

183 1000 1111
Dienst Wegen en Water, Lande Doel
archief Afd. in de Vaststelling
A-6 NPC 93



92257

Driepuntsbuigproef
Afleiding voor een
lineair visco-elastisch
materiaal

4 november 1993

Onderzoek uitgevoerd in opdracht van:

Rijkswaterstaat
Dienst Weg- en Waterbouwkunde
Postbus 5044
2600 GA DELFT

Contactpersoon: ing. C.C. Montauban

Onderzoek uitgevoerd door:

Netherlands Pavement Consultants bv
Postbus 83 Hogebrinkerweg 35
3870 CB HOEVELAKEN 3871 KM HOEVELAKEN

Telefoon: 03495 - 36344
Telefax : 03495 - 36517

Oprichtingsnummer : 92257
Auteur : ir. F. Tolman
Projectleider : ir. M. v.d. Ven

c1/85
(zie ook c174+c182)

Hoevelaken, 4 november 1993

Het auteursrecht van dit rapport is voorbehouden aan Netherlands Pavement Consultants bv te Hoevelaken.

Het is niet toegestaan dit rapport aan derden direct of indirect te openbaren, te vermenigvuldigen of te verspreiden op welke wijze dan ook, behoudens voorafgaande toestemming van NPC bv.

Zowel bij de keuze van de uitgangspunten als bij het uitwerken van de afleiding is zorgvuldigheid betracht. De aard van deze studie is echter zodanig dat onjuistheden in beide kunnen voorkomen. Noch de opdrachtgever noch de opdrachtnemer zijn aansprakelijk voor de gevolgen van het ontlenen van informatie aan de voorliggende studie.

Inhoudsopgave

	<u>Blz.</u>
1. Inleiding	1
2. Afleidingen	3
2.1. Inleiding	3
2.2. Infinitesimale elementen beschouwing	3
2.2.1. Drie-dimensionaal	3
2.2.2. Twee-dimensionaal	6
2.3. Ligger beschouwing	7
2.3.1. Elastisch	7
2.3.2. Visco-elastisch	11
2.4. Lineaire modellen	14
3. Oplossingen	18
3.1. Balk	18
3.1.1. Zuivere buiging	18
3.1.2. Buiging met dwarskracht	21
3.2. Buigligger	24
3.3. Lineaire modellen	31
4. Toelichtingen	33
4.1. Fysische aspecten	33
4.2. Berekeningen	34
5. Slot	37
5.1. Conclusies	37
5.2. Aanbevelingen	37
Literatuur	38
Bijlage I: Overzicht vergelijkingen	

Dit rapport omvat 38 bladzijden en
1 bijlage, genummerd Bijlage I.

1. Inleiding

Het doel van deze studie is het afleiden en oplossen van het volgende stelsel vergelijkingen en het aangeven in hoeverre zij kunnen dienen om het probleem van de krachtgestuurde 3-puntsbuigproef op visco-elastische materialen te beschrijven.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (1.1.)$$

$$F(0, t) = F_0 + F \sin(\omega_0 t) \quad (1.2.)$$

$$w(0, t) = 0$$

$$M(0, t) = 0$$

$$w(l, t) = 0$$

$$M(l, t) = 0$$

(1.3.)

Hierin is:

E = stijfheidsmodulus (in het elastische geval de elasticiteitsmodulus)

I = traagheidsmoment

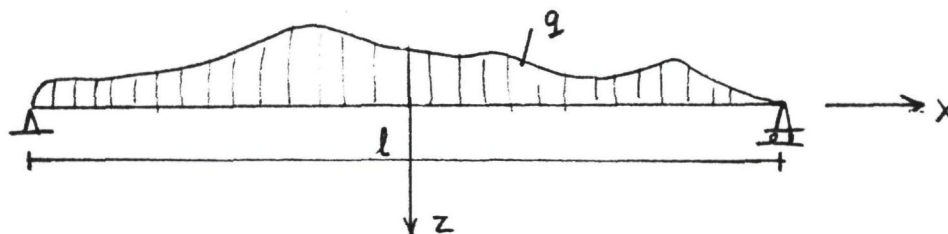
p = massa per lengte-eenheid (constant)

q = belastingfunctie

x = plaatscoördinaat langs de balkas op t = 0

v = verplaatsing loodrecht op x

M = moment



Figuur 1.1.: Schematisering van de driepuntsbuigproef.

De studie is als volgt opgezet. In hoofdstuk 2 worden afleidingen op grond van een drietal beschouwingwijzen voor constructies uitgewerkt. Deze zijn:

1. Beschouw een infinitesimale volume-eenheid materiaal en stel daarvoor de basisvergelijkingen op. Breidt vervolgens het volume uit tot de randen van het constructieelement, i.e. de balk. Wiskundig betekent dit het integreren van de basisvergelijkingen. In principe is deze beschouwingswijze 3 dimensionaal, maar ten behoeve van de toepasbaarheid is het vaak zinvol het probleem tot 2 dimensies te reduceren.
2. Beschouw een constructie die geschematiseerd is tot een lijnelement, bijvoorbeeld door het zwaartepunt van de doorsnede van de reële constructie. Een balk met een massa en een volume wordt zodoende gereduceerd tot een massa- en volumeloze ligger (een lijn) waarbij massa- en doorsnedegrootheden als externe grootheden opgelegd kunnen worden. Ook hierbij is een drie-dimensionale beschouwing mogelijk waarbij gebruikelijk is 1 dimensie langs de ligger te kiezen en de ligger in 2 onderling loodrecht op elkaar staande richtingen te laten uitbuigen. In de regel wordt bij de vereenvoudiging van de balk tot ligger volstaan met een 2 dimensionale probleemstelling.
3. Een derde wijze is de constructie op te vatten als een systeem van lineaire modellen (rheologische of mechanische elementen) dat op identieke excitaties een met de balk vergelijkbare respons geeft.

Oplossingen en oplossingsmethoden worden in hoofdstuk 3 gegeven. Gezien de gecompliceerdheid van de vergelijkingen zijn hierbij vereenvoudigingen gedaan, waarvan de grootte achteraf bij benadering bepaald dient te worden.

In hoofdstuk 4 is hiertoe een aanzet gedaan, die evenwel nog nadere uitwerking behoeft. In hoofdstuk 5 wordt het resultaat besproken.

Daarnaast worden in deze studie aanzetten gegeven voor verdergaand theoretisch onderzoek, welke niet binnen het kader van deze studie konden worden uitgewerkt.

2. Afleidingen

2.1. Inleiding

Teneinde inzicht te krijgen in de veronderstelling en verwaarlozingen die bij de formulering van (1.1.) als beschrijving van de driepuntsbuigproef zijn gedaan, worden enige mogelijke wiskundige beschrijvingen van het fysische probleem beschouwd. Paragraaf 2.2. en 2.3. zijn gebaseerd op de continuümmechanica. In paragraaf 2.2. wordt een beschouwing van de spanningen en rekken op een infinitesimaal volume gegeven. De differentiaalvergelijkingen die hieruit resulteren zijn niet eenvoudig op te lossen. Daarom wordt er ten dele mee volstaan de vergelijkingen op te stellen. De zin van zo'n beschouwing is onder meer het verkrijgen van meer inzicht in de andere probleemformuleringen. In paragraaf 3.1. worden daarnaast voor enkele eenvoudige gevallen oplossingen gegeven die op deze probleembeschrijving gebaseerd zijn. Deze oplossingen geven inzicht in de belangrijkheid van sommige aannamen.

In paragraaf 2.3. wordt in principe eenzelfde werkwijze als in paragraaf 2.2. gevolgd, maar nu op een ligger-mootje van infinitesimale lengte. Ten koste van enige aanvullende veronderstellingen kan nu een beter hanteerbare probleemformulering worden opgesteld. In paragraaf 2.4. wordt een beschouwing op basis van mechanische (of ook rheologische) modellen gegeven. Hiermee wordt de wiskundige formulering nog eenvoudiger, maar is de relatie met het fysische probleem kleiner.

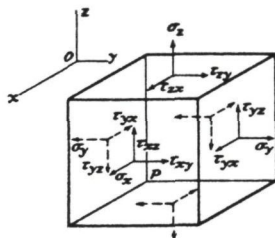
Het is van belang in het oog te houden dat het probleem bij alle drie beschouwingswijzen bestaat uit drie groepen vergelijkingen:

- Bewegingsvergelijkingen of evenwichtsvergelijkingen waarmee de optredende krachten beschreven worden;
- Compatibiliteitsvergelijkingen, waarmee de geometrische samehang beschreven wordt;
- Constitutieve vergelijkingen, waarmee het materiaalgedrag beschreven wordt en die de compatibiliteits- en bewegingsvergelijkingen koppelen.

2.2. Infinitesimale elementen beschouwing

2.2.1. Drie-dimensionaal

Beschouw een rechthoekig elementje en de daarop werkende oppervlakte- en lichaamskrachten (zie figuur 2.1. en [7 p. 236]).



Figuur 2.1.: Oppervlaktekrachten op een infinitesimaal volume-element [7 p.4,5].

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (2.2.1.)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + Z = m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

(2.2.1.) is de bewegingsvergelijking. De compatibiliteitsvergelijking luidt als volgt [7 p. 237]:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (2.2.2.)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

De koppeling tussen (2.2.1.) en (2.2.2.) wordt gelegd door middel van de constitutieve vergelijkingen waarvan de bekendste en tevens relatief eenvoudigste de wet van Hooke is [7 p. 8,10].

