

EENIGE ONDERZOEKINGEN OVER TRILLINGEN MET
FREQUENTIE MODULATIE

17/10-1946

EENIGE ONDERZOEKINGEN OVER TRILLINGEN MET FREQUENTIEMODULATIE

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN
DOCTOR IN DE TECHNISCHE WETENSCHAP
AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE
DELFT, KRACHTENS ARTIKEL 2 VAN HET
KONINKLIJK BESLUIT VAN 16 SEPTEMBER
1927, STAATSBLAD Nr. 310, EN OP GEZAG
VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS, DR. IR. H. J.
VAN DER MAAS, HOOGLEERAAR IN DE
AFDEELING DER WERKTUIGBOUWKUNDE,
SCHEEPSBOUWKUNDE EN VLIEGTUIGBOUW-
KUNDE, VOOR EEN COMMISSIE UIT DEN
SENAAT TE VERDEDIGEN OP WOENSDAG
29 MEI 1946, DES NAMIDDAGS TE 2 UUR

DOOR

FRANS LOUIS HENRI MARIE STUMPERS

GEBOREN TE EINDHOVEN



1012 5052

1012 45

1946

N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ
AMSTERDAM

Dit proefschrift is goedgekeurd door de promotors:

Prof. dr. BALTH. VAN DER POL

Prof. dr. H. BREMEKAMP.

Aan de nagedachtenis van mijn Ouders.

Aan de Directie van het Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips Gloeilampenfabrieken betuig ik mijn hartelijken dank voor de toestemming, om dit gedeelte van mijn werk in dezen vorm te publiceeren.

INHOUD.

Blz.

HOOFDSTUK I. Inleiding.

1. Modulatie. Historisch overzicht.	1
2. Definities	3
3. Frequentiespectrum	8

HOOFDSTUK II. Interferentieverschijnselen bij signalen met frequentie-modulatie.

4. Overzicht	12
5. Het algemeene probleem	14
6. Twee zenders op een draaggolf	20
7. a) Beide zenders dezelfde modulatie	25
b) Eenzelfde signaal langs twee wegen ontvangen	27

HOOFDSTUK III. Over den invloed van het geruisch en de storingen op de ontvangst van signalen met frequentiemodulatie.

8. Geruisch	30
9. Keuze van pre-emphasis en frequentiezwaai	36
10. Hoogere orde benadering voor de energie van het geruisch bij afwezigheid van modulatie	38
11. Hoogere orde benadering voor de energie van het geruisch bij aanwezigheid van modulatie	42
12. Het geruisch bij afwezigheid van draaggolf	43
13. Knal- of impulsstoringen	46

HOOFDSTUK IV. Distorsie van signalen met frequentiemodulatie bij doorgang door elektrische netwerken.

14. Overzicht	49
15. De FOURIER-methode	50
16. De asymptotische methode	51
17. De berekening van CARSON en FRY	53
18. Afleiding van de asymptotische reeks	57
19. Over de schatting van de fout	61

HOOFDSTUK V. Toepassing van de theorie op eenige eenvoudige netwerken.

20. Een afgestemde kring	63
21. Twee gekoppelde kringen	71
22. De frequentiedetector	77
23. Intermodulatie bij een enkelen kring	83
24. Grafische bepaling der vervorming	87

HOOFDSTUK VI. Experimenten over distorsie van trillingen met frequentiemodulatie. Over een methode om de distorsie bij den zender rechtstreeks uit het spectrum te bepalen.

25. De meetopstelling	87
26. De meetzender	88
27. Bepaling van de vervorming bij een f. m. zender uit het spectrum	90
28. Vervormingsmetingen aan onze meetzender	93
29. Constructie van den meetontvanger	95
30. Amplitude karakteristiek van de gemeten filters	96
31. Resultaten van distorsie- en intermodulatie metingen	97

LITERATUUROVERZICHT	105
--------------------------------------	------------

HOOFDSTUK I.

Inleiding.

1. *Modulatie. Historisch overzicht.*

Onder modulatie verstaan we in de radiotechniek het proces, waardoor karakteristieke grootheden aan de door een radiozender uitgezonden trillingen of impulsen worden gevarieerd in overeenstemming met over te brengen mededeelingen. Gewoonlijk geeft de radiozender, wanneer hij niet gemoduleerd wordt, een hoogfrequente sinusvormige trilling: de draaggolf. Deze kan gekenschetst worden door haar maximale uitwijking of amplitude, en haar aantal trillingen per seconde, of frequentie. Bij radiozenders is de frequentie gewoonlijk grooter dan 150.000 perioden per seconde. Het hoorbare spraak- of muziekspectrum bevat daarentegen slechts trillingen tot ca. 15.000 perioden per seconde, en wordt daarom laagfrequent genoemd. Men kan nu de amplitude van de draaggolf langzaam laten variëren in overeenstemming met een laagfrequent signaal, en heeft dan amplitudemodulatie (a.m.). Laat men daarentegen de amplitude constant, maar varieert men de frequentie in het rythme van een uit te zenden signaal, dan ontstaat frequentiemodulatie (f.m.). Wanneer men een gemoduleerde trilling ontleedt in sinusvormige componenten, wordt het verschil in frequentie tusschen de uiterste componenten, die nog van belang zijn, de bandbreedte genoemd.

Dit alles vindt zijn belangrijkste toepassing bij het uitzenden van spraak of muziek per radio. Reeds in het begin van de ontwikkeling der radio dacht men aan frequentiemodulatie, maar toen omstreeks 1914 de vacuumbuismodulator de ontwikkeling van de amplitudemodulatie een heel eind verder bracht, werd frequentiemodulatie vergeten. Toen het aantal zenders in den, daarvoor het meest geschikten, band steeds vermeerderde, heeft men zich omstreeks 1922 nog wel eens afgevraagd, of uitzendingen met frequentiemodulatie misschien minder bandbreedte in beslag zouden nemen. Uit onderzoekingen van CARSON¹⁾ en VAN DER POL²⁾ bleek echter, dat dit niet het geval was.

Naarmate de ontvangers gevoeliger werden, trad een ander probleem meer en meer op den voorgrond, namelijk dat van de storingen en het geruisch. Wanneer we met geschikte selectiemiddelen den band, die het gemoduleerde signaal bevat, uitkiezen, ontvangen we steeds bovendien nog ongewenschte componenten. De superpositie van storingen en gewenscht a.m. signaal geeft een trilling, die anders in amplitude varieert, dan bij de uitzending bedoeld was. Wanneer we deze trilling dan ook detecteeren, dus het laagfrequent verloop van de amplitude opsporen, krijgen we storende bijgeluiden. Om de storende effecten te verkleinen, zou men de amplitude van het uitgezonden signaal moeten vergrooten, m.a.w. de zendenergie opvoeren. Wanneer bij frequentiemodulatie de amplitude van het gewenschte signaal bijv. tweemaal grooter is, dan die van de storingen, wordt het aantal perioden in een bepaalden tijd slechts in veel geringer mate door de storingen beïnvloed. Door de frequentievariatiën ten gevolge van de modulatie voldoende groot te maken, wordt het effect van de storingen dus zoo klein, als men wil. De zendenergie behoeft daarvoor niet vergroot te worden, wel de bandbreedte. (We merken hier reeds op, dat tengevolge van de grootere bandbreedte de energie van het geruisch ook weer toeneemt. Het totaal effect blijft echter toch gunstig.)

ARMSTRONG publiceerde in 1936 zijn fundamenteele artikel over: „A method of reducing disturbances in radiosignalling by a system of frequency modulation” 8), waarin hij op dit voordeelig aspect der frequentiemodulatie den nadruk legde. Zijn theorie werd door vrij uitvoerige experimenten ondersteund. HAZELTINE's presidentieele toespraak voor het Amerikaansche „Institute of Radio Engineers” geeft er blijk van, dat sommigen reeds aanstonds groote toekomst-mogelijkheden in het nieuwe systeem zagen 7). Toch schrijft bijv. RODER nog in 1937 in een artikel over frequentiemodulatie, als „a subject as remote from practical application as the one above” 14). Eerst nadat ARMSTRONG in 1938 den 40 KW zender Alpine gereed had, en CARSON en FRY de theorie verder hadden ontwikkeld 11), nam de toepassing eenigszins toe.

Op 1 Januari 1941 waren 15.000 ontvangtoestellen bij het Amerikaanse publiek in gebruik. Een jaar later 250.000. Op 1 Januari 1942 gaven 24 commercieele zendstations f.m. programma's, bovendien waren 14 experimenteële zenders in gebruik. Er werd gestreefd

naar nauwkeurige weergave van de uitgezonden muziekprogramma's („High fidelity”). Voor het televisiegeluidskanaal werd frequentie-modulatie in Amerika zelfs wettelijk voorgeschreven. Voor politie en militaire doeleinden nam het gebruik steeds toe. Ook ter vervanging van kabels bij verbindingen van punt tot punt bewezen f.m. zenders goede diensten. Ook in de Vereenigde Staten heeft de oorlog den verderen vooruitgang in de toepassing van f.m. voor omroepdoeleinden eenigen tijd belemmerd. Nu deze beëindigd is, zijn een groot aantal aanvragen om vergunning tot het oprichten van f.m. stations tot de bevoegde commissie, de F.C.C. gericht.

De theorie werd zoowel in Europa als in Amerika verder ontwikkeld. Voor details verwijzen we naar ons literatuuroverzicht. Hierin zijn o.a. de artikelen van GUY en MORRIS³⁹⁾, WEYERS⁴¹⁾, VELLAT³⁸⁾ en BELL⁶⁵⁾ van algemeeneren aard.

2. *Definities.*

We zullen trachten in deze paragraaf de eerder aangeduide begrippen, en ook eenige andere, welke we straks noodig zullen hebben, precieser te omlijnen, dan gewoonlijk gebeurt. (Literatuur, o.a. 42) 46) 57).)

Een harmonische trilling kan, zooals bekend, worden voorgesteld door de beweging van de projectie van een punt, hetwelk met eenparige snelheid een cirkel doorloopt, op een middellijn van dien cirkel. De bewegingsrichting kiezen we steeds tegen de wijzers van de klok in. Den vector, welke het middelpunt met het bewegend punt verbindt, noemen we *karakteristieke vector*. Hij wordt bepaald door zijn grootte: de *amplitude*, en de hoek welken hij maakt met een bepaalde richting: de *phasehoek*. Als vaste richting kiezen we de richting van de middellijn, waarop de beweging geprojecteerd wordt.

De beweging van de projectie kan dus in formule voorgesteld worden door:

$$f_0(t) = A \cos \varphi(t), \text{ waarbij: } \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t. \quad . \quad . \quad (1)$$

Naar analogie hiervan willen we een gegeven tijdsfunctie $f(t)$ nu ook voorstellen door de projectie van een bewegend vector van varieerende lengte $A(t)$, welke een tijdsafhankelijken hoek $\varphi(t)$

met een vaste richting maakt. Dus:

$$f(t) = A(t) \cdot \cos \varphi(t). \quad (2)$$

Nu behoeft $\varphi(t)$ geen lineaire functie van den tijd te zijn. In de keuze van de splitsing heeft men nog vrijheid. Bij een gekozen functie $A(t)$ kan men steeds $\varphi(t)$ bepalen. Nemen we als gegeven functie: $\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$, dan zijn er verschillende voor de hand liggende splitsingswijzen, b.v.:

$$A_1(t) = 2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t; \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t.$$

$$A_2(t) = 2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t; \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t.$$

$$A_3(t) = 1 + \frac{\cos \omega_1 t}{\cos \omega_2 t}; \quad \varphi_3(t) = \omega_2 t.$$

Om de splitsing nu eenduidig vast te leggen, eischen we, dat:

1. Wanneer we de nieuwe definities van amplitude en phase toepassen op harmonische trillingen, het resultaat in overeenstemming is met de klassieke definities.

2. De karakteristieke vector van een som van functies samenvalt met de resultante van de vectoren, welke de afzonderlijke functies voorstellen.

Het gevolg van deze beide eischen is, dat de karakteristieke vector vast ligt voor de som van twee of meer harmonische trillingen. De overgang op een convergente rij van oneindig veel componenten levert dan geen moeilijkheden meer op.

Is nu een of andere functie van den tijd gegeven in het vak van $-T$ tot T , dan kunnen we haar, binnen dat gebied, wanneer ze aan bepaalde eischen voldoet, voorstellen door een FOURIER-reeks. Bij de functies, die wij beschouwen, is aan deze eischen steeds voldaan. We hebben dus nu: $\varphi_0 = 0$

$$f(t) = \sum_0^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

De afzonderlijke componenten zijn weer harmonische trillingen, die we ons nu kunnen voorstellen, te worden uitgevoerd door de projecties van, op concentrische cirkels met eenparige snelheid rondlopende, punten op een lijn door het middelpunt. De amplitude van $f(t)$ is volgens onzen tweeden eisch nu bepaald door de lengte van den resulterenden karakteristieken vector. Door ook te pro-

jecteeren op een lijn loodrecht op de zoo juist genoemde, verkrijgt men:

$$A(t) = \left[\left\{ \sum_0^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n) \right\}^2 + \left\{ \sum_1^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \right\}^2 \right]^{1/2} \quad \dots \quad (4)$$

De phasehoek, waarvan nu door formule 2 de cosinus bepaald is, ligt ook geheel vast, wanneer we ons houden aan de definitie, als de hoek tusschen den karakteristieken vector en de vaste richting, dus:

$$\varphi(t) = \arctg \frac{\sum A_n \cdot \sin(n\omega t + \varphi_n)}{\sum A_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n)} = \arcsin \frac{\sum A_n \cdot \sin(n\omega t + \varphi_n)}{A(t)} \quad (5)$$

De phase is uit den aard der zaak bepaald, modulo 2π .

Op deze wijze kunnen we dus iedere functie in elk gegeven tijdsinterval splitsen naar amplitude en phase. Op ieder tijdstip kent men dus de *momenteele amplitude* en de *momenteele phase*.

Het volgende belangrijke begrip is de *frequentie*. Bij een harmonische trilling beweegt het eindpunt van den karakteristieken vector zich met een constante hoeksnelheid langs een cirkel. Deze hoeksnelheid noemen we de hoek- of radiale frequentie. Zij wordt uitgedrukt in radialen per seconde. Volkomen analoog noemen we bij een willekeurige functie van den tijd de hoeksnelheid van den karakteristieken vector ook weer de (hoek)frequentie. Zij is dus de afgeleide van de phase naar den tijd:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad \dots \quad (6)$$

Hierdoor ligt dus ook op elk tijdstip de *momenteele frequentie* vast. (Deze definitie van frequentie als afgeleide van de phase, vinden we in de radiotechniek het eerst bij VAN DER POL²⁾).

Voor harmonische trillingen treft men als definitie van frequentie ook aan: het aantal perioden per seconde. Dit verschilt dus een factor 2π . Wanneer we het niet uitdrukkelijk anders vermelden, zullen we in het vervolg onder frequentie steeds de hoekfrequentie in radialen per sec. verstaan.

Voor verschillende berekeningen maakt men geschikt gebruik van de complexe schrijfwijze:

$$f(t) = \operatorname{Re} A_n \cdot e^{i(n\omega t + \varphi_n)}, \text{ enz.}$$

Ook gaat men bij uitbreiding van het integratie-interval wel over op FOURIER-integralen, i.p.v. FOURIER-reeksen. De formules worden volkomen analoog.

We willen hier nog de aandacht vestigen op een eigenschap van de nieuwe definitie van de momenteele frequentie, die men anders wellicht zou overzien. In de ontvangstechniek maakt men veelal gebruik van het superheterodyne-principe, d.w.z. men voegt aan het ontvangen signaal er een van andere frequentie toe, om daarna met behulp van een niet-lineair element, gevolgd door een selectieven kring, de verschilfrequentie naar voren te halen. Dit kan bijv. met een quadratische buiskarakteristiek, volgens de relatie:

$$(a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t)^2 = b \cos (\omega_1 - \omega_2) t + \dots$$

De momenteele frequentie van het signaal, dat ontstaat door alle frequenties van de oorspronkelijke componenten met een bepaald bedrag te verminderen, is nu slechts dan gelijk aan het verschil der momenteele frequenties, indien alle verschilfrequenties het positieve teken hebben. Dit ziet men gemakkelijk in.

Bij *amplitudemodulatie* variëren we de momenteele amplitude in overeenstemming met het laagfrequent signaal, en houden de frequentie constant:

$$f(t) = \{A_0 + \Delta A(t)\} \cdot \cos(\omega t + \varphi). \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Heeft de modulatie plaats met een sinusvormig laagfrequent signaal, dan wordt dus:

$$\Delta A(t) = a \cos pt.$$

De *modulatiediepte* $m = \frac{a}{A}$. Bij niet-sinusvormig signaal moet men voor a de topwaarde van het laagfrequent signaal nemen.

Bij *phasemodulatie* wordt op de lineaire toename van de phase met den tijd, zooals die bij een ongemoduleerde harmonische trilling plaats vindt, nog een variatie gesuperponeerd, die evenredig is met het laagfrequent signaal:

$$f(t) = A \cdot \cos \{ \omega t + \varphi + \Delta \varphi(t) \}. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Het maximum van $|\Delta\varphi(t)|$ wordt nu de *phasezwaai* genoemd. Bij sinusvormige modulatie wordt dus:

$$\Delta\varphi(t) = a \cos pt.$$

Bij *frequentiemodulatie* varieert de momenteele frequentie in overeenstemming met het gegeven signaal:

$$f(t) = A \cdot \cos \left\{ \omega t + \int_0^t \Delta\omega(\tau) \cdot d\tau + \varphi \right\} \dots (9)$$

Bij sinusvormig signaal dus:

$$\Delta\omega(t) = a \cos pt.$$

De maximale uitwijking van de frequentie heet nu *frequentiezwaai* (sweep, Frequenzhub). Voor het juist genoemde sinusvormige signaal dus a rad. per sec. Het quotiënt van den frequentiezwaai, en de frequentie van het laagfrequent signaal wordt de *modulatie-index* genoemd.

Men overtuigt er zich gemakkelijk van, dat de aangebrachte splitsingen in amplitude en frequentie in overeenstemming zijn met de gegeven definities. In § 3 zullen we weliswaar zien, dat het f.m. spectrum zich theoretisch tot het oneindige uitstrekt, maar de amplitudes der componenten $\omega - np$, waarvoor $\omega - np$ negatief zou worden, mogen wel verwaarloosd worden.

Bij phasemodulatie met een signaal:

$$\sum a_n \cos (npt + \varphi_n),$$

varieert de frequentie, als de afgeleide van de phase, dus evenredig met:

$$- \sum na_n p \cdot \sin (npt + \varphi_n).$$

Men krijgt dus hetzelfde resultaat, wanneer men direct phasemodulatie toepast, en wanneer men het gegeven programma eerst differentieert, en daarna het verkregen resultaat als frequentiemodulatie uitzendt. De omgekeerde weg, eerst het programma integreren, en dan als phasemodulatie uitzenden, geeft evenzoo hetzelfde resultaat als directe frequentiemodulatie. Deze weg werd reeds door ARMSTRONG beschreden, en is sinds vrij gebruikelijk.

HÖLZLER⁴⁶⁾ heeft voorgesteld in te voeren de benaming *frequentiemodulatie van den n^{e} graad*. Deze verkrijgt men door het laag-frequent signaal n maal te integreren, en het verkregen resultaat als phasemodulatie uit te zenden.

Een variant hierop is de *pre-emphasis*. Het is gebruikelijk aan de zenzijde de hoge frequenties op te halen evenredig met $\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}$. Dit maakt men in den ontvanger met een eenvoudig RC netwerk weer in orde. Hier noemt men het dan *de-emphasis*. Op de bedoeling hiervan komen we nog terug.

Simultane modulatie van amplitude en phase door hetzelfde signaal is ook voorgesteld²³⁾. De bedoeling is de bandbreedte te beperken; het resultaat is ongeveer als bij amplitudemodulatie met uitzending van een zijband.

Gelijktijdige modulatie van één draaggolf in amplitude en frequentie met verschillende programma's werd ook voorgesteld. Bij dispergeerende elementen in den transmissieweg zal dan echter „overspreken” optreden. Het denkbeeld om de trillingen direct boven den geluidsband (dus b.v. van 15.000 tot 30.000 perioden per seconde) met een ander programma te moduleeren, stelt eveneens hoge eischen aan de ontvangers, maar biedt toch meer kans van slagen. Dit extra-kanaal wordt dan benut voor stereophonie, of facsimile.

In het bovenstaande hebben we steeds het oog gericht op de aan den zender bedoelde modulatie. Voor den ontvanger, die op bepaalde variaties reageert, is echter iedere verandering van de betreffende grootheid (amplitude, phase, frequentie) modulatie. Dit verschil in standpunt gaf in de literatuur tot eenige discussie aanleiding (vooral over de vraag, of phase- en frequentiemodulatie eigenlijk hetzelfde zijn)^{26) 27) 36) 40)}.

3. *Frequentiespectrum.*

We vragen ons nu af, hoe het frequentiespectrum er bij de verschillende vormen van modulatie gaat uitzien. Als voorbeeld moduleeren we steeds met een enkele sinusvormige trilling: $a \cos pt$. De uitbreiding tot meerdere modulatiefrequenties is dan eenvoudig. We krijgen dus bij:

a) Amplitudemodulatie. Het gemoduleerde signaal wordt:

$$A(1 + a \cos pt) \cdot \cos \omega t = \\ = A \left\{ \cos \omega t + \frac{a}{2} \cdot \cos(\omega + p)t + \frac{a}{2} \cdot \cos(\omega - p)t \right\}; \quad |a| < 1.$$

Bestaat het laagfrequent signaal uit een spectrum van componenten, dan zien we, dat dit spectrum ten gevolge van de modulatie, met behoud van vorm, over den afstand ω naar boven verplaatst wordt. Naast het aldus ontstane spectrum komt er een, dat het spiegelbeeld is van het eerste ten opzichte van de draaggolf.

b) Phasemodulatie. Gemoduleerd signaal:

$$A \cos(\omega t + a \cos pt).$$

Voor kleinen phasezwaai a vervangen we bij de uitwerking hiervan, den cosinus door 1, en den sinus door zijn argument. In dit geval wordt het resultaat:

$$A \cos \omega t - a A \cdot \sin \omega t \cdot \cos pt = \\ = A \cdot \left\{ \cos \omega t - \frac{a}{2} \cdot \sin(\omega + p)t - \frac{a}{2} \cdot \sin(\omega - p)t \right\}.$$

De amplituden der componenten zijn dezelfde als bij amplitudemodulatie, maar alle componenten zijn 90° in phase gedraaid. Voor grooteren phasezwaai kunnen we een analoge ontwikkeling maken, als we aanstonds onder c) voor frequentiemodulatie zullen aantreffen.

c) Frequentiemodulatie. Gemoduleerd signaal:

$$A \cdot \cos \left(\omega t + \int_0^t dt \cdot a \cdot \cos pt \right) = A \cdot \cos(\omega t + m \sin pt); \quad m = \frac{a}{p}.$$

Met behulp van een bekende FOURIER-ontwikkeling krijgen we dan:

$$A \{ J_0(m) \cdot \cos \omega t + J_{-1}(m) \cdot \cos(\omega - p)t + J_1(m) \cdot \cos(\omega + p)t + \dots \} = \\ = A \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cdot \cos(\omega + np)t.$$

Hierin stelt $J_n(m)$ de BESSELFUNCTIE van de orde n en het argument m voor. Dit is dus de amplitude van den component met frequentie $\omega + np$. Het spectrum heeft oneindig veel componenten.

Voor groote n wordt hun amplitude ongeveer evenredig met: $\frac{m^n}{n/2^n}$, en daalt dus monotoon.

Wil men een voor de practijk geschikte bandbreedte definiëren, dan kiest men daarvoor bijv. den band, waarin zooveel componenten liggen, dat ze 99 % van de uitgezonden energie vertegenwoordigen. Voor $m = 2$ moet men in dit geval 3 componenten aan weerszijden van de draaggolf meenemen. Men heeft dan 99,76 % van de energie. Met 4 componenten bereikt men in dit geval 99,99 % van de energie. De bandbreedte is in het eerste geval $6p$, en in het tweede $8p$. Hieronder geven we voor verschillende m nog een overzicht van het aantal componenten, dat men aan weerszijden van de draaggolf moet meetellen, om een gegeven percentage van de totale energie te verkrijgen.

m	n (99 %)	n (99,9 %)	n (99,99 %)
2	3	4	4
4	5	6	7
10	12	13	14
20	22	23	25
30	32	34	36
40	42	44	46
100	102	105	108

Het relatieve verschil tusschen de aldus gedefinieerde bandbreedte en den dubbelen frequentiezwaai daalt voor groote m blijkbaar snel. De bij den ontvanger aan te wenden selectiviteit, en dus ook de distorsie hangen samen met de wijze, waarop de bandbreedte gedefinieerd wordt.

De definitie van de bandbreedte, als de breedte van den band,

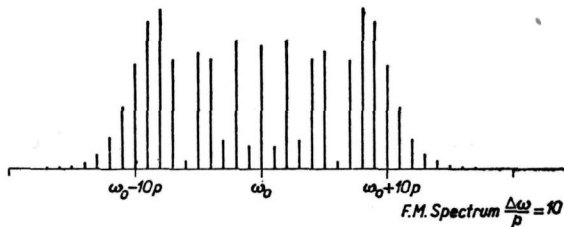


Fig. 1.

F. M. Spectrum. ($m = 10$). Onderlinge afstand der lijnen: p .

waar buiten geen componenten sterker dan 1 % van de draaggolf voorkomen ³³⁾, is bij grooten modulatie-index onbruikbaar.

Een typisch f.m. spectrum geven we in fig. 1. Aan het spectrum alleen is natuurlijk geen verschil tusschen phase en frequentie modulatie te zien. Het hier behandelde geval van één laagfrequenten toon als modulatie is op eenvoudige wijze voor meer frequenties uit te breiden. Men ziet dan, dat het f.m. spectrum niet symmetrisch ten opzichte van de draaggolf behoeft te zijn. Dit was door KROGER, TREVOR en SMITH experimenteel gevonden ⁴³⁾, en werd door VELLAT theoretisch verklaard ⁴⁷⁾.

HOOFDSTUK II.

Interferentieverschijnselen bij signalen met frequentiemodulatie.

4. Overzicht.

Wanneer een f.m. zender tegelijk met verschillende laagfrequente tonen gemoduleerd wordt, zullen in een ontvanger, die netwerken bevat, welke geen lineair faseverloop hebben, som- en verschil-tonen ontstaan. Dit verschijnsel wordt *intermodulatie* genoemd. Bij uitzending van meerdere telefoniekkanalen op dezelfde draaggolf moet hiermede rekening worden gehouden. Evenzoo beperkt het de mogelijkheid om op één draaggolf tegelijk spraak of muziek en facsimile te geven.

Theoretisch is dit verschijnsel in de literatuur niet onderzocht. Wij komen er in hoofdstuk V op terug. Experimenten over de combinatie muziek-facsimile werden gedaan door ARTZT en FOSTER⁵³⁾ en door ARMSTRONG^{8) 34) 35)}. Hoewel de eerstgenoemde schrijvers de combinatie ontraden, acht ARMSTRONG haar zeer wel mogelijk. Uitzending op dezelfde draaggolf van een a.m. en een f.m. programma heeft analoge bezwaren. Ook deze zullen elkander storen, zoodra ze door één of ander netwerk gestuurd worden, of ook reeds in den transmissieweg. Nadat WOODYARD¹³⁾ met eenig succes experimenten op dit gebied gedaan had, worden ze verder niet meer vermeld.

Nu echter willen we de interferentie onder het oog zien van twee frequentiegemoduleerde zenders, waarvan de spectra elkaar geheel of gedeeltelijk overdekken. Hiervan is een bijzonder geval, dat beide zenders op dezelfde golflengte uitzenden, en dit kunnen we weer specialiseeren, door beide ook hetzelfde programma te laten weergeven (gesynchroniseerde zenders). Hetzelfde probleem treedt op, wanneer signalen, van één zender afkomstig, langs meerdere wegen den ontvanger bereiken.

CROSBY^{9) 24) 52)} nam de nadeelige effecten van selectieve fading bij zijn experimenten over lange afstandsontvangst waar, en publiceerde ook photo's van gedistordeerde laagfrequent signalen. Hij gaf ook een theoretische verklaring, die de voornaamste feiten op-

helderde. (Door een rekenfout zijn in het eerste artikel de formules 5, 6 en 7 foutief. De vereenvoudigde analyse in het laatste artikel is minder fraai.) Opgemerkt moet worden, dat T. L. ECKERSLEY⁴⁾ reeds in 1930 voorspeld had, dat echo's van 2 à 3 msec., in amplitude vergelijkbaar met het oorspronkelijke signaal, f.m. ontvangst onmogelijk zouden maken. Dank zij de inactiviteit van de ionosfeer treedt dit verschijnsel voor golflengten beneden 10 Meter in veel mindere mate op. Men heeft daarom voor uitzendingen met frequentiemodulatie vrijwel algemeen golflengten van 7 meter of korter aanvaard.

Over de grootte van de onderlinge storing van twee signalen, beide in frequentie gemoduleerd, geven de meeste overzichtschrjvers, in navolging van de eerste experimenten van ARMSTRONG en WEIR⁸⁾ 22) aan, dat een verhouding 2 : 1 in amplitude voldoende is, om de storing te onderdrukken. Men geeft echter geen quantitief criterium, en volgens het latere onderzoek van GUY en MORRIS³⁹⁾ zou een verhouding 10 : 1 gewenscht zijn, terwijl desnoods nog 4 : 1 aanvaard wordt. VELLAT³⁸⁾ achtte de onderlinge storing van gesynchroniseerde f.m. zenders geheel te wijten aan onvolmaakte begrenzing in de ontvangers. Dit is onjuist. Ook WHEELER's conclusie⁶³⁾, dat bij onderlinge storing van f.m. zenders, in het geval van een perfecten begrenzer, geen verstaanbaar overspreken voorkomt, is niet geheel gerechtvaardigd. De beide laatstgenoemde schrijvers onderzoeken naast de logische detectiemethode met amplitudebegrenzing, ook detectie zonder amplitudebegrenzing. Hierbij schat VELLAT de storing van een f.m. zender door een ongemoduleerden stoorzender een factor 2 te hoog.

Bij amplitudemodulatie kan ten gevolge van kromming der buiskarakteristieken het verschijnsel der kruismodulatie optreden: Het programma van een stoorzender op andere golflengte komt verstaanbaar door in de pauzen van het programma van den gewenschten zender. De derde graadsterm, die bij a.m. dit gevolg heeft, geeft bij f.m. niet hetzelfde resultaat. Wel kunnen, wanneer twee zenders met draaggolffrequentie f_1 en f_2 aanwezig zijn, o.a. de nieuwe frequenties $2f_2 - f_1$ en $2f_1 - f_2$ ontstaan, en storing veroorzaken. Volgens WHEELER⁴⁴⁾ zijn deze effecten niet zoo groot, dat men reeds voor de eerste buis selectiviteit zou moeten toepassen.

BELL ⁶⁵) gaat uit van de juiste formule voor interferentie tusschen twee draaggolven $\cos \omega_1 t$ en $A \cos \omega_2 t$, n.l. dat de momenteele frequentie wordt:

$$\omega_1 + (\omega_2 - \omega_1) \frac{A^2 + A \cos(\omega_2 - \omega_1) t}{1 + A^2 + 2A \cos(\omega_2 - \omega_1) t} \quad \dots \quad (13)$$

Hij knoopt daaraan echter de opmerking vast, dat, wanneer $\omega_2 - \omega_1$ buiten den geluidsband valt, de effectieve frequentie wordt:

$\omega_1 + (\omega_2 - \omega_1) \frac{A^2}{1 + A^2}$. Het komt ons voor, dat dit weinig zin heeft, en het erbij aansluitende resultaat, dat de modulatie van het gewenschte signaal in de verhouding $\frac{A^2}{1 + A^2}$ onderdrukt wordt, is

onjuist. WUNDT en HOFFMANN ⁵⁶), die een serie fraaie krommen voor gedistorteerde signalen geven, hebben de beïnvloeding van den grondtoon der gewenschte modulatie, bij aanwezigheid van een stoorzender zonder modulatie, op dezelfde golflengte, bij benadering uitgerekend voor het geval $m = 100$. Dat bij gelijke sterkte van draaggolf en storing in het algemeen geen distorsie zou optreden, kan wegens de hier optredende labiliteit, moeilijk worden onderschreven.

In het vervolg zullen de optredende spectra systematisch worden onderzocht, en de energie der optredende storingen wordt berekend, waarbij ook met den belangrijken invloed der pre-emphasis rekening wordt gehouden. Dit is in de literatuur nog niet gebeurd, al zullen we op een enkel punt wel bij de reeds genoemde schrijvers aansluiten.

