Watercirculatie

Dichtheidsverschillen in de Waddenzee

Hugo Platell

Technische Universiteit Delft

TU Delft

Watercirculatie

Dichtheidsverschillen in de Waddenzee

door

Hugo Platell

ter verkrijging van de graad van Bachelor of Science
van de opleidingen Civiele Techniek en Technische Wiskunde
aan de Technische Universiteit Delft,
in het openbaar te verdedigen op dinsdag 28 juni 2016 om 14:00 uur.

Studentnummer:	4292715	
Project duur:	18 april 2016 – 28 juni 2016	
Beoordelingscommissie:	Dr. H. M. Schuttelaars,	TU Delft (EWI), begeleider
	Dr. ir. B. C. van Prooijen,	TU Delft (CiTG), begeleider
	Prof. dr. ir. C. Vuik,	TU Delft (EWI)
	Dr. ir. R. J. Labeur,	TU Delft (CiTG)
	Dr. B. van den Dries,	TU Delft (EWI)

TU Delft

Voorwoord

Dit verslag is geschreven in het kader van een bacheloreindwerk voor de opleidingen Technische Wiskunde en Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. Naar aanleiding van verschillende vakken in de bachelor is mijn interesse gewekt binnen differentiaalvergelijkingen en vloeistofmechanica. Met dit bacheloreindproject hoop ik te laten zien hoe deze twee elkaar aanvullen.

Voor lezers met een achtergrond in de civiele techniek moeten de toepassingen en in de grote lijnen het gevolgde wiskundige proces begrepen kunnen worden. Voor lezers met een achtergrond in de wiskunde zou het gehele verslag goed te volgen moeten zijn.

Het rapport kan gebruikt worden om een eerste inzicht te krijgen in het belang van watercirculatie gedreven door dichtheidsverschillen in de Waddenzee. Daarnaast zouden de gevonden vergelijkingen met bijbehorende oplossingen kunnen worden gebruikt in andere situaties, waarbij rekening dient te worden gehouden met de gebruikte aannames.

Gedurende het project ben ik begeleid door dr. H. M. Schuttelaars vanuit Technische Wiskunde en dr. ir. B. C. van Prooijen vanuit Civiele Techniek, die ik hierbij daarvoor graag wil bedanken.

Hugo Platell
Den Hoorn, Juni 2016

Inhoudsopgave

Voorwoord **iii**

Samenvatting **vii**

Symbolenlijst **ix**

1 Inleiding **1**

2 Modelvorming **3**
2.1 Variabelen . . . 3
2.2 Met getij . . . 4
2.2.1 Continuïteitsvergelijking . . . 4
2.2.2 Impulsbalans . . . 5
2.2.3 Randvoorwaarden . . . 6
2.3 Zonder getij . . . 6
2.3.1 Continuïteitsvergelijking . . . 6
2.3.2 Impulsbalans . . . 7
2.3.3 Randvoorwaarden . . . 7
2.4 Niet-uniforme viscositeit . . . 7

3 Parametrisatie **9**
3.1 Verloop van het bekken . . . 9
3.2 Getij . . . 10
3.3 Temperatuur . . . 11
3.3.1 Resultaten . . . 12
3.4 Saliniteit . . . 15
3.5 Dichtheid . . . 18
3.5.1 Resultaten . . . 19

4 Oplossingen **21**
4.1 Zonder getij . . . 21
4.2 Met getij . . . 22
4.2.1 Leidende orde probleem . . . 24
4.2.2 Eerste orde probleem . . . 25
4.3 Niet-uniforme viscositeit . . . 26

5 Resultaten **27**
5.1 Zonder getij . . . 27
5.2 Met getij . . . 28
5.2.1 Uniforme geometrie . . . 28
5.2.2 Niet-uniforme geometrie . . . 31
5.3 Niet-uniforme viscositeit . . . 33

6 Conclusie **37**

7 Discussie **39**

Bibliografie **41**

Lijst van figuren **43**

A Berekeningen **45**
A.1 Zonder getij . . . 45
A.2 Met getij . . . 47
A.2.1 Leidende orde probleem . . . 50

A.2.2 Eerste orde probleem 54
A.2.3 Niet-uniforme viscositeit 58

B Parameter gevoeligheid 61
B.1 Zonder getij 61
B.2 Met getij 62
B.2.1 Uniforme geometrie 62
B.2.2 Niet-uniforme geometrie 63
B.3 Niet-uniforme viscositeit 64

Samenvatting

In dit verslag zijn de resultaten van het onderzoek beschreven dat is uitgevoerd naar de gravitatie circulatie in de Waddenzee. Daarbij is de vraag of dit een rol kan spelen bij sedimenttransport. De gravitatie circulatie is een stroming die bovenin de waterkolom een andere stromingsrichting kent dan onderin en ontstaat doordat het water niet een uniforme dichtheid kent in het bekken.

Daarvoor is eerst bekeken hoe de dichtheid in het Vlie-bekken varieert. Deze hangt vooral af van de watertemperatuur en de saliniteit (zoutgehalte). Om de verschillen te bepalen zijn beschikbare meetgegevens over temperatuur en saliniteit gebruikt. Bij deze tijdreeksen is een verband gezocht hoe deze twee factoren van tijd en plaats afhangen. Deze resultaten zijn vervolgens gebruikt om een profiel op te kunnen stellen van de dichtheid afhankelijk van plaats en tijd. Het blijkt dat de dichtheid varieert tussen de 1012 $[kg/m^3]$ bij Harlingen en 1022 $[kg/m^3]$ aan de kant van de Noordzee.

Aan de hand van de Navier-Stokes vergelijkingen is vervolgens een model opgesteld, waarmee de waterstroom kan worden gemodelleerd. Hierin is de gravitatie circulatie meegenomen, maar ook de stromingen door toedoen van het M_2- en M_4-getij. Deze zijn vervolgens allemaal afzonderlijk opgelost, waarna een superpositie van de drie problemen is toegepast om het totale stroombeeld te kunnen vinden.

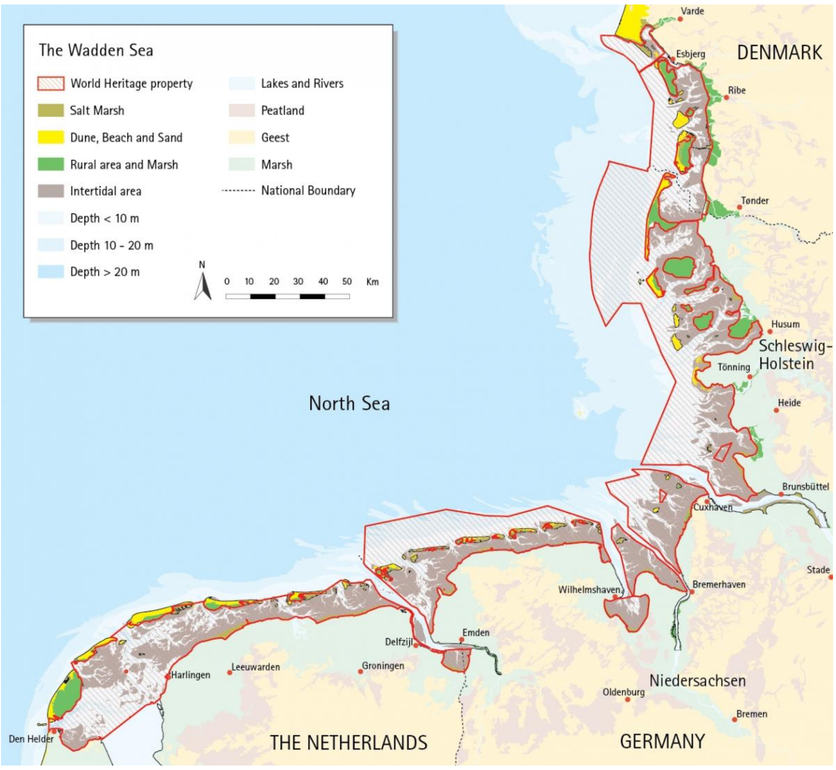
Als de eerdere gevonden dichtheidsverschillen worden gecombineerd met de oplossingen voor de stroomsnelheden, kunnen deze waarden worden berekend. Het blijkt dat de gravitatie circulatie een kleine invloed (circa 1%) heeft op het totale stroombeeld en een stroomsnelheid van enkele centimeters per seconde kent. Maar omdat de stroom niet veel varieert in de tijd en over de waterkolom andere stromingsrichtingen kent, kan deze stroming een belangrijke rol spelen als het gaat om sedimenttransport.

Symbolenlijst

Symbool	Eenheid	Beschrijving
A_{M_2}	m	Amplitude M_2-getij
A_{M_4}	m	Amplitude M_4-getij
A_v	m^2/s	viscositeit constante voor de verticale menging
b	m	breedte van de geul
η	m	waterniveau ten opzichte van referentiepeil
g	m/s^2	gravitatie constante ($= 9,81$)
h	m	diepte van het bassin
h_0	m	karakteristieke diepte van het bassin
L	m	lengte van het bassin
ω	rad/s	hoekfrequentie van M_2 getij ($= 1,41 \cdot 10^{-4}$)
ρ	kg/m^3	dichtheid van water
ρ_0	kg/m^3	referentiewaarde voor de dichtheid
ρ'	kg/m^3	afwijking van de dichtheid ten opzichte van de referentiewaarde (ρ_0)
S	psu	saliniteit (zoutgehalte) van water
T	$^\circ C$	watertemperatuur
t	t	tijd
$\mathbf{u}$	$m/s \times m/s \times m/s$	snelheidsvector $(u, v, w)^T$
u	m/s	stroomsnelheid in de x-richting
v	m/s	stroomsnelheid in de y-richting
w	m/s	stroomsnelheid in de z-richting
Q	m^3/s	debiet behorende bij de afvoer door het bekken
x	m	plaatscoördinaat in de stromingsrichting
y	m	plaatscoördinaat in het horizontale vlak haaks op de stromingsrichting
z	m	plaatscoördinaat in de hoogte

1
Inleiding

De Waddenzee is één van de natuurgebieden die op de UNESCO Werelderfgoedlijst staat. Dit gebied strekt zich uit van Nederland bij Texel tot aan Denemarken (Fanø) en kenmerkt zich doordat de bodem zeer dicht onder of zelfs net boven de waterspiegel ligt. Door invloed van het getij, vallen de ondiepe gebieden hier dagelijks twee keer droog. Op deze intergetijdengebied kunnen dieren rusten, maar ook eten vinden. Daarnaast wordt de Waddenzee veel bezocht door toeristen en is het regelmatig mogelijk om van het vaste land naar de eilanden Ameland en Schiermonnikoog te wandelen (wadlopen).



Figuur 1.1: Overzicht van de Waddenzee [5]

Rond de Waddenzee zijn er meerdere morfologische vraagstukken. Zo is er de vraag of onder invloed van zeespiegelstijging in de komende decennia de Waddenzee niet meer droog zal vallen. Als de stijging van de waterstand namelijk groot genoeg is en het bodemniveau gelijk blijft, bestaat de kans dat de intergetijdengebieden niet meer droogvallen. Dit zou ook kunnen gebeuren door een bodemdaling, veroorzaakt door zoutwinning rond onder andere Harlingen en de gaswinning in Groningen [6]. Daarnaast is het belangrijk de water bewegingen in kaart te brengen om de menselijke invloed zoals vervuiling en zandsuppleties te kunnen bepalen. Het zand wat wordt aangebracht om de kust te versterken, kan zich gaan verplaatsen en als dit dan in de geul afzinkt zou dit een probleem kunnen vormen voor schepen met een grote diepgang. Immers is de geul ondieper geworden door het extra zand. Om deze vragen te kunnen beantwoorden moet worden gekeken hoe sediment zich door de Waddenzee beweegt en hoeveel er naar binnen komt door de verschillende zeegaten tussen de eilanden.

Om de beweging van sediment te kunnen modelleren moet in eerste instantie bekeken worden hoe de waterstromingen zich gedragen. Onder invloed van het getij ontstaat er elke 12 uur 25 minuten een grote stroom in en uit het bekken. Dit zal betekenen dat deze stroming bijna geen netto sedimenttransport te weeg brengt. Daarnaast kennen sommige geulen in de Waddenzee, zoals het Marsdiep tussen Den Helder en Texel, een grote afvoer functie. Door deze geul moet namelijk al het water stromen dat door de monding van de IJssel in het IJsselmeer stroomt. Dit zou zorgen voor een export van sediment. Echter beschrijven deze twee stromingen niet het gehele stroombeeld. Doordat er een verschil in zoutgehalte en watertemperatuur is tussen de land- een zeezijde van de bassins, is er een verschil in dichtheid waarneembaar in het bekken. Deze dichtheidsverschillen zorgen ervoor dat er een gravitatie circulatie ontstaat die geen netto waterverplaatsing teweeg brengt, maar wel tegengestelde stroomrichtingen in het diepteprofiel. Omdat sediment niet uniform over de waterkolom is verdeeld, kan dit leiden tot een netto sedimenttransport.

In dit onderzoek zal gekeken worden hoe belangrijk de gravitatie circulatie is ten opzichte van stromingen veroorzaakt door het M_2-getij (tweemaal daags getij), M_4-getij (viermaal daags) en rivierafvoeren. Daarmee kan bekeken worden of dit een belangrijke factor kan spelen in het transport van sediment of dat deze verwaarloosd mag worden.

Om deze gravitatie circulatie te kunnen berekenen, is een model opgesteld waarin de stroomsnelheid afhankelijk is van de diepte. Hiervoor zal gebruik gemaakt worden van breedte geïntegreerde vergelijkingen. Deze zullen in verschillende fases worden afgeleid vanuit algemeen geldende vergelijkingen tot een (mathematisch) model in hoofdstuk 2. Daarna zullen in hoofdstuk 3 afhankelijk van metingen verschillende parameters worden bepaald om het Vlie-bekken tussen Vlieland, Terschelling en Harlingen te kunnen modelleren. Deze schattingen zullen vervolgens (in hoofdstuk 4) met de eerder gevonden modelvergelijkingen worden gecombineerd om zo tot oplossingen te komen voor het probleem. Deze oplossingen zullen zoveel mogelijk analytisch worden bepaald. Als dit niet meer lukt, zal een numerieke aanpak gevolgd worden. Tot slot zullen de volledige parametrisaties uit hoofdstuk 3 worden gecombineerd met de oplossingen van hoofdstuk 4 om zo de stroomsnelheden te kunnen berekenen. Als afsluiting zullen de resultaten worden beschouwd (hoofdstuk 5) en daaraan conclusies worden verbonden (hoofdstuk 6).

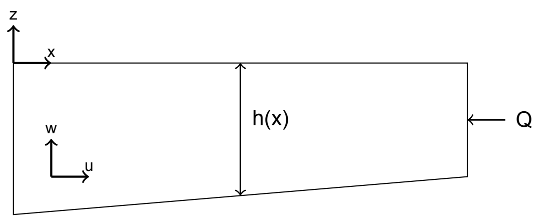
2

Modelvorming

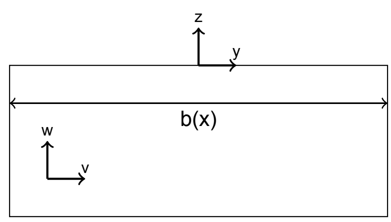
Voor de stroomgeulen van de Waddenzee moeten uitdrukkingen worden gevonden voor de stroming afhankelijk van onder andere de dichtheidsgradiënten en het afvoerdebiet. Allereerst zullen de variabelen worden geïntroduceerd waarmee het model kan worden opgesteld. Vervolgens zal eerst een model worden beschreven waarin het getij wordt meegenomen. De bijbehorende oplossingen kunnen gebruikt worden om de gravitatie circulatie te vergelijken met het getij. Daarna zal het model worden versimpeld door het getij te middelen. Hierdoor is de bijbehorende oplossing niet geldig op een korte tijdschaal. Deze stap zorgt voor een eerste relatief eenvoudige schatting van de grootte van de gravitatie circulatie. Tot slot zal een model worden behandeld waarin één van de parameters varieert in het bekken.

2.1. Variabelen

Als eerst zal gekeken worden naar de definitie van de geometrie.

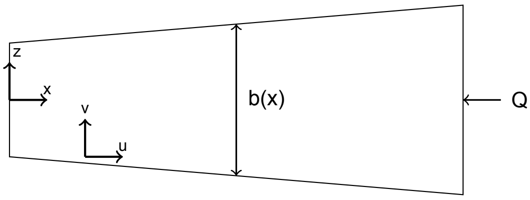


Figuur 2.1: Langsdoorsnede van de parametrisatie van het bekken



Figuur 2.2: Dwarsprofiel behorende bij de parametrisatie van het bekken

Gekozen wordt voor een xyz-assenstel, waarbij x in de richting van de hoofdstroming is, y de coördinaat voor de plaatsaanduiding in het dwarsprofiel van het kanaal en z is de hoogte coördinaat ten opzichte van het referentie niveau. In de figuren 2.1, 2.2 en 2.3 zijn verschillende doorsnedes behorende bij deze parametrisatie weergegeven. Als referentieniveau ($z = 0$) zal het gemiddelde zeeniveau worden aangehouden. De breedte van de waterloop zal worden aangeduid met b die alleen afhankelijk wordt verondersteld van plaats (x) en met h de hoogte van de waterkolom. Dit betekent dat de bodem verloopt volgens $z = -h(x)$ en dat voor het dwarsprofiel een rechthoekige vorm wordt



Figuur 2.3: Bovenaanzicht van de parametrisatie van het bekken

aangenomen. Dit is een ruwe benadering, maar door b en h zo te kiezen dat de het totale oppervlak gelijk blijft, kan de afwijking worden beperkt. Tot slot wordt de variatie in de waterstand (het vrije oppervlak) aangegeven met η.

Vervolgens wordt een snelheidsprofiel $\mathbf{u}$ gedefinieërd door $(u, v, w)^T$, waarbij u de snelheid in de x-richting is, v de snelheid in de y-richting en w de snelheid in de z-richting. De (in)stroom van water (debiet) in het bekken vanuit een rivier wordt aangegeven met Q.

Tot slot moeten er nog enkele andere variabelen worden geïntroduceerd. De saliniteit wordt weergegeven met S, T voor de watertemperatuur en ρ voor de dichtheid van het water. Voor de dichtheid zal worden aangenomen dat het water goed gemengd is en dat ρ constant is in de waterkolom. Met A_v wordt de viscositeitsconstante voor verticale menging bedoeld die een relatie legt tussen de schuifweerstand en de versnelling van een waterdeeltje. Omdat in de modellen geen wrijvingstermen ten gevolge van bodemschuifspanning zal worden meegenomen, betekent dat dit zal worden gecompenseerd door een grotere waarde voor A_v te kiezen.

2.2. Met getij

Het model zal worden afgeleid uit de Navier-Stokes vergelijkingen inclusief de continuïteitsvergelijking. In deze afleiding zal rekening worden gehouden met het getij. Daarnaast zullen bij dit probleem ook randvoorwaarden worden opgesteld.

2.2.1. Continuïteitsvergelijking

Deze vergelijking wordt gegeven door [16]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{2.1}$$

Als deze uitgeschreven wordt, volgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{2.2}$$

Verondersteld wordt dat de dichtheid niet sterk verandert in de tijd en plaats, dat dit mag zal blijken uit de waarden die in paragraaf 3.5 worden gevonden. De dichtheid is nu te schrijven als: $\rho = \rho_0 + \rho'$, met ρ_0 een constante in ruimte en tijd en ρ' de variatie. Aangenomen wordt dat geldt: $|\rho'| \ll \rho_0$. Dit geeft:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&\quad + u \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{\partial \rho'}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w \frac{\partial \rho'}{\partial z} \\
&\approx \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w \frac{\partial \rho'}{\partial z} \\
&= \frac{d \rho'}{dt} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

In de laatste stap is gebruik gemaakt van de totale afgeleide ($\frac{d}{dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$). De variaties in de dichtheid zijn kleiner dan de veranderingen van de snelheden wat betekent dat de eerste term veel kleiner is dan de tweede set en kan worden verwaarloosd. Dit geeft:

$$\begin{aligned} \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nu wordt de continuïteitsvergelijking geïntegreerd over de breedte met randvoorwaarden: $v|_{y=0} = 0$ en $v|_{y=b} = u\frac{\partial b}{\partial x}$ en wordt aangenomen dat u en w niet variëren in de y-richting:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \int_0^b \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} dy = 0, \\ \Rightarrow b\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial z} + [v]_0^b = 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2.2. Impulsbalans

De Navier-Stokes vergelijking voor onsamendrukbare media wordt gegeven door [16]:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\rho\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}. \tag{2.6}$$

Hierin is ν de kinematische viscositeit van water en $\mathbf{f}$ de externe kracht op het water. Omdat geldt $\mathbf{f} = [0, 0, -\rho g]^T$ en de linkerzijde anders te schrijven is, volgt voor de x-component van de vergelijking:

$$\rho\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{2.7}$$

Van deze vergelijking kan de Reynolds-gemiddelde Navier-Stokes vergelijking worden afgeleid [18]:

$$\rho\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right). \tag{2.8}$$

Vervolgens wordt de horizontale viscositeit verwaarloosd en ondanks dat de verticale viscositeit (A_v) afhankelijk is van z wordt deze uniform over de diepte aangenomen. Na middeling over de breedte wordt gevonden:

$$\rho\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho A_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{2.9}$$

Voor het berekenen van de drukgradiënt, wordt eerst de z-component van de Navier-Stokes vergelijking uitgewerkt. Er geldt:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\nabla^2 w. \tag{2.10}$$

Schalingsargumenten [2] laten zien dat de termen $\frac{dw}{dt}$ en $\nu\nabla^2 w$ veel kleiner zijn dan de andere twee termen, waardoor de hydrostatische balans volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g, \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = g\rho \approx g\rho_0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Uit (2.11) volgt dat:

$$\begin{aligned}
p &= -g\rho z + C,\\
p(\eta) &= -g\rho\eta + C = p_{atm},\\
\Rightarrow C &= p_{atm} + g\rho\eta,\\
\Rightarrow p &= g\rho(\eta - z) + p_{atm},\\
\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} &= g\frac{\partial \rho}{\partial x}(\eta - z) + g\rho\frac{\partial \eta}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Vergelijking 2.9 en 2.12 geven nu samen de complete breedte-gemiddelde impulsbalans in de x-richting:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}(\eta - z) - g\frac{\partial \eta}{\partial x} + A_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{2.13}$$

2.2.3. Randvoorwaarden

Om dit probleem te kunnen oplossen, worden voor u de volgende randvoorwaarden opgesteld: $u|_{z=-h} = 0$ (geen stroming over de bodem). De tweede voorwaarden is $\rho_0 A_v \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, wat betekent dat er geen kracht (bijvoorbeeld door toedoen van wind) op het vrije oppervlak werkt. Omdat $\rho_0 \neq 0$ en $A_v \neq 0$ volgt nu een versimpelde versie: $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$. Daarnaast horen er nog twee randvoorwaarden bij de verticale stroomsnelheid w. Op de bodem moet gelden, omdat één deeltje niet door de bodem heen kan: $w(-h) = -u\frac{\partial h}{\partial x}$, maar omdat hier geldt $u = 0$, moet gelden: $w(-h) = 0$. Op het oppervlak wordt op een vergelijkbare manier een conditie gevonden: $w(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}$. Daarnaast zijn er nog twee condities voor het vrije oppervlak. Aan de zeezijde wordt deze gegeven door het M_2 en M_4-getij. $\eta(0,t) = A_{M_2}\cos(\omega t) + A_{M_4}\cos(2\omega t - \phi)$, waarin A_{M_2} en A_{M_4} de respectievelijke amplitudes zijn en $\omega = 1,41 \cdot 10^{-4}\ rad/s$ de hoekfrequentie van het M_2 getij. Aan de landzijde wordt de voorwaarde gegeven door het debiet van de rivierafvoer: $Q = \int_{-H(L)}^{\eta(L)} b(L)u(L,z)dz$.