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)) \quad (2.2.3.)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz}$$

Hiermee is het probleem in wezen beschreven. Slechts in bijzondere gevallen zijn oplossingen te vinden, dat wil zeggen als (2.2.1. t/m 2.2.3.) sterk vereenvoudigd kunnen worden. De vergelijkingen worden hier gepresenteerd om de gecompliceerdheid van het probleem aan te geven, om de afleidingen in de volgende paragrafen te plaatsen en om de principiële methode van behandeling van continuümproblemen toe te lichten. Voor de afleidingen en verdere beschouwingen, wordt naar de literatuur, bijvoorbeeld [7] verwezen. Het is van belang te realiseren dat de begin- en randvoorwaarden (BVW en RVW) veelal in de vorm van krachten en verplaatsingen worden gegeven.

De relaties tussen rekken en verplaatsingen luiden [7 p. 7]:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

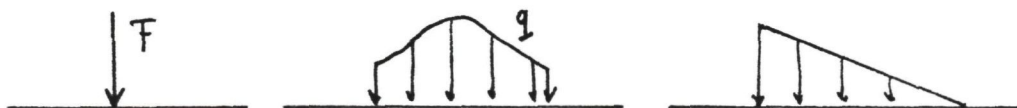
$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2.4.)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Het opleggen van krachten, puntlasten of blokbelasting, betekent het introduceren van discontinuïteiten aan de rand, zie figuur 2.2.2. Om dit probleem te omzeilen kan men de discontinuïteiten door middel van een benadering van de belastingfunctie opheffen of het kritieke punt van de rand buiten beschouwing laten en daar een spanningsverdeling in het materiaal aannemen.



Figuur 2.2.2.: Voorbeelden van randdiscontinuïteiten.

2.2.2. Twee-dimensionaal

Een wezenlijke vereenvoudiging van het probleem wordt bereikt door 1 dimensie buiten beschouwing te laten. De reden is dat het stelsel (2.2.1. t/m 2.2.3.) dan in de vorm van een spanningsfunctie (Airy stress function) geschreven kan worden [7 p. 327].

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.2.5.)$$

hierin is:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho g y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho g y \quad (2.2.6.)$$

$$\sigma_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Hierbij zijn de lichaams- en versnellingstermen uit (2.2.1.) verwaarloosd. Als deze termen als een potentiaalfunctie geschreven kunnen worden, kunnen ze in (2.2.6.) opgenomen worden.

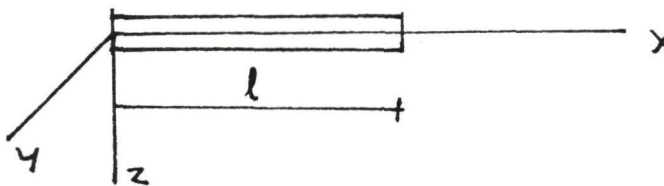
De oplossing van (2.2.5.) met bijbehorende randvoorwaarden kan in het algemeen in de vorm van reekso oplossingen gevonden worden. Timoshenko [7] geeft voor een aantal bijzondere gevallen oplossingen met behulp van polynomen. Meer algemeen, maar tevens ondoorzichtiger zijn oplossingen door middel van Fourier-reeksen.

2.3. Ligger beschouwing

2.3.1. Elastisch

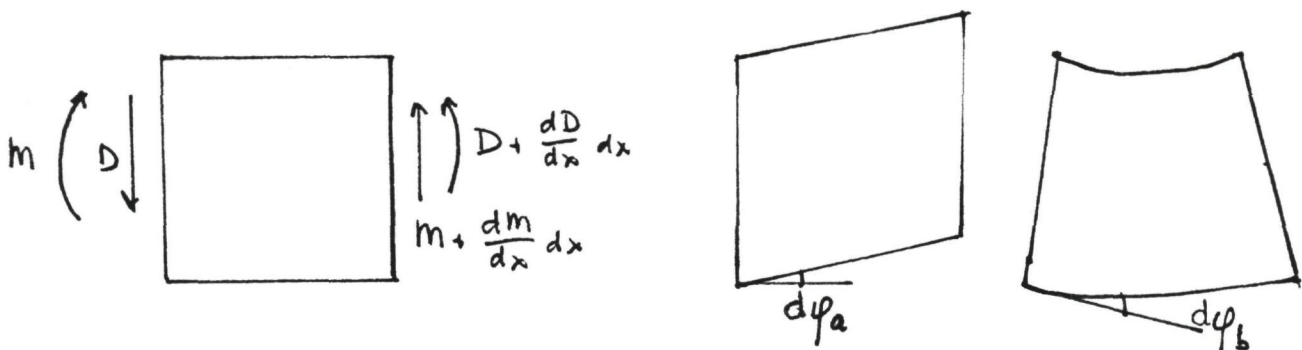
In de mechanica van constructies wordt een slanke balk die loodrecht op zijn grootste afmeting belast wordt, gekarakteriseerd door [2]:

- $A(x)$ doorsnede
- $I(x)$ oppervlakte traagheidsmoment
- $A^*(x)$ equivalente doorsnede t.b.v. dwarskracht
- $\rho(x)$ massa per volume-eenheid
- $E(x)$ elasticiteitsmodulus
- $G(x)$ glijdingsmodulus



Figuur 2.3.1.: Definitieschets.

De verplaatsing $w(x)$ in z -richting t.g.v. een belasting $q(x,t)$ in z -richting of een moment $M(x,t)$ om de y -as is de som van de verplaatsing door afschuiving w_a en door buiging w_b .



Figuur 2.3.2.: Vervormingsmogelijkheden van een liggerelement.

De bewegingsvergelijkingen in z-richting (dwarskracht) en om de y-as (moment) zijn:

$$\rho A \ddot{w} - D' - q = 0 \quad (2.3.1.)$$

$$\rho I \ddot{\varphi}_b - M' + D = 0 \quad (2.3.2.)$$

De kracht-ervormingsrelaties (constitutieve vergelijkingen) luiden:

$$M = EI \varphi_b' \quad (2.3.3.)$$

$$D = -GA^* \varphi_a \quad (2.3.4.)$$

De geometrische vergelijkingen (compatibiliteitsvergelijkingen) zijn:

$$\varphi_a = -w_a' \quad (2.3.5.)$$

$$\varphi_b = -w_b' \quad (2.3.6.)$$

$$w = w_a + w_b \quad (2.3.7.)$$

(2.3.1.) t/m (2.3.6.) kunnen in de verplaatsingen w_a en w_b uitgedrukt worden:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI w'') - \frac{\partial}{\partial x} (\rho I \ddot{w}_b') + \rho A \ddot{w} = q \quad (a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} (GA^* w_a') + \rho A \ddot{w} = q \quad (b)$$

Met (2.3.7.) kan uit (a) en (b) in principe een vergelijking in w met niet constante coëfficiënten geschreven worden. Dit is nogal gecompliceerd en voor deze studie minder relevant, zodat slechts w_a en w_b in (a) en (b) verder als variabelen worden behandeld en de overige factoren als constanten.

$$(a) - \left(\frac{EI}{GA^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho I}{GA^*} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (b) \text{ levert op :}$$

$$EI w_b'''' + \rho A \ddot{w} + \rho I \left(1 + \frac{EA}{GA^*} \right) \ddot{w}' - \frac{\rho^2 AI}{GA^*} \ddot{w}'' =$$

$$q - \frac{EI}{GA^*} q'' + \frac{\rho I}{GA^*} \ddot{q} \quad (2.3.8.)$$

De termen kunnen achtereenvolgens benoemd worden:

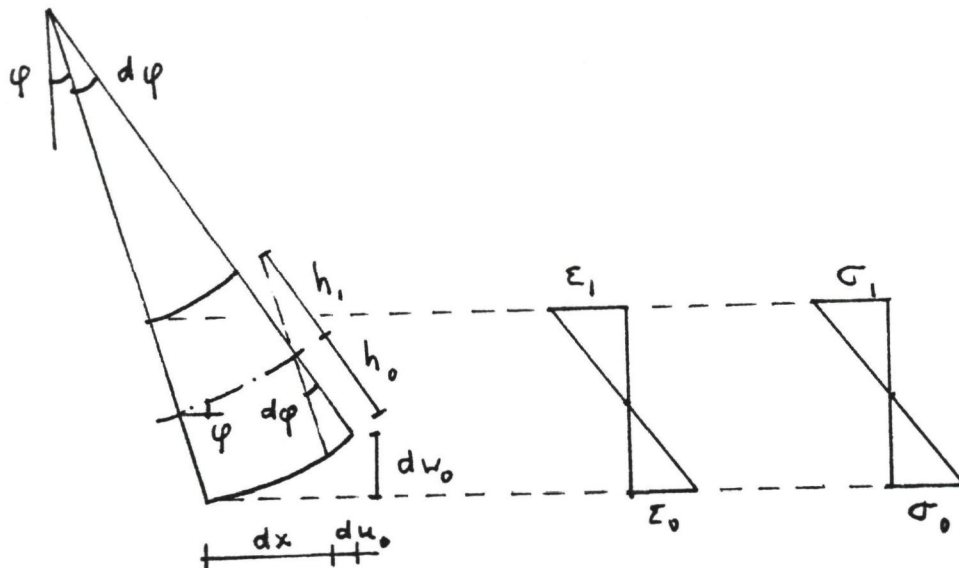
- buiging
- translatie traagheid
- rotatie traagheid
- dwarskracht
- interactie rotatietraagheid en dwarskracht
- belasting en 2e orde plaats- en tijd afgeleiden van de belasting.

(a) geeft dus het probleem weer als alleen buiging en rotatie traagheid in rekening worden gebracht ($w = w_b$ en $w_a = 0$) en (b) het geval indien alleen dwarskrachtvervorming wordt teweeggebracht ($w = w_a$ en $w_b = 0$). Een veel voorkomende benadering van het buigliggerprobleem is (vergelijk (1.1)):

$$\frac{\partial^2 (EI w'')}{\partial x^2} + \rho A \ddot{w} = q(x, t) \quad (2.3.9.)$$

Opmerking 1:

Vergelijking (2.3.3.) kan als volgt worden toegelicht. Beschouw een mootje van een ligger als in figuur 2.3.3.



Figuur 2.3.3.: Definitieschets.

Het moment van doorsnede (bewegingsvergelijking) is:

$$M = \int b \sigma_x(z) z dz$$

De constitutieve vergelijking luidt:

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

Als compatibiliteitsvergelijking wordt de hypothese van Bernoulli aangenomen (vlakke doorsneden blijven vlak).

$$\epsilon_x = z d\varphi/dx$$

Uit deze drie vergelijkingen volgt:

$$M = EI d\varphi_b/dx$$

met $I = \int bz^2 dz$.

Opmerking 2:

(2.3.6.) kan ook worden afgeleid door een kromtestraal R te definiëren. Uit de vergelijking van een cirkel volgt door differentiëren en substitueren:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x + y dy/dx = 0$$

$$1 + (dy/dx)^2 + y d^2y/dx^2 = 0$$

$$R^2 = y^2 (1 + (dy/dx)^2) = (1 - dy/dx)^2)^3 / (d^2y/dx^2)^2$$

$$1/R = (1 + (dy/dx)^2)^{-3/2} d^2y/dx^2 \quad (2-3-10)$$

Voor geringe vervormingen is dy/dx verwaarloosbaar ten opzichte van 1, zodat $1/R = d^2y/dx^2$. In de termen van figuur 2.3.3. is dus $1/R = d^2w/dx^2 = d\varphi/dx = 1/\kappa$.

Opmerking 3:

Vergelijking (2.3.4.) kan als volgt worden toegelicht:

De dwarskracht in een doorsnede is:

$$D = \int b \sigma_{xz}(z) dz$$

De constitutieve vergelijking luidt:

$$\sigma_{xz} = G \gamma_{xz}$$

De compatibilitietsvergelijking luidt:

$$\gamma_{xz} = \varphi_a(x, z)$$

Uit deze vergelijking volgt:

$$D = GA^* \varphi_a$$

$$\text{met } A^* = \frac{1}{\varphi_a} \int b \varphi_a(x, z) dz$$

Omdat $\varphi_a(x, z)$ niet bekend is, wordt veelal een parabolisch schuifspanningsprofiel voor rechthoekige doorsneden aangenomen, zodat $D = \frac{2}{3} \tau_{\max} bh = \frac{2}{3} G \varphi_a bh$ en dus $A^* = \frac{2}{3} bh$.

Opmerking 4:

Als de tweede term in (2.3.9.) nul is, dat wil zeggen $\rho = 0$ of $d^2w/dt^2 = 0$ ontstaat de vergelijking voor het statische probleem. De oplossing voor (2.3.9.) kan op twee manieren worden gevonden, namelijk door het probleem op te vatten als een rand/-beginwaarden probleem of door het sommeren van de algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking en één particuliere oplossing van de niet gereduceerde vergelijking.

2.3.2. Visco-elastisch

De algemene formulering van de constitutieve vergelijking van een lineair visco-elastisch materiaal luidt:

$$P(\sigma) = Q(\epsilon) \quad (2.3.11.)$$

Hierin zijn P en Q differentiaaloperatoren naar t:

$$P = \sum_{i=0}^m P_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad (2.3.12.)$$

$$Q = \sum_{i=0}^n Q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}$$

Vervang de constitutieve vergelijking $\sigma = E\epsilon$ uit paragraaf (2.3.1.) door (2.3.11.) dan volgt uit:

$$M = \int b \sigma(z) dz, \quad \epsilon = z/K \quad \text{en} \quad I = \int b z^2 dz$$

$$P(M) = -I Q(1/\kappa) \quad (2.3.13.)$$

Uit (2.3.9.) en (2.3.3.) volgt: $-\partial^2 M / \partial x^2 + p \partial^2 w / \partial t^2 = q(x, t)$

Substitutie in (2.3.13.) met $1/\kappa = \partial^2 w / \partial x^2$ levert op
 $-\partial^2 P(M) / \partial x^2 + p \partial^2 P(w) / \partial t^2 = P(q)$ en dus:

$$I P(\partial^4 w / \partial x^4) + p Q(\partial^2 w / \partial t^2) = P(q) \quad (2.3.14.)$$

Kies voor de formele uitdrukking (2.3.11.) nu een gebruikelijke uitdrukking, bijvoorbeeld een Burgers element. De differentiaal-vergelijking hiervan luidt:

$$\ddot{\sigma} + \left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_2}{\eta_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{E_1 E_2}{\eta_1 \eta_2} \sigma = E_1 \ddot{\epsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_2} \dot{\epsilon} \quad (2.3.15.)$$

Zodat:

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 \\ p_1 &= E_1 / \eta_1 + E_1 / \eta_2 + E_2 / \eta_2 \\ p_0 &= E_1 E_2 / \eta_1 \eta_2 \\ q_2 &= E_1 \\ q_1 &= E_1 E_2 / \eta_2 \\ q_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.16.)$$

De vergelijking van een buigligger van een materiaal dat door een Burgers model beschreven kan worden, wordt hiermee:

$$\begin{aligned} I \frac{\partial^6 w}{\partial t^2 \partial x^4} + I \left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_2}{\eta_2} \right) \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} + \\ I \frac{E_1 E_2}{\eta_1 \eta_2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p E_1 \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + p \frac{E_1 E_2}{\eta_2} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} = \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_2}{\eta_2} \right) \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{E_1 E_2}{\eta_1 \eta_2} q$$

Dit is het visco-elastische (Burgers) equivalent van (2.3.9.).

(2.3.11.) kan aanzienlijk vereenvoudigd worden met behulp van transformatie technieken, waarbij de tijdas wordt omgezet naar een andere parameter. De algemene integraalvorm luidt:

$$H(s) = \int_a^b h(t) K(s, t) dt \quad (2.3.16.)$$

Hierin is H de getransformeerde van h en K een handig gekozen functie, de kern (eng. Kernel). De nieuwe variabele is s . K dient nu zodanig te worden gekozen, dat de vergelijking in s op te lossen is en het resultaat teruggetransformeerd kan worden naar t . De meest gebruikelijke transformaties voor dit type vergelijkingen zijn de Fourier- en de Laplace transformatie, gedefinieerd als respectievelijk:

$$F(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.3.19.)$$

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.3.20.)$$

De clou van de toepassing van deze transformaties op (2.3.11.) is dat de afgeleiden zo eenvoudig zijn:

$$F\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = (-i\omega)^n F(f) \quad (2.3.21.)$$

$$L\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n L(f) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} \frac{d^i f(0)}{dt^i} \quad (2.3.22.)$$

Beide typen transformaties hebben hun voor- en nadelen. De Fourier getransformeerde heeft een in principe eenvoudige inverse.

$$F^{-1}(F(f)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.3.23.)$$

Voor de Laplace getransformeerde is deze veel ingewikkelder, de zogenaamde Bromwich integraal:

$$L^{-1}(L(f)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} L ds \quad (2.3.24.)$$

Echter van de Laplace transformatie bestaan uitgebreide formule-tabellen. In veel artikelen wordt de Laplace transformatie aanbevolen. Als de Laplace getransformeerde van w wordt aangeduid met \bar{w} kan (2.3.14.) nu worden geschreven als:

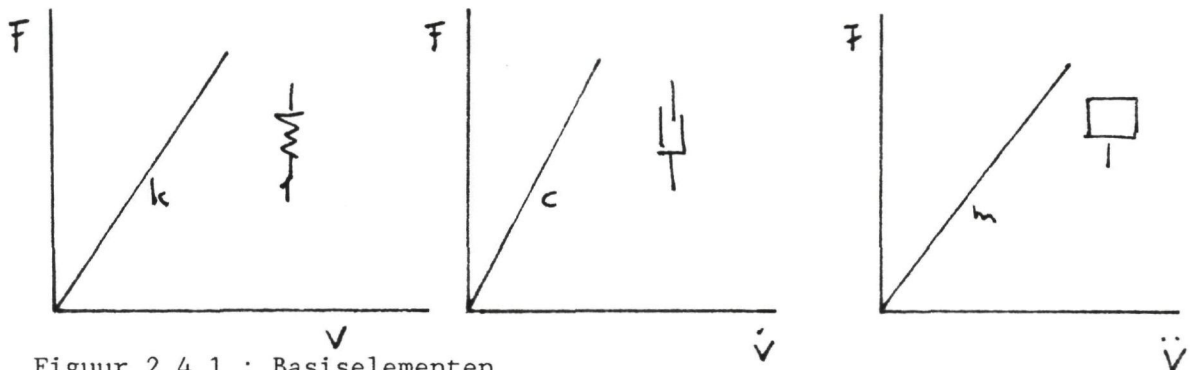
$$I (s^2 + p_1 s + p_0) \partial^4 \bar{w} dx^4 + p (q_2 s^4 + q_1 s^3) \bar{w} = (s^2 + p_1 s + q_0) q + S$$

(2.3.25.)

Hierbij is $S(s)$ een constante in de DV in \bar{w} waarin de termen die uit de BVW voortvloeien zijn opgenomen. Er resteert dus een gewone DV waarvan de oplossing eenvoudig is. De terug-transformatie kan echter tot problemen leiden.

2.4. Lineaire modellen

Hierbij wordt de balk opgevat als een systeem dat in wiskundige termen analoog is aan een systeem dat opgebouwd is uit veren, smoorpotten, massa's, sliders en andere elementen zoals met name in rheologie en de mechanica toepassing hebben gevonden. De vergelijkingen die het gedrag van deze elementen beschrijven zijn lineair.



Figuur 2.4.1.: Basiselementen.

De elementen kunnen worden gecombineerd tot meer complexe elementen, zoals een massa-veer- en een massa-Burgers-systeem, met de volgende vergelijkingen.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m} \quad (2.4.1.)$$

$$q_4 \ddot{\ddot{x}} + q_3 \ddot{x} + q_2 \dot{x} + q_1 x = p_2 \ddot{F} + p_1 \dot{F} + p_0 F \quad (2.4.2.)$$

met:

$$q_4 = 1$$

$$q_3 = \frac{k_1}{c_1} + \frac{k_1}{c_2} + \frac{k_2}{c_2}$$

$$q_2 = \frac{k_1 k_2}{c_1 c_2} + \frac{k_1}{m} \quad (2.4.3.)$$

$$q_1 = \frac{k_1 k_2}{c_2 m}$$

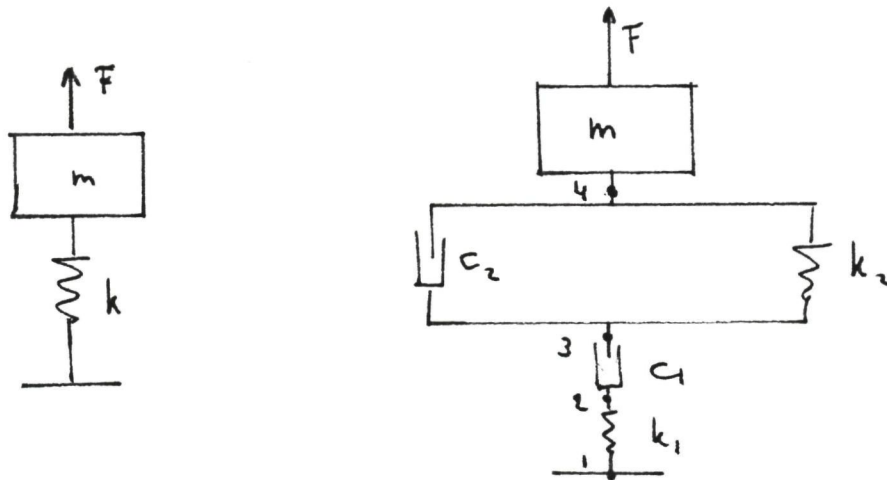
$$q_0 = 0$$

$$p_2 = \frac{1}{m}$$

$$p_1 = \left(\frac{k_1}{c_1} + \frac{k_1}{c_2} + \frac{k_2}{c_2} \right) \frac{1}{m}$$

$$p_0 = \frac{k_1 k_2}{c_1 c_2} \frac{1}{m}$$

De elementen zijn geschetst in figuur 2.4.2.



Figuur 2.4.2.: Definitieschets.

De afleiding van (2.4.1.) en (2.4.2.) is wederom gebaseerd op de bewegings-, compatibiliteits- en constitutieve vergelijkingen. Voor het systeem met het Burgerselement kunnen de volgende vergelijkingen opgesteld worden met F_i de inwendige kracht in punt i . De constitutieve vergelijkingen zijn:

$$F + F_4 = -m\ddot{x}_4 \quad (a)$$

$$F_4 = k_2(x_4 - x_3) + c_2(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) \quad (b)$$

$$F_3 = c_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \quad (c)$$

$$F_2 = k_1x_2 \quad (d)$$

Uit het evenwicht volgt wegens de massaloosheid van de veren en smoorpotten:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 \quad (e) \text{ t/m } (g)$$

De compatibiliteitsvergelijking is:

$$x = (x_4 - x_3) + (x_3 - x_2) + x_2 = x_4 \quad (h)$$

In de 8 vergelijkingen (a) t/m (h) zijn nu 8 onbekenden F_1 t/m F_4 en x_2 t/m x_4 . Stel $F_1 = F_r$ en substitueer (e) t/m (h) in (a) t/m (d), zodat:

$F - F_r = m\ddot{x}$ $F_r = c_2\dot{x} + k_2x - c_2\dot{x}_3 - k_2x_3$ $F_r = c_1\dot{x}_3 - c_1\dot{x}_2$ $F_r = k_1x_2$	$\frac{c_2}{k_1} D^2 + (1 + \frac{k_2}{k_1} + \frac{c_2}{c_1}) D + \frac{k_2}{c_1}$ D $\frac{c_2}{c_1} D + \frac{k_2}{c_1}$ $\frac{c_2}{k_1} D^2 + \frac{k_2}{k_2} D$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$\frac{c_2}{k_1} \ddot{x} + (1 + \frac{k_2}{k_1} + \frac{c_2}{c_1}) \dot{x} + \frac{k_2}{c_1} x = M \frac{c_2}{k_1} \ddot{x} + m(1 + \frac{k_2}{k_1} + \frac{c_2}{c_1}) \dot{x} + (\frac{k_2}{c_1} + c_2) x + k_2x \quad (2.2.4.)$$

Na deling door mc_2/k_1 ontstaan de vergelijkingen (2.4.3.). Vergelijking met (2.3.15.) leert dat slechts q_3 en q_2 een verandering hebben ondergaan als $E_i = k_i$ en $\eta_i = c$ gesteld wordt, hetgeen ook in te zien is door in (2.3.14.) σ te vervangen door $F - m\ddot{x}$ en ϵ door x . Uit (2.4.4.) blijkt dat de meebewegende massa hogere orde afgeleiden in de verplaatsing tot gevolg heeft.

Analoog aan (2.3.11.) kan (2.4.2.) veralgemeeniseerd worden tot:

$$\sum_{i=0}^n p_i \frac{\delta^i (F - m\ddot{x})}{\delta t^i} = \sum_{i=0}^n q_i \frac{\delta^i x}{\delta t^i} \quad (2.4.5.)$$

$$\sum_{i=0}^n p_i \frac{\delta^i F}{\delta t^i} = \sum_{i=0}^n q_i \frac{\delta^i x}{\delta t^i} + m \sum_{i=0}^n p_i \frac{\delta^{i+2} x}{\delta t^i} \quad (2.4.6.)$$

Van der Poel heeft voorgesteld de reële elementen door een complex element, dat hij stijfheid noemt, te vervangen, gedefinieerd als:

$$S = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (2.4.7.)$$

Analoog kan een constructiestijfheid S_α worden voorgesteld:

$$S_\alpha = \alpha \frac{F}{x} \quad (2.4.8.)$$

Hierin is α een vormfactor die van de geometrie van de opstelling afhangt.

Opmerking:

Hoewel de vergelijkingen in de rheologie en de mechanica formeel gelijk zijn, is hun betekenis sterk verschillend. In de rheologie wordt er een materiaaleigenschap mee voorgesteld en in de mechanica het gedrag van een constructie. In een proef worden de parameters voor een constructie bepaald. Met behulp van bewegings- en geometrische vergelijkingen kunnen hieruit materiaalparameters afgeleid worden. Met betrekking tot de modellering van asfalt door middel van een Burgers element is het goed te realiseren dat de serie-smoorpot, die het "vloeien" van het materiaal voorstelt, de verplaatsing van de afzonderlijke korrels per tijseenheid en zoiets als het stromen van de mortel/mastiek weergeeft. Bovendien komt in de parameter de schade die het proefstuk tijdens de beproeving oploopt (scheuren en microscheuren) voor. E.e.a. betekent dat de parameters van zo'n rheologisch model tijdens de proef veranderen. De afleidingen in dit hoofdstuk zijn dus alleen momentaan geldig (veronderstelling van quasi stationariteit).

3. Oplossingen

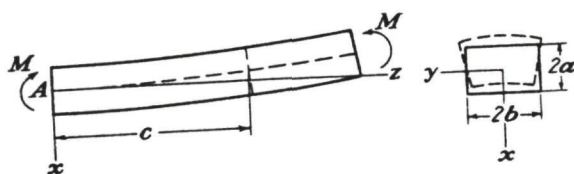
3.1. Balk

3.1.1. Zuivere buiging

Voor een prismatische staaf waarvan de massa verwaarloosbaar is en de belasting bestaat uit een spanningsverdeling op de uiteinden zoals in figuur 3.1.1. is weergegeven is de oplossing [7 p. 284]:

$$\sigma_x = EZ/R \quad (3.1.1.)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$



Figuur 3.1.1.: Definitieschets.

Het buigend moment is:

$$M = \int \sigma_x z \, dA = EI/R \quad (3.1.2.)$$

(3.1.1.) voldoet aan de evenwichtsvergelijkingen (2.2.1.). Substitutie in (2.2.3.) geeft:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= z/R \\ \epsilon_y &= -\nu z/R \\ \epsilon_z &= -\nu z/R \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.3.)$$

Met (2.2.4.) volgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{z}{R} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\nu \frac{z}{R} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\nu \frac{z}{R} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.1.4.}$$

Deze vergelijkingen kunnen geïntegreerd worden. Als de verplaatsing in het punt (0, 0, 0) op (0, 0, 0) wordt gesteld, wordt de oplossing:

$$\begin{aligned}u &= xz/R \\ v &= -\nu yz/R \\ w &= -(x^2 + \nu(z^2 - y^2))/2R\end{aligned}\tag{3.1.5.}$$

Voor de neutrale lijn ($z = 0$, $y = 0$) volgt met (3.1.2.) de bekende uitdrukking $w = -M x^2/2EI$.

