

Analyse

ANALYSE

door **Dr. J.H.J. Almering e.a.**

geheel herzien door Dr. H. Bavinck en Dr.Ir. R.W. Goldbach

6e druk

Delftse Uitgevers Maatschappij b.v.

CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Analyse

Analyse / door J.H.J. Almering . . . [et al.]. — Delft : Delftse U.M. — Tab.

Vanaf de 5e dr. geheel herz. door H. Bavinck en R.W. Goldbach. — Met index.

ISBN 90-6562-078-8 geb.

SISO 515 UDC 517

Trefw.: analyse (wiskunde).

ANALYSE

door Dr. J.H.J. Almering e.s.

g geheel herzien door Dr. H. Bavinck en Dr. R.W. Goldbach

ge druk

© VSSD

Eerste druk 1974

Zesde druk 1989, 1990, 1991, 1992, 1993

Delftse Uitgevers Maatschappij b.v.

P.O. Box 2851, 2601 CW Delft, The Netherlands

Tel. 015-123 725, telefax 015-143724

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 90 6562 078 8 geb.

Voorwoord

Dit boek is bestemd als hulpmiddel bij het onderwijs in de Analyse aan de Technische Universiteit te Delft.

De eerste druk werd in 1974 in opdracht van de Onderafdeling der Wiskunde samengesteld door een werkgroep bestaande uit Prof. Dr. J.M. Aarts, Dr. J.H.J. Almering (voorzitter), Drs. N.C. Balkenende, Dr. H. Bavinck, Ir. J.J.I.M. van Kan, Drs. J.S. Mahler, Drs. L. Sleutelberg.

Nadat het boek, vrijwel ongewijzigd, vijf jaar in gebruik is geweest, heeft een ingrijpende herziening plaatsgevonden door Prof. Dr. J.M. Aarts, Dr. H. Bavinck en Drs. L. Sleutelberg. Uit deze versie werd van september '80 af onderwijs gegeven.

In 1985 is een enquête gehouden onder docenten en studenten over hun ervaringen met het boek. De uitkomst van deze enquête heeft geleid tot het besluit van de Vakgroep Algemene Wiskunde om ondergetekenden op te dragen het boek opnieuw geheel te bewerken. Het initiatief voor het schrijfwerk lag bij de eerste met name genoemde, waarna de definitieve tekst in overleg met de tweede samensteller tot stand kwam.

Naast een algehele herziening van de tekst, waarbij veel aandacht is besteed aan het inleiden van nieuwe onderwerpen en de behandeling van eenvoudige voorbeelden ter toelichting, zijn ook enige nieuwe onderwerpen toegevoegd. Hoofdstuk 1 werd uitgebreid met paragrafen over elementaire logica en bewijstechniek. In de hoofdstukken 5 en 7 is het onderwerp Laplace transformatie opgenomen.

Hoofdstuk 6 is volledig opnieuw opgezet. Gekozen is voor een systematische behandeling van functies $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, waardoor het noodzakelijk werd enige paragrafen te besteden aan een inleiding in de lineaire algebra.

Ook is getracht de leesbaarheid van het boek te vergroten door het gebruik van een groter lettertype en het opnemen van talrijke figuren.

Bij het schrijven is op enkele plaatsen gebruik gemaakt van collegedictaten van Prof. Dr. J. van der Craats en Prof. Dr. J.H.M. Steenbrink. We zijn erkentelijk voor hun toestemming daartoe.

Veel dank zijn we verschuldigd aan Dr. A. Schuitman voor zijn nuttige commentaar en voor het verzorgen van vele figuren.

Tenslotte willen wij onze waardering uitspreken voor de medewerkers van de VSSD vanwege de prettige samenwerking en de uitstekende verwerking van het manuscript.

Delft, juli 1986

De samenstellers,
Dr. H. Bavinck
Dr. Ir. R.W. Goldbach

Enkele wenken bij het gebruik

Het boek bestaat uit tien hoofdstukken, die alle zijn ingedeeld in paragrafen. Aan het eind van de meeste paragrafen is een aantal oefeningen opgenomen om de lezer vertrouwd te maken met de voorafgaande leerstof. Aan het eind van elk hoofdstuk is een paragraaf met vraagstukken toegevoegd, gerangschikt overeenkomstig de behandeling van de leerstof in het betreffende hoofdstuk. Sommige oefeningen en vraagstukken zijn voorzien van een *.

Dit duidt op een opgave die

- (1) wat dieper op de stof ingaat, of
- (2) theoretischer van aard is, of
- (3) betrekking heeft op wat meer geavanceerde onderwerpen (bijvoorbeeld Laplace transformatie).

In dit boek staan talloze verwijzingen. Een verwijzing naar 1.6.2 duidt op de tweede sectie van de zesde paragraaf van hoofdstuk één. Een verwijzing naar oef. 1.6.2 duidt op de tweede oefening achteraan de zesde paragraaf van hoofdstuk één. Ook in de index wordt op deze manier verwezen.

Als bijlage is aan dit boek een losse tabel met belangrijke formules toegevoegd.

Bij dezelfde uitgever verscheen een bundel met 250 tentamenopgaven met uitwerkingen, geredigeerd door Dr. H. Bavinck.

Inhoud

Voorwoord	5
Enkele wenken bij het gebruik	6
Inhoud	7
1. Grondbegrippen	
<i>De reële getallen</i>	13
1.1. Getallen	13
1.2. Grondeigenschappen van de reële getallen	14
1.3. Enkele begrippen	16
1.4. Volledigheid ten opzichte van de ordening	18
<i>Bewijstechniek</i>	19
1.5. Opbouw van een wiskundige theorie	19
1.6. Enkele begrippen uit de logica	20
1.7. Algemene bewijsmethoden	22
1.8. Volledige inductie	25
<i>Functies</i>	28
1.9. Het begrip functie	28
1.10. Eigenschappen van functies	31
1.11. Functies gedefinieerd op een eindige verzameling	34
1.12. Reële functies van een reële veranderlijke	37
<i>Elementaire functies</i>	41
1.13. Logaritme en exponentiële functie	41
1.14. Goniometrische functies	42
1.15. Cyclometrische functies	45
1.16. Hyperbolische functies	48
1.17. Vraagstukken	49
2. Complexe getallen	
<i>Belangrijkste eigenschappen</i>	54
2.1. Inleiding en rekenregels	54
2.2. Invoering van de complexe getallen	55
2.3. Grafische voorstelling van complexe getallen	57
2.4. Complex geconjugeerde	59
2.5. Modulus	60
2.6. Argument	64
2.7. Rekenen met modulus en argument	66
2.8. Exponentiële functie	68

2.9. Algemene vergelijking van cirkels en rechte lijnen	70
<i>Vergelijkingen</i>	71
2.10. Polynomen	71
2.11. Algebraïsche vergelijkingen	72
2.12. Binomiaalvergelijking	76
2.13. Exponentiële vergelijking	77
<i>Complexe functies van een complexe veranderlijke</i>	78
2.14. Enkele bijzondere afbeeldingen	78
2.15. Vraagstukken	83

3. Limieten en continuïteit

<i>De begrippen</i>	87
3.1. Limiet voor $x \rightarrow a$	87
3.2. Continuïteit	91
3.3. Rechter- en linkerlimiet. Rechts- en linkscontinu	93
3.4. Limieten voor $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$	95
<i>Belangrijkste eigenschappen</i>	97
3.5. Gevolgen van de limietdefinitie	97
3.6. Rekenregels voor limieten	101
3.7. Rekenregels voor continuïteit	102
3.8. Oneigenlijke limieten	104
<i>Het berekenen van limieten</i>	106
3.9. Elementaire technieken	106
3.10. Standaardlimieten van functies	110
3.11. Limieten van rijen	114
<i>Continue functies op een gesloten en begrensd interval</i>	117
3.12. Stelling van Weierstrass en gevolgen	117
3.13. Extreme waarden	119
3.14. Continuïteit van de inverse functie	121
3.15. Vraagstukken	124
<i>Appendix</i>	127

4. Differentiaalrekening

<i>Basiseigenschappen</i>	133
4.1. Definities en voorbeelden	133
4.2. Rekenregels voor differentiëren	139
4.3. Differentiëren van de inverse functie	144
<i>Differentiaal; middelwaardestelling; grafieken</i>	147
4.4. Linearisering en differentiaal	147
4.5. De middelwaardestelling en haar gevolgen	151
4.6. Extreme waarden en grafieken	156

<i>Stelling van Taylor en haar gevolgen</i>	164
4.7. Stelling van Taylor	164
4.8. Het \mathbf{O} -symbool van Landau. Standaard Taylorontwikkelingen	170
4.9. Nieuwe technieken voor het berekenen van limieten	177
<i>Enkele onderwerpen uit de numerieke analyse</i>	183
4.10. Interpolatie	183
4.11. Picard-iteratie	192
4.12. Vraagstukken	204
5. Integraalrekening	
<i>Definitie en eenvoudige eigenschappen van integralen</i>	212
5.1. De Riemann-integraal	212
5.2. Eigenschappen van integralen	216
<i>Het berekenen van integralen met behulp van primitieven</i>	221
5.3. Primitieven	221
5.4. Substitutiemethode	224
5.5. Partiële integratie	226
5.6. Het primitiveren van rationale functies	228
5.7. Het primitiveren van wortelvormen	234
5.8. Toepassing bij het berekenen van integralen	237
5.9. De natuurlijke logaritme	241
<i>Oneigenlijke integralen</i>	243
5.10. Eerste soort: oneindig integratieinterval	243
5.11. Tweede soort: integrand kan onbegrensd zijn	246
5.12. Convergentieonderzoek van oneigenlijke integralen van de eerste soort	249
5.13. Convergentieonderzoek van oneigenlijke integralen van de tweede soort	255
<i>Laplace transformatie</i>	259
5.14. Definitie en algemene stellingen	259
5.15. Drie belangrijke rekenregels	262
5.16. Differentiatie- en integratiestellingen	264
<i>Numerieke integratie</i>	267
5.17. Trapeziumregel en regel van Simpson	267
5.18. Practische wenken bij numerieke integratie	273
5.19. Vraagstukken	278
<i>Appendix</i>	286
6. Functies van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^m	
<i>Herhaling lineaire algebra</i>	290
6.1. Vectorruimte. De vectorruimte \mathbb{R}^n	290
6.2. Lineaire afbeeldingen en matrices	296
6.3. Determinanten	304

<i>Limieten en continuïteit</i>	310
6.4. Deelverzamelingen van \mathbb{R}^n	310
6.5. Definitie en voorbeelden van functies van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^m	313
6.6. Limieten	319
6.7. Continuïteit	321
<i>Differentiaalrekening</i>	324
6.8. Partiële afgeleiden en richtingsafgeleiden	324
6.9. Gradiënt, divergentie en rotatie	330
6.10. Differentieerbaarheid	332
6.11. Rekenregels voor differentiëren	340
6.12. Stelling van Taylor. Linearisering	347
6.13. Inverse functies. Impliciete functies	352
<i>Extreme waarden</i>	363
6.14. Extreme waarden van functies van meer variabelen	363
6.15. Extreme waarden onder één nevenvoorwaarde	372
6.16. Vraagstukken	377
7. Differentiaalvergelijkingen	
<i>Algemene probleemstelling</i>	382
7.1. Elementaire begrippen	382
7.2. Existentie en eenduidigheid van de oplossingen	389
7.3. Numerieke oplosmethoden	394
<i>Analytische oplosmethoden</i>	400
7.4. Enkele elementaire methoden	400
7.5. Lineaire differentiaalvergelijkingen	408
7.6. Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten	412
7.7. Toepassing van de Laplace transformatie	421
7.8. Vraagstukken	425
8. Meervoudige integralen	
<i>Integratie in \mathbb{R}^2</i>	430
8.1. Enkele definities	430
8.2. Eigenschappen van integralen	434
8.3. Transformatie in \mathbb{R}^2	439
8.4. Transformaties met behulp van poolcoördinaten	445
<i>Integratie in \mathbb{R}^3</i>	449
8.5. Rechtstreekse berekening	449
8.6. Transformatie in \mathbb{R}^3	455
8.7. Toepassingen van meervoudige integralen	463
8.8. Oneigenlijke meervoudige integralen	466
8.9. Vraagstukken	469

9. Lijnintegralen en oppervlakteintegralen	
<i>Definitie en rechtstreekse berekening</i>	472
9.1. Lijnintegralen	472
9.2. Beschrijving van (gekromde) oppervlakken in \mathbb{R}^3	479
9.3. Oppervlakteintegralen	485
<i>Integraalstellingen</i>	492
9.4. De integraalstelling van Gauss	492
9.5. De integraalstellingen van Stokes en Green	498
9.6. Toepassingen van de integraalstellingen	504
9.7. Vraagstukken	509
10. Reeksen	
<i>Convergentiecriteria</i>	514
10.1. Convergente of divergente reeksen	514
10.2. Reeksen met positieve termen	519
10.3. Absolute convergentie	524
10.4. Relatieve convergentie	528
<i>Machtreeksen</i>	531
10.5. De convergentiestraal	531
10.6. Taylorreeksen. Bepaling van de som	537
10.7. Toepassingen	546
10.8. Vraagstukken	551
Antwoorden	555
Trefwoordenlijst	581
Formuleblad	586

472	9. Lijnsregelen en openbare lijnsregelen
473	Deel van een wettelijke bepaling
479	9.1. Lijnsregelen
482	9.2. Bestrijding van (tijdelijke) openbaringen in RZ
482	9.3. Openbaringsregels
482	Openbaringsregels
492	9.4. De uitwerking van de wet
492	9.5. De uitwerking van de wet in de praktijk
504	9.6. Toepassing van de openbaringsregels
509	9.7. Vragenlijst
	10. Rekenen
514	Convergentie
514	10.1. Convergentie of divergentie van reeksen
519	10.2. Reeksen met positieve termen
524	10.3. Absolute convergentie
528	10.4. Relatieve convergentie
531	Methoden
531	10.5. De convergentietest
537	10.6. Toepassing van de test
544	10.7. Toepassing
551	10.8. Vragenlijst
552	Antwoorden
581	Index
586	Hoofdstuk

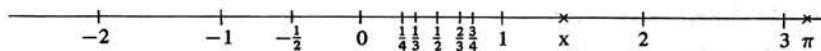
1. Grondbegrippen

De reële getallen

1.1. Getallen

We gaan uit van de verzameling van de *natuurlijke getallen* $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die we aanduiden met \mathbb{N} . Met elk tweetal elementen uit \mathbb{N} kunnen we binnen \mathbb{N} twee bewerkingen altijd uitvoeren: optellen en vermenigvuldigen. We zeggen: \mathbb{N} is *gesloten* met betrekking tot de optelling en de vermenigvuldiging. Aftrekken is niet altijd mogelijk, want er is bijvoorbeeld geen $x \in \mathbb{N}$ zó dat $1 + x = 0$; de vergelijking $a + x = b$ is binnen \mathbb{N} niet altijd oplosbaar. Door 'uitbreiding' van \mathbb{N} met de negatieve gehele getallen krijgt men $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, de *gehele getallen*. Binnen \mathbb{Z} is de vergelijking $a + x = b$ eenduidig oplosbaar: voor ieder tweetal $a, b \in \mathbb{Z}$ bestaat er precies één $x \in \mathbb{Z}$, zó dat $a + x = b$. We geven deze x aan met $b - a$. \mathbb{Z} is dus gesloten met betrekking tot de optelling, de aftrekking en de vermenigvuldiging.

Delen is binnen \mathbb{Z} niet altijd mogelijk, want er is bijvoorbeeld geen $x \in \mathbb{Z}$ zó dat $2x = 1$. Om de deling (dat wil zeggen, het bepalen van x als oplossing van de vergelijking $ax = b$, waarbij $a, b \in \mathbb{Z}$ en $a \neq 0$) mogelijk te maken, moet men \mathbb{Z} 'uitbreiden' met de zogenaamde breuken. Deling door 0 is echter nooit mogelijk. We noemen de verzameling van alle (positieve en negatieve) breuken en de getallen uit \mathbb{Z} de *rationale getallen*, die we aanduiden met \mathbb{Q} . Ga na dat ieder element x uit \mathbb{Q} te schrijven is als een onvereenvoudigbare breuk, dat wil zeggen: $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ en p en q zijn onderling ondeelbaar. p en q hebben dan geen gemeenschappelijke positieve factoren > 1 . Er geldt dat \mathbb{Q} gesloten is met betrekking tot de optelling, aftrekking en vermenigvuldiging, en met betrekking tot de deling door een getal ongelijk aan 0. We kunnen de rationale getallen afbeelden op de getallenas, maar \mathbb{Q} vult haar niet helemaal op.



Zij x de lengte van een diagonaal van een vierkant met zijde 1. Dan geldt volgens de stelling van Pythagoras: $x^2 = 2$. We zullen in 1.7.3 aantonen, dat met het punt op de getallenas, gelegen rechts van 0 op afstand $x = \sqrt{2}$ geen rationaal getal correspondeert. Evenmin is π , de verhouding van de omtrek en de middellijn van een cirkel, rationaal.

We zullen daarom de verzameling \mathbb{Q} "uitbreiden" tot de *reële getallen* \mathbb{R} , zó

dat met ieder punt van de getallenas precies één element van \mathbb{R} correspondeert.

In het volgende hoofdstuk zullen we bovendien kennis maken met de *complexe getallen* \mathbb{C} , een uitbreiding van de reële getallen.

Er geldt dus voor de genoemde getallenstelsels:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Hoe men, uitgaande van \mathbb{N} op wiskundig strenge wijze de diverse uitbreidingen tot stand brengt, dat wil zeggen achtereenvolgens de negatieve getallen, de rationale getallen, de reële getallen en de complexe getallen construeert, kan men vinden in vele boeken, bijvoorbeeld in Loonstra, *Inleiding tot de Algebra*, hoofdstuk II. We sommen nu een aantal eigenschappen voor de reële getallen op, die als axioma's (zie 1.5) voor de reële getallen kunnen worden beschouwd.

1.2. Grondeigenschappen van de reële getallen

1.2.1. Rekenregels (lichaamseigenschappen)

\mathbb{R} is gesloten met betrekking tot de optelling en de vermenigvuldiging.

Het rekenen in \mathbb{R} voldoet aan de volgende regels.

- a) De *commutatieve* wet voor de optelling:
voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ is $a + b = b + a$.
- b) De *associatieve* wet voor de optelling:
voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ is $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- c) Er is een *neutraal* element 0 voor de optelling:
voor alle $a \in \mathbb{R}$ is $a + 0 = a$.
- d) Voor alle $a \in \mathbb{R}$ is er een *tegengestelde* $-a$
zó dat $a + (-a) = 0$.
- e) De *commutatieve* wet voor de vermenigvuldiging:
voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ is $a b = b a$.
- f) De *associatieve* wet voor de vermenigvuldiging:
voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ is $a (b c) = (a b) c$.
- g) Er is een *neutraal* element $1 \neq 0$ voor de vermenigvuldiging:
voor alle $a \in \mathbb{R}$ is $1 a = a$.
- h) Voor alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ is er een *multiplicatieve inverse* $\frac{1}{a}$
zó dat $a \frac{1}{a} = 1$.
- i) De *distributieve* wet:
voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ is $(a + b) c = a c + b c$.

Een verzameling, waarop een optelling en een vermenigvuldiging zijn gedefinieerd met de eigenschappen a tot en met i wordt een *lichaam* genoemd.

Opmerking

Uit de hierboven opgesomde regels kunnen alle bekende rekenregels worden afgeleid. We merken nog op dat er precies één neutraal element voor

de optelling (c) en precies één neutraal element voor de vermenigvuldiging (g) is; tevens geldt dat ieder element van \mathbb{R} precies één tegengestelde (d) en dat ieder element van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ precies één multiplicatieve inverse (h) heeft. Voor het neutrale element voor de optelling bewijst men dat als volgt. Laat behalve 0 ook 0^* aan (c) voldoen. Dan is $0^* \stackrel{(c)}{=} 0^* + 0 \stackrel{(a)}{=} 0 + 0^* \stackrel{(c)}{=} 0$ en dus $0^* = 0$.

1.2.2. Ordeningsregels

In \mathbb{R} is de relatie $<$ gedefinieerd. Meetkundig betekent $a < b$, dat het punt a op de getallenas links van het punt b ligt. Is $a < b < c$, dan ligt b tussen a en c .

De relatie $<$ voldoet aan de volgende regels.

a) Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt precies één van de relaties

$$a = b \text{ of } a < b \text{ of } b < a.$$

Voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt:

b) Als $a < b$ en $b < c$ dan $a < c$.

c) Als $a < b$ dan $a + c < b + c$.

d) Als $a < b$ en $0 < c$ dan $ac < bc$; als $a < b$ en $c < 0$ dan $bc < ac$.

Uitgaande van de reële getallen \mathbb{R} kunnen we de natuurlijke getallen \mathbb{N} definiëren als de kleinste deelverzameling $V \subset \mathbb{R}$ zó dat

$$1) 0 \in V$$

$$2) x \in V \implies x + 1 \in V.$$

e) Als $0 < a$ en $0 < b$, dan bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zó dat $b < na$. (Axioma van Archimedes)

1.2.3. Definities

a) $a > b$ betekent: $b < a$.

b) $a \leq b$ betekent: $a < b$ of $a = b$;

c) $a \geq b$ betekent: $a > b$ of $a = b$;

d) $a \neq b$ betekent: $a > b$ of $a < b$;

e) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$;

f) $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Uit de lichaams- en ordeningseigenschappen kunnen alle bekende rekenregels worden afgeleid. Al deze rekenregels gelden ook in \mathbb{Q} ; met andere woorden \mathbb{Q} en \mathbb{R} zijn geordende lichamen. Om \mathbb{R} te karakteriseren, en dus te onderscheiden van \mathbb{Q} , is nog een axioma nodig, namelijk de *volledigheid ten opzichte van de ordening*, die we in 1.4 zullen behandelen.

1.2.4. Som- en produktteken

Omdat optelling en vermenigvuldiging associatief zijn, zijn $a + b + c$ en abc eenduidig gedefinieerd en kan men herhaald optellen en vermenigvuldigen. Zijn de getallen $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$ gegeven, dan schrijven we

$$b_0 + b_1 + \dots + b_n = \sum_{k=0}^n b_k.$$

k heet de *sommatieindex*, n is hier de *bovengrens* en 0 de *ondergrens* van de sommatie.

Merk op dat $\sum_{k=0}^n b_k$ onafhankelijk is van k . Zo geldt bijvoorbeeld

$$\sum_{k=0}^n b_k = \sum_{i=0}^n b_i.$$

$\sum_{k=p}^m b_k$, waarbij $p, m \in \mathbb{N}$ met $0 \leq p \leq m \leq n$, betekent dat alle getallen b_k , waarbij k alle natuurlijke getallen vanaf en inclusief de ondergrens p tot en met de bovengrens m doorloopt, moeten worden opgeteld. Dus

$$\sum_{k=p}^m b_k = b_p + b_{p+1} + \dots + b_{m-1} + b_m.$$

Ga zelf na dat $\sum_{k=p}^m b_k = \sum_{k=p+i}^{m+i} b_{k-i}$ voor elke $i \in \mathbb{Z}$. We hebben hier de sommatieindex k een bedrag i verschoven. Analoog schrijven we

$$b_p b_{p+1} \dots b_{m-1} b_m = \prod_{k=p}^m b_k.$$

Als $p > m$, dan definiëren we $\sum_{k=p}^m b_k = 0$ en $\prod_{k=p}^m b_k = 1$.

1.2.5 Faculteit

We definiëren $n!$ (spreek uit: n faculteit) door

$$n! = \prod_{k=1}^n k, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ en } 0! = 1.$$

Dus $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Oefening

Als $a, b \in \mathbb{R}$ en $a < b$, dan bestaat er een $c \in \mathbb{R}$ tussen a en b . Toon dit aan met behulp van de ordeningsregels 1.2.2.

1.3. Enkele begrippen

1.3.1. Interval

Een *interval* is een deelverzameling I van \mathbb{R} met de eigenschap:

als $a, b \in I$ en $a < c < b$ dan $c \in I$.

Een interval heeft een van de volgende gedaanten:

- $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$, $a \leq b$: gesloten interval
- $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $a < b$: links gesloten, rechts open interval
- $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$, $a < b$: links open, rechts gesloten interval
- $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$, $a < b$: open interval
- $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$
- $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

1.3.2. Absolute waarde

We herinneren hier aan de definitie van de *absolute waarde* of *modulus* $|a|$ van $a \in \mathbb{R}$:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0, \\ -a & \text{als } a < 0. \end{cases}$$

Als $a \geq 0$ verstaan we onder \sqrt{a} de niet-negatieve oplossing van de vergelijking $x^2 = a$ (er is er precies één). Dan geldt voor alle $a \in \mathbb{R}$:

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Met behulp hiervan bewijst men eenvoudig de volgende betrekkingen, die voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelden.

- a) $|ab| = |a||b|$
- b) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- c) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- d) Is $b \neq 0$, dan is $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

1.3.3. Maximum en minimum

Zij $V \subset \mathbb{R}$.

Als er een $v_0 \in V$ bestaat, zó dat $v \leq v_0$ voor alle $v \in V$, dan noemen we v_0 het *maximum* van V , notatie $v_0 = \max V$.

Als er een $v_1 \in V$ bestaat, zó dat $v_1 \leq v$ voor alle $v \in V$, dan noemen we v_1 het *minimum* van V , notatie $v_1 = \min V$.

1.3.4. Boven- en benedengrens

Zij $V \subset \mathbb{R}$. Een getal $u \in \mathbb{R}$ heet een *bovengrens* van V als voor alle $x \in V$ geldt $x \leq u$. V heet *naar boven begrensd*, indien er een bovengrens van V bestaat.

Een getal $t \in \mathbb{R}$ heet een *benedengrens* van V als voor alle $x \in V$ geldt $x \geq t$. V heet *naar beneden begrensd*, indien er een benedengrens van V bestaat. V heet *begrensd* als V zowel naar boven als naar beneden begrensd is.

1.3.5. Supremum en infimum

Zij $V \subset \mathbb{R}$.

- a) Een getal $\alpha \in \mathbb{R}$ heet het *supremum* van V , notatie $\alpha = \sup V$, indien geldt:
 - (i) α is een bovengrens van V en
 - (ii) als $\gamma < \alpha$ dan is γ geen bovengrens van V .
- b) Een getal $\beta \in \mathbb{R}$ heet het *infimum* van V , notatie $\beta = \inf V$, indien geldt:
 - (i) β is een benedengrens van V en
 - (ii) als $\gamma > \beta$ dan is γ geen benedengrens van V .

Opmerkingen

a) $\sup V$ wordt ook de *kleinste bovengrens* van V genoemd.

Er geldt: $a = \sup V$ dan en slechts dan als

(i) voor alle $x \in V$ is $x \leq a$ en

(ii) voor alle $\epsilon > 0$ is er een $x \in V$ met $x > a - \epsilon$.

b) $\inf V$ wordt ook de *grootste benedengrens* van V genoemd.

Er geldt: $\beta = \inf V$ dan en slechts dan als

(i) voor alle $x \in V$ is $x \geq \beta$ en

(ii) voor alle $\epsilon > 0$ is er een $x \in V$ met $x < \beta + \epsilon$.

c) Als $\max V$ bestaat, dan is blijkbaar $\max V = \sup V$.

Als $\min V$ bestaat, dan is $\min V = \inf V$.

1.3.6. Voorbeelden

a) $\sup (a, b] = \max (a, b] = b$; $\inf (a, b] = a$; $\min (a, b]$ bestaat niet.

b) $\sup (-\infty, 0) = 0$; $\inf (-\infty, 0)$, $\min (-\infty, 0)$ en $\max (-\infty, 0)$ bestaan niet. $(-\infty, 0)$ is niet naar beneden begrensd.

c) $\sup \phi$, $\inf \phi$, $\max \phi$ en $\min \phi$ bestaan niet (ϕ is de lege verzameling).

d) Zij $V = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Dan is $\max V = \sup V = 1$, $\inf V = 0$, $\min V$ bestaat niet.

1.4. Volledigheid ten opzichte van de ordening

We zijn nu in staat de laatste grondeigenschap van de reële getallen te formuleren. Als men de in 1.1 genoemde uitbreidingen streng construeert, dan kan men deze eigenschap als stelling bewijzen. Wij zullen hem als axioma beschouwen.

1.4.1. Laatste axioma van \mathbb{R} : Volledigheid ten opzichte van de ordening

a) Als V een niet-lege en naar boven begrensde verzameling van reële getallen is, dan bestaat $\sup V$.

b) Als V een niet-lege en naar beneden begrensde verzameling van reële getallen is, dan bestaat $\inf V$.

1.4.2. Opmerkingen

a) Zij $V \subset \mathbb{R}$ niet leeg en naar boven begrensd. Voor V bestaat er dus een bovengrens b en omdat ieder getal groter dan b ook een bovengrens van V is, zijn er dus oneindig veel bovengrenzen. Beschouwen we de verzameling B van alle bovengrenzen van V .

Eigenschap 1.4.1a zegt nu dat B een kleinste element, dat wil zeggen een minimum heeft. Deze eigenschap is dus verre van triviaal, want een willekeurige verzameling reële getallen hoeft geen minimum te hebben (zie de voorbeelden 1.3.6).

b) Voor de rationale getallen geldt eigenschap 1.4.1 niet. Zo heeft de verzameling $V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ geen supremum in \mathbb{Q} ; in \mathbb{R} is er wel een supremum, namelijk $\sqrt{2}$ (zie 1.7.3a).

We illustreren het gebruik van de volledigheid ten opzichte van de ordening aan de hand van de volgende stelling.

1.4.3. Stelling

Laat $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], \dots$ een rij gesloten intervallen in \mathbb{R} zijn, zó dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.
Dan bestaat er een reëel getal a dat tot elk van die intervallen behoort.

Bewijs

Zij A de verzameling van de linkereindpunten van de intervallen, dus $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, en zij p een willekeurig natuurlijk getal.

Als $p \geq n$ dan is $[a_p, b_p] \subset [a_n, b_n]$, dus $a_n \leq b_p$;

als $n > p$ dan is $[a_n, b_n] \subset [a_p, b_p]$, dus $a_n \leq b_p$.

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is blijkbaar $a_n \leq b_p$.

De verzameling A is dus naar boven begrensd en uiteraard niet leeg.

Volgens 1.4.1 bestaat $a = \sup A$. Omdat a een bovengrens van A is, is $a_p \leq a$; omdat geen bovengrens van A kleiner is dan a , is $a \leq b_p$.

Bijgevolg geldt voor iedere $p \in \mathbb{N}$ dat $a \in [a_p, b_p]$.

Oefeningen

1. A en B zijn begrensde en niet-lege deelverzamelingen van \mathbb{R} met $A \subset B$.

Bewijs: $\sup A \leq \sup B$ en $\inf A \geq \inf B$.

2. $A = \{\frac{n+2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

Bepaal $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ en $\max A$, indien deze bestaan.

Bewijstechniek

1.5. Opbouw van een wiskundige theorie

Ieder onderdeel van de wiskunde (bijvoorbeeld de verzamelingsleer) is een deductieve theorie. Bij de opbouw van zo'n wetenschap kiest men een klein aantal begrippen uit die wetenschap, die niet nader worden verklaard en *basisbegrippen* heten (bijvoorbeeld verzameling, element, behoren tot). Alle andere begrippen worden met een *definitie* herleid tot de basisbegrippen; men noemt ze wel *afgeleide begrippen*.

Een voorbeeld van een afgeleid begrip uit de verzamelingenleer is doorsnede: de doorsnede van 2 verzamelingen A en B (notatie $A \cap B$) is de verzameling van die elementen x die zowel tot A als tot B behoren.

Vervolgens kiezen we een aantal beweringen als *grondeigenschappen* of *axioma's* (bijvoorbeeld: Een verzameling is geheel bepaald door zijn elementen). Alle andere beweringen leiden we hieruit af met behulp van een *bewijs*. Deze afgeleide beweringen noemen we *stellingen*.

De in 1.2.1, 1.2.2 en 1.4.1 genoemde eigenschappen kunnen worden beschouwd als de axioma's van de reële getallen.

1.6. Enkele begrippen uit de logica

1.6.1. De bewering

Onder een bewering (uitspraak of propositie) zullen we een zin verstaan die een mededeling bevat, waarvan de waarheid (of juistheid) of onwaarheid (onjuistheid) eenduidig kan worden vastgesteld.

Voorbeelden van beweringen zijn „6 is een even getal” (waar, juist) en „23 is deelbaar door 5” (onwaar, onjuist).

Een zinnetje als „het reële getal x is negatief” noemen we een, van x afhankelijke, bewering of open bewering, want voor elke $x \in \mathbb{R}$ is de waarheid of onwaarheid van de bewering eenduidig vast te stellen. Vullen we in $x=3$, dan is „het reële getal 3 is negatief” een (onware) bewering.

Aan een ware bewering kennen we de waarheidswaarde w toe, aan een onware bewering de waarheidswaarde o .

De meeste wiskundige beweringen zijn combinaties van eenvoudiger beweringen, die ontstaan door een keuze uit de woorden 'of', 'en' en 'niet' en uit de zinsconstructies 'als . . . dan' en 'dan en slechts dan' te maken.

Dit noemen we de *logische verbindingen*.

In het vervolg van deze paragraaf zijn A en B beweringen.

1.6.2. De disjunctie

De *disjunctie* van A en B is de bewering

$$A \text{ of } B \quad (\text{notatie } A \vee B)$$

en deze is waar als tenminste één van de twee beweringen A en B waar is. Zo niet, dan is $A \vee B$ onwaar.

Voorbeeld: $(2 \in \mathbb{N}) \vee (-3 \in \mathbb{N})$ is waar, omdat één van de twee door disjunctie verbonden beweringen (namelijk de eerste) waar is.

1.6.3. De conjunctie

De *conjunctie* van A en B is de bewering

$$A \text{ en } B \quad (\text{notatie } A \wedge B)$$

en deze is waar als A en B beide waar zijn. In de overige gevallen is $A \wedge B$ onwaar.

Voorbeeld: $(2 \in \mathbb{N}) \wedge (-3 \in \mathbb{N})$ is onwaar, omdat één van de twee door conjunctie verbonden beweringen (namelijk de tweede) onwaar is.

1.6.4. De negatie

De *negatie* van A is de bewering

$$\text{niet } A \quad (\text{notatie } \neg A)$$

en heeft een waarheidswaarde verschillend van die van A .

Voorbeeld: $\neg(2 \in \mathbb{N})$ is onwaar, $\neg(-3 \in \mathbb{N})$ is waar.

1.6.5. De equivalentie

De *equivalentie* van A en B is de bewering

$$A \text{ dan en slechts dan als } B \quad (\text{notatie } A \iff B)$$

en deze is waar als A en B gelijke waarheidswaarden hebben en onwaar als A en B verschillende waarheidswaarden hebben (zie ook 1.7.4).

Als de equivalentie $A \iff B$ waar is noemt men beide beweringen equivalent.

Voorbeeld: Voor de van x afhankelijke beweringen $A(x): x = 1 \vee x = -1$ en $B(x): x^2 = 1$ is $A(x) \iff B(x)$ waar voor alle $x \in \mathbb{R}$ want (i) in het geval $x = 1$ zijn A en B beide waar, (ii) in het geval $x = -1$ zijn A en B beide waar, en (iii) als $x \neq 1 \wedge x \neq -1$, dan zijn A en B beide onwaar.

1.6.6. De implicatie

De *implicatie* van B door A is de bewering

$$\text{als } A, \text{ dan } B \quad (\text{notatie } A \Rightarrow B)$$

en deze is onwaar als A waar is en B onwaar. In de overige gevallen is $A \Rightarrow B$ waar.

Voorbeeld: Voor de van x afhankelijke beweringen $A(x): (x - 1)(x + 2) = 0$ en $B(x): x^2 = 1$ is de bewering "voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $A(x) \Rightarrow B(x)$ " onwaar. Immers,

voor $x = 1$ geldt: A is waar, B is waar, $A \Rightarrow B$ is waar;

voor $x = -2$ geldt: A is waar, B is onwaar, $A \Rightarrow B$ is onwaar;

voor $x = -1$ geldt: A is onwaar, B is waar, $A \Rightarrow B$ is waar;

en voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$ geldt: $A(x)$ is onwaar, $B(x)$ is onwaar, $A(x) \Rightarrow B(x)$ is waar.

Wel een ware bewering is dus "voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ geldt $A(x) \Rightarrow B(x)$ ".

De bewering $\neg B \Rightarrow \neg A$ noemt men de *logische omkering* van de bewering $A \Rightarrow B$. Uit oefening 1 volgt dat $A \Rightarrow B$ equivalent is met $\neg B \Rightarrow \neg A$.

De *omgekeerde bewering* van $A \Rightarrow B$ is $B \Rightarrow A$. Deze beide beweringen zijn *niet* equivalent. Geef zelf een voorbeeld voor beweringen A en B, waarvoor $A \Rightarrow B$ waar is en het omgekeerde $B \Rightarrow A$ onwaar is. Het omgekeerde van een ware stelling is dus niet altijd waar.

1.6.7. Waarheidstabel

We vatten de logische verbindingen samen in de volgende waarheidstabel.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$A \iff B$	$A \Rightarrow B$
w	w	w	w	o	w	w
w	o	w	o	o	o	o
o	w	w	o	w	o	w
o	o	o	o	w	w	w

Oefeningen

Toon met behulp van een waarheidstabel de waarheid van de volgende beweringen (1 t/m 4) aan.

- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
- Toon aan: voor alle $x \in \mathbb{R}^+$ geldt "als $x \leq 3$, dan $x^2 \leq 9$ ".
- Gegeven $a, b \in \mathbb{R}$. Het produkt $ab = 0$ dan en slechts dan als $a = 0$ of $b = 0$. Bewijs dit met behulp van 1.2.1.

1.7. Algemene bewijsmethoden**1.7.1. Het bewijs via een tegenvoorbeeld**

In het voorbeeld in 1.6.6 hebben we al gezien, dat de onwaarheid van de bewering "voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $A \Rightarrow B$ " volgde uit het feit, dat $A \Rightarrow B$ onwaar was voor $x = -2$. Met $x = -2$ hebben we een *tegenvoorbeeld* gevonden.

Zie hier een ander voorbeeld. De uitspraak "Voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt: $ab = ac \Rightarrow b = c$ " is onjuist. Om dit aan te tonen is het voldoende om te laten zien dat dit voor één speciaal geval, het tegenvoorbeeld, onjuist is. Tegenvoorbeeld: $a = 0, b = 2, c = 3$.

1.7.2. Het bewijs van een implicatie

We illustreren een aantal methoden om een implicatie te bewijzen aan de hand van het volgende voorbeeld.

Zij $A(x): x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ en $B(x): x = 2$. We willen bewijzen dat de bewering "voor alle $x \in \mathbb{R}$ is de implicatie $A(x) \Rightarrow B(x)$ waar" juist is.

a) *Rechtstreeks bewijs*; $A(x) \Rightarrow B(x)$

Zij $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$. Dan $(x - 2)(x^2 + 1) = 0$, waaruit volgt:
 $x - 2 = 0 \vee x^2 + 1 = 0$. Maar we weten dat $x^2 + 1 \neq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dus $x - 2 = 0$. Dus $x = 2$. \square

b) *Bewijs door omkering*; $\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$

Neem eens aan $x \neq 2$. Dan is $x - 2 \neq 0$. Maar voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt:
 $x^2 + 1 \neq 0$. Dus is dan $(x - 2)(x^2 + 1) = x^3 - 2x^2 + x - 2 \neq 0$. \square

c) *Bewijs uit het ongerijmde*; $(A(x) \wedge \neg B(x)) \Rightarrow (C(x) \wedge \neg C(x))$

Neem eens aan $x \neq 2$ en $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ en $x \in \mathbb{R}$. Omdat
 $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$ en $x - 2 \neq 0$ volgt dan $x^2 + 1 = 0$.
 Maar er bestaat geen enkel reëel getal met $x^2 + 1 = 0$. Tegenspraak. \square

1.7.3. Toepassingen

a) Als voor $x \in \mathbb{R}$ geldt $x^2 = 2$, dan $x \notin \mathbb{Q}$.

Bewijs

Neem eens aan dat er een $x \in \mathbb{Q}$ bestond met $x^2 = 2$. Dan was x te schrij-

ven (zie 1.1) als een onvereenvoudigbare breuk $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, zó dat $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Dan zou $p^2 = 2q^2$ zijn. Het getal p^2 zou dan een even getal zijn, en dus ook p . We kunnen daarom $p = 2r$, $r \in \mathbb{Z}$, stellen. Invullen in $p^2 = 2q^2$ en delen door 2 levert dan: $2r^2 = q^2$. Dit zou betekenen, dat ook q een even getal is, waardoor de breuk $\frac{p}{q}$ wel vereenvoudigbaar zou zijn, in strijd met de gemaakte veronderstelling. Een getal met de eigenschap $x^2 = 2$, dat wil zeggen een wortel van de vergelijking $x^2 - 2 = 0$ kan daarom geen rationaal getal zijn. \square

- b) Zijn $a, b \in \mathbb{R}$ en geldt voor iedere $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ de ongelijkheid $a < b + \epsilon$, dan is $a \leq b$.

Bewijs

Neem eens aan dat $b < a$ was. Dan was $c = \frac{a-b}{2} \in \mathbb{R}^+$ en er gold:

$b + c = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$. De keuze $c = \epsilon$ leverde dan een tegenvoorbeeld tegen het gegeven, dat voor alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ de ongelijkheid $a < b + \epsilon$ zou gelden. De aanname $b < a$ leidt dus tot een tegenspraak en daarom is $a \leq b$. \square

1.7.4. Bewijs van een equivalentie

Stellingen in de wiskunde hebben dikwijls de vorm: 'de uitspraak A is *dan en slechts dan* waar als de uitspraak B waar is'. De inhoud van deze stelling bestaat uit 2 delen.

Deel 1: A is *dan* waar, als de uitspraak B waar is, dat wil zeggen als B waar is, dan is A waar, formeel: $B \Rightarrow A$. De juistheid van de uitspraak B is *voldoende* voor de juistheid van de uitspraak A.

Deel 2: A is *slechts dan* waar, als de uitspraak B waar is, dat wil zeggen als B onwaar is, dan is A onwaar, formeel: $\neg B \Rightarrow \neg A$. De juistheid van de uitspraak B is *noodzakelijk* voor de juistheid van de uitspraak A.

Wegens oefening 1.6.1 is de uitspraak in het tweede deel equivalent met $A \Rightarrow B$. Dus: de uitspraak "A is dan en slechts dan waar als de uitspraak B waar is" is equivalent met " $(B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)$ " en dit is wegens oefening 1.6.2 equivalent met " $A \Leftrightarrow B$ ".

Bij het bewijs van een dergelijke stelling bewijst men dikwijls de beide delen $B \Rightarrow A$ en $A \Rightarrow B$ afzonderlijk. Een analoge methode wordt vaak gebruikt om de gelijkheid van 2 getallen of van 2 verzamelingen aan te tonen.

Om te bewijzen dat voor $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $a = b$, bewijst men dikwijls eerst $a \leq b$ en vervolgens $b \leq a$; om te bewijzen dat voor 2 verzamelingen A en B geldt $A = B$, bewijst men dikwijls eerst $A \subset B$ en vervolgens $B \subset A$.

Er geldt immers:

$$(\text{voor alle } x \text{ geldt } (x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \Leftrightarrow A \subset B,$$

$$(\text{voor alle } x \text{ geldt } (x \in B) \Rightarrow (x \in A)) \Leftrightarrow B \subset A,$$

$$(\text{voor alle } x \text{ geldt } (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)) \Leftrightarrow A = B.$$

1.7.5. Voorbeelden

a) Zij $b > 0$. Dan is $|a| < b \iff a \in (-b, b)$. Bewijs dit.

Bewijs

(i) \Leftarrow : Zij $a \in (-b, b)$, dan is $-b < a < b$.

Is $a \geq 0$, dan dus $|a| = a < b$.

Is $a < 0$, dan is $|a| = -a$. Omdat $-b < a$ volgt uit 1.2.2d $-a < b$, zodat nu ook $|a| = -a < b$.

(ii) \Rightarrow : Zij $|a| < b$.

Is $a \geq 0$, dan geldt dus: $-b < 0 \leq a = |a| < b$, dus $a \in (-b, b)$.

Is $a < 0$, dan is $-a = |a| < b$, zodat uit 1.2.2d volgt: $-b < a$.

Dus $-b < a < 0 < b$ en ook $a \in (-b, b)$.

Uit (i) en (ii) volgt het gestelde. \square

b) Neem aan voor $A \subset \mathbb{R}$ bestaat $\sup A = \alpha$.

Zij $B = \{b \in \mathbb{R} \mid b = 2a, a \in A\}$. Dan is $\sup B = 2\alpha$. Bewijs dit.

Bewijs

(i) 2α is een bovengrens voor B want voor alle $b \in B$ bestaat er een $a \in A$, zó dat $b = 2a \leq 2\sup A = 2\alpha$. Omdat $\sup B$ de kleinste bovengrens voor B is, geldt $\sup B \leq 2\alpha$.

(ii) Omdat α de kleinste bovengrens is van A , geldt voor iedere $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ dat $\alpha - \frac{1}{2}\epsilon$ geen bovengrens is voor A , dus er bestaat een $a_0 \in A$ met $\alpha - \frac{1}{2}\epsilon < a_0$. Dus bestaat er een $b_0 \in B$, namelijk $b_0 = 2a_0$, zó dat $2\alpha - \epsilon < 2a_0 = b_0$. Maar $b_0 \leq \sup B$, zodat voor alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ geldt: $2\alpha - \epsilon < \sup B \iff 2\alpha < \sup B + \epsilon$. Uit 1.7.3b volgt dan: $2\alpha \leq \sup B$.

(i) en (ii) levert dus: $\sup B = 2\alpha$. \square

c) Zijn A, B en C verzamelingen, dan is

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Bewijs dit.

Bewijs

(i) Laat voor een willekeurige x gelden $x \in (A \cap (B \cup C))$.

Dan $(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$. $x \in B \cup C$ is equivalent met $(x \in B) \vee (x \in C)$, zodat $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$.

Dit betekent $(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$ en dit is equivalent met

$x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Aangezien dit voor elke willekeurige

$x \in A \cap (B \cup C)$ geldt, volgt $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ii) Laat voor een willekeurige y gelden $y \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$.

Dan $(y \in A \cap B) \vee (y \in A \cap C)$. Dit betekent dat

$((y \in A) \wedge (y \in B)) \vee ((y \in A) \wedge (y \in C))$.

Als $(y \in A) \wedge (y \in B)$ dan is ook $(y \in A) \wedge (y \in B \cup C)$, zodat dan $y \in A \cap (B \cup C)$.

Als $(y \in A) \wedge (y \in C)$ dan is ook $(y \in A) \wedge (y \in B \cup C)$, zodat dan ook $y \in A \cap (B \cup C)$.

Aangezien dus voor elke willekeurige $y \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ geldt $y \in A \cap (B \cup C)$, volgt $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Uit (i) en (ii) volgt het gestelde. \square

1.7.6. Opmerking

De in voorbeeld 1.7.5c gebruikte methode om aan te tonen dat een uitspraak voor alle x uit een verzameling geldt, namelijk door aan te tonen dat het voor een willekeurige x uit die verzameling geldt, is een veel gebruikte en dus belangrijke bewijstechniek.

Oefeningen

1. Een verzameling $V \subset \mathbb{R}$ is begrensd dan en slechts dan als er een $p \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat voor alle $x \in V$ geldt $|x| \leq p$. Bewijs dit.
- *2. Neem aan voor $A \subset \mathbb{R}$ bestaat $\sup A = \alpha$.
Zij $B = \{b \in \mathbb{R} \mid b = -3a, a \in A\}$. Dan is $\inf B = -3\alpha$. Bewijs dit.
3. Zijn $a, b \in \mathbb{R}$ en er geldt voor alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ de ongelijkheid $|a - b| < \epsilon$, dan is $a = b$. Bewijs dit.
- *4. Zijn A, B en C verzamelingen, dan is $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
Bewijs dit.
5. Zijn A en B verzamelingen, dan is $A \subset B \iff A \cap B = A$. Bewijs dit.
- *6. Toon aan dat uit 1.2.2a tot en met 1.2.2d voor alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ volgt:
 $0 < a^2$.

1.8. Volledige inductie

1.8.1. Inleiding

Volledige inductie is een bewijsmethode om aan te tonen dat een bepaalde bewering $E(n)$, waarin een onbepaald natuurlijk getal n voorkomt, juist is voor *elk* natuurlijk getal $n \geq k$, waarbij k een vast natuurlijk getal is.

Voorbeelden van zo'n bewering $E(n)$ zijn:

- a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$;
- b) $5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}$ is deelbaar door 7;
- c) $(n+1)^2 < 2^n$;

Deze uitspraken zijn niet altijd juist voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

Zo is de in c) genoemde uitspraak onjuist voor $n=3$. We zullen in 1.8.3 laten zien dat de bewering c) wel juist is voor alle natuurlijke getallen ≥ 6 . De nauwkeurige formulering van het beginsel van de volledige inductie, dat een direct gevolg is van de definitie van \mathbb{N} (zie 1.2.2), luidt als volgt.

1.8.2. Beginsel van volledige inductie

Zij $E(n)$ een bewering betreffende $n \in \mathbb{N}$.

Als a) $E(k)$ waar is, en

b) de implicatie $E(n) \implies E(n+1)$ waar is voor iedere $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq k$, dan is $E(n)$ waar voor iedere $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq k$.

Opmerking over de voorwaarde b)

Om de juistheid van de uitspraak in de voorwaarde b)

$$E(n) \Rightarrow E(n+1) \text{ voor iedere } n \in \mathbb{N} \text{ met } n \geq k$$

aan te tonen, gaan we als volgt te werk.

We nemen een willekeurige $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq k$ en veronderstellen dat $E(n)$ juist is. Uitgaande van dit gegeven tonen we aan dat dan ook $E(n+1)$ juist is. Men noemt de veronderstelling, dat $E(n)$ juist is voor een zekere $n \geq k$, de *inductieveronderstelling (IV)*.

1.8.3. Voorbeelden

a) Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Bewijs

De bewering is juist voor $n=1$. Aan voorwaarde 1.8.2a is dus voldaan, met $k=1$. Voor het bewijs dat aan de voorwaarde 1.8.2b voldaan is, nemen we aan dat

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

voor een zekere $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$ (de inductieveronderstelling).

We bewijzen nu

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

als volgt.

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \{1^2 + 2^2 + \dots + n^2\} + (n+1)^2 \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Op grond van eigenschap 1.8.2 is hiermee het bewijs voltooid. \square

b) Voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n} \text{ is deelbaar door } 7.$$

Bewijs

De bewering is juist voor $n=0$: 14 is deelbaar door 7.

Neem aan dat voor zekere $n \in \mathbb{N}$

$$5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n} \text{ deelbaar is door } 7 \text{ (IV),}$$

de inductieveronderstelling. We tonen nu aan dat

$$5 \cdot 3^{4n+5} - 2^{2n+2} \text{ deelbaar is door } 7.$$

$$5 \cdot 3^{4n+5} - 2^{2n+2} = 5 \cdot 81 \cdot 3^{4n+1} - 4 \cdot 2^{2n} = 81 \cdot \underbrace{(5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n})}_{\text{deelbaar door } 7 \text{ (IV)}} + \underbrace{77 \cdot 2^{2n}}_{\text{deelbaar door } 7 \text{ (IV)}}$$

Omdat beide termen van de som deelbaar zijn door 7, is $5 \cdot 3^{4n+5} - 2^{2n+2}$ deelbaar door 7. □

Opmerking

Uit dit voorbeeld blijkt dat het nodig is de juistheid van de bewering voor $n=0$ na te gaan:

op precies dezelfde wijze als boven kan men aantonen dat uit

$$5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n} \text{ is deelbaar door } 11$$

volgt dat

$$5 \cdot 3^{4n+5} - 2^{2n+2} \text{ deelbaar is door } 11.$$

De uitspraak: voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n} \text{ is deelbaar door } 11$$

is onjuist! Deze bewering is onjuist zoals blijkt bij substitutie van $n = 0$. Ook is het noodzakelijk dat de uitspraak $E(n) \implies E(n+1)$ waar is voor alle $n \geq k$.

Nemen we b.v. voor $E(n)$ de uitspraak

$$5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n} \text{ is deelbaar door } 14,$$

dan volgt uit bovenstaand bewijs dat $E(0)$ juist is en dat voor iedere $n \geq 1$ uit de juistheid van $E(n)$ de juistheid van $E(n+1)$ volgt (want $77 \cdot 2^{2n}$ is voor $n \geq 1$ deelbaar door 14).

Hieruit kan men echter geen enkele conclusie trekken. Een kleine berekening leert ons overigens, dat $E(1)$ onjuist is.

c) Voor elk natuurlijk getal $n \geq 6$ geldt:

$$(n+1)^2 < 2^n.$$

Bewijs

De bewering is juist voor $n = 6$.

Neem aan dat voor een $n \geq 6$ geldt $(n+1)^2 < 2^n$, de inductieveronderstelling.

We tonen nu aan dat $(n+2)^2 < 2^{n+1}$.

We doen dit met behulp van de inductieveronderstelling en de ongelijkheid $2 < n^2$, die geldt voor alle $n \geq 2$.

Nu is

$$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 < n^2 + 4n + 2 + n^2 = 2(n+1)^2 \stackrel{IV}{<} 2 \cdot 2^n.$$

Dus $(n+2)^2 < 2^{n+1}$. Hieruit volgt het gestelde. □

1.8.4. Toepassingen

a) Voor de som van de eerste $n+1$ termen van de meetkundige rij (zie 1.12.9c) a, ar, ar^2, \dots, ar^n geldt

$$a + ar + \dots + ar^n = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Bewijs

Voor $n=0$ is de bewering juist. Stel de formule is juist voor zekere $n \geq 0$.

Dan is

$$\begin{aligned} a + ar + \dots + ar^n + ar^{n+1} &\stackrel{IV}{=} a \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + ar^{n+1} = \\ &= a \frac{1-r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1-r} = a \frac{1-r^{n+2}}{1-r}, \end{aligned}$$

waarmee het bewijs voltooid is. \square

b) Zij a een reëel getal met $a > -1$ en $a \neq 0$.

Voor ieder natuurlijk getal $n \geq 2$ geldt:

$$(1+a)^n > 1+na \quad (\text{ongelijkheid van Bernoulli}).$$

Bewijs

Voor $n=2$ is

$$(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a.$$

Stel $(1+a)^n > 1+na$ voor zekere $n \geq 2$.

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n.$$

Omdat $a > -1$ volgt uit de inductieveronderstelling

$$(1+a)(1+a)^n > (1+a)(1+na) = 1+(n+1)a+na^2.$$

Hieruit volgt

$$(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a,$$

waarmee het bewijs voltooid is. \square

Oefeningen

1. Toon aan dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$ geldt:

$$1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

2. $1^3+2^3+\dots+n^3 = (\frac{1}{2}n(n+1))^2$.

Bewijs deze gelijkheid voor iedere $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$.

3. Bewijs dat voor ieder natuurlijk getal $n \geq 5$ geldt:

$$n^2 < 2^n.$$

4. Bewijs dat voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt:

$$3^{2n+1} + 2^{n-1} \text{ is deelbaar door } 7.$$

5. Voor ieder even natuurlijk getal n is $x^n - y^n$ deelbaar door $x+y$.

Bewijs dit. Aanwijzing: toon aan dat voor ieder natuurlijk getal n $x^{2n} - y^{2n}$ deelbaar is door $x+y$.

Functies

1.9. Het begrip functie

1.9.1. Cartesisch produkt

Laat A en B niet-lege verzamelingen zijn.

Formulensblad

behorend bij Analyse

door J.H.J. Almering e.a.

Enkele goniometrische formules

No.

$$(g.1) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$(g.2) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$(g.3) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

$$(g.4) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

$$(g.5) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

$$(g.6) \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

$$(g.7) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

$$(g.8) \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$(g.9) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

Standaard Taylorontwikkelingen

No.

$$(s.1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}).$$

$$(s.2) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}).$$

$$(s.3) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}).$$

$$(s.4) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^{n+1}).$$

$$(s.5) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + O(x^{n+2}).$$

$$(s.6) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}).$$

$$(s.7) \quad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots + \binom{a}{n} x^n + O(x^{n+1}), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Hierbij is $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$ als $n > 0$ en $\binom{a}{0} = 1$.

Tabel van Laplace getransformeerden

No.	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$
(ℓ.1)	1	$\frac{1}{s}, s > 0$
(ℓ.2)	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
(ℓ.3)	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
(ℓ.4)	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
(ℓ.5)	$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, s > 0$
(ℓ.6)	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
(ℓ.7)	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > a $
(ℓ.8)	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > a $
(ℓ.9)	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
(ℓ.10)	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
(ℓ.11)	$t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$
(ℓ.12)	$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, s > 0$
(ℓ.13)	$u_a(t) f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
(ℓ.14)	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
(ℓ.15)	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
(ℓ.16)	$\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
(ℓ.17)	$\delta(t-a)$	e^{-as}
(ℓ.18)	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
(ℓ.19)	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

Het *Cartesisch produkt* van A en B (notatie $A \times B$) is de verzameling van alle geordende paren (a, b) met $a \in A$ en $b \in B$.

In formule: $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

1.9.2. Voorbeelden

a. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$.

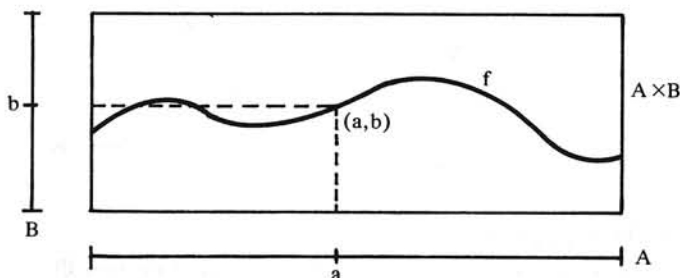
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

b. In 1.1 hebben we gezien dat we de reële getallen kunnen voorstellen als punten op een rechte lijn zó dat bij elk reëel getal één punt van de rechte lijn behoort en omgekeerd bij elk punt van de lijn één reëel getal behoort. De verzameling $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kunnen we dan voorstellen als punten in een vlak.

1.9.3. Definitie

Laat A en B niet-lege verzamelingen zijn.

Beschouw een deelverzameling f van het Cartesisch produkt $A \times B$ met de volgende eigenschap: Voor alle $a \in A$ is er één en slechts één $b \in B$ met $(a, b) \in f$.



Met iedere $a \in A$ correspondeert dus precies één $b \in B$ zó dat $(a, b) \in f$.

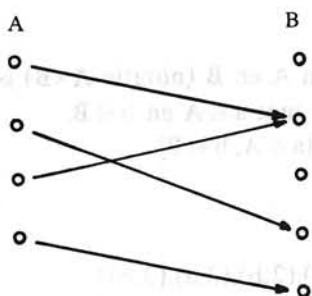
In plaats van $(a, b) \in f$ schrijven we vaak $b = f(a)$, waarin f een *afbeelding* of *functie* van A in B (notatie $f: A \rightarrow B$) definieert.

A heet de *definitie-verzameling* of het *domein* van f . B heet het *bereik* of het *codomein* van f . Als $W \subset A$ dan heet $f(W) = \{f(x) | x \in W\}$ het *beeld* van W onder f .

Heel vaak kan men een functie aangeven met een voorschrift, dat wil zeggen, een functie $f: A \rightarrow B$ wordt aangegeven met een voorschrift (= recept) dat aan iedere $a \in A$ een waarde $f(a) \in B$ toevoegt. We schrijven $a \mapsto f(a)$ a noemen we een *origineel* van $f(a)$; $f(a)$ heet het *beeld* van a.

1.9.4. Opmerkingen

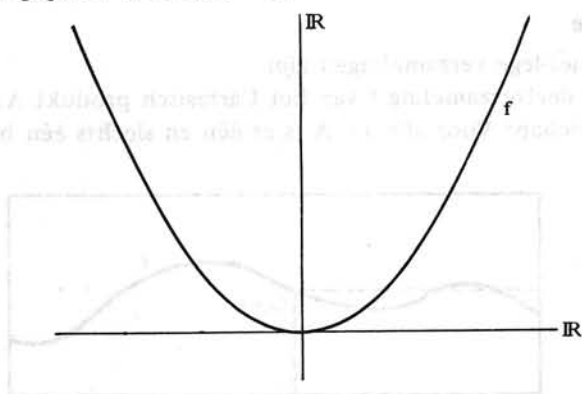
a) De hier gegeven definitie van functie wijkt enigzins af van die op het VWO. In de VWO definitie is het niet noodzakelijk dat bij $f: A \rightarrow B$ er voor iedere $a \in A$ een beeld $f(a)$ bestaat, dat wil zeggen, de functie hoeft niet op de hele verzameling A gedefinieerd te zijn. Bij onze definitie moet $f(a)$ voor alle $a \in A$ gedefinieerd zijn.



- b) Het woord “bereik” suggereert ten onrechte dat elk van zijn elementen als functiewaarden “bereikt” worden.

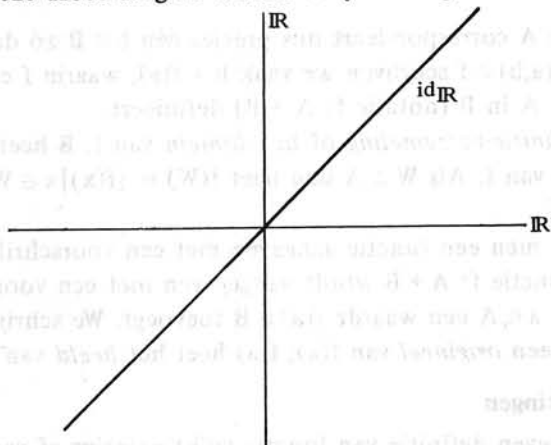
1.9.5. Voorbeelden

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = x^2$.



- b) $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $x \mapsto x$.

We noemen deze afbeelding de *identieke afbeelding* van \mathbb{R} .



- c) Door het voorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ wordt geen afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd.

1.10. Eigenschappen van functies

1.10.1. Gelijkheid

We noemen 2 functies f en g *gelijk* (notatie $f = g$) als

- (i) f en g dezelfde definitieverzameling A hebben,
- (ii) f en g hetzelfde bereik B hebben,
- (iii) voor alle $a \in A$ geldt: $f(a) = g(a)$.

1.10.2. Voorbeelden

- a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = 1 - x^2$ is gelijk aan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = (1 - x)(1 + x)$.
- b. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^2$ is *niet* gelijk aan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegeven door $g(x) = x^2$ want er is niet voldaan aan 1.10.1 ii.

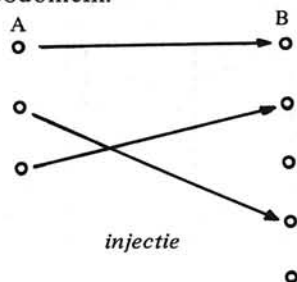
1.10.3. Definitie

- a. $f: A \rightarrow B$ heet een *injectie* (injectieve afbeelding) als voor alle $x, y \in A$ uit $f(x) = f(y)$ volgt dat $x = y$.
- b. $f: A \rightarrow B$ heet een *surjectie* (surjectieve afbeelding) als er voor alle $b \in B$ minstens één $a \in A$ is met $f(a) = b$.
- c. $f: A \rightarrow B$ heet een *bijectie* (bijjectieve afbeelding) als f injectief en surjectief is.

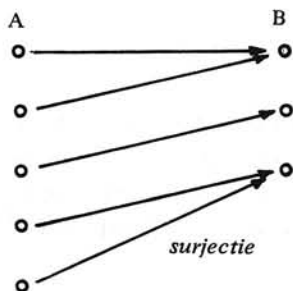
1.10.4. Toelichting

- a) f is een injectie, dan en slechts dan als voor alle $x, y \in A$
 $(f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$ of equivalent (wegens oefening 1.6.1)
 $(x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$.

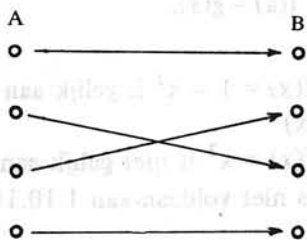
Verschillende waarden uit het domein worden afgebeeld op verschillende waarden in het codomein.



- b) Is f een surjectie, dan komen alle elementen van het bereik B als functiewaarden voor, dat wil zeggen, $B = f(A)$: het beeld van A onder f is gelijk aan het codomein.



- c) Is f een bijectie, dan horen bij verschillende elementen van het domein verschillende elementen van het codomein (injectie), en alle elementen van het codomein komen als functiewaarden aan bod (surjectie). Dus ieder element b van het codomein B komt dan voor als functiewaarde van precies één punt a uit het domein A . De toevoeging is wederzijds.



bijectie

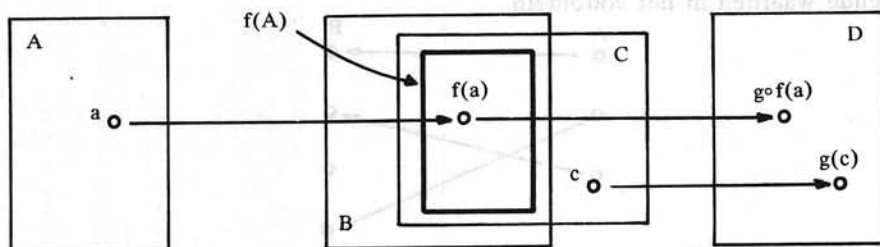
1.10.5. Voorbeelden

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$ is niet injectief en niet surjectief;
 b) $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ met $g(x) = x^2$ is niet injectief maar wel surjectief;
 c) $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met $h(x) = x^2$ is wel injectief maar niet surjectief;
 d) $j: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $j(x) = x^2$ is bijectief.

Merk op dat f , g , h , j vier onderling verschillende afbeeldingen zijn.

1.10.6. Definitie

Als $f: A \rightarrow B$ en $g: B \rightarrow C$ afbeeldingen zijn en $f(A) \subset C$ dan wordt de *samengestelde afbeelding* $g \circ f: A \rightarrow C$ gedefinieerd door $g \circ f(x) = g(f(x))$.



1.10.7. Voorbeeld

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $x \mapsto x + 2$ en $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $x \mapsto x^2$.
 Dan is $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $x \mapsto (x + 2)^2$
 en is $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $x \mapsto x^2 + 2$.
 Merk op dat in het algemeen $f \circ g \neq g \circ f$.

1.10.8. Definitie

De afbeeldingen $f: A \rightarrow B$ en $g: B \rightarrow A$ heten elkaars *inverse* als $g \circ f(a) = a$ voor alle $a \in A$ en $f \circ g(b) = b$ voor alle $b \in B$.

Men zegt in dit geval ook dat f een *inverse g heeft* en dat g een *inverse f heeft*. Men duidt de inverse van f vaak aan met f^{inv} .

1.10.9. Voorbeelden

- a) Neem $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$ en $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $g(x) = \sqrt{x}$.
Dan zijn f en g elkaars inverse afbeelding.
- b) Neem $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$ en $g: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$ met $g(x) = -\sqrt{x}$. Dan zijn f en g elkaars inverse afbeelding.
- c) De afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$ heeft geen inverse. Was immers $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ een inverse afbeelding dan zou moeten gelden $g(1) = g(f(1)) = 1$ en $g(1) = g(f(-1)) = -1$, hetgeen onmogelijk is.
- d) De afbeelding $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$ heeft geen inverse. Was immers $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ een inverse afbeelding dan zou moeten gelden $f(g(-1)) = -1$. Dit is onmogelijk omdat -1 niet tot het beeld van f behoort.

1.10.10. Toepassingen

Met behulp van inverse functies kunnen we de volgende functies definiëren.

- a) Voor $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiëren we $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ met $g(x) = \sqrt[n]{x}$ als de inverse van $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ met $f(x) = x^{2n}$.
- b) Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $g(x) = \sqrt[n+1]{x}$ als de inverse van $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^{2n+1}$.

Merk op dat f en g bijecties zijn.

1.10.11. Stelling

De afbeelding $f: A \rightarrow B$ heeft een inverse $g: B \rightarrow A$ dan en slechts dan als f bijectief is, dat wil zeggen,

$$f \text{ heeft een inverse} \iff f \text{ is bijectief.}$$

Bewijs

\Rightarrow : Stel f heeft een inverse g . Dan is f injectief. Immers uit $f(a_1) = f(a_2)$ volgt $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Maar $g(f(a_1)) = a_1$ en $g(f(a_2)) = a_2$, dus $a_1 = a_2$.

f is ook surjectief. Zij namelijk $b \in B$. Dan geldt voor $a = g(b)$ dat $f(a) = f(g(b)) = b$. Dus f is bijectief.

\Leftarrow : Neem nu aan dat f bijectief is. Dan is er voor iedere $b \in B$ precies één $a \in A$ met $f(a) = b$. We kunnen dus $g: B \rightarrow A$ definiëren door $g(b) = a \iff f(a) = b$. Dan is inderdaad $g(f(a)) = a$ voor alle $a \in A$ en $f(g(b)) = b$ voor alle $b \in B$. \square

Oefeningen

- Toon aan dat een functie hoogstens 1 inverse heeft.
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zijn gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ 1 & \text{als } x \geq 0 \end{cases}.$$

Bepaal een voorschrift voor

$$f \circ f, g \circ g, f \circ g \text{ en } g \circ f.$$

- Bewijs met behulp van stelling (1.10.11) dat de afbeeldingen in (1.10.9c) en (1.10.9d) geen inverse hebben.

4. $f: [0,2] \rightarrow [0,2]$, gegeven door $f(x) = x$ als $0 \leq x < 1$ en $f(x) = 3 - x$ als $1 \leq x \leq 2$, heeft een inverse.

Bewijs dit en bepaal de inverse van f .

5. $f: [0,3] \rightarrow [0,3]$, gegeven door $f(x) = 2x$ als $0 \leq x < 1$ en $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ als $1 \leq x \leq 3$, heeft een inverse.

Bewijs dit en bepaal de inverse van f .

1.11. Functies gedefinieerd op een eindige verzameling

1.11.1. Permutatie

Zij $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ en zij V een verzameling die n elementen bevat. Onder een *permutatie* p van V verstaan we een bijectieve afbeelding van V naar V .

Denken we de elementen van V gerangschikt, v_1, v_2, \dots, v_n , dan levert $p(v_1), p(v_2), \dots, p(v_n)$ een nieuwe rangschikking van de elementen op. Een permutatie is een *omschikking* van de elementen van V . Omdat iedere rangschikking van de elementen van V uit de oorspronkelijke rangschikking kan worden verkregen door een bepaalde permutatie, kan men een permutatie ook opvatten als een mogelijke volgorde (namelijk het resultaat van de omschikking) waarin de n elementen kunnen worden geplaatst.

1.11.2. Voorbeeld

Zij $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. We geven een permutatie p weer door het rijtje getallen: $p(1), p(2), p(3), \dots, p(n)$.

Voor $n = 2$ zijn er 2 permutaties, namelijk 12 en 21. Voor $n = 3$ zijn er 6 permutaties, namelijk 123, 132, 213, 231, 312 en 321.

1.11.3. Stelling

Het aantal permutaties van een verzameling van n elementen is gelijk aan $n!$

Bewijs 1

Zij v_1, v_2, \dots, v_n een rangschikking van de elementen van V . Voor v_1 zijn er n mogelijke beelden $p(v_1)$ beschikbaar, voor v_2 zijn er daarna $(n - 1)$ beelden $p(v_2)$ beschikbaar, voor v_3 daarna $(n - 2)$ enzovoort. Voor v_n is er nog maar 1 mogelijk beeld over. In totaal zijn er dus $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ mogelijke bijectieve afbeeldingen van $V \rightarrow V$. \square

Bewijs 2

Met volledige inductie. De stelling is juist voor $n = 1$.

Neem aan dat de stelling juist is voor n . Laat $n + 1$ elementen gegeven zijn, welke gerangschikt moeten worden over $n + 1$ plaatsen. Het $(n + 1)^e$ element kan op $(n + 1)$ verschillende plaatsen staan. In elk van zijn posities geven de andere elementen $n!$ permutaties. In het totaal krijgen we $(n + 1)n! = (n + 1)!$ permutaties. Hiermee is het bewijs geleverd. \square

1.11.4. Definitie

Laat $n, k \in \mathbb{N}$. Een deelverzameling bestaande uit k elementen van een verzameling met n elementen heet een *combinatie van k elementen uit n*

elementen; daarbij wordt dus niet gelet op de volgorde van deze k elementen. Het aantal combinaties van k elementen uit n elementen wordt aangeduid met $\binom{n}{k}$; (spreek uit: n over k).

1.11.5. Voorbeelden

a) Alle combinaties van 2 uit de 5 elementen van de verzameling $\{1,2,3,4,5\}$ zijn:

$$\begin{aligned} &\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \\ &\{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \\ &\{3,4\}, \{3,5\}, \\ &\{4,5\}. \end{aligned}$$

b) Voor alle $n \in \mathbb{N}$ is $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;

voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ is $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$;

voor alle $n, k \in \mathbb{N}$ met $k > n$ is $\binom{n}{k} = 0$.

1.11.6. Stelling

Laat $n, k \in \mathbb{N}$. Dan geldt:

(i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ als $0 \leq k \leq n$;

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ als $0 \leq k \leq n$;

(iii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ als $1 \leq k \leq n$.

Bewijs

(i) Zij $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ één der $\binom{n}{k}$ deelverzamelingen met k elementen van $\{1, 2, \dots, n\}$. Iedere permutatie van de elementen van $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ kunnen we aanvullen tot een permutatie van $\{1, 2, \dots, n\}$ door de overige $(n-k)$ elementen achter $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ te plaatsen. Dit kan op $(n-k)!$ manieren gebeuren (zie stelling 1.11.3). De deelverzameling $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ kan zelf op $k!$ manieren geordend worden.

Er kunnen op deze wijze dan $\binom{n}{k} k! (n-k)!$ permutaties gevormd worden en iedere permutatie van de elementen van $\{1, 2, \dots, n\}$ treedt daarbij één maal op. Dus $\binom{n}{k} k! (n-k)! = n!$.

Merk op dat dankzij de definitie van $0!$ het bovenstaande ook juist is als $n=0$, $k=0$ of $k=n$.

(ii) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.

(iii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$
 $= \frac{n! [k+(n-k+1)]}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$. \square

De volgende belangrijke formule om de n -de macht van een som van twee termen uit te rekenen staat bekend als het *binomium van Newton*.

1.11.7. Binomium van Newton

Als $a, b \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$, dan geldt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bewijs

Voor $n=0$ blijkt de juistheid door invullen.

Als $n \geq 1$ dan is

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ factoren.}}$$

Uitwerken levert een som van termen van de vorm $a^{n-k} b^k$ ($k=0, 1, \dots, n$). Zo'n term ontstaat door uit elk van de n factoren de a of de b te kiezen, en wel $n-k$ maal de a en k maal de b .

Het aantal termen $a^{n-k} b^k$ is dus gelijk aan het aantal combinaties van k factoren $a+b$ waaruit de b gekozen wordt (uit de overige $n-k$ factoren moet dan a gekozen worden), dat wil zeggen, de coëfficiënt van $a^{n-k} b^k$ is $\binom{n}{k}$.

1.11.8. Opmerkingen

- a) Op grond van 1.11.7 noemt men de getallen $\binom{n}{k}$ *binomiaalcoëfficiënten*. Rangschikt men de binomiaalcoëfficiënten als volgt in een schema:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \end{array}$$

dan volgt uit 1.11.6(iii) dat ieder getal dat niet aan het begin of het eind van een rij staat, gelijk is aan de som van de getallen die er links en rechts boven staan. De binomiaalcoëfficiënten kunnen dus berekend worden door alleen optellingen te gebruiken. Dit leidt tot onderstaande *driehoek van Pascal*:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

- b) Een bewijs met volledige inductie van 1.11.7 verloopt als volgt. Voor $n=1$ is de formule juist, want

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k.$$

Zij $n \geq 1$. Dan is op grond van de inductieveronderstelling

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \end{aligned}$$

In de tweede som verschuiven we de sommatieindex een bedrag 1 (zie 1.2.4). Dan krijgen we

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \stackrel{1.11.6iii}{=} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k. \end{aligned}$$

Voor $n = 0$ volgt het gestelde door invullen. \square

Oefeningen

1. Toon aan: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$, ($n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$).
2. Bewijs: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, ($n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$).
3. Bereken de coëfficiënt van x^5 in $(1+x)^{17}$ en de coëfficiënt van x^2 in $(x^2 - \frac{1}{x})^7$.
4. Bewijs dat $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ en bereken het aantal deelverzamelingen van een verzameling met n elementen.

1.12. Reële functies van een reële veranderlijke

Afbeeldingen $f: D \rightarrow B$, waarbij de definitieverzameling D en het bereik B beide deelverzamelingen van \mathbb{R} zijn, worden meestal *reële functies* (omdat $B \subset \mathbb{R}$) *van een reële veranderlijke* (omdat $D \subset \mathbb{R}$) of kortweg functies genoemd. We behandelen enkele eigenschappen die bij dergelijke functies kunnen optreden. Tenzij anders vermeld is steeds $D \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}$.

1.12.1. Definitie

Een functie $f: D \rightarrow B$ heet *naar boven begrensd op een verzameling* $V \subset D$ als er een getal $M \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat voor alle $x \in V$ geldt $f(x) \leq M$ en heet *naar beneden begrensd op* V als er een getal $m \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat voor alle $x \in V$ geldt $m \leq f(x)$; f heet *begrensd op* V als f op V zowel naar boven als naar beneden begrensd is.

1.12.2. Voorbeelden

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$: is begrensd op \mathbb{R} .
 b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{1}{x}$ is op $(0, \infty)$ niet naar boven, maar wel naar beneden begrensd; op $(1, \infty)$ is f begrensd.

1.12.3. Definitie

Een functie $f: D \rightarrow B$ heet op een verzameling $V \subset D$

- (i) *stijgend* als voor alle $x, y \in V$ met $x < y$ geldt $f(x) \leq f(y)$;
 (ii) *strikt stijgend* als voor alle $x, y \in V$ met $x < y$ geldt $f(x) < f(y)$;
 (iii) *dalend* als voor alle $x, y \in V$ met $x < y$ geldt $f(x) \geq f(y)$;
 (iv) *strikt dalend* als voor alle $x, y \in V$ met $x < y$ geldt $f(x) > f(y)$.

De genoemde vier soorten functies noemt men *monotoon* op V ;
 de functies die voldoen aan (ii) of (iv) noemt men *strikt monotoon* op V .

1.12.4. Voorbeelden

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ voor alle x , is zowel stijgend als dalend.
 b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$, is strikt dalend.
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ als $x < 1$, $f(x) = x + 3$ als $x \geq 1$, is stijgend.
 d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, is strikt stijgend.
 e) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{1}{n+1}$, is strikt dalend.

1.12.5. Definitie

Laat D symmetrisch t.o.v. 0 zijn, d.w.z. voor alle $x \in D$ is $-x \in D$.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heet *even* als voor alle $x \in D$ geldt $f(-x) = f(x)$;

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heet *oneven* als voor alle $x \in D$ geldt $f(-x) = -f(x)$.

1.12.6. Voorbeelden

- a) Alle polynomen met uitsluitend oneven machten van x zijn oneven functies van $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (voor een algemene definitie van polynoom zie 2.10.1).
 b) Alle polynomen met uitsluitend even machten van x zijn even functies van $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, is even.
 d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x+1| - |x-1|$, is oneven.
 e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$, is noch even, noch oneven.
 f) $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, is geen even functie.

1.12.7. Grafiek

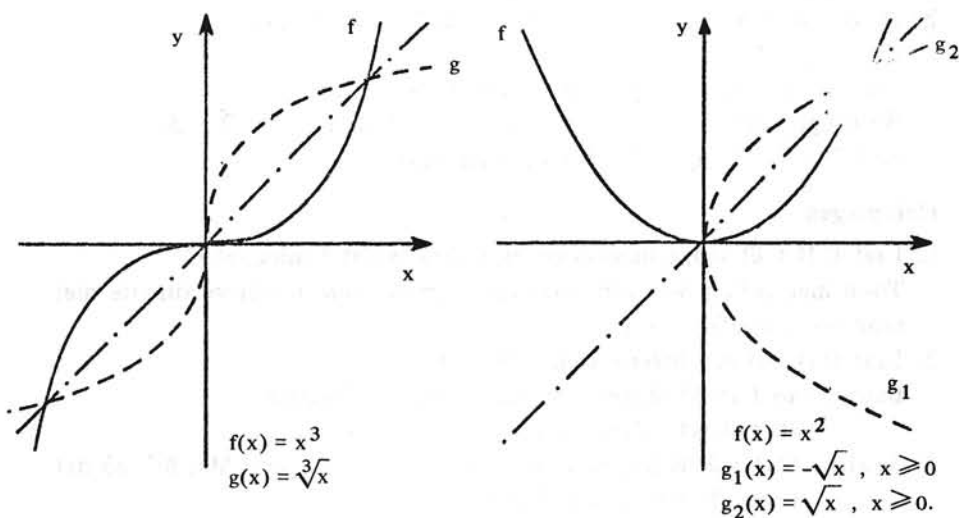
Een grafische voorstelling van een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ verkrijgen we als volgt. We kiezen in het vlak een rechthoekig assenstelsel. Op beide assen tekenen we een grafische voorstelling van \mathbb{R} . Hierbij gebruiken we op beide assen dezelfde schaal en kiezen op beide assen het punt 0 in het snijpunt der assen. Het element $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stellen we voor door het snijpunt van de loodlijn op de x -as in a en van de loodlijn op de y -as in b .

De *grafiek* van een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ is de grafische voorstelling van de verzameling $\{(x, f(x)) | x \in D\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Zij nu f een functie die een inverse g heeft. Dan ontstaat de grafiek van g

uit de grafiek van f door deze te spiegelen t.o.v. de lijn $y = x$. Dit kan men als volgt inzien:

als (p, q) een punt is van de grafiek van f , dan is $q = f(p)$. Hieruit volgt dat $g(q) = g(f(p)) = p$. Met andere woorden: (q, p) is een punt van de grafiek van g . In onderstaande plaatjes wordt dit geïllustreerd (vergelijk 1.10.9 en 1.10.10).



Een functie is even als zijn grafiek symmetrisch is ten opzichte van de y -as. Een functie is oneven als zijn grafiek puntsymmetrisch is ten opzichte van de oorsprong.

1.12.8. Rij

Een rij van reële getallen is een functie $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Voor de functiewaarde in $n \in \mathbb{N}$ schrijven we in plaats van $a(n)$ dikwijls a_n en we noteren de rij als a_0, a_1, a_2, \dots of (a_n)

1.12.9. Voorbeelden

- De identieke afbeelding, die aan $n \in \mathbb{N}$ het getal n toevoegt:
 $a_n = n$ is de rij van de natuurlijke getallen.
- In de getaltheorie onderzoekt men de functie $\pi(n)$ die aan $n \in \mathbb{N}$ het aantal priemgetallen $\leq n$ toevoegt.
- We gaan uit van een $a \in \mathbb{R}$ en vermenigvuldigen a herhaald met $r \in \mathbb{R}$.
We krijgen dan de zogenaamde *meetkundige rij* (a_n) waarbij $a_n = ar^n$.

1.12.10. Recursieve definitie van een rij

We kunnen het principe van volledige inductie gebruiken bij het definiëren van een rij, een zogenaamde recursieve definitie.

Een *recursieve definitie* van een rij (a_n) bestaat uit 2 delen:

- een voorschrift voor de berekening van a_0 t.e.m. a_p ($p \in \mathbb{N}$);
- een voorschrift om a_{n+1} te berekenen uit $a_0, \dots, a_n, n \geq p, n \in \mathbb{N}$.

Recursieve definities zijn zeer geschikt voor programmering voor de computer.

1.12.11. Voorbeelden

a) We kunnen $n!$ recursief definiëren door:

- (i) $0! = 1$;
- (ii) $(n + 1)! = (n + 1)n!$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

b) De rij van Fibonacci wordt recursief gedefinieerd door

- (i) $a_0 = 0, a_1 = 1$;
- (ii) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

We krijgen dan: $a_2 = 0 + 1 = 1, a_3 = 1 + 1 = 2, a_4 = 1 + 2 = 3,$
 $a_5 = 2 + 3 = 5, a_6 = 3 + 5 = 8,$ enzovoort.

Oefeningen

1. Laat $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ strikt monotoon zijn. Bewijs dat f injectief is.
 Toon met behulp van een voorbeeld aan dat een injectieve functie niet monotoon hoeft te zijn.

2. Laat $f: D \rightarrow B$ een inverse $g: B \rightarrow D$ hebben.

Bewijs: als f strikt stijgend is dan is g strikt stijgend;
 als f strikt dalend is dan is g strikt dalend.

3. Bewijs: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ is begrensd \iff er bestaat een getal $M \in \mathbb{R}^+$ zó dat voor alle $x \in D$ geldt $|f(x)| \leq M$.

4. Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ oneven en zij $0 \in D$. Bewijs dat $f(0) = 0$.

5. Onderzoek of er functies bestaan die zowel even als oneven zijn.

6. Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie waarbij D symmetrisch is t.o.v. 0.

Toon aan dat $f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ een even functie en dat $f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ een oneven functie is. Laat zien dat $f = f_e + f_o$.

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = 3x + 1$. Bereken het functievoorschrift voor de inverse g van f en teken in één assenstelsel de grafieken van f en g .

8. Laat $f: D \rightarrow B$ een inverse $g: B \rightarrow D$ hebben en D en B symmetrisch ten opzichte van de oorsprong zijn. Dan geldt

$$f \text{ is oneven} \iff g \text{ is oneven}$$

Bewijs dit.

9. Gegeven de rij (a_n) . Geef een recursieve definitie voor de rij (s_n) met

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Elementaire functies

We geven hier een overzicht van de belangrijkste eigenschappen van een aantal reële functies, waarmee men op het VWO al heeft kennis gemaakt. Hierbij zijn ook enkele limieten van deze functies gegeven. Op het limietbegrip wordt in hoofdstuk 3 uitvoerig ingegaan.

De natuurlijke logaritme zal worden ingevoerd met behulp van een integraal. Het begrip integraal wordt in hoofdstuk 5 behandeld.

1.13. Logaritme en exponentiële functie

1.13.1. De logaritmische functies

De natuurlijke logaritme $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. We vermelden de volgende eigenschappen.

- (i) $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ is bijectief en strikt stijgend;
- (ii) $\ln 1 = 0$ en voor alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ geldt
 $\ln ab = \ln a + \ln b$ en $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$;
- (iii) $\lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty$ en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

In de hoofdstukken 3 en 4 komen meer eigenschappen van de natuurlijke logaritme aan de orde. Al deze eigenschappen zullen pas in 5.9.3 worden bewezen, maar zullen eerder in het boek al worden gebruikt.

Voorts definieert men voor alle $g \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ de functies

${}^g\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ door ${}^g\log x = \frac{\ln x}{\ln g}$.

Op grond van (i) is er precies één reëel getal e zó dat $\ln e = 1$.

Blijkbaar is $\ln x = {}^e\log x$ voor alle $x \in \mathbb{R}^+$ (e heet daarom *basis* of *grondtal* van de natuurlijke logaritme).

1.13.2. De exponentiële functie

Omdat $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ bijectief is heeft deze functie een inverse $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ die *exp* (spreek uit: *exponent*) genoemd wordt.

Uit (1.13.1) leiden we de volgende eigenschappen af.

- (i) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ is bijectief en strikt stijgend;
- (ii) $\exp 0 = 1$ en voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt
 $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$ en $\exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b}$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$ en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$.

Bewijs

- (i) Zie (1.12) oefening 2.

$$(ii) \quad \exp(a+b) = \exp(\ln \exp a + \ln \exp b) = \exp(\ln(\exp a \cdot \exp b)) = \exp a \cdot \exp b;$$

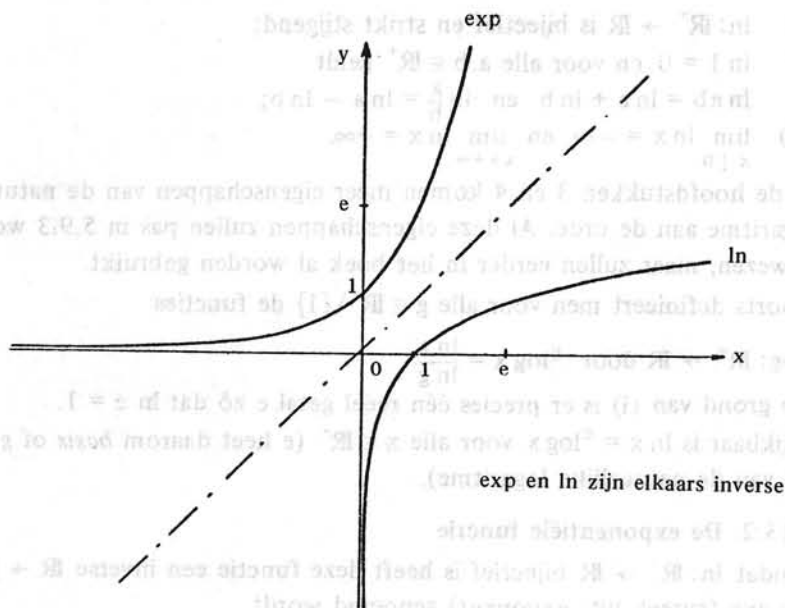
$$\exp(a-b) = \exp(\ln \exp a - \ln \exp b) = \exp \ln \frac{\exp a}{\exp b} = \frac{\exp a}{\exp b}.$$

(iii) Stel $x = \ln y$. Dan is in verband met 1.13.1(iii):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = \lim_{\ln y \rightarrow -\infty} \exp \ln y = \lim_{y \downarrow 0} y = 0 \text{ en}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = \lim_{\ln y \rightarrow +\infty} \exp \ln y = \lim_{y \rightarrow +\infty} y = +\infty.$$

Voorts definieert men voor alle $a \in \mathbb{R}^+$ en alle $x \in \mathbb{R}$ a^x door $a^x = \exp(x \ln a)$. Verder definiëren we $0^x = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^+$ en $0^0 = 1$. Blijkbaar is $e^x = \exp(x \ln e) = \exp x$; we zullen in plaats van $\exp x$ daarom meestal e^x schrijven. Verder is de notatie a^x in overeenstemming met hetgeen we vroeger geleerd hebben.



1.14. Goniometrische functies

1.14.1. Sinus en cosinus

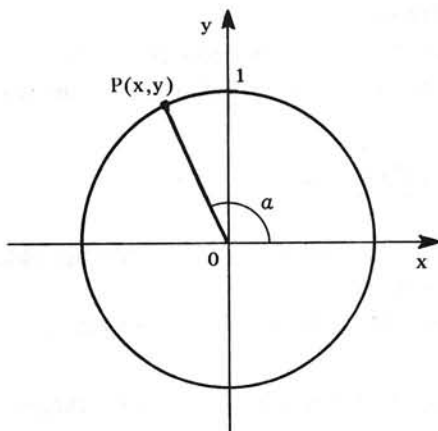
We geven hier geen definitie van de

sinusfunctie $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ en de

cosinusfunctie $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$,

maar volstaan met het vermelden van de volgende meetkundige eigenschap.

Zij $a \in \mathbb{R}$. Construeer in het vlak de boog van de eenheidscirkel ter grootte van a radialen, gemeten vanaf de positieve x -as (positieve waarden van a



linksom, negatieve rechtsom). Zij $P(x,y)$ het uiteinde van deze boog; dan is $x = \cos a$ en $y = \sin a$. Met weinig moeite leidt men hieruit af dat voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt:

- a) $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$;
- b) (i) $\cos(-a) = \cos a$, dus \cos is een even functie;
 (ii) $\sin(-a) = -\sin a$, dus \sin is een oneven functie;
- c) (i) $\cos(a + k\pi) = (-1)^k \cos a$ (voor alle $k \in \mathbb{Z}$);
 (ii) $\sin(a + k\pi) = (-1)^k \sin a$ (voor alle $k \in \mathbb{Z}$).

1.14.2. Verdere formules voor sinus en cosinus

Voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelden de volgende formules

- a) (i) $\sin(a + \beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta$;
 (ii) $\cos(a + \beta) = \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta$;
 (iii) $\sin(a - \beta) = \sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta$;
 (iv) $\cos(a - \beta) = \cos a \cos \beta + \sin a \sin \beta$;
- b) (i) $\sin a + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(a + \beta) \cos \frac{1}{2}(a - \beta)$;
 (ii) $\sin a - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(a + \beta) \sin \frac{1}{2}(a - \beta)$;
 (iii) $\cos a + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(a + \beta) \cos \frac{1}{2}(a - \beta)$;
 (iv) $\cos a - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(a + \beta) \sin \frac{1}{2}(a - \beta)$;
- c) (i) $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$;
 (ii) $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$;
- d) (i) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$;
 (ii) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$;
 $= 2 \cos^2 a - 1$;
 $= 1 - 2 \sin^2 a$;
 (iii) $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$;
 (iv) $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$.

1.14.3. Tangens en cotangens

De tangensfunctie $\tan: D_{\tan} \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, en de cotangensfunctie $\cot: D_{\cot} \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, worden gedefinieerd door

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad \text{en} \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

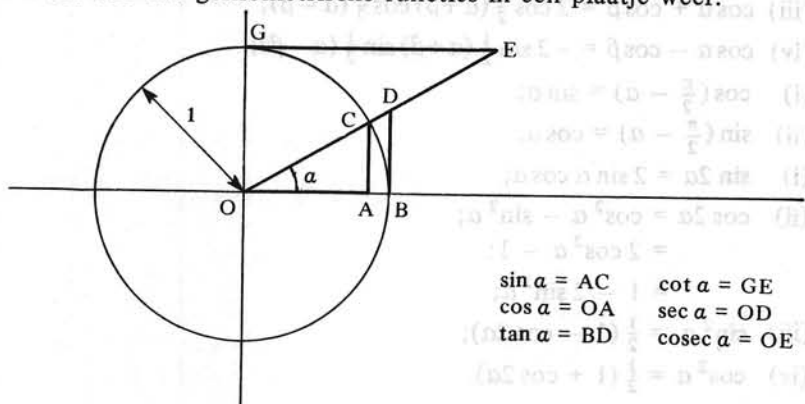
Met behulp van de in 1.14.1 en 1.14.2 vermelde betrekkingen kan men de volgende relaties bewijzen.

Voor alle a en β waarvoor beide leden gedefinieerd zijn, geldt:

- a) $\tan a \cdot \cot a = 1$;
- b) (i) $\tan(-a) = -\tan a$, dus \tan is een oneven functie;
(ii) $\cot(-a) = -\cot a$, dus \cot is een oneven functie;
- c) (i) $\tan(a + k\pi) = \tan a$ (voor alle $k \in \mathbb{Z}$);
(ii) $\cot(a + k\pi) = \cot a$ (voor alle $k \in \mathbb{Z}$);
- d) (i) $\tan(\frac{\pi}{2} - a) = \cot a$;
(ii) $\cot(\frac{\pi}{2} - a) = \tan a$;
- e) (i) $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$;
(ii) $1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$;
- f) $\tan(a + \beta) = \frac{\tan a + \tan \beta}{1 - \tan a \tan \beta}$;
- g) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.

In de literatuur komt men de secans en de cosecans, gedefinieerd door $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$, tegen. Wij zullen deze functies niet gebruiken.

We geven tot slot alle goniometrische functies in een plaatje weer.



1.15. Cyclometrische functies

1.15.1. De functie arcsin

Voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ is de functie $\sin: [-\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijectief.

De inverse functie van $\sin: [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \rightarrow [-1, 1]$ wordt *arcsin* genoemd. De functie

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

is dus voor iedere $x \in [-1, 1]$ gedefinieerd door

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x \text{ en } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Arcsin x is dus de hoek (gemeten in radialen) tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, waarvan de sinus gelijk is aan x .

Voor iedere $x \in [-1, 1]$ is $\sin(\arcsin x) = x$ en voor iedere $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ is $\arcsin(\sin x) = x$.

Let goed op! Als $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dan is $\arcsin(\sin x)$ wel gedefinieerd, maar niet gelijk aan x .

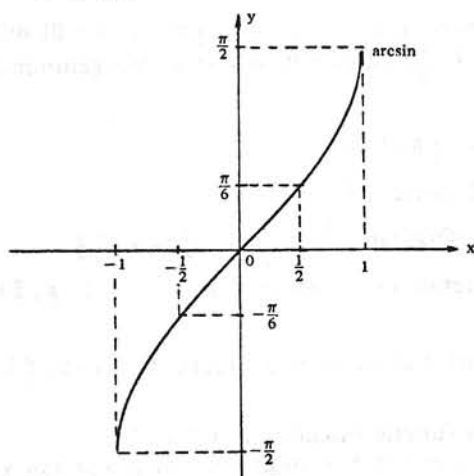
Zo is $\arcsin(\sin \frac{3}{2}\pi) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ en

$$\arcsin(\sin \frac{3}{4}\pi) = \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Omdat $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ strikt stijgend is, is $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ strikt stijgend, zie oef. 1.12.2.

Verder is arcsin een oneven functie:

als $\arcsin x = y$, dan is $x = \sin y$, dus $-x = \sin(-y)$; aangezien $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ is ook $-y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en dus $\arcsin(-x) = -y = -\arcsin x$ (zie oef. 1.12.8).



x	$\arcsin x$
-1	$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{2}$

1.15.2. De functie arccos

Voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ is de functie $\cos: [k\pi, \pi + k\pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijectief.

De inverse functie van $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ wordt *arccos* genoemd.

De functie

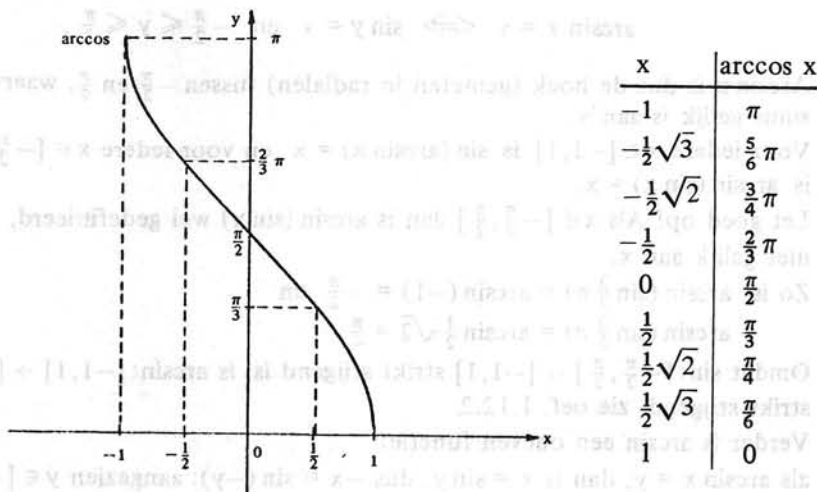
$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

is dus voor iedere $x \in [-1, 1]$ gedefinieerd door

$$\arccos x = y \iff \cos y = x \text{ en } 0 \leq y \leq \pi.$$

Voor iedere $x \in [-1, 1]$ is $\cos(\arccos x) = x$ en voor iedere $x \in [0, \pi]$ is $\arccos(\cos x) = x$.

Omdat $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ strikt dalend is, is $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ strikt dalend.



1.15.3. De functie arctan

Voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ is de functie $\tan: (-\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ bijectief.

De inverse functie van $\tan: (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ wordt *arctan* genoemd.

De functie

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$$

is dus voor iedere $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\arctan x = y \iff \tan y = x \text{ en } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

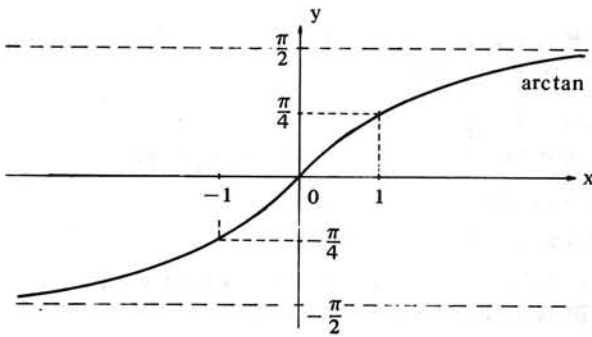
Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is $\tan(\arctan x) = x$ en voor iedere $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ is $\arctan(\tan x) = x$.

Omdat $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ strikt stijgend is, is $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ strikt stijgend.

Voorts is arctan een oneven functie (analoog aan 1.15.1).

Uit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan x = -\infty$ en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x = +\infty$ volgt nog dat $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.



x	arctan x
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
0	0
$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$

1.15.4. De functie arccot

Voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ is de functie $\cot: (k\pi, \pi + k\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ bijectief.

De inverse functie van $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ wordt *arccot* genoemd.

De functie

$$\text{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

is dus voor iedere $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\text{arccot } x = y \iff \cot y = x \text{ en } 0 < y < \pi.$$

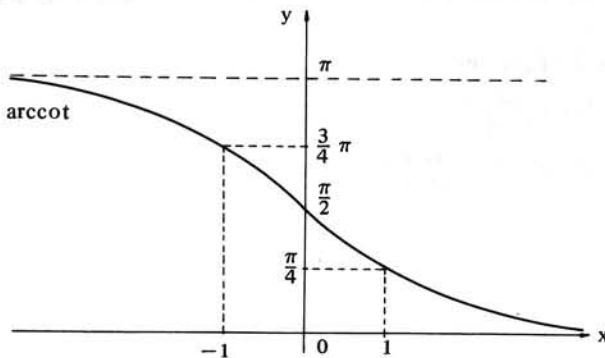
Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is $\cot(\text{arccot } x) = x$ en voor iedere $x \in (0, \pi)$ is

$$\text{arccot}(\cot x) = x.$$

Omdat $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ strikt dalend is, is $\text{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ strikt dalend.

Uit $\lim_{x \uparrow \pi} \cot x = -\infty$ en $\lim_{x \downarrow 0} \cot x = +\infty$ volgt dat $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arccot } x = \pi$ en

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arccot } x = 0.$$



x	arccot x
$-\sqrt{3}$	$\frac{5}{6} \pi$
-1	$\frac{3}{4} \pi$
$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{2}{3} \pi$
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$

1.15.5. Voorbeeld

We bewijzen dat voor alle $x \in [-1, 1]$ geldt $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Noem $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Dan is $\sin y = \sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \cos(\arccos x) = x$.

Wegens $0 \leq \arccos x \leq \pi$ is $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Uit $\sin y = x$ en $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

volgt $y = \arcsin x$. Dus $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x$.

Oefeningen

1. Bewijs: voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$.
2. Bewijs: $\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$ en
 $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3}{4}\pi$.
3. Bewijs: voor alle $x \in [0, \infty)$ is $\arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ en
 voor alle $x \in (-\infty, 0]$ is $\arctan x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
 Illustreer deze betrekkingen met een plaatje.
4. Bewijs: voor alle $x \in [-1, 1]$ is $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ en
 voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$.
 De functies \arccos en arccot zijn blijkbaar noch even, noch oneven.

1.16. Hyperbolische functies

Wanneer we volgens het recept van oef. 1.12.6 de exponentiële functie schrijven als som van een even functie en een oneven functie dan komt er

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

De even component heet *cosh*: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (spreek uit: cosinus hyperbolicus), dus

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

de oneven component heet *sinh*: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (spreek uit: sinus hyperbolicus), dus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

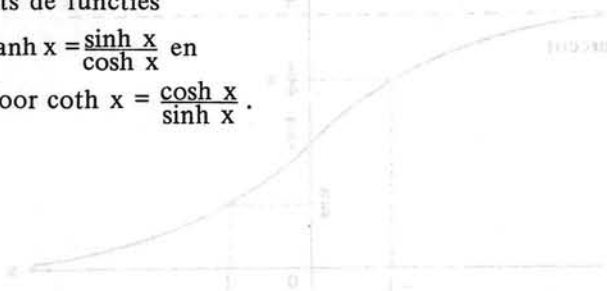
Er geldt $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1$.

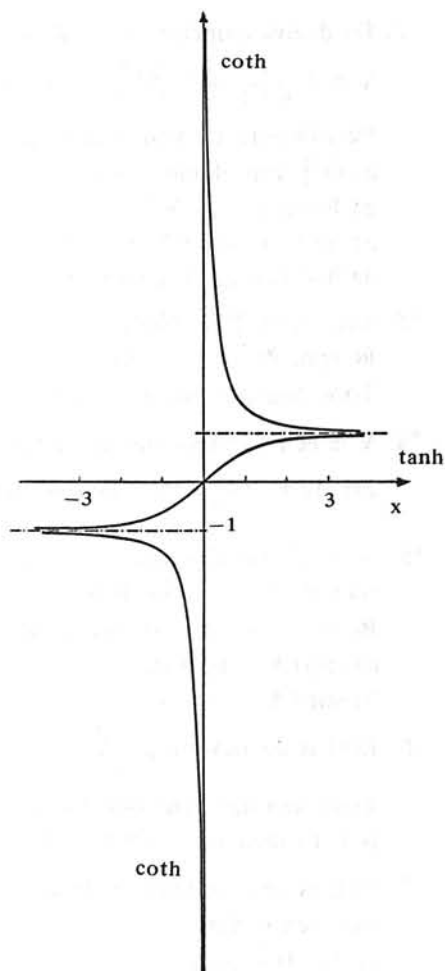
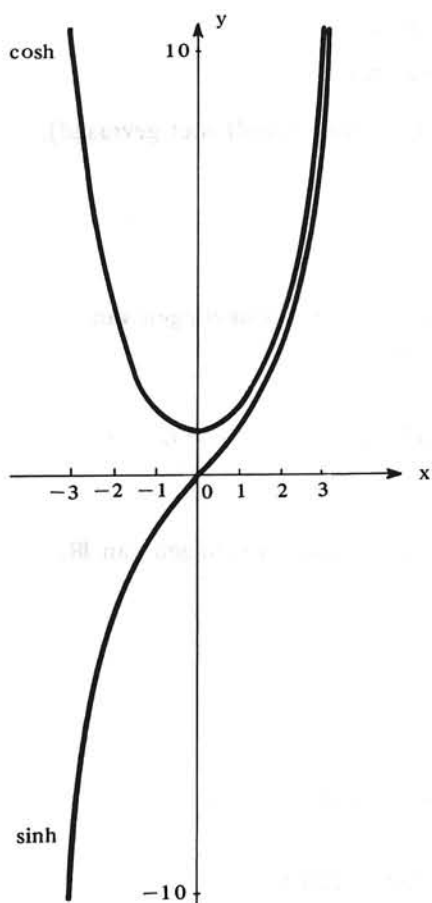
Hieruit blijkt dat $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ een parametervoorstelling (zie 6.10.14a) is van een tak van de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$; vandaar de naam hyperbolische functies.

Men definieert voorts de functies

tanh: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ en

coth: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ door $\operatorname{coth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$.





Oefeningen

- Bewijs: $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.
- Bewijs: $\cosh 2x = 1 + 2 \sinh^2 x$.
- Toon aan:
 - $\sinh 0 = 0$ en $\cosh 0 = 1$;
 - $\sinh x > 0$ voor $x > 0$ en $\sinh x < 0$ voor $x < 0$;
 - $\cosh x > 1$ voor $x \neq 0$.
- Bewijs: voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $|\tanh x| < 1$.

1.17. Vraagstukken

- Bepaal van elk van de volgende ongelijkheden de oplossingsverzameling in \mathbb{R} .
 - $|\frac{x}{x-6}| \leq x$;
 - $|\frac{x-1}{x-2}| > x$;
 - $|x| + |x-2| \leq 5x - 3$;
 - $(x-3)|x| < x^2 - 9$.

2. De deelverzameling $V \subset \mathbb{R}$ is gegeven door

$$V = \left\{ \frac{1}{m+1} + \frac{(-1)^{m+1}}{n+1} \mid m \in \mathbb{N} \text{ en } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Beantwoord de volgende vragen (een toelichting wordt niet gevraagd).

a) Is $\frac{2}{3}$ een element van V ?

b) Bestaat $\max V$?

c) Bestaat $\min V$?

d) Bereken $\inf V$ en $\sup V$.

*3. Laat A en B niet-lege naar boven begrensde deelverzamelingen van \mathbb{R} zijn. Zij $C = \{x+y \mid x \in A \text{ en } y \in B\}$.

Toon aan dat $\sup C = \sup A + \sup B$.

*4. V is een niet-lege deelverzameling van \mathbb{R} met $\inf V = a > 0$.

Zij $W = \{x \mid \frac{1}{x} \in V\}$. Bewijs: $\sup W = \frac{1}{a}$.

*5. A en B zijn niet-lege naar boven begrensde deelverzamelingen van \mathbb{R} , terwijl $\sup A = \sup B = a$.

Bewijs of weerleg de volgende uitspraken:

a) $\sup(A \cup B) = a$,

b) $\sup(A \cap B) = a$.

6. $E(n)$ is de bewering $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{8}(2n+1)^2$.

Toon aan dat $E(n) \implies E(n+1)$ geldt voor iedere $n \geq 1$.

Is $E(n)$ juist voor iedere $n \geq 1$?

7. $E(n)$ is een uitspraak betreffende het gehele getal n .

Gegeven is dat

a) $E(19)$ is juist,

b) $E(n) \implies E(n+3)$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$,

c) $E(n) \implies E(n-2)$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

Bepaal de verzameling van alle gehele getallen n , waarvoor $E(n)$ juist is.

8. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt:

a) $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$.

De tweeterm $x^n - y^n$ is dus deelbaar door $x - y$.

In het bijzonder is $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

b) $x^{2n} - y^{2n} = (x + y) \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^{2n-1-k} y^k$.

De tweeterm $x^{2n} - y^{2n}$ is dus deelbaar door $x + y$.

In het bijzonder is $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

c) $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x + y) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^{2n-k} y^k$.

De tweeterm $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ is dus deelbaar door $x + y$.
 In het bijzonder is $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

9. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\text{als } x \neq 1, \text{ dan is } \prod_{k=0}^n \{1 + x^{(2^k)}\} = \frac{1 - x^{(2^{n+1})}}{1 - x}.$$

Bewijs dit.

10. Bewijs, dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$ geldt:

$$\prod_{k=1}^n (2k - 1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

11. Leid een formule af voor $\prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k^2})$, waarin alleen de veranderlijke n voorkomt en bewijs deze formule ($n \geq 2$).

12. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|. \text{ Bewijs dit.}$$

13. Bewijs dat er een getal n_0 bestaat, zó dat voor ieder natuurlijk getal $n \geq n_0$ geldt:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{n+6}{2}.$$

14. Bewijs dat voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt: $n! \geq 2^{n-1}$.

15. Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$ geldt:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2.$$

Aanwijzing: Toon aan dat $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - 2^{-n+1}$ en gebruik hierbij vraagstuk 14.

*16. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt: $n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

17. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

18. Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

19. In de vlakke meetkunde heet een veelhoek *convex*, als voor elk tweetal punten P en Q uit het binnengebied van de veelhoek geldt, dat hun verbindingslijn PQ ook geheel tot het binnengebied behoort. Toon aan dat het aantal diagonalen van een convexe n -hoek ($n \geq 3$) gelijk is aan $\frac{1}{2}n(n-3)$.

20. Drie opeenvolgende coëfficiënten in de ontwikkeling van $(1+x)^n$ zijn 220, 495 en 792. Bereken n .

21. Voor iedere $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ is het produkt van n opeenvolgende natuurlijke getallen deelbaar door $n!$. Toon dit aan.
22. Op hoeveel manieren kan men op een telefoontoestel een nummer
- van 5 verschillende cijfers draaien?
 - van 5 cijfers draaien?
 - zelfde vragen indien niet met een 0 begonnen wordt.
23. Gegeven zijn twee gelijke bouten.
Iemand zoekt twee bijpassende moeren.
Deze worden aselekt gepakt uit een doosje met vijf moeren waarvan 3 passende en 2 niet passende.
Hoe groot is de 'kans' dat twee passende moeren worden gepakt?
24. Op hoeveel manieren kan iemand drie boterhammen beleggen als hij uit 5 mogelijkheden kan kiezen en iedere boterham verschillend belegt? (De volgorde van de boterhammen is niet relevant.)
25. Op hoeveel manieren kan een voetbalcoach een elftal samenstellen als hij over 22 spelers kan beschikken? (Twee elftallen met dezelfde spelers maar op verschillende plaatsen opgesteld worden als verschillend beschouwd.)
Dezelfde vraag indien hij over 19 veldspelers en 3 keepers beschikt.
- *26. Zij p een priemgetal en $n \in \mathbb{N}$.
Bewijs dat $n^p - n$ deelbaar is door p .
- *27. Bereken $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}$.
Aanwijzing: gebruik oefening 1.11.2.
- *28. De getallen a_n ($n \in \mathbb{N}$) worden als volgt gedefinieerd met volledige inductie:
 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
De getallen a_1, a_2, \dots heten de getallen van Fibonacci.
Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:
- $\sum_{k=0}^n a_k = a_{n+2} - 1$;
 - $2a_{n+1} = a_{n+3} - a_n$;
 - a_{3n} is even;
 - $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.
- *29. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ en alle $x \in (0, 2\pi)$ geldt:
- $$\sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}.$$

30. Gegeven zijn de functies

$$f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty) \text{ met } f(x) = 1 + \sqrt{x} \text{ en}$$

$$g: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ met } g(x) = (x - 1)^2.$$

Toon aan dat f en g elkaars inverse functie zijn.

31. Gegeven zijn de functies

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ met } f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ en } \tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1).$$

Toon aan dat f en \tanh elkaars inverse functie zijn.

32. Bewijs dat $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ en $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ elkaars inverse functie zijn.

33. Bewijs dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

*34. Teken de grafieken van:

(i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \arcsin(\sin x)$;

(ii) $g: D_{\tan} \rightarrow \mathbb{R}$ met $g(x) = \arctan(\tan x)$.

*35. Bewijs:

$$\arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \frac{1}{4} \pi & \text{als } x > -1, \\ -\frac{3}{4} \pi & \text{als } x < -1. \end{cases}$$

36. Een koord waarvan de uiteinden aan twee punten, die op een horizontale lijn liggen, is bevestigd, hangt volgens de kettinglijn:

$$y = 80 \cosh \frac{x}{80}.$$

Als het midden van dit koord 20 m onder de horizontale verbindinglijn van de ophangpunten ligt, hoe groot is dan de afstand tussen de ophangpunten?

2. Complexe getallen

Belangrijkste eigenschappen

2.1. Inleiding en rekenregels

2.1.1. Inleiding

De vergelijking $x^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossing in het lichaam der reële getallen. Om toch met een oplossing van deze vergelijking te kunnen rekenen wordt een imaginair (= denkbeeldig) getal i ingevoerd. Men rekent hiermee volgens de gewone regels, terwijl telkens i^2 gelijk aan -1 wordt gesteld. Hierbij treden getallen op van de vorm $a + bi$, waarin $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$, die men complexe getallen noemt. Is $z = a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$, dan heet a het *reële deel* van z (notatie $a = \operatorname{Re}z$) en b het *imaginaire deel* (notatie $b = \operatorname{Im}z$).

Het gebruik van complexe getallen heeft vele toepassingen binnen en buiten de wiskunde. Zo wordt in de theorie van elektrische netwerken veelvuldig met complexe getallen gewerkt en veel technische problemen leiden tot differentiaalvergelijkingen waarbij complexe getallen worden gebruikt om de (reële) oplossingen te vinden. De theorie van complexe functies van een complexe veranderlijke vindt toepassing in de stromingsleer en kan ook worden toegepast voor het berekenen van reële integralen.

2.1.2. Gelijkheid

Twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ (waarbij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) heten *gelijk* dan en slechts dan als $a = c$ en $b = d$.

De verzameling van alle complexe getallen duiden we aan met \mathbb{C} .

2.1.3. Rekenregels

Om te rekenen met complexe getallen gaat men net zo te werk als met reële getallen, waarbij men telkens i^2 door -1 vervangt.

Gegeven: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Optelling

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

b) Aftrekking

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

c) Vermenigvuldiging

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

d) Deling ($c + di \neq 0 + 0i$)

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

\mathbb{C} is gesloten onder optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling (noemer $\neq 0 + 0i$).

Oefeningen

- Bereken $(2 - 3i)(4 + 2i)$.
- Toon aan: $(2 - i)[(-3 + 2i)(5 - 4i)] = [(2 - i)(-3 + 2i)](5 - 4i)$.
Waarvan is dit een illustratie?
- Bereken $\frac{2-2i}{-3+i} \cdot \frac{-3-i}{-3-i}$ door tellers en noemers met elkaar te vermenigvuldigen.
- Laat $z = \frac{3+4i}{-4+i}$. Bereken $\operatorname{Re} z$ en $\operatorname{Im} z$. Aanwijzing: denk aan oefening 3.
- Zij $z = \frac{i}{3+i}$. Bereken $\operatorname{Re} z$ en $\operatorname{Im} z$.

2.2. Invoering van de complexe getallen

In de 19^e eeuw is door Hamilton voorgesteld om de complexe getallen in te voeren als geordende paren (a,b) van reële getallen, dat wil zeggen als elementen van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, waarop bepaalde rekenoperaties zijn gedefinieerd, die zullen blijken equivalent te zijn met de in 2.1.3 ingevoerde rekenoperaties. Niet alleen wordt hiermee het begrip complex getal herleid tot de bekende begrippen reëel getal en geordend paar, maar ook geeft dit op natuurlijke wijze een voorstelling van complexe getallen als punten in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.2.1. Definitie

Gegeven $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Complexe getallen zijn elementen van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, waarop de volgende relaties zijn gedefinieerd.

- Gelijkheid: $(a,b) = (c,d)$ dan en slechts dan als $a = c$ en $b = d$.
- Optelling: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$.
- Vermenigvuldiging: $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

2.2.2. Voorbeelden

$$(4,3) + (5,-4) = (9,-1).$$

$$(1,1)^2 = (0,2).$$

$$(4,3)(5,-4) = (32,-1).$$

2.2.3. Stelling

\mathbb{C} is een lichaam, dat wil zeggen het rekenen in \mathbb{C} voldoet aan de regels 1.2.1a tot en met 1.2.1i (lichaamseigenschappen).

Bewijs

De eigenschappen 1.2.1a tot en met 1.2.1d volgen eenvoudig. Een neutraal

element voor de optelling is $(0,0)$. Ga zelf de commutatieve wet voor de vermenigvuldiging (1.2.1e) na.

De associatieve wet voor de vermenigvuldiging (1.2.1f), dus

$$[(a_1, a_2)(b_1, b_2)](c_1, c_2) = (a_1, a_2)[(b_1, b_2)(c_1, c_2)]$$

voor alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ uit \mathbb{C} , bewijzen we als volgt:

$$\begin{aligned} \text{linkerlid} &= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)(c_1, c_2) \\ &= (a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_1 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2, a_1 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1) \\ \text{rechterlid} &= (a_1, a_2)(b_1 c_1 - b_2 c_2, b_1 c_2 + b_2 c_1) \\ &= (a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1, a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2), \end{aligned}$$

waaruit de gelijkheid van linker- en rechterlid volgt.

$(1,0)$ is een neutraal element voor de vermenigvuldiging (1.2.1g), want voor alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}$ geldt

$$(1,0)(a_1, a_2) = (1a_1 - 0a_2, 1a_2 + 0a_1) = (a_1, a_2).$$

Toepassing van de definitie van vermenigvuldiging laat zien dat voor alle $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ geldt

$$(a_1, a_2) \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) = (1,0).$$

Dus is $\left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right)$ een multiplicatieve inverse van (a_1, a_2) , die we noteren met $(a_1, a_2)^{-1}$.

Bewijs zelf de distributieve wet: voor alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in \mathbb{C}$ is

$$[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)](c_1, c_2) = (a_1, a_2)(c_1, c_2) + (b_1, b_2)(c_1, c_2).$$

2.2.4. Verband tussen \mathbb{C} en \mathbb{R}

Laat $\mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}$ gegeven zijn door $\mathbb{C}_0 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Men rekent gemakkelijk na dat voor $z = (a,0)$ en $w = (b,0)$ geldt $z + w = (a + b, 0)$ en $zw = (ab, 0)$.

We definiëren de afbeelding $h: \mathbb{C}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ door $h((x,0)) = x$.

De afbeelding is bijectief, maar bovendien geldt:

(i) het beeld van de som is de som van de beelden:

$$h((a + b, 0)) = h((a,0)) + h((b,0)), \text{ en}$$

(ii) het beeld van het produkt is het produkt van de beelden:

$$h((ab, 0)) = h((a,0)).h((b,0)).$$

Het rekenen in \mathbb{C}_0 verloopt dus precies zoals het rekenen in \mathbb{R} . *Op grond hiervan maken we geen onderscheid tussen het complexe getal $(a,0)$ en het reële getal a .*

Een bijectieve afbeelding met behoud van de rekenoperaties noemt men een *isomorfie*.

2.2.5. Het getal i

- a) We noemen $i = (0,1)$ de imaginaire eenheid.
Er geldt: $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. (De laatste stap geldt wegens 2.2.4)
- b) Verder volgt nu $(a,b) = a + bi$, want $(a,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi$.

2.2.6. Reëel en imaginair deel

a) Definitie

Als $z = (x,y) \in \mathbb{C}$, dan heet x het *reële deel* van z en y het *imaginaire deel* van z ; notatie

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{en} \quad y = \operatorname{Im} z.$$

b) Opmerkingen

- (i) Let goed op: $\operatorname{Im} z$ is een reëel getal.
(ii) Uit 2.2.5b volgt nu direct de eigenschap

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z).$$

- (iii) Getallen van de vorm $(0,b) = bi$ met $b \in \mathbb{R}$ noemt men *zuiver imaginair*.

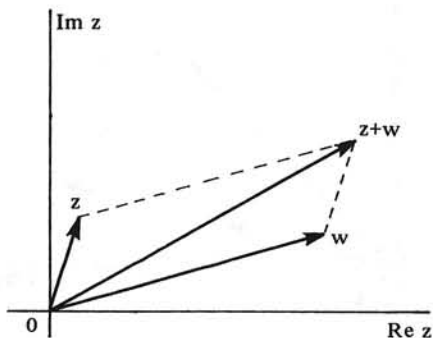
2.3. Grafische voorstelling van complexe getallen

2.3.1. Het complexe vlak (Gauss-vlak)

Omdat een complex getal een element van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is, kan het voorgesteld worden door een punt in het vlak met behulp van een rechthoekig assenstelsel. Het getal $z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ stellen we voor door het punt met coördinaten $\operatorname{Re} z$ en $\operatorname{Im} z$. Dit punt wordt wel het *beeldpunt* van z genoemd. We zullen in het vervolg het getal z en zijn beeldpunt identificeren, dus getal z en beeldpunt van z als synoniem beschouwen.

Gelet op de definitie van optelling (2.2.1b) is de optelling van complexe getallen niets anders dan de uit het VWO bekende optelling van vectoren (zie de figuur); $z = (x,y)$, $w = (u,v)$ en $z + w = (x + u, y + v)$.

De horizontale as wordt vaak de *reële as* en de verticale de *imaginaire as* genoemd.

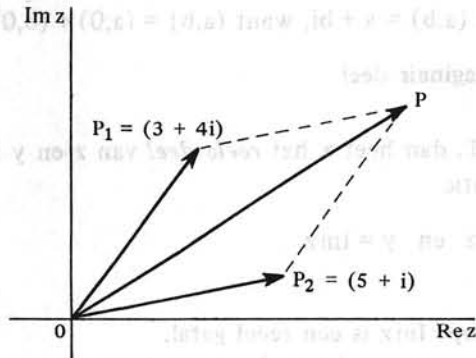


2.3.2. Voorbeelden

a) Bereken en teken de volgende getallen in het complexe vlak

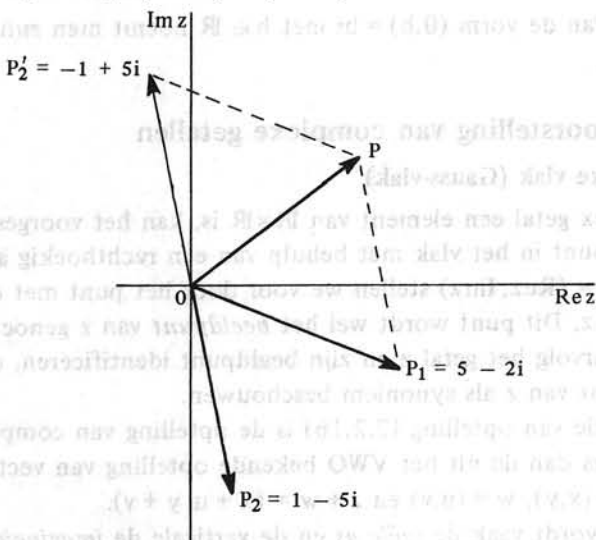
(i) $(3 + 4i) + (5 + i)$

Oplossing: $(3 + 4i) + (5 + i) = 8 + 5i$

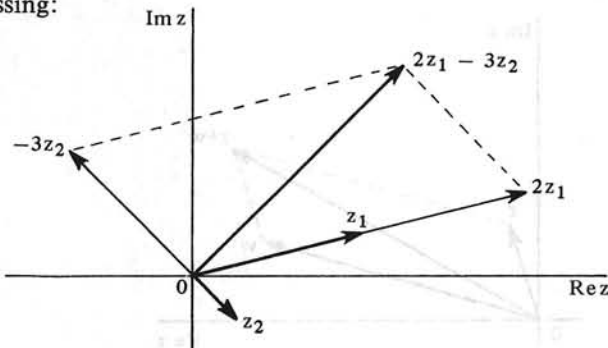


(ii) $(5 - 2i) - (1 - 5i)$

Oplossing: $(5 - 2i) - (1 - 5i) = 5 - 1 - 2i + 5i = 4 + 3i$

b) Gegeven de complexe getallen z_1 en z_2 .Construeer grafisch $2z_1 - 3z_2$.

Oplossing:



Oefeningen

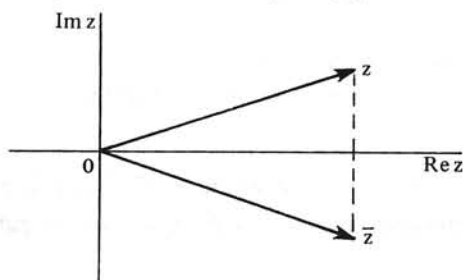
- Gegeven: $z_1 = -3$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 1 + i$ en $z_4 = -\sqrt{3} - i$.
 - Bereken van elk van deze getallen het reële en het imaginaire deel.
 - Teken deze getallen in het complexe vlak.
- Gegeven: $z_1 = 3 + i$ en $z_2 = 1 + 3i$.
Teken in het complexe vlak
 - $z_1 + z_2$, b) $z_1 - z_2$ en c) $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$.
- Zij $z_1 = 3$. Teken de getallen iz_1 , i^2z_1 , i^3z_1 , i^4z_1 en i^5z_1 .
- Teken in het Gauss-vlak de verzameling $\{z \mid \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z\}$.
- Teken in het Gauss-vlak de verzameling $\{z \mid \operatorname{Im} \frac{z-3}{z+2i} = 0\}$.

2.4. Complex geconjugeerde

2.4.1. Definitie

Als $z = x + iy \in \mathbb{C}$, waarbij $x, y \in \mathbb{R}$, dan heet $\bar{z} = x - iy$ de *complex geconjugeerde* van z . Het beeldpunt van \bar{z} verkrijgt men door het beeldpunt van z te spiegelen in de reële as.

Blijkbaar is $\overline{\bar{z}} = z$. Dus zijn z en \bar{z} elkaars geconjugeerde.



2.4.2. Rekenregels

Het rekenen met geconjugeerden voldoet aan zeer eenvoudige rekenregels.

Laat $z = a + bi$, $w = c + di$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

De geconjugeerde van een som is gelijk aan de som van de geconjugeerden.

Bewijs

$$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \bar{z} + \bar{w}. \quad \square$$

b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

De geconjugeerde van een product is gelijk aan het product van de geconjugeerden.

Bewijs

$$\overline{zw} = \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i$$

$$\bar{z}\bar{w} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd) - (ad+bc)i. \text{ Dus } \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}. \quad \square$$

c) Als $z \neq 0$ is $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$ oftewel $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

De geconjugeerde van de inverse is gelijk aan de inverse van de geconjugeerde.

Bewijs

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$(\bar{z})^{-1} = \frac{1}{a-bi} = \frac{1}{a-bi} \cdot \frac{a+bi}{a+bi} = \frac{a+bi}{a^2+b^2}. \text{ Dus } (z^{-1}) = (\bar{z})^{-1}. \quad \square$$

d) Als $z \neq 0$ is $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$.

De geconjugeerde van een quotiënt is gelijk aan het quotiënt van de geconjugeerden

Bewijs

Volgt uit b) en c). \square

e) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2} = \operatorname{Re} \bar{z}$; $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i} = -\operatorname{Im} \bar{z}$.

Geconjugeerde complexe getallen hebben gelijke reële delen en tegengestelde imaginaire delen.

Bewijs

Volgt direct uit de definitie 2.4.1. \square

f) $z\bar{z} \in \mathbb{R}$, $z\bar{z} \geq 0$; $z\bar{z} = 0$ dan en slechts dan als $z = 0$.

Bewijs

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_0^+$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0 \iff z = 0. \quad \square$$

Oefeningen

1. Laat $z = 2 + 3i$ en $w = 4 - 3i$. Bereken \bar{z} , \bar{w} , $\bar{z}w$, $\overline{\bar{z}w}$, $z\bar{w}$.

2. Teken in het complexe vlak de volgende verzamelingen.

$$A = \{z \mid z + \bar{z} = z\bar{z}\},$$

$$B = \{z \mid z + 2\bar{z} = 3\}.$$

2.5. Modulus**2.5.1. \mathbb{C} kan niet geordend worden**

Voor ieder reëel getal $a \geq 0$ is \sqrt{a} gedefinieerd als het *unieke* niet-negatieve getal dat voldoet aan de vergelijking $x^2 = a$. Men zou nu in de verleiding kunnen komen om te schrijven $\sqrt{-1} = i$. Immers $i^2 = -1$. Maar ook geldt $(-i)^2 = -1$; i en $-i$ kunnen niet onderscheiden worden op grond van een ordening, zoals we zullen aantonen.

Stelling

Er is in \mathbb{C} geen ordening mogelijk die voldoet aan de ordeningseigenschappen 1.2.2a tot en met 1.2.2d.

Bewijs (uit het ongerijmde)

Neem eens aan dat er in \mathbb{C} een ordening bestaat die voldoet aan de ordeningsaxioma's 1.2.2a tot en met 1.2.2d. We geven deze ordening aan met het teken $<$.

In oefening 1.7.6 is aangetoond dat uit 1.2.2a tot en met 1.2.2d volgt dat

het kwadraat van ieder element $\neq 0$ positief is. In \mathbb{C} geldt $1^2 = 1$ en $i^2 = -1$ waaruit zou volgen $0 < 1$ en $0 < -1$. Passen we nu 1.2.2c toe met $a = 0$, $b = 1$ en $c = -1$, dan $0 < 1 \Rightarrow -1 < 0$. Dus we vinden $-1 < 0$ en $0 < -1$ in strijd met 1.2.2a. \square

2.5.2. Gevolg

De notatie $z < w$ is alleen zinvol als z en w beide reëel zijn. In alle andere gevallen staat er onzin! Om toch complexe getallen te kunnen vergelijken, voegen we aan elk complex getal z een reëel getal toe, de zogenaamde *modulus*. Bovendien bewijzen de modulus en het in 2.6 in te voeren begrip argument goede diensten bij het vermenigvuldigen van complexe getallen.

2.5.3. Definitie

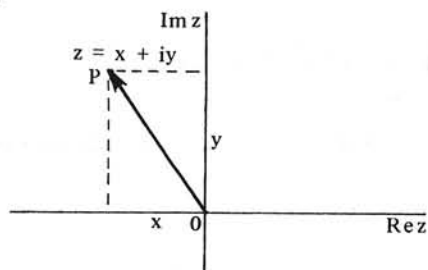
Zij $z \in \mathbb{C}$. De *modulus* van z , notatie $|z|$, is gedefinieerd door $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

2.5.4. Opmerkingen

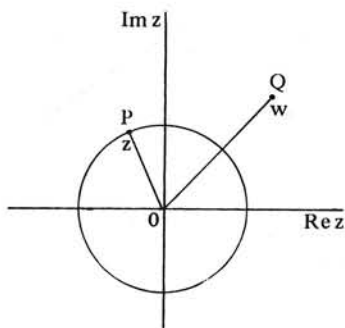
- a) Deze definitie is zinvol wegens 2.4.2f.
- b) De modulus van $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) met beeldpunt P is gelijk aan de lengte van OP :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

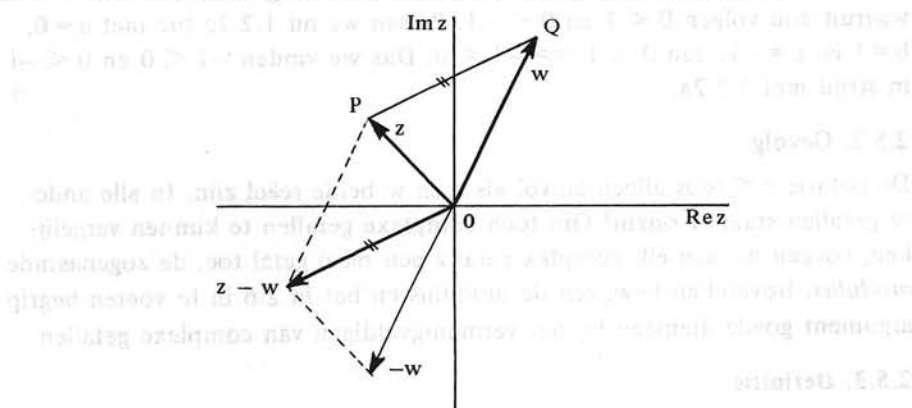
De modulus van $x = (x, 0)$ valt samen met de in \mathbb{R} gedefinieerde absolute waarde van x .



- c) Men kan dus complexe getallen z en w vergelijken door bijvoorbeeld te schrijven $|z| < |w|$. Als P het beeldpunt van z en Q het beeldpunt van w is, betekent dit: lengte van $OP < \text{lengte van } OQ$. Het is duidelijk dat alle punten gelegen op een cirkel om O gelijke modulus hebben.



- d)
- $|z - w|$
- is blijkbaar de afstand tussen de beeldpunten van
- z
- en
- w
- .



2.5.5. Rekenregels

Laat $z, w \in \mathbb{C}$.

- a)
- $|zw| = |z||w|$
- .

De modulus van een product is gelijk aan het product van de moduli.

Bewijs

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) \stackrel{2.4.2b}{=} z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2 |w|^2. \quad \square$$

- b) Als
- $z \neq 0$
- is
- $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
- oftewel
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$
- .

De modulus van de inverse is gelijk aan de inverse van de modulus.

Bewijs

$$|z^{-1}|^2 = (z^{-1})(\overline{z^{-1}}) \stackrel{2.4.2c}{=} z^{-1}(\bar{z})^{-1} = (\overline{z})^{-1} = |z|^{-2}. \quad \square$$

- c) Als
- $z \neq 0$
- is
- $|\frac{w}{z}| = \frac{|w|}{|z|}$
- .

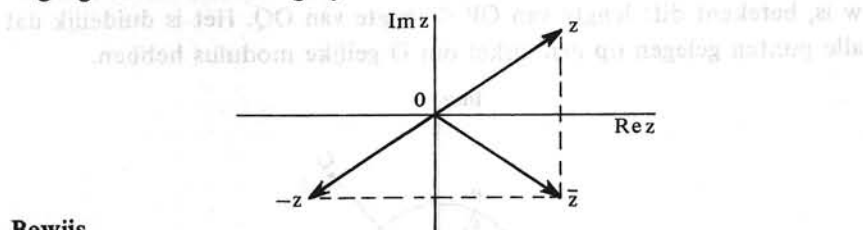
De modulus van een quotiënt is gelijk aan het quotiënt van de moduli.

BewijsVolgt uit a) en b). □

- d)
- $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
- .

Geconjugeerden hebben gelijke modulus.

Tegengestelden hebben gelijke modulus.

**Bewijs**

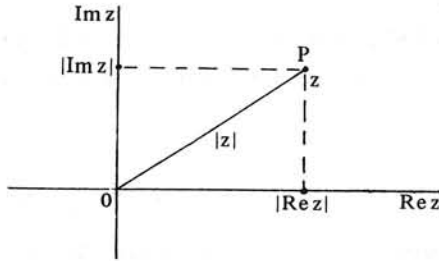
$$|\bar{z}|^2 = \bar{z}z = z\bar{z} = |z|^2.$$

$$|-z|^2 = (-z)(\overline{-z}) = (-z)(-\bar{z}) = z\bar{z} = |z|^2. \quad \square$$

- e)
- $|z| = \sqrt{(\text{Rez})^2 + (\text{Im}z)^2}$
- .

BewijsVolgt uit 2.5.4b. □

f) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$; $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.



Bewijs

$$|\operatorname{Re} z|^2 \leq (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2 ; \quad |\operatorname{Im} z|^2 \leq (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2. \quad \square$$

g) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

Bewijs

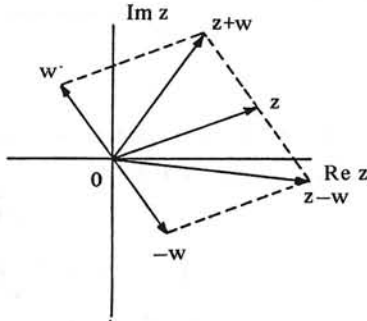
$$\begin{aligned} |z|^2 &= |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2 \\ &\leq |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2 + 2|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z| = (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2. \end{aligned} \quad \square$$

h) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$. (*Driehoeksongelijkheid*).

De modulus van een som of verschil is kleiner dan of gelijk aan de som van de moduli.

Bewijs

Meetkundig komen beide ongelijkheden neer op de bekende stelling uit de vlakke meetkunde: in een driehoek is een zijde altijd kleiner dan de som van de twee andere. De gelijktekens treden alleen op als één van de zijden een lengte 0 heeft (ontaarde driehoek).



Analytisch bewijzen we de ongelijkheden als volgt.

$$\begin{aligned} |z \pm w|^2 &= (z \pm w)(\overline{z \pm w}) = (z \pm w)(\bar{z} \pm \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} \pm z\bar{w} \pm \bar{z}w = \\ &= |z|^2 + |w|^2 \pm (z\bar{w} + \bar{z}w) = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) = \\ &= |z|^2 + |w|^2 \pm 2|z||w| \cos \theta \\ &\stackrel{(f)}{\leq} |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned} \quad \square$$

i) $|z \pm w| \geq ||z| - |w||$.

De modulus van een som of verschil is groter dan of gelijk aan de absolute waarde van het verschil der moduli.

Bewijs

We passen h) toe:

$$|z| = |(z \pm w) \mp w| \leq |z \pm w| + |w|. \text{ Dus (i) } |z| - |w| \leq |z \pm w|.$$

$$|w| = |(w \pm z) \mp z| \leq |w \pm z| + |z|. \text{ Dus (ii) } |w| - |z| \leq |z \pm w|.$$

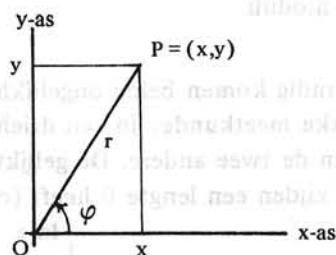
Uit (i) en (ii) volgt $||z| - |w|| \leq |z \pm w|$. □

Oefeningen

- Bereken de modulus van $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -7$, $z_3 = 2i$ en $z_4 = \frac{2-2i}{i-3}$.
- Teken in het Gauss-vlak de verzameling van de getallen z met de eigenschap $|z| = 1$ (de *eenheidskring*).
- Teken in het Gauss-vlak de verzameling $\{z \mid 2 < |z| \leq 3\}$.
- Teken in het Gauss-vlak de verzameling $\{z \mid |z + 3i| = 5\}$.
- Teken in het Gauss-vlak de verzameling $\{z \mid |z - 3i| = |4 + 2i - z|\}$.

2.6. Argument**2.6.1. Poolcoördinaten**

Zij P een punt uit het vlak verschillend van O . Dan is de positie van P bepaald door de afstand van P tot O , meestal aangegeven met r , en de hoek tussen de positieve x -as en OP (linksom is positief). Deze hoek φ heet de *poolhoek* en is bepaald op een veelvoud van 2π na. De lengte van het lijnstuk OP heet de *voerstraal* r . Het verband tussen cartesische coördinaten (x,y) en poolcoördinaten (r,φ) is gegeven door :



$$\text{I } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{II } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Merk op dat altijd $r > 0$.

Bij gegeven r en φ zijn x en y door I éénduidig bepaald. Zijn x en y gegeven dan is door II φ slechts bepaald op een veelvoud van 2π na. In welk kwadrant het punt ligt is af te leiden uit het teken van x en y ; is het kwadrant eenmaal bekend dan volgt indien $x \neq 0$ de waarde van φ (bepaald op 2π na) uit de betrekking

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}.$$

Als $x=0$ dan volgen de waarden van φ uit het teken van y . Voor de oorsprong O nemen we $r=0$ en $\varphi \in \mathbb{R}$ willekeurig.

2.6.2. Argument

Zij $z \in \mathbb{C}$. In cartesische coördinaten is $z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. De poolcoördinaten van z vindt men als volgt. De voerstraal is $|z|$. Zij nu $z \neq 0$. De poolhoek is op een veelvoud van 2π na bepaald. Dié waarde van de poolhoek welke ligt in $[0, 2\pi)$ heet het *argument van z* en wordt genoteerd met $\arg z$ (soms neemt men ook i.p.v. $[0, 2\pi)$ het interval $(-\pi, \pi]$). De poolcoördinaten van $z \neq 0$ zijn dan $(|z|, \arg z)$. Het argument van 0 is niet gedefinieerd. We spreken af dat we ieder reëel getal uit $[0, 2\pi)$ kunnen gebruiken als $\arg 0$.

Dus altijd geldt:

$$0 \leq \arg z < 2\pi.$$

2.6.3. Stelling

- a) Voor elk complex getal z geldt $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$.
 b) Als $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ met $r > 0$, dan is $|z| = r$ en $\arg z = \varphi + 2k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.

Bewijs

- a) Men verifiëre zelf dat de stelling juist is voor $z=0$.

Zij $z \neq 0$. In cartesische coördinaten is $z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$; in poolcoördinaten $(|z|, \arg z)$. Met formule 2.6.1 (I) vinden we dat

$\operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z)$ en $\operatorname{Im} z = |z| \sin(\arg z)$. Het gestelde volgt nu uit 2.2.6 b(ii).

- b) $|z| = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r$. Dus volgt uit a)
 $\cos(\arg z) = \cos \varphi$ en $\sin(\arg z) = \sin \varphi$,
 zodat $\arg z = \varphi + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. Omdat $0 \leq \arg z < 2\pi$ komt precies één waarde van k in aanmerking. \square

2.6.4. Voorbeelden

Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm:

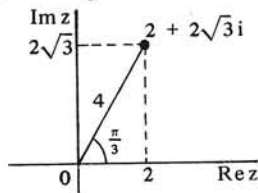
$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)).$$

- a) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Oplossing:

$|z| = \sqrt{4 + 12} = 4$. Dus $z = 4(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i)$. Dan wordt $\cos(\arg z) = \frac{1}{2}$ en $\sin(\arg z) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, zodat $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

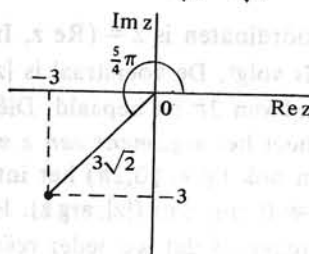
Daarom geldt: $z = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$.



b) $z = -3 - 3i$.

Oplossing:

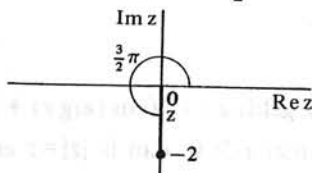
$$|z| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}. \text{ Dus } z = 3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right).$$



c) $z = -2i$.

Oplossing:

$$|z| = \sqrt{0+4} = 2. \text{ Dus } z = 2(-i) = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right).$$



Oefeningen

- Bereken modulus en argument van $z_1 = -3$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 1 + i$ en $z_4 = -\sqrt{3} - i$.
- Gegeven: $z_1 = 4 - 4i$ en $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
Bereken voor $k=1$ en $k=2$: $\operatorname{Re} z_k$, $\operatorname{Im} z_k$, $|z_k|$, $\cos(\arg z_k)$, $\sin(\arg z_k)$ en $\arg z_k$.
- Teken in het Gauss-vlak de verzameling $\{z \mid 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \text{ en } 0 < |z| \leq 1\}$.
- Bereken modulus en argument van $z_1 = -4 + 4i\sqrt{3}$, $z_2 = -i$, $z_3 = -2 + 2i$.

2.7. Rekenen met modulus en argument

2.7.1. Inleiding

Bij de in 2.1.3 gegeven rekenregels voor complexe getallen valt het op, dat de optellingsregel 2.1.3a heel eenvoudig is, maar de vermenigvuldigingsregel 2.1.3c ingewikkeld. Wanneer $z_k = a_k + b_k i$, ($k \in \{1, \dots, n\}$), dan

geldt eenvoudig $\sum_{k=1}^n z_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^n b_k\right)i$, maar voor $\prod_{k=1}^n z_k$ is het geven

van een formule zeer lastig. In deze paragraaf zullen we zien dat het vermenigvuldigen van complexe getallen eenvoudiger gaat, als men ze in de modulus-argumentvorm schrijft.

2.7.2. Stelling

Laat $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ en $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$, $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$.

Dan is $zw = |z||w|[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)]$.

Bewijs

$$\begin{aligned}
 zw &= |z| |w| (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) \\
 &= |z| |w| [(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)] \\
 &= |z| |w| [\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)].
 \end{aligned}$$

□

2.7.3. Gevolg

Voor alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ geldt

$$\begin{aligned}
 \arg(zw) &= \arg z + \arg w && \text{als } 0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi, \\
 &= \arg z + \arg w - 2\pi && \text{als } 2\pi \leq \arg z + \arg w < 4\pi.
 \end{aligned}$$

Bewijs

Uit 2.7.2 met $\varphi = \arg z$ en $\psi = \arg w$ volgt met 2.6.3b dat $\arg(zw)$ op een veelvoud van 2π na gelijk is aan $\varphi + \psi$. Daar $0 \leq \varphi < 2\pi$ en $0 \leq \psi < 2\pi$, is $0 \leq \varphi + \psi < 4\pi$. Gelet op de definitie 2.6.2 van $\arg z$, volgt nu $\arg(zw) = \varphi + \psi - 2k\pi$, waarbij $k = 0$ of $k = 1$. □

Om 2 complexe getallen te vermenigvuldigen, vermenigvuldigt men de moduli en telt de argumenten (met eventuele correctie van 2π) op.

2.7.4. Toepassing: Formule van De Moivre

Voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\varphi \in \mathbb{R}$ geldt

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Bewijs

Volgt gemakkelijk uit 2.7.2 door $|z| = |w| = 1$ te nemen en volledige inductie te gebruiken. □

2.7.5. Gevolg

Voor alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en $n \in \mathbb{N}$ geldt $\arg(z^n) = n \arg z - 2k\pi$, voor zekere $k \in \mathbb{N}$, $k < n$. Bewijs dit zelf.

2.7.6. Voorbeelden

a) Bereken $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
 (1 + \sqrt{3}i)^{10} &= \left(2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^{10} = \left(2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right)^{10} \\
 &= 2^{10} \left(\cos \frac{10}{3}\pi + i \sin \frac{10}{3}\pi\right) = 2^{10} \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= 2^{10} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right).
 \end{aligned}$$

b) We illustreren aan de hand van een voorbeeld hoe men met behulp van de formule van De Moivre formules voor $\cos n\varphi$ en $\sin n\varphi$ kan afleiden.

$$\begin{aligned}
 \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \\
 \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi.
 \end{aligned}$$

Splitsing in reële en imaginaire delen geeft:

$$\begin{aligned}
 \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi && \text{en} \\
 \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi.
 \end{aligned}$$

c) Teken $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg\left(\frac{z}{z-2}\right) = \frac{\pi}{2}\}$ in het complexe vlak.

Oplossing. Uit de opgave blijkt direct $z \neq 2$. Uit $\arg\left(\frac{z}{z-2}\right) = \frac{\pi}{2}$

volgt : $\operatorname{Re} \left(\frac{z}{z-2} \right) = 0$ en $\operatorname{Im} \left(\frac{z}{z-2} \right) \geq 0$. (Van $\frac{z}{z-2} = 0$ is immers het argument onbepaald en kan dus ook $\frac{\pi}{2}$ zijn).

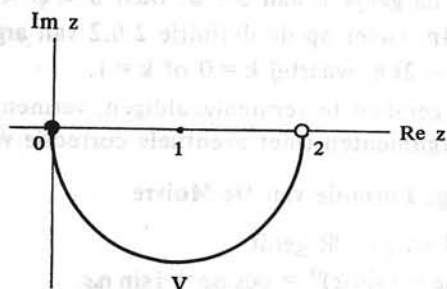
Stellen we $z = x + iy$ dan krijgen we:

$$\frac{z}{z-2} = \frac{x+iy}{x+iy-2} = \frac{(x+iy)((x-2)-iy)}{(x-2)^2 + y^2} = \frac{(x^2 - 2x + y^2) + i(-2y)}{(x-2)^2 + y^2}$$

$\operatorname{Re} \left(\frac{z}{z-2} \right) = 0$ levert $(x-1)^2 + y^2 = 1$, de vergelijking van de cirkel met middelpunt in $z=1$ en straal 1.

$\operatorname{Im} \left(\frac{z}{z-2} \right) \geq 0$ levert $y \leq 0$, zodat alleen de onderste helft van de cirkel overblijft.

Het punt $z=0$ behoort tot V , het punt $z=2$ moet worden uitgesloten.



Oefeningen

1. Bewijs: $\arg \left(\frac{z}{w} \right) = \arg z - \arg w + 2k\pi$, waarbij $k=0$ of $k=1$, ($zw \neq 0$).

2. Laat $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ en $w = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.

Bereken $|zw|$, $\arg(zw)$ en zw . Bereken ook $\arg \frac{z}{w}$, $|\frac{z}{w}|$ en $\frac{z}{w}$.

3. Gegeven zijn $z = 4 - 4i$ en $w = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Bereken modulus en argument van zw^{-1} en $(\bar{z})^3 w^2$.

4. Leid een formule af voor $\cos 5\varphi$ in termen van $\cos \varphi$ en een formule voor $\sin 5\varphi$ in termen van $\sin \varphi$.

5. Zij $z = \sin \varphi + i \cos \varphi$, met $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Bepaal $\arg z$, $\arg \bar{z}$ en $\arg \frac{1}{z}$.

6. Teken $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg \frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{4}\}$ in het complexe vlak.

7. Bewijs de formule van De Moivre voor negatief gehele n .

2.8. Exponentiële functie

We definiëren nu de complexe exponentiële functie e^z . We behandelen eerst het speciale geval $\operatorname{Re} z = 0$.

2.8.1. Definitie

Zij $\varphi \in \mathbb{R}$. We definiëren $e^{i\varphi}$ door

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Wegens 2.6.3 kan men voor iedere $z \in \mathbb{C}$ schrijven: $z = |z|e^{i \arg z}$.

Merk op dat $|e^{i\varphi}| = 1$. Daarom worden getallen van de vorm $e^{i\varphi}$ waarbij $\varphi \in \mathbb{R}$ *unimodulaire getallen* genoemd. Enkele belangrijke bijzondere gevallen zijn:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

2.8.2. Stelling

$$e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)} \text{ voor alle } \varphi, \psi \in \mathbb{R}.$$

Bewijs

Zij $z = e^{i\varphi}$ en $w = e^{i\psi}$. Gebruik de berekening van zw uit het bewijs van stelling 2.7.2. Merk op dat $|z| = |w| = 1$. \square

2.8.3. Definitie

Zij $z \in \mathbb{C}$. We definiëren nu e^z door

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}.$$

M.a.w. als $z = x + iy$, waarbij $x, y \in \mathbb{R}$, dan is

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

De grondeigenschap van e^z luidt als volgt.

2.8.4. Stelling

Voor alle $z, w \in \mathbb{C}$ geldt $e^z e^w = e^{z+w}$.

Bewijs

Zij $z = x + iy$ en $w = u + iv$ met $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

Dan is met 2.8.2 en 2.8.3:

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x e^{iy} e^u e^{iv} = e^x e^u e^{iy} e^{iv} = \\ &= e^{x+u} e^{i(y+v)} = e^{\operatorname{Re}(z+w)} e^{i \operatorname{Im}(z+w)} = \\ &= e^{z+w}. \end{aligned} \quad \square$$

2.8.5. Modulus en argument van e^z .

Uit definitie 2.8.3 en stelling 2.6.3b volgt voor alle $z \in \mathbb{C}$

a) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$,

b) $\arg(e^z) = \operatorname{Im} z + 2k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.

Dus als $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, dan geldt:

$$|e^z| = e^x, \text{ en } \arg(e^z) = y + 2k\pi \text{ voor zekere } k \in \mathbb{Z}.$$

2.8.6. Formules van Euler

Voor alle $\varphi \in \mathbb{R}$ is

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{en} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Bewijs

De formules worden gevonden door $\cos \varphi$ en $\sin \varphi$ op te lossen uit de betrekkingen

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi. \end{aligned} \quad \square$$

2.8.7. Opmerking

Let op de analogie tussen de formules in 2.8.6 en die in 1.16.

2.8.8. Voorbeelden

a) Bereken $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{13}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{13} &= \left(\frac{2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)}\right)^{13} = \left(\frac{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^{13} = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{-\frac{\pi}{3}i}}\right)^{13} = \\ &= (e^{\frac{2}{3}\pi i})^{13} = e^{\frac{26}{3}\pi i} = e^{8\pi i} \cdot e^{\frac{2}{3}\pi i} = 1(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi) = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

b) Met behulp van de formules van Euler kunnen allerlei goniometrische formules gemakkelijk worden afgeleid, bijvoorbeeld

$$\cos^3 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-3i\varphi}) = \frac{1}{4}(\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi).$$

Oefeningen

1. Toon aan dat $e^z = e^{z + 2k\pi i}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$ en $z \in \mathbb{C}$.
2. Als $z = re^{i\varphi}$ met $r, \varphi \in \mathbb{R}$, dan $\bar{z} = re^{-i\varphi}$. Toon dit aan.
3. Onderstaande getallen zijn geschreven in één van de vormen $x + iy$, $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ of $re^{i\varphi}$. Schrijf ze in beide andere vormen.
 - a) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$, b) $2\sqrt{3} + 2i$, c) $e^{\frac{1}{2}\pi i}$, d) $-e$, e) $2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$.
4. Schrijf $\cos^5 \varphi$ in de vorm $a \cos 5\varphi + b \cos 3\varphi + c \cos \varphi$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2.9. Algemene vergelijking van cirkels en rechte lijnen

2.9.1. Stelling

Cirkels en rechte lijnen in het complexe vlak zijn beeldfiguren van een vergelijking van de vorm

$$pz\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + q = 0 \quad (*)$$

met $p, q \in \mathbb{R}$ vast; $z_0 \in \mathbb{C}$ vast; $z \in \mathbb{C}$ en $z_0\bar{z}_0 - pq > 0$. Als $p = 0$ is (*) de vergelijking van een rechte lijn, als $p \neq 0$ die van een cirkel.

Bewijs

Geval 1: $p = 0$.

De voorwaarde $z_0\bar{z}_0 - pq > 0$ is dan wegens 2.4.2f equivalent met $z_0 \neq 0$. Stel $z_0 = x_0 + iy_0$ en $z = x + iy$. (*) wordt dan $z_0\bar{z} + \bar{z}_0z = q$, hetgeen wegens $z_0\bar{z} + \bar{z}_0z = z_0\bar{z} + \overline{z_0\bar{z}} = 2 \operatorname{Re}(z_0\bar{z}) = 2 \operatorname{Re}((x_0 + iy_0)(x - iy)) = 2(x_0x + y_0y)$ levert

$$x_0x + y_0y = \frac{1}{2}q, \quad \text{met } (x_0, y_0) \neq (0, 0).$$

Dit is de vergelijking van een rechte lijn, die loodrecht staat op de lijn die z_0 met O verbindt. Omgekeerd kan de vergelijking van een willekeurige lijn $ax + by + c = 0$ in de vorm (*) met $p = 0$ worden gebracht door $z_0 = a + bi$ en $q = -2c$ te stellen.

Geval 2: $p \neq 0$.

Deling van (*) door p levert

$$z\bar{z} - \frac{z_0\bar{z}}{p} - \frac{\bar{z}_0z}{p} + \frac{q}{p} = 0$$

of

$$\left(z - \frac{z_0}{p}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{z}_0}{p}\right) = \frac{z_0\bar{z}_0 - pq}{p^2}$$

of

$$\left|z - \frac{z_0}{p}\right|^2 = \frac{z_0\bar{z}_0 - pq}{p^2} > 0.$$

Dit is de vergelijking van een cirkel met $\frac{z_0}{p}$ als middelpunt en $\left(\frac{z_0\bar{z}_0 - pq}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

als straal. Omgekeerd kan de vergelijking van een willekeurige cirkel $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ in de vorm (*) worden gebracht door $p=1$, $z_0 = a+bi$ en $q = a^2 + b^2 - c^2$ te stellen. \square

Vergelijkingen

2.10. Polynomen

2.10.1. Enige definities

Een *polynoom* is een uitdrukking van de vorm

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad (*)$$

waarbij $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ en $n \in \mathbb{N}$. Voor z mag men hierbij denken aan een niet nader gepreciseerd complex getal.

De getallen a_0, \dots, a_n heten de *coëfficiënten* van het polynoom.

Het *nulpolynoom* is het polynoom waarvan alle coëfficiënten 0 zijn.

Als een polynoom niet het nulpolynoom is, definiëren we zijn *graad* als volgt. Schrijf (*) in de vorm

$$a_g z^g + a_{g-1} z^{g-1} + \dots + a_0 \quad \text{met } a_g \neq 0.$$

Dan is g de *graad* van het polynoom.

Een polynoom kan opgevat worden als het voorschrift van een functie $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$f(z) = a_n z^n + \dots + a_0.$$

Hierbij spreken we van de functie f en het polynoom $f(z)$.

2.10.2. Delingsalgoritme

Bij elk tweetal polynomen $f(z)$ en $g(z)$ met $g(z)$ verschillend van het nulpolynoom bestaan er twee polynomen $q(z)$, het *quotiëntpolynoom*, en $r(z)$, het *restpolynoom*, zó dat voor elke z geldt

$$f(z) = g(z)q(z) + r(z), \quad (**)$$

waarbij $r(z)$ het nulpolynoom is of de graad van $r(z)$ kleiner is dan de graad van $g(z)$.

We zeggen dat het polynoom $f(z)$ *deelbaar* is door $g(z)$ wanneer $r(z)$ het nulpolynoom is.

2.10.3. Voorbeeld

$f(z) = z^3 - 3z^2 - 4$, $g(z) = z^2 - 2iz + 3 - i$. Bepaal $q(z)$ en $r(z)$.

Oplossing:

We gebruiken de bekende staartdeling

$$\begin{array}{r} z^3 - 2iz + (3-i) \overline{) z^3 - 3z^2} \\ \underline{z^3 - 2iz^2 + (3-i)z} \\ (-3+2i)z^2 + (-3+i)z - 4 \\ \underline{(-3+2i)z^2 + (4+6i)z + (-7+9i)} \\ (-7-5i)z + (3-9i) \end{array}$$

Dus $q(z) = z + (-3 + 2i)$ en $r(z) = (-7 - 5i)z + (3 - 9i)$.

2.10.4. Opmerking

Zijn de coëfficiënten van $f(z)$ en $g(z)$ reëel, dan zijn ook de coëfficiënten van $q(z)$ en $r(z)$ reëel. Waarom?

2.10.5. Reststelling

Zij $f(z)$ een polynoom van graad $n \geq 1$. Is $a \in \mathbb{C}$, dan is de rest bij deling van $f(z)$ door $z - a$ gelijk aan $f(a)$.

Bewijs

Deling van $f(z)$ door $z - a$ levert wegens (**)

$$f(z) = (z - a)q(z) + \beta,$$

waarbij $\beta \in \mathbb{C}$. Invullen van $z = a$ geeft het gewenste resultaat. \square

2.11. Algebraïsche vergelijkingen

2.11.1. Enige definities

Is $f(z)$ een polynoom van de graad $n \geq 1$, dan heet $f(z) = 0$ een *algebraïsche vergelijking van de n^{de} graad*. Een getal $a \in \mathbb{C}$ heet een *wortel* van de vergelijking $f(z) = 0$ indien $f(a) = 0$. Men noemt a ook wel een *nulpunt* van de bijbehorende functie f .

Door toepassing van de reststelling krijgen we de volgende stelling.

2.11.2. Factorstelling

Heeft de algebraïsche vergelijking $f(z) = 0$ de wortel a , dan is $f(z)$ deelbaar door $z - a$ en omgekeerd.

2.11.3. Hoofdstelling van de algebra

Iedere algebraïsche vergelijking van de graad $n \geq 1$ heeft tenminste één (complexe) wortel.

Het bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van dit boek.

2.11.4. Definitie

Is a een wortel van de algebraïsche vergelijking $f(z)=0$, dan heet a een *k-voudige wortel* van $f(z)=0$ als $f(z)$ deelbaar is door $(z-a)^k$ en niet deelbaar is door $(z-a)^{k+1}$.

2.11.5. Voorbeeld

Van de algebraïsche vergelijking $(z-1+i)^3(z+2-3i)^2=0$ is $z_1=1-i$ een 3-voudige wortel en $z_2=-2+3i$ een dubbele wortel.

2.11.6. Stelling

Een algebraïsche vergelijking van de n^{de} graad, waarbij $n \geq 1$, heeft precies n wortels. Hierbij wordt een k -voudige wortel voor k wortels geteld.

Bewijs

Volgens de hoofdstelling van de algebra heeft de algebraïsche vergelijking $f(z)=0$ tenminste één wortel z_1 . Volgens de factorstelling is dan $f(z)=(z-z_1)g(z)$. Hierin is g een polynoom van de graad $n-1$. Ook de vergelijking $g(z)=0$ heeft weer een wortel z_2 indien $n \geq 2$. Dan is $g(z)=(z-z_2)h(z)$ en $f(z)=(z-z_1)(z-z_2)h(z)$. Zo voortgaande vindt men

$$f(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n), \quad (*)$$

een ontbinding van $f(z)$ in n factoren van de eerste graad. Iedere z_i is een wortel van $f(z)=0$, $i=1, 2, \dots, n$. De vergelijking $f(z)=0$ heeft blijkbaar n wortels, die niet noodzakelijk onderling verschillend zijn. Treedt in (*) de factor $(z-z_i)$ k maal op, dan is z_i een k -voudige wortel, die dan voor k wortels geteld wordt. \square

2.11.7. Algemene 2de graads vergelijking met reële coëfficiënten

Laat $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$. We beschouwen de vergelijking $az^2 + bz + c = 0$. Met kwadraat afsplitsen vinden we

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right],$$

waarin $D = b^2 - 4ac$ de *discriminant* is.

Is $D > 0$, dan heeft de vergelijking twee reële wortels, namelijk

$z_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{D})$, is $D = 0$, dan heeft de vergelijking één tweevoudige

wortel $z = -\frac{b}{2a}$, en is $D < 0$, dan heeft de vergelijking twee niet-reële wor-

tels, namelijk $z_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm i\sqrt{-D})$. Dat dit inderdaad wortels zijn is te verifiëren door substitutie in de vergelijking, dat hiermee ook alle wortels zijn verkregen volgt uit 2.11.6.

We vestigen er de aandacht op, dat voor $D < 0$ de notatie \sqrt{D} niet is gebruikt. We hebben de vierkantswortel alleen gedefinieerd voor elementen uit \mathbb{R}_0^+ .

2.11.8. Het zoeken naar een rationale wortel

Een algebraïsche vergelijking van de n -de graad met rationale coëfficiënten is altijd te schrijven in de vorm

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad a_k \in \mathbb{Z}, k = \{0, 1, \dots, n\}.$$

Neem eens aan, dat deze vergelijking een rationale wortel heeft. Dan bestaan er een $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, (p en q onderling ondeelbaar), zó dat

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \iff$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_0 q^n = 0.$$

Omdat alle termen behalve de laatste een factor p bevatten en p en q onderling ondeelbaar zijn volgt: p deelt a_0 .

Omdat alle termen behalve de eerste een factor q bevatten en p en q onderling ondeelbaar zijn volgt: q deelt a_n .

Bij het zoeken van een rationale wortel kunnen we ons bij het bepalen van p beperken tot de positieve en negatieve delers van a_0 en bij q tot de positieve delers van a_n . Er is dus maar een eindig aantal mogelijkheden.

2.11.9. Voorbeelden

- a) Los z op uit $z^3 - 2z^2 + 5z - 4 = 0$.

Oplossing:

Zij $f(z) = z^3 - 2z^2 + 5z - 4$. Voor een rationaal nulpunt $\frac{p}{q}$ van $f(z)$ moet gelden: $q = 1$ en p deelt -4 , zodat alleen $z = \pm 1$, $z = \pm 2$ en $z = \pm 4$ te proberen zijn. Men vindt $f(1) = 0$. Wegens de factorstelling is $f(z)$ deelbaar door $z - 1$; $z^3 - 2z^2 + 5z - 4 = (z - 1)(z^2 - z + 4)$.

Hieruit volgt dat $z_1 = 1$ en $z_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{15})$ de wortels van de gegeven vergelijking zijn.

- b) Los z op uit $2z^3 - z^2 + z + 1 = 0$.

Oplossing:

Zij $f(z) = 2z^3 - z^2 + z + 1 = 0$. Voor een rationaal nulpunt $\frac{p}{q}$ van $f(z)$ moet gelden: $q = 1$ of $q = 2$ en $p = 1$ of $p = -1$.

Dus alleen $z = \pm 1$ en $z = \pm \frac{1}{2}$ komen in aanmerking. Men vindt $f(-\frac{1}{2}) = 0$.

Dus $f(z)$ is deelbaar door $2z + 1$; $f(z) = (2z + 1)(z^2 - z + 1)$.

Hieruit volgt dat $z_1 = -\frac{1}{2}$ en $z_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ de wortels van de gegeven vergelijking zijn.

2.11.10. Polynomen van reële coëfficiënten

Tot slot van deze paragraaf een stelling over de nulpunten van een polynoom met *reële* coëfficiënten. Volgens deze stelling liggen die, net zoals in de voorbeelden 2.11.9 het geval is, òf op de reële as (reële wortels) òf symmetrisch ten opzichte van de reële as (complex geconjugeerde wortels).