Om dit probleem te kunnen oplossen zijn geen beginvoorwaarden nodig. Voor de tijdsafhankelijke oplossing is men alleen geïnteresseerd in de particuliere oplossing en niet in de homogene oplossing, omdat er vanuit gegaan wordt dat de homogene (beginvoorwaarde afhankelijke) oplossing na een termijn uitdooft en dat het systeem zich dan gedraagt naar de externe (periodieke) voorwaarden. Deze uiten zich alleen in de particuliere oplossing.

Samenvattend zijn de randvoorwaarden:

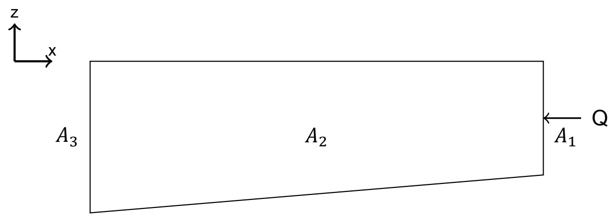
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z}(\eta) &= 0, & u(-h) &= 0,\\
w(\eta) &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}, & w(-h) &= 0,\\
Q &= \int_{-h(L)}^{\eta(L)} b(L)u(L,z)dz, & \eta(0,t) &= A_{M_2}\cos(\omega t) + A_{M_4}\cos(2\omega t - \phi).
\end{aligned}$$

2.3. Zonder getij

Vervolgens wordt opzoek gegaan naar een model waarbij het getij wordt gemiddeld. De oplossing die hierbij hoort, kan dan gebruikt worden om een eerste indruk te krijgen van de gravitatie circulatie. In de afleiding zal gebruik worden gemaakt van de afleiding van het model met getij.

2.3.1. Continuïteitsvergelijking

Met vergelijking 2.4 uit het model met getij wordt nu verder gerekend. Deze vergelijking wordt geïntegreerd over een volume V met zijden A_1 tot en met A_3, waarna de integraalstelling van Gauss kan worden toegepast. A_2 is hierbij het oppervlak wat om het middelste gedeelte ligt, dit betekent dat A_2 op te delen zou zijn in vier vlakken.



Figuur 2.4: Zijaanzicht van het controlevolume V

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{u}dV &= \iint_A \mathbf{u}\cdot\hat{n}dA\\ &= \iint_{A_1}\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA + \iint_{A_2}\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA + \iint_{A_3}\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Er van uitgaande dat er geen zij-instroom (door A_2) is, het stromingsprofiel over de breedte uniform is en $\eta \approx 0$, omdat naar een getijgemiddelde oplossing wordt gezocht, kan dit vereenvoudigd worden tot:

$$\begin{aligned}Q + \iint_{A_3}\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA &= 0,\\ \Rightarrow Q &= -\iint_{A_3} udA\\ &= -\int_{-h}^{\eta}\int_0^b udydz\\ &= -\int_{-h}^{\eta} ubdz\\ &\approx -\int_{-h}^{0} ubdz.\end{aligned} \tag{2.15}$$

2.3.2. Impulsbalans

Vervolgens wordt gezocht naar een getijgemiddelde oplossing. Nu geldt dat de snelheid u niet veel varieert in de tijd en dus $\frac{du}{dt} \approx 0$. Omdat verder geldt voor een breedte gemiddelde oplossing: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}$ volgt nu met vergelijking 2.13 de impulsbalans in de x-richting voor het getijgemiddelde model:

$$-g\rho_0\frac{\partial\eta}{\partial x} + gz\frac{\partial\rho'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 A_v\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0. \tag{2.16}$$

2.3.3. Randvoorwaarden

Om dit probleem op te lossen worden dezelfde randvoorwaarden voor de horizontale stroomsnelheid als in paragraaf 2.2.3 gebruikt: $u|_{z=-h} = 0$ en $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$.

2.4. Niet-uniforme viscositeit

De viscositeit van het water is niet uniform in het bekken. Deze is afhankelijk van de hoogte van de waterkolom en zal vergelijkbaar met Chernetsky et.al. [4] als volgt geparametriseerd worden:

$$A_v = A_{v0}\frac{h(x)}{h_0}. \tag{2.17}$$

Hierin is h_0 een karakteristieke waterdiepte voor het bekken, bijvoorbeeld het gemiddelde.

3

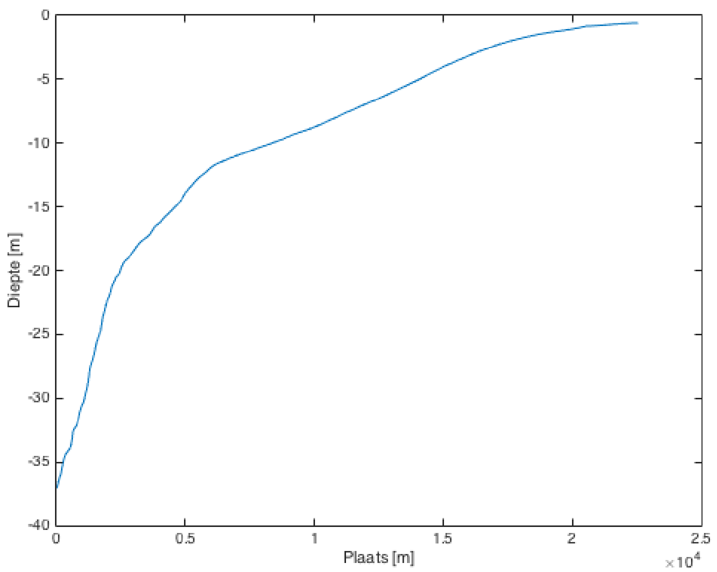
Parametrisatie

In dit hoofdstuk zullen uitdrukkingen en getalswaarden worden gevonden om het Vlie-bekken te representeren. Deze waarden kunnen vervolgens worden gebruikt in hoofdstuk 4 om de oplossingen te bepalen en in hoofdstuk 5 om de getalswaarden voor de stromingen te berekenen.

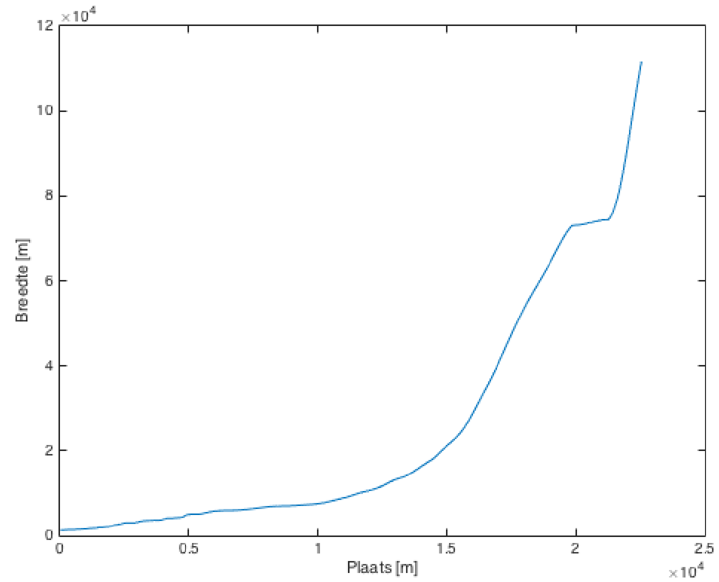
3.1. Verloop van het bekken

In de modelvorming is aangenomen dat de bekkens in de Waddenzee te beschrijven zijn als een geul met een rechthoekige doorsnede. Deze parametrisatie is al eerder uitgevoerd door Van Prooijen en Wang [13] voor het Vlie-bekken. De afmetingen zijn hierbij zo gekozen, dat ze dichtbij de gemeten doorsneden liggen.

Omdat in het gebruikte model geen rekening wordt gehouden met droogval, zal het laatste deel van het bekken niet worden doorgerekend. Hier zou anders de diepte namelijk een negatieve waarde krijgen. Voor het Vlie-bekken is het breedte en diepte verloop nu gegeven zoals in figuur 3.1 en 3.2. Duidelijk is te zien dat de breedte toeneemt en de diepte afneemt in landwaartse richting. Dit komt overeen met de verwachting. De monding is relatief smal en diep en bij Harlingen is het bekken een stuk minder diep.



Figuur 3.1: Diepte verloop van het Vlie-bekken



Figuur 3.2: Breedte verloop van het Vlie-bekken

Meetpunt	Locatie (km)	Getij	Amplitude (m)	Fase (rad)
Stortemelk	0	M_2	$0,8208$	$4,568$
Stortemelk	0	M_4	$0,0613$	$0,3853$
Vlieland haven	$4,9$	M_2	$0,8484$	$4,744$
West-Terschelling	$16,3$	M_2	$0,8367$	$4,965$
Harlingen	$23,5$	M_2	$0,8842$	$5,278$

Tabel 3.1: Gevonden amplitudes en fases

In de volgende paragrafen worden het getij, de watertemperatuur en de saliniteit in de langsrichting bekeken. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van meetpunten in het bekken. Deze meetpunten worden verondersteld op een zelfde afstand (rekening houdend met het verloop van de geul) van de monding te liggen in het model. Dit betekent dat als een meetpunt in de jachthaven van Vlieland op $4,9$ $[km]$ van de monding ligt dat deze in de parametrisatie van het bekken ook op $4,9$ $[km]$ ligt van de monding. In figuur 3.3 is een overzicht van de gebruikte meetpunten weergegeven.

3.2. Getij

Rijkswaterstaat [14] heeft op verschillende plekken in de het Vlie-bekken de waterstanden gedurende een langere periode gemeten. Met behulp van een Matlab-script met de naam t_tide [12] kan op deze data een tijdsreeks analyse worden uitgevoerd. Uit deze analyse volgen vervolgens de verschillende getijcomponenten. In het model is alleen aandacht voor M_2- en M_4-getij, waarbij de waarde voor het M_4-getij alleen wordt bekeken bij het zeegat. De waarden voor het M_2-getij bij de andere meetpunten zullen namelijk gebruikt worden om het model te kalibreren. De gevonden waarden zijn te vinden in tabel 3.1. Daarnaast is een deel van de voorspelling met t_tide en de meetwaardes naast elkaar uitgezet in figuur 3.4. Hieruit is af te lezen dat het door t_tide gegenereerde model de amplitudes van het getij goed pakt, maar dat wel een duidelijk afwijking van het gemiddelde is te zien. Dit betekent dat t_tide niet goed met de variatie van de waterstanden over het jaar omgaat. Deze zorgen namelijk dat de gemiddelde waterstand per getijperiode door het jaar heen verandert.

Uit de tabel is duidelijk af te lezen hoe de amplitude van het M_2 getij afneemt in het bekken en hoe de fase toeneemt. Er is dus duidelijk een vertraging van de vloedgolf aanwezig. Tussen Harlingen en Vlieland is er een verschil van $0,710$ rad, wat omgerekend $83,9$ minuten is. Dit komt zeer dicht in de buurt bij de 82 minuten die gevonden zijn door Duran-Matute et. al. [3]. Als ook de amplitudes worden vergeleken, is te zien dat de waarden in tabel 3.1 iets hoger zijn met $+3$ tot $+5$ centimeter, dan in het

Figuur 3.3: Gebruikte meetpunten [8]

artikel [3]. Wel komt overeen dat de amplitude in Harlingen groter is dan bij het zeegat.

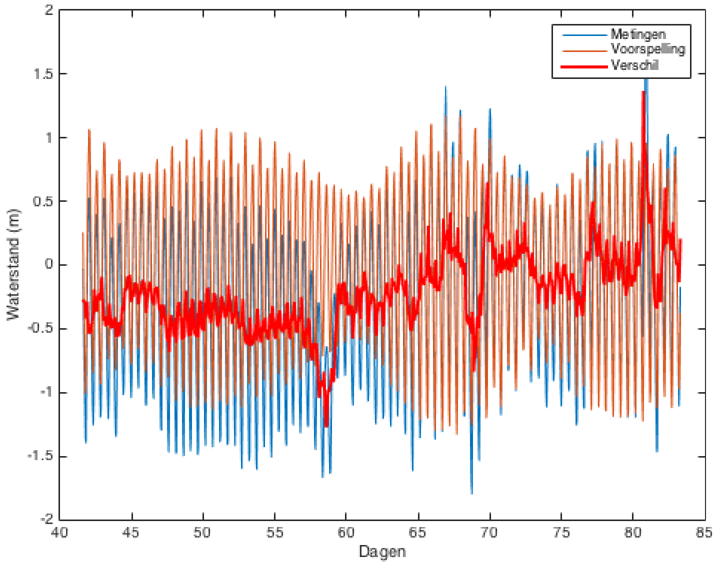
3.3. Temperatuur

De watertemperatuur langs een geul in de Waddenzee is variabel in de tijd en de plaats (in de lengterichting van de geul). Aan de hand van meetgegevens van verschillende meetpunten langs het Vlie-bekken kunnen parameters worden geschat die vervolgens een algeheel beeld kunnen geven van de temperatuurvariatie door het jaar heen en in de geul.

Als uitgangspositie wordt eerst een vast meetpunt genomen. Uit de metingen komt duidelijk naar voren dat de temperatuur zich periodiek gedraagt met een periode van een jaar. Voor een completer beeld kunnen nog extra frequenties mee worden genomen om de variatie tussen de verschillende jaren. Deze frequenties zijn veelvouden van de jaarfrequentie. Verder kan de gemiddelde temperatuur lineair toenemend in de tijd worden verondersteld, zodat de eventuele opwarming van de aarde ook kan worden meegenomen. Dan volgt dat de temperatuur als volgt kan worden geschreven, waarin elke ω_i een frequentie is:

$$T(t) = A + Bt + \sum_{i=1}^{n} \left[C_i \cos(\omega_i t) + D_i \sin(\omega_i t)\right]. \tag{3.1}$$

Vervolgens wordt gezocht naar een uitdrukking voor de temperatuur afhankelijk van x en t, door de parameters A, B, C_i, D_i af te laten hangen van x. Met behulp van de trial-error methode blijkt dat als deze parameters geschreven worden als een tweedegraads polynoom in x de data goed beschreven kan worden. Bij de trial-error methode wordt een oplossing verondersteld en bekeken of deze goed is. In dit geval wordt de uitkomst vergeleken met de meetgegevens. Omdat een constant en lineair model in x geen goede overeenkomsten hadden en een derdegraads polynoom niet haalbaar is met maar drie meetpunten is dus uiteindelijk gekozen voor een tweedegraads polynoom.



Figuur 3.4: Voorbeeld uitvoer t_tide (locatie Stortemelk)

$$T(x,t) = A' + xA'' + x^2A''' + (B' + xB'' + x^2B''')t + \sum_{i=1}^{n} \left[(C_i' + xC_i'' + x^2C_i''')\cos(\omega_i t) + (D_i' + xD_i'' + x^2D_i''')\sin(\omega_i t) \right]. \tag{3.2}$$

Om uit de meetwaarden de gezochte parameters te kunnen schatten, zal de kleinste-kwadratenmethode worden gebruikt. De matrix $\mathbf{F}$ wordt voor dit model gegeven door (aangezien x en t bekend zijn voor de metingen):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & t_1 & x_1t_1 & x_1^2t_1 & c_{1,1} & x_1c_{1,1} & x_1^2c_{1,1} & s_{1,1} & x_1s_{1,1} & x_1^2s_{1,1} & \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & t_2 & x_2t_2 & x_2^2t_2 & c_{1,2} & x_2c_{1,2} & x_2^2c_{1,2} & s_{1,2} & x_2s_{1,2} & x_2^2s_{1,2} & \dots \\ 1 & x_3 & x_3^2 & t_3 & x_3t_3 & x_3^2t_3 & c_{1,3} & x_3c_{1,3} & x_3^2c_{1,3} & s_{1,3} & x_3s_{1,3} & x_3^2s_{1,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Hier zijn x_i en t_i de plaats- en tijdcoördinaat van de i-de meting, $c_{i,j} = \cos(\omega_i t_j)$ en $s_{i,j} = \sin(\omega_i t_j)$. Vervolgens worden de vectoren gedefinieerd:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} A' & A'' & A''' & B' & B'' & B''' & C_1' & C_1'' & C_1''' & D_1' & D_1'' & D_1''' & \dots \end{bmatrix}^T \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T(x_1,t_1) \\ T(x_2,t_2) \\ T(x_3,t_3) \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Met de kleinste-kwadratenmethode worden vervolgens de schattingen van $\mathbf{b}$ gevonden:

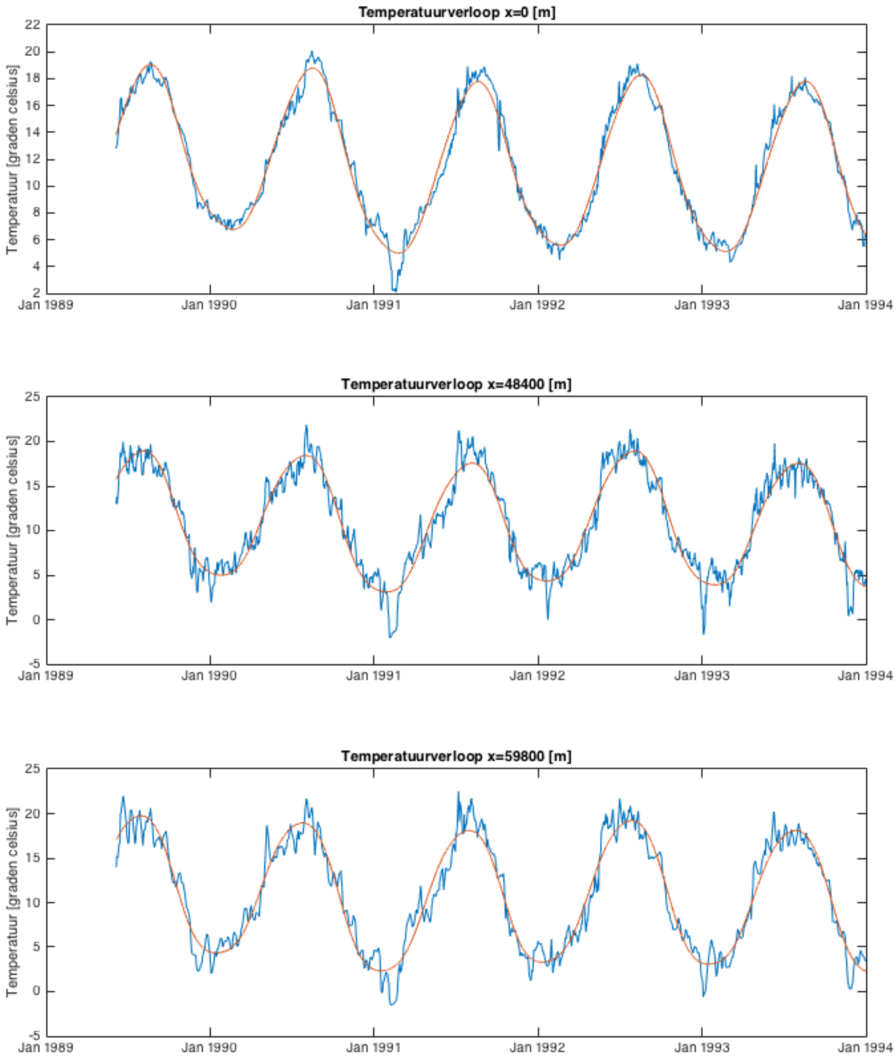
$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}\right)^{-1}\mathbf{F}^T\hat{\mathbf{T}}. \tag{3.5}$$

3.3.1. Resultaten

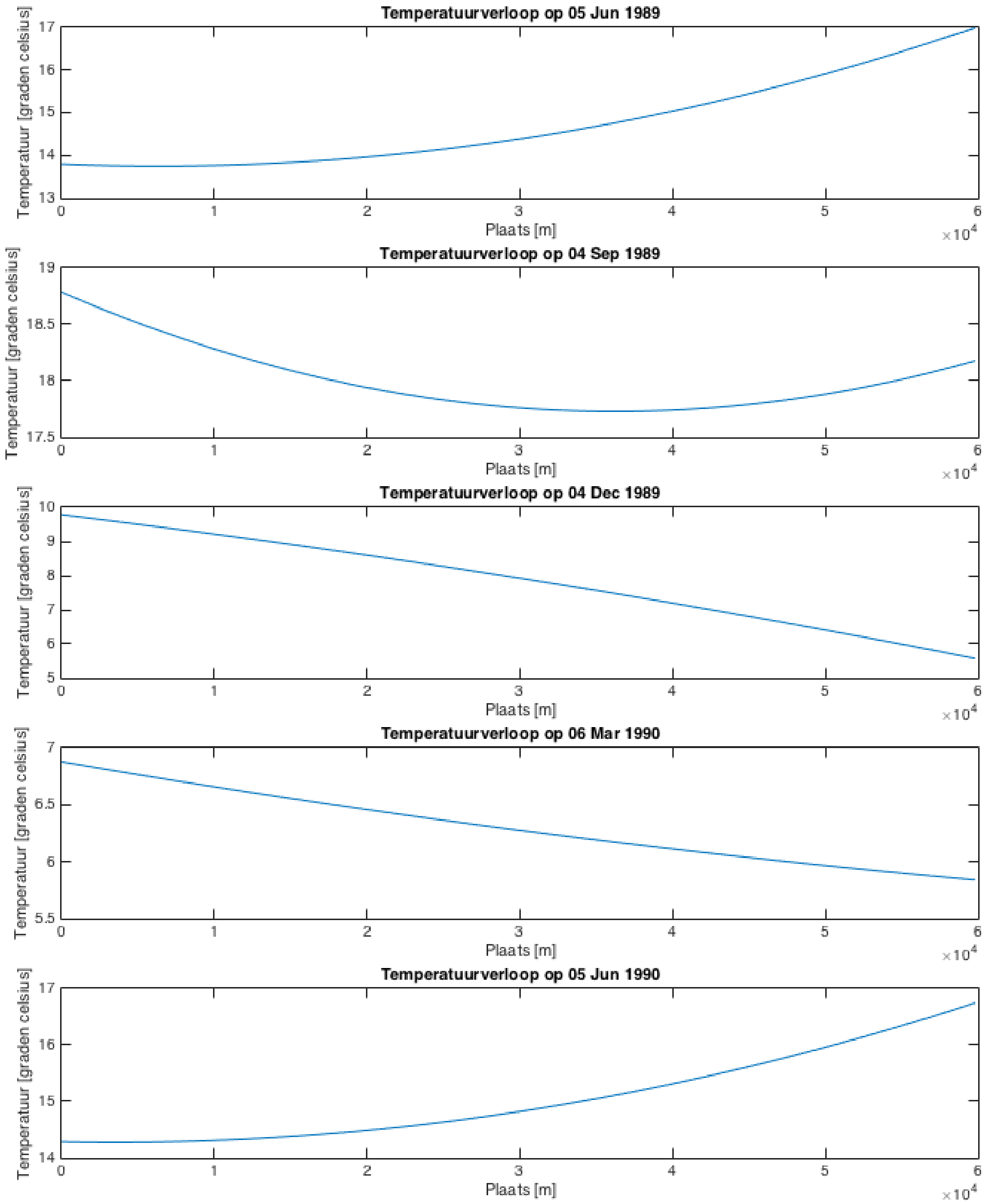
In het Vlie-bekken is op drie verschillende plaatsen de temperatuur gedurende een lange periode gelijktijdig gemeten. Deze punten hebben allemaal een x-coördinaat gekregen afhankelijk van hoever ze zich van de monding van de geul bevinden. Op het eerste meetpunt is gekozen dat $x = 0$ geldt. Omdat dit meetpunt vóór de monding ligt, is voor deze analyse de plaats waar geldt $x = 0$ niet gelijk aan het begin van het bekken (zoals in paragraaf 3.1). In de volgende paragrafen zal steeds hetzelfde punt $x = 0$ worden genomen als hier en in hoofdstuk 5 zal dit worden rechtgezet. De berekeningen van beide secties houden op hetzelfde punt (Harlingen) op.

