkomend met de kenmerkende afmeting (ℓ_t) van de wervels, de z.g. mengweglengte. De snelheidsfluctuaties worden eveneens gelijk gesteld aan een kenmerkende snelheid (u_t) van die wervels. Daarmee geldt (in grootte-orde):

$$c' \sim \ell_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}, \quad u'_z \sim u_t \quad \text{en} \quad \overline{c'u'_z} \sim \ell_t u_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (11.34)$$

We zien dat het gemiddelde turbulente transport volgens dit model evenredig is met de gradiënt van $\bar{c}$, analoog aan moleculaire diffusie; dit **gemiddelde turbulente transport** is daarom ook als een **diffusieproces** te zien (op micro-schaal is het instantane transport advectioneel). De evenredigheidsfactor schrijven we als ϵ_t , de z.g. **turbulentie diffusiviteit**:

$$\overline{c'u'_z} = - \epsilon_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (11.35)$$

Hierin is de turbulentie diffusiviteit een nieuwe onbekende, in grootte-orde gegeven door $\epsilon_t \sim \ell_t u_t$. Per stromingssituatie moeten ℓ_t en u_t geschat worden.

Evenals massa van sediment in suspensie kan gemiddeld bijv. ook impuls van de vloeistof worden uitgewisseld door turbulente fluctuaties, waardoor de gemiddelde snelheidsverdeling wordt beïnvloed. Denk ook hier aan een vrijwel horizontale stroming boven een weerstand leverende bodem, waarin gemiddeld genomen de snelheid naar boven toeneemt. Met een opwaartse snelheid ($u_z > 0$) wordt ook voorwaartse impuls (pu_x p.e.v. volume) naar boven getransporteerd door een horizontaal vlakje. Bij gemiddelde verticale snelheid gelijk aan nul heeft het gemiddelde opwaarts transport van voorwaartse impuls p.e.v. horizontaal oppervlak de waarde $\overline{pu'_x u'_z}$. Omdat de gemiddelde horizontale snelheid toeneemt naar boven zijn u'_x en u'_z negatief gecorreleerd. Gemiddeld genomen remt de vloeistoflaag onder het beschouwde vlakje de laag erboven af. De werking van dit **gemiddelde turbulente impulstransport** is als die van een schuifspanning in het beschouwde vlakje. Men noemt dat een **Reynolds (schuif)spanning**. Via het mengweglengtemodel wordt deze schuifspanning evenredig gesteld met de gemiddelde snelheidsgradiënt:

$$\tau_{xz} = -\rho \overline{u'_x u'_z} = \rho v_t \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} \quad (11.36)$$

De evenredigheidsfactor v_t hierin heet de **turbulentie viscositeit**.

We passen het bovenstaande toe op de advection-diffusie vergelijking (11.24), die we daarvoor eerst uitschrijven, waarbij de moleculaire diffusiviteit (ϵ) constant wordt verondersteld:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(cu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(cu_z) - \epsilon \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (11.37)$$

We nemen hiervan het gemiddelde. Alle termen op die van de advection na zijn lineair. Middeling van lineaire termen is eenvoudig: vervang de fluctuerende grootheid door zijn gemiddelde (bv. $\overline{\partial c / \partial t} = \partial \bar{c} / \partial t$).

Voor de advection termen geldt (11.33), zoals in

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}(cu_x)} = \frac{\partial}{\partial x}(\overline{cu_x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{c} \bar{u}_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'_x c'}) \quad (11.38)$$

De laatste term hierin wordt vervangen door een uitdrukking analoog aan (11.35):

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}(cu_x)} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{c} \bar{u}_x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) \quad (11.39)$$

Hiermee wordt het gemiddelde van (11.37), geschreven in vectorvorm:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{u}}) - \nabla \cdot [(\epsilon + \epsilon_t) \nabla \bar{c}] = 0 \quad (11.40)$$

Omdat $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$ is dit te herleiden tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{c} - \nabla \cdot [(\epsilon + \epsilon_t) \nabla \bar{c}] = 0 \quad (11.41)$$

Deze vergelijking heeft dezelfde gedaante als die voor advection en moleculaire diffusie (zie 11.24), maar geldt voor de gemiddelde toestand inclusief turbulente diffusie. (Waar die actief is kan de moleculaire diffusie wel verwaarloosd worden, dus ϵ uit de vergelijking geschrapt.) We zullen eerst oplossingen hiervan behandelen voor de al genoemde voorbeelden van het verticale transport van horizontale impuls en van sediment in suspensie in een open waterloop. Vervolgens gaan we in op diverse gevallen van horizontale transporten.

11.6 Vertikaal transport in open waterlopen

We gaan uit van een (vrijwel) horizontale, turbulente stroming in een open waterloop, gemiddeld genomen eenparig en tweedimensionaal. We gaan daarvoor de verticale verdelingen bepalen van de gemiddelde snelheid en van de concentratie van gesuspendeerd sediment, met een valsnelheid. Daartoe geven we eerst een uitdrukking voor ϵ_t . Notatie: $z = 0$ in lokale bodem, $z = d$ in oppervlak, $\bar{u}_x = \bar{u}_x(z)$, $\bar{u}_y = 0$ en $\bar{u}_z \approx 0$.

Turbulentie diffusiviteit

De z.g. turbulentie diffusiviteit (ϵ_t) is een **stromingseigenschap** (niet een vloeistofeigenschap, zoals ϵ) en daarom niet a priori bekend en ook niet een constante. Waarden van ϵ_t zijn slechts globaal te schatten (met forse onzekerheden!) op basis van eigenschappen van turbulente wervels, m.n. een kenmerkende afmeting (ℓ_t), ook wel **mengweglengte** genoemd, en een kenmerkende snelheid (u_t), en wel als $\epsilon_t \sim \ell_t u_t$.

De stroming in een open waterloop is een grenslaagstroming langs een wand (bodem); de wisselwerking met de bodem is daarom belangrijk voor de turbulentie in het stromende water. De kenmerkende afmeting van turbulente wervels (ℓ_t) in de buurt van de bodem wordt door de aanwezigheid van die bodem beperkt, en zal daarom toenemen met toenemende afstand (z) tot de bodem. In eerste benadering kunnen we stellen dat $\ell_t \sim z$ in de buurt van de bodem. Het vrije oppervlak heeft echter ook een bijna totale dempende invloed op de turbulente wervels, althans op de verticale beweging daarin. We kiezen ook hier als globale benadering een evenredig met de afstand beneden het oppervlak toenemende waarde van ℓ_t . Het product van de twee lineaire toenemingen van ℓ_t vanuit bodem en oppervlak levert het volgende parabolisch verloop van ℓ_t :

$$\ell_t \sim z \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (11.42)$$

Omdat de turbulentie hier ontstaat door bodemweerstand nemen we als maat voor de snelheidsfluctuaties $u_* = \sqrt{\tau_b / \rho}$, waarin τ_b de schuifspanning is aan de bodem. Met toevoeging van een evenredigheidsfactor κ , de z.g. **constante van Von Karman**, ontstaat

$$\epsilon_t = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (11.43)$$

De waarde van κ is empirisch bepaald op ca. 0.4.

De variatie van ϵ_t met z volgens (11.43) is parabolisch, met een maximum halverwege bodem en oppervlak gelijk aan $\frac{1}{4}\kappa u_* d$; de over de diepte gemiddelde waarde van ϵ_t is $(1/6)\kappa u_* d$ ofwel ca. $0.06 u_* d$.

We passen (11.43) toe voor de bepaling van de verticale uitwisseling van impuls en sediment, aannemend dat $v_t = \epsilon_t$.

Vertikale verdeling van horizontale snelheid

In (11.36) is een verband gegeven tussen gemiddelde schuifspanning en snelheidsgradiënt. In eenparige stroom volgt uit de evenwichtsvoorwaarde dat de schuifspanning evenredig is aan de afstand boven de bodem. Dit geeft

$$\tau_{xz} = \tau_b \left(1 - \frac{z}{d}\right) = \rho v_t \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = \rho \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{d}\right) \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} \quad (11.44)$$

waaruit met $\tau_b = \rho u_*^2$ de bekende logaritmische snelheidsverdeling volgt:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \quad \text{dus} \quad \bar{u}_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (11.45)$$

waarin z_0 de integratieconstante is, gekozen als de afstand boven de bodem waar volgens het log-profiel de gemiddelde snelheid nul is.

