

I R 897-II

waterloopkundig laboratorium

berekening van stroming in een getijrivier

principe-onderzoek gewogen-residuen methode

AFGEHANDELD

verslag wiskundig onderzoek

R 897 deel II

maart 1975

16 JULI 1975

berekening van stroming in een getijrivier

principe-onderzoek gewogen-residuen methode

verslag wiskundig onderzoek

R 897 deel II

maart 1975

Summary

A feasibility study is described in this report concerning the use of the method of weighted residuals for the computation of two- or three-dimensional flow in estuaries and coastal waters, especially for the vertical flow profiles. The objective is to find out whether such a method can be more economical than a straightforward finite-difference method. Several variants of the method of weighted residuals are applied to a schematized differential equation, the analytical solution of which is known. It is found that no accurate solutions are obtained unless attention is given explicitly to the logarithmic behaviour of the velocity near the bottom. This can be done either by transforming the differential equations or by treating the bottom layer in a special way. If this is done, a reasonable solution can be obtained, using 5 to 8 terms in the series of interpolation functions. A simple and accurate method is a standard (Galerkin) finite-element method with linear interpolation, except for a logarithmic element near the bottom. Finite-difference methods are not investigated in this report, but the conclusions are likely to apply also to them, due to the equivalence with finite-element methods.

INHOUD

SUMMARY

INHOUD

NOTATIE

	blz.
<u>1 Inleiding en probleemstelling</u>	1
<u>2 Wiskundige formulering</u>	3
<u>3 Schematisering</u>	4
<u>4 Analytische oplossing</u>	6
<u>5 Transformatie</u>	7
<u>6 Gewogen-residuen methode</u>	8
<u>7 Keuze van de gewichts- en interpolatiefuncties</u>	9
<u>8 Resultaten</u>	12
<u>9 Conclusies</u>	14

LITERATUUR

APPENDIX A

- A1 Subdomain-methode, polynomen
- A2 Lagen-methode
- A3 Collocatie-methode, polynomen
- A4 Galerkin-methode, polynomen
- A5 Elementen-methode
- A6 Elementen-methode met singulariteit
- A7 Subdomain-methode, getransformeerde vergelijking
- A8 Collocatie-methode, getransformeerde vergelijking
- A9 Galerkin-methode, getransformeerde vergelijking

NOTATIE

$A(z)$	sneldheidsprofiel in vertikaal
$\bar{A}(z)$	benadering van sneldheidsprofiel
A_k	koëfficiënt in benadering
b_{jk}	koëfficiënt in vergelijkingenstelsel
c_{jk}	koëfficiënt in vergelijkingenstelsel
c	constante
$f(x)$	longitudinale variatie van waterdiepte
g	versnelling van de zwaartekracht
h	waterdiepte
h_0	waterdiepte in onverstoorde toestand
h_1	randvoorwaarde voor waterdiepte
H	getij-amplitude
L	lengte estuarium
p	hoogte waarboven viscositeit constant is (dimensieloos)
q	constante
r	hoogte waarop sneldheid nul wordt, relatief t.o.v. h
t	tijd
T	getijperiode
u	sneldheid
$W_j(z)$	gewichtsfunctie
x	horizontale koördinaat
$X(x)$	longitudinale variatie van sneldheid
z	vertikale koördinaat
z^*	getransformeerde vertikale koördinaat
z_j	intervalgrens of collocatiepunt
α	constante
δ	gemiddelde kwadratische afwijking tussen benaderde en analytische oplossing
ϵ	turbulente viscositeit
ϵ_0	maximale waarde van ϵ
$\phi_k(z)$	interpolatiefunctie
λ	constante, verband houdend met de drukgradient
σ	dimensieloze hoekfrequentie

1 Inleiding en probleemstelling

Bij de wiskundige bestudering van stroming in estuaria en kustwateren moet een drie-dimensionaal tijdsafhankelijk probleem worden behandeld. De differentiaalvergelijkingen voor de horizontale snelheidscomponenten hebben een parabolisch karakter. Het is mogelijk, deze vergelijkingen numeriek op te lossen met behulp van een differentiemethode. Voor het speciale geval dat de stroming slechts in één richting plaats vindt (twee-dimensionale stroming in een vertikaal vlak) wordt een overzicht van de mogelijkheden gegeven in een voorafgaand verslag [10]. Het is te verwachten dat een vrij fijne verdeling van de roosterpunten over de vertikaal nodig zal zijn om de stromingsverdeling weer te geven. Om de gedachten te bepalen kan een aantal van 20 rekenpunten per vertikaal genoemd worden. Daar voor een weergave van de stroombeelden in het horizontale vlak vaak enkele duizenden roosterpunten nodig zijn, leidt deze methode tot een zeer aanzienlijke rekeninspanning.

In de literatuur wordt een alternatief aangetroffen in de vorm van de gewogen-residuen methode (method of weighted residuals [1], ook andere namen worden gebruikt). De variatie van een grootte wordt hierbij niet weergegeven door middel van een aantal diskrete punten, zoals bij een differentiemethode, maar door middel van een aantal continue functies, die tezamen een benadering van de oplossing kunnen geven. Deze "interpolatiefuncties" voldoen in het algemeen niet aan de differentiaalvergelijking, wel vaak aan (sommige) randvoorwaarden. De benaderde oplossing, opgebouwd uit een aantal interpolatiefuncties, wordt nu zodanig geconstrueerd dat hij in een bepaalde zin aan de differentiaalvergelijkingen voldoet, bijv. in een aantal punten, gemiddeld over enkele deelintervallen of zodanig dat de gekwadraterde afwijkingen minimaal zijn. Het blijkt mogelijk te zijn, al deze varianten in een algemene vorm te gieten. De residuen, die ontstaan door de benaderde oplossing in de differentiaalvergelijkingen in te vullen, worden vermenigvuldigd met een gewichtsfunctie en het resultaat wordt nul gesteld ter bepaling van de coëfficiënten in de reeks van interpolatiefuncties. Door de interpolatiefuncties bepaalde eigenschappen te geven is het in sommige toepassingen mogelijk gebleken, een zeer redelijk resultaat te bereiken met een klein aantal ($n = 3 \text{ à } 5$) interpolatiefuncties.

Men zou nu kunnen overwegen, het drie-dimensionale stromingsprobleem voor wat de verticale richting betreft te behandelen met de gewogen residuen methode. Hierdoor wordt een differentiaalvergelijking in x , y , z en t vervangen door n differentiaalvergelijkingen in x , y en t , hetgeen aantrekkelijk kan zijn als n klein is. Het is de bedoeling van dit verslag, een indruk te krijgen van de mogelijk-

heden van deze aanpak.

Daartoe wordt een geschematiseerd probleem bekeken dat ook analytisch oplosbaar is, aangezien dit de enige afdoende mogelijkheid is om de nauwkeurigheid van de benaderde oplossingen te beoordelen. Dit betekent dat de resultaten, verkregen in dit verslag, niet rechtstreeks in de praktijk bruikbaar zijn. Als geconcludeerd wordt dat een gewogen-residuen methode perspectieven biedt zal hij op de volledige vergelijkingen moeten worden toegepast, waarbij ongetwijfeld een aantal complicaties zal optreden, met name in verband met niet-lineaire effecten en meer ingewikkelde randvoorwaarden.

Eenvoudigheidshalve wordt hier slechts het vertikaal twee-dimensionale, homogene, gelineariseerde geval onderzocht. De keuze van interpolatiefuncties biedt een grote vrijheid. Het is mogelijk, op heuristische basis functies te kiezen die ruwweg het gewenste verloop hebben. Dit is bijv. gedaan in [5]. Dergelijke functies kunnen eventueel afgeleid worden uit een vereenvoudigde vorm van de differentiaalvergelijkingen [8]. De heuristische methode heeft echter het nadeel dat er geen systematische verbetering kan worden aangebracht als de nauwkeurigheid onvoldoende blijkt te zijn. In andere toepassingen worden eigenfuncties van de differentiaalvergelijking als interpolatiefuncties gebruikt [2, 4, 6]. Dit is echter moeilijk uit te breiden tot wat meer algemene situaties. In dit verslag worden enkele andere mogelijkheden onderzocht.

In sommige publicaties [3, 7] wordt een "lagen-methode" toegepast. De 3-dimensionale vergelijkingen worden dan geïntegreerd over n lagen, waardoor n 2-dimensionale vergelijkingen ontstaan die in een horizontaal vlak moeten worden opgelost. De methodiek daarvan is reeds uitvoerig bestudeerd voor stormvloed- en getijproblemen. Het is duidelijk dat deze methodiek past in het kader van gewogen residuen. Als een van de varianten wordt daarom in dit verslag de lagen-methode bestudeerd.

Dit onderzoek werd uitgevoerd door dr.ir. C.B. Vreugdenhil.

2 Wiskundige formulering

Er wordt homogene stroming beschouwd in een estuarium met horizontale bodem en rechthoekige dwarsdoorsnede, dat aan één zijde is afgesloten (fig. 1).

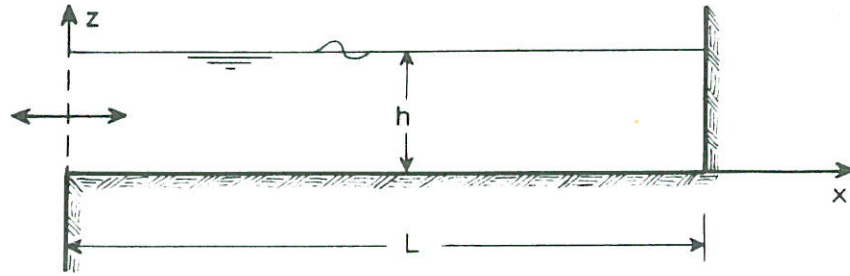


Fig. 1 Definities geschematiseerd estuarium.

De convectieve termen worden verwaarloosd in de vergelijkingen, die dan luiden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{rh}^h u dz = 0 \quad (2)$$

met de randvoorwaarden

$$x = L : u = 0 \quad (3)$$

$$x = 0 : h = h_1(t) \quad (4)$$

$$z = rh : u = 0 \quad (5)$$

$$z = h : \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

De kinematische randvoorwaarde aan het oppervlak is reeds in (2) verwerkt. De notatie is als volgt:

u snelheidscomponent in x-richting

t tijd

g versnelling van de zwaartkracht

h waterdiepte

x horizontale coördinaat

z verticale coördinaat

ε turbulente viscositeit

- r hoogte waarop de snelheid nul is, relatief tot de waterdiepte
 L lengte van het estuarium
 h_1 randvoorwaarde (vertikaal getij)

3 Schematisering

Teneinde het probleem analytisch oplosbaar te maken, worden de volgende transformaties ingevoerd

$$\begin{aligned}
 z' &= z/h(x,t) \\
 x' &= x/L \\
 \varepsilon' &= \varepsilon/\varepsilon_0 \\
 t' &= \varepsilon_0 t/h_0^2 \\
 h' &= (h-h_0)/H \\
 u' &= h_0^3 u/(HL\varepsilon_0)
 \end{aligned} \tag{7}$$

- waarin ε_0 maximale waarde van ε
 h_0 onverstoorde waterdiepte
 H getijamplitude op $x = 0$

De vergelijkingen (1)...(6) gaan dan over in de volgende

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} - \frac{H}{h_0} z' \left(1 + \frac{H}{h_0} h'\right)^{-1} \frac{\partial h'}{\partial t'} \frac{\partial u'}{\partial z'} + c \frac{\partial h'}{\partial x'} - \left(1 + \frac{H}{h_0} h'\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(1 + \frac{H}{h_0} h'\right)^{-1} \varepsilon' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right\} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(1 + \frac{H}{h_0} h'\right) \int_r^1 u' dz' \right\} = 0 \tag{9}$$

$$x' = 1 : u' = 0 \tag{10}$$

$$x' = 0 : h' = (h_1(t) - h_0)/H \tag{11}$$

$$z' = r : u' = 0 \tag{12}$$

$$z' = 1 : \frac{\partial u'}{\partial z'} = 0 \tag{13}$$

waarin $c = gh_0^5 (\varepsilon_0^2 L)^{-1}$

De veronderstelling wordt nu gemaakt dat H/h_0 zo klein is dat alle termen in de vergelijkingen (8) en (9), waarin deze factor voorkomt, verwaarloosd mogen worden. Met weglating van de accenten wordt het geschematiseerde modelprobleem dan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^1 u dz = 0 \quad (15)$$

$$x = 1 : u = 0 \quad (16)$$

$$x = 0 : h = (h_1(t) - h_0)/H \quad (17)$$

$$z = r : u = 0 \quad (18)$$

$$z = 1 : \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

Hierbij wordt een analytische oplossing gezocht van de vorm

$$h = f(x) e^{i\sigma t} \quad (20)$$

$$u = X(x)A(z) e^{i\sigma t} \quad (21)$$

waarin $\sigma = 2 \pi h_0^2 (\epsilon_0 T)^{-1}$ de dimensieloze hoekfrequentie is en T de getijperiode. Door invullen in de vergelijkingen blijkt dit alleen te kunnen als

$$f'(x)/X(x) = b_1 \quad (22)$$

$$X'(x)/f(x) = b_2 \quad (23)$$

met constante b_1 en b_2 . Aangezien $X(x)$ op een constante factor na bepaald is kan één van de beide constanten willekeurig gekozen worden. Stel $b_2 = -i\sigma$, dan volgt

$$i\sigma A - \frac{d}{dz} \left(\epsilon \frac{dA}{dz} \right) = \lambda \quad (24)$$

$$\int_r^1 A dz = 1 \quad (25)$$

$$z = r : A = 0 \quad (26)$$

$$z = 1 : dA/dz = 0 \quad (27)$$

waarin $\lambda = -cb_1$.

