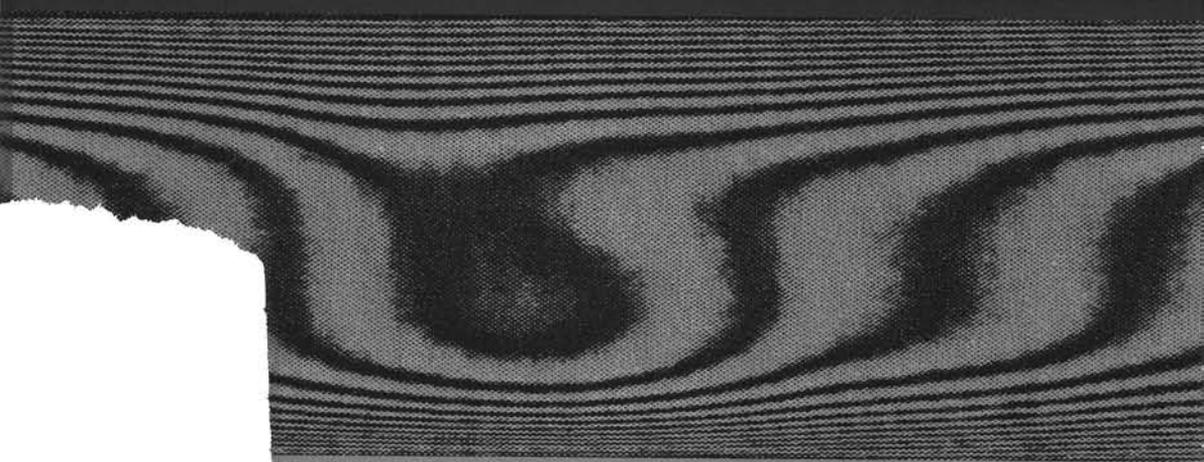


# Fysische Transportverschijnselen II

C.J. Hoogendoorn en T.H. van der Meer



742530  
5002070

# Fysische Transportverschijnselen II

C.J. Hoogendoorn en T.H. van der Meer



2519  
322  
9

Bibliotheek TU Delft



C 5002070

VSSD

Een sterk aangepaste Engelstalige editie verschijnt naar verwachting  
najaar 2007 onder de titel **Modelling Transport Phenomena**,  
auteurs K. Hanjalic, S. Kenjeres, M.J. Tummers, H. J. J. Jonker,  
ca. 300 pp.

© VSSD

Eerste druk 1978

Derde druk 1991-2005

Uitgegeven door:

VSSD

Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 278 2124, telefax +31 15 278 7585, e-mail: [hlf@vssd.nl](mailto:hlf@vssd.nl)

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL over dit boek: <http://www.vssd.nl/hlf/c014.htm>

Een verzameling digitale illustraties en/of een elektronische versie van het boek is beschikbaar voor docenten die met het boek werken. Een aanvraag, voorzien van enige informatie over de cursus waarbij het boek gebruikt wordt, kan men sturen naar e-mail adres [hlf@vssd.nl](mailto:hlf@vssd.nl).

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.*

ISBN-10 90-6562-059-1

ISBN-13 978-90-6562-059-0

NUR 924

*Keywords:* natuurkunde, transportverschijnselen

## Voorwoord

Het college Fysische Transportverschijnselen II werd in 1960 opgezet door prof. ir. H. Kramers en prof. dr. J. A. Prins. Het eerste dictaat werd geschreven door prof. Kramers en prof.dr.ir. J. Schenk. In de cursus 1969/70 werd het college voor het eerst gegeven als een blokcollege met veel tijd voor oefeningen. Hierbij werd de opzet van het college veranderd zonder dat de feitelijke inhoud zich wijzigde. Dit maakte het uitreiken van collegestencils naast het oude dictaat FT II noodzakelijk. Deze door prof. dr. ir. W. J. Beek begonnen vorm van het college werd in de cursusjaren na 1970 voortgezet. In 1973 verscheen een beknopt aangepast dictaat, dat later in meer volledige vorm als een sterk herziene uitgave verscheen.

Dit nieuwe boek is een synthese van het dictaat Kramers/Schenk en de uitgereikte collegestencils uit de jaren '60 en '70. Het verschil tussen de oorspronkelijke opzet en deze is de volgorde van behandeling van de stof. Terwijl het oorspronkelijke dictaat opgezet was vanuit de fysische problemen waarbij de wiskundige hulpmiddelen door de hoofdstukken heen verweven waren, is dit bij de blokcollege-opzet veranderd. Eerst worden nu de wiskundige hulpmiddelen behandeld, wel steeds aan de hand van een fysisch voorbeeld, daarna worden de fysische problemen systematisch behandeld.

Voor veel studenten behoort de bespreking van de wiskundige methoden een recapitulatie te zijn. Voor een aantal is dit echter wel nodig. Gezien de toenemende mogelijkheden voor computerberekeningen is tevens aandacht aan de numerieke methoden gegeven. In deze derde druk is het hoofdstuk over numerieke methoden nog verder uitgebreid en aangepast aan nieuwe ontwikkelingen, met name in de numerieke stromingsleer. Dit weerspiegelt het sterk groeiende belang van numerieke simulatie in dit vakgebied. Uiteraard worden alleen die methoden behandeld die voor FT-problemen van belang zijn. Bovendien worden ze steeds geïllustreerd met voorbeelden van warmte- en stoftransport.

Een belangrijk punt bij de studie van dit vak is het zelf aanpakken van problemen. Daaraan wordt bij het blokcollege een aantal oefenmiddagen besteed. De gebruikte voorbeeldproblemen zijn hier voor een deel opgenomen, de overige zijn verkrijgbaar bij ondergetekenden.

Delft, december 1990

C.J. Hoogendoorn

T.H. van der Meer

# Voorwoord

Lijst van meest voorkomende symbolen	6
<b>DEEL I. FYSISCHE BASISVERGELIJKINGEN</b>	
1. INLEIDING	9
1.1. Doelstellingen van het college	9
1.2. De transportvergelijkingen	10
1.3. De behoudswetten	14
1.4. Coördinatentransformaties	14
1.5. Classificatie van vergelijkingen	15
1.6. Rand- en beginvoorwaarden	17
<b>DEEL II. WISKUNDIGE METHODEN</b>	
2. ANALYTISCHE METHODEN	21
2.1. Gewone differentiaalvergelijkingen	21
2.2. Scheiden van variabelen	22
2.3. Eigenfuncties en eigenwaarden	28
2.4. Besselfuncties	31
2.5. Laplace-transformaties	35
2.6. Error- en gammafuncties	42
2.6.1. Error-functie	42
2.6.2. Gammafunctie	44
2.7. Dimensie-analyse en samennemen van variabelen	44
2.8. Benaderende analytische methoden	45
2.8.1. Integraalmethoden	48
2.8.2. Storingsrekening	54
2.8.3. Methode van de gewogen residuen	56
3. NUMERIEKE METHODEN	61
3.1. Inleiding	61
3.1.1. Numerieke methodiek	61
3.1.2. Het principe van de eindige-differentiemethode	62
3.1.3. Het principe van de eindige-volumemethode	63
3.1.4. Vier basisregels	68
3.2. Stationair warmtetransport door diffusie	69
3.2.1. Niet-homogene materialen	70
3.2.2. Randvoorwaarden	71
3.2.3. Algemene implementatie van de randvoorwaarden	73
3.2.4. Niet-lineaire randvoorwaarde of bronterm	74
3.3. Instationaire diffusie	75
3.3.1. Stabiteit van de expliciete methode	77
3.3.2. Nauwkeurigheid	77
3.3.3. Andere discretisatieschema's voor de instationaire diffusie-vergelijking	78
Expliciete methoden van Du Fort-Franklin en Saul'ev	79
3.4. Oplossingsmethoden voor de stationaire diffusievergelijking	80
3.4.1. Puntsgewijze iteratieve oplosmethoden	81
3.4.2. Convergentie en divergentie	85
3.4.3. De lijn-voor-lijn oplosmethode	86