Vertikale verdeling sedimentconcentratie

We passen het voorgaande nu toe op de berekening van een evenwichtsconcentratieverdeling van fijn sediment in suspensie in een stationaire, eenparige en tweedimensionale stroom, maar brengen nu de valsnelheid in rekening.

Voor het sediment geldt de behoudsvergelijking (11.6); vanwege het gegeven van stationaire, eenparige en tweedimensionale stroom zijn de termen $\partial c / \partial t$, $\partial T_x / \partial x$ en $\partial T_y / \partial y$ na middeling gelijk aan nul, en resteert van (11.6) slechts

$$\frac{\partial \bar{T}_z}{\partial z} = 0 \quad \text{of} \quad \bar{T}_z = \text{constant} = 0 \quad (11.46)$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit de voorwaarde dat er geen netto sedimenttransport is door het vrije oppervlak.

We veronderstellen dat het sediment instantaan de lokale vloeistof volgt op de valsnelheid $\vec{w} = -w \vec{e}_z$ na. Het instantane opwaartse transport van sediment (p.e.v. horizontaal oppervlak) door een horizontaal vlakje is dan

$$T_z = c (u_z - w) \quad (11.47)$$

Middeling hiervan gevolgd door substitutie van (11.46) en van $\bar{u}_z = 0$ en $w = \text{constant}$ (voor uniform sediment), geeft

$$\overline{T}_z = \overline{cu}_z - \overline{cw} = \overline{c'u'_z} - \overline{cw} = 0 \quad (11.48)$$

of

$$\epsilon_t \frac{d\bar{c}}{dz} + w\bar{c} = 0 \quad (11.49)$$

We substitueren hierin (11.43) voor ϵ_t en maken z tijdelijk dimensieloos volgens $Z = z/d$ (zodat $0 \leq Z \leq 1$):

$$\kappa u_* Z (1-Z) \frac{d\bar{c}}{dZ} + w\bar{c} = 0 \quad (11.50)$$

of

$$\frac{d\bar{c}}{\bar{c}} = - \frac{w}{\kappa u_*} \frac{dZ}{Z(1-Z)} = - \frac{w}{\kappa u_*} \left(\frac{dZ}{Z} + \frac{dZ}{1-Z} \right) \quad (11.51)$$

Dit integreren geeft

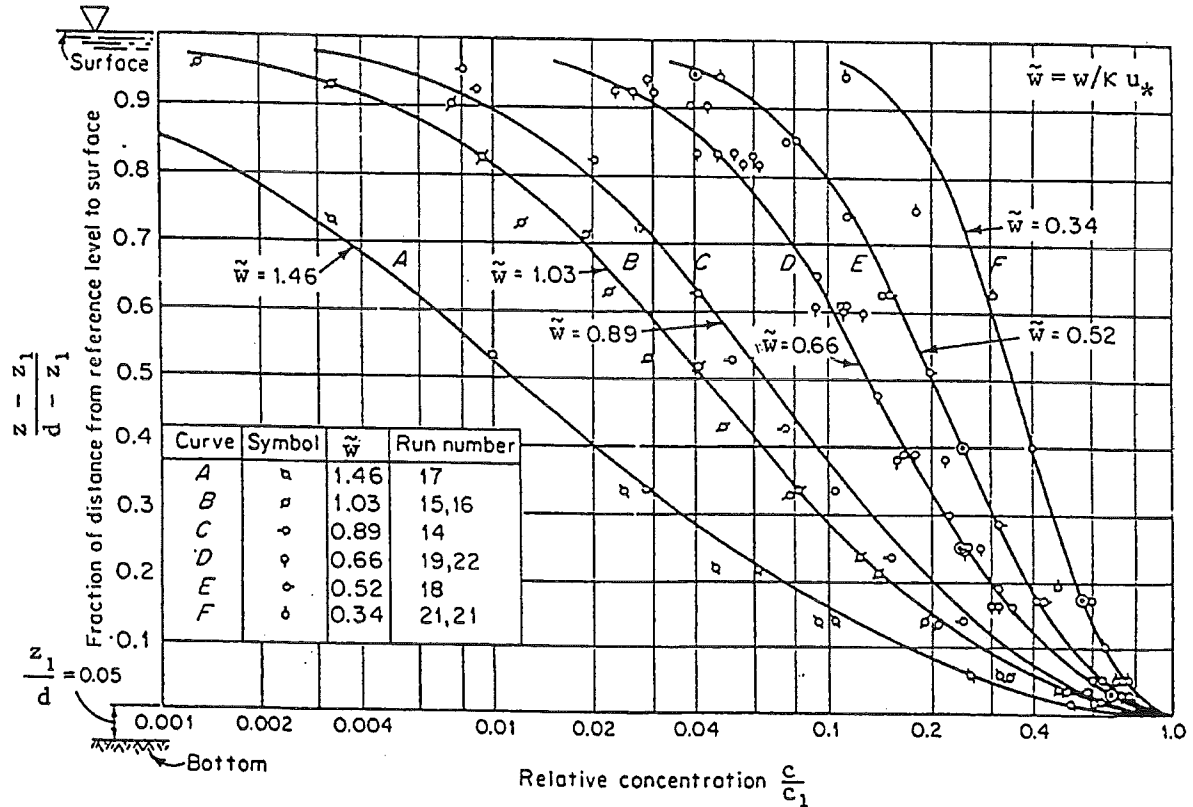
$$\ln \bar{c} = \frac{w}{\kappa u_*} \ln \frac{1-Z}{Z} + \text{const} = \ln \left(\frac{1-Z}{Z} \right)^{w/\kappa u_*} + \text{const} \quad (11.52)$$

of

$$\bar{c} = \text{const} \left[\frac{1-Z}{Z} \right]^{w/\kappa u_*} = \text{const} \left[\frac{d-z}{z} \right]^{w/\kappa u_*} \quad (11.53)$$

Deze verdeling wordt genoemd naar **Rouse**. De constante wordt bepaald door de condities bij de bodem waarop wij hier niet ingaan. Met toenemende Z (relatieve hoogte boven de bodem) neemt de factor tussen haken af evenredig met $(1-Z)/Z$. Als $w/\kappa u_* = 1$ neemt $\bar{c}$ even sterk af. Als $w/\kappa u_* \gg 1$ (relatief grof sediment of zwakke stroming) neemt $\bar{c}$ echter veel sterker af met toenemende hoogte boven de bodem, en als $w/\kappa u_* \ll 1$ (relatief fijn sediment of sterke stroming) is $\bar{c}$ bijna uniform in de vertikaal (zie Figuur 11.3).

Ondanks de ruwe benaderingen blijkt het mengweglengtemodel in eenvoudige stromingssituaties bruikbare schattingen te kunnen geven. Voor complexe stromen zijn complexe turbulentiemodellen nodig; die blijven hier buiten beschouwing.



Figuur 11.3 Vertikale verdeling relatieve sedimentconcentratie: meetpunten en theoretische waarden volgens verg. 11.53 (getrokken lijnen)

11.7 Horizontaal transport in open waterlopen

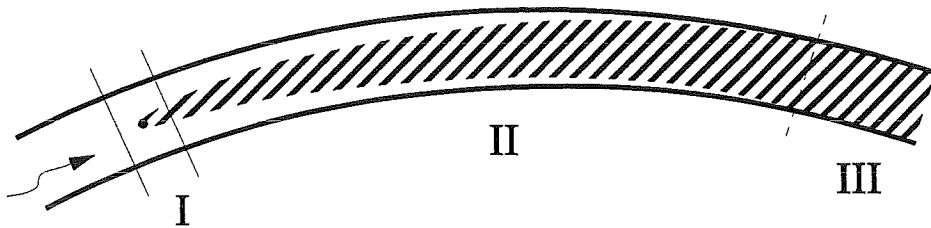
11.7.1 Inleiding

Een stof die vanuit een leiding wordt geloosd in stromend water in een open waterloop wordt stroomafwaarts gevoerd en tegelijk door turbulente diffusie verspreid. In het algemeen kunnen we daarbij drie gebieden onderscheiden (Figuur 11.4):

- (I) Een aanvangsgebied waarin de verspreiding driedimensionaal (3D) is; hier komt vooral de menging over de diepte tot stand.
- (II) Een tussengebied waarin de geloosde stof, die al over de diepte is gemengd, zich stroomafwaarts geleidelijk in het horizontale vlak (overdwars en in langsrichting)

verspreidt, bij stroming meestal in de vorm van een langgerekte pluim.

