



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

De geschiedenis en filosofie van het constructivisme
(Engelse titel: The history and philosophy of
constructivism)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Chia Karin

Delft, Nederland
Augustus 2012

Copyright © 2012 door Chia Karin. Alle rechten voorbehouden.



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“ De geschiedenis en filosofie van het constructivisme ”
(Engelse titel: “The history and philosophy of constructivism”)

Chia Karin

Technische Universiteit Delft

Begeleiders

Prof.Dr. J.M.A.M. van Neerven Dr. M.H.A. Haase

Overige commissieleden

Dr. E. Coplakova Dr. J.G. Spandaw

Augustus, 2012

Delft

Voorwoord

Al meerdere keren in mijn studie ben ik bewijzen tegengekomen die gebruik maakten van de wet van de uitgesloten derde. Deze regel wekte mijn nieuwsgierigheid telkens weer op om antwoord op de vraag te geven waarom ervan uit wordt gegaan dat je maar twee keuzes hebt. Met het schrijven van dit verslag ben ik achter gekomen dat er een alternatief voor het gebruik van deze regel bestaat. Bij deze wil ik Prof.Dr. J.M.A.M.van Neerven en Dr. M.H.A. Haase bedanken voor de begeleiding die ze gegeven hebben tijdens het schrijven van mijn bachelorthesis.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	6
1.1	Plato's vormentheorie	8
1.2	De potentiële en actuele oneindigheid	10
2	Geschiedenis van de wiskunde rond het jaar 1900	11
2.1	Het logicisme	11
2.2	Het formalisme	12
2.3	Het constructivisme	15
2.3.1	L.E.J. Brouwer	17
2.3.2	Arend Heyting	20
2.3.3	Errett Bishop	23
2.4	Kritiek op de constructivistische analyse	24
3	Filosofie van de constructieve wiskunde	26
4	Waar is het constructivisme eigenlijk goed voor?	34
5	Een voorbeeld van een constructief bewijs	36

1 Inleiding

Aan het eind van de negentiende eeuw ontstond het constructivisme als een aparte stroming binnen de wiskunde. Het ontstaan van deze stroming was voornamelijk gericht om de snelle opmars van de niet-constructivistische wiskunde onder leiding van o.a. Hilbert, Frege een halt toe te roepen.

Hilbert stelde voor om de strijd tegen paradoxen tegen te gaan door consistent te zijn in het doen van wiskunde. Zijn belangrijkste bijdrage is het opzetten van Hilberts programma. Dit programma heeft als doel om de gehele wiskunde te formaliseren in een axiomatische raam, samen met het bewijs dat deze axiomatisering van wiskunde consistent is. Waar Hilbert zelfs buiten de landsgrenzen van Duitsland als een autoriteit werd beschouwd op het wiskundige vakgebied, werd zijn opmars voor een tijd stopgezet door de Nederlandse wiskundige Brouwer. Brouwer was er volledig op tegen om de wiskunde bij voorbaat vast te leggen in een aantal axioma's. Dat paste niet bij Brouwer's denkwijze over de wiskunde, want wiskunde is een mentale activiteit en dus neemt intuïtie een belangrijke rol in bij wiskunde. Daarentegen wordt er helemaal geen rekening gehouden met intuïtie in Hilberts formalistische theorieën, wat ons volledig afhankelijk zal maken van een beperkt aantal middelen die bestaan. Dus we moeten ook een blik werpen op de filosofie die toentertijd werd aangehaald om verklaringen te geven voor wiskundige ontdekkingen.

Na Brouwer werd zijn student Heyting ook bekend door het formaliseren van intuïtionistische logica met de bijbehorende filosofie die daarbij hoorde. Heyting vond het jammer dat zijn intuïtionistische logica alleen als een formalistisch model werd overgenomen maar de intuïtie liet men in het algemeen halverwege. Een belangrijk punt in het intuïtionistische programma is het afwijzen van het gebruik van de wet van de uitgesloten derde. Deze regel zou volgens de intuïtionisten geschrapt moeten worden, want deze maakt wiskunde veel onduidelijker terwijl wiskunde helder opgebouwd moet zijn uit duidelijke regels. De andere regel is de bivalentie wet, waartegen er ook bezwaren waren bij het gebruik ervan.

Laat A een welgeformuleerde propositie zijn, dan zegt de wet van de uitgesloten derde dat de bijbehorende instantie van de uitgesloten derde de propositie is dat er A of niet A geldt, in kwantoren $A \vee \neg A$. De bivalentiewet zegt dat elke propositie waar is of niet waar, dus het sluit een derde mogelijkheid uit, vandaar deze naam. Als er in de wiskunde de wet van de uitgesloten derde toegestaan is dan heet dit klassieke wiskunde. De logica die de wet van de uitgesloten derde niet bevat heet intuïtionistische logica en constructivisten gebruiken deze wet van de uitgesloten derde niet.

In mijn bachelorthesis heb ik onderzocht is in welke historisch context het constructivisme past. In het tweede hoofdstuk maak ik een begin in een inleiding in filosofische terminologie die we nodig hebben in hoofdstuk vier. In hoofdstuk drie leg ik in het kort uit wat de drie belangrijkste stromingen waren aan het begin van de twintigste eeuw. Ik ga vooral de nadruk leggen op de constructivistische historie in dit hoofdstuk. In hoofdstuk vier leg ik de filosofie van het constructivisme uit en wat zijn positie is ten opzichte van andere stromingen. In

hoofdstuk vier en vijf ga ik respectievelijk uitleggen waarin constructivistische wiskunde gebruikt wordt en als geef ik het bewijs van de tussenwaarde stelling zoals bewezen in de klassieke analyse en in de constructieve analyse.

1.1 Plato's vormentheorie

We gaan nu in op de terminologie binnen de filosofie van de wiskunde. Dit is nodig want om de geschiedenis van het constructivisme te begrijpen moeten we verschillende termen kennen uit de filosofie om uit de voeten te kunnen. Een deel van de wiskundigen bekijken de wiskunde vanuit een platonistisch oogpunt. Wat is een platonistisch oogpunt nu? Essentieel gezien is Plato's beeld van onze wereld dat de reële, stabiele en permanente wereld een onderdeel is van ideeën, of vormen zoals hij ze zelf noemt. Daarom wordt dit ook wel de *vormentheorie* genoemd. Dus de wereld waarin mensen zich bevinden is illusionair, wat wij zien zijn alleen opeenvolgingen van gebeurtenissen in de fysieke wereld, in plaats van de realiteit. Plato(427 - 347 v.Chr.) staat aan het hoofd van een lange traditie in filosofie, namelijk het *realisme* of ook wel het *platonisme*.

Het verband tussen de bovenwaarneembare wereld van vormen en de waarneembare fysieke wereld is door Plato beschreven in zijn werk *Timaeus* waarin er aan de hand van veel 'theoretische discussies' een beeld wordt geschapen van deze twee werelden. Dit werk is waarschijnlijk geschreven in 360 v.Chr. geschreven. Hierin wordt gesproken alsof beide werelden oneindig zijn, maar de wereld van de ideeën is verantwoordelijk voor het bestaan van de materiële wereld. Er bestaat een zogenaamde tussenschakel tussen deze twee werelden waardoor het voor ons mogelijk wordt om sommige schaduwen of copieën die bestaan in de ideeënwereld te zien in onze imperfecte, waarneembare wereld. En hoe ziet deze tussenschakel eruit? "*Dat wordt uitgewerkt in de leer van de ziel. De ziel, en vooral de rationele ziel overbrugt de kloof tussen de twee werelden.*" ¹

Laten we een voorbeeld nemen van de vormentheorie. Je kijkt naar de hemel op een klaarlichte dag en ziet dat de kleur van de hemel blauw is. Je kunt ook zeggen dat de kleur van je eigen spijkerbroek blauw is. Dus de hemel en je spijkerbroek hebben beide een blauwe kleur, maar ze hebben beide een andere accent van blauw. En zo is de blauw die wij kennen niet het absoluut blauw, maar juist 'imperfect' blauw. Hoe komt het dat wij ze herkennen aan dezelfde kleur? De reden hiervoor is volgens Plato dat er een ideale vorm bestaat van blauw, naar welke de kleuren van de hemel en je spijkerbroek corresponderen. Blauwe objecten participeren in absoluut blauw of het blauw, dus het idee zelf.

Daarom sprak Plato ook of *schoonheid zichzelf, rechtvaardigheid zichzelf*. Plato noemt de fysieke wereld ook wel de wereld van "wording", omdat fysieke objecten onderhevig zijn aan verandering en corruptie. Ze worden beter en ze worden slechter. Wat op een dag mooi is, kan op een andere dag lelijk zijn. Dat wat eerbaar is, kan de andere keer gemeen worden. Terwijl in tegenstelling de vormen oneindig en onveranderlijk zijn op zichzelf. Schoonheid zichzelf was, is, en zal altijd hetzelfde blijven, terwijl individuele objecten daarentegen mooi zijn in overeenstemming met deze onveranderlijke standaard.

We hebben nu kort de ontologie van vormen van Plato besproken. Ontologie is een ander woord voor de zijnsleer. In de ontologie stelt men vragen als 'wat zijn dingen?', 'wat betekent bestaan?' etc. Maar er zit hieraan natuurlijk ook een

¹D.Th. Runia, Platonisme als filosofische stroming, Universiteit Utrecht, pagina 11, <http://igitur-archive.library.uu.nl/sg/2007-1115-200507/1-platonisme.pdf>

epistemologische kant aan vast. In de epistemologie vraagt men zich af hoe we van deze vormen op de hoogte zijn of kunnen begrijpen. Volgens Plato kunnen we de fysieke wereld bevatten volgens onze zintuigen. Hij noemt dit ook wel de wereld van "zicht en geluid". Terwijl wij vormen alleen met behulp van mentale processen kunnen 'zien'. Een citaat uit Plato's zesde boek *Politeia* geschreven omstreeks 380 v.Chr., geeft ons een beter beeld hierover:

"Let me remind you of the distinction we drew earlier and have often drawn on other occasions, between the multiplicity of things that we call good or beautiful or whatever it may be and, on the other hand, Goodness itself or Beauty itself and so on. Corresponding to each of these sets of many things, we postulate a single Form or real essence, as we call it further, the many things, we say, can be seen, but are not objects of rational thought; whereas the Forms are objects of thought, but invisible."

Laten we nu eens kijken naar de filosofie van de wiskunde van Plato. Plato dacht dat de manier waarop wij meetkundige stellingen begrijpen niet op dezelfde manier verloopt zoals wij empirische waarheden ontdekken, dus dat wil zeggen bevindingen die afhankelijk zijn van onze zintuigen. We kunnen geometrie en rekenkunde *a priori* bevatten. *A priori* betekent dat we alvorens we een beroep hebben gedaan op empirische bevindingen we een uitspraak kunnen doen over een probleem of een stelling. Dus we hoeven bijvoorbeeld stellingen in de geometrie niet te onthouden om geometrie te leren, maar we moeten wel kennis hebben van een aantal algemene regels(puzzelstukjes) en vanuit hier kunnen we zodoende de puzzelstukjes in elkaar passen totdat we uiteindelijk het probleem(puzzel) hebben opgelost. We kunnen dus *a priori* over problemen in de rekenkunde en geometrie beredeneren.

Een deel van de wiskundigen behoren tot de categorie van realisten. Deze wiskundigen denken dat wiskundige objecten en waarheden onafhankelijk zijn van de mens en voor altijd waar zijn. Dus functies, objecten en dergelijke concepten bestaan al voor het bestaan van de mens. Volgens Plato is het dan ook het geval dat mensen ooit veel kennis bezaten, maar nadat we op aarde terecht zijn gekomen moeten we dit kennis als het ware weer herontdekken.