3.5.	De convectie-diffusie vergelijking	88
3.5.1.	Upwind differenties	90
3.5.2.	2D convectie-diffusie vergelijking	92
3.5.3.	Numerieke diffusie	94
3.5.4.	Voorbeelden van nauwkeuriger differentieschema's	98
3.6.	De impulsvergelijkingen	99
3.6.1.	Verschoven roosters	100
3.6.2.	De 2D impulsvergelijking	102
3.6.3.	Het oplossen van het drukveld	103

DEEL III. FYSISCHE PROBLEMEN

4.	TRANSPORTPROBLEMEN IN RUSTENDE MEDIA	109
4.1.	Stationaire problemen	109
4.2.	Diffusievergelijking	111
4.2.1.	Typen randvoorwaarden	111
4.2.2.	Grafische oplossingen d ffusievergelijking	112
4.2.3.	De bronoplossing	119
4.2.4.	Sommatie van bronnen en Greense functies	121
4.2.5.	Lijn- en puntbronnen	127
4.2.6.	Penetratietheorie en theorema van Duhamel	129
4.2.7.	Contacttemperatuur bij twee verschillende materialen	131
4.2.8.	Uitsterfprobleem	134
4.2.9.	Instationaire diffusieproblemen in meer dimensies	135
4.3.	Bewegend-frontproblemen	138
4.3.1.	Algemene probleemstelling	138
4.3.2.	Niet-stationaire warmtegeleiding met fase-overgang	139
4.3.3.	Bewegend-frontprobleem bij stoftransport	141
4.3.4.	Landau-transformatie en storingsrekening voor bewegend-frontproblemen	143
4.3.5.	Stolling met convectieve warmte-overdracht	146
4.3.6.	Integraalmethode bij stollingsproblemen met convectieve overdracht	148
4.4.	Diffusievergelijking in brontermen	152
4.4.1.	Niet-stationaire warmtegeleiding met warmteproductie in het medium	152
4.4.2.	Niet-stationaire diffusie met homogene chemische reactie	154
4.4.3.	Methode van Danckwerts voor eerste-orde reacties	157
5.	IMPULSTRANSPORT	163
5.1.	Inleiding	163
5.2.	Stromingen van incompressibele media	164
5.2.1.	Potentiaalstroming	164
5.2.2.	Kruipstroming	170
5.2.3.	Wervelsterkte en diffusievergelijking	173
5.3.	Grenslaagstromingen	174
5.3.1.	Grenslaagvergelijkingen	174
5.3.2.	Oplossing laminaire grenslaagvergelijkingen	177
6.	DIFFUSIE EN GELEIDING IN STROMENDE MEDIA	181
6.1.	Stationair transport in stromingen met uniforme snelheid	181
6.1.1.	Transport in propstroming langs een vlakke plaat	182
6.1.2.	Transport in propstroming in een ronde buis	183

## 6 Fysische Transportverschijnselen II

6.1.3.	Diffusie vanuit een puntbron in een propstroom	185
6.2.	Lévéque-probleem	186
6.3.	Laminaire buisstroming	190
6.3.1.	Lévéque-oplossing voor thermisch inloopgebied	190
6.3.2.	Thermisch volledig ingestelde stroming	194
6.4.	Transport in laminaire grenslagen	194
6.4.1.	Integraalmethode-oplossingen	194
6.4.2.	Warmte-overdrachtsrelaties voor laminaire grenslagen	197
6.4.3.	Vrije convectie langs een verticale plaat	198
APPENDIX I. BIBLIOGRAFIE		205
APPENDIX II. ENKELE STOFEIGENSCHAPPEN		209
TREFWOORDENLIJST		211

### LIJST VAN MEEST VOORKOMENDE SYMBOLEN

a	warmtevereffeningscoëfficiënt	$m^2/s$
c	concentratie (volume, massa, mol)	$(m^3/m^3, kg/m^3, mol/m^3)$
$c_p$	soortelijke warmte	J/kgK
d	diameter	m
D	stof-diffusiecoëfficiënt	$m^2/s$
g	versnelling van de zwaartekracht	$m/s^2$
$J_k(x)$	Besselfunctie	
k	reactiesnelheidsconstante	1/s
L	lengte	m
p	druk	$N/m^2$
Q	warmte (stof) hoeveelheid, bronsterkte	J (kg)
r	straal	m
t	tijd	s
T	temperatuur	K
$\bar{T}(x,p)$	Laplace-getransformeerde van T(x,t)	-
u	} snelheid	m/s
v		
$v_x$		
$v_y$		
$v_z$		
$\alpha$	warmte-overdrachtscoëfficiënt	$W/m^2 K$
$\delta$	grenslaagdikte	m
$\epsilon$	storingsparameter	-
$\lambda$	warmtegeleidingscoëfficiënt	$W/mK$
$\eta$	dynamische viscositeit	$Ns/m^2$
$\rho$	dichtheid	$kg/m^3$
$\tau$	schuifspanning (of dim. tijd)	$N/m^2 (-)$
$\Phi_w'', \Phi_m''$	warmte- of stofstroomdichtheid	$W/m^2 (kg/m^2s)$
$\nu$	kinematische viscositeit	$m^2/s$

Voor dimensieloze groepen, zie tabel 2.7.1.

**DEEL I**  
**Fysische**  
**basisvergelijkingen**



# 1. Inleiding

## 1.1. Doelstellingen van het college

De titel van dit dictaat Fysische Transportverschijnselen II wijst erop dat er ook een FT I is. Voor dat laatste college zij hier verwezen naar het boek van prof. J.M. Smith, dr.ir. E. Stammers en dr.ir. L.P.B.M. Janssen\*. Een direct vervolg op FT I is FT II echter niet. Het is in wezen de behandeling van dezelfde stof, maar nu gericht op het gebruik maken van en inzicht krijgen in de wiskundige oplossingsmethoden.

De doelstellingen van het college zijn als volgt te formuleren:

- op een fysisch-fenomenologische wijze inzicht verwerven in het formuleren van de problemen en het opstellen van de mathematische vergelijkingen die transport van materie, warmte en impuls op macroschaal beschrijven;
- de algemene (niet zozeer op strak wiskundige wijze) merites en samenhang leren onderkennen van de verschillende oplossingsmethoden voor de betreffende partiële differentiaalvergelijkingen met hun randvoorwaarden;
- paraat bruikbare kennis opdoen voor het oplossen van veel voorkomende problemen.

In dit boek komen na dit eerste deel dat de fysische basisvergelijkingen bespreekt, in een tweede en derde deel respectievelijk de wiskundige methoden en de fysische problemen afzonderlijk aan de orde. Hierdoor krijgen de wiskundige oplossingsmethoden veel (noodzakelijke) aandacht. Hopelijk wekt deze opzet niet de onjuiste indruk dat FT II een vorm van toegepaste wiskunde is. Men moet de nadruk gelegd zien op de fysische problemen, met gebruikmaking van de wiskunde.

Voor wat betreft de plaats van het vak Fysische Transportverschijnselen zij hier verwezen naar de inleiding van het dictaat FT I. Als toepassingsgebieden zijn daar genoemd: chemische techniek, kern- en energietechniek, meteorologie, ruimtevaart, fysiologie en hydraulica. Daarnaast vallen hier nog te noemen de bouwfysica, de warmte- en koudetechniek, de landbouwtechniek en de metallurgie.

Er zijn veel boeken betreffende de transportverschijnselen en nog steeds verschijnen er nieuwe. De als appendix I toegevoegde bibliografie geeft slechts een greep uit de belangrijkste literatuur.

Het boek van Bird, Steward en Lightfoot, "Transport phenomena" [B1] is het eerste boek dat destijds (1960) de behandeling van impuls, warmte en stoftransport onder één noemer bracht. Het idee om dit te doen is mede voortgekomen uit de tijd die Bird bij Kramers doorbracht. Kramers zette in Delft reeds in 1956 de colleges fysische transportverschijnselen op.