5. *Het algemeene probleem.*

We berekenen eerst de momenteele frequentie van de resulterende trilling, die ontstaat door samenvoeging van twee componenten met frequentiemodulatie. De amplitude van het sterkste signaal kiezen we 1, die van het zwakkere zij: A (in passende eenheden). De toonhoogte van het laagfrequent signaal zij in het eerste geval: p , en in het tweede: q rad. per sec. Evenzoo is de frequentie-zwaai: $\Delta\omega_1$ resp. $\Delta\omega_2$ rad. per sec.

De componenten zijn dus:

$$\cos \varphi_1(t) = \cos \left(\omega_1 t + \frac{\Delta \omega_1}{p} \sin pt \right) \text{ en}$$

$$A \cos \varphi_2(t) = A \cos \left(\omega_2 t + \frac{\Delta \omega_2}{q} \sin qt + \varphi_0 \right).$$

Voor de momenteele amplitude vinden we dan, volgens definitie:

$$\sqrt{1 + A^2 + 2A \cos \varphi(t)}, \text{ waarbij } \varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t).$$

Eenzoo levert toepassing der definitie voor de momenteele frequentie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{arc tg} \frac{\sin \varphi_1 + A \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + A \cos \varphi_2} = \\ = \omega_1 + \Delta \omega_1 \cos pt + \frac{A \cos \varphi + A^2}{1 + 2A \cos \varphi + A^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \right\} (14)$$

De eerste termen van deze som geven het gewenschte signaal, bij afwezigheid van den stoorzender.

De functie

$$f(x, A) = \frac{A^2 + A \cos x}{1 + 2A \cos x + A^2} \cdot \dots \cdot (15)$$

is in dit verband zoo belangrijk, dat we haar een oogenblik nader willen beschouwen. Zij is een periodieke functie van x , met periode 2π , en kan voorgesteld worden door een FOURIER-reeks. Voor $A < 1$ vindt men eenvoudig:

$$f(x, A) = A \cdot \cos x - A^2 \cdot \cos 2x + A^3 \cdot \cos 3x - A^4 \cdot \cos 4x + \dots$$

Verder geldt:

$$f(0, A) = \frac{A}{1+A}; f\left(\frac{\pi}{2}, A\right) = \frac{A^2}{1+A^2}; f(\pi, A) = \frac{-A}{1-A}.$$

De laatste betrekking geldt, wanneer $A \neq 1$. Naarmate A dichter bij 1 komt, wordt de piek bij π scherper, en de waarde van $f(x)$ grooter dan ieder gegeven getal. Wanneer A van beneden af tot 1

nadert, gelden de volgende betrekkingen:

$$\text{Lim}_{A=1} f(x, A) = \frac{1}{2}, \quad x \neq \pi. \quad (16a)$$

$$\text{Lim}_{A=1-0} f(\pi, A) = -\infty. \quad (16b)$$

$$\text{Lim}_{\epsilon=0} \text{lim}_{A=1-0} \int_{\pi-\epsilon}^{\pi+\epsilon} f(x, A) \cdot dx = -\pi. \quad . . . (16c)$$

en ten slotte:

$$\text{Lim}_{\epsilon=0} \text{lim}_{A=1-0} \int_{\pi-\epsilon}^{\pi+\epsilon} f(x, A) \cdot g(x) \cdot dx = -\pi g(\pi), \quad . (16d)$$

wanneer $g(x)$ continu is voor $x = \pi$.

Met de in de operatorenrekening gebruikelijke δ -functies schrijft men form. 16 kort: $\text{Lim}_{A=1-0} f(x, A) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \delta\left(\cos \frac{x}{2}\right)$

We merken nog op, dat het voldoende is, het geval $A \leq 1$ te beschouwen, omdat de overige waarden dan volgen uit de relatie:

$$f(x, A) + f\left(x, \frac{1}{A}\right) = 1. \quad (17)$$

Voor verschillende A is $f(x, A)$ geschetst in fig. 2.

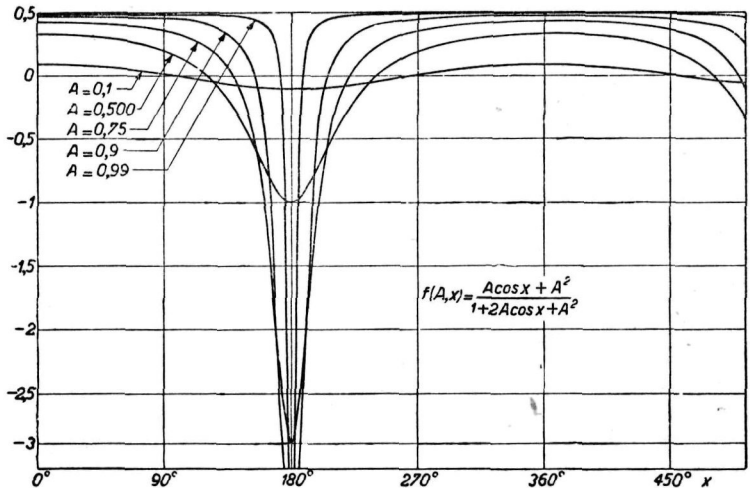


Fig. 2. Grafische voorstelling van $f(x, A)$ voor verschillende waarden van A .

Door gebruik te maken van de genoemde eigenschappen en de bekende ontwikkeling van $\cos(m \sin pt)$ kunnen we voor form. 14 schrijven, wanneer $A < 1$, $\Delta\omega_1 = m_1 p$, $\Delta\omega_2 = m_2 q$:

$$\omega_1 + \Delta\omega_1 \cos pt - \sum_s^{\infty} \frac{(-1)^s A^s}{s} \sum_m^{\infty} J_m(s m_1) \cdot \sum_n^{\infty} J_n(s m_2) \cdot \left. \begin{aligned} & \cdot (s\omega_2 - s\omega_1 - mp + nq) \cos \{(s\omega_2 - s\omega_1 - mp + nq)t + s\varphi_0\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

We zien, dat wanneer $\omega_2 \neq \omega_1$ de frequentie q in het algemeen niet optreedt in het gedetecteerde signaal. Dan is er dus geen kruis-modulatie, en de tweede term is geheel storing. Wanneer de audio-frequente band ω_a rad/sec. breed is, moeten we, om de hoorbare storing te berekenen, de energie sommeren van alle componenten, waarvoor m , n , en s voldoen aan de relatie:

$$-\omega_a < s(\omega_2 - \omega_1) - mp + nq < \omega_a.$$

Uit het symmetrisch karakter van de uitdrukking 18 volgt, dat bij verwisseling der intensiteitsverhoudingen de sterkste zender weer dezelfde storing ondervindt. Bij ieder geval, hetwelk we uitrekenen, behoort dus automatisch een toegevoegd geval, met gelijke storings-energie.

Zijn beide zenders ongemoduleerd, dan wordt de storingsenergie:

$$\sum_s^n \frac{A^{2s}}{s^2} \frac{s^2 (\omega_2 - \omega_1)^2}{2} = A^2 \cdot \frac{1 - A^{2n}}{1 - A^2} \cdot \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{2} \quad (19a)$$

waarbij n zoo gekozen moet worden, dat:

$$n(\omega_2 - \omega_1) \leq \omega_a < (n + 1)(\omega_2 - \omega_1).$$

De amplitude van de storing neemt stuksgewijs lineair toe met het frequentieverschil. De evenredigheidsfactor verandert naar gelang van het aantal doorgelaten harmonischen (zie fig. 3).

Met pre-emphasis wordt de storing onder overigens gelijke omstandigheden:

$$\sum_s^n \frac{A^{2s} (\omega_2 - \omega_1)^2}{2 \{1 + R^2 C^2 s^2 (\omega_2 - \omega_1)^2\}} \cdot \dots \quad (19b)$$

(zie fig. 3)

Wel is de energie van de storing niet zonder meer een maat voor de hinderlijkheid, maar een berekening van de subjectieve luidheid is te omslachtig, om hier telkens te worden toegepast (men zie ⁷⁵⁾ ⁷⁶⁾).

Gewoonlijk vergelijkt men de energie van de storing met de maximale nuttige energie: $\frac{\Delta \omega^2}{2}$. De relatieve storing is dus omgekeerd evenredig met het kwadraat van den max. frequentiezwaai. Wanneer

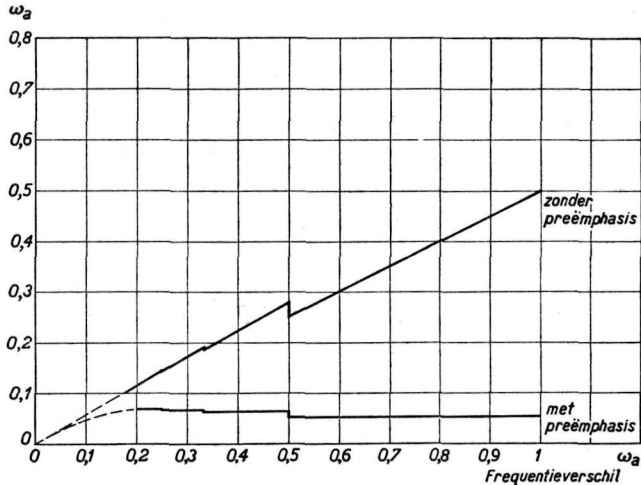


Fig. 3.

Amplitude der storing als functie van het frequentieverschil. Beide zenders ongemoduleerd. Amplitudeverhouding 2 : 1.

men $10 \times$ de logaritmie (bij het grondtal 10) van de verhouding der energieën neemt, krijgt men de verhouding in decibel.

Wanneer tenminste een van de twee zenders gemoduleerd is, en zoo'n grooten frequentiezwaai maakt, dat het spectrum van den anderen geheel wordt overdekt, kan men de storingsenergie op eenvoudige wijze schatten. We nemen daartoe aan, dat de energie van het breede spectrum gelijkmatig over $2\Delta\omega_1$ verdeeld is, en dat:

$$\Delta\omega_1 > \Delta\omega_2 + \omega_a + \omega_2 - \omega_1,$$

waarin $\Delta\omega_1$ en $\Delta\omega_2$ de frequentiezwaai van den eersten en tweeden zender, ω_1 en ω_2 de resp. draaggolffrequenties, en ω_a de laagfrequente bandbreedte zijn.

Men vindt dan gemakkelijk voor kleine A ($A < \frac{1}{2}$) een verhouding van de storingsenergie tot de nuttige energie van $\frac{\omega_a^3 \cdot A^2}{3 \cdot \Delta\omega^2 \cdot \Delta\omega_1}$,

waarin $\Delta\omega$ de volle modulatie, behoorend bij den ontvanger is. Bij toepassing van pre-emphasis krijgen we evenzoo:

$$\frac{A^2 (RC \omega_a - \text{arc tg } RC \omega_a)}{R^3 C^3 \cdot \Delta \omega^2 \cdot \Delta \omega_1}.$$

Zooals we uit de formule zien, wordt de storing grooter bij kleineren frequentiezwaai.

Wanneer we numerieke berekeningen maken, houden we ons steeds aan een RC tijd van 10^{-4} sec. We zullen deze keuze in hoofdstuk III nog nader bespreken. Het voordeel van pre-emphasis zou ten volle tot zijn recht komen, wanneer het uit te zenden laagfrequent spectrum voor de hoge tonen zoo weinig energie bezat, dat de bijbehorende frequentiezwaai, ook na pre-emphasis niet grooter was dan die voor de lage tonen. Bij een normaal muziek-spectrum is de situatie echter zoo, dat de frequentiezwaai voor de hoge tonen ten gevolge van de pre-emphasis te groot zou worden. Men moet daarom het geheele volume met 2,5 db. verlagen. Bij de beoordeeling van het relatieve voordeel der pre-emphasis, dient men de winst in db. dus eerst met 2,5 db. te verminderen. Dit is bij de volgende berekeningen nog niet gebeurd.

Hebben we een ontvanger voor een frequentiezwaai van 75 Kc/sec., en ontvangen we twee zenders met een draaggolffrequentieverschil van 5 Kc/sec., dan blijft de storing, indien beide zenders ongemoduleerd zijn zonder pre-emphasis (23,5 — 20 lg A) db., resp. met pre-emphasis (33,9 — 20 lg A) db., onder max. modulatie. Hierbij moet de amplitudeverhouding A kleiner zijn dan 0,5. Is A grooter, dan moet men meer termen in de ontwikkeling van de storingsamplitude naar A meetellen.

Is een zender vol gemoduleerd, en wordt het spectrum van den anderen geheel overdekt, dan geeft bovenstaande berekening: (25,7 — 20 lg A) db. beneden volle mod. zonder p.e. en (41,2 — 20 lg A) db. met p.e.

Wordt bij 5 Kc/sec. verschil in draaggolffrequentie de eene zender niet gemoduleerd, en de andere met 2001 per./sec. en 12 Kc/sec. frequentiezwaai, dan komt de storing (33,8 — 20 lg A) db. beneden v.m. bij toepassing van p.e., resp. (18,2 — 20 lg A) db. zonder p.e. Verhoogt men nu den frequentiezwaai van 12 tot 48 Kc/sec., dan worden deze getallen resp. (40,5 — 20 lg A) en (24,1 — 20 lg A) db.

Dit geldt nog steeds voor kleine A . Bij het zoo juist besproken geval van 5 Kc/sec. draaggolffrequentie-verschil, modulatie met 2001 per./sec. en 12 Kc/sec. frequentiezwaaai, wordt de reeksontwikkeling voor de energieverhouding van storing tot volle modulatie:

zonder pre-emphasis: $0,01510 A^2 + 0,001924 A^4 + 0,0005976 A^6$,
met pre-emphasis: $0,0004134 A^2 + 0,00005335 A^4 + 0,00001420 A^6$.

We hebben hier modulatie met 2001 per./sec. genomen, om moeilijkheden te voorkomen, die uit een toevallig samenvallen van componenten voortvloeien.

6. Twee zenders op één draaggolf.

Wanneer beide zenders op dezelfde draaggolffrequentie werken, wordt de momenteele frequentie van de resultante:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 + \Delta \omega_1 \cos pt - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} \cdot A^s \sum_{-\infty}^{\infty} J_m \left(\frac{s \Delta \omega_1}{p} \right) \cdot \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n \left(\frac{s \cdot \Delta \omega_2}{q} \right) \cdot (nq - mp) \cdot \cos \{(nq - mp)t + s\varphi_0\} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Hierbij kan dus kruismodulatie optreden, want de frequentie q komt in het uitgangsspectrum voor. Uit de formules blijkt, dat dit vooral bij ondiepe modulatie van beide zenders een rol speelt, omdat anders de talrijke andere frequenties de verstaanbaarheid toch onmogelijk maken. Wanneer men echter zonder speciale kunstgrepen, als expansie en compressie, een groote dynamiek wil uitzenden, zullen de zenders juist dikwijls ondiep gemoduleerd zijn, zoodat het effect een rol kan spelen.

We behandelen thans een aantal bijzondere gevallen:

a) Een zender ongemoduleerd.

Is het gewenschte signaal ongemoduleerd, dan krijgen we als momenteele frequentie: $\left(\frac{\Delta \omega}{q} = m \right)$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 - 2q \sum_0^{\infty} (2n+1) \cdot \cos(2n+1)qt \cdot \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^s A^s}{s} \cdot J_{2n+1}(sm) \cdot \cos s\varphi_0 \\ + 2q \sum_0^{\infty} 2n \cdot \sin 2nqt \cdot \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^s \cdot A^s}{s} \cdot J_{2n}(sm) \cdot \sin s\varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

De maximale waarde van J_1 is 0,5819, en wordt bereikt bij 1,84. De frequentiezwaai van de kruismodulatie is blijkbaar evenredig met de laagfrequente toonhoogte, en bij een toonhoogte van 1000 per./sec. wordt deze zwaai maximaal 1164 A. Wanneer 75 KC/sec. de volle modulatie is, blijven we daar $(36,3 - 20 \lg A)$ db. beneden, indien we geen pre-emphasis toepassen, en $(37,6 - 20 \lg A)$ db. met pre-emphasis.

Evenzoo wordt de amplitude van den grondtoon van het gewenschte signaal beïnvloed door een ongemoduleerden stoorzender. De berekening verloopt hiervoor geheel gelijk.

We kunnen ook voor de storing schrijven:

$$\Delta \omega \cdot \cos qt \frac{A \cos (m \sin qt + \varphi_0) + A^2}{1 + A^2 + 2A \cos (m \sin qt + \varphi_0)} \quad (14a)$$

Reeds eerder hebben we gezien, dat $\frac{A \cos x + A^2}{1 + A^2 + 2A \cos x}$ telkens een piek krijgt, wanneer $x = (2k + 1)\pi$, welke des te scherper wordt, naarmate A dichter bij 1 komt. Hier is $x = m \sin qt + \varphi_0$, en loopt dus in de eene halve laagfrequent periode van $-m + \varphi_0$ tot $m + \varphi_0$, en in de volgende halve periode weer terug. Het aantal storingspieken per halve periode hangt dus mede af van den phase-

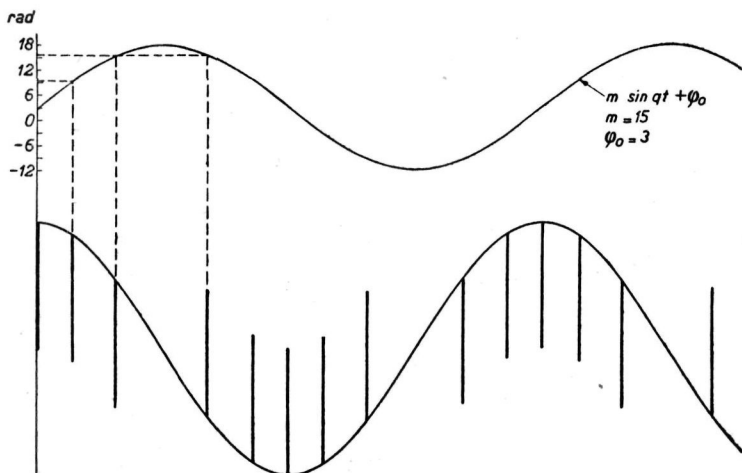


Fig. 4.

Storing van een ongemoduleerden zender door een gemoduleerden.
Modulatie-index m .

hoek, en is dus gelijk aan $\left[\frac{\Delta \omega}{\pi q} \right]$, of 1 grooter. De pieken komen hier voor, als product van $f(x, A)$ met $\cos qt$. Ze slaan van richting om, als A de waarde 1 passeert. Men kan hun ligging gemakkelijk grafisch vaststellen. (In fig. 4 zijn de pieken scherp geteekend, zooals ze worden, wanneer A tot 1 nadert. In andere gevallen zal men deze moeten vervangen, door de minder scherpe pieken behoorend bij de waarde van A , zie fig. 2.)

We gaan nu eenerzijds in form. 21 over tot de limiet voor $A = 1 - 0$, en passen daarnaast op form. 14a de bekende integratiemethoden der FOURIER-analyse toe. Wanneer we nu ook gebruik maken van form. 16d, krijgen we de harmonischen voor dit geval in gesloten vorm.

De grondtoon wordt:

$$2q \left\{ J_1(m) \cdot \cos \varphi_0 - J_1(2m) \cdot \frac{\cos 2\varphi_0}{2} + J_1(3m) \cdot \frac{\cos 3\varphi_0}{3} + \dots \right\} = \left. \begin{aligned} & 2q \left[\frac{m}{4} - \sum_k \cos \left\{ \arcsin \frac{(2k+1)\pi - \varphi_0}{m} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

waarbij we moeten sommeeren over alle k , waarvoor:

$$-m < (2k+1)\pi - \varphi_0 \leq m.$$

Het definitiegebied van \arcsin loopt hier van $-\frac{\pi}{2}$ tot $\frac{\pi}{2}$. Evenzoo vinden we voor de tweede harmonische:

$$2q \cdot 2 \left\{ J_2(m) \cdot \sin \varphi_0 - J_2(2m) \cdot \frac{\sin 2\varphi_0}{2} + J_2(3m) \cdot \frac{\sin 3\varphi_0}{3} + \dots \right\} = \left. \begin{aligned} & 2q \left[\sum_k \sin 2 \left\{ \arcsin \frac{(2k+1)\pi - \varphi_0}{m} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (22b)$$

waarbij over dezelfde k 's gesommeerd moet worden, en evenzoo voor de derde harmonische:

$$2q \cdot 3 \left\{ J_3(m) \cdot \cos \varphi_0 - J_3(2m) \cdot \frac{\cos 2\varphi_0}{2} + J_3(3m) \cdot \frac{\cos 3\varphi_0}{3} + \dots \right\} = \left. \begin{aligned} & 2q \left[- \sum_k \cos 3 \left\{ \arcsin \frac{(2k+1)\pi - \varphi_0}{m} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (22c)$$

Wanneer we in deze gevallen linker- en rechterlid door $2q$ deelen, blijven merkwaardige identiteiten voor reeksen van BESSELfuncties over. Verder zien we, dat wanneer tusschen $-m + \varphi_0$ en $m + \varphi_0$ geen oneven veelvoud van π ligt, bij gelijke sterkte van den gemoduleerden en den ongemoduleerden zender, de modulatie onvervormd, maar met halve sterkte in de resultante komt. In alle andere gevallen treedt vervorming op.

a2) *Groote frequentiezwaai.*

Indien de frequentiezwaai groot is ten opzichte van de laagfrequente toonhoogte, kunnen we de bekende benadering gebruiken voor $J_n(x)$, welke voor groote x geldt, n.l.

$$J_n(x) \cong \frac{\cos \left\{ x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right\}}{\sqrt{\frac{\pi x}{2}}}.$$

($n^2 \ll x$).

Verder nemen we den phasehoek $\varphi_0 = 0$.

Formule 21 kunnen we voor dit geval vereenvoudigen tot:

$$\omega_0 - (2q)^{3/2} (\pi \cdot \Delta \omega)^{-1/2} f(A, m) \cdot \{ \cos qt - 3 \cos 3qt + 5 \cos 5qt + \dots \}$$

waarbij:

$$f(A, m) = A \cos \left(m + \frac{\pi}{4} \right) - A^2 \cdot 2^{-3/2} \cdot \cos \left(2m + \frac{\pi}{4} \right) + \\ + A^3 \cdot 3^{-3/2} \cos \left(3m + \frac{\pi}{4} \right) + \dots$$

Voor $m = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ wordt:

$$f \left(A, -\frac{\pi}{4} \right) = A - \frac{1}{4} A^2 + \frac{A^4}{8 \cdot \sqrt{2}} + \dots$$

De verhouding van de storingsenergie tot de max. modulatie-energie wordt dan:

$$\frac{(2q)^3 \cdot A^2}{\pi \cdot \Delta \omega \cdot \Delta \omega_{max}^2} \{1 - \frac{1}{2} A + \frac{1}{16} A^2 + \dots\} (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + n^2)$$

waarin n het grootste oneven getal, kleiner dan $\frac{\omega_a}{q}$, is.

Is q klein ten opzichte van ω_a , dan wordt:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + n^2 \approx \frac{1}{6} \frac{\omega_a^3}{q^3}.$$

De gezochte verhouding tusschen storingsenergie, en max. modulatie wordt in dat geval:

$$\frac{4}{3\pi} \frac{\omega_a^3}{\Delta \omega \cdot \Delta \omega_{max}^2} \cdot A^2 \cdot (1 - \frac{1}{2} A).$$

Bij toenemenden frequentiezwaai neemt de storing weer af. Het feit, dat we voor de uitwerking der formule $\varphi_0 = 0$ namen, is niet belangrijk. Voor $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ leidt men het resultaat ook gemakkelijk af.

Bij toepassing van pre-emphasis verkrijgt men op analoge wijze voor dezelfde energieverhouding:

$$\frac{4}{\pi} \frac{1}{R^3 C^3 \cdot \Delta \omega \cdot \Delta \omega_{max}^2} \{RC \omega_a - \text{arc } \text{tg } RC \omega_a\} A^2 \cdot (1 - \frac{1}{2} A).$$

Numeriek verkrijgt men voor $\frac{\Delta \omega}{\omega_a} = 5$, en max. modulatie, de volgende waarden voor de storing:

	Zonder pre-emphasis	In db.	Met pre-emphasis	In db.
$A = 0,1$	0,0000323	44,9	$0,921 \cdot 10^{-6}$	60,4
$A = 0,25$	0,000187	37,3	$5,33 \cdot 10^{-6}$	52,7
$A = 0,5$	0,000659	31,8	$18,8 \cdot 10^{-6}$	47,3

a3) *Grootste storing.*

De storing wordt grooter, naarmate, bij ongemoduleerden gewenschten zender, een grooter deel van de energie van den stoorzender tusschen $\omega_0 - \omega_a$ en $\omega_0 + \omega_a$ ligt. Voor $m = 10$, $\varphi_0 = 0$ krijgen we de volgende tabel voor de storing (laagfrequente bandbreedte ontvanger 15 Kc/sec. en max. frequentiezwaai 75 Kc/sec.). De storingsenergie in db. beneden max. modulatie is:

q in per./sec.	Zonder pre-emphasis			met pre-emphasis		
	A = 0,1	0,25	0,5	0,1	0,25	0,5
7500	51,7	44,7	41,3	65,3	58,4	55,0
4500	51,2	44,0	40,5	64,7	57,6	54,2
2800	41,2	33,8	29,0	59,2	51,8	47,2
2100	39,1	31,1	24,4	56,1	48,1	41,9
1600	37,1	29,3	23,5	54,5	46,7	41,0
1300	36,6	29,0	23,4	53,4	45,7	40,4

Het ongunstigste geval voor onze berekening krijgen we ongeveer wanneer $q = 15.000$ per./sec., en J_1 maximaal, dus $m = 1,84$. Zonder pre-emphasis komen we dan uit op 33,2 db. ($A = 0,1$), 24,9 db. ($A = 0,25$) en 19,3 db. ($A = 0,5$). Met pre-emphasis wordt dit resp. 52,7 db., 44,1 db. en 38,9 db. Voor 8000 per./sec. krijgen we in analoge gevallen zonder pre-emphasis 38,6 db., 30,4 db., 24,8 db.; resp. met pre-emphasis 52,8 db., 44,6 db. en 39,0 db.

Bij modulatie van beide zenders wordt de situatie niet ongunstiger. Hebben we bijv.: $m_1 = 10$, $m_2 = 15$, $p = 6000$, $q = 4799$, $\omega_a = 15.000$ per./sec., dan wordt de storing voor $A = 0,1$: 44,8 db. zonder, en 60,7 db. met pre-emphasis.

§ 7. a) *Beide zenders dezelfde modulatie.*

De afzonderlijke signalen zijn: $\cos(\omega_0 t + m \sin pt)$ en

$$A. \cos\{\omega_0 t + m \sin(pt + \psi) + \varphi\}.$$

In dit geval wordt de momenteele frequentie, gerangschikt naar harmonischen:

$$\begin{aligned}
 & \omega_0 + \Delta\omega \cos pt - 2p \cdot \sin \left(pt + \frac{\psi}{2} \right) \cdot \\
 & \cdot \left\{ A \cdot J_1(a) \cdot \cos \varphi - \frac{A^2}{2} \cdot J_1(2a) \cdot \cos 2\varphi + \frac{A^3}{3} \cdot J_1(3a) \cdot \cos 3\varphi + \dots \right\} + \\
 & + 2 \cdot 2p \cdot \sin \left(2pt + \frac{\psi}{2} \right) \cdot \\
 & \cdot \left\{ A \cdot J_2(a) \sin \varphi - \frac{A^2}{2} \cdot J_2(2a) \cdot \sin 2\varphi + \frac{A^3}{3} \cdot J_2(3a) \cdot \sin 3\varphi + \dots \right\} + \quad (23) \\
 & + 2 \cdot 3p \sin \left(3pt + \frac{\psi}{2} \right) \cdot \\
 & \cdot \left\{ A \cdot J_3(a) \cdot \cos \varphi - \frac{A^2}{2} \cdot J_3(2a) \cdot \cos 2\varphi + \frac{A^3}{3} \cdot J_3(3a) \cdot \cos 3\varphi + \dots \right\} - \\
 & - 2 \cdot 4p \sin \left(4pt + \frac{\psi}{2} \right) \cdot \{ \dots \} \dots
 \end{aligned}$$

waarin $\alpha = 2m \sin \frac{\psi}{2}$.

Afgezien van $\Delta\omega \cos pt$, krijgen we dezelfde componenten, als optreden bij de storing van een ongemoduleerden zender door een stoorzender met frequentiezwaai $2 \Delta\omega \cdot \sin \frac{\psi}{2}$, en waarvan de laagfrequente modulatie evenredig is met $\cos \left(pt + \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$.

De ligging der storingspieken is op dezelfde eenvoudige wijze vast te stellen, als in het eerder besproken geval. Daar de storing niet in phase is met het ongestoorde signaal, kan het omklappen van de pieken in de resultante nu op andere punten geschieden.

Bij het berekenen van de storingsenergie tellen we nu den grondtoon niet mee, omdat deze term alleen phasedraaiing en versterking van het ongestoorde signaal veroorzaakt.

We krijgen dan de volgende tabel:

q per./sec.	Zonder pre-emphasis			Met pre-emphasis		
	A = 0,1	0,25	0,5	0,1	0,25	0,5
4500	53,0	45,6	42,1	71,7	64,3	60,8
2800	41,4	34,0	29,1	60,2	52,8	47,9
2100	39,2	31,0	24,5	56,6	48,4	42,1
1600	37,2	29,4	23,6	54,8	47,0	41,3
1300	36,7	29,1	23,5	53,6	45,9	40,4

De meeste storing verwachten we nu in het max. van J_2 , als de phasehoek gunstig is voor het ontstaan van tweede harmonische, dus bijv. $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $J_2(3,06) = 0,487$. Voor $A = 0,1$, komen we met pre-emphasis op 53,8 db. en zonder pre-emphasis op 34,2 db. beneden volle modulatie. Dit geldt bij 7500 per./sec. modulatie. Bij 4000 per./sec. wordt het resultaat resp. 53,2 en 40,0 db.

b) *Eenzelfde signaal langs twee wegen ontvangen.*

In dit geval krijgen we, wanneer het tijdsverschil tusschen de signalen τ sec. is, in formule (23): $\psi = p\tau$ en $\varphi = \omega_0\tau$.

Bij klein tijdsverschil ($p\tau \ll 1$), mogen we den modulatie-index van de storing $2m \sin \frac{p\tau}{2}$ wel gelijk $\Delta\omega\tau$ stellen. Zoodra $\omega\tau$ ongeveer π wordt, dus voor een golflengte van 7 Meter bij een tijdsverschil van $1,17 \cdot 10^{-8}$ sec., kunnen, wanneer de beide signalen ongeveer gelijke amplitude hebben, reeds vrij groote storingen optreden. Voor $A \rightarrow 1$, nadert de amplitude van de tweede harmonische, zooals we in § 6 gezien hebben, tot: $2 p \cdot \sin\left(2 \arcsin \frac{\pi - \omega\tau}{\Delta\omega\tau}\right)$. Van de derde harmonische wordt de amplitude evenzoo: $2 p \cdot \cos\left(3 \arcsin \frac{\pi - \omega\tau}{\Delta\omega\tau}\right)$, enz.

Indien $\beta = \arcsin \frac{\pi - \omega\tau}{\Delta\omega\tau}$, ω_a de laagfrequente bandbreedte, en

$$\left[\frac{\omega_a}{p}\right] = 2n + 1, \text{ wordt de storingsenergie:}$$

$$2p^2 \cdot \{\sin^2 2\beta + \cos^2 3\beta + \dots \cos^2 (2n + 1)\beta\}.$$

Voor kleine p wordt deze energie dus ongeveer $2np^2 = p\omega a$. Wordt met 7500 per./sec. gemoduleerd, dan blijft de storing zonder pre-emphasis 14,0 db. onder volle modulatie, en met pre-emphasis 33,5 db. Bij modulatie met 1000 per./sec. worden deze getallen resp. 25,7 en 33,0 db. Toch zal bij het hier besproken tijdsverschil van ca. 10^{-8} sec. in het algemeen niet zoo'n groote storing optreden, omdat, voor het bereiken hiervan, zoowel amplitude als tijdsverschil aan zeer nauwe grenzen gebonden zijn. De situatie wordt heel anders, wanneer het signaal, langs één van beide wegen komend, tweemaal zoo sterk is als het andere. Voor $A = 0,1$ en $A = 0,5$ is de maximale storing berekend:

$\Delta \omega \tau$	Zonder pre-emphasis		Met pre-emphasis	
	A 0,1	A 0,5	A 0,1	A 0,5
0,1	84	68	104	88
0,5	61,5	40,3	81,0	59,9
1	49,9	31,1	69,4	50,6
2	40	25,6	59,5	45,2
3	37,2	33,4	56,8	43,0

De storing is weer opgegeven in db. beneden volle modulatie (75 Kc/sec.).

Uit de metingen, welke WAYNICK⁷⁸⁾ deed over een afstand van 73 KM, en die van CRAWFORD, ENGLUND en MUMFORD⁷⁹⁾ over 120 KM (zeetraject), volgt wel, dat over deze afstanden steeds één der signalen veel sterker is dan het andere. Daarentegen komt de conditie van ongeveer gelijke sterkte, langs twee verschillende wegen meer voor bij transmissie via de ionosfeer, zooals bijv. bij CROSBY's metingen^{9) 51)} over 1800 KM bleek. Hier kwamen tijdsverschillen tot enkele msec. voor. Voor deze afstanden is frequentie-modulatie minder geschikt.

Bij de beoordeeling van het resultaat achten GUY en MORRIS³⁷⁾ voor uitstekende ontvangst een niveauverschil van 50 db. tusschen signaal en storing noodig; zij vinden de ontvangst nog goed bij 40 db. verschil, slechts matig bij 30 db., en bij 20 db. slecht. Wan-

neer men aan frequentiemodulatie hoge eischen wil stellen, is een amplitudeverhouding 2 : 1 tot een ander signaal op dezelfde golflengte niet voldoende, ook niet met pre-emphasis. Zooals uit de tabel in § 6 volgt, is een verhouding 10 : 1 dichter bij de gewenschte waarde. Dit klopt met de experimenteele resultaten van GUY en MORRIS. Het belang van pre-emphasis voor deze storingen staat uit de berekening wel vast.

HOOFDSTUK III.

Over den invloed van het geruisch en de storingen op de ontvangst van signalen met frequentiemodulatie.

8. *Geruisch.*

Zooals we reeds in de inleiding gezien hebben, bevat iedere frequentieband, naast het signaal, dat we wenschen te ontvangen, nog componenten, die de ontvangst storen. Wanneer het spectrum der storende componenten continu is, en aan een groot aantal toevallige oorzaken te wijten, spreekt men van het geruisch. Dit geruisch wordt bijv. veroorzaakt door den discontinuen overgang der electriciteit in radiobuizen, en door thermische beweging in weerstanden, of ook door atmosferische omstandigheden. Terwijl bij het geruisch de fasen der afzonderlijke componenten steeds toevallig verdeeld zijn, is dit bij impuls- of knalstoringen niet het geval. Hier zijn alle componenten op een bepaald moment in phase, waardoor een piek ontstaat. Deze soort storingen kan bijv. veroorzaakt worden door het ontstekingsmechanisme van een dichtbij passerende auto, door een diathermieapparaat, enz.

Als maat voor de hinderlijkheid van het geruisch nemen we de energie, en als maat voor de hinderlijkheid van impulsstoringen de tophoogte, beide van de storing in het laagfrequent spectrum aan den uitgang van den ontvanger. We houden dus geen rekening met de oorgevoeligheidskromme. Daar we steeds naast elkaar beschouwen: de storing bij frequentiemodulatie, en die bij amplitude-modulatie, wordt de fout, welke we hierdoor maken, weer eenigszins gecompenseerd. Overigens zou ook het gebruik van een eenvoudige gewichtsfunctie niet tot het doel leiden, vooral niet bij de aanwezigheid van signaal (vgl. FLETCHER c.s. ⁷⁵ ⁷⁶). Volgens CROSBY ¹⁰) mag het driehoekig geruischpectrum, dat bij f.m., zooals we aanstonds zullen zien, ontstaat, voor gelijke hinderlijkheid 8 db. meer energie hebben, dan het gewone rechthoekige spectrum van het geruisch bij a.m. Dit voordeel, dat bij toepassing van pre-emphasis weer verloren gaat, komt bij energieberekening niet tot uiting. In Europa heeft een internationale commissie ter bestudeering van

radiostoringen (C.I.S.P.R.) aanbevelen de storingen te meten met een top-spanningsmeter, waarvoor laadtijd en ontlaadtijd gegeven waren (resp. 1 en 160 msec.). In de Vereenigde Staten koos men een dergelijk instrument met andere tijdconstanten (zie BURRILL ⁷⁴)).

Bij de berekening denken we ons het geruisch aan den ingang van den frequentiedetector gedurende een tijd van $-T$ tot T waargenomen. Van deze tijdsfunctie zij het FOURIER-spectrum bepaald:

$$v(t) = \text{Re} \sum_n^{\infty} (a_n + i b_n) e^{i n \frac{\pi t}{T}}; \quad |t| \leq T. \quad . \quad . \quad (24)$$

Hierbij hebben zoowel a_n , als b_n een waarschijnlijkheidsverdeeling volgens GAUSS. (Zie literatuur, 70—73). Door overgang op poolcoördinaten vindt men de waarschijnlijkheidsverdeeling van de moduli der componenten:

$$W(r_n) \cdot dr_n = \frac{2 r_n}{c} \cdot e^{-\frac{r_n^2}{c}} \cdot dr_n \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Hierin is $c = \overline{r_n^2} = \int_0^{\infty} W(r_n) \cdot r_n^2 \cdot dr_n$, dus het quadratisch gemiddelde van de moduli. Alle phasehoeken hebben gelijke waarschijnlijkheid.

De middenfrequentfilters van het ontvangtoestel zullen nu de componenten van het geruisch doorlaten, welke liggen in den band van $\omega_c - \Delta\omega$ tot $\omega_c + \Delta\omega$. (ω_c is de draaggolffrequentie, en $2 \Delta\omega$ de bandbreedte van de middenfrequentfilters.) Van de resultante van dit storend spectrum en de draaggolf moeten we nu de momenteele frequentie bepalen, om den toestand in de pauze van het programma weer te geven. Dus:

$$V(t) = \text{Re} \left\{ e^{i \omega_c t} + \sum_n^{N_2}_{N_1} r_n \cdot e^{i \left(n \pi \frac{t}{T} + \theta_n \right)} \right\} \quad . \quad . \quad (26)$$

In deze en de volgende formules sommeeren we over die waarden van n , waarvoor:

$$\omega_c - \Delta\omega \leq \frac{n \pi}{T} \leq \omega_c + \Delta\omega.$$

De gevraagde momenteele frequentie wordt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \omega_c t + \sum r_n \sin \left(n \frac{\pi t}{T} + \theta_n \right)}{\cos \omega_c t + \sum r_n \cos \left(n \frac{\pi t}{T} + \theta_n \right)} = \\ = \omega_c + \frac{\sum \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right) \cdot r_n \cos \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right) t + \theta_n \right\} +}{1 + 2 \sum r_n \cdot \cos \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right) t + \theta_n \right\} +} \\ + \frac{\sum \sum \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right) \cdot r_n r_m \cdot \cos \left\{ (n-m) \frac{\pi t}{T} + \theta_n - \theta_m \right\}}{+ \sum \sum r_n r_m \cos \left\{ (n-m) \frac{\pi t}{T} + \theta_n - \theta_m \right\}} \end{aligned}$$

Bij balansdetectie vervalt de eerste term in deze som. We kunnen voor de resultante der geruischcomponenten ook schrijven:

$$\sum r_n \cdot \cos \left(\frac{n\pi}{T} t + \theta_n \right) = A(t) \cdot \cos \varphi(t).$$

Na balansdetectie krijgen we dan:

$$f(t) = \frac{(\varphi' - \omega_c) [A^2 + A \cdot \cos \{ \varphi(t) - \omega_c t \}] + A'(t) \cdot \sin \{ \varphi(t) - \omega_c t \}}{1 + A^2 + 2A \cdot \cos \{ \varphi(t) - \omega_c t \}}.$$

Deze functie heeft weer een limiet voor $A \rightarrow 1$, behalve wanneer $\cos \{ \varphi(t) - \omega_c t \} = -1$, want dan gaat ze naar $\rightarrow \infty$. Voor $A < 1$, kan men $f(t)$ in een reeks ontwikkelen:

$$f(t) = \frac{d}{dt} \left\{ A(t) \cdot \sin \{ \varphi(t) - \omega_c t \} - \frac{A^2}{2} \sin 2(\varphi - \omega_c t) + \right. \\ \left. + \frac{A^3}{3} \sin 3(\varphi - \omega_c t) \dots \right\} \quad (27a)$$

Deze ontwikkeling is identiek met de volgende:

$$f(t) = \left. \begin{aligned} & \Sigma \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right) \cdot r_n \cos \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right) t + \theta_n \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \Sigma \Sigma \left\{ \frac{(n+m)\pi}{T} - 2\omega_c \right\} r_n \cdot r_m \cos \left\{ \frac{(n+m)\pi t}{T} - 2\omega_c t + \theta_n + \theta_m \right\} + \\ & + \frac{1}{8} \Sigma \Sigma \Sigma \left\{ \frac{(n+m+p)\pi}{T} - 3\omega_c \right\} r_n \cdot r_m \cdot r_p \cdot \cos \left\{ \frac{(n+m+p)\pi t}{T} - \right. \\ & \left. - 3\omega_c t + \theta_n + \theta_m + \theta_p \right\} + \dots \end{aligned} \right\} \cdot (27b)$$

Om de energieverdeeling in het na detectie verkregen hoorbare spectrum te berekenen, merken we op, dat de amplitude van een bepaalden component hierin, een functie is van de kenmerkende grootheden der middenfrequente geruischcomponenten. Deze functie is in de singuliere punten niet bepaald, maar heeft daar wel een linker- en rechter limiet. Wanneer we de bedoelde functie $g(a_{N_1}, \dots, b_{N_s})$ noemen, is de gemiddelde bijdrage van dezen component tot de energie:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(a_{N_1}, \dots, b_{N_s}) \cdot W(a_{N_1}) \dots W(b_{N_s}) \cdot da_{N_1} \dots db_{N_s}$$

waarbij:

$$W(a_{N_i}) = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} e^{-\frac{a^2 N_i}{c}}.$$

Op de moeilijkheden, die men ontmoet bij een poging om deze integraal exact te berekenen, komen we nog terug. In de integrand neemt de functie g weliswaar toe, maar de e -machten nemen sneller af. g blijft begrensd. Daarom kunnen we een benadering maken, indien we g kennen voor kleine a_n , b_n , enz., bijv. $a_n < 2c^{\frac{1}{2}}$. Wanneer de energie van het geruisch klein is ten opzichte van de draaggolfenergie, hebben we voor g een goede benadering in den eersten term van form. 27b. In het laagfrequent spectrum komen hiervan de termen, waarvoor: $-\omega_a < \frac{n\pi}{T} - \omega_c < \omega_a$, dus in totaal

$\left[2 \frac{\omega_a T}{\pi} \right] = 2S$ termen. De energie wordt dus in passende eenheden:

$$2S \cdot \frac{\overline{r_n^2}}{2} \cdot \overline{\left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right)^2} = S c \frac{\omega_a^2}{3}.$$

In het vervolg behouden we dezelfde eenheden. Ons interesseeren toch slechts verhoudingen.

Uit de formule volgt, dat na detectie het geruisch spectrum driehoekig wordt, want iedere component wordt juist vermenigvuldigd met een grootheid, evenredig aan den afstand van zijn frequentie tot de draaggolfrequentie.

Bij amplitudemodulatie krijgen we als eerste orde term:

$$\sum_{-s}^{+s} r_n \cdot \cos \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right) t + \theta_n \right\}$$

en bij phasemodulatie:

$$\sum_{-s}^{+s} r_n \cdot \sin \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right) t + \theta_n \right\}.$$

De energie wordt in beide gevallen: $S c$.

Bij toepassing van pre-emphasis wordt de amplitude van iederen component met toonhoogte p , vermenigvuldigd met een factor $(1 + R^2 C^2 p^2)^{-\frac{1}{2}}$. In dit geval krijgt men voor de energie door integratie:

$$\frac{cS}{\pi R^3 C^3 \omega_a} (RC \omega_a - \text{arc tg } RC \omega_a).$$

Het ligt voor de hand de energie van deze storing te vergelijken met die van de maximale modulatie. Deze laatste wordt bij amplitudemodulatie: $\frac{1}{2}$, bij frequentiemodulatie: $\frac{1}{2} \Delta \omega^2$, indien $\Delta \omega$ de max. frequentiezwaai is. Bij phasemodulatie evenzoo: $\frac{1}{2} \frac{\Delta \omega^2}{p^2}$, wanneer $\Delta \omega$ de frequentiezwaai, en p de frequentie van het moduleerende signaal is.

De verhouding tusschen de energieën van het geruisch en de max. modulatie wordt dus, wanneer de energie van het geruisch middenfrequent klein is ten opzichte van de draaggolfenergie:

a) Bij amplitudemodulatie: $\frac{2 c T \omega_a}{\pi} = D \dots \dots \dots (28)$

b) Bij amplitudemodulatie met pre-emphasis: $\frac{\text{arc tg } RC \omega_a}{RC \omega_a} \cdot D$

c) Bij fasemodulatie: $\left(\frac{p}{\Delta \omega}\right)^2 \cdot D$

d) Bij frequentiemodulatie: $\frac{\omega_a^2}{3 \Delta \omega^2} \cdot D$

e) Bij frequentiemodulatie met pre-emphasis:

$$\frac{\omega_a^2}{\Delta \omega^2} \frac{RC \omega_a - \text{arc tg } RC \omega_a}{R^3 C^3 \omega_a^3} D.$$

Wat gebeurt nu, wanneer we bij deze kleine geruisch-energie den zender gaan moduleeren?

Bij amplitudemodulatie krijgen we op den detector de spanning:
(sinusvormige modulatie).

$$\cos \omega_0 t \cdot (1 + a \cos pt) + \sum r_n \cos \left(\frac{n\pi t}{T} + \theta_n \right)$$

De momenteele amplitude wordt in eerste benadering:

$$1 + a \cos pt + \sum r_n \cos \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c \right) t + \theta_n \right\} + \frac{a}{2} \cdot \sum r_n \cos \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c - p \right) t + \theta_n \right\} + \frac{a}{2} \sum r_n \cos \left\{ \left(\frac{n\pi}{T} - \omega_c + p \right) t + \theta_n \right\}.$$

De energie van de storing is dus: $(1 + a^2) \cdot A$.

Bij frequentiemodulatie moeten we de momenteele frequentie bepalen van de resultante van:

$$\sum J_n \left(\frac{\Delta \omega_2}{p} \right) \cdot \cos npt + \sum r_n \cos \left(\frac{n\pi}{T} t + \theta_n \right).$$

We moeten hierbij steeds sommeeren over de componenten, die door de middenfrequentfilters worden doorgelaten. Het gedetecteerde spectrum wordt nu in eerste benadering:

$$\omega_0 + \Delta \omega \cos pt +$$

$$+ \sum \sum \left(np - \frac{m\pi}{T} \right) \cdot J_n \cdot r_m \cdot \cos \left(\omega_c t + npt - \frac{m\pi}{T} t - \theta_m \right).$$

Om iederen component J_n heen krijgen we een storingsspectrum. Dit zal het laagfrequente gebied geheel overdekken, wanneer voldaan is aan: $np < \Delta\omega_1 - \omega_a$, waarbij $\Delta\omega_1$ de halve bandbreedte der middenfrequente filters is, maar slechts gedeeltelijk, wanneer: $\Delta\omega_1 - \omega_a < mp < \Delta\omega_1 + \omega_a$. Hieruit berekent men gemakkelijk de hoorbare storingsenergie:

$$(J_0^2 + 2 \sum J_n^2) \cdot \frac{cT}{\pi} \cdot \frac{\omega_a^3}{3} + \sum J_m^2 \cdot \frac{cT}{\pi} \cdot \left\{ \frac{\omega_a^3}{3} - \frac{(mp - \Delta\omega)^3}{3} \right\}.$$

De energie van het geruisch wordt nu beter benaderd, door de energie berekend voor het geval, dat geen modulatie optreedt, naar mate de energie van het f.m. signaal voor een grooter deel binnen den band tusschen $\Delta\omega_1 - \omega_a$ en $\Delta\omega_1 + \omega_a$ blijft. Hetzelfde geldt ook bij toepassing van pre-emphasis, voor welk geval men gemakkelijk de bijbehorende uitdrukking vindt.

Ter oriëntatie geven we nu eenige numerieke gegevens. We vergelijken de signaal-geruisch-verhouding steeds met die bij amplitude-modulatie van dezelfde bandbreedte.

Frequentiezwaai (Kc/sec.)	15	75	8	15	75	150
Ontvangerbreedte l.f. (Kc/sec.)	15	15	8	8	8	15
Voordeel in decibel voor:						
Ampl. mod. met pre-emphasis	8,08		5,63			
Frequentiemodulatie	4,77	18,75	4,77	10,23	24,21	24,77
Freq. mod. met pre-emphasis	20,22	34,20	15,41	20,87	34,85	40,22

Het verschil in signaal-geruisch-verhouding tusschen amplitude-modulatie met 8 Kc/sec. bandbreedte en 15 Kc/sec. is 5,46 db. Bij de berekening is een RC tijd van 10^{-4} sec. voor de pre-emphasis aangenomen.

9. Keuze van pre-emphasis en frequentiezwaai.

Voor een zender is een bepaalde frequentieband beschikbaar. Om dezen band zoo goed mogelijk te benutten, zal men ernaar streven den max. frequentiezwaai juist te laten corresponderen met de toppen van de energie van het uit te zenden l.f. spectrum. Wanneer deze topenergieën voor alle frequenties gelijk waren, zou men den band het best benutten met gewone frequentiemodulatie. Pre-empha-

sis ware in dit geval ongewenscht, want we zouden tegen elkaar af moeten wegen: ($RC\omega_a = x$).

Vermindering van het geruisch-niveau door pre-emphasis: $3x^{-3} \cdot (x - \arctg x)$.

Noodzakelijke daling van de modulatie-energie: $(1 + x^2)^{-1}$.

Het totaal effect: $3x^{-3} \cdot (x - \arctg x) \cdot (1 + x^2)$ geeft dan steeds een relatieve toename van het geruisch.

De energieverdeling van het gemiddelde spraak- en muziek-spectrum is statistisch onderzocht³³⁾, en de topenergieën blijken bij de hoge tonen ca. 14 db. lager te liggen, dan bij 300 per./sec. het geval is. Het is daarom mogelijk pre-emphasis toe te passen, zonder dat het voordeel effect door een noodzakelijke verlaging van het totale niveau weer verloren gaat. In de Ver. Staten heeft de F.C.C. een RC tijd van 10^{-4} sec. wettelijk vastgelegd, en wij hebben deze keuze ook voor onze quantitative berekening gebruikt. Het blijkt noodzakelijk om hierbij het totale niveau met 2,5 db. te verlagen. Dit bedrag moeten we dus van de winst door pre-emphasis aftrekken. Afspraken over de toelaatbare hoeveelheid energie in den naastliggenden band zouden een correctie op de overwegingen, die tot een bepaalde pre-emphasis-keuze leiden, noodzakelijk kunnen maken.

De keuze van den frequentiezwaai hangt af van de qualiteits-eischen, welke men voor behoorlijke ontvangst noodzakelijk acht. Voor goede muziek wenscht men het geruisch minstens 50 db. beneden volle modulatie te houden, maar voor communicatie-doeleinden kan men met veel minder volstaan. Nu gelden de tot nu toe gegeven berekeningen slechts indien de energie van het middenfrequente geruisch-spectrum klein is ten opzichte van de draaggolf-energie. Uit experimenteele gegevens kan men afleiden, dat de max.

toelaatbare verhouding hier $\frac{1}{4}$ is. Met de notatie van form. 28 is de verhouding van het middenfrequent geruisch tot de draaggolfenergie:

$\frac{\Delta\omega}{\omega_a} D$. Voor $\Delta\omega = 75$ Kc/sec. en $\omega_a = 15$ Kc/sec. moet D dus

kleiner zijn dan 0,05, en de lineaire afname van het geruisch begint dus bij $34,2 + 13,0 = 47,2$ db. Kiest men den frequentiezwaai grooter, dan moet men ook de draaggolfamplitude verhoogen, om bij hetzelfde ingangs-geruischniveau de waarde te bereiken, waar-

voor de formules gelden. Bij een frequentiezwaai van 150 Kc/sec. begint de verbetering bij $40 + 16 = 56$ db., en bij 15 Kc/sec. reeds bij $20 + 3 = 23$ db. Het punt, waarbij de afwijking van het lineaire verloop meer dan 10 % wordt, noemen we den verbeteringsdrempel voor het geruisch. Uit het voorafgaande volgt, dat indien men een bandbreedte van 15 Kc/sec. noodig acht, en een signaal geruisch-verhouding van 47 db., de frequentiezwaai van 75 Kc/sec. de voorkeur verdient. Indien het geruischniveau op de plaatsen, waar ontvangst gewenscht wordt, nu bekend is, kan men ook de vereischte veldsterkte bepalen. Met behulp van grafieken, gebaseerd op het theoretisch werk van VAN DER POL en BREMMER⁷⁷), laat zich dan het vereischte zendantenne-vermogen vaststellen. Voor communicatiedoeleinden komt men op deze wijze tot een lageren frequentiezwaai; dit brengt evenwel mede, dat men aan de stabiliteit van zender en ontvanger hogere eischen moet stellen.

De samenhang tusschen de waarschijnlijkheidsverdeeling van de momenteele amplitude van het geruisch, en de energie is eenvoudig: De resultante der N componenten, die alle, zoowel wat hun imaginair, als reëel deel betreft, een verdeeling volgens GAUSS hebben, heeft ook zoo'n verdeeling met N -voudige strooiing. Door overgang op poolcoördinaten wordt de waarschijnlijkheidsverdeeling der amplitudes:

$W(A) \cdot dA = \frac{2A}{Nc} \cdot e^{-\frac{A^2}{Nc}} \cdot dA$. Hierin is Nc juist de ver-

houding tusschen de effectieve waarden van middenfrequente geruisch en draaggolfenergie. De kans, dat de momenteele amplitude van dit geruisch grooter dan a is, vindt men door integratie:

$e^{-\frac{a^2}{Nc}}$. Is de draaggolfenergie $10 \times$ de energie van het geruisch,

dan is de kans, dat de momenteele amplitude van het geruisch grooter is, dan die van de draaggolf 0,000045. Bij een verhouding 5 : 1 wordt deze kans 0,0067, en bij een verhouding 2 : 1 0,135.

10. *Hoogere orde-benadering voor de energie van het geruisch bij afwezigheid van modulatie.*

Om theoretisch na te gaan, waar de afwijking van de lineaire karakteristiek voor het geruisch begint, gaan we uit van form. 27b. Ter verkorte aanduiding noemen we in deze ontwikkeling de eerste, enkelvoudige som: het eerste orde storingspectrum; de tweede, dub-

bele som, het tweede orde storingsspectrum, enz. Voor de berekening van de storingsenergie mogen we apart de quadraten der verschillende orde spectra uitrekenen. Alleen die uitdrukkingen leveren in het gemiddelde iets op, waarin dezelfde phasehoeken, evt. in een andere permutatie, voorkomen. Voor de energieberekening nemen we dus telkens groepen van componenten bij elkaar. We vragen eerst naar de energie van de groepen in het p^e orde spectrum, die bij een bepaalde frequentie-uitwijking x behooren. Een dergelijke groep zij gekenmerkt door:

$$r_{n_1}^{k_1} \cdot r_{n_2}^{k_2} \dots r_{n_m}^{k_m}, \text{ waarbij } k_1 + k_2 + \dots + k_m = p, \text{ en} \\ k_1 n_1 + k_2 n_2 + \dots + k_m n_m - p \omega_c = x.$$

Tot de groep behooren $\frac{p!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ combinaties, en zij draagt tot de energie bij:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{p!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \right\}^2 \cdot \frac{x^2}{p^2} \cdot \overline{r_{n_1}^{2k_1}} \cdot \overline{r_{n_2}^{2k_2}} \dots$$

Nu is

$$\overline{r^{2k}} = \int_0^{\infty} \frac{2}{c} e^{-\frac{r^2}{c}} \cdot r^{2k+1} \cdot dr = k! c^k.$$

De energie van de groep wordt dus:

$$\frac{1}{2} \frac{p!}{p^2} \left\{ \frac{p!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \right\} \cdot c^p \cdot x^2,$$

en de energie per combinatie: $\frac{1}{2} \frac{p!}{p^2} \cdot c^p \cdot x^2$.

Het aantal combinaties in het p^e ordespectrum, dat aan een gegeven totale frequentieuitwijking x beantwoordt, zij nu $f_p(x)$. Voor deze berekening denken we het spectrum continu, en vermenigvuldigen in de uitkomst de frequentie, met $\frac{T}{\pi}$ het aantal componenten per frequentie-eenheid.

Het eerste orde spectrum geeft voor iedere combinatie tusschen $\omega_0 - \Delta\omega$ en $\omega_0 + \Delta\omega$ juist één mogelijkheid, en daarbuiten geen enkele:

$$f_1(x) = U(x + \Delta\omega) - U(x - \Delta\omega). *$$

*) $U(x) = 0$, voor $x < 0$; $U(0) = \frac{1}{2}$; $U(x) = 1$ voor $x > 1$.

De frequentieuitwijking x in het tweede orde spectrum wordt nu opgeleverd door elke combinatie van een frequentieuitwijking y met een frequentieuitwijking $x - y$ in de eerste orde spectra. Dus:

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) \cdot f_1(y) \cdot dy$$

en analoog:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) \cdot f_{n-1}(y) \cdot dy \dots \dots (29)$$

Met behulp der LAPLACE-transformatie vindt men gemakkelijk:

$$f_n(x) = \sum_0^n \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{e^{(-2k+n)p\Delta\omega}}{p^{n-1}}$$

Uit verg. 29 volgt verder:

$$\frac{df_n(x)}{dx} = f_{n-1}(x + \Delta\omega) - f_{n-1}(x - \Delta\omega)$$

Omdat voor groote n geldt:

$$f_n(x) \doteq \frac{1}{p^{n-1}} \cdot 2^n \cdot \sinh^n p \Delta \omega \cong p (2 \Delta \omega)^n \cdot e^{\frac{1}{2} p^2 \Delta \omega^2}$$

terwijl:

$$p (2 \Delta \omega)^n \cdot e^{\frac{1}{2} p^2 \Delta \omega^2} \doteq \sqrt{\frac{6}{\pi n}} \cdot (2 \Delta \omega)^{n-1} \cdot e^{-\frac{3x^2}{2n \cdot \Delta \omega^2}}$$

verwacht men dat deze laatste functie een goede benadering voor $f_n(x)$ zal zijn. Dit is inderdaad reeds bij lage k het geval.

Het verloop der functies $f_n(x)$ wordt dus als volgt:

$-\infty < x < -\Delta\omega$	$f_1(x) = 0$		
$-\Delta\omega < x < \Delta\omega$	1		
$\Delta\omega < x < \infty$	0		
$-\infty < x < -2\Delta\omega$	$f_2(x) = 0$		
$-2\Delta\omega < x < 0$	$2\Delta\omega + x$		
$0 < x < 2\Delta\omega$	$2\Delta\omega - x$		
$2\Delta\omega < x < \infty$	0		
			$f_3(x)$
		$-\infty < x < -3\Delta\omega$	0
		$-3\Delta\omega < x < -\Delta\omega$	$\frac{1}{3}(3\Delta\omega + x)^2$
		$-\Delta\omega < x < \Delta\omega$	$3\Delta\omega^2 - x^2$
		$\Delta\omega < x < 3\Delta\omega$	$\frac{1}{3}(3\Delta\omega - x)^2$
		$3\Delta\omega < x < \infty$	0

Zie ook fig. 5.

De energie van het hoorbare p^e orde storingsspectrum wordt nu:

$$\frac{p!}{2p^2} \cdot \left(\frac{cT}{\pi}\right)^p \int_{-\omega_a}^{\omega_a} x^2 f_p(x) \cdot dx.$$

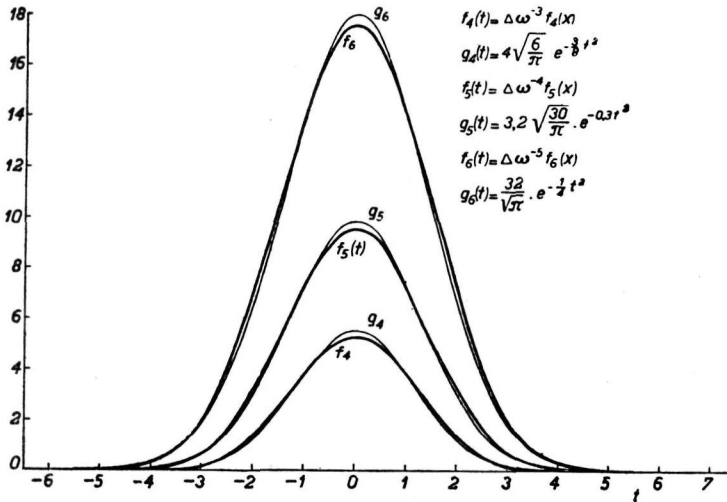


Fig. 5.

Eenige hogere orde storingsspectra.

Toepassing van dit resultaat geeft voor de energie van het geruis de volgende ontwikkeling:

$$E = \frac{1}{6} \omega_a^2 \cdot D + \frac{1}{4} \omega_a \left(\frac{\Delta \omega}{3} - \frac{\omega_a}{8} \right) \cdot D^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \Delta \omega^2 - \frac{1}{15} \omega_a^2 \right) \cdot D^3$$

$$+ \frac{1}{16} \left(\frac{8}{3} \frac{\Delta \omega^3}{\omega_a} - \frac{3}{5} \Delta \omega \cdot \omega_a + \frac{\omega_a^2}{8} \right) D^4 + \dots$$

Deze reeksontwikkeling is geschikt om te zien, waar de afwijking van de lineaire karakteristiek aanmerkelijk wordt, echter niet om het verloop voor groote relatieve amplitude na te gaan. We hebben n.l. gebruik gemaakt van een ontwikkeling, die slechts geldt, zolang

de momenteele amplitude van het geruisch kleiner is dan die van de draaggolf.

Voor $\frac{\Delta\omega}{\omega_a} = 1$ krijgen we:

$$\left(\frac{1}{6} D + \frac{5}{96} D^2 + \frac{1}{15} D^3 + \frac{263}{1920} D^4 + \dots\right) \omega_a^2, \text{ en voor } \frac{\Delta\omega}{\omega_a} = 5:$$

$$\left(\frac{1}{6} D + \frac{37}{96} D^2 + \frac{31}{15} D^3 + \frac{7931}{384} D^4 + \dots\right) \omega_a^2.$$

Bij toepassing van pre-emphasis wordt de energie van het p^e orde spectrum:

$$\frac{p!}{2 p^2} \left(\frac{c T}{\pi}\right)^p \int_{-\omega_a}^{\omega_a} \frac{x^2 f_p(x)}{1 + R^2 C^2 x^2} dx.$$

Men vindt gemakkelijk de bijbehorende reeksontwikkeling. Deze wordt voor $\Delta\omega/\omega_a = 1$:

$$\{0,004754 D + 0,001709 D^2 + 0,002074 D^3 + 0,002793 D^4 + \dots\} \omega_a^2,$$

en voor $\Delta\omega/\omega_a = 5$:

$$\{0,004754 D + 0,01122 D^2 + 0,05912 D^3 + 0,5848 D^4 + \dots\} \omega_a^2.$$

In beide gevallen wordt de afwijking van de lineaire karakteristiek meer dan 10 %, voor $\Delta\omega/\omega_a = 1$, bij $D = 0,24$, en voor $\Delta\omega/\omega_a = 5$, bij $D = 0,04$. We komen dan op een verbeteringsdrempel van $20,2 + 5,9 = 26,1$ db., voor $\Delta\omega/\omega_a = 1$, en van $34,2 + 14 = 48,2$ db., voor $\Delta\omega/\omega_a = 5$, met pre-emphasis. Dit stemt overeen met de resultaten van de vorige paragraaf.

11. Hoogere orde benadering voor de energie van het geruisch, bij aanwezigheid van modulatie.

Wanneer de frequentie van het moduleerende signaal q is, de frequentiezwaai $\Delta\omega_1$, en de middenfrequentie bandbreedte $\Delta\omega$ is, wordt de energie van het p^e orde spectrum:

$$\sum_k \frac{p!}{2 p^2} \left(\frac{c T}{\pi}\right)^p \cdot J_k^2 \left(\frac{p \Delta\omega}{q}\right) \cdot \int_{-\omega_a}^{\omega_a} \frac{x^2 f_p(x + kq) \cdot dx}{1 + R^2 C^2 x^2}; \quad |k| < \frac{\Delta\omega}{q}.$$

Het resultaat is nu afhankelijk van den frequentiezwaai, zooals door GUY en MORRIS experimenteel werd gevonden. De quantitative overeenstemming met deze experimenten laat te wenschen over.

12. Het geruisch bij afwezigheid van draaggolf.

Het spectrum na de middenfrequentfilters wordt, bij afwezigheid van draaggolf: $\sum_{N_1}^{N_2} (a_n + ib_n) e^{i n \pi \frac{t}{T}}$, (zie form. 24, 26). De momenteele frequentie wordt nu:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sum \operatorname{Im} . (a_n + i b_n) . e^{i n \pi \frac{t}{T}}}{\sum \operatorname{Re} . (a_n + i b_n) . e^{i n \pi \frac{t}{T}}} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2i} \ln \frac{\sum (a_n + i b_n) . e^{i n \pi \frac{t}{T}}}{\sum (a_n - i b_n) . e^{-i n \pi \frac{t}{T}}}. \quad (30)$$

Van dit resultaat willen we een FOURIER-analyse maken. Wanneer we als nieuwe variabele invoeren: $e^{i n \pi \frac{t}{T}} = z$, wordt de gelijkstroomterm:

$$\frac{1}{4i T} \oint \frac{d}{dz} \ln \frac{\sum (a_n + i b_n) z^n}{\sum (a_n - i b_n) . z^{-n}} . dz (31)$$

De integratieweg loopt hier langs den eenheidscirkel. Evenzoo vindt men voor de amplitude van den component met frequentie $\frac{n\pi}{T}$:

$$\frac{1}{2T} \left| \oint z^n \frac{d}{dz} \ln \left\{ \frac{\sum (a_n + i b_n) z^n}{\sum (a_n - i b_n) z^{-n}} \right\} dz \right| (32)$$

Voor den gelijkstroomterm kunnen we ook schrijven:

$$\frac{\pi (N_1 + N_2)}{T} + \frac{1}{4i T} \oint \frac{d}{dz} \ln \frac{\sum a_{n+N_1} + i b_{n+N_1} z^n}{\sum (a_{-n+N_1} - i b_{-n+N_1}) z^n} dz . . (31a)$$

De eerste term is de gemiddelde frequentie. Indien de frequentie-detector op het midden van den doorgelaten band is afgestemd, geeft hij hiervoor geen uitslag. Heeft de verg.

$$\sum_0^{N_2-N_1} (a_{n+N_1} + i b_{n+N_1}) z^n = 0, (33)$$

p wortels binnen den eenheidscirkel, dan is de uitkomst van de integraal: $2\pi i (2p - N_2 + N_1)$.

De uitkomst is onbepaald, indien een van de wortels juist op den

eenheidscirkel valt. Het is echter duidelijk, dat, wanneer ten gevolge van variatie der coëfficiënten één van de wortels tot een punt op den eenheidscirkel nadert, steeds een limiet kan worden aangegeven, maar de waarde hangt ervan af, of men den wortel van binnen of van buiten tot den cirkel laat naderen.

Wanneer we de wortels van de N^e machtsvergelijking (33) nummeren, zoodat $z_1 z_2 z_3 \dots z_p$ binnen den eenheidscirkel liggen, en $z_{p+1} z_{p+2} \dots z_{N-N_1}$ er buiten, wordt de amplitude van den component met frequentie $n \pi/T$: ($z^* =$ complex geconjugeerde van z)

$$\frac{\pi}{T} \left| (z_1^n + z_2^n + \dots + z_p^n) - \left(\frac{1}{z_{p+1}^{*n}} + \frac{1}{z_{p+2}^{*n}} + \dots + \frac{1}{z_{N_1-N_1}^{*n}} \right) \right|.$$

Van de juist gevonden uitkomsten moeten we nu het gemiddeld kwadraat uitrekenen, indien de a 's en b 's een verdeling volgens GAUSS hebben. Wordt de waarschijnlijkheid, dat er van de N wortels p binnen den eenheidscirkel liggen, $W(p)$, dan is het gemiddeld kwadraat van den gelijkstroomcomponent:

$$\frac{\pi^2}{4 T^2} \sum_0^N (2p-N)^2 W(p).$$

We gaan dus de verdeling van de wortels der N^e machtsvergelijking:

$$(a_N + i b_N) \cdot z^N + (a_{N-1} + i b_{N-1}) \cdot z^{N-1} + \dots + (a_0 + i b_0) = 0 \quad (33a)$$

over het vlak nader bekijken. We noemen de waarschijnlijkheid, dat één der N wortels in het gebied tusschen $u, u + du, v, v + dv$ ligt, $W(u, v) \cdot du \cdot dv$. Wanneer we een wortel in dit gebied willen hebben, kunnen we a_1 t/m a_N en b_1 t/m b_N nog willekeurig kiezen, mits we a_0 en b_0 dan maar de juiste waarde geven. Deze waarde volgt uit verg. (33a), n.l.:

$$(a_0 + i b_0) = - (a_1 + i b_1) (u + i v) - (a_2 + i b_2) (u + i v)^2 \dots - (a_N + i b_N) (u + i v)^N = f(z)$$

$$z = u + i v.$$

$$\text{Dus } W(u, v) \cdot du \cdot dv =$$

$$\int \int \dots \int W(a_1) \cdot da_1 \dots W(a_N) \cdot da_N \cdot W(b_1) db_1 \dots W(b_N) \cdot db_N \cdot W\{f(z)\} \cdot |f'(z)|^2 \cdot du \cdot dv.$$

Het uitwerken van deze integraal met behulp van een hoofdassen-transformatie levert, wanneer we overgaan op poolcoördinaten, en de waarschijnlijkheid, dat één der N wortels in het gebied tusschen r , $r + dr$ en φ , $\varphi + d\varphi$ ligt $W(r, \varphi) dr \cdot d\varphi$ noemen:

$$W_N(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{(1-r^2)^2} - \frac{(N+1)^2 r^{2N}}{(1-r^{2(N+1)})^2} \right\} \cdot r \quad \dots \quad (34)$$

Wanneer we $s = r^2$ als nieuwe variabele kiezen, volgt hieruit:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} W_N(s) ds &= 2 \int_0^1 W_N(s) ds = N; \\ \int_0^1 s^p \cdot W_N(s) \cdot ds &= \int_1^{\infty} s^{-p} \cdot W_N(s) \cdot ds. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (35)$$

Passen we deze resultaten toe op ons probleem, dan wordt

$W(p) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{p}$, en de gemiddelde gelijkstroomenergie:

$$\frac{\pi^2}{4 T^2} \sum_0^N \frac{1}{2^N} \cdot \binom{N}{p} \cdot (2p - N)^2 = \frac{\pi^2 N}{4 T^2}.$$

De energie van den component $\frac{n\pi}{T}$ wordt, wegens de gelijkmatige verdeling van de wortels over de phase: $\frac{\pi^2}{2 T^2} N \overline{r^{2n}}$, waarbij gemiddeld moet worden over de waarden van r , die kleiner dan 1 zijn.

$$\overline{r^{2n}} = \frac{2}{N} \int_0^1 s^n \cdot \left\{ \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{(N+1)^2 s^N}{(1-s^{N+1})^2} \right\} \cdot ds.$$

Voor groote N krijgen we: $\overline{r^2} = 1$ $r^{2(N+1)} = 2C - 1$; $C =$ constante van EULER.

Voor $n = AN \gg 1$, en $A < 1$ geldt:

$$\overline{r^{2AN}} = 2AC + 2A \lg A + 1 - 2A^2 \cdot \left\{ \frac{1}{A+1} + \frac{1}{2(A+2)} + \frac{1}{3(A+3)} + \dots \right\}.$$

De bijdrage voor een frequentiegebied van 0 tot ω_a , bevattende a componenten bedraagt:

$$\frac{\pi^2}{T^2} \left\{ \frac{Na}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \lg \frac{N}{a} + \frac{1}{2} a^2 \cdot C - \frac{a^3}{3N} \cdot \zeta(2) + \frac{a^4}{4N^2} \cdot \zeta(3) \dots \right\}$$

waarin:

$$\zeta(n) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}.$$

Bij een frequentie-uitwijking, groot ten opzichte van de l.f. bandbreedte, speelt de eerste term de hoofdrol. De energie wordt dan $\omega_a \cdot \Delta\omega$, en blijft een factor $\frac{2\omega_a}{\Delta\omega}$ onder volle modulatie. Voor een uitwijkingsverhouding 5 blijft het max. geruisch 5,1 db. onder volle modulatie. Bij een verhouding 1: 0,2 db.

Bij deze berekening is geen rekening gehouden met het feit, dat de keuze van den eersten wortel de waarschijnlijkheidsverdeeling van den tweeden wortel beïnvloedt, enz. Voor het geval van 3 componenten, waarmee dus een vierkantsvergelijking correspondeert, wordt de kans, dat de tweede wortel ook binnen den eenheidscirkel ligt, wanneer de eerste erin ligt, 0,3914 in plaats van 0,5, zooals zonder wisselwerking het geval zou zijn. De bijbehorende energie wordt dan ook $0,3914 \frac{\pi^2}{T^2}$ in plaats van $0,5 \frac{\pi^2}{T^2}$. Evenzoo levert de

strengere berekening in dit geval voor den component $\frac{\pi}{T}$ na detectie,

als energie: $0,4187 \frac{\pi^2}{T^2}$, in plaats van $0,4562 \frac{\pi^2}{T^2}$, zooals de berekening

zonder wisselwerking geeft. De fout is dus niet groot, en het is aanmerkelijk, dat ze voor groote N kleiner wordt.

De in deze paragraaf aangewende methode is wellicht de meest geschikte, om met een kleine wijziging het verloop van de geruisch-energie, ook bij aanwezigheid van draaggolf, te berekenen.

13. *Knal- of impulsstoringen.*

Bij een knal- of impuls-storing komen een groot aantal componenten van ongeveer gelijke amplitude in het doorgelaten spectrum voor. In tegenstelling met hetgeen voor geruischstoringen gold, zijn

alle componenten op een bepaald moment in phase. We kiezen hiervoor het moment $t = 0$, en idealiseeren het ingangssignaal van den f.m. ontvanger tot $\cos(\omega_c t + \varphi) + a \cdot \delta(t)$. (Over de δ -functie vergelijk men ⁷⁷). Voor de nu volgende berekening is het ongewenscht de filters tot rechthoekig afsnijdend te vervormen. Men mag namelijk niet tegelijk aannemen, dat de amplitudekarakteristiek rechthoekig, en bovendien de phase constant is. De keuze van de amplitudekarakteristiek beïnvloedt immers het phaseverloop. Bij het berekenen van een inschakelverschijnsel heeft het phaseverloop juist grooten invloed. We vervangen de filters dus liever door een afgestemden kring, met dempingsconstante $\frac{r}{2L} = a$, en resonantiefrequentie ω_0 .

De momenteele frequentie na doorgang door dezen kring wordt dan:

$$\frac{d}{dt} \arctg \frac{\sin(\omega_c t + \varphi) + 2aa \cdot \sin \omega_0 t \cdot e^{-at} \cdot U(t)}{\cos(\omega_c t + \varphi) + 2aa \cdot \cos \omega_0 t \cdot e^{-at} \cdot U(t)} \quad *)$$

Deze functie kan op eenvoudige wijze in een machtreeks ontwikkeld worden naar $2aa \cdot e^{-at}$, of naar $(2aa)^{-1} \cdot e^{at}$, al naar gelang de eerste of de tweede grootheid kleiner dan 1 is.

Ten slotte stuurt men het na detectie verkregen l.f. signaal door een laagdoorlatend filter met dempingsconstante β . De berekening van het resultaat hiervan, bijv. met behulp der methodes van de operatorenrekening levert geen groote moeilijkheden op. We geven het eindresultaat voor $\omega_c = \omega_0$:

$$\text{Eerste geval: } b = 2aa < 1; \quad t < 0 : 0$$

$$t > 0: \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot b^n}{(na - \beta)} \cdot a\beta \cdot (e^{-\beta t} - e^{-n\alpha t}) \cdot \sin n\varphi - \frac{b\beta e^{-\beta t} \sin \varphi}{1 + 2b \cos \varphi + b^2}$$

$$\text{Tweede geval: } b > 1; \quad t < 0 : 0$$

$$0 < t < \frac{1}{a} \lg b: -\frac{b\beta \sin \varphi \cdot e^{-\beta t}}{1 + 2b \cos \varphi + b^2} + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{a\beta \cdot (e^{-\beta t} - e^{-n\alpha t}) \cdot \sin n\varphi}{(\beta + n\alpha) \cdot b^n}$$

$$\frac{1}{a} \lg b < t: \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a\beta \sin n\varphi$$

$$\left\{ -\frac{e^{-n\alpha t_1}}{na - \beta} + \frac{2na \cdot e^{-\beta t_1}}{(n^2 a^2 - \beta^2)} - \frac{e^{-\beta t}}{(\beta + n\alpha) b^n} - \frac{e^{-\beta t}}{a b^n} \right\}$$

$$t_1 = t - \frac{1}{a} \lg b.$$

*) Definitie $U(t)$, zie pag. 39.

De verhouding van de topwaarde van storing en draaggolf na het m.f. filter is b . Is deze verhouding klein, dan geeft de eerste term van de som de belangrijkste bijdrage. Het maximum wordt dan bereikt voor $\varphi = 90^\circ$. Voor kleine b wordt de tophoogte:

$$2 a \beta^2 \cdot \left(\frac{\beta^2}{a^2} \right)^{\frac{\beta}{\alpha - \beta}}.$$

Bij amplitudemodulatie is de storing juist het grootst, wanneer $\varphi = 0$. De amplitudemodulatie na het middenfrequentfilter wordt dan: $2 a \beta \cdot e^{-\beta t} \cdot U(t)$, en wanneer we dit nog eens door een laagdoorlatend filter met dezelfde dempingsconstante sturen, is het resultaat: $2 a \beta \cdot \beta t \cdot e^{-\beta t} \cdot U(t)$. De tophoogte wordt dan $\frac{2}{e} a \beta$. Dit geldt voor kleine storingen. Het voordeel van f.m. voor impulsstoringen ontstaat weer doordat we vergelijken met den nuttigen top: a bij f.m. en 1 bij f.m., en wordt $\frac{1}{e} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}}$ in het voordeel van f.m. Wanneer $\frac{\alpha}{\beta} = 5$ wordt dit 12,3 db. Met pre-emphasis wordt het voordeel groter, omdat β kleiner wordt, voor 75 Kc/sec. frequentiezwaaai, en pre-emphasis 10^{-4} sec., bijv. 45 db.

We kunnen met behulp der gegeven formules ook het gedrag voor grootere b berekenen. Als voorbeeld nemen we $\frac{\alpha}{\beta} = 5$; voor kleine b krijgen we dan den top bij: $0,08944 b \beta$. Verder behooren de volgende topwaarden bij de bijbehorende waarden van b :

b	Top/ β
0,1	0,009229
0,2	0,02099
0,3	0,03984
0,5	0,07245
1	0,2220
2	0,4757
∞	1,2664

De afwijking van de lineaire karakteristiek bedraagt 3 % bij $b = 0,1$, en wordt daarboven groter. Het effect van grote storingen blijft echter begrensd. De nuttige topwaarde, waarmee vergeleken moet worden, is hier 5β .

HOOFDSTUK IV.

Distorsie van signalen met frequentiemodulatie bij doorgang door elektrische netwerken.

14. Overzicht.

Het probleem, den stroom te berekenen, welke een spanning, waarvan de frequentie gemoduleerd wordt, in een electrisch netwerk veroorzaakt, kan op verschillende wijzen worden opgelost. In hoofdzaak komen de FOURIER-methode en de asymptotische methode in aanmerking; welke in een bepaald geval de voorkeur verdient, hangt o.a. af van de grootte van den modulatie-index.

Bij de eerstgenoemde methode splitst men het oorspronkelijke signaal in zijn FOURIER-componenten, en past hierop de gewone wisselstroomtheorie toe. Men vindt de momenteele frequentie van de resultante dan door toepassing van de definitie. Deze weg werd bewandeld door RODER¹⁴), die hoofdzakelijk berekeningen deed aan een afgestemden kring, voor welk bijzonder geval hij geschikt gebruik kon maken van een „differential analyser”. (Dit is een apparaat, waarmee men op mechanische wijze differentiaalvergelijkingen oplost.)

Een bezwaar van de FOURIER-methode is, dat men niet eenvoudig het verband tusschen de distorsie en de kenmerkende grootheden van het netwerk kan zien. Dit wordt veel duidelijker bij de asymptotische methode, welke door CARSON en FRY¹¹) werd ontwikkeld, en die haar resultaat geeft in den vorm van een machtreeks. Het hierbij toegepaste mathematische procédé wordt in dit hoofdstuk aan een nader onderzoek onderworpen. Tevens zal een van de reeks van CARSON en FRY eenigszins afwijkende asymptotische ontwikkeling worden gegeven, die bij toepassing op frequentiemodulatie de voorkeur verdient.

WILDE⁶⁶) heeft de van FELDTKELLER⁵⁵) en GENSEL⁶⁰) afkomstige methode om inschakelverschijnselen voor een netwerk te benaderen met behulp van een „kabelharp”, nader uitgewerkt voor signalen met frequentiemodulatie. Bij sinusvormige modulatie is deze methode wat omslachtig.

15. De FOURIER-methode.

We beperken ons eerst tot modulatie met één sinusvormigen toon. Dan krijgen we voor het FOURIER-spectrum:

$$e^{i\omega_0 t + i m \sin pt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cdot e^{i(\omega_0 t + m \sin pt)}.$$

De differentiaalvergelijking van het netwerk zij:

$$\left(a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + \dots + a_r \frac{d^r}{dt^r} \right) \cdot E(t) = \left(b_0 + b_1 \frac{d}{dt} + \dots + b_s \frac{d^s}{dt^s} \right) \cdot I(t) \quad (36)$$

waarbij de stroom gegeven is:

$$I(t) = e^{i(\omega_0 t + m \sin pt)}.$$

We schrijven de differentiaalvergelijking kort:

$$f\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot E(t) = g\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot e^{i\omega_0 t + i m \sin pt} \quad \dots \quad (36a)$$

Wanneer we afzien van inschakelverschijnselen krijgen we den uit de gewone wisselstroomtheorie bekenden „blijvend toestand” (steady state):

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cdot \frac{g(i\omega_0 + inp)}{f(i\omega_0 + inp)} e^{i\omega_0 t + inpt}.$$

We beperken ons tot passieve netwerken, waarbij alle eigen trillingen gedempt zijn. De termen van de reeks blijven dan eindig. De reeks convergeert dan volgens het kenmerk van D'ALEMBERT, want

$J_n(m)$ gedraagt zich voor groote n als $\frac{1}{n!} \left(\frac{m}{2}\right)^n$, terwijl voor het

gedrag van $\frac{g}{f}$ bij groote n de termen van den hoogsten graad in

teller en noemer maatgevend zijn. We vervangen nu $\frac{g}{f}$ door Z , en splitsen Z in reëel en imaginair deel:

$$Z = Z(i\omega_0) = X_0 + iY_0 = X(i\omega_0) + iY(i\omega_0).$$

Evenzoo: $Z_n = X_n + iY_n = Z(i\omega_0 + inp)$.

De phasehoek wordt, als we dit instellen:

$$\varphi = \omega_0 t + \arctg \frac{\sum J_n(m) \cdot (X_n \sin n p t + Y_n \cos n p t)}{\sum J_n(m) \cdot (X_n \cos n p t - Y_n \sin n p t)}.$$

Een op de frequentie ω_0 afgestemde detector geeft dan een spanning:

$$\frac{d\varphi}{dt} - \omega_0 = \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} m p \cdot J_n \cdot J_m \{ (X_n X_m + Y_n Y_m) \cos (n-m) p t + (X_n Y_m - X_m Y_n) \sin (n-m) p t \}}{\sum \sum J_n J_m \{ (X_n X_m + Y_n Y_m) \cos (n-m) p t + (X_n Y_m - X_m Y_n) \sin (n-m) p t \}}. \quad (37)$$

In verschillende practisch interessante gevallen wordt de berekening vereenvoudigd, doordat $X_{-n} = X_n$, en $Y_{-n} = -Y_n$, terwijl $Y_0 = 0$.

De bepaling van de harmonischen in het gedetecteerde spectrum is in hoofdstuk III, § 12 reeds voor het meest algemeene geval van een eindelijk aantal aequidistante componenten uitgevoerd, en vereischt de oplossing van een hoogere machtsvergelijking, welke één in graad lager is, dan het aantal gegeven componenten.

Meestal is het eenvoudiger direct een voldoende aantal punten per periode uit te rekenen met behulp van form. 37, en grafisch de harmonischen te bepalen. (In het vereenvoudigde geval is een halve periode voldoende.) Bij deze laatste methode vindt men meteen het kwadraat van de amplitude. Dit is immers de noemer van de breuk voor $\frac{d\varphi}{dt}$. Bij aanwezigheid van 2 modulatiefrequenties, wordt het frequentiespectrum:

$$e^{i\omega_0 t + i m_1 \sin p t + i m_2 \sin q t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(m_1) \cdot J_n(m_2) \cdot e^{i(\omega_0 + n p + m q) t}.$$

De geheele verdere berekening verloopt analoog.

16. De asymptotische methode.

We gaan weer uit van de diff. verg. (36), en kunnen deze, wan-

neer we $E(t) = E_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$ stellen omvormen tot:

$$f\left(i\omega_0 + \frac{d}{dt}\right) \cdot E_0(t) = g\left(i\omega_0 + \frac{d}{dt}\right) \cdot e^{im \sin pt} \dots (38)$$

De juistheid hiervan blijkt bij formeele ontwikkeling.

Het ligt nu voor de hand te beproeven, of de volgende functie een bijzondere oplossing van (38) is:

$$E_0(t) = \frac{g}{f}\left(i\omega_0 + \frac{d}{dt}\right) \cdot e^{im \sin pt} \dots (39)$$

Formeel voldoet deze functie, die, daar alle termen periodiek zijn, correspondeert met den „blijvenden toestand”.

We schrijven voor $\frac{g}{f}$ weer Z , de impedantie van het netwerk. De oplossing van de differentiaalvergelijking krijgt dan den vorm:

$$E_0(t) = \left\{ Z(i\omega_0) + Z'(i\omega_0) \frac{d}{dt} + \frac{Z''(i\omega_0)}{2!} \frac{d^2}{dt^2} + \dots \right\} e^{im \sin pt} \quad (39a)$$

Ongeveer in dezen vorm (met uitwerking der afzonderlijke differentiaties) vindt men haar het eerst bij CARSON en FRY (l.c. pag. 521), naar wie we de reeks daarom in het vervolg zullen noemen. Op de door deze schrijvers gekozen afleiding komen we in de volgende paragraaf terug.

Terwijl nu in form. 38 de ontwikkeling van $f\left(i\omega_0 + \frac{d}{dt}\right)$ automatisch afbreekt, is dit bij $Z\left(i\omega_0 + \frac{d}{dt}\right)$ in het algemeen niet meer het geval. Dat de ontwikkeling tot het juiste resultaat leidt, wanneer de reeks afbreekt, is direct duidelijk. De vraag ligt echter voor de hand, hoe het staat met de convergentie van de reeks van CARSON en FRY, wanneer deze tot oneindig veel termen voert. Om deze na te gaan, berekenen we den restterm, welken we verkrijgen, door de eerste k termen van de reeks af te trekken van de uit de FOURIER-methode verkregen exacte uitdrukking. Deze restterm wordt:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cdot Z(i\omega_0 + inp) \cdot e^{inpt} - \\ - \left\{ Z + Z' \frac{d}{dt} + \frac{Z''}{2!} \frac{d^2}{dt^2} + \dots + \frac{Z^{(k)}}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \right\} \cdot \sum J_n \cdot e^{inpt}.$$

Wegens de uniforme convergentie van het resultaat, mag de FOURIER-reeks hier term voor term gedifferentieerd worden; bovendien mogen we wegens de absolute convergentie de volgorde der termen veranderen en dus ook de termen met denzelfden factor e^{inpt} bijeen nemen. We krijgen dan voor onzen restterm:

$$\sum J_n(m) \cdot e^{inpt} \left\{ Z(i\omega_0 + inp) - Z(i\omega_0) - inp Z'(i\omega_0) \dots - \frac{(inp)^k}{k!} Z^{(k)}(i\omega_0) \right\}.$$

Deze staat hier in den vorm van een FOURIER-reeks. De component e^{inpt} heeft hierin als amplitude, het product van $J_n(m)$ en den restterm van de ontwikkeling van $Z(i\omega_0 + inp)$ in de omgeving van $i\omega_0$, na $k + 1$ termen. Wanneer men nu bij constante n , k grooter laat worden, zal deze amplitude alleen dan naar nul afnemen, wanneer $i\omega_0 + inp$ binnen den convergentiecirkel van deze ontwikkeling ligt. In het andere geval neemt de amplitude op den duur toe. Daar echter een sinusvormige modulatie tot een oneindig frequentiespectrum voert, komen er zeker ook componenten voor, waarbij $i\omega_0 + inp$ buiten den convergentiecirkel van Z om $i\omega_0$ ligt, wanneer de straal van dien cirkel eindig is. Is de straal wel oneindig (correspondeerend met weerstand + zelfinductie), dan breekt de reeks af. Behalve in dit geval alleen, mag de reeks van CARSON en FRY dus zeker niet zonder restterm geschreven worden. Op het asymptotisch karakter in den zin van POINCARÉ bij $p \rightarrow 0$, komen we in § 18 terug.

17. De berekening van CARSON en FRY.

We zullen nu de afleiding, welke CARSON en FRY gaven en die met onbeteekenende wijzigingen ook door latere auteurs (VELLAT, WEYERS) werd gevolgd, kritisch beschouwen.

Men kan beginnen met te vragen, naar het verloop van de spanning op een netwerk, indien de stroom, als functie van den tijd gegeven is. We voeren eerst het begrip tijdsimpedantie $A(t)$ in. Dit is de functie van den tijd, welke de spanning op het netwerk voorstelt, wanneer ten tijde $t = 0$, een eenheidsstroom door het netwerk gestuurd wordt. Een eenheidsstroom $U(t)$ is 0 voor $t < 0$, en 1 voor $t > 0$. $U(0) = \frac{1}{2}$. Uit het superpositieprincipe volgt nu direct, dat wanneer een willekeurige stroom $F(t)$ wordt inge-

schakeld ten tijde $t = 0$, en voordien geen stroom door het netwerk liep, de spanning wordt voorgesteld door:

$$E(t) = \int_0^t A(t-\tau) \cdot dF(\tau) \dots \dots \dots (40)$$

Wanneer men dit partieel integreert, krijgt men:

$$E(t) = A(0) \cdot F(t) - A(t) \cdot F(0) - \int_0^t \frac{dA(t-\tau)}{d\tau} \cdot F(\tau) \cdot d\tau.$$

Om singulariteiten te vermijden, beperken we ons tot netwerken, waarvan de eigen trillingen gedempt zijn, en die voor hooge frequenties een capaciteef karakter hebben. In dit geval is $A(0)$ ook 0, en we krijgen voor de spanning de uitdrukking:

$$E(t) = \int_0^t A'(\tau) \cdot F(t-\tau) \cdot d\tau \dots \dots \dots (40a)$$

Wanneer $F(t)$ een periodieke functie van t is, splitsen we de integraal in twee deelen, n.l.:

$$E(t) = \int_0^\infty F(t-\tau) \cdot A'(\tau) \cdot d\tau - \int_t^\infty F(t-\tau) \cdot A'(\tau) \cdot d\tau \dots (40b)$$

De tweede integraal in het rechterlid stelt een inschakelverschijnsel voor, dat voor groote t uitsterft. De eerste integraal representeert den „blijvenden toestand”.

De eerste afleiding van CARSON en FRY gaat nu, als volgt, verder.

Het gegeven signaal zij: $F(t) = e^{i\omega t + i \int_0^t \mu d\tau}$.

Stel nu $F(t-\tau) = F(t) \cdot M(t, \tau) \cdot e^{-i\omega\tau}$, dus $M(t, 0) = 1$.

Vul dit in in form. 40b:

$$E(t) = F(t) \cdot \int_0^\infty M(t, \tau) \cdot A'(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau.$$

De schrijvers ontwikkelen nu:

$$M(t, \tau) = M(t, 0) + \tau \left\{ \frac{dM(t, \tau)}{d\tau} \right\}_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2!} \left\{ \frac{d^2 M(t, \tau)}{d\tau^2} \right\}_{\tau=0} + \dots$$

Dit wordt ingevuld in de integraal en term voor term geïntegreerd:

$$E(t) = F(t) \cdot \left. \left\{ \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} \cdot A'(\tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_1^{\infty} C_n \int_0^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot A'(\tau) \cdot d\tau \right\} \right\} \cdot (41)$$

Hierin wordt C_n dus bepaald door:

$$C_n(t) = \left\{ \frac{d^n}{d\tau^n} M(t, \tau) \right\}_{\tau=0}.$$

Wanneer men in form. 40b voor den stroom $F(t) = e^{i\omega t}$ invoert, ziet men, dat $Z(i\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} \cdot A'(\tau) \cdot d\tau$. Evenzoo geldt ook, dat:

$$\frac{dZ(i\omega)}{di\omega} = - \int_0^{\infty} \tau \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot A'(\tau) \cdot dt,$$

want men mag hier differentieeren onder het integraalteeken, omdat $A'(\tau)$ uit een som van gedempte trillingen bestaat. Wanneer men dit substitueert in (41), en er rekening mee houdt, dat:

$$C_n = (-1)^n \frac{d^n F(t)}{dt^n}$$

bereikt men de gewenschte reeksontwikkeling. Het zwakke punt is echter de term voor term integratie. Deze is hier niet geoorloofd, omdat de machtreksen voor sinus en cosinus wel in het geheele vlak convergeeren, maar niet gelijkmatig bij ∞ .

Een andere, ook door VELLAT gekozen afleiding, gaat uit van de FOURIER-integraal:

$$e^{i \int_0^t \mu d\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega.$$

(Bij sinusvormige modulatie wordt dit een FOURIER-reeks.)

De spanning wordt dan:

$$E = e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) \cdot Z(i\omega + i\omega_0) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega.$$

Ontwikkel nu:

$$Z(i\omega_0 + i\omega) = Z(i\omega_0) + \sum_1^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \left\{ \frac{d^n}{d\omega^n} Z(i\omega) \right\}_{\omega=\omega_0}$$

en integreer dit term voor term. Met een kleine omvorming komt men dan weer tot de reeks van CARSON en FRY. Daar de reeksontwikkeling voor $Z(i\omega_0 + i\omega)$, behoudens triviale uitzonderingen, niet geldt in het gebied van $-\infty$ tot $+\infty$, is de term voor term integratie hier weer een sprong in het duister. Ook hier mag men de reeks niet zonder restterm schrijven.

VELLAT noemt den restterm R_m en schrijft: „Soll die Darstellung brauchbar sein, so muss für wachsendes m das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_m \cdot F(i\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega$$

rasch gegen 0 konvergieren”. Deze opvatting is onjuist. Uit het vervolg zal blijken, dat de resultaten uit een asymptotische reeks verkregen, waarvoor dus niet aan de door VELLAT genoemde voorwaarde voldaan is, toch bruikbaar zijn voor een benaderde berekening.

CARSON en FRY merken zonder op de redenen hiervan in te gaan, op: „The series..... may not be convergent. Furthermore in its application to the theory of frequency modulation terms beyond the first represent distortion”. Om deze reden geven zij den raad de reeks met restterm te schrijven, waarbij het volgens hen gewenscht

is de ontwikkeling reeds bij $\frac{dZ}{d\omega}$ af te breken, en dus alleen het gedrag van het netwerk in de onmiddellijke nabijheid van de afstemfrequentie in aanmerking te nemen. Inderdaad handelen zij aldus bij de bespreking van den frequentiedetector. Bij het berekenen der distortie door filters is deze beperking echter stellig minder gewenscht.

18. *Afleiding van de asymptotische reeks.*

We beschouwen nu een signaal, dat zowel in amplitude, als in frequentie gemoduleerd is. Verder nemen we aan, dat de modulatie in beide gevallen denzelfden laagfrequenten grondtoon van p radialen per seconde bevat, en stellen het signaal dus voor door:

$$a(p t) \cdot e^{i\omega_0 t + i \int_0^t h(p\tau) \cdot d\tau}.$$

De momenteele amplitude van het ingangssignaal is daarin dus $a(pt)$. Met de reeds eerder gebruikte afkortingen wordt de differentiaalvergelijking voor de spanning derhalve:

$$f\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot E = g\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot a(p t) \cdot e^{i\omega_0 t + i \int_0^t h(p\tau) \cdot d\tau}$$

We nemen aan, dat zich onder de algemeene integralen geen ongedempte trillingen bevinden. Verder voeren we weer in: $E = E_0 e^{i\omega_0 t}$, en vervangen pt door u . De differentiaalvergelijking voor $E_0(u)$ wordt dan:

$$f\left(i\omega_0 + p \frac{d}{du}\right) \cdot E_0(u) = g\left(i\omega_0 + p \frac{d}{du}\right) \cdot e^{\frac{i}{p} \int_0^u h(x) \cdot dx}.$$

De uitdrukking in het tweede lid kunnen we uitwerken, door de s differentiaties uit te voeren (zie § 15). Het resultaat zij:

$$f\left(i\omega_0 + p \frac{d}{du}\right) \cdot E_0(u) = G(p, u) \cdot e^{\frac{i}{p} \int_0^u h(x) \cdot dx} \quad (42)$$

Hierin wordt $G(p, u)$ een polynoom in p . Het geheele tweede lid is periodiek in u . De oplossing van deze diff. verg. bestaat nu uit de som van een periodieke functie en de r met geschikte constanten vermenigvuldigde algemeene integralen (hier gedempte trillingen). We differentieeren nu beide leden van de vergelijking naar u :

$$f\left(i\omega_0 + p \frac{d}{du}\right) \cdot p \frac{dE_0}{du} = \left\{ i h(u) \cdot G(u) + p \frac{dG}{du} \right\} \cdot e^{\frac{i}{p} \int_0^u h(x) dx}.$$

Stelling: Wanneer de wortels $f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u)$ der n^e graadsverg.

$$f^n + a_{1,0} \cdot f^{n-1} + a_{2,0} f^{n-2} + \dots + a_{n,0} = 0$$

nu voldoen aan den eisch:

$$\operatorname{Re} f_1(u) \equiv \operatorname{Re} f_2(u) \equiv \operatorname{Re} f_3(u) \dots \equiv \operatorname{Re} f_n(u)$$

in het geheele segment $b \leq u \leq c$, dan bestaan er n integralen E_j , die asymptotisch gelijk zijn aan:

$$E_j(u) = e^{\frac{1}{p} \int_0^u f_j(u) \cdot du} \cdot \left\{ \sum_0^{\infty} w_{j,v}(u) \cdot p^v \right\}$$

voor $p \rightarrow 0, j = 1, 2, 3, \dots, n.$

De afgeleiden $\frac{dE_j}{du} \dots \frac{d^{n-1}E_j}{du^{n-1}}$ zijn eveneens asymptotisch gelijk aan de door formeele differentiatie ontstaande uitdrukkingen. Daarenboven gelden de asymptotische uitdrukkingen in het geheele segment $b \leq u \leq c$ gelijkmatig. De functies $w_{j,v}(u)$ kunnen door formeele uitwerking van de diff. verg. gevonden worden.