2.11.11. Stelling

Als $f(z)$ een polynoom met reële coëfficiënten is, dan geldt

- $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.
- als $f(a) = 0$, dan is $f(\bar{a}) = 0$.
- als a een k -voudige wortel van $f(z) = 0$ is, dan is \bar{a} ook een k -voudige wortel van $f(z) = 0$.

Bewijs

- a) Als $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, dan is volgens de rekenregels in 2.4.2:

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= a_n \bar{z}^n + \dots + a_0 \\ &= \overline{a_n z^n} + \dots + \bar{a}_0 \\ &= \overline{a_n z^n + \dots + a_0} = \overline{f(z)}. \end{aligned}$$

- b) Als $f(a) = 0$, dan is $f(\bar{a}) = \overline{f(a)} = \bar{0} = 0$.

- c) Voor $a \in \mathbb{R}$ is er niets te bewijzen.

Zij dus $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ een k -voudige wortel van $f(z) = 0$ met $k \in \mathbb{N}$ en $k > 1$.

Wegens b) is \bar{a} dan ook een wortel van $f(z) = 0$, zodat uit de factorstelling volgt dat $f(z)$ deelbaar is door $(z - a)(z - \bar{a})$.

Maar in

$$(z - a)(z - \bar{a}) = z^2 - (a + \bar{a})z + a\bar{a}$$

zijn volgens 2.4.2 de coëfficiënten reëel. Als we $f(z)$ door deze kwadratische factor met reële coëfficiënten delen krijgen we een quotiëntpolynoom $q(z)$ van de graad $n - 2$, waarvan volgens 2.10.4 de coëfficiënten weer reëel zijn. Van $q(z) = 0$ is a een $(k - 1)$ -voudige wortel en dus \bar{a} weer een wortel. De procedure kan dus net zo lang herhaald worden tot alle factoren $(z - a)(z - \bar{a})$ zijn uitgedeeld. Dus is \bar{a} een l -voudige wortel met $l \geq k$. Door in bovenstaande redenering a en \bar{a} te verwisselen volgt echter ook $k \geq l$. Dus \bar{a} is een k -voudige wortel van $f(z) = 0$. \square

2.11.12. Gevolg

Uit de hoofdstelling van de algebra en het bewijs van 2.11.11c volgt:

Als de coëfficiënten van het polynoom $f(z)$ reëel zijn, dan is $f(z)$ te ontbinden in factoren met reële coëfficiënten, die van de eerste of tweede graad zijn.

Oefeningen

Los z op uit

- $z^3 + z^2 - 3z + 1 = 0$.
- $z^3 + z^2 - 3z - 6 = 0$.
- $z^3 + iz^2 + 4z + 4i = 0$.

2.12. Binomiaalvergelijking

2.12.1. Definitie

Een vergelijking van het type

$$z^n = c, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (*)$$

heet een *binomiaalvergelijking*.

2.12.2. Oplossingsmethode

Om een binomiaalvergelijking op te lossen, dient men op te merken dat

(*) equivalent is met:

voor welke z geldt

$$|z^n| e^{i \arg z^n} = |c| e^{i \arg c}$$

Op grond van 2.5.5a en 2.7.5 is dan en slechts dan aan (*) voldaan als

$$|z| = \sqrt[n]{|c|}$$

$$n \arg z = \arg c + 2k\pi \quad \text{voor willekeurige } k \in \mathbb{Z}$$

Omdat $0 \leq \arg z < 2\pi$ is dus $0 \leq n \arg z < 2n\pi$.

Daar $0 \leq \arg c < 2\pi$ komen dus alleen $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ in aanmerking.

Voor de wortels z_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ geldt nu

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad \text{waarin } \varphi_k = \frac{\arg c}{n} + k \frac{2\pi}{n}.$$

Er zijn precies n verschillende wortels, waarvan de beeldpunten in het Gauss-vlak de hoekpunten zijn van een regelmatige n -hoek.

2.12.3. Voorbeelden

a) Los op: $z^3 = -i$.

Oplossing: $|-i| = 1$ en $\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$.

$z_j = \cos \varphi_j + i \sin \varphi_j$, waarin

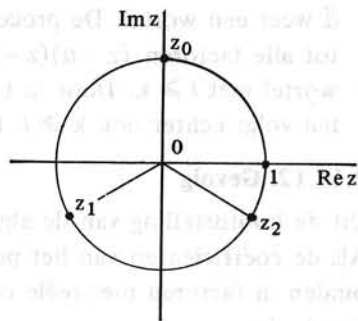
$$\varphi_j = \frac{\pi}{2} + j \frac{2\pi}{3}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Dus

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i;$$

$$z_1 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i;$$

$$z_2 = \cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i.$$



b) Los op: $z^4 = 8\sqrt{2}(1+i)$.

Oplossing: $|8\sqrt{2}(1+i)| = 16$

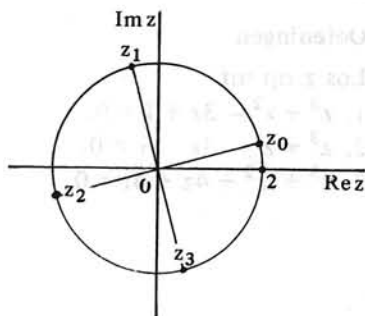
en $\arg(8\sqrt{2}(1+i)) = \frac{\pi}{4}$.

Dus $z_j = 2(\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j)$,

waarin $\varphi_j = \frac{\pi}{16} + j \frac{\pi}{2}$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Dus $z_0 = 2(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16})$;

$z_1 = 2(\cos \frac{9}{16}\pi + i \sin \frac{9}{16}\pi)$;



$$z_2 = 2(\cos \frac{17}{16}\pi + i \sin \frac{17}{16}\pi); \quad z_3 = 2(\cos \frac{25}{16}\pi + i \sin \frac{25}{16}\pi).$$

2.12.4. Algemene 2de graads vergelijking met complexe coëfficiënten

Laat $a, b, c \in \mathbb{C}$ en $a \neq 0$. We beschouwen de vergelijking $az^2 + bz + c = 0$. Met kwadraat afsplitsen vinden we

$$(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2},$$

waarin $D = b^2 - 4ac$ de discriminant is. Stel nu $w = z + \frac{b}{2a}$ en beschouw de binomiaalvergelijking $w^2 = \frac{D}{4a^2}$ en zij $D \neq 0$. Dan heeft deze vergelijking

2 wortels w_1, w_2 met de eigenschap $w_2 = -w_1$.

De algemene oplossing van de 2de graads vergelijking wordt dus

$$z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm w_1, \quad \text{met } w_1^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Voor $D = 0$ heeft de vergelijking een dubbele wortel $z = -\frac{b}{2a}$.

2.12.5. Voorbeeld

Los op: $z^2 + (2 - 2i)z - 2 - 2(1 + \sqrt{3})i = 0$.

Oplossing:

$$\frac{D}{4a^2} = \frac{4 - 4 - 8i + 8 + 8(1 + \sqrt{3})i}{4} = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

Stellen we $z + 1 - i = w$, dan moet w voldoen aan de vergelijking

$$w^2 = 2 + 2\sqrt{3}i = 4(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Dus $w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$, en $w_2 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i$.

Dus $z_1 = w_1 - 1 + i = \sqrt{3} - 1 + 2i$, en $z_2 = w_2 - 1 + i = -\sqrt{3} - 1$.

Oefeningen

Los de volgende vergelijkingen op en teken de wortels in het complexe vlak.

1. $z^3 = i$.
2. $z^6 = 1$.
3. $(z - 2i)^4 = -8(1 + i\sqrt{3})$.
4. $z^2 + (-2 + 6i)z - 8 - 4i = 0$.
5. $iz^2 + 2z + 2\sqrt{3} + i = 0$.

Ontbind de volgende polynomen in lineaire en kwadratische factoren met reële coëfficiënten.

6. $z^3 + 1$.
7. $z^4 + 1$.

2.13. Exponentiële vergelijking

2.13.1. Definitie

Een vergelijking van het type

$$e^z = c, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (*)$$

heet een *exponentiële vergelijking*.

2.13.2. Oplossingsmethode

Om een exponentiële vergelijking op te lossen, dient men op te merken dat (*) equivalent is met:

voor welke z geldt

$$e^z = |c|e^{i \arg c}$$

Stellen we $z = x + iy$, dan zien we dat wegens 2.8.5 z voldoet aan (*) dan en slechts dan als

$$e^x = |c|$$

$$y = \arg c + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Er zijn dus oneindig veel wortels z_k , nl.

$$z_k = \ln |c| + i \arg c + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.13.3. Voorbeeld

Los op: $e^z = 5\sqrt{2}(1-i)$.

Oplossing: $|5\sqrt{2}(1-i)| = 10$,

$$\arg(5\sqrt{2}(1-i)) = \frac{7}{4}\pi.$$

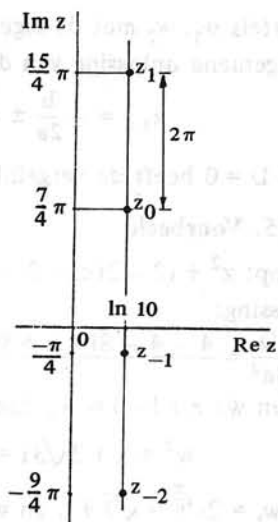
De oplossingen zijn

$$z_k = \ln 10 + \frac{7}{4}\pi i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Oefeningen

Los de volgende vergelijkingen op.

- $e^z = i$.
- $e^z = -1 - i$.
- $e^z = -4\sqrt{3} + 4i$.



Complexe functies van een complexe veranderlijke

2.14. Enkele bijzondere afbeeldingen

Afbeeldingen $f: D \rightarrow B$, waarbij de definitieverzameling D en het bereik B beide deelverzamelingen van \mathbb{C} zijn, worden meestal complexe functies van een complexe veranderlijke (of kortweg complexe functies) genoemd. Complexe functies brengt men in beeld door twee 'complexe vlakken' te nemen, nl. een z -vlak, waarin D gelegen is en een w -vlak, waarin B gelegen is.

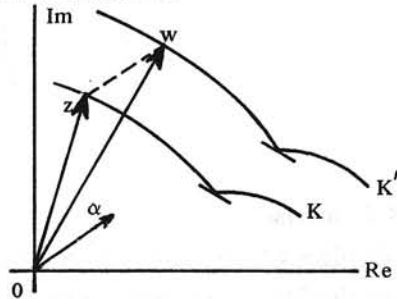
Bij iedere $z = (x, y) \in D$ behoort dan een $w = (u, v) = f(z) \in B$. Soms laten we z -vlak en w -vlak samenvallen zó dat ook assenkruis xy en assenkruis uv samenvallen.

2.14.1. Optelling

$f_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, met $w = f_1(z) = z + a$, waarin $a \in \mathbb{C}$.

Om het beeld van z te vinden dient men bij de 'vector' z de 'vector' a op te tellen. Het gaat hier blijkbaar om een *translatie*.

Doorloopt z de kromme K , dan doorloopt w de kromme K' die door translatie over a uit K ontstaat. Meetkundig is het duidelijk dat bij translatie cirkels overgaan in cirkels en rechte lijnen in rechte lijnen. Bewijs dit zelf met 2.9.1.



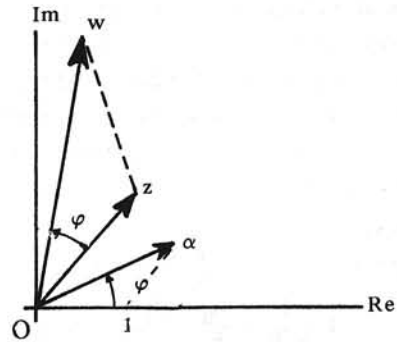
2.14.2. Vermenigvuldiging

$f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, met $w = f_2(z) = az$, waarin $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Zij $a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, waarin $\varphi = \arg a$ en $z = |z|(\cos \psi + i \sin \psi)$, waarin $\psi = \arg z$. Dan is $w = |a||z|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$.

Meetkundig betekent dit dat het beeld w wordt gevonden door een *rotatie* van z om 0 over een hoek φ , gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met factor $|a|$.

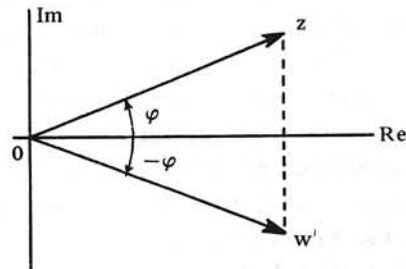
Merk op dat de driehoekjes in de figuur gelijkvormig zijn. Ook bij deze afbeelding gaan cirkels over in cirkels en rechte lijnen in rechte lijnen. Toon dit aan.



2.14.3. Conjugatie

$f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, met $w = f_3(z) = \bar{z}$.

Dit stelt meetkundig een spiegeling ten opzichte van de reële as voor.

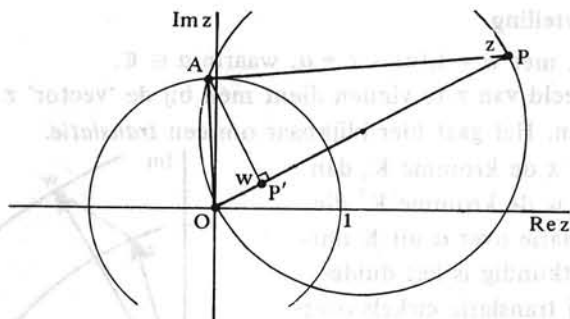


2.14.4. Inverse van de geconjugeerde

$f_4: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, met $w = f_4(z) = \frac{1}{z}$.

Stellen we $z = re^{i\varphi}$, dan vinden we $w = r^{-1}e^{-i\varphi}$. Dus $\arg w = -\arg z$. De punten van de eenheidscirkel worden op zichzelf afgebeeld; binnengebied van de eenheidscirkel, 0 uitgezonderd, wordt afgebeeld op het buitengebied van de eenheidscirkel en omgekeerd.

Zij P een punt buiten de eenheidscirkel. A is een snijpunt van de eenheidscirkel en de cirkel met middellijn OP . AP' is de hoogtelijn uit A in rechthoekige driehoek OAP . Dan geldt $OP' \times OP = OA^2 = 1$ (ga dit na!) P en P' zijn dus elkaars beeldpunt bij de afbeelding $w = \frac{1}{z}$.



2.14.5. Inverse

$f_5: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, met $w = f_5(z) = \frac{1}{z}$.

Deze afbeelding is de samengestelde afbeelding $f_5 = f_3 \circ f_4$, waaruit de meetkundige interpretatie gemakkelijk volgt. Wij tonen nu aan dat bij deze afbeelding een cirkel overgaat in een cirkel of een rechte lijn, terwijl een rechte lijn overgaat in een rechte lijn of een cirkel.

Opmerking vooraf. Omdat de afbeelding f_5 in 0 niet gedefinieerd is, kunnen we bv. niet spreken van het beeld van een rechte lijn door 0. Als $A \subset \mathbb{C}$ en $0 \in A$, dan zullen we $A \setminus \{0\}$ de *gepunteeerde verzameling* A noemen.

Bewijs

Substitutie van $z = \frac{1}{w}$ in 2.9.1 levert

$$p \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{z_0}{\bar{w}} - \frac{\bar{z}_0}{w} + q = 0$$

of

$$q w \bar{w} - z_0 w - \bar{z}_0 \bar{w} + p = 0.$$

Dit is de vergelijking van de beeldfiguur in het w -vlak. Hieruit blijkt dat een gepunteeerde rechte lijn in het z -vlak, die door 0 gaat (dus $p=0, q=0$) weer in een gepunteeerde rechte lijn door 0 overgaat.

Een rechte lijn in het z -vlak, die niet door 0 gaat (dus $p \neq 0, q \neq 0$) gaat over in een gepunteeerde cirkel door 0.

Een gepunteeerde cirkel in het z -vlak, die door 0 gaat (dus $p \neq 0, q=0$) gaat over in een rechte lijn die niet door 0 gaat. Een cirkel in het z -vlak, die niet door 0 gaat (dus $p \neq 0, q \neq 0$) gaat over in een cirkel, die niet door 0 gaat. \square

2.14.6. Algemene gebroken lineaire transformatie

$f_6: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{\delta}{\gamma}\} \rightarrow \mathbb{C}$, met $w = f_6(z) = \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$,

waarin $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ en $a\delta - \beta\gamma \neq 0$.

We willen weer laten zien dat het beeld onder de afbeelding f_6 van een rechte lijn of een cirkel in het z -vlak een rechte lijn of een cirkel in het w -vlak oplevert. We onderscheiden

Geval 1. $\gamma = 0$, dan $a\delta \neq 0$.

$$w = \frac{a}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$$

f_6 is de samengestelde afbeelding $f_1 \circ f_2$,
 waarbij f_2 is de rotatie en vermenigvuldiging t.o.v. 0: $z \mapsto \frac{a}{\delta}z$

en f_1 is de translatie $z \mapsto z + \frac{\beta}{\delta}$.

Onder beide afbeeldingen gaan cirkels over in cirkels en rechte lijnen over in rechte lijnen.

Geval 2. $\gamma \neq 0$.

$$w = \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{a(z + \frac{\delta}{\gamma}) + \beta - \frac{a\delta}{\gamma}}{\gamma(z + \frac{\delta}{\gamma})} = \frac{a}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2} \frac{1}{z + \frac{\delta}{\gamma}}$$

f_6 is de samengestelde afbeelding $f_1^* \circ f_2 \circ f_5 \circ f_1$,

waarbij f_1 is de translatie $z \mapsto z + \frac{\delta}{\gamma}$,

f_5 de afbeelding $z \mapsto \frac{1}{z}$,

f_2 de rotatie en vermenigvuldiging t.o.v. 0 $z \mapsto \frac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2} z$,

f_1^* de translatie $z \mapsto z + \frac{a}{\gamma}$.

Onder elk van deze afbeeldingen is het beeld van een cirkel of rechte lijn in het z -vlak een cirkel of rechte lijn in het w -vlak. Voor zover de

lijnen en cirkels door $-\frac{\delta}{\gamma}$ gaan, dienen we weer naar analogie van 2.14.5 'gepuncteerd' lijnen en cirkels te beschouwen. □

2.14.7. Voorbeelden

a) $f: \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ met $w = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

Bij deze afbeelding zullen we nagaan wat het beeld is van een punt op de eenheidscirkel. Laat $|z|=1$ en $z \neq -1$.

Dan is $z = e^{i\varphi}$, waarbij $-\pi < \varphi < \pi$.

Dan is $w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} + 1}$. Door tel-

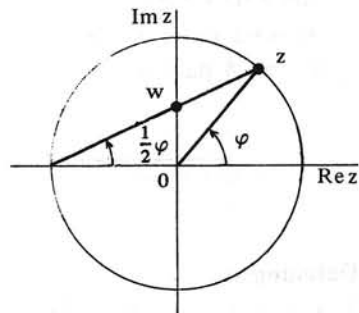
ler en noemer met $e^{-\frac{1}{2}i\varphi}$ te vermenigvuldigen vinden we met de formules

$$\text{van Euler dat } w = \frac{2i \sin \frac{1}{2}\varphi}{2 \cos \frac{1}{2}\varphi} = i \tan \frac{1}{2}\varphi$$

Hieruit zien we dat, als z de eenheidscirkel, met uitzondering van het punt -1 , doorloopt, w de imaginaire as doorloopt.

b) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met $w = f(z) = e^z$.

We bepalen het beeld van de rechte lijnen van de vorm $L_a = \{z | \operatorname{Re} z = a\}$, waarbij $a \in \mathbb{R}$. Een punt op zo'n lijn L_a kan voorgesteld worden door $z = a + i\varphi$, waarbij $\varphi \in \mathbb{R}$.



Dan is $w = e^z = e^a e^{i\varphi} = e^a (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Als z de lijn L_a doorloopt, dan doorloopt w de cirkel met straal e^a en middelpunt 0 . Merk op dat $a + i\varphi$ en $a + i(2k\pi + \varphi)$ hetzelfde beeld hebben, waarbij $k \in \mathbb{Z}$.

Ga na dat het beeld van de verzameling $\{z \mid 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ de verzameling $\{w \mid w \neq 0\}$ is.

- c) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met $w = f(z) = z^2 + i\bar{z} + 3|z|$.

Het punt z doorloopt de imaginaire as van $-3i$ naar $3i$. Beschrijf de baan van w en teken hem in het complexe vlak.

Oplossing. Daar z de imaginaire as doorloopt kunnen we stellen $z = iy$.

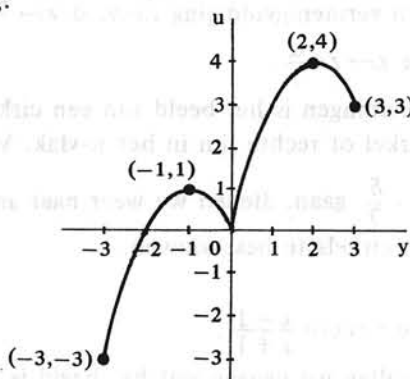
Als $w = u + iv$ dan $u + iv = -y^2 + y + 3|y|$, y van -3 naar 3 .

Dus $u = g(y) = -y^2 + y + 3|y|$, $-3 \leq y \leq 3$

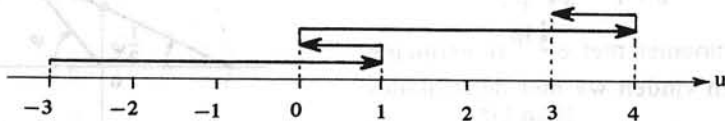
$$v = 0.$$

$$g(y) = \begin{cases} -y^2 - 2y & , -3 \leq y \leq 0 \\ -y^2 + 4y & , 0 \leq y \leq 3. \end{cases}$$

De grafiek van g :



Als z de imaginaire as van -3 naar 3 doorloopt, doorloopt w de reële as eerst van -3 naar 1 , dan van 1 naar 0 , dan van 0 naar 4 en tenslotte van 4 naar 3 .



Oefeningen

1. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is gegeven door $w = f(z) = \bar{z} + 1$.

Bepaal het beeld van de verzameling $\{z \mid \operatorname{Im} z = 1 \text{ en } \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

2. $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ is gegeven door $w = f(z) = \frac{1}{1-z}$.

z doorloopt de cirkel $|z| = 1$ van i naar -1 over de kleinste boog.

Welke baan beschrijft w ?

3. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is gegeven door $w = f(z) = e^z$.

Bepaal het beeld van de verzamelingen

- a) $\{z \mid \operatorname{Im} z = b\}$, $b \in \mathbb{R}$,
 b) $\{z \mid \operatorname{Re} z < 0 \text{ en } |\operatorname{Im} z| < \pi\}$.

4. Tussen w en z bestaat de volgende betrekking:

$$w = z^2 + z\bar{z}.$$

z doorloopt de eenheidscirkel in de positieve zin (d.w.z. linksom).
 Welke baan beschrijft w ?

2.15. Vraagstukken

1. Zij $z = a + bi$ en $w = c + di$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

Welk verband bestaat er tussen a, b, c en d in elk van de volgende gevallen?

- a) $\operatorname{Re}(zw) = 0$,
 b) $\operatorname{Im}(zw) = 0$,
 c) $\operatorname{Re}(zw^{-1}) = 0$,
 d) $\operatorname{Im}(zw^{-1}) = 0$.

2. De positieve reële getallen R , L en C stellen respectievelijk de weerstand, zelfinductie en capaciteit voor. Het complexe getal $(0,1)$ wordt in dit vraagstuk, dat ontleend is aan de electriciteitsleer, voorgesteld door j om verwarring met de stroomsterkte i te voorkomen.

Ga na voor welke reële waarden van ω de volgende getallen reëel zijn.

- a) $R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$,
 b) $\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$,
 c) $\frac{j\omega LR}{j\omega L + R} + \frac{1}{j\omega C}$.

3. Teken in het complexe vlak de volgende verzamelingen.

$$A = \{z \mid \operatorname{Re} \frac{z-3}{z+i} = 0\},$$

$$B = \{z \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ en } |z-i| \leq 1 \text{ en } |z+1| \leq 2\},$$

$$C = \{z \mid \operatorname{Re} z = |z-4|\},$$

$$D = \{z \mid |z-3i| + |z+3i| = 10\}.$$

4. Bepaal het complexe getal z dat voldoet aan de volgende drie voorwaarden.

$$a) |z+2+2i| = |z-2-2i|,$$

$$b) |z-i-1| = 2,$$

$$c) \operatorname{Im} z > 0.$$

5. Wijs aan welk(e) gelijkteken(s) in de volgende onjuiste herleiding ten onrechte is (zijn) neergeschreven.

$$-1 = ii = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

6. Onderstaande getallen zijn geschreven in één van de vormen

$$x + iy, r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ of } e^{x+iy}.$$

Schrijf ze in de beide andere vormen.

a) $e^{2+3\pi i}$,

b) $-6 + 6i$,

c) πi ,

d) e^{ie} .

7. Toon aan dat
- $\frac{2z}{1+z} = 1 + i \tan \frac{1}{2} \varphi$
- , indien
- $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$
- ,
- $z \neq -1$
- .

8. Bereken $\frac{(1 - i\sqrt{3})^{30}}{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{20}}$.

9. Zij $z = 1 + i\sqrt{3}$ en $w = 1 - i\sqrt{3}$.

Toon aan dat $(zw^{-1})^{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

Bereken $(zw^{-1})^{4711}$.

10. Teken de volgende verzamelingen in het complexe vlak.

$$A = \{z \mid 0 < |z| \leq 1 \text{ en } 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{3}\},$$

$$B = \{z \mid \arg \left(\frac{z-6-7i}{z+i} \right) = \pi\},$$

$$C = \{z \mid \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 2\}.$$

11. Teken in het complexe vlak de verzamelingen

$$A = \{z \mid |z - 5i| = |4 + 3i - z|\},$$

$$B = \{z \mid \arg \left(\frac{z+2i}{z-2i} \right) = \frac{\pi}{3}\} \text{ en}$$

$$A \cap B.$$

12. Bewijs dat voor iedere
- $z \in \mathbb{C}$
- met
- $|z|=1$
- en
- $z \neq -1$
- geldt:

$$\frac{z}{(z+1)^2} \text{ is reëel en } \frac{z}{(z+1)^2} \geq \frac{1}{4}.$$

13. Bereken
- $\left| \frac{2ie^{i\varphi} + 4}{2e^{i\varphi} - i} \right|$
- , (
- $\varphi \in \mathbb{R}$
-).

14. Los de volgende vergelijkingen op.

a) $(z^2 + 1)^3 = -1$,

b) $(z+i-1)^3 + i = 0$,

c) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$,

d) $z^{10} - z^6 - 8z^4 + 8 = 0$,

e) $z^6 = (2 - i2\sqrt{3})^6$,

f) $z^6 + (-1+i)z^3 - i = 0$,

g) $z^5 - iz^3 + iz^2 + 1 = 0$,

h) $z^4 - 4iz^2 + 32 = 0$,

i) $2z^3 + 17z^2 + 23z + 3 = 0$,

j) $6z^4 + 5z^3 + 4z^2 - 2z - 1 = 0$.

15. Los de volgende vergelijkingen op.
- $e^{2z} - 2e^z + 4 = 0$,
 - $e^{\frac{\pi}{z}} = -i$,
 - $(e^z)^3 = -2 + 2i$.
- *16. Bewijs dat alle wortels van de vergelijking $e^{\frac{1}{z}} = \sqrt{e}$ op de cirkel $|z - 1| = 1$ liggen.
- *17. Gegeven $w = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$.
Bereken $\operatorname{Re} w$ en $\operatorname{Im} w$.
18. Zij $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Bewijs:
- $e^{\overline{iz}} = e^{-i\bar{z}}$;
 - $|e^{iz} + e^{-iz}|^2 = 2 \cos 2x + 2 \cosh 2y$.
- *19. a) Bewijs: $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$, ($z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, n \in \mathbb{N}$).
b) Bereken met behulp van a)
- $$\sum_{k=0}^n \cos k\varphi, \quad (0 < \varphi < 2\pi).$$
- *20. Zij $a \in \mathbb{R}$. De wortels van de vergelijking $z^2 + az + a + 3 = 0$ noteren we met z_1 en z_2 .
- Toon aan dat $z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{R}$.
 - Voor welke waarde van a is $z_1^2 + z_2^2$ minimaal?
 - Voor welke waarde van a is $z_1^2 + z_2^2$ minimaal, als we slechts reële wortels toelaten?
- *21. Bepaal het complexe getal w zó dat de vergelijking
- $$iz^2 + (w - 3 + i)z - 12 + 5i = 0$$
- twee gelijke wortels heeft.
- *22. Gegeven is het polynoom $f(z) = z^4 + z + 1$.
Bewijs:
- f heeft geen zuiver imaginaire nulpunten;
 - f heeft geen reële nulpunten;
 - als $|z| \geq 2$ dan $|f(z)| \geq 13$;
 - alle nulpunten van f zijn enkelvoudig
(aanwijzing: $f(z)$ is niet het kwadraat van een tweede graadspolynoom).
- *23. Zij $w = f(z) = |z| + \frac{i}{z}$.
 z doorloopt de imaginaire as van ∞ tot i , daarna de cirkel $|z| = 1$ van i tot 1 over de kleinste boog, en tenslotte de reële as van 1 tot ∞ . Bepaal de baan van $w = f(z)$.

- *24. Laat $z = e^{ia}$, waarin $a \in \mathbb{R}$.
- Toon aan dat $w = \frac{z^2 - z + 1}{2z}$ reëel is.
 - Bepaal de baan die w beschrijft, als a toeneemt van 0 tot 2π .
- *25. Laat $w = \frac{i + |z|}{z}$.
- z doorloopt de bissectrice van het eerste kwadrant van 0 tot $\frac{1}{2}(1+i)\sqrt{2}$, vervolgens de kleinste boog van de eenheidscirkel van $\frac{1}{2}(1+i)\sqrt{2}$ tot $\frac{1}{2}(-1+i)\sqrt{2}$, en tenslotte de bissectrice van het tweede kwadrant van $\frac{1}{2}(-1+i)\sqrt{2}$ tot aan 0. Beschrijf de baan van w .
- *26. Gegeven is de afbeelding $w = \bar{z} + \frac{i}{z}$.
- Het punt z doorloopt eerst de reële as van 0 tot 1, daarna de kleinste boog van de eenheidscirkel van 1 tot i , en vervolgens de imaginaire as van i tot 0. Bepaal de baan die het punt w doorloopt.
- *27. Gegeven is de afbeelding $w = f(z) = \frac{1}{z+2}$.
- Beschrijf de baan van w als z de imaginaire as doorloopt van 0 naar $2i$.
 - Zij $A = \{z \mid |z| = 1\}$. Bepaal $f(A)$.
- *28. Als $w = \frac{z-1}{z+1}$, beschrijf dan de baan van w indien z de reële as doorloopt van 0 tot 1, daarna de grootste boog van de eenheidscirkel van 1 tot i en tenslotte de imaginaire as van i tot 0.
- *29. Beschrijf de baan van $w = e^{\frac{\pi}{4}(z - \frac{1}{2})}$ als z de eenheidscirkel in positieve zin van $+1$ naar -1 doorloopt.
- *30. Gegeven is de afbeelding $w = z^2 + \frac{i\bar{z}}{z}$.
- Het punt z doorloopt eerst de reële as van 0 tot 1, daarna de kleinste boog van de eenheidscirkel van 1 tot i , en vervolgens de imaginaire as van i tot 0.
- Beschrijf de baan die het punt w doorloopt.

3. Limieten en continuïteit

De begrippen

3.1. Limiet voor $x \rightarrow a$

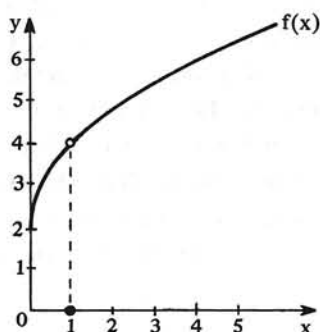
3.1.1. Inleiding

Het limietbegrip is het fundamentele begrip, dat de analyse onderscheidt van andere takken van de wiskunde zoals algebra en meetkunde. Veel begrippen zoals differentiëren en integreren, die in de techniek veelvuldig worden toegepast, zijn van het limietbegrip afgeleid. De precieze definitie van limiet doet bij eerste kennismaking moeilijk aan en het kost meestal veel inspanning om goed te begrijpen waar het om gaat. We geven eerst een voorbeeld.

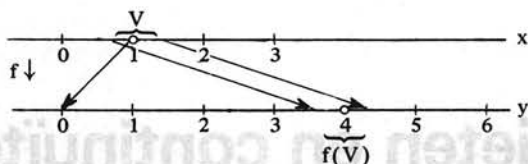
Zij $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Voor $x \neq 1$ is $f(x) = 2(\sqrt{x} + 1)$, voor $x = 1$ is $f(x) = 0$.



We zijn geïnteresseerd in de waarden van $f(x)$ als x een getalverzameling V doorloopt, waarvan de elementen dicht bij 1 liggen (maar $\neq 1$ zijn). Het blijkt dan dat voor elke $x \in V$ de functiewaarde $f(x)$ steeds weinig van 4 verschilt. Hoe minder de x -waarden van 1 verschillen, des te minder de $f(x)$ -waarden van 4. We zeggen: als x nadert naar 1 (notatie $x \rightarrow 1$), dan $f(x) \rightarrow 4$.



Natuurlijk zijn de omschrijvingen “dicht bij” en “weinig verschilt van” vaag en relatief. Om dit formeel correct te maken, voeren we de volgende begrippen in.

3.1.2. Omgeving en gereduceerde omgeving

Zij $a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}^+$.

- a) De verzameling $U_r(a)$ van alle punten in \mathbb{R} die tot a een afstand kleiner dan r hebben, heet de r -omgeving van a :

$$U_r(a) = \{x \mid |x - a| < r\}.$$

- b) De verzameling die ontstaat door uit de r -omgeving van a het getal a weg te laten wordt aangeduid met $U'_r(a)$ en heet de *gereduceerde* r -omgeving van a , dat wil zeggen

$$U'_r(a) = \{x \mid 0 < |x - a| < r\}.$$

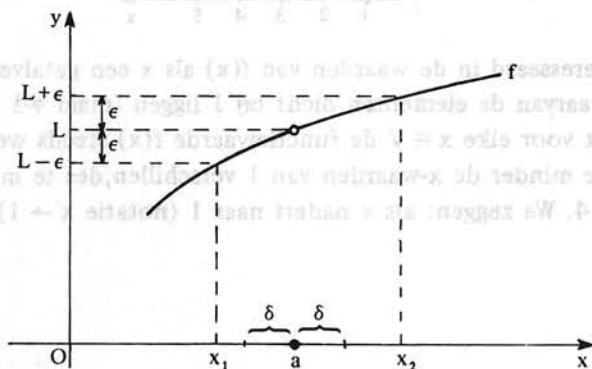
Dus er geldt

$$U_r(a) = (a - r, a + r), \text{ en}$$

$$U'_r(a) = (a - r, a) \cup (a, a + r).$$

Het voorbeeld uit 3.1.1 kunnen we nu als volgt formuleren: $f(x)$ verschilt weinig van 4 betekent dat $f(x) \in U_\epsilon(4) = (4 - \epsilon, 4 + \epsilon)$, waarin ϵ een “klein” positief getal is. x ligt dichtbij 1 (maar $\neq 1$) betekent dat $x \in U'_\delta(1)$, waarin δ een “klein” positief getal is. Hierin hangt δ af van ϵ ; is ϵ “klein”, dan verwachten we dat ook δ in het algemeen “klein” moet zijn.

Wel blijft vaag: wat is “klein”? Bij de definitie van limiet zal ϵ willekeurig klein genomen kunnen worden met behulp van “voor elke ϵ ”. De δ , die van ϵ afhangt, kan dan ook willekeurig klein worden. Nu de precieze limietdefinitie.



3.1.3. Definitie

Zij $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+$ en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}$.

Laat f gedefinieerd zijn in een gereduceerde r -omgeving van a ,

d.w.z. $U_r'(a) \subset D$.

Dan heet L de *limiet van f voor x naar a* , notatie

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

als er bij elk reëel getal $\epsilon > 0$ een reëel getal $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $|f(x) - L| < \epsilon$.

We kunnen deze definitie als volgt herformuleren.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

als voor alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ er een $\delta \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat

$$[x \in U_\delta'(a)] \Rightarrow [f(x) \in U_\epsilon(L)].$$

3.1.4. Opmerkingen

- Wanneer we in het vervolg schrijven $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ zullen we naar goed mathematisch gebruik stilzwijgend onderstellen dat f in een gereduceerde r -omgeving van a gedefinieerd is.
- De in 3.1.3 optredende δ zal in het algemeen afhankelijk zijn van ϵ én van a .
- Het is terecht dat er gesproken wordt over *de* limiet van f voor x naar a . Deze is namelijk eenduidig bepaald. We zullen dit in de appendix van dit hoofdstuk bewijzen.

3.1.5. Voorbeelden

- We passen nu de limietdefinitie toe op het voorbeeld uit 3.1.1.

$f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Toon aan: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.

Oplossing:

We moeten een bewering bewijzen voor alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

Overeenkomstig 1.7.6 bewijzen we de uitspraak voor een willekeurige $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. We zoeken nu bij deze ϵ een $\delta \in \mathbb{R}^+$ zó dat $|f(x) - 4| < \epsilon$ als maar geldt $0 < |x - 1| < \delta$.

Zij $\epsilon > 0$ willekeurig en zij $x \neq 1$. Dan geldt

$$|f(x) - 4| = |2\sqrt{x} + 2 - 4| = 2|\sqrt{x} - 1| = 2 \left| \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \right| = 2 \frac{|x - 1|}{|\sqrt{x} + 1|}.$$

We hebben zo bereikt dat $|x - 1|$ voorkomt in de uitdrukking voor $|f(x) - 4|$ en we weten dat $|x - 1|$ willekeurig klein kan worden.

Nu is $\sqrt{x} \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}_0^+$, dus voor alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ is

$$(*) \quad \frac{2|x-1|}{\sqrt{x+1}} \leq 2|x-1|, \quad (\text{zie opmerking 3.1.6})$$

zodat $|f(x) - 4| \leq 2|x-1|$.

Maar $2|x-1| < \epsilon \iff |x-1| < \frac{\epsilon}{2}$.

Dus, nemen we $\delta := \frac{\epsilon}{2}$, dan geldt voor alle $x \in U_\delta'(1)$ dat $|f(x) - 4| < \epsilon$, hetgeen betekent $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.

- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ bestaat niet.

We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Neem eens aan dat $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = L$. Kies $\epsilon = \frac{1}{2}$, dan bestaat er volgens

3.1.3 een getal $\delta > 0$ zó dat voor alle x met $0 < |x| < \delta$ geldt

$|\cos \frac{1}{x} - L| < \frac{1}{2}$. Zij $n \in \mathbb{N}$ zó dat $\frac{1}{2n\pi} < \delta$. Invullen van $x = \frac{1}{2n\pi}$

in $|\cos \frac{1}{x} - L| < \frac{1}{2}$ levert

$$|\cos 2n\pi - L| = |1 - L| < \frac{1}{2} \quad \text{en dus} \quad \frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}.$$

Invullen van $x = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ geeft

$$|\cos(2n+1)\pi - L| = |-1 - L| < \frac{1}{2}, \quad \text{dus} \quad -\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2},$$

waarmee een tegenspraak gevonden is.

3.1.6. Opmerking

In formule 3.1.5* werd een breuk met positieve teller en noemer naar boven geschat. Dit kan altijd op 2 manieren:

- a) teller vergroten: $\frac{3}{11} < \frac{4}{11}$,
 b) noemer verkleinen: $\frac{3}{11} < \frac{3}{10}$.

In 3.1.5* is de noemer verkleind (in feite niet groter gemaakt, want voor $x = 0$ blijft hij gelijk).

Oefeningen

- *1. Toon aan met behulp van de limietdefinitie

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 13x + 14}{x^2 - 4} = -\frac{1}{4}$

2. Toon aan dat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ niet bestaat.

3.2. Continuïteit

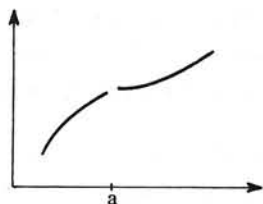
3.2.1. Inleiding

Als f een willekeurige functie is, geldt niet noodzakelijk

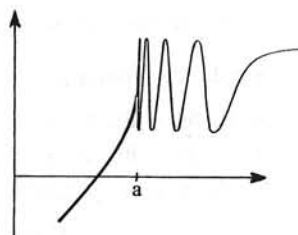
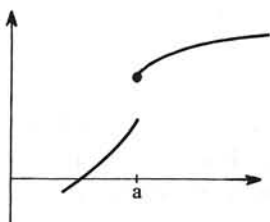
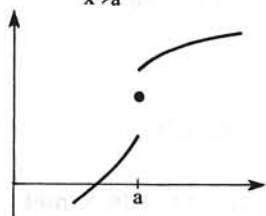
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Er zijn allerlei situaties mogelijk, waarin dit niet waar is:

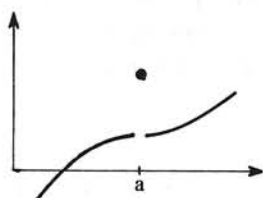
- (i) f is niet gedefinieerd in a , dus het rechterlid van de uitspraak is zinloos



- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat niet



- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat maar is niet gelijk aan $f(a)$.



We willen al deze situaties als afwijkend beschouwen en zullen de functie continu noemen als dergelijk afwijkend gedrag niet optreedt. Intuïtief houdt continuïteit in dat de grafiek geen breuken, sprongen of te wilde slingeren vertoont.

3.2.2. Definitie

Zij $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+$ en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}$. Laat f gedefinieerd zijn in een r -omgeving van a (dat wil zeggen $U_r(a) \subset D$).

We noemen f *continu* in a als

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

3.2.3. Opmerkingen

- a) Uit de definitie 3.2.2 volgt dat voor continuïteit 2 dingen vereist zijn:
- De limiet $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat
 - De limiet is gelijk aan $f(a)$.
- b) De definitie 3.2.2 houdt in feite in dat bij continue functies het nemen van de limiet en het toepassen van de functie mogen worden verwisseld:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a), \quad \text{zie ook 3.2.4b.}$$

- c) Als f niet continu is in a dan noemen we f *discontinu* in a .
De functie \tan is dus bijvoorbeeld discontinu in $\frac{\pi}{2}$, omdat hij daar niet gedefinieerd is. Dat er in de grafiek een sprong optreedt bij $x = \frac{\pi}{2}$, doet daarbij niets terzake.
- d) Wanneer we in het vervolg schrijven: f is continu in a , zullen we stilzwijgend veronderstellen dat f in een r -omgeving van a gedefinieerd is. We noemen a dan een *inwendig punt* van D . In het algemeen definiëren we: Zij $V \subset \mathbb{R}$. We noemen a een inwendig punt van V als er een $r \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat $U_r(a) \subset V$.

3.2.4. Voorbeelden

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ is continu in elk punt $a \in \mathbb{R}$ (waarom?).
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ is continu in elk punt $a \in \mathbb{R}$.

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. We zoeken een getal $\delta > 0$ zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Maar voor $x = a$ is triviaal $|f(a) - f(a)| = 0 < \epsilon$. Dus we kunnen ook zeggen: we zoeken een getal $\delta > 0$, zó dat voor alle x met $|x - a| < \delta$ geldt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Voor de hier beschouwde f wordt deze laatste ongelijkheid $|x - a| < \epsilon$. Voor de gezochte δ kan hier dus ϵ worden genomen.

- c) $f: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5x+25}{x+2}$.

We zullen met behulp van de definitie van continuïteit aantonen dat f continu is in het punt 3.

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. We zoeken een getal $\delta > 0$ zó dat voor alle x met $|x - 3| < \delta$ geldt $|f(x) - 8| < \epsilon$.

We noemen zulk een getal δ een bij ϵ 'passende' δ . Het is duidelijk dat zodra een bij ϵ passende δ is gevonden, ook iedere kleinere positieve δ een bij ϵ passende δ is. Bij het zoeken naar een bij ϵ passende δ kan men zich dus bijvoorbeeld beperken tot het zoeken naar een δ met $0 < \delta \leq 1$ en dus reeds aannemen dat $|x - 3| < 1$. Dan geldt $2 < x < 4$ en dus $x + 2 > 4$.

$$\text{Dan is } |f(x) - 8| = \left| \frac{5x+25}{x+2} - 8 \right| = \frac{3|x-3|}{x+2} < \frac{3}{4} |x-3|,$$

en $\frac{3}{4} |x-3| < \epsilon \iff |x-3| < \frac{4}{3} \epsilon$. Nemen we nu $\delta = \min \{1, \frac{4}{3} \epsilon\}$ dan

is voor $|x-3| < \delta$ voldaan aan $\left| \frac{5x+25}{x+2} - 8 \right| < \epsilon$.

Dus f is continu in 3.

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

We zullen aantonen dat f continu is in elk punt $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Net als in voorbeeld c) beperken we ons in de keuze van δ , hier tot $0 < \delta \leq \frac{1}{2}|a|$.

Kiezen we nu $|x - a| < \delta$, dan geldt dus

$$|x - a| < \frac{1}{2}|a| \implies ||x| - |a|| < \frac{1}{2}|a| \iff -\frac{1}{2}|a| < |x| - |a| < \frac{1}{2}|a|.$$

Dus er geldt: $\frac{1}{2}|a| < |x| < \frac{3}{2}|a|$.

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - x|}{|ax|} = \frac{|x - a|}{|a||x|} < \frac{|x - a|}{\frac{1}{2}|a|^2} = \frac{|x - a|}{\frac{1}{2}a^2}.$$

Nemen we dus $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}|a|, \frac{1}{2}a^2 \epsilon \right\}$ dan is voor alle x met $|x - a| < \delta$ voldaan aan $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \epsilon$.

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ als } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & , \text{ als } x = 0, \\ \frac{1}{n} & , \text{ als } x \in \mathbb{Q} \text{ en } x = \frac{t}{n}. \end{cases}$

Hierbij zijn t en n onderling ondeelbaar, $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

i) f is continu in alle punten uit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, want bij gegeven $\epsilon > 0$ is er voor elk irrationaal punt een zó kleine r -omgeving U te vinden, dat deze alleen irrationale punten of rationale punten met noemer $> \frac{1}{\epsilon}$ bevat. In beide gevallen geldt $|f(x) - 0| < \epsilon$ voor alle $x \in U$.

ii) f is discontinu in alle punten uit \mathbb{Q} . De functiewaarde is in geen enkel rationaal punt 0, terwijl er willekeurig dicht bij ieder rationaal punt nog irrationale punten liggen, die functiewaarde 0 hebben. Voor $x_0 = \frac{t}{n} \in \mathbb{Q}$, waarbij t en n onderling ondeelbaar zijn, $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ kan dus nooit voor alle x uit een r -omgeving van x_0 de waarde $|f(x) - f(x_0)|$ kleiner zijn dan $\frac{1}{n}$; voor irrationale x is nl. $|f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{n}$. Dit geldt evenzo voor $x_0 = 0$.

Oefeningen

1. Voor alle $p, q, a \in \mathbb{R}$ is de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = px + q$ continu in a . Toon dit aan met behulp van de limietdefinitie.
- *2. Bewijs dat voor $a > 0$ geldt: $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- *3. Toon aan met behulp van de definitie van limiet dat $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ continu is in 5.
- *4. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ als } x \notin \mathbb{Q} \\ x & , \text{ als } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$.

Onderzoek in welke punten f continu en in welke punten f discontinu is.

3.3. Rechter- en linkerlimiet. Rechts- en linkscontinu

3.3.1. Inleiding

Het komt voor dat een functie maar aan één kant van een punt a gedefinieerd is, zodat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ niet bestaat (waarom niet?). Zo bestaat bijvoor-

beeld $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ niet. We zullen daarom x soms van links of van rechts laten naderen, notatie $x \uparrow a$ respectievelijk $x \downarrow a$. Dit leidt tot de volgende definities.

3.3.2. Definitie

Zij $a \in \mathbb{R}$ en laat de functie f gedefinieerd zijn op $(a, a+r)$ met $r \in \mathbb{R}^+$. Dan heet L de *rechterlimiet* van f voor x naar a , notatie

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = L,$$

als er bij elk getal $\epsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $0 < x - a < \delta$ geldt $|f(x) - L| < \epsilon$.

We kunnen deze definitie als volgt herformuleren:

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = L$$

als voor elke $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ er een $\delta \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat

$$[x \in (a, a + \delta)] \implies [f(x) \in U_\epsilon(L)].$$

3.3.3. Definitie

Zij $a \in \mathbb{R}$ en laat de functie f gedefinieerd zijn op $(a-r, a)$ met $r \in \mathbb{R}^+$. Dan heet L de *linkerlimiet* van f voor x naar a , notatie

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$$

als er bij elk getal $\epsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $-\delta < x - a < 0$ geldt $|f(x) - L| < \epsilon$.

Met andere woorden:

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$$

als voor elke $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ er een $\delta \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat

$$[x \in (a - \delta, a)] \implies [f(x) \in U_\epsilon(L)].$$

3.3.4. Stelling

De limiet van f voor x naar a bestaat dan en slechts dan als de linkerlimiet en de rechterlimiet voor x naar a beide bestaan en gelijk zijn, in formule

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \uparrow a} f(x) = L.$$

Bewijs

\implies : Laat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Zij $\epsilon > 0$. Er bestaat een $\delta > 0$ zó dat voor alle x met

$$0 < |x - a| < \delta \text{ geldt } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Dan geldt voor alle x met $-\delta < x - a < 0$ en ook voor alle x met $0 < x - a < \delta$ dat $|f(x) - L| < \epsilon$.

Dit betekent dat L zowel linker- als rechterlimiet is van f voor x naar a .

⇐: Laat $\lim_{x \downarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$. Zij $\epsilon > 0$. Dan bestaan er positieve

getallen δ_1 en δ_2 zó dat voor alle x met $-\delta_1 < x - a < 0$ en ook voor alle x met $0 < x - a < \delta_2$ geldt $|f(x) - L| < \epsilon$.

Zij $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ dan geldt voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ dat $|f(x) - L| < \epsilon$.

Dit betekent dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. □

3.3.5. Definitie

Zij $a \in \mathbb{R}$ en laat de functie f gedefinieerd zijn op $[a, a+r)$ met $r \in \mathbb{R}^+$.

We noemen f *rechtscontinu* in a als

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a).$$

3.3.6. Definitie

Zij $a \in \mathbb{R}$ en laat de functie f gedefinieerd zijn op $(a-r, a]$ met $r \in \mathbb{R}^+$.

We noemen f *linkscontinu* in a als

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a).$$

3.3.7. Voorbeeld

De functie $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^p$, $p > 0$, is rechtscontinu in 0.

Zij $\epsilon > 0$. Dan geldt voor alle $x > 0$: $|f(x) - f(0)| = |x^p| = x^p$, en dit is kleiner dan ϵ als $0 < x < \epsilon^{1/p}$. Nemen we dus $\delta = \epsilon^{1/p}$, dan is voor alle x met $0 < x - 0 < \delta$ voldaan aan $|x^p - 0| < \epsilon$.

3.3.8. Stelling

f is continu in $a \iff f$ is zowel links- als rechtscontinu in a .

Bewijs

Oefening 2.

Oefeningen

*1. Toon aan met de definitie dat $\lim_{x \uparrow 2} \sqrt{4 - x^2} = 0$.

*2. Bewijs stelling 3.3.8.

3. Bereken $\lim_{x \downarrow 0} \frac{|x|}{x}$ en $\lim_{x \uparrow 0} \frac{|x|}{x}$. Wat kunt u concluderen omtrent $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$?

3.4. Limieten voor $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$

3.4.1. Inleiding

Beschouw $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Door te schrijven $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$

ziet men dat $f(x)$ voor "grote" waarden van x slechts weinig van 1 verschilt en dat het verschil tussen $f(x)$ en 1 steeds kleiner wordt naarmate x groter wordt.

Als we x onbeperkt laten toenemen (notatie $x \rightarrow \infty$) nadert $f(x)$ naar 1. Dit leidt tot de volgende definities.

3.4.2. Definitie

Laat de functie f gedefinieerd zijn op een interval (r, ∞) . Dan heet L de *limiet* van f voor x naar ∞ , notatie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L,$$

als er bij elk getal $\epsilon > 0$ een getal $G \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat voor alle x met $x > G$ geldt $|f(x) - L| < \epsilon$, met andere woorden

$$[x \in (G, \infty)] \Rightarrow [f(x) \in U_\epsilon(L)].$$

3.4.3. Definitie

Laat de functie f gedefinieerd zijn op een interval $(-\infty, r)$. Dan heet L de *limiet* van f voor x naar $-\infty$, notatie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

als er bij elk getal $\epsilon > 0$ een getal $G \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat voor alle x met $x < G$ geldt $|f(x) - L| < \epsilon$, met andere woorden

$$[x \in (-\infty, G)] \Rightarrow [f(x) \in U_\epsilon(L)].$$

3.4.4. Voorbeelden

a) We tonen aan: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$. (zie 3.4.1)

Zij $\epsilon > 0$ gegeven.

$\left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 \right| = \frac{2}{x^2 + 1}$. Net zoals we in 3.2.4c de δ beperkten tot $0 < \delta \leq 1$, kunnen we hier G beperken door te stellen: $G > 0$.

Als $x > G$, dan geldt $\frac{2}{x^2 + 1} < \frac{2}{x^2}$.

Nu is $\left[\frac{2}{x^2} < \epsilon \right] \Leftrightarrow \left[\frac{2}{\epsilon} < x^2 \right] \Leftrightarrow \left[\sqrt{\frac{2}{\epsilon}} < x \right]$ (omdat $x > 0$ is).

Dus nemen we $G = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$, dan geldt voor alle x met $x > G$ dat

$\left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 \right| < \epsilon$, hetgeen betekent $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$.

b) Als $p > 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-p} = 0$.

Zij $\epsilon > 0$ gegeven.

$|x^{-p} - 0| = \frac{1}{x^p} < \epsilon \Leftrightarrow \left[\frac{1}{\epsilon} < x^p \right] \Leftrightarrow \left[\frac{1}{\epsilon^{1/p}} < x \right]$ (als $x > 0$ is).

Dus nemen we voor $G = \frac{1}{\epsilon^{1/p}}$, dan geldt voor alle x met $x > G$ dat

$|x^{-p}| < \epsilon$, dat wil zeggen $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-p} = 0$.

Oefeningen

1. Bewijs met behulp van de definitie dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.
- *2. Bewijs met behulp van de definitie dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^3| + 5}{2x^3 + 1} = \frac{1}{2}$.
- *3. Bewijs met behulp van de definitie dat $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x - 2} = 2$.
- *4. Bewijs: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff \lim_{u \downarrow 0} f\left(\frac{1}{u}\right) = L$.

Belangrijkste eigenschappen

3.5. Gevolgen van de limietdefinitie

3.5.1. Inleiding

In deze paragraaf tot 3.5.5 behandelen we een aantal zeer fundamentele eigenschappen van limieten, die steeds eenvoudige gevolgen van de limietdefinitie zijn. *Alle eigenschappen worden geformuleerd en bewezen voor $x \rightarrow a$. Ze gelden echter eveneens voor $x \downarrow a$, $x \uparrow a$, $x \rightarrow \infty$ en $x \rightarrow -\infty$.* De bewijzen moeten daartoe steeds worden aangepast op de plaatsen waar de gereduceerde δ -omgeving $U'_\delta(a)$ optreedt.

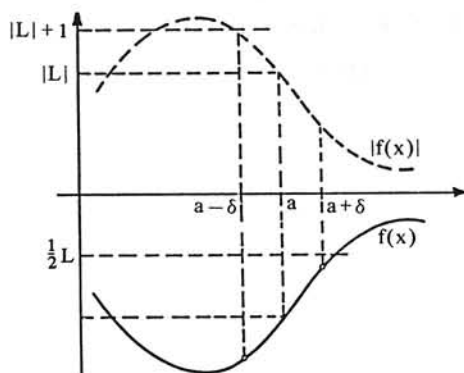
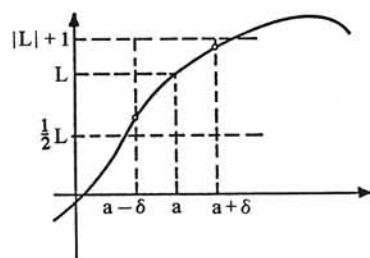
3.5.2. Stelling

Zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Dan geldt:

- a) Er is een gereduceerde δ -omgeving $U'_\delta(a)$ van a zó dat $|f(x)| < 1 + |L|$ voor alle $x \in U'_\delta(a)$. In het bijzonder is f begrensd op $U'_\delta(a)$.
- b) Als $L > 0$, dan is er een gereduceerde δ -omgeving $U'_\delta(a)$ van a zó dat $f(x) > \frac{1}{2}L > 0$ voor alle $x \in U'_\delta(a)$.
- c) Als $L < 0$, dan is er een gereduceerde δ -omgeving $U'_\delta(a)$ van a zó dat $f(x) < \frac{1}{2}L < 0$ voor alle $x \in U'_\delta(a)$.

Bewijs

- a) Kies $\epsilon = 1$. Dan bestaat daarbij een getal $\delta > 0$ zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $|f(x) - L| < 1$. Wegens 1.3.2b volgt dan



$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$. Dit betekent dat f begrensd is op $U_\delta'(a) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.

b) Kies $\epsilon = \frac{1}{2}L$. Dan bestaat er een getal $\delta > 0$ zó dat voor alle x met

$0 < |x - a| < \delta$ geldt $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$, oftewel

$$0 < \frac{1}{2}L < f(x) < \frac{3}{2}L.$$

Er is dus voor alle $x \in U_\delta' = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ voldaan aan

$$f(x) > \frac{1}{2}L > 0.$$

c) Dit wordt analoog aan b) bewezen. □

3.5.3. Insluitstelling

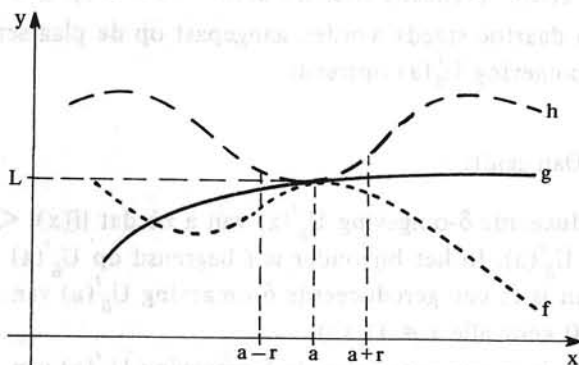
Laat f , g en h gedefinieerd zijn in $U_r'(a)$. Als gegeven is

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ en } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

$$2) f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ voor alle } x \in U_r'(a),$$

dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$



Bewijs

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Er is een $\delta > 0$ zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt: $x \in U_r'(a)$, $|f(x) - L| < \epsilon$ en $|h(x) - L| < \epsilon$.

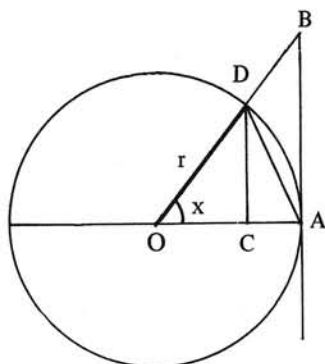
Blijkbaar is dan

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon.$$

Dus geldt voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$

$$|g(x) - L| < \epsilon. \quad \square$$

3.5.4. Voorbeeld



We nemen $OD = OA = r$ en stellen hoek $DOA = x$. Dan is $CD = r \sin x$ en $AB = r \tan x$, ($0 < x < \frac{\pi}{2}$). De oppervlakte van driehoek DOA is kleiner dan de oppervlakte van de cirkelsector DOA en deze laatste is kleiner dan de oppervlakte van driehoek BOA .

Dit levert de volgende ongelijkheid

$$\frac{1}{2} r^2 \sin x < \frac{x}{2\pi} \pi r^2 < \frac{1}{2} r^2 \tan x.$$

We merken nog op dat het voorgaande geen streng bewijs van de ongelijkheid is: het begrip 'oppervlakte' is nog niet gedefinieerd.

Uit bovenstaande ongelijkheid volgt nu

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ voor alle } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Dus

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

welke ongelijkheid ook geldt als $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, omdat de drie functies even zijn. Nu is $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ (\cos is continu in 0), zodat volgens de

insluitstelling

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3.5.5. Stelling

Zij f begrensd op $U'_r(a)$ en zij $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Dan is $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Dat wil zeggen, het produkt van een begrensde functie en een functie die naar 0 nadert, nadert naar 0.

Bewijs

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Kies $M > 0$ zó dat $|f(x)| \leq M$ op $U'_r(a)$.

Dan is $|f(x)g(x)| \leq M|g(x)|$ op $U'_r(a)$. Omdat $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ is er bij $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{M}$

een δ tussen 0 en r te vinden zó dat

$$0 < |x - a| < \delta \implies |g(x)| = |g(x) - 0| < \frac{\epsilon}{M}.$$

Voor $0 < |x - a| < \delta$ geldt dan

$$|f(x)g(x) - 0| \leq M|g(x)| < \epsilon, \text{ dus}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

3.5.6. Voorbeeld

Toon aan $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.

Oplossing:

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ en $|\cos \frac{1}{x}| \leq 1$ voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegens 3.5.5 volgt dan

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0.$$

3.5.7. Limieten van monotone en begrensde functies

Als f naar beneden of boven begrensd is, kan men vaak het bestaan van de limiet aantonen met behulp van de monotonie-eigenschappen van f . Dit geldt dan voor limieten, waarbij men van één kant nadert, dat wil zeggen $x \downarrow a$, $x \uparrow a$, $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$. Wij zullen voor deze 4 gevallen de stelling formuleren en in 1 geval bewijzen. Met name bij rijen (3.11) zullen we hier veel gebruik van maken.

3.5.8. Stelling

- a) Als $f: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stijgend en naar boven begrensd is, dan bestaat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- b) Als $f: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dalend en naar beneden begrensd is, dan bestaat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Bewijs

- a) De verzameling $\{f(x) \mid x \in (a, \infty)\}$ is naar boven begrensd en niet leeg. Zij $L = \sup \{f(x) \mid x \in (a, \infty)\}$ en zij $\epsilon > 0$. Daar $L - \epsilon$ geen bovengrens is, is er een $x_0 \in (a, \infty)$ zó dat $f(x_0) > L - \epsilon$. Omdat f stijgend is geldt nu voor alle $x > x_0$

$$L - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L$$

en dus $|f(x) - L| < \epsilon$. Dit betekent: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

- b) Volgt door toepassing van a) op de functie $-f$. □

Op geheel analoge wijze bewijst men de stellingen 3.5.9, 3.5.10 en 3.5.11.

3.5.9. Stelling

- a) Als $f: (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ dalend en naar boven begrensd is, dan bestaat $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) Als $f: (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ stijgend en naar beneden begrensd is, dan bestaat $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3.5.10. Stelling

- a) Als $f: (a-r, a) \rightarrow \mathbb{R}$ ($r > 0$) stijgend en naar boven begrensd is, dan bestaat $\lim_{x \uparrow a} f(x)$.
- b) Als $f: (a-r, a) \rightarrow \mathbb{R}$ ($r > 0$) dalend en naar beneden begrensd is, dan bestaat $\lim_{x \uparrow a} f(x)$.

3.5.11. Stelling

- a) Als $f: (a, a+r) \rightarrow \mathbb{R}$ ($r > 0$) dalend en naar boven begrensd is, dan bestaat $\lim_{x \downarrow a} f(x)$.
- b) Als $f: (a, a+r) \rightarrow \mathbb{R}$ ($r > 0$) stijgend en naar beneden begrensd is, dan bestaat $\lim_{x \downarrow a} f(x)$.

Oefeningen

- *1. Bewijs 3.5.2c.
2. Formuleer en bewijs het analogon van stelling 3.5.2 voor linker- en rechterlimieten.
- *3. Zij f continu in a en zij $C < f(a) < D$. Dan is er een r -omgeving $U_r(a)$ zó dat $C < f(x) < D$ voor alle $x \in U_r(a)$. Toon dit aan. Formuleer en bewijs analoge uitspraken voor rechtscontinu in a en linkscontinu in a .
4. Toon aan dat $\lim_{x \downarrow 0} x^k \sin \frac{1}{x} = 0$ voor alle $k \in \mathbb{R}^+$.
5. Toon aan dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

3.6. Rekenregels voor limieten**3.6.1. Inleiding**

Alvorens de rekenregels van limieten te behandelen, geven we eerst een stelling die bij het berekenen van limieten zeer veel wordt toegepast. Daarna formuleren we de rekenregels van limieten. Alle bewijzen van de stellingen uit deze paragraaf worden gegeven in de appendix bij dit hoofdstuk.

3.6.2. Stelling

Als $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ en als f continu is in b dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(b),$$

$$\text{m.a.w. } \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)).$$

3.6.3. Stelling

- a) Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

De limiet van een som is gelijk aan de som van de limieten.

- b) Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x)) = \alpha L.$$

De limiet van een constante maal een functie is gelijk aan die constante maal de limiet van de functie.

3.6.4. Gevolg

- Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dan is

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha L + \beta M.$$

De limiet van een lineaire combinatie is gelijk aan die lineaire combinatie van de limieten.

3.6.5. Stelling

- Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$.

De limiet van de absolute waarde is gelijk aan de absolute waarde van de limiet.

3.6.6. Stelling

- Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ dan is

- a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = LM$

De limiet van een produkt is gelijk aan het produkt van de limieten.

- b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, mits $M \neq 0$.

De limiet van een quotiënt is gelijk aan het quotiënt van de limieten, mits de noemer ongelijk 0 is.

3.6.7. Opmerking

Analoge rekenregels gelden ook voor linker-, rechterlimieten en voor limieten voor $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$.

3.7. Rekenregels voor continuïteit

3.7.1. Inleiding

Omdat continuïteit gedefinieerd is met behulp van een limiet, volgen uit de in 3.6 opgesomde rekenregels voor limieten analoge regels voor continuïteit.

3.7.2. Stelling

Als g continu is in a en f continu is in $g(a)$ dan is $f \circ g$ continu in a .
De samenstelling van twee continue functies is continu.

3.7.3. Stelling

a) Als f en g continu zijn in a , dan is $f + g$ continu in a .

De som van continue functies is continu.

b) Als f continu is in a en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan is αf continu in a .

Het produkt van een constante en een continue functie is continu.

3.7.4. Gevolg

Als f en g continu zijn in a en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dan is $\alpha f + \beta g$ continu in a .

Een lineaire combinatie van continue functies is continu.

3.7.5. Stelling

Is f continu in a , dan is $|f|$ continu in a .

De absolute waarde van een continue functie is continu.

3.7.6. Stelling

Zijn f en g continu in a dan is

a) fg continu in a .

Het produkt van continue functies is continu.

b) $\frac{f}{g}$ continu in a , mits $g(a) \neq 0$.

Het quotiënt van continue functies is continu,
mits de noemer ongelijk 0 is.

3.7.7. Opmerking

Analoge regels gelden ook voor links- en rechtscontinuïteit.

3.7.8. Continuïteit op een interval

We zeggen dat f continu is op een interval I als f continu is in elk punt van I met dien verstande dat in het eventuele linkeruiteinde van I f slechts rechtscontinu en in het eventuele rechteruiteinde van I f slechts linkscontinu hoeft te zijn. Is V de vereniging van disjuncte open intervallen, dat wil zeggen: intervallen met lege doorsnede, dan zeggen we dat f continu is op V als f continu is op alle intervallen waaruit V is opgebouwd.

3.7.9. Voorbeelden van continue functies

a) *Polynomen en rationale functies*

In de voorbeelden 3.2.4a en 3.2.4b hebben we gezien dat $x \mapsto c$ en $x \mapsto x$ continu zijn op \mathbb{R} . Omdat sommen en produkten van continue functies weer continu zijn en ieder polynoom te schrijven is als som van produkten van constanten en machten (= herhaalde produkten) van x , is ieder polynoom continu op \mathbb{R} . Eveneens is het quotiënt van twee polynomen (een zogenaamde *rationale functie*) continu in elk punt waar de noemer niet gelijk aan 0 is.

b) *Elementaire functies*

Zonder bewijs zullen we gebruiken dat alle in 1.13 tot en met 1.16 opgesomde functies continu zijn op hun definitieverzameling.

c) *Inverse functies*

In paragraaf 3.14 zullen we aantonen dat de inverse functie van een continue functie (als hij bestaat) weer continu is. Dus zijn de in

1.10.10 ingevoerde functies $x \mapsto \sqrt[2n]{x}$ en $x \mapsto \sqrt[2n+1]{x}$ continu op \mathbb{R}_0^+ respectievelijk \mathbb{R} .

3.7.10. Voorbeelden

a) De functie $x \mapsto \ln \frac{5x+25}{x+2}$ is continu in $x=3$. Toon dit aan.

Oplossing:

De functie $f: x \mapsto \frac{5x+25}{x+2}$ is een rationale functie en in $x=3$ is de noemer ongelijk aan 0. Volgens 3.7.9a is f continu in 3 en $f(3) = 8$. De functie \ln is volgens 3.7.9b continu op \mathbb{R}^+ en dus continu in 8. Stelling 3.7.2 leert dan dat de samenstelling

$x \rightarrow \ln \circ f(x) = \ln \frac{5x+25}{x+2}$ continu is in $x=3$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = e^{(\sin x)^3 + \cos x}$ is continu in elk punt van \mathbb{R} .

Toon dit aan.

Oplossing:

Zij $a \in \mathbb{R}$ willekeurig. Volgens 3.7.9b zijn \sin en \cos continu in a . Volgens 3.7.3a en 3.7.6a is $x \mapsto (\sin x)^3 + \cos x$ continu in a . Omdat de exponentiële functie continu is op \mathbb{R} is hij dat dus ook in het punt $(\sin a)^3 + \cos a$.

Volgens stelling 3.7.2 is dan ook de functie $x \mapsto e^{(\sin x)^3 + \cos x}$ continu in a .

3.7.11. Invullen van de functiewaarde

Is bekend dat f continu is in een punt a (bijvoorbeeld omdat f een samenstelling is van continue functies), dan is op grond van de definitie van continuïteit (3.2.2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (invullen van de functiewaarde).

Zo is in het voorbeeld 3.7.10a $\lim_{x \rightarrow 3} \ln \frac{5x+25}{x+2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x+25}{x+2} \right) = \ln 8$.

Stelling 3.7.2 houdt in de praktijk in dat het limiet-symbool en het functie-symbool bij continue functies mogen worden verwisseld.

3.8. Oneigenlijke limieten**3.8.1. Definitie**

Zij $a \in \mathbb{R}$ en laat de reële functie f gedefinieerd zijn in een gereduceerde r -omgeving $U_r'(a)$. Dan zeggen we:

de *limiet* van f voor x naar a is ∞ , notatie

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

als er bij elk getal G een getal $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $f(x) > G$, met andere woorden

$$[x \in U'_\delta(a)] \Rightarrow [f(x) \in (G, \infty)].$$

3.8.2. Definitie

Zij $a \in \mathbb{R}$ en laat de reële functie f gedefinieerd zijn in een gereduceerde r -omgeving $U'_r(a)$. Dan zeggen we:

de *limiet* van f voor x naar a is $-\infty$, notatie

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

als er bij elk getal G een getal $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $f(x) < G$, met andere woorden

$$[x \in U'_\delta(a)] \Rightarrow [f(x) \in (-\infty, G)].$$

3.8.3. Opmerkingen

- Op een overeenkomstige manier kunnen we een oneigenlijke rechterlimiet en een oneigenlijke linkerlimiet invoeren.
- Op een overeenkomstige manier kunnen we oneigenlijke limieten voor $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$ invoeren.
- Als we zeggen: " $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat", bedoelen we dat er een $b \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Oneigenlijke limieten vallen hier dus niet onder.

3.8.4. Het rekenen met oneigenlijke limieten

- Sommige van de in 3.6 genoemde rekenregels voor limieten gaan voor oneigenlijke limieten niet meer op. Zo kan men uit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ wél concluderen dat $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$, maar *niet* dat

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0.$$

$$\text{Zo is } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|} + 26} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = \infty, \text{ terwijl}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|} + 26} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right) = \frac{1}{2},$$

hetgeen blijkt bij toepassen van elementaire technieken uit 3.9.

$$\text{Ook heeft men: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

$$\text{terwijl } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^4} = -\infty.$$

Evenzo kan men uit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ wèl de gevolgtrekking maken dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$, maar *niet* dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$.

Neem bijv. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$, $a = 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = 0$.

b) Uit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ kan men *niet* concluderen $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$;

immers $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, maar $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

We vatten enkele rekenregels samen in de volgende stelling.

3.8.5. Stelling

Zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Dan geldt

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^p = \infty$ als $p > 0$,

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^p = 0$ als $p < 0$,

c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$ als $L > 0$,

d) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$ als $L < 0$,

e) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$.

Bewijs

Zie appendix.

Oefening

Toon aan met behulp van de limietdefinitie:

Als $p > 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = \infty$.

Het berekenen van limieten

3.9. Elementaire technieken

3.9.1. De limiet van een quotiënt van twee functies

Zijn f en g continu in a , dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ door invullen van de functiewaarden te berekenen, tenzij $g(a) = 0$. Is $f(a) \neq 0$ en $g(a) = 0$, dan bestaat de limiet niet (misschien wel als oneigenlijke limiet). Over de situatie $f(a) = g(a) = 0$, de zogenaamde $\frac{0}{0}$ situatie, valt zeer veel te zeggen. In paragraaf 3.9 geven we enkele simpele gevallen, waarin limieten in deze situatie kunnen worden bepaald. In paragraaf 3.10 zullen de

zogenaamde “standaardlimieten” ons weer in staat stellen een aantal van dit soort gevallen te behandelen. Maar ook in hoofdstuk 4 zullen we nog een aantal methodes leren om nog gecompliceerdere gevallen aan te kunnen pakken.

Een andere situatie doet zich voor als g niet continu is in a en

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. Is f begrensd in een gereduceerde omgeving van a (dit is

bijvoorbeeld het geval als $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat en eindig is (zie 3.5.2a)) dan

volgt eenvoudig dat $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Als echter ook $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, de zogenaamde $\frac{\infty}{\infty}$ situatie, kan a priori geen uitspraak worden gedaan. In deze paragraaf geven we ook enkele methoden om in dit geval de limiet te berekenen.

3.9.2. Uitsplitsen van een factor

Zijn f en g polynomen en is $f(a) = g(a) = 0$, dan zijn volgens de factorstelling (2.11.2) $f(x)$ en $g(x)$ beide deelbaar door $(x - a)$. Is a een enkelvoudig nulpunt van g , dan is $g(x) = (x - a)g_1(x)$, met $g_1(a) \neq 0$, zodat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)f_1(x)}{(x - a)g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}.$$

Zo is

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

3.9.3. De worteltruc

Bestaat f of g uit een verschil van termen, waarin één of meer vierkantswortels voorkomen, dan past men vaak de zogenaamde “worteltruc” toe, waarbij men teller en noemer vermenigvuldigt met een zelfde factor, die bestaat uit de overeenkomstige som van de termen.

We lichten dit toe aan de hand van enkele voorbeelden.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(\sqrt{x^2 + 3} - 2)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{x^2 + 3 - 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{x - 1} = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 26} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 26} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + x + 26} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + x + 26} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 25}{\sqrt{x^2 + x + 26} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{25}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{26}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.9.4. Uitsplitsen van de hoofdzaak van de noemer

a) Beschouw de limiet

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{1/2} + 3x + 2x^2}{2x^{1/2} - x^{3/2} + x^2}.$$

Als $x \downarrow 0$, dan geldt voor de noemer $g(x) = 2x^{1/2} - x^{3/2} + x^2$, dat de eerste term veel groter is dan de overige twee. Vul maar eens in $x = \frac{1}{100}$, dan is $g(\frac{1}{100}) = 0,2 - 0,001 + 0,0001$.

Als $x \downarrow 0$ geldt steeds voor machten van x : Hoe kleiner de exponent van x , hoe groter de waarde van de macht. We beschouwen daarom de term $2x^{1/2}$ als de hoofdzaak van de noemer.

Een belangrijk principe bij het berekenen van limieten in de " $\frac{0}{0}$ "-situatie (en ook in de " $\frac{\infty}{\infty}$ "-situatie) is "Deel de hoofdzaak van de noemer uit (eventueel op een constante na)".

We krijgen dan

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{1/2} + 3x + 2x^2}{2x^{1/2} - x^{3/2} + x^2} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1 + 3x^{1/2} + 2x^{3/2}}{2 - x + x^{3/2}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 - 0 + 0} = \frac{1}{2}.$$

b) Beschouwen we nu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2} + 3x + 2x^2}{2x^{1/2} - x^{3/2} + x^2}.$$

Dit is de zogenaamde " $\frac{\infty}{\infty}$ "-situatie.

Als $x \rightarrow \infty$, dan geldt voor de noemer $g(x) = 2x^{1/2} - x^{3/2} + x^2$, dat de laatste term veel groter is dan de overige twee. Vul maar eens in $x = 100$, dan is $g(100) = 20 - 1000 + 10000$.

Als $x \rightarrow \infty$ geldt steeds voor machten van x : Hoe groter de exponent van x , hoe groter de waarde van de macht. In dit geval is dus x^2 de hoofdzaak van de noemer en ons principe levert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2} + 3x + 2x^2}{2x^{1/2} - x^{3/2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-3/2} + 3x^{-1} + 2}{2x^{-3/2} - x^{-1/2} + 1} = \frac{0 + 0 + 2}{0 - 0 + 1} = 2.$$

3.9.5. Substitutie

Het is soms mogelijk om door overgang op een andere variabele een gegeven limiet terug te brengen tot een bekende limiet.

Beschouw bijvoorbeeld $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

Door toepassing van 2 substituties vinden we:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{x - \frac{\pi}{4}} & \quad x = \frac{\pi}{4} - t & \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2(\frac{\pi}{4} - t)}{-t} & = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 2t)}{-t} = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{-t} & \quad t = \frac{u}{2} & \quad \lim_{u \rightarrow 0} 2 \frac{\sin u}{-u} = -2. \end{aligned}$$

3.9.6. Opmerking

Een veel gemaakte fout bij het berekenen van limieten ontstaat, doordat men zich niet strikt aan de rekenregels houdt. Men vult in een gedeelte van het functievoorschrift de limietwaarde in en rekt met de rest verder. Dit is alleen geoorloofd als men binnen de regels blijft. We lichten dit toe aan de hand van voorbeelden.

We weten $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Zij $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = L$. Dan is volgens 3.6.6.a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = L \cdot 1 = L.$$

Hier mogen we dus $\cos x$ door 1 vervangen.

We zullen vervolgens laten zien dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x \cos x}{x^3} \neq L.$$

Hier rechtvaardigt dan ook geen enkele rekenregel het vervangen van $\cos x$ door 1. Immers:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2 \left(\sin \frac{x}{2} \right)^2}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x} \right)^2 \cdot \frac{1}{4 \cos x} = 1 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x \cos x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1^2 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Oefeningen

1. Bereken de volgende limieten

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6}$.

b. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 16}$.

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$.

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$.

e. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1})$.

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{6 + x - 3x^2}$.

2. Zij $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$f(x) = \begin{cases} |x - 1| \tan \frac{\pi}{2} x & \text{als } 0 < x < 1, \\ ax^2 + 2x - 2 & \text{als } x > 1. \end{cases}$$

Bepaal a zó dat f continu te maken is in 1.

3. Voor $x \neq 0$ en $x \neq 4$ is $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{(x-2)^2}}{x^2 - 4x}.$$

De functie f is continu op \mathbb{R} . Bereken $f(0)$ en $f(4)$.

4. Bereken

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}{\cos 2x}.$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x(\sqrt{x^2 - 1} - x)}.$

3.10. Standaardlimieten van functies

3.10.1. Inleiding

In de vorige paragraaf werden een aantal technieken besproken voor de " $\frac{0}{0}$ "-situatie. Maar deze methoden bieden geen uitkomst als er elementaire functies in teller of noemer voorkomen. Wij zullen nu een lijst van zogenaamde *standaardlimieten* geven. Dit zijn limieten die bij berekeningen verder zonder bewijs mogen worden gebruikt en waartoe veelal de vraagstukken worden teruggebracht. Met behulp hiervan en de technieken van de vorige paragraaf kan men al een groot aantal limieten berekenen.

3.10.2. Stelling (standaardlimieten van functies)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$ als $p > 0.$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ als $p > 0.$

i) $\lim_{x \downarrow 0} x^p \ln x = 0$ als $p > 0.$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ voor alle $p \in \mathbb{R}$, $a > 1.$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^p} = 0$ als $p > 0.$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^p} = 0$ als $p > 0.$

Bewijs

a) Zie 3.5.4.

b) Volgt uit a).

c) Onderstel $0 < |x| < 1$ en stel $\arcsin x = y$. Dan is $x = \sin y$ en $0 < |y| < \frac{\pi}{2}$.

In de praktijk redeneert men nu: wegens de continuïteit van arcsin geldt $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0$, zodat $y \rightarrow 0$ als $x \rightarrow 0$. Dus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Netjes: Zij $f: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gegeven door $f(x) = \arcsin x$ en zij

$$g: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \text{ gegeven door } g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & , x \neq 0, \\ 1 & , x = 0. \end{cases}$$

Dan zijn f en g continu. Toepassing van stelling 3.7.2 geeft

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g \circ f(x) = g \circ f(0) = 1.$$

d) Analoog aan het bewijs van c).

e) Deze limiet zullen we afleiden in 5.9 uit stellingen over integralen.

De functie \ln wordt daar gedefinieerd met behulp van een integraal.

f) Stel $e^x - 1 = y$. Dan is $x = \ln(1 + y)$.

In de praktijk redeneert men: wegens de continuïteit van \exp geldt $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$, zodat $y \rightarrow 0$ als $x \rightarrow 0$. Dus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = 1.$$

g) Zie 3.4.4b.

h) In 5.9 zullen we bewijzen: $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

Stellen we $u = x^p$ met $p > 0$, dan $u \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$. Dus is

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = \frac{1}{p} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^p}{x^p} = \frac{1}{p} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

i) Volgt uit h) door x te vervangen door $\frac{1}{x}$.

j) Voor $p \leq 0$ is de juistheid van de bewering evident.

Uit de in 5.9 te bewijzen limiet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ volgt door $x = e^t$ te

stellen ($x \rightarrow \infty$ dus $t \rightarrow \infty$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0.$$

Onderstel nu $p > 0$ en $a > 1$. Dan volgt door te nemen $t = \frac{x \ln a}{p}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x \ln a}{p}}{a^{\frac{x \ln a}{p}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x \ln a}{p}}{\frac{x \ln a}{e^{\frac{x \ln a}{p}}}} = 0.$$

Wegens 3.3.7 is dan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \ln a}{\frac{p}{x}} \right)^p = 0, \left(\frac{p}{\ln a} \right)^p = 0.$$

k) Omdat $|\sin x| \leq 1$, volgt dit direct uit g) en 3.5.5.

l) Analoog aan k). \square

3.10.3. Voorbeelden

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x)^2}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2.$$

$$\text{b) } \lim_{x \uparrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{2(\sin \frac{1}{2} \sqrt{|x|})^2}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \sqrt{|x|}}{\frac{1}{2} \sqrt{|x|}} \right)^2 \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1) = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{(\arcsin \frac{1}{2} x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \sin x - (\cos x)^2}{\sqrt{1+x \sin x} + \cos x} \cdot \frac{\frac{1}{4} x^2}{(\arcsin \frac{1}{2} x)^2 x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 + x \sin x}{x^2} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} x}{\arcsin \frac{1}{2} x} \right)^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{1+x \sin x} + \cos x} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{2} = 4. \end{aligned}$$

$$\text{d) Bereken } \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}.$$

Stellen we $x = \frac{1}{u}$ dan is

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Dus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sin 3x}{x + 4 \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + \sin(-3x)}{-x + 4 \sin(-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sin 3x}{x + 4 \sin 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + 3 \frac{\sin 3x}{3x}}{1 + 8 \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{t \uparrow 1} \{ \ln(1-t) - t \ln(1-t^2) \} &= \lim_{t \uparrow 1} \{ (1-t) \ln(1-t) - t \ln(1+t) \} = \\ \lim_{x \downarrow 0} x \ln x - \lim_{t \uparrow 1} t \ln(1+t) &= 0 - \ln 2 = -\ln 2. \end{aligned}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{(\cot x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp((\cot x)^2 \ln \cos x) = \exp(\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^2 \ln \cos x).$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } \lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^2 \ln \cos x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\tan x)^2} \ln(1 - 2(\sin \frac{1}{2} x)^2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2(\sin \frac{1}{2} x)^2)}{-2(\sin \frac{1}{2} x)^2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x} \right)^2 \left(\frac{x}{\tan x} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De oorspronkelijke limiet is $e^{-\frac{1}{2}}$.

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + (\sin x)^2}{x^3 + 2(\sin x)^2}.$$

Omdat $\sin x$ als $x \rightarrow 0$ slechts weinig van x verschilt, is de "hoofdzaak van de noemer" in essentie $2x^2$.

$$\text{Dus } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + (\sin x)^2}{x^3 + 2(\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{x + 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2}.$$

3.10.4. Opmerking

Aangezien alle standaardlimieten betrekking hebben op $x \rightarrow 0$, $x \downarrow 0$ of $x \rightarrow \infty$ zal men andere limieten via een substitutie meestal tot deze situaties terugbrengen (zie de voorbeelden 3.10.3d tot en met 3.10.3f).

Oefeningen

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{(e^x - 1)\sin x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin^2 x}{x + 2\sin^2 x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\tan^2 5x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + \sin^2 x}{x^3 + 2\sin^2 x}.$$

$$6. \lim_{x \downarrow -1} \frac{x \arcsin(x+1) - (x+1) \arcsin x}{x+1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{(1 - \cos x) \arctan 5x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cos x^2 \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$10. \lim_{x \downarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\cot x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}}.$$

12. Bewijs dat voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

3.11. Limieten van rijen

In 1.12.8 hebben we de definitie van het begrip *rij* gegeven. We definiëren nu:

3.11.1. Definitie

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ betekent dat bij elk getal $\epsilon > 0$ een getal $G \in \mathbb{R}$ bestaat, zó

dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > G$ geldt $|a_n - L| < \epsilon$.

De rij (a_n) heet *convergent met limiet* L als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Andere notatie:

$a_n \rightarrow L$. Bestaat zo'n L niet, dan heet de rij *divergent*.

$a_n \not\rightarrow L$ betekent dat de rij (a_n) niet naar L convergeert.

3.11.2. Rekenregels

De limietdefinitie van rijen vertoont zeer veel overeenkomst met de eerder gegeven limietdefinities. Alle gevolgen uit 3.5 en de rekenregels uit 3.6 blijven met de voor de hand liggende modificaties geldig voor limieten van rijen.

Ook kan men analoog aan 3.8 definiëren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ en } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

3.11.3. Voorbeelden

a) De rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ heeft de limiet 0 (zie 1.3.6d).

b) De rij $1, 2, 3, \dots$ heeft geen limiet.

c) De rij $1, -1, 1, -1, \dots$ heeft geen limiet.

Dit ziet men als volgt in. Onderstel dat de rij een limiet heeft. Noem deze L . Dan is er een getal G zó dat voor $n > G$ geldt $|a_n - L| < \frac{1}{2}$.

Voor $n > G$ zou dan gelden:

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - L + L - a_n| \leq$$

$$|a_{n+1} - L| + |L - a_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

terwijl $|a_{n+1} - a_n| = 2$. Tegenspraak.

3.11.4. Notatieafspraken

Als $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dan verstaan we onder $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$, dat L de limiet is van de rij $f(0), f(1), f(2), \dots$

Uit de definities volgt dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L.$$

Dat het omgekeerde niet waar hoeft te zijn blijkt uit het voorbeeld:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2\pi n = 1, \text{ terwijl } \lim_{x \rightarrow \infty} \cos 2\pi x \text{ niet bestaat.}$$

3.11.5. Monotone rijen

Aangezien een rij gedefinieerd is als een functie, zijn in het algemeen uitspraken over functies ook geldig voor rijen. De begrippen (strikt) stijgend of dalend, monotoon, begrensd en dergelijke zijn eveneens zinvol.

Van veel belang is het analogon van stelling 3.5.8:

- a) Een stijgende naar boven begrensde rij is convergent.
- b) Een dalende naar beneden begrensde rij is convergent.

3.11.6. Voorbeeld

Neem $p > 0, q > 0$. De rij (a_n) is recursief, dat is met volledige inductie, gedefinieerd door

$$a_0 = p, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{q}{a_n} \right).$$

We tonen aan dat deze rij convergeert naar \sqrt{q} .

Aangezien $a_0 > 0$ en omdat de implicatie $a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > 0$ juist is voor iedere $n \in \mathbb{N}$, volgt met volledige inductie dat $a_n > 0$ voor alle n .

Voor iedere $n \geq 1$ geldt

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{q}{a_{n-1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{\frac{q}{a_{n-1}}} \right)^2 + \sqrt{q} \geq \sqrt{q},$$

en dus

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{a_n} - a_n \right) = \frac{1}{2} \frac{q - a_n^2}{a_n} \leq 0.$$

De rij (a_n) is dus dalend en naar beneden begrensd, dus convergent; noem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Daar voor iedere n geldt $a_n \geq \sqrt{q}$, is $L \geq \sqrt{q}$, oefening 3.11.6; omdat voor iedere n geldt

$$2a_n a_{n+1} - a_n^2 = q,$$

is na limietovergang $L^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n a_{n+1} - a_n^2) = q$, zodat $L = \sqrt{q}$.

Nemen we als voorbeeld $q = 5$ en $p = 2$, dan is $a_1 = \frac{9}{4} = 2,25$,

$$a_2 = \frac{161}{72} = 2,236111\dots,$$

$$a_3 = \frac{51841}{23184} = 2,2360679779\dots$$

Dat a_3 reeds een zeer goede benadering van $\sqrt{5}$ is blijkt uit het feit dat $2,2360679774 < \sqrt{5} < 2,2360679775$.

Evenals bij limieten van functies zijn er standaardlimieten, die bij berekeningen verder zonder toelichting kunnen worden toegepast.

3.11.7. Stelling (Standaardlimieten van rijen)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-a} = 0$ voor alle $a \in \mathbb{R}^+$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

c) Voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt:
als $|x| < 1$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a x^n = 0$,

als $|x| > 1$, dan is de rij $(n^a x^n)$ divergent.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs

a) Volgt direct uit 3.10.2g.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n} = e^0 = 1$.

c) Volgt uit 3.10.2j.

d) Volgt uit oefening 3.10.12.

e) Zij $x \in \mathbb{R}$ en zij $N \geq 2|x|$. Voor iedere $n > N$ is

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| = \left| \frac{x}{n} \right| \left| \frac{x}{n-1} \right| \dots \left| \frac{x}{N+1} \right| \left| \frac{x^N}{N!} \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N} \left| \frac{x^N}{N!} \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{|2x|^N}{N!} = \frac{K}{2^n}.$$

Aangezien $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{2^n} = 0$, is $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = 0$ en dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. □

3.11.8. Voorbeelden

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1000)^n}{n!} = 0$, wegens 3.11.7e.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n)e^{-n} = 0$, wegens 3.11.7c.

c) Uit de ongelijkheid van Bernoulli 1.8.4b volgt voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
 $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$. Met 3.11.7d en oefening 3.11.6 volgt dan $e \geq 2$.

Oefeningen

1. Toon aan dat de rij (a_n) met $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ de limiet 0 heeft.

2. Toon aan dat de rij (a_n) met $a_n = \cos n\pi$ geen limiet heeft.

3. Toon aan dat de rij (a_n) met $a_n = \frac{1}{n!}$ de limiet 0 heeft.

4. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n}$.

5. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n + (-1)^n}{n + \cos n}$.
- *6. Als $a_n \rightarrow L$ en als $a_n > M$ voor alle $n \geq n_0$, dan is $L \geq M$. Bewijs dit.
- *7. Bewijs dat een convergente rij begrensd is.
- *8. De rij (a_n) is gegeven door $a_0 = \sqrt{2}$ en $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$, $n \in \mathbb{N}$.
 Bewijs:
 (i) $\sqrt{2} \leq a_n < 2$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.
 (ii) $a_{n+1} - a_n > 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.
 (iii) De rij (a_n) is convergent.
- *9. Als f is continu in a en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$.
 Toon dit aan.
- *10. Bewijs 3.11.5a.
11. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2+\dots+n}$.
12. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{3n}$.
13. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
14. Voor welke waarden van $x \in \mathbb{R}$ zijn de volgende limieten 0?
 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{n^3 + 2} x^n$,
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - n}{n + 1} x^n$,
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n} (1+x)^n$.
15. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 2^{2n+1} - 3^{n+1}}{n + 3^{n-2} - 4^n}$.

Continue functies op een gesloten en begrensd interval

3.12. Stelling van Weierstrass en gevolgen

3.12.1. Inleiding

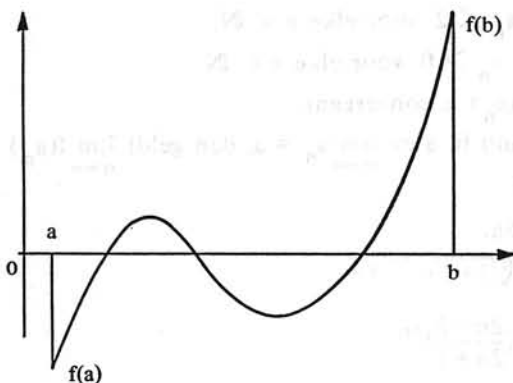
In 3.7.8 gaven we de definitie van continuïteit op een interval I . Voor een gesloten, begrensd interval $[a, b]$ hield deze definitie in: continuïteit voor alle $c \in (a, b)$, rechtscontinuïteit in a en linkscontinuïteit in b .

In deze paragraaf behandelen we enkele belangrijke eigenschappen van functies, die continu zijn op een gesloten, begrensd interval.

3.12.2. Stelling (Weierstrass)*

Zij $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu op het gesloten interval $[a,b]$. Als $f(a)f(b) < 0$, dan is er een $c \in (a,b)$ zó dat $f(c) = 0$.

Met andere woorden: Als een continue functie aan het ene uiteinde van een interval positief en aan het andere uiteinde negatief is, wordt hij ergens binnen het interval gelijk aan 0 (een continue functie kan niet "springen").

**Bewijs**

Neem aan dat $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$. (Het geval $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$ kan analoog worden behandeld).

Zij $W = \{x \mid x \in [a,b] \text{ en } f(x) < 0\}$. W is naar boven begrensd (want b is een bovengrens van W) en $W \neq \emptyset$ (want $a \in W$). Dus $c = \sup W$ bestaat.

We bewijzen nu eerst

(i) $f(c) \geq 0$ en $a < c \leq b$.

Neem eens aan $f(c) < 0$. Dan is $c \neq b$, dus $a < c < b$ en is f rechts-continu in c . Er bestaat daarom (zie 3.5.2c) een $r > 0$ zó dat $f(x) < 0$ voor alle $x \in [c, c+r)$. Maar dan is $[c, c+r) \subset W$, in tegenspraak met het feit dat c een bovengrens is van W .

We bewijzen nu

(ii) $f(c) \leq 0$ en $a \leq c < b$.

Neem nu eens aan dat $f(c) > 0$. Dan is $c \neq a$, dus $a < c \leq b$ en is f links-continu in c . Er bestaat daarom een $r > 0$ zó dat $f(x) > 0$ voor alle $x \in (c-r, c]$. Maar dan is $c-r$ een bovengrens van W die kleiner is dan c .

Ook dit is onmogelijk.

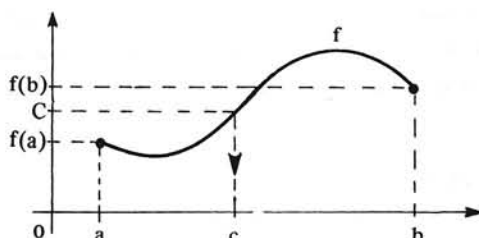
Uit (i) en (ii) concluderen we dat $f(c) = 0$ en $a < c < b$. □

Uit de stelling van Weierstrass leiden we het volgende resultaat af.

3.12.3. Tussenwaardstelling

Zij $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu op $[a,b]$. Als $f(a) \neq f(b)$ en C is een reëel getal tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan is er een punt $c \in (a,b)$ met $f(c) = C$.

* Al eerder bewezen en gepubliceerd door Bolzano. Dit bleek ons pas achteraf.



Bewijs

Pas de stelling van Weierstrass toe op de functie

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ met } g(x) = f(x) - C. \quad \square$$

3.12.4. Toepassing

Zij I een interval. Als $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continu is, dan is $f(I)$, het beeld van I onder f , een interval.

Bewijs

Volgens 1.3.1 is een interval J een deelverzameling van \mathbb{R} met de eigenschap dat voor alle a, b, c geldt:

$$a, b \in J \text{ en } a < c < b \implies c \in J.$$

Zij nu $\alpha, \beta \in f(I)$ en $\alpha < \gamma < \beta$. We bewijzen dat $\gamma \in f(I)$.

Omdat $\alpha \in f(I)$ bestaat er een $a \in I$ zó dat $f(a) = \alpha$;

omdat $\beta \in f(I)$ bestaat er een $b \in I$ zó dat $f(b) = \beta$.

Omdat $\alpha < \beta$ is dus $a \neq b$. We onderscheiden twee gevallen

(i) $a < b$. Omdat I een interval is geldt dan $[a, b] \subset I$ en dus is f continu op $[a, b]$. Volgens de tussenwaardstelling is er nu een $c \in (a, b)$ zó dat $f(c) = \gamma$. Dus $\gamma \in f([a, b]) \subset f(I)$.

(ii) $b < a$. Dan volgt op analoge manier: $[b, a] \subset I$ en f is continu op $[b, a]$. Er is dus een $c \in (b, a)$ zó dat $f(c) = \gamma$. Dus $\gamma \in f([b, a]) \subset f(I)$. \square

Oefening

Toon aan dat de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^3 + 3x - 1$ precies één nulpunt heeft en dat dit ligt in het interval $(0, \frac{1}{3})$.

3.13. Extreme waarden

3.13.1. Definitie

Een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heeft in $c \in D$ een *lokaal maximum* als een r -omgeving $U_r(c)$ van c bestaat zó dat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in U_r(c) \cap D$.

3.13.2. Definitie

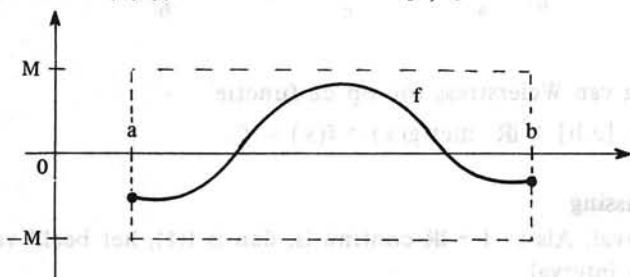
Een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heeft in $c \in D$ een *globaal maximum* als $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in D$.

De definities van *lokaal minimum* en *globaal minimum* volgen uit de voorgaande door \leq te vervangen door \geq .

Stelling 3.13.4 leert ons het bestaan van globale extremen van een continue functie op een gesloten begrensde interval. Hierbij maken we gebruik van een belangrijk resultaat, dat we in de appendix zullen bewijzen:

3.13.3. Stelling

Zij $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Dan is f *begrensd* op $[a,b]$, dat wil zeggen er is een $M \in \mathbb{R}^+$ zó dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$.



We merken nog op, dat het feit dat f gedefinieerd is op $[a,b]$ niet voldoende is voor de begrensdheid van f .

Zo is de functie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ voor $0 < x \leq 1$,
 $f(0) = 2$

niet begrensd op $[0,1]$ maar wel gedefinieerd voor iedere $x \in [0,1]$.

3.13.4. Stelling

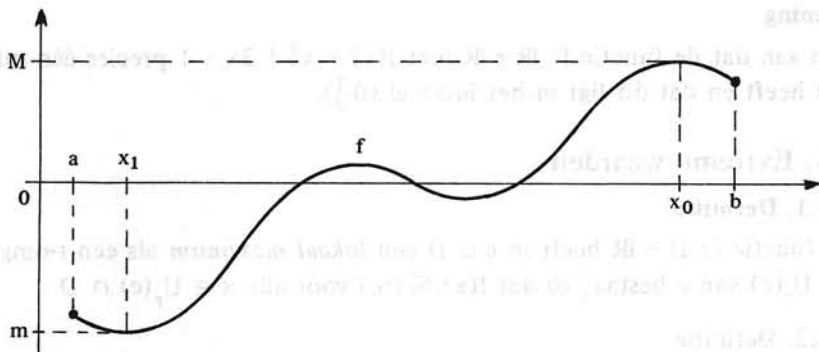
Zij $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Dan heeft f op $[a,b]$ een *globaal maximum* en een *globaal minimum*.

Bewijs

Het is voldoende om te bewijzen dat f een globaal maximum heeft; het bestaan van een globaal minimum volgt dan door toepassing van dit resultaat op $-f$.

Volgens 3.13.3 is f begrensd. Zij $M = \sup \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.

Neem nu eens aan $f(x) < M$ voor alle $x \in [a,b]$.



Beschouw dan $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Dan is g continu op $[a,b]$ en wegens 3.13.3 dus begrensd. Zij N een bovengrens van g .

Dan geldt:

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq N \text{ voor alle } x \in [a, b]$$

oftewel

$$1 \leq NM - Nf(x)$$

of

$$f(x) \leq M - \frac{1}{N},$$

in tegenspraak met het feit dat $M = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

Er is dus een $x_0 \in [a, b]$ waarvoor geldt $f(x_0) = M$. f heeft dan een globaal maximum in x_0 . \square

3.13.5. Opmerkingen

a) Als f *niet continu* is op $[a, b]$ dan hoeft f geen globale extremen te hebben. De functie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x=0, \\ x & \text{als } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

is discontinu in 0 en heeft op $[0, 1]$ geen globaal *minimum*.

b) Als f continu is op een niet-gesloten interval dan hoeft de functie geen globale extremen te hebben.

De functie $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x$ is op $[0, 1)$ continu en heeft geen globaal maximum op $[0, 1)$.

c) Het interval $(-\infty, \infty)$ is niet begrensd. De functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x$ is continu op \mathbb{R} en heeft geen globale extremen.

3.13.6. Toepassing

In 3.12.4 hebben we gezien dat het beeld van een interval onder een continue functie f weer een interval is. Uit 3.13.4 volgt nu verder dat het beeld van een gesloten, begrensd interval $[a, b]$ onder een continue functie f weer een gesloten, begrensd interval is. Immers, voor alle $y \in f([a, b])$ geldt $f(c_1) \leq y \leq f(c_2)$, wanneer f in c_1 een globaal minimum en in c_2 een globaal maximum heeft. Dus: Het continue beeld van een gesloten, begrensd interval is een gesloten, begrensd interval.

Oefening

*. Zij $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continu op $[0, \infty)$ en zij $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. Dan is f begrensd.

Bewijs dit.

3.14. Continuïteit van de inverse functie

3.14.1. Inleiding

Alvorens te bewijzen dat de inverse functie van een continue functie (als hij bestaat) weer continu is, bewijzen we eerst een stelling, die duidelijk maakt, waarom wij ons bij de behandeling van de inverse van een continue functie zullen beperken tot intervallen, waar f strikt monotoon is.

3.14.2. Stelling

Zij I een interval en zij $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continu op I .

Dan geldt:

f is injectief op $I \iff f$ is strikt monotoon op I .

Bewijs

\Leftarrow : Als f strikt monotoon is dan impliceert $x_1 \neq x_2$ dat $f(x_1) \neq f(x_2)$, dus dan is f injectief.

\Rightarrow : Neem nu aan dat f injectief is. Zij $[a, b]$ een begrensd gesloten interval met $[a, b] \subset I$, $a < b$.

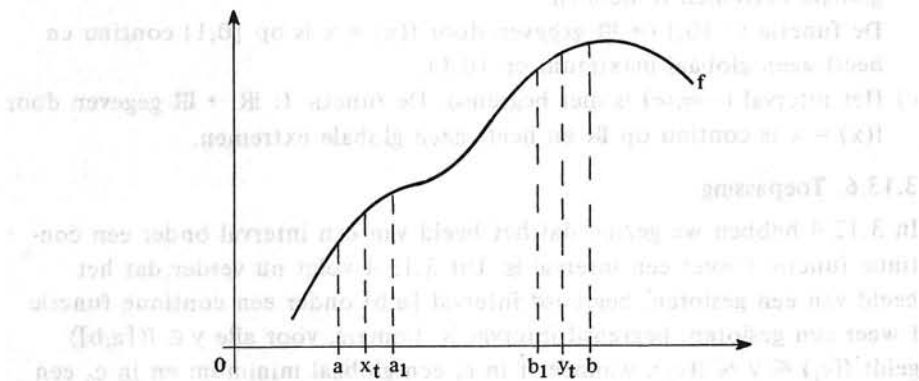
Omdat f injectief is geldt $f(a) \neq f(b)$, zeg $f(a) < f(b)$. We zullen aantonen dat dezelfde ongelijkheid geldt voor willekeurige $a_1 < b_1$ binnen dit interval, zodat f strikt stijgend is. (Analoog toont men in het geval $f(a) > f(b)$ aan dat f strikt dalend is).

Zij

$$\begin{aligned} x_t &= (1-t)a + ta_1, & \text{voor } 0 \leq t \leq 1. \\ y_t &= (1-t)b + tb_1, \end{aligned}$$

Dan is $x_0 = a$ en $x_1 = a_1$ en alle punten x_t liggen tussen a en a_1 (ga dit na!). Een analoge uitspraak geldt voor y_t . Dus $x_t, y_t \in I$.

Verder, omdat $a < b$ en $a_1 < b_1$ volgt: $x_t < y_t$ voor $0 \leq t \leq 1$.



We beschouwen nu $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$g(t) = f(y_t) - f(x_t).$$

g is de samenstelling van continue functies, dus continu op $[0, 1]$

(stelling 3.7.2). Bovendien is $g(t) \neq 0$ voor alle $t \in [0, 1]$, omdat

$x_t < y_t$ en f injectief is. Dus $g(t) > 0$ voor alle $t \in [0, 1]$ of $g(t) < 0$ voor alle $t \in [0, 1]$ (want anders zou g volgens de tussenwaardstelling ergens nul worden). Maar $g(0) = f(b) - f(a) > 0$.

Dus is ook $g(1) = f(b_1) - f(a_1) > 0$. \square

3.14.3. Opmerkingen

a) Een niet continue functie kan ook injectief zijn als hij niet (strikt) monotoon is.

Een voorbeeld is de functie $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ met $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ en $f(x) = x$ voor $0 < x < 1$.

- b) Als f continu is op een interval I , dan is $f(I)$ volgens 3.12.4 weer een interval.

Als een continue functie op een interval een inverse heeft, dan is dus de definitieverzameling van deze inverse ook een interval.

3.14.4. Stelling

Laat de functie f continu en strikt monotoon zijn op een interval I en zij $J = f(I)$. Dan geldt:

- a) $f: I \rightarrow J$ heeft een inverse $g: J \rightarrow I$.

Als f strikt stijgend is, dan is g strikt stijgend; als f strikt dalend is, dan is g strikt dalend.

- b) g is continu op J .

Bewijs

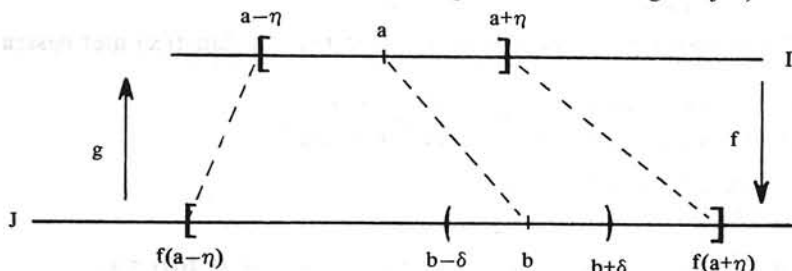
- a) f is surjectief en volgens 3.14.2 ook injectief. Op grond van 1.10.11 heeft f dus een inverse.

Neem aan dat f strikt stijgend is. Voor alle $y_1, y_2 \in J$ met $y_1 < y_2$ is dan $g(y_1) < g(y_2)$, want uit $g(y_1) \geq g(y_2)$ zou volgen $y_1 = f(g(y_1)) \geq f(g(y_2)) = y_2$.

Analoog bewijs als f strikt dalend is.

- b) We mogen aannemen dat g strikt stijgend is (vervang eventueel g door $-g$).

Volgens 3.12.4 is J een interval. We zullen bewijzen dat g continu is in ieder inwendig punt b van J (is b een eindpunt van J dan volgt de links- of rechtscontinuïteit in b op overeenkomstige wijze).



Zij $\epsilon > 0$ en zij b een inwendig punt van J . Omdat I een interval is en g strikt stijgend is, is $a = g(b)$ een inwendig punt van I .

We kunnen dus η zó kiezen dat $0 < \eta \leq \epsilon$ en $[a-\eta, a+\eta] \subset I$.

Dan is $f(a-\eta) < f(a) = b < f(a+\eta)$, dus er bestaat een $\delta > 0$ zó dat $(b-\delta, b+\delta) \subset [f(a-\eta), f(a+\eta)]$. Voor iedere x met $b-\delta < x < b+\delta$ is nu, omdat g strikt stijgend is

$$a-\eta = g(f(a-\eta)) < g(b-\delta) < g(x) < g(b+\delta) < g(f(a+\eta)) = a+\eta,$$

dat wil zeggen:

$$\text{als } |x - b| < \delta, \text{ dan } |g(x) - g(b)| = |g(x) - a| < \eta \leq \epsilon. \quad \square$$

3.15. Vraagstukken

*1. a) Geef de definitie van $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

b) Bewijs met behulp van deze definitie dat $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 1} = 2$.

2. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{voor } x \leq 2, \\ \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} & \text{voor } x > 2, \text{ waarbij } a \text{ en } b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Onderzoek of a en b zo bepaald kunnen worden dat f continu is in 2.

*3. Voor $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ geldt $\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Bewijs dat er een $\sigma \in (0,1)$

bestaat zó dat $f(x) > x^2$ voor alle $x \in (0,\sigma)$.

*4. a) Geef de definitie van $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

b) Bewijs met behulp van deze definitie dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2} = 1$.

*5. a) Bewijs: Als $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, dan is $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = |L|$.

b) Geef een voorbeeld waarbij $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)|$ bestaat en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ niet bestaat.

*6. Gegeven is dat f continu is in x_0 en $f(x_0) > 0$.

Bewijs met behulp van de definitie van limiet dat

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1 + f(x)} = \sqrt{1 + f(x_0)}.$$

7. Gegeven $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x \sin x}}$ voor $x \neq 0$, $f(0) = a$.

Onderzoek of a zó gekozen kan worden dat f continu is in 0.

*8. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ begrensd en zij voor $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \infty$. Bewijs dit.

9. Bereken:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-5 + \sqrt{x^2 + 9}}{x^2 - x - 12}$,

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + \tan^2 x}{x^2 + \sin^3 x}.$$

10. Bereken:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} \sin \frac{1}{x+1},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \sin \frac{2}{x}.$$

11. Bereken:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{x \arctan \frac{3}{x^2}},$$

$$b) \lim_{x \downarrow 0} \arctan \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2},$$

$$c) \lim_{x \uparrow 0} \arctan \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}.$$

12. Bereken:

$$a) \lim_{x \uparrow 0} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - \cos x}},$$

$$b) \lim_{x \downarrow 0} \sin 2x \cdot \ln x,$$

$$c) \lim_{x \downarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

13. Bereken:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\cos \frac{\pi}{2}x},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin 2x)}{x},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 - x)}{1 - \cos x}.$$

14. Bereken:

$$a) \lim_{x \downarrow 0} x^{\sin \sqrt{x}},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x,$$

$$c) \lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{\frac{x-1}{x}}.$$

*15. Een condensator met capaciteit C en een spoel met zelfinductie L worden in serie geschakeld en aangesloten op een bron die de spanning

$V = V_0 \sin(\omega t)$ afgeeft. De stroom door de kring wordt dan gegeven door:

$$I = \frac{V_0 \omega}{L(\omega^2 - \omega_0^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)], \text{ waarin } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Bereken $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} I$.

*16. Gegeven: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, $A < B$.

Bewijs dat vanaf zekere index n_0 voldaan is aan $a_n < b_n$.

17. De rij (a_n) is gegeven door $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) Bewijs dat de rij stijgend is.

b) Bewijs dat de rij naar boven begrensd is.

c) Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

18. Bereken:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1})\sqrt{n}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n}{3n^2 - 2^{n+1}}$,

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2n}$.

*19. Bereken:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+4}{2n-3}\right)^{n+5}$,

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$, als $\mu_n = \frac{n!}{n^n}$.

20. $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ is continu. Bewijs dat er een $c \in [0,1]$ bestaat waarvoor geldt $f(c) = c$.

Aanwijzing: Beschouw $g(x) = f(x) - x$.

*21. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Voor zekere $p \in \mathbb{R}$ geldt

$f(p) = k > 0$. Bewijs: als $0 < m < k$, dan bestaat er een $x_0 > p$ zó dat $f(x_0) = m$.

Appendix

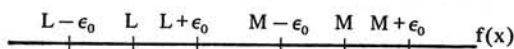
A3.1. Bij 3.1.4c

Stelling

Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, dan is $L = M$.

Bewijs

Neem eens aan $L \neq M$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat $M > L$. Noem $\epsilon_0 = \frac{M-L}{3} \in \mathbb{R}^+$. Volgens $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ is bij iedere $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ een $\delta \in \mathbb{R}^+$ te vinden zó dat voor alle $x \in U'_\delta(a)$ geldt $f(x) \in U_\epsilon(L)$.



Dus in het bijzonder voor $\epsilon = \epsilon_0$ is er een $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ te vinden zó dat voor alle $x \in U'_{\delta_1}(a)$ geldt: $f(x) \in U_{\epsilon_0}(L)$.

Wegens $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ is bij ϵ_0 een $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ te vinden zó dat voor alle

$x \in U'_{\delta_2}(a)$ geldt $f(x) \in U_{\epsilon_0}(M)$.

Zij $\delta_0 = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Dan geldt voor alle $x \in U'_{\delta_0}(a) = U'_{\delta_1}(a) \cap U'_{\delta_2}(a)$:

$$f(x) \in U_{\epsilon_0}(L) \cap U_{\epsilon_0}(M).$$

Maar $L + \epsilon_0 = L + \frac{M-L}{3} = \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}M < \frac{1}{3}L + \frac{2}{3}M = M - \frac{M-L}{3} = M - \epsilon_0$,

zodat

$$U_{\epsilon_0}(L) \cap U_{\epsilon_0}(M) = \emptyset.$$

Dus $f(x) \in U_{\epsilon_0}(L) \cap U_{\epsilon_0}(M)$ levert een tegenspraak. □

A3.2. Stelling 3.6.2

Stelling

Als $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ en als f continu is in b , dan geldt $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(b)$.

Bewijs

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Omdat f continu is in b is er een $\epsilon_1 > 0$ zó dat $|f(t) - f(b)| < \epsilon$ voor alle t met $|t - b| < \epsilon_1$.

Omdat $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ is er bij ϵ_1 een $\delta > 0$ zó dat $|g(x) - b| < \epsilon_1$ voor

alle x met $0 < |x - a| < \delta$.

Voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt dus

$$|(f \circ g)(x) - f(b)| = |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon.$$

Dit betekent dat $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(b)$. □

A3.3. Stelling 3.6.3

Stelling

- a) Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ dan geldt $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$.
 b) Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ dan geldt $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x)) = \alpha L$.

Bewijs

- a) Zij $\epsilon > 0$ gegeven. We onderzoeken

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|. \end{aligned}$$

Omdat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ is er een $\delta_1 > 0$ zó dat voor alle x met

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ geldt dat } |f(x) - L| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Omdat $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ is er een $\delta_2 > 0$ zó dat voor alle x met

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ geldt dat } |g(x) - M| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Noem $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt dan

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon, \text{ dus het gestelde.}$$

- b) Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Als $\alpha = 0$ is de te bewijzen limiet triviaal.

Zij nu $\alpha \neq 0$. We onderzoeken $|\alpha f(x) - \alpha L| = |\alpha| |f(x) - L|$.

Omdat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, is er een $\delta > 0$ zó dat voor alle x met

$$0 < |x - a| < \delta \text{ geldt dat } |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|\alpha|}.$$

Dus voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ is dan $|\alpha f(x) - \alpha L| < |\alpha| \frac{\epsilon}{|\alpha|} = \epsilon$. \square

A3.4. Stelling 3.6.5

Stelling

Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$.

Bewijs

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Er is een $\delta > 0$ zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $|f(x) - L| < \epsilon$.

Wegens 1.3.2c is $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$.

Dus voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $||f(x)| - |L|| < \epsilon$. \square

A3.5. Stelling 3.6.6

Stelling

Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, dan is

a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = LM,$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M},$ mits $M \neq 0$.

Bewijs

a) We schrijven

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x)M + f(x)(g(x) - M)) \\ &\stackrel{3.6.3a}{=} \lim_{x \rightarrow a} (f(x)M) + \lim_{x \rightarrow a} (f(x)(g(x) - M)) \\ &\stackrel{3.6.3b}{=} LM + \lim_{x \rightarrow a} (f(x)(g(x) - M)). \end{aligned}$$

Omdat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ is wegens 3.5.2a f begrensd in een gereduceerde een δ -omgeving van a . Omdat $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, is $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) - M) = 0$.

Stelling 3.5.5 leert dan $\lim_{x \rightarrow a} f(x)(g(x) - M) = 0$.

 b) Eerst merken we op dat wegens 3.6.5 $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = |M| > 0$.

Met behulp van 3.5.2b volgt: Er bestaat een $\delta > 0$ zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt: $|g(x)| > \frac{1}{2}|M|$. In het bijzonder is dan $\frac{1}{g}$ gedefinieerd op $U'_\delta(a)$ en heeft het dus zin om

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$ te beschouwen.

Nu is de functie $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ de samenstelling van $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $x \mapsto g(x)$.

In 3.2.4d toonden we aan dat de functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ continu is op $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Toepassing van stelling 3.6.2 levert dan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{M}.$$

Omdat $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$ volgt uit a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$. □

A3.6. Stelling 3.8.5

Stelling

Zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Dan geldt

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^p = \infty$ als $p > 0$,

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^p = 0$ als $p < 0$,

c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$ als $L > 0$,

d) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$ als $L < 0$,

e) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$.

Bewijs

 a) Zij $G > 0$ gegeven. Uit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zó

dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $f(x) > G^{1/p}$. Dus voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $[f(x)]^p > G$. Dus $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^p = \infty$.

- b) Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Noem $q = -p > 0$. Uit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $f(x) > (\frac{1}{\epsilon})^{1/q}$. Dus voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt $[f(x)]^q > \frac{1}{\epsilon}$ oftewel $0 < [f(x)]^p = \frac{1}{[f(x)]^q} < \epsilon$. Hieruit volgt het gestelde.
- c) Uit 3.5.2b volgt dat er een $\delta_1 > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta_1$ geldt $g(x) > \frac{L}{2}$. Zij $G > 0$ gegeven. Uit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ volgt dat er een $\delta_2 > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta_2$ geldt $f(x) > \frac{2G}{L}$. Voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ waarbij $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ geldt $f(x)g(x) > \frac{2G}{L} \cdot \frac{L}{2} = G$. Dus $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$.
- d) Analoog aan het bewijs van c).
- e) Uit de definitie volgt dat er een $\delta_1 > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta_1$ geldt $g(x) > L - 1$. Zij G gegeven. Uit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ volgt dat er een $\delta_2 > 0$ bestaat zó dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta_2$ geldt $f(x) > G - L + 1$. Voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$, waarbij $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, geldt $f(x) + g(x) > G$, dus $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$. \square

A3.7. Stelling 3.13.3

A3.7.1. Definitie

Zij I een interval. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heet *uniform continu* op I , als er bij elke $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ een $\delta \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat voor alle $x_1, x_2 \in I$ met $|x_1 - x_2| < \delta$ geldt dat $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

A3.7.2. Opmerking

Is f uniform continu op I , dan is f ook continu op I . Het omgekeerde is echter in het algemeen niet waar. Zo is bijvoorbeeld $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ continu op $(0,1)$, maar niet uniform continu op $(0,1)$.

Kies bijvoorbeeld $\epsilon = 1$.

Voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt $|f(\frac{1}{k\pi}) - f(\frac{1}{(k+1)\pi})| = 2$.

Bij elke $\delta \in \mathbb{R}^+$ kan men $k \in \mathbb{N}$ zó groot kiezen dat voor $x_1 = \frac{1}{k\pi}$ en $x_2 = \frac{1}{(k+1)\pi}$ geldt dat $|x_1 - x_2| < \delta$ en dan is dus

$$2 = |f(x_1) - f(x_2)| > 1 = \epsilon.$$

A3.7.3. Definitie

Zij $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ en $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en J een deelinterval van I . We noemen $\delta \in \mathbb{R}^+$ een ϵ -tolerantie voor f op J als voor alle $x_1, x_2 \in J$ met $|x_1 - x_2| < \delta$ geldt $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

(Er geldt dus: f is uniform continu op $J \iff$ bij elke $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ is er een ϵ -tolerantie $\delta \in \mathbb{R}^+$ voor f op J .)

A3.7.4. Stelling

Als $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $x_0 \in I$ en f continu is in x_0 , dan is er een $\delta \in \mathbb{R}^+$, zó dat er op $U_\delta(x_0) \cap I$ voor f een ϵ -tolerantie 2δ bestaat.

Bewijs

Uit de definitie van continuïteit in x_0 volgt: Voor iedere $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ bestaat er een $\delta \in \mathbb{R}^+$ zó dat $x \in U_\delta(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\epsilon$.

Als $x_1, x_2 \in U_\delta(x_0)$ dan is $|x_1 - x_2| < 2\delta$ en $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_2)| < \epsilon$. □

A3.7.5. Stelling

Als $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is op $[a, b]$, dan is f uniform continu op $[a, b]$.

Bewijs

Zij $\epsilon > 0$. We moeten bewijzen dat bij deze ϵ er een ϵ -tolerantie van f op $[a, b]$ bestaat.

Noem $V_\epsilon = \{x \in [a, b] \mid \text{er is een } \epsilon\text{-tolerantie voor } f \text{ op } [a, x]\}$. Wegens A3.7.4 is $V_\epsilon \neq \emptyset$ omdat f (rechts-)continu is in a en V_ϵ is naar boven begrensd want b is een bovengrens van V_ϵ .

Zij $c_\epsilon = \sup V_\epsilon$. We bewijzen

(i) $c_\epsilon > a$.

f is (rechts-)continu in a , dus volgens A3.7.4 is er een $\delta > 0$, zó dat δ een ϵ -tolerantie voor f is op $[a, a + \delta]$ en dus op $[a, a + \frac{1}{2}\delta]$.

Dus $a + \frac{1}{2}\delta \in V_\epsilon$, zodat $a < a + \frac{1}{2}\delta \leq c_\epsilon$.

(ii) $c_\epsilon \notin (a, b)$.

Neem eens aan $c_\epsilon \in (a, b)$. Dan is f continu in c_ϵ , dus is er volgens A3.7.4 een $\delta > 0$, zó dat er een ϵ -tolerantie voor f bestaat op $(c_\epsilon - \delta, c_\epsilon + \delta)$ en dus ook op $[c_\epsilon - \frac{1}{2}\delta, c_\epsilon + \frac{1}{2}\delta]$.

Omdat $c_\epsilon = \sup V_\epsilon$ is er een $x_0 \in V_\epsilon$, zó dat $c_\epsilon - \frac{1}{2}\delta < x_0 \leq c_\epsilon$. Dus is er een ϵ -tolerantie voor f op $[a, x_0] \cup [c_\epsilon - \frac{1}{2}\delta, c_\epsilon + \frac{1}{2}\delta] = [a, c_\epsilon + \frac{1}{2}\delta]$.

Dus $c_\epsilon + \frac{1}{2}\delta \in V_\epsilon$, in tegenspraak met $c_\epsilon = \sup V_\epsilon$.

Uit (i) en (ii) volgt $c_\epsilon = b$.

f is (links-)continu in b , dus volgens A3.7.4 is er een $\delta > 0$, zó dat δ een ϵ -tolerantie voor f is op $(b - \delta, b]$. Omdat $b = \sup V_\epsilon$ is er een $x_1 \in V_\epsilon$ zó dat $b - \delta < x_1 \leq b$. Dus f heeft een ϵ -tolerantie op $[a, x_1] \cup [b - \delta, b] = [a, b]$. □

A3.7.6. Stelling

Als $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is op $[a, b]$, dan is f begrensd op $[a, b]$.

Bewijs

Omdat f continu is op $[a, b]$, is f ook uniform continu op $[a, b]$. Bij bijvoorbeeld $\epsilon = 1$ is er dus een $\delta \in \mathbb{R}^+$, zó dat voor alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ met $|x_1 - x_2| < \delta$ geldt: $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$.

Zij $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ een verdeling van het interval $[a, b]$ in n gelijke delen van lengte $(b - a)/n < \delta$. Stel $K = \max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|$.

Dan geldt voor alle $x \in [a, b]$ dat $|f(x)| \leq K + 1 = M$. □

A3.7.3. Definitie

A3.7.4. Stelling

A3.7.5. Stelling

A3.7.6. Stelling

A3.7.7. Stelling

A3.7.8. Stelling

A3.7.9. Stelling

A3.7.10. Stelling

A3.7.11. Stelling

A3.7.12. Stelling

A3.7.13. Stelling

A3.7.14. Stelling

A3.7.15. Stelling

A3.7.16. Stelling

A3.7.17. Stelling

A3.7.18. Stelling

A3.7.19. Stelling

A3.7.20. Stelling

A3.7.21. Stelling

A3.7.22. Stelling

A3.7.23. Stelling

A3.7.24. Stelling

A3.7.25. Stelling

A3.7.26. Stelling

A3.7.27. Stelling

A3.7.28. Stelling

A3.7.29. Stelling

A3.7.30. Stelling

A3.7.31. Stelling

A3.7.32. Stelling

A3.7.33. Stelling

A3.7.34. Stelling

A3.7.35. Stelling

A3.7.36. Stelling

A3.7.37. Stelling

A3.7.38. Stelling

A3.7.39. Stelling

A3.7.40. Stelling

A3.7.41. Stelling

A3.7.42. Stelling

A3.7.43. Stelling

A3.7.44. Stelling

A3.7.45. Stelling

A3.7.46. Stelling

A3.7.47. Stelling

A3.7.48. Stelling

A3.7.49. Stelling

A3.7.50. Stelling

A3.7.51. Stelling

A3.7.52. Stelling

A3.7.53. Stelling

A3.7.54. Stelling

A3.7.55. Stelling

A3.7.56. Stelling

A3.7.57. Stelling

A3.7.58. Stelling

A3.7.59. Stelling

A3.7.60. Stelling

A3.7.61. Stelling

A3.7.62. Stelling

A3.7.63. Stelling

A3.7.64. Stelling

A3.7.65. Stelling

A3.7.66. Stelling

A3.7.67. Stelling

A3.7.68. Stelling

A3.7.69. Stelling

A3.7.70. Stelling

A3.7.71. Stelling

A3.7.72. Stelling

A3.7.73. Stelling

A3.7.74. Stelling

A3.7.75. Stelling

A3.7.76. Stelling

A3.7.77. Stelling

A3.7.78. Stelling

A3.7.79. Stelling

A3.7.80. Stelling

A3.7.81. Stelling

A3.7.82. Stelling

A3.7.83. Stelling

A3.7.84. Stelling

A3.7.85. Stelling

A3.7.86. Stelling

A3.7.87. Stelling

A3.7.88. Stelling

A3.7.89. Stelling

A3.7.90. Stelling

A3.7.91. Stelling

A3.7.92. Stelling

A3.7.93. Stelling

A3.7.94. Stelling

A3.7.95. Stelling

A3.7.96. Stelling

A3.7.97. Stelling

A3.7.98. Stelling

A3.7.99. Stelling

A3.7.100. Stelling

4. Differentiaalrekening

Basiseigenschappen

4.1. Definities en voorbeelden

4.1.1. Inleiding

De differentiaalrekening, onafhankelijk van elkaar door Leibniz en Newton ingevoerd, is een zeer belangrijk deel van de Analyse met vele toepassingen in allerlei takken van de wiskunde, als ook in de mechanica, fysica en economie.

Differentieerbaarheid van een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}$ is alleen gedefinieerd in inwendige punten van D . We herhalen de in 3.2.3d gegeven definitie: a is een inwendig punt van D als er een $r \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat voor de r -omgeving van a geldt: $U_r(a) \subset D$. Anders gezegd: als er een r -omgeving van a bestaat die geheel binnen D ligt.

We zullen in het vervolg van dit hoofdstuk steeds aannemen: $D \subset \mathbb{R}$.

4.1.2. Definitie

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en zij a een inwendig punt van D .

f heet *differentieerbaar in a* als

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

bestaat, met andere woorden als er een getal $b \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b.$$

Dit getal b heet de *afgeleide van f in a* ; notatie $b = f'(a)$.

Opmerking

Men kan bovenstaande limiet ook noteren als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Stel daartoe $x = a + h$.

4.1.3. Voorbeelden

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, is in ieder punt $a \in \mathbb{R}$ differentieerbaar met afgeleide $f'(a) = \cos a$.

Bewijs.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(a + \frac{1}{2}h) \sin \frac{1}{2}h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(a + \frac{1}{2}h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = \cos a. \end{aligned}$$

- b) Beschouw $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ als $x \neq 0$ en $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0, \text{ zie 3.5.6.}$$

f is dus differentieerbaar in 0 met afgeleide $f'(0) = 0$.

- c) Voor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ als $x \neq 0$ en $f(0) = 0$ is

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \cos \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0).$$

Daar $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ niet bestaat (zie 3.1.5b), is f niet differentieerbaar in 0.

Merk op dat f wel continu is in 0.

- d) Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{als } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \begin{cases} |x| & \text{als } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{als } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Voor iedere $\epsilon > 0$ geldt dus:

$$\text{als } 0 < |x| < \delta = \epsilon \text{ dan is } \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| < \epsilon,$$

$$\text{d.w.z. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Dus f is differentieerbaar in 0 met afgeleide $f'(0) = 0$.

4.1.4. Meetkundige interpretatie

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Zij f differentieerbaar in a .

Voor $x \in D \setminus \{a\}$ is

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tan \alpha(x).$$

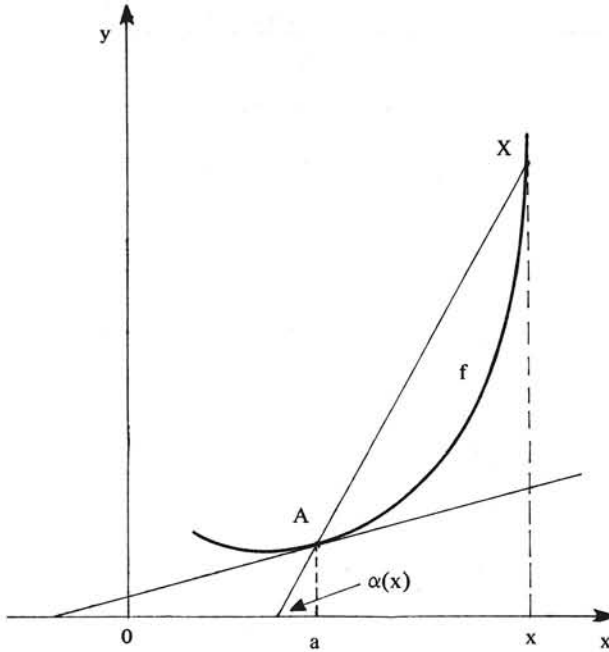
Hierin is $\alpha(x)$ de hoek tussen de x -as en de koorde AX waarbij $A = (a, f(a))$ en $X = (x, f(x))$. ' f differentieerbaar in a ' wil zeggen dat $\lim_{x \rightarrow a} \tan \alpha(x)$ bestaat.

De koorde convergeren dan naar een limietstand als x naar a nadert. Hierdoor wordt de raaklijn in $(a, f(a))$ bepaald. *De vergelijking van de raaklijn in $(a, f(a))$ is:*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a);$$

de raaklijn is de grafiek van de functie t , gedefinieerd door

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$



4.1.5. Afgeleide functie

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en zij

$E = \{x \mid x \text{ is inwendig punt van } D \text{ en } f \text{ is differentieerbaar in } x\}$.

De functie $f': E \rightarrow \mathbb{R}$ die aan iedere $x \in E$ de afgeleide $f'(x)$ van f in x toevoegt wordt de *afgeleide functie van f* (of ook de *afgeleide van f*) genoemd.

In plaats van f' noteert men ook wel $\frac{df}{dx}$. Is de functie f' zelf weer differentieerbaar, dan noemen we de afgeleide van f' de *tweede afgeleide van f* en we noteren deze met f'' . Zo voortgaande komen we tot: $f^{(n)}$, de *n^{de} afgeleide van f* . Een andere notatie is $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Bestaat $f^{(n)}$, dan noemt men f *n maal differentieerbaar*. Is $f^{(n)}$ bovendien continu, dan noemt men f *n maal continu differentieerbaar*.

4.1.6. Tabel van afgeleiden

Op de volgende bladzijde staat een tabel met de voorschriften van enige functies en hun respectievelijke afgeleiden. De meeste van deze voorschriften zullen in het vervolg van dit hoofdstuk gecontroleerd worden.

4.1.7. Voorbeelden

Met behulp van de tabel vindt men:

- Als $f(x) = e^x$, dan is $f^{(n)}(x) = e^x$.
- Als $f(x) = \ln x$, dan is $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$, ($n \neq 0$).
- Als $f(x) = \sin x$, is $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, enzovoort.

Kortweg: als $f(x) = \sin x$, dan is $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi)$. Ga dit na!

	$f(x)$	$f'(x)$	opmerkingen
1	c	0	$c \in \mathbb{R}$
2	x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
3	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 1; x \neq 0$
4	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
5	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 1, x > 0$
6	e^x	e^x	
7	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$
8	x^a	ax^{a-1}	$x > 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
9	$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
10	$\sin x$	$\cos x$	
11	$\cos x$	$-\sin x$	
12	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \notin \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
13	$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
14	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
15	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
16	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
17	$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	
18	$\sinh x$	$\cosh x$	
19	$\cosh x$	$\sinh x$	
20	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	
21	$\operatorname{coth} x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$	$x \neq 0$
22	$\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$a \in \mathbb{R}^+$
23	$\ln x + \sqrt{x^2 - a^2} $	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$a \in \mathbb{R}^+$ en $ x > a$

4.1.8. Linker- en rechterafgeleide

- a) Zij f gedefinieerd op $[a, a+r)$, waarbij $r \in \mathbb{R}^+$. f heet *rechtsdifferen-
teerbaar in a* indien $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ bestaat.

We noemen $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ de *rechterafgeleide in a* en noteren deze als $f'_r(a)$.

- b) Zij f gedefinieerd op $(b-r, b]$, waarbij $r \in \mathbb{R}^+$. f heet *linksdifferen-
teerbaar in b* indien $\lim_{x \uparrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ bestaat.

Deze limiet wordt *linkerafgeleide in b* genoemd en genoteerd als $f'_l(b)$.

4.1.9. Voorbeelden

- a) Zij $f(x) = |\sin x|$ voor alle $x \in [-\pi, \pi]$.

$$\text{Dan geldt } f'_r(0) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{en } f'_l(0) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-\sin x}{x} = -1.$$

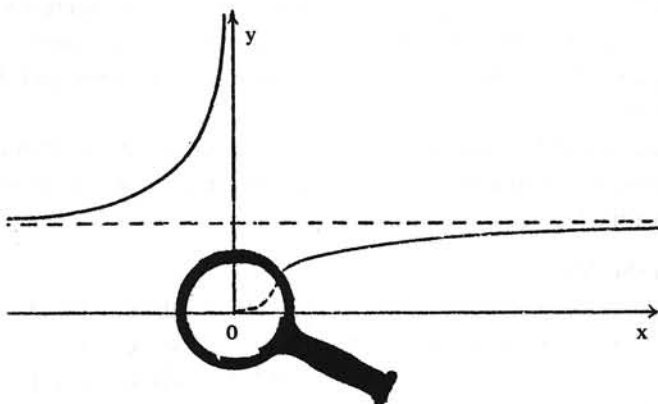
- b) Zij $f(x) = e^{-1/x}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $x \neq 0$ en $f(0) = 0$.
Met behulp van de standaardlimieten vinden we

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty.$$

De functie f is dus rechtscontinu in 0. We onderzoeken nu hoe de grafiek van f in de buurt van 0 verloopt. Daartoe bepalen we $f'_r(0)$.

$$f'_r(0) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} y e^{-y} = 0.$$

De grafiek van f raakt dus aan de x -as in 0 (aan de rechterkant).



4.1.10. Stelling

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en zij p een inwendig punt van D . Dan geldt:

f differentieerbaar in $p \iff \begin{cases} f \text{ is zowel links- als rechtsdifferentieerbaar} \\ \text{in } p \text{ en } f'_l(p) = f'_r(p). \end{cases}$

Bewijs

Dit volgt uit 3.3.4. \square

4.1.11. Definitie

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en $[a,b] \subset D$, $a < b$.

- (i) We noemen f differentieerbaar op (a,b) als f differentieerbaar is in elk punt van (a,b) .
- (ii) We noemen f differentieerbaar op $[a,b]$ als f differentieerbaar is op (a,b) , rechtsdifferentieerbaar is in a en linksdifferentieerbaar is in b . Voor half open intervallen analoog.
- (iii) Als V de vereniging is van onderling disjuncte open intervallen, dan noemen we f differentieerbaar op V als f op alle intervallen waaruit V bestaat differentieerbaar is.

4.1.12. Verband tussen continuïteit en differentieerbaarheid.

Uit voorbeeld 4.1.3c blijkt dat een continue functie niet differentieerbaar hoeft te zijn. Wel geldt:

Stelling

Als $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in a dan is f continu in a .

Bewijs

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

dus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ en f is volgens 3.2.2 continu in a . \square

4.1.13. Opmerking

Stelling 4.1.12 zegt dat uit het bestaan van $f'(a)$ de continuïteit van f in het punt a volgt. Het omgekeerde is in het algemeen niet waar.

Zo is de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = |x|$ continu in 0 maar niet differentieerbaar in 0.

Uit het bestaan van f' volgt in het algemeen ook niet de continuïteit van f' : een functie die differentieerbaar is, behoeft niet continu differentieerbaar te zijn (zie 4.2.6d).

4.1.14. Voorbeelden

$$\text{a) } f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ is gegeven door } f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in [0,1), \\ a & \text{als } x = 1, \\ bx^2 + c & \text{als } x \in (1,2]. \end{cases}$$

We bepalen a, b en c zó dat f differentieerbaar is in 1.

Volgens 4.1.12 moet f zeker continu zijn in 1.

Nu is $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} x = 1$ en $\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} (bx^2 + c) = b + c$.

f is dus continu in 1 als $a = 1$ en $c = 1 - b$.

Op grond van 4.1.10 is f differentieerbaar in 1 als $f'_l(1) = f'_r(1)$.

Nu is $f'_l(1) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$ en

$f'_r(1) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \downarrow 1} \frac{bx^2 + 1 - b - 1}{x - 1} = \lim_{x \downarrow 1} b(x + 1) = 2b$.

Dus $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ en $c = \frac{1}{2}$.

- b) De functie in voorbeeld 4.1.3d is in geen enkel punt van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ continu en dus ook in geen enkel punt van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differentieerbaar. Blijkbaar is 0 het enige punt waar deze functie differentieerbaar is.

Oefeningen

- Toon aan dat \cos in ieder punt van \mathbb{R} differentieerbaar is.
- Toon aan dat \tan in ieder punt van $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ differentieerbaar is.
- Als f rechtsdifferentieerbaar is in a , dan is f rechtscontinu in a . Bewijs dit.

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0, \\ x + 1 & \text{als } x > 0. \end{cases}$

Laat zien dat $f'_r(0)$ niet bestaat, maar dat $\lim_{x \downarrow 0} f'(x)$ wel bestaat.

Aanwijzing: gebruik oefening 3.

Blijkbaar is 'rechterafgeleide' niet hetzelfde als 'rechterlimiet van de afgeleide'.

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x \leq c, \\ ax + b & \text{als } x > c. \end{cases}$

Bepaal waarden van a en b (uitgedrukt in c) zó dat f differentieerbaar is in c .

6. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar.

Bewijs: Als f een oneven functie is, dan is f' een even functie.

Als f een even functie is, dan is f' een oneven functie.

4.2. Rekenregels voor differentiëren

We beginnen deze paragraaf met de regels voor het berekenen van de afgeleide van een som, een produkt of een quotiënt van twee differentieerbare functies.

4.2.1. Stelling

Laat $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in a . Dan geldt:

- a) Voor alle $a, \beta \in \mathbb{R}$ is $af + \beta g$ differentieerbaar in a met afgeleide

$$(af + \beta g)'(a) = af'(a) + \beta g'(a),$$

b) fg is differentieerbaar in a met afgeleide

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

c) Als $g(a) \neq 0$ dan is $\frac{f}{g}$ differentieerbaar in a met afgeleide

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Bewijs

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(af + \beta g)(x) - (af + \beta g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{af(x) + \beta g(x) - af(a) - \beta g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] = af'(a) + \beta g'(a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x) - f(a)]g(x) + f(a)[g(x) - g(a)]}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

Hierbij is gebruikt dat g continu is in a (zie 4.1.12).

c) We bewijzen eerst dat $\frac{1}{g}$ differentieerbaar is in a .

Omdat g continu is in a is $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0$, dus volgens 3.5.2

is er een r -omgeving $U_r(a)$ van a zó dat $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in U_r(a)$

en $U_r(a) \subset D$. Dus $\frac{1}{g}$ is gedefinieerd op $U_r(a)$ en

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x)(x - a)} = \\ &= \frac{-1}{g(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

Volgens b) is dus $\frac{f}{g}$ differentieerbaar in a met afgeleide

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= f'(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \\ &= \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a) \cdot \frac{-g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

4.2.2. Voorbeelden

a) Zij $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}$.

We bewijzen met volledige inductie dat $f'_n(x) = nx^{n-1}$.

Voor $n=1$ is dit juist, want voor iedere $a \in \mathbb{R}$ is

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x-a} = 1. \text{ Neem aan dat de bewering waar is voor een } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Dan is wegens 4.2.1b voor iedere $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(x) &= (f_1 f_n)'(x) = f'_1(x) f_n(x) + f_1(x) f'_n(x) = \\ &= 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n. \end{aligned}$$

b) Zij $g_n(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en zij f_n als in a).

Dan is op grond van het eerste deel van het bewijs van 4.2.1c:

$$g'_n(x) = \left(\frac{1}{f_n}\right)'(x) = -\frac{f'_n(x)}{f_n(x)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

4.2.3. Regel van Leibniz

Om de n^{de} afgeleide van een produkt fg te berekenen kan men soms gebruik maken van de *regel van Leibniz*:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Hierin is $f^{(0)} = f$ en $g^{(0)} = g$. De regel van Leibniz kan bewezen worden met volledige inductie op een manier, analoog aan het bewijs van het binomium van Newton met volledige inductie (zie 1.11.8b).

4.2.4. Voorbeeld

Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^2 e^{3x}$. Bereken $f^{(n)}(x)$.

Oplossing:

Zij $f_1(x) = e^{3x}$ en $g_1(x) = x^2$. Dan geldt:

$$f_1^{(n)}(x) = 3^n e^{3x} \text{ en } g_1'(x) = 2x, g_1''(x) = 2, g_1^{(k)}(x) = 0, k > 2.$$

Toepassing van de regel van Leibniz op $f_1 g_1$ levert:

$$\begin{aligned} (x^2 e^{3x})^{(n)} &= 3^n e^{3x} x^2 + \binom{n}{1} 3^{n-1} e^{3x} 2x + \binom{n}{2} 3^{n-2} e^{3x} 2 = \\ &= 3^n e^{3x} x^2 + 2nx 3^{n-1} e^{3x} + n(n-1) 3^{n-2} e^{3x} = \\ &= 3^{n-2} e^{3x} (9x^2 + 6nx + n(n-1)). \end{aligned}$$

4.2.5. Stelling (Kettingregel)

Laat $g: D \rightarrow B$ differentieerbaar zijn in a en

laat $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in $b = g(a)$.

Dan is $f \circ g$ differentieerbaar in a met afgeleide

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) g'(a).$$

Opmerking

In de praktijk gebruiken we deze *kettingregel* vaak in de volgende vorm. Zijn $z = f(y)$ en $y = g(x)$ differentieerbare functies, dan is de samengestelde functie $z = f(g(x))$ differentieerbaar met afgeleide $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$.

Bewijs

We moeten berekenen

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}.$$

We zouden daarvoor graag schrijven

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

De moeilijkheid schuilt in de eerste limiet en wel in de noemer; er kunnen punten zijn waar $g(x) = g(a)$. Definieer daarom de functie $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b} \text{ als } y \neq b \text{ en } \varphi(b) = f'(b).$$

Dan is $\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = f'(b) = \varphi(b)$, dus φ is continu in b .

Verder geldt voor alle $y \in B$

$$f(y) - f(b) = \varphi(y)(y - b), \quad (*)$$

(dit volgt voor $y \neq b$ uit de definitie van φ en voor $y = b$ door invullen).

Door in (*) $y = g(x)$ en $b = g(a)$ te substitueren en beide leden door $x - a$ te delen ziet men dat voor alle $x \in D \setminus \{a\}$ geldt

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \varphi(g(x)) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Nu is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$ en wegens de continuïteit van φ in b is

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(g(x)) = \varphi(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = \varphi(b).$$

$$\text{Dus } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \varphi(b)g'(a) = f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a). \quad \square$$

4.2.6. Voorbeelden

a) In 5.9.3 zullen we bewijzen dat $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, ($x \in \mathbb{R}^+$).

Zij nu $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \ln|x|$.

Voor $x > 0$ is dus $f'(x) = \frac{1}{x}$. Is $x < 0$ dan is $f(x) = \ln(-x)$ en

volgens de kettingregel is $f'(x) = \ln'(-x) \frac{d(-x)}{dx} = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Dus $f'(x) = \frac{1}{x}$ voor alle $x \neq 0$.

b) In 4.3.3e zullen we bewijzen dat $\exp' = \exp$.

Zij $a \in \mathbb{R}^+$ en zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

$$\text{Dan is } f'(x) = e^{x \ln a} \frac{d(x \ln a)}{dx} = a^x \ln a.$$

c) Zij $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en zij $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$.

$$\text{Dan is } f'(x) = e^{a \ln x} \frac{d(a \ln x)}{dx} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

Merk op dat dit voor $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ al in 4.2.2 bewezen is.

In het bijzonder is

$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{en} \quad \frac{d(\sqrt[n]{x})}{dx} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ als $x \neq 0$ en $f(0) = 0$.

In 4.1.3b is bewezen dat f differentieerbaar is in 0 met $f'(0) = 0$.

Voor $x \neq 0$ is

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} - x^2 \sin \frac{1}{x} \frac{d(\frac{1}{x})}{dx} = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}.$$

Nu is $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0$ terwijl $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ niet bestaat.

Dus $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ bestaat niet en f' is niet continu in 0.

Ook uit dit voorbeeld blijkt dat de begrippen 'rechterafgeleide' en 'rechterlimiet van de afgeleide' (resp. 'linkerafgeleide' en 'linkerlimiet van de afgeleide') goed van elkaar onderscheiden dienen te worden.

4.2.7. Logaritmisch differentiëren

Bij het differentiëren van een ingewikkelde uitdrukking (met produkten, quotiënten en/of machten van functies) verdient het vaak aanbeveling om eerst de logaritme van die uitdrukking te nemen en deze te differentiëren. Als $f(x) \neq 0$ geldt er namelijk

$$\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \left[\frac{d}{dx} \ln |f(x)| \right].$$

$$\text{Zij } h(x) = \frac{f_1(x)f_2(x)f_3(x)}{f_4(x)f_5(x)},$$

waarin de functies f_i differentieerbaar zijn en geen nulpunt hebben in een open interval I . Voor iedere $x \in I$ geldt dan

$$\ln |h(x)| = \ln |f_1(x)| + \ln |f_2(x)| + \ln |f_3(x)| - \ln |f_4(x)| - \ln |f_5(x)|.$$

Differentiëren van beide leden levert

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \frac{f_3'(x)}{f_3(x)} - \frac{f_4'(x)}{f_4(x)} - \frac{f_5'(x)}{f_5(x)},$$

waaruit men $h'(x)$ kan berekenen.

Deze methode kan men ook gebruiken om h' te berekenen als $h(x) = f(x)^{g(x)}$, waarbij $f(x) > 0$ op I .

4.2.8. Voorbeeld

Zij $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^x$.

Dan is $\ln |f(x)| = x \ln x$, dus $f'(x) = f(x) \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x(\ln x + 1)$.

Oefeningen

1. Bepaal bij elk volgend voorschrift het voorschrift van de afgeleide functie (voor zover deze gedefinieerd is).

a. $\tan x$.

b. $\cot x$.

c. $\frac{x}{1+x^2}$.

d. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

2. Als gegeven is dat $\exp' = \exp$, bepaal dan de afgeleide functies van \sinh , \cosh , \tanh , \coth .

3. Bepaal bij elk volgend voorschrift het voorschrift van de afgeleide functie (voor zover deze gedefinieerd is).

a. $\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, ($a \in \mathbb{R}^+$).

b. $\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$, ($a \in \mathbb{R}^+$).

c. $(1 + \cos 6x^2)^4$.

d. $\ln \sqrt{3 + \frac{2}{x}}$.

e. $\sin(x \cos x)$.

f. 2^{3x^2} .

g. $(\sin x)^{\tan x}$.

h. $\ln \frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

i. x^x .

j. $\frac{xe^x \sin x}{(x-1)^4}$.

4.3. Differentiëren van de inverse functie

4.3.1. Inleiding

In 3.14 hebben we gezien dat de inverse functie van een continue functie (als hij bestaat) continu is. We zullen in de volgende stelling aantonen dat de inverse van een differentieerbare functie (als hij bestaat) weer differentieerbaar is, als f' in het betreffende punt $\neq 0$ is. Deze stelling stelt ons bovendien in staat om de afgeleide van de inverse functie in dat geval ook daadwerkelijk te berekenen.

4.3.2. Stelling

Gegeven I en J zijn intervallen en $f: I \rightarrow J$ en $g: J \rightarrow I$ zijn continu en elkaars inverse. Dan geldt:

als f differentieerbaar is in een inwendig punt a van I met afgeleide $f'(a) \neq 0$, dan is g differentieerbaar in $b = f(a)$ met afgeleide

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Bewijs

Zij a een inwendig punt van I . Omdat J een interval is en f strikt monotoon is, is $b = f(a)$ een inwendig punt van J . Verder geldt

- (i) $(x \neq a) \iff (y = f(x) \neq f(a) = b)$; omdat f en g beide injectief zijn,
 (ii) $(x \rightarrow a) \iff (y \rightarrow b)$; omdat f en g beide continu zijn.

$$\text{Dus } \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)},$$

wegens 3.6.6b. □

4.3.3. Toepassingen

a) $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

is de inverse van de strikt stijgende continue functie $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $f(x) = x^n$. Dus g is strikt stijgend en continu.

Daar f differentieerbaar is en $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$ op $(0, \infty)$ is g differentieerbaar op $f((0, \infty)) = (0, \infty)$ met afgeleide

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \text{ vergelijk 4.2.6c.}$$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $g(x) = \sqrt[2n+1]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{2n+1}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -|x|^{\frac{1}{2n+1}} & x < 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$, is de

inverse van de strikt stijgende continue functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^{2n+1}$. Dus g is strikt stijgend en continu.

Daar f differentieerbaar is en $f'(x) = (2n+1)x^{2n} \neq 0$ als $x \neq 0$, is g differentieerbaar op $f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ met afgeleide

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{(2n+1)(\sqrt[2n+1]{x})^{2n}} = \frac{1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}, x \neq 0.$$

c) $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

is de inverse van de strikt stijgende continue functie

$\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$.

Dus arcsin is strikt stijgend en continu.

Daar \sin differentieerbaar is en $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \neq 0$ op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ is arcsin differentieerbaar op $(-1, 1)$ met afgeleide

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Nu is $\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$, terwijl $\cos(\arcsin x) > 0$ wegens $-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$.

Dus $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ en

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

d) $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

is de inverse van de strikt stijgende continue functie

$\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Dus arctan is strikt stijgend en continu.

Daar \tan differentieerbaar is en $\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ is arctan differentieerbaar op \mathbb{R} met afgeleide

$$\frac{d \arctan x}{dx} = \cos^2(\arctan x).$$

Nu is $\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$, dus

$$\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

e) In 5.9.3 zullen we bewijzen dat

$\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

differentieerbaar (en dus continu) is op $(0, \infty)$ met afgeleide $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$.

Hieruit volgt dat de inverse functie

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$

differentieerbaar (en continu) is op \mathbb{R} met afgeleide

$$\frac{d \exp x}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x.$$

4.3.4. Een methode om hogere afgeleiden te berekenen

In sommige gevallen is het mogelijk de n^{de} afgeleide van een functie te bepalen omdat er een eenvoudige relatie tussen afgeleiden van f en polynomen van lage graad bestaat.

Voor $f(x) = \arctan x$ bijvoorbeeld, met $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ is deze relatie

$$f'(x)(1 + x^2) = 1.$$

Door $(n - 1)$ keer differentiëren van de laatste betrekking vinden we met de regel van Leibniz voor $n \geq 2$

$$f^{(n)}(x)(1+x^2) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

Invullen van $x = 0$ geeft $f^{(0)}(0) = 0$, $f^{(1)}(0) = 1$ en

$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$ voor $n \geq 2$. We maken onderscheid tussen even en oneven n .

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= -(2k-1)(2k-2)f^{(2k-2)}(0) = \\ &= (-1)^2(2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)f^{(2k-4)}(0) = \\ &= (-1)^k(2k-1)(2k-2) \dots 1 \cdot 0 \cdot f^{(0)}(0) = 0, \quad (k > 0) \end{aligned}$$

$$f^{(2k+1)}(0) = -2k(2k-1)f^{(2k-1)}(0) = (-1)^k(2k)!, \quad (k > 0).$$

Oefeningen

1. Bewijs: \arccos is differentieerbaar op $(-1, 1)$ met afgeleide

$$\frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Bewijs: arccot is differentieerbaar op \mathbb{R} met afgeleide

$$\frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

3. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \ln x + \arctan x$.

Bewijs dat f een differentieerbare inverse g heeft en bereken $g'(\frac{\pi}{4})$.

4. Zij $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \arcsin x$.

Bepaal $f^{(n)}(0)$.

Aanwijzing: Zoek een relatie tussen f' , f'' en polynomen.

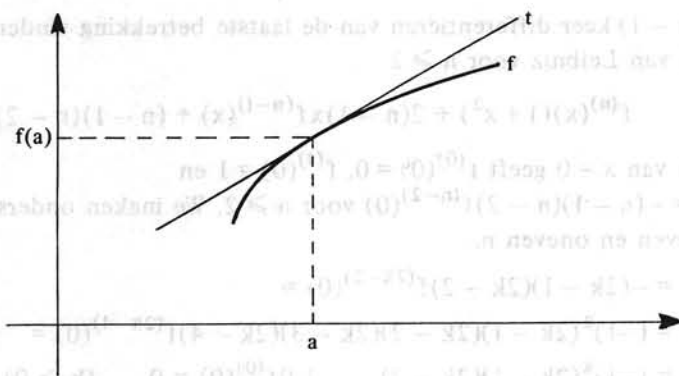
Differentiaal; middelwaardestelling; grafieken

4.4. Linearisering en differentiaal

4.4.1. Linearisering

In sommige gevallen zal men de functiewaarden van f in de buurt van een punt a willen benaderen met behulp van een polynoom van hoogstens eerste graad. In dat geval blijkt het polynoom, waarvan de grafiek de raaklijn aan f in het punt a voorstelt de beste keuze te zijn. Dit polynoom $t(x)$ heet de *linearisering* van f in a .

Volgens 4.1.4 geldt: $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.



4.4.2. Stelling

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en a is een inwendig punt van D .

- (i) Als f differentieerbaar is in a , dan bestaat er een functie $\eta: D \rightarrow \mathbb{R}$, zó dat voor alle $x \in D$ geldt

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \eta(x)(x - a)$$

$$\text{en } \lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0.$$

- (ii) Als voor zekere $A \in \mathbb{R}$ en een functie $\eta: D \rightarrow \mathbb{R}$ geldt

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \eta(x)(x - a), \text{ voor alle } x \in D,$$

$$\text{en bovendien } \lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0,$$

dan is f differentieerbaar in a en $A = f'(a)$.

Bewijs

- (i) Zij $\eta: D \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\eta(x) = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a}, \quad x \neq a.$$

$$\eta(a) = 0.$$

$$\text{Dan geldt: } \lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right] = 0,$$

omdat f differentieerbaar is in a .

Verder is duidelijk dat voor elke $x \in D \setminus \{a\}$ geldt:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \eta(x)(x - a).$$

Voor $x = a$ is deze relatie echter ook geldig.

- (ii) Als aan de gestelde voorwaarden is voldaan, is

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x - a) + \eta(x)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (A + \eta(x)) = A.$$

Dus f is differentieerbaar in a en $f'(a) = A$. \square

4.4.3. Opmerking

Uit stelling 4.4.2 volgt dat de raaklijn aan f in het punt a de enige lijn ℓ door $(a, f(a))$ is met de eigenschap dat $f(x) - \ell(x)$ sneller naar 0 nadert dan $(x - a)$ als $x \rightarrow a$. Immers, voor $\ell(x) = t(x)$ volgt uit (i)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \eta(x) = 0,$$

en uit (ii) volgt dat voor iedere andere lijn door $(a, f(a))$, bijvoorbeeld

$\ell(x) = f(a) + A(x - a)$, met de eigenschap dat $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - a} = 0$ volgt:

$$A = f'(a), \text{ dat wil zeggen: } \ell(x) = t(x).$$

Verder spreekt het vanzelf dat $f(x) - \ell(x)$ alleen naar nul kan gaan als $x \rightarrow a$, indien de lijn ℓ door $(a, f(a))$ gaat.

4.4.4. Voorbeeld

Een kubus met ribbe a zet door verwarming uit tot een kubus met ribbe $a + h$. Geef met behulp van de linearisering een benadering van de inhoud van de kubus.

Oplossing.

Is x de ribbe van een kubus dan is de inhoud $I(x) = x^3$.

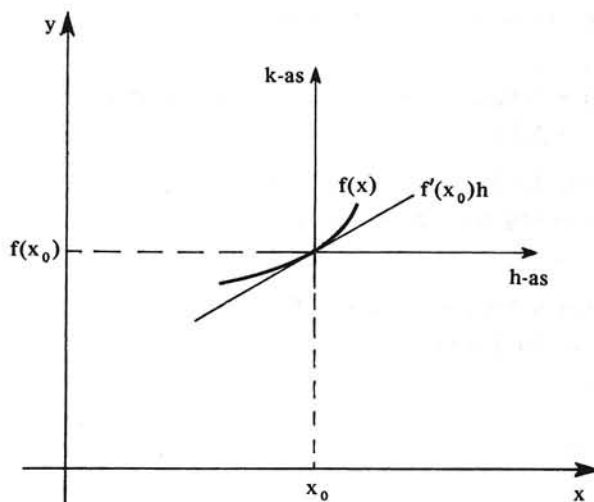
Benaderen we I met de linearisering t , dan geldt

$$t(x) = I(a) + I'(a)(x - a), \text{ en dus } t(a+h) = a^3 + 3a^2h.$$

Merk op dat $I(a+h) - t(a+h) = 3ah^2 + h^3$ inderdaad sneller naar 0 gaat dan h .

4.4.5. Differentiaal

We brengen in het punt $(x_0, f(x_0))$ van de grafiek van f een nieuw assenstelsel aan dat uit het oude ontstaat door translatie. De coördinaten in



het nieuwe assenstelsel geven we aan met h en k . Door de vergelijking

$$k = f'(x_0)h$$

wordt in het nieuwe assenstelsel juist de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in de (nieuwe) oorsprong voorgesteld.

Als f differentieerbaar is op D , is voor elke $x \in D$ $h \mapsto f'(x)h$ een *lineaire* functie van h , de zogenaamde *differentiaal van f in x* .

Notatie: $df(x)$.

Dus $df(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h \mapsto df(x)(h) = f'(x)h.$$

De differentiaal $df(x)$ stelt dus in het nieuwe assenstelsel de raaklijn aan de grafiek van f in de (nieuwe) oorsprong voor.

Wegens 4.4.3 is de differentiaal de *lineaire* functie die het functiewaardenverschil $f(x+h) - f(x)$ voor kleine h "het best" benadert.

4.4.6. Opmerkingen

a) Neemt men $f(x) = \text{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$, dus $f'(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan schrijft men in de praktijk dx in plaats van $d \text{id}_{\mathbb{R}}(x)$ zodat voor alle h

$$dx(h) = h.$$

De gelijkheid $df(x)(h) = f'(x)h$ kunnen we dus schrijven als $df(x)(h) = f'(x)dx(h)$, en dit leidt tot de relatie

$$df(x) = f'(x)dx \quad (*)$$

tussen de differentiaal $df(x)$ en dx .

b) In de praktijk gebruikt men de differentiaal en met name de relatie (*) om de verandering van de functiewaarden $f(x)$ te berekenen bij "kleine" veranderingen van de x . In feite berekent men dan de waarde van de linearisering $t(x)$ in plaats van de functie $f(x)$.

Zo schrijft men voorbeeld 4.4.4 als volgt:

$$I(x) = x^3$$

$$dI(x) = 3x^2 dx. \quad \text{Nu is } x = a \text{ en } dx = h, \text{ dus}$$

$$dI(a)(h) = 3a^2 h$$

en concludeert dat $I(a+h) - I(a) \approx 3a^2 h$.

(\approx betekent: is ongeveer gelijk aan.)

Oefeningen

1. $\cos x dx = d(\sin x + C)$, waarbij $C \in \mathbb{R}$ willekeurig.

Schrijf op dezelfde manier

a) $\cos 2x dx$,

b) $(x+2) dx$,

c) $(\cos x)^{-2} dx$,

d) $\sqrt{x} dx$,

e) $(\cos x)^2 dx$.

2. Een bol ijs met straal 10 cm smelt gelijkmatig af tot een bol met straal 9,8 cm. Benader de volume- en de oppervlakteverandering met behulp van differentialen.

Volume bol: $\frac{4}{3}\pi R^3$. Oppervlakte bol: $4\pi R^2$.

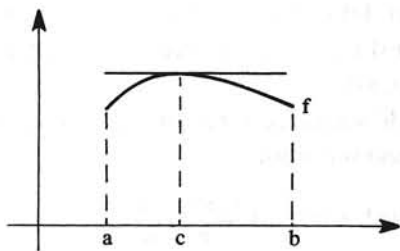
3. Benader $\sqrt[3]{65}$ met gebruikmaking van de differentiaal van $x^{\frac{1}{3}}$ in 64 (zie 4.7.8a voor een schatting van de fout).

4.5. De middelwaardestelling en haar gevolgen

We behandelen nu de middelwaardestelling en enige toepassingen ervan. De middelwaardestelling is gebaseerd op de volgende stelling.

4.5.1. Stelling (Rolle)

Zij f een continue reële functie op $[a,b]$, welke differentieerbaar is op (a,b) . Als $f(a) = f(b)$, dan is er een $c \in (a,b)$ met $f'(c) = 0$.



Bewijs

We onderscheiden drie gevallen:

- (i) f is constant op $[a,b]$;
- (ii) er is een $x \in (a,b)$ met $f(x) > f(a)$;
- (iii) er is een $x \in (a,b)$ met $f(x) < f(a)$.

ad (i): Iedere $c \in (a,b)$ voldoet.

ad (ii): Volgens stelling 3.13.4 is er een $c \in [a,b]$ zó dat f in c een globaal maximum heeft. Omdat er een $x \in (a,b)$ is met $f(x) > f(a)$ is zeker $f(c) > f(a)$. Dus $c \neq a$ en $c \neq b$, d.w.z. $c \in (a,b)$.

Hieruit volgt dat f in c (links- en rechts-) differentieerbaar is.

Nu is

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ als } c < x \leq b, \text{ dus } f'_r(c) = \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

en

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ als } a \leq x < c, \text{ dus } f'_l(c) = \lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Aangezien $f'(c) = f'_r(c) = f'_l(c)$, is $f'(c) = 0$.

ad (iii): Pas (ii) toe op de functie $-f$. □

4.5.2. Opmerking

De voorwaarde dat f differentieerbaar is op (a,b) is noodzakelijk in de stelling van Rolle.

De functie $g: [-1,1] \rightarrow [0,1]$ gedefinieerd door $g(x) = |x|$ voldoet, op de differentieerbaarheid in 0 na, aan de voorwaarden van de stelling van Rolle. g' is echter nergens 0.

Ook de continuïteit in de eindpunten kan niet gemist worden, zoals blijkt uit het voorbeeld $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ met $h(x) = x$ voor $0 \leq x < 1$ en $h(1) = 0$.

De stelling van Rolle is een bijzonder geval van de volgende stelling.

4.5.3. Middelwaardestelling

Zij f een continue reële functie op $[a,b]$, welke differentieerbaar is op (a,b) .

Dan is er een $c \in (a,b)$ met $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Bewijs

We moeten laten zien dat er een $c \in (a,b)$ is zó dat de raaklijn t aan de grafiek van f in $(c, f(c))$ (zie 4.1.4) evenwijdig is aan de verbindingslijn v tussen $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$.

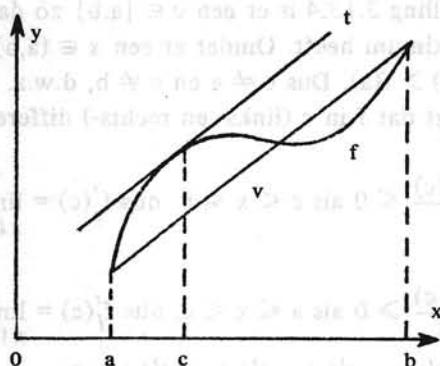
We herleiden de middelwaardestelling tot de stelling van Rolle. De vergelijking van v wordt gegeven door:

$$y = v(x) = f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zij $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\varphi(x) = f(x) - v(x)$. Dan is φ continu op $[a,b]$. Ook is $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Omdat φ differentieerbaar is op (a,b) is er volgens de stelling van Rolle een punt $c \in (a,b)$ met $\varphi'(c) = 0$.

Dan geldt:

$$f'(c) = v'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$



De middelwaardestelling wordt vaak toegepast in de volgende vorm.

4.5.4. Stelling

Zij f een continue reële functie op $[a,b]$, die differentieerbaar is op (a,b) .

Als x_1 en $x_2 \in [a,b]$, $x_1 \neq x_2$, dan is er een ξ tussen x_1 en x_2 zó dat $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$.

Bewijs

Voor $x_1 < x_2$ volgt de stelling uit de middelwaardestelling toegepast op $[x_1, x_2]$.