De Amerikaanse wetenschapper Joseph Henry (1797 - 1878) verwoordt treffend de visie van Plato:

"The seeds of great discovery are constantly floating around us, but they only take root in minds well prepared to receive them."

Nu kunnen we in het realisme een onderscheiding maken tussen realisme in ontologie en realisme in waarheidswaarde. Realisme in ontologie betekent dat je aanneemt dat wiskundige objecten zoals nummers, functies en verzamelingen bestaan. Realisme in waarheidswaarde betekent (in mathematische logica) dat elk goedgeformuleerde zin een vaste waarheidswaarde heeft, ofwel waar of niet waar is.

1.2 De potentiële en actuele oneindigheid

De term 'oneindig' heeft veel wiskundigen eeuwenlang beziggehouden. Wat is oneindigheid nu? Aristoteles (384 - 322 v.Chr.), student van Plato, onderscheidde twee gevallen van oneindigheid, de actuele oneindigheid en de potentiële oneindigheid. De actuele oneindigheid is het idee dat getallen, of andere mathematische objecten samen een gehele totaliteit kunnen vormen, dus een verzameling van objecten. En als we het hebben over de werkelijke oneindigheid dan zijn wij genoodzaakt om oneindige entiteiten, zoals de verzameling van alle natuurlijke getallen of een oneindige rij van rationale getallen te benaderen als een object die al van te voren vaststaat. Dus de werkelijke oneindigheid is iets die compleet is en uit oneindig veel elementen bestaat, wat paradoxaal klinkt volgens Aristoteles, hetzij in theorie hetzij in de werkelijkheid. Want als wij over het complete hebben dan hebben we een duidelijk beeld van een hele verzameling, maar als het oneindig is dan kan er geen sprake zijn van een hele verzameling. Beschouwen wij de optelling in de natuurlijke getallen, dan wordt er met oneindige rijen of reeksen, potentiële rijen of reeksen bedoeld. Potentieel oneindige reeksen betekent dat je altijd een element op kunt tellen, en dit proces van elementen bij elkaar optellen raakt nooit uitgeput. Een goede voorbeeld hiervan wordt gegeven door de tweede axioma's van Euclides, de schrijver van het bekende geometrieboek 'De Elementen'. Deze luidt namelijk:

Elk eindig rechte lijnstuk kan continu worden verlengd.

2 Geschiedenis van de wiskunde rond het jaar 1900

Willen we een goed beeld hebben van de geschiedenis van het constructivisme dan zijn we genoodzaakt om een beroep te doen op de geschiedenis van de filosofie en op de geschiedenis van de wiskunde. De opvatting die men had in de wiskunde voor de grondslagenonderzoek was dat wiskundige kennis al los van de empirische wereld bestaat en dat wiskundige theorie steeds groeit omdat wiskundigen nieuwe waarheden ontdekken. Maar op een gegeven moment kwam er een eind aan deze opvatting door o.a. het ontdekken van een consistente niet-Euclidische meetkunde, terwijl men al meer dan 2000 jaar lang geen enkel moment aan deze waarheid durfde te twijfelen.

Nikolai Ivanovich Lobachevsky(1792-1856), János Bolyai(1802 - 1860) en Carl Friedrich Gauss(1777-1855) hadden onafhankelijk van elkaar de hyperbolische geometrie uitgevonden, maar ze hebben niet expliciet bewezen dat dit een niet-Euclidische meetkunde is, dus een meetkunde die niet gebruikt maakt van het parallelenpostulaat. Door deze ontdekking kwam men achter dat er wiskundige theorieën bestaan die in zichzelf consistent zijn, maar tegelijkertijd onverenigbaar zijn. De wiskundige fundamenteen waren hierdoor toe aan een grondige herziening en de grondslagenonderzoek deed zijn intrede vanaf het laatste kwart van de negentiende eeuw.²

Wij gaan kort behandelen welke drie stromingen er ontstonden in het grondslagenonderzoek. Alle wiskundigen in deze drie stromingen hadden een andere mening over op welk fundament wiskundige kennis gebaseerd moest worden. De drie grote stromingen waren:

- Het logicisme
- Het formalisme
- Het constructivisme

2.1 Het logicisme

Het logicisme is bedacht door Gottlob Frege(1848-1925) en uitgebreid door Bertrand Russell(1872-1970) samen met Alfred Whitehead(1861-1947). Frege's eerste werk, de '*Begriffsschrift*', gepubliceerd in 1879 is een inleidend boek over formele logische systemen. In dit boek legt Frege uit hoe een formele taal, dubbelzinnigheden en onregelmatigheden van de natuurlijke taal vermijdt en krachtig genoeg is om wiskundige problemen te formuleren. Zijn tweede werk '*Grundgesetze der Arithmetik*' gepubliceerd in 1884 is een boek dat de rekenkunde op een filosofische manier benadert.

Het derde werk, '*Grundgesetze der Arithmetik*', dat gesplitst is in twee delen werd respectievelijk gepubliceerd in 1893 en in 1903. Met dit boek ontstond in feite het logicisme en als doel werd gesteld om de wiskunde te herleiden uit de logica met o.a. behulp van kwantoren. Frege is een realist, en hij gelooft in

²E.Glas; in dictaat 'Wiskunde, maatschappij en methode', 2008, Technische Universiteit Delft

het realisme in waarheidswaarde. Dus hij neemt aan dat de logische waarheid absoluut is en dat deze onafhankelijk is van de mens.

De logicist heeft als doel om te laten zien dat de gehele wiskunde of maar een deel ervan uiteindelijk echt tot logica te herleiden is. Frege geloofde dat de rekenkunde te herleiden is tot de logica, maar niet noodzakelijkerwijs alle andere delen van de wiskunde. Volgens Frege is de meetkunde bijvoorbeeld niet te herleiden tot de logica, terwijl Russell en Whitehead dachten dat de gehele wiskunde te reduceren is tot de logica. Wat deze twee opvattingen in het gemeen hebben is dat wiskunde te herleiden is tot de logica en dat de logica een heel fundamenteel begrip is, dus niet alleen in de wiskunde maar ook in andere vakgebieden. Frege aan de ene kant en Russell en Whitehead aan de andere kant hadden een andere opvatting over het logicisme. Russell en Whitehead vonden niet dat de wiskunde waarheden onafhankelijk zijn van de mens, maar we moeten het op een voorzichtige manier construeren. Er zijn alleen een aantal logische technieken beschikbaar, en dit is onze gereedschap om wiskunde te doen. Dit zeggende toont aan dat Russell en Whitehead geen realisten zijn.

2.2 Het formalisme

De formalisten onder leiding van David Hilbert(1862 -1943) vonden dat niet de logische waarheid als uitgangspunt voor wiskundige zekerheid gekozen moest worden maar juist consistentie. Dus wiskunde moet uit consistente formele axioma's afleidbaar zijn volgens expliciete formele regels, d.w.z. zonder er de betekenis of interpretatie van de gebruikte symbolen bij te betrekken. De axiomas definiëren de wiskundige objecten impliciet. Bijvoorbeeld, een natuurlijk getal is ieder object dat aan een aantal opgestelde axioma's voldoet. Dus in het algemeen kan men zeggen dat de essentie van het formalisme het manipuleren van symbolen zijn. Als je weet dat $x = 8 + 2$, dan mag je ook stellen dat er $x = 10$ geldt. We zitten dan nog steeds op het speelveld van de rekenkunde. Dus wiskunde draait eigenlijk net als een spel om een aantal van te voren vastgestelde regels, en zolang je je maar binnen deze regels manoeuvreert, dan is elk stap gerechtvaardigd.

De wat behoudende formalisten vinden dat er een achterliggende betekenis kan bestaan bij wiskunde, maar deze achterliggende betekenis is wel irrelevant om wiskunde te doen, dus het mag niet op de een of andere manier wiskundige handelingen 'blokkeren'. Het voordeel van zulk soort wiskunde is dat men ontologische en epistemologische problemen ontwijkt. Want waar gaat wiskunde nou over? Niks. Wat zijn mathematische objecten? Zij bestaan niet, of we mogen ze als niet bestaand beschouwen. Hoe leert men wiskunde en wat is wiskundige kennis? Het gaat erom dat je de regels van het spel kent, of kennis hebt van bepaalde bewegingen die stroken met de regels van het spel.

Deze manier van wiskunde bedrijven stuitte Frege op het borst, want volgens Frege is het juist van belang dat het er in de wiskunde erom gaat dat je de waarheidswaarde van wiskundige stellingen achterhaald en niet de epistemologische problemen ervan omzeilt. Integendeel, juist dit epistemologische onderzoek is onontbeerlijk bij het rechtvaardigen van wiskundige waarheden.

In een citaat van Frege lezen we het volgende:

*"An arithmetic without thought as its content will also be without possibility of application. Why can no application be made of a configuration of chess pieces? Obviously, because it expresses no thought. If it did so and every chess move conforming to the rules corresponded to a transition from one thought to another, applications of chess would also be conceivable. Why can arithmetical equations be applied? Only because they express thoughts. How could we possibly apply an equation which expressed nothing and was nothing more than a group of figures, to be transformed into another group of figures in accordance with certain rules? [I]t is applicability alone which elevates arithmetic from a game to the rank of science."*³

Hilbert publiceerde in 1899 een werk genaamd *Grundlagen der Geometrie*. Dit werk was bijzonder want het stond voor het einde van de traditie die ooit begonnen was met Euclides waarin de meetkunde in een axiomatisch raam geplaatst werd. Hilbert vatte in zijn boek het werk van paar duizend jaar samen. Tegelijkertijd vernieuwde Hilbert door de axiomatische methode een moderne gedaante te geven. De moderne gedaante in dit geval is dat *"de axiomatische methode zijn elegantste belichaming in de predicaatlogica vindt."*⁴

In de jaren twintig aan het begin van de twintigste eeuw kwam Hilbert aan met de zogenaamde 'Hilberts programma' als een oplossing voor de grondslagencrisis in de wiskunde. Dit programma heeft als doel om de gehele wiskunde te formaliseren in een axiomatische raam, samen met het bewijs dat deze axiomatisering van wiskunde consistent is. Het bewijzen van de consistentie van de axioma's moet uitgevoerd worden door finiete methoden, oftewel eindige methoden. Gedurende vele eeuwen waren wiskundige bewijzen voor de 19e eeuw constructief, in die zin dat er weinig van de wet van bivalentie gebruik gemaakt werd en bewijzen daadwerkelijk vanuit constructieve gronden als een legitieme bewijs gold.

Maar nadat Hilbert in 1888 het bewijs van de zogenaamde Finite Basis stelling vond, een probleem bedacht door de Duitse wiskundige Paul Gordan (1837-1912) uit Gottingen, was dit het begin van een stroom van niet-constructieve bewijzen die de opvolgende decennia zou volgen. Ik ga nu uitleggen wat dit probleem inhoudt en waarom Gordan Hilberts zijn bewijs niet meteen positief ontving.