- (III) Een eindgebied waarin de stof al over het gehele dwarsprofiel is gemengd en (gemiddeld) alleen nog in longitudinale richting wordt getransporteerd.



Figuur 11.4
(in realiteit verbreedt de pluim zich niet zo snel als in de figuur)

In veel natuurlijke waterlopen is de diepte aanzienlijk kleiner dan de breedte, waardoor de lengte van gebied I verwaarloosbaar is t.o.v. die van II. We laten gebied I hier buiten beschouwing en we beperken ons tot de *horizontale, diepte-geïntegreerde transporten* in de gebieden II en III.

In gebied II, waarin de stof al min of meer uniform over de diepte is gemengd, rekenen we met het over de lokale diepte geïntegreerde, horizontale stoftransport; dit heeft zowel een longitudinale als een transversale component. We rekenen hier tweedimensionaal horizontaal (2DH).

In gebied III, waarin de stof al min of meer uniform over het hele dwarsprofiel is gemengd, rekenen we met het totale longitudinale stoftransport, geïntegreerd over de gehele dwarsdoorsnede. Hier rekenen we ééndimensionaal horizontaal (1DH).

Kortheidshalve laten we in deze paragraaf de overstreping weg die een tijdgemiddelde van turbulent fluctuerende grootheden aangeeft. In plaats daarvan zal nu middeling over de diepte respectievelijk het dwarsprofiel worden aangegeven met een enkele respectievelijk dubbele overstreping, zoals in

$$\bar{c} = \frac{1}{d} \int_d c \, dz \quad \text{respectievelijk} \quad \bar{\bar{c}} = \frac{1}{A} \iint c \, dA \quad (11.54)$$

Een lokale afwijking daarvan wordt met een enkel respectievelijk dubbel accent aangeduid.

11.7.2 Tweedimensionaal horizontaal transport (gebied II)

We gaan eenvoudigheidshalve uit van een willekeurige waterloop waarin de diepte en de stroomsnelheid zijdelings (in y-richting) kunnen variëren.

De hoeveelheid en het transport van de geloosde stof in het water worden lokaal over de diepte geïntegreerd:

Hoeveelheid p.e.v. oppervlakte:

$$\int c \, dz = \bar{c} \, d \quad (11.55)$$

Longitudinaal transport p.e.v. breedte:

$$\int T_x \, dz = \bar{T}_x \, d \quad (11.56)$$

Transversaal transport p.e.v. lengte:

$$\int T_y \, dz = \bar{T}_y \, d \quad (11.57)$$

Als balansgebied kiezen we een verticale kolom van bodem tot oppervlak met een infinitesimaal grondvlak. Onder de veronderstelling dat de getransporteerde stof behouden blijft wordt de balans (p.e.v. oppervlak):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{c}d) + \text{div} (\bar{\vec{T}}d) = 0 \quad \text{ofwel} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{c}d) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{T}_x \, d) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{T}_y \, d) = 0 \quad (11.58)$$

Voor de uitwerking hiervan gaan we verschillende bijdragen aan het transport beschrijven.

Het gemiddelde **longitudinale transport** in een punt bestaat uit de som van **advectie**, met de lokale gemiddelde snelheid $u_x(y, z)$, en **turbulente diffusie**, evenredig aan $\partial c / \partial x$. Maar omdat de lokale snelheid varieert met z wordt de geloosde stof die op een zeker moment in een vertikaal aanwezig is, door deze verschillen in advectie in longitudinale richting gespreid (Figuur 11.5). Dit effect komt bovenop het advectief transport met de diepte-gemiddelde snelheid en moet dus als extra bijdrage in rekening worden gebracht wanneer we met diepte-gemiddelde transporten werken. Dit extra effect heet **longitudinale dispersie**. Kwantitatief geformuleerd:

$$\int u_x c \, dz = \overline{u_x c} \, d = [\overline{u_x} \, \bar{c} + \overline{u'_x c'}]d = \bar{q}_x \bar{c} + d \, \overline{u'_x c'} \quad (11.59)$$

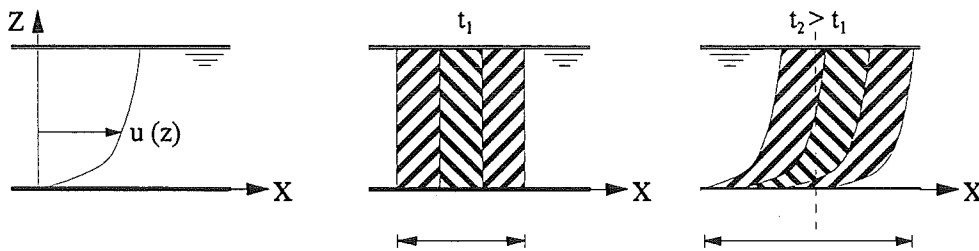
(Let op: overstreping betekent hier diepte-middeling, en een accent een afwijking van de lokale waarde t.o.v. de diepte-gemiddelde waarde.) Hierin is de laatste term de dispersieve

bijdrage; wiskundig wordt deze als een longitudinale diffusie beschreven:

$$\overline{u_x'c'} = -K_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (11.60)$$

De waarde van K_x , de coëfficiënt van longitudinale dispersie, is door Elder berekend uit de parabolische u_z -verdeling volgens (11.43), met het resultaat

$$K_x \approx 6 u_* d \quad (11.61)$$



Figuur 11.5 Advectie met lokale gemiddelde snelheid

Dit is ca. 10^2 keer groter dan de turbulentie diffusiviteit, die volgens (11.43) een diepte-gemiddelde waarde heeft van ca. $ku_*d/6$ ofwel ca. $0.06u_*d$. Het effect van de longitudinale turbulente diffusie is dus verwaarloosbaar t.o.v. dat van de longitudinale dispersie. Het totale longitudinale transport p.e.v. breedte is hiermee gelijk aan

$$\bar{T}_x d = [\bar{u}_x \bar{c}_x - K_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}] d = q_x \bar{c} - K_x d \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (11.62)$$

Voor het **transversale transport** geldt in principe eenzelfde uitdrukking:

$$\bar{T}_y d = [\bar{u}_y \bar{c}_y - K_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}] d = q_y \bar{c} - K_y d \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \quad (11.63)$$

Toch zijn er belangrijke verschillen omdat de x-as stroomafwaarts is gericht en de y-as overdwars. De stroomsnelheden in beide richtingen zijn dus zeer verschillend. Bij een stationaire toestand (geen berging) moet q_y zelfs nul zijn (geen netto volumetransport naar de oever). Maar lokaal in de vertikaal kan er wel advectioneel transport overdwars zijn, want door bochten en/of zijdelingse variaties van diepte en snelheid heeft de lokale, tijdgemiddelde snelheid componenten in het vlak van het dwarsprofiel, de z.g. secundaire stromen; die kunnen bijdragen aan $\bar{T}_y$. Dit noemen we **transversale dispersie**. Een voorbeeld hiervan doet zich voor in bochtstromen. Daarbij is de dwarsgerichte snelheid (u_y) bovenin naar de

buitenbocht gericht en onderin naar de binnenkant. Omdat onderin de sedimentconcentratie het grootst is resulteert dit in een netto binnenwaarts sedimenttransport, ook al is het vertikaal geïntegreerde zijdelings transport van water gelijk aan nul. (Dit naar binnen gericht sedimenttransport doet een rivier meanderen.)