Verder zij hier speciaal verwezen naar het boek van Carslaw en Jaeger [A1], dat klassiek is voor de behandeling van transport in starre media. Voor de stromingsleer zij hier verwezen naar de boeken van Schlichting [B3] en Tennekes en Lumley [B14]. In dit laatste boek wordt de turbulentie uitvoerig behandeld, hetgeen in dit college FT II buiten de stof blijft.

## 1.2. De transportvergelijkingen

Transportverschijnselen veroorzaken in een systeem dat niet in thermodynamisch evenwicht is zodanige energie- en massastromen dat het evenwicht hersteld kan worden. In een systeem in evenwicht zijn de intensieve toestands-grootheden overal constant en niet veranderlijk in de tijd. In een niet-evenwichtssituatie zullen er in het systeem wel verschillen in de toestands-grootheden zijn. Dit kunnen bijvoorbeeld verschillen in temperatuur, concentratie of druk zijn, die aanleiding geven tot gradiënten. Deze gradiënten werken nu via de transportverschijnselen als een drijvende kracht voor een netto transport dat het evenwicht probeert te herstellen.

Dit netto transport (flux)  $\bar{J}$  blijkt in veel fysische situaties, die niet sterk van thermodynamisch evenwicht verschillen, lineair afhankelijk te zijn van de gradiënten grad  $x$ , dit geeft de transportvergelijking:

$$\bar{J} = -L \text{ grad } x, \quad (1.2.1)$$

waarbij  $L$  de transportcoëfficiënt is. Bijvoorbeeld indien  $x$  de temperatuur is, zijn  $\bar{J}$  en  $L$  respectievelijk de warmtestroom  $\bar{\Phi}_w''$  en de warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda$ :

$$\bar{\Phi}_w'' = -\lambda \text{ grad } T. \quad (1.2.2)$$

Op microscopische schaal kan men vanuit statistische beschouwingen de transportvergelijkingen afleiden en voorspellingen doen over de grootte van de transportcoëfficiënten op grond van het statistische gedrag van moleculaire systemen. Deze weg zal hier niet gevolgd worden, hiervoor wordt verwezen naar de literatuur [B6, B7]. Het belang van deze beschouwingen voor technische toepassingen ligt vooral in de mogelijkheid kwantitatieve voorspellingen te doen over de grootte van de transportcoëfficiënten, die soms niet eenvoudig experimenteel te bepalen zijn. In het boek van Bird [B1] wordt dit voor de viscositeit, warmtegeleidingscoëfficiënt en de diffusiecoëfficiënt gedaan. Het boek van Bretsznajder [B8] geeft zeer uitvoerig voorspellingen van de transportcoëfficiënten.

Hier zullen we steeds de macroscopische beschouwingen gebruiken. Daartoe zullen we voor het opstellen van de transportvergelijkingen het medium steeds als een continuüm beschouwen en uitgaan van fenomenologisch gedefinieerde transportcoëfficiënten. Bij de continuümbeschouwing beschouwt men de stof als één ondeelbaar geheel, dat voor alle delen, hoe klein ook, dezelfde eigenschappen heeft. Dit betekent in feite dat de kleinste delen die we beschouwen nog steeds zo groot moeten zijn dat ze veel moleculen omvatten. Dit is toe te lichten aan de hand van de dichtheid van een stof, bv. water. Een watermolecuul heeft afmetingen van ongeveer  $5 \text{ \AA}$  ( $5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ). Zolang we volumina beschouwen van  $10^{-21} \text{ m}^3$  (kubus van  $0.1 \text{ \mu m}$ ), dan zal dit in de vloeistoffase voor water nog ca.  $10^6$  moleculen bevatten. We kunnen dan nog steeds stellen dat de dichtheid van water gegeven wordt door:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \delta V} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad \delta V = 10^{-21} \text{ m}^3. \quad (1.2.3)$$

Zolang dichtheidsveranderingen over de afstanden van  $10^{-7}$  m te verwaarlozen zijn geeft dit geen problemen.

In wezen moet de lengteschaal van de veranderingen van de grootheden, die we beschouwen, bij vloeistoffen en vaste stoffen, enige orden van grootte groter zijn dan de moleculaire afmetingen en bij gassen groter dan de vrije weglengte. Bij lage gasdrukken kan de vrije weglengte groot worden (Knudser gas) en zijn onze beschouwingen niet geldig.

Daarnaast wordt uitgegaan van fenomenologisch bepaalde wetten voor de transportverschijnselen. De hierin gegeven transportcoëfficiënten zijn dan empirisch bepaald.

We gebruiken hier de wetten van Fourier, Fick en Newton, die respectievelijk geven:

1. Wet van Fourier:

$$\bar{\Phi}_w'' = -\lambda \text{grad } T. \quad (1.2.4)$$

2. Wet van Fick:

$$\bar{\Phi}_m'' = -D \text{grad } c. \quad (1.2.5)$$

3. Wet van Newton:

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} \text{ (snelheidsgradiënt alleen in } y\text{-richting)}. \quad (1.2.6)$$

Een verschil tussen de bovenstaande drie vergelijkingen is dat de eerste twee betrekking hebben op een scalaire grootheid ( $T$  en  $c$ ) en de derde op een vectoriële ( $\bar{v}$ ). Dit betekent dat  $\bar{\Phi}_w''$  en  $\bar{\Phi}_m''$  vectoren zijn, maar dat de schuifspanning  $\tau$  in een volledige vorm een tensor met negen componenten is. Hiervoor wordt verder verwezen naar FT I, p. 29 en stromingsleerboeken.

Als andere, hier verder niet behandelde, transportverschijnselen zijn te noemen de elektrische (wet van Ohm) en elektromagnetische (stralingswetten voor fotontransport). Belangrijk kunnen ook transportverschijnselen zijn die door kruisverbanden tussen flux en niet-direct bijbehorende drijvende kracht blijken te ontstaan. I.h.a.

$$\bar{J}_i = -L_{ik} \text{grad } x_k. \quad (1.2.7)$$

Een voorbeeld is de thermo-diffusie. Een stoftransport kan ontstaan in een meer-componentensysteem met een temperatuurgradiënt:

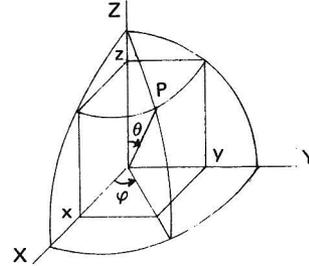
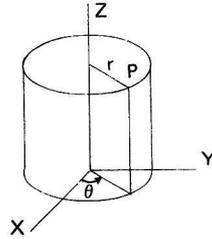
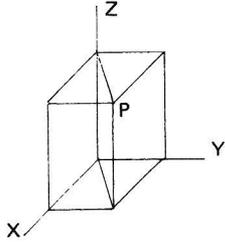
$$\bar{\Phi}_c'' = -D_T \text{grad } T. \quad (1.2.8)$$

Hierin is  $\bar{\Phi}_c''$  de stofflux voor een component  $C$  als gevolg van de temperatuurgradiënt.

Kruisverbanden spelen met name een belangrijke rol bij de interactie tussen thermische en elektrische verschijnselen, de thermo-elektrische effecten, met name het Peltier- en Seebeck-effect. Voor de hier te behandelen stof zullen deze kruisverbanden worden verwaarloosd.

	cartesiaanse coördinaten	cylindrische coördinaten	bolcoördinaten
$\nabla T$	$\bar{e}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{e}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \bar{e}_z \frac{\partial T}{\partial z}$	$\bar{e}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \bar{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \bar{e}_z \frac{\partial T}{\partial z}$	$\bar{e}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \bar{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \bar{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$
$\nabla \cdot \bar{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$
$\nabla^2 T$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ or $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$ or $\frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$
$\nabla \lambda \nabla T$	$\frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \lambda \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)$
$\bar{v} \cdot \nabla T$	$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}$	$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}$	$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$
$\frac{D}{Dt}$	$\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$

Tabel 1.4.1. Coördinatentransformaties.