Een polynoom $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wordt homogeen genoemd als al zijn monomen van dezelfde totale graad zijn, dus bijvoorbeeld $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ of bijvoorbeeld $\sum_{i,k} a_{i,k} \cdot x_i \cdot x_k$ waarbij $a_{ik} = a_{ki}$. Nu wordt een polynomiale functie $f(a_\gamma)$ van de coëfficiënten van a_γ invariant genoemd als voor elk lineaire transformatie $x_i \rightarrow x'_i = \sum c_{ik} \cdot x_k$ alleen met een multiplicatieve constante veranderd $f(a'_\gamma) = \lambda(c_{ik}) \cdot f(a_\gamma)$. Nemen wij in dit geval $n = 2$, dus kwadratische vormen met twee in variabelen dan krijgen we $a_{11} \cdot x_1^2 + 2a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2$. De discriminant hiervan is $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$ en deze is invariant.⁵ Hilbert bewees

³[Stewart Shapiro, Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics, Oxford / Oxford UP., 2000, pag. 147]

⁴D. van Dalen, Filosofische grondslagen van de wiskunde, Van Gorcum, Assen/A'dam, 1978, pag. 54

⁵Vladik Kreinovich, Cantor's Paradise Regained, University of Texas, pag 182

nu dat voor alle n een eindige basis bestaat die invariant is. Zijn bewijs bevatte geen duidelijke constructie van de basis en het bestaan ervan was alleen met behulp van de bivalentiewet bewezen. Hilbert stuurde zijn bewijs op naar Het Duitstalige wiskundig tijdschrift *Mathematische Annalen* om zijn resultaten te publiceren. Omdat Paul Gordan toendertijd expert was op het gebied van invariantentheorie werd zijn mening gevraagd over Hilberts bewijs. Gordan had geen goed gevoel over de aanpak van het bewijs, hij vond dit te 'gedurfd' en bovendien had hij liever een bewijs met een constructief karakter gezien in plaats van een bewijs door tegenspraak. Het schijnt dat Gordan na het zien van Hilberts bewijs "*Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie*" geeft gezegd. Nadat Gordan het bewijs van Hilbert door had genomen, stuurde hij zijn commentaar op het bewijs van Hilbert naar Felix Klein (1849-1925) die toen redacteur was van de *Mathematische Annalen*. In zijn brief liet hij het volgende doorschemeren:

"The problem lies not with the form ... but rather much deeper. Hilbert has scorned to present his thoughts following formal rules, he thinks it suffices that no one contradict his proof ... he is content to think that the importance and correctness of his propositions suffice. ... for a comprehensive work for the Annalen this is insufficient."

Het is duidelijk dat Gordan geen genoegen neemt met een bewijs uit het ongerijmde. Hilbert, die door zijn wiskundige vriend op de hoogte werd gebracht over de brief die Gordan naar Klein stuurde was hiermee niet gecharmeerd en stuurde een brief waarin hij zijn ongenoegen toont over die afwijzing van Gordan. Het gaat als volgt:

"... I am not prepared to alter or delete anything, and regarding this paper, I say with all modesty, that this is my last word so long as no definite and irrefutable objection against my reasoning is raised."

Dus Hilbert vindt dat zolang er niemand is die iets tegen zijn bewijs in kan brengen, hij dan ook geen redenen heeft om zijn bewijs te veranderen. Klein zat hierdoor als het ware midden in het conflict tussen Gordan en Hilbert. Gordan was in die tijd de leidende expert op het gebied van de invariantietheorie en hij had ook vriendschappelijke banden met Klein. Maar aan de andere kant wist Klein dat het bewijs van Hilbert te belangrijk was om hem als nietig te verklaren en daarom beloofde hij Hilbert om het bewijs onveranderd te laten publiceren in de *Mathematische Annalen*.

Het bewijs van de Finite Basis stelling gaf aanleiding tot een stroom van niet-constructivistische bewijzen, bijvoorbeeld in Cantor's verzamelingenleer. Een goed voorbeeld hiervan is het bewijs dat er irrationale en transcendente getallen bestaan die met behulp van het diagonaalbewijs van Cantor worden geconstrueerd. De formalisten vonden dat bewijzen niet per se constructief van aard hoefde te wezen, maar ook existentialiteit van de oplossing was voldoende.

2.3 Het constructivisme

De discussie tussen klassieke en constructivistische wiskunde werd al gevoerd ten tijde van het oude Griekenland. De Griekse wiskundige Archytas uit Tarentum (428 - 347 v.Chr.) merkte de tweespalt tussen geometrische en rekenkundige bewijzen op. Een citaat van Archytas van rond 175 v.Chr. luidt:

"Niet de geometrie, maar de rekenkunde alleen zal zorgen voor een bevredigend bewijs."

Door de eeuwen heen zien we constructieve en klassieke methoden verschijnen. De Pythagoraanse school probeerde de gehele wiskunde op getallen te baseren. Nadat Plato zijn werk over Vormen heeft geïntroduceerd, wat overigens een idealistische benadering is die de gehele klassieke wiskunde doordringt, geloofden veel mensen dat wiskundige waarheden onafhankelijk bestaan van de mens.

Daarna systematiseerde Aristoteles de logica en hij kwam aan met de term 'wet van de uitgesloten derde', die zegt dat een uitspraak geldt of niet geldt. Het is interessant om eens naar twee belangrijke oude constructieve bewijzen te bekijken, namelijk het bewijs dat $\sqrt{2}$ irrationaal is en dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Het bewijs dat $\sqrt{2}$ is irrationaal vertelt ons niks over de existentie van een object maar het vertelt ons alleen over de onmogelijkheid van iets. Het bewijs van Euclides dat er oneindig veel priemgetallen bestaan is een bijzonder constructief voorbeeld, want hij vertelt ons hoe we een ander priemgetal kunnen vinden als we een zekere verzameling hebben van priemgetallen. In principe vertelt Euclides ons hoe je een ander priemgetal kunt vinden als er drie priemgetallen gegeven zijn, waarbij deze drie priemgetallen natuurlijk een eindige verzameling is.

Zoals geschreven in de inleiding is het ontstaan van het constructivisme een reactie op de steeds groeiende groep wiskundigen die menen dat de wiskunde als een realistische vakgebied binnen de wetenschap beschouwd moet worden. De wiskundige die tot zover bekend als eerste constructivistische "trekjes" vertoonde was de Duitse wiskundige Leopold Kronecker (1823 - 1891). Menigeen kent Kronecker als een wiskundige die zijn bijdrage heeft geleverd aan getaltheorie en algebra. Kronecker had als doel voor ogen om analyse en algebra te aritmetiseren, als onderdeel van zijn aritmetisatieprogramma. Na al zijn wiskundige werken trok hij de conclusie dat men kan spreken over een bewijs van een stelling als je het op een combinatorische methode bewijst. Het volgend citaat van Kronecker vertelt ons meteen dat hij een antirealist is.

"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."

Oftewel alleen de natuurlijke getallen mogen als gegeven beschouwd worden want deze is geconstrueerd door god, maar alle andere mathematische objecten moeten met behulp van natuurlijke getallen bewezen worden.

De wiskundigen die na Kronecker ook min of meer pleitten voor het bewijzen van stellingen op een constructivistische manier waren bijvoorbeeld Henri Lebesgue (1875-1941), Émile Borel (1871-1956) en René Baire (1871-1932). Deze wiskundigen waren geen hardline constructivisten maar om precies te zijn semi-intuitionisten. *"De semi-intuitionisten denken dat wiskundige objecten alleen be-*

staan als wij ze mentaal kunnen construeren oftewel als we met behulp van onze intuïtie deze objecten kunnen bevatten, zelfs als deze objecten onafhankelijk bestaan van de mens.” ⁶

Een ander belangrijke wiskundige in de ontwikkeling van het constructivisme is de wiskundige Henri Poincaré (1854 - 1913). Poincaré was een fel tegenstander van Cantor's verzamelingenleer. Waar Poincaré voor streed was dat intuïtie een grotere rol moet spelen binnen de wiskunde. In zijn boek schrijft hij dat er drie soorten intuïties bestaan, namelijk het beroep die de wiskundige doet op zijn zintuigen, het veralgemeniseren van de inductie en de intuïtie over gehele getallen. Volgens Poincaré garandeert de intuïtie over de gehele getallen de precisie van wiskundige kennis. ⁷

- Hij zorgde ervoor dat er een actieve discussie ontstond over de rol van de intuïtie binnen de wiskunde. Volgens Poincaré zorgt deze intuïtie voor de volledige inductie van gehele getallen, die volgens hem ook wel te begrijpen zijn door middel van "synthetisch a priori". Op het begrip synthetisch a priori gaan we in de volgende hoofdstuk verder in.
- Volgens Poincaré ontstonden de paradoxen in de verzamelingstheorie alleen wegens het toelaten van impredicatieve definities. Wil men onduidelijkheid en in het ergste geval - een paradox - voorkomen dan moeten definities predicatief zijn.

Een definitie van een mathematisch entiteit is impredicatief als het refereert naar een verzameling die de gedefinieerde entiteit bevat. Een goed voorbeeld hiervan is bijvoorbeeld de metaforische uitspraak 'een groot generaal', dat gedefinieerd is als een militaire persoon met als rank generaal en die groot is (d.w.z. belangrijk, bekend). Nu is deze definitie een circulair, want als we eerst de betekenis van de termen "generaal" en "groot" niet weten dan weten we alsnog niet wat de definitie ons nou wil vertellen. Interessant om te weten is dat Russell ervoor pleitte om definities zo helder en begrijpbaar mogelijk te maken door ze van een predicatief karakter te voorzien. Dus definities moeten termen bevatten die verwijzen naar geheel andere objecten of concepten.

Nu weer terug naar Poincaré. Poincaré begon een aanval op het gebruik van impredicatieve definities met daarachter het idee dat wiskunde niet onafhankelijk bestaat van de mens. Een logisch gevolg van deze denkwijze impliceert dat Poincaré vanzelfsprekend niet gelooft in de actuele oneindigheid maar in het enige alternatief, namelijk de potentiële werkelijkheid. Al met al lijkt Poincaré op een bepaald manier ook een constructivist te zijn. Want hij zegt dat de methode van volledige inductie een onbewijsbare feit is, pleit voor een grotere rol van de intuïtie binnen de wiskunde en hij wijst de actuele oneindigheid af. Tevens heeft hij zich met deze uitspraken aangetoond dat hij een antirealist is.

⁶A.S. Troelstra, Constructivism in Mathematics in the 20th century, pag. 5,
<http://staff.science.uva.nl/~anne/hhhist.pdf>

⁷Ibid., pag 4

2.3.1 L.E.J. Brouwer

Gedurende deze strijd tussen de semi-intuïtionisten, formalisten en logicisten die zich afspeelde grofweg tussen de jaren 1880-1910, dook er een Nederlands wiskundige op, namelijk L.E.J. Brouwer (1881 -1966). Brouwers ideeën en zijn mening over wiskundige zaken leidden uiteindelijk tot een systematische afscheiding van de overige stromingen en hierdoor ontstond het intuïtionistische school, waarin er over wiskunde en filosofie gediscussieerd werd. Toen Brouwer in 1907 zijn thesis met als titel "Over de grondslagen der wiskunde" schreef, had hij duidelijk een stevigere stelling genomen in vergelijking met de semi-intuïtionisten over de rol van intuïtie binnen de wiskunde. Met de betrekking van de intuïtie binnen de wiskunde, komt daar automatisch ook het filosofisch aspect om de hoek kijken. Brouwer dit uitgebreid behandeld in zijn boek 'Leven, Kunst en Mystiek', uitgebracht in 1905. Grofweg kan men Brouwers standpunten samenvatten in een aantal punten namelijk:

- Wiskunde is onafhankelijk van gebeurtenissen die plaatsvinden in de buitenwereld (d.w.z. buiten de gedachten) en tevens is wiskunde onafhankelijk van talen. Mentale constructies die men bouwt bij het bedrijven van wiskunde zijn voor elke persoon uniek en twee of meerdere mensen kunnen dus nooit exact dezelfde gedachteconstructies hebben. Hun constructies zijn aan elkaar verwant, maar niet precies hetzelfde.
- Wiskunde is geen onderdeel van de logica, zoals Frege het bijvoorbeeld ziet. Het omgekeerde is juist waar, de logica is afhankelijk van de wiskunde.
- Wiskunde gaat over de gedachteconstructies van de wiskundige. De taal-loze mentale constructies zijn exact, maar deze exactheid gaat verloren bij communicatie. Dus de taal waarin men over de wiskunde communiceert is niet exact, alleen de intramentale constructies van de wiskundige kan met recht exacte wiskunde genoemd worden.