Als nu dit systeem wordt doorgerekend, worden voor de meetpunten de temperatuurverlopen gevonden, die te vinden zijn in figuur 3.5. De blauwe lijn geeft de maatwaarden aan en de rode lijn is het model uit vergelijking 3.2 met de geschatte parameters. Hieruit is te op te maken dat dit model het temperatuurverloop goed weet te volgen. De gemiddelde kwadratische afwijking is gelijk aan $1,9$ $[°C]$. Duidelijk is zichtbaar dat het water in de zomer gemiddeld warmer is dan in de winter.

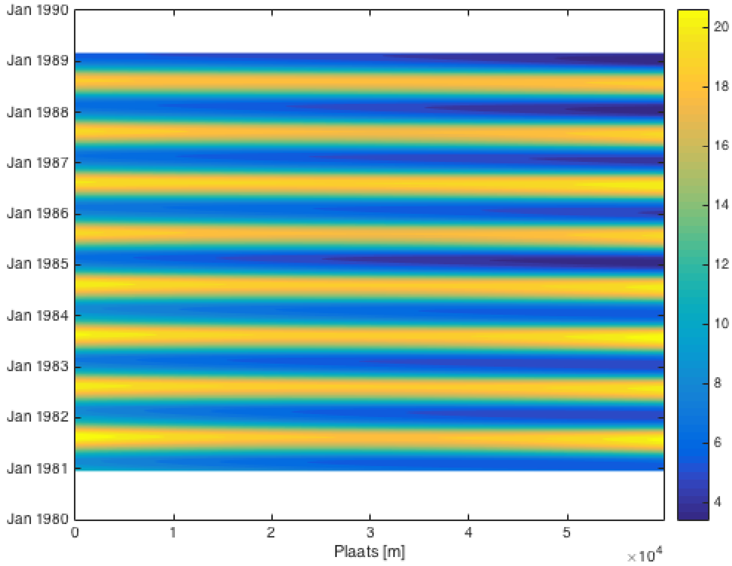
In figuur 3.6 is het temperatuurverloop volgens het model in de langsrichting weergegeven op verschillende momenten. Af te lezen is dat de temperatuur aan de zeezijde een kleinere fluctuatie kent dan aan de landzijde. In het laatste figuur (3.7) is de temperatuur (volgens het model) afhankelijk van plaats en tijd weergegeven. Aan de kleur op een bepaald punt is af te lezen hoe warm het water is. Uit het figuur is op te maken dat de temperatuur veranderingen net iets eerder bij Harlingen op te merken zijn dan op de Noordzee.



Figuur 3.5: Temperatuur fit in de tijd



Figuur 3.6: Temperatuurverloop in de x-richting

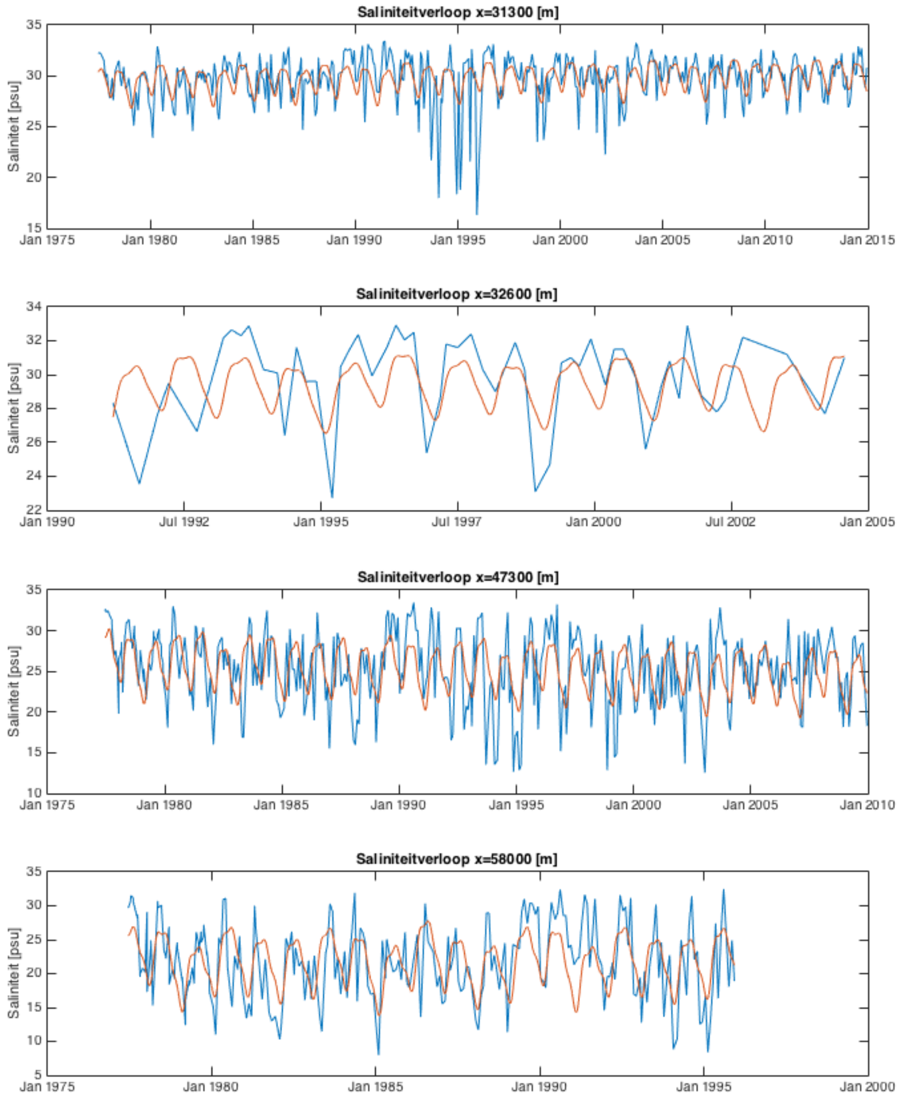


Figuur 3.7: Temperatuurverloop [graden Celsius]

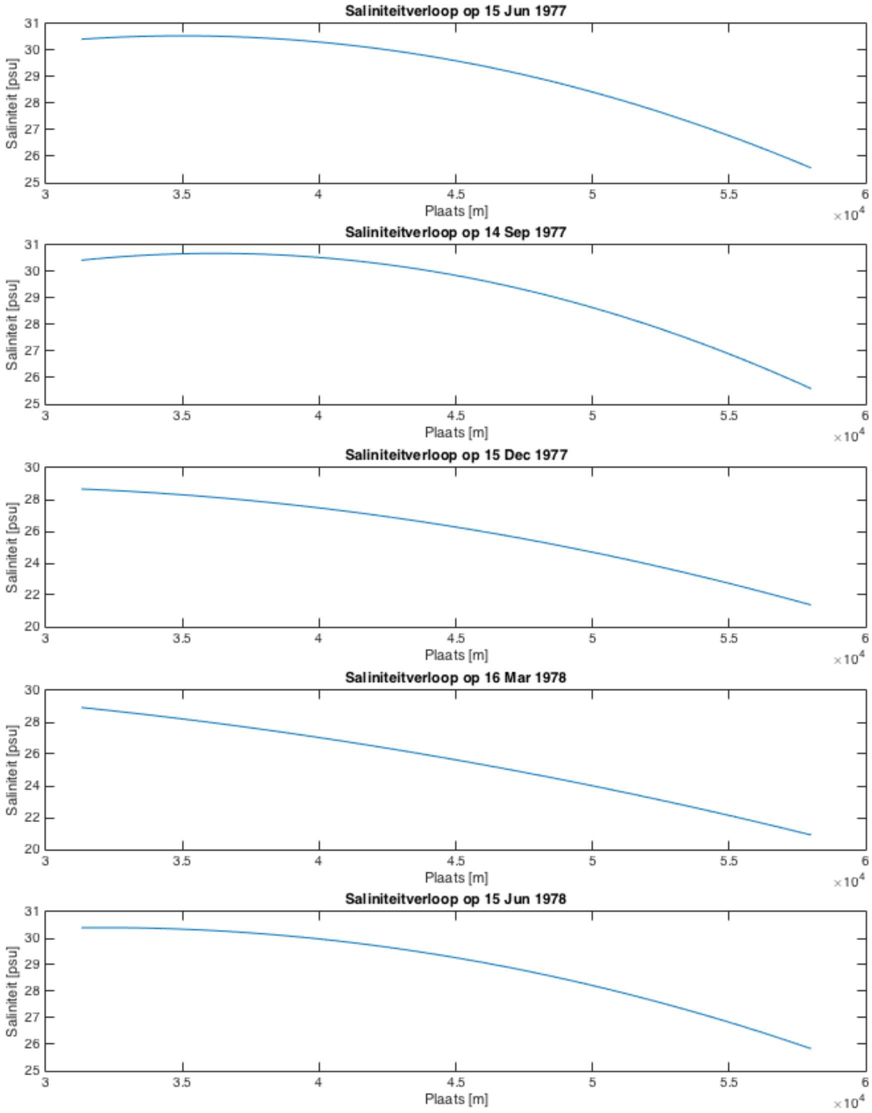
3.4. Saliniteit

Op dezelfde manier als bij de temperatuur, kan ook voor salinitiet (zoutgehalte) een model worden opgesteld. Het blijkt dat deze zich ook goed laat benaderen door het model van vergelijking 3.2. De wiskundige afleiding voor de kleinste-kwadratenmethode blijft hetzelfde (behalve dat T nu in S moet veranderen). Met de meetwaarden is een analyse uitgevoerd, de resultaten zijn te vinden in de figuren 3.8, 3.9 en 3.10.

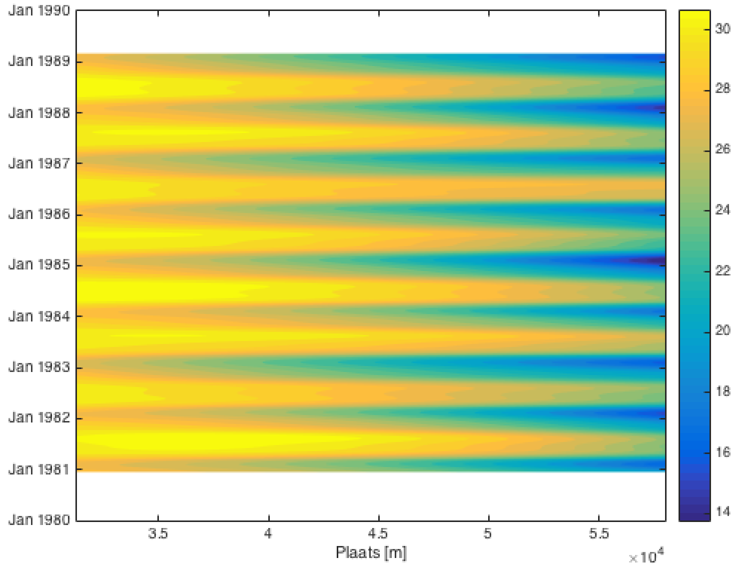
In het eerste figuur zijn de meetwaarden (blauw) tegelijkertijd met de modelwaarden (rood) weergegeven. Hieruit is af te lezen dat dit model de meetwaarden redelijk volgt, maar bij lange na niet zo goed als dat van de temperatuur. De gemiddelde kwadratische afwijking is hier dan ook veel groter, namelijk 11 $[psu]$. Dit kan er aan liggen dat niet alle factoren die het zoutveld beïnvloeden zich als harmonische functies gedragen. Voorbeelden hiervan zijn het spuien van water en een regenbui. Dit zijn plotselinge gebeurtenissen die zich niet goed laten modelleren door harmonische functies. Ook is dit figuur een duidelijke periode van een jaar zichtbaar. In figuur 3.9 is weergegeven hoe het saliniteitverloop in langsrichting is op verschillende momenten in het jaar. Duidelijk is te zien dat het zoutgehalte groter is aan de zeezijde dan aan de landkant, daarnaast kent de concentratie aan de zeezijde een kleinere variatie door het jaar dan aan de landkant. Ook dit komt duidelijk naar voren in het laatste figuur (3.10), waarbij in plaats en tijd het zoutgehalte is aangegeven afhankelijk van de kleur. Als de uitkomsten worden vergeleken met de uitkomsten van Duran-Matute et.al. [3] blijkt in beide gevallen het minimale zoutgehalte gelijk te zijn aan 18 $[psu]$ en het maximale aan 30 $[psu]$.



Figuur 3.8: Saliniteit fit in de tijd



Figuur 3.9: Saliniteitverloop in de x-richting



Figuur 3.10: Saliniteitverloop [psu]

3.5. Dichtheid

De dichtheid van zeewater hangt voornamelijk af van twee factoren: de saliniteit (S) en de temperatuur (T). In het technisch report van Unesco [15] is gegeven hoe deze factoren de dichtheid van water beïnvloeden. Op basis van gemeten waarden is vervolgens de volgende analytische uitdrukking gevonden:

$$\rho(S,t) = \rho_w + \left(b_0 + b_1T + b_2T^2 + b_3T^3 + b_4T^5\right)S + \left(c_0 + c_1T + c_2T^2\right)S^{3/2} + d_0S^2, \quad (3.6)$$
$$\rho_w = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + a_4T^4 + a_5T^5. \quad (3.7)$$

Hierbij horen de volgende constanten:

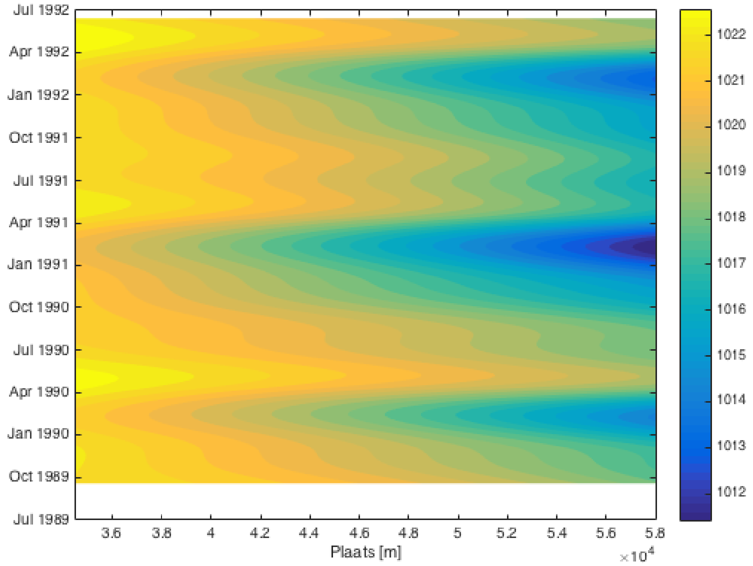
$$\begin{aligned}
a_0 &= 999,842594, & b_0 &= 8,24493\cdot10^{-1}, & c_0 &= -5,27466\cdot10^{-3},\\
a_1 &= 6,793952\cdot10^{-2}, & b_1 &= -4,0899\cdot10^{-3}, & c_1 &= 1,0227\cdot10^{-4},\\
a_2 &= -9,095290\cdot10^{-3}, & b_2 &= 7,6438\cdot10^{-5}, & c_2 &= -1,6546\cdot10^{-6},\\
a_3 &= 1,001685\cdot10^{-4}, & b_3 &= -8,2467\cdot10^{-7}, & &\\
a_4 &= -1,120083\cdot10^{-6}, & b_4 &= 5,3875\cdot10^{-9}, & d_0 &= 4,8314\cdot10^{-4},\\
a_5 &= 6,536332\cdot10^{-9}. & & & &
\end{aligned}$$

Naast de dichtheid is de partiële afgeleide van de dichtheid naar de plaats (x) ook van belang omdat deze in de vergelijkingen van de waterbeweging moet worden ingevuld. Hiervoor wordt het volgende gevonden:

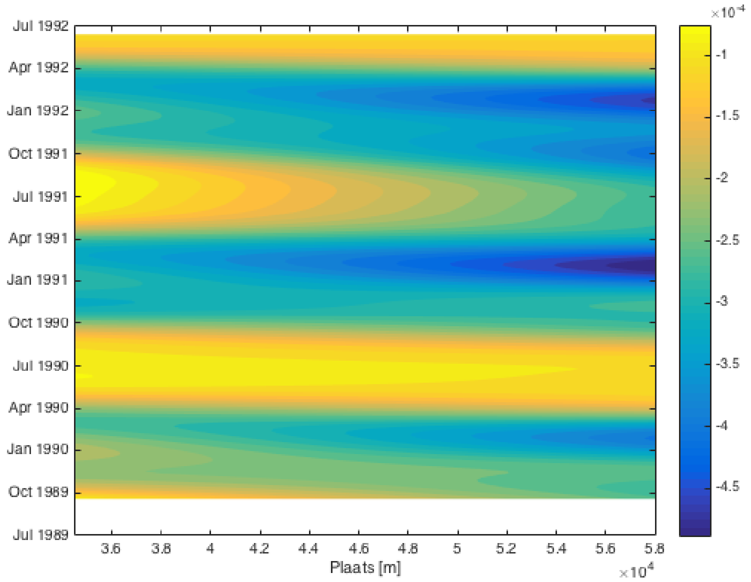
$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial x} &= \frac{\partial\rho}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}, \quad (3.8)\\
\frac{\partial\rho}{\partial T} &= \frac{\partial\rho_w}{\partial T} + \left(b_1 + 2b_2T + 3b_3T^2 + 5b_4T^4\right)S + \left(c_1 + 2c_2T\right)S^{3/2},\\
\frac{\partial\rho_w}{\partial T} &= a_1 + 2a_2T + 3a_3T^2 + 4a_4T^3 + 5a_5T^4,\\
\frac{\partial\rho}{\partial S} &= \left(b_0 + b_1T + b_2T^2 + b_3T^3 + b_4T^5\right) + \frac{3}{2}\left(c_0 + c_1T + c_2T^2\right)S^{1/2} + 2d_0S.
\end{aligned}$$

3.5.1. Resultaten

Als de resultaten voor temperatuur en saliniteit uit respectievelijk paragraaf 3.3.1 en 3.4 worden gecombineerd met vergelijkingen 3.6 en 3.8, worden de waterdichtheden afhankelijk van plaats en tijd gevonden zoals weergegeven in figuur 3.11 en 3.12. In deze figuren is afhankelijk van de plaats en tijd respectievelijk de dichtheid en partiële afgeleide van de dichtheid in de langsrichting weergegeven. Uit deze figuren is af te lezen dat de dichtheid aan de zeezijde groter is dan aan de landkant en ook dat deze varieert met een periode van een jaar. Tussen april en juni neemt de dichtheid snel toe, waarna deze weer langzaam afneemt tot volgend jaar april. Voor de dichtheidsgradiënt in de x-richting, blijkt (figuur 3.12) dat de gradiënt altijd negatief is en toeneemt (sterker negatief wordt) richting de landzijde. Dat deze gradiënt altijd negatief is, heeft als gevolg dat de gravitatie circulatie altijd dezelfde richting opdraait. Dat betekent dat onderin de waterkolom de stroming landwaarts is gericht en bovenin zeewaarts. Verder valt op dat deze ook varieert met een periode van een jaar en in de zomer (mei-september) zijn maximale waarde aanneemt.



Figuur 3.11: Verloop van de waterdichtheid [kg/m^3]



Figuur 3.12: Verloop van de dichtheidsgradiënt $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ $[kg/m^4]$

4 Oplossingen

Elk van de modellen opgesteld in hoofdstuk 2 zal apart worden opgelost. Zodat later de resultaten van de verschillende modellen met elkaar kunnen worden vergeleken. Als eerst zal het getij gemiddelde model worden opgelost, waarna een oplossing voor het model met getij zal worden gezocht.

4.1. Zonder getij

Dit model wordt gegeven door het volgende stelsel (vergelijking 2.15, 2.16 en randvoorwaarden uit 2.3.3).

$$
\begin{aligned}
Q &= -\int_{-h}^{0} ubdz, \\
-g\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + gz\frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z}\right) &= 0, \\
u|_{z=-h} &= 0, \\
\rho_0 A_v \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} &= 0.
\end{aligned}
$$

Er wordt vanuit gegaan dat Q, h, b, g, ρ_0, A_v en $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$ bekend zijn. De stroming wordt gedreven door twee factoren: het debiet Q en de dichtheidsgradiënt $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$. Omdat deze termen lineair onafhankelijk van elkaar zijn, kunnen deze onafhankelijk worden opgelost waarna superpositie kan worden toegepast om de volledige oplossing te krijgen. De stroming ten gevolgen van de rivieruitstroom ($\frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$) wordt gegeven door:

$$u = \frac{g}{2A_v}\frac{3QA_v}{gbh^3}\left(z^2 - h^2\right) = \frac{3Q}{2bh}\left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1\right]. \tag{4.1}$$

De uitgebreide berekening van deze oplossing is in de bijlage opgenomen (sectie A.1). De dichtheids-gradiënt resulteert in de volgende stroming:

$$u = \frac{g}{\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho}{\partial x}\left[\frac{1}{48}h^3 - \frac{3}{16}hz^2 - \frac{1}{6}z^3\right] = \frac{gh^3}{48\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho}{\partial x}\left[1 - 9\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 8\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]. \tag{4.2}$$

Met superpositie (van vergelijking 4.1 en 4.2) volgt nu de totale oplossing:

$$u = \frac{3Q}{2bh}\left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1\right] + \frac{gh^3}{48\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho}{\partial x}\left[1 - 9\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 8\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]. \tag{4.3}$$

Deze oplossing is gelijk aan deze gevonden door Donker en De Swart [7].

4.2. Met getij

Uit vergelijkingen 2.5 en 2.13 volgt samen met de randvoorwaarden uit paragraaf 2.2.3 het volgende stelsel.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x}(\eta - z) - g\frac{\partial \eta}{\partial x} + A_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(\eta) = 0, \qquad u(-h) = 0,$$
$$w(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad w(-h) = 0,$$
$$Q = \int_{-h(L)}^{\eta(L)} b(L)u(L,z)dz, \qquad \eta(0,t) = A_{M_2}\cos(\omega t) + A_{M_4}\cos(2\omega t - \phi).$$

Om dit systeem op te lossen zullen eerst de vergelijkingen geschaald worden, zodat deze dimensieloos worden. Na schaling wordt een kleine parameter geïntroduceerd en kunnen vervolgens termen vandezelfde orde worden samengenomen, wat resulteert in een leidende en eerste orde probleem. De variabelen schalen met de volgende constanten:

$$x = L\tilde{x}, \qquad z = h_0\tilde{z},$$
$$t = \omega^{-1}\tilde{t},$$
$$U = \frac{\omega A_{M2} L}{h_0} \qquad u(L\tilde{x}, H_0\tilde{z}, \omega^{-1}\tilde{t}), = U\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}),$$
$$W = \frac{h_0}{L}U = \omega A_{M2}, \qquad w(L\tilde{x}, H_0\tilde{z}, \omega^{-1}\tilde{t}) = W\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}),$$
$$h(L\tilde{x}) = h_0\tilde{h}(\tilde{x}), \qquad b(L\tilde{x}) = \tilde{b}(\tilde{x}),$$
$$\eta(L\tilde{x}, \omega^{-1}\tilde{t}) = \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t})A_{M2}, \qquad \rho(L\tilde{x}, \omega^{-1}\tilde{t}) = \rho_0\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}).$$

Verder wordt $\varepsilon = \frac{A_{M2}}{h_0}$ gedefinieërd, de kleine parameter waarin later zal worden ontwikkeld. Voor de modelvergelijkingen volgt nu (berekening zie A.2):

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{b}}\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} = 0, \tag{4.4}$$
$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{g h_0^2}{\omega^2 L^2 A_{M2}}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}}\left(\frac{A_{M2}}{h_0}\tilde{\eta} - \tilde{z}\right) - \frac{g h_0}{\omega^2 L^2}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{A_v}{\omega h_0^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}, \tag{4.5}$$

en voor de randvoorwaarden:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}(\varepsilon\tilde{\eta}) = 0, \qquad \tilde{u}(-\tilde{h}) = 0,$$
$$\tilde{w}(\varepsilon\tilde{\eta}) = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}}, \qquad \tilde{w}(-\tilde{h}) = 0,$$
$$\frac{Q}{\omega A_{M2} L\tilde{b}(1)} = \int_{-\tilde{h}(1)}^{\varepsilon\tilde{\eta}(1)} \tilde{u}(1,\tilde{z})d\tilde{z}, \qquad \tilde{\eta}(0,\tilde{t}) = \cos(\tilde{t}) + \frac{A_{M4}}{A_{M2}}\cos(2\tilde{t} - \phi).$$

Vervolgens moet de orde grootte van alle constanten in de vergelijkingen worden bepaald. Hiervoor is eerst een schatting van de parameters nodig. Deze kunnen gemaakt worden op basis van de gegevens uit hoofdstuk 3. Q wordt hier heel klein gekozen, omdat het Vlie-bassin bij Harlingen een zeer kleine uitstroom kent. Daarnaast is de keuze voor A_v nog een beetje willekeurig, maar later (in hoofdstuk 5) zal blijken dat deze keuze qua orde grootte correct is.

$$
\begin{aligned}
A_{M2} &= 0,82\ [m], & A_{M4} &= 0,061\ [m],\\
h_0 &= 9,0\ [m], & L &= 23\ [km],\\
b &= 28\ [km], & \frac{\partial b}{\partial x} &= 5,3\ [-],\\
A_v &= 0,01\ [m^2/s], & \omega &= 1,41\cdot 10^{-4}\ [rad/s],\\
g &= 9,81\ [m/s^2], & Q &= 1\ [m^3/s],\\
\rho_0 &= 1020\ [kg/m^3], & \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 3\cdot 10^{-4}\ [kg/m^4],\\
\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}} &= \frac{L}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,0069\ [-].
\end{aligned}
$$

Nu volgen de getalswaarden voor de constanten en hun orde ten opzichte van ε:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon = \frac{A_{M2}}{h_0} &= 0,091 && \mathcal{O}(\varepsilon),\\
\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}}\frac{1}{\tilde{b}} &= 1,9\cdot 10^{-4} && \mathcal{O}(\varepsilon^4),\\
\frac{A_v}{\omega h_0^2} &= 0,88 && \mathcal{O}(1),\\
\frac{g h_0}{\omega^2 L^2} &= 8,1 && \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}),\\
\frac{g h_0^2}{\omega^2 L^2 A_{M2}}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}} &= 0,61 && \mathcal{O}(\varepsilon),\\
\frac{Q}{\omega A_{M2} b L} &= 1,3\cdot 10^{-5} && \mathcal{O}(\varepsilon^5),\\
\frac{A_{M4}}{A_{M2}} &= 0,075 && \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Vervolgens worden de typische onbekenden ontwikkeld in de kleine parameter ε. Dit betekent dat deze als volgt te schrijven zijn:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u} &= \tilde{u}^0 + \varepsilon^1\tilde{u}^1 + \varepsilon^2\tilde{u}^2 + \dots,\\
\tilde{w} &= \tilde{w}^0 + \varepsilon^1\tilde{w}^1 + \varepsilon^2\tilde{w}^2 + \dots,\\
\tilde{\eta} &= \tilde{\eta}^0 + \varepsilon^1\tilde{\eta}^1 + \varepsilon^2\tilde{\eta}^2 + \dots.
\end{aligned}
$$

Als dit nu gecombineerd wordt met de ordegrootte van de coëfficiënten, kan het probleem per orde worden opgeschreven. Hiervoor wordt $\frac{g h_0}{\omega^2 L^2}$ ook in de leidende ordevergelijking genomen. Ook wordt $\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}}\frac{1}{\tilde{b}}$ als leidende orde gebuikt omdat deze ten opzichte van de andere termen in de vergelijking even groot is.

De herleiding van het probleem naar het leidende orde en eerste orde probleem inclusief het terug schalen is te vinden in bijlage A.2. Hogere orde termen zullen niet mee worden genomen, omdat deze kleiner en minder belangrijk zijn dan de eerste twee problemen. Het leidende orde probleem wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^0}{\partial x}+\frac{\partial w^0}{\partial z}+\frac{u^0}{b}\frac{\partial b}{\partial x} &= 0,\\
\frac{\partial u^0}{\partial t} &= -g\frac{\partial \eta^0}{\partial \tilde{x}}+A_v\frac{\partial^2 u^0}{\partial z^2},\\
\frac{\partial u^0(0)}{\partial z} &= 0,\\
w^0(0) &= \frac{\partial \eta^0}{\partial t},\\
w^0(-h) &= 0,\\
u^0(-h) &= 0,\\
0 &= \int_{-h}^{0} u^0(L,z)dz,\\
\eta^0(0,t) &= A_{M2}\cos(\omega t).
\end{aligned}$$

Het eerste orde probleem dat gevonden wordt, is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^1}{\partial x}+\frac{\partial w^1}{\partial z}+\frac{u^1}{b}\frac{\partial b}{\partial x} &= 0,\\
\frac{\partial u^1}{\partial t}+u^0\frac{\partial u^0}{\partial x}+w^0\frac{\partial u^0}{\partial z} &= \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}z-g\frac{\partial \eta^1}{\partial x}+A_v\frac{\partial^2 u^1}{\partial z^2},\\
\frac{\partial u^1(0)}{\partial z}+\eta^0\frac{\partial^2 u^0(0)}{\partial z^2} &= 0,\\
w^1(0)+\eta^0\frac{\partial w^0(0)}{\partial z} &= \frac{\partial \eta^1}{\partial t}+u^0\frac{\partial \eta^0}{\partial x},\\
w^1(-h) &= 0,\\
u^1(-h) &= 0,\\
0 &= \int_{-h}^{0} u^1(L,z)dz+u^0(L,0)\eta^0(L),\\
\eta^1(0,t) &= A_{M4}\cos(2\omega t-\phi).
\end{aligned}$$

4.2.1. Leidende orde probleem

Als eerst zal het leidende orde probleem worden opgelost. Omdat de enige tijdsafhankelijke in de vergelijking $\cos(\omega t)$ is, wordt aangenomen dat de oplossing van het probleem te schrijven is als $u^0 = \Re\left(e^{i\omega t}u^{xz,0}\right)$, $w^0 = \Re\left(e^{i\omega t}w^{xz,0}\right)$ en $\eta^0 = \Re\left(e^{i\omega t}\eta^{xz,0}\right)$ (hierin is $u^{xz,0}$ het deel van u^0 dat alleen afhangt van x en z, hetzelfde geldt voor $w^{xz,0}$ en $\eta^{x,0}$). Er hoeft immers geen rekening te worden gehouden met beginvoorwaarden omdat alleen de particuliere oplossing interessant is. Voor de afhankelijkheid van x en z blijft nu een stelsel vergelijking over onafhankelijk van t.

In sectie A.2.1 wordt dit probleem helemaal opgelost. Voor een niet-uniforme geometrie blijkt het niet mogelijk te zijn een analytische uitdrukking te vinden. Hiervoor moet namelijk eerst de volgende differentiaalvergelijking voor de waterstand $\eta^{x,0}$ worden opgelost, waarbij $\lambda^2 = \frac{i\omega}{A_v}$:

$$i\omega\eta^{x,0} = \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)^2}{\cosh(\lambda h)^2}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)}-h\right]\right]-\frac{g}{i\omega}\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda H)}-h\right], \tag{4.6}$$

met de bijbehorende randvoorwaarden:

$$\eta^{x,0}(0) = A_{M2}, \qquad \frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}(L) = 0.$$

In de bijlage is ook uitgelegd hoe dit probleem numeriek op te lossen is. De oplossingen voor u^0 en η^0

worden uiteindelijk gegeven door:

$$\begin{aligned} u^0 &= \Re\left(e^{i\omega t}\frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda H)}-1\right]\right),\\ \eta^0 &= \Re\left(e^{i\omega t}\eta^{x,0}\right). \end{aligned}$$

Voor een uniforme geometrie is het wel mogelijk een analytische oplossing te vinden. Dan gelden: $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial b}{\partial x} = 0$. De volgende oplossing wordt dan gevonden, met $\mu^2 = \frac{\omega^2}{g}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right]^{-1}$:

$$u^0 = \Re\left(e^{i\omega t}\frac{gA_{M2}\mu}{i\omega}\left(\sinh(\mu x) - \cosh(\mu x)\frac{\sinh(\mu L)}{\cosh(\mu L)}\right)\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda H)}-1\right]\right), \tag{4.7}$$

$$\eta^0 = \Re\left(e^{i\omega t}A_{M2}\left[\cosh(\mu x) - \sinh(\mu x)\frac{\sinh(\mu L)}{\cosh(\mu L)}\right]\right). \tag{4.8}$$

Deze oplossingen blijken overeen te komen met de uitkomsten van Chernetsky, Schuttelaars en Talke [4].

4.2.2. Eerste orde probleem

Na het oplossen van het leidende orde probleem, wordt het eerste orde probleem opgelost. De stroming wordt hier gedreven door zes verschillende termen:

$$\begin{aligned} A &: u^0\frac{\partial u^0}{\partial x} + w^0\frac{\partial u^0}{\partial z},\\ B &: \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}z,\\ C &: \eta^0\frac{\partial^2 u^0(0)}{\partial z^2},\\ D &: \eta^0\frac{\partial w^0(0)}{\partial z} - u^0\frac{\partial \eta^0}{\partial x},\\ E &: u^0(L,0)\eta^0(L),\\ F &: A_{M4}\cos(2\omega t - \phi). \end{aligned}$$

Aangezien deze vergelijkingen allemaal lineair zijn, betekent dit dat voor elke afzonderlijke term dit probleem kan worden opgelost. Omdat dit onderzoek zich richt op de stroming die door dichtheidsverschillen wordt gedreven zal in ieder geval de stroomsnelheid ten gevolge van term B worden berekend. Het blijkt nu dat het systeem onafhankelijk van de tijd is, omdat de stroming wordt gedreven door een term die tijdsonafhankelijk is. Immers wordt alleen gezocht naar een particuliere oplossing (en dus niet naar de homogene oplossing), waardoor het systeem een evenwicht zal instellen met de drijvende term. Dit geeft dat alle afgeleiden naar de tijd gelijk zijn aan nul.

Vervolgens kan dit systeem worden opgelost. In paragraaf A.2.2 wordt toegelicht hoe tot een oplossing wordt gekomen. Voor een niet-uniforme geometrie blijft de volgende differentiaalvergelijking over:

$$\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}h^4 + \frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^3\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^4\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x} + \left[\frac{g}{A_v}h^2\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{3A_v}h^3\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\right]\frac{\partial\eta^1}{\partial x} + \frac{g}{3A_v}\frac{\partial^2\eta^1}{\partial x^2}h^3 = 0, \tag{4.9}$$

met de bijbehorende randvoorwaarden.

$$\eta^1(0) = 0, \qquad \frac{\partial \eta^1}{\partial x}(L) = -\frac{3}{8\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h.$$

Hoe dit systeem numeriek voor alle mogelijkheden van h en b kan worden opgelost is beschreven in de bijlage. De bijbehorende oplossing voor de stroomsnelheid wordt gegeven door:

$$u^1 = \frac{g}{2A_v}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}\left(z^2 - h^2\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}\left(z^3 + h^3\right). \tag{4.10}$$

Vervolgens kan dit probleem ook voor een uniforme geometrie worden opgelost. Dan worden de volgende oplossingen gevonden:

$$u^1 = \frac{gh^3}{48\rho_0 A_v}\frac{\partial\rho}{\partial x}\left[1-9\left(\frac{z}{h}\right)^2-8\left(\frac{z}{h}\right)^3\right], \tag{4.11}$$

$$\eta^1 = \frac{3}{8\rho_0}h\left(\rho'(0)-\rho'(x)\right). \tag{4.12}$$

Hierbij kan opgemerkt worden dat deze oplossing exact overeenkomt met de oplossing die in sectie 4.1 is gevonden.

Tot slot wordt bij dit model ook de stroomsnelheid ten gevolge van het M_4-getij berekend (term F). Het systeem wat dan overblijft is gelijk aan het stelsel differentiaalvergelijkingen wat ook voor het leidende orde probleem is gebruikt. Behalve dat u^0 nu door u^1 is vervangen, verandert ω in 2ω en A_{M_2} in A_{M_4}. Bij de uiteindelijke oplossingen moet ook nog $e^{i\omega t}$ vervangen worden door $e^{i(2\omega t-\phi)}$, zodat het faseverschil tussen M_2-getij en M_4-getij ook zichtbaar wordt als de oplossingen op hetzelfde tijdstip worden vergeleken.

4.3. Niet-uniforme viscositeit

In het geval dat de viscositeit afhangt van de plaats (x) wordt de differentiaalvergelijking voor $\eta^{x,0}$ gegeven door (voor details zie bijlage A.2.3):

$$\eta^{x,0} + A(x)\frac{\partial\eta^{x,0}}{\partial x} + B(x)\frac{\partial^2\eta^{x,0}}{\partial x^2} = 0, \tag{4.13}$$

met:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{g}{\omega^2}\left[\frac{\sinh(\lambda h)^2}{\cosh(\lambda h)^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{h}{\lambda}\right)-\frac{1-\cosh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)}\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)}-h\right]\right],\\
B(x) &= -\frac{g}{\omega^2}\frac{\partial^2\eta^{x,0}}{\partial x^2}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)}-h\right].
\end{aligned}$$

En voor η^1 wordt de volgende differentiaalvergelijking gevonden (details zie bijlage A.2.3):

$$C(x)\frac{\partial\eta^1}{\partial x} + D(x)\frac{\partial^2\eta^1}{\partial x^2} = E(x), \tag{4.14}$$

met:

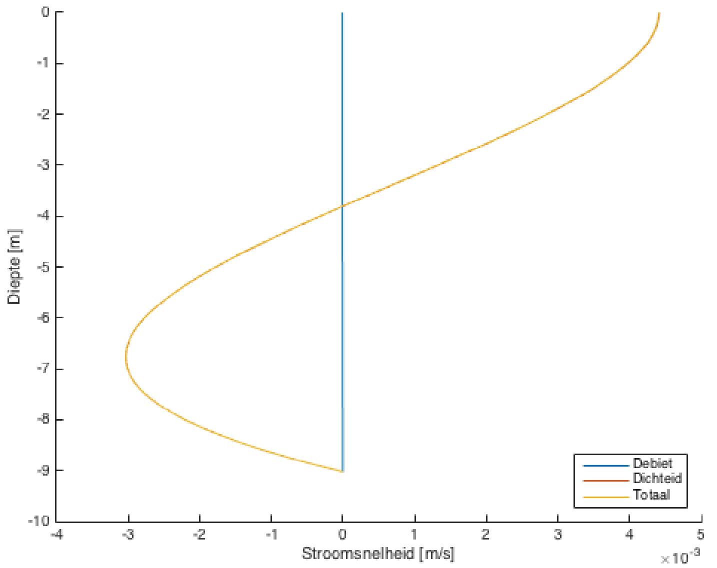
$$\begin{aligned}
C(x) &= \left[\frac{g}{3A_v}h^3\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{g}{3A_v^2}\frac{\partial A_v}{\partial x}h^3+\frac{g}{A_v}h^2\frac{\partial h}{\partial x}\right],\\
D(x) &= \frac{g}{3A_v}h^3,\\
E(x) &= -\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^4\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^3\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}h^4+\frac{g}{8A_v^2\rho_0}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^4.
\end{aligned}$$

Bij deze twee differentiaalvergelijkingen kan met behulp van de randvoorwaarden een numerieke oplossing worden bepaald. De gebruikte numerieke methode blijft gelijk aan de die voor het probleem met een variabele geometrie met getij zoals beschreven in bijlage A.2. Alleen veranderen nu de definities voor $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ en $E(x)$.

5 Resultaten

In dit hoofdstuk zullen de uitkomsten van de parametrisatie (hoofdstuk 3) worden gecombineerd met de oplossingen voor de stroomsnelheid die gevonden zijn in hoofdstuk 4. Hiertoe zullen de opgeloste modellen (zonder getij, met getij en variabele viscositeit) los worden behandeld. Bij elk model zullen de karakteristieke waarden worden gebruikt in dit hoofdstuk, in het bijlage B zal een bijbehorende parameter gevoeligheid analyse worden uitgevoerd. Als niet anders is vermeld is de diepte onafhankelijke viscositeit gelijk aan $A_v = 0,01\ [m^2/s]$.

5.1. Zonder getij



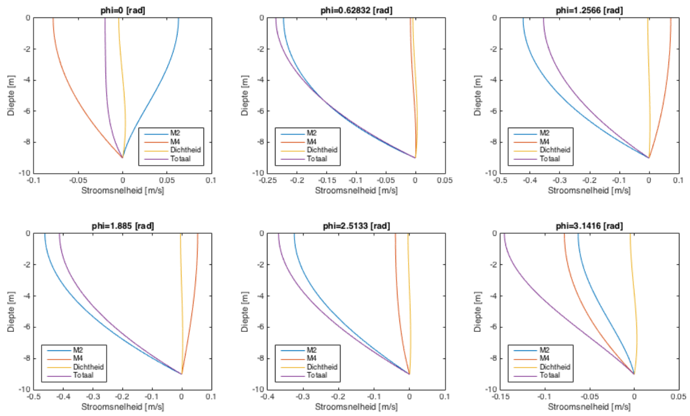
Figuur 5.1: Stroombeeld voor $h = 9\ [m]$, $b = 28\ [km]$ en $Q = 1\ [m^3/s]$

Uit figuur 5.1 is af te lezen hoe het stroombeeld zich gedraagt onder een gemiddelde geometrie. Het blijkt dat de gravitatie circulatie enkele millimeters per seconde bedraagt en dat de stroming door toedoen van het debiet nagenoeg gelijk is aan nul. Verder is te zien dat de stroomprofielen voldoen aan de twee randvoorwaarden, namelijk dat op de bodem de waterdeeltjes niet bewegen en aan het oppervlak niet afschuiven.

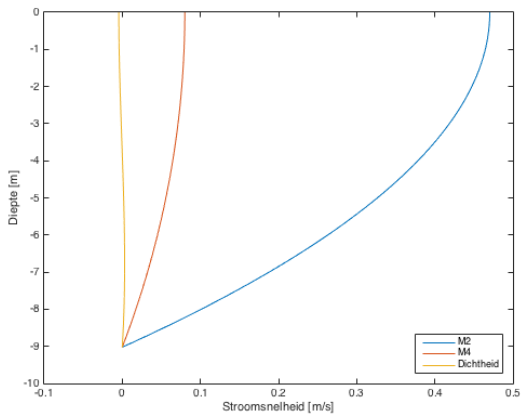
5.2. Met getij

Vervolgens wordt het model met getij bekeken, ook nu wordt een onderscheid gemaakt tussen een uniforme geometrie en niet-uniforme geometrie.

5.2.1. Uniforme geometrie



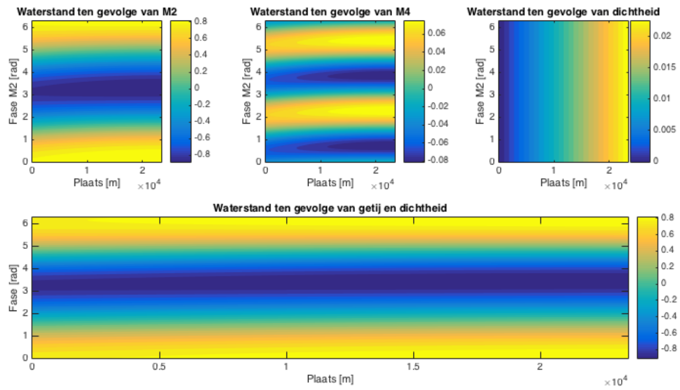
Figuur 5.2: Stroomsnelheid [m/s] voor $h = 9$ $[m]$



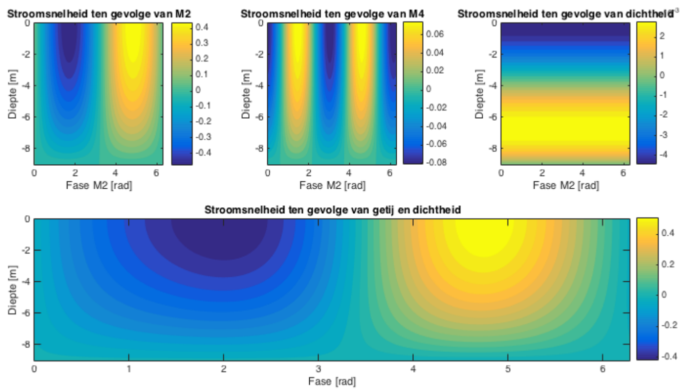
Figuur 5.3: Amplitude stroomsnelheid [m/s] voor $h = 9$ $[m]$

De uitkomsten van de gravitatie circulatie in figuur komen overeen met het gevonden stroomprofiel in het model zonder getij. Immers was de formule ook hetzelfde. Daarnaast is af te lezen dat in dit geval de gravitatie circulatie ondergeschikt is aan de stromingen veroorzaakt door de M_2 en M_4 componenten van het getij. De amplitude (figuur 5.3) van M_2 is namelijk veel groter dan die van M_4 en de gravitatie circulatie. Omdat de circulatie onafhankelijk is van de tijd, speelt deze afhankelijk van de fase van de getijgolf af en toe een belangrijkere rol.

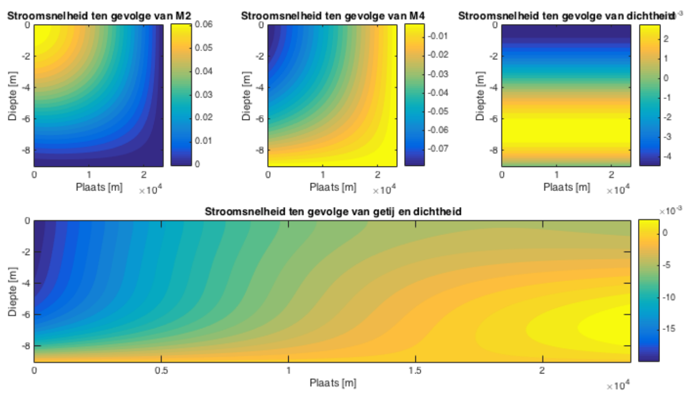
In figuur 5.4 is de waterstand in plaats en fase van de getijgolf weergegeven. Duidelijk is te zien dat in dit model de amplitude van de M_2-golf niet veel verandert afhankelijk van de plaats en dat de golf niet veel vertraging ondervindt in het bekken. Voor M_4 is te zien dat de amplitude van de golf wordt versterkt en dat deze golf ook snel door het bekken stroomt. Uit figuur 5.5 is af te lezen dat de stroomsnelheid in het zeegat zich symmetrisch gedraagt tussen de in- en uitstroom. Tot slot geeft figuur 5.6 aan dat de stroomsnelheid in het bekken geleidelijk afneemt.



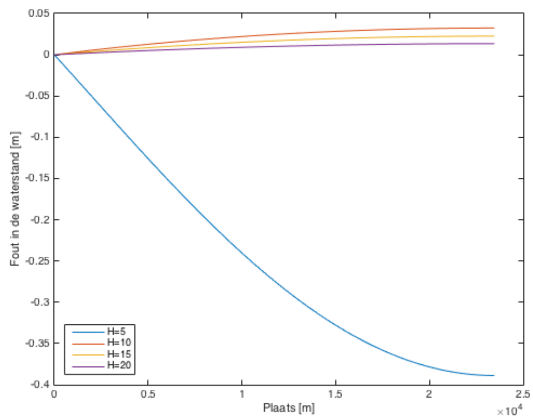
Figuur 5.4: Waterstanden [m] voor $h = 9\ [m]$



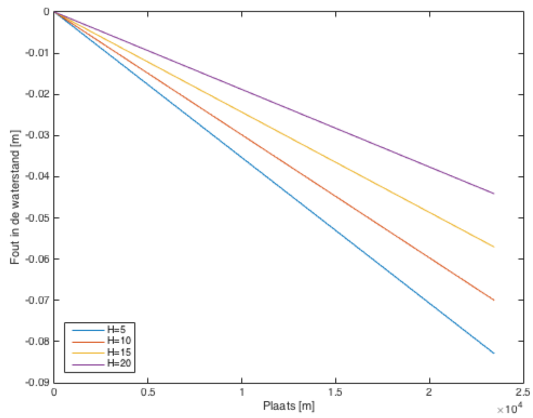
Figuur 5.5: Stroomsnelheid [m/s] voor $h = 9\ [m]$ en $x = 0\ [m]$



Figuur 5.6: Stroomsnelheid [m/s] voor $h = 9\ [m]$, $\phi_{M_2} = 0\ [rad]$



Figuur 5.7: Waterstanden $\eta^{x,0}$ analytisch versus numeriek

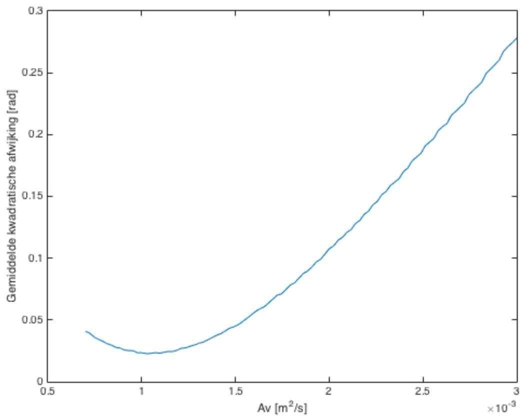


Figuur 5.8: Waterstanden η^{1} analytisch versus numeriek

Het model met een constante geometrie kent een analytische oplossing. Bij het model van een variabele geometrie is een numerieke oplossing gezocht. Als hier ook een constante geometrie wordt ingevoerd, kunnen de resultaten van $\eta^{x,0}$ en η^{1} (figuur 5.7 en 5.8) worden vergeleken. Aan deze figuren is af te lezen dat de fout afneemt naar mate de diepte toeneemt. Δx wordt niet gevarieerd omdat deze bij een niet-uniforme geometrie vastligt op basis van de gekozen parametrisatie in paragraaf 3.1. Hierbij is namelijk een Δx voorgeschreven. Daarnaast is te zien dat de fout bij $x = 0$ in alle gevallen gelijk is aan nul en toeneemt richting Harlingen. Omdat op de linkerrand de waarde voor $\eta^{x,0}$ en η^{1} is voorgeschreven, is het logisch dat de fout daar nul is.

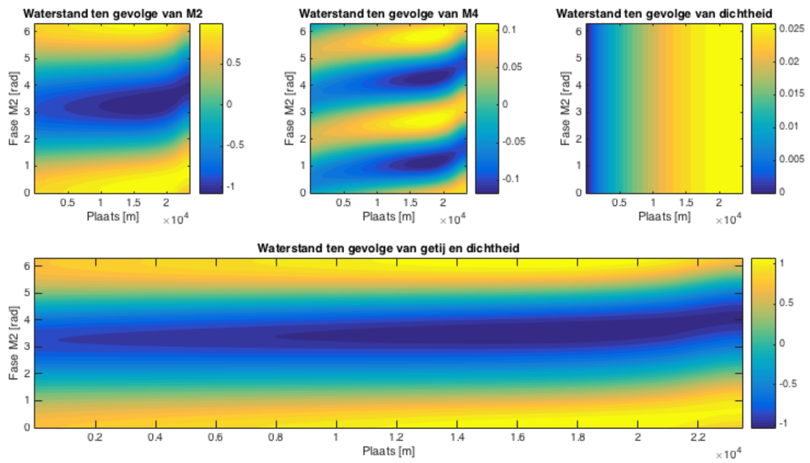
5.2.2. Niet-uniforme geometrie

Vervolgens is in het numerieke model de variabele geometrie ingevoerd. Hierbij is gebruik gemaakt van de parametrisatie die gevonden is in 3.1. Uit de berekening (zie figuur 5.10) is nu af te lezen hoe groot het faseverschil is, dat optreedt in de M_2-getijgolf tussen het zeegat en Harlingen. De pieken worden eerder bereikt bij het zeegat dan bij Harlingen. Daarnaast is zichtbaar hoe de amplitude van het getij toeneemt in het bekken. In bijlage B.2.2 is beschreven hoe deze eigenschappen afhangen van de viscositeit A_v. Op basis daarvan is gezocht naar de A_v-waarde waarbij de fase de kleinste afwijking heeft ten opzichte van de waarden uit tabel 3.1. Het verband tussen de afwijking en de gekozen A_v is in figuur 5.9 opgenomen. Hieruit volgt: $A_v = 0,0011\ [m^2/s]$.

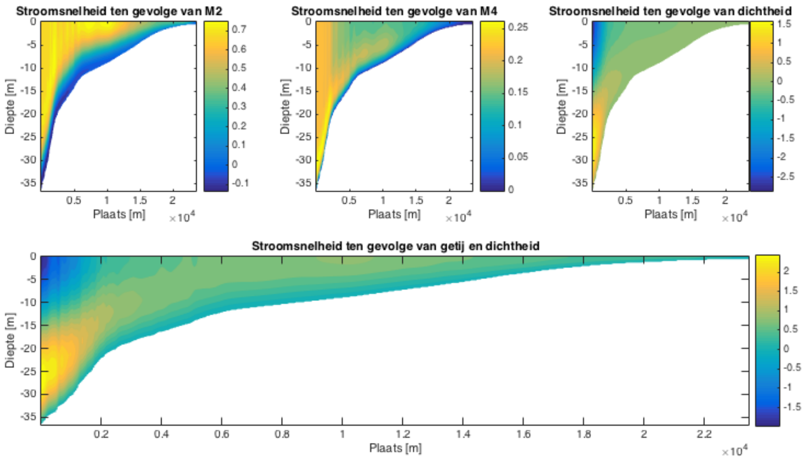


Figuur 5.9: Gemiddelde kwadratische afwijking van de fase

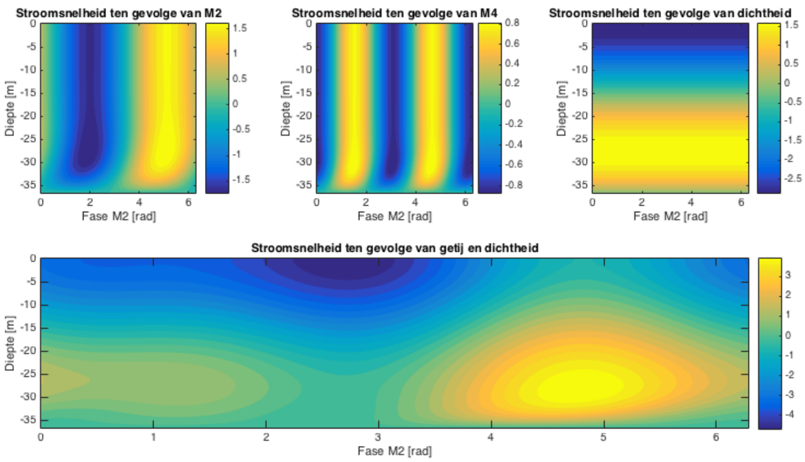
De stroomsnelheid met deze waarde voor de viscositeit is af te lezen uit de figuren 5.11 en 5.12. Hier komt duidelijk uit naar voren dat de stroomsnelheden in de opening het grootst zijn. Dit ligt ook in de lijn de verwachting omdat in een getijcyclus al het water door de monding moet. Ook de gravitatie circulatie is het grootst in de opening, omdat hier de diepte het grootst is en de circulatie schaalt met h^3. Merk op dat deze in dit model wel erg groot is, dat komt door de keuze van uniforme waarde voor A_v. In de volgende sectie zal dit probleem worden verholpen.



Figuur 5.10: Waterstanden [m] met $A_v = 0,0011\ [m^2/s]$



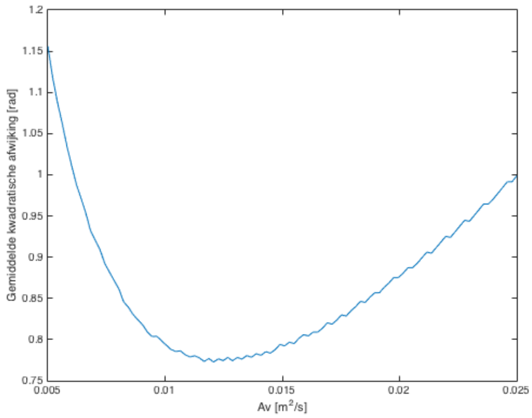
Figuur 5.11: Stroomsnelheid [m/s] met $\phi_{M_2} = 0\ [rad]$ en $A_v = 0,0011\ [m^2/s]$



Figuur 5.12: Stroomsnelheid [m/s] met $x = 0\ [m]$ en $A_v = 0,0011\ [m^2/s]$

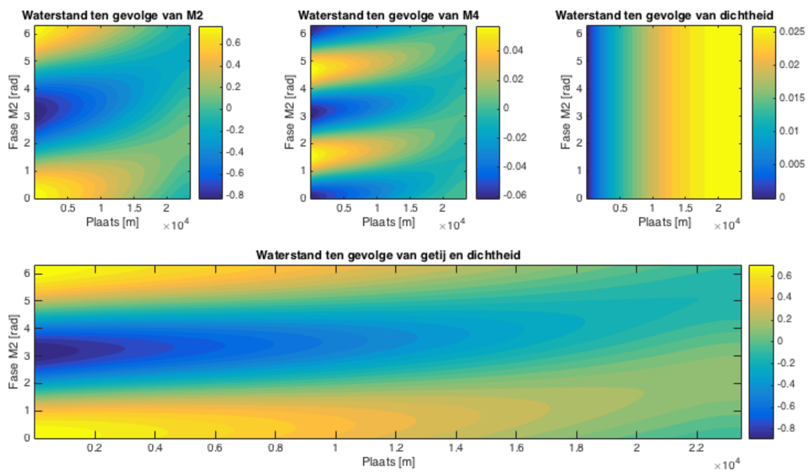
5.3. Niet-uniforme viscositeit

Tot slot wordt het probleem met niet-uniforme viscositeit bekeken.

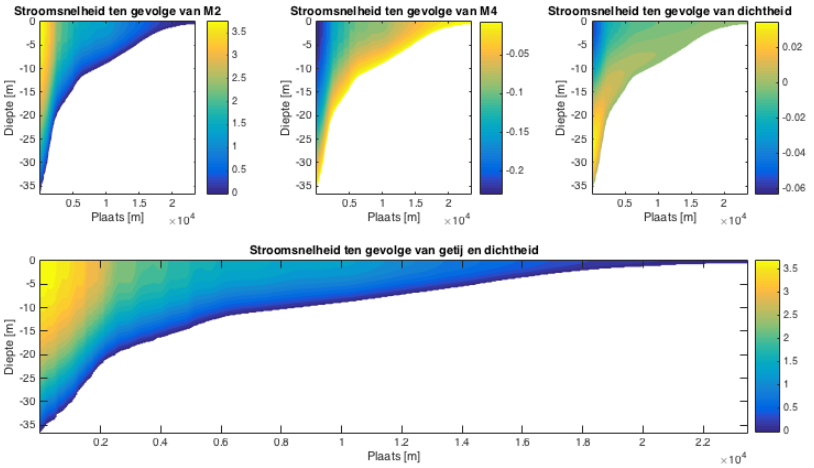


Figuur 5.13: Gemiddelde kwadratische afwijking van de fase

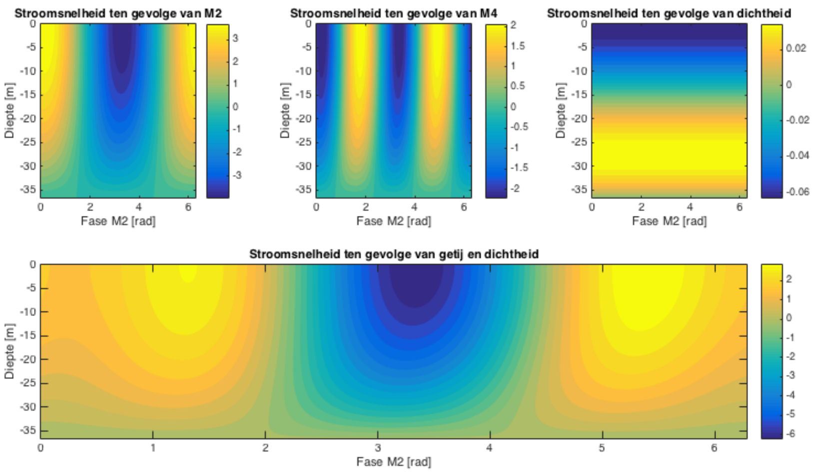
Ook nu wordt weer gezocht naar een optimale waarde voor A_{v0} zodat het faseverschil zo goed mogelijk overeenkomt met de meetwaarden. Nu wordt gevonden $A_{v0} = 0,0125\ [m^2/s]$. Opmerkelijk is dat uit figuur 5.14 nu blijkt dat de amplitude van het getij afneemt in het bekken, dit komt doordat de viscositeitswaarde erg groot is en daarmee ook de wrijving (immers was A_v ook een maat daarvoor). Uit het totale stroombeeld (figuur 5.15, 5.16 en 5.17) is nu op te maken dat het M_2-getij een duidelijk dominant effect heeft. De snelheden hiervan variëren in de monding tussen de $-3,9\ [m/s]$ en $3,7\ [m/s]$ en nemen in het bassin langzaam af. In het midden van het bassin varieert deze tussen de $-1,5\ [m/s]$ en $1,5\ [m/s]$. De M_4-stroming heeft een snelheid die varieert tussen de $-2,1\ [m/s]$ en $2,0\ [m/s]$ in de monding en is dus een factor twee kleiner dan de stroming veroorzaakt door M_2. Dit terwijl de gravitatie circulatie varieert tussen de $-0,06\ [m/s]$ en $0,04\ [m/s]$ tussen Vlieland en Terschelling, en deze nagenoeg nul is in de ondiepere gedeelten. In figuur 5.17 is op verschillende locaties en voor verschillende fases van het M_2-getij het stroomprofiel weergegeven. De blauwe lijn is de stroming door het M_2-getij, de rode door het M_4-getij en de gele de gravitatie circulatie. De paarse is vervolgens het totale stroombeeld. Hier is ook duidelijk te zien dat de stroomsnelheid afneemt in het bassin en dat M_2 en M_4 een in- en uitstroom kennen afhankelijk van de fase.



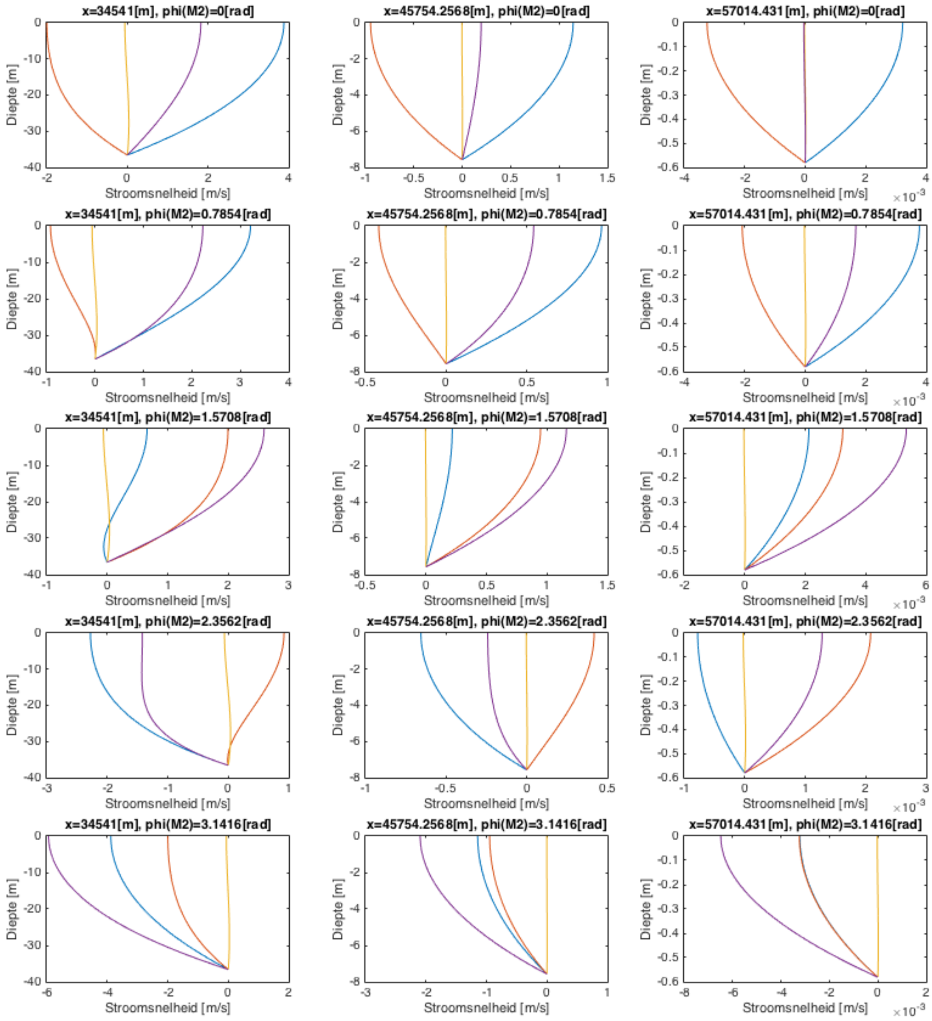
Figuur 5.14: Waterstanden [m] met $A_{v0} = 0,0125\ [m^2/s]$



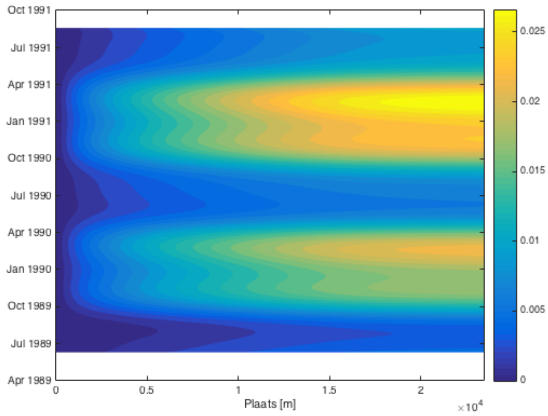
Figuur 5.15: Stroomsnelheid [m/s] met $\phi_{M_2} = 0\ [rad]$ en $A_{v0} = 0,0125\ [m^2/s]$



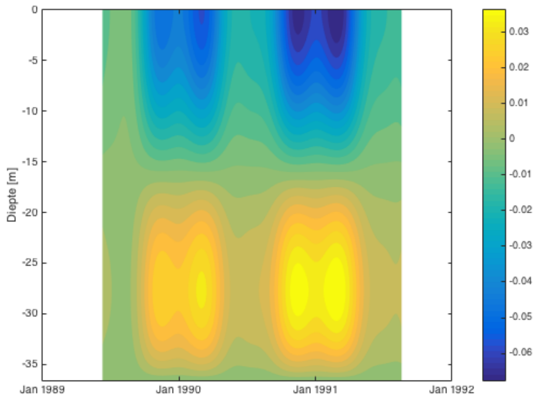
Figuur 5.16: Stroomsnelheid [m/s] met $x = 0\ [m]$ en $A_{v0} = 0,0125\ [m^2/s]$



Figuur 5.17: Stroomsnelheid [m/s] met $A_{v0} = 0,0125\ [m^2/s]$



Figuur 5.18: Waterstand [m] over het jaar met $A_{v0} = 0,0125\ [m^2/s]$



Figuur 5.19: Stroomsnelheid [m/s] over het jaar met $x = 0,\ A_{v0} = 0,0125\ [m^2/s]$

Nu de constante voor de viscositeit A_{v0} is bepaald, kan voor verschillende momenten in het seizoen de gravitatie circulatie kunnen worden berekend. Uit figuur 5.19 is nu op te maken dat deze stroming in de monding varieert tussen de $-0,09\ [m/s]$ en $0,05\ [m/s]$. Aangezien het figuur twee jaren weergeeft is duidelijk een jaarlijkse piek in de stroming te zien. Deze ligt in de winter omdat dan de dichtheidsgradiënt het grootst is. De piek is opgebouwd uit twee losse pieken, waarvan de één net voor de jaarwisseling plaatsvindt en de andere er net na. In de zomer is de stroming een factor vijf kleiner maar nog steeds aanwezig. Dit zou betekenen dat in de winter er meer sedimenttransport plaatsvindt door dit effect dan in de zomer. Tot slot is te constateren dat de circulatie gedurende het hele jaar dezelfde kant op is gericht, wat betekent dat dicht bij de bodem de stroming landinwaarts is gericht. Voor sedimenttransport zou dit betekenen dat er sediment door dit proces wordt geïmporteerd in de Waddenzee, omdat onder in de waterkolom zich meer sediment bevindt.

6 Conclusie

De vraag is hoe belangrijk de gravitatie circulatie is ten opzichte van andere stromingen (M_2, M_4 en rivierafvoer) in het Vlie-bekken en of dit een rol kan spelen bij sedimenttransport. Omdat de gravitatie circulatie wordt gedreven door dichtheidsverschillen, is in hoofdstuk 3 onderzocht hoe groot deze zijn in het Vlie-bekken. Met een temperatuur die varieert tussen de 4 $[°C]$ en 20 $[°C]$ volgt een variatie in de dichtheid van 1 à 2 $[kg/m^3]$ en een saliniteit variërende tussen de 14 $[psu]$ en 30 $[psu]$ resulteert in een variatie van 8 à 9 $[kg/m^3]$. Dit gecombineerd levert een profiel voor de dichtheid op wat varieert tussen de 1012 $[kg/m^3]$ en 1022 $[kg/m^3]$. Dit brengt dan een dichtheidsgradiënt in de langsrichting te weeg tussen de $-1 \cdot 10^{-4}$ $[kg/m^4]$ en $-4,5 \cdot 10^{-4}$ $[kg/m^4]$. Het blijkt dat deze verschillen groot genoeg zijn om gravitatie circulatie te weeg te brengen met snelheden van enkele centimeters per seconde.

Uit de resultaten behorende bij het model zonder getij (paragraaf 5.1) is gebleken dat het debiet door toedoen van de uitstroom van een rivier niet een substantieel effect heeft op de stroming in het Vlie-bekken. Dit bekken kent immers ook geen grote afvoer van een rivier. In andere bekkens zoals het Marsdiep, kan dit een belangrijkere rol spelen. Daarom is deze stroming (voor het Vlie-bekken) ook niet meegenomen in het volgende model waarbij wel naar het getij is gekeken. In het model met getij is zowel de M_2- als de M_4-term meegenomen. Zoals verwacht is de M_2-stroming een stuk groter dan de M_4-stroming en spelen zij een belangrijke rol in het gehele bekken. Deze twee termen zijn groter in de buurt van het zeegat dan bij Harlingen. Dit komt omdat al het water in het bekken wat in een getij periode naar binnen dan wel naar buiten moet, door het zeegat moet stromen.