In het bijzondere geval van een **zuiver tweedimensionale stroom** variëren u en d zijdelings niet en zijn er geen secundaire stromen en is er dus ook geen transversale dispersie. Het zijdelings transport bestaat dan alleen uit **turbulente diffusie**. Voor uitsluitend turbulente diffusie geldt volgens Fischer e.a. (1979) $K_{y,diff} = \text{ca. } 0.15 u_* d$. (Dit is vrijwel het dubbele van het dieptegemiddelde van ϵ_t volgens (11.43), dat ca. $0.06 u_* d$ bedraagt.)

De transversale dispersie wordt eveneens met een diffusiemodel beschreven, alleen heet K_y dan de (transversale) dispersiecoëfficiënt. De waarde ervan hangt o.m. af van de vorm van het dwarsprofiel en van de bochtigheid van de waterloop; daarom is er geen algemeen geldende waarde of uitdrukking te geven. Een zeer globale, gemiddelde waarde ervan (inclusief de turbulente diffusie) is ca. $0.6 u_* d$, met een spreiding van wel $\pm 50\%$:

$$K_{y,disp} \approx 0.6 u_* d \pm 50\% \quad (11.64)$$

Het effect van de zijdelingse turbulente diffusie is hierbij inbegrepen.

Met het voorgaande wordt de balans (11.58) voor de getransporteerde stof:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{c} d) + \frac{\partial}{\partial x} [q_x \bar{c} - K_x d \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [q_y \bar{c} - K_y d \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}] = 0 \quad (11.65)$$

De behoudsvergelijking voor het volume water (de z.g. continuïteitsvergelijking) kan voor deze tweedimensionale stroming geschreven worden in de vorm

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (11.66)$$

Daarmee reduceert de behoudsvergelijking voor de meegevoerde stof tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial x} (K_x d \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}) - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial y} (K_y d \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}) = 0 \quad (11.67)$$

Hierin is de zijdelingse diepte-gemiddelde advectie verwaarloosd (identiek nul in stationaire stromen, zwak bij niet-stationaire), en is $\bar{u}_x$ kortheidshalve als $\bar{u}$ geschreven.

In het algemeen kunnen de grootheden $\bar{u}$, d , K_x en K_y variëren met (x,y,t) en moet (11.67) numeriek worden geïntegreerd, bij gegeven begin- en randvoorwaarden, om $\bar{c}$ te bepalen als functie van (x,y,t) . Daarvoor wordt verwezen naar vervolgvakken (m.n. CTwa4340) en naar

de literatuur genoemd in Hoofdstuk 1.

Voor de eenvoud beperken we ons hier verder tot tweedimensionale, eenparige stromen waarbij $\bar{d}$, $\bar{u}$, K_x en K_y constant zijn (ook zijdelings), en (11.67) reduceert tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - K_y \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} = 0 \quad (11.68)$$

De som van de eerste twee termen is weer de met snelheid $\bar{u}$ meebewegende afgeleide.

Voorbeeld 1: Instantane lozing in een punt

Stel dat een hoeveelheid M op $t = 0$ wordt geloosd in een punt $x = 0$, $y = 0$ in een oneindig uitgestrekt water van (ook zijdelings) constante stroomsnelheid $\bar{u}$ en diepte $\bar{d}$. Bij een uniforme verdeling over de diepte komt dit neer op een hoeveelheid $M/\bar{d}$ p.e.v. hoogte. De aanvankelijke concentratie is overal nul. De bijbehorende oplossing van (11.68) is, conform de oplossing (11.19) van (11.18), met $m = M/\bar{d}$:

$$\bar{c}(x, y, t) = \frac{M/\bar{d}}{4\pi\sqrt{K_x K_y} t} \exp \left[-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} \right] \quad (11.69)$$

ofwel

$$\bar{c}(x, y, t) = \frac{M}{\bar{d}} \Phi_x(x - \bar{u}t, t) \Phi_y(y, t) \quad (11.70)$$

waarin

$$\sigma_x = \sqrt{2K_x t} \quad \text{en} \quad \sigma_y = \sqrt{2K_y t} \quad (11.71)$$

De oplossing (11.69) stelt een wolk voor waarin de concentratieverdeling op elke t zowel in longitudinale (x) als in transversale (y) richting verloopt volgens een Gauss-kromme. De piek daarvan ligt in ($x = \bar{u}t$, $y = 0$); de spreiding in longitudinale resp. transversale richting is evenredig met $\sqrt{K_x t}$ respectievelijk $\sqrt{K_y t}$. Lijnen waarlangs $\bar{c}$ constant is hebben de vorm van een ellips, met lange as evenredig aan $\sqrt{K_x t}$ en met korte as evenredig aan $\sqrt{K_y t}$.

Wanneer de vloeistof begrensd is door een **ondoorlatende oever**, bijv. waar $y = 0$, moet daar gelden $\bar{T}_y = 0$ ofwel $\partial \bar{c} / \partial y = 0$. Bij lozing op enige afstand uit de oever voldoet de oplossing met een enkele Gausskromme daar niet aan. Een oplossing is dan weer te bereiken door **spiegeling** in de oever waardoor daar wel aan de voorwaarde $\partial \bar{c} / \partial y = 0$ wordt voldaan.

Stel dat de lozing plaats vindt in een punt waarvoor $x = 0$, $y = y_o$, dus op een afstand y_o uit de oever, dan is de geldende oplossing

$$\bar{c}(x,y,t) = \frac{M}{d} \Phi_x(x - \bar{u}t, t) [\Phi_y(y - y_o, t) + \Phi_y(y + y_o, t)] \quad (11.72)$$

Bij lozing ter plaatse van de oever ($y_o = 0$) reduceert dit tot

$$\bar{c}(x,y,t) = 2 \frac{M}{d} \Phi_x(x - \bar{u}t, t) \Phi_y(y, t) \quad (11.73)$$

(uiteraard alleen voor $y \geq 0$). In dit geval is de Gauss-oplossing in zijn symmetrie-as gespiegeld en heeft de oplossing dezelfde vorm als zonder oever (verg. 11.70), alleen zijn de concentraties een factor twee hoger omdat de totale hoeveelheid M nu in slechts een halfruimte uitgespreid wordt.

Bij twee parallelle oevers moeten meervoudige spiegelingen worden uitgevoerd; theoretisch zelfs oneindig veel, maar meestal geven enkele termen een voldoende benadering. Gezamenlijk doen die de transversale concentratieverdeling met toenemende afstand benedenstrooms van het lozingspunt naderen tot een over het dwarsprofiel uniforme verdeling. Deze is al vrijwel bereikt (bij lozing uit een oever) wanneer $\sigma_y (= \sqrt{2K_y t})$ ongeveer gelijk is aan de afstand tussen de oevers (B), ofwel wanneer $t \approx B^2/2K_y$ (zie ook par. 11.3). Verder benedenstrooms kan met een ééndimensionale berekening worden volstaan (par. 11.7.3) waarin alleen nog longitudinale advection en dispersie een rol spelen.

Voorbeeld 2: Continue lozing in een punt

Stel nu dat er continu lozing plaats vindt in een punt $x = 0$, $y = 0$, met een constante hoeveelheid p.e.v. tijd gelijk aan $\bar{M}$. Er ontstaat dan een langgerekte pluim benedenstrooms van het lozingspunt. Vanwege die langgerektheid is de longitudinale dispersie verwaarloosbaar t.o.v. de transversale. Als bovendien de situatie stationair is reduceert de balansvergelijking (11.68) (bij zijdelings constante diepte) tot

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_y \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \quad (11.74)$$

Dit is juist de ééndimensionale diffusievergelijking (11.13) als we de tijd t daarin vervangen door $x/\bar{u}$. Met bovenstaande beginvoorwaarde, en met de randvoorwaarde $\bar{c} \rightarrow 0$ als $y \rightarrow \pm \infty$, is de oplossing van (11.74) analoog aan (11.14); we moeten daarin t vervangen door $x/\bar{u}$, x door y en ϵ door K_y :

$$\bar{c}(x,y) = \frac{C}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) = C \Phi_y(y, x/\bar{u}) \quad (11.75)$$

waarin C een nader te bepalen constante is, en

$$\sigma_y = \sqrt{2K_y x / \bar{u}} \quad (11.76)$$

Verg. (11.75) stelt een pluim voor die zich vanaf het lozingspunt stroomafwaarts uitstrekt. In elk dwarsprofiel ($x = \text{constant}$) verloopt $\bar{c}$ overdwars (in de y -richting) als een Gauss-kromme; de breedte daarvan, gemeten naar de "standaardafwijking" in dwarsrichting (σ_y), neemt stroomafwaarts toe evenredig met $\sqrt{x}$.

