



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Analyse van een wiskundig model voor het
beheersen van invasieve soorten**
(Engelse titel: Analysis of a mathematical model to
control invasive species)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Shifra Lopulalan

Delft, Nederland
September 2021



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Analyse van een wiskundig model voor het beheersen van invasieve soorten”
(Engelse titel: “Analysis of a mathematical model to control invasive species”)

Shifra Lopulalan

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Prof. dr.ir. C. Vuik

Overige commissieleden

Dr. K.P. Hart

Dr. ir. E.G. Rens

...

...

September, 2021

Delft

Inhoudsopgave

1	Abstract	2
2	Inleiding	3
3	Theoretisch onderzoek: Wat is er bekend over invasieve soorten?	4
3.1	Controlling invasive populations in rivers	4
3.2	A Hybrid Continuous/Discrete-Time Model	7
3.2.1	Het Model	7
3.2.2	Model Toegepast Op De Criteria	9
3.2.3	Critical Domain Size	11
3.2.4	Model Parametrisering	11
3.2.5	Numerieke Resultaten	12
3.3	Optimal Control of a PDE	12
3.3.1	Numerieke Oplossingen	13
3.4	Bevindingen	16
4	Probleemformulering en numerieke resultaten	17
4.1	Model met alle parameters constant	17
4.2	A, D en Q constant nemen	18
4.3	Onderzoek naar variabelen A en Q	27
5	Conclusie	32
	Appendix	33
	A: Python Code voor Logistische Groei	33
	B: Python Code voor model 4.3	34
	C: Python Code voor model 4.8	36

1 Abstract

In dit verslag wordt gekeken naar een wiskundig model voor invasieve soorten in een rivier. Allereerst wordt onderzocht wat er bekend is in de wiskunde over dit onderwerp, waarna een convectie-diffusievergelijking voor de populatiedichtheid van een invasieve soort wordt opgelost met behulp van een zelfgeschreven programma in Python. Deze vergelijking is opgelost met behulp van een eindige differentiemethode, waarbij gebruik gemaakt wordt van benaderingen voor de populatiedichtheid en de bijbehorende afgeleiden. Uit het onderzoek blijkt dat de invasieve soort beheerst wordt, wanneer het debiet groter of gelijk aan 13 is. De populatiedichtheid neemt dan namelijk af per tijdstap.

Als uitbreiding op dit onderzoek kan worden gekeken naar uitbreidingen voor het populatiemodel, zo kan er bijvoorbeeld een overlevingskans worden toegevoegd. Of er kan een afhankelijkheid van de temperatuur worden geïmplementeerd, zodat bijvoorbeeld Q afhankelijk is van de temperatuur.

2 Inleiding

Invasieve soorten zorgen jaarlijks voor miljarden euro's aan schade, ze kunnen bijvoorbeeld de motoren van boten stuk maken of gemalen vast laten lopen. Het is daarom van belang dat invasieve soorten worden beheerst. Voor invasieve waterdieren geldt dat ze zich vaak verspreiden door rivieren om uiteindelijk bij een meer uit te komen, waar ze zich zullen vestigen. Het is dus van belang om de invasieve soort in de rivier te stoppen en de schade te beperken. In dit verslag wordt gekeken naar een vergelijking van de populatiedichtheid van invasieve soorten in een rivier. Eerst wordt onderzocht wat er al bekend is in de wiskunde over deze probleemsituatie, daarna zal worden gekeken hoe een vergelijking voor de populatiedichtheid kan worden opgelost om vervolgens dit op te lossen met behulp van een zelfgeschreven programma in Python. Nadat bekend is hoe de oplossing gevonden kan worden, zal worden onderzocht welke waarden voor de parameters nodig zijn om de invasieve soort te beheersen.

3 Theoretisch onderzoek: Wat is er bekend over invasieve soorten?

Allereerst zullen we kijken naar verschillende artikelen met betrekking tot wiskundige modellen van invasieve soorten in een rivier, deze artikelen worden samengevat en vervolgens kijken we naar welke informatie zal worden gebruikt in het verdere onderzoek.

Merk op dat voor sommige termen de Engelse term gebruikt wordt om de essentie van het begrip te behouden.

3.1 Controlling invasive populations in rivers

In artikel [2] wordt gekeken naar hoe invasieve soorten zijn te beheersen met behulp van het debiet, de hoeveelheid water per tijdseenheid. Dit is belangrijk omdat de verandering van de volumesnelheid een grote invloed heeft op het ecosysteem in de rivier.

Om de hydrologie van de rivier te modelleren wordt een convectie-diffusie vergelijking gebruikt. Deze vergelijking zal een verband leggen tussen verschillende eigenschappen van de rivier. Verder zal er ook nog een populatiemodel worden toegevoegd. Door dit te combineren krijgen we de volgende formule:

$$N_t = -A_t(x, t) \frac{N}{A(x, t)} + \frac{1}{A(x, t)} (D(x, t) A(x, t) N_x)_x - \frac{Q(t)}{A(x, t)} N_x + rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (3.1)$$

De formule geeft het verloop van de populatiedichtheid N aan over de tijd, ofwel N_t . $A(x, t)$ is de dwarsdoorsnede van de rivier, hierbij is $A_t(x, t)$ gelijk aan de verandering van de dwarsdoorsnede ten opzichte van de tijd t . Daarnaast hebben we de diffusie term $D(x, t)$ die de biodiffusie en stromingdiffusie zal bevatten en het debiet $Q(t)$ wat de hoeveelheid water in de rivier per tijdseenheid aangeeft. Het debiet is onafhankelijk van x , dit betekent dat de plaats in de rivier de volumesnelheid niet zal beïnvloeden. Voor het populatiemodel hebben we de groeiterm r , die aangeeft hoe snel de soort zich vermenigvuldigt en de draagcapaciteit K , het maximum aantal van de invasieve soort dat in de rivier kan leven.

De eerste term aan de rechterkant van de formule geeft de verspreiding van de invasieve soort aan over de rivier. Hierbij wordt ook rekening gehouden met een eventuele verandering van de dwarsdoorsnede van de rivier in de tijd. De tweede term is de diffusie term, deze zal aangeven hoe de invasieve soort zich zal verspreiden. De derde term is de convectie term, hiermee wordt de verplaatsing van de invasieve soort bepaald met betrekking tot de stroming van de rivier. Ten slotte hebben we het populatiemodel, dit is een logistische groei die de groei van de invasieve soort zal berekenen.

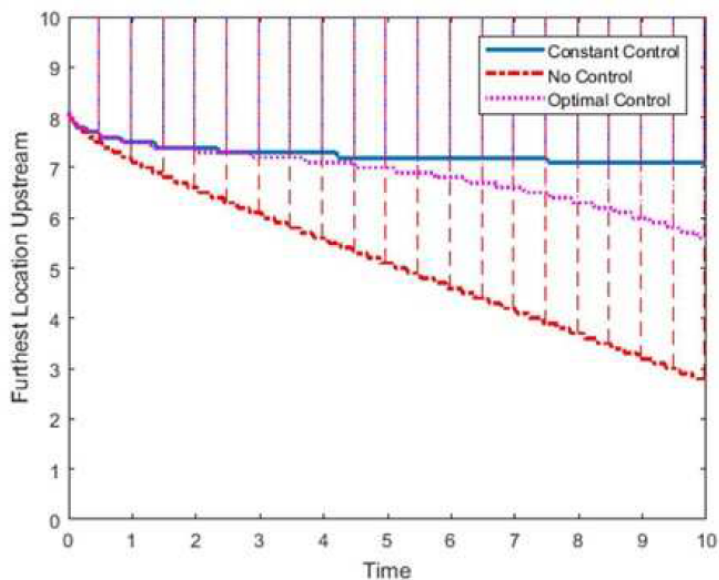
Bij vergelijking 3.1 horen ook een aantal rand- en beginvoorwaarden. We bekijken een rivier met lengte L , dus geldt voor de verplaatsing x dat $0 \leq x \leq L$, waarbij $x = 0$ het begin van de rivier is en $x = L$ is de mond van de rivier. Allereerst wordt er aangenomen dat er stroomopwaarts in het begin nog geen invasieve soort aanwezig is. Verder nemen we aan dat zodra de invasieve soort in de rivier terecht komt er geen invloed is van buitenaf. Er komen dus geen

invasieve soorten meer bij doordat ze bijvoorbeeld van een boot af vallen. Deze aannames geven de volgende randvoorwaarden en beginvoorwaarde:

$$\begin{aligned} N(0, t) &= 0 \text{ op } (0, T), \\ N_x(L, t) &= 0 \text{ op } (0, T), \\ N(x, 0) &= N_0(x) \text{ op } (0, L). \end{aligned}$$

Nu er een model is voor de invasieve soort wordt er gekeken naar het gedrag van de soort als de stroming verandert. Wanneer de stroming laag is kan de soort zich verder verspreiden over de rivier, terwijl verspreiding niet mogelijk is wanneer de stroming sterk is. Wanneer een invasieve soort zich langzaam aan weet te verspreiden over de rivier wordt dit ook wel een ‘invasion ratchet’ genoemd. Hieruit wordt duidelijk hoe belangrijk de stroming van de rivier is voor een invasieve soort. Daarom is optimal control over het debiet $Q(t)$ van belang.

Om de optimale waarde voor $Q(t)$ te vinden wordt de populatie integraal geïntegreerd vermenigvuldigd met een factor voor de kosten¹. Vervolgens wordt het resultaat geminimaliseerd om de beste $Q(t)$ te vinden. Het blijkt dat er een 84% verbetering is in de beperking van de verspreiding als de geminimaliseerde $Q(t)$ genomen wordt. Bij de optimale waarde voor $Q(t)$ is er een verbetering van 74%, zoals in de figuur hieronder te zien is. De optimale waarde is de gevonden $Q(t)$ waarbij de kosten ook zo laag mogelijk zijn.



Figuur 1: De locatie van de invasieve soort in de rivier.

¹In dit artikel wordt verder niet stilgestaan bij wat deze kosten precies zijn, of wat deze integraal precies is.

Zie onderstaande tabel voor een overzicht van de belangrijkste parameters en de bijbehorende eenheden.

Symbol	Naam	Eenheid
$N(x, t)$	Populatie ­ dichtheid	$1/m^2$
$A(x, t)$	Dwarsdoorsnede	m^2
$D(x, t)$	Diffusiecoëfficiënt	m^2/s
$Q(t)$	Debiet	m^3/s
r	Groeiterm	1/dag
K	Draagcapaciteit	$1/m^2$

3.2 A Hybrid Continuous/Discrete-Time Model

In artikel [1] wordt een wiskundig model ontwikkeld om de succeskans van de zebramossel te bepalen door te kijken naar de interactie tussen populatiegroei en verspreiding, de omgeving en de stroming.

Allereerst wordt er onderscheid gemaakt tussen de verschillende levensfasen van de zebramossel. De larven fase wordt beschreven met een diffusie-advectie vergelijking, terwijl de jeugd en volwassen fase wordt beschreven met twee verschilformules die een verband leggen met de populatie van het huidige jaar en de populatie voor het volgende jaar.

Om te onderzoeken of de zebramossel de rivier kan binnendringen wordt er gekeken naar verschillende persistentie criteria voor de zebramossel, hiermee worden criteria bedoeld waardoor de zebramossel zal overleven. Dit zijn de criteria die gebruikt zullen worden:

1. $R_{loc}(x)$, de fundamentele niche, een individu wordt alleen geboren en zal overlijden, verspreiding is uitgesloten. De belangrijkste vraag voor deze criterium is: Als een volwassen individu is geïntroduceerd, hoeveel volwassen nakomelingen zal deze dan produceren?
2. $R_\delta(x)$, ‘source-sink distribution’, hier zal gekeken worden naar de levenslange bijdrage van een individu met betrekking tot overleven, verspreiden en voortplanten. De belangrijkste vraag is: Als een volwassen individu wordt geïntroduceerd op locatie x en voortplanting, larvale verspreiding en groei van de larven ondergaat, hoeveel volwassen nakomelingen heeft de geïntroduceerde individu bijgedragen?
3. R_0 , netto voortplanting, ofwel het gemiddeld aantal volwassenen geproduceerd door een volwassen individu over zijn hele leven.

3.2.1 Het Model

Voordat het model gemaakt wordt, wordt er gekeken naar hoe lang iedere levensfase duurt. De larven fase is vrij kort, deze zal een aantal dagen tot een paar weken duren. De jeugd fase begint zodra de larven fase is geëindigd en eindigt wanneer de zebramossel geslachtsrijp is. Dit is ongeveer wanneer de zebramossel twee jaar is. Hierna zal de zebramossel de volwassen fase ingaan tot zijn overlijden. Deze fase duurt ongeveer 1 tot 3 jaar. Door de verschillende levensfasen zal in het model gewerkt moeten worden met verschillende tijdschalen.

We gaan het model van de dynamiek van de zebramossel stap voor stap opbouwen. Voor het model kijken we naar een rivier met lengte L , waarbij $x = 0$ het begin van de rivier is en $x = L$ de mond van de rivier.

$$u_t = \frac{1}{q(x)}(D(x)q(x)u_x)_x - \frac{Q}{q(x)}u_x - m(x)u - \sigma(x)u, \quad (3.2)$$

$$w_t = h(x)\sigma(x)u. \quad (3.3)$$

In vergelijking 3.2 hebben we de volgende parameters: u is de populatiegroei van larven, waarbij u_t en u_x respectievelijk de afgeleiden zijn naar de tijd t en naar de plaats x . Verder hebben we $q(x)$ de dwarsdoorsnede van de rivier, $D(x)$ een diffusie parameter, Q het debiet, ofwel de volumesnelheid van de rivier, $m(x)$ het sterftcijfer die afhankelijk is van x dus per locatie in de rivier kan

verschillen en als laatste hebben we $\sigma(x)$ de settling rate, de proportie larven die naar de grond zullen zakken en zich zullen settelen.

Vergelijking 3.2 beschrijft de populatiegroei van larven, u , in de tijd. De eerste term van de vergelijking is de diffusie-term, deze term houdt rekening met hoe de larven zich verspreiden. De volgende term is de convectie-term, deze term geeft de verplaatsing van de larven aan met betrekking tot de waterstroming. Daarna hebben we een term die de sterfelijkheid beschrijft. En de laatste term geeft het aantal larven weer die naar de grond zakken en zullen settelen.

In vergelijking 3.3 kijken we naar w , de dichtheid van de larven die zich in de benthische zone, de onderste laag van de rivier, bevinden. Hierbij is w_t de afgeleide naar de tijd dus we bepalen de verandering van de dichtheid in de tijd. Verder hebben we de parameter $h(x)$, de waterdiepte van de rivier, die verschilt per locatie x . We zien dat de populatiedichtheid w afhankelijk is van u vermenigvuldigd met de diepte van de rivier en hoeveel larven zich zullen settelen. Hierdoor weten we dat we w kunnen vinden door u_t op te lossen en te substitueren in w_t .

Nu er een beeld is van de groei en populatiedichtheid van de larven kunnen we gaan kijken naar de jeugd en volwassen populatie, de volgende levensfasen van de zebramosseel.

$$J(x, n + 1) = \varphi(x, n) s_l(x, T) w(x, \tau) \quad (3.4)$$

$$A(x, n + 1) = \varphi(x, n) [s_j(x, T) J(x, n) + s_a(x, T) A(x, n)] \quad (3.5)$$

In vergelijkingen 3.4 en 3.5 hebben we allereerst $J(x, n + 1)$ en $A(x, n + 1)$, de populatiegroei voor respectievelijk de jeugd en volwassen populatie. Hierbij is n het huidige jaar, en $n + 1$ het volgende jaar. Verder hebben we $\varphi(x, n)$ die de overlevingskansen met betrekking tot de dichtheid van de populatie, bij bijvoorbeeld een hogere dichtheid zebramosseelen zal er meer strijd zijn om voedsel dan wanneer de dichtheid lager is. Voor $\varphi(x, n)$ wordt een Beverton-Holt dichtheidsafhankelijke overlevingsterm gebruikt:

$$\varphi(x, n) = \frac{1}{1 + \beta [l_l(T) \omega(x, \tau) + l_j(T) J(x, n) + l_a(T) A(x, n)]}$$

Hierbij is β de concurrentie coëfficiënt en l_l , l_j , l_a zijn de lengten van de schelp, waarbij de temperatuur van invloed is op de lengte van de schelp. Als laatste zijn s_l , s_j en s_a in 3.4 en 3.5 de overlevingskansen voor respectievelijk de larven, jeugd en volwassenen. We zien dat de groei van de jeugd en volwassenen niet meer afhankelijk is van de diffusie of de watersnelheid maar dat de groei van de jeugd en volwassenen juist algemene overlevingskansen heeft.

We hebben de populatiegroei van de zebramosseelen in alle levensfasen gevonden. Nu zullen we kijken waaraan moet worden voldaan om deze vergelijkingen te kunnen gebruiken. Allereerst kijken we naar de randvoorwaarden van u .

$$\alpha_1 u(0, t) - \alpha_2 u_x(0, t) = 0, \quad \alpha_3 u(L, t) + \alpha_4 u_x(L, t) = 0, \quad (3.6)$$

In vergelijking 3.6 hebben we twee randvoorwaarden die afhankelijk zijn van de waarden van α_1 , α_2 , α_3 , en α_4 . Wanneer $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ en $\alpha_4 = \alpha_2 = 0$ hebben we Dirichlet randvoorwaarden en wanneer $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ en $\alpha_4 = \alpha_2 = 1$ hebben we Neumann randvoorwaarden. Verder krijgen we Robin randvoorwaarden wanneer $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$ en $\alpha_4 + \alpha_2 \neq 0$, en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0$.

Daarnaast wordt er in het artikel onderscheid gemaakt tussen twee soorten randvoorwaarden. Allereerst hebben we vijandige randvoorwaarden, deze zeggen dat de flux aan het begin van de rivier gelijk is aan nul en aan de mond van de rivier is er geen dichtheid. Ook hebben we de Danckwerts' randvoorwaarden, deze nemen ook aan dat de flux aan het begin van de rivier nul is, maar aan de mond van de rivier hebben we een isolatie randvoorwaarde. Zodra de invasieve soort uit de rivier is geduwd kan hij niet meer terug zwemmen.

Naast de randvoorwaarden, zijn er ook beginvoorwaarden gegeven. Namelijk:

$$u(x, 0) = \frac{r(x)A(x, n)}{h(x)}, w(x, 0) = 0, \quad (3.7)$$

$$J(x, 0) = J^0(x), A(x, 0) = A^0(x). \quad (3.8)$$

Allereerst hebben we in 3.7 de ratio van de dichtheid van de larven die geboren worden tijdens het broedseizoen. In het artikel wordt niet specifiek benoemd wat $r(x)$ is, maar we gaan ervan uit dat dit de groeiterm is, hoe snel de zebromossel zich vermenigvuldigd. Verder zorgt de term $\frac{1}{h(x)}$ er voor dat je kijkt naar de dichtheid per eenheid van de benthische zone. In de tweede vergelijking van 3.7 nemen we aan dat in het begin nog geen larven zijn in de benthische zone. Als laatste hebben we in 3.8 de beginvoorwaarden $J_0(x)$ en $A_0(x)$ voor respectievelijk de jeugd en de volwassenen.

We hebben nu stuk voor stuk naar de vergelijkingen en beginvoorwaarden gekeken. Alles samenvoegen geeft het volgende model:

$$u_t = \frac{1}{q(x)}(D(x)q(x)u_x)_x - \frac{Q}{q(x)}u_x - m(x)u - \sigma(x)u \quad (3.2)$$

$$w_t = h(x)\sigma(x)u \quad (3.3)$$

$$J(x, n+1) = \varphi(x, n)s_l(x, T)w(x, \tau) \quad (3.4)$$

$$A(x, n+1) = \varphi(x, n)[s_j(x, T)J(x, n) + s_a(x, T)A(x, n)] \quad (3.5)$$

$$\alpha_1 u(0, t) - \alpha_2 u_x(0, t) = 0, \alpha_3 u(L, t) + \alpha_4 u_x(L, t) = 0, \quad (3.6)$$

$$u(x, 0) = \frac{r(x)A(x, n)}{h(x)}, w(x, 0) = 0, \quad (3.7)$$

$$J(x, 0) = J^0(x), A(x, 0) = A^0(x). \quad (3.8)$$

3.2.2 Model Toegepast Op De Criteria

Nu het model is opgesteld zal er gekeken worden naar de criteria die zijn vastgesteld aan het begin van het artikel.

3.2.2.1 $R_{loc}(x)$

We beginnen met het kijken naar $R_{loc}(x)$, de fundamentele niche. Voor $R_{loc}(x)$ is aangenomen dat verspreiding en concurrentie is uitgesloten, dus de termen $D(x)$, Q en $\varphi(x, n)$ vallen weg in het bovenstaande model. Verder vallen de randvoorwaarden weg omdat deze rekening houden met de stroming van de

rivier. We houden het volgende model over:

$$\begin{aligned}
u_t &= m(x)u - \sigma(x)u \\
w_t &= h(x)\sigma(x)u \\
J(x, n+1) &= s_l(x, T)w(x, \tau) \\
A(x, n+1) &= s_j(x, T)J(x, n) + s_a(x, T)A(x, n) \\
u(x, 0) &= \frac{r(x)A(x, n)}{h(x)}, \quad w(x, 0) = 0, \\
J(x, 0) &= J^0(x), \quad A(x, 0) = A^0(x).
\end{aligned}$$

We kunnen de vergelijking voor u_t oplossen en met het invullen van de beginvoorwaarde krijgen we de volgende uitdrukking voor u :

$$u(x, t) = \frac{r(x)A(x, n)}{h(x)} e^{-(m(x)+\sigma(x))t}$$

Nu we een uitdrukking voor $u(x, t)$ hebben gevonden, kunnen we w_t ook oplossen door te integreren over t en $u(x, t)$ in te vullen. We krijgen voor w de volgende uitdrukking:

$$w(x, \tau) = \frac{\sigma(x)r(x)[1 - e^{-(m(x)+\sigma(x))\tau}]}{m(x) + \sigma(x)} A(x, n) = \Theta(x)A(x, n)$$

Met behulp van de oplossing van $w(x, \tau)$ kunnen we nu een vergelijking voor $R_{loc}(x)$ opstellen. Waarbij we aannemen dat $R_{loc}(x)$ gelijk is aan het aantal volwassen nakomelingen van een individu op locatie x .

$$R_{loc}(x) = \frac{\Theta(x)s_l(x)s_j(x)}{1 - s_a(x)} = \frac{\sigma(x)r(x)[1 - e^{-(m(x)+\sigma(x))\tau}]s_l(x)s_j(x)}{(1 - s_a(x))(m(x) + \sigma(x))}$$

We zien nu uit de vergelijking wanneer $R_{loc}(x) > 1$ dat de populatie zal groeien, terwijl wanneer $R_{loc}(x) < 1$ de populatie zal uitsterven.

Bovendien legt artikel [1] uit hoe $R_{loc}(x)$ geschreven kan worden in matrixvorm. Door de oplossing voor $w(x, \tau)$ te substitueren in vergelijkingen 3.4 en 3.5 van het model krijgen we:

$$\begin{pmatrix} J(x, n+1) \\ A(x, n+1) \end{pmatrix} = \mathbf{P}(x) \begin{pmatrix} J(x, n) \\ A(x, n) \end{pmatrix}$$

Waarbij P gelijk is aan:

$$\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & s_l(x)\Theta(x) \\ s_j(x) & s_a(x) \end{pmatrix}$$

Vervolgens kan P opgesplitst worden in twee componenten, namelijk:

$$\mathbf{T}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_j(x) & s_a(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 & s_l(x)\Theta(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Door de decompositie van P in T en F kan er een vergelijking op worden gesteld voor R_0 .

$$R_0(x) = \rho[\mathbf{F}(x)(\mathbf{I} - \mathbf{T}(x))^{-1}].$$

Het uitwerken van de vergelijking voor R_0 geeft:

$$R_0(x) = \frac{\Theta(x)s_l(x)s_j(x)}{1 - s_a(x)} = \frac{\sigma(x)r(x)[1 - e^{-(m(x)+\sigma(x))\tau}]s_l(x)s_j(x)}{(1 - s_a(x))(m(x) + \sigma(x))}$$

Het blijkt dat R_0 en R_{loc} gelijk zijn, ofwel R_{loc} kan gezien worden als een uitbreiding voor de netto voortplanting met betrekking tot de omvang van de rivier.

3.2.2.2 $R_\sigma(x)$, 'source-sink distribution'

Voor $R_\sigma(x)$ zullen we kijken naar de vergelijkingen 3.2 en 3.3. We onderzoeken het gedrag van de larven, hoe ze zich verspreiden en het effect van het vestigen op de rivierbodem met betrekking tot verspreiding. Voordat we een vergelijking voor $R_\sigma(x)$ onderzoeken, introduceren we eerst een nieuwe variabele $k(x, y)$, dit is de kansdichtheid van een larve die geboren is op plaats y zich zal vestigen op plaats x . Voor $R_\sigma(x)$ krijgen we een vergelijking die het totaal aantal volwassen nakomelingen door een individu zal beschrijven. We zullen de $k(x, y)$ combineren met de overlevingskansen om de vergelijking op te stellen. We krijgen uiteindelijk:

$$R_\sigma(x) = \frac{r(x)}{1 - s_a(x)} \int_0^L s_l(y)s_j(y)k(y, x)dy.$$

3.2.2.3 R_0

We hebben aangenomen dat R_0 de netto voortplanting is, ofwel het gemiddeld aantal volwassenen geproduceerd door een volwassen individu over zijn hele leven. We hebben voor $R_\sigma(x)$ een vergelijking gevonden, echter geeft deze vergelijking niet voldoende informatie over de globale groei of uitroeiing van de zebramossel. Om een beter beeld van de groei of uitroeiing te krijgen moeten we een nieuwe functie toevoegen die de volgende generatie zal modelleren.

We vinden uiteindelijk dat $\Gamma\phi(x) = R_0\phi(x)$, waarbij Γ de functie is om de volgende generatie te bepalen en $\phi(x)$ de eigen functie die geassocieerd wordt met R_0 , wat deze eigenfunctie precies is wordt niet verder uitgelegd.

Voor de afleiding van dit resultaat en de theorie erachter zie artikel [1], sectie 3.3.

3.2.3 Critical Domain Size

Om de minimale lengte van een rivier te vinden waarbij de zebramossel zal overleven wordt de functie Γ geanalyseerd. We beginnen de analyse met het nemen van constante waarden voor q , D , m , σ , h , r , s_l , s_j en s_a . Daarnaast nemen we $\phi(x, n) = 1$. Vervolgens lossen we het eigenwaardeprobleem $\Gamma A(x) = \lambda A(x) = \frac{s_l s_j r}{1 - s_a} \int_0^L A(y)k(x, y)dy$ op en werken dit uit. We zullen een Sturm-Liouville probleem krijgen; de oplossing is afhankelijk van de randvoorwaarden.

Voor meer informatie en de afleiding van de domein grootte zie [1], sectie 5.

3.2.4 Model Parametrisering

De parameters voor het model worden geschat met waarden uit experimenten. De belangrijkste parametrisering is die van de overlevingskansen voor de larven,

jeugd en volwassenen. Voor deze overlevingskansen wordt er van uit gegaan dat deze afhankelijk zijn van de schelpgrootte en de temperatuur. Dit wordt geparametriseerd met behulp van kwadratische regressie. We krijgen:

$$s_l(T) = s_j(T) = s_a(T) = \frac{e^{b_0+b_1T+b_2T^2}}{1 + e^{b_0+b_1T+b_2T^2}}$$

Bovendien worden nog een aantal andere parameters gegeven:

Symbol	Betekenis	Geschatte waarden
τ	De langste verspreidingstijd voor het settelen	30 dagen
m	Sterftcijfer van verspreidende larven	1.44/dag
σ	Settling rate van verspreidende larven	0.00144/dag
r	Reproductie cijfer van volwassen zebrosselen	4218/jaar
D	Diffusiecoëfficiënt	$0.4m^2$ /seconde

3.2.5 Numerieke Resultaten

Omdat er nu schattingen zijn voor veel parameters gaan we het model parametriseren om te onderzoeken wat het effect van de rivierstroming, de temperatuur en de randvoorwaarden op de populatiedichtheid van de zebrosselen is.

Aangezien er onvoldoende informatie is over β wordt het model omgeschreven zodat we geen schatting van β nodig hebben. Daarom nemen we:

$$\tilde{u} = \beta l_a u, \tilde{w} = \beta l_1 w, \tilde{J} = \beta l_j J, \tilde{A} = \beta l_a A.$$

En vullen dit in, in het model. Vervolgens kiezen we de temperatuur, $T = 15C$, zodat de overlevingskansen en de schelpgrootte berekend kunnen worden. Hierna kan R_0 geschat worden. Daarna wordt er een schatting gemaakt voor $R_\sigma(x)$, dit wordt gedaan met behulp van de randvoorwaarden en het geparametriseerde model.

3.3 Optimal Control of a PDE

In artikel [3] wordt gekeken naar invasieve soorten onder controle houden in rivieren met behulp van het debiet, de volume van het water in de rivier.

We gebruiken dezelfde partiële differentiaalvergelijking als in artikel [2], dus:

$$N_t = -A_t(x, t) \frac{N}{A(x, t)} + \frac{1}{A(x, t)} (D(x, t) A(x, t) N_x)_x - \frac{Q(t)}{A(x, t)} N_x + rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (3.9)$$

We gaan kijken naar $Q(t)$, en hoe we controle kunnen krijgen over het debiet. Allereerst moeten we kijken naar de minimale en maximale waarde voor $Q(t)$. Het spreekt voor zich dan $Q(t) > 0$, aangezien we geen negatieve stroming kunnen hebben. Dus er is een waarde m zodat $Q(t) > m$. Voor de maximale waarde nemen we aan dat $Q(t)$ een bovengrens M heeft, dit heeft onder andere te maken met het afdammen van rivieren en het water in de rivier kan geen oneindige snelheid hebben. We nemen aan dat we volledige controle hebben over hoeveel water door de dam zal stromen, de verzameling voor deze controle is dus:

$$\mathcal{U} = \{Q \in L^\infty(0, T) | m \leq Q(t) \leq M\}.$$

We gebruiken het idee dat $Q(t)$ hoger is in bepaalde seizoenen en lager is in andere seizoenen, wat van invloed is op de populatie van de invasieve soort. We zullen de volgende functie gaan minimaliseren:

$$J(Q) = \int_0^T \int_0^L W(x)N(x, t)dxdt + \int_0^T \epsilon Q^2(t)dt. \quad (3.10)$$

Hierbij is $J(Q)$ de doelfunctie, we willen de optimale waarde voor Q weten dus we zullen deze functie minimaliseren om de waarde voor Q te vinden. In deze uitdrukking hebben een gewichtsfunctie $W(x)$ die groot is in $x = 0$, het begin van de rivier en heel klein zal zijn in $x = L$, de mond van de rivier. Dit zal helpen met de invasieve soort in de mond van de river te houden. De eerste term zal de populatie van de invasieve soort minimaliseren waarbij de nadruk ligt om de soort zo dicht mogelijk bij de mond van de rivier te houden. Terwijl de tweede term is gefocust op $Q(t)$ te minimaliseren zodat je met een minimale inspanning van $Q(t)$ de invasieve soort stroomafwaarts houdt. Hierbij zorgt ϵ er voor dat de term Q^2 klein blijft. Er wordt verder niet op ingegaan in het artikel hoe men ϵ gebruikt. We gaan op zoek naar een waarde Q^* in de eerder opgestelde verzameling zodat $J(Q^*) = \inf J(Q)$.

Voordat we verder gaan nemen we ook aan dat alle variabelen in de partiële differentiaalvergelijking groter (of gelijk) zijn aan nul en van boven begrensd zijn door een bepaalde waarde M_{max} , waarbij het maximum verschilt per waarde van x .

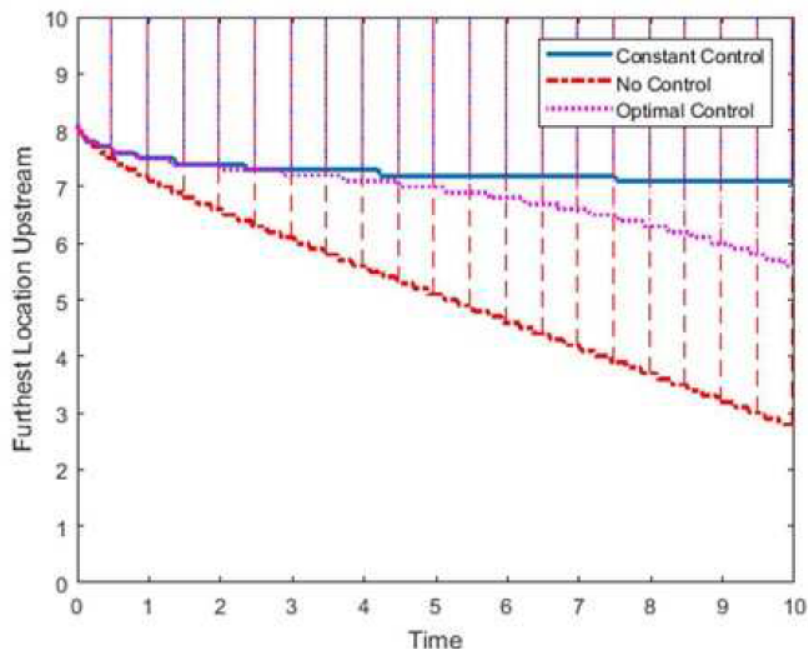
3.3.1 Numerieke Oplossingen

Om de optimale waarde voor $Q(t)$ te vinden wordt de ‘forward-backward sweep’ methode gebruikt. Allereerst wordt er een waarde voor $Q(t)$ geschat, vervolgens lossen we de partiële differentiaalvergelijking (pdv, vergelijking 3.9) op vooruit in de tijd, daarna lossen we de ‘adjoint’ pdv, lambda op achteruit in de tijd. Daarna zullen we de waarde van $Q(t)$ aanpassen met behulp van de gevonden waarden voor N en λ . Deze ‘adjoint’ pdv kan worden gevonden in artikel [3] als formule (5), we gaan hier verder niet op in omdat er veel theorie nodig is om deze differentiaalvergelijking op te stellen.

We beginnen de simulaties door voor de dwarsdoorsnede A , een constante waarde te nemen. Verder worden de volgende parameters gebruikt:

Parameter	Waarde
T	10
L	10
r	0.6
K	200
D	0.1
A	20
ϵ	0.05
Q	0-10

Na het optimaliseren, kunnen we de oplossing plotten en krijgen we figuur 2.



Figuur 2: De locatie van de invasieve soort in de rivier, waarbij A constant is.

Wanneer er geen controle is over het debiet zal de invasieve soort zich verder in de rivier kunnen verspreiden. We zien een aanzienlijk verschil wanneer er wel controle is over het debiet, waarbij constant control er zelfs voor zorgt dat de invasieve soort zich nauwelijks verspreid. Alhoewel de constant control het beste resultaat geeft met betrekking tot verspreiding, kost constant control veel inspanning omdat het debiet steeds dezelfde snelheid moet hebben. De optimal control houdt hier rekening mee, dit is de oplossing waarbij de debiet zo min mogelijk wordt aangepast ofwel, het kost zo min mogelijk inspanning om te voorkomen dat de invasieve soort zich verspreid over de hele rivier. We zien dus dat constant control en optimal control afwegingen zijn tussen kosten/inspanning en het voorkomen van verdere verspreiding. Verder blijkt uit de oplossing van het model dat de capaciteit K bijna bereikt wordt, echter wordt niet beschreven in het artikel hoe men dit kan zien.

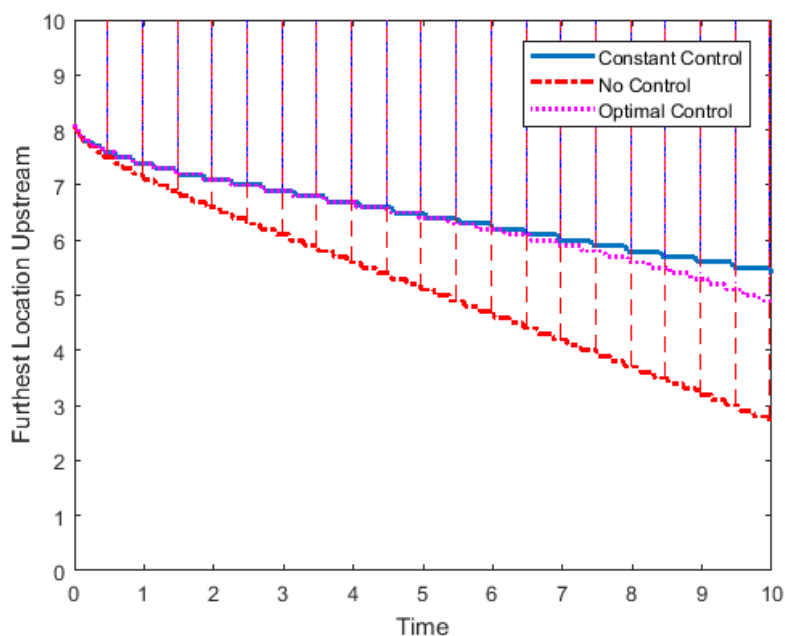
Nadat de oplossing gevonden is wordt er gekeken naar het effect van de andere parameters. Zo worden de diffusiecoëfficiënt D en de temperatuur T aangepast. Voor de diffusiecoëfficiënt zien we dat een verhoging nauwelijks effect heeft op de resultaten, echter is bij een verlaging van het diffusiecoëfficiënt een duidelijke afname van de populatie te zien. Wanneer we kijken naar een verandering in temperatuur zien we dat bij een verlaging van de temperatuur de populatie fors afneemt, terwijl bij een hogere temperatuur de populatie fors toeneemt. Alhoewel de temperatuur en diffusiecoëfficiënt lastig zijn om aan te passen is het belangrijk dat we hierdoor wel het effect op de oplossing ervan

begrijpen.

We hebben gezien dat bij een constante dwarsdoorsnede er al een aanzienlijk verschil is voor de waarde van $Q(t)$ wanneer we niks doen en met optimal control. Nu gaan we onderzoeken wat er gebeurt wanneer A , de dwarsdoorsnede van de rivier, niet meer constant is. We nemen $A(x) = 0.5x + 25$, en gebruiken dezelfde waarden als in het constante geval. Verder, als we de dwarsdoorsnede van de plaats en de tijd laten afhangen krijgen we de volgende vergelijking: $A(x, t) = (0.5x + 25) + (0.2t(10 - t))$.

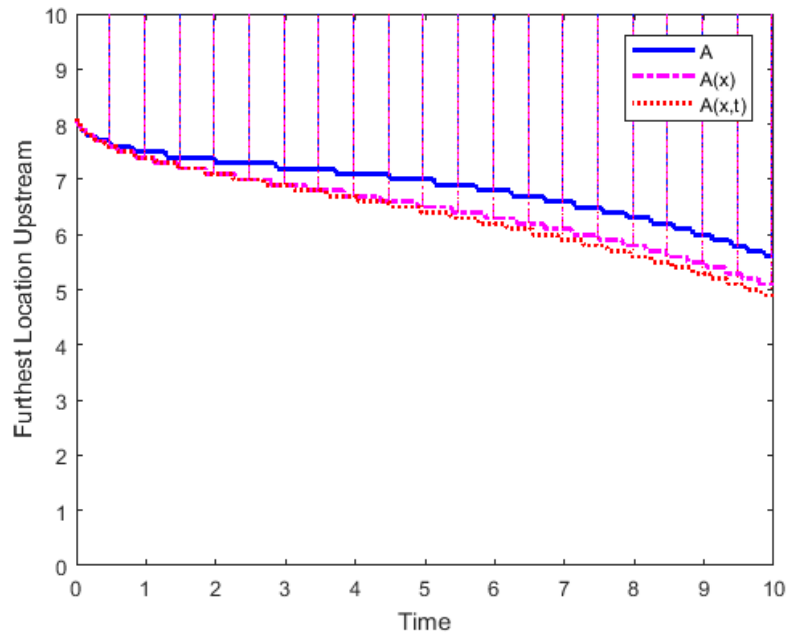
Het artikel gaat er niet verder op in wat het effect is van een dwarsdoorsnede die alleen afhangt van x .

De optimale oplossing vinden met het gebruiken van $A(x, t)$ geeft figuur 3.



Figuur 3: De locatie van de invasieve soort in de rivier met A afhankelijk van x en t

Allereerst valt op dat, in vergelijking met figuur 2 waarbij A constant is, de constant control en optimal control dicht bij elkaar liggen. Tot slot wordt $A(x, t)$ vergeleken met $A(x)$ en A in figuur 5. Hieruit blijkt dat er weinig verschil is tussen de dwarsdoorsnede af laten hangen van de tijd en de plaats of alleen af laten hangen van de plaats.



Figuur 4: Vergelijking van de verschillende mogelijkheden voor A

3.4 Bevindingen

Ten eerste hebben we een idee gekregen hoe je de populatiedichtheid van een invasieve soort in een rivier kan modelleren en welke randvoorwaarden hierbij horen. Echter is er geen duidelijke beschrijving gegeven hoe de oplossing precies gevonden wordt. Daarom zullen we in het verdere onderzoek eerst gaan kijken naar methoden om de partiële differentiaalvergelijking op te lossen. Verder heeft [3] een idee gegeven van de invloed van verschillende parameters op de oplossing en heeft laten zien dat de verschillende keuzes voor A oplossingen geven die dicht bij elkaar liggen. Daarnaast heeft [1] een idee gegeven voor mogelijke uitbreidingen doordat het gekozen model in [1] heel uitgebreid is en met veel meer factoren rekening houdt dan in [3].

4 Probleemformulering en numerieke resultaten

Voor dit onderzoek gebruiken we de vergelijking uit [3], namelijk:

$$N_t = -A_t(x, t) \frac{N}{A(x, t)} + \frac{1}{A(x, t)} (D(x, t) A(x, t) N_x)_x - \frac{Q(t)}{A(x, t)} N_x + rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (4.1)$$

Ook gebruiken we de gegeven randvoorwaarden en beginvoorwaarden van dit model. We gaan het model stap voor stap onderzoeken en oplossen om zo een beeld te krijgen wat de effecten zijn van de constanten en hoe we deze kunnen aanpassen om de hoeveelheid invasieve soort te minimaliseren. Tijdens het onderzoek nemen we het volgende aan over de parameters:

Symbol	Naam	Eenheid
$N(x, t)$	Populatie ­ dichtheid	$1/km^2$
$A(x, t)$	Dwarsdoorsnede	km^2
$D(x, t)$	Diffusiecoëfficiënt	km^2/u
$Q(t)$	Debiet	km^3/u
r	Groeiterm	$1/jaar$
K	Draagcapaciteit	$1/m^2$
L	Lengte van de rivier	km
T	Totale tijd	$jaar$

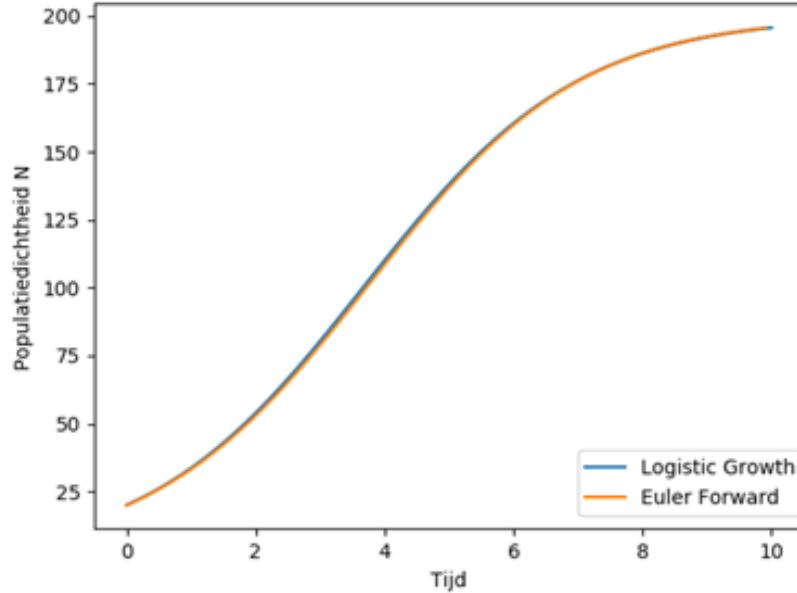
4.1 Model met alle parameters constant

Om te beginnen nemen we aan dat de populatie­dichtheid N alleen van de tijd afhangt, verder nemen we aan dat de dwarsdoorsnede A constant is. We krijgen dan het volgende model:

$$N_t = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (4.2)$$

Dit is een standaardvergelijking voor een populatiemodel met logistische groei en we weten hiervan de oplossing. We benaderen het populatiemodel met behulp van de voorwaartse Euler methode. Net zoals in artikel [3] gebruiken we $r = 0.6$, $K = 200$ en we nemen als beginwaarde $N_0 = 20$. Verder kiezen we een stapgrootte $h = 0.1$. De waarde voor h is bepaald door verschillende waarden uit te proberen, hieruit bleek dat 0.1 het meest precieze resultaat geeft. Deze waarden invullen in de code² geeft:

²Zie Appendix A: Python Code voor de logistische groei.



Figuur 5: Oplossing voor model 4.2 in vergelijking met logistische groei.

We zien dat voor een eenvoudig model de voorwaartse Euler methode een vrij realistische benadering geeft.

4.2 A, D en Q constant nemen

Nu we een idee hebben van het basismodel, gaan we een stapje verder. We nemen nu aan dat alleen de dwarsdoorsnede A , diffusiecoëfficiënt D , en de heid Q constant zijn. Hierdoor wordt de vergelijking voor het model als volgt:

$$N_t = DN_{xx} + \frac{Q}{A}N_x + rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (4.3)$$

Verder hebben we de rand- en beginvoorwaarden van het originele model. We gaan dit model oplossen met behulp van een eindige differentiemethode. We gebruiken de volgende benaderingen:

$$\begin{aligned} N_t &= \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\Delta t} \\ N_{xx} &= \frac{y_{j-1}^n - 2y_j^n + y_{j+1}^n}{\Delta x^2} \\ N_x &= \frac{y_{j+1}^n - y_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ N &= y_j \end{aligned}$$

Hierbij is j de stap voor de verplaatsing van x en n is de stap voor de verandering in de tijd t . Wanneer we deze benaderingen invullen in het bovenstaande model krijgen we het volgende model:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\Delta t} = \frac{D}{A} \frac{y_{j-1}^n - 2y_j^n + y_{j+1}^n}{\Delta x^2} - \frac{Q}{A} \frac{y_{j+1}^n - y_{j-1}^n}{2\Delta x} + ry_j^n \left(1 - \frac{y_j^n}{k}\right) \quad (4.4)$$

Vervolgens kunnen we dit model omschrijven naar een vergelijking voor y_j^{n+1} . We krijgen dan:

$$y_j^{n+1} = y_j^n + \frac{\Delta t}{A\Delta x^2} D(y_{j-1}^n - 2y_j^n + y_{j+1}^n) - \frac{\Delta t Q}{2\Delta x A} (y_{j+1}^n - y_{j-1}^n) + \Delta t r y_j^n \left(1 - \frac{y_j^n}{k}\right) \quad (4.5)$$

Verder moeten we ook nog rekening houden met de randvoorwaarden. Allereerst schrijven we deze om met de bovenstaande benaderingen. De randvoorwaarden worden dan:

$$y_0^n = 0 \quad (4.6)$$

$$y_L^n = y_{L-1}^n \quad (4.7)$$

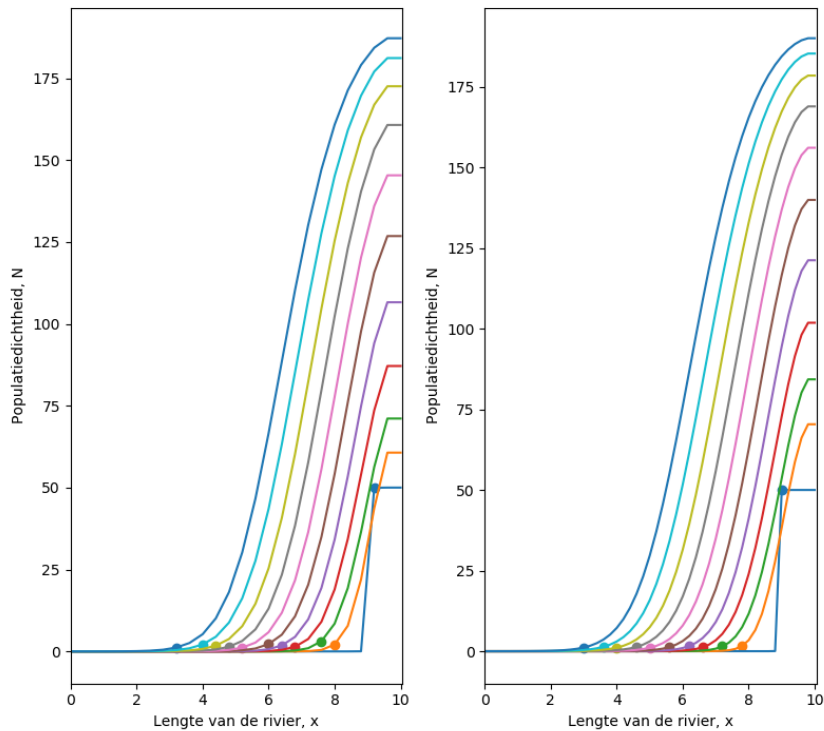
Voor de beginvoorwaarde nemen we aan dat de invasieve soort aanwezig is in de laatste kilometer van de rivier. Hier zal de beginvoorwaarde gelijk zijn aan een waarde N_0 , in de rest van de rivier is de beginvoorwaarde gelijk aan 0.

Nu we een vergelijking hebben om het model op te lossen en de rand- en beginvoorwaarden voor dit model bekend zijn kunnen we kijken welke gegevens we gaan gebruiken om de oplossing te plotten. We willen een stabiele oplossing, dus is het belangrijk dat we de tijdstap goed kiezen zodat er geen instabiliteit ontstaat. We nemen $\Delta t = \frac{D\Delta x^2}{2A}$ als benadering voor Δt . Verder gebruiken we de volgende waarden:

Parameter	Naam	Waarde	Eenheid
N_0	Beginvoorwaarde	50	$1/km^2$
D	Diffusiecoefficient	0.2	km^2/uur
Q	Volumesnelheid	5	km^3/uur
A	Dwarsdoorsnede	20	km^2
r	Groeiterm	0.8	$1/jaar$
K	Draagcapaciteit	200	$1/km^2$
T	Totale tijd	10	$jaar$
L	Lengte rivier	10	km

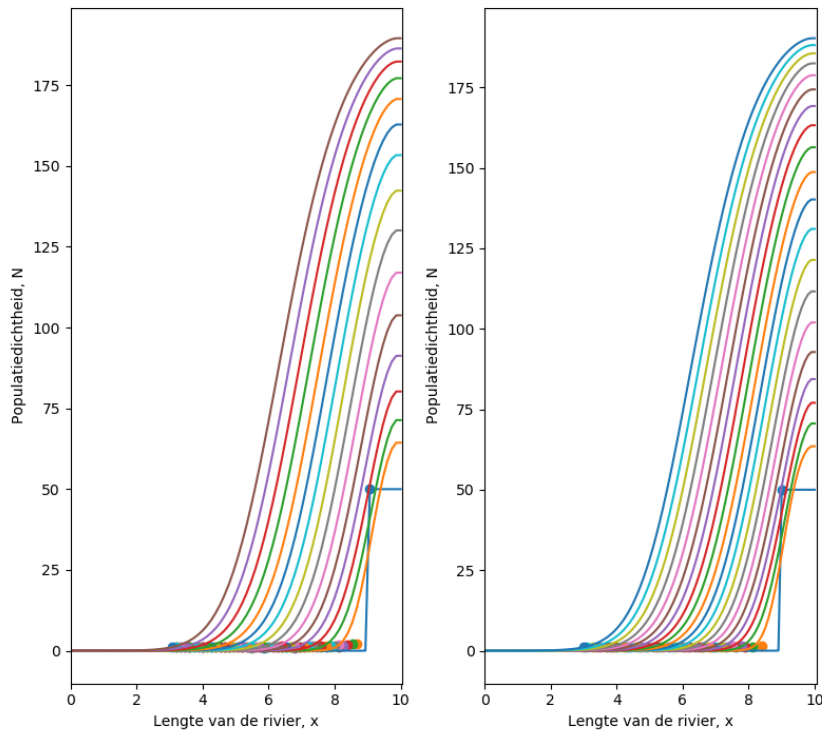
Vervolgens lossen we vergelijking 4.5 op in Python³ met behulp van semi-discretisatie en de Euler voorwaarts methode voor partiële differentiaalvergelijkingen.

³Zie Appendix B: Python Codes voor model 4.3



Figuur 6: Oplossingen voor model 4.3, waarbij links $n = 25$ is genomen en om de 1250 tijdstappen is geplot. En rechts heeft $n = 50$ en is om de 5000 tijdstappen geplot.

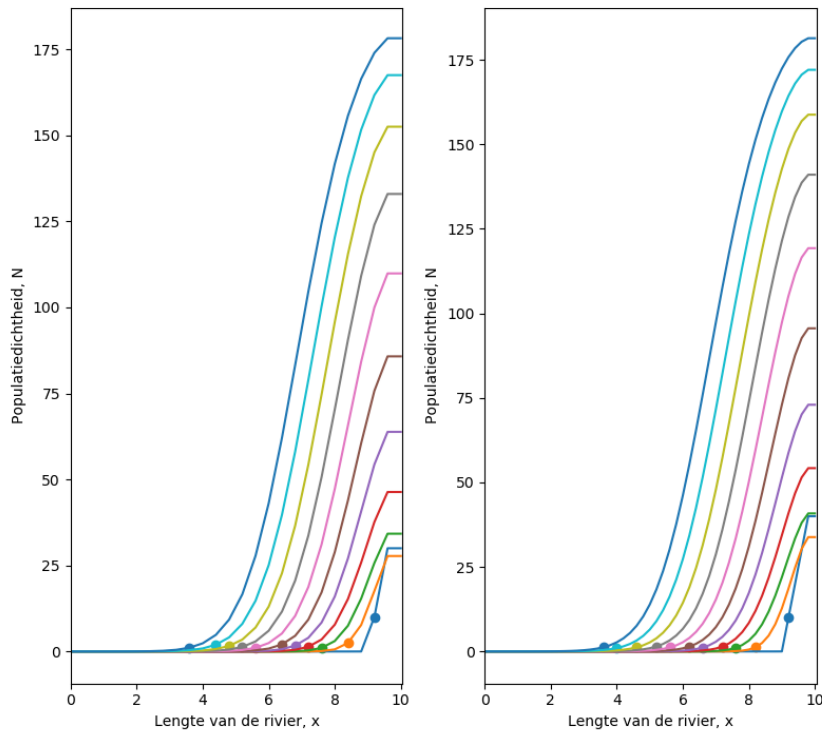
We zien in figuur 6 twee mogelijke oplossingen voor model 4.5. Allereerst valt op dat de eerste tijdstap, de blauwe lijn, eerst nul is en opeens omhoog springt. Dit heeft te maken met hoe we de beginvoorwaarde hebben gedefinieerd, we hebben aangenomen dat de invasieve soort in de laatste kilometer van de rivier aanwezig is. Ook valt op dat de maximale populatiedichtheid slechts tot ongeveer 180 komt, dit komt door de groeiterm en de draagcapaciteit. We kunnen concluderen dat of de groeiterm te laag is of de draagcapaciteit is te hoog. Ook zien we dat voor zowel $n = 25$ als $n = 50$ de invasieve soort tot $x = 3.0$ komt. Om te controleren of de oplossing afhankelijk is van het aantal stappen, n , kijken we ook naar de oplossing wanneer $n = 75$ en $n = 100$.



Figuur 7: Oplossingen voor model 4.3, waarbij links $n = 75$ en om de 7500 tijdstappen is geplot en rechts heeft $n = 100$ en is om de 10000 stappen geplot.

In figuur 7 zien we dat het grootste verschil bij $n = 75$ en $n = 100$ is dat de oplossing aanzienlijk gladder wordt. Verder zien we dat de invasieve soort voor $n = 75$ tot $x = 3.06$ komt en voor $n = 100$ komt de invasieve soort tot $x = 3.0$. Daarnaast zijn $n = 150$ en $n = 200$ ook geplot, voor deze waarden van n volgt ook dat de invasieve soort tot $x = 3.0$ komt. We kunnen concluderen dat er voor de gebruikte beginvoorwaarde, gridonafhankelijkheid is. Echter moet wel genoemd worden dat deze beginvoorwaarde niet voor een realistische simulatie zorgt, het is namelijk veel realistischer dat de invasieve soort lineair verdeeld wordt over de laatste kilometer van de rivier dan dat er plotseling een aantal vissen uniform verdeeld is over de laatste kilometer van de rivier.

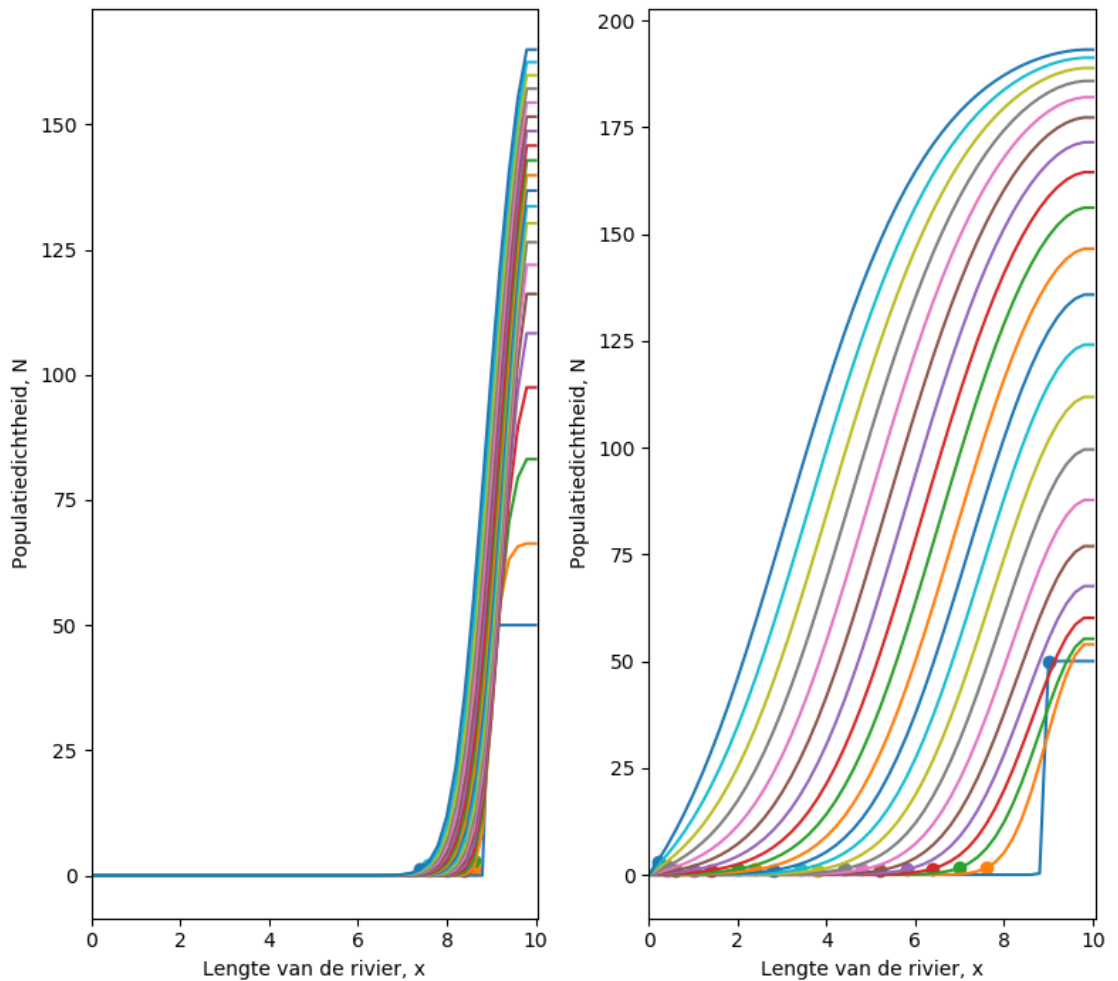
Om een realistischer resultaat te krijgen gaan we de beginvoorwaarde aanpassen en kijken of deze voorwaarde ook voor gridonafhankelijkheid zorgt. We nemen aan dat de invasieve soort nu lineair verdeeld is over de laatste kilometer van de rivier. Dit geeft de volgende beginvoorwaarde: $N_0 = y_0(x - 9)$ voor $x \geq 9$.



Figuur 8: Oplossingen voor model 4.3, met de lineaire beginvoorwaarde. Waarbij rechts $n = 25$ om de 1250 tijdstappen is geplot en links $n = 50$ om de 5000 tijdstappen is geplot.

Uit figuur 8 blijkt voor zowel $n = 25$ als $n = 50$ dat de invasieve soort tot $x = 3.6$ komt. Om te controleren of deze gridonafhankelijkheid blijft zijn ook $n = 75$ en $n = 100$ geplot. Hieruit volgt dat voor $n = 75$ de invasieve soort tot $x = 3.47$ komt en voor $n = 100$ komt de invasieve soort tot $x = 3.5$. Alhoewel de beginvoorwaarde een realistischer beeld geeft van de begin verdeling van de invasieve soort, blijkt wel dat deze beginvoorwaarde niet gridonafhankelijk is. Daarom is er voor gekozen om de simpele beginvoorwaarde te gebruiken in de rest van het onderzoek.

Nu we weten dat er gridonafhankelijkheid is gaan we de constanten van model 4.3 variëren om een idee te krijgen van het effect van deze constanten op het model. Allereerst kijken we naar D . We vergelijken de onderstaande figuur met de rechterplot uit figuur 6, waarbij $D = 0.2$ is genomen.

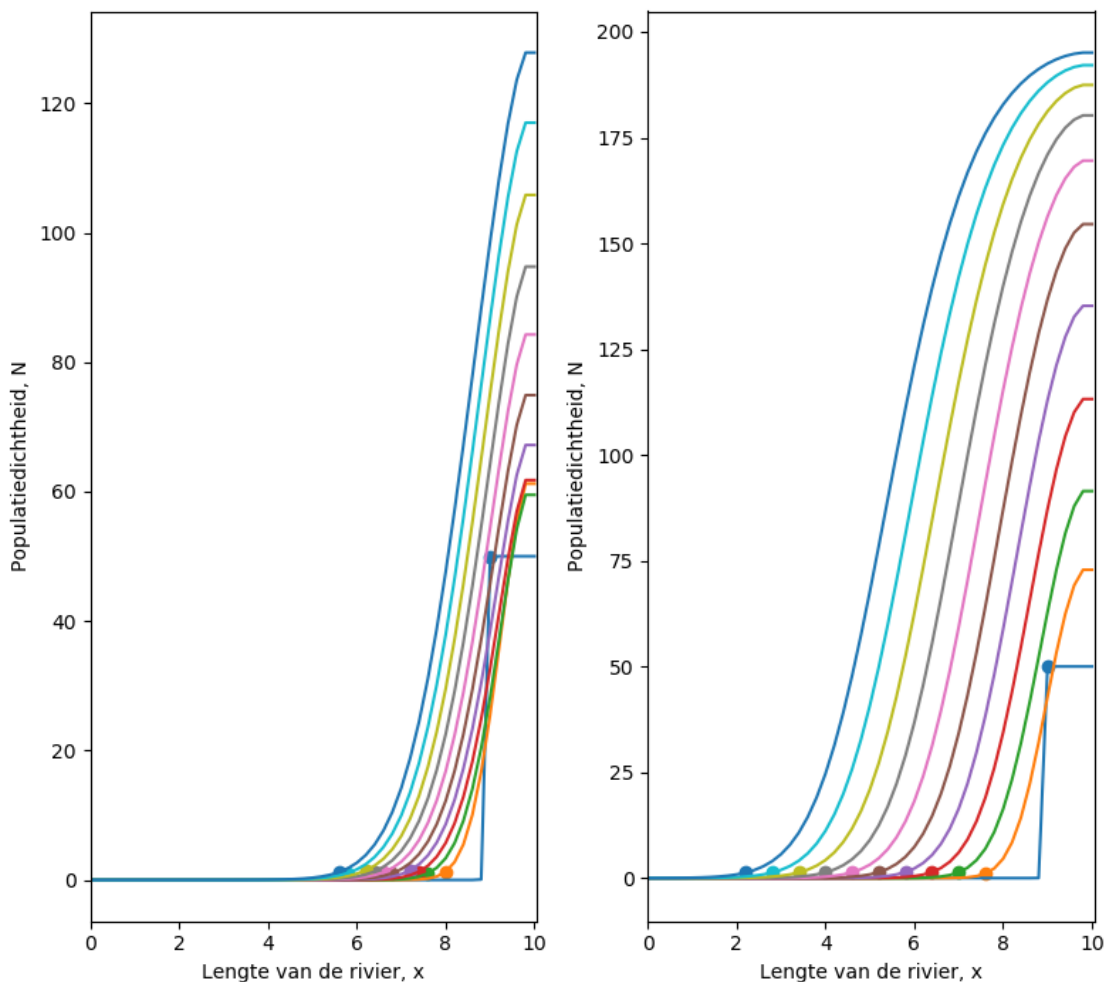


Figuur 9: Oplossingen voor model 4.3 met links $D = 0.05$ en rechts $D = 0.5$, waarbij $n = 50$, en om de 100 tijdstappen een oplossing is geplot.

We zien dat het verschil tussen de verschillende waarden van D de gladheid van de grafiek is en hoe dicht de oplossingen bij elkaar liggen. Verder zien we in figuur 9 dat voor $D = 0.05$ de invasieve soort niet verder komt dan $x = 7.4$, voor $D = 0.5$ komt de invasieve soort tot $x = 0.2$. Dit grote verschil komt omdat er meer verspreiding zal plaatsvinden wanneer D groter is.

Alhoewel er een aanzienlijk verschil is voor de verplaatsing in de x -richting wanneer de diffusiecoëfficiënt aangepast wordt, is dit geen realistisch scenario. Er kan weinig invloed worden uitgeoefend op de diffusie in een rivier, dit is namelijk afhankelijk van factoren zoals de temperatuur en de diepte van de rivier. Daarom nemen wij in het vervolg aan dat D constant is. Nu er een beeld is van het effect van D op het model wordt er gekeken naar het effect van de volgende constante, dit is de dwarsdoorsnede A . In de analyse worden de resultaten vergeleken met figuur 6 waarbij $A = 20$ is genomen. $A = 20$ geeft een maximale waarde voor de populatiedichtheid van $N = 190.1$. Er zal nu gekeken

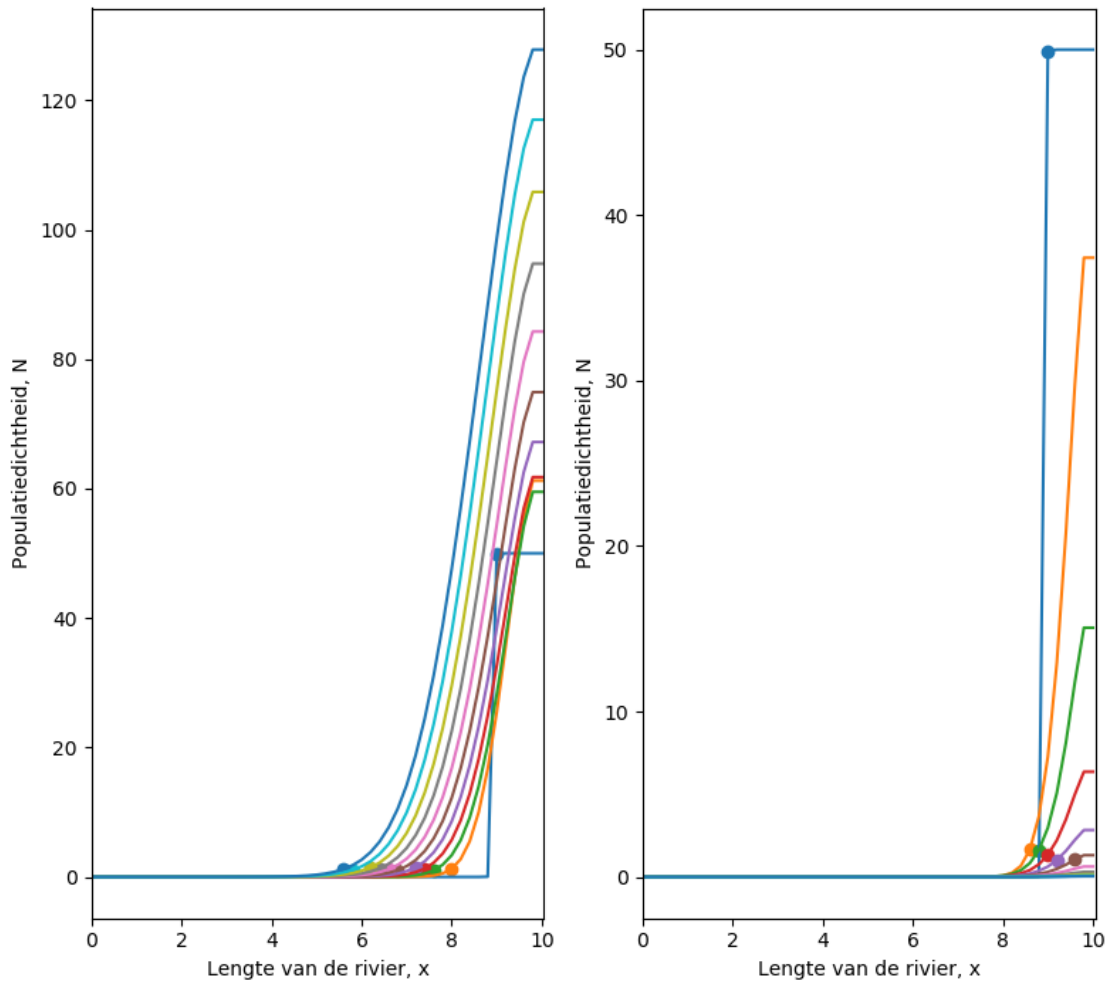
worden naar de resultaten wanneer $A = 10$ en $A = 30$. De oplossingen zijn te zien in figuur 10.



Figuur 10: Oplossingen voor model 4.3 met $n = 50$ waarbij links $A = 10$ om de 2500 tijdstappen is geplot en rechts $A = 30$ om de 7500 tijdstappen een oplossing is geplot.

We vinden dat voor $A = 10$ de maximale waarde voor N gelijk is aan 127.8 en voor $A = 30$ krijgen we een maximale N van 195.1. Ook zien we in figuur 10 dat de invasieve soort verder in de rivier komt wanneer A groter is. Dit is te verklaren doordat de convectieterm kleiner wordt naar mate A groter wordt. Het is dus belangrijk om te kijken naar de ratio tussen de snelheid Q en dwarsdoorsnede A om er voor te zorgen dat we een zo goed mogelijke convectieterm krijgen.

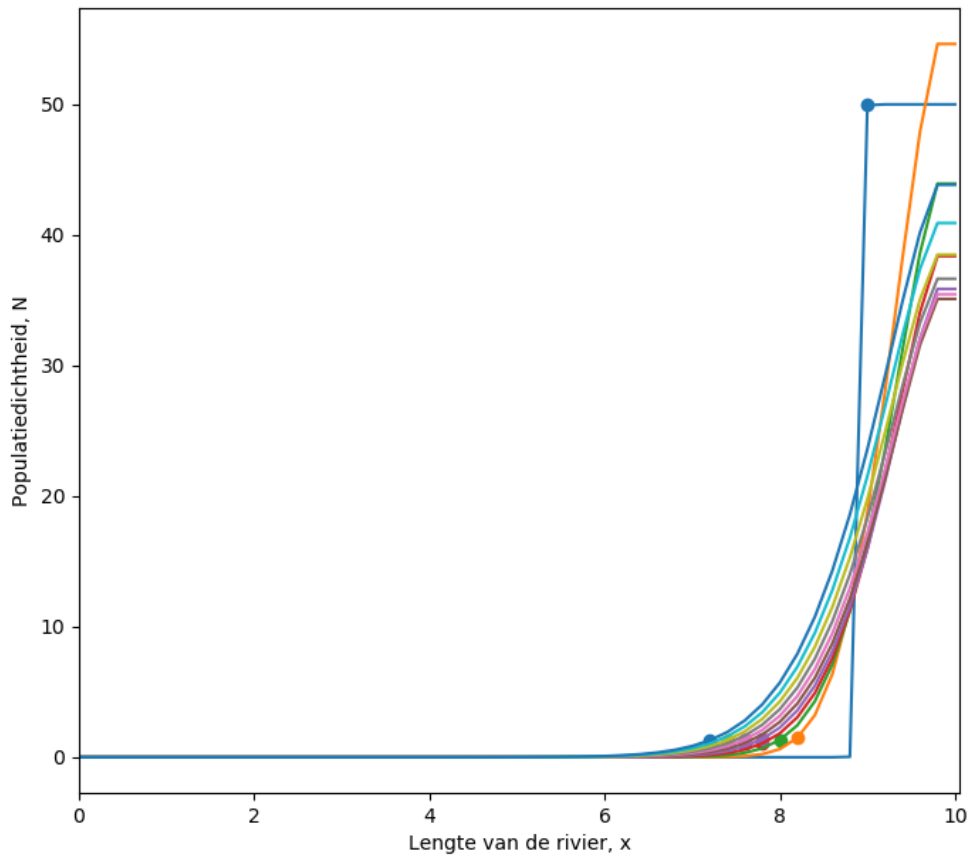
Ten slotte wordt er gekeken naar het effect van Q . Hoe ver wordt de invasieve soort teruggedrongen wanneer Q hoger wordt?



Figuur 11: Oplossingen voor model 4.3 met links $Q = 10$ en rechts $Q = 20$ waarbij geldt dat $n = 50$ en de oplossing om de 5000 tijdstappen is geplot.

Uit figuur 11 blijkt dat het nemen van $Q = 10$ er voor zorgt dat de invasieve soort tot $x = 5.6$ komt, en het nemen van $Q = 20$ zorgt er voor dat de invasieve soort tot $x = 9.6$ komt. Wanneer Q toeneemt, wordt de invasieve soort steeds verder teruggedrongen. Waarbij de invasieve soort zelfs verder de rivier uit wordt geduwd met $Q = 20$ dan is aangenomen in de beginvoorwaarde. Dit is een wenselijk effect alleen kost het veranderen van Q van 5 naar 20 veel energie en is dus niet gewenst. Verder moet worden opgemerkt dat het theoretisch mogelijk is om Q eenvoudig te verhogen, in praktijk zal dit niet zo makkelijk mogelijk zijn.

Daarom zal er worden gekeken of er een waarde van Q kan worden gevonden om de invasieve soort wel terug te dringen maar Q zo laag mogelijk te houden. Na uitgebreid testen blijkt dat $Q = 13$ de eerste waarde is waarbij de populatie-dichtheid afneemt zoals in de rechterplot van figuur 11. Dit is te zien in figuur 12.



Figuur 12: Oplossingen voor model 4.3 met $Q = 13$ waarbij geldt dat $n = 50$ en de oplossing om de 5000 tijdstappen is geplot.

Alhoewel de populatiedichtheid in figuur 12 tijdens de één van de tijdstappen in de figuur boven de beginvoorwaarde uitkomt, neemt de populatiedichtheid hierna af. Na 10 jaar is de populatiedichtheid gelijk aan $N = 43.8$, dus de invasieve soort wordt beheerst; maar als ze helemaal moeten verdwijnen uit de rivier zal dit meer dan 10 jaar duren. Ook komt de invasieve soort tot $x = 7.2$ in de rivier, dit is een stuk verder dan wanneer $Q = 20$ omdat de populatiedichtheid laag blijft, is dit echter geen zorgwekkende situatie.

Voor vergelijking 4.3 komt de invasieve soort beheersen neer op keuzes maken. Is het van belang dat ze niet ver in de rivier komen, moeten ze zo snel mogelijk gestopt worden of is er tijd om de groei van de invasieve soort in te perken. Hierbij is niet alleen het debiet, Q , van belang maar ook de dwarsdoorsnede A .

4.3 Onderzoek naar variabelen A en Q

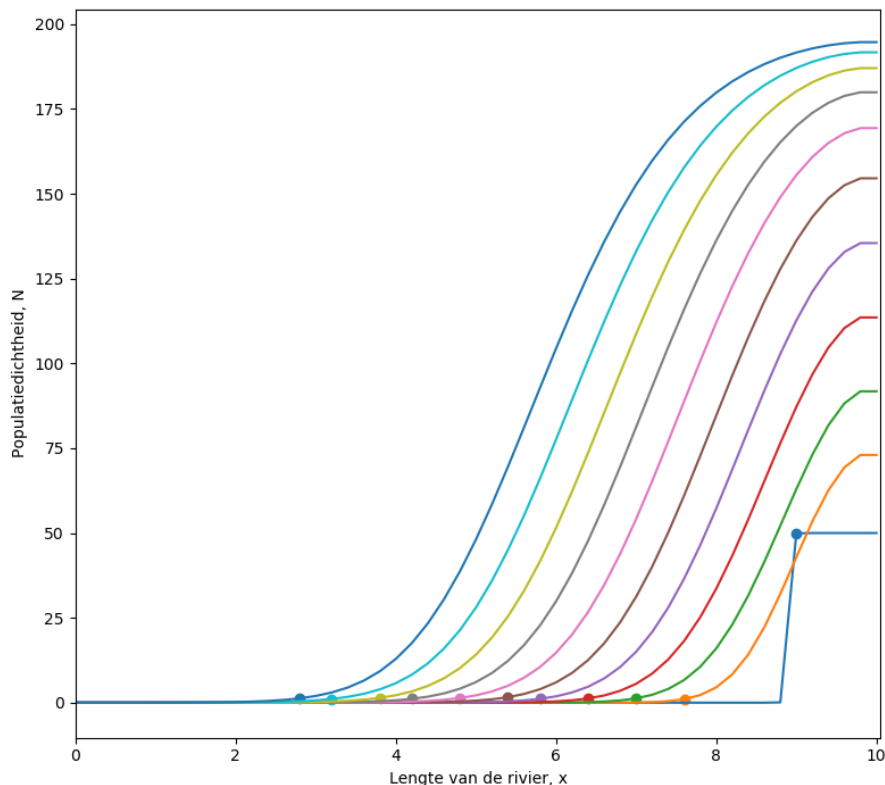
Nu er een duidelijk beeld is van de effecten van A en Q zal er worden gekeken hoe deze variabelen kunnen worden aangepast zodat ze afhankelijk zijn van respectievelijk de plaats x en tijd T .⁴

Ten eerste gaan we kijken naar een uitdrukking voor A waarbij A zal afhangen van de plaats x . We nemen aan dat de rivier wanneer $x = 0$ gelijk is aan $A = 10$ en de mond van de rivier, wanneer $x = 10$, gelijk is aan $A = 30$. Als we een rechte lijn trekken naar deze punten krijgen we de volgende uitdrukking: $A = 2x + 10$. Nu er een uitdrukking voor A is, die afhankelijk is van x , is het model gelijk aan het volgende:

$$N_t(x, t) = \frac{1}{A(x)}(DA_x(x)N_x + DA(x)N_{xx}) - \frac{Q}{A(x)}N_x + rN\left(1 - \frac{N}{K}\right). \quad (4.8)$$

Verder wordt de simpele beginvoorwaarde gebruikt, $N(x, 0) = 50$, wanneer $x > 9$. Omdat we hebben bepaald dat $\Delta t = \frac{D\Delta x^2}{2A}$. Moet er een waarde voor A gekozen worden om Δt te kunnen bepalen. We zullen de waarde voor A kiezen waardoor Δt zo klein mogelijk is, Δt is zo klein mogelijk wanneer A zo groot mogelijk is, dus gebruiken we $A = 30$.

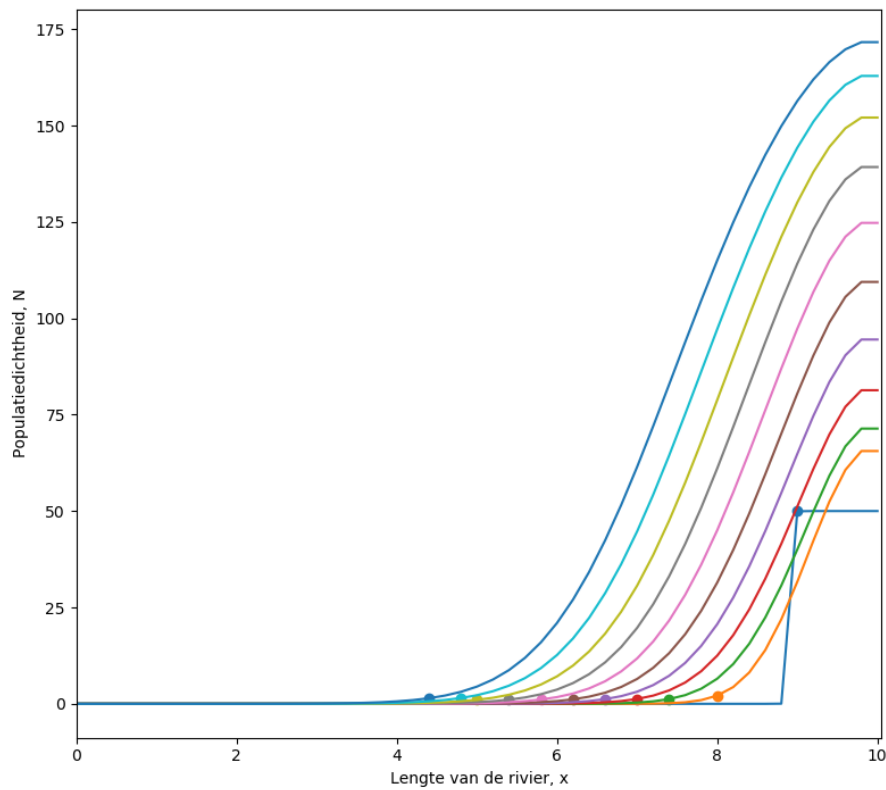
⁴De code voor deze sectie kan worden gevonden in Appedix C: Python Code voor model4.8



Figuur 13: Oplossing voor model 4.8 waarbij $n = 50$ is genomen en om de 2500 tijdstappen is geplot.

In figuur 13 komt de invasieve soort tot $x = 2.8$. Naast $n = 50$ zijn ook $n = 75$ en $n = 100$ getest, hieruit is gebleken dat de invasieve soort inderdaad tot $x = 2.8$ komt. We kunnen concluderen dat gridonafhankelijkheid nog steeds van toepassing is. Verder is het maximum voor de populatiedichtheid van de invasieve soort gelijk aan 194.7. In vergelijking met figuur 6, waarbij A constant was, is de maximum voor de populatiedichtheid iets toegenomen.

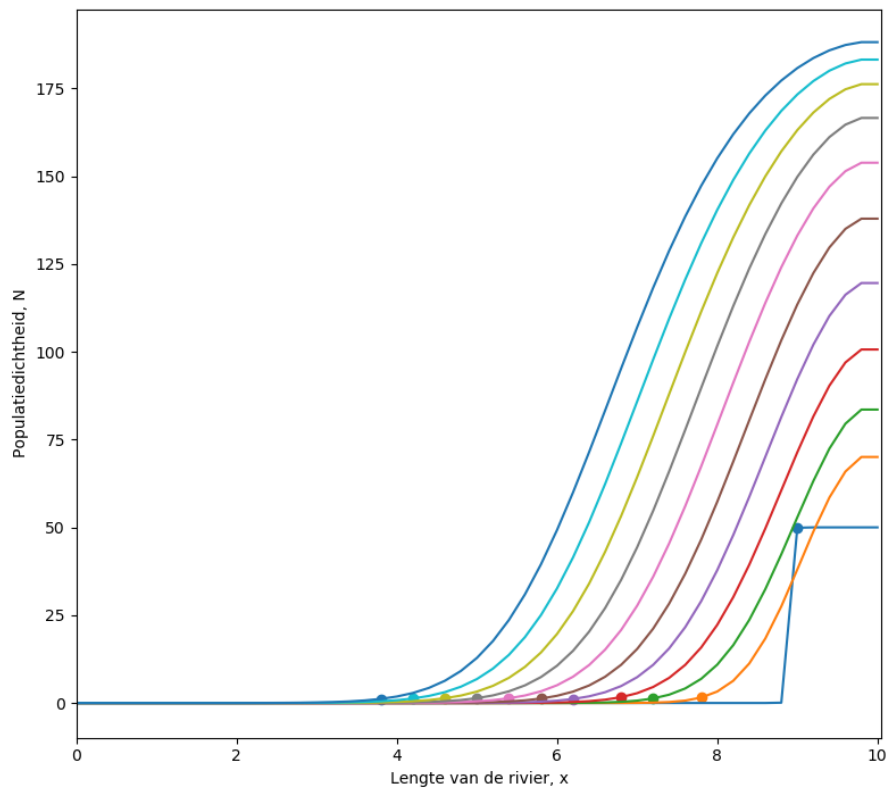
Nu we een uitdrukking hebben voor A , die afhankelijk is van x , gaan we kijken naar een uitdrukking voor Q die afhankelijk is van t . Nadat we deze hebben gevonden zullen we de uitdrukking voor A en Q combineren. Voor Q nemen we aan dat een seizoen 6 maanden duurt, dus per jaar hebben we een seizoen waarbij Q hoog is en een seizoen waarbij Q laag is. Als minimum voor Q nemen we $Q = 5$ en als maximum nemen we $Q = 10$, verder willen we er voor zorgen dat de seizoenen geleidelijk verlopen daarom nemen we een sinus-functie. We krijgen de volgende uitdrukking: $Q = 2.5 \sin(2\pi T) + 7.5$, waarbij T de tijd is in jaren. Wanneer we deze uitdrukking combineren met de waarden die we hebben gebruikt om figuur 6 te plotten, krijgen we de onderstaande figuur.



Figuur 14: Oplossing voor model 4.3 met Q afhankelijk van t , waarbij $n = 50$ is genomen en om de 5000 tijdstappen is geplot.

In figuur 14 zien we dat de invasieve soort tot $x = 4.4$ komt, dit is een aanzienlijke verbetering tegenover figuur 6 waar de invasieve soort tot $x = 3.0$ kwam. Ook valt op dat de populatiedichtheid slechts een maximum heeft van $N = 171.7$. Dus in vergelijking tot figuur 6 wordt de invasieve soort verder teruggedrongen en is de populatiedichtheid lager, waardoor het beheersen van de invasieve soort effectief is.

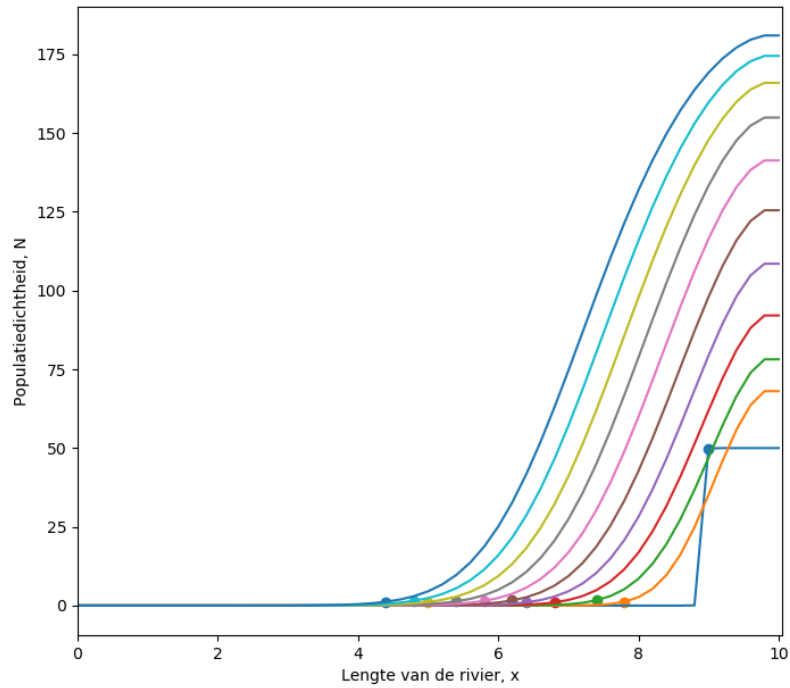
Nu er een uitdrukking is bepaald voor A en voor Q zullen deze uitdrukkingen ingevuld worden in 4.8. Het resultaat hiervan is te vinden in figuur 15.



Figuur 15: Oplossing voor model 4.8 met Q afhankelijk van t en A afhankelijk van x , waarbij $n = 50$ is genomen en om de 2500 tijdstappen is geplot.

Het resultaat van figuur 15 is zoals verwacht, beide waarden zitten precies tussen de waarden die zijn gevonden in figuur 13 en figuur 14. De invasieve soort komt tot $x = 3.8$ en de maximum populatiedichtheid is 188.2.

In de vorige paragraaf is een minimale waarde voor Q gevonden, namelijk $Q = 13$, waarbij de invasieve soort beheerst blijft. Wanneer we de functie voor $Q(t)$ aanpassen zodat Q tussen 5 en 13 ligt, krijgen we de volgende uitdrukking: $Q(t) = 4 \sin(2\pi T) + 9$. Deze uitdrukking invullen in vergelijking 4.8 geeft het resultaat in figuur 16.



Figuur 16: Oplossing voor model 4.8 met Q tussen 5 en 13 en afhankelijk van t en A afhankelijk van x , waarbij $n = 50$ is genomen en om de 2500 tijdstapen is geplot.

Q verhogen van 10 naar 13 zorgt er voor dat de invasieve soort tot $x = 4.4$ komt in plaats van $x = 3.8$. Echter zien we wel in figuur 16 dat het maximum van de populatie-dichtheid tot 180.9 komt, dit is lager dan in figuur 15. Alhoewel dit resultaat wenselijk is, is het moeilijker te behalen omdat Q hoger moet zijn. Dit is in de praktijk niet gemakkelijk te doen.

Er zal niet verder worden gekeken naar een uitdrukking voor A die afhankelijk is van zowel x als t , uit figuur 7 van [3] blijkt namelijk dat de optimale oplossing met $A(x, t)$ nauwelijks verschilt van de optimale oplossing met $A(x)$.

5 Conclusie

Uit dit onderzoek blijkt dat het debiet Q een belangrijke rol speelt in het beheersen van de invasieve soort. Om te zorgen dat de invasieve soort beheerst blijft is er gezocht naar de minimale waarde van Q waarvoor de invasieve soort teruggedrongen wordt en de populatiedichtheid van de invasieve soort zo laag mogelijk blijft. Hieruit is gebleken dat het debiet Q minimaal gelijk moet zijn aan 13. Verder wordt duidelijk dat het belangrijk is om vast te stellen wat de prioriteit is: is het van belang dat ze niet ver in de rivier komen, moeten ze zo snel mogelijk gestopt worden of is er tijd om de groei van de invasieve soort in te perken. Deze resultaten zijn gevonden door de diffusie-convectie vergelijking op te lossen met behulp van een eindige differentie methode. Er is gebruik gemaakt van benaderingen voor de populatiedichtheid N en de afgeleiden van N zodat de vergelijking opgelost kan worden in een programma zoals Python.

In simulaties zoals deze is het makkelijk om waarden te verhogen, echter is dit niet zo gemakkelijk in praktijk omdat er rekening moet worden gehouden met meerdere factoren dan de variabelen die in dit onderzoek zijn gebruikt. Deze methode kan wel gebruikt worden om een beeld te schetsen van mogelijke situaties. Er kan worden onderzocht of een bepaalde invasieve soort beheerst kan worden waarna verder onderzoek gedaan kan worden om te kijken hoe en of het mogelijk is om het debiet, Q , naar de juiste waarde te krijgen.

Nu bekend is hoe dit model kan worden opgelost met behulp van numerieke methoden zijn er meerdere uitbreidingen mogelijk. Aanbevelingen voor verdere verdieping van dit onderwerp zijn bijvoorbeeld het kijken naar een uitbreiding van het populatiemodel, door een overlevingskans toe te voegen. Of door een afhankelijkheid van de temperatuur te implementeren, zodat bijvoorbeeld Q ook afhankelijk wordt van de temperatuur. Daarnaast kan dit model worden gebruikt voor een echte invasieve soort om een beeld te krijgen hoe deze zich zal verspreiden in de rivier.

Appendix

A: Python Code voor Logistische Groei

Bijbehorende code voor model 4.1:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

r = 0.6 #Grow rate
K = 200 #Carrying Capacity
N0 = 20 #Initial value

#Oplossing voor Populatiemodel (Logistic Growth)
def LogisticGrowth(t, N0):
    a = (K - N0)/N0
    return K / (1 + a*math.exp(-r*t))

def PopModel(t, N):
    return r*N*(1 - N/K)

##Euler Method
def EulerForward(N0, te, h):

    t = np.arange(0, te, h)
    y = np.zeros(len(t))
    y[0] = N0
    for i in range(0, len(t) - 1):

        y[i+ 1] = y[i] + h*PopModel(t[i], y[i])

    return t, y

## Plotten
xp = np.linspace(0, 10)
zp = [LogisticGrowth(i, N0) for i in xp]

plt.plot(xp,zp, label = 'Logistic_Growth')
plt.plot(EulerForward(N0, 10, 0.1)[0], \n
EulerForward(N0, 10, 0.1)[1], label = 'Euler_Forward')

plt.xlabel("Tijd")
plt.ylabel("Populatiedichtheid_N")
plt.legend(bbox_to_anchor=(1, 0.15), loc=1, borderaxespad=0.)
plt.show()
```

B: Python Code voor model 4.3

Code bijbehorend bij model 4.3. In deze code wordt de parameter P gebruikt om de constanten te laten variëren.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

fig , (ax1, ax2) = plt.subplots(1,2)

def FiniteDifference(n,y0, T, L, pltname, P):

    D = 0.2
    Q = 5
    r = 0.8
    K = 200
    A = 20

    x = np.linspace(0, L, n + 1)
    dx = x[1] - x[0]
    dt = D * (dx**2) / (2*A)
    t = np.arange(0, T, dt)
    m = len(t)

    #Set up u(t)
    u = np.zeros(n+1);
    u_n = np.zeros(n+1);

    u1 = []
    first = True
    #Set up initial condition
    for i in range(0, n + 1):
        if x[i] >= 9:
            u_n[i] = y0

    for j in range(0, m + 1): #Tijd stappen
        for i in range (1, n): #stappen in x-richting

            N = (u_n[i])
            Nx = ((u_n[i+1] - u_n[i-1])/(2*dx))
            Nxx = ((u_n[i-1] - 2*u_n[i] + u_n[i+1]) / (dx**2))

            diff = ((dt/A)*(D*Ax*Nx + D*A*Nxx))
            conv = (dt*(Q/ A)*Nx)
            pop = (dt*(r*N)*( 1 - (N / K)))
            u[i] = u_n[i] + diff - conv + pop

        if n == 75:
            if j % 7500 == 0:
                if u[i] > 1 and first == True:
```

```

        u1.append((u[i], i*dx, j))

        #Eerste punt groter dan 1 plotten
        pltname.scatter(i*dx, u[i])
        first = False

    if n == 120:
        if j % 48000 == 0:
            if u[i] > 1 and first == True:
                u1.append((u[i], i*dx, j))

                #Eerste punt groter dan 1 plotten
                pltname.scatter(i*dx, u[i])
                first = False

    first = True
    u[0] = 0
    u[n] = u[n-1]
    u_n[:] = u

    if n == 75:
        #Plot grafiek om de x aantal tijdstappen
        if j % 7500 == 0:
            pltname.plot(x, u)
    if n == 120:
        #Plot grafiek om de x aantal tijdstappen
        if j % 48000 == 0:
            pltname.plot(x, u)

    return u

n1 = 75;
y01 = 50;
T1 = 10;
L1 = 10;
n2 = 120;

FiniteDifference(n1, y01, T1, L1, ax1, 5)
FiniteDifference(n2, y01, T1, L1, ax2, 10)

for ax in (ax1, ax2):
    ax.set(xlabel='Lengte_van_de_rivier', _x', ylabel='Populatie_dichtheid', _N')
    ax.set_xlim([0, 10.05])

fig.set_figheight(6)
fig.set_figwidth(8)
plt.show()

```

C: Python Code voor model 4.8

Code gebruikt voor het oplossen van model 4.8.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

fig, ax1 = plt.subplots(1,1)

def FiniteDifference(n,y0, T, L, pltname):

    D = 0.2
    r = 0.8
    K = 200
    Amin = 10

    x = np.linspace(0, L, n + 1)
    dx = x[1] - x[0]
    dt = D * (dx**2) / (2*Amin)
    t = np.arange(0, T, dt)
    m = len(t)

    #Set up u(t)
    u = np.zeros(n+1);
    u_n = np.zeros(n+1);

    u1 = []
    first = True
    #Set up initial condition
    for i in range(0, n + 1):

        if x[i] >= 9:
            u_n[i] = y0

    for j in range(0, m + 1): #Tijd stappen

        #Q = 2.5*math.sin(j*dt * 2 * math.pi) + 7.5
        Q = 4*math.sin(j*dt * 2 * math.pi) + 9

        for i in range (1, n): #stappen in x-richting

            A = 2*x[i] + 10
            Ax = 2

            N = (u_n[i])
            Nx = ((u_n[i+1] - u_n[i-1])/(2*dx))
            Nxx = ((u_n[i-1] - 2*u_n[i] + u_n[i+1]) / (dx**2))
```

```

diff = ((dt/A)*(D*A*Nxx + D*Ax*Nx))
conv = (dt*(Q/ A)*Nx)
pop = (dt*(r*N)*( 1 - (N / K)))
u[i] = u_n[i] + diff - conv + pop

if n == 50:
    if j % 2500 == 0:
        if u[i] > 1 and first == True:
            u1.append((u[i], i*dx, j))

            #Eerste punt groter dan 1 plotten
            pltname.scatter(i*dx, u[i])
            first = False

first = True
u[0] = 0
u[n] = u[n-1]
u_n[:] = u

if n == 50:
    #Plot grafiek om de x aantal tijdstappen
    if j % 2500 == 0:
        pltname.plot(x, u)

return u

y01 = 50;
T1 = 10;
L1 = 10;
n2 = 50;

FiniteDifference(n2, y01, T1, L1, ax1)

ax1.set(xlabel='Lengte_van_de_rivier',_x', ylabel='Populatie_dichtheid',_N')
ax1.set_xlim([0, 10.05])

fig.set_figheight(6)
fig.set_figwidth(8)
plt.show()

```

Referenties

- [1] Qihua Huang, Hao Wang en Mark A. Lewis. “A Hybrid Continuous/Discrete-Time Model for Invasion Dynamics of Zebra Mussels in Rivers”. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 77.3 (2017), p. 854–880. DOI: 10.1137/16M1057826.
- [2] Yu Jin en Suzanne Lenhart. “Controlling Invasive Populations in Rivers”. In: *Siam News* 53.9 (2020), p. 1, 4.
- [3] Rebecca Pettit en Suzanne Lenhart. “Optimal Control of a PDE Model of an Invasive Species in a River”. In: *Mathematics* 7.10 (2019). ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math7100975. URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/7/10/975>.