*Cartesiaanse coördinaten*

$$\text{x-component } \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

$$\text{y-component } \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$\text{z-component } \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

*Cilindercoördinaten*

$$\text{r-component } \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r$$

$$\text{\theta-component } \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta$$

$$\text{z-component } \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

*Bolcoördinaten*

$$\text{r-component } \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left( \nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^3} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho g_r$$

$$\text{\theta-component } \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho g_\theta$$

$$\text{\varphi-component } \rho \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \eta \left( \nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) + \rho g_\varphi$$

Tabel 1.4.2. Coördinatentransformaties van Navier-Stokesvergelijkingen.

### 1.3. De behoudswetten

Ook in een systeem dat niet in thermodynamisch evenwicht is en waarin energie- en massafluxen voorkomen, gelden de behoudswetten voor energie en massa. Bovendien geldt de wet van behoud van impuls uit de mechanica. Door de wetten van Fourier, Fick en Newton toe te passen op de behoudswetten voor een klein volume-element in het systeem zijn de differentiaalvergelijkingen van de fysische transportverschijnselen eenvoudig af te leiden (zie FT I, p. 29, 84). De algemene vorm van deze vergelijkingen is:

$$\begin{array}{cccc} \text{INSTATIONAIRE} & = & \text{CONVECTIEVE} & + & \text{DIFFUSIE-} & + & \text{BRON (PUT)} \\ \text{TERM} & & \text{TERM} & & \text{TERM} & & \text{TERM} \end{array}$$

Dit geeft:

Voor thermische verschijnselen de *energievergelijking*:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_p (\bar{v} \cdot \nabla) T + (\nabla \cdot \lambda \nabla T) + q. \quad (1.3.1)$$

Voor stoftransport van een component met concentratie  $c$  de *diffusievergelijking*:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -(\bar{v} \cdot \nabla) c + (\nabla \cdot D \nabla c) + r. \quad (1.3.2)$$

Voor stromingen de bewegingsvergelijkingen of *Navier-Stokesvergelijkingen* voor het geval van constante stofgrootheden.

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\rho (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \eta \nabla^2 \bar{v} - \nabla p + k. \quad (1.3.3)$$

Hierin stelt  $q$  een warmtebron voor, eventueel inclusief visceuze dissipatie,  $r$  verdwijnen (ontstaan) van een stof, bv. door een chemische reactie en  $k$  een uitwendig krachtenveld, bv. de zwaartekracht.

Naast een stofbalans, zoals vgl. 1.3.2 geeft voor een component met concentratie  $c$ , is er nog de *continuïteitsvergelijking* voor de totale massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \bar{v}) = -\text{div} (\rho \bar{v}). \quad (1.3.4)$$

Voor een vloeistof met constante dichtheid wordt dit:

$$\text{div} \bar{v} = 0. \quad (1.3.5)$$

Bovenstaande vergelijkingen zijn in vectorvorm gegeven, hetgeen voor (1.3.3) betekent dat er drie vergelijkingen zijn, respectievelijk één voor  $v_x$ , één voor  $v_y$ , en één voor  $v_z$ .

### 1.4. Coördinatentransformaties

De basisvergelijkingen zijn in vectorvorm gegeven. Voor praktische gevallen dienen ze voor het oplossen in componenten te worden uitgeschreven. Afhankelijk van de geometrie van het probleem kiest men hiervoor de cartesiaanse, cylinder- of bolcoördinaten. Deze coördinaten zijn gedefinieerd zoals geïllustreerd in tabel 1.4.1.

In deze tabel zijn de transformaties gegeven voor de hier van belang zijnde termen.

Voor de continuïteitsvergelijking is de divergentie van een vector uitgeschreven. Voor de basistransportvergelijkingen geeft tabel (1.4.1) de gradiënt ( $\nabla T$ ) terwijl de diffusie-term  $\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$  eveneens wordt uitgeschreven. Uiteraard gelden voor  $\nabla c$  en  $\nabla \cdot (D \nabla c)$  gelijke relaties. Voor  $\lambda$  constant geeft dezelfde tabel tevens  $\nabla^2 T$ .

De convectieve term  $\bar{v} \cdot \nabla$  is voor de energie- en diffusievergelijking in componenten uitgeschreven in tabel (1.4.1).

De Navier-Stokes-vergelijkingen zijn in wezen drie vergelijkingen voor de drie componenten van de snelheidsvector  $\bar{v}$ . In tabel (1.4.2) zijn deze voor de drie coördinatenstelsels volledig uitgeschreven.

Vaak combineert men in de behoudsvergelijkingen de instationaire term met de convectieve term en noemt deze combinatie de materiële of substantiële afgeleide  $\frac{D}{Dt}$ , en wel is:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \quad (1.4.1)$$

Bijvoorbeeld:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla c \quad (1.4.2)$$

en

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot \bar{v} \quad (1.4.3)$$

Terwijl  $\frac{\partial}{\partial t}$  de lokale veranderingen met de tijd geeft, doet  $\frac{D}{Dt}$  dat voor de veranderingen van een materie-element door de materiële beweging mee te rekenen.

## 1.5. Classificatie van vergelijkingen

In een belangrijk aantal gevallen vereenvoudigen de algemene transportvergelijkingen aanzienlijk. We kunnen deze veel voorkomende gevallen als volgt in een aantal typen indelen:

a) Stationair transport zonder stroming:

$$\nabla^2 T = 0$$

of

*Laplace (potentiaal)vergelijking* (1.5.1)

$$\nabla^2 c = 0.$$

b) Niet-stationair transport zonder stroming:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T$$

of

*Diffusievergelijking* (1.5.2)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c$$

c) Stationair transport met stroming

$$\rho c_p (\bar{v} \nabla) T = \lambda \nabla^2 T$$

of

$$(\bar{v} \nabla) c = D \nabla^2 c. \quad (1.5.3)$$

d) Niet-stationair transport met stroming:

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) T \right] = \lambda \nabla^2 T$$

of

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) c = D \nabla^2 c \quad (1.5.4)$$

Een fysisch probleem is dikwijls tot één van deze differentiaalvergelijkingen terug te voeren.

Wiskundig classificeert men partiële differentiaalvergelijkingen zoals hierboven gegeven in drie typen van vergelijkingen. Uitgaande van de algemene vorm:

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = 0 \quad (1.5.5)$$

spreekt men van:

1) *Elliptisch* type als:

$$B^2 - 4AC < 0.$$

Hieraan voldoet de *Laplace-vergelijking*:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (1.5.6)$$

2) *Parabolisch* type als:

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Hieraan voldoet de *diffusievergelijking*:

$$A u_{xx} - u_y = 0 \quad (A > 0 \text{ en } y = t). \quad (1.5.7)$$

3) *Hyperbolisch* type als:

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Dit leidt tot de vergelijking:

$$A u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (A > 0) \quad (1.5.8)$$

Hieraan voldoet de zogenaamde *golfvergelijking* die hier niet behandeld wordt. Deze vergelijking kan met name ontstaan uit de Navier-Stokes-vergelijking met verwaarlozing van visceuze effecten toegepast op kleine verstoringen  $p^l$  in bijvoorbeeld de druk. Voor een compressibel medium geeft dit na linearisering voor voortplanting in  $x$ -richting:



$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0. \quad (1.5.9)$$

Deze vergelijking geeft de voortplanting van een akoestisch vlak golf front in  $x$ -richting.