De waarde van de evenredigheidsconstante C volgt in dit geval uit de voorwaarde dat door elk dwarsprofiel een stoftransport plaatsvindt gelijk aan $\dot{M}$ (de toestand is immers stationair):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u} \bar{c} d) dy = (\bar{u} d) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c} dy = (\bar{u} d) C = \dot{M} \quad (11.77)$$

zodat $C = \dot{M} / \bar{u} d = \dot{M} / q$ (q is het debiet p.e.v. breedte). De oplossing (uitgeschreven) is dus

$$\bar{c}(x, y) = \frac{\dot{M}/q}{\sqrt{4\pi K_y x / \bar{u}}} \exp\left(-\frac{y^2}{4K_y x / \bar{u}}\right) \quad (11.78)$$

In geval van aanwezigheid van één of meer oevers kan de oplossing (11.78) in de oevers worden gespiegeld om aan de voorwaarde van ondoorlatendheid te voldoen.

Het zijdelings uitzakken (breder en lager worden) van de concentratieverdeling met toenemende afstand benedenstrooms leidt bij lozing in een kanaal of rivier op de duur tot een overdwars uniforme verdeling. Daar eindigt zone II en begint zone III uit Figuur 11.4, laten we zeggen op een afstand L_{II} vanaf het lozingspunt. De overgang is natuurlijk geleidelijk. Bij lozing in één oever is de concentratie, berekend met (11.78) en spiegelingen, al op enkele procenten na uniform over de breedte voor die waarde van x waar $\sigma_y = B$ ofwel waar $\sqrt{2K_y x / \bar{u}} = B$. Als we dat als criterium nemen dan geldt

$$L_{II} = \alpha \frac{\bar{u} B^2}{K_y} \quad (11.79)$$

waarin $\alpha = 0.5$. Voor realistische waarden van de parameters is de hiermee berekende L_{II} al gauw een factor 10^3 keer groter dan de breedte B . Het gaat dus inderdaad om zeer langgerekte pluimen (vergelijk met rookpluimen in de lucht). Bij lozing in het midden is α een factor 4 kleiner.

Waar de concentratie vrijwel uniform is over het gehele dwarsprofiel ($x > L_{II}$) geldt in de hier beschouwde stationaire situatie de (limiet)waarde

$$\bar{c}_\infty = \frac{\dot{M}}{qB} = \frac{\dot{M}}{Q} \quad (11.80)$$

Deze betrekking wordt wel gebruikt bij debietmeting (voeg bekende stofstroom $\dot{M}$ toe; meet $\bar{c}_\infty$, d.w.z. $\bar{c}$ waar deze al vrijwel uniform is, en bepaal $Q = \dot{M}/\bar{c}_\infty$).

11.7.3 Eéndimensionaal horizontaal transport (gebied III)

In het gebied waar de meegevoerde stof min of meer gelijkmatig over het dwarsprofiel is gespreid (gebied III van Figuur 11.4) kunnen we volstaan met ééndimensionale modellen, waarin wordt gewerkt met het over het hele dwarsprofiel geïntegreerde, longitudinale transport. Met verwaarlozing van moleculaire en turbulente diffusie is dit

$$\iint u c \, dA = A \bar{T}_x = A(\bar{u} \bar{c} + \overline{u''c''}) = Q \bar{c} + A \overline{u''c''} \quad (11.81)$$

De laatste term representeert het longitudinale dispersieve transport (Figuur 11.5). Dit wordt weer gemodelleerd als een diffusieproces:

$$\overline{u''c''} = -K \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (11.82)$$

In het hier behandelde geval vindt er niet alleen dispersie plaats als gevolg van variaties van de stroomsnelheid u in de vertikaal, zoals beschouwd in par. 11.7.2, maar ook als gevolg van variaties van u in dwarsrichting. In dwarsprofielen met aanzienlijke diepteverschillen, en ook als gevolg van bochten, kunnen zulke transversale verschillen aanzienlijk zijn. De coëfficiënt van longitudinale dispersie voor dit geval (K) heeft daarom een aanzienlijk grotere waarde dan $K_{x,disp}$, die slechts was bepaald door verticale snelheidsvariaties ($K_{x,disp} \approx 6u_* d$; zie vgl. 11.61). Een waarde van K is echter moeilijk in het algemeen te formuleren omdat die sterk afhangt van de geometrie van de waterloop (dwarsprofiel en alignement). Op grond van globale beschouwingen geven Fischer e.a. (1979) een uitdrukking voor K in de vorm

$$K = \gamma \frac{\bar{u}^2 B_s^2}{u_* \langle d \rangle} = \frac{\gamma}{\sqrt{c_f}} \frac{QB_s^3}{A_s^2} \quad (11.83)$$

De dimensieloze coëfficiënt γ heeft een waarde van ca. 10^{-2} . Een vergelijking met uit metingen geschatte waarden geeft echter een variatie hierop te zien met wel een factor 4 of meer naar boven en naar beneden. Bij toepassingen geeft bovenstaande uitdrukking dus slechts een ruwe indicatie. Voor een hogere nauwkeurigheid zal de te gebruiken waarde ter plaatse proefondervindelijk moeten worden bepaald.

De balans wordt nu opgesteld voor een mootje van de waterloop tussen twee dwarsprofielen. Voor de eenheid van lengte is het resultaat

$$\frac{\partial}{\partial t} (A\bar{c}) + \frac{\partial}{\partial x} (A\bar{T}_x) = 0 \quad (11.84)$$

ofwel

$$\frac{\partial}{\partial t} (A\bar{c}) + \frac{\partial}{\partial x} (Q\bar{c}) - \frac{\partial}{\partial x} (KA \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}) = 0 \quad (11.85)$$

Door gebruik te maken van de behoudsvergelijking voor het volume water in de vorm

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (11.86)$$

reduceert dit tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (KA \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}) = 0 \quad (11.87)$$

In geval van eenparige stroom reduceert dit verder tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} = 0 \quad (11.88)$$

ofwel juist de standaard advection-diffusie vergelijking (zie 11.25) in één dimensie.

Voorbeeld 3: Instantane lozing in een dwarsprofiel

Stel dat op $t = 0$ in een dwarsprofiel waar $x = 0$ een hoeveelheid M wordt geloosd, waarbij we voor de eenvoud doen alsof de stof instantaan uniform in het hele dwarsprofiel wordt verspreid. De oplossing is analoog aan (11.14), waarbij de evenredigheidsfactor m in (11.14) nu volgt uit de voorwaarde dat de op elk moment in de rivier aanwezige totale hoeveelheid stof gelijk is aan M :

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} A \bar{c}(x,t) dx = A \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c} dx = A m \quad (11.89)$$

Daarmee wordt de oplossing

$$\bar{c}(x,t) = \frac{M/A}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{2\sigma_x^2}\right) = \frac{M}{A} \Phi_x(x - \bar{u}t, t) \quad (11.90)$$

waarin

$$\sigma_x = \sqrt{2Kt} \quad (11.91)$$

Dit houdt in dat $\bar{c}$ op elk tijdstip met x varieert volgens een Gauss-kromme, met het maximum waar $x = \bar{u}t$; dit maximum neemt in de tijd af omgekeerd evenredig met $\sqrt{t}$.

De totale hoeveelheid stof die een doorsnede $x = \text{constant}$ passeert is

$$\int_0^\infty A \bar{u} \bar{c} dt = Q \int_0^\infty \bar{c} dt = M \quad (11.92)$$

Ook deze relatie kan worden gebruikt in een methode van debietmeting via injectie van een bekende hoeveelheid stof (M) waarbij benedenstrooms (in gebied III) de concentratie wordt gemeten in een doorsnede als functie van de tijd.

11.7.4 Résumé van balansvergelijkingen en coëfficiëntwaarden

Alle gevallen: prismatische waterloop, eenparige stroom.