De vergelijkingen (24)...(27) bepalen $A(z)$ alsmede de constante λ . Desgewenst kunnen $f(x)$ en $X(x)$ daarna worden opgelost uit (22) en (23) met de randvoorwaarden

$$x = 1 : X(x) = 0 \quad (28)$$

$$x = 0 : f(x) = 1 \quad (29)$$

De vergelijkingen (24)...(27) worden hierna als het modelprobleem beschouwd.

4 Analytische oplossing

Een essentieel kenmerk van het hier beschouwde type van snelheidsprofielen is de logarithmische singulariteit in de buurt van de bodem. Deze treedt niet op als de turbulente viscositeit ϵ over de gehele diepte constant wordt genomen, hetgeen dus niet realistisch is. Als één van de eenvoudigste vormen, die wel leiden tot de singulariteit, is gebruikt (in dimensieloze vorm):

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & p \leq z \leq 1 \\ z/p & r \leq z < p \end{cases} \quad (30)$$

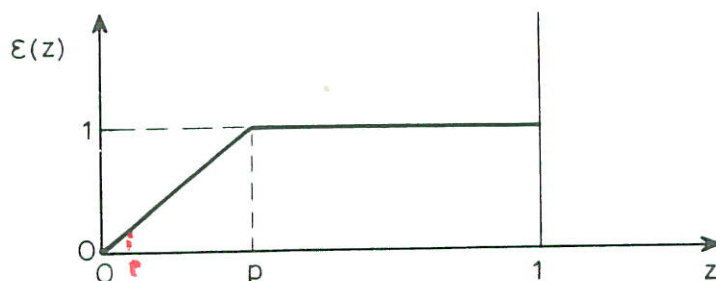


Fig. 2 Geschematiseerde turbulente viscositeit

In het gebied $p \leq z \leq 1$ heeft de differentiaal vergelijking (24) de volgende oplossing die voldoet aan (27):

$$A(z) = -i \frac{\lambda}{\sigma} + a_1 \left[\exp \left\{ \sqrt{\frac{1}{2} \sigma(1+i)}(z-1) \right\} + \exp \left\{ - \sqrt{\frac{1}{2} \sigma(1+i)}(z-1) \right\} \right] \quad p \leq z \leq 1 \quad (31)$$

In het onderste deel van de vertikaal luidt de differentiaalvergelijking voor $A' = A + i\lambda/\sigma$

$$- \frac{z}{p} \frac{d^2 A'}{dz^2} - \frac{1}{p} \frac{dA'}{dz} + i\sigma A' = 0$$

Door de transformatie $\xi = \sqrt{2\sigma p z} (i-1)$ gaat dit over in

$$\frac{d^2 A'}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dA'}{d\xi} + A' = 0$$

met de oplossing

$$A' = a_2 J_0(\xi) + a_3 Y_0(\xi)$$

waarin J_0 en Y_0 Besselfuncties van de eerste en tweede soort voorstellen. Dus

$$A(z) = -i \frac{\lambda}{\sigma} + a_2 J_0(\sqrt{2\sigma pz} (i-1)) + a_3 Y_0(\sqrt{2\sigma pz} (i-1)) \quad r \leq z < p \quad (32)$$

Door substitutie van (31) en (32) in (25) en (26) en continuïteitsvoorwaarden voor A en zijn eerste afgeleide op $z = p$ ontstaan vier lineaire vergelijkingen voor de vier onbekende constanten λ , a_1 , a_2 en a_3 . De oplossing wordt hier niet expliciet gegeven.

In fig. 3 zijn enkele analytische oplossingen aangegeven voor verschillende waarden van σ en r . In dit verslag is verder het geval bekeken met

$$r = 0.3 \times 10^{-3}$$

$$p = 0.2$$

$$\sigma = 0.32$$

overeenkomend met $h_0 = 10$ m, $\epsilon_0 = 0.0435$ m²/s, $T = 12.5$ h en een bodemruwheid van 0.1 m (= $33r_{h_0}$). De oplossing voor grotere waarden van σ tot $\sigma = 1.6$ blijkt nauwelijks van die in fig. 3 af te wijken, hetgeen erop wijst dat de traagheidsterm $i\sigma A$ relatief onbelangrijk is voor dit soort stromingen. Verandering van de bodemruwheid leidt tot duidelijk verschillende snelheidsprofielen als aangegeven in fig. 3.

5 Transformatie

Voor kleine waarden van z gedraagt Y_0 in (32) zich als $\ln z$. Deze singulariteit kan worden weggenomen door de coördinaten-transformatie

$$z^* = 1 - \ln z / \ln r$$

$$z = r^{1-z^*}$$

(33)

De differentiaalvergelijking wordt dan:

$$-\frac{d}{dz^*} \left(\epsilon^* \frac{dA}{dz^*} \right) + i \alpha r^{1-z^*} A = \lambda p r^{1-z^*} \ln^2 r \quad (34)$$

$$\text{met } \epsilon^* = 1 \quad 0 \leq z^* < q$$

$$\epsilon^* = p r^{z^*-1} \quad q \leq z^* \leq 1$$

$$\alpha = \sigma p \ln^2 r$$

$$q = 1 - \ln p / \ln r$$

De randvoorwaarden worden

$$z^* = 0 \quad A = 0 \quad (35)$$

$$z^* = 1 \quad dA/dz^* = 0 \quad (36)$$

en de continuïteitsvoorwaarde (25):

$$-\ln r \int_0^1 r^{1-z^*} A dz^* = 1 \quad (37)$$

De oplossing van dit stelsel is eveneens weergegeven in fig. 3.

6 Gewogen-residuen methode

De gewogen-residuen methode wordt toegepast op de vergelijkingen (24)...(27) resp. (34)...(37). Het is eenvoudig aan te tonen dat hetzelfde resultaat wordt bereikt als de methode wordt toegepast op de partiële differentiaalvergelijking (14) met voorwaarden (15)...(19), voor wat betreft de verticale coördinaat z . De constante λ zal echter verschillen van die bij de analytische oplossing; hij speelt de rol van een onbekende.

De onbekende snelheidsverdeling in de vertikaal $A(z)$ wordt benaderd door middel van een aantal interpolatiefuncties $\phi_k(z)$, die voldoen aan de randvoorwaarden (26) en (27). De benaderde oplossing is

$$\bar{A}(z) = \sum_{k=1}^n A_k \phi_k(z) \quad (38)$$

De vergelijking (24) wordt achtereenvolgens vermenigvuldigd met een stelsel ge-

wichtsfunkties $W_j(z)$ en geïntegreerd over het gebied $r \leq z \leq 1$. Er ontstaat dan een stelsel algebraïsche vergelijkingen voor de koëfficiënten A_k :

$$\sum_{k=1}^n (i \sigma b_{jk} - c_{jk}) A_k = c_{j,n+1} \lambda \quad (j = 1, \dots, n) \quad (39)$$

$$\text{waarin } b_{jk} = \int_r^1 W_j(z) \phi_k(z) dz \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, n \end{array} \quad (40)$$

$$c_{jk} = \int_r^1 W_j(z) \frac{d}{dz} \left\{ \epsilon(z) \frac{d\phi_k}{dz} \right\} dz \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, n \end{array} \quad (41)$$

$$c_{j,n+1} = \int_r^1 W_j(z) dz \quad j = 1, \dots, n \quad (42)$$

Uit de continuïteitsvoorwaarde volgt

$$- \sum_{k=1}^n c_{n+1,k} A_k = 1 \quad (43)$$

$$\text{met } c_{n+1,k} = - \int_r^1 \phi_k(z) dz \quad k = 1, \dots, n \quad (44)$$

Er ontstaat dus een stelsel van $n+1$ lineaire vergelijkingen in de $n+1$ onbekenden A_k ($k = 1, \dots, n$) en λ . Zijn deze berekend dan volgt uit (38) een benadering van de oplossing, die vergeleken kan worden met de analytische oplossing. Verwacht mag worden, dat de benadering beter wordt naarmate n toeneemt.

7 Keuze van gewichts- en interpolatiefunkties

Voor de keuze van de interpolatiefunkties bestaan vele mogelijkheden

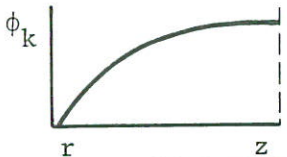
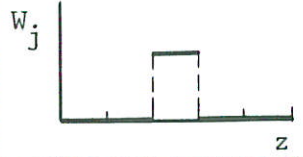
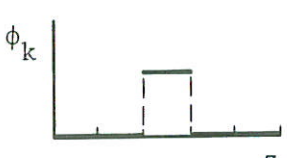
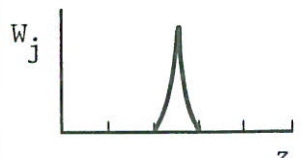
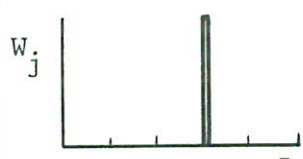
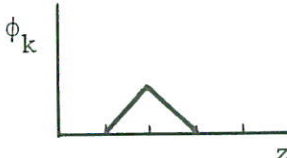
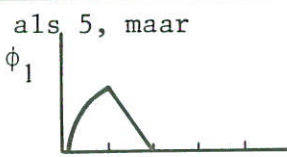
- a polynomen
- b termen van een Fourierreeks
- c heuristische funkties van de gewenste vorm
- d eigenfunkties van de differentiaaloperator
- e driehoeksfunkties, leidend tot een eindige-elementen methode
- f constanten per laag, leidend tot een lagen-methode

In dit verslag worden de mogelijkheden a, e en f onderzocht. Mogelijkheid b is waarschijnlijk vergelijkbaar met a. Zoals reeds in de inleiding uiteengezet, is het bij c niet mogelijk, een systematische verbetering van de oplossing te bereiken. Mogelijkheid d is voor dit vereenvoudigde geval al vrij moeilijk te hanteren. Het is te verwachten dat de bepaling van eigenfuncties in het algemene geval op grote moeilijkheden zal stuiten. Er moet nog opgemerkt worden dat de interpolatiefuncties een volledig stelsel moeten vormen teneinde de approximatie van iedere gewenste oplossing theoretisch mogelijk te maken. Dit is het geval voor de mogelijkheden a en e, waarschijnlijk niet voor f.

Onafhankelijk worden de gewichtsfuncties gekozen. Dit leidt tot een aantal verschillende methodes.