### 1.6. Rand- en beginvoorwaarden

Voor het oplossen van de differentiaalvergelijkingen dienen we voor de stationaire problemen over randvoorwaarden te beschikken. Voor de niet-stationaire problemen komen daar beginvoorwaarden bij. Hoeveel rand- en beginvoorwaarden precies nodig zijn, is niet eenvoudig exact aan te geven. Als vuistregel kan men gebruiken dat men evenveel rand- en beginvoorwaarden nodig heeft als de som van de hoogste orden van de differentiaalquotienten in de onafhankelijk variabelen.

Voor de diffusievergelijking in het  $x,y$ -vlak zijn dat 2e orde in  $x$ , 2e orde in  $y$  en 1e orde in  $t$ , dus totaal vijf rand- en beginvoorwaarden (gezien de eerste orde in  $t$ , is dat één beginvoorwaarde). Bij de door ons te behandelen problemen moeten de randvoorwaarden over een gesloten (eventueel over  $\infty$ ) rand gegeven zijn.

De beginvoorwaarde is voor één  $t$ -waarde over het gehele gesloten gebied te geven. Het opstellen van de juiste voorwaarden is zeer belangrijk. Algemene regels zijn moeilijk te geven, men kan zich het beste in het fysische probleem vragen wat er nodig is wil het fysisch bepaald zijn. We kunnen bij onze problemen een aantal veel voorkomende rand- en beginvoorwaarden onderscheiden.

1. Randvoorwaarde  $T$  (resp.  $c$ ) gegeven:  $T_R = T(x,y,z)$

2. Randvoorwaarde flux gegeven:

$$a. \Phi_w'' = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_R = f(x,y,z)$$

$$\text{of } b. \Phi_w'' = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_R = F(x,y,z,T_R).$$

Hierbij is  $\partial n$  differentiatie langs de normaal van de rand  $R$ .

Uiteraard gelden voor de massastroom  $\phi_m''$  en de concentratiegradiënt gelijk relaties. De relatie 2b is voor het thermische geval nog te onderscheiden in twee belangrijke varianten en wel:

$$1^\circ F(x,y,z,T_R) = a(x,y,z)(T_R - T_0),$$

hetgeen convectieve warmte-overdracht aan de rand naar een ander medium weergeeft en voor stoftransport een direct analogon heeft met de stofoverdrachtscoëfficiënten, en in:

$$2^\circ F(x,y,z,T_R) = G(x,y,z)\sigma(T_R^4 - T_0^4),$$

hetgeen stralingsoverdracht naar buiten het systeem weergeeft ( $\sigma$  is constante van Boltzmann).

3. Randvoorwaarde bij impulsvergelijking:  $v_{\text{slip}} = 0$

4. Beginvoorwaarde:  $t = 0, T = T(x, y, z)$ .

Men zal er rekening mee moeten houden dat een probleem voor de verschillende randvoorwaarden 1, 2a en 2b ook verschillende oplossingen zal hebben.

Er is nog een belangrijk verschil vanuit het oogpunt van rand- en beginvoorwaarden tussen de vergelijkingen van het elliptisch type aan de ene kant en de parabolische en hyperbolische typen aan de andere kant. Het elliptische type kent alleen randvoorwaarden langs een gesloten domein van de onafhankelijk variabelen. In feite betekent dit dat met name voor de Laplace-vergelijking:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1.6.1)$$

randvoorwaarden langs een rand, die een gebied in het  $xy$ -vlak volledig omsluit, moeten zijn gegeven (zie fig. 1.6.1). Wil men een oplossing vinden die bij een punt binnen dit gebied hoort, dan hangt deze oplossing af van alle andere waarden in dit gebied. Men moet voor alle punten binnen het gebied een oplossing hebben, men spreekt van een 'jury-problem'.

De hyperbolische en parabolische vergelijkingen vereisen beginvoorwaarden naast randvoorwaarden. De diffusievergelijking met name:

$$Au_{xx} - u_t = 0 \quad (1.6.2)$$

vereist beginvoorwaarden voor  $u$  bij  $t = t_0$  en randvoorwaarden voor  $u$  of  $\partial u / \partial x$  bij 2 waarden van  $x$  voor  $t > t_0$  (zie fig. 1.6.2). Hier heeft men een open gebied in het  $xt$ -vlak. Een oplossing voor  $t = t_0 + \tau$  hangt niet af van waarden van  $u$  voor  $t > t_0 + \tau$ . Men kan steeds vanuit  $t = t_0$  rekenen en men spreekt van 'marching solutions'.

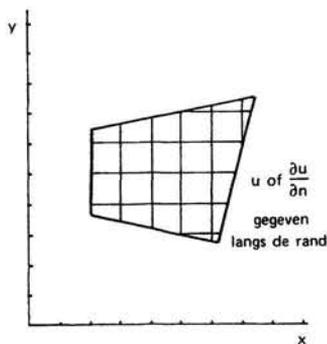


Fig. 1.6.1.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  
Jury-probleem.

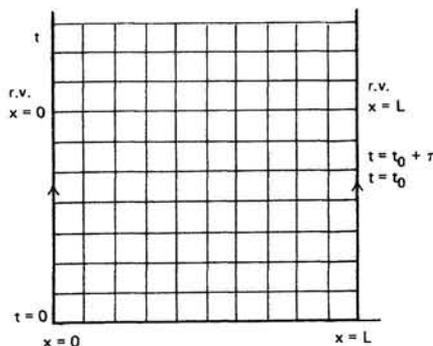


Fig. 1.6.2.  $Au_{xx} - u_t = 0$ ,  
lopende oplossingen (marching solutions).

# **DEEL II**

## **Wiskundige methoden**

## 2. Analytische methoden

### 2.1. Gewone differentiaalvergelijkingen

Indien we een probleem met slechts één onafhankelijk veranderlijke hebben, krijgen we een gewone differentiaalvergelijking. Dit geval doet zich alleen voor bij stationaire problemen in één dimensie. Oplossing hiervan kan dikwijls analytisch, zo nodig ook numeriek. Voorbeelden hiervan zijn behandeld in FT I, één geval wordt hier besproken.

Dit aan de hand van de effectiviteit van een poreuze vaste katalysator voor gasreacties (zie fig. 2.1.1).

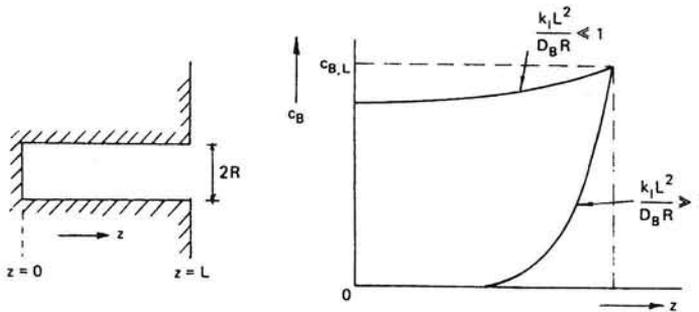


Fig. 2.1.1. Concentratieverloop van reactant B in katalysator-porie.

Op  $z = L$  wordt de concentratie van de op het katalysatoroppervlak reagerende component B gelijk aan  $c_{B,L}$  gesteld. Deze component B diffundeert naar binnen en reageert aan de wand van de porie volgens een eerste-orde reactie: aantal kmol B omgezet per eenheid van tijd en wandoppervlak is  $k_1 c_B$ . Radiale concentratiegradiënten verwaarlozende (geoorloofd als  $k_1 R / D_B \ll 1$ ) vindt men voor de stofbalans over een schijfje  $dz$ :

$$D_B \frac{d^2 c_B}{dz^2} \cdot \pi R^2 dz - k_1 c_B \cdot 2\pi R dz = 0 \quad (2.1.1)$$

met de randvoorwaarden  $z = L$ ,  $c_B = c_{B,L}$  en  $z = 0$ ,  $\frac{dc_B}{dz} \approx 0$ .