Tweedimensionale advectie en dispersie (gebied II)

Willekeurig dwarsprofiel:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} d) = 0 \quad (11.67)$$

$$K_x \approx 6 u_* d$$

$$K_y \approx 0.6 u_* d \pm 50\%$$

Tweedimensionale stroom (geen zijdelingse variatie van $\bar{u}$ en d):

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - K_y \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} = 0 \quad (11.68)$$

$$K_x \approx 6 u_* d$$

$$K_y = 0.15 u_* d$$

Eéndimensionale advectie en dispersie (gebied III)

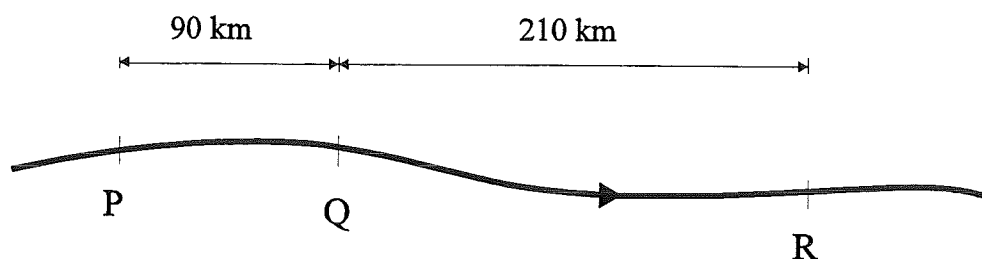
$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} = 0 \quad (11.88)$$

$$K = \gamma \frac{\bar{u}^2 B_s^2}{u_* \langle d \rangle} = \frac{\gamma}{\sqrt{c_f}} \frac{QB_s^3}{A_s^2} \quad \text{met } \gamma \text{ ca. } 10^{-2} \quad (11.83)$$

11.8 Vragen en opgaven

1. Maak een samenvatting van dit hoofdstuk.
2. Beschrijf in je eigen woorden wat de begrippen moleculaire diffusie, turbulente diffusie en dispersie inhouden.
3. Wat is de fysische betekenis van het begrip "divergentie van een transportvector"?
4. Wat is het verschil tussen een balansvergelijking en een behoudsvergelijking?
5. Verklaar waarom en onder welke omstandigheden turbulente fluctuaties, die ieder voor zich gemiddeld nul zijn, toch een netto transport kunnen veroorzaken.
6. Welke grootheden van de turbulentie zijn bepalend voor de turbulente diffusiviteit?
7. Zet voor jezelf een schema op waarmee je de verschillende processen van horizontaal, diepte-geïntegreerd transport in open waterlopen in kaart brengt.
8. Welke processen veroorzaken in een waterloop een netto stroomafwaarts transport?
9. Welke processen veroorzaken in een waterloop een netto zijdelings transport?
10. Als gevolg van een explosie aan boord van een tanker geladen met chemicaliën wordt op $t = 0$ een hoeveelheid M van een niet afbreekbare stof in het water geloosd. De lozing vindt plaats in P en wordt direct over de dwarsdoorsnede van de rivier verdeeld. In R op 300 km benedenstrooms van P is een inlaatstation voor drinkwater.

In Q op 90 km stroomafwaarts van P bevindt zich een meetstation, waar continu concentraties aan verontreinigingen worden gemeten.



De over het dwarsprofiel gemiddelde stroomsnelheid op de rivier is gelijk aan $U = \bar{u}$; de breedte is B en de waterdiepte is d .

Numerieke gegevens

$U = 1 \text{ m/s}$, $B = 250 \text{ m}$, $d = 6 \text{ m}$, $M = 100 \text{ kg}$

De resultaten van de concentratiemetingen van de geloosde stof in Q laten onder meer het volgende zien:

t	20 uur	25 uur	30 uur
$\bar{c} \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$0,89 \cdot 10^{-6}$	$1,40 \cdot 10^{-6}$	$0,88 \cdot 10^{-6}$

Gevraagd

- Wat zijn in dit geval de bepalende transportmechanismen voor de geloosde stof?
 - Als gevolg waarvan treedt in het algemeen longitudinale dispersie op?
- Bereken uit de waarnemingen in Q de grootte van de longitudinale dispersiecoëfficiënt K .
- Het drinkwaterbedrijf te R stelt als eis aan het in te laten water dat de concentratie van de betreffende verontreiniging $\bar{c} < 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^3$. Teken het verloop van $\bar{c}$ in R als functie van de tijd en bepaal daaruit de tijdsduur gedurende welke men de waterinname moet stoppen.

Uitwerking

- 1.a. Eendimensionaal → longitudinale transporten → advectie en dispersie in langsrichting van de rivier.
- b. Variaties van de stroomsnelheid u in de vertikaal en in dwarsrichting (door diepteverschillen en door bochten).
2. De vergelijking voor eendimensionale dispersie door een instantane lozing is:

$$\bar{c}(x,t) = \frac{M/A}{(4\pi Kt)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-Ut)^2}{4Kt}\right] \quad (1)$$

Voor $t = x_Q / U = 9 \cdot 10^4 \text{ s} = 25 \text{ uur}$ is de exp in (1) gelijk aan de eenheid. Invullen van de numerieke gegevens en $\bar{c} = 1,40 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^3$ bij m^3 op $t = 9 \cdot 10^4 \text{ s}$ in (1) geeft $K = 2 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$.

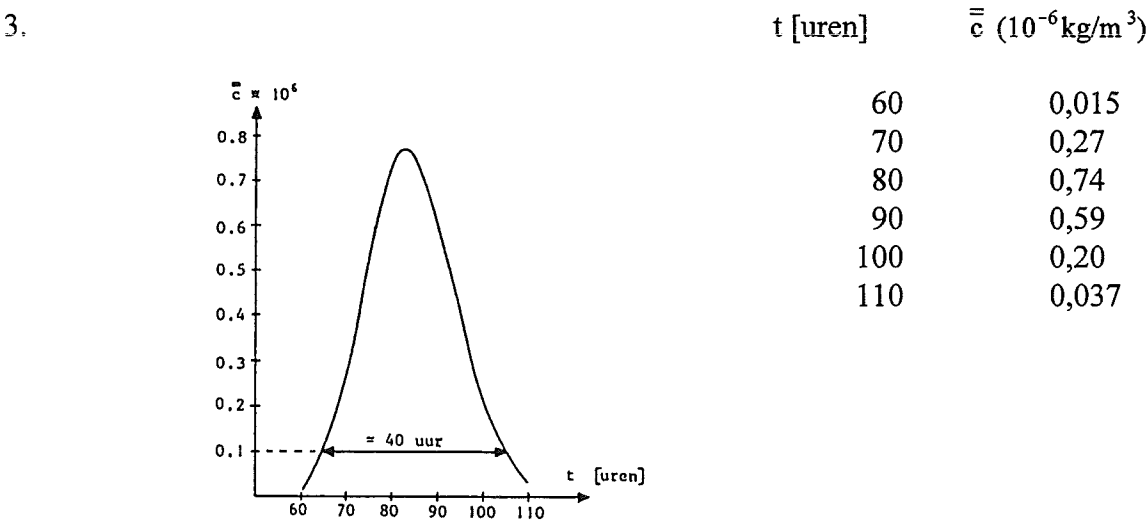
Uit (4) volgt voor $x_R = 3 \cdot 10^5 \text{ m}$: $t_1 = 298000 \text{ s} = 82,8 \text{ uur}$.

Substitutie van $t = t_1$ en de overige numerieke waarden in (1) geeft:

$$\bar{c} = 0,77 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^3.$$

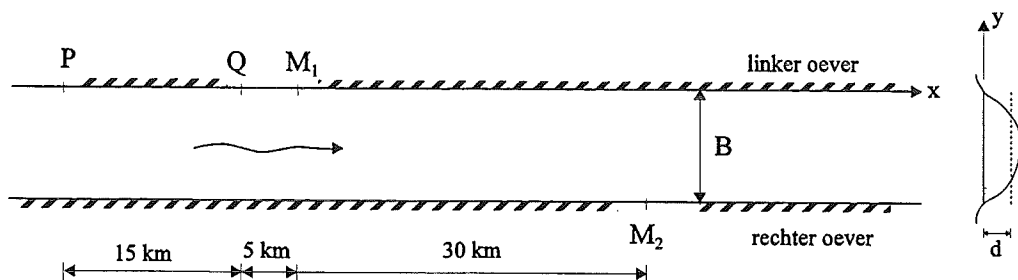
N.B.: voor relatief grote afstand ($xU/K \gg 1$) geldt: $t \approx x/U$

Dit geeft: $t_1 \approx x_R/U = 300000 \text{ s} = 83,3 \text{ uur}$ als benadering



De gevraagde tijdsduur is ongeveer 40 uren.

11. Aan de linker oever van een rivier met gemiddelde waterdiepte d , gemiddelde stroomsnelheid $U = \bar{u}$, constante breedte B en wrijvingscoëfficiënt c_f bevindt zich een permanent meetstation M_1 . Aan de andere oever, op een afstand 30 km benedenstrooms van M_1 , bevindt zich een tweede meetstation M_2 . Bij beide stations wordt al geruime tijd een in de tijd constante concentratie van een verontreinigende stof aangetroffen (concentratie $\bar{c}_1$ bij M_1 en $\bar{c}_2$ bij meetstation M_2). Op een afstand van 5 km en 20 km bovenstrooms van M_1 bevinden zich aan de linker oever twee potentiële vervuilers, respectievelijk de chemische fabrieken Q en P.



Numerieke gegevens

$$U = 1 \text{ m/s}, \quad d = 5 \text{ m}, \quad B = 100 \text{ m}, \quad c_f = 0.004,$$

$$\bar{c}_1 = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^3, \quad \bar{c}_2 = 4.0 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^3$$

Gevraagd

1. Welke zijn in dit geval de bepalende transportmechanismen voor de geloosde stof in x- en y-richting benedenstrooms van het lozingspunt?
2. Wat is het verschil tussen dispersie en turbulente diffusie?
3. Stel de algemene vergelijking op voor de concentratie in de rivier t.g.v. een continue lozing (lozingsdebiet $\dot{M}$) aan de linker oever.
4. De bedrijven P en Q ontkennen voor de lozing verantwoordelijk te zijn. Als wordt aangenomen dat slechts één van beide de lozing verricht, toon dan aan door berekening dat bedrijf Q hiervoor verantwoordelijk is.
5. Bereken het lozingsdebiet $\dot{M}$.
6. Hoe groot is de over het gehele dwarsprofiel gemiddelde concentratie van de stof in de rivier bij meetstation M_2 ?

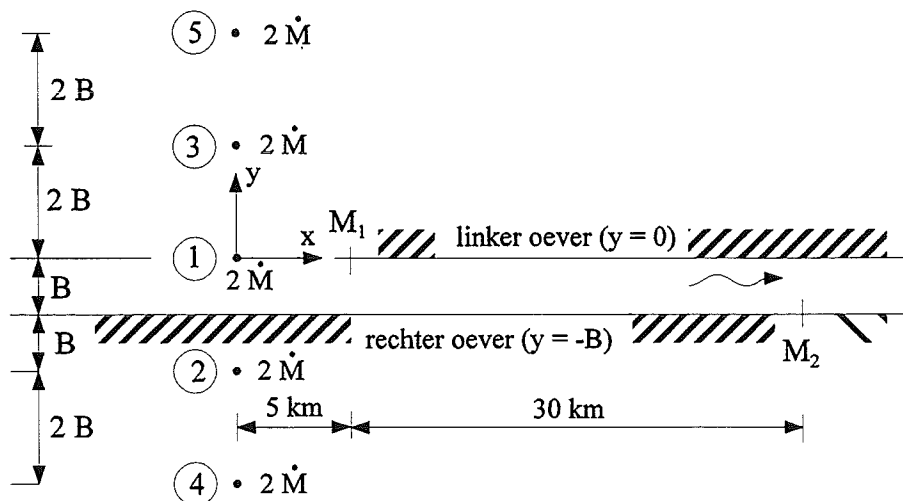
Uitwerking

1. x-richting: advectie
y-richting: transversale dispersie en turbulente diffusie
2. Zie collegedictaat
3. De uitdrukking voor de concentratie $\bar{c}(x,y)$ in een oneindig uitgestrekt stroomveld in geval van een continue lozing in $(x,y) = (0,0)$ luidt:

$$\bar{c}(x,y) = \frac{\dot{M}/q}{(4\pi K_y x/U)^{1/2}} \exp \left[-\frac{y^2}{4K_y x/U} \right] \quad (1)$$

Om de invloed van beide oevers te verdisconteren wordt een fictieve lozing ter grootte $\dot{M}$ aangebracht in het punt $(0,0)$ en fictieve lozingen $2\dot{M}$ in de punten $(0, \pm 2B)$, $(0, \pm 4B)$, ... enz.

Punt (1) in de figuur is het lozingspunt ($2\dot{M}$ i.v.m. aanwezigheid linker oever). Het effect van de rechter oever kan verdisconteerd worden d.m.v. een spiegeling in het lozingspunt t.o.v. deze oever, d.w.z. door het aanbrengen van lozingspunt (2). Lozingspunt (2) moet echter ook weer gespiegeld worden t.o.v. de linker oever, dit geeft lozingspunt (3), dat weer gespiegeld moet worden t.o.v. de rechter oever, lozingspunt (4), enz.



De gevraagde vergelijking voor $\bar{c}(x,y)$ luidt dus

$$\begin{aligned} \bar{c}(x,y) = & \frac{2\dot{M}/q}{(4\pi K_y x/U)^{1/2}} \left\{ \exp\left[\frac{y^2}{4K_y x/U}\right] + \exp\left[-\frac{(y+2B)^2}{4K_y x/U}\right] \right. \\ & \left. + \exp\left[-\frac{(y-2B)^2}{4K_y x/U}\right] + \exp\left[-\frac{(y+4B)^2}{4K_y x/U}\right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

4. Bij lozing door bedrijf Q geldt $x_1 = 5000$ m en $x_2 = 35000$ m. Substitutie van $K_y = 0,6$ d U $\sqrt{c_f} = 0,19$ m²/s, $x_1 = 5000$ m, $y = 0$ en de overige numerieke gegevens in (3) geeft:

$$\bar{c}_1 = 0,0037 \text{ s/m}^3 \dot{M} \{1 + 2 * 2,7 * 10^{-5} + \dots\} = 0,0037 \text{ s/m}^3 \dot{M} \quad (4)$$

Evenzo volgt bij lozing in Q met $x_2 = 35000$ m en $y = -B = -100$ m:

$$\bar{c}_2 = 0,0014 \text{ s/m}^3 \dot{M} \{2 * 0,69 + 2 * 0,033 + \dots\} = 0,0020 \text{ s/m}^3 \dot{M} \quad (5)$$

Uit (4) en (5) volgt: $\bar{c}_1/\bar{c}_2 \approx 1,8$

Dit komt overeen met de verhouding $\bar{c}_1/\bar{c}_2$ die volgt uit de waarnemingen. Een lozing op een andere lokatie dan die van bedrijf Q geeft een andere verhouding $\bar{c}_1/\bar{c}_2$. In geval van lozing door bedrijf P geldt: $\bar{c}_1/\bar{c}_2 \approx 0,3$. Dus bedrijf Q verricht de lozing.

