Rapport No. 131-M.

LABORATORIUM VOOR SCHEEPSBOUWKUNDE

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

College

Functietheorie van Prof.dr S.C. van Veen.

Door J.H. Vugts.

september 1965.

Dit interne memorandum omvat de stof van het College Functie-theorie, zoals dat in de cursus 1961 - 1962 werd gegeven door Prof.Dr S.C. van Veen en door mij werd opgetekend.
Het bevat in het algemeen de ter plaatse gemaakte aantekeningen, naar aanleiding van de voordrachten van Prof. van Veen. Slechts hier en daar is een nadere verklaring of uitwerking van mijn hand tussengevoegd. Persoonlijk heb ik de overtuiging dat het een bijzonder plezierige en zeer goede behandeling van de functietheorie geeft, maar vanzelfsprekend kunnen noch Prof. van Veen noch ik enige verantwoording voor de inhoud dragen.

J.H. Vugts.

College Functietheorie.

Prof. Dr S.C. Van Veen.

1961 - 1962.

Eigenlijk: complexe - functietheorie ≡ theorie der complexe functies.

Uitbreiding van het getallenbegrip:

$$x^2 + 1 = 0 \longrightarrow x^2 = -1.$$

Nieuw getal ingevoerd: i. Dit moet voldoen aan de volgende eigenschap:

$$\boxed{i^2 = -1\,.}$$

i = imaginaire eenheid.

$$x^2 = -1 = i^2 \longrightarrow x = \pm\, i.$$

<u>a + b . i.</u> a en b zijn beide reëele getallen.

b i = zuiver imaginair getal.

a + b i = complex getal, d.i. een samenstelling van een reëel en een zuiver imaginair getal.

$$\left.\begin{array}{l} c = a + b\,i \\ \bar{c} = a - b\,i \end{array}\right\}$$ toegevoegd complexe getallen; schrijfwijze dus c en $\bar{c}$.

$\pm$

$c + \bar{c} = 2\,a$ (reëel).

$c - \bar{c} = 2\,b\,i$ (zuiver imaginair).

a = het reële gedeelte van c = $Re(c)$.

b = het imaginaire gedeelte van c = $Im(c)$.

Rekenkunde.

Optellen
$$k_1 = a_1 + b_1 \cdot i$$
$$k_2 = a_2 + b_2 \cdot i$$
$$k_1 + k_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$$

Vermenigvuldigen

$$k_1 \cdot k_2 = (a_1 + b_1 . i)(a_2 + b_2 . i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

Bij optelling, aftrekking, vermenigvuldiging ontstaan i.h.a. weer complexe getallen. Deze kunnen bij toeval wel eens reëel worden of zuiver imaginair, maar in feite is ieder getal complex.

reële getallen = complex getal met Im(c) = 0

imaginaire getallen = complex getal met Re(c) = 0.

Deling

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_1 + b_1 . 1}{a_2 + b_2 . i}$$

Dit zodanig vermenigvuldigen met het getal 1, dat de noemer $c.\bar{c}$ wordt:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_1 + b_1 . i}{a_2 + b_2 . i} \times \frac{a_2 - b_2 . i}{a_2 - b_2 . i} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}_{\text{reëel deel}} + \underbrace{\frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2) . i}{a_2^2 + b_2^2}}_{\text{imaginair deel}}}_{\text{complex getal.}}$$

Machtsverheffing van i:

$$\left\{\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} i^4 & = & i^2 . i^2 & = +1 \\ i^5 & = & i^4 . i & = i \\ i^6 & = & & -1 \\ i^7 & = & & -i \end{array}\right.$$

Deze volgorde herhaalt zich steeds: + 1, + i, - 1, - i.

$$\boxed{\begin{array}{ll} i^{4n} & = +1 \\ i^{4n+1} & = +i \\ i^{4n+2} & = -1 \\ i^{4n+3} & = -i \end{array}}$$

Goniometrische producten.

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) =$$

$$(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2)$$

$$= \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2).$$

In het algemeen is:

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)(\cos\alpha_3 + i\sin\alpha_3) \times \ldots$$

$$\ldots(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n) = \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_n)$$

Bijzonder geval daarvan:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

n voorlopig geheel. (De Moivre).

$n = 3$:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha,$$

volgens de normale machtsverheffing:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha \,.\, i\sin\alpha + 3\cos\alpha \,.\, i^2\sin^2\alpha + i^3\sin^3\alpha =$$

$$\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)$$

Dus:

$$\begin{cases} \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \,.\, \sin^2\alpha \\ \sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \,.\, \sin\alpha - \sin^3\alpha. \end{cases}$$

Hiermee dus direct allerlei goniometrische formules af te leiden. De stelling van De Moivre is zeer belangrijk!

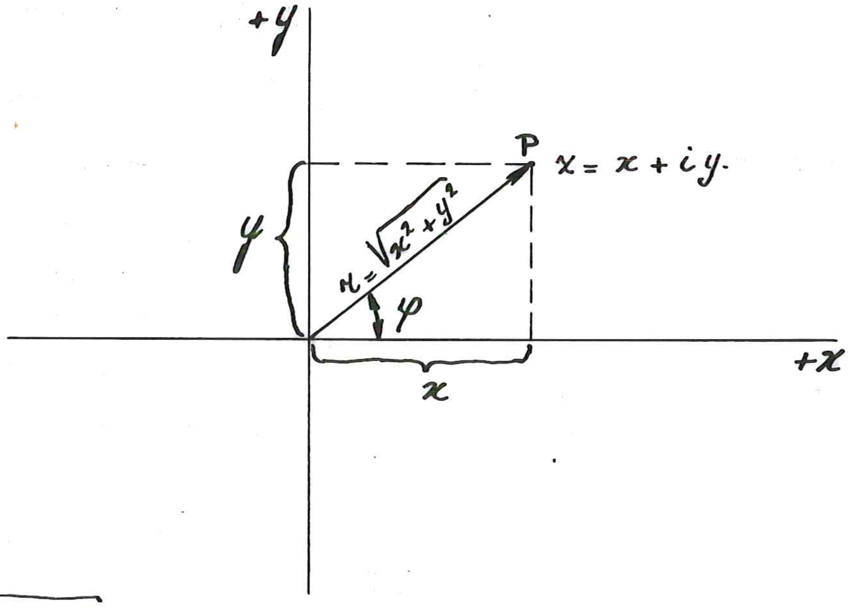
Afbeelding van de complexe getallen.

Een veranderlijk complex getal: $x + iy$ wordt voortaan aangeduid door z:

$z = x + iy$ is veranderlijk.

Per definitie is het punt P met de coördinaten x en y het beeldpunt, de afbeelding van $z = x + iy$ in het XOY-vlak, het z-vlak of het complexe vlak.

Afbeelding in het complexe vlak ontwikkeld door Gauss (voornaamste), Argaud en Wessel (Deen). Onafhankelijk van elkaar.



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ is de modulus of de absolute waarde van z genoemd $= |z|$. Steeds ≥ 0.

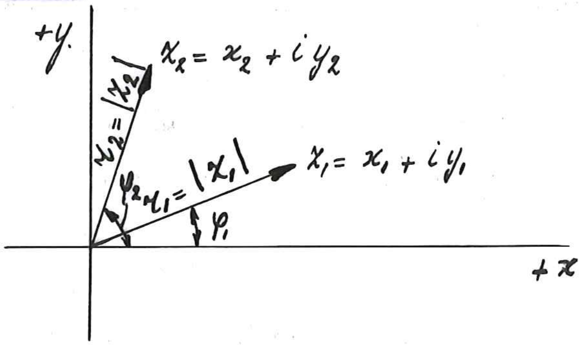
Plaats van P op de cirkel met straal $|z|$ wordt vastgelegd door de richtingshoek φ tussen de positieve x-as en r; altijd gemeten in de analytische positieve richting, d.i. tegen de klok in.

φ = argument van z. $\quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

In zijn afbeelding heeft elk complex getal dus een modulus en een argument. z kan dan ook als volgt worden voorgesteld:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}\right\} \quad z = x + i\,y = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

<u>Vermenigvuldiging</u>.



Product:

$$z_1 z_2 = (x_1 + i\,y_1)(x_2 + i\,y_2) =$$

$$= r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2 \left\{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right\}$$

Modulus product:

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$$

argument product:

$$\arg z_1 z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

<u>Eigenschappen</u>.

I: Mod $z_1 z_2 = r_1 r_2 = \mathrm{mod}\ z_1 \cdot \mathrm{mod}\ z_2$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Modulus van het product van n factoren = product van de moduli der afzonderlijke factoren.

II: $\arg z_1 z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

Argument van het product van een aantal factoren = som van de argumenten der afzonderlijke factoren.

<u>Deling</u>.

Wat is $\frac{1}{z_1}$?

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)} =$$

$$= \frac{1}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} \times \frac{\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1} = \frac{\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1}{r_1 \cdot 1}.$$

Dus:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1) = \frac{1}{r_1}\left\{\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)\right\}.$$

Dus:

1e. $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{|z_1|}$

2e. $\arg\frac{1}{z_1} = -\varphi_1 = -\arg z_1.$

Elke deling $\frac{z_2}{z_1}$ is nu dus het product van z_2 en $\frac{1}{z_1}$.

Dus:

I: De modulus van een quotient van 2 factoren is het quotient van de moduli der factoren:

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{r_2}{r_1}.$$

II: Het argument van een quotient van 2 factoren is het verschil van de argumenten der factoren:

$$\arg \frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Scherper geformuleerd: argument teller - argument noemer.

<u>Optellen en aftrekken</u>.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Dus het beeldpunt van een som van twee complexe getallen is het 4e hoekpunt van een parallellogram op de twee vectoren als zijden geconstrueerd.

I. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$

De modulus van de som is <u>kleiner</u> dan of gelijk aan de som van de moduli. Gelijk als $\arg z_1 = \arg z_2$. Dit is de <u>driehoekseigenschap</u>. Zeer belangrijk!

Meetkundig bewijs is zeer simpel, stelling voor zijden van een driehoek. Analytisch bewijs:

te bew.: $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}$,

of:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 \leq$$

$$\leq x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)},$$

of:

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)},$$

of:

$$x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \leq (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2),$$

of:

$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2,$$

of:

$$0 \leq x_1^2y_2^2 - 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2,$$

of:

$$0 \leq \underbrace{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}_{\text{kwadraat van een reëel getal, dus altijd } \geq 0.}$$

Gelijkteken als:

$$x_1y_2 = x_2y_1 \longrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \longrightarrow \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2,$$

dus als $\varphi_1 = \varphi_2$.

Meer in het algemeen geldt:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|,$$

of:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Aftrekking is terug te voeren tot een optelling. Het is een spiegeling van een vector:

a). $|-z_2| = |z_2|$

b). argument $-z_2 = \arg z_2 + 180^\circ$.

Dus: $z = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

II. <u>Driehoeksongelijkheid bij aftrekking</u>.

a). $|z_2| \geq |z_1|$.

$$|z_2| = |\underbrace{z_2 - z_1}_{=u} + z_1| \leq \underbrace{|z_2 - z_1|}_{=|u|} + |z_1|.$$

dus: $|z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1|$.

b). Als $|z_2| \leq |z_1|$ geldt analoog:

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

of: $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \geq |z_1| - |z_2|$

We hebben:

$$\begin{cases} |z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1|, & |z_2| \geq |z_1| \\ |z_2 - z_1| \geq |z_1| - |z_2|, & |z_1| \geq |z_2|. \end{cases}$$

Samengevat: Steeds geldt:

$$|z_2 - z_1| \geq \big||z_2| - |z_1|\big|.$$

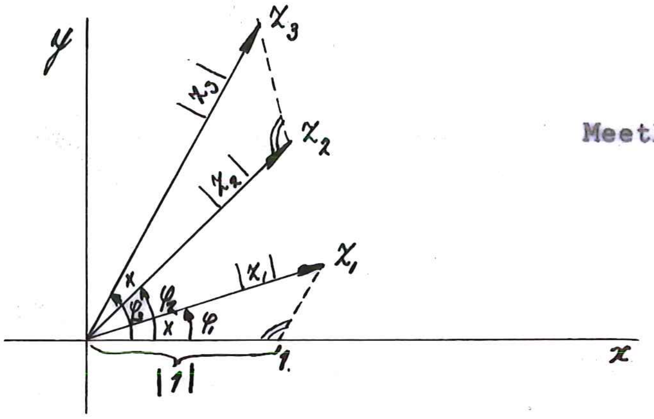
In woorden:

De absolute waarde van,(of de modulus van) het verschil van 2 complexe getallen is groter dan of gelijk aan de absolute waarde van het verschil der moduli van deze 2 complexe getallen.

Product van 2 vectoren.

1). Modulus van een product = product der moduli.

2). Arg product = som van de argumenten.



Meetkundige voorstelling.

Δ Δ zijn gelijkvormig:

$$|z_3| : |z_1| = |z_2| : |1| \rightarrow |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| .$$

arg z_3 = arg z_1 + arg z_2.

Theorie van de functies van complexe getallen.

$w = f(z)$,

bijv.:

$w = z^3 - 5z$

$w = \sin z$

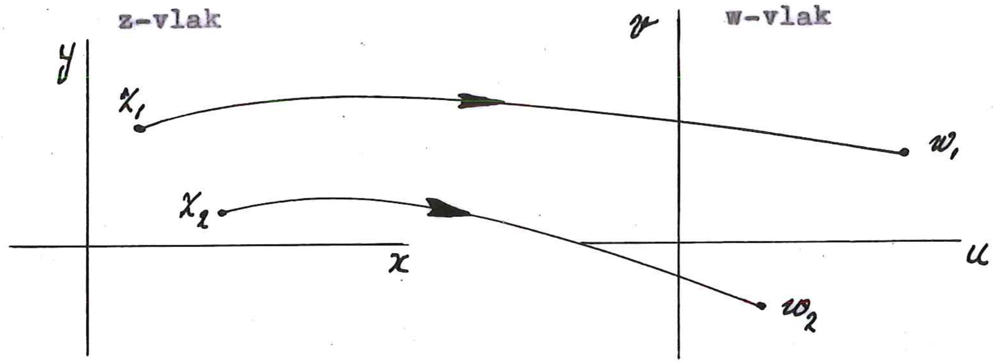
$w = \log z$.

w is ook complex: $w = u + iv$.

De afbeelding vindt plaats in 2 vlakken:

- het z-vlak: afbeelding van de onafhankelijk veranderlijke;
- het w-vlak: afbeelding van de afhankelijk veranderlijke of functie.

Dus afbeelding van $w = f(z)$.

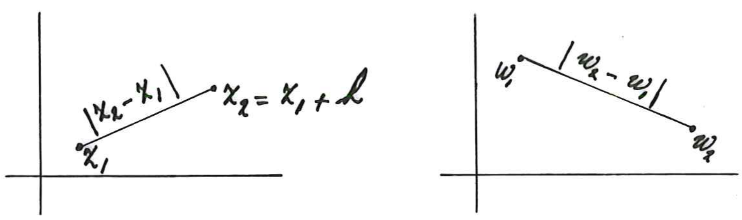


Algemeen functionaal verband.

Aan een willekeurig punt z van het z-vlak wordt één bepaald punt w van het w-vlak toegevoegd, volgens een bepaald voorschrift. Men zegt dan: $w = f(z)$; w_1 is de afbeelding van z_1 op het w-vlak. Er is een (1,1) duidige correspondentie tussen de punten van het z- en van het w-vlak.

1e. Eigenschap.

Het functionaalverband moet continu zijn.



De bedoeling is dus:

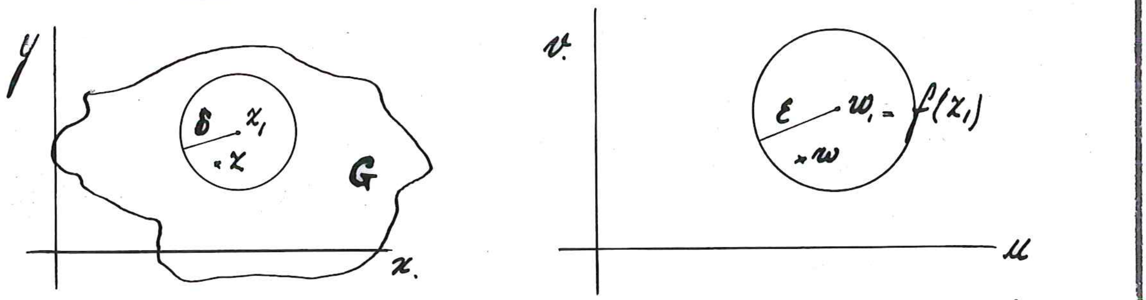
$|w_2 - w_1|$ moet klein zijn als $|z_2 - z_1|$ klein is.

Definitie van de <u>continuïteit</u> in een <u>punt</u>: Men noemt $w = f(z)$ continu in het punt $z = z_1$ als bij willekeurig gekozen $\varepsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ is te bepalen met de eigenschap:

voor <u>iedere</u> z met $|z - z_1| < \delta$ is $|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$.

Meetkundige toelichting:

z-vlak | w-vlak



$|z - z_1| < \delta \rightarrow$ z binnen cirkel met straal δ om z_1.

$|w_2 - w_1| = |f(z) - f(z_1)| < \varepsilon \rightarrow$ cirkelbegrenzing met straal ε

Er zijn nog andere eisen: Complement bij de definitie: Wanneer $f(z)$ continu is in ieder punt z_1 van het gebied G, dan heet $f(z)$ continu in G. Continuïteit in een <u>gebied</u>.

<u>Bijzondere functies</u>.

Voor reële x geldt:

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots$

(voor $-\cos < x < \infty$, of m.a.w. convergent voor alle x).

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots$

(eveneens convergent voor alle x).

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(convergent voor iedere x).

Voor complexe waarden van z geldt <u>per definitie</u>:

1). $1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\ldots \equiv \cos z$

een even functie: $f(-z) = f(z)$. Convergent voor alle z.

2). $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\ldots \equiv \sin z$

een oneven functie: $f(-z) = -f(z)$. Convergent voor alle z.

3). $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots \equiv \exp.\ z.$

(d.i. exponentiële functie van z).

<u>Stelling</u>: $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots = e^z$.

<u>Eigenschap</u>: $\exp.\ (z_1 + z_2) = \exp.\ z_1 \times \exp.\ z_2$

<u>Verband tussen deze 3 functies</u>. Neem in reeks (3) $z = iy$ (dus zuiver imaginair).

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \frac{i^5y^5}{5!} + \ldots\ldots$$

$i = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, $i^5 = i$ of: $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

dus:

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\ldots,$$
$$+ \frac{iy}{1!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{iy^5}{5!} \ldots\ldots$$

$$e^{iy} = \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right)}_{\text{reële deel } = u \; = \cos y} + i\underbrace{\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right)}_{\text{imaginaire deel } = v \; = \sin y}$$

$$\Longrightarrow \boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}.$$

Gevolgen:

a). $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy}$

$$= e^{x} \cdot (\cos y + i \sin y).$$

b). $\left| e^{z} \right| = \sqrt{(e^{x} \cos y)^2 + (e^{x} \sin y)^2}$

$$= \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = \sqrt{e^{2x}} = e^{x}$$

$$\boxed{\left| e^{z} \right| = e^{x}}$$

c). $e^{i\pi} = \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \underbrace{i \sin \pi}_{0} = -1.$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1.}$$

d). $e^{i\,\pi/2} = \underbrace{\cos \pi/2}_{0} + \underbrace{i \sin \pi/2}_{1} = i$

$$\boxed{e^{i \cdot \pi/2} = i}$$

e). $e^{i\,2\pi} = \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + \underbrace{i \sin 2\pi}_{0} = +1$

$$\boxed{e^{i \cdot 2\pi} = 1}.$$

Algemeen geldt:

$$\left\{ \begin{array}{ll} e^{2k\pi i} & = +1 \\ e^{(2k+1)\pi i} & = -1 \\ e^{(2k+\frac{1}{2})\pi i} & = +i \\ e^{(2k-\frac{1}{2})\pi i} & = -i \end{array} \right.$$

Voor k geheel. (Euler).

Opmerking:

1°. $i^{i} = (e^{i \cdot \pi/2})^{i} = e^{-\pi/2}$, daar $e^{(2k+1/2)\pi i} = i$

2°. algemeen:

$$i^{i} = \left\{ e^{(2k+1/2)\pi i} \right\}^{i} = e^{-(2k+1/2)\pi}.$$

k is een willekeurig natuurlijk getal. Dit zijn meerwaardige functies.

complex: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad \pm$

$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$

$e^{iz} - e^{-iz} = 2 i \sin z.$

$$\longrightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{en} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} .$$

Enkele functies van complexe veranderlijken waren:

Definitie:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\ldots$$

dit is een even functie:

$f\{-z\} = f\{z\}.$

Definitie:

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\ldots$$

dit is een oneven functie:

$f\{-z\} = -f\{z\}.$

Dit is dus analoog aan de cos- en sin-functie in de goniometrie. Beide reeksen zijn convergent. Zal later nog wel eens bewezen worden.

Definitie van exponentiële functie van z:

$$\exp. z \overset{\text{def.}}{=} 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots = e^z.$$

Eigenschap:

$$\exp.(z_1 + z_2) = \exp. z_1 . \exp. z_2 \longrightarrow \exp. z \overset{\text{def.}}{=} e^z$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Algemeen:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$
$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad \pm$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$$
$$e^{iz} - e^{-iz} = 2 i \sin z$$

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}.$$

Deze grondvergelijkingen moeten zeker gekend worden; er wordt dagelijks gebruik van gemaakt. Al het bovenstaande geldt voor <u>alle</u> complexe waarden van z.

<u>Gevolgen</u>:

$$\underline{\cos i z} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \underline{\cos h z},$$

dit is de cosinus hyperbolicus z. Als z reëel is, is cos h z reëel.

$$\underline{\sin i z} = \frac{iz}{1!} + \frac{iz^3}{3!} + \frac{iz^5}{5!} + \frac{iz^7}{7!} + \ldots$$

$$\underline{\frac{\sin i z}{i}} = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\ldots = \frac{e^{-z} - e^{z}}{-2} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \underline{\sin h z},$$

de sinus hyperbolicus z.

$$\boxed{\cos h z = \cos i z} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\boxed{\sin h z = \frac{\sin i z}{i}} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

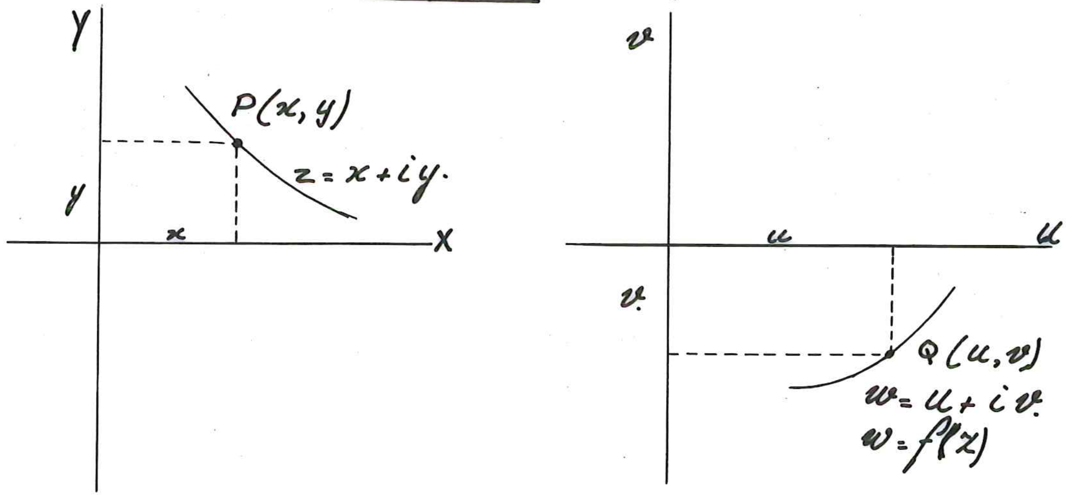
Er is ook een tgh z te definiëren:

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sin h z}{\cos h z}.$$

Hoofdeigenschap van de "hyperbolische goniometrie":

$$\boxed{\cos h^2 z - \sin h^2 z = 1}.$$

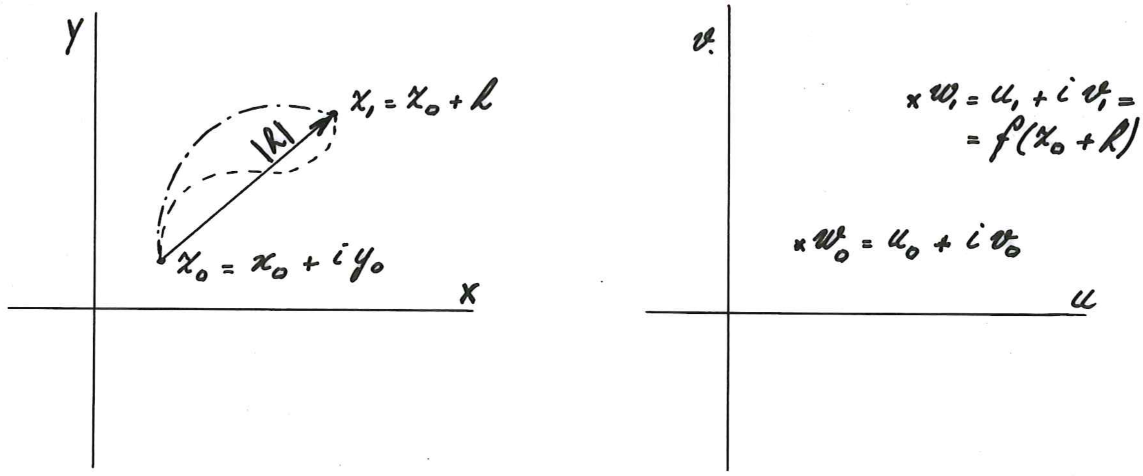
$w = f(z)$



Elk punt van het z-vlak correspondeert met één punt van het w-vlak. Er moet een (1.1) duidige correspondentie bestaan tussen punten van het z- en w-vlak.

De continuïteit is al behandeld. Nu moeten we ook nog het differentiaalquotient van complexe functies bespreken. Het begrip functie, waarmee we door al deze eisen kunnen werken, moeten we voor het differentiaalquotient nog verder inperken.

Differentiaalquotient van complexe functies.



Er is dus een functie w van z.

$$w_o = f(z_o)$$

$$w_1 = f(z_1) = f(z_o + h).$$

<u>Definitie</u>:

$$f'(z_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h},$$

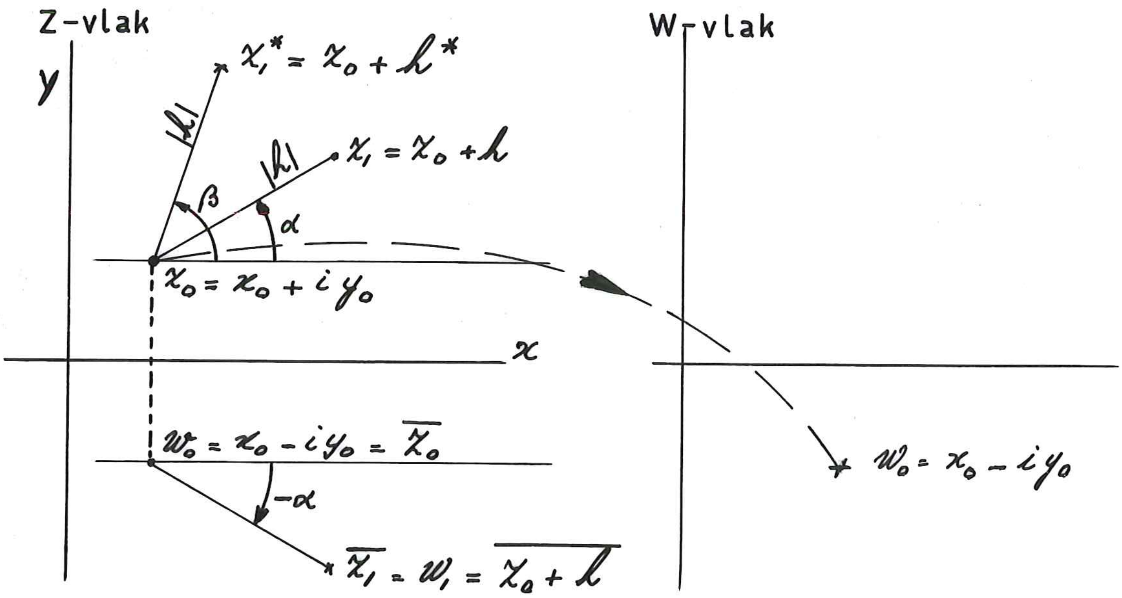
dus formeel is dit dezelfde definitie als in de gewone analyse:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Het verschil is echter, dat h bij de gewone analyse zich over de x-as beweegt, terwijl hij hier in een cirkel kan ronddraaien. De enige eis is dat je van $z_1 \longrightarrow z_o$ moet gaan, waarbij de weg <u>niet</u> bepaald is. De vraag doet zich dus voor of de limiet onafhankelijk is van de weg.

Gewenst is dat de onstane limiet steeds dezelfde uitkomst levert, voor <u>ieder</u> punt z_1 in de omgeving van z_o, en bij <u>elke</u> weg van z_1 naar z_o.

We onderzoeken dit aan de hand van een eenvoudig voorbeeld.



$w = f(z) = \overline{z}$.

Dit is zo'n eenvoudig geval ($w_o = x_o - i y_o$) dat we dit wel in hetzelfde vlak kunnen weergeven. Dus functie is: $w = f(z) = \overline{z}$. Dit houdt in: spiegeling t.o.v. reële as. Kies een punt z_1, en daarbij behoort $\overline{z_1} = w_1$. Kies de rechte weg van $z_1 \longrightarrow z_o$, arg.= α, arg. beeldpunt = $-\alpha$.

Differentie quotient. Volgens de voorlopige definitie is differentie quotient:

$$\frac{f(z_1) - f(z_o)}{z_1 - z_o} = \frac{f\left\{ z_o + h \right\} - f(z_o)}{h}$$

$$= \frac{\overline{z_o + h} - \overline{z_o}}{h} = \frac{\overline{z}_o + \overline{h} - \overline{z}_o}{h} = \frac{\overline{h}}{h},$$

$$h = |h| (\cos\alpha + i \sin\alpha) = |h|\cos\alpha + i|h|\sin\alpha,$$

toegevoegd:

$$\overline{h} = |h|\left\{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\right\}.$$

differentie quotient:

$$\frac{\overline{h}}{h} = \frac{|h| \ (\cos\alpha - i\sin\alpha)}{|h| \ (\cos\alpha + i\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha} \times \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} =$$

$$= (\cos\alpha - i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha.$$

Differentiaalquotient wordt dan:

$$\lim_{h \to o} \frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h} = \cos 2\alpha - i\sin 2\alpha.$$

(bij constante α !). Als weg is immers de rechte verbinding tussen z_1 en z_o gekozen, dus α = constant.

Neemt men een andere z_1 en dus een andere hoek: β, dan levert dit een andere uitkomst. Het differentiaalquotient is afhankelijk van α, dus van de weg. We zullen dus het functie verband moeten inkrimpen, willen we deze moeilijkheid omzeilen. Als het differentiaalquotient hiervan niet onafhankelijk is, is er niet mee te werken.

Om nu uit te zoeken welke functies wel en welke niet bruikbaar zijn voor onze theorie zal het doel van dit college zijn. De functies die wel aan de gestelde wens voldoen, worden analytische of holomorfe functies genoemd. Deze functies zullen in het college nog nader bekeken worden.

Uitvoeriger definitie van de afgeleide: Wanneer bij een gegeven functie $w = f(z)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = A$$

bestaat, voor alle waarden van $z_0 + h$ in de omgeving van z_0 en voor alle wegen van $z_0 + h$ naar z_0, dan noemt men deze limiet A: $f'(z_0)$ en dan is $f(z)$ differentieerbaar in z_0. Wanneer $f'(z_0)$ bestaat in alle punten van G (dus in ieder punt z_0 van G bestaat één bepaalde eindige limiet $A(z_0) = f'(z_0)$) dan heet de functie $f(z)$ **analytisch in het gebied G**, of holomorf in G.

Meetkundige verduidelijking.

We zullen ons voorlopig uitsluitend bezighouden met analytische functies, met uitbreiding van enkele singuliere punten, waar de functies niet analytisch zijn.

$w = z^n$ is een analytische functie in alle punten van het z-vlak (mits eindig !) en voor n geheel positief of negatief.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{z_1 \to z_0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} =$$

$$= \lim_{z_1 \to z_0} \frac{z_1^n - z_0^n}{z_1 - z_0}.$$

a). Neem n geheel positief. Dit is een merkwaardig quotient:

$$\lim_{z_1 \to z_0} \frac{z_1^n - z_0^n}{z_1 - z_0} = \lim_{z_1 \to z_0} (z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_0 + z_1^{n-3} z_0^2 + \ldots + z_0^{n-1})$$

$$= \underbrace{z_0^{n-1} + z_0^{n-1} + z_0^{n-1} + \ldots + z_0^{n-1}}_{n \text{ termen.}} = \underline{n \cdot z_0^{n-1}}.$$

b). Voor n negatief geheel: $n = -m$. Met m geheel positief. $w = z^{-m}$.

$$\lim_{z_1 \to z_0} \frac{z_1^{-m} - z_0^{-m}}{z_1 - z_0} = \lim_{z_1 \to z_0} \frac{\frac{1}{z_1^m} - \frac{1}{z_0^m}}{z_1 - z_0} = \lim_{z_1 \to z_0} \frac{z_0^m - z_1^m}{z_1^m z_0^m (z_1 - z_0)} =$$

$$= -\lim_{z_1 \to z_0} \frac{1}{z_0^m z_1^m} \cdot \left(\frac{z_1^m - z_0^m}{z_1 - z_0}\right) =$$

$$= -\lim_{z_1 \to z_0} \frac{1}{z_0^m \cdot z_1^m} (z_1^{m-1} + z_1^{m-1} z_0 + z_1^{m-2} z_0^2 + \ldots + z_0^{m-1})$$

$$= -\frac{1}{z_0^{2m}} \cdot m z_0^{m-1} = -m \cdot z_0^{-m-1} = -m \cdot z_0^{-m-1}$$

$$= \underline{\underline{n \cdot z_0^{n-1}}}$$

Dus onafhankelijk van keuze z_1 en van de weg. Q.e.d.

Wanneer een <u>eindig</u> aantal functies alle analytisch zijn:

$f_1(z)$; $f_2(z)$; $f_3(z)$; . . . .; $f_k(z)$,

dan is de som der functies ook een analytische functie:

$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots + f_k(z)$,

met afgeleide $f_1'(z) + f_2'(z) + \ldots + f_k'(z)$.

Bewijs volgt eenvoudig uit de eigenschappen van de limieten. Dus: iedere algebraïsche veelterm is een analytische functie.

$f(z) = 3 - 5z + 31z^2 + 12z^4$

$f'(z) = 0 - 5 + 62z + 48z^3$.

Vervolgens zal onderzocht worden aan welke eisen een functie moet voldoen, wil deze analytisch zijn. Daarvoor zal eerst de splitsing van $w = f(z) = u + iv$ in een reëel en een imaginair deel (resp. u en v) bekeken worden.

Bijv.:

$$-w = z^3 = (x + i\,y)^3 = x^3 + 3\,x^2\,i\,y + 3\,x\,i^2 y^2 + i^3 y^3$$

$$= x^3 + 3\,i\,x^2\,y - 3\,x\,y^2 - i\,y^3$$

$$= \underbrace{(x^3 - 3\,x\,y^2)}_{\substack{u(x,y) \\ \text{reële deel}}} + i\underbrace{(3\,x^2\,y - y^3)}_{\substack{v(x,y) \\ \text{imaginaire deel.}}}$$

$$-\sin(x + i\,y) = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2\,i}, \quad x \text{ en } y \text{ zijn reëel.}$$

Volgens:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i},$$

dus:

$$\sin(x + i\,y) = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{+y}(\cos x - i \sin x)}{2\,i}$$

$$= \frac{\cos x\,(e^{-y} - e^{y}) + i \sin x\,(e^{-y} + e^{y})}{2\,i} =$$

$$= \frac{i \cos x\,(e^{y} - e^{-y}) + \sin x\,(e^{y} + e^{-y})}{2} =$$

$$= \underbrace{\sin x \,.\, \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}}_{\substack{u(x,y) \\ \text{reëel deel}}} + \underbrace{i \cos x \,.\, \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}}_{\substack{v(x,y) \\ \text{imaginair deel}}} =$$

$$\sin x \,.\, \underbrace{\cosh y}_{= \cos i\,y} + i \cos x \,.\, \underbrace{\sinh y}_{= \frac{\sin i\,y}{i}}$$

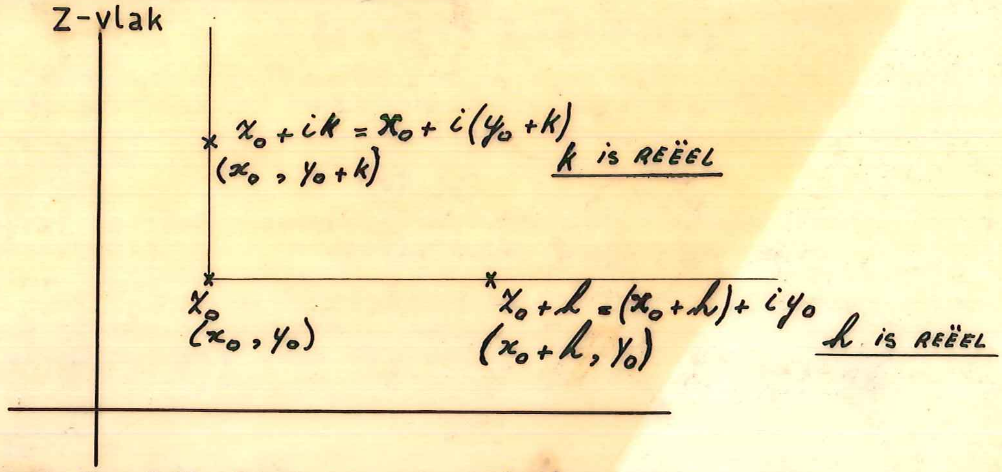
$$= \sin x \,.\, \cos i\,y + \cos x \,.\, \sin i\,y.$$

Het blijkt dus dat het gewone optellingstheorema uit de goniometrie ook hier opgaat.

De splitsing in een reëel en een imaginair deel is dus altijd mogelijk. Daar zullen we nu gebruik van maken.

$w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Wanneer is $f(z)$ analytisch in z_o?

a). <u>Noodzakelijke voorwaarden</u>.



Er <u>moet</u> dezelfde limietwaarde $f'(z_o)$ bestaan, als:

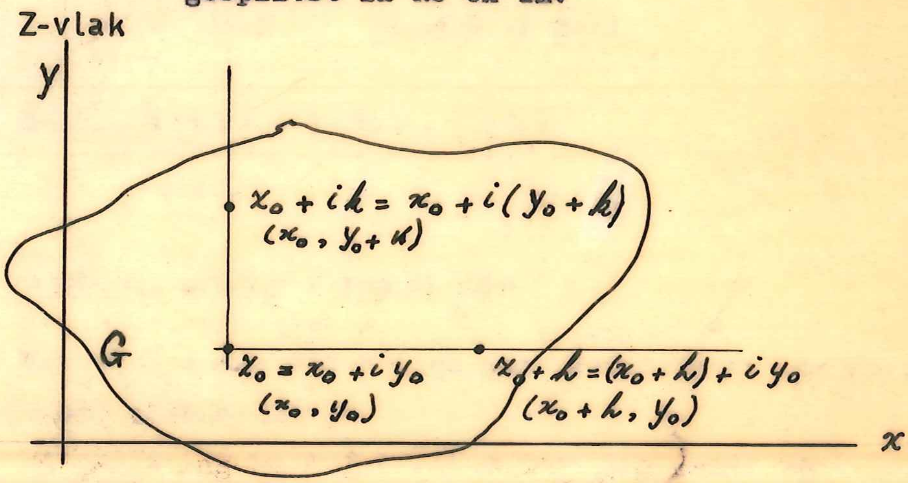
1°. $z_o + h \longrightarrow z_o$ langs een lijn // X-as;

2°. $z_o + k \longrightarrow z_o$ " " " // Y-as.

(Hier zijn dus <u>2</u> wegen gekozen, dit is in het algemeen dus zeker nog <u>niet</u> voldoende !) . In elk geval noodzakelijk.

Afleiding van de noodzakelijke voorwaarden voor differentieerbaarheid.

$$w = f(z) = \underbrace{u(x,y) + i\,v(x,y)}_{\text{gesplitst in Re en Im.}}$$



-h en k zijn reële getallen.

-<u>Kies</u> nu 2 wegen voor de afleiding van de afgeleide, n.l. // X-as d.m.v. $h \longrightarrow o$ en // Y-as d.m.v. $k \longrightarrow o$.

In elk geval zal de uitkomst voor deze 2 wegen dus dezelfde moeten zijn (noodzakelijke voorwaarden!) maar nog niet de garantie geven dat het langs alle wegen in orde is (niet voldoende!)

Afgeleide langs de lijn // X-as.

$$\frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h} = \frac{f\{(x_o + h) + i\,y_o\} - f\{x_o + i\,y_o\}}{h} =$$

$$= \frac{u(x_o + h, y_o) + i\,v(x_o + h, y_o) - u(x_o, y_o) - i\,v(x_o, y_o)}{h} =$$

$$= \frac{u(x_o + h, y_o) - u(x_o, y_o)}{h} + i\,\frac{v(x_o + h, y_o) - v(x_o, y_o)}{h}$$

In beide breuken zijn zowel teller als noemer reëel, immers Re$\{f(z)\}$ en Im$\{f(z)\}$ zijn reëel, evenals h. Limietovergang:

$$\lim_{h \to o} \frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{u(x_o + h, y_o) - u(x_o, y_o)}{h} +$$

$$+ i \lim_{h \to o} \frac{v(x_o + h, y_o) - v(x_o, y_o)}{h}.$$

Deze limieten zijn niets anders dan de in de reële analyse gedefinieerde partiële differentiaalquotienten:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_o, y_o} \quad \text{en:} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_o, y_o} .$$

Dus:

$$\lim_{h \to o} \frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_o, y_o} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_o, y_o} \qquad (1)$$

Afgeleide langs de lijn // Y-as.

Dit leidt volkomen analoog tot:

$$\lim_{k \to o} \frac{f(z_o + i\,k) - f(z_o)}{i\,k} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x_o, y_o} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x_o, y_o} =$$

$$= - i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x_o, y_o} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x_o, y_o} \qquad (2)$$

Gelijkstelling van (1) en (2) levert:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_o,y_o} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x_o,y_o} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_o,y_o} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x_o,y_o} \end{cases}$$

Noodzakelijke voorwaarden.

Noodzakelijke voorwaarden voor het analytisch zijn in een bepaald punt $z = x + i\,y$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} & (2) \end{cases}$$

Differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann.

Dus als aan deze voorwaarden niet voldaan wordt, is de functie zeker niet analytisch: bijv.:

$$w = f(z) = \bar{z} = x - i\,y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = +1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Ongelijk, dus niet analytisch; verg.blz.14.

Als aan deze voorwaarden wel wordt voldaan, is de functie dan ook analitisch? M.a.w. zijn deze voorwaarden ook voldoende? Dat zal nader onderzocht worden. Eerst nog een bijzonderheid van de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann.

1e. naar x gedifferentieerd: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

2e. naar y gedifferentieerd: $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

D.i. de differentiaalvergelijking van Laplace, die in tal van gebieden een uiterst belangrijke rol speelt.

Dus het reële gedeelte moet aan de differentiaalvergelijking van Laplace voldoen.

Idem:

1e. naar y gedifferentieerd: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

2e. naar x gedifferentieerd: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}$$

Dus ook het imaginaire deel moet aan de differentiaalvergelijking van Laplace voldoen.

Andere vorm van de noodzakelijke voorwaarden: het reële en het imaginaire deel van de functie moeten aan de differentiaalvergelijking van Laplace voldoen.

<u>Opm.:</u>

Iedere functie die aan de differentiaalvergelijking van Laplace voldoet wordt in de literatuur een <u>harmonische functie</u> genoemd.

<u>Voorbeeld</u> om te onderzoeken of de voorwaarden voldoende zijn:

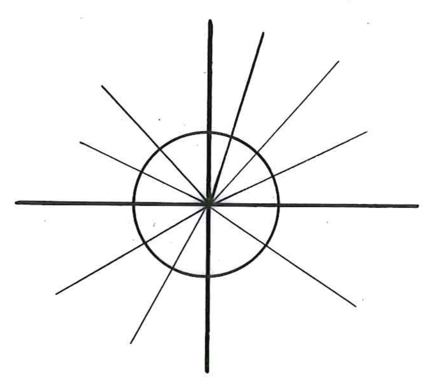
$$f(z) = u + i\,v = \frac{xy^2(x + i\,y)}{x^2 + y^4} = \frac{xy^2 z}{x^2 + y^4}$$

voor x en y niet tegelijk nul, dan is f(z) onbepaald. Hoe moet f(z) bepaald worden voor $z = 0$? In de omgeving van 0 poolcoördinaat $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$f(z) = \frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r^2\left\{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi\right\}} =$$

$$= \frac{r^2\cos\varphi\sin^2\varphi\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi}$$

$$|f(z)| = r^2\,\frac{|\cos\varphi| \cdot \sin^2\varphi \cdot 1}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi}$$



Voor $\varphi \neq \pi/2$:

$$|f(z)| = r^2\,\frac{|\cos\varphi| \cdot \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} < \frac{r^2}{\cos^2\varphi}$$

Voor $z \longrightarrow 0$, d.w.z. $r \longrightarrow 0$ bij willekeurige φ (uitgezonderd $\varphi = \frac{\pi}{2}$) gaat $|f(z)| \longrightarrow 0$. Nodig voor continuïteit in 0 is:

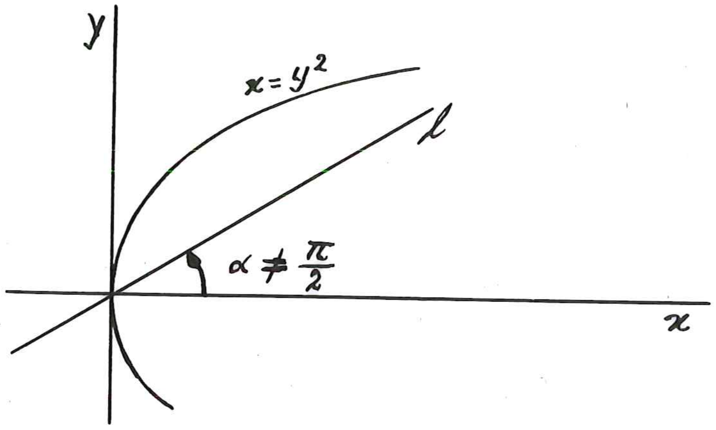
$|f(z)| = 0$ of $f(z) = 0$ in 0.

Er is één uitzondering gemaakt: de Y-as, deze moet apart bekeken worden.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \longrightarrow |f(z)| = r^2 \frac{0.1}{0 + r^2} = 0.$$

Dus voor continuïteit in de oorsprong is nodig $f(z) = 0$ in 0.

Op deze continue functie gaan we nu onderzoeken of het differentiaalquotient onafhankelijk van de weg is. Kies een rechte weg, onder een hoek α met de horizontaal.



De afgeleide van $f(z)$ in 0 langs l is:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(o)}{z - 0} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\frac{xy^2 z}{x^2 + y^4} - 0}{z} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^3 \cos \sin^2\alpha}{r^2\left\{\cos^2\alpha + r^2 \sin^4\alpha\right\}} = \lim_{r \to 0} r \frac{\cos\alpha \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + r^2 \sin^4\alpha} = 0$$

(Voor $\alpha \neq \pm \pi/2$; dan wordt noemer van 2e factor ook nul). Dus voor $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ is de afgeleide onafhankelijke van α . Voor $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{r \to 0} r \cdot \frac{0 . 1}{0 + r^2} = 0.$$

Dus conclusie: Langs alle <u>rechte</u> wegen door O blijkt $f'(z) = 0$ te zijn in het punt O.

Maar kies nu een kromme weg: de parabool $x = y^2$

$$\lim_{z \to 0} \frac{x y^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2 \cdot y^2}{y^4 + y^4} = \lim_{y \to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Aan de vergelijkingen van Cauchy-Riemann is dus niet alleen langs een lijn // X-as en // Y-as voldaan, maar zelfs langs elke rechte lijn. Toch blijkt de functie in het geheel niet analytisch te zijn. In het algemeen kan dus geconcludeerd worden dat de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann niet voldoende zijn.

<u>Voldoende</u> voorwaarden voor het analytisch zijn van een functie in het punt $z = x + i y$.

I. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$ differentiaalvergelijking van Cauchy-Riemann.

II. De partiële afgeleiden $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ en $\frac{\partial v}{\partial y}$ moeten <u>continue</u> functies zijn in het betrokken punt z.

<u>Bewijs</u>:

$x \longrightarrow x + \Delta x$

$y \longrightarrow y + \Delta y$ $\qquad f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

$$\Delta u = u\left\{x + \Delta x,\ y + \Delta y\right\} - u(x,y) =$$

$$u\left\{x + \Delta x, y + \Delta y\right\} - u\left\{x, y + \Delta y\right\} + u(x, y + \Delta y) - u(x,y).$$

Toepassing van de middelwaarde-stelling voor één veranderlijke:

$$f(x+h) - f(x) = h\, f'(\xi) \quad \text{voor } x < \xi < x + h$$

$$\xi = x + \theta h$$

$$0 < \theta < 1.$$

In de eerste 2 termen is de y een constante, in de tweede reeks van 2 termen is de x een constante.

$$\Delta u = \Delta x \cdot \frac{\partial u\{x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y\}}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial u\{x, y + \theta_2 \cdot \Delta y\}}{\partial y}.$$

Evenzo:

$$\Delta v = \Delta x \cdot \frac{\partial v\{x + \theta_3 \Delta x, y + \Delta y\}}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial v\{x, y + \theta_4 \Delta y\}}{\partial y}.$$

De continuïteit van de partiële afgeleiden eist nu: (de 2e voorwaarde !!)

$$\frac{\partial u(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1$$

Met $\varepsilon_1 \longrightarrow 0$ voor Δx en $\Delta y \longrightarrow 0$. Dat geldt ook voor:

$$\frac{\partial u\{x, y + \theta_2 \cdot \Delta y\}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2 \qquad (\varepsilon_2 \longrightarrow 0)$$

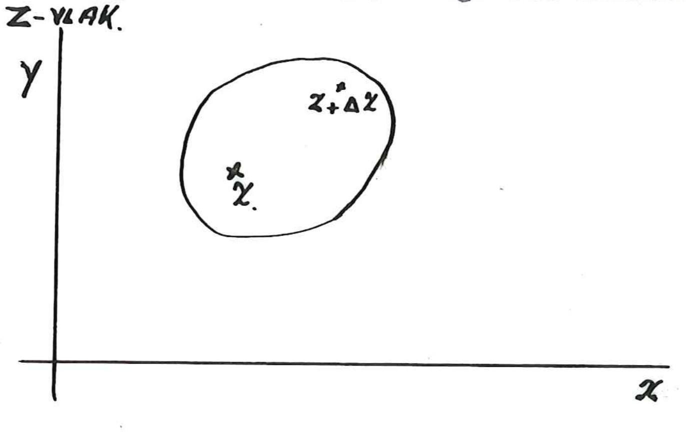
$$\frac{\partial v(x + \theta_3 \Delta x, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon_3 \qquad (\varepsilon_3 \longrightarrow 0)$$

$$\frac{\partial v(x, y + \theta_4 \cdot \Delta y)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon_4 \qquad (\varepsilon_4 \longrightarrow 0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta u &= \Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1\right) + \Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2\right) \\ \Delta v &= \Delta x\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon_3\right) + \Delta y\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon_4\right) \end{aligned}} \qquad \varepsilon_h \longrightarrow 0 \text{ voor } \Delta x, \Delta y \longrightarrow 0$$

$$\Delta f(z) = \Delta u + i\,\Delta v.$$

Bekijk nu de afgeleide van f(z) langs een willekeurige weg van z.



$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i\, v(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - i\, v(x,y)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{\Delta u(x,y) + i\,\Delta v(x,y)}{\Delta z} = \frac{\Delta u(x,y) + i\,\Delta v(x,y)}{\Delta x + i\,\Delta y} =$$

$$= \frac{\Delta x(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1) + \Delta y(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2) + i\,\Delta x(\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon_3) + i\,\Delta y(\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon_4)}{\Delta x + i\,\Delta y} .$$

Volgens de vergelijking van Cauchy-Riemann is:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{(De 1e voorwaarde !).}$$

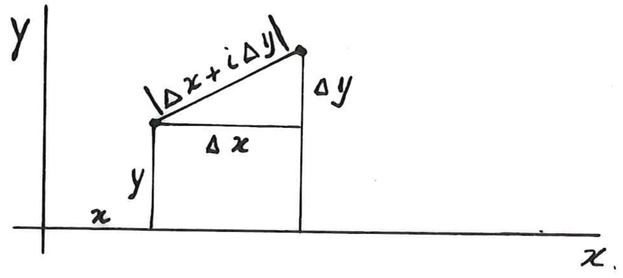
Dit geeft:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x} i(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + i\varepsilon_3\Delta x + i\varepsilon_4\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}}}_{\text{d.i. de afgeleide langs de x-as.}} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + i\,\varepsilon_3 \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + i\,\varepsilon_4 \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left\{ \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \right\} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \\ \Delta y} \to 0} \left\{ \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \cdots\cdots \right\} \qquad (1)$$



$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta x + i\,\Delta y} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y} \right| \leq 1$$

Van beide leden der gelijkheid (1) de modulus nemen en het rechterlid majoreren, geeft:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| \leq \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left\{ |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots \right\} = 0$$

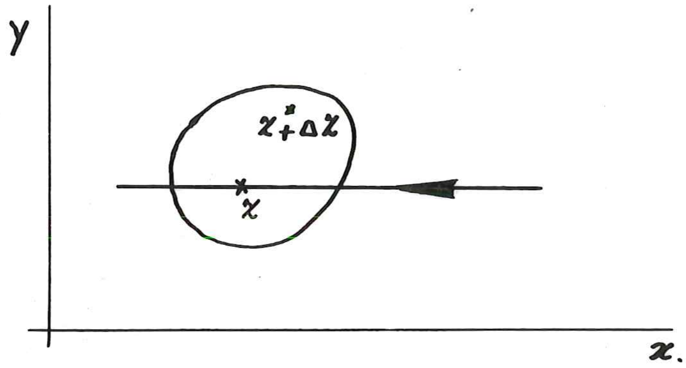
Dus:

$$\left| f'(z) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| = 0.$$

Dus voor iedere weg bestaat de afgeleide en is gelijk aan:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

dus aan de afgeleide langs de x-as.



Enkele grondkenmerken van de convergentie van reeksen.

R: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots\dots$ complexe getallen.

Een convergentie-criterium voor absolute convergentie is dat van d'Alembert: Een reeks is absoluut convergent als:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1,$$

en hij is absoluut divergent als:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1.$$

Het geval dat lim = 1 komt dus niet voor. In dat geval is het onbepaald en moeten andere criteria worden toegepast.

Toepassing op machtreeks:

R_2: $a_o + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots a_k z^k + \ldots$

a_k complex (dit sluit dus ook de reële getallen in !).
Stel:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 ,$$

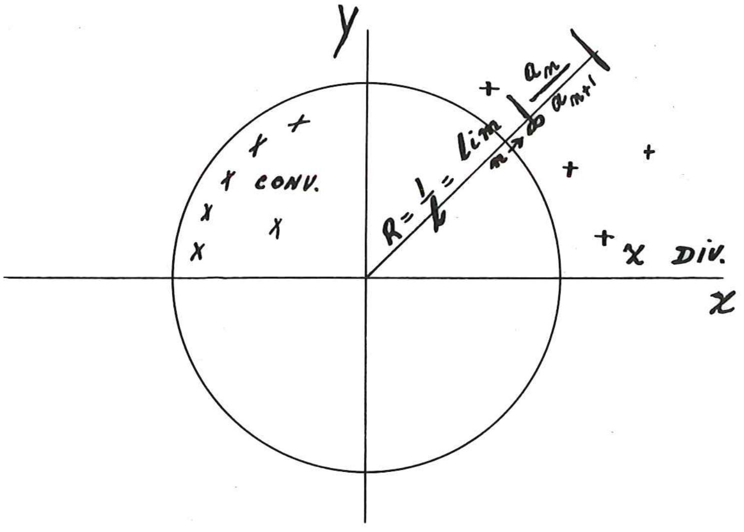
d'Alembert;

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |z| = 1 \cdot |z|$$

Dus R_2 convergeert absoluut als $1 \cdot |z| < 1$
divergeert als $1 \cdot |z| > 1$,

of: convergeert als $|z| < \frac{1}{l} = R$
divergeert als $|z| > \frac{1}{l} = R$

(R is geen aanduiding van een reeks, maar een meetkundige voorstelling).



Dus de reeks convergeert in een gebied binnen een straal R.

De machtreeks $R_2 = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots\ldots$ is <u>convergent</u> (absoluut, dus ook gewoon !) als z ligt <u>binnen</u> de cirkel met straal

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| ;$$

en hij is <u>divergent</u> als z waarden heeft <u>buiten</u> de cirkel.

Het gedrag op de cirkel is onbekend. De cirkel heet de convergentiecirkel; de straal heet de convergentiestraal.

Voorbeeld:

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \ldots (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{n+1}{(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

(In dit bijzondere geval is voor één punt op de cirkel: $z = 1$ (dus reëel getal) de reeks convergent: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots$, maar niet absoluut; de reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ is de harmonische reeks, die divergent is. Voor $z = -1$ is deze reeks divergent).(Op de hele convergentiecirkel, uitgezonderd in $z = -1$ is deze reeks convergent).

De bovenstaande eigenschap van de machtreeks is een gevolg van de driehoekseigenschap.

De convergentiestraal van de e-reeks wordt:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \qquad \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = n+1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$$

Dus de e-reeks convergeert voor elke z; voor de sin z en de cos z geldt dit eveneens.

We hebben gezien dat: z^n voor n geheel, analytische functies zijn en een som van een eindig aantal analytische termen is ook analytisch. Elke analytische functie is nu weer te geven in een machtreeks:

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

of eigenlijk meer algemeen:

$$(2) \quad f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

(Voor theorie over de reeksen is vooral het standaardwerk van Knopp aan te bevelen: "Unendliche Reihen").

Criterium van d'Alembert:

$$U_n = a_n z^n \qquad\qquad \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$
$$U_{n+1} = a_{n+1} z^{n+1}$$

Convergent als:

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| < 1$$

$$\rightarrow |z| . \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$|z| .\ l < 1, \text{ dus } |z| < \frac{1}{l},$$

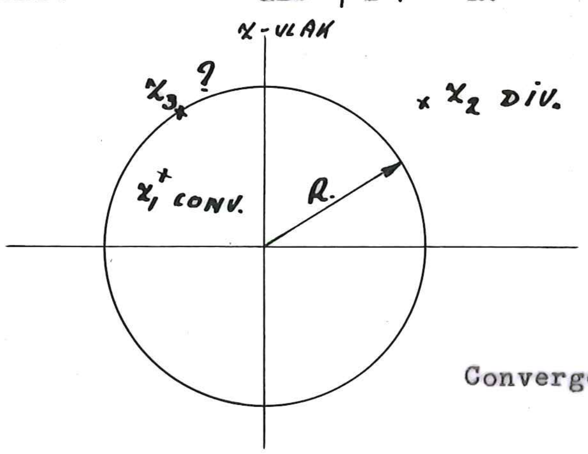
of:

$\lvert z \rvert < \lim \left\lvert\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\rvert$	Absoluut convergent.
$\lvert z \rvert > \lim \left\lvert\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\rvert$	Divergent.
$\lvert z \rvert = \lim \left\lvert\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\rvert$	Onbeslist.

Meetkundig.

Stel $\frac{1}{l}$ = R, dan is de reeks:

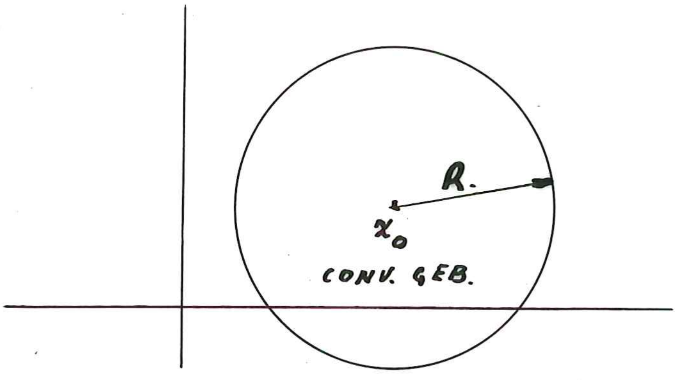
absoluut convergent als $|z| < R$
divergent als $|z| > R$
onbeslist als $|z| = R$.



Convergentiegebied.

Opm.: Een machtreeks die in het gehele complexe vlak convergeert, heet een gehele functie, (Fonction entière).

Bovenstaande is afgeleid voor reeks (1), d.i. $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$, voor $\sum_{0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ geldt dit juist zo, met het convergentie-gebied om een punt z_o heen.



Hoofdstelling van de functie theorie.

Wanneer een functie f(z) kan worden voorgesteld door een machtreeks, dan is deze functie binnen zijn convergentie-gebied een analytische functie.

Gegeven: Stel we hebben een reeks:

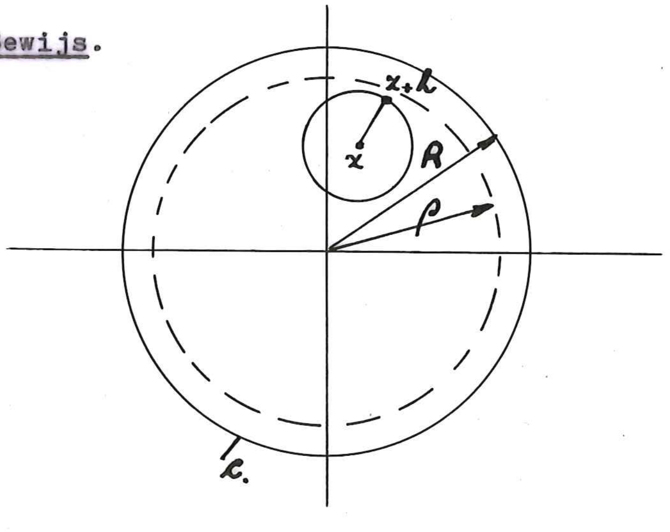
$$f(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots\dots$$

Een reeks van het type (2) kan door een eenvoudige substitutie tot type (1) worden teruggebracht. Deze reeks is convergent voor $|z| < R$.

Te bewijzen: f(z) is een analytische functie van z voor $|z| < R$.

Opm.: later zal ook het omgekeerde worden bewezen, zodat analytische functie en machtreeks in het convergentie-gebied synoniemen zijn.

Bewijs.



Te bewijzen: $f'(z)$ is éénduidig bepaald in ieder punt z binnen c, en wel:

$$f'(z) = 1.a_1 + 2.a_2 z + 3.a_3 z^2 + \dots\dots$$

Dus de machtreeks zal blijken termsgewijze te mogen worden gedifferentieerd.

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Neem een cirkel in het convergentie-gebied met straal $\rho < R$ en zodanig dat:

$$|z| < \rho \quad \text{en} \quad |z+h| < \rho$$

$$|U_n| = |a_n z^n| < |a_n| . \rho^n < |a_n| . R^n$$

De reeks $|a_0| + |a_1| \rho + |a_2| \rho^2 + \dots$ is convergent omdat z met $|z| = \rho < R$ binnen de convergentiecirkel ligt. ρ is gewoon een reëel getal (punt op de x-as), dus bovenstaande reeks is een gewone "reële reeks". Nu is volgens de meest primaire (noodzakelijke) voorwaarde voor convergentie:

$$\lim_{n \to \infty} |u_n| = \lim_{n \to \infty} |a_n| \rho^n = 0.$$

Dus $|a_n| . \rho^n$ is begrensd voor elke n(geheel) of:

$|a_n| \rho^n < M$ voor alle gehele, positieve n of:

voor $n = 0,1,2,\dots$ is: $\boxed{|a_n| < \frac{M}{\rho^n}}$

Gegeven is $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ convergent voor $|z| < R$ en noem:

$$g(z) = 1.a_1 + 2.a_2 z + 3.a_3 z^2 + \dots = \sum_0^\infty n\, a_n z^{n-1}.$$

Bekijk dan:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_0^\infty \left\{ a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n\, a_n z^{n-1} \right\}.$$

De reeks $g(z)$ is hier dus a.h.w. uit de lucht komen vallen. Hij heeft tot nu toe nog geen enkele betekenis. Het is de reeks die opgebouwd is uit de afgeleiden van de termen van $f(z)$. $g(z)$ is ook convergent voor $|z| < R$, immers:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1) a_{n+1} z^n}{n\, a_n z^{n-1}} \right| = |z| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| . \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =$$

$$= 1 . 1 . |z| < 1.R = 1.$$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n \left\{ \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n\, z^{n-1} \right\}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} a_n \left\{ \frac{(z^n + \frac{n}{1!} z^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2} h^2 + \ldots + h^n) - z^n}{h} - n\, z^{n-1} \right\}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} a_n \left\{ (n(z^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2} h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} z^{n-3} h^2 \ldots + h^{n-1}) + \right.$$

$$\left. - n\, z^{n-1} \right\}.$$

$$= \sum_{0}^{\infty} a_n \left\{ \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2} h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} z^{n-3} h^2 + \ldots + h^{n-1} \right\}.$$

Dus: moduli linkerlid = moduli rechterlid $\leq$ som moduli afzonderlijke termen rechterlid.

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left\{ \frac{n(n-1)}{1.2} |z|^{n-2} |h| + \ldots + |h|^{n-1} \right\}$$

$$< M \underbrace{\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{ \frac{n(n-1)}{1.2} |z|^{n-2} |h| + \ldots + |h|^{n-1} \right\}}_{\text{deze som is te bepalen.}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{ \frac{n(n-1)}{1.2} |z|^{n-2} |h| + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} |z|^{n-3} |h|^2 + \ldots + |h|^{n-1} \right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{ \frac{\left[|z| + |h| \right]^n - (|z|)^n}{|h|} - n |z|^{n-1} \right\}.$$

Dit volgt n.l. direct uit toepassing van het binomium van Newton op de vorm $\left\{ |z| + |h| \right\}^n$, dus hetzelfde als boven gedaan, maar nu met toepassing op de moduli, of:

$$\sum_{0}^{\infty} = \frac{1}{|h|} \underbrace{\sum_{0}^{\infty} \frac{(|z|+|h|)^n}{\rho^n}}_{\text{M.R. met reden}} - \frac{1}{|h|} \underbrace{\sum_{0}^{\infty} \frac{|z|^n}{\rho^n}}_{\text{M.R. met reden}} - \underbrace{\sum_{0}^{\infty} \frac{n|z|^{n-1}}{\rho^n}}_{\text{herleiding zie verder}}$$

$$\frac{|z| + |h|}{\rho} < 1 \qquad \frac{|z|}{\rho} < 1$$

Dus:

$$\sum_0^\infty = \frac{1}{|h|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z|+|h|}{\rho}} - \frac{1}{|h|} \cdot \frac{1}{1-\frac{|z|}{\rho}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{(1-\frac{|z|}{\rho})^2}}_{\text{afleiding hiervan zie verder.}}$$

De derde reeks is:

$$\sum_0^\infty \frac{n|z|^{n-1}}{\rho^n} = \frac{1}{\rho} \sum_0^\infty n\, x^{n-1} = \frac{1}{\rho}(1-x)^{-2}$$

want voor:

$$x = \frac{|z|}{\rho} \text{ is } n\,x^{n-1} < 1.$$

Want volgens het Binomium van Newton is:

$$(1-x)^{-2} = 1 + \frac{-2}{1}(-x) + \frac{-2.-3}{1.2}(-x)^2 + \frac{-2.-3.-4}{1.2.3}(-x)^3 + \ldots$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

Op andere "H.B.S."-manier: reeks is:

$$\sum_0^\infty n\,x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots,$$

dus:

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \\ x\,S = & \quad\;\; 1x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots \quad - \\ \hline S(1-x) = & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \end{array} = \frac{1}{1-x} \quad \text{of: } S = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Dit laatste volgens bekende reeksontwikkeling, geldig voor $|x| = \frac{|z|}{\rho} < 1$. Daaraan is voldaan.

Teruggaande tot de oorspronkelijke vorm, vinden we:

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) \right| < M \left\{ \frac{1}{|h|} \cdot \frac{\rho}{\rho - |z| - |h|} - \frac{1}{|h|} \cdot \frac{\rho}{\rho - |z|} - \frac{\rho}{(\rho - |z|)^2} \right.$$

$$= M \left\{ \frac{\rho}{|h|} \cdot \frac{|h|}{\{\rho - |z| - |h|\}\{\rho - |z|\}} - \frac{\rho}{(\rho - |z|)^2} \right.$$

$$= M \frac{\rho}{(\rho - |z|)} \left\{ \frac{1}{\rho - |z| - |h|} - \frac{1}{\rho - |z|} \right\}$$

$$= M \cdot \frac{\rho}{\rho - |z|} \cdot \frac{|h|}{(\rho - |z| - |h|)(\rho - |z|)} =$$

$$= \frac{M.\rho.|h|}{\{\rho - |z|\}^2 \{\rho - |z| - |h|\}}$$

Voor $|h| \longrightarrow 0$ nadert de teller $\longrightarrow 0$ en de noemer $\longrightarrow \{\rho - |z|\}^3 \neq 0$.
Dus:

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| = 0.$$

Als de modulus $\longrightarrow 0$ nadert de complexe $\overset{\text{VERSCHIL}}{\text{waarde}}$ ook naar nul, dus: als de modulus van het verschil $\longrightarrow 0$ gaan de 2 complexe getallen naar hetzelfde punt. Dus:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z).$$

Dit is volkomen onafhankelijk van de weg, gevolgd van $z + h \longrightarrow z$ en van de keuze van h. Dus: $f'(z)$ bestaat en:

$$= g(z) = 1 \cdot a_1 + 2 a_2 z + \dots$$

$$= \sum_0^\infty n a_n z^{n-1}$$

$$= \sum_0^\infty (a_n z^n)'.$$

Dus er zijn twee dingen tegelijk bewezen:

1. de afgeleide bestaat, dus de functie is analytisch,
2. binnen haar convergentiecirkel mag een machtreeks termsgewijs gedifferentieerd worden.

Toepassing op de al ter sprake gebrachte reeks:

$$f(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \ldots |z| < 1,$$

$$\underbrace{f'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4}_{\text{termsgewijze differentiatie}} \underbrace{- \dots \dots = \frac{1}{1+z}}_{\text{bekende reeksontwikkeling}}$$

dus:

$$f(z) = \log(1 + z)$$

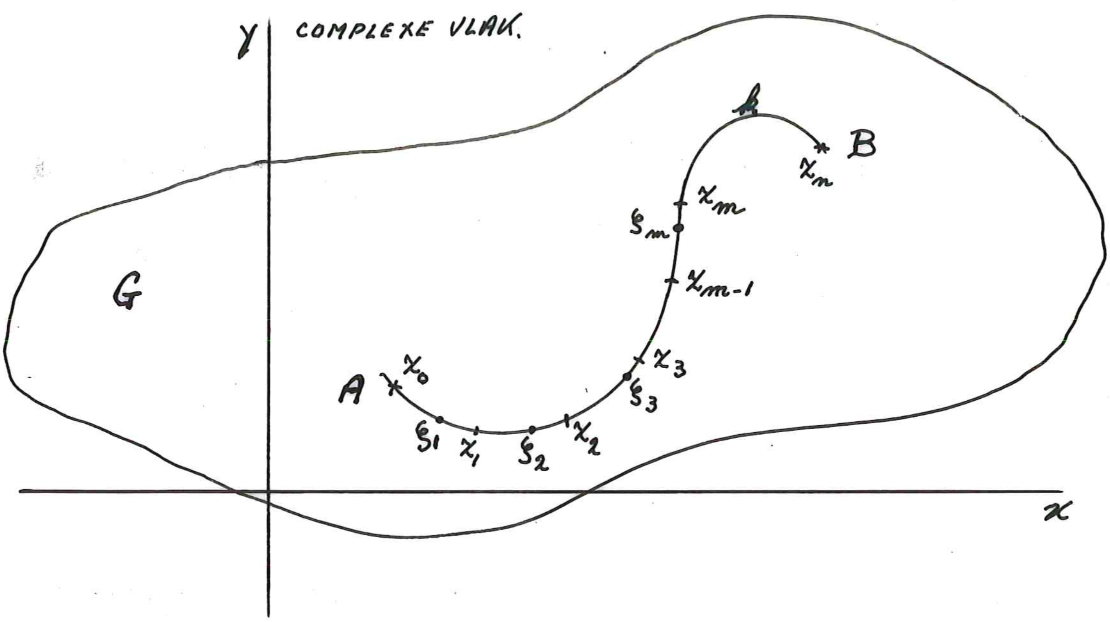
en:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z}$$

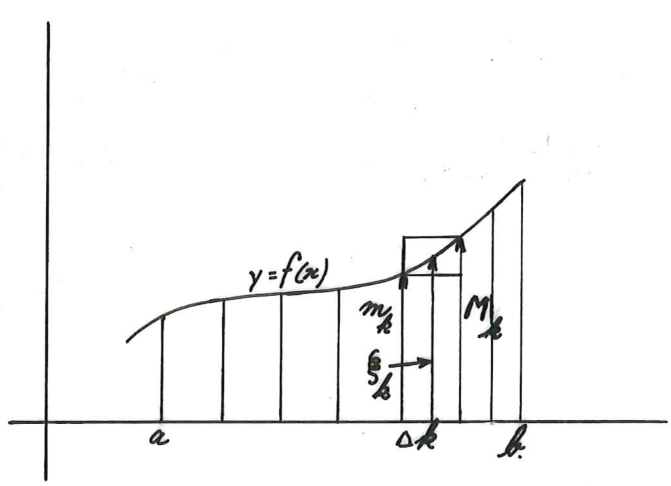
We zullen later zien dat als een analytische functie dus een eerste afgeleide heeft, dan heeft hij ook een 2e, 3e, 4e enz. afgeleide. Of: als een functie f(z) een eenduidig bepaalde eerste afgeleide bezit (dus analytisch is), bezit hij automatisch alle hogere afgeleiden. Dit zal langs andere weg worden aangetoond dan de voorgaande.

Als de eerste afgeleide bestaat, behoudens in enkele uitzonderingspunten (de singuliere punten) geldt dit ook nog. Maar het zal bewezen worden d.m.v. de integraalrekening.

Integraalrekening van complexe functies.



f(z) is slechts continu verondersteld in een gebied G. A en B zijn willekeurige punten in G; A en B worden verbonden door een willekeurige kromme k in G, een aaneengesloten punten verzameling. Er is één beperking: de lengte van de kromme is begrensd (L < K).



In de reële analyse is de integraal gedefinieerd als:

Riemannse bovensom

$\sum M_k \Delta_k \downarrow$ dalend

$\xrightarrow{\text{limiet}} = \int_a^b f(x)\,dx$.

Riemannse ondersom

$\sum m_k \Delta_k \uparrow$ stijgend

Verder ligt $\sum f(\xi_k)\Delta_k$ tussen de beide sommen in.

Zo gaan we ook in het complexe vlak te werk. Verdeel k in n gelijke delen: $z_o, z_1, z_2, \ldots\ldots z_n \equiv B$. Neem in ieder interval ergens een willekeurig punt: ξ . Beschouw nu:

$$\sum_{m=1}^{m=n} \underbrace{(z_m - z_{m-1})}_{=\Delta_k} \underbrace{f(\xi_m)}_{=f(\xi_k)}$$

Dus dezelfde som als in de reële analyse.

1. Kromme k wordt vastgelegd, maar is willekeurig. Het beste gebeurt dit door een parameter voorstelling:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$$ Dan is: $z = x + i\,y = \varphi_1(t) + i\,.\,\varphi_2(t)$.

Verondersteld wordt dat φ_1 en φ_2 differentieerbaar zijn, dus $\varphi_1'(t)$ en $\varphi_2'(t)$ bestaan. Het bewijs kan nog algemener, maar wordt dan helemaal vreselijk moeilijk. Op k is:

$$f(z) = U\,(x, y) + i\,v\,(x, y) =$$

$$= U\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\} + i\,v\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\} = U(t) + i\,v(t).$$

In het punt A is $t = t_o$

In het punt B is $t = T(=t_n)$.

De parameter-waarden binnen een interval $z_m - z_{m-1}$ worden τ_m genoemd; τ_m behoort dus bij ξ_m. Dan is:

$$\sum_{m=1}^{n} (z_m - z_{m-1})\,.\,f(\xi_m) = \sum_{m=1}^{m=n} \Big\{(\varphi_1(t_m) - \varphi_1(t_{m-1})) +$$

$$+ i(\varphi_2(t_m) - \varphi_2(t_{m-1}))\Big\} \times \Big\{ U(\tau_m) + i\,v\,(\tau_m)\Big\}.$$

Hierop wordt de stelling van het gemiddelde uit de reële analyse toegepast: (functies φ zijn reële functies !)

$$\varphi(t_a)-\varphi(t_b)=(t_a-t_b)\cdot\varphi'(\tau), \text{ met } t_a<\tau<t_b.$$

Dus:

$$\Sigma=\sum_{m=1}^{m=n}(t_m-t_{m-1})\left\{\varphi_1'(\bar{\tau}_m)+i\,\varphi_2'(\bar{\bar{\tau}}_m)\right\}\left\{U(\tau_m)+i\,v(\tau_m)\right\}$$

Hierin is dus:

$$t_{m-1}<\tau_m<t_m$$
$$t_{m-1}<\bar{\tau}_m<t_m$$
$$t_{m-1}<\bar{\bar{\tau}}_m<t_m.$$

Maar het behoeven niet dezelfde τ_m's te zijn. Dat kan niemand weten.

$$\Sigma=\sum_{m=1}^{m=n}(t_m-t_{m-1})\Big[\underbrace{\left\{\varphi_1'(\bar{\tau}_m).\,U(\tau_m)-\varphi_2'(\bar{\bar{\tau}}_m).\,v(\tau_m)\right\}}_{\text{reële deel}}+$$

$$+\,\underbrace{i\left\{\varphi_1'(\bar{\tau}_m)\,v(\tau_m)+\varphi_2'(\bar{\bar{\tau}}_m)\,U(\tau_m)\right\}}_{\text{imaginaire deel.}}\Big]$$

Of:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma=&+\sum_{m=1}^{m=n}\varphi_1'(\bar{\tau}_m).\,U(\tau_m)\,(t_m-t_{m-1})+\\&-\sum_{m=1}^{n}\varphi_2'(\bar{\bar{\tau}}_m).\,v(\tau_m)\,.(t_m-t_{m-1})+\\&+i\sum_{m=1}^{n}\varphi_1'(\bar{\tau}_m).\,v(\tau_m)\,.(t_m-t_{m-1})+\\&+i\sum_{m=1}^{n}\varphi_2'(\bar{\bar{\tau}}_m).\,u(\tau_m)\,.(t_m-t_{m-1})\end{aligned}\right\}\text{Dit zijn 4 gewone, reële Riemann-sommen.}$$

Uit de reële analyse is dan bekend dat al deze Riemann-sommen naderen tot gewone integralen uit de reële analyse. Dus:

$$\sum_{m=1}^{m=n}f(\xi_m).(z_m-z_{m-1})=+\int_{t_0}^{T}u(t)\,.\,\varphi_1'(t)\,.\,dt+$$

$$- \int_{t_o}^{T} v(t) \cdot \varphi_2'(t) \cdot dt +$$

$$+ i \int_{t_o}^{T} v(t) \cdot \varphi_1'(t)\, dt +$$

$$+ i \int_{t_o}^{T} u(t) \cdot \varphi_2'(t) \cdot dt.$$

Dit is samen te vatten tot:

$$\int_{t_o}^{T} \left\{ u(t) \cdot \varphi_1'(t) - v(t) \cdot \varphi_2'(t) + i\, v(t) \cdot \varphi_1'(t) + i \cdot u(t) \cdot \varphi_2'(t) \right\} dt =$$

$$= \int_{t_o}^{T} \boxed{\left\{ u(t) + i\, v(t) \right\}} \boxed{\left\{ \varphi_1'(t) + i\, \varphi_2'(t) \right\}} dt =$$

$$= \int_{\substack{t_o = A \\ (k)}}^{z_n = B} f(z) \cdot dz$$

Hiermee is het integraal begrip voor complexe functies gedefinieerd:

$$\int_{\substack{z_o = A \\ (k)}}^{z_n = B} f(z) \cdot dz.$$

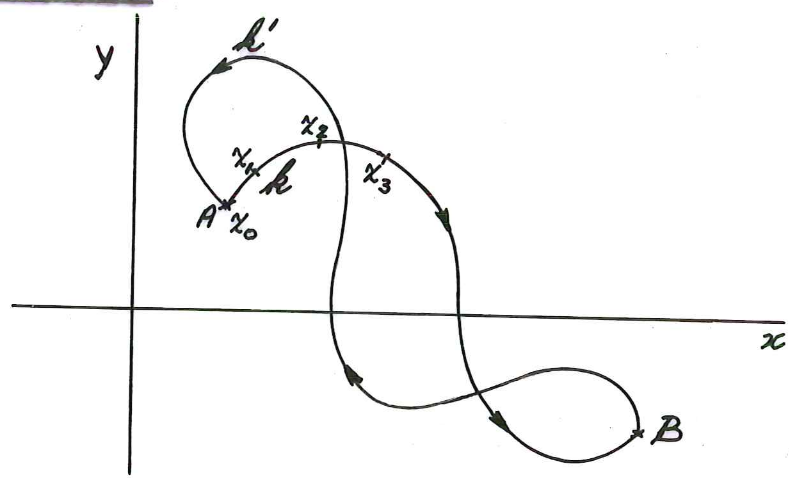
Hier zit de kromme k nog in. We kunnen voor een andere kromme dezelfde redenering opzetten, maar deze zal steeds een andere integraal opleveren. Maar het zal blijken dat iedere kromme k tussen A en B dezelfde uitkomst geeft. Er zal dus worden aangetoond dat:

$$\int_{\substack{A \\ (k)}}^{B} f(z)\, dz$$ <u>onafhankelijk</u> is van k.

Er zullen daarvoor eerst een aantal voorbeelden en voorbereidende maatregelen worden gegeven.

Bijzondere gevallen.

1.



f(z) = C (constante) die is overal analytisch en ook continu: f'(z) = 0.
Dus geldig voor gehele complexe vlak. Het uitgangspunt was:

$$\sum_{m=1}^{m=n} f(\xi_m) \cdot (z_m - z_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} C.(z_m - z_{m-1}) =$$

$$C. \sum_{m=1}^{n} (z_m - z_{m-1}) = C\left\{(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1})\right\} =$$

$$= C.(z_n - z_0).$$

Dus bij iedere verdeling, fijn of grof, is:

$$\underset{(k)}{\int_{z_0}^{z_n}} C\,dz = C\,(z_n - z_0)$$

onafhankelijk van de weg k, want z_n en z_0 zijn eind- en beginpunt.
De weg k is doorlopen van A ⟶ B. Gaan we nu omgekeerd van B ⟶ A, langs dezelfde of een andere weg, dan krijgen we:

$$\underset{(k')}{\int_{z_n}^{z_0}} C\,dz = C(z_0 - z_n)$$

Opgeteld:

$$\int C\,dz = \oint C\,dz = 0$$

(contour- of kringintegraal).

2. $f(z) = z.$

Deze is ook analytisch, en de afgeleide is overal 1.

$$\sum_{m=1}^{n} f(\xi_m) \cdot (z_m - z_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} \xi_m \cdot (z_m - z_{m-1})$$

ξ_m is willekeurig, maar $z_{m-1} \leqslant \xi_m \leqslant z_m$. Kies ξ_m in de beginpunten van elk interval:

$$S_1 = \sum_{m=1}^{n} z_{m-1} \cdot (z_m - z_{m-1}) \xrightarrow{\text{verfijning}} \int_{z_o\,(k)}^{z_n} z\,dz \quad \text{Riemannse ondersom.}$$

Kies ξ_m in de eindpunten van elk interval:

$$S_2 = \sum_{m=1}^{n} z_m (z_m - z_{m-1}) \xrightarrow{\text{verfijning}} \int_{z_o\,(k)}^{z_n} z\,dz\,. \quad \text{Riemannse bovensom.}$$

Opgeteld:

$$S_1 + S_2 = \sum_{m=1}^{m=n} (z_m + z_{m-1})(z_m - z_{m-1}) \longrightarrow 2 \int_{z_o\,(k)}^{z_n} z\,dz$$

$$S_1 + S_2 = \sum_{m=1}^{n} (z_m^2 - z_{m-1}^2) \longrightarrow 2 \int_{z_o\,(k)}^{z_n} z\,dz$$

of:

$$S_1 + S_2 = z_n^2 - z_o^2 = 2 \int_{z_o\,(k)}^{z_n} z\,dz.$$

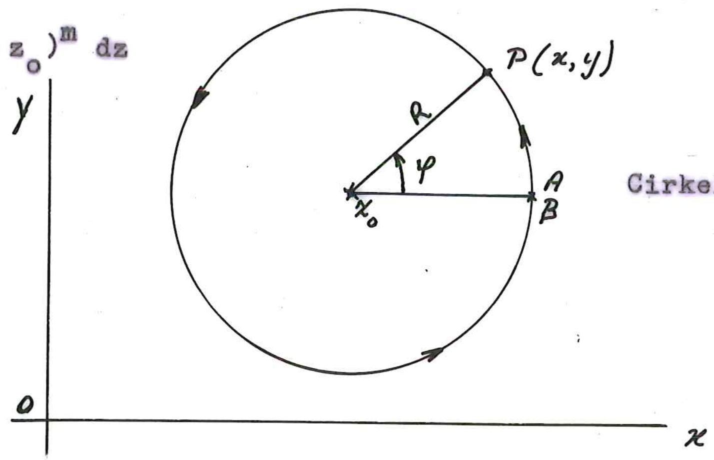
Ook hier blijkt de integraal alleen van de eindpunten af te hangen en niet van de weg k. Dus:

$$\int_{z_o}^{z_n} z\,dz = \tfrac{1}{2}(z_n^2 - z_o^2), \text{ onafhankelijk van } k, \text{ en:}$$

$$\oint z\,dz = 0.$$

3. We zullen nu willen onderzoeken $\int z^m dz$, maar we doen het iets algemener: $\int (z - z_0)^m\, dz$. Bovendien kijken we direct naar de contour-integraal en wel langs een heel bijzondere contour: een cirkel.

$$\oint (z - z_0)^m\, dz$$



Cirkel om z_0

M is <u>geheel</u>. (pos. neg. of nul). Parametervergelijking van de cirkel:

$$x = x_0 + R\cos\varphi$$

$$y = y_0 + R\sin\varphi$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$x - x_0 = R\cos\varphi$$

$$y - y_0 = R\sin\varphi$$

$$(z - z_0) = (x - x_0) + i(y - y_0) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= \underline{\underline{R e^{i\varphi}}}$$

$$z = z_0 + R e^{i\varphi}.$$

$$z = x + iy = (x_0 + iy_0) + R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$dz = \quad 0 + R(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$= \quad R i(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, d\varphi = \underline{\underline{R i e^{i\varphi}\, d\varphi}}.$$

$$\oint (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} R^m e^{i\varphi m} . R\, i e^{i\varphi}\, d\varphi =$$

$$= i R^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{(m+1)i\varphi}\, d\varphi =$$

$$= i R^{m+1} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos(m+1)\varphi + i\sin(m+1)\varphi \right\} d\varphi =$$

$$\boxed{= i R^{m+1} \int_0^{2\pi} \cos(m+1)\varphi \,.\, d\varphi - R^{m+1} \int_0^{2\pi} \sin(m+1)\varphi\, d\varphi =}$$

$$= i\,R^{m+1}\underbrace{\left[\frac{\sin(m+1)\varphi}{m+1}\right]_{o}^{2\pi}}_{=0 \text{ voor } m \neq -1} + R^{m+1}\underbrace{\left[\frac{\cos(m+1)\varphi}{m+1}\right]_{o}^{2\pi}}_{=0 \text{ voor } m \neq -1}$$

Dus: $\oint (z-z_o)^m\,dz = 0$ voor $m \neq -1$.

Voor $m = -1$ moeten we teruggaan tot de laatste integraal (omrand):

$$\oint (z-z_o)^m\,dz = i.1\int_o^{2\pi} 1.d\varphi - 1.\int_o^{2\pi} 0.d\varphi = 2\pi i.$$

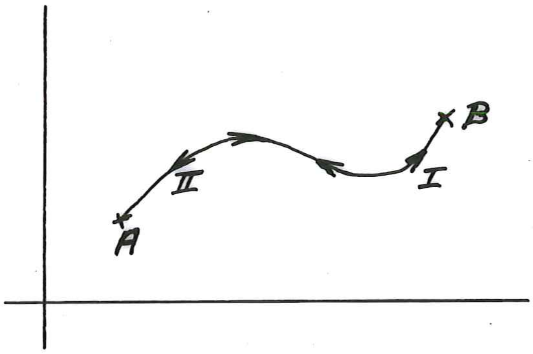
Samenvattend:

$$\oint (z-z_o)^m\,dz = 0 \qquad \text{voor } m \neq -1$$

$$\oint (z-z_o)^m\,dz = 2\pi i \qquad \text{voor } m = -1.$$

Steeds voor m is geheel. De oorzaak is, dat $\frac{1}{z-z_o}$ niet analytisch is in het punt z_o; er is daar een discontinuïteit.

<u>Stellingen</u>.



Riemann som I:

$$\sum_{m=1}^{n} f(\xi_m)(z_m - z_{m-1}).$$

terug langs dezelfde weg:

Riemann som II:

$$\sum_{1}^{n} f(\xi_m)(z_{m-1} - z_m).$$

Dus elke 2e Riemann som is het tegengestelde van de eerste.

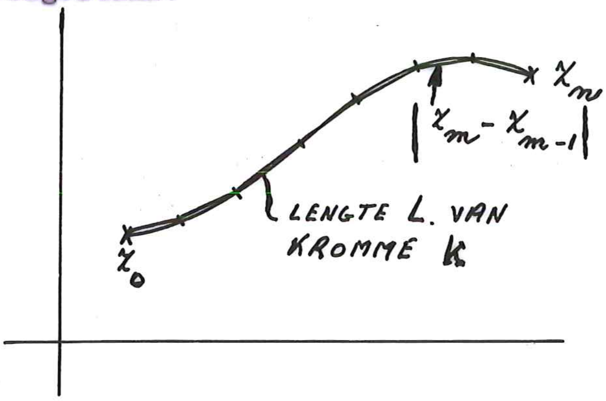
Het gevolg is:

-) $$\boxed{\int_{z_n}^{z_o} f(z)\,dz = -\int_{z_o}^{z_n} f(z)\,dz.}$$

-) $$\int_{z_o}^{z_n} C.f(z)\,dz = C\int_{z_o}^{z_n} f(z)\,dz$$

-) $$\int_{z_o}^{z_n}\left\{f(z) \pm g(z)\right\} dz = \int_{z_o}^{z_n} f(z)dz \pm \int_{z_o}^{z_n} g(z)\,dz.$$

Er is nog een stelling die belangrijker is en waar wat langer bij zal worden stilgestaan.



Aangenomen wordt: langs de kromme $|f(z)| < M$. De modulus van de som is $\leq$ de som van de moduli (drieh. ongelijkheid !).

$$\left|\sum_1^n f(\xi_m)(z_m - z_{m-1})\right| \leq \sum_1^n \left|f(\xi_m)\right| . \left|(z_m - z_{m-1}\right| <$$

$$< \sum_1^n M . \left|z_m - z_{m-1}\right| = M\sum_1^n \left|z_m - z_{m-1}\right| < M . L.$$

Dus:

$$\left|\int_{z_o}^{z_n} f(z)\,dz\right| < M . L.$$

M = majorante,

L = lengtekromme k.

Beroemde ongelijkheid van <u>Schwartz</u>. (H.A. Schwartz).

Dus samenvattend:

1e. $\oint\limits_c dz = 0$

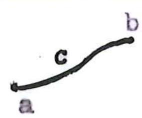
2e. $\oint\limits_c z\, dz = 0$

3e. $\int\limits_c f_1(z)\, dz \pm \int\limits_c f_2(z)\, dz = \int\limits_c \{f_1(z) \pm f_2(z)\}\, dz.$

Dit mag een open kromme zijn, bijv. een stuk boog.

4e. $\int\limits_{a\,c}^{b} f(z)\, dz = - \int\limits_{b\,c}^{a} f(z)\, dz.$

5e. Ongelijkheid van Schwartz:



Lengte boog c_a^b = L op de boog (a,b) is $|f(z)| < M$

Stelling:

$$\left| \int\limits_{a\,c}^{b} f(z)\, dz \right| < M.L.$$

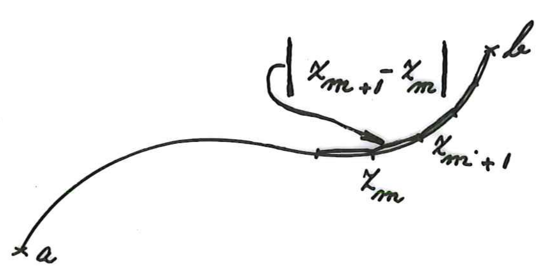
Bewijs van de ongelijkheid van Schwartz: (Cauchy kende deze stelling al eerder, maar heeft hem nooit gepubliceerd).

Riemann som:

$$S_n = \sum_{m=o}^{m=n-1} f(\xi_m) . (z_{m+1} - z_m)$$

$$|S_n| = \left| \sum_o^{n-1} f(\xi_m) . (z_{m+1} - z_m) \right| \leq \sum_o^{n-1} \underbrace{|f(\xi_m)|}_{< M} \, |z_{m+1} - z_m|$$

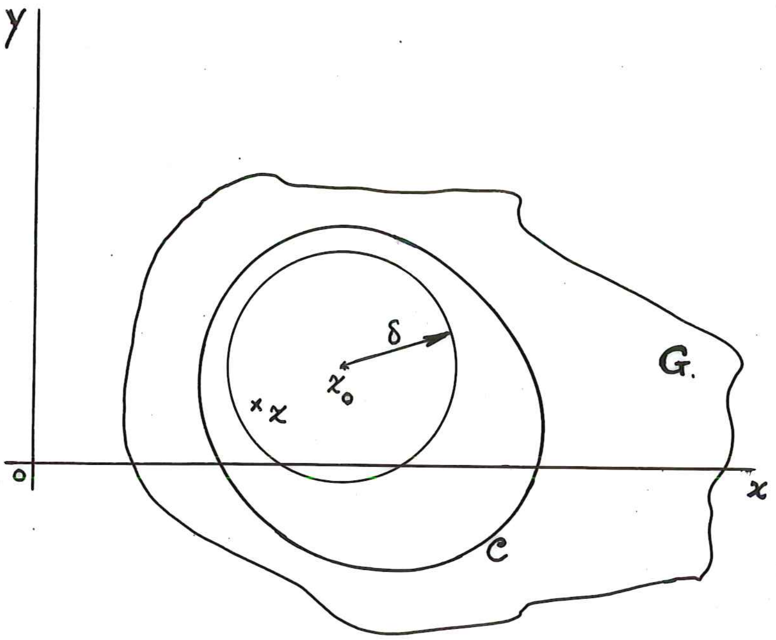
$$< M \sum_o^{n-1} |z_{m+1} - z_m| = M \times \text{lengte ingesloten veelhoek} < M.L.$$



Dit geldt voor iedere fijnheid van de verdeling en ook voor de limiet bij $n \to \infty$. De Riemann-som gaat dan over in een integraal:

$$\left| \int_a^b f(z)\, dz \right| < M.L.$$

We gaan nu de stelling formuleren die we uiteindelijk willen bewijzen.



Gegeven:

f(z) is analytisch in G (analytisch ≡ holomorf ≡ monogeen). d.w.z. in ieder punt z_0 van G(schrijfwijze: $z_0 \in G$; $\in$ duidt aan: z_0 is een punt van G), geldt bij willekeurig gegeven $\varepsilon > 0$ is een δ (> 0) te bepalen, zodat:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

voor alle z uit G die voldoen aan $|z - z_0| < \delta$. Of:

$$\left| f(z) - f(z_0) - (z - z_0)\, f'(z_0) \right| < \varepsilon \left| z - z_0 \right| ,$$

of:

$$f(z) - f(z_0) - (z - z_0).\, f'(z_0) = \eta\, (z - z_0), \text{ met } |\eta| < \varepsilon$$

η is complex; deze laatste regel drukt precies hetzelfde uit als de eerste.

Dus:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\, f'(z_0) + \eta\,(z - z_0) \\ \\ \text{met } |\eta| < \varepsilon\,. \end{array}} \qquad (6)$$

Dit is het gevolg van het analytisch zijn.

Kies in G een willekeurige gesloten kromme c; c ligt dus binnen G, de randpunten worden ook buiten beschouwing gelaten.

Stelling:

$\oint_c f(z)\,dz = 0$. Stelling van Cauchy (1814).

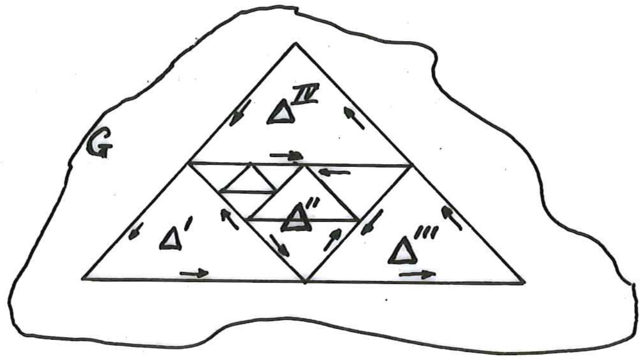
Het essentiële is hierbij dat f(z) analytisch is in alle punten van G, dus zeker in alle punten op en binnen c. Het bewijs van Goursat wordt gegeven in 3 stappen:

1e. c is een rechtlijnige Δ;
2e. c is een willekeurige, rechtlijnige veelhoek;
3e. c is een willekeurige gesloten kromme.

We gebruiken daarbij de eigenschappen 1 t/m 6; 1 t/m 5 Zie samenvatting; 6 zie vorige blz.: uitdrukking van het gegeven analytisch zijn. Oorspronkelijk werd van de functie meer verondersteld. Maar Goursat heeft met een meer algemeen bewijs aangetoond dat de gemaakte veronderstellingen voldoende zijn.

Bewijs.

1e. deel.



De omtrek van de gegeven $\Delta = S_0$. Verdeel de Δ in 4 andere driehoeken, door halvering van de zijden, dan is volgens eigenschap 4:

$$\oint_{\Delta} = \oint_{\Delta'} + \oint_{\Delta''} + \oint_{\Delta'''} + \oint_{\Delta^{IV}}$$

Verder is:

$$\left|\oint_{\Delta}\right| \leqslant \left|\oint_{\Delta'}\right| + \left|\oint_{\Delta''}\right| + \left|\oint_{\Delta'''}\right| + \left|\oint_{\Delta^{IV}}\right| \qquad *).$$

Één van de integralen is de grootste: $\left|\oint_{\Delta_1}\right|$ (aangeduid met een index 1 onderaan). Dus:

$$\left|\oint_{\Delta_1}\right| \geqslant \left|\oint_{\Delta^k}\right|$$

Dus:

$$\left|\oint_{\Delta}\right| \leqslant 4\left|\oint_{\Delta_1}\right|$$

Stel dat dit Δ'' is. Dan kunnen we de zijden daarvan ook weer halveren, waarbij weer 4 kleinere driehoeken ontstaan. Dan is evenzo:

$$\left|\oint_{\Delta_1}\right| \leqslant 4\left|\oint_{\Delta_2}\right| \qquad \text{evenzo:} \quad \left|\oint_{\Delta_2}\right| \leqslant 4\left|\oint_{\Delta_3}\right|$$

I.h.a.:

$$\left|\oint_{\Delta_{n-1}}\right| \leqslant 4\left|\oint_{\Delta_n}\right|$$

Dus:

Δ_1 is binnen Δ

Δ_2 is binnen Δ_1

Δ_3 is binnen Δ_2

Δ_n is binnen Δ_{n-1}.

Dan is:

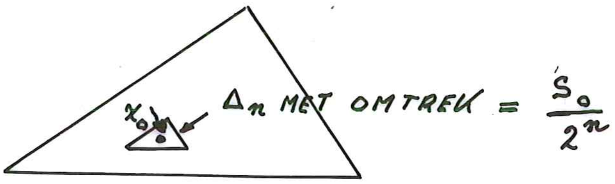
$$\left|\oint_{\Delta} f(z)dz\right| \leqslant 4^n \cdot \left|\oint_{\Delta_n} f(z)\,dz\right|$$

n is willekeurig geheel en positief (natuurlijk getal).

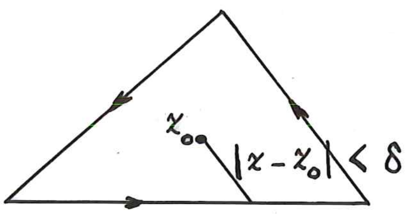
*). Het teken voor de kringintegraal is niet absoluut noodzakelijk, omdat de aangegeven kromme een driehoek is, dus een gesloten contour. Duidelijkheidshalve kan het er beter gezet worden. Het zijn allemaal kringintegralen langs driehoeks contouren.

De $\Delta\Delta$ zijn ruimte-intervallen, die binnen elkaar liggen, dit wordt in het Nederlands een <u>intervallen-nest</u> genoemd (denk aan nest schalen).

Als n groot genoeg wordt, naderen alle driehoeken tot één punt.



Uitgangsdriehoek met omtrek S_0, omtrek S_1 is dan $\frac{1}{2} S_0$ door de halvering van de zijden <u>enz</u>. Alle driehoeken krimpen samen tot één punt $= z_0$; z_0 ligt binnen Δ_n, dus binnen Δ_{n-1} enz.; z_0 is het enige punt dat binnen <u>alle</u> driehoeken ligt. Althans binnen alle driehoeken met een index onderaan.



$$\oint_{\Delta_n} f(z)\,dz = \text{(volgens 6)}$$

$$= \oint_{\Delta_n} f(z_0)\,dz + \oint_{\Delta_n} z\,f'(z_0)\,dz - \oint_{\Delta_n} z_0\,f'(z_0)\,dz +$$

$$+ \oint_{\Delta_n} \eta\,(z - z_0)\,dz$$

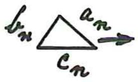
$$= \underbrace{f(z_0) \oint_{\Delta_n} dz}_{=0\ (1)} + \underbrace{f'(z_0) \oint_{\Delta_n} z\,dz}_{=0\ (\text{eig. } 2)} - \underbrace{z_0\,f'(z_0) \oint_{\Delta_n} dz}_{=0\ (\text{eig. } 1)} + \oint_{\Delta_n} \eta\,(z - z_0)\,dz$$

Dus:

$$\oint_{\Delta_n} f(z)\,dz = \oint_{\Delta_n} \eta\,(z - z_0)\,dz \qquad (7)$$

Mits inderdaad $|z - z_0| < \delta$.

De maximale lengte van $|z - z_o|$ = lengte langste zijde = driehoekszijde c_n. Dan is $|z - z_o| \leqslant c_n$



$$\begin{array}{l} c_n \leqslant a_n + b_n \\ c_n = c_n \\ \hline 2\,c_n \leqslant a_n + b_n + c_n = S_n \longrightarrow c_n \leqslant \frac{S_n}{2}\,. \end{array} \; +$$

Verder is:

$$S_n = \frac{S_o}{2^n}\,, \quad \text{dus} \quad c_n \leqslant \frac{S_o}{2^{n+1}}\,.$$

Dus:

$$|z - z_o| \leqslant c_n \leqslant \frac{S_o}{2^{n+1}}$$

is voor n groot genoeg altijd $< \delta$ te maken. Dus toepassing van 6 was geoorloofd. Ongelijkheid van Schwartz (5):

$$\left| \oint_{\Delta_n} f(z)\,dz \right| < \varepsilon \cdot \frac{S_n}{2} \cdot S_n = \varepsilon \cdot \frac{S_n^2}{2} = \varepsilon \cdot \frac{S_o^2}{2^{2n+1}}$$

want:

$$M = \varepsilon \times \frac{S_n}{2} \;{}^{*});\qquad L = \text{omtrek } \Delta_n = S_n,$$

of:

$$\left| \oint_{\Delta_n} f(z)dz \right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{S_o^2}{4^n}\,.$$

Ook is:

$$\left| \oint_{\Delta} f(z)dz \right| \leqslant 4^n \left| \oint_{\Delta_n} f(z)dz \right| \quad \text{(zie blz. 50.)}$$

Dus:

$$\left| \oint_{\Delta} f(z)dz \right| \leqslant 4^n \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{S_o^2}{4^n} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot S_o^2\,.$$

Dus:

$$\left| \oint_{\Delta} f(z)dz \right| = 0, \quad \text{m.a.w.} \quad \oint_{\Delta} f(z)dz = 0,$$

hetgeen te bewijzen was.

*). Immers: zie vorige blz. verg.(7): $f(z) = \eta\,(z - z_o)$

$$\left.\begin{array}{l} M > |f(z)| = |\eta|\,|z - z_o| \\ |\eta| < \varepsilon \\ |z - z_o| \leqslant \frac{S_n}{2} \quad \text{(zie vorige blz.)} \end{array}\right\} \; M > \varepsilon \cdot \frac{S_n}{2}$$

Want, als de modulus van de integraal niet precies = 0 zou zijn, maar bijv.:

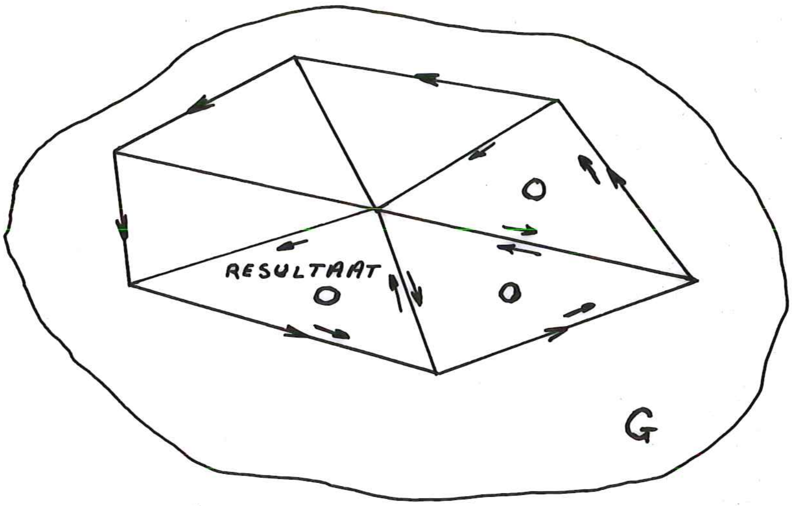
$$\left| \oint_{\Delta} f(z)\,dz \right| = \varepsilon^{x} < \frac{\varepsilon}{2} s_o^2 , \quad \text{maar} \quad \varepsilon^{x} \neq 0,$$

dan kiezen we $\bar{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon^{*}}{4s_o^2}$ i.p.v. ε, dan vinden we:

$$\left| \oint_{\Delta} f(z)\,dz \right| < \frac{\varepsilon^{*}}{8\,s_o^2} \times s_o^2 = \frac{\varepsilon^{x}}{8} < \varepsilon^{*}$$

Dus schiet er alleen de mogelijkheid = 0 over.

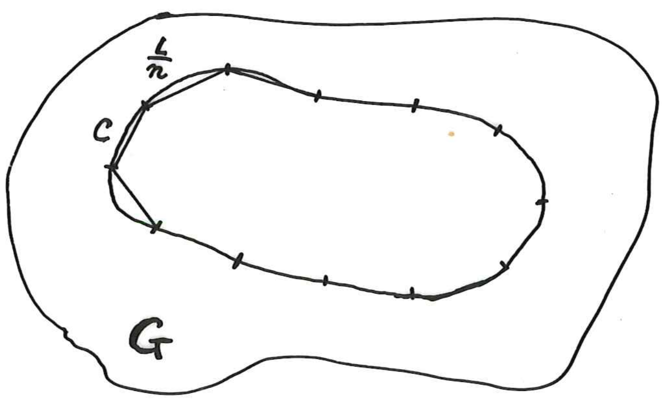
2e deel.



Je kunt nu elke willekeurige veelhoek op zeer veel verschillende manieren in een aantal driehoeken verdelen, bijv. zoals in de figuur gedaan is. In het voorgaande is bewezen dat de integraal langs elke Δ nul is. Sommeren van alle integralen langs de $\Delta\Delta$ levert de integraal langs de veelhoek, daar de verbindingsstukken wegvallen op grond van eig. 4. Uiteindelijk dus:

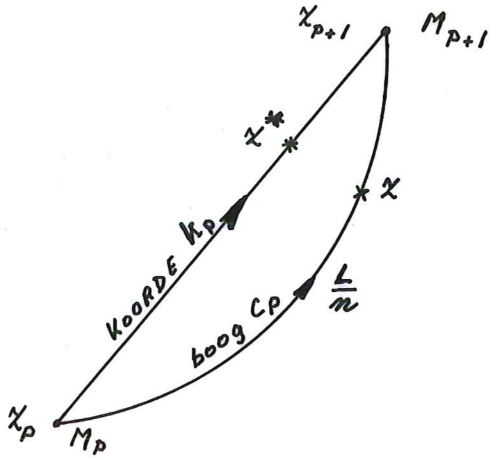
$$\oint_{\text{veelhoek}} = 0$$

3e deel.



Aangenomen wordt dat de lengte van de kromme c eindig is = L. Verdeel omtrek van c in een aantal van n gelijke bogen $\frac{L}{n}$. (n is willekeurig groot). Verbindt de deelpunten door rechte lijnen, dan ontstaat een veelhoek. Bij voldoende grote n kan er altijd voor gezorgd worden dat de veelhoek binnen c ligt, dus ook binnen G. Er ontstaat een veelhoek (polygoon) met n hoekpunten. Volgens det 2e geval is dan $\oint_{P_n} f(z)dz = 0$.

Over de kromme zegt dit echter verder niets. Bekijk één element van de kromme:



De integraal langs de p°-boog wordt I_p genoemd:

$$I_p = \int_{\substack{M_p \\ \text{boog } c_p}}^{M_{p+1}} f(z)dz.$$

De integraal langs de p°-koorde wordt J_p genoemd:

$$J_p = \int_{\substack{M_p \\ \text{koorde } k_p}}^{M_{p+1}} f(z)\, dz.$$

$$I_p = \int_{\substack{z_p \\ \text{(boog)}}}^{z_{p+1}} f(z)dz = \underbrace{\int_{\substack{z_p \\ \text{(boog)}}}^{z_{p+1}} f(z_p)dz}_{I'_p} + \underbrace{\int_{\substack{z_p \\ \text{(boog)}}}^{z_{p+1}} \left\{ f(z) - f(z_p) \right\} dz.}_{I''_p}$$

Hetzelfde met J_p:

$$J_p = \underset{\text{(koorde)}}{\int_{z_p}^{z_{p+1}}} f(z)dz = \underbrace{\underset{\text{(koorde)}}{\int_{z_p}^{z_{p+1}}} f(z_p)dz}_{J_p'} + \underbrace{\underset{\text{(koorde)}}{\int_{z_p}^{z_{p+1}}} \left\{ f(z) - f(z_p) \right\} dz}_{J_p''}$$

$f(z_p)$ is een constante, dus:

$$I_p' = f(z_p) \underset{\text{(boog)}}{\int_{z_p}^{z_{p+1}}} dz = f(z_p) \cdot (z_{p+1} - z_p) \text{ en}$$

en ook:

$$J_p' = f(z_p) \cdot \quad \cdot (z_{p+1} - z_p) \; ^{*})$$

Dus:

$$\underline{\underline{I_p' = J_p'}}$$

$f(z)$ is analytisch in G en uit de definitie volgt dan dat hij continu is in G. We kunnen n zo groot maken dat we steeds kunnen zorgen dat $|f(z) - f(z_p)| < \varepsilon$. Dus kunnen we zorgen dat $J_p'' \leq \varepsilon \cdot \frac{L}{n}$ volgens Schwartz.

Toelichting:

$C_p = \frac{L}{n}$ is willekeurig klein te maken.

$$|z - z_p| \leq \text{boog } (z,z_p) \leq \frac{L}{n}$$
$$|z^* - z_p| = \text{koorde } (z^*,z_p) < \text{boog } (z_p,z_{p+1}) < \frac{L}{n}$$

(z op de boog, z^* op de koorde).

Dus wegens de continuïteit van $f(z)$ is bij willekeurig kleine ε voor n groot genoeg:

$$|f(z) - f(z_p)| < \varepsilon \quad \text{(boog)}$$

evenzo:

$$|f(z^*) - f(z_p)| < \varepsilon \quad \text{(koorde)}.$$

*). Het is vroeger n.l. bewezen dat $\int_{z_p}^{z_{p+1}} dz$ onafhankelijk is van de gevolgde weg, dus $I_p' = J_p'$.

Dus:

$$\left| I_p'' \right| = \int_{z_p}^{z_{p+1}} \left\{ f(z) - f(z_p) \right\} dz < \frac{\varepsilon L}{n}$$
(boog)

en:

$$\left| J_p'' \right| = \int_{z_p}^{z_{p+1}} \left\{ f(z) - f(z_p) \right\} dz < \frac{\varepsilon L}{n}$$
(koorde)

Nu is dus:

$$\left| I_p - J_p \right| = \left| I_p'' - J_p'' \right| \leqslant \left| I_p'' \right| + \left| J_p'' \right| < \frac{2\varepsilon L}{n}$$

Dit geldt voor alle segmenten, waaruit volgt:

$$\left.\begin{array}{l} \oint_c = \sum_{p=1}^{n} I_p \\ 0 = \oint_p = \sum_{p=1}^{n} J_p \end{array}\right\} \oint_c - \oint_p = \sum_{p=1}^{n} \left\{ I_p - J_p \right\}$$

Dus:

$$\left| \oint_c - \oint_p \right| \leqslant \sum_{p=1}^{n} \left| I_p - J_p \right| < \sum_{p=1}^{n} \frac{2\varepsilon L}{n} = 2\varepsilon L$$

of:

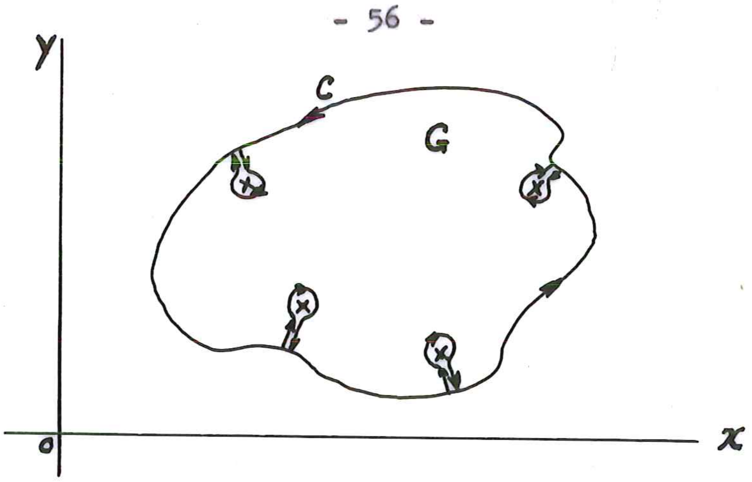
$\left| \oint_c \right| < 2\varepsilon L$ bij willekeurig kleine ε, want $\oint_p = 0$.

Hieruit kan alleen volgen:

$$\left| \oint_c \right| = 0, \text{ of: } \oint_c f(z)\,dz = 0.$$

Hiermee is het bewijs van de stelling van Cauchy volledig geleverd.

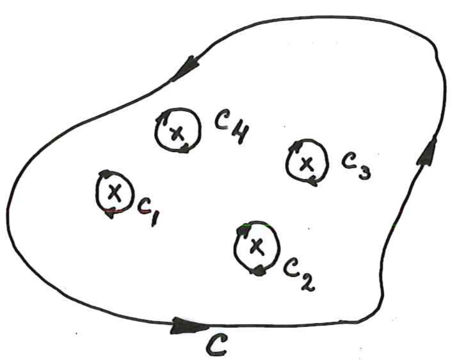
Er is nog een uitbreiding aan deze stelling te geven voor de singuliere punten. Voorwaarde was f(z) holomorf in het gehele gebied G. Nu is f(z) in het met een kruisje aangetekende punt niet meer holomorf: singuliere punten.



Hierop is de stelling van Cauchy dus niet meer zonder meer toepasbaar. Neem om elk singulier punt een gebiedje dat dit punt uitsluit. Het omsloten binnen-gebied heeft dan geen singulariteiten meer. De nieuwe omtrek is c_1. Dus:

$$\oint_{c'} = 0.$$

Maar langs de "slootjes" wordt heen en terug geïntegreerd. Ze hebben een breedte nul en deze stukken van de integraal over c' vallen 2 aan 2 tegen elkaar weg. Nu blijft over:



Dan is dus:

$$\oint_{c'} = \underbrace{\oint_{c}}_{\text{in pos. zin}} \underbrace{- \oint_{c_1} - \oint_{c_2} - \oint_{c_3} - \oint_{c_4}}_{\text{in neg. zin doorlopen}} = 0$$

in pos. zin | in neg. zin doorlopen, daarom $\oint$ met een (-)teken. (Feitelijk dus $\oint$).

Of:

$$\oint_{c^+} + \oint_{c_1^-} + \oint_{c_2^-} + \oint_{c_3^-} + \oint_{c_4^-} = 0$$

Dus:

$$\boxed{\oint_{c^+} f(z)dz = \oint_{c_1^+} f(z)dz + \oint_{c_2^+} .. + \oint_{c_3^+} .. + \oint_{c_4^+} ..}$$

Voorbeeld.

Bereken: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx,$

a en b worden reëel ondersteld, dit is echter niet essentieel. Verder wordt om de gedachten te bepalen $a > 0$ en $b > 0$ gesteld. Dit is geen wezenlijke beperking daar voor a en b negatief er niets veranderd: $\cos ax$ en b^2 zijn even functies. Dit is een oneigenlijke integraal:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx \ \underline{\underline{\text{def.}}}\ \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx .$$

Dit is één van de integralen van Laplace. Opgelost op de wijze van de functietheorie:

$$\cos ax = \frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$$

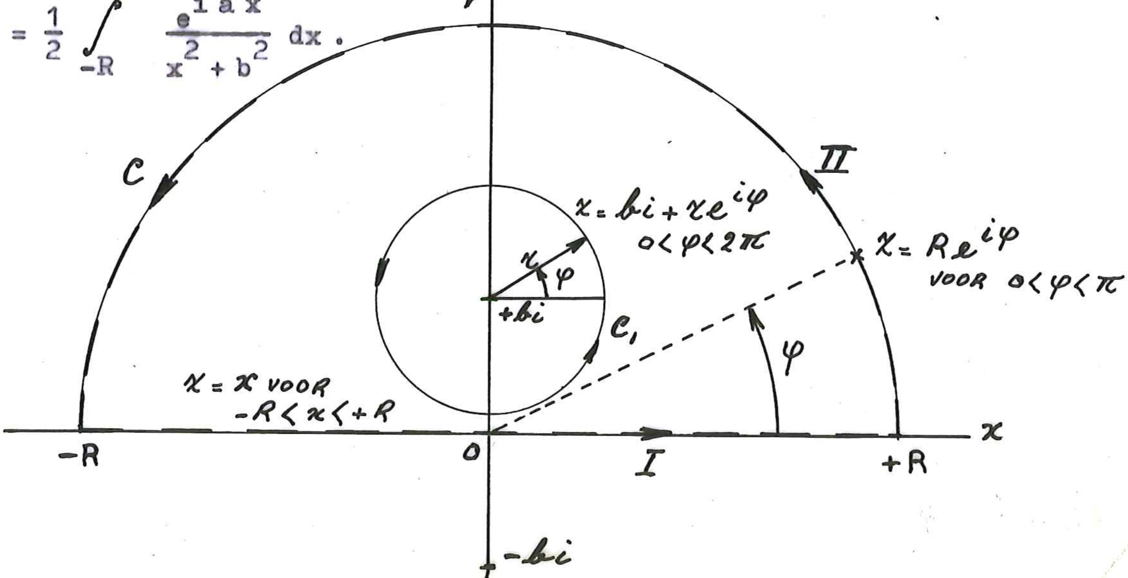
$$\int_0^R \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{e^{iax}+e^{-iax}}{x^2+b^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R \frac{e^{iax}}{x^2+b^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^R \frac{e^{-iax}}{x^2+b^2}\,dx = (\text{substitutie } x = x')$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R \frac{e^{+iax}}{x^2+b^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{-R} \frac{e^{iax'}}{(x')^2+b^2}\,dx' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R \frac{e^{+iax}}{x^2+b^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-R}^{0} \frac{e^{iax'}}{(x')^2+b^2}\,dx' = (\text{met accent weglaten})$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-R}^{+R} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2}\,dx .$$



Gevraagd wordt dus de integraal langs de (— — —) lijn (I). We willen nu de stelling van Cauchy toepassen en de weg moet dus gesloten worden door een willekeurige weg, verreweg de handigste is de cirkelboog. Integreren langs de gesloten kromme c:

$$\int_c \frac{e^{i\,az}}{z^2+b^2}\,dz$$

$$f(z) = \frac{e^{i\,az}}{z^2+b^2},$$

teller is steeds analytisch (e-macht); noemer is een veelterm en is ook analytisch in elk punt. Het quotiënt is niet analytisch voor de nulpunten van de noemer:

$$z^2+b^2=0 \qquad z^2=-b^2 \qquad \boxed{\begin{array}{l} z_1 = +b\,i \\ z_2 = -b\,i \end{array}}$$

In deze twee punten is f(z) singulier.

1e. Daar $\int\limits_c = \int\limits_I + \int\limits_{II}$ krijgen we:

$$\int\limits_c = \underbrace{\underset{I}{\int_{-R}^{+R}} \frac{e^{i\,ax}}{x^2+b^2}\,dx}_{\text{in deze integraal zijn we geïnteresseerd.}} + \underset{II}{\int_0^{\pi}} \frac{e^{i\,a\,Re^{i\varphi}}}{R^2 e^{2i\varphi}+b^2}\cdot R\,i\,e^{i\varphi}\,d\varphi$$

2e. Verder is $\int\limits_c = \int\limits_{c_1}$ (Cauchy)

$$\int_{c_1} \frac{e^{i\,az}}{z^2+b^2}\,dz = \underset{c_1}{\int_0^{2\pi}} \frac{e^{ia(bi+r\,e^{i\varphi})}\cdot r\,i\,e^{i\varphi}}{b^2+(-b^2+2\,i\,b\,r\,e^{i\varphi}+r^2e^{2i\varphi})}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ab+i\,ar\,e^{i\varphi}}\,d\varphi}{2b-i\,r\,e^{i\varphi}} = e^{-ab}\underset{III}{\int_0^{2\pi}} \frac{e^{i\,a\,r\,e^{i\varphi}}}{2b-i\,r\,e^{i\varphi}}\cdot d\varphi.$$

We gaan nu de integraal II schatten, bepaling is niet zo eenvoudig.

$$\left| \int_{II} \right| = \left| R\,i \int_0^{\pi} \frac{e^{i\,a\,Re^{i\varphi}}}{R^2\,e^{2\,i\varphi} + b^2}\, e^{i\varphi}\, d\varphi \right|.$$

Majoreren, waarbij we moeten bedenken dat:

$$\left| e^{i\varphi} \right| = 1.$$

$$\left| e^{x+iy} \right| = \left| e^{x} \right| . \left| e^{iy} \right| = e^{x}$$

$$\left| \int_{II} \right| = R \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{a\,i\,R\cos\varphi - a\,R\sin\varphi}\, e^{i\varphi}}{R^2 e^{2\,i\varphi} + b^2}\, d\varphi \right|$$

Integrand:

$$\left| \frac{e^{a\,i\,R\cos\varphi - a\,R\sin\varphi}\, e^{i\varphi}}{R^2 e^{2\,i\varphi} + b^2} \right| = \frac{e^{-a\,R\sin\varphi} . 1}{\left| R^2 e^{2\,i\varphi} + b^2 \right|} \leqslant \frac{e^{-a\,R\sin\varphi}}{\left| R^2 - b^2 \right|},$$

want majoreren betekent noemer minoreren, en:

$$\left| R^2 e^{2\,i\varphi} + b^2 \right| \geqslant \left| \left| R^2 \right| - \left| b^2 \right| \right| = \left| R^2 - b^2 \right| = R^2 - b^2 \quad \text{daar } R \to \infty$$

dus:

$$\left| \text{integrand} \right| \leqslant \frac{e^{-a\,R\sin\varphi}}{R^2 - b^2} \leqslant \frac{1}{R^2 - b^2}$$

daar $\sin\varphi$ positief (en < 1) is, dus:

$$e^{-R\sin\varphi} < e^{0} = 1.$$

$\sin\varphi > 0$ daar $0 < \varphi < \pi$, dus geen gelijktekens! Overigens niet bèlangrijk.

Dus:

$$\left| \int_{II} \right| \leqslant \frac{R}{R^2 - b^2} \left| \int_0^{\pi} d\varphi \right| = \frac{R\,\pi}{R^2 - b^2} \longrightarrow 0 \text{ voor } R \to \infty \,.$$

Nu integraal III:

$$\int_{III} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ab + i\,ar\,e^{i\varphi}}}{2b - i\,re^{i\varphi}}\, d\varphi = e^{-ab} \int_0^{2\pi} \frac{1\,d\varphi}{2b} \quad \text{voor } r \to 0 \text{ (r is willekeurig)}$$

$$= \frac{e^{-ab}}{2b} . 2\pi = \frac{2\pi e^{-ab}}{2b} = \frac{\pi}{b} . e^{-ab} .$$

Dus voor $R \to \infty$:

$$= \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2}\, dx + 0 = \frac{\pi}{b}\, e^{-ab}.$$

Hier moeten we nog de helft van nemen, dus:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{b} e^{-ab} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2b} \cdot e^{-ab}}}.$$

Nog een voorbeeld:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Deze integraal speelt een hoofdrol in de Fourier-analyse.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Ook voor $x = 0$ is er nog gevaar, maar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Vervang de sin x door e-machten

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\, ix}\, dx = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2i} \int_0^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left\{ \frac{1}{2i} \int_0^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \frac{1}{2i} \int_0^R \frac{e^{-ix}}{x}\, dx \right\}.$$

Maar hier is een grote fout gemaakt, want:

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ voor } x \to 0,$$

maar:

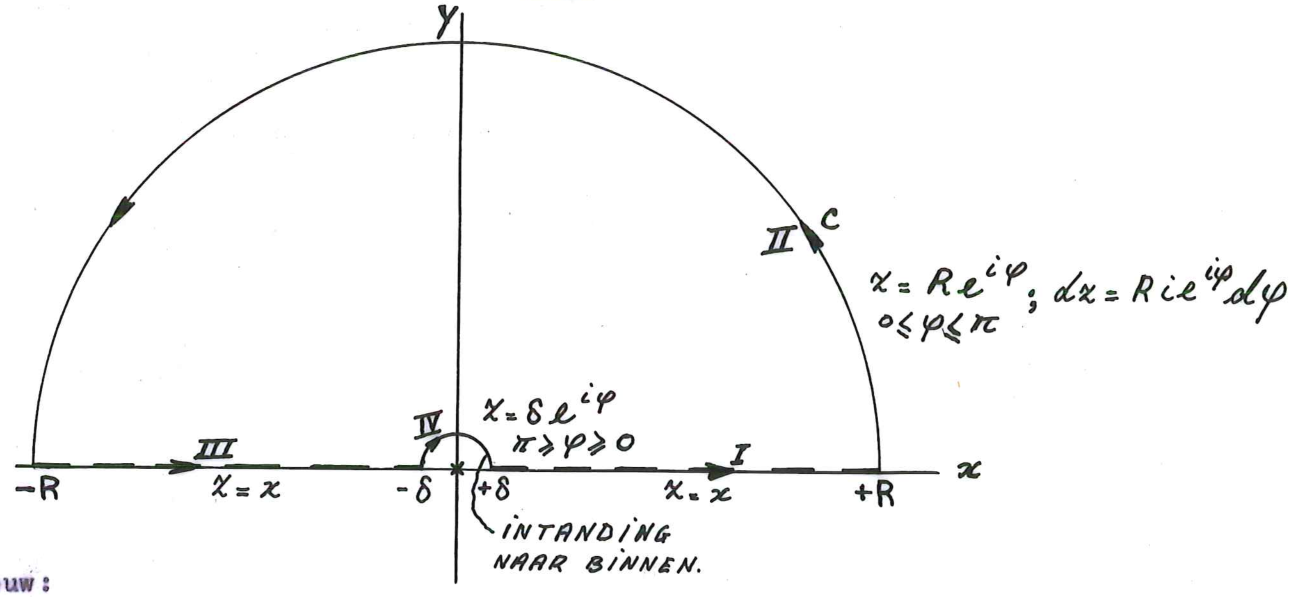
$$\frac{e^{\pm ix}}{x} \to \frac{1}{0} \approx \infty$$

dus hier is de integraal in de oorsprong niet in orde. In orde maken door:

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ \delta \to 0}} \left\{ \frac{1}{2i} \int_\delta^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \frac{1}{2i} \int_\delta^R \frac{e^{-ix}}{x}\, dx \right\} =$$

$$\frac{1}{2i} \lim_{\substack{R \to \infty \\ \delta \to 0}} \left\{ \int_\delta^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{ix'}}{x'}\, dx' \right\}.$$

We willen de integralen graag weer samen nemen maar i.v.m. de grenzen kan dat niet. Van $-\delta$ tot $+\delta$ wordt niet geïntegreerd.



Beschouw:

$$\int_c \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

de contour moet de 2(— — —) stukken bevatten; het singuliere punt in 0 is uitgesloten. Het omsloten gebied omvat nu geen enkele singulariteit meer, dus:

$$\int_c \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0 \text{ (Cauchy !).}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_{I} &= \int_{\delta}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \\ \int_{III} &= \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \end{aligned}\right\}$$ Dit zijn de integralen waar het om gaat.

$$\int_{II} = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\varphi}} . iRe^{i\varphi}\,d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\varphi}}\,d\varphi.$$

(uitrekenen hiervan is niet zo eenvoudig).

$$\int_{IV} = \int_{+\pi}^{0} \frac{e^{i\delta e^{i\varphi}} . i\delta e^{i\varphi}\,d\varphi}{\delta e^{i\varphi}} = -i\int_0^{\pi} e^{i\delta e^{i\varphi}}\,d\varphi.$$

(het berekenen hiervan kost weinig moeite).

$$\int_{I} + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = 0 \text{ (Cauchy).}$$

Integraal II. Schatten !!

$$\left|\int_{II}\right| = \left|\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\varphi}}\,d\varphi\right| = \left|\int_0^{\pi} e^{iR\cos\varphi - R\sin\varphi}\,d\varphi\right| \leqslant$$

$$\int_0^{\pi}\left|e^{iR\cos\varphi - R\sin\varphi}\right| d\varphi = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi.$$

φ in het 1e en 2e kwadrant, dus $\sin\varphi \geqslant 0$. De exponent $-R\sin\varphi \leqslant 0$, dus:

$e^{-R\sin\varphi} \leqslant 1$.

Voorlopig is dus niet nader bekend dan $e^{-R\sin\varphi} \leqslant 1$.

Dit gelijkteken is juist vervelend, want dan kan de integraal niet verder geschat worden, dan in elk geval $\leqslant \pi$. We willen graag bewijzen dat deze integraal $\rightarrow 0$ voor $R \rightarrow \infty$. De gewone methode met grove schatting, zoals boven en in vorig voorbeeld gebruikt, is niet voldoende. In verschillende handboeken wordt hiervoor een hulpstelling afgeleid: het lemma van Jordan.

Wij gaan echter een verfijnde schatting toepassen. Verdeel boog II in 3 stukken: bijv. van:

$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}$ $(=30^\circ)$. Deze keuze van 30° is eigenlijk willekeurig.

$\frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{6}$ (150°).

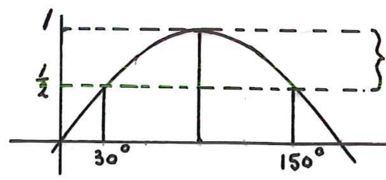
$\frac{5\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \pi$

$$\left|\int_{II}\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\right| \leqq \left|\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi\right| +$$

$$+\left|\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi\right|.$$

Het kleiner-teken staat hier in principe ook, maar het gelijk-teken geldt hier. De modulus-strepen in het rechterlid kunnen weggelaten worden omdat elke term positief is. De middelste term kan nu grof geschat worden omdat de vervelende stukken waarvoor $e^{-R\sin\varphi} = e^0 = 1$ er afgehaald zijn.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} e^{-\frac{1}{2}R}\,d\varphi = \frac{2}{3}.\pi.e^{-\frac{1}{2}R} \longrightarrow 0 \text{ voor } R \rightarrow \infty$$



HIER is $-R\sin\varphi < -\frac{1}{2}R$

$$\left|\int_{II}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi \leq \frac{2}{3}\pi e^{-\frac{R}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi \qquad (1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^{-R\sin\varphi}\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi}$$

In dit interval is: $\frac{1}{2}\sqrt{3} \leq \cos\varphi \leq 1$, dus:

$$\frac{1}{\cos\varphi} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^{-R\sin\varphi}\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R\sin\varphi}\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{R\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R\sin\varphi}\,d(R\sin\varphi) = \frac{-2}{R\sqrt{3}}\left[e^{-R\sin\varphi}\right]_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{-2}{R\sqrt{3}}\left(e^{-\frac{R}{2}} - 1\right) = \frac{2\left(1 - e^{-\frac{R}{2}}\right)}{R\sqrt{3}} < \frac{2}{R\sqrt{3}}$$

(1) geeft dan:

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi \leq \frac{2}{3}\pi e^{-\frac{R}{2}} + \frac{4}{R\sqrt{3}} \longrightarrow 0 \text{ voor } R \to \infty\,.$$

Nu de integraal IV nog:

$$\int_{IV} = -i\int_0^{\pi} e^{i\delta e^{i\varphi}}\,d\varphi = -i\int_0^{\pi}\left\{1 + i\delta e^{i\varphi} + \frac{i^2\delta^2 e^{2i\varphi}}{2!} + \dots\right\}d\varphi$$

$$= -i\left\{\pi + \underbrace{\left[\delta e^{i\varphi}\right]_0^{\pi}}_{\to 0} \pm \underbrace{\left[\frac{i\delta^2}{2!2}e^{2i\varphi}\right]_0^{\pi}}_{\to 0} + \dots\right\} \longrightarrow -\pi i \text{ voor } \delta \to 0.$$

$$\underbrace{\int_I + \int_{II}}_{\substack{\to 0 \\ \text{voor } R \to \infty}} + \int_{III} + \underbrace{\int_{IV}}_{\substack{\to -\pi i \\ \text{voor } 0}} = 0 \qquad \underbrace{\int_I + \int_{III}}_{\substack{\text{voor } R \to \infty \\ \delta \to 0}} = +\pi i$$

$$\frac{1}{2i} \lim_{\substack{R\to\infty \\ \delta\to 0}} \left\{ \int_{\delta}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \right\} = \frac{1}{2i} \lim \left\{ \int_{I} + \int_{III} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2i} \times \pi i = \frac{\pi}{2}.$$

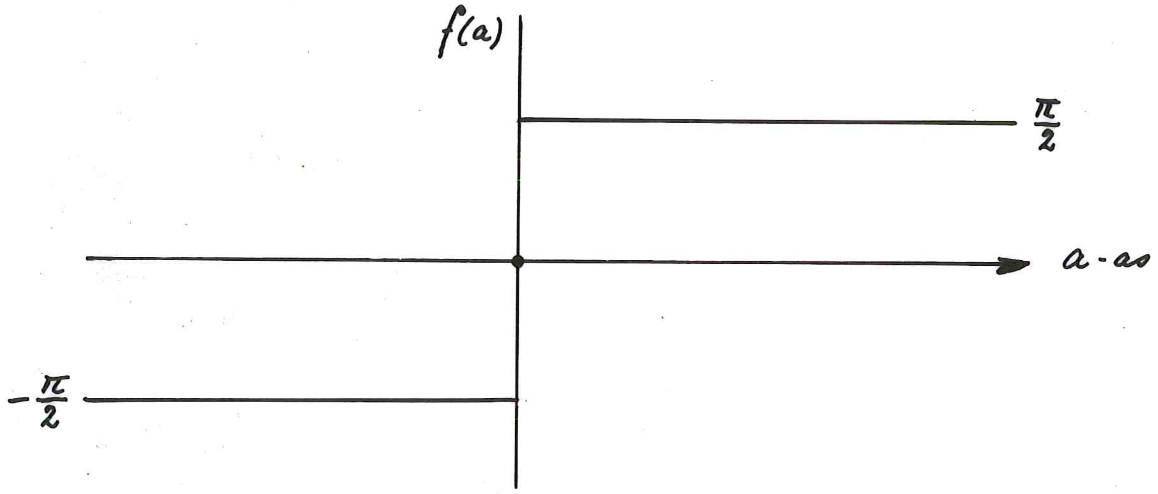
Dus:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

We weten nu ook direct:

$$f(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx \quad \text{voor } a > 0.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{ax}\,d(ax) = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$$



Voor $a < 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \int_a^{\infty} \frac{\sin ax}{ax}\,d(ax) = \int_0^{-\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(-w)}{(-w)}\,d(-w) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin w}{w}\,dw = -\frac{\pi}{2}$$

voor $y = -w$. Grenzen:

$y = 0 : w = 0$

$y = -\infty : w = \infty$

Voor $a = 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \int 0\,dx = 0.$$

Deze functie heeft een discontinuïteit in de oorsprong. De functie speelt een hoofdrol in de Fourier-analyse.

Opgave: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \,.\, \cos bx}{x}\,dx$ is nu ook te berekenen.

Voorbeeld:

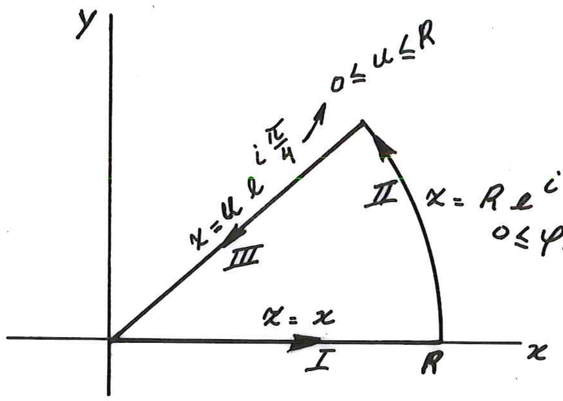
$$F_1 = \int_0^\infty \cos(x^2)dx \quad \text{en} \quad F_2 = \int_0^\infty \sin(x^2)dx.$$

De integralen van Fresnel spelen een rol in de lichttheorie. Deze kunnen we berekenen door uit te gaan van $\int_C e^{-z^2}\,dz$.voor een geschikte contour. Daarbij wordt bekend verondersteld:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Bekende integraal uit de gewone analyse.

$$F_1 \pm i\,F_2 = \int_0^\infty \left\{\cos(x^2) \pm i\sin(x^2)\right\} dx = \int_0^\infty e^{\pm i x^2}\,dx$$



$$\int_C e^{-z^2}\,dz = \underbrace{\int_0^R e^{-x^2}\,dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2i\varphi}}\, i\,R\,e^{i\varphi}\,d\varphi}_{\text{II}} + \underbrace{\int_R^0 e^{-u^2 e^{\frac{\pi i}{2}}}\, e^{\frac{\pi i}{4}}\,du}_{\text{III}}$$

Geen singulariteiten:

$$\int_{\text{I}} + \int_{\text{II}} + \int_{\text{III}} = 0$$

$$\int_{\text{I}} \rightarrow \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{voor } R \rightarrow \infty.$$

$$\int_{\text{III}} = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_{+R}^{0} e^{-i u^2}\,du = -\,e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^R e^{-i u^2}\,du.$$

$$\left|\int_{\text{II}}\right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi}\,d\varphi; \quad e^{-R^2\cos 2\varphi} \leq 1.$$

Deze schatting is weer niet fijn genoeg, dus een betere schatting door te splitsen in tweeën:

$$\left|\int_{II}\right| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi}d\varphi = \underbrace{R\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-R^2\cos 2\varphi}d\varphi}_{\text{grof:}} + R\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi}\,d\varphi$$

$$\tfrac{1}{2}\leqslant \cos 2\varphi \leqslant 1.$$

$$e^{-R^2\cos 2\varphi} \leqslant e^{-\frac{1}{2}R^2}$$

d.i.:

$$\leqslant R\cdot e^{-\frac{1}{2}R^2}\cdot\frac{\pi}{6} + R\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-R^2\cos 2\varphi}\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}\,d\varphi$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sin\frac{\pi}{3} \leqslant \sin 2\varphi \leqslant \sin\frac{\pi}{2} = 1,\quad \frac{1}{\sin 2\varphi} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$0 \leqslant R\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-R^2\cos 2\varphi}\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}\,d\varphi \leqslant R\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi}\,d\cos 2\varphi$$

$$= -\frac{R}{\sqrt{3}}\cdot -\frac{1}{R^2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi}\,d(-R^2\cos 2\varphi) = \frac{1}{R\sqrt{3}}\left[e^{-R^2\cos 2\varphi}\right]_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{R\sqrt{3}}\left\{1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right\} < \frac{1}{R\sqrt{3}}$$

$$\left|\int_{II}\right| \leqslant \frac{\pi}{6}R\,e^{-\frac{R^2}{2}} + \frac{1}{R\sqrt{3}} \longrightarrow 0 \text{ voor } R\to\infty.$$

Als $\left|\int_{II}\right| \to 0$ dan ook $\int_{II} \to 0$.

Opm.:

$$R\,e^{-\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{e^{\frac{R^2}{2}}} = \frac{R}{1+\frac{R^2}{2}+\ldots} < \frac{R}{\frac{R^2}{2}} = \frac{2}{R} \longrightarrow 0 \text{ voor } R\to\infty.$$

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{I} + \int_{II} + \int_{III}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - e^{\frac{\pi i}{4}}\int_0^{\infty} e^{-iu^2}\,du =$$

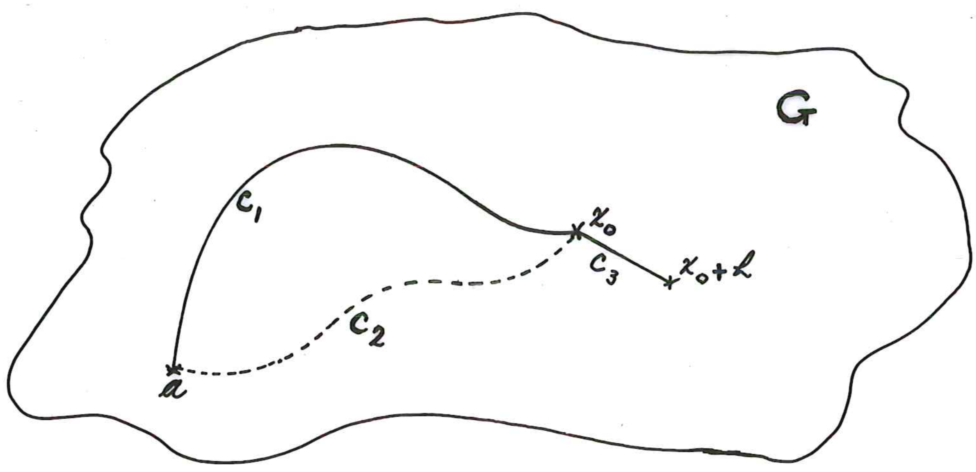
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - e^{\frac{\pi i}{4}} \left\{ \int_0^\infty \cos(u^2)du - i \int_0^\infty \sin(u^2)\, du \right\} = 0.$$

$$\text{X } e^{-\frac{\pi i}{4}}: \quad 0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}} - \left\{ \int_0^\infty \cos(u^2)du - i \int_0^\infty \sin(u^2)du \right\}.$$

$$\int_0^\infty \cos(u^2)\, du - i \int_0^\infty \sin(u^2)du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \left\{ \cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4} \right\}$$

$$\begin{cases} \text{Reëel gedeelte:} & \int_0^\infty \cos(u^2)du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}. \\ \text{Imaginair gedeelte:} & \int_0^\infty \sin(u^2)du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}. \end{cases}$$

Verschillende stellingen uit de integraalrekening voor complexe functies.



f(z) is analytisch in G. 2 punten: a vast en z_0 veranderlijk.

$$\int_{a \atop c_1}^{z_0} f(z)dz = \int_{c_2} = \phi(z_0).$$

De weg kan geen invloed uitoefenen, maar het veranderlijke eindpunt z_0 natuurlijk wel.

1e. Stelling: $\phi(z_0)$ is een analytische functie in G. De afgeleide van $\phi(z_0)$ moet dus éénduidig bepaald zijn en wel: $\phi'(z) = f(z)$.

Bewijs: Beschouw:

$$\frac{\phi(z_0+h) - \phi(z_0)}{h}$$

$$\phi(z_0+h) = \int_{a \atop c}^{z_0+h} f(z)dz = \int_{a \atop c_1}^{z_0} f(z)dz + \int_{z_0 \atop c_3}^{z_0+h} f(z)dz = \phi(z_0) + \int_{z_0}^{z_0+h} f(z)dz.$$

Dus:

$$\frac{\phi(z_0+h) - \phi(z_0)}{h} = \frac{\int_{z_0}^{z_0+h} f(z)dz}{h} = \frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h} f(z_0)dz + \frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h}\left\{f(z) - f(z_0)\right\}dz =$$

$$= \frac{1}{h}\cdot f(z_0)\int_{z_0}^{z_0+h} dz + \frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h}\left\{f(z) - f(z_0)\right\}dz =$$

$$= f(z_0) + \frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h}\left\{f(z) - f(z_0)\right\}dz.$$

f(z) is analytisch in G, dus f(z) is ook continu .

Dus bij willekeurig kleine $\varepsilon > 0$ is een getal δ te vinden, zodat $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$ voor iedere z in G met $|z - z_o| < \delta$. Als we er voor zorgen dat $|h| < \delta$ dan geldt dit dus zeker. Dus:

$$\left| \int_{z_o}^{z_o+h} \left\{ f(z) - f(z_o) \right\} dz \right| \leqslant \varepsilon |h| < \varepsilon . \delta$$

langs rechte. D.i. de ongelijkheid van Schwartz.

Of:

$$\left| \frac{1}{h} \int_{z_o}^{z_o+h} \left\{ f(z) - f(z_z) \right\} dz \right| \leqslant \frac{\varepsilon |h|}{|h|} = \varepsilon .$$

(Gelijktekenuit $\leqslant$ kan zelfs weg, daar Schwartz geeft $<$).

Dus:

$$\left| \frac{\phi(z_o + h) - \phi(z_o)}{h} - f(z_o) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{voor } |h| < \delta .$$

Of:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(z_o + h) - \phi(z_o)}{h} = f(z_o)$$

d.i. onafhankelijk van de h, dus éénduidig.

Of $\phi'(z_o)$ bestaat en is gelijk aan $f(z_o)$ in ieder punt z_o van G. De functie $\phi(z_o)$ is dus analytisch in G.

Zo'n functie $\phi(z)$ heet een primitieve functie van f(z) als $f(z) = \phi'(z)$. Een gegeven functie f(z) heeft eigenlijk oneindig veel primitieve functies. Als $\phi(z)$ een primitieve functie is, is ook $\phi(z) + c$ een primitieve functie van f(z) Immers $\left\{ \phi(z) + c \right\}' = \phi'(z) = f(z)$. Maar andere zijn er niet. Dat zal bewezen worden door het omgekeerde te bewijzen.

Opm.: Deze constante is i.h.a. een complexe constante a + b i; in bijzondere gevallen kan het natuurlijk een reële constante c zijn.

Het omgekeerde luidt: wanneer $\phi_1(z)$ en $\phi_2(z)$ beide primitieve functies van f(z) zijn, dan is:

$$\phi_1(z) - \phi_2(z) = c.$$

Bewijs. Stel:

$$\phi_1(z) - \phi_2(z) = F(z)$$

$$F'(z) = \phi_1'(z) - \phi_2'(z) = f(z) - f(z) = 0. \text{ Dus } F'(z) = 0.$$

(ϕ_1 en ϕ_2 zijn automatisch analytisch, dus ook F is analytisch. Differentiatie dus mogelijk !).

Bij reële functies zou hier inderdaad uit volgen F(z) = constant. Voor complexe functies kan je dit niet zonder meer stellen, maar moet je het bewijzen.

$$\frac{d}{dz}\left\{F(z)\right\} = 0 \quad \frac{d}{dz}\left\{u + i\,v\right\} = 0,$$

onafhankelijk van de richting. Neem speciaal langs de x-as:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{u + i\,v\right\} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ en } \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Evenzo speciaal langs de y-as:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{u + i\,v\right\} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ en } \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Hierbij is dus $u = u(x,y)$ en $v = v(x,y)$. Dit zijn <u>reële</u> functies, daarvoor geldt dus:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \longrightarrow u = u(y) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = u'(y) = 0 \longrightarrow u(y) = C_1\,,$$

dus $u(x,y)$ = constante C_1.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \longrightarrow v = v(y) \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = v'(y) = 0 \longrightarrow v(y) = C_2,$$

dus $v(x,y)$ = constante C_2.

Dan is dus:

$$F(z) = \Phi_1(z) - \Phi_1(z) = C_1 + i\,C_2 = D \text{ \underline{constante}}.$$

We kunnen nu het resultaat uiteindelijk als volgt opschrijven: (in meest algemene vorm)

$$\int_a^{z_1} f(z)dz = F_1(z_1) + C.$$

waarbij dus $F_1(z)$ een primitieve functie is van $f(z)$: $F_1'(z) = f(z)$. Wat is nu de constante C ? Laat $z_1 \longrightarrow a$.

$$\int_a^{a} f(z)dz = F_1(a) + C = 0 \longrightarrow C = -\,F_1(a).$$

Dus:

$$\boxed{\int_a^{z_1} f(z)dz = F_1(z_1) - F_1(a).}$$

Dit is formeel dezelfde uitdrukking als in de reële analyse voor een bepaalde integraal.

Voorbeeld.

1). $\int_a^b z^m dz = \left[\frac{z^{m+1}}{m+1}\right]_a^b = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$

(z^m is overal analytisch, behalve in $z = 0$).

2). Beginsel van de partiële integratie.

$$(fg)' = f'g + g'f$$

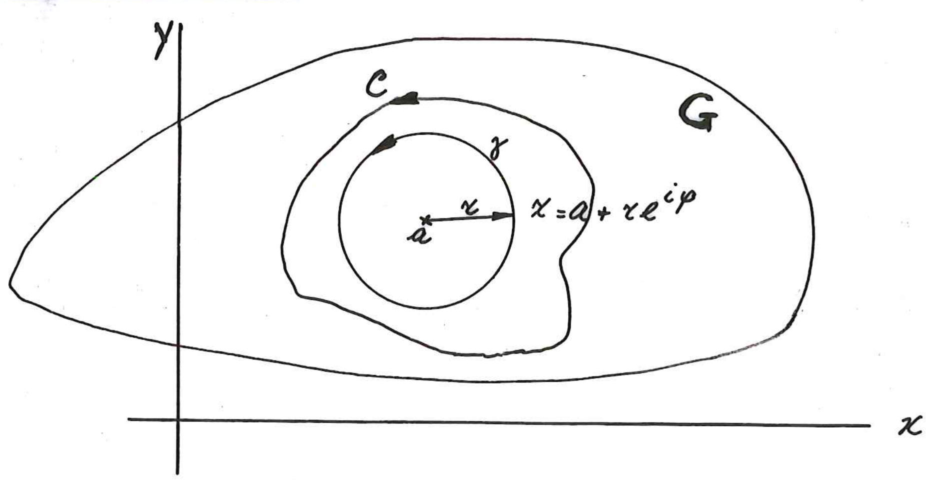
$$\int_a^b f\,g'\,dz = \int_a^b (fg)'dz - \int_a^b f'(g)dz = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b f'g\,dz$$

In de gewone integraalrekening wordt dit gewoonlijk als volgt geschreven:

$$\int_a^b F(x)dx = \left[\,x\,F(x)\right]_a^b - \int_a^b x\,F'(x)\,dx.$$

Hier is dus $g(x) \equiv x$ en $g'(x) \equiv 1$ genomen.

Integralen van Cauchy.



f(z) analytisch binnen G en op de rand C.

a is willekeurig punt binnen G.

C is willekeurige kromme in G, die a omsluit.

Te bewijzen:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)} \quad *). \qquad (I)$$

d.i. de eerste integraal van Cauchy.

*) C^+ wil zeggen dat C in positieve richting, d.i. linksom, doorlopen moet worden.

Bewijs: $\frac{f(z)}{z-a}$ is i.h.a. niet analytisch in z = a. (Het <u>kan</u> wel, als f(z) deelbaar is door z - a). z = a is dus een singulier punt van de integrand.

$$\underbrace{\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz}_{\text{volgens stelling van Cauchy.}} = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz + \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz$$

$$= f(a)\int_\gamma \frac{dz}{z-a} + \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = f(a)\int_0^{2\pi} \frac{r\,i\,e^{i\varphi}}{r\,e^{i\varphi}}\,d\varphi + \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz =$$

$$= 2\pi i . f(a) + \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz.$$

f(z) is analytisch in G, dus ook continu:

$$|f(z)-f(a)| < \varepsilon \qquad \text{voor } |z-a| < \delta.$$

Kies $r < \delta$.

$$\left|\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz\right| \leq \int_\gamma \frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}\,|dz| < \frac{\varepsilon}{r}.L = \frac{\varepsilon}{r}.2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

want $L = 2\pi r$.

Dus:

$$\underbrace{\left|\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz - 2\pi i\ f(a)\right|}_{\text{onafhankelijk van } \varepsilon.} < 2\pi\varepsilon,$$

dus:

$$|- - - -| = 0 \text{ of: } \int_{C^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\ f(a)$$

Deze stelling wil dus zeggen: door de grens worden alle functie-waarden in het omsloten gebied éénduidig bepaald !!

Te bewijzen:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = f'(a)} \qquad \text{(II)}$$

Bewijs:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i h}\left\{\int_{C^+}\frac{f(z)}{z-a-h}\,dz - \int_{C^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz\right\} =$$

(Volgens stelling I) $= \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{C^+}\frac{f(z)}{h}\left(\frac{1}{z-a-h}-\frac{1}{z-a}\right)dz =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)(z-a-h)}\cdot dz$$

Bewijs van de integraal van Cauchy.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)$$

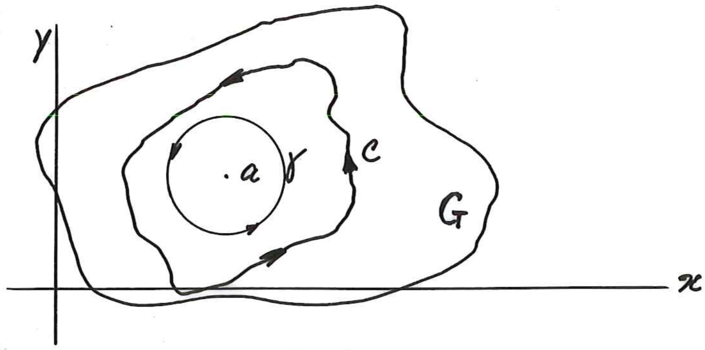
Gegeven:

f(z) is analytisch in G.

a is willekeurig punt binnen G.

C is willekeurige kromme binnen G die a omsluit.

Bewijs:



γ is cirkel met straal r om a.

Op a is:

$z = a + re^{i\varphi}$ $z - a = re^{i\varphi}$

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$dz = rie^{i\varphi}d\varphi$

De integrand $\frac{f(z)}{z-a}$ is singulier voor $z = a$. Nergens anders in G: teller overal analytisch, noemer ook, breuk met uitzondering van $z = a$.

Opm.: In bijzondere gevallen kan het quotient toch nog analytisch zijn als f(z) deelbaar is door (z - a). Dit maakt geen essentieel verschil. We vinden dan f(a) = 0, hetgeen in orde is, want in dat geval moet z = a een nulpunt van f(z) zijn.

Volgens de stelling van Cauchy, met 1 ingesloten singulariteit, is dan:

$$\int_{C^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{\gamma^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{\gamma^+} \frac{f(z)+f(a)-f(a)}{z-a}\,dz = \underbrace{\int_{\gamma^+} \frac{f(a)}{z-a}\,dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{\gamma^+} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{\gamma^+} \frac{f(a)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a)}{re^{i\varphi}}\, r i e^{i\varphi} d\varphi = f(a).\,i.\int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{\underline{2\pi i f(a)}}$$

I_2 wordt geschat. De functie f(z) is analytisch, dus ook continu, dus ook begrensd. En wel:

$$\left.\begin{array}{l} |f(z)-f(a)| < \varepsilon \quad \text{voor } |z-a| < \delta \\ \phantom{|f(z)-f(a)| < \varepsilon \quad \text{voor }} |z-a| = r \end{array}\right\} \quad \text{dus voor } r < \delta$$

M.a.w. als $r < \delta$ gekozen wordt is $|f(z)-f(a)| < \varepsilon$. Dan is

$$\left|\int I_2\right| \leq \int_{\gamma^+} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| |dz| = \int_{\gamma^+} \frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|} |dz| =$$

$$= < \int_{\gamma^+} \frac{\varepsilon}{r} |dz| = \frac{\varepsilon}{r} \int_{\gamma^+} |dz| = \frac{\varepsilon\, 2\pi r}{r} = \underline{\underline{2\pi\varepsilon}}$$

Dus: $|I_2| < 2\pi\varepsilon$, zodat:

$$\int_{C^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = I_1 + I_2 = 2\pi i f(a) + I_2$$

$$\left|\int_{C^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - 2\pi i f(a)\right| = |I_2| < 2\pi\varepsilon \qquad \text{(VOOR ELKE } \varepsilon\text{)}$$

Dit kan <u>alleen</u> waar zijn als:

$$\left|\int_{C^+} - 2\pi i f(a)\right| = 0.$$

En <u>dit</u> kan alleen waar zijn als:

$$\int_{C^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

of:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).}$$

De streng wetenschappelijke manier om II aan te tonen is nu:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)\left\{\frac{1}{(z-a)(z-a-h)} - \frac{1}{(z-a)^2}\right\} dz =$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\,dz .$$

Kleinste afstand van z - a tot C is δ. Dus op C is $|z-a| \geq \delta$.
f(z) is analytisch in G, dus begrensd. Op C is er dus een bovengrens voor f(z):

$$|f(z)| < M$$

$$|z-a-h| \geq \big|\,|z-a|-|h|\,\big| \geq \delta-|h| \qquad \text{voor } |h|<\delta$$

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right| \leq \boxed{\frac{|h|}{2\pi}\,\frac{M}{\delta^2(\delta-|h|)}}$$

dit is een eindig bedrag.

Dus:

$$\lim_{h\to 0}\left|\text{-------}\right| = 0$$

of:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$

of:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

De functiewaardenlangs de omtrek C bepalen dus alle functiewaarden binnen C en zelfs alle afgeleiden binnen C !!

$$\boxed{\frac{2!}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz = f''(a)} \qquad \text{(III)}$$

Bewijs:

$$f''(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

Als deze lim bestaat.

$$\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^2}-\frac{1}{(z-a)^2}\right\}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{h}\cdot\frac{(z-a)^2-(z-a-h)^2}{(z-a)^2\cdot(z-a-h)^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z).(2z-2a-h)}{(z-a)^2(z-a-h)^2}\,dz.$$

Op dezelfde strenge manier wordt er nu $\frac{2}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz$ van beide leden afgetrokken. Het rechterlid wordt dan:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{\{(2z-2a-h)-(2z-2a-2h)\}}{(z-a)^3(z-a-h)}f(z)\,dz = \frac{h}{2\pi}\int\frac{f(z)}{(z-a)^3(z-a-h)}\,dz \to 0$$

voor $h \to 0$

Zo gaat dit verder. Algemene formule:

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(a) \qquad (N+1)$$

Voor n geheel en positief.

Dit toont ook aan dat een analytische functie onbeperkt differentieerbaar is. Het blijkt n.l. dat iedere afgeleide op zijn beurt weer gedifferentieerd kan worden. (Het linkerlid van de vergelijking bestaat n.l. voor elke n, dus ook het rechterlid).

Algemeen bewijs van:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad (N+1)$$

d.m.v. volledige inductie. Voor de eerste en twee afgeleide (en voor de functie zelf), dus voor n = 0, 1, 2 is bovenstaande bewezen. Veronderstel geldig voor n = n, dan moet bewezen worden dat deze stelling ook voor n = n + 1 geldig is.

$$f^{(n+1)}(a) = \frac{d}{da} f^{(n)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n!}{2\pi i h} \left[\int_{C+} f(z) \cdot \left\{ \frac{1}{(z-a-h)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \right\} dz \right]$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \lim_{h \to 0} \int_{C+} \frac{f(z)}{h} \cdot \frac{(z-a)^{n+1} - (z-a-h)^{n+1}}{(z-a)^{n+1} \cdot (z-a-h)^{n+1}}\, dz.$$

Nu is:

$$\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q} = \underbrace{p^n + p^{n-1}q + p^{n-2}q^2 + \cdots\cdots + pq^{n-1} + q^n}_{n+1 \text{ TERMEN.}}.$$

toepassen op de integrand met:

$p \equiv z - a$

$q \equiv z - a - h$

$p - q \equiv h.$

Dus:

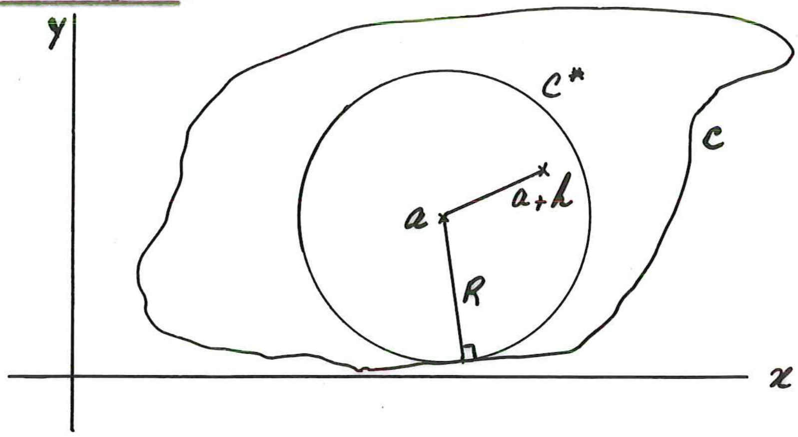
$$\frac{n!}{2\pi i} \lim_{h \to 0} \int_{C+} f(z) \cdot \frac{(z-a)^n + (z-a)^{n-1} \cdot (z-a-h) + \cdots\cdots + (z-a-h)^n}{(z-a)^{n+1} \cdot (z-a-h)^{n+1}}\, dz.$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_{C+} f(z) \cdot \frac{(n+1)(z-a)^n}{(z-a)^{2n+2}}\, dz =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{C+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+2}}\, dz \qquad (N+2)$$

Deze formules gelden dus voor iedere gehele n.

Reeks van Taylor.



f(z) analytisch op en binnen C; a willekeurig binnen C; kortste afstand van a tot C = R (R > 0). Cirkel C* met a als middelpunt en R als straal ligt geheel op of binnen C. Dus f(z) is analytisch op en binnen C*. Neem a + h binnen C*, dus binnen C, dus $|h| < R$. Integraal van Cauchy voor C*:

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(z)}{z-a-h}\,dz \qquad (2)$$

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{h}{z-a}\right)} \qquad (1)$$

z doorloopt C*, dus $|z - a| = R$, $|h| < R$, dus $\left|\frac{h}{z-a}\right| < 1$.

Verder is:

$$\frac{1-u^{n+1}}{1-u} \equiv 1 + u + u^2 + \dots + u^n$$

(gewoon een merkwaardig quotient, voor elke u geldig).

dus:

$$\frac{1}{1-u} \equiv (1 + u + u^2 + \dots + u^n) + \frac{u^{n+1}}{1-u}$$

toegepast met $u \equiv \frac{h}{z-a}$

(1) wordt:

$$\frac{1}{z-a-h} \equiv \frac{1}{z-a}\left\{1 + \frac{h}{z-a} + \frac{h^2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{h^n}{(z-a)^n} + \boxed{\frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}\left(1-\frac{h}{z-a}\right)}}\right\}$$

$$\equiv \frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \frac{h^2}{(z-a)^3} + \dots + \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}} + \boxed{\frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}}$$

Dus zie (2) en uitsplitsing van het herleide rechterlid in afzonderlijke integralen:

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(z)}{(z-a)}\,dz + \frac{h}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz +$$

$$+ \frac{h^2}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz + \ldots\ldots + \frac{h^n}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz +$$

$$+ \boxed{\frac{h^{n+1}}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\,dz\,.} \qquad \text{(A)}$$

of:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) +$$

$$\ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}f^{n}(a) + \boxed{\frac{h^{n+1}}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\,dz}$$

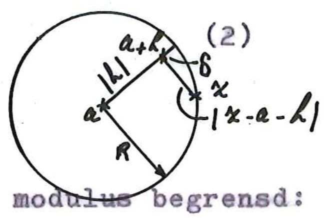
RESTTERM NA $(n+1)$ TERMEN; AFSCHATTEN.

Deze formule komt precies overeen met de reeks van Taylor, afgezien van de restterm.

Schatting van:

$$\left| \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\,dz \right|$$

$$|z-a-h| \geqslant \delta = R - |h| > 0 \qquad |z-a| = R$$



f(z) is analytisch <u>op</u> (en binnen) C*, dus continu en dus modulus begrensd: $|f(z)| < M$. M eindig en constant.

(2): $$|\ldots\ldots| < \frac{|h|^{n+1}}{2\pi}\int_{C^*} \frac{M}{R^{n+1}\cdot\delta}\,|dz| =$$

$$= \frac{|h|^{n+1}\cdot 2\pi R M}{2\pi R^{n+1}\delta} = \underbrace{\left|\frac{M.R}{\delta}\right|}_{\text{constante}} \cdot \underbrace{\left|\frac{h}{R}\right|^{n+1}}_{<1}$$

$$\left|\frac{h}{R}\right|^{n+1} \to 0 \text{ VOOR } n \to \infty .$$

Dus $\left|\int(\text{restintegraal})\right| \longrightarrow 0$ voor $h \to \infty$. Dus de reeks (A) convergent voor alle a + h binnen C*, dus voor $|h| < R$.

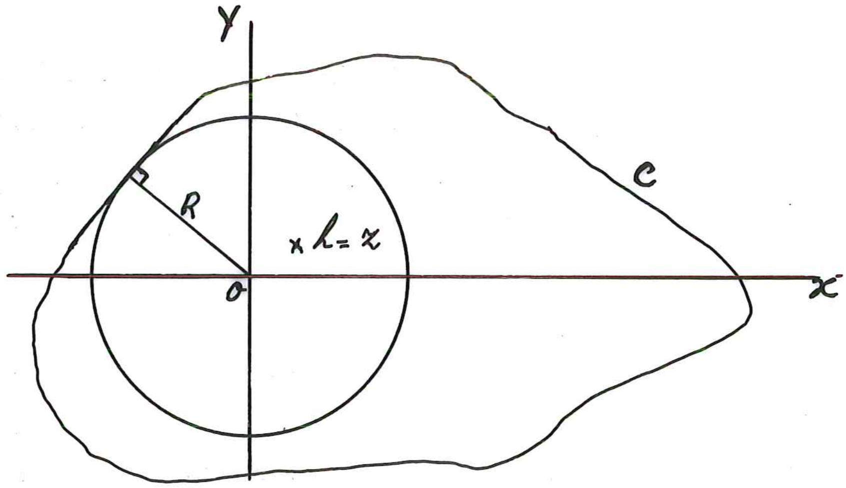
$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \ldots\ldots$$

Deze oneindig voortlopende reeks is convergent voor $|h| < R$. Dit is de <u>reeks van Taylor</u> voor complexe functies

De reeks van Mac-Laurin volgt hier onmiddellijk uit door a = 0 te stellen. Dit kan alleen als 0 binnen C ligt. Noem h = z. $|z| < R$.
Dan is:

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1!}f'(0) + \frac{z^2}{2!}f''(0) + \frac{z^3}{3!}f'''(0) + \ldots\ldots + \frac{z^n}{n!}f^{n}(0) + \ldots\ldots$$

convergent voor $|z| < R$.



d.i. de ontwikkeling van Mac-Laurin.. Links staat een analytische functie (voorwaarde waarnaar Taylor-reeks is afgeleid !); rechts een machtreeks:

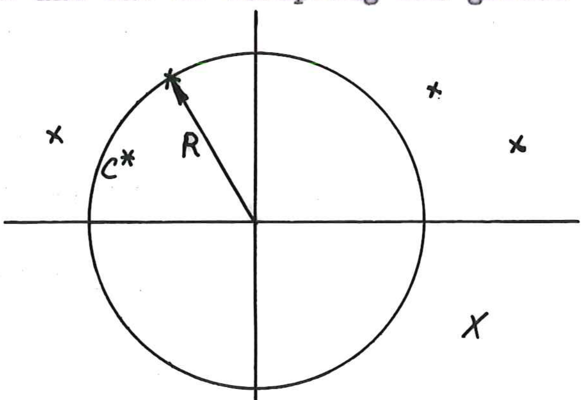
$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Dus elke analytische functie kan in een machtreeks worden uitgedrukt.
Met:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Convergent voor $|z| < R$.

Het voorgaande (Cauchy, Taylor, Mac-Laurin) gold allemaal voor analytische functies. De meeste functies hebben echter één of meer singuliere punten. Neem aan dat de oorsprong een gewoon punt is, dus waar f(z) analytisch is.



Dan is f(z) analytisch binnen cirkel C*, die door het dichtst bij de oorsprong gelegen singuliere punt gaat.

Dus: Stelling.

Iedere functie die analytisch is in de omgeving van O, kan worden ontwikkeld in een machtreeks naar machten van z, die convergent binnen de cirkel C*, met middelpunt O, die zich uitstrekt tot het singuliere punt, dat zo dicht mogelijk bij O is gelegen.

Cirkel C* heet de convergentie-cirkel, R heet de convergentie-straal.

Opm.: Deze uitspraak geldt alleen binnen de convergentie-cirkel; omtrent convergentie e.d. kan op de cirkel niets gezegd worden.

Vroeger is bewezen:

Een machtreeks stelt binnen haar convergentie-cirkel een analytische functie voor.

Nu:

Een analytische functie stelt binnen haar convergentie-cirkel een machtreeks voor.

Dus de begrippen analytische functie en machtreeks dekken elkaar volkomen. Als de oorsprong een singulier punt is, kan je een nieuwe oorsprong nemen: a en een reeks-ontwikkeling naar machten van $(z - a)$ i.p.v. z opstellen.

Een analytische functie is equivalent met, komt overeen met een machtreeks. Weierstrasz heeft de hele functietheorie opgezet met machtreeksen. Cauchy heeft dat gedaan met integralen (Van Veen: degelijk, droog en romantisch; vergelijking met volksaard !!).

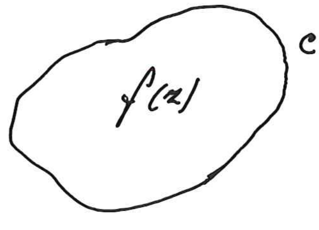
In het eindige complexe vlak hebben geen singuliere punten: e^z, $\sin z$, $\cos z$. (niet tg.z).

In het oneidige hebben zij nog één singulariteit.

Er zijn zelfs functies die nergens (noch in het eindige, noch in het oneindige) een singulariteit hebben. Dit zijn echter alleen maar constanten. Dit is een zeer belangrijke stelling, die later nog bewezen zal worden.

Omrekening van de stelling van Cauchy.

Gegeven: $f(z)$ analytisch op en binnen C.

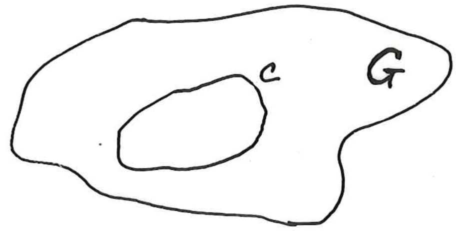


Cauchy : $\int_C f(z)dz = 0$.

Omkering.

Gegeven: $f(z)$ is continu in G

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

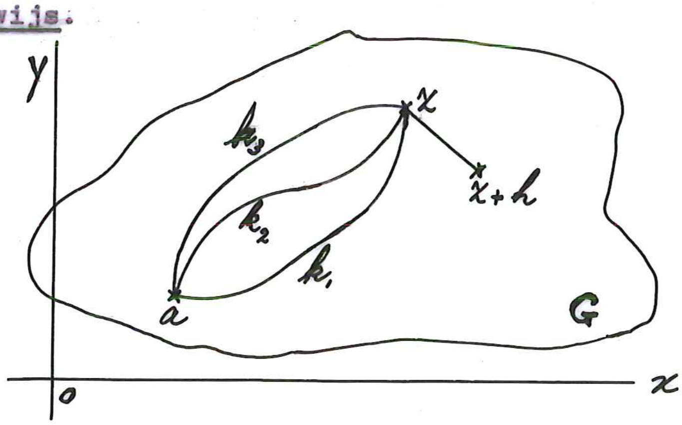


voor iedere kromme C binnen G.

Stelling:

$f(z)$ is analytisch binnen G (stelling van Morera, $\pm$ 1900).

Bewijs.



$$\int_{a\,(k_1)}^{z} f(z)\,dz = \int_{a\,(k_2)}^{z} = \int_{a\,(k_3)}^{z}$$

Deze integralen zijn onafhankelijk van de weg omdat gegeven is dat de contourintegraal nul is (alles binnen G !). Ze hangen uitsluitend af van Z.

$$\int_a^Z f(z)\,dz = F(Z)$$

$$F(Z+h) = \int_a^{Z+h} f(z)\,dz = \underbrace{\int_a^Z f(z)\,dz}_{F(z)} + \int_Z^{Z+h} f(z)\,dz$$

$$F(Z+h) - F(Z) = \int_Z^{Z+h} f(z)\,dz \qquad \text{Ook:} \qquad \frac{F(Z+h)-F(Z)}{h} = \int_Z^{Z+h} f(z)\,dz.$$

Langs een rechte lijn, voor $h \to 0$ nadert $\frac{1}{h}\int_Z^{Z+h} f(z)dz \to f(Z)$. Dit is al meer malen aangetoond. N.l.: Stel:

$$\int f(z)\,dz = \varphi(z) + \text{constant. Dan:} \; \frac{1}{h}\int_Z^{Z+h} f(z)\,dz = \frac{\varphi(Z+h)-\varphi(Z)}{h}$$

lim voor $h \to 0$ geeft $\varphi'(z)$ maar $\varphi'(z) = f(z)$.

Dus:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(Z+h)-F(Z)}{h}$$

bestaat, dus F(Z) bezit een afgeleide, dus F(Z) is analytisch in alle punten van G. Maar dan is ook F'(Z) analytisch, en dus f(z) ook.

Noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor ontwikkeling van een functie f(z) in een machtreeks is: f(z) is analytisch.

$$f(z) = f\{(a) + (z-a)\} = f(a) + \frac{z-a}{1!}f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}f''(a) + \dots \qquad \text{(Taylor)}$$

Bij a = 0:

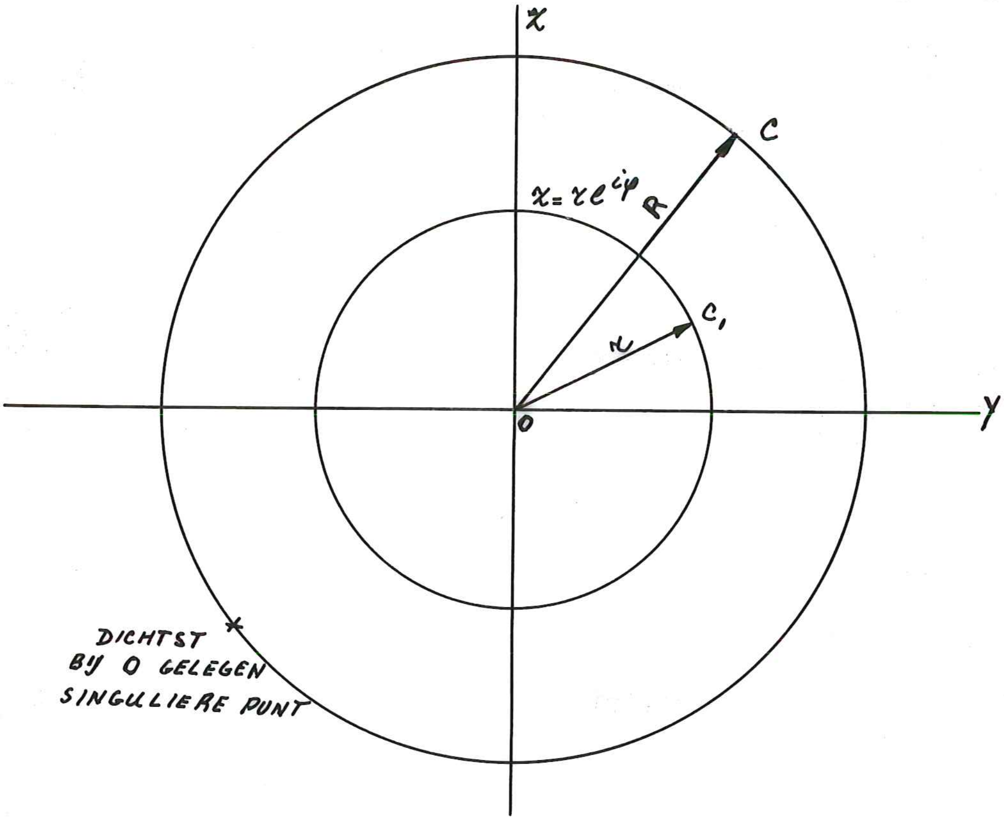
$$f(z) = f\{(0) + (z-0)\} = f(0) + \frac{z}{1!}f'(0) + \frac{z^2}{2!}f''(0) + \dots \qquad \text{(Mac Laurin).}$$

Als f(z) analytisch is in de omgeving van a en de straal van een singulariteitenvrije-cirkel om a is R, dan is f(z) analytisch binnen de cirkel. De reeks ontwikkeling geldt dan voor $|z - a| < R$ = convergentiestraal. Voor z = 0 is een gewoon punt, geldt dus:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n +$$

Met: $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Machtreeks-ontwikkeling van analytische functie in de omgeving van 0.



f(z) is analytisch op en binnen C_1 met straal $r < R$. Op C_1 is $|f(z)| \leq M(r)$ want f(z) is analytisch, dus begrensd; i.h.a is M afhankelijk van r.

Gevraagd: ongelijkheden voor a_n.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C^{a+}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

neem a = 0:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^{0+}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

Kies voor C^{0+} de cirkel C_1:

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_1} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\varphi})\, r i e^{i\varphi}}{r^{n+1} e^{(n+1)i\varphi}}\, d\varphi \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\varphi})i|}{|e^{ni\varphi}|}d\varphi \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi \leq \frac{1}{2\pi r^n} M(r)\int_0^{2\pi} d\varphi \leq$$

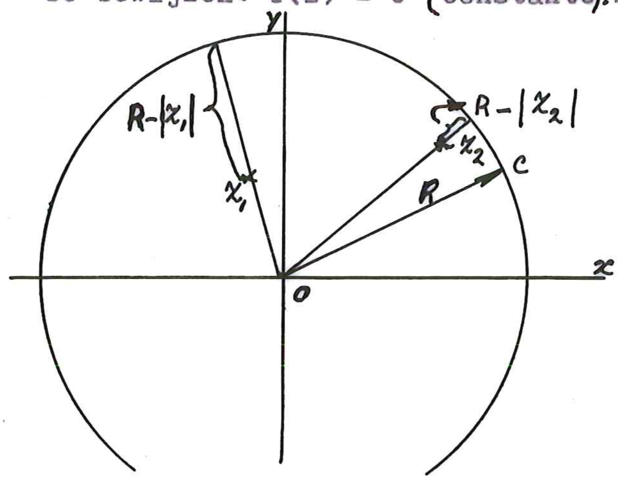
$$|e^{ni\varphi}| = 1. \qquad\qquad \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

$$\boxed{|k_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}}$$

Ongelijkheid van Cauchy.

Gegeven: 1e. f(z) is analytisch in alle punten van het z-vlak.
2e. f(z) is begrensd in het hele z-vlak, d.w.z. $|f(z)| < M$ (eindige waarde).

Te bewijzen: f(z) = C (constante). Stelling van Lionville.



$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^{z_1+}} \frac{f(z)}{z-z_1}\,dz$$

$$f(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^{z_2+}} \frac{f(z)}{z-z_2}\,dz$$

z_1 en z_2 zijn willekeurige punten, dus als we kunnen bewijzen $f(z_1) = f(z_2)$ dan moet f(z) constant zijn in het hele z-vlak.

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)\left\{\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right\}dz$$

waarbij als integraalkromme een cirkel om O gekozen is met straal R, die zowel z_1 als z_2 omvat.

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{z_1 - z_2}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Op C is
$$|z - z_1| \geq R - |z_1|$$
$$|z - z_2| \geq R - |z_2|$$
$$|f(z)| < M$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi}\cdot\frac{M.2\pi R}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)} = \frac{|z_1 - z_2|\,M.R}{(R-|z_1|).(R-|z_2|)}$$

Over R is niets anders verondersteld dan dat de cirkel z_1 en z_2 omsluit; kies $R > 2|z_1|$ en $R > 2|z_2|$, dus:

$|z_1| < 1/2\,R$ dus $R - |z_1| > 1/2\,R$
$|z_2| < 1/2\,R$ $\quad R - |z_2| > 1/2\,R$

$$\rightarrow \frac{R}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)} < \frac{R}{\frac{1}{4}R^2} < \frac{4}{R}$$

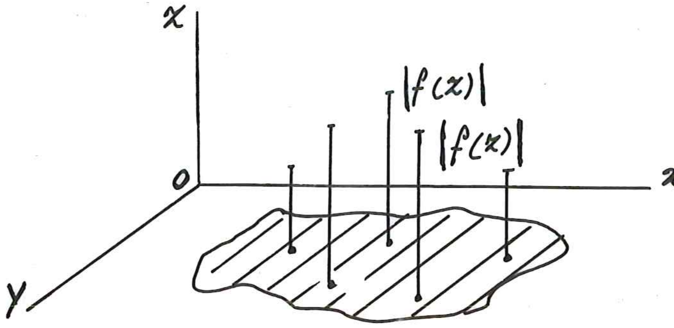
Dus:

$$|f(z_1)-f(z_2)| \leq \frac{4M|z_1-z_2|}{R}$$

Voor $R \rightarrow \infty$ gaat $|f(z_1) - f(z_2)| \rightarrow 0$, dus $f(z_1) = f(z_2)$.

Stelling van het maximum van $|f(z)|$.

Grafisch aangeduid ontstaat het "analytische landschap": (Langs de derde as (z-as) wordt $|f(z)|$ uitgezet).



GRONDVLAK = COMPLEXE VLAK.

Een analytische functie kan de maximumwaarde van $|f(z)|$ alleen aannemen op de rand. Of $|f(z)|$ kan geen maximum bereiken voor een punt van het inwendige van G.
(N.B. Voor niet analytische functies is dit anders !!).

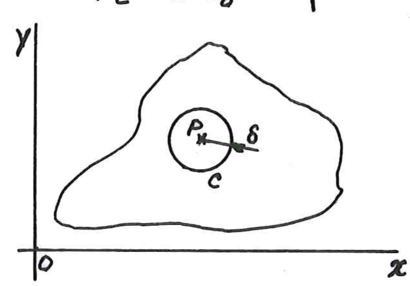
Bewijs uit het ongerijmde. Stel dat $|f(z)|$ zijn maximum M bereikt in een inwendig punt $P(z_0)$. Dan is op C $|f(z)| < M$; $|f(z_0)| = M$. z op de cirkel C:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$|f(z_0)| < \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right| = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\delta}\left|\delta i e^{i\varphi}\right| = \frac{M}{2\pi}.2\pi = M$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \rightarrow |f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{C+}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{C+}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|}\,|dz|$$



Op C is $z = \delta e^{i\varphi}$ met $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $\quad dz = \delta i e^{i\varphi} d\varphi$

$$|z-z_0| = \delta \qquad |dz| = |\delta e^{i\varphi} i\, d\varphi| = |\delta e^{i\varphi} d\varphi| = \delta\, d\varphi$$

Dus:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z)|}{\delta}\,\delta\, d\varphi < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, d\varphi = \frac{M}{2\pi}\,2\pi = M$$

D.i. in tegenspraak met veronderstelling, dus $|f(z)|$ kan nooit een maximum bereiken in een inwendig punt $P(z_0)$.

Maar de functie is analytisch, dus continu, dus moet er een maximum zijn. Dan moet dit maximum dus bereikt worden op de rand.

Bijzondere analytische functies.

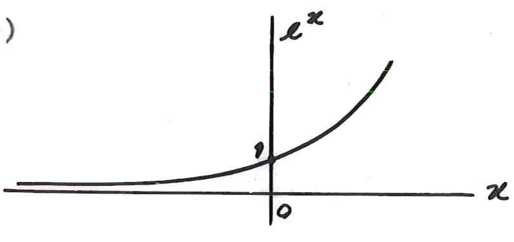
$f(z)$ is analytisch in G. Het is mogelijk dat in een punt a van G $f(a) = 0$; a heet een nulpunt van $f(z)$. Voorbeeld $f(z) = \sin z$.
Goniometrie $\sin k\pi = 0$ (voor k geheel).
Nulpunten van $\sin z$ zijn (o.a.?) 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ enz. Dit zijn enkelvoudige nulpunten. Het moet nog bewezen worden dat er geen andere zijn.
Voorbeeld $f(z) = az + b$. Nulpunt: $z = -\frac{b}{a}$ (één nulpunt).

Een algebraïsche veelterm van de n^e graad heeft precies n nulpunten, i.h.a. complex. (Voor het eerst streng bewezen door Gauss, 1799). Niet alle functies bezitten nulpunten. Triviaal is $f(z) = C$ voor $C \neq 0$. Ook e^z bezit geen nulpunt in het eindige.
Stel $z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$|e^z| = e^x$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0,$$



maar e^x is voor geen enkele eindige waarde van x nul, dus $|e^z| \neq 0$, dus ook $e^z \neq 0$.
In de omgeving van a:

$$f(z) = f(a) + (z-a).\frac{f'(a)}{1!} + (z-a)^2.\frac{f''(a)}{2!} + \dots$$

a nulpunt $\rightarrow$ $f(a) = 0$, dus $f(z)$ is deelbaar door $(z - a)$. Het kan gebeuren dat bovendien $f'(a) = 0$. Bijv.:

$$f(z) = \sin^2 z \qquad z = 0 \ : \ f(z) = 0.$$

$$f'(z) = 2 \sin z \cos z = 0 \qquad \text{voor } z = 0.$$

Het kan ook gebeuren dat $f''(a) = 0$ enz. Stel:

$$f'(a) = 0 \text{ t/m } f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ maar } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

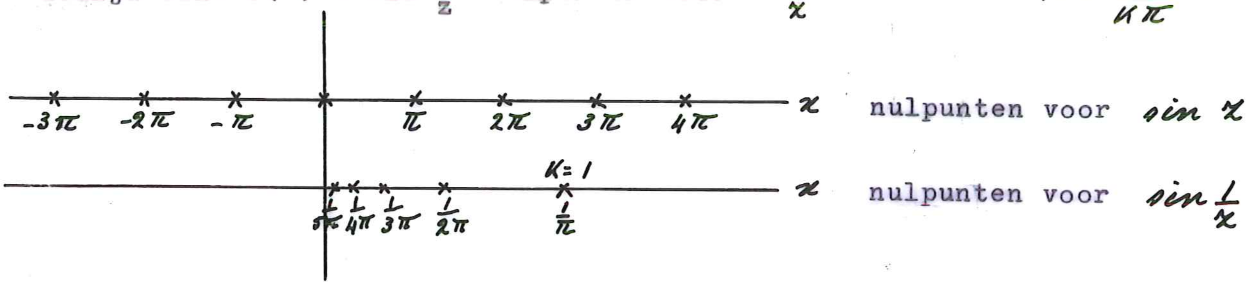
Dus:

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0; \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

$$f(z) = (z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dots$$

Nu is $f(z)$ deelbaar door $(z - a)^n$. In dit geval spreken we over een n-voudig nulpunt, (functiewaarde in a en (n - 1) afgeleiden in a zijn nul).

Bekijk eens $f(z) = \sin\frac{1}{z}$. Nulpunten voor: $\frac{1}{z} = k\pi \longrightarrow z = \frac{1}{k\pi}$



In elke omgeving van 0, hoe klein ook, komen nulpunten voor. Een dergelijk geval doet zich nu niet voor bij een analytische functie.

<u>Stelling</u>: De nulpunten van een <u>analytische</u> functie liggen geïsoleerd. (Een punt a_1 heet geïsoleerd als er een straal δ is te bepalen, zodat er binnen de cirkel om a_1 met straal $\delta > 0$ <u>alleen</u> het punt a_1 van de verzameling (bijv. verzameling nulpunten) is gelegen).

Belangrijke stelling ! (Een punt 0 als bij de nulpunten van $\sin\frac{1}{z}$ heet een <u>verdichtingspunt</u>).

<u>Bewijs</u>.

Neem (zonder beperking) aan dat $a = 0$ een k-voudig nulpunt is ($k = 0, 1, 2, \ldots$ naar believen):

$$f(z) = z^k \cdot \frac{f^{k}(0)}{k!} + \ldots =$$

$$= a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots$$

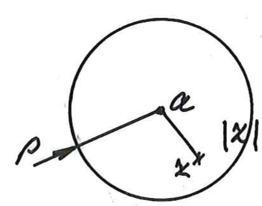
De functie is analytisch, dus de machtreeks convergent binnen de cirkel $|z| < R$. Neem $\rho < R$. De termen zijn alle begrensd (convergent!), dus $|a_n z^n| = |a_n|\rho^n$ begrensd voor alle n. Stel $|a_n|\rho^n < K$ voor alle n.

$$|a_n| < \frac{K}{\rho^n}$$

$$|f(z)| \geq |a_k z^k| - |a_{k+1} z^{k+1}| - |a_{k+2} z^{k+2}| - \ldots$$

$$|f(z)| \geq |a_k||z^k| \underbrace{- \frac{K}{\rho^{k+1}}|z^{k+1}| - \frac{K}{\rho^{k+2}}|z|^{k+2} - \ldots}_{\text{dit is een M.R. met reden } \frac{|z|}{\rho}}$$

$$|f(z)| \geq |a_k||z^k|\left\{1 - \frac{1}{|a_k|}\frac{K}{\rho^k}\left(\frac{|z|}{\rho} + \frac{|z|^2}{\rho^2} + \ldots\right)\right\}$$



$$= |a_k||z^k|\left\{1 - \frac{1}{|a_k|}\frac{\frac{K}{\rho^k}\cdot\left|\frac{z}{\rho}\right|}{1 - \frac{|z|}{\rho}}\right\} =$$

$$= |a_k||z|^k\left\{1 - \frac{1}{|a_k|}\frac{K.|z|}{\rho^k(\rho - |z|)}\right\}$$

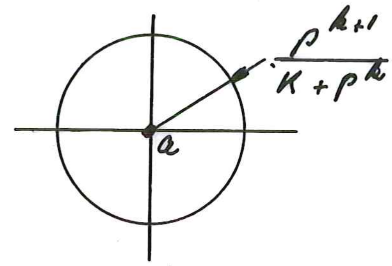
Te zorgen dat:

$$\frac{1}{a_k}\;\frac{K|z|}{\rho^k(\rho-|z|)} < 1.$$

$$K|z| < \rho^{k+1} - \rho^k|z| \qquad\qquad \{K+\rho^k\}|z| < \rho^{k+1}.$$

voor:

$$|z| < \frac{\rho^{k+1}}{K+\rho^k} \quad \text{is} \quad |f(z)| \geqslant 0$$



dus ligt er geen ander nulpunt in de cirkel.

Het laatst behandelde onderwerp was nulpunten van analytische functies.

$$f(z) = f(a) + (z-a)\frac{f'(a)}{1!} + (z-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \dots$$

Als $f(a) = 0$ (a is nulpunt van $f(z)$) dan is $f(z)$ deelbaar door $z - a$.

Als bovendien:
$$\left\{\begin{array}{ll} f'(a) & = 0 \\ f''(a) & = 0 \\ \vdots & \\ f^{(k-1)}(a) & = 0 \\ f^{(k)}(a) & \neq 0, \end{array}\right.$$

dan is:

$$f(z) = (z-a)^k\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \dots = (z-a)^k\left\{\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \dots\right\}$$

Dan heet a een k-voudig nulpunt van f(z). Voorbeeld:

$f(z) = 7(z-1)^3$: 1 is een drievoudig nulpunt

$f(z) = \sin^5 z$: $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ elk vijfvoudig nulpunt.

In de nulpunten blijft f(z) analytisch (niet singulier).

Nulpunten van sin z zijn <u>zeker</u> $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$, i.h.a. $k.\pi$ (k geheel).
Zijn dit de enige nulpunten?

VERG: $f(z) = e^z - 1$

$e^z = 1 = e^{2k\pi i}$

$z = 2k\pi i$, NULPUNT.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Stel dat een nulpunt is $z = x_0 + i\,y_0$; $\sin z = \sin(x_0 + i\,y_0) = 0$,

$$\frac{e^{i(x_0+iy_0)} - e^{-i(x_0+iy_0)}}{2i} = 0$$

$$\frac{e^{-y_0+ix_0} - e^{y_0-ix_0}}{2i} = 0, \text{ dus: } e^{-y_0+ix_0} = e^{y_0-ix_0}$$

of:

$$1 = e^{2y_0-2ix_0} = e^{2y_0}(\cos 2x_0 - i\sin 2x_0)$$

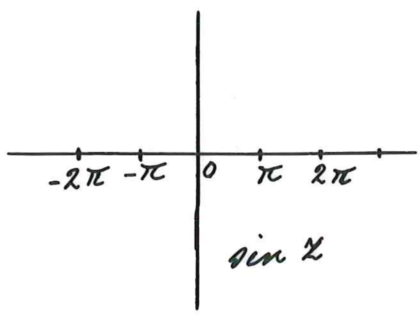
I/ $e^{2y_o} \cos 2x_o = 1$ II/ $e^{2y_o} \sin 2x_o = 0.$

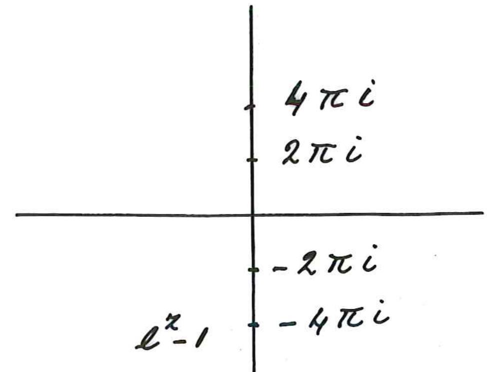
Uit deze twee volgt via kwadraten:

$e^{4.y_o} = 1 \rightarrow \underline{\underline{y_o = 0.}}$

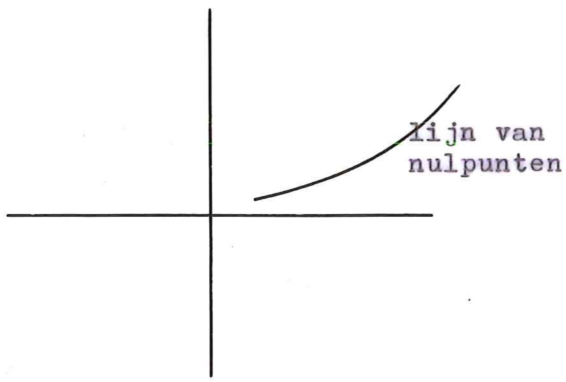
De enige nulpunten zijn die van $\sin x_o = 0$ met x_o reëel. sin z heeft alleen de nulpunten $k.\pi$.

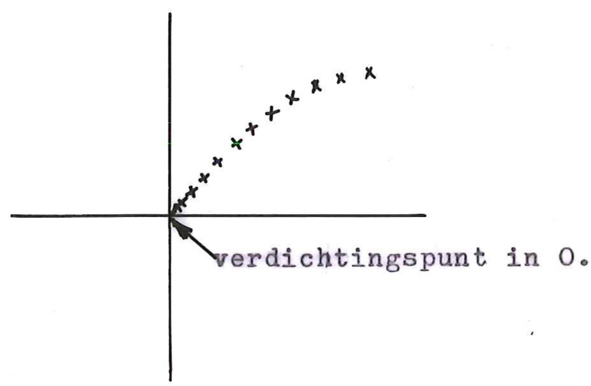
Waar liggen de nulpunten?





Zou er een lijn van nulpunten bestaan? (Dus ook bij elke andere functie ?)





Definitie verdichtingspunt.

a heet verdichtingspunt van de oneindige rij $z_1, z_2, z_3 \ldots$ als binnen iedere cirkel om a, hoe klein ook, steeds nog van a verschillende punten van de rij liggen.

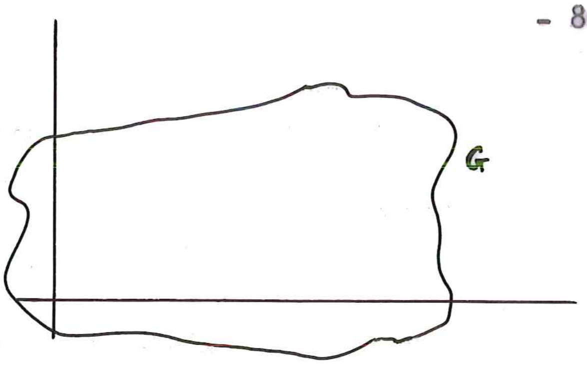
Tegenover dit begrip staat "geïsoleerd punt" (zie bijv. sin z). Een punt a heet geïsoleerd van een puntenverzameling als het mogelijk is een getal $\varepsilon > 0$ te bepalen, zodat binnen de cirkel om a met straal ε geen ander punt van de verzameling ligt dan a.

Stelling.

Wanneer f(z) analytisch is in een gebied G en wanneer de nulpunten van f(z) in G een verdichtingspunt bezitten, dan is $f(z) \equiv 0$ in G. M.a.w. wanneer $f(z) \not\equiv 0$ in G liggen de nulpunten van f(z) geïsoleerd.

Bewijs.

Zonder beperking nemen we aan dat $f(z) = 0$ voor $z = 0$, bijv. een k-voudig nulpunt.

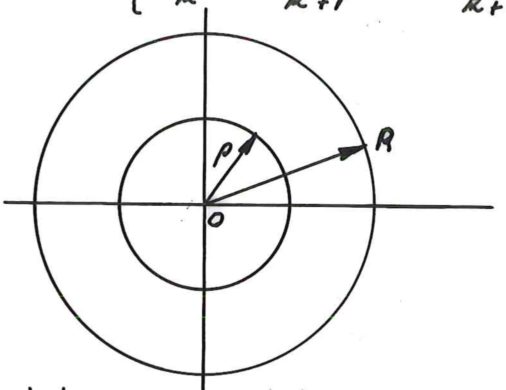


In de omgeving van z = 0:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots$$

$$a_k \neq 0 \qquad\qquad a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0.$$

$$f(z) = z^k \{ a_k + a_{k+1} z + a_{k+2} z^2 + \dots \} \quad \text{voor } |z| < R.$$



$0 < \rho < R$. Voor $|z| < R$. Voor $|z| = \rho$ is de reeks convergent. Stel dat $|f(z)| < M$ op cirkel met straal ρ. Ongelijkheden van Cauchy:

$$|a_n| < \frac{M}{\rho^n}$$

$$|a_{k+1} z + a_{k+2} z^2 + \dots| \leq |a_{k+1}||z| + |a_{k+2}||z^2| + \dots$$

$$\leq M \left\{ \frac{|z|}{\rho^{k+1}} + \frac{|z|^2}{\rho^{k+2}} + \dots \right\}$$

tussen accoladen een meetkundige reeks, convergent voor: $|z| < \rho$, reden $\frac{|z|}{\rho}$

som $\frac{1^e \text{ term}}{1-r}$.

$$\leq \frac{M|z|}{\rho^{k+1}(1 - \frac{|z|}{\rho})} = \frac{M|z|}{\rho^k(\rho - |z|)}$$

Dit nadert tot nul voor $|z| \to 0$. We kunnen $|z| z_0$ klein kiezen, dat:

$$\frac{M|z|}{\rho^k(\rho - |z|)} < \frac{1}{2}|a_k|$$

dus:

$$|f(z)| = |z|^k |a_k + a_{k+1} z + \dots|$$

$$\geq |z|^k \{ |a_k| - |a_{k+1} z + a_{k+2} z^2 + \dots| \}$$

Dus:

$$\geq |z|^k \{ |a_k| - |\tfrac{1}{2} a_k| \}$$

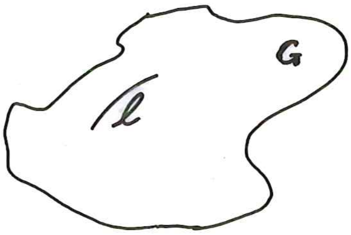
$$|f(z)| \geq |z|^k \cdot \frac{|a_k|}{2} > 0 \qquad \text{voor } |z| \neq 0$$

M.a.w. er is geen ander nulpunt van f(z) dan z = 0 in dit gebied.

Maar:

$$\sin \frac{1}{z} = 0 \longrightarrow z = \frac{1}{k\pi}$$

met 0 als verdichtingspunt. Is dan $\sin \frac{1}{z} \equiv 0$? Dat is niet zo, maar de functie is niet analytisch in een gebied G, n.l. niet voor $z = 0$ (zelfs niet bepaald voor $z = 0$).



Gegeven: $f(z)$ en $g(z)$ beide analytisch in G

$f(z) = g(z)$ in de punten van het boogje l.

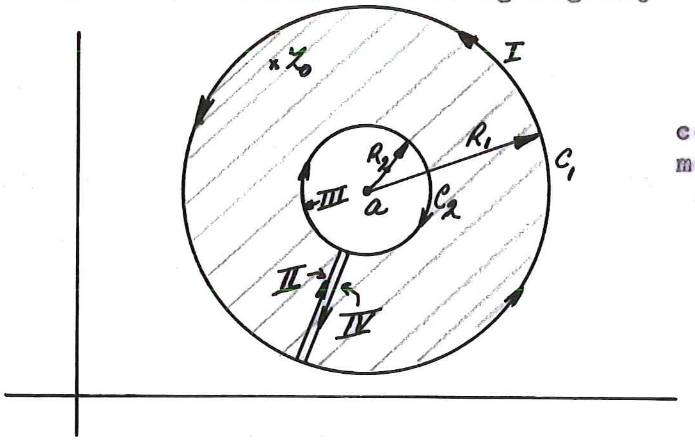
Dan geldt: $f(z) = g(z)$ in het hele gebied G.

Bewijs:

langs l is $F(z) = f(z) - g(z) = 0$, dus $F(z) \equiv 0$ in G (nulpunten niet geïsoleerd!). Dan is dus $f(z) = g(z)$ in G.

Singuliere punten.

Dit zijn punten waar $f(z)$ niet analytisch is. Bijv. $f(z) = \frac{1}{z-1}$ (niet analytisch in $z = 1$). Reeksontwikkeling mogelijk zoals bij analytische functies?



concentrische cirkels met middelpunt a: c_1 en c_2

a is een bijzonder punt: singulier of niet singulier. $f(z)$ is analytisch binnen de ring tussen de beide concentrische cirkels (ook de randen zijn analytisch!). $f(z)$ is éénwaardig: bij één gegeven waarde van z behoort dus slechts 1 waarde van $f(z)$. We nemen dus niet bijv.:

$f(z) = z^{1/2}$ (tweewaardig)

$f(z) = z^{1/3}$ (driewaardig)

(Worteltrekken uit complexe getallen is niet eenduidig te definiëren). We nemen in het gebied een willekeurig gewoon punt z_0.

Cauchy: $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

$f(z)$ analytisch op en binnen de gesloten kromme C die z_0 omvat.

"Slootje graven":

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\underbrace{C}_{C_1+II+C_2+IV}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{II}\cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^-}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{IV}$$

gelijk, wegens de eenwaardigheid

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Beschouw:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

$$z - z_0 = (z-a) - (z_0-a) \qquad |z_0-a| < |z-a| = R_1$$

als z C_1 doorloopt. Dus $\left|\frac{z_0-a}{z-a}\right| < 1$

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-a)-(z_0-a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{z_0-a}{z-a}\right)} = \frac{1}{z-a}\left\{1 + \frac{z_0-a}{z-a} + \left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^2 + \left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^3 + \cdots\right\}$$

Dus:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz}_{a_0} + (z_0-a)\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz}}_{=a_1} + \cdots \text{enz}$$

N.B. $a_0 \neq f(a)$ enz. volgens Cauchy omdat aan het analytisch zijn niet is voldaan. Definitie:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = a_n \qquad (n = 0,1,2,3,\ldots)$$

dus:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = a_0 + a_1(z_0-a) + \cdots + a_n(z_0-a)^n + \cdots$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$$ geldt voor: $\left|\frac{z_0-a}{z-a}\right| < 1.$

Als z de cirkel C_2 doorloopt:

$z - z_0 = (z-a) - (z_0-a)$ met: $|z-a| = R_2 < |z_0-a|$ dus: $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$

Dit veroorzaakt een fundamenteel verschil met de eerste integraal.

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-a)-(z_0-a)} = -\frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{z_0-a}} = -\left\{\frac{1}{z_0-a} + \frac{z-a}{(z_0-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(z_0-a)^3} + \cdots\right\}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} = +\frac{1}{(z_0-a)}\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} f(z)\,dz}}_{b_1=a_{-1}} + \frac{1}{(z_0-a)^2}\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}(z-a)f(z)\,dz}}_{b_2=a_{-2}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(z_0-a)^n}\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}(z-a)^{n-1}f(z)\,dz}}_{b_n=a_{-n}}$$

Dus:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z_0-a)^{-k}$$ alleen geldig voor $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$

waarbij dus: $b_n = a_{-n} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}(z-a)^{+n-1}f(z)\,dz$

We hebben dus gevonden:

$$f(z_0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_0 - a)^{-n}}_{\text{volgens negatieve machten}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 - a)^n}_{\text{volgens positieve machten.}}$$

Nu zijn a_n en a_{-n} gelijkwaardig:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} f(z) \times (z-a)^{-n-1}\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} f(z) \times (z-a)^{+n-1}\, dz \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

De enige moeilijkheid is dat geïntegreerd moet worden over C_1 resp. C_2. In deze integralen komt z_0 niet meer voor. Neem nu een willekeurige gesloten kromme in het ringgebied, bijv. een cirkel C met a als middelpunt. Dan is:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} f(z)(z-a)^{-n-1}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

daar het ringgebied geen singulariteiten bevat.
(N.B. In de oorspronkelijke integralen stond z_0 in de noemer, en dus was in z_0 een singulariteit!). En ook:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} f(z)(z-a)^{+n-1}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \underbrace{f(z)(z-a)^{n-1}}_{}\, dz$$

deze functie weer zonder singulariteit in ringgebied.

Dus:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)(z-a)^{-n-1}\, dz \qquad \text{met} \qquad -\infty < n < +\infty$$

Het eindresultaat wordt dus:

$$f(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z_0 - a)^n$$

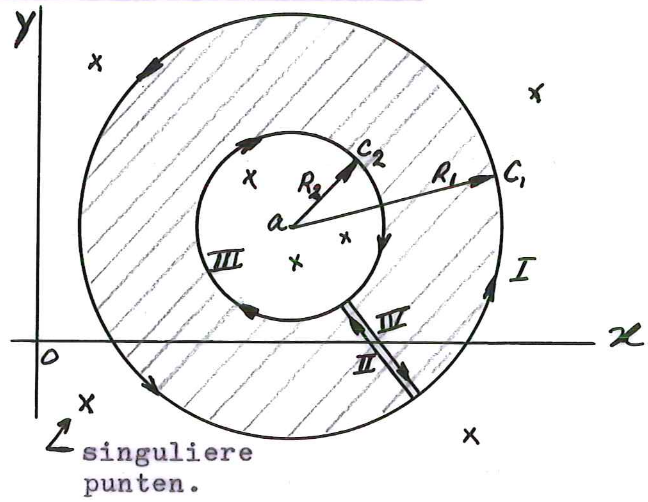
positieve en negatieve machtsontwikkeling van Laurent.

z_0 is een punt uit de ring. Bij een analytische functie had je alleen positieve machten in de machtreeks, bij een functie met singulariteiten binnen de binnenste en buiten de buitenste cirkel krijg je een reeksontwikkeling met positieve en negatieve machten. z_0 is een willekeurig punt uit het randgebied en kan dus geschreven worden als z. De coëfficiënt a_{-1} heet nog het residu; dit speelt een zeer belangrijke rol.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)\, dz$$

Het residu van f(z).

Afleiding van de Laurent-ontwikkeling.



Gegeven:

f(z) is éénwaardig,

f(z) is niet overal analytisch, maar heeft singulariteiten in de (x) punten,

f(z) is wel overal analytisch binnen ring gevormd door C_1 en C_2, inclusief de begrenzing,

a is een gekozen willekeurig punt, zowel binnen C_1 als C_2; het is niet van belang of f(z) voor z = a analytisch is of singulier.

Afleiding:

Kies willekeurig punt z_o in ringgebied.

$f(z_o)$ is analytisch,

contour C die z_o omsluit en waar binnen f(z) geheel analytisch is: I + II + III + IV.

Cauchy:

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_I + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{II\uparrow}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{III} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{IV\downarrow}}$$

in limiet toestand van een oneindig smal slootje zijn deze gelijk en tegengesteld op grond van éénwaardigheid.

$$= \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\int_I}_{I = C_1^+} + \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\int_{III}}_{III = C_2^-} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}$$

Dus:

$$f(z_o) = \boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-z_o}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}\frac{f(z)}{z-z_o}\,dz} \qquad (1)$$

Beschouw: $\displaystyle\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-z_o}\,dz.$

Integrand in een reeksontwikkelen

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-a)-(z_0-a)} = \frac{1}{(z-a)\left\{1-\frac{z_0-a}{z-a}\right\}}$$

$$|z_0 - a| < |z_{\text{op } C_1} - a| = R_1 \longrightarrow \frac{z_0-a}{z-a} < 1$$

zodat:

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a}\left\{1 + \frac{z_0-a}{z-a} + \left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^2 + \left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^3 + \dots\right\}$$

$$= \frac{1}{z-a} + \frac{z_0-a}{(z-a)^2} + \frac{(z_0-a)^2}{(z-a)^3} + \frac{(z_0-a)^3}{(z-a)^4} + \dots$$

zodat:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 1\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz}}_{=a_0} + (z_0-a)\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz}}_{=a_1} +$$

$$+ (z_0-a)^2\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz}}_{=a_2} + \dots$$

$$= a_0 + a_1(z_0-a) + a_2(z_0-a)^2 + a_3(z_0-a)^3 + \dots$$

waarin per definitie is:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz}$$

Opm.:Op grond van de Cauchy-integralen kan niet gezegd worden:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)$$

omdat f(z) niet overal analytisch is binnen C_1 !!. Dus $a_0 \neq f(a)$.

Uiteindelijk:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0-a)^n} \qquad (2)$$

coëfficiënt a_n boven gedefinieerd,

geldig voor $\left|\frac{z_0-a}{z-a}\right| < 1$ (in orde voor z op C_1).

Beschouw nu evenzo:

$$\int_{C_2^+}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Integrand weer in een reeks ontwikkelen. Nu doorloopt z de cirkel C_2 en is dus:

$$R = |z_{\text{op } C_2} - a| < |z_0 - a| \qquad \text{dus:} \qquad \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1.$$

Dit levert dus een geheel andere ontwikkeling op en een fundamenteel verschil met de eerste integraal.

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-a)-(z_0-a)} = -\frac{1}{(z_0-a)-(z-a)} = -\frac{1}{(z_0-a)\left\{1-\frac{z-a}{z_0-a}\right\}} =$$

$$= -\frac{1}{z_0-a}\left\{1 + \frac{z-a}{z_0-a} + \left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^2 + \dots\right\} =$$

$$= -\frac{1}{z_0-a} - \frac{z-a}{(z_0-a)^2} - \frac{(z-a)^2}{(z_0-a)^3} - \dots$$

zodat:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = +\frac{1}{z_0-a}\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} f(z)dz}}_{=b_1} + \frac{1}{(z_0-a)^2}\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} f(z)(z-a)dz}}_{=b_2} +$$

$$+\frac{1}{(z_0-a)^3}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} f(z)(z-a)^2dz}}_{=b_3} + \ldots =$$

$$= \frac{b_1}{z_0-a} + \frac{b_2}{(z_0-a)^2} + \frac{b_3}{(z_0-a)^3} + \ldots$$

waaruit per definitie is:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}(z-a)^{n-1}f(z)dz.} \qquad n = 1,2,3\ldots$$

Uiteindelijk dus:

$$\boxed{-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z_0-a)^{-n}} \qquad (3)$$

-coëfficiënt b_n boven gedefinieerd,
geldig voor $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|<1$ (in orde voor z op C_2).

Substitutie van (2) en (3) in (1) geeft:

$$f(z_0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z_0-a)^{-n}}_{\substack{\text{negatieve machten}\\ \text{van } (z_0-a)\\ \text{substitueer } n=-k}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^{n}}_{\substack{\text{positieve machten}\\ \text{van } (z_0-a)\\ \text{substitueer } n=k.}} =$$

$$= \sum_{k=-1}^{-\infty} b_{-k}(z_0-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0-a)^k \qquad (4)$$

Dit zou samengenomen kunnen worden tot één reeks $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ indien b_{-k} en a_k identiek waren.

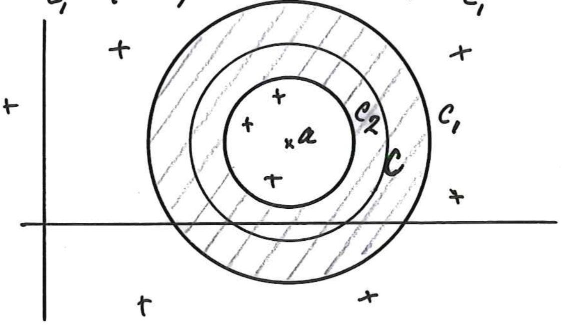
Nu is de definitie van b_n gelijkwaardig aan die van a_n voor n = -n.

N.l.:

$$\left.\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}(z-a)^{n-1}f(z)dz. \\ a_{-n} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}(z-a)^{n-1}f(z)dz. \end{aligned}\right\}$$

Het enige verschil is de integratie-contour. Nu is verder:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}F(z)dz.$$



Singulariteiten van $F(z)$ zijn de singulariteiten van $f(z)$ én $z = a$. Neem kromme, cirkel C met middelpunt a, tussen C_1 en C_2 in. Dan heeft $F(z)$ singulariteiten binnen C. Dus is:

$$\int_{C_1} F(z)dz = \Sigma \text{ (integraaltjes om alle singulariteiten heen).}$$

<u>(Stelling van Cauchy)</u>.

$$= \int_C F(z)dz \text{ , (omdat zich tussen } C_1 \text{ en } C_2 \text{ \underline{geen} singulariteiten bevinden).}$$

Evenzo is:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+} G(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\Sigma \text{ (integralen om singulariteiten heen)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C G(z)dz, \text{(omdat zich tussen } C_2 \text{ en } C \text{ weer geen singulariteiten bevinden).}$$

Verder is:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+} G(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C G(z)\,dz.$$

Zodat $a_{-n} \equiv b_n$ (en $b_{-n} \equiv a_n$). Hiermee is het gestelde doel bereikt.

(4) wordt dan:

$$f(z_0) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z_0-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z_0-a)^k.$$

of:

$$\boxed{f(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z_0-a)^n}$$ <u>Laurent</u>.

De definities van a_n en b_n kunnen nu samengevat worden in de algemene definitie:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-a)^{-n-1}\,dz}$$

Met $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

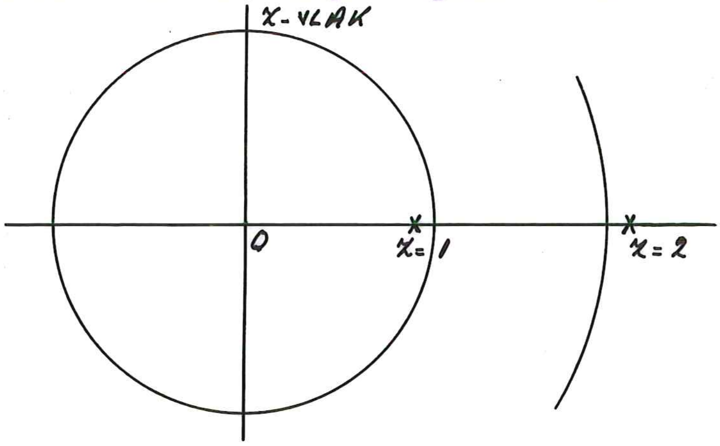
of $-\infty < n < +\infty$

C is een contour tussen C_1 en C_2 in.

Voorbeeld:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Rationele functie, enige singulariteiten z = 1 en z = 2.



Er zijn verschillende ontwikkelingen van Laurent mogelijk:

1e. Ontwikkeling om 0 (d.w.z. a = 0).

a. cirkel met straal iets groter dan $|z_1|$, en
" " " " kleiner dan $|z_2|$.

$1 < |z| < 2$ is ring vrij van singulariteiten.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$|z| < 2 \ : \ \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \frac{z^3}{2^4} - \dots \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

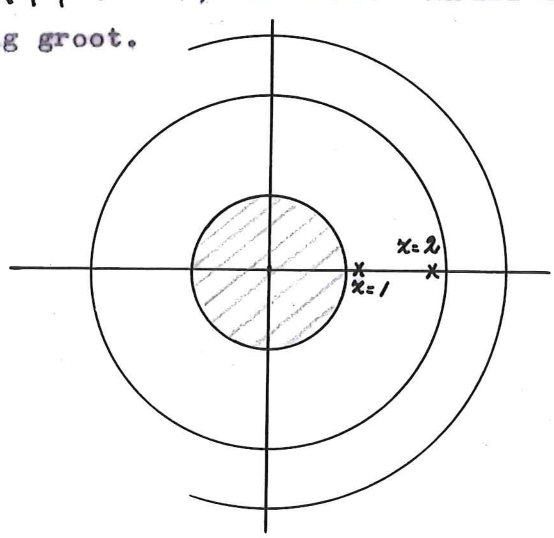
$$|z| > 1 \ : \ \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \dots \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \frac{z^3}{2^4} - \dots$$

voor $+1 < |z| < 2$, d.i. de Laurent-ontwikkeling. Residu = $a_{-1} = 1$.

b. Andere gebied:

$2 < |z|$ $(< \infty)$, dus eerste cirkel buiten 2, buitenste cirkel willekeurig groot.



$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} =$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{z^n} + \dots$$

$$- \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots - \frac{1}{z^n} - \dots$$

$$= \frac{2-1}{z^2} + \frac{2^2-1}{z^3} + \frac{2^3-1}{z^4} + \dots + \frac{2^{n-1}-1}{z^n} + \dots$$

d.i. een geheel andere reeksontwikeling, geldig voor $|z| > 2$; residu is nul.

c. derde gebied:
$(\varepsilon <) |z| < 1$, dan is $f(z)$ analytisch en geldt de reeks van Taylor zelfs. We krijgen nu:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} =$$

$$= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$$

$$- \frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z}{2^3} - \frac{z^3}{2^4} - \dots - \frac{z^n}{2^{n+1}} - \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n + \dots$$

alleen positieve machten geen residu.
Nu is voor elke z (uitgezonderd de singulariteiten) de functie in een machtreeks ontwikkeld.

2e. Ontwikkeling om 1 $(a = 1)$.

c. $0 < |z - 1| < 1$.
Ontwikkelen naar machten van $z - 1$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)-1} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} =$$

$$= -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - (z-1)^3 - \dots - (z-1)^n - \dots$$

geldig voor $0 < |z - 1| < 1$.
Alle mogelijke positieve machten van $z - 1$, maar slechts één negatieve macht van $z - 1$, n.l. $(z - 1)^{-1}$. De negatieve machten in de ontwikkeling van Laurent zijn hier dus beperkt. Residu voor $z = 1$ is -1.

d. $|z-1| > 1.$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)-1} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{1}{z-1}\right)} - \frac{1}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots + \frac{1}{(z-1)^n} + \cdots - \frac{1}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots + \frac{1}{(z-1)^n} + \cdots$$

Uitsluitend negatieve machten.

3e. Ontwikkeling om 2 ($a = 2$).
Volkomen analoog.

In sommige ontwikkelingen komen in het geheel geen positieve, of in het geheel geen negatieve machten voor; in sommige komt slechts een eindig aantal positieve of negatieve machten voor; in sommige loopt de reeks (zoals in het algemene gaval) naar $-\infty$ en $+\infty$ door.

Ander voorbeeld.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

Bij:

$$f(z) = e^{z} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

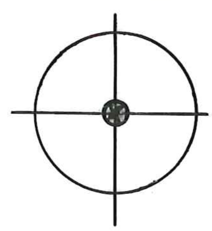
Analytisch (reeks convergent) voor alle punten z in het eindige.

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ heeft één singulier punt: $z = 0$

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$$

één nulde macht en verder uitsluitend negatieve machten. Deze ontwikkeling geldt voor $|z| > 0$.

$1 = a_{-1} = 1$ residu



Soorten van singulariteiten.

We zullen alleen beschouwen de geïsoleerde singulariteiten. Twee soorten:

I: het aantal negatieve machten van $(z - a_1)$ is beperkt;
II: het aantal negatieve machten van $(z - a_1)$ is onbeperkt.

Voorbeelden daarvan hebben we al gehad. Vooral I is voor de praktijk van belang.

I: polaire singulariteit;
II: echte of essentiële singulariteit.

Het gedeelte met de negatieve machten heet het <u>hoofddeel</u> van de reeksontwikkeling, het gedeelte met de positieve machten het analytische of holomorfe deel.
f(z) is éénwaardig in G; a is een geïsoleerd singulier punt. Ontwikkeling van Laurent:

$$f(z) = \ldots + \underbrace{a_{-2}(z-a)^{-2} + a_{-1}(z-a)^{-1}}_{\text{hoofddeel}} + \underbrace{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots}_{\text{analytisch gedeelte}}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Van bijzonder belang is de coëfficiënt van de eerste negatieve macht.

$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+} f(z)\,dz$ is het residu van f(z) voor de singulariteit z=a.

Twee soorten singulariteiten:

I). het hoofddeel bevat een eindig aantal termen, is een veelterm. Hoofddeel:

$$\equiv a_{-1}(z-a)^{-1} + a_{-2}(z-a)^{-2} + \ldots + a_{-k}(z-a)^{-k}$$

m.a.w.:

$$a_{-k-1},\ a_{-k-2}, \ldots = 0 \qquad ; \quad a_{-k} \neq 0$$

<u>Polaire</u> singulariteit. In dit geval een pool van de k°-orde.
(Opm. in zekere analogie zou men bij een analytische functie, dus zonder singulariteit, kunnen spreken van een pool van de nulde orde, omdat het gehele hoofddeel daar ontbreekt).
Dit geval is voor de praktijk van groot belang.

II). Het hoofddeel bevat een oneindig aantal termen, bijv. f(z) = $e^{\frac{1}{z}}$.
<u>Essentiële</u> singulariteit. Voor de theorie van groot belang, maar niet voor de praktijk.

Pool van de orde k.

$$f(z) = \ldots a_2(z-a)^2 + a_1(z-a) + a_0 + a_{-1}(z-a)^{-1} + \ldots + a_{-k}(z-a)^{-k}$$

dus:

$$(z-a)^k f(z) = \underbrace{\ldots + a_2(z-a)^{2+k} + a_1(z-a)^{k+1} + a_0(z-a)^k + a_{-1}(z-a)^{-1+k} + \ldots + a_{-k}}_{\text{dit is een analytische functie}}$$

Je kunt dus bij een polaire singulariteit de functie analytisch maken door te vermenigvuldigen met een voldoende hoge macht van (z-a). Dus:

$$\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) = a_{-k} \neq 0, \text{ dus: } \lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

Bewijs uit het ongerijmde. Neem aan dat $\lim_{z \to a} f(z)$ bestaat en gelijk is aan l (eindig). Dan is:

$$\lim_{z \to a} f(z) \cdot (z-a)^k = l \cdot \lim_{z \to a} (z-a)^k = l \cdot 0 = 0.$$

D.i. strijdig, dus de limiet kan niet bestaan (m.a.w. is ∞).

Dus in de buurt van een polaire singulariteit stijgt de functie boven alle grenzen.

Stelling.

Voor een essentiële singulariteit geldt echter de stelling van Weierstrass-Casorati. In iedere willekeurig kleine omgeving van een essentieel singulier punt zal een functie iedere willekeurig voorgeschreven waarde willekeurig dicht kunnen benaderen.

Deze stelling zal niet bewezen worden en wordt ook niet gebruikt. De functies gedragen zich dus in de omgeving van de 2 soorten singulariteiten totaal verschillend.

Neem nu aan dat er een pool van de eerste orde is.

$$f(z) = \ldots + a_1(z-a) + a_0 + a_{-1}(z-a)^{-1}$$

vermenigvuldig met z-a:

$$(z-a) f(z) = \ldots + a_1(z-a)^2 + a_0(z-a) + a_{-1},$$

of:

$$\boxed{a_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \text{residu.}}$$

D.i. de handigste manier om het residu te bepalen.

Voorbeeld:

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Teller en noemer zijn beide op zichzelfd analytisch, maar cotg z is singulier in de nulpunten van sin z, dus in de punten $z = k\pi$. (k geheel). De nulpunten van de noemer zijn enkelvoudig, zie voorgaande theorie. Dat zien we nog eens duidelijk in het volgende. Bepaal:

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) f(z) = \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \frac{\cos z}{\sin z}$$

Stel:

$z - k.\pi = \delta$; $z = k\pi + \delta$.

$z \to k.\pi$; $\delta \to 0$.

$$= \lim_{\delta \to 0} \delta \frac{\cos(k\pi + \delta)}{\sin(k\pi + \delta} = \lim_{\delta \to 0} \delta \frac{(-1)^k \cos\delta}{(-1)^k \sin\delta}$$

Dit volgens de optellingstheorema's en cos $k\pi = (-1)^k$, sin $k\pi = 0$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{\sin\delta} \cdot \cos\delta = 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1.}}$$

Het residu in de buurt van de pool $a = k\pi$ is dus $\underline{1}$. We hebben hieruit gezien:

a = $k\pi$ is een pool van de $\underline{\text{1e orde}}$ van f(z) = cotg z.

het residu van cotg z in z = $k\pi$ bedraagt 1.

Het residu laat zich dus zeer eenvoudig bepalen bij een pool van de 1e orde. Bij een hogere orde gaat dit echter niet meer op. Bij een pool van de k^e orde kunnen we wel even gemakkelijk a_{-k} bepalen, maar deze is meestal niet erg interessant.

Bepaling van de a_{-1} bij een pool van de k^e orde.

Er zijn 2 principieel verschillende manieren. De eerste wordt niet in extenso behandeld maar wel vrij vaak toegepast. Hij bestaat in het trachten de ontwikkeling van Laurent op te stellen en de term $a_{-1}(z - a)^{-1}$ er uit te lichten. Dan is de coëfficiënt a_{-1} bekend. Of anders:

bepaal: $(z-a)^k f(z) = \ldots a_2 (z-a)^{k+2} + a_1 (z-a)^{k+1} + a_0 (z-a)^k +$

$$+ a_{-1}(z-a)^{k-1} + \ldots + a_{-k+1}(z-a) + a_{-k}$$

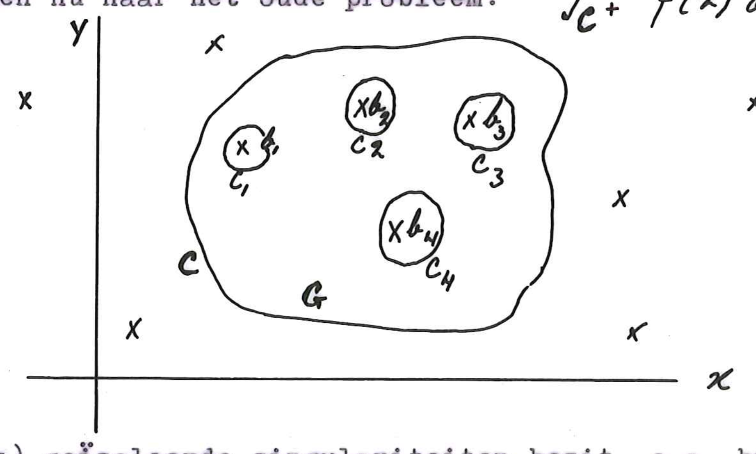
Differentieer deze uitkomst nu k-1 maal naar z; dan blijft als enige negatieve term over die met het residu.

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{(z-a)^k f(z)\right\} = \ldots \frac{k!}{1!} a_0 (z-a) + (k-1)!\, a_{-1}$$

Dus: $\boxed{\lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{(z-a)^k f(z)\right\} = (k-1)!\, a_{-1}.}$

Bij een essentiële singulariteit zijn de methodes van vermenigvuldiging (en eventueel differentieren) niet toe te passen. De enige mogelijkheid om de a_{-1} te bepalen is daar de Laurent-ontwikkeling op te stellen, de term met a_{-1} er uit te lichten en a_{-1} af te lezen.

We vragen nu naar het oude probleem: $\int_{C^+} f(z)\, dz$



Als f(z) geïsoleerde singulariteiten bezit, o.a. binnen C. Als f(z) analytisch is binnen C is volgens Cauchy:

$$\int_{C^+} f(z)\, dz = 0.$$

De singulariteiten mogen polair (meestal) of essentieel zijn; f(z) moet éénwaardig zijn.

$$\int_{C^+} f(z)\,dz = \int_{C_1^+} + \int_{C_2^+} + \int_{C_3^+} + \int_{C_4^+}$$

Zie voorgaande theorie met "slootjes graven" enz. We kunnen nu om de singulariteit b_1 volgens Laurent een ring maken. Het residu:

$$(a_{-1})_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)\,dz.$$

Dus:

$$\int_{C_1^+} f(z)\,dz = 2\pi i\,(a_{-1})_1$$

Evenzo is voor b_2:

$$\int_{C_2^+} f(z)\,dz = 2\pi i\,(a_{-1})_2 \quad \text{enz.}$$

Dus:

$$\int_{C^+} f(z)\,dz = \int_{C_1^+} + \int_{C_2^+} + \int_{C_3^+} + \int_{C_4^+} = 2\pi i\left\{(a_{-1})_1 + (a_{-1})_2 + \cdots\right\}$$

Dit resultaat is ook van Cauchy, een uitbreiding van zijn eerste stelling.

<u>Stelling</u>:

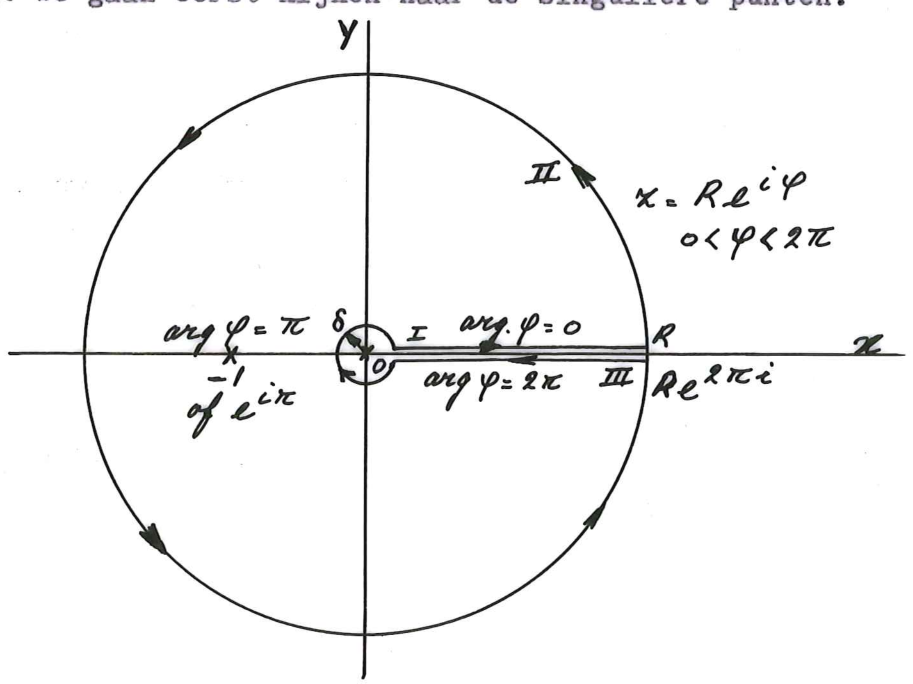
De uitkomst: $\int_{C^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum$ (residuen in de ingesloten polen).

<u>Residu-stelling van Cauchy</u>.

<u>Voorbeeld</u>:

Gevraagd: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$ voor $0 < a < 1$.

We zullen dit proberen op te lossen met contour-integratie en de residu-stelling. We gaan eerst kijken naar de singuliere punten.



<u>Singuliere punten</u>:

1e. x = -1 is pool van de eerste orde.

2e. x = 0 essentiële singulariteit.

Veel ernstiger is dat de functie in 0 niet eens éénduidig is.

De functie voldoet niet aan de meest essentiële voorwaarde: f(z) is eenwaardig. De kunst is nu zo'n gebied te nemen waar de functie <u>wel</u> eenwaardig is. x = -1 is ook $x = e^{i\pi}$. <u>Binnen</u> de gevormde contour C ligt nu alleen de <u>pool</u> van <u>de 1e orde</u> $z = e^{i\pi}$ van:

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z}$$

De functie is nu eenwaardig geworden. Elk punt heeft een arg φ dat voldoet aan $0 < \varphi < 2\pi$. Het residu van:

$$\frac{z^{a-1}}{1+z}$$

in de pool van de eerste orde $z = e^{i\pi}$ is:

$$\lim_{z\to e^{i\pi}} (z - e^{i\pi})\frac{z^{a-1}}{1+z} = \lim_{z\to e^{i\pi}} z^{a-1} = e^{(a-1)i\pi}$$

(dus niet -1 i.p.v. $e^{i\pi}$ schrijven want $(-1)^{a-1}$ zegt niets).

$$\int_{C^+} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i \times (\text{residu voor } z = e^{i\pi}) = 2\pi i \times e^{(a-1)i\pi}$$

$$\int_{C^+} = \int_{I} + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}$$

1). $\int_I$. arg z = 0, dus z = x (gewoon reëel getal).

$$\delta < x < R$$

$$\int_I = \int_\delta^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

is juist wat we zoeken voor $\delta \to 0$ en $R \to \infty$.

2). $$\int_{II} = \int_0^{2\pi} \frac{R^{(a-1)} e^{i\varphi(a-1)}}{1+Re^{i\varphi}}\, Rie^{i\varphi}d\varphi = iR^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{ia\varphi}d\varphi}{1+Re^{i\varphi}}$$

(deze wordt straks geschat).

3). $\int_{III}$. arg $z = 2\pi$, dus $z = x\,e^{2\pi i}$

$$\int_{III} = \int_R^\delta \frac{x^{a-1}e^{2\pi i(a-1)}}{1+x\,\underbrace{\boxed{e^{2\pi i}}}_{=1}}\, e^{2\pi i}\,dx = e^{2\pi i a}\int_R^\delta \frac{x^{a-1}}{1+x}dx =$$

$$= -e^{2\pi i a}\int_\delta^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

4). $\int_{IV}$. $z = \delta e^{i\varphi}$ Evenbeeld van II, maar beginnend met 2π eindigend met 0.

$$\int_{IV} = i\delta^a \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{ia\varphi}}{1+\delta e^{i\varphi}}\, d\varphi \qquad \text{(schatten!)}$$

$$\left|\int_{II}\right| = R^a \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{ia\varphi}}{1+Re^{i\varphi}}\, d\varphi\right| \leq R^a \frac{1}{R-1}\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

daar: $|1+Re^{i\varphi}| \geq R-1$ $\qquad = \dfrac{2\pi R^a}{R-1} = \dfrac{2\pi R^{a-1}}{1-\frac{1}{R}}$

$a-1 < 0$, dus $R^{a-1} \rightarrow 0$ voor $R \rightarrow \infty$, noemer $\rightarrow 1$ voor $R \rightarrow \infty$, dus $\int_{II} \rightarrow 0$ voor $R \rightarrow \infty$.

$$\left|\int_{IV}\right| < \delta^a \cdot \frac{1}{1-\delta}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\delta^a \cdot 2\pi}{1-\delta} \rightarrow 0 \quad \text{VOOR } \delta \rightarrow 0 \ (a>0)$$

Dus: $\int_I + \int_{III} = \int_C$ voor $R \rightarrow \infty$ en $\delta \rightarrow 0$.

$$\int_C = (1-e^{2\pi ia})\int_\delta^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = (1-e^{2\pi ia})\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx =$$

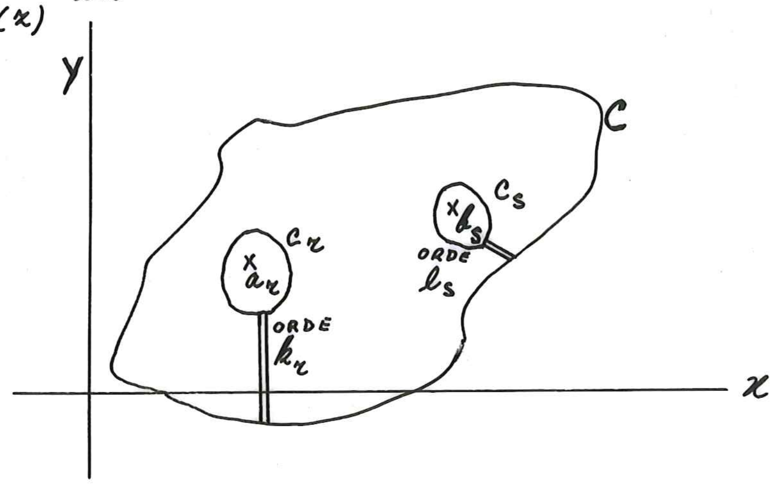
$$= 2\pi i \cdot e^{(a-1)i\pi} = 2\pi i e^{a\pi i} \cdot e^{-i\pi} = -2\pi i e^{a\pi i}$$

$$\text{dus: } \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ia}} = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2\pi ia}-1} =$$

$$= \frac{2\pi i}{e^{\pi ia}-e^{-\pi ia}} = \frac{2\pi i}{2i\sin\pi a} = \underline{\underline{\frac{\pi}{\sin\pi a}}} \qquad \text{(Euler).}$$

$f(z)$ is analytisch op en binnen C, met uitzondering van polen in $a_1, a_2 \ldots, a_m$; van de orde $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Nulpunten in $b_1, b_2 \ldots, b_n$ (niet singulier dus) van de orde $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Hiermee is m.b.v. de residuenstelling een fraaie stelling af te leiden. We beschouwen:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$



Deze integraal blijkt op zeer eenvoudige wijze samen te hangen met de orde van de polen en nulpunten. In de naaste omgeving van pool a_r is geen andere pool en geen ander nulpunt gelegen (omgeving zo klein gekozen). Laurent:

$$f(z) = \frac{A_{-k_r}}{(z-a_r)^{k}} + \frac{A_{-k_r+1}}{(z-a_r)^{k_r-1}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(z-a_r)^{k_r}} \Big\{ \underbrace{A_{-k_r} + A_{-k_r+1}(z-a_r) + \dots\dots}_{\text{gewone analytische functie in dit gebied te vervangen door } \varphi_r(z).} \Big\}$$

$$= \frac{\varphi_r(z)}{(z-a_r)^{k_r}} . \qquad \varphi_r(a_r) = A_{-k_r} \neq 0. \tag{1}$$

Evenzo nadere omgeving van b_s: nulpunt van orde l_s, dus de analytische functie is te ontwikkelen in een machtreeks die deelbaar is door $(z-b_s)^{ls}$.

$$f(z) = B_{l_s}(z-b_s)^{l_s} + B_{l_s+1}(z-b_s)^{l_s+1} + \dots =$$

$$= (z-b_s)^{l_s}\left\{B_{l_s} + B_{l_s+1}(z-b_s) + \dots\right\} = (z-b_s)^{l_s}\,\psi_s(z) \tag{2}$$

Hierbij is weer $B_{l_s} \neq 0$ en ook $\psi_s(b_s) = B_{l_s} \neq 0$. Uit (2) volgt:

$$f'(z) = l_s(z-b_s)^{l_s-1}\psi_s(z) + (z-b_s)^{l_s}\psi_s'(z) \tag{3}$$

(3) delen door (2):

$$\boxed{\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{l_s}{z-b_s} + \frac{\psi_s'(z)}{\psi_s(z)}} \tag{4}$$

Evenzo volgt uit (1) (in de omgeving van a_r, enz):

$$f'(z) = -k_r(z-a_r)^{-k_r-1}\varphi_r(z) + (z-a_r)^{-k_r}\varphi_r'(z) \tag{5}$$

(5) delen door (1):

$$\boxed{\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k_r}{z-a_r} + \frac{\varphi_r'(z)}{\varphi_r(z)}} \tag{6}$$

Contour-integraal, "slootjes graven": $\int_C = \Sigma\int_{C_r} + \Sigma\int_{C_s}$

$$\int_{C_r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = -k_r\underbrace{\int_{C_r}\frac{dz}{z-a_r}}_{=2\pi i} + \underbrace{\int_{C_r}\frac{\varphi_r'(z)}{\varphi_r(z)}dz.}_{\substack{\text{teller is analytisch, noemer is analytisch en } \neq 0\text{; dus breuk is} \\ \text{analytisch op en binnen } C_r. \\ \int = 0 \text{ volgens Cauchy.}}}$$

- 107 -

(Volgens integraal van Cauchy: $\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-a} = 2\pi i F(a)$ met $F(z) \equiv 1$.).

Of:

$$\int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \underline{\underline{-2\pi i k_r}} = -2\pi i \times \text{orde pool in } a_r.$$

Evenzo:

$$\int_{C_s} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = l_s \underbrace{\int_{C_s} \frac{dz}{z-b_s}}_{=2\pi i} + \underbrace{\int_{C_s} \frac{\psi_s'(z)}{\psi_s(z)}\,dz}_{=0} = 2\pi i l_s.$$

of:

$$\int_{C_s} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \underline{\underline{+2\pi i l_s}} = +2\pi i \times \text{orde nulpunt in } b_s.$$

Dit geldt voor elke pool en elk nulpunt. De totale contour-integraal wordt dus:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \left\{\underbrace{(l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n)}_{\text{voor de nulpunten}} - \underbrace{(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m)}_{\text{voor de polen}}\right\}$$

voor de nulpunten. Hier staat niets anders dan het totale aantal nulpunten: een viervoudig nulpunt telt ook voor 4. Dit aantal is N.

voor de polen. Evenzo de som van het aantal polen naar hun veelvuldigheid gerekend. Dit is P.

De uitkomst van deze contour-integraal is N-P, is een gewoon getal, en wel een geheel positief of negatief getal. Bij een analytische functie f(z) zijn geen polen. Daar is eenvoudig:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N$$

Stelling:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P.$$

waarbij f(z) analytisch is met uitzondering van een eindig aantal polen.

N = totaal aantal nulpunten binnen C, elk nulpunt naar zijn veelvuldigheid gerekend.

P = evenzo totaal aantal polen.

Gevolgtrekking:

Als f(z) geheel analytisch is, is:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N$$

Een uitbreiding: bekijk:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} F(z)\,dz$$

, waarbij F(z) geheel analytisch is op en binnen C.

In de omgeving van a_r:

$$F(z) = C_0 + C_1(z-a_r) + C_2(z-a_r)^2 + \dots$$

$$F(a_r) = C_0$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \cdot F(z) = \underbrace{-\frac{k_r C_0}{z-a_r}}_{\substack{\text{alleen dit}\\ \text{moet geïn-}\\ \text{tegreerd}\\ \text{worden}}} \underbrace{-\frac{k_r C_1}{1} - k_r C_2(z-a_r) - \dots}_{\substack{\text{geheel analytisch}\\ \int_{C_r} = 0}} + \underbrace{\frac{\varphi_r'(z)}{\varphi_r(z)} F(z)}_{\substack{\text{hele functie}\\ \text{is analytisch}\\ \int_{C_r} = 0}}.$$

Dus:

$$\int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)} F(z)\,dz = -2\pi i\, k_r C_0 = -2\pi i\, k_r F(a_r).$$

Evenzo:

$$\int_{C_s} \frac{f'(z)}{f(z)} F(z)\,dz = +2\pi i\, l_s F(b_s).$$

De totale contourintegraal:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} F(z)\,dz = \Big\{ l_1 F(b_1) + l_2 F(b_2) + \dots + l_n F(b_n) + \\ - k_1 F(a_1) - k_2 F(a_2) - \dots - k_r F(a_r) \Big\}$$

$$= \sum_{\text{nulpunten}} F(b_s) - \sum_{\text{polen}} F(a_r)$$

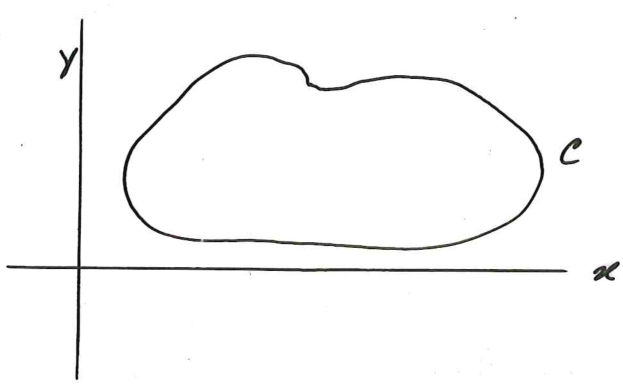
<u>Uitbreiding</u>.

Wanneer F(z) analytisch is op ~~en~~ binnen C, dan is:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} F(z)\,dz = \sum_{\text{nulpunten}} F(b_s) - \sum_{\text{polen}} F(a_r)$$

Mits iedere pool (nulpunt) naar zijn veelvuldigheid in rekening wordt gebracht. Dus voor een 10-voudige pool komt de term $F(a_r)$ tien maal voor. De vorige stelling is hierin begrepen. Deze stellingen zijn van Cauchy.

Een andere stelling, die hieruit volgt is van opvolger van Cauchy, Rouché (± 1850).



$f(z)$ en $g(z)$ beide analytisch op en binnen C. (geen polen, hoogstens nulpunten). Op de contour C moet gelden $|g(z)| < |f(z)|$.

Stelling:

Binnen C bezitten $f(z)$ en $f(z) + g(z)$ evenveel nulpunten.

Bewijs: opmerkingen vooraf:

1). $f(z)$ heeft geen enkel nulpunt op contour C, want op C is $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$.
Dus $|f(z)| > 0 \longrightarrow f(z) \neq 0$ op C.

2). Evenzo heeft $f(z) + g(z)$ geen enkel nulpunt op C, want op C is:

$$|f(z) + g(z)| \geq \big||f(z)| - |g(z)|\big| = |f(z)| - |g(z)| > 0.$$

Dus:

$|f(z) + g(z)| > 0$ op C, dus: $f(z) + g(z) \neq 0$ op C.

Het aantal nulpunten van $f(z) + g(z)$ binnen C is:

$$N^* = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)}\,dz.$$

Voer een hulpfunctie $\varphi(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ in. $\varphi(z)$ hoeft niet analytisch te zijn, maar we bekijken deze functie alleen op C. Daar is hij wel analytisch !

$$g(z) = f(z)\cdot\varphi(z) \qquad\qquad g'(z) = f(z)\cdot\varphi'(z) + f'(z)\,\varphi(z).$$

Op C is:

$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| = |\varphi(z)| < 1.$ volgens het gegeven.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z) + f'(z)\varphi(z) + f(z)\varphi'(z)}{f(z) + f(z)\varphi(z)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)\{1 + \varphi(z)\} + f(z)\varphi'(z)}{f(z)\{1 + \varphi(z)\}}\,dz.$$

Splitsen in 2 integralen en delen door $\{1 + \varphi(z)\}$, geoorloofd want:

$$|1 + \varphi(z)| \geq 1 - |\varphi(z)| > 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz}_{N \text{ vanaf } f(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi'(z)}{1 + \varphi(z)}\,dz.$$

Of in totaal:

$$N^* = N + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi'(z)}{1 + \varphi(z)}\,dz$$

Nu rest te bewijzen dat deze laatste integraal nul is.

$\int_C \frac{\varphi'(z)}{1 + \varphi(z)}\,dz.$ Op C is $|\varphi(z)| < 1$, dus ontwikkeling in een reeks is geoorloofd.

$$\int_C \varphi'(z)\left\{1 - \varphi(z) + \{\varphi(z)\}^2 - \{\varphi(z)\}^3 + \dots\right\}dz.$$

Termsgewijze integratie is toegestaan, gelijkmatig convergente reeks.

$$= \varphi(z) - \frac{\{\varphi(z)\}^2}{2} + \frac{\{\varphi(z)\}^3}{3} - \dots$$

$$= \{\varphi(z_0) - \varphi(z_0)\} - \frac{\{\varphi(z_0)\}^2 - \{\varphi(z_0)\}^2}{2} + \dots = 0$$

We zullen deze stellingen nu gaan toepassen om een hoofdstelling uit de algebra te bewijzen, n.l. een algebraïsche veelterm van de n^e graad heeft n nulpunten.

Hoofdstelling van de algebra.

Een algebraïsche vergelijking van de n^e graad bezit precies n wortels.
Of: een veelterm van de n^e graad bezit altijd n nulpunten.
(Opm. het feit dat een functie nulpunten heeft is op zichzelf geen vanzelfsprekendheid, en niet essentieel voor functies. Enkele eeuwen geleden dacht men van wel. Niet elke functie heeft nulpunten, bijv. e^z niet, is vroeger al eens uitgebreid aangetoond; zelfs $e^{f(z)} \neq 0$ als f(z) een analytische functie is; n.l. f(z) kan dan nooit $-\infty$ worden, en alleen voor $z \to -\infty$ gaat $e^z \to 0$).

Bewijs:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n.$$

I.v.m. stelling van Rouché nemen we $f(z) = a_n z^n$, en $g(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$. Dus:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = f(z) + g(z).$$

Nu moeten we laten zien dat er een contour C is waarvoor de essentiële voorwaarde $|g(z)| < |f(z)|$ geldt. Neem een cirkelcontour om de oorsprong met straal R. $R > 1$. Op C is:

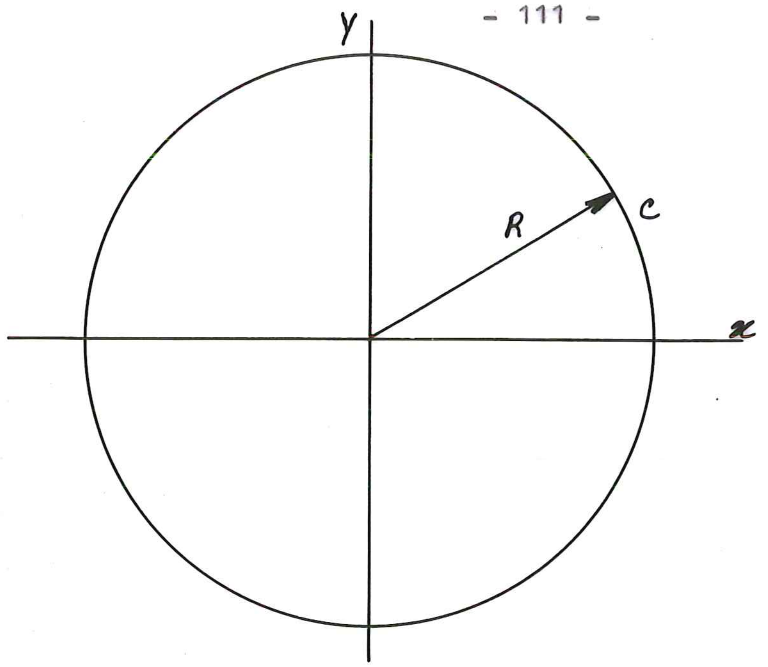
$$|g(z)| \leq |a_0| + |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \dots + |a_n||z|^n$$

De coëfficiënten $a_0, \dots, a_n$ zijn willekeurig gegeven complexe getallen, waarvoor maar één voorwaarde geldt: $a_n \neq 0$.

$$|g(z)| \leq \dots = |a_0| + |a_1|R + |a_2|R^2 + \dots + |a_{n-1}|R^{n-1}$$
$$< |a_0|R^{n-1} + |a_1|R^{n-1} + |a_2|R^{n-1} + \dots + |a_{n-1}|R^{n-1}$$

Dus op C is:

$$|g(z)| < R^{n-1}\{|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots |a_{n-1}|\}$$



Als we nu zorgen dat R zo groot wordt gekozen dat:

$$R^{n-1}\{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\} < |a_n| R^n \quad \text{dan is:} \quad |g(z)| < |f(z)|$$

Dit is het geval als:

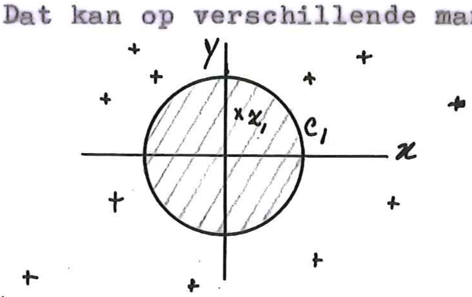
$$R > \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

We kiezen nu dus een straal, die groter is dan dit van tevoren te bepalen getal en dan geldt de stelling van Rouché. Dan hebben f(z) en f(z) + g(z) evenveel nulpunten binnen de cirkel. f(z) heeft er N in de oorsprong, dan heeft ook de veelterm er dus n. Voor R > (bepaalde waarde) liggen er in cirkel C evenveel nulpunten van f(z) als van f(z) + + g(z), maar $f(z) = a_n z^n$ heeft precies n nulpunten binnen deze cirkel, n.l. het n-voudige nulpunt z = 0.

<u>Conclusie</u>: $f(z) + g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ bezit precies n nulpunten, die i.h.a. complex zijn. Er kunnen ook geen nulpunten van f(z)+ g(z) buiten de cirkel meer zijn omdat bij uitbreiding van R de functie f(z) niet meer nulpunten krijgt.

De polen bepalen in hoge mate het gedrag van een functie. Er is een gedeelte van de theorie dat hierop voortbouwt en dat door ons niet of nauwelijks behandeld zal worden: de <u>analytische voortzetting</u>.

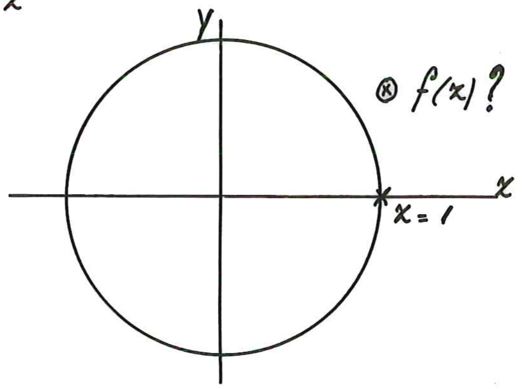
<u>Voorbeeld</u>. Gegeven f(z) met singuliere punten. Functiewaarden van f(z) bepalen. Dat kan op verschillende manieren:



Reeksontwikkeling volgens Taylor of Mac Laurin (machtreeks binnen C_1). Dit kan een prachtige methode zijn, maar in de regel geeft het slechts waarden binnen een bepaald, beperkt gebied.

Bijv.:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad \text{voor } |x| < 1.$$



Dit is maar een flauw voorbeeldje, want niemand zal deze reeksontwikkeling toepassen om deze functie numeriek te bepalen. Buiten de cirkel kunnen we hier niets mee doen. Iets anders is het al met:

$$f(z) = \log(1-z) = -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots \qquad |z| < 1$$

Ook dit is slechts voor een beperkt gebied, maar de functie is op een andere manier niet zo eenvoudig te bepalen. Als je tenminste geen log-tafel hebt. Voor de eerste functie is te schrijven:

$$f(x) = \frac{1}{-x(1-\frac{1}{x})} = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = -\frac{1}{x}\left\{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right\}$$

dit geldt juist voor $|z| > 1$. Maar noch de eerste noch de tweede reeks is bruikbaar op de cirkelomtrek. Daar is:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-e^{i\varphi}}$$

niet ontwikkelen, convergeert niet, maar de functie zelf gebruiken. De uitdrukking voor de functie zelf: $\frac{1}{1-z}$ beheerst het gehele complexe vlak, de reeksontwikkelingen elk slechts een deel en samen nog niet eens het geheel. Voor numerieke bepaling dus niet erg geschikt.

Weierstrasz, heeft in principe een veel betere oplossing gegeven, het is echter zeer onpractisch. Neem z_1 binnen C_1, willekeurig. Daarvoor geldt reeksontwikkeling. Neem z_1 nu als middelpunt voor een nieuwe cirkel tot de dichtst bij-zijnde singulariteit. Dan is:

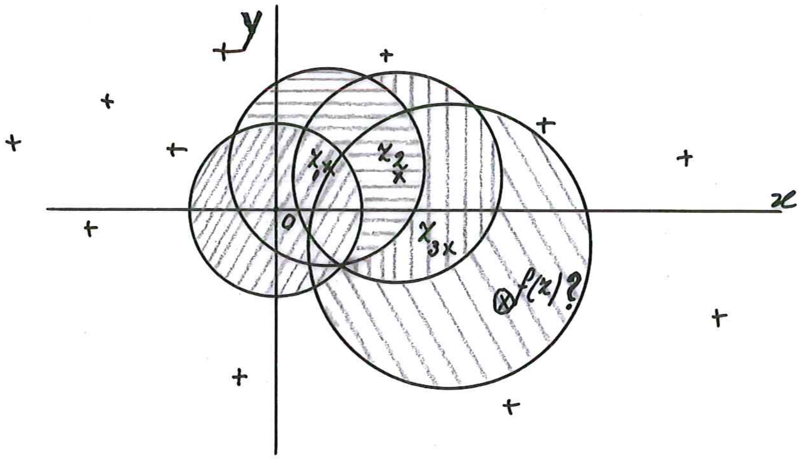
$$f(z) = \underline{\underline{f(z_1)}} + \frac{z-z_1}{1!}\underline{\underline{f'(z_1)}} + \frac{(z-z_1)^2}{2!}\underline{\underline{f''(z_1)}} + \ldots$$

terwijl $f(z_1)$ was:

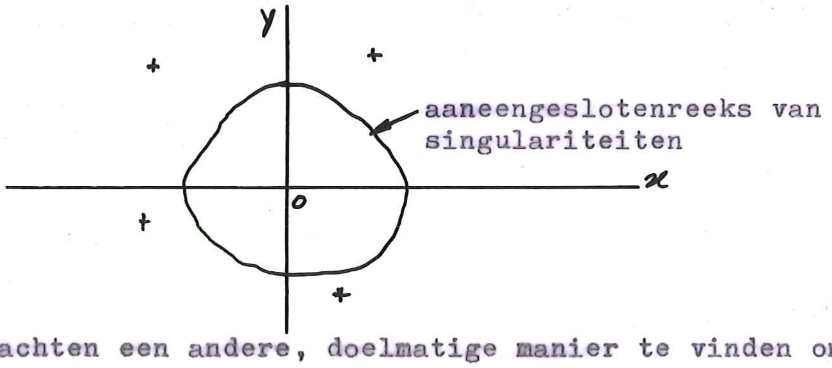
$$f(0) + \frac{z}{1!}f'(0) + \frac{z_1^2}{2!}f''(0) + \ldots$$

door differentiëren kan ook $f'(z_1)$ en $f''(z_1)$ bepaald worden.

Zo kunnen we voortgaan en we gaan een steeds groter gebied bestrijken. In principe kunnen we zo kruipend naar elk punt komen, waar we f(z) willen weten. Dit heet analytische voortzetting.



Het is een theoretisch principe, practisch volkomen onbruikbaar. Dit principe gaat in één geval mis: als er een gesloten ring van singuliëre punten is. Dit vormt dan een natuurlijke grens waar je niet buiten kan komen. Zulke functies bestaan inderdaad. Een klein gaatje in de ring is voldoende om toch het hele vlak te bestrijken.



We zullen nu trachten een andere, doelmatige manier te vinden om het doel te bereiken. Machtreeksen kunnen zeer nuttig zijn; in de verder reikende functietheorie spelen integraalvoorstellingen een grotere rol.

We gaan nu spreken over functies die singulariteiten vertonen maar alleen polaire singulariteiten. In een eindig begrensd gebied liggen slechts een eindig aantal polen. We zullen nu een reeksontwikkeling daarvoor opstellen, maar geen machtreeks.

Functies die geen andere singulariteiten vertonen dan polaire singulariteiten heten meromorfe functies. Helemaal geen singulariteiten in het eindige zijn holomorfe functies.

Bijv.:

$\operatorname{cosec} z\ ;\ \sec z\ ;\ \operatorname{tg} z\ ;\ \frac{1}{e^z-1}$. meromorf.

$e^z\ ;\ \sin z\ ;\ \cos z$ holomorf.

Triviale gevallen van meromorfe functies:

$$\frac{1}{1-z} \quad ; \quad f(z) = \frac{7z+24}{(3z-5)(2z-8)(9z-11)}$$

deze heeft slechts 3 singuliëre punten, 3 polen van de eerste orde $\rightarrow$ meromorf. Algemeen:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

P(z) en Q(z) veeltermen (een rationale functie).

Ontwikkeling meromorfe functies.

(de enige singulariteiten in het eindige zijn polen).

Beperkingen (voorlopig althans).

1). Aangenomen wordt f(z) is meromorf met alleen polen van de eerste orde in de punten.

$a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots, a_n, \ldots$ met residuen

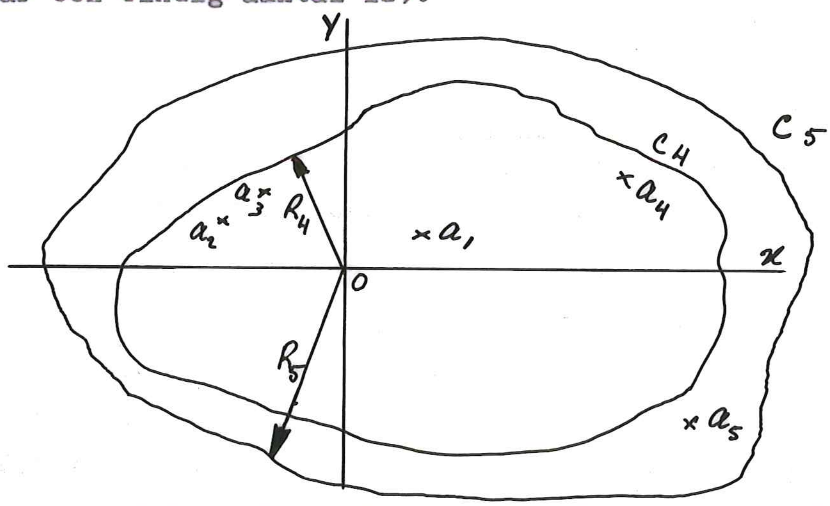
$b_1, b_2, b_3, \ldots \ldots, b_n, \ldots$

2). Deze polen zijn gerangschikt naar de absolute waarden:

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots \leq |a_n| \leq \ldots$$

Dus de oorsprong is geen singulariteit !!

(N.B. het aantal singulariteiten mag best oneindig zijn, als er in het eindige maar een eindig aantal is).



3). Er bestaan een aantal gesloten krommen $C_1, C_2, \ldots \ldots, C_n, \ldots$ zodanig dat C_n precies n polen omvat.

(N.B. Hoeven geen cirkels te zijn !!). De kleinste afstand van C_n tot O is R_n. $R_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$ (d.i. voorwaarde!). De omtrek van C_n heet L_n, met $L_n < K \cdot R_n$ (K is constant, eindig, onafhankelijk van n). We zullen veel te maken hebben met cirkels (elke $K > 2\pi$ goed) en met vierkanten (elke $K > 8$ goed).

4). $f(z)$ is op C_n uniform begrensd, d.w.z. $|f(z)| < M$ op C_n.
(Uniform wil dus zeggen: constante M onafhankelijk van n; M is constant en eindig en onafhankelijk van n).

D.i. a.h.w. een grondwet. De met pijltjes aangegeven regels zijn de essentiële voorwaarden. Later zal daar wel één en ander van verlicht worden.
Beschouw nu:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw$$

w veranderlijk, z constant, $z \neq a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n \ldots)$ dus een gewoon punt.
Singuliere punten van de integrand:

I): $w = 0$ pool van de eerste orde.
II): $w = z$ pool van de eerste orde.
III): $w = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ (de polen van $f(w)$, volgens de "wet" allemaal van de 1e orde met de residuen $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$).

Dan is volgens de residuen-stelling:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw = \sum \text{ residu van de polen binnen } C_n.$$

Neem R_n van C_n zo groot dat z binnen C_n ligt, $R_n > |z|$. (We zullen nemen $R_n > 2|z|$).

Residu in: $w = 0$ is $\equiv \lim\limits_{w\to 0}(w-0)\dfrac{f(w)}{w(w-z)} = \dfrac{f(0)}{-z}$ $\quad (I')$

Residu in $w = z$ is $\equiv \lim\limits_{w\to z}(w-z)\dfrac{f(w)}{w(w-z)} = \dfrac{f(z)}{z}$ $\quad (II')$

Residu in $w = a_k$ is $\equiv \lim\limits_{w\to a_k}\underbrace{(w-a_k)f(w)}_{\text{residu van } f(w) \text{ is } b_k}\cdot\dfrac{1}{w(w-z)} = \dfrac{b_k}{a_k(a_k-z)}$ $\quad (III')$

$k = 1, 2, 3 \ldots n.$

Dus:

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw = -\frac{f(0)}{z} + \frac{f(z)}{z} + \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k(a_k-z)} \qquad (1)$$

Anderzijds is een schatting van I_n:

$$|I_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_n}\frac{|f(w)|}{R_n(R_n-|z|)}\,d|w| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M.L_n}{R_n(R_n-|z|)} < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M.K.R_n}{R_n(R_n-|z|)} < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M.K}{\frac{1}{2}R_n} = \frac{M.K}{\pi R_n}$$

Immers:
Op C_n is: $|w| \geq R_n$; op C_n is: $|w-z| \geq |w| - |z| \geq R_n - |z|$
(we nemen: $R_n > 2|z|$ of: $|z| < \frac{1}{2}R_n$ dus: $R_n - |z| > \frac{R_n}{2}$).

Dus op

C_n is: $|I_n| < \frac{M.K}{\pi R_n}$

Voor $n \rightarrow \infty$ gaat $|I_n| \rightarrow 0$. Voor $n \rightarrow \infty$ gaat de modulus van het linkerlid van (1) naar 0, dus ook het hele linkerlid $\rightarrow 0$.

$n \rightarrow \infty$:

$$0 = -\frac{f(0)}{z} + \frac{f(z)}{z} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k(a_k - z)}.$$

of:

$$0 = -f(0) + f(z) + z \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_k(a_k - z)}$$

of:

$$\boxed{f(z) = f(0) - z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_k(a_k - z)}}$$

Hier staat de ontwikkeling; niet in een machtreeks maar in eenvoudige breuken. Of:

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right)$$

Deze reeksontwikkeling geldt in het hele complexe vlak en is bijzonder efficiënt voor berekening. Dit heet wel een <u>ontwikkeling in partiële breuken</u>. D.i. in hoofdzaak het werk van één van de beroemdste leerlingen van Weierstrasz (tussen ~ 1870-1880): een Zweed: <u>Gösta Mittag-Leffler</u>.

<u>Afleiding van de ontwikkeling van Mittag-Leffler</u>.

Beschouw:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(w)}{w(w-z)} \, dw$$

De gegevens zijn dus de voorwaarden waaraan f(w) moet voldoen voor deze ontwikkeling.

met - z een willekeurig gekozen <u>vast</u> punt $\neq 0$.

  z natuurlijk $\neq a_k$ omdat f(z) in de singuliere punten niet bepaald is, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

  - de onafhankelijk veranderlijke is w genoemd.

Singuliere punten van de integrand zijn:

A: $w = 0$ (pool van de 1e orde)

B: $w = z \neq a_k$ (pool van de 1e orde)

C: $w = a_k$ met $k = 1,2,3, \ldots, n, \ldots$ (polen van de 1e orde, n.l. gegeven) de polen van f(w).

Neem R_n van C_n nu zo groot dat z binnen C_n ligt. Van de serie polen C liggen a_1 t/m a_n er binnen). Dus $1 \leq k \leq n$; alle polen a_{n+1}, a_{n+2} enz. liggen buiten C_n. Volgens de gegevens is dit immers de eis waaraan de contour C_n voldoet. We <u>kiezen</u> $R_n > 2|z|$. Dit is niet essentieel, het kan ook een andere waarde zijn, als $R_n > |z|$ blijft. Binnen C_n liggen nu in totaal n+2 singuliere (polen), n.l. A: w = 0; B: w = z en n van C: a_1, a_2, . . a_n.

Residuen-stelling.

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw = \sum \text{(residu van alle polen binnen } C_n).$$

De residuen:

van A: $\lim\limits_{w\to 0}(w-0)\dfrac{f(w)}{w(w-z)} = \dfrac{f(0)}{-z}$ (f(o) bestaat, want volgens de gegevens is 0 geen pool).

van B: $\lim\limits_{w\to z}(w-z)\dfrac{f(w)}{w(w-z)} = \dfrac{f(z)}{z}$ (daar $z \neq a_k$ bestaat f(z). Ook is $z \neq 0$ gekozen).

van C:

Voor $w=a_k$: $$\lim_{w\to a_k}(w-a_k)\frac{f(w)}{w(w-z)} = \underbrace{\lim_{w\to a_k}(w-a_k)f(w)}_{\substack{=\text{residu van } f(w)\\ \text{voor } w=a_k;\\ \text{dus } =b_k}} \cdot \underbrace{\lim_{w\to a_k}\frac{1}{w(w-z)}}_{\substack{\text{is analytisch}\\ \text{dus:}\\ \lim = \frac{1}{a_k(a_k-z)}}} =$$

$$= b_k \cdot \frac{1}{a_k(a_k-z)} \qquad \boxed{k = 1, 2, \ldots, n.}$$

(N.B. Hierbij is gebruik gemaakt van het feit dat alle polen van de 1e orde zijn en dat 0 geen pool is).

Ingevuld in residuen-stelling:

$$I_n = \Sigma(\ldots\ldots) = -\frac{f(0)}{z} + \frac{f(z)}{z} + \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k(a_k-z)} \qquad \text{(I)}$$

I_n laat zich ook schatten:

$$|I_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_n}\frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_n}\frac{|f(w)|}{|w|\,|w-z|}\,|dw|$$

teller majoreren: $|f(w)| < M$ op C_n. volgens gegeven

noemer minoreren: op C_n is $|w| \geq R_n$ ook dus $|w-z| \geq |w| - |z| \geq R_n - |z|$

zodat: $$|I_n| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{R_n(R_n-|z|)}\int_{C_n} d|w| = \frac{M}{2\pi R_n(R_n-|z|)}\cdot L_n =$$

(gegeven is L_n K R_n)

$$= < \frac{M.K.R_n}{2\pi R_n \underbrace{(R_n-|z|)}} < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M.K}{\frac{1}{2}R_n} = \frac{M.K}{\pi R_n}.$$

gekozen R_n 2 z , dus z ½ R_n. R_n - z ½ R_n ,

d.w.z. $|I_n| \to 0$ voor $n\to\infty$ daar volgens gegeven dan ook $R_n \to \infty$.

Dus: $|I_n| \to 0$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0. \qquad \text{(II)}.$$

Limietovergang in (I):

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 = -\frac{f(0)}{z} + \frac{f(z)}{z} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k(a_k - z)} =$$

$$= -\frac{f(0)}{z} + \frac{f(z)}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_k(a_k-z)} .$$

of:

$$\boxed{f(z) = f(0) - z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_k(a_k-z)}}$$

<u>Meromorfe functies</u>.

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

voor: $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$ 0 geen pool.

polen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ alleen van de 1e orde

residuen $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$

Ondanks de beperkingen kunnen we er al veel mee doen; bijv. periodieke functies (goniometrische functies).

$\text{tg } z = \frac{\sin z}{\cos z}$ (polen in nulpunt van cos z)

$\text{cotg } z = \frac{\cos z}{\sin z}$ (" " " " sin z)

$\sec z = \frac{1}{\cos z}$ (" " " " cos z)

$\text{cosec } z = \frac{1}{\sin z}$ (" " " " sin z)

We bekijken $\text{cosec } z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$, polen voor $e^{iz} - e^{-iz} = 0$.

$e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i}$ (k geheel)

$2iz = 2k\pi i$, dus polen $\underline{\underline{z = k\pi}}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Dus cosec z heeft een pool in 0, en dat is bij de voorwaarden uitgesloten. Met een klein trucje kan de functie echter geschikt gemaakt worden.

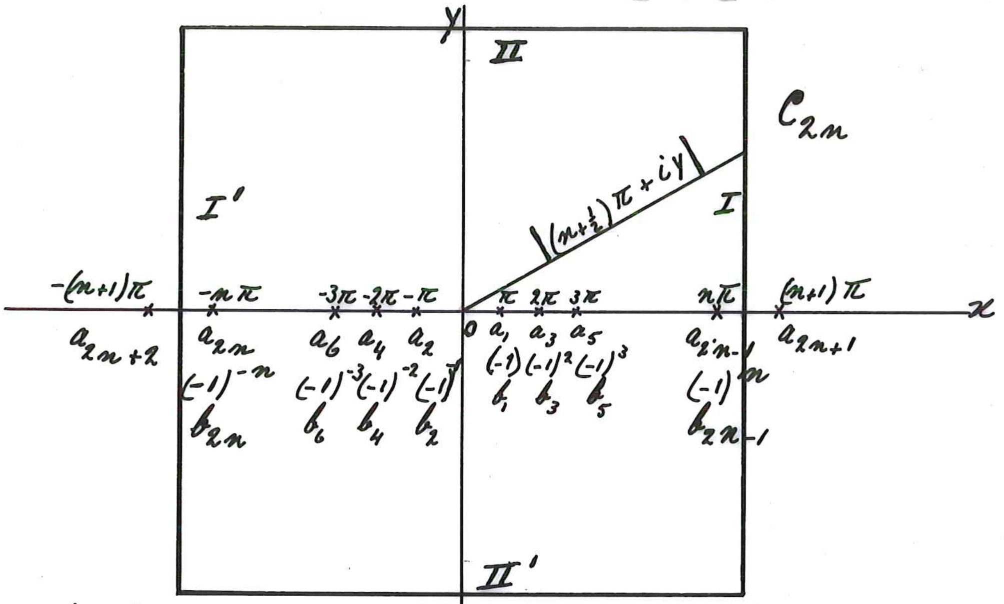
I). Wegwerken van de pool in z = 0.

Neem als $f(z) = \text{cosec } z - \frac{1}{z} = \frac{z - \sin z}{z \sin z} =$

$$= \frac{z - \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)}{z\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)} = \frac{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots}{\frac{z^2}{1!} - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \ldots} =$$

$$= \frac{z}{3!} \times \frac{1 - \frac{z^2}{4.5} + \frac{z^4}{4.5.6.7} - \ldots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots} \longrightarrow 0 \times 1 \,, \longrightarrow$$ dus tot nul.

Deze nieuwe functie heeft dus geen pool meer in 0, maar nog wel polen van de eerste orde in $z = k\pi$ met $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$



$|a_{2n-1}| = |a_{2n}| = n\pi$ $\quad$ $|a_{2n}|$ en $|a_{2n-1}| \to \infty$ voor $n \to \infty$

Het residu in $k\pi$ is:

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi)\left\{\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}\right\} = \lim_{\delta \to 0} \delta \left\{\frac{1}{\sin(k\pi + \delta)} - \frac{1}{k\pi + \delta}\right\}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{(-1)^k \sin\delta} - \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{k\pi + \delta} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k.$$

Neem als contour een vierkant met een halve zijde $(n + \frac{1}{2}).\pi$, dat is het meest efficiënt. Een cirkel is ook mogelijk. Deze contour omvat de polen t/m a_{2n}, dus kromme C_{2n}; a_{2n+1} ligt erbuiten.

R_{2n} = kortste afstand tot de oorsprong = $(n + \frac{1}{2})\pi$; $R_{2n} \to \infty$ voor $n \to \infty$

omtrek $L_{2n} = 8 \times R_{2n} < k\, R_{2n}$ voor elke $k \geq 9$, of liever elke $k > 8$.

Belangrijke eis: is $|f(z)|$ begrensd op C_{2n} ?

$f(z)$ op I $\qquad z = (n + \frac{1}{2})\pi + iy.$

$$f(z) = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} - \frac{1}{z} = \frac{2i}{e^{(n+\frac{1}{2})\pi i - y} - e^{-(n+\frac{1}{2})\pi i + y}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi + iy} =$$

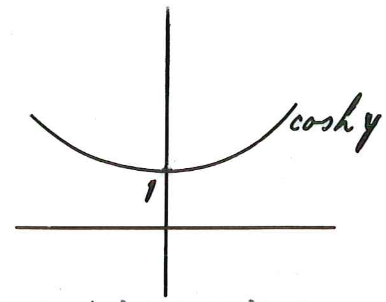
$$= \frac{2i}{e^{(n+\frac{1}{2})\pi i}\{e^{-y} - \underbrace{\boxed{e^{-(2n+1)\pi i}}}_{= e^{-\pi i} = -1} e^{+y}\}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi + iy} =$$

$$= \frac{2i}{e^{(n+\frac{1}{2})\pi i}\{e^{-y} + e^{+y}\}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi + iy}$$

$$|f(z)| \leq \frac{2}{e^y + e^{-y}} + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} < \frac{2}{e^y + e^{-y}} + \frac{2}{\pi}$$

Nu is:

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y \geq 1.$$



ook te zien met reeksontwikkeling van e^y. Dus:

$$|f(z)| \leq 1 + \frac{2}{\pi} \quad \text{op } I$$

Op I' geldt hetzelfde resultaat; onderweg zijn een paar -tekens anders, verder geldt een volkomen analoge beschouwing.

Op II is: $\quad z = x + (n + \frac{1}{2})\pi i$

$$f(z) = \frac{2i}{e^{ix-(n+\frac{1}{2})\pi} - e^{-ix+(n+\frac{1}{2})\pi}} - \frac{1}{x + (n+\frac{1}{2})\pi i}$$

$$\left| e^{ix-(n+\frac{1}{2})\pi} - e^{-ix+(n+\frac{1}{2})\pi} \right| \geq e^{(n+\frac{1}{2})\pi} - e^{-(n+\frac{1}{2})\pi}$$

Dus:

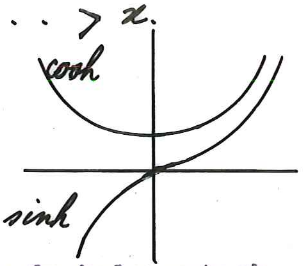
$$|f(z)| \leq \frac{2}{e^{(n+\frac{1}{2})\pi} - e^{-(n+\frac{1}{2})\pi}} + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} = \frac{1}{\sinh(n+\frac{1}{2})\pi} + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$$

of:

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots > x.$$

$$|f(z)| \leq \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} < 1 + \frac{2}{\pi}$$



We kunnen dezelfde grens aanhouden. Analoog voor II' Op de hele omtrek van C_{2n} is de modulus van f(z) uniform begrensd door:

$$|f(z)| < 1 + \frac{2}{\pi}$$

We vinden dus:

$$f(z) = \operatorname{cosec} z - \frac{1}{z} = 0 + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$$

Alle waarden van n zijn goed, met uitzondering van n=0. In de gehele analyse wordt uitzondering van n=0 weergegeven door Σ' i.p.v. Σ.

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) + \sum_{-1}^{-\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right\} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

$$\boxed{\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}}$$

Geldig in het gehele complexe vlak, behalve in de polen, die hier duidelijk naar voren komen: $z = 0$ en $z = n\pi$.

Op dezelfde wijze vindt men:

$$\boxed{\begin{aligned} \sec z &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+\frac{1}{2})}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 - z^2} \\ \operatorname{tg} z &= 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 - z^2}. \\ \operatorname{cotg} z &= \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2} \end{aligned}}$$

Er kan hiervoor ook een machtreeksontwikkeling voor opgesteld worden, maar slechts voor een beperkt gebied. Bovendien zijn de coëfficiënten niet zo eenvoudig. Een andere die nog behandeld zal worden, is:

$$\boxed{\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4n^2\pi^2}}$$

Nog een formule is:

$$\boxed{\operatorname{cosec}^2 z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}}$$

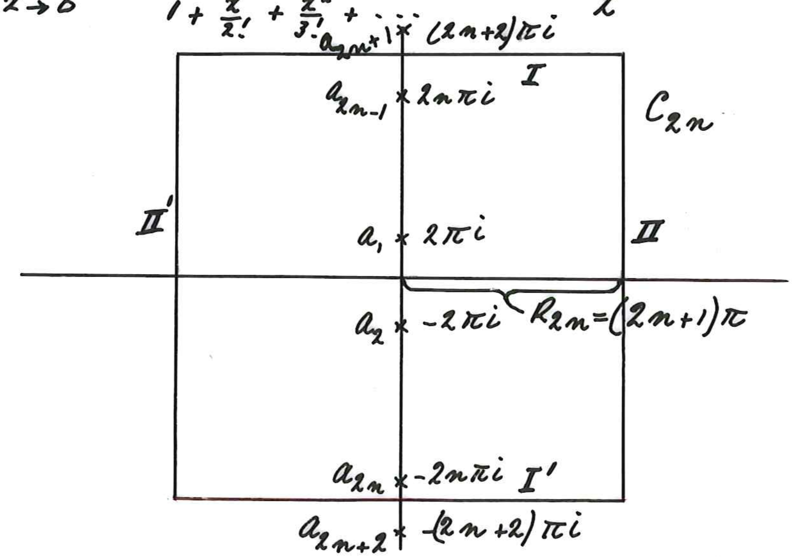
D.i. wel een zeer fraaie ontwikkeling. N.B. niet de geaccentueerde som; $n=0$ niet uitgesloten!

$\frac{1}{e^z-1}$ polen voor $e^z = 1$ $\underline{z = 2k\pi i}$ ook in 0.

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = \frac{z - e^z + 1}{z(e^z - 1)}.$$

$$f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z + 1 - (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots)}{z(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots)} =$$

$$= -\lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} = -\frac{1}{2}$$



Alles analoog aan het voorgaande geval. Moeilijkheid is weer de begrenzing op de rand. Residu van $2k\pi i$ is:

$$\lim_{z \to 2k\pi i} (z - 2k\pi i)\left\{\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}\right\}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \delta \left\{\frac{1}{e^{2k\pi i+\delta} - 1} - \frac{1}{2k\pi i + \delta}\right\} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{e^\delta - 1} - \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{2k\pi i + \delta}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{e^\delta - 1} = 1.$$

(standaardlimiet, anders direct af te leiden met reeksontwikkeling). Alle residuen zijn $\underline{1}$.

De begrensdheid. Op I is $z = (2n+1)\pi i + x$.

$$f(z) = \frac{1}{e^{(2n+1)\pi i + x} - 1} - \frac{1}{(2n+1)\pi i + x} = \frac{1}{e^{\pi i + x} - 1} - \frac{1}{(2n+1)\pi i + x} =$$

$$= \frac{1}{-e^x - 1} - \frac{1}{(2n+1)\pi i + x} = \frac{-1}{e^x + 1} - \frac{1}{(2n+1)\pi i + x}$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{(2n+1)\pi} \leq 1 + \frac{1}{\pi}$$

Op I' idem.

Op II is $z = (2n+1)\pi + iy$

$$f(z) = \frac{1}{e^{(2n+1)\pi + iy} - 1} - \frac{1}{(2n+1)\pi + iy}$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{e^{(2n+1)\pi} - 1} + \frac{1}{(2n+1)\pi} < \frac{1}{e^\pi - 1} + \frac{1}{\pi}$$

$$e^\pi = 1 + \frac{\pi}{1!} + \dots \quad \text{zeker} > 2$$

Dus: $|f(z)| < 1 + \frac{1}{\pi}$

Op II' iets anders:

$$f(z) = \frac{1}{e^{-(2n+1)\pi + iy} - 1} - \frac{1}{-(2n+1)\pi + iy}$$

$$|f(z)| = \frac{1}{1 - e^{-(2n+1)\pi}} + \frac{1}{(2n+1)\pi} < \frac{1}{1 - e^{-\pi}} + \frac{1}{\pi} =$$

$$= \frac{e^\pi}{e^\pi - 1} + \frac{1}{\pi} < e^\pi + \frac{1}{\pi}$$

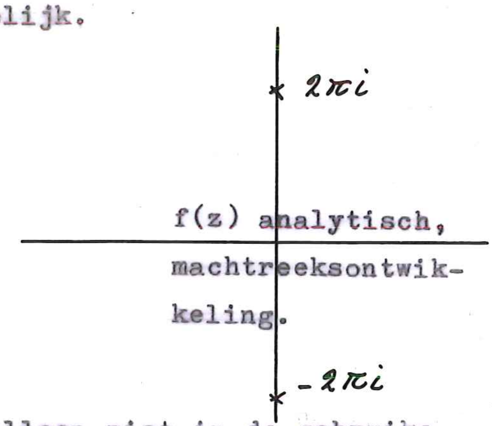
d.i. ook begrensd; met een andere grens. Maar deze grenzen hebben niet veel betekenis, de schattingen zijn zeer grof en dat is ook voldoende.

Zodat: $$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \, 1 \cdot \left(\frac{1}{z - 2k\pi i} + \frac{1}{2k\pi i}\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{z - 2k\pi i} + \frac{1}{2k\pi i} + \frac{1}{z + 2k\pi i} - \frac{1}{2k\pi i}\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4k^2\pi^2}$$

Er is in een gebied ook een machtreeks mogelijk.



$$\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+4k^2\pi^2}$$

polen voor $z = 2k\pi i$;($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$)

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2+4k^2\pi^2}$$

analytisch voor: $|z| < 2\pi$.

Machtreeksontwikkeling in omgeving van 0, alleen niet in de gebruikelijke vorm.

$$\frac{2z^2}{z^2+4k^2\pi^2} = \frac{2z^2}{4k^2\pi^2\left(1+\frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right)} = \frac{2z^2}{4k^2\pi^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z^2}{4k^2\pi^2}} \qquad (1)$$

ontwikkelen volgens:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \ldots \quad \text{voor} \quad |u| < 1.$$

$$u = -\frac{z^2}{4k^2\pi^2} \qquad |u| = \left|\frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right| \leq \left|\frac{z^2}{4\pi^2}\right| < 1.$$

(1) is:

$$\frac{2z^2}{4k^2\pi^2}\left\{1 - \frac{z^2}{4k^2\pi^2} + \frac{z^4}{16k^4\pi^4} - \frac{z^6}{2^6k^6\pi^6} + \ldots\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{z^2}{2^2k^2\pi^2} - \frac{z^4}{2^4k^4\pi^4} + \frac{z^6}{2^6k^6\pi^6} - \frac{z^8}{2^8k^8\pi^8} + \ldots\right\}$$

Voor $|z| < 2\pi$ is:

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{z^2}{2^2k^2\pi^2} - \frac{z^4}{2^4k^4\pi^4} + \frac{z^6}{2^6k^6\pi^6} - \ldots\right\}$$

$$= 1 - \frac{z}{2} + 2\frac{z^2}{2^2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 2\frac{z^4}{2^4\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} + 2\frac{z^6}{2^6\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} - \text{enz}$$

De coëfficiënten zijn van de vorm: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \ldots$

Deze functies heten in de wiskunde zeta-functies. Wij zullen ze noemen:

$$S(2m) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}.$$

Dan is:

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{2S(2)}{2^2\pi^2}z^2 - \frac{2S(4)}{2^4\pi^4}z^4 + \frac{2S(6)}{2^6\pi^6}z^6 - \ldots$$

$$\ldots (-1)^{m-1}\frac{2S(2m)}{2^{2m}\pi^{2m}}z^{2m} + \ldots$$

De coëfficiënten zijn zelf oneindig voortlopende reeksen. We laten dit voorlopig even rusten, het is één uitkomst. Een andere benadering is: we weten dat binnen cirkel $|z| \leq 2\pi$ de functie analytisch is, dus een machtreeksontwikkeling naar machten van z moet bestaan,

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = B_0 + \frac{B_1 z}{1!} + \frac{B_2 z^2}{2!} + \frac{B_3 z^3}{3!} + \dots \qquad |z| < 2\pi$$

B_k zijn coëfficiënten (getallen coëfficiënten), die bepaald moeten worden.

$$B_m = f^m(0)$$

$$B_0 = 1; \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad B_2 = \frac{2\,S(2)}{2^2\pi^2}\,2! \quad ; \quad \boxed{B_3 = 0}$$

Evenzo $B_5 = B_7 = \dots = 0$. Algemeen $\boxed{B_{2m-1} = 0.}$ De oneven coëfficiënten zijn alle nul, behalve B_1. De even coëfficiënt is i.h.a.:

$$B_{2m} = (2m!)\,\frac{(-1)^{m-1}\,S(2m)}{2^{2m-1}\,\pi^{2m}}.$$

Uit f(z) volgt:

$$z \equiv (e^z - 1)\left(B_0 + \frac{B_1 z}{1!} + \frac{B_2 z^2}{2!} + \frac{B_3 z^3}{3!} + \dots\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\left(B_0 + \frac{B_1 z}{1!} + \frac{B_2 z^2}{2!} + \frac{B_3 z^3}{3!} + \dots\right)$$

D.i. een identiteit binnen de convergentiecirkel. Uitvermenigvuldigen en machten gelijk stellen levert: (de methode der onbepaalde coëfficiënt),

$$1 = \frac{B_0}{1!} = B_0 \longrightarrow B_0 = 1 \; ; \qquad 0 = \frac{B_0}{2!} + \frac{B_1}{1!1!} \longrightarrow B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Dit worden recurrente betrekkingen; met alle voorgaande is de volgende te bepalen.

$$0 = \frac{B_0}{3!} + \frac{B_1}{1!\,2!} + \frac{B_2}{2!\,1!} \longrightarrow 0 = \frac{1}{3!} - \frac{\frac{1}{2}}{1!\,2!} + \frac{B_2}{2!\,1!} \longrightarrow$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = B_2 = \frac{1}{6}.$$

zodat:

$$B_2 = \frac{2\,S(2)}{2^2\pi^2}\,2! = \frac{S(2)}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}\left\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right\} = \frac{1}{6}$$

Dus:

$$\boxed{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}}$$

Evenzo 4^o macht:

$$0 = \frac{B_0}{4!} + \frac{B_1}{1!\,3!} + \frac{B_2}{2!\,2!} + \frac{B_3}{3!\,1!} = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{B_3}{6}$$

5^o macht:

$$B_3 = 0$$

$$0 = \frac{B_0}{5!} + \frac{B_1}{1!\,4!} + \frac{B_2}{2!\,3!} + \frac{B_3}{3!\,2!} + \frac{B_4}{4!\,1!} \longrightarrow B_4 = -\frac{1}{30}$$

Anderzijds is:

$$B_4 = \frac{4!\,(-1)^3\,S(4)}{2^3\,\pi^4} = \frac{-24\,S(4)}{8\,\pi^4} = -\frac{1}{30}$$

$$S(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Dus:

$$\boxed{1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}}$$

Enz., enz.

We vinden:

$$B_0 = 1 \qquad B_8 = -\frac{1}{30}$$
$$B_1 = -\frac{1}{2} \qquad B_9 = 0$$
$$B_2 = \frac{1}{6} \qquad B_{10} = \frac{5}{66}$$
$$B_3 = 0 \qquad B_{11} = 0$$
$$B_4 = -\frac{1}{30} \qquad B_{12} = -\frac{691}{2430}$$
$$B_5 = 0 \qquad B_{13} = 0$$
$$B_6 = \frac{1}{42} \qquad B_{14} = \frac{7}{6}.$$
$$B_7 = 0$$

Daarmee is S(2m) te bepalen.

$$S(2m) = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \cdots = \frac{(-1)^{m-1} \cdot 2^{2m-1}\,\pi^{2m}}{(2m)!}\,B_{2m}.$$

We kunnen ze recursief bepalen.

Bij de differentie vergelijkingen en in de numerieke wiskunde spelen deze coëfficiënten B een zeer belangrijke rol. Er is geen eenheid in de notatie, wat de indices betreft; de meeste wiskundigen (bijna allen) duiden ze wel met een B aan; het zijn de getallen van Bernoulli.

Algemeen zal de coëfficiënt van de m^e^ macht te vinden zijn uit:

$$0 = \frac{B_0}{m!} + \frac{B_1}{1!(m-1)!} + \frac{B_2}{2!(m-2)!} + \frac{B_3}{3!(m-3)!} + \cdots + \frac{B_{m-2}}{(m-2)!\,2!} + \frac{B_{m-1}}{(m-1)!\,1!}.$$

d.i. de algemene recurrente betrekking tussen de eerste (m) getallen. Of anders geschreven:

$$0 = \frac{m!}{0!\,m!}B_0 + \frac{m!}{1!(m-1)!}B_1 + \frac{m!}{2!(m-2)!}B_2 + \cdots + \frac{m!}{(m-2)!\,2!}B_{m-2} +$$
$$+ \frac{m!}{(m-1)!\,1!}B_{m-1} + \frac{m!}{m!\,0!}B_m - \frac{m!}{m!\,0!}B_m.$$

De coëfficiënten zijn nu de binomiaalcoëfficiënten:

$$0 = \binom{m}{0} B_0 + \binom{m}{1} B_1 + \binom{m}{2} B_2 + \dots + \binom{m}{m-1} B_{m-1} + \binom{m}{m} B_m - \binom{m}{m} B_m$$

Symbolisch:

$$0 = \left\{ \binom{m}{0} B^0 + \binom{m}{1} B^1 + \binom{m}{2} B^2 + \dots + \binom{m}{m-1} B^{m-1} + \binom{m}{m} B^m \right\} - \underbrace{\binom{m}{m}}_{=1} B^m$$

$$\boxed{0 = (1+B)^m - B^m.}$$

Zo schrijft men deze ingewikkelde betrekking algemeen symbolisch op. D.w.z. goed lezen: uitwerken als een binomium van Newton; na uitwerken exponenten vervangen door indices. Dat is het grote voordeel van de nummering van de B's op bovenstaande manier; daarom dit aanhouden. Ingevoerd door Italiaan Césaro (ca. 1900).

[Deze getallen en betrekkingen bieden ons de mogelijkheid de reeksen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ te sommeren, maar alleen voor even exponenten.

Hiermee wordt afgestapt van de meromorfe functies. We gaan nu kijken naar functies die in het eindige geen singulariteiten hebben.

Functies zonder singuliere punten in het eindige.

Dus analytisch in het gehele complexe vlak, althans in het eindige. Ze heten gehele functies: bijv. sin z, cos z, e^z. Primitieve gehele functies zijn algebraïsche veeltermen: $f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_m z^m$. (Gehele algebraïsche functie, in tegenstelling tot een gebroken algebraische functie).

$$f(z) = \frac{A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots}{B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots}$$

is een speciaal geval van een meromorfe functie. Meromorf wil eigenlijk zo iets zeggen als: niet geheel, gebroken. De gehele functies hebben alleen nulpunten. Een veelterm kan ontbonden worden door gebruik te maken van de nulpunten:

$$f(z) = A_m (z - a_1).(z - a_2).(\dots) \dots (z - a_m).$$

Gaat dit ook op bij een oneindig aantal nulpunten? Bij de meromorfe functies streven we in de ontwikkeling naar een aantal breuken, bij gehele functies zoeken we een ontwikkeling naar een product van factoren.

f(z) is een gehele functie, met o.a. een nulpunt a_1. Enkelvoudige nulpunten. De convergentiecirkel is oneindig groot. Ontwikkeling in machtreeks:

$$f(z) = \underbrace{f(a_1)}_{=0} + (z-a_1)\frac{f'(a_1)}{1!} + (z-a_1)^2\frac{f''(a_1)}{2!} + \ldots$$

$$= (z-a_1)\left\{\frac{f'(a_1)}{1!} + (z-a_1)\frac{f''(a_1)}{2!} + (z-a_1)^2\frac{f'''(a_1)}{3!} + \ldots\right\}$$

$$= (z-a_1)\,\varphi(z)$$

met $\varphi(a_1) \neq 0$, anders zou er een dubbel nulpunt zijn. $\varphi(z)$ is een analytische functie. (Machtreeks van $(z - a_1)$).

$$f'(z) = (z-a_1)\,\varphi'(z) + \varphi(z)$$

dus:
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a_1)\,\varphi'(z)+\varphi(z)}{(z-a_1)\,\varphi(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{1}{z-a_1} = F(z)$$

$\varphi(z) \neq 0$ in $z = a_1$

dus: $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ is analytisch in de omgeving van $z=a_1$

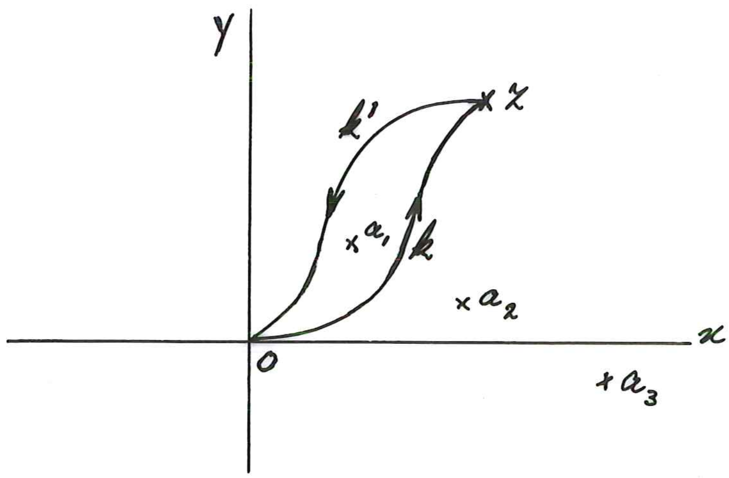
$\dfrac{1}{z-a_1}$ is singulier met een pool van de 1° orde in $z=a_1$ met residu 1.

Dus $F(z)$ is meromorf, met polen van de 1e orde in a_1, a_2, . . (dus in de nulpunten van $f(z)$). Alle residuen b_1, b_2, b_3, . . zijn allemaal 1. Ontwikkeling van de meromorfe functie in partiële breuken volgens Mittag Leffler is dus mogelijk als aan alle voorwaarden is voldaan. Veronderstel dat aan deze voorwaarden is voldaan. Dan is:

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right),$$ mits: $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$

aan alle vroeger gestelde voorwaarden voldoet. (Voorwaarde voor de Mittag-Leffler ontwikkeling!).



Ga beide zijden integreren langs k van 0 naar z:

$$\int_0^z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_0^z \frac{f'(0)}{f(0)}\,dz + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^z \frac{dz}{z-a_n} + \int_0^z \frac{dz}{a_n}\right\}$$

$$\rightarrow \underbrace{\log f(z) - \log f(0)}_{\text{uitkomst integraal cirkellid}} = \frac{f'(0)}{f(0)}\cdot z + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log(z-a_n) - \log(-a_n) + \frac{z}{a_n}\right\}$$

$$\log\frac{f(z)}{f(0)} = \log f(z) - \log f(0) = \frac{f'(0)}{f(0)}\cdot z + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n}\right\}$$

$$f(z) = f(0)\cdot e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z}{a_n}}\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

D.i. de ontwikkeling van de gehele functie f(z) in een product naar de nulpunten.

We hadden z willekeurig in complexe vlak ($\neq a_k)_0$; k is een willekeurige kromme van 0 naar z

$$\int_k \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_k\left\{\frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} 1\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right)\right\}dz.$$

$$\frac{d}{dz}(\log f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

dus:

$$\int_0^z d\log f(z) = \frac{f'(0)}{f(0)}\int_0^z dz + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z \frac{dz}{z-a_n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\int_0^z dz$$

$$\underbrace{\log f(z) - \log f(0)}_{\text{afhankelijk van k}} = \underbrace{\frac{f'(0)}{f(0)}\cdot z}_{\text{onafhankelijk van k (reeds bewezen)}} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left\{\log(z-a_n) - \log(0-a_n)\right\}}_{\text{afhankelijk van k}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{a_n}}_{\text{onafhankelijk van k}}.$$

$$\oint \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i N$$

N = aantal nulpunten.

Stel $C = k_+ + k'_+ = k - k'$

$$\int_k - \int_{k'} = 2\pi i . \underbrace{1}_{\text{1 nulpunt ingesloten nl. } a_1.} \longrightarrow \underbrace{\int_k = \int_{k'} + 2\pi i}_{\text{afhankelijk van de kromme}}$$

Bovendien:

$$\oint \frac{dz}{z-a_n} = 2\pi i \qquad C^+ \text{ met } a_n \text{ ingesloten.}$$

$$\int_k \frac{dz}{z-a_1} - \int_{k'} \frac{dz}{z-a_1} = 2\pi i \longrightarrow \underbrace{\int_k \frac{dz}{z-a_1} = 2\pi i + \int_{k'} \frac{dz}{z-a_1}}_{\text{afhankelijk van de kromme}}.$$

Dus het moet zijn:

$$\log f(z) - \log f(0) + 2k\pi i = \frac{f'(0)}{f(0)} z + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log \frac{a_n - z}{a_n} \pm 2\pi i \right\} + \sum_{1}^{\infty} \frac{z}{a_n}.$$

verhef e tot de uitkomst boven:

$$e^{\log f(z) - \log f(0) + 2k\pi i} = e^{z\frac{f'(0)}{f(0)}} . e^{\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log \frac{a_n - z}{a_n} \pm 2\pi i \right\}} . e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_n}}.$$

Maar $e^{2k\pi i} = 1$,

$$\frac{f(z)}{f(0)} . 1 = e^{z\frac{f'(0)}{f(0)}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - z}{a_n} \right\} e^{\frac{z}{a_n}}$$

of:

$$\boxed{f(z) = f(0) . e^{z\frac{f'(0)}{f(0)}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{z}{a_n} \right\} e^{\frac{z}{a_n}}.}$$

Productontwikkeling van Weierstrasz. Dit geldt, mits $\frac{f'(z)}{f(z)}$ aan de bij Mittag-Leffler gestelde eisen voldoet.

Voorbeeld.

$$f(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

$$f'(z) = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname{cotg} z \qquad \text{(pool van de 1e orde voor z=0).}$$

Liever:

$$\boxed{f(z) = \frac{\sin z}{z}} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

$$f'(z) = \frac{z\cos z - \sin z}{z^2}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} \cdot \frac{z}{\sin z} = \underbrace{\cot z - \frac{1}{z}}$$

pool in O verdwenen !.

$$f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \lim_{z\to 0} \left\{ \cot z - \frac{1}{z} \right\} = 0$$

(Uit te rekenen door gebruik te maken van de reeksontwikkelingen voor sin z en cos z en boven één noemer brengen).

Nulpunten van $\frac{\sin z}{z} = +\pi, -\pi, +2\pi, -2\pi, \ldots, +k\pi, -k\pi$; $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$.

f(z) is een gehele functie, de nulpunten zijn enkelvoudig, voor $\frac{f'(z)}{f(z)}$ is voldaan aan de voorwaarde voor ontwikkeling van Mittag-Leffler (d.i. hier verder niet aangetoond). Dus:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 . e^{z.0}\left\{\left(1-\frac{z}{\pi}\right)e^{\frac{z}{\pi}}\left(1+\frac{z}{\pi}\right)e^{-\frac{z}{\pi}}\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)e^{\frac{z}{2\pi}}\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)e^{-\frac{z}{2\pi}}\ldots\right\}$$

$$\frac{\sin z}{z} = \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$

$$\boxed{\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}$$

Ontwikkeling naar nulpunten. Sinus-product. Analoog:

$$\boxed{\cos z = \prod_{k=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z^2}{(k-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right\}}$$

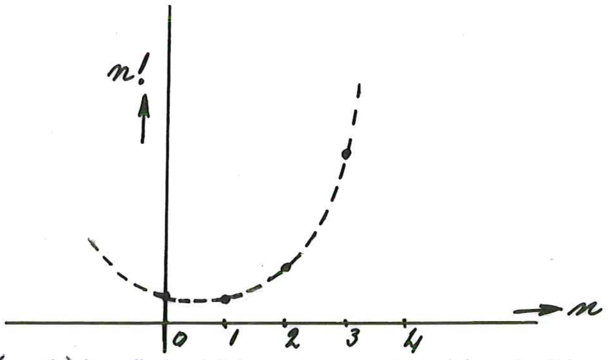
Speciaal $z = \frac{\pi}{2}$,

$$\sin z = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)(2k-1)}{2k.2k}$$

Dus:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k.2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{4.4}{3.5}\cdot\frac{6.6}{5.7}\cdot\frac{8.8}{7.9}\cdot\ldots$$

$$\pi = 2.\frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}\ldots$$ Wallis ± 1650.



n! = n(n-1)!. Substitueer n = 1. 1! = 1.0! ⟶ 0! = 1. n! geeft aanleiding tot een aantal geïsoleerd liggende punten. Kan men nu een grafiek tekenen, zodat x! betekenis krijgt? (x willekeurig).

$$\int_0^\infty e^{-u}u^x\,du = -\int_0^\infty u^x\,de^{-u} = -\left[u^x e^{-u}\right]_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}\,du.$$

I). $x > 0$ $u \to 0$ geeft geen moeilijkheden $\left.\begin{matrix} e^{-u} \to 1 \\ u^x \to 0 \end{matrix}\right\}$ integrand. $\to 0$

$\left.\begin{matrix} u \to \infty : u^x \to \infty \\ e^{-u} \to 0 \end{matrix}\right\}$ toch is $\underbrace{u^x e^{-u}} \to 0$

want: $u^x e^{-u} = \dfrac{u^x}{e^u} = \dfrac{u^x}{1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^k}{k!} + \dots}$

Zorg ervoor dat $k > x$.

$$\frac{u^x}{e^u} < \frac{u^x}{\frac{u^k}{k!} + \dots} < \frac{u^x}{\frac{u^k}{k!}} = \underbrace{u^{x-k}}_{u^{\text{neg.exp.}}} . k! \to 0.$$

dus: $u^x e^{-u}\Big|_0^\infty = 0$ voor $x > 0$.

Zodat: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u}u^x\,du = x\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}\,du$

II). $x < 0 : u^x \to 0$ als f(x) voor groter wordende x.

$u \to \infty : e^{-u} \to 0$ en $u^x \to 0$ als f(u) dus de gehele integrand $\to 0$.

$u \to 0 : \left.\begin{cases} e^{-u} \to 1 \\ u^x \to \infty \quad \text{als } f(u) \end{cases}\right\}$ dus geen $x < 0$,

(dus de integrand naar $1.\infty = \infty$ voor $u \to 0$; d.w.z. dat in dit geval de integraal niet bestaat. De oneigenlijke integraal $\int_0^\infty e^{-u}u^x\,du$ is divergent!).