De concentratieverdeling wordt:

$$\frac{c_B}{c_{B,L}} = \frac{\cosh z \sqrt{\frac{2k_1}{D_B R}}}{\cosh L \sqrt{\frac{2k_1}{D_B R}}} \quad (2.1.2)$$

De effectiviteit van de katalysator (werkelijke reactie-opbrengst gedeeld door maximaal denkbare reactie-opbrengst) is:

$$\frac{2\pi R k_1 \int_0^L c_B dz}{2\pi R k_1 c_{B,L} L} = \frac{\text{tgh } L \sqrt{\frac{2k_1}{D_B R}}}{L \sqrt{\frac{2k_1}{D_B R}}} \quad (2.1.3)$$

viteit ongeveer 1; in het omgekeerde geval vindt de reactie voornamelijk plaats aan de mond van de porie.

Hoe wordt de oplossing als we op de bodem van de porie niet  $dc_B/dz = 0$  aannemen, maar ook daar eerste-orde reactie?

## 2.2. Scheiden van variabelen

De partiële differentiaalvergelijking die we in FT II behandelen zal men langs verschillende wegen trachten te herleiden tot gewone differentiaalvergelijkingen. Een belangrijke methode is:

*Scheiding van variabelen*, d.w.z. de gezochte temperatuur (of  $\vec{v}$  of  $c$ )-verdeling die van 2 of meerdere variabelen afhangt, wordt geacht voorgesteld te kunnen worden door het product van 2 of meer afzonderlijke verdelingen, die ieder slechts van één der variabelen afhangt. Op deze wijze verkrijgt men 2 of meer gewone differentiaalvergelijkingen in de gescheiden variabelen. Oplossingen hiervan zijn meestal in de vorm van een reeks van zgn. *eigenfuncties*  $f(\mu, x)$ , waarin de parameter  $\mu$  slechts een beperkt aantal mogelijke 'eigenwaarden' kan aannemen, afhankelijk van randvoorwaarden.

Het meest eenvoudige voorbeeld van eigenfuncties zijn de harmonische functies  $\sin(k\pi x)$  en  $\cos(k\pi x)$ . Dit zal met een voorbeeld worden geïllustreerd.

De niet-stationaire afkoeling van een vlakke muur, die aanvankelijk een temperatuur  $T_0$  heeft, maar waarvoor vanaf  $t = 0$  de wanden op een temperatuur 0 worden gehouden.

We veronderstellen de vlakke muur als oneindig uitgestrekt. Vanaf  $t > 0$  is de wandtemperatuur (op  $x = \pm L$ )  $T = 0$ , terwijl op  $t = 0$  de temperatuur in de muur uniform  $T_0$  graden was (zie fig. 2.2.1).

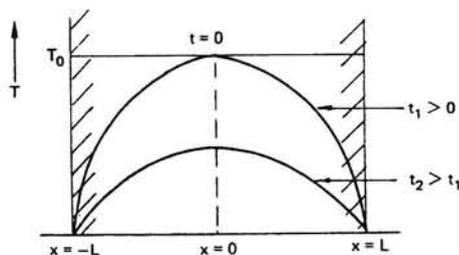


Fig. 2.2.1. Afkoeling van een muur.

De differentiaalvergelijking voor de temperatuur  $T$  en de randcondities luiden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.2.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \quad -L \leq x \leq L \quad T = T_0 \\ t > 0 \quad x = \pm L \quad T = 0 \end{array} \right\}$$

Door invoeren van de dimensieloze variabelen  $\theta = T/T_0$ ,  $\xi = x/L$  en  $\tau = at/L^2$  wordt dit:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (2.2.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau = 0 \quad -1 < \xi < 1 \quad \theta = 1, \\ \tau > 0 \quad \xi = \pm 1 \quad \theta = 0. \end{array} \right\} \quad (2.2.3)$$

Het scheiden van variabelen houdt nu in dat we een oplossing voor de partiële differentiaalvergelijking *proberen* van het type:

$$\theta = X(\xi) \cdot F(\tau), \quad (2.2.4)$$

d.w.z. het product van een functie van  $\xi$  alleen en een functie van  $\tau$  alleen. Indien we hiermede een oplossing vinden, die ook aan de randvoorwaarden kan voldoen, is te bewijzen dat deze oplossing de enige is (zie Luikov, p. 656). Vullen we (2.2.4) in de vergelijking (2.2.2) in, dan krijgen we:

$$X \frac{dF}{d\tau} = F \frac{d^2 X}{d\xi^2} \quad (2.2.5)$$

of

$$\frac{F'}{F} = \frac{X''}{X}.$$

Aangezien links van het is-gelijk-teken in (2.2.5) een functie van  $\tau$  staat en rechts een van  $\xi$ , kan (2.2.4) alleen juist zijn als beide termen onafhankelijk van  $\tau$  en  $\xi$  zijn (dus constante, stel deze  $-\mu^2$ ) of:

$$\frac{F'}{F} + \mu^2 = 0 \quad (2.2.6)$$

$$\frac{X''}{X} + \mu^2 = 0. \quad (2.2.7)$$

$$\text{Dit heeft als oplossingen: } X = p \cdot \sin \mu \xi + q \cdot \cos \mu \xi \quad (2.2.8)$$

$$\text{en} \quad F = e^{-\mu^2 \tau}. \quad (2.2.9)$$

Wegens symmetrie voor oplossingen ( $\xi$  en  $-\xi$ ) is  $p = 0$ .

I.v.m. de randvoorwaarde bij  $\xi = \pm 1$  heeft  $\mu$  als *eigenwaarden*:

$$\mu_n = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

De algemene oplossing voor  $X$  is de som van de *eigenfuncties*:

$$X = \sum_{n=0}^{n=\infty} q_n \cos \left( \frac{2n+1}{2} \pi \cdot \xi \right) \quad (2.2.10)$$

en dus:

$$\theta = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} \tau} q_n \cos \left( \frac{2n+1}{2} \pi \cdot \xi \right). \quad (2.2.11)$$

De coëfficiënten  $q_n$  worden nu bepaald uit de beginvoorwaarden met behulp van de *Fourier-analyse*. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de zgn. *orthogonaliteitseigenschap* van eigenfuncties, die voor de cosinusfunctie luidt:

$$\int_{-1}^{+1} \cos \left( \frac{n\pi}{2} \xi \right) \cdot \cos \left( \frac{m\pi}{2} \xi \right) \cdot d\xi = \begin{cases} 1 & \text{voor } m = n \\ 0 & \text{voor } m \neq n. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

## 24 Fysische Transportverschijnselen II

Dit is voor deze functie makkelijk in te zien, is echter af te leiden voor alle eigenfuncties.

Onze oplossing voor  $\theta$  met  $\tau = 0$  en de beginvoorwaarde geeft:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} q_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\xi\right) = 1. \quad (2.2.13)$$

In de Fourier-analyse vermenigvuldigen we beide termen met

$$\int_{-1}^{+1} \cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi\xi\right) d\xi,$$

dit geeft samen met de orthogonaliteitseigenschap:

$$q_m \int_{-1}^{+1} \cos^2\left(\frac{2m+1}{2}\pi\xi\right) d\xi = \int_{-1}^{+1} \cos\left(\frac{2m+1}{2}\pi\xi\right) d\xi \quad (2.2.14)$$

$$q_m = \frac{(-1)^m \cdot 4}{(2m+1)\pi}.$$

Uiteindelijk is dus:

$$\theta = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{(2n+1)\pi} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \tau}{4}} \cdot \cos\left(\frac{2n+1}{2} \cdot \pi\xi\right). \quad (2.2.15)$$

Voor lange tijden, reeds voor  $\tau > 0,5$ , is alleen de term met  $n = 0$  belangrijk en vinden we:

$$\theta = \frac{4}{\pi} \cdot e^{-\frac{\pi^2 \tau}{4}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \xi \quad (2.2.16)$$

en als we teruggaan naar de oorspronkelijke variabelen  $T$ ,  $x$  en  $t$  dan:

$$T = \frac{4}{\pi} \cdot T_0 e^{-\frac{\pi^2 at}{4L^2}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{L}, \quad (2.2.17)$$

waarin de dimensieloze groep  $at/L^2 = F_0$  het *Fouriergetal* is.