D. Van Dalen⁸verwoordt heel mooi de rol van de taal in de wiskunde volgens Brouwer:

"Alle storende invloeden, voornamelijk de onnauwkeurige natuurlijke taal, zijn geweerd en men heeft de ideale vorm van het zuivere redeneren bereikt. Voor de intuitionist is echter tegelijk met het badwater het kind weegegooid. Immers de wiskundige is bij dit proces vervangen door het begeleidende taalgebouw en de inhoudelijke wiskundige begrippen zijn vervangen door rijen tekens. Echter, de taal van de wiskundige is iets anders dan de wiskunde zelf, slechts "een gebrek-kig hulpmiddel voor de mensen om wiskunde aan elkaar mee te delen en hun geheugen voor de wiskunde te ondersteunen" [Brouwer 1907].

Brouwer beschuldigde de logicisten ervan om de wiskunde ondergeschikt te beschouwen met logica. Brouwer uitte ook zijn kritiek op de formalisten omdat de wiskunde op die manier vereenvoudigd wordt door woordspelletjes, die je zonder enige betekenis aan elkaar moet zien te verbinden totdat je op een resultaat uitkomt. Dit vernietigt de wiskundige geest om zich met het echte wiskunde bezig te houden.

Zoals wij weten was de denkwijze van Hilbert dat indirecte bewijzen (d.w.z. waar je het bewijs niet construeert) ook geldige bewijzen zijn en dit werd ook algemeen geaccepteerd bij wiskundigen. Nu vond Brouwer dat de oorspronkelijke betekenis van de existentialiteit niet betekent dat je de oplossing niet perse hoeft te construeren. Maar dan concludeerde hij, dan moet men de betekenis van de existentielle kwantor veranderen, zodat je kunt zeggen dat $\exists xP(x)$ betekent dat je x kunt construeren waarvoor $P(x)$ waar is en niet dat er alleen geldt dat er een x bestaat. Volgens Brouwer is het belangrijk dat intuïtie ook een rol krijgt in de wiskunde en hij noemde zijn wiskundige methodiek dan ook 'intuitionistisch'. Hij vindt dat het belangrijk is voor de wiskundige om zijn intuïtie te gebruiken bij het oplossen van problemen en vinden van bewijzen, in plaats van dat je vantevoren bepaalde formele constructies gebruikt moeten we ook naar onze intuïtie luisteren. Dit is vooral het geval voor wiskundigen die geïnteresseerd zijn in de toegepaste wiskunde en dus daadwerkelijk oplossingen moeten kunnen vinden. In de toegepaste wiskunde is het vooral van belang dat men oplossingen van vergelijkingen vindt in plaats van dat er aangetoond wordt dat een oplossing bestaat. Een citaat die één van Brouwers uitgangspunten verwoorden zijn:

"De eerste handeling van het intuitionisme maakt een volledige scheiding tussen wiskunde en de wiskundige taal. ... wiskunde is een taalvrije activiteit van de geest die zijn oorsprong heeft in het fundamentele verschijnsel van waarneming van tijdsbeweging, die uit elkaar vallen van een levensmoment in twee verschillende dingen, waarvan de een plaats maakt voor de ander, maar bewaard wordt door het geheugen. Als de zo ontstane tweehed ontdaan wordt van elke eigenschap, blijft het gemeenschappelijke substratum van alle tweeheden over, de geestelijke schepping van de lege tweehed. Deze lege tweehed en de twee eenheden waaruit het is samengesteld, vormen de fundamentele wiskundige systeem. En de fundamentele operatie van wiskundig construeren is de schepping in de

⁸Ibid. 4, pag. 31

geest van de tweeheid van twee wiskundige systemen die reeds eerder verkregen waren, en het opvatten van deze tweeheid als een nieuwe wiskundig systeem. Door introspectie ziet men in hoe deze basis-operatie on het voortdurend vasthouden zonder verandering in het geheugen, achtereenvolgens elk natuurlijke getal genereert, evenals de oneindig voortlopende rij van natuurlijke getallen, willekeurige eindige en oneindig voortlopende rijen van wiskundige systemen die reeds verkregen waren.”

Wat we hier uit kunnen halen is dat Brouwer stelt dat natuurlijke getallen geconstrueerd worden als we alle eenheden bijeenvoegen in ons geest. De eerste paar regels van Brouwers thesis luiden als volgt:

”Een, twee, drie , ..., de rij deze klanken kennen we uit ons hoofd als een reeks zonder einde, dat wil zeggen die zich altijd door voortzet volgens een als vast gekende wet”[Brouwer; Over de grondslagen der wiskunde; 1907].

Volgens Hesseling⁹ moeten we opmerken dat Brouwer’s natuurlijke getallen een onvoltooide rij is en geen oneindige verzameling. Verder neemt Brouwer de aanname dat de gehele getallen intuïtief in ons zit, d.w.z. we hebben een intuïtieve gevoel over de mechanica van de natuurlijke getallen. Hij definieert negatieve getallen als ”naar links’ tellen en rekenoperaties op positieve en negatieve getallen ”in twee richtingen”[Brouwer’s thesis uit 1907]. Wat Brouwer nu voor ogen stond was om de regels van de klassieke logica zodanig te wijzigen dat deze voldoet aan het intuïtionisme. Brouwer kwam pas in 1908, na het schrijven van zijn thesis achter dat men de klassieke logica om moest vormen tot de intuïtionistische logica.

De eerste belangrijke stap naar het systematiseren van het intuïtionistische logica is de ontdekking dat $\neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$ is. [Brouwer; Intuitionistische Zerlegung mathematischer. Grundbegriffe; 1924]. In hoofdstuk 4 leggen we dit onderwerp uit. Vanaf deze periode begon Brouwer met zijn Brouwer’s programma. Hij merkte bijvoorbeeld op dat de wet van de uitgesloten derde $\Phi \vee \neg\Phi$ intuïtionistisch gezien niet voldoet. Laat nu P een eigenschap zijn van de gehele getallen en beschouw de propositie dat er een getal a bestaat zodanig dat er P van a bestaat. Dit kunnen wij ook noteren als $\exists aP(a)$. Volgens Brouwer en zijn volgelingen is deze propositie ongeldig, mits je erbij vertelt hoe we het getal a kunnen construeren die de desbetreffende eigenschap P heeft. In dezelfde trant voor het geval dat we de negatie van Λ nemen, kortweg $\neg\Lambda$. Nu kunnen wij alleen de propositie $\neg\Lambda$ definiëren als we kunnen construeren dat Λ een tegenspraak oplevert. En tevens kunnen we alleen $\neg\neg\exists aP(a)$ definiëren als we op een constructieve wijze kunnen laten zien dat $\neg\exists P(a)$ ook een tegenspraak oplevert. Het is eigenlijk wel duidelijk dat als we een tegenspraak willen krijgen van de uitspraak $\neg\exists aP(a)$ dan moeten we niet een getal a construeren zodanig dat $P(a)$ geldt. We kunnen dus een tegenspraak concluderen en alsnog geen idee hebben wat het getal a kan zijn. Dus Brouwer vond hierom dat de dubbele negatie eliminatie een ongeldige handeling is. Een ander voorbeeld, stel we beschouwen de uitspraak $A \vee B$. Deze uitspraak kunnen we interpreteren als: we weten A of we weten B , maar

⁹Dennis E. Hesseling, Gnomes in the Fog: The Reception of Brouwer’s Intuitionism in the 1920’s, , Historical Studies, vol. 28, Birkhäuser, Basel, 2003

omdat we de waarheidswaarde van een algemeen uitspraak Φ niet weten, is de wet van de uitgesloten derde hierdoor niet waar.

Brouwer kreeg vooral in Nederland volgelingen, want zijn boeken voor het grote publiek waren pas voor het eerst halverwege de jaren 70 naar het Engels vertaald. Maar dat wil niet zeggen dat er geen grote wiskundigen waren die met Brouwer streden voor een intuïtionistischere aanpak van problemen. Het intuïtionisme begon meer aanzien te krijgen toen Brouwer na de jaren 20 van de twintigste eeuw college begon te geven in verschillende Europese steden.

De wiskundige die een belangrijke bijdrage heeft geleverd aan de intuïtionistische logica is de Rus Andrej Nikolajevitsj Kolmogorov (1903 - 1987), die aantoonde dat de intuïtionistische logica een deelverzameling is van de klassieke logica in 1925. Hoe hij dit heeft gedaan was door elke uitspraak in de klassieke logica op te vatten als $\neg\neg\Phi$. Dus een uitspraak als $\Phi \wedge \Lambda$ zou geïnterpreteerd moeten worden als $\neg\neg(\neg\neg\Phi \wedge \neg\neg\Lambda)$. Nu is dit stap gerechtvaardigd om de volgende reden. We weten uiteraard dat er in de klassieke logica geldt dat als Φ een welgeformuleerde uitspraak is, dan mogen we uit niet niet Φ de conclusie Φ trekken, in de logica ook wel geschreven als $\neg\neg\Phi \vdash \Phi$.

Volgens de classicist is dit helemaal waar maar intuïtionistisch gezien is deze denkwijze niet geldig. Want in de intuïtionistische logica is het niet belangrijk om te weten of een uitspraak waar is of niet, maar we moeten ook weten of het waar is of niet. Waarheid is volgens de intuïtionisten ook wel *beperkt onder epistemologie*, in het Engels '*epistemically constrained*'¹⁰. Dus als we niet weten dat we Φ niet weten, dan volgt er niet Φ . Maar men mag wel $\Phi \vdash \neg\neg\Phi$ concluderen. Want als wij Φ weten, dan volgt hieruit dat dat we weten dat het niet het geval is dat we Φ niet weten. En dit klinkt voor ons gezond verstand veel aannemelijker dan het eerste geval.

2.3.2 Arend Heyting

De wiskundige die ook een belangrijke bijdrage had in het formaliseren van intuïtionistische logica was een student van Brouwer, Arend Heyting (1890-1980). Deze formalisering van de intuïtionistische logica wordt ook wel Heyting calculus genoemd. Heyting suggereerde dat wegens de metafysische aannames waarop klassieke logica is gebaseerd, namelijk realisme in waarheidswaarde, de taal van de klassieke wiskunde (d.w.z. wiskunde dat op klassieke logica is gefundeerd) het best begrepen kan worden in termen van objectieve waarheidscondities. Omdat de intuïtionist de bivalentie wet afwijst kunnen ze hierdoor niet dezelfde beredenering volgen als de classicist, namelijk om te kijken naar de objectieve waarheidscondities alleen. In plaats daarvan zou de intuïtionist moeten kijken naar zogenaamde bewijsvoorwaarden. Toen Heyting in 1925 promoveerde bij Brouwer met het proefschrift genaamd '*Intuitionistische axiomatiek der projectieve meetkunde*', zorgde hij voor een belangrijke bijdrage aan de Brouwer Programma die niet door Brouwer zelf geschreven was.

¹⁰Michele Friend; Introducing philosophy of mathematics; Acumen Publishing Limited, 2007, pag 107

Daarnaast heeft Heyting een aantal regels opgesteld in 1930 ¹¹, en deze regels samen worden nu ook wel de 'Heyting semantiek' genoemd. Ze luiden als volgt:

- Een bewijs voor de uitspraak in de vorm van ' Φ en Λ ' bestaat uit een bewijs van Φ en een bewijs van Λ
- Een bewijs voor de uitspraak in de vorm van ' Φ of Λ ' bestaat uit een bewijs van Φ of een bewijs van Λ
- Een bewijs voor de uitspraak in de vorm van ' Φ dan Λ ' bestaat uit de methode om elk bewijs van Φ te transformeren naar een bewijs van Λ
- Een bewijs voor de uitspraak in de vorm van ' $\text{niet } \Lambda$ ' bestaat uit een procedure om elk bewijs van Λ te transformeren naar een bewijs van Reductio ad absurdum. Met andere woorden, een bewijs van ' $\text{niet } \Lambda$ ' is een bewijs dat er geen bewijs kan bestaan van Λ
- Een bewijs voor de uitspraak in de vorm ' $\text{voor alle } x, \Lambda(x)$ ' bestaat uit een procedure om met elk gegeven x een bewijs te produceren van elke corresponderende uitspraak $\Lambda(x)$
- Een bewijs voor de uitspraak ' $\text{er bestaat een } x \text{ zodanig dat } \Lambda(x)$ ' bestaat uit de constructie van een object n en een bewijs van de corresponderende $\Lambda(n)$

Wat we op moeten merken bij het nalopen van deze regels is dat er bijvoorbeeld bij de uitspraak ' Φ of Λ ' geen grondige bewijs bestaat tenzij iemand een bewijs heeft van een van deze uitspraken. Kortweg kunnen we geen bewijs hebben van een instantie van de wet van de uitgesloten derde ' Λ of niet- Λ ' tenzij je een bewijs hebt van Λ of als je een bewijs hebt dat er geen bewijs van Λ kan bestaan.

Door de mathematische theorieën van Brouwer te formaliseren werd Heyting plotseling bekend als een expert op het gebied van het intuïtionisme. Er schuilt een goede reden achter dit succes. Brouwer probeerde zijn intuïtionisme hevig te laten beïnvloeden door metafysische kenmerken en dit schrok de wiskundigen als het ware af. Deze formalisatie van Heyting was het eerste stap om het intuïtionisme en de klassieke logica op een lijn te stellen. Omdat Brouwer failliekant tegen was om de wiskunde een formalistisch karakter toe te wijzen, had hij hierdoor mogelijk de indruk gewekt dat het koppelen van intuïtionistische en klassieke theorieën onmogelijk was.

¹¹A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik II, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (phys.-math. Klasse), Berlin, pag. 57-71

Een citaat van Troelstra laat goed de verschillende posities zien waarin Brouwer en Heyting zich bevonden ten opzichte van het grote publiek:

*"Een zeer belangrijke bijdrage leverde Heyting ook aan het expliciet maken van een intuïtionistische zinvolle interpretatie van de logische operaties, in diverse publicaties uit de periode 1930-1945. Uit dit werk bleek dat Heyting een der zeer weinigen was die Brouwer's gedachtengang hadden begrepen, terwijl hij bovendien in staat was die op heldere, niet-polemische en nuchtere wijze uiteen te zetten. Brouwer zelf presenteerde zijn ideeën in een stimulerende, maar vaak ook moeilijk verstaanbare vorm, als een frontale aanval op de klassieke wiskunde, waardoor hij veel weestanden opriep."*¹²

Dit is misschien de reden waarom de discussie tussen Hilbert en Brouwer op de klippen liep. Hilbert zag Brouwer als een waardige tegenstander in het begin, maar in de loop der tijd stelde hij zich defensief op tegen de ideeën van Brouwer. Hij meende dat de constructieve analyse te veel van het goede loslaat om de wiskunde te laten ontwikkelen. Zijn gedachtegang over het constructivisme is dan ook goed weergegeven in zijn citaat:

"Taking the principle of excluded middle from the mathematician would be the same, say, as proscribing the telescope to the astronomer or to the boxer the use of his fists. To prohibit existence statements and the principle of excluded middle is tantamount to relinquishing the science of mathematics altogether."

of in deze:

"No one will drive us from the paradise which Cantor created for us"

Dus zonder gebruik te maken van de wet van de uitgesloten derde is het volgens Hilbert niet mogelijk voor wiskundigen om nieuwe wiskundige waarheden te ontdekken. Dat de ruzie tussen Hilbert en Brouwer zelfs blijktbaar om persoonlijke redenen schiedde was te zien aan het feit dat Hilbert, Brouwer ontsloeg uit de redactie van de *Mathematische Annalen*.

Heyting baseerde zijn intuïtionistische logica op basis van de gehele getallen, en de voordelen waren volgens hem als volgt:

- Het is makkelijk te begrijpen door een persoon die een minimum aan onderwijs heeft gehad.
- Het is een universeel systeem toepasbaar in processen waar aritmetische bewerkingen te pas komen.
- Het is het fundamen van de constructieve analyse.

Heyting en Brouwer hadden we dezelfde visie over wat de positie van de logica is vergeleken met de wiskunde als een aparte natuurwetenschap. Het volgende

¹²A.S. Troelstra, Levensbericht A. Heyting, Jaarboek, 1980, Amsterdam, pp. 172-175

is een citaat van Heyting die zijn opvatting over de logica weergeeft:

*"Logic is not the ground on which I stand. How could it be? It would in turn need a foundation, which would involve principles much more intricate and less direct than those of mathematics itself. A mathematical construction ought to be so immediate to the mind and its result so clear that it needs no foundation whatsoever"*¹³

Dus op het gebied van logica komen Brouwer en Heyting dicht in de buurt om op te merken dat wiskunde het fundament is van de logica en niet andersom.

2.3.3 Errett Bishop

De persoon die ten slotte een grote invloed had in de geschiedenis van het constructivisme is de Amerikaanse wiskundige Errett Bishop(1928-1983). Bishop heeft in 1967 een belangrijk boek geschreven met de titel *Foundations of Constructive Analysis*. Wat Bishop in dit boek heeft gedaan is dat hij de wiskunde van de klassieke analyse om heeft gezet in de constructivistische(lees: wiskunde met intuïtionistische logica en rekenkunde erin verwerkt) analyse. Kortweg houdt dat in dat Bishop geprobeerd heeft om de klassieke bewijzen die een "existentieel" karakter hebben te verwijderen en in plaats daarvan een constructief bewijs te geven.

Oorspronkelijk anticipeerde Bishop om op de impliciete uitdaging van Hilbert in te gaan, uitgaande van wat Hilbert gezegd heeft:

"What Weyl and Brouwer do amounts in principle to following the erstwhile path of Kronecker: they seek to ground mathematics by throwing overboard all phenomena that make them uneasy [for example, the law of excluded middle] if we follow such reformers, we run the danger of losing a large number [infinite-number] of our most valuable treasures." ¹⁴

Bishop en een andere collega wiskundige Douglas Bridges hebben samen en onafhankelijk van elkaar deze uitdaging aangenomen en ze hebben vrij een groot deel van de klassieke analyse om kunnen zetten in constructivistische analyse.¹⁵

Als eerst heeft Bishop een uitgebreid boek over de constructivistische analyse geschreven, maar in 1985 is er een revisie van dat boek met de naam *Constructive Analysis* uitgebracht waarbij hij samen heeft gewerkt met Douglas Bridges. Bishop en Douglas Bridges hebben met het schrijven van dit boek willen aantonen dat er geen sprake is van 'verlies' als we wiskunde op een constructivistische manier doen, zoals Hilbert dat stelde maar juist van 'winst' in duidelijkheid, toepasbaarheid en precisie.

¹³Arend Heyting, Intuitionism. An introduction, 1956, pag. 6

¹⁴David Hilbert, quote in *Philosophia Mathematica*, 6, 1998, pag. 2

¹⁵Ibid. 10, pag.124

2.4 Kritiek op de constructivistische analyse

Wiskundigen die kritiek hadden (en hebben) op het constructivisme denken dat wiskundige kennis opgebouwd op een constructivistisch fundament, te langzaam groeit en ook nog te moeizaam is om te volgen. Wiskundigen zoals Hilbert zagen vooral dat het constructivistisch benaderen van wiskundige problemen ervoor zorgt dat de wiskunde wordt afgebroken. Dat kwam dan vooral vanwege de omslachtige methodiek die door Brouwer werd gebruikt om wiskunde te doen en door het ontnemen van een belangrijke gereedschap in de klassieke wiskunde, namelijk de wet van de uitgesloten derde. Ook wiskundigen als Hermann Weyl (1885-1955) die zich voor een korte tijd had bekeerd tot het intuïtionisme, zag op een gegeven moment in dat er te weinig middelen bestaan in de constructivistische analyse en logica om wiskunde op een hoger niveau te beoefenen. Hermann Weyl schrijft in 1928:

*"De wiskunde verkrijgt met Brouwer de hoogste intuïtieve helderheid. Het lukt hem de beginstukken van de analyse op natuurlijk wijze te ontwikkelen en daarbij het contact met de aanschouwing veel nauwer te behouden als voorheen. Maar men kan niet ontkennen, dat bij het vorderen naar hogere en algemenere theorieën de ontoepasbaarheid van de simpele principes van de klassieke logica uiteindelijk een nauwelijks te dragen moeizaamheid ten gevolge heeft. Met pijn ziet de wiskundige het grootste deel van zijn torenbouwswel, dat hij met stevige blokken gemetseld had dacht, in nevel oplossen"*¹⁶

Daarnaast is het ook een soort van attitude probleem mijns inziens. Een deel van de classicisten denkt dat constructivisten zo gefixeerd zijn op het weglaten van de wet van de uitgesloten derde dat het lijkt alsof ze zich schuldig maken aan een soort van propaganda, en ook proberen ze hun eigen ideeën op te dringen aan andere wiskundigen. Dit zal niet voor elke classicist zo zijn geweest, maar naar mijn mening is dat wel hoe het door een deel van hen is ervaren. Een deel van de kritiek komt van de constructivisten zelf, zoals Heyting.

*"Heyting claims that constructivism avoids paradoxes- but he admits that constructivism is more restrictive than would really be necessary to avoid them."*¹⁷

Daarnaast is er een belangrijke vraag waarop classicisten en constructivisten een ander antwoord op moeten geven, namelijk het antwoord op de vraag 'welke stellingen moeten we bewijzen?'. De classicist vindt dat zijn bewijs voldoende is voor het oplossen van het probleem en dat de constructivist onnodig de details wil weten terwijl dat geeneens gevraagd wordt of nodig is. De constructivist denkt daarentegen dat het bewijs van de classicist een soort deelprobleem heeft opgelost namelijk het bestaan van een oplossing of het ontkennen ervan, en die op zich wel nuttig kan zijn in een constructief bewijs maar alleen aan het begin van het bewijs, want het uiteindelijke doel is toch om de oplossing te kunnen construeren.

Het antwoord van de constructivist op de vraag die hierboven wordt gesteld is: 'stellingen met een numerieke inhoud'. De reden hiervoor is dat mensen eindig

¹⁶Ibid. 4, pag. 32,

¹⁷M.Maloney, Constructivism: a realistic approach to math?, The University of Chicago, pag.17, <http://theory1.net/Constructivism-A-Realistic-Approach-to-Math-download-w2103.pdf>

zijn, en hierdoor zijn wij ook alleen geïnteresseerd in bewijzen die in een eindige procedure opgelost kunnen worden. Dus hierin wordt ook meteen duidelijk dat constructivisten tegen het idee van een actuele oneindigheid zijn, want wiskunde is een mentale activiteit van de mens. Vanaf het begin van ons leven hebben we duidelijk een intuïtief gevoel over de natuurlijke getallen en de inductie van de gehele getallen. En dat is tevens de reden waarom de constructivisten anti-realisten zijn, zij geloven niet in een wiskunde die al voor de mensheid al bestond. Daartegenover hebben we de realisten die vinden dat de wiskundige waarheid bestaat, maar zich alleen moet openbaren aan ons. En alleen het nauwgezet volgen van axioma's zonder het toevoegen van enige intuïtie zou ons moeten helpen om de wiskundige waarheden te ontdekken.