Voor $x_2 < x_1$ volgt de stelling uit de middelwaardestelling toegepast op $[x_2, x_1]$. □

Later zal dit resultaat gegeneraliseerd worden in de stelling van Taylor (4.7.6).

De volgende stellingen zijn toepassingen van de middelwaardestelling.

4.5.5. Stelling

Zij f een continue reële functie op $[a,b]$, die differentieerbaar is op (a,b) .

Als $f'(x) = 0$ voor iedere $x \in (a,b)$, dan is f constant op $[a,b]$.

Bewijs

Kies in stelling 4.5.4 $x_1 = a$ en $x_2 = x \in (a,b)$.

Dan is $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$ voor geschikte $\xi \in (a,x)$.

Omdat $f'(\xi) = 0$, geldt $f(x) = f(a)$ voor alle $x \in (a,b)$. □

4.5.6. Stelling

Zij f een continue reële functie op $[a,b]$, die differentieerbaar is op (a,b) .

Dan geldt:

- a) Als $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f strikt stijgend op $[a,b]$;
- b) Als $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f stijgend op $[a,b]$;
- c) Als $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f dalend op $[a,b]$;
- d) Als $f'(x) < 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f strikt dalend op $[a,b]$.

Bewijs

We bewijzen alleen a). Ga de andere gevallen zelf na.

Volgens stelling 4.5.4 geldt voor alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ met $x_1 \neq x_2$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ voor geschikte ξ tussen x_1 en x_2 .

Als $x_1 < x_2$, dan is het rechterlid positief. Dan ook $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Dus $f(x_1) < f(x_2)$. □

4.5.7. Voorbeelden

a) Dit voorbeeld laat zien dat de omkering van stelling 4.5.6a niet geldt.

$f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = x^3$.

$f'(0) = 0$. Toch is f strikt stijgend op $[-1,1]$. Dit volgt uit het feit dat

f strikt stijgend is op de intervallen $[-1,0]$ en $[0,1]$, zoals men door

toepassing van stelling 4.5.6a kan aantonen.

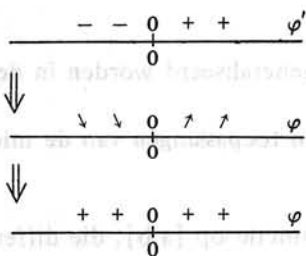
b) $e^x > 1 + x$ voor alle $x \neq 0$.

Bij het bewijs van deze ongelijkheid gebruiken we dat $e^x < 1$ voor alle $x < 0$ en $e^x > 1$ voor alle $x > 0$.

We beschouwen de functie φ gedefinieerd door $\varphi(x) = e^x - 1 - x$.

Dan is $\varphi(0) = 0$ en $\varphi'(x) = e^x - 1$. Hieruit volgt dat $\varphi'(x) < 0$ voor alle $x < 0$ en $\varphi'(x) > 0$ voor alle $x > 0$. met behulp van stelling 4.5.6 vinden we hieruit dat φ strikt stijgend is op $[0, \infty)$ en dat φ strikt dalend is op $(-\infty, 0]$. Omdat $\varphi(0) = 0$, volgt hieruit dat $\varphi(x) > 0$ voor alle $x \neq 0$. Hiermee is de ongelijkheid bewezen.

Schematisch:



c) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ voor alle $x > 0$;

$e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}$ voor alle $x < 0$.

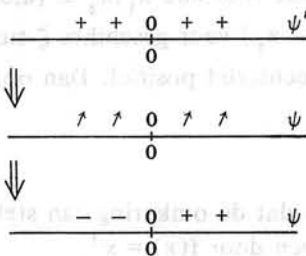
Om dit aan te tonen beschouwen we

$$\psi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

Dan is $\psi(0) = 0$ en $\psi'(x) = e^x - 1 - x$. In verband met b) volgt hieruit dat $\psi'(x) > 0$ voor alle $x \neq 0$. Hieruit volgt dat ψ strikt stijgend is op \mathbb{R} (ψ is nl. strikt stijgend op $(-\infty, 0]$ en op $[0, \infty)$ op grond van stelling 4.5.6a.

Dus $\psi(x) < 0$ voor alle $x < 0$ en $\psi(x) > 0$ voor alle $x > 0$, waaruit het gestelde volgt.

Schematisch:



4.5.8. Opmerking

We merken op dat de stellingen 4.5.5 en .6 alleen op een *interval* geldig zijn. Zo heeft de functie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{1}{x}$ voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ een afgeleide $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, maar toch is $f(x)$ niet strikt dalend op $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, wel op de intervallen $(-\infty, 0)$ en $(0, \infty)$.

We hebben gezien (bijvoorbeeld bij oefening 4.1.4) dat de (rechter-)afgeleide en de (rechter-)limiet van de afgeleide niet altijd dezelfde uitkomst geven. De volgende stelling, een toepassing van de middelwaardestelling, geeft echter aan dat in geval f (rechts-)continu is in a en de (rechter-)limiet van de afgeleide bestaat, deze gelijk is aan de (rechter-)afgeleide.

4.5.9. Stelling

Zij $f: [a, a+r) \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar op $(a, a+r)$ en rechtscontinu in a . Als $\lim_{x \downarrow a} f'(x)$ bestaat, dan is f rechtsdifferentieerbaar in a met rechterafgeleide $f'_r(a) = \lim_{x \downarrow a} f'(x)$.

Bewijs

Noem $\lim_{x \downarrow a} f'(x) = L$. Zij $\epsilon > 0$. Er is een $\delta > 0$ zó dat voor alle t met $a < t < a + \delta$ geldt $|f'(t) - L| < \epsilon$. Zij nu $a < x < a + \delta$. Omdat f continu is op $[a, x]$ en differentieerbaar op (a, x) is er volgens de middelwaardestelling een ξ tussen a en x met $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$.

Maar uit $a < \xi < x < a + \delta$ volgt $|f'(\xi) - L| < \epsilon$. Voor iedere x met $a < x < a + \delta$ is dus

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| < \epsilon,$$

d.w.z.

$$f'_r(a) = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L. \quad \square$$

4.5.10. Opmerkingen

- a) Analoge uitspraken gelden met betrekking tot de linkerafgeleide en de linkerlimiet van de afgeleide, en ten aanzien van de afgeleide en de limiet van de afgeleide.
- b) Uit stelling 4.5.9 en opmerking a) volgt dat $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a)$ (als aan de voorwaarden is voldaan), dat wil zeggen dat f' continu is in a . Er geldt dus: de afgeleide f' van een in een r -omgeving van a differentieerbare functie f , is continu in a dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ bestaat. De situatie, die zich voor willekeurige functies wel kan voordoen, namelijk dat $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ bestaat maar niet gelijk is aan $g(a)$, komt bij een afgeleide blijkbaar nooit voor!

- c) Een waarschuwing is op zijn plaats. Er bestaan functies (zie voorbeeld 4.2.6d), die wel differentieerbaar zijn in een r -omgeving van a , maar waarvoor f' niet continu is in a omdat (en dat is de enige mogelijkheid) $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ niet bestaat. Stelling 4.5.9 kan dus niet worden omgekeerd, dat wil zeggen, uit het feit dat $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ niet bestaat mag men dus *niet* concluderen dat f niet differentieerbaar is in a .

Oefeningen

1. Voor alle $x > 0$ geldt $\sin x < x$. Toon dit aan.
2. Laat zien dat $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$ voor alle $x > 0$.
3. Bewijs: $\arctan x < x$ voor alle $x > 0$,
 $\arcsin x > x$ voor $0 < x \leq 1$.
4. Bewijs: $\arcsin \frac{1}{x} = 2 \arctan(x - \sqrt{x^2 - 1})$ voor alle $x \geq 1$,
 $\arcsin \frac{1}{x} = 2 \arctan(x + \sqrt{x^2 - 1})$ voor alle $x \leq -1$.

4.6. Extreme waarden en grafieken

4.6.1. Stationair punt

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Een inwendig punt a van D heet *stationair punt* van f als f differentieerbaar is in a met afgeleide $f'(a) = 0$.

De volgende stelling speelt een rol bij het bepalen van extreme waarden.

4.6.2. Stelling

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Als f in een inwendig punt a van D een (lokaal of globaal) extreem heeft en f is differentieerbaar in a , dan is a een stationair punt van f .

Bewijs

We mogen aannemen dat f in a een lokaal maximum heeft. Omdat a een inwendig punt is van D is er een $U_r(a) \subset D$ zó, dat voor alle $x \in U_r(a)$ geldt: $f(x) \leq f(a)$.

Dan is

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \text{ als } a < x < a + r, \text{ en } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \text{ als } a - r < x < a.$$

Net als in het bewijs van de stelling van Rolle (4.5.1) volgt hieruit dat $f'(a) = 0$. \square

4.6.3. Gevolg voor het bepalen van extreme waarden

Uit stelling 4.6.2 blijkt dat men zich bij het opsporen van de extreme waarden van een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ kan beperken tot een nader onderzoek van

- (i) de niet-inwendige punten van D ('randpunten'),
- (ii) de inwendige punten van D waar f niet differentieerbaar is,
- (iii) de stationaire punten van f .

Stellingen 4.6.4 en 4.6.6, die men met weinig moeite uit 4.5.6 kan afleiden, geven soms uitsluitel omtrent het gedrag van f in de gevallen (ii) en (iii).

4.6.4. Stelling omtrent de tekenwisseling van f'

Laat $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn in een inwendig punt a van D en differentieerbaar zijn in een gereduceerde omgeving $U_r(a)$ van a .

Als $f'(x) \geq 0$ voor $a-r < x < a$ en $f'(x) \leq 0$ voor $a < x < a+r$ dan heeft f in a een lokaal maximum.

Als $f'(x) \leq 0$ voor $a-r < x < a$ en $f'(x) \geq 0$ voor $a < x < a+r$ dan heeft f in a een lokaal minimum.

4.6.5. Opmerking

Voor de toepasbaarheid van stelling 4.6.4 is het niet nodig dat f differentieerbaar is in a , maar wel dat f continu is in a .

Als f niet continu is in a dan bestaat er geen enkel verband tussen tekenwisseling van de afgeleide en het optreden van lokale extremen, zie 4.6.7.

4.6.6. Stelling

Zij a een inwendig punt van D en laat $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in een r -omgeving $U_r(a)$ van a tweemaal differentieerbaar zijn.

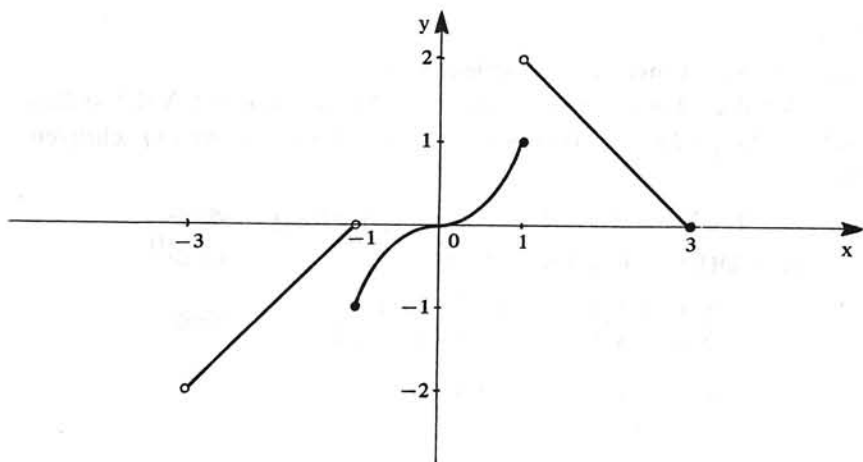
Als $f'(a) = 0$ en $f''(x) < 0$ voor alle $x \in U_r(a)$ dan heeft f in a een lokaal maximum.

Als $f'(a) = 0$ en $f''(x) > 0$ voor alle $x \in U_r(a)$ dan heeft f in a een lokaal minimum.

4.6.7. Voorbeeld

$f: (-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{als } -3 < x < -1, \\ x^3 & \text{als } -1 \leq x \leq 1, \\ -x+3 & \text{als } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$



Het enige randpunt is 3; $f(3) = 0$ is een lokaal minimum.
Inwendige punten waar f niet differentieerbaar (en zelfs niet continu) is, zijn de punten -1 en $+1$.

$f(-1) = -1$ is een lokaal minimum (f' wisselt bij -1 niet van teken!).

$f(1) = 1$ is geen extreme waarde (f' wisselt bij 1 wel van teken!).

Het enige stationaire punt is 0 ; $f(0) = 0$ is geen extreme waarde.

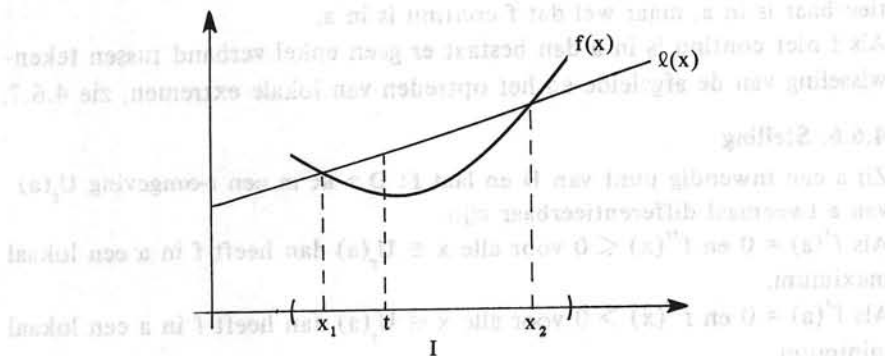
Er zijn geen globale extremen.

4.6.8. Convex en concaaf

- a) Een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heet *convex* op een interval $I \subset D$ als voor alle $x_1, x_2 \in I$ met $x_1 < x_2$ en voor alle λ met $0 \leq \lambda \leq 1$ geldt

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (*)$$

Grafisch betekent dit dat voor $x_1 < t < x_2$ het punt $(t, f(t))$ moet liggen onder of op de lijn ℓ , die de punten $(x_1, f(x_1))$ en $(x_2, f(x_2))$ verbindt.



- b) We tonen aan dat f convex is op I dan en slechts dan als voor alle $x_1, x_2, t \in I$ met $x_1 < t < x_2$ geldt

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t} \quad (**)$$

Bewijs

Neem $x_1, x_2 \in I$ met $x_1 < x_2$ willekeurig.

Voor $\lambda = 0$ en $\lambda = 1$ is aan (*) triviaal voldaan. Voor $0 < \lambda < 1$ stellen we $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 = t$. Dan is $x_1 < t < x_2$ en kunnen we (*) schrijven als

$$\begin{aligned} (1-\lambda + \lambda)f(t) &\leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) && \Leftrightarrow \\ (1-\lambda)(f(t) - f(x_1)) &\leq \lambda(f(x_2) - f(t)) && \Leftrightarrow (1) \end{aligned}$$

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(t)}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t}$$

Bij (1) hebben we beide leden gedeeld door $\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)$. \square

c) Is f differentieerbaar op I dan geldt de volgende bewering:

f' is stijgend op $I \Rightarrow f$ is convex op I .

Bewijs

Volgens de middelwaardstelling 4.5.3 bestaan er bij x_1, x_2 en t in b) een ξ en een η zó dat

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} = f'(\xi) \quad \text{en} \quad \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t} = f'(\eta),$$

met $x_1 < \xi < t < \eta < x_2$.

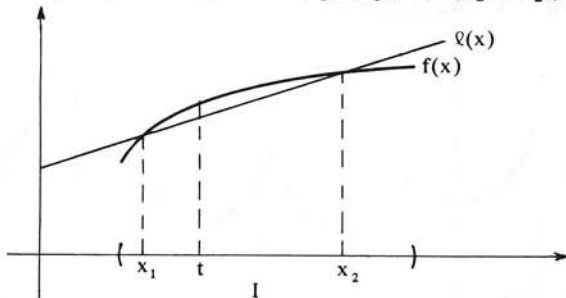
Omdat f' stijgend is, volgt $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, zodat aan (***) is voldaan. \square

d) Gevolg: Is $f''(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$, dan is f' stijgend op I en is dus f convex op I .

e) Een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heet *concaaf* op een interval $I \subset D$ als voor alle $x_1, x_2 \in I$ met $x_1 < x_2$ en voor alle λ met $0 \leq \lambda \leq 1$ geldt

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Grafisch betekent dit dat voor $x_1 < t < x_2$ het punt $(t, f(t))$ moet liggen boven of op de lijn ℓ , die de punten $(x_1, f(x_1))$ en $(x_2, f(x_2))$ verbindt.



Analoog aan c) en d) geldt:

(i) f' is dalend op $I \Rightarrow f$ is concaaf op I ,

(ii) $f''(x) \leq 0$ voor alle $x \in I \Rightarrow f$ is concaaf op I .

4.6.9. Asymptoten

a) Verticale asymptoot.

We noemen de lijn met vergelijking $x = a$ een *verticale asymptoot* van f voor $x \downarrow a$, als $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = -\infty$. Analoog voor $x \uparrow a$.

b) Horizontale en scheve asymptoten.

We noemen de lijn met vergelijking $y = px + q$ een *horizontale* ($p = 0$) of een *scheve* ($p \neq 0$) *asymptoot* van f voor $x \rightarrow \infty$, als

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - px - q) = 0. \quad \text{Analoog voor } x \rightarrow -\infty.$$

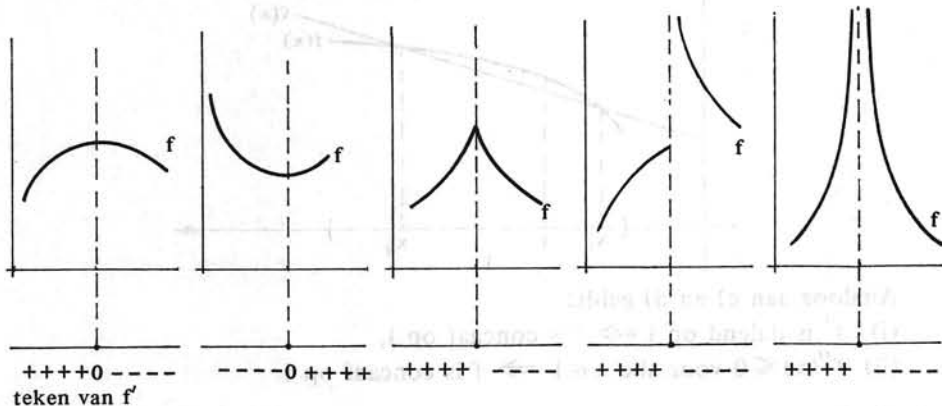
Om een eventuele horizontale of scheve asymptoot voor $x \rightarrow \infty$ te vinden beschouwen we $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$. Bestaat deze limiet en is deze p , dan berekenen we $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - px)$. Bestaat deze limiet en is deze q , dan is $y = px + q$ de gezochte asymptoot. Ook kan men gebruik maken van vraagstuk 4.12.34.

4.6.10. Aanwijzingen voor het tekenen van grafieken

In 1.12.7 is reeds uiteengezet wat we onder een grafiek van $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ verstaan. Bij het tekenen van grafieken lette men op de volgende punten.

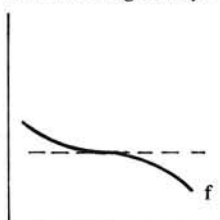
- Het definitiegebied D , in het bijzonder punten, die een bijzondere positie innemen t.o.v. D , zoals randpunten en punten waar verticale asymptoten kunnen optreden.
- Snijpunten met de assen.
- Symmetrie t.o.v. de y -as (even functie) of symmetrie t.o.v. het punt 0 (oneven functie).
- Het tekenverloop van f .
- Lokale en globale maxima en minima.
- Het tekenverloop van f' .

In de onderstaande figuurtjes zijn enkele mogelijke gevolgen van tekenwisseling van f' in beeld gebracht.



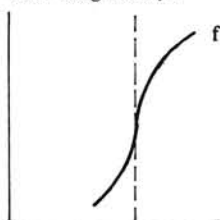
- Het tekenverloop van f'' . Een tekenwisseling van f'' correspondeert volgens 4.6.8 met de overgang van een convex deel van de grafiek naar een concaaf deel of omgekeerd. Dit leidt tot een *buigpunt* indien in het betreffende punt a de afgeleide $f'(a)$ bestaat of ook indien f continu is in a en $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm \infty$ (buigpunt met verticale raaklijn).
Onderstaande figuurtjes geven enige mogelijke gevolgen weer van tekenwisseling van f'' .

buigpunt met horizontale buigraaklijn



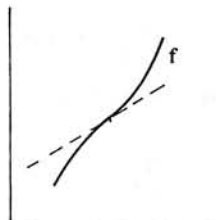
++++0----
teken van f''

buigpunt met verticale buigraaklijn



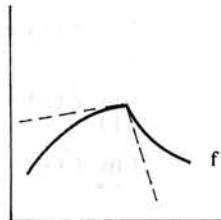
++++ ----

buigpunt



----0++++

geen buigpunt



---- +++++

h) Gedrag van $f(x)$ voor $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$ (horizontale asymptoten, scheve asymptoten).

i) Gedrag van f' in de buurt van randpunten.

Opmerking

Met de hier gegeven aanwijzingen is het tekenen van grafieken *niet* uitputtend behandeld. Met name is geen aandacht besteed aan de invloed van hogere afgeleiden dan de tweede afgeleide.

4.6.11. Voorbeelden

a) De grafiek van f gegeven door $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. f is een even functie.

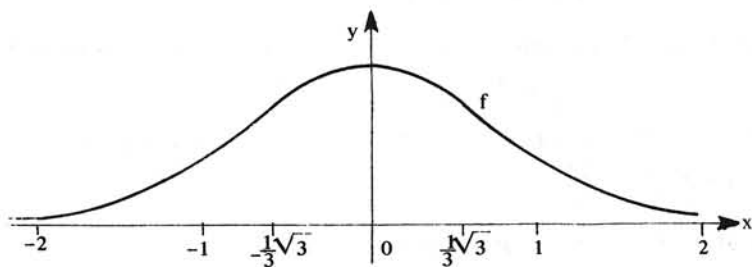
$f(x) > 0$ voor alle x en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. De x -as is dus een horizontale asymptoot. Het snijpunt met de y -as is $(0,1)$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{en} \quad f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

Tekenverloop f' : $\frac{++++ \quad ----}{0}$

Tekenverloop f'' : $\frac{++++ \quad ---- \quad +++++}{-\frac{1}{3}\sqrt{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3}\sqrt{3}}$

De punten in de grafiek corresponderend met $x^2 = \frac{1}{3}$ zijn buigpunten.



b) De grafiek van f gegeven door $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2 - 3x)(\sqrt[3]{x})^{-1}(\sqrt[3]{1-x})^{-2} \quad \text{voor } x \neq 0 \text{ en } x \neq 1.$$

Tekenverloop van f' : $\frac{- - - | + + + + + | 0 - - - | - - -}{0 \quad \frac{2}{3} \quad 1}$

$$\lim_{x \uparrow 0} f'(x) = -\infty ; \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \uparrow 1} f'(x) = -\infty ; \lim_{x \downarrow 1} f'(x) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = -1 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -1 .$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(\sqrt[3]{x})^{-4}(\sqrt[3]{1-x})^{-5} \text{ voor } x \neq 0 \text{ en } x \neq 1.$$

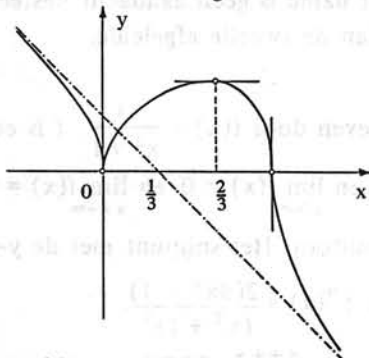
Tekenverloop van f'' : $\frac{- - | - - - - - - - | + +}{0 \quad 1}$

$f(0) = 0$ is een lokaal minimum; $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{4}$ is een lokaal maximum.

De grafiek heeft in $(1,0)$ een buigpunt met verticale buigraaklijn.

De lijn $y = -x + \frac{1}{3}$ is scheve asymptoot (zowel voor $x \rightarrow \infty$ als voor

$x \rightarrow -\infty$), want $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}) = \frac{1}{3}$ (zie vraagstuk 4.12.35e).



4.6.12. Toepassing op problemen uit de praktijk

- a) Men wil een cilindervormige bus zó ontwerpen dat het volume V is, terwijl de oppervlakte minimaal is. Hoe moeten hoogte en diameter gekozen worden?

Oplossing

Bij diameter d en hoogte h is $V = \frac{1}{4} \pi d^2 h$.

Oppervlakte bus = opp. grondvlak + opp. bovenvlak + opp. mantel =
 $= \frac{1}{2} \pi d^2 + \pi d h = \frac{1}{2} \pi d^2 + \frac{4V}{d} = f(d)$.

Om de stationaire punten van f te bepalen beschouwen we f' :

$$f'(d) = \frac{\pi}{d^2} (d^3 - \frac{4V}{\pi}).$$

f heeft een stationair punt voor $d = h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

Uit het tekenonderzoek van f' blijkt dat f een minimum heeft voor $d = h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

- b) De stroomkosten per uur van een tram zijn evenredig met het kwadraat van de snelheid. Deze kosten zijn $f25,-$ per uur bij een snelheid van

25 km/uur. De overige kosten (personeel, onderhoud, e.d.) zijn f100,= per uur. Bij welke snelheid zijn de kosten per km minimaal?

Oplossing

Zij v de snelheid van de tram.

De stroomkosten per uur bij snelheid v zijn cv^2 .

Om c te bepalen substitueren we $v = 25$; $c \cdot 625 = 25$. Dus $c = \frac{1}{25}$.

De kosten per km bij snelheid v zijn gegeven door

$$k(v) = \frac{\text{kosten per uur}}{\text{snelheid}} = \frac{v}{25} + \frac{100}{v}.$$

$$k'(v) = 0 \text{ voor } v = 50.$$

De grafiek van k laat zien dat k een minimum heeft voor $v = 50$.

Vraag: Wat zal het effect zijn van stijgende personeelskosten op de snelheid, waarbij de kosten per km minimaal zijn? Kunt U dit direct beredeneren?

c) Brekingswet van Snellius.

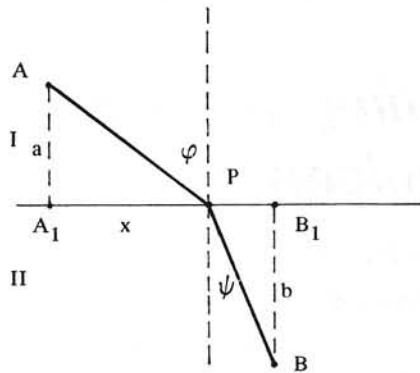
A en B zijn vaste punten in medium I, resp. medium II.

De snelheid in I is v_1 m/sec

en die in II is v_2 m/sec.

Laat zien dat de snelste weg van A naar B (gevolgd door de lichtstraal van A naar B) bepaald wordt door

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{v_1}{v_2} = n \text{ (breekingsindex).}$$



Oplossing

Noem $A_1B_1 = l$ en $A_1P = x$. Dan is $PB_1 = l - x$ (zie figuur).

Noem $AA_1 = a$ en $BB_1 = b$.

De tijd nodig om de weg APB af te leggen is

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}{v_2}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$\text{Dan is } \frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (l - x)^2}}. \quad (*)$$

Voor $x = 0$ is $\frac{dt}{dx} < 0$ en voor $x = l$ is $\frac{dt}{dx} > 0$. De vergelijking $\frac{dt}{dx} = 0$ heeft dus wegens (3.12.2) tenminste één wortel op $[0, l]$.

$$\text{Nu is } \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{a^2}{v_1 \sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{v_2 \sqrt{(b^2 + (l - x)^2)^3}} > 0.$$

$\frac{dt}{dx}$ is dus strikt stijgend op $[0, l]$ en heeft dus maar één nulpunt op $[0, l]$.

In dit nulpunt heeft de functie t een globaal minimum.

Uit (*) volgt dat bij $\frac{dt}{dx} = 0$ geldt: $\frac{\sin \varphi}{v_1} = \frac{\sin \psi}{v_2}$.

Oefeningen

- $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.
Bepaal de extreme waarde(n) van f .
- Gegeven is de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met het voorschrift $f(x) = -x + 4 \arctan x$.
 - Toon aan dat f oneven is.
 - Bepaal de extremen van f .
 - Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het buigpunt van f .
 - Bepaal eventuele asymptoten.
 - Schets de grafiek van f .
- Teken de grafiek van $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x - \sqrt{2|x|}$.

Stelling van Taylor en haar gevolgen

4.7. Stelling van Taylor

4.7.1. Inleiding

De stelling van Taylor is een zeer belangrijk hulpmiddel om het gedrag van een functie f in de buurt van een bepaald punt a te onderzoeken. Men benadert daarbij f door het polynoom van de graad n , dat in een omgeving van a zo goed mogelijk bij de functie f aansluit. We zijn dan tevens in staat een schatting van de fout aan te geven, die optreedt als men f door dit polynoom benadert. Naast vele andere toepassingen (bijvoorbeeld foutschattingen in de numerieke wiskunde) kan de stelling van Taylor ook worden gebruikt om limieten te berekenen.

We beginnen deze paragraaf met een generalisatie van de middelwaardestelling.

4.7.2. Middelwaardestelling voor 2 functies

Laat de functies $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn op $[a, b]$ en differentieerbaar zijn op (a, b) , terwijl $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a, b)$.

Dan is er een punt $\xi \in (a, b)$ zó dat

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bewijs

Met de middelwaardestelling 4.5.3 volgt uit $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a, b)$ dat $g(a) \neq g(b)$. We maken nu op een handige manier een hulpfunctie φ , waarop de stelling van Rolle (4.5.1) kan worden toegepast.

We definiëren $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\varphi(x) = f(x) + pg(x), \quad p \in \mathbb{R}.$$

Dan is φ continu op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) , zoals uit de gegevens over f en g volgt. We bepalen de constante p nu zó dat $\varphi(a) = \varphi(b)$. Dit levert

$$f(a) + pg(a) = f(b) + pg(b) \iff p = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Volgens de stelling van Rolle is er dan een $\xi \in (a, b)$ met $\varphi'(\xi) = 0$, zodat

$$f'(\xi) + pg'(\xi) = 0$$

of

$$p = -\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Door beide uitkomsten voor p te combineren volgt de stelling. \square

De volgende stelling speelt een belangrijke rol bij het bewijs van de stelling van Taylor, maar geeft op zichzelf informatie over hogere orde extremen en buigpunten.

4.7.3. Stelling

Zij I een open interval en $a \in I$.

Laat $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -maal differentieerbaar zijn op I , terwijl $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$.

Dan is er voor iedere $x \in I \setminus \{a\}$ een ξ tussen a en x zó dat

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Bewijs

We nemen aan dat $x > a$. Het geval $x < a$ gaat analoog.

Noem $g(x) = (x-a)^{n+1}$.

Uit stelling 4.7.2, toegepast op het interval $[a, x]$, volgt het bestaan van een $x_1 \in (a, x)$ zó dat

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Op dezelfde wijze vinden we een $x_2 \in (a, x_1)$ met

$$\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{f'(x_1) - f'(a)}{g'(x_1) - g'(a)} = \frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}.$$

Zo doorgaande vinden we tenslotte een $x_{n+1} \in (a, x_n)$ met

$$\frac{f^{(n)}(x_n)}{g^{(n)}(x_n)} = \frac{f^{(n)}(x_n) - f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(x_n) - g^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{g^{(n+1)}(x_{n+1})}.$$

We merken hierbij op dat voor $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ geldt

$$g^{(k)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} (x-a)^{n+1-k},$$

zodat inderdaad $g^{(k)}(x) \neq 0$ op $I \setminus \{a\}$ en $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0$.
 Bijgevolg is (met $\xi = x_{n+1}$)

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \quad \square$$

4.7.4. Gevolg

Als f $(n+1)$ -maal continu differentieerbaar is in een r -omgeving $U_r(a)$ en er geldt:

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$$

en

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0,$$

dan heeft f in dit stationaire punt (van hogere orde als $n > 1$)

- (i) een buigpunt (van hogere orde) als n even is;
- (ii) een lokaal maximum als n oneven is en $f^{(n+1)}(a) < 0$;
- (iii) een lokaal minimum als n oneven is en $f^{(n+1)}(a) > 0$.

Bewijs

De functie h met $h(x) = f(x) - f(a)$ voldoet aan de voorwaarden van stelling 4.7.3. Omdat $h^{(n+1)}$ continu is en $h^{(n+1)}(a) \neq 0$ is er een δ -omgeving van a zó dat voor alle $x \in U_\delta(a)$ geldt: $h^{(n+1)}(x) \neq 0$ en tekenvast.

Passen we stelling 4.7.3 toe dan krijgen we

$$h(x) = f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Is $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), dan is $f(x) - f(a)$ dus niet tekenvast op $U_\delta(a)$, omdat $\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}$ tekenvast blijft en $(x-a)^{2k+1}$ van teken verwisselt.

In dat geval heeft f in a geen extreem maar een zogenaamd *buigpunt van hogere orde*.

Is $n = 2k+1$ en $f^{(2k+2)}(a) < 0$, dan is voor alle $x \in U_\delta(a)$ $f^{(2k+2)}(x) < 0$ en

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!} (x-a)^{2k+2} \leq f(a),$$

dus f heeft een lokaal maximum in a .

Het geval $n = 2k+1$ en $f^{(2k+2)}(a) > 0$ leidt op analoge wijze tot een lokaal minimum in a . □

4.7.5. Taylorpolynoom

Laat f in een r -omgeving $U_r(a)$ van a tenminste n -maal differentieerbaar zijn. We zoeken een polynoom $t_n(x)$ van graad $\leq n$, dat voldoet aan de volgende $(n+1)$ voorwaarden:

$$t_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad (0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}).$$

Schrijven we

$$t_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$$

dan levert de voorwaarde $t_n(a) = f(a)$ direct:

$$c_0 = f(a).$$

Differentiëren we $t_n(x)$ k maal ($1 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$), dan is (ga dit na!)

$$t_n^{(k)}(a) = c_k k!,$$

zodat de voorwaarde $t_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ levert

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad (1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}).$$

Het polynoom

$$t_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

heeft dus de eigenschap dat

$$t_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad (0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}),$$

en

$$t_n^{(k)}(x) = 0, \quad \text{voor alle } x \text{ als } k > n.$$

We noemen het polynoom $t_n(x)$ het *Taylorpolynoom van de index n van f in a* .

Men gebruikt het Taylorpolynoom om een functie in de buurt van een punt a te benaderen. De fout die men hierbij maakt is

$$R_n(x) = f(x) - t_n(x).$$

De volgende stelling verschaft de mogelijkheid om de grootte van deze fout te schatten.

4.7.6. Stelling (Taylor)

Zij I een open interval en $a \in I$. Laat $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -maal differentieerbaar zijn en zij $t_n(x)$ het Taylorpolynoom van de index n van f in het punt a .

Dan geldt:

Voor iedere $x \in I \setminus \{a\}$ bestaat er een ξ tussen a en x zó dat

$$f(x) = t_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Bewijs

De functie R_n met $R_n(x) = f(x) - t_n(x)$, is $(n+1)$ -maal differentieerbaar op I . Uit 4.7.5 volgt:

$$R_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - t_n^{(k)}(a) = 0 \quad \text{als } 0 \leq k \leq n.$$

Volgens stelling 4.7.3 is er dus een ξ tussen a en x zó dat

$$R_n(x) = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Nu is $R_n^{(n+1)} = f^{(n+1)} - t_n^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, zie 4.7.5.

Dus

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \quad \square$$

4.7.7. Opmerkingen

a) De in stelling 4.7.6 bewezen formule

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

wordt de *formule van Taylor* genoemd. $R_n(x)$ heet de *restterm*. Men spreekt ook van de *Taylorontwikkeling met restterm van f in het punt a* .

b) De restterm in de vorm

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

heet de *restterm van Lagrange*. Er zijn ook andere schrijfwijzen voor $R_n(x)$ bekend (zie 5.8.7). De in bovenstaande formule optredende ξ hangt zowel van x als van n af.

c) De formule van Taylor met $a=0$ wordt vaak de *formule van Mac Laurin* genoemd:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

waarbij $0 < \vartheta < 1$.

Men spreekt ook van de *Mac Laurin-ontwikkeling met restterm*.

d) Het Taylorpolynoom van de index 1 van f in a

$$t_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

is het voorschrift van de linearisering van f in a .

Met de restterm $R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)^2$ kan men de fout schatten

die men maakt, wanneer men f door zijn linearisering in het punt a vervangt (mits f in een omgeving van a tweemaal continu differentieerbaar is). Merk op dat $R_1(a) = 0$.

$t_1(x)$ stelt de raaklijn aan de grafiek van f in $(a, f(a))$ voor.

Is $f''(x) > 0$ op een interval I en $a \in I$ willekeurig, dan volgt dat

$R_1(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$. De grafiek van f ligt dan boven elk van zijn raaklijnen.

Is $f''(x) < 0$ op een interval I en $a \in I$ willekeurig, dan volgt dat $R_1(x) \leq 0$ voor alle $x \in I$. De grafiek van f ligt dan onder elk van zijn raaklijnen.

4.7.8. Voorbeelden

a) Bereken $65^{1/3}$ met behulp van de linearisering van $x^{1/3}$ in 64.

Geef een schatting van de fout.

Volgens de formule van Taylor is

$$x^{1/3} = 64^{1/3} + (x - 64) \frac{1}{3} 64^{-2/3} + (x - 64)^2 \left(-\frac{2}{9}\right) \frac{(\xi)^{-5/3}}{2},$$

waarbij ξ tussen 64 en x ligt.

Voor $x = 65$ vinden we:

$$65^{1/3} = 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9} \xi^{-5/3}, \quad (64 < \xi < 65).$$

Nu is $5^{-5} = 125^{-5/3} < 65^{-5/3} < \xi^{-5/3} < 64^{-5/3} = 4^{-5}$,

zodat $4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9 \cdot 4^5} < 65^{1/3} < 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9 \cdot 5^5}$,

dus $4,0207 < 65^{1/3} < 4,0208$.

b) Bepaal $h > 0$ zó dat voor alle $x \in (-h, h)$ geldt

$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + R$, waarbij $|R| < 0,001$.

Volgens de formule van Mac Laurin (met $n = 4$) is

$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{\cos(\vartheta x)}{120} x^5$ voor zekere $\vartheta \in (0, 1)$.

Immers $\sin(0) = \sin^{(2)}(0) = \sin^{(4)}(0) = 0$,

$\sin^{(1)}(0) = 1$, $\sin^{(3)}(0) = -1$ en $\sin^{(5)}(x) = \cos x$.

Voor $|x| < h$ is

$$|R| = \left| \frac{\cos(\vartheta x)}{120} x^5 \right| < \frac{h^5}{120}.$$

Een geschikte waarde van h is dus $h = \sqrt[5]{0,12} \approx 0,65$.

Voor $|x| < 0,65$ ($\approx 37^\circ$) is de fout kleiner dan 0,001.

Oefeningen

Bepaal h zó dat voor alle $x \in (-h, h)$ geldt

1. $\sin x = x + R$, waarbij $|R| < 0,001$.

2. $\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + R$, waarbij $|R| < 0,001$.

3. Bepaal het Taylorpolynoom van de index 3 in het punt 1 en de restterm van Lagrange R_3 van de functies

a) $x \rightarrow \sqrt{1 + x^2}$,

b) $x \rightarrow x \ln x$.

4. Geef de eerste vier (van nul verschillende) termen van de Taylorontwikkeling in het punt 1 (zonder restterm) van de functies

a) $x \rightarrow x \cos(x - 1)$,

b) $x \rightarrow \ln \frac{x}{x+1} + \ln 2$.

4.8. Het O-symbool van Landau. Standaard Taylorontwikkelingen

4.8.1. Snelheid waarmee een functie naar 0 nadert

Als $x \downarrow 0$ gaan \sqrt{x} , x^2 , $e^{-1/x}$ en $5\sqrt{x} - 2x$ allemaal naar 0, maar er bestaan belangrijke verschillen in de "snelheid" waarmee ze naar 0 naderen.

Is bijvoorbeeld $x = 0,01$, dan is $\sqrt{0,01} = 0,1$, $(0,01)^2 = 0,0001$,

$$e^{-\frac{1}{0,01}} = 3,72 \cdot 10^{-44} \text{ en } 5\sqrt{0,01} - 2(0,01) = 0,48.$$

Laten we voorlopig aannemen dat $f(x) > 0$ en $g(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^+$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} g(x) = 0$.

We zeggen

(i) $g(x)$ gaat sneller naar 0 dan $f(x)$ als $\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$;

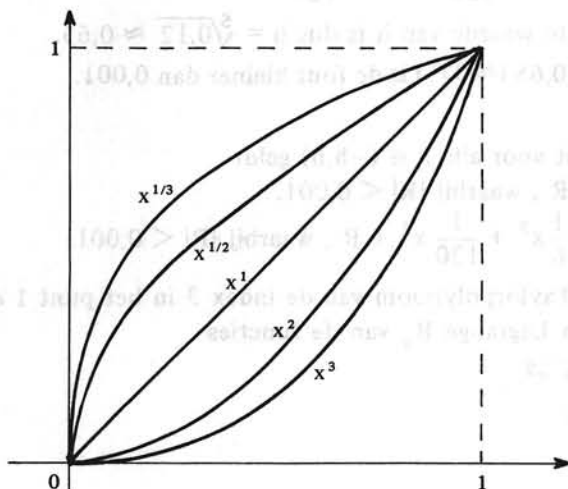
(ii) $f(x)$ gaat sneller naar 0 dan $g(x)$ als $\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

(iii) $f(x)$ en $g(x)$ gaan met vergelijkbare snelheid naar 0 als

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty.$$

Zo gaat $e^{-\frac{1}{x}}$ sneller naar 0 dan x^2 , want

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 e^{-u} = 0.$$



x^2 gaat sneller naar 0 dan \sqrt{x} , want $\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = 0$.

\sqrt{x} en $5\sqrt{x} - 2x$ gaan met vergelijkbare snelheid naar 0, want

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{5\sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}} = 5.$$

Als $p > 0$ dan nadert x^p sneller naar 0 als $x \downarrow 0$, naarmate men een grotere waarde van p kiest; hoe groter p , hoe kleiner x^p als x dichtbij 0 ligt.

4.8.2. Als het quotiënt begrensd blijft

We willen nu de situatie iets algemener bekijken. We zullen niet alleen de voorwaarde $f(x) > 0$ en $g(x) > 0$ laten vallen, maar bovendien $x \rightarrow a$ nemen in plaats van $x \downarrow 0$. Zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Als $\frac{f(x)}{g(x)}$ in een gereduceerde omgeving van a begrensd is, dat wil zeggen als er een $r \in \mathbb{R}^+$ en een $M \in \mathbb{R}^+$ bestaan zó dat voor alle $x \in U_r'(a)$ geldt

$$|f(x)| \leq M|g(x)|,$$

dan is dus zeker *niet* $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \infty$ en doet zich derhalve één van de volgende drie gevallen voor (zie stelling 3.5.2a):

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$; $|f(x)|$ gaat sneller naar 0 dan $|g(x)|$ als $x \rightarrow a$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = L$, met $0 < L' < \infty$;
 $|f(x)|$ en $|g(x)|$ gaan met vergelijkbare snelheid naar 0 als $x \rightarrow a$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ bestaat niet, ook niet als oneigenlijke limiet, maar het quotiënt is begrensd.

In elk van de bovenstaande gevallen geldt dus: $|f(x)|$ gaat minstens zo snel naar 0 als $|g(x)|$ als $x \rightarrow a$.

E. Landau heeft een symbool ingevoerd, dat kort deze situatie aanduidt en dat wordt gebruikt om de orde van grootte van een "moeilijke" functie $f(x)$ te vergelijken met een "eenvoudige" functie $g(x)$.

Dit ordesymbool wordt aangeduid met de letter **O**.

4.8.3. Definitie van het **O**-symbool van Landau

Neem aan f en g zijn in een gereduceerde omgeving van het punt a gedefinieerd. Men schrijft

$$f(x) = \mathbf{O}(g(x)) \text{ als } x \rightarrow a$$

[spreek uit: $f(x)$ is grote **O** van $g(x)$ als x naar a gaat]; als er een

$r \in \mathbb{R}^+$ en een $M \in \mathbb{R}^+$ bestaan zó dat

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \text{voor alle } x \in U'_r(a).$$

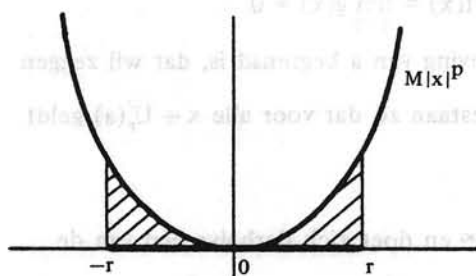
4.8.4. Opmerkingen

- a) In het vervolg zullen wij vrijwel uitsluitend te maken krijgen met het geval $a = 0$, waarbij we $g(x) = x^p$ zullen nemen voor zekere $p \in \mathbb{R}_0^+$. De definitie nog even herhalend voor dit geval:

$$f(x) = \mathbf{O}(x^p) \quad \text{als } x \rightarrow 0$$

betekent dat er een $r \in \mathbb{R}^+$ en een $M \in \mathbb{R}^+$ bestaan zó dat

$$|f(x)| \leq M|x|^p \quad \text{als } x \in U'_r(0).$$



$f(x) = \mathbf{O}(x^p)$: in de gereduceerde omgeving $U'_r(0)$ ligt de grafiek van $|f|$ in het gearceerde gebied

- b) Men kan $f(x) = \mathbf{O}(x^p)$ lezen als:

“ $f(x)$ is nul tot op grootteorde minstens x^p ”;

een vergelijkbare uitspraak als

“een getal is nul tot in minstens p decimalen”.

Deze analogie maakt de rekenregels van het \mathbf{O} -symbool begrijpelijk.

- c) Onder $f(x) = g(x) + \mathbf{O}(x^p)$ als $x \rightarrow 0$ verstaan we

$$f(x) - g(x) = \mathbf{O}(x^p) \quad \text{als } x \rightarrow 0.$$

Men kan dus

$$f(x) = g(x) + \mathbf{O}(x^p)$$

interpreteren als

$$f(x) = g(x) + \varphi(x),$$

waarbij dan $\varphi(x) = \mathbf{O}(x^p)$ als $x \rightarrow 0$.

- d) Als het duidelijk is dat $x \rightarrow 0$, schrijven we wel eens kortweg:

$f(x) = \mathbf{O}(x^p)$; de toevoeging “als $x \rightarrow 0$ ” wordt dan achterwege gelaten.

- e) Als $f(x) = \mathbf{O}(x^p)$ als $x \rightarrow 0$ en $p \in \mathbb{R}^+$, dan geldt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

4.8.5. Voorbeelden

- a) $\sin x - \tan x = \mathbf{O}(x)$ als $x \rightarrow 0$, want

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x - \tan x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} - \frac{\tan x}{x} \right| = 0.$$

b) $x^2 + \tan x = \mathbf{O}(x)$ als $x \rightarrow 0$, want

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 + \tan x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| x + \frac{\tan x}{x} \right| = 1.$$

c) $x^2 \sin \frac{1}{x} = \mathbf{O}(x^2)$ als $x \rightarrow 0$, want

$$\frac{|x^2 \sin \frac{1}{x}|}{|x^2|} = |\sin \frac{1}{x}| \leq 1 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4.8.6. Rekenregels

Als $f(x) = \mathbf{O}(x^p)$ en $g(x) = \mathbf{O}(x^q)$ als $x \rightarrow 0$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, dan is

a) $f(x) = \mathbf{O}(x^s)$ voor alle s met $0 \leq s \leq p$.

b) $\alpha f(x) + \beta g(x) = \mathbf{O}(x^{\min\{p,q\}})$ voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

c) $f(x)g(x) = \mathbf{O}(x^{p+q})$.

d) $\frac{f(x)}{|x|^s} = \mathbf{O}(x^{p-s})$, als $0 \leq s \leq p$.

Bewijs

a) Het geval $s = p$ is triviaal. Is $s < p$ dan is $\frac{|f(x)|}{|x|^s} = \frac{|f(x)|}{|x|^p} |x|^{p-s}$.

Omdat de eerste factor begrensd is en de tweede naar 0 nadert als

$$x \rightarrow 0 \text{ volgt wegens 3.5.5 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^s} = 0.$$

Wegens 3.5.2a is $\frac{|f(x)|}{|x|^s}$ dan begrensd.

b) Zij $s = \min\{p, q\}$.

Uit a) volgt dan: er bestaan getallen $M_1, M_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ zó dat

$$\frac{|f(x)|}{|x|^s} \leq M_1 \quad \text{voor alle } x \in U'_{r_1}(0),$$

$$\frac{|g(x)|}{|x|^s} \leq M_2 \quad \text{voor alle } x \in U'_{r_2}(0).$$

Dus

$$\frac{|\alpha f(x) + \beta g(x)|}{|x|^s} \leq \frac{|\alpha| |f(x)| + |\beta| |g(x)|}{|x|^s} \leq |\alpha| M_1 + |\beta| M_2$$

voor alle $x \in U'_r(0)$, waarbij $r = \min\{r_1, r_2\}$.

c) Er bestaan $M_1, r_1 \in \mathbb{R}^+$ zó dat voor alle $x \in U'_{r_1}(0)$ geldt $\frac{|f(x)|}{|x|^p} \leq M_1$, en

er bestaan $M_2, r_2 \in \mathbb{R}^+$ zó dat voor alle $x \in U'_{r_2}(0)$ geldt $\frac{|g(x)|}{|x|^q} \leq M_2$.

Dus voor alle $x \in U'_r(0)$ met $r = \min\{r_1, r_2\}$ geldt:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{|x|^{p+q}} = \frac{|f(x)|}{|x|^p} \cdot \frac{|g(x)|}{|x|^q} \leq M_1 M_2.$$

d) Er bestaan $M, r \in \mathbb{R}^+$ zó dat voor alle $x \in U_r'(0)$ geldt $\frac{|f(x)|}{|x|^p} \leq M$.

Dus voor alle $x \in U_r'(0)$ geldt

$$\frac{|f(x)|}{|x|^{p-s}} = \frac{|f(x)|}{|x|^p} \leq M, \quad 0 \leq s \leq p. \quad \square$$

4.8.7. Formule van Taylor met grote O restterm

Zij I een open interval en $a \in I$. Laat $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -maal continu differentieerbaar zijn (dat wil zeggen $f^{(n+1)}$ bestaat en is continu op I), dan geldt voor iedere $a+h \in I$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + O(h^{n+1}) \text{ als } h \rightarrow 0.$$

Bewijs

Omdat $f^{(n+1)}$ continu is in a bestaan er een getal M en een r -omgeving $U_r(a)$ van a zó dat

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M \text{ voor alle } t \in U_r(a).$$

Als $|h| < r$, dan behoort ook iedere ξ tussen a en $a+h$ tot $U_r(a)$.

Door de substitutie $x = a+h$ gaat de formule van Taylor over in:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Omdat $\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |h|^{n+1}$, volgt het gestelde. \square

4.8.8. Standaard Taylorontwikkelingen

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$.

b) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$.

c) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$.

d) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$.

e) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + O(x^{n+2})$.

f) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$.

g) $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots + \binom{a}{n} x^n + O(x^{n+1})$, $a \in \mathbb{R}$.

Hierbij is $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$ als $n > 0$ en $\binom{a}{0} = 1$.

Bewijs

Iedere te ontwikkelen functie is in een geschikt gekozen r -omgeving van 0 willekeurig vaak differentieerbaar. Formule 4.8.7 met $a = 0$, $h = x$ is dus van toepassing, zodat we iedere keer kunnen volstaan met het berekenen van het Taylorpolynoom van passende index in 0.

a) $f(x) = e^x$, dus $f^{(k)}(x) = e^x$ en $f^{(k)}(0) = 1$.

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

b) $f(x) = \sin x$, dus $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$
en $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$.

$$\begin{aligned} t_{2n+2}(x) &= \sum_{j=0}^{2n+2} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \cos x$, dus $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$
en $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$.

$$\begin{aligned} t_{2n+1}(x) &= \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, dus $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ en $f^{(k)}(0) = k!$.

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n x^k.$$

e) $f(x) = \ln(1+x)$, dus $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}$, $k \geq 1$,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!, \quad k \geq 1, \quad \text{en } f(0) = 0.$$

$$t_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

f) $f(x) = \arctan x$.

Uit 4.3.4 volgt: $f^{(2k)}(0) = 0$ en $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!$.

$$\begin{aligned} t_{2n+2}(x) &= \sum_{j=0}^{2n+2} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

g) $f(x) = (1+x)^a$, dus $f^{(k)}(x) = a(a-1)\dots(a-k+1)(1+x)^{a-k}$, $k \geq 1$,
 $f^{(k)}(0) = a(a-1)\dots(a-k+1)$, $k \geq 1$, en $f(0) = 1$.

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k. \quad \square$$

4.8.9. Opmerkingen

a) De notatie $\binom{a}{n}$ is een generalisatie van definitie 1.11.4.

Immers voor $a \in \mathbb{N}$ is

$$\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} = \begin{cases} \frac{a!}{n!(a-n)!} & \text{als } 1 \leq n \leq a, \\ 0 & \text{als } n > a. \end{cases}$$

b) Formule d) volgt uit formule g) als we daarin $a = -1$ nemen en x door $-x$ vervangen.

$$\text{Inderdaad is } (-1)^k \binom{-1}{k} = (-1)^k \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{k!} = 1.$$

c) Zij $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Volgens g) is het Taylorpolynoom van de index n van f in 0:

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Uit 4.7.6 volgt dat

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Daar $f^{(n+1)}(x) = 0$ voor alle x , is dus

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \text{ vgl. het binomium van Newton (1.11.7).}$$

Oefeningen

1. Onderzoek welke van de volgende beweringen juist zijn en welke niet.

Als $f(x) = \mathcal{O}(x^3)$ en $g(x) = \mathcal{O}(x^2)$ als $x \rightarrow 0$, dan is

a) $f(x) + g(x) = \mathcal{O}(x^3)$.

b) $f(x) + g(x) = \mathcal{O}(x^2)$.

c) $f(x)g(x) = \mathcal{O}(x^5)$.

d) $\frac{f(x)}{g(x)} = \mathcal{O}(x)$.

e) $\frac{f(x)}{1+g(x)} = \mathcal{O}(x^3)$.

2. Bepaal de grootst mogelijke waarde van p , waarvoor de volgende beweringen juist zijn.

a) $\cos(x^2) - 1 = \mathcal{O}(x^p)$.

b) $\sin x - \tan x = \mathcal{O}(x^p)$.

c) $\sqrt{1-x^2} - \cos x = \mathcal{O}(x^p)$.

3. Bepaal het Taylorpolynoom van de index n in het punt 0 met de restterm van Lagrange van de functies \cosh en \sinh .
4. Bereken het Taylorpolynoom van de index n van $\frac{1}{(1-x)^2}$ in het punt 0 rechtstreeks en met behulp van 4.8.8g.
5. Bereken het Taylorpolynoom van de index 6 van $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in het punt 0 .
6. Gegeven $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ en $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ als $x \rightarrow 0$. Toon aan dat $f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \mathcal{O}(x^3)$.

4.9. Nieuwe technieken voor het berekenen van limieten

4.9.1. Berekening van limieten met behulp van Taylorontwikkelingen

Als bij de berekening van een limiet de $\frac{0}{0}$ situatie (zie 3.9.1) optreedt kan men meestal met succes gebruik maken van de Taylorontwikkelingen van teller en noemer om de limiet te kunnen berekenen.

Is $f(x) = px^n + \mathcal{O}(x^{n+k})$ als $x \rightarrow 0$

en $g(x) = qx^\ell + \mathcal{O}(x^{n+\ell})$ als $x \rightarrow 0$

met $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ en $k, \ell \in \mathbb{R}^+$, dan is

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)x^{-n}}{g(x)x^{-n}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} [p + \mathcal{O}(x^k)]}{\lim_{x \rightarrow 0} [q + \mathcal{O}(x^\ell)]} = \frac{p}{q}$$

Hierbij hebben we $\lim_{x \rightarrow 0} [p + \mathcal{O}(x^k)]$ geschreven in plaats van $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)x^{-n}$

en iets dergelijks in de noemer. Het laatste gelijkteken wordt gerechtvaardigd door het feit dat uit $h(x) = \mathcal{O}(x^k)$ met $k > 0$ (groter!) volgt dat $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

4.9.2. Voorbeelden

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - x - \cos x)}{\cos x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2[(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)) - x - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4))]}{(1 - \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^8)) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) - x - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)]}{-\frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2[x^2 + \mathcal{O}(x^3)]}{-\frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^8)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \mathcal{O}(x)}{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^4)} = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x} \\
 &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} - 1}{x} \\
 &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} [x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)] - 1} - 1}{x} \\
 &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)} - 1}{x} \\
 &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)} - 1}{-\frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)} \cdot \frac{-\frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)}{x} = e \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e.
 \end{aligned}$$

$$\text{c) Bepaal } a \in \mathbb{R} \text{ zó dat } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-ax^3} + \ln(1+2x^3) - 1}{\arctan x^2 - x^2 e^{-x^4}} \text{ bestaat.}$$

Oplossing.

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{1-ax^3} &= 1 + \left(\frac{1}{3}\right)(-ax^3) + \left(\frac{1}{2}\right)(-ax^3)^2 + \mathcal{O}(x^9) \\
 &= 1 - \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{9}a^2x^6 + \mathcal{O}(x^9).
 \end{aligned}$$

$$\ln(1+2x^3) = 2x^3 - \frac{1}{2}(2x^3)^2 + \mathcal{O}(x^9) = 2x^3 - 2x^6 + \mathcal{O}(x^9).$$

$$\arctan x^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \mathcal{O}(x^{10}).$$

$$x^2 e^{-x^4} = x^2 (1 - x^4 + \mathcal{O}(x^8)) = x^2 - x^6 + \mathcal{O}(x^{10}).$$

Dus

$$\frac{\sqrt[3]{1-ax^3} + \ln(1+2x^3) - 1}{\arctan x^2 - x^2 e^{-x^4}} = \frac{(2 - \frac{1}{3}a)x^3 - (2 + \frac{1}{9}a^2)x^6 + \mathcal{O}(x^9)}{\frac{2}{3}x^6 + \mathcal{O}(x^{10})}$$

Een noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van de limiet is, dat in de teller geen term voorkomt van graad lager dan 6. Dus $a = 6$.

$$\text{Voor } a = 6 \text{ is de limiet gelijk aan } \frac{-(2 + \frac{1}{9}a^2)}{\frac{2}{3}} = -9.$$

4.9.3. Opmerkingen

a) Deze methode kan ook worden toegepast voor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Men stelt in dat geval $x - a = h$.

b) Een probleem bij het gebruik van deze methode is bij welke macht van

x men de Taylorontwikkelingen van de verschillende in de limiet voorkomende functies afbreekt. Hier is geen algemene uitspraak over te geven. Als vuistregel kan men gebruiken, dat men in eerste instantie teller en noemer tot en met dezelfde orde dient te berekenen, namelijk tot aan die orde waarbij in teller of noemer de betreffende macht van x *niet* wegvalt.

4.9.4. Berekening van limieten met behulp van de middelwaardestelling

Wanneer in een limietuitdrukking een verschil van functiewaarden van dezelfde differentieerbare functie voorkomt kan men gebruik maken van de middelwaardestelling (4.5.3) en de insluitstelling (3.5.3) om de betreffende limiet te berekenen.

We lichten deze methode toe aan de hand van het volgende voorbeeld.

4.9.5. Voorbeeld

Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\arctan(x+2) - \arctan x)$.

Oplossing.

Op elk interval $[x, x+2]$ voldoet \arctan aan de voorwaarden van de middelwaardestelling, zodat er een $\xi \in (x, x+2)$ bestaat zó dat

$$\arctan(x+2) - \arctan x = 2 \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Dus

$$x^2 (\arctan(x+2) - \arctan x) = \frac{2x^2}{1+\xi^2}$$

Door schatting vindt men

$$\frac{2x^2}{1+(x+2)^2} \leq \frac{2x^2}{1+\xi^2} \leq \frac{2x^2}{1+x^2}$$

Daar de uitdrukkingen uiterst links en uiterst rechts beide naar 2 naderen als $x \rightarrow \infty$ volgt met behulp van de insluitstelling

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\arctan(x+2) - \arctan x) = 2.$$

4.9.6. Stelling (de l'Hospital)

Laat de functies f en g differentieerbaar zijn op (a,b) , waarbij $a \in \mathbb{R}$ of $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ of $b = +\infty$.

Indien geldt

A) $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a,b)$ en

B) $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, waarbij $L \in \mathbb{R}$ of $L = -\infty$ of $L = +\infty$,

terwijl voldaan is aan één van de volgende voorwaarden

C₁) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$ of

C_2) $\lim_{x \downarrow a} g(x) = \infty$ of

C_3) $\lim_{x \downarrow a} g(x) = -\infty$,

dan is $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Een analoge uitspraak geldt voor $\lim_{x \uparrow b}$ en $\lim_{x \rightarrow c}$, waarbij in het laatste geval (a,b) vervangen moet worden door een gereduceerde r -omgeving van $c \in \mathbb{R}$.

Bewijs

We zullen het bewijs geven voor $L \in \mathbb{R}$. Via enkele kleine aanpassingen in het bewijs kan men inzien dat de stelling ook juist is als $L = -\infty$ of $L = \infty$. Het bewijs wordt zo geformuleerd, dat het zowel voor $a = -\infty$ als voor $a \in \mathbb{R}$ geldt.

Zij $\epsilon > 0$. Op grond van B) is er een $c \in (a,b)$ zó dat voor alle $\xi \in (a,c)$ geldt $|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L| < \frac{1}{2}\epsilon$.

Volgens de middelwaardestelling voor 2 functies (4.7.2) bestaat er voor alle $x, y \in (a,c)$ met $x \neq y$ een ξ tussen x en y zó dat

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Omdat deze ξ tussen a en c ligt, geldt voor alle $x, y \in (a,c)$ met $x \neq y$

$$L - \frac{1}{2}\epsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < L + \frac{1}{2}\epsilon. \quad (*)$$

Geval C_1).

Wegens $\lim_{y \downarrow a} f(y) = \lim_{y \downarrow a} g(y) = 0$, $g'(x) \neq 0$ en de middelwaardestelling is $g(x) \neq 0$ op (a,b) ; dus volgt uit (*) via limietovergang $y \downarrow a$ dat voor alle $x \in (a,c)$ geldt

$$L - \frac{1}{2}\epsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \frac{1}{2}\epsilon.$$

Voor iedere $\epsilon > 0$ is er dus een $c \in (a,b)$ zó dat voor alle $x \in (a,c)$ geldt

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - L| \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon.$$

Dus $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Geval C_2).



We gaan weer uit van de ongelijkheid (*), nu met vaste $y_0 \in (a, c)$.

Kies eerst $c_1 \in (a, y_0)$ zó dat voor alle $x \in (a, c_1)$ geldt $g(x) > 0$ en $g(x) > g(y_0)$; zo'n c_1 bestaat wegens $\lim_{x \downarrow a} g(x) = +\infty$.

Voor alle $x \in (a, c_1)$ levert vermenigvuldigen van (*) met $\frac{g(x) - g(y_0)}{g(x)}$:

$$(L - \frac{1}{2}\epsilon)(1 - \frac{g(y_0)}{g(x)}) < \frac{f(x) - f(y_0)}{g(x)} < (L + \frac{1}{2}\epsilon)(1 - \frac{g(y_0)}{g(x)})$$

en dus

$$\varphi(x) = (L - \frac{1}{2}\epsilon)(1 - \frac{g(y_0)}{g(x)}) + \frac{f(y_0)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < (L + \frac{1}{2}\epsilon)(1 - \frac{g(y_0)}{g(x)}) + \frac{f(y_0)}{g(x)} = \psi(x).$$

Nu is $\lim_{x \downarrow a} \varphi(x) = L - \frac{1}{2}\epsilon$ en $\lim_{x \downarrow a} \psi(x) = L + \frac{1}{2}\epsilon$.

Er is dus een $c_2 \in (a, c_1)$ zó dat voor alle $x \in (a, c_2)$ geldt

$$\varphi(x) > L - \epsilon \text{ en } \psi(x) < L + \epsilon,$$

en dus

$$L - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \epsilon.$$

Voor iedere $\epsilon > 0$ is er blijkbaar een $c_2 \in (a, b)$ zó dat voor alle $x \in (a, c_2)$ geldt

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - L| < \epsilon,$$

dat wil zeggen $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Geval C_3).

Vervang $g(x)$ door $-g(x)$ en pas geval C_2) toe. □

4.9.7. Voorbeelden

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{e^{4x} - e^\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4e^{4x}} = \frac{\sqrt{2}}{4e^\pi}.$

Controleer dat aan C_1) voldaan is.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1.$

Controleer dat aan C_2) voldaan is.

c) Herhaalde toepassing van de stelling van de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{3x^2} \text{ mits deze laatste limiet}$$

bestaat (eventueel oneigenlijk).

Nu is $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x + \sin x}{6x}$ mits weer de laatste

limiet bestaat.

Tenslotte is

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x + \sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x + \cos x}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Dus } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Hierbij is de stelling van de l'Hospital driemaal gebruikt; controleer dat iedere keer aan C_1) voldaan is.

d) De berekening

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 2}{6x - 6} = \frac{10}{6}$$

is fout, want $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x - 1) = 7$ en $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 6x + 3) = 3$.

Er is dus aan geen van de voorwaarden C) voldaan en stelling 4.9.6 kan niet toegepast worden.

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ kan niet met stelling 4.9.6 berekend worden..

Wel is hier aan C_1) voldaan, maar niet aan B):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ bestaat niet.}$$

De gevraagde limiet bestaat echter wel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

f) Ook als stelling 4.9.6 wél toegepast mag worden hoeft dat niet altijd een vereenvoudiging van het probleem op te leveren.

Zo is de uitspraak

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{2x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{2x^3}$$

correct, maar de te berekenen limiet is daardoor zelfs moeilijker geworden.

De goede methode is die uit hoofdstuk 3:

via $x = \frac{1}{y}$ vindt men

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^2 e^y = 0.$$

Oefeningen

Bereken de volgende limieten.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \sin x - x^2}{\arctan x^3}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x + x - 2 \sin x}{x^5}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x^2} - e^{x^2} - 1}{2 - 2 \cos x - x \arctan x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x+1}) x^2$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{2}{3}} ((x+1)^{\frac{1}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}})$.
6. $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$.
7. $\lim_{x \downarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin \pi x^2}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x \arctan x} - \frac{1}{x^2})$.
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x (\frac{\pi}{2} - \arctan x)$.

Enkele onderwerpen uit de numerieke analyse

4.10. Interpolatie

4.10.1. Het begrip interpolatie

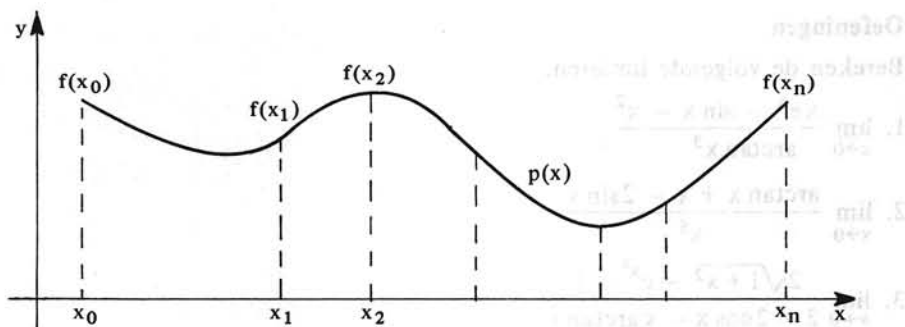
Het komt voor dat van een functie f slechts een eindig aantal functiewaarden $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ bekend zijn. Die waarden kunnen bijvoorbeeld zijn verkregen door berekening, door meting of uit een tabel. We willen nu deze functie "benaderen" door een polynoom

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i \text{ van zo laag mogelijke graad dat in de punten } x_0, x_1, \dots, x_n$$

(de zogenaamde *steunpunten*) dezelfde waarden aanneemt als f .

Dit noemt men *interpolatie* door een polynoom.

Als we de functiewaarden van f willen berekenen in een punt tussen de



steunpunten, dan berekenen we de waarde van het polynoom in het betreffende punt en beschouwen dit als benadering voor de gewenste functie-waarde.

We zoeken dus een polynoom $p_k(x)$ (van zo laag mogelijke graad) dat voldoet aan: $p_k(x_i) = f(x_i)$ voor alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Gaan we uit van een willekeurig polynoom

$$p_k(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$$

dan zullen de coëfficiënten c_0 t/m c_k aan de volgende $(n+1)$ lineaire vergelijkingen moeten voldoen:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \dots + c_k x_0^k = f(x_0) \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_k x_1^k = f(x_1) \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \dots + c_k x_n^k = f(x_n) \end{cases}$$

Men kan aantonen (met behulp van een stelling uit de lineaire algebra), dat voor $k < n$ dit stelsel in het algemeen geen oplossing heeft en dat voor $k = n$ er altijd een eenduidige oplossing bestaat. Het oplossen van dit stelsel is meestal nogal bewerkelijk. We zullen op een geheel andere wijze het interpolatiepolynoom $p_n(x)$ construeren.

4.10.2. De interpolatieformule van Lagrange

Stap 1

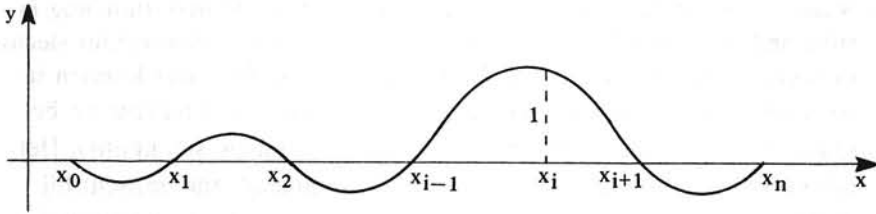
We construeren eerst voor iedere $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ een polynoom $l_i(x)$ van de graad n , zó dat geldt

- (i) $l_i(x_j) = 1$ voor $j = i$,
- (ii) $l_i(x_j) = 0$ voor $j \neq i$.

Om $l_i(x)$ aan (ii) te laten voldoen stellen we

$$l_i(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

waarin A een nog nader te bepalen constante is. Blijkbaar is $l_i(x)$ van de graad n .



De voorwaarde (i) levert nu

$$A(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = 1$$

ofwel

$$A = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Hieruit volgt dat

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (\text{I})$$

Stap 2

Beschouw een lineaire combinatie van de polynomen $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$, bijvoorbeeld

$$q(x) = \sum_{i=0}^n c_i l_i(x).$$

Dan geldt:

- (i) $q(x)$ is een polynoom van de graad $\leq n$.
(de term van de n^{de} graad kan mogelijk wegvallen.)
- (ii) $q(x_j) = \sum_{i=0}^n c_i l_i(x_j) = c_j l_j(x_j) = c_j$.

Stap 3

Als we een lineaire combinatie van de polynomen $l_i(x)$ nemen waarin $c_i = f(x_i)$, dan voldoet dit nu aan alle eisen.

Dus het gevraagde polynoom is

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x). \quad (\text{II})$$

De combinatie van de met (I) en (II) gemarkeerde formules staat bekend als de interpolatieformule van Lagrange.

4.10.3. Opmerkingen

- a) Als we noteren $l(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$ dan is $l_i(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i)l'(x_i)}$.

Ga dit zelf na.

- b) Naast de interpolatieformule van Lagrange zijn in de literatuur nog talrijke andere interpolatieformules bekend. Deze verschillen echter slechts in rekentechnische zin van de bovenstaande formule, maar kunnen in bepaalde omstandigheden een aanzienlijke hoeveelheid rekenwerk besparen (bijvoorbeeld bij het toevoegen van een nieuw steunpunt). Het belang van de formule van Lagrange is voornamelijk theoretisch; hij dient bijvoorbeeld als basis voor het afleiden van benaderingsformules voor differentiaalquotienten en bepaalde integralen (zie hoofdstuk 5). Theoretisch gezien leveren alle interpolatieformules hetzelfde polynoom op, zoals blijkt uit de volgende stelling.

4.10.4. Stelling

Zij f een reële functie, gedefinieerd op een interval I .

Laat $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ zó dat $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Dan is er precies één polynoom $p_n(x)$ van graad $\leq n$ zó dat

$$p_n(x_i) = f(x_i) \text{ voor alle } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Bewijs

Uit 4.10.2 volgt reeds, dat er tenminste één zo'n polynoom bestaat.

We zullen nog bewijzen, dat er ten hoogste één bestaat.

Stel dat p_n en q_n twee polynomen zijn van graad $\leq n$, zó dat

$$p_n(x_i) = f(x_i) \text{ en } q_n(x_i) = f(x_i) \text{ voor } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Beschouw nu het verschilpolynoom

$$r_n(x) = p_n(x) - q_n(x).$$

$r_n(x)$ is een polynoom van graad $\leq n$ en is 0 in de punten x_i ,

$$i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Dit polynoom van graad $\leq n$ heeft dus $n+1$ nulpunten en volgens stelling 2.11.6 kan dit slechts, wanneer het identiek gelijk is aan 0. Maar dit betekent, dat $p_n(x) = q_n(x)$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$. \square

Een zinvol gebruik van interpolatieformules is slechts mogelijk, wanneer we een indicatie hebben, hoe goed het interpolatiepolynoom de gegeven functie benadert. Dit houdt in, dat we meer informatie over de desbetreffende functie nodig hebben dan alleen de tabelwaarden. Dit wordt nog nader gepreciseerd in de volgende stelling, die het mogelijk maakt de grootte van de interpolatiefout $E_n(x) = f(x) - p_n(x)$ te schatten.

4.10.5. Stelling

Zij I een interval en zij $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -maal differentieerbaar op I .

Laat $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ zó dat $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ en laat $p_n(x)$ gegeven zijn door 4.10.2 I en II.

Dan bestaat er voor iedere $x \in I$ een $\xi \in I$, waarbij

$\min \{x, x_0\} < \xi < \max \{x, x_n\}$, zó dat

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Bewijs

Zij x een willekeurig maar vast punt in I . Zij verder $[a, b]$ het kleinste interval dat de punten x, x_0, x_1, \dots, x_n bevat.

Als $x = x_k$ voor zekere $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ dan is $E_n(x) = 0$, dus dan is de bewering juist voor iedere $\zeta \in (a, b)$.

Zij nu $x \neq x_k$ en definieer $C \in \mathbb{R}$ door

$$C = \frac{E_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}.$$

Definieer vervolgens $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$g(t) = E_n(t) - C(t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n).$$

Nu is $g(t) = f(t) - p_n(t) - C(t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n) =$
 $= f(t) - Ct^{n+1} + \text{polynoom in } t \text{ van graad } \leq n.$

Hieruit volgt dat g $(n+1)$ -maal differentieerbaar is op $[a, b]$, terwijl $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - C(n+1)!$.

We zullen nu aantonen dat er een $\zeta \in (a, b)$ is met $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$.

Er geldt $g(x_k) = E_n(x_k) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$); uit de definitie van C volgt dat ook $g(x) = 0$. Dus g heeft op $[a, b]$ $n+2$ verschillende nulpunten. Op ieder interval begrensd door twee opeenvolgende nulpunten passen we de stelling van Rolle (4.5.1) toe. We concluderen dat in het inwendige van elk zo'n interval een nulpunt van g' ligt, met andere woorden g' heeft tenminste $n+1$ verschillende nulpunten op (a, b) .

Volgens eenzelfde redenering vinden we dat g'' tenminste n verschillende nulpunten op (a, b) heeft en zo doorgaande tenslotte dat $g^{(n+1)}$ op (a, b) tenminste één nulpunt ζ heeft.

Uit $g^{(n+1)}(\zeta) = f^{(n+1)}(\zeta) - C(n+1)! = 0$ volgt $C = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$ en dus

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad \square$$

4.10.6. Opmerkingen

- Let op de overeenkomst van de restterm 4.10.5 bij de Lagrange-interpolatie met de restterm 4.7.6 bij de formule van Taylor.
- Als $x_0 = a$ en $x_1 = b$, dan stelt het Lagrange interpolatiepolynoom $p_1(x)$ de verbindingslijn voor tussen $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$.
 Is $f''(x) > 0$ op een interval I en zijn a en b willekeurige punten van I met $a < b$, dan volgt voor alle $x \in (a, b)$

$$E_1(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2!} f''(\zeta) < 0, \quad \zeta \in (a, b)$$

De grafiek van f ligt dan onder elke verbindingslijn van punten van zijn grafiek, dus f is convex.

Is $f''(x) < 0$, dan is $E_1(x) > 0$ en ligt de grafiek van f boven elke verbindingslijn van punten van zijn grafiek, dus f is concaaf.

c) Als $x < x_0$ of als $x > x_n$ spreekt men van *extrapolatie*.

4.10.7. Voorbeeld

x	$\ln x$
1,5	0,40547
2	0,69315
2,5	0,91629

Bereken $\ln 1,75$ met lineaire en kwadratische interpolatie (dat wil zeggen met behulp van polynomen van de graad ≤ 1 respectievelijk ≤ 2) en geef een schatting van de fout.

Oplossing

Zij $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1,5$, $x_1 = 2$ en $x_2 = 2,5$. Volgens 4.10.2 geldt:

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

$$\begin{aligned} p_1(1,75) &= \frac{1,75 - 2}{1,5 - 2} \times 0,40547 + \frac{1,75 - 1,5}{2 - 1,5} \times 0,69315 = \\ &= \frac{1}{2} \times 0,40547 + \frac{1}{2} \times 0,69315 = 0,54931. \end{aligned}$$

Voor de fout vinden we met 4.10.5:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(\xi) = \frac{(1,75 - 1,5)(1,75 - 2)}{2} \times \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) = \\ &= \frac{1}{32} \times \frac{1}{\xi^2}, \text{ met } 1,5 < \xi < 2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $E_1(1,75)$ ligt tussen

$$\frac{1}{32} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx 0,00781 \text{ en } \frac{1}{32} \times \left(\frac{1}{1,5}\right)^2 \approx 0,01389.$$

Op deze wijze vinden we $0,55712 < \ln(1,75) < 0,56320$.

De laatste twee cijfers leveren geen wezenlijke informatie en worden weggelaten teneinde geen nauwkeurigheid te suggereren die in feite niet gehaald wordt. Het resultaat noteert men veelal als volgt:

$$\ln(1,75) = 0,560 \pm 0,004.$$

Kwadratische interpolatie geeft:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \\ &\quad \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_2(1,75) &= \frac{(1,75-2)(1,75-2,5)}{(1,5-2)(1,5-2,5)} \times 0,40547 + \frac{(1,75-1,5)(1,75-2,5)}{(2-1,5)(2-2,5)} \times 0,69315 + \\
 &+ \frac{(1,75-1,5)(1,75-2)}{(2,5-1,5)(2,5-2)} \times 0,91629 = \\
 &= 0,375 \times 0,40547 + 0,75 \times 0,69315 - 0,125 \times 0,91629 = \\
 &= 0,55738.
 \end{aligned}$$

De fout in deze interpolatie wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
 E_2(1,75) &= \frac{(1,75-1,5)(1,75-2)(1,75-2,5)}{3!} f'''(\xi) = \\
 &= \frac{(0,25)(-0,25)(-0,75)}{6} \frac{2}{\xi^3}, \text{ met } 1,5 < \xi < 2,5.
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $E_2(1,75)$ ligt tussen

$$\frac{1}{64} \times \left(\frac{1}{2,5}\right)^3 = 0,001 \text{ en } \frac{1}{64} \times \left(\frac{1}{1,5}\right)^3 \approx 0,00463.$$

Op dezelfde manier als zoëven leidt dit tot:

$$\ln(1,75) = 0,5602 \pm 0,0019.$$

4.10.8. Inverse interpolatie

Het tabelletje in voorbeeld 4.10.7 kan ook worden gebruikt om bijvoorbeeld $e^{0,8}$ te berekenen. Daarvoor interpoleert men in de x-tabel in plaats van in de ln x-tabel en men spreekt van *inverse interpolatie*.

Lineaire interpolatie in de x-tabel geeft:

$$P_1(0,8) = \frac{0,8 - 0,91629}{0,69315 - 0,91629} \times 2 + \frac{0,8 - 0,69315}{0,91629 - 0,69315} \times 2,5 = 2,23942.$$

Voor de fout vinden we

$$\begin{aligned}
 E_1(0,8) &= \frac{(0,8 - 0,69315)(0,8 - 0,91629)}{2!} e^\xi \\
 &\approx -0,00621 \times e^\xi, \text{ met } 0,69315 < \xi < 0,91629.
 \end{aligned}$$

Dus $E_1(0,8)$ ligt tussen

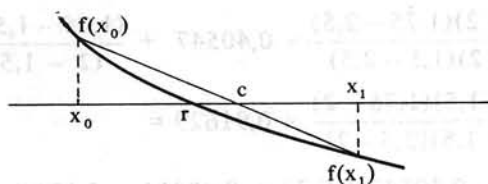
$$-0,00621 \times 2 = -0,01242 \text{ en } -0,00621 \times 2,5 = -0,01553$$

Op deze wijze vinden we $2,22389 < e^{0,8} < 2,22700$.

Dus $e^{0,8} = 2,2254 \pm 0,0016$.

4.10.9. Regula falsi

Als f continu is op een interval I en als in de punten $x_0, x_1 \in I$ ($x_0 < x_1$) de functiewaarden $f(x_0)$ en $f(x_1)$ van teken verschillen, dan heeft f volgens 3.12.2 tenminste één nulpunt tussen x_0 en x_1 . Is f bovendien strikt monotoon op $[x_0, x_1]$, dan heeft f precies één nulpunt r op (x_0, x_1) .



Men kan dit nulpunt benaderen door het toepassen van lineaire interpolatie, d.w.z. we nemen als benadering van r het nulpunt c van het lineaire interpolatiepolynoom

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Grafisch betekent dit, dat we het snijpunt met de x -as bepalen van de rechte lijn door de punten $(x_0, f(x_0))$ en $(x_1, f(x_1))$.

Lossen we c op uit de vergelijking

$$p_1(c) = \frac{c - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{c - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = 0$$

dan vinden we

$$c = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}. \quad (\text{I})$$

Formule (I) is de *regula falsi*, waarmee c berekend wordt uit de beginschattingen x_0 en x_1 .

Is $f(c) = 0$ dan hebben we het nulpunt gevonden.

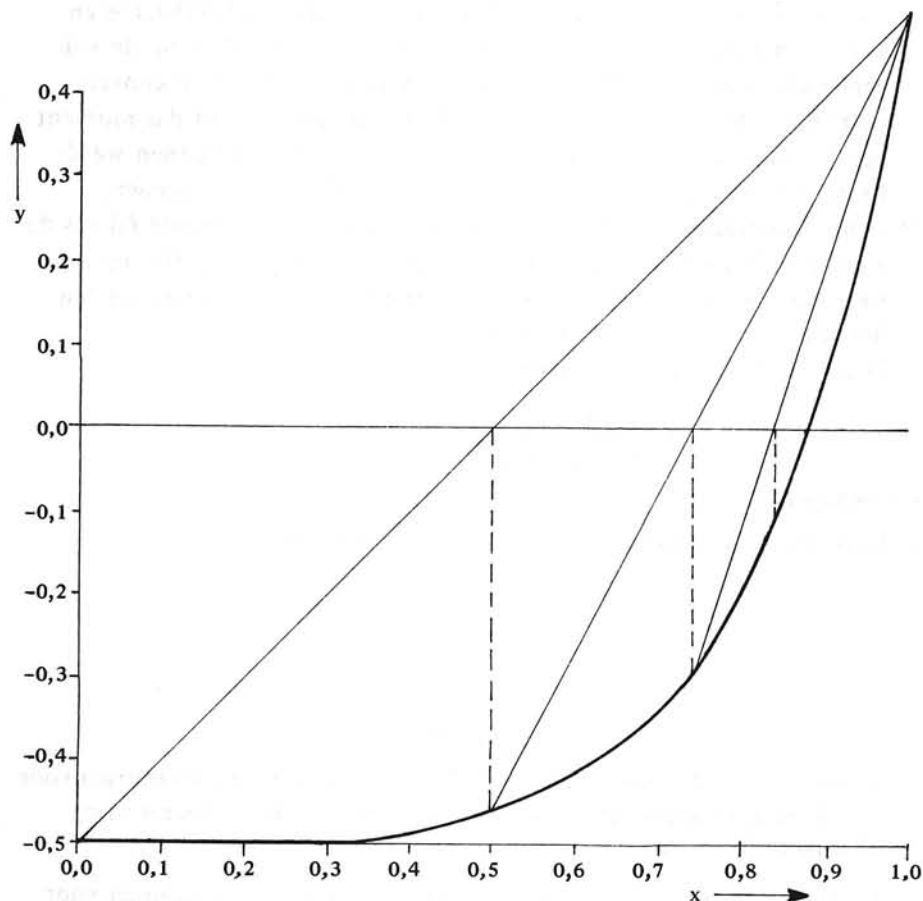
Is $f(c)f(x_0) < 0$ dan herhalen we het proces met dezelfde x_0 en $x_1 = c$.

Is $f(c)f(x_0) > 0$ dan is $f(c)f(x_1) < 0$ en dan herhalen we het proces met $x_0 = c$ en dezelfde x_1 .

4.10.10. Voorbeeld

We gebruiken de regula falsi voor het uitrekenen van $\sqrt[5]{0,5}$. Dan moeten we het nulpunt zoeken van de functie $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}$. Het nulpunt kan gemakkelijk gelocaliseerd worden in het interval $(0,1)$, daar $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$ en $f(1) = \frac{1}{2} > 0$. We passen de regula falsi viermaal toe en geven het resultaat weer in een tabel.

k^{de} stap	x_{0k}	x_{1k}	$f(x_{0k})$	$f(x_{1k})$	c_k
1	0	1	-0,5	0,5	0,5
2	0,5	1	-0,4687	0,5	0,7419
3	0,7419	1	-0,2752	0,5	0,8335
4	0,8335	1	-0,0976	0,5	0,8607



4.10.11. Opmerkingen

- a) De regula falsi is ook op te vatten als een voorbeeld van lineaire inverse interpolatie. In de tabel

$$\begin{array}{ccc} x_0 & r & x_1 \\ f(x_0) & 0 & f(x_1) \end{array}$$

berekent men c als benadering van r door te nemen

$$c = \frac{0 - f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} x_0 + \frac{0 - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} x_1,$$

hetgeen tot hetzelfde resultaat als 4.10.9(I) leidt.

Het is ook mogelijk om nulpunten te benaderen via hogere orde inverse interpolatie.

- b) Om de fout bij de regula falsi uit de berekende waarden c_k te bepalen, gaat men als volgt te werk. Zolang de functiewaarden $f(c_k)$ van teken wisselen en dus de ene keer het linkereinde vervangen wordt en een andere keer het rechteruiteinde bij de volgende stap regula falsi, neemt

men als fout $x_{1k} - x_{0k}$. Als f echter tweemaal differentieerbaar is en f' en f'' tekenvast zijn op het interval $[x_{0k}, x_{1k}]$, dan blijft bij de volgende stappen één eindpunt vast (zie vraagstuk 4.12.47) en convergeert het proces monotoon naar r . De regula falsi is vanaf dat moment een éénpunts-iteratieproces geworden (zie 4.11) en dan kunnen we de foutschattingen voor éénpunts-iteratie (4.11.6II en III) toepassen.

- c) Een in de praktijk veelvuldig toegepaste variant van de regula falsi is de zogenaamde *secantmethode*. Hierbij past men steeds 4.10.9(I) toe op twee opeenvolgende gevonden waarden, zonder zich te bekommeren om het teken van de functiewaarden.

Dus bij gekozen x_0 en x_1 neemt men

$$x_{k+2} = \frac{x_k f(x_{k+1}) - x_{k+1} f(x_k)}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Oefeningen

1. Gegeven is de volgende sinustabel in vier decimalen:

φ	$\sin \varphi$
0	0,0000
$\frac{\pi}{6}$	0,5000
$\frac{\pi}{3}$	0,8660
$\frac{\pi}{2}$	1,0000

Interpoleer op zo verstandig mogelijke wijze lineair en kwadratisch voor $\varphi = \frac{\pi}{4}$ en geef een schatting van de fout. (Stel in de foutberekening $\pi^2 = 10$ en $\pi^3 = 30$.)

2. De functies $l_1(x)$ in de interpolatieformule van Lagrange voldoen voor ieder stel niet-samenvallende steunpunten x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) en voor iedere $x \in \mathbb{R}$ aan de betrekking $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$. Bewijs dit.

(Aanwijzing: Pas Lagrange-interpolatie toe op een geschikt gekozen functie.)

3. Zij $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = 3 \ln x - x$.

Bewijs dat f precies één nulpunt heeft.

Benader dit nulpunt door 5 stappen regula falsi te doen.

4.11. Picard-iteratie

4.11.1. Inleiding

De regula falsi is een typisch voorbeeld van een *iteratieproces*, dat wil zeggen het herhaald toepassen van hetzelfde proces.

Voor de regula falsi zijn twee beginschattingen nodig (namelijk punten waar het nulpunt tussenin ligt) en het proces heeft voor een nieuwe schatting ook steeds twee gegevens nodig.

Thans richten we onze aandacht op een ander type iteratieproces voor het bepalen van nulpunten, de *éénpunts-* of *Picard-iteratie*. Essentieel hieraan is, dat één beginschatting vereist is en dat voor een nieuwe stap één gegeven (nl. het resultaat van de vorige stap) gebruikt wordt. Om een dergelijk iteratieproces te construeren vervangen we de vergelijking

$$a) f(x) = 0 \text{ door}$$

$$b) x = F(x)$$

en wel zó, dat de te benaderen wortel r van a) ook een wortel van b) is. Merk op dat bijv. $F(x) = x + f(x)^n$ voor iedere $n \in \mathbb{Z}^+$ aan deze eis voldoet. Vervolgens gaan we uit van een beginschatting x_0 voor het te bepalen nulpunt r van f . We nemen $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1)$ en in het algemeen $x_{n+1} = F(x_n)$.

Als $x_n \rightarrow r$ voor $n \rightarrow \infty$ zeggen we dat het iteratieproces naar r convergeert. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ bestaat zeggen we kortweg: het iteratieproces convergeert. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ niet bestaat heet het proces divergent.

De geschetste werkwijze heeft een grafische interpretatie die we illustreren aan de hand van een voorbeeld.

4.11.2. Voorbeeld

De vergelijking $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ vormen we om tot $x = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$. We tekenen in één figuur de grafieken van $y_1 = x$ en $y_2 = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$.

We trekken nu een lijn vanaf de x -as in onze beginschatting (bijvoorbeeld $x = 1$) tot aan de grafiek van y_2 , evenwijdig met de y -as. Vervolgens vanuit dit punt een lijn evenwijdig met de x -as tot aan de grafiek van y_1 . Zo voortgaande ontstaat een 'trap' die naar het snijpunt van de beide grafieken loopt. Iedere 'trede' representeert een slag van het iteratieproces (zie figuur).

Omdat $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^3 - 3x + 1$ continu is op \mathbb{R} en omdat invullen de volgende tabel geeft

$$f(-2) = -1$$

$$f(-1) = 3$$

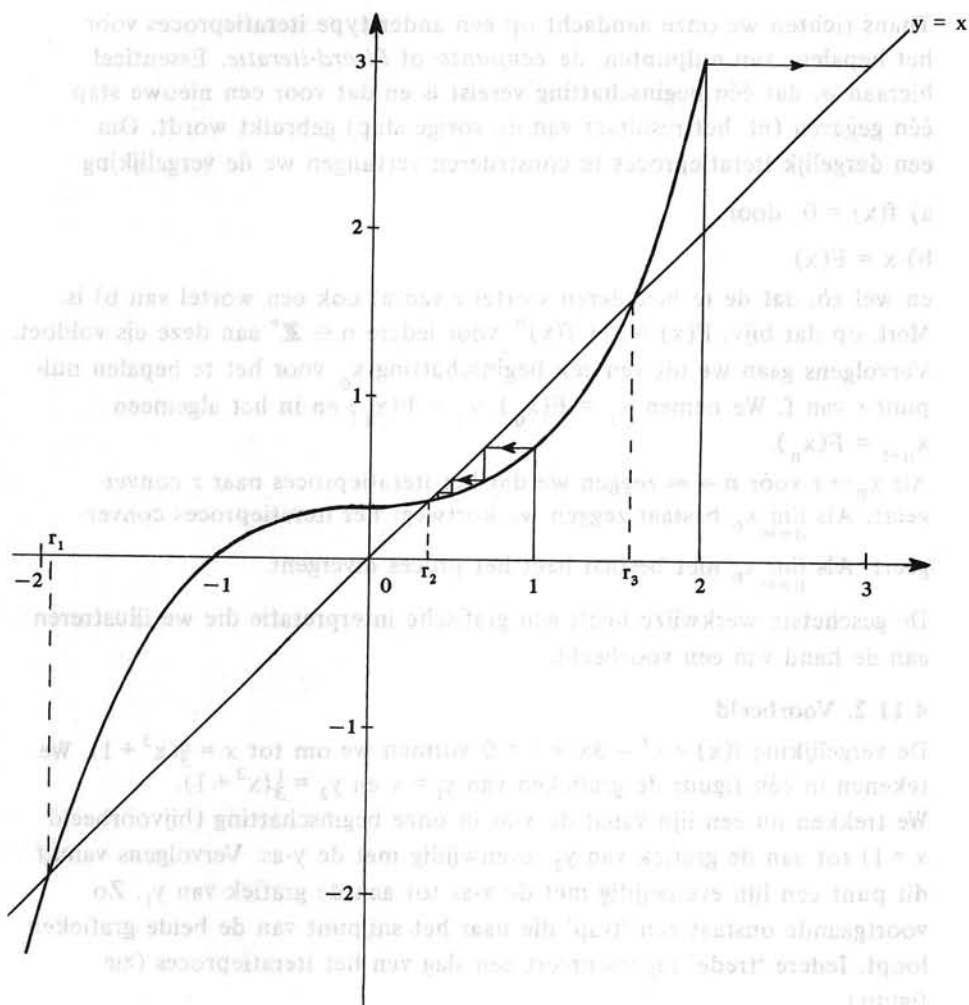
$$f(0) = 1$$

$$f(1) = -1$$

$$f(2) = 3$$

zijn er volgens de stelling van Weierstrass 3 nulpunten r_1, r_2 en r_3 met $-2 < r_1 < -1$, $0 < r_2 < 1$, $1 < r_3 < 2$. Volgens 2.11.6 zijn dit alle nulpunten. De 3 nulpunten zijn in de figuur x -coördinaten van de 3 snijpunten van de grafieken van $y = x$ en $y = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$.

We bekijken het verloop van het iteratieproces $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^3 + 1)$ voor verschillende waarden van de beginschatting x_0 .



$x_0 = -2$	$x_0 = -1$	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$
$x_1 = -2,333333$	$x_1 = 0$	$x_1 = 0,666667$	$x_1 = 3$
$x_2 = -3,901235$	$x_2 = 0,333333$	$x_2 = 0,432099$	$x_2 = 9,333333$
$x_3 = -19,458452$	$x_3 = 0,345679$	$x_3 = 0,360226$	$x_3 = 271,34568$
$x_4 = -2455,86$	$x_4 = 0,347102$	$x_4 = 0,348915$	$x_4 = 6659590$
enz.	enz.	enz.	enz.

We constateren dat voor de beginschattingen $x_0 = -2$ en $x_0 = 2$, hoewel beide dicht bij een nulpunt gelegen zijn, de rij divergeert en dat voor de beginschattingen $x_0 = -1$ en $x_0 = 1$ de rij convergeert naar het nulpunt r_2 . Voor dit verschijnsel zoeken we een verklaring.

4.11.3. Voorwaarden voor convergentie van het proces

We willen het nulpunt r van $f(x)$ benaderen met het iteratieproces

$x_{n+1} = F(x_n)$. Hierbij is $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie met de eigenschap dat $F(r) = r$.

Dan geldt volgens de middelwaardstelling: voor alle $n \in \mathbb{N}$ bestaat er een ξ_n tussen x_n en r , zó dat

$$x_{n+1} - r = F(x_n) - F(r) = F'(\xi_n)(x_n - r). \quad (I)$$

We onderscheiden nu twee gevallen:

a) Het geval $|F'(r)| > 1$.

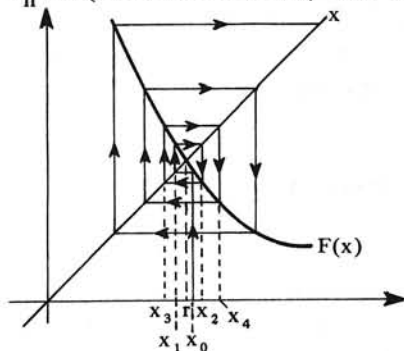
Als $|F'(r)| > 1$, dan volgt uit de continuïteit van $|F'|$ dat er een $d \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat

$$|F'(x)| > 1 \quad \text{voor alle } x \in (r-d, r+d).$$

Voor iedere n , waarvoor $x_n \in (r-d, r+d)$ ligt ook $\xi_n \in (r-d, r+d)$ en is dus $|F'(\xi_n)| > 1$. Dit betekent dat wegens (I)

$$|x_{n+1} - r| = |F'(\xi_n)| |x_n - r| > |x_n - r|,$$

zodat de afstand tussen de benadering en het werkelijke nulpunt weer toeneemt, zodra men dicht genoeg bij r in de buurt is gekomen. In de praktijk zal het proces dan nooit convergeren naar r : het proces convergeert namelijk alleen als $x_n = r$ (in alle decimalen!) voor zekere n .



b) Het geval $|F'(r)| < 1$.

Er bestaat een getal L zó dat $|F'(r)| < L < 1$. Uit de continuïteit van $|F'|$ volgt dat er een $d \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat

$$|F'(x)| < L \quad \text{voor alle } x \in (r-d, r+d) = J.$$

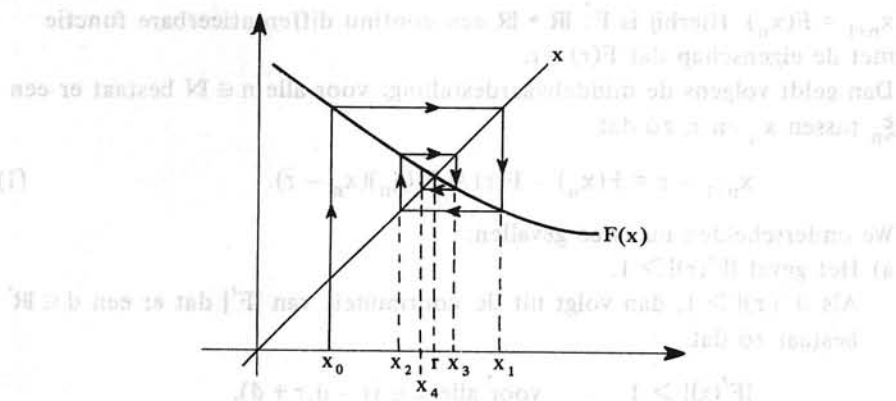
Neem nu aan dat voor zekere $n \in \mathbb{N}$ geldt $x_n \in J$.

Dan volgt uit (I), daar $\xi_n \in J$:

$$|x_{n+1} - r| = |F'(\xi_n)| |x_n - r| < L |x_n - r|.$$

Wegens $L < 1$ volgt dus: $x_n \in J \Rightarrow x_{n+1} \in J$.

Met volledige inductie hebben we dan bewezen: als voor $n_0 \in \mathbb{N}$ geldt $x_{n_0} \in J$, dan $x_n \in J$ voor alle $n \geq n_0$, en bovendien geldt voor $n > n_0$:



$$|x_n - r| \leq L|x_{n-1} - r| \leq L^2|x_{n-2} - r| \leq \dots \leq L^{n-n_0}|x_{n_0} - r|.$$

Nu is $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n = 0$ (omdat $|L| < 1$), dus $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - r| = 0$ ofwel $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$.

We hebben aangetoond:

Als $|F'(r)| < 1$, dan kan er een interval $J = (r - d, r + d)$ worden aangegeven, zó dat $|F'(x)| < L < 1$ voor alle $x \in J$. Het iteratieproces convergeert, wanneer men voor zekere $n_0 \in \mathbb{N}$ in dit interval terecht komt, dat wil zeggen als $x_{n_0} \in J$. Het proces convergeert dus zeker als men in dit interval start, dat wil zeggen als $x_0 \in J$.

Als $|F'(r)| < 1$ kan er dus altijd een zodanige startwaarde gekozen worden dat het proces convergeert.

4.11.4. Voorbeeld

Voor het in 4.11.2 genoemde iteratieproces

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^3 + 1)$$

geldt: $F(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$, dus $F'(x) = x^2$, en dus $|F'(x)| < 1 \iff -1 < x < 1$.

Voor de nulpunten r_1 en r_3 geldt: $|F'(r_1)| > 1$ en $|F'(r_3)| > 1$, waardoor verklaard is, dat het proces niet naar r_1 of r_3 convergeert, hoewel sommige startwaarden toch dicht bij r_1 of r_3 waren gekozen. Voor r_2 geldt:

$|F'(r_2)| < 1$, zodat het proces zal convergeren naar r_2 , wanneer de startwaarde geschikt wordt gekozen. Voor $x_0 = -1$ en $x_0 = 1$ is dit blijkbaar het geval. Uit de in 4.11.2 gegeven grafiek en "trap-interpretatie" van het proces volgt zelfs dat het proces convergeert naar r_2 voor alle startwaarden x_0 met $r_1 < x_0 < r_3$, dus bijvoorbeeld voor $x_0 = -1,5$ en $x_0 = 1,5$ terwijl dan toch $|F'(x_0)| > 1$ is.

We merken op, dat in geval $0 < F'(r) < 1$, zoals hier het geval is voor $r = r_2$, er een $d > 0$ bestaat zó dat $0 < F'(x) < 1$ voor alle $x \in U_d(r)$.

Als $x_n \in U_d(r)$, volgt uit 4.11.3(I) (omdat ook $\xi_n \in U_d(r)$) dat $x_{n+1} - r$ hetzelfde teken heeft als $x_n - r$. Het proces nadert in dit geval *monotoon* naar r , zoals ook blijkt uit de tabellen in 4.11.2.

4.11.5. Convergentiesnelheid

We veronderstellen weer dat $F(r) = r$ en dat F tweemaal continu differentieerbaar is in een d -omgeving van r .

Als $|F'(r)| < 1$ dan heet $F'(r)$ de *convergentiefactor* van het iteratieproces ' $x_{n+1} = F(x_n)$ '. De convergentiefactor is een maat voor de snelheid van de convergentie. Dit kan men als volgt inzien.

In geval van convergentie is

$$x_{n+1} - r = F(x_n) - F(r) = F'(r)(x_n - r) + O((x_n - r)^2)$$

en dus (met $\epsilon_n = r - x_n$)

$$\epsilon_{n+1} = F'(r)\epsilon_n + O(\epsilon_n^2) \quad (\text{I})$$

(in de praktijk: $\epsilon_{n+1} \approx F'(r)\epsilon_n$).

In het voorbeeld 4.11.2 is $r_2 \approx 0,34$ en $F'(r) \approx 0,12$. Daaruit volgt: $\epsilon_{n+1} \approx 0,12\epsilon_n$, zodat voor grote n in iedere iteratieslag er ongeveer één correcte decimaal bijkomt.

Een bijzonder geval treedt op wanneer $F'(r) = 0$, waarbij we veronderstellen dat F in een d -omgeving van r driemaal continu differentieerbaar is.

Dan geldt namelijk volgens de stelling van Taylor

$$\begin{aligned} x_{n+1} - r &= F(x_n) - F(r) = (x_n - r)F'(r) + \frac{1}{2}(x_n - r)^2 F''(r) + O((x_n - r)^3) = \\ &= \frac{1}{2}(x_n - r)^2 F''(r) + O((x_n - r)^3). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat in geval van convergentie voor voldoende grote waarden van n geldt

$$\epsilon_{n+1} = -\frac{1}{2}F''(r)\epsilon_n^2 + O(\epsilon_n^3) \quad (\text{II})$$

(in de praktijk: $\epsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2}F''(r)\epsilon_n^2$),

en dit betekent ruwweg, dat het aantal correcte decimalen in iedere stap verdubbeld wordt (n groot genoeg). Wanneer de fout zich gedraagt als onder (I) spreekt men van *lineaire of 1^e orde convergentie*, als hij zich gedraagt als onder (II) spreekt men van *kwadratische of 2^e orde convergentie*.

4.11.6. Schattingen

In de praktijk is de convergentiefactor van belang om de fout $\epsilon_n = r - x_n$ te kunnen schatten. Is namelijk $C = F'(r)$ en $|C| < 1$, dan geldt

$$\epsilon_n = C\epsilon_{n-1} + O(\epsilon_{n-1}^2)$$

Daar

$$\epsilon_{n-1} = r - x_{n-1} = r - x_n + x_n - x_{n-1} = \epsilon_n + (x_n - x_{n-1}),$$

is

$$\epsilon_{n-1} = C\epsilon_{n-1} + (x_n - x_{n-1}) + O(\epsilon_{n-1}^2),$$

dus

$$\epsilon_{n-1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{1 - C} + O(\epsilon_{n-1}^2). \quad (\text{I})$$

In geval van lineaire convergentie leiden we hieruit af

$$\epsilon_n = \frac{C}{1 - C}(x_n - x_{n-1}) + O(\epsilon_{n-1}^2) \quad (\text{II})$$

(in de praktijk: $\epsilon_n \approx \frac{C}{1 - C}(x_n - x_{n-1})$),

en in geval van kwadratische convergentie ($C = 0$)

$$\epsilon_{n-1} = x_n - x_{n-1} + O(\epsilon_{n-1}^2) \quad (\text{III})$$

(in de praktijk: $\epsilon_{n-1} \approx x_n - x_{n-1}$).

Om met bovenstaande methode de fout te schatten heeft men de convergentiefactor nodig, die meestal niet vooraf bekend is. Een goede schatting kan echter weer uit de procesgegevens afgeleid worden.

Voor n groot genoeg geldt

$$x_n - r = C(x_{n-1} - r) + O(\epsilon_{n-1}^2)$$

$$x_{n-1} - r = C(x_{n-2} - r) + O(\epsilon_{n-2}^2)$$

en na aftrekking

$$x_n - x_{n-1} = C(x_{n-1} - x_{n-2}) + O(\epsilon_{n-2}^2).$$

Met behulp van (I) is dan af te leiden:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = C + \frac{O(\epsilon_{n-2}^2)}{(1 - C)\epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-2}^2)},$$

dus

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = C + O(\epsilon_{n-2}), \quad (\text{IV})$$

in de praktijk: $C \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$.

4.11.7. Voorbeelden

- a) De functie f met $f(x) = xe^{x-2} - 1$ heeft op $(1,2)$ precies één nulpunt r , want $f(1) = e^{-1} - 1 < 0$, $f(2) = 1 > 0$ en f is continu, dus f heeft volgens de stelling van Weierstrass *minstens* 1 nulpunt op $(1,2)$ en $f'(x) = (1+x)e^{x-2} > 0$ voor alle $x \in (1,2)$, dus f is strikt stijgend op $(1,2)$ en heeft dus *hoogstens* 1 nulpunt op $(1,2)$.

De vergelijking $f(x) = 0$ is gelijkwaardig met

$$x = F(x), \text{ waarbij } F(x) = e^{-x+2}.$$

Nu is $|F'(x)| = e^{-x+2} > 1$ voor alle $x < 2$, dus het iteratieproces

$x_{n+1} = F(x_n)$ convergeert niet naar r .

We kunnen de vergelijking $f(x) = 0$ echter ook schrijven in de vorm

$$x = G(x), \text{ waarbij } G(x) = 2 - \ln x.$$

Uit $G'(x) = -\frac{1}{x}$ volgt dat $-1 < G'(x) < 0$ voor alle $x > 1$ en dus

$$|G'(r)| < 1.$$

Volgens 4.11.3 zal het proces convergeren als we een startwaarde x_0 kiezen, die ligt in een interval $(r - d, r + d) \subset (1, \infty)$. Om een zo groot mogelijk interval te krijgen kiezen we $r - d = 1$, dus $d = r - 1$, zodat het interval wordt: $(1, 2r - 1)$. Daar $\bigcap_{1 < r < 2} (1, 2r - 1) = \emptyset$ kunnen we nog geen startwaarde aangeven die convergentie garandeert. Aangezien echter $f(\frac{3}{2}) = -0,09 \dots$ kunnen we concluderen dat $\frac{3}{2} < r$. Derhalve convergeert het proces voor alle

$$x_0 \in (1, 2] = \bigcap_{\frac{3}{2} < r < 2} (1, 2r - 1).$$

Bijvoorbeeld het proces

$$x_{n+1} = 2 - \ln x_n, \quad x_0 = \frac{3}{2}$$

convergeert dus naar r .

We vinden

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,5945349 \\ x_2 &= 1,5334179 \\ x_3 &= 1,5725008 \\ x_4 &= 1,5473328 \\ x_5 &= 1,5634673 \\ x_6 &= 1,5530940 \\ x_7 &= 1,5597509 \\ x_8 &= 1,5554738 \\ x_9 &= 1,5582198 \\ x_{10} &= 1,5564560 \end{aligned}$$

Voor de convergentiefactor geldt

$$C \approx \frac{x_{10} - x_9}{x_9 - x_8} \approx -0,64$$

en voor de fout

$$\epsilon_{10} \approx \frac{C}{1 - C} (x_{10} - x_9) \approx 0,0006883.$$

Dus

$$r = x_{10} + \epsilon_{10} \approx 1,5571443.$$

Voor de grootte van de fout in deze laatste benadering is nu niet meer op eenvoudige wijze een zinvolle schatting te geven.

b) Om \sqrt{p} uit te rekenen gaan we uit van de vergelijking $x^2 - p = 0$.

We beschouwen het iteratieproces

$$x_{k+1} = ax_k + (1-a)\frac{p}{x_k} \quad (a \neq 1, p > 0)$$

voor verschillende waarden van a en onderzoeken hiervan de convergentie.

$F(x) = ax + (1-a)\frac{p}{x}$. Men ziet direct, dat als $\zeta = F(\zeta)$, dit tot gevolg heeft $\zeta^2 = p$, zodat het iteratieproces, indien het convergeert, inderdaad $\pm\sqrt{p}$ zal opleveren.

Beschouw $F'(x) = a - (1-a)\frac{p}{x^2}$.

$$F'(\sqrt{p}) = a - 1 + a = 2a - 1.$$

Voor $a \in (0,1)$ geldt dus $|F'(\sqrt{p})| < 1$ en bestaan er d -omgevingen van \sqrt{p} , waarin het proces convergeert (4.11.3).

Voor $a = \frac{1}{2}$ is de convergentie kwadratisch, voor $a \in (0, \frac{1}{2})$ of $a \in (\frac{1}{2}, 1)$

lineair. Om de convergentiesnelheid te illustreren doen we 10 iteraties voor $a = 0,1$, $a = 0,5$, $a = 0,6$ en $a = 0,9$ met $p = 2$. Als startwaarde is steeds $x_0 = 1$ gekozen.

$a = 0,1$	
1	1,900000000
2	1,137368421
3	1,696337490
4	1,230743352
5	1,585605087
6	1,293773819
7	1,520656115
8	1,335765188
9	1,481118748
10	1,363409434

$a = 0,5$	
1	1,500000000
2	1,416666667
3	1,414215686
4	1,414213562
5	1,414213562
6	1,414213562
7	1,414213562
8	1,414213562
9	1,414213562
10	1,414213562

$a = 0,6$	
1	1,400000000
2	1,411428571
3	1,413658762
4	1,414102689
5	1,414191391
6	1,414209128
7	1,414212676
8	1,414213385
9	1,414213527
10	1,414213555

$a = 0,9$	
1	1,100000000
2	1,171818182
3	1,225311305
4	1,266004001
5	1,297380985
6	1,321799609
7	1,340928514
8	1,355986044
9	1,367881583
10	1,377304912

De convergentiefactor $F'(\sqrt{p})$ is voor de lineaire gevallen:

$$a = 0,1 \quad F'(\sqrt{p}) = -0,8,$$

$$a = 0,6 \quad F'(\sqrt{p}) = 0,2,$$

$$a = 0,9 \quad F'(\sqrt{p}) = 0,8.$$

Schatting van de convergentiefactor en de fout uit de tabelgegevens met de formules

$$C \approx \frac{x_{10} - x_9}{x_9 - x_8} \quad \text{en} \quad \epsilon_{10} \approx \frac{C}{1 - C} (x_{10} - x_9)$$

(zie 4.11.6) geeft:

$$a = 0,1 \quad C \approx -\frac{0,118}{0,145} \approx -0,81, \quad \epsilon_{10} \approx 0,052;$$

$$a = 0,6 \quad C \approx \frac{0,000000028}{0,000000142} \approx 0,20, \quad \epsilon_{10} \approx 7 \cdot 10^{-9};$$

$$a = 0,9 \quad C \approx \frac{0,0094}{0,0119} \approx 0,79, \quad \epsilon_{10} \approx 0,0376.$$

Merk op dat voor $0 < \alpha < 0,5$ $F'(\sqrt{p}) < 0$ is, zodat de iteranden x_n afwisselend groter en kleiner dan \sqrt{p} zijn (wegens 4.11.5(I)). Voor $0,5 < \alpha < 1$ is $F'(\sqrt{p}) > 0$ en dan wordt \sqrt{p} monotoon benaderd (ook wegens 4.11.5(I)).

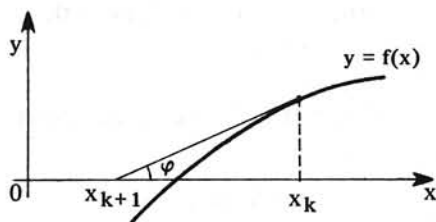
4.11.8. Methode van Newton-Raphson

We behandelen nu een Picard iteratieproces dat kwadratisch convergeert.

We veronderstellen dat de functie f in een d -omgeving U van een nulpunt r driemaal continu differentieerbaar is en dat $f'(x) \neq 0$ voor alle $x \in U$.

We vormen de vergelijking $f(x) = 0$ om in de gelijkwaardige vergelijking

$$x = F(x), \quad \text{waarin} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$



Het resulterende iteratieproces $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k \in \mathbb{N}$, heet de

methode van Newton-Raphson.

Grafisch kan deze als volgt geïnterpreteerd worden.

Aan de grafiek van f wordt een raaklijn getrokken in $(x_k, f(x_k))$.

Men bepaalt het snijpunt van deze raaklijn met de x-as en neemt dat als nieuwe schatting x_{k+1} . Uit de figuur zien we

$$\tan \varphi = f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}},$$

waaruit bovenstaande formule onmiddellijk volgt.

Omdat

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \quad \text{en } f(r) = 0,$$

is $F'(r) = 0$.

Uit de voorgaande beschouwingen volgt, dat indien $f'(r) \neq 0$ en de startwaarde x_0 voldoende dicht bij het nulpunt r gekozen wordt, het proces van Newton-Raphson kwadratisch convergeert.

We merken hierbij het volgende op.

Als I een interval is dat r bevat en waar f' en f'' tekenvast zijn, dan convergeert het Newton-Raphson proces naar r voor iedere startwaarde $x_0 \in I$ met $f(x_0)f''(x_0) > 0$, zie vraagstuk 4.12.46.

4.11.9. Voorbeelden

a) We bepalen de 3 nulpunten van $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (zie ook 4.11.2) met behulp van de methode van Newton-Raphson.

$f'(x) = 3x^2 - 3$, en $f''(x) = 6x$, dus het Newton-Raphson-proces wordt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 1}{3(x_k^2 - 1)} = \frac{2x_k^3 - 1}{3x_k^2 - 3}.$$

1) Op $(-\infty, -1)$ zijn f' en f'' tekenvast en $r_1 \in (-\infty, -1)$.

Omdat bijvoorbeeld $-2 \in (-\infty, -1)$ en $f(-2)f''(-2) = 12 > 0$, convergeert het proces naar r_1 bij startwaarde $x_0 = -2$.

2) Op $(0, 1)$ zijn f' en f'' tekenvast en $r_2 \in (0, 1)$.

Omdat bijvoorbeeld $0,1 \in (0, 1)$ en $f(0,1)f''(0,1) = 0,4206 > 0$, convergeert het proces naar r_2 bij startwaarde $x_0 = 0,1$.

3) Op $(1, \infty)$ zijn f' en f'' tekenvast en $r_3 \in (1, \infty)$.

Omdat bijvoorbeeld $2 \in (1, \infty)$ en $f(2)f''(2) = 36 > 0$, convergeert het proces naar r_3 bij startwaarde $x_0 = 2$.

Bepaling r_1	Bepaling r_2	Bepaling r_3
$x_0 = -2$	$x_0 = 0,1$	$x_0 = 2$
$x_1 = -1,8888889$	$x_1 = 0,3360269$	$x_1 = 1,6666667$
$x_2 = -1,8794516$	$x_2 = 0,3472477$	$x_2 = 1,5486111$
$x_3 = -1,8793852$	$x_3 = 0,3472964$	$x_3 = 1,5323902$
$x_4 = -1,8793852$	$x_4 = 0,3472964$	$x_4 = 1,5320890$
		$x_5 = 1,5320889$

- b) Willen we \sqrt{p} uitrekenen met het Newton-Raphson proces uit de vergelijking $x^2 - p = 0$, dan krijgen we

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - p}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}\frac{p}{x_k}$$

Dit is het in voorbeeld 4.11.7b beschouwde proces met $\alpha = \frac{1}{2}$, waarvan we al hadden gezien dat het kwadratisch en (dus) zeer snel convergeert.

Oefeningen

- Toon aan dat voor het proces $x_{n+1} = G(x_n)$ in voorbeeld 4.11.7a $x_0 = 3$ een geschikte startwaarde is.
- Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^3 + 9x - 1$.
 - Toon aan dat f op het interval $(0, \frac{1}{9})$ precies één nulpunt heeft.
 - Men benadert dit nulpunt met het iteratieproces

$$x_{n+1} = -\frac{1}{9}(x_n^3 - 1), x_0 \in [\frac{2}{9} - \sqrt{3}, \sqrt{3}).$$
 Bewijs dat dit proces convergeert naar het in a) bedoelde nulpunt.
 - Onderzoek of het in b) bedoelde proces ook convergeert als $x_0 = 2$ of als $x_0 = 4$.
- Om de wortels van de vergelijking $x^2 = x + 1$ te vinden wordt gebruik gemaakt van de volgende iteratieprocessen

$$a) x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k},$$

$$b) x_{k+1} = \frac{1}{x_k - 1}.$$

Controleer, dat deze processen, indien convergent, een wortel van de vergelijking opleveren.

Laat zien dat a) naar de grootste en b) naar de kleinste wortel van de vergelijking convergeert.

- Beschouw het iteratieproces $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}$, $x_0 = 0$.
 - Naar welke limiet convergeert dit proces?
 - Wat is de convergentiefactor?
- Gegeven is het iteratieproces $x_{k+1} = F(x_k)$, lineair convergerend naar een punt r . In een omgeving van r bezit F een inverse G . Laat zien dat geldt:
 - $r = G(r)$;
 - het iteratieproces $x_{k+1} = G(x_k)$ convergeert niet naar r .
Vgl. oefening 3 en voorbeeld 4.11.7a.
- Een nulpunt r van de vergelijking $f(x) = 0$ wordt bepaald met behulp

van een iteratieproces van de vorm $x_{k+1} = F(x_k)$. In de buurt van r is het resultaat van 5 opeenvolgende stappen:

0,619047

0,617647

0,618188

0,617977

0,618055

Geef een schatting van de convergentiefactor en van de fout in het laatste resultaat.

7. Zij $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = 5 + 11\sqrt{x} - 5x^2$.
- Bewijs dat f één nulpunt heeft tussen 1 en 4.
 - Benader dit nulpunt door één stap regula falsi te doen.
 - Benader dit nulpunt door één stap Newton-Raphson te doen. Kies hiertoe een geschikt startpunt.
8. Benader met de methode van Newton-Raphson de positieve wortel van de vergelijking $\sin x = 0,6x$. Kies een geschikte startwaarde en zet het proces voort totdat het verschil van twee opeenvolgende uitkomsten kleiner is dan 10^{-6} .

4.12. Vraagstukken

1. Differentieer:

a) $\tan(\ln(2x^2 + x))$,

b) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} e^{\arctan x}$,

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sin x}{\sqrt{2}}$,

d) $\arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

2. Differentieer:

a) $\arcsin \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$,

b) $\ln(\sin e^{(x^2)})$,

c) $\arctan \left(\frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}} \right)$.

3. Differentieer:

a) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right|$,

$$b) \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} - \sqrt{1 - x^2},$$

$$c) (\tan x)^{\arctan x},$$

$$d) \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} (x - 1) \sqrt{2x - x^2}.$$

4. Bepaal de afgeleide van $(x + \frac{1}{2})^{\frac{\arcsin x}{\pi}}$ in $\frac{1}{2}$ en van $(\frac{1+2x}{1+x})^{\frac{x-1}{x}}$ in 1.

5. f is gegeven door $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$.

a) Bepaal de definitieverzameling van f .

b) Bereken $f'(x)$.

Zelfde vragen voor $g(x) = \arcsin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + \sqrt{15 - 4x - 4x^2}$.

6. Voor $k \in \mathbb{N}$ is $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x} & \text{voor } x \neq 0, \\ 0 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Onderzoek voor welke waarden van k

a) f_k continu is in 0,

b) f_k differentieerbaar is in 0,

c) f_k continu differentieerbaar is in 0.

7. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{voor } x \neq 0, \\ 0 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

a) Onderzoek de continuïteit en differentieerbaarheid van f in 0.

b) Bepaal de afgeleide van f .

c) Onderzoek de continuïteit van de functie f' in 0.

*8. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ als $x \neq 0$ en $f(0) = 0$.

a) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^{3n}} p_{2n-2}(x), \quad x \neq 0,$$

waarbij $p_{2n-2}(x)$ een polynoom is van de graad $\leq 2n - 2$.

b) Bewijs: $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

9. De functies $H_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ worden gedefinieerd door de betrekking

$$e^{-x^2} H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

a) Bewijs de volgende relatie:

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

b) Toon aan dat $H_n(x)$ polynomen zijn van de graad n .

De polynomen $H_n(x)$ worden de *polynomen van Hermite* genoemd.

10. Zij f de inverse functie van $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Bereken $f'(x)$ en $f''(x)$.

b) Leid een relatie af tussen $f'(x)$ en $f''(x)$ en bereken met behulp daarvan $f^{(n)}(0)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

11. Zij g de inverse functie van $\cosh: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$.

a) Bereken $g'(x)$ en $g''(x)$.

b) Leid een recurrenente betrekking af voor $g^{(n)}(x)$.

12. De functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = e^x + x$.

Bewijs dat f een differentieerbare inverse $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heeft.

Bereken $g'(1)$

13. Benader met behulp van linearisering

a) $\sqrt{37}$ (linearisering om 36),

b) $\sqrt[3]{66}$ (linearisering om 64).

*14. Van de functie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven dat

a) f continu is op $[0, 1]$ en differentieerbaar op $(0, 1)$,

b) $f'(x) \leq 1$ voor alle $x \in (0, 1)$,

c) $f(0) = 0$ en $f(1) = 1$.

Toon aan dat $f(x) = x$ voor alle $x \in [0, 1]$.

*15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar op \mathbb{R} , $f(0) = 0$ en voor iedere $x \neq 0$ is $f'(x) \geq 1$.

Bewijs:

a) Voor iedere $x \neq 0$ geldt $\frac{f(x)}{x} \geq 1$,

b) $f'(0) \geq 1$.

*16. De functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar op \mathbb{R} , $f'(x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $f(0) = 1$.

Bewijs:

a) $f(x)f(-x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$,

c) f is strikt stijgend,

d) $f(a+x) = f(a)f(x)$ voor alle $a, x \in \mathbb{R}$.

*17. a) Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in een inwendig punt a van D en zij $f'(a) > 0$.

Bewijs dat er een $r \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat

$f(x) > f(a)$ voor alle $x \in (a, a+r)$ en

$f(x) < f(a)$ voor alle $x \in (a-r, a)$.

- b) Zij f tweemaal differentieerbaar in een r -omgeving van a ,
zij $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$.

Bewijs dat f in a een lokaal minimum heeft.

18. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$.

Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarden van f .

19. De massa M van de hoeveelheid rookgassen die per tijdseenheid uit een schoorsteen stroomt, wordt bepaald door:

$$M = \frac{S\lambda}{1 + T_m} \left[\frac{2gha(T_m - T_a)}{1 + \alpha T_a} \right]^{1/2}$$

Hierin is T_m de gemiddelde temperatuur van de rookgassen, terwijl S , λ , α , h , g en T_a positieve constanten zijn.

Bij welke gemiddelde temperatuur T_m is M maximaal?

20. Bepaal van de functies f en g , gegeven door onderstaande voorschriften, het maximale definitiegebied en schets hun grafiek.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3}{\ln x^4 + 1}, \quad \text{b) } g(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln^2 x}.$$

21. De functie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{als } x > 0 \text{ en } f(0) = 0.$$

- a) Onderzoek voor welke $x \in (0, \infty)$ f differentieerbaar is.
b) Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarden van f .
c) Toon aan dat de grafiek van f één buigpunt heeft en bepaal dit.
d) Schets de grafiek van f .

22. De functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continu en wordt voor $x^2 \neq 1$ gegeven door

$$f(x) = \arctan \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|.$$

- a) Bereken $f(-1)$ en $f(1)$.
b) Onderzoek of f differentieerbaar is in 0.
c) Bereken $\lim_{x \downarrow 1} f'(x)$ en $\lim_{x \uparrow 1} f'(x)$.
d) Bepaal de extreme waarde(n) van f .
e) Schets de grafiek van f .

- *23. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Toon aan:

als $f^{(n)} = 0$, dan is f een polynoom van de graad $\leq n-1$, $n \geq 1$.

24. Zij $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Geef het Taylorpolynoom van de index 3 van f in 1 en de restterm van Lagrange R_3 .

- b) Toon aan dat $|R_3| < 0,03$ indien $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$.
25. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = (1+x)^{10}$.
Gebruik linearisering van f om $1,01^{10}$ te benaderen.
Geef een schatting van de fout.
26. Benader $\ln(e^3 + \frac{1}{10})$ met behulp van een linearisering;
neem daarbij $e^3 = 20$.
Geef een schatting van de fout als gegeven is dat $20 < e^3 < 20,1$.
- *27. Zij $t_n(x)$ het Taylorpolynoom van index n in het punt 0 van de functie e^x en zij $R_n(x) = e^x - t_n(x)$.
- a) Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt
$$0 < |n! R_n(-1)| < 1.$$
- b) Bewijs dat e irrationaal is door aan te nemen dat $e = \frac{p}{q}$ met $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ en daaruit af te leiden dat
$$p!(e^{-1} - t_p(-1))$$

een geheel getal is.
- *28. Zij $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = (\arcsin x)^2$.
Leid een relatie af tussen $f'(x)$ en $f''(x)$ en bereken met behulp daarvan de coëfficiënt van x^n in de Taylorontwikkeling van f in het punt 0.
29. Bereken α als gegeven is dat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+\alpha x}}{1 - \cos 2x}$ bestaat en eindig is.
Bereken vervolgens de limiet.
30. Voor $\alpha \in \mathbb{R}^+$ is de functie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2) - \arctan x^2}{x^\alpha}, & (x \neq 0), \\ 0 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$
- Voor welke waarde(n) van α is f rechtscontinu in 0?
31. Bereken:
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - x}{x^2 \sin 2x}$,
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - x \cosh x}$,
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x}}{1 - \cos 2x}$,

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} x(x \ln(\frac{2x+1}{2x+3}) + 1).$$

32. Van de differentieerbare functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven dat

a) er is een $c \in \mathbb{R}^+$ zó dat $|f(x)| \geq c$ voor alle $x \in \mathbb{R}$,

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

Toon aan dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{f(x+1)} - \frac{1}{f(x)}) = 0$.

33. Bepaal de volgende limieten.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\arcsin \frac{1}{x} - \arcsin \frac{1}{x+1}),$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\arctan(x+1) - \arctan x).$$

34. Als $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is op \mathbb{R} en $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = p$,

dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = p$. Bewijs dit.

35. Bereken:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}}{x},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}),$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \cos^2 x)^{\frac{1}{x}},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)^{\tan x},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}),$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - e^{x^2}}{x^2},$$

36. Zij $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$.

Schets de grafiek van f .

37. De waarden in equidistante steunpunten op het interval $[0,1]$ van de functie f gegeven door $f(x) = x^3$ worden in een tabel opgenomen. Hoe groot mag de afstand tussen de steunpunten maximaal gekozen worden, opdat bij lineaire interpolatie in de tabel de interpolatiefout kleiner is dan 0,03?

Wat wordt deze afstand bij kwadratische interpolatie?

38. Gegeven is de tabel:

x	x^2
1,0	1,0
1,1	1,21
1,2	1,44
1,3	1,69
1,4	1,96
1,5	2,25

Bereken hieruit met kwadratische interpolatie $\sqrt{1,5}$ en geef een schatting van de fout.

39. Stel voor de steunpunten $x_0 = 0$ en $x_1 = \frac{\pi}{2}$ het lineaire Lagrange interpolatiepolynoom met restterm op voor de functie \sin .

Bewijs vervolgens de ongelijkheid

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x \quad \text{voor alle } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

40. Bewijs dat voor alle $x \in [0,1]$ geldt

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - (1 - e^{-1})x.$$

Gelden deze ongelijkheden ook buiten het interval $[0,1]$?

41. Gegeven het iteratieproces

$$x_{n+1} = x_n + \alpha \frac{x_n^3 - 10}{x_n^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Bepaal in geval van convergentie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

b) Bewijs dat er precies één waarde van α bestaat waarvoor het proces kwadratisch convergent kan zijn.

c) Laat zien dat voor de onder b) bedoelde waarde van α het proces bij startwaarde $x_0 = 2$ inderdaad convergeert.

42. Gegeven het iteratieproces $x_{k+1} = \alpha \sin(x_k)$ met $|\alpha| < 1$.

a) Bewijs dat het proces convergeert voor iedere startwaarde x_0 .

b) Wat is $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$?

43. Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^5 - 5x - 1$.

a) Bewijs dat f één nulpunt heeft tussen -2 en -1 .

b) Zij r het bij a) gevonden nulpunt; benader r met x_{RF} door één stap regula falsi te doen en met x_{NR} door één stap Newton-Raphson te doen met startwaarde -2 .

c) Toon aan dat $x_{NR} \leq r \leq x_{RF}$.

*44. Om de vergelijking $f(x) = 0$ iteratief op te lossen, maakt men gebruik van het iteratieproces $x_{k+1} = x_k + p(x_k)f(x_k)$, waarbij p en f voldoende vaak differentieerbare functies zijn.

- a) Laat zien dat, wanneer r een nulpunt is van f , voor convergentie moet gelden $-2 < f'(r)p(r) < 0$.
- b) Aan welke voorwaarde moet $p(r)$ voldoen, opdat het proces kwadratisch convergeert?
- c) Kan het proces ook nog convergeren naar waarden die geen nulpunt zijn van f ?
- *45. De Fibonaccirij (u_n) wordt als volgt gedefinieerd:
 $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{k+2} = u_{k+1} + u_k, k \in \mathbb{N}$.
- Bewijs dat $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$, de gulden verhouding.
- (Aanwijzing: Beschouw het iteratieproces $x_{k+1} = \frac{1+x_k}{x_k}, x_1 = 1$.)
- *46. Gegeven is een tweemaal differentieerbare functie f met continue tweede afgeleide. Zij r een nulpunt van f . In een d -omgeving U van r geldt $f''(x) > 0$ en $f'(x) \neq 0$. Men kiest een beginschatting $x_0 \in U$ zó dat $f(x_0) > 0$ en benadert de wortel met het Newton-Raphson proces.
- a) Bewijs dat f slechts één nulpunt in U heeft.
- b) Bewijs dat, indien $x_0 < r$,
- $f'(x) < 0$ voor iedere $x \in U$,
 - $x_1 > x_0$,
 - $x_1 < r$ (Aanwijzing: Gebruik de linearisering van f in x_0),
 - $x_k < x_{k+1} < r$ voor iedere $k \in \mathbb{N}$,
 - $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = r$.
- *47. Laat de functie f tweemaal continu differentieerbaar zijn op een interval I , terwijl voor alle $x \in I$ geldt $f'(x) > 0$ en $f''(x) > 0$.
 Zij $a_0, b_0 \in I$ zó dat $f(a_0) < 0 < f(b_0)$.
- a) Bewijs dat f één nulpunt r heeft op I en dat $a_0 < r < b_0$.
- b) Benader r door één stap regula falsi te doen op de steunpunten a_0 en b_0 ; noem het resultaat a_1 .
 Bewijs dat $f(a_1) < 0$ en $a_0 < a_1 < r$.
- c) Toon aan dat bij iedere volgende stap regula falsi het steunpunt b_0 vast blijft, terwijl de rij benaderingen (a_k) stijgend en begrensd is en naar r convergeert.

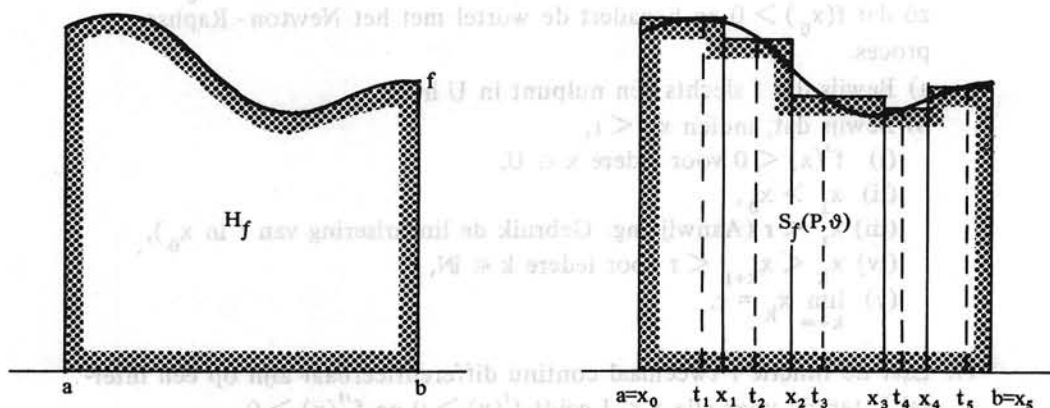
5. Integraalrekening

Definitie en eenvoudige eigenschappen van integralen

5.1. De Riemann-integraal

5.1.1. Inleiding

Ter inleiding tot de definitie van Riemann-integraal bekijken we het gebied H_f begrensd door de grafiek van een continue, overall positieve functie $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, de x-as en de verticale lijnen $x=a$ en $x=b$.



De oppervlakte van het gebied H_f wordt benaderd door de som van oppervlakten van rechthoeken (zie rechter figuur). Daarbij is het interval $[a,b]$ verdeeld in een aantal deelintervallen $[x_{i-1}, x_i]$, niet noodzakelijk met gelijke lengte, en in elk deelinterval is een punt t_i met $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ gekozen. Als benadering van de oppervlakte van H_f wordt dan genomen

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Hoe kleiner de lengten van de deelintervallen worden gekozen, des te beter zal de oppervlakte van H_f door deze som worden benaderd.

Sommen van deze vorm kunnen echter in een algemenere situatie worden toegepast. Dit leidt tot de volgende definities.

5.1.2. Definities

Zij $D \subset \mathbb{R}$, en $[a, b] \subset D$ een *begrensd gesloten interval*.

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ *begrensd* op $[a, b]$, ($a < b$).

a) Een *partitie* (of *verdeling*) P van $[a, b]$ is een eindige verzameling punten $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ zó dat

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

b) We noemen $\mu(P) = \max \{(x_i - x_{i-1}) \mid 1 \leq i \leq n\}$ de *maaswijdte* of *grofheid* van P . Dus de maaswijdte is de lengte van het grootste deelinterval $[x_{i-1}, x_i]$.

c) Een n -tal punten $\vartheta = \{t_i \mid x_{i-1} \leq t_i \leq x_i, 1 \leq i \leq n\}$ heet een *strooiing* bij de partitie P .

d) Is ϑ een strooiing bij de partitie P dan heet

$$S_f(P, \vartheta) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (I)$$

de *Riemann-som* van f behorende bij P en ϑ .

e) De functie f heet *Riemann-integreerbaar* (kort: *integreerbaar*) over $[a, b]$ als er een getal $I \in \mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap: bij iedere $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zó dat voor *iedere* partitie P met maaswijdte $\mu(P) < \delta$ en *iedere* bij P behorende strooiing ϑ geldt voor de Riemann-som $S_f(P, \vartheta)$:

$$|S_f(P, \vartheta) - I| < \epsilon.$$

We noemen I de (*Riemann-*) *integraal van f over $[a, b]$* , ook wel de *integraal van f van a tot b* . Daarbij heet f de *integrand*.

f) De integraal van f over $[a, b]$, waarbij $a < b$, noteren we met

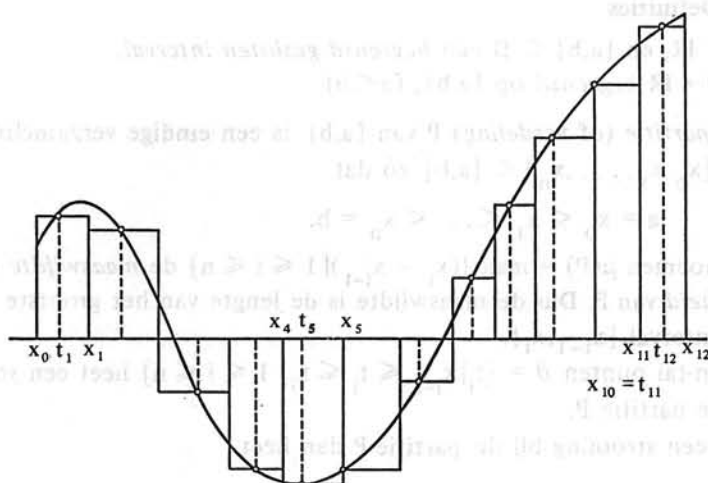
$$\int_a^b f(x) dx.$$

Verder definiëren we

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \text{ als } a > b, \text{ en } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

5.1.3. Opmerkingen

a) De som in (I) is een voorbeeld van een Riemann-som. In het algemeen kan een Riemann-som meetkundig worden voorgesteld als som van oppervlakten van rechthoeken, waarbij deze oppervlakten van een passend teken voorzien zijn (zie figuur).



b) Integreerbaarheid houdt in feite het volgende in:

Onafhankelijk van de keuze van de partitie en de strooiing nadert de Riemann-som naar een getal I , indien we de lengte van het langste deelinterval naar 0 laten gaan.

c) In de notatie $\int_a^b f(x) dx$ kan de veranderlijke x door een andere veranderlijke vervangen worden, bijv. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du$.

5.1.4. Voorbeelden

a) Zij $f(x) = c$ voor alle $x \in [a, b]$.

Voor iedere partitie P en iedere strooiing ϑ bij P geldt

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a), \text{ dus } \int_a^b c dx = c(b - a).$$

b) Zij $f(x) = x$ voor alle $x \in [a, b]$ en zij P een partitie van $[a, b]$.

Voor de bijzondere strooiing ϑ^* met strooipten

$$\tau_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \text{ geldt wegens } f(\tau_i) = \tau_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i-1}}{2} (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \\ &= \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Voor een willekeurige strooiing ϑ geldt:

$$\text{als } t_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ dan is } |t_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}| \leq \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{1}{2}\mu(P).$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left[\left| t_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right| (x_i - x_{i-1}) \right] \leq \frac{1}{2} \mu(P) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \mu(P)(b - a). \end{aligned}$$

Kiest men bij gegeven $\epsilon > 0$ nu $\delta = \frac{2\epsilon}{b-a}$, dan is voor iedere partitie P met $\mu(P) < \delta$ en iedere strooiing ϑ bij P :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right| \leq \frac{1}{2} \mu(P)(b - a) < \frac{1}{2} \delta (b - a) = \epsilon, \\ & \text{dus } \int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

- c) Zij $a < c < b$ en laat de functie f op $[a, b]$ gedefinieerd zijn door $f(x) = 0$ als $x \neq c$ en $f(c) = 1$. Is P een partitie van $[a, b]$, dan geldt voor iedere bijbehorende Riemann-som

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \mu(P) \sum_{i=1}^n |f(t_i)|.$$

Er zijn ten hoogste twee waarden van i waarvoor $t_i = c$; in $\sum_{i=1}^n |f(t_i)|$

hebben dus ten hoogste twee termen de waarde 1 en alle overige termen de waarde 0. Hieruit volgt

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 \right| \leq 2\mu(P).$$

Op dezelfde wijze als in voorbeeld 5.1.4b concludeert men hieruit dat

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0.$$

- d) Laat $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & \text{elders op } [0, 1]. \end{cases}$$

Zij P een partitie van $[0, 1]$. In ieder deelinterval $[x_{i-1}, x_i]$ kan men een getal t_i met $f(t_i) = 0$ en een getal u_i met $f(u_i) = 1$ kiezen.

Dan is

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = 0 \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = 1.$$

Bij iedere partitie bestaat er dus een Riemann-som met de waarde 0 en bestaat er tevens een Riemann-som met de waarde 1. Hieruit volgt dat f niet integreerbaar is over $[0, 1]$.

5.2. Eigenschappen van integralen

5.2.1. Inleiding

In deze paragraaf vermelden we de voornaamste eigenschappen en rekenregels voor integralen. Definitie 5.1.2e, waarin wordt geëist dat voor de Riemann-integreerbaarheid van f er een getal I moet bestaan dat minder dan ϵ verschilt van alle mogelijke Riemann-sommen (bij willekeurige partitie en willekeurige strooiing met maaswijdte $< \delta$), suggereert wellicht dat integreerbaarheid een zware eis is, waaraan maar weinig functies voldoen. Het tegendeel is echter het geval! De volgende stelling leert, dat alle in de praktijk voorkomende (begrensde) functies op een eindig interval $[a, b]$ Riemann-integreerbaar zijn. Voor een voorbeeld van een niet Riemann-integreerbare functie (5.1.4d) hebben we (noodgedwongen) een wat vreemd aandoende functie gekozen.

5.2.2. Stelling

- a) f is continu op $[a, b] \Rightarrow f$ is integreerbaar over $[a, b]$.
 b) Als $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ begrensd is en in hoogstens eindig veel punten van $[a, b]$ niet continu is, dan is f integreerbaar over $[a, b]$.
 c) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is monotoon $\Rightarrow f$ is integreerbaar over $[a, b]$.

- d) Als $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar is over $[a, b]$ en als $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de eigenschap heeft dat in hoogstens eindig veel punten van $[a, b]$ geldt $f(x) \neq g(x)$, dan is g integreerbaar over $[a, b]$ en

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

- e) Als f en g integreerbaar zijn over $[a, b]$, dan zijn ook $|f|$, fg en $\frac{1}{f}$ (mits $\frac{1}{f}$ begrensd is op $[a, b]$) integreerbaar over $[a, b]$.

Bewijs

Het bewijs van a) en c) geven we in de appendix bij dit hoofdstuk. Het bewijs van b) en d) volgt eenvoudig via een redenering analoog aan die van voorbeeld 5.1.4c. Van e) geven we geen bewijs. \square

Enkele regels voor integralen staan vermeld in de volgende stelling.

5.2.3. Stelling

- a) Als f integreerbaar is over $[a, b]$ dan is f integreerbaar over ieder gesloten deelinterval van $[a, b]$ en voor ieder drietal punten $c_1, c_2, c_3 \in [a, b]$ geldt

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x) dx.$$

- b) Zijn f en g integreerbaar over $[a, b]$ dan is voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de functie $\alpha f + \beta g$ integreerbaar over $[a, b]$ en

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

We geven van deze stelling geen bewijs.

Wel kan men de in de stelling gedane uitspraken plausibel maken door alle integralen in de stelling te vervangen door geschikt gekozen Riemannsommen.

In de volgende stelling worden een paar belangrijke ongelijkheden voor integralen opgesomd.

5.2.4. Stelling

Laat f en g integreerbaar zijn over $[a, b]$. Dus $a \leq b$.

a) Als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$ dan is $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Een overal niet-negatieve functie heeft een niet-negatief getal als integraal over $[a, b]$.

b) Als $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in [a, b]$ dan is $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Als f overal niet groter is dan g , dan is de integraal van f niet groter dan de integraal van g .

c) Als $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$ dan is $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$.

In het bijzonder: de integraal van f is niet kleiner dan het produkt van lengte en minimum van de integrand en niet groter dan het produkt van lengte en maximum van de integrand.

d) $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

De modulus van de integraal is niet groter dan de integraal van de modulus.

Bewijs

a) Neem eens aan dat $\int_a^b f(x) dx = I < 0$. Volgens definitie 5.1.2e, waarin $\epsilon = -\frac{I}{2}$ is gekozen, bestaat er een partitie P en een daarbij behorende strooiing ϑ zó dat voor de Riemann-som $S_f(P, \vartheta)$ geldt:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < -\frac{I}{2}.$$

Uit deze ongelijkheid volgt

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{I}{2} < 0.$$

Dit is onmogelijk omdat voor alle i geldt $f(t_i) \geq 0$.

b) Daar $g(x) - f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$ geldt wegens 5.2.3b en 5.2.4a:

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0.$$

c) Is $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$ dan volgt uit b) dat

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx, \text{ dus}$$

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

d) Daar voor alle $x \in [a, b]$ geldt $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ is volgens b)

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx, \text{ dus } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad \square$$

We zijn nu gekomen tot de zogenaamde hoofdstelling van de integraalrekening die een verband legt tussen differentiaalrekening en integraalrekening en ons in staat zal stellen integralen uit te rekenen.

5.2.5. De hoofdstelling van de integraalrekening

Zij f integreerbaar over $[a, b]$ en zij $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \text{ Dan geldt:}$$

- F is continu op $[a, b]$.
- Als f continu is in $c \in (a, b)$ dan is F differentieerbaar in c en $F'(c) = f(c)$.

Bewijs

a) f is begrensd op $[a, b]$, dus er is een $M > 0$ zó dat $|f(x)| \leq M$ op $[a, b]$.

Zij $c \in (a, b)$ en zij $\epsilon > 0$. Neem $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Voor alle $x \in [a, b]$ met

$|x - c| < \delta$ geldt

$$|F(x) - F(c)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \right| = \left| \int_c^x f(t) dt \right|.$$

Is $x \geq c$ dan is $\left| \int_c^x f(t) dt \right| \leq \int_c^x |f(t)| dt \leq M(x - c) = M|x - c|$;

is $x \leq c$ dan is $\left| \int_c^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^c f(t) dt \right| \leq \int_x^c |f(t)| dt \leq M(c - x) = M|x - c|$.

In beide gevallen volgt $|F(x) - F(c)| < M\delta = \epsilon$. Dus F is continu in c .
Op overeenkomstige wijze bewijst men dat F rechtscontinu is in a en linkscontinu in b .

b) Laat nu f continu zijn in $c \in (a, b)$. We zullen bewijzen dat

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c).$$

Zij $\epsilon > 0$. Kies $\delta > 0$ zó dat er voor iedere $t \in [a, b]$ met $|t - c| < \delta$ geldt $|f(t) - f(c)| < \frac{1}{2}\epsilon$. Voor iedere $x \in [a, b]$ met $0 < |x - c| < \delta$ volgt op dezelfde wijze als boven $|\int_c^x [f(t) - f(c)] dt| \leq \frac{1}{2}|x - c|\epsilon$, dus

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| = \left| \frac{\int_c^x f(t) dt}{x - c} - \frac{\int_c^x f(c) dt}{x - c} \right| = \frac{|\int_c^x [f(t) - f(c)] dt|}{|x - c|} \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon,$$

waarmee de stelling bewezen is. \square

5.2.6. Opmerking

Op overeenkomstige wijze kan men ook de volgende varianten van 5.2.5b bewijzen:

f en F zijn gegeven als in de aanhef van stelling 5.2.5. Dan geldt:

(i) Als f rechtscontinu is in a (resp. linkscontinu in b), dan is F rechtsdifferentieerbaar in a (resp. linksdifferentieerbaar in b) en $F'_r(a) = f(a)$ (resp. $F'_l(b) = f(b)$).

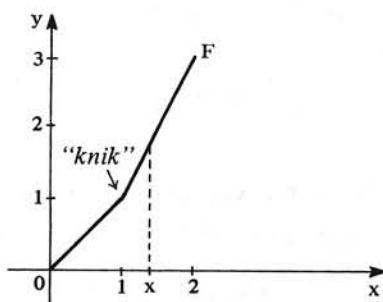
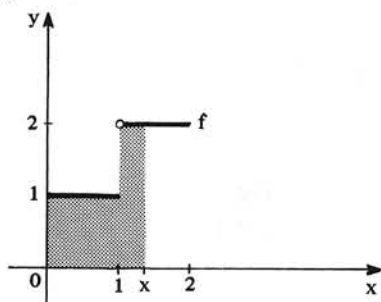
(ii) Als f continu is op $[a, b]$ is F differentieerbaar op $[a, b]$.

5.2.7. Voorbeeld

Zij $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Dan is $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ gegeven door $F(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Dus F is continu op $[0, 2]$ en F is differentieerbaar op $[0, 1) \cup (1, 2]$ met $F'(x) = f(x)$. In $x = 1$, waar f niet continu is, is F niet differentieerbaar.



5.2.8. Het differentiëren van een integraal met variabele grenzen

We bekijken eerst het geval, waarbij de variabele x alleen in de bovengrens van de integraal voorkomt.

Zij $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu op $[a, b]$ en $g: (c, d) \rightarrow (a, b)$ differentieerbaar op (c, d) , dan is de functie $\Phi: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$\Phi(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

differentieerbaar op (c,d) en $\Phi'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Bewijs

Zij $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Dan is volgens 5.2.5: $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in (a,b)$.

Nu is $\Phi = F \circ g$, dus geldt volgens de kettingregel (4.2.5):

$$\Phi'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

voor alle $x \in (c,d)$. □

Als alleen de ondergrens van x afhangt, dan verwisselen we onder- en bovengrens en zetten een min-teken voor de integraal. Dan kunnen we differentiëren. Komt de variabele x zowel in ondergrens als bovengrens voor dan splitsen we de integraal (zie stelling 5.2.3a).

$$\Phi(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = \int_{g(x)}^c f(t) dt + \int_c^{h(x)} f(t) dt = -\int_c^{g(x)} f(t) dt + \int_c^{h(x)} f(t) dt,$$

waarin c een willekeurig getal in het definitiegebied van f is.

Dus $\Phi'(x) = -f(g(x))g'(x) + f(h(x))h'(x)$.

Vanzelfsprekend hebben we hier aangenomen dat g en h aan de voorwaarden voor g hierboven voldoen.

5.2.9. Voorbeeld

Zij $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt$. Bereken $f'(x)$.

Oplossing.

$$f(x) = \int_{x^2}^c \frac{\sin t}{t} dt + \int_c^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt = -\int_c^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt + \int_c^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt, \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

Dan:

$$f'(x) = -\frac{\sin x^2}{x^2} 2x + \frac{\sin x^3}{x^3} 3x^2 = \frac{3 \sin x^3}{x} - \frac{2 \sin x^2}{x}.$$

5.2.10. Middelwaardestelling van de integraalrekening

Als f continu is op $[a,b]$ dan is er een $c \in (a,b)$ zó dat

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Bewijs

Zij $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Uit stelling 5.2.5 volgt dat F continu is op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) . Toepassing van de Middelwaardestelling (4.5.3) leidt tot:

$$\text{er is een } c \in (a,b) \text{ zó dat } F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}.$$

Wegens 5.2.5b is $F'(c) = f(c)$ zodat

$$f(c)(b-a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

Oefeningen

1. Laat de functie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn.

Zij $g: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ en zij $h: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = \int_{x^2}^1 f(t) dt$. Bereken $g'(x)$ en $h'(x)$.

2. Zij F gegeven door $F(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt$.

Bereken F' .

3. Zij $F: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \arcsin t dt$.

Bewijs dat $F'(x) = x(\sin x - \cos x) - \frac{\pi}{2} \sin x$.

4. Geef de eerste vier (van nul verschillende) termen van de Taylorontwikkeling in het punt 1 van de functie

$$x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t(t+1)}.$$

5. Zij $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Als voor alle $x \in [a,b]$ geldt $f(x) \geq 0$ en voor $x_0 \in [a,b]$ geldt $f(x_0) > 0$ dan is

$$\int_a^b f(x) dx > 0. \quad \text{Bewijs dit.}$$

6. Zij $f: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \max\{1, x\}$ en

zij $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Bereken $F(2)$ en $F'(1)$.

Het berekenen van integralen met behulp van primitieven

5.3. Primitieven

5.3.1. Definitie

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. We noemen $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ een *primitieve* van f als voor alle $x \in D$ geldt: $F'(x) = f(x)$.

5.3.2. Opmerking

Uit de voorgaande definitie volgt dat F differentieerbaar moet zijn op D . Dit is (in 4.1.11) alleen gedefinieerd als D een interval of een vereniging van onderling disjuncte intervallen is.

Als het definitiegebied van f een interval is, dan verschilt elk tweetal primitieven van f slechts een constante, zoals blijkt uit de volgende stelling.

5.3.3. Stelling

Zij I een interval en F en G zijn primitieven van $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dan is er een $K \in \mathbb{R}$, zó dat $F(x) - G(x) = K$ voor alle $x \in I$.

Bewijs

Voor alle $x \in I$ is $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, dus $(F(x) - G(x))' = 0$. Volgens stelling 4.5.5 geldt dat $F(x) - G(x)$ constant is op ieder interval $[c, d] \subset I$. Hieruit volgt het gestelde. \square

5.3.4. Opmerking

In het algemeen is de uitspraak van stelling 5.3.3 niet juist als F en G primitieven zijn van f en het definitiegebied van f geen interval is.

Zo heeft de functie f bepaald door $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ op $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ de primitieven

$$F(x) = \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{als } x < 0, \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

De volgende stelling legt het verband tussen een primitieve van $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en de integraal van f over $[a, b]$ voor een continue functie f .

5.3.5. Stelling

Zij f continu op $[a, b]$ en zij G een primitieve van f . Dan geldt

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Bewijs

Omdat f continu is op $[a, b]$, is volgens 5.2.6 ii de functie F , gedefinieerd

door $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, een primitieve van f op $[a, b]$.

Wegens stelling 5.3.3 is er een $K \in \mathbb{R}$ zó dat

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) = G(x) + K \quad \text{voor alle } x \in [a, b].$$

Dus $G(a) + K = F(a) = 0$, waaruit volgt $K = -G(a)$ en

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) = G(b) - G(a). \quad \square$$

5.3.6. Notatieafpraak

De primitieven van f vormen een verzameling van functies. Wij zullen met $\int f(x) dx$ een *willekeurig element* uit deze verzameling van functies aanduiden. Is f gedefinieerd op een interval I en is G een primitieve van f ,

dan schrijft men $\int f(x)dx = G(x) + K$ op I , omdat wegens stelling 5.3.3 iedere primitieve van f in deze vorm te schrijven is.

Met de schrijfwijze $\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int h(x)dx$ (respectievelijk $F(x) + \int g(x)dx = \int h(x)dx$) wordt bedoeld dat de som van een primitieve van f en een primitieve van g (respectievelijk de som van F en een primitieve van g) een primitieve van h is.

Dat de schrijfwijze $\int f(x)dx = G(x) + K$ onjuist is, wanneer G een primitieve van f is waarvan het domein geen interval is, blijkt uit 5.3.4.

5.3.7. Rekenregel

Voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ is $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

Bewijs

Volgens 4.2.1a hebben beide leden dezelfde afgeleide. □

5.3.8. Opmerkingen

- a) Een formule voor een primitieve van het product van twee functies is niet te geven, evenmin als voor een primitieve van de inverse van een functie, de macht van een functie, de logaritme van een functie, enz. Wel kan men vaak nuttig gebruik maken van de kettingregel (4.2.5), die aanleiding geeft tot de substitutiemethode (zie 5.4).
- b) Krachtens 5.2.5 en 5.2.6 weten we dat iedere continue functie, gedefinieerd op een interval een primitieve heeft. Het is echter soms niet mogelijk een primitieve van een uit elementaire functies opgebouwde functie uit de drukken in elementaire functies. Voorbeelden hiervan zijn $\int e^{-x^2} dx$ en $\int \frac{e^x}{x} dx$.

We zullen in het volgende methoden aangeven waarmee men in staat is om van een groot aantal functies een primitieve te vinden. Men kan daarbij gebruik maken van de bij dit boek behorende integraaltabel.

Er bestaan zeer uitvoerige tabellen van primitieven, genoemd zij

I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik: *Tables of integrals, series and products*.

- c) Het symbool $\int f(x)dx$ noemt men ook wel de *onbepaalde integraal* van f .

Dan spreekt men bij $\int_a^b f(x)dx$ van een *bepaalde integraal*.

Oefeningen

1. Zij $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Controleer dat $\arctan \frac{1+x}{1-x}$ en $\arctan x$ beide primitieven van f zijn.

Bepaal, indien mogelijk, $K \in \mathbb{R}$ zó dat $\arctan \frac{1+x}{1-x} = \arctan x + K$

- a) voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) voor alle $x \in (-\infty, 1)$.
- c) voor alle $x \in (1, \infty)$.

2. Controleer de formules (t.1) tot en met (t.10) uit de integraaltabel.

5.4. Substitutiemethode

Deze methode om primitieven te bepalen is gebaseerd op de volgende stelling.

5.4.1. Stelling

Als F een primitieve is van f op (a,b) en $g: (c,d) \rightarrow (a,b)$ differentieerbaar is op (c,d) met afgeleide g' , dan is

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + K \quad \text{op } (c,d).$$

Andere notatie (met differentialen)

$$\int f(g(x)) dg(x) = F(g(x)) + K \quad \text{op } (c,d).$$

Bewijs

Beide leden hebben volgens 4.2.5 dezelfde afgeleide. \square

5.4.2. Rechtstreekse toepassing

We zoeken $\int h(x) dx$.

(i) Schrijf $h(x)$ in de vorm: $h(x) = f(g(x))g'(x)$.

(ii) Bepaal een primitieve $F(x)$ van $f(x)$.

Dan geldt: $\int h(x) dx = F(g(x)) + K$.

We noteren:

$$\begin{aligned} \int h(x) dx &= \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(g(x)) dg(x) \stackrel{t=g(x)}{=} \int f(t) dt = F(t) + K = \\ &= F(g(x)) + K. \end{aligned}$$

We hebben dus $g(x) = t$ gesteld, vandaar de naam substitutiemethode.

5.4.3. Voorbeelden

a) Bereken $\int \frac{\ln x}{x} dx$ op \mathbb{R}^+ .

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x (\ln x)' dx = \int \ln x d \ln x \stackrel{t=\ln x}{=} \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + K = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + K.$$

b) Bereken $\int (2x+5)^{-\frac{1}{3}} dx$ op $(-\frac{5}{2}, \infty)$.

$$\text{Stel } t = 2x + 5, dt = 2 dx, \text{ dus } dx = \frac{1}{2} dt, \text{ dus}$$

$$\int (2x+5)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} + K \stackrel{t=2x+5}{=} \frac{3}{4} (2x+5)^{\frac{2}{3}} + K.$$

c) Bereken $\int x\sqrt{a^2+x^2} dx$ op \mathbb{R} .

$$\int x\sqrt{a^2+x^2} dx \stackrel{a^2+x^2=t}{=} \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + K \stackrel{t=a^2+x^2}{=} \frac{1}{3} (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} + K.$$

d) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{e^{2x} + 1} e^x dx = \int \frac{1}{(e^x)^2 + 1} de^x = \arctan e^x + K.$

We hebben hier in gedachten $e^x = t$ gesteld.

5.4.4. Omgekeerde toepassing

We zoeken $\int f(x) dx$

- (i) Kies $g(t)$ zó dat men een primitieve kan bepalen van $f(g(t))g'(t) = h(t)$.
- (ii) Bepaal een primitieve $H(t)$ van $h(t)$.
Dan geldt volgens stelling 5.4.1: $F(g(t)) = H(t) + K$, waarin F een primitieve van f is.
- (iii) Als $x = g(t)$ de inverse $t = k(x)$ heeft (alleen dan kan deze methode worden toegepast!) dan is

$$\int f(x) dx = H(k(x)) + K.$$

We noteren

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &\stackrel{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) dg(t) = \int f(g(t))g'(t) dt = \int h(t) dt = H(t) + K \\ &\stackrel{t=k(x)}{=} H(k(x)) + K. \end{aligned}$$

5.4.5. Voorbeelden

- a) Bepaal $\int \sqrt{1-x^2} dx$ op $(-1,1)$.

Stel $x = g(t) = \sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dan is $t = k(x) = \arcsin x$.

We krijgen:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} d(\sin t) = \int |\cos t| \cos t dt \stackrel{(1)}{=} \int \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + K = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + K. \end{aligned}$$

De stap (1) kan worden gemaakt omdat $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

- b) Met behulp van de substitutie $x = t^2$, $t = \sqrt{x}$, waarbij $x > 0$ en $t > 0$ volgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{t^2}{1+t} dt^2 = 2 \int \frac{t^3}{1+t} dt = 2 \int [t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}] dt = \\ \frac{2}{3} t^3 - t^2 + 2t - 2 \ln(1+t) + K &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + K \\ &\text{op } (0, \infty). \end{aligned}$$

- c) Met behulp van de substitutie $x = \frac{a}{t}$, $t = \frac{a}{x}$ met $x > a > 0$, $t \in (0,1)$ volgt

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{\frac{t}{a}}{\frac{a}{t} \sqrt{\frac{a^2}{t^2} - a^2}} d\left(\frac{a}{t}\right) = \int \frac{-dt}{a\sqrt{1-t^2}} \\ &= -\frac{1}{a} \arcsin t + K = -\frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{x} + K \text{ op } (a, \infty). \end{aligned}$$

Een geschikte rechtstreekse substitutie voor dit voorbeeld is $t = \sqrt{x^2 - a^2}$.

Ga dit zelf na.

Oefeningen

Bepaal primitieven van de door de volgende voorschriften gegeven functies op de vermelde intervallen.

- | | | | |
|---------------------------------|--|---|--|
| 1. $\frac{1}{x \ln x}$ | op $(0,1)$. | 8. $\sin^4 x \cos x$ | op $(-\infty, \infty)$. |
| 2. $\tan x$ | op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. | 9. $\sin^4 x \cos^2 x$ | op $(-\infty, \infty)$. |
| 3. $x^2 \sqrt{2x^3 + 1}$ | op $(0, \infty)$. | 10. $\frac{1}{e^x + 1}$ | op $(-\infty, \infty)$. |
| 4. $x e^{x^2}$ | op $(-\infty, \infty)$. | 11. $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ | op $(0, \infty)$. |
| 5. $\frac{4x - 2}{x^2 - x + 1}$ | op $(-\infty, \infty)$. | 12. $\frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ | op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
$a > 0, b > 0$. |
| 6. $\frac{\arctan x}{1 + x^2}$ | op $(-\infty, \infty)$. | 13. $\frac{1}{\sqrt{15 + 4x - 4x^2}}$ | op $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. |
| 7. $\frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ | op $(-\infty, \infty)$. | 14. $\frac{x + 2}{\sqrt{15 + 4x - 4x^2}}$ | op $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. |
| | | 15. $\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}$ | op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. |

5.5. Partiële integratie

Deze methode om primitieven te bepalen berust op de volgende stelling.

5.5.1. Stelling

Als f en g differentieerbaar zijn, dan is

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx.$$

Andere notatie (met differentiaal)

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$$

Bewijs

De afgeleide van het rechterlid is $f(x)g'(x)$. □

5.5.2. Voorbeelden

a) Bereken $\int x e^x dx$ op \mathbb{R} .

Stel $f(x) = x$ en $g(x) = e^x$.

Dan vinden we $\int x e^x dx = \int x de^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + K$.

b) Bereken $\int x^2 \sin x dx$ op \mathbb{R} .

Hier passen we stelling 5.5.1 herhaald toe:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -\int x^2 d(\cos x) = -x^2 \cos x + \int \cos x d(x^2) = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x d(\sin x) = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K. \end{aligned}$$

c) Bereken $\int \ln x \, dx$.

Hier kiest men $g(x) = x$, een keuze die vaak wordt gemaakt, als men een primitieve zoekt van een functie $f(x)$, waarbij men $\int x f'(x) \, dx$ kan bepalen.

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \, d \ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + K \quad \text{op } (0, \infty). \end{aligned}$$

d) Bereken $\int \sin x e^x \, dx$.

Hier gebruikt men partiële integratie om een uitdrukking te vinden voor de gevraagde primitieve, waarin hijzelf weer voorkomt. Dan kan hij worden opgelost.

$$\begin{aligned} \int \sin x e^x \, dx &= \int \sin x \, de^x = e^x \sin x - \int e^x \, d \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \\ &= e^x \sin x - \int \cos x \, de^x = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x \, d \cos x = \\ &= (\sin x - \cos x) e^x - \int e^x \sin x \, dx, \quad \text{dus} \\ \int e^x \sin x \, dx &= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) e^x + K. \end{aligned}$$

5.5.3. Reductieformules

Wanneer de integrand een natuurlijk getal n als parameter bevat, kan men schrijven $J_n = \int f_n(x) \, dx$. Met behulp van partiële integratie is het soms mogelijk de primitieve J_n recursief te berekenen. Daarbij probeert men voor J_n een uitdrukking te vinden, waarin naast bekende functies uitsluitend J_k 's voorkomen met $k < n$.

Zo'n uitdrukking voor J_n noemt men een *reductieformule* voor J_n . Men gaat er daarbij van uit, dat J_k voor kleine waarden van k , bijvoorbeeld 0 of 1, kan worden berekend. We lichten dit toe aan de hand van twee voorbeelden.

5.5.4. Voorbeelden

a) Geef een reductieformule voor $J_n = \int x^n e^x \, dx$.

$$\begin{aligned} J_n &= \int x^n \, de^x = x^n e^x - \int e^x \, d(x^n) \quad (n \geq 1) \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx \\ &= x^n e^x - n J_{n-1}. \end{aligned}$$

Dus voor $n \geq 1$ is $J_n = x^n e^x - n J_{n-1}$.

Verder is $J_0 = \int e^x \, dx = e^x$. Hiermee hebben we een recursieve definitie voor de rij (J_n) gevonden.

Er volgt: $J_1 = x e^x - e^x = e^x(x - 1)$

$$J_2 = x^2 e^x - 2e^x(x - 1) = e^x(x^2 - 2x + 2)$$

$$J_3 = x^3 e^x - 3e^x(x^2 - 2x + 2) = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$$

enz.

b) Geef een reductieformule voor $J_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Voor $n = 0$ respectievelijk $n = 1$ volgt eenvoudig

$$J_0 = x + K \text{ en } J_1 = \arctan x + K.$$

Voor $n \geq 2$ maken we gebruik van de volgende kunstgreep.

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = J_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = \\ &= J_{n-1} - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^n} dx = \\ &= J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \int x d\left(\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right) = \\ &= J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1}. \end{aligned}$$

Dus

$$J_n = \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

We zullen in 5.6 zien dat deze reductieformule van groot belang is voor het primitiveren van rationale functies.

Oefeningen

Bepaal primitieven van de door de volgende voorschriften gegeven functies op de vermelde intervallen.

1. $\arctan x$ op $(-\infty, \infty)$.
2. $x^2 \cos 2x$ op $(-\infty, \infty)$.
3. $\arcsin x$ op $(-1, 1)$.
4. $x^2 \ln x$ op $(0, \infty)$.
5. $x^2 \sinh x$ op $(-\infty, \infty)$.
6. $e^{ax} \cos bx$ op $(-\infty, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Bepaal een reductieformule voor het berekenen van de volgende primitieven

7. $J_n = \int \sin^n x dx$.
8. $J_n = \int x^n \sin x dx$.
9. $J_n = \int (1+x^2)^n dx$.

5.6. Het primitiveren van rationale functies

5.6.1. Definitie

Gegeven zijn $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ en

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

polynomen van de graad n respectievelijk m (dus $a_n \neq 0$ en $b_m \neq 0$).

Dan heet $f: x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ een *rationale* functie. f is gedefinieerd in alle x waar

$q(x) \neq 0$. Als $m = 0$, dan is $q(x) = b_0 \neq 0$, dus dan is f een polynoom. Polynomen noemt men ook wel *gehele* rationale functies (vergelijk gehele getallen en breuken).

5.6.2. Methode voor het primitiveren

Het primitiveren van polynomen is geen probleem

$$\int \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + K$$

Er is ook een methode om in het algemeen de primitieven te bepalen van een willekeurige rationale functie $f = \frac{p}{q}$. Deze methode berust er op dat men $f = \frac{p}{q}$ kan schrijven als een lineaire combinatie van "elementaire" rationale functies waarvan men de primitieven kent. Het bepalen van zo'n lineaire combinatie noemt men *breuksplitsen*. Om dit te leren kan men het (ingewikkelde) algemene geval bekijken (zie 5.6.3, .4 en .5), maar men kan dit ook doen aan de hand van de voorbeelden in 5.6.7.

5.6.3. Twee belangrijke eigenschappen van polynomen

We vermelden hier twee eigenschappen, die directe gevolgen zijn van resultaten, die in hoofdstuk 2 zijn verkregen. Het eerste is een direct gevolg van de delingsalgoritme 2.10.2.

- a) Als de graad van $p(x) \geq$ de graad van $q(x)$ is, dan zijn er polynomen $s(x)$ en $r(x)$ zó dat óf $r(x)$ het nulpolynoom is óf de graad van $r(x) <$ de graad van $q(x)$ en $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$; dus

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Gevolg: het probleem om een primitieve van f te bepalen is hiermee gereduceerd tot het geval dat graad van $p(x) <$ graad van $q(x)$.

- b) Als $q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$ ($b_m \neq 0, m > 0$), dan kan $q(x)$ geschreven worden in de vorm

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{s_1} \dots \\ \dots (x^2 + \beta_\ell x + \gamma_\ell)^{s_\ell} b_m,$$

met $r_1 + r_2 + \dots + r_k + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_\ell) = m$,

en $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$ voor $i = 1, \dots, \ell$.

Immers, wegens 2.11.12 is een polynoom met reële coëfficiënten te ontbinden in reële factoren van de eerste graad (de factoren $(x - \alpha_j)$) en van de tweede graad, die niet verder reëel te ontbinden zijn (de factoren $(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)$ met $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$).

5.6.4. (Partiële) breuksplitsing

Zij $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ als in definitie 5.6.1 en zij de graad van $p(x)$ kleiner dan de graad van $q(x)$. Stel dat $q(x)$ is geschreven als in 5.6.3b. Men kan bewijzen dat men kan schrijven

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^k \left[\frac{a_{i1}}{(x - \alpha_i)} + \dots + \frac{a_{ir_i}}{(x - \alpha_i)^{r_i}} \right] + \sum_{j=1}^l \left[\frac{b_{j1}x + c_{j1}}{(x^2 + \beta_jx + \gamma_j)} + \dots + \frac{b_{js_j}x + c_{js_j}}{(x^2 + \beta_jx + \gamma_j)^{s_j}} \right].$$

Ga na dat het aantal te bepalen constanten in de tellers gelijk is aan de graad van de noemer $q(x)$.

5.6.5. Opmerking

In theorie is hiermee een primitieve van elke rationale functie te bepalen, want van elk van de termen in 5.6.4 kent men een primitieve (zie 5.6.6). In de praktijk is de methode alleen uitvoerbaar als de graad van $q(x)$ niet te groot is, en als men de volledige ontbinding van $q(x)$ uit 5.6.3b kent. De coëfficiënten a_{ij} , b_{ij} en c_{ij} in de breuksplitsing bepaalt men door de uitdrukking uit 5.6.4 onder één noemer te brengen. De teller wordt een polynoom met als coëfficiënten uitdrukkingen in de onbekenden a_{ij} , b_{ij} en c_{ij} . Dit polynoom moet identiek gelijk zijn aan $\frac{1}{b_m} p(x)$. Gelijk stellen van overeenkomstige coëfficiënten en/of invullen van geschikte waarden van x geeft een stelsel lineaire vergelijkingen waaruit a_{ij} , b_{ij} en c_{ij} op te lossen zijn. Hoe men in de praktijk te werk gaat wordt duidelijk gemaakt in de voorbeelden in 5.6.7.

5.6.6. Primitieven van "elementaire" rationale functies

a) $\int \frac{dx}{x - \alpha} = \ln |x - \alpha| + K.$

b) $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^r} = \frac{-1}{r-1} (x - \alpha)^{-r+1} + K, \quad (r > 1).$

c) $\int \frac{x + \alpha}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + \beta x + \gamma)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s} + \int \frac{(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s} dx =$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^s} + (\alpha - \frac{1}{2}\beta) \int \frac{dx}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s},$

met $u = x^2 + \beta x + \gamma.$ ($s \geq 1$).

d) Als $\beta^2 - 4\gamma < 0$ en $y = \frac{2x + \beta}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}$, dan is

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s} = \left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \right)^{2s-1} \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^s}, \quad (s \geq 1).$$

$$e) \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \arctan y + K.$$

$$f) \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^{s+1}} = \frac{1}{2s} \cdot \frac{y}{(y^2 + 1)^s} + \frac{2s-1}{2s} \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^s}, \quad (s \geq 1).$$

Dit volgt uit de reductieformule 5.5.4b.

5.6.7. Voorbeelden

$$a) \int \frac{x^4 - 4x^3 - 2x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx.$$

Stap 1 (*Deling en splitsing*)

Met behulp van delingsalgoritme 2.10.2 kunnen we de te primitiveren functie splitsen in een polynoom en een rationale functie, waarvan de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer. In ons voorbeeld:

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 2x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = x - 1 + \frac{-5x^2 + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}.$$

Het primitiveren van het polynoom is direct mogelijk (in dit geval:

$\frac{1}{2}x^2 - x + K$), zodat we het probleem hebben teruggebracht tot het primitiveren van een rationale functie, waarbij de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer. Deze stap kan en zal, indien nodig, steeds worden uitgevoerd.

Stap 2 (*Ontbinding van de noemer*)

We ontbinden de noemer in factoren met reële coëfficiënten, die van de eerste of tweede graad zijn. Dit is wegens 2.11.12 in theorie altijd mogelijk. In de praktijk kan het evenwel grote moeilijkheden opleveren.

In ons voorbeeld: $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$.

Stap 3 (*Partiële breuksplitsing*)

We proberen $A, B, C \in \mathbb{R}$ zó te bepalen dat

$$\frac{-5x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

voor alle x , uitgezonderd die waarvoor één der noemers nul is. Daartoe moeten de polynomen die links en rechts ontstaan na vermenigvuldiging met $x(x-1)(x-2)$ identiek zijn, dus

$$-5x^2 + 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1) \quad (*)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$, dus ook voor $x = 0$, $x = 1$ en $x = 2$.

We kunnen A, B en C nu bepalen door de coëfficiënten van gelijke machten links en rechts gelijk te stellen:

$$\begin{aligned} \text{coëfficiënt van } x^2 &: -5 = A + B + C, \\ \text{coëfficiënt van } x &: 0 = -3A - 2B - C, \\ \text{coëfficiënt van } x^0 &: 2 = 2A. \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $A = 1$, $B = 3$, $C = -9$.

Een andere methode om A, B en C te berekenen verkrijgt men als men geschikt gekozen waarden van x in (*) substitueert. Bijvoorbeeld x = 0 levert direct $2 = 2A$ of $A = 1$; x = 1 geeft $-3 = -B$ of $B = 3$; x = 2 leidt tot $-18 = 2C$ of $C = -9$.

Vaak gebruikt men beide methoden gecombineerd.

We hebben dus gekregen

$$\frac{-5x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} + 3\frac{1}{x-1} - 9\frac{1}{x-2}.$$

Stap 4 (Primitiveren)

We kunnen nu onmiddellijk tot primitiveren overgaan:

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 - 2x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x| + 3\ln|x-1| - 9\ln|x-2| + K$$

op de intervallen $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ of $(2, \infty)$.

In het voorbeeld dat we hebben behandeld is de noemer te ontbinden in lineaire factoren, waaronder geen gelijke voorkomen.

Nu een voorbeeld, waarbij de noemer een product is van lineaire factoren, waaronder gelijke voorkomen.

$$b) \int \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} dx.$$

We kunnen hier meteen aan stap 3 beginnen.

We proberen nu A, B en C zó te bepalen dat

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}.$$

Dan is $x = A(1+x) + B(1-x)(1+x) + C(1-x)^2$.

Hieruit volgt door x = 1 te substitueren $1 = 2A$, door x = -1 te substitueren $-1 = 4C$ en door x = 0 te substitueren $0 = A + B + C$.

$$\text{Dus } A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, C = -\frac{1}{4}.$$

Er komt

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(1-x)^2(1+x)} dx &= \int \left[\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{1-x} - \frac{\frac{1}{4}}{1+x} \right] dx = \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + K \end{aligned}$$

op de intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ of $(1, \infty)$.

In het volgende voorbeeld is de noemer een product van een lineaire en een kwadratische factor, die niet is te schrijven als product van reële lineaire factoren.

$$c) \int \frac{x-4}{(x+1)(x^2+2x+3)} dx.$$

We zoeken nu breuksplitsing in de vorm

$$\frac{x-4}{(x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

Dan is $x-4 = A(x^2+2x+3) + (Bx+C)(x+1)$.

Door substitutie van $x=-1$ volgt: $-5 = 2A$ of $A = -\frac{5}{2}$ en van

$x=0$: $-4 = 3A + C$, zodat $C = \frac{7}{2}$.

Gelijk stellen van de coëfficiënt van x^2 links en rechts levert:

$$0 = A + B, \text{ waaruit volgt } B = \frac{5}{2}.$$

Dus

$$\int \frac{x-4}{(x+1)(x^2+2x+3)} dx = -\frac{5}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{5x+7}{x^2+2x+3} dx.$$

Nu is

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+7}{x^2+2x+3} dx &= \int \frac{5x+5+2}{x^2+2x+3} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} + 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \frac{5}{2} \ln(x^2+2x+3) + \sqrt{2} \int \frac{d(\frac{x+1}{\sqrt{2}})}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1} = \\ &= \frac{5}{2} \ln(x^2+2x+3) + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + K. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \int \frac{x-4}{(x+1)(x^2+2x+3)} dx =$$

$$= -\frac{5}{2} \ln|x+1| + \frac{5}{4} \ln(x^2+2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + K$$

op de intervallen $(-\infty, -1)$ of $(-1, \infty)$.

Tenslotte een voorbeeld met een rationale functie waarvan de noemer een macht is van een kwadratische factor.

$$d) \int \frac{x^4+x^3+3x}{x^4+2x^2+1} dx = \int \left[1 + \frac{x^3-2x^2+3x-1}{(x^2+1)^2} \right] dx = x + \int \frac{x^3-2x^2+3x-1}{(x^2+1)^2} dx.$$

De breuksplitsing geschiedt nu als volgt:

$$\frac{x^3-2x^2+3x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Dan is $x^3-2x^2+3x-1 = Cx^3 + Dx^2 + (A+C)x + (B+D)$.

Hieruit volgt $A=2$, $B=C=1$, $D=-2$, dus

$$\int \frac{x^4+x^3+3x}{x^4+2x^2+1} dx = x + \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{x}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$\stackrel{(1)}{=} x - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctan x + K =$$

$$= \frac{x^3 + \frac{3}{2}x - 1}{x^2 + 1} - \frac{3}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + K.$$

Bij de stap (1) is gebruik gemaakt van de in 5.5.4b afgeleide reductieformule met $n = 2$.

Oefeningen

Bepaal primitieven van de door de volgende voorschriften gegeven functies op intervallen die geen nulpunten van de noemer bevatten.

1. $\frac{1}{x^2 - 1}$

7. $\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)^2}$

2. $\frac{3x+1}{x^2+3x+2}$

8. $\frac{1}{e^{2x} + e^x - 2}$

3. $\frac{1}{(x+1)^2 + 4}$

9. $\frac{\sin x}{4 - \cos^2 x}$

4. $\frac{3x+1}{x^2+x+1}$

10. $\frac{1}{\cos x}$

5. $\frac{7x-4}{(x-1)^2(x+2)}$

11. $\frac{1}{\cos^3 x}$

6. $\frac{x^4 + x^3}{x^3 - 1}$

5.7. Het primitiveren van wortelvormen

5.7.1. Wortelvormen van het type $\sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$

Het probleem van het vinden van een primitieve van een gegeven functie kan in een aantal gevallen door een geschikt gekozen substitutie herleid worden tot het berekenen van een primitieve van een rationale functie. Dit geldt in het bijzonder voor het primitiveren van wortelvormen van

het type $\sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ eventueel gecombineerd met rationale functies van x .

De substitutie $t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ geeft achtereenvolgens $t^n = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$,

$$x(\gamma t^n - \alpha) = (-\delta t^n + \beta), \text{ dus } x = \frac{-\delta t^n + \beta}{\gamma t^n - \alpha}.$$

Dan levert $\frac{dx}{dt}$ een rationale functie van t op. Door de substitutie gaat het gevraagde probleem over in het zoeken van een primitieve van een rationale functie in t . Dit probleem is in 5.6 behandeld.

5.7.2. Voorbeelden

$$a) \int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{1+x}} \quad \text{op } (-1, \infty).$$

Met behulp van de substitutie $t = \sqrt{1+x}$, dus $t \in (0, \infty)$, $x = t^2 - 1$ en $\frac{dx}{dt} = 2t$ krijgen we

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{1+x}} &= \int \frac{2t dt}{(t^2+3)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + K = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}} + K \quad \text{op } (-1, \infty). \end{aligned}$$

We hebben hierbij gebruik gemaakt van (t.19) uit de tabel.

$$b) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx \quad \text{op } (1, \infty).$$

Met de substitutie $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$, dus $\frac{x-1}{x+1} = t^2$, $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ en

$\frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$ krijgen we de breuksplitsing

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} t \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = 4 \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = \\ &= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 2 \arctan t + K = \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) - 2 \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + K. \end{aligned}$$

5.7.3. Wortelvormen van het type $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Door $x + \frac{b}{2a} = u$ en $b^2 - 4ac = D$ te stellen geldt:

$$ax^2 + bx + c = au^2 - \frac{D}{4a}, \quad (a \neq 0).$$

Hierdoor is het mogelijk uitdrukkingen met een wortelvorm $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ te herleiden tot drie mogelijke gevallen.

$$a) \alpha \sqrt{u^2 - \beta^2}. \quad \text{Dit treedt op als } a > 0 \text{ en } D > 0; \alpha = \sqrt{a} \text{ en } \beta = \frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

$$b) \alpha \sqrt{u^2 + \beta^2}. \quad \text{Dit treedt op als } a > 0 \text{ en } D < 0; \alpha = \sqrt{a} \text{ en } \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2a}.$$

$$c) \alpha \sqrt{\beta^2 - u^2}. \quad \text{Dit treedt op als } a < 0 \text{ en } D > 0; \alpha = \sqrt{-a} \text{ en } \beta = \frac{-\sqrt{D}}{2a}.$$

Als $D = 0$ kan de wortel getrokken worden; het geval $a < 0$ en $D < 0$ kan niet optreden, omdat $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ dan voor geen enkele x gedefinieerd

is. Hoe men in elk van de drie gevallen primitieven bepaalt door goniometrische substitutie blijkt uit de volgende voorbeelden.

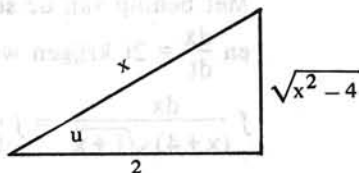
5.7.4. Voorbeelden

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ op $(2, \infty)$.

Stel $x = \frac{2}{\cos u}$, $u \in (0, \frac{\pi}{2})$,

dan is $\frac{dx}{du} = \frac{2 \sin u}{\cos^2 u}$ en $\sqrt{x^2-4} = 2 \tan u$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} &= \int \frac{\cos u}{2} \frac{\cos u}{2 \sin u} \frac{2 \sin u}{\cos^2 u} du = \frac{1}{2} \int du = \frac{1}{2} u + K = \\ &= \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{x} + K. \end{aligned}$$



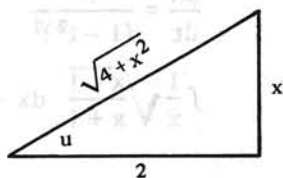
Door de substitutie $x = -t$ uit te voeren kan men ook een primitieve op $(-\infty, -2)$ vinden.

b) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}}$ op $(-\infty, 0)$ of $(0, \infty)$.

Stel $x = 2 \tan u$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ of $u \in (0, \frac{\pi}{2})$,

dan is $\frac{dx}{du} = \frac{2}{\cos^2 u}$ en $\sqrt{4+x^2} = \frac{2}{\cos u}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{1}{4 \tan^2 u} \frac{\cos u}{2} \frac{2}{\cos^2 u} du = \frac{1}{4} \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} du = \\ &= -\frac{1}{4 \sin u} + K = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + K. \end{aligned}$$

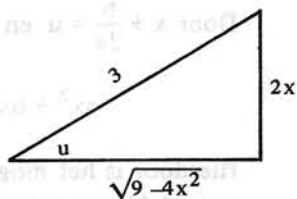


c) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$ op $(-\frac{3}{2}, 0)$ of $(0, \frac{3}{2})$.

Stel $x = \frac{3}{2} \sin u$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ of $u \in (0, \frac{\pi}{2})$,

dan is $\frac{dx}{du} = \frac{3}{2} \cos u$ en $\sqrt{9-4x^2} = 3 \cos u$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx &= \int 3 \cos u \frac{2}{3 \sin u} \frac{3}{2} \cos u du = 3 \int \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = \\ &= 3 \int \frac{1-\sin^2 u}{\sin u} du = 3 \ln \frac{1-\cos u}{|\sin u|} + 3 \cos u + K = \\ &= 3 \ln \frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{|2x|} + \sqrt{9-4x^2} + K. \end{aligned}$$



Oefeningen

Bepaal primitieven van de door de volgende voorschriften gegeven functies op de vermelde intervallen.

$$1. \frac{\sqrt{1+x}}{x-3} \quad \text{op } (-1,3). \quad 5. \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}} \quad \text{op } (-2,2).$$

$$2. \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}} \quad \text{op } (-\infty,-4). \quad 6. \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} \quad \text{op } (0,2).$$

$$3. \frac{1}{x^4 \sqrt{5+x^2}} \quad \text{op } (0,\infty).$$

$$4. \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+5}} \quad \text{op } (-5,2).$$

5.8. Toepassing bij het berekenen van integralen

Met behulp van stelling 5.3.5 en de bovengenoemde methoden om primitieven te bepalen is men in staat veel integralen uit te rekenen. Vaak is het handiger om de volgende variant van de substitutieregels te gebruiken, waarbij de grenzen bij de substitutie worden meegenomen.

5.8.1. Stelling

Zij I een interval.

Als $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continu is en $g: [c,d] \rightarrow I$ differentieerbaar is met continue afgeleide g' , terwijl $g(c) = a$ en $g(d) = b$, dan is

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t))g'(t) dt.$$

Hierbij is het niet nodig dat g een inverse heeft.

Bewijs

Zij $H(t) = \int_a^{g(t)} f(x) dx$. Dan is $H(c) = 0$ en $H(d) = \int_a^b f(x) dx$.

Verder geldt $H'(t) = f(g(t))g'(t)$,

$$\text{dus } \int_c^d f(g(t))g'(t) dt = \int_c^d H'(t) dt = H(d) - H(c) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

5.8.2. Voorbeelden

$$a) \int_{x=0}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin t}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{u=0}^{\sqrt{2}} \frac{du}{1-u^2} = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} \right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx.$$

Substitueer in de tweede integraal $x = \pi - t$. Er komt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\pi - t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt.$$

$$\text{Dus } \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

Via de substitutie $x = \frac{\pi}{2} - t$ bewijst men evenzo $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.

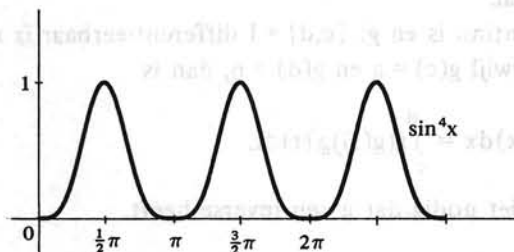
5.8.3. Enkele goniometrische integralen

In veel toepassingen stuit men op de integraal van $\sin^n x$ of $\cos^n x$ ($n \in \mathbb{N}$) over een interval $[\frac{p\pi}{2}, (\frac{p+k}{2})\pi]$, $p \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. In dit geval dient men onderscheid te maken tussen n even en n oneven.

a) n even.

In dit geval is $\sin^n x = \sin^n(x + \pi)$, zodat met behulp van 5.8.2b volgt:

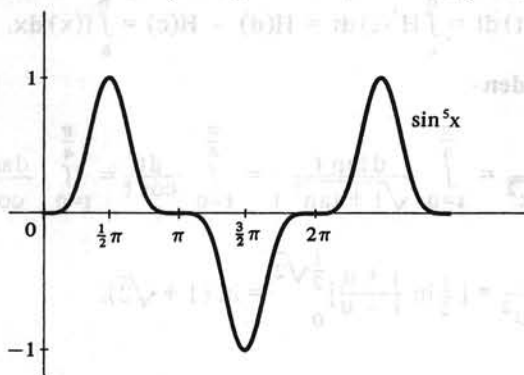
$$\int_{\frac{p\pi}{2}}^{(\frac{p+k}{2})\pi} \sin^n x dx = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$



Analoog voor $\cos^n x$.

b) n oneven.

In dit geval is $\sin^n x = -\sin^n(x + \pi)$ en dient men zorgvuldig te letten



op het teken van $\sin x$ op elk interval $[i\frac{\pi}{2}, (i+1)\frac{\pi}{2}]$, $i \in \mathbb{Z}$. Wel geldt voor alle $i \in \mathbb{Z}$:

$$\left| \int_{i\frac{\pi}{2}}^{(i+1)\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

Analoog voor $\cos^n x$.

5.8.4. Voorbeelden

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \sin^4 x \, dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx.$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x \, dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x \, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx.$$

5.8.5. Berekening van $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

Zij n geheel, $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} k_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d \cos x = [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, d \sin^{n-1} x = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Hieruit volgt } n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx.$$

We hebben dus voor k_n de volgende recurrente betrekking gevonden:

$$k_n = \frac{n-1}{n} k_{n-2}.$$

(Vergelijk de reductieformule voor onbepaalde integralen 5.5.3). Gemakkelijk berekent men $k_0 = \frac{\pi}{2}$, $k_1 = 1$.

We vinden door herhaalde toepassing van de recurrente betrekking:

$$k_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot k_0 = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$k_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot k_1 = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

Merk op dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ (vergelijk 5.8.2b).

5.8.6. Het product van Wallis

Omdat $\sin^{n+1}x \leq \sin^n x$ voor alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ en voor alle $n \in \mathbb{N}$, is

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx, \text{ dus met behulp van 5.8.5 volgt:}$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \leq \\ \leq \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

of

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 \cdot \dots \cdot 4^2 \cdot 2^2}{(2n+1)(2n-1)^2 (2n-3)^2 \cdot \dots \cdot 5^2 \cdot 3^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Met behulp van de insluitstelling volgt dan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 \cdot \dots \cdot 4^2 \cdot 2^2}{(2n+1)(2n-1)^2 (2n-3)^2 \cdot \dots \cdot 5^2 \cdot 3^2} = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{product van Wallis})$$

Als toepassing van partiële integratie geven we een versie van de stelling van Taylor (4.7.6) met een restterm in integraalvorm.

5.8.7. Stelling

Zij I een open interval en laat $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -maal continu differentieerbaar zijn. Laat $c, x \in I$ en zij $R_n(x) = f(x) - t_n(x)$, waarbij $t_n(x)$ het Taylorpolynoom van de index n van f in c is;

$$t_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

$$\text{Dan geldt } R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Bewijs (met volledige inductie)

Is $n=0$ dan is volgens stelling 5.3.5:

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t) dt, \text{ dus wegens } t_0(x) = f(c) \text{ is}$$

$$f(x) = t_0(x) + \int_c^x f'(t) dt =$$

$$= t_0(x) + \frac{1}{0!} \int_c^x f^{(0+1)}(t)(x-t)^0 dt.$$

Veronderstel dat $n \geq 1$ en dat

$$f(x) = t_{n-1}(x) + \frac{1}{(n-1)!} \int_c^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$$

(inductieveronderstelling).

Door partiële integratie volgt

$$\begin{aligned} \int_c^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt &= -\frac{1}{n} \int_c^x f^{(n)}(t) d(x-t)^n = \\ &= \left[-\frac{1}{n} f^{(n)}(t) (x-t)^n \right]_c^x + \frac{1}{n} \int_c^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = \\ &= \frac{1}{n} f^{(n)}(c) (x-c)^n + \frac{1}{n} \int_c^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt, \end{aligned}$$

dus wegens de inductieveronderstelling geldt

$$\begin{aligned} f(x) &= t_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n + \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = \\ &= t_n(x) + \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt. \quad \square \end{aligned}$$

Oefeningen

1. Bereken

a) $\int_0^1 x(1-x)^{10} dx.$

e) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$

b) $\int_{-1}^1 e^{\sqrt[3]{x}} dx.$

f) $\int \frac{8 dx}{1+x+\sqrt[3]{x}}.$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx.$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1+\sin^2 x} dx.$

d) $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 4}.$

h) $\int \left(\frac{1}{x^2} \ln(1-x) + \frac{1}{x} \right) dx.$

2. Zij $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2 \cos x} \cos nx dx$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Bewijs: $I_{n-1} - I_{n+1} = nI_n.$

5.9. De natuurlijke logaritme

Mede ter illustratie van de in dit hoofdstuk behandelde theorie laten we hier zien hoe de natuurlijke logaritme kan worden ingevoerd met behulp van het integraalbegrip.

5.9.1. Definitie

De natuurlijke logaritme $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

5.9.2. Opmerking

Omdat de functie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{1}{x}$ continu is op \mathbb{R}^+ is hij volgens

5.2.2a integreerbaar over ieder gesloten deelinterval van \mathbb{R}^+ . De hier gegeven definitie van de natuurlijke logaritme is dus zinvol.

5.9.3. Eigenschappen

a) De functie \ln is continu en differentieerbaar op \mathbb{R}^+ en

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}^+.$$

Bewijs

Volgt uit stelling 5.2.5. □

b) De functie \ln is strikt stijgend op \mathbb{R}^+ .

Bewijs

Volgt uit stelling 4.5.6 omdat $\frac{1}{x} > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^+$. □

c) $\ln 1 = 0$.

Bewijs

Volgt uit de definitie wegens 5.1.2f. □

d) $\ln ab = \ln a + \ln b$ voor alle $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Bewijs

$$\begin{aligned} \ln ab &= \int_1^{ab} \frac{dt}{t} && \text{(volgens de definitie)} \\ &= \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} && \text{(volgens stelling 5.2.3a)} \\ &= \ln a + \int_1^b \frac{du}{u} && \text{(door de substitutie } t = au) \\ &= \ln a + \ln b. && \square \end{aligned}$$

e) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ voor alle $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Bewijs

$$\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b \quad \text{volgens d).}$$

Dus

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b. \quad \square$$

f) $\ln a^n = n \ln a$ voor alle $a \in \mathbb{R}^+$ en voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

Bewijs

Voor $n=0$ volgt de bewering uit c). Voor $n > 0$ volgt de bewering met volledige inductie uit d); het geval $n < 0$ volgt uit het geval $n > 0$ wegens e). □

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$.

Bewijs

Voor elke $x \geq 1$ bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zó dat $2^n \leq x < 2^{n+1}$.

Dus volgt uit b) en f) $\ln x \geq \ln 2^n = n \ln 2$;

omdat uit $x \rightarrow \infty$ volgt $n \ln 2 \rightarrow \infty$ is $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$. □

$$h) \lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty.$$

Bewijs

Omdat $y = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$ als $x \downarrow 0$ volgt uit e) en g)

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln x = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y \rightarrow \infty} \ln y = -\infty. \quad \square$$

i) De functie $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ is bijectief.

Bewijs

Dat \ln injectief is volgt uit b).

Dat \ln surjectief is volgt uit a), g) en h) omdat 3.12.4 leert dat het beeld van een interval onder een continue functie weer een interval is. \square

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Bewijs

Uit a) volgt, gelet op de definitie van afgeleide, voor de afgeleide in het punt 1:

$$1 = \left(\frac{d}{dx} \ln x \right)_{x=1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}. \quad \square$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Bewijs

Voor $x > 1$ geldt wegens stelling 5.2.4b

$$0 < \frac{\ln x}{x} = \frac{\int_1^x \frac{dt}{t}}{x} \leq \frac{\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}, \text{ zodat volgens de insluitstelling}$$

$$\text{volgt: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0. \quad \square$$

Oneigenlijke integralen

5.10. Eerste soort: oneindig integratieinterval

5.10.1. Definitie

Laat $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ voor iedere $b > a$ integreerbaar zijn over $[a, b]$.

Als er een reëel getal L is met $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = L$ dan definiëren we:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

In dit geval heet $\int_a^\infty f(x) dx$ een *convergente oneigenlijke integraal* (van de

eerste soort); is er geen L met bovengenoemde eigenschap dan spreekt men van een *divergente oneigenlijke integraal (van de eerste soort)*.

Onder analoge voorwaarden definieert men:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

5.10.2. Opmerking

Kent men van f een primitieve F op $[a, \infty)$, dan is dus

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(a),$$

en analoog

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x),$$

als deze limieten bestaan.

5.10.3. Definitie

Is f integreerbaar over ieder gesloten begrensde interval en zijn voor

willekeurige $a \in \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ en $\int_a^{\infty} f(x) dx$ beide convergent, dan zegt

men dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ convergent is en men definieert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Men noemt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ *divergent*, indien $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ niet convergent is.

5.10.4. Opmerkingen

a) De in 5.10.3 gegeven definitie van $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ is onafhankelijk van het gekozen getal a , omdat wegens 5.2.3a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx \quad (\text{voor elke } b \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

b) Als F een primitieve van f is op \mathbb{R} , dan is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x),$$

als beide limieten bestaan.

5.10.5. Voorbeelden

a) Bereken, indien convergent, de integraal $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Oplossing.

We weten dat $2\sqrt{x}$ een primitieve is van $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Dus

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x} - 2) = \infty.$$

Dus de integraal is divergent.

b) Bereken, indien convergent, de integraal $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Oplossing.

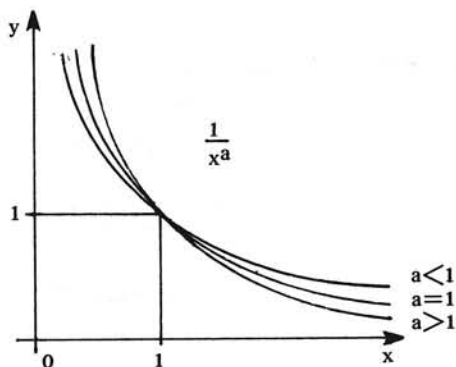
We weten dat $-\frac{1}{x}$ een primitieve is van $\frac{1}{x^2}$. Dus

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = 1.$$

Deze integraal is dus convergent.

c) Analoog aan a) en b) vindt men

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_1^p \frac{dx}{x^a} = \begin{cases} \frac{1}{a-1} & \text{als } a > 1, \\ +\infty & \text{als } a \leq 1. \end{cases}$$



Dus $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}$ is convergent als $a > 1$ en divergent als $a \leq 1$.

d) Omdat $\frac{1}{a}e^{ax}$ een primitieve is van e^{ax} als $a \neq 0$ en x als $a = 0$, vinden we

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{ax} dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\right) = \infty && \text{als } a > 0, \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a} && \text{als } a < 0, \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 0) = \infty && \text{als } a = 0. \end{aligned}$$

$\int_0^{\infty} e^{ax} dx$ is convergent als $a < 0$ en divergent als $a \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{e) } \int_{-\infty}^0 e^{ax} dx &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-p}^0 e^{ax} dx \stackrel{x=-t}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} - \int_p^0 e^{-at} dt = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} dt, \end{aligned}$$

is dus convergent als $a > 0$ en divergent als $a \leq 0$.

Uit d) en e) volgt dat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} dx$ divergent is voor alle $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{f) Voor iedere } p > 0 \text{ is } \int_{-p}^p x dx = 0, \text{ dus } \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-p}^p x dx = 0.$$

Toch is $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ divergent, want bijv. $\int_0^{\infty} x dx$ is divergent.

$$\text{g) } \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{x+1}{x+2} + \ln 2 \right] = \ln 2.$$

Merk op dat $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1}$ en $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+2}$ allebei divergent zijn; een uitspraak als

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+2} =$$

is daarom zinloos.

Oefeningen

Bereken de volgende oneigenlijke integralen.

$$1. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$2. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

$$5. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+x}}.$$

$$3. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}.$$

$$6. \int_{-\infty}^0 e^x \sin x dx.$$

5.11. Tweede soort: integrand kan onbegrensd zijn

5.11.1. Definitie

Laat $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ voor iedere $c \in (a, b)$ integreerbaar zijn over $[c, b]$.

Als er een reëel getal L is met

$$\lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x) dx = L, \text{ dan definiëren we}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x) dx.$$

De *oneigenlijke integraal (van de tweede soort)* $\int_a^b f(x) dx$ heet in dit geval

convergent; is er geen L met bovengenoemde eigenschap dan heet de oneigenlijke integraal van de tweede soort *divergent*.

Men zegt ook wel: $\int_a^b f(x) dx$ is oneigenlijk in a .

Laat $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ voor iedere $c \in (a, b)$ integreerbaar zijn over $[a, c]$.

Als er een reëel getal L is met

$\lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x) dx = L$, dan definiëren we op analoge wijze

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x) dx.$$

5.11.2. Opmerkingen

- a) Aan het symbool $\int_a^b f(x) dx$ is niet te zien of het een oneigenlijke integraal van de 2-de soort betreft of een gewone integraal. Dat blijkt alleen uit het al dan niet begrensd zijn of het al dan niet gedefinieerd zijn van de integrand. Een gewone integraal kan echter als oneigenlijke integraal behandeld worden. Immers, is f integreerbaar over $[a, b]$, dan volgt uit de hoofdstelling (5.2.5)

$$\lim_{c \downarrow a} \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

In dit geval zijn de definities 5.1.2 en 5.11.1 dus met elkaar in overeenstemming.

- b) Is $\int_a^b f(x) dx$ oneigenlijk in b en kent men van f een primitieve F , dan is

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \uparrow b} F(x) - F(a),$$

als deze limiet bestaat.

Analoog als de integraal oneigenlijk is in a .

We definiëren nu integralen die oneigenlijk zijn (van 1-ste of 2-de soort) in beide uiteinden.

5.11.3. Definitie

Zij $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar over ieder gesloten begrensd deelinterval $[c, d] \subset (a, b)$. Hierin mag $a = -\infty$ en/of $b = \infty$ genomen worden. Zijn voor

een zekere $p \in (a, b)$ $\int_a^p f(x) dx$ en $\int_p^b f(x) dx$ beide convergent, dan zegt

men dat $\int_a^b f(x) dx$ *convergent* is en men definieert:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx.$$

Deze definitie blijft geldig als de integralen uit het rechterlid eventueel oneigenlijk zijn in p . Is $\int_a^b f(x) dx$ niet convergent, dan noemt men hem *divergent*.

5.11.4. Opmerkingen

- De net genoemde definitie is onafhankelijk van de keuze van p (vergelijk 5.10.4).
- Het geval $a = -\infty$ en $b = \infty$ stemt overeen met definitie 5.10.3.
- In het meest algemene geval wordt het integratie-interval zo opgesplitst, dat elk der integralen over de deelintervallen in hooguit één eindpunt oneigenlijk is. De integraal heet dan convergent als alle deelintegralen convergent zijn.

5.11.5. Voorbeelden

- a) Voor alle $p \in (0, 1)$ is

$$\int_p^1 \frac{dx}{x^a} = \begin{cases} \frac{1 - p^{1-a}}{1 - a} & \text{als } a \neq 1, \\ -\ln p & \text{als } a = 1. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$\lim_{p \downarrow 0} \int_p^1 \frac{dx}{x^a} = \begin{cases} \frac{1}{1 - a} & \text{als } a < 1, \\ +\infty & \text{als } a \geq 1. \end{cases}$$

Dus $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$ is convergent als $a < 1$ en divergent als $a \geq 1$.

- b) Voor alle $p \in (0, 1)$ is

$$\int_p^1 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_p^1 = -1 - p \ln p + p.$$

Daar $\lim_{p \downarrow 0} (-1 - p \ln p + p) = -1$ is $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$.

- c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ is in beide uiteinden oneigenlijk.

Omdat $\arcsin x$ een primitieve is van $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, geldt

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \uparrow 1} \arcsin x - \lim_{x \downarrow -1} \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

We kunnen deze integraal ook berekenen met behulp van de substitutie $x = \sin t$. Merk op dat de resulterende integraal niet meer oneigenlijk is.

- d) Let goed op! De "berekening"

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \Big|_{-1}^1 = 0 \quad \text{is foutief,}$$

want $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$ is divergent (zie a).

Wel correct is

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \\ &= \lim_{x \uparrow 0} \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(-1)^2} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{1^2} - \lim_{x \downarrow 0} \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Beide integralen uit het rechterlid zijn nu convergent.

e) Beschouw $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

De integrand is niet gedefinieerd voor $x = 0$ en dus is dit een oneigenlijke integraal. Maar de integrand is niet onbegrensd.

De functie f , gedefinieerd door $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{als } x \neq 0, \\ 1 & \text{als } x = 0, \end{cases}$

is continu op \mathbb{R} en dus integreerbaar over $[0,1]$.

Volgens opmerking 5.11.2a is

$$\lim_{p \downarrow 0} \int_p^1 \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{p \downarrow 0} \int_p^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

De oneigenlijke integraal $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ is dus convergent.

Men spreekt in zo'n geval van een *ophefbaar oneigenlijke integraal*.

Oefeningen

Bereken de volgende oneigenlijke integralen.

1. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

4. $\int_{-3}^3 \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

2. $\int_0^1 x^2 \ln(1-x) dx$.

5. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-4}}$.

3. $\int_0^1 \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

5.12. Convergentieonderzoek van oneigenlijke integralen van de eerste soort

5.12.1. Wat is convergentieonderzoek?

Het is vaak mogelijk om van een oneigenlijke integraal de convergentie of divergentie vast te stellen zonder dat men daarbij de integraal uitrekent. Daarbij vergelijkt men de integrand met de integrand van een integraal waarvan de convergentie of divergentie al bekend is. Het is in vele gevallen zinvol om de convergentie zo van te voren te onderzoeken. Als men geen primitieve van de integrand kent en men de integraal langs

numerieke weg wil berekenen (zie 5.18.4), dan dient de convergentie vast te staan, daar men anders rekentijd verspilt. Ook in het geval dat de integrand afhankelijk is van een parameter α en dus de oneigenlijke integraal $I(\alpha)$ een functie van α is, is het belangrijk het domein van deze functie te kennen. Dit bestaat uit die waarden van α waarvoor de oneigenlijke integraal convergent is. In de volgende paragrafen geven we een aantal stellingen over convergentie en divergentie. We formuleren en bewijzen de stellingen alleen in het geval dat de integraal oneigenlijk is in het rechteruiteinde van het integratieinterval. Analoge stellingen gelden echter als de integraal oneigenlijk is in het linkeruiteinde.

5.12.2. Stelling

Als $\int_a^{\infty} f(x) dx$ en $\int_a^{\infty} g(x) dx$ convergeren, dan convergeert voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

de integraal $\int_a^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx$ en er geldt:

$$\int_a^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^{\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{\infty} g(x) dx.$$

Bewijs

Voor alle $c > a$ en voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geldt wegens 5.2.3b:

$$\int_a^c [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^c f(x) dx + \beta \int_a^c g(x) dx.$$

De limiet voor $c \rightarrow \infty$ bestaat rechts wegens het gegeven en 3.6.4, en dus ook links. Limietovergang levert nu het gestelde. \square

De volgende stellingen zullen ons in staat stellen om het al dan niet convergeren van de ene oneigenlijke integraal in verband te brengen met het al dan niet convergeren van een andere integraal, waarvan dit misschien al bekend is of eenvoudiger is te bepalen.

5.12.3. Stelling (Majorante-minorantekenmerk)

Laat $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ en $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ voor iedere $b > a$ integreerbaar zijn over $[a, b]$.

Als er een $c \geq a$ is zó dat $0 \leq f(x) \leq g(x)$ op $[c, \infty)$ dan geldt:

$$\text{a) } \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ is convergent} \implies \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ is convergent};$$

$$\text{b) } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ is divergent} \implies \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ is divergent.}$$

Bewijs

a) Zij $\int_a^{\infty} g(x) dx$ convergent; noem $\int_a^{\infty} g(x) dx = L$.

Daar $0 \leq f(x) \leq g(x)$ op $[c, \infty)$ is $F: [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door

$F(y) = \int_c^y f(x) dx$, een stijgende functie en geldt voor iedere $y > c$

$$\int_c^y f(x) dx \leq \int_c^y g(x) dx = \int_a^y g(x) dx - \int_a^c g(x) dx \leq L - \int_a^c g(x) dx.$$

Volgens stelling 3.5.8a bestaat $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_c^y f(x) dx$ en dus ook

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^y f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_c^y f(x) dx. \text{ Dit betekent dat } \int_a^\infty f(x) dx$$

convergent is.

- b) Neem eens aan dat $\int_a^\infty g(x) dx$ convergent is. Dan is volgens a) $\int_a^\infty f(x) dx$ convergent, in strijd met het gegeven. Bewering b) is de logische omkering van bewering a) (zie 1.6.6). \square

5.12.4. Stelling (Limietkenmerk)

Als $f: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ en $g: [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ voor iedere $b > a$ integreerbaar zijn over $[a, b]$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L < \infty$ dan geldt:

- a) Als $L > 0$: $\int_a^\infty f(x) dx$ is convergent $\iff \int_a^\infty g(x) dx$ is convergent.
- b) Als $L = 0$: $\int_a^\infty g(x) dx$ is convergent $\implies \int_a^\infty f(x) dx$ is convergent.

Bewijs

Merk op dat altijd geldt $L \geq 0$ (vergelijk 3.5.2c).

- a) Volgens de limietdefinitie bestaat er een $c > a$ zó dat

$$\frac{1}{2} L < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2} L, \text{ dus } \frac{1}{2} L g(x) < f(x) < \frac{3}{2} L g(x) \text{ voor alle } x > c.$$

De bewering volgt nu uit 5.12.2 en 5.12.3.

- b) Als $L = 0$ bestaat er een $c > a$ zó dat

$$0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \text{ dus } 0 \leq f(x) < g(x) \text{ voor alle } x > c.$$

De bewering volgt dan uit 5.12.3. \square

5.12.5. Opmerking

Om de convergentie te onderzoeken van $\int_a^\infty f(x) dx$, waarbij $f(x)$ voor alle $x > c$ tekenvast is (de stelling eist $f(x) \geq 0$, maar als $f(x) \leq 0$ dan kan men $\int_a^\infty -f(x) dx$ onderzoeken), zoekt men een passende vergelijkingsfunctie g waarvoor men de convergentie of divergentie van $\int_a^\infty g(x) dx$ al heeft vast-

gesteld. Voor g kiest men vaak een functie waarvan de integraal in de voorbeelden van 5.10.5 is behandeld.

5.12.6. Voorbeelden

a) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$

Voor iedere $x \geq 1$ is $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$; uit de convergentie van $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ volgt

dus de convergentie van $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$

Aangezien $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-x^2} dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$, is $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

convergent en geldt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$

Zonder bewijs vermelden we dat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, zie 8.4.4.

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x - \ln x}.$

Noem $\frac{1}{x^2 + 4x - \ln x} = f(x)$ en kies $g(x) = \frac{1}{x^2}.$

Daar $x^2 + 4x - \ln x > 0$ voor $x \geq 1$, is $f(x) \geq 0$ voor alle $x \geq 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 4x - \ln x} = 1.$$

Aangezien $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ convergeert, convergeert ook $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x - \ln x}.$

5.12.7. Definitie

Zij $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. De oneigenlijke integraal $\int_a^{\infty} f(x) dx$ heet *absoluut convergent* als de oneigenlijke integraal $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ convergent is.

Een oneigenlijke integraal die convergent is, maar niet absoluut convergent is, heet *relatief convergent*.

5.12.8. Stelling

Zij $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar over $[a, b]$ voor alle $b \in [a, \infty)$.

Dan geldt:

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ is convergent} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ is convergent.}$$

Een absoluut convergente oneigenlijke integraal is dus convergent.

Bewijs

Noem $g(x) = \frac{1}{2} [f(x) + |f(x)|]$ en $h(x) = \frac{1}{2} [-f(x) + |f(x)|].$

Volgens 5.2.2e en 5.2.3b zijn g en h voor iedere $b > a$ integreerbaar

over $[a, b]$. Voor $x > a$ geldt:

$$0 \leq g(x) \leq |f(x)| \text{ en } 0 \leq h(x) \leq |f(x)|.$$

Hieruit volgt met 5.12.3 de convergentie van de oneigenlijke integralen

$\int_a^\infty g(x) dx$ en $\int_a^\infty h(x) dx$. Stelling 5.12.2 levert nu het bestaan van

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^\infty (g(x) - h(x)) dx = \int_a^\infty g(x) dx - \int_a^\infty h(x) dx. \quad \square$$

5.12.9. Voorbeelden

a) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$.

Op $[1, \infty)$ is $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$. Omdat $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ convergent is, is $\int_1^\infty |\frac{\cos x}{x^2}| dx$

en dus ook $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ convergent.

b) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Voor iedere $p > 1$ is

$$\int_1^p \frac{\sin x}{x} dx = [-\frac{\cos x}{x}]_1^p + \int_1^p \cos x d\frac{1}{x} = \cos 1 - \frac{\cos p}{p} - \int_1^p \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Omdat $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\cos p}{p}$ en $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_1^p \frac{\cos x}{x^2} dx$ bestaan (zie voorbeeld a)), bestaat

$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_1^p \frac{\sin x}{x} dx$, d.w.z. is $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ convergent.

Aangezien ook $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ convergent is (vgl. 5.11.5e), is $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ convergent.

Zonder bewijs vermelden we dat $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

We onderzoeken nu of deze integraal absoluut convergent is.

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is

$$\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^n \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k\pi} \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} |\sin x| dx \right].$$

Via de substitutie $x = k\pi - \pi + t$ ziet men dat

$$\int_{k\pi-\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \int_0^\pi |\sin(k\pi - \pi + t)| dt = \int_0^\pi |\sin t| dt = \int_0^\pi \sin t dt = 2.$$

$$\text{Dus } \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Zij $2^p \leq n < 2^{p+1}$. Dan is

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^p}}_{> \frac{1}{2}}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{p}{2}.$$

Omdat uit $n \rightarrow \infty$ volgt $(1 + \frac{p}{2}) \rightarrow \infty$ is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$.

Dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$ en dus ook $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$.

Dit betekent dat $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ divergent is.

$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ is dus een voorbeeld van een relatief convergente oneigenlijke integraal.

Oefeningen

Onderzoek of de volgende oneigenlijke integralen convergent of divergent zijn.

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$.

2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \ln x}$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

4. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$.

5. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \ln^2 x}$.

Onderzoek voor welke waarde(n) van $a \in \mathbb{R}$ de volgende integralen convergeren resp. divergeren.

6. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^a} dx$.

7. $\int_1^{\infty} \frac{x^\alpha}{e^{2x} - 1} dx$.

8. $\int_1^{\infty} \frac{2 + \cos x}{(x^2 + 1)^\alpha} dx$.

9. Bewijs dat $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ absoluut convergent is.

10. Bewijs dat $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ convergeert.

5.13. Convergentieonderzoek van oneigenlijke integralen van de tweede soort

5.13.1. Inleiding

Het convergentieonderzoek van oneigenlijke integralen van de tweede soort vertoont grote overeenkomst met het onderzoek van oneigenlijke integralen van de eerste soort. Ook hier formuleren we de stellingen alleen in het geval dat de integraal oneigenlijk is in het rechteruiteinde van het integratieinterval. De bewijzen verlopen analoog aan die in 5.12. Daarom laten we de meeste achterwege.

5.13.2. Stelling

Laat $f: [a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ en $g: [a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ voor iedere $c \in (a,b)$ integreerbaar zijn over $[a,c]$. Als de (in b oneigenlijke) integralen $\int_a^b f(x) dx$ en $\int_a^b g(x) dx$ convergeren, dan convergeert voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de integraal $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx$ en er geldt:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx .$$

5.13.3. Stelling (Majorante-minorantenkenmerk)

Laat $f: [a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ en $g: [a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ voor iedere $c \in (a,b)$ integreerbaar zijn over $[a,c]$. Als $0 \leq f(x) \leq g(x)$ op $[d,b)$ voor zekere $d \in [a,b)$ dan geldt:

- a) $\int_a^b g(x) dx$ is convergent $\implies \int_a^b f(x) dx$ is convergent ;
 b) $\int_a^b f(x) dx$ is divergent $\implies \int_a^b g(x) dx$ is divergent.

Bewijs

- a) Zij $\int_a^b g(x) dx$ convergent; noem $\int_a^b g(x) dx = L$.

Daar $0 \leq f(x) \leq g(x)$ op $[d,b)$ is $F: [d,b) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$F(y) = \int_d^y f(x) dx$ een stijgende functie en geldt voor iedere $y \in [d,b)$

$$\int_d^y f(x) dx \leq \int_d^y g(x) dx = \int_a^y g(x) dx - \int_a^d g(x) dx \leq L - \int_a^d g(x) dx .$$

Volgens stelling 3.5.10a bestaat $\lim_{y \uparrow b} \int_d^y f(x) dx$, dus ook

$$\lim_{y \uparrow b} \int_a^y f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \lim_{y \uparrow b} \int_d^y f(x) dx . \text{ Dit betekent dat}$$

$\int_a^b f(x) dx$ convergent is.

b) De logische omkering van a). □

5.13.4. Stelling (Limietkenmerk)

Als $f: [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ en $g: [a, b) \rightarrow (0, \infty)$ voor iedere $c \in (a, b)$ integreerbaar

zijn over $[a, c]$ en $\lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L < \infty$ dan geldt:

a) Als $L > 0$: $\int_a^b f(x) dx$ is convergent $\Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx$ is convergent.

b) Als $L = 0$: $\int_a^b g(x) dx$ is convergent $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ is convergent.

5.13.5. Definitie

Zij $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. De oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x) dx$ heet *absoluut convergent* als de oneigenlijke integraal $\int_a^b |f(x)| dx$ convergent is.

Een oneigenlijke integraal die convergent is, maar niet absoluut convergent is, heet *relatief convergent*.

5.13.6. Stelling

Zij $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar over $[a, c]$ voor alle $c \in [a, b)$.

Dan geldt

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ is convergent} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ is convergent.}$$

Een absoluut convergente oneigenlijke integraal is dus convergent.

5.13.7. Voorbeelden

a) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{x^2} - 1}$.

Deze integraal is oneigenlijk in 0. We bekijken het begin van de Taylorontwikkeling van de noemer in 0:

$$e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2!} e^{\vartheta x^2}.$$

Dit brengt ons op het idee om $f(x) = \frac{1}{e^{x^2} - 1}$ te gaan vergelijken met

$$g(x) = \frac{1}{x^2}. \text{ Nu is } \lim_{x \downarrow 0} \frac{1/(e^{x^2} - 1)}{1/x^2} = 1. \text{ Daar wegens 5.11.5a: } \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

divergeert, divergeert ook $\int_0^1 \frac{dx}{e^{x^2} - 1}$.

b) Onderzoek voor welke waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ de integraal $\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^\alpha} dx$ convergeert respectievelijk divergeert.

Oplissing:

Zij $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^\alpha}$. $\int_0^\infty f(x) dx$ is oneigenlijk in 0 en ∞ voor zekere α .

Merk op dat $f(x) \geq 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}^+$. We splitsen de integraal:

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^\infty f(x) dx.$$

(i) Het convergentiegedrag in 0.

Omdat $x - \sin x = x - (x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)) = \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ als $x \rightarrow 0$, is

$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^\alpha}$ eindig en $\neq 0$ als $\alpha = 3$. Daarom kiezen we

$$g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-3}} > 0. \text{ Dan is } \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Dus } \int_0^1 f(x) dx \text{ convergeert} \iff \int_0^1 g(x) dx \text{ convergeert} \iff$$

$$\iff \alpha - 3 < 1 \iff \alpha < 4.$$

(ii) Het convergentiegedrag in ∞ .

We kiezen als vergelijkingsfunctie $g(x) = x^{1-\alpha}$.

$$\text{Dan is } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1.$$

$$\text{Dus } \int_1^\infty f(x) dx \text{ convergeert} \iff \int_1^\infty g(x) dx \text{ convergeert} \iff$$

$$\iff \alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2.$$

Conclusie: $\int_0^\infty f(x) dx$ convergeert voor $2 < \alpha < 4$ en divergeert voor

$\alpha \leq 2$ en $\alpha \geq 4$.

5.13.8. De Gammafunctie van Euler

Beschouw $\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$. We splitsen deze integraal in \int_0^1 en \int_1^∞ .

Zij $f(x) = e^{-x} x^{p-1}$.

(i) Het convergentiegedrag in 0.

We nemen $g(x) = x^{p-1}$. Dan is $\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

$$\text{Dus } \int_0^1 f(x) dx \text{ convergeert} \iff \int_0^1 g(x) dx \text{ convergeert} \iff$$

$$\iff 1 - p < 1 \iff p > 0.$$

(ii) Het convergentiegedrag in ∞ .

We schrijven $f(x) = e^{-x} x^{p-1} = e^{-\frac{x}{2}} (e^{-\frac{x}{2}} x^{p-1})$. Omdat voor alle $p \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{p-1} = 0$, is $e^{-\frac{x}{2}} x^{p-1} < 1$ als $x > G$ voor zekere G .

Kiezen we $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, dan is dus voor $x > G$: $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Daar $\int_1^{\infty} g(x) dx$ convergeert, volgt dat $\int_1^{\infty} f(x) dx$ voor alle $p \in \mathbb{R}$ convergeert.

Dus $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ convergeert als $p > 0$ en divergeert als $p \leq 0$.

De functie $\Gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ met $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ heet de *Gammafunctie van Euler*. Een belangrijke eigenschap van de Gammafunctie is de relatie:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad p > 0.$$

Bewijs

$$\begin{aligned} \int e^{-x} x^p dx &= - \int x^p d(e^{-x}) = \\ &= -e^{-x} x^p + p \int e^{-x} x^{p-1} dx. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} b^p) + \lim_{a \downarrow 0} (e^{-a} a^p) + p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \\ &= p\Gamma(p). \end{aligned}$$

Daar $\Gamma(1) = 1$ volgt voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Omdat door de substitutie $x^2 = t$, $x = t^{1/2}$

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-t} t^{-1/2} dt$$

kan men uit voorbeeld 5.12.6a afleiden

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \text{dus } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad \square$$

Hieruit kan dan ook $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ worden berekend.

Oefeningen

1. Bewijs de stellingen 5.13.2, 5.13.4 en 5.13.6.

Onderzoek of de volgende oneigenlijke integralen convergent of divergent zijn.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x - \ln x}$.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{1 - \sqrt{x}}$.

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

Onderzoek voor welke waarde(n) van $\alpha \in \mathbb{R}$ de volgende integralen convergeren resp. divergeren.

6. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$.

7. $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^{2x} - 1} dx$.

8. $\int_0^1 \frac{\arctan \sqrt[3]{x}}{x^{2\alpha}} dx$.

Laplace transformatie

5.14. Definitie en algemene stellingen

5.14.1. Inleiding

We introduceren nu de Laplace transformatie, een belangrijk hulpmiddel voor het bestuderen van lineaire differentiaalvergelijkingen (zoals ze bij elektrische netwerken bijvoorbeeld vaak voorkomen).

De Laplace transformatie is een afbeelding \mathbf{L} die aan een functie f (van de variabele t) als beeld een functie $F = \mathbf{L}[f]$ (van de variabele s) toevoegt.

5.14.2. Definitie

Zij f een functie $t \mapsto f(t)$ gedefinieerd op \mathbb{R}^+ .

De Laplace getransformeerde $\mathbf{L}[f]$ van f is een functie F met als voorschrift

$$F(s) = \mathbf{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

gedefinieerd voor die waarden van s , waarvoor de integraal convergeert.

De inverse Laplace getransformeerde van F is een functie f zó dat

$\mathbf{L}[f] = F$. We noteren

$$\mathbf{L}^{-1}[F] = f.$$

5.14.3. Opmerkingen

a) In plaats van $\mathbf{L}[f]$ schrijven we meestal $\mathbf{L}[f(t)]$ (dus de functie f vervangen we door zijn voorschrift).

Evenzo noteren we $\mathbf{L}^{-1}[F(s)]$.

- b) Bij de definitie van $\mathbf{L}^{-1}[F]$ hebben we stilzwijgend verondersteld, dat het origineel f eenduidig bepaald is door het beeld F . Dit is onder bepaalde voorwaarden juist, bijvoorbeeld als f continu is. Het bewijs hiervan valt buiten het bestek van dit boek.

5.14.4. Voorbeelden

- a) Als $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\mathbf{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-st} (st)^n d(st) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

(zie 5.13.8), dus

(i) $\mathbf{L}[1] = \frac{1}{s}$, $s > 0$,

(ii) $\mathbf{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $s > 0$.

- b) Als $f(t) = \cos bt$, $b \in \mathbb{R}$, dan volgt met (t.18).

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos bt dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + b^2} (-s \cos bt + b \sin bt) \right]_{t=0}^p = \frac{s}{s^2 + b^2},$$

als $s > 0$, dus

(i) $\mathbf{L}[\cos bt] = \frac{s}{s^2 + b^2}$, $s > 0$.

Analoog vindt men

(ii) $\mathbf{L}[\sin bt] = \frac{b}{s^2 + b^2}$, $s > 0$.

- c) Als $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, dan is, als $s > a$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_{t=0}^p = \frac{1}{s-a},$$

$$\mathbf{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

In de nu volgende stelling worden voldoende voorwaarden voor het bestaan van de Laplace getransformeerden gegeven.

5.14.5. Stelling

Als voor $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven is

- a) voor alle $k \in \mathbb{R}^+$ is f op het interval $[0, k]$ begrensd en in hoogstens eindig veel punten niet continu, en

- b) er bestaan getallen M , b en t_0 uit $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, zó dat

$$|f(t)| \leq M e^{bt} \quad \text{voor alle } t \geq t_0,$$

dan bestaat $\mathbf{L}[f(t)]$ voor $s > b$.

Bewijs

Wegens 5.2.2b bestaat voor alle $k \in \mathbb{R}^+$ $\int_0^k e^{-st} f(t) dt$, dus ook

$\int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt$. Omdat $\int_{t_0}^{\infty} M e^{(b-s)t} dt$ convergeert voor $s > b$, convergeert

wegens 5.12.3 en 5.12.8 ook $\int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ voor $s > b$.

Dus $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ convergeert voor $s > b$. \square

5.14.6. Stelling

Voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ is

$$\mathbf{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathbf{L}[f(t)] + \beta \mathbf{L}[g(t)].$$

als alle drie de Laplace getransformeerden bestaan.

Bewijs

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \\ &= \alpha \mathbf{L}[f(t)] + \beta \mathbf{L}[g(t)]. \end{aligned} \quad \square$$

5.14.7. Stelling

Voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ is

$$\mathbf{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha \mathbf{L}^{-1}[F(s)] + \beta \mathbf{L}^{-1}[G(s)].$$

Bewijs

Uit stelling 5.14.6 volgt dat linker- en rechterlid dezelfde Laplace getransformeerde hebben. De stelling volgt dan uit de eenduidigheid van de inverse Laplace transformatie. \square

5.14.8. Opmerking

Uit oefening 3 zal blijken dat de voorwaarden in stelling 5.14.5 niet *noodzakelijk* zijn voor het bestaan van de Laplace getransformeerde.

Oefeningen

1. Bereken $\mathbf{L}[f(t)]$ voor de volgende $f(t)$.

a) $2 \sinh(3t) - 4$.

b) $7t^2 - te^{-4t}$.

c) $(t-1)\cos 3t + 5e^{-t}$.

2. Bereken $\mathbf{L}^{-1}[F(s)]$ voor de volgende $F(s)$.

a) $\frac{4s}{s^2 - 16}$.

b) $\frac{3}{s-7} + \frac{1}{s^2}$.

c) $\frac{3s+17}{s^2-7}$.

d) $\frac{s^2-2s+4}{s^6}$.

3. Toon aan: $\mathbf{L}(t^{-\frac{1}{2}}) = (\frac{\pi}{s})^{\frac{1}{2}}$.**5.15. Drie belangrijke rekenregels**

De nu volgende elementaire stellingen, waarin $F(s)$ steeds de Laplace getransformeerde van $f(t)$ voor $s > s_0$ is, helpen zeer bij het rekenen met Laplace transformaties.

5.15.1. Gelijkvormigheidsstelling

$$\mathbf{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad (a > 0).$$

Bewijs

$$\mathbf{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt \stackrel{u=at}{=} \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{met } s > as_0. \quad \square$$

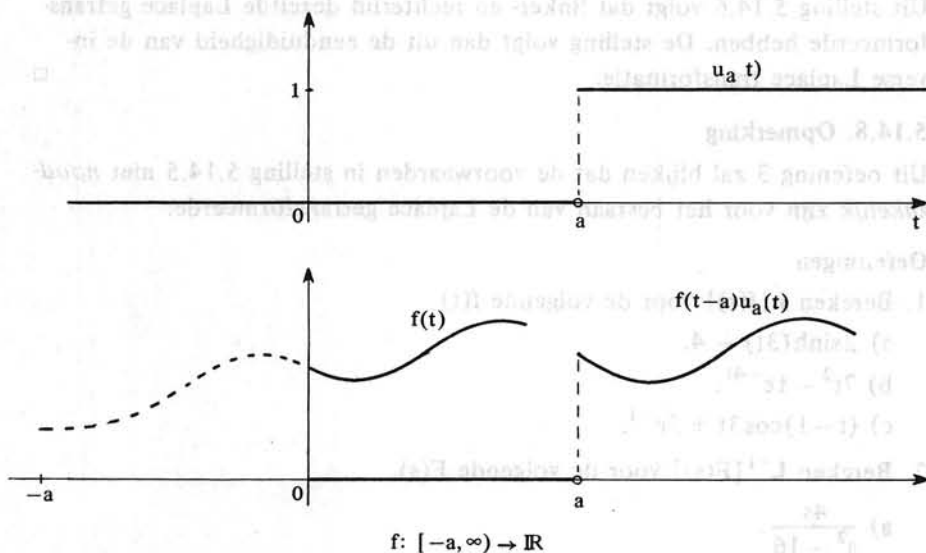
5.15.2. Verschuivingsstelling

Zij $u_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de eenheidsstapfunctie, gedefinieerd door

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}, \quad (a \geq 0).$$

Dan is

$$\mathbf{L}[f(t-a)u_a(t)] = e^{-as} F(s), \quad (a \geq 0).$$



Bewijs

$$f(t-a)u_a(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{voor } t \geq a \\ 0 & \text{voor } t < a \end{cases},$$

dus $L[f(t-a)u_a(t)] = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt \stackrel{v=t-a}{=} \int_0^{\infty} e^{-s(a+v)} f(v) dv = e^{-as} F(s)$. \square

5.15.3. Dempingsstelling

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad \text{voor } s > s_0 - a.$$

Bewijs

$$L[e^{-at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} f(t) dt = F(s+a). \quad \square$$

5.15.4. Voorbeelden

a) Zij $f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 3 \\ \cos 4(t-3) & , t \geq 3 \end{cases}$.

Om $L[f(t)]$ te vinden, schrijven we $f(t) = \cos 4(t-3)u_3(t)$.

Uit 5.15.2 volgt $L[f(t)] = e^{-3s} L[\cos 4t] = e^{-3s} \frac{s}{s^2 + 16}$.

b) Uit 5.15.3 volgt

$$L[e^{-at} \cos bt] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}, \quad s > -a$$

$$L[e^{-at} \sin bt] = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}, \quad s > -a.$$

c) Zij $f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 2 \\ t-1 & , 2 \leq t < 5 \\ \frac{1}{8}t^2 & , t \geq 5 \end{cases}$.

We schrijven $f(t) = g_1(t) + g_2(t)$, waarbij

$$g_1(t) = \begin{cases} t-1 & , 2 \leq t < 5 \\ 0 & , \text{ elders} \end{cases}, \quad \text{en } g_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 & , t \geq 5 \\ 0 & , \text{ elders} \end{cases}.$$

Dan $g_1(t) = (t-1)(u_2(t) - u_5(t))$ en $g_2(t) = \frac{1}{8}t^2 u_5(t)$.

Dus $f(t) = (t-1)u_2(t) + (\frac{1}{8}t^2 - t + 1)u_5(t) =$

$$= (1 + (t-2))u_2(t) + (-\frac{7}{8} + \frac{1}{4}(t-5) + \frac{1}{8}(t-5)^2)u_5(t),$$

en $L[f(t)] = e^{-2s} L[1+t] + e^{-5s} L[-\frac{7}{8} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}t^2] =$
 $= e^{-2s} (\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}) + e^{-5s} (-\frac{7}{8s} + \frac{1}{4s^2} + \frac{1}{4s^3}).$

Oefeningen

Bepaal de Laplace getransformeerde van de volgende functies.

1. $tu_4(t)$.

2. $1 - \sinh 6t + e^{-t} \cosh t$.

3. $3e^{-4t} \sin 2t - \cos 6t + 6$.

4. $f(t) = \begin{cases} 2t & , 0 \leq t < 5 \\ t+2 & , t \geq 5 \end{cases}$.

5. $f(t) = \begin{cases} -2t^2 & , 0 \leq t < 9 \\ (t+1)^3 & , t \geq 9 \end{cases}$.

6. $f(t) = \begin{cases} \sin t & , 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & , t > \pi \end{cases}$.

7. $1 - t^2 e^{-3t} u_2(t)$.

5.16. Differentiatie- en integratiestellingen**5.16.1. Stelling**

Zij $|f(t)| \leq Me^{bt}$ voor $t \geq t_0$ ($M, b, t_0 \in \mathbb{R}_0^+$). Zij f differentieerbaar op $(0, \infty)$ en rechtscontinu in 0.

Dan is

$$\mathbf{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad \text{voor } s > b.$$

Bewijs

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} ([e^{-st} f(t)]_0^A + s \int_\epsilon^A e^{-st} f(t) dt) = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-sA} f(A) - \lim_{\epsilon \downarrow 0} e^{-s\epsilon} f(\epsilon) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Wegens het gegeven is $|e^{-sA} f(A)| \leq Me^{(b-s)A}$ voor $A > t_0$.

$Me^{(b-s)A} \rightarrow 0$ als $A \rightarrow \infty$ en $s > b$, dus $|e^{-sA} f(A)| \rightarrow 0$ als $A \rightarrow \infty$.

Wegens de rechtscontinuïteit van f in 0 is $\lim_{\epsilon \downarrow 0} e^{-s\epsilon} f(\epsilon) = f(0)$.

Wegens stelling 5.15.3 bestaat $\mathbf{L}[f(t)]$ voor $s > b$ en dus volgt het gestelde. \square

5.16.2. Gevolg

Voldoen f , f' en f'' aan voorwaarden analoog aan die genoemd in 5.16.1,

$$\begin{aligned} \text{dan is } \mathbf{L}[f''(t)] &= s\mathbf{L}[f'(t)] - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Zo doorgaande vindt men

$$\mathbf{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

5.16.3. Stelling

Laat $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn op $[0, \infty)$ en zij $F = \mathbf{L}[f]$. Dan is

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \frac{1}{s} F(s).$$

Bewijs

Pas 5.16.1 toe voor $g(t) = \int_0^t f(x) dx$ in plaats van $f(t)$. Dan

$$\mathbf{L}[g'(t)] = s\mathbf{L}[g(t)] - g(0).$$

Omdat $g'(t) = f(t)$ en $g(0) = 0$ volgt $\mathbf{L}[f(t)] = s\mathbf{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right]$, of

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \frac{F(s)}{s}. \quad \square$$

5.16.4. Stelling (Laplace getransformeerde van een periodieke functie)

Zij $f(t)$ periodiek met periode T , dat wil zeggen $f(t) = f(t + T)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dan is

$$F(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}, \quad s > 0.$$

Bewijs

Door verschuiven van f over een periode krijgen we

$$f(t) - f(t - T) u_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{voor } 0 < t < T \\ 0 & \text{voor } t > T. \end{cases}$$

Met stelling 5.15.2 volgt dan voor $s > 0$:

$$F(s) - e^{-sT} F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt, \quad \text{zodat}$$

$$F(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}, \quad s > 0. \quad \square$$

5.16.5. Vermenigvuldigingsstelling

Is $F(s) = \mathbf{L}[f(t)](s)$ voor $s > b$, dan is F differentieerbaar voor $s > b$ en er geldt

$$\mathbf{L}[tf(t)] = -F'(s).$$

Bewijs

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right] = \int_0^\infty -t e^{-st} f(t) dt = -\mathbf{L}[tf(t)].$$

We hebben hierbij gebruik gemaakt van differentiatie onder het integraal-teken. Dit is onder zekere voorwaarden toegelaten. We gaan hier echter niet verder op in. \square

5.16.6. Voorbeelden

a) Zij $f(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < \pi \\ |\sin t| & , t \geq \pi \end{cases}$. Bereken $\mathbf{L}[f(t)]$.

Oplossing:

$$f(t) = |\sin t| u_{\pi}(t) = |\sin(t - \pi)| u_{\pi}(t).$$

Wegens 5.16.4 is

$$\mathbf{L}[|\sin t|] = \frac{\int_0^{\pi} e^{-st} \sin t \, dt}{1 - e^{-s\pi}} \stackrel{(t.17)}{=} \frac{[e^{-st}(-s \sin t - \cos t)]_0^{\pi}}{(s^2 + 1)(1 - e^{-s\pi})} = \frac{1 + e^{-s\pi}}{1 - e^{-s\pi}} \frac{1}{s^2 + 1}$$

Toepassing van 5.15.2 levert

$$\mathbf{L}[f(t)] = e^{-s\pi} \frac{1 + e^{-s\pi}}{1 - e^{-s\pi}} \frac{1}{s^2 + 1}.$$

b) Gevraagd $\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{3s^2 - 4s + 2}{(s^2 + 1)^2}\right]$.

Oplossing:

$$\frac{3s^2 - 4s + 2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{3(s^2 + 1) - 4s - 1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{3}{s^2 + 1} - \frac{4s}{(s^2 + 1)^2} - \frac{1}{(s^2 + 1)^2}.$$

Verder volgt uit 5.14.4b en 5.16.5:

$$\mathbf{L}[t \sin t] = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}, \quad \text{en} \quad \mathbf{L}[t \cos t] = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{2}{(s^2 + 1)^2},$$

$$\text{zodat } \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2}\right] = -\frac{1}{2}[t \cos t - \sin t].$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{3s^2 - 4s + 2}{(s^2 + 1)^2}\right] &= 3 \sin t - 2t \sin t + \frac{1}{2}(t \cos t - \sin t) = \\ &= \frac{5}{2} \sin t - 2t \sin t + \frac{1}{2} t \cos t. \end{aligned}$$

c) Zij $0 < p < \tau$. $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2p}, & \tau - p \leq t \leq \tau + p \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$.

$$\text{Dan is } F(s) = \int_{\tau-p}^{\tau+p} \frac{1}{2p} e^{-st} \, dt = e^{-\tau s} \frac{e^{ps} - e^{-ps}}{2ps}.$$

Voor $p \downarrow 0$ gaat $f(t)$ over in de *deltafunctie van Dirac* $\delta(t - \tau)$, een zogenaamde gegeneraliseerde functie. Er geldt

$$\delta(t) = 0 \text{ voor alle } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ en } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \, dt = 1.$$

$$\mathbf{L}[\delta(t - \tau)] = \lim_{p \downarrow 0} F(s) = \lim_{p \downarrow 0} e^{-\tau s} \frac{e^{ps} - e^{-ps}}{2ps} = e^{-\tau s}, \quad \tau > 0, s > 0.$$

Als $\tau \rightarrow 0$ vinden we $\mathbf{L}[\delta(t)] = 1$.

We merken op dat voor "gewone" functies steeds geldt: $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

Oefeningen

Bepaal de Laplace getransformeerde van de volgende functies.

$$1. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}; \quad f(t+2) = f(t).$$

$$2. f(t) = t, \quad 0 \leq t < 1; \quad f(t+1) = f(t).$$

$$3. f(t) = te^{-4t} \sin 2t.$$

Bepaal de inverse Laplace getransformeerde van de volgende functies.

$$4. F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2 + 4)}.$$

$$5. F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{(s^2 - 4s + 3)^2}.$$

$$6. F(s) = \frac{2s+1}{4s^2 + 4s + 5}.$$

$$7. F(s) = \frac{1}{(s-4)^3}$$

Numerieke integratie

5.17. Trapeziumregel en regel van Simpson

5.17.1. Inleiding

De in het voorgaande behandelde methoden zijn voor het uitrekenen (dat is: als getal voorstellen) van integralen in vele gevallen niet goed bruikbaar. Het uitdrukken van een primitieve in elementaire functies is in veel gevallen lastig of zelfs onmogelijk. Bovendien heeft een resultaat als

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1 + \sqrt{2})$$

weinig zin als men geïnteresseerd is in een numerieke uitkomst.

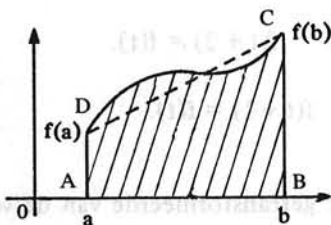
Aangezien men dan toch genoeg zal moeten nemen met een benadering, is het soms doelmatiger deze benadering met behulp van elementaire rekenoperaties (optellen, vermenigvuldigen enz.) rechtstreeks af te leiden uit een stel functiewaarden van de integrand. Men benadert daartoe de integrand met bijvoorbeeld een geschikt gekozen polynoom van zekere graad en berekent vervolgens hiervan de integraal. Van de vele mogelijkheden zullen we er enkele formuleren.

5.17.2. Trapeziumregel

Als $f(x) \geq 0$ voor alle $a \leq x \leq b$ stelt $I = \int_a^b f(x) dx$ de oppervlakte voor

van het gearceerde gebied in de figuur. We benaderen I door de oppervlakte van het trapezium ABCD. Er geldt

$$\text{Oppervlakte trapezium ABCD} = \frac{1}{2}AB(AD + BC) = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)).$$



Deze benadering van een integraal I is ook zinvol als $f(x)$ niet meer op het hele interval ≥ 0 is.

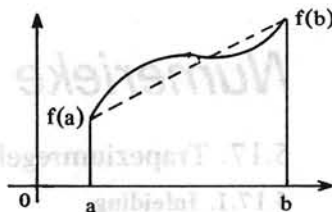
Dankzij het feit, dat we de lijn CD kunnen interpreteren als de grafiek van het 1-ste orde Lagrange interpolatiepolynoom door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$, is het mogelijk voor tweemaal continu differentieerbare functies een uitdrukking te geven van de fout die men maakt als men I benadert door $\frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b))$.

5.17.3. Stelling (Trapeziumregel)

Zij f op $[a, b]$ minstens tweemaal differentieerbaar en zij f'' continu op $[a, b]$.

Dan is er een $\xi \in [a, b]$ zó dat

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi).$$



Bewijs

We veronderstellen dat $a < b$. Volgens de interpolatieformule van Lagrange (met $n = 1$) en stelling 4.10.5 is er voor iedere $x \in [a, b]$ een $x_0 \in (a, b)$ met

$$f(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a} + \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(x_0).$$

Zij $m = \min \{f''(x) | a \leq x \leq b\}$ en $M = \max \{f''(x) | a \leq x \leq b\}$; zie 3.13.4.

Dan is, wegens $(x-a)(x-b) \leq 0$ op $[a, b]$, voor iedere $x \in [a, b]$

$$\frac{1}{2} M(x-a)(x-b) \leq f(x) - f(a) \frac{x-b}{a-b} - f(b) \frac{x-a}{b-a} \leq \frac{1}{2} m(x-a)(x-b),$$

dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M \int_a^b (x-a)(x-b) dx &\leq \int_a^b [f(x) - f(a) \frac{x-b}{a-b} - f(b) \frac{x-a}{b-a}] dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} m \int_a^b (x-a)(x-b) dx. \end{aligned}$$

Gebruikmakend van

$$\int_a^b (x-a)(x-b) dx = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a) d(x-b)^2 = -\frac{1}{2} \int_a^b (x-b)^2 dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

leiden we hieruit af

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]}{-\frac{1}{12}(b-a)^3} \leq M.$$

Omdat f'' continu is op $[a, b]$ is er volgens 3.12.3 een $\xi \in [a, b]$ met

$$f''(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}$$

Hieruit volgt het gestelde. □

Benadering van f met een kwadratisch polynoom geeft

5.17.4. Stelling (Regel van Simpson)

Zij f op $[a, b]$ minstens viermaal differentieerbaar en zij $f^{(4)}$ continu op $[a, b]$.

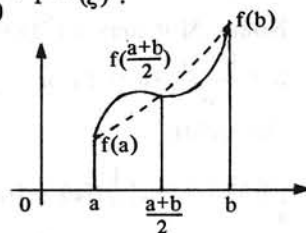
Dan is er een $\xi \in [a, b]$ zó dat

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{6}(b-a)[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

Schets van het bewijs

Noem $c = \frac{a+b}{2}$, $h = \frac{b-a}{2}$ en $y = \frac{x-c}{h}$.

Dan is $\int_a^b f(x) dx = h \int_{-1}^1 f(c+hy) dy$.



Door deze substitutie is f een functie van y geworden en volgens de interpolatieformule van Lagrange met steunpunten $-1, 0, 1$ en stelling 4.10.5 is

$$f(c+hy) = f(a) \frac{y(y-1)}{2} + f(c) \frac{(y+1)(y-1)}{-1} + f(b) \frac{y(y+1)}{2} + E_2(y).$$

Dus

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2} h f(a) \int_{-1}^1 (y^2 - y) dy - h f(c) \int_{-1}^1 (y^2 - 1) dy + \frac{1}{2} h f(b) \int_{-1}^1 (y^2 + y) dy + \\ &+ h \int_{-1}^1 E_2(y) dy = \frac{1}{3} h f(a) + \frac{4}{3} h f(c) + \frac{1}{3} h f(b) + h \int_{-1}^1 E_2(y) dy = \\ &= \frac{1}{6} (b-a) [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)] + h \int_{-1}^1 E_2(y) dy. \end{aligned}$$

De uitdrukking voor $\int_{-1}^1 E_2(y) dy$ kunnen we niet aanpakken zoals in stelling 5.17.3 omdat $E_2(y)$ op $[-1, 1]$ van teken wisselt. Het bewijs van

$$E = \frac{-(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

valt buiten het bestek van dit boek. □

5.17.5. Nauwkeuriger berekening

In bovenstaande betrekkingen noemt men de eerste term van het rechterlid een *kwadratuurformule* en de tweede term de *restterm*. De restterm biedt de mogelijkheid een bovengrens aan te geven voor de absolute waarde van de fout die men maakt bij het benaderen van een integraal door middel van een der kwadratuurformules. Aangezien de in de restterm optredende tweede (resp. vierde) afgeleide van f begrensd is op $[a, b]$ kan men genoemde bovengrens willekeurig klein maken door de lengte van het integratieinterval voldoende klein te nemen. Om dit te bereiken verdeelt men $[a, b]$ in een aantal deelintervallen en past op ieder daarvan de kwadratuurformule toe. Kiezen we deelintervallen van gelijke lengte (gelijke stapgrootte) dan krijgen we de in 5.17.6 en 7 vermelde resultaten.

5.17.6. Stelling (Samengestelde trapeziumregel)

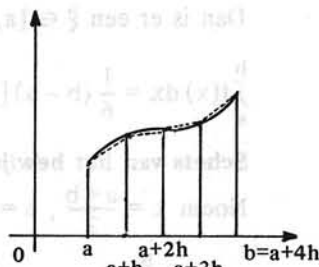
Zij f op $[a, b]$ minstens tweemaal differentieerbaar en zij f'' continu op $[a, b]$.

Noem $M = \max \{ |f''(x)| \mid a \leq x \leq b \}$ en

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1).$$

Dan geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{1}{2} f(b) \right] + E$$



waarbij $E = -\frac{1}{12} h^3 \sum_{k=1}^n f''(\xi_k)$ en $\xi_k \in [a + (k-1)h, a + kh]$ voor alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Een schatting voor E is $|E| \leq \frac{1}{12} (b-a) M h^2$.

Bewijs

Voor iedere $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ is

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(x) dx = \frac{1}{2} h [f(a+(k-1)h) + f(a+kh)] + E_k.$$

Volgens stelling 5.17.3 is er een $\xi_k \in [a+(k-1)h, a+kh]$

$$\text{met } E_k = -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi_k), \text{ dus } |E_k| \leq \frac{1}{12} h^3 M.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} h [f(a+(k-1)h) + f(a+kh)] + \sum_{k=1}^n E_k = \\ &= h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{1}{2} f(b) \right] + E, \end{aligned}$$

$$\text{waarbij } |E| \leq \sum_{k=1}^n |E_k| \leq \frac{1}{12} n h^3 M = \frac{1}{12} (b-a) h^2 M. \quad \square$$

5.17.7. Stelling (Samengestelde regel van Simpson)

Zij f op $[a, b]$ minstens viermaal differentieerbaar en zij $f^{(4)}$ continu op $[a, b]$.

Noem $M = \max \{|f^{(4)}(x)| \mid a \leq x \leq b\}$ en

$$2h = \frac{b-a}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1).$$

Dan geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3}h [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \dots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)] + E,$$

waarbij $E = -\frac{1}{90}h^5 \sum_{k=1}^n f^{(4)}(\xi_k)$ en $\xi_k \in [a + (2k-2)h, a + 2kh]$ voor alle

$k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Een schatting voor E is $|E| \leq \frac{1}{180}(b-a)Mh^4$.

Bewijs.

Voor iedere $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ is

$$\int_{a+2(k-1)h}^{a+2kh} f(x) dx = \frac{1}{6} \cdot 2h [f(a+(2k-2)h) + 4f(a+(2k-1)h) + f(a+2kh)] + E_k.$$

Volgens stelling 5.17.4 is er een $\xi_k \in [a+(2k-2)h, a+2kh]$

met $E_k = -\frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_k)$, dus $|E_k| \leq \frac{1}{90} h^5 M$.

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{a+2(k-1)h}^{a+2kh} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} h [f(a+(2k-2)h) + 4f(a+(2k-1)h) + f(a+2kh)] + \sum_{k=1}^n E_k \\ &= \frac{1}{3} h [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)] + E, \end{aligned}$$

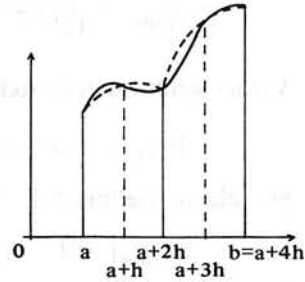
waarbij $|E| \leq \sum_{k=1}^n |E_k| \leq \frac{1}{90} nh^5 M = \frac{1}{180} (b-a)h^4 M$. □

5.17.8. Voorbeeld

We berekenen $I = \int_0^1 f(x) dx$, waarbij $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ met behulp van de samengestelde trapeziumregel ($n=4$) en de samengestelde regel van Simpson ($n=2$). Daarbij worden in beide gevallen de functiewaarden $f(0)$, $f(\frac{1}{4})$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{3}{4})$ en $f(1)$ gebruikt.

We vinden

$$I_{\text{Trap}} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2}{1+\frac{1}{16}} + \frac{2}{1+\frac{1}{4}} + \frac{2}{1+\frac{9}{16}} + \frac{1}{2} \right) = 0,78279.$$



$$I_{\text{Sim}} = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{4}{1 + \frac{1}{16}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{4}} + \frac{4}{1 + \frac{9}{16}} + \frac{1}{2} \right) = 0,78539.$$

Verder geldt volgens stelling 5.17.6

$$|E_{\text{Trap}}| = |I - I_{\text{Trap}}| \leq \frac{1}{12} M_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2, \quad \text{waarbij } M_2 = \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$$

en volgens stelling 5.17.7

$$|E_{\text{Sim}}| = |I - I_{\text{Sim}}| \leq \frac{1}{180} M_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4, \quad \text{waarbij } M_4 = \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(4)}(x)|.$$

Via een truc slagen we erin een schatting van M_2 en M_4 te vinden.

$$\text{Uit } f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right) \text{ volgt}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{2}{(x-i)^3} - \frac{2}{(x+i)^3} \right), \text{ en}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{24}{(x-i)^5} - \frac{24}{(x+i)^5} \right).$$

$$\text{Dus } |f''(x)| \leq \frac{1}{|x-i|^3} + \frac{1}{|x+i|^3} \leq 2 \quad \text{voor } x \in [0,1],$$

$$\text{en } |f^{(4)}(x)| \leq \frac{12}{|x-i|^5} + \frac{12}{|x+i|^5} \leq 24 \quad \text{voor } x \in [0,1].$$

Hierbij merken we zonder bewijs op dat complexe functies van een reële variabele volgens dezelfde regels gedifferentieerd kunnen worden als reële functies. We concluderen dat

$$|E_{\text{Trap}}| \leq \frac{1}{96} = 0,0104 \quad \text{en} \quad |E_{\text{Sim}}| \leq \frac{1}{1920} = 0,0005.$$

$$\text{Omdat } \pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \text{ geldt } \pi = 4(0,78539 + E_{\text{Sim}}) = 3,14156 \pm 0,002.$$

Door te vergelijken met de juiste waarde $\pi = 3,141592 \dots$ ziet men dat de fout zelfs kleiner is dan $4 \cdot 10^{-5}$.

5.17.9. Opmerkingen

- a) Uit stelling 5.17.6 volgt dat de fout bij de samengestelde trapeziumregel $E = O(h^2)$ is; stelling 5.17.7 leert dat de fout bij de samengestelde regel van Simpson $E = O(h^4)$ is.

In het algemeen is de regel van Simpson dan ook te prefereren boven de trapeziumregel (zie ook 5.17.8). De trapeziumregel is wel theoretisch belangrijk, onder andere bij het numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen.

- b) In de praktijk wordt de stapgrootte in het ene gedeelte van het integratieinterval dikwijls verschillend gekozen van die in een ander gedeelte van het integratieinterval. De stapgrootte wordt dan aangepast aan het verloop van de integrand, zodat met een zo groot mogelijke stapgrootte op alle gedeelten van het interval de gewenste nauwkeurigheid kan worden gehaald.

- c) Er bestaan naast de behandelde numerieke integratiemethoden ook methoden van zogenaamd Gauss-type, waarbij het integratieinterval niet meer in gelijke delen wordt verdeeld, doch waarbij de keuze van steunpunten een extra mogelijkheid biedt om de nauwkeurigheid op te voeren (zie vraagstuk 5.19.41).

Oefeningen

1. Bewijs met behulp van de trapeziumregel:

$$\arctan \frac{1}{3} \sqrt{3} \geq \frac{7}{24} \sqrt{3}, \quad \arctan 1 - \arctan \frac{1}{3} \sqrt{3} \leq \frac{5}{8} \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{3}\right).$$

Leid uit deze ongelijkheden af $3 < \pi < 3\frac{1}{5}$.

2. Bereken $\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 4x - 3) dx$ met behulp van een primitieve van de integrand en via de regel van Simpson.
Wat merkt u op? Verklaar dit.

5.18. Practische wenken bij numerieke integratie

5.18.1. Halvering van de stapgrootte

In de praktijk zal men bij de numerieke berekening van een integraal de gekozen kwadratuurformule een paar keer toepassen bij verschillende waarden van de stapgrootte h . Doorgaans *halveert* men de stapgrootte enkele malen, net zo lang tot het resultaat niet veel meer verandert. Dit halveren heeft het voordeel, dat een eenmaal berekende waarde van de integrand in een punt bij de halve staplengte opnieuw in de formule voorkomt en dus opnieuw gebruikt kan worden zonder extra berekeningen. Bovendien kan men op deze manier een schatting van de nauwkeurigheid krijgen.

5.18.2. Foutschatting

- a) Zij $I = \int_p^{p+h} f(x) dx$ en zij I_1 de benadering van I verkregen met behulp van de trapeziumregel.

Dan geldt volgens 5.17.3:

$$I - I_1 = -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi_1) \quad \text{met } \xi_1 \in [p, p+h].$$

Zij I_2 de benadering van I die men verkrijgt door op de intervallen $[p, p+\frac{1}{2}h]$ en $[p+\frac{1}{2}h, p+h]$ de trapeziumregel toe te passen.

Dan is

$$I - I_2 = -\frac{1}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(\xi_2) - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(\xi_3)$$

$$\text{met } \xi_2 \in [p, p+\frac{1}{2}h] \text{ en } \xi_3 \in [p+\frac{1}{2}h, p+h].$$

Indien f'' op het interval $[p, p+h]$ weinig verandert kan men aannemen $f''(\xi_1) \approx f''(\xi_2) \approx f''(\xi_3) = K$.

Naarmate h kleiner is is dit meer plausibel.

Er geldt dan

$$I - I_1 \approx -\frac{1}{12} h^3 K$$

$$I - I_2 \approx -\frac{1}{4} \frac{1}{12} h^3 K.$$

$$\text{Dus } I - I_2 \approx \frac{1}{4} (I - I_1) = \frac{1}{4} (I - I_2) + \frac{1}{4} (I_2 - I_1).$$

Men vindt dan voor de fout gemaakt bij de trapeziumregel:

$$I - I_2 \approx \frac{1}{3} (I_2 - I_1). \quad (\text{I})$$

Hiermee kan dus uit het verschil tussen I_1 en I_2 een schatting van $I - I_2$ worden verkregen.

- b) Op analoge wijze kan men ook voor de regel van Simpson een schatting voor de nauwkeurigheid krijgen (zie oefening 1). We vermelden hier alleen het resultaat.

Zij I_1 de benadering van I verkregen met behulp van de regel van Simpson en zij I_2 de benadering van I die men verkrijgt door op de deelintervallen $[p, p+\frac{1}{2}h]$ en $[p+\frac{1}{2}h, p+h]$ de regel van Simpson toe te passen.

Als $f^{(4)}$ op het interval $[p, p+h]$ weinig verandert dan geldt voor de fout gemaakt bij de regel van Simpson:

$$I - I_2 \approx \frac{1}{15} (I_2 - I_1). \quad (\text{II})$$

De formules (I) en (II) zijn afgeleid voor de enkelvoudige trapeziumregel respectievelijk de regel van Simpson. Ze zijn echter ook geldig voor de samengestelde regels, omdat bovenstaande redenering op ieder deelinterval kan worden toegepast.

5.18.3. Voorbeeld

$$I = \int_1^5 \frac{e^x}{x} dx.$$

We werken eerst met de trapeziumregel.

Enkelvoudige trapeziumregel.

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \left(\frac{e}{1} + \frac{e^5}{5} \right) = 64,801828.$$

Samengestelde trapeziumregel ($n = 2$, $h = 2$)

$$I_2 = 2 \left[\frac{1}{2} \frac{e}{1} + \frac{e^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{e^5}{5} \right] = 45,791272.$$

Samengestelde trapeziumregel ($n = 4$, $h = 1$)

$$I_3 = 1 \left[\frac{1}{2} \frac{e}{1} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^4}{4} + \frac{1}{2} \frac{e^5}{5} \right] = 40,239701 .$$

Samengestelde trapeziumregel ($n = 8$, $h = 0,5$)

$$I_4 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{e}{1} + \frac{e^{1,5}}{1,5} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^{2,5}}{2,5} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^{3,5}}{3,5} + \frac{e^4}{4} + \frac{e^{4,5}}{4,5} + \frac{1}{2} \frac{e^5}{5} \right] = 38,782928 .$$

Met behulp van 5.18.2I, op ieder deelinterval toegepast, vindt men

$$I - I_4 \approx \frac{1}{3} (I_4 - I_3) = -0,485591$$

dus

$$I \approx 38,782928 - 0,485591 = 38,297337 \approx 38,3 .$$

Nu met de regel van Simpson.

Enkelvoudige regel van Simpson

$$I_1 = \frac{1}{6} \cdot 4 \left[\frac{e}{1} + 4 \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} \right] = 39,454420 .$$

Samengestelde regel van Simpson ($n = 2$, $h = 1$)

$$I_2 = \frac{1}{3} \left[\frac{e}{1} + 4 \frac{e^2}{2} + 2 \frac{e^3}{3} + 4 \frac{e^4}{4} + \frac{e^5}{5} \right] = 38,389178 .$$

Samengestelde regel van Simpson ($n = 4$, $h = 0,5$)

$$I_3 = \frac{1}{6} \left[\frac{e}{1} + 4 \frac{e^{1,5}}{1,5} + 2 \frac{e^2}{2} + 4 \frac{e^{2,5}}{2,5} + 2 \frac{e^3}{3} + 4 \frac{e^{3,5}}{3,5} + 2 \frac{e^4}{4} + 4 \frac{e^{4,5}}{4,5} + \frac{e^5}{5} \right] = 38,297337 .$$

Met behulp van 5.18.2II, op ieder deelinterval toegepast, vindt men

$$I - I_3 \approx \frac{1}{15} (I_3 - I_2) = -0,006123$$

dus

$$I \approx 38,291214 \approx 38,29 .$$

Na verdere benadering volgt: $I = 38,29016$.

5.18.4. Het numeriek berekenen van convergente oneigenlijke integralen

Veelal is het eenvoudiger van een oneigenlijke integraal aan te tonen dat hij convergeert, dan om zijn waarde te berekenen (zie 5.12 en 5.13). In dat geval kunnen numerieke technieken uitkomst bieden. Het uitrekenen van oneigenlijke integralen vergt in het algemeen een bijzondere aanpak, omdat enerzijds voor oneigenlijke integralen van de eerste soort het integratieinterval te groot is om numeriek te representeren en anderzijds bij oneigenlijke integralen van de tweede soort de waarde van de integrand in singuliere punten niet berekend kan worden. We geven van beide soorten een voorbeeld, aan de hand waarvan we de te volgen methode demonstreren.

5.18.5. Voorbeeld (Eerste soort)

Bereken $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin \sqrt{x} \, dx$ met een nauwkeurigheid van 10^{-6} .

Uitwerking

Omdat het integratieinterval $[0, \infty)$ niet met numerieke technieken te bevatten is, splitsen we de integraal in twee delen:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin \sqrt{x} \, dx = \int_0^A e^{-x^2} \sin \sqrt{x} \, dx + \int_A^{\infty} e^{-x^2} \sin \sqrt{x} \, dx.$$

De standaardtechniek is nu A zo groot te kiezen, dat $\int_A^{\infty} e^{-x^2} \sin \sqrt{x} \, dx$

kleiner dan $0,5 \times 10^{-6}$ is en vervolgens de integraal $\int_0^A e^{-x^2} \sin \sqrt{x} \, dx$ met

een nauwkeurigheid van $0,5 \times 10^{-6}$ te berekenen met een numerieke methode (bijvoorbeeld de samengestelde regel van Simpson).

$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin \sqrt{x} \, dx$ is niet analytisch te berekenen, doch we kunnen een

majorant zoeken, bijvoorbeeld $|e^{-x^2} \sin \sqrt{x}| \leq x e^{-x^2}$ voor $x \geq 1$ en dus is (volgens 5.2.4b en d) voor $A \geq 1$

$$\left| \int_A^{\infty} e^{-x^2} \sin \sqrt{x} \, dx \right| \leq \int_A^{\infty} e^{-x^2} |\sin \sqrt{x}| \, dx \leq \int_A^{\infty} x e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{-A^2}.$$

Dus als we A zó kiezen dat $\frac{1}{2} e^{-A^2} < 0,5 \times 10^{-6}$, dus als $A \geq 3,8$ dan geldt

$$\left| \int_A^{\infty} e^{-x^2} \sin \sqrt{x} \, dx \right| < 0,5 \times 10^{-6}.$$

5.18.6. Opmerking

Indien men geen geschikte majorant weet te vinden, kan altijd nog de "botte bijl"-methode worden gebruikt:

Integreer $\int_0^A f(x) \, dx$ numeriek met A groot genoeg (kies bijvoorbeeld $A = 10$).

Integreer vervolgens $\int_A^{10A} f(x) \, dx$ numeriek met de geschikte stapgrootte en

herhaal dit proces met $\int_{10A}^{100A} f(x) \, dx$, enzovoort, net zo lang tot de laatst

berekende integraal kleiner dan de geëiste waarde is.

Het kiezen van een geschikte majorant en vervolgens analytisch schatten van de restterm verdient de voorkeur, daar de "botte bijl"-methode niet alleen duur is, maar ook niet in alle gevallen betrouwbaar.

5.18.7. Voorbeeld (Tweede soort)

Bereken $\int_0^1 \frac{e^{-x^2} \ln(2+x)}{\sqrt{x}} \, dx$ met een nauwkeurigheid van 10^{-6} .

Uitwerking

Omdat de integrand onbegrensd is in 0, proberen we de singulariteit in 0 van de integrand af te splitsen. Met de formule van Taylor vinden we voor $x \downarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{-x^2} \ln(2+x)}{\sqrt{x}} &= \frac{e^{-x^2} [\ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2}x)]}{\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{[1 - x^2 + O(x^4)] [\ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)]}{\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{\ln 2 + \frac{1}{2}x + O(x^2)}{\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} + O(x^{\frac{1}{2}}).
 \end{aligned}$$

We schrijven daarom

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{e^{-x^2} \ln(2+x)}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx + \int_0^1 \frac{[e^{-x^2} \ln(2+x) - \ln 2]}{\sqrt{x}} dx = \\
 &= 2 \ln 2 + \int_0^1 \frac{[e^{-x^2} \ln(2+x) - \ln 2]}{\sqrt{x}} dx
 \end{aligned}$$

en deze laatste integraal is ophefbaar oneigenlijk in 0 en de integrand is daar 0. We kunnen hem met een numerieke integratiemethode, bijvoorbeeld de samengestelde regel van Simpson, gemakkelijk berekenen met een nauwkeurigheid van 10^{-6} .

5.18.8. Opmerking

Ook voor oneigenlijke integralen van de tweede soort is een "botte bijl"-methode mogelijk. Er gelden echter dezelfde bezwaren als bij integralen van de eerste soort.

Oefeningen

1. Geef een afleiding voor 5.18.2(II).
2. Geef aan hoe u de volgende integralen numeriek moet berekenen met een nauwkeurigheid van ϵ .

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^4} dx.$

b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x + x}}.$

c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x}}{x^2} dx.$

d) $\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^{2x} - 1} dx.$

5.19. Vraagstukken

1. Gegeven de functie $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ met $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$.

Bereken het Taylorpolynoom van de index 2 van F in 1.

Bepaal een primitieve van de functies waarvan het voorschrift gegeven is in vraagstukken 2 t/m 9.

2. a) $\sqrt[3]{4x+1}$,

b) $\frac{x^2}{1+x^6}$,

c) $(\sin 2x + \cos 2x)^2$.

3. a) $\cos x \cos 3x$,

b) $\cos^3 x$,

c) $\sin^4 x$.

4. a) $\frac{1}{x^2 + 6x + 10}$,

b) $\frac{1}{\sqrt{16 + 12x - 4x^2}}$,

c) $\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

5. a) $\cot x$,

b) $\frac{1}{(1+x^2) \arctan x}$,

c) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

6. a) $\frac{\cos x}{6 - 2 \sin x - \cos^2 x}$,

b) $\frac{-3x^2 - 11x + 25}{(x+4)^2 (x^2 + 5)}$,

c) $\frac{3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$.

7. a) $\frac{x}{1 + \sqrt{x}}$,

b) $\frac{\sqrt{1+x}}{x^2}$,

c) $\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. a) $\frac{\sqrt{x^2+9}}{x-4}$. Aanwijzing: stel $\sqrt{x^2+9} = x+t$, dus $x = \frac{9-t^2}{2t}$.

b) $\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$. Aanwijzing: stel $x = \frac{t+1}{t-1}$.

c) $x\sqrt{3-2x-x^2}$.

9. a) $\sqrt{x} \ln(1+x)$,

b) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+13}}$,

c) $\sqrt{4-\sqrt{x}}$.

Bereken de integralen in de vraagstukken 10 t/m 15.

10. a) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$,

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sin x dx$,

c) $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

11. a) $\int_0^1 x \arctan \sqrt{x} dx$,

b) $\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$,

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 2 \cos x + 2} dx$.

12. a) $\int_2^4 x \sqrt{4x-x^2} dx$,

b) $\int_0^2 \sqrt{9x^2+4} dx$,

c) $\int_0^{\pi} \cos^4 \frac{1}{2} x dx$.

13. a) $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+2} \sqrt[3]{x+2}}$,

b) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{dx}{x+x \ln^2 x}$,

c) $\int_{-1}^1 \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$.

$$14. a) \int_3^8 \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} dx,$$

$$b) \int \frac{\pi}{3} \frac{dx}{\sin^3 x},$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(\sin^2 x + 4 \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$15. a) \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{(1+x)^2} dx,$$

$$b) \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{dx}{(1+e^{|x|})^2},$$

$$c) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

*16. a) Leid een recurrente betrekking af voor $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

b) Leid met behulp van a) een recurrente betrekking af voor

$$I_n = \int_0^1 x^n \arctan x dx.$$

- *17. Polaire moleculen zijn moleculen die als gevolg van hun structuur een permanent elektrisch dipoolmoment \vec{p} hebben. In een uitwendig elektrisch veld \vec{E} ondervinden deze dipolen een krachtmoment $\vec{p} \times \vec{E}$, dat ze tracht te oriënteren in de richting van het veld \vec{E} . Dit richt-effect wordt echter tegen-gerewerkt door de warmtebeweging van de moleculen. Er stelt zich een evenwicht in, waarbij de waarschijnlijkheid om een molecuul aan te treffen met zijn dipoolmoment \vec{p} onder een hoek tussen θ en $\theta + d\theta$ met het veld \vec{E} gegeven wordt door:

$$w(\theta)d\theta = \frac{\frac{1}{2} \sin \theta \exp\{-\frac{u(\theta)}{kT}\}d\theta}{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin \theta \exp\{-\frac{u(\theta)}{kT}\}d\theta}. \quad (1)$$

Hierin is $u(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$ de potentiële energie van een dipool in het veld \vec{E} , terwijl T de temperatuur is en k de constante van Boltzmann.

a) Bereken de noemer van de uitdrukking (1).

b) Bereken met behulp van (1) het gemiddelde dipoolmoment $\langle p \rangle$ gedefiniëerd door

$$\langle p \rangle = \int_0^{\pi} p \cos \theta w(\theta) d\theta.$$

c) Geef een benaderende waarde van $\langle p \rangle$ als $pE \ll kT$.

18. Zij $0 < p < 1$ en $n \in \mathbb{N}$. Bewijs

$$\text{a) } 0 \leq \int_0^p \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{p^{n+1}}{n+1},$$

$$\text{b) } 0 \leq \int_0^p \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{p^{n+1}}{(1-p)(n+1)}.$$

19. Toon aan dat voor $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ geldt:

$$\sin x \leq \sqrt{\sin x} \leq \sqrt{x},$$

en bewijs vervolgens dat

$$1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} dx \leq 1,32.$$

20. Zij F gegeven door $F(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$,
terwijl f continu is op \mathbb{R} en $\frac{dF}{dx} = \arctan x$.

Bereken $\int_0^4 f(t) dt$.

21. Gegeven: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$. Toon aan dat:

$$\text{a) } I_{n+1} \leq I_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{b) } I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

*22. Zij $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tweemaal continu differentieerbaar. Gegeven is

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sin x dx = 5 \quad \text{en} \quad f(\pi) = 2.$$

Bereken $f(0)$.

23. Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{2t + \ln^3 t}{1+t} dt$.

*24. De functie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is continu. Bewijs dat er een $\xi \in [0, 1]$ bestaat zó dat

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} f(\xi).$$

Bereken de integralen in de vraagstukken 25 tot en met 28.

$$\text{25. a) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)},$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2},$$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx$.

26. a) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(1+x)^2} dx$,

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1-e^{-x})}$,

c) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+4}}$.

27. a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$,

b) $\int_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{3+4x}} dx$,

c) $\int_{-2}^0 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

28. a) $\int_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$,

b) $\int_0^{\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} dx$,

c) $\int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{x+1} + \arctan \frac{1}{x}\right) dx$.

Onderzoek of de oneigenlijke integralen in de vraagstukken 29 en 30 convergent of divergent zijn.

*29. a) $\int_0^{\infty} \cos x dx$,

b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1} \arctan x}$.

*30. a) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx$,

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}}$,

c) $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x} + \tan x}$.

Onderzoek voor welke waarde(n) van α de integralen in de vraagstukken 31 en 32 convergent resp. divergent zijn.

*31. a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^\alpha)}$,

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^2} dx$,

c) $\int_0^{\infty} \frac{(\ln(1+x))^\alpha}{\sqrt{x}(1+x)} dx$.

*32. a) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha(e^{2x}-1)} dx$,

b) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(x-1)^\alpha} dx$,

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{e^x - \cos x}} dx$.

*33. Bewijs dat $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ convergent is.

*34. Bereken $L(\sin^2 at)$.

*35. Bereken $L^{-1}\left(\frac{s^2+2}{s^4-6s^3+32s}\right)$.

*36. Bereken $L^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2-3s-4}\right)$.

*37. Bereken $L^{-1}\left(\ln \frac{s+1}{s-1}\right)$.

38. Bereken met behulp van de trapeziumregel $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^4}$,

a) met twee steunpunten (enkelvoudige trapeziumregel); noem deze benadering I_1 .

b) met drie steunpunten (samengestelde trapeziumregel); noem deze benadering I_2 .

c) Geef met behulp van I_1 een schatting van de nauwkeurigheid van I_2 .

39. Voor elke lineaire kwadratuurformule P (dat wil zeggen een kwadratuur-

formule van de vorm $\sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$, waarbij $w_i \in \mathbb{R}$) geldt het volgende.

Als P exact is (d.w.z. de fout is nul) voor $1, x, x^2, \dots, x^n$, dan is P ook exact voor ieder polynoom van graad $\leq n$. Bewijs dit.

40. Bereken met behulp van de Simpsonregel

$$I = \int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2 + x + 1},$$

- a) met drie steunpunten $x_i = x_0 + ih_1$, $i = 0, 1, 2$. (Enkelvoudige Simpsonregel). Noem deze benadering I_1 .
- b) met vijf steunpunten $x_i = x_0 + ih_2$, $i = 0, 1, \dots, 4$. (Samengestelde Simpsonregel). Noem deze benadering I_2 .
- c) Geef met behulp van I_1 een schatting van de nauwkeurigheid van I_2 .
- *41. Zij $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar. We beschouwen op $[-1, 1]$ de kwadratuurformule

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + R_f; \quad x_0, x_1 \in [-1, 1], \quad w_0, w_1 \in \mathbb{R}.$$

- a) Als $x_0 = -x_1$ en $w_0 = w_1$, dan is $R_f = 0$ voor iedere oneven functie f . Bewijs dit.
- b) Bepaal $x_0 = -x_1$ (met $x_1 > 0$) en $w_0 = w_1$ zó dat $R_f = 0$ voor iedere veelterm f van graad ≤ 3 .
Aanwijzing: het is voldoende te eisen dat $R_f = 0$ voor de functies f , gegeven door $f(x) = 1$ en $f(x) = x^2$. (Waarom?)
- c) Toon aan dat de in b) bedoelde kwadratuurformule dezelfde is als de kwadratuurformule die ontstaat door het lineaire interpolatiepolynoom van f met steunpunten x_0 en x_1 te integreren van -1 naar 1 .
- d) Benader

$$\ln 2 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}$$

met de gevonden kwadratuurformule. Bewijs dat de absolute waarde van de fout kleiner is dan $0,03$ door voor ieder der intervallen $[-1, x_0]$, $[x_0, x_1]$ en $[x_1, 1]$ de integraal van de restterm van het in c) bedoelde interpolatiepolynoom af te schatten.

Aanwijzing: het is voldoende aan te tonen dat de fout kleiner is dan $\frac{7\sqrt{3}}{432}$.

- *42. Gegeven is, dat f een driemaal differentieerbare functie is op het interval $[x_0, x_0 + h]$ met $h > 0$.

- a) Bewijs dat de uitdrukkingen

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) \, dx \quad \text{en} \quad \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_0 + h)]$$

eenzelfde Taylorpolynoom van de index 2 hebben in $h = 0$.

- b) Bereken het verschil van de Taylorpolynomen van de index 3 in $h = 0$.

- *43. Gegeven is, dat f een vijfmaal differentieerbare functie is op het interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ met $h > 0$.

a) Bewijs dat de uitdrukkingen

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) dx \text{ en } \frac{h}{3}[f(x_0-h) + 4f(x_0) + f(x_0+h)]$$

eenzelfde Taylorpolynoom hebben van de index 4 in $h = 0$.

b) Bereken het verschil van de Taylorpolynomen van de index 5 in $h = 0$.

44. Gegeven is, dat de kwadratuurformule

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = h \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + E$$

is verkregen door voor f het Lagrange-interpolatiepolynoom van de graad n te substitueren, met steunpunten $x_0 < x_1 < \dots < x_n = x_0 + h$.

Bewijs nu: $\sum_{i=0}^n w_i = 1$.

(Aanwijzing: maak gebruik van het resultaat van oef. 4.10.2.)

Controleer dit resultaat voor de in dit hoofdstuk afgeleide kwadratuurformules.

45. Van een functie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kunnen de functiewaarden met een absolute nauwkeurigheid ϵ worden berekend, d.w.z. voor de berekende functiewaarden $\tilde{f}(x)$ geldt:

$$f(x) - \epsilon \leq \tilde{f}(x) \leq f(x) + \epsilon \quad \text{met } \epsilon > 0.$$

Men benadert de integraal $\int_a^b f(x) dx$ met behulp van de (samengestelde) trapeziumregel of regel van Simpson.

Toon aan dat de beperkte nauwkeurigheid van de functiewaarden van f aanleiding geeft tot een fout in de uitkomst van de numerieke integratie, welke in absolute waarde $\leq \epsilon(b-a)$ is, onafhankelijk van het aantal gebruikte steunpunten.

46. Zij $p \in \mathbb{R}^+$ en zij

$$I = \int_0^p (1,25x^4 + 3x^2 + x + 2) dx.$$

In geval $p = 2$ geldt dan $I = 22$.

a) Benadert men I door de enkelvoudige regel van Simpson toe te passen, dan neemt men de benadering S_1 . Ga na dat in geval $p = 2$ geldt

$$S_1 = \frac{67}{3}.$$

b) Benadert men I door de samengestelde regel van Simpson ($n=2$) toe te

passen, dan noemt men deze benadering S_2 . Ga na dat in geval $p = 2$

$$\text{geldt } S_2 = \frac{1057}{48}.$$

c) In geval $p = 2$ controleert men gemakkelijk dat $\frac{16S_2 - S_1}{15} = 1$.

Toon aan dat dit resultaat geldig blijft voor alle $p \in \mathbb{R}^+$ door gebruik te maken van de uitdrukking voor de afbreekfouten bij S_1 en S_2 .

Appendix

In deze appendix worden de stellingen 5.2.2a en c bewezen. De punten A5.1 t/m A5.6 dienen als voorbereiding tot het bewijs van deze stellingen.

A5.1. Bij definitie 5.1.2

Zij $[a, b]$ een begrensd gesloten interval en $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ begrensd.

Bij een partitie $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ definiëren we

$$M_i = \sup \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

$$m_i = \inf \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

We noemen $U_f(P)$ de *bovensom* van f bij P en $L_f(P)$ de *ondersom* van f bij P .

Het is duidelijk dat bij iedere strooiing ϑ voor de Riemann-som $S_f(P, \vartheta)$ geldt:

$$L_f(P) \leq S_f(P, \vartheta) \leq U_f(P).$$

A5.2. Stelling

Als P_1 en P_2 partities zijn van $[a, b]$ met $P_2 \supset P_1$, dan is

$$L_f(P_1) \leq L_f(P_2) \leq U_f(P_2) \leq U_f(P_1),$$

met andere woorden: bij toenemende verfijning nemen de ondersommen niet af en de bovensommen niet toe.

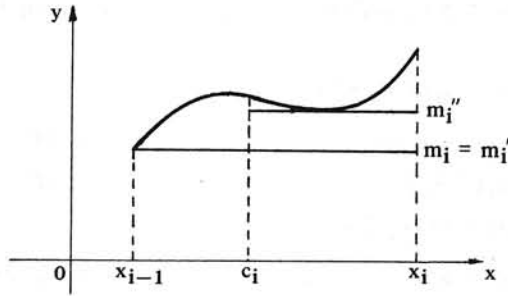
Bewijs

Als het deelinterval $[x_{i-1}, x_i]$ door een nieuw deelpunt c_i in twee delen wordt verdeeld, dan geldt voor de infima m'_i en m''_i op elk der deelintervallen $[x_{i-1}, c_i]$ en $[c_i, x_i]$:

$$m_i \leq m'_i \quad \text{en} \quad m_i \leq m''_i.$$

De bijdrage aan $L_f(P_2)$ van de twee intervallen is dus

$$m'_i(c_i - x_{i-1}) + m''_i(x_i - c_i) \geq m_i(x_i - x_{i-1}).$$



Dit geldt voor alle deelintervallen (ook bij toevoeging van meerdere deelpunten), dus $L_f(P_2) \geq L_f(P_1)$.

Een analoge redenering voor de bovensommen levert $U_f(P_2) \leq U_f(P_1)$. \square

A5.3. Stelling

Voor ieder tweetal partities P_1 en P_2 van $[a, b]$ geldt

$$L_f(P_1) \leq U_f(P_2),$$

met andere woorden: een willekeurige ondersom is nooit groter dan een willekeurige bovensom.

Bewijs

Daar $P_1 \cup P_2$ een gemeenschappelijke verfijning is van P_1 en P_2 volgt uit de vorige stelling

$$L_f(P_1) \leq L_f(P_1 \cup P_2) \leq U_f(P_1 \cup P_2) \leq U_f(P_2). \quad \square$$

A5.4. Definities

Laat $[a, b]$ en f zijn als in A5.1.

De *bovenintegraal* van f over $[a, b]$, notatie $\int_a^b f(x) dx$, definiëren we door

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{U_f(P) \mid P \text{ is een partitie van } [a, b]\}.$$

De *onderintegraal* van f over $[a, b]$, notatie $\int_a^b f(x) dx$, definiëren we door

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{L_f(P) \mid P \text{ is een partitie van } [a, b]\}.$$

A5.5. Stelling

Laat $[a, b]$ en f zijn als in A5.1. Dan geldt

$$f \text{ is Riemann-integreerbaar over } [a, b] \iff \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Bewijs

\Rightarrow : Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Dan is volgens definitie 5.1.2 daarbij een $\delta > 0$

en een partitie P met $\mu(P) < \delta$ te vinden, zó dat voor iedere strooiing ϑ geldt

$$I - \epsilon < S_f(P, \vartheta) < I + \epsilon.$$

Omdat $\sup \{S_f(P, \theta) \mid \theta \text{ is een strooiing bij } P\} = U_f(P)$,

en $\inf \{S_f(P, \theta) \mid \theta \text{ is een strooiing bij } P\} = L_f(P)$,

is $I - \epsilon \leq L_f(P)$ en $U_f(P) \leq I + \epsilon$, zodat geldt

$$I - \epsilon \leq L_f(P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq U_f(P) \leq I + \epsilon.$$

Voor iedere $\epsilon > 0$ is dus $I - \epsilon \leq \int_a^b f(x) dx \leq I + \epsilon$, en dus geldt $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

\Leftarrow : Dit (zeer technische) bewijs laten we achterwege. \square

A5.6. Stelling

Laat $[a, b]$ en f zijn als in A5.1.

f is Riemann-integreerbaar over $[a, b]$ \iff

\iff Voor iedere $\epsilon > 0$ is er een partitie P van $[a, b]$ met $U_f(P) - L_f(P) < \epsilon$.

Bewijs

\implies : Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Er is een partitie P_1 van $[a, b]$, zó dat

$$L_f(P_1) > \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2}\epsilon, \text{ en er is een partitie } P_2 \text{ van } [a, b] \text{ zó dat}$$

$$U_f(P_2) < \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2}\epsilon.$$

Omdat volgens stelling A5.5 onder- en bovenintegraal aan elkaar gelijk zijn, geldt wegens stelling A5.2 voor $P = P_1 \cup P_2$

$$U_f(P) - L_f(P) \leq U_f(P_2) - L_f(P_1) < \epsilon.$$

\Leftarrow : Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Kies een partitie P van $[a, b]$ zó dat

$$U_f(P) - L_f(P) < \epsilon. \text{ Omdat } L_f(P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq U_f(P), \text{ is}$$

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq U_f(P) - L_f(P) < \epsilon.$$

Aangezien dit voor iedere $\epsilon > 0$ geldt is $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$, dus

is volgens stelling A5.5 f Riemann-integreerbaar over $[a, b]$. \square

We zijn nu in staat om de stellingen 5.2.2a en 5.2.2c te bewijzen.

A5.7. Stelling 5.2.2a**Stelling**

f continu op $[a, b] \Rightarrow f$ is integreerbaar over $[a, b]$.

Bewijs

Omdat f continu is op $[a, b]$, is f begrensd en uniform continu op $[a, b]$ (zie A3.7.5 en .6).

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Er is een $\delta > 0$, zó dat voor alle $s, t \in [a, b]$ met $|s - t| < \delta$ geldt

$$|f(s) - f(t)| < \eta = \frac{\epsilon}{b - a + 1}.$$

Kies een partitie P zó dat $\mu(P) < \delta$. Op grond van stelling A5.6 is het voldoende te bewijzen dat $U_f(P) - L_f(P) < \epsilon$.

Zij $[x_{i-1}, x_i]$ een willekeurig deelinterval van de partitie P en zij $t \in [x_{i-1}, x_i]$. Voor alle $s \in [x_{i-1}, x_i]$ is $f(s) \leq f(t) + \eta$, dus $M_i \leq f(t) + \eta$.

Omdat dit voor iedere t geldt is $M_i \leq m_i + \eta$.

$$\begin{aligned} \text{Dan is } U_f(P) - L_f(P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \eta \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \eta(b - a) < \epsilon. \end{aligned} \quad \square$$

A5.8. Stelling 5.2.2c**Stelling**

Als $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotoon is, dan is f integreerbaar over $[a, b]$.

Bewijs

Neem aan dat f dalend is (het geval dat f stijgend is verloopt analoog).

Daar $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$ voor alle $x \in [a, b]$, is f begrensd.

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Kies een partitie P zó dat

$$\mu(P) < \delta = \frac{\epsilon}{f(a) - f(b) + 1}.$$

Wegens $M_i = f(x_{i-1})$ en $m_i = f(x_i)$ is dan

$$\begin{aligned} U_f(P) - L_f(P) &= \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) - f(x_i))(x_i - x_{i-1}) \leq \\ &\leq \delta \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) - f(x_i)) = \delta(f(a) - f(b)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Het gestelde volgt nu uit stelling A5.6. □

6. Functies van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^m

Herhaling lineaire algebra

6.1. Vectorruimte. De vectorruimte \mathbb{R}^n

6.1.1. Inleiding

In de paragrafen 6.1 t/m 6.3 herhalen we een aantal begrippen en resultaten uit de lineaire algebra, die we nodig hebben voor het vervolg. We beschouwen dit als een opsomming van leerstof die de lezer al bekend is; als eerste kennismaking met deze stof is deze samenvatting aan de summiere kant.

6.1.2. Het begrip vectorruimte

Een vectorruimte over \mathbb{R} (of reële vectorruimte) is een verzameling V waarop een *optelling* en een *vermenigvuldiging met een reëel getal* zijn gedefinieerd.

Aan ieder tweetal elementen $\underline{a}, \underline{b} \in V$ (ook *vectoren* genoemd) is eenduidig een element $\underline{a} + \underline{b} \in V$ toegevoegd (de *som* van \underline{a} en \underline{b}) zó dat:

- a) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ voor alle $\underline{a}, \underline{b} \in V$.
- b) $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ voor alle $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V$.
- c) Er is een *nulvector* $\underline{0} \in V$ zó dat $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ voor alle $\underline{a} \in V$.
- d) Er is een *tegengestelde* $-\underline{a} \in V$ zó dat $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$ voor alle $\underline{a} \in V$.

Aan ieder element $\underline{a} \in V$ en ieder getal $\lambda \in \mathbb{R}$ is eenduidig een element $\lambda \underline{a} \in V$ toegevoegd (vermenigvuldiging van \underline{a} met het getal λ) zó dat

- e) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en alle $\underline{a}, \underline{b} \in V$.
- f) $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$ voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en alle $\underline{a} \in V$.
- g) $\lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda\mu)\underline{a}$ voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en alle $\underline{a} \in V$.
- h) $1 \underline{a} = \underline{a}$ voor alle $\underline{a} \in V$.

Is W een niet-lege deelverzameling van V en is W gesloten ten opzichte van som en vermenigvuldiging met een reëel getal (dat wil zeggen: voor alle $\underline{a}, \underline{b} \in W$ en voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $\underline{a} + \underline{b} \in W$ en $\lambda \underline{a} \in W$), dan noemen we W een *deelruimte* van V . W is dan zelf een vectorruimte.

6.1.3. Opmerkingen

- a) Merk de overeenkomst op tussen de rekenregels 6.1.2a t/m 6.1.2d in een vectorruimte en de rekenregels 1.2.1a t/m 1.2.1d in een lichaam.
- b) Men definieert een vectorruimte over \mathbb{C} (of complexe vectorruimte) geheel analoog aan 6.1.2 door voor de getallen λ en μ elementen uit \mathbb{C} in plaats van uit \mathbb{R} te nemen.

6.1.4. Lineaire onafhankelijkheid, basis, dimensie

- a) Zijn $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ elementen van V en zijn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ reële getallen, dan heet $\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n \in V$ een (reële) *lineaire combinatie* van het *stelsel* vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$.
- b) De verzameling U van alle lineaire combinaties van $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vormt een deelruimte van V . Ga dit na!
We zeggen dat U wordt *voortgebracht door* het stelsel vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$.
- c) Het stelsel vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in V$ heet *onafhankelijk* als de volgende implicatie geldt:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{a}_i = \underline{0} \right) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0).$$

Het stelsel heet *afhankelijk* als het niet onafhankelijk is.

- d) Een vectorruimte V heet *eindig-dimensionaal* als V voortgebracht kan worden door een eindig stelsel vectoren in V .
- e) Een *basis* van de eindig-dimensionale vectorruimte V is een onafhankelijk stelsel vectoren dat V voortbrengt.
- f) Men kan bewijzen dat iedere basis van een eindig-dimensionale vectorruimte hetzelfde aantal elementen bevat. Daardoor kan men definiëren: Het aantal vectoren van een basis van een eindig-dimensionale vectorruimte V heet de *dimensie* van V .

6.1.5. De vectorruimte \mathbb{R}^n

Onder de reële vectorruimte \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) verstaan we de verzameling van alle geordende grepen van n reële getallen $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Hierin noemen we a_k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) de k -de component van \underline{a} .

Optelling en vermenigvuldiging geschiedt componentsgewijs:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n), \text{ en}$$

$$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Met weinig moeite kan men nagaan dat aan de voorwaarden van definitie 6.1.2 wordt voldaan.

Iedere vector $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ uit \mathbb{R}^n is op precies één manier te schrijven als een lineaire combinatie van de onafhankelijke vectoren

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \underline{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1),$$

namelijk als

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \dots + a_n \underline{e}_n.$$

We noemen het geordende n -tal (stelsel) $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ de *natuurlijke basis* voor \mathbb{R}^n . De dimensie van \mathbb{R}^n is dus n .

We hebben hier de vectoren uit \mathbb{R}^n geschreven als rijvectoren (horizontaal); in sommige gevallen is het praktischer ze als kolomvectoren (verticaal) te noteren.

6.1.6. Inwendig produkt

Voor ieder tweetal vectoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ is het *inwendig produkt* $\underline{a} \cdot \underline{b}$, soms ook genoteerd met $(\underline{a}, \underline{b})$, gedefinieerd door:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Uit de definitie van het inwendig produkt volgen door uitschrijven de volgende rekenregels.

Laat $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

- $\underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$;
- $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \iff \underline{a} = \underline{0}$;
- $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$;
- $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$;
- $(\lambda \underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\lambda \underline{b}) = \lambda (\underline{a} \cdot \underline{b})$.

6.1.7. Metriek in een vectorruimte

Met behulp van het in 6.1.6 gedefinieerde inwendige produkt kunnen we tot de volgende definities komen.

a) De *lengte* van $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ wordt gedefinieerd door:

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

b) De *afstand* $d(\underline{a}, \underline{b})$ van twee vectoren in \mathbb{R}^n wordt gedefinieerd door:

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a} - \underline{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

In dit boek treden in hoofdzaak de vectorruimten \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 op.

Merk op dat \mathbb{R}^1 niets anders is dan \mathbb{R} zelf, indien we voor $\underline{a} = (a) \in \mathbb{R}^1$ gewoon a schrijven. Het inwendig produkt in \mathbb{R}^1 valt samen met de vermenigvuldiging in \mathbb{R} en de lengte van een vector $(a) \in \mathbb{R}^1$ is de absolute waarde van het corresponderende reële getal a .

6.1.8. De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz

Laat $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Dan is

$$|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| |\underline{b}|.$$

Bewijs

Voor $\underline{b} = \underline{0}$ is de bewering juist.

Neem nu aan $\underline{b} \neq \underline{0}$. Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ is volgens 6.1.6

$$0 \leq (\underline{a} + \lambda \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \lambda \underline{b}) = |\underline{a}|^2 + 2\lambda(\underline{a} \cdot \underline{b}) + \lambda^2 |\underline{b}|^2.$$

De vorm in het rechterlid is een tweedegraads polynoom in λ dat niet-negatief is. De discriminant is dus niet-positief:

$$4(\underline{a} \cdot \underline{b})^2 - 4|\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 \leq 0.$$

Hieruit volgt

$$|\underline{a} \cdot \underline{b}| = \sqrt{(\underline{a} \cdot \underline{b})^2} \leq |\underline{a}| |\underline{b}|. \quad \square$$

6.1.9. Hoek tussen twee vectoren

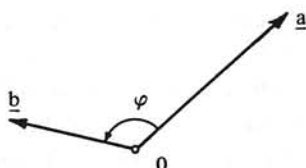
Voor $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ volgt met behulp van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

$$-1 \leq \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|} \leq 1.$$

We definiëren nu de *hoek* φ tussen de vectoren \underline{a} en \underline{b} als

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|} \right).$$

Dus $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

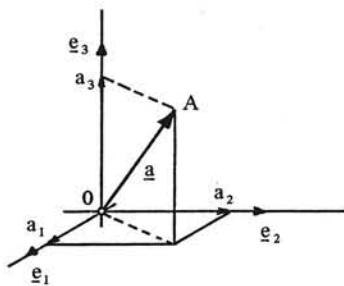


We noemen de vectoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ *orthogonaal* (notatie $\underline{a} \perp \underline{b}$) als $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$; als $\underline{a} \perp \underline{b}$ dan geldt dus:

$$(\underline{a} = \underline{0}) \vee (\underline{b} = \underline{0}) \vee (\varphi = \frac{1}{2}\pi).$$

Merk op dat de vectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ onderling orthogonaal zijn en alle de lengte 1 hebben.

We kunnen de kentallen a_1, a_2 t/m a_n van de vector $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ nu opvatten als de coördinaten van een punt A ten opzichte van het orthogonale coördinatenstelsel \underline{e}_1 t/m \underline{e}_n . We zullen in het vervolg de vector \underline{a} en het punt A identificeren en dus ook over het punt \underline{a} spreken.



6.1.10 Driehoeksongelijkheden

Voor alle $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ geldt:

- $|\underline{a} \pm \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|$;
- $|\underline{a} \pm \underline{b}| \geq ||\underline{a}| - |\underline{b}||$.

Bewijs

$$|\underline{a} \pm \underline{b}|^2 = (\underline{a} \pm \underline{b}) \cdot (\underline{a} \pm \underline{b}) = |\underline{a}|^2 \pm 2(\underline{a} \cdot \underline{b}) + |\underline{b}|^2.$$

Nu is wegens 6.1.8 $\underline{a} \cdot \underline{b} \leq |\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| |\underline{b}|$, en dus

$$|\underline{a} \pm \underline{b}|^2 \leq |\underline{a}|^2 + 2|\underline{a}| |\underline{b}| + |\underline{b}|^2 = (|\underline{a}| + |\underline{b}|)^2.$$

Hieruit volgt de juistheid van a).

Om b) te bewijzen passen we a) toe:

$$|\underline{a}| = |(\underline{a} \pm \underline{b}) \mp \underline{b}| \leq |\underline{a} \pm \underline{b}| + |\mp \underline{b}| = |\underline{a} \pm \underline{b}| + |\underline{b}|.$$

Dus $|\underline{a}| - |\underline{b}| \leq |\underline{a} \pm \underline{b}|$, evenzo blijkt dat $|\underline{b}| - |\underline{a}| \leq |\underline{a} \pm \underline{b}|$.

Bijgevolg is $||\underline{a}| - |\underline{b}|| \leq |\underline{a} \pm \underline{b}|$. □

6.1.11. Opmerking

In het geval $n = 2$ zijn we veel uit deze paragraaf al tegengekomen in hoofdstuk 2 (complexe getallen). \mathbb{C} is op te vatten als \mathbb{R}^2 , waarbij nog een extra structuur, namelijk het produkt van 2 complexe getallen (vectoren), is gedefinieerd. De optelling in \mathbb{C} valt samen met die in \mathbb{R}^2 ; de modulus in \mathbb{C} komt overeen met de lengte van de vector in \mathbb{R}^2 . De ongelijkheden in 6.1.10 zijn voor \mathbb{C} in 2.5.5h en 2.5.5i behandeld.

Voor $n = 1$ komen de ongelijkheden 6.1.10 overeen met 1.3.2b en 1.3.2c.

6.1.12. Parametervoorstellingen

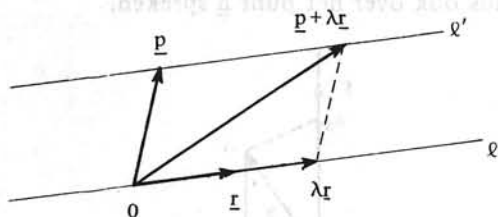
a) Laat ℓ een lijn zijn in \mathbb{R}^n door O , dat wil zeggen een 1-dimensionale deelruimte.

Kies een vector $\underline{r} \neq \underline{0}$ langs deze lijn. Met elk punt \underline{x} van ℓ correspondeert precies één $\lambda \in \mathbb{R}$ zó dat

$$\underline{x} = \lambda \underline{r} \quad (*)$$

We noemen (*) een *parametervoorstelling* of *parametrisering* van ℓ .

\underline{r} heet een *richtingsvector* van ℓ .



Een lijn ℓ' evenwijdig met ℓ door een punt \underline{p} heeft dan als parametervoorstelling

$$\underline{x} = \underline{p} + \lambda \underline{r}$$

\underline{p} heet *plaatsvector* of *steunvector* van ℓ' .

Een parametervoorstelling van een lijn door de punten \underline{a} en \underline{b} wordt gegeven door

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda(\underline{b} - \underline{a}).$$

b) Laat V een vlak zijn in \mathbb{R}^n door O , dat wil zeggen een 2-dimensionale deelruimte.

Kies twee lineair onafhankelijke vectoren \underline{r}_1 en \underline{r}_2 in dit vlak (richtingsvectoren). Een parametervoorstelling van V luidt dan

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{r}_1 + \lambda_2 \underline{r}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

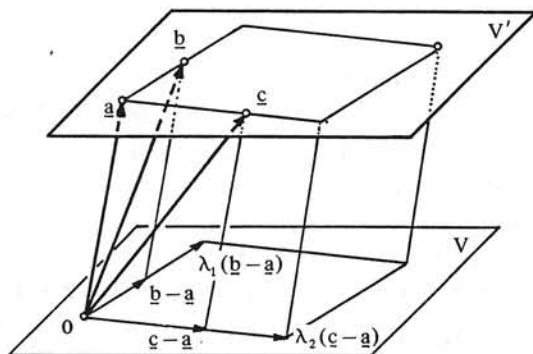
Een vlak V' evenwijdig met V door een punt \underline{p} heeft dan als parametervoorstelling

$$\underline{x} = \underline{p} + \lambda_1 \underline{r}_1 + \lambda_2 \underline{r}_2$$

\underline{p} heet weer een steunvector van V' .

Een parametervoorstelling van het vlak door de punten \underline{a} , \underline{b} en \underline{c} , die niet op één lijn liggen, wordt gegeven door

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda_1(\underline{b} - \underline{a}) + \lambda_2(\underline{c} - \underline{a})$$



- c) Zij W een k -dimensionale deelruimte van \mathbb{R}^n . Dus $k \leq n$.

Kies een basis $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_k$ van W . Een parametervoorstelling van W luidt dan

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{r}_1 + \lambda_2 \underline{r}_2 + \dots + \lambda_k \underline{r}_k, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Zij \underline{p} een punt uit \mathbb{R}^n . De verzameling W' met parametervoorstelling

$$\underline{x} = \underline{p} + \lambda_1 \underline{r}_1 + \dots + \lambda_k \underline{r}_k, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

heet een k -dimensionale *lineaire variëteit* (of verschoven deelruimte) in \mathbb{R}^n .

Een lijn is dus een 1-dimensionale, en een vlak een 2-dimensionale lineaire variëteit in \mathbb{R}^3 .

6.1.13. Enkele andere voorbeelden van vectorruimten

- a) Zij $n \in \mathbb{N}$. De polynomen van de graad $\leq n$ met reële coëfficiënten vormen een reële vectorruimte P_n . Het stelsel $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ is een basis van P_n . Dus P_n heeft dimensie $n + 1$.

De polynomen van de graad $\leq n$ met complexe coëfficiënten vormen een complexe vectorruimte.

- b) Zij $[a, b]$ een gesloten begrensde interval.

Alle functies $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vormen een reële vectorruimte $F[a, b]$, waar-

bij voor $f, g \in F[a, b]$ de som $f + g$ is gedefinieerd door

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{voor alle } x \in [a, b],$$

en λf , de vermenigvuldiging van f met $\lambda \in \mathbb{R}$, is gedefinieerd door

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \text{voor alle } x \in [a, b].$$

- c) Alle Riemann-integreerbare functies $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vormen volgens stelling 5.2.3b een deelruimte $F_{\mathbb{R}}[a, b]$ van $F[a, b]$.
- d) Alle continue functies $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vormen volgens 3.7.3 en 5.2.2 een deelruimte $C[a, b]$ van $F_{\mathbb{R}}[a, b]$.
- e) Alle continu differentieerbare functies $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vormen volgens 4.2.1a en 4.1.12 een deelruimte $C^1[a, b]$ van $C[a, b]$.

Oefeningen

- *1. Uit 6.1.2a t/m 6.1.2c volgt dat V geen tweede nulvector $\underline{0}^*$ bevat en dat er bij iedere $\underline{a} \in V$ ook maar één tegengestelde is. Bewijs dit.
- *2. Zij $V = \{\underline{x}, \underline{y}\}$ een verzameling met 2 elementen.
Definieer $\underline{x} + \underline{x} = \underline{y} + \underline{y} = \underline{x}$,
 $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x} = \underline{y}$,
 $\lambda \underline{x} = \lambda \underline{y} = \underline{x}$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Ga na dat voldaan is aan 6.1.2a t/m g, maar niet aan 6.1.2h.
3. Als $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, dan is $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$. Bewijs dit.
4. Gegeven in \mathbb{R}^3 de punten $A = (1, 2, 1)$, $B = (7, -1, -2)$ en $C = (-1, 1, 4)$
- a) Bepaal een parametervoorstelling van de rechte lijn door A en B.
b) Bepaal een parametervoorstelling van het vlak door A, B en C.
- *5. Toon aan dat in de vectorruimte $C[a, b]$ (zie 6.1.13d) als volgt een inwendig product kan worden gedefinieerd:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad f, g \in C[a, b],$$

dat voldoet aan 6.1.6a t/m e.

6.2. Lineaire afbeeldingen en matrices

6.2.1. Definitie

Zijn U en V twee vectorruimten, dan heet een afbeelding $F: U \rightarrow V$ *lineair* als voor alle $\underline{a}, \underline{b} \in U$ en alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geldt

$$F(\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) = \lambda F(\underline{a}) + \mu F(\underline{b}).$$

6.2.2. Gevolg

Een lineaire afbeelding $F: U \rightarrow V$ beeldt de nulvector van U af op de nulvector van V

Bewijs

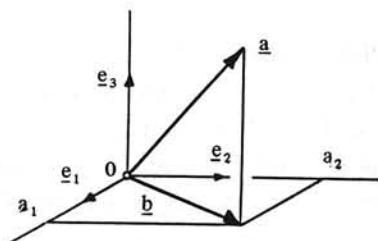
$$F(\underline{0}) = F(\underline{0} \underline{0}) = \underline{0} F(\underline{0}) = \underline{0}. \quad \square$$

6.2.3. Voorbeelden van lineaire afbeeldingen

- a) $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is de afbeelding die elk punt afbeeldt op zijn loodrechte projectie in het $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ vlak.

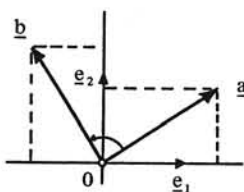
Als $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan geldt $\underline{b} = P(\underline{a}) = (a_1, a_2, 0)$.

Men controleert eenvoudig dat deze afbeelding aan definitie 6.2.1 voldoet en dus lineair is.



- b) Laat in \mathbb{R}^2 R de rotatie zijn om O over een rechte hoek in positieve zin. Als $\underline{a} = (a_1, a_2)$, dan geldt $\underline{b} = R\underline{a} = (-a_2, a_1)$.

Ga zelf na dat R lineair is.



- c) Zij $F_{\mathbb{R}}[a, b]$ de vectorruimte van alle Riemann-integreerbare functies. De afbeelding $S: F_{\mathbb{R}}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$S(f) = \int_a^b f(x) dx \text{ is lineair.}$$

- d) De Laplace transformatie is wegens 5.14.6 een lineaire afbeelding.
- e) Voor een vectorruimte V is de *identieke afbeelding* $I_V: V \rightarrow V$, gedefinieerd door $I_V(\underline{v}) = \underline{v}$ voor alle $\underline{v} \in V$, lineair.
- f) Zijn U en V vectorruimten, dan is de *nulafbeelding* $O: U \rightarrow V$ de afbeelding die elk element van U afbeeldt op het nulelement van V . Dus $O(\underline{u}) = \underline{0}$ voor alle $\underline{u} \in U$. Ook deze afbeelding is lineair.

6.2.4. Som, veelvoud en produkt van lineaire afbeeldingen

- a) Zijn $F: U \rightarrow V$ en $G: U \rightarrow V$ twee lineaire afbeeldingen, dan is de afbeelding $F + G: U \rightarrow V$ gedefinieerd door

$$(F + G)(\underline{a}) = F(\underline{a}) + G(\underline{a}) \quad \text{voor alle } \underline{a} \in U.$$

- b) Is $F: U \rightarrow V$ een lineaire afbeelding en is $\lambda \in \mathbb{R}$, dan is de afbeelding $\lambda F: U \rightarrow V$ gedefinieerd door

$$(\lambda F)(\underline{a}) = \lambda F(\underline{a}) \quad \text{voor alle } \underline{a} \in U.$$

c) Laat U, V en W drie vectorruimten zijn. Als $F: U \rightarrow V$ en $H: W \rightarrow U$ twee lineaire afbeeldingen zijn, dan kunnen we hieruit de *samengestelde afbeelding (produktafbeelding)* $F \circ H: W \rightarrow V$ construeren (zie 1.10.6), die wordt gedefinieerd door

$$F \circ H(\underline{w}) = F(H(\underline{w})) \quad \text{voor alle } \underline{w} \in W.$$

Men bewijst eenvoudig dat de afbeeldingen $F + G$, λF en $F \circ H$ lineaire afbeeldingen zijn.

6.2.5. Inverse van een lineaire afbeelding

In 1.10.11 hebben we bewezen dat de afbeelding $F: U \rightarrow V$ dan en slechts dan een inverse $F^{-1}: V \rightarrow U$ heeft als F bijectief is.

Men kan gemakkelijk de volgende stelling bewijzen: heeft de lineaire afbeelding $F: U \rightarrow V$ een inverse $F^{-1}: V \rightarrow U$, dan is ook F^{-1} lineair.

6.2.6. Lineaire afbeeldingen van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^m

We zullen de natuurlijke basis in \mathbb{R}^n aangeven met $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$; die in \mathbb{R}^m met $(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_m)$.

Is $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een lineaire afbeelding, dan is deze geheel bepaald door de vectoren $A(\underline{e}_1), A(\underline{e}_2), \dots, A(\underline{e}_n)$, de beelden van de basisvectoren.

Immers, als geldt

$$\begin{aligned} A(\underline{e}_1) &= a_{11}\underline{f}_1 + a_{21}\underline{f}_2 + \dots + a_{m1}\underline{f}_m \\ A(\underline{e}_2) &= a_{12}\underline{f}_1 + a_{22}\underline{f}_2 + \dots + a_{m2}\underline{f}_m \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ A(\underline{e}_n) &= a_{1n}\underline{f}_1 + a_{2n}\underline{f}_2 + \dots + a_{mn}\underline{f}_m \end{aligned}$$

dan is het beeld $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ van $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ gegeven door

$$\begin{aligned} \underline{y} &= A(\underline{x}) = A(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + \dots + x_n\underline{e}_n) = \\ &= x_1A(\underline{e}_1) + x_2A(\underline{e}_2) + \dots + x_nA(\underline{e}_n) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\underline{f}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)\underline{f}_2 + \\ &\quad + \dots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)\underline{f}_m. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (*)$$

De afbeelding A is dus geheel bepaald door het rechthoekig schema van mn getallen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

bestaande uit m (horizontale) rijen en n (verticale) kolommen, een zogenaamde $(m \times n)$ -matrix A , behorende bij de lineaire afbeelding A (bij deze keuze van de bases).

De matrix kunnen we opgebouwd denken uit m rijvectoren uit \mathbb{R}^n :

$$\underline{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), \quad k \in \{1, 2, \dots, m\},$$

of uit n kolomvectoren uit \mathbb{R}^m :

$$\underline{a}^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Uit de definitie van gelijkheid van afbeeldingen (zie 1.10.1) volgt dat twee matrices A en B gelijk zijn dan en slechts dan als

(i) zij van dezelfde orde zijn, zeg $m \times n$, en

(ii) $a_{ij} = b_{ij}$ voor alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

6.2.7. Eenheidsmatrix en nulmatrix

a) Bij de identieke afbeelding $I_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (zie 6.2.3e) gegeven door

$I_{\mathbb{R}^n}(\underline{x}) = \underline{x}$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ hoort de $(n \times n)$ -matrix

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{array}$$

$\leftarrow n \rightarrow$

We noemen I_n de $(n \times n)$ -eenheidsmatrix. Als er geen verwarring omtrent n mogelijk is schrijven we wel I in plaats van I_n .

b) Bij de nulafbeelding $O: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (zie 6.2.3f) hoort de $(m \times n)$ -matrix

$$O_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{array}$$

$\leftarrow n \rightarrow$

We noemen $O_{m,n}$ de $(m \times n)$ -nulmatrix. Als er geen verwarring omtrent $(m \times n)$ mogelijk is schrijven we wel O in plaats van $O_{m,n}$.

6.2.8. Som, veelvoud en produkt van matrices

a) Zijn $A, B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineaire afbeeldingen met bijbehorende matrices A en B , dan verstaan we onder $A+B$ de matrix behorende bij de lineaire afbeelding $A+B$.

Men gaat eenvoudig na dat

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

We noemen $A + B$ de *som* van A en B .

- b) Is $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een lineaire afbeelding met bijbehorende matrix A , dan verstaan we onder λA de matrix behorende bij de lineaire afbeelding λA . Er geldt

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

We noemen λA het *produkt* van A met het getal λ (*scalair produkt*).

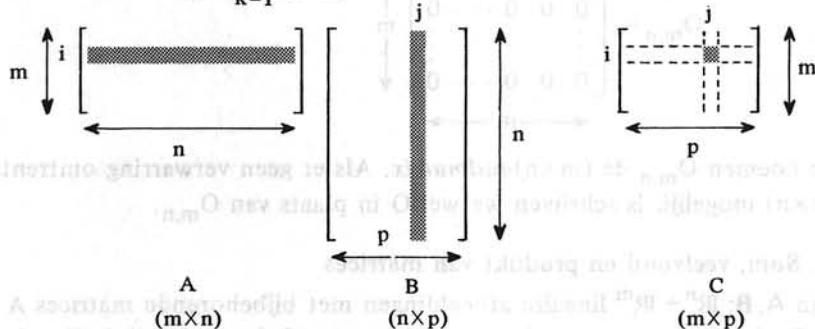
- c) Zijn $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineaire afbeeldingen met bijbehorende $(m \times n)$ -matrix A respectievelijk $(n \times p)$ -matrix B , dan verstaan we onder AB de $(m \times p)$ -matrix behorende bij de lineaire afbeelding $A \circ B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$. Zijn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ en } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix},$$

dan blijkt na uitschrijven, dat AB gelijk is aan de $(m \times p)$ -matrix C bepaald door

$$c_{ij} = a_i \cdot b^j, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad (*)$$

uitgeschreven: $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, p\}$.



We noemen AB het (*matrix*-)produkt van A en B .

6.2.9. Opmerkingen

- a) Alleen voor matrices van gelijke orde ($m \times n$) is de som gedefinieerd.
 b) Het produkt AB van de ($m \times n$)-matrix A en de ($k \times p$)-matrix B is dan en slechts dan gedefinieerd als $n = k$. We noemen n de *gemeenschappelijke afmeting* van A en B .

6.2.10. Voorbeelden

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 14 & -7 \\ 25 & -1 & 26 \end{bmatrix}.$$

$$b) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 24 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & -2 & 3 \\ -14 & 16 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$c) \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 \end{bmatrix}.$$

$$d) \text{ Als } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \text{ dan geldt } AB = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ en}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \text{ zodat } AB \neq BA. \text{ Het matrixprodukt is in het algemeen}$$

dus niet commutatief, evenmin als de samenstelling van lineaire afbeeldingen dat is.

6.2.11. Toepassing

Schrijven we de vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ als een $(n \times 1)$ -matrix (een kolommatrix) en $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ als een $(m \times 1)$ -matrix dan kunnen we 6.2.6(*) schrijven als een matrixprodukt:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$(m \times 1) \qquad (m \times n) \qquad (n \times 1)$

of, korter:

$$\underline{y} = A\underline{x}$$

6.2.12. Rekenregels voor de som en het scalaire produkt van matrices

Zonder bewijs vermelden we een aantal rekenregels voor de som en het scalaire produkt van matrices.

Zijn A, B, C drie $(m \times n)$ -matrices, is O de $(m \times n)$ -nulmatrix en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dan geldt

- a) $A + B = B + A$,
- b) $A + (B + C) = (A + B) + C$,
- c) $A + O = A$,
- d) $A + (-A) = O$, waarbij $-A = (-1)A$,
- e) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
- f) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
- g) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
- h) $1A = A$.

Uit het feit dat deze rekenregels overeenstemmen met die in 6.1.2 kan geconcludeerd worden dat de $(m \times n)$ -matrices een vectorruimte vormen.

6.2.13. Rekenregels voor het matrixprodukt

Eveneens zonder bewijs vermelden we rekenregels voor het matrixprodukt.

Zijn A, B, C drie matrices, waarvan de afmetingen passend bij elkaar aansluiten, dan geldt:

- a) $A(BC) = (AB)C$, we kunnen dus schrijven ABC ,
- b) $A(B + C) = AB + AC$,
- c) $(A + B)C = AC + BC$,
- d) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$, we kunnen dus schrijven λAB .

Is A een $(m \times n)$ -matrix dan geldt

- e) $AO_{n,p} = O_{m,p}$ en $O_{p,m}A = O_{p,n}$.
- f) $I_m A = AI_n = A$.

6.2.14. Inverse van een matrix

Men kan aantonen dat een lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nooit bijtief kan zijn als $n \neq m$. We beschouwen nu de afbeelding $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ met (vierkante) matrix A .

Als A een inverse afbeelding $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ met matrix B heeft, dan zal voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ moeten gelden

- a) $B(A(\underline{x})) = \underline{x}$, ofwel $BA\underline{x} = \underline{x}$, dus $BA = I$;
- b) $A(B(\underline{x})) = \underline{x}$, ofwel $AB\underline{x} = \underline{x}$, dus $AB = I$.

In dit geval noemen we de matrix A *inverteerbaar* en we duiden de (uniek bepaalde, zie oefening 1.10.1) matrix B aan met A^{-1} , de *inverse* van A .

Er geldt dus

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

6.2.15. Opmerkingen

a) Een stelsel van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kan worden geschreven als $A\underline{x} = \underline{b}$, waarin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Als $m = n$ en A inverteerbaar is, dan heeft dit stelsel precies één oplossing, namelijk $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$.

b) Niet alle vierkante matrices zijn inverteerbaar, bijvoorbeeld $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6.2.16. Voorbeeld

Zij $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, dan zoeken we een matrix B , zó dat $AB = I$.

Stel $B = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$. Dit levert de volgende stelsels vergelijkingen op:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 1 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 - z_2 + 2z_3 = 0 \\ 2z_1 + z_2 + 3z_3 = 0 \\ 3z_1 + 2z_2 + 4z_3 = 1 \end{cases}.$$

Oplossing levert $B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

Controleer dat inderdaad $AB = BA = I$. Dus $B = A^{-1}$.

6.2.17. Norm van een matrix

Zij A een $(m \times n)$ -matrix. We definiëren de *norm* van A (notatie $\|A\|$) als

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6.2.18. Stelling

Zij A een $(m \times n)$ -matrix. Dan is voor iedere $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$|A\underline{x}| \leq \|A\| |\underline{x}|.$$

Bewijs

$$|A\underline{x}|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2.$$

Voor iedere $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ is volgens Cauchy-Schwarz (zie 6.1.8)

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dus

$$|A\underline{x}|^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) = |\underline{x}|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \|A\|^2 |\underline{x}|^2.$$

Hieruit volgt het gestelde. \square

Oefeningen

1. Onderzoek welke van de volgende afbeeldingen lineair zijn.

a) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2 - 2x_1)$.

b) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $F(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1 + x_2)$.

c) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 - 4x_3$.

d) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x) = 3x + 1$.

2. Als $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, bereken dan AB en BA wan-

neer deze gedefinieerd zijn.

3. Bepaal de inverse van de volgende matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$.

6.3. Determinanten

6.3.1. Inleiding

Aan elk stelsel van n vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ uit \mathbb{R}^n kan een getal worden toegevoegd, de *determinant* $\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ van het stelsel.

Is A een $(n \times n)$ -matrix, dan verstaan we onder de *determinant* van A de determinant van het stelsel rijvectoren van A . We schrijven

$$\det A \quad \text{of} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Duiden we, zoals in 6.2.6 de rijvectoren van de $(n \times n)$ -matrix A aan met $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$, dan geldt dus

$$\det A = \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n).$$

Hoe de determinant van een stelsel van n vectoren uit \mathbb{R}^n wordt gedefinieerd zullen wij hier niet in zijn volle algemeenheid behandelen. We beperken ons tot een korte bespreking van de gevallen $n = 2$ en $n = 3$.

6.3.2. De determinant van twee vectoren in \mathbb{R}^2

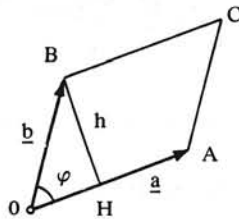
a) Zijn $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, dan is

$$\det(\underline{a}, \underline{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Dus als $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, dan $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

b) Meetkundig kunnen we $\det(\underline{a}, \underline{b})$ als volgt interpreteren.

Zijn $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$, beide verschillend van de nulvector, dan is de absolute waarde van $\det(\underline{a}, \underline{b})$ gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram OABC, dat door de vectoren \underline{a} en \underline{b} wordt opgespannen.



Bewijs

De oppervlakte van OABC is gelijk aan $OA \times BH = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, zie 6.1.9.

Nu is eenvoudig te controleren dat geldt:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2.$$

Dit is ook te schrijven als

$$(\det(\underline{a}, \underline{b}))^2 = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2,$$

zodat

$$(\det(\underline{a}, \underline{b}))^2 = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - (|\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 \cos^2 \varphi) = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 \sin^2 \varphi,$$

dus oppervlakte OABC = $|\det(\underline{a}, \underline{b})|$. □

6.3.3. Het uitwendig produkt van twee vectoren in \mathbb{R}^3

a) Onder het *uitwendig produkt* van de vectoren \underline{a} en \underline{b} in \mathbb{R}^3 verstaan we een vector $\underline{a} \times \underline{b}$ in \mathbb{R}^3 gedefinieerd door

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

We kunnen ook schrijven

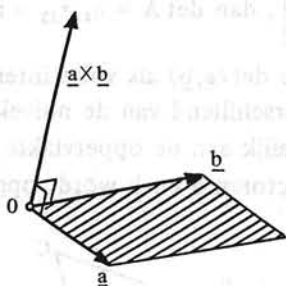
$$\underline{a} \times \underline{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Men gaat eenvoudig na dat $\underline{a} \times \underline{b}$ loodrecht staat op de vectoren \underline{a} en \underline{b} .

- b) Zij $\underline{a} \neq \underline{0}$ en $\underline{b} \neq \lambda \underline{a}$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, met andere woorden: \underline{a} en \underline{b} zijn onafhankelijk.

Dan geldt: de vectoren \underline{a} , \underline{b} , $\underline{a} \times \underline{b}$ (in deze volgorde) vormen een rechts-cyclisch stelsel, d.w.z. de richting van $\underline{a} \times \underline{b}$ past volgens de kurketrekkerregel bij de draairichting over de kleinste hoek van \underline{a} naar \underline{b} , mits $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ een rechts-cyclisch assenstelsel is.

- c) De lengte van $\underline{a} \times \underline{b}$ is gelijk aan de oppervlakte van het door \underline{a} en \underline{b} opgespannen parallellogram.



Bewijs

De oppervlakte van het door \underline{a} en \underline{b} opgespannen parallellogram is gelijk aan $|\underline{a}| |\underline{b}| \sin \varphi$.

Eenvoudig is te controleren dat geldt:

$$\begin{aligned} & (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \\ & = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2. \end{aligned}$$

Dit is ook te schrijven als:

$$\begin{aligned} |\underline{a} \times \underline{b}|^2 &= |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2 = \\ &= |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - (|\underline{a}| |\underline{b}| \cos^2 \varphi) = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 \sin^2 \varphi. \quad \square \end{aligned}$$

Zonder bewijs vermelden we enkele rekenregels voor het uitwendig product.

- d) $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$;
 e) $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$;
 f) $(\underline{a} + \underline{a}') \times \underline{b} = (\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{a}' \times \underline{b})$;
 g) $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{b}') = (\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{a} \times \underline{b}')$;
 h) $(\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b}) = \lambda (\underline{a} \times \underline{b})$.

6.3.4. De determinant van drie vectoren in \mathbb{R}^3

- a) Zijn $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, dan is

$$\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}).$$

Uitwerking levert:

$$\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

b) Door anders rangschikken van de termen in het rechterlid vinden we:

$$\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}).$$

c) Wegens 6.3.3e is de determinant van een stelsel van 3 vectoren waaronder twee gelijke voorkomen dus gelijk aan nul.

d) Als $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, dan geldt

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Vervangen we in deze uitdrukking alle termen a_{ij} door a_{ji} ($i, j \in \{1, 2, 3\}$), dan gaan de termen $a_{12} a_{23} a_{31}$ en $a_{13} a_{21} a_{32}$ in elkaar over, terwijl de overige termen niet veranderen. In de definitie van de determinant van een (3×3) -matrix spelen rijen en kolommen dus eenzelfde rol. Elke determinant-stelling, die geldt voor de rijvectoren, geldt dus ook voor de kolomvectoren.

e) Schrapen we in de (3×3) -matrix A de i -de rij en de j -de kolom, ($i, j \in \{1, 2, 3\}$), dan houden we een (2×2) -deelmatrix over. De determinant m_{ij} van deze deelmatrix heet een onderdeterminant van de matrix A ; het getal A_{ij} , gedefinieerd door $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ heet de *cofactor van het element* a_{ij} .

De rijvectoren van A duiden we zoals gewoonlijk aan met $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$, zodat $\underline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Schrijven we $\underline{A}_i = (A_{i1}, A_{i2}, A_{i3})$, $i \in \{1, 2, 3\}$, dan zijn hiermee drie vectoren ingevoerd, waarvoor geldt:

$$\underline{A}_1 = \underline{a}_2 \times \underline{a}_3, \underline{A}_2 = \underline{a}_3 \times \underline{a}_1, \underline{A}_3 = \underline{a}_1 \times \underline{a}_2.$$

Dus geldt voor alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\underline{a}_i \cdot \underline{A}_j = 0 \text{ als } i \neq j \text{ en wegens b) } \underline{a}_i \cdot \underline{A}_i = \det A,$$

$$\text{ofwel } \det A = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{ij}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

De determinant van een (3×3) -matrix wordt verkregen door van een willekeurige rij elk element te vermenigvuldigen met zijn eigen cofactor en de drie zo verkregen produkten op te tellen. Dit kan men generaliseren tot $(n \times n)$ -matrices.

We noemen dit het berekenen van $\det A$ door *ontwikkeling* naar de betreffende rij. Wegens d) kan men $\det A$ ook berekenen door ontwikkeling naar een kolom.

f) Voorbeeld

$$\text{Zij } A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ontwikkeling naar de 2-de rij levert

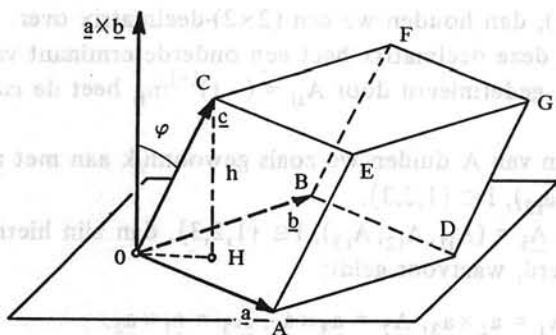
$$\begin{aligned} \det A &= -(-3) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot 23 - 1 \cdot 10 - 2 \cdot (-1) = 61. \end{aligned}$$

Ontwikkeling naar de eerste kolom levert

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 23 + 1 \cdot 6 = 61. \end{aligned}$$

6.3.5. Meetkundige interpretatie

De inhoud van het blok (parallelepipedum) opgespannen door het onafhankelijke stelsel vectoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ is gelijk aan de absolute waarde van $\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$.

**Bewijs**

V is het vlak waarin het door de vectoren \underline{a} en \underline{b} opgespannen parallelogram $OADB$ ligt (het grondvlak van het blok). CH is de loodlijn uit C op V (de lengte h van CH is de hoogte van het blok).

Volgens 6.3.3c is $|\underline{a} \times \underline{b}|$ gelijk aan de oppervlakte van het grondvlak; verder staat $\underline{a} \times \underline{b}$ loodrecht op V .

Laat φ de hoek zijn tussen $\underline{a} \times \underline{b}$ en \underline{c} ($0 \leq \varphi \leq \pi$). Dan geldt:

$h = |\underline{c}| |\cos \varphi|$. De inhoud van het blok is gelijk aan het product van de oppervlakte van het grondvlak en de hoogte; dit product is gelijk aan $|\underline{a} \times \underline{b}| |\underline{c}| |\cos \varphi| = |(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}|$.

Volgens 6.3.4b geldt: $\det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$. \square

6.3.6. Enkele eigenschappen van determinanten

Zonder bewijs vermelden we hier enkele eigenschappen van determinanten. (We gebruiken hier alleen $n = 2$ of $n = 3$).

a) Zijn A en B ($n \times n$)-matrices, dan geldt

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

b) Een stelsel van n vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^n$ is dan en slechts dan onafhankelijk als

$$\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \neq 0.$$

c) Een ($n \times n$)-matrix A is dan en slechts dan inverteerbaar als $\det A \neq 0$. Er geldt dan:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

$$\text{Is } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ dan is } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Is } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ dan is } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

waarbij A_{ij} de cofactor (zie 6.3.4e) is van a_{ij} ($i, j \in \{1, 2, 3\}$).

Oefeningen

1. Bepaal $\lambda \in \mathbb{R}$ zó dat $\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -7 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

2. Bewijs 6.3.6a voor (2×2)-matrices.

3. Bereken $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c})$,

waarin $\underline{a} = (1, -2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -1)$ en $\underline{c} = (1, 3, -2)$.

4. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC,

waarin $A = (2, 1, -1)$, $B = (5, 2, -1)$, $C = (-1, 2, 3)$.

5. Bereken de determinant van de volgende matrices.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Voor welke waarden van $\lambda \in \mathbb{R}$ is het stelsel $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ afhankelijk, als $\underline{a} = (\lambda, 2, 3)$, $\underline{b} = (2, \lambda, 3)$ en $\underline{c} = (3, 2, \lambda)$?

7. Toon aan dat $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

Limieten en continuïteit

6.4. Deelverzamelingen van \mathbb{R}^n

6.4.1. Inleiding

Alvorens de algemene theorie van afbeeldingen van $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ te beginnen, dienen we een aantal begrippen die bij het bestuderen van functies van $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een rol speelden (zoals omgeving, gereduceerde omgeving, inwendig punt en dergelijke) ook in \mathbb{R}^n in te voeren. Daartoe dient deze paragraaf.

6.4.2. Omgeving en gereduceerde omgeving

Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ en $r \in \mathbb{R}^+$.

- a) De verzameling $U_r(\underline{a})$ van alle punten in \mathbb{R}^n die tot \underline{a} een afstand kleiner dan r hebben, heet de *r-omgeving* van \underline{a} :

$$U_r(\underline{a}) = \{\underline{x} \mid |\underline{x} - \underline{a}| < r\}.$$

- b) De verzameling $U'_r(\underline{a})$ van alle punten in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{a}\}$ die tot \underline{a} een afstand kleiner dan r hebben, heet de *gereduceerde r-omgeving* van \underline{a} :

$$U'_r(\underline{a}) = \{\underline{x} \mid 0 < |\underline{x} - \underline{a}| < r\}.$$

6.4.3. Voorbeelden

- a) In \mathbb{R} is $U_r(a) = (a-r, a+r)$

en $U'_r(a) = (a-r, a) \cup (a, a+r)$, (vergelijk 3.1.2).

- b) In \mathbb{R}^2 is $U_r(\underline{a})$ een cirkelschijf zonder rand;
in \mathbb{R}^3 is $U_r(\underline{a})$ een volle bol zonder rand.

6.4.4. Inwendig punt

Analoog aan 3.2.3d geven we nu de volgende definitie.

Laat $S \subset \mathbb{R}^n$. Een punt $\underline{a} \in S$ heet *inwendig punt van S* als er een r -omgeving $U_r(\underline{a})$ van \underline{a} bestaat die geheel tot S behoort:

er is een $r > 0$ waarvoor geldt dat $U_r(\underline{a}) \subset S$.

De verzameling van alle inwendige punten van S heet het *inwendige* van S .

6.4.5. Voorbeelden

- a) In \mathbb{R} :

(i) $S = \{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup (2,3)$. Het inwendige van S is $(2,3)$.

(ii) \mathbb{Z} heeft geen inwendige punten. Het inwendige van \mathbb{Z} is de lege verzameling.

- b) In \mathbb{R}^2 :

(i) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Het inwendige van S is $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(ii) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

Het inwendige van S is de lege verzameling.

6.4.6. Open verzameling

Op grond van definitie 6.4.4 behoort een inwendig punt van S steeds tot S . Anderzijds blijkt uit de voorbeelden in 6.4.5 dat een punt van S niet altijd inwendig punt van S hoeft te zijn. Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie.

Een deelverzameling S van \mathbb{R}^n heet *open in \mathbb{R}^n* (of *open deelverzameling van \mathbb{R}^n*) indien ieder punt van S inwendig punt van S is.

6.4.7. Voorbeelden

a) \emptyset en \mathbb{R}^n zelf zijn open in \mathbb{R}^n .

b) Het interval (a, b) is open in \mathbb{R} (vandaar de naam: *open interval*).

Merk op dat $(a, b) = U_r(p)$ met $p = \frac{1}{2}(a + b)$ en $r = \frac{1}{2}(b - a)$.

Algemeen geldt dat voor iedere $r \in \mathbb{R}^+$ de r -omgeving van een punt $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ open is in \mathbb{R}^n (men noemt een r -omgeving in \mathbb{R}^2 een *open cirkelschijf* en een r -omgeving in \mathbb{R}^3 een *open (volle) bol*).

Het formele bewijs van de bewering dat $U_r(\underline{a})$ open is in \mathbb{R}^n luidt als volgt.

Zij $\underline{b} \in U_r(\underline{a})$. Dan is $|\underline{b} - \underline{a}| < r$. Kies $\epsilon > 0$ zó dat $|\underline{b} - \underline{a}| + \epsilon < r$.

Nu is $U_\epsilon(\underline{b}) \subset U_r(\underline{a})$, want als $\underline{x} \in U_\epsilon(\underline{b})$ dan is $|\underline{x} - \underline{b}| < \epsilon$, dus

$|\underline{x} - \underline{a}| \leq |\underline{x} - \underline{b}| + |\underline{b} - \underline{a}| < \epsilon + |\underline{b} - \underline{a}| < r$. Hiermee is bewezen dat iedere $\underline{b} \in U_r(\underline{a})$ inwendig punt van $U_r(\underline{a})$ is.

c) Het interval $[a, b)$ is niet open in \mathbb{R} :

er bestaat geen r -omgeving van a met $(a - r, a + r) \subset [a, b)$, dus a is een punt van $[a, b)$ dat geen inwendig punt is.

6.4.8. Gesloten verzameling

Een deelverzameling S van \mathbb{R}^n heet *gesloten in \mathbb{R}^n* (of *gesloten deelverzameling van \mathbb{R}^n*) indien $\mathbb{R}^n \setminus S$ open is in \mathbb{R}^n .

6.4.9. Voorbeelden

a) \emptyset en \mathbb{R}^n zelf zijn gesloten in \mathbb{R}^n .

b) Het interval $[a, b]$ is gesloten in \mathbb{R} (vandaar de naam: *gesloten interval*).

Algemeen geldt dat voor iedere $r \in \mathbb{R}^+$ en iedere $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ de verzameling $W_r(\underline{a}) = \{\underline{x} \mid |\underline{x} - \underline{a}| \leq r\}$ gesloten is in \mathbb{R}^n (zo'n verzameling heet in \mathbb{R}^2 een *gesloten cirkelschijf* en heet in \mathbb{R}^3 een *gesloten (volle) bol*).

We bewijzen dit door aan te tonen:

als $\underline{b} \in \mathbb{R}^n \setminus W_r(\underline{a})$ dan is \underline{b} inwendig punt van $\mathbb{R}^n \setminus W_r(\underline{a})$.

Zij dus $|\underline{b} - \underline{a}| > r$. Kies $\epsilon = |\underline{b} - \underline{a}| - r$ (merk op dat $\epsilon > 0$).

Dan is $U_\epsilon(\underline{b}) \cap W_r(\underline{a}) = \emptyset$, want was $\underline{x} \in U_\epsilon(\underline{b}) \cap W_r(\underline{a})$, dan was $|\underline{x} - \underline{b}| + |\underline{x} - \underline{a}| < \epsilon + r = |\underline{b} - \underline{a}|$, hetgeen in strijd is met de driehoeksongelijkheid 6.1.10a.

Hiermee is aangetoond dat $U_\epsilon(\underline{b}) \subset \mathbb{R}^n \setminus W_r(\underline{a})$, dus dat \underline{b} inwendig punt van $\mathbb{R}^n \setminus W_r(\underline{a})$ is.

- c) Het interval $[a, b)$ is niet gesloten in \mathbb{R} want $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$ is niet open in \mathbb{R} :
 b is een punt van $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$ dat geen inwendig punt is.

6.4.10. Adherent punt

Laat $S \subset \mathbb{R}^n$. Een punt $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ heet een *aan S adherent punt* als iedere r -omgeving van \underline{a} een punt van S bevat:

$$\text{voor iedere } r > 0 \text{ geldt } U_r(\underline{a}) \cap S \neq \emptyset.$$

6.4.11. Voorbeelden

a) In \mathbb{R} :

(i) De verzameling van alle aan $(-1, 1)$ adherente punten is $[-1, 1]$.

(ii) Zij $S = \{ \frac{m}{2^n} \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ en } 0 \leq m \leq 2^n \}$.

De verzameling van alle aan S adherente punten is $[0, 1]$.

b) In \mathbb{R}^2 :

De verzameling van alle aan $U_r(\underline{a})$ adherente punten is $\{ \underline{x} \mid |\underline{x} - \underline{a}| \leq r \}$.

Uit de definitie 6.4.10 volgt direct dat ieder punt van S een aan S adherent punt is. Anderzijds blijkt uit de voorbeelden 6.4.11 dat een aan S adherent punt niet altijd tot S behoort.

De volgende stelling karakteriseert de verzamelingen die wèl al hun adherente punten bevatten.

6.4.12. Stelling

Zij $S \subset \mathbb{R}^n$. Dan geldt:

Ieder aan S adherent punt behoort tot S dan en slechts dan als S gesloten is.

Bewijs

Ieder aan S adherent punt behoort tot $S \iff$ geen enkel punt van $\mathbb{R}^n \setminus S$

is adherent aan $S \iff$ bij ieder punt $\underline{a} \in \mathbb{R}^n \setminus S$ is er een $r > 0$ met

$U_r(\underline{a}) \cap S = \emptyset \iff$ bij ieder punt $\underline{a} \in \mathbb{R}^n \setminus S$ is er een $r > 0$ met

$U_r(\underline{a}) \subset \mathbb{R}^n \setminus S \iff \mathbb{R}^n \setminus S$ is open $\iff S$ is gesloten. \square

6.4.13. Afsluiting

Zij $S \subset \mathbb{R}^n$. Men noemt de *afsluiting* van S (notatie \bar{S}) de verzameling van alle aan S adherente punten

6.4.14. Begrensde verzameling

Een deelverzameling S van \mathbb{R}^n heet *begrensd* indien er een getal M bestaat zó dat $|\underline{x}| \leq M$ voor alle $\underline{x} \in S$.

6.4.15. Voorbeelden

a) Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ en $r \in \mathbb{R}^+$. Dan is $U_r(\underline{a})$ begrensd, want voor alle $\underline{x} \in U_r(\underline{a})$ geldt

$$|\underline{x}| = |(\underline{x} - \underline{a}) + \underline{a}| \leq |\underline{x} - \underline{a}| + |\underline{a}| < r + |\underline{a}| = M.$$

b) In \mathbb{R}^2 is de verzameling $S = \{(x, y) \mid 3x + 4y = 6\}$ niet begrensd.

c) \emptyset is begrensd.

Oefeningen

- Bewijs dat $(-\infty, 0]$ en $[0, \infty)$ gesloten zijn in \mathbb{R} .
- Laat A en B deelverzamelingen zijn van \mathbb{R} met $A \subset B$.
Onderzoek de juistheid van de volgende beweringen.
 - Als p inwendig punt van A is dan is p inwendig punt van B .
 - Als A open is in \mathbb{R} dan is B open in \mathbb{R} .
 - Als p een aan A adherent punt is dan is p een aan B adherent punt.
 - Als A gesloten is in \mathbb{R} dan is B gesloten in \mathbb{R} .
- A en B zijn begrensde deelverzamelingen van \mathbb{R} en $A \cap B \neq \emptyset$.
Bewijs dat $\inf(A \cap B)$ adherent is aan A .
- *4. Toon aan dat voor iedere $S \subset \mathbb{R}^n$ geldt: de afsluiting \bar{S} is gesloten in \mathbb{R}^n .

6.5. Definitie en voorbeelden van functies van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^m

6.5.1. Naamgeving en notatie

Een *reële functie van twee reële variabelen* (of kortweg *functie van twee variabelen*) is een afbeelding $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^2$.

Aan elke $\underline{x} = (x, y) \in D$ wordt een getal $f(\underline{x}) = f(x, y) \in \mathbb{R}$ toegevoegd; men schrijft ook vaak $z = f(x, y)$.

Een (*reële*) *functie van drie (reële) variabelen* is een afbeelding $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^3$. Aan elke $\underline{x} = (x, y, z) \in D$ wordt een getal $f(\underline{x}) = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ toegevoegd; men schrijft ook vaak $u = f(x, y, z)$.

Een (*reële*) *functie van n (reële) variabelen* is een afbeelding $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$. Aan elke $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ wordt een getal $f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ toegevoegd; men schrijft ook vaak $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Een *vectorfunctie van n (reële) variabelen* is een afbeelding $\underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$. Aan elke $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ wordt een vector $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$ toegevoegd; men schrijft ook vaak $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$.

De functie f_k , ($k \in \{1, 2, \dots, m\}$) heet de *k -de componentfunctie* of *k -de component* van \underline{f} .

6.5.2. Voorbeelden

- Zij $h(P)$ de hoogte van een punt P van het aardoppervlak ten opzichte van de zeespiegel. Door geschikte coördinaten op het aardoppervlak te kiezen (bijvoorbeeld het aantal graden Noorder- of Zuiderbreedte en het aantal graden Ooster- of Westlengte) wordt h een functie van twee variabelen.
- De temperatuur T in een bepaalde ruimte kan men opvatten als een afbeelding

$$(x, y, z, t) \longmapsto T(x, y, z, t),$$

waarbij (x,y,z) een punt uit die ruimte is en t de tijd aangeeft.

T is in dit geval een reële functie van vier variabelen.

- c) Een parametervoorstelling van een lijn in \mathbb{R}^m (zie 6.1.12a) kunnen we opvatten als een vectorfunctie $\underline{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, gegeven door het voorschrift $\lambda \mapsto \underline{p} + \lambda \underline{r} \in \mathbb{R}^m$.

Onder bepaalde voorwaarden is een vectorfunctie van één variabele op te vatten als een parametervoorstelling van een *kromme* in \mathbb{R}^m .

Zo is de vectorfunctie $\underline{f}: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeven door $\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ een parametervoorstelling van de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1.

Immers, de kromme bestaat uit alle punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $x = \cos t$ en $y = \sin t$ voor zekere $t \in [0, 2\pi)$. Na eliminatie van t volgt $x^2 + y^2 = 1$, de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1. Dezelfde functie \underline{f} met definitiegebied beperkt tot $[0, \pi]$ is een parametervoorstelling van een halve cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1. De halve cirkel is ook de grafiek van de reële functie $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. De parametervoorstelling voor de halve cirkel is dus te herleiden tot een voorstelling door middel van een reële functie. Voor de volledige cirkel als boven is een dergelijke herleiding niet mogelijk.

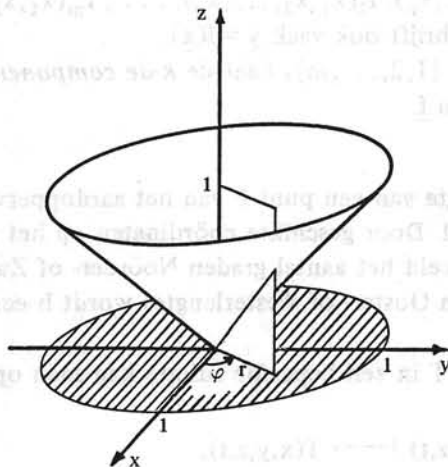
- d) Een parametervoorstelling van een vlak in \mathbb{R}^m (zie 6.1.12b) kunnen we opvatten als een vectorfunctie $\underline{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij aan het tweetal parameters $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ een punt uit \mathbb{R}^m , gelegen op het betreffende vlak, wordt toegevoegd.

Onder bepaalde voorwaarden is een vectorfunctie van twee variabelen op te vatten als een parametervoorstelling van een *oppervlak* in \mathbb{R}^n .

Zo is de vectorfunctie, die $D = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ afbeeldt in \mathbb{R}^3 via het voorschrift

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r$$

de parametervoorstelling van een kegeloppervlak.



e) Een magnetisch of elektrisch veld kan men opvatten als een afbeelding $\underline{F}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, waarbij de drie componenten F_1, F_2 en F_3 van het veld afhangen van de drie plaatscoördinaten (x, y, z) en van de tijd t :

$$(x, y, z, t) \mapsto (F_1(x, y, z, t), F_2(x, y, z, t), F_3(x, y, z, t)).$$

f) Een lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (zie 6.2.6) met bijbehorende matrix A is een vectorfunctie, waarvan de componentfuncties lineair zijn.

6.5.3. Grafische voorstelling

De grafiek van een functie of vectorfunctie van meer variabelen kunnen we op soortgelijke wijze als bij functies van één variabele definiëren.

De grafiek van $\underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$, is de grafische voorstelling van de verzameling

$$\{(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) \mid \underline{x} \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

die men kan krijgen door in \mathbb{R}^{n+m} een rechthoekig assenstelsel te kiezen.

Het is duidelijk, dat zelfs in het geval $n+m=3$ een deelverzameling van \mathbb{R}^3 grafisch moet worden weergegeven. Dit kan met behulp van een gipsmodel of anders via projectie in \mathbb{R}^2 .

6.5.4. Omwentelingsoppervlak

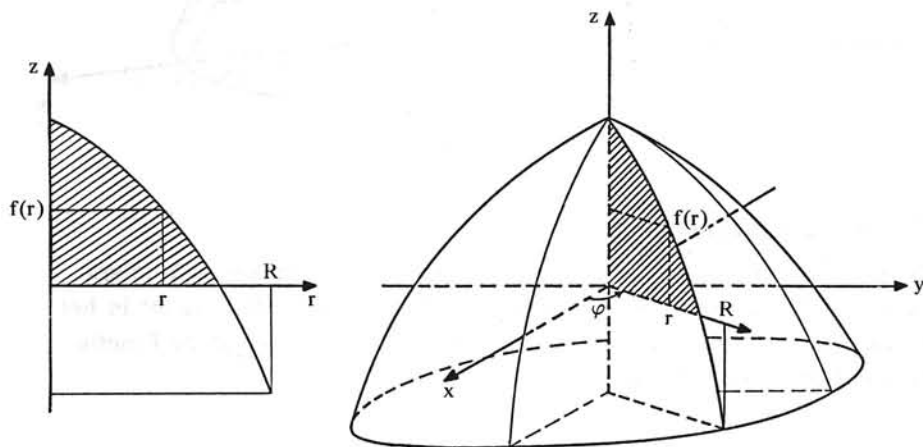
In de praktijk komen we nogal eens functies van twee variabelen tegen met een voorschrift van de vorm

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad \text{waarbij } D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Door over te gaan op poolcoördinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ in het vlak $z = 0$ vinden we

$$z = f(r), \quad 0 \leq r \leq R.$$

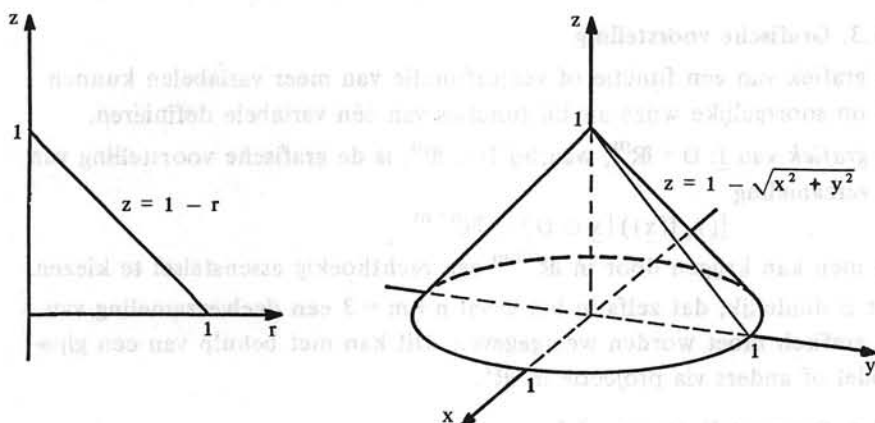
In het (r, z) -halfvlak (een halfvlak vanwege $r \geq 0$) kunnen we deze grafiek tekenen. Dit stelt de doorsnede voor van de grafiek van f met een willekeurig vlak door de z -as. Omdat het voorschrift van f onafhankelijk is van



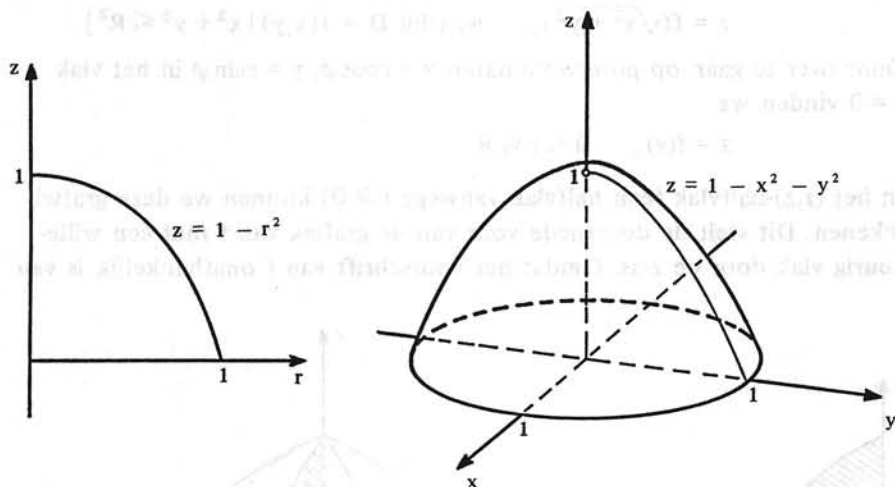
de poolcoördinaat φ is deze doorsnede voor ieder vlak door de z-as hetzelfde. f stelt een *omwentelingsoppervlak* voor met de z-as als as waarom gewenteld wordt.

6.5.5. Voorbeelden

a) $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.



b) $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.

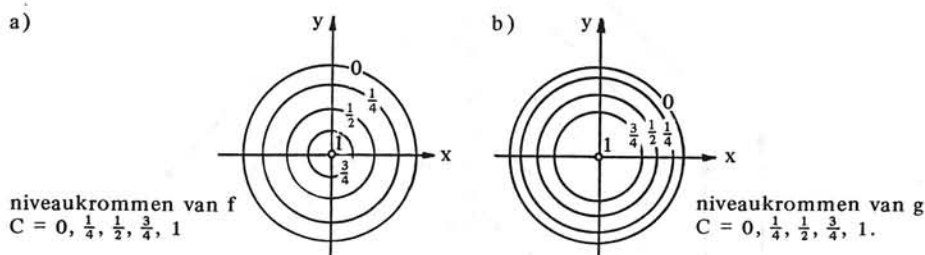


6.5.6. Niveaokrommen

Dikwijls is het moeilijk zich een goede voorstelling te maken van de grafiek; men kan dan gebruik maken van een *hoogtekaart*. Men tekent in het xy -vlak een aantal *niveaokrommen*. Dit zijn krommen waarop de functie een constante waarde heeft:

$$f(x,y) = C.$$

In het geval van de voorbeelden in 6.5.5 vinden we:



In beide gevallen zijn de niveaukrommen cirkels, maar aan de afstand tussen de niveaukrommen kan men zien, dat de grafiek van g bij de top meer afgeplat is dan die van f , en bij de rand steiler verloopt.

Men komt niveaukrommen dikwijls tegen: op weerkaarten (lijnen van gelijke luchtdruk: isobaren), op sommige kaarten van een bergachtig landschap (hoogtelijnen).

Let op: niveaukrommen liggen niet op de grafiek van f , maar in het definitiegebied van f .

6.5.7. Niveaoppervlakken

Een eenvoudige meetkundige voorstelling van een functie van drie variabelen, analoog aan de grafiek van een functie van twee variabelen, is er niet. Inzicht in zo'n functie kunnen we verkrijgen door *niveaoppervlakken* te beschouwen, dat zijn oppervlakken in \mathbb{R}^3 gegeven door de vergelijking $f(x,y,z) = C$ met C constant.

Niveaoppervlakken in \mathbb{R}^3 zijn het analogon van hoogtelijnen in \mathbb{R}^2 .

Zo heeft de functie $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ als niveaoppervlakken het stelsel concentrische bollen met middelpunt $(0,0,0)$.

In de electriciteitstheorie zijn de oppervlakken waar de elektrostatische potentiaal constant is (zogenaamde equipotentiaalvlakken) van belang; in de meteorologie gebruikt men isothermen (oppervlakken van constante temperatuur).

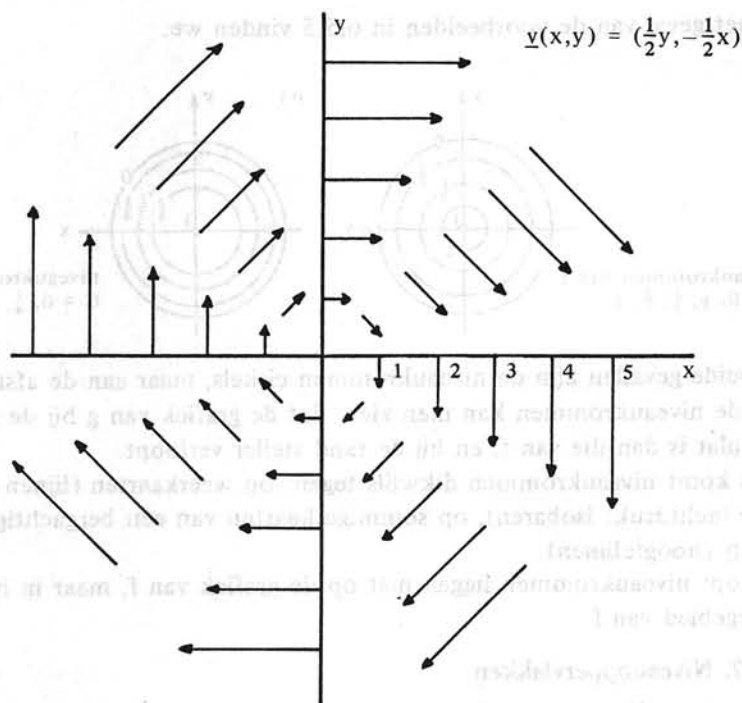
6.5.8. Vectorfuncties van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^n

a) Bij coördinatentransformaties krijgen we te maken met afbeeldingen van $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Zo wordt het verband tussen rechthoekige (cartesische) en poolcoördinaten in \mathbb{R}^2 gegeven door de afbeelding

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = (x, y).$$

b) Als in 6.5.1 geldt: $n = m$, duiden we de vectorfunctie vaak aan met $\underline{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$ en spreken van een *vectorveld*.

Immers, aan elk $\underline{x} \in D$ wordt dan een vector $\underline{v}(\underline{x})$ toegevoegd. Voorbeelden zijn het gravitatieveld, het elektrisch veld, het magnetisch veld en het stromingsveld. Een voorbeeld van de laatste soort is het windveld.



Vectorvelden $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan men met pijltjes in beeld brengen.

Om de tegenstelling met een vectorveld aan te geven noemt men een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$, vaak een *scalarveld*.

Oefeningen

- Teken de zogenaamde schroeflijn, gegeven door $\{(x,y,z) \mid x = \cos t, y = \sin t, z = t, t \in \mathbb{R}\}$.
- De volgende vlakke krommen worden gegeven met behulp van een parametervoorstelling met parameter $t \in \mathbb{R}$. Bepaal de vergelijkingen van die krommen in de vorm $f(x,y) = 0$.
 - $\underline{f}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $a > 0, b > 0$.
 - $\underline{f}(t) = (\sin t, \sin 3t)$. (Aanwijzing: zie 2.7.6b).
 - $\underline{f}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{t-t^3}{1+t^2} \right)$
 - $\underline{f}(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t)$
- Schets de volgende oppervlakken.
 - $\{(x,y,z) \mid z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}, 0 \leq z \leq 1\}$.
 - $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
 - $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$.
 - $\{(x,y,z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$.

4. Teken de aangegeven niveaukrommen van de oppervlakken behorende bij de volgende vergelijkingen.

- a) $z = x + 2y$, niveaukrommen behorend bij $z = 0, \pm 2, \pm 4$ en ± 6 .
 b) $z = \frac{2x}{1+y}$, niveaukrommen behorend bij $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ en ± 4 .
 c) $z = xy$, niveaukrommen behorend bij $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ en ± 4 .
 d) $z = x^2 - y^2$, niveaukrommen behorend bij $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ en ± 4 .
 e) $z = \frac{y^2 - x}{y^2}$, niveaukrommen behorend bij $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ en ± 4 .

6.6. Limieten

6.6.1. Inleiding

We gaan nu het limietbegrip introduceren voor functies en vectorfuncties van meer variabelen. Daarbij spelen de in 6.4.2 gedefinieerde begrippen omgeving en gereduceerde omgeving een belangrijke rol. De definitie van limiet is volstrekt analoog aan die van functies van één variabele, maar we zullen toch zien dat er zich verrassende complicaties kunnen voordoen (zie voorbeeld 6.6.4b en oefening 3).

6.6.2. Definitie

Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$ en zij $\underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ met $D \subset \mathbb{R}^n$.

Laat \underline{f} gedefinieerd zijn in een gereduceerde r -omgeving van \underline{a} , dat wil zeggen: $U'_r(\underline{a}) \subset D$.

Dan heet $\underline{q} \in \mathbb{R}^m$ de *limiet van \underline{f} voor \underline{x} naar \underline{a}* , notatie

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{q}$$

als er bij elk reëel getal $\epsilon > 0$ een reëel getal $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ met $0 < |\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ geldt $|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{q}| < \epsilon$.

We kunnen deze definitie als volgt herformuleren:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{q}$$

als voor alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ er een $\delta \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat

$$[\underline{x} \in U'_\delta(\underline{a})] \implies [\underline{f}(\underline{x}) \in U_\epsilon(\underline{q})].$$

6.6.3. Stelling

Laten $\underline{a}, r, \underline{f}, D$ en \underline{q} zijn als in 6.6.2. Dan geldt

$$[\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{q}] \iff [\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f_i(\underline{x}) = q_i \text{ voor alle } i \in \{1, 2, \dots, m\}].$$

De limiet van een vectorfunctie bestaat dan en slechts dan als de limiet van alle componentfuncties bestaat.

Bewijs

\implies : Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Er bestaat dan een $\delta > 0$, zó dat

$$[\underline{x} \in U'_\delta(\underline{a})] \implies [f(\underline{x}) \in U_\epsilon(\underline{\ell})].$$

Dan geldt voor alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$|f_i(\underline{x}) - \ell_i| \leq |f(\underline{x}) - \underline{\ell}| < \epsilon,$$

dus $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f_i(\underline{x}) = \ell_i$.

\impliedby : Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Er bestaat dan voor elke $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ een $\delta_i \in \mathbb{R}^+$ zó dat

$$[\underline{x} \in U'_{\delta_i}(\underline{a})] \implies |f_i(\underline{x}) - \ell_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}.$$

Zij $\delta = \min_{1 \leq i \leq m} \delta_i$. Dan geldt voor $\underline{x} \in U'_\delta(\underline{a})$:

$$|f(\underline{x}) - \underline{\ell}|^2 = \sum_{i=1}^m (f_i(\underline{x}) - \ell_i)^2 < m \frac{\epsilon^2}{m} = \epsilon^2,$$

dus $|f(\underline{x}) - \underline{\ell}| < \epsilon$. Hieruit volgt $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = \underline{\ell}$. \square

6.6.4. Voorbeelden

a) We tonen aan dat $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

Voor $\underline{x} = (x, y) \neq (0, 0)$ geldt:

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x||y|}{|x|} \leq \frac{|x||x|}{|x|} = |x|.$$

Zij $\epsilon > 0$, dan geldt voor alle \underline{x} met $0 < |\underline{x} - \underline{0}| < \delta$, waarbij we $\delta = \epsilon$ nemen, dat

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \leq |x| < \epsilon.$$

b) We tonen aan dat $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ niet bestaat.

Delen van teller en noemer door x^2 (voor $x \neq 0$) laat zien dat $\frac{xy}{x^2 + y^2}$

slechts afhangt van de verhouding $\frac{y}{x}$. Dus de rechten $y = \alpha x$ ($x \neq 0$) zijn hoogtelijnen. De waarde van de functie op $y = \alpha x$ is $\alpha/(1 + \alpha^2)$. In elke gereduceerde r -omgeving van $\underline{0}$ neemt de functie alle waarden uit $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ aan.

6.6.5. Opmerkingen

a) Men dient onderscheid te maken tussen $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} f(\underline{x})$, $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)]$ en $\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)]$.

Zo is in voorbeeld 6.6.4b $\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$; $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} f(\underline{x})$ be-

staat echter niet. Zie echter ook oefening 6.7.4.

- b) Wegens stelling 6.6.3 kunnen we ons beperken tot het bekijken van limieten van reële functies van meer variabelen.
- c) Voor functies van meer variabelen kunnen limieten voor $\underline{x} \rightarrow +\infty$, $\underline{x} \rightarrow -\infty$, $\underline{x} \downarrow \underline{a}$ of $\underline{x} \uparrow \underline{a}$ niet op zinvolle wijze gedefinieerd worden. Wel kunnen analoog aan 3.8 oneigenlijke limieten gedefinieerd worden.
- d) De in 3.5.2, 3.5.3 en 3.5.5 genoemde stellingen en de in 3.6 geformuleerde rekenregels gelden analoog voor limieten van functies van meer variabelen. Hetzelfde geldt voor de in 3.8.5 gegeven rekenregels voor oneigenlijke limieten.

Oefeningen

1. Toon aan dat $\lim_{\underline{x} \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ niet bestaat.
2. Bewijs: $\lim_{\underline{x} \rightarrow 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$.
- *3. Zij $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.
 - a) Toon aan dat $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 0$.
 - b) Toon aan dat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \alpha x) = 0$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - c) Toon aan dat de parabolen $y = \alpha x^2$, ($\alpha \in \mathbb{R}$), niveaokrommen zijn van f .
 - d) Toon aan dat $\lim_{\underline{x} \rightarrow 0} f(\underline{x})$ niet bestaat.

6.7. Continuïteit

6.7.1. Definitie

Zij $\underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$ en zij $\underline{a} \in D$.

De functie \underline{f} heet *continu* in \underline{a} als er bij elk reëel getal $\epsilon > 0$ een reëel getal $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle $\underline{x} \in D$ met $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ geldt $|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})| < \epsilon$.

We kunnen deze definitie als volgt herformuleren:

\underline{f} heet continu in \underline{a} ,
als voor alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ er een $\delta \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat
 $[\underline{x} \in U_\delta(\underline{a}) \cap D] \implies \underline{f}(\underline{x}) \in U_\epsilon(\underline{f}(\underline{a}))$.

6.7.2. Opmerking

Bij de definitie van continuïteit van functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (zie 3.2.2) eisten we dat het punt a een inwendig punt van het definitiegebied was. De hier gegeven definitie is iets algemener. Zij is gebruikt om in niet-inwendige punten van het definitiegebied continuïteit te kunnen definiëren.

Zo is bijvoorbeeld $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, met $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ en

$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, continu op zijn hele definitiegebied, zowel in de inwendige punten als in de randpunten.

6.7.3. Stelling

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, met $D \subset \mathbb{R}^n$ en zij \underline{a} een inwendig punt van D .

Dan geldt

$$[f \text{ is continu in } \underline{a}] \iff [\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})].$$

Bewijs

Volgt meteen uit de definities 6.6.2 en 6.7.1. \square

6.7.4. Stelling

Een vectorfunctie is dan en slechts dan continu in \underline{a} als al zijn componentfuncties continu zijn in \underline{a} .

Het bewijs is analoog aan dat van stelling 6.6.3.

6.7.5. Rekenregels voor continuïteit

- a) Als $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $g: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$, continu zijn in $\underline{a} \in D$, dan zijn $f + g$, αf , waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ en $|f|$ continu in \underline{a} .
- b) Als $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$, continu zijn in $\underline{a} \in D$, dan is fg continu in \underline{a} ; als bovendien $g(\underline{a}) \neq 0$, dan is $\frac{f}{g}$ continu in \underline{a} .

Bewijs

Omdat \underline{a} een niet-inwendig punt van D kan zijn, kunnen we ons niet zoals in 3.7 beroepen op de overeenkomstige rekenregels voor limieten. We kunnen echter wel het bewijs van deze rekenregels imiteren (zie de appendix bij hoofdstuk 3). De volgende stelling hebben we hierbij nodig.

6.7.6. Stelling

Zijn $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$, en $g: E \rightarrow D$, waarbij $E \subset \mathbb{R}^p$, vectorfuncties zó dat g continu is in $\underline{a} \in E$ en f continu is in $\underline{b} = g(\underline{a}) \in D$, dan is de samengestelde functie $f \circ g: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu in \underline{a} .

Iets minder nauwkeurig geformuleerd:

De samenstelling van continue functies is continu.

Bewijs

Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Omdat f continu is in \underline{b} is er een $\epsilon_1 > 0$ zó dat

$$|f(\underline{t}) - f(\underline{b})| < \epsilon \text{ voor alle } \underline{t} \in U_{\epsilon_1}(\underline{b}) \cap D.$$

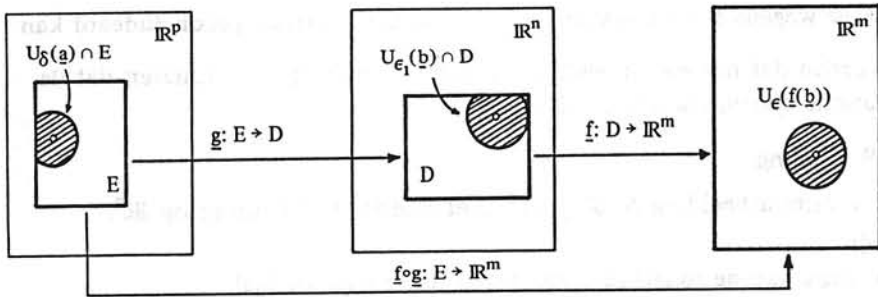
Omdat g continu is in \underline{a} is er bij ϵ_1 een $\delta > 0$ te vinden zó dat

$$|g(\underline{x}) - g(\underline{a})| = |g(\underline{x}) - \underline{b}| < \epsilon_1 \text{ voor alle } \underline{x} \in U_\delta(\underline{a}) \cap E.$$

Voor alle $\underline{x} \in U_\delta(\underline{a}) \cap E$ geldt dus (met $\underline{t} = g(\underline{x})$)

$$|f \circ g(\underline{x}) - f \circ g(\underline{a})| = |f(g(\underline{x})) - f(g(\underline{a}))| = |f(\underline{t}) - f(\underline{b})| < \epsilon. \quad \square$$

In het onderstaande schema wordt het bewijs toegelicht.



6.7.7. Definities

Zij $\underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$ en zij $V \subset D$.

We definiëren nu:

- \underline{f} heet *continu op V* als \underline{f} continu is in elk punt van V ;
- \underline{f} heet *begrensd op V* als er een $M \in \mathbb{R}^+$ bestaat zó dat voor alle $\underline{x} \in V$ geldt: $|\underline{f}(\underline{x})| \leq M$.

6.7.8. Voorbeelden

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $f(x,y) = x$, is continu in elk punt $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$.

Immers,

$$|f(x,y) - f(a_1, a_2)| = |x - a_1| \leq (|x - a_1|^2 + |y - a_2|^2)^{\frac{1}{2}} = |\underline{x} - \underline{a}|.$$

Zij $\epsilon > 0$, dan geldt voor alle \underline{x} met $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$, waarbij we $\delta = \epsilon$ kiezen,

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{a})| < \epsilon.$$

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $f(x,y) = y$, is continu op \mathbb{R}^2 .

Dit bewijst men geheel analoog aan a).

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $f(x,y) = xy^2 + xy + x^4y + x^5$, is continu op \mathbb{R}^2 .

Dit volgt direct uit a), b) en stelling 6.7.5.

- Zij $D = \{(x,y) | x^2 - y^2 \neq 0\}$.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$, is continu op D .

Dit volgt uit a), b) en stelling 6.7.5.

- Zij $D = \{(x,y) | xy \geq 0\}$.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $f(x,y) = \sqrt{xy}$, is continu op D .

Er geldt namelijk $f = h \circ g$, waarbij

$g: D \rightarrow [0, \infty)$, met $g(x,y) = xy$, continu is op D en

$h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, met $h(t) = \sqrt{t}$, continu is op $[0, \infty)$, zie 6.7.6.

- $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $g(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, is continu op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Kan g in $(0,0)$ nu zó gedefinieerd worden dat we daarmee een continue functie van \mathbb{R}^2 naar \mathbb{R} verkrijgen?

Volgens 6.7.3 is dit dan en slechts dan mogelijk als $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} g(x,y)$ bestaat.

Maar wegens 6.6.4b bestaat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ niet, waaruit geconcludeerd kan worden dat het niet mogelijk is g in $(0,0)$ zodanig te definiëren dat de functie continu wordt in $(0,0)$.

6.7.9. Stelling

Een lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ met matrix A is continu op \mathbb{R}^n .

Bewijs

Is A gelijk aan de nulafbeelding, dan is de stelling triviaal.

Is $A \neq O_{mn}$, dan geldt voor de norm van A (zie 6.2.17) $\|A\| \neq 0$.

Zij $\epsilon > 0$ gegeven en $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ willekeurig. Wegens de lineariteit geldt dan

$$|A\underline{x} - A\underline{a}| = |A(\underline{x} - \underline{a})|.$$

Volgens stelling 6.2.18 volgt dus

$$|A\underline{x} - A\underline{a}| \leq \|A\| |\underline{x} - \underline{a}|.$$

Als we $\delta = \frac{\epsilon}{\|A\|}$ nemen dan geldt dus

$$|\underline{x} - \underline{a}| < \delta \implies |A\underline{x} - A\underline{a}| < \epsilon. \quad \square$$

Oefeningen

1. Toon aan dat $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, continu is op \mathbb{R}^2 .
2. Toon aan dat $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $f(x,y) = \frac{2x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$ voor $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$, continu is op \mathbb{R}^2 .
3. De functies f en $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zijn gegeven door $f(x,y) = xy$ en $g(x,y) = x^2 + y^2$. Bewijs, uitgaande van de definitie, dat f en g continu zijn in $(2,1)$.
- *4. Zij D een open deelverzameling van \mathbb{R}^2 en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continu op D . Dan geldt voor iedere $\underline{a} \in D$

$$\lim_{x \rightarrow a_1} (\lim_{y \rightarrow a_2} f(x,y)) = \lim_{y \rightarrow a_2} (\lim_{x \rightarrow a_1} f(x,y)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x,y) = f(a_1, a_2).$$

Bewijs dit.

Differentiaalrekening

6.8. Partiële afgeleiden en richtingsafgeleiden

6.8.1. Inleiding

De partiële afgeleiden en richtingsafgeleiden van een functie van meer variabelen verkrijgt men door toepassing van de differentiaalrekening voor functies van één variabele. Ze spelen een belangrijke rol bij het bestuderen van functies van meer variabelen

6.8.2. Definitie

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}^n$ en zij \underline{a} een inwendig punt van D . Zij $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ eenheidsvector, dat wil zeggen $|\underline{v}| = 1$.

We beschouwen nu de functie van één variabele

$$g(t) = f(\underline{a} + t\underline{v}) = f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, \dots, a_n + tv_n)$$

en we definiëren

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = g'(0)$$

als g in 0 differentieerbaar is.

We noemen $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ de *richtingsafgeleide* van f in het punt \underline{a} in de richting \underline{v} .

Men krijgt nu de *partiële afgeleiden* van f door voor \underline{v} achtereenvolgens de vectoren van de natuurlijke basis van \mathbb{R}^n , $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$, in te vullen. Dus:

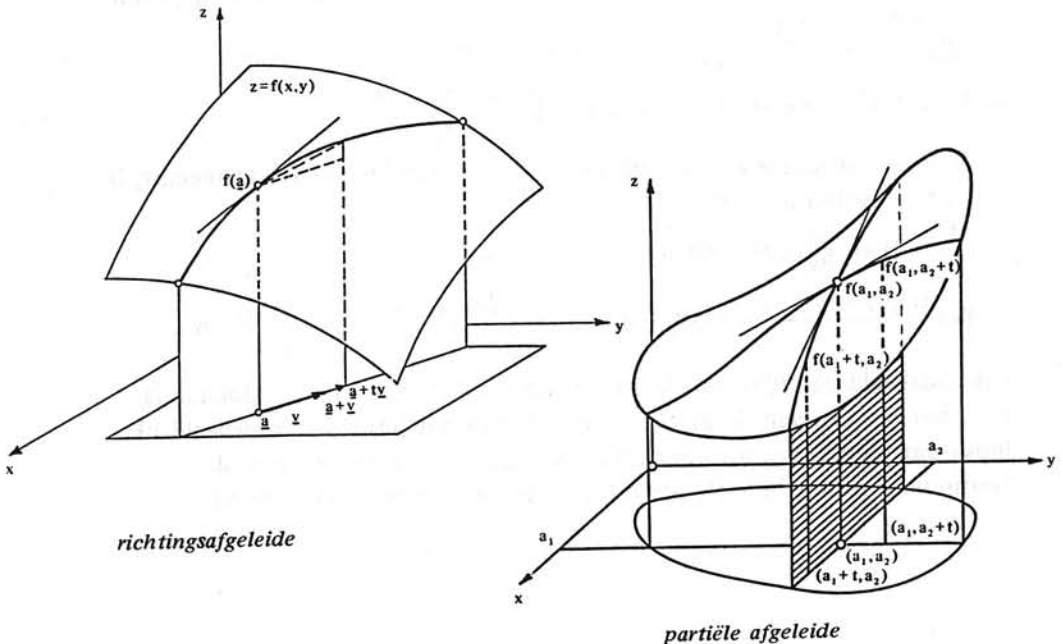
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}_i}(\underline{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}_i) - f(\underline{a})}{t}.$$

Voor partiële afgeleiden bestaan diverse notaties:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}_i}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = f_{x_i}(\underline{a}).$$

6.8.3. Praktische opmerking

Partieel differentiëren van een functie van meer variabelen komt er dus op neer dat men alle variabelen op één na als constante opvat en naar de ene overgebleven variabele differentieert.



Voor een functie van twee variabelen geldt dus:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

6.8.4. Voorbeelden

- a) Zij $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door
$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Voor $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ geldt dan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{3x_0^2(x_0^2 + y_0^2) - 2x_0^3x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{x_0^4 + 3x_0^2y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{-2x_0^3y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}.$$

Voor het punt $(0, 0)$ gebruiken we de definitie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x, y) = |y|$ is continu in $(0, 0)$. (Ga na!).

De functie is echter niet partiël differentieerbaar naar y in $(0, 0)$, want

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t| - 0}{t} \text{ bestaat niet.}$$

- c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } xy = 0 \\ 1 & \text{als } xy \neq 0 \end{cases}$.

Omdat f in iedere r -omgeving van $(0, 0)$ de waarden 0 en 1 aanneemt, is f niet continu in $(0, 0)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ bestaan echter wel, want

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0, \quad \text{en} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Uit voorbeeld b) blijkt dat de continuïteit in een punt niet voldoende is voor het bestaan van de partiële afgeleiden in dat punt. Uit voorbeeld c) blijkt dat omgekeerd uit het bestaan van partiële afgeleiden niet de continuïteit in het betreffende punt volgt (zie evenwel oefening 6).

6.8.5. Hogere partiële afgeleiden

Als de partiële afgeleiden f_x en f_y van een functie van twee variabelen bestaan in een r -omgeving $U_r(\underline{a})$ van \underline{a} , dan kunnen deze zelf ook weer opgevat worden als functies van twee variabelen. Partieel differentiëren (indien mogelijk) van f_x en f_y geeft de *partiële afgeleiden van de tweede orde* van f , die als volgt worden genoteerd:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Analoog definieert en noteert men partiële afgeleiden van derde en hogere orde. Hogere partiële afgeleiden van een functie van meer variabelen worden op analoge wijze gedefinieerd en genoteerd.

Let op de volgorde van differentiatie bij de verschillende notaties: de operator die het dichtst bij f staat wordt het eerst toegepast.

In het algemeen geldt $f_{xy}(\underline{a}) \neq f_{yx}(\underline{a})$, zie 6.8.8.

Voldoende voorwaarden voor het wel gelijk zijn van de afgeleiden worden in de nu volgende stelling genoemd.

6.8.6. Stelling

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^2$ en zij D open.

Als f en de partiële afgeleiden f_x , f_y en f_{yx} op D bestaan en continu zijn, dan bestaat ook f_{xy} op D en geldt er

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Bewijs

Zij $\underline{a} \in D$. Omdat D open is bestaat er een $\epsilon > 0$ zó dat $U_\epsilon(\underline{a}) \subset D$.

Voor $\underline{x} \in U_\epsilon(\underline{a})$, met $x \neq a_1$ en $y \neq a_2$, definiëren we

$$H(x, y) = f(x, y) + f(a_1, a_2) - f(a_1, y) - f(x, a_2).$$

We gaan $H(x, y)$ op twee manieren herleiden.

(i) Noem $g(y) = f(x, y) - f(a_1, y)$. Volgens de middelwaardstelling 4.5.3 is

$$\begin{aligned} H(x, y) &= [f(x, y) - f(a_1, y)] - [f(x, a_2) - f(a_1, a_2)] = \\ &= g(y) - g(a_2) = (y - a_2)g'(\eta) = \\ &= (y - a_2)[f_y(x, \eta) - f_y(a_1, \eta)] = \\ &= (x - a_1)(y - a_2)f_{yx}(\xi, \eta), \quad (\xi \text{ tussen } x \text{ en } a_1, \\ &\quad \eta \text{ tussen } y \text{ en } a_2). \end{aligned}$$

Omdat f_{yx} continu is in (a_1, a_2) geldt:

$$f_{yx}(a_1, a_2) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{H(x, y)}{(x - a_1)(y - a_2)}.$$

(ii) Noem $h(x) = f(x, y) - f(x, a_2)$. Dan is volgens de middelwaardstelling

$$\begin{aligned} H(x, y) &= [f(x, y) - f(x, a_2)] - [f(a_1, y) - f(a_1, a_2)] = \\ &= h(x) - h(a_1) = (x - a_1)h'(\xi^*) = \\ &= (x - a_1)[f_x(\xi^*, y) - f_x(\xi^*, a_2)]. \end{aligned}$$

(ξ^* tussen x en a_1).

Dus geldt

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{H(x, y)}{(x - a_1)(y - a_2)} = \lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f_x(\xi^*, y) - f_x(\xi^*, a_2)}{y - a_2} =$$

$$(*) \lim_{y \rightarrow a_2} \frac{f_x(a_1, y) - f_x(a_1, a_2)}{y - a_2} = f_{xy}(a_1, a_2).$$

(*): Vanwege oefening 6.7.4; f_x is immers continu in (a_1, a_2) .

Dus $f_{xy}(a_1, a_2) = f_{yx}(a_1, a_2)$. \square

6.8.7. Gevolgen

a) Is $D \subset \mathbb{R}^n$ open, is $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven, bestaan f_{x_i} , f_{x_j} en $f_{x_i x_j}$ op D en zijn zij bovendien continu, dan bestaat ook $f_{x_j x_i}$ op D en geldt er

$$f_{x_j x_i} = f_{x_i x_j}, \quad (i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$$

Bewijs

We mogen aannemen $i \neq j$. Laat voor $\underline{a} \in D$ nu

$$\varphi(x, y) = f(\underline{a} + x\mathbf{e}_i + y\mathbf{e}_j).$$

Dan is $\varphi_x = f_{x_i}$ en $\varphi_y = f_{x_j}$. De bewering over f volgt dus uit de toepassing van 6.8.6 op φ . \square

b) Een overeenkomstige stelling geldt voor partiële afgeleiden van de k -de orde ($k > 2$)

Als de 2^k mogelijke partiële afgeleiden van de k -de orde van een functie van twee variabelen continu zijn, dan zijn er ten hoogste $k+1$ verschillende. Er geldt dan bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} f_{xxy} &= f_{xyx} = f_{yxx}, \\ f_{xyy} &= f_{yxy} = f_{yyx}, \\ f_{xxyy} &= f_{xyxy} = f_{yxyx} = f_{yyxx} = f_{xyyx} = f_{yxyx}. \end{aligned}$$

6.8.8. Voorbeeld

Men kan allerlei merkwaardige voorbeelden geven in het geval dat niet aan de voorwaarden van stelling 6.8.6 is voldaan.

We volstaan echter met het volgende.

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ als } (x,y) \neq (0,0) \text{ en } f(0,0) = 0.$$

We berekenen $f_{xy}(0,0)$ en $f_{yx}(0,0)$.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(0,t) - f_x(0,0)}{t};$$

$$\text{uit } f_x(0,y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s,y) - f(0,y)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sy}{s} \frac{s^2 - y^2}{s^2 + y^2} = -y, \text{ (ook voor } y = 0),$$

$$\text{volgt } f_{xy}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t - 0}{t} = -1.$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_y(s,0) - f_y(0,0)}{s};$$

$$\text{daar } f_y(x,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{xt}{t} \frac{x^2 - t^2}{x^2 + t^2} = x, \text{ (ook voor } x = 0),$$

$$\text{is } f_{yx}(0,0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s - 0}{s} = 1.$$

Blijkbaar is $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Oefeningen

1. Bepaal telkens $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

a) $z = 2x^2 - 5xy + y^2$,

b) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$,

c) $z = \sin 3x \cos 4y$,

d) $z = \arctan \frac{y}{x}$,

e) $z = xye^{x+2y}$.

2. Zij $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Toon aan dat $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

3. Zij $z = e^{x/y} \sin \frac{x}{y} + e^{y/x} \cos \frac{y}{x}$. Toon aan dat $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. Zij $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y^2}$.

Bepaal alle punten $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ waar $\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a})$ bestaat.

Onderzoek of $\frac{\partial f}{\partial x}$ continu is in $\underline{0}$.

5. Toon aan dat in voorbeeld 6.8.8 noch f_{xy} noch f_{yx} continu is in $\underline{0}$.

*6. Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie van twee variabelen en zij $U_r(\underline{a}) \subset D$.

Bewijs:

Als de partiële afgeleiden f_x en f_y bestaan en begrensd zijn op $U_r(\underline{a})$ dan is f continu in \underline{a} .

6.9. Gradiënt, divergentie en rotatie

6.9.1. Inleiding

Deze paragraaf behandelt enkele begrippen, waarin partiële afgeleiden een rol spelen. Ze zijn onder andere voor de toepassingen in de natuurkunde van groot belang.

6.9.2. Gradiënt

- a) Zij $D \subset \mathbb{R}^2$ en zij \underline{a} een inwendig punt van D . Laat van de functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ de partiële afgeleiden naar x en y bestaan in het punt \underline{a} . Onder de *gradiënt van f in het punt \underline{a}* , notatie: $\text{grad } f(\underline{a})$ of $\nabla f(\underline{a})$, verstaan we de vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}) \right).$$

- b) Zij $D \subset \mathbb{R}^n$ en zij \underline{a} een inwendig punt van D . Laat van de functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ alle partiële afgeleiden van de eerste orde bestaan in het punt \underline{a} . Onder de *gradiënt van f in het punt \underline{a}* , notatie: $\text{grad } f(\underline{a})$ of $\nabla f(\underline{a})$, verstaan we de vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) \right).$$

Bestaat $\nabla f(\underline{a})$ voor alle $\underline{a} \in D$ dan definieert de toevoeging

$$\underline{a} \mapsto \nabla f(\underline{a})$$

een *vectorveld* op D : het *gradiëntvectorveld* van f .

6.9.3. Opmerkingen

- a) Men spreekt $\nabla f(\underline{a})$ uit: nabla van f in \underline{a} . Er wordt veelvuldig gebruik gemaakt van de symbolische nablavector

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Dus:
$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

- b) Op de meetkundige betekenis van $\nabla f(\underline{a})$ gaan we later in (zie 6.11.10).

6.9.4. Divergentie en rotatie

Zij $\underline{y}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^3$, een vectorveld (zie 6.5.8b).

Dus $\underline{y}(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$.

Wanneer voor alle v_i ($i = 1, 2, 3$) de partiële afgeleiden naar x, y en z bestaan in $\underline{a} \in D$, dan definiëren we:

- a) De *divergentie* van \underline{y} in het punt \underline{a} is de scalaire grootheid

$$\text{div } \underline{y}(\underline{a}) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(\underline{a}) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(\underline{a}) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(\underline{a}).$$

Symbolische notatie: $\operatorname{div} \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v}$, (inwendig product).

b) De *rotatie* van \underline{v} in het punt \underline{a} is de vector

$$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{a}) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y}(\underline{a}) - \frac{\partial v_2}{\partial z}(\underline{a}), \frac{\partial v_1}{\partial z}(\underline{a}) - \frac{\partial v_3}{\partial x}(\underline{a}), \frac{\partial v_2}{\partial x}(\underline{a}) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(\underline{a}) \right).$$

Symbolische notatie: $\operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v}$ (uitwendig product).

6.9.5. Opmerking

Bij een gegeven vectorveld \underline{v} , waarbij in elk punt van $D \subset \mathbb{R}^3$ een vector is gedefinieerd, hangen zowel de componenten $v_1(x,y,z)$, $v_2(x,y,z)$ en $v_3(x,y,z)$ af van de keuze van het (orthogonale, rechtscyclische) coördinatenstelsel, als de kentallen $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ van de symbolische nablvector.

Bij translaties en rotaties van het assenstelsel blijft het inwendig product van (en dus de hoek tussen) twee vectoren gelijk. Dit geldt ook voor het uitwendig product.

Aangezien de symbolische nablvector zich bij translatie of rotatie van het coördinatenstelsel gedraagt als een vector, zijn $\operatorname{div} \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v}$ en $\operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v}$ onafhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel. Het zijn dus zogenaamde *intrinsieke* grootheden van het vectorveld \underline{v} . Dit verklaart waarom juist deze combinaties van partiële afgeleiden een fysische betekenis hebben. Op deze betekenis komen we in hoofdstuk 9 terug.

6.9.6. Voorbeelden

a) Zij $f(x,y,z) = 3x^4y - yz^2$.

Dan geldt

$$\nabla f = (12x^3y, 3x^4 - z^2, -2yz),$$

$$\operatorname{rot} \nabla f = (0, 0, 0),$$

$$\operatorname{div} \nabla f = 36x^2y - 2y.$$

(zie oefening 1a)),

b) Zij $\underline{v}(x,y,z) = (-2xz, -x^2, y^2)$.

Dan geldt

$$\operatorname{rot} \underline{v} = (2y, -2x, -2x),$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = -2z,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \underline{v}) = 0,$$

(zie oefening 1b)).

Oefeningen

1. In deze oefening zijn $\varphi(x,y,z)$, $v_i(x,y,z)$ voor $i = 1,2,3$ functies waarvan de partiële afgeleiden van de orde 2 bestaan en onafhankelijk zijn van de differentiatievolgorde. Verder is $\underline{x} = (x,y,z)$, $r = |\underline{x}| \neq 0$ en $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Bewijs:

a) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \underline{0}$.

b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{v} = 0$.

c) $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$, (notatie: $\nabla^2 \varphi$ of $\Delta \varphi$).

d) $\operatorname{grad} r = \frac{1}{r} \underline{x}$.

- e) $\operatorname{div} r^n \underline{x} = (n+3)r^n$.
 f) $\operatorname{div} \operatorname{grad} r^n = n(n+1)r^{n-2}$.
 g) $\operatorname{div}(\varphi \underline{v}) = \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \underline{v}$.
 h) $\operatorname{grad} \operatorname{div} r^n \underline{x} = n(n+3)r^{n-2} \underline{x}$.
2. Gegeven: $\underline{v} = (xz^3, -2x^2yz, 2yz^4)$.
 Bereken $\operatorname{div} \underline{v}$, $\operatorname{rot} \underline{v}$ en $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{v}$ in het punt $(1, -1, 1)$.
3. Gegeven: $\underline{v} = (bxy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$.
 Bepaal a en b zó dat $\operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$ voor alle x, y en z .
4. Gegeven: $\varphi = z^2 x \ln x + x^2 y \ln y + y^2 z \ln z$ ($x, y, z \in \mathbb{R}^+$).
 Bereken $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ in $(\lambda, \lambda, \lambda)$ waarbij $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

6.10. Differentieerbaarheid

6.10.1. Inleiding

In 4.4 hebben we gezien, dat differentieerbaarheid van een functie f van één variabele in een punt equivalent is met het bestaan van een lineaire afbeelding $h \mapsto Ah$, (de differentiaal), zó dat

$$f(b+h) - f(b) = Ah + r(h),$$

$$\text{met } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Deze interpretatie van differentieerbaarheid is geschikt voor generalisatie naar vectorfuncties van meer variabelen.

6.10.2. Definitie

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$. Zij \underline{b} een inwendig punt van D .
 De vectorfunctie \underline{f} heet *differentieerbaar* in \underline{b} indien er een lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ met matrix A en een functie $\underline{r}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ bestaan, waarbij $U \subset \mathbb{R}^n$, en $\underline{0}$ een inwendig punt is van U , zó dat

- a) $\underline{f}(\underline{b} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{b}) = A\underline{h} + \underline{r}(\underline{h})$ voor alle $\underline{h} \in U$, en
 b) $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{|\underline{r}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} = 0$.

Men spreekt soms ook van totaal differentieerbaar.

De volgende stelling maakt duidelijk dat de lineaire afbeelding A , en dus de matrix A , eenduidig bepaald is en hoe deze kan worden berekend.

De lineaire afbeelding A heet de *differentiaal* van \underline{f} in \underline{b} (notatie: $d\underline{f}(\underline{b})$), en de matrix A heet de *afgeleide* van \underline{f} in \underline{b} (notatie: $\underline{f}'(\underline{b})$).

6.10.3. Stelling

We gebruiken alle letters in de betekenis van definitie 6.10.2.

Laat \underline{f} differentieerbaar zijn in \underline{b} met

$$\underline{f}'(\underline{b}) = A = (a_{ij}), \quad (i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

Dan geldt voor iedere $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ en $j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{b}) \text{ bestaat, en}$$

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{b}).$$

In andere notatie:

$$\underline{f}'(\underline{b}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{b}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{b}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{b}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\underline{b}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{b}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{b}) \end{bmatrix}$$

De afgeleide $\underline{f}'(\underline{b})$ wordt ook vaak *functionaalmatrix* of *matrix van Jacobi* genoemd.

Bewijs

Aangezien \underline{f} differentieerbaar is in \underline{b} volgt uit 6.10.2a, met $\underline{h} = t\mathbf{e}_j$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\frac{\underline{f}(\underline{b} + t\mathbf{e}_j) - \underline{f}(\underline{b})}{t} = A\mathbf{e}_j + \frac{r(t\mathbf{e}_j)}{t}.$$

Verder geldt wegens 6.10.2b

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|r(t\mathbf{e}_j)|}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|r(t\mathbf{e}_j)|}{|t\mathbf{e}_j|} = 0.$$

Hieruit volgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\underline{f}(\underline{b} + t\mathbf{e}_j) - \underline{f}(\underline{b})}{t} = A\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Door in het eerste en in het laatste lid de i -de component te nemen, vinden we

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{b}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(\underline{b} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\underline{b})}{t} = a_{ij}. \quad \square$$

6.10.4. Gevolg

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, met $D \subset \mathbb{R}^2$ en zij $\underline{b} = (b_1, b_2)$ een inwendig punt van D .

Dan geldt:

f is differentieerbaar in \underline{b} dan en slechts dan als de partiële afgeleiden f_x en f_y in \underline{b} bestaan en

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{b}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{b}) - (x - b_1)f_x(\underline{b}) - (y - b_2)f_y(\underline{b})}{|\underline{x} - \underline{b}|} = 0.$$

De functionaalmatrix is in dit geval

$$f'(\underline{b}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(b_1, b_2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(b_1, b_2) \right].$$

Deze valt samen met de gradiënt vector.

6.10.5. Definitie

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$.

Als W een open verzameling is met $W \subset D$ zó dat \underline{f} in ieder punt van W differentieerbaar is, dan heet \underline{f} differentieerbaar op W .

6.10.6. Voorbeelden

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a})(x - a_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a})(y - a_2) &= \\ &= (x^2 + y^2) - (a_1^2 + a_2^2) - 2a_1(x - a_1) - 2a_2(y - a_2) = \\ &= (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = |\underline{x} - \underline{a}|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a})(x - a_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a})(y - a_2)}{|\underline{x} - \underline{a}|} = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \frac{|\underline{x} - \underline{a}|^2}{|\underline{x} - \underline{a}|} = 0.$$

Derhalve is f differentieerbaar op \mathbb{R}^2 .

b) De functie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x, y) = |y|$ is niet differentieerbaar in $(0, 0)$,

want $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ bestaat niet (zie 6.8.4b).

6.10.7. Stelling

Zij $\underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$, en zij \underline{b} een inwendig punt van D .

Dan geldt

$$\underline{f} \text{ is differentieerbaar in } \underline{b} \iff$$

$$\iff \text{de componenten } f_1, f_2, \dots, f_m \text{ zijn differentieerbaar in } \underline{b}.$$

Bewijs

\implies : Als \underline{f} differentieerbaar is in \underline{b} , dan verkrijgt men door in 6.10.2a de i -de component te nemen:

$$f_i(\underline{b} + \underline{h}) - f_i(\underline{b}) = (A\underline{h})_i + r_i(\underline{h}) \quad \text{voor alle } \underline{h} \in U.$$

Verder is

$$\frac{|r_i(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \leq \frac{|\underline{r}(\underline{h})|}{|\underline{h}|}$$

en dus

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{|r_i(\underline{h})|}{|\underline{h}|} = 0.$$

Dus f_i is differentieerbaar met afgeleide

$$f_i'(\underline{b}) = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}].$$

⇐: Als f_i differentieerbaar is in \underline{b} , dan zijn er een lineaire afbeelding A_i met matrix $A_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en een functie $r_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $U_i \subset \mathbb{R}^n$ en $\underline{0}$ een inwendig punt is van U_i , zó dat

$$f_i(\underline{b} + \underline{h}) - f_i(\underline{b}) = A_i \underline{h} + r_i(\underline{h}) \quad \text{voor alle } \underline{h} \in U_i, \text{ en}$$

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{|r_i(\underline{h})|}{|\underline{h}|} = 0,$$

dit alles geldend voor iedere $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Zij $U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_m$ en merk op dat $\underline{0}$ een inwendig punt is van U . Definieer $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ met behulp van de matrix $A = [a_{ij}]$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, en $\underline{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ door $\underline{r}(\underline{h}) = (r_1(\underline{h}), r_2(\underline{h}), \dots, r_m(\underline{h}))$.

Dan is voor iedere $\underline{h} \in U$

$$\underline{f}(\underline{b} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{b}) = A \underline{h} + \underline{r}(\underline{h}),$$

omdat deze relatie componentsgewijs geldt.

Verder is

$$\frac{|\underline{r}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \leq \sum_{i=1}^m \frac{|r_i(\underline{h})|}{|\underline{h}|}, \quad \text{en dus} \quad \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{|\underline{r}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} = 0. \quad \square$$

6.10.8. Verband tussen differentieerbaarheid en continuïteit

Stelling

Een differentieerbare (vector-)functie is continu.

Bewijs

We gebruiken alle letters in de betekenis van definitie 6.10.2.

Uit 6.10.2b volgt $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} |\underline{r}(\underline{h})| = 0$.

Wegens 6.7.9 is A continu, zodat $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} A \underline{h} = \underline{0}$.

Dus $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \underline{f}(\underline{b} + \underline{h}) = \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} (\underline{f}(\underline{b}) + A \underline{h} + \underline{r}(\underline{h})) = \underline{f}(\underline{b})$.

Volgens 6.7.3 is \underline{f} dan continu in \underline{b} . □

6.10.9. Voorbeeld

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ als $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$

is niet continu in $(0,0)$, zie 6.7.8f, en dus niet differentieerbaar in $(0,0)$.

De beide partiële afgeleiden in $(0,0)$ bestaan echter wel:

eenvoudig is na te gaan dat $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Uit dit voorbeeld blijkt dat uit het bestaan van de partiële afgeleiden niet de differentieerbaarheid van een functie van twee variabelen volgt.

Wel geldt de volgende stelling, die we formuleren en bewijzen voor functies van twee variabelen, maar die zich met behulp van stelling 6.10.7 laat generaliseren naar vectorfuncties van meer variabelen.

6.10.10. Stelling

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie van twee variabelen en zij $U_r(\underline{a}) \subset D$.

Als f en de partiële afgeleiden f_x en f_y bestaan in $U_r(\underline{a})$ en continu zijn in \underline{a} , dan is f differentieerbaar in \underline{a} .

Bewijs

Laat $(x,y) \in U_r(\underline{a})$.

Volgens de middelwaardestelling 4.5.3 is

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a_1, a_2) &= [f(x,y) - f(a_1, y)] + [f(a_1, y) - f(a_1, a_2)] = \\ &= (x - a_1)f_x(\xi, y) + (y - a_2)f_y(a_1, \eta), \end{aligned}$$

waarin ξ tussen a_1 en x als $a_1 \neq x$ en $\xi = a_1$ als $a_1 = x$, η tussen a_2 en y als $a_2 \neq y$ en $\eta = a_2$ als $a_2 = y$.

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \frac{|f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - (x - a_1)f_x(\underline{a}) - (y - a_2)f_y(\underline{a})|}{|\underline{x} - \underline{a}|} &= \\ &= \frac{|(x - a_1)[f_x(\xi, y) - f_x(a_1, a_2)] + (y - a_2)[f_y(a_1, \eta) - f_y(a_1, a_2)]|}{|\underline{x} - \underline{a}|} \leq \\ &\leq \frac{|x - a_1|}{|\underline{x} - \underline{a}|} |f_x(\xi, y) - f_x(a_1, a_2)| + \frac{|y - a_2|}{|\underline{x} - \underline{a}|} |f_y(a_1, \eta) - f_y(a_1, a_2)| \leq \\ &\leq |f_x(\xi, y) - f_x(a_1, a_2)| + |f_y(a_1, \eta) - f_y(a_1, a_2)|. \end{aligned}$$

Uit de continuïteit van f_x en f_y in \underline{a} volgt

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} |f_x(\xi, y) - f_x(a_1, a_2)| = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} |f_y(a_1, \eta) - f_y(a_1, a_2)| = 0.$$

Dus

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - (x - a_1)f_x(\underline{a}) - (y - a_2)f_y(\underline{a})}{|\underline{x} - \underline{a}|} = 0,$$

dat wil zeggen f is differentieerbaar in \underline{a} . \square

In het vervolg zullen we verschillende keren het begrip "continu differentieerbaar" nodig hebben. Vandaar de nu volgende definitie.

6.10.11. Definitie

Een vectorfunctie $\underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$, heet *continu differentieerbaar* op $W \subset D$ als alle partiële afgeleiden van de componentfuncties van \underline{f} continu zijn op W .

6.10.12. Voorbeeld

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y^2}.$$

$$\text{Omdat } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0 \text{ en } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

is

$$f(\underline{x}) - f(\underline{0}) - x \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{0}) - y \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{0}) = \sqrt[3]{x^2 y^2}.$$

$$\text{Voor } (x,y) \neq (0,0) \text{ is } 0 \leq \frac{\sqrt[3]{x^2 y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt[3]{x^2 + y^2} \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = |\underline{x}|^{\frac{1}{3}},$$

$$\text{zodat } \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{\sqrt[3]{x^2 y^2}}{|\underline{x}|} = 0.$$

f is dus differentieerbaar in $(0,0)$.

Voor $xy \neq 0$ is

$$f_x(x,y) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} \quad \text{en} \quad f_y(x,y) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}.$$

Daar f_x en f_y continu zijn op $E = \{(x,y) | xy \neq 0\}$, vgl. 6.7.8e, is f differentieerbaar op E .

$f_x(0, a_2)$ bestaat niet als $a_2 \neq 0$ en $f_y(a_1, 0)$ bestaat niet als $a_1 \neq 0$.

Op grond van stelling 6.10.3 is f dus niet differentieerbaar op de in $(0,0)$ gepuncteerde x -as en y -as.

In $(0,0)$ is f wel differentieerbaar, hoewel f_x en f_y in $(0,0)$ niet continu zijn ($f_x(y^2, y) = \frac{2}{3}$ voor alle $y \neq 0$ en $f_x(0,0) = 0$; $f_y(x, x^2) = \frac{2}{3}$ voor alle $x \neq 0$ en $f_y(0,0) = 0$).

Blijkbaar is continuïteit van de partiële afgeleiden geen noodzakelijke voorwaarde voor differentieerbaarheid.

6.10.13. Notatie-afspraken

Wij zullen in het vervolg er dikwijls toe overgaan om bij (vector-)functies functievoorschrift en functiewaarden met dezelfde letter aan te geven.

Voor $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, met $\underline{x} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{y}$ en dus $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ schrijven we vaak $\underline{y} = \underline{y}(\underline{x})$.

Bijvoorbeeld:

- Voor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $y = f(x)$ schrijven we $y = y(x)$;
- Voor $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met $z = f(x,y)$ schrijven we $z = z(x,y)$;
- Voor $\underline{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ met $\underline{x} = \underline{f}(t)$ schrijven we $\underline{x} = \underline{x}(t)$, of, uitgeschreven, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

6.10.14. Raaklijn aan een kromme

a) We gaan uit van een vectorfunctie van één variabele $\underline{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij I een interval in \mathbb{R} is, en we nemen aan dat \underline{x} continu is op I .

Volgens 6.7.4 is dit het geval als alle componentfuncties continu zijn op I . De verzameling $S = \{\underline{x}(t) \mid t \in I\}$ stelt een kromme k in \mathbb{R}^m voor (eventueel ontaard tot één punt).

Indien deze kromme in een vlak ligt (dit is zeker het geval als $m = 2$), dan spreken we van een *vlakke kromme*, anders van een *ruimtekrumme*.

De functie $\underline{x}(t)$ heet een *parametrisering* of *parametervoorstelling* van de kromme voorgesteld door S met *parameter* t .

b) Zij $\underline{x}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu differentieerbaar op $[\alpha, \beta]$. De functionaalmatrix van \underline{x} in het punt $a \in (\alpha, \beta)$ is dan

$$\underline{x}'(a) = \begin{bmatrix} x_1'(a) \\ x_2'(a) \\ \vdots \\ x_m'(a) \end{bmatrix}, \text{ een kolomvector.}$$

Als $\underline{x}'(t) \neq \underline{0}$ voor alle $t \in (\alpha, \beta)$, dan noemt men de door \underline{x} voorgestelde kromme een *gladde kromme*. De componenten van \underline{x} kunnen we benaderen door hun linearisering in a (zie 4.4.1)

$$x_i(t) \approx x_i(a) + x_i'(a)(t - a), \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

In een r -omgeving van a is \underline{x} lineair te benaderen door de vectorfunctie

$$\underline{\ell}(t) = \underline{x}(a) + \underline{x}'(a)(t - a).$$

Indien $\underline{x}'(a) \neq \underline{0}$, dan is $\underline{\ell}(t)$ een parametervoorstelling van een rechte lijn: de *raaklijn* aan de kromme in het punt $\underline{x}(a)$.

De functionaalmatrix (hier kolomvector) $\underline{x}'(a)$ stelt dus de richtingsvector van de raaklijn aan k in het punt $\underline{x}(a)$ voor (mits $\underline{x}'(a) \neq \underline{0}$).

c) In het geval $m = 2$ hebben we dus te maken met een vlakke kromme gegeven door $\underline{x}(t) = (x(t), y(t))$, met $t \in I$.

Is \underline{x} differentieerbaar, dan betekent $x'(a) = 0$ en $y'(a) \neq 0$, dat de raaklijn in het punt $(x(a), y(a))$ aan de kromme evenwijdig is aan de y -as. Als $y'(a) = 0$ en $x'(a) \neq 0$ is de raaklijn evenwijdig aan de x -as.

6.10.15. Snelheid en versnelling

Een punt P beschrijft een baan in de ruimte.

De plaatsvector \vec{OP} is een vectorfunctie van de tijd:

$$\vec{OP} = \underline{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

De *snelheid* van P is een vectorfunctie, gegeven door

$$\underline{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)}{h} = \underline{x}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Hierin is de limiet componentsgewijs genomen.

De snelheidsvector heeft dus de richting van de raaklijn aan de baan die P beschrijft. De *versnelling* van P is een vectorfunctie gegeven door

$$\underline{a}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(t+h) - \underline{v}(t)}{h} = \underline{v}'(t) = \underline{x}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)).$$

6.10.16. Voorbeelden

- a) $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$ met $\varphi = \varphi(t)$ bepaalt een cirkelvormige beweging (R constant en > 0).

$$\underline{v} = \underline{x}' = (-R \varphi' \sin \varphi, R \varphi' \cos \varphi),$$

$$\underline{a} = \underline{x}'' = (-R \varphi'' \sin \varphi - R (\varphi')^2 \cos \varphi, R \varphi'' \cos \varphi - R (\varphi')^2 \sin \varphi).$$

Is $\varphi'' = 0$ dan spreekt men van een eenparige cirkelvormige beweging.

De hoeksnelheid φ' is dan constant ($\varphi' = \omega$), zodat in dat geval geldt

$$\underline{a} = -\omega^2 \underline{x}.$$

- b) $x = R\varphi - R \sin \varphi$, $y = R - R \cos \varphi$ met $\varphi = \omega t$ geeft de baan van een punt P op de omtrek van een met constante snelheid voortrollend wiel (*cycloïde*).

$$\underline{v} = \underline{x}' = (R\omega - R\omega \cos \omega t, R\omega \sin \omega t),$$

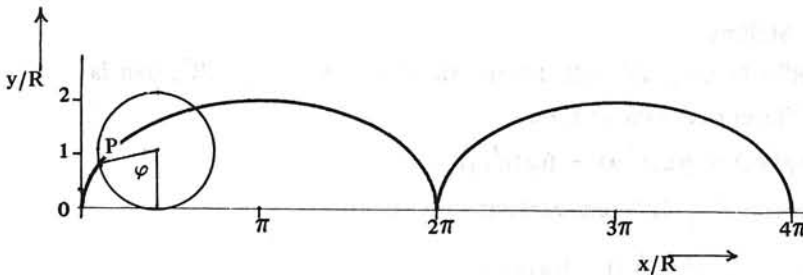
$$\underline{a} = \underline{v}' = (R\omega^2 \sin \omega t, R\omega^2 \cos \omega t).$$

De grootte van de snelheid van het punt P is $|\underline{v}| = R\omega \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \omega t}$.

Deze is maximaal als $t = \frac{(2k+1)\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{N}$ en minimaal als $t = \frac{2k\pi}{\omega}$,

$k \in \mathbb{N}$. De grootte van de versnelling van het punt P is $|\underline{a}| = R\omega^2$.

Deze is dus onafhankelijk van de tijd.



Oefeningen

1. Bepaal de functionaalmatrix van de volgende (vector-)functies.

a) $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, voor geschikt gekozen $D \subset \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^{y+z}$.

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$.

c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x^2 y) \cos 3x$.

*2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}$ als $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$.

a) Bewijs dat f continu is in $(0,0)$.

b) Bewijs dat de partiële afgeleiden van f in $(0,0)$ niet continu zijn.

c) Onderzoek of f differentieerbaar is in $(0,0)$.

3. Een ruimtekromme is gegeven door de parametervoorstelling

$$x = 2t, y = t^2 - 2t, z = t^3 + 2t^2.$$

Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn in het punt (0,0,0) van de kromme.

4. Laat de kromme k gegeven zijn door de vergelijkingen $x^2 - y = 0$ en $xy - z = 0$. Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn in het punt (1,1,1) aan k .

Aanwijzing: Bedenk eerst een parametervoorstelling voor k .

- *5. Zij $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineair met matrix A . Toon aan dat voor iedere $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ A differentieerbaar is in \underline{b} en dat geldt: $A'(\underline{b}) = A$.

6.11. Rekenregels voor differentiëren

6.11.1. Inleiding

We behandelen in deze paragraaf een aantal rekenregels voor het differentiëren van (vector-)functies. Vooral de kettingregel, die leert hoe men een samengestelde functie moet differentiëren, is van groot belang.

Van de volgende twee stellingen laten we het (nogal bewerkelijke) bewijs achterwege.

6.11.2. Stelling

Als $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentieerbaar zijn in $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, dan zijn $\underline{f} + \underline{g}$ en $\alpha \underline{f}$, ($\alpha \in \mathbb{R}$), differentieerbaar in \underline{a} ,

$$(\underline{f} + \underline{g})'(\underline{a}) = \underline{f}'(\underline{a}) + \underline{g}'(\underline{a}) \quad \text{en} \quad (\alpha \underline{f})'(\underline{a}) = \alpha \underline{f}'(\underline{a}).$$

6.11.3. Stelling

Als $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, dan is

- a) fg differentieerbaar in \underline{a} en

$$(fg)'(\underline{a}) = g(\underline{a})f'(\underline{a}) + f(\underline{a})g'(\underline{a}),$$

- b) als $g(\underline{a}) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ differentieerbaar in \underline{a} en

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\underline{a}) = \frac{g(\underline{a})f'(\underline{a}) - f(\underline{a})g'(\underline{a})}{(g(\underline{a}))^2}.$$

6.11.4. Opmerking

Onder de iets sterkere voorwaarde (waaraan in de praktijk meestal voldaan is) dat de partiële afgeleiden van \underline{f} en \underline{g} (uit 6.11.2) en f en g (uit 6.11.3) in een r -omgeving van \underline{a} bestaan en continu zijn in \underline{a} , is het bewijs van deze stellingen eenvoudig. In dat geval zijn namelijk ook de partiële afgeleiden van $\underline{f} + \underline{g}$, $\alpha \underline{f}$, fg en $\frac{f}{g}$ gedefinieerd in een r -omgeving van \underline{a} en continu in \underline{a} , zodat de differentieerbaarheid van deze functies in \underline{a} direct volgt uit de generalisatie van stelling 6.10.10.

6.11.5. Kettingregel

Stelling

Laat $g: D \rightarrow E$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$ en $E \subset \mathbb{R}^m$, differentieerbaar zijn in \underline{a} en laat $f: E \rightarrow \mathbb{R}^p$ differentieerbaar zijn in $\underline{b} = g(\underline{a})$.

Dan is $f \circ g$ differentieerbaar in \underline{a} met afgeleide

$$(f \circ g)'(\underline{a}) = \underline{f}'(g(\underline{a})) \underline{g}'(\underline{a}).$$

Bewijs

Voor geschikt gekozen $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ en $\underline{k} \in \mathbb{R}^m$ geldt volgens de definitie van differentieerbaarheid

$$\begin{aligned} \underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a}) &= \underline{B}\underline{h} + \underline{s}(\underline{h}) \\ \underline{f}(\underline{b} + \underline{k}) - \underline{f}(\underline{b}) &= \underline{A}\underline{k} + \underline{r}(\underline{k}), \end{aligned}$$

waarbij $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{|\underline{s}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} = 0$ en $\lim_{\underline{k} \rightarrow \underline{0}} \frac{|\underline{r}(\underline{k})|}{|\underline{k}|} = 0$.

Neem $\underline{k} = \underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})$, dan ontstaat er

$$\begin{aligned} \underline{f}(\underline{g}(\underline{a} + \underline{h})) - \underline{f}(\underline{g}(\underline{a})) &= \underline{A}(\underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})) + \underline{r}(\underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})) = \\ &= \underline{A}\underline{B}\underline{h} + \underline{v}(\underline{h}), \end{aligned}$$

waarbij $\underline{v}(\underline{h}) = \underline{A}\underline{s}(\underline{h}) + \underline{r}(\underline{B}\underline{h} + \underline{s}(\underline{h}))$.

Om te bewijzen dat $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{|\underline{v}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} = 0$, schrijven we voor $\underline{h} \neq \underline{0}$:

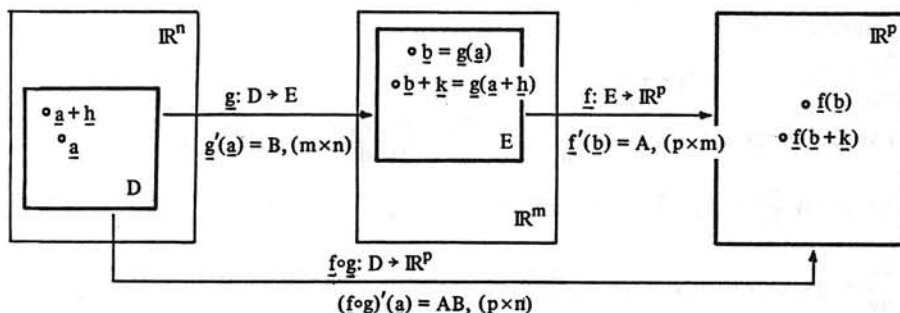
$$\frac{|\underline{v}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \leq \frac{|\underline{A}\underline{s}(\underline{h})| + |\underline{r}(\underline{B}\underline{h} + \underline{s}(\underline{h}))|}{|\underline{h}|} \leq \|\underline{A}\| \frac{|\underline{s}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} + \frac{|\underline{r}(\underline{B}\underline{h} + \underline{s}(\underline{h}))|}{|\underline{h}|}.$$

(zie eventueel 6.2.18). Stel nu $\underline{B}\underline{h} + \underline{s}(\underline{h}) = \underline{\ell}$. Direct is in te zien dat $\underline{\ell} \rightarrow \underline{0}$

als $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$. Vanwege het feit $\frac{|\underline{r}(\underline{\ell})|}{|\underline{\ell}|} \rightarrow 0$ als $\underline{\ell} \rightarrow \underline{0}$, geldt $|\underline{r}(\underline{\ell})| = |\underline{\ell}| \delta(|\underline{\ell}|)$, waarbij δ een functie van \mathbb{R} naar \mathbb{R} is waarvoor geldt: $\delta(|\underline{\ell}|) \rightarrow 0$ als $\underline{\ell} \rightarrow \underline{0}$.

We krijgen:

$$\begin{aligned} |\underline{r}(\underline{B}\underline{h} + \underline{s}(\underline{h}))| &= |\underline{B}\underline{h} + \underline{s}(\underline{h})| \delta(|\underline{\ell}|) \\ &\leq (\|\underline{B}\| |\underline{h}| + |\underline{s}(\underline{h})|) \delta(|\underline{\ell}|) \\ &= |\underline{h}| \left(\|\underline{B}\| + \frac{|\underline{s}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \right) \delta(|\underline{\ell}|). \end{aligned}$$



Omdat $(\|B\| + \frac{|s(\underline{h})|}{|\underline{h}|})$ begrensd is, volgt dat $\frac{|r(B\underline{h} + s(\underline{h}))|}{|\underline{h}|} \rightarrow 0$ als $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$.

Daar ook $\frac{|s(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \rightarrow 0$ als $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ volgt het gestelde. \square

6.11.6. Opmerkingen

a) We kunnen de kettingregel in matrixelementen uitschrijven. De functionaalmatrix van $f \circ g$ in \underline{a} is dan het matrixproduct van die van f in \underline{b} en die van g in \underline{a} ; we krijgen de volgende regel:

$$\text{Als } \underline{g}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$\text{en } \underline{f}(y_1, y_2, \dots, y_m) = (z_1, z_2, \dots, z_p),$$

$$\text{dan is } \underline{f} \circ \underline{g}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (z_1, z_2, \dots, z_p)$$

$$\text{en } \frac{\partial (f \circ g)_j}{\partial x_i}(\underline{a}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(\underline{b}) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\underline{a}), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

b) We schrijven één bijzonder geval, dat optreedt bij coördinatentransformatie in \mathbb{R}^2 , uit.

Als $z = f(x, y)$, $x = g_1(u, v)$, $y = g_2(u, v)$ differentieerbaar zijn, dan is $z = f(g_1(u, v), g_2(u, v))$ differentieerbaar.

Er geldt (ietwat slordig schrijven we $\frac{\partial z}{\partial x}$ voor $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ voor $\frac{\partial g_1}{\partial u}$, enz.)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

6.11.7. Voorbeelden

a) Gegeven $z = x^2 - y^2$; $x = u + v$, $y = u - v$.

Gevraagd $\frac{\partial z}{\partial u}$ en $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Oplossing: Volgens 6.11.6b is $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$.

Nu geldt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1,$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x - 2y = 2(u + v) - 2(u - v) = 4v.$$

Evenzo volgt uit 6.11.6b $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$.

Nu geldt $\frac{\partial x}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -1$, zodat

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x + 2y = 2(u + v) + 2(u - v) = 4u.$$

b) Zij $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ en $z = f(x, y)$, waarbij f continue partiële afgeleiden van de tweede orde heeft.

Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$ uit in x , y en partiële afgeleiden van z naar x en y .

Oplossing:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

$$\text{Nu is } \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi = -y \text{ en } \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi = x.$$

Dus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \\ &= \left(-y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \cdot (-y) + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \cdot x = \\ &= y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}$$

6.11.8. Verband tussen richtingsafgeleide en gradiënt

Zij $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ een eenheidsvector en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, met $D \subset \mathbb{R}^n$ gegeven.

In 6.8.2 hebben we de richtingsafgeleide $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$, waarbij \underline{a} een inwendig punt van D is, ingevoerd. Als we stelden

$$g(t) = f(\underline{a} + t\underline{v}),$$

$$\text{dan was } \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = g'(0).$$

Wegens de kettingregel geldt nu:

Als f differentieerbaar is in \underline{a} , dan is

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) &= g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a})v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a})v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a})v_n = \\ &= \nabla f(\underline{a}) \cdot \underline{v} = |\nabla f(\underline{a})| \cos \alpha, \end{aligned}$$

waarin α de hoek is tussen de vectoren $\nabla f(\underline{a})$ en \underline{v} .

Door de eenheidsvector \underline{v} te laten variëren ziet men dat $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ maximaal is als \underline{v} dezelfde richting heeft als $\nabla f(\underline{a})$ en minimaal is als de richting van \underline{v} tegengesteld is aan die van $\nabla f(\underline{a})$.

6.11.9. Voorbeelden

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\underline{u} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Daar voor $\underline{x} \neq \underline{0}$ geldt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

zijn $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en is volgens 6.10.10 f differentieerbaar op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Toepassing van 6.11.8 geeft voor $\underline{x} \neq \underline{0}$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x}) = \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x})$ is maximaal voor $\underline{u} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

en is minimaal voor $\underline{u} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

Verklaar dit door interpretatie van f .

Omdat $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}$ niet bestaat, bestaat $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{0})$ niet.

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ als $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$,

en $\underline{u} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^3 \varphi}{t^2} = \cos^3 \varphi, \text{ dus}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = 1, \text{ en } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = 0, \quad (\text{zie ev. 6.8.4a}).$$

Om te onderzoeken of f differentieerbaar is in $(0,0)$ passen we 6.10.4 toe. Er geldt

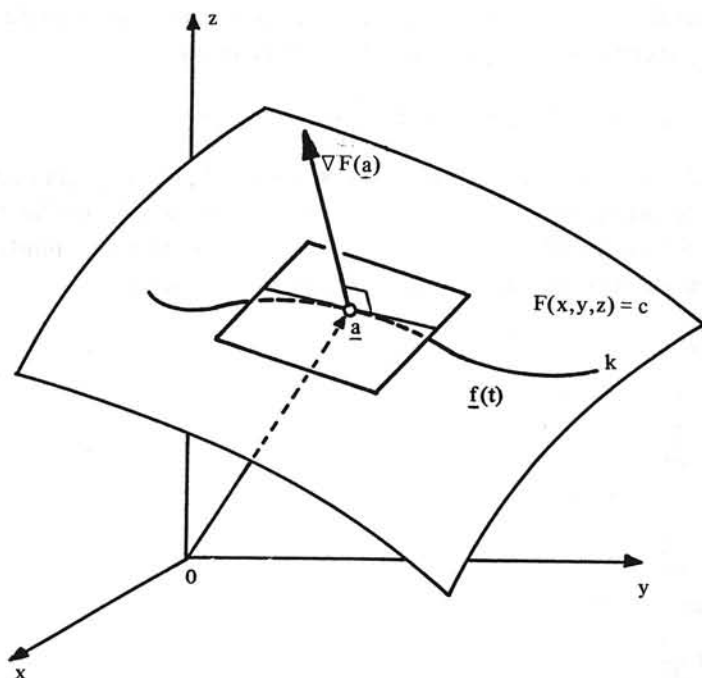
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2 + y^2} - 0 - x - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Deze limiet bestaat niet en is dus zeker niet gelijk aan 0. Derhalve is f niet differentieerbaar in $(0,0)$. Dit blijkt ook uit het feit dat $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(0,0)$ niet berekend kan worden met 6.11.8, want

$$\nabla f(0,0) \cdot \underline{u} = \cos \varphi \neq \cos^3 \varphi = \frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(0,0), \quad (\text{voor } \varphi \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}).$$

6.11.10. Meetkundige beschouwingen

Zij $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en zij $F(\underline{a}) = c$. Het oppervlak bepaald door $F(x,y,z) = c$ is het niveauoppervlak van F door \underline{a} .



Beschouw een op dit niveauoppervlak gelegen kromme k , die door \underline{a} gaat en die bepaald is door de differentieerbare vectorfunctie $\underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door $\underline{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, waarbij $D \subset \mathbb{R}$.

Er is dan een $t_0 \in D$ met $\underline{f}(t_0) = \underline{a}$, terwijl voor alle $t \in D$ geldt

$$F(x(t), y(t), z(t)) = c.$$

De afgeleide van het linkerlid in t_0 is 0, dus volgens de kettingregel is

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{a})x'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{a})y'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(\underline{a})z'(t_0) = 0$$

of

$$\text{grad } F(\underline{a}) \cdot \underline{f}'(t_0) = 0.$$

We nemen aan dat $\underline{f}'(t_0) \neq \underline{0}$ en dat $\text{grad } F(\underline{a}) \neq \underline{0}$. Daar $\underline{f}'(t_0)$ een richtingsvector is van de raaklijn aan k in \underline{a} , geldt voor iedere kromme door \underline{a} die een raaklijn in \underline{a} heeft en gelegen is op het niveauoppervlak bepaald door $F(x, y, z) = c$, dat die raaklijn loodrecht staat op de vector $\nabla F(\underline{a})$. We noemen $\nabla F(\underline{a})$ een *normaalvector* op het niveauoppervlak. Bedoelde raaklijnen liggen dus alle in één vlak, het *raakvlak* in \underline{a} aan $F(x, y, z) = c$.

De vergelijking van dat raakvlak is

$$\nabla F(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a}) = 0;$$

uitgeschreven

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{a})(x - a_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{a})(y - a_2) + \frac{\partial F}{\partial z}(\underline{a})(z - a_3) = 0.$$

Speciaal geval: het raakvlak in (a_1, a_2, a_3) aan het oppervlak bepaald door $z = f(x, y)$, waarbij $a_3 = f(a_1, a_2)$, heeft als vergelijking

$$z - a_3 = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a})(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a})(y - a_2).$$

In verband met het bovenstaande kunnen we aan het begrip gradiënt nog de volgende interpretatie geven: aangezien in ieder punt de gradiënt (mits deze $\neq \underline{0}$ is) loodrecht staat op het niveauoppervlak door dat punt, geeft de gradiënt de richting aan waarin F het snelst toeneemt.

Oefeningen

1. Gegeven $z = xy$; $x = \frac{1}{t}$ en $y = t^2$.

Bepaal $\frac{dz}{dt}$.

2. Gegeven $z = x^2 + 2xy + 4y^2$; $y = e^{ax}$.

Bepaal $\frac{dz}{dx}$.

3. Gegeven $z = e^{xy}$; $x = \ln t$ en $y = \sin t$.

Bepaal $\frac{dz}{dt}$.

4. Gegeven $z = \ln(x^2 + y^2)$; $x = u + 2v + 1$ en $y = 3u - v - 1$.

Bepaal $\frac{\partial z}{\partial u}$ en $\frac{\partial z}{\partial v}$.

5. Gegeven $z = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$; $x = r \cos \varphi$ en $y = r \sin \varphi$.

Druk $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \varphi}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$ uit in x en y .

6. Gegeven $z = \int_0^y e^{-(x-t)^2} dt$, $x = 1 - u$, $y = u^2$.

Bereken $\frac{dz}{du}$.

Opmerking: Zonder bewijs mag worden aangenomen dat

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} (e^{-(x-t)^2}) dt.$$

7. Bepaal de afgeleide van $z = x^2 - 6y^2$ in het punt $(7, 2)$ in de richting van de vectoren $(1, 1)$ en $(-1, -1)$.

8. De temperatuur T van een verwarmde cirkelvormige schijf met middelpunt in $(0, 0)$ is in elk van zijn punten (x, y) gegeven door

$$T(x, y) = \frac{64}{x^2 + y^2 + 2}.$$

Bepaal in het punt $(1, 2)$ de verandering van de temperatuur in de richting van een vector die een hoek van 60° met de positieve x -as maakt.

9. a) Bepaal de richtingsafgeleide van f gegeven door $f(x,y,z) = x^2yz + 4xz^2 + y$ in het punt $(1, -2, -1)$ in de richting $(2, -1, -2)$.
 b) In welke richting is de richtingsafgeleide in dit punt maximaal en hoe groot is de maximale waarde?
10. Bepaal de vergelijking van het raakvlak in het punt $(-1, 2, 1)$ aan het oppervlak bepaald door $3x^2 - y^2 + 2xy - xz - 4x + 3z = 3$.

6.12. Stelling van Taylor. Linearisering

6.12.1. Notatie

We voeren de volgende notatie in.

Is $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \in D$ en $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$, dan is

$$(\underline{h} \cdot \nabla)f(\underline{x}) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x})$$

en

$$(\underline{h} \cdot \nabla)^m f(\underline{x}) = (\underline{h} \cdot \nabla)(\underline{h} \cdot \nabla)^{m-1} f(\underline{x}).$$

Verder is $(\underline{h} \cdot \nabla)^0 f(\underline{x}) = f(\underline{x})$.

Is f een functie van twee variabelen dan geldt

$$\underline{h} = (h_1, h_2), \quad \underline{x} = (x, y), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

zodat

$$(\underline{h} \cdot \nabla)f(\underline{x}) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) f(\underline{x})$$

en wegens 6.8.6 geldt (als f continue partiële afgeleiden van de orde m heeft)

$$\begin{aligned} (\underline{h} \cdot \nabla)^m f(\underline{x}) &= \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(\underline{x}) = \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} h_1^{m-j} h_2^j \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x, y) \end{aligned}$$

(vergelijk met het binomium van Newton; 1.11.7).

In het bijzonder is

$$(\underline{h} \cdot \nabla)^2 f(x, y) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Voor functies van meer dan twee variabelen wordt het berekenen van $(\underline{h} \cdot \nabla)^m f(\underline{x})$ op analoge wijze uitgewerkt. Het wordt dan wel heel bewerkelijk.

6.12.2. Stelling (Taylor)

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, met $D \subset \mathbb{R}^n$ en laat f continue partiële afgeleiden van de orde $k+1$ hebben in $U_r(\underline{a})$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\underline{a} \in D$.

Dan is er voor elk punt $\underline{a} + \underline{h} \in U_r(\underline{a})$ een $\vartheta \in (0, 1)$ zó dat

$$f(\underline{a} + \underline{h}) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} (\underline{h} \cdot \nabla)^m f(\underline{a}) + R_k(\underline{a}, \underline{h}),$$

waarin

$$R_k(\underline{a}, \underline{h}) = \frac{1}{(k+1)!} (\underline{h} \cdot \nabla)^{k+1} f(\underline{a} + \vartheta \underline{h}).$$

Voorts geldt

$$R_k(\underline{a}, \underline{h}) = O(|\underline{h}|^{k+1}).$$

We noemen $t_k(\underline{x}) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} ((\underline{x} - \underline{a}) \cdot \nabla)^m f(\underline{a})$ het *Taylorpolynoom van de index k van f in a*.

Bewijs

We geven het bewijs in het geval $n = 2$.

Zij $\underline{a} + \underline{h} \in U_1(\underline{a})$. Kies $d > 1$ zó dat $d|\underline{h}| \leq r$ en definieer $F: (-d, d) \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$F(t) = f(\underline{a} + t\underline{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2).$$

Volgens de kettingregel 6.11.5 is F differentieerbaar op $(-d, d)$ met afgeleide

$$F'(t) = f_x(\underline{a} + t\underline{h})h_1 + f_y(\underline{a} + t\underline{h})h_2 = (\underline{h} \cdot \nabla) f(\underline{a} + t\underline{h}).$$

Voor $k \geq 1$ zijn f_x en f_y opnieuw differentieerbaar. Nogmaals toepassen van de kettingregel levert voor $t \in (-d, d)$

$$\begin{aligned} F''(t) &= f_{xx}(\underline{a} + t\underline{h})h_1^2 + 2f_{xy}(\underline{a} + t\underline{h})h_1h_2 + f_{yy}(\underline{a} + t\underline{h})h_2^2 = \\ &= (\underline{h} \cdot \nabla)^2 f(\underline{a} + t\underline{h}). \end{aligned}$$

Net zo als in 1.11.8b bewijst men met volledige inductie dat

$$F^{(m)}(t) = (\underline{h} \cdot \nabla)^m f(\underline{a} + t\underline{h})$$

voor $m = 1, 2, \dots, k+1$ en $t \in (-d, d)$.

Door toepassing van de formule van Taylor 4.7.6 op F in het punt 0 vinden we voor $t = 1$

$$F(1) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} F^{(m)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\vartheta) \quad \text{voor zekere } \vartheta \in (0, 1).$$

Daar $F(1) = f(\underline{a} + \underline{h})$,

$$F^{(m)}(0) = (\underline{h} \cdot \nabla)^m f(\underline{a}),$$

$$F^{(k+1)}(\vartheta) = (\underline{h} \cdot \nabla)^{k+1} f(\underline{a} + \vartheta \underline{h})$$

is dus

$$f(\underline{a} + \underline{h}) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} (\underline{h} \cdot \nabla)^m f(\underline{a}) + \frac{1}{(k+1)!} (\underline{h} \cdot \nabla)^{k+1} f(\underline{a} + \vartheta \underline{h}).$$

We bewijzen vervolgens de tweede bewering.

$R_k(\underline{a}, \underline{h})$ is de som van $k+2$ termen van de vorm

$$R_{k,j}(\underline{a}, \underline{h}) = \frac{1}{j!(k+1-j)!} h_1^{k+1-j} h_2^j \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-j} \partial y^j}(\underline{a} + \vartheta \underline{h}), \quad 0 \leq j \leq k+1.$$

Omdat

$$\frac{|h_1^{k+1-j} h_2^j|}{|h|^{k+1}} \leq \frac{|h|^{k+1-j} |h|^j}{|h|^{k+1}} = 1 \quad \text{voor } h \neq 0$$

en $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1-j} \partial y^j}$ continu is in \underline{a} , is er een $\delta > 0$ zó dat

$$\frac{R_{k,j}(\underline{a}, h)}{|h|^{k+1}} \text{ begrensd is voor } 0 < |h| < \delta.$$

Dus $R_{k,j}(\underline{a}, h) = O(|h|^{k+1})$ voor iedere j met $0 \leq j \leq k+1$ en bijgevolg

$$R_k(\underline{a}, h) = O(|h|^{k+1}).$$

□

6.12.3. Voorbeelden

a) Zij $f(x, y) = e^{x+y}$, $\underline{a} = (0, 0)$, dan is

$$f(h) = e^{h_1+h_2} = f(0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0) + \frac{1}{2!} (h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y})^2 f(0) + R_2(0, h)$$

$$\text{met } R_2(0, h) = \frac{1}{3!} (h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y})^3 f(\vartheta h), \quad \vartheta \in (0, 1).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x+y} \text{ enz.}$$

Dus alle partiële afgeleiden zijn in $(0, 0)$ gelijk aan 1, zodat

$$e^{h_1+h_2} = 1 + h_1 + h_2 + \frac{1}{2!} (h_1^2 + 2h_1 h_2 + h_2^2) + \frac{1}{3!} (h_1^3 + 3h_1^2 h_2 + 3h_1 h_2^2 + h_2^3) e^{\vartheta h_1 + \vartheta h_2}, \quad (\vartheta \in (0, 1)).$$

b) Zij $f(x, y) = \sin(xe^y)$, $\underline{a} = (0, 0)$, dan is

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos(xe^y), \quad \text{dus } \frac{\partial f}{\partial x}(0) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y \cos(xe^y), \quad \text{dus } \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^{2y} \sin(xe^y), \quad \text{dus } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y \cos(xe^y) - xe^{2y} \sin(xe^y), \quad \text{dus } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y \cos(xe^y) - x^2 e^{2y} \sin(xe^y), \quad \text{dus } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0.$$

Derhalve is

$$\sin(xe^y) = x + xy + R_2(0, \underline{x})$$

met

$$R_2(0, \underline{x}) = \frac{1}{3!} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})^3 f(\vartheta x, \vartheta y), \quad \vartheta \in (0, 1).$$

6.12.4. Linearisering

In sommige gevallen zal men de functiewaarden van $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in de buurt van een punt \underline{a} willen benaderen met behulp van een polynoom van hoogstens de eerste graad. In dat geval blijkt het Taylorpolynoom $t_1(\underline{x})$ vaak de beste keuze te zijn:

$$t_1(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}).$$

Het polynoom $t_1(\underline{x})$ heet de *linearisering* van f in \underline{a} .

Voor $n=2$ vinden we

$$t_1(x,y) = f(a_1, a_2) + (x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + (y - a_2) \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2).$$

Volgens 6.11.10 stelt $z = t_1(x,y)$ de vergelijking van het raakvlak van de grafiek van f in het punt (a_1, a_2) voor.

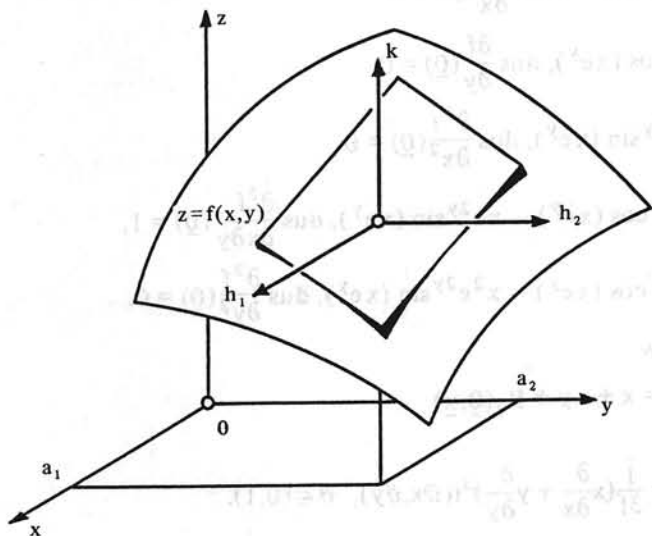
De restterm

$$R_1 = \frac{1}{2} [(x - a_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \eta) + 2(x - a_1)(y - a_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \eta) + (y - a_2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \eta)],$$

waarin $(\xi, \eta) = \underline{a} + \vartheta(\underline{x} - \underline{a})$, $0 < \vartheta < 1$, maakt het mogelijk een schatting te geven van de gemaakte fout wanneer men f door zijn linearisering in het punt \underline{a} vervangt.

6.12.5. Differentiaal

In 6.10.2 hebben we aan een afbeelding $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, met $D \subset \mathbb{R}^n$ en \underline{b} een inwendig punt van D , een lineaire afbeelding toegevoegd: de differentiaal van f in het punt \underline{b} . In het geval $n=2$, $m=1$ kunnen we deze lineaire afbeelding als volgt interpreteren.



We brengen in het punt $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ van de grafiek van f een nieuw assenstelsel aan dat uit het oude ontstaat door translatie. De coördinaten in het nieuwe assenstelsel geven we aan met h_1, h_2 en k .

Door de vergelijking

$$k = f'(a_1, a_2)\underline{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)h_2$$

wordt in het nieuwe assenstelsel juist de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in de (nieuwe) oorsprong voorgesteld.

Als f differentieerbaar is op D , dan is voor elke $\underline{x} \in D$

$$(h_1, h_2) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2$$

een lineaire afbeelding, de *differentiaal* van f in (x, y) ; notatie $df(x, y)$.

Men spreekt soms van de totale differentiaal.

Dus $df(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(h_1, h_2) \longmapsto df(\underline{x})(\underline{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2.$$

Daar $dx(\underline{h}) = h_1$ en $dy(\underline{h}) = h_2$ kunnen we schrijven

$$df(x, y)(\underline{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx(\underline{h}) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy(\underline{h}).$$

Dit leidt tot de relatie tussen de differentialen:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

Deze laatste formule wordt in de praktijk vaak als volgt geïnterpreteerd: Bij een aangroeiing dx van de x -variabele en dy van de y -variabele kunnen we $df(x, y)$ in de formule opvatten als de bijbehorende aangroeiing van de linearisering t_1 van f in (x, y) , die wordt gebruikt als benadering voor de aangroeiing van f in (x, y) .

6.12.6. Toepassing

Een belangrijke toepassing van differentialen vinden we in de *foutenleer*.

Stel de grootheden a en β worden gegeven door $a = a \pm \Delta a$; $\Delta a \geq 0$

(Δa heet de *absolute fout* in a , $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$ heet de *relatieve fout* in a),

$\beta = b \pm \Delta b$; $\Delta b \geq 0$. Men neemt voor $f(a, \beta)$ de waarde $f(a, b)$. Wat is de

absolute fout in $f(a, b)$? We benaderen de aangroeiing van f door de differentiaal

$$df(a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} dy.$$

De absolute fout van f in (a, b) is dus bij benadering

$$\Delta f(a, b) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right| \Delta b.$$

Ook in de *thermodynamica* wordt de totale differentiaal veelvuldig gehanteerd.

Oefeningen

- Geef van de volgende functies de formule van Taylor in \underline{a} tot en met de kwadratische termen.
 - $f(x,y) = \sin(e^{x^2}y) + x(y-1)$ met $\underline{a} = (0,0)$.
 - $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$ met $\underline{a} = (0,1)$.
 - $f(x,y) = xy + \ln xy$ met $\underline{a} = (1,1)$.
- Gegeven $\alpha = a \pm \Delta a$, $\beta = b \pm \Delta b$.
Bepaal de absolute en de relatieve fout bij de volgende grootheden.
 - $\alpha + \beta$.
 - $\alpha - \beta$.
 - $\alpha\beta$.
 - α/β .
- Bereken de absolute en de relatieve fout in $z = \pi r^2 h$ als $r = 5 \pm 0,05$ en $h = 12 \pm 0,1$.
 - Bereken de absolute en de relatieve fout in z als $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,
 $x = 4 \pm 0,01$ en $y = 8 \pm 0,02$.
 - Bereken de relatieve fout in $z = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$ als de relatieve fout in x resp. y 1% en $\frac{1}{2}$ % is. Aanwijzing: bereken $d \ln z$.

6.13. Inverse functies. Impliciete functies**6.13.1. Inleiding**

- In deze paragraaf gaan we in op de vraag, wanneer een differentieerbare vectorfunctie een inverse heeft. Voor functies van één variabele hebben we het volgende resultaat bewezen:

Als $f: I \rightarrow J$ continu is op I en $J = f(I)$ dan heeft f een inverse dan en slechts dan als f strikt monotoon is op I (zie 3.14).

Als f differentieerbaar is op I , dan heeft f een differentieerbare inverse g dan en slechts dan als voor $x \in I$ geldt $f'(x) \neq 0$.

Bovendien is dan $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ (zie 4.3.2).

- Er is ook een "lokale versie" van deze stelling:
Is $f: I \rightarrow J$ continu differentieerbaar, c inwendig punt van I en $f'(c) \neq 0$, dan is er een $\epsilon > 0$ zó dat de beperking van f tot het interval $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ een differentieerbare inverse bezit. Immers, kies $\epsilon > 0$ zó dat voor alle $x \in U_\epsilon(c)$ geldt $f'(x) > 0$ (indien $f'(c) > 0$) of $f'(x) < 0$ (indien $f'(c) < 0$). Dus is f strikt monotoon op $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ en is de onder a) genoemde stelling van toepassing.
- Het begrip "monotoon" is zinloos voor vectorfuncties van meer variabelen. Het globale resultaat a) kan niet worden generaliseerd. Het lokale resultaat b) echter wel. Er geldt de volgende stelling, die we niet zullen bewijzen.

6.13.2. Inverse functiestelling

Laat $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, waarbij U een open deelverzameling is van \mathbb{R}^n , continu

differentieerbaar zijn op U . Zij $\underline{a} \in U$ en $\underline{b} = \underline{f}(\underline{a})$.

Als de afgeleide $\underline{f}'(\underline{a})$ van \underline{f} in \underline{a} inverteerbaar is, dan geldt:

- er zijn open verzamelingen V en W in \mathbb{R}^n zó dat $\underline{a} \in V$, $\underline{b} \in W$ en $\underline{f}: V \rightarrow W$ (de beperking van \underline{f} tot V) bijectief is;
- in het geval $\underline{g}: W \rightarrow V$ de inverse is van $\underline{f}: V \rightarrow W$, dan is \underline{g} continu differentieerbaar op W , en
- in datzelfde geval geldt $\underline{g}'(\underline{y}) = (\underline{f}'(\underline{g}(\underline{y})))^{-1}$ voor alle $\underline{y} \in W$.

6.13.3. Toelichting

a) Stelling 6.13.2 kan als volgt duidelijk worden gemaakt.

Zij $\underline{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, met $U \subset \mathbb{R}^n$ continu differentieerbaar op U .

Laat $\underline{a} \in U$ en $\underline{b} = \underline{f}(\underline{a})$. Voor iedere $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ beschouwen we het volgende stelsel van n vergelijkingen in n onbekenden x_1, x_2, \dots, x_n

$$(I) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

We weten dat voor $\underline{y} = \underline{b}$ dit stelsel een oplossing $\underline{x} = \underline{a}$ heeft. We beschouwen het stelsel lineaire vergelijkingen dat men krijgt door in alle vergelijkingen over te gaan op de linearisering.

$$(II) \quad \begin{cases} y_1 - b_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{a})(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{a})(x_n - a_n) \\ y_2 - b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{a})(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\underline{a})(x_n - a_n) \\ \vdots \\ y_n - b_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\underline{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\underline{a})(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\underline{a})(x_n - a_n) \end{cases}$$

Uit de lineaire algebra (zie 6.2.15) weten we dat, indien de functionaalmatrix $\underline{f}'(\underline{a})$ inverteerbaar is, het lineaire stelsel (II) voor iedere $\underline{y} - \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ precies één oplossing $\underline{x} - \underline{a} \in \mathbb{R}^n$ heeft. Volgens 6.3.6c is dit dan en slechts dan het geval als de determinant van de functionaalmatrix, de *functionaaldeterminant* of *Jacobiaan* \underline{J}_f van \underline{f} ongelijk aan 0 is; dus

$$J_{\underline{f}}(\underline{a}) = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\underline{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\underline{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\underline{a}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

De inverse functiestelling zegt nu onder meer, dat het stelsel (I) dan ook voor iedere \underline{y} (uit een geschikt gekozen omgeving van \underline{b}) precies één oplossing \underline{x} (gelegen in een geschikt gekozen omgeving van \underline{a}) heeft. Is het gelineariseerde stelsel (II) oplosbaar, dan is ook het stelsel (I) (lokaal) oplosbaar.

- b) Eigenschap 6.13.2c kan gemakkelijk verklaard worden met de kettingregel. Differentiatie van $\underline{f}(\underline{g}(\underline{y})) = \underline{y}$ voert immers direct tot

$$\underline{f}'(\underline{g}(\underline{y}))\underline{g}'(\underline{y}) = \mathbf{I},$$

waarin \mathbf{I} de eenheidsmatrix (zie ev. 6.2.7) is. Uit 6.3.6c volgt verder

$$J_{\underline{g}}(\underline{b}) = \frac{1}{J_{\underline{f}}(\underline{a})}, \quad \text{mits } J_{\underline{f}}(\underline{a}) \neq 0.$$

6.13.4. Voorbeelden

- a) De transformatieformules bij overgang op poolcoördinaten

$$(I) \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (II)$$

zijn op te vatten als een vectorfunctie, gegeven door

$$\underline{x}(r, \varphi) = \begin{bmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

De functionaaldeterminant

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

In een omgeving van een punt (r, φ) met $r \neq 0$ bestaat nu de inverse transformatie, die we wederom opvatten als een vectorfunctie, gegeven door

$$\underline{r}(x, y) = \begin{bmatrix} r(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{bmatrix}.$$

De uitgeschreven transformatieformules zijn

$$(II) \begin{cases} r = r(x,y) \\ \varphi = \varphi(x,y) \end{cases}$$

waarvan de functionaalmatrix gelijk is aan de inverse van de functionaalmatrix van (I):

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -(\sin \varphi)/r & (\cos \varphi)/r \end{bmatrix}.$$

Hieruit zijn de partiële afgeleiden van de functies (II) af te lezen, uitgedrukt in poolcoördinaten:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Met behulp van de kettingregel zijn vervolgens hogere partiële afgeleiden te berekenen, bijvoorbeeld

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sin^2 \varphi}{r}.$$

b) Beschouw de vectorfunctie gegeven door

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

Deze vectorfunctie is continu differentieerbaar op \mathbb{R}^2 .

De functionaalmatrix en de functionaaldeterminant worden gegeven door

$$\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}, \quad \text{respectievelijk} \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2.$$

In een omgeving van een punt $(x,y) \neq (0,0)$ bestaat de inverse vectorfunctie, gegeven door

$$\begin{cases} x = h_1(u,v) \\ y = h_2(u,v) \end{cases}$$

met functionaalmatrix

$$\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2(x^2 + y^2)} & \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{-y}{2(x^2 + y^2)} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{bmatrix}.$$

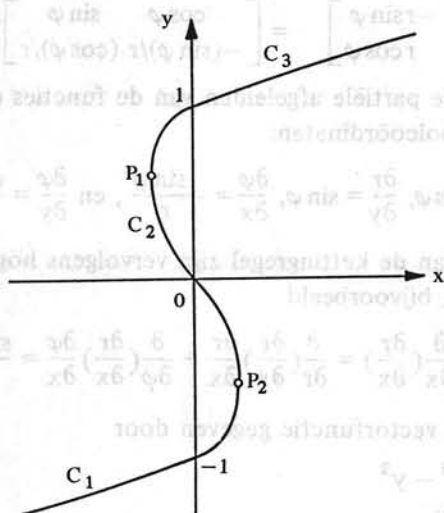
Van de inverse zijn dus de partiële afgeleiden, uitgedrukt in x en y ,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(x^2 + y^2)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-y}{2(x^2 + y^2)}, \quad \text{en} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

De Jacobiaan wordt $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} = \frac{1}{2\sqrt{u^2 + 4v^2}}$.

6.13.5. Impliciete functies

- a) Laat $U \subset \mathbb{R}^2$ open zijn en $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Beschouw de niveaукromme C gegeven door $f(x,y) = 0$. We vragen nu wanneer C "lokaal" de grafiek van een functie g van de variabele x is. Daartoe bekijken we eerst een voorbeeld. Laat $f(x,y) = y^3 - y - x$, $U = \mathbb{R}^2$.



Het is duidelijk dat $f(x,y) = 0$ niet de grafiek van een functie g is: met $x = 0$ corresponderen immers 3 waarden van y . Als we ons echter tot stukken van C beperken, krijgen we wel grafieken van functies. Hiertoe laten we de punten $P_1 = (-\frac{2}{9}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$ en $P_2 = (\frac{2}{9}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$ uit C weg. De 3 stukken van C die we overhouden zijn grafieken van drie functies:

$$\begin{aligned} g_1 &: (-\infty, \frac{2}{9}\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{R}, \\ g_2 &: (-\frac{2}{9}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{R}, \\ g_3 &: (-\frac{2}{9}\sqrt{3}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

met grafiek van $g_i = C_i$ (zie figuur) en $f(x, g_i(x)) = 0$ ($i \in \{1, 2, 3\}$). We kunnen *niet* in een omgeving van P_1 of P_2 werken, omdat C daar (lokaal) tweevoudig boven of onder de x -as ligt.

De afgeleide van g_i kan men berekenen door de identiteit $f(x, g_i(x)) = 0$ naar x te differentiëren.

Men vindt:

$$f_x(x, g_i(x)) + f_y(x, g_i(x))g_i'(x) = 0,$$

en dus

$$g_i'(x) = -\frac{f_x(x, g_i(x))}{f_y(x, g_i(x))},$$

als $f(x, g_i(x)) = 0$ en $f_y(x, g_i(x)) \neq 0$.

Om een differentieerbare functie $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ te vinden met $f(x, g(x)) = 0$ moeten we kennelijk die punten van C uitzonderen, waarin $f_y = 0$.

- b) In de praktijk substitueren we vaak $y = y(x)$ in de vergelijking $f(x, y(x)) = 0$ en differentiëren vervolgens beide leden naar x (impliciet differentiëren).

Zo wordt het bovengenoemde voorbeeld

$$(y(x))^3 - y(x) - x = 0.$$

Impliciet differentiëren levert

$$3(y(x))^2 y'(x) - y'(x) - 1 = 0,$$

dus

$$y'(x) = \frac{1}{3(y(x))^2 - 1}.$$

Het mogen toepassen van deze methode is gebonden aan precieze voorwaarden. In de volgende stelling worden deze voorwaarden zonder bewijs gegeven.

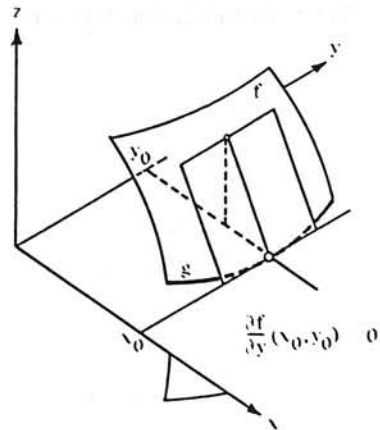
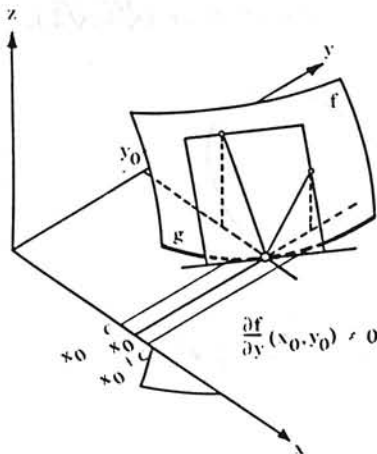
6.13.6. Impliciete functiestelling voor 2 variabelen

Zij $U \subset \mathbb{R}^2$ open, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar, $(x_0, y_0) \in U$ met $f(x_0, y_0) = 0$ en $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Dan bestaat er een $\epsilon > 0$ en een differentieerbare functie

$g: (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ met $g(x_0) = y_0$ en $f(x, g(x)) = 0$ voor alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Verder is

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}.$$



6.13.7. Voorbeelden

- a) Door de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ worden op $[-1, 1]$ twee functies impliciet gegeven, namelijk

$$y = g_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{en} \quad y = g_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Beide functies zijn differentieerbaar op $(-1,1)$ met afgeleiden

$$g_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y} \quad \text{en} \quad g_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{y}.$$

Uit de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ volgt door impliciet differentiëren

$2x + 2yy' = 0$, $y' = -\frac{x}{y}$ mits $y \neq 0$, in overeenstemming met wat we net gevonden hebben. De tweede afgeleide van $y(x)$ volgt door de vergelijking $x + yy' = 0$ opnieuw impliciet te differentiëren:

$$1 + (y')^2 + yy'' = 0,$$

waaruit volgt

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1}{y^3} \quad \text{mits } y \neq 0.$$

- b) Beschouw de vergelijking $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
 Impliciet differentiëren naar x geeft

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0,$$

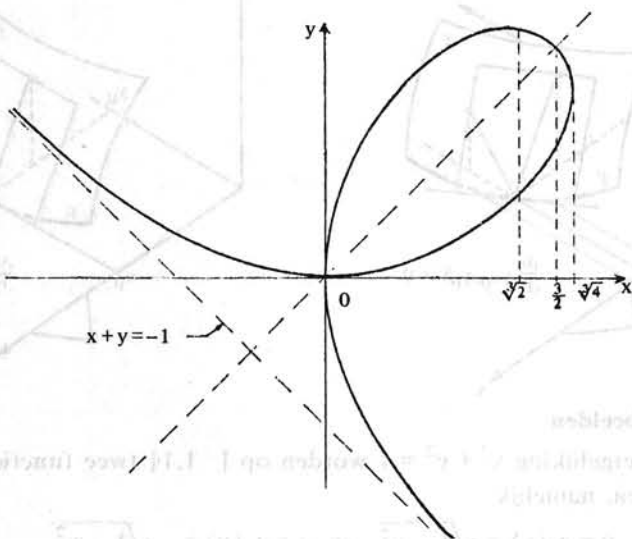
waaruit volgt

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x} \quad \text{mits } y^2 - x \neq 0.$$

We onderzoeken nu de kromme, beschreven door de vergelijking $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Horizontale raaklijnen kunnen optreden als $y - x^2 = 0$. Gecombineerd met de oorspronkelijke vergelijking levert dit de punten $(x,y) = (0,0)$ en $(x,y) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

Het punt $(0,0)$ is een bijzonder punt omdat daar ook $y^2 - x = 0$.

Verticale raaklijnen kunnen optreden in de punten $(0,0)$ en $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$,



zoals volgt uit $y^2 - x = 0$ en de oorspronkelijke vergelijking. De kromme is symmetrisch t.o.v. de rechte $y = x$.

Snijdt men de kromme met een rechte door $(0,0)$, $y = mx$, dan levert $x = 0$ een dubbele wortel. De oorsprong is een *dubbelpunt* van de kromme. Bovendien vinden we het snijpunt

$$x = \frac{3m}{1+m^3}, y = \frac{3m^2}{1+m^3}.$$

Dit is een parametervoorstelling van de kromme met m als parameter. $m = 0$ en $m \rightarrow \infty$ leveren beide het punt $(0,0)$. De x -as en y -as zijn beide raaklijnen in $(0,0)$. Zonder bewijs vermelden we dat $x + y = -1$ een scheve asymptoot is..

De kromme staat bekend onder de naam *folium van Descartes*.

6.13.8. Algemene impliciete functiestelling

a) Notatieafspraken

Als $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, dan duidt $(\underline{x}, \underline{y})$ het punt $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ aan. Het eerste element \underline{x} van het geordend paar $(\underline{x}, \underline{y})$ is telkens een vector uit \mathbb{R}^n , het tweede element \underline{y} een vector uit \mathbb{R}^m . Verder krijgen we te maken met een differentieerbare afbeelding $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij U een open deelverzameling van \mathbb{R}^{n+m} is.

De functionaalmatrix van f in $(\underline{a}, \underline{b}) \in U$ ziet er uitgeschreven als volgt uit

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a}, \underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{a}, \underline{b}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\underline{a}, \underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\underline{a}, \underline{b}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{a}, \underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{a}, \underline{b}) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\underline{a}, \underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\underline{a}, \underline{b}) \end{bmatrix}.$$

We definiëren nu $\left[\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(\underline{a}, \underline{b}) \right]$ en $\left[\frac{\partial f}{\partial \underline{y}}(\underline{a}, \underline{b}) \right]$ als volgt:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(\underline{a}, \underline{b}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a}, \underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{a}, \underline{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{a}, \underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{a}, \underline{b}) \end{bmatrix}; \text{ en}$$

$$\left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}}(\underline{a}, \underline{b}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\underline{a}, \underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\underline{a}, \underline{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\underline{a}, \underline{b}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\underline{a}, \underline{b}) \end{bmatrix}$$

Merk op dat $\left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}}(\underline{a}, \underline{b}) \right]$ een vierkante matrix is.

b) Stelling

Zij $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ open, $\underline{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu differentieerbaar, $(\underline{a}, \underline{b}) \in U$ met

$\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{0}$ en $\det \left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}}(\underline{a}, \underline{b}) \right] \neq 0$ (dus $\left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}}(\underline{a}, \underline{b}) \right]$ inverteerbaar).

Dan bestaat er een $\epsilon > 0$ en een differentieerbare functie $\underline{g}: U_\epsilon(\underline{a}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($U_\epsilon(\underline{a})$ is een ϵ -omgeving van \underline{a} in \mathbb{R}^n) met $\underline{g}(\underline{a}) = \underline{b}$ en $\underline{f}(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x})) = \underline{0}$ voor alle $\underline{x} \in U_\epsilon(\underline{a})$.

Verder is $\underline{g}'(\underline{x}) = - \left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}}(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x})) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x})) \right]$.

6.13.9. Toelichting

We kunnen de stelling als volgt duidelijk maken.

Zij $\underline{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, waarbij U open in \mathbb{R}^{n+m} , continu differentieerbaar op U .

Zij verder $\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{0}$.

We beschouwen het stelsel vergelijkingen gegeven door $\underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$:

$$(I) \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

We weten dat voor $\underline{x} = \underline{a}$ dit stelsel een oplossing $\underline{y} = \underline{b}$ heeft. Beschouwen we het stelsel lineaire vergelijkingen dat men krijgt door in alle vergelijkingen over te gaan op de linearisering

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a}, \underline{b})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{a}, \underline{b})(x_n - a_n) + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\underline{a}, \underline{b})(y_1 - b_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\underline{a}, \underline{b})(y_m - b_m) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{a}, \underline{b})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{a}, \underline{b})(x_n - a_n) + \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\underline{a}, \underline{b})(y_1 - b_1) + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\underline{a}, \underline{b})(y_m - b_m) = 0 \end{cases}$$

Uit de lineaire algebra weten we dat, indien de matrix gevormd door de

laatste m kolommen $\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}, \underline{b}) \right]$ inverteerbaar is,

het lineaire stelsel (II) voor ieder waarde van $\underline{x} - \underline{a} \in \mathbb{R}^n$ precies één oplossing $\underline{y} - \underline{b} \in \mathbb{R}^m$ heeft.

De impliciete functiestelling zegt nu onder meer, dat het stelsel (I) dan ook voor iedere \underline{x} (uit een geschikt gekozen omgeving van \underline{a}) precies één oplossing \underline{y} (uit een geschikt gekozen omgeving van \underline{b}) heeft. De unieke oplossing bij gegeven \underline{x} noteren we met $\underline{g}(\underline{x})$. Zo is de functie \underline{g} gedefinieerd.

Wat voor het gelineariseerde stelsel (II) geldt, geldt dus lokaal ook voor het stelsel (I).

6.13.10. Praktische werkwijze

Ook bij functies van meer variabelen kan men gebruik maken van de techniek van impliciet differentiëren (zie 6.13.5b). De rechtvaardiging van deze methode ligt in stelling 6.13.8. We geven twee gevallen.

a) De vergelijking $f(x,y,z) = 0$ beschrijft een oppervlak in \mathbb{R}^3 .

Door deze vergelijking is, onder zekere voorwaarden, z impliciet gegeven als functie van x en y : $z = z(x,y)$. De partiële afgeleiden

$\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ kunnen we vinden door partiële differentiatie van

$f(x,y,z(x,y)) = 0$ onder toepassing van de kettingregel, zie 6.11.5.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z}, \quad \text{mits } \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0.$$

b) Het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} f(x,y,z) = 0, \\ g(x,y,z) = 0, \end{cases}$

beschrijft een kromme in \mathbb{R}^3 . Men kan y en z , onder zekere voorwaarden, als impliciet gegeven functies van x beschouwen en vragen naar de afgeleiden $y'(x)$ en $z'(x)$.

Differentiatie naar x levert

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

waaruit $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ zijn op te lossen, mits

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

6.13.11. Voorbeelden

- a) Beschouw de vergelijking
- $x - e^y \sin z = 0$
- .

Partieel differentiëren naar x en naar y levert

$$1 - e^y \cos z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$-e^y \sin z - e^y \cos z \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^y \cos z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\tan z, \quad \text{mits } \cos z \neq 0.$$

- b) Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ xy + yz = 2. \end{cases}$$

Bereken $y'(x)$, $z'(x)$ en $z''(x)$ in $(x, y, z) = (0, 1, 2)$.Differentiatie naar x levert

$$\begin{cases} 2x + 2yy' + 2zz' = 0, \\ y + (x+z)y' + yz' = 0. \end{cases}$$

In $(0, 1, 2)$ wordt dit

$$\begin{cases} 2y'(0) + 4z'(0) = 0, \\ 2y'(0) + z'(0) = -1, \end{cases}$$

met oplossing $y'(0) = -\frac{2}{3}$ en $z'(0) = \frac{1}{3}$.Nogmaals differentiëren naar x levert

$$\begin{cases} 1 + (y')^2 + yy'' + (z')^2 + zz'' = 0, \\ y' + (x+z)y'' + (1+z')y' + y'z' + yz'' = 0. \end{cases}$$

Invullen van $(x, y, z) = (0, 1, 2)$ en van de bekende waarden van $y'(0)$ en $z'(0)$ geeft twee vergelijkingen voor $y''(0)$ en $z''(0)$, waaruit volgt

$$z''(0) = -\frac{44}{27}.$$

Oefeningen

1. Zij
- $D = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2, \frac{1}{2}y^2 \leq x \leq y^2\}$
- en

$$E = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}.$$

De afbeelding $D \rightarrow E$ is gegeven door

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}.$$

Bepaal de Jacobiaan van de inverse afbeelding.

2. Gegeven de kromme
- k
- voorgesteld door de vergelijking
- $x^3 - y^3 = 19$
- .

Bepaal het punt van k in het eerste kwadrant, waar de raaklijn aan k een richtingscoëfficiënt $\frac{9}{4}$ heeft.Bepaal in dit punt ook $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $\frac{d^2x}{dy^2}$.

3. Gegeven: $y \ln x - x \ln y = 0$.

Druk $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dx}{dy}$ uit in x en y .

4. Gegeven: $xy + y^2 + xz - z^2 = 1$.

Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ uit in x, y en z .

5. Gegeven: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 12, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

Druk $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$ uit in x, y en z .

6. Gegeven $z = F(x, y)$; $x = r \cos \varphi$ en $y = r \sin \varphi$.

Waarin gaat $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$ over, als men z als functie van r en φ beschouwt?

7. Zij $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}^3$ zó dat $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ en $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ voor alle $(x, y, z) \in D$.

Door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ wordt x impliciet gegeven als functie $x = x(y, z)$, wordt y impliciet gegeven als functie $y = y(x, z)$ en wordt z

impliciet gegeven als $z = z(x, y)$. Bewijs: $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = -1$ en $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial x} = -1$.

Extreme waarden

6.14. Extreme waarden van functies van meer variabelen

6.14.1. Inleiding

We behandelen in deze paragraaf methoden om de maxima en minima van een functie van meer variabelen op te sporen. In de voorbeelden richten we ons steeds op functies van twee variabelen.

6.14.2. Definitie

Een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$, heeft in $\underline{c} \in D$ een *lokaal maximum* als er een r -omgeving $U_r(\underline{c})$ van \underline{c} bestaat zó dat $f(\underline{x}) \leq f(\underline{c})$ voor alle $\underline{x} \in U_r(\underline{c}) \cap D$.

Een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$, heeft in $\underline{c} \in D$ een *globaal maximum* als $f(\underline{x}) \leq f(\underline{c})$ voor alle $\underline{x} \in D$.

De definities van *lokaal minimum* en *globaal minimum* volgen uit de voorgaande door \leq te vervangen door \geq .

De volgende stelling, die we niet bewijzen, leert ons het bestaan van globale extrema van een continue functie op een begrensde, gesloten verzameling, vergelijk stelling 3.13.4.

6.14.3. Stelling

Zij D een begrensde en gesloten deelverzameling van \mathbb{R}^n en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continu op D . Dan neemt f op D een globaal maximum en een globaal minimum aan.

6.14.4. Opmerkingen

- a) Zij $D \subset \mathbb{R}^2$ de gesloten cirkelschijf met middelpunt $(0,0)$ en straal 1.
Als een functie f niet continu is op D dan behoeft f geen globale extremen te hebben. De functie f gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{als } (x,y) = (0,0), \\ x^2 + y^2 & \text{als } (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

is discontinu in $(0,0)$ en heeft op D geen globaal minimum.

- b) De verzameling $D = \{(x,y) | x+y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ is gesloten en niet begrensd.

De continue functie gegeven door het voorschrift $f(x,y) = \frac{1}{1+x+y}$ heeft op D geen globaal minimum.

- c) De verzameling $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ is begrensd, niet gesloten.

De continue functie gegeven door $f(x,y) = x^2 + y^2$ heeft op D geen globaal maximum.

6.14.5. Definitie

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$.

Een inwendig punt $\underline{a} \in D$ heet *stationair* punt van f als $\nabla f(\underline{a}) = \underline{0}$, d.w.z.

$$\text{in } \mathbb{R}^2: \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}) = 0,$$

$$\text{in } \mathbb{R}^3: \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\underline{a}) = 0.$$

De volgende stelling speelt een rol bij het bepalen van extreme waarden.

6.14.6. Stelling

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$.

Als f in een inwendig punt \underline{a} van D een (lokaal of globaal) extreem heeft en de partiële afgeleiden van f in \underline{a} bestaan, dan is \underline{a} een stationair punt van f .

Bewijs

Beschouw de functies $g_i: (-d, d) \rightarrow \mathbb{R}$ met $g_i(t) = f(\underline{a} + t\mathbf{e}_i)$, waarbij $d > 0$ zo gekozen is dat $\underline{a} + t\mathbf{e}_i \in D$ voor alle $t \in (-d, d)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Dan is 0 een inwendig punt van het definitiegebied van g_i , is g_i differentieerbaar in 0 en heeft g_i een extreem in 0 .

Dan geldt wegens 4.6.2

$$g_i'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\underline{a})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = 0.$$

Dus voor alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ geldt: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = 0$. \square

6.14.7. Gevolg

Uit stelling 6.14.6 blijkt dat men zich bij het opsporen van de extreme

waarden van een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$ kan beperken tot een nader onderzoek van:

- (i) de niet-inwendige punten van D ('randpunten'),
- (ii) de inwendige punten van D waar niet alle partiële afgeleiden van f bestaan,
- (iii) de stationaire punten van f .

Pas er voor op de stelling niet om te keren. Een stationair punt levert niet noodzakelijk een extreem. Zie de volgende voorbeelden.

6.14.8. Voorbeelden

a) Bepaal de extreme waarden van $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ en } f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Oplossing.

D is gesloten en begrensd, f is continu op D , dus f neemt een globaal maximum en een globaal minimum aan (wegens 6.14.3).

Het enige stationaire punt is de oorsprong, waar $f(0,0) = 0$.

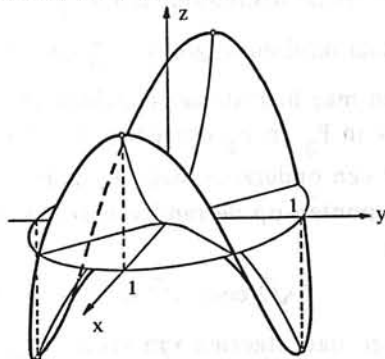
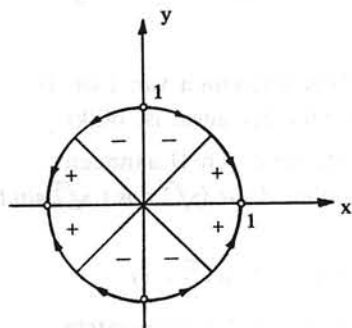
Men ziet eenvoudig in dat op de x -as $f(x,0) = x^2 > 0$ voor $x \neq 0$ en op de y -as $f(0,y) = -y^2 < 0$ voor $y \neq 0$, zodat in $(0,0)$ blijkbaar noch een maximum, noch een minimum aanwezig is. Een dergelijk stationair punt heet een *zadelpunt*.

De extreme waarden worden aangenomen op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, in parametervorm $(\cos t, \sin t)$.

De functie $f(x(t), y(t)) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$, $0 \leq t < 2\pi$, heeft globale maxima 1 voor $t = 0$ en $t = \pi$ en globale minima -1 voor

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ en } t = \frac{3}{2}\pi.$$

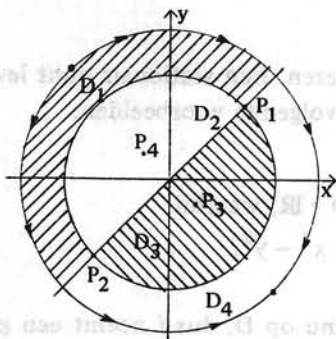
Voor de grootste waarde op de rand kunnen we tot een globaal maximum besluiten; voor de kleinste waarde op de rand kunnen we tot een globaal minimum besluiten. Aangezien $f(1,0) = f(-1,0) = 1$ en $f(0,1) = f(0,-1) = -1$, volgt dat globale maxima optreden in de punten $(1,0)$ en $(-1,0)$ en globale minima in $(0,1)$ en $(0,-1)$.



In de figuur zijn de gebieden, waarin de functie positieve respectievelijk negatieve waarden aanneemt, aangeduid met + respectievelijk -. Op de

rand van D geven de pijlen de richting aan waarin de functiewaarden toenemen.

- b) Zij $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$ en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) = (x-y)(x^2 + y^2 - 1)$. Bepaal de extreme waarden van f .



Oplossing.

$$f_x(x,y) = x^2 + y^2 - 1 + 2x(x-y);$$

$$f_y(x,y) = -x^2 - y^2 + 1 + 2y(x-y).$$

De stationaire punten zijn

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$P_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), P_4 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Laat $D_1 = \{(x,y) \in D | x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \text{ en } x - y \leq 0\}$,

$$D_2 = \{(x,y) \in D | x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \text{ en } x - y \leq 0\},$$

$$D_3 = \{(x,y) \in D | x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \text{ en } x - y \geq 0\},$$

$$D_4 = \{(x,y) \in D | x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \text{ en } x - y \geq 0\}.$$

Er geldt: $f(x,y) < 0$ op het inwendige van $D_1 \cup D_3$ (gearceerde gebieden);

$f(x,y) > 0$ op het inwendige van $D_2 \cup D_4$ (witte gebieden).

Hieruit volgt dat f in iedere omgeving van P_1 zowel positieve als negatieve waarden aanneemt. Daar $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, heeft f in P_1 geen lokaal

extreem, maar een zadelpunt. Evenzo heeft f in P_2 een zadelpunt.

Omdat D_2 gesloten en begrensd is, terwijl $f(x,y) = 0$ op de rand (d.w.z. de niet-inwendige punten) van D_2 en $f(x,y) > 0$ op het inwendige van D_2 , heeft f een maximum in een inwendig punt van D_2 . Daar P_4 het enige stationaire punt is dat tevens inwendig punt is van D_2 , heeft f

een lokaal maximum, groot $\frac{2}{9}\sqrt{6}$, in P_4 . Evenzo blijkt dat f in P_3 een lokaal minimum, groot $-\frac{2}{9}\sqrt{6}$, heeft.

Men mag hieruit niet concluderen dat de globale extremen van f op D ook in P_3 en P_4 optreden. Dat dit inderdaad niet het geval is, blijkt uit een onderzoek naar de waarden die f op de rand van D aanneemt.

De punten op de rand van D kan men voorstellen door $(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$.

Uit

$$f(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t) = \sqrt{2} (\cos t - \sin t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$$

volgt, dat, afgezien van veelvoudigen van 2π , op de rand f de grootste waarde 2 heeft voor $t = -\frac{\pi}{4}$ en de kleinste waarde -2 voor $t = \frac{3}{4}\pi$.

Daar $2 > \frac{2}{9}\sqrt{6}$ heeft f op D het globale maximum 2 in $(1, -1)$ en het globale minimum -2 in $(-1, 1)$.

c) De functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, met $D \subset \mathbb{R}^2$, is gegeven door

$$f(x,y) = (2x^2 - y)(2 - y).$$

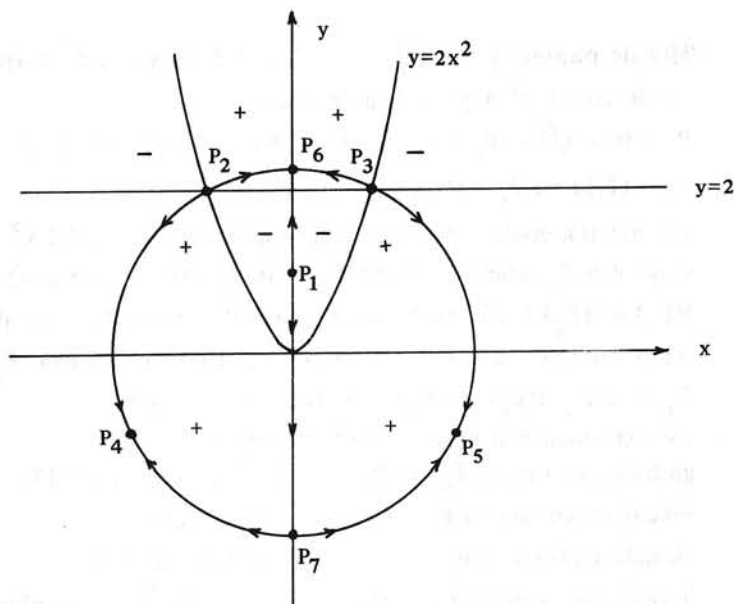
Bepaal aard, ligging en grootte van de extremen van f als

(i) $D = \mathbb{R}^2$,

(ii) $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 5\}$,

(iii) $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 5\}$.

Oplossing.



(i) $f_x(x,y) = 4x(2 - y)$,
 $f_y(x,y) = -2x^2 + 2y - 2$.

De stationaire punten zijn

$$P_1 = (0,1), P_2 = (-1,2), P_3 = (1,2).$$

Uit het tekenverloop van f (zie figuur) blijkt dat P_2 en P_3 zadelpunten zijn. Omdat er geen randpunten zijn en f overal differentieerbaar is, kan alleen in P_1 een extreem optreden.

Zij $D_1 = \{(x,y) | 2x^2 \leq y \leq 2\}$.

D_1 is gesloten en begrensd, f is continu op D_1 , dus heeft f op D_1 een minimum. Daar $f(x,y) = 0$ op de rand van D_1 en $f(x,y) < 0$ op het inwendige van D_1 , wordt dit minimum aangenomen in een inwendig punt van D_1 , dus in P_1 .

$f(P_1) = f(0,1) = -1$ en

$f(x,2x) = -4x(x-1)^2 \rightarrow -\infty$ voor $x \rightarrow \infty$; op \mathbb{R}^2 heeft f dus een lokaal minimum $f(0,1) = -1$ en geen andere extremen.

(ii) Voor $x^2 + y^2 = 5$ is

$$f(x,y) = (10 - 2y^2 - y)(2 - y) = 2y^3 - 3y^2 - 12y + 20 = g(y),$$

met $-\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5}$.

$$g'(y) = 6y^2 - 6y - 12 = 6(y+1)(y-2).$$



Met de punten $y = -\sqrt{5}$, $y = -1$, $y = 2$ en $y = \sqrt{5}$ corresponderen op de cirkel $x^2 + y^2 = 5$ de punten

$$P_7 = (0, -\sqrt{5}), P_4 = (-2, -1), P_5 = (2, -1), P_2 = (-1, 2),$$

$$P_3 = (1, 2) \text{ en } P_6 = (0, \sqrt{5}).$$

Uit het tekenverloop van g' volgt dat f langs de cirkel $x^2 + y^2 = 5$ stijgt van P_7 naar P_4 en van P_7 naar P_5 , $f(P_7) = 5 + 2\sqrt{5}$,

$f(P_4) = f(P_5) = 27$, daalt van P_4 naar P_2 en van P_5 naar P_3 ,

$f(P_4) = f(P_5) = 27$, $f(P_2) = f(P_3) = 0$, stijgt van P_2 naar P_6 en van

P_3 naar P_6 , $f(P_2) = f(P_3) = 0$, $f(P_6) = 5 - 2\sqrt{5}$.

De extremen van f op $x^2 + y^2 = 5$ zijn dus:

globale maxima in P_4 en P_5 : $f(-2, -1) = f(2, -1) = 27$,

lokaal maximum in P_6 : $f(0, \sqrt{5}) = 5 - 2\sqrt{5}$,

globale minima in P_2 en P_3 : $f(-1, 2) = f(1, 2) = 0$,

lokaal minimum in P_7 : $f(0, -\sqrt{5}) = 5 + 2\sqrt{5}$, (zie pijlen in figuur).

(iii) Op de cirkelschijf $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 5\}$ kunnen extremen alleen optreden in de punten $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ of P_7 .

P_2 en P_3 zijn ook in dit geval geen extremen (tekenverloop van f).

Daar f op grond van stelling 6.14.3 op D een globaal maximum en een globaal minimum heeft en

$$f(P_4) = f(P_5) = 27 > f(P_7) = 5 + 2\sqrt{5} > f(P_6) = 5 - 2\sqrt{5} > f(P_1) = -1,$$

heeft f op D globale maxima in P_4 en P_5 ter grootte 27 en

een globaal minimum in P_1 ter grootte -1 .

Om P_6 te onderzoeken beschouwen we

$$D_2 = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 5 \text{ en } y \geq 2\}.$$

Op grond van stelling 6.14.3 heeft f op D_2 een globaal maximum;

hiervoor komt alleen het punt P_6 in aanmerking. Dus

$$f(0, \sqrt{5}) = 5 - 2\sqrt{5} \text{ is een lokaal maximum van } f \text{ op } D.$$

Tenslotte onderzoeken we P_7 .

Daar $f(0,y) = y(y - 2)$ langs de y -as daalt van P_7 naar P_1 , terwijl f langs de cirkel $x^2 + y^2 = 5$ stijgt van P_7 naar P_5 , heeft f op D geen extreem in P_7 (zie pijlen in figuur).

6.14.9. Een hulpmiddel bij het onderzoek van stationaire punten

Om uit te maken of in een stationair punt van f een lokaal maximum, een lokaal minimum of een zadelpunt van de functie f optreedt, kan men de volgende stelling gebruiken.

Stelling

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^2$, en zij \underline{a} een inwendig punt van D . Laat \underline{a} een stationair punt van f zijn en laat f in een r -omgeving $U_r(\underline{a})$ van \underline{a} continue partiële afgeleiden van de derde orde hebben. Zij

$$H_f(\underline{a}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\underline{a}) & f_{xy}(\underline{a}) \\ f_{xy}(\underline{a}) & f_{yy}(\underline{a}) \end{vmatrix} = f_{xx}(\underline{a})f_{yy}(\underline{a}) - (f_{xy}(\underline{a}))^2$$

(de determinant van Hesse van f in \underline{a}).

Dan geldt:

- (i) Als $H_f(\underline{a}) > 0$ en $f_{xx}(\underline{a}) > 0$, dan heeft f in \underline{a} een lokaal minimum.
- (ii) Als $H_f(\underline{a}) > 0$ en $f_{xx}(\underline{a}) < 0$, dan heeft f in \underline{a} een lokaal maximum.
- (iii) Als $H_f(\underline{a}) < 0$, dan heeft f in \underline{a} geen extreem (\underline{a} is dan een zadelpunt van de grafiek van f).

Bewijs

Volgens de stelling van Taylor 6.12.2 geldt wegens $f_x(\underline{a}) = f_y(\underline{a}) = 0$ dat

$$f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + \frac{1}{2!} [h_1^2 f_{xx}(\underline{a}) + 2h_1 h_2 f_{xy}(\underline{a}) + h_2^2 f_{yy}(\underline{a})] + R_2(\underline{a}, \underline{h}).$$

Noemen we

$$p(h_1, h_2) = \frac{1}{2} h_1^2 f_{xx}(\underline{a}) + h_1 h_2 f_{xy}(\underline{a}) + \frac{1}{2} h_2^2 f_{yy}(\underline{a})$$

dan is dus

$$f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + p(\underline{h}) + R_2(\underline{a}, \underline{h}) \quad \text{met } R_2(\underline{a}, \underline{h}) = \mathbf{O}(|\underline{h}|^3),$$

waarbij $p(h_1, h_2)$ een kwadratische vorm is met discriminant $-H_f(\underline{a})$.

- (i) Veronderstel dat $f_{xx}(\underline{a}) > 0$ en $H_f(\underline{a}) > 0$.

$p(h_1, h_2)$ is dan positief voor iedere $\underline{h} \neq \underline{0}$ en het minimum van p op de gesloten en begrensde eenheidscirkel $h_1^2 + h_2^2 = 1$ is dus een positief getal K .

Voor iedere eenheidsvector \underline{u} en iedere $t \in \mathbb{R}^+$ is daarom

$$p(t\underline{u}) = t^2 p(\underline{u}) \geq K t^2.$$

Uit $R_2(\underline{a}, \underline{h}) = \mathbf{O}(|\underline{h}|^3)$ volgt het bestaan van een $M \in \mathbb{R}^+$ en een $\delta \in \mathbb{R}^+$ zó dat

$$|R_2(\underline{a}, t\underline{u})| \leq M|t\underline{u}|^3 = Mt^3 \quad \text{voor alle } t \in (0, \delta).$$

Voor alle $t \in (0, \rho)$, waarbij $\rho = \min \left\{ \delta, \frac{K}{M} \right\}$, is dus

$$p(t\underline{u}) + R_2(\underline{a}, t\underline{u}) \geq Kt^2 - Mt^3 = (K - Mt)t^2 > 0,$$

d.w.z. $f(\underline{x}) > f(\underline{a})$ voor alle $\underline{x} \in U'_\rho(\underline{a})$.

(ii) Volgt door toepassing van (i) op $-f$.

(iii) Als $H_f(\underline{a}) < 0$ dan is de discriminant van $p(h_1, h_2)$ positief. Er zijn dan eenheidsvectoren \underline{u}_0 en \underline{v}_0 met $p(\underline{u}_0) > 0$, $p(\underline{v}_0) < 0$.

Nemen we M en δ als in het bewijs van (i), dan is voor alle $t \in (0, \delta)$

met $t < \frac{p(\underline{u}_0)}{M}$

$$p(t\underline{u}_0) + R_2(\underline{a}, t\underline{u}_0) \geq t^2 p(\underline{u}_0) - t^3 M = t^2(p(\underline{u}_0) - tM) > 0$$

en voor alle $t \in (0, \delta)$ met $t < -\frac{p(\underline{v}_0)}{M}$

$$p(t\underline{v}_0) + R_2(\underline{a}, t\underline{v}_0) \leq t^2 p(\underline{v}_0) + t^3 M = t^2(p(\underline{v}_0) + tM) < 0.$$

f neemt dus in iedere r -omgeving van \underline{a} zowel waarden groter dan $f(\underline{a})$ als waarden kleiner dan $f(\underline{a})$ aan. \square

6.14.10. Opmerkingen

a) Het geval $H_f(\underline{a}) > 0$ en $f_{xx}(\underline{a}) = 0$ kan niet optreden.

b) Er wordt geen uitspraak gedaan in het geval dat $H_f(\underline{a}) = 0$; een nader onderzoek is dan noodzakelijk.

6.14.11. Voorbeeld

We zoeken de lokale extremen van $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Er geldt

$$f_x = 4(x^3 - x + y), \quad f_y = 4(y^3 - y + x).$$

Dus de stationaire punten volgen uit

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 - y + x = 0. \end{cases}$$

Optelling levert $x^3 + y^3 = 0$, dus $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ ofwel $x = -y$; we vinden de stationaire punten $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Uit de tabel

	$(0, 0)$	$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$f_{xx}(x, y) = 4(3x^2 - 1)$	-4	20	20
$f_{xy}(x, y) = 4$	4	4	4
$f_{yy}(x, y) = 4(3y^2 - 1)$	-4	20	20

volgt dat $H_f(0, 0) = 0$, $H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 384 > 0$.

Met $f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$ volgt dat f in $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ lokale minima heeft (ter grootte -8). Over het punt $(0,0)$ geeft stelling 6.14.9 geen uitsluitel; we onderzoeken dit punt nader: er geldt $f(0,0) = 0$ en

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x^2(x^2 - 2) < 0 & \text{als } 0 < |x| < \sqrt{2}, \\ f(x,x) &= 2x^4 > 0 & \text{als } x \neq 0. \end{aligned}$$

We concluderen dat f binnen elke omgeving van $(0,0)$ zowel positieve als negatieve waarden aanneemt: f heeft in $(0,0)$ dus geen lokaal extreem.

6.14.12. Toepassing: Methode van de kleinste kwadraten

Bij de methode van de kleinste kwadraten gaat het erom een onbekende functie te benaderen door een of andere (eenvoudige) functie, op grond van een aantal bekende functiewaarden die bijvoorbeeld door meting zijn verkregen.

Als maat voor de afwijking bij die benadering neemt men de som van een aantal kwadraten (vandaar de naam) en het gaat erom deze som zo klein mogelijk te maken.

Stel dat gegeven zijn de functiewaarden $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ en alle x_i verschillend, en dat we de onbekende functie f willen benaderen door een lineaire functie. We stellen daartoe $y = ax + b$; a en b moeten we dan op geschikte wijze bepalen.

In x_i neemt de lineaire functie de waarde $ax_i + b$ aan. Als maat voor de afwijking nemen we

$$G(a,b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

Zijn a en b zodanig dat G minimaal is, dan moet $\nabla G(a,b) = \underline{0}$ zijn, dus

$$\frac{\partial G}{\partial a}(a,b) = 2 \sum_{i=1}^n x_i(ax_i + b - y_i) = 0, \text{ en}$$

$$\frac{\partial G}{\partial b}(a,b) = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0.$$

Dit levert 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden:

$$(I) \quad \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Als de coëfficiënten-determinant $\neq 0$ is, is volgens 6.3.6 en 6.2.15 het stelsel eenduidig oplosbaar. De coëfficiënten-determinant is nul als

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Past men de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz toe op de vectoren $(1,1,\dots,1)$ en (x_1, x_2, \dots, x_n) , dan vindt men

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (\text{II})$$

met het gelijkteken dan en slechts dan als $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Dit doet zich in ons geval niet voor en dus levert het stelsel (I) precies één oplossing (a_0, b_0) . De determinant van Hesse H_G is onafhankelijk van het punt (a, b) :

$$H_G(a, b) = 4 \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} > 0,$$

wegens (II). Omdat $\frac{\partial^2 G}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, is het gevonden paar (a_0, b_0) een minimum voor G .

Oefeningen

- $D = \{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y) = x^3 y^2 (12 - x - y)$.
Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarde(n) van f .
- $D = \{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } x + y \leq 2\}$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y) = xy(x - 1)$.
Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarde(n) van f .
- Zij $a \in \mathbb{R}$ en zij $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = x^2 y + xy^2 - axy$.
Bepaal aard, ligging en grootte van de extremen van f .
Onderscheid de gevallen $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.
- Zij $D = \{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } x + y \leq 1\}$
en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 + 3x + 7y + 10$.
Bepaal ligging, aard en grootte van de extremen van f .
- Bepaal de lokale extremen en hun aard van de functies $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door de volgende voorschriften.
 - $f(x, y) = x^3 - y^3 + 5xy$.
 - $f(x, y) = \ln(1 + e^x + e^y) - \ln(2 + e^{x+y})$.
 - $f(x, y) = x^2 y^2 - 2xy^2 - 3y^2 - 4x^2 + 8x$.

6.15. Extreme waarden onder één nevenvoorwaarde

6.15.1. Definitie

Zij $D \subset \mathbb{R}^n$ en zij $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zó dat

$E = \{\underline{x} \mid \underline{x} \in D \text{ en } \varphi(\underline{x}) = 0\}$ niet leeg is.

Men zegt dat een functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in $\underline{a} \in E$ een lokaal maximum (resp. minimum) onder de nevenvoorwaarde $\varphi(\underline{x}) = 0$ heeft, als er een r -omgeving

U van \underline{a} bestaat zó dat $f(\underline{x}) \leq f(\underline{a})$ (resp. $f(\underline{x}) \geq f(\underline{a})$) voor alle $\underline{x} \in U \cap E$.

6.15.2. Opmerking

We zoeken dus de extremen van f , waarbij we ons beperken tot die punten, die voldoen aan $\varphi(\underline{x}) = 0$. We merken hierbij het volgende op. Als f in \underline{a} een lokaal extreem heeft en $\varphi(\underline{a}) = 0$, dan heeft f in \underline{a} ook een lokaal extreem onder de nevenvoorwaarde $\varphi(\underline{x}) = 0$, maar niet omgekeerd. Zo heeft de functie gegeven door $f(x,y) = x^2 - y^2$ in $(0,0)$ geen lokaal extreem, maar onder de nevenvoorwaarde $y = 0$ heeft f in $(0,0)$ een lokaal (zelfs globaal) minimum; onder de nevenvoorwaarde $x = 0$ heeft f in $(0,0)$ daarentegen een globaal maximum.

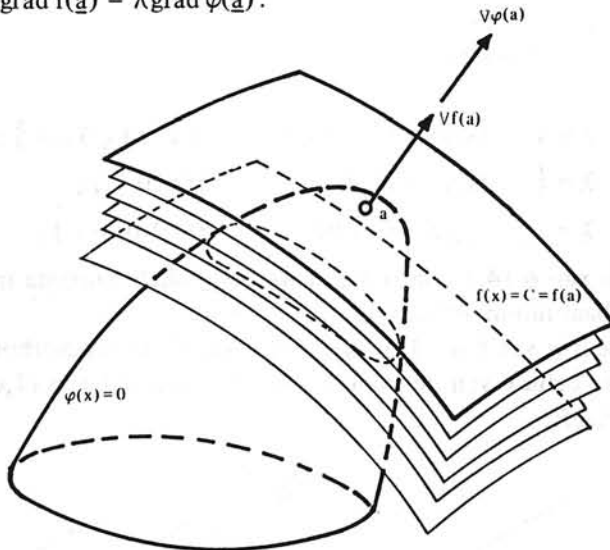
De volgende stelling geeft een noodzakelijke voorwaarde voor een extreem.

6.15.3. Multiplicatorenstelling van Lagrange

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^n$.

Laat f in een inwendig punt \underline{a} van D een lokaal extreem hebben onder de nevenvoorwaarde $\varphi(\underline{x}) = 0$, laat f en φ (totaal) differentieerbaar zijn in \underline{a} en zij $\text{grad } \varphi(\underline{a}) \neq \underline{0}$. Dan is er een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ zó dat geldt

$$\text{grad } f(\underline{a}) = \lambda \text{grad } \varphi(\underline{a}).$$



We bewijzen deze stelling niet. Meetkundig is de stelling als volgt plausibel te maken (we nemen het geval $n = 3$). De nevenvoorwaarde $\varphi(\underline{x}) = 0$ is de vergelijking van een oppervlak Φ in \mathbb{R}^3 . Heeft f in een punt \underline{a} van Φ een extreem met betrekking tot Φ , dan raken het niveauoppervlak van f door \underline{a} en het oppervlak Φ aan elkaar. Dit betekent dat de normalen in \underline{a} van deze oppervlakken dezelfde of tegengestelde richting hebben, zodat de vector $f(\underline{a})$ een veelvoud van $\text{grad } \varphi(\underline{a})$ is.

6.15.4. Praktische werkwijze

Men gebruikt stelling 6.15.3 aldus (we nemen hier $n = 2$).

Los x , y en λ op uit de vergelijkingen

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ f_x(x,y) = \lambda \varphi_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda \varphi_y(x,y) \end{cases},$$

Is (x_0, y_0, λ_0) een oplossing van dit stelsel vergelijkingen, dan kan er in (x_0, y_0) een extreem optreden. In de punten waar $\text{grad } \varphi = \underline{0}$ is de methode niet toepasbaar: zulke punten komen dus ook voor extremen in aanmerking. Deze methode heet de *multiplicatorenmethode van Lagrange* (λ heet de multiplicator).

6.15.5. Voorbeelden

- a) Bepaal de extremen van $f(x,y) = x + y^2$ onder de nevenvoorwaarde $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Oplossing.

$$\nabla f(\underline{x}) = (1, 2y); \quad \nabla \varphi(\underline{x}) = (2x, 2y).$$

Oplossen van x , y en λ uit het stelsel

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ 1 = \lambda \cdot 2x, \\ 2y = \lambda \cdot 2y, \end{cases}$$

levert

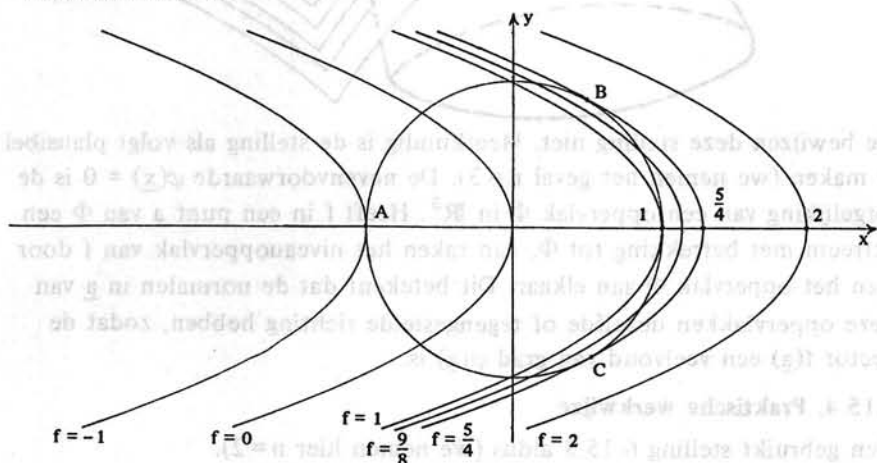
$$\lambda = 1, \quad (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \quad f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{5}{4};$$

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad (x,y) = (1,0), \quad f(1,0) = 1;$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \quad (x,y) = (-1,0), \quad f(-1,0) = -1.$$

Met behulp van 6.14.3 concluderen we tot globale maxima in $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en een globaal minimum in $(-1,0)$.

Over het gedrag van f in $(1,0)$ geeft de multiplicatorenmethode geen uitsluitel. Met behulp van de hoogtekaart ziet men dat f in $(1,0)$ een lokaal minimum heeft.



- b) Bepaal de maximale lengte van een vector (x,y) met $x^4 + y^4 = 1$.

Oplossing

Zij $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $\varphi(x,y) = x^4 + y^4 - 1$.

$\nabla f(\underline{x}) = (2x, 2y)$; $\nabla \varphi(\underline{x}) = (4x^3, 4y^3)$.

Oplossen van x , y en λ uit het stelsel

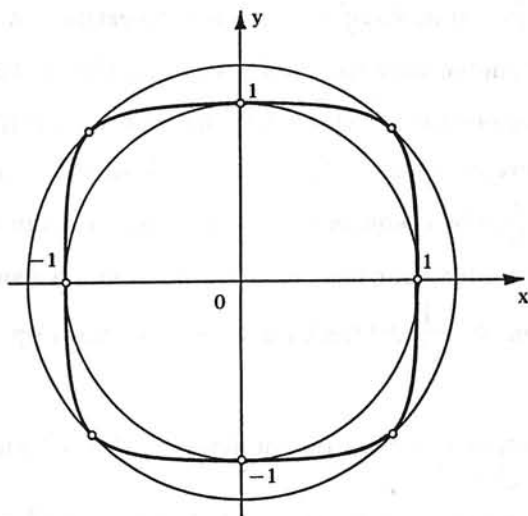
$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 1 = 0, \\ 2x = \lambda \cdot 4x^3, \\ 2y = \lambda \cdot 4y^3 \end{cases}$$

levert $x = 0$, $y = \pm 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $f(0, \pm 1) = 1$.

Als $x \neq 0$ volgt $\frac{y}{x} = \frac{y^3}{x^3} \iff xy(x^2 - y^2) = 0$.

Hieruit volgt $y = 0$, $x = \pm 1$, $f(\pm 1, 0) = 1$, of $x = \pm y$, zodat $x^4 = \frac{1}{2} = y^4$, dus $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$. Dit nu is het gevraagde maximum.

De maximale lengte van de vector is dus $\sqrt[4]{2}$.



- c) Bepaal de extremen van $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ onder de nevenvoorwaarde $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ($a > b > c > 0$).

Oplossing.

De vergelijkingen zijn

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \\ 2x = \lambda \cdot 2ax, \\ 2y = \lambda \cdot 2by, \\ 2z = \lambda \cdot 2cz, \end{cases}$$

met oplossingen

$$\lambda = \frac{1}{a}, \quad (x,y,z) = (\pm \frac{1}{\sqrt{a}}, 0, 0), \quad f(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}, 0, 0) = \frac{1}{a};$$

$$\lambda = \frac{1}{b}, \quad (x,y,z) = (0, \pm \frac{1}{\sqrt{b}}, 0), \quad f(0, \pm \frac{1}{\sqrt{b}}, 0) = \frac{1}{b};$$

$$\lambda = \frac{1}{c}, \quad (x,y,z) = (0, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{c}}), \quad f(0, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{c}}) = \frac{1}{c}.$$

Aangezien $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$, kunnen we met behulp van 6.14.3 concluderen tot globale minima in $(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}, 0, 0)$ en globale maxima in $(0, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{c}})$.

In de punten $(0, \pm \frac{1}{\sqrt{b}}, 0)$ treden geen extremen op. Dit laatste kan

men als volgt inzien.

Beperken we ons tot het vlak $z = 0$, dan zien we dat $f(x,y,0) = x^2 + y^2$ onder de nevenvoorwaarde $ax^2 + by^2 = 1$ leidt tot $f(x,y,0) = \frac{1}{b} + (1 - \frac{a}{b})x^2$.

Omdat $1 - \frac{a}{b} < 0$ is, komen er in iedere omgeving van $(0, \frac{1}{\sqrt{b}}, 0)$ en van $(0, -\frac{1}{\sqrt{b}}, 0)$ punten voor met functiewaarden kleiner dan $\frac{1}{b}$.

Beperken we ons tot het vlak $x = 0$, dan zien we dat $f(0,y,z) = y^2 + z^2$ onder de nevenvoorwaarde $by^2 + cz^2 = 1$ leidt tot $f(0,y,z) = \frac{1}{b} + (1 - \frac{c}{b})z^2$.

Omdat $1 - \frac{c}{b} > 0$ is, komen er in iedere omgeving van $(0, \frac{1}{\sqrt{b}}, 0)$ en van $(0, -\frac{1}{\sqrt{b}}, 0)$ punten voor met functiewaarden groter dan $\frac{1}{b}$.

In de punten $(0, \pm \frac{1}{\sqrt{b}}, 0)$ treden dus geen extremen op.

Oefeningen

1. Bepaal de extremen van de functie $f(x,y) = x^2 + y^3$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 1$.
2. Bepaal de extremen van de functie $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5x$ onder de nevenvoorwaarde $3x + 2y - 10z = 0$.
3. Gevraagd de afstand van het punt $(-1, -2, 3)$ tot het vlak $2x + 2y + z = 6$.
4. Bepaal de extremen van de functie $f(x,y,z) = xyz$ onder de nevenvoorwaarde $x + 2y + 3z = 6$.
5. De hoekpunten van een rechthoek liggen op de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en zijn zó gekozen dat de oppervlakte van de rechthoek maximaal is. Bereken deze oppervlakte (men mag hierbij aannemen dat de zijden van de rechthoek evenwijdig zijn met de assen van de ellips).

6.16. Vraagstukken

- *1. A is een niet-lege, begrensde deelverzameling van \mathbb{R} .
Bewijs dat $\inf A$ en $\sup A$ adherent aan A zijn.
- *2. V en W zijn open verzamelingen van \mathbb{R}^n .
Bewijs dat $V \cap W$ en $V \cup W$ open zijn in \mathbb{R}^n .
- *3. Toon aan dat $\{(x,y) \mid 3x + 2y = 6\}$ gesloten is in \mathbb{R}^2 .
Is deze verzameling ook open in \mathbb{R}^2 ?
Is de verzameling $\{(x,y) \mid 4x + y > 2\}$ open in \mathbb{R}^2 ?
Is de laatste verzameling ook gesloten in \mathbb{R}^2 ?
- *4. A en B zijn deelverzamelingen van \mathbb{R}^2 .
Bewijs of weerleg de volgende uitspraak:
Als p adherent is aan A en adherent is aan B , dan is p adherent aan $A \cap B$.
- *5. We definiëren de *afstand van een punt $p \in \mathbb{R}^n$ tot de verzameling $V \subset \mathbb{R}^n$* als $d(p, V) = \inf \{ |p - x| \mid x \in V \}$.
Toon aan: p adherent aan $V \iff d(p, V) = 0$.
6. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = \begin{cases} y & \text{als } x \geq 0, \\ -y & \text{als } x < 0. \end{cases}$
Bewijs dat f continu is in $(0,0)$.
7. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door
$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (2x - y)^2} \quad \text{als } (x,y) \neq (0,0) \text{ en } f(0,0) = 0.$$

Onderzoek de continuïteit van f in $(0,0)$.
- *8. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door
$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{|x| + |y|} \quad \text{als } (x,y) \neq (0,0) \text{ en } f(0,0) = 0.$$

Bewijs dat f continu is op \mathbb{R}^2 .
9. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door
$$f(x,y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 + x^4} \quad \text{als } (x,y) \neq (0,0) \text{ en } f(0,0) = 0.$$

Bewijs dat f continu is op \mathbb{R}^2 .
- *10. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door
$$f(x,y) = \frac{(\arctan y)^4}{x^4 + y^4} \quad \text{als } (x,y) \neq (0,0) \text{ en } f(0,0) = 0.$$

a) Ga na of f continu is in $(0,0)$.
b) Bewijs dat $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ bestaat.
c) Onderzoek of $\frac{\partial f}{\partial x}$ continu is in $(0,0)$.
11. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.
Onderzoek of f differentieerbaar is in $(0,0)$.

*12. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = |x|\sqrt{|y|}$.

- a) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
 b) Onderzoek of $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ bestaat voor $y \neq 0$.
 c) Onderzoek of f differentieerbaar is in $(0,0)$.
 d) Zij $a_1 > 0$ en $a_2 > 0$.

Bewijs dat f differentieerbaar is in (a_1, a_2) .

13. De ruimtekromme k is gegeven door de parametervoorstelling

$$\underline{x}(t) = (t^2, 2t - 1, t^3).$$

Een lijn door het punt $(-3, 1, 5)$ raakt k in het punt P .

Bereken de coördinaten van P .

14. Zij f een differentieerbare functie van de variabelen x en y . Men gaat over op nieuwe coördinaten u en v , die met x en y als volgt samenhangen:

$$\begin{cases} x = u^2 v^{-1}, \\ y = u^{-1} v^2. \end{cases}$$

Hierdoor gaat f over in een functie f^* van u en v .

Toon aan: $3 \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \frac{v}{u} \frac{\partial f^*}{\partial u} + \frac{v^2}{u^2} \frac{\partial f^*}{\partial v}$.

15. Laat z een tweemaal continu differentieerbare functie van x en y zijn. Men gaat over op de nieuwe variabelen u en v ,

gegeven door $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Bewijs: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (u^2 + v^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)$.

16. Laat f en g tweemaal differentieerbare functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zijn en laat F voor $xy \neq 0$ gedefinieerd zijn door

$$F(x,y) = x f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right).$$

Bewijs: $x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

17. a) Bewijs dat door de coördinatentransformatie

$$\begin{cases} u = x + ct, \\ v = x - ct, \end{cases}$$

de zogenaamde ééndimensionale golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

overgaat in $4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$. (als z een tweemaal continu differentieerbare functie van x en t is).

b) Toon aan dat voor ieder tweetal tweemaal differentieerbare functies $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een oplossing van deze golfvergelijking gegeven wordt door $z(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$.

18. Geef de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak $x^3 + yz = 0$ in het punt $(1, 1, -1)$.

19. Bepaal de Taylorontwikkeling van f om \underline{a} tot en met de kwadratische termen (zonder restterm) in de volgende gevallen:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}$, $\underline{a} = (1, 0)$;

b) $f(x, y) = \ln(y + \sin x)$, $\underline{a} = (\frac{\pi}{2}, 0)$;

c) $f(x, y) = e^x \cos(xy)$, $\underline{a} = (0, 3)$.

20. Ontwikkel in een omgeving van het punt $\underline{a} = (1, \frac{1}{2}\pi)$ de functie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x, y) = x \sin y$ in een Taylorpolynoom $t_2(x, y)$.

Bewijs dat voor $|\underline{x} - \underline{a}| < 0,1$ geldt $|f(\underline{x}) - t_2(\underline{x})| < 0,001$.

21. De functie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y, z) = \int_0^{x+2y-z^2} e^{t^2} dt.$$

Geef de linearisering van f in $(0, 0, 0)$.

22. Laat z impliciet als functie van x en y gegeven zijn door

$$3x^2 + 5y^2 - 8xy + 4xz - 4yz - 2x + 12y - 2z - 1 = 0.$$

Bereken $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$ en $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$.

23. De toestandsvergelijking voor 1 mol van een ideaal gas is

$$pV = RT,$$

waarin R de gasconstante is.

De temperatuur van een ideaal gas is dus een functie van twee variabelen p en V . Men geeft, zoals in de fysica gebruikelijk is, deze functie aan door hetzelfde symbool als de grootte die er door wordt voorgesteld:

$$T(p, V) = \frac{pV}{R}.$$

Bereken $\frac{\partial T}{\partial p}, \frac{\partial T}{\partial V}$ en geef een uitdrukking voor de totale differentiaal dT .

24. Een grootte die in de thermodynamica een belangrijke rol speelt, is de entropie S . Voor een ideaal gas kan men S schrijven als:

$$S = C_v \ln p + C_p \ln V + \text{constante}. \quad (1)$$

Hierin zijn C_v en C_p respectievelijk de soortelijke warmte bij constant volume en die bij constante druk.

Met behulp van de toestandsvergelijking $pV = RT$ kan men (1) ook schrijven als:

$$S = (C_v - C_p) \ln p + C_p \ln T + \text{constante}. \quad (2)$$

- a) Bereken $\frac{\partial S}{\partial p}$ uit (1) en ook uit (2).
- b) Waarom zijn de onder a) gevonden uitdrukkingen voor $\frac{\partial S}{\partial p}$ verschillend en hoe kan men dit verschil in de notatie tot uitdrukking brengen?
25. Zij z een functie van x en y .
Men gaat over op nieuwe variabelen u en v , die gegeven zijn door
 $u = x^2 + y^2$ en $v = x + y$.
Druk $\frac{\partial z}{\partial u}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ uit in x, y en partiële afgeleiden van z naar x en y .
26. Gegeven is het stelsel vergelijkingen
 $x = uv \cos w,$
 $y = uv \sin w,$
 $z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).$
a) Druk de partiële afgeleiden van de eerste orde van x, y en z naar u, v en w uit in u, v en w .
b) Druk de partiële afgeleiden van de eerste orde van u, v en w naar x, y en z uit in u, v en w .
27. a) Door de betrekkingen
 $x = r \cos \varphi,$
 $y = r \sin \varphi.$
worden r en φ impliciet gedefinieerd als functies van x en y .
Druk $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ uit in r en φ .
b) Laat de functies $f(x, y)$ en $f^*(r, \varphi)$ voldoen aan
 $f^*(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Toon aan dat $\Delta f = \frac{\partial^2 f^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi^2}$.
Hierin is Δ de Laplace-operator, gedefinieerd door $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
28. In een omgeving van het punt $(1, -2)$ is z impliciet gedefinieerd als functie van x en y door
 $e^z = x + y \sin z, \quad z(1, -2) = 0.$
Bereken $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -2)$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, -2)$.
29. Zij z een functie van x en y .
Men gaat over op de nieuwe variabelen r en φ die impliciet gedefinieerd zijn door
 $x = \frac{r}{\cos \varphi}, \quad y = \frac{r}{\sin \varphi} \quad (r > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}).$

Druk

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}$$

uit in r , φ en de partiële afgeleiden van z naar r en φ .

30. $D = \{(x,y) \mid x \geq 1\}$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door
 $f(x,y) = x^4 + 8x^2 - xy^2 + 2y^2$.
 Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarde(n) van f .
31. $D = \{(x,y) \mid y^2 \leq x^3 \leq 8\}$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door
 $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$.
 Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarde(n) van f .
32. De functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}^2$ is gegeven door
 $f(x,y) = (y^2 - x - 1)(y^2 + x - 1)$.
 Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarde(n) van f
 a) als $D = \mathbb{R}^2$,
 b) als $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
33. Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarden van $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 waarbij $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ en } 0 \leq y \leq 4\}$ en
 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y$.
34. De functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = (x - y^2)(x - 1)$, waarbij
 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{1}{2} \leq y \leq 2\}$.
 Bereken aard, ligging en grootte van de extreme waarden van f .
35. Zij $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \leq 2, y \geq x\}$.
 Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarden van $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 met $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 5y^2 - 2x - 10y$.
36. Zij $D = \{(x,y) \mid x^6 + y^6 \leq 2^{19}\}$ en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door
 $f(x,y) = x^6 + y^6 - 12(x - y)^4$.
 Bepaal aard, ligging en grootte van de extremen van f .
37. $D = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq 2x\}$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door
 $f(x,y) = e^{2x-y} \sqrt{y - x^2}$.
 Bepaal aard, ligging en grootte van de extreme waarde(n) van f .
38. Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}^2$ gegeven door
 $f(x,y) = e^{y-x}(x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4)$.
 Bereken aard, ligging en grootte van de extremen van f als
 a) $D = \mathbb{R}^2$,
 b) D de rand van het onder c) gegeven gebied is,
 c) $D = \{(x,y) \mid x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 6\}$.
39. Bepaal in \mathbb{R}^2 de afstand van de oorsprong tot de hyperbool met vergelijking $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$.

7. Differentiaalvergelijkingen

Algemene probleemstelling

7.1. Elementaire begrippen

7.1.1. Inleiding

Een differentiaalvergelijking is een vergelijking waarin van een onbekende functie één of meer afgeleiden voorkomen. Bovendien kunnen in die vergelijking de onafhankelijke variabele(n) en de functie zelf optreden. Het is de bedoeling om de onbekende functie uit de vergelijking op te lossen. In dit hoofdstuk wordt een summier eerste inleiding gegeven tot dit uitgebreide en belangrijke vakgebied van de wiskunde.

We beginnen met een bespreking van het bestaan van oplossingen. Vervolgens komen enkele numerieke oplosmethoden aan de orde. Het tweede gedeelte van dit hoofdstuk is gewijd aan een aantal bijzondere typen differentiaalvergelijkingen, waarvoor een oplossingsmethode kan worden aangegeven. We willen er de nadruk op leggen dat dit slechts in bijzondere gevallen mogelijk is; in de meeste gevallen kunnen alleen benaderingsmethoden (bijvoorbeeld numerieke methoden) uitkomst bieden. De genoemde oplossingsmethoden zijn niettemin belangrijk vanwege de vele (theoretische) toepassingen.

7.1.2. Enkele definities

- a) Onder een *gewone differentiaalvergelijking* (DV) verstaan we een betrekking tussen de reële onafhankelijk veranderlijke x en een daarvan afhankelijke reële veranderlijke y en afgeleiden van y naar x :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (*)$$

bijvoorbeeld $yy' + x^2 = 0$, waarbij $n = 1$,

of $x^3y' + y'' + \sin y = 0$, waarbij $n = 2$.

Het adjectief 'gewoon' onderscheidt zo'n DV van een zogenaamde partiële differentiaalvergelijking, een betrekking waarin partiële afgeleiden voorkomen, zoals bijvoorbeeld

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{of} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

In dit hoofdstuk beschouwen we uitsluitend gewone differentiaalvergelijkingen.

- b) Een *oplossing* van een gewone DV is een functie $y = f(x)$ die bij substitutie in de DV een identiteit in x doet ontstaan op een zeker interval. Dikwijls moet men zich tevreden stellen met een oplossing gevonden in een impliciete vorm $f(x,y) = 0$.
De grafiek van een oplossing van de DV noemt men *integraalkromme*.
- c) De verzameling van alle oplossingen van een DV wordt *de algemene oplossing* genoemd.
- d) Is bij een DV de n -de afgeleide de hoogste afgeleide die voorkomt, dan noemt men de DV een DV *van de n -de orde*.

7.1.3. Voorbeelden

- a) $y' = F(x)$, $a < x < b$, F continu op (a,b) .

In verband met 5.2.5 en 5.3.3 worden alle oplossingen gegeven door de formule

$$y = f(x) = \int_{x_0}^x F(t) dt + C, \quad x_0 \in (a,b), C \in \mathbb{R}.$$

- b) $y' = ky$, $-\infty < x < \infty$.

De oplossingen van deze DV zijn $y = f(x) = Ce^{kx}$, waarbij $C \in \mathbb{R}$.

Het is direct duidelijk dat Ce^{kx} oplossingen van de gegeven DV zijn.

Anderzijds geldt, als $g(x)$ een oplossing van b) is,

$$\frac{d}{dx} (g(x)e^{-kx}) = e^{-kx} (g'(x) - kg(x)) = 0.$$

Volgens stelling 4.5.5 geldt nu $g(x)e^{-kx} = C_0$ voor geschikte $C_0 \in \mathbb{R}$, dus $g(x) = C_0 e^{kx}$.

Hieruit volgt dat Ce^{kx} alle oplossingen van de gegeven DV zijn.

- c) $y^{(n)} = 1$, $-\infty < x < \infty$.

De algemene oplossing van deze DV is

$$y = \frac{x^n}{n!} + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

want iedere oplossing kan bij geschikte keuze van de constanten c_{n-1}, \dots, c_0 in deze vorm geschreven worden.

7.1.4. Opmerking

Als vuistregel vermelden we dat in de algemene oplossing van een DV van de n -de orde n constanten optreden. Een (*particuliere*) oplossing wordt verkregen door een specifieke waarde aan deze constanten toe te kennen. Sommige DV's van de n -de orde hebben naast de oplossingen waarin n constanten voorkomen nog andere oplossingen, de zogenaamde *singuliere oplossingen* (zie voorbeeld 7.1.8b). Deze oplossingen zijn niet te verkrijgen door waarden van de constanten in te vullen, maar vereisen een andere aanpak. In dit boek zal hier echter niet verder op ingegaan worden.

7.1.5. Voorbeelden van toepassingen

a) Radioactief verval

De hoeveelheid uranium dat in een bepaalde tijdspanne een deeltje uitzendt is evenredig met de aanwezige hoeveelheid uranium.

Zij $y(t)$ de hoeveelheid uranium (b.v. in gramatomen) op tijdstip t .

Dan is $\Delta y(t) \approx -ky(t)\Delta t$. Hierbij is $k > 0$ (k heet de reactieconstante).

$$\text{Dus } \frac{dy(t)}{dt} = -ky(t).$$

Oplossing: $y(t) = Ce^{-kt}$. Hierin is $C = y(0)$.

$$\text{Dus } y(t) = y(0)e^{-kt}.$$

De *halfwaardetijd* $t_{1/2}$ volgt uit:

$$y(t_{1/2}) = \frac{1}{2}y(0) = y(0)e^{-kt_{1/2}}.$$

$$\text{Dus } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}.$$

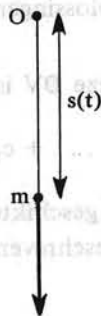
In de praktijk wordt k bepaald uit metingen van de halfwaardetijd.

b) Val met luchtweerstand

Een voorwerp met massa m wordt losgelaten uit een ballon.

We zullen de afstand die tijdens de val in t seconden wordt afgelegd bepalen, onder aanname dat de kracht veroorzaakt door de luchtweerstand evenredig is met de snelheid van het voorwerp.

We voeren daartoe een verticale s in met de positieve zin naar beneden en we proberen de afstand $s(t)$ van de oorsprong (het punt van loslaten) tot het voorwerp op tijdstip t te bepalen.



Uit 6.10.15 weten we dat de snelheid van het voorwerp $v = \frac{ds}{dt}$ en de versnelling $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. De zwaartekracht is mg en de kracht veroorzaakt

door de luchtweerstand is kv , voor zekere constante k , en deze kracht is tegengesteld aan de beweging.

De wet van Newton $F = ma$ levert de volgende DV voor v :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

of

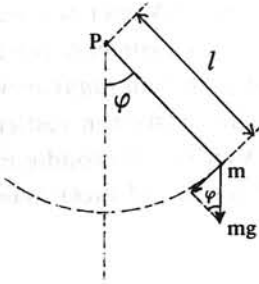
$$v' = g - cv,$$

waarin $c = \frac{k}{m}$. De vergelijking voor s wordt dan $s'' = g - cs'$.

Men kan dit probleem pas oplossen als men de toestand op het tijdstip $t = 0$ volledig vastlegt. In dit geval als $s(0)$ en $v(0)$ gegeven zijn.

In 7.4.4 komen we op deze DV terug.

c) Slinger



Een massa m is opgehangen aan een draad ter lengte l , bevestigd aan een vast punt P . De draad wordt gewichtloos verondersteld. We onderwerpen dit systeem aan de zwaartekracht (verticaal gericht) en beschouwen een uitwijking van de slinger uit zijn evenwichtsstand zó dat de slinger op tijdstip t een hoek $\varphi = \varphi(t)$ maakt met de

verticale as. Er geldt dan voor de afgelegde weg $s = l\varphi$, voor

de snelheid $v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\varphi}{dt}$ en voor

de versnelling $a = \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Bij deze uitwijking veroorzaakt de zwaartekracht een teruggedrijvende kracht langs de baan van grootte $m g \sin\varphi$ (g is de versnelling van de zwaartekracht). Deze kracht is echter tegengesteld gericht aan de uitwijking, dus $F = -m g \sin\varphi$. Toepassing van de bewegingswet van Newton $F = m a$ leidt tot de DV

$$m l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m g \sin\varphi, \text{ ofwel}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$$

Als de slinger zich bevindt in een medium dat weerstand geeft (bijv. lucht, olie, appelstroop), dan treedt er nog een extra kracht op, die evenredig is met de snelheid en daaraan tegengesteld gericht: $F_w = -bv$ ($b > 0$). De slingervergelijking wordt dan

$$m l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m g \sin\varphi - b l \frac{d\varphi}{dt}, \text{ ofwel}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0.$$

In 7.6.6 zullen we op de hier gevonden differentiaalvergelijkingen nader ingaan.

7.1.6. Begin- en randvoorwaarden

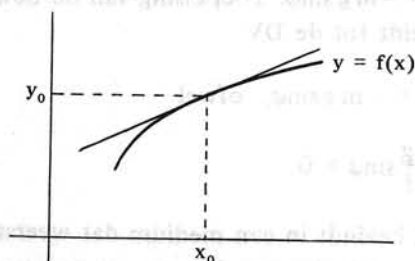
Uit bovenstaande voorbeelden blijkt dat in verband met de probleemstelling behalve aan een DV ook nog aan een of meer voorwaarden voldaan moet zijn, die de toestand van het systeem op een gegeven tijdstip t_0 nader bepalen. Zulke voorwaarden worden *beginvoorwaarden* genoemd. Zo is in voorbeeld 7.1.5a de oplossing pas eenduidig bepaald als de begintoestand $y(0)$ bekend is; in voorbeeld 7.1.5c moeten voor een volledige beschrijving van de slingerbeweging de uitwijking s en de snelheid v van het bewegende punt op zeker tijdstip t_0 gegeven zijn. Een DV met een geschikt stel beginvoorwaarden wordt ook wel een *beginwaardeprobleem* genoemd. Soms treden de extra voorwaarden ook op in de vorm van *randvoorwaarden*. Zo kan men in 7.1.5c φ op twee verschillende tijdstippen vastleggen. Men spreekt dan van een *randwaardeprobleem*. Men ziet eenvoudig in dat de oplossing in dat geval niet eenduidig bepaald is (één, of meer malen slingeren).

7.1.7. Grafische methode

Omtrent de aard van de oplossingen van een DV van de eerste orde kan men een indruk krijgen met behulp van de grafische methode. Men kijkt daarbij op verschillende manieren naar de DV $F(x, y, y') = 0$.

a) Invullen van een punt (x_0, y_0) in de DV geeft een vergelijking voor y' .

In de voor de toepassingen interessante gevallen volgt uit deze vergelijking, $F(x_0, y_0, y') = 0$, bijna altijd één oplossing voor y' . Deze oplossing geeft de richting die de raaklijn aan de integraalkromme, gegeven door $y = f(x)$, heeft. De differentiaalvergelijking stelt dus meetkundig een *richtingsveld* voor: in een bepaald punt (x_0, y_0) wordt een richting vastgelegd.



Indien men in (x_0, y_0) meer oplossingen voor y' vindt, worden er in dat punt ook meer richtingen gegeven en gaan er door (x_0, y_0) meer dan één oplossing.

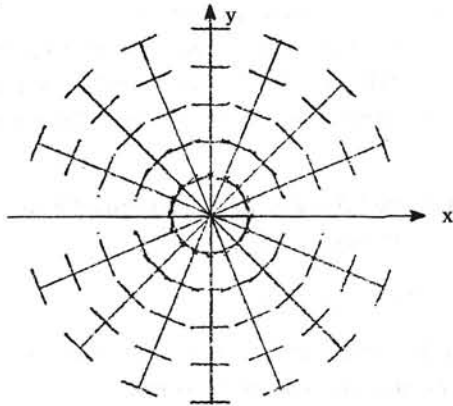
b) Door in de DV $F(x, y, y') = 0$ voor y' een waarde c in te vullen ontstaat $F(x, y, c) = 0$, hetgeen een impliciete vergelijking voor een kromme voorstelt, een zogenaamde *isocline* van de DV. Deze kromme verbindt de punten (x, y) uit het richtingsveld met gelijke waarde van y' , en dus met gelijke richting. Isoclinen zijn vaak een handig hulpmiddel om een indruk van het richtingsveld te krijgen.

7.1.8. Voorbeelden

a) $yy' + x = 0$.

 Isoclinen: $cy + x = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

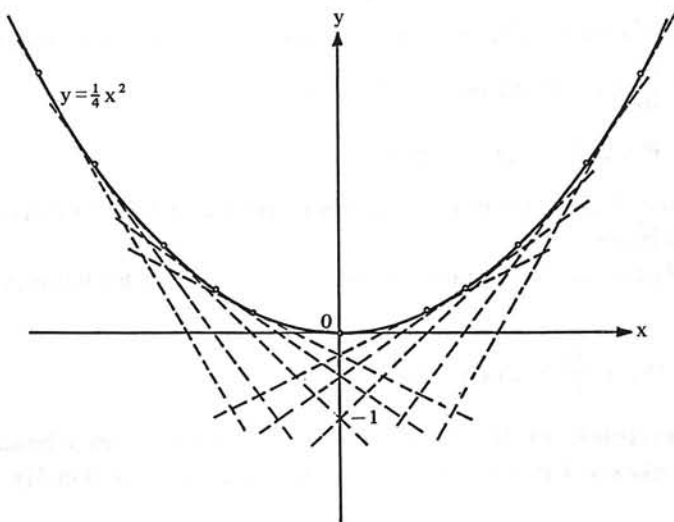
In een punt (x,y) , $y \neq 0$, is de richtingscoëfficiënt $y' = -\frac{x}{y}$. In de figuur zijn bij de isoclinen de richtingen aangegeven. Merk op dat de x -as geen isocline is. Inspectie van de figuur suggereert dat de integraalkrommen van de DV cirkels met de oorsprong als middelpunt zijn, dat wil zeggen $x^2 + y^2 = r^2$. Voor elke $r > 0$ volgen hieruit twee functies, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| < r$. Door invullen in de gegeven DV ziet men direct dat dit inderdaad oplossingen zijn. (Men kan ook snel via impliciet differentiëren tot deze conclusie komen).



b) $(y')^2 - xy' + y = 0$.

 Isoclinen: $y = cx - c^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Uit het richtingsveld blijkt dat in dit geval isoclinen en integraalkrommen samenvallen. Controleer dit door invullen in de DV. Ook is uit het richtingsveld af te leiden dat $y = \frac{1}{4}x^2$ een oplossing moet zijn.



7.1.9. Lineaire en niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

Een belangrijke classificatie van gewone differentiaalvergelijkingen ontstaat door onderscheid te maken tussen lineaire en niet-lineaire DV's.

Onder een *lineaire* DV van de orde n verstaat men een DV van de vorm

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

De onbekende functie y en zijn afgeleiden komen hierin lineair voor. De functies a_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) heten de (van x afhankelijke) *coëfficiënten*. Iedere DV die niet van deze vorm is heet niet-lineair. Voor lineaire DV's bestaat een algemene theorie, die de structuur van de oplossingsverzameling beschrijft (zie 7.5.4 t/m 7.5.6) en in sommige gevallen (bijvoorbeeld bij een lineaire DV van de 1-ste orde) tot de algemene oplossing voert (zie 7.5.2). Niet-lineaire DV's zijn in het algemeen veel gecompliceerder. Slechts in heel incidentele gevallen is het mogelijk een oplossing (veelal in impliciete vorm) te geven. We zullen in 7.4 enkele van deze gevallen behandelen.

7.1.10. Differentiaalvergelijkingen in differentiaalvorm

We beschouwen een DV van de vorm

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0. \quad (I)$$

Als we er in slagen de algemene oplossing van een DV van deze gedaante te vinden, krijgen we die meestal in de vorm

$$F(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (I')$$

Als we (I') impliciet differentiëren krijgen we $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0$, zodat (mogelijk op een factor na)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y). \quad (*)$$

Als we van (I') formeel de differentiaal opschrijven van beide leden krijgen we $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$, en met (*) komt er

$$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0. \quad (II)$$

Vaak zet men daarom (I) om in (II). Men zegt wel dat (I) in differentiaalvorm is geschreven.

Als men (II) ziet en de voorgeschiedenis niet kent, kan hij natuurlijk ook als

$$P(x,y) \frac{dx}{dy} + Q(x,y) = 0$$

worden geïnterpreteerd. Hierbij wordt dan x als functie van y beschouwd. In die zin bekeken kan (II) dus meer oplossingen bezitten dan (I).

Zo is $x = 0$ geen oplossing van $e^x + y + xy' = 0$, aangezien $x = 0$ geen functie $y(x)$ is, maar wel van $(e^x + y)dx + x dy = 0$.

Oefeningen

- Los op de DV $x^2 y' = 1 - y'$.
Bepaal die oplossingen die voldoen aan $y(1) = 2y(0)$.
- Gegeven is de DV $y' = f(x)$, waarbij f continu is op (a, b) .
Bepaal de oplossing van deze DV, die voldoet aan de beginvoorwaarde $d_2 = y(d_1)$, waarbij $d_1 \in (a, b)$ en $d_2 \in \mathbb{R}$.
- Bepaal de isoclinen en de oplossingen van de DV $y' = x$.
- Bepaal de isoclinen en de oplossingen van de DV $y' = y$.
- Bepaal van de volgende DV's de orde en het al dan niet lineair zijn.
 - $x^2 y'' - 3xy' + 2y = \cos x$.
 - $y'' + \sin(x - y) = e^x$.
 - $y'''' + 3y''' + 2yy' = x^3$.
 - $y'' + (1 - y^2)y' + y = 0$.
 - $y''' + (\cos x)^2 y'' - y = 1 + x$.

7.2. Existentie en eenduidigheid van de oplossingen

7.2.1. Inleiding

In deze paragraaf gaan we in op de vraag of er van een DV met of zonder bepaalde voorwaarden oplossingen bestaan. Zo heeft de DV

$$(y')^2 + y^2 + 1 = 0$$

vanzelfsprekend geen (reële) oplossingen.

Voor een beginwaardeprobleem met een DV van de eerste orde van de vorm $y' = f(x, y)$, is het mogelijk een existentiestelling te formuleren. Wij vermelden deze stelling en geven slechts een schets van het bewijs (zie 7.2.5). Daarna geven we zonder bewijs een existentiestelling voor lineaire DV's.

7.2.2. Stelling

Laat $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn, waarbij $D \subset \mathbb{R}^2$. Zij (x_0, y_0) een inwendig punt van D .

Existentie

Als er een r -omgeving U van (x_0, y_0) bestaat zó dat F continu is op U ($U \subset D$), dan heeft het beginwaardeprobleem

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{I}$$

in een interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, voor zekere $\delta \in (0, r)$, tenminste één oplossing g (dus: $g'(x) = F(x, g(x))$ voor alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en $y_0 = g(x_0)$).

Eenduidigheid

Voldoet F bovendien nog aan de volgende **Lipschitz-voorwaarde**:

er bestaat een $N \in \mathbb{R}^+$ zó dat $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$ voor alle $(x, y_1), (x, y_2) \in U$,

dan is de oplossing eenduidig, dat wil zeggen:

als $y = g_1(x)$ en $y = g_2(x)$ beide voldoen aan de DV (I) en aan de beginvoorwaarden $y_0 = g_1(x_0) = g_2(x_0)$, dan is, voor alle x in een *geschikte* δ -omgeving van x_0 , $g_1(x) = g_2(x)$.

7.2.3. Voorbeeld

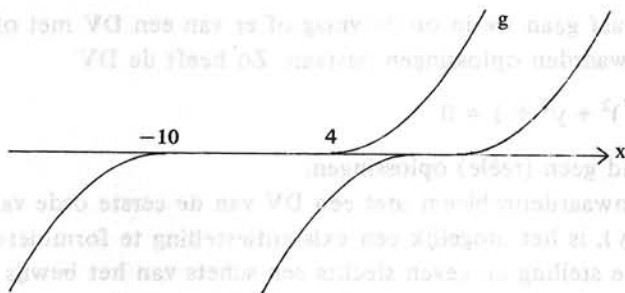
Gegeven is de DV $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

Door substitueren kan men nagaan dat de volgende functies oplossingen zijn:

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ y &= (x + C)^3, \end{aligned}$$

met $C \in \mathbb{R}$ en combinaties van deze, zoals b.v. de functie g gedefinieerd door

$$g(x) = \begin{cases} (x + 10)^3 & \text{voor } x \leq -10, \\ 0 & \text{voor } -10 \leq x \leq 4, \\ (x - 4)^3 & \text{voor } x \geq 4. \end{cases}$$



Uit stelling 7.2.2 zien we dat aan de voorwaarde voor existentie van oplossingen in ieder punt van \mathbb{R}^2 is voldaan: $3\sqrt[3]{y^2}$ is immers continu op \mathbb{R}^2 . Voor de punten op de x -as bestaat er geen r -omgeving waar aan de Lipschitz-voorwaarde is voldaan: substitueert men in de ongelijkheid

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$$

de functie $F(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$, dan komt er voor $y_1 = 0, y_2 \neq 0$

$$3\sqrt[3]{y_2^2} \leq N|y_2|, \text{ ofwel } 3 \leq N\sqrt[3]{|y_2|}.$$

Zoals men eenvoudig inzielt, kan aan deze ongelijkheid niet voldaan zijn door alle y_2 in een interval dat 0 bevat. Ligt het punt $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ niet op de x-as, dan is in

$$U = \{x \mid |x - x_0| < \frac{1}{2}|y_0|\}$$

wel voldaan aan de Lipschitz-voorwaarde. Dit kan men het eenvoudigst inzien met behulp van onderstaande opmerking 7.2.4.

Uit deze beschouwingen kan men opmaken dat hierboven alle oplossingen van de DV zijn aangegeven.

Merk op dat er bij ieder punt $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ oneindig veel oplossingen g zijn met $y_0 = g(x_0)$. Is echter $y_0 \neq 0$, dan is er in

$$U = \{x \mid |x - x_0| < \frac{1}{2}|y_0|\}$$

slechts één oplossing met $y_0 = g(x_0)$. Stelling 7.2.2 doet immers alleen een uitspraak over het bestaan van de eenduidigheid van een oplossing in de buurt van (x_0, y_0) . Het is een 'lokale stelling'.

7.2.4. Opmerking

Is $\frac{\partial F}{\partial y}$ begrensd op U , dan voldoet F op U aan de Lipschitz-voorwaarde.

Immers als $|\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)| \leq N$ voor alle $(x, y) \in U$, dan is volgens de middelwaardestelling 4.5.3.

$$F(x, y_1) - F(x, y_2) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta)(y_1 - y_2), \quad \eta \text{ tussen } y_1 \text{ en } y_2,$$

dus $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$ voor alle $(x, y_1), (x, y_2) \in U$

In het bijzonder geldt dat $\frac{\partial F}{\partial y}$ begrensd is op een r -omgeving U van (x_0, y_0) ,

als $\frac{\partial F}{\partial y}$ continu is in (x_0, y_0) ; men kan dan bijv. r zó kiezen dat

$$|\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)| < 1 \quad \text{voor alle } (x, y) \in U$$

7.2.5. Schets van het bewijs van stelling 7.2.2. (Picard)

Stap 1

We tonen aan dat het beginwaardeprobleem

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{I}$$

en de integraalvergelijking

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(x, y(x)) dx \tag{II}$$

dezelfde oplossingsverzameling hebben.

Bewijs

Veronderstel dat g een oplossing is van (I), dat wil zeggen

$$g'(x) = F(x, g(x)), \quad y_0 = g(x_0).$$

g is blijkbaar differentieerbaar en dus continu; daar ook F continu is volgt dat g' continu is. Op grond van 5.3.5 is nu

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x g'(t) dt = \int_{x_0}^x F(t, g(t)) dt,$$

ofwel

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, g(t)) dt.$$

Als omgekeerd g voldoet aan de *integraalvergelijking* (II), dan volgt uit de hoofdstelling van de integraalrekening (5.2.5) dat g een oplossing van (I) is.

Stap 2

We proberen de eventuele oplossing van (II) iteratief te benaderen. Daartoe construeren we een rij benaderde oplossingen g_0, g_1, g_2, \dots van de integraalvergelijking (II) op de volgende manier (methode van *successieve approximaties*, vergelijk 4.11):

$$g_0(x) = y_0$$

$$g_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, g_0(t)) dt.$$

$$\vdots$$

$$g_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, g_{n-1}(t)) dt.$$

Stap 3

Indien aan de Lipschitz-voorwaarde is voldaan dan kan men bewijzen dat de functie g , gedefinieerd door

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

bestaat en aan (II) en dus ook aan (I) voldoet.

Stap 4

Men bewijst dat indien aan de Lipschitz-voorwaarde is voldaan de gevonden oplossing eenduidig is bepaald.

Het bewijs van de laatste twee stappen is van zodanige omvang dat we het hier achterwege laten. \square

7.2.6. Voorbeelden

a) We berekenen de successieve approximaties van de oplossing van het beginwaardeprobleem

$y' = y$, $y(0) = 1$; (merk op dat de oplossing is $y = e^x$).

De bijbehorende integraalvergelijking is

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t) dt.$$

We vinden

$$g_0(x) = 1,$$

$$g_1(x) = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x,$$

$$g_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{1}{2} x^2,$$

$$g_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t + \frac{1}{2} t^2) dt = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3$$

en voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$ (volledige inductie)

$$g_n(x) = 1 + \int_0^x g_{n-1}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Blijkbaar is $g_n(x)$ in dit geval het Taylorpolynoom van de index n in 0 voor e^x . Op grond van de stelling van Taylor (4.7.6) is

$$e^x - g_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}, \quad 0 < \vartheta < 1;$$

volgens 3.11.7e is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

dus wegens $0 < e^{\vartheta x} < e^{|x|}$ is inderdaad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = e^x \text{ voor iedere } x.$$

b) Bepaal de eerste drie approximaties van de oplossing van de DV

$y' = x - y^2$ met beginvoorwaarde $y(0) = \frac{1}{2}$.

De corresponderende integraalvergelijking is

$$g(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x [t - g(t)^2] dt$$

Er komt

$$g_0(x) = \frac{1}{2}.$$

$$g_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x (t - \frac{1}{4}) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x^2.$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \{t - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t^2)^2\} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{20}x^5.$$

7.2.7. Existentie en eenduidigheid bij lineaire differentiaalvergelijkingen

Zonder bewijs vermelden we de nu volgende stelling.

Stelling

Als de functies a_0, a_1, \dots, a_{n-1} en b continu zijn op (α, β) , dan heeft het beginwaardeprobleem

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

waarbij $x_0 \in (\alpha, \beta)$ en $y_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,
een eenduidige oplossing $y = f(x)$ op het interval (α, β) .

7.2.8. Voorbeeld

Los op het beginwaardeprobleem $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Oplossing.

Stellen we $y' = u$, dan vinden we $u' = 2u$, waarvan volgens 7.1.3b de algemene oplossing is $u = Ce^{2x}$.

Dus $y' = Ce^{2x}$, zodat $y = \frac{1}{2}Ce^{2x} + C_1$.

Invullen van de beginvoorwaarden levert $y(0) = \frac{1}{2}C + C_1 = 2$
 $y'(0) = C = 1$,

dus $C = 1$ en $C_1 = \frac{3}{2}$.

De gevraagde oplossing van het beginwaardeprobleem is dus $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$.

Oefeningen

1. Bepaal de eerste drie successieve benaderingen van de oplossing van de volgende beginwaardeproblemen.

a) $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = 1$.

b) $y' = 2x - \ln y$, $y(0) = 1$.

*2. Gegeven de DV $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

a) Stel een integraalvergelijking op voor die oplossing g van de DV waarvoor geldt $g(1) = 0$.

b) Bepaal, uitgaande van de gevonden integraalvergelijking en $g_0(x) = 0$, één successieve aproximatie g_1 voor de oplossing g .

c) Bepaal de isoclinen van deze DV.

d) Toon aan dat in geen enkele omgeving van $(0,0)$ aan de Lipschitzvoorwaarde is voldaan.

7.3. Numerieke oplosmethoden**7.3.1. Inleiding**

We behandelen nu enkele numerieke methoden voor het vinden van een benadering van de oplossing van de DV

$$y' = F(x, y) \quad \text{met beginvoorwaarde } y(x_0) = y_0.$$

Het zal veelal namelijk niet mogelijk zijn de oplossing van deze DV in gesloten vorm (dat wil zeggen in de vorm $y = g(x)$ of $g(x,y) = 0$) te vinden. In die gevallen kan men zich met behulp van de benaderende oplossing toch een goede indruk van het verloop van de exacte oplossing vormen.

7.3.2. Methode van Euler

Zij $x_1 = x_0 + h$, waarin h een (in het algemeen) kleine stap is, en zij $y_1 = g(x_1)$. Dan is, wegens de stelling van Taylor (4.8.7),

$$\begin{aligned} y_1 &= g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + \mathbf{O}(h^2) = \\ &= y_0 + hF(x_0, y_0) + \mathbf{O}(h^2). \end{aligned}$$

Als benadering voor y_1 nemen we nu

$$y_1^E = y_0 + hF(x_0, y_0).$$

Uitgaande van $y_1^E = y(x_1)$ als nieuwe beginvoorwaarde kunnen we op dezelfde wijze y_2^E berekenen als benadering van $y_2 = g(x_2)$, waarin $x_2 = x_0 + 2h$. Dit proces kan steeds herhaald worden, zodat g tabellarisch kan worden bepaald (althans bij benadering).

7.3.3. Methode van Heun

De methode van Heun is een verfijning van de methode van Euler, waarbij nu wordt uitgegaan van de integraalvergelijking 7.2.5(II).

Dan is, bij dezelfde notatie als in 7.3.2,

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} F(t, g(t)) dt.$$

Op grond van de trapeziumregel 5.17.2 is

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} F(t, g(t)) dt \approx y_0 + \frac{1}{2}h[F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1)].$$

Omdat y_1 nog in $F(x_1, y_1)$ voorkomt, benaderen we in eerste instantie y_1 door y_1^E met behulp van de methode van Euler:

$$y_1^E = y_0 + hF(x_0, y_0), \quad (\text{I})$$

en kiezen vervolgens als uiteindelijke benadering van y_1

$$y_1^H = y_0 + \frac{1}{2}h[F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E)]. \quad (\text{II})$$

De formules (I) en (II) zijn de formules van Heun; (I) heet de *predictor*, (II) heet de *corrector*.

Ook dit proces kan worden herhaald, door y_1^H als nieuwe beginvoorwaarde te nemen en zo door te gaan.

7.3.4. Voorbeeld

gevraagd wordt de oplossing van de DV $y' = ky$ met beginvoorwaarde $y(0) = y_0$ te benaderen met de methode van Euler en de methode van Heun. We vinden

$$y_1^E = y_0 + hF(x_0, y_0) = (1 + hk)y_0,$$

en

$$\begin{aligned} y_1^H &= y_0 + \frac{1}{2}h[F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E)] = y_0 + \frac{1}{2}h[ky_0 + ky_1^E] = \\ &= (1 + hk + \frac{1}{2}h^2k^2)y_0. \end{aligned}$$

Bij de volgende Euler-stap wordt y_1^E als beginvoorwaarde genomen, dus

$$y_2^E = (1 + hk)y_1^E$$

en in het algemeen

$$y_n^E = (1 + hk)y_{n-1}^E,$$

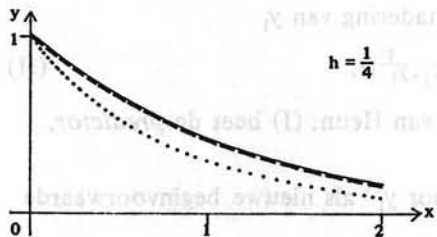
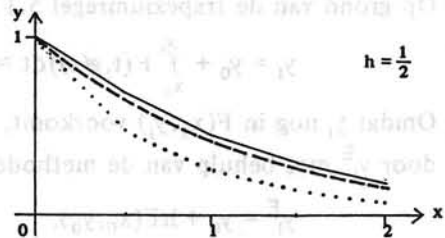
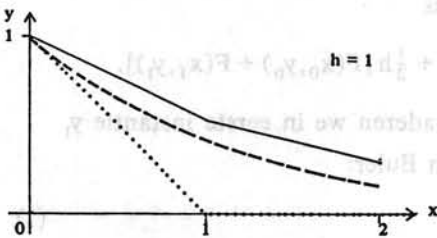
of, zoals met volledige inductie gemakkelijk is te bewijzen,

$$y_n^E = (1 + hk)^n y_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analoog vindt men bij de methode van Heun:

$$y_n^H = (1 + hk + \frac{1}{2}h^2k^2)^n y_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In de figuur ziet men de integratie van de DV van 0 tot 2 voor $h = 1, \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ en $y_0 = 1$, benevens de exacte oplossing $y = e^{kx}$ (k is hier -1 gekozen). Men ziet, dat bij kleiner wordende stapgrootte de numerieke oplossing steeds dichterbij de exacte oplossing komt te liggen.



$y' = -y, y(0) = 1$ geïntegreerd met de methoden van Euler en Heun, van 0 naar 2.

- benaderde oplossing met Euler
- benaderde oplossing met Heun
- exacte oplossing

7.3.5. Nauwkeurigheid

a) Bij de methode van Euler is wegens 7.3.2 de *afbreekfout per integratiestap*

$$E_E(x_0 + h) = y(x_0 + h) - y_1^E = O(h^2).$$

Integreert men een differentiaalvergelijking over een interval met lengte L , met stap h zó dat $nh = L$, dan treedt een cumulatief effect op, doordat men in iedere integratiestap voortrekent met de fouten in alle voorgaande stappen.

Men kan echter wel aantonen dat voor de fout na n integratiestappen h , zó dat $nh = L$, geldt:

$$E_E(x_0 + L) = y(x_0 + nh) - y_n^E = O(h).$$

b) Vergelijken wij het resultaat van de eerste Heun-stap in voorbeeld 7.3.4 met de exacte oplossing in het punt $x = h$, dan zien we, dat geldt:

$$y_1^H = 1 + hk + \frac{1}{2}h^2k^2 \quad (y_0 \text{ is } 1 \text{ genomen})$$

en

$$y_1 = y(h) = e^{kh}.$$

Volgens de stelling van Taylor 4.8.7 is

$$e^{kh} = 1 + hk + \frac{1}{2}h^2k^2 + O(h^3).$$

Voor de afbreekfout per integratiestap $E_H(h) = y(h) - y_1^H$ geldt dus

$$E_H(h) = \frac{1}{6}h^3k^3e^{k\theta h} = O(h^3).$$

Zonder bewijs vermelden we, dat een soortgelijk resultaat in het algemeen geldt, dat wil zeggen

$$E_H(x_0 + h) = y(x_0 + h) - y_1^H = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y) dx - \frac{1}{2}h[F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E)] = O(h^3).$$

Vergelijk dit resultaat met de restterm van de trapeziumregel 5.17.3.

Na n integratiestappen h geldt:

$$E_H(x_0 + L) = y(x_0 + nh) - y_n^H = O(h^2).$$

Men ziet dat bij beide methoden de numerieke oplossing op ieder begrensd interval naar de exacte oplossing nadert, wanneer de stapgrootte h naar 0 gaat.

Klaarblijkelijk is de methode van Heun nauwkeuriger dan die van Euler.

7.3.6. Opmerking

Wanneer men de integraal in 7.3.3 door een nauwkeuriger kwadratuurformule benadert (bijvoorbeeld de Simpsonregel), dan verkrijgt men ook een

nauwkeuriger methode om differentiaalvergelijkingen numeriek te integreren.

In de literatuur zijn nog vele andere numerieke methoden bekend, die alle hun specifieke voor- en nadelen hebben. In dit boek zal hier niet verder op ingegaan worden.

7.3.7. Schatting van de nauwkeurigheid in de praktijk

Evenals voor numerieke integratie (zie 5.18.2) is het voor het numeriek oplossen van een DV mogelijk de fout op grond van numerieke resultaten te schatten.

We zullen steeds de fout in het punt $x = x_0 + L$ schatten, indien de oplossing van de DV op het interval $[x_0, x_0 + L]$ wordt gevraagd.

Aangenomen wordt dat de fout in $x_0 + L$ bij benadering van de vorm Kh^p is, waarin K nog wel van L afhangt. De waarde van p zal hierbij in het algemeen één lager zijn dan de exponent van h in de afbreekfout per stap van de gebruikte methode.

In eerste benadering zal immers gelden:

$$\text{totale fout over } [x_0, x_0 + L] = \frac{L}{h} \times \text{afbreekfout per stap.}$$

(vergelijk 7.3.5a en b).

Is p niet bekend dan kan deze afgeleid worden uit drie, met verschillende stapgrootte bepaalde, benaderingen van $y(x_0 + L)$. Neem achtereenvolgens stapgrootte h , $\frac{1}{2}h$ en $\frac{1}{4}h$, noem de respectievelijke benaderingen van $y(x_0 + L)$: $y_{L,h}$, $y_{L,\frac{1}{2}h}$, $y_{L,\frac{1}{4}h}$, dan geldt:

$$y(x_0 + L) - y_{L,h} \approx Kh^p$$

$$y(x_0 + L) - y_{L,\frac{1}{2}h} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^p Kh^p$$

$$y(x_0 + L) - y_{L,\frac{1}{4}h} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{2p} Kh^p.$$

Dus

$$y_{L,\frac{1}{4}h} - y_{L,\frac{1}{2}h} \approx Kh^p [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p] \left(\frac{1}{2}\right)^p$$

$$y_{L,\frac{1}{2}h} - y_{L,h} \approx Kh^p [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p],$$

zodat inzicht in de orde van de fout verkregen kan worden door in beide laatste uitdrukkingen linker- en rechterleden op elkaar te delen:

$$\frac{y_{L,\frac{1}{2}h} - y_{L,h}}{y_{L,\frac{1}{4}h} - y_{L,\frac{1}{2}h}} \approx 2^p. \quad (*)$$

Is de orde van de fout in $x = x_0 + L$ bekend, dan kan een benadering van K bepaald worden uit $y_{L,\frac{1}{2}h}$ en $y_{L,\frac{1}{4}h}$:

$$K = K(L) \approx \frac{y_{L,\frac{1}{4}h} - y_{L,\frac{1}{2}h}}{\left(\frac{1}{2}h\right)^p [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p]}$$

waarmee tevens een schatting van de in $x = x_0 + L$ bepaalde nauwkeurigheid bekend is: $K(\frac{1}{4}h)^p$.

Een goede procedure is de volgende. Kies een stapgrootte h om mee te beginnen. Benader de oplossing met die stapgrootte en herhaal de berekening een aantal malen met halveringen van de stapgrootte. Kijk welke p bij de gebruikte methode theoretisch is voorspeld en pas ter controle (*) toe met de drie laatst verkregen uitkomsten. Vindt men bijvoorbeeld $2^p = 6,738$, dan ligt $p = 3$ voor de hand. Herhaal echter de berekening (tenminste één keer) via halveringen en gebruik opnieuw (*). Komt er nu bijvoorbeeld $2^p = 7,982$, dan heeft men grotere zekerheid dat het aantal halveringen voldoende is om een zekere mate van nauwkeurigheid te hebben bereikt. Ga tenslotte met de formule voor $K(L)$ na hoe groot de fout in de laatst verkregen uitkomst ongeveer is.

7.3.8. Het doorwerken van een fout in de beginvoorwaarde

Naast de afbreekfout per integratiestap speelt nog een tweede factor een belangrijke rol bij het numeriek oplossen van een beginwaardeprobleem, namelijk hoe een fout in de beginvoorwaarde (bijvoorbeeld veroorzaakt door afrondfouten samenhangend met eindige machinenauwkeurigheid) doorwerkt in de erop volgende stappen.

Voor een goed bruikbare numerieke oplossing zal de afbreekfout per stap voldoende klein moeten zijn en moet een fout in de beginvoorwaarde zo mogelijk verzwakt worden doorgegeven aan de volgende integratiestap.

Noem $y_0 = y(x_0)$ de exacte beginvoorwaarde, en

$\bar{y}_0 = \bar{y}(x_0)$ de gestoorde beginvoorwaarde, en

zij $\epsilon_0 = \bar{y}_0 - y_0$.

Bij een gegeven DV en een gekozen numerieke oplosmethode (Euler, Heun) vindt men na 1 stap ter grootte h de waarde y_1 als men uitgaat van de exacte beginvoorwaarde en \bar{y}_1 als men uitgaat van de gestoorde beginvoorwaarde. Als $\epsilon_1 = \bar{y}_1 - y_1$, dan moeten we dus eisen dat $|\epsilon_1| < |\epsilon_0|$. Indien dit vervuld is wordt de numerieke methode *stabiel* genoemd, anders is hij *instabiel*.

7.3.9. Voorbeeld

Men integreert de DV $y' = 5000(x - y)$ met stapgrootte h met behulp van de methode van Euler. Noem y_1^E de verkregen waarde in het punt $x_0 + h$ uitgaande van de beginvoorwaarde $y(x_0) = 1$. Noem \bar{y}_1^E de verkregen waarde in het punt $x_0 + h$ uitgaande van de (verstoorte) beginvoorwaarde $y(x_0) = 1 + \epsilon_0$. Stel $\epsilon_1 = \bar{y}_1^E - y_1^E$.

Aan welke voorwaarden moet h voldoen opdat geldt $|\epsilon_1| < |\epsilon_0|$.

Oplossing

Eén stap met de methode van Euler levert

$$y_1^E = 1 + h(5000x_0 - 5000)$$

en $\bar{y}_1^E = 1 + \epsilon_0 + h(5000x_0 - 5000(1 + \epsilon_0))$.

Dus $\epsilon_1 = \bar{y}_1^E - y_1^E = \epsilon_0 - 5000h\epsilon_0 = \epsilon_0(1 - 5000h)$.

Alleen als $|1 - 5000h| < 1$, dus als $h < \frac{2}{5000}$, is $|\epsilon_1| < |\epsilon_0|$.

Hieruit blijkt dat er bij het gegeven beginwaardeprobleem heel kleine stappen nodig zijn om de methode van Euler stabiel te laten zijn.

Oefeningen

- Gegeven de DV $y' = \alpha(x)y + \beta(x)$, $y(x_0) = y_0$.
Integreer deze DV van x_0 tot $x_0 + h$ met behulp van de trapeziumregel.
Is het nu nog nodig voor de bepaling van $y_1 (= y(x_0 + h))$ een predictor te gebruiken?
Integreer de DV $y' = y + x$, $y(0) = 1$, één stap, stapgrootte h , met behulp van bovenstaande methode en met de methode van Heun.
Vergelijk beide resultaten met de exacte oplossing ($y = 2e^x - x - 1$) door van het laatste het Taylorpolynoom van geschikte index te beschouwen. Welke term wijkt het eerst af? Is dit in overeenstemming met de theorie?
- Men integreert de DV $y' = \lambda y$ met stapgrootte h met behulp van de methode van Heun. Noem y_1^H de verkregen waarde in het punt $x_0 + h$ uitgaande van de beginvoorwaarde $y_0 = 1$.
Noem \bar{y}_1^H de verkregen waarde in het punt $x_0 + h$ uitgaande van de (verstoorde) beginvoorwaarde $\bar{y}_0 = 1 + \epsilon_0$. Stel $\epsilon_1 = \bar{y}_1^H - y_1^H$. Aan welke voorwaarde(n) moeten h en λ voldoen opdat geldt $|\epsilon_1| < |\epsilon_0|$, met andere woorden opdat de fout, veroorzaakt door een fout in de beginvoorwaarde afneemt?
- Laat door berekening zien dat voor uitdampen van de fout bij de methode van Heun, toegepast op het voorbeeld van 7.3.9, moet gelden $-1 < 1 - 5000h + \frac{(5000h)^2}{2} < 1$, en bepaal hieruit welke waarden van h kunnen worden toegelaten.
- Gegeven is de differentiaalvergelijking $y' = -4y + \sin x$ met beginvoorwaarde $y(0) = 1$. Men wil $y(2)$ benaderen met de methode van Euler met n stappen. Hoe groot moet men n minstens nemen opdat een eenmaal gemaakte fout verzwakt wordt doorgegeven?
- Als opgave 4 maar nu voor de methode van Heun.

Analytische oplosmethoden

7.4. Enkele elementaire methoden

7.4.1. Inleiding

We stellen in deze paragraaf enkele eenvoudige oplosmethoden aan de orde die kunnen worden toegepast bij sommige DV's. We volstaan met het ver-

melden van de oplostechnieken en gaan niet steeds in op het gebied, waar de gevonden oplossingen geldig zijn.

Waar nodig zullen we in de rest van dit hoofdstuk stilzwijgend aannemen dat alle te beschouwen functies voldoende vaak differentieerbaar zijn.

7.4.2. Separabele differentiaalvergelijking

Een *separabele* DV is een DV die te schrijven is in de vorm $y' = \frac{p(x)}{q(y)}$,

waarbij $(x,y) \in U$, ($U \subset \mathbb{R}^2$) en $q(y) \neq 0$ voor alle y met $(x,y) \in U$.

De DV is te schrijven als

$$q(y)y' = p(x).$$

Stel dat $y(x)$ een oplossing is. Invullen geeft dan

$$q(y(x))y'(x) = p(x),$$

waaruit volgt

$$\int q(y(x))y'(x) dx = \int p(x) dx. \quad (*)$$

Stel dat P en Q respectievelijk primitieven zijn van p en q .

Dan geldt dus

$$Q(y(x)) = P(x) + K, \text{ of kortweg } Q(y) = P(x) + K, K \in \mathbb{R}.$$

Is er een beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$ gegeven, dan volgt K uit

$$K = Q(y_0) - P(x_0).$$

Er komt dan

$$Q(y) - Q(y_0) = P(x) - P(x_0)$$

hetgeen ook te schrijven is als

$$\int_{y_0}^y q(t) dt = \int_{x_0}^x p(t) dt.$$

De algemene oplossing van de DV $\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)}$ kan blijkbaar verkregen worden door te schrijven

$$q(y) dy = p(x) dx$$

en vervolgens beide leden te primitiveren (zie (*)).

Men noemt deze methode *separatie* (of *scheiding*) *der variabelen*.

7.4.3. Voorbeelden

a) $x(y+1)y' + y(x+1) = 0.$

Oplossing.

Voor $x \neq 0$ en $y \neq 0$ is deze DV gelijkwaardig met

$$\frac{y+1}{y} y' + \frac{x+1}{x} = 0.$$

Hieruit volgt

$$\int \frac{y+1}{y} dy + \int \frac{x+1}{x} dx = C.$$

Integratie levert

$$y + \ln |y| + x + \ln |x| = C,$$

$$x + y + \ln |xy| = C,$$

$$|xy|e^{x+y} = e^C,$$

$$xye^{x+y} = C^*, \quad (C^* \neq 0).$$

Aangezien ook $y = 0$ een oplossing is (dit blijkt door substitutie in de gegeven DV), kan men de oplossing in de vorm $xye^{x+y} = K$ ($K \in \mathbb{R}$) schrijven. Van het door deze vergelijking bepaalde stelsel krommen is de rechte $x = 0$ geen integraalkromme, want $x = 0$ is geen functie $y(x)$.

Opmerking

Als de DV in differentiaalvorm

$$x(y+1)dy + y(x+1)dx = 0$$

gegeven is, dan is $x = 0$ wèl een oplossing; er wordt in dat geval namelijk in het midden gelaten of x dan wel y de onafhankelijke veranderlijke is.

b) $yy'\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-y^2}$, $|x| < 1$, $0 < y < 1$.

Gevraagd de oplossing door het punt $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Oplossing. Scheiding van variabelen geeft

$$\frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De gevraagde oplossing is dan

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$-\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Na herleiding komt er $y^2 = x^2$, dus $y = x$ of $y = -x$. De gevonden oplossing $y = x$ vervalt in verband met de beginvoorwaarde. We vinden zo als oplossing

$$y = -x, \quad -1 < x < 0.$$

7.4.4. Toepassing

In 7.1.5b hebben we gezien dat het probleem van val met luchtweerstand de snelheid v voldoet aan de DV

$$\frac{dv}{dt} = g - cv.$$

Deze DV kan geschreven worden als

$$\frac{dv}{g - cv} = dt$$

en integratie levert

$$-\frac{1}{c} \ln |g - cv| = t + k$$

of

$$|g - cv| = e^{-ck} e^{-ct}.$$

Als we aannemen dat op tijdstip $t = 0$ geldt $v = 0$, dan vinden we $g = e^{-ck}$, zodat voor v geldt

$$v(t) = g \frac{1 - e^{-ct}}{c}.$$

Aangezien $v(t) = s'(t)$ volgt

$$s'(t) = g \frac{1 - e^{-ct}}{c},$$

en dus

$$s(t) = \frac{g}{c}t + \frac{g}{c^2}e^{-ct} + D.$$

De constante D wordt bepaald uit de relatie $s(0) = 0$. Dus $D = -\frac{g}{c^2}$.

Bijgevolg is de afstand die het voorwerp aflegt in t seconden ($c = \frac{k}{m}$)

$$s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}). \quad (*)$$

Het is interessant om deze formule voor $s(t)$ te vergelijken met de uitkomst als de luchtweerstand wordt verwaarloosd.

In dat geval krijgen we: $\frac{dv}{dt} = g$, $s'(t) = v(t) = gt$, $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Laat zien dat dit resultaat ook kan worden gevonden door in (*) de limiet $k \rightarrow 0$ te nemen.

7.4.5. Homogene differentiaalvergelijking

a) Een functie $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heet *homogeen* van de graad n ($n \in \mathbb{N}$) als

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y) \text{ voor alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ en } t \in \mathbb{R}^+.$$

Zo is $F(x, y) = x^2 + y^2$ homogeen van de graad 2,

$$F(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2} \text{ homogeen van de graad 1,}$$

en $F(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ homogeen van de graad 0.

b) Een DV van de vorm $y' = F(x, y)$ heet *homogeen* als F homogeen is van de graad 0.

Als F homogeen is van de graad 0 dan geldt

$$F(x, ux) = F(1, u).$$

Passen we op een homogene DV de substitutie $y = ux$ toe, dan komt er

$$u + xu' = F(1, u),$$

waarbij u als functie van x beschouwd wordt.

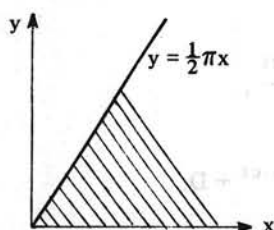
Deze DV is separabel.

7.4.6. Voorbeeld

Bepaal van de DV

$$y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{2y}{x}$$

de oplossingen in het gebied bepaald door $0 < y \leq \frac{1}{2}\pi x$.



Oplossing.

Stel $y = ux$ met $0 < u \leq \frac{1}{2}\pi$. Dan wordt de vergelijking

$$u + xu' = \frac{ux}{x} + \sin \frac{2ux}{x} = u + \sin 2u,$$

dus $xu' = \sin 2u$. Deze laatste vergelijking heeft in het gegeven gebied de constante oplossing $u = \frac{1}{2}\pi$.

Voor $0 < u < \frac{1}{2}\pi$ geldt

$$\frac{du}{\sin 2u} = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2} \ln \tan u = \ln x + \frac{1}{2} \ln C \quad (C > 0), \text{ en}$$

(merk op dat voor het gegeven gebied $x > 0$ is),

$$\tan \frac{y}{x} = Cx^2.$$

De oplossingen worden gegeven door

$$y = x \arctan Cx^2, \quad (x > 0, C > 0),$$

$$y = \frac{1}{2}\pi x, \quad (x > 0).$$

Deze oplossingen liggen in het bovengenoemde gebied.

7.4.7. Exacte differentiaalvergelijking

De DV

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

wordt een *exacte* DV genoemd als P en Q continue partiële afgeleiden hebben, terwijl

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (\text{I})$$

Om zo'n DV op te lossen, trachten we een functie $u(x,y)$ te vinden zó dat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \text{ en } \frac{\partial u}{\partial y} = Q. \quad (\text{II})$$

Hebben we $u(x,y)$ gevonden, dan geeft de DV:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

ofwel

$$\frac{d}{dx} u(x, y(x)) = 0.$$

Primitiveren levert dus de in impliciete vorm gegeven oplossing

$$u(x, y(x)) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Het is duidelijk dat de voorwaarde (I) noodzakelijk is voor het bestaan van zo'n functie u ; immers, er moet dan volgens 6.8.6 gelden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \text{ ofwel } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

hetgeen wegens (II) betekent $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

In 9.6.4 zullen we bewijzen dat de voorwaarde (I) ook voldoende is, dat wil zeggen: als op een open cirkelschijf V voldaan is aan (I) dan bestaat er op V een functie u met de eigenschappen (II). Men noemt daarom (I) de *integreerbaarheidsvoorwaarde*.

Men kan bewijzen dat op deze wijze inderdaad iedere oplossing verkregen wordt. Daar in de impliciete vorm van de oplossing evengoed x als functie van y is op te vatten, wordt de DV ook vaak in differentiaalvorm

$$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$$

geschreven.

De techniek voor het vinden van $u(x,y)$ moge blijken uit het volgende voorbeeld.

7.4.8. Voorbeeld

$$3x^2y + 2xy^2 + (x^3 + 2x^2y + 4y^3)y' = 0.$$

Oplossing. Stel $P(x,y) = 3x^2y + 2xy^2$ en $Q(x,y) = x^3 + 2x^2y + 4y^3$.

Dan is $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 4xy$, dus aan de integreerbaarheidsvoorwaarde

7.4.7(I) is voldaan. Stel nu $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = 3x^2y + 2xy^2$.

Dan is $u = x^3y + x^2y^2 + \varphi(y)$ (bij integratie naar x vervult $\varphi(y)$ de rol van integratieconstante).

Uit

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + \varphi'(y) = x^3 + 2x^2y + 4y^3 = Q(x,y)$$

vinden we $\varphi'(y) = 4y^3$. Nemen we nu $\varphi(y) = y^4$, dan vinden we als oplossing

$$(II) \quad x^3y + x^2y^2 + y^4 = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Hierbij is y impliciet gegeven als functie van x . Merk op dat het voldoende is, één oplossing voor φ te vinden.

7.4.9. Integrerende factor

Indien de in de DV

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

optredende functies P en Q niet aan de integreerbaarheidsvoorwaarde

7.4.7(I) voldoen, dan kan men proberen een functie φ van x en y te vinden, zó dat de DV na vermenigvuldiging met $\varphi(x,y)$ exact wordt.

Dan moet φ voldoen aan de betrekking

$$\frac{\partial(\varphi P)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial x}. \quad (*)$$

Een dergelijke functie φ noemt men een *integrerende factor*. In het algemeen is zulk een integrerende factor moeilijk te bepalen, want men moet een oplossing φ vinden van de *partiële* differentiaalvergelijking (*).

7.4.10. Voorbeeld

Gegeven is dat de DV

$$(y \cos x - y^3) dx - (\sin x + xy^2) dy = 0$$

een integrerende factor heeft die alleen van y afhangt. Bepaal zo'n integrerende factor en los vervolgens de DV op.

Oplossing.

$$\text{Uit } \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(y)(y \cos x - y^3)] = \frac{\partial}{\partial x} [-\varphi(y)(\sin x + xy^2)]$$

$$\text{volgt } \varphi'(y)(y \cos x - y^3) + \varphi(y)(\cos x - 3y^2) = -\varphi(y)(\cos x + y^2).$$

Na herleiding komt er

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = -\frac{2}{y}$$

met als oplossingen $\ln|\varphi(y)| = -2 \ln|y| + C$.

Hieruit volgt dat

$$\varphi(y) = \frac{1}{y^2}$$

een integreerfactor is (we hebben $C = 0$ genomen) en dat

$$\left(\frac{\cos x}{y} - y\right)dx - \left(\frac{\sin x}{y^2} + x\right)dy = 0$$

een exacte DV is.

Volgens de methode van 7.4.8 vinden we als oplossing

$$\frac{\sin x}{y} - xy = K, \quad y \neq 0.$$

Daar ook $y = 0$ aan de gegeven DV voldoet, schrijven we de oplossing als volgt

$$\sin x - xy^2 = Ky \quad \text{of} \quad y = 0.$$

Oefeningen

- Los op de DV $y' = \frac{x+1}{y+1}$, $y > -1$.
- a) Los op de DV $\sqrt{1-x^2} dy - 2\sqrt{1-y} dx = 0$, $|x| \leq 1$, $y \leq 1$.
b) Los op de DV $\frac{y'}{2\sqrt{1-y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$, $y < 1$.
- $F(x,y)$ is homogeen van de graad n .

Bewijs dat

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = nF.$$

(Stelling van Euler).

Aanwijzing: Differentieer $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$ naar t .

- Los op de DV

$$4x^2 \frac{dy}{dx} - (x+y)^2 = 0, \quad x > 0.$$

- a) Los op de volgende in differentiaalvorm gegeven DV:

$$(3x + 2y)dx + (4x + 3y)dy = 0, \quad x > 0 \quad \text{en} \quad y > 0.$$

- b) Herleid de volgende DV door de substitutie $x = u + 1$, $y = v - 1$ tot oefening a) en geef de oplossingen:

$$(3x + 2y - 1)dx + (4x + 3y - 1)dy = 0, \quad x > 1, \quad y > -1.$$

- Los op de DV

$$2x - 2y + (1 - 2x)y' = 0$$

en bepaal de oplossing door $(0,1)$.

7. Los op de DV

$$(2x \sin y + \cos x)dx + (x^2 \cos y + \sin y)dy = 0.$$

8. Los op de DV

$$(6 + 3xy^2 + 2y^2) + (2x^2y + 2xy)y' = 0$$

(zoek een integrerende factor die alleen van x afhangt).

9. Los op de DV

$$x + y(x^2 + 3y^2 + 3)y' = 0$$

(zoek een integrerende factor die alleen van y afhangt).

7.5. Lineaire differentiaalvergelijkingen

7.5.1. Inleiding

In 7.1.9 hebben we verteld dat een lineaire DV van de n -de orde van de vorm

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (\text{I})$$

is, en in 7.2.7 hebben we een existentie-eenduidigheidsstelling gegeven voor het corresponderende beginwaardeprobleem. Bij de lineaire DV (I) beschouwen we de bijbehorende zogenaamde *gereduceerde* DV.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (\text{II})$$

(sommige boeken spreken hier van een homogeen lineaire DV).

Alvorens de structuur van de oplossingsverzameling van (II) en (I) te behandelen, bespreken we eerst een eenvoudig geval, de lineaire DV van de eerste orde.

7.5.2. Lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde

Teneinde de DV

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (\text{I})$$

waarbij $a, b: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn op (α, β) , op te lossen, bekijken we eerst de bijbehorende gereduceerde DV

$$y' + a(x)y = 0. \quad (\text{II})$$

Hiervan is $y = 0$ een oplossing (de triviale oplossing). De andere oplossingen vindt men door de variabelen te scheiden.

Er komt

$$\frac{dy}{y} + a(x)dx = 0,$$

dus, met $A'(x) = a(x)$,

$$y = Ce^{-A(x)}.$$

Noemen we $g(x) = e^{-A(x)}$, dan is

$$y = Cg(x). \quad (\text{III})$$

Dit is de algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking (II).

We proberen nu een oplossing van de *niet-gereduceerde vergelijking* te vinden, door in (III) de constante C te vervangen door een nader te bepalen functie u (methode van *variatie van de constanten*) en vervolgens

$$y = u(x)g(x)$$

te substitueren in (I).

Dit levert

$$u'(x)g(x) + u(x)(g'(x) + a(x)g(x)) = b(x).$$

Aangezien g een oplossing is van de gereduceerde vergelijking, is

$$g'(x) + a(x)g(x) = 0,$$

en dus

$$u'(x) = \frac{b(x)}{g(x)}.$$

Indien we voor u een willekeurige primitieve u_0 van $\frac{b}{g}$ nemen dan is

$$u(x) = u_0(x) + C$$

en dus

$$y = u_0(x)g(x) + Cg(x).$$

Uit de algemene theorie van lineaire differentiaalvergelijkingen (zie 7.5.6) blijkt dat hiermee alle oplossingen van (I) verkregen zijn.

7.5.3. Voorbeeld

Zij gegeven de DV

$$xy' + y = 2x, \quad (x > 0).$$

Schrijven we de DV in de vorm

$$y' + \frac{y}{x} = 2,$$

dan zien we dat hij van de gedaante (I) is.

De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking is

$$y = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Substitutie van $y = \frac{u(x)}{x}$ in de niet-gereduceerde vergelijking geeft

$$\frac{xu'(x) - u(x)}{x^2} + \frac{u(x)}{x^2} = 2,$$

$$u'(x) = 2x.$$

Kiezen we $u_0(x) = x^2$, dan is de algemene oplossing van de gegeven DV

$$(III) \quad y = x + \frac{C}{x}.$$

7.5.4. Gereduceerde lineaire differentiaalvergelijkingen van de n-de orde

Als $y_1(x)$ en $y_2(x)$ op (α, β) twee oplossingen zijn van de DV 7.5.1 (II) dan volgt door direct invullen in de DV dat voor alle $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ geldt dat $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ ook een oplossing van deze DV is. De oplossingen van 7.5.1 (II) vormen dus een vectorruimte, een deelruimte van de vectorruimte van alle n maal differentieerbare functies op (α, β) . Op grond van de existentistelling 7.2.7 kunnen we bij iedere keuze van de beginwaarden een oplossing vinden; er zijn dus oneindig veel oplossingen van de DV.

Neem eens aan dat $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ oplossingen zijn, dan kunnen we de vraag stellen of de algemene oplossing van 7.5.1 (II) te schrijven is als

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

waarbij C_1, C_2, \dots, C_n willekeurige reële constanten zijn.

Kiezen we $x_0 \in (\alpha, \beta)$, dan moeten we voor iedere keuze van

$y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ in staat zijn de constanten C_1, C_2, \dots, C_n te bepalen uit de vergelijkingen

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) \\ y'_0 &= C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) \\ &\vdots \\ y_0^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0). \end{aligned}$$

Dit lukt als de *determinant van Wronski*

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ongelijk aan 0 is voor $x = x_0$. Aangezien x_0 willekeurig gekozen kan worden in het interval (α, β) , is het noodzakelijk en voldoende dat

$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ voor iedere $x \in (\alpha, \beta)$.

Men kan aantonen dat voor ieder stelsel oplossingen y_1, y_2, \dots, y_n geldt:

òf $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ voor alle $x \in (\alpha, \beta)$,

òf $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ voor alle $x \in (\alpha, \beta)$.

In het eerste geval heet het stelsel *afhankelijk*, in het tweede geval heet het stelsel *onafhankelijk* en spreken we van een *fundamenteelstelsel* (van oplossingen).

We vatten het voorgaande samen in de nu volgende stelling.

7.5.5. Stelling

Als de functies $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn op het interval (α, β) , als y_1, y_2, \dots, y_n oplossingen zijn van 7.5.1 (II) en als $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ voor minstens één punt $x \in (\alpha, \beta)$, dan is iedere oplossing van 7.5.1 (II) te schrijven als lineaire combinatie van de oplossingen y_1, y_2, \dots, y_n .

De algemene oplossing van 7.5.1 (II) is dan

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

7.5.6. Algemene lineaire differentiaalvergelijkingen van de n-de orde

Voor de algemene lineaire differentiaalvergelijking 7.5.1 (I) geldt de volgende stelling.

Stelling

Gegeven de functies $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ zijn continu op (α, β) . Zij (y_1, y_2, \dots, y_n) een fundamenteelstelsel (van oplossingen) van de gereduceerde DV 7.5.1 (II) en zij y_p een particuliere oplossing van 7.5.1 (I).

Dan is de algemene oplossing van 7.5.1 (I)

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Bewijs

Is naast y_p ook \tilde{y}_p een oplossing van de DV 7.5.1 (I), dan is

$$\tilde{y}_p^{(n)} + a_{n-1}(x)\tilde{y}_p^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\tilde{y}_p = b(x)$$

$$y_p^{(n)} + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y_p = b(x).$$

Aftrekking levert

$$(\tilde{y}_p - y_p)^{(n)} + a_{n-1}(x)(\tilde{y}_p - y_p)^{(n-1)} + \dots + a_0(x)(\tilde{y}_p - y_p) = 0,$$

dus $\tilde{y}_p - y_p$ is een oplossing van 7.5.1 (II).

Omdat iedere oplossing van 7.5.1 (II) te schrijven is als lineaire combinatie van de oplossingen y_1, y_2, \dots, y_n geldt dus

$$\tilde{y}_p = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Omgekeerd is voor elke keuze van C_1, \dots, C_n het rechterlid een oplossing van 7.5.1 (I), zoals door invullen blijkt. De algemene oplossing van 7.5.1 (I) is dus te schrijven als

$$y = y_p + C_1 y_1 + \dots + C_n y_n,$$

waarbij y_p een particuliere oplossing is van 7.5.1 (I) en (y_1, y_2, \dots, y_n) een fundamenteelstelsel is van 7.5.1 (II). \square

Het eerste probleem is dus een fundamenteelstelsel van de gereduceerde DV te vinden. In het geval dat de coëfficiënten $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ constanten zijn, is dat niet al te moeilijk. We behandelen dit in de volgen-

de paragraaf. Zijn de coëfficiënten niet constant, dan is dit een lastig probleem, waar we hier niet verder op ingaan (zie eventueel echter 10.7.4). Het tweede probleem is, één particuliere oplossing van de niet-gereduceerde DV te vinden. In het geval van constante coëfficiënten zullen we dit doen door de *methode van de onbepaalde coëfficiënten*.

Oefeningen

1. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

a) $y' + y = e^{-x}$.

b) $xy' + \frac{y}{\ln x} = 2, \quad x > 1$.

c) $y' \cos x + y \sin x = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

d) $2\sqrt{x-1} y' + y = 1, \quad x > 1$.

2. Verifieer dat de gegeven functies oplossingen zijn van de DV en bepaal de determinant van Wronski van deze oplossingen.

a) $y''' + 4y' = 0$; $1, \cos 2x, \sin 2x$.

b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; e^x, xe^x, x^2e^x .

c) $xy''' - y'' = 0$; $1, x, x^3$.

7.6. Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

7.6.1. Inleiding

In deze paragraaf proberen we de algemene oplossing te bepalen van de DV

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x), \quad (\text{I})$$

waarbij $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, en $b: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continu is.

We beschouwen de bijbehorende gereduceerde DV

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (\text{II})$$

Voor het vinden van een fundamenteelstelsel van de gereduceerde DV (II) blijkt het nuttig te zijn om y als een *complexe functie van de reële variabele* x te beschouwen. Hiermee bedoelen we een functie van de vorm

$$h(x) = f(x) + ig(x),$$

waarin f en g reële functies van x zijn. Wanneer f en g differentieerbaar zijn, dan noemen we h een *differentieerbare complexe functie* van de reële variabele x . Onder de *afgeleide* van h verstaan we de functie h' gedefinieerd door

$$h'(x) = f'(x) + ig'(x).$$

De gewone rekenregels voor het differentiëren van een som, verschil, product en quotiënt van functies blijven geldig (ga dit na voor som en product).

Ook geldt dat

$$\frac{de^{\lambda x}}{dx} = \lambda e^{\lambda x}, \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

We tonen dit als volgt aan. Zij $\lambda = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Zij $x \in \mathbb{R}$.

Volgens 2.8.1 is

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx.$$

De afgeleide van e^{ibx} is gelijk aan

$$-b \sin bx + ib \cos bx = ib e^{ibx}.$$

De afgeleide van $e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx}$ is dan gelijk aan

$$ae^{ax} e^{ibx} + e^{ax} ib e^{ibx} = (a+ib)e^{(a+ib)x}.$$

7.6.2. De gereduceerde vergelijking

In voorbeeld 7.1.3b hebben we gezien dat de oplossingen van een gereduceerde lineaire DV van de eerste orde met constante coëfficiënten de gedaante $y = Ce^{kx}$ hebben.

Dit brengt ons er toe om te proberen ook in het geval dat de orde n is oplossingen van dit type te vinden. Daartoe substitueren we $y = e^{\lambda x}$, met eventueel $\lambda \in \mathbb{C}$, in 7.6.1 (II).

Aangezien $y^{(m)} = \lambda^m e^{\lambda x}$ (zie 7.6.1) leidt dit tot

$$(\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0$$

ofwel (wegens $e^{\lambda x} \neq 0$)

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (\text{III})$$

Dit is een n -de graadsvergelijking in λ met reële coëfficiënten, de zogenaamde *karakteristieke vergelijking*.

Iedere reële wortel λ_j van (III) levert een oplossing $e^{\lambda_j x}$ van 7.6.1 (II).

Volgens 2.11.6 heeft (III) precies n wortels, als we een k -voudige wortel voor k wortels tellen. Indien deze n wortels alle reëel en enkelvoudig zijn dan vormen deze oplossingen een fundamenteelstelsel (voor $n = 3$ volgt dit uit oefening 6.3.7) en is

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

de algemene oplossing van 7.6.1 (II).

Is $\lambda_j = a + bi$ een enkelvoudige niet-reële wortel, dan is volgens 2.11.11 ook $\bar{\lambda}_j = a - bi$ een enkelvoudige niet-reële wortel. De met λ_j en $\bar{\lambda}_j$ corresponderende complexe oplossingen

$$y_j = e^{(a+bi)x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

en

$$\bar{y}_j = e^{(a-bi)x} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx)$$

kan men als volgt omvormen tot twee reële onafhankelijke oplossingen:

$$\frac{1}{2}(y_j + \bar{y}_j) = e^{ax} \cos bx,$$

$$\frac{1}{2i}(y_j - \bar{y}_j) = e^{ax} \sin bx.$$

Zonder bewijs vermelden we nog het volgende.

Als λ_j een k -voudige reële wortel is, dan corresponderen met λ_j de k onafhankelijke oplossingen

$$e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_j x}.$$

Is $\lambda_i = a + bi$ een k -voudige niet-reële wortel, dan is ook $\bar{\lambda}_i = a - bi$ een k -voudige wortel (2.11.11c) en met deze $2k$ wortels corresponderen de $2k$ onafhankelijke oplossingen

$$e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \cos bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos bx,$$

$$e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \sin bx.$$

Uit het bovenstaande volgt dat in alle gevallen met behulp van de n wortels van de karakteristieke vergelijking n reële lineair onafhankelijke oplossingen van de gereduceerde DV 7.6.1 (II) gevormd kunnen worden.

Geven we deze oplossingen aan met y_1, y_2, \dots, y_n dan is de algemene oplossing

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n.$$

7.6.3. Voorbeelden

a) De DV

$$y''' - 7y' + 6y = 0$$

heeft karakteristieke vergelijking

$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$$

met de wortels $-3, 1, 2$.

De algemene oplossing is

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}.$$

b) De DV

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

heeft karakteristieke vergelijking

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$$

met de wortels $-2, 1, 1$.

De algemene oplossing is

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

De wortels van de karakteristieke vergelijking zijn $-1 \pm 2i$.

De algemene oplossing is

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x.$$

d) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

De wortels van de karakteristieke vergelijking zijn 1 en $\pm 2i$.

De algemene oplossing is

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

e) $y^{(6)} - 2y^{(3)} + y = 0$.

De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^6 - 2\lambda^3 + 1 = 0 \quad \text{ofwel}$$

$$(\lambda^3 - 1)^2 = 0.$$

De wortels zijn

$$1, 1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

De algemene oplossing is

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + C_4 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + C_5 x e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + C_6 x e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right).$$

7.6.4. De niet-gereduceerde vergelijking

Als we erin geslaagd zijn de algemene oplossing van 7.6.1(II) te bepalen, hebben we volgens 7.5.6 nog één particuliere oplossing van de niet-gereduceerde DV 7.6.1(I) nodig om de algemene oplossing van 7.6.1(I) te verkrijgen. We proberen deze particuliere oplossing van 7.6.1(I) te vinden door toepassing van de *methode der onbepaalde coëfficiënten*.

Vaak is $b(x)$ van de vorm

$$b(x) = (C_r x^r + \dots + C_0) e^{ax} \begin{cases} \sin bx \\ \cos bx \end{cases}, \quad (*)$$

waarbij r , a of b gelijk aan nul kunnen zijn.

We gaan eerst na of $a + bi$ een oplossing is van de karakteristieke vergelijking bij 7.6.1(II). Als $a + bi$ geen oplossing is kiezen we de particuliere oplossing $y_p(x)$ van 7.6.1(I) in de vorm

$$y_p(x) = (A_r x^r + \dots + A_0) e^{ax} \sin bx + (B_r x^r + \dots + B_0) e^{ax} \cos bx.$$

De onbekende coëfficiënten A_r, \dots, B_0 bepalen we dan door $y_p(x)$ in te vullen in de gegeven DV.

Als $a + bi$ een s -voudige wortel is van de karakteristieke vergelijking kiezen we $y_p(x)$ in de vorm

$$y_p(x) = x^s (A_r x^r + \dots + A_0) e^{ax} \sin bx + x^s (B_r x^r + \dots + B_0) e^{ax} \cos bx,$$

waarna we weer $y_p(x)$ invullen in de gegeven DV.

Als $b(x)$ van de vorm

$$b(x) = b_1(x) + \dots + b_k(x)$$

is, kunnen we ook als volgt te werk gaan.

Bepaal particuliere oplossingen y_1, \dots, y_k van respectievelijk de DV's

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Dan is $y_p(x) = y_1(x) + \dots + y_k(x)$ een particuliere oplossing van

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_1(x) + \dots + b_k(x),$$

zoals door invullen eenvoudig blijkt.

Op grond hiervan kan men het rechterlid van 7.6.1(I) term voor term beschouwen om het rekenwerk overzichtelijk te houden. Speciaal als $b(x)$ een lineaire combinatie is van uitdrukkingen van het type (*), met verschillende parameterwaarden, kan men op deze manier met voordeel splitsen. De methode wordt duidelijk gemaakt in de voorbeelden in 7.6.5.

7.6.5. Voorbeelden

a) $y''' - 7y' + 6y = 6x^2 - 14x.$

De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking is

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}, \text{ zie voorbeeld 7.6.3a.}$$

Om een particuliere oplossing te vinden proberen we een oplossing van de vorm $y = px^2 + qx + r$. Nu geldt

$$\begin{array}{l|l} y = px^2 + qx + r & 6 \\ y' = 2px + q & -7 \\ y'' = 2p & 0 \\ y''' = 0 & 1 \end{array}$$

Substitutie in de DV leidt tot de betrekkingen

$$\begin{array}{rcl} 6p & = & 6, \\ 6q - 14p & = & -14, \\ 6r - 7q & = & 0. \end{array}$$

Hieruit volgt $p = 1, q = r = 0$.

De algemene oplossing is

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + x^2.$$

Bij het laatste voorbeeld zagen we dat door 'slim stellen' een particuliere oplossing van de DV gevonden werd. Hier was $b(x)$ een polynoom. In de volgende voorbeelden worden nog enige andere gevallen van 'slim stellen' behandeld.

b) $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x$.

De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking is

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Zoek een particuliere oplossing van de vorm

$$\begin{array}{l} y = a \cos x + b \sin x \\ y' = b \cos x - a \sin x \\ y'' = -a \cos x - b \sin x \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \right.$$

Door substitueren vinden we

$$2a - 3b - a = 0 \quad \text{en} \quad 2b + 3a - b = 10.$$

Dus $a = 3$ en $b = 1$.

De algemene oplossing is

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3 \cos x + \sin x.$$

c) $y'' + 3y' + 2y = 3xe^x$.

De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking is

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Zoek een particuliere oplossing van de vorm

$$\begin{array}{l} y = axe^x + be^x \\ y' = axe^x + (a+b)e^x \\ y'' = axe^x + (2a+b)e^x \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right.$$

Hieruit volgt

$$6a = 3, \quad 5a + 6b = 0.$$

We vinden $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{12}$.

De algemene oplossing is

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^x - \frac{5}{12}e^x.$$

d) $y'' + 2y' + 5y = x + \sin x$.

De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking is (zie 7.6.3c)

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Zoek een particuliere oplossing van de vorm

$$y = ax + b + c \sin x + d \cos x.$$

$$y = ax + b + c \sin x + d \cos x \quad \left| \begin{array}{l} 5 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$y' = \quad a - d \sin x + c \cos x \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$y'' = \quad -c \sin x - d \cos x \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$$

Hieruit volgt

$$5a = 1, \quad 2a + 5b = 0, \quad 4c - 2d = 1, \quad 2c + 4d = 0.$$

$$\text{We vinden } a = \frac{1}{5}, \quad b = -\frac{2}{25}, \quad c = \frac{1}{5}, \quad d = -\frac{1}{10}.$$

De algemene oplossing is

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25} + \frac{1}{5} \sin x - \frac{1}{10} \cos x.$$

e) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 20 \cos 2x$.

De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking is (zie 7.6.3d)

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Probeer als particuliere oplossing

$$y = ax \cos 2x + bx \sin 2x.$$

$$y = \quad ax \cos 2x + bx \sin 2x \quad \left| \begin{array}{l} -4 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$y' = \quad 2bx \cos 2x - 2ax \sin 2x + a \cos 2x + b \sin 2x \quad \left| \begin{array}{l} 4 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$y'' = \quad -4ax \cos 2x - 4bx \sin 2x + 4b \cos 2x - 4a \sin 2x \quad \left| \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$y''' = \quad -8bx \cos 2x + 8ax \sin 2x - 12a \cos 2x - 12b \sin 2x \quad \left| \begin{array}{l} 1 \end{array} \right.$$

Hieruit volgt

$$4a - 8b = 0, \quad -8a - 4b = 20; \text{ we vinden } a = -2, \quad b = -1.$$

De algemene oplossing is

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - 2x \cos 2x - x \sin 2x.$$

7.6.6. Toepassing: de mathematische slinger

Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten komen in de techniek veelvuldig voor. Als eenvoudige toepassingen behandelen we de *mathematische slinger* met vrije en gedempte slingering, zie voorbeeld 7.1.5c

a) Voor de vrije slingering vonden we in 7.1.5c de DV

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (\text{I})$$

Deze vergelijking is met de ons ten dienste staande middelen niet op te lossen, maar voor kleine uitwijkingen φ kunnen we een vereenvoudiging bewerkstelligen. Er geldt dan $\sin \varphi \approx \varphi$ en de DV gaat dan over in de lineaire DV met constante coëfficiënten

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \quad \text{waarin } \omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (\text{II})$$

Vergelijking (II) wordt de vergelijking van de *harmonische oscillator* genoemd. Deze treedt steeds op, wanneer in een systeem de kracht recht evenredig is met de uitwijking en daaraan tegengesteld gericht (bijv. bij een veer).

De karakteristieke vergelijking van (II) is

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

met als oplossingen

$$\lambda = \pm i\omega.$$

De algemene oplossing van (II) wordt dan gegeven door

$$\varphi(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t. \quad (\text{III})$$

De constanten C_1 en C_2 volgen uit de beginvoorwaarden.

Brengen we de slinger bv. onder een hoek φ_0 uit de evenwichtsstand en laten we hem los op tijdstip $t = 0$, dan hebben we als beginvoorwaarden

$$\text{i) } \varphi(0) = \varphi_0$$

en, daar de snelheid op $t = 0$ nul is

$$\text{ii) } \varphi'(0) = 0.$$

Daaruit volgt via substitutie in (III)

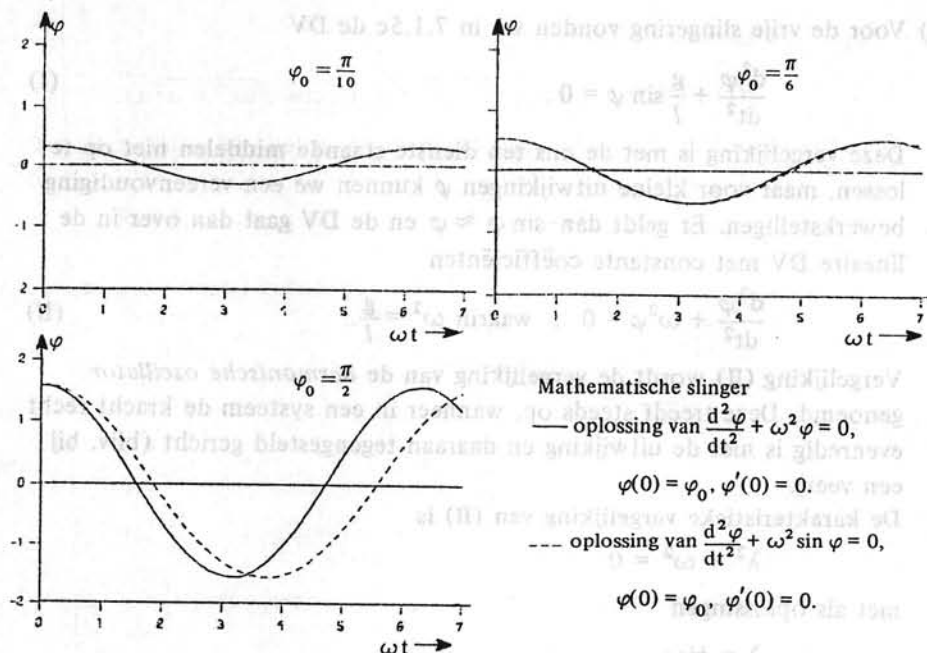
$$\varphi_0 = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2,$$

$$0 = \omega C_1 \cos(0) - \omega C_2 \sin(0) = \omega C_1.$$

(III) wordt voor deze beginvoorwaarden:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t.$$

De figuur toont het verloop van de trilling voor verschillende beginuitwijkingen. Tevens ziet men gestippeld de oplossing van (I) zodat een indruk wordt verkregen voor welke uitwijkingen vergelijking (II) vergelijking (I) nog redelijk benadert.



b) Voor de gedempte slingering vonden we in 7.1.5c de DV

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (\text{IV})$$

Vervangen we weer $\sin \varphi$ door φ en noemen we $\frac{g}{l} = \omega^2$, $\frac{b}{m} = 2a$ dan gaat (IV) over in

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2a \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 \varphi = 0 \quad (a > 0). \quad (\text{V})$$

De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^2 + 2a\lambda + \omega^2 = 0.$$

Er treden nu drie verschillende gevallen op al naar gelang de wortels van deze vergelijking reëel en verschillend, reëel en samenvallend of complex zijn.

i) $a^2 - \omega^2 > 0$. De wortels zijn reëel en verschillend (en dus beide negatief). Er treedt nu geen trilling op; de oplossing is de som van twee dalende e-machten.

$$\varphi(t) = C_1 e^{(-a - \sqrt{a^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{(-a + \sqrt{a^2 - \omega^2})t}$$

ii) $a^2 - \omega^2 = 0$. De wortels zijn reëel en gelijk. Er treedt (nog net) geen trilling op. Men noemt dit *kritische demping*. De algemene oplossing is:

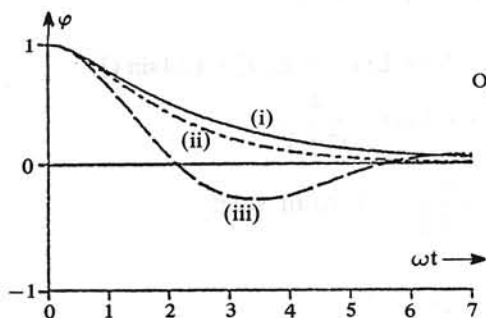
$$\varphi(t) = C_1 e^{-at} + C_2 t e^{-at}.$$

iii) $a^2 - \omega^2 < 0$. De wortels zijn complex. Er treedt een *gedempte trilling*

op. De algemene oplossing is

$$\varphi(t) = e^{-at}(C_1 \sin \sqrt{\omega^2 - a^2} t + C_2 \cos \sqrt{\omega^2 - a^2} t).$$

De figuur toont de 3 gevallen met beginvoorwaarden $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$.



Oplossing van $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2a\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\varphi = 0$,

$$\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0.$$

— $\frac{a}{\omega} = \frac{5}{4}$ $\varphi(t) = \frac{1}{3}(-e^{-2\omega t} + 4e^{-\frac{1}{2}\omega t})$.

-·- $\frac{a}{\omega} = 1$ $\varphi(t) = e^{-\omega t} + \omega t e^{-\omega t}$

- - $\frac{a}{\omega} = \frac{5}{13}$ $\varphi(t) = e^{-\frac{5}{13}\omega t}(\frac{5}{12}\sin \frac{12}{13}\omega t + \cos \frac{12}{13}\omega t)$.

Oefeningen

Los de onderstaande differentiaalvergelijkingen op:

- $y'''' + 4y = 0$.
- $y'''' - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$
- $y'' + 4y = 3 \sin x$.
- $y'' + 4y = \sin 2x$.
- $y'''' - 2y'' + y = 2 \sin x + 5 \cos x$.
- $y'' - 2y' + y = e^x$.
- $y'' - 4y = e^{2x}$.
- $y'' - 2y' + 2y = -3e^x \sin 2x$.

7.7. Toepassing van de Laplace transformatie

7.7.1. Inleiding

In 5.14 hebben we de Laplace transformatie ingevoerd. Stelling 5.16.1 en gevolg 5.16.2 impliceren, dat een beginwaardeprobleem van een lineaire DV met constante coëfficiënten door Laplace transformatie wordt overgevoerd in een algebraïsche vergelijking.

Bij beginwaardeproblemen voor lineaire DV's met constante coëfficiënten en een eenvoudig rechterlid (polynoom, sin, cos, exp) levert Laplace transformatie dus een eenvoudige (alternatieve) oplosmethode.

7.7.2. Voorbeelden

a) $y'' + y = 4 \sin t$, $0 < t < \infty$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Oplossing.

Stel $L[y(t)] = Y(s)$. Dan is $L[y'' + y] = L[y''] + L[y] = L[4 \sin t]$.

$$\text{Dan is } (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s) = \frac{4}{s^2 + 1},$$

$$\text{of } (s^2 + 1)Y(s) = s - 2 + \frac{4}{s^2 + 1}, \quad \text{waaruit volgt}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{4}{(s^2 + 1)^2}.$$

$$\text{Dus } y(t) = \cos t - 2 \sin t - 2t \cos t + 2 \sin t = (1 - 2t) \cos t.$$

b) $y'' + 3y' - 4y = e^{-t}$, $0 < t < \infty$; $y(0) = y'(0) = 0$.

Oplossing.

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) - 4Y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{oftewel}$$

$$(s^2 + 3s - 4)Y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{zodat}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)(s-1)} = -\frac{1}{6} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{15} \frac{1}{s+4} + \frac{1}{10} \frac{1}{s-1}.$$

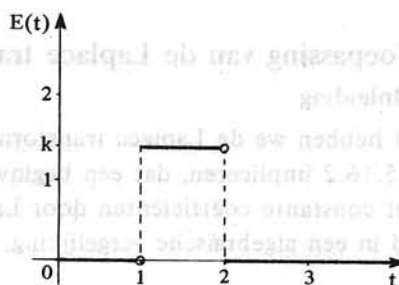
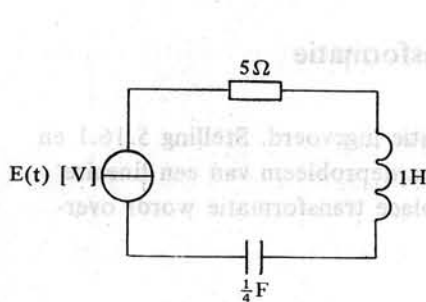
$$\text{Dus } y(t) = -\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{15}e^{-4t} + \frac{1}{10}e^t.$$

7.7.3. Beginwaardeprobleem met discontinu rechterlid

In veel problemen uit de techniek krijgen we te maken met een beginwaardeprobleem voor een lineaire DV met constante coëfficiënten met een discontinu rechterlid. Laplace transformatie kan dikwijls leiden tot de oplossing.

- a) Beschouw de lading $Q(t)$ op de condensatorplaten in het volgende netwerk, waarbij de electromotorische kracht $E(t)$ gelijk is aan k voor $1 \leq t < 2$ en aan 0 voor $0 \leq t < 1$ en $t \geq 2$.

$$\text{Dus } E(t) = k(u_1(t) - u_2(t)).$$



De DV voor de lading is $Q'' + 5Q' + 4Q = E(t)$, waarbij we als beginvoorwaarden nemen $Q(0) = Q'(0) = 0$.

Laplace transformatie levert:

$$s^2 \mathbf{L}[Q] + 5s \mathbf{L}[Q] + 4 \mathbf{L}[Q] = \mathbf{L}[E(t)] = k \left(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \right).$$

$$\mathbf{L}[Q] = k \frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+4)} - k \frac{e^{-2s}}{s(s+1)(s+4)} =$$

$$= (ke^{-s} - ke^{-2s}) \left(\frac{1}{4} \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{12} \frac{1}{s+4} \right).$$

$$Q(t) = ku_1(t) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} e^{-(t-1)} + \frac{1}{12} e^{-4(t-1)} \right) - ku_2(t) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} e^{-(t-2)} + \frac{1}{12} e^{-4(t-2)} \right).$$

Als we Q uitschrijven zonder eenheidsstapfuncties dan vinden we:

$$Q(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{12} e^4 e^{-4t} \right) k, & 1 \leq t < 2 \\ \left(\frac{1}{3} (e^2 - e) e^{-t} - \frac{1}{12} (e^8 - e^4) e^{-4t} \right) k, & t \geq 2. \end{cases}$$

Merk op dat Q differentieerbaar in 1 en 2 is met continue afgeleide. Vanwege de stapfuncties in het rechterlid van de DV bestaat Q'' niet voor $t = 1$ en $t = 2$. De gevonden functie Q is een gegeneraliseerde oplossing van de DV.

- b) We beschouwen nu hetzelfde netwerk, waarbij $E(t)$ wordt gegeven door een spanningsstoot ter grootte k op het tijdstip $t = 1$. We gebruiken hierbij de deltafunctie (zie 5.16.6c).

DV en beginvoorwaarden worden dan gegeven door

$$Q'' + 5Q' + 4Q = k\delta(t - 1), \quad Q(0) = 0, \quad Q'(0) = 0.$$

Laplace transformatie levert

$$s^2 \mathbf{L}[Q] + 5s \mathbf{L}[Q] + 4 \mathbf{L}[Q] = k e^{-s}.$$

$$\mathbf{L}[Q] = \frac{k e^{-s}}{(s+1)(s+4)} = \frac{1}{3} k e^{-s} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4} \right).$$

$$Q(t) = \frac{1}{3} k u_1(t) (e^{-(t-1)} - e^{-4(t-1)}), \text{ oftewel}$$

$$Q(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ k \left(\frac{e}{3} e^{-t} - \frac{e^4}{3} e^{-4t} \right), & t > 1. \end{cases}$$

Merk op dat Q continu is in 1, maar dat Q niet meer differentieerbaar is in 1.

7.7.4. Stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen

Laplace transformatie kan ook gebruikt worden bij het oplossen van stelsels lineaire DV. We geven een voorbeeld.

Een stoffelijk punt bevindt zich op het tijdstip $t = 0$ in het punt $(0, \frac{1}{4})$. De

baan wordt bepaald door

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + y + \frac{1}{2} \sin t \end{cases}$$

Oplossing.

Voor $L[x(t)]$ schrijven we $X(s)$ en ter afkorting X . Voor $y(t)$ idem.

We krijgen zo na Laplace transformatie

$$sX - 0 = -X - 2Y + \frac{1}{s-1}.$$

$$sY - \frac{1}{4} = X + Y + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}.$$

Herleiding geeft

$$(s+1)X + 2Y = \frac{1}{s-1},$$

$$-X + (s-1)Y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1},$$

waaruit volgt

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

Substitutie in de eerste vergelijking levert:

$$Y(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

Dus $x(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} t \cos t = \frac{1}{2} t \cos t$,

en $y(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t - \frac{1}{4} t \cos t + \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4} t \sin t =$
 $= \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4} t \cos t + \frac{1}{4} t \sin t.$

Oefeningen

1. Los op: $y'' - 2y' + y = e^t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
2. Los op: $y'' - y = 5 \sin 2t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
3. Los op: $y'' - 4y' + 9y = -\cos t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
4. Los op: $y'' + 5y' + 6y = f(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, waarin

$$f(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}.$$

7.8. Vraagstukken

*1. Zij $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{als } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{en } f(0,0) = 0.$$

a) Bewijs dat $\frac{\partial f}{\partial y}$ begrensd is op \mathbb{R}^2 .

b) Zij $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Toon aan dat er een d -omgeving van x_0 in \mathbb{R} bestaat waarop de DV $y' = f(x,y)$ precies één oplossing g heeft die voldoet aan $g(x_0) = y_0$.

c) Bepaal met Picard-iteratie, uitgaande van $g_0(x) = 0$, de benaderende oplossingen g_1 en g_2 van de DV $y' = f(x,y)$ met beginvoorwaarde $y(0) = 0$.

*2. Gegeven de DV

$$y' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

a) Bepaal de isoclinen van de DV.

b) Laat zien, dat aan de Lipschitz-voorwaarde is voldaan voor iedere omgeving van $(0,0)$.

c) Toon aan dat de oplossing met de beginvoorwaarde $y(0) = 0$ een oneven functie is (aanwijzing: benader de oplossing met Picard-iteratie).

3. Integreer $y' = xy^2$ met beginvoorwaarde $y(0) = 1$ met de methode van Heun (neem slechts één stap, stapgrootte h). Vergelijk dit resultaat met de exacte oplossing door van de laatste het Taylorpolynoom van geschikte index te bekijken. Welke term wijkt het eerst af? Stemt dit overeen met de theorie?

Van de differentiaalvergelijkingen 4 t/m 24 wordt de algemene oplossing gevraagd. Een bepaling van de definitieverzameling van de oplossingen mag achterwege blijven.

4. $y' = \frac{y}{x + xy}.$

5. $y' - y^2 \cos^2 x = 0.$

6. $(2x^2 - y)y' = -4xy.$

7. $(xe^{x(1+y)} + 1)dy + (e^{x(1+y)}(1+y))dx = 0.$

8. $dx + (1 + (x+y)\tan y)dy = 0.$

(Aanwijzing: de DV heeft een integrerende factor, die een functie van $x + y$ is).

9. $y' = \frac{3y - x}{y + x}.$

10. $2xy dx - (y^2 + 3x^2) dy = 0$.

11. $y' = 1 + x + y$.

12. $(2x + 2y - 1)y' + x + y + 1 = 0$ (Aanwijzing: stel $x + y = z$).

13. $y' \sin y - \cos x \cos y = \cos x$.

14. $\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} + 2y \right) + y \right) = 0$.

*15. $(2x + y + 3)y' + x + 2 = 0$.

(Aanwijzing: maak deze DV homogeen met behulp van een translatie.)

*16. Laat zien dat de DV

$$y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{b}{x^2} y = f(x), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

geschreven kan worden als

$$x^{-(a+\beta)} \frac{d}{dx} \left[x^a \frac{d}{dx} (x^\beta y) \right] = f(x).$$

Los met behulp hiervan op

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \cos x.$$

17. $(3x^2 + \sin y) dx + (2y + x \cos y) dy = 0$.

18. $(x^2 + 8xy + 6y^2) dx + (4x^2 + 12xy + 2y^2) dy = 0$.

19. $y' + y \tan(a - x) = \frac{1}{\sin(a - x)}, \quad a \in \mathbb{R}$.

20. $y'''' - 4y'''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$.

(Aanwijzing: het karakteristieke polynoom heeft uitsluitend dubbele nulpunten).

21. $y'' - y' + 2y = 4x^5$.

22. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2, \quad x > 0$.

(Aanwijzing: gebruik de substitutie $x = e^t$).

23. $y(1 + xy)e^{xy} dx + x(1 + xy)e^{xy} dy + dx + dy = 0$.

24. $2x^2 y dx + (y - x^3) dy = 0, \quad y > 0$.

(Aanwijzing: de DV heeft een integrerende factor, die een functie van y is).*Los de beginwaardeproblemen 25 tot en met 30 op. Geef steeds aan op welk interval de gevonden oplossing geldig is.*

25. $xy' = 1 + x + y, \quad y(1) = 2$.

26. $y' = 1 + y^2, \quad y(2) = 1$.

27. $xy' - (x + 1)y = x^2 - x^3, \quad y(-1) = -1$.

28. $y' = \sin x - \frac{y}{x}, \quad y(\pi) = 3$.

29. $y' \sin x + y \cos x + 1 = 0, \quad y\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 1$.

30. $2x^2yy' = 1 - xy^2$, $y(\frac{1}{e}) = 1$.

31. Gegeven de DV

$$y'' - 2y' + 17y = 0.$$

Bepaal de oplossingskromme, die door de oorsprong gaat en die de x-as daar onder een hoek van 45° snijdt (2 oplossingen).

32. Bepaal de oplossing van de DV

$$y'''' - y = 0, \text{ waarvoor geldt:}$$

$$y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0 \text{ en die begrensd blijft voor } x \rightarrow \infty.$$

33. Bepaal de oplossing van de DV

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = \sin x$$

die voldoet aan $y(0) = y'(0) = 0$ en die periodiek is met periode 2π .

34. Bepaal in de DV

$$y'' + \lambda y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

de waarden van λ , waarvoor een oplossing, die voldoet aan $y(0) = 0$ en $y(1) = 0$, niet identiek gelijk is aan nul.

35. Toon aan dat, indien voor de functies P en Q: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geldt, dat

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{xP - yQ} \text{ een functie van } xy \text{ is,}$$

de DV

$$Pdx + Qdy = 0$$

een integrerende factor bezit, die een functie van xy is.

Ga na dat de DV

$$(2x^2y^2 + y)dx + x^3y dy = 0$$

een integrerende factor heeft die een functie van xy is en los de DV op.

36. Bepaal de oplossing $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ van het beginwaardeprobleem

$$y' + y = |x|, \quad y(1) = 0.$$

*37. Los op: $y'' + y = f(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, waarin $f(t) = \begin{cases} 4 & , 0 \leq t < 2 \\ t+2, & t \geq 2. \end{cases}$

38. Bepaal de vergelijking van de kromme k met de volgende eigenschappen:

a) Zij P een punt van k, Q het snijpunt met de x-as van de raaklijn aan k door P; dan geldt dat de afstand van P tot Q constant is en gelijk aan 1.

b) (0,1) is een punt van k.

39. Een vliegwiel dat om zijn as met een hoeksnelheid ω draait, heeft een impulsmoment $b = I\omega$; hierin is I het traagheidsmoment van het

vliegwiel. Laat men op de as een vertragend krachtmoment M werken, dan geldt $M = -\frac{db}{dt}$. Als nu gegeven is dat $M = k\omega$, waarbij k een constante is, bereken dan ω als functie van t , indien op het tijdstip $t = 0$ de hoeksnelheid ω_0 is.

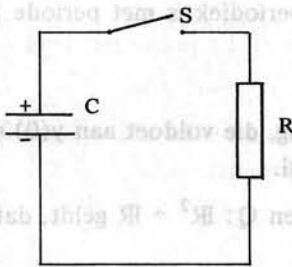
40. De grootte van een kolonie bacteriën y wordt als functie van de tijd t beschreven door de DV

$$y' = y - 0,1y^2 - 0,9.$$

Bepaal de algemene oplossing van deze DV.

Wat is de grootte van de kolonie voor $t \rightarrow \infty$, als gegeven is dat $y(0) > 1$.

- 41.



De in nevenstaande figuur getekende condensator met capaciteit C is opgeladen; de spanning over de condensator is V_0 en de lading op een plaat is $Q_0 = CV_0$.

Wanneer men op tijdstip $t = 0$ de schakelaar S sluit vloeit de lading van de positieve plaat weg en er ontstaat een stroom $I = -\frac{dQ}{dt}$. Op elk tijdstip na

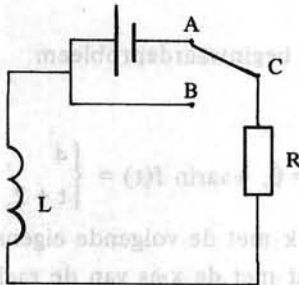
$t = 0$ geldt $V_C = IR$, waarin $V_C = \frac{Q}{C}$ de spanning over de condensator voorstelt.

- a) Bepaal de stroom I als functie van de tijd.

In de weerstand R wordt warmte ontwikkeld die aan de omgeving wordt afgestaan. De in een zeer klein tijdsinterval dt ontwikkelde warmte is $I^2 R dt$.

- b) Bereken hoeveel warmte er aan de omgeving wordt afgestaan vanaf $t = 0$ totdat de condensator geheel is ontladen.

- 42.



Door een spoel met zelfinductie L loopt een stroom I_0 (zie nevenstaande figuur). Op tijdstip $t = 0$ wordt met behulp van een schakelaar C de verbinding met de spanningsbron verbroken, en die met het punt B tot stand gebracht.

Door het verbreken van de stroom ontstaat in de kring een zelfinductie-spanning $V_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}$, zodat op elk tijdstip na $t = 0$ geldt: $V_{\text{ind}} = IR$.

- a) Bepaal de stroom als functie van de tijd.

In de weerstand R wordt in een zeer klein tijdsinterval dt aan warmte ontwikkeld $I^2 R dt$.

- b) Bereken hoeveel warmte er vanaf $t = 0$ totdat de stroom I nul is geworden in de weerstand is ontwikkeld.
43. Als een bol met massa m en straal a zonder beginsnelheid in een vloeistof wordt losgelaten, valt hij onder invloed van de zwaartekracht en ondervindt daarbij een wrijvingskracht W waarvan de grootte volgens de wet van Stokes is $W = 6\pi\eta av$; hierin is η de viscositeit van de vloeistof en v de snelheid van de bol.
Bereken de snelheid van de bol als functie van de tijd, en laat zien dat de bol op den duur eenparig valt.
44. Nabij de rand van een volkomen gladde tafel ligt een opgerolde ketting. Door een of andere oorzaak begint het vrije uiteinde van de ketting van de rand af te glijden.
Als de lengte van het afhangende deel x is en de massa per lengteëenheid m , is de bewegingsvergelijking:

$$\frac{d(mvx)}{dt} = mgx, \text{ waarin } v \text{ de snelheid is en } g \text{ de versnelling van de zwaartekracht.}$$

Laat zien dat uit de bewegingsvergelijking volgt

$$xv \frac{dv}{dx} + v^2 = gx$$

en bereken de snelheid als functie van x .

(Aanwijzing: transformeer de DV naar een lineaire DV).



8. Meervoudige integralen

Integratie in \mathbb{R}^2

8.1. Enkele definities

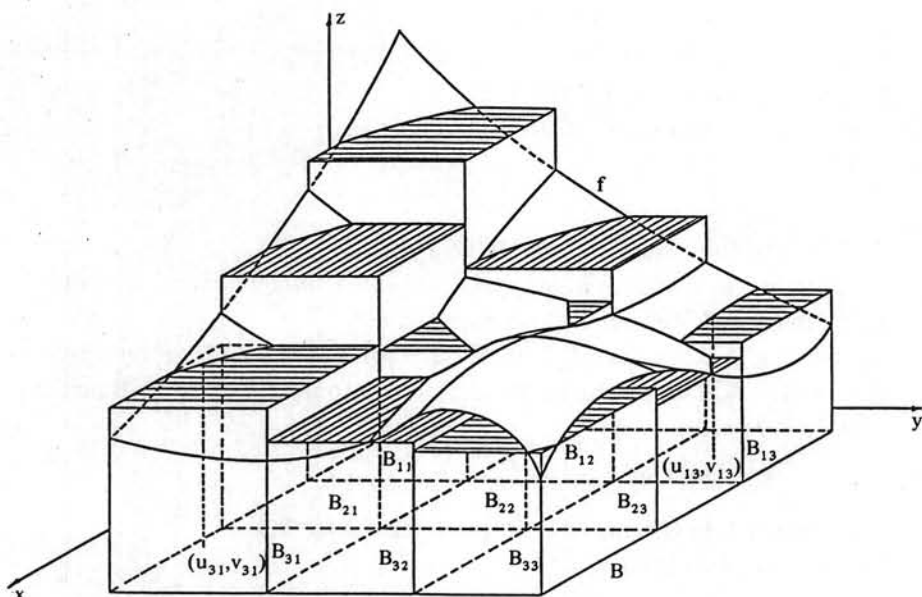
8.1.1. Inleiding

Meervoudige integralen worden onder andere gebruikt bij het berekenen van massa's, zwaartepunten en traagheidsmomenten (zie 8.7) en spelen verder een belangrijke rol bij het berekenen van oppervlakten van gebogen figuren (zie 9.3). Een andere belangrijke toepassing wordt gevormd door de zogenaamde integraalstellingen (zie 9.4 en 9.5), die gebruikt worden in de elektriciteitsleer en de stromingstheorie.

We zullen in het volgende de theorie van de meervoudige integraal opzetten in analogie met de Riemannintegraal uit hoofdstuk 5. Een gedetailleerde behandeling is vanwege de omvang van deze cursus niet mogelijk. We zullen ons noodgedwongen beperken tot hoofdzaken.

Er wordt begonnen met een schetsmatige definitie; in 8.1.2 wordt de strenge definitie van Riemann-integraal gegeven.

Zij f een begrensde reële functie gedefinieerd op een rechthoek B in \mathbb{R}^2 . We bepalen een Riemann-som van f als volgt.



De rechthoek B wordt door lijnen evenwijdig aan de x - respectievelijk y -as in een aantal rechthoekjes B_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, onderverdeeld. De oppervlakte van zo'n rechthoekje B_{ij} noteren we met $\Omega(B_{ij})$. In ieder rechthoekje B_{ij} kiezen we een punt (u_{ij}, v_{ij}) .

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_{ij}, v_{ij}) \Omega(B_{ij})$ wordt nu een *Riemann-som* van f genoemd; meetkundig is het een som van inhouden van blokken, waarbij deze inhouden van een passend teken zijn voorzien.

Integreerbaarheid van f over B houdt in feite het volgende in:

onafhankelijk van de verdeling van de rechthoek in rechthoekjes en onafhankelijk van de in de rechthoekjes gekozen punten, nadert de Riemann-som naar een getal I , indien we de lengte van de zijden van de rechthoekjes naar 0 laten gaan.

We noemen I de *integraal van f over B* , notatie $I = \iint_B f(x,y) dx dy$.

De precieze definitie van Riemann-integreerbaarheid is als volgt.

8.1.2. Definitie

Zij $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ een begrensde gesloten rechthoek in \mathbb{R}^2 en zij $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie.

a) Een *partitie* (of *verdeling*) P van B is een eindige verzameling rechthoeken B_{ij} : $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, waarbij

$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$ een partitie is van het interval $[a_1, b_1]$

en $a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$ een partitie is van het interval $[a_2, b_2]$.

We noemen $\Omega(B_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ de *oppervlakte* van B_{ij} .

b) We noemen $\mu(P) = \max \{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}, y_1 - y_0, \dots, y_m - y_{m-1}\}$ de *maaswijdte* of *grofheid* van P .

c) Een $(n \times m)$ -tal punten $\vartheta = \{(u_{ij}, v_{ij}) \mid (u_{ij}, v_{ij}) \in B_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ heet een *strooiing* bij de partitie P .

d) Is ϑ een strooiing bij de partitie P dan heet

$$S_f(P, \vartheta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_{ij}, v_{ij}) \Omega(B_{ij})$$

de *Riemann-som* van f behorende bij P en ϑ .

e) De functie f heet *Riemann-integreerbaar* (kort: *integreerbaar*) over B , als er een $I \in \mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap:

bij iedere $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zó dat voor *iedere* partitie P met maaswijdte $\mu(P) < \delta$ en *iedere* bij P behorende strooiing ϑ voor de Riemann-som $S_f(P, \vartheta)$ geldt:

$$|S_f(P, \vartheta) - I| < \epsilon.$$

We noemen I de (*Riemann-*) *integraal* van f over B .

Daarbij heet f de *integrand*.

f) De integraal van f over B noteren we met $\iint_B f(x,y) dx dy$.

We spreken van een *tweevoudige integraal*.

8.1.3. Opmerking

In de notatie $\iint_B f(x,y) dx dy$ kunnen namen der veranderlijken x en y

door andere vervangen worden, bijv.

$$\iint_B f(x,y) dx dy = \iint_B f(u,v) du dv.$$

8.1.4. Voorbeeld

Zij $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ en zij $f(x,y) = c$ voor alle $(x,y) \in B$.

Voor iedere partitie P en iedere strooiing ϑ bij P geldt

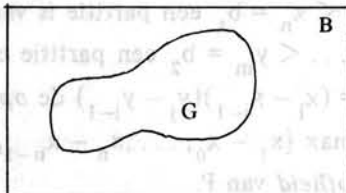
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(u_{ij}, v_{ij}) \Omega(B_{ij}) &= c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \\ &= c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1}) = c(b_1 - a_1)(b_2 - a_2). \end{aligned}$$

Dus

$$\iint_B c dx dy = c(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = c\Omega(B).$$

8.1.5. Definitie

Zij G een begrensde deelverzameling van \mathbb{R}^2 , zij $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie en zij B een gesloten rechthoek met zijden evenwijdig aan de assen zó dat $G \subset B \subset \mathbb{R}^2$.



Definieer de functie $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{als } (x,y) \in G, \\ 0 & \text{als } (x,y) \in B \setminus G. \end{cases}$$

We noemen f *integreerbaar over G* als g integreerbaar is over B en we definiëren in dat geval

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \iint_B g(x,y) dx dy.$$

8.1.6. Opmerkingen

- Wanneer G een gesloten rechthoek met zijden evenwijdig aan de assen is, valt definitie 8.1.5 samen met definitie 8.1.2.
- Bewijs zelf dat het bestaan en de waarde van de integraal van f over G niet afhangen van de keuze van B (mits $G \subset B$); alleen f en G zijn hiervoor bepalend.
- $\iint_G dx dy$ kan geïnterpreteerd worden als de *oppervlakte* van G (Notatie $\Omega(G)$).

8.1.7. Reguliere en normale gebieden

Om tweevoudige integralen te kunnen berekenen, hebben we een precieze beschrijving nodig van het gebied waarover geïntegreerd wordt. Dit leidt tot de volgende definitie.

Definitie

a) Een deelverzameling G van \mathbb{R}^2 heet een *regulier gebied* als er intervallen $[a_1, b_1]$ en $[a_2, b_2]$ (de loodrechte projecties van G op de x -as resp. op de y -as) en continue functies $\varphi_1, \varphi_2 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$; $\psi_1, \psi_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ bestaan, zó dat G op de volgende twee manieren kan worden beschreven:

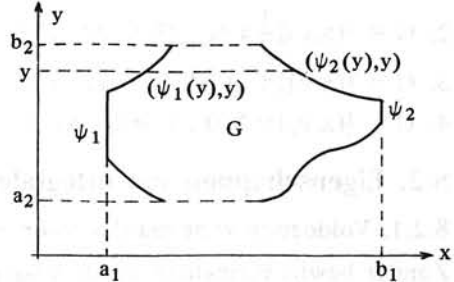
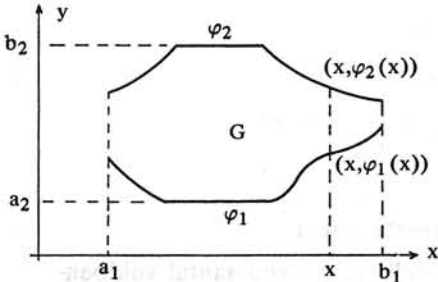
(i) $G = \{(x,y) | x \in [a_1, b_1] \text{ en } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$,

(ii) $G = \{(x,y) | y \in [a_2, b_2] \text{ en } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$.

b) Onder de *rand* ∂G van een regulier gebied G in \mathbb{R}^2 verstaan we de vereniging van de verzamelingen

$$\{(x,y) | x \in [a_1, b_1] \text{ en } y = \varphi_i(x)\}, \quad i \in \{1,2\} \text{ en}$$

$$\{(x,y) | y \in [a_2, b_2] \text{ en } x = \psi_i(y)\}, \quad i \in \{1,2\}.$$



c) Een deelverzameling G van \mathbb{R}^2 heet een *normaal gebied* als G de vereniging is van eindig veel reguliere gebieden, die hoogstens randpunten gemeen hebben.

8.1.8. Opmerking

In definitie 8.1.7 is $[a_1, b_1]$ de (loodrechte) projectie van G op de x -as en $[a_2, b_2]$ de projectie van G op de y -as. De rechthoek $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ noemen we de *omhullende rechthoek* van G .

8.1.9. Voorbeeld

Zij $0 < a < b$ en zij $G = \{(x,y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$.

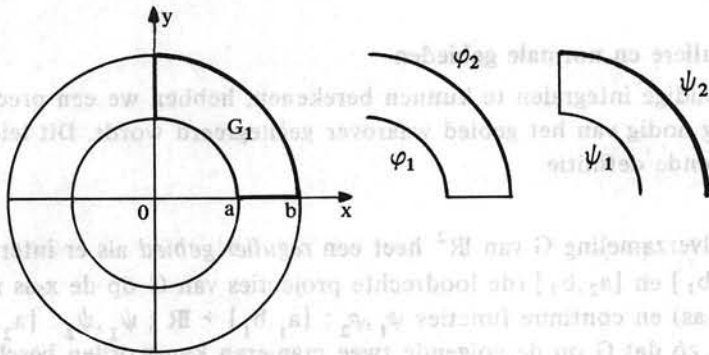
G is een normaal gebied maar geen regulier gebied.

$$G_1 = \{(x,y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$$

is een regulier gebied; de bijbehorende functies φ_i en ψ_i zijn

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{als } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{als } a < x \leq b, \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \sqrt{b^2 - x^2}, \quad (0 \leq x \leq b),$$

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - y^2} & \text{als } 0 \leq y \leq a, \\ 0 & \text{als } a < y \leq b, \end{cases} \quad \psi_2(y) = \sqrt{b^2 - y^2}, \quad (0 \leq y \leq b).$$



Evenzo blijkt dat de doorsnede van G met ieder van de andere drie kwadranten een regulier gebied is.

Oefeningen

Zijn de gebieden gegeven in de oefeningen 1 t/m 4 regulier? Zo ja, bepaal dan de omhullende rechthoek B en de functies $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ voor dat gebied.

- $G = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1 \text{ en } x^2 \leq y \leq 2x\}$.
- $G = \{(x,y) | \frac{1}{2}x \leq y \leq x \text{ en } 0 \leq y \leq 1\}$.
- $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq x\}$.
- $G = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 16, y \leq x, x \leq 8\}$.

8.2. Eigenschappen van integralen

8.2.1. Voldoende voorwaarden voor integreerbaarheid

Zonder bewijs vermelden we de volgende stelling, die een aantal voldoende voorwaarden voor integreerbaarheid geeft.

Stelling

Zij G een normaal gebied in \mathbb{R}^2 .

- Als $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ continu is op G dan is f integreerbaar over G .
- Als f en g integreerbaar zijn over G , dan zijn ook $|f|$, fg en $\frac{1}{f}$ (mits $\frac{1}{f}$ begrensd is op G) integreerbaar over G .

8.2.2. Enkele rekenregels voor integralen

Voor de berekening van integralen maken we dikwijls gebruik van de volgende eigenschappen om de integraal te herleiden tot eenvoudiger integralen.

Stelling

Zij G een normaal gebied in \mathbb{R}^2 .

- Zij $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ een splitsing van G in reguliere gebieden die hoogstens randpunten gemeen hebben.

Dan is f integreerbaar over G dan en slechts dan als f integreerbaar is over alle G_i , $1 \leq i \leq n$, en er geldt

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} f(x,y) dx dy.$$

- b) Zijn f en g integreerbaar over G dan is voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de functie $\alpha f + \beta g$ integreerbaar over G en

$$\iint_G [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)] dx dy = \alpha \iint_G f(x,y) dx dy + \beta \iint_G g(x,y) dx dy.$$

We geven van deze stelling geen bewijs.

8.2.3. Ongelijkheden voor integralen

In de volgende stelling worden een paar belangrijke ongelijkheden voor integralen opgesomd.

Stelling

Zij G een normaal gebied in \mathbb{R}^2 en laat f en g integreerbaar zijn over G .

- a) Als $f(x,y) \geq 0$ voor alle $(x,y) \in G$ dan is $\iint_G f(x,y) dx dy \geq 0$.
- b) Als $f(x,y) \leq g(x,y)$ voor alle $(x,y) \in G$ dan is $\iint_G f(x,y) dx dy \leq \iint_G g(x,y) dx dy$.
- c) Als $m \leq f(x,y) \leq M$ voor alle $(x,y) \in G$ dan is $m\Omega \leq \iint_G f(x,y) dx dy \leq M\Omega$, waarbij $\Omega = \iint_G dx dy$ de oppervlakte van G voorstelt.
- d) $|\iint_G f(x,y) dx dy| \leq \iint_G |f(x,y)| dx dy$.

Bewijs

Het bewijs volgt direct door interpretatie van de bijbehorende Riemansommen (analoog aan het bewijs van stelling 5.2.4). \square

8.2.4. Het berekenen van tweevoudige integralen

Bij de berekening van de tweevoudige integraal $\iint_G f(x,y) dx dy$ hebben we te maken met de integrand, waarvan we dus het voorschrift moeten kennen, en verder met het (normaal veronderstelde) gebied G .

De eerste stap bij berekening van de integraal is dikwijls het splitsen van G in geschikt gekozen reguliere deelgebieden en het toepassen van 8.2.2a. Daarna wordt met behulp van de nu volgende stelling elke integraal over een regulier deelgebied herleid tot twee enkelvoudige integralen, waarop de methoden uit hoofdstuk 5 kunnen worden toegepast.

8.2.5. Stelling (Fubini)

Zij G een regulier gebied in \mathbb{R}^2 en zij $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ continu op G .

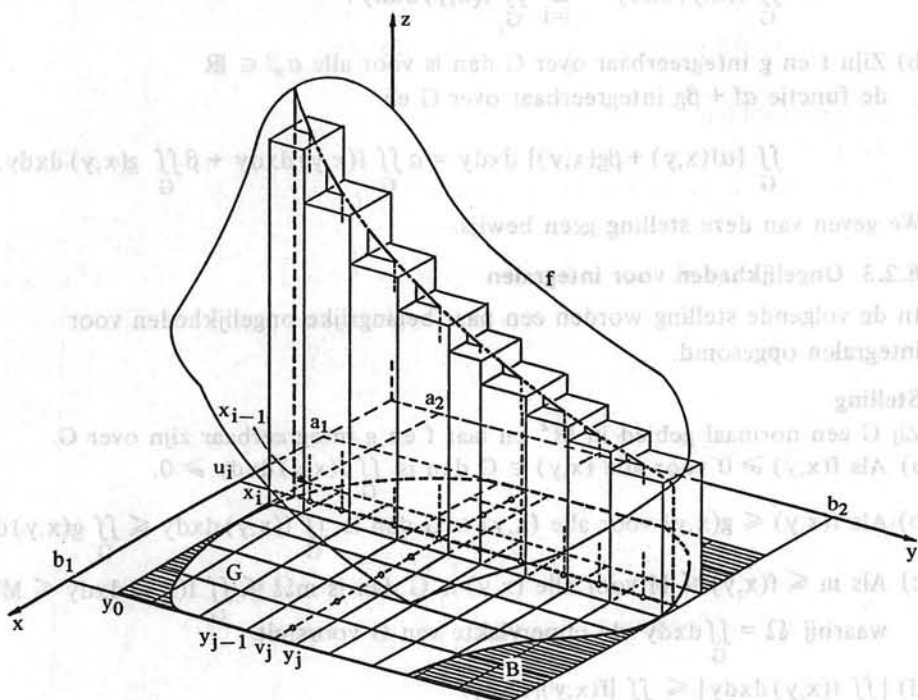
Dan geldt (met de in 8.1.7 ingevoerde notaties):

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right] dy.$$

Men noemt het tweede en derde lid *herhaalde* integralen.

Het bestaan van deze integralen is een onderdeel van de stelling.

Schets van het bewijs



Zij P een voldoende fijne partitie van de omhullende rechthoek $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. We kiezen nu een speciale strooiing ϑ bij P nl. een strooiing waarbij de eerste coördinaat van de strooi punten alleen van i en de tweede coördinaat alleen van j afhangt, d.w.z.

$$\vartheta = \{(u_i, v_j) | (u_i, v_j) \in B_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Dan geldt (met de notatie uit definitie (8.1.5))

$$\begin{aligned} \iint_G f(x,y) dx dy &= \iint_B g(x,y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(u_i, v_j) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left(\sum_{j=1}^m g(u_i, v_j) (y_j - y_{j-1}) \right) \\ &\approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \int_{a_2}^{b_2} g(u_i, y) dy \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \int_{\varphi_1(u_i)}^{\varphi_2(u_i)} f(u_i, y) dy \\ &\approx \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

Hierbij hebben we geschreven dat een integraal ongeveer gelijk is aan (\approx) een Riemann-som behorend bij die integraal.

Op analoge wijze kan men aannemelijk maken dat

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_{a_2}^{b_2} \psi_2(y) \left[\int_{a_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y) dx \right] dy. \quad \square$$

8.2.6. Voorbeelden

a) Zij $G = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } y \geq 0\}$.

We berekenen $\iint_G (x+y) dx dy$ op twee manieren.

$$\begin{aligned} \iint_G (x+y) dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2) \right] dx = \\ &= \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_G (x+y) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x+y) dx \right] dy = \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2} dy = \\ &= \left[-\frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

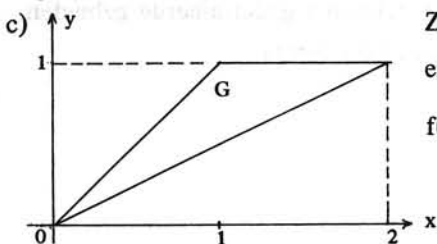
b) Zij $a > 0, b > 0$ en zij $G = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

$$\iint_G dx dy = \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \right] dx = \int_{-a}^a 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Via de substitutie $x = a \sin t$ vinden we

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} dx &= 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \pi ab. \end{aligned}$$

De oppervlakte van het door de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ begrensde vlakdeel is dus πab ; in het bijzonder is de oppervlakte van een cirkel met straal r gelijk aan πr^2 .



Zij $G = \{(x,y) \mid \frac{1}{2}x \leq y \leq x \text{ en } 0 \leq y \leq 1\}$

en zij $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = y^2 e^{y^2}.$$

Door eerst naar y en daarna naar x te integreren vinden we

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{\frac{1}{2}x}^x y^2 e^{y^2} dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_{\frac{1}{2}x}^1 y^2 e^{y^2} dy \right] dx.$$

Dit is niet verder te herleiden omdat $\int y^2 e^{y^2} dy$ niet in elementaire functies uitgedrukt kan worden. Integreren we echter eerst naar x en daarna naar y , dan vinden we

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_y^{2y} y^2 e^{y^2} dx \right] dy = \int_0^1 y^3 e^{y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^t dt = \frac{1}{2}.$$

8.2.7. Opmerking

Uit de stelling van Fubini (8.2.5) blijkt dat men bij het berekenen van $\iint_G f(x,y) dx dy$ eventueel kan volstaan met één van beide beschrijvingswijzen (i) of (ii) uit definitie 8.1.7a, waarmee de integratievolgorde dan vastligt. De keuze van de integratievolgorde wordt bepaald door de vorm van het gebied enerzijds en de integrand anderzijds. Het is blijkens 8.2.6c mogelijk dat de integraal maar met één volgorde te berekenen is!

Oefeningen

Bereken de volgende integralen.

- $\iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy$; $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$.
- $\iint_G xy dx dy$; G is het deel van \mathbb{R}^2 , begrensd door de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(1,2)$ en $(2,1)$.
- $\iint_G \sin(x+y) e^{\sin y} dx dy$; $G = \{(x,y) | 0 \leq x \leq \pi \text{ en } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.
- $\iint_G (x+y) dx dy$; $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } x \leq 0 \text{ en } y \geq 0\}$.

Verklaar de uitkomst.

- Zij $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ en zij $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ continu en gegeven door $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$.

Bewijs:

$$\iint_B f(x,y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x) dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(y) dy.$$

- Bepaal de oppervlakte van de in oef. 8.1.1 t/m 4 gedefinieerde gebieden.
- Bereken door verwisseling van de integratievolgorde

$$\int_0^1 \left[\int_{y\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 dx \right] dy.$$

8.3. Transformatie in \mathbb{R}^2

8.3.1. Inleiding

In de definitie van Riemann-som (8.1.2d) is er vanuit gegaan dat de deelgebieden B_{ij} , waarin het gebied G is verdeeld, rechthoeken zijn. De definitie van Riemann integraal kan echter ook worden gegeven met behulp van Riemann-sommen, voortkomend uit een verdeling van het gebied G in (niet-noodzakelijk rechthoekige) gesloten gebieden G_{ij} , mits men van die gebieden de oppervlakte kan berekenen. Voor normale gebieden G_{ij} is dit thans het geval. Voor de maaswijdte dient men dan te nemen het maximum van de diameters der G_{ij} . De diameter van G_{ij} is gegeven door: $\max \{d(p,q) \mid p,q \in G_{ij}\}$. Dikwijls komt zo'n verdeling van het gebied voort uit een afbeelding van een (u,v) -vlak naar het (x,y) -vlak.

8.3.2. Net van parameterkrommen

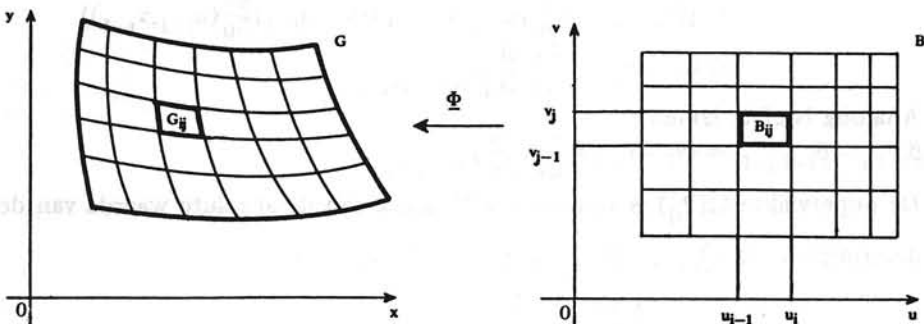
Zij B een rechthoek in \mathbb{R}^2 en zij V een verdeling van B in rechthoekjes $B_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$

Laat G een normaal gebied zijn in \mathbb{R}^2 en veronderstel dat $\Phi: B \rightarrow G$ een bijectieve afbeelding is, $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, waarvan de componenten $x(u,v)$ en $y(u,v)$ continu zijn op B en continue partiële afgeleiden hebben in de inwendige punten van B .

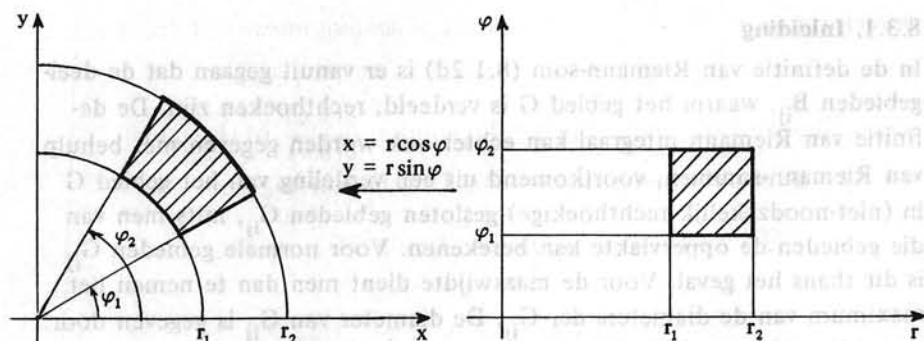
De lijn $u = u_0$ in het (u,v) -vlak gaat door deze afbeelding over in de kromme $x = x(u_0, v)$, $y = y(u_0, v)$ in het (x,y) -vlak.

De lijn $v = v_0$ in het (u,v) -vlak gaat door deze afbeelding over in de kromme $x = x(u, v_0)$, $y = y(u, v_0)$ in het (x,y) -vlak.

De twee families krommen, voortkomend uit $u = \text{constant}$ en $v = \text{constant}$ vormen een netwerk over het gebied G . We noemen dit het *net van parameterkrommen*.



Voorbeeld:

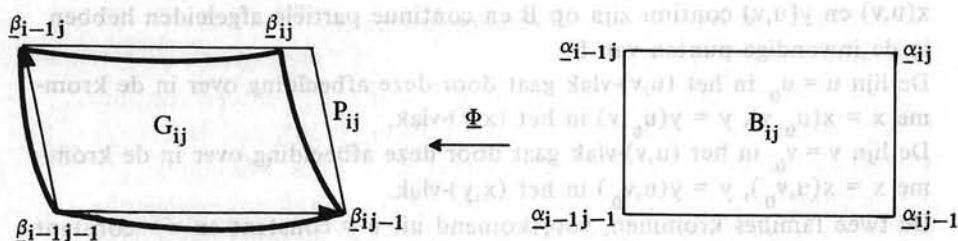


8.3.3. Berekening van de Riemann-som

Een rechthoekje B_{ij} gaat onder transformatie over in een gebiedje G_{ij} , dat begrensd wordt door 4 parameterkrommen.

Zij $\underline{\alpha}_{ij} = (u_i, v_j)$ en $\Phi: \underline{\alpha}_{ij} \rightarrow \underline{\beta}_{ij} = (x(\underline{\alpha}_{ij}), y(\underline{\alpha}_{ij}))$.

We benaderen de oppervlakte van G_{ij} door het parallellogram P_{ij} opgespannen door de vectoren $\underline{\beta}_{i,j-1} - \underline{\beta}_{i-1,j-1}$ en $\underline{\beta}_{i-1,j} - \underline{\beta}_{i-1,j-1}$.



$$\begin{aligned} \underline{\beta}_{i,j-1} - \underline{\beta}_{i-1,j-1} &= (x(u_i, v_{j-1}) - x(u_{i-1}, v_{j-1}), y(u_i, v_{j-1}) - y(u_{i-1}, v_{j-1})) \\ &\approx ((u_i - u_{i-1}) \frac{\partial x}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}), (u_i - u_{i-1}) \frac{\partial y}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1})) \\ &= (u_i - u_{i-1}) \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) (u_{i-1}, v_{j-1}). \end{aligned}$$

Analoog is af te leiden

$$\underline{\beta}_{i-1,j} - \underline{\beta}_{i-1,j-1} \approx (v_j - v_{j-1}) \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) (u_{i-1}, v_{j-1}).$$

De oppervlakte $\Omega(P_{ij})$ is volgens 6.3.2b gelijk aan de absolute waarde van de determinant $\det(\underline{\beta}_{i,j-1} - \underline{\beta}_{i-1,j-1}, \underline{\beta}_{i-1,j} - \underline{\beta}_{i-1,j-1}) =$

$$= (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} (u_{i-1}, v_{j-1})$$

De determinant $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ heet de *functionaaldeterminant* of *Jacobiaan*

(zie 6.13.3a) van de transformatie $\underline{\Phi}$, notatie $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ of $J_{\underline{\Phi}}(u,v)$.

Is $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie, dan is bij benadering

$$\begin{aligned} \iint_G f(x,y) dx dy &= \sum_{i,j} \iint_{G_{ij}} f(x,y) dx dy \approx \\ &\approx \sum_{i,j} f(x(u_{i-1}, v_{j-1}), y(u_{i-1}, v_{j-1})) \Omega(G_{ij}) \approx \\ &\approx \sum_{i,j} f(\underline{\Phi}(u_{i-1}, v_{j-1})) |J_{\underline{\Phi}}(u_{i-1}, v_{j-1})| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}), \end{aligned}$$

welke laatste uitdrukking een Riemann-som is, behorend bij de integraal

$$\iint_B f \circ \underline{\Phi}(u,v) |J_{\underline{\Phi}}(u,v)| du dv.$$

Hiermee is de volgende stelling plausibel gemaakt.

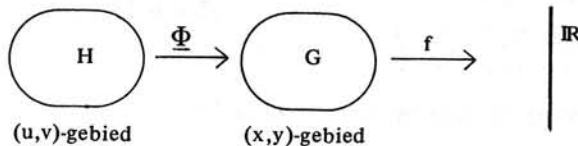
8.3.4. Substitutieregel voor tweevoudige integralen

Stelling

Laat G en H normale gebieden zijn in \mathbb{R}^2 , laat $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie zijn en laat $\underline{\Phi}: H \rightarrow G$, $\underline{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, een surjectieve afbeelding zijn die in het inwendige van H injectief is. Veronderstel dat de componenten van $\underline{\Phi}$ continu zijn op H en in de inwendige punten van H continue partiële afgeleiden hebben, terwijl de functionaaldeterminant van $\underline{\Phi}$ in het inwendige van H begrensd en niet nul is.

Dan geldt:

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \iint_H f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv.$$



8.3.5. Opmerkingen

- Stelling 8.3.4 is het twee-dimensionale analogon van stelling 5.4.1.
- Indien in stelling 8.3.4 $f = 1$ wordt genomen, krijgen we voor de oppervlakte van G :

$$\Omega(G) = \iint_G dx dy = \iint_H \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv.$$

Vaak noteert men ook $\Omega(G) = \iint_G d\Omega$,

waarbij $d\Omega$ het oppervlakte-element genoemd wordt.

Voor iedere afbeelding $\Phi: H \rightarrow G$ die aan de eisen van stelling 8.3.4 voldoet (zo'n afbeelding wordt een *parametrisering* van G genoemd) geldt dus

$$\iint_G d\Omega = \iint_H \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

Analoog noteert men

$$\iint_G f d\Omega = \iint_H f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv.$$

Men kan hierin $d\Omega$ opvatten als een symbolische notatie voor $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$.

Ten overvloede: $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ is de absolute waarde van de functionaaldeterminant.

Bijzonder geval: als $G = H$, $x = u$, $y = v$ dan is

$$\iint_G f d\Omega = \iint_G f(x,y) dx dy.$$

- c) Indien men in plaats van de afbeelding $\Phi: H \rightarrow G$ de inverse afbeelding $\Psi: G \rightarrow H$ kent, dan kan men de Jacobiaan $J_\Psi(u,v)$ als volgt berekenen.

Uit de relaties $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

volgt door impliciet partieel differentiëren

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ 1 = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases},$$

of met matrices geschreven:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ zie 6.13.2c.}$$

Dus geldt voor de determinanten (zie 6.13.3b)

$$J_\Phi(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{J_\Psi(x,y)}.$$

De functionaaldeterminant van de inverse afbeelding is dus het omgekeerde van die van de oorspronkelijke afbeelding.

8.3.6. Voorbeelden

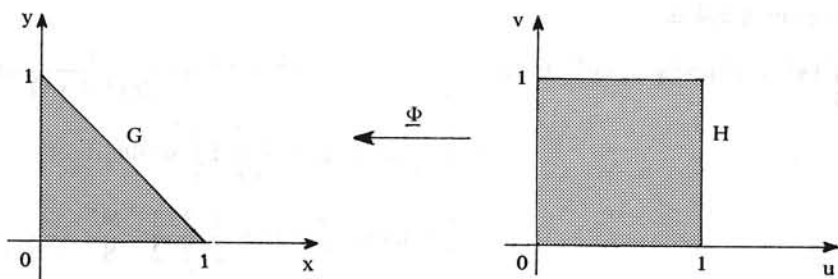
- a) Zij $G = \{(x,y) | x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } x + y \leq 1\}$
en $H = \{(u,v) | 0 \leq u \leq 1 \text{ en } 0 \leq v \leq 1\}$.

Door $\Phi(u,v) = (u, (1-u)v)$ wordt H afgebeeld op G en

$$J_{\Phi}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = 1-u.$$

Dat Φ injectief is op het inwendige van H wordt in 8.3.7 aangetoond.

Ga na dat Φ aan de overige voorwaarden van 8.3.4 voldoet.



Volgens 8.3.4 is

$$\begin{aligned} \iint_G (1-x-y) \, dx \, dy &= \iint_H [1-u-(1-u)v] |1-u| \, du \, dv = \\ &= \iint_H (1-u)^2 (1-v) \, du \, dv = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 (1-u)^2 (1-v) \, du \right] dv = \\ &= \int_0^1 (1-v) \, dv \cdot \int_0^1 (1-u)^2 \, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

De integraal kan ook rechtstreeks berekend worden:

$$\begin{aligned} \iint_G (1-x-y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 \, dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

We merken nog op dat $J_{\Phi}(u,v) = 0$ als $u = 1$, maar dat $J_{\Phi}(u,v) > 0$ op het inwendige van H .

b) Zij $G = \{(x,y) | x \geq 0 \text{ en } 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2 \text{ en } 1 \leq xy \leq 2\}$.

Bereken $\iint_G (x^2 + y^2)(x^3 y - xy^3) \, dx \, dy$.

Oplossing:

Stel $u = x^2 - y^2$, $v = xy$ en $H = \{(u,v) | 1 \leq u \leq 2 \text{ en } 1 \leq v \leq 2\}$.

De transformatie Ψ , gegeven door $\Psi(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$, is een bijectieve afbeelding $G \rightarrow H$. De surjectiviteit is evident; de injectiviteit wordt in 8.3.7 bewezen.

Laat $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ de inverse afbeelding van $\Psi(x,y)$ zijn.
Volgens opmerking 8.3.5c is

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}, \text{ zie 6.13.4b.}$$

Volgens 8.3.4 is

$$\begin{aligned} \iint_G (x^2 + y^2)(x^3 y - xy^3) dx dy &= \iint_H (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)xy \frac{1}{2(x^2 + y^2)} dudv = \\ &= \frac{1}{2} \iint_H uv dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\int_1^2 uv du \right] dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 u du \cdot \int_1^2 v dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

8.3.7. De injectiviteit van de in 8.3.6 behandelde transformaties

a) Dat de in voorbeeld 8.3.6a gebruikte transformatie injectief is op het inwendige van H bewijst men als volgt.

Zij $\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2)$ met $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in (0,1) \times (0,1)$.

Dan is $(u_1, (1-u_1)v_1) = (u_2, (1-u_2)v_2)$, dus $u_1 = u_2$ en

$(1-u_1)v_1 = (1-u_2)v_2$. Uit deze vergelijkingen volgt

$(1-u_1)v_1 = (1-u_1)v_2$ en, wegens $1-u_1 \neq 0$, $v_1 = v_2$.

Dus $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$.

b) Op overeenkomstige wijze bewijst men de injectiviteit van de in voorbeeld 8.3.6b voorkomende transformatie Ψ .

Uit $\Psi(x_1, y_1) = \Psi(x_2, y_2)$ ofwel

$$\begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \\ x_1 y_1 = x_2 y_2 \end{cases}$$

leidt men af

$$\begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \\ (x_1^2 - y_1^2)^2 + 4x_1^2 y_1^2 = (x_2^2 - y_2^2)^2 + 4x_2^2 y_2^2. \end{cases}$$

Dus

$$\begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \\ (x_1^2 + y_1^2)^2 = (x_2^2 + y_2^2)^2. \end{cases}$$

Hieruit volgt

$$\begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2, \\ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2. \end{cases}$$

En tenslotte

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2^2, \\ y_1^2 = y_2^2. \end{cases}$$

Als $(x_1, y_1) \in G$ en $(x_2, y_2) \in G$, dus $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$, dan volgt uit het laatste stelsel vergelijkingen dat $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, waarmee de injectiviteit van Ψ bewezen is.

Oefeningen

1. Zij $G = \{(x, y) | x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } 1 \leq x + y \leq 2\}$.

Bereken $\iint_G e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ via de transformatie, gegeven door $\begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v. \end{cases}$

2. Zij $G = \{(x, y) | \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2, \frac{1}{2}y^2 \leq x \leq y^2\}$.

Bereken $\iint_G xy dx dy$ via de transformatie gegeven door

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}.$$

3. Bereken $\iint_G (x^4 - y^4) dx dy$, waarbij

$$G = \{(x, y) | 0 \leq x \text{ en } 0 \leq y \text{ en } 0 \leq x^2 - y^2 \leq 12 \text{ en } 13 \leq x^2 + y^2 \leq 15\},$$

via de transformatie, bepaald door $\begin{cases} x^2 + y^2 = u, \\ x^2 - y^2 = v. \end{cases}$

8.4. Transformaties met behulp van poolcoördinaten

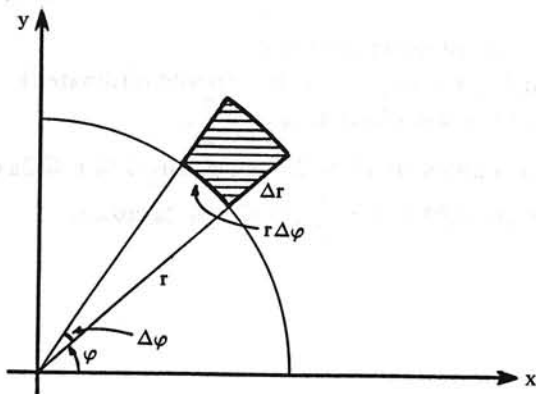
8.4.1. Poolcoördinaten

Een veelvuldig toegepaste transformatie bij tweevoudige integralen is de overgang op poolcoördinaten (zie 2.6.1). In de terminologie van 8.3.4 betekent dit dat $\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Door deze transformatie wordt een rechthoek $[0, R] \times [0, 2\pi]$ afgebeeld op een cirkel $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Merk op dat deze afbeelding op het inwendige van de rechthoek wegens 2.6.1 (II) injectief is.

De Jacobiaan is

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r, \quad (\text{zie 6.13.4}),$$

zodat het oppervlakte-element $d\Omega$ in poolcoördinaten geschreven kan worden als $r dr d\varphi$.

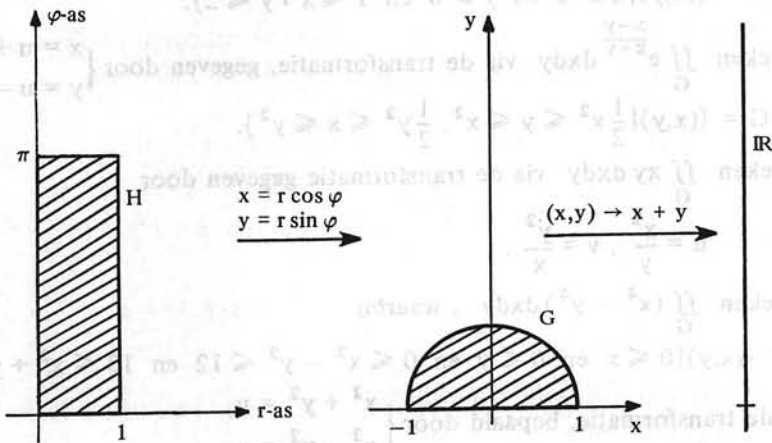


8.4.2. Voorbeelden

a) We berekenen nu voorbeeld 8.2.6a met behulp van poolcoördinaten.

$G = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } y \geq 0\}$ levert

$H = \{(r,\varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.



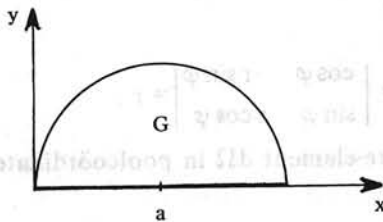
Dus

$$\begin{aligned} \iint_G (x+y) dx dy &= \iint_H (r \cos \varphi + r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_0^1 r^2 \left[\int_0^\pi (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \right] dr = \\ &= \int_0^1 r^2 [\sin \varphi - \cos \varphi]_{\varphi=0}^\pi dr = 2 \int_0^1 r^2 dr = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

b) Zij $G = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2ax\}$ waarin $a > 0$.

Bereken

$$\iint_G (x^2 + y^2) dx dy.$$



We behandelen 2 oplossingsmethoden.

Methode 1. Stel $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (poolcoördinaten).

Uit $x \geq 0, y \geq 0$ volgt direct $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$x^2 + y^2 \leq 2ax$ impliceert $r^2 \leq 2ar \cos \varphi$, dus $0 \leq r \leq 2a \cos \varphi$.

Derhalve $H = \{(r,\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi\}$.

$$\begin{aligned} \iint_G (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_H r^2 r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2a \cos \varphi} r^3 dr \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} 2^4 a^4 \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{4} a^4 \pi. \end{aligned}$$

Methode 2. Stel $x - a = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ('verschoven' poolcoördinaten). Dan wordt $H = \{(r, \varphi) | 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq a\}$. De Jacobiaan is r .

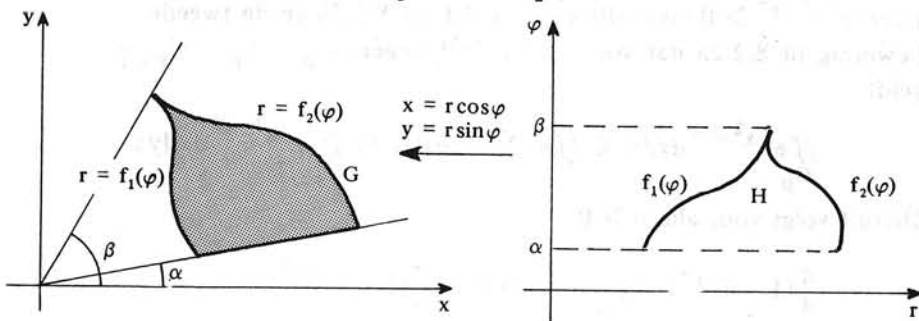
$$\begin{aligned} \iint_G (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_H (a^2 + 2ar \cos \varphi + r^2) r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \left[\int_0^a (a^2 r + 2ar^2 \cos \varphi + r^3) dr \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4} a^4 + \frac{2}{3} a^4 \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{3}{4} a^4 \pi. \end{aligned}$$

8.4.3. De oppervlakte in poolcoördinaten

Laat G "in poolcoördinaten" gegeven zijn door

$G = \{(x, y) | x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \text{ en } \alpha \leq \varphi \leq \beta \text{ en } f_1(\varphi) \leq r \leq f_2(\varphi)\}$,
 waarbij $\beta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$, en $f_1, f_2: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn.

Noem $H = \{(r, \varphi) | \alpha \leq \varphi \leq \beta \text{ en } f_1(\varphi) \leq r \leq f_2(\varphi)\}$.



De oppervlakte van G is

$$\Omega(G) = \iint_G dx dy = \iint_H r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} r dr \right] d\varphi,$$

dus

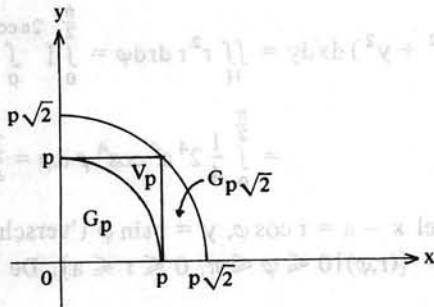
$$\Omega(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi)] d\varphi.$$

Nemen we $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $f_1(\varphi) = 0$ en $f_2(\varphi) = a$, dan komt er $\Omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 d\varphi = \pi a^2$; de oppervlakte van een cirkel met straal a .

8.4.4. Een toepassing: de berekening van $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Zij $G_p = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq p^2 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$

en $H_p = \{(r, \varphi) | 0 \leq r \leq p \text{ en } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$, ($p > 0$).



Dan is

$$\begin{aligned} \iint_{G_p} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{H_p} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^p e^{-r^2} r dr \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - e^{-p^2}) d\varphi = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-p^2}). \end{aligned}$$

Noem $V_p = \{(x,y) | 0 \leq x \leq p \text{ en } 0 \leq y \leq p\}$.

Dan is

$$\begin{aligned} \iint_{V_p} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^p \left[\int_0^p e^{-x^2-y^2} dx \right] dy = \int_0^p [e^{-y^2} \int_0^p e^{-x^2} dx] dy = \\ &= \int_0^p e^{-x^2} dx \cdot \int_0^p e^{-y^2} dy = \left[\int_0^p e^{-x^2} dx \right]^2. \end{aligned}$$

Daar $e^{-x^2-y^2} > 0$ voor alle (x,y) , volgt uit 8.2.3a en de tweede bewering in 8.2.2a dat voor alle $p > 0$ wegens $G_p \subset V_p \subset G_{p\sqrt{2}}$ geldt

$$\iint_{G_p} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{V_p} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{G_{p\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Hieruit volgt voor alle $p > 0$

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-p^2}) \leq \left[\int_0^p e^{-x^2} dx \right]^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2p^2}).$$

Limietovergang $p \rightarrow \infty$ levert $\left[\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \frac{\pi}{4}$ (wegens de insluitstelling).

Daar $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx > 0$ volgt hieruit $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, (vgl. 5.12.6a).

Oefeningen

1. Bereken de integraal uit oefening 8.2.1 met behulp van poolcoördinaten.
2. De kromme k in \mathbb{R}^2 is in poolcoördinaten gegeven door $r = \cos^2 \varphi$ met $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Schets k en bereken de oppervlakte van het door k begrensde gebied.

3. Bereken de oppervlakte van het vierkant met hoekpunten (0,0), (1,0), (0,1) en (1,1) via overgang op poolcoördinaten.
4. Zij $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \geq 1, y^2 \leq 4 - 4x, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Bereken $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

Integratie in \mathbb{R}^3

8.5. Rechtstreekse berekening

8.5.1. Inleiding

De definitie van de Riemann-integraal van een begrensde functie f over een rechthoekig blok $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ resp. een begrensde verzameling G in \mathbb{R}^3 verloopt analoog met hetgeen behandeld is in paragraaf 8.1.

We spreken dan van een *drievoudige integraal* $\iiint_B f(x,y,z) dx dy dz$, resp. $\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz$.

Als $V(G) = \iiint_G dx dy dz$ bestaat, dan heet $V(G)$ het *volume* of de *inhoud* van G .

De stellingen 8.2.1, 8.2.2 en 8.2.3 blijven geldig als men de daarin optredende tweevoudige integralen vervangt door drievoudige integralen en als men aan de begrippen regulier gebied en normaal gebied de hierna te definiëren betekenis toekent.

8.5.2. Reguliere en normale gebieden

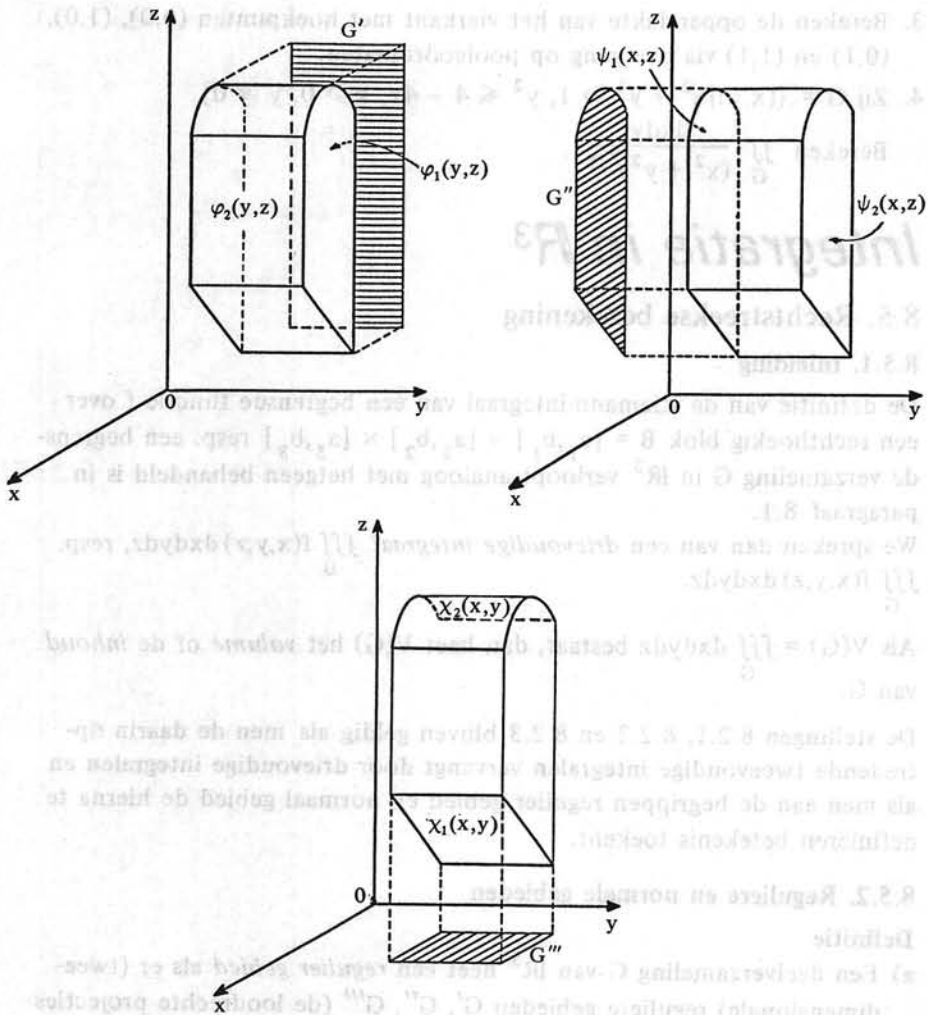
Definitie

a) Een deelverzameling G van \mathbb{R}^3 heet een *regulier gebied* als er (twee-dimensionale) reguliere gebieden G' , G'' , G''' (de loodrechte projecties van G resp. in de vlakken $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$) en continue functies $\varphi_1, \varphi_2: G' \rightarrow \mathbb{R}$; $\psi_1, \psi_2: G'' \rightarrow \mathbb{R}$; $\chi_1, \chi_2: G''' \rightarrow \mathbb{R}$ bestaan, zó dat G op de volgende drie manieren kan worden beschreven:

- (i) $G = \{(x,y,z) | (y,z) \in G' \text{ en } \varphi_1(y,z) \leq x \leq \varphi_2(y,z)\}$,
- (ii) $G = \{(x,y,z) | (x,z) \in G'' \text{ en } \psi_1(x,z) \leq y \leq \psi_2(x,z)\}$,
- (iii) $G = \{(x,y,z) | (x,y) \in G''' \text{ en } \chi_1(x,y) \leq z \leq \chi_2(x,y)\}$.

b) Onder de *rand* ∂G van een regulier gebied G in \mathbb{R}^3 verstaan we de vereniging van de verzamelingen

- $\{(x,y,z) | (y,z) \in G' \text{ en } x = \varphi_i(y,z)\}$, $i \in \{1,2\}$ (achter- en voorkant),
- $\{(x,y,z) | (x,z) \in G'' \text{ en } y = \psi_i(x,z)\}$, $i \in \{1,2\}$ (linker- en rechterkant),
- $\{(x,y,z) | (x,y) \in G''' \text{ en } z = \chi_i(x,y)\}$, $i \in \{1,2\}$ (onder- en bovenkant).



- c) Een deelverzameling G van \mathbb{R}^3 heet een *normaal gebied* als G de vereniging is van eindig veel reguliere gebieden die hoogstens randpunten gemeen hebben.

8.5.3. Voorbeeld

Zij $0 < a < b$ en zij $G = \{(x, y, z) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$.

G is een normaal gebied, maar geen regulier gebied.

$G_1 = \{(x, y, z) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } z \geq 0\}$,

$G_2 = \{(x, y, z) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } z \leq 0\}$,

enz.

zijn reguliere gebieden.

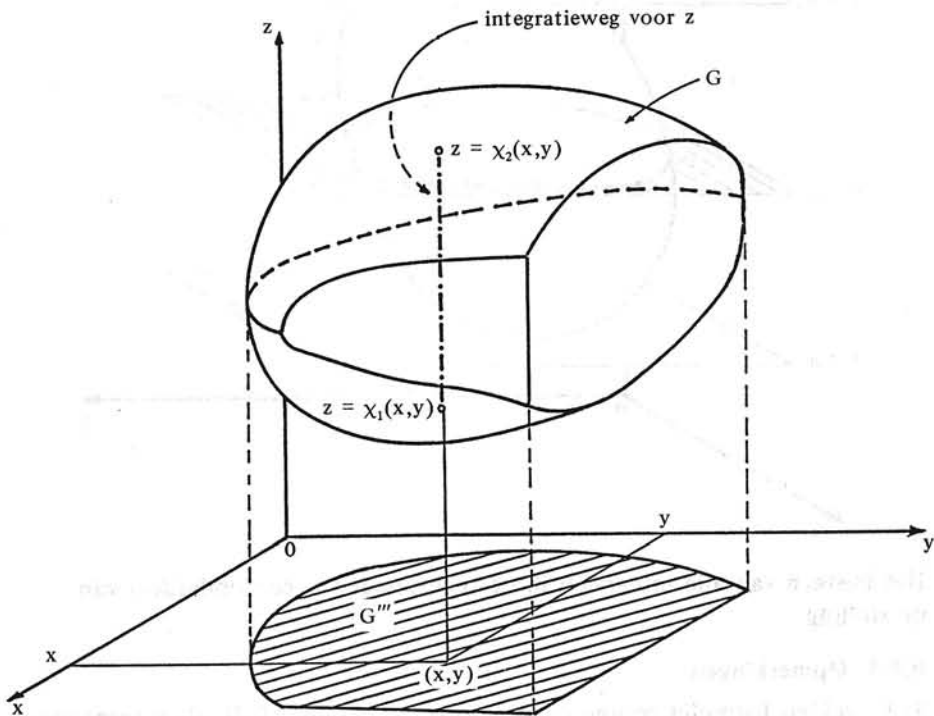
Het volgende analogon van stelling 8.2.5 wordt niet bewezen.

8.5.4. Stelling (Fubini)

Zij G een regulier gebied in \mathbb{R}^3 en zij $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ continu op G .

Dan geldt (met de in 8.5.2 ingevoerde notaties):

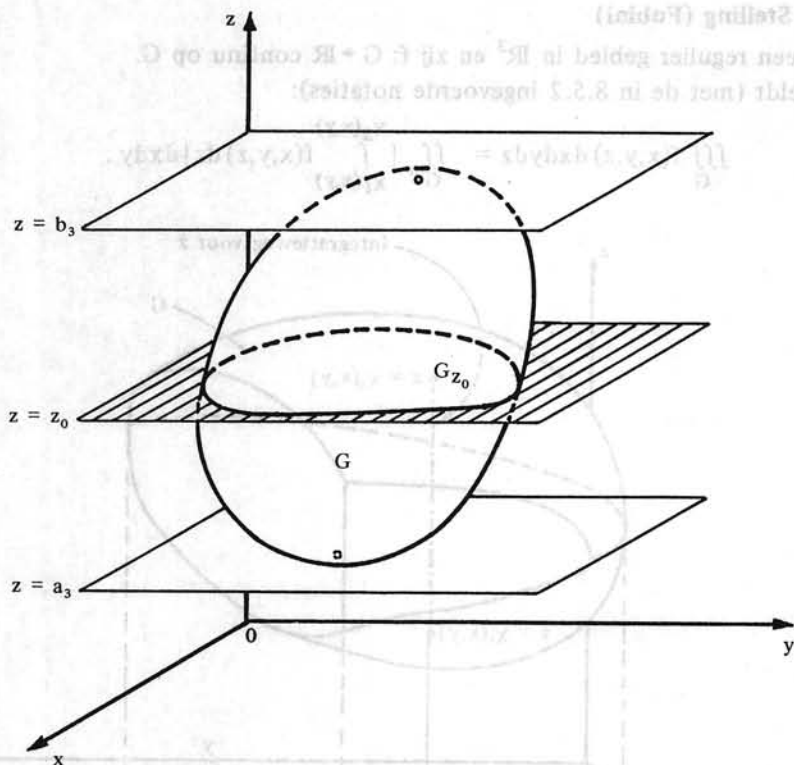
$$a) \quad \iiint_G f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{G'''} \left[\int_{x_1(x,y)}^{x_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right] dx \, dy.$$



b) Als $[a_3, b_3]$ de loodrechte projectie van G op de z -as is en

$G_{z_0} = \{(x,y) | (x,y,z_0) \in G\}$ met $z_0 \in [a_3, b_3]$, dan is

$$\iiint_G f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \int_{a_3}^{b_3} \left[\iint_{G_z} f(x,y,z) \, dx \, dy \right] dz.$$



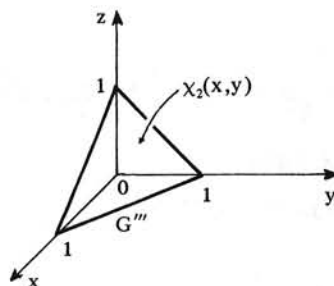
Het bestaan van alle integralen in de rechterleden is een onderdeel van de stelling.

8.5.5. Opmerkingen

- Er gelden formules overeenkomstig aan 8.5.4a en 8.5.4b als x respectievelijk y in plaats van z als enkelvoudige integratievariabele wordt gekozen.
- Als $z_0 \in [a_3, b_3]$ stelt $\{(x, y, z_0) \mid (x, y) \in G_{z_0}\}$ de doorsnede van G met het vlak $z = z_0$ voor.
Ga na dat G_{z_0} een regulier gebied is.
- De in 8.5.4a en 8.5.4b voorkomende tweevoudige integralen kunnen met behulp van stelling 8.2.5 herleid worden tot herhaalde integralen. Eventueel kunnen in deze tweevoudige integralen nieuwe variabelen worden ingevoerd.

8.5.6. Voorbeelden

- Zij $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 1 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } z \geq 0\}$.
Dan is $G''' = \{(x, y) \mid x + y \leq 1 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$,
 $\chi_1(x, y) = 0$ en $\chi_2(x, y) = 1 - x - y$.



Er volgt

$$\begin{aligned}
 \iiint_G (y^2 + 3z^2) dx dy dz &= \iint_{G'''} \left[\int_0^{1-x-y} (y^2 + 3z^2) dz \right] dx dy = \\
 &= \iint_{G'''} [y^2(1-x-y) + (1-x-y)^3] dx dy = \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-y} [y^2(1-x-y) + (1-x-y)^3] dx \right] dy = \\
 &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2}y^2(1-x-y)^2 - \frac{1}{4}(1-x-y)^4 \right]_{x=0}^{1-y} dy = \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2(1-y)^2 + \frac{1}{4}(1-y)^4 \right] dy = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \right]_0^1 + \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{5}(1-y)^5 \right]_0^1 = \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15}.
 \end{aligned}$$

b) Zij $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ en zij $G = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.

Bereken de inhoud van G .

We geven twee oplosmethoden.

Methode 1 (met 8.5.4a)

$$G''' = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\},$$

$$x_1(x,y) = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

$$x_2(x,y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

$$\iiint_G dx dy dz = \iint_{G'''} \left[\int_{x_1(x,y)}^{x_2(x,y)} dz \right] dx dy = \iint_{G'''} 2c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

Stellen we $\frac{x}{a} = r \cos \varphi$, $\frac{y}{b} = r \sin \varphi$ dan is $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| = rab$.

Dus vinden we

$$\iint_G 2c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} 2abc \sqrt{1 - r^2} \, r \, d\varphi \right] dr = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Methode 2 (met 8.5.4b)

$$\text{Als } z_0 \in [-c, c] \text{ dan } G_{z_0} = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \right\}.$$

$$\iiint_G dx dy dz = \int_{-c}^c \left[\iint_{G_z} dx dy \right] dz.$$

Stellen we weer $\frac{x}{a} = r \cos \varphi$, $\frac{y}{b} = r \sin \varphi$, dan vinden we

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c \left[\iint_{G_z} dx dy \right] dz &= \int_{-c}^c \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}} ab r \, d\varphi \right] dr dz = \\ &= \int_{-c}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

De inhoud van het door $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ begrensde deel van de ruimte is dus $\frac{4}{3} \pi abc$; in het bijzonder is de inhoud van de bol met straal r gelijk aan $\frac{4}{3} \pi r^3$.

Oefeningen

1. Bereken de inhoud van het deel van de ruimte dat wordt ingesloten door de cilinders $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + z^2 = 1$.

Is dit gebied regulier?

2. Bereken $\iiint_G \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}$, waarbij

$$G = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 1 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } z \geq 0\}.$$

3. Bereken $\iiint_G (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, waarbij

$$G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ en } z \geq 0\}.$$

4. Zij G als in voorbeeld 8.5.6a. Bepaal uitgaande van de in dit voorbeeld berekende integraal (dus zonder nieuwe berekening)

$$\iiint_G 4y^2 \, dx dy dz.$$

5. Bereken het volume van $G = \{(x, y, z) \mid z \leq 4 - y^2 \text{ en } z \geq 2x^2 + y^2\}$.

6. Zij $G = \{(x, y, z) \mid y \geq 0, z \geq 0, x + y \geq 2, 2y + x \leq 6, y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Bereken $\iiint_G z \, dx dy dz$.

7. Zij $G = \{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$.

Bereken $\iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz$.

8.6. Transformatie in \mathbb{R}^3

We vermelden zonder bewijs de substitutieregels voor drievoudige integralen, die op soortgelijke wijze als stelling 8.3.4 aannemelijk gemaakt kan worden.

8.6.1. Substitutieregels voor drievoudige integralen

Stelling

Laat G en H normale gebieden zijn in \mathbb{R}^3 , laat $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie zijn en laat $\Phi: H \rightarrow G$, $\Phi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, een surjectieve afbeelding zijn die in het inwendige van H ook injectief is. Veronderstel dat de componenten van Φ continue zijn op H en in de inwendige punten van H continue partiële afgeleiden hebben, terwijl de functionaaldeterminant

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

in het inwendige van H begrensd en niet nul is.

Dan geldt

$$\iiint_G f(x,y,z) \, dx dy dz = \iiint_H f \circ \Phi(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \, dudvdw.$$

8.6.2. Opmerkingen

a) Indien in stelling 8.6.1 $f = 1$ wordt genomen, krijgen we voor het volume van G :

$$V(G) = \iiint_G dx dy dz = \iiint_H \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \, dudvdw.$$

Vaak noteert men ook $V(G) = \iiint_G dV$, waarbij dV het *volume-element* genoemd wordt. Voor iedere afbeelding $\Phi: H \rightarrow G$ die aan de eisen van stelling 8.6.1 voldoet (zo'n afbeelding wordt een *parametrisering* van G genoemd) geldt dus

$$\iiint_G dV = \iiint_H \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \, dudvdw.$$

Analoog noteert men

$$\iiint_G f \, dV = \iiint_H f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \, dudvdw.$$

Men kan hierin dV opvatten als een symbolische notatie voor

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw. \text{ Bijzonder geval: als } G = H, x = u, y = v, z = w \text{ dan}$$

$$\text{is } \iiint_G f dV = \iiint_G f(x,y,z) dx dy dz.$$

- b) Indien men in plaats van de afbeelding $\Phi: H \rightarrow G$ de inverse afbeelding $\Psi: G \rightarrow H$ kent, kan men, analoog aan 8.3.5c de Jacobiaan $J_\Psi(u,v,w)$ berekenen uit

$$J_\Phi(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = \frac{1}{J_\Psi(x,y,z)}.$$

8.6.3. Voorbeeld

Zij $G = \{(x,y,z) | x + y + z \leq 1 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \text{ en } z \geq 0\}$ (zie 8.5.6a) en $H = \{(u,v,w) | 0 \leq u \leq 1 \text{ en } 0 \leq v \leq 1 \text{ en } 0 \leq w \leq 1\}$.

Door $\Phi(u,v,w) = (u, (1-u)v, (1-u)(1-v)w)$ wordt H afgebeeld op G en

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v & 1-u & 0 \\ -(1-v)w & -(1-u)w & (1-u)(1-v) \end{vmatrix} = (1-u)^2(1-v).$$

Volgens 8.6.1 is

$$\begin{aligned} \iiint_G (y^2 + 3z^2) dx dy dz &= \\ &= \iiint_H [(1-u)^2 v^2 + 3(1-u)^2 (1-v)^2 w^2] \cdot |(1-u)^2(1-v)| dudvdw = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 [(1-u)^4 (v^2 - v^3) + 3(1-u)^4 (1-v)^3 w^2] dw \right] dv \right] du = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 [(1-u)^4 (v^2 - v^3) + (1-u)^4 (1-v)^3] dv \right] du = \\ &= \int_0^1 (1-u)^4 du \cdot \int_0^1 [v^2 - v^3 + (1-v)^3] dv = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

8.6.4. Cilindercoördinaten

Een vaak gebruikte transformatie bij drievoudige integralen is de overgang op cilindercoördinaten:

$$\Phi(r,\varphi,\zeta) = (x,y,z) \text{ met } \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = \zeta. \end{cases}$$

Door deze transformatie wordt $\{(r,\varphi,\zeta) | r \in \mathbb{R}^+, \zeta \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ bijectief afgebeeld op $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) | x^2 + y^2 = 0\}$.

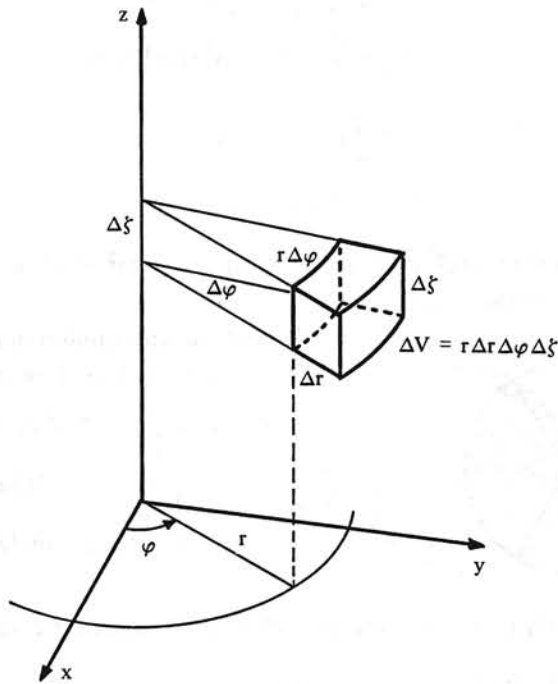
Er geldt

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\zeta)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Door deze transformatie wordt een rechthoekig blok
 $B = \{(r, \varphi, \zeta) \mid 0 \leq r \leq R \text{ en } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ en } a \leq \zeta \leq b\}$
 afgebeeld op een cilinder
 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ en } a \leq z \leq b\}$.

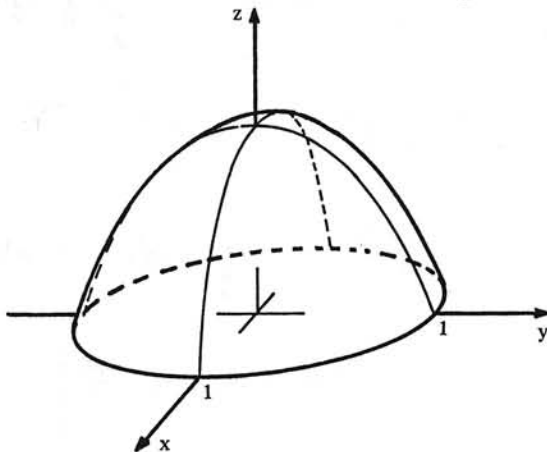
Op dezelfde wijze als in opmerking 8.3.7 kan men bewijzen dat de transformatie op het inwendige van B injectief is.

Het volume-element dV is in cilindercoördinaten uitgedrukt $r \, dr \, d\varphi \, d\zeta$.
 Dit kan men ook inzien aan de hand van de volgende figuur.



8.6.5. Voorbeelden

a) Zij $G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$. Bereken $\iiint_G z \, dx \, dy \, dz$.



Oplissing.

We gebruiken cilindercoördinaten.

Dan geldt

$$H = \{(r, \varphi, \zeta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \zeta \leq 1 - r^2\},$$

en is

$$\iiint_G z \, dx \, dy \, dz = \iiint_H \zeta r \, dr \, d\varphi \, d\zeta =$$

$$= \int_{r=0}^1 \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\int_{\zeta=0}^{1-r^2} \zeta r \, d\zeta \right] d\varphi \right] dr =$$

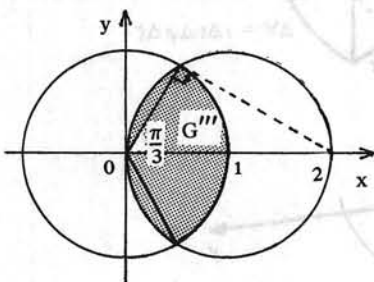
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1-r^2)^2 r \, d\varphi \right] dr =$$

$$= \pi \int_0^1 (1-r^2)^2 r \, dr =$$

$$1-r^2 = u \quad -\frac{1}{2}\pi \int_1^0 u^2 \, du = \frac{1}{6}\pi.$$

b) Zij $G = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \text{ en } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Bereken de inhoud van G .



We gebruiken cilindercoördinaten.

We vinden voor de grenzen van H :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad r \leq \zeta \leq 1,$$

$$0 \leq r \leq \begin{cases} 1 & \text{als } |\varphi| \leq \frac{\pi}{3}, \\ 2 \cos \varphi & \text{als } |\varphi| \geq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

We maken bij de berekening gebruik van de symmetrie van het gebied G .

$$\iiint_G z \, dx \, dy \, dz = \iiint_H r \, dr \, d\varphi \, d\zeta =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^1 \left[\int_r^1 r \, d\zeta \right] dr \right] d\varphi + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2 \cos \varphi} \left[\int_r^1 r \, d\zeta \right] dr \right] d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^1 (r - r^2) \, dr \right] d\varphi + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2 \cos \varphi} (r - r^2) \, dr \right] d\varphi =$$

$$= 2 \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cos^2 \varphi - \frac{8}{3} \cos^3 \varphi \right) d\varphi =$$

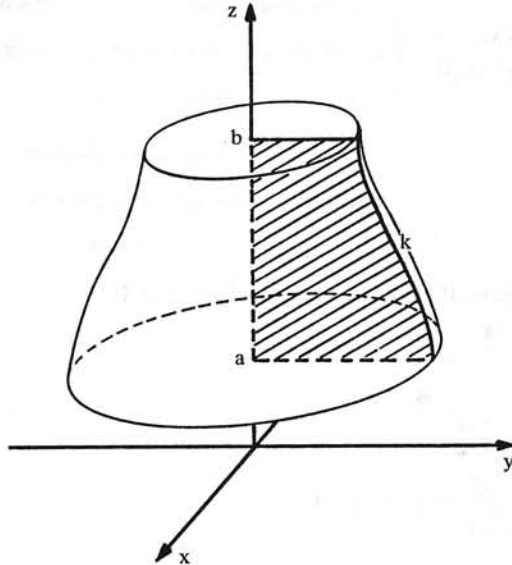
$$= \frac{1}{9}\pi + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi - \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) \, d\sin \varphi =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9}\pi + 2\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right] \frac{\pi}{3} - \frac{16}{3}\left[\sin \varphi - \frac{1}{3}\sin^3 \varphi\right] \frac{\pi}{3} = \\
 &= \frac{1}{9}\pi + 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) - \frac{16}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\sqrt{3}\right) = \\
 &= \frac{4}{9}\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{32}{9}.
 \end{aligned}$$

8.6.6. Inhoud van een omwentelingslichaam

Zij $a < b$ en zij $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ continu.

Laat de in het vlak $x = 0$ gelegen kromme k gegeven zijn door $y = f(z)$, $a \leq z \leq b$. Wanneer k om de z -as wordt gewenteld, ontstaat een gebogen oppervlak (*omwentelingsoppervlak*). Zij G het deel van \mathbb{R}^3 dat begrensd wordt door dit gebogen oppervlak en de vlakken $z = a$ en $z = b$, met andere woorden $G = \{(x,y,z) \mid a \leq z \leq b \text{ en } x^2 + y^2 \leq (f(z))^2\}$.



We berekenen de inhoud V van dit *omwentelingslichaam* met behulp van cilindercoördinaten. We nemen daartoe

$$H = \{(r,\varphi,\xi) \mid 0 \leq r \leq f(\xi) \text{ en } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ en } a \leq \xi \leq b\}.$$

Dan is

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_G dx dy dz = \iiint_H r dr d\varphi d\xi = \\
 &= \int_a^b \left[\int_0^{f(\xi)} \left[\int_0^{2\pi} r d\varphi \right] dr \right] d\xi = \int_a^b \left[\int_0^{f(\xi)} 2\pi r dr \right] d\xi,
 \end{aligned}$$

dus

$$V = \pi \int_a^b [f(z)]^2 dz. \tag{*}$$

Nemen we in (*) $a = -R$, $b = R$, $f(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ dan vinden we

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \pi(2R^3 - \frac{2}{3}R^3) = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

de inhoud van een bol met straal R .

8.6.7. Bolcoördinaten

Ook wordt dikwijls gebruik gemaakt van de overgang op bolcoördinaten:

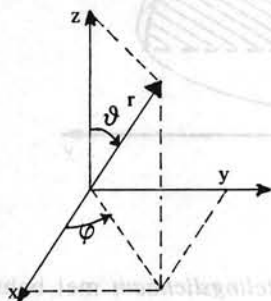
$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = (x, y, z) \text{ met } \begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = r \cos \vartheta. \end{cases}$$

Door deze transformatie wordt $\{(r, \vartheta, \varphi) \mid r \in \mathbb{R}^+, 0 < \vartheta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ bijectief afgebeeld op $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 0\}$.

Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= r^2 \sin \vartheta \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Merk op dat wegens $0 \leq \vartheta \leq \pi$ geldt $r^2 \sin \vartheta \geq 0$.



Door deze transformatie wordt een rechthoekig blok

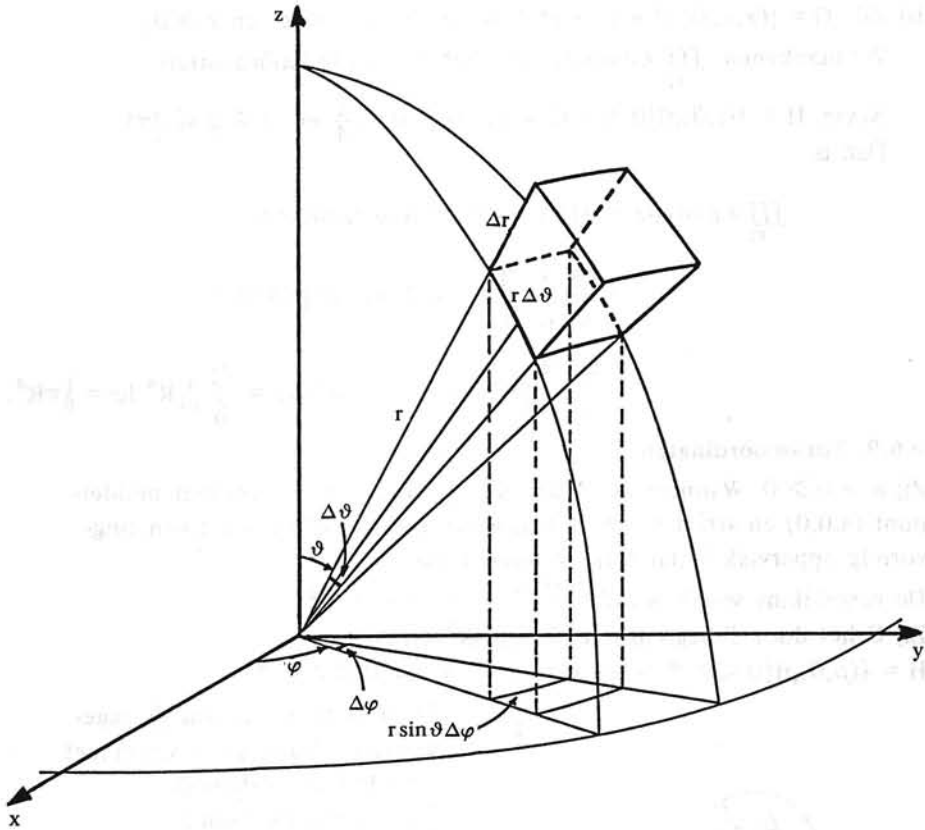
$$B = \{(r, \vartheta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R \text{ en } 0 \leq \vartheta \leq \pi \text{ en } 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

afgebeeld op een bol $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Op dezelfde wijze als in opmerking 8.3.7 kan men bewijzen dat de transformatie op het inwendige van B injectief is.

Het volume-element dV is in bolcoördinaten uitgedrukt $r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$.

Dit kan men ook inzien aan de hand van de figuur.



8.6.8. Voorbeelden

a) Zij $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

We berekenen $\iiint_G z^2 dx dy dz$ met behulp van bolcoördinaten

$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$ en

$H = \{(r, \vartheta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Dus

$$\begin{aligned}
 \iiint_G z^2 dx dy dz &= \iiint_H r^2 \cos^2 \vartheta r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\
 &= \int_{r=0}^R \left[\int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^4 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\varphi \right] d\vartheta \right] dr = \\
 &= 2\pi \int_0^R \left[\int_0^{\pi} -r^4 \cos^2 \vartheta d(\cos \vartheta) \right] dr = \\
 &= 2\pi \int_0^R r^4 \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^{\pi} dr = \\
 &= \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{1}{5} R^5 = \frac{4}{15} \pi R^5.
 \end{aligned}$$

b) Zij $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ en } x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ en } z \geq 0\}$.

We berekenen $\iiint_G z \, dx \, dy \, dz$ met behulp van bolcoördinaten.

Neem $H = \{(r, \vartheta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R \text{ en } 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \text{ en } 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Dan is

$$\begin{aligned} \iiint_G z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_H r \cos \vartheta \cdot r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^R r^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, dr \right] d\vartheta \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} R^4 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right] d\varphi = \frac{2\pi}{0} \frac{1}{16} R^4 d\varphi = \frac{1}{8} \pi R^4. \end{aligned}$$

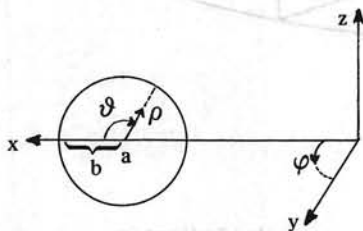
8.6.9. Toruscoördinaten

Zij $a > b > 0$. Wanneer de in het vlak $y = 0$ gelegen cirkel met middelpunt $(a, 0, 0)$ en straal b om de z -as gewenteld wordt ontstaat een ringvormig oppervlak T dat *torus* genoemd wordt.

De vergelijking van T is $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$.

Zij G het door T begrensde deel van \mathbb{R}^3 en zij

$H = \{(\rho, \vartheta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq b \text{ en } 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \text{ en } 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.



Door de transformatie Φ , gegeven door $\Phi(\rho, \vartheta, \varphi) = (x, y, z)$ met

$$\begin{cases} x = (a + \rho \cos \vartheta) \cos \varphi, \\ y = (a + \rho \cos \vartheta) \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \vartheta, \end{cases}$$

wordt H afgebeeld op G .

Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho, \vartheta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -\rho \sin \vartheta \cos \varphi & -(a + \rho \cos \vartheta) \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & -\rho \sin \vartheta \sin \varphi & (a + \rho \cos \vartheta) \cos \varphi \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \rho(a + \rho \cos \vartheta) \begin{vmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \end{vmatrix} = -\rho(a + \rho \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Wegens $0 \leq \rho \leq b < a$ is $\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho, \vartheta, \varphi)} \right| = \rho(a + \rho \cos \vartheta)$.

8.6.10. Voorbeeld

Zij $G = \{(x,y,z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 \leq b^2\}$.

We berekenen met behulp van toruscoördinaten $\iiint_G (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$.

$$H = \{(\rho, \vartheta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq b, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \text{ en } 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

$$\text{Dus } \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_H \rho (a + \rho \cos \vartheta)^3 d\rho d\vartheta d\varphi =$$

$$= \int_0^b \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \rho (a + \rho \cos \vartheta)^3 d\varphi \right] d\vartheta \right] d\rho = \int_0^b \left[\int_0^{2\pi} 2\pi \rho (a + \rho \cos \vartheta)^3 d\vartheta \right] d\rho =$$

$$= \int_0^b \left[\int_0^{2\pi} 2\pi (a^3 \rho + 3a^2 \rho^2 \cos \vartheta + 3a \rho^3 \cos^2 \vartheta + \rho^4 \cos^3 \vartheta) d\vartheta \right] d\rho =$$

$$= \int_0^b 2\pi (2\pi a^3 \rho + 3\pi a \rho^3) d\rho = 2\pi^2 a^3 b^2 + \frac{3}{2} \pi^2 a b^4.$$

Oefeningen

1. Bereken de inhoud van een bol met straal R door overgang op bolcoördinaten.
2. Bereken de inhoud van de in 8.6.9 gedefinieerde torus via overgang op de daar ingevoerde toruscoördinaten en ook met behulp van 8.6.6(*).
3. Bereken de in oefening 8.5.3 gevraagde integraal door overgang op bolcoördinaten.
4. Men laat de in het vlak $x = 0$ gelegen kromme $yz = 1$ wentelen om de z -as. Van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat beschouwen we het deel G dat ligt tussen de vlakken $z = 1$ en $z = a$, ($a > 1$). Bereken de inhoud V van G en de oppervlakte Ω van de doorsnede van G met het vlak $x = 0$.
Ga na dat Ω niet en V wel begrensd is als a naar ∞ nadert.
5. Bereken $\iiint_G z^2 dx dy dz$, waarbij $G = \{(x, y, z) \mid 3x^2 + 3y^2 \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2\}$.
6. Zij $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3}\}$.

$$\text{Bereken } \iiint_G \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$$

8.7. Toepassingen van meervoudige integralen

8.7.1. Massa

Is G een deel van \mathbb{R}^3 en is in ieder punt (x, y, z) van G de *massadichtheid* (d.i. massa per volume-eenheid) gegeven door $\rho(x, y, z)$, dan volgt uit een beschouwing met Riemann-sommen dat voor de totaal in G aanwezige massa (kort: de massa van G) geldt:

$$M = \iiint_G \rho(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G \rho dV.$$

Het massa-element dM kan worden geschreven als ρdV .

8.7.2. Zwaartepunt

Het *zwaartepunt* $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ van een eindig stel puntmassa's m_i op plaatsen $\underline{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ is gegeven door $M \underline{x}_0 = \sum m_i \underline{x}_i$, waarbij

$$M = \sum m_i. \text{ Dus } x_0 = \frac{1}{M} \sum m_i x_i, y_0 = \frac{1}{M} \sum m_i y_i, z_0 = \frac{1}{M} \sum m_i z_i.$$

Met behulp van Riemann-sommen leidt men hieruit af, dat de coördinaten van het zwaartepunt van een lichaam G met massadichtheid $\rho(x,y,z)$ en massa M gegeven worden door

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_G x \rho(x,y,z) dx dy dz = \frac{1}{M} \iiint_G x \rho dV,$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \iiint_G y \rho(x,y,z) dx dy dz = \frac{1}{M} \iiint_G y \rho dV,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \iiint_G z \rho(x,y,z) dx dy dz = \frac{1}{M} \iiint_G z \rho dV.$$

8.7.3. Voorbeeld

Zij $G = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ en } x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ en } z \geq 0\}$ en zij $\rho(x,y,z) = 1$.

We berekenen de coördinaten van het zwaartepunt van G .

Omdat de massadichtheid constant is en de z -as symmetrie-as is van G , ligt het zwaartepunt op de z -as. Dus $x_0 = y_0 = 0$.

In 8.6.8b zagen we dat $\iiint_G z dx dy dz = \frac{1}{8} \pi R^4$.

Verder is (met H als in 8.6.8b)

$$M = \iiint_G dx dy dz = \iiint_H r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right] d\vartheta \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} R^3 \sin \vartheta d\vartheta \right] d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) d\varphi = \frac{1}{3} \pi R^3 (2 - \sqrt{2}).$$

$$\text{Dus } z_0 = \frac{\frac{1}{8} \pi R^4}{\frac{1}{3} \pi R^3 (2 - \sqrt{2})} = \frac{3}{16} R (2 + \sqrt{2}).$$

8.7.4. Traagheidsmoment

Als een deeltje met massa m zich bevindt in het punt (x,y,z) en zijn afstand tot een lijn s is $d_s(x,y,z)$, dan is zijn traagheidsmoment ten opzichte van de lijn s gelijk aan $(d_s(x,y,z))^2 m$.

Als G een lichaam is met massadichtheid gegeven door $\rho(x,y,z)$ dan is het traagheidsmoment I_s van G ten opzichte van de lijn s gelijk aan

$$I_s = \iiint_G (d_s(x,y,z))^2 \rho(x,y,z) dx dy dz = \iiint_G d_s^2 \rho dV.$$

8.7.5. Voorbeeld

Zij G de in 8.6.9 gedefinieerde torus en zij $\rho(x,y,z) = 1$.

De in 8.6.10 berekende integraal

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{1}{2} \pi^2 ab^2 (4a^2 + 3b^2)$$

is dan het traagheidsmoment van G ten opzichte van de z -as.

Gebruikmakend van de in 8.6.9 ingevoerde notaties berekenen we nu het traagheidsmoment van G ten opzichte van de x -as:

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_G y^2 dx dy dz + \iiint_G z^2 dx dy dz.$$

$$\iiint_G y^2 dx dy dz = \iiint_H \rho(a + \rho \cos \vartheta)^3 \sin^2 \varphi \rho d\rho d\vartheta d\varphi =$$

$$= \int_0^b \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \rho(a + \rho \cos \vartheta)^3 \sin^2 \varphi d\varphi \right] d\vartheta \right] d\rho =$$

$$= \int_0^b \left[\int_0^{2\pi} \pi \rho(a + \rho \cos \vartheta)^3 d\vartheta \right] d\rho.$$

Deze integraal is op een factor 2 na dezelfde als de integraal in 8.6.10,

dus $\iiint_G y^2 dx dy dz = \pi^2 a^3 b^2 + \frac{3}{4} \pi^2 ab^4$.

Verder is

$$\iiint_G z^2 dx dy dz = \iiint_H \rho^2 \sin^2 \vartheta \rho(a + \rho \cos \vartheta) d\rho d\vartheta d\varphi =$$

$$= \int_0^b \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (a\rho^3 \sin^2 \vartheta + \rho^4 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta \right] d\varphi \right] d\rho =$$

$$= \int_0^b \left[\int_0^{2\pi} \pi a \rho^3 d\varphi \right] d\rho = \int_0^b 2\pi^2 a \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi^2 ab^4.$$

We concluderen dat

$$I_x = \pi^2 a^3 b^2 + \frac{5}{4} \pi^2 ab^4 = \frac{1}{4} \pi^2 ab^2 (4a^2 + 5b^2).$$

Ga na dat $I_z > I_x$.

Oefeningen

1. De kubus $G = \{(x,y,z) \mid |x| \leq a \text{ en } |y| \leq a \text{ en } |z| \leq a\}$ heeft een constante massadichtheid $\rho(x,y,z) = c$. Bereken het traagheidsmoment van G t.o.v. de z -as.
2. In de halve bol $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ en } z \geq 0\}$ is de massadichtheid gegeven door $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Bereken:

- a) de coördinaten van het zwaartepunt van G .
- b) het traagheidsmoment van G t.o.v. de z -as.
- c) het traagheidsmoment van G t.o.v. de x -as.

Verklaar waarom b) en c) hetzelfde antwoord opleveren.

8.8. Oneigenlijke meervoudige integralen

8.8.1. Inleiding

De theorie van meervoudige integralen die we tot nu toe hebben behandeld beperkt zich tot *begrensde* functies op *begrensde* gebieden. Toch komt het vaak voor dat men onbegrensde functies, of functies op onbegrensde gebieden, wil integreren. Dit leidt tot zogenaamde *oneigenlijke integralen*, die men via een limietproces kan definiëren, zoals in hoofdstuk 5 reeds met functies van één variabele is gedaan. Terwijl we op \mathbb{R} een ordening hebben, die de symbolen $+\infty$ en $-\infty$ zinvol maakt, kan men bij functies op \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 \underline{x} in vele richtingen naar ∞ laten naderen. Dit feit zal ons dwingen iets voorzichtiger te zijn en met positieve functies te werken. We formuleren alles in deze paragraaf verder voor tweevoudige integralen. Drievoudige integralen laten zich analoog behandelen.

Wederom moeten we ons beperkingen opleggen wat betreft de uitwerking van de theorie. We behandelen slechts zoveel als nodig is voor een goed begrip van oneigenlijke integralen.

8.8.2. Monotone rij deelgebieden

Neem aan dat G het gebied is waarover f moet worden geïntegreerd.

We zeggen dat het gebied G wordt *benaderd door een monotone rij deelgebieden* (G_n) als voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

- $G_n \subset G$,
- G_n is gesloten en begrensd,
- $G_n \subset G_{n+1}$,
- voor iedere gesloten en begrensd deelverzameling $H \subset G$ bestaat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ zó dat $H \subset G_{n_0}$.

Let er op dat we geen uitspraak doen over het al of niet open of gesloten zijn van G ; het voert te ver om daar in dit boek op in te gaan.

Voorwaarde c) geeft aan dat de rij monotoon is; voorwaarde d) is nodig om het hele gebied G te kunnen opvullen met verzamelingen uit de rij, er mogen geen stukjes van G "onbedekt" blijven.

8.8.3. Definitie

We zeggen dat $\iint_G f(x,y) dx dy$ convergeert als $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} f(x,y) dx dy$ bestaat

en de waarde van de limiet onafhankelijk is van de gekozen rij deelgebieden (G_n) die G benadert.

Voor positieve functies geldt de nu volgende stelling.

8.8.4. Stelling

Als $f(x,y) \geq 0$ voor alle $(x,y) \in G$ dan convergeert $\iint_G f(x,y) dx dy$ als $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} f(x,y) dx dy$ bestaat voor één enkele monotone rij deelgebieden (G_n) .

Bewijs

Zij (H_n) een willekeurige andere monotone rij deelgebieden die G benadert. Omdat G_n voor iedere n gesloten en begrensd is, bestaat er volgens 8.8.2d een $n_1 \in \mathbb{N}$ zó dat voor elke $k \geq n_1$ geldt $G_n \subset H_k$.

Anderzijds kan om dezelfde reden bij iedere $k \in \mathbb{N}$ een $n_2 \in \mathbb{N}$ worden aangegeven zó dat voor alle $m \geq n_2$ geldt $H_k \subset G_m$.

Omdat $f(x,y) \geq 0$ is geldt dus

$$\iint_{G_n} f(x,y) dx dy \leq \iint_{H_k} f(x,y) dx dy \leq \iint_{G_m} f(x,y) dx dy.$$

Als $n \rightarrow \infty$ dan gaan de buitenste twee integralen naar dezelfde limiet; volgens de insluitstelling nadert dan ook $\iint_{H_k} f(x,y) dx dy$ naar dezelfde limiet. \square

8.8.5. Opmerkingen

- a) Het geval $f(x,y) \leq 0$ op G kan tot het vorige worden teruggebracht door f door $-f$ te vervangen.
- b) Als f van teken wisselt op G kunnen we stelling 8.8.4 toepassen op $|f|$. Als de integraal van $|f|$ convergeert, dan convergeert ook de integraal van f . Het bewijs verloopt analoog aan dat van stelling 5.12.8.

8.8.6. Voorbeelden

- a) In 8.4.4 hebben we $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ berekend door de monotone rijen (G_p) en (V_p) in te voeren, waarbij $G_p = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq p^2 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$, en $V_p = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq p \text{ en } 0 \leq y \leq p\}$.

Beide rijen benaderen $G = \{(x,y) \mid x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$. Achteraf kunnen we nu dus zeggen dat $\iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{4}\pi$.

- b) Zij $G = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Bereken $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}}$.

Oplossing.

Beschouw de monotone rij deelgebieden (G_n) die G benadert:

$$G_n = \{(x,y) \mid \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{r dr}{r^{\frac{3}{2}}} \right] d\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left[r^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{n}}^1 d\varphi = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \pi. \end{aligned}$$

8.8.7. Toepassing: de convolutieregel voor de Laplace transformatie

- a) Als $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar zijn, dan wordt het *convolutieprodukt* $f * g$ gedefinieerd door de relatie

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Met behulp van de substitutie $u = t - \tau$ krijgen we

$$\begin{aligned}(g * f)(t) &= \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau = - \int_t^0 g(t - u) f(u) du = \\ &= \int_0^t f(u) g(t - u) du = (f * g)(t).\end{aligned}$$

Het convolutieproduct is dus commutatief:

$$f * g = g * f.$$

b) Convolutieregel

Als f en g voldoen aan de voorwaarden van stelling 5.14.5 dan is

$$\mathbf{L}[(f * g)(t)] = \mathbf{L}[f(t)] \mathbf{L}[g(t)].$$

Bewijs

Wegens stelling 5.14.5 bestaan $\mathbf{L}[f]$ en $\mathbf{L}[g]$, dus

$$\mathbf{L}[f(t)] \mathbf{L}[g(t)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \int_0^\infty e^{-sy} g(y) dy.$$

We schrijven het product van de beide integralen als herhaalde integraal over het gebied $G = \{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$.

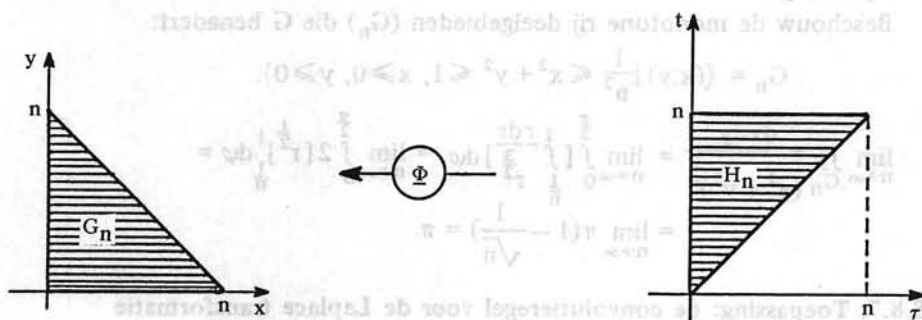
We krijgen dan

$$\begin{aligned}\mathbf{L}[f(t)] \mathbf{L}[g(t)] &= \iint_G e^{-s(x+y)} f(x) g(y) dx dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} e^{-s(x+y)} f(x) g(y) dx dy,\end{aligned}$$

voor elke monotone rij (G_n) die G benadert.

In de laatste integraal willen we weer een Laplace transformatie herkennen. We zullen dus een transformatie moeten toepassen die $x + y = t$ bewerkstelligt. Om het rekenwerk eenvoudig te houden passen we de monotone rij deelgebieden (G_n) aan aan deze situatie. We kiezen

$$G_n = \{(x, y) \mid x + y \leq n \text{ en } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}.$$



Met behulp van de transformatie $\Phi: \begin{cases} x = \tau \\ y = t - \tau \end{cases}$,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\tau,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

volgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} e^{-s(x+y)} f(x) g(y) dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{H_n} e^{-st} f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] dt = \mathbf{L}[(f * g)(t)], \end{aligned}$$

waarmee de stelling bewezen is. \square

c) Voorbeeld

Bepaal $\mathbf{L}^{-1} \left[\frac{a}{s^2(s^2 + a^2)} \right]$.

Oplossing.

$$\frac{a}{s^2(s^2 + a^2)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} = \mathbf{L}[t] \mathbf{L}[\sin at].$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{a}{s^2(s^2 + a^2)} \right] &= \int_0^t (t - \tau) \sin a\tau d\tau = -\frac{1}{a} \int_0^t (t - \tau) d(\cos a\tau) = \\ &= \left[-\frac{1}{a} (t - \tau) \cos a\tau \right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \frac{1}{a} \int_0^t \cos a\tau d\tau = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} \sin at. \end{aligned}$$

Oefeningen

1. $G = \{(x,y) \mid y^2 \leq x, x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$.

Bereken $\iint_G \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

2. $G = \{(x,y) \mid 1 \leq 4x^2 + y^2\}$.

Bereken $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$.

Aanwijzing: Neem $G_n = \{(x,y) \mid 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq n^2\}$

8.9. Vraagstukken

1. Zij G de driehoek in \mathbb{R}^2 met hoekpunten $(0,1)$, $(2,5)$ en $(3,4)$.

Bereken $\iint_G (x + y)^3 dx dy$.

2. Bereken $\iint_G e^{x^2 + y^2 - x^2 y^2} \sqrt{1 - x^2} dx dy$, waarbij

$G = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1\}$.

Aanwijzing: gebruik de transformatie $\Phi(u,v) = (u, \frac{v}{\sqrt{1-u^2}})$.

3. Zij $G = \{(x,y) | 0 \leq y \leq \sqrt{x} \leq 1\}$.

Bereken $\iint_G \frac{y^5}{1+x^8} dx dy$.

4. Zij $G = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 1+x^2\}$.

Bereken $\iint_G \frac{e^{y-2x}}{1-\sqrt{y-2x}} dx dy$.

Aanwijzing: gebruik de substitutie $x = v$, $y = u^2 + 2v$, $u \geq 0$.

5. Zij $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$.

Bereken $\iint_G (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy$.

6. Zij $G = \{(x,y) | x^2 + 3y^2 \leq 3, y \geq x \geq 0\}$.

Bereken $\iint_G x^2 dx dy$.

7. $G = \{(x,y) | x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$.

Bereken $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

8. Zij $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \geq 4, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

Bereken $\iint_G \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$.

9. G is het gebied in het eerste kwadrant begrensd door de grafieken

van $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = \frac{1}{2}x$ en $y = 2x$.

Bereken $\iint_G y^4 e^{x^2} dx dy$.

Aanwijzing: gebruik de substitutie $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.10. Geef een vergelijking in poolcoördinaten van het folium van Descartes $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ en bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de in het eerste kwadrant gelegen lus van deze kromme.

11. $G = \{(x,y,z) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \frac{y}{x+1}, 1 \leq x+y \leq 2\}$.

Bereken het volume van G .

12. $G = \{(x,y,z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y \leq 1, x + y + z \leq 3\}$.

Bereken het volume van G .

13. $G = \{(x,y,z) | 0 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$.

Bereken $\iiint_G (x^2 + y^2 + z) dx dy dz$.

14. $G = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

Bereken $\iiint_G \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$.

15. $G = \{(x,y,z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Bereken $\iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz$.

16. $G = \{(x,y,z) | 0 \leq z \leq \frac{x^2 + y^2}{4}, x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

Bereken het volume van G .

17. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat bepaald wordt door de ongelijkheid $(x^2 + y^2)^{1/3} + z^{2/3} \leq 1$.

18. $G = \{(x,y,z) | x + y + z \geq \sqrt{3} \text{ en } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Bereken $\iiint_G \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$.

Aanwijzing: maak gebruik van de transformatie

$$\Phi(u,v,w) = \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}}, -\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}}, \frac{-2v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}} \right).$$

19. $G = \{(x,y,z) | z \geq 0, z^2 \geq x^2 + y^2, z \leq 2 - (x^2 + y^2)\}$.

Bereken $\iiint_G x^2 \, dx dy dz$.

20. Een oppervlak in \mathbb{R}^3 is in bolcoördinaten gegeven door $r = a \sin 2\vartheta$;
 $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $a > 0$.

Bereken de inhoud van het door dat oppervlak begrensde gebied.

21. Zij $a > b > 0$. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de halve torus, bepaald door de ongelijkheden $y \geq 0$ en $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 \leq b^2$, als de massadichtheid constant is.

22. Zij G het deel van de cilinder $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ waarvoor geldt $0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1$.

a) Bereken de inhoud van G .

b) Bereken het traagheidsmoment van G t.o.v. de cilinderas, als de massadichtheid gegeven is door $\rho(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$.

23. Bereken het traagheidsmoment van een bol met straal R en massadichtheid 1

a) t.o.v. een lijn door het middelpunt,

b) t.o.v. een raaklijn.

24. Zij $G = \{(x,y,z) | z \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van G , als de massadichtheid gegeven is door $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

25. Bereken van een rechte cirkelkegel met hoogte h en straal van de grondcirkel a het traagheidsmoment t.o.v. de as van de kegel, als de dichtheid evenredig is met de afstand tot het grondvlak.

9. Lijnintegralen en oppervlakteintegralen

Definitie en rechtstreekse berekening

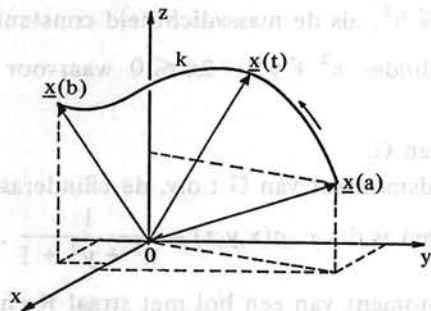
9.1. Lijnintegralen

9.1.1. Inleiding

In vele toepassingen van de analyse, bijvoorbeeld in de elektriciteitsleer, krijgt men te maken met lijnintegralen en oppervlakteintegralen. Wij zullen in deze paragraaf de lijnintegralen behandelen. Hierbij wordt uitgegaan van een gladde kromme k (zie 6.10.14b). We herhalen de definitie voor een gladde kromme in \mathbb{R}^3 .

9.1.2. Definitie

Zij k een kromme in \mathbb{R}^3 met parametrisering $\underline{x}: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. k heet een *gladde kromme* als de componentfuncties $t \rightarrow x(t)$, $t \rightarrow y(t)$, $t \rightarrow z(t)$ op $[a,b]$ continu differentieerbaar zijn, terwijl $\underline{x}'(t) \neq \underline{0}$ voor alle $t \in (a,b)$.



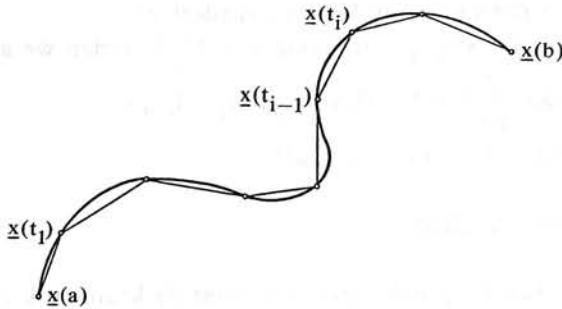
Merk op dat door een parametrisering een richting langs de kromme wordt bepaald, namelijk de richting waarin de parameter t toeneemt.

In het vervolg zullen we (zonder dit expliciet te vermelden) eisen dat $\underline{x}: (a,b) \rightarrow \underline{x}((a,b))$ bijectief is. In dat geval noemen we de parametrisering bijectief.

9.1.3. Booglengte

Gegeven is een gladde kromme k .

We verdelen het interval $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Met iedere



$t_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ correspondeert een punt $\underline{x}(t_i) \in \mathbb{R}^3$. We verbinden de opeenvolgende punten en krijgen zo een “koordentrek” van k , waarvan de lengte is

$$\ell = \sum_{i=1}^n |\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1})|.$$

Voor een gladde kromme is $\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1})$ bij benadering gelijk aan $(t_i - t_{i-1})\underline{x}'(t_{i-1})$ en is dus ℓ bij benadering gelijk aan

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) |\underline{x}'(t_{i-1})|.$$

Aangezien deze laatste uitdrukking een Riemann-som voorstelt van de integraal $\int_a^b |\underline{x}'(t)| dt$, komen we tot de volgende definitie.

9.1.4. Definitie

Is k een gladde kromme in \mathbb{R}^3 met parametrisering $\underline{x}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dan is de *booglengte* van k gelijk aan

$$\int_a^b |\underline{x}'(t)| dt.$$

Is $t \in [a, b]$, dan geven we de booglengte van het tussen $\underline{x}(a)$ en $\underline{x}(t)$ gelegen deel van k aan met $s(t)$. Er geldt dan

$$s(t) = \int_a^t |\underline{x}'(u)| du, \quad \text{en} \quad \frac{ds}{dt} = |\underline{x}'(t)|.$$

We noteren: $\int_a^b |\underline{x}'(t)| dt = \int_k ds$.

9.1.5. Integraal van een functie langs een kromme

Beschouw een draad waarvan de dichtheid (massa per lengte-eenheid) ρ afhankelijk is van de plaats op de draad. Om de massa van de draad te benaderen beschouwt men de draad als een gladde kromme en gaat men te werk als in 9.1.3. De kromme wordt benaderd met een koordentrek, de massa van elk

deelstuk door “lengte van de koorde” \times “dichtheid in een punt van het deelstuk”. Een voorbeeld van de laatste benadering:

$m_i \approx \rho(\underline{x}(t_{i-1})) |\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1})|$. Analoog aan 9.1.3 vinden we als benadering van de totale massa: $\sum_{i=1}^n \rho(\underline{x}(t_{i-1})) |\underline{x}'(t_{i-1})| (t_i - t_{i-1})$.

Dit is een Riemann-som van de integraal

$$\int_a^b \rho(\underline{x}(t)) |\underline{x}'(t)| dt.$$

We zeggen dat de functie ρ geïntegreerd is langs de kromme k en schrijven $\int_k \rho ds$. Dit leidt tot de volgende definitie.

9.1.6. Definitie

Zij k een gladde kromme in \mathbb{R}^3 met parametrisering $\underline{x}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie, waarbij $k \subset D \subset \mathbb{R}^3$.

De *integraal van f langs k* wordt gedefinieerd als

$$\int_k f ds = \int_a^b f(\underline{x}(t)) |\underline{x}'(t)| dt.$$

9.1.7. Opmerkingen

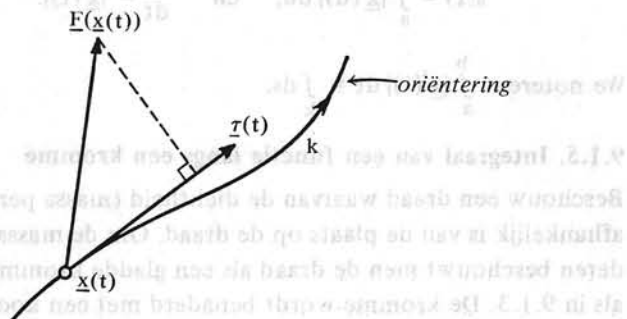
a) Daar $|\underline{x}'(t)| = \frac{ds}{dt}$, kan men voor deze integraal ook schrijven $\int_a^b f(\underline{x}(t)) \frac{ds}{dt} dt$, waarmee de notatie $\int_k f ds$ verklaard is. Hierin is ds , het *lijnelement*, een symbolische notatie voor $|\underline{x}'(t)| dt$.

b) Bijzonder geval: Als de vlakke kromme k wordt gegeven als de grafiek van $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, dan geldt

$$\int_k ds = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx$$

9.1.8. Integraal van een vectorveld langs een kromme

Zij k een gladde kromme en \underline{F} een vectorveld (krachtveld) dat in elk punt van k gedefinieerd is. Als we aannemen dat de kromme in een bepaalde richting doorlopen wordt, dan definiëren we in ieder punt van k een



eenheidsvector $\underline{\tau}$ in de richting van de raaklijn aan k en in overeenstemming met de doorlooprichting. Deze doorlooprichting noemen we de *oriëntering* van de kromme. Merk op dat deze oriëntering niet overeen hoeft te komen met de richting bepaald door de gekozen parametrisering van de kromme. $\underline{F} \cdot \underline{\tau}$ stelt de grootte van de component van \underline{F} langs de raaklijn aan k voor, de zogenaamde tangentiële component. Ga dit na.

Beweegt een massadeeltje zich langs de kromme k in de richting $\underline{\tau}$ en werkt op dat deeltje gedurende de beweging een kracht \underline{F} , waarvan de grootte en richting afhankelijk kunnen zijn van de plaats, dan wordt de arbeid verricht door die kracht tijdens de beweging gedefinieerd door

$$\int_k \underline{F} \cdot \underline{\tau} \, ds.$$

We noemen dit de *integraal van het vectorveld \underline{F} langs de (georiënteerde) kromme k* .

9.1.9. Definitie

Zij k een gladde kromme in \mathbb{R}^3 met parametrisering $\underline{x}: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, en zij $\underline{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ een continu vectorveld, waarbij $k \subset D \subset \mathbb{R}^3$ en $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$.

De integraal (van de tangentiële component) van \underline{v} langs k wordt gedefinieerd als

$$\int_k \underline{v} \cdot \underline{\tau} \, ds = \int_a^b \underline{v}(\underline{x}(t)) \cdot \underline{\tau}(t) |\underline{x}'(t)| \, dt,$$

waarin $\underline{\tau}(t)$ de eenheidsvector langs de raaklijn aan k is behorende bij een gegeven *oriëntering* (dat is de richting waarin de kromme doorlopen wordt) van de kromme k .

9.1.10. Toelichting

Bij een gekozen parametrisering van k vindt men voor een eenheidsvector langs de raaklijn $\frac{\underline{x}'(t)}{|\underline{x}'(t)|}$; dit is de eenheidsvector volgens de oriëntering,

zoals deze door de parametrisering wordt bepaald, dat wil zeggen in de richting van toenemende waarden van t .

Nu is de door de parametrisering bepaalde oriëntering óf voor alle t gelijk aan de door $\underline{\tau}(t)$ voorgeschreven oriëntering van k óf tegengesteld aan de door $\underline{\tau}(t)$ voorgeschreven oriëntering van k (wegens de continuïteit van \underline{x}' en $\underline{\tau}$). In het eerste geval geldt voor alle $t \in [a,b] : \underline{\tau}(t) = \frac{\underline{x}'(t)}{|\underline{x}'(t)|}$ en dus

$$\int_k \underline{v} \cdot \underline{\tau} \, ds = \int_a^b \underline{v}(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t) \, dt. \tag{I}$$

In het tweede geval geldt voor alle $t \in [a,b] : \underline{\tau}(t) = -\frac{\underline{x}'(t)}{|\underline{x}'(t)|}$ en dus

$$\int_k \underline{v} \cdot \underline{\tau} \, ds = -\int_a^b \underline{v}(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t) \, dt = \int_b^a \underline{v}(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t) \, dt. \tag{II}$$

9.1.11. Opmerkingen

- a) Men kan bewijzen dat voor een gladde kromme k de definities onafhankelijk zijn van de gekozen parametrisering van k , mits de parametriseringen bijectief zijn.
- b) De gegeven definities kunnen worden uitgebreid tot het geval dat k een *stuksgewijs gladde* kromme is, d.w.z. k is opgebouwd uit eindig veel gladde krommen die hoogstens eindpunten gemeen hebben en waarvan de oriënteringen 'bij elkaar passen'.
- c) Voor scalarvelden, vectorvelden en krommen in \mathbb{R}^2 zijn definities te geven analoog met 9.1.4, 9.1.6 en 9.1.9.

De daar gedefinieerde integralen worden *lijnintegralen* genoemd.

- d) $\int \underline{v} \cdot \underline{\tau} ds$, het *vectorieel lijnelement*, is een symbolische notatie voor $\pm \underline{x}'(t) dt$.
- e) Omdat $\underline{v}(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t) = v_1(\underline{x}(t))x'(t) + v_2(\underline{x}(t))y'(t) + v_3(\underline{x}(t))z'(t)$ schrijft men wel

$$\int_k \underline{v} \cdot \underline{\tau} ds = \pm \int_k v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz.$$

9.1.12. Voorbeelden

- a) Van de *cycloïde*, geparametriseerd door $\underline{x}(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$, zie 6.10.16b, berekenen we de lengte s van de boog tussen $\underline{x}(0) = (0, 0)$ en $\underline{x}(2\pi) = (2\pi R, 0)$.

Er geldt $\underline{x}'(t) = (R(1 - \cos t), R \sin t)$,

$$|\underline{x}'(t)| = R\sqrt{2 - 2\cos t} = 2R|\sin \frac{1}{2}t|.$$

Merk op dat $|\underline{x}'(t)| \neq 0$ voor alle $t \in (0, 2\pi)$.

We vinden

$$s = \int_0^{2\pi} 2R|\sin \frac{1}{2}t| dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}t dt = 8R.$$

- b) Laat de vlakke kromme k m.b.v. poolcoördinaten gegeven zijn door $\underline{x}(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, waarbij de functie r op $[\varphi_1, \varphi_2]$ differentieerbaar is met continue afgeleide, terwijl $\underline{x}'(\varphi) \neq \underline{0}$ op (φ_1, φ_2) .

Er geldt

$$\underline{x}'(\varphi) = (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi),$$

$$|\underline{x}'(\varphi)| = \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2}.$$

De booglengte s van k is dus

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2} d\varphi. \quad (*)$$

Met behulp van (*) berekenen we de lengte van de kromme die

gegeven is door $r(\varphi) = \cos^2 \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2 \cos \varphi \sin \varphi)^2 + \cos^4 \varphi} \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} |\cos \varphi| \, d\varphi = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \sin^2 \varphi + 1} \, d \sin \varphi = \sqrt{3} \int_{-1}^1 \sqrt{t^2 + \frac{1}{3}} \, dt = \\
&= \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} t \sqrt{t^2 + \frac{1}{3}} + \frac{1}{6} \ln \left(t + \sqrt{t^2 + \frac{1}{3}} \right) \right]_{-1}^1 = \\
&= \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \ln \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right) = \\
&= 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

- c) Is k een kromme in \mathbb{R}^3 en is $\rho(x,y,z)$ de massadichtheid (massa per lengte-eenheid) in het punt $(x,y,z) \in k$, dan is $M = \int_k \rho \, ds$ de massa van k .

De coördinaten (x_0, y_0, z_0) van het zwaartepunt van k zijn

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_k x \rho \, ds, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_k y \rho \, ds, \quad z_0 = \frac{1}{M} \int_k z \rho \, ds.$$

Als voorbeeld berekenen we de coördinaten van het zwaartepunt van de kromme k , gegeven door $\underline{x}(t) = (t^2 + 1, 2t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$, als

$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x+4y+19}}.$$

Er geldt $\underline{x}'(t) = (2t, 4t, 3t^2)$,

$$|\underline{x}'(t)| = \sqrt{4t^2 + 16t^2 + 9t^4} = t\sqrt{9t^2 + 20},$$

$$\text{dus } M = \int_0^1 \frac{t\sqrt{9t^2+20}}{\sqrt{t^2+1+8t^2+19}} \, dt = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2},$$

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_k \frac{x}{\sqrt{x+4y+19}} \, ds = 2 \int_0^1 \frac{(t^2+1)t\sqrt{9t^2+20}}{\sqrt{t^2+1+8t^2+19}} \, dt = 2 \int_0^1 (t^3+t) \, dt = \frac{3}{2},$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \int_k \frac{y}{\sqrt{x+4y+19}} \, ds = 2 \int_0^1 2t^3 \, dt = 1,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \int_k \frac{z}{\sqrt{x+4y+19}} \, ds = 2 \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{2}{5}.$$

- d) Laat het vectorveld \underline{v} gegeven zijn door

$$\underline{v}(x,y,z) = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2).$$

We beschouwen drie krommen met beginpunt $(0,0,0)$ en eindpunt $(1,1,1)$:

k_1 is de rechte lijn van $(0,0,0)$ naar $(1,1,1)$;

k_2 is de gebroken lijn die gevormd wordt door de lijnstukken, welke bepaald zijn door de punten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$;

k_3 is de kromme, gegeven door $\underline{x}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

We berekenen $\int_{k_i} \underline{y} \cdot \underline{r} \, ds$ voor $i = 1, 2, 3$.

Als parametrisering van k_1 kiezen we $\underline{x}(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Dan is $\underline{y}(\underline{x}(t)) = (3t^2 + 6t, -14t^2, 20t^3)$ en $\underline{x}'(t) = (1, 1, 1)$.

Dus

$$\begin{aligned} \int_{k_1} \underline{y} \cdot \underline{r} \, ds &= \int_0^1 (3t^2 + 6t, -14t^2, 20t^3) \cdot (1, 1, 1) \, dt = \\ &= \int_0^1 (20t^3 - 11t^2 + 6t) \, dt = \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

De drie lijnstukken waaruit k_2 is opgebouwd parametriseren we met resp. $\underline{x}(t) = (t, 0, 0)$, $0 \leq t \leq 1$; $\underline{x}(t) = (1, t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$; $\underline{x}(t) = (1, 1, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

We vinden

$$\begin{aligned} \int_{k_2} \underline{y} \cdot \underline{r} \, ds &= \int_0^1 (3t^2, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) \, dt + \int_0^1 (3 + 6t, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) \, dt + \\ &+ \int_0^1 (9, -14t, 20t^2) \cdot (0, 0, 1) \, dt = \int_0^1 23t^2 \, dt = \frac{23}{3}. \end{aligned}$$

Tenslotte blijkt

$$\begin{aligned} \int_{k_3} \underline{y} \cdot \underline{r} \, ds &= \int_0^1 (9t^2, -14t^5, 20t^7) \cdot (1, 2t, 3t^2) \, dt = \\ &= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9) \, dt = 5. \end{aligned}$$

Oefeningen

1. Bereken de lengte van het tussen $(a, 0, 0)$ en $(a, 0, 4\pi b)$ gelegen deel van de kromme (*schroeflijn*), die gegeven is door de parametrisering $\underline{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$.

2. Zij k de vlakke kromme die in poolcoördinaten gegeven is door $r = ae^{b\varphi}$ (*logaritmische spiraal*), $b \neq 0$, $a > 0$.

Bewijs: als $(x_1, 0)$ en $(x_2, 0)$ twee opeenvolgende snijpunten van k met de positieve x -as zijn, dan is de lengte van het tussen deze punten gelegen deel van k gelijk aan

$$|x_1 - x_2| \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}}.$$

3. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de tussen $(0, 0)$ en $(2\pi R, 0)$ gelegen cycloïdeboog, als de massadichtheid constant is.
4. Het vectorveld \underline{y} is gegeven door $\underline{y}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$. Bereken de integraal van \underline{y} langs het tussen $(a, 0, 0)$ en $(a, 0, 2\pi b)$ gelegen deel van de schroeflijn $\underline{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ en langs het lijnstuk dat deze punten verbindt (beide georiënteerd van het eerste naar het laatste punt).

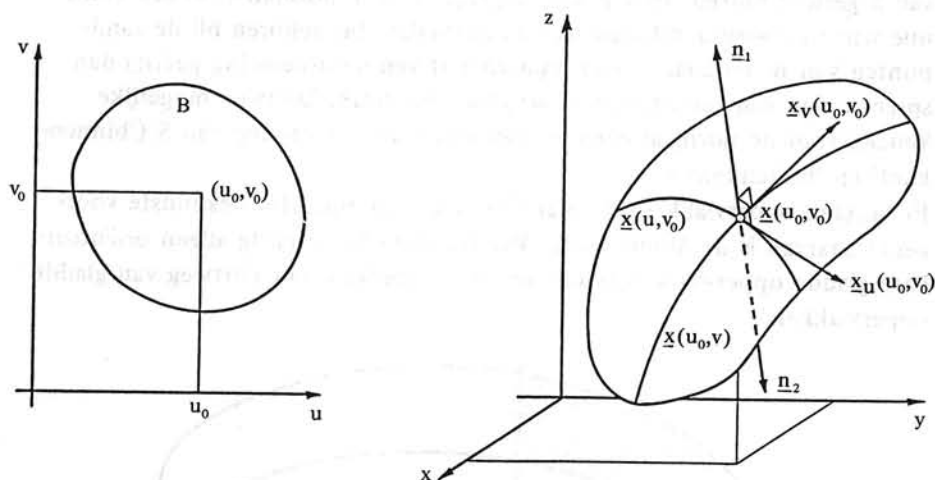
9.2. Beschrijving van (gekromde) oppervlakken in \mathbb{R}^3

9.2.1. Inleiding en definitie

In paragraaf 6.5 zijn al enkele voorbeelden van oppervlakken aan de orde gekomen. We willen nu als voorbereiding op de oppervlakteintegralen iets dieper op oppervlakken ingaan.

We beschouwen de afbeelding van een regulier gebied $B \subset \mathbb{R}^2$ naar \mathbb{R}^3 gegeven door $\underline{x}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

De functies $(u,v) \mapsto x(u,v)$, $(u,v) \mapsto y(u,v)$, $(u,v) \mapsto z(u,v)$ heten de *component-functies* van de afbeelding \underline{x} . Deze afbeelding kan moeilijk in beeld worden gebracht. Men volstaat meestal met een grafische voorstelling van de verzameling $S = \{\underline{x}(u,v) | (u,v) \in B\}$; meetkundig stelt S een *oppervlak* in \mathbb{R}^3 voor. Men noemt de afbeelding \underline{x} een *parametrisering* van het oppervlak S .



Zij $\underline{x}_0 = \underline{x}(u_0, v_0)$ een punt van het oppervlak S . Door de afbeeldingen $u \mapsto \underline{x}(u, v_0)$ en $v \mapsto \underline{x}(u_0, v)$ worden twee op S gelegen krommen door \underline{x}_0 bepaald (zogenaamde *parameterkrommen*). Zijn de componentfuncties partieel differentieerbaar naar u en naar v in (u_0, v_0) , dan zijn de raakvectoren aan de parameterkrommen in \underline{x}_0 respectievelijk

$$\underline{x}_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

en

$$\underline{x}_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right),$$

mits deze vectoren beide $\neq \underline{0}$ zijn.

Als \underline{x}_u en \underline{x}_v lineair onafhankelijk zijn (d.w.z. als de raaklijnen aan de parameterkrommen in \underline{x}_0 bestaan en verschillend zijn), dan is het uitwendig product $\underline{x}_u \times \underline{x}_v$ een vector die loodrecht staat op het raakvlak aan S in \underline{x}_0 (normaalvector van S in \underline{x}_0), zie 6.3.3.

De eenheidsnormaalvectoren van S in \underline{x}_0 zijn dus

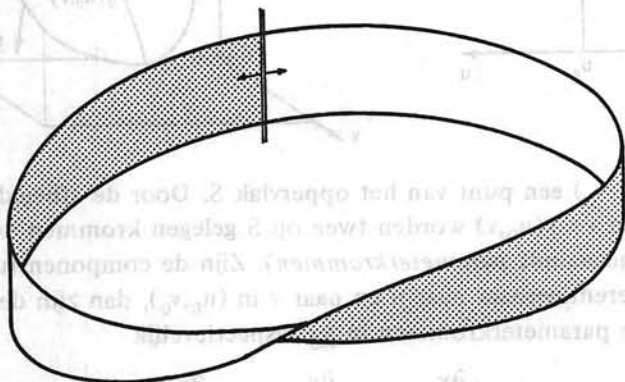
$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{|\underline{x}_u \times \underline{x}_v|} \quad \text{en} \quad \underline{n}_2 = -\frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{|\underline{x}_u \times \underline{x}_v|}$$

Indien de componentfuncties continu zijn op B en in het inwendige van B continue partiële afgeleiden hebben, waarvoor steeds geldt dat \underline{x}_u en \underline{x}_v lineair onafhankelijk zijn, dan spreekt men van een *glad oppervlak* S . In het vervolg zullen we (zonder dit expliciet te vermelden) eisen dat de parametrisering van S op het inwendige van B bijectief is.

9.2.2. Opmerking

Is S een glad oppervlak, dan zijn \underline{n}_1 en \underline{n}_2 continue functies van u en v op het inwendige van B , zodat \underline{n}_1 en ook \underline{n}_2 overal naar eenzelfde kant van S gericht blijven. Indien het mogelijk is deze normalen op een continue wijze te laten aansluiten aan de normalen die behoren bij de randpunten van B (en daar is geen bijectiviteit van de afbeelding geëist) dan spreekt men van een *oriënteerbaar glad oppervlak*. De twee mogelijke keuzen voor de normaal bepalen dan ieder een *oriëntering* van S ('binnenkant' en 'buitenkant').

Er bestaan oppervlakken die niet oriënteerbaar zijn. Het bekendste voorbeeld daarvan is de Möbiusband. Wij zullen in het vervolg alleen oriënteerbare gladde oppervlakken beschouwen, en spreken dan kortweg van gladde oppervlakken.



9.2.3. Voorbeeld

Het oppervlak S is gegeven door $S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$.

Met behulp van bolcoördinaten (zie 8.6.7) vinden we voor S de volgende parametrisering:

$x = a \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = a \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = a \cos \vartheta$, waarbij

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad a > 0.$$

Er geldt:

$$\underline{x}_\vartheta = (a \cos \vartheta \cos \varphi, a \cos \vartheta \sin \varphi, -a \sin \vartheta),$$

$$\underline{x}_\varphi = (-a \sin \vartheta \sin \varphi, a \sin \vartheta \cos \varphi, 0);$$

dus

$$\underline{x}_\vartheta \times \underline{x}_\varphi = (a^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi, a^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi, a^2 \cos \vartheta \sin \vartheta)$$

en

$$|\underline{x}_\vartheta \times \underline{x}_\varphi| = a^2 \sin \vartheta.$$

De eenheidsnormaal

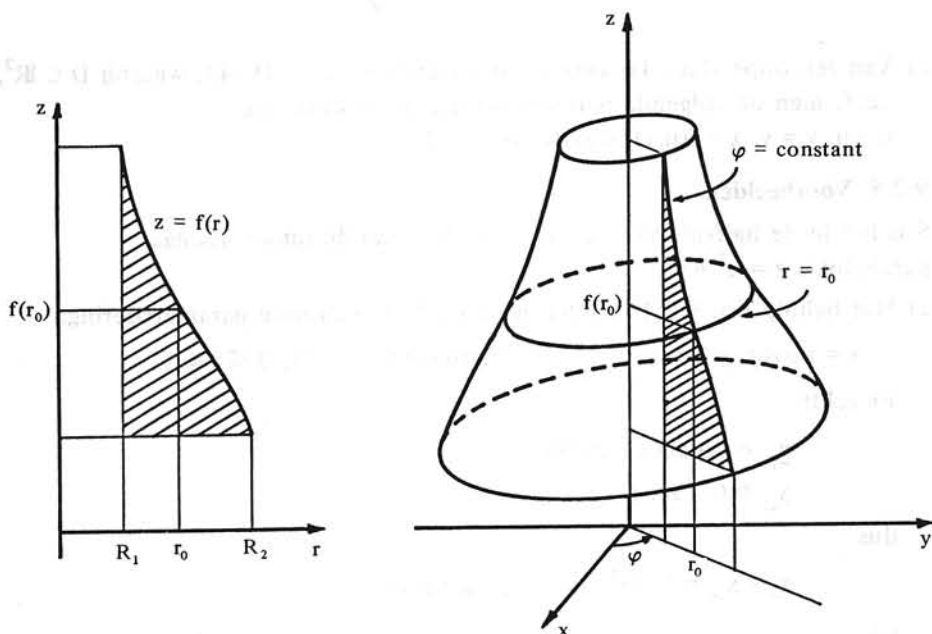
$$\frac{\underline{x}_\vartheta \times \underline{x}_\varphi}{|\underline{x}_\vartheta \times \underline{x}_\varphi|} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$$

is blijkbaar naar buiten (van het middelpunt af) gericht.

9.2.4. Bijzondere gevallen

We vermelden hier enkele bijzondere, veel voorkomende gevallen, waarin op eenvoudige wijze van bepaalde oppervlakken een parametrisering kan worden gevonden.

- a) Bij een omwentelingsoppervlak om de z-as (zie 6.5.4) dat gegeven is in de vorm $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, waarbij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en $D = \{r \mid 0 \leq r \leq R_2\}$, komt men meestal tot een geschikte parametrisering door over te gaan op poolcoördinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = f(r)$, waarbij $R_1 \leq r \leq R_2$ en $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

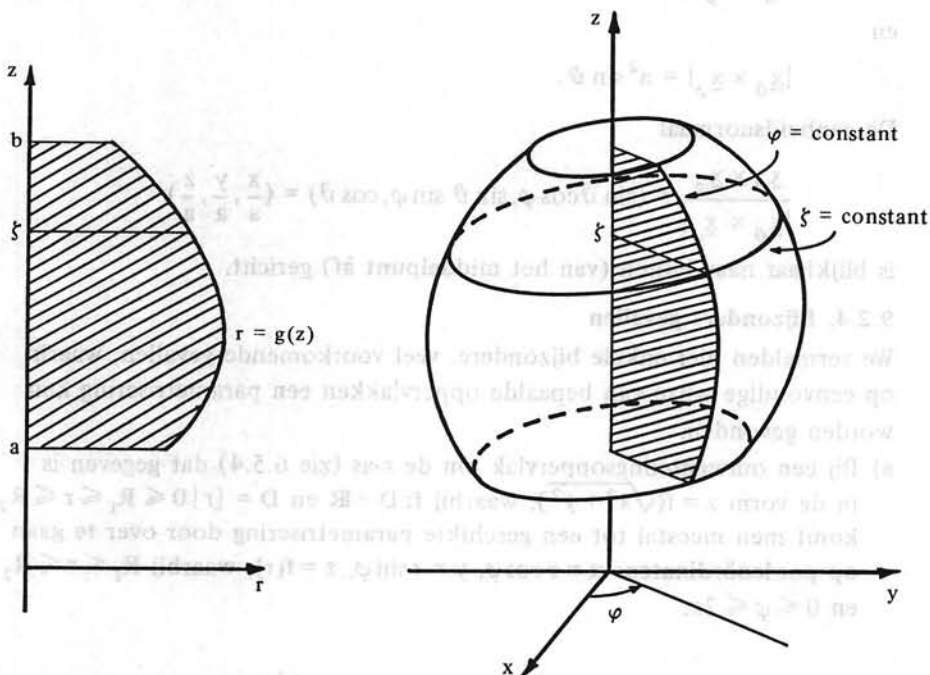


b) Soms wordt het omwentelingsoppervlak beschreven door

$$\sqrt{x^2 + y^2} = g(z), \text{ waarbij } g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Gebruikt men ξ en de φ bij poolcoördinaten als parameters dan vindt men als parametrisering:

$$x = g(\xi) \cos \varphi, \quad y = g(\xi) \sin \varphi, \quad z = \xi, \text{ waarbij } a \leq \xi \leq b \text{ en } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



c) Van een oppervlak, dat gegeven is als grafiek van $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $D \subset \mathbb{R}^2$, heeft men de volgende parametrisering ter beschikking:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \text{ waarbij } (u, v) \in D.$$

9.2.5. Voorbeelden

S is het in de halfruimte $z \leq 1$ gelegen deel van de omwentelingsparaboloïde $z = x^2 + y^2$.

a) Met behulp van 9.2.4a vinden we voor S de volgende parametrisering:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r^2, \text{ waarbij } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Er geldt:

$$\underline{x}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 2r),$$

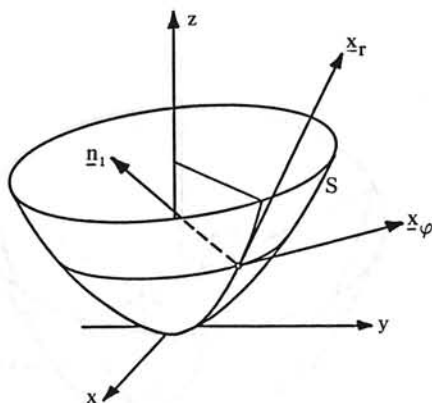
$$\underline{x}_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0);$$

dus

$$\underline{x}_r \times \underline{x}_\varphi = (-2r^2 \cos \varphi, -2r^2 \sin \varphi, r)$$

en

$$|\underline{x}_r \times \underline{x}_\varphi| = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$



De eenheidsnormaal

$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{x}_r \times \underline{x}_\varphi}{|\underline{x}_r \times \underline{x}_\varphi|} = \frac{1}{\sqrt{4r^2 + 1}} (-2r \cos \varphi, -2r \sin \varphi, 1)$$

is naar binnen (naar de z-as toe) gericht, hetgeen bijvoorbeeld blijkt uit de positieve derde component.

- b) Met behulp van 9.2.4b vinden we als parametrisering voor S met ξ en φ als parameters:

$$x = \sqrt{\xi} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi} \sin \varphi, \quad z = \xi.$$

Er geldt:

$$\underline{x}_\xi = \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \cos \varphi, \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \sin \varphi, 1 \right),$$

$$\underline{x}_\varphi = (-\sqrt{\xi} \sin \varphi, \sqrt{\xi} \cos \varphi, 0);$$

dus

$$\underline{x}_\xi \times \underline{x}_\varphi = (-\sqrt{\xi} \cos \varphi, -\sqrt{\xi} \sin \varphi, \frac{1}{2})$$

en

$$|\underline{x}_\xi \times \underline{x}_\varphi| = \sqrt{\frac{1}{4} + \xi}.$$

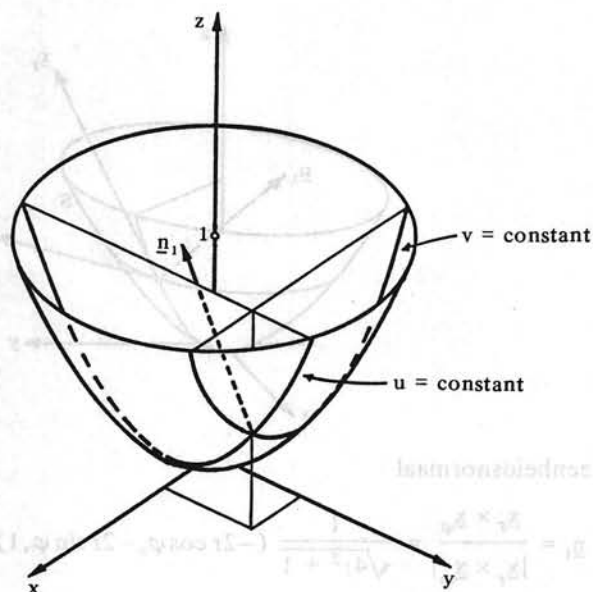
De eenheidsnormaal

$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{x}_\xi \times \underline{x}_\varphi}{|\underline{x}_\xi \times \underline{x}_\varphi|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \xi}} (-\sqrt{\xi} \cos \varphi, -\sqrt{\xi} \sin \varphi, \frac{1}{2})$$

is naar binnen (naar de z-as toe) gericht.

- c) Een andere parametrisering van het oppervlak is

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 + v^2, \quad \text{waarbij } -1 \leq u \leq 1, \quad -\sqrt{1-u^2} \leq v \leq \sqrt{1-u^2}.$$



Er geldt:

$$\underline{x}_u = (1, 0, 2u),$$

$$\underline{x}_v = (0, 1, 2v);$$

dus

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = (-2u, -2v, 1)$$

en

$$|\underline{x}_u \times \underline{x}_v| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}.$$

De eenheidsnormaal

$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{|\underline{x}_u \times \underline{x}_v|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (-2u, -2v, 1)$$

is naar binnen (naar de z-as toe) gericht.

Oefeningen

Bepaal van de volgende oppervlakken een parametrisering en de grenzen van de parameters; druk een eenheidsnormaal op het oppervlak uit in de parameters en geef aan hoe deze gericht is.

1. $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2\}$.
2. $S = \{(x, y, z) | x + 2y + 3z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
3. $S = \{(x, y, z) | (x^2)^{1/3} + (y^2)^{1/3} = (4z^2)^{1/3}, 0 \leq z \leq 2\}$.
4. $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 16, 0 \leq z \leq 4\}$.
5. $S = \{(x, y, z) | (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1, 0 \leq z \leq x + y\}$.

9.3. Oppervlakteintegralen

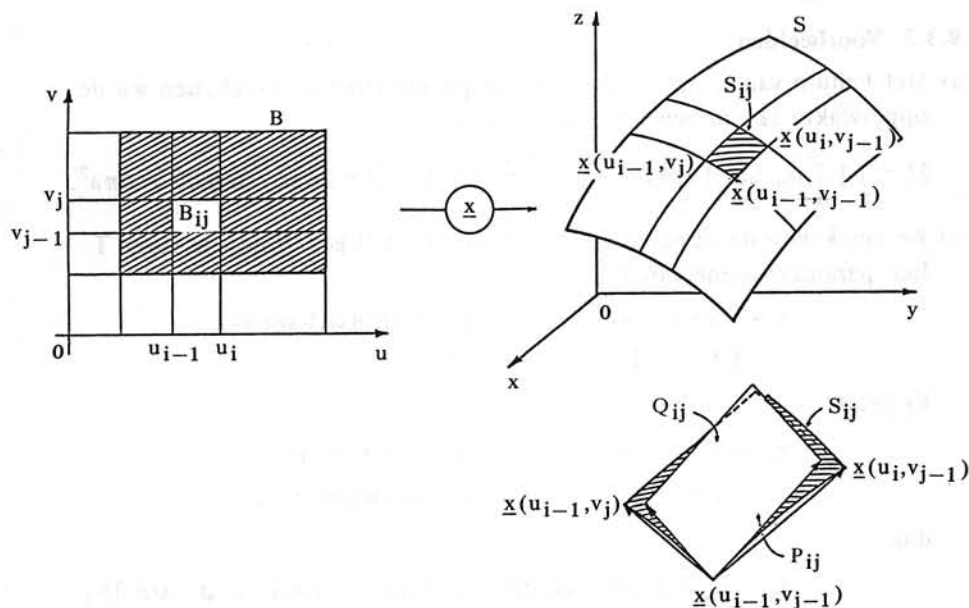
9.3.1. De oppervlakte van een (gekromd) oppervlak

We veronderstellen nu dat $\underline{x}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ een parametrisering van het gladde oppervlak S is, waarbij $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ een rechthoek in \mathbb{R}^2 is.

Laat $a_1 = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b_1$, $a_2 = v_0 < v_1 < \dots < v_m = b_2$ een verdeling geven van B in de rechthoekjes

$$B_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j], \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

Zij S_{ij} het gedeelte van S waarop B_{ij} wordt afgebeeld.



We benaderen S_{ij} door het parallellogram P_{ij} opgespannen door de vectoren $\underline{x}(u_i, v_{j-1}) - \underline{x}(u_{i-1}, v_{j-1})$ en $\underline{x}(u_{i-1}, v_j) - \underline{x}(u_{i-1}, v_{j-1})$.

Deze vectoren zijn op hun beurt te benaderen door

$$(u_i - u_{i-1}) \underline{x}_u(u_{i-1}, v_{j-1})$$

respectievelijk

$$(v_j - v_{j-1}) \underline{x}_v(u_{i-1}, v_{j-1}),$$

zodat volgens 6.3.3c de oppervlakte van P_{ij} bij benadering gelijk is aan

$$(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) |\underline{x}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \underline{x}_v(u_{i-1}, v_{j-1})|.$$

Deze uitdrukking geeft (zie de figuur) de oppervlakte van Q_{ij} .

Als benadering voor de oppervlakte van S kan men dus nemen

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) |\underline{x}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \underline{x}_v(u_{i-1}, v_{j-1})|.$$

Aangezien dit een Riemann-som is van

$$\iint_B |\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)| \, dudv$$

komen we tot de volgende definitie.

9.3.2. Definitie

Is S een glad oppervlak in \mathbb{R}^3 met parametrisering $\underline{x}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$, waarbij B een regulier gebied is in \mathbb{R}^2 , dan is de oppervlakte van S gelijk aan

$$\iint_B |\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)| \, dudv.$$

9.3.3. Voorbeelden

a) Met behulp van de in 9.2.3 gevonden parametrisering berekenen we de oppervlakte Ω van een bol met straal a .

$$\Omega = \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} |\underline{x}_\theta \times \underline{x}_\varphi| \, d\varphi \right] d\theta = \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} a^2 \sin \theta \, d\varphi \right] d\theta = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 4\pi a^2.$$

b) We berekenen de oppervlakte Ω van de in 8.6.9 gedefinieerde torus T . Een parametrisering van T is

$$\begin{aligned} \underline{x} &= ((a + b \cos \vartheta) \cos \varphi, (a + b \cos \vartheta) \sin \varphi, b \sin \vartheta); \\ (\vartheta, \varphi) &\in B = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Er geldt:

$$\begin{aligned} \underline{x}_\vartheta &= (-b \sin \vartheta \cos \varphi, -b \sin \vartheta \sin \varphi, b \cos \vartheta), \\ \underline{x}_\varphi &= (-(a + b \cos \vartheta) \sin \varphi, (a + b \cos \vartheta) \cos \varphi, 0), \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} \underline{x}_\vartheta \times \underline{x}_\varphi &= b(a + b \cos \vartheta)(-\cos \vartheta \cos \varphi, -\cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta), \\ |\underline{x}_\vartheta \times \underline{x}_\varphi| &= b(a + b \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Er volgt

$$\begin{aligned} \Omega &= \iint_B |\underline{x}_\vartheta \times \underline{x}_\varphi| \, d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} b(a + b \cos \vartheta) \, d\vartheta \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi ab \, d\varphi = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

9.3.4. Bijzondere gevallen

Voor de in 9.2.4 behandelde bijzondere gevallen vinden we eenvoudige formules voor de oppervlakte.

a) Voor een omwentelingsoppervlak S om de z -as, geparametriseerd door

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = f(r),$$

waarbij $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, en f continu differentieerbaar,

geldt:

$$\begin{aligned} \underline{x}_r &= (\cos \varphi, \sin \varphi, f'(r)), \\ \underline{x}_\varphi &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Men verifieert eenvoudig dat $\underline{x}_r \cdot \underline{x}_\varphi = 0$, waaruit volgt:

$$|\underline{x}_r \times \underline{x}_\varphi| = |\underline{x}_r| \cdot |\underline{x}_\varphi| = \sqrt{(f'(r))^2 + 1} r.$$

De oppervlakte van S is

$$\begin{aligned} \Omega &= \iint_B |\underline{x}_r \times \underline{x}_\varphi| \, dr d\varphi = \iint_B r \sqrt{(f'(r))^2 + 1} \, dr d\varphi = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \left[\int_0^{2\pi} r \sqrt{(f'(r))^2 + 1} \, d\varphi \right] dr = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r \sqrt{(f'(r))^2 + 1} \, dr \end{aligned}$$

Dus

$$\Omega = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r \sqrt{(f'(r))^2 + 1} \, dr.$$

b) Voor een omwentelingsoppervlak S om de z-as geparametriseerd door

$$x = g(\zeta) \cos \varphi, \quad y = g(\zeta) \sin \varphi, \quad z = \zeta,$$

waarbij $a \leq \zeta \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, en g continu differentieerbaar,

geldt:

$$\underline{x}_\zeta = (g'(\zeta) \cos \varphi, g'(\zeta) \sin \varphi, 1),$$

$$\underline{x}_\varphi = (-g(\zeta) \sin \varphi, g(\zeta) \cos \varphi, 0).$$

Daar $\underline{x}_\zeta \cdot \underline{x}_\varphi = 0$ (ga na!) volgt

$$|\underline{x}_\zeta \times \underline{x}_\varphi| = |\underline{x}_\zeta| \cdot |\underline{x}_\varphi| = \sqrt{(g'(\zeta))^2 + 1} g(\zeta).$$

De oppervlakte van S is

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_a^b \left[\int_0^{2\pi} |\underline{x}_\zeta \times \underline{x}_\varphi| \, d\varphi \right] d\zeta = \\ &= 2\pi \int_a^b g(\zeta) \sqrt{(g'(\zeta))^2 + 1} \, d\zeta. \end{aligned}$$

Dus

$$\Omega = 2\pi \int_a^b g(z) \sqrt{(g'(z))^2 + 1} \, dz.$$

c) Is een oppervlak S geparametriseerd door

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v),$$

waarbij $(u, v) \in D$, D een normaal gebied in \mathbb{R}^2 en f continu differentieerbaar,

dan geldt

$$\underline{x}_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right),$$

$$\underline{x}_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right),$$

dus

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial v}(u, v), \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), 1 \right).$$

De oppervlakte van S is

$$\Omega = \iint_D |\underline{x}_u \times \underline{x}_v| \, dudv = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1} \, dudv.$$

Dus, weer met x en y in plaats van u en v ,

$$\Omega = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx dy.$$

9.3.5. Voorbeelden

- a) We berekenen met behulp van 9.3.4b de 'ronde oppervlakte' van een kegel, waarvan h de hoogte en a de straal van de grondcirkel is.

Neem daartoe $f(z) = a(1 - \frac{z}{h})$. We vinden

$$\begin{aligned} \Omega &= 2\pi \int_0^h a(1 - \frac{z}{h}) \sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} \, dz = 2a\pi \sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} \cdot \frac{1}{2} h = \\ &= a\pi \sqrt{a^2 + h^2}. \end{aligned}$$

- b) We berekenen met 9.3.4c de oppervlakte van een halve bol.

Neem $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ en $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Dan is

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 = \\ &= \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}, \end{aligned}$$

dus

$$\Omega = \iint_G \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy.$$

Via overgang op poolcoördinaten vinden we

$$\Omega = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r \, dr \right] d\varphi = 2\pi R \int_0^R \frac{r \, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R^2.$$

9.3.6. Integraal van een functie over een oppervlak

Beschouw een (gebogen) plaat waarvan de dichtheid per oppervlakte-eenheid afhankelijk is van de plaats op de plaat. Om de massa van de plaat te benaderen beschouwt men de plaat als een glad oppervlak en gaat men te werk als in 9.3.1. Men verdeelt het oppervlak S door een net van parameterkrommen in deeloppervlakjes S_{ij} , waarvan men de oppervlakte benadert door de oppervlakte van het parallellogram Q_{ij} , en de massa door: oppervlakte van Q_{ij} \times dichtheid in een punt van S_{ij} .

Een voorbeeld van zo'n massabepaling:

$$m_{ij} \approx \rho(\underline{x}(u_{i-1}, v_{j-1})) |\underline{x}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \underline{x}_v(u_{i-1}, v_{j-1})| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).$$

Analoog aan 9.3.1 vinden we als benadering voor de totale massa:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho(\underline{x}(u_{i-1}, v_{j-1})) |\underline{x}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \underline{x}_v(u_{i-1}, v_{j-1})| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).$$

Dit is een Riemann-som voor de integraal

$$\iint_B \rho(\underline{x}(u,v)) |\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)| \, dudv.$$

We zeggen dat we de functie ρ geïntegreerd hebben over het oppervlak S en schrijven $\iint_S \rho \, d\Omega$.

9.3.7. Definitie

Zij S een glad oppervlak in \mathbb{R}^3 met parametrisering $\underline{x}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ en zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie, waarbij $S \subset D \subset \mathbb{R}^3$. De *integraal van f over S* wordt gedefinieerd als

$$\iint_S f \, d\Omega = \iint_B f(\underline{x}(u,v)) |\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)| \, dudv.$$

9.3.8. Opmerking

In 9.3.7 is $d\Omega$, het *oppervlakte-element*, op te vatten als een symbolische notatie voor $|\underline{x}_u \times \underline{x}_v| \, dudv$. In het geval dat het oppervlak S een gedeelte van het coördinaatvlak $z = 0$ is, geparametriseerd volgens $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = 0$, is

$$|\underline{x}_u \times \underline{x}_v| \, dudv = \left| \begin{array}{cc} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{array} \right| \, dudv = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, dudv,$$

zodat het voor dat geval in 8.3.5b ingevoerde oppervlakte-element $d\Omega$ een bijzonder geval is van het hier geïntroduceerde oppervlakte-element.

9.3.9. Voorbeeld

S is het in de halfruimte $z \leq 1$ gelegen deel van de omwentelingsparaboloïde $z = x^2 + y^2$; de massadichtheid (massa per oppervlakte-eenheid) van S is gegeven door $\rho(x,y,z) = z$.

Met behulp van de in 9.2.5a ingevoerde parametrisering vinden we voor het traagheidsmoment ten opzichte van de z -as:

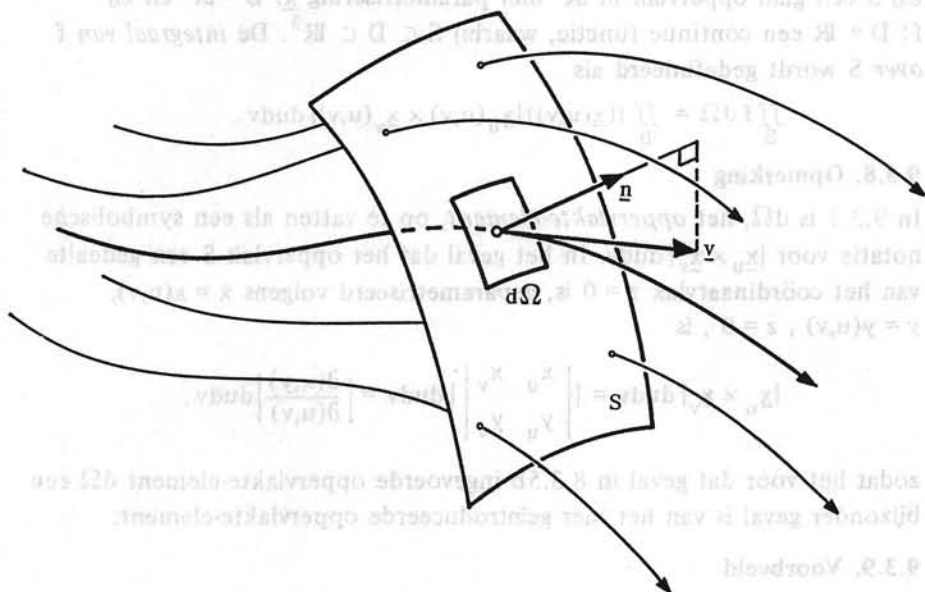
$$\begin{aligned} I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) z \, d\Omega = \iint_B r^2 \cdot r^2 \cdot r \sqrt{4r^2 + 1} \, dr d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\int_0^1 r^5 \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \right] d\varphi = 2\pi \int_0^1 r^5 \sqrt{4r^2 + 1} \, dr. \end{aligned}$$

Via de substitutie $t = \sqrt{4r^2 + 1}$ leiden we hieruit af

$$\begin{aligned} I_z &= 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{t^2 - 1}{4} \right)^2 \cdot t \cdot \frac{1}{4} t \, dt = \frac{1}{32} \pi \int_1^{\sqrt{5}} (t^6 - 2t^4 + t^2) \, dt = \\ &= \frac{\pi}{420} (125\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

9.3.10. Integraal van een vectorveld over een oppervlak

Zij S een georiënteerd glad oppervlak, gelegen in een vloeistofstroming die wordt gegeven door het vectorveld \underline{v} (stromingsveld), dat in elk punt van S is gedefinieerd. Is \underline{n} de door de oriëntatie bepaalde eenheidsnormaalvector op S , dan stelt $\underline{v} \cdot \underline{n}$ de grootte van de normale component van het stromingsveld voor. De hoeveelheid vloeistof die per tijdseenheid in de richting van de normaal door het oppervlak $d\Omega$ stroomt wordt gegeven door $\underline{v} \cdot \underline{n} d\Omega$, de zogenaamde *flux*. De totale hoeveelheid vloeistof die per tijdseenheid door S stroomt in de richting van \underline{n} wordt dan gegeven door $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} d\Omega$.



We zeggen dat we (de normale component van) \underline{v} hebben geïntegreerd over het oppervlak S .

9.3.11. Definitie

Zij S een glad oppervlak in \mathbb{R}^3 met parametrisering $\underline{x}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ en zij $\underline{w}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ een continu vectorveld, waarbij $S \subset D \subset \mathbb{R}^3$.

De *integraal van de normale component van \underline{w} over S* wordt gedefinieerd door

$$\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} d\Omega = \iint_B \underline{w}(\underline{x}(u,v)) \cdot \underline{n}(u,v) |\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)| du dv,$$

waarin $\underline{n}(u,v)$ de eenheidsnormaalvector van S is behorende bij een gegeven oriëntering van het oppervlak S .

9.3.12. Toelichting

Bij een gekozen parametrisering van S vindt men een eenheidsnormaal

$$\underline{n}_1(u,v) = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{|\underline{x}_u \times \underline{x}_v|}. \text{ Deze vector is óf voor alle } (u,v) \in B \text{ gelijk aan de}$$

door $\underline{n}(u,v)$ voorgeschreven oriëntering van S óf tegengesteld aan de door $\underline{n}(u,v)$ voorgeschreven oriëntering van S (zie opmerking 9.2.2).

Is de door de parametrisering bepaalde oriëntering (d.i. de richting van de normaal \underline{n}_1) gelijk aan de bij \underline{n} voorgeschreven oriëntering van S, dan is $\underline{n} = \underline{n}_1$ en dus

$$\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \iint_B \underline{w}(\underline{x}(u,v)) \cdot (\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)) \, dudv. \quad (I)$$

Zijn de door de parametrisering bepaalde en de met \underline{n} gegeven oriëntering verschillend, dan is $\underline{n} = -\underline{n}_1$ en dus

$$\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = - \iint_B \underline{w}(\underline{x}(u,v)) \cdot (\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)) \, dudv. \quad (II)$$

9.3.13. Opmerkingen

- a) Men kan bewijzen dat de definities onafhankelijk zijn van de gekozen parametrisering van S, als de parametriseringen bijectief zijn.
- b) De definities kunnen worden uitgebreid tot het geval dat S een *stuks-gewijs glad* oppervlak is, d.w.z. S is ‘opgebouwd’ uit eindig veel gladde oppervlakken waarvan de oriënteringen ‘bij elkaar passen’.
- c) De in 9.3.2, 9.3.7 en 9.3.11 gedefinieerde integralen worden *oppervlakte-integralen* genoemd.
- d) $\underline{n} \, d\Omega$, het *vectorieel oppervlakte-element*, is een symbolische notatie voor $\pm(\underline{x}_u(u,v) \times \underline{x}_v(u,v)) \, dudv$.

9.3.14. Voorbeeld

S is het in de halfruimte $z \leq 1$ gelegen deel van de omwentelingsparaboloïde $z = x^2 + y^2$, (zie 9.2.5), georiënteerd volgens de naar buiten (dat is hier: van de z-as àf) gerichte normaal.

Het vectorveld \underline{w} is gegeven door $\underline{w}(x,y,z) = (x,y,z)$.

We berekenen $\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega$.

Gebruiken we dezelfde parametrisering als in 9.2.5a, dan zien we dat $\underline{x}_r \times \underline{x}_\varphi = (-2r^2 \cos \varphi, -2r^2 \sin \varphi, r)$ naar de z-as toe gericht is, dus dat $|\underline{x}_r \times \underline{x}_\varphi| \underline{n} = -\underline{x}_r \times \underline{x}_\varphi = (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, -r)$. Er volgt

$$\begin{aligned} \iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega &= \iint_B (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2) \cdot (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, -r) \, drd\varphi = \\ &= \iint_B r^3 \, drd\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r^3 \, dr \right] d\varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Oefeningen

1. Bereken met behulp van 9.3.4b de oppervlakte van een bol met straal R .
2. Bereken met behulp van 9.3.4b de oppervlakte van de in 8.6.9 gedefiniëerde torus T .
3. Bereken de oppervlakte van het in de halfruimte $z \geq 0$ gelegen deel van de paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.
4. Laat S het deel van het oppervlak $z = y^2 + 2x$ zijn waarvoor geldt $y \leq 1$ en $x + y \geq 0$ en $x - y \leq 0$. Bereken de oppervlakte van S .
5. Zij S het deel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ waarvoor geldt $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z\sqrt{3}$. Bereken de oppervlakte van S .
6. Zij S het in de halfruimte $z \geq 0$ gelegen deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van S , als de massadichtheid constant is.
7. De ellipsoïde S is gegeven door de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

Het vectorveld \underline{w} is gegeven door $\underline{w}(x,y,z) = (x,y,z)$.

Bereken $\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega$ als S georiënteerd is volgens de naar buiten gerichte normaal.

Aanwijzing: gebruik de parametrisering

$$\underline{x}(\vartheta, \varphi) = (a \sin \vartheta \cos \varphi, b \sin \vartheta \sin \varphi, c \cos \vartheta).$$

8. S is het deel van de cilinder $x^2 + y^2 = 16$ waarvoor geldt $x \geq 0$ en $0 \leq z \leq 5$; S is georiënteerd volgens de naar de z -as gerichte normaal. Bereken $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$ als $\underline{v}(x,y,z) = (z, x, -3y^2z)$.

Integraalstellingen

9.4. De integraalstelling van Gauss

9.4.1. Inleiding

De hoofdstelling van de integraalrekening 5.2.5 is te schrijven in de vorm

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a) \quad (I)$$

Dit legt een verband tussen de (eendimensionale) integraal over een interval $[a,b]$ van een zekere functie (f') en de waarden op de rand van dit interval van een andere functie (f). Deze rand bestaat uit twee (van teken voorziene) punten: we kunnen $f(b) - f(a)$ opvatten als een (nuldimensionale) integraal van f over de rand van $[a,b]$. In deze paragraaf zullen meerdimensionale analoga van (I) behandeld worden. We beginnen met de inte-

graalstelling van Gauss, die een verband tussen een (driedimensionale) volume-integraal over een lichaam G en een (tweedimensionale) oppervlakte-integraal over de rand van G beschrijft. Vervolgens wordt de integraalstelling van Stokes (met als bijzonder geval de stelling van Green) behandeld, die een verband legt tussen een (tweedimensionale) oppervlakte-integraal over een oppervlak S en een (eendimensionale) lijnintegraal over de randkromme van S .

9.4.2. Iets over randen

- a) In 8.5.2 hebben we definities gegeven van een regulier gebied G in \mathbb{R}^3 , alsmede van de rand ∂G van G . De rand van G is het omsluitende oppervlak van G .
- b) In de stelling van Stokes hebben we het begrip *rand van een oppervlak* nodig. Hiervan geven we geen strenge definitie, maar slechts een vage schets.

Een oppervlak S in \mathbb{R}^3 wordt in het algemeen begrensd door één of meer gesloten krommen, die samen de zogenaamde *rand* ∂S van S vormen. Zo is de rand van een halve bol een cirkel, terwijl de rand van een door een symmetrievlak gehalveerde torus gevormd wordt door twee cirkels. Als de rand van S leeg is, dan heet S een *gesloten* oppervlak (vgl. het begrip gesloten kromme, dat is: kromme zonder eindpunten).

Voorbeelden van gesloten oppervlakken zijn de bol en de torus. Algemeen geldt dat de rand van een regulier gebied in \mathbb{R}^3 een gesloten oppervlak is.

9.4.3. Integraalstelling van Gauss

Zij G een regulier gebied in \mathbb{R}^3 met (stuksgewijs) gladde rand $S = \partial G$ en zij $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ de *naar buiten gerichte* eenheidsnormaalvector op S . Laat $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ een differentieerbaar vectorveld met continue partiële afgeleiden zijn in $D \subset \mathbb{R}^3$, waarbij G en S bevat zijn in D . Dan geldt:

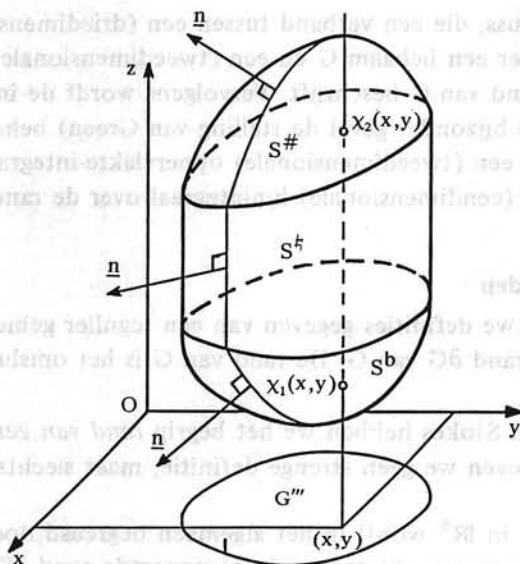
$$\iiint_G \operatorname{div} \underline{w} \, dV = \iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega.$$

Bewijs

We bewijzen de stelling in het geval van een gebied met gladde rand (zonder hier verder op in te gaan vermelden we dat het algemene geval tot het bovenstaande kan worden teruggebracht door G te verdelen in een aantal deelgebieden).

We gebruiken de notaties van 8.5.2 en veronderstellen eerst dat

$$\underline{w}(x, y, z) = (0, 0, w_3(x, y, z)).$$



Verdeel S in drie deelopervlakken:

- (i) $S^\#$ met parametrisering $\underline{x}(u,v) = (u,v,\chi_2(u,v))$, $(u,v) \in G'''$;
- (ii) S^b met parametrisering $\underline{x}(u,v) = (u,v,\chi_1(u,v))$, $(u,v) \in G'''$;
- (iii) het tussen S^b en $S^\#$ gelegen deel S^h van de cilinder met beschrijvende evenwijdig met de z -as en als richtkromme de rand van G''' .

Op $S^\#$ is $\underline{n} = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{|\underline{x}_u \times \underline{x}_v|}$, op S^b is $\underline{n} = -\frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{|\underline{x}_u \times \underline{x}_v|}$ en op

S^h is $n_3 = 0$, dus $\underline{w} \cdot \underline{n} = 0$ op S^h .

Er volgt

$$\iint_{S^\#} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \iint_{G'''} w_3(u,v,\chi_2(u,v)) \, dudv;$$

$$\iint_{S^b} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = -\iint_{G'''} w_3(u,v,\chi_1(u,v)) \, dudv;$$

$$\iint_{S^h} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = 0.$$

Dus

$$\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \iint_{G'''} [w_3(u,v,\chi_2(u,v)) - w_3(u,v,\chi_1(u,v))] \, dudv =$$

$$= \iint_{G'''} \left[\int_{\chi_1(u,v)}^{\chi_2(u,v)} \frac{\partial w_3}{\partial z}(u,v,z) \, dz \right] \, dudv =$$

$$= \iiint_G \frac{\partial w_3}{\partial z}(x,y,z) \, dx dy dz =$$

$$= \iiint_G \operatorname{div} \underline{w} \, dV.$$

Als $\underline{w}(x,y,z) = (w_1(x,y,z), 0, 0)$ of $\underline{w}(x,y,z) = (0, w_2(x,y,z), 0)$ wordt het bewijs op overeenkomstige wijze geleverd; voor willekeurige \underline{w} volgt de juistheid van de stelling door optelling van linker- en rechterleden van de gevonden betrekkingen. \square

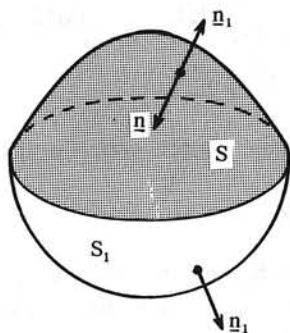
9.4.4. Opmerkingen

- a) De integraal $\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega$ in de stelling van Gauss heet de *flux* van \underline{w} door S en wordt ook wel eens genoteerd met $\oint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega$, om aan te duiden dat er geïntegreerd wordt over een gesloten oppervlak.
- b) De stelling van Gauss kan ook voor normale gebieden bewezen worden. Een algemeen geldige definitie van de rand van een normaal gebied is echter niet eenvoudig te geven. We zullen daarom volstaan met een voorbeeld (zie 9.4.5c).
- c) Als S een niet gesloten oppervlak is, dan kan men $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$ vaak ook met de stelling van Gauss berekenen door het oppervlak S op 'passende wijze' af te sluiten. Dat wil zeggen: men bepaalt een regulier gebied $G \subset \mathbb{R}^3$ zo, dat $S \subset \partial G$. Noemen we $S_1 = \partial G \setminus S$, dan geldt, als we S en S_1 oriënteren met de ten opzichte van G naar buiten gerichte normaal \underline{n}_1 :

$$\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n}_1 \, d\Omega = \iiint_G \operatorname{div} \underline{v} \, dV - \iint_{S_1} \underline{v} \cdot \underline{n}_1 \, d\Omega.$$

Afhankelijk van de oorspronkelijke oriëntering van S is

$$\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \pm \iint_{S_1} \underline{v} \cdot \underline{n}_1 \, d\Omega.$$



9.4.5. Voorbeelden

- a) Gebruikmakend van stelling 9.4.3 kan men de integraal van voorbeeld 9.3.14 ook als volgt berekenen. Zij S_1 de in het vlak $z = 1$ gelegen cirkelschijf met middelpunt $(0,0,1)$ en straal 1 en zij $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Nemen we als normaal op S_1 de eenheidsvector in de richting van de positieve z -as, dan geldt

$$\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega + \iint_{S_1} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \iiint_G \operatorname{div} \underline{w} \, dV.$$

Op S_1 is $\underline{w} \cdot \underline{n} = (x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1$, dus

$$\iint_{S_1} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \iint_{S_1} d\Omega = \pi \quad (\text{oppervlakte van cirkel met straal 1}).$$

Verder is $\text{div } \underline{w} = 3$, dus

$$\iiint_G \text{div } \underline{w} \, dV = 3 \iiint_G dx dy dz = 3\pi \int_0^1 (\sqrt{z})^2 dz = \frac{3}{2}\pi.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van 8.6.6(*).

We concluderen dat $\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \frac{\pi}{2}$.

- b) Op $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ is het vectorveld \underline{w} gegeven door $\underline{w}(\underline{x}) = \left(\frac{x}{|\underline{x}|^3}, \frac{y}{|\underline{x}|^3}, \frac{z}{|\underline{x}|^3} \right)$.
Voor iedere $\underline{x} \in D$ is

$$\text{div } \underline{w} = \frac{|\underline{x}|^3 - 3x^2|\underline{x}|}{|\underline{x}|^6} + \frac{|\underline{x}|^3 - 3y^2|\underline{x}|}{|\underline{x}|^6} + \frac{|\underline{x}|^3 - 3z^2|\underline{x}|}{|\underline{x}|^6} = 0.$$

Is nu G een in D gelegen regulier gebied met stuksgewijs gladde rand S , dan is volgens 9.4.3

$$\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \iiint_G \text{div } \underline{w} \, dV = 0.$$

We merken hierbij op dat de stelling van Gauss niet toegepast kan worden als niet voldaan is aan de voorwaarde $G \subset D$. Ter illustratie berekenen we $\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega$, waarbij S een bol is met middelpunt $\underline{0}$ en straal R :

$$\begin{aligned} \iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega &= \iint_S \left(\frac{x}{|\underline{x}|^3}, \frac{y}{|\underline{x}|^3}, \frac{z}{|\underline{x}|^3} \right) \cdot \left(\frac{x}{|\underline{x}|}, \frac{y}{|\underline{x}|}, \frac{z}{|\underline{x}|} \right) d\Omega = \\ &= \iint_S \frac{1}{|\underline{x}|^2} d\Omega = \frac{1}{R^2} \iint_S d\Omega = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \neq 0. \end{aligned}$$

- c) Zij S de ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

georiënteerd volgens de naar buiten gerichte normaal, en zij \underline{w} als in voorbeeld b).

We berekenen $\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega$.

Beschouw daartoe de bol S_1 met middelpunt $\underline{0}$ en straal R , die georiënteerd is volgens de naar binnen gerichte normaal. Kies daarbij R zó dat S_1 geheel binnen S ligt.

Het tussen S_1 en S ingesloten deel van \mathbb{R}^3 is een normaal gebied, dat door de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ verdeeld wordt in acht reguliere gebieden. Aangezien $\text{div } \underline{w} = 0$ op $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ volgt uit de stelling van Gauss, dat de integraal van \underline{w} over de rand voor ieder van deze reguliere gebieden gelijk is aan 0. Door deze integralen op te tellen en te bedenken dat daarbij de integralen over de snijvlakken wegens de paarsgewijs te-

gengestelde oriënteringen tegen elkaar wegvallen, ziet men dat

$$\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega + \iint_{S_1} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = 0.$$

Op dezelfde wijze als in b) blijkt dat $\iint_{S_1} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = -4\pi$.

Dus

$$\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = 4\pi.$$

Oefeningen

- Het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (4xz, xyz^2, 3z)$.
 - S_1 is het deel van de kegel $x^2 + y^2 = z^2$ waarvoor geldt $0 \leq z \leq 4$; S_1 is georiënteerd volgens de van de z-as af gerichte normaal. Bereken $\iint_{S_1} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$ rechtstreeks.
 - S_2 is de in het vlak $z = 4$ gelegen cirkelschijf met middelpunt $(0,0,4)$ en straal 4; S_2 is georiënteerd volgens de naar boven gerichte normaal. Bereken $\iint_{S_2} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$.
 - Verifieer de stelling van Gauss met behulp van de in a) en b) gevonden uitkomsten.
- Het gesloten oppervlak S wordt gevormd door de zijvlakken van de kubus, waarvan $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$ vier hoekpunten zijn; S is georiënteerd volgens de naar buiten gerichte normaal. Bereken met behulp van de stelling van Gauss $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$ als $\underline{v}(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$.
- Bewijs met behulp van de stelling van Gauss dat de inhoud van een bol met straal R gelijk is aan $\frac{1}{3}R$ maal zijn oppervlakte. Aanwijzing: neem als vectorveld $\underline{v}(x,y,z) = (x,y,z)$.
- S is het deel van het cilinderoppervlak $x^2 + y^2 = R^2$ waarvoor geldt $0 \leq z \leq h$, ($R > 0$, $h > 0$). S is georiënteerd volgens de van de z-as af gerichte normaal. Bereken de flux van het vectorveld $\underline{v}(x,y,z) = (x,y,z)$ door S met behulp van de stelling van Gauss. Beschouw daartoe een gesloten oppervlak waarvan S deel uitmaakt.
- Laat de functie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue partiële afgeleiden van de tweede orde hebben. Bewijs, door de stelling van Gauss toe te passen op het vectorveld $\text{grad } f$, dat met G , S en \underline{n} als in 9.4.3 geldt

$$\iiint_G \Delta f \, dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \underline{n}} \, d\Omega, \quad \text{waarbij } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

9.5. De integraalstellingen van Stokes en Green

9.5.1. Integraalstelling van Stokes

Zij S een (stuksgewijs) glad oppervlak in \mathbb{R}^3 met (stuksgewijs) gladde, gesloten randkromme C .

Zij $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ een differentieerbaar vectorveld met continue partiële afgeleiden in $D \subset \mathbb{R}^3$, waarbij S en C bevat zijn in D .

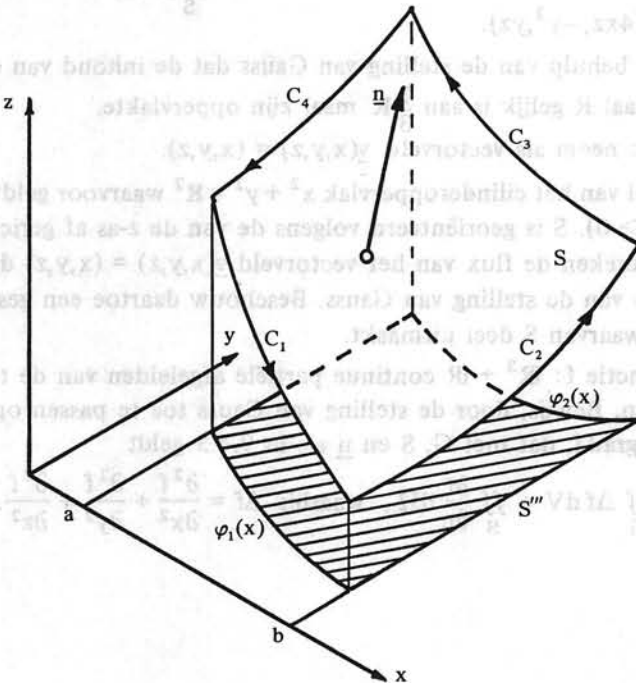
Laat de oriëntering van S en van C zó gekozen zijn dat de richting van de eenheidsnormaalvector \underline{n} op S rechtscyclisch (dat is volgens de kurketrekkerregel) is toegevoegd aan de omlooprichting van C . Met andere woorden: als men de randkromme C zo doorloopt dat men het oppervlak S aan de linkerzijde heeft, dan is de normaalvector \underline{n} op S naar boven gericht.

Dan geldt:

$$\iint_S (\text{rot } \underline{w}) \cdot \underline{n} \, d\Omega = \int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} \, ds.$$

Bewijs

We beschouwen eerst het geval dat $\underline{w}(x,y,z) = (w_1(x,y,z), 0, 0)$ en nemen daarbij aan dat S een glad oppervlak is, bepaald door de vergelijking $z = f(x,y)$, en dat de projectie S''' van S op het vlak $z = 0$ een (tweedimensionaal) regulier gebied is. We merken op dat dan de rand van S''' samenvalt met de projectie van C op het vlak $z = 0$. (Zonder hierop nader in te gaan vermelden we dat het algemene geval tot het bovenstaande teruggebracht kan worden door S te verdelen in een aantal deeloppervlakken).



Zij $S''' = \{(x,y,0) | a \leq x \leq b \text{ en } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$.

C is dan samengesteld uit ten hoogste vier gladde krommen C_1, C_2, C_3 en C_4 (het kunnen er minder zijn; als bijv. $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ dan vervalt C_2).

We parametriseren deze krommen als volgt:

$$\begin{aligned} C_1: x &\rightarrow (x, \varphi_1(x), f(x, \varphi_1(x))), & x \text{ van } a \text{ naar } b; \\ C_2: y &\rightarrow (b, y, f(b, y)), & y \text{ van } \varphi_1(b) \text{ naar } \varphi_2(b); \\ C_3: x &\rightarrow (x, \varphi_2(x), f(x, \varphi_2(x))), & x \text{ van } b \text{ naar } a; \\ C_4: y &\rightarrow (a, y, f(a, y)), & y \text{ van } \varphi_2(a) \text{ naar } \varphi_1(a). \end{aligned}$$

Aangezien voor C_2 en C_4 geldt $\underline{w} \cdot \underline{\tau} = 0$, is

$$\begin{aligned} \int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} \, ds &= \int_{C_1} \underline{w} \cdot \underline{\tau} \, ds + \int_{C_3} \underline{w} \cdot \underline{\tau} \, ds = \\ &= \int_a^b w_1(x, \varphi_1(x), f(x, \varphi_1(x))) \, dx + \int_b^a w_1(x, \varphi_2(x), f(x, \varphi_2(x))) \, dx. \end{aligned}$$

Stellen we $g(x,y) = w_1(x,y, f(x,y))$, dan is dus

$$\begin{aligned} \int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} \, ds &= \int_a^b g(x, \varphi_1(x)) \, dx + \int_b^a g(x, \varphi_2(x)) \, dx = \\ &= - \int_a^b [g(x, \varphi_2(x)) - g(x, \varphi_1(x))] \, dx = \\ &= - \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \, dy \right] dx = - \iint_{S'''} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \, dx dy. \end{aligned}$$

Een parametrisering van S die de juiste oriëntering geeft is

$$x = x, \quad y = y, \quad z = f(x,y), \quad (x,y) \in S''''.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \underline{w}) \cdot \underline{n} \, d\Omega &= \\ &= \iint_{S''''} \left[0, \frac{\partial w_1}{\partial z}(x,y, f(x,y)), -\frac{\partial w_1}{\partial y}(x,y, f(x,y)) \right] \cdot \left[-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1 \right] dx dy = \\ &= \iint_{S''''} \left[-\frac{\partial w_1}{\partial y}(x,y, f(x,y)) - \frac{\partial w_1}{\partial z}(x,y, f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right] dx dy = \\ &= - \iint_{S''''} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \, dx dy = \\ &= \int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} \, ds. \end{aligned}$$

Als $\underline{w}(x,y,z) = (0, w_2(x,y,z), 0)$ of $\underline{w}(x,y,z) = (0, 0, w_3(x,y,z))$ wordt het bewijs op overeenkomstige wijze geleverd; voor willekeurige \underline{w} volgt de

juistheid van de stelling door optelling van linker- en rechterleden van de gevonden betrekkingen. \square

9.5.2. Opmerking

De integraal $\int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} ds$ heet de *circulatie* van \underline{w} langs de gesloten kromme C en wordt ook wel eens genoteerd met $\oint_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} ds$, om aan te duiden dat er geïntegreerd wordt langs een gesloten kromme.

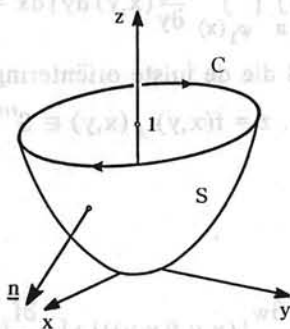
9.5.3. Voorbeelden

- a) Het oppervlak S is gegeven door $z = x^2 + y^2$, waarbij $0 \leq z \leq 1$. Het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (-y, x, 2x^2z)$. De eenheidsnormaalvector \underline{n} op S is van de z -as af gericht. Bereken $\iint_S \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} d\Omega$.

Oplossing.

De randkromme C van S is de cirkel in het vlak $z = 1$ met middelpunt op de z -as en straal 1. Parametrisering van C : $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = 1$. Deze cirkel wordt doorlopen in de richting waarin de parameter φ afneemt. Dan geldt

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} d\Omega &= \int_C \underline{v} \cdot \underline{\tau} ds = -\int_0^{2\pi} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 2\cos^2 \varphi) \cdot (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) d\varphi = \\ &= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = -2\pi. \end{aligned}$$

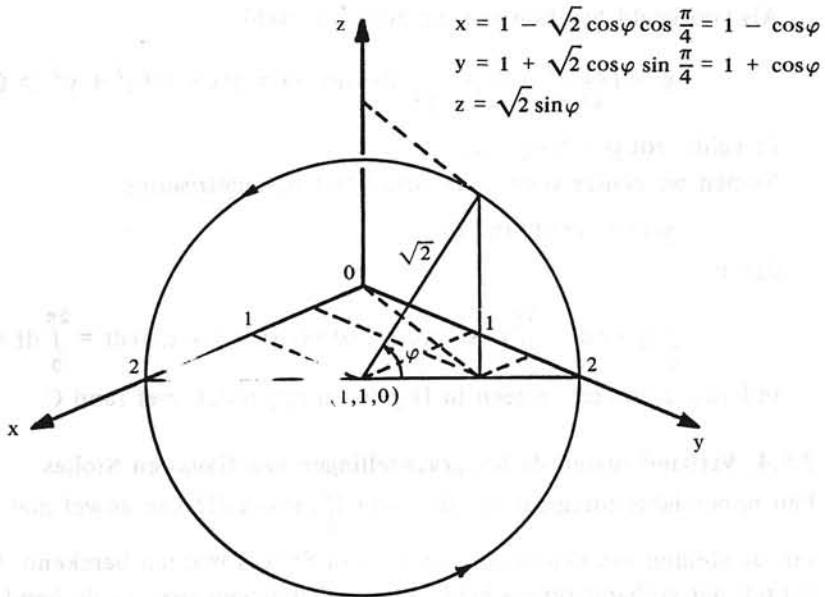


Als controle berekenen we de integraal ook rechtstreeks.

Gebruiken we de parametrisering en de normaal als in 9.2.5a en berekenen we $\text{rot } \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = (0, -4xz, 2)$, dan krijgen we

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} d\Omega &= \iint_B (0, -4r^3 \cos \varphi, 2) \cdot (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, -r) dr d\varphi = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (-8r^5 \sin \varphi \cos \varphi - 2r) d\varphi \right] dr = \int_0^1 -4\pi r dr = -2\pi. \end{aligned}$$

- b) Zij \underline{w} het vectorveld, gegeven door $\underline{w}(x,y,z) = (y,z,x)$ en zij C de in het vlak $x + y = 2$ gelegen cirkel met middelpunt $(1,1,0)$ en straal $\sqrt{2}$. Vanuit de oorsprong gezien wordt C in negatieve zin doorlopen (dat wil zeggen: met de richting van de klok mee).



We berekenen met behulp van stelling 9.5.1 $\int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} ds$.

Zij S het door C begrensde deel van het vlak $x + y = 2$. De bij de oriëntering van C passende eenheidsnormaalvector op S is

$$\underline{n} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right), \text{ terwijl } \text{rot } \underline{w} = (-1, -1, -1).$$

Dus

$$\int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} ds = \iint_S (\text{rot } \underline{w}) \cdot \underline{n} d\Omega = -\sqrt{2} \iint_S d\Omega = -\sqrt{2} \cdot 2\pi = -2\pi\sqrt{2}.$$

Als controle berekenen we de integraal ook rechtstreeks.

Een parametrisering van C is

$$\underline{x}(\varphi) = (1 - \cos \varphi, 1 + \cos \varphi, \sqrt{2} \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

We vinden

$$\begin{aligned} \int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} ds &= \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi, \sqrt{2} \sin \varphi, 1 - \cos \varphi) \cdot (\sin \varphi, -\sin \varphi, \sqrt{2} \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi - \sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \varphi] d\varphi = -2\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

- c) Is \underline{w} een vectorveld in $D \subset \mathbb{R}^3$ met $\text{rot } \underline{w} = \underline{0}$ en is C een gesloten kromme in D zó dat C de rand is van een in D gelegen oppervlak S , dan is

$$\int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} ds = \iint_S (\text{rot } \underline{w}) \cdot \underline{n} d\Omega = 0.$$

Evenals in voorbeeld 9.4.5 is bij het toepassen van deze betrekking voorzichtigheid geboden.

Als voorbeeld beschouwen we het vectorveld

$$\underline{w} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \text{ op } D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 > 0\}.$$

Er geldt $\text{rot } \underline{w} = \underline{0}$ (ga na).

Nemen we echter voor C de cirkel met parametrisering

$$\underline{x}(t) = (\cos t, \sin t, 0),$$

dan is

$$\int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} \, ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Inderdaad bestaat er geen in D gelegen oppervlak met rand C .

9.5.4. Verband tussen de integraalstellingen van Gauss en Stokes

Een oppervlakte-integraal van de vorm $\iint_S \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$ kan zowel met behulp

van de stelling van Gauss als met die van Stokes worden berekend. We lichten het verband tussen beide integraalstellingen toe aan de hand van voorbeeld 9.5.3a. Daar is $\iint_S \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$ met behulp van de stelling van

Stokes berekend. De kromme C is echter ook te beschouwen als randkromme van het oppervlak $S^* = \{(x, y, z) | z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Oriënteren we S^* met de naar boven gerichte normaal, dan geldt

$$\iint_S \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \int_C \underline{v} \cdot \underline{\tau} \, ds = -\iint_{S^*} \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega. \quad (\text{I})$$

Het oppervlak $S \cup S^*$ is een gesloten oppervlak, georiënteerd volgens de naar buiten gerichte normaal. Volgens de integraalstelling van Gauss geldt dan

$$\iiint_G \text{div}(\text{rot } \underline{v}) \, dV = \iint_S \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega + \iint_{S^*} \text{rot } \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega, \quad (\text{II})$$

waarbij G het gebied is dat door $S \cup S^*$ wordt omsloten.

Volgens oefening 6.9.1b is $\text{div}(\text{rot } \underline{v}) = 0$, zodat (I) en (II) met elkaar overeenstemmen.

9.5.5. Integraalstelling van Green voor het platte vlak

Zij G een regulier gebied in \mathbb{R}^2 , begrensd door een (stuksgewijs) gladde randkromme C , welke zo georiënteerd is, dat G steeds aan de linkerkant is als men C doorloopt.

Als $p, q : D \rightarrow \mathbb{R}$ met $G \subset D \subset \mathbb{R}^2$ differentieerbaar zijn met continue partiële afgeleiden in D , dan geldt

$$\int_C p \, dx + q \, dy = \iint_G \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

Bewijs

We bewijzen deze stelling met behulp van de stelling van Stokes door \mathbb{R}^2 te beschouwen als deelruimte van \mathbb{R}^3 via identificatie van (x,y) en $(x,y,0)$. Zij $\underline{x}(t) = (x(t), y(t), 0)$, $a \leq t \leq b$ een parametrisering van C met passende oriëntering. Definieer het vectorveld \underline{w} door $\underline{w}(x,y,z) = (p(x,y), q(x,y), 0)$. Dan is aan de voorwaarden van de stelling van Stokes voldaan en dus is

$$\int_C \underline{w} \cdot \underline{\tau} \, ds = \iint_G (\text{rot } \underline{w}) \cdot \underline{n} \, d\Omega.$$

Nu is $\text{rot } \underline{w} = (0, 0, \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})$, $\underline{n} = (0, 0, 1)$ en $d\Omega = dx dy$.

We vinden

$$\int_a^b [p(x(t), y(t))x'(t) + q(x(t), y(t))y'(t)] dt = \iint_G [\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)] dx dy$$

of in symbolische notatie

$$\int_C p \, dx + q \, dy = \iint_G (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}) dx dy. \quad \square$$

9.5.6. Voorbeelden

a) Door voor p en q geschikte functies te substitueren kan men op diverse manieren de oppervlakte van G herleiden tot een lijnintegraal:

$$\int_C x \, dy = \iint_G dx dy \quad \text{via } p = 0 \text{ en } q = x;$$

$$\int_C -y \, dx = \iint_G dx dy \quad \text{via } p = -y \text{ en } q = 0;$$

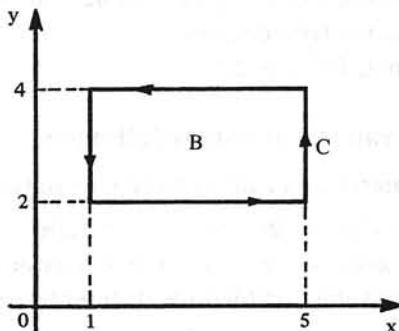
$$\frac{1}{2} \int_C (x \, dy - y \, dx) = \iint_G dx dy \quad \text{via } p = -\frac{1}{2}y \text{ en } q = \frac{1}{2}x.$$

Zo vindt men voor de oppervlakte Ω van de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ met parametrisering

$$\underline{x}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\Omega = \int_C x \, dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \, d(b \sin t) = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi ab.$$

b) Bereken $\int_C (e^{x^2} + y) \, dx + (x^2 + \arctan \sqrt{y}) \, dy$, waarbij C de rand is van



de rechthoek B met hoekpunten $(1,2)$, $(5,2)$, $(5,4)$ en $(1,4)$, georiënteerd tegen de wijzers van de klok in.

Oplossing.

Volgens de stelling van Green is de gevraagde lijnintegraal gelijk aan

$$\iint_B (2x - 1) dx dy = \int_2^4 \left[\int_1^5 (2x - 1) dx \right] dy = 40.$$

Rechtstreekse berekening van deze lijnintegraal brengt heel wat meer rekenwerk met zich mee.

Oefeningen

- S is het deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ waarvoor geldt $z \geq 0$; S is georiënteerd volgens de naar de oorsprong gerichte normaal. Bereken via de stelling van Stokes $\iint_S (\text{rot } \underline{v}) \cdot \underline{n} d\Omega$ als
 - $\underline{v}(x,y,z) = (0,0,x^2 + xy - z^2)$,
 - $\underline{v}(x,y,z) = (y^2, xy, xz)$,
 - $\underline{v}(x,y,z) = (z - y, x - z, x - y)$.
- Het oppervlak S is gegeven door $S = \{(x,y,z) | z = 4 - (x^2 + y^2), z \geq 0\}$; het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (z + x, x + y, y + z)$; \underline{n} is de eenheidsnormaalvector op S met positief derde kental. Bereken $\iint_S (\text{rot } \underline{v}) \cdot \underline{n} d\Omega$
 - rechtstreeks,
 - door gebruik te maken van de stelling van Stokes,
 - door gebruik te maken van de stelling van Gauss.
- De kromme k bestaat uit
 - de kromme k_1 bepaald door $y = x^2$, $z = 0$, $0 \leq x \leq 1$.
 k_1 wordt doorlopen van $(0,0,0)$ tot $(1,1,0)$;
 - het lijnstuk met beginpunt $(1,1,0)$ en eindpunt $(0,0,0)$.
 Het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (y, -x, 0)$.
Bereken $\int_k \underline{v} \cdot \underline{\tau} ds$
 - rechtstreeks,
 - door gebruik te maken van de stelling van Stokes.
- Bereken de oppervlakte van het gebied in \mathbb{R}^2 dat begrensd wordt door de kromme met parametervoorstelling
 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

9.6. Toepassingen van de integraalstellingen

9.6.1. Fysische interpretatie van divergentie en rotatie

- Zij \underline{w} een vectorveld in $D \subset \mathbb{R}^3$ en G een regulier gebied met rand S zó dat $G \cup S \subset D$. We gaan uit van een situatie waarin de integraalstelling van Gauss 9.4.3 toegepast mag worden (\underline{w} differentieerbaar vectorveld enz.).

Er geldt dan

$$\iint_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \iiint_G \operatorname{div} \underline{w} \, dV.$$

Is ΔG een omgeving van het inwendige punt $P \in G$ en ΔS de rand van ΔG , dan geldt

$$\iiint_{\Delta G} \operatorname{div} \underline{w} \, dV = \iint_{\Delta S} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega.$$

Uit een analogon van de middelwaardstelling van de integraalrekening 5.2.10 volgt het bestaan van een punt $Q \in \Delta G$ zodanig dat

$$(\operatorname{inh} \Delta G)(\operatorname{div} \underline{w})_Q = \iint_{\Delta S} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega.$$

Hieruit volgt

$$(\operatorname{div} \underline{w})_P = \lim_{\substack{\operatorname{diam} \Delta G \rightarrow 0 \\ P \in \Delta G}} \frac{\iint_{\Delta S} \underline{w} \cdot \underline{n} \, d\Omega}{\operatorname{inh} \Delta G}. \quad (*)$$

Het rechterlid heet *brondichtheid* van het vectorveld in P . Het inwendige van G heet bronvrij als $\operatorname{div} \underline{w} = 0$ in alle punten van het inwendige van G .

- i) Laat \underline{v} een stationair (= tijdsafhankelijk) snelheidsveld zijn van een onsamendrukbare vloeistof (massadichtheid ρ_0 constant). Zij \underline{v} zodanig gegeven en G_P zodanig gekozen (met P inwendig punt van G_P en S_P rand van G_P) dat aan de stelling van Gauss voldaan wordt. Aangezien de stroming tijdsafhankelijk is en de dichtheid ρ_0 constant is, geldt voor de massastroom door het oppervlak S_P : $\iint_{S_P} \rho_0 \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega = 0$.

Toepassen van (*) levert derhalve

$$(\operatorname{div}(\rho_0 \underline{v}))_P = 0 \quad \text{ofwel} \quad (\operatorname{div} \underline{v})_P = 0.$$

In woorden: in ieder punt van het stationaire vectorveld van een onsamendrukbare vloeistof waar de stroming 'geen singulariteit' heeft, geldt $\operatorname{div} \underline{v} = 0$.

- ii) Beschouw wederom een stationaire stroming van een onsamendrukbare vloeistof. Laat S de rand van een regulier gebied G zijn en stel dat $\iint_S \rho_0 \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega = Q \neq 0$.

Stel dat P het enige punt is van G waar het vectorveld niet voldoet aan de voorwaarden om de stelling van Gauss te kunnen toepassen. Zij G_P een omgeving van P met rand S_P en zij $G_N = G \setminus G_P$. Dan is G_N een normaal gebied en er geldt dat

$$Q = \iint_S \rho_0 \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega = \iint_{S_P} \rho_0 \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega,$$

waarbij beide normalen naar buiten zijn gericht.

In woorden: de singulariteit in P representeert een bron ($Q > 0$) of een put ($Q < 0$) in de stationaire stroming van de onsamendrukbare vloeistof.

- b) Het niet gesloten gladde oppervlak S met gladde randkromme C bevindt zich in het snelheidsveld \underline{w} .

Zij P inwendig punt van S en zij ΔS een georiënteerd deeloppervlak van S, zodanig dat P ook inwendig punt van ΔS is. Laat de gesloten kromme ΔC de rand zijn van ΔS , waarbij ΔC voorzien is van de bij ΔS passende oriëntering.

Door toepassing van de stelling van Stokes vindt men op dezelfde wijze als hierboven:

$$(\underline{n} \cdot \text{rot } \underline{w})_P = \lim_{\substack{\text{diam } \Delta S \rightarrow 0 \\ P \in \Delta S}} \frac{\oint_{\Delta C} \underline{w} \cdot \underline{\tau} \, ds}{\text{opp } \Delta S}$$

Het rechterlid heet de *circulatie*dichtheid in P. Het veld \underline{w} heet wervel-vrij indien $\text{rot } \underline{w} = \underline{0}$. In dit geval is de circulatie langs iedere gesloten kromme gelijk aan 0.

9.6.2. De continuïteitsvergelijking bij de stroming van een gas

Beschouw een stroming van een gas of vloeistof, gekarakteriseerd door een stroomvector $v(x,y,z,t)$ die de richting en grootte van de stroomsnelheid in het punt (x,y,z) op het tijdstip t geeft. Er zijn geen geïsoleerde massa-bronnen of -putten aanwezig. Zij $\rho(x,y,z,t)$ de dichtheid van het gas in het punt (x,y,z) op het tijdstip t .

Het door S omsloten reguliere gebied G bevindt zich in de gasstroom. De verandering in de totale massa binnen G per tijdseenheid is gelijk aan de hoeveelheid gas welke per tijdseenheid door het oppervlak S stroomt. Dus

$$-\iiint_G \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = \iint_S (\rho \underline{v}) \cdot \underline{n} \, d\Omega.$$

Toepassing van de stelling van Gauss op het rechterlid geeft

$$\iiint_G \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) \right] dV = 0.$$

Aangezien dit geldt voor een willekeurig ruimtedeel, volgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0,$$

de zogenaamde continuïteitsvergelijking van de gas- of vloeistofstroom. In het bijzondere geval van een incompressibele stroming ($\rho = \text{constant}$) vereenvoudigt deze vergelijking zich tot (zie ook 9.6.1a)

$$\text{div } \underline{v} = 0.$$

9.6.3. Conserverend krachtenveld

Zij $\underline{F}(x,y,z)$ een krachtenveld, dan stelt (zie 9.1.8) $\int_k \underline{F} \cdot \underline{\tau} ds$ de arbeid voor door \underline{F} verricht op een massadeeltje als dit k doorloopt.

Is $\text{rot } \underline{F} = \underline{0}$ voor alle $(x,y,z) \in G$, waarbij G een regulier gebied $G \subset \mathbb{R}^3$ is, dan spreekt men van een *conserverend krachtenveld*.

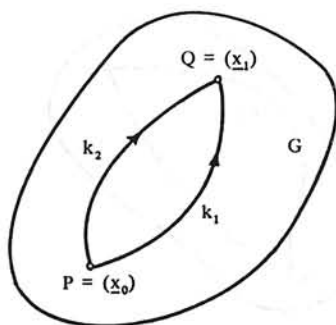
Laat k_1 en k_2 krommen binnen G zijn, die de punten $P(x_0, y_0, z_0)$ en $Q(x_1, y_1, z_1)$ met elkaar verbinden, waarbij beide krommen worden doorlopen van P naar Q .

Is \underline{F} een conserverend krachtenveld, dan is volgens de stelling van Stokes

$$\int_{k_1} \underline{F} \cdot \underline{\tau} ds - \int_{k_2} \underline{F} \cdot \underline{\tau} ds = 0$$

of

$$\int_{k_1} \underline{F} \cdot \underline{\tau} ds = \int_{k_2} \underline{F} \cdot \underline{\tau} ds.$$



In een conserverend veld is de arbeid verricht langs een kromme van een punt P naar een punt Q dus onafhankelijk van de gekozen weg van P naar Q .

Strikt genomen is deze redenering alleen geldig indien er een glad oppervlak S bestaat dat geheel binnen G ligt en zó dat k_1 tesamen met k_2 de rand van S vormen. Op deze moeilijkheid gaan we hier verder niet in.

9.6.4. De integreerbaarheidsvoorwaarde voor een exacte DV

Als voor de DV $P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$, waarbij P en Q continue partiële afgeleiden hebben, geldt

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

(d.w.z. de DV is exact, zie 7.4.7, voor alle (x,y) behorend tot een regulier gebied G in \mathbb{R}^2), dan heeft de DV in G oplossingen van de vorm $u(x,y) = \text{constant}$.

Bewijs

Laat $\underline{a} = (a_1, a_2)$ en $\underline{x} = (x,y)$ punten van G zijn en k_1 en k_2 twee krommen in G die \underline{a} en \underline{x} verbinden. Omdat G regulier is ligt het

gehele door k_1 en k_2 omsloten gebied binnen G , zodat toepassing van de stelling van Green leert:

$$\int_{k_1} P dx + Q dy - \int_{k_2} P dx + Q dy = 0$$

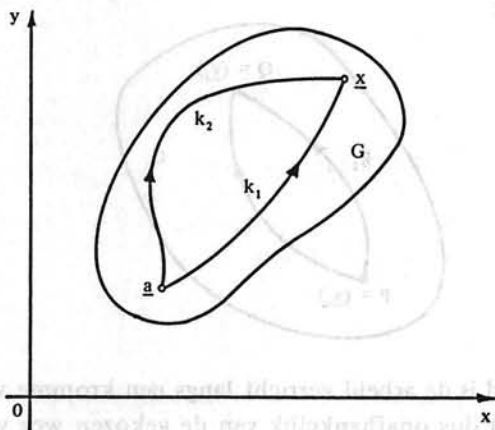
of

$$\int_{k_1} P dx + Q dy = \int_{k_2} P dx + Q dy.$$

Omdat de integratie kennelijk onafhankelijk is van de gekozen weg tussen \underline{a} en \underline{x} , kunnen we bij vast gekozen beginpunt \underline{a} definiëren

$$u(x,y) = \int_k P dx + Q dy,$$

waarbij k een willekeurig gekozen weg is van \underline{a} naar \underline{x} die geheel binnen G blijft.



We tonen nu aan dat $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ en $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$.

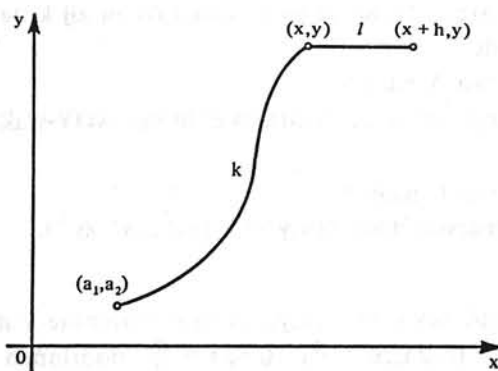
Volgens definitie is

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{k'} P dx + Q dy - \int_k P dx + Q dy}{h},$$

waarbij k' een willekeurig gekozen weg van (a_1, a_2) naar $(x+h, y) \in G$ is, die geheel binnen G blijft. We kiezen voor k' de weg die eerst langs k van (a_1, a_2) naar (x, y) voert en daarna langs de rechte lijn l evenwijdig aan de x -as van (x, y) naar $(x+h, y)$ loopt. Dan is

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_k P dx + Q dy + \int_l P dx + Q dy - \int_k P dx + Q dy}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_l P dx + Q dy.$$



Parametriseren we l door $(x+t, y)$ met $0 \leq t \leq h$, dan geldt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h P(x+t, y) dt = \lim_{h \rightarrow 0} P(x+\vartheta h, y) = P(x, y).$$

Hierbij is gebruik gemaakt van 5.2.10, want P is continu wegens 6.10.10 en 6.10.8.

Evenzo bewijst men $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

Dus is $u(x, y) = \text{constant}$ een oplossing van $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$. \square

9.7. Vraagstukken

- De kromme k is het gedeelte van de parabool $y = 2x^2$ in \mathbb{R}^2 gelegen tussen de punten $(0, 0)$ en $(2, 8)$. Bereken de lengte van k .
- Zij k de in het vlak $z = 0$ gelegen kromme met beginpunt $(0, 0, 0)$ en eindpunt $(1, 0, 0)$ gegeven door de vergelijking $y = \sqrt{(1-x)\sin x}$. Bereken $\int_k \underline{y} \cdot \underline{\tau} ds$ als $\underline{v}(x, y, z) = (ax, by, cz)$.
- Zij k het deel van de snijkromme van de parabolische cilinder $x^2 = 4y$ en het vlak $x + y + z = 0$, gelegen tussen beginpunt $(0, 0, 0)$ en eindpunt $(2, 1, -3)$.
 - Bereken de lengte van k .
 - Bereken de massa van k , als de massadichtheid (massa per lengte-eenheid) gegeven is door $\rho(x, y, z) = \frac{x+1}{y-z+2}$.
 - Bereken $\int_k \underline{y} \cdot \underline{\tau} ds$, waarbij $\underline{v}(x, y, z) = (x - 4y, 3y - z, 2x)$.
- De gesloten kromme k wordt gevormd door het rechte lijnsegment van $(0, 0, 0)$ naar $(2, 1, 3)$ en het tussen deze punten gelegen deel van de snijkromme van de oppervlakken $x^2 = 4y$ en $3x^3 = 8z$, doorlopen van $(2, 1, 3)$ naar $(0, 0, 0)$. Bereken $\int_k \underline{y} \cdot \underline{\tau} ds$ als $\underline{v}(x, y, z) = (3x^2, 2xz - y, z)$.

5. Gegeven de punten $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$ en $C(0,1,0)$ en zij k de gesloten kromme bestaande uit :

k_1 de rechte lijn van A naar B ;

k_2 de kleinste boog van de eenheidscirkel in het XOY -vlak van B naar C ;

k_3 de rechte lijn van C naar A .

Het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (xz^2, yx^2, zy^2)$.

Bereken $\int_k \underline{v} \cdot \underline{\tau} ds$.

6. Gegeven het vectorveld $\underline{v}(x,y,z) = (x,y,yz)$ en de kromme k met parametrisering $\underline{x}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, doorlopen volgens toenemende waarden van t .

Bereken $\int_k \underline{v} \cdot \underline{\tau} ds$.

7. Zij C een gladde kromme in \mathbb{R}^2 met parametrisering $\underline{x}: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ waarbij $\underline{x}(t) = (x(t), y(t))$ en zij $s(t)$, $t \in [a,b]$, de booglengte van het tussen $\underline{x}(a)$ en $\underline{x}(t)$ gelegen deel van C .

Zij $\alpha(t)$ de hoek, die in het punt $(x(t), y(t))$ de raaklijnvector $\underline{\tau}$ corresponderend met de parametrisering maakt met de positieve x -as.

- a) Toon aan dat voor $x'(t) \neq 0$ geldt: $\alpha(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)} + k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.

- b) We definiëren de *kromming* κ van de kromme C in het punt (x,y) van C door $\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$.

Bewijs dat

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

- c) De *kromtestraal* ρ wordt gedefinieerd door $\rho = \frac{1}{|\kappa|}$.

Bewijs dat de kromtestraal in ieder punt van de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ gelijk is aan $|a|$.

8. Het oppervlak S is gegeven door $S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 = \frac{1}{4} - z, z \geq 0\}$. Bereken

$$\iint_S \sqrt{1 - 4(x^2 + y^2)} d\Omega.$$

9. Bereken de oppervlakte van

$$S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

10. Bereken de oppervlakte van het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door wenteling om de z -as van de in het vlak $x = 0$ gelegen kromme $z = \cosh y$, $(0 \leq y \leq 1)$.

11. S is het deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ waarvoor geldt $1 \leq z \leq \sqrt{3}$. De massadichtheid is gegeven door $\rho(x,y,z) = z$.

- a) Bereken de massa van S .

- b) Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van S.
 c) Bereken het traagheidsmoment van S t.o.v. de z-as.

12. S is het deel van de paraboloid $z = x^2 + y^2$ waarvoor geldt $z \leq x + y$.
 Bereken de massa van S als de massadichtheid gegeven is door

$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}.$$

13. Men laat de in het vlak $x = 0$ gelegen kromme $yz = 1$ wentelen om de z-as; S is het tussen de vlakken $z = 1$ en $z = a$ ($a > 1$) gelegen deel van het omwentelingsoppervlak dat hierdoor ontstaat.

Bereken de oppervlakte van S en ga na dat deze oppervlakte niet begrensd is als a naar ∞ nadert (vgl. oefening 8.6.4).

Tip voor verffabrikanten: een bus van bovenstaand model bevat minder verf dan nodig is om de buitenkant te schilderen. Of klopt er soms iets niet in deze redenering?

14. Het oppervlak S is in bolcoördinaten gegeven door de vergelijking $r = 1 - \cos \vartheta$, ($0 \leq \vartheta \leq \pi$).

Bereken de oppervlakte van S.

15. S is het deel van het oppervlak $z = xy$ waarvoor geldt $1 \leq x \leq 2$ en $2 \leq y \leq 3$. De normaal \underline{n} heeft een positief derde kental.

Het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (x,0,0)$.

Bereken

$$\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega.$$

16. Het oppervlak S is gegeven door $S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (x + y, -x + y, z^2)$, \underline{n} is de eenheidsnormaal op S met niet-negatief derde kental.

Bereken $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$

a) rechtstreeks,

b) door gebruik te maken van de integraalstelling van Gauss.

17. Zij $G = \{(x,y,z) | y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, 0 \leq x \leq 3\}$ en het vectorveld \underline{v} gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (z^2, yz, xy)$.

Bereken $\iiint_G \operatorname{div} \underline{v} \, dV$

a) rechtstreeks,

b) door gebruik te maken van de integraalstelling van Gauss.

18. Zij $S = \{(x,y,z) | z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ en het vectorveld \underline{v} gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (y, x, -4z)$; \underline{n} is de naar de z-as toe gerichte eenheidsnormaal op S.

Bereken $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$

a) rechtstreeks,

b) door gebruik te maken van de integraalstelling van Gauss.

19. Zij $S = \{(x,y,z) | z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, x \geq 0, z \geq 0\}$ en het vectorveld \underline{v} gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (-y, x, (1-z)^2 - x^2)$; \underline{n} is de van de z-as af gerichte eenheidsnormaal op S.
Bereken $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$
- rechtstreeks,
 - door gebruik te maken van de integraalstelling van Gauss.
20. S is de ellipsoïde $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, ($a, b, c > 0$).
S is georiënteerd volgens de naar buiten gerichte normaal.
- Bereken $\iint_S (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{1/2} \, d\Omega$ via toepassing van de stelling van Gauss op het vectorveld $\underline{v}(x,y,z) = (ax, by, cz)$.
 - Bereken $\iint_S (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{-1/2} \, d\Omega$ met behulp van het vectorveld $\underline{v}(x,y,z) = (x, y, z)$.
21. Zij $S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \text{ en } z \geq 0\}$. De normaal \underline{n} op S heeft in het punt $(0,0,2)$ de richting van de positieve z-as. Het vectorveld $\underline{v}: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$.
Bereken $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$.
- Aanwijzing: gebruik de integraalstelling van Gauss door S op geschikte wijze af te sluiten.
22. Laat S en $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ zijn als in 9.4.3.
Bewijs: $\iint_S n_i \, d\Omega = 0$ voor $i = 1, 2, 3$.
23. Zij $S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0 \text{ en } 1 \leq z \leq 3, x \geq 0\}$.
Het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (-2xz, -x^2, y^2)$.
De eenheidsnormaalvector \underline{n} op S is zo gericht dat het derde kental ≤ 0 is. Bereken $\iint_S (\text{rot } \underline{v}) \cdot \underline{n} \, d\Omega$
- rechtstreeks,
 - door gebruik te maken van de stelling van Stokes.
24. C is de snijkromme van het vlak $x + y + z = 1$ en de cilinder $2x^2 + 2y^2 = 1$; vanuit de oorsprong gezien wordt C in positieve zin doorlopen. Bereken met behulp van de stelling van Stokes $\int_C \underline{v} \cdot \underline{\tau} \, ds$ als $\underline{v}(x,y,z) = (-y, x, z)$.
25. S is het deel van de ellipsoïde $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ waarvoor geldt $z \geq 0$; S is georiënteerd volgens de van de oorsprong af gerichte normaal.
Bereken $\iint_S (\text{rot } \underline{v}) \cdot \underline{n} \, d\Omega$
en $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$
als $\underline{v}(x,y,z) = (x - y, y + 2xz, z)$.

26. $S = \{(x,y,z) | (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4, y \geq 1\}$.

De normaal \underline{n} op S wordt zo gekozen dat deze in $(1,4,3)$ de richting van de positieve y -as heeft. Het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (2x + y - z, \arctan(x+y), x + y^6 + z)$.

Bereken

$$\iint_S (\text{rot } \underline{v}) \cdot \underline{n} \, d\Omega.$$

27. Gegeven is het vectorveld \underline{v} door $\underline{v}(x,y,z) = (y - xz, z^2 - y, 2z)$

alsmede $G = \{(x,y,z) | 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Zij S de rand van G en \underline{n} de naar buiten gerichte eenheidsnormaal op S .

a) Bereken $\iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\Omega$.

b) Zij $S^* = \{(x,y,z) | 0 \leq z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Bereken $\iint_{S^*} (\text{rot } \underline{v}) \cdot \underline{n} \, d\Omega$.

28. G is het deel van \mathbb{R}^3 dat ingesloten wordt door de vlakken met vergelijking $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en $2x + y + 2z = 8$.

S is het oppervlak dat G omsluit met uitzondering van het gedeelte dat in het XOZ-vlak ligt. Het vectorveld \underline{v} is gegeven door

$\underline{v}(x,y,z) = (xz, -y, x^2y)$. De eenheidsnormaalvector \underline{n} wordt naar buiten gericht gekozen.

Bereken $\iint_S (\text{rot } \underline{v}) \cdot \underline{n} \, d\Omega$.

29. G is het deel van het xy -vlak waar $x \geq 0$, $y \geq 0$ en $x^2 + y^2 \leq 1$; k is de in de positieve zin doorlopen rand van G .

a) Bereken met behulp van de stelling van Green

$$\int_k (3y^4 \, dx - 4x^3y \, dy).$$

b) Bereken deze integraal ook rechtstreeks.

30. In het xy -vlak is de kromme k in poolcoördinaten gegeven door de vergelijking $r = 1 + \cos \varphi$, ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Bereken met behulp van de stelling van Green de oppervlakte van het door k begrensde gebied.

10. Reeksen

Convergentiecriteria

10.1. Convergente of divergente reeksen

10.1.1. Inleiding

In 1.12.8 hebben we het begrip *rij* (Engels: sequence) ingevoerd. Uitgaand van een rij (a_n) kan men een nieuwe rij (s_n) construeren, gedefinieerd door

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \text{ enzovoort,}$$

dus

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Deze nieuwe rij noemen we de bij a_n behorende *reeks* (Engels: series).

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ bestaat en gelijk is aan s , is een voor de hand liggende notatie

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (*)$$

of ook wel

$$s = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Om historische redenen duidt men de reeks (s_n) vaak aan met $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Men zegt dus “gegeven de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ” of “gegeven de reeks $a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$ ”. Het bepalen van $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ wordt dan aangegeven

met “sommeer de reeks $a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$ ”, of met “bepaal $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ”.

Deze uitdrukkingen hebben in ieder geval het voordeel dat de rij (a_n) , de rij waar men van uitgaat, duidelijk wordt vermeld. In het volgende zullen wij dan ook dit “spraakgebruik” hanteren.

a_0, a_1, a_2, \dots heten de *termen* van de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

s_0, s_1, s_2, \dots noemt men de *partiële sommen* van de reeks.

Formule (*) suggereert het optellen van oneindig veel getallen. Merk op dat alleen sommen met eindig veel termen door optelling kunnen worden berekend, zodat het nodig is om te definiëren wat onder een oneindige som wordt verstaan. Die definitie luidt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

We illustreren dit aan de hand van de reeks

$$0,3 + 0,03 + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots,$$

waarvan de eerste partiële sommen zijn

$$0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; 0,3333 ; \dots$$

We zullen in 10.1.3a zien dat deze rij de limiet $\frac{1}{3}$ heeft. Aangezien de rij van de partiële sommen s_n van de reeks dus nadert naar $\frac{1}{3}$, ligt het voor de hand om het getal $\frac{1}{3}$ als som toe te kennen aan de reeks en te schrijven

$$\frac{1}{3} = 0,3 + 0,03 + \dots + \frac{0,3}{10^n} + \dots$$

Hierop berust het dat men het rationale getal $\frac{1}{3}$ als een oneindig repeterende decimale breuk $0,3333\dots$ schrijft.

We vatten het voorgaande samen in de volgende definitie.

10.1.2. Definitie

- a) Een reeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ met een rij van partiële sommen (s_n) is *convergent* (of *convergeert*) als $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ voor zekere $s \in \mathbb{R}$. De reeks is *divergent* (of *divergeert*) als deze limiet niet bestaat.
- b) Als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ een convergente reeks is en $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, dan heet s de *som van de reeks* en we schrijven

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Een divergente reeks heeft geen som.

- c) Voor willekeurige $p \in \mathbb{N}$ definieert men analoog:

de reeks $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ is convergent als de rij (s_n) , met

$$s_n = \begin{cases} \sum_{k=p}^n a_k & \text{voor } n \geq p \\ 0 & \text{voor } n < p \end{cases},$$

een limiet $s \in \mathbb{R}$ heeft. De reeks is divergent als deze limiet niet bestaat.

10.1.3. Enige belangrijke gevallen

- a) Zij $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dan geldt wegens 1.8.4a

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Voor $r = 1$ geldt: $s_n = (n+1)a$.

Met behulp van 3.11.7c volgt nu:

- (i) indien $|r| < 1$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-r}$, zodat dan $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ convergeert en er geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

- (ii) indien $|r| \geq 1$, dan is de rij (s_n) divergent, zodat $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ divergeert voor alle a ongelijk aan nul.

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ wordt de *meetkundige reeks* met reden r genoemd.

Zo is de reeks

$$0,3 + 0,03 + \dots + \frac{0,3}{10^n} + \dots$$

een meetkundige reeks met $a = 0,3$ en $r = 0,1$.

De som is dus: $s = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$.

- b) Zij $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Voor iedere $n > 1$ geldt

$$s_n < s_{n+1}$$

en

$$\begin{aligned} s_n &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

De rij (s_n) is dus stijgend en begrensd en daarom volgens 3.11.5a convergent. Zonder bewijs vermelden we dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- c) Zij $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Voor iedere k is

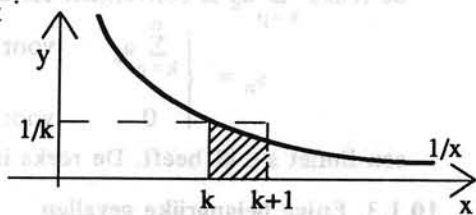
$$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x},$$

dus voor iedere $n \geq 1$ is

$$s_n > \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1).$$

Daar $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent. Zie ook 5.12.9b.

Men noemt de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ de *harmonische reeks*.



$$d) \text{ Zij } s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Omdat voor iedere $k \geq 1$ geldt

$$\int_0^1 (-x)^{k-1} dx = \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

is

$$\begin{aligned} s_n &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} dx = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$|s_n - \ln 2| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n - \ln 2| = 0.$$

We concluderen dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergent is en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

We bewijzen nu enkele rekenregels voor reeksen.

10.1.4. Stelling

a) Voor iedere $p \in \mathbb{N}$ geldt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent $\Leftrightarrow \sum_{n=p}^{\infty} a_n$ is convergent.

b) Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t$, dan geldt voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha s + \beta t.$$

Bewijs

a) Zij $p \in \mathbb{N}$, p vast; noem $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ en $\sigma_n = \sum_{k=p}^n a_k$, ($n \geq p$).

Voor iedere $n \geq p$ is dan $s_n = s_{p-1} + \sigma_n$. Er volgt:

(s_n) is convergent $\Leftrightarrow (s_n - s_{p-1})$ is convergent $\Leftrightarrow (\sigma_n)$ is convergent.

b) Uit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = s$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k = t$ volgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \sum_{k=0}^n a_k + \beta \sum_{k=0}^n b_k \right) = \alpha s + \beta t. \quad \square$$

10.1.5. Onderzoek naar de convergentie

Krachtens de definitie is het onderzoek naar de convergentie van een reeks

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ niets anders dan het onderzoek naar de convergentie van de rij der partiële sommen (s_n) .

In de voorbeelden 10.1.3 slaagt men er in om van de partiële sommen van de te onderzoeken reeksen zodanige uitdrukkingen te krijgen, dat men daarmee op eenvoudige wijze kan uitmaken of de betreffende reeksen convergeren of divergeren. In het algemeen is dit buitengewoon lastig. Vandaar dat men geprobeerd heeft criteria te ontwikkelen voor de termen a_n van de reeks, om op grond daarvan te kunnen bepalen of de reeks convergeert of divergeert. Bij dit onderzoek speelt de volgende opmerking een rol.

10.1.6. Opmerking

Bij het onderzoek naar de convergentie van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kunnen de eerste p termen ($p \in \mathbb{N}$ willekeurig) buiten beschouwing gelaten worden. Dit volgt direct uit stelling 10.1.4a.

Een noodzakelijke voorwaarde voor convergentie geeft de volgende stelling.

10.1.7. Stelling

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bewijs

Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is, dan bestaat $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, dus dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0. \quad \square$$

10.1.8. Gevolg (Criterium voor divergentie)

$a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is divergent.

10.1.9. Opmerking

De voorwaarde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ is noodzakelijk voor convergentie van de reeks

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ maar niet voldoende. Anders gezegd: het is mogelijk dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

en de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ toch divergeert. Voorbeelden hiervan zijn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (voorbeeld 10.1.3c) en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (oefening 10.1.3).

10.1.10. Voorbeelden

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ is divergent.

- b) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\sin n}$ is divergent, omdat voor iedere n geldt
 $e^{\sin n} \geq e^{-1}$ en dus $e^{\sin n} \not\rightarrow 0$.

Oefeningen

1. Onderzoek of de meetkundige reeks convergeert voor $r = 1$ en $r = -1$.

2. Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

3. Toon aan dat $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, $n \geq 2$.

Bewijs hiermee dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergeert.

4. Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent is, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$

divergent. Bewijs dit.

Kan men hetzelfde concluderen als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ beide divergent zijn?

5. Zij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent met som s en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent met som t .

Vorm $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ met $c_{2k} = a_k$, $c_{2k+1} = b_k$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ convergent is met som $s + t$.

6. Zij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent. Vorm $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ zoals in oefening 5. Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent is.

10.2. Reeksen met positieve termen

10.2.1. Inleiding

In deze en de volgende paragrafen komt een aantal criteria voor de convergentie van reeksen aan de orde. Eerst behandelen we criteria, die gelden voor reeksen met positieve termen (eigenlijk niet-negatieve termen, maar termen 0 kunnen worden weggelaten).

10.2.2. Stelling (Majorante-minorante kenmerk)

Als er een getal N is zó dat voor alle $n \geq N$ geldt $0 \leq a_n \leq b_n$, dan

a) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ is convergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent ;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is divergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ is divergent.

Bewijs

a) Noem $s_n = \sum_{k=N}^n a_k$ en $t_n = \sum_{k=N}^n b_k$, ($n \geq N$).

Als $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent is, dan bestaat volgens 10.1.4a $t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ en voor iedere $n \geq N$ is $0 \leq s_n \leq t_n \leq t$.

De rij (s_n) is dus begrensd en wegens $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$ ook stijgend.

Volgens 3.11.5a is (s_n) convergent en volgens 10.1.4a is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent.

b) Bewering b) is de logische omkering (zie 1.6.6) van bewering a). \square

10.2.3. Stelling (Limietkenmerk)

Als er een getal N is zó dat $b_n > 0$ en $a_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$

en als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L < \infty$ dan geldt:

a) Als $L > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent $\iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ is convergent.

b) Als $L = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ is convergent $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent.

Bewijs

Merk op dat altijd $L \geq 0$.

a) Als $L > 0$ dan bestaat er volgens de limietdefinitie een $N_0 > N$ zó dat

$$\frac{1}{2}L < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}L \quad \text{of} \quad \frac{1}{2}Lb_n < a_n < \frac{3}{2}Lb_n$$

voor alle $n > N_0$.

De juistheid van de bewering volgt nu uit 10.1.4b en 10.2.2. \square

b) Als $L = 0$ dan bestaat er een $N_0 > N$ zó dat

$$0 \leq \frac{a_n}{b_n} < 1 \quad \text{dus} \quad 0 \leq a_n < b_n$$

voor alle $n > N_0$.

De juistheid van de bewering volgt dan uit 10.2.2a.

10.2.4. Opmerkingen

a) Om de convergentie te onderzoeken van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, waarbij a_n voor alle $n > N$ tekenvast is (de stelling eist $a_n \geq 0$ maar als $a_n \leq 0$ dan kan men $\sum_{n=0}^{\infty} -a_n$ onderzoeken) zoekt men een passende vergelijkingsreeks $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ waarvoor men de convergentie of divergentie al heeft vastgesteld.

b) Let op de analogie tussen de stellingen 10.2.1 en 10.2.2 voor reeksen en de stellingen 5.12.3 en 5.12.4 voor oneigenlijke integralen van de eerste soort.

10.2.5. Voorbeelden

a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\ln n}}$.

Voor alle $n \geq 3$ is $0 \leq \frac{1}{n} = e^{-\ln n} \leq e^{-\sqrt{\ln n}}$.

Uit de divergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ volgt dus wegens 10.2.2b de divergentie

van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\ln n}}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 5 + \sin n}$.

Noem $\frac{1}{n^2 - 5 + \sin n} = a_n$ en kies $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Ga na dat $a_n > 0$ als $n \geq 3$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 5 + \sin n} = 1.$$

Aangezien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is (zie voorbeeld 10.1.3b), convergeert

ook $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 5 + \sin n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n}$.

Omdat volgens 4.8.8f $\arctan x = x + O(x^3)$ zullen we $a_n = \arctan \frac{1}{n}$ vergelijken met $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Aangezien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent is (zie voorbeeld 10.1.3c) is ook

$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n}$ divergent.

10.2.6. Stelling (Integraalkekenmerk)

Zij $p \in \mathbb{N}$ en laat $f: [p, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar zijn over $[p, q]$ voor alle $q > p$. Als verder geldt:

(i) f is dalend,

(ii) $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [p, \infty)$,

dan volgt:

$$\int_p^{\infty} f(x) dx \text{ is convergent} \iff \sum_{n=p}^{\infty} f(n) \text{ is convergent.}$$

Bewijs

Omdat f een dalende functie is, geldt voor iedere $k \geq p$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k),$$

zie stelling 5.2.4c. Zie ook de figuren. Hieruit volgt voor iedere $n > p$

$$\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leq \int_p^n f(x) dx \leq \sum_{k=p}^{n-1} f(k),$$

dus met $s_n = \sum_{k=p}^n f(k)$

$$s_n - f(p) \leq \int_p^n f(x) dx \leq s_{n-1}.$$

\Rightarrow : Zij $\int_p^\infty f(x) dx$ convergent. Omdat $f(x) \geq 0$ op $[p, \infty)$, is de rij (s_n) stijgend en geldt voor iedere $n > p$

$$s_n \leq f(p) + \int_p^n f(x) dx \leq f(p) + \int_p^\infty f(x) dx.$$

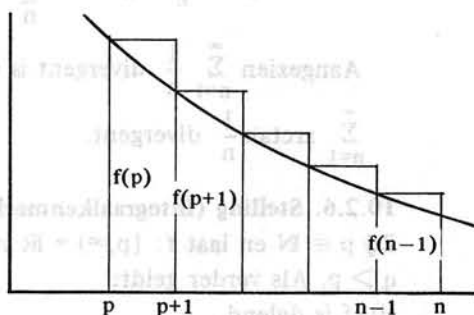
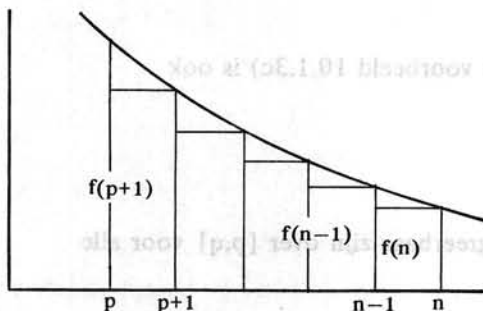
Uit 3.11.5a volgt dat (s_n) convergent is.

\Leftarrow : Zij omgekeerd $\sum_{k=p}^\infty f(k)$ convergent met som s . Zij $y \in [p, \infty)$ en zij $n \in \mathbb{N}$ zó dat $n > y$. Dan is

$$\int_p^y f(x) dx \leq \int_p^n f(x) dx \leq s_{n-1} \leq s.$$

De functie $y \rightarrow \int_p^y f(x) dx$ is dus naar boven begrensd en stijgend.

Volgens 3.5.8a bestaat $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_p^y f(x) dx$.

**10.2.7. Gevolg**

In het bewijs van 10.2.6 is gebleken dat f voldoet aan

$$\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leq \int_p^n f(x) dx \leq \sum_{k=p}^{n-1} f(k).$$

Met weinig moeite kan men hieruit afleiden dat, als f voldoet aan de

voorwaarden van 10.2.6, de volgende relaties gelden:

$$\sum_{k=p+1}^n f(k) \leq \int_p^n f(x) dx \leq \sum_{k=p}^{n-1} f(k), \quad (\text{I})$$

$$\int_p^n f(x) dx \leq \sum_{k=p}^{n-1} f(k) \leq f(p) + \int_p^{n-1} f(x) dx. \quad (\text{II})$$

10.2.8. Voorbeelden

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$.

Voor $a \geq 0$ is de functie $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ dalend en positief op $[1, \infty)$.

Volgens 5.10.5c is $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}$ convergent als $a > 1$ en divergent als $a \leq 1$.

Uit 10.2.6 volgt dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ convergent is als $a > 1$ en divergent als $0 \leq a \leq 1$.

Is $a < 0$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = \infty$, dus volgt de divergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ uit 10.1.8; merk op dat in dit geval het integraalmerk niet toepasbaar is.

Dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ is convergent als $a > 1$ en divergent als $a \leq 1$.

(Vergelijk 10.1.3 b en c).

b) Geef een benadering van de som van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{15}}$.

De reeks convergeert volgens a). Met behulp van 10.2.7(II) vinden we voor alle $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:

$$\int_1^N \frac{dx}{x^{15}} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{15}} \leq 1 + \int_1^{N-1} \frac{dx}{x^{15}}.$$

Als $N \rightarrow \infty$ dan volgt wegens 5.10.5c

$$15 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{15}} \leq 16.$$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$.

Beschouw de functie $f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{1}{x \ln^a x}$. $f'(x) = \frac{-(\ln x + a)}{x^2 \ln^{a+1} x}$,

dus f is voor $x > e^{-a}$ positief en dalend. Op grond van 10.1.6 kan het integraalmerk voor alle a worden toegepast.

$$\int_2^p \frac{dx}{x \ln^a x} = \begin{cases} \frac{(\ln p)^{1-a} - (\ln 2)^{1-a}}{1-a} & \text{als } a \neq 1, \\ \ln \ln p - \ln \ln 2 & \text{als } a = 1. \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^a x}$ convergent is als $a > 1$ en divergent is als $a \leq 1$.

Dus $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$ convergeert als $a > 1$ en divergeert als $a \leq 1$.

Oefeningen

Onderzoek of de volgende reeksen convergent of divergent zijn.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$.

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^5 n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$.

7. Geef een benadering van de som van $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{15} n}$.

8. Onderzoek de convergentie of divergentie van de reeks

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^a} \quad \text{voor alle } a \in \mathbb{R}.$$

9. Gebruik 10.2.7(II) om de volgende limieten te berekenen:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k \ln k}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

10. Bepaal $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ tot op $\frac{1}{100}$ nauwkeurig door voor geschikt gekozen $p \in \mathbb{N}$ te gebruiken:

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^3} + \int_p^{\infty} \frac{dx}{x^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^3} + \int_p^{\infty} \frac{dx}{x^3}.$$

10.3. Absolute convergentie

10.3.1. Definitie

Een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heet *absoluut convergent* als de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent is.

Een reeks die convergent, maar niet absoluut convergent is, heet *relatief convergent*.

10.3.2. Voorbeeld

Volgens 10.1.3d is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergent. Aangezien volgens 10.1.3c

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|$ divergent is, is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ relatief convergent.

Er geldt nu de volgende stelling.

10.3.3. Stelling

Een absoluut convergente reeks is convergent.

Bewijs

Zij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent.

Noem $b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ en $c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$.

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$0 \leq b_n \leq |a_n| \text{ en } 0 \leq c_n \leq |a_n|.$$

Daar $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent is, zijn volgens 10.2.2a de reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ convergent. Wegens 10.1.4b is dan ook $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n)$ convergent. \square

10.3.4. Gevolgen voor het onderzoek naar de convergentie

Indien men van een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de convergentie wil onderzoeken, beschouwt men eerst de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Hiertoe kan men gebruik maken van kenmerken voor reeksen met positieve termen. Blijkt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent te zijn, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent en volgens stelling 10.3.3 dus ook convergent.

Is $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ divergent, dan kan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nog divergent of relatief convergent zijn.

Samengevat:

$\sum a_n$	$\sum a_n $	
convergent	convergent	$\sum a_n$ is absoluut convergent
convergent	divergent	$\sum a_n$ is relatief convergent
divergent	convergent	onmogelijk wegens 10.3.3
divergent	divergent	$\sum a_n$ is divergent

We behandelen nu twee kenmerken, waarmee de absolute convergentie of de divergentie van een reeks kan worden vastgesteld. Of de reeks relatief convergent is kan met deze kenmerken nooit worden uitgemaakt; daarop gaan we in paragraaf 10.4 in.

10.3.5. Stelling (Wortelkenmerk van Cauchy)

Gegeven de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, waarbij $L \in \mathbb{R}_0^+$ of $L = \infty$, dan geldt:

a) $0 \leq L < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent.

b) $L > 1$ of $L = \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is divergent.

Merk op dat er geen uitspraak wordt gedaan als $L = 1$ of als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ niet bestaat (noch als eigenlijke, noch als oneigenlijke limiet).

Bewijs

a) Zij $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$. Kies r zó dat $L < r < 1$.

Er is een M zó dat voor alle $n \geq M$ geldt: $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, dus $|a_n| \leq r^n$.

Volgens 10.1.3a is $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ (meetkundige reeks) convergent en wegens het majorantekenmerk 10.2.2a is dan ook $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent, dus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent.

b) Is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, dan is er een M zó dat voor alle $n \geq M$ geldt:

$\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ en dus $|a_n| > 1$. Hieruit volgt dat $a_n \not\rightarrow 0$, zodat volgens

10.1.8 de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert. \square

10.3.6. Stelling (Quotiëntenkenmerk van d'Alembert)

Gegeven de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, waarbij $a_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, waarbij $L \in \mathbb{R}_0^+$ of $L = \infty$, dan geldt:

a) $0 \leq L < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent.

b) $L > 1$ of $L = \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is divergent.

Merk op dat er geen uitspraak wordt gedaan als $L = 1$ of als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ niet bestaat (noch als eigenlijke, noch als oneigenlijke limiet).

Bewijs

a) Zij $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$. Kies r zó dat $L < r < 1$.

Er is een M zó dat voor alle $n \geq M$ geldt: $0 < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r$, dus

$$0 < |a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{M+1}|}{|a_M|} |a_M| \leq \frac{|a_M|}{r^M} r^n = cr^n.$$

Uit de convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} cr^n$ volgt de convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

b) Is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L > 1$, dan is er een M zó dat voor alle $n \geq M$ geldt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \text{ en dus } |a_{n+1}| > |a_n| > \dots > |a_M| > 0.$$

Hieruit volgt dat $a_n \not\rightarrow 0$, zodat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert. \square

10.3.7. Opmerking

Men kan bewijzen dat uit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ ook het bestaan van $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ volgt en dat deze limiet eveneens gelijk is aan L . Het heeft dus geen zin als het kenmerk van d'Alembert $L = 1$ oplevert en dus geen uitsluitsel geeft vervolgens het kenmerk van Cauchy te proberen.

10.3.8. Voorbeelden

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ is convergent, want

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van 3.11.7d.

b) Zij $a_n = (\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}n\pi))^n$. Er geldt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |\cos(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}n\pi)| = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{als } n \text{ even,} \\ \frac{1}{2} & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ niet bestaat.

Uit $0 \leq |a_n| \leq (\frac{1}{2}\sqrt{3})^n$ volgt echter dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is.

c) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent; er geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n}\right) = 1$.

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent; er geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ en

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2}\right) = 1$. Hierbij is gebruik gemaakt van 3.11.7b.

In deze gevallen kan men op grond van de kenmerken van Cauchy en d'Alembert geen uitspraak doen.

Oefeningen

Onderzoek of de volgende reeksen absoluut convergeren.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{n})^n$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+\ln n} \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^{10}}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

10.4. Relatieve convergentie**10.4.1. Inleiding**

Als van een gegeven reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is aangetoond, dat hij niet absoluut convergent is, blijft de vraag over of hij relatief convergent, of divergent is. In het algemeen is dit een lastig probleem en slechts voor reeksen met afwisselend positieve en negatieve termen (de zogenaamde *alternerende reeksen*) zullen we hier verder op ingaan. Dan levert de volgende stelling *voldoende* voorwaarden voor convergentie.

10.4.2. Stelling (Kenmerk van Leibniz)

Zij van de rij (b_n) gegeven:

(i) $b_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $b_{n+1} \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Er geldt dan:

a) De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ is convergent.

b) Als $s_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n b_n$ en $s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ dan is $|s - s_N| \leq b_{N+1}$.

Benadert men s door s_N , dan is de fout dus niet groter dan de absolute waarde van de eerstvolgende term.

Bewijs

a) Beschouw $s_{2p} = b_0 - (b_1 - b_2) - (b_3 - b_4) - \dots - (b_{2p-1} - b_{2p})$.

Wegens (ii) geldt dus voor alle $p \in \mathbb{N}$

$$s_{2p} \geq s_{2p+2}$$

Er geldt echter ook

$$s_{2p+2} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{2p} - b_{2p+1}) + b_{2p+2}$$

waaruit volgt $s_{2p+2} \geq 0$.

De rij (s_{2p}) is dus dalend en naar beneden begrensd, zodat $\lim_{p \rightarrow \infty} s_{2p}$ bestaat. Noem $\lim_{p \rightarrow \infty} s_{2p} = s$.

Beschouw nu

$$s_{2p+1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{2p-2} - b_{2p-1}) + (b_{2p} - b_{2p+1}).$$

Blijkbaar is voor alle $p \in \mathbb{N}$ $s_{2p+1} \geq s_{2p-1}$.

Schrijven we

$$s_{2p+1} = b_0 - (b_1 - b_2) - \dots - (b_{2p-1} - b_{2p}) - b_{2p+1}$$

dan volgt voor alle $p \in \mathbb{N}$

$$s_{2p+1} \leq b_0.$$

De rij (s_{2p+1}) is dus stijgend en naar boven begrensd, zodat $\lim_{p \rightarrow \infty} s_{2p+1}$

bestaat. Noem $\lim_{p \rightarrow \infty} s_{2p+1} = s'$.

Aangezien $s_{2p+1} = s_{2p} - b_{2p+1}$, volgt wegens (iii)

$$s' = \lim_{p \rightarrow \infty} s_{2p+1} = \lim_{p \rightarrow \infty} s_{2p} - \lim_{p \rightarrow \infty} b_{2p+1} = s - 0 = s.$$

Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, zodat $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ convergent is.

b) We hebben onder a) bewezen

$$s_1 \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2p+1} \leq \dots \leq s \leq \dots \leq s_{2p} \leq s_{2p-2} \leq \dots \leq s_2 \leq s_0.$$

Voor even n is dus

$$0 \leq s_n - s \leq s_n - s_{n+1} = b_{n+1}.$$

Voor oneven n volgt

$$0 \leq s - s_n \leq s_{n+1} - s_n = b_{n+1}.$$

Dus

$$|s - s_n| \leq b_{n+1} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

10.4.3. Voorbeelden

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

Zij $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$. Dan is $|a_n| = \frac{1}{n}$ en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent (zie 10.1.3c). De gevraagde reeks is dus niet absoluut convergent maar voldoet wel aan de voorwaarden van stelling 10.4.2. Vandaar dat de gevraagde reeks relatief convergent is (vergelijk 10.1.3d).

b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Zij $a_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. Dan is voor $n \geq 3$ $|a_n| = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$.

Wegens 10.2.2b is de gevraagde reeks dus niet absoluut convergent. Aan de voorwaarden (i) en (iii) van stelling 10.4.2 is door

$b_n = |a_n| = \frac{\ln n}{n}$ voldaan. Dat ook aan voorwaarde (ii) is voldaan tonen we aan door $h: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ te beschouwen.

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \quad \text{voor } x > e, \text{ dus } b_{n+1} < b_n \text{ voor } n \geq 3.$$

De eerste term heeft geen invloed op de convergentie (zie 10.1.6), de reeks is dus relatief convergent.

10.4.4. Opmerkingen

- a) Relatief convergente reeksen hebben de volgende verrassende eigenschap. Het is mogelijk, door verandering van de volgorde van de termen een reeks te vormen, die een andere som heeft; het is zelfs mogelijk met dezelfde termen een divergente reeks te vormen. Zo is bijvoorbeeld

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2.$$

Vermenigvuldigen we met een factor $\frac{1}{2}$, dan vinden we

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Optelling van de onder elkaar geplaatste termen levert

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2.$$

De laatste reeks bevat kennelijk dezelfde termen als de eerste, maar geplaatst in een andere volgorde.

Men kan aantonen dat de reeks

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{8} + \dots$$

die eveneens dezelfde termen bevat, divergent is.

Absoluut convergente reeksen hebben deze eigenschap niet: bij verandering van de volgorde van de termen blijven zij convergeren naar dezelfde som. We gaan hier niet verder op in.

- b) Zij gegeven dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oneindig veel positieve en oneindig veel negatieve termen heeft. We duiden de positieve termen aan met p_1, p_2, p_3, \dots en de negatieve termen met $-q_1, -q_2, -q_3, \dots$. Neem aan dat in $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ er n' positieve termen en n'' negatieve termen voorkomen met $n = n' + n''$. Dan geldt:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{n'} p_k - \sum_{k=1}^{n''} q_k; \quad (*)$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^{n'} p_k + \sum_{k=1}^{n''} q_k.$$

Is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoluut convergent, dan convergeren $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ en $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ beide, want de rijen van hun partiële sommen zijn stijgend en naar boven begrensd door $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ relatief convergent, dan divergeren $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ en $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ beide. Want als beide convergent waren, dan convergeerde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoluut in strijd met onze aanname (vgl. oefening 10.1.5).

En als er één van beide, bijv. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, divergent is en de andere convergent is, dan levert (*) dat (s_n) niet kan convergeren, omdat $\sum_{k=1}^{n'} p_k$ onbegrensd is en $\sum_{k=1}^{n''} q_k$ naar een limiet nadert (vgl. oefeningen 10.1.4 en 10.1.6).

Oefeningen

Onderzoek de convergentie of divergentie van de volgende reeksen. Vermeld in geval van convergentie of deze absoluut of relatief is.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+3}}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{2n+1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n^2}$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

Machtreeksen

10.5. De convergentiestraal

10.5.1. Inleiding

Een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, waarvan de termen $f_n(x)$ afhankelijk zijn van een reële variabele x en dus functies zijn, heet een *functiereeks*. De convergentie of divergentie van een functiereeks zal in het algemeen afhangen van de waarde van x . De verzameling van alle waarden van x , waarvoor

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ convergeert heet het *convergentiegebied* van de functiereeks.

Een voorbeeld is de meetkundige reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, die convergeert voor

$|x| < 1$ en divergeert voor $|x| \geq 1$. Het convergentiegebied van de meetkundige reeks is dus het interval $(-1, 1)$.

Als $D \subset \mathbb{R}$ het convergentiegebied is van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, dan is de som voor alle $x \in D$ gedefinieerd en in het algemeen afhankelijk van x . Men

spreekt van de *somfunctie* $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ en we noteren

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Een functiereeks $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ waarvan de termen van de vorm $f_n(x) = a_n(x-c)^n$ zijn (met $f_0(x) = a_0$) wordt een *machtreeks* genoemd. De reële getallen a_n , $n \in \mathbb{N}$, heten de *coëfficiënten* van de machtreeks. Het reële getal c is in alle termen hetzelfde. Voor de theorie is het voldoende om het geval $c = 0$ te behandelen.

Machtreeksen spelen een centrale rol in de theorie van de complexe functies en worden onder andere gebruikt bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen (zie 10.7.4).

10.5.2. Voorbeelden

- a) De machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x-1)^n$ is absoluut convergent als $|x-1| < 1$, dus als $0 < x < 2$, en divergent als $|x-1| \geq 1$ (meetkundige reeks).

Voor alle $|x-1| < 1$ geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}, \quad (\text{vgl. 10.1.3a}).$$

- b) De functiereeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ ($x \neq -1$) is absoluut convergent als $|x| > 1$ en divergent als $|x| \leq 1$.

Bewijs

Zij $|x| > 1$. We vergelijken $|u_n| = \frac{1}{|1+x^n|} = \frac{1}{|x|^n} \frac{1}{|1+(\frac{1}{x})^n|}$ met $|v_n| = \frac{1}{|x|^n}$.

Nu is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = 1$.

Aangezien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|x|^n}$ convergent is, is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ absoluut convergent.

Is $|x| \leq 1$, dan is voor iedere $n \in \mathbb{N}$ $|1+x^n| \leq 1+|x|^n \leq 2$, dus

$|\frac{1}{1+x^n}| \geq \frac{1}{2}$. Hieruit volgt dat $\frac{1}{1+x^n} \not\rightarrow 0$, dus dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ divergent is.

- c) De functiereeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ is absoluut convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Voor $x = 0$ is iedere partiële som gelijk aan 0, dus de reeks is dan absoluut convergent en de som is 0.

Voor $x \neq 0$ is de reeks een meetkundige reeks met $0 < r = \frac{1}{1+x^2} < 1$.

Wegens 10.1.3a is de reeks dan absoluut convergent en de som is

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1+x^2.$$

$$1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Noteren we de som van de reeks door $s(x)$, dan geldt dus

$$s(x) = 1 + x^2, \quad x \neq 0,$$

$$s(0) = 0.$$

Hoewel alle termen van de reeks continue functies van x zijn en de reeks voor alle x convergeert, heeft de somfunctie een discontinuïteit.

10.5.3. Opmerking

De theorie van functiereksen in het algemeen is lastig en er kunnen zich complicaties voordoen zoals aan het eind van voorbeeld 10.5.2c al is gesignaleerd. Op deze algemene theorie zullen wij niet verder ingaan.

Bij machtreksen is de theorie wezenlijk eenvoudiger. We zullen aantonen dat het convergentiegebied van een machtreks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ altijd een interval

is (op randpunten na symmetrisch om 0) en dat de somfunctie binnen het convergentiegebied willekeurig vaak differentieerbaar is.

Een eerste resultaat in die richting is de volgende stelling.

10.5.4. Stelling

- a) Is een machtreks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergent voor zekere $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dan is de machtreks absoluut convergent voor iedere $x \in \mathbb{R}$ in het interval $(-|x_0|, |x_0|)$.
- b) Is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergent voor zekere $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dan is de machtreks divergent voor iedere $x \in \mathbb{R}$ buiten het interval $[-|x_1|, |x_1|]$.

Bewijs

- a) Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ convergeert, waarbij $x_0 \neq 0$, dan is wegens 10.1.7

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$. Passen we definitie 3.11.1 toe met $\epsilon = 1$, dan bestaat er

een $N \in \mathbb{N}$ zó dat $|a_n x_0^n| < 1$ als $n > N$.

Dus $|a_n x^n| = \left| \frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$, als $n > N$.

Is $|x| < |x_0|$, dan is $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ en is $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ een convergente meet-

kundige reeks. Door toepassing van het majorantekenmerk 10.2.2a

volgt dan: $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n|$ is convergent. Wegens 10.1.6 is dan ook

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ convergent.

- b) Neem eens aan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is convergent voor een $x \in \mathbb{R}$ met $|x| > |x_1|$.

Dan is volgens a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ (absoluut) convergent, in strijd met het gegeven. □

10.5.5. Stelling

Voor iedere machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is precies één van de volgende drie beweringen waar:

- De reeks is alleen absoluut convergent voor $x \neq 0$;
- De reeks is absoluut convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$;
- Er bestaat een positief getal R zó dat de reeks absoluut convergeert als $|x| < R$ en divergeert als $|x| > R$.

Bewijs

Als noch a) noch b) waar is, bestaan er getallen $x_0, x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zó dat de reeks absoluut convergeert voor $x = x_0$ en divergeert voor $x = x_1$.

Zij A de verzameling van alle reële getallen waarvoor de reeks absoluut convergent is. Dan is $x_0 \in A$, dus A is niet leeg. Wegens 10.5.4b divergeert de reeks als $|x| > |x_1|$, dus voor iedere $x \in A$ geldt: $|x| \leq |x_1|$. Derhalve is A naar boven begrensd. Volgens 1.4.1a heeft A een kleinste bovengrens $R = \sup A$. Voor alle $x \in A$ geldt dan $|x| \leq R$.

Zij nu $|x| < R$. Dan is $|x|$ geen bovengrens van A , d.w.z. er bestaat een $\tilde{x} \in A$ zó dat $|x| < \tilde{x}$. Volgens de definitie van A is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ absoluut

convergent, dus volgt de absolute convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uit 10.5.4a.

Zij $|x| > R$ en neem eens aan dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergent is. Kies x_2 zó dat $|x| > |x_2| > R$. Volgens stelling 10.5.4b is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ dan absoluut convergent, dus $x_2 \in A$. Voor alle $x \in A$ geldt echter $|x| \leq R$. Tegenspraak. □

10.5.6. Definitie

Als bewering 10.5.5c waar is, noemen we het daar ingevoerde getal R de *convergentiestraal* van de machtreeks.

Als bewering 10.5.5a waar is, definiëren we de convergentiestraal $R = 0$.

Als bewering 10.5.5b waar is, definiëren we de convergentiestraal $R = \infty$.

10.5.7. Opmerking

Uit de definitie van R volgt $R \geq 0$.

Als $R = 0$ dan is de machtreeks alleen convergent voor $x = 0$, als $R = \infty$ dan is de machtreeks absoluut convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$, en als $R \in (0, \infty)$ dan is de machtreeks absoluut convergent binnen het interval $-R < x < R$ en divergent voor $|x| > R$.

Het convergentiegebied van een machtreeks is blijkbaar altijd een interval, het *convergentie-interval* van de machtreeks. Stelling 10.5.5 doet geen uit-

spraak betreffende de convergentie of divergentie in de eindpunten van het convergentie-interval. Dat in dit geval geen algemene uitspraak mogelijk is blijkt uit de volgende voorbeelden.

10.5.8. Voorbeelden

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

Voor $x = 0$ is de reeks convergent; voor $x \neq 0$ passen we op de reeks

$\sum_{n=0}^{\infty} |n! x^n|$ het quotiëntenkenmerk van d'Alembert toe.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! |x|^{n+1}}{n! |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty.$$

Dit betekent dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} |n! x^n|$ divergeert voor alle $x \neq 0$, dus $R = 0$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Voor $x = 0$ is de reeks convergent; voor $x \neq 0$ passen we het quotiëntenkenmerk van d'Alembert toe.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)! |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Dit betekent dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x^n|}{n!}$ convergeert voor alle $x \neq 0$, dus $R = \infty$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Als $|x| \leq 1$, dan is $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, dus de reeks convergeert absoluut.

Als $|x| > 1$, dan $\frac{x^n}{n^2} \not\rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ volgens 3.11.7c.

Dus $R = 1$ en het convergentie-interval is $[-1, 1]$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

De reeks is voor $x = 1$ divergent en voor $x = -1$ relatief convergent; vergelijk 10.1.3c en 10.1.3d. Aangezien relatieve convergentie alleen aan de rand van het convergentie-interval kan optreden volgt meteen dat $R = 1$ en het convergentie-interval $[-1, 1)$ is.

10.5.9. Formule van Stirling

We bekijken de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

Voor $x = 0$ is de reeks convergent; voor $x \neq 0$ geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} x^{n+1} : \frac{n!}{n^n} x^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x|}{e}.$$

Volgens 10.3.6 is de reeks convergent als $|x| < e$ en divergent als $|x| > e$.
Dus $R = e$.

We bewijzen nu dat de reeks divergeert als $|x| = e$, door aan te tonen dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

zodat $\frac{n!}{n^n} e^n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Noem $u_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$. Dan is

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln k - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n. \quad (\text{I})$$

Toepassing van de trapeziumregel 5.17.2 op $f(x) = \ln x$ over $[k-1, k]$ levert

$$\int_{k-1}^k \ln x \, dx - \frac{\ln(k-1) + \ln k}{2} = \frac{1}{12} \xi_k^{-2} \quad \text{met } k-1 \leq \xi_k \leq k.$$

Na sommatie van 2 tot n krijgen we

$$\int_1^n \ln x \, dx - \sum_{k=1}^n \ln k + \frac{\ln n}{2} = \frac{1}{12} \sum_{k=2}^n \xi_k^{-2},$$

zodat

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - \sum_{k=1}^n \ln k - n + 1 = \frac{1}{12} \sum_{k=2}^n \xi_k^{-2}. \quad (\text{II})$$

Uit (I) en (II) volgt dus: $\ln u_n = 1 - \frac{1}{12} \sum_{k=2}^n \xi_k^{-2}$.

Nu is $\xi_k^{-2} \leq \frac{1}{(k-1)^2}$, dus convergeert $\sum_{k=2}^{\infty} \xi_k^{-2}$. Derhalve bestaan ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n$

en dus ook $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Zij $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$. Dan is ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2}{u_{2n}} = \alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{u_n^2}{u_{2n}} &= \frac{(n!)^2 (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{n^{2n+1} e^{-2n} (2n)!} = \frac{(n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2 (2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2n(2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot n^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2n(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)(2n-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot n^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Kwadratering en toepassing van het product van Wallis 5.8.6 levert:

$$\alpha^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{u_{2n}} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 \cdot \dots \cdot 4^2 \cdot 2^2}{(2n-1)^2 (2n-3)^2 \cdot \dots \cdot 5^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)}{n} = 2\pi.$$

Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{2\pi}$.

Dit leidt tot de *formule van Stirling*

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (n \text{ voldoende groot}).$$

Deze benadering van $n!$ wordt in de waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek veelvuldig toegepast.

Oefeningen

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ de functiereeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1-x^2)^n}$ convergent is en bereken voor die waarden van x de som.

2. Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeksen.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$, d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n)!}$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2n} x^n$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$,

10.6. Taylorreeksen. Bepaling van de som

10.6.1. Stelling

Zij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal R . Dan geldt:

a) de machtreeksen $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ hebben eveneens een convergentiestraal R .

b) de functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is op $(-R, R)$ differentieerbaar, en dus continu, terwijl $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

c) de functie $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ is op $(-R, R)$ die primitieve van f ,

waarvoor geldt $F(0) = 0$.

Bewijs

a) Zij R_1 de convergentiestraal van $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Stel $R_1 > R$ en kies x_0 zó dat $R < |x_0| < R_1$. Wegens $|x_0| < R_1$ is

$\sum_{n=1}^{\infty} |na_n x_0^{n-1}|$ convergent. Daar voor $n \geq 1$ geldt

$$|a_n x_0^n| \leq |na_n x_0^n| = |x_0| \cdot |na_n x_0^{n-1}|,$$

is dan ook $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ op grond van 10.2.2a convergent, hetgeen wegens $|x_0| > R$ in strijd is met de definitie van R .

Stel $R_1 < R$ en kies x_0 en x_1 zó dat $R_1 < |x_0| < |x_1| < R$.

Dan is $r = \frac{|x_0|}{|x_1|} < 1$. Wegens $|x_1| < R$ is $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ convergent.

Aangezien $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$, bestaat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq n_0$ geldt:

$$|na_n x_0^{n-1}| = \left| \frac{1}{x_0} n \frac{x_0^n}{x_1^n} a_n x_1^n \right| = \frac{1}{|x_0|} nr^n |a_n x_1^n| \leq |a_n x_1^n|.$$

Wegens 10.2.2a is $\sum_{n=1}^{\infty} |na_n x_0^{n-1}|$ convergent, hetgeen in strijd is met $|x_0| > R_1$.

Dus $R = R_1$.

De andere bewering in a) volgt uit het zojuist bewezene.

b) Zij $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R$, $h \neq 0$, zó dat $|x| + |h| < R$, en zij $\epsilon > 0$ gegeven.

Beschouw

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right|. \quad (*)$$

We kiezen $x_0 \in \mathbb{R}$ zó dat $|x| < |x_0| < R$, en we nemen h zo klein dat $|x| + |h| < |x_0|$. Zij $N \in \mathbb{N}$.

Schrijf (*) als $|A_N + B_N + C_N|$, met

$$A_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - \sum_{n=1}^N a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h},$$

$$B_N = \sum_{n=1}^N a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - \sum_{n=1}^N n a_n x^{n-1},$$

$$C_N = \sum_{n=1}^N n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Aangezien (zie vraagstuk 1.17.8a)

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} = (x+h)^{n-1} + x(x+h)^{n-2} + \dots + x^{n-1}$$

en $|x| < |x_0|$, $|x+h| < |x_0|$ geldt

$$|A_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n |x_0|^{n-1} < \frac{1}{3} \epsilon$$

voor N voldoende groot wegens a) omdat $|x_0| < R$.

Eveneens is $|C_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| < \frac{1}{3}\epsilon$ voor N voldoende groot.

Kies nu N zo groot dat $|A_N| < \frac{1}{3}\epsilon$ en $|C_N| < \frac{1}{3}\epsilon$.

Aangezien $\lim_{h \rightarrow 0} B_N = 0$ is er een $\delta > 0$ zó dat $0 < |h| < \delta \Rightarrow |B_N| < \frac{1}{3}\epsilon$.

Dus voor $0 < |h| < \delta$ is het rechterlid van (*) kleiner dan ϵ .

Dit betekent dat $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

c) Volgt meteen uit b). □

10.6.2. Opmerking

Stelling 10.6.1 houdt in dat men (slordig gezegd) een *machtreeks* termsgewijs mag differentiëren en integreren.

Dat dit in het algemeen voor een willekeurige functiereeks niet geoorloofd is, blijkt uit het volgende voorbeeld.

Definieer voor $x \in (-1, +1)$ de functie f door $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [x^3(1-x^2)^n]$.

Dan is $f(0) = 0$ en voor $0 < |x| < 1$ is

$$f(x) = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} (1-x^2)^n = x^3 \frac{1-x^2}{1-(1-x^2)} = x - x^3.$$

Dus $f(x) = x - x^3$ voor alle $x \in (-1, +1)$ en $f'(0) = 1$.

Termsgewijs differentiëren levert de reeks

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [(1-x^2)^{n-1}(3x^2 - 3x^4 - 2nx^4)].$$

Deze reeks is voor iedere $x \in (-1, +1)$ convergent (ga na), maar $g(0) = 0 \neq f'(0)$.

10.6.3. Taylorreeksen

In hoofdstuk 4 is de ontwikkeling van een functie f in een polynoom met rest behandeld (stelling van Taylor 4.7.6).

Indien f willekeurig vaak differentieerbaar is, kan men naast het Taylorpolynoom

$$t_p(x) = \sum_{n=0}^p \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

de *machtreeks*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

(de zogenaamde *machtreeksontwikkeling van f in het punt c*) beschouwen.

Een voor de hand liggende vraag is dan of binnen het convergentie-interval de som van deze *Taylorreeks* gelijk is aan $f(x)$, d.w.z. of daar geldt

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^p \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \right| = \lim_{p \rightarrow \infty} |R_p(x)| = 0.$$

Deze vraag kan niet voor iedere functie bevestigend beantwoord worden,

zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

10.6.4. Voorbeeld

Laat f op \mathbb{R} gedefinieerd zijn door $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{als } x \neq 0. \end{cases}$

Men kan bewijzen dat f in het punt $c = 0$ willekeurig vaak differentieerbaar is en dat voor iedere n geldt $f^{(n)}(0) = 0$ (zie vraagstuk 4.12.8). Hieruit volgt dat alle coëfficiënten van de Taylorreeks in $c = 0$ gelijk aan 0 zijn, dus dat deze reeks voor iedere x convergent is met som 0.

Dit betekent dat voor $x \neq 0$ geldt $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

We zullen nu een aantal gevallen behandelen waar de boven gestelde vraag een bevestigend antwoord heeft. Daarbij is de volgende stelling van belang.

10.6.5. Stelling (Eenduidigheidsstelling voor machtreeksen)

Zij $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}$ en zij c een inwendig punt van D . Als er een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ met positieve convergentiestraal R bestaat zó dat voor zekere δ met $0 < \delta \leq R$ geldt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \text{voor alle } x \in (c-\delta, c+\delta)$$

dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ de Taylorreeks van f in het punt c .

Bewijs

Op grond van 10.6.1 is f op het interval $c - \delta < x < c + \delta$ willekeurig vaak differentieerbaar. Verder geldt

$$a_0 = f(c).$$

Er geldt echter (zie 10.6.1b)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}, \quad \text{waaruit volgt } a_1 = \frac{f'(c)}{1!}.$$

Evenzo

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) a_n (x-c)^{n-k}$$

waaruit volgt

$$f^{(k)}(c) = k! a_k \quad \text{of} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ is dus de Taylorreeks van f in het punt c . \square

10.6.6. Standaard Taylorreeksen

$$a) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$b) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$c) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$d) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{voor alle } x \in (-1, 1).$$

$$e) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \text{voor alle } x \in (-1, 1].$$

$$f) \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \text{voor alle } x \in [-1, 1].$$

$$g) (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$a \in \mathbb{R}$, voor alle $x \in (-1, 1)$. (Binomiaalreeks).

Bewijs

In 4.8.8 zijn van de gegeven functies de Taylorontwikkelingen al gegeven. We bewijzen nu dat voor de aangegeven waarden van x de resttermen naar 0 convergeren.

- a) Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is er een ξ tussen 0 en x te vinden zó dat (restterm van Lagrange)

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Aangezien $0 \leq e^{\xi} \leq e^{|x|}$ en wegens 3.11.7e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- b) Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is er een ξ tussen 0 en x te vinden zó dat (restterm van Lagrange)

$$R_n(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Aangezien $|\frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ volgt uit 3.11.7e. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- c) Analoog aan b).

- d) Zie 10.1.3a.

- e) Voor iedere $t \neq -1$ is $\frac{1}{1+t} = 1 - t + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$, dus voor iedere $x > -1$ is

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

Voor $0 \leq x \leq 1$ is

$$|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Voor $-1 < x < 0$ is

$$\begin{aligned} |(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt| &= \left| -\int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} du \right| = \int_0^{-x} \frac{u^n}{1-u} du \leq \int_0^{-x} \frac{u^n}{1+x} du \leq \\ &\leq \frac{1}{1+x} \int_0^1 u^n du = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Voor iedere $x \in (-1, 1]$ geldt dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt| = 0.$$

f) Er geldt $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$, dus

voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

$$\text{Voor } x \geq 0 \text{ is } |(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

$$\text{Voor } x < 0 \text{ is } |(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt| = \int_0^{-x} \frac{u^{2n+2}}{1+u^2} du \leq \int_0^{-x} u^{2n+2} du = \frac{(-x)^{2n+3}}{2n+3}.$$

Voor iedere $x \in [-1, 1]$ is dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \arctan x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt| = 0.$$

g) Noem $f(x) = (1+x)^a$. Volgens 5.8.7 is $f(x) = \sum_{n=0}^p \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_p(x)$
met $R_p(x) = \frac{1}{p!} \int_0^x f^{(p+1)}(t) (x-t)^p dt$.

Daar $f^{(n)}(x) = a(a-1) \dots (a-n+1)(1+x)^{a-n}$ is

$$f(x) = \sum_{n=0}^p \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} x^n + R_p(x) = \sum_{n=0}^p \binom{a}{n} x^n + R_p(x) \text{ en}$$

$$R_p(x) = \frac{a(a-1) \dots (a-p)}{p!} \int_0^x (1+t)^{a-p-1} (x-t)^p dt. \quad (I)$$

We bewijzen dat $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p(x) = 0$ voor alle $x \in (-1, 1)$.

Aangezien $R_p(0) = 0$ voor elke p , dus $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p(0) = 0$, mogen we veronderstellen dat $x \neq 0$. Verder is de stelling triviaal als $a = 0$. Onderstel

daarom $a \neq 0$. Via de substitutie $t = xu$ gaat $\int_0^x (1+t)^{a-p-1} (x-t)^p dt$
over in $\int_0^1 (1+xu)^{a-p-1} (x-xu)^p x du = x^{p+1} \int_0^1 (1+xu)^{a-1} \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^p du$.

Wegens $-1 < x$ geldt, omdat $u \in [0, 1]$, $0 \leq 1 - u \leq 1 + xu$ en $0 < 1 + xu$, dus $0 \leq \int_0^1 (1 + xu)^{a-1} \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^p du \leq \int_0^1 (1 + xu)^{a-1} du = \frac{(1+x)^a - 1}{ax}$.

Hieruit volgt

$$\left| \int_0^x (1+t)^{a-p-1} (x-t)^p dt \right| \leq |x|^p \cdot \left| \frac{(1+x)^a - 1}{a} \right|. \quad (\text{II})$$

Zij m geheel en $m \geq |a|$. Voor iedere $p \geq m$ is

$$\begin{aligned} \left| \frac{a(a-1) \dots (a-p)}{p!} \right| &\leq \frac{m(m+1) \dots (m+p)}{p!} = \frac{(m+p)!}{p!(m-1)!} = \\ &= \frac{(p+1) \dots (p+m)}{(m-1)!} \leq (p+1) \dots (p+m) \leq \\ &\leq (2p)^m. \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Uit (I), (II) en (III) volgt voor $p \geq m$ en $x \in (-1, 1)$

$$|R_p(x)| \leq (2p)^m \cdot |x|^p \cdot \left| \frac{(1+x)^a - 1}{a} \right| = Mp^m |x|^p.$$

Daar $|x| < 1$, is volgens 3.11.7c $\lim_{p \rightarrow \infty} p^m |x|^p = 0$, dus $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p(x) = 0$. \square

10.6.7. Voorbeeld

Bepaal van de volgende machtreeks het convergentiegebied en de som voor die x waar de reeks convergeert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n3^n} x^n.$$

Oplossing

We nemen $a_n = \frac{n^2 + 1}{n3^n} x^n$ en passen het wortelkenmerk van Cauchy toe

op $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2 + 1}}{\sqrt[n]{n} \cdot 3} |x| = \frac{|x|}{3}.$$

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergeert dus als $|x| < 3$ en divergeert als $|x| > 3$.

De convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is dus 3. Voor $|x| = 3$ is

$|a_n| = \frac{n^2 + 1}{n}$; daar $a_n \not\rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ kunnen we concluderen:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent als $|x| < 3$ en divergent als $|x| \geq 3$.

Neem $|x| < 3$. Zij

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n3^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Voor $|x| < 3$ zijn de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ beide absoluut convergent. We splitsen $S(x)$ in twee reeksen, hetgeen wegens 10.1.4b geoorloofd is.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Nu is $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{x}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}$. Als voor $-1 < u < 1$, $f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} nu^{n-1}$, dan leert 10.6.1b dat

$$f(u) = \frac{d}{du} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u^n \right) = \frac{d}{du} \left(\frac{1}{1-u} - 1 \right) = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

Hieruit volgt: $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{\frac{x}{3}}{\left(1 - \frac{x}{3}\right)^2} = \frac{3x}{(3-x)^2}$, $-3 < x < 3$.

Verder is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n = -\ln\left(1 - \frac{x}{3}\right)$, hetgeen volgt uit 10.6.6e.

Derhalve is

$$S(x) = \frac{3x}{(3-x)^2} - \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right).$$

10.6.8. Machtreeksen met complexe termen

Het is mogelijk de theorie van de reeksen uit te breiden tot reeksen met complexe termen. Veel van de bewijzen verlopen analoog aan het reële geval. Ook kunnen machtreeksen van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}$$

worden beschouwd. Men vindt dan analoog aan stelling 10.5.5 dat er een getal $R \in [0, \infty]$ bestaat zó dat de reeks (absoluut) convergeert voor $|z| < R$ en divergeert voor $|z| > R$. Het convergentiegebied is nu dus een cirkelschijf in het complexe vlak. Over het gedrag op de cirkel $|z| = R$ kan men geen algemene uitspraken doen.

In 2.8.1 is gedefinieerd $e^{ib} = \cos b + i \sin b$, ($b \in \mathbb{R}$).

Daar $\cos b = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n}}{(2n)!}$ en $\sin b = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!}$, is

$$e^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(ib)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(ib)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \stackrel{(1)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ib)^m}{m!}.$$

Tevens werd gedefinieerd $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$, zie 2.8.3.

$$\begin{aligned}
 \text{Nu is } e^a e^{ib} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ib)^m}{m!} \stackrel{(2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k+m=n} \frac{a^k (ib)^m}{k! m!} \right] = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \frac{a^{n-m} (ib)^m}{(n-m)! m!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} (ib)^m \right] = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+ib)^n}{n!}, \text{ zodat voor iedere } z \in \mathbb{C} \text{ geldt } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Hierbij moet worden opgemerkt dat de juistheid van (1) en (2) niet triviaal is, maar hier zonder bewijs wordt aangenomen.

Definieert men verder de complexe functies

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{en} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

(ga na dat door deze definities de reële goniometrische functies voortgezet worden tot \mathbb{C}), dan bewijst men evenals boven dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $\cos(-z) = \cos z$ en $\sin(-z) = -\sin z$.

Hieruit volgen de relaties $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ en $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Met behulp hiervan kan men weer betrekkingen afleiden als

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,$$

$$\cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z,$$

$$\sin iz = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \sinh z.$$

Oefeningen

1. Bewijs

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{voor alle } x \in (-1, 1).$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n} = \frac{1}{(1+x^2)^2} \quad \text{voor alle } x \in (-1, 1).$$

2. Geef de eerste 5 van 0 verschillende termen van de machtreeksontwikkeling in het punt 0 van de volgende functies.

$$\text{a) } \sqrt{1-x}.$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{c) } \arcsin x.$$

$$\text{d) } \sinh x.$$

3. Bepaal van de volgende machtreeksen

(i) het convergentiegebied;

(ii) de som voor die x , waarvoor de reeks convergeert.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

$$b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^n.$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n)!} x^{2n}.$$

10.7. Toepassingen

10.7.1. Inleiding

Reeksen vormen een essentieel onderdeel van de analyse en spelen in allerlei gebieden van de wiskunde een belangrijke rol. Naast de machtreeksen, waarvoor in de complexe functietheorie een hoofdrol is weggelegd, zijn ook reeksen van goniometrische functies (de zogenaamde Fourierreeksen) uiterst belangrijk, zowel voor de wiskunde als voor de mathematische fysica.

Wij geven in deze paragraaf enkele eenvoudige toepassingen van reeksen. Duidelijk zal worden dat reeksen gebruikt kunnen worden om benaderingen van getallen of integralen te geven en we behandelen een voorbeeld van het oplossen van een differentiaalvergelijking met behulp van machtreeksen.

10.7.2. Benadering van getallen

a) Benadering van e

Volgens 10.6.6a is $e = \sum_{n=0}^p \frac{1}{n!} + R_p$, waarbij $R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Hieruit volgt

$$\frac{1}{(p+1)!} < R_p = \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \dots \right) < \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} + \dots \right) = \frac{1}{p \cdot p!}.$$

Voor $p = 8$ komt er

$$e = \sum_{n=0}^8 \frac{1}{n!} + R_8 = 2,71827877 + R_8$$

met $0,00000275 < R_8 < 0,00000311$.

Dus $2,71828152 < e < 2,71828188$.

b) Benadering van π

Volgens het bewijs van 10.6.6f is voor $x \geq 0$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + R_p(x),$$

waarbij

$$0 \leq (-1)^{p+1} R_p(x) = \int_0^x \frac{t^{2p+2}}{1+t^2} dt \leq \frac{x^{2p+3}}{2p+3}.$$

Voor $x = 1$ vinden we

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n}{2n+1} + R_p(1) \text{ met } |R_p(1)| \leq \frac{1}{2p+3}.$$

Als we met deze reeks een benadering van π willen uitrekenen dan dienen we, om de fout kleiner te houden dan bijv. 10^{-6} , p zó groot te nemen dat $\frac{4}{2p+3} < 10^{-6}$. Dat komt neer op het berekenen en sommeren van twee miljoen termen.

We gaan daarom anders te werk, waarbij we gebruik maken van de relatie

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (\text{formule van Machin}).$$

Bewijs

Men bewijst deze betrekking door achtereenvolgens te berekenen

$$\tan(2 \arctan \frac{1}{5}) = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{5}{12},$$

$$\tan(4 \arctan \frac{1}{5}) = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{120}{119},$$

$$\tan(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = 1,$$

en op te merken dat wegens $0 < \arctan \frac{1}{239} < \arctan \frac{1}{5} < \frac{1}{5}$ geldt

$$0 < 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} < \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Nemen we $x = \frac{1}{5}$ en $p = 3$, dan volgt

$$\arctan \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + R_3\left(\frac{1}{5}\right) = 0,1973955 \dots + R_3\left(\frac{1}{5}\right)$$

met $0 < R_3\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{9 \cdot 5^9} < 10^{-7}$, dus

$$0,1973955 < \arctan \frac{1}{5} < 0,1973957.$$

Voor $x = \frac{1}{239}$ en $p = 0$ komt er

$$\arctan \frac{1}{239} = \frac{1}{239} + R_0\left(\frac{1}{239}\right) = 0,0041841\dots + R_0\left(\frac{1}{239}\right)$$

met $0 < -R_0\left(\frac{1}{239}\right) \leq \frac{1}{3 \cdot 239^3} < 10^{-7}$, dus

$$0,0041840 < \arctan \frac{1}{239} < 0,0041842.$$

Er volgt

$$3,141591 < \pi < 3,141596.$$

c) Benadering van $\ln 2$

Volgens het bewijs van 10.6.6e is

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^p \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_p \quad \text{met } |R_p| \leq \frac{1}{p+1}.$$

De restterm R_p convergeert zeer langzaam naar 0, waardoor deze reeks ongeschikt is voor het benaderen van $\ln 2$. Beter gaat het als volgt.

Voor $|x| < 1$ is

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots\right) = \\ &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right). \end{aligned}$$

Hieruit volgt voor $0 \leq x < 1$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^p \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_p(x),$$

waarbij

$$0 \leq R_p(x) = 2 \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{x^{2p+3}}{1-x^2}.$$

Nemen we hierin $x = \frac{1}{3}$ en $p = 5$, dan krijgen we

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}}\right) + R_5\left(\frac{1}{3}\right) = \\ &= 0,69314707 + R_5\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

met $0 < R_5\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{9 \cdot 3^{13}} < 8 \cdot 10^{-7}$. Er volgt

$$0,6931470 < \ln 2 < 0,6931478.$$

10.7.3. Benadering van integralen

In sommige gevallen levert machtreeksontwikkeling een (alternatieve) numerieke integratiemethode. We lichten dit toe aan de hand van een voorbeeld.

Bereken in 4 decimalen $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx$.

Oplossing.

$$e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3!} + \dots \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wegens stelling 10.6.1 is dan

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx = x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{14} x^7 \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{60} x^{10} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Als we als benadering de eerste drie termen gebruiken, dan is volgens 10.4.2b de fout in absolute waarde kleiner dan de vierde term in absolute waarde: $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2^{10}} \approx 1,6 \times 10^{-5}$, want de reeks is alternerend.

Dus

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{14} \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0,48493.$$

Dit resultaat is correct in 4 decimalen.

10.7.4. Oplossing van differentiaalvergelijkingen

Een in de toegepaste analyse vaak voorkomende differentiaalvergelijking is

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}_0^+$$

(differentiaalvergelijking van Bessel van de orde ν). We bekijken als voorbeeld het geval $\nu = 0$. De DV wordt

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0,$$

die vereenvoudigd kan worden tot

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

We zoeken een oplossing van de vorm $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, die geldig is in zekere omgeving van 0.

Substitutie geeft

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Door in de derde som de sommatie-index 2 te verschuiven komt er meer eenheid in de machten van x :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0.$$

We kunnen dit ook schrijven als

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 a_n + a_{n-2}) x^{n-1} = 0 = \text{nulfunctie.}$$

Vergelijking van gelijke machten van x levert

$$a_1 = 0 \quad (\text{I})$$

$$n^2 a_n = -a_{n-2} \quad (\text{II})$$

Uit (I) en (II) volgt direct: $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = \dots = 0$.

Kiezen we a_0 willekeurig, dan vinden we met behulp van (II)

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4 = \frac{a_0}{4^2 2^2},$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)^2 (2n-2)^2 \dots 4^2 2^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} a_0$$

We vinden dus als oplossing voor de DV:

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}.$$

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$ heeft de convergentiestraal ∞ (ga na!) en de oplossing is dus geldig op \mathbb{R} . Deze reeks wordt meestal aangeduid met $J_0(x)$, de *Besselfunctie* van de orde nul en van de eerste soort.

Oefeningen

1. Gebruik reeksontwikkeling om de volgende getallen in 4 decimalen te benaderen:

a) \sqrt{e}

b) $\sin 10^\circ$

c) $\ln \frac{5}{3}$.

2. Gebruik machtreksen om de volgende integralen in 4 decimalen te benaderen.

a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos x^2 dx$.

3. Geef een oplossing in de vorm van een machtreeks van de DV van Bessel van de orde n .

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

10.8. Vraagstukken

Onderzoek of de reeksen in de vraagstukken 1 t/m 3 convergent of divergent zijn.

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 6n)e^{-n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n \arctan \frac{1}{n^3}}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(ln n)^2}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}$.

3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} 2^n$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\arctan \frac{n+1}{n}}$.

*4. Toon aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)$ bestaat.

Bewijs daartoe dat de rij (a_n) , met $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x}$, dalend en begrensd is.

N.B. $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)$ heet de *constante van Euler-*

Mascheroni ($\gamma = 0,577215\dots$).

*5. Gegeven $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent.

Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ convergent is.

*6. Gegeven $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent. Bewijs dat

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=p+1}^{2p} a_n = 0.$$

*7. Gegeven $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent, $a_n \geq 0$ en $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_{2n} = 0.$$

Aanwijzing: gebruik vraagstuk 6.

Onderzoek de convergentie of divergentie van de reeksen in de vraagstukken 8 t/m 11. Vermeld in geval van convergentie of deze absoluut dan wel relatief is.

8. a) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^4}{n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\arctan n}{n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$.

9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{n}$.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\ln^2 n}$.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{\ln^2 n}$.

10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [\ln(1+n\sqrt{n}) - \ln n\sqrt{n}]$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (e^{\frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n})$.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \pi^{-\ln n}$.

11. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \ln n}{n^2}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(1 + \sin \frac{1}{n})}{n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln(n^3 + 3)}{n^2}$.

*12. Onderzoek voor welke $a \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^a}$ respectievelijk absoluut convergent, relatief convergent, divergent is.

13. De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, convergeert absoluut voor $x = -2$ en divergeert voor $x = 4$.

a) Onderzoek het gedrag van de reeks voor elk der volgende waarden van x ; geef in uw antwoord aan of er sprake is van convergentie of divergentie, of dat men op grond van de gegevens geen beslissing kan nemen.

(i) $x = 0$,

(ii) $x = -\sqrt{2}$,

(iii) $x = 2$,

(iv) $x = -4$,

(v) $x = -5$.

b) Bewijs: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

c) Bewijs: als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, dan is $\frac{1}{4} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$.

14. Bereken de convergentiestraal van de volgende machtreeksen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n! (x)^{n^2}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n-1)} x^n$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sin(e^{-n})}$.

Bepaal van de reeksen in de vraagstukken 15 t/m 18

(i) het convergentiegebied

(ii) de som voor die waarden van x , waarvoor de reeks convergeert.

15. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} x^n$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n+9)x^{2n+2}}{(2n+1)!}$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

16. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n - \frac{1}{n}\right) x^n$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$.

17. a) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-1)^n$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh nx}{n!}$.

18. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n!} x^n$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^n$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(\cosh x)^n}$.

19. Bepaal het convergentiegebied van de volgende reeksen.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x^2 + n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n} (1+x)^n$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Antwoorden

Hoofdstuk 1

Oefeningen

§1.4. 2. $\inf A = 1$; $\sup A = 2$; $\max A = 2$.

§1.10. 2. $f \circ f = f$; $g \circ g(x) = 1$ voor alle x ; $f \circ g = g$; $g \circ f(x) = 1$ voor alle x .

4. $f^{\text{inv}} = f$. 5. $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{2}x$ als $0 \leq x < 2$, $f^{\text{inv}}(x) = -2x + 7$ als $2 \leq x \leq 3$.

§1.11. 3. 6188; 35. 4. 2^n .

§1.12. 7. $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. 9. (i) $s_0 = a_0$, (ii) $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$.

Vraagstukken (§1.17)

1. (i) $[0,5] \cup [7,\infty)$; (ii) $(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2) \cup (2, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$; (iii) $[1,\infty)$;

(iv) $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (3,\infty)$. 2. a) ja; b) ja; c) nee; d) $\inf V = -1$, $\sup V = \frac{3}{2}$.

5. a) juist; b) onjuist. 6. nee. 7. \mathbb{Z} . 11. $\frac{n+1}{2n}$. 20. $n = 12$.

22. a) 30.240; b) 100.000; c) 27.216; 90.000. 23. $\frac{3}{10}$. 24. 10. 25. $\frac{22!}{11!}$; $3 \cdot \frac{19!}{9!}$.

27. $n \times$. 34. (i) $D_f = \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$, $f(x) = x$ als $-\frac{1}{2}\pi \leq x < \frac{1}{2}\pi$, $f(x) = \pi - x$ als $\frac{1}{2}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi$. (ii) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $g(x + \pi) = g(x)$, $g(x) = x$ als $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$.

36. $160 \ln 2$.

Hoofdstuk 2

Oefeningen

§2.1. 1. $14 - 8i$. 3. $-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$. 4. $\operatorname{Re} z = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{19}{17}$.

5. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{10}$, $\operatorname{Im} z = \frac{3}{10}$.

§2.3. 1. $\operatorname{Re} z_1 = -3$, $\operatorname{Im} z_1 = 0$; $\operatorname{Re} z_2 = 0$, $\operatorname{Im} z_2 = 2$; $\operatorname{Re} z_3 = 1$, $\operatorname{Im} z_3 = 1$;

$\operatorname{Re} z_4 = -\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z_4 = -1$. 4. de bisectrix van het 2-de en 4-de kwadrant.

5. de rechte $2x - 3y - 6 = 0$, behalve het punt $(0, -2)$.

§2.4. 1. $\bar{z} = 2 - 3i$; $\bar{w} = 4 + 3i$; $\bar{z}w = -1 - 18i$; $\overline{z\bar{w}} = z\bar{w} = -1 + 18i$.

2. de cirkel met middelpunt $(1,0)$ en straal 1; het punt $(1,0)$.

§2.5. 1. $|z_1| = \sqrt{13}$; $|z_2| = 7$; $|z_3| = 2$; $|z_4| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1. 3. het ringgebied tussen de concentrische cirkels met middelpunt $(0,0)$ en stralen 2 en 3 (inclusief de grootste cirkel). 4. de cirkel met middelpunt $(0, -3)$ en straal 5.

5. de middelloodlijn van het lijnstuk tussen (0,3) en (4,2), vergelijking
 $8x - 2y - 11 = 0$.

§ 2.6. 1. $|z_1| = 3$, $\arg z_1 = \pi$; $|z_2| = 2$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{2}$;
 $|z_3| = \sqrt{2}$, $\arg z_3 = \frac{\pi}{4}$; $|z_4| = 2$, $\arg z_4 = \frac{7}{6}\pi$.

2. $\operatorname{Re} z_1 = 4$, $\operatorname{Im} z_1 = -4$, $|z_1| = 4\sqrt{2}$, $\cos(\arg z_1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$\sin(\arg z_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\arg z_1 = \frac{7}{4}\pi$;

$\operatorname{Re} z_2 = -2$, $\operatorname{Im} z_2 = 2\sqrt{3}$, $|z_2| = 4$, $\cos(\arg z_2) = -\frac{1}{2}$,

$\sin(\arg z_2) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\arg z_2 = \frac{2}{3}\pi$.

3. het in het 1^e kwadrant gelegen deel van de eenheidscirkel (binnengebied + rand), behalve het middelpunt.

4. $|z_1| = 8$, $\arg z_1 = \frac{2}{3}\pi$; $|z_2| = 1$, $\arg z_2 = \frac{3}{2}\pi$;

$|z_3| = 2\sqrt{2}$, $\arg z_3 = \frac{3}{4}\pi$.

§ 2.7. 2. $|zw| = 1$, $\arg(zw) = \frac{\pi}{2}$, $zw = i$;

$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\left|\frac{z}{w}\right| = 1$, $\frac{z}{w} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$.

3. $|zw^{-1}| = \sqrt{2}$, $\arg(zw^{-1}) = \frac{13}{12}\pi$; $|\bar{z}^3 w^2| = 2^{11}\sqrt{2}$, $\arg(\bar{z}^3 w^2) = \frac{\pi}{12}$.

4. $\cos 5\varphi = 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi$;

$\sin 5\varphi = 16 \sin^5 \varphi - 20 \sin^3 \varphi + 5 \sin \varphi$.

5. $\arg z = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z} = \frac{3}{2}\pi + \varphi$.

6. het in het bovenhalfvlak gelegen deel van de cirkel met middelpunt (0,1) en straal $\sqrt{2}$, inclusief het punt (1,0), exclusief het punt (-1,0).

§ 2.8. 3. a) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$.

b) $2\sqrt{3} + 2i = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

c) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$.

d) $-e = e(\cos \pi + i \sin \pi) = ee^{i\pi}$.

e) $2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) = 2e^{\frac{2}{3}i\pi} = -1 + i\sqrt{3}$.

4. $\cos^5 \varphi = \frac{1}{16} \cos 5\varphi + \frac{5}{16} \cos 3\varphi + \frac{10}{16} \cos \varphi$.

§ 2.11. 1. 1 , $-1 + \sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$. 2. 2 , $\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$. 3. $-i$, $2i$, $-2i$.

§ 2.12. 1. $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $-i$.

2. 1 , $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, -1 , $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

3. $1 + i(2 + \sqrt{3})$, $-\sqrt{3} + 3i$, $-1 + i(2 - \sqrt{3})$, $\sqrt{3} + i$.

4. $2 - 4i$, $-2i$.

5. $1 + i(1 + \sqrt{3})$, $-1 + i(1 - \sqrt{3})$.

6. $z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$.

7. $z^4 + 1 = (z^2 + z\sqrt{2} + 1)(z^2 - z\sqrt{2} + 1)$.

§2.13. 1. $\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5}{4} \pi i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\ln 8 + \frac{5}{6} \pi i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

§2.14. 1. $w = u - i$, $u \leq 2$.

2. het lijnstuk met beginpunt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en eindpunt $(\frac{1}{2}, 0)$.

3. a) de halfrechte die een hoek b maakt met de positieve reële as, behalve het punt $(0,0)$.b) het inwendige van de eenheidscirkel, behalve de punten op de negatieve reële as en het punt $(0,0)$.4. w doorloopt de cirkel met middelpunt $(1,0)$ en straal 1 tweemaal in positieve zin.

Vraagstukken (§2.15)

1. a) $ac - bd = 0$; b) $bc + ad = 0$; c) $ac + bd = 0$, $(c,d) \neq (0,0)$; d) $bc - ad = 0$, $(c,d) \neq (0,0)$.

2. a) $\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$; b) $\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$; c) $\omega = \frac{\pm R}{\sqrt{R^2 LC - L^2}}$, $R^2 C - L > 0$.

3. A) de cirkel met middelpunt $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ en straal $\frac{1}{2}\sqrt{10}$, behalve het punt $(0,-1)$.B) het gebied begrensd door de kleinste boog van de cirkel $x^2 + (y-1)^2 = 1$ tussen de punten $(0,0)$ en $(\frac{1+\sqrt{7}}{4}, \frac{5-\sqrt{7}}{4})$, de kleinste boog van decirkel $(x+1)^2 + y^2 = 4$ tussen de punten $(\frac{1+\sqrt{7}}{4}, \frac{5-\sqrt{7}}{4})$ en $(0,\sqrt{3})$ en het lijnstuk tussen de punten $(0,0)$ en $(0,\sqrt{3})$.C) de parabool $y^2 = 8(x-2)$.D) de ellips $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

4. $z = -1 + i$.

5. het tweede en het derde gelijkteken.

6. a) $e^{2+3\pi i} = e^2(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -e^2$.

b) $-6 + 6i = 6\sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi) = e^{\ln(6\sqrt{2}) + \frac{3}{4}\pi i}$.

c) $\pi i = \pi(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = e^{\ln \pi + \frac{\pi}{2}i}$.

d) $e^{ie} = \cos e + i \sin e$.

8. -1024 .

9. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.
10. A) de sector van de eenheidscirkel op de kleinste boog tussen de punten $(1,0)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, behalve de punten op de reële as.
 B) het lijnstuk tussen de punten $(0,-1)$ en $(6,7)$, behalve het punt $(0,-1)$.
 C) het buitengebied (incl. rand) van de cirkel met middelpunt $(-\frac{5}{3}, 0)$ en straal $\frac{4}{3}$.
11. A) de lijn $y = 2x$.
 B) het in het rechterhalvlak gelegen deel van de cirkel met middelpunt $(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$ en straal $\frac{4}{\sqrt{3}}$, inclusief het punt $(0,-2)$, exclusief het punt $(0,2)$; $A \cap B = \{(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})\}$.
13. 2.
14. a) $\pm i\sqrt{2}, \pm(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}), \pm(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})$.
 b) $1, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$.
 c) $\pm\sqrt[4]{2}(\cos \frac{3}{8}\pi + i\sin \frac{3}{8}\pi), \pm\sqrt[4]{2}(\cos \frac{5}{8}\pi + i\sin \frac{5}{8}\pi)$.
 d) $\pm 1, \pm i, \pm\sqrt{2}, \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{6}), \pm(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{6})$.
 e) $\pm 4, \pm(2 + 2i\sqrt{3}), \pm(-2 + 2i\sqrt{3})$.
 f) $1, i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$.
 g) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}, i, -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$.
 h) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i, -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, 2 + 2i, -2 - 2i$.
 i) $-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}, -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}$.
 j) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.
15. a) $\ln 2 + \frac{\pi}{3}i + 2k\pi i, \ln 2 - \frac{\pi}{3}i + 2k\pi i, (k \in \mathbb{Z})$.
 b) $\frac{2i}{1-4k}, (k \in \mathbb{Z})$.
 c) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}\pi i + \frac{2}{3}k\pi i, (k \in \mathbb{Z})$.
17. $\operatorname{Re} w = \sin x \cosh y, \operatorname{Im} w = \cos x \sinh y, (x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z)$.
19. b) $\frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\varphi}{2 \sin \frac{1}{2}\varphi}$.
20. b) 1 ; c) -2.
21. $-1 + 5i, 7 - 7i$.
23. $w = u + iv$ doorloopt de reële as van $+\infty$ tot 2, vervolgens de kleinste boog van de cirkel $(u-1)^2 + v^2 = 1$ van $(2,0)$ tot $(1,1)$ en tenslotte de hyperbool $uv = 1$ van $(1,1)$ naar $(+\infty, 0)$.

24. b) w doorloopt de reële as van $\frac{1}{2}$ tot $-\frac{3}{2}$ en terug.
25. $w = u + iv$ doorloopt de rechte $u - v = \sqrt{2}$ van $(+\infty, +\infty)$ tot $(\sqrt{2}, 0)$, vervolgens de kleinste boog van de cirkel $u^2 + v^2 = 2$ van $(\sqrt{2}, 0)$ naar $(0, -\sqrt{2})$ en daarna de rechte $u + v = -\sqrt{2}$ van $(0, -\sqrt{2})$ naar $(+\infty, -\infty)$.
26. $w = u + iv$ doorloopt de hyperbool $uv = 1$ van $(0, +\infty)$ tot $(1, 1)$, dan de kleinste boog van de cirkel $u^2 + v^2 = 2$ van $(1, 1)$ tot $(1, -1)$ en tenslotte de hyperbool $uv = -1$ van $(1, -1)$ tot $(+\infty, 0)$.
27. a) w doorloopt de kleinste boog van de cirkel met middelpunt $(\frac{1}{4}, 0)$ en straal $\frac{1}{4}$ van $(\frac{1}{2}, 0)$ tot $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.
- b) de cirkel met middelpunt $(\frac{2}{3}, 0)$ en straal $\frac{1}{3}$.
28. w doorloopt de reële as van $(-1, 0)$ tot $(0, 0)$, vervolgens de imaginaire as van $(0, 0)$ tot $(0, -\infty)$, daarna de imaginaire as van $(0, +\infty)$ tot $(0, 1)$ en tenslotte de kleinste boog van de eenheidscirkel van $(0, 1)$ tot $(-1, 0)$.
29. w doorloopt de kleinste boog van de eenheidscirkel van 1 tot i en terug.
30. $w = u + iv$ doorloopt de rechte $v = 1$ van $(0, 1)$ tot $(1, 1)$, daarna de rechte $u = v$ van $(1, 1)$ tot $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, vervolgens de rechte $u = v$ van $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ tot $(-1, -1)$ en tenslotte de rechte $v = -1$ van $(-1, -1)$ tot $(0, -1)$.

Hoofdstuk 3

Oefeningen

- §3.2. 4. continu in 0 ; elders discontinu.
- §3.3. 3. 1 ; -1 ; bestaat niet.
- §3.5. 2. Zij $\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$ (resp. $\lim_{x \downarrow a} f(x) = L$). Dan geldt:
- Er is een $\delta > 0$ zó dat $|f(x)| < 1 + |L|$ voor alle $x \in (a - \delta, a)$ (resp. voor alle $x \in (a, a + \delta)$).
 - Als $L > 0$ dan is er een $\delta > 0$ zó dat $f(x) > \frac{1}{2}L > 0$ voor alle $x \in (a - \delta, a)$ (resp. voor alle $x \in (a, a + \delta)$).
 - Als $L < 0$ dan is er een $\delta > 0$ zó dat $f(x) < \frac{1}{2}L < 0$ voor alle $x \in (a - \delta, a)$ (resp. voor alle $x \in (a, a + \delta)$).
3. Zij f linkscontinu (resp. rechtscontinu) in a en zij $C < f(a) < D$. Dan is er een $r > 0$ zó dat $C < f(x) < D$ voor alle $x \in (a - r, a)$ (resp. voor alle $x \in (a, a + r)$).
- §3.9. 1. a) 27 ; b) $\frac{7}{8}$; c) 6 ; d) 2 ; e) $\frac{1}{2}$; f) $-\frac{2}{3}$. 2. $a = \frac{2}{\pi}$. 3. $f(0) = f(4) = -\frac{1}{4}$.
4. a) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; b) $-\pi$.
- §3.10. 1. 2. 2. 1. 3. 2. 4. $\frac{8}{25}$. 5. 2. 6. $-1 + \frac{1}{2}\pi$. 7. $\frac{1}{5}$. 8. 0.
9. e. 10. $e^{-\frac{1}{2}}$ 11. e^2 .
- §3.11. 4. 1. 5. 0. 11. 1. 12. e^{-6} . 13. 0.
14. a) $|x| \leq 1$; b) $|x| \leq \frac{1}{2}$; c) $-2 \leq x \leq 0$. 15. -2.

Vraagstukken (§3.15)

2. a = 1, b = -6. 5. b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{voor } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ 7. nee. 9. a) $\frac{4}{35}$; b) 3.
10. a) -1; b) 1. 11. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{\pi}{2}$. 12. a) $-\sqrt{2}$; b) 0; c) 0.
13. a) $-\frac{2}{\pi}$; b) -2; c) -2. 14. a) 1; b) $\frac{1}{e}$; c) $\frac{1}{e}$. 15. $\frac{V_0 t}{2L} \sin \omega_0 t$.
17. c) 3. 18. a) 2; b) $-\frac{1}{2}$; c) 1. 19. a) 3; b) $e^{\frac{7}{2}}$; c) $\frac{1}{e}$.

Hoofdstuk 4

Oefeningen

- §4.1. 5. a = 2c, b = -c².
- §4.2. 1. a) $\frac{1}{\cos^2 x}$; b) $\frac{-1}{\sin^2 x}$; c) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; d) $\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$.
2. cosh; sinh; $\frac{1}{\cosh^2}$; $\frac{-1}{\sinh^2}$.
3. a) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. b) $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$. c) $-48x \sin(6x^2)(1 + \cos(6x^2))^3$.
- d) $\frac{-1}{3x^2+2x}$. e) $\cos(x \cos x)(\cos x - x \sin x)$. f) $2^{3x^2} 6x \ln 2$.
- g) $(\sin x)^{\tan x} (1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x})$. h) $\frac{-1}{\cos x}$. i) $x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$.
- j) $\frac{x e^x \sin x}{(x-1)^4} (\frac{1}{x} + 1 + \cot x - \frac{4}{x-1})$.
- §4.3. 3. $g'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{3}$. 4. $f^{(2k)}(0) = 0$; $f^{(2k+1)}(0) = 1^2 3^2 5^2 \dots (2k-1)^2$.
- §4.4. 1. a) $d(\frac{1}{2} \sin 2x + C)$ b) $d(\frac{1}{2} x^2 + 2x + C)$. c) $d(\tan x + C)$.
- d) $d(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C)$, e) $d(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C)$. 2. $dV = -80\pi$; $d\Omega = -16\pi$.
3. $\sqrt[3]{65} \approx \frac{193}{48} = 4,02083$.
- §4.6. 1. globaal maximum $f(0) = \frac{\pi}{2}$.
2. b) lokaal maximum $f(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$;
lokaal minimum $f(-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$.
- c) $y = 3x$. d) scheve asymptoten $y = -x + 2\pi$ en $y = -x - 2\pi$.
3. lokaal maximum $f(0) = 0$; lokaal minimum $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$; f is convex op $(-\infty, 0)$ en $(0, \infty)$; geen buigpunten; geen asymptoten.
- §4.7. 1. $h = \sqrt[3]{0,006} \approx 0,18$. 2. $h = \sqrt[7]{7!} 10^{-3} \approx 1,26$.
3. a) $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{2} + \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{(x-1)^2}{4\sqrt{2}} - \frac{(x-1)^3}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \frac{4\xi^2-1}{(1+\xi^2)^{\frac{7}{2}}} (x-1)^4$.
- b) $x \ln x = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12\xi^3}(x-1)^4$.

4. a) $x \cos(x-1) = 1 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 + R_3(x)$.
 b) $\ln \frac{2x}{x+1} = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)^2 + \frac{7}{24}(x-1)^3 - \frac{15}{64}(x-1)^4 + R_4(x)$.

§4.8. 1. a) onjuist ; b) juist ; c) juist ; d) onjuist ; e) juist.

2. a) 4 ; b) 3 ; c) 4.

3. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\sinh(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, (n even) ;

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\cosh(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, (n oneven) ;

$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\cosh(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, (n even) ;

$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\sinh(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, (n oneven).

4. $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + R_n(x)$.

5. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + R_6(x)$.

§4.9. 1. $\frac{2}{3}$. 2. $\frac{11}{60}$. 3. -3. 4. 1. 5. $\frac{2}{3}$. 6. 1. 7. $e^{-\frac{1}{2}}$. 8. $\frac{1}{2}$.

9. $\frac{1}{3}$. 10. 1.

§4.10. 1. steunpunten $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$:

$p_1(\frac{\pi}{4}) = 0,6830$, $0,0174 < E_1(\frac{\pi}{4}) < 0,0301$, $\sin \frac{\pi}{4} = 0,707 \pm 0,007$;

steunpunten $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$:

$p_2(\frac{\pi}{4}) = 0,7120$, $-0,009 < E_2(\frac{\pi}{4}) < 0$, $\sin \frac{\pi}{4} = 0,708 \pm 0,005$.

3. 2,3406 2,1074 1,9809 1,9169 1,8857

§4.11. 2. c) convergent voor $x_0 = 2$; divergent voor $x_0 = 4$.

4. a) 2 ; b) $\frac{1}{4}$.

6. $C \approx -0,37$; $\epsilon \approx -2 \cdot 10^{-5}$.

7. b) $x_{RF} = 1,5156$; c) startwaarde 4, $x_{NR} = 2,5772$.

8. startwaarde tussen r en π , bijvoorbeeld $x_0 = 2$; $x_0 = 2$

$x_1 = 1,7139167$

$x_2 = 1,6619741$

$x_3 = 1,6600376$

$x_4 = 1,6600348$

$x_5 = 1,6600348$

Vraagstukken (§4.12)

1. a) $\frac{4x+1}{(2x^2+x)\cos^2(\ln(2x^2+x))}$; b) $\frac{2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} e^{\arctan x}$; c) $\frac{\cos x}{2+\sin^2 x}$; d) $\frac{\sin x}{2|\sin x|}$.

2. a) $\frac{2x}{1+x^4}$; b) $\frac{2xe^{x^2}\cos(e^{x^2})}{\sin(e^{x^2})}$; c) $\frac{1}{x^2+1}$.

3. a) $\frac{-1-x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$; b) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; c) $(\frac{\arctan x}{\sin x \cos x} + \frac{\ln \tan x}{1+x^2})(\tan x)^{\arctan x}$. d) $\sqrt{2x-x^2}$.

4. $\frac{1}{6}; \ln \frac{3}{2}$.
5. a) $D_f = [0, \frac{1}{2}]$; $D_g = [-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}]$.
 b) $f'(x) = \frac{-1}{(1+2x)\sqrt{x-2x^2}}$; $g'(x) = \frac{-4x}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$.
6. a) $k \geq 1$; b) $k \geq 2$; c) $k \geq 3$.
7. a) f is continu en differentieerbaar in 0; b) $f'(0) = 1$; $f'(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$ voor $x \neq 0$; c) f' is continu in 0.
10. a) $f'(x) = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$; $f''(x) = -x(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$.
 b) $f^{(2k)}(0) = 0$; $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2k-1)^2$.
11. a) $g'(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$; $g''(x) = -x(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$.
 b) $(x^2 - 1)g^{(n)}(x) + (2n-3)xg^{(n-1)}(x) + (n-2)^2g^{(n-2)}(x) = 0$, ($n \geq 2$).
12. $g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$
13. $\sqrt[3]{37} \approx 6\frac{1}{12} = 6,08333$; $\sqrt[3]{66} \approx 4\frac{1}{24} = 4,04166$.
18. globaal maximum $f(1) = \frac{\pi}{2}$; globaal minimum $f(0) = 0$.
19. $T_m = 1 + 2T_a$.
20. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-e^{-\frac{1}{4}}, 0, e^{-\frac{1}{4}}\}$;
 oneven functie;
 verticale asymptoten $x = -e^{-\frac{1}{4}}$ en $x = e^{-\frac{1}{4}}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$;
 lokaal maximum $f(-e^{\frac{1}{12}}) = -\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}}$;
 lokaal minimum $f(e^{\frac{1}{12}}) = \frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}}$.
- b) $D = (0, \infty)$;
 horizontale asymptoot $y = 0$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = -\infty$;
 globaal maximum $g(e) = \frac{1}{2}$;
 globaal minimum $g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{2}$.
21. a) differentieerbaar op $(0,1) \cup (1, \infty)$.
 b) globaal minimum $f(0) = 0$;
 globaal minimum $f(1) = 0$;
 lokaal maximum $f(\frac{1}{2}) = e^{-2}$.
 c) $(\frac{1}{4}, 3e^{-4})$.
 d) horizontale asymptoot $y = 1$;
 $f'_r(0) = 0$; $f'_r(1) = -\frac{1}{e}$; $f'_r(1) = \frac{1}{e}$.

22. a) $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$.
 b) f is niet differentieerbaar in 0.
 c) $\lim_{x \downarrow 1} f'(x) = -2$; $\lim_{x \uparrow 1} f'(x) = 2$.
 d) globaal minimum $f(0) = 0$;
 globale maxima $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$.
 e) even functie;
 horizontale asymptoot $y = 0$;
 $f'_r(0) = 1$; $f'_l(0) = -1$.
24. a) $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}\xi^{-\frac{7}{2}}(x-1)^4$.
25. $t_1(0,01) = 1,1$; $0,0045 < R_1 < 0,0049$; $1,01^{10} = 1,1047 \pm 0,0002$.
26. $t_1(\frac{1}{10}) = 3,005$; $R_1(\frac{1}{10}) \approx -0,0000125$;
 de fout in $t_1(\frac{1}{10})$ ligt tussen $-0,000025$ en 0 ;
 de totale fout ligt tussen $-0,00004$ en $-0,00001$.
28. $(1-x^2)f''(x) = 2 + xf'(x)$; 0 als $n = 0$ of $n = 2k-1$;
 $\frac{((k-1)!)^2 2^{2k-1}}{(2k)!}$, als $n = 2k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
29. $\alpha = 3; \frac{3}{4}$.
30. $0 < \alpha < 4$.
31. a) $-\frac{1}{3}$; b) -1 ; c) $\frac{3}{4}$; d) 1 .
33. a) 1 ; b) 1 .
35. a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1 ; d) $\frac{1}{e}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $-\frac{3}{2}$.
36. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; oneven functie; $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1$; $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 2$; scheve asymptoot $y = 2x$; geen extremen.
37. lineair: $h = \frac{1}{5}$; kwadratisch: $h = \frac{1}{3}$.
38. steunpunten $1,21$; $1,44$; $1,69$.
 $p_2(1,5) = 1,224826$;
 $-0,00013 < E_2(1,5) < -0,00005$
 $\sqrt{1,5} = 1,22474 \pm 0,00004$.
39. $\sin x = \frac{2}{\pi}x - \frac{1}{2}x(x - \frac{\pi}{2})\sin \xi$, $\min\{0, x\} < \xi < \max\{\frac{\pi}{2}, x\}$.
40. de eerste ongelijkheid geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$, de tweede alleen voor $x \in [0, 1]$.
41. a) $\sqrt[3]{10}$; b) $\alpha = -\frac{1}{3}$.
42. b) 0 .
43. b) $x_{RF} = -1,1154$; $x_{NR} = -1,6933$.
44. b) $1 + p(r)f'(r) = 0$; c) naar nulpunten van p .

Hoofdstuk 5

Oefeningen

- § 5.2. 1. $g'(x) = 2xf(x^2)$; $h'(x) = -2xf(x^2)$. 2. $F'(x) = 2e^{-4x^2}$.
4. $\int \frac{x}{t(t+1)} dt = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)^2 + \frac{7}{24}(x-1)^3 - \frac{15}{64}(x-1)^4 + R_4(x)$.
6. $F(2) = \frac{5}{2}$; $F'(1) = 1$.
- § 5.3. 1. a) onmogelijk; b) $K = \frac{1}{4}\pi$; c) $K = -\frac{3}{4}\pi$.
- § 5.4. 1. $\ln(-\ln x)$.
2. $-\ln \cos x$.
3. $\frac{1}{9}(2x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}$.
4. $\frac{1}{2}e^{x^2}$.
5. $2 \ln(x^2 - x + 1)$.
6. $\frac{1}{2}(\arctan x)^2$.
7. $\arctan(x+1)$.
8. $\frac{1}{5} \sin^5 x$.
9. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x$.
10. $-\ln(1 + e^{-x})$.
11. $2 \arctan \sqrt{x}$.
12. $\frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right)$.
13. $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$.
14. $-\frac{1}{4} \sqrt{15+4x-4x^2} + \frac{5}{4} \arcsin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$.
15. $\frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x$.
- § 5.5. 1. $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.
2. $\frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x$.
3. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.
4. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3$.
5. $x^2 \cosh x - 2x \sinh x + 2 \cosh x$.
6. x als $a^2 + b^2 = 0$;
 $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$ als $a^2 + b^2 \neq 0$.

$$7. J_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}).$$

$$8. J_n = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)J_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}).$$

$$9. J_n = \frac{x(1+x^2)^n}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1} J_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}).$$

§5.6 1. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$

2. $-2 \ln |x+1| + 5 \ln |x+2|.$

3. $\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}(x+1).$

4. $\frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$

5. $2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| - \frac{1}{x-1}.$

6. $\frac{1}{2} x^2 + x + \frac{1}{3} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}.$

7. $\frac{1-\frac{1}{2}x}{x^2+1} - \frac{3}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$

8. $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \ln |e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2).$

9. $\frac{1}{4} \ln \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x}.$

10. $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$

11. $\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$

§5.7 1. $2\sqrt{x+1} + 2 \ln \frac{2 - \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}}.$

2. $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 16} + 8 \ln(-x - \sqrt{x^2 - 16}).$

3. $\frac{2x^2 - 5}{75x^3} \sqrt{5+x^2}.$

4. $\frac{1}{\sqrt{7}} \ln \frac{\sqrt{7} - \sqrt{x+5}}{\sqrt{7} + \sqrt{x+5}}.$

5. $\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}.$

6. $-\frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} + \frac{3}{2} \arcsin(x-1).$

§5.8. 1. a) $\frac{1}{132}$; b) $3e - 15e^{-1}$; c) 2; d) $\frac{1}{4} \ln 3$; e) $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$; f) $\frac{3}{2} \ln \frac{5}{2}$; g) $1 + \frac{1}{2}\pi$;
h) $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4}.$

§5.10. 1. $\frac{1}{\ln 2}.$ 2. 2. 3. $\ln 2.$ 4. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$ 5. $2 \ln(1 + \sqrt{2}).$ 6. $-\frac{1}{2}.$

§5.11. 1. -4. 2. $-\frac{11}{18}.$ 3. 1. 4. 0. 5. $\frac{1}{4}\pi.$

- §5.12. 1. convergent. 2. divergent. 3. convergent. 4. divergent.
5. divergent. 6. convergent voor $\alpha > 1$; divergent voor $\alpha \leq 1$.
7. convergent voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
8. convergent voor $\alpha > \frac{1}{2}$; divergent voor $\alpha \leq \frac{1}{2}$.
- §5.13. 2. convergent. 3. convergent. 4. divergent. 5. divergent.
6. convergent voor $\alpha < 3$; divergent voor $\alpha \geq 3$.
7. convergent voor $\alpha > 0$; divergent voor $\alpha \leq 0$.
8. convergent voor $\alpha < \frac{2}{3}$; divergent voor $\alpha \geq \frac{2}{3}$.
- §5.14. 1. a) $\frac{6}{s^2-9} - \frac{4}{s}$; b) $\frac{14}{s^3} - \frac{1}{(s+4)^2}$; c) $\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2} - \frac{s}{s^2+9} + \frac{5}{s+1}$.
2. a) $4 \cosh(4t)$; b) $3e^{7t} + t$; c) $3 \cosh(\sqrt{7}t) + \frac{17}{\sqrt{7}} \sinh(\sqrt{7}t)$;
d) $\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{30}$.
- §5.15. 1. $\frac{e^{-4s}}{s^2} + \frac{4e^{-4s}}{s}$. 2. $\frac{1}{s} - \frac{6}{s^2-36} + \frac{s+1}{(s+1)^2-1}$.
3. $\frac{6}{(s+4)^2+4} - \frac{s}{s^2+36} + \frac{6}{s}$. 4. $\frac{-e^{-5s}}{s^2} - \frac{3e^{-5s}}{s} + \frac{2}{s^2}$.
5. $-\frac{4}{s^3} + e^{-9s} \left(\frac{6}{s^4} + \frac{64}{s^3} + \frac{336}{s^2} + \frac{1162}{s} \right)$. 6. $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$.
7. $\frac{1}{s} - e^{-2(s+3)} \left(\frac{4}{s+3} + \frac{4}{(s+3)^2} + \frac{2}{(s+3)^3} \right)$.
- §5.16. 1. $L[f(t)] = \frac{1}{s(1+e^{-s})}$, $s > 0$. 2. $L[f(t)] = \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$, $s > 0$.
3. $\frac{4(s+4)}{[(s+4)^2+4]^2}$. 4. $\left(\frac{1}{4}(t-\pi) - \frac{1}{8}\sin 2t \right) u_\pi(t)$.
5. $\left(\frac{1}{4}e^{3(t-1)}(t-1) - \frac{1}{4}e^{t-1}(t-1) \right) u_1(t)$. 6. $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cos t$. 7. $\frac{1}{2}t^2 e^{4t}$.
- §5.17. 2. $\frac{38}{3}$.
- §5.18. 2. a) Kies A zó dat $\left| \int_A^\infty \frac{\sin x}{1+x^4} dx \right| \leq \int_A^\infty \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3A^3} < \frac{1}{2}\epsilon$, en bereken $\int_0^A \frac{\sin x}{1+x^4} dx$ met de samengestelde regel van Simpson met een nauwkeurigheid van $\frac{1}{2}\epsilon$.
b) Kies A zó dat $\left| \int_A^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x+x}} \right| \leq \int_A^\infty e^{-\frac{1}{2}x} dx = 2e^{-\frac{1}{2}A} < \frac{1}{2}\epsilon$, en bereken $\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{e^x+x}}$ met de samengestelde regel van Simpson met een nauwkeurigheid van $\frac{1}{2}\epsilon$.
c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x}}{x^2} dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 \frac{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x} - \frac{1}{6}(\sqrt{x})^3}{x^2} dx$, en bereken deze ophefbaar oneigenlijke integraal met de samengestelde regel van Simpson met een nauwkeurigheid van ϵ .
d) $\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^{2x}-1} dx = \frac{3}{2} + \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{3}}(1+2x-e^{2x})}{2x(e^{2x}-1)} dx$, en bereken deze ophefbaar oneigenlijke integraal met de samengestelde regel van Simpson met een nauwkeurigheid van ϵ .

Vraagstukken (§5.19)

1. $t_2(x) = \frac{1}{2} e(x-1) + \frac{1}{8} e(x-1)^2$.
2. a) $\frac{3}{16} (4x+1)^{\frac{4}{3}}$.
 b) $\frac{1}{3} \arctan x^3$.
 c) $x + \frac{1}{2} \sin^2 2x$.
3. a) $\sin x \cos^3 x$.
 b) $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.
 c) $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$.
4. a) $\arctan(x+3)$.
 b) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{5} (2x-3)$.
 c) $\arcsin(x-1)$.
5. a) $\ln |\sin x|$.
 b) $\ln |\arctan x|$.
 c) $-x + 2 \tan \frac{1}{2} x$.
6. a) $\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} (-1 + \sin x)$.
 b) $-\frac{1}{x+4} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x+4)^2}{x^2+5}$.
 c) $\arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1}$.
7. a) $\frac{2}{3} x \sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x})$.
 b) $\frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{x} \sqrt{1+x} - \ln(1+\sqrt{1+x})$.
 c) $\frac{3}{8} \arcsin x - \frac{3}{8} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} x^3 \sqrt{1-x^2}$.
8. a) $\sqrt{x^2+9} - 4 \ln(\sqrt{x^2+9} - x) + 5 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+9} - x - 1}{\sqrt{x^2+9} - x + 9} \right|$.
 b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-1}{x+1+\sqrt{2x^2+2}} \right|$.
 c) $\frac{1}{6} (2x^2+x-9) \sqrt{3-2x-x^2} - 2 \arcsin \frac{1}{2} (x+1)$.
9. a) $\frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln(1+x) - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \frac{4}{3} \arctan \sqrt{x}$.
 b) $\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+13})$.
 c) $-\frac{16}{3} (4-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5} (4-\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}$.

10. a) $\frac{2}{15}$; b) $-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{4}$.
11. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{5}(e^\pi - 1)$; c) $\ln \frac{5}{2} + \frac{\pi}{2} - 2 \arctan 2$.
12. a) $2\pi + \frac{8}{3}$; b) $2\sqrt{10} + \frac{2}{3} \ln(3 + \sqrt{10})$; c) $\frac{3}{8}\pi$.
13. a) $6 - 3 \ln 5$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $2\sqrt{2} - 2 + 2 \ln(1 + \sqrt{2})$.
14. a) $20 \ln 2 - 6 \ln 3 - 4$; b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln 3$; c) $\frac{1}{2}$.
15. a) $\frac{\pi}{4} - \ln 2$; b) $2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{3}$; c) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$.
16. a) $J_n = \frac{1}{n-1} - J_{n-2}$, $n \geq 2$; b) $I_n = \frac{\pi}{2(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} - \frac{n-1}{n+1} I_{n-2}$, $n \geq 2$.
17. a) $\frac{\sinh \alpha}{\alpha}$, waarin $\alpha = \frac{pE}{kT}$; b) $p \frac{\alpha \cosh \alpha - \sinh \alpha}{\alpha \sinh \alpha}$; c) 0.
20. $2 \arctan 2 - \frac{1}{2} \ln 5$.
22. 3.
23. 2.
25. a) $\frac{1}{4}\pi$; b) $\frac{1}{4}\pi$; c) 1.
26. a) $\frac{1}{4}\pi$; b) $\frac{1}{2} \ln \frac{e+1}{e-1}$; c) $\frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)$.
27. a) $-\ln 2$; b) $\frac{9}{40}$; c) $-\frac{16}{3}$.
28. a) $\frac{7}{9}$; b) $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$; c) 1.
29. a) divergent; b) convergent; c) convergent.
30. a) divergent; b) convergent; c) convergent.
31. a) convergent voor $\alpha > 0$; divergent voor $\alpha \leq 0$;
 b) convergent voor $-1 < \alpha < 3$; divergent voor $\alpha \leq -1$ of $\alpha \geq 3$.
 c) convergent voor $\alpha > -\frac{1}{2}$; divergent voor $\alpha \leq -\frac{1}{2}$.
32. a) convergent voor $\alpha < 2$; divergent voor $\alpha \geq 2$;
 b) convergent voor $1 < \alpha < 2$; divergent voor $\alpha \leq 1$ of $\alpha \geq 2$;
 c) convergent voor $\alpha > -\frac{1}{2}$; divergent voor $\alpha \leq -\frac{1}{2}$.
34. $\frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$.
35. $\frac{1}{16} - \frac{e^{-2t}}{12} + \frac{e^{4t}}{48} + \frac{3te^{4t}}{4}$.
36. $-\frac{1}{5}u_2(t)e^{-(t-2)} + \frac{1}{3}u_2(t)e^{4(t-2)}$.
37. $\frac{2 \sinh t}{t}$.
38. a) $I_1 = \frac{31}{60} \approx 0,5167$; b) $I_2 = \frac{1039}{2040} \approx 0,5093$; c) $I_1 - I_2 \approx -0,0025$.
40. a) $I_1 = \frac{31}{126} \approx 0,246032$; b) $I_2 = \frac{329}{1332} \approx 0,246997$; c) $I_1 - I_2 \approx 0,000064$.

41. b) $x_0 = -x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$; $w_0 = w_1 = 1$; d) $\ln 2 = \frac{9}{13} + R_f$.

42. a) $t_2(h) = hf(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_0)$; b) $-\frac{1}{12}h^3 f''(x_0)$.

43. a) $t_4(h) = 2hf(x_0) + \frac{1}{3}h^3 f''(x_0)$; b) $-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(x_0)$.

Hoofdstuk 6

Oefeningen

§ 6.1 4. a) $x = 1 + 2\lambda$, $y = 2 - \lambda$, $z = 1 - \lambda$; b) $x = 1 + 2\lambda - 2\mu$, $y = 2 - \lambda - \mu$,
 $z = 1 - \lambda + 3\mu$.

§ 6.2 1. a) lineair; b) niet lineair; c) lineair; d) niet lineair.

2. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 22 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 14 \\ -7 & -4 & 5 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

3. a) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

§ 6.3 1. $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$. 3. $(-40, -20, 20)$. 4. 7. 5. a) -55 ; b) -75 .

6. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -5$.

§ 6.4 2. a) juist; b) onjuist; c) juist; d) onjuist.

§ 6.5 2. a) $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$; b) $y = 3x - 4x^3$; c) $x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$; d) $x^2 + y^2 = y$.

§ 6.8 1.

	$\frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{\partial z}{\partial y}$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
a) $4x - 5y$		$-5x + 2y$	4	-5	2
b) $\frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}$		$-\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2}$	$-\frac{6y}{x^4}$	$-\frac{2}{y^3} + \frac{2}{x^3}$	$\frac{6x}{y^4}$
c) $3 \cos 3x \cos 4y$		$-4 \sin 3x \sin 4y$	$-9 \sin 3x \cos 4y$	$-12 \cos 3x \sin 4y$	$-16 \sin 3x \cos 4y$
d) $\frac{-y}{x^2 + y^2}$		$\frac{x}{x^2 + y^2}$	$\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$	$\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$	$\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
e) $y(1+x)e^{x+2y}$		$x(1+2y)e^{x+2y}$	$y(2+x)e^{x+2y}$	$(1+x)(1+2y)e^{x+2y}$	$4x(1+y)e^{x+2y}$

4. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{y^2}{x}}$ als $x \neq 0$;

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$;

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ bestaat niet als $y \neq 0$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ is niet continu in $(0, 0)$.

§ 6.9 2. $\text{div } \underline{v} = -9$; $\text{rot } \underline{v} = (0, 3, 4)$; $\text{rot rot } \underline{v} = (-10, 4, 1)$.

3. $a = b = 4$. 4. $3\lambda(1 + 2 \ln \lambda)$.

- § 6.10 1. a) $\left[x^{y+z} \frac{(y+z)}{x} \quad x^{y+z} \ln x \quad x^{y+z} \ln x \right]$; b) $\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}$;
 c) $[2xy \cos(x^2y) \cos 3x - 3 \sin(x^2y) \sin 3x \quad x^2 \cos(x^2y) \cos 3x]$.
 2. c) f is niet differentieerbaar in $(0,0)$. 3. $\lambda(1, -1, 0)$. 4. $(1, 1, 1) + \lambda(1, 2, 3)$

- § 6.11 1. 1. 2. $2x + 2e^{ax} + 2axe^{ax} + 8ae^{2ax}$. 3. $t^{\sin t} (\ln t \cos t + (\sin t)/t)$.

$$4. \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{20u - 2v - 4}{(u + 2v + 1)^2 + (3u - v - 1)^2}; \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{-2u + 10v + 6}{(u + 2v + 1)^2 + (3u - v - 1)^2}$$

$$5. \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{\partial z}{\partial \phi} = -x^2y + xy^2; \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{2x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \phi} = \frac{3xy^2 - 3x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = -x^3 - y^3 + 2xy^2 + 2x^2y.$$

$$6. \frac{dz}{du} = (2u + 1)e^{-(1-u-u^2)^2} - e^{-(1-u)^2}$$

$$7. -5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}. \quad 8. -\frac{64}{49}(1 + 2\sqrt{3}). \quad 9. \text{a) } 12; \text{b) } (4, 0, -5), 2\sqrt{41}.$$

$$10. 7x + 6y - 4z = 1.$$

- § 6.12 1. a) $-x + y + xy$; b) $x - x(y-1)$;

$$\text{c) } 1 + 2(x-1) + 2(y-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2.$$

$$2. \text{a) } \Delta a + \Delta b; \frac{\Delta a + \Delta b}{|a + b|}; \text{b) } \Delta a + \Delta b; \frac{\Delta a + \Delta b}{|a - b|};$$

$$\text{c) } |a|\Delta b + |b|\Delta a; \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} = \delta a + \delta b; \text{d) } \frac{\Delta a}{|b|} + \frac{|a|\Delta b}{|b|^2}; \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} = \delta a + \delta b.$$

$$3. \text{a) } \frac{17}{2}\pi; \frac{17}{600}; \text{b) } \frac{1}{150}; \frac{1}{400}; \text{c) } \frac{1}{200}.$$

- § 6.13 1. $\frac{1}{3}$.

$$2. (3, 2); \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{57}{16}; \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{76}{243}$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{xy \ln y - y^2}{xy \ln x - x^2}; \frac{dx}{dy} = \frac{xy \ln x - x^2}{xy \ln y - y^2}$$

$$4. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y+z)(x+y-z)}{(x-2z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4(y+z)(x+y-z)}{(x-2z)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8(y+z)(x+y-z)}{(x-2z)^3}$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{-x + 2z}{2y - 2z}; \frac{dz}{dx} = \frac{-x + 2y}{2z - 2y};$$

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} =$$

$$= \frac{2(y-z)^2 + (x-2z)^2 + (x-2y)^2}{4(y-z)^3}$$

$$6. \frac{\partial z}{\partial \phi}$$

- § 6.14 1. globaal maximum 6912 in $(6, 4)$; lokaal maximum 0 in $(x, 0)$ met $x > 12$ en $(0, y)$ met $y > 12$; lokaal minimum 0 in $(x, 0)$ met $0 \leq x < 12$ en $(0, y)$ met $0 \leq y < 12$.
 2. lokale maxima 0 in $(0, y)$ met $0 \leq y \leq 2$ en $(x, 0)$ met $0 \leq x < 1$; lokale minima 0 in $(x, 0)$ met $1 < x \leq 2$;
 globaal minimum $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ in $(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$;
 globaal maximum $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ in $(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$.

3. lokaal minimum $f(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}) = -\frac{1}{27}a^3$ als $a > 0$;
 lokaal maximum $f(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}) = -\frac{1}{27}a^3$ als $a < 0$;
 geen extreem als $a = 0$.
4. globaal minimum $f(0,0) = 10$; globaal maximum $f(0,1) = 23$;
 lokaal maximum $f(1,0) = 18$.
5. a) lokaal minimum $f(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) = -\frac{125}{27}$; b) geen extremen;
 c) lokaal maximum $f(1,0) = 4$.
- §6.15 1. globale maxima $f(1,0) = f(-1,0) = f(0,1) = 1$; globaal minimum $f(0,-1) = -1$;
 lokale minima $f(-\frac{1}{3}\sqrt{5}, \frac{2}{3}) = f(\frac{1}{3}\sqrt{5}, \frac{2}{3}) = 23/27$.
2. globaal minimum $f(\frac{260}{113}, \frac{-15}{113}, \frac{75}{113}) = -\frac{650}{113}$.
3. 3. 4. lokaal maximum $f(2,1, \frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$. 5. 2ab.

Vraagstukken (§6.16)

3. nee; ja; nee.
4. onjuist.
7. f is niet continu in $(0,0)$.
10. a) f is niet continu in $(0,0)$; b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; c) $\frac{\partial f}{\partial x}$ is niet continu in $(0,0)$.
11. f is differentieerbaar in $(0,0)$.
12. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ bestaat niet voor $y \neq 0$;
 c) f is differentieerbaar in $(0,0)$.
13. $(1, -3, -1)$.
18. $3x - y + z = 1$.
19. a) $\sqrt{x^4 + y^2} = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}y^2 + R_2(x,y)$;
 b) $\ln(y + \sin x) = y - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi)^2 - \frac{1}{2}y^2 + R_2(x,y)$;
 c) $e^x \cos(xy) = 1 + x - 4x^2 + R_2(x,y)$.
20. $x \sin y = 1 + (x-1) - \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}\pi)^2 + R_2(x,y)$;
 $R_2(x,y) = \frac{1}{3!}[-3 \sin \eta \cdot (x-1)(y - \frac{1}{2}\pi)^2 - \xi \cos \eta \cdot (y - \frac{1}{2}\pi)^3]$, waarin
 $(\xi, \eta) = (1 + \vartheta(x-1), \frac{1}{2}\pi + \vartheta(y - \frac{1}{2}\pi))$ voor zekere $\vartheta \in (0,1)$.
21. $t_1(x,y,z) = x + 2y$.
22. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -2$; $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = -2$.
23. $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{p}{R}$; $dT = \frac{V}{R}dp + \frac{p}{R}dV$.
24. $(\frac{\partial S}{\partial p})_V = \frac{C_V}{p}$; $(\frac{\partial S}{\partial p})_T = \frac{C_V - C_P}{p}$.
25. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}}{2(x-y)}$;
 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{4(x-y)^2} - \frac{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}}{2(x-y)^3}$.

26. a) $\frac{\partial x}{\partial u} = v \cos w$; $\frac{\partial x}{\partial v} = u \cos w$; $\frac{\partial x}{\partial w} = -uv \sin w$;
 $\frac{\partial y}{\partial u} = v \sin w$; $\frac{\partial y}{\partial v} = u \sin w$; $\frac{\partial y}{\partial w} = uv \cos w$;
 $\frac{\partial z}{\partial u} = u$; $\frac{\partial z}{\partial v} = -v$; $\frac{\partial z}{\partial w} = 0$.
- b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v \cos w}{u^2 + v^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v \sin w}{u^2 + v^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u}{u^2 + v^2}$;
 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u \cos w}{u^2 + v^2}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u \sin w}{u^2 + v^2}$; $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{-v}{u^2 + v^2}$;
 $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\sin w}{uv}$; $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\cos w}{uv}$; $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$.
27. a) $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi$; $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi$; $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}$.
28. $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = \frac{1}{3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, -2) = -\frac{1}{27}$.
29. $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos^3 \varphi$; $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin^3 \varphi$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r}$;
 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 2r \cot 2\varphi \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}$.
30. lokaal minimum $f(1,0) = 9$.
31. globaal minimum $f(0,0) = 0$;
 globale maxima $f(2, \pm 2\sqrt{2}) = 14$.
32. a) lokaal maximum 1 in $(0,0)$.
 b) globale minima $-\frac{1}{4}$ in $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$;
 globaal maximum 1 in $(0,0)$.
33. globaal minimum $f(1,0) = -1$;
 globaal maximum $f(4,4) = 32$;
 lokaal maximum $f(0,4) = 24$.
34. globaal minimum $f(2,2) = -2$;
 globaal maximum $f(0,2) = 4$;
 lokaal minimum $f(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}) = -\frac{9}{64}$;
 lokaal maximum $f(2, \frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$.
35. globaal minimum $f(0,1) = -5$;
 globaal maximum $f(2,2) = 12$;
 lokaal maximum $f(0,0) = 0$.
36. globale maxima 2^{19} in $(8,8)$ en $(-8,-8)$;
 globale minima -2^{18} in $(-8,8)$ en $(8,-8)$.
37. globale minima 0 in (x,y) met $y = x^2$,
 $0 \leq x \leq 2$;
 globaal maximum $\sqrt{\frac{1}{2}}e$ in $(1, \frac{3}{2})$.
38. a) globaal minimum $f(-3,3) = -2e^6$;
 b) globaal minimum $f(-3,3) = -2e^6$,
 lokale minima $f(-2,0) = f(0,2) = 0$,
 lokaal maximum $f(0,0) = 4$,
 globale maxima $f(-6,0) = f(0,6) = 16e^6$.
 c) globaal minimum $f(-3,3) = -2e^6$,
 lokaal maximum $f(0,0) = 4$,
 globale maxima $f(-6,0) = f(0,6) = 16e^6$.
39. 5.

Hoofdstuk 7

Oefeningen

- §7.1. 1. $y = \arctan(x) + \frac{1}{4}\pi$. 2. $y = d_2 + \int^x f(t)dt$.
 3. $x = C$; $y = \frac{1}{2}x^2 + C$. 4. $y = C$; $y = \int_1^d Ce^x$.
 5. a) 2, lineair; b) 2, niet lineair; c) 4, niet lineair; d) 2, niet lineair;
 d) 3, lineair.
- §7.2. 1. a) $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $g_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{24}x^6$;
 b) $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = 1 + x^2$, $g_2(x) = 1 + x^2 - x \ln(1 + x^2) + 2x - 2 \arctan x$.
 2. a) $g(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 + (g(t))^2} dt$; b) $g_1(x) = \frac{3}{5}(x^{\frac{5}{3}} - 1)$; c) $x^2 + y^2 = C$.
- §7.3. 1. $y(x_0 + h) = \frac{(2 + h\alpha(x_0))y(x_0) + h(\beta(x_0) + \beta(x_0 + h))}{2 - h\alpha(x_0 + h)}$; nee;
 $y(h) = \frac{h^2 + h + 2}{2 - h} = 1 + h + h^2 + \frac{1}{2}h^3 + O(h^4)$; $y_1^H = 1 + h + h^2$;
 $y(\text{exact}) = 1 + h + h^2 + \frac{1}{3}h^3 + O(h^4)$; term met h^3 wijkt af; ja.
 3. $0 < h < \frac{1}{2500}$. 4. $n > 4$. 5. $n > 4$.
 2. $\epsilon_i = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2)\epsilon_{i-1} = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2)^i \epsilon_0$;
 $|\epsilon_i| < |\epsilon_0| \iff h < \frac{-2}{\lambda}$ en $\lambda < 0$.
- §7.4. 1. $x^2 - y^2 + 2(x - y) + C = 0$.
 2. a) $y = 1 - (\arcsin x + C)^2$, $y = 1$, $x = 1$, $x = -1$; b) $y = 1 - (\arcsin x + C)^2$.
 4. $4x + (y - x) \ln Cx = 0$, $C > 0$; $y = x$.
 5. a) $C(x + y)^3 = e^{\frac{x}{x+y}}$; b) $C(x + y)^3 = e^{\frac{x-1}{x+y}}$.
 6. $x^2 - 2xy + y = C$, $x^2 - 2xy + y = 1$.
 7. $x^2 \sin y + \sin x - \cos y = C$.
 8. $3x^2 + x^3y^2 + x^2y^2 = C$.
 9. $(x^2 + 3y^2)e^{y^2} = C$.
- §7.5. 1. a) $y = xe^{-x} + Ce^{-x}$. b) $y = \ln x + \frac{C}{\ln x}$. c) $y = \sin x + C \cos x$.
 d) $y = 1 + Ce^{-\sqrt{x-1}}$. 2. a) 8; b) $2e^{3x}$; c) $6x$.
- §7.6. 1. $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + C_3 e^{-x} \cos x + C_4 e^{-x} \sin x$.
 2. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 e^{-2x}$.
 3. $y = \sin x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.
 4. $y = -\frac{1}{4}x \cos 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.
 5. $y = \frac{1}{2} \sin x + \frac{5}{4} \cos x + C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$.
 6. $y = \frac{1}{2} x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$.
 7. $y = \frac{1}{4} x e^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.
 8. $y = e^x \sin 2x + C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$.
- §7.7. 1. $y = e^t(\frac{1}{2}t^2 - t)$. 2. $y = 3 \sinh t - \sin 2t$.

$$3. y = -\frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{20}\sin t + \frac{1}{10}e^{2t}\cos(\sqrt{5}t) - \frac{1}{20}\sqrt{5}e^{2t}\sin(\sqrt{5}t).$$

$$4. y = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t} + e^{-2t} + \frac{1}{3}u_3(t) + \frac{2}{3}u_3(t)e^{-3(t-3)} - u_3(t)e^{-2(t-3)}.$$

Vraagstukken (§7.8)

1. c) $g_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g_2(x) = 2\ln(1 + \frac{1}{4}x^2)$.

3. $y_1^H = 1 + \frac{1}{2}h^2$, $y_{\text{exact}}(h) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}h^2} = 1 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{4}h^4 + O(h^6)$; term met h^4 wijkt af; theorie voorspelt fout $O(h^3)$.

4. $ye^y = Cx$.

5. $y = \frac{-4}{2x + \sin 2x + C}$, $y = 0$.

6. $2x^2y - \frac{1}{2}y^2 = C$.

7. $e^{x(1+y)} + y = C$.

8. $x + y = C \cos y$.

9. $y - x = Ce^{\frac{-2x}{x-y}}$.

10. $x^2 + y^2 = Cy^3$ en $y = 0$.

11. $y = -x - 2 + Ce^x$.

12. $x + 2y + 3\ln|x+y-2| = C$; $x + y = 2$.

13. $\cos y = Ce^{-\sin x} - 1$.

14. $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}$.

15. $x + y + 1 = Ce^{\frac{x+2}{x+y+1}}$.

16. $y = -\frac{\cos x}{x^2} + C_1x^{-1} + C_2x^{-2}$.

17. $x^3 + x \sin y + y^2 = C$.

18. $\frac{1}{3}x^3 + 4x^2y + 6xy^2 + \frac{2}{3}y^3 = C$.

19. $y = (-\ln|\sin(a-x)| + C) \frac{1}{\cos(a-x)}$.

20. $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + xe^x(C_3 \sin x + C_4 \cos x)$.

21. $y = e^{\frac{1}{2}x} \{C_1 \sin \frac{1}{2}x\sqrt{7} + C_2 \cos \frac{1}{2}x\sqrt{7}\} + 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 45x^2 - 15x + \frac{75}{2}$.

22. $y = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 + C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$.

23. $xye^{xy} + x + y = C$.

24. $\frac{2}{3}x^3y^{-\frac{3}{2}} - 2y^{-\frac{1}{2}} = C$.

25. $y = x \ln x - 1 + 3x$, $0 < x < \infty$.

26. $y = \tan(x + \frac{\pi}{4} - 2)$, $2 - \frac{3}{4}\pi < x < 2 + \frac{\pi}{4}$.

27. $y = x^2 + 2xe^{x+1}$, $-\infty < x < \infty$.

28. $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{2\pi}{x}$, $0 < x < \infty$.

$$29. y = \frac{1}{\sin x} \left(\frac{5}{4} \pi - \frac{1}{2} \sqrt{2} - x \right), \pi < x < 2\pi.$$

$$30. y = \sqrt{\frac{1}{x} \left(\ln x + \frac{1}{e} + 1 \right)}, e^{-1-\frac{1}{e}} < x < \infty.$$

$$31. y = \frac{1}{4} e^x \sin 4x, y = -\frac{1}{4} e^x \sin 4x.$$

$$32. y = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x.$$

$$33. y = -\frac{1}{18} \sin 2x + \frac{1}{9} \sin x.$$

$$34. \lambda = k^2 \pi^2, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; y = C \sin k\pi x.$$

$$35. x^2 y + \ln |x| = C \text{ en } x = 0 \text{ en } y = 0.$$

$$36. g(x) = \begin{cases} x - 1 & , 0 \leq x < \infty, \\ 1 - x - 2e^{-x} & , -\infty < x < 0. \end{cases}$$

$$37. y = \begin{cases} 4 - 4 \cos t, & 0 \leq t < 2 \\ t + 2 - 4 \cos t - \sin(t - 2), & t \geq 2 \end{cases}$$

$$38. \pm x = \sqrt{1 - y^2} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

$$39. \omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{I} t}.$$

$$40. y = \frac{9 - Ce^{-\frac{4}{5}x}}{1 - Ce^{-\frac{4}{5}x}}; 9.$$

$$41. a) I = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}; b) \frac{Q_0^2}{2C}.$$

$$42. a) I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}; b) \frac{LI_0^2}{2}.$$

$$43. v = \frac{mg}{6\pi\eta a} \left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta a}{m}t} \right), g \text{ is de versnelling van de zwaartekracht.}$$

$$44. v = \sqrt{\frac{2}{3}g \left(x - \frac{x_0^3}{x^2} \right)}.$$

Hoofdstuk 8

Oefeningen

§8.1. Alle gebieden zijn regulier.

$$1. B = [0,1] \times [0,2]; \varphi_1(x) = x^2; \varphi_2(x) = 2x; \psi_1(y) = \frac{1}{2}y; \psi_2(y) = \sqrt{y}, \\ 0 \leq y \leq 1, \psi_2(y) = 1, 1 < y \leq 2.$$

$$2. B = [0,2] \times [0,1]; \varphi_1(x) = \frac{1}{2}x; \varphi_2(x) = x, 0 \leq x \leq 1, \varphi_2(x) = 1, \\ 1 < x \leq 2; \psi_1(y) = y; \psi_2(y) = 2y.$$

$$3. B = [0,1] \times [0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]; \varphi_1(x) = 0; \varphi_2(x) = x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \varphi_2(x) = \sqrt{1 - x^2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} < x \leq 1; \psi_1(y) = y; \psi_2(y) = \sqrt{1 - y^2}.$$

$$4. B = [0,8] \times [0,4]; \varphi_1(x) = 0; \varphi_2(x) = x, 0 \leq x \leq 4, \varphi_2(x) = \frac{16}{x},$$

$$4 < x \leq 8; \psi_1(y) = y; \psi_2(y) = 8, 0 \leq y \leq 2, \psi_2(y) = \frac{16}{y},$$

$$2 < y \leq 4.$$

$$\S 8.2. \quad 1. \frac{1}{4}. \quad 2. \frac{13}{8}. \quad 3. 2(e-1). \quad 4. 0. \quad 5. \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{8}\pi; 8 + 16 \ln 2. \quad 7. \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

$$\S 8.3. \quad 1. \frac{3}{4}(e - \frac{1}{e}). \quad 2. \frac{3}{4}. \quad 3. \frac{287}{6}.$$

$$\S 8.4. \quad 1. \frac{1}{4}. \quad 2. \frac{3}{16}\pi. \quad 3. 1. \quad 4. \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}.$$

$$\S 8.5. \quad 1. \frac{16}{3}; \text{ja}. \quad 2. \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \quad 3. \frac{4}{15}\pi. \quad 4. \frac{1}{15}. \quad 5. 4\pi. \quad 6. \frac{26}{3}.$$

$$7. \frac{2}{15}\pi(4\sqrt{2} - 1).$$

$$\S 8.6. \quad 1. \frac{4}{3}\pi R^3. \quad 2. 2\pi^2 ab^2. \quad 3. \frac{4}{15}\pi. \quad 4. \pi(1 - \frac{1}{a}); 2 \ln a. \quad 5. \frac{\pi}{30}(8 - 3\sqrt{3}).$$

$$6. \pi(4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \ln \frac{3}{4}).$$

$$\S 8.7. \quad 1. \frac{16}{3}a^5c. \quad 2. \text{a) } (0, 0, \frac{2}{3}); \text{b) } \frac{2}{9}\pi; \text{c) } \frac{2}{9}\pi.$$

$$\S 8.8. \quad 1. \frac{1}{4}. \quad 2. \frac{5}{2}\pi.$$

Vraagstukken (§8.9)

$$1. \frac{2301}{5}.$$

$$2. \frac{1}{4}\pi(e-1).$$

$$3. \frac{\pi}{96}.$$

$$4. e-1.$$

$$5. 2 - \frac{1}{2}\pi.$$

$$6. \frac{\pi\sqrt{3}}{16} - \frac{9}{32}.$$

$$7. \frac{32}{9}.$$

$$8. \frac{1}{32}(\pi-2).$$

$$9. \frac{21}{4}(e^4 - e^{\frac{1}{4}}).$$

$$10. \frac{3}{2}.$$

$$11. \frac{9}{2} \ln 3 - 6 \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$12. \frac{89}{60}.$$

$$13. \frac{64}{3}\pi.$$

$$14. \pi(2 \ln 2 - 2 + \pi).$$

$$15. \frac{47}{60}\pi.$$

$$16. \frac{3}{8}\pi.$$

$$17. \frac{32\pi}{105}.$$

$$18. \frac{1}{4}\pi.$$

$$19. \frac{2}{15}\pi.$$

$$20. \frac{32}{105}\pi a^3.$$

$$21. (0, \frac{4a^2 + b^2}{2a\pi}, 0).$$

$$22. \text{a) } \frac{5}{2}\pi; \text{b) } \frac{1}{2}\pi.$$

$$23. \frac{8}{15}\pi R^5; \text{b) } \frac{28}{15}\pi R^5.$$

$$24. (0, 0, -\frac{4}{1113}).$$

$$25. \frac{1}{60}\pi ch^2 a^4 \text{ als } \rho(x,y,z) = cz.$$

Hoofdstuk 9

Oefeningen

$$\S 9.1. \quad 1. 4\pi\sqrt{a^2 + b^2}. \quad 3. (\pi R, \frac{4}{3}R). \quad 4. 2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^3; \frac{8}{3}\pi^3 b^3.$$

$$\S 9.2. \quad 1. x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r; 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \varphi, -\frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \varphi, \frac{1}{2}\sqrt{2}); \text{naar de } z\text{-as toe gericht.}$$

$$2. x = u, y = v, z = \frac{1}{3}(1 - u - 2v); 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{1}{2}(1 - u);$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3); \text{naar boven gericht.}$$

$$3. x = r \cos^3 \varphi, y = r \sin^3 \varphi, z = \frac{1}{2}r; 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$\frac{\sin 2\varphi}{|\sin 2\varphi|} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 2\varphi}} (-\sin \varphi, -\cos \varphi, \sin 2\varphi); \text{ naar binnen gericht.}$$

4. $x = 4 \cos \varphi, y = 4 \sin \varphi, z = \zeta; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \zeta \leq 4;$

$(\cos \varphi, \sin \varphi, 0);$ naar buiten gericht.

5. $x = 3 + \cos \varphi, y = 2 + \sin \varphi, z = \zeta; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \zeta \leq 5 + \cos \varphi + \sin \varphi;$

$(\cos \varphi, \sin \varphi, 0);$ naar buiten gericht.

§9.3. 1. $4\pi R^2.$ 2. $4\pi^2 ab.$ 3. $\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1).$ 4. $\frac{1}{6}\pi(27 - 5\sqrt{5}).$ 5. $\pi R^2.$

6. $(0, 0, \frac{1}{2}).$ 7. $4\pi abc.$ 8. $-100.$

§9.4. 1. $128\pi; 192\pi.$ 2. $\frac{3}{2}.$ 4. $2\pi R^2 h.$

§9.5. 1. $0; 0; -2\pi.$ 2. $4\pi.$ 3. $-\frac{1}{3}.$ 4. $\frac{3}{8}\pi a^2.$

Vraagstukken (§9.7)

1. $\sqrt{65} + \frac{1}{8}\ln(8 + \sqrt{65}).$

2. $\frac{1}{2}a.$

3. $\frac{3}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} \ln(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}); 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}; -4.$

4. $0.$

5. $\frac{5}{12}.$

6. $\frac{1}{10}\sqrt{2} e^{\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{5}.$

8. $\frac{\pi^2}{16}.$

9. $4\pi - 8.$

10. $2\pi(1 - \frac{1}{e}).$

11. $4\pi; (0, 0, \sqrt{3} - \frac{1}{3}); 8\pi.$

12. $\frac{1}{2}\pi.$

13. $\pi\sqrt{2} - \pi \frac{\sqrt{1+a^4}}{a^2} + \pi \ln(a^2 + \sqrt{1+a^4}) - \pi \ln(1 + \sqrt{2}).$

14. $\frac{32\pi}{5}.$

15. $-\frac{15}{4}.$

16. $\frac{11}{6}\pi.$

17. $2.$

18. $-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}.$

19. $\frac{1}{8}\pi.$

20. $\frac{4}{3}\pi \frac{a+b+c}{\sqrt{abc}}; \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.$

21. $2\pi.$

23. $\frac{32}{3}.$

24. $-\pi.$

25. $12\pi; 8\pi.$

26. $-6\pi.$

27. $\frac{1}{4}\pi; -\pi.$

28. $\frac{32}{3}.$

29. $-\frac{12}{5}.$

30. $\frac{3}{2}\pi.$

Hoofdstuk 10

Oefeningen

§10.1 1. divergent, divergent.

§10.2 1. convergent. 2. divergent. 3. convergent. 4. convergent.

5. convergent. 6. convergent.

7. $15(\ln 2)^{-\frac{1}{15}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} (\ln n)^{-\frac{16}{15}} \leq \frac{1}{2}(\ln 2)^{-\frac{16}{15}} + 15(\ln 2)^{-\frac{1}{15}}, \text{ of}$

$15,37 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} (\ln n)^{-\frac{16}{15}} \leq 0,74 + 15,37.$

8. $a > 1$ convergent, $a \leq 1$ divergent. 9. a) $\ln 2$; b) 2.

10. $p = 5$; $1,1976 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < 1,2057$.

§10.3 1. absoluut convergent. 2. absoluut convergent. 3. absoluut convergent.
4. divergent. 5. absoluut convergent. 6. divergent.
7. absoluut convergent.

§10.4 1. relatief convergent. 2. divergent. 3. absoluut convergent.
4. relatief convergent.

§10.5 1. convergent als $|x| > \sqrt{2}$ en als $x = 0$; divergent als $|x| \leq \sqrt{2}$, $x \neq 0$;
 $\frac{x^2-1}{x}$ als $|x| > \sqrt{2}$, 0 als $x = 0$. 2. a) 1; b) 1; c) 0; d) ∞ ; e) $\frac{1}{2}$.

§10.6 2. a) $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots$

b) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots$

c) $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots$

d) $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$

3. a) $-1 < x < 1$; $\frac{2x}{(1-x)^3}$.

b) $-1 \leq x \leq 1$; $(1-x)\ln(1-x) + x$ als $-1 \leq x < 1$, 1 als $x = 1$.

c) $-\infty < x < \infty$ $e^x - \frac{e^x-1}{x}$ als $x \neq 0$

0 als $x = 0$.

d) $-\infty < x < \infty$; $2 \cos x - 2 - x \sin x$.

§10.7 1. a) 1,6487; b) 0,1736; c) 0,5108. 2. a) 0,7468; b) 0,9461; c) 0,4969.

3. $a_n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{2^{2k} k! (n+k)!} x^{n+2k}$.

Vraagstukken (§10.8)

1. a) convergent. b) divergent. c) convergent.

2. a) convergent. b) divergent. c) convergent.

3. a) convergent. b) convergent. c) divergent.

8. a) relatief convergent. b) relatief convergent. c) divergent.

9. a) absoluut convergent. b) absoluut convergent. c) relatief convergent.

10. a) absoluut convergent. b) relatief convergent. c) absoluut convergent.

11. a) absoluut convergent. b) absoluut convergent. c) absoluut convergent.

12. $\alpha > 1$ absoluut convergent; $0 < \alpha \leq 1$ relatief convergent; $\alpha \leq 0$ divergent.

13. a) (i) absoluut convergent; (ii) absoluut convergent; (iii) absoluut convergent;
(iv) relatief convergent of divergent (geen beslissing); (v) divergent.

14. a) 1; b) e; c) e^{-1} .

15. a) $-1 \leq x \leq 1$; $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})\ln(1+x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$, $x \in (-1,0) \cup (0,1]$; 0, $x = 0$; $\frac{3}{4}$, $x = -1$.

b) $-\infty < x < \infty$; $6x \sin x + 3x^2 \cos x$.

c) $-1 < x < 1$; $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

16. a) $-\infty < x < \infty$; $x(x+1)e^x$. b) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$; $\frac{2x}{1-2x} + \ln(1-x)$.
c) $-\infty < x < \infty$; $e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$.
17. a) $x > -\frac{1}{2}$; $(x+1)^2(2x+1)$. b) $0 < x < 2$; $\frac{2(x-1)^2}{(2-x)^3}$.
c) $-\infty < x < \infty$; $\frac{1}{2}(e^{e^x} + e^{e^{-x}})$.
18. a) $-\infty < x < \infty$; $(x+3)e^x - 3$. b) $x > -\frac{3}{2}$; $(x+1) + \ln(x+2)$.
c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $(\frac{\cosh x}{\cosh x - 1})^2$.
19. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. b) $-2 \leq x \leq 0$. c) $x \geq 0$.

16. a) $-\infty < x < \infty$; $x(x+1) < 0$ b) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
17. a) $x > \frac{1}{2}$ b) $0 < x < 1$ c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
18. a) $-\infty < x < \infty$; $(x+3)^2 < 0$ b) $x > -\frac{1}{2}$ c) $(x+3)^2 < 0$ d) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
19. a) $15 \leq 10$ b) $-3 < x < 0$ c) $x \geq 0$

Trefwoordenlijst

a

absolute fout 6.12.6
 absolute waarde 1.3.2
 absoluut convergent (voor oneigenlijke
 integralen) 5.12.7; 5.13.5
 absoluut convergent (voor reeksen)
 10.3.1
 adherent punt 6.4.10
 afbeelding 1.9.3
 afbreekfout per integratiestap 7.3.5
 afgeleide 4.1.2; 6.10.2
 afgeleide begrippen 1.5
 afgeleide functie 4.1.5
 afhankelijk 6.1.4c; 7.5.4
 afsluiting 6.4.13
 afstand 2.5.4d; 6.1.7b; 6.16.5
 d'Alembert, quotiëntenkenmerk van 10.3.6
 algebraïsche vergelijking 2.11.1
 algemene oplossing van een DV 7.1.2c
 alternerende reeks 10.4.1
 arccos 1.15.2
 arccot 1.15.4
 Archimedes, axioma van 1.2.2e
 arcsin 1.15.1
 arctan 1.15.3
 argument 2.6.2
 associatieve wet 1.2.1
 asymptoten 4.6.9

b

basis 6.1.4e
 basisbegrippen 1.5
 basis van een logaritme 1.13.1
 beeld 1.9.3
 beeldpunt 2.3.1
 beginvoorwaarde 7.1.6
 beginwaardeprobleem 7.1.6
 begrensde functie 1.12.1; 6.7.7
 begrensde verzameling 1.3.4; 6.4.14
 benedengrens (van een verzameling) 1.3.4
 bepaalde integraal 5.3.8c
 bereik 1.9.3
 Bernoulli, ongelijkheid van 1.8.4b
 Bessel, DV van 10.7.4
 Besselfunctie 10.7.4
 bewering 1.6.1
 bewijs door omkering 1.7.2b
 bewijs uit het ongerijmde 1.7.2c
 bijectie 1.10.3
 binomiaalcoëfficiënten 1.11.8a
 binomiaalreeks 10.6.6g
 binomialvergelijking 2.12.1
 binomium van Newton 1.11.7
 bolcoördinaten 8.6.7
 booglengte 9.1.4
 bovengrens (van een verzameling) 1.3.4
 bovengrens (van sommatie) 1.2.4
 bovenintegraal A.5.4
 bovensom A.5.1
 breuksplitsing 5.6.4
 brondichtheid 9.6.1e
 buigpunt 4.6.10g

c

Cartesisch produkt 1.9.1
 Cauchy-Schwarz, ongelijkheid van 6.1.8
 Cauchy, wortelkenmerk van 10.3.5
 cilindercoördinaten 8.6.4
 circulatie 9.5.2
 circulatiedichtheid 9.6.1b
 codomein 1.9.3
 coëfficiënten 2.10.1; 7.1.9; 10.5.1
 cofactor 6.3.4e
 combinatie 1.11.4
 commutatieve wet 1.2.1
 complexe vlak 2.3.1
 complex geconjugeerde 2.4.1
 complexe getallen (\mathbb{C}) 1.1; 2.1
 component 6.1.5; 6.5.1
 componentfunctie 6.1.5; 9.1.2; 9.2.1
 concaaf 4.6.8e
 conjugatie 2.14.3
 conjunctie 1.6.3
 conservatief krachtenveld 9.6.3
 continu (in een punt) 3.2.2; 6.7.1
 continu (op een interval) 3.7.8
 continu (op een verzameling) 6.6.7
 continu differentieerbaar 4.1.5; 6.10.11
 convergent (voor oneigenlijke integralen)
 5.10.1; 5.11.1; 5.11.3
 convergent (voor reeksen) 10.1.2
 convergent (voor rijen) 3.11.1
 convergentiefactor 4.11.5
 convergentiegebied 10.5.1
 convergentie-interval 10.5.7
 convergentiesnelheid 4.11.5
 convergentiestraal 10.5.6
 convexe functie 4.6.8a
 convexe veelhoek 1.17.19
 convolutie 8.8.7a
 convolutieregel 8.8.7b
 corrector 7.3.3II
 cosecans (cosec) 1.14.3
 cosh 1.16
 cosinus (cos) 1.14.1
 cotangens (cot) 1.14.3
 coth 1.16
 cycloïde 6.10.16b
 cyclometrische functies 1.15

d

dalende functie 1.12.3
 deelbaarheid van polynomen 2.10.2
 definitie 1.5
 definitieverzameling 1.9.3
 delingsalgoritme 2.10.2
 deltafunctie van Dirac 5.16.6c
 De Moivre, formules van 2.7.4
 dempingsstelling 5.15.3
 Descartes, folium van 6.13.7b
 determinant (2×2) 6.3.2a
 determinant (3×3) 6.3.4a
 determinant van Hesse 6.14.9
 determinant van Wronski 7.5.4
 differentiaal 4.4.5; 6.10.2; 6.12.5
 differentiaalvergelijking 7.1.1

- differentieerbaar (in een punt) 4.1.2;
 6.10.2
 differentieerbaar (op een interval) 4.1.11
 differentieerbaar (op een verzameling)
 6.10.5
 discontinu 3.2.3c
 discriminant 2.11.7
 disjunctie 1.6.2
 distributieve wet 1.2.1
 divergent (voor oneigenlijke integralen)
 5.10.1; 5.11.1; 5.11.3
 divergent (voor reeksen) 10.1.2
 divergent (voor rijen) 3.11.1
 divergentie van een vectorveld 6.9.4a;
 9.6.1
 domein 1.9.3
 driehoeksongelijkheid 2.5.5g; 6.1.10
 driehoek van Pascal 1.11.8a
 drievoudige integraal 8.5.1
 dubbelpunt 6.13.7b
- e**
- eenduidigheidsstelling (voor DV) 7.2.2;
 7.2.7
 eenduidigheidsstelling (voor machtreeksen)
 10.6.5
 eenheidscirkel oef. 2.5.2
 eenheidsmatrix 6.2.7a
 eenheidsnormaalvector 9.2.1
 eenpuntsiteratie 4.11.1
 eindig-dimensionaal 6.1.4d
 elementaire functies 1.13 e.v.
 equivalentie 1.6.5
 Euler, formules van 2.8.6
 Euler, gammafunctie van 5.13.8
 Euler-Mascheroni, constante van 10.8.4
 Euler, methode van 7.3.2
 Euler, stelling van oef. 7.4.3
 even functie 1.12.5
 exacte DV 7.4.7
 existentiëlestelling (voor DV) 7.2.2; 7.2.7
 exponentiële functie (exp) 1.13.2; 2.8.1
 exponentiële vergelijking 2.13.1
 extrapolatie 4.10.6c
 extreme waarden 3.13; 6.14
 extreme waarden onder een nevenvoor-
 waarde 6.15
- f**
- factorstelling 2.11.2
 faculteit 1.2.5
 Fibonacci, getallen van 1.12.11b
 flux 9.3.10; 9.4.4
 folium van Descartes 6.13.7b
 Fubini, stelling van 8.2.5; 8.5.4
 functie 1.9.3
 functiereeks 10.5.1
 functionaaldeterminant 6.13.3; 8.3.3; 8.5.4
 functionaalmatrix 6.10.3
 fundamenteelstelsel 7.5.4
- g**
- gammafunctie van Euler 5.13.8
 Gauss, integraalstelling van 9.4.3
 Gauss-vlak 2.3.1
 gedempte trilling 7.6.6b
 gehele getallen (\mathbb{Z}) 1.1
 gehele rationale functie 5.6.1
 gelijkheid (van 2 complexe getallen) 2.1.2
 gelijkheid (van 2 functies) 1.10.1
 gelijkheid (van 2 matrices) 6.2.6
 gelijkvormigheidsstelling 5.15.1
 gepuncteerde verzameling 2.14.5
 gereduceerde r-omgeving 3.1.2b; 6.4.2b
 gereduceerde DV 7.5.1
 gesloten (onder een bewerking) 1.1
 gesloten cirkelschijf 6.4.9b
 gesloten interval 1.3.1; 6.4.9b
 gesloten oppervlak 9.4.2b
 gesloten verzameling 6.4.8
 gesloten (volle) bol 6.4.9b
 gewone differentiaalvergelijking 7.1.2a
 gladde kromme 6.10.14b; 9.1.2
 glad oppervlak 9.2.1
 globaal maximum 3.13.2; 6.14.2
 globaal minimum 3.13.2; 6.14.2
 goniometrische functies 1.14
 graad (van een polynoom) 2.10.1
 gradiënt 6.9.2a
 gradiëntvectorveld 6.9.2b
 grafiek 1.12.7; 6.5.3
 Green, integraalstelling van 9.5.5
 grofheid 5.1.2b; 8.1.2b
 grondeigenschappen 1.5
 grondtal (van logaritme) 1.13.1
 grootste benedengrens 1.3.5
- h**
- harmonische oscillator 7.6.6a
 harmonische reeks 10.1.3c
 herhaalde integraal 8.2.5
 Hermite, polynomen van 4.12.9
 Hesse, determinant van 6.14.9
 Heun, methode van 7.3.3
 hoek (tussen 2 vectoren) 6.1.9
 hogere partiële afgeleiden 6.8.5
 homogene DV 7.4.5b
 homogene functie 7.4.5a
 hoofdstelling van de algebra 2.11.3
 hoofdstelling van de integraalrekening 5.2.5
 hoogtekaart 6.5.6
 hoogtelijnen 6.5.6
 horizontale asymptoot 4.6.9b
 l'Hospital, regel van de 4.9.6
 hyperbolische functies 1.16
- i**
- identieke afbeelding 1.9.5b; 6.2.3e
 imaginair deel (Im) 2.1.1
 imaginaire as 2.3.1
 implicatie 1.6.6
 impliciet 6.13.5
 impliciet differentiëren 6.13.5b
 impliciete functiestelling 6.13.6; 6.13.8b
 inductieveronderstelling (IV) 1.8.2
 infimum 1.3.5
 injectie 1.10.3
 inhoud 8.5.1
 insluitstelling 3.5.3
 instabiel 7.3.8
 integraal 5.1.2e; 8.1.2e
 integraal kenmerk 10.2.6
 integraalkromme 7.1.2b
 integraalstelling van Gauss 9.4.3
 integraalstelling van Green 9.5.5
 integraalstelling van Stokes 9.5.1
 integraalvergelijking 7.2.5
 integrand 5.1.2e; 8.1.2e
 integreerbaar 5.1.2e; 8.1.2e
 integreerbaarheidsvoorwaarde 7.4.7; 9.6.4
 integrerende factor 7.4.9

interpolatie 4.10.1
 interval 1.3.1
 intrinsieke grootheden 6.9.5
 inverse 1.2.1; 2.14.4; 6.2.14
 inverse (van een lineaire vergelijking) 6.2.5
 inverse functiestelling 6.13.2
 inverse interpolatie 4.10.8
 inverse Laplace getransformeerde 5.14.2
 inverteerbare matrix 6.2.14
 inwendige (van een verzameling) 6.4.4
 inwendig produkt 6.1.6
 inwendig punt 3.2.3d; 6.4.4
 isoclinen 7.1.7b
 isomorfie 2.2.4
 iteratieproces 4.11.1

j

Jacobi, matrix van 6.10.3
 Jacobiaan 6.13.3; 8.3.3

k

karakteristieke vergelijking 7.6.2
 kettinglijn 1.17.36
 kettingregel 4.2.5; 6.11.5
 kleinste bovengrens 1.3.5
 kleinste kwadraten, methode van 6.14.12
 kolomvector (van een matrix) 6.2.6
 koordentrek 9.1.3
 kritische demping 7.6.6b
 kromme 6.10.14a
 kromming 9.7.7b
 kromtestraal 9.7.7c
 kwadratische convergentie 4.11.5
 kwadratuurformule 5.17.5

l

Lagrange, interpolatieformule van 4.10.2
 Lagrange, multiplicatorenmethode van 6.15.3
 Lagrange, restterm van 4.7.7b
 Landau, O-symbool van 4.8.3
 Laplace getransformeerde 5.14.2
 Laplace, operator van 6.16.27
 Leibniz, kenmerk van 10.4.2
 Leibniz, regel van 4.2.3
 lengte van een vector 6.1.7a
 lichaam 1.2.1
 limiet voor $x \rightarrow a$ 3.1.3; 3.8.1; 3.8.2
 limiet voor $x \rightarrow a$ 6.6.2
 limiet voor $x \rightarrow \infty$ 3.4.2
 limiet voor $x \rightarrow -\infty$ 3.4.3
 limietkenmerk (voor oneigenlijke integralen) 5.12.4; 5.13.4
 limietkenmerk (voor reeksen) 10.2.3
 lineaire afbeelding 6.2.1
 lineaire combinatie 6.1.4a
 lineaire convergentie 4.11.5
 lineaire DV 7.1.9
 lineaire variëteit 6.1.12c
 linearisering 4.4.1; 6.12.4
 linkerafgeleide 4.1.8
 linkerlimiet 3.3.3
 linkscontinu 3.3.6
 linksdifferentieerbaar 4.1.8
 Lipschitz-voorwaarde 7.2.2
 logaritmisches differentieren 4.2.7
 logaritmische functies 1.13.1
 logaritmische spiraal oef. 9.1.2
 logische omkering 1.6.6
 logische verbindingen 1.6.1

lokaal maximum 3.13.1; 6.14.2
 lokaal minimum 3.13.1; 6.14.2
 lijnintegraal 9.1.11c
 lijnelement 9.1.7

m

maaswijdte 5.1.2; 8.1.2b
 Machin, formule van 10.7.2b
 machtreeks 10.5.1
 Mac Laurin, formule van 4.7.7c
 majorante-minorantekenmerk (voor oneigenlijke integralen) 5.12.3; 5.13.3
 majorante-minorantekenmerk (voor reeksen) 10.2.2
 massa 8.7.1
 massadichtheid 8.7.1
 mathematische slinger 7.6.6
 matrix 6.2.6
 matrixprodukt 6.2.8
 maximum (van een functie) 3.13.1; 3.13.2; 6.14.2
 maximum (van een verzameling) 1.3.3
 meetkundige reeks 10.1.3a
 meetkundige rij 1.8.4a; 1.12.9c
 middelwaardestelling 4.5.3
 middelwaardestelling van de integraalrekening 5.2.10
 middelwaardestelling voor 2 functies 4.7.2
 minimum (van een functie) 3.13.1; 3.13.2; 6.14.2
 minimum (voor een verzameling) 1.3.3
 Möbiusband 9.2.2
 modulus 2.5.3
 De Moivre, formule van 2.7.4
 monotone functie 1.12.3
 monotone rij deelgebieden 8.8.2
 multiplicatieve inverse 1.2.1
 multiplicator 6.15.3
 multiplicatorenmethode van Lagrange 6.15.3

n

naar beneden begrensde functie 1.12.1
 naar beneden begrensde verzameling 1.3.4
 naar boven begrensde functie 1.12.1
 naar boven begrensde verzameling 1.3.4
 natuurlijke basis 6.1.5
 natuurlijke getallen (\mathbb{N}) 1.1
 natuurlijke logaritme 1.13.1; 5.9.1
 negatie 1.6.4
 neutraal element 1.2.1
 Newton, binomium van 1.11.7
 Newton-Raphson, methode van 4.11.8
 niveaукromme 6.5.6
 niveauoppervlak 6.5.7
 noodzakelijk 1.7.4
 norm (van een matrix) 6.2.17
 normaal gebied 8.1.7c; 8.5.2c
 normaalvector 6.11.10
 nulafbeelding 6.2.3f
 nulmatrix 6.2.7b
 nulpolynoom 2.10.1
 nulpunt 2.11.1
 nulvector 6.1.2
 numerieke integratie 5.17 e.v.
 numerieke mulpuntsbepaling 4.10.9; 4.11.8

O

- omgekeerde bewering 1.6.6
- omhullende rechthoek 8.1.8
- omwentelingslichaam 8.6.6
- omwentelingsoppervlak 6.5.4; 8.6.6
- onafhankelijk 6.1.4c; 7.5.4
- onbepaalde coëfficiënten (methode der) 7.6.4
- onbepaalde integraal 5.3.8c
- ondergrens (van sommatie) 1.2.4
- onderintegraal A5.4
- ondersom A5.1
- oneigenlijke integraal 5.10.1; 5.11.1; 8.8.1
- oneigenlijke limiet 3.8
- oneven functie 1.12.5
- ongelijkheid van Bernoulli 1.8.4b
- ongelijkheid van Cauchy-Schwarz 6.1.8
- open bewering 1.6.1
- open cirkelschijf 6.4.7b
- open interval 1.3.1; 6.4.7b
- open verzameling 6.4.6
- open (volle) bol 6.4.7b
- ophefbaar oneigenlijke integraal 5.11.5e
- oplossing (van een DV) 7.1.2b
- oppervlak 6.5.2d; 9.2.1
- oppervlakte 8.1.2a; 8.1.6c; 9.3.2
- oppervlakte-element 8.3.5; 9.3.8
- oppervlakte-integraal 9.3.13c
- optelling 2.1.1; 2.14.1; 6.1.2
- orde (van een DV) 7.1.2b
- orderingsregels 1.2.2
- oriëntering 9.1.8
- origineel 1.9.3
- orthogonaal 6.1.9
- O-symbool van Landau 4.8.3

P

- parameterkromme 8.3.2; 9.2.1
- parametervoorstelling 6.1.12a
- parametrisering (van een kromme) 6.10.14a
- parametrisering (van een lijn) 6.1.12a
- parametrisering (van een oppervlak) 9.2.1
- parametrisering (van een vlak) 6.1.12b
- particuliere oplossing 7.1.4; 7.5.6
- partieel differentieerbaar 6.8.2
- partieel afgeleide 6.8.2
- partieële breuksplitsing 5.6.4
- partieële integratie 5.5.1
- partieële sommen 10.1.1
- partitie 5.1.2a; 8.1.2a
- Pascal, driehoek van 1.11.8a
- periodieke functie 5.16.4
- permutatie 1.11.1
- Picard-iteratie 4.11.1; 7.2.5
- plaatsvector 6.1.12a
- polynomen van Hermite 4.12.9
- polynoom 2.10.1
- poolcoördinaten 2.6.1; 8.4.1
- poolhoek 2.6.1
- predictor 7.3.3I
- primitieve 5.3.1
- produkt (van 2 matrices) 6.2.8c
- produktafbeelding 6.2.4e
- produktteken (II) 1.2.4

Q

- quotiëntenkenmerk van d'Alembert 10.3.6
- quotiëntpolynoom 2.10.2

R

- raaklijn 4.1.4; 6.10.14b
 - raakvlak 6.11.10
 - rand (van een oppervlak) 9.4.2b
 - rand (van een regulier gebied) 8.1.7b; 8.5.2b
 - randvoorwaarden 7.1.6
 - randwaardeprobleem 7.1.6
 - rationale functie 3.7.9; 5.6.1
 - rationale getallen (Q) 1.1
 - rechterafgeleide 4.1.8
 - rechterlimiet 3.3.2
 - rechtscontinu 3.3.5
 - rechtsdifferentieerbaar 4.1.8
 - rechtstreeks bewijs 1.7.2a
 - recursieve definitie 1.12.10
 - reductieformule 5.5.3
 - reeks 10.1.1
 - reële as 2.3.1
 - reële deel (Re) 2.1.1
 - reële getallen (IR) 1.1
 - regula falsi 4.10.9
 - regulier gebied 8.1.7a; 8.5.2a
 - relatief convergent (voor oneigenlijke integralen) 5.12.7; 5.13.5
 - relatief convergent (voor reeksen) 10.3.1
 - relatieve fout 6.12.6
 - restpolynoom 2.10.2
 - reststelling 2.10.5
 - restterm (in integraalvorm) 5.8.7
 - restterm (van Lagrange) 4.7.7b
 - richtingsafgeleide 6.8.2
 - richtingsvector 6.1.12
 - richtingsveld 7.1.7a
 - Riemann-integraal 5.1.2e; 8.1.2e
 - Riemann-integreerbaar 5.1.2e; 8.1.2e
 - Riemann-som 5.1.2d; 8.1.2d
 - Rolle, stelling van 4.5.1
 - r-omgeving 3.1.2a; 6.4.2a
 - rotatie 2.14.2
 - rotatie (van een vectorveld) 6.4.9b; 9.6.1b
 - ruimtecurve 6.10.14a
 - rij 1.12.8
 - rij van Fibonacci 1.12.11b
- S
- samengestelde afbeelding 1.10.6; 6.2.4c
 - samengestelde regel van Simpson 5.17.7
 - samengestelde trapeziumregel 5.17.6
 - scalarveld 6.5.8
 - scheiding der variabelen 7.4.2
 - scheve asymptoot 4.6.9b
 - schroeflijn oef. 9.1.1
 - secans (sec) 1.14.3
 - secantmethode 4.10.11c
 - separabele DV 7.4.2
 - Simpson, regel van 5.17.4
 - singuliere oplossing 7.1.4
 - sinh 1.16
 - sinus (sin) 1.14.1
 - snelheid 6.10.15
 - Snellius, brekingswet van 4.6.12c
 - som (van 2 matrices) 6.2.8a
 - som (van een reeks) 10.1.2
 - somfunctie 10.5.1
 - sommatie-index 1.2.4
 - somteken (Σ) 1.2.4
 - stabiel 7.3.8
 - standaardlimieten van functies 3.10.2
 - standaardlimieten van rijen 3.11.7

standaard Taylorontwikkelingen 4.8.8
 standaard Taylorreeksen 10.6.6
 stationair punt 4.6.1; 6.14.5
 stelsel vectoren 6.1.4a
 steunpunten 4.10.1
 steunvector 6.1.12a
 Stirling, formule van 10.5.9
 Stokes, integraalstelling van 9.5.1
 strikt dalende functie 1.12.3
 strikt monotone functie 1.12.3
 strikt stijgende functie 1.12.3
 strooiing 5.1.2c; 8.1.2c
 stuksgewijs gladde kromme 9.1.11b
 stuksgewijs glad oppervlak 9.3.13b
 stijgende functie 1.12.3
 substitutieregels 5.4.1; 8.3.4; 8.6.1
 successieve approximaties 7.2.5
 supremum 1.3.5
 surjectie 1.10.3

t

tangens (tan) 1.14.3
 tanh 1.16
 Taylor, stelling van 4.7.6; 6.12.2
 Taylorontwikkeling 4.7.7a
 Taylorpolynoom 4.7.5; 6.12.2
 Taylorreeks 10.6.3
 tegengestelde 1.2.1; 6.1.2
 tegenvoorbeeld 1.7.1
 termen (van een reeks) 10.1.1
 torus 8.6.9
 toruscoördinaten 8.6.9
 totaal differentieerbaar 6.10.2
 totale differentiaal 6.12.5
 traagheidsmoment 8.7.4
 transformatie 8.3
 trapeziumregel 5.17.2
 tussenwaardestelling 3.12.3
 tweevoudige integraal 8.1.2f

u

uitspraak 1.6.1
 uitwendig produkt 6.3.3a
 uniform continu A3.7
 unimodulaire getallen 2.8.1

v

variatie van de constanten (methode van) 7.5.2
 vector 6.1.2
 vectorfunctie 6.5.1
 vectorieel lijnelement 9.1.11d
 vectorieel oppervlakte-element 9.3.13d
 vectorruimte 6.1.2
 vectorveld 6.5.8b
 veelvoud van een matrix 6.2.8b
 vermenigvuldiging 2.1.1; 2.14.2; 6.1.2
 vermenigvuldigingsstelling 5.16.5
 verschuivingsstelling 5.15.2
 versnelling 6.10.15
 verticale asymptoot 4.6.9a
 vlakke kromme 6.10.14a
 voerstraal 2.6.1
 voldoende 1.7.4
 volledige inductie 1.8
 volledigheid t.o.v. de ordening 1.4.1
 volume 8.5.1
 volume-element 8.6.2

w

waarheidstabel 1.6.7
 Wallis, produkt van 5.8.6
 Weierstrass, stelling van 3.12.2
 wortel (van een vergelijking) 2.11.1
 wortelkenmerk van Cauchy 10.3.5
 worteltruc 3.9.3
 Wronski, determinant van 7.5.4

z

zadelpunt 6.14.8
 zuiver imaginair 2.2.6b
 zwaartepunt 8.7.2

Formuleblad

behorend bij Analyse

door J.H.J. Almering e.a.

Enkele goniometrische formules

No.

(g.1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$

(g.2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$

(g.3) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$

(g.4) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$

(g.5) $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$

(g.6) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$

(g.7) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$

(g.8) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

(g.9) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$

Standaard Taylorontwikkelingen

No.

(s.1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}).$

(s.2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}).$

(s.3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}).$

(s.4) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^{n+1}).$

(s.5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + O(x^{n+2}).$

(s.6) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}).$

(s.7) $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots + \binom{a}{n} x^n + O(x^{n+1}), a \in \mathbb{R}.$

Hierbij is $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$ als $n > 0$ en $\binom{a}{0} = 1$.

Integraaltabel

No.			
(t.1)	$\int x^a dx$	$= \frac{1}{a+1} x^{a+1}$	$(a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.
(t.2)	$\int \frac{dx}{x}$	$= \ln x $.	
(t.3)	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$= \ln f(x) $.	
(t.4)	$\int e^x dx$	$= e^x$.	
(t.5)	$\int a^x dx$	$= \frac{1}{\ln a} a^x$	$(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$.
(t.6)	$\int \sin x dx$	$= -\cos x$.	
(t.7)	$\int \cos x dx$	$= \sin x$.	
(t.8)	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	$= -\cot x$.	
(t.9)	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	$= \tan x$.	
(t.10)	$\int \tan x dx$	$= -\ln \cos x $.	
(t.11)	$\int \frac{dx}{\sin x}$	$= \ln \tan \frac{x}{2} = \ln \frac{1 - \cos x}{ \sin x } = \ln \frac{ \sin x }{1 + \cos x}$.	
(t.12)	$\int \frac{dx}{\cos x}$	$= \ln \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) = \ln \frac{1 + \sin x}{ \cos x } = \ln \frac{ \cos x }{1 - \sin x}$.	
(t.13)	$\int \sin^p x \cos^q x dx$	$(p, q \in \mathbb{N})$	<p>p oneven, stel $\cos x = t$.</p> <p>q oneven, stel $\sin x = t$.</p> <p>p en q even, voer dubbele hoek in met behulp van $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ of $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.</p>
(t.14)	$\int \sin mx \sin nx dx$	$= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$	$(m^2 \neq n^2)$.
(t.15)	$\int \cos mx \cos nx dx$	$= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$	$(m^2 \neq n^2)$.
(t.16)	$\int \sin mx \cos nx dx$	$= -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}$	$(m^2 \neq n^2)$.
(t.17)	$\int e^{ax} \sin bx dx$	$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$	$(a^2 + b^2 \neq 0)$.

$$(t.18) \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

$$(t.19) \quad \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a} \quad (a, b \in \mathbb{R}^+).$$

$$(t.20) \quad \int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a+bx}{a-bx} \right| \quad (a, b \in \mathbb{R}^+).$$

$$(t.21) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

$$(t.22) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

$$(t.23) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

$$(t.24) \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

$$(t.25) \quad \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) \quad (a \in \mathbb{R}^+)$$

$$(t.26) \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x.$$

$$(t.27) \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x.$$

$$(t.28) \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi a^2}{4} \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

$$(t.29) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \, dx = \frac{p-1}{p} \frac{p-3}{p-2} \dots \frac{4}{5} \frac{2}{3} \quad \text{voor } p = \text{oneven } \geq 3,$$

$$= \frac{p-1}{p} \frac{p-3}{p-2} \dots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \quad \text{voor } p = \text{even } \geq 2.$$

$$(t.30) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$(t.31) \quad \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx = \frac{(n!)(m!)}{(m+n+1)!} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Tabel van Laplace getransformeerden

No.	$f(t) = \mathbf{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathbf{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$
(l.1)	1	$\frac{1}{s}, s > 0$
(l.2)	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
(l.3)	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
(l.4)	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
(l.5)	$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, s > 0$
(l.6)	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
(l.7)	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > a $
(l.8)	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > a $
(l.9)	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
(l.10)	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
(l.11)	$t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$
(l.12)	$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, s > 0$
(l.13)	$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
(l.14)	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
(l.15)	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
(l.16)	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
(l.17)	$\delta(t-a)$	e^{-as}
(l.18)	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
(l.19)	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

Andere uitgaven van de Delftse Uitgevers
Maatschappij

**wiskunde: analyse, lineaire algebra,
stochastiek en statistiek**

ANALYSE

**door dr. J.H.J. Almering e.a.
geheel herzien door dr.H. Bavinck en
dr.ir. R.W. Goldbach**

'Analyse' behandelt de analyse op moderne wijze. De hoofdstukken behandelen de grondbegrippen, complexe getallen, limieten en continuïteit, differentiaalrekening, integraalrekening, afbeeldingen, differentiaalvergelijkingen, meervoudige integralen, lijn-integralen, oppervlakteintegralen en reeksen.

Aan het eind van de meeste paragrafen is een aantal oefeningen opgenomen om de lezer vertrouwd te maken met de voorafgaande leerstof. Aan het eind van elk hoofdstuk is een paragraaf met vraagstukken toegevoegd, gerangschikt overeenkomstig de behandeling van de leerstof in het betreffende hoofdstuk.

Het boek doet o.a. dienst bij het analyseonderwijs bij nagenoeg alle afdelingen van de TU-Delft.

592 pag., ISBN 90-6562-078-8 (gebonden) (1993)

ANALYSE, 250 tentamenopgaven met uitwerkingen, door dr. H. Bavinck

Aansluitend aan Analyse door dr. J.H.J. Almering e.a. redigeerde dr. H. Bavinck een boek met opgaven en uitwerkingen.

Het aan studenten ter beschikking stellen van vraagstukken met uitwerkingen, betekent didactisch gezien een risico; van de gebruikers moet dan ook, wil men het boekje met vrucht hanteren, een zekere zelfdiscipline worden verwacht.

112 pag., ISBN 90-6562-060-5 (1993)

ANALYSE

**door prof.dr. B. Meulenbeld en
prof.dr. A.W. Grootendorst**

In drie kloeke delen presenteren de auteurs een volledige cursus analyse.

Deel 1 beperkt zich in hoofdzaak tot *functies van één veranderlijke*. Beginselen van differentiaal- en integraalrekening, complexe getallen, extreme waarden en het schetsen van krommen, systematische berekening van de primitieven van enige klassen van functies, oneigenlijke integralen, rijen, reeksen, vergelijkingen, numerieke integratie en differentiatie, en hyperbolische functies. Tenslotte wordt kort aandacht besteed aan functies van twee veranderlijken.

Deel 2 behandelt *functies met twee of meer variabelen*. De hoofdstukken gaan over impliciete functies, extreme waarden, vectoranalyse, vlakke krommen, ruimtekrommen, lijnintegralen, meer-

voudige integralen, integraalstellingen, massa, zwaartepunt en traagheidsmoment, en de gamma- en bètafunctie.

De differentiaalvergelijkingen zijn het onderwerp van *deel 3*. Gewone differentiaalvergelijkingen, het oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van machtreeksen, simultane differentiaalvergelijkingen, de Laplace-transformatie, numerieke methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen en partiële differentiaalvergelijkingen.

Over *deel 1* schreef O. Bottema in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde van februari 1982:

"Dit werk is voorwaar een leerboek. Bij het schrijven moet de toekomstige lezer voortdurend in de geest aanwezig zijn geweest. De hoge didactische kwaliteit berust op een streven naar evenwicht; de behandeling is exact maar een acribie die het wezenlijke kan versluieren is vermeden. Evenwicht is er ook tussen de zakelijke tekst en een groot aantal goed gekozen voorbeelden. Ook de typografie werkt mee aan de uitnemende presentatie."

Deel 1, 433 pag., ISBN 90-6562-064-8 (1988)

Deel 2, 344 pag., ISBN 90-6562-065-6 (1989)

Deel 3, 256 pag., ISBN 90-6562-066-4 (1992)

PARTIËLE DIFFERENTIAAL- VERGELIJKINGEN

**door prof.dr.ir. C.J. van Duijn en
ir. M.J. de Neef**

Het boek bestaat uit 4 delen:

1. Gewone differentiaalvergelijkingen.

In dit deel zijn hoofdstukken gewijd aan fundamentele aspecten van beginwaardeproblemen, tweede orde lineaire vergelijkingen en classificatie en stabiliteit van evenwichten.

2. Eigenwaarde problemen en bijzondere functies, met de behandeling van de Schrödervergelijking, de methode van machtreeksubstitutie en Bessel-functies.

3. Partiële differentiaalvergelijkingen, waarin aan de orde komen warmtevergelijking, Laplacevergelijking, golfvergelijking en Burgersvergelijking.

4. Complexe functietheorie.

Complexe functies, residuënstelling en reeksen van complexe functies worden in dit deel behandeld.

ca. 200 pag., ISBN 90-6562-150-4

(verschijnt september 1994)

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

**220 voorbeelden en opgaven met
oplossingen en beknopte theorie, door dr.
A. Schuitman**

Aan de hand van voorbeelden en vele opgaven wordt in dit boek een overzicht gegeven van de verschillende typen differentiaalvergelijkingen en op toepassingen op partiële differentiaalvergelijkingen. Tenslotte worden Laplacetransformaties en randwaardeproblemen behandeld.

Het boek is vooral bedoeld als vraagstukkenverzameling naast een college of leerboek.

174 pag., ISBN 90-6562-026-5 (1988)

COMPLEXE FUNCTIETHEORIE, FOURIER- EN LAPLACETRANSFORMATIES

Tentamenopgaven met uitwerkingen

door dr. H. Bavinck

De opgaven in deze bundel zijn ontleend aan tentamens uit de jaren '87 t.e.m. '89 van de TU Delft. In acht hoofdstukjes wordt de oefenstof doorgenomen: differentieerbaarheid • functies en conforme afbeeldingen • singulariteiten en Laurentreeksen • integratie en residuënstelling • nulpunten en argumentenprincipe • Fourierreksen • Fouriertransformatie • Laplacetransformatie.

79 pag., ISBN 90-6562-115-6

(1989)

NUMERIEKE WISKUNDE voor Technici, door ir. J.J.I.M. van Kan

Het gebruik van numerieke methoden door technici beperkt zich in de praktijk vaak door het aanroepen van subroutines uit een bestaand programma-pakket. Daar dit vaak 'black-box' pakketten zijn is het noodzakelijk dat men uit de resultaten zelf kan zien of de vereiste nauwkeurigheid gehaald is en of het probleem gevoelig is voor verstoringen. Om deze reden wordt in dit boek naast de uiteenzetting van de numerieke methoden ook ruimschoots aandacht besteed aan zaken als foutenanalyse, stabiliteit en conditie.

De methoden worden gepresenteerd in een technische context in de verwachting dat dit motivatieverhogend zal werken.

Dit boek bevat (in iets gewijzigde vorm) de stof zoals die in het college Numerieke Analyse C1 aan de TU Delft wordt onderwezen. Het bevat als onderwerpen gewone differentiaalvergelijkingen en numerieke lineaire algebra. Elementaire onderwerpen als interpolatie, numerieke integratie en nulpuntsbepaling worden bekend verondersteld. In die zin bouwt het voort op Analyse door J.H.J. Almering e.a.

118 pag., ISBN 90-6562-098-2

(1993)

NUMERIEKE METHODEN VOOR PARTIËLE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN,

door ir. J.J.I.M. van Kan en ir. A. Segal

Dit boek biedt een staalkaart beschikbare numerieke methoden voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen. Naast elkaar geplaatst zijn eindige differentie- en elementenmethoden. De laatste worden in een enigszins ander kader behandeld dan in de techniek (met name de sterkteleer) gebruikelijk is. Hierdoor wordt duidelijk dat het toepassingsgebied van de eindige elementenmethode (EEM) min of meer universeel is. Zowel praktische als theoretische zaken komen aan de orde. Hierbij dient opgemerkt te worden dat steeds uitgegaan wordt van de meest eenvoudige vergelijkingen in zijn soort. In dit boek staan de Poisson-vergelijking, de diffusievergelijking, de trillingsvergelijking en de transportvergelijking model voor meer algemene vergelijkingen. Bewijzen worden uitsluitend gegeven voor eenvoudige lineaire gevallen. In de praktijk hoopt men, dat in ingewikkelde (niet lineaire) gevallen de methodes op dezelfde wijze als op de modelvergelijkingen

kunnen worden toegepast. Veelal blijkt de simpele lineaire analyse ook inzicht te verschaffen in meer ingewikkelde problemen. Voor zover daar al theorie voor is ontwikkeld, maken vooral bewijstechnische details de zaak ingewikkeld zonder wezenlijk bij te dragen tot het inzicht. De theorie in dit boek is niet bedoeld om echte foutschattingen voor praktische situaties te verschaffen, maar om aan de hand van simpele modelproblemen inzicht te verkrijgen in de merites van de verschillende methoden. Een 'harde' schatting van de fout kan alleen maar verworven worden door met andere stapgrootte het probleem nogmaals door te rekenen.

Hoofdstukken: Inleiding • terreinverkenning • differentiemethoden • minimalisierungsproblemen • eindige elementen • foutschatting voor het Poissonprobleem • mathematische fundering van de EEM • methode van Galerkin • fundering van de methode van Galerkin • elementen in de literatuur • oplosmethoden • convergentie van niet-lineaire iteratieprocessen • tijdsafhankelijke problemen • warmte- of diffusievergelijking • golfvergelijking

310 pag., ISBN 90-6562-107-5

(1993)

DICTAAT LINEAIRE ALGEBRA

door dr. G.W. Decnop, ir. H. van Iperen en dr. R. Martini

In een systematische opbouw behandelen de auteurs de lineaire algebra, zoals die wordt gegeven aan de TU-Delft. Daarbij zijn vele voorbeelden en vraagstukken opgenomen.

Vectorruimten, matrices en rekentechnieken in R^n , lineaire afbeeldingen en bilineaire vormen, inwendige productruimten, stelsels lineaire vergelijkingen, determinanten, lineaire operatoren van inwendige productruimten en kwadratische vormen zijn de onderwerpen van de hoofdstukken.

236 pag., ISBN 90-6562-036-2

(1992)

MATRIXREKENING

door ir. C.A. den Braber, ir. H. van Iperen, en dr.ir. M.A. Viergever

Dit boek onderscheidt zich van 'Dictaat Lineaire Algebra' door een directere aansluiting bij de programma-eisen van enkele studierichtingen aan de TU-Delft.

De lineaire algebra en matrixrekening zijn in dit boek vooral toepassingsgericht behandeld, bijvoorbeeld met het oog op vakken als technische mechanica, stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen en statistiek.

De volgende hoofdstukken zijn in het boek opgenomen:

- Het oplossen van eenvoudige stelsels lineaire vergelijkingen
 - Matrixen, bewerkingen met matrixen
 - Analytische meetkunde in de ruimte en het platte vlak
 - Lineaire operatoren in de ruimte en het platte vlak
 - R^n & C^n , rang van een matrix, methode der kleinste kwadraten
 - Determinanten
 - Eigenwaarden en eigenvectoren.
- Het is een leerboek met veel oefenstof, waarbij de

docent zonodig de weg kan wijzen.

400 pag., ISBN 90-6562-077-x (1994)

ELEMENTAIRE STATISTIEK door ir. J. van Soest

De auteur richt zich in dit boek vooral op de toepassingen van de statistiek. Achtereenvolgens worden behandeld de beschrijvende statistiek, de kansrekening, stochastische variabelen, populatie en steekproef, de binomiale verdeling, de Poisson-verdeling, de normale verdeling, functies van continue stochastische variabelen, de centrale limietstelling, statistische toetsen voor ligging, toetsen voor verschil in ligging en toetsen voor varianties, regressie- en correlatierekening. Tal van vraagstukken zijn opgenomen.

207 pag., ISBN 90-6562-003-6 (1994)

aanvulling ELEMENTAIRE STATISTIEK door ir. J. van Soest, ir. A.J. Meelen en ir. J.M.G. Vermeulen

Ten behoeve van een meer mathematische benadering van de statistiek is een aanvulling beschikbaar, die een verdieping inhoudt van hetgeen in de hoofdstukken 3, 7, 8 en 13 van Elementaire Statistiek is weergegeven.

66 pag., ISBN 90-6562-006-0 (1992)

GREPEN UIT DE GESCHIEDENIS VAN DE WISKUNDE

door prof.dr. A.W. Grootendorst

Dit werk bevat opstellen over zeer diverse onderwerpen uit de geschiedenis van de wiskunde. Voor een deel zijn het verhandelingen die de auteur reeds eerder in vaktijdschriften deed verschijnen; er zijn echter ook stukken opgenomen die speciaal voor dit boek zijn geschreven. Na een algemeen oriënterend hoofdstuk volgen enkele opstellen over de wiskunde bij de Grieken, waarin wordt getoond hoe de Grieken met scherpzinnige en doorzichtige methoden fundamentele resultaten wisten te bereiken. Tot dit gedeelte behoort een artikel over het omgaan met getallen in de oudheid en een beschouwing over rekenkunde en de 'meetkundige algebra' en de oorsprong van de woorden parabool, hyperbool en ellips.

De bundel bevat ook de vertaling (met oorspronkelijke tekst en commentaar) van enkele in het Latijn geschreven brieven, nl. die van Johan Hudde (1628-1704), burgemeester van Amsterdam, over het bepalen van maxima en minima en een brief van Hendrik van Heuraet (1634-1660?), waarin voor het eerst de lengte van een kromme wordt berekend. Verder zijn er stukken gewijd aan Leonard Euler (1707-1783), en aan de nagenoeg onbekende Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) die als eerste bewees dat een willekeurige hoek niet in drie gelijke delen verdeeld kan worden met behulp van passer en lijnaal alleen, een eeuwenoud probleem waarvan de oplossing in de vergetelheid is geraakt. Zijn naam komt zelfs niet voor in de Dictionary of Scientific Biography!

H. Bakker in Euclides: "Zeker een aanwinst, ook al omdat het geschikt is als eerste kennismaking met

de Geschiedenis van de Wiskunde."

157 pag., ISBN 90-6562-94-x (1988)

REGELMAAT IN DE RUIMTE door prof.dr. A.K. van der Vegt

Dit boekje gaat over een heel oud onderwerp. Al eeuwen geleden waren er mensen die door veelvlakken geboeid werden en een groot deel van hun tijd besteedden aan het opsporen en analyseren van regelmatige structuren. In de terminologie van de veelvlakken kom je dan ook namen tegen als Archimedes, Pythagoras, Plato en Kepler.

Veelvlakken spelen vandaag de dag een rol in onder andere de kristallografie, de beeldende kunst (Escher!), de bouwkunde en, vooral, in de 'polyedrofilie'. Met dit laatste bedoelt de auteur het verschijnsel dat een klein aantal mensen zo verrukt zijn van veelvlakken (polyeders), dat ze het niet kunnen laten om er mee te spelen, ze te analyseren, ze te plakken of ze te boetseren, en bovenal zich erin te verlustigen, zodat men dit verschijnsel eigenlijk 'polyedromanie' zou moeten noemen. Dit boekje pretendeert geen historisch-wetenschappelijke verhandeling te zijn.

J. van der Craats in NRC-Handelsblad van 16 juli 1992: "Het is een helder geschreven rondleiding geworden door polyederland. (...) De veelvlakken zijn afgebeeld door middel van duidelijke computer-tekeningen; de verzorging van de tekst en de figuren is eenvoudig maar voorbeeldig afgewerkt en de prijs is verrassend laag."

94 pag., ISBN 90-6562-141-5 (1991)