- i Subdomain methode: gewichtsfuncties per laag constant en daarbuiten nul. Hierbij wordt per interval gemiddeld aan de differentiaalvergelijking voldaan
- ii Collocatiemethode: gewichtsfuncties zijn (Dirac) deltafuncties in een aantal (collocatie-) punten. Aan de differentiaalvergelijkingen wordt in de collocatiepunten (maar ook alleen daar) exact voldaan
- iii Galerkin methode: hierbij zijn de gewichtsfuncties identiek met de interpolatiefuncties
- iv Kleinste-~~k~~wadraten methode: hierbij worden de residuen geminimaliseerd op basis van een kleinste-dwadraten criterium. Voor de algemene vergelijkingen die de stroming in een estuarium beschrijven zou dit tot uitermate gecompliceerde differentiaalvergelijkingen aanleiding geven. Deze methode is hier dus niet verder beschouwd
- v Lagen-methode: hoewel meestal niet als zodanig voorgesteld, kan de lagen-methode door een speciale keus van de gewichtsfuncties als een gewogen-residuen methode beschreven worden

In alle gevallen wordt gemakshalve aangenomen dat intervalgrenzen of collocatiepunten gelijkmatig over het interval zijn verdeeld. De methode biedt echter de vrijheid om hiervan af te wijken, bijvoorbeeld om in de buurt van de bodem een nauwkeuriger weergave mogelijk te maken. Om het effect van een niet-uniforme verdeling na te gaan wordt ook het getransformeerde probleem onderzocht. Een alternatief is, de logaritmische singulariteit in de interpolatiefuncties te verwerken. Dit is bij de elementen methode vrij eenvoudig te realiseren. Een uitwerking van alle formules wordt gegeven in appendix A. De volgende tabel geeft een overzicht van de onderzochte mogelijkheden.

no.	naam	vergelijkingen getransformeerd		interpolatie- functies $\phi_k(z)$	gewichtsfuncties $W_j(z)$
		niet	wel		
1	subdomain methode, polynomen	x			
2	lagen-methode	x			
3	collocatie methode, polynomen	x		als 1	
4	Galerkin- methode, polynomen	x		als 1	gelijk aan $\phi_j(z)$
5	elementen- methode (Galerkin)	x			gelijk aan $\phi_j(z)$
6	elementen-methode met singulariteit	x		als 5, maar 	als 5 (ook j=1)
7	subdomain methode, polynomen		x	als 1	als 1
8	collocatie-methode, polynomen		x	als 1	als 2
9	Galerkin-methode, polynomen		x	als 1	gelijk aan $\phi_j(z)$

Tabel 1 Overzicht onderzochte methodes

8 Resultaten

De in tabel 1 aangegeven methodes zijn uitgewerkt volgens appendix A en toegepast op het modelprobleem (24)...(27) voor een aantal waarden van orde van benadering n , weergegeven door het aantal interpolatiefuncties. De afwijking tussen de benaderde oplossing $\bar{A}(z)$ volgens (38) en de analytische oplossing volgens (31) en (32) is gekarakteriseerd door de grootte

$$\delta = \left[\sum_{k=0}^{50} \{ \bar{A}(z_k) - A(z_k) \}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

waarin $z_0 = r$

$$z_k = k/50, k=1, \dots, 50$$

In fig. 4 is δ voor de onderzochte gevallen weergegeven als functie van n . De benaderde oplossingen $\bar{A}(z)$ zijn voor enkele waarden van n vergeleken met de analytische oplossing in de figuren 5...13.

a Subdomain-methode, polynomen. Deze methode blijkt niet te convergeren. Uit figuur 5 wordt duidelijk dat de singulariteit bij de bodem steeds beter wordt benaderd bij toenemende n , maar dit gaat ten koste van de benadering in de rest van het interval. De getransformeerde vergelijking leidt tot veel betere resultaten (fig. 11), zelfs voor een bescheiden waarde van n , maar ook hier lijkt voor grotere n geen convergentie op te treden. Het wisselende gedrag van δ als functie van n voor deze methode kan worden veroorzaakt door een in toenemende mate slechte conditie van het lineaire stelsel vergelijkingen (39). Bij kleine waarden van n speelt dit nog geen rol.

b Collocatie-methode, polynomen. De indruk wordt verkregen dat deze methode wel convergeert, maar zeer langzaam. De knikken in de lijn voor δ als functie van n worden verklaard om het feit dat voor $n < 5$ geen enkel collocatiepunt en voor $5 < n < 10$ slechts één collocatiepunt in het gebied van variabele viscositeit ligt (fig. 2). De benadering, ook bij grotere waarden van n is niet erg nauwkeurig (fig. 7). De getransformeerde versie (fig. 12) convergeert aanvankelijk snel, maar lijkt te divergeren voor grotere waarden van n . Dit heeft waarschijnlijk dezelfde oorzaak als bij de subdomain methode. Bij de overige onderzochte methodes blijkt het stelsel vergelijkingen beter geconditioneerd te zijn.

c Galerkin-methode, polynomen. In het niet-getransformeerde geval convergeert deze methode wel, maar erg langzaam. De benaderingen voor lage waarden van n hebben een grillig verloop (fig. 8). In de getransformeerde vorm convergeert deze methode echter uiterst snel en worden voor kleine waarden van n al zeer behoorlijke snelheidsprofielen gevonden (fig. 13). Vanaf $n = 8$ lijkt volgens fig. 4 geen verdere verbetering op te treden. Dit is waarschijnlijk echter een gevolg van de beperkte nauwkeurigheid waarmee de analytische oplossing is berekend.

d Elementen-methode. Uit andere bron (bijv. [9]) is reeds bekend dat de elementen-methode met lineaire interpolatiefuncties overeenkomt met een differentiemethode. Er mag dan ook niet worden verwacht dat de weergave voor lage n nauwkeurig zal zijn. Dit blijkt uit fig. 9 inderdaad het geval te zijn, vooral in de buurt van de bodem. Afgezien van de flexibiliteit in de keuze van de rekenpunten biedt deze methode dan ook geen voordelen boven een differentiemethode. Het wordt anders, wanneer het logaritmisch karakter in de buurt van de bodem expliciet wordt meegenomen, hetgeen bij deze methode erg eenvoudig te realiseren is (fig. 10). Deze methode is, vooral voor kleine n , beter dan alle andere die hier onderzocht zijn (fig. 4).

e Lagen-methode. De afwijking δ vertoont volgens fig. 4 een vrij ongunstig verloop voor de lagen-methode. Dit is te wijten aan de vorm van de interpolatiefuncties. Uit fig. 6 is echter te zien dat de benaderde funktiewaarden in de middelpunten van de intervallen goed bij de analytische oplossing aansluiten, zelfs voor betrekkelijk lage waarden van n . Dit blijkt echter alleen mogelijk te zijn als het logaritmisch gedrag bij de bodem op de juiste wijze in de vergelijkingen wordt verwerkt. Als daarentegen de snelheidsgradient bij de bodem bijvoorbeeld door een eenvoudige differentie wordt weergegeven, ontstaan snelheidsprofielen die voor alle waarden van n zo goed als uniform zijn. Deze zijn hier niet geïllustreerd.

Als algemene conclusie kan uit het voorgaande worden afgeleid, dat een goede weergave van de snelheidsverdeling voor beperkte waarden van n slechts mogelijk is door expliciet rekening te houden met het logaritmisch karakter in de buurt van de bodem. Het maakt dan weinig verschil of dit wordt gedaan door transformatie van de vergelijkingen of door een speciale behandeling van het onderste interval. Het is te verwachten dat ook een differentiemethode met een beperkt aantal rekenpunten goede resultaten kan geven als aan deze voorwaarde is voldaan, aangezien enkele van de onderzochte methodes gelijkwaardig zijn aan een differentiemethode.

Tenslotte wordt opgemerkt dat aan de theoretische eigenschappen van de methodes betreffende convergentie, nauwkeurigheid en stabiliteit in dit verslag geen aandacht wordt besteed. Uit de literatuur blijkt dat hierover nog slechts weinig bekend is.

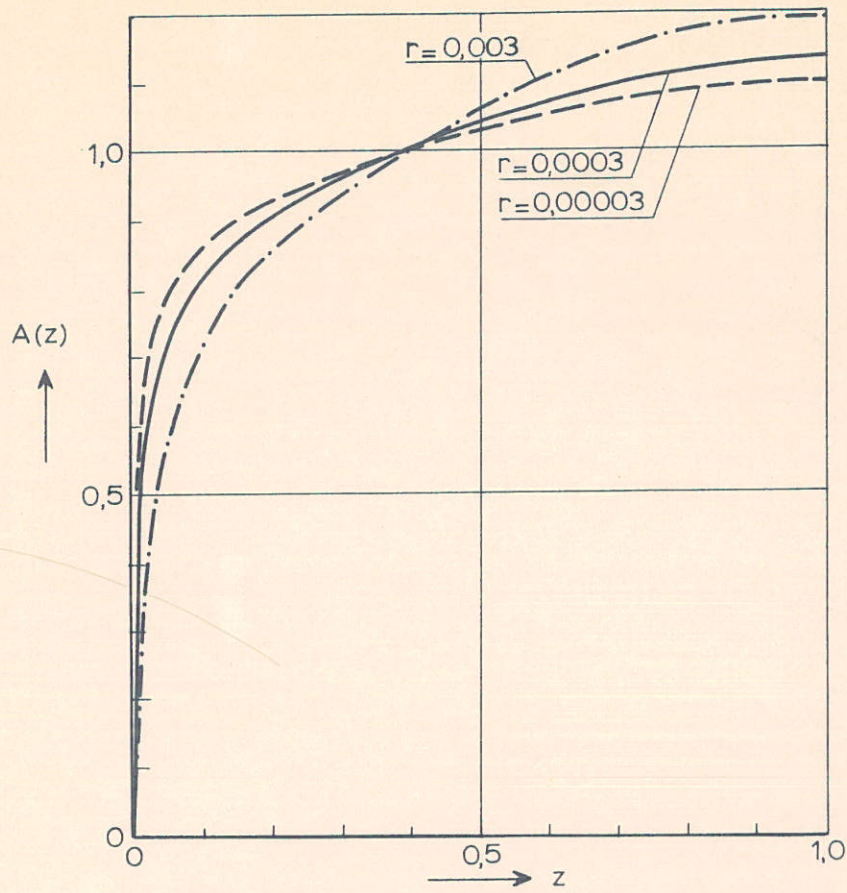
9 Conclusies

Enkele conclusies uit het voorafgaande kunnen als volgt samengevat worden.

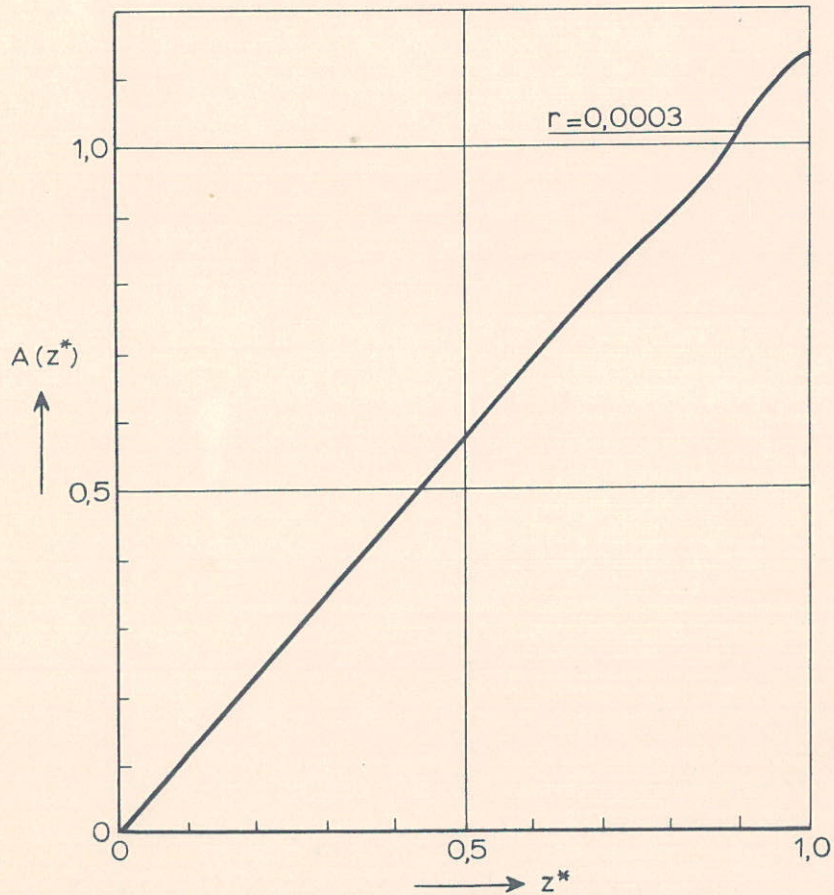
- a In dit verslag is alleen homogene stroming beschouwd. In het geval van dichtheidsstromen wordt de methode belangrijk ingewikkelder, hoewel de eigenschappen waarschijnlijk vergelijkbaar blijven.
- b Het gebruik van de gewogen-residuen methode met een lage orde van benadering biedt beperkte mogelijkheden. De vorm van de vergelijkingen is in het algemeen ingewikkelder dan bij differentiemethodes waardoor de flexibiliteit beperkt wordt.
- c Nauwkeurige resultaten worden behaald met de Galerkin-methode, toegepast op de getransformeerde vergelijkingen en met de elementen-methode mits daarin expliciet met de logaritmische singulariteit rekening wordt gehouden.
- d Het minimale aantal interpolatiefuncties zal in de orde van 5 à 10 liggen, zeker als rekening gehouden moet worden met wind-schuifspanning aan het wateroppervlak en met dichtheidsstromen.
- e Met welke methode dan ook kunnen slechts goede resultaten worden bereikt als rekening wordt gehouden met de logaritmische singulariteit, hetzij door de vergelijkingen te transformeren, hetzij door de onderste laag op een speciale manier te behandelen.
- f Hoewel differentiemethodes hierin niet onderzocht zijn mag worden verwacht dat conclusies d en e ook hierop van toepassing zijn, daar zowel de elementenmethode als de lagen-methode min of meer gelijkwaardig zijn met een differentiemethode. Aangezien met differentiemethodes meer ervaring is opgedaan is dus het gebruik daarvan aan te bevelen.

LITERATUUR

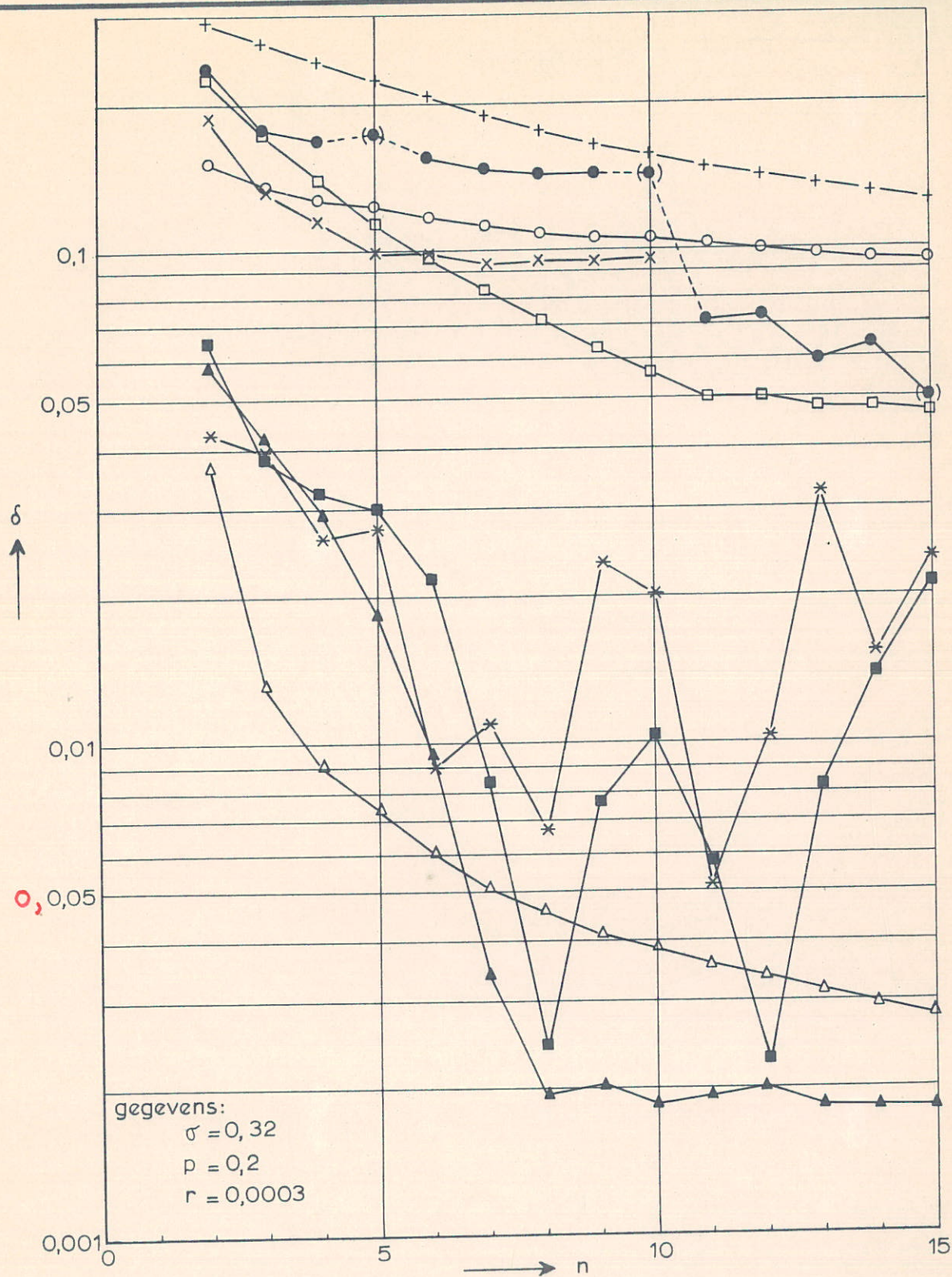
- 1 Finlayson, B.A.,
The method of weighted residuals and variational principles,
Acad. Press, New York, 1972
- 2 Heaps, N.S.,
On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations
for tides and storm surges,
3rd Liège Coll. Ocean Hydrodynamics, 1972, p. 143-180
- 3 Leendertse, J.J., Alexander, R.C., Shiao-Kung Liu,
A three-dimensional model for estuaries and coastal seas I, principles of
computation,
Rand Corp., Santa Monica, R 1417 OWRR, 1973
- 4 Liggett, J.A.,
Unsteady circulation in shallow, homogeneous lakes,
J. ASCE, 95, HY4 (1969) 1273-1288
- 5 Nielsen, J.H.,
Application of boundary-layer theory to dispersion in non-stratified two-
dimensional estuaries,
Nielson Eng. Res. Inc., Mountain View, Cal., 1972
- 6 Sgibneva, L.A., Felzenbaum, A.I.,
Theory of tides in a fluid with friction,
Dokl. Akad. Nauk. SSSR 164, 1965, 2 (Geophysics)
- 7 Simons, T.J.,
Development of numerical models of Lake Ontario II,
15th Congr. Great Lakes Res., Madison, Wisc. 1972
- 8 Vreugdenhil, C.B.,
Computation of gravity currents in estuaries,
Delft Hydr. Lab. Publ. no. 86, 1970
- 9 Waterloopkundig Laboratorium,
Computational methods for the vertical distribution of flow in shallow water,
Literature study, Report W 152 - I, 1973
- 10 Waterloopkundig Laboratorium,
Berekening dichtheidsstromen, keuze van de differentiemethode,
Verslag R 897 - I, 1975



gegevens:
 $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$

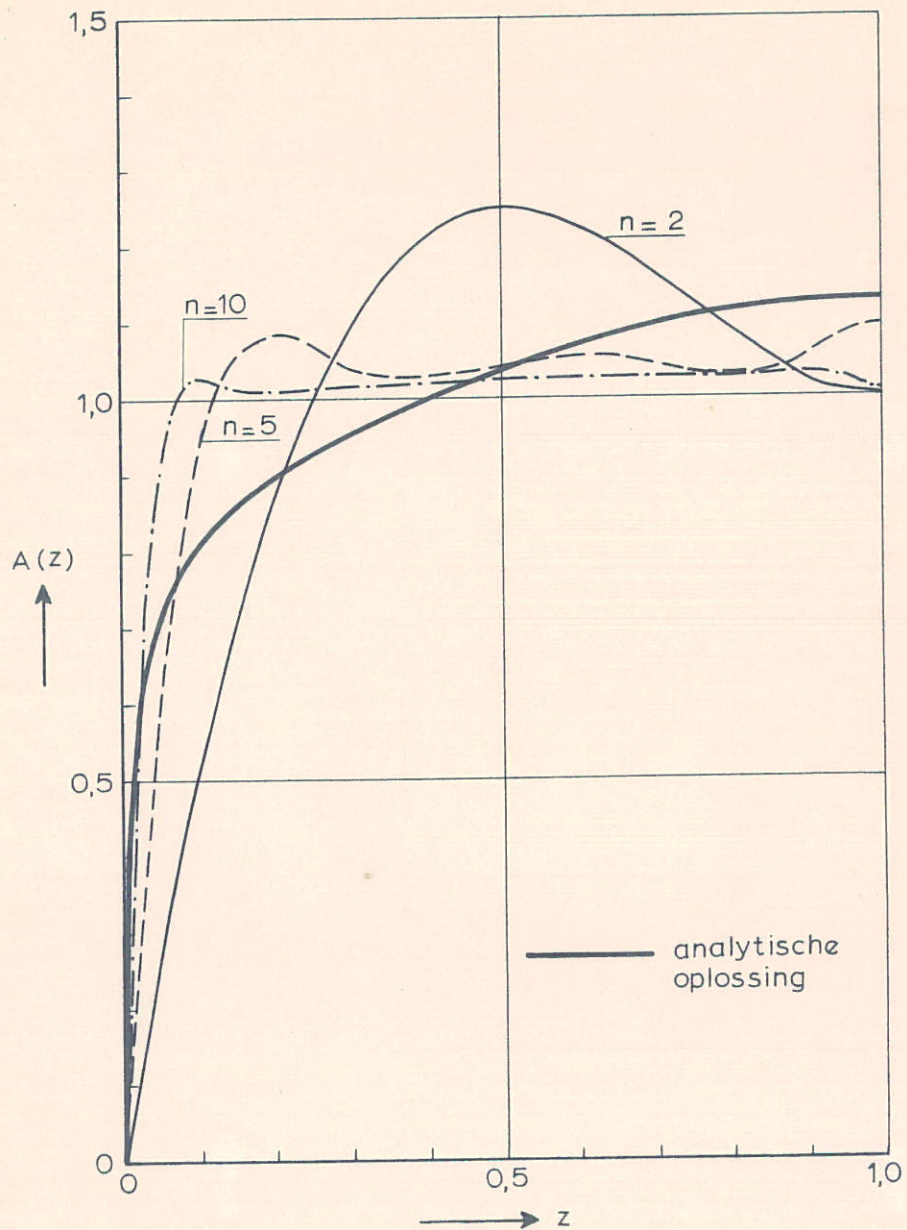


ANALYTISCHE OPLOSSING IN OORSPRONKELIJKE (boven)
 EN GETRANSFORMEERDE COORDINATEN (onder)



- x subdomain, polynomen
- o lagen methode
- collocatie, polynomen
- galerkin, polynomen
- + elementen methode
- △ elementen met singulariteit
- subdomain, polynomen, getransformeerd
- * collocatie, polynomen, getransformeerd
- ▲ galerkin, polynomen, getransformeerd
- (●) niet eenduidig

GEMIDDELDE KWADRATISCHE AFWIJING δ TUSSEN
 BENADERDE EN ANALYTISCHE OPLOSSINGEN ALS
 FUNCTIE VAN DE ORDE VAN BENADERING n

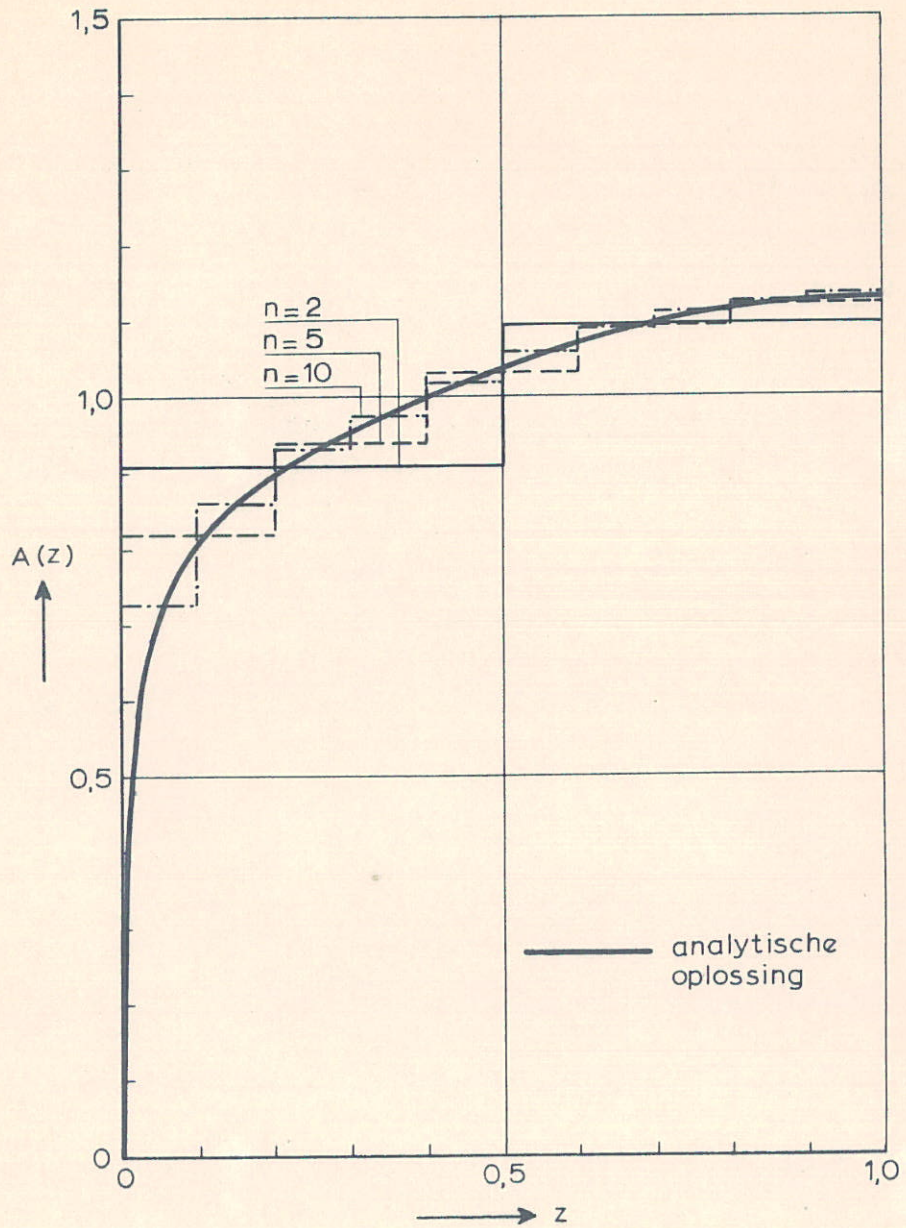


gegevens: $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$
 $r = 0,0003$

SUBDOMAIN-METHODE, POLYNOMEN
 BENADERINGEN VOOR $n=2, 5, 10$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 897-II FIG. 5

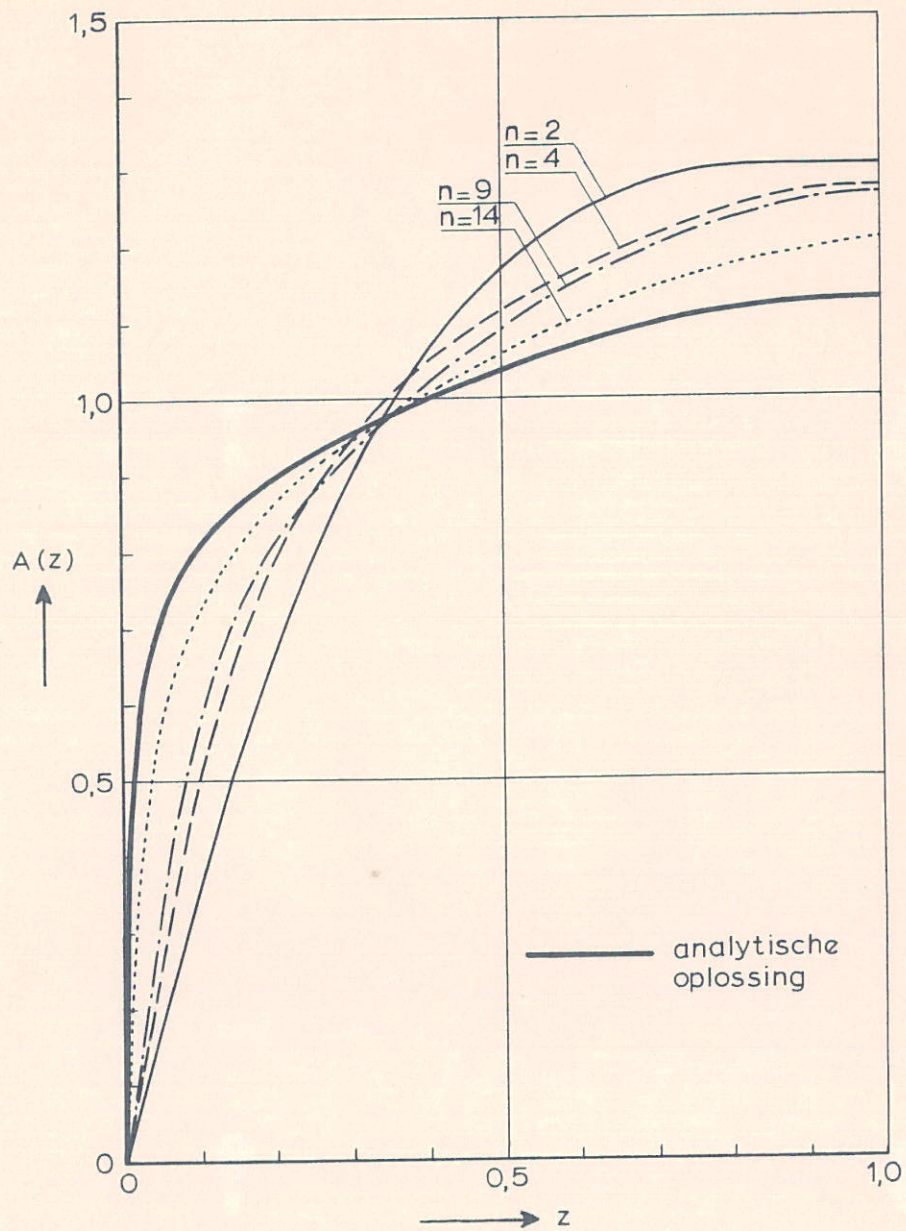


gegevens: $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$
 $r = 0,0003$

LAGEN-METHODE
 BENADERINGEN VOOR $n=2, 5, 10$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 897-II FIG. 6



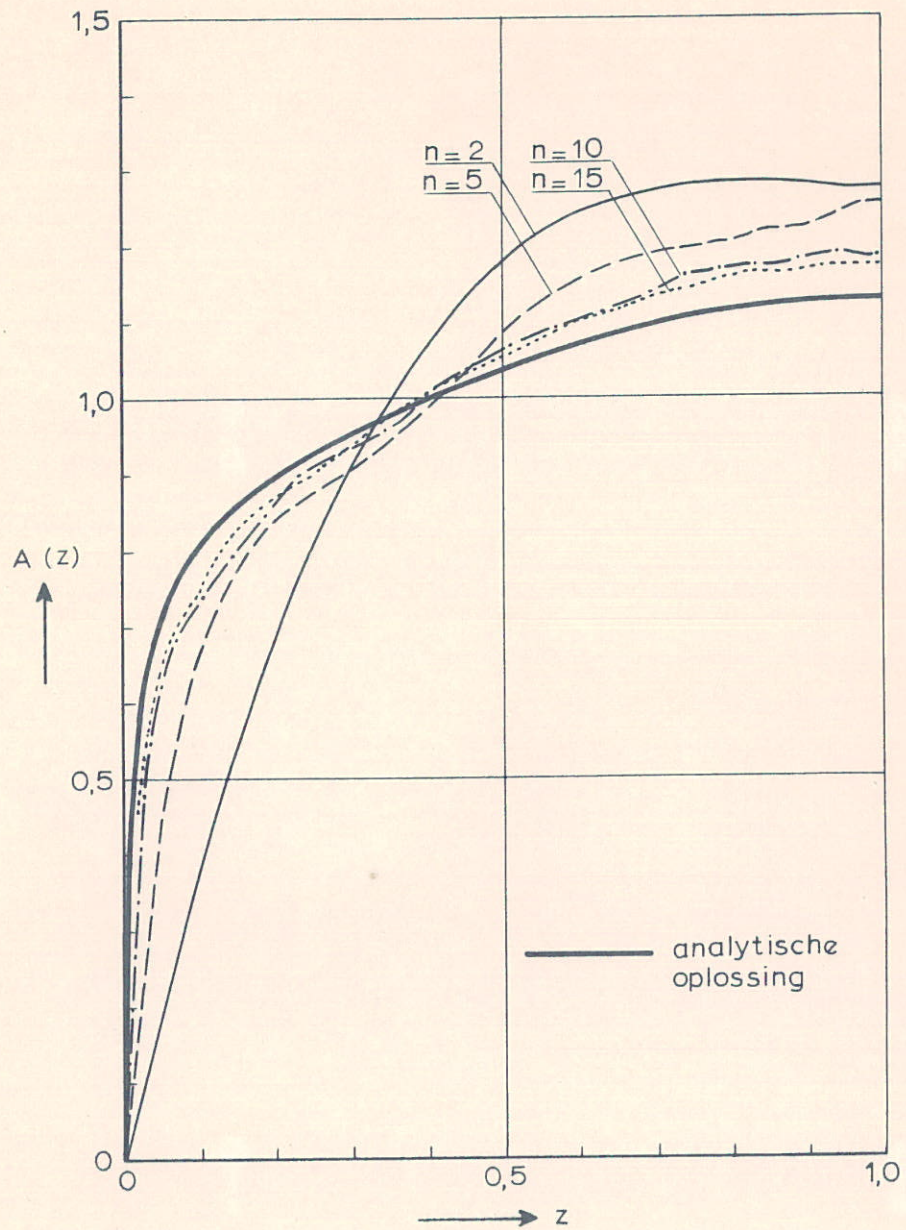
gegevens: $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$
 $r = 0,0003$

COLLOCATIE-METHODE, POLYNOMEN
 BENADERINGEN VOOR $n=2, 4, 9, 14$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 897-II

FIG. 7

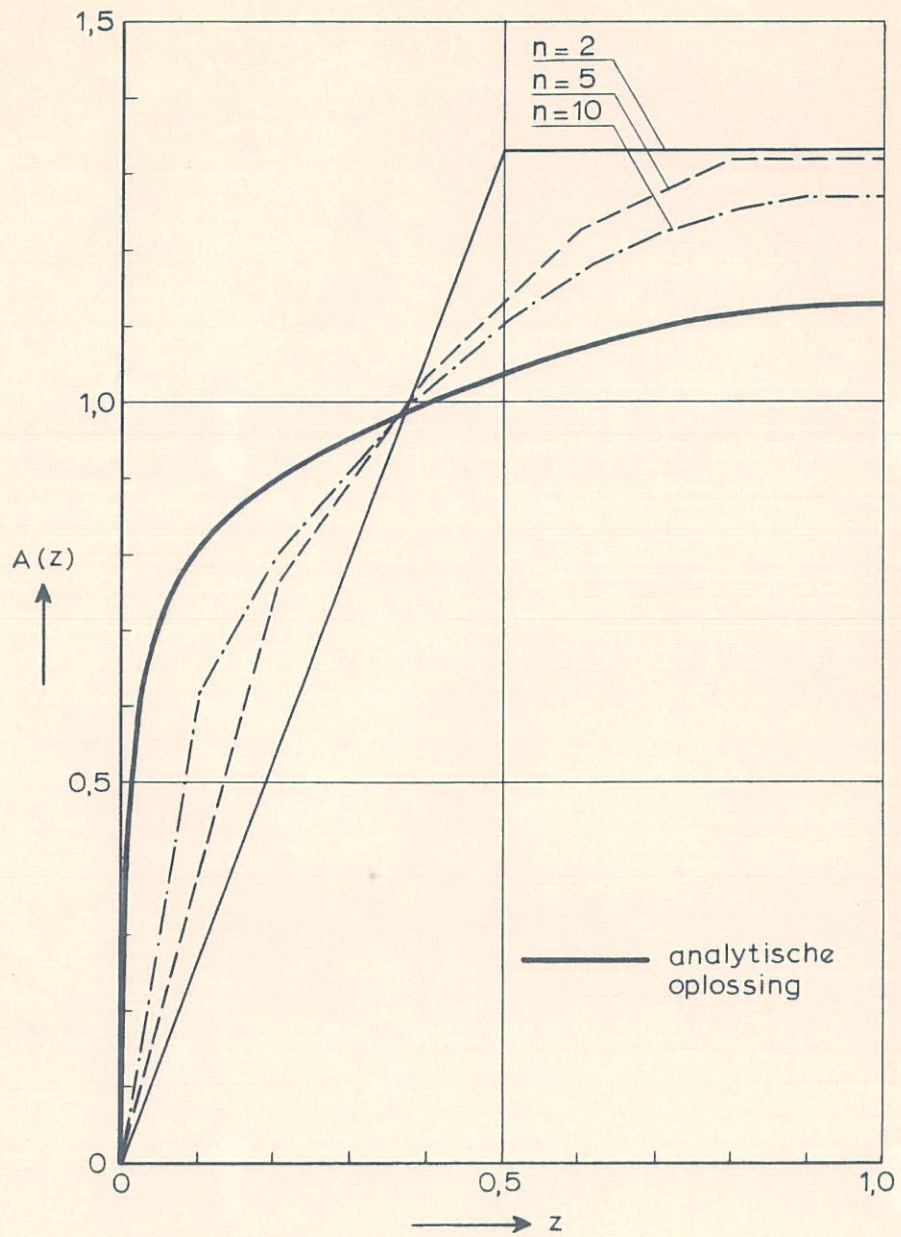


gegevens: $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$
 $r = 0,0003$

GALERKIN-METHODE, POLYNOMEN
 BENADERINGEN VOOR $n = 2, 5, 10, 15$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 897-II FIG. 8

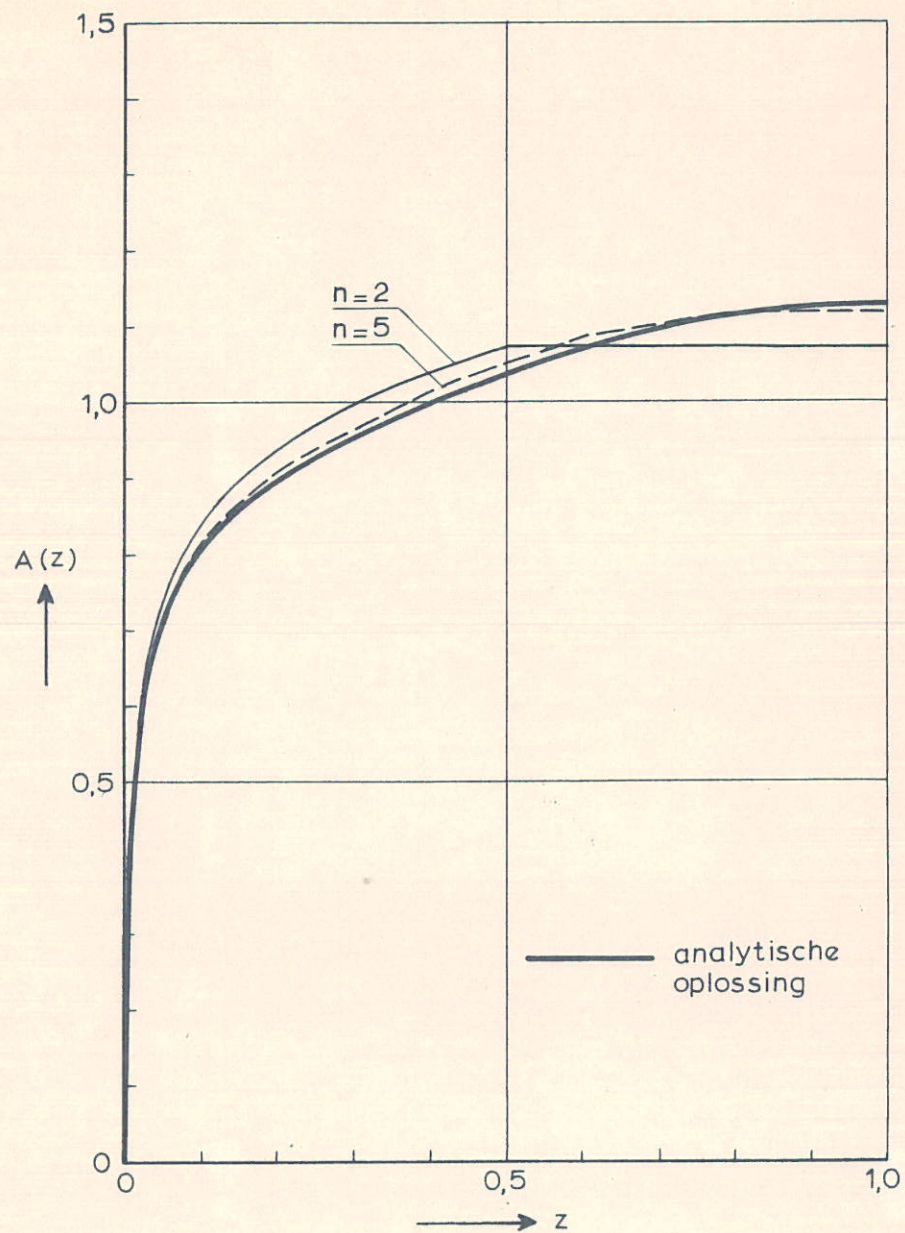


gegevens: $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$
 $r = 0,0003$

ELEMENTEN-METHODE, LINEAIRE INTERPOLATIE
 BENADERINGEN VOOR $n=2, 5, 10$

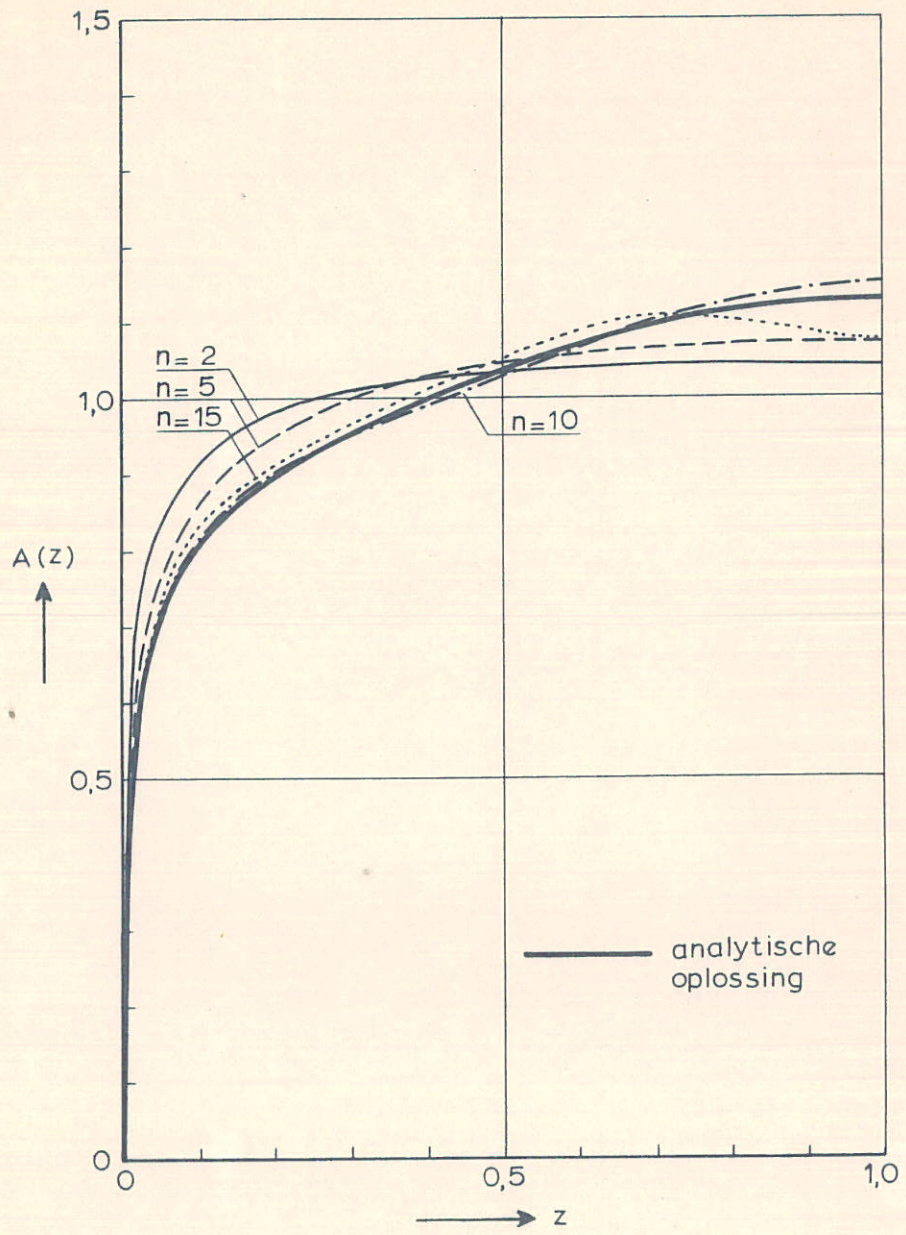
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 897-II FIG. 9



gegevens: $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$
 $r = 0,0003$

ELEMENTEN-METHODE MET LINEAIRE INTERPOLATIE
 EN MET EEN LOGARITHMISCH ELEMENT BIJ $z=r$
 BENADERINGEN VOOR $n=2$ EN $n=5$



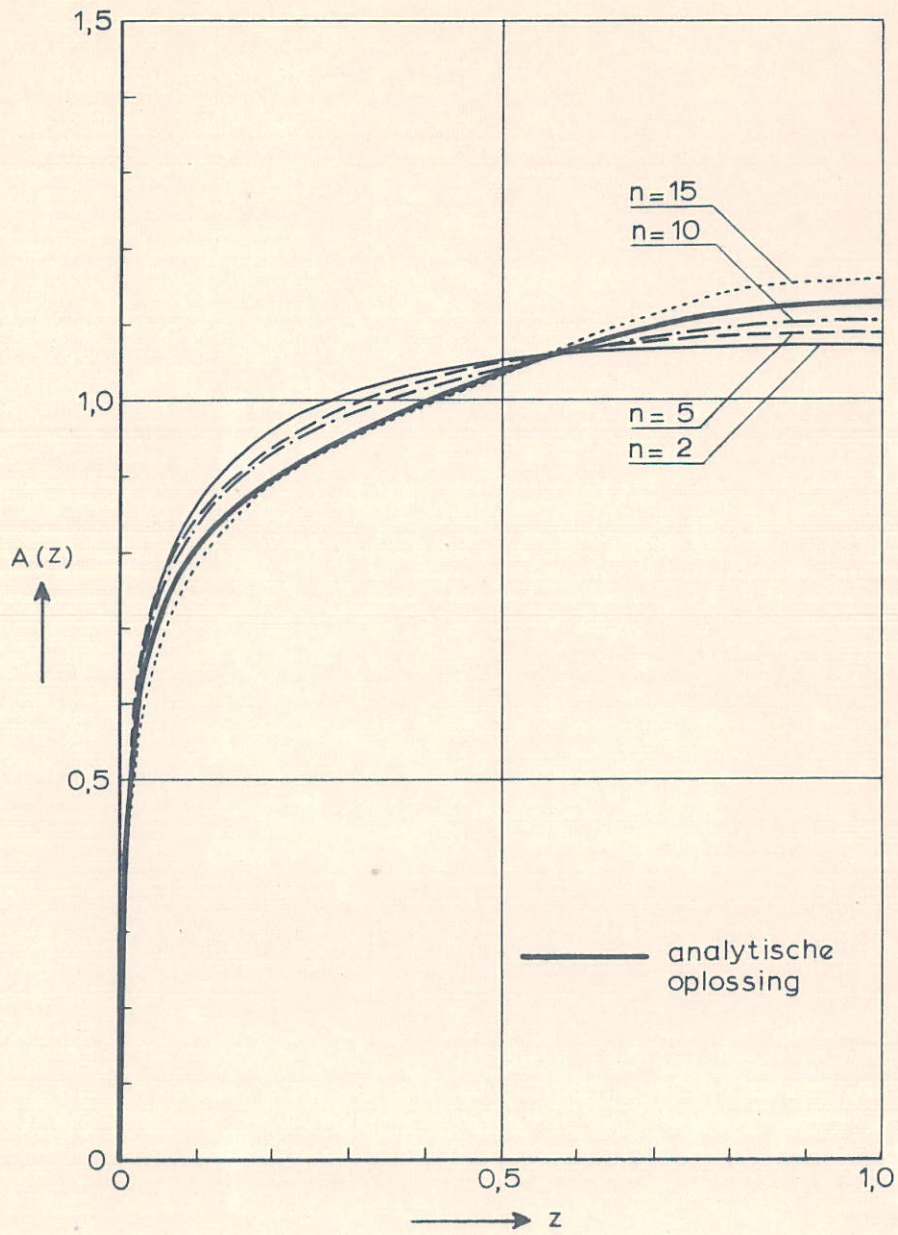
gegevens: $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$
 $r = 0,0003$

SUBDOMAIN-METHODE, POLYNOMEN,
 GETRANSFORMEERDE VERGELIJKINGEN
 BENADERINGEN VOOR $n = 2, 5, 10, 15$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 897-II

FIG. 11

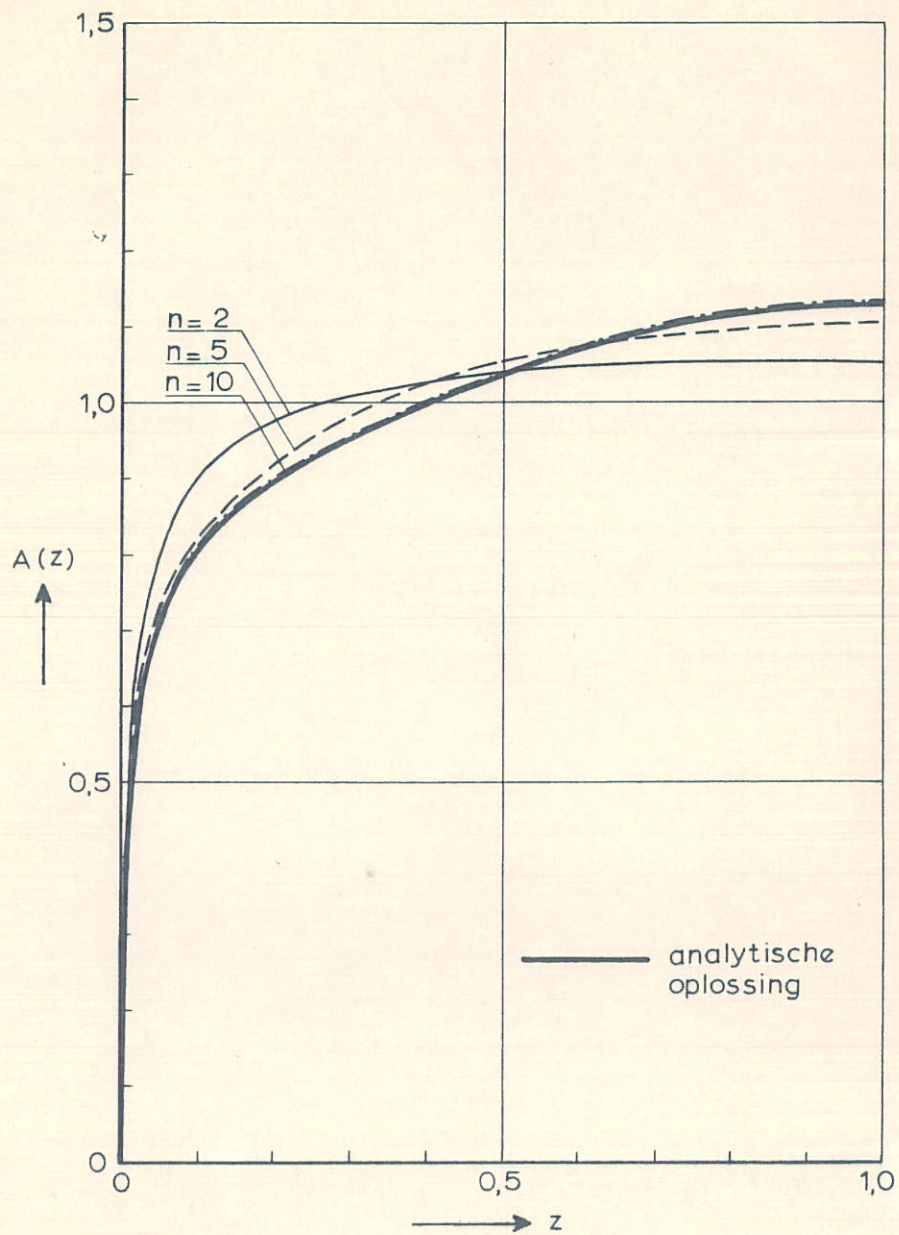


gegevens: $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$
 $r = 0,0003$

COLLOCATIE-METHODE, POLYNOMEN,
 GETRANSFORMEERDE VERGELIJKINGEN
 BENADERINGEN VOOR $n=2, 5, 10, 15$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 897-II	FIG. 12



gegevens: $\sigma = 0,32$
 $p = 0,2$
 $r = 0,0003$

GALERKIN-METHODE, POLYNOMEN,
 GETRANSFORMEERDE VERGELUKINGEN
 BENADERINGEN VOOR $n = 2, 5, 10$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 897-II FIG. 13

appendix

APPENDIX A Uitwerking van de verschillende methodes

A1 Subdomain-methode, polynomen

De eenvoudigste vorm van polynomen die aan de randvoorwaarden voldoen is

$$\phi_k(z) = (1-z)^{k+1} - (1-r)^{k+1} \quad k = 1, \dots, n \quad (A1)$$

Het polynoom van de eerste orde komt niet voor daar dit niet aan de randvoorwaarden op $z = 1$ voldoet. De gewichtsfuncties zijn

$$W_j(z) = \begin{cases} 1 & z_{j-1} \leq z \leq z_j \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (A2)$$

$$\text{waarbij } \begin{cases} z_0 = r \\ z_j = j/n \quad j \geq 1 \end{cases} \quad (A3)$$

Er volgt dan

$$b_{jk} = \int_{z_{j-1}}^{z_j} \{(1-z)^{k+1} - (1-r)^{k+1}\} dz = \frac{(1-z_{j-1})^{k+2} - (1-z_j)^{k+2}}{k+2} - (1-r)^{k+1} (z_j - z_{j-1}) \quad (A4)$$

$$c_{jk} = \left[-\epsilon(z) (k+1) (1-z)^k \right]_{z=z_{j-1}}^{z_j} = \\ = \{\epsilon(z_{j-1}) (1-z_{j-1})^k - \epsilon(z_j) (1-z_j)^k\} (k+1) \quad (A5)$$

$$c_{j,n+1} = z_j - z_{j-1} \quad (A6)$$

$$-c_{n+1,k} = \int_r^1 \{(1-z)^{k+1} - (1-r)^{k+1}\} dz = \frac{(1-r)^{k+2}}{k+2} - (1-r)^{k+2} \quad (A7)$$

A2 Lagen-methode

De gebruikelijke procedure bij een lagen-methode bestaat uit integratie over een laag. Voor vgl. (24) geeft dit

$$i\sigma A_j \Delta z - \left[\epsilon \frac{dA}{dz} \right]_{z_{j-1}}^{z_j} = \lambda \Delta z \quad (\text{A8})$$

waarin A_j het gemiddelde van A over de laag tussen z_{j-1} en z_j is. Voor de schuifspanningen in het inwendige wordt gewoonlijk gesteld

$$\epsilon \frac{dA}{dz} \Big|_{z_j} = \epsilon (z_j) \frac{A_{j+1} - A_j}{\Delta z} \quad (\text{A9})$$

Aan het oppervlak geldt wegens de randvoorwaarde (27)

$$\epsilon \frac{dA}{dz} \Big|_{z_n} = 0$$

Aan de bodem is de snelheid nul (26). Dit zou aanleiding kunnen zijn om te stellen

$$\epsilon \frac{dA}{dz} \Big|_{z_0} = \epsilon (z_0) \frac{A_1 - (-A_1)}{\Delta z}$$

Dit geeft echter niet weer dat er lokaal een veel sterkere snelheidsgradient optreedt. Toepassing leidt dan ook tot snelheidsprofielen die zo goed als uniform zijn over de diepte. Deze zijn in dit verslag niet weergegeven. Het logarithmische gedrag van de snelheid in de buurt van de bodem kan als volgt in rekening worden gebracht. Veronderstel dat de schuifspanning in de onderste laag lineair verloopt:

$$\epsilon \frac{dA}{dz} = \frac{\tau_1}{\rho} = \frac{\tau_1}{\rho} + d(z_1 - z) \quad \text{voor } z \leq z_1$$

waarin τ_1 de schuifspanning op $z = z_1$ voorstelt. De constante d is vooralsnog onbekend. Hieruit kan worden opgelost

$$A = p \left(\frac{\tau_1}{\rho} + dz_1 \right) \ln \frac{z}{r} - dp(z-r)$$

met behulp van (26) en (30). Dan is gemiddelde snelheid A_1 in die laag

$$A_1 = \frac{1}{z_1 - r} \int_r^{z_1} A dz = \frac{p}{z_1 - r} \left(\frac{\tau_1}{\rho} + dz_1 \right) \left(z_1 \ln \frac{z_1}{r} - z_1 + r \right) - \frac{1}{2} dp(z_1 - r)$$

De schuifspanning op de bodem is nu

$$\varepsilon \frac{dA}{dz} \Big|_{z_0} = \frac{\tau_1}{\rho} + d (z_1 - r)$$

Uit de beide laatste vergelijkingen kan d geëlimineerd worden, waaruit ontstaat

$$d = \frac{\tau_0 - \tau_1}{\rho} \frac{1}{z_1 - r} = \left\{ A_1 - \frac{p}{z_1 - r} \left(z_1 \ln \frac{z_1}{r} - z_1 + r \right) \frac{\tau_1}{\rho} \right\} \cdot \left\{ \frac{pz_1}{z_1 - r} \left(z_1 \ln \frac{z_1}{r} - z_1 + r \right) - \frac{1}{2} p (z_1 - r) \right\}^{-1}$$

Substitutie hiervan in (A8) en gebruik van (A9) voor τ_1 levert dan

$$i\sigma A_1 + \left\{ (z_1 - r) A_1 - p \left(z_1 \ln \frac{z_1}{r} - z_1 + r \right) \varepsilon (z_1) \frac{A_2 - A_1}{\Delta z} \right\} \cdot \left\{ \frac{pz_1}{z_1 - r} \left(z_1 \ln \frac{z_1}{r} - z_1 + r \right) - \frac{1}{2} p (z_1 - r) \right\}^{-1} = \lambda \Delta z \quad (A10)$$

In termen van de gewogen-residuen methode kunnen hier direkt b_{11} , c_{11} en c_{12} uit afgelezen worden. De vergelijkingen voor de andere lagen kunnen worden gevonden door te stellen

$$\phi_k(z) = \begin{cases} 1 & z_{k-1} < z \leq z_k \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (A11)$$

$$W_j(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{j-1}}{\Delta z} + 9 \frac{(z - z_{j-1})^2}{\Delta z^2} & z_{j-1} \leq z \leq z_{j-1} + \frac{1}{2} \Delta z \\ \frac{z_j - z}{\Delta z} + 9 \frac{(z_j - z)^2}{\Delta z^2} & z_{j-1} + \frac{1}{2} \Delta z \leq z \leq z_j, \quad j < n \\ 11 \frac{(z_j - z)^2}{\Delta z^2} & z_{j-1} + \frac{1}{2} \Delta z \leq z \leq z_j, \quad j = n \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (A12)$$

waarin $\Delta z = z_j - z_{j-1}$. Hieruit volgt nl.

$$b_{jk} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} W_j(z) dz = \Delta z \quad k = j, \text{ anders } 0 \quad (\text{A13})$$

$$\begin{aligned} c_{jk} &= \left[W_j(z) \varepsilon(z) \frac{d\phi_k}{dz} \right]_r^1 - \int_r^1 \varepsilon(z) \frac{dW_j}{dz} \frac{d\phi_k}{dz} dz = \\ &= - \int_r^1 \varepsilon(z) \frac{dW_j}{dz} \{ \delta(z-z_{k-1}) - \delta(z-z_k) \} dz \\ &= \varepsilon(z_k) \frac{dW_j}{dz} \Big|_{z_k} - \varepsilon(z_{k-1}) \frac{dW_j}{dz} \Big|_{z_{k-1}} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \varepsilon(z_{j-1})/\Delta z & k = j-1 \\ - \{ \varepsilon(z_j) + \varepsilon(z_{j-1}) \} / \Delta z & k = j \\ - \varepsilon(z_{n-1})/\Delta z & k = j = n \\ \varepsilon(z_j)/\Delta z & k = j+1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (\text{A14})$$