3 Filosofie van de constructieve wiskunde

Nu zal ik in dit hoofdstuk voornamelijk in gaan op het constructivistisch gedachtegoed van Brouwer en zijn filosofie erachter. In verschillende bronnen worden de termen 'constructivisme' en 'intuitionisme' door elkaar gebruikt. Dat komt vooral omdat in de tijd van Brouwer bijvoorbeeld, mensen die Brouwer's theorieën opvolgden intuitionisten werden genoemd, maar halverwege de twintigste eeuw is de groep die pleit voor intuitionistische wiskunde, maar zonder daarbij behorende metafysische en of de omslachtige filosofische aspecten erbij te betrekken, gegroeid. Zo ontstond het begrip 'constructivisten' min of meer. Er zijn mensen die bijvoorbeeld Brouwer's opvolgers bestempelen als 'radicale' constructivisten en Bishop's volgelingen als 'liberale' constructivisten. Omdat ik niet te diep in wil gaan op dit taalspelletje kies ik ervoor om het constructivisme in de tijd van Brouwer, 'intuitionisme' te noemen en het constructivisme in de tijd van Bishop en later perioden 'constructivisme'.

Laat ik beginnen bij Bishop. Wat Bishop zijn werk zo bijzonder maakt is dat het op wiskundige vlak een niet al te groot verschil heeft met het werk van de classicisten. Met de term 'classicisten' duid ik de term aan voor wiskundigen die de wiskunde doen waarin klassieke regels en logica erin verwerkt zijn. Het enige verschil van de classicisten met de constructivisten is dat de constructivisten de wet van de uitgesloten derde en de daaruit deriverende regels uitsluiten.

Als we eens kijken naar het eerste hoofdstuk van Bishop's zijn boek 'Foundations of Constructive Analysis', dan zien we dat hij de volgende drie onderwerpen analyseert:

- De aard van wiskunde.
- Waarom schiet de klassieke wiskunde tekort?
- Hoe kunnen we de aard van de echte wiskunde zien?

Bishop's merkt vervolgens in dit boek het volgende op:

*"The primary concern of mathematics is number, and this means the positive integers. We feel about number the way Kant felt about space. The positive integers and their arithmetic are presupposed by the very nature of our intelligence and, we are tempted to believe, by the very nature of intelligence in general."*¹⁸

Bishop zegt hier dat de positieve gehele getallen onafhankelijk zijn van empirische bevindingen en volledig afhankelijk is van onze aard van onze intelligentie. Hij betreft de Duitse filosoof Kant erbij¹⁹ om te vertellen dat hij de gehele getallen hetzelfde beschouwt als hoe Kant de ruimte beschouwt. Volgens Kant kunnen we kennis over uitspraken opdelen in twee soorten, namelijk analytisch en synthetisch. Analytische kennis kunnen we verkrijgen door de termen te analyseren die in een uitspraak voorkomen. Bijvoorbeeld 'Alle nonnen zijn vrouwen'. Natuurlijk hoeven we niet op pad te gaan om te kijken of nonnen daadwerkelijk vrouwen zijn, maar het is gewoon het concept in onze taalsysteem dat nonnen vrouwen moeten zijn.

Daarentegen hebben we synthetische kennis. Stel dat we de volgende uitspraak hebben 'sommige nonnen zijn jonger dan het kind van hun broer(s) of zus(sen)'. Deze uitspraak is afhankelijk van hoe zaken in de werkelijkheid zijn, dus we kunnen de waarheid hier niet ontdekken door gewoonweg de termen die in de uitspraak voorkomen te analyseren, maar je moet dan gaan onderzoeken of de uitspraak ook daadwerkelijk waar is. Een synthetisch a priori kennis bestaat uit een uitspraak die informatie moet bevatten die niet alleen afhangt van de logische natuur van de termen die erin voorkomen(d.w.z. de betekenis van de termen op zichzelf) maar die ook niet afhankelijk is van empirische kennis om te achterhalen wat de waarheid is.²⁰

Een bekend voorbeeld van Kant is ' $5+7=12$ '. Laten we nu eens het gedachte-experiment van Kant beschouwen om te weten waarom hij deze kennis als synthetisch a priori bevat. Op het eerste gezicht lijkt het alsof de uitspraak ' $5+7=12$ ' een analytische uitspraak is. Maar als we het concept van de som van 5 en 7 bekijken dan is geen reden om aan te nemen waarom deze twee getallen tot één getal verandert. Tevens is het concept 12 zeker niet van te voren te bedenken als de optelling van 5 en 7. Hoe lang ik ook het concept van deze mogelijke som ook analyseer, maar het getal 12 zal ik nooit erin vinden. In het combineren van deze twee concepten in een andere concept, die de som is, moet de intuïtie een rol krijgen dat ons toegang verschaft tot dit nieuwe concept. Een citaat van Kant hierover:

"That 5 should be added to 7 was no doubt implied in my concept of a sum $7+5$, but not that that sum should be equal to 12. An arithmetical proposition is, therefore, always synthetic, which is seen more easily still by taking larger numbers, where we clearly perceive that, turn and twist our conceptions we may, we could never, by means of the mere analysis of our concepts and without the

¹⁸A.R. Sheive, A Brief Tour of Constructive Mathematics, May 19, 2006

¹⁹Immanuel Kant; 1724-1804

²⁰Richard H. Popkin en Avrum Stroll; Philosophy made simple; Doubleday, 1993, pag 145

*help of intuition arrive at the sum wanted.”*²¹

Daarnaast vertelt Bishop ons:

*”All mathematics should have numerical meaning. In other words, every mathematical theorem should admit an ultimate interpretation to the effect that certain finite computations within the set of positive integers will give certain results.”*²²

Bishop doelt hiermee op dat wiskunde van nature een numerieke karakter heeft. Het constructivisme van Bishop heeft dus zeker iets tegen zogenaamde ‘actueel oneindige’, want elke stelling moet in eindig aantal stappen bewezen kunnen worden. Daarnaast een citaat van Bishop dat laat zien hoe hij over de natuurlijke getallen denkt:

”We are not interested in the properties of the positive integers that have no descriptive meaning for finite man. When a man proves a positive integer to exist, he should show how to find it. If God has mathematics of his own that needs to be done, let him do it himself.”

We zien dat Bishop zijn uitspraken in het algemeen overeenkomen met hoe Kronecker dacht over de gehele getallen. Voor de constructivist moeten wiskundige stellingen aritmetisch zijn van aard. En dit kijk van het constructivisme op de wiskunde is weer gebaseerd op het feit dat constructivisten vinden dat wiskunde door de mens zelf gecreëerd wordt in onze gedachten en omdat een mensenleven ook eindig(finiet) is, moeten alle berekeningen en constructies die door de mens gemaakt wordt ook eindig zijn.

Een veelopgenoemd voorbeeld in boeken die over constructivisme gaan wordt het voorbeeld van Goldbach’s vermoeden genomen voor een expliciet voorbeeld. Goldbach’s vermoeden luidt als volgt:

elk even getal groter dan 2 kan uitgedrukt worden als de som van twee priemgetallen

Als ik dit vermoeden in een andere vorm giet, namelijk:

$$n = \begin{cases} 0 & \text{tegenspraak bij Goldbach's vermoeden} \\ 1 & \text{als Goldbach's vermoeden klopt} \end{cases}$$

dan beschouwt Bishop dit niet als een geheel getal. Want volgens hem zou het mogelijk moeten zijn om een representatie van elk geheel getal te geven, dus een oplossing in een numerieke vorm. En dit is zeker niet het geval bij het bovenstaand voorbeeld.

Als voorbeeld nemen we de tussenwaarde stelling. Deze stelling zegt dat:

²¹Ibid., pag 146

²²The constructivization of abstract mathematical analysis; A.Aeppli en E.Calabi, Proceedings of the Conference on Complex Analysis, International Press of Boston 1994

als we een continue functie hebben die ergens positieve waarden aanneemt en in een ander gebied een negatieve waarde aanneemt, dan de functie ergens de as snijden.

Classicisten nemen deze stelling zonder problemen aan, maar voor een constructivist is dit niet genoeg. De constructivist weet nu alleen dat de kromme ergens de as snijdt, maar waar snijdt de kromme de as dan precies? Kunnen we dit punt werkelijk vinden? Zo ja, hoe vinden we dit punt dan, enzovoort. Dus voor de constructivist moet er een algemene eindige routine bestaan om dit snijpunt te construeren. We analyseren eerst het klassieke bewijs van deze stelling. Als eerst nemen we aan dat de functie het as niet raakt en door dit gegeven te combineren met de aannames, kunnen we hieruit een tegenspraak opmaken. Dus wat er in feite is aangenomen is dat 'existentie' in feite 'niet-existentie' geeft een tegenspraak' betekent.

Het enige voordeel aan het bewijs van de tussenwaarde stelling op de klassieke manier is zou je kunnen zeggen dat er daadwerkelijk een functie bestaat dat door het as gaat. Maar het heeft voor de rest geen ander nut, behalve dat je dit weet. Voor een constructivist is het klassieke bewijs van de tussenwaarde stelling alleen leuke informatie voor de beginfase van het bewijs, dus je hebt alleen kennis over dat er een functie bestaat die het as snijdt, maar hoe vinden we deze functie? Dat is een vraag die de classicist niet bezig houdt en naar zijn eigen zeggen ook niet hoeft te doen.

We bekijken nu ander voorbeeld, namelijk de trichotomie wet, die zegt dat voor een reëel getal α het volgende geldt:

- $\alpha < 0$
- $\alpha = 0$
- $\alpha > 0$

Classicisten nemen deze wet zonder meer aan. Maar constructivisten niet, want er bestaat geen eindige procedure die ons voor een geheel getal α naar één van deze keuzes brengt. Sterker nog, Brouwer heeft zelfs een bewijs om aan te tonen dat er ook nooit zo een procedure kan bestaan om het bewijs te vinden van deze stelling. Een constructieve redenering dat de trichotomie wet in de constructivistische analyse niet werkt gaat ruwweg als volgt. Neem aan dat we een reële getal α in decimale vorm hebben, dus $\alpha = 0.x_1x_2x_3 \dots$. Nu wij kunnen in eindige tijd alleen maar eindig aantal x_j kunnen doorlopen. Stel nu dat we een miljoen aantal getallen hebben berekend, en ze allemaal 0 zijn. Maar vooralsnog ligt het niet in ons bereik om te kunnen voorspellen of alle potentieel oneindige getallen nullen zijn in deze rij of misschien dat er toch ergens een ander getal dan 0 verschijnt. Oftewel we weten niet weten of er $\alpha > 0$ of $\alpha = 0$ zal voorkomen.