5. $\bar{c}_1 = 0,0037 \text{ s/m}^3 \dot{M} = 7,3 * 10^{-5} \text{ kg/m}^3 \rightarrow \dot{M} = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$
6. $\bar{c} = \dot{M}/(d U B) = 4,0 * 10^{-5} \text{ kg/m}^3$

FORMULES STROMING IN WATERLOPEN (CTwa3310)

Continuïteitsvergelijking open waterloop:

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Bewegingsvergelijking voor open waterloop of gesloten leiding:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A_s} \right) + g A_s \frac{\partial h}{\partial x} + c_f \frac{Q|Q|}{A_s R} = 0$$

Elementaire golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$$

waarin $c = \sqrt{g A_s / B}$ (open water) of $c = 1 / \sqrt{\rho / K + \rho D / (E \delta)}$ (drukleidingen)

Voor enkele golf, zonder vervorming voortplantend in open water, geldt $\delta Q = \pm B c \delta h$

Karakteristieke betrekkingen voor prismatische leiding (in ongestoorde toestand), hetzij open waterloop met horizontale bodem, of gesloten leiding, beide zonder weerstand:

$$\frac{dh}{dU} \pm \frac{c}{g} = 0 \quad \text{ofwel} \quad \delta h = \mp \frac{c}{g} \delta U \quad \text{langs} \quad \frac{dx}{dt} = U \pm c$$

waarin $c = \sqrt{g A_s / B}$ (open water) of $c = 1 / \sqrt{\rho / K + \rho D / (E \delta)}$ (drukleidingen)

Voor open water geldt $\delta h = \delta d$. Voor 2-dimensionale beweging is $c = \sqrt{gd}$ zodat in dat geval

$$\frac{dd}{dU} \pm \sqrt{\frac{d}{g}} = 0 \quad \text{ofwel} \quad \delta d = \mp \sqrt{\frac{d}{g}} \delta U \quad \text{ofwel} \quad U \pm 2c = \text{constant langs} \quad \frac{dx}{dt} = U \pm c$$

Systeem met discrete berging, traagheid en gelineariseerde weerstand:

$$\omega_o^{-2} \frac{d^2 \zeta_k}{dt^2} + \tau \frac{d\zeta_k}{dt} + \zeta_k = \zeta_z$$

waarin

$$\omega_o^2 = \frac{g}{l} \frac{A_s}{A_k}, \quad \tau = \frac{8}{3\pi} \frac{\chi \hat{Q} A_k}{g A_s^2} \quad \text{en} \quad \chi = \frac{1}{2} + c_f \frac{l}{R}$$

Complexe responsfactor $\tilde{r} = \tilde{\zeta}_k / \tilde{\zeta}_z = 1/[1 - \omega^2/\omega_o^2 + i\omega\tau]$

Amplitudeverhouding:

$$r = \frac{\hat{\zeta}_k}{\hat{\zeta}_z} = \frac{1}{\sqrt{2} \Gamma} \sqrt{-(1 - \omega^2/\omega_o^2)^2 + \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_o^2)^4 + 4\Gamma^2}}$$

Faseverschuiving:

$$\tan \theta = \frac{\Gamma r}{1 - \omega^2/\omega_o^2}$$

waarin

$$\Gamma = \frac{\omega\tau}{r} = \frac{8}{3\pi} \chi \left(\frac{A_k}{A_s} \right)^2 \frac{\omega^2 \hat{\zeta}_z}{g}$$

Harmonische methode Algemene oplossing:

$$\tilde{\zeta}(x) = C_1 \exp(-px) + C_2 \exp(px) = \tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_2 \quad \text{waarbij hoort}$$

$$\tilde{Q}(x) = Bc \cos \delta \exp(i\delta) (\tilde{\zeta}_1 - \tilde{\zeta}_2)$$

$$\text{waarin } p = \mu + ik, \quad c = \omega/k, \quad \tan 2\delta \equiv \sigma = \frac{8}{3\pi} c_f \frac{\hat{U}}{\omega R},$$

$$k = \frac{k_o}{\sqrt{1 - \tan^2 \delta}} \quad \text{en} \quad \mu = k \tan \delta \quad \text{waarin} \quad k_o = \frac{\omega}{c_o} \quad \text{en} \quad c_o = \sqrt{\frac{g A_s}{B}}$$

Bekken, aan één zijde ($x = 0$) gesloten:

$$\text{Amplitudeverhouding } r(x) = \hat{\zeta}(x)/\hat{\zeta}(0) = \sqrt{\sinh^2(\mu x) + \cos^2(kx)}$$

$$\text{Debiet } \hat{Q}(x) = Bc \hat{\zeta}(0) \cos \delta \sqrt{\sinh^2(\mu x) + \sin^2(kx)}$$

Vakconstanten voor een enkel vak met einden in $x = 0$ en $x = l$

$$L = O = \cosh(pl), \quad M = -\frac{p}{i\omega B} \sinh(pl), \quad N = -\frac{i\omega B}{p} \sinh(pl), \quad \frac{i\omega B}{p} = Bc \cos\delta \exp(i\delta)$$

Vierpoolvergelijkingen:

$$\zeta_l = L \zeta_0 + M \tilde{Q}_0 \quad \text{en} \quad \tilde{Q}_l = N \zeta_0 + O \tilde{Q}_0$$

Hoogwatergolven

Diffusiemodel; respons op plotselinge toevoeging van volume V op $t = 0$ in $x = 0$:

$$d(x,t) - d_0 = (V/B) \Phi_x(x-ct,t) \quad \text{met} \quad c = \frac{1}{B} \frac{dQ_e}{dh} = \frac{3}{2} \frac{B_s}{B} U \quad \text{waarin}$$

$$\Phi_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right], \quad \sigma_x = \sqrt{2Kt} \quad \text{en} \quad K = \frac{Q_e}{2i_b B}$$

Transportprocessen in open water

Twee-dimensionaal diepte-gemiddeld horizontaal transport in eenparige stroom

Behoudsvergelijking voor meegevoerde stof met diepte-gemiddelde volumeconcentratie $\bar{c}$:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} d \right) = 0$$

$$K_x \approx 6 u_* d \quad (\text{longitudinale dispersie a.g.v. diepte-variantie van stroomsnelheid})$$

$$K_y \approx 0.15 u_* d \quad (\text{alleen transversale turbulente diffusie})$$

$$K_y \approx 0.6 u_* d \pm 50\% \quad (\text{transversale dispersie a.g.v. secundaire stromen etc.})$$

Diepte-gemiddelde concentratie bij instantane lozing M in $(x,y,t) = (0,0,0)$, geen zijdelingse variatie van stroomsnelheid en diepte, buiten invloed van oevers:

$$\bar{c}(x,y,t) = \frac{M}{d} \Phi_x(x-\bar{u}t,t) \Phi_y(y,t) \quad \text{waarin} \quad \sigma_x = \sqrt{2K_x t} \quad \text{en} \quad \sigma_y = \sqrt{2K_y t}$$

(voor de definitie van Φ zie hierboven, bij het diffusiemodel voor hoogwatergolven)

Limietwaarde (uniform in dwarsrichting) voor $t > \alpha B^2/K_y$ ($\alpha \approx 0.5$ bij lozing aan een oever, $4x$ kleiner bij lozing in het midden):

$$\bar{c}(x,t) = \frac{M}{Bd} \Phi_x(x-\bar{u}t,t)$$

Stationaire diepte-gemiddelde concentratie bij constante lozing $\dot{M}$ in $(x,y) = (0,0)$, geen zijdelingse variatie van stroomsnelheid en diepte, buiten invloed van oevers:

$$\bar{c}(x,y) = \frac{\dot{M}}{q} \Phi_y(y, x/\bar{u}) \quad \text{met} \quad \sigma_y = \sqrt{2K_y x/\bar{u}}$$

Limietwaarde (uniform in dwarsrichting) voor $x > \alpha B^2 U/K_y$: $\bar{c}_\infty = \frac{\dot{M}}{qB} = \frac{\dot{M}}{Q}$

Eén-dimensionale (longitudinale) horizontale advection en dispersie

Behoudsvergelijking voor meegevoerde stof met dwarsprofiel-gemiddelde volumeconcentratie $\bar{\bar{c}}$:

$$\frac{\partial \bar{\bar{c}}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\bar{c}}}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \bar{\bar{c}}}{\partial x^2} = 0$$

Longitudinale dispersie a.g.v. variaties van stroomsnelheid in het dwarsprofiel (vertikaal en zijdelings):

$$K = \frac{\gamma}{\sqrt{c_f}} \frac{QB_s^3}{A_s^2} = \frac{\gamma}{\sqrt{c_f}} \frac{UB_s^2}{d} \quad \text{met} \quad \gamma = (0.5 \sim 2.0)10^{-2}$$

Profielgemiddelde concentratie bij instantane lozing M in $x = 0, t = 0$ (onmiddellijk uniform over dwarsprofiel verdeeld verondersteld):

$$\bar{\bar{c}} = \frac{M}{A} \Phi_x(x-\bar{u}t,t)$$