De gravitatie circulatie blijkt kleiner te zijn dan de stroomsnelheden veroorzaakt door het M_4-getij (en daarmee dus ook M_2). Over het algemeen is de stroomsnelheid ten gevolge van verschillen in de dichtheid ongeveer 1% van de stroomsnelheid die veroorzaakt wordt door het M_2-getij. Echter moet wel opgemerkt worden dat de gravitatie circulatie constant aanwezig en nauwelijks verandert gedurende een getijperiode, terwijl het getij in zo'n zelfde periode een in- en uitstroom kent. In diepere gedeeltes wordt de circulatie snel belangrijker doordat deze schaalt met de diepte tot de derde macht. De gravitatie circulatie is zo gericht dat in het onderste deel van de waterkolom de stroming landinwaarts is gericht en bovenin zeewaarts. Doordat de concentratie sediment onderin de waterkolom lager is, zou dit betekenen dat er door toedoen van deze circulatie een netto sedimentimport plaats vindt.

Als de gevonden snelheden van de gravitatie circulatie worden vergeleken met de uitkomsten van Chernetsky et.al. [4] voor riviermondingen, is te zien dat deze dezelfde ordegrootte hebben. In dat artikel blijkt ook nog dat met deze snelheden de gravitatie circulatie een belangrijke rol speelt in het sedimenttransport. Op basis van deze constateringen is te concluderen dat deze circulatie niet direct zou mogen worden verwaarloosd.

7 Discussie

In dit onderzoek is de focus gericht op het berekenen van de gravitatie circulatie in de Waddenzee. Hiervoor zijn de dictheidsgradiënten bepaald en uitdrukkingen gezocht voor de circulatie, waarna deze ook berekend is.

Het model voor het modelleren van de waterdichtheid is niet helemaal nauwkeurig. Zo heeft de saliniteit ten opzichte van de meetwaarden een grote afwijking. Echter komen de uitkomsten wel in hetzelfde gebied terecht als het saliniteitverloop gevonden door Matute et.al. [3]. Dit model zou verbeterd kunnen worden door meer metingen te verrichten en daarop een uitgebreidere tijdreeks-analyse op toe te passen. Daarnaast zouden meer meetpunten in het bekken kunnen helpen een betere verdeling te vinden. Voor de temperatuur zijn er nu maar drie beschikbaar en de vraag is of alle extremen zo worden afgedekt.

Het opgestelde model voor de waterstromingen blijkt sterk afhankelijk te zijn van de waarde voor A_v. Aangezien deze waarde aan het begin nog niet vaststond en uit variatie blijkt dat deze een invloed heeft op zowel de amplitude van de getijgolf in het bekken als op hoe snel deze zich door het bekken voortplant, is het dus belangrijk deze waarde goed te kiezen. Dat zorgt ervoor dat de gevonden stromingen goed overeenkomen met de werkelijkheid. De bodemwrijving is nu verwerkt in de waarde voor de viscositeit A_v en de snelheid over de bodem is gelijk genomen aan nul. Door gebruikt te maken van een slip conditie op de bodem zou dit beter kunnen worden gemodelleerd en is A_v geen maat meer voor de bodemwrijving. Daarnaast kan gebruik gemaakt worden van een parabolisch profiel voor de viscositeit in de waterdiepte. Tot slot zou het model ook nog beter kunnen worden opgelost door alle termen die in het eerste orde probleem nu niet meegenomen zijn ook nog uit te rekenen. Ook zouden eventueel nog hogere orde problemen kunnen worden bekeken om de uitkomst nauwkeuriger te maken.

Verder zou gekeken kunnen worden of de parametrisatie die in paragraaf 3.1 is aangenomen ook valide is voor het berekenen van de gravitatie circulatie. Immers is deze circulatie sterk afhankelijk van de diepte en als er een onderscheid wordt gemaakt tussen de geulen en het omliggende wad, zou de gravitatie circulatie verder landinwaarts waarschijnlijk een groter effect hebben dan in het model nu is gevonden. Ook zou nog goed moeten worden gekeken hoe om te gaan met droogval. Immers als het wad droogvalt geldt niet dat de golf klein is ten opzichte van de waterdiepte. Het omgekeerde is eerder waar.

Tot slot kan dit onderzoek uitgebreid worden naar wat de gravitatie circulatie betekent voor sedimenttransport. Daarbij moet gekeken hoe de concentratie van sediment verloopt over de waterkolom. Als deze dicht bij de bodem hoger is, zal er door toedoen van de circulatie een import van sediment plaatsvinden in het Vlie-bekken. Immers is met dit onderzoek aangetoond dat de gravitatie circulatie bij de bodem altijd landinwaarts is gericht.

Bibliografie

[1] Badewien, T.H., Burchard H. (2015). Thermohaline residual circulation of the Wadden Sea. *Ocean Dynamics, 65(12),* 1717-1730. doi: 10.1007/s10236-015-0895-x

[2] Beckers, J., Cushman-Roisin, B. (2009) *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics. Physical and Numerical Aspects*. Academic Press.

[3] Boer, G.J., Duran-Matute, M., Gerkema, T., Gräwe, U. (2014). Residual circulation and freshwater transport in the Dutch Wadden Sea: a numerical modelling study. *Ocean Science, 10,* 611-632. doi: 10.5194/os-10-611-2014

[4] Chernetsky, A.S., Schuttelaars, H.M., Talke, S.A. (2010). The effect of tidal asymmetry and temporal settling lag on sediment trapping in tidal estuaries. *Ocean Dynamics, 60(5),*, 1219-1241. doi: 10.1007/s10236-010-0329-8

[5] Common Wadden Sea Secretariat. Wadden Sea World Heritage Map. Geraadpleegd op 10 mei 2015, van http://www.waddensea-worldheritage.org/node/1228

[6] Dissanayake, D.M.P.K., Ranasinghe, R., Roelvink, J.A. (2012). The morphological response of large tidal inlet/basin systems to relative sea level rise. *Climatic Change, 113(2),* 253-276. doi: 10.1007/s10584-012-0402-z

[7] Donker, J.J.A., Swart, H.E. de. (2013). Effects of bottom slope, flocculation and hindered settling on the coupled dynamics of currents and suspended sediment in highly turbid estuaries, a simple model. *Ocean Dynamics, 63(4),* 311-327. doi: 10.1007/s10236-013-0593-5

[8] Google (2016). *Google Maps.* Geraadpleegd op 21 juni 2016, van https://www.google.com/maps/

[9] MacCready P., Rockwell Geyer, W. (2013). The Estuarine Circulation. *Annual Review Fluid Mechanics, 2014(46),* 175-197. doi: 10.1146/annurev-fluid-010313-141302

[10] Maple (18.01). Waterloo. Maplesoft.

[11] MATLAB R2015a (8.5.0.197613). MathWorks

[12] Pawlowicz, R. (2010). *Rich Pawlowicz's Matlab Stuff*. Geraadpleegd op 31 mei 2016, van https://www.eoas.ubc.ca/ rich/#T_Tide

[13] Prooijen, B.C. van, Wang, Z.B. (2013). A 1D model for tides waves and fine sediment in short tidal basins—Application to the Wadden Sea. *Ocean Dynamics, 63(11),* 1233-1248. doi: 10.1007/s10236-013-0648-7

[14] Rijkswaterstaat. *live.waterbase.nl*. Geraadpleegd op 30 april 2016, van http://live.waterbase.nl/waterbase_wns.cfm?taal=nl

[15] Unesco (1983). *Algorithms for computation of fundamental properties of seawater.* Gedownload op 25 april 2016, van http://unesdoc.unesco.org/images/0005/000598/059832eb.pdf

[16] Wikipedia (2016). *Navier–Stokes equations*. Geraadpleegd op 19 april 2016, van https://en.wikipedia.org/wiki/Navier–Stokes_equations

[17] Wikipedia (2016). *Perturbation theory*. Geraadpleegd op 25 april 2016, van https://en.wikipedia.org/wiki/Perturbation_theory

[18] Wikipedia (2016). *Viscosity*. Geraadpleegd op 19 april 2016, van https://en.wikipedia.org/wiki/Viscosity

Lijst van figuren

1.1 Overzicht van de Waddenzee [5] . . . 1

2.1 Langsdoorsnede van de parametrisatie van het bekken . . . 3
2.2 Dwarsprofiel behorende bij de parametrisatie van het bekken . . . 3
2.3 Bovenaanzicht van de parametrisatie van het bekken . . . 4
2.4 Zijaanzicht van het controlevolume V . . . 7

3.1 Diepte verloop van het Vlie-bekken . . . 9
3.2 Breedte verloop van het Vlie-bekken . . . 10
3.3 Gebruikte meetpunten [8] . . . 11
3.4 Voorbeeld uitvoer t_tide (locatie Stortemelk) . . . 12
3.5 Temperatuur fit in de tijd . . . 13
3.6 Temperatuurverloop in de x-richting . . . 14
3.7 Temperatuurverloop [graden Celsius] . . . 15
3.8 Saliniteit fit in de tijd . . . 16
3.9 Saliniteitverloop in de x-richting . . . 17
3.10 Saliniteitverloop [psu] . . . 18
3.11 Verloop van de waterdichtheid $[kg/m^3]$ . . . 19
3.12 Verloop van de dichtheidsgradiënt $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ $[kg/m^4]$ . . . 20

5.1 Stroombeeld voor $h = 9$ $[m]$, $b = 28$ $[km]$ en $Q = 1$ $[m^3/s]$ . . . 27
5.2 Stroomsnelheid [m/s] voor $h = 9$ $[m]$ . . . 28
5.3 Amplitude stroomsnelheid [m/s] voor $h = 9$ $[m]$ . . . 28
5.4 Waterstanden [m] voor $h = 9$ $[m]$ . . . 29
5.5 Stroomsnelheid [m/s] voor $h = 9$ $[m]$ en $x = 0$ $[m]$ . . . 29
5.6 Stroomsnelheid [m/s] voor $h = 9$ $[m]$, $\phi_{M_2} = 0$ $[rad]$ . . . 29
5.7 Waterstanden $\eta^{x,0}$ analytisch versus numeriek . . . 30
5.8 Waterstanden η^1 analytisch versus numeriek . . . 30
5.9 Gemiddelde kwadratische afwijking van de fase . . . 31
5.10 Waterstanden [m] met $A_v = 0,0011$ $[m^2/s]$ . . . 31
5.11 Stroomsnelheid [m/s] met $\phi_{M_2} = 0$ $[rad]$ en $A_v = 0,0011$ $[m^2/s]$ . . . 32
5.12 Stroomsnelheid [m/s] met $x = 0$ $[m]$ en $A_v = 0,0011$ $[m^2/s]$ . . . 32
5.13 Gemiddelde kwadratische afwijking van de fase . . . 33
5.14 Waterstanden [m] met $A_{v0} = 0,0125$ $[m^2/s]$ . . . 33
5.15 Stroomsnelheid [m/s] met $\phi_{M_2} = 0$ $[rad]$ en $A_{v0} = 0,0125$ $[m^2/s]$ . . . 34
5.16 Stroomsnelheid [m/s] met $x = 0$ $[m]$ en $A_{v0} = 0,0125$ $[m^2/s]$ . . . 34
5.17 Stroomsnelheid [m/s] met $A_{v0} = 0,0125$ $[m^2/s]$ . . . 35
5.18 Waterstand [m] over het jaar met $A_{v0} = 0,0125$ $[m^2/s]$ . . . 36
5.19 Stroomsnelheid [m/s] over het jaar met $x = 0$, $A_{v0} = 0,0125$ $[m^2/s]$ . . . 36

A.1 Numeriek grid . . . 53

B.1 Stroombeeld voor $h = 37$ $[m]$, $b = 1309$ $[m]$ en $Q = 1$ $[m^3/s]$ . . . 61
B.2 Stroombeeld voor $h = 37$ $[m]$, $b = 1309$ $[m]$ en $Q = 1000$ $[m^3/s]$ . . . 62
B.3 Amplitude stroomsnelheid [m/s] voor $h = 37$ $[m]$ . . . 62
B.4 Waterstanden [m] met $A_v = 0,01$ $[m^2/s]$ . . . 63
B.5 Stroomsnelheid [m/s] met $\phi_{M_2} = 0$ $[rad]$ en $A_v = 0,01$ $[m^2/s]$ . . . 63
B.6 Stroomsnelheid [m/s] met $x = 0$ $[m]$ en $A_v = 0,01$ $[m^2/s]$ . . . 64
B.7 Waterstanden [m] met $A_{v0} = 0,01$ $[m^2/s]$ . . . 64

B.8 Stroomsnelheid [m/s] met $\phi_{M_2} = 0\ [rad]$ en $A_{v0} = 0,01\ [m^2/s]$ 65
B.9 Stroomsnelheid [m/s] met $x = 0\ [m]$ en $A_{v0} = 0,01\ [m^2/s]$ 65

A
Berekeningen

In deze bijlage zijn de uitgebreide berekeningen behorende bij hoofdstuk 4 te vinden.

A.1. Zonder getij

Deze berekening hoort bij het model zonder getij zoals dit wordt opgelost in sectie 4.1. Als eerst zal de oplossing worden gezocht voor het geval $\frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -g\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \Rightarrow g\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \Rightarrow g\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} z + B &= \rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \Rightarrow \frac{g\rho_0}{2} \frac{\partial \eta}{\partial x} z^2 + Bz + C &= \rho_0 A_v u. \end{aligned}$$

Met de randvoorwaarden volgt nu:

$$\begin{aligned} \rho_0 A_v \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0, \\ \Rightarrow g\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot 0 + B &= 0, \\ \Rightarrow B &= 0, \\ u|_{z=-h} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{g\rho_0}{2} \frac{\partial \eta}{\partial x} (-h)^2 + C &= 0, \\ \Rightarrow C &= -\frac{g\rho_0}{2} \frac{\partial \eta}{\partial x} h^2. \end{aligned}$$

Oftewel:

$$u = \frac{g}{2A_v} \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(z^2 - h^2\right). \tag{A.1}$$

Vervolgens kan de continuiteïtsvergelijking gebruikt worden om de onbekende gradiënt $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ weg te werken:

$$\begin{aligned}
Q &= -\int_{-h}^{0} ubdz \\
&= -\int_{-h}^{0} \frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}\left(z^2 - h^2\right) bdz \\
&= -\left[\frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}\left(\frac{1}{3}z^3 - h^2 z\right) b\right]_{-h}^{0} \\
&= \frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}\left(-\frac{1}{3}h^3 + h^3\right) b \\
&= \frac{g}{3A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x} h^3 b \\
\Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{3QA_v}{gbh^3}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$u = \frac{g}{2A_v}\frac{3QA_v}{gbh^3}\left(z^2 - h^2\right) = \frac{3Q}{2bh^3}\left(z^2 - h^2\right). \tag{A.2}$$

Vervolgens wordt gekeken naar het andere geval $Q = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= -g\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial x} + gz\frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\
\Rightarrow g\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial x} - gz\frac{\partial \rho'}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\
\Rightarrow g\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial x} z - \frac{1}{2}gz^2\frac{\partial \rho'}{\partial x} + B &= \rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z}, \\
\Rightarrow g\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}gz^3\frac{\partial \rho'}{\partial x} + Bz + C &= \rho_0 A_v u.
\end{aligned}$$

Met de randvoorwaarden volgt:

$$\begin{aligned}
\rho_0 A_v \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} &= 0, \\
\Rightarrow B &= 0, \\
u|_{z=-h} &= 0, \\
\Rightarrow g\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}gh^3\frac{\partial \rho'}{\partial x} + C &= 0, \\
\Rightarrow C &= -g\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}gh^3\frac{\partial \rho'}{\partial x}.
\end{aligned}$$

De oplossing wordt dan:

$$u = \frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}\left(z^2 - h^2\right) - \frac{g}{6\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(z^3 + h^3\right). \tag{A.3}$$

Ook nu kan met behulp van continuïteit van de waterstroom worden bepaald hoe groot $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ is:

$$\begin{aligned}
-Q &= \int_{-h}^{0} ubdz \\
&= \int_{-h}^{0} \left[\frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}\left(z^2-h^2\right) - \frac{g}{6\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(z^3+h^3\right)\right] bdz \\
&= b\left[\frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}\left(\frac{1}{3}z^3-h^2 z\right) - \frac{g}{6\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(\frac{1}{4}z^4+h^3 z\right)\right]_{-h}^{0} \\
&= -b\left[\frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}\left(-\frac{1}{3}h^3+h^3\right) - \frac{g}{6\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(\frac{1}{4}h^4-h^4\right)\right] \\
&= -b\left[\frac{g}{3A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}h^3 + \frac{g}{8\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^4\right], \\
Q &= 0, \\
\Rightarrow 0 &= b\left[\frac{g}{3A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}h^3 + \frac{g}{8\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^4\right], \\
\Rightarrow \frac{g}{3A_v}\frac{\partial \eta}{\partial x}h^3 &= -\frac{g}{8\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^4, \\
\Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{3h}{8\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Dit geeft:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{3gh}{16\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(h^2-z^2\right) - \frac{g}{6\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(z^3+h^3\right) \\
&= \frac{g}{\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left[\frac{3h}{16}\left(h^2-z^2\right) - \frac{1}{6}\left(z^3+h^3\right)\right] \\
&= \frac{g}{\rho_0 A_v}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left[\frac{1}{48}h^3 - \frac{3}{16}hz^2 - \frac{1}{6}z^3\right]. \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

A.2. Met getij

Het stelsel vergelijkingen uit sectie 4.2 moet als eerst worden geschaald. Dit gaat als volgt:

$$\begin{aligned}
\frac{U}{L}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{W}{h_0}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} + \frac{U}{L}\frac{\tilde{u}}{\tilde{b}}\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} &= 0, \\
\Rightarrow \frac{U}{L}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U}{L}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} + \frac{U}{L}\frac{\tilde{u}}{\tilde{b}}\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} &= 0, \\
\Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{b}}\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} &= 0, \\
U\omega\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{U^2}{L}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{UW}{h_0}\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{g}{L}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}}\left(A_{M2}\tilde{\eta} - h_0\tilde{z}\right) - \frac{gA_{M2}}{L}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{A_v U}{h_0^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}, \\
\Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{U}{\omega L}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U}{\omega L}\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{gh_0^2}{\omega^2 L^2 A_{M2}}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}}\left(\frac{A_{M2}}{h_0}\tilde{\eta} - \tilde{z}\right) - \frac{gA_{M2}}{\omega UL}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{A_v}{\omega h_0^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}, \\
\Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{gh_0^2}{\omega^2 L^2 A_{M2}}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}}\left(\frac{A_{M2}}{h_0}\tilde{\eta} - \tilde{z}\right) - \frac{gh_0}{\omega^2 L^2}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{A_v}{\omega h_0^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}, \\
\Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{gh_0^2}{\omega^2 L^2 A_{M2}}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}}\left(\frac{A_{M2}}{h_0}\tilde{\eta} - \tilde{z}\right) - \frac{gh_0}{\omega^2 L^2}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{A_v}{\omega h_0^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}.
\end{aligned}$$

En voor de randvoorwaarden volgt op vergelijkbare wijze:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}(\varepsilon\tilde{\eta}) &= 0,\\
W\tilde{w}(\varepsilon\tilde{\eta}) &= A_{M2}\omega\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + U\frac{A_{M2}}{L}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}},\\
\Rightarrow \tilde{w}(\varepsilon\tilde{\eta}) &= \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + \frac{A_{M2}}{h_0}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}},\\
\Rightarrow \tilde{w}(\varepsilon\tilde{\eta}) &= \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}},\\
\tilde{w}(-\tilde{h}) &= 0,\\
\tilde{u}(-\tilde{h}) &= 0,\\
Q &= h_0U\tilde{b}(1)\int_{-\tilde{h}(1)}^{\varepsilon\tilde{\eta}(1)} \tilde{u}(1,\tilde{z})d\tilde{z},\\
\Rightarrow \frac{Q}{h_0U\tilde{b}(1)} &= \int_{-\tilde{h}(1)}^{\varepsilon\tilde{\eta}(1)} \tilde{u}(1,\tilde{z})d\tilde{z},\\
\Rightarrow \frac{Q}{\omega A_{M2}L\tilde{b}(1)} &= \int_{-\tilde{h}(1)}^{\varepsilon\tilde{\eta}(1)} \tilde{u}(1,\tilde{z})d\tilde{z},\\
\tilde{\eta}(0,\tilde{t}) &= \cos(\tilde{t}) + \frac{A_{M4}}{A_{M2}}\cos(2\tilde{t}-\phi).
\end{aligned}
$$

Vervolgens wordt elke vergelijking opgedeeld in een leidende orde en eerste orde probleem en daarna terug geschaald naar de originele grootheden. Merk hierbij op dat $u^1 = \varepsilon\tilde{u}^1$, $w^1 = \varepsilon\tilde{w}^1$ en $\eta^1 = \varepsilon\tilde{\eta}^1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{b}}\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} &= 0\\
\mathcal{O}(1): \frac{\partial \tilde{u}^0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{w}^0}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{u}^0}{\tilde{b}}\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} &= 0\\
\Rightarrow \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial z} + \frac{u^0}{b}\frac{\partial b}{\partial x} &= 0\\
\mathcal{O}(\varepsilon): \varepsilon\frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial \tilde{w}^1}{\partial z} + \varepsilon\frac{\tilde{u}^1}{\tilde{b}}\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} &= 0\\
\Rightarrow \frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial w^1}{\partial z} + \frac{u^1}{b}\frac{\partial b}{\partial x} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon\tilde{w}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{gh_0^2}{\omega^2L^2A_{M2}}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}}(\varepsilon\eta - \tilde{z}) - \frac{gh_0}{\omega^2L^2}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{A_v}{\omega h_0^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}\\
\mathcal{O}(1): \frac{\partial \tilde{u}^0}{\partial \tilde{t}} &= -\frac{gh_0}{\omega^2L^2}\frac{\partial \tilde{\eta}^0}{\partial \tilde{x}} + \frac{A_v}{\omega h_0^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}^0}{\partial \tilde{z}^2}\\
\Rightarrow \frac{\partial u^0}{\partial t} &= -g\frac{\partial \eta^0}{\partial x} + A_v\frac{\partial^2 u^0}{\partial z^2}\\
\mathcal{O}(\varepsilon): \varepsilon\frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}^0\frac{\partial \tilde{u}^0}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon\tilde{w}^0\frac{\partial \tilde{u}^0}{\partial \tilde{z}} &= \frac{gh_0^2}{\omega^2L^2A_{M2}}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}}\tilde{z} - \frac{gh_0}{\omega^2L^2}\varepsilon\frac{\partial \tilde{\eta}^1}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon\frac{A_v}{\omega h_0^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}^1}{\partial \tilde{z}^2}\\
\Rightarrow \frac{\partial u^1}{\partial t} + u^0\frac{\partial u^0}{\partial x} + w^0\frac{\partial u^0}{\partial z} &= \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}z - g\frac{\partial \eta^1}{\partial x} + A_v\frac{\partial^2 u^1}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}(\varepsilon\eta) \\
&= \frac{\partial \tilde{u}(0)}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(0)}{\partial \tilde{z}^2}\varepsilon\tilde{\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \frac{\partial \tilde{u}^0(0)}{\partial \tilde{z}} + \varepsilon\frac{\partial \tilde{u}^1(0)}{\partial \tilde{z}} + \varepsilon\tilde{\eta}^0\frac{\partial^2 \tilde{u}^0(0)}{\partial \tilde{z}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}(1) : \frac{\partial \tilde{u}^0(0)}{\partial \tilde{z}} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial u^0(0)}{\partial z} &= 0 \\
\mathcal{O}(\varepsilon) : \varepsilon\frac{\partial \tilde{u}^1(0)}{\partial \tilde{z}} + \varepsilon\tilde{\eta}^0\frac{\partial^2 \tilde{u}^0(0)}{\partial \tilde{z}^2} &= 0 \\
\Rightarrow \varepsilon\frac{\partial \tilde{u}^1(0)}{\partial \tilde{z}} + \varepsilon\tilde{\eta}^0\frac{\partial^2 \tilde{u}^0(0)}{\partial \tilde{z}^2} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial u^1(0)}{\partial z} + \varepsilon\frac{h_0}{A_{M2}}\eta^0\frac{\partial^2 u^0(0)}{\partial z^2} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial u^1(0)}{\partial z} + \eta^0\frac{\partial^2 u^0(0)}{\partial z^2} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{w}(\varepsilon\tilde{\eta}) &= \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} \\
\Rightarrow \tilde{w}^0(0) + \varepsilon\tilde{w}^1(0) + \varepsilon\eta^0\frac{\partial \tilde{w}^0(0)}{\partial \tilde{z}} &= \frac{\partial \tilde{\eta}^0}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\frac{\partial \tilde{\eta}^1}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}^0\frac{\partial \tilde{\eta}^0}{\partial \tilde{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
\mathcal{O}(1) : \tilde{w}^0(0) &= \frac{\partial \tilde{\eta}^0}{\partial \tilde{t}} \\
\Rightarrow w^0(0) &= \frac{\partial \eta^0}{\partial t} \\
\mathcal{O}(\varepsilon) : \varepsilon\tilde{w}^1(0) + \varepsilon\eta^0\frac{\partial \tilde{w}^0(0)}{\partial \tilde{z}} &= \varepsilon\frac{\partial \tilde{\eta}^1}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\tilde{u}^0\frac{\partial \tilde{\eta}^0}{\partial \tilde{x}} \\
\Rightarrow \frac{1}{W}w^1 + \frac{h_0}{W}\frac{A_{M2}}{h_0}\frac{\eta^0}{A_{M2}}\frac{\partial w^0(0)}{\partial z} &= \frac{1}{A_{M2}\omega}\frac{\partial \eta^1}{\partial t} + \frac{A_{M2}}{h_0}\frac{L}{A_{M2}U}u^0\frac{\partial \eta^0}{\partial x} \\
\Rightarrow w^1(0) + \eta^0\frac{\partial w^0(0)}{\partial z} &= \frac{\partial \eta^1}{\partial t} + u^0\frac{\partial \eta^0}{\partial x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{w}(-\tilde{H}) &= 0 \\
\mathcal{O}(1) : w^0(-H) &= 0 \\
\mathcal{O}(\varepsilon) : w^1(-H) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(-\tilde{H}) &= 0 \\
\mathcal{O}(1) : u^0(-H) &= 0 \\
\mathcal{O}(\varepsilon) : u^1(-H) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{Q}{\omega A_{M2} L\tilde{b}(1)} &= \int_{-\tilde{h}(1)}^{\varepsilon\tilde{\eta}(1)} \tilde{u}(1,\tilde{z}) d\tilde{z} \\
&= \int_{-\tilde{h}(1)}^{0} \tilde{u}(1,\tilde{z}) d\tilde{z} + \int_{0}^{\varepsilon\tilde{\eta}(1)} \tilde{u}(1,0) + \frac{\partial \tilde{u}(1,0)}{\partial \tilde{z}} \tilde{z} + \mathcal{O}(\tilde{z}^2) d\tilde{z} \\
&= \int_{-\tilde{h}(1)}^{0} \tilde{u}(1,\tilde{z}) d\tilde{z} + \left[\tilde{u}(1,0)\tilde{z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(1,0)}{\partial \tilde{z}} \tilde{z}^2 + \mathcal{O}(\tilde{z}^3) \right]_0^{\varepsilon\tilde{\eta}(1)} \\
&= \int_{-\tilde{h}(1)}^{0} \tilde{u}(1,\tilde{z}) d\tilde{z} + \varepsilon \tilde{u}(1,0)\tilde{\eta}(1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \int_{-\tilde{h}(1)}^{0} \tilde{u}^0(1,\tilde{z}) d\tilde{z} + \int_{-\tilde{h}(1)}^{0} \varepsilon \tilde{u}^1(1,\tilde{z}) d\tilde{z} + \varepsilon \tilde{u}^0(1,0)\tilde{\eta}^0(1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
\mathcal{O}(1) : 0 &= \int_{-\tilde{h}(1)}^{0} \tilde{u}^0(1,\tilde{z}) d\tilde{z} \\
\Rightarrow 0 &= \int_{-H}^{0} u^0(L,z) dz \\
\mathcal{O}(\varepsilon) : 0 &= \int_{-\tilde{h}(1)}^{0} \varepsilon \tilde{u}^1(1,\tilde{z}) d\tilde{z} + \varepsilon \tilde{u}^0(1,0)\tilde{\eta}^0(1) \\
0 &= \int_{-h}^{0} u^1(L,z) dz + u^0(L,0)\eta^0(L)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\eta}(0,\tilde{t}) &= \cos(\tilde{t}) + \frac{A_{M4}}{A_{M2}} \cos(2\tilde{t} - \phi) \\
\mathcal{O}(1) : \eta^0(0,t) &= A_{M2} \cos(\omega t) \\
\mathcal{O}(\varepsilon) : \eta^1(0,t) &= A_{M4} \cos(2\omega t - \phi)
\end{aligned}
$$

A.2.1. Leidende orde probleem

Voor het leidende orde probleem blijft het volgende stelsel onafhankelijk van t over:

$$\frac{\partial u^{xz,0}}{\partial x} + \frac{\partial w^{xz,0}}{\partial z} + \frac{u^{xz,0}}{b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \tag{A.5}$$

$$i\omega u^{xz,0} = -g \frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial \tilde{x}} + A_v \frac{\partial^2 u^{xz,0}}{\partial z^2} \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial u^{xz,0}(0)}{\partial z} = 0, \tag{A.7}$$

$$w^{xz,0}(0) = i\omega \eta^{x,0}, \tag{A.8}$$

$$w^{xz,0}(-h) = 0, \tag{A.9}$$

$$u^{xz,0}(-h) = 0, \tag{A.10}$$

$$0 = \int_{-h}^{0} u^{xz,0}(L,z) dz, \tag{A.11}$$

$$\eta^{x,0}(0,t) = A_{M2}. \tag{A.12}$$

Vanuit vergelijking A.6 wordt verder gewerkt. Bij deze oplossing wordt gebruik gemaakt van de volgende variabele: $\lambda^2 = \frac{i\omega}{A_v}$.

$$
\begin{aligned}
i\omega u^{xz,0} &= -g\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 u^{xz,0}}{\partial z^2},\\
\frac{\partial^2 u^{xz,0}}{\partial z^2} - \frac{i\omega}{A_v}u^{xz,0} &= \frac{g}{A_v}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x},\\
u^{xz,0}_{hom} &= A\cosh(\lambda z) + B\sinh(\lambda z),\\
u^{xz,0}_{part} &= \frac{-g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x},\\
u^{xz,0} &= A\cosh(\lambda z) + B\sinh(\lambda z) - \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x},\\
\frac{\partial u^{xz,0}}{\partial z}(0) &= B\lambda = 0,\\
u^{xz,0}(-H) = 0 &= A\cosh(\lambda H) - \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x},\\
A &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\frac{1}{\cosh(\lambda H)},\\
u^{xz,0} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda H)} - 1\right].
\end{aligned}
$$

Deze oplossing wordt gebruikt om met behulp van de continuïteitsvergelijking A.5 een uitdrukking voor $w^{xz,0}$ te vinden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u^{xz,0}}{\partial x} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda H)} - 1\right] - \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda H)^2}\sinh(\lambda H)\lambda\frac{\partial H}{\partial x}\right],\\
\frac{\partial w^{xz,0}}{\partial z} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda H)^2}\sinh(\lambda H)\lambda\frac{\partial H}{\partial x}\right] - \frac{g}{i\omega}\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda H)} - 1\right]\\
&\quad - \frac{g}{i\omega b}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda H)} - 1\right],\\
\int_{-h}^{z}\frac{\partial w^{xz,0}}{\partial z}dz &= w^{xz,0}(z) - w^{xz,0}(-h) = w^{xz,0},\\
&= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda z)+\sinh(\lambda h)}{\cosh(\lambda h)^2}\sinh(\lambda h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]\\
&\quad - \frac{g}{i\omega}\left[\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\right]\left[\frac{\sinh(\lambda z)+\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - (z+h)\right].
\end{aligned}
$$

Met de tweede randvoorwaarde voor $w^{xz,0}$ volgt vervolgens de ontbrekende differentiaalvergelijking om $\eta^{x,0}$ te kunnen bepalen:

$$
\begin{aligned}
i\omega\eta^{x,0} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)^2}{\cosh(\lambda h)^2}\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{g}{i\omega}\left[\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\right]\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right]\\
&= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)^2}{\cosh(\lambda h)^2}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right]\right] - \frac{g}{i\omega}\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda H)} - h\right]. \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}
$$

De randvoorwaarden bij dit probleem zijn:

$$
\begin{aligned}
\eta^{x,0}(0) &= A_{M2}, \\
0 &= \int_{-h}^{0} u^{xz,0}(L,z)dz \\
&= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}(L)\int_{-h}^{0}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)} - 1\right]dz \\
&= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}(L)\left[\frac{\sinh(\lambda z)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - z\right]_{-h}^{0} \\
&= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}(L)\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right], \\
\Rightarrow \frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}(L) &= 0.
\end{aligned}
$$

Uniforme geometrie

De differentiaalvergelijking (A.13) die voor $\eta^{x,0}$ is gevonden, is niet makkelijk analytisch op te lossen. Echter als de aanname wordt gedaan dat de breedte en diepte niet variëren, kan deze worden versimpeld en is een analytische oplossing mogelijk.

Er geldt dan: $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial b}{\partial x} = 0$ en in combinatie met de definitie van $\mu^2 = \frac{\omega^2}{g}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right]^{-1}$, wordt de volgende oplossing gevonden:

$$
\begin{aligned}
\mu^2\eta^{x,0} &= \frac{\partial^2\eta^{x,0}}{\partial x^2}, \\
\Rightarrow \eta^{x,0} &= C\cosh(\mu x) + D\sinh(\mu x), \\
\eta^{x,0}(0) &= A_{M2}, \\
C &= A_{M2}, \\
\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x} &= A_{M2}\mu\sinh(\mu x) + D\mu\cosh(\mu x), \\
u^{xz,0} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)} - 1\right] \\
&= \frac{g}{i\omega}\left(A_{M2}\mu\sinh(\mu x) + D\mu\cosh(\mu x)\right)\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)} - 1\right], \\
0 &= \int_{-h}^{0} u^{xz,0}(L,z)dz \\
&= \frac{g}{i\omega}\left(A_{M2}\mu\sinh(\mu L) + D\mu\cosh(\mu L)\right)\int_{-h}^{0}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)} - 1\right]dz \\
&= \frac{g}{i\omega}\left(A_{M2}\mu\sinh(\mu L) + D\mu\cosh(\mu L)\right)\left[\frac{\sinh(\lambda z)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - z\right]_{-h}^{0} \\
&= \frac{g}{i\omega}\left(A_{M2}\mu\sinh(\mu L) + D\mu\cosh(\mu L)\right)\left[-\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right], \\
\Rightarrow 0 &= A_{M2}\sinh(\mu L) + D\cosh(\mu L), \\
\Rightarrow D &= -A_{M2}\frac{\sinh(\mu L)}{\cosh(\mu L)}.
\end{aligned}
$$

De oplossingen zijn daarmee gelijk aan:

$$
\begin{aligned}
u^0 &= \Re\left(e^{i\omega t}\frac{gA_{M2}\mu}{i\omega}\left(\sinh(\mu x) - \cosh(\mu x)\frac{\sinh(\mu L)}{\cosh(\mu L)}\right)\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda H)} - 1\right]\right),\\
w^0 &= \Re\left(e^{i\omega t}\frac{g\mu A_{M2}\mu}{i\omega}\left[\sinh(\mu x)\frac{\sinh(\mu L)}{\cosh(\mu L)} - \cosh(\mu x)\right]\left[\frac{\sinh(\lambda z) + \sinh(\lambda H)}{\lambda\cosh(\lambda H)} - (z+H)\right]\right),\\
\eta^0 &= \Re\left(e^{i\omega t}A_{M2}\left[\cosh(\mu x) - \sinh(\mu x)\frac{\sinh(\mu L)}{\cosh(\mu L)}\right]\right).
\end{aligned}
$$

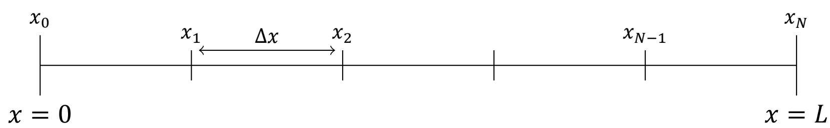
Niet-uniforme geometrie
Als de geometrie niet-uniform wordt verondersteld moet de oplossing van $\eta^{x,0}$ numeriek worden gevonden. Als eerst wordt de vergelijking geschreven als:

$$\eta^{x,0} + A(x)\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x} + B(x)\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2} = 0, \tag{A.14}$$

waarbij geldt:

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{g}{\omega^2}\left[\frac{\sinh(\lambda h)^2}{\cosh(\lambda h)^2}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right]\right],\\
B(x) &= -\frac{g}{\omega^2}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda H)} - h\right].
\end{aligned}
$$

Vervolgens wordt een numeriek grid gedefinieerd met afstand Δx tussen de punten (zie figuur A.1). Op $x = 0$ is punt 0 gesitueerd en op $x = L$ punt N. De oplossing moet berekend worden voor de punten 1 tot en met N. Vervolgens worden eindige differenties gebruikt om de differentiaalvergelijking te discretiseren voor de interne punten (hierbij is x_i de x-coördinaat van het i-de punt):



Figuur A.1: Numeriek grid

$$\eta_i^{x,0} + A(x_i)\frac{\eta_{i+1}^{x,0} - \eta_{i-1}^{x,0}}{2\Delta x} + B(x_i)\frac{\eta_{i+1}^{x,0} - 2\eta_i^{x,0} + \eta_{i-1}^{x,0}}{\Delta x^2} = 0. \tag{A.15}$$

Omdat hierbij centrale differenties zijn gebruikt betekent dat de fout gelijk is aan $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. De randvoorwaarden op $x = 0$ is gegeven door $\eta^{x,0} = A_{M_2}$. Dan volgt voor de discretisatie van punt 1:

$$\eta_1^{x,0} + A(x_1)\frac{\eta_2^{x,0}}{2\Delta x} + B(x_1)\frac{\eta_2^{x,0} - 2\eta_1^{x,0}}{\Delta x^2} = A(x_1)\frac{A_{M_2}}{2\Delta x} - B(x_1)\frac{A_{M_2}}{\Delta x^2}. \tag{A.16}$$

Met de randvoorwaarden voor $x = L$: $\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x} = 0$ wordt het volgende gevonden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\eta_{N+1}^{x,0} - \eta_{N-1}^{x,0}}{2\Delta x} &= 0,\\
\Rightarrow \eta_{N+1}^{x,0} &= \eta_{N-1}^{x,0},\\
\Rightarrow \eta_N^{x,0} + B(x_N)\frac{2\eta_{N-1}^{x,0} - 2\eta_N^{x,0}}{\Delta x^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.17}
$$

Ook dit is met een centrale differentie uitgewerkt. Dit betekent dat het gehele numerieke schema een nauwkeurigheid heeft van $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Tot slot kan dit probleem in matrix-vector notatie worden gezet, waarbij I_N de $N \times N$ identiteitsmatrix is:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & A(x_1) & & & \\ -A(x_2) & 0 & A(x_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -A(x_{N-1}) & 0 & A(x_{N-1}) \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.18}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2B(x_1) & B(x_1) & & & \\ B(x_2) & -2B(x_2) & B(x_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B(x_{N-1}) & -2B(x_{N-1}) & B(x_{N-1}) \\ & & & 2B(x_N) & -2B(x_N) \end{bmatrix}, \tag{A.19}$$

$$\boldsymbol{\eta}^{x,0} = \left[\eta_1^{x,0} \quad \eta_2^{x,0} \quad \dots \quad \eta_N^{x,0}\right]^T, \tag{A.20}$$

$$\mathbf{b} = \left[A(x_1)\tfrac{A_{M_2}}{2\Delta x} - B(x_1)\tfrac{A_{M_2}}{\Delta x^2} \quad 0 \quad \dots \quad 0\right]^T, \tag{A.21}$$

$$\left(I_N + \frac{1}{2\Delta x}A_1 + \frac{1}{\Delta x^2}A_2\right)\boldsymbol{\eta}^{x,0} = \mathbf{b}. \tag{A.22}$$

Met behulp van Matlab kan dit stelsel nu worden opgelost. Daarvoor moeten echter wel de termen $A(x_i)$ en $B(x_i)$ worden berekend. Dit betekent dat breedte en diepte ook gedifferentieerd moeten worden naar x. Voor het gemak zal dit gedaan worden met een voorwaartse differentie: $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1}-h_i}{\Delta x}$ voor de breedte wordt ook een voorwaartse differentie gebruikt. Tot slot moet voor het bereken van de horizontale snelheid de gradiënt: $\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}$ worden bepaald. Ook dit zal met behulp van een voorwaartse differentie worden uitgevoerd: $\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x} = \frac{\eta_{i+1}^{x,0}-\eta_i^{x,0}}{\Delta x}$.

A.2.2. Eerste orde probleem

Bij het probleem dat gedreven wordt door dichtheidsverschillen, geldt het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial w^1}{\partial z} + \frac{u^1}{b}\frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}z - g\frac{\partial \eta^1}{\partial x} + A_v\frac{\partial^2 u^1}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial u^1(0)}{\partial z} &= 0, \\ w^1(0) &= 0, \\ w^1(-h) &= 0, \\ u^1(-h) &= 0, \\ 0 &= \int_{-h}^{0} u^1(L,z)dz, \\ \eta^1(0,t) &= 0. \end{aligned}$$

Vervolgens kan er worden gezocht naar een oplossing:

$$
\begin{aligned}
u^1 &= \frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}z^2 - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}z^3 + Az + B,\\
\frac{\partial u^1(0)}{\partial z} &= A = 0,\\
u^1(-h) &= 0,\\
\Rightarrow 0 &= \frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}h^2 + \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^3 + B,\\
\Rightarrow B &= -\frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}h^2 - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^3,\\
u^1 &= \frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}\left(z^2 - h^2\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(z^3 + h^3\right).
\end{aligned}
$$

Hiermee kan met behulp van de continuïteitsvergelijking de differentiaalvergelijking voor η^1 worden bepaald:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u^1}{\partial x} &= \frac{g}{2A_v}\frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x^2}\left(z^2 - h^2\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}\left(z^3 + h^3\right) - \frac{g}{A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}h\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^2\frac{\partial h}{\partial x},\\
\frac{\partial w^1}{\partial z} &= -\frac{u^1}{b}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{g}{2A_v}\frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x^2}\left(z^2 - h^2\right) + \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}\left(z^3 + h^3\right)\\
&\quad + \frac{g}{A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}h\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^2\frac{\partial h}{\partial x},\\
\int_{-h}^{0}\frac{\partial w^1}{\partial z}dz &= w^1(0) - w^1(-H) = 0,\\
\Rightarrow 0 &= \Bigg[-\left[\frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}\left(\frac{1}{3}z^3 - zh^2\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(\frac{1}{4}z^4 + h^3 z\right)\right]\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\\
&\quad - \frac{g}{2A_v}\frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3}z^3 - zh^2\right) + \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}\left(\frac{1}{4}z^4 + zh^3\right)\\
&\quad + \frac{g}{A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}h\frac{\partial h}{\partial x}z + \frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^2\frac{\partial h}{\partial x}z\Bigg]_{-h}^{0},\\
&= \left[\frac{g}{3A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}h^3 + \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^4\right]\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{g}{3A_v}\frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x^2}h^3 + \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}h^4\\
&\quad + \frac{g}{A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}h^2\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^3\frac{\partial h}{\partial x},\\
&= \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}h^4 + \frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^3\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^4\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\\
&\quad + \left[\frac{g}{A_v}h^2\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{3A_v}h^3\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\right]\frac{\partial \eta^1}{\partial x} + \frac{g}{3A_v}\frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x^2}h^3.
\end{aligned}
$$

De randvoorwaarden bij dit probleem worden gegeven door:

$$
\begin{aligned}
\eta^1(0) &= 0, \\
0 &= \int_{-h}^{0} u^1(L,z)dz \\
&= \int_{-h}^{0} \frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}(L)\left(z^2-h^2\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(z^3+h^3\right)dz \\
&= \left[\frac{g}{2A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}(L)\left(\frac{1}{3}z^3-h^2z\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(\frac{1}{4}z^4+h^3z\right)\right]_{-h}^{0}, \\
\Rightarrow \frac{g}{3A_v}\frac{\partial \eta^1}{\partial x}(L) &= -\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h, \\
\Rightarrow \frac{\partial \eta^1}{\partial x}(L) &= -\frac{3}{8\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h.
\end{aligned}
$$

Uniforme geometrie

Vervolgens wordt weer een analytische uitdrukking gezocht voor het geval dat $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial b}{\partial x} = 0$. Dan volgt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}h^4 + \frac{g}{3A_v}\frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x^2}h^3, \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x^2} &= -\frac{3}{8\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}h, \\
\Rightarrow \frac{\partial \eta^1}{\partial x} &= -\frac{3}{8\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h + C, \\
\Rightarrow \eta^1 &= -\frac{3}{8\rho_0}\rho'(x)h + Cx + D, \\
\eta^1(0) = 0 &= -\frac{3}{8\rho_0}\rho'(0)h + D, \\
\Rightarrow D &= \frac{3}{8\rho_0}\rho'(0)h, \\
u^1 &= \frac{g}{2A_v}\left[-\frac{3}{8\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h + C\right]\left(z^2-h^2\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(z^3+h^3\right), \\
&= -\frac{3g}{16A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}H\left(z^2-h^2\right) + \frac{gC}{2A_v}\left(z^2-h^2\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(z^3+h^3\right), \\
\int_{-h}^{0} u^1 dz &= 0 \\
&= \left[-\frac{3g}{16A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h\left(\frac{1}{3}z^3-zh^2\right) + \frac{gC}{2A_v}\left(\frac{1}{3}z^3-zh^2\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(\frac{1}{4}z^4+zh^3\right)\right]_{-h}^{0} \\
&= \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^4 - \frac{gC}{3A_v}h^3 - \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}h^4 \\
&= -\frac{gC}{3A_v}h^3, \\
\Rightarrow C &= 0, \\
u^1 &= -\frac{3g}{16A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(hz^2-h^3\right) - \frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left(z^3+h^3\right) \\
&= \frac{g}{A_v\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x}\left[\frac{1}{48}h^3 - \frac{3}{16}hz^2 - \frac{1}{6}z^3\right].
\end{aligned}
$$

Deze uitdrukking is gelijk aan deze gevonden in het model zonder getij (sectie A.1).

Niet-uniforme geometrie
Met een niet-constante breedte en diepte wordt het lastig een analytische uitdrukking te vinden. Daarom wordt ook nu weer voor een numerieke aanpak gekozen. Er wordt gekozen om met hetzelfde grid als in figuur A.1 te werken. De differentiaalvergelijking kan als volgt worden geschreven:

$$\begin{aligned}
C(x) &= \frac{g}{A_v}h^2\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{3A_v}h^3\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}, \\
D(x) &= \frac{g}{3A_v}h^3, \\
E(x) &= -\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}h^4 - \frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^3\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^4\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$C(x)\frac{\partial\eta^1}{\partial x} + D(x)\frac{\partial^2\eta^1}{\partial x^2} = E(x).$$

Welke dan als volgt gediscrediteerd kan worden voor de interne punten:

$$C(x_i)\frac{\eta^1_{i+1} - \eta^1_{i-1}}{2\Delta x} + D(x_i)\frac{\eta^1_{i+1} - 2\eta^1_i + \eta^1_{i-1}}{\Delta x^2} = E(x_i). \tag{A.23}$$

Voor de randvoorwaarde bij $x = 0$ volgt ($\eta^1 = 0$):

$$C(x_1)\frac{\eta^1_2}{2\Delta x} + D(x_1)\frac{\eta^1_2 - 2\eta^1_1}{\Delta x^2} = E(x_1). \tag{A.24}$$

En voor $x = L$ volgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\eta^1}{\partial x}(L) &= -\frac{3}{8\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h, \\
\Rightarrow \frac{\eta^1_{N+1} - \eta^1_{N-1}}{2\Delta x} &= -\frac{3}{8\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h, \\
\Rightarrow \eta^1_{N+1} &= \eta^1_{N-1} - \Delta x\frac{3}{4\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D(x_N)\frac{2\eta^1_{N-1} - 2\eta^1_N}{\Delta x^2} = E(x_N) + C(x_N)\frac{3}{8\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h + D(x_N)\frac{1}{\Delta x}\frac{3}{4\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h. \tag{A.25}$$

Ook dit probleem is benaderd met centrale differenties en heeft daarom een numerieke fout van $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.
Nu kunnen deze vergelijkingen samengevat worden in een matrix-vector notatie:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & C(x_1) & & & \\ -C(x_2) & 0 & C(x_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -C(x_{N-1}) & 0 & C(x_{N-1}) \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.26}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -2D(x_1) & D(x_1) & & & \\ D(x_2) & -2D(x_2) & D(x_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & D(x_{N-1}) & -2D(x_{N-1}) & D(x_{N-1}) \\ & & & 2D(x_N) & -2D(x_N) \end{bmatrix}, \tag{A.27}$$

$$\boldsymbol{\eta}^1 = \begin{bmatrix} \eta^1_1 & \eta^1_2 & \dots & \eta^1_N \end{bmatrix}^T, \tag{A.28}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} E(x_1) & E(x_2) & \dots & E(x_N) \end{bmatrix}^T, \tag{A.29}$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & C(x_N)\frac{3}{8\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h + D(x_N)\frac{1}{\Delta x}\frac{3}{4\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h \end{bmatrix}^T, \tag{A.30}$$

$$\left(\frac{1}{2\Delta x}B_1 + \frac{1}{\Delta x^2}B_2\right)\boldsymbol{\eta}^1 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2. \tag{A.31}$$

Het oplossen van dit systeem en het berekenen van de stroomsnelheid zal nu net zo gebeuren als in het leidende orde probleem.

A.2.3. Niet-uniforme viscositeit

In het probleem met niet-uniforme viscositeit verandert qua oplossingstechniek niks. Alleen komen er nu extra termen bij omdat A_v nu ook afhankelijk is van x. Daarvoor worden nu eerst een paar termen berekend:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_v}{\partial x} &= \frac{A_{v0}}{h_0}\frac{\partial h}{\partial x},\\
\lambda &= \sqrt{\frac{i\omega}{A_v}},\\
\frac{\partial \lambda}{\partial x} &= \frac{-i\omega}{2\sqrt{\frac{i\omega}{A_v}}}\frac{1}{A_v^2}\frac{\partial A_v}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

Leidende orde probleem

Als eerst wordt weer naar het leidende orde probleem gekeken.

$$
\begin{aligned}
u^{xz,0} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)} - 1\right],\\
\frac{\partial u^{xz,0}}{\partial x} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)} - 1\right]\\
&\quad + \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)}\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)^2}\sinh(\lambda h)\left(\lambda\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}h\right)\right],\\
\frac{\partial w^{xz,0}}{\partial z} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)^2}\sinh(\lambda h)\left(\lambda\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}h\right) - \frac{\sinh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right]\\
&\quad - \frac{g}{i\omega}\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)} - 1\right] - \frac{g}{i\omega b}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda h)} - 1\right],\\
w^{xz,0} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda z) + \sinh(\lambda h)}{\cosh(\lambda h)^2}\sinh(\lambda h)\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{h}{\lambda}\right) - \frac{\cosh(\lambda z) - \cosh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right]\\
&\quad - \frac{g}{i\omega}\left[\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\right]\left[\frac{\sinh(\lambda z) + \sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - (z+h)\right],\\
i\omega\eta^{x,0} &= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)^2}{\cosh(\lambda h)^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{h}{\lambda}\right) - \frac{1 - \cosh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right]\\
&\quad - \frac{g}{i\omega}\left[\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\right]\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right]\\
&= \frac{g}{i\omega}\frac{\partial \eta^{x,0}}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)^2}{\cosh(\lambda h)^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{h}{\lambda}\right) - \frac{1 - \cosh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right]\right] - \frac{g}{i\omega}\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right].
\end{aligned}
$$

Dit betekent dat de numerieke oplosmethode gelijk blijft behalve dan dat nu geldt:

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{g}{\omega^2}\left[\frac{\sinh(\lambda h)^2}{\cosh(\lambda h)^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{h}{\lambda}\right) - \frac{1 - \cosh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)}\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right]\right],\\
B(x) &= -\frac{g}{\omega^2}\frac{\partial^2 \eta^{x,0}}{\partial x^2}\left[\frac{\sinh(\lambda h)}{\lambda\cosh(\lambda h)} - h\right].
\end{aligned}
$$

Eerste orde probleem
Dit proces wordt vervolgens herhaald voor het eerste orde probleem.

$$
\begin{aligned}
u^1 &= \frac{g}{2A_v}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}\left(z^2-h^2\right)-\frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}\left(z^3+h^3\right),\\
\frac{\partial u^1}{\partial x} &= \left[-\frac{g}{2A_v^2}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}+\frac{g}{2A_v}\frac{\partial^2\eta^1}{\partial x^2}\right]\left(z^2-h^2\right)-\frac{g}{A_v}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}h\frac{\partial h}{\partial x}\\
&\quad-\left[-\frac{g}{6A_v^2\rho_0}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\rho'}{\partial x}+\frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}\right]\left(z^3+h^3\right)-\frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^2\frac{\partial h}{\partial x},\\
\frac{\partial w^1}{\partial z} &= -\frac{u^1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}+\left[\frac{g}{2A_v^2}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}-\frac{g}{2A_v}\frac{\partial^2\eta^1}{\partial x^2}\right]\left(z^2-h^2\right)+\frac{g}{A_v}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}h\frac{\partial h}{\partial x}\\
&\quad+\left[\frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}-\frac{g}{6A_v^2\rho_0}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\rho'}{\partial x}\right]\left(z^3+h^3\right)+\frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^2\frac{\partial h}{\partial x}\\
&= -\left[\frac{g}{2A_v}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}\left(z^2-h^2\right)-\frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}\left(z^3+h^3\right)\right]\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\\
&\quad+\left[\frac{g}{2A_v^2}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}-\frac{g}{2A_v}\frac{\partial^2\eta^1}{\partial x^2}\right]\left(z^2-h^2\right)+\frac{g}{A_v}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}h\frac{\partial h}{\partial x}\\
&\quad+\left[\frac{g}{6A_v\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}-\frac{g}{6A_v^2\rho_0}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\rho'}{\partial x}\right]\left(z^3+h^3\right)+\frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^2\frac{\partial h}{\partial x},\\
0 &= \int_{-h}^{0}\frac{\partial w^1}{\partial z}dz\\
&= \left[\frac{g}{3A_v}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}h^3+\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^4\right]\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\\
&\quad-\left[\frac{g}{3A_v^2}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}-\frac{g}{3A_v}\frac{\partial^2\eta^1}{\partial x^2}\right]h^3+\frac{g}{A_v}\frac{\partial\eta^1}{\partial x}h^2\frac{\partial h}{\partial x}\\
&\quad+\left[\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}-\frac{g}{8A_v^2\rho_0}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\rho'}{\partial x}\right]h^4+\frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^3\frac{\partial h}{\partial x}\\
&= \frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^4\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^3\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}h^4\\
&\quad-\frac{g}{8A_v^2\rho_0}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^4+\frac{g}{3A_v}h^3\frac{\partial^2\eta^1}{\partial x^2}\\
&\quad+\left[\frac{g}{3A_v}h^3\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{g}{3A_v^2}\frac{\partial A_v}{\partial x}h^3+\frac{g}{A_v}h^2\frac{\partial h}{\partial x}\right]\frac{\partial\eta^1}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

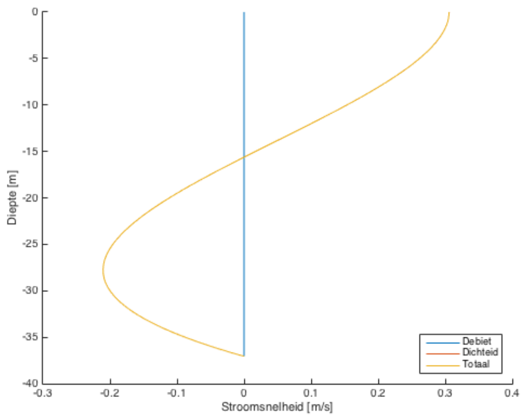
Ook nu blijft de numerieke methode gelijk en moeten slechts de volgende definities worden gewijzigd:

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \left[\frac{g}{3A_v}h^3\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{g}{3A_v^2}\frac{\partial A_v}{\partial x}h^3+\frac{g}{A_v}h^2\frac{\partial h}{\partial x}\right],\\
D(x) &= \frac{g}{3A_v}h^3,\\
E(x) &= -\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^4\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{g}{2A_v\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^3\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{g}{8A_v\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x^2}h^4+\frac{g}{8A_v^2\rho_0}\frac{\partial A_v}{\partial x}\frac{\partial\rho'}{\partial x}h^4.
\end{aligned}
$$

B
Parameter gevoeligheid

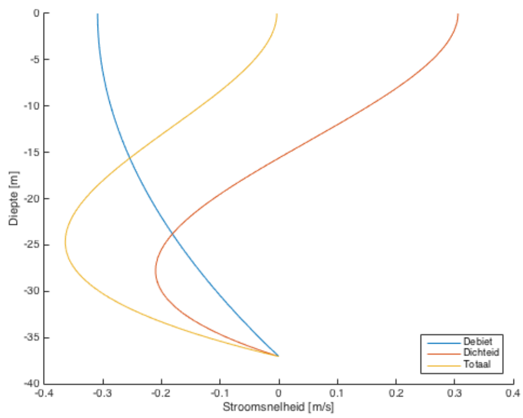
In deze bijlage zal bij de resultaten uit hoofdstuk 5 een parameter gevoeligheidsanalyse worden uitgevoerd.

B.1. Zonder getij



Figuur B.1: Stroombeeld voor $h = 37\ [m]$, $b = 1309\ [m]$ en $Q = 1\ [m^3/s]$

Als voor de geometrie de afmetingen van het zeegat worden genomen, resulteert dit model tot een stroombeeld zoals weergeven in figuur B.1. Ten opzichte van de gemiddelde geometrie (figuur 5.1) is de diepte nu veel groter en is de geul een stuk smaller. Dit heeft als gevolg dat de gravitatie circulatie een stuk groter is, namelijk $0,2\ [m/s]$ in plaats van $0,004\ [m/s]$. Dit grote verschil heeft er mee te maken dat in de term voor de gravitatie circulatie van de oplossing (vergelijking 4.3) een factor h^3 voorkomt.



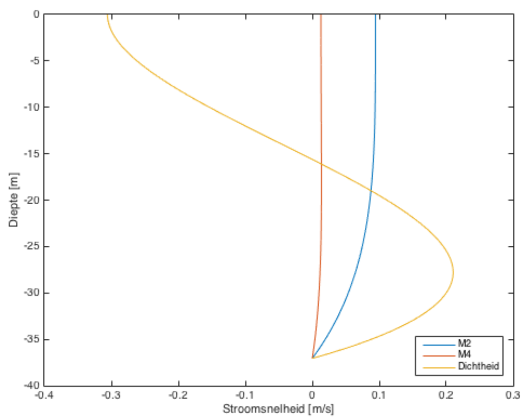
Figuur B.2: Stroombeeld voor $h = 37$ $[m]$, $b = 1309$ $[m]$ en $Q = 1000$ $[m^3/s]$

Nu wordt Q een stuk groter gemaakt en wordt het stroombeeld van figuur B.2 gevonden. Omdat Q los in de oplossing voorkomt (zonder machten) heeft deze verhoging een kleine impact ten opzichte van de verhoging van de waarde. Nu is wel duidelijk te zien dat de stroming door toedoen van het debiet niet altijd gelijk aan nul is en aan de randvoorwaarden voldoet.

B.2. Met getij

Vervolgens wordt het systeem bekeken waarin het getij is meegenomen. Hier wordt een onderscheid gemaakt tussen een model met uniforme geometrie (waarbij een analytische oplossing nog mogelijk is) en een niet-uniforme geometrie.

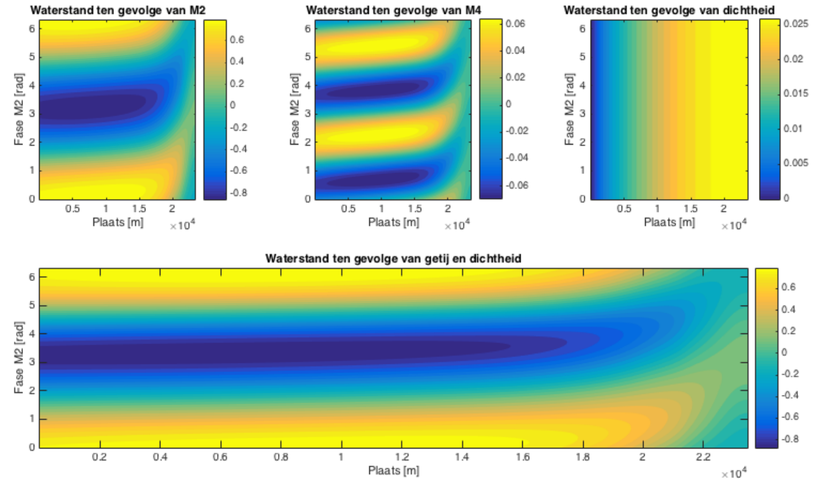
B.2.1. Uniforme geometrie



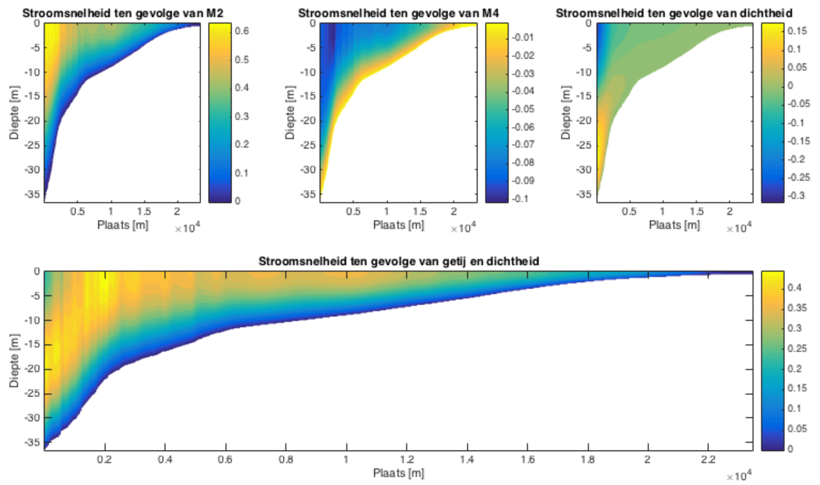
Figuur B.3: Amplitude stroomsnelheid [m/s] voor $h = 37$ $[m]$

In figuur B.3 is de amplitude van de verschillende stromingen weergegeven. Duidelijk is de gravitatie circulatie nu belangrijker dan de stromingen door M_2 en M_4. Dit komt weer omdat de diepte tot de derde macht schaalt. Daarnaast zijn de M_2 en M_4 snelheden nu veel kleiner dan in figuur 5.3. Dit komt omdat deze omgekeerd evenredig schalen met de diepte. Als h groter wordt dan wordt de snelheid kleiner.

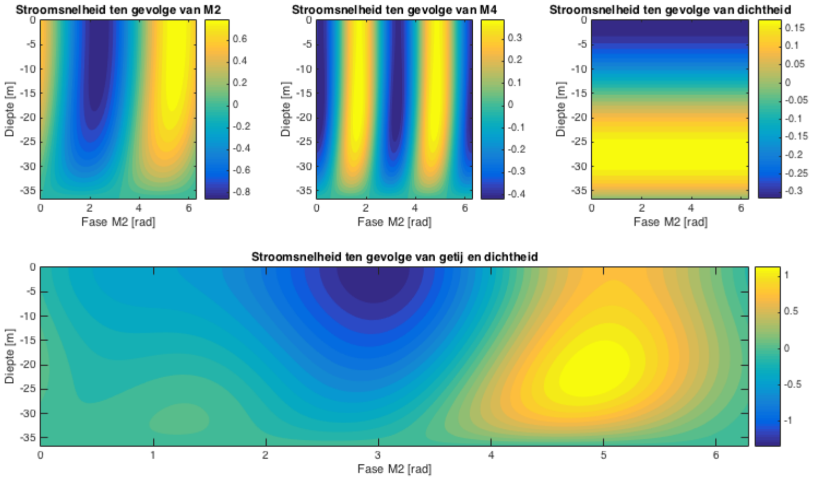
B.2.2. Niet-uniforme geometrie



Figuur B.4: Waterstanden [m] met $A_v = 0,01\ [m^2/s]$



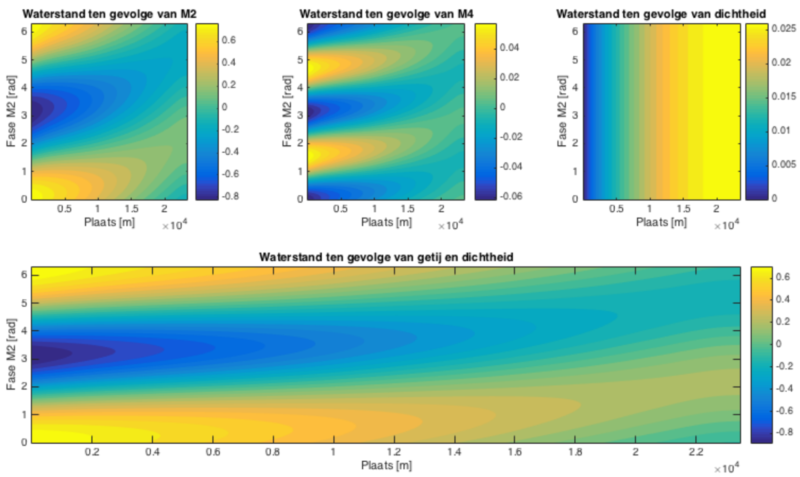
Figuur B.5: Stroomsnelheid [m/s] met $\phi_{M_2} = 0\ [rad]$ en $A_v = 0,01\ [m^2/s]$



Figuur B.6: Stroomsnelheid [m/s] met $x = 0\ [m]$ en $A_v = 0,01\ [m^2/s]$

In paragraaf 5.2.2 is de waarde voor de viscositeit veranderd. Als de uitkomsten van de waarde $A_v = 0,0011\ [m^2/s]$ worden vergeleken met de uitkomsten bij $A_v = 0,01\ [m^2/s]$, is te zien dat bij een grotere viscositeit de amplitude van de getijgolf afneemt in het bekken in plaats van toeneemt (figuur B.4 en 5.10). Daarnaast is een duidelijk verschil zichtbaar in de fase van de getijgolf. Bij een grotere A_v-waarde wordt de getijgolf meer vertraagd, dit is omdat deze variabele beïnvloed wordt door de wrijving en bij een grotere wrijving hoort immers een grotere vertraging. Dit zorgt er ook voor dat de stroomsnelheden veroorzaakt door M_2 en M_4 een stuk lager zijn. De gravitatie circulatie is daarentegen een stuk groter.

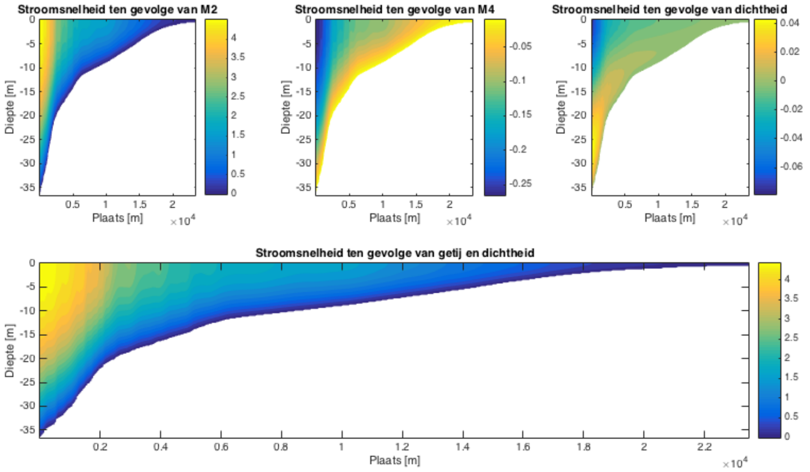
B.3. Niet-uniforme viscositeit



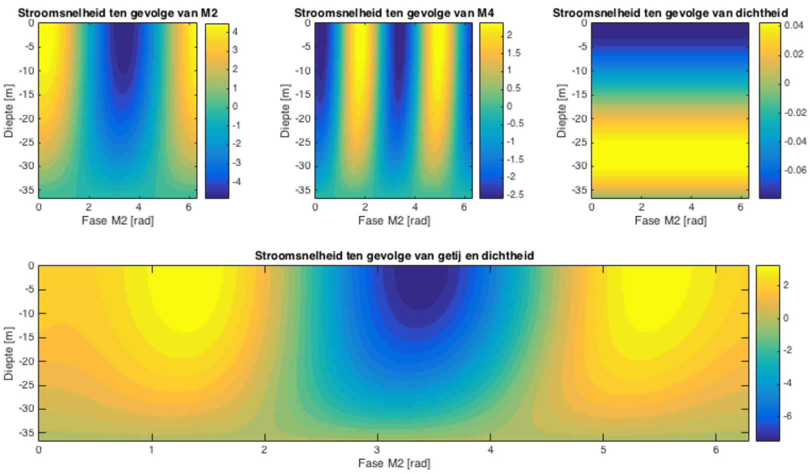
Figuur B.7: Waterstanden [m] met $A_{v0} = 0,01\ [m^2/s]$

Met een waarde voor $A_{v0} = 0,01\ [m^2/s]$ is duidelijk de demping van de getijgolf een stuk groter dan in het geval met constante viscositeit (en $A_v = 0,01[m^2/s]$). Ook is af te lezen dat de stroomsnelheden door toedoen van het getij (zowel M_2 als M_4) een stuk groter zijn geworden, terwijl de snelheden ten gevolge van de gravitatie circulatie een stuk kleiner zijn geworden.

Net als in het model met uniforme viscositeit heeft een grotere waarde voor de parameter (zoals gebruikt in paragraaf 5.3) een grotere demping en een groter faseverschil tussen het zeegat en Harlingen tot gevolg.



Figuur B.8: Stroomsnelheid [m/s] met $\phi_{M_2} = 0\ [rad]$ en $A_{v0} = 0,01\ [m^2/s]$



Figuur B.9: Stroomsnelheid [m/s] met $x = 0\ [m]$ en $A_{v0} = 0,01\ [m^2/s]$