Wat Bishop onder andere gedaan heeft is zulke stellingen die bekend zijn in de klassieke analyse om te zetten in een constructivistisch jasje. Andere vakgebieden die hij heeft overgezet zijn bijvoorbeeld complexe analyse, metrische ruimten, maattheorie en de calculus. Maar alsnog is dit natuurlijk niet helemaal

af, want er zijn nog zoveel meer stellingen die op een klassieke manier bewezen zijn en die nog niet overgezet zijn naar een constructieve variant. En natuurlijk is het zo dat er stellingen zijn die niet overgezet kunnen worden van de klassieke naar de constructivistische variant. Simpelweg omdat er stellingen zijn in de klassieke analyse die de keuzeaxioma als een eis stellen. Dit probleem kom je ook in de overige vakgebieden tegen hierboven beschreven en daarom is het zo dat de aantal stellingen die op een constructivistische manier opgelost worden minder zijn dan stellingen die op een klassieke manier opgelost kunnen worden. Waar ik ook de lezer op de hoogte van wil brengen is van het feit dat het constructivisme, het gebruik van een tegenspraak in een bewijs niet verbiedt. Laten we een voorbeeld beschouwen, 'Er bestaat een priemgetal tussen de 100,000 en 100,020'. Constructief is deze bewering waar of niet waar. De reden hiervoor is omdat er een eindige procedure bestaat om dit te kunnen achterhalen. Dus in dit geval kunnen we een bewijs geven door middel van het gebruik van een tegenspraak in het bewijs. Als we nu aannemen dat er geen priemgetal bestaat tussen de 100.000 en 100.020, en deze aanname tot een tegenspraak leidt, dan zou dit constructief gezien kloppen. De reden waarom we in dit geval een indirect bewijs kunnen opvoeren is omdat we van te voren al in eindig aantal procedures kunnen achterhalen of er daadwerkelijk ene priemgetal of geen priemgetal bestaat in dit interval. En bij het gebruik van een indirect bewijs voor het aantonen dat het tweede geval (i.e. er geen priemgetal bestaat in het gekozen interval) op een tegenspraak uitkomt, kunnen we een voorspelling maken over dat we in een eindige procedure kunnen weten dat er wel een priemgetal bestaat.

Bishop beweert dat het belangrijk is dat wiskunde bestaat uit een numeriek karakter, dit is het echte aard van de wiskunde. Klassieke wiskunde daarentegen kan geen echte wiskunde zijn, maar het beschrijft juist het 'ideale' karakter van de wiskunde, in die zin dat in de klassieke wiskunde genoeg wordt genomen als een bewijs een existensief karakter heeft, d.w.z. 'is' heeft als betekenis 'er bestaat' en niet 'kunnen vinden'. In de logica van de klassieke wiskunde betekent $\exists a$ 'er bestaat een a ', terwijl in de constructieve wiskunde er juist 'we kunnen een a construeren' wordt bedoeld. En volgens constructivisten is al datgene waar de classicisten zich mee bezig houden puur idealistisch, want het is genoeg als we kunnen aantonen dat er een oplossing bestaat. Daarnaast bevat klassieke wiskunde weinig tot geen numerieke inhoud.

In de proloog van Bishop's boek maakt hij twee onderscheidingen in wiskundige beweringen ²³, namelijk:

1. Those which are merely evocative, that make assertions without empirical validity.
2. And those which are of immediate empirical validity, which say that certain performable operations will produce certain observable results.

Uit deze bewering lijkt Bishop te menen met 'immediate empirical validity' dat er wiskundige beweringen zijn die pragmatisch zijn voor in de directe buitenwereld, maar dat is niet wat hij bedoelt. Uit zijn volgende zin wordt ons duidelijker

²³Constructive Analysis; <http://www.rbjones.com/rbjpub/philos/bibliog/bishop85.htm>. Chap 1

waar hij nou heen wil gaan.

"Many mathematical statements have a rather peculiar pragmatic content. Consider the theorem that either every even integer greater than 2 is the sum of two primes, or else there exists an even integer greater than 2 that is not the sum of two primes. The pragmatic content of this theorem is not that if we go to the integers and observe we shall see certain things happen. Rather the pragmatic content of such a theorem, if it exists, lies in the circumstance that we are going to use it to help derive other theorems, themselves of peculiar pragmatic content, which in turn will be the basis for further development. ... There are also mathematical statements of immediate empirical validity, which say that certain performable operations will produce certain observable results, for instance, the theorem that every positive integer is the sum of four squares" ²⁴

Dus Bishop bedoelt hier dat als een stelling pragmatisch inhoud heeft, dan moet dat blijken uit zijn gebruik in het vinden van nieuwe andere stellingen.

In de eerste paar bladzijden beschrijft Bishop duidelijk wat zijn gereedschap is om constructieve analyse te kunnen doen. Bijvoorbeeld, een verzameling is alleen gedefinieerd als er ons verteld wordt hoe we een element uit deze verzameling kunnen construeren en hoe we aan kunnen tonen dat twee elementen gelijk zijn aan elkaar. Terwijl er in de klassieke wiskunde gedacht wordt dat verzamelingen willekeurige collectie is van pre-bestaande objecten. Bishop neemt de constructieve logica aan die door Brouwer en Heyting zijn bedacht en uitgewerkt. Al deze aannames waren voor Bishop genoeg om de klassieke analyse in een constructieve vorm te zetten.

Bishop en Heyting zijn beide constructivisten en hebben beide ook hetzelfde idee dat wiskunde onafhankelijk van de mens niet zou bestaan. In zijn eerste boek zegt Bishop:

"...nothing is true unless and until it as been proved"

En als men deze houding aanneemt, dan mag duidelijk zijn dat je alleen over een stelling kunt zeggen dat hij bestaat als hij op een constructieve manier bewezen is en men kan hierdoor niet spreken over dat de stelling al de hele tijd waar was, zoals de realisten dat doen. In een specifiek boek van Heyting ' *Intuitionism. An introduction* ' laat hij gesprekken weergeven tussen een classicist en een intuïtionist. In deze gesprekken wil Heyting aantonen door middel van het uitputten van redeneringen in een conversatie laten zien waarom de intuïtionistische wiskunde en met de bijbehorende filosofische inslag beter is dan de klassieke wiskunde. Hieronder een passage van deze conversatie:

"Classicist: One may object that the extent of our knowledge about the existence or non-existence of a last pair of twin primes is purely contingent and entirely irrelevant in questions of mathematics truth. Either an infinity of such pairs exists, in which case $l = 1$; or their number is finite, in which case l equals the greatest prime such that $l - 2$ is also a prime. In every conceivable case l is defined; what does it matter whether or not we can actually calculate the

²⁴Bishop; Foundations of Constructive analysis, McGraw-Hill series in higher mathematics, 1967

number?"

"Intuitionist: *Your argument is metaphysical in nature. If 'to exist' does not mean 'to be constructed', it must have some metaphysical meaning. It cannot be the task of mathematics to investigate this meaning or to decide whether it is tenable or not. We have no objection against a mathematician privately admitting any metaphysical theory he likes, but Brouwer's program entails that we study mathematics as something simpler, more immediate than metaphysics. In the study of mental mathematical construction 'to exist' must be synonymous with 'to be constructed' "*

Wat wij uit dit gesprek kunnen concluderen is dat Heyting niet als doel had om op de discussie in te gaan of wiskunde nou onafhankelijk is van de mens of niet, maar het kan de wiskundige simpelweg ook niet schelen, i.e. een wiskundige zou zich niet moeten richten op het onderzoek van de waarheid van zulke onderwerpen.

Bishop denkt dus dat 'er bestaat' betekent dat je moet laten zien dat het bewijs op op een constructieve manier kan schrijven, met alle gereedschappen die we krijgen van Brouwer, Heyting en van andere intuïtionisten. De classicist zegt juist 'er bestaat' puur een existentieel karakter heeft, en niet erover gaat om de oplossing ook daadwerkelijk te kunnen construeren. Volgens Bishop is dit niet de juiste redenatie, en zorgt dit ervoor dat je alleen afhankelijk bent van formalistische definities. Maar waarom beschouwt Bishop dan niet de mogelijkheid dat 'er bestaat' in verband kan worden gebracht met een niet-epistemologische platonistische of realistische interpretatie van de klassieke wiskunde?²⁵ Dus misschien bedoelt de classicist met ' $\exists aP(a)$ ' simpelweg de redenering dat er een a gevonden kan worden en voor je voor de rest niet hoeft te weten of a zelf te construeren is. Nu is de reden dat Brouwer niet aan deze mogelijkheid heeft gedacht is omdat hij vond dat deze redenering van de classicist triviaal is en je alleen deze redenering kunt hebben als je al van te voren weet wat de betekenis is van 'er bestaat'.²⁶

De andere reden is dat Bishop dacht dat als je aan kunt tonen dat de wiskunde onafhankelijk van de mens bestaat, dat je dan pas kunt zeggen dat je kunt zeggen dat er een a nbestaat die aan de genoemde eigenschap voldoet. Maar Bishop wilt zijn handen vooral niet vies maken aan de filosofische aspecten van de wiskunde en hij denkt dat je wiskunde niet kunt doen op basis van filosofie. Hij heeft ook Brouwer's theorie over de keuzerijen beoordeeld als een heel bizar en zelfs onaangenaam voor wiskundigen.²⁷ Maar ook vindt hij dat Brouwer's theorie een sterk afhankelijkheid vertoont met de metafysica van de wiskunde, wat Bishop zeker niet aansprak. In plaats daarvan was het een noodzaak om de filosofische aspecten van de ideale wiskunde, dus de constructieve wiskunde te minimaliseren.

²⁵Helen Billinge, *Philosophia Mathematica* (3) vol.11, 2003, pag 183, [Http://philmat.oxfordjournals.org](http://philmat.oxfordjournals.org)

²⁶Ibid.

²⁷Ibid. 25, pag. 6

Bishop vertelt het volgende over waarom het intuïtionisme van Brouwer ten onder ging en eigenlijk ook niet kon blijven bestaan. Daarnaast zegt Bishop dat zijn werk aantoont dat constructivistische wiskunde niet ten onder doet aan de klassieke wiskunde omdat het een prima alternatief is voor de 'idealistische' wiskunde.

"There have been, however, attempts to constructivize mathematics, to purge it completely of its idealistic content. The most sustained attempt was made by L.E.J. Brouwer, beginning in 1907. The movement he founded has long been dead, killed partly by compromises of Brouwer's disciples with the viewpoint of idealism, partly by extraneous peculiarities of Brouwer's system which made it vague and even ridiculous to practising mathematicians, but chiefly by the failure of Brouwer and his followers to convince the mathematical public that abandonment of the idealistic viewpoint would not sterilize or cripple the development of mathematics. Brouwer and other constructivists were much more successful in their criticisms of classical mathematics than in their efforts to replace it with something better. Many mathematicians familiar with Brouwer's objections to classical mathematics concede their validity but remain unconvinced that there is any satisfactory alternative. This book is a piece of constructivist propaganda, designed to show that there does exist a satisfactory alternative. To this end, we develop a large portion of abstract analysis within a constructive framework" ²⁸

Volgens Bilinge is het niet mogelijk om Bishop's kijk op de wiskunde volledig op één lijn te stellen met de visie die Brouwer had. Dus het idee van Brouwer dat de klassieke wiskunde incoherent is, gaat niet op voor Bishop. Waar Bishop de wiskundigen vooral op attent wilde maken is dat de klassieke wiskunde vol zit met uitspraken die existentieel zijn en dus idealistisch van aard zijn en als je op zoek bent naar wiskunde die pragmatische en numerieke betekenis heeft, dan moet je bij de constructieve wiskunde zijn.

Volgens Bishop is klassieke wiskunde opzichzelf coherent, alleen gaat het niet samen met constructieve wiskunde mits je de wet van de uitgesloten derde eruit zou schrappen. Dus vanuit het gezichtspunt van een wat liberale constructivist is de klassieke wiskunde niet nutteloos of zelfs helemaal fout, maar qua informatie is het alleen wat beperkt. En de strenge constructivisten vinden juist de informatie die incompleet in de klassieke wiskunde (d.w.z de numerieke inhoud) ervoor zorgt dat deze wiskunde incoherent is en eigenlijk dat wiskunde niet op de juiste manier uitgeoefend kan worden. Wat constructivisten als Brouwer, Heyting en Bishop met elkaar verbindt is het feit dat ze tegen het gebruik van de wet van uitgesloten derde zijn en dat elke stelling voorzien is van een constructief bewijs, dus niet een bewijs dat ons alleen toont dat er een oplossing bestaat, maar deze oplossing ook vindt en kan berekenen.