We nemen $x \geqslant 0$.

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^x \, du \qquad F(x-1) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} \, du \quad \text{en} \quad F(x) = x\,F(x-1)$$

Als: $x-1 \geqslant 0$ is: $F(x-1) = (x-1)\,F(x-2)$, zodat:

$F(x) = x(x-1) \ldots (x-k)\,F(x-k-1)$ voor $x-k \geqslant 0$.

Neem nu x geheel = n.

$$F(n) = \int_0^\infty e^{-u} u^n \, du = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k)\,F(n-k-1).$$

Kies $k = n-1$. Dan is $x - k = n-(n-1) = 1 > 0$; dus goed.

$$F(n) = n(n-1)(n-2) \ldots 1 \,.\, F(0).$$

$$F(0) = \int_0^\infty e^{-u} \, du = -e^{-u}\Big]_0^\infty = 1.$$

Voor n geheel positief is $F(n) = \int_0^\infty e^{-u} u^n \, du = n!$. Hiermee zou je dus ook n! kunnen definiëren.

Je zou kunnen definiëren:

$$x! \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-u} u^x \, du \qquad x \geqslant 0.$$

een analytische voortzetting van de faculteit. Beschouw nu:

$F(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} \, du$ z complex. Voor welke z betekenis?

$$F(z) = (z-1)\,F(z-2)$$

$F(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} \, du$ Opm.: Dus afwijkend niet u^z, maar u^{z-1} !

De oorsprong is een gevaarlijk punt. In de buurt van $u = 0$

$$e^{-u} u^{z-1} = u^{z-1}\left\{1 - \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \ldots\right\} =$$

$$= u^{z-1} - \frac{u^z}{1!} + \frac{u^{z+1}}{2!} - \ldots$$

$$\int e^{-u} u^{z-1} \, du = \int u^{z-1} \, du - \frac{1}{1!}\int u^z \, du + \ldots$$

$$|u^z| = u^x \qquad x = Re(z) > 0 \qquad u^x \to 0 \text{ voor } u \to 0.$$

Euler. Uitbreiding van de faculteit n!. Voorlopig was m geheel (geheel, positief).

$$\int_0^\infty e^{-x}x^m dx = m\int_0^\infty e^{-x}x^{m-1}dx = \ldots\ldots = m(m-1)\ldots(m-k)\int_0^\infty e^{-x}x^{m-k-1}dx$$

(voor m geheel $= m!\underbrace{\int_0^\infty e^{-x}dx}_{=1} = m!$, nu m willekeurig = z (z complex)).

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^z dx.$$

Heeft $\int_0^\infty e^{-x}x^{-z}dx$ betekenis? Niet in de buurt van x=0: De integrand is:

$$\sim \frac{1}{x^2} \longrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big]_0^\infty = \infty.$$

F(z) heeft betekenis als Re z > -1.

$$z = x + iy \qquad x > -1.$$

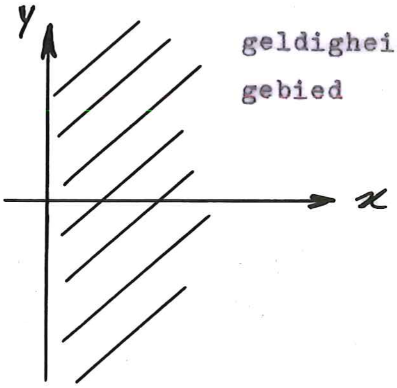
$$|u^{x+iy}| = |e^{(\log u)(x+iy)}| = e^{x\log u} = u^x$$

$$\left|\int_0 e^{-u}u^{x+iy}du\right| \leq \int_0 e^{-u}u^x du \approx \int_0 u^x dx = \frac{u^{x+1}}{x+1}\Big]_0$$

Betekenis aan de ondergrens voor x > -1.

Liever beschouwen we: $\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du$. Deze heeft betekenis voor Re(z) > 0; het rechter halfvlak.

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du}$$



geldigheids-gebied

Gamma-functie.

Legendre.

Een analytische functie van z voor Re(z)>0, er is een bepaalde afgeleide voor Re(z) > 0. (Integralen van Euler van de tweede soort).

Analytische voortzetting.

$F_1(z) = 1 + z + z^2 + \ldots$ Betekenis voor $|z| < 1$.

$F_2(z) = \frac{1}{1-z}$ Heet de analytische voortzetting van $F_1(z)$ over het hele complexe vlak.

Voorlopig Re(z) > 0.

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x}x^{z-1}dx}_{P(z)} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}dx}_{Q(z)}$$

Bekijk eerst P(z).

Reeks van Mac Laurin :

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots (-1)^m \frac{x^m}{m!} + \overbrace{(-1)^{m+1} \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\theta x}}^{\text{restterm}} \qquad 0<\theta<1$$

$$P(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ x^{z-1} - \frac{x^z}{1!} + \frac{x^{z+1}}{2!} - \frac{x^{z+2}}{3!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{z+m-1}}{m!} + (-1)^{m+1} \frac{x^{z+m} e^{-\theta x}}{(m+1)!} \right\} dx =$$

$$= \left[\frac{x^z}{0!z} - \frac{x^{z+1}}{1!(z+1)} + \frac{x^{z+2}}{2!(z+2)} - \frac{x^{z+3}}{3!(z+3)} + \ldots (-1)^m \frac{x^{z+m}}{m!(z+m)} \right]_0^1 + (-1)^{m+1} \frac{1}{(m+1)!} \int_0^1 e^{-\theta x} x^{z+m} dx =$$

(daar Re(z)>0) $$= \frac{1}{0!z} - \frac{1}{1!(z+1)} + \frac{1}{2!(z+2)} + \ldots (-1)^m \frac{1}{m!(z+m)} + \underbrace{\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} \int_0^1 e^{-\theta x} x^{z+m} dx}_{R_m}$$

$0<\theta<1$; $0<e^{-\theta x}<1$

$0<x<1$

dus $0<\theta x<1$

$$|R_m| < \frac{1}{(m+1)!} \int_0^1 x^{a+m} dx = \frac{1}{(m+1)!(a+m+1)} \to 0 \text{ voor } m \to \infty.$$

(a komt uit de lucht vallen; volgens deze uitwerking zal a=Re(z) moeten zijn, dus z = a + b i). Dus voor Re(z) > 0:

$$P(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1} dx = \frac{1}{0!z} - \frac{1}{1!(z+1)} + \frac{1}{2!(z+2)} - \frac{1}{3!(z+3)} + \ldots (-1)^m \frac{1}{m!(z+m)} + \ldots$$

een meromorfe functie met polen van de 1e orde in z = 0, -1, -2, -3, . . .
Het residu voor z = -m is $\frac{(-1)^m}{m!}$. (Bepaal residu maar met $\lim_{z \to m} (z+m)P(z)$!).
Deze is geldig in het gehele complexe vlak met uitzondering van de polen.
Dus: voor Re(z) > 0 is P(z) = opgestelde reeks; voor Re(z) < 0 definiëren we nu: zelfde reeks = P(z).

Bekijk nu Q(z).

$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1} dx$$

is analytisch in het hele complexe vlak.

Te bewijzen: Q(z) heeft één bepaalde afgeleide naar z in het gehele complexe vlak.

$$\frac{Q(z+h) - Q(z)}{h} = \int_1^\infty \frac{e^{-x} x^{z+h-1} - e^{-x} x^{z-1}}{h} dx = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1} \frac{x^h - 1}{h} dx$$

(h is een complexe toename van z).

$$\frac{x^h-1}{h} = \frac{e^{h\log x}-1}{h} = \frac{1+\frac{h\log x}{1!}+\frac{h^2\log^2 x}{2!}+\ldots-1}{h} =$$

$$= \log x + \frac{h\log^2 x}{2!}\left\{1+\frac{h\log x}{3}+\frac{h^2\log^2 x}{3.4}+\ldots\right\}$$

$$\left|\frac{x^h-1}{h}-\log x\right| < |h|\frac{\log^2 x}{2}\left\{1+\frac{|h|\log x}{1}+\frac{|h|^2\log^2 x}{1.2}+\ldots\right\} =$$

$$= |h|\frac{\log^2 x}{2}\cdot x^{|h|} \to 0 \quad \text{voor} \quad h \to 0$$

dus: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Q(z+h)-Q(z)}{h} = \int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}\log x\,dx$

dus Q(z) analytisch in hele complexe vlak,
P(z) " " " " ",

met uitzondering van 0, -1, -2, . . .

Voor het <u>gehele</u> complexe vlak geldt de <u>meromorfe</u> functie:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{0!\,z} - \frac{1}{1!(z+1)} + \frac{1}{2!(z+2)} - \frac{1}{3!(z+3)} + \ldots + \int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}dx.$$

polen van de eerste orde in z = 0, -1, -2, . . . , -m, ... met residuen

$\frac{1}{0!}, \frac{-1}{1!}, \frac{1}{2!}, \ldots, \frac{(-1)^m}{m!}, \ldots$

Dus:

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx$ geldt alleen in rechter halfvlak!

In het hele complexe vlak geldt:

$$\Gamma(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(z+m)} + \int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}dx.$$

deze is analytisch, met uitzondering van de polen van de eerste orde.

Voor Re(z) > 0 is:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx.$$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^z dx = -\int_0^\infty x^z de^{-x} =$$

$$= -\left[x^z e^{-x}\right]_0^\infty + z\underbrace{\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx}_{=\Gamma(z)} = z\,\Gamma(z)$$

Voor de ondergrens:

$|x^z e^{-x}| = x^a e^{-x} \to 0$

Voor de bovengrens:

$|x^z e^{x}| = x^a e^{-x}$ ook $\to$ 0 omdat e^{-x} veel sterker $\to$ 0 dan $x^a \to \infty$

Als de modulus van een complex getal $\to 0$, gaat dus ook het complexe getal zelf $\to 0$. Dus:

$$\left[x^{x} e^{-x}\right]_0^{\infty} = 0$$

(N.B. = 0 en niet $\to 0$ omdat de integraal oneigenlijk is en feitelijk de $\lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ \delta\to 0}} \int_\delta^{\infty}$, dus $\lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ \delta\to 0}} \left[x^z e^{-x}\right]_\delta^N$ genomen moet worden).

Zodat voor $Re(z) > 0$ is $\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)}$ Recursie-betrekking.

Nu bewijzen dat dit in het gehele complexe vlak geldt, behalve in de polen.

<u>Bewijs</u>:

$$\Gamma(z+1) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(z+k+1)}}_{\Sigma} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-t} t^z\,dt}_{I}$$

I met partiële integratie: $\left.-t^z e^{-t}\right]_1^{\infty} + z\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt =$

$$= +e^{-1} + z\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} + z\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt$$

$$\frac{(k+1)}{(k+1)} \cdot \Sigma = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1+z)-z}{(k+1)!\,(k+z+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} - z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!(k+z+1)}$$

Samengenomen:

$$\Gamma(z+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} + z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!(k+z+1)} + \underbrace{1}_{} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} + z\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt.$$

1e term v.d. reeks $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$, dus voor k=0.

Stel nu $k+1 = k^*$ in de eerste 2 reeksen en schrijf voor $+1$: $\frac{z}{0!(0+z)}$.

Dan is:

$$\Gamma(z+1) = -\sum_{k^*=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k^*}}{k^*!} + z\sum_{k^*=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k^*}}{k^*!(k^*+z)} + \frac{z}{0!(0+z)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} + z\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt =$$

$$= \underbrace{z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)}}_{} + z\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt = z\,\Gamma(z).$$

hierin 2e en 3e term samengenomen door $\sum_0^{\infty}$ i.p.v. $\sum_1^{\infty}$

Waarmee het gestelde $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ bewezen is voor het gehele complexe vlak, uitgezonderd in de polen.

Bijzonder geval: z = m = geheel positief = 1, 2, 3, . . .

$\boxed{\Gamma(m+1) = m!}$ met recursie-formule doorgaan tot $\Gamma(1) = 1$.

Opm.: In de literatuur wordt vaak voor $\Gamma(z+1) = \pi(z)$ geschreven. Dat is een andere notatie. $\pi(z)$ is dus $\pi(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^z\, dt$.

Nu bezien we:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} . u^{-1}\, 2u\, du$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = 2.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

(immers uit reële analyse is bekend $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.)

Dus: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ en: $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ enz.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}\Gamma(-\tfrac{1}{2}) \rightarrow \Gamma(-\tfrac{1}{2}) = -2\Gamma(\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

Algemeen:

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left\{-(n+\tfrac{1}{2})\right\} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!\; 2^{2(n+1)}}{(2n+2)!}\sqrt{\pi}$$

Voor n = 1, 2, 3, . . (natuurlijk getal) in het eerste geval en
n = 0, 1, 2, 3, ... , in het tweede geval.

Wanneer we $\Gamma(z)$ weten voor $0 < \mathrm{Re}(z) \leq 1$, dan kunnen we het voor alle z berekenen met recursie-formules volgens: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
Het reële gedeelte van z wordt immers telkens 1 verlaagd, zodat we automatisch tenslotte in het gebied $0 < \mathrm{Re}(z) \leq 1$ terecht komen.

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) \rightarrow \Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1}$$

Integralen van de 1e soort van Euler zijn:

$$B(z,n) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{n-1} dt$$: de Bêta-functie.

De Bêta-functie is uit te drukken in de Γ-functie en wel volgens:

$$\boxed{B(z,n) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(n)}{\Gamma(z+n)}}$$

waarin z en n zonodig willekeurig complex.

Stel: $t = \sin^2\varphi \rightarrow (1-t) = \cos^2\varphi$. $t=0 \rightarrow \varphi = 0$. $t=1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$B(z,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-2}\varphi \cos^{2n-2}\varphi . \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1}\varphi \cos^{2n-1}\varphi \, d\varphi.$$

Dus integralen van deze vorm zijn gemakkelijk te berekenen met Γ-functies.

Integralen van Euler van de 1e soort.

$$\boxed{B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}$$ (p en q i.h.a. complex).

Mogelijke discontinuïteiten voor t = 0 en t = 1. In de omgeving van t = 0 is de integrand ongeveer:

$$t^{p-1} \quad ; \quad \int_0 t^{p-1}\,dt = \left.\frac{t^p}{p}\right]_0$$

Aan de ondergrens is dit dus alleen dan = 0 als Re(p)>0.

In de omgeving van t = 1 is de integrand ongeveer:

$$(1-t)^{q-1} \quad ; \quad \int^1 (1-t)^{q-1}\,dt = -\left.\frac{(1-t)^q}{q}\right]^1$$

D.i. aan de bovengrens alleen dan = 0 als Re(q)>0.

Dus:

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

heeft alleen betekenis voor: Re(p)>0

Re(q)>0.

$$\boxed{B(p,q) = B(q,p)}$$

want:

$$B(q,p) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt \quad = \text{(stel } t = 1-u)$$

$$= -\int_1^0 (1-u)^{q-1}u^{p-1}\,du = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du = B(p,q).$$

$$B(p,q+1) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q\,dt = \text{partiële integraal} =$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^1 (1-t)^q\,dt^p = \frac{1}{p}\Big[(1-t)^q t^p\Big]_0^1 + \frac{q}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}\,dt = \frac{q}{p}\,B(p+1,q)$$

Dus:

$$\boxed{B(p,q+1) = \frac{q}{p}\,B(p+1,q).} \qquad (1)$$

Ook:

$$B(p,q+1) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q dt = \underbrace{\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt}_{=B(p,q)} - \underbrace{\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1} dt}_{=B(p+1,q)}$$

Immers: $t^{p-1}(1-t)^q = t^{p-1}(1-t)^{q-1}(1-t) =$

$$= (t^{p-1} - t^p)(1-t)^{q-1} = t^{p-1}(1-t)^{q-1} - t^p(1-t)^{q-1}.$$

Dus:

$$\boxed{B(p,q+1) = B(p,q) - B(p+1,q)} \qquad (2)$$

Nu:

$$(1) \times 1 : \quad B(p,q+1) = \frac{q}{p} B(p+1,q)$$

$$(2) \times \frac{q}{p} : \quad \frac{q}{p} B(p,q+1) = -\frac{q}{p} B(p+1,q) + \frac{q}{p} B(p,q) \quad +$$

$$\left(\frac{q}{p}+1\right) B(p,q+1) = \frac{q}{p} B(p,q).$$

$$\Longrightarrow B(p,q+1) = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q+p} B(p,q) = \frac{q}{p+q} B(p,q).$$

Zodat:

$$\boxed{B(p,q+1) = \frac{q}{p+q} B(p,q)} \qquad (3)$$

(1), (2) en (3) hoeven niet onthouden te worden.

Toepassing.

Stel in B (p,q) is

$$t = \sin^2\varphi \qquad t=0 \rightarrow \varphi=0$$
$$1-t = \cos^2\varphi \qquad t=1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$
$$dt = 2 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi.$$

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-2}\varphi \cos^{2q-2}\varphi \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$\boxed{B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi \cos^{2q-1}\varphi \, d\varphi}$$

Zeer belangrijke stelling:

$$\boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

Voor $Re(p)>0$
$Re(q)>0$

Uit het hoofd weten !!

Bewijs: Voor Re(p)>0 is $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-u} u^{p-1} du = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} e^{-u} u^{p-1} du$ 1)

Evenzo is voor Re(q)>0 is $\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} e^{-v} v^{q-1} dv$ 2).

Stel $u = x^2$ dan x van 0 $\to$ R
$v = y^2$ dan y van 0 $\to$ R.

1) wordt: $\Gamma(p) = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2} x^{2p-1} dx.$ 3)

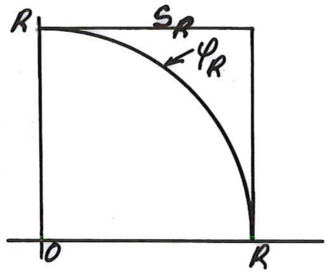
2) wordt: $\Gamma(q) = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-y^2} y^{2q-1} dy$ 4)

3) x 4) = $\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_0^R e^{-x^2} x^{2p-1} dx . \int_0^R e^{-y^2} y^{2q-1} dy \right\} =$

$= 4 \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx\, dy$ 5).

We integreren over een vierkant S_R. We willen op poolcoördinaten overgaan.

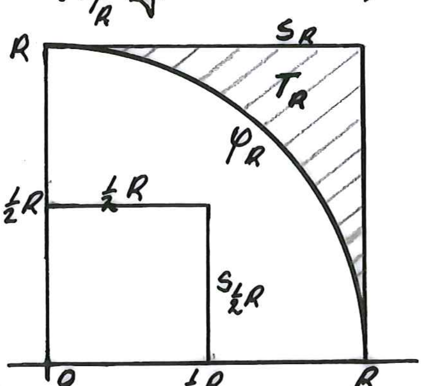
$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\}$ voor de cirkel φ_R.



We moeten proberen het integratie gebied van het vierkant op de 1/4 cirkel te doen overgaan. We bezien:

$$\left| \iint_{S_R \square} f(x,y)\,dx\,dy - \iint_{\varphi_R \square} f(x,y)\,dx\,dy \right| = \left| \iint_{T_R} f(x,y)\,dx\,dy \right| =$$

$$\leq \iint_{T_R} |f(x,y)|\,dx\,dy = \iint_{S_R \square} |f(x,y)|\,dx\,dy - \iint_{\varphi_R \square} |f(x,y)|\,dx\,dy \quad 6)$$



$$\iint_{\varphi_R \square} |f(x,y)|\,dx\,dy > \iint_{S_{\frac{1}{2}R} \square} |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

dus 6) is: $< \iint_{S_R} |f(x,y)|\,dx\,dy - \iint_{S_{\frac{1}{2}R}} |f(x,y)|\,dx\,dy.$

Nu $R \longrightarrow \infty$

$$\begin{cases} p = a + i b & a > 0 \\ q = c + i d & c > 0. \end{cases}$$

$$\left| f(x,y) \right| = \left| e^{-(x^2+y^2)} x^{2a-1} y^{2c-1} \right| = e^{-(x^2+y^2)} x^{2a-1} y^{2c-1}$$

Volgens 5) is:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} x^{2a-1} y^{2c-1} dx\, dy = \tfrac{1}{4} \Gamma(a) \times \Gamma(c).$$

zodat:

$$\lim_{R\to\infty} \left| \iint_{S_R} f(x,y)\, dx\, dy - \iint_{\varphi_R} f(x,y)\, dx\, dy \right| \leq \tfrac{1}{4}\Gamma(a)\Gamma(c) - \tfrac{1}{4}\Gamma(a)\Gamma(c) = 0.$$

dus:

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{S_R \square} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \iint_{\varphi_R \square} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx\, dy$$

M.a.w.

$\lim \iint_{S_R \square}$ is overgegaan in: $\lim \iint_{\varphi_R \square}$!!

Nu kunnen we dus schrijven:

$$\Gamma(p)\, \Gamma(q) = 4 \lim_{R\to\infty} \iint_{\varphi_R \square} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx\, dy \qquad 7)$$

en nu kunnen we poolcoördinaten invoeren.

$x = r \cos\varphi \quad 0 \leq r \leq R \qquad dx\, dy = r\, dr\, d\varphi.$

$y = r \sin\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

7) wordt:

$$4 \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \cdot r^{2p-1} \cdot r^{2q-1} \cdot \cos^{2p-1}\varphi \cdot \sin^{2q-1}\varphi \cdot r\, dr\, d\varphi$$

$$= 4 \underbrace{\left(\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr \right)}_{\text{stel } r^2 = w} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi \cdot \sin^{2q-1}\varphi\, d\varphi}_{\text{heeft niets met de lim. te maken}}$$

$= \frac{1}{2} B(q, p) = \frac{1}{2} B(p, q).$

$$= 2 B(p,q) \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} e^{-w} w^{p+q-\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw =$$

$$= B(p,q) \cdot \int_0^{\infty} e^{-w} w^{p+q-1} dw = B(p,q) \cdot \Gamma(p+q)$$

Dus: $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$ of: $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Nu was:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi \cdot \cos^{2q-1}\varphi \cdot d\varphi.$$

Toepassing van bovenstaande stelling levert:

$$\boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi \cdot \cos^{2q-1}\varphi \cdot d\varphi}$$

Belangrijke eigenschap ! Onthouden !

Voorbeeld.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx.$$

is hiervóór behandeld met contourintegratie. Stel nu $\frac{x}{1+x} = t$ dus $x = t + tx \rightarrow x(1-t) = t$.

$$x = \frac{t}{1-t} \qquad 1+x = 1+\frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t}$$

$$dx = \frac{dt}{(1-t)^2} \qquad \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow t = 0. \\ x = \infty \rightarrow t = 1. \end{array}$$

Dus:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{(1-t)^{a-1}} \cdot \frac{1-t}{1} \cdot \frac{dt}{(1-t)^2} =$$

$$= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a} dt = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{(1-a)-1} dt = B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

Mits:

$$\begin{array}{l} \underline{Re(a) > 0} \\ Re(1-a) > 0 \rightarrow \\ \quad 1 - Re(a) > 0 \rightarrow \underline{Re(a) < 1.} \end{array}$$

Dus voor $0 < Re(a) < 1$ is

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a).} \qquad \text{(I)}$$

Nu dezelfde integraal uitwerken met contourintegratie (verg. blz. 104), voor $0 < Re(a) < 1$. daar echter voor reële a!

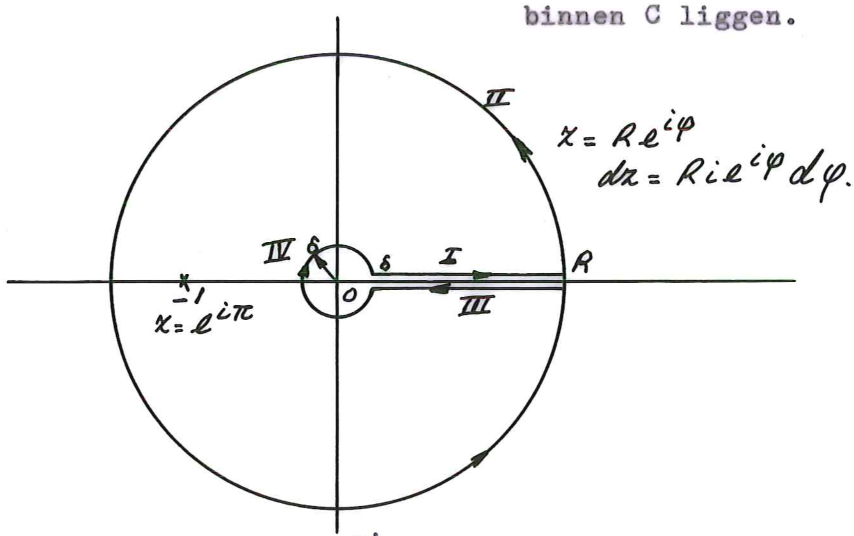
Stel $a = b + ic$, dus $0 < b < 1$. Bezie:

$$\int_C \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz.$$

over een geschikte contour.

Singuliere punten z = -1, singulier = pool van de 1e orde

z = 0, singulier = essentieel singulier. Deze mag niet binnen C liggen.



I. arg z = 0, d.w.z. $z = x\,e^{0i} = x$

II. arg z van 0 $\rightarrow$ 2π ; $z = Re^{i\varphi}$

III. arg z = 2π, d.w.z. $z = x\,e^{2\pi i}$

IV. arg z van $2\pi \rightarrow 0$; $z = \delta\,e^{i\varphi}$.

$$\int_{I} = \int_{\delta}^{R} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$$

$$\int_{II} = R^a i \int_0^{2\pi} \frac{e^{(a-1)i\varphi + i\varphi}}{1+Re^{i\varphi}}\,d\varphi = R^a i \int_0^{2\pi} \frac{e^{ai\varphi}}{Re^{i\varphi}+1}\,d\varphi.$$

$$\int_{III} = \int_R^{\delta} \frac{x^{a-1}e^{2\pi i(a-1)}e^{2\pi i}\,dx}{1+xe^{2\pi i}} = -e^{2\pi i a}\int_{\delta}^{R} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

$$\int_{IV} = -i\delta^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{ai\varphi}}{\delta e^{i\varphi}+1}\,d\varphi$$ (integraal volgorde van $2\pi \rightarrow 0$, vandaar min-teken).

Totaal:

$$(1-e^{2\pi i a})\int_{\delta}^{R} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + iR^a\int_0^{2\pi} \frac{e^{ai\varphi}}{Re^{i\varphi}+1}\,d\varphi - i\delta^a\int_0^{2\pi}\frac{e^{ai\varphi}}{1+\delta e^{i\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi i\left\{\text{residu van } z = e^{i\pi}\right\} = 2\pi i \lim_{z\to e^{i\pi}} (z-e^{i\pi})\frac{z^{a-1}}{1+z} = 2\pi i\, e^{i\pi(a-1)}$$

$$\left| iR^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{ai\varphi}}{Re^{i\varphi}+1}\,d\varphi \right| \leq R^b \int_0^{2\pi} \frac{e^{-c\varphi}}{R-1}\,d\varphi \quad (e^{ai\varphi} = e^{-c\varphi+bi\varphi})$$

$$|Re^{i\varphi}+1| \geq R-1.$$

$$= \frac{R^b}{R-1}\int_0^{2\pi} e^{-c\varphi}\,d\varphi = \frac{R^{b-1}}{1-\frac{1}{R}} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-c\varphi}\,d\varphi}_{\text{eindig}} \longrightarrow 0 \text{ voor } R\to\infty \text{ wegens } b<1$$

$$\left| i\delta^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{ai\varphi}\,d\varphi}{\delta e^{i\varphi}+1} \right| \leq \delta^b \int_0^{2\pi} \frac{e^{-c\varphi}}{1-\delta}\,d\varphi = \frac{\delta^b}{1-\delta} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-c\varphi}\,d\varphi}_{\text{eindig}}$$

dus $\longrightarrow 0$ voor $\delta \to 0$ wegens $b > 0$. Zodat:

$$\left(1-e^{2\pi i a}\right)\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = 2\pi i e^{i\pi(a-1)} = -2\pi i e^{i\pi a}$$

$$\left(e^{2\pi i a}-1\right)\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = +2\pi i e^{i\pi a} \quad \text{delen door } e^{i\pi a}$$

$$\frac{e^{\pi i a}-e^{-\pi i a}}{2i}\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \pi.$$

dus voor a is complex en $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$ is:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}} \qquad \text{(II)}$$

(I) en (II) samen levert dan dus:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad \text{(voor a complex).}$$

In andere, algemenere notatie:

$$\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}}$$ met $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$. (althans voorlopig).

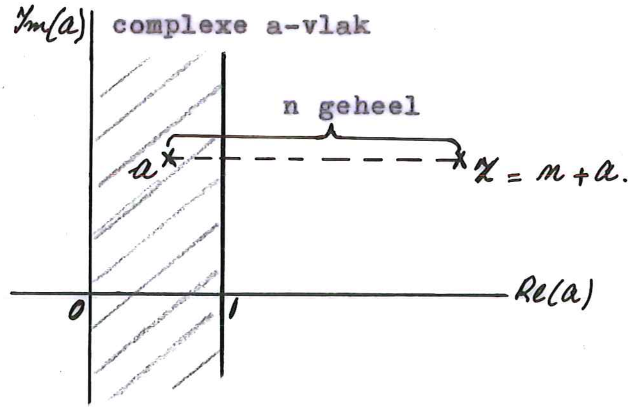
Belangrijke stelling ! Onthouden !

Voorwaarde $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \underbrace{B(a,1-a)}_{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

Slechts in het gearceerde gebied is deze uitkomst juist, althans dat is tot nu toe slechts bewezen. Maar de uitkomst is algemeen geldig, in het gehele complexe a-vlak. Dat moeten we nu bewijzen.



1e. stap van bewijs.

Neem z buiten gebied. Dan is z = n + a; n geheel en positief, a in gebied, dus $0 < Re(a) < 1$. (Voor z aan de andere zijde van de Im-as is z + n = a, z = a - n, n geheel, positief. Daarvoor is dezelfde redenering, met hetzelfde resultaat op te stellen).

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) \qquad ?$$

$$\Gamma(z) = \Gamma(a+n) = (a+n-1)\Gamma(a+n-1) = \ldots\ldots =$$

$$= (a+n-1)(a+n-2)(a+n-3)\ldots(a+1).a.\Gamma(a).$$

$$\Gamma(1-z) = \Gamma(1-a-n) = \frac{\Gamma(2-a-n)}{1-a-n} = \frac{\Gamma(3-a-n)}{(2-a-n)(1-a-n)} = \ldots =$$

$$= \frac{\Gamma\{(n+1)-a-n\}}{(n-a-n)(n-1-a-n)(n-2-a-n)\ldots(1-a-n)}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) \times \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-2)(a+n-1)}{\underbrace{(-a)(-a-1)(-a-2)\ldots(1-a-n)}_{\text{n factoren}}}$$

$$= (-1)^n\,\Gamma(a)\,\Gamma(1-a).$$

Dit geldt voor alle mogelijke z, dus alle mogelijke n en a. Voor a is $0 < Re(a) < 1$. Daar $0 < Re(a) < 1$ is dus:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = (-1)^n\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = (-1)^n\frac{\pi}{\sin \pi a} =$$

$$= (-1)^n\frac{\pi}{\sin \pi(z-n)} = \underline{\underline{\frac{\pi}{\sin \pi z}}} \qquad \text{want: } \sin \pi(z-n) = (-1)^n \sin \pi z.$$

Dus bewezen:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

voor alle z, mits $Re(z) \neq$ geheel getal (dan immers $Re(a) = 0$ of $= 1$; grenzen uitgesloten!). Of:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)\,\sin \pi z = \pi$$

2e stap van bewijs:

Reeds bekend is dat $\Gamma(z)$ overal analytisch is, behalve in $z = 0, -1, -2, \ldots$ (polen van de 1e orde), dus ook continu.

$$\left.\begin{array}{ll} \Gamma(z) & \text{continu, behalve in polen } z = 0, -1, -2, \ldots \\ \Gamma(1-z) & \text{continu, behalve in polen } z = +1, +2, +3 \ldots \\ \sin \pi z & \text{continu, (voor elke } z). \end{array}\right\}$$

Uit deze continuïteiten volgt dat $\Gamma(z).\Gamma(1-z)\sin \pi z = \pi$ overal geldt, dus ook voor Re(z) is geheel, behalve in de polen.

3e stap van bewijs:

Kijk naar de pool $z = n$ (n positief geheel).

$\Gamma(n) = (n-1)!$

$\Gamma(1-n)$ pool van de 1e orde.

$z' = n + \delta$

$\Gamma(n+\delta).\Gamma(1-n-\delta)\sin \pi(n+\delta) = \pi$

Vroeger is gevonden:

$$\Gamma(1-n-\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+1-n-\delta)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{-n-\delta} dt$$

dus:

$$\Gamma(n+\delta).\ \delta.\Gamma(1-n-\delta)\ \frac{\sin \pi(n+\delta)}{\delta} = \pi \qquad (1)$$

$$\delta.\Gamma(1-n-\delta) = \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{\delta}{k!(k+1-n-\delta)} + \underbrace{\delta \int_1^{\infty} e^{-t} t^{-n-\delta} dt}_{\rightarrow 0}$$

door de δ voor de integraal.

$$\lim_{\delta \to 0} \delta\, \Gamma(1-n-\delta) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}$$

voor $\delta \to 0$ wordt (1) naderend tot:

$$\Gamma(n).\frac{(-1)^n}{(n-1)!}(-1)^n \pi = (n-1)!\frac{(-1)^n}{(n-1)!}(-1)^n \pi = \pi$$

In het limiet geval geldt de gevonden uitdrukking dus ook in de polen.

$$\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin \pi z = \pi}$$ is universeel.

Met de recursie betrekkingen is dit de meest gebruikte formule in de theorie van de Γ functies.

Stelling.

$\Gamma(z)$ bezit geen nulpunten (wel polen). Stel n.l. dat $z = z_0$ een nulpunt van $\Gamma(z)$ is.

$\Gamma(z_0) = 0$

$$\underbrace{\Gamma(z_0)}_{=0}\ \underbrace{\Gamma(1-z_0)}_{?} = \frac{\pi}{\sin \pi z_0} \qquad \frac{\pi}{\sin \pi z_0} \neq 0$$

want $\sin \pi z$ heeft geen polen. Dan moet dus $\Gamma(z_0)\,\Gamma(1-z_0) \neq 0$ zijn, dat kan alleen in een limiet geval, als $\Gamma(1-z_0) = \infty$ wordt. D.w.z. $1-z_0$ pool van de Γ-functie. Polen van de Γ-functie $0, -1, -2, \ldots -m$ dus $1-z_0 = -m$ (m geheel positief). $z_0 = m+1$, maar dat is geen nulpunt want $\Gamma(m+1) = m!$
Dit is een tegenstrijdigheid, dus $\Gamma(z)$ heeft geen nulpunten.

We willen komen tot een productregel voor de nulpunten. Voor $\Gamma(z)$ heeft dit geen zin (geen nulpunten, wel polen). Echter voor $\frac{1}{\Gamma(z)}$ heeft dit dan wel zin (geen polen, wel nulpunten, n.l. in de polen van $\Gamma(z)$). Voor $1/\Gamma(z)$ nu een product ontwikkeling te zoeken.

Opm. 1:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

kan hieruit afgeleid worden. Stel $a = \frac{1}{2}$.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$$

dus: $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \pm\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\frac{1}{2}-1}dt > 0$$

dus + teken kiezen. Stel $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x^2}\frac{1}{x}\,2x\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

dus:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Opm. 2.

Verdubbelingsformule voor Γ-functies, dus $\Gamma(2z) = ?$

Bêta-functie:

$$B(z,z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \qquad (Re(z)>0)$$

Dus:

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt.$$

Substitutie (zeer bekend): Stel:

$$t = \sin^2\varphi$$

$$1-t = \cos^2\varphi$$

$$dt = 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

grenzen worden 0 en $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-2}\varphi . \cos^{2z-2}\varphi . \sin\varphi . \cos\varphi . d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1}\varphi . \cos^{2z-1}\varphi\, d\varphi .$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

dus integrand is:

$$\frac{\sin^{2z-1}2\varphi}{2^{2z-1}}$$

of:

$$= \frac{2}{2^{2z-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1}2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^{\pi} \sin^{2z-1}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}}_{\text{vervang } \theta \text{ door } \pi-\theta'}\right\} = \frac{1}{2^{2z-1}}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} = \frac{2}{2^{2z-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1}\theta\, d\theta$$

Nu omgekeerd: Stel: $\sin^2\theta = t$

$$\cos^2\theta = 1-t$$

$$2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dt$$

$$\int = \frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2z-2}\theta}{\cos\theta}\, 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt = B(z,\tfrac{1}{2}) . \frac{1}{2^{2z-1}} = \frac{\Gamma(z).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} . \frac{1}{2^{2z-1}} .$$

Dus:

$$\frac{\Gamma(z).\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \equiv \frac{1}{2^{2z-1}} . \frac{\Gamma(z).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} .$$

dus:

$$\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}).\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\,\Gamma(z).\,\Gamma(z+\tfrac{1}{2}).}$$

Heel belangrijke formule voor bijzondere functies; behoort niet tot de vergeet-mij-nietjes.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = +\sqrt{\pi} \quad !.$$

De productontwikkeling van $\frac{1}{\Gamma(z)}$ volgens de nulpunten (analoog aan de sin- en cos-ontwikkeling).

Uitgangspunt: $\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{n+1-1}dt = B(z, n+1) = \frac{\Gamma(z).\Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)}$ = n geheel pos. Re(z) > 0.

$$\underbrace{\frac{n!\,\Gamma(z)}{(z+n)(z+n-1)\dots z.\Gamma(z)}}_{n+1 \text{ factoren}} = \frac{n!}{(z+n)(z+n-1)\dots(z+1)} \cdot \frac{1}{z} =$$

$$= \frac{1}{\frac{z+n}{n}\cdot\frac{z+n-1}{n-1}\cdot\frac{z+n-2}{n-2}\dots\frac{z+1}{1}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z}{1})(1+\frac{z}{2})\dots(1+\frac{z}{n})}$$

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{n+1-1}dt = \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)(z+n)}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1+\frac{z}{1})(1+\frac{z}{2})\dots(1+\frac{z}{n})}$$

Stel $t = \frac{u}{n}$; $t = 0 \longrightarrow u = 0$

$t = 1 \longrightarrow u = n.$

Integraal wordt:

$$\frac{1}{n^z}\int_0^n u^{z-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n du = \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

of:

$$\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{z-1}du = \frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{z-1}du = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log(1-\frac{u}{n})} = \lim_{n\to\infty} e^{n\{-\frac{u}{n}-\frac{1}{2}\frac{u^2}{n^2}-\frac{1}{3}\frac{u^3}{n^3}\dots\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-u-\frac{1}{2}\frac{u^2}{n}-\frac{1}{3}\frac{u^3}{n^2}-\dots} = e^{-u}$$

Dan zal waarschijnlijk wel de lim. van de integraal in het linkerlid worden:

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du = \Gamma(z).$$

Dit is een vermoeden, maar geen bewijs; er is een dubbele limietovergang.

Vermoeden:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{z-1}du = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-u}u^{z-1}du$$

dus:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n u^{z-1}\left\{e^{-u}-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right\}du = 0$$

We zullen bewijzen:

$$0 \leq e^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq \frac{u^2}{n} e^{-u} \qquad \text{(A)}$$

Als we dit bewezen hebben zal het vermoeden juist zijn. Uitgangspunt: $1 + y \leq e^y \leq (1 - y)^{-1}$ voor $0 \leq y < 1$. Bewijs:

$$1 + y \leq 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \leq 1 + y + y^2 + y^3 + \dots$$

Stel:

$y = \frac{u}{n}$. u van 0 $\longrightarrow$ n, dus $\frac{u}{n}$ tussen 0 en 1.

$$(1)\dots\dots \qquad 1 + \frac{u}{n} \leq e^{\frac{u}{n}} \leq \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{-1}$$

omkeren:

$$\frac{1}{1 + \frac{u}{n}} \geq e^{-\frac{u}{n}} \geq 1 - \frac{u}{n}.$$

in de n^e macht:

$$\left\{\frac{1}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)}\right\}^n = \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n} \geq e^{-u} \geq \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{+n}$$

dus:

$$\boxed{e^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \geq 0} \qquad \text{(a)}$$

$$e^{-u}\left\{1 - e^u\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n\right\} \geq 0.$$

Uit (1) volgt:

$$e^u \geq \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n.$$

$$e^u\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^n.$$

dus:

$$1 - e^u\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq 1 - \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^n$$

dus:

$$e^{-u}\left\{1 - e^u\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n\right\} \leq e^{-u}\left\{1 - \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^n\right\} \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{1 - a^n}{1 - a} = \underbrace{1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}}_{\text{n termen (merkwaardig quotient).}} \leq n \quad \text{voor} \quad 0 \leq a \leq 1.$$

dus:

$$\boxed{1 - a^n \leq n(1 - a)} \quad \text{voor} \quad 0 \leq a \leq 1$$

Één van de ongelijkheden van Bernoulli. Zeer belangrijk.

a = $1-\frac{u^2}{n^2}$

voldoet aan de eis $0\leq a\leq 1$. Dus:

$$1-\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)^n\leq n\left\{1-1+\frac{u^2}{n^2}\right\}=\frac{u^2}{n}.$$

Zodat (b) wordt:

$$e^{-u}\left\{1-e^u\left(1-\right.\right. \qquad (c)$$

Dan is met (a) en (c) (A) aangetoond. Dus:

$$\left|\int_0^n u^{x-1}\left\{e^{-u}-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right\}du\right|\leq\int_0^n\left|u^{x-1}\right|\left|e^{-u}-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right|du.$$

$$=\int_0^n u^{x-1}\frac{u^2}{n}e^{-u}du=\frac{1}{n}\int_0^n e^{-u}u^{x+1}dx.$$

$$<\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-u}u^{x+1}dx=\frac{1}{n}\Gamma(x+2)$$

zodat:

$$\left|\int_0^n u^{x-1}\left\{e^{-u}-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right\}du\right|<\frac{\Gamma(x+2)}{n}\qquad\text{voor elke gehele n.}$$

Dus: $\lim_{n\to\infty}\left|\ldots\right| = 0$, dus $\int_0^n\ldots = 0$,

zodat we het vermoeden nu inderdaad bewezen hebben.

<u>Gevonden</u>:

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du=\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$

Voorlopig nog slechts geldig voor Re(z)>0 afkomstig van Gauss. Het zal echter voor elke complexe z blijken te gelden, behalve voor z = 0, -1, -2, . . . , -n.

Neem nu aan Re(z)$\leq$ 0. Voeg er een positief geheel getal k aan toe, zodat Re(z + k)> 0.

$$\Gamma(z+k)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z+k}}{(z+k)(z+k+1)(z+k+2)\ldots(z+k+n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z+k}}{(z+k)(z+k+1)\ldots(z+n)(z+n+1)\ldots(z+k+n)}$$

Steeds geldt:

$$\Gamma(z+k)=\underbrace{(z+k-1)(z+k-2)\ldots z}.\Gamma(z)$$

invullen in linkerlid en delen door factor tussen accolade.

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{\underbrace{z(z+1)\ldots(z+k-1)}\cdot\underbrace{(z+k)(z+k+1)\ldots(z+n)}}\cdot\frac{n^k}{\underbrace{(z+n+1)\ldots(z+k+n)}}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\underbrace{(z+n+1)\ldots(z+k+n)}},$$

in teller en noemer k-factoren.

$$= \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{z+1}{n}\right)\left(1+\frac{z+2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{z+k}{n}\right)}}$$

k is eindig, $\lim = \dfrac{1}{1.1.1\ldots 1} = 1.$

zodat:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$

voor elke z, behalve als er ∞ optreedt. (Dat gebeurt links en rechts gelijk in $z = 0, -1, -2, \ldots, -n$).

Omkeren:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!\,n^z}$$

analytische functie; geen singuliere punten meer; voor elke z geldig. Van Gauss.

Enkele schoonheidsfoutjes nog corrigeren: o.a.:

$$\frac{1}{z\,\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!\,n^z}.$$

nu in teller en noemer n factoren, zodat:

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \lim_{n\to\infty} n^{-z}\left\{\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\}}$$