(De asymptotische vergelijking $f(p) \sim g(p) \cdot \sum_0^{\infty} A_n \cdot p^n$ voor $p \rightarrow 0$, zegt: Wanneer $f(p) = g(p) \sum_0^m A_n p^n + R_m(p)$, dan is voor $m = 0, 1, 2, \dots$: $\lim_{p \rightarrow 0} p^m \cdot R_m(p) = 0$.)

Bij het toepassen van deze stelling op onze differentiaalvergelijking, merken we op, dat in elk segment, waarop $G(u)$ geen nulpunt heeft, de diff. verg. in den gewenschten vorm gebracht kan worden, waarbij de ontwikkeling naar p bovendien nog convergent is.

De hoogere machtsvergelijking uit PERRON's stelling, luidt hier:

$$-\frac{f^{(r)}(i\omega_0)}{r!} \cdot k^{r+1} + \left\{ ih(u) \cdot \frac{f^{(r)}(i\omega_0)}{r!} - \frac{f^{(r-1)}(i\omega_0)}{(r-1)!} \right\} k^r + \dots +$$

$$+ ih(u) \cdot f(i\omega_0) = 0.$$

Dit kunnen we ook schrijven:

$$-\{k - ih(u)\} \cdot \left\{ \frac{f^{(r)}(i\omega_0)}{r!} \cdot k^r + \frac{f^{(r-1)}(i\omega_0)}{(r-1)!} \cdot k^{r-1} + \dots + f(i\omega_0) \right\} =$$

$$= -\{k - ih(u)\} \cdot f(i\omega_0 + k).$$

De $r + 1$ wortels zijn $k = ih(u)$, $k_n = a_n - i\omega_0$, $n = 2, 3, \dots, r + 1$, waarbij de a_n 's de wortels zijn van de r^e graadsverg. $f(a_n) = 0$, dus de polen van de impedantie $Z = \left(\frac{g}{f}\right)$. De reële delen van deze wortels liggen dus inderdaad in een vaste volgorde. Daaruit volgt dan dat er een integraal bestaat van den vorm:

$$e^{\frac{i}{p} \int_0^u h(u) \cdot du} \cdot \sum_0^{\infty} w_v(u) \cdot p^v,$$

asymptotisch voor $p \rightarrow 0$. Dit is, evt. vermenigvuldigd met een constante, juist de periodieke oplossing van de oorspronkelijke diff. verg. Door deze uitdrukking dus formeel in de diff. verg. (42) in te vullen, en linker- en rechterlid uit te werken, kunnen we de functies $w_v(u)$ bepalen. Men vindt aldus:

$$E_0(u) = e^{\frac{i}{p} \int_0^u h(x) \cdot dx} \left[a Z + p \left(a' \cdot Z' + \frac{i h' \cdot Z'}{2} \right) + p^2 \left\{ \frac{a'' \cdot Z''}{2} + i \frac{a' \cdot h' \cdot Z'''}{2} + a \left(\frac{i h'' \cdot Z''}{6} - \frac{h'^2 \cdot Z''''}{8} \right) \right\} + \dots \right] \quad (43)$$

Hierin is: $a = a(u)$; $h = h(u)$; $Z = Z(i\omega_m)$, $Z' = \frac{dZ(i\omega_m)}{di\omega_m}$, enz. $\omega_m = \omega_0 + h(u)$. In het bijzondere geval, dat het signaal alleen in amplitude gemoduleerd wordt, krijgen we:

$$E_0(u) = a(u) \cdot Z(i\omega_0) + p \cdot a'(u) \cdot Z'(i\omega_0) + p^2 \frac{a''(u) \cdot Z''(i\omega_0)}{2} + \dots \quad (43a)$$

en bij een signaal, dat alleen frequentiemodulatie bevat:

$$E_0(u) = e^{\frac{i}{p} \int_0^u h(x) \cdot dx} \left[Z + \frac{i p h' Z'}{2} + p^2 \left\{ \frac{i h'' Z''}{6} - \frac{h'^2 \cdot Z''''}{8} \right\} + \dots \right] \quad (44)$$

De momenteele frequentie en amplitude kunnen uit deze reeksen gemakkelijk afgeleid worden. Daarbij splitsen we de impedantie in modulus en phase: $Z(i\omega) = M(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)}$. De reeksontwikkeling

voor de momenteele frequentie, behoorend bij (44) begint dan met:

$$\omega_0 + h(p t) + p \varphi' \cdot h' + p^2 \left\{ \frac{h''}{2} \left(-\frac{M''}{M} + \varphi'^2 \right) + \frac{h'^2}{2} \left(\frac{M'' M' - M''' M}{M^2} + 2 \varphi' \varphi'' \right) \right\} \quad (44a)$$

waarbij:

$$h' = \frac{dh(p t)}{d p t}; \quad \varphi' = \frac{d\varphi(\omega_m)}{d\omega_m}; \quad M' = \frac{dM(\omega_m)}{d\omega_m}; \quad \text{enz.}$$

Voor de momenteele amplitude krijgt men in hetzelfde geval:

$$M + p \left(M' \varphi' + \frac{\varphi'' M}{2} \right) + \dots \quad (44b)$$

In de reeksen (44) noemen we de 0^e graadstermen in p : de statische termen; die van den eersten graad: de quasi-stationnaire termen.

Tezamen vormen zij de quasi-stationnaire benadering.

In tegenstelling met de reeks (44) geeft de reeks van CARSON en FRY, bij signalen met frequentiemodulatie, niet direct een ontwikkeling naar machten van p . Dit zou wel het geval zijn, wanneer de modulatie-index $m = \Delta\omega/p$ als een constante beschouwd werd, m.a.w. bij phasemodulatie.

VELLAT nam voor zijn berekeningen 5 termen in de reeks van CARSON en FRY mee, en schrapte daaruit nog die termen in de afgeleiden van $e^{i m \sin p t}$, waarin p expliciet voorkomt. Op deze wijze verkrijgt hij een benadering van de reeks (44a). Het komt ons dan ook voor, dat het gebruik van deze asymptotische reeks de voorkeur verdient.

19. Over de schatting van de fout.

Een andere manier om de termen van de asymptotische reeks te voorschijn te laten komen, zullen we in deze paragraaf discussieeren. Deze gaat uit van de formule:

$$E(t) = \int_0^{\infty} F(t-\tau) \cdot A'(\tau) \cdot d\tau.$$

$A(\tau)$ heeft hierin steeds den vorm: $\sum_n (A_n + iB_n) e^{-(\alpha_n + i\beta_n)\tau}$, waarbij de termen steeds paarsgewijs toegevoegd complex voorkomen, behalve wanneer $\beta_n = 0$. Bij frequentiemodulatie is

$$F(t) = e^{i(\omega_0 t + m \sin p t)}$$

Dus:

$$E(t) = \operatorname{Re} e^{i(\omega_0 t + m \sin x)} \cdot \sum (A_n + i B_n) \int_0^{\infty} e^{-\alpha_n \tau + g(\tau)} \cdot d\tau$$

$$g(\tau) = -i(\beta_n + \omega_0)\tau + im \sin(x - p\tau) - im \sin x; \quad x = pt.$$

Ontwikkelen we nu $e^{g(\tau)}$ naar p , en voeren daarna de integratie term voor term uit, dan krijgen we de asymptotische reeks. In de integrand is de term $e^{-\alpha_n \tau}$ snel dalend. De belangrijkste bijdrage tot de integraal is dus te verwachten voor $\alpha_n \tau$ klein, bijv. kleiner dan 4. Beschouw bijv. de integraal:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha_n \tau} \cdot \cos(\beta_n + \omega_0)\tau \cdot \cos m \{ \sin(x - p\tau) - \sin x \} \cdot d\tau. \quad (45)$$

Deze wordt goed benaderd door:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha_n \tau} \cdot \cos(\beta_n + \omega_0)\tau \cdot \cos(\Delta\omega\tau \cdot \cos x) \cdot d\tau,$$

wanneer voor $\tau_0 = \frac{4}{\alpha_n}$ nog geldt: $\sin p\tau_0 \cong p\tau_0$, en $\frac{\Delta\omega p\tau_0^2}{2} \ll 1$.

Dus bijv. $p < 0,05 \alpha_n$; $p\Delta\omega < 0,03 \alpha_n^2$.

Neemt men meer termen in p , dan wordt $e^{g(\tau)}$ weliswaar beter benaderd bij dezelfde waarde van τ , maar voor het verschil tusschen de integraal (45), en de benadering, krijgt men integralen van den vorm:

$$\int_0^{\infty} R(\tau) \cdot \tau^n \cdot e^{-\alpha_n \tau} \cdot d\tau.$$

Het zwaartepunt van de integrand verschuift steeds verder naar rechts. Dit heeft tot gevolg, dat het gebied, waarin de benadering nauwkeurig is, steeds kleiner wordt.

Bij de bespreking van de toepassing op een enkelen kring, zullen we nog een nauwkeuriger schatting van de fout geven, zoowel bij de bepaling van de momenteele frequentie, als van de momenteele amplitude.

HOOFDSTUK V.

Toepassing van de theorie op eenige eenvoudige netwerken.

20. Een afgestemde kring.

Als eerste voorbeeld nemen we een afgestemden kring. Daar de berekening in andere gevallen analoog verloopt, zullen we dit geval eenigszins uitvoerig onderzoeken.

Door den afgestemden kring voeren we een stroom, waarvan de frequentie wordt gemoduleerd, en de amplitude constant gehouden. We vragen naar de spanning, welke aan de klemmen ontstaat, en wenschen van deze spanning de momenteele amplitude en frequentie te kennen. De differentiaalvergelijking voor deze spanning E wordt nu, bij de in de wisselstroomtheorie gebruikelijke complexe schrijfwijze:

$$\left(1 + LC \frac{d^2}{dt^2} + RC \frac{d}{dt}\right) E = \left(R + L \frac{d}{dt}\right) \cdot e^{i(\omega_0 t + m \sin pt)}.$$

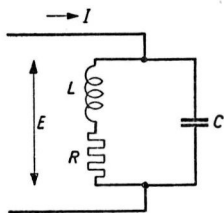


Fig. 6.
Enkele afgestemde kring.

We nemen $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$, en stellen $\frac{R}{L} = 2a$; verder voeren we in $E = E_0 e^{i\omega_0 t}$, en nemen aan, dat a en $\Delta\omega$ beide klein zijn ten opzichte van ω_0 . We zullen ons tevreden stellen met een approximatie, waaruit grootheden, die een factor $\frac{a}{\omega_0}$, resp. $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ kleiner zijn, worden weggelaten. Deze vereenvoudiging is niet essentieel, en dient alleen om de formules iets overzichtelijker te maken. Men ziet gemakkelijk

in, dat we voor ons doel de differentiaalvergelijking kunnen vereenvoudigen tot:

$$\alpha E_0 + \frac{dE_0}{dt} = \frac{\omega_0^2 L}{2} \cdot e^{im \sin pt}.$$

In het vervolg kiezen we $\omega_0^2 L = 2$.

a) We bespreken eerst de oplossing volgens de FOURIER-methode, en gaan daartoe uit van:

$$\alpha E_0 + \frac{dE_0}{dt} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cdot e^{inpt}.$$

Hiervan is de periodieke oplossing:

$$E_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha + inp} J_n(m) \cdot e^{inpt} = X + iY,$$

waarbij dus:

$$X = \frac{J_0}{\alpha} + \sum_1^{\infty} \frac{2J_{2n}}{\alpha^2 + 4n^2 p^2} (\alpha \cos 2npt + 2np \sin 2npt)$$

$$Y = \sum_0^{\infty} \frac{2J_{2n+1}}{\alpha^2 + (2n+1)^2 p^2} \{ \alpha \sin (2n+1)pt - (2n+1)p \cos (2n+1)pt \}.$$

Voor de bepaling van de momenteele frequentie moeten we ook nog X' en Y' kennen:

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dX}{dt} = \\ &= \sum_1^{+\infty} \frac{2J_n}{\alpha^2 + 4n^2 p^2} (-2anp \sin npt + 4n^2 p^2 \cos npt) = -\alpha X + \cos(m \sin pt), \end{aligned}$$

en evenzoo: $Y' = -\alpha Y + \sin(m \sin pt)$.

Een op ω_0 afgestemde frequentiedetector geeft een spanning evenredig met:

$$\frac{XY' - YX'}{X^2 + Y^2} = \frac{X \cos(m \sin pt) - Y \sin(m \sin pt)}{X^2 + Y^2}$$

Met behulp van deze formule bepaalt men de uitkomst voor een halve periode van pt , bijv. voor elke 90° , (wegens de symmetrie-eigenschappen is een halve periode hier voldoende). Grafisch bepaalt men vervolgens den grondtoon en de oneven harmonischen.

De momenteele amplitude wordt bepaald door $(X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$. Zie fig. 8, 9, en de tabel op pag. 70.

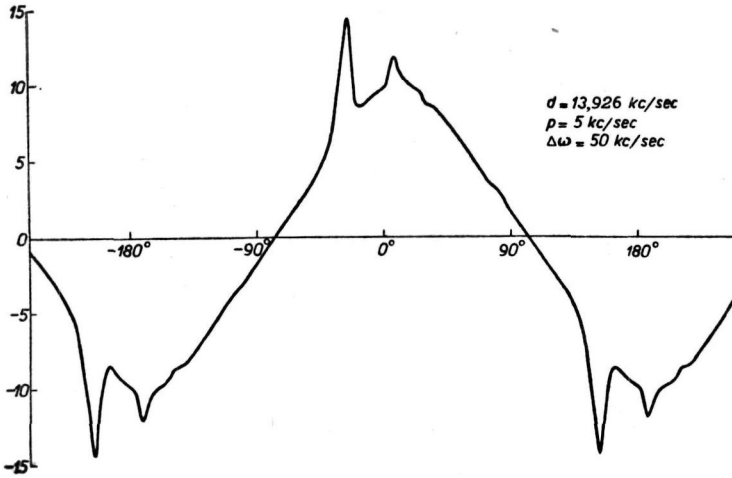


Fig. 7.

Momentele frequentie van het signaal na doorgang door een enkelen kring.

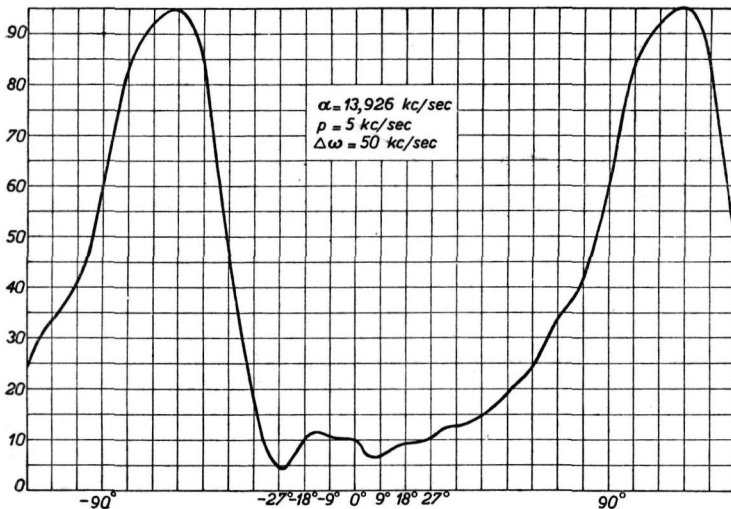


Fig. 8.

Momentele amplitude van het signaal na doorgang door een enkelen kring.

b) Oplossing volgens de asymptotische methode:

$$aE_0 + \frac{dE_0}{dt} = e^{im \sin pt} \dots \dots \dots (46)$$

Stel:

$$E_0 = \{f_0(pt) + pf_1(pt) + p^2 f_2(pt) + \dots\} \cdot e^{i \frac{\Delta \omega}{p} \cdot \sin pt}$$

Substitutie hiervan leidt direct tot:

$$f_0 = \frac{1}{a + i \Delta \omega \cos pt}$$

$$f_1 = \frac{-i \Delta \omega \sin pt}{(a + i \Delta \omega \cos pt)^3}, \text{ enz.}$$

Uit deze ontwikkeling bepaalt men het kwadraat van de momenteele amplitude:

$$A^2 = \frac{1}{a^2 + \Delta \omega^2 \cos^2 pt} - \frac{2pa \cdot \Delta \omega^2 \cdot \sin 2pt}{(a^2 + \Delta \omega^2 \cos^2 pt)^3} + \dots$$

De momenteele frequentie wordt volgens definitie:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 + \Delta \cos pt + \frac{pa \cdot \Delta \omega \sin pt}{a^2 + \Delta \omega^2 \cos^2 pt} + \frac{p^2 \cdot \Delta \omega \cos pt}{(a^2 + \Delta \omega^2 \cos^2 pt)^3} \cdot \dots \\ \cdot \{-a^4 - 6a^2 \cdot \Delta \omega^2 \cdot \sin^2 pt + \Delta \omega^4 \cdot \cos^2 pt \cdot (1 + \sin^2 pt)\} + \dots \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

Wanneer de momenteele frequentie wordt voorgesteld door:

$$\omega_0 + \Delta \omega \cdot \cos pt + p \sum C_{2n+1} \sin(2n+1)pt + p^2 \sum D_{2n+1} \cos(2n+1)pt + \dots$$

krijgt men na FOURIER-integratie voor de quasi-stationaire benadering:

$$C_{2n+1} = (-1)^n \cdot 2 \cdot c^{-(2n+1)} \{(1 + c^2)^{1/2} - 1\}^{2n+1}; c = \frac{\Delta \omega}{a} \dots (47a)$$

Evenzoo krijgt men voor de tweede benadering in p :

$$\left. \begin{aligned} B_{2n+1} = p^2 \cdot D_{2n+1} = \\ (-1)^n \cdot 2 \cdot (2n+1)^2 \cdot \frac{p^2}{a^2} \cdot c^{-(2n+1)} (1 + c^2)^{-1} \{(1 + c^2)^{1/2} - 1\}^{2n+1} \end{aligned} \right\} \dots (47b)$$

Bij kleinen frequentiezwaai blijkt de derde harmonische evenredig

met $\Delta\omega^3$, de vijfde evenredig met $\Delta\omega^5$, enz. volgens:

$$pC_3 = A_3 = 6p \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n+2)!}{(n+3)!n!} \cdot \left(\frac{\Delta\omega}{2a}\right)^{2n+3}$$

$$pC_5 = A_5 = 10p \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+4)!}{(n+5)!n!} \cdot \left(\frac{\Delta\omega}{2a}\right)^{2n+5} \text{ enz.}$$

Terwijl de FOURIER-methode het resultaat slechts punt voor punt geeft en een tijdroovend grafisch procédé vereischt, hebben we hier de harmonischen direct in gesloten vorm. De vraag is nu: wanneer geven de asymptotische formules een goede benadering? Daartoe moeten we de fout majoreeren. We schrijven de oplossing van (46) dus in den vorm:

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot e^{im \sin p(t-\tau)} \cdot d\tau = \\ &= e^{im \sin x} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau + im \{ \sin x (\cos p\tau - 1) - \cos x \cdot \sin p\tau \}} \cdot d\tau = \\ &= e^{im \sin x} \cdot (U + iV); \quad x = p\tau. \end{aligned}$$

Het kwadraat van de momenteele amplitude wordt:

$$\begin{aligned} U^2 + V^2 &= \int_0^{\infty} d\tau_1 \cdot \int_0^{\infty} d\tau_2 \cdot e^{-\alpha(\tau_1 + \tau_2)} \cdot \\ &\cdot \cos \frac{\Delta\omega}{p} \{ \sin x (\cos p\tau_1 - \cos p\tau_2) - \cos x (\sin p\tau_1 - \sin p\tau_2) \}. \end{aligned}$$

We voeren als nieuwe variabelen in: $\tau_1 + \tau_2 = u$, en $\tau_1 - \tau_2 = v$.

$$U^2 + V^2 = \int_0^{\infty} du \cdot \int_0^u dv \cdot e^{-\alpha u} \cdot \cos \left\{ \frac{2\Delta\omega}{p} \cdot \sin \frac{pv}{2} \cdot \cos \left(x - \frac{pu}{2} \right) \right\}.$$

Door de integrand naar p te ontwikkelen, krijgt men de asymptotische reeks te beginnen met:

$$(U^2 + V^2)_0 = \int_0^{\infty} du \int_0^u dv \cdot e^{-\alpha u} \cdot \cos(\Delta\omega v \cos x) = \frac{1}{\alpha^2 + \Delta\omega^2 \cos^2 x}.$$

Hieruit volgt:

$$|(U^2 + V^2) - (U^2 + V^2)_0| \cong$$

$$\int_0^{\infty} du \int_0^u dv \cdot 2e^{-au} \cdot \left| \sin \left\{ \frac{\Delta\omega}{p} \cdot \sin \frac{pv}{2} \cdot \cos \left(x - \frac{pu}{2} \right) - \frac{\Delta\omega v}{2} \cos x \right\} \right|$$

$$\cong \frac{7}{4} \frac{p^2 \Delta\omega}{a^5} \cdot |\cos x| + \frac{3}{2} \frac{p \cdot \Delta\omega}{a^4} \cdot |\sin x|.$$

Voor de momenteele frequentie moeten we ook nog $UV' - U'V$ beschouwen. We voeren als nieuwe variabelen nog in $\frac{p}{a} = a$, en

$\frac{\Delta\omega}{a} = b$, en krijgen dan:

$$UV' - U'V = \frac{ab}{a} \left\{ \frac{\sin x}{1 + b^2 \cos^2 x} + \right.$$

$$\left. + \theta_1 (a |\cos x| + a^2 |\sin x| + 3ab \sin^2 x + 5a^2 b |\sin 2x| + 10a^3 b \cos^2 x) \right\}.$$

$$|\theta_1| \cong 1.$$

De volgende benadering levert:

$$(U^2 + V^2) = a^{-2} \left\{ \frac{1}{1 + b^2 \cos^2 x} - \frac{2ab^2 \sin 2x}{(1 + b^2 \cos^2 x)^3} \right\} +$$

$$+ \theta a^{-2} \left\{ \frac{7}{4} a^2 b |\cos x| + 5a^2 b^2 \sin^2 x + \frac{15}{8} a^3 b |\sin x| + 9a^3 b^2 |\sin 2x| + \right.$$

$$\left. + \frac{105}{16} a^3 b^3 |\sin^3 x| + 19a^4 b^2 \cos^2 x + 27a^5 b^3 |\sin x| \cos^2 x \right\}.$$

Evenzoo krijgen we voor:

$$UV' - U'V = p(UV' - U'V)_1 + p^2(UV' - U'V)_2 + \theta R_2.$$

$$(UV' - U'V)_1 = a^{-1} \cdot (1 + b^2 \cos^2 x)^{-1} \cdot ab \sin x.$$

$$(UV' - U'V)_2 = a^{-1} \cdot (1 + b^2 \cos^2 x)^{-3} \cdot$$

$$a^2 b \cos x \{ -1 - 10b^2 \sin^2 x + b^4 \cos^2 x (1 + \sin^2 x) \}.$$

$$R_2 = a^{-1} [a^3 b \{ |\sin x| + \frac{35}{8} b |\cos x| + \frac{35}{8} b |\sin 2x| + 15b^2 |\sin^3 x| \} +$$

$$+ a^4 b \{ |\cos x| + b(15 \sin^2 x + \frac{81}{8} \cos^2 x) +$$

$$+ 105b^2 \sin^2 x |\cos x| + \frac{105}{4} b^3 \sin^4 x \} + \dots].$$

Voor $a \leq 0,1$, en bovendien $ab \leq 0,1$ mag men op grond van deze schatting een redelijke nauwkeurigheid verwachten. In dit geval geeft de tweede benadering ook nog een verbetering.

Als voorbeeld nemen we het geval: $p = 0,1a$; $a = \Delta\omega$. We geven hiervoor het resultaat van de FOURIER-methode, en van de asymptotische methode tot de tweede orde benadering, zoowel voor de momenteele amplitude, als voor de momenteele frequentie. In fig. 9

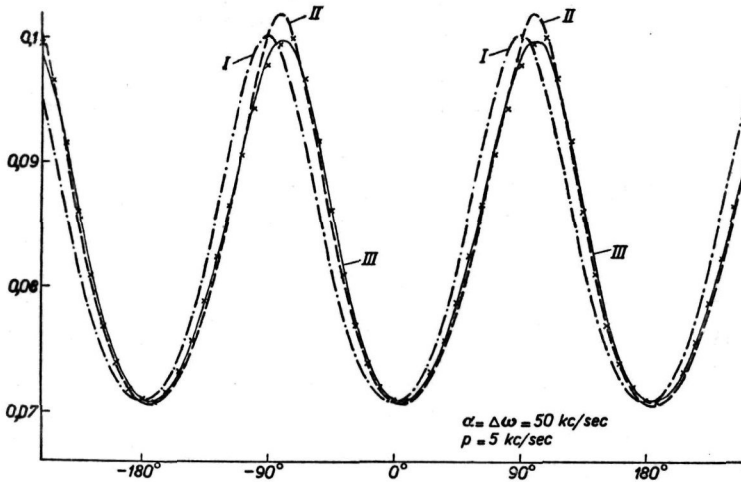


Fig. 9.

Momenteele amplitude: I. Statische benadering. II. Quasi-stationnaire benadering. III. Berekend uit de FOURIER-methode. $\times\times$. Tweede orde benadering uit de asymptotische reeks.

ziet men behalve de exacte waarde van de momenteele frequentie, ook het $50 \times$ vergrootte verschil tusschen deze functie en haar eerste, resp. tweede orde benadering. In fig. 10 vindt men de momenteele amplitude en haar benaderde functies. Bovendien geven we de waarden voor een halve periode, voor elke 9° berekend. (Zie pag. 70.)

Opgemerkt moet worden, dat voor $p = \frac{a}{3}$, $\Delta\omega = a$ de tweede ordebenadering voor de momenteele frequentie aanmerkelijk meer van de exacte waarde afwijkt, dan de quasi-stationnaire. Men mag den tweede orde-term dus zeker niet altijd als een verbetering beschouwen.

Momenteele amplitude:

	FOURIER- methode	Asymptotische methode		
		Statisch	Quasi-stationnair	Tweede orde
0°	0,07089	0,07071	0,07071	0,07089
9°	0,07077	0,07115	0,07058	0,07078
18°	0,07151	0,07246	0,07129	0,07154
27°	0,07309	0,07467	0,07279	0,07314
36°	0,07547	0,07774	0,07504	0,07554
45°	0,07861	0,08165	0,07802	0,07868
54°	0,08238	0,08621	0,08168	0,08240
63°	0,08662	0,09104	0,08598	0,08640
72°	0,09099	0,09554	0,09086	0,09036
81°	0,09501	0,09880	0,09589	0,09407
90°	0,09808	0,10000	0,10000	0,09750
99°	0,09953	0,09880	0,10171	0,09921
108°	0,09889	0,09554	0,10022	0,09972
117°	0,09607	0,09104	0,09610	0,09652
126°	0,09155	0,08621	0,09074	0,09146
135°	0,08627	0,08165	0,08528	0,08593
144°	0,08121	0,07774	0,08044	0,08092
153°	0,07703	0,07467	0,07655	0,07690
162°	0,07394	0,07246	0,07364	0,07389
171°	0,07192	0,07115	0,07171	0,07190

Momenteele frequentie:

0°	10,001	10,000	10,000	10,000
9°	9,955	9,877	9,956	9,954
18°	9,667	9,511	9,673	9,665
27°	9,148	8,910	9,163	9,144
36°	8,416	8,090	8,446	8,406
45°	7,492	7,071	7,543	7,474
54°	6,394	5,878	6,479	6,374
63°	5,174	4,540	5,279	5,139
72°	3,835	3,090	3,958	3,812
81°	2,442	1,564	2,528	2,429
90°	0,929	0,000	1,000	1,000
99°	-0,059	-0,600	-0,600	-0,501
108°	-2,126	-3,090	-2,222	-2,075
117°	-3,650	-4,540	-3,801	-3,662
126°	-5,128	-5,878	-5,277	-5,172
135°	-6,485	-7,071	-6,600	-6,532
144°	-7,670	-8,090	-7,735	-7,696
153°	-8,629	-8,910	-8,657	-8,637
162°	-9,339	-9,511	-9,348	-9,340
171°	-9,797	-9,877	-9,798	-9,796

Ter vergelijking geven we hieronder nog eenige met de FOURIER-methode berekende harmonischen van de momenteele frequentie, naast die, welke aan de quasi-stationnaire benadering ontleend zijn.

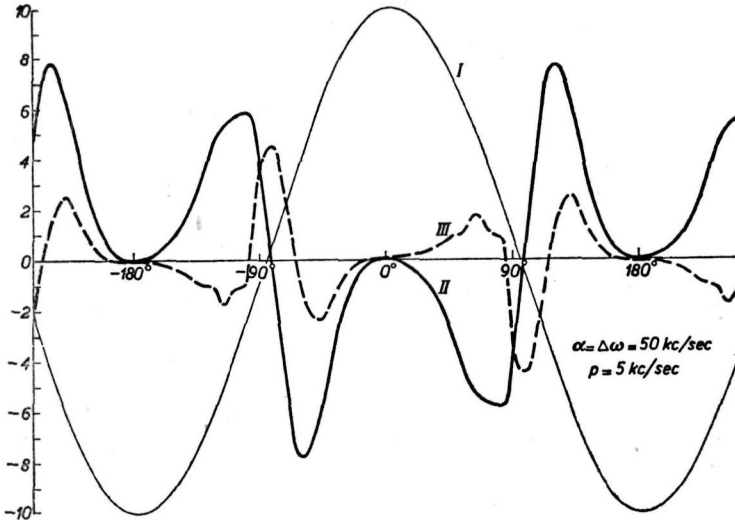


Fig. 10.

Momenteele frequentie:

- I. Exacte waarde (FOURIER-methode).
 II. Verschil tusschen exacte waarde en 1e benadering. (50 × vergroot)

$$\sqrt{\overline{\Delta^2}} = 0,0793.$$

- III. Verschil tusschen exacte waarde en 2e benadering. (50 × vergroot)

$$\sqrt{\overline{\Delta^2}} = 0,0341.$$

$\frac{p}{a}$	$\frac{\Delta \omega}{a}$	$\frac{p \Delta \omega}{a^2}$	FOURIER		Asymptotisch	
			% 3e harm.	% 5e harm.	% 3e harm.	% 5e harm.
0,1	1	0,1	1,42	0,24	1,38	0,24
0,33	1	0,33	4,00	0,64	4,74	0,81
0,28	1,08	0,30	4,7	0,87	5,53	1,06
0,28	1,79	0,50	8,7	3,9	8,08	2,78
0,28	2,51	0,70	9,8	6,3	8,91	3,53
0,28	3,59	1,01	10,1	6,55	8,74	4,59

21. Twee gekoppelde kringen.

Als tweede voorbeeld behandelen we twee gekoppelde kringen.

Zie fig. 11. De bijbehorende differentiaalvergelijking wordt nu:

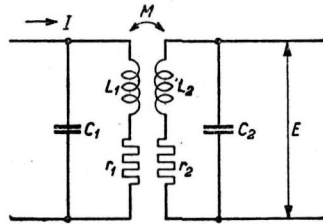
$$\left. \begin{aligned} (L_1 L_2 - M^2) \cdot C_1 C_2 \cdot E'''' + (L_2 r_1 + L_1 r_2) \cdot C_1 C_2 \cdot E'''' + \\ + (L_1 C_1 + L_2 C_2 + r_1 r_2 C_1 C_2) \cdot E'' + (r_1 C_1 + r_2 C_2) \cdot E' + E = M \cdot I' \end{aligned} \right\} (48)$$


Fig. 11.
Gekoppelde kringen.

Hierin is M de coëfficiënt van wederzijdsche inductie. $M = k^2 L_1 L_2$; k is de koppelingsfactor. We nemen verder aan, dat beide kringen op de frequentie ω_0 zijn afgestemd, en stellen: $r_1 = \omega_0 L_1 \cdot \delta_1$, $r_2 = \omega_0 L_2 \cdot \delta_2$.

Wanneer nu de grootheden δ_1 , δ_2 en k klein zijn ten opzichte van 1, en bovendien $\Delta\omega$ en p klein zijn ten opzichte van ω_0 , stellen we ons weer tevreden met een benadering waaruit hoogere machten van δ_1 , δ_2 , k , $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ en $\frac{p}{\omega_0}$ zijn weggelaten. De differentiaalvergelijking hiervoor wordt dan:

$$\omega_0^2 (k^2 + \delta_1 \delta_2) \cdot E_0 + 2 \omega_0 (\delta_1 + \delta_2) \cdot E_0' + 4 E_0'' = i M \omega_0^3 \cdot e^{i m \sin pt}.$$

Hierbij is $E = E_0 e^{i \omega_0 t}$ en $I = e^{i \omega_0 t + i m \sin pt}$. De aangebrachte vereenvoudigingen dienen alleen om de formules niet te onoverzichtelijk te maken en zijn dan ook voor de berekening zelf geenszins essentieel. Voor de oplossing volgens de FOURIER-methode hebben we weer noodig: $P = \text{Re } E_0$ en $Q = \text{Im } E_0$. De momenteele amplitude wordt dan: $(P^2 + Q^2)^{1/2}$, en de momenteele frequentie: $(P^2 + Q^2)^{-1} \cdot (P \cdot Q' - P' \cdot Q)$. Men vindt gemakkelijk, dat:

$$P = 2 \omega_0^3 \cdot M \sum_0^{\infty} J_{2n+1}(m)$$

$$\frac{2(2n+1)p \cdot \omega_0 (\delta_1 + \delta_2) \cdot \cos(2n+1)pt - \{k^2 + \delta_1 \delta_2\} \omega_0^2 - 4(2n+1)^2 p^2 \sin(2n+1)pt}{(k^2 + \delta_1 \delta_2)^2 \cdot \omega_0^4 + 4(2n+1)^2 \cdot p^2} \cdot \omega_0^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2k^2) + 16(2n+1)^4 \cdot p^4$$

$$Q = \omega_0^3 M \cdot \frac{J_0(m)}{k^2 + \delta_1 \delta_2} + 2 \omega_0^3 M \cdot \sum_1^{\infty} J_{2n}.$$

$$\frac{\{(k^2 + \delta_1 \delta_2) \omega_0^2 - 16 n^2 p^2\} \cos 2npt + 4 np \cdot \omega_0 (\delta_1 + \delta_2) \cdot \sin 2npt}{(k^2 + \delta_1 \delta_2)^2 \omega_0^4 + 16 n^2 p^2 \cdot \omega_0^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2k^2) + 256 n^4 p^4}$$

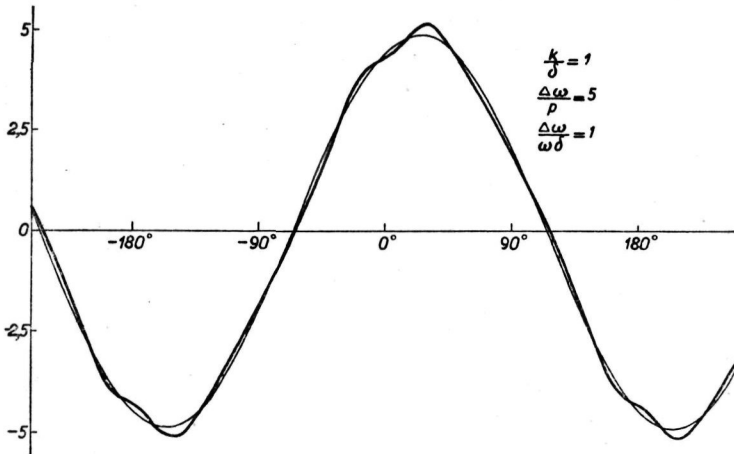


Fig. 12.

Momentelee frequentie na doorgang door gekoppelde kringen.
(Dunne lijn = cosinus.)

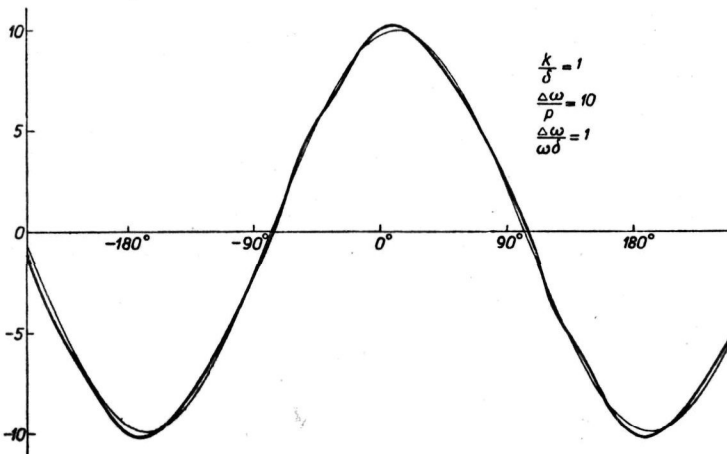


Fig. 13.

Als fig. 12 met andere constanten.

Op deze wijze zijn de resultaten in onderstaande tabel, en fig. 12 t/m 14 berekend. Aangezien men voor $m = 10$, bijv. al 20 componenten mee moet tellen, blijft het proces nogal bewerkelijk.

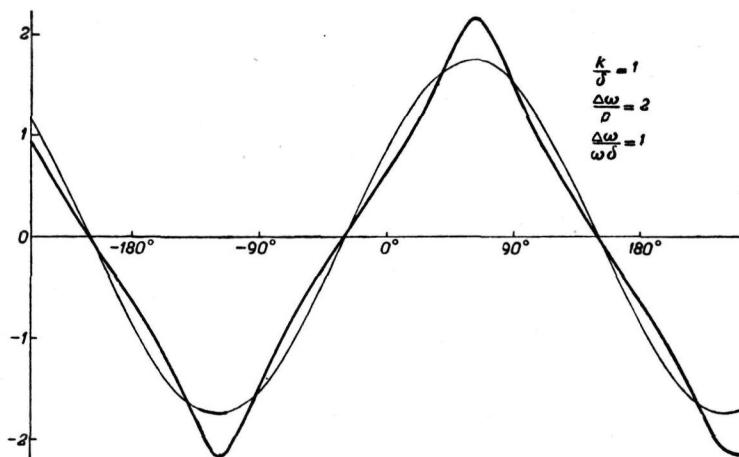


Fig. 14.

Als fig. 13 en fig. 12 met andere constanten.

We kunnen E_0 ook weer in integraalvorm schrijven. Daartoe voeren we eerst eenige afkortingen in, n.l. $\omega_0(\delta_1 + \delta_2) = 4a$, en $\omega_0^2(k^2 + \delta_1\delta_2) = 4\beta^2$; verder nemen we $M\omega_0^3 = 4$. In plaats van verg. 48 krijgen we dan:

$$\beta^2 \cdot E_0 + 2a \cdot E_0' + E_0'' = i e^{im \sin pt}$$

$$E_0 = (U + iV) \cdot e^{im \sin pt}$$

$$U = - \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\tau} \cdot \sin \tau \sqrt{\beta^2 - a^2}}{\sqrt{\beta^2 - a^2}} \cdot \sin \left[\frac{\Delta\omega}{p} \cdot \right. \\ \left. \cdot \{ \sin x (\cos p\tau - 1) - \cos x \cdot \sin p\tau \} \right] \cdot d\tau$$

$$V = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\tau} \cdot \sin \tau \sqrt{\beta^2 - a^2}}{\sqrt{\beta^2 - a^2}} \cdot \cos \left[\frac{\Delta\omega}{p} \cdot \right. \\ \left. \cdot \{ \sin x \cdot (\cos p\tau - 1) - \cos x \cdot \sin p\tau \} \right] \cdot d\tau.$$

Hieruit kunnen we op volkomen analoge manier, als bij den enkelen kring, door ontwikkeling van de integrand naar p de termen van

de asymptotische reeks te voorschijn laten komen, en de fout majoreeren. Voor het kwadraat van de momenteele amplitude verkrijgt men:

$$E_0^2 = \{\beta^4 + (4a^2 - 2\beta^2) \cdot \Delta\omega^2 \cdot \cos^2 pt + \Delta\omega^4 \cdot \cos^4 pt\}^{-1} + \\ \frac{2p \cdot a \cdot \Delta\omega^2 \cdot \sin 2pt \cdot [\beta^2 \cdot (-8a^2 + 5\beta^2) - 2(\beta^2 + 2a^2) \cdot \Delta\omega^2 \cdot \cos^2 pt - 3\Delta\omega^4 \cdot \cos^4 pt]}{\{\beta^4 + (4a^2 - 2\beta^2) \cdot \Delta\omega^2 \cdot \cos^2 pt + \Delta\omega^4 \cdot \cos^4 pt\}^3} + \dots$$

De momenteele frequentie wordt:

$$\omega_0 + \Delta\omega \cdot \cos pt + \frac{2p \cdot a \cdot \Delta\omega \cdot \sin pt \cdot (\beta^2 + \Delta\omega^2 \cos^2 pt)}{\beta^4 + (4a^2 - 2\beta^2) \cdot \Delta\omega^2 \cos^2 pt + \Delta\omega^4 \cos^4 pt} + \dots$$

Men leidt hieruit door FOURIER-integratie de harmonischen af.

Wanneer $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $\frac{k}{\delta} = c$, en $\frac{\Delta\omega}{\omega\delta} = \frac{1}{2}x$, worden de aan form.

47 analoge formules:

$$A_3 = \frac{4p}{x} \left[3 + \frac{4(1-3c^2)}{x^2} - \frac{1}{x^2} \{(x^2 + 4 - 4c^2) \cdot A - 8cB\} \right] \\ A_5 = \frac{4p}{x} \left[5 + \frac{20-60c^2}{x^2} + \frac{16-160c^2+80c^4}{x^4} - \right. \\ \left. - \left\{ 1 + \frac{12(1-c^2)}{x^2} + \frac{16(1-6c^2+c^4)}{x^4} \right\} A + \left\{ \frac{24c}{x^2} + \frac{64c(1-c^2)}{x^4} \right\} B \right]$$

met

$$2A^2 = x^2 + 1 - c^2 + \{(x^2 + 1 - c^2)^2 + 4c^2\}^{1/2} \\ 2B^2 = -x^2 - 1 + c^2 + \{(x^2 + 1 - c^2)^2 + 4c^2\}^{1/2}.$$

Aan de hand van deze formules zijn voor verschillende waarden van c grafieken geteekend, waaruit de vervorming als functie van den frequentiezwaai kan worden afgelezen. De frequentiezwaai en de laagfrequente toonhoogte moeten hiertoe worden uitgedrukt in de voor het filter karakteristieke bandbreedte $\omega_0\delta$.

De reeksontwikkeling voor kleine x begint voor A_3 met:

$$-\frac{px^3(1-3c^2)}{2(1+c^2)^3} + \frac{3px^5(1-10c^2+5c^4)}{8(1+c^2)^5}$$

en voor A_5 met:

$$-\frac{px^5(1-10c^2+5c^4)}{8(1+c^2)^5} + \frac{5}{32} \frac{px^7(1-21c^2+35c^4-7c^6)}{(1+c^2)^7} + \dots$$

In fig. 15, 16 is de absolute waarde van A_3 , resp. A_5 uitgezet. Wanneer deze door nul gaat, draait de phase 180° . Dit opent de mogelijkheid om door gebruik van verschillende filters na elkaar compensatie te krijgen.

Ter vergelijking geven we de resultaten in een aantal gevallen

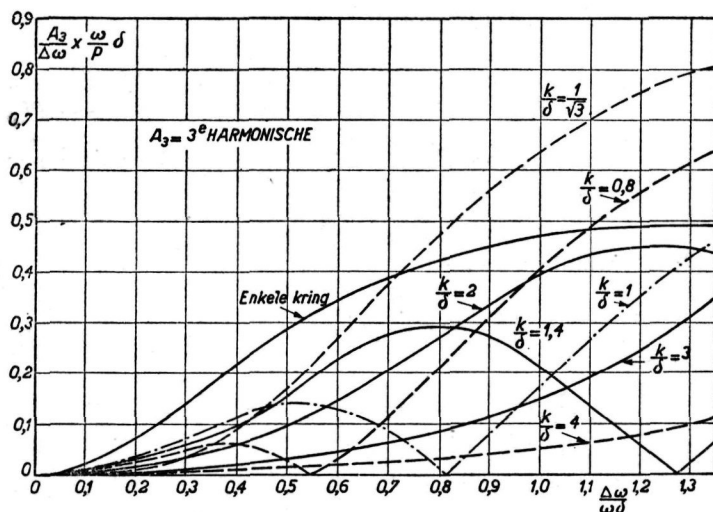


Fig. 15.

Derde harmonische, veroorzaakt door bandfilter en enkelen kring, in algemene constanten. (Berekend uit quasi-stat. benadering.)

$\frac{p \Delta \omega}{\omega^2 \delta^2}$	$\frac{k}{\delta}$	$\frac{\Delta \omega}{\omega \delta}$	$\frac{p}{\omega \delta}$	m	FOURIER meth.		Asympt. meth.	
					3e harm.	5e harm.	3e harm.	5e harm.
0,05	1	0,5	0,1	5	1,31 %	0,53 %	1,37 %	0,39 %
0,08	1	0,4	0,2	2	2,20 %	0,45 %	2,30 %	0,32 %
0,1	1	1	0,1	10	1,65 %	2,10 %	1,73 %	1,79 %
0,1	2	1	0,1	10	3,86 %	1,13 %	3,99 %	0,24 %
0,2	1	1	0,2	5	2,53 %	3,06 %	3,46 %	3,59 %
0,25	1	0,5	0,5	1	4,91 %	0,39 %	6,88 %	1,93 %
0,4	2	2	0,2	10	4,71 %	6,16 %	1,34 %	7,89 %
0,5	1	1	0,5	2	16,35 %	4,36 %	8,64 %	8,97 %

volgens de FOURIER-methode berekend, met daarnaast het resultaat van den quasi-stationnairen term alleen. (Zie tabel pag. 76.)

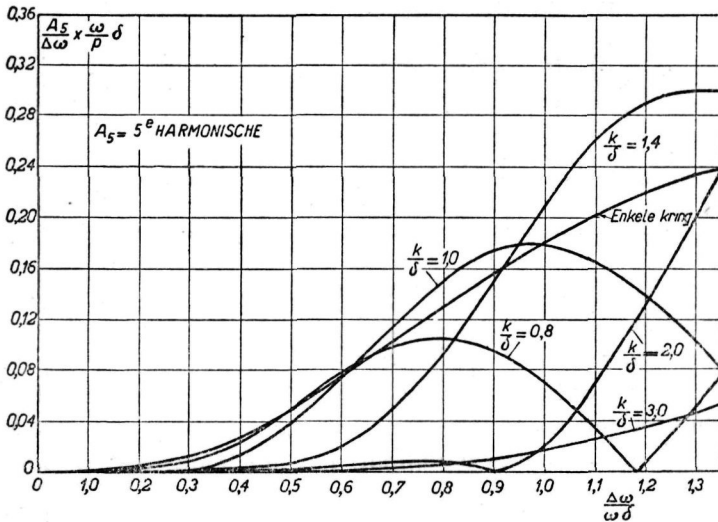


Fig. 16.

Vijfde harmonische, veroorzaakt door bandfilter en enkelen kring, in algemeene constanten. (Berekend uit quasi-stat. benadering.)

Het gebruik van de grafieken van fig. 15 en 16, voor de berekening van de hoeveelheid harmonischen is verantwoord tot $\frac{p}{\omega \delta} = 0,2$, en

$\frac{p \Delta \omega}{\omega^2 \delta^2} = 0,1$. Deze getallen zijn iets ruimer, dan uit de schatting van den majorant alleen zou volgen.

22. De frequentie-detector.

Als volgende toepassing van de theorie behandelen we de frequentiedetector-schakeling, zooals die door TRAVIS⁶⁾, FOSTER en SEELEY¹²⁾ voor automatische frequentieregeling werd ontworpen, en o.a. door FYLER en WORCESTER²⁵⁾ voor frequentiedetectie werd ingevoerd. Zij kan bijv. uitgevoerd worden volgens onderstaand schema (fig. 17). De frequentiemodulatie wordt hierbij in amplitude-modulatie omgezet. Voor de berekening nemen we aan, dat de detectie door de diodes de voorafgaande schakeling niet beïnvloedt.

De spanning op den primairen kring noemen we E_1 , en die op den secundairen E_2 . De beide amplitude-gemoduleerde spanningen, waar-

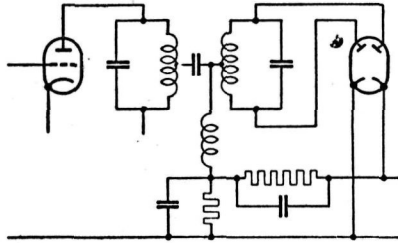


Fig. 17.
Frequentiedetector.

voor we ons interesseeren, ontstaan nu door het deel γ van den primairen kring in serie te zetten met de beide helften van den secundairen. De spanningen hebben dus den vorm: $\gamma E_1 + \frac{1}{2} E_2$, resp. $\gamma E - \frac{1}{2} E_2$. We beperken ons tot het geval, dat beide kringen op de middenfrequentie zijn afgestemd, en stellen ons weer tevreden met dezelfde benadering als in de vorige paragraaf. Dit houdt dus o.a. in, dat δ en $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ klein ten opzichte van 1 worden aangenomen. Wanneer we weer invoeren, dat $E = E_0 e^{i\omega_0 t}$, en $L_2 = a^2 L_1$, wordt de vergelijking:

$$(k^2 + \delta_1 \delta_2) \omega_0^2 \cdot E_0 + 2\omega_0 (\delta_1 + \delta_2) \cdot \frac{dE_0}{dt} + 4 \frac{d^2 E_0}{dt^2} =$$

$$= \frac{\gamma}{C_1} \left\{ \omega_0 \left(\delta_2 + \frac{iak}{2\gamma} \right) + 2i\Delta\omega \cos pt \right\} e^{im \sin pt}.$$

De oplossing volgens de FOURIER-methode geeft hier:

$$E_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{inpt}, \text{ met: } c_n = \frac{\gamma}{C_1} \frac{\omega_0 \left(\delta_2 + i \frac{ak}{2\gamma} \right) + 2in p}{(k^2 + \delta_1 \delta_2) \omega_0^2 + 2in p \cdot \omega_0 (\delta_1 + \delta_2) - 4n^2 p^2}.$$

De numerieke berekening werd uitgevoerd voor het geval:

$$\delta_2 = 0; \omega_0 k = 1; p = 0,1; \delta_1 = k\sqrt{2}; \gamma = 0,5; a = 1.$$

Het resultaat was, voor $m = 0,2$: 0,556 % tweede harmonische, en 0,03 % derde harmonische. Voor $m = 1$: $A_2 = 2,87$ %, $A_3 = 0,45$ %, $A_4 = 0,70$ %, $A_5 = 0,10$ %. Voor $m = 2$: $A_2 = 5,06$ %, $A_3 = 1,98$ %, $A_4 = 3,46$ %, $A_5 = 0,83$ %. We

zullen dit aanstonds kunnen vergelijken met de quasi-stationnaire benadering.

De oplossing volgens de asymptotische methode verkrijgt men weer, door te stellen:

$$E_0 = \{a_0(pt) + pa_1(pt) + p^2 a_2(pt) + \dots\} e^{i \frac{\Delta\omega}{p} \sin pt}.$$

Men vindt dan:

$$a_0 = \frac{\gamma}{C_1} \frac{\omega_0 \left(\delta_2 + i \frac{ak}{2\gamma} \right) + 2i \Delta\omega \cos pt}{\omega_0^2 (k^2 + \delta_1 \delta_2) + 2i \omega_0 (\delta_1 + \delta_2) \cdot \Delta\omega \cos pt - 4 \Delta\omega^2 \cos^2 pt}.$$

$$|a_0|^2 = \frac{\gamma^2}{C_1^2} \frac{\omega_0^2 \delta_2^2 + \left(\frac{ak}{2\gamma} \omega_0 + 2 \Delta\omega \cos pt \right)^2}{\omega_0^4 (k^2 + \delta_1 \delta_2)^2 + 4 \omega_0^2 (-2k^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2) \cdot \Delta\omega^2 \cos^2 pt + 16 \cdot \Delta\omega^4 \cos^4 pt}.$$

Door ontwikkeling naar machten van $\Delta\omega$ krijgen we:

$$\begin{aligned} |a_0|^2 = & \frac{\gamma \left(\delta_2^2 + \frac{a^2 k^2}{4\gamma^2} \right)^{1/2}}{(k^2 + \delta_1 \delta_2) \cdot \omega_0 C_1} + \frac{ak \cdot \Delta\omega \cos pt}{(k^2 + \delta_1 \delta_2) \cdot \left(\delta_2^2 + \frac{a^2 k^2}{4\gamma^2} \right)^{1/2} \cdot \omega_0^2 C_1} + \\ & + \frac{2\gamma \cdot \Delta\omega^2 \cos^2 pt \cdot \left\{ \delta_2^2 (k^2 + \delta_1 \delta_2)^2 + \left(\delta_2^2 + \frac{a^2 k^2}{4\gamma^2} \right)^2 (2k^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2) \right\}}{(k^2 + \delta_1 \delta_2)^3 \cdot \left(\delta_2^2 + \frac{a^2 k^2}{4\gamma^2} \right)^{3/2} \cdot \omega_0^3 C_1} + \\ & + \frac{2ak \cdot \Delta\omega^3 \cos^3 pt}{(k^2 + \delta_1 \delta_2)^3 \cdot \left(\delta_2^2 + \frac{a^2 k^2}{4\gamma^2} \right)^{5/2} \cdot \omega_0^4 C_1} \left[\frac{a^4 k^4}{16\gamma^4} (2k^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2) + \right. \\ & \left. + \frac{a^2 k^2 \delta_2^2}{2\gamma^2} (2k^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2) + \delta_2^2 \{ -k^4 + 2k^2 \delta_2 (\delta_1 - \delta_2) - \delta_2^2 (2\delta_1^2 + \delta_2^2) \} \right]. \end{aligned}$$

De modulatie diepte wordt dus:

$$\frac{ak}{\gamma} \frac{\Delta\omega}{\left(\delta_2^2 + \frac{a^2 k^2}{4\gamma^2} \right) \omega_0}.$$

De derde graadsterm wordt nul, wanneer men de constanten zoo kiest, dat:

$$\frac{a^2 k^2}{4\gamma^2} = -\delta_2^2 + \frac{\delta_2 (k^2 + \delta_1 \delta_2)}{(2k^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2)^{1/2}}.$$

We hebben ook den vijfden graadsterm berekend, en dezen kan men eveneens nul maken, wanneer ook geldt:

$$\frac{(k^2 + \delta_1 \delta_2)}{\delta_2 (2k^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2)^{1/2}} + \frac{(k^2 + \delta_1 \delta_2)^2}{(2k^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2)^2} = 2.$$

Aan de eerste voorwaarde alleen voldoen bijv. de constanten:

$$\begin{aligned} \gamma = 0,5 a, \delta_1 = k\sqrt{2}, \delta_2 = 0; \quad \gamma = a, \delta_1 = \delta_2 = 0,4861 k; \\ \gamma = 0,5 a, \delta_1 = 0,6 k, \delta_2 = k. \end{aligned}$$

De tweede voorwaarde voert tot minder geschikte constanten, bijv.:

$$\begin{aligned} \gamma = 1,58 a, \delta_2 = 0,9 k, \delta_1 = 0,108 k; \quad \gamma = 1,255 a, \delta_1 = 0,187 k, \\ \delta_2 = 0,8 k; \quad \gamma = 1,185 a, \delta_2 = 0,6 k, \delta_1 = 0,219 k. \end{aligned}$$

Tot dusver hebben we nog slechts de statische karakteristiek beschouwd. Op analoge wijze als in de beide vorige paragrafen vindt men den quasi-stationnaireren term. Wanneer we de uitkomst voor de momenteele amplitude weer naar $\Delta\omega$ ontwikkelen, krijgen we als eerste termen:

$$\begin{aligned} & \frac{2 a k (\delta_1 + \delta_2) \cdot \Delta \omega \cdot p \sin pt}{\left(\delta_2^2 + \frac{a^2 k^2}{4 \gamma^2} \right)^{1/2} \cdot (k^2 + \delta_1 \delta_2)^2 \cdot \omega_0^3 C_1} + \\ & \frac{p \gamma \cdot \Delta \omega^2 \sin 2 pt \left[\frac{a^4 k^4}{4 \gamma^4} (\delta_1 + \delta_2) (5 k^2 - 2 \delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 - 2 \delta_2^2) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{a^2 k^2}{\gamma^2} D_1 + 4 \delta_2 \cdot D_2 \right]}{\omega_0^4 C_1 \cdot (k^2 + \delta_1 \delta_2)^4 \cdot \left(\delta_2^2 + \frac{a^2 k^2}{4 \gamma^2} \right)^{3/2}} \\ & + \frac{2 a k \cdot \Delta \omega^3 \cdot p \sin pt \cdot \cos^2 pt}{\omega_0^5 C_1 (k^2 + \delta_1 \delta_2)^4 \left(\delta_2^2 + \frac{a^2 k^2}{4 \gamma^2} \right)^{5/2}} \cdot \left(\frac{a^4 k^4}{8 \gamma^4} D_3 + \frac{a^2 k^2}{\gamma^2} \delta_2 D_4 + \delta_2^2 D_5 \right) + \dots \end{aligned}$$

met:

$$D_1 = -2k^4 \delta_2 + k^2 \delta_2 (\delta_1^2 + 8\delta_1 \delta_2 + 11\delta_2^2) - \delta_2^2 (3\delta_1^3 + 2\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + 4\delta_2^3)$$

$$D_2 = k^4 (\delta_1 - \delta_2) + k^2 \delta_2 (3\delta_1^2 + 5\delta_1 \delta_2 + 6\delta_2^2)$$

$$D_3 = (\delta_1 + \delta_2) (18k^2 - 7\delta_1^2 + 4\delta_1 \delta_2 - 7\delta_2^2)$$

$$D_4 = 2k^4 + k^2 (-\delta_1^2 + 20\delta_1 \delta_2 + 17\delta_2^2) - \delta_2 (8\delta_1^3 + 3\delta_1^2 \delta_2 + 4\delta_1 \delta_2^2 + 7\delta_2^3)$$

$$D_5 = 2k^4 (-3\delta_1 + \delta_2) + 16k^2 \delta_2 (-\delta_1^2 + 2\delta_1 \delta_2 + 2\delta_2^2) - 2\delta_2^2 (12\delta_1^3 + 6\delta_1^2 \delta_2 + 5\delta_1 \delta_2^2 + 7\delta_2^3).$$

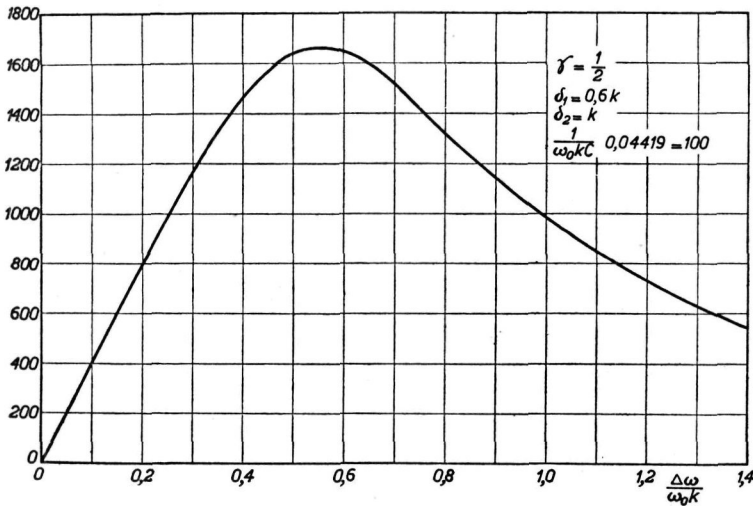


Fig. 18.
Statische karakteristiek frequentiedetector.

De evengraadstermen worden gecompenseerd, doordat men balansdetectie toepast, d.w.z. van de hier berekende $|\gamma E_1 + \frac{E_2}{2}|$ aftrekt:

$|\gamma E_1 - \frac{E_2}{2}|$. Toch zal men ook de tweede harmonische bij voorkeur laag houden, opdat evt. fouten in de compensatie geen al te groot effect hebben.

Bespreken we nu nog eenige numerieke voorbeelden.

Eerste geval (zie pag. 78):

Wanneer we in de statische karakteristiek tot termen van den vijfden en in de quasi-stationnaire benadering tot termen van den derden graad gaan, levert de reeksontwikkeling:

$$\frac{1}{\omega_0 k C_1} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} x^4 + \left(x + \frac{x^5}{2} \right) \cdot \cos pt - 2x^4 \cdot \cos 2pt + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} x^5 \cdot \cos 3pt - \frac{x^4}{2} \cdot \cos 4pt + \frac{x^5}{2} \cos 5pt \right\} + \\ + \frac{p\sqrt{2}}{\omega_0^2 k^2 C_1} \{ (2x + 4x^3) \cdot \sin pt + 2x^2 \cdot \sin 2pt + 4x^3 \cdot \sin 3pt \}$$

waarbij $x = \frac{\Delta \omega}{\omega_0 k}$.

Vergelijken we eerst eens de resultaten met die volgens de FOURIER-methode verkregen. We krijgen nu voor $p = 0,1 \omega_0 k$, en

$$\begin{aligned} x = 0,02: & \text{ 2e harm. } 0,56 \% ; \text{ 3e harm. } 0,03 \% , \\ x = 0,1 : & \text{ 2e harm. } 2,83 \% ; \text{ 3e harm. } 0,56 \% , \\ x = 0,2 : & \text{ 2e harm. } 5,66 \% ; \text{ 3e harm. } 2,27 \% . \end{aligned}$$

De distortie wordt hier inderdaad bijna geheel gegeven door den quasi-stationnairen term (zie ook pag. 78).

Laat men 0,5 % derde harmonische toe, dan mag men volgens de statische karakteristiek gaan tot $x = 0,211$. Bij $x = 0,299$ berekent men op deze wijze 2 % derde harmonische. De tweede harmonische is hier statisch per helft 1,89 %, resp. 5,34 %. De quasi-stationnaire termen geven, wanneer m de modulatie-index is: 12,65 m^{-1} %, resp. 25,3 m^{-1} % tweede harmonische per helft, en evenzoo: 5,34 m^{-1} %, resp. 15,10 m^{-1} % derde harmonische. Bij $m = 10$ wordt deze vervorming reeds van dezelfde orde, als die door de statische karakteristiek alleen gegeven. Zij is hiermede evenwel 90° uit fase.

We geven de met behulp der formules berekende resultaten voor drie andere gevallen hieronder nog in tabelvorm:

- I. $\delta_1 = \delta_2 = k$; $\gamma = \frac{1}{4}$; $a = 1$.
- II. $\delta_1 = \delta_2 = 0,486 k$; $\gamma = 1$; $a = 1$.
- III. $\delta_1 = 0,6 k$; $\delta_2 = k$; $\gamma = \frac{1}{2}$; $a = 1$.

	Gevoeligheid	x	Statisch		Quasi-stationnair	
			2e harm.	3e harm.	2e harm.	3e harm.
I	0,224	0,250	1,18 %	0,5 %	17,2 m ⁻¹ %	11,8 m ⁻¹ %
		0,325	1,48 %	2 %	29,1 m ⁻¹ %	19,9 m ⁻¹ %
II	1,160	0,230	26,2 %	0,5 %	22,3 m ⁻¹ %	9,40 m ⁻¹ %
		0,326	42,3 %	2 %	44,6 m ⁻¹ %	26,6 m ⁻¹ %
III	0,442	0,268	3,46 %	0,5 %	39,3 m ⁻¹ %	8,30 m ⁻¹ %
		0,378	6,68 %	2 %	78,6 m ⁻¹ %	23,5 m ⁻¹ %

Gevoeligheid 0,224 beteekent, dat de topspanning per helft voor een signaal met frequentiezwaai $\Delta\omega$ bedraagt $0,224 \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 k^2 C_1}$. Bij het als eerste behandelde geval was deze constante 1. De groote tweede harmonische in beide helften van II. maakt deze combinatie minder gewenscht.

De formules worden meer gecompliceerd, wanneer δ niet meer klein is ten opzichte van 1. In dit geval treden even harmonischen op. Men kan de tweede harmonische dan compenseeren door de kringen een weinig te verstemmen. Dit probleem treedt bij een lage middenfrequentie op.

23. Intermodulatie.

Wanneer een zender tegelijk gemoduleerd wordt met verschillende laagfrequent tonen, ontstaan in de filters ook som en verschiltönen. We nemen als voorbeeld een enkelen kring in afstemming, terwijl de zender gemoduleerd wordt met twee laagfrequente tonen. De momenteele frequentie aan den ingang van den ontvanger wordt dan:

$$\omega_0 + \Delta\omega_1 \cos pt + \Delta\omega_2 \cdot \cos qt.$$

Nu wordt de quasi-stationnaire term:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta\omega_1 \cos pt + \Delta\omega_2 \cos qt}{a}.$$

We maken nu gebruik van de betrekking:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} a = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} \cdot \sin au \cdot du$$

en vullen hierin in:

$$a = 2x \cos pt + 2y \cos qt; \quad 2x = \frac{\Delta \omega_1}{a}; \quad 2y = \frac{\Delta \omega_2}{a}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} \text{arc tg } a &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} \cdot \sin(2ux \cos pt + 2uy \cos qt) du = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \left\{ 2 \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot J_{2n+1}(2ux) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos(2n+1)pt \right\} \left\{ J_0(2uy) + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^m \cdot J_{2m}(2uy) \cos 2mqt \right\} \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} \cdot du \left\{ 2 \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot J_{2n+1}(2uy) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos(2n+1)qt \right\} \left\{ J_0(2ux) + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^m \cdot J_{2m}(2ux) \cos 2mpt \right\}. \end{aligned}$$

Vraagt men nu naar den coëfficiënt van $\cos(2k+1)pt + 2mqt$, dan is het antwoord blijkbaar:

$$2(-1)^{k+m} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} J_{2k+1}(2ux) \cdot J_{2m}(2uy) \cdot du. \quad . \quad . \quad (49)$$

In verschillende gevallen kan men deze integralen met behulp van de in WATSON's boek ⁸⁰⁾ aangegeven formules verder vereenvoudigen. Dit is bijv. steeds het geval, wanneer $k = m$. Wanneer de argumenten der BESSEL-functies gelijk zijn, gelukt het ook steeds, n.l. op dezelfde manier als in onderstaand voorbeeld.

Vb. We nemen de amplitudes der beide laagfrequent tonen gelijk, en vragen naar de amplitude van $\sin 3pt$ na doorgang door den kring. We moeten daarbij bedenken, dat, om den quasi-stationnaireren term in de frequentie te krijgen, $\text{arc tg } a$ nog eens gedifferentieerd moet worden, zoodat $A_{3p} = 3p \cdot C_{3p}$, terwijl

$$C_{3p} = -2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} J_3(2ux) \cdot J_0(2ux) \cdot du.$$

Met behulp van NEUMANN's integraal wordt dit teruggebracht tot:

$$-\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_3(4ux \cos \theta) \cdot \cos 3\theta \cdot d\theta.$$

Verwisseling der integratie-volgorde levert daarna:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3\theta \cdot d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} \cdot J_3(4ux \cos \theta) \cdot du = \\ -\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3\theta \cdot d\theta \cdot \{(1 + 16x^2 \cos^2 \theta)^{1/2} - 1\}}{192x^3 \cdot \cos^3 \theta}. \end{aligned}$$

Voer nu in, dat $u = \sin \theta$:

$$-\frac{1}{48\pi x^3} \int_0^1 \frac{du (1-4u^2) \{(1 + 16x^2 - 16x^2 u^2)^{1/2} - 1\}^3}{(1-u^2)^{3/2}}.$$

Deze integraal is terug te voeren op complete elliptische integralen van de eerste en tweede soort, zoodat tenslotte:

$$C_{3p} = -\frac{(1 + 16x^2)^{1/2}}{36\pi x^3} \{(11 - 2x^2)E - 5F\} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^3}. \quad (50)$$

Het argument van E en F is $k = \frac{4x}{(1 + 16x^2)^{1/2}}$. (Vindt men E en F getabelleerd als functie van a , waarbij $\sin a = k$, dan is dus hier $tg a = 4x$.)

Op analoge wijze wordt bij gelijke amplitude der beide oorspronkelijke laagfrequent componenten:

$$C_{2p \pm q} = -\frac{(1 + 16x^2)^{1/2}}{12\pi x^3} \{(-1 + 4x^2)E + F\} + \frac{1}{2x}. \quad (51)$$

Eenmaal differentieeren geeft weer de quasi-stationnaire amplitude

$$A_{2p+q} = C_{2p+q} \cdot (2p + q).$$

Voor de berekening bij kleinen frequentiezwaai maakt men geschikt gebruik van de reeksontwikkeling voor arc tg ; dit kan, zoolang:

$$\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 \leq a.$$

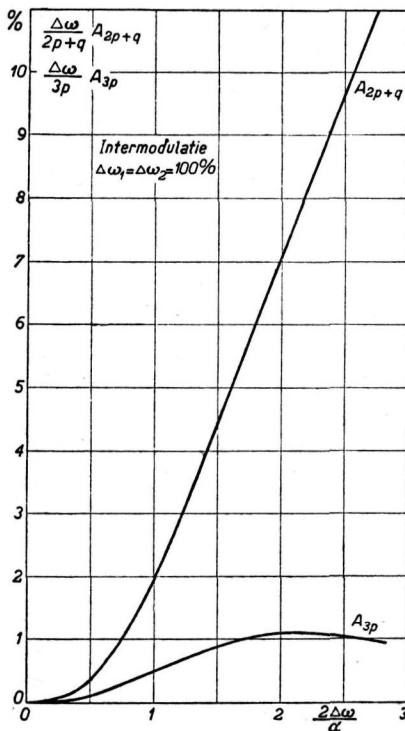
Dit geeft bijv. voor den $2p \pm q$ term:

$$C_{2p \pm q} = 2 \sum_0^{\infty} m \sum_0^{\infty} n (-1)^{m+n+1} \frac{(2m+2n+2)! x^{2n+2} y^{2m+1}}{(n+2)! n! (m+1)! m!}$$

resp. voor den $2p \pm 3q$ term:

$$C_{2p \pm 3q} = 2 \sum_0^{\infty} m \sum_0^{\infty} n (-1)^{m+n+2} \frac{(2m+2n+4)! x^{2n+2} y^{2m+3}}{(n+2)! n! (m+3)! m!}.$$

Evenals vroeger kunnen we slechts in een bepaald gebied verwachten, dat dit een goede benadering geeft, n.l. wanneer $\frac{P}{\alpha} \leq 0,4$, $\frac{q}{\alpha} \leq 0,4$ en $\frac{p \Delta \omega_1 + q \Delta \omega_2}{\alpha^2} \leq 0,8$. Bij de experimenten, die we in het volgende hoofdstuk zullen bespreken, zal men inderdaad een gedrag vinden, als door deze formules voorspeld.



Intermodulatie bij gekoppelde kringen is op analoge wijze te berekenen.

24. Grafische bepaling der vervorming.

Wanneer een zender met frequentiemodulatie met een periodiek signaal gemoduleerd wordt, kan men de amplitude- en phasemodulatie na doorgang door een filter ook grafisch construeren, indien amplitude en fasekarakteristiek van het filter gegeven zijn. Men maakt daarbij gebruik van de formules 44a, b.

Fig. 19.
Intermodulatie bij f.m., na doorgang door een enkelen kring.
(Quasi-stationaire benadering.)

HOOFDSTUK VI.

**Experimenten over distorsie van trillingen met frequentiemodulatie.
Over een methode om de distorsie bij den zender rechtstreeks uit
het spectrum te bepalen.**

25. Ten einde de in het voorafgaande hoofdstuk besproken berekeningen over distorsie van signalen met frequentiemodulatie ook experimenteel te toetsen, werd gebruik gemaakt van een meetopstel-

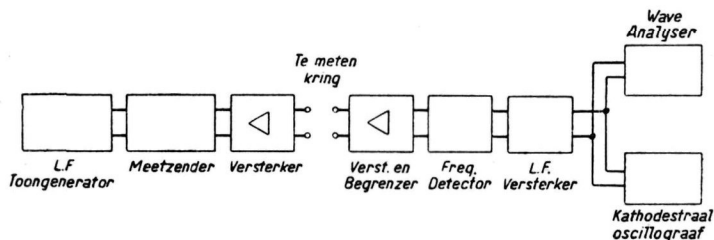


Fig. 20.

Opstelling voor distortiemetingen.

ling, volgens het schema van fig. 20. Het van den meetzender ontvangen signaal wordt toegevoerd aan een versterkerbuis, in het anode-circuit waarvan de te meten kring is opgenomen. Eventuele amplitudemodulatie wordt in den begrenzer verwijderd, waarna het signaal in den frequentiedetector wordt gedetecteerd, en vervolgens laagfrequent versterkt. De omstandigheden werden steeds zoo gekozen, dat de breedte van den te meten kring klein was, ten opzichte van de breedte der voor detectie en versterking gebruikte kringen. De begrenzer was met het oog op de bijzondere eischen dubbel uitgevoerd. Voor de meting der harmonischen werd het laagfrequente resultaat ten slotte toegevoerd aan een General Radio Wave Analyser, type 636 A, serie nr. 203, terwijl de vorm ervan werd zichtbaar gemaakt door middel van den Philips kathodestraal-oscillograaf, type nr. G.M. 3152. In het vervolg zullen we eenige onderdeelen van het schema nog meer in detail bezien.

26. De Meetzender.

De metingen werden uitgevoerd bij een frequentie van $2 \cdot 10^6$ per./sec. Een meetzender, waarvan de frequentie bij $2 \cdot 10^6$ per./sec.

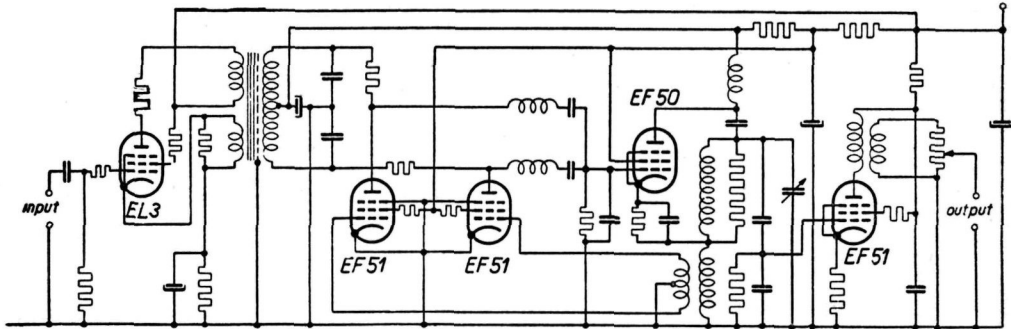


Fig. 21.

Modulator; draaggolf 2 Mc/sec. Frequentiezwaai ca. 60 Kc/sec.

gemoduleerd kon worden, werd gebouwd volgens een nog niet gepubliceerd ontwerp van G. HEPP. Zie schema, fig. 21. Het laagfrequente modulatiesignaal wordt toegevoerd aan de versterkerbuis *EL 3*, welke het omzet in een signaal in balans tegen aarde. Deze gebalanceerde spanning wordt gesuperponeerd op de anodespanning der buizen *EF 51*, welke hun roosterspanning ontleenen aan de oscillatorbuis *EF 50*. De buizen *EF 51* moduleren dus de van den oscillator *EF 50* afkomstige spanning in amplitude, volgens het anode-modulatiesysteem. Deze amplitude-gemoduleerde spanning wordt 90° in phase gedraaid teruggevoerd aan het rooster van de oscillatorbuis.

Kenmerkend voor de methode is, dat de door de oscillatorbuis opgewekte spanning gedeeltelijk rechtstreeks wordt teruggekoppeld, gedeeltelijk eerst in amplitude gemoduleerd, 90° in phase gedraaid, en daarna aan het rooster van dezelfde buis wordt teruggevoerd.

Wanneer we, zoals in ons geval, in balans amplitude moduleren, is het resultaat van de modulatie evenredig met het product van de laagfrequente spanning en de oscillatorspanning, in formule:

$$\beta \cdot v_a \cdot v_l \cdot f.$$

Dit wordt 90° gedraaid:

$$\int^t dt \cdot \beta \cdot v_a \cdot v_{l.f.}$$

De roosterspanning wordt totaal:

$$v_g = -\alpha v_a + \int^t dt \cdot \beta \cdot v_a \cdot v_{l.f.}$$

De betrekking tusschen anodestroom en anodespanning wordt bepaald door:

$$L \cdot \frac{d}{dt} i_a = \left(1 + LC \frac{d^2}{dt^2} + rC \frac{d}{dt} \right) v_a.$$

De anodestroom hangt nu af van rooster- en anodespanning, volgens:

$$i_a = \frac{1}{R_i} (v_a + \mu v_g).$$

Maakt men gebruik van deze betrekking, dan wordt de differentiaalvergelijking voor de anodespanning:

$$\left\{ \frac{1}{L} + \frac{\mu}{R_i} \cdot \beta \cdot v_{l.f.} \right\} v_a + \left\{ -\frac{\alpha \mu}{R_i} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R_i} \right\} \cdot \frac{dv_a}{dt} + C \cdot \frac{d^2 v_a}{dt^2} = 0.$$

In den stabielen trillingstoestand zal de terugkoppeling zoo groot zijn, dat:

$$-\frac{\alpha \mu}{R_i} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R_i} = 0.$$

De momenteele frequentie wordt nu bepaald door:

$$\frac{d^2 v_a}{dt^2} + (1 + \alpha v_{l.f.}) \cdot \frac{1}{LC} \cdot v_a = 0; \quad \alpha = \frac{\mu \beta}{R_i} \cdot LC.$$

Wanneer het laagfrequente signaal sinusvormig is: $v_{l.f.} = A \cos pt$, en $\alpha A \ll 1$, hebben we hier juist de vergelijking voor frequentie modulatie²⁾, en de benaderde oplossing wordt dus voorgesteld door:

$$v_a = \beta \cos \left\{ \omega_0 t + \omega_0 \int^t \frac{\alpha A}{2} \cos p\tau \cdot d\tau \right\}.$$

Naast harmonischen van de draaggolffrequentie, kunnen ook harmonischen van de modulatie ontstaan. Zoo wordt de momenteele frequentie, volgens bovenstaande formule iets beter benaderd door:

$$\omega_m = \omega_0 \left(1 + \frac{\alpha A}{2} \cdot \cos pt - \frac{\alpha^2 A^2}{8} \cos^2 pt + \dots \right)$$

en bovendien kunnen ook bij de amplitudemodulatie harmonischen ontstaan.

Daar het natuurlijk van belang is, om te weten, welke harmonischen reeds in den zender zelf verwekt worden, willen we dit ook meten. Hiervoor bestaan twee mogelijkheden: Men kan een goeden frequentiedetector maken, die een breed lineair gebied heeft. Het blijft dan moeilijk om te bepalen, of de overblijvende kleine distortie aan den zender, of aan den ontvanger te wijten is. Een andere methode, welke door ons met bevredigend resultaat werd toegepast, zullen we in de volgende paragraaf bespreken.

27. *Bepaling van de vervorming bij een f.m. zender uit het spectrum.*

Bij een idealen f.m. zender is de frequentiezwaai een lineaire functie van de laagfrequentspanning. Het signaal, dat behoort bij een ingangsspanning $V \cos pt$ wordt:

$$A \cos \left(\omega_0 t + \int \alpha_1 V \cdot \cos p\tau \cdot d\tau \right).$$

Hiervan wordt het spectrum gegeven door de formule:

$$A \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cdot \cos(\omega_0 + np) t.$$

waarbij: $m = \frac{\alpha_1 V}{p}$.

De amplitude van den component met frequentie $\omega_0 + np$ gaat door nul, wanneer $J_n(m) = 0$. Deze waarden zijn getabelleerd, en men vindt, bijv. voor $J_0(m)$ nulpunten bij $m = 2,405; 5,520; 8,655$, enz. Men behoeft dus slechts het rangnummer van het nulpunt en de laagfrequente toonhoogte te kennen, om den frequentiezwaai te bepalen. Hieruit bepaalt men α_1 , daar ook V bekend is.

In de practijk komen kleine afwijkingen van de lineariteit voor.

We kunnen dit weergeven door met de spanning $V \cos pt$ te laten corresponderen een signaal met momenteele frequentie:

$$\omega_0 + \sum a_n \cdot V^n \cdot \cos^n pt.$$

Voor het vervolg van de berekening nemen we aan, dat een reeks van 5 termen voldoende is. We kunnen de momenteele frequentie dan ook in den vorm van een FOURIER-reeks schrijven:

$$\begin{aligned} \omega_m = \omega_0 + \frac{1}{2} a_2 V^2 + \frac{3}{4} a_4 V^4 + (a_1 V + \frac{3}{4} a_3 V^3 + \frac{5}{8} a_5 V^5) \cos pt + \\ (\frac{1}{2} a_2 V^2 + \frac{1}{4} a_4 V^4) \cdot \cos 2pt + (\frac{1}{4} a_3 V^3 + \frac{5}{16} a_5 V^5) \cdot \cos 3pt + \\ \frac{1}{4} a_4 V^4 \cdot \cos 4pt + \frac{1}{16} a_5 V^5 \cdot \cos 5pt. \end{aligned}$$

Welken invloed heeft het optreden der niet-lineaire termen nu op het frequentiespectrum? Wanneer $\omega_1 = \omega_0 + \frac{1}{2} a_2 V^2 + \frac{3}{4} a_4 V^4$, en $a_1 V = mp$, wordt het signaal:

$$A \cdot \cos (\omega_1 t + m \sin pt + \varphi)$$

waarbij:

$$\begin{aligned} \varphi = (\frac{3}{4} a_3 V^3 + \frac{5}{8} a_5 V^5) \frac{\sin pt}{p} + (\frac{1}{2} a_2 V^2 + \frac{1}{4} a_4 V^4) \frac{\sin 2pt}{2p} + \\ (\frac{1}{4} a_3 V^3 + \frac{5}{16} a_5 V^5) \frac{\sin 3pt}{3p} + \frac{1}{8} a_4 V^4 \cdot \frac{\sin 4pt}{4p} + \frac{1}{16} a_5 V^5 \cdot \frac{\sin 5pt}{5p}. \end{aligned}$$

We nemen aan, dat de vervorming zoo klein blijft, dat $|\varphi| \leq \frac{1}{2}$ rad. blijft, en schrijven dan voor het signaal:

$$\begin{aligned} A \cos (\omega_1 t + m \sin pt) - A \varphi \sin (\omega_1 t + m \sin pt) = \\ A \sum J_n \cos (\omega_1 + np) t - A \varphi \sum J_n \cdot \sin (\omega_1 + np) t. \end{aligned}$$

De amplitude van den centralen component wordt nu:

$$\begin{aligned} J_0 - \left(\frac{3}{4p} a_3 V^3 + \frac{5}{8p} a_5 V^5 \right) J_1 - \\ - \left(\frac{1}{12p} a_3 V^3 + \frac{5}{48p} a_5 V^5 \right) J_3 - \frac{1}{80p} a_5 V^5 \cdot J_5. \end{aligned}$$

Het gevolg van de vervorming is eenerzijds een verschuiving van het spectrum als geheel, waaruit a_2 en a_4 bepaald kunnen worden, en verder wordt het nulpunt, bijv. van den centralen component nu

niet gevonden bij de waarde van m , welke in de tabel staat: m_0 , maar bij $m_0 + \Delta m$:

$$J_0(m_0 + \Delta m) = \Delta m \cdot \frac{dJ_0(m)}{dm} = -\Delta m \cdot J_1(m_0).$$

Met behulp van de betrekking $J_{n+1}(m) + J_{n-1}(m) = \frac{2n}{m} J_n(m)$ kan men nu ook J_3 en J_5 in J_1 uitdrukken. In de nulpunten van J_0 geldt dan:

$$J_3 = \left(-1 + \frac{8}{m_0^2}\right) J_1(m); \quad J_5 = \left(1 - \frac{72}{m_0^2} + \frac{384}{m_0^4}\right) \cdot J_1(m).$$

Hieruit volgt:

$$-a_1 \cdot \Delta V = -p \cdot \Delta m =$$

$$\frac{2}{3} a_3 V^3 + \frac{8}{15} a_5 V^5 + \frac{1}{m_0^2} \left(\frac{2}{3} a_3 V^3 - \frac{1}{15} a_5 V^5\right) + \frac{24}{5 m_0^4} a_5 V^5.$$

Nu is voor het zesde nulpunt m_0 reeds 18,07, en dus vormen de beide laatste termen een kleine correctie. Uit de verschuiving der nulpunten kan men dus a_3 en a_5 bepalen. We hadden reeds a_2 en a_4 , en kunnen dus eenvoudig de harmonischen berekenen.

Bij wijze van contrôle kan men ook een anderen component nemen, bijv. $\cos(\omega_0 + np)t$. Men maakt dan gebruik van de betrekking:

$$J_n(m_n + \Delta m_n) = m_n \cdot J_{n-1}(m_n)$$

Verder drukt men ook de overige BESSEL-functies in J_{n-1} uit, en vindt voor de verschuiving:

$$p \cdot \Delta m_n = - \left[\frac{2}{3} a_3 V^3 + \frac{8}{15} a_5 V^5 + \right. \\ \left. + \frac{n}{m_n} \left(4 a_2 V^2 + a_4 V^4 + \frac{2(n^2 + 11)}{m_n^2} a^4 V^4 \right) + \right. \\ \left. + \frac{n^2 + 2}{3 m_n^2} a_3 V^3 + \frac{a_5 V^5}{15 m_n^2} \left\{ (4n^2 - 1) + \frac{3(n^4 + 35n^2 + 24)}{m_n^2} \right\} \right].$$

Telt men de verschuiving, welke de nulpunten bij den component $\omega_0 + np$ ondergaan, bij de verschuiving van de nulpunten $\omega_0 - np$, dan is de som weer onafhankelijk van de evengraadstermen. Uit het

verschil zou men de evengraadstermen kunnen bepalen, maar dit is wegens den factor $\frac{1}{m_n}$ onnauwkeuriger, dan de bepaling uit de verplaatsing van het geheele spectrum.

Opgemerkt kan worden, dat deze meting door een weinig amplitudemodulatie niet gestoord wordt. Voor amplitudemodulatie met denzelfden grondtoon en in dezelfde phase, berekenen we het spectrum uit:

$$(1 + a \cos pt) \cdot \Sigma J_n \cos (\omega_0 + np)t.$$

De amplitude van den component $\omega_0 + np$ wordt nu:

$$J_n + a \frac{J_{n+1} + J_{n-1}}{2} = J_n \left(1 + \frac{a n}{m} \right).$$

Hierdoor verandert het nulpunt dus niet. Is de amplitudemodulatie niet in dezelfde phase, dan wordt alleen een minimum bereikt en geen nulpunt. De plaats verandert echter niet.

Bij amplitudemodulatie met de tweede harmonische, wordt de amplitude van den component $\omega_0 + np$: $J_n + \frac{1}{2}b(J_{n-2} + J_{n+2})$, en de verschuiving van het nulpunt

$$\Delta m = \frac{2b}{m(1-b)}.$$

Deze neemt dus af met toenemende m , en zal hoogstens een kleine fout in de meting veroorzaken.

Op deze wijze meten we alleen de distortie, welke het gevolg is van kromming van de modulatiekarakteristiek, en niet die, welke veroorzaakt wordt bij doorgang door electriche netwerken. Door deze laatste worden de nulpunten niet beïnvloed.

28. *Vervormingsmetingen aan onzen meetzender.*

Als toepassing van de in § 27 gegeven theorie werd de vervorming aan onzen meetzender bepaald. De schijnbare frequentiezwaai is uitgezet tegen de spanning aan de ingangsklemmen. (Onder den schijnbaren frequentiezwaai verstaan we het product van het getal, dat aangeeft, waar de BESSEL-functie nul wordt, en de laagfrequente toonhoogte in per./sec.). De afwijking van de lineaire karakteristiek

kunnen we dan, tot een spanning van 5,6 Volt bij benadering voorstellen door:

$$\Delta V = 6.10^{-4} V^3 + 20.10^{-6} V^5.$$

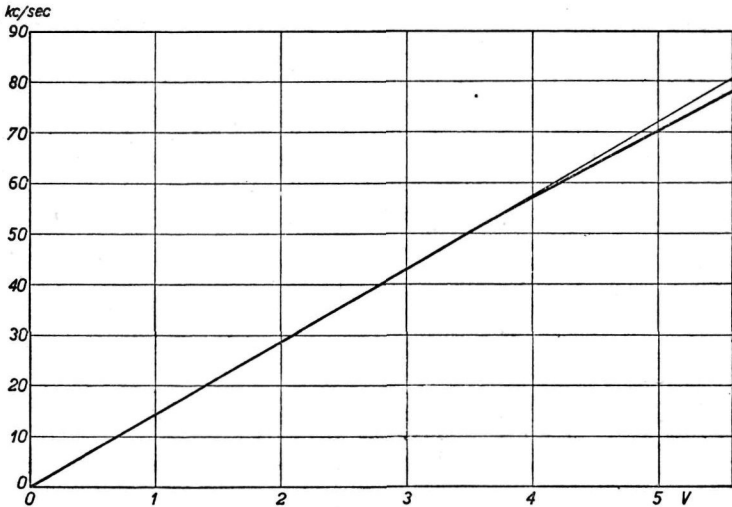


Fig. 22.

Schijnbare frequentiezwaai van den meetzender als functie van de ingangsspanning.

Uit de karakteristiek bepaalt men $a_1 = 14,35$, en uit bovenstaande relatie $a_3 = -9.10^{-4}a_1$ en $a_5 = -4.10^{-5}a_1$.

De derde en vijfde harmonischen worden in verhouding tot den grondtoon nu bepaald door:

$$\frac{1}{4} \frac{a_3}{a_1} V^2 + \frac{5}{16} \frac{a_5}{a_1} V^4.$$

$$\text{resp.: } \frac{a_5}{16 a_1} V^4.$$

Het resultaat is dus hier:

$$-23.10^{-5} V^2 - 12.10^{-6} V^4.$$

$$-23.10^{-7} V^4.$$

Bij $V = 5$ Volt wordt dus

$$\frac{A_3}{A_1} = 1,3 \text{ ‰}; \quad \frac{A_5}{A_1} = 1,5 \text{ ‰}.$$

Bij $V = 4$ Volt

$$\frac{A_3}{A_1} = 0,7\%; \quad \frac{A_5}{A_1} = 0,6\%$$

Het percentage 3e en 5e harmonische blijft dus tot bijna 4 Volt beneden 0,7 %.

De verschuiving van het geheele spectrum bedroeg bij 70 Kc/sec. frequentiezwaai 400 per./sec. Dit komt dus neer op ca. 0,6 % tweede harmonische. Voor onze metingen is deze nauwkeurigheid voldoende.

29. Constructie van den meetontvanger.

Het schema van den meetontvanger is weergegeven in fig. 23. In den anodekring van de versterkerbuis kan tusschen de klemmen *abcd* het te meten filter worden geschakeld. De oorspronkelijk alleen in frequentie gemoduleerde spanning is ten gevolge van den doorgang door het filter nu

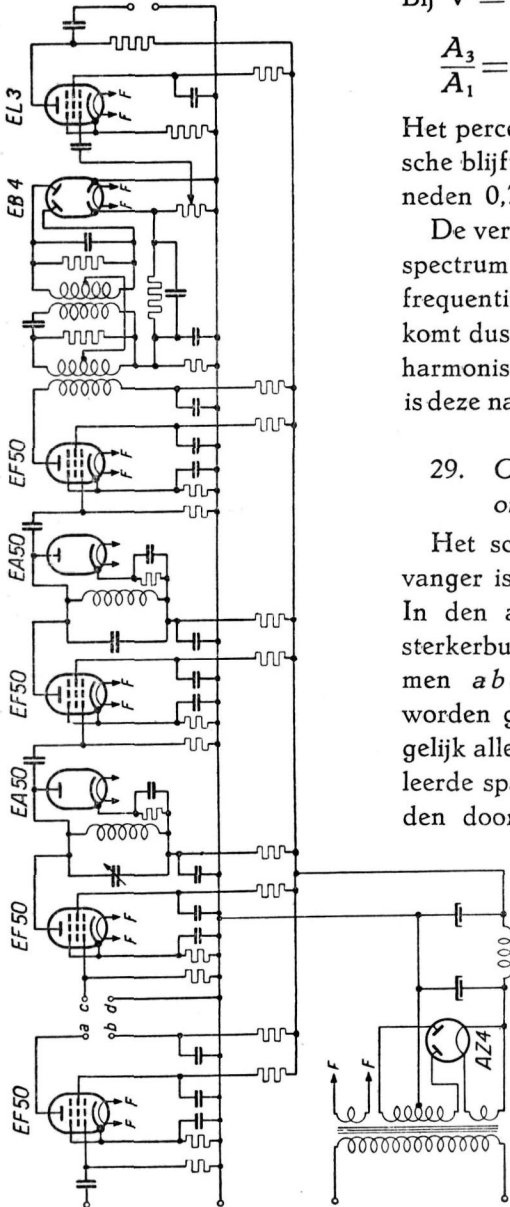


Fig. 23.
Schema van den
meetontvanger.

ook in amplitude gemoduleerd. Door middel van de gelijkrichters *EA 50* (en evt. ook doordat de buizen *EF 50* in roosterstroom lopen) wordt deze amplitudemodulatie weer verwijderd. De instelling van de diodes wordt, daar de *RC* tijd groot is ten opzichte van den duur van een laagfrequente periode, bepaald door de gemiddelde amplitude. Het is duidelijk, dat extra demping optreedt, wanneer de momenteele amplitude de gemiddelde amplitude overtreft, en minder demping, wanneer de momenteele amplitude kleiner is. Het gevolg is, dat amplitudevariaties worden tegengegaan. Op analoge wijze worden deze variaties tegengewerkt door roosterstroombegrenzing. Wanneer men de amplitudemodulatie voor en na den begrenzer meet, kan men den verbeteringsfactor bepalen. In ons geval was deze ca. 25.

De koppelingsconstante tusschen den primaire en den secundairen kring van den frequentiedetector was $k = 0,1875$, terwijl zonder extra dempingsweerstand de demping van den primairen kring $\delta_{10} = 0,0163$, en van den secundairen kring $\delta_{20} = 0,0119$ was. We kozen de combinatie $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta_1 = 0,6$ $k = 0,1050$, en $\delta_2 = k = 0,1875$, en brachten daartoe parallelle dempingsweerstand van 8460, resp. 3580 Ohm.

Wanneer we in plaats van een filter een weerstand in den anodekring van de eerste buis van den meetontvanger plaatsten, was de distorsie vanaf den laagfrequent toongenerator tot de Wave-Analyser, voor een frequentiezwaai van 60 Kc/sec., en laagfrequente tonen van 100 tot 8000 per./sec., steeds minder dan 0,6 % tweede harmonische. Bij een laagfrequente toonhoogte van 100 tot 5700 per./sec. was er minder dan 0,9 % derde harmonische. (Deze grenzen werden gekozen, omdat de General Radio Wave Analyser gebruikt kan worden tot ca. 17000 per./sec. Hiermede verkregen we voor ons doel voldoende gegevens.)

30. *De amplitudekarakteristiek van de gemeten filters.*

De filters werden gemeten in de schakeling van den meetontvanger, waarbij in plaats van den begrenzer in den anodekring van de tweede *EF 50* buis een weerstand werd geplaatst. De spanningen werden gemeten met behulp van een Philips Thermokoppel Voltmeter. De karakteristieken zijn weergegeven in fig. 24.

Hieruit werden de constanten voor de filters berekend, n.l.

Filter I: $\delta_1 = \delta_2 = 0,01557, \frac{k}{\gamma} = 4,006.$

Filter II: $\delta = 0,0141, (\text{enkele kring}).$

Filter III: $\delta_1 = \delta_2 = 0,0150, \frac{k}{\gamma} = 0,8.$

Filter IV: $\delta_1 = \delta_2 = 0,01474, \frac{k}{\gamma} = 1,925.$

Filter V: $\delta_1 = \delta_2 = 0,01433, \frac{k}{\gamma} = 5,5.$

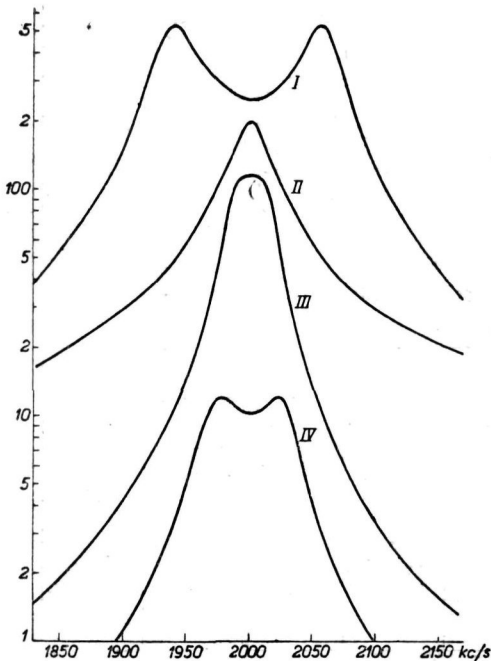


Fig. 24.
Amplitudekarakteristiek van de
gemeten filters.

31. Resultaten van de distortie- en intermodulatiemetingen.

De resultaten, welke de Wave-Analyser gaf, voor de distortiemetingen zijn weergegeven in een achttal grafieken, fig. 25 t/m 32. Men merkt, zoals verwacht werd, een stijging van het percentage harmonischen, ongeveer evenredig met de laagfrequente toonhoogte

op. Zoals uit de grafieken blijkt, werden zowel de laagfrequente toonhoogte, als de frequentiezwaai gevarieerd.

De resultaten voor een enkelen kring worden weergegeven in fig. 26 en fig. 30. We hebben hiervoor reeds een zestal gevallen exact berekend (zie tabel aan het eind van § 20). De experimenteetele

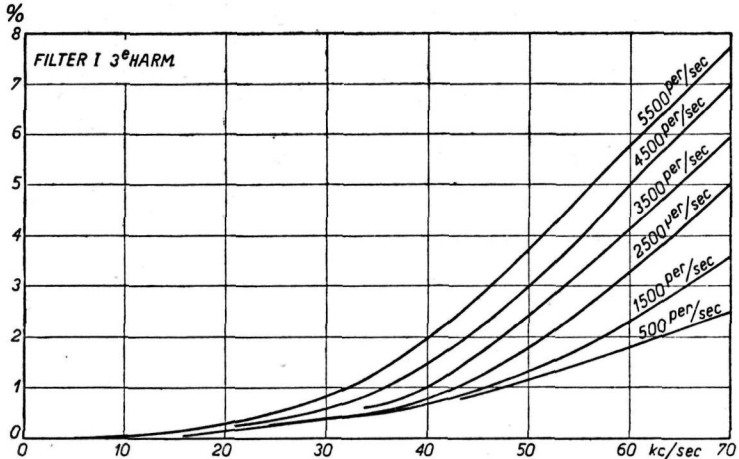


Fig. 25.

De derde harmonische bij filter I (experimenteel).

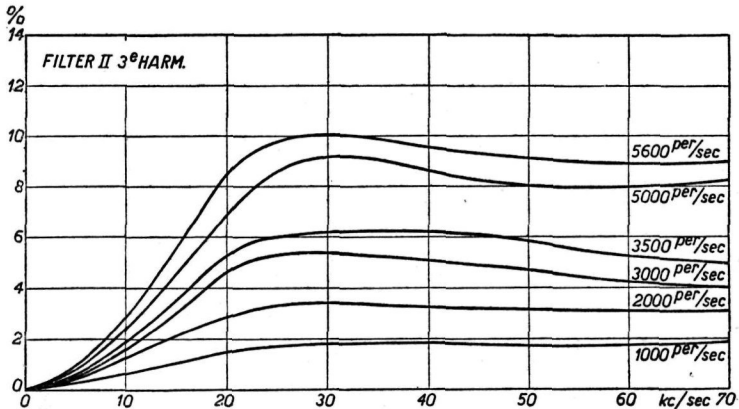


Fig. 26.

Derde harmonische bij filter II.

resultaten in deze gevallen, afgelezen uit de grafiek, zijn, voor de derde harmonische: 1,5 %, 4,0 %, 4,6 %, 8,7 %, 9,0 %, en 8,1 %,

terwijl de theorie gaf: 1,4 %, 4,0 %, 4,7 %, 8,7 %, 9,8 %, en 10,1 %. De corresponderende gevallen staan in dezelfde volgorde. Voor de vijfde harmonische is alleen het eerste uitgerekende geval direct vergelijkbaar. Hier meten we 0,33 %, terwijl de theorie 0,24 % gaf.

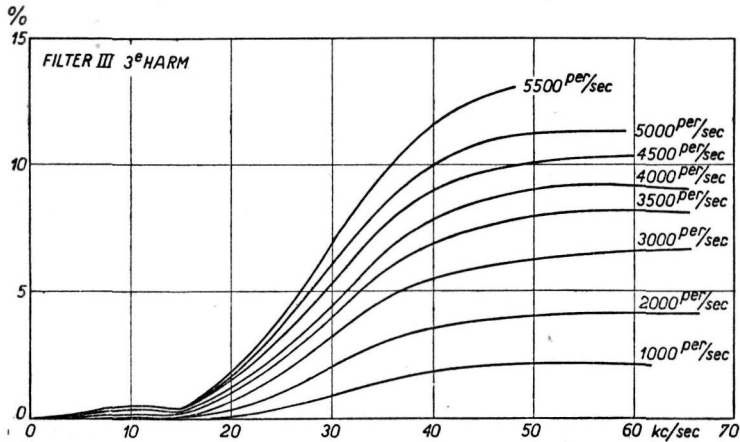


Fig. 27.

Derde harmonische bij filter III.

Voor het overige vergelijken we de gemeten vijfde harmonische met de quasi-stationaire benadering. Dit geeft het volgende resultaat:

Frequentiezwaai Kc/sec.	2000 per. sec.		3000 per. sec.	
	quasi-stat. %	exp. %	quasi-stat. %	exp. %
15	0,42	0,42	0,63	0,72
25	1,11	1,30	1,67	2,13
35	1,41	1,75	2,13	2,83
50	1,84	2,30	2,76	2,93
56,4	2,06	2,25	3,09	3,13

Ook hier is het experiment in overeenstemming met de theorie. Voor het filter I gelden de meetkrommen van fig. 25 en fig. 29. Bij gelijke damping geeft dit filter minder vervorming, maar dit gaat ten koste van de selectiviteit. We beperken ons tot vergelijking met de quasi-stat. benadering. De derde harmonische van 5000 per./sec. wordt hieronder gegeven:

Frequentiezwaaai Kc/sec.	Quasi-stat. %	Meting %
15,8	0,26	0,1
31,6	0,70	0,72
47,3	1,86	2,8
62,3	3,5	5,7

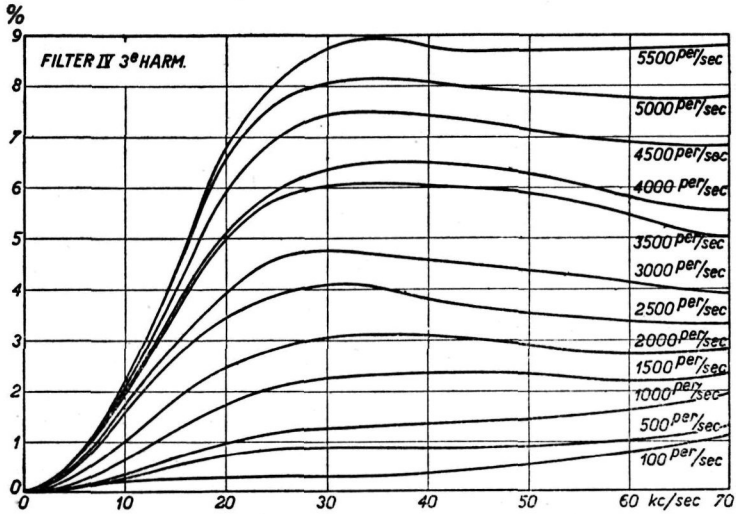


Fig. 28. Derde harmonische bij filter IV.

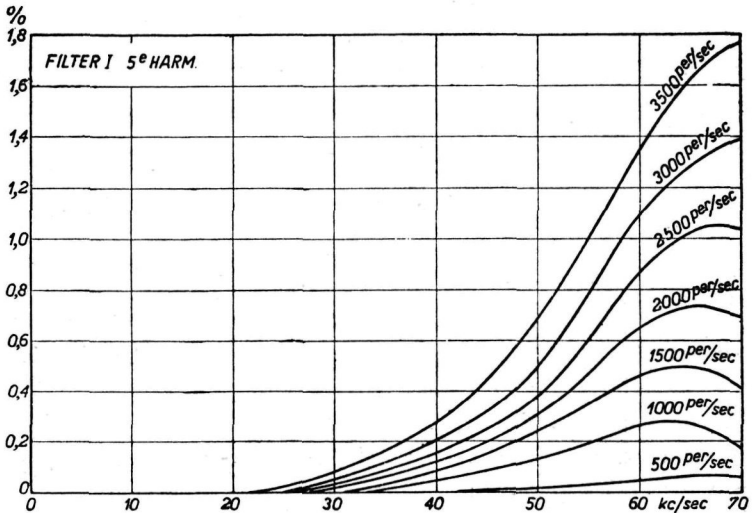


Fig. 29. Vijfde harmonische bij filter I.

De vijfde harmonische is veel minder. Het gemeten bedrag is echter hooger dan hetgeen volgens de quasi-stat. benadering te verwachten was.

Bij filter III geeft de quasi-stat. benadering een omkeerpunt bij 16,5 Kc/sec. voor de derde, en bij 35,4 Kc/sec. voor de vijfde harmonische (zie fig. 15 en 16). Dit komt in het experiment op bevredigende wijze tot uiting. Verder geeft de quasi-stat. benadering bij 5000 per./sec. laagfrequente modulatie, voor een frequentiezwaai van

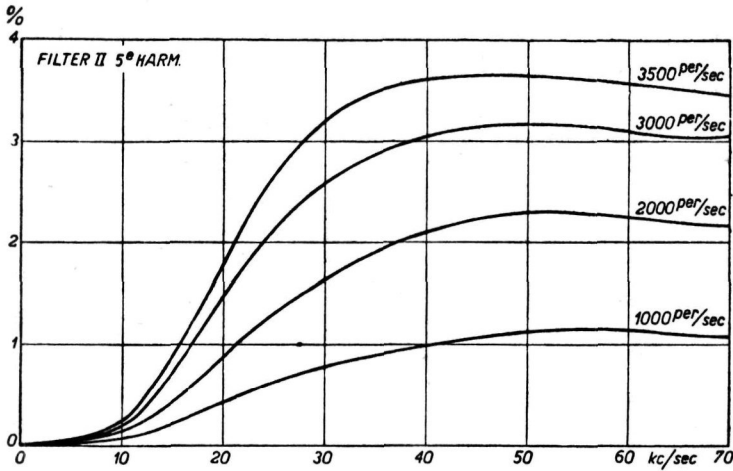


Fig. 30. Vijfde harmonische bij filter II.

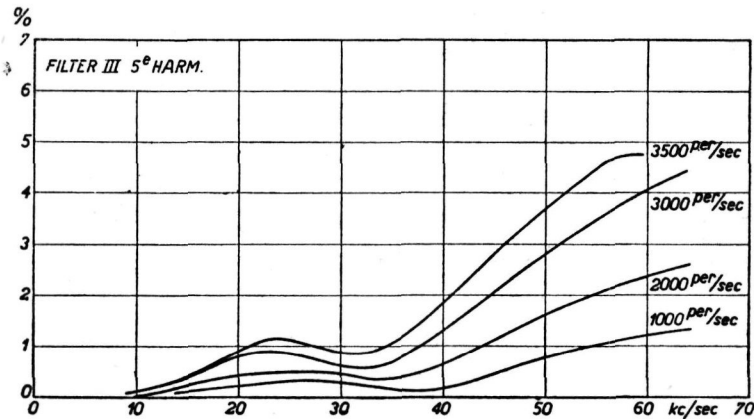


Fig. 31. Vijfde harmonische bij filter III.

30 Kc/sec. 6,8 %, en voor 40 Kc/sec. 10,5 % derde harmonische. De meting geeft 6 % resp. 9,9 %. Voor de vijfde harmonische zou bij modulatie met 3000 per./sec. een maximum moeten ontstaan van 1,06 % voor 23 Kc/sec. frequentiezwaaai. Bij het experiment is dit maximum 0,9 %.

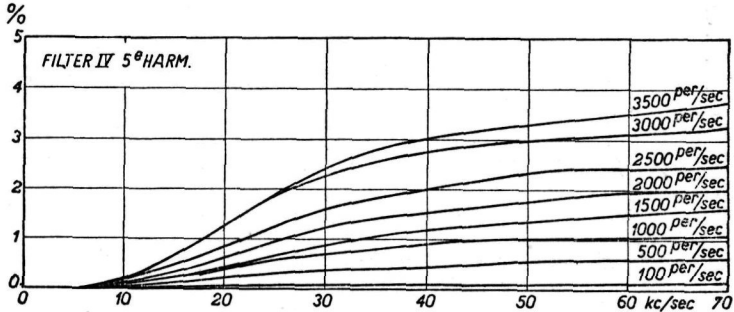


Fig. 32. Vijfde harmonische bij filter IV.

Bij filter IV vergelijken we de quasi-stat. benadering voor de derde harmonische van 3000 en 5000 per./sec. voor $k/\delta = 2$ met het experiment. (De k/δ bij het experiment is 1,9.)

Frequentiezwaaai Kc/sec.	3000 per./sec.		5000 per./sec.	
	Quasi-stat. %	Exp. %	Quasi-stat. %	Exp. %
10	0,44	1,2	0,7	1,8
20	1,85	3,9	3,1	6,5
30	3,95	4,6	6,6	8,1
40	4,45	4,75	7,4	8,1

De verwachting, dat het filter V slechts weinig vervorming zou geven, bleek gerechtvaardigd. Bij modulatie met 5000 per./sec. werd tot 45 Kc/sec. frequentiezwaaai minder dan 1 % derde harmonische, en bij modulatie met 3000 per./sec. tot 50 Kc/sec. minder dan 0,2 % vijfde harmonische gemeten.

Ten slotte zijn enkele intermodulatiemetingen gedaan. De meetzender werd hierbij met twee l.f. signalen van gelijke amplitude en frequenties van resp. 4150 en 5000 per./sec. gemoduleerd. Het resultaat, dat in fig. 33 is weergegeven, kan vergeleken worden met de

berekende krommen van fig. 19. Zoals daar reeds opgemerkt, mag men verwachten, dat de amplituden van de componenten $2p - q$,

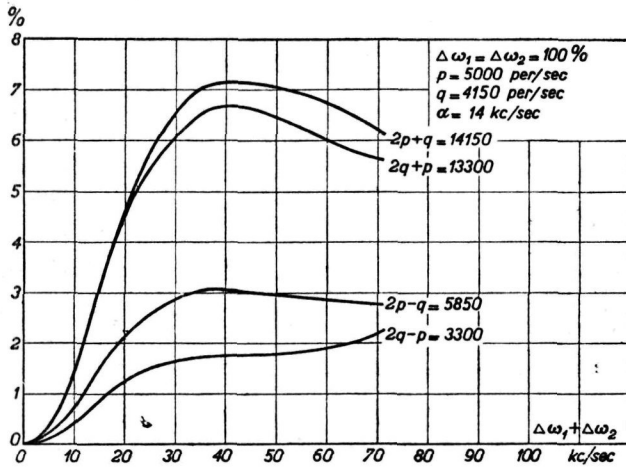


Fig. 33. Intermodulatie gemeten aan een enkelen kring.

$2q - p$, $2p + q$, en $2q + p$ evenredig zijn met hun resp. frequenties. Dit wordt door het experiment bevestigd. Voor den $2p + q$ term zouden we volgens fig. 19 verwachten bij een totalen frequentiezwaai van 14 Kc/sec. 1,9 % en voor 28 Kc/sec. 7,1 %. De resultaten der metingen zijn 2,7 resp. 6,3 %. Voor $2p - q$ verwacht men 0,8 % en 2,9 % bij denzelfden frequentiezwaai, en meet 1,4 % resp. 2,8 %.

Verder zijn nog de termen $3p - 2q$ en $3q - 2p$ gemeten. Zoals uit fig. 34 blijkt, komt ook hier de evenredigheid met de frequentie goed tot zijn recht. Het percentage is echter veel geringer.

Bij al deze experimenten is het percentage van den grondtoon als 100 % genomen. Bij de berekening daarentegen was 100 %: $\Delta\omega$, dus zonder de verandering, welke de grondtoon zelf ondergaat, mee te tellen.

Ook de vorm van de na detectie ontstane laagfrequente signalen op de kathodestraal-oscillograaf stemde goed overeen met de daarvoor berekende krommen.

Over het algemeen blijkt dus bij het experiment het theoretisch resultaat behoorlijk benaderd te worden. De onvolmaaktheid van begrenzer en detector heeft dus geen grooten invloed, en de toe-

passing van de theorie (o.a. wat betreft de quasi-stationnaire benadering) is gerechtvaardigd gebleken.

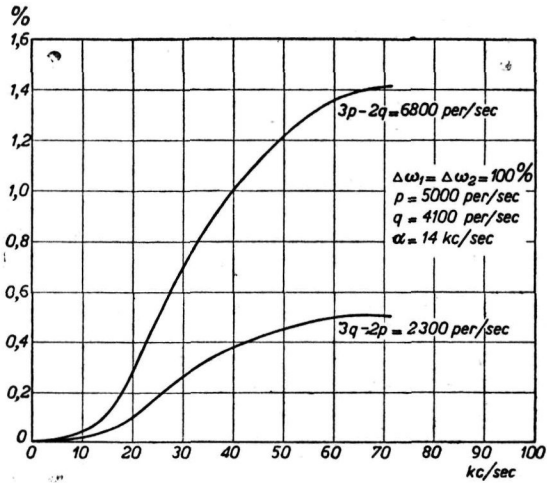


Fig. 34.

Nog eenige intermodulatie producten bij een enkelen kring.

LITERATUUROVERZICHT.

A. *Frequentiemodulatie.*

1. CARSON, J. R., Notes on theory of modulation. Proc. Inst. Rad. Eng. **10**, 57, 1922.
2. POL, B. VAN DER, Frequency modulation. Proc. Inst. Rad. Eng. **18**, 1104, 1930. Frequentiemodulatie. T. Ned. Rad. Genoot. **4**, 57, 1929.
3. RODER, H., Über Frequenzmodulation. Telef. Ztn. **53**, 48, 1929.
4. ECKERSLEY, T. L., Frequency modulation and distortion. Wir. Eng. **7**, 482, 1930.
5. EASTMAN, A. and E. SCOTT, Transmission lines as frequency modulators. Proc. Inst. Rad. Eng. **22**, 878, 1934.
6. TRAVIS, B., Automatic frequency control. Proc. Inst. Rad. Eng. **23**, 1125, 1935.
7. HAZELTINE, A., Inaugural address Pres. Inst. Rad. Eng. Proc. Inst. Rad. Eng. **24**, 140, 1936.
8. ARMSTRONG, E. H., A method of reducing disturbances in radio signalling by a method of frequency modulation. Proc. Inst. Rad. Eng. **24**, 489, 1936.
9. CROSBY, M. G., Frequency modulation propagation characteristics. Proc. Inst. Rad. Eng. **24**, 898, 1936.
10. CROSBY, M. G., Frequency modulation noise characteristics. Proc. Inst. Rad. Eng. **25**, 472, 1937.
11. CARSON, J. R. and T. C. FRY, Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency modulation. Bell Syst. Techn. Journ. **16**, 513, 1937.
12. FOSTER and SEELEY, Automatic tuning, simplified circuits and design practice. Proc. Inst. Rad. Eng. **25**, 289, 1937.
13. WOODYARD, J. R., Application of the autosynchronised oscillator to frequency demodulation. Proc. Inst. Rad. Eng. **25**, 612, 1937.
14. RODER, H., Effects of tuned circuits on a frequency modulated signal. Proc. Inst. Rad. Eng. **25**, 1617, 1937.
15. PLUMP, H., Störverminderung durch Frequenzmodulation. Jb. drahtl. Telegr. Teleph. **52**, 73, 1937.
16. FELDTKELLER, H. Spannungsgesteuerte Scheinwiderstände. T. F. T. **27**, 205, 1937.
17. RODER, H., Theory of the discriminator circuit for automatic frequency control. Proc. Inst. Rad. Eng. **26**, 590, 1938.
18. JAFFE, D. L., ARMSTRONG's frequency modulator. Proc. Inst. Rad. Eng. **26**, 475, 1938.
19. CROSBY, M. G., Carrier and side frequency relations with multitone frequency or phase modulation. R. C. A. Review. **3**, 140, 1938.

20. ZUHRT, E., Die Störverminderung bei Frequenzmodulation in Abhängigkeit von der Amplitudengrenzung. Veröff. Nachr. Techn. 9, 117, 1939.
21. THON, E., Der Verlustwinkel der Spannungsgesteuerten Kapazität. T. F. T. 28, 344, 1939.
22. WEIR, I. R., Field test of frequency and amplitude modulation with ultra high frequency waves. G. E. Review 42, 188, 1939.
23. TETELBAUM, On a certain method for increasing the effectiveness of wireless communication. Journ. of Physics U.S.S.R. 1, 325, 1939.
24. CROSBY, M. G., Communication by phase modulation. Proc. Inst. Rad. Eng. 27, 126, 1939.
25. FYLER, G. and J. WORCESTER, A noise-free radio receiver for the reception of frequency modulated waves. G. E. Review 43, 507, 1939.
26. HOWE, G. W. O., Amplitude, frequency and phasemodulation. Wir. Eng. 16, 547, 1939.
27. LAWSON and WEIGHTON. Discussion. Wir. Eng. 16, 596, 1939.
28. METSCHL, Wesen der Frequenz und Amplitudenmodelung. E.T.Z. 60, 1357, 1939.
29. CARSON, J. R., Frequency modulation: Theory of the feedback receiving circuit. Bell Syst. Techn. Journ. 18, 395, 1939.
30. CHAFFEE, J. G., The application of negative feedback to frequency modulation. Bell Syst. Techn. Journ. 18, 404, 1939.
31. CROSBY, M. G., A method for measuring frequency deviation. R. C. A. Review 4, 473, 1939.
32. CROSBY, M. G., The service range of frequency modulation. R. C. A. Review 4, 349, 1939.
33. BLACK, J. L. and H. J. SCOTT, Modulation limits in f. m. Electronics 13, 11, 1940.
34. ARMSTRONG, E. H., Evolution of frequency modulation. El. Eng. 32, 485, 1940.
35. ARMSTRONG, E. H., Use of frequency modulation for multiplex service. Sci. News Letter 37, 54, 1940.
36. SCOTT, H. J., Frequency vs. phase modulation. Communications 20, 10, 1940.
37. NOBLE, D. E., A state-wide f. m. police-network. Electronics 13, 11, 1940.
38. VELLAT, T., Der Empfang frequenzmodulierter Wellen. E.N.T. 18, 72, 1940.
39. GUY and MORRIS, N. B. S. frequency modulation field test. R. C. A. Review 5, 19, 1940.
40. HOWE, G. W. O., Amplitude, phase and frequency modulation. Wir. Eng. 17, 198, 1940.
41. WEYERS, TH. J., Recente ontwikkelingen betreffende frequentiemodulatie. T. Ned. Rad. Gen. 8, 315, 1940.
42. COCCI, G. et R. SARTORI, Funzione modulate. Alta Frequenza 7, 96, 1940.
43. KROGER, TREVOR and SMITH, A 500 megacycle radio relay distribution system for television. Radio Telev. —, 494, 1940.
44. WHEELER, H. A., Two signal cross modulation in a frequency modulated receiver. Proc. Inst. Rad. Eng. 28, 537, 1940.

45. HUDEC, E., Die Übertragung von Funkbildern durch Frequenzmodulung. E. N. T. **18**, 12, 1940.
46. HÖLZLER, E., Über die Wirkung von Verzerrungen bei der Übertragung frequenzmodulierter Schwingungen. E. N. T. **18**, 106, 1940.
47. VELLAT, T., Beitrag zur Theorie der Seitenbänder bei Frequenzmodulation. E. N. T. **18**, 147, 1940.
48. CROSBY, M. G., Bandwidth and readability in frequency modulation. R. C. A. Review. **5**, 363, 1940.
49. MONTGOMERY, B. E., An inductively coupled frequency modulator. Proc. Inst. Rad. Eng. **29**, 398, 1941.
50. SEELEY, S. W., Frequency modulation. Proc. Inst. Rad. Eng. **29**, 559, 1941.
51. LANDON, V. D., Impulse noise in f. m. reception. Electronics, **14**, 36, 1941.
52. CROSBY, M. G., Observations of frequency modulation propagation on 26 megacycles. Proc. Inst. Rad. Eng. **29**, 398, 1941.
53. ARTZT and FOSTER, Duplex transmission of frequency modulated sound and facsimile. R. C. A. Review **6**, 88, 1941.
54. LANDON, V. D., The distribution of amplitude with time in fluctuation noise. Proc. Inst. Rad. Eng. **29**, 537, 1941.
55. FELDTKELLER, R. und H. WILDE, Gleitfrequenzen in Schwingungskreisen. T. F. T. **30**, 347, 1941.
56. WUNDT, R. und C. HOFFMAN, Überlagerungserscheinungen beim Empfang frequenzmodulierter Wellen. Lorenz Ber. —, 63, 1941.
57. HENKLER, O. und R. OTTO, Modulation. Veröff. Nachr. Techn. **11**, 49, 1941.
58. CUDELL, E., Experimente mit Amplituden und Frequenzmodulation. Jb. drahtl. Telegr. **59**, 66, 1941.
59. KULP, R., Spektre und klirrfaktoren frequenz- und amplitudenmodulierter Wellen. E. N. T. **19**, 72, 1941.
60. GENSEL, R., Näherungsverfahren zur Berechnung von Einschwingvorgänge in Siebschaltungen. T. F. T. **31**, 299, 1941.
61. WESTON, J. D., Response of reactive networks to frequency modulated signals. Wir. Eng. **19**, 251, 1941.
62. MORRISON, J. F., A new broadcast transmitter circuit design for frequency modulation. Proc. Inst. Rad. Eng. **28**, 444, 1940.
63. WHEELER, H. A., Common channel interference between two frequency modulated signals. Proc. Inst. Rad. Eng. **30**, 76, 1942.
64. PIERACCI, R., A stabilised frequency modulation system. Proc. Inst. Rad. Eng. **30**, 76, 1942.
65. BELL, D. A., F. M. Communication systems, interference and propagation characteristics. Wir. Eng. **20**, 233, 1942.
66. WILDE, H., Verzerrung frequenzmodulierter Schwingungen am Schwingungskreis. T. F. T. **32**, 150, 1942.
67. STURLEY, K., The phase discriminator. Wir. Eng. **21**, 72, 1943.
68. HÖLZLER, GECKS und KAMPHAUSEN, Übertragung Amplituden- und frequenzmodulierter Schwingungen auf kurzen Wellen. E.T.Z. **65**, 133, 1943.

B. *Overige literatuur.*

69. POL, B. VAN DER and H. BREMMER, The diffraction of electromagnetic waves from an electrical point source round a finitely conducting sphere with applications to radiotelegraphy and the theory of the rainbow. *Phil. Mag.* **24**, 141, 825, 1937; *id.* **25**, 817, 1938.
70. FRÄNZ, K., Beiträge zur Berechnung des Verhältnisses von Signalspannung zu Rauschspannung am Ausgang von Empfängern. *E. N. T.* **17**, 215, 1939.
71. FRÄNZ, K., Die Überlagerung von Rauschspannungen über den linearen Gleichrichter. *Jb. drahtl. Telegr. Telef.* **57**, 140, 1940.
72. FRÄNZ, K. und T. VELLAT, Der Einfluss von Trägern auf das Rauschen hinter Amplitudenbegrenzern und linearen Gleichrichtern. *E. N. T.* **20**, 183, 1942.
73. LANDON, V. D., A study of the characteristics of noise. *Proc. Inst. Rad. Eng.* **24**, 1514, 1936.
74. BURRILL, R., Progress in the development of instruments for measuring radio noise. *Proc. Inst. Rad. Eng.* **29**, 433, 1941.
75. FLETCHER, H. and W. MUMSON, Loudness, its definition, measurement and calculation. *Bell Syst. Techn. Journ.* **12**, 377, 1933.
76. FLETCHER, H., Auditory patterns. *Review modern phys.* **12**, 47, 1937.
77. POL, B. VAN DER, Discontinuous phenomena in radio communication. *Jn. Inst. Electr. Eng.* **81**, 381, 1937.
78. WAYNICK, A. H., Experiments on the propagation of ultra short radio waves. *Proc. Inst. Rad. Eng.* **28**, 468, 1940.
79. ENGLUND, C., A. CRAWFORD and W. MUMFORD, Some results of a study of ultra short wave transmission phenomena. *Bell Syst. Techn. Journ.* **17**, 489, 1938.
80. WATSON, G. N., A treatise on the theory of BESSEL functions, 1st ed. Cambridge, 1922.

STELLINGEN

I.

Bij geruischfuncties, met eindige bandbreedte, is de waarschijnlijkheidsverdeling der oneven afgeleiden van de functie naar den tijd, onafhankelijk van de verdeling der even afgeleiden, en van de functie zelf.

II.

De verdeling van nulpunten en maxima van geruischfuncties, kan op eenvoudiger wijze gevonden worden, dan door RICE aangegeven.

RICE, Bell Syst. Techn. Journ. 24, 46 (1945).

III.

Wanneer van een determinant van n rijen en n kolommen gegeven is, dat er in elke rij hoogstens twee van nul verschillende elementen voorkomen, terwijl alle elementen in absolute waarde ≤ 1 zijn, is de absolute waarde van den determinant $\leq 2^{\frac{n}{2}}$.

IV.

Stelling: Zij $\Phi(y)$ voor $y > 1$ monotoon dalend en positief;

$$\int_0^{\infty} \Phi(y) dy \text{ convergent;}$$

$f(x)$ continu en periodiek met periode 2π ;

$$|f(x+t) - f(x)| \leq t^{\frac{1}{2}} \Phi\left(\log \frac{1}{t}\right) \begin{array}{l} \text{alle } t \left(0 < t < \frac{1}{e}\right) \\ \text{alle } x \end{array}$$

dan is de FOURIER-reeks voor $f(x)$ absoluut convergent.

Zie: NEDER, Math. Zeitschr. 49, 644 (1944).

V.

De oplossing, door SINGER gegeven, voor de functionaalvergelijking: $f^2(p) = f\left(\frac{p}{a}\right)$, is niet volledig.

SINGER, Proc. Inst. Rad. Eng., 33, 192 (1945).

VI.

De formule, die KREULEN en TER HORST gebruiken voor het gemiddelde dipoolmoment van een mengsel moleculen, is onjuist.

KREULEN en TER HORST, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 43, 68 (1940).

VII.

Het verdient overweging, ook bij de geestelijke scholing meer aandacht aan het spelelement te schenken.

VIII.

De door O'BRIEN toegepaste frequentiemodulator heeft niet de voordeelen, die hij ervan verwacht.

O'BRIEN, Proc. Inst. Rad. Eng., 32, 348 (1944).

IX.

De door BODE gegeven formules voor het verband tusschen phase en modulus van impedantiefuncties, en generalisaties hiervan, kunnen afgeleid worden uit een beschouwing van eenige eenvoudige integralen.

BODE, Bell Syst. Techn. Journ., 19, 421 (1940).
NIJENHUIS en STUMPERS, Physica, 8, 297 (1941).

X.

De afleiding van de noodzakelijke voorwaarden, waaraan een impedantiefunctie moet voldoen, kan op elegantere wijze gegeven worden, dan in BRUNE's bekende artikel.

BRUNE, Journ. of Math. and Phys., 10, 191 (1931).

XI.

De beschouwingen van KALLMANN en SPENCER over inschakelverschijnselen zijn incorrect.

KALLMANN en SPENCER, Proc. Inst. Rad. Eng., 28, 557 (1940).

XII.

De regel van LLEWELLYN over de stabiliteit van elektrische netwerken, kan niet beschouwd worden als een uitbreiding van het theorema van NYQUIST.

LLEWELLYN, Proc. Inst. Rad. Eng., 21, 1532 (1933).
ENG LUNG CHU, Proc. Inst. Rad. Eng., 32, 630 (1944).

XIII.

Conclusies uit de gelijkvormigheid der recursieformules voor $P_n(z)$ en $Q_n(z)$ (LEGENDRE polynomen), resp. $T_a^n(z)$ en $T_a^n(z)$, moeten met voorzichtigheid aanvaard worden.

STRATTON, Proc. Nat. Acad. Sc., 21, 317 (1935).

XIV.

Voor de ontwikkeling der wetenschap is de vrijheid van wetenschappelijke informatie van groot belang.

XV.

De theoretische afleiding, die WALD geeft, voor zijn schakelingen voor phasecorrectie, is niet geheel juist.

WALD, Elektr. Nachr. Techn., 19, 1 (1942).

XVI.

De door PETERSON en LLEWELLYN bij de bespreking van lineaire netwerken ter vervanging van „meng“-schakelingen, aangebrachte vereenvoudigingen, zijn ontoelaatbaar.

PETERSON en LLEWELLYN, Proc. Inst. Rad. Eng., 33, 458 (1945).

XVII.

De berekeningen van SILBERSTEIN, over het optreden van multipletten bij willekeurige verdeelingen van punten op een rechte lijn, of in een plat vlak, zijn onnauwkeurig.

SILBERSTEIN, Phil. Mag. 36, 319 (1945).