Dit blijkt overeen te komen met (A8) en (A9). Deze vergelijkingen worden voor $j = 1$ vervangen door (A10).

$$\begin{aligned} \text{Verder geldt nog} \quad - c_{n+1,k} &= z_k - z_{k-1} \\ c_{j,n+1} &= z_j - z_{j-1} \end{aligned}$$

A3 Collocatiemethode, polynomen

In dit geval worden de interpolatiefuncties volgens vgl. (A1) gebruikt met gewichtsfuncties

$$W_j(z) = \delta(z-z_j) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (\text{A15})$$

waarbij z_j weer gedefiniëerd wordt volgens (A3). Merk op dat $z = r$ geen collocatiepunt is, aangezien daar de randvoorwaarde $A = 0$ is opgelegd. Het punt $z = 1$ is

echter wel een collocatiepunt aangezien de funktiewaarde daar nog vrij is. Er volgt dan

$$b_{jk} = \phi_k(z_j) = (1-z_j)^{k+1} - (1-r)^{k+1} \quad (A16)$$

$$c_{jk} = \frac{d}{dz} \left\{ \varepsilon(z) \frac{d\phi_k}{dz} \right\} \Big|_{z=z_j} = \frac{d}{dz} \left\{ -\varepsilon(z)(k+1)(1-z)^k \right\} \Big|_{z=z_j}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Voor } z_j > p \text{ geeft dit } & c_{jk} = +k(k+1)(1-z_j)^{k-1} \\ \text{Voor } z_j < p & c_{jk} = -\frac{1}{p}(k+1)(1-z_j)^k + k(k+1)\frac{z_j}{p}(1-z_j)^{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (A17)$$

Als $z_j = p$ is c_{jk} niet eenduidig gedefiniëerd.

$$c_{j,n+1} = 1 \quad (A18)$$

$$c_{n+1,k} \text{ zie (A7)}$$

A4 Galerkin-methode, polynomen

Zowel interpolatie- als gewichtsfunkties worden nu gegeven door vgl. (A1). Dit geeft

$$\begin{aligned} b_{jk} &= \int_r^1 \left\{ (1-z)^{k+1} - (1-r)^{k+1} \right\} \left\{ (1-z)^{j+1} - (1-r)^{j+1} \right\} dz = \\ &= \frac{(1-r)^{k+j+3}}{k+j+3} - (1-r)^{k+j+3} \left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{j+2} \right) + (1-r)^{k+j+3} \\ &= (1-r)^{k+j+3} \left(1 - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{j+2} + \frac{1}{k+j+3} \right) \end{aligned} \quad (A19)$$

$$\begin{aligned} c_{jk} &= - \int_r^p \frac{z}{p} (j+1)(k+1)(1-z)^{k+j} dz - \int_p^1 (k+1)(j+1)(1-z)^{k+j} dz = \\ &= + \frac{(k+1)(j+1)}{p(k+j+1)} \left\{ \frac{(1-p)^{k+j+2} - (1-r)^{k+j+2}}{k+j+2} - r(1-r)^{k+j+1} \right\} \end{aligned} \quad (A20)$$

$$c_{j,n+1} = \int_r^1 \{(1-z)^{j+1} - (1-r)^{j+1}\} dz = \frac{(1-r)^{j+2}}{j+2} - (1-r)^{j+2} \quad (\text{A21})$$

$c_{n+1,k}$ zie (A7)

A5 Elementen-methode

Als interpolatie- en gewichtsfunkties worden driehoeksfunkties gebruikt:

$$\phi_k(z) = W_k(z) = \begin{cases} n(z - \frac{k-1}{n}) & z_{k-1} \leq z < z_k \\ n(\frac{k+1}{n} - z) & z_k \leq z \leq z_{k+1} \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (\text{A22})$$

Deze funkties voldoen wel aan (26) maar niet aan (27), zodat een aparte vergelijking moet worden gebruikt voor die randvoorwaarde. Dit houdt tevens in dat slechts $n-1$ gewichtsfunkties worden gebruikt ($j = 1, \dots, n-1$). Dan volgt

$$\begin{aligned} b_{jk} &= 1/(6n) & k &= j-1, j+1 \\ b_{jk} &= 2/(3n) & k &= j & (j = 1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

$$b_{jk} = 0 \text{ voor overige waarden van } k, \text{ met uitzondering van } b_{11} = \frac{2}{3n} - \frac{1}{3} n^2 r^3$$

In verband met de randvoorwaarde geldt

$$\begin{aligned} b_{nk} &= 0 & \text{alle } k \\ c_{nn} &= -c_{n,n-1} = 1 \\ c_{nk} &= 0 & \text{overige waarden van } k \end{aligned}$$

$$\text{Verder - } c_{n+1,k} = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 < k < n \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{2} nr^2 & -k = 1 \\ \frac{1}{2n} & k = n \end{cases} \quad (\text{A24})$$

$$c_{j,n+1} = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 < j < n \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{2} nr^2 & j = 1 \end{cases} \quad (A25)$$

$$c_{j,k} = -n \int_{z_{j-1}}^{z_j} \epsilon(z) \frac{d\phi_k}{dz} dz + n \int_{z_j}^{z_{j+1}} \epsilon(z) \frac{d\phi_k}{dz} dz =$$

$$= \begin{cases} n^2 \int_{z_{j-1}}^{z_j} \epsilon(z) dz & k=j-1 \\ -n^2 \int_{z_{j-1}}^{z_{j+1}} \epsilon(z) dz & k=j \quad j < n \\ n^2 \int_{z_j}^{z_{j+1}} \epsilon(z) dz & k=j+1 \end{cases} \quad (A26)$$

A6 Elementenmethode met singulariteit

Teneinde de logarithmische singulariteit bij de bodem mogelijk te maken wordt uitsluitend $\phi_1(z)$ vervangen t.o.v. (A22)

$$\phi_1(z) = \begin{cases} -\ln \frac{z}{r} / \ln rn & r \leq z \leq \frac{1}{n} \\ n \left(\frac{2}{n} - z \right) & \frac{1}{n} \leq z \leq \frac{2}{n} \end{cases} \quad (A27)$$

$W_1(z)$ blijft als in par. A5. Alle matrix-elementen blijven dan gelijk met uitzondering van

$$b_{11} = - \int_r^{1/n} nz \ln \frac{z}{r} / \ln rn dz = \frac{1}{n} + \frac{1/n-r^2n}{4 \ln rn} \quad (A28)$$

$$c_{11} = \frac{1-nr}{p \ln rn} - n^2 \int_{z_1}^{z_2} \epsilon(z) dz \quad (A29)$$

$$-c_{n+1,1} = \frac{3}{2n} + \frac{1}{\ln rn} \left(\frac{1}{n} - r \right) \quad (\text{A30})$$

A7 Subdomain-methode, polynomen, getransformeerde vergelijking

Interpolatie- en gewichtsfuncties zijn nu

$$\phi_k(z) = (1-z)^{k+1} - 1 \quad (\text{A31})$$

$$W_j(z) = 1 \quad \frac{j-1}{n} < z < \frac{j}{n} \quad (\text{A32})$$

De methode wordt nu toegepast op vgl. (34) (met weglating van de sterretjes)

$$b_{jk} = \frac{\alpha}{\sigma} \int_0^1 r^{1-z} W_j(z) \phi_k(z) dz = \quad (\text{A33})$$

$$= \frac{\alpha}{\sigma} \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} r^{1-z} \{(1-z)^{k+1} - 1\} dz = \frac{\alpha r}{\sigma} \left(\beta_{j,k+1} + \frac{r^{-j/n} - r^{-(j-1)/n}}{\ln r} \right) \quad (\text{A34})$$

$$\text{waarin } \beta_{j,k+1} = \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} (1-z)^{k+1} r^{-z} dz \quad (\text{A35})$$

recursief berekend kan worden.

$$c_{jk} = \left[\epsilon \frac{d\phi_k}{dz} \right]_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} = \left\{ \epsilon \left(\frac{j-1}{n} \right) \left(1 - \frac{j-1}{n} \right)^k - \epsilon \left(\frac{j}{n} \right) \left(1 - \frac{j}{n} \right)^k \right\} (k+1) \quad (\text{A36})$$

nu met ϵ volgens (34). In dit geval wordt

$$c_{j,n+1} = pr \int_0^1 r^{-z} \ln^2 r W_j(z) dz = \quad (\text{A37})$$

$$= pr \ln r \left(r^{-\frac{j-1}{n}} - r^{-\frac{j}{n}} \right) \quad (\text{A38})$$

$$\text{en } -c_{n+1,k} = -\ln r \int_0^1 r^{-z} \phi_k(z) dz = \quad (\text{A39})$$

$$= -r \ln r \int_0^1 r^{-z} \{(1-z)^{k+1} - 1\} dz =$$

$$= -r \ln r \left(\gamma_{k+1} - \frac{1-r^{-1}}{\ln r} \right) \quad (\text{A40})$$

$$\text{waarin } \gamma_{k+1} = \int_0^1 r^{-z} (1-z)^{k+1} dz \quad (\text{A41})$$

A8 Collocatiemethode, polynomen, getransformeerde vergelijking

De interpolatiefuncties zijn gegeven door (A31). De gewichtsfuncties zijn

$$W_j(z) = \delta \left(z - \frac{j}{n} \right) \quad (\text{A42})$$

$$\text{Dan wordt } b_{jk} = \frac{\alpha}{\sigma} r^{\frac{n-j}{n}} \left\{ \left(\frac{n-j}{n} \right)^{k+1} - 1 \right\} \quad (\text{A43})$$

$$\begin{aligned} c_{jk} &= \left[\frac{d}{dz} \left\{ -\epsilon (k+1) (1-z)^k \right\} \right]_{z=j/n} = \\ &= + k (k+1) \left(\frac{n-j}{n} \right)^{k-1} \quad \frac{j}{n} < q \\ &= - pr^{j/n-1} (k+1) \left(\frac{n-j}{n} \right)^k \ln r + k(k+1) pr^{\frac{j}{n}-1} \left(\frac{n-j}{n} \right)^{k-1} \quad \frac{j}{n} > q \end{aligned} \quad (\text{A44})$$

$$c_{j,n+1} = pr \ln^2 r \int_0^1 r^{-z} \delta \left(z - \frac{j}{n} \right) dz = pr \ln^2 r r^{-\frac{j}{n}} \quad (\text{A45})$$

$$c_{n+1,k} \text{ zie (A40)}$$

A9 Galerkin-methode, polynomen, getransformeerde vergelijking

Zowel interpolatie- als gewichtsfuncties worden nu gegeven door (A31)

$$\begin{aligned}
 b_{jk} &= \frac{\alpha r}{\sigma} \int_0^1 r^{-z} \{(1-z)^{k+1} - 1\} \{(1-z)^{j+1} - 1\} dz = \\
 &= \frac{\alpha r}{\sigma} (\gamma_{k+j+2} - \gamma_{k+1} - \gamma_{j+1} + \frac{1-r^{-1}}{\ln r})
 \end{aligned} \tag{A46}$$

waarbij γ gegeven is door vgl. (A41).

$$\begin{aligned}
 c_{jk} &= - (k+1)(j+1) \int_0^1 (1-z)^{k+j} \varepsilon(z) dz = \\
 &= - (k+1)(j+1) \int_0^q (1-z)^{k+j} dz - (k+1)(j+1) \int_q^1 pr^{z-1} (1-z)^{k+j} dz = \\
 &= \frac{(k+1)(j+1)}{k+j+1} \{(1-q)^{k+j+1} - 1\} - \frac{p}{r} (k+1)(j+1) \mu_{k+j}
 \end{aligned} \tag{A47}$$

$$\text{waarin } \mu_m = \int_q^1 r^z (1-z)^m dz \tag{A48}$$

$$\begin{aligned}
 c_{j,n+1} &= pr \ln^2 r \int_0^1 r^{-z} \{(1-z)^{j+1} - 1\} dz = \\
 &= pr \ln^2 r (\gamma_{j+1} - \frac{1-r^{-1}}{\ln r})
 \end{aligned} \tag{A49}$$

$c_{n+1,k}$ zie (A40)

waterloopkundig laboratorium postbus 177 delft