²⁸Errett Bishop en Douglas Bridges, Constructive Analysis, Springer- Verlag, 1985, pag.2

4 Waar is het constructivisme eigenlijk goed voor?

Zoals wij weten hebben constructivisten een aantal redenen waarom ze denken dat het uitoefenen van constructivistische wiskunde beter is dan de klassieke wiskunde. Maar zijn er buiten deze voornamelijk op wiskunde en filosofische gebaseerde redenen ook nog andere redenen? Het antwoord op deze vraag is ja. Zoals we weten is het belangrijk in het constructivisme dat je niet alleen moet bewijzen dat een oplossing bestaat, maar deze ook daadwerkelijk vindt. Bij het programmeren is het van belang dat je objecten die je wilt weten kunt berekenen en natuurlijk kan een computer niet achterhalen of de oplossing die je zoekt existent is of niet, en dat is ook in het algemeen niet interessant voor informatici. Die willen numerieke resultaten kunnen krijgen als oplossing.

Na de Tweede Wereldoorlog begon het gebruik van computers steeds toe te nemen door regeringen en universiteiten. Voor het eerst werd er door de Zweedse logicus en filosoof Martin-Löf(1942)²⁹ in 1975³⁰ op de mogelijkheden gewezen om de intuïtionistische logica toe te passen in programmeertalen. In zijn eerste werken bouwt Martin-Löf een filosofische en een formele basis waarop zijn constructieve type theorie op is gebaseerd en wijst daarna de overeenkomsten tussen programmeren en wiskunde. Hij laat ons zien dat zijn bewering helemaal klopt dat de computerwetenschappen equivalent te stellen is aan wiskunde die alleen gebruikt maakt van intuïtionistische logica.³¹ Martin-Löf vertelt in een passage van zijn werk over het gebruik van klassieke en intuïtionistische logica in programmeertalen:

*"the whole conceptual apparatus of programming mirrors that of modern mathematics and yet is supposed to be different from it. How come? The reason for this curious situation is, I think, that the mathematical notions have gradually received an interpretation, the interpretation which we refer to as classical, which makes them unusable for programming. Fortunately, I do not need to enter the philosophical debate as to whether the classical interpretation of the primitive logical and mathematical notions... is sufficiently clear, because this much at least is clear, that if a function is defined as a binary relation satisfying the usual existence and unicity condition whereby classical reasoning is allowed in the existence proof... then a function cannot be the same as a computer program... Now it is the contention of the intuitionists ... that the basic mathematical notions, above all the notion of function, ought to be interpreted in such a way that the cleavage between mathematics, classical mathematics, that is, and programming that we are witnessing at present disappear. In the case of mathematical notions of functions and set, it is not so much a question of providing them with new meanings as of restoring old ones..."*³²

²⁹Per Erik Rutger Martin-Löf

³⁰Martin-Löf, An intuitionistic theory of types: predicative part, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 80, 1975

³¹Douglas Bridges, Steve Reeves; Constructive Mathematics in Theory and Programming Practice, University of Waikato, 1997

³²Martin-Löf, University of Stockholm, Constructive mathematics and computer programming, <http://www.cs.tufts.edu/~nr/cs257/archive/per-martin-lof/constructive-math.pdf>, pag 154-155

Wellicht dat we kunnen aannemen dat het gros van de wiskundigen in de eerste helft van de twintigste eeuw de constructieve wiskunde niet zo zagen zitten omdat het nut ervan niet zozeer bekend was. Maar met de opkomst van de computer veranderde de algemene houding van wiskundigen ten opzicht van het constructivisme en werd er toch aangenomen dat de intuïtionistische logica bij uitstek een goed gereedschap is voor het maken van programmeertalen en dergelijke concepten.

5 Een voorbeeld van een constructief bewijs

Definitie. Een reëel-waardige functie f gedefinieerd op een compact interval I is continu als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\omega(\varepsilon)$ bestaat zodanig dat $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ als $x, y \in I$ en $|x - y| \leq \omega(\varepsilon)$. De operatie $\varepsilon \mapsto \omega(\varepsilon)$ heet de modulus van continuïteit voor f .

We zien dat Bishop in zijn definitie van een continue functiein feite aanneemt dat deze functie uniform continu is. Tevens beperkt hij zich tot functies die gedefinieerd zijn op een compact interval; zoals we weten zijn in de klassieke analyse continue functies op een compact interval inderdaad automatisch uniform continu. De reden om deze definitie te gebruiken is deze je in staat stelt het bewijs van de stelling tot een eindige situatie te herleiden (doordat het ons in staat stelt met een eindige partitie $a = a_0 < \dots < a_n = b$ te werken). Deze techniek zou niet werken als we de klassieke definitie van continuïteit zouden gebruiken.

Om een voorbeeld te geven laat ik het bewijs van de tussenwaarde stelling zien. Om goed de verschillende kanten te belichten geef ik een klassiek bewijs en een constructivistisch bewijs van deze stelling.

De tussenwaarde stelling op de klassieke wijze luidt: ³³

Als f een continue functie is op $[a, b]$ en u een reëel getal is dat tussen de getallen $f(a)$ en $f(b)$ ligt dan bestaat er een punt c in $[a, b]$ zodanig dat $f(c) = u$.

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $f(a) < u < f(b)$ geldt. Laat nu $S = \{x : a \leq x \leq b \text{ en } f(x) \leq u\}$. Omdat a in S zit, is de verzameling S niet leeg. Tevens is S naar boven begrensd door b en door de volledighedsstelling hebben we nu dat S een supremum heeft, noem dit c . Stel nu dat $f(c) > u$. Dan is $a \neq u$ en door de continuïteit van onze functie hebben we $f(x) > u$ in een interval $(c - \delta, c]$. Maar nu staat er dat $c - \delta$ een bovengrens is van S terwijl deze kleiner is dan de supremum van S . Dit is onmogelijk en dus $f(c) \leq u$.

Nu stellen we dat $f(c) < u$ en door de continuïteit van onze functie geldt er $f(x) < u$ in een interval $[c, c + \delta)$ voor een $\delta > 0$. Maar nu staat er dat $[c, c + \delta) \subset S$ en dit is een tegenspraak want we hadden dat c een bovengrens is voor S . Omdat we nu ook geen $f(x) < u$ kunnen hebben geldt met behulp van de trichotomie wet dat $f(c) = u$. ■

We kunnen nu een constructivistische variant op de tussenwaarde stelling vinden, waarbij we niet alleen de existentie van c bewijzen maar deze ook daadwerkelijk kunnen vinden. Hieronder lezen we hoe deze stelling tot stand komt.³⁴

³³Robert A. Adams, Calculus a complete course, sixth edition, Pearson Addison Wesley, 2006, pag A-25

³⁴Helmut Schwichtenberg, Constructive Analysis with witnesses, Mathematisches Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München

Stelling.

Laat $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $a < b$ en $a, b \in \mathbb{R}$. Dan geldt er voor $f(a) < 0 < f(b)$ en ieder getal k , we een $c \in [a,b]$ kunnen vinden zodanig dat $|f(c)| \leq 2^{-k}$

Bewijs: Laat k gegeven zijn en definieer $\varepsilon = 2^{-k}$. Nu gaan we respectievelijk $f(a)$ en $f(b)$ met $-\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2}$ en $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ vergelijken. Als $-\varepsilon < f(a)$ of $f(b) < \varepsilon$ dan weten we dat $|f(c)| < \varepsilon$ voor respectievelijk $c = a$ of $c = b$. Neem nu aan dat $f(a) < -\frac{\varepsilon}{2}$ en $\frac{\varepsilon}{2} < f(b)$. Kies nu een p zodanig dat voor alle $x, y \in [a, b]$, als $|x - y| \leq 2^{-p}$ dan $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Verdeel daarna het interval $[a, b]$ in $a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_{n-1} < a_n = b$ zodanig dat er aan de voorwaarde $|a_{i-1} - a_i| \leq 2^{-p}$ voldaan is voor $0 < i < n$. Vergelijk nu elke $f(a_i)$ met $-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Door de aanname dat $f(a_0) < -\frac{\varepsilon}{2}$ en $\frac{\varepsilon}{2} < f(a_n)$, kunnen we de kleinste m vinden waarvoor er $f(a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ en $-\frac{\varepsilon}{2} < f(a_{m+1})$ geldt. Vergelijk ten slotte $f(a_m)$ met $-\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2}$ en $f(a_{m+1})$ met $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Als $-\varepsilon < f(a_m)$ dan hebben we $|f(a_m)| < \varepsilon$. Als $f(a_{m+1}) < \varepsilon$ dan $|f(a_{m+1})| < \varepsilon$. Als beide $f(a_m) < -\frac{\varepsilon}{2}$ en $\frac{\varepsilon}{2} < f(a_{m+1})$ dan zou er hieruit $|f(a_{m+1}) - f(a_m)| > \varepsilon$ moeten volgen en dit is een tegenspraak met wat we aangenomen hebben, namelijk dat $|a_{m+1} - a_m| \leq 2^{-p}$. ■

De reden dat de hierboven genoemde m bestaat, kan als volgt verklaard worden. Stel dat er geen m bestaat, d.w.z. we kunnen geen m vinden waarvoor er geldt dat $f(a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ en $f(a_{m+1}) > -\frac{\varepsilon}{2}$. Omdat $f(a_0) < -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ volgt er hieruit dat $f(a_1) \leq -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Maar dan is $f(a_2) \leq -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Als we alle punten van de rij $(a_0, \dots, a_n)$ op deze manier aflopen dan volgt er uit de aanname $f(a_{m+1}) \leq -\frac{\varepsilon}{2}$ dat alle functiewaarden van deze punten zich onder de $-\frac{\varepsilon}{2}$ moeten bevinden. In het bijzonder geldt er $f(b) = f(a_n) \leq -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Hieruit volgt er een tegenspraak want we hadden aangenomen dat $f(a_n) = f(b) > \frac{\varepsilon}{2}$. Dus m moet wel bestaan en omdat we het interval in eindige aantal stukken hebben opgedeeld, mogen we uit deze tegenspraak afleiden dat m moet bestaan met de genoemde eigenschappen.

In het bovenstaande bewijs is het echt nodig om aan te tonen dat deze m bestaat. Bishop rechtvaardigt een bewijs met behulp van tegenspraak als volgt.³⁵ Stel dat we een stelling hebben en we willen deze stelling bewijzen. Om een stelling te bewijzen hebben we de keuze uit een aantal alternatieven, in ons geval zijn er 2 alternatieven, namelijk m bestaat of m bestaat niet. Kunnen we aantonen dat er een tegenspraak geldt uit bijvoorbeeld alternatief x , dan moeten we kijken naar de overige alternatieven, bijvoorbeeld $y, z, \dots$.

Vinden we een tegenspraak bij alternatief y ? Dan moeten we de alternatieven $z, \dots$ bekijken. In ons geval zijn er maar twee alternatieven en omdat we uit de uitspraak ' m bestaat niet' een tegenspraak krijgen mogen we aannemen dat het alternatief ' m bestaat' als waar mogen beschouwen, want een ander alternatief bestaat niet. Merk wel op dat Bishop deze manier van aanpak alleen goedkeurt als we eindige situaties beschouwen. In ons geval hebben we een eindig interval, dus kunnen we in eindig aantal stappen nagaan dat deze stelling ook klopt. Dus eerst moeten we kijken of we ons probleem in een eindig aantal stappen kunnen oplossen en dan pas kunnen we een bewijs door middel van tegenspraak toepassen.

³⁵Ibid. 28, pagina 11, "Proofs by contradiction ... equality 0=1"