Voor een doorsnede van de ligger op een afstand $x = c$ geldt $u = cz/R$ wat in overeenstemming is met de hypothese van Bernoulli. Voor de zijkanen van de balk $y = \pm b$ wordt $v = 2 \nu bz/R$, dat wil zeggen de oorspronkelijk verticale zijkanen komen bij buiging schuin te staan. De boven- en onderkant van de balk ($z \pm a$) vervormen als $w = -(c^2 + \nu(a^2 - y^2))/2R$ dat wil zeggen gaan parabolisch verlopen.

Als de kromming van de balk groot wordt, dient hiermee rekening te worden gehouden. Voor een ligger met geringe breedte kan dit door het probleem als een tweedimensionaal probleem op te vatten, waarop de methode van de potentiaalfunctie toegepast kan worden. Door vergelijking (2.3.5.) in poolcoördinaten te schrijven en de oplossing alleen van r te laten afhangen kan een oplossing voor een gebogen ligger (lineair-elastisch) gevonden worden [7 p.71.]. De stress functie luidt [7 p. 68.]:

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \frac{d^4 \phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (3.1.6.)$$

Een oplossing is:

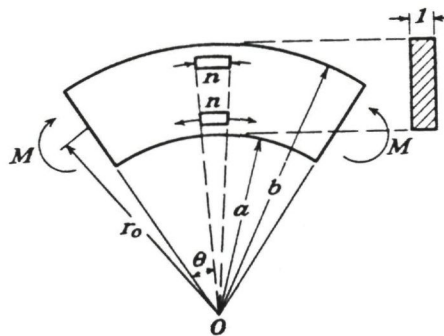
$$\phi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D \quad (3.1.7.)$$

Met:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = Ar^{-2} + B(1 + 2 \log r) + 2C$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = -Ar^{-2} + B(3 + 2 \log r) + 2C$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$



Figuur 3.1.2.: Definitieschets [7.p.72.].

Timoshenko leidt af dat met de RVW:

$$\sigma_r (r=a, b) = 0$$

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = 0$$

(3.1.8.)

$$\int_a^b r \sigma_\theta dr = -M$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

de oplossing luidt:

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} \right)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \quad (3.1.9.)$$

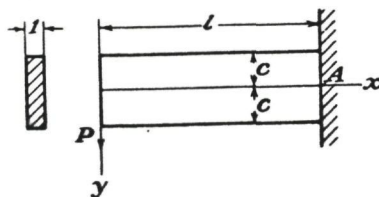
$$\sigma_{r\theta} = 0$$

met:

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\log \frac{b}{a} \right)^2 \quad (3.1.10.)$$

3.1.2. Buiging met dwarskracht

Beschouw eerst het geval van een smalle ligger, aan een zijde ingeklemd en belast door een dwarskracht D langs het liggereinde.



Figuur 3.1.3.: Definitieschets.

Oplossingen van de vergelijking: $\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$ zijn polynomen van de volgende vorm [7.p.41.]

$$\phi_2 = \frac{1}{2} a_2 x^2 + b_2 xy + \frac{1}{2} c_2 y^2$$

$$\phi_3 = \frac{1}{6} a_3 x^3 + \frac{1}{2} b_3 x^2 y + \frac{1}{2} c_3 xy^2 + \frac{1}{6} d_3 y^3 \quad (3.1.11.)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{12} a_4 x^4 + \frac{1}{6} b_4 x^3 y + \frac{1}{2} c_4 x^2 y^2 + \frac{1}{6} d_4 xy^3 + \frac{1}{12} e_4 y^4$$

etc.

De coëfficiënten in de polynomen van de macht 4 en hoger zijn niet meer onderling onafhankelijk. Substitutie van ϕ_4 in $\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$ levert bijvoorbeeld op $e_4 = -(2c_4 + a_4)$. Of de oplossing in de vorm van polymeren relevant is, hangt af van de randvoorwaarden. Het bovenstaande probleem kan opgelost worden door te kiezen $\phi = b_2 xy + \frac{1}{6} d_4 xy^3$ en de overige coëfficiënten 0 te stellen.

Uit (2.2.6.) volgt dan:

$$\sigma_x = d_4 xy$$

$$\sigma_y = 0 \quad (3.1.12.)$$

$$\sigma_{xy} = -b_2 - \frac{1}{2} d_4 y^2$$

Omdat langs de boven- en onderzijde van de balk geen schuifspanningen heersen is $\sigma_{xy} = -b_2 - \frac{1}{2} d_4 a^2 = 0 \rightarrow d_4 = -2b_2/a^2$

Verder moet langs de belaste zijde gelden

$$-\int_{-a}^a \sigma_{xy} dy = D \rightarrow b_2 = 3D/4a$$

Hiermee wordt als oplossing gevonden

$$\sigma_x = -Pxy/I$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\sigma_{xy} = -P(a^2 - y^2)/2I$$

$$\epsilon_x = -Pxy/EI$$

$$\epsilon_y = \nu Pxy/EI \quad (3.1.13.)$$

$$\epsilon_{xy} = -(a^2 - y^2)P/2IG$$

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{2IG}\right)y$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}$$

De schuifspanning die het gevolg is van de belasting, is parabolisch verdeeld over de hoogte. (3.1.13.) is in de regel bruikbaar omdat gebleken is dat de spanningsverdeling slechts zeer lokaal afwijkt als er een belasting wordt opgelegd die niet parabolisch over de hoogte verloopt. Verder valt op dat als gevolg van de dwarskracht de hypothese van Bernoulli niet geldig is. Ten opzichte van (3.1.1.) is het verschil in de spanningsverdelingen dat σ_x ook van x afhangt en $\sigma_{xy} \neq 0$.

Beschouw nu een drie-dimensionale ligger en doe de volgende aannamen [7.p.354.]

$$\sigma_x = -\frac{D(1-\nu)x}{I} \quad (3.1.14.)$$

$$\sigma_z = \sigma_y = \sigma_{zy} = 0$$

Timoshenko [7.p.354.] heeft aangetoond dat met deze aannemen σ_{xy} en σ_{xz} bepaald kunnen worden en dat deze oplossingen voldoen aan (2.2.1.) t/m (2.2.4.) en de RVW van figuur 3.1.3.

Met deze aannemen resulteert:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{xy} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_{xz} &= -\frac{P}{(1+\nu)I} \end{aligned} \quad (3.1.15.)$$

Ook in dit geval kan er een spanningspotentiaal $\phi(y,z)$ gevonden worden. De resulterende vergelijking kan echter niet in gesloten vorm opgelost worden. Wel bestaan er reeksooplossingen en benaderingen voor $a \gg b$ of $a \ll b$ [7.p.361.].

3.2. Buigligger

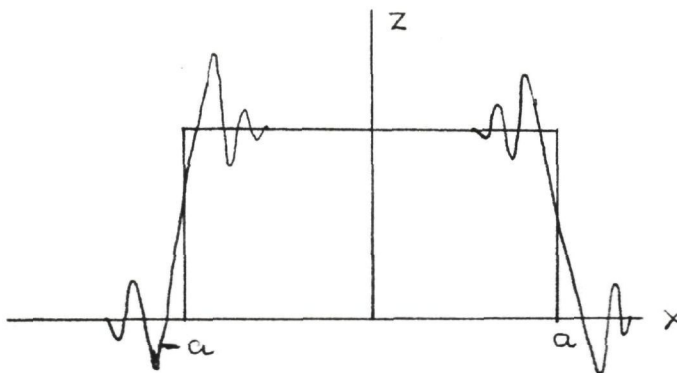
De oplossing van het stelsel (1.1.) t/m (1.3.) wordt in de volgende stappen uitgevoerd:

1. Schrijf (1.2.) in een zodanige vorm dat q als functie van F uitgedrukt kan worden en substitueer in (1.1.);
2. Bepaal de algemene oplossing van het homogene deel van (1.1.) (eigentrillingen):
 - * transformeer de partiele DV naar een gewone,
 - * bepaal de getransformeerde oplossing met behulp van de RVW.
3. Bepaal een partikuliere oplossing van de niet gereduceerde getransporteerde vergelijking.
4. Voer de inverse transformatie van de totale oplossing uit.

Ad. 1.: Herschrijven van de puntlast.

De kracht die op de balk werkt is weergegeven als een puntlast. Dit is wiskundig en fysisch een probleem (discontinuïteit in de RVW en niet overeenkomend met de werkelijkheid).

Een oplossing biedt een blokbelasting over een klein interval $[a,a]$ die als Fourier-reeks geschreven wordt. Ook een blokfunctie heeft discontinuïteiten die echter door deze reeksontwikkeling opgeheven worden.



Figuur 3.1.: Blokbelasting en (eindige) Fourier-reeks ontwikkeling.

De Fourier-reeks kan geschreven worden als [1.p.649].

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n 2\pi x}{1} + b_n \sin \frac{n 2\pi x}{1} \quad (3.2.1.)$$

Fourier-coëfficiënten zijn:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{b} \int_{-b}^b q(x) \cos \left(n 2\pi \frac{x}{1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{b} \int_{-a}^a q \cos \left(n 2\pi \frac{x}{1} \right) dx = \\ &= \begin{cases} \frac{q 2a}{b} & , n = 0 \\ \frac{2 q}{n \pi} \sin \left(n 2\pi \frac{a}{1} \right) & , n \geq 1 \end{cases} \quad (3.2.2.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{b} \int_{-b}^b q(x) \sin \left(n 2\pi \frac{x}{1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{b} \int_{-a}^a q \sin \left(n 2\pi \frac{x}{1} \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3.)$$

De reeksontwikkeling van de blokbelasting wordt met $q = F/2a$:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{F}{b} + \frac{F}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(n 2\pi \frac{a}{1} \right) \cos \left(n 2\pi \frac{a}{1} \right) = \\ &= \frac{F}{b} + \frac{F}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \left(n 2\pi \frac{a+x}{1} \right) + \sin \left(n 2\pi \frac{a-x}{1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2.4.)$$

Het alternatief voor een blokfunctie is de puntlast te vervangen door een δ -functie, gedefinieerd als [1.p.413]:

$$\delta(x) = 0 \quad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (3.2.5.)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

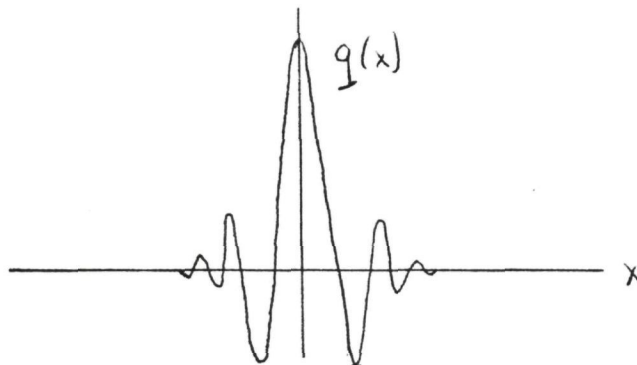
Ook deze functie kan als Fourier-reeks geschreven worden. Als deze na n termen afgebroken wordt is het zinvol te definiëren:

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) \quad (3.2.6.)$$

Er volgt dan:

$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} \quad (3.2.7.)$$

$$q(x) = \frac{F \sin nx}{\pi x} \quad (3.2.8.)$$



Figuur 3.2.: Benadering van de puntlast door middel van een δ -functie [1].

In al deze formuleringen kan gelden $F = F(t)$. In het navolgende zal (3.2.4.) worden gebruikt met $F = \hat{F} \sin(\omega_0 t)$.

Ad 2. Oplossing van de homogene vergelijking.

Er zijn verschillende methoden om de oplossing van het gereduceerde deel van (1.1.) te bepalen. Eén ervan is de Fourier-transformatie, gedefinieerd als [1 p. 673].

$$F(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \bar{f}(\omega)$$

$$F^{-1}(F(f(t))) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.2.9.)$$

Hieruit is af te leiden:

$$F\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = \frac{d^n \bar{f}}{d\omega^n} = (-i\omega)^n \bar{f} \quad (3.2.10.)$$

Zodat (1.1.) geschreven kan worden als

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} - \alpha^4 \omega^2 \bar{w} = 0 \quad (3.2.11.)$$

$$\alpha^4 = p/EI \quad (3.2.12.)$$

Een oplossing van (3.2.11.) is $\bar{w} = C \exp(\lambda x)$. Substitutie in (3.2.11.) geeft

$$\lambda^4 - \alpha^4 \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \alpha \sqrt{\omega}, \lambda_{3,4} = \pm i\alpha \sqrt{\omega} = i\lambda_{1,2}$$

De volledige oplossing luidt (lineariteit, dus superponeerbaarheid):

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, \omega) = & C_1 \exp(\alpha \sqrt{\omega} x) + C_2 \exp(-\alpha \sqrt{\omega} x) + \\ & C_3 \exp(i\alpha \sqrt{\omega} x) + C_4 \exp(-i\alpha \sqrt{\omega} x) \end{aligned} \quad (3.2.13.)$$

De constanten C_i worden uit de RVW (1.3.) bepaald, waarbij

$$M = - \frac{1}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ is.}$$

$$\bar{w}(\pm b, \omega) = C_1 \exp(-\alpha\sqrt{\omega}b) + C_2 \exp(\alpha\sqrt{\omega}b) + \\ C_3 \exp(-i\alpha\sqrt{\omega}b) + C_4 \exp(i\alpha\sqrt{\omega}b) = 0$$

$$\frac{1}{\alpha^2 \omega} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}(\pm b, \omega) = C_1 \exp(-\alpha\sqrt{\omega}b) + C_2 \exp(\alpha\sqrt{\omega}b) + \\ -C_3 \exp(-i\alpha\sqrt{\omega}b) - C_4 \exp(i\alpha\sqrt{\omega}b) = 0$$

Hieruit volgt $C_1 + C_2 = C_3 + C_4 = 0$, zodat (3.2.13.) geschreven kan worden als:

$$\bar{w}(x, \omega) = 2C_1 \cosh(\alpha\sqrt{\omega}x) + 2C_3 \cos(\alpha\sqrt{\omega}x)$$

$$\bar{w}(b, \omega) = 2C_1 \cosh(\alpha\sqrt{\omega}b) + 2C_3 \cos(\alpha\sqrt{\omega}b) = 0 \quad (3.2.14.)$$

$$\frac{1}{\alpha^2 \omega} \frac{\partial^2 \bar{w}(b, \omega)}{\partial x^2} = 2C_1 \cosh(\alpha\sqrt{\omega}b) - 2C_3 \cos(\alpha\sqrt{\omega}b) = 0$$

Een triviale oplossing is $C_1 = C_3 = 0$. De andere oplossing is $C_1 = 0$ en $\cos(\alpha\sqrt{\omega}b) = 0$. Hierbij moet C_3 bepaald worden uit het niet-gereduceerde deel van (1.1.). De eigentrillingen hebben als frequentie

$$\omega_k = (k\pi/\alpha l)^2, \quad k \in G, \quad l = 2b \quad (3.2.15.)$$

Ad 3.: Oplossing van de niet-gereduceerde vergelijking.

De Fourier-transformatie van $F = \hat{F} \sin(\omega_o t)$ is $\hat{F} \delta(\omega_o - \omega)$. Hiermee wordt de niet-gereduceerde getransformeerde vergelijking (1.1.):

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} - \alpha^4 \omega^2 \bar{w} = EI \cdot \hat{F} \delta(\omega_o - \omega) \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \right. \\ \left. \frac{1}{n} \sin(n 2\pi \frac{a}{l}) \cos(n 2\pi \frac{x}{l}) \right] \quad (3.2.16.)$$

met als algemene oplossing (3.2.14.) en (3.2.15.):

$$\bar{w}(x, \omega) = D(\omega) \cos(k \pi \frac{x}{l}) \quad (3.2.17.)$$

Substitutie van (3.2.16.) en (3.2.15.) leidt tot:

$$D(\omega) = \frac{\frac{2}{l} + \frac{1}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n 2\pi \frac{a}{l}) \cos(n 2\pi \frac{x}{l})}{[(\frac{k\pi}{l})^4 - \alpha^4 \omega^2] \cos(k \pi \frac{x}{l})} \frac{\hat{F}}{EI} \delta(\omega_0 - \omega) \quad (3.2.18.)$$

Met (3.2.15.) en (3.2.17.) volgt:

$$\bar{w}(x, \omega) = \frac{\frac{a}{l} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n 2\pi \frac{a}{l}) \cos(n 2\pi \frac{x}{l})}{1 - (\omega/\omega_k)^2} \frac{2\hat{F} l^4}{EI (K\pi)^4 a} \delta(\omega_0 - \omega) \quad (3.2.19.)$$

De inverse getransformeerde is (na sommatie over k, wat wegens lineariteit geoorloofd is):

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2\pi} \frac{l}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n 2\pi \frac{a}{l}) \cos(n 2\pi \frac{x}{l})}{(1 - (\omega_0/\omega_k)^2) k^4} \frac{2\hat{F} l^3}{\pi^4 EI} \sin(\omega_0 t) \quad (3.2.20.)$$

Als $a \rightarrow 0$ geldt $\sin(n 2\pi a/l) / (n 2\pi a/l) \rightarrow 1$ zodat overblijft:

$$w(x, t) = \frac{2 \hat{F} l^3}{\pi^4 EI} \sin(\omega_0 t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(n 2\pi \frac{x}{l})}{k^4 (1 - (\omega_0/\omega_k)^2)} \quad (3.2.21.)$$

De statische oplossing op $x = 0$ is

$$w(x, t) = \frac{1}{48} \frac{F l^3}{EI} \quad (3.2.22.)$$

Vergelijking van de coëfficiënten in (3.2.21.) en (3.2.22.) laat zien dat de verhouding $\pi^4/48,2 = 1,015$ is, hetgeen te verwaarlozen is ten opzichte van eerdere vereenvoudigingen. Derhalve is de statische oplossing een goede benadering voor het dynamische probleem als de sommatie over k in (3.2.21.) naar 1 gaat voor $x = 0$, dat wil zeggen $\omega_0 \ll \omega_k$.

De oplossing van het statische probleem wordt gevonden door (2.3.2.), (2.3.3.) en (2.3.6.) te gebruiken om (1.1.) te integreren met randvoorwaarden (1.3.) en $q = dD/dx$. Uiteraard zijn hierbij de tijdsafgeleiden nul.

Figuur 3.3.: Belastingschema en dwarskrachten-, momenten-, hoekverdraaiings- en doorbuigingslijn voor een driepuntsbuigligger.

$$D = F \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{1}{2} l < x < 0 \\ -\frac{1}{2} \quad , \quad 0 < x < \frac{1}{2} l \end{array} \right. \quad (3.2.23.)$$

$$M = F \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} l \\ -\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} l \end{array} \right. \quad (3.2.24.)$$

$$\varphi = \frac{F}{EI} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} l x \\ -\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} l x \end{array} \right. \quad (3.2.25.)$$

$$W = -\frac{F}{EI} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{8} l x^2 - \frac{1}{48} l^3 \\ -\frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{8} l x^2 - \frac{1}{48} l^3 \end{array} \right. \quad (3.2.26.)$$

Uit kracht- en verplaatsingsregistraties kan de balkstijfheid E bepaald worden als:

$$E = \frac{1}{48} \frac{l^3}{I} \frac{F}{\omega} \quad (3.2.27.)$$

Voor een viskeus materiaal kunnen de materiaalstijfheid en de materiaalfasehoek uit de balkstijfheid en de gemeten fasehoek met (3.3.8.), (3.3.9.) en $S_\alpha = E$ worden bepaald.

3.3. Lineaire modellen

Vergelijking (2.4.6.) kan dienen om op eenvoudige wijze de invloed van de meebewegende massa op het systeem te schatten. Beschouw hiertoe een tijdsinterval dat zo kort is dat het signaal gemiddeld over dat interval constant is.

Stel:

$$F = \bar{F} + \hat{F} \exp(i\omega t) \quad (3.3.1.)$$

$$x = \bar{x} + \hat{x} \exp(i\omega t + \varphi) \quad (3.3.2.)$$

Substitutie in (2.4.6.) geeft:

$$\bar{F} + \hat{F} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i\omega)^n = \bar{x} + \hat{x} \exp(i\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} (q_n i\omega)^n + m p_n(i\omega)^{n+2} \quad (3.3.3.)$$

De complexe stijfheidsmodulus (materiaal parameter) is gedefinieerd voor het harmonische deel van de signalen als

$$S = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\epsilon}} \quad (3.3.4.)$$

Wegens de lineariteit is F evenredig met σ en x met ϵ , zodat de materiaalstijfheid berekend uit de constructie-variabelen F en x wordt:

$$S_\alpha = \alpha \frac{\hat{F} \sum p_n(i\omega)^n}{\hat{x} \sum (q_n(i\omega)^n + m p_n(i\omega)^{n+2})} \exp(-i\varphi) \quad (3.3.5.)$$

Hierbij is α een evenredigheidsconstante die door de geometrie wordt bepaald en is $S = \alpha \hat{F}/\hat{X}$. Omdat S_α in het algemeen complex is, zullen zowel de gemeten waarden van $|S_\alpha|$ als van φ_α van de materiaalwaarden S en φ afwijken.

Dit kan met een voorbeeld worden toegelicht. Voor een elastisch systeem geldt (2.4.1.) en dus $p_0 = 1/m$, $q_0 = k/m$ en $q_2 = 1$. De overige waarden van p_n en q_n zijn nul, zodat

$$S_\alpha = S \exp(-i\varphi) + m\omega^2 \quad (3.3.6.)$$

$$S_\alpha = |S_\alpha| \exp(-i\varphi_\alpha) \quad (3.3.7.)$$

De materiaal-parameters S en φ kunnen nu uit de opgelegde en gemeten variabelen worden bepaald. Stel daartoe de reële en imaginaire delen van (3.3.6.) en (3.3.7.) gelijk.

$$S \cos \varphi_\alpha + m\omega^2 = S_\alpha \cos \varphi$$

$$S \sin \varphi_\alpha = S_\alpha \sin \varphi$$

Zodat:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi_\alpha}{\cos \varphi_\alpha - m\omega^2 / S_\alpha} \quad (3.3.8.)$$

$$|S| = S_d [1 - 2 (m\omega^2 / S_\alpha) \cos \varphi_\alpha + (m\omega^2 / S_\alpha)^2]^{1/2} \quad (3.3.9.)$$

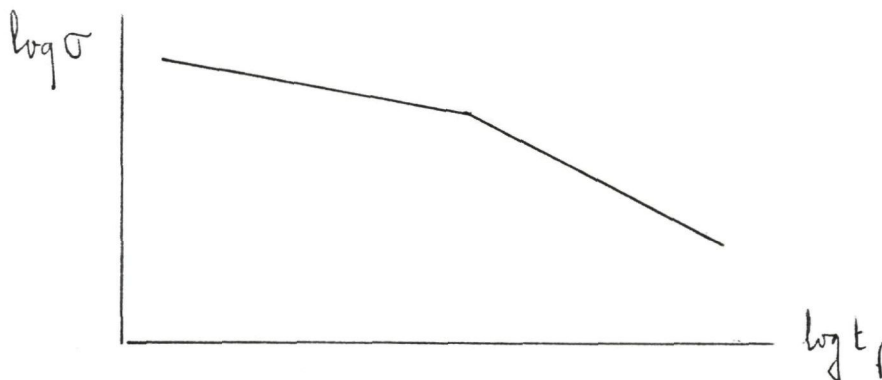
4. Toelichtingen

4.1. Fysische aspecten

Bij de afleiding van de vergelijkingen zijn materiaal-aspecten buiten beschouwing gelaten die mogelijk een grote invloed op de oplossing hebben. Verondersteld is dat het materiaal in de loop der tijd niet verandert (constante coëfficiënt in de DV). In de proef gebeurt dit wel, meestal als gevolg van de opgelegde belasting of verplaatsing. In principe zijn er twee belastingvormen te onderscheiden die dit veroorzaken:

- kruip (constante belasting als functie van de tijd);
- vermoeiing (periodieke belasting).

Meestal zijn er twee regimes te onderscheiden, namelijk bij hoge respectievelijk lage belasting [3].



Figuur 4.1.: Tijd tot bezwijken bij verschillende belastingniveaus bij een vermoeiings- respectievelijk kruipproef [3].

Een korte duurproef is op te vatten als een kortdurende kruipproef, met als limietgeval een impactproef (bijvoorbeeld een kerfslagproef). Voor een vermoeiingsproef betekent dit een proef met weinig tot 1 belasting(en).

In de huidige opzet wordt de proef krachtgestuurd uitgevoerd met een sinusvormige sprongbelasting. Dit houdt in dat beide belastingvormen een rol spelen. De gevolgen van de belasting zijn:

- (vertraagd) reversibele vervorming;
- irreversibele vervorming;
- schade, dat wil zeggen afname van stijfheids- en sterkte-eigenschappen.

De reversibele vervorming is visco-elastisch. Voor de elastische componenten zijn de afleidingen vrij goed bekend (zie hoofdstuk 2 en 3).

De irreversibele vervorming is in de regel zowel van viskeuze aard als het gevolg van (micro)scheurvorming (schade). Hiermee is in deze studie geen rekening gehouden, evenmin als met het veranderen van de stijfheid gedurende de proef. De oplossingen zijn derhalve alleen bruikbaar voor metingen in een interval dat klein genoeg is om de coëfficiënten constant te veronderstellen (quasi-stationair).

Een poging de beide typen belastingen en vervormingen te scheiden, alsmede het verdelen van de schade, bijvoorbeeld gedefinieerd als $D = S(t)/S(o)$, over elk van deze componenten vereist aanvullende veronderstellingen. Verder is werk verricht op het gebied van metalen en kunststoffen in de vorm van de breukmechanica en de continuum schade mechanica (bijvoorbeeld door constitutieve modellen als kinetische- of rate theories te poneren en hun bruikbaarheid empirisch te toetsen).

Een ander verwaarloosd punt is de niet-lineariteit, dat wil zeggen het σ - ϵ diagram is geen rechte. Deze vereenvoudiging is noodzakelijk om tot een analytisch oplosbare probleemformulering te komen. Asphalt voldoet hieraan slechts in beperkte mate en bij benadering. Genoemd is wel dat ϵ kleiner dan 100μ dient te zijn. Dit is slechts het geval tot een verticale verplaatsing van het midden van de balk van $20 \mu\text{m}$ (zie par. 4.2.).

Ook bij de schadevorming komt het niet-lineair gedrag naar voren, met name als lokaal de stijfheid afneemt (bijvoorbeeld door micro- of zelfs macroscheurvorming). Het falen van de balk - zowel door scheurgroei als door (plastisch) vloeien - is met de weergegeven modellen niet beschreven. Bij benadering kan ook hier quasi stationair worden gerekend als de - nu vaak sterk lokale - eigenschappen als homogeen verdeelde equivalenten waarden worden weergegeven.

4.2. Berekeningen

Uitgaande van de volgende grootheden kunnen op basis van de afgeleide vergelijkingen, die in bijlage I samengevat zijn, de orden van grootte van enige termen worden bepaald.

E	= 8000	MPa
b	= 50	mm
h	= 50	mm
l	= 200	mm
ρ	= 2400	kg/m ³
ν	= 0.35	
f	= 9.8	Hz
F	= 500	N
I	= $1/12 bh^3 = 520,8 \cdot 10^3$	mm ⁴
p	= $\rho bh = 6 \cdot 10^{-3}$	kg/mm
w	= 9 mm	(t.g.v. kruip)
A	= $bh = 2500$	mm ²
A^*	= $2/3 bh = 1776$	mm ²
ΔX	= 100	mm
Δw	= 30	μm

Basisvergelijking

De orde van grootte van de coëfficiënten in (2.3.8.) wordt met deze waarde als weergegeven in tabel 4.1.

Tabel 4.1.: Schatting van de termen in (2.3.8.).