Voor grote waarden van dit Fouriergetal is de oplossing dus te schrijven met de laagste eigenwaarde. Dit geldt algemeen en het vinden van deze waarde is van groot belang. Een nauwkeurige methode om voor onbekende eigenfuncties deze waarde te benaderen, is gegeven door *Ritz-Galerkin*, zie de literatuur [D.10].

### Kwantitatief voorbeeld

We berekenen enige waarden in het bovenstaande probleem voor het geval van een 0,05 m dikke wand, waarbij we onderscheid maken tussen een wand van beton en één van gipsplaat. Fysische gegevens zijn:

Beton: $\lambda = 0,40 \text{ W/mK}$	Gipsplaat: $\lambda = 0,05 \text{ W/mK}$
$\rho c = 1,0 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$	$\rho c = 0,125 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$
$a = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$	$a = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

Deze materialen blijken nagenoeg dezelfde  $a$ -waarden te hebben, hetgeen betekent dat voor de snelheid van vereffenen van het temperatuur-

verschil er geen verschillen tussen deze materialen zijn voor dit probleem. Voor het geval dat de temperatuur in het midden van de wand ( $x = 0$ ) 5% van de eindtemperatuur afligt t.o.v. de gehele temperatuursprong, is:

$$T = 0,05 = \frac{4}{\pi} \cdot 1 \cdot \exp \left[ -\frac{\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot t}{(0,05)^2} \right] = 1,27 \exp [-1,58 \cdot 10^{-3} t];$$

dit geeft  $t = 2047 \text{ s} \approx 34 \text{ min}$ .

Dat voor dit geval de volgende eigenwaarde al geheel verwaarloosd kan worden is te zien uit deze eigenwaarde die als term in (2.2.15) geeft:

$$\frac{4}{3\pi} \exp \left[ -\frac{9\pi^2 at}{4L^2} \right].$$

T.o.v. de eerste term geeft dit een factor  $f$

$$f = \frac{1}{3} \exp \left[ \left( -\frac{9\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{at}{L^2} \right].$$

Voor  $t = 300 \text{ s}$  (5 min) is  $f$  reeds 0,008 en te verwaarlozen.

Weliswaar is de snelheid van vereffening in beide gevallen gelijk, de afgestane hoeveelheid warmte is sterk verschillend. Immers:

$$\phi_w'' = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L}$$

geeft dat de warmtestromen direct evenredig zijn met  $\lambda$  en dit geeft voor de betonwand een  $8 \times$  zo grote warmte-opname in dezelfde tijd. Indien de warmtetoevoer naar de wand door uitwendige convectie limiterend is zal dit niet zo zijn, maar moet ook een oplossing met een andere randvoorwaarde worden gebruikt. Probeer dit zelf, gebruik makend van het hieronder besproken voorbeeldprobleem.

Als ander voorbeeld beschouwen we: de niet-stationaire afkoeling van een wand met voor  $t > 0$  een convectieve warmte-overdracht aan één buitenzijde en de andere zijde volledig geïsoleerd. De differentiaalvergelijking en rand- en beginvoorwaarden voor dit probleem zijn:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.2.18)$$

met  $t = 0 \quad T = T_0$

$$t > 0 \quad x = d: -\lambda \frac{dT}{dx} = \alpha(T - 0) \quad (2.2.19)$$

$$x = 0: \lambda \frac{dT}{dx} = 0.$$

De voorwaarde bij  $x = 0$  betekent symmetrie van het temperatuurveld om  $x = 0$  en het probleem is dus identiek met het probleem voor  $x = +d$  en  $-d$  met eerste randvoorwaarde. We voeren in:

$$\theta = \frac{T}{T_0} \quad \text{en} \quad \zeta = \frac{x}{d}, \quad \text{dan}$$



$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{a}{d^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (2.2.20)$$

$$t = 0 \quad \theta = 1$$

$$t > 0 \quad \zeta = \pm 1: \frac{d\theta}{d\zeta} = -\left(\frac{\alpha d}{\lambda}\right) \theta = -\text{Bi} \cdot \theta. \quad (2.2.21)$$

De dimensieloze groep  $\left(\frac{\alpha d}{\lambda}\right)$ , waarbij  $\alpha$  op het *externe* en  $\lambda$  op het *interne* medium betrekking heeft noemt men wel het *Biot-getal*.

We passen scheiden van variabelen toe:

$$\theta = F(t) G(\zeta), \quad (2.2.22)$$

$$\text{dit geeft: } \frac{d^2 \cdot F'}{aF} = \frac{G''}{G} = -\lambda^2 \quad (2.2.23)$$

$$F(t) = \exp\left[-\frac{\lambda^2 a}{d^2} t\right] \quad (2.2.24)$$

$$G(\zeta) = A \sin(\lambda \zeta) + B \cos(\lambda \zeta). \quad (2.2.25)$$

Aangezien  $\theta$  symmetrisch in  $\zeta = 0$  is ( $d\theta/d\zeta = 0$ ,  $\zeta = 0$ ) moet  $A = 0$ . De gehele oplossing is de som van de eigenfuncties voor nader te bepalen eigenwaarden  $\lambda_k$ :

$$\theta = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \cos(\lambda_k \zeta) \exp\left[-\frac{\lambda_k^2 a}{d^2} t\right]. \quad (2.2.26)$$

Uit de randvoorwaarde voor  $\zeta = +1$  volgt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} &= -\sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \cdot \lambda_k \sin(\lambda_k) \exp\left[-\frac{\lambda_k^2 a}{d^2} t\right] = -\text{Bi} \cdot \theta \Big|_{\zeta=1} \\ &= -\text{Bi} \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \cos(\lambda_k) \exp\left[-\frac{\lambda_k^2 a}{d^2} t\right]. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Deze sommen kunnen alleen voor elke  $t$  gelijk zijn als:

$$\lambda_k \sin(\lambda_k) = \text{Bi} \cos(\lambda_k)$$

of

$$\tan(\lambda_k) = \frac{\text{Bi}}{\lambda_k}. \quad (2.2.28)$$

Uit deze transcendente vergelijking voor  $\lambda_k$  zijn voor een gegeven waarde van  $\text{Bi}$  de eigenwaarden voor  $\lambda_k$  te bepalen.

De waarde van  $B_k$  kan weer uit de beginvoorwaarde en de orthogonaliteitseigenschap worden bepaald:

$$\begin{aligned} t = 0: \theta = 1 &= \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \cdot \cos(\lambda_k \zeta) \\ \int_{-1}^{+1} \cos(\lambda_k \zeta) d\zeta &= \int_{-1}^{+1} B_k \cdot \cos^2(\lambda_k \zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

De rechter integraal lost men op met  $2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$ ; dit geeft uiteindelijk:

$$B_k = \frac{4\sin(\lambda_k)}{2\lambda_k + \sin(2\lambda_k)} = \frac{2\sin(\lambda_k)}{\lambda_k + \sin(\lambda_k)\cos(\lambda_k)}. \quad (2.2.30)$$

Volledige oplossing is:

$$\theta = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{4\sin(\lambda_k)}{2\lambda_k + \sin(2\lambda_k)} \cdot \cos(\lambda_k \zeta) \exp\left[-\frac{\lambda_k^2 a}{d^2} t\right] \quad (2.2.31)$$

of

$$T = T_0 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2\sin(\lambda_k)}{\lambda_k + \sin(\lambda_k)\cos(\lambda_k)} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_k x}{d}\right) \exp\left[-\frac{\lambda_k^2 a}{d^2} t\right]. \quad (2.2.32)$$

De eigenwaarden  $\lambda_k$  kan men grafisch bepalen uit een grafiek van  $\text{tg } \lambda_k$  en van  $\frac{Bi}{\lambda_k}$ . De snijpunten van de curven geven de  $\lambda_k$ -waarden, zie fig. 2.2.2. Tabel

2.2.1. geeft een aantal van deze waarden voor verschillende Biot-waarden.

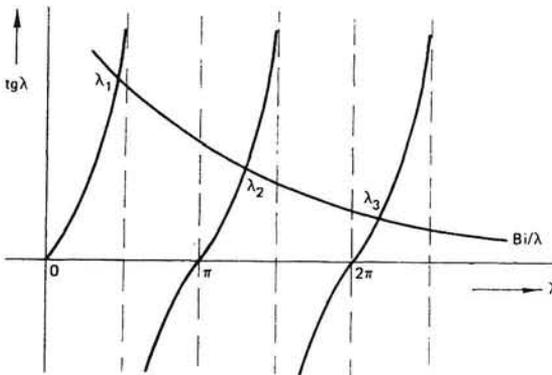


Fig. 2.2.2. Grafische oplossing van vergelijking (2.2.28):  $\text{tg } \lambda_k = Bi/\lambda_k$ .

Bi	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0	0	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$
0.001	0.0316	3.1419	6.2833	9.4249	12.5665
0.002	0.0447	3.1422	6.2835	9.4250	12.5665
0.006	0.0774	3.1435	6.2841	9.4254	12.5668
0.01	0.0998	3.1448	6.2848	9.4258	12.5672
0.02	0.1410	3.1479	6.2864	9.4269	12.5680
0.04	0.1987	3.1543	6.2895	9.4290	12.5696
0.1	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354	12.5743
0.2	0.4328	3.2039	6.3148	9.4459	12.5823
0.5	0.6533	3.2923	6.3616	9.4775	12.6060
1.0	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293	12.6453
2.0	1.0769	3.6436	6.5783	9.6296	12.7223
5.0	1.3138	4.0336	6.9096	9.8928	12.9352
10.0	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003	13.2142
20.0	1.4961	4.4915	7.4954	10.5117	13.5420
50.0	1.5400	4.6202	7.7012	10.7832	13.8666
100.0	1.5552	4.6658	7.7764	10.8871	13.9981
$\infty$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$	$9\pi/2$

Tabel 2.2.1. Wortels van  $\lambda \text{tg } \lambda = Bi$ .

**Kwantitatief voorbeeld**

We beschouwen een stalen plaat van  $900^{\circ}\text{C}$  die wordt afgekoeld door aan één zijde water van  $40^{\circ}\text{C}$  op de plaat te sproeien. Hiermede wordt een warmte-overdracht van het staaloppervlak naar het water verkregen die met een constante warmte-overdrachtscoëfficiënt van  $5000\text{ W/m}^2\text{K}$  te beschrijven is. De andere zijde van de plaat kan als volledig thermisch geïsoleerd worden opgevat.

Voor een plaat van  $0,004\text{ m}$  dikte worden de temperaturen aan beide oppervlakken van de plaat gevraagd  $5\text{ s}$  nadat het sproeien begonnen is. Voor staal kunnen we hier een constante  $\lambda = 20\text{ W/mK}$  en  $a = 6 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$  veronderstellen.

We vinden in dit geval:

$$\text{Bi} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,004}{20} = 1, \quad \lambda_1 = 0,860.$$

We nemen alleen de eerste eigenwaarde, dit geeft:

voor  $x = d$ :

$$T(x=d) = 40 + 860 \cdot 0,73 \cdot \exp[-0,28t]$$

voor  $t = 5\text{ s}$ :

$$T = 195^{\circ}\text{C}$$

en

$$T(x=0) = 40 + 860 \cdot 1,12 \cdot \exp[-0,28t] = 277^{\circ}\text{C}.$$

Het is makkelijk na te gaan dat de tweede eigenwaarde reeds verwaarloosd kan worden.

**2.3. Eigenfuncties en eigenwaarden**

De differentiaalvergelijking van het hierboven behandelde voorbeeld werd opgelost door een reeks van eigenfuncties, die in dit geval een Fourierreeks werd. Deze methode is een bijzonder geval van een algemener procédé, dat wordt gekarakteriseerd door het type differentiaalvergelijking en door een bepaald type randcondities. Daar we in het volgende nog enkele malen met vergelijkingen van deze aard te maken zullen krijgen, is het gewenst hier een en ander wat algemener te resumeren. Voor een volledige behandeling wordt verwezen naar de wiskundecolleges.

Men doet er goed aan steeds de algemene beweringen uit deze paragraaf te toetsen aan het concrete voorbeeld van de vorige paragraaf.

De zgn. vergelijking van *Sturm-Liouville* ziet er in de algemene vorm als volgt uit:

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dy}{dx} \right) + (\beta^2 q + r)y = 0, \quad (2.3.1)$$

waarin  $p$ ,  $q$  en  $r$  functies van  $x$  kunnen zijn (in het beschouwde interval continu) en  $\beta^2$  een onbepaalde constante. De randcondities luiden:

$$\left. \begin{aligned} x = x_1 &\rightarrow \frac{dy}{dx} = a_1 y \\ x = x_2 &\rightarrow \frac{dy}{dx} = a_2 y \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

Hierin kunnen  $a_1$  en  $a_2$  iedere willekeurige reële waarde hebben, nul en oneindig niet uitgesloten.

Deze gewone differentiaalvergelijking met randconditie kan in principe opgelost worden; desnoods door numeriek te itereren. Daarbij blijkt dat het niet mogelijk is voor elke waarde van  $\beta^2$  een oplossing te vinden die aan de randcondities voldoet. Dit blijkt alleen te kunnen voor een (oneindig groot) aantal zeer bepaalde waarden van  $\beta^2$ , die we de *eigenwaarden* van het probleem noemen. Deze discrete eigenwaarden vormen in de meest voorkomende gevallen een oneindig voortlopende aftelbare reeks; bij iedere eigenwaarde behoort vanzelfsprekend een *eigenfunctie* die aan (2.3.1) voldoet.

Hebben we nu twee willekeurige eigenfuncties  $y_n$  en  $y_m$  uit deze verzameling, dan kunnen we bewijzen:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} q y_m y_n dx &= 0 \quad \text{voor } m \neq n, \\ &\neq 0 \quad \text{voor } m = n \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

Een stelsel van bij elkaar behorende eigenfuncties, die aan deze relatie voldoen, noemt men *orthogonaal*.

Deze eigenschap stelt ons in staat een willekeurige gegeven functie die continu is in het interval  $x_1 - x_2$ , voor te stellen door een reeks van dergelijke onderling orthogonale eigenfuncties:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y_n. \quad (2.3.4)$$

Dit kan doordat (2.3.4) na vermenigvuldigen met  $q y_m dx$  en integreren over het interval  $x_1 - x_2$  overgaat in

$$\int_{x_1}^{x_2} q y_m f(x) dx = A_m \int_{x_1}^{x_2} q y_m^2 dx. \quad (2.3.5)$$

De overige termen van de reeks leveren immers volgens (2.3.3) bij deze bewerking nul op. Uit (2.3.5) kan de coëfficiënt  $A_m$  voor elke term van de reeks worden berekend.

Van deze eigenschap van een orthogonaal functiesysteem kunnen we gebruik maken om uit de reeks van eigenfuncties (oplossingen van de differentiaalvergelijking) door samenstelling een oplossing te construeren die aan een bepaalde 'begin'-functie  $f(x)$  voldoet. Nodig is daarvoor nog het berekenen van de twee integralen in (2.3.5). Men kan dit in enkele gevallen 'elementair' doen. In de meeste andere gevallen is numerieke berekening (b.v. door grafische integratie of met de regel van Simpson) de aangewezen weg.

In dit college krijgen we achtereenvolgens te maken met de volgende differentiaalvergelijkingen van het type Sturm-Liouville:

$$\left. \begin{aligned} y'' + \beta^2 y &= