



Delft University of Technology

Trek, knik en zo meer: belastingsvormen vergeleken (not) safe for designers? - IV

Tempelman, Erik

Publication date
2020

Document Version
Final published version

Published in
De Constructeur

Citation (APA)

Tempelman, E. (2020). Trek, knik en zo meer: belastingsvormen vergeleken: (not) safe for designers? - IV. *De Constructeur*, 60(3), 30-33.

Important note

To cite this publication, please use the final published version (if applicable).
Please check the document version above.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download, forward or distribute the text or part of it, without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license such as Creative Commons.

Takedown policy

Please contact us and provide details if you believe this document breaches copyrights.
We will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Trek, knik en zo meer: belastingsvormen vergeleken

(NOT) SAFE FOR DESIGNERS? – IV

Het woord 'belastingsvormen' hoeft buiten de constructieleer doorgaans niet op een goede ontvangst te rekenen. Voor de constructeur heeft het gelukkig een meer neutrale betekenis: het beduidt dan de *vorm* van de *belasting* op een onderdeel, dat wil zeggen de externe krachten en/of momenten, met een implicatie voor de vorm van het onderdeel zelf.

ERIK TEMPELMAN, ADVIESBUREAU ERIKTEMPELMAN.COM, UNIVERSITAIR HOOFDDOCENT TU DELFT – INDUSTRIEEL ONTWERPEN

Zo krijgen we de *trekstaaf* met een trekkracht erop, de *balk* in buiging, de *as* in torsie, en de *kolom* onder druk dan wel knik. We kunnen ook nog afschuiven: dan staat de belasting dwars op ons onderdeel. Afbeelding 1 vat deze vijf belastingsvormen voor u samen¹. Het bepalen van de sterkte en stijfheid van deze onderdelen onder de bijbehorende belastingsvorm is iets dat elke constructeur al vroeg in de opleiding leert: eerst met simpele handberekeningen, later met meer uitgebreide FEM-analyses. Deze bijdrage frist voor u het handwerk nog eens op. Om een vergelijking tussen de vijf vormen mogelijk te maken, kijken we steeds naar hetzelfde onderdeel, te weten een aluminium buisje van 50 cm lengte, met een holle, ronde doorsnede (diameter 22 mm, wanddikte 2 mm). We kiezen een legering met een vloeigrens van 175 MPa; qua stijfheid rekenen we met 70 GPa. Wat denkt u: onder welke belastingsvorm is dit buisje het zwakst, en wanneer het sterkst – en hoe groot zijn de verschillen? We gaan het zien.

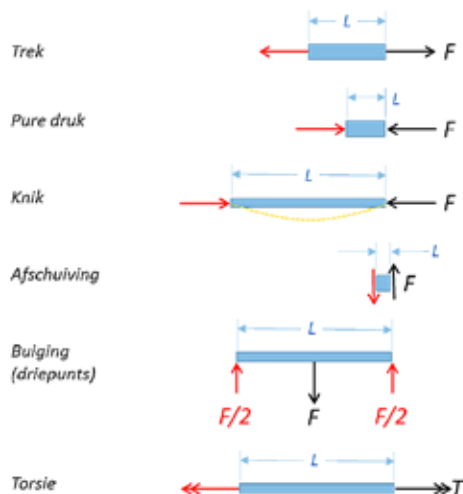
¹ U wilt er meer zien? Dat kan: er is ook nog tweeassige spanning (relevant voor drukvaten, vliegtuigrompen en dergelijke), thermische belasting. Combinaties, zoals buiging plus torsie, komen ook voor. Let wel – we spreken hier van statische belastingen; het gedrag van de belasting als functie van tijd (denkt u aan vermoeiing, kruip, impacts) blijft nog buiten beschouwing.

Trek

Ons buisje heeft een dwarsdoorsnede $A = 126 \text{ mm}^2$. Via de vergelijking $\sigma = F/A$ is het een koud kunstje om de maximaal toelaatbare kracht F te vinden, aangezien we al weten dat de spanning σ maximaal 175 MPa mag zijn. We vinden $F = 22,1 \text{ kN}$. Bij die trekkracht zal ons buisje $\Delta L = 1,25 \text{ mm}$ langer worden, hetgeen we leren uit $\Delta L = FL/EA$, met L gelijk aan 0,5 m en E aan de eerder gegeven stijfheid. Dit zijn indrukwekkende prestaties – maar we vermelden er gelijk bij dat het lastig is om zo'n kracht zonder spanningsconcentraties in te leiden. Zou de kracht herhaaldelijk worden aangebracht dan moeten we rekening houden met spanningsconcentratiefactoren (SCF's) van pakweg 2-5, *plus* de flink lagere vermoeiingssterkte. Mogelijk blijft er dan slechts één tiende over van wat de buis in een enkele statische test kan dragen. En dat is tegelijk het grootste probleem bij vrijwel alle op trek belaste onderdelen. De spaken van uw fiets bijvoorbeeld hebben hier ook mee te maken. De in wielerkringen bekende 'double-butted' spaken kunnen ons helpen, maar wel tegen meerprijs (afbeelding 2).

Druk en knik

Als we in plaats van een trekkracht een drukkracht uitoefenen, zal ons buisje in principe falen bij dezelfde belasting van 22,1 kN, en zal daarbij dezelfde lengteverandering ondergaan als eerst, alleen nu de andere kant op. Deze belastingsvorm van 'pure druk' heeft tot voordeel dat vermoeiing aanmerkelijk minder problematisch zal zijn, maar er is een flinke kanttekening te maken: lange buisjes falen in de regel als kolommen, in *knik* (Engels: *buckling*).



Afbeelding 1 De diverse belastingsvormen uit dit artikel.



Afbeelding 2 Een 'double-butt' spaak – vanwege spanningsconcentraties en vermoeiing.

De hierbij behorende formule is al sinds de dagen van wiskundig superheld Leonard Euler (1707-1787) bekend: hij was namelijk degene die ons aan deze, inmiddels naar hem genoemde, knikformule hielp. Deze voorspelt de kritische knikbelasting als $F_c = \pi^2 EI / (kL)^2$. Hierin is I het zogeheten oppervlaktetraagheidsmoment van de dwarsdoorsnede van de buis, in dit geval gelijk aan $I = 6,35 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$. De factor k beschrijft hoe de uiteinden van de buis zijn bevestigd; voor het geval waarin deze uiteinden scharnierend zijn opgelegd (en dus kunnen roteren), geldt $k = 1$ en komen we uit op $F_c = 17,5 \text{ kN}$. Dat is 80 procent van de sterkte op pure druk, en ons buisje zal dan ook knikken als een kolom. Let op – de vervorming hierbij is catastrofaal: bij knik is er, althans voor een kolom², geen sprake van een veilig faalgedrag! Zou u de eindjes perfect kunnen inklemmen, dan mag u rekenen met $k = 0,5$ en stijgt de Euler kniklast F_c naar ruim 70 kN. Echter, perfecte inklemming bestaat niet en in de praktijk zal k blijven steken op $\pm 0,7$. Los daarvan zijn kracht en kolom, anders dan Euler aannam, nooit perfect op te lijnen, waardoor u nog meer veiligheidsmarge moet inbouwen om schade te voorkomen. Wees gewaarschuwd...

Afschuiving

Afbeelding 1 gaf ook een voorbeeld van een belasting loodrecht op ons onderdeel. Dit genereert *afschuiving*. Daarbij moet de afstand L tussen de aangebrachte kracht en de reactiekracht (in **rood** in de figuur) klein zijn ten opzichte van de relevante afmeting van het onderdeel – in dit geval de diameter D van de buis – omdat we anders een mengvorm van afschuiving en

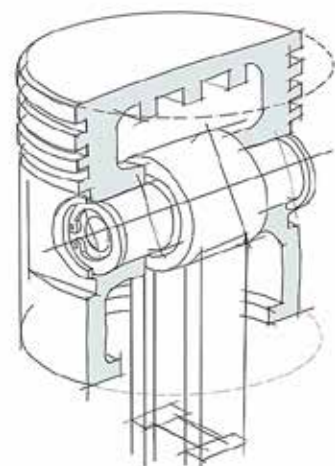
² Plaatmateriaal kan, mits goed verstijfd, 'lokaal knikken' en als dit elastisch gebeurt, dan zal het materiaal weer terugknikken zodra de belasting wordt weggenomen. Een simpele kolom vertoont dit gedrag niet.

³ Geen goed idee, om meerdere redenen: dit voorbeeld beoogt slechts om de belastingsvormen te vergelijken.

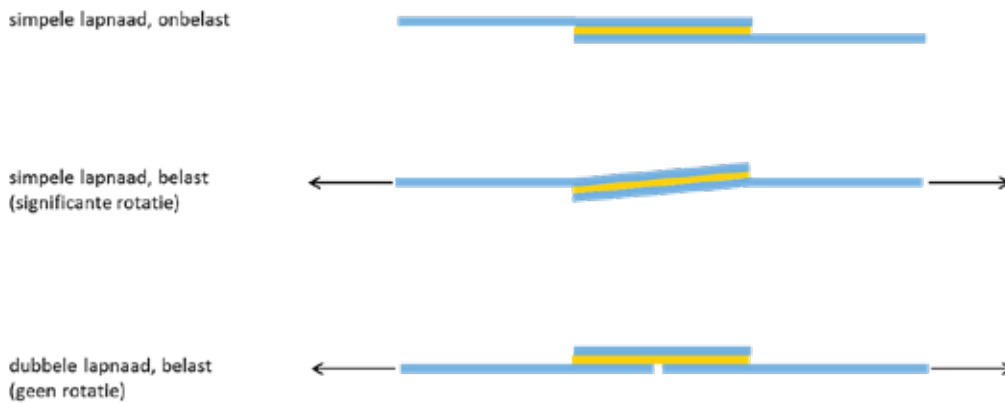
buiging krijgen. Een goed voorbeeld is een zuigerpen: dit onderdeel bevindt zich tussen zuiger en zuigerstang, met $L \ll D$, en wordt op pure afschuiving belast (en dan herhaaldelijk, dus in vermoeiing). Afbeelding 3 toont ons dit voor de techniek zo belangrijke onderdeel.

Stel dat we onze aluminium buis als zuigerpen zouden gebruiken³ – wat dan? Het Von Mises-vloeicriterium voorspelt ons dat dit materiaal onder afschuiving zal gaan vloeien bij 58 procent van de vloeigrens voor trek. We komen daarmee op $F = 12,6 \text{ kN}$ en dat is (uiteraard) precies 58 procent van de eerder uiterekende waarde voor trekbelasting. Het bepalen van de bijbehorende vervorming is nu niet bijster zinvol, voornamelijk omdat de betreffende lengte zo klein is.

Als u nou denkt dat afschuiving makkelijk is, kijk dan naar een voor de techniek tweede re- ➤



Afbeelding 3 Een zuigerpen wordt op pure afschuiving belast. (Beeld: Koos Eissen)



Afbeelding 4 Lapnaden en afschuiving.

levant voorbeeld van deze belastingsvorm: de lapnaad. Zoals afbeelding 4 aangeeft, zal een simpele lapnaad onder externe belasting iets roteren. De beide krachten moeten immers op één lijn komen. Dit maakt dat de verbinding – bijvoorbeeld een lijmsort – naast afschuifspanningen ook ‘peel stresses’ ondervindt. Het is precies hoe u een pleister verwijdt, en het maakt de verbinding zeer veel zwakker! Afbeelding 4 toont ook een doeltreffende wijze om deze ongewenste mengvorm van belastingen te vermijden. De moraal van het verhaal is dat afschuiving weliswaar simpel lijkt, maar het beslist niet altijd is.

Buiging

Deze belastingsvorm verdient feitelijk een eigen NSFD-hoofdstuk en zal dat ook krijgen. Voor nu dus alleen de samenvatting in de vorm van de uitkomst voor onze aluminium buis.

Buiging heeft diverse vormen; hier kiezen we voor de zogeheten *driepuntsbuiging*, waarbij de buis aan beide uiteinden, een afstand $L = 0.5$ m uit elkaar, is opgelegd en precies in het midden wordt belast. Gebruik van het juiste ‘vergeet-mij-nietje’ leert ons dan dat deze buis zal gaan vloeien bij een kracht van $F = 808$ N. Dat is maar 4 procent(!) van de kracht die we nodig hadden voor vloeien onder pure trek. Wie er nog een tweede formule tegenaan gooit, vindt dat de bijbehorende vervorming ofwel doorbuiging dan 4,7 mm is, en dat is (ondanks de veel lagere kracht) weer ruim meer dan wat we onder trek zagen gebeuren. Wie het niet gelooft wordt van harte uitgenodigd om zo’n buis bij de doehet-zelf zaak te kopen en het experimenteel aan de tand te voelen. Kapot trekken zal u zwaar afgaan, buigen niet.

Torsie

Nog één belastingsvorm te gaan: torsie. Net als alle voorgaande vormen komen we ook torsie

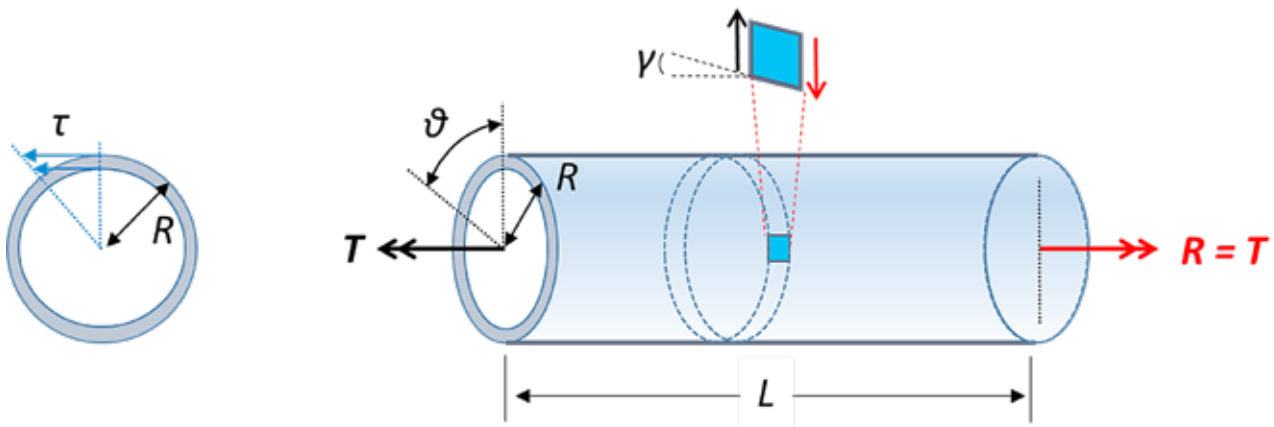
⁴ Vierkante of rechthoekige doorsneden gaan ook nog wel: zie onder ‘torsion constant’ op Wikipedia.

vaak genoeg tegen in de techniek. Fietsframes bijvoorbeeld worden getordeerd onder de combinaties van arm- en beenkrachten van de berijder. De dragende constructies van auto’s ervaren ook torsie, maar dan onder de krachten die de wielophangingen erop uitoefenen. Overigens worden zowel voor fietsen als auto’s de torsietijfheden vaak prominent aangewend voor marketingdoeleinden – iets dat we anders niet vaak tegenkomen. Interessant genoeg zien we torsie juist minder terug in natuurlijke constructies, en dat is zeker stof tot nadenken.

Aan torsie is nog niet zo makkelijk te rekenen. Alleen als ons onderdeel een rotatie-symmetrische doorsnede heeft, kunnen we er snel wat over zeggen⁴. Gelukkig beschikt ons aluminium buisje over dergelijke symmetrie. Afbeelding 5 toont ons dit buisje in close-up. We zien dat het externe torsiekoppel T zorgt voor het optreden van schuifspanningen in het materiaal. Deze moeten onder de maximale schuifspanning blijven (die 58 procent, weet u nog?). Met behulp van het zogeheten polaire traagheidsmoment en een geschikt vergeet-mij-nietje komen we dan op $T = 115$ Nm. De bijbehorende vervorming is nu een verdraaiing $\vartheta = 0,17$ radialen, oftewel 10° . Om dit koppel te kunnen vergelijken met de eerder bepaalde krachten, hebben we een karakteristieke lengte nodig – bijvoorbeeld L . Daarmee vinden we dan tenslotte dat er een kracht van $F = T/L = 234$ N nodig is om bij torsie tot vloeien te komen. Net als bij buiging is dat slechts een fractie van wat er voor pure trek of druk nodig was ($234/22050 = 1$ procent).

Even recapituleren...

Ons voorbeeld-onderdeel is natuurlijk maar één van de vele mogelijkheden, maar de algemene tendens is desondanks duidelijk: trek en pure druk zijn de winnaars, gevolg door knik en afschuiving, met op ruime afstand daarachter buiging en torsie. Dit klinkende resultaat verklaart



Afbeelding 5 Torsie nader gezien.

waarom die ‘ouderwetse’ vakwerkconstructies (we noemen ze liever *spaceframes*) het zo goed doen, zeker ook per eenheid gewicht. Daarin zijn immers ook alleen trek en pure druk aan het werk. Mits het probleem van knik goed wordt voorkomen, is het toespitsen van het materiaal op deze twee belastingsvormen zelfs de beste manier om, gegeven een gewenste belastbaarheid en geometrische beperking, gewicht te sparen! In diverse spectaculair ogende 3D-prints ziet u dit beginsel regelmatig terug, zeker als de vorm in kwestie het resultaat is van generatief ontwerp. Kortom: trek en druk prima, knik en afschuiving minder, buiging en torsie – niet doen.

Terloops kwam in het bovenstaande het concept van *vermoeiing* aan de orde. Om te voorkomen dat u met het onjuiste beeld deze pagina's verlaat, dient nog gezegd dat dit uiteraard niet alleen bij trek aan de orde is. Bij afschuiving (denk aan de zuigerpen), buiging en torsie speelt het zeer zeker ook zijn rol. Hier is nog zeer veel meer over te zeggen⁵, maar enig misverstand is nu hopelijk voorkomen.

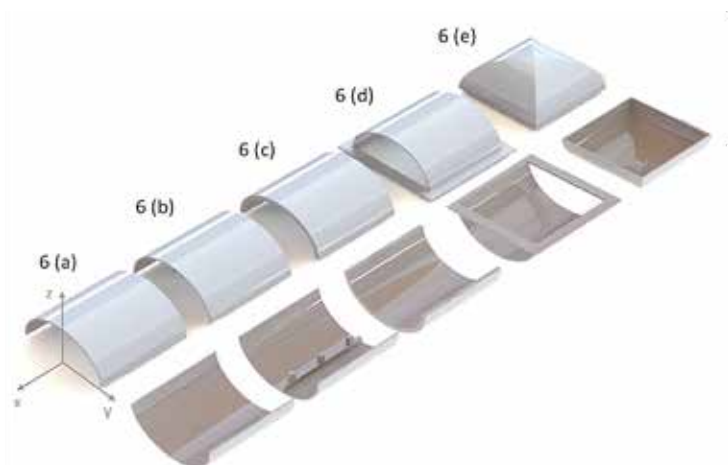
⁵ In NSFD – engineering essays on structures & materials (E. Tempelman, BoekenGilde, 2020) wordt nader op vermoeiing ingegaan. Voor het complete verhaal wordt *Fatigue of Structures and Materials* (J. Schijve, Springer, 2009) van harte aanbevolen.

Toegift: van buizen naar schalen

Aan buisjes is makkelijk met de hand te rekenen – aan schaalconstructies niet. Gelukkig is het tegenwoordig relatief makkelijk hier kleine testjes mee uit te voeren: al wat u nodig hebt is een laptop met wat CAD-software, een 3D-printer en een drukbank. Met deze wapens hebben twee ondernemende studenten aan de TU Delft onlangs enkele vergelijkende tests uitgevoerd, dit onder begeleiding van uw NSFD-correspondent. Afbeelding 6 toont de geteste schaaldelen: we zien in volgorde (a) een enkel-gekromd deel, (b) hetzelfde deel met een verstijvende rib in x-richting, (c) een dikker deel (schaaldikte 4,0 i.p.v. 1,6 mm), (d) een deel met flens rondom, en tenslotte een dubbel-gekromd deel op dezelfde 80 bij 80 mm ‘footprint’. De belasting was een neerwaartse kracht in z-richting; gemeten was steeds het kracht-weg diagram, dat middels linearisering de stijfheid van de delen als veerconstante (in N/mm) naar voren bracht.

De resultaten waren als volgt: (a) 4,8; (b) 5,8; (c) 71; (d) 45 en (e) 116 – alles in N/mm. Merk op dat $(4/1,6)^3 = 15,6$ en dat is min of meer gelijk aan $71/4,8 = 14,8$. Stijfheid gaat in dit geval dus met de derde macht van dikte. Maar de winnaar is dubbele kromming – en het moge duidelijk zijn waarom: opnieuw wordt buiging vermeden ten faveure van pure druk. Waarvan acte! ●

Volgende keer in (Not) Safe For Designers?: ingenieurs-balkentheorie.



Afbeelding 6 De geteste schaaldelen, met dank aan Noor Eddes en Davy Kreuk.