Buiging	EI	$4,17 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$	$\Delta\omega \cdot \Delta x^{-4} = 0,3 \cdot 10^{-9} \text{ mm}^{-3}$	$1,25 \text{ Nmm}^{-1} \text{ Nmm}^{-1}$
Translatietraagheid	$\rho A \omega^2$	$22,75 \cdot 10^{-3} \text{ Nmm}^2$	$\Delta\omega = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$	$6,83 \cdot 10^{-4} \text{ Nmm}^{-1}$
Rotatietraagheid	$\rho I \omega^2$	4,74 N	$\Delta\omega \cdot \Delta x^{-2} = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$	$14 \cdot 10^{-6} \text{ Nmm}^{-1}$
Dwarskracht	$\rho I E A \omega^2 / GA^*$	2,63 N	$\Delta\omega \cdot \Delta x^{-2} = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$	$7,89 \cdot 10^{-6} \text{ Nmm}^{-1}$
Interactieterm	$\rho^2 A I \omega^4 / GA^*$	$3,00 \cdot 10^{-9} \text{ Nmm}^2$	$\Delta\omega = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$	$0,9 \cdot 10^{-12} \text{ Nmm}^{-1}$
Belasting		1	q	q
Plaatsafgeleide belasting	EI/GA*	115,7 mm^2	$q \Delta x^{-2} = 10^{-4} \text{ mm}^{-2}$	$11,5 \cdot 10^{-3} \text{ q Nmm}^{-1}$
Tijdsafgeleide belasting	$\rho I \omega^2 / GA^*$	$87,76 \cdot 10^{-3}$	q	$87,8 \cdot 10^{-3} \text{ q Nmm}^{-1}$

Balk (zuivere buiging)

$$M = 1/4 F l = 1/4 \cdot 100 \cdot 200 = 5 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$R = EI/M = 8000 \cdot 520,8 \cdot 10^3 / 5 \cdot 10^3 = 0,167 \cdot 10^6 \text{ mm}$$

$$\sigma_x = E \cdot \frac{1}{2} h/R = 8000 \cdot 25 / 0,167 \cdot 10^6 \text{ mm} = 1,20 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} h/R = 25/0,167 \cdot 10^6 = 150 \cdot 10^{-6}$$

$$w = \left(\frac{1}{2} l\right)^2 + v \left(\left(\frac{1}{2} h\right)^2 - 0\right) / 2R$$

$$= (100^2 + 0,35 \cdot 25^2) / 2 \cdot 0,167 \cdot 10^6 = 30,6 \text{ } \mu\text{m}$$

als $v = 0$ is $w = 29,9 \text{ } \mu\text{m}$

Balk (buiging met grote kromming)

$$r^2 = 100^2 + (r - 29)^2$$

$$r = 560 \text{ mm}$$

$$a = 560 - 25 = 535 \text{ mm}$$

$$b = 560 + 25 = 585 \text{ mm}$$

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4 a^2 b^2 (\log b/a)^2 = (3,14 - 0,59)10^9 = 2,55 \cdot 10^9$$

$$\sigma_{r(r-b)} = 0$$

$$|\sigma_{\theta(r-b)}| = 4 (M/N) (2 a^2 \log(b/a) - b^2 + a^2) = 1,33 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{\theta(r-a)}| = 4 (M/N) (2 b^2 \log(b/a) - b^2 + a^2) = 1,15 \text{ MPa}$$

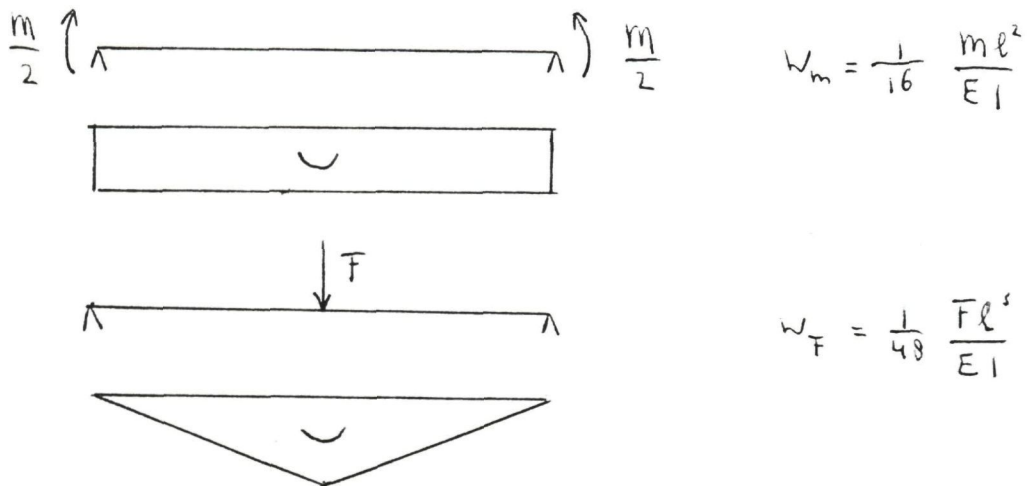
Balk (buiging met dwarskracht)

$$\sigma_x = \frac{1}{2} F \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} h/I = 1,20 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_x = \sigma_x / E = 150 \cdot 10^{-6}$$

$$w = Fl^3/48EI (1 + 1,5 \nu (h/l)^2 = 20 (1 + 2 (h/l)^2) \mu\text{m}$$

met $h/l = 1/4$ betekent dit een afwijking van 12,5 ‰. Merk op dat de maximale doorbuiging van een zuivere buigligger en een driepuntsligger zich verhouden als 3:2 (vergeet-me-nietje: $w_a/w_{F1} = 3M/F1$).



Figuur 4.2.: Definitieschets.

5. Slot

5.1. Conclusies

Bij de korte liggers ($l/h = 4$) is geen sprake meer van zuivere buiging. De dwarskracht is van belang en dient in de uitwerking verdisconteerd te worden.

De meebewegende massa is onbelangrijk. De opgelegde frequenties liggen niet in de buurt van de eigen frequenties.

Grote kromming is van belang en leidt (voor elastische liggers) tot sterk gereduceerde of vergrote spanningen.

Drie-dimensionale effecten (dwarscontractie) hebben een geringe invloed op het stijfheidsgedrag. De schematisatie tot een tweedimensionale ligger lijkt verantwoord.

5.2. Aanbevelingen

Het verdient aanbeveling de volgende aspecten (nader) uit te werken:

- Een ligger met een visco-elastisch materiaalmodel, bijvoorbeeld een Burgers model, teneinde effecten op de tijdschaal van 1 periode te schatten;
- Een ligger met een schademodel teneinde de verandering in stijfheid en fasehoek, de kruip en de vermoeiing te bepalen;
- Een energiebeschouwing;
- De invloed van de oplegpunten en de overstekken te schatten;
- Een nader onderzoek uit te voeren op de invloed van het systeem, bijvoorbeeld de PID, de demping en de stijfheid van de opstelling;
- Een dwarskracht-ligger model.

Literatuur

- [1]. Arfken, G.; Mathematical methods for physicists, 2nd edition, 1970.
- [2]. Bouma, A.L.; Esveld, C.; Dynamica van constructies, deel 1 t/m 5, Technische Hogeschool Delft, Afdeling der Civiele Techniek, 1979.
- [3]. Kachanov, L.M.; Introduction to continuum damage mechanics, 1986.
- [4]. Molenaar, J.J.M.; Van Dommelen, A.E.; Pronk, A.C.; Theorie van de vierpuntsbuigproef, DWW-MAO-R-87064.
- [5]. Pronk, A.C.: Diverse notities.
- [6]. Shames I.H.; Cozzarelli, S.A.; Elastic and in-elastic stress analysis, 1992.
- [7]. Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N.; Theory of Elasticity, 3rd edition 1970.
- [8]. Timoshenko, S.P.; Young, D.H.; Weaver jr. W.; Vibration Problems in engineering, 4th edition 1974.
- [9]. Tolman, F.; Onderbouwing bij voorschrift vierpuntsbuigproef (nog te publiceren).
- [10]. Verruit, A.; Toegepaste mechanica - 1 en II, 1977.

Bijlage I: Overzicht vergelijkingen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (1.1.)$$

$$EI w_b'''' + \rho A \ddot{w} + \rho I \left(1 + \frac{EA}{GA^*} \right) \dot{w}'' - \frac{\rho^2 AI}{GA^*} \ddot{w} = q - \frac{EI}{GA^*} q'' + \frac{\rho I}{GA^*} \ddot{q} \quad (2.3.8.)$$

Balk (zuivere buiging 3-dimensionaal)

$$R = EI/M \quad (3.1.2.)$$

$$\sigma_x = Ez/R \quad (3.1.1.)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= z/R \\ \epsilon_y &= -\nu z/R \\ \epsilon_z &= -\nu z/R \end{aligned} \quad (3.1.3.)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\begin{aligned} u &= xz/R \\ v &= -\nu yz/R \end{aligned} \quad (3.1.5.)$$

$$w = -(x^2 + \nu(z^2 - y^2))/2R$$

Balk (zuivere buiging met grote kromming, 2 dimensionaal)

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\log \frac{b}{a} \right)^2 \quad (3.1.10.)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (3.1.8.)$$

92257/FT/c182

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} \right) \quad (3.1.9.)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right)$$

Balk (buiging met dwarskracht, 2-dimensionaal)

$$\sigma_x = -Pxy/I$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\sigma_{xy} = -P(a^2 - y^2)/2I$$

$$\epsilon_x = -Pxy/EI$$

$$\epsilon_y = \nu Pxy/EI \quad (3.1.13.)$$

$$\epsilon_{xy} = -(\alpha^2 - y^2) P/2IG$$

$$u = -\frac{Px^2 y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \left(\frac{Pl^2 x}{2EI} - \frac{Pa^2}{2IG} \right) y$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}$$

Buigligger

$$w(x, t) = \frac{2 \hat{F} l^3}{\pi^4 EI} \sin(\omega_0 t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n 2\pi \frac{x}{l})}{k^4 (1 - (\omega_0/\omega_k)^2)} \quad (3.2.21.)$$

$$\omega(x) = -\frac{F}{EI} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{8} lx^2 - \frac{1}{48} l^3 & -l/2 < x < 0 \\ -\frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{8} lx^2 - \frac{1}{48} l^3 & 0 < x < l/2 \end{array} \right. \quad (3.2.26.)$$

92257/FT/c182



NPC
Hogebrinkerweg 35
Postbus 83
3870 CB Hoevelaken
telefoon 03495 - 363 44
telefax 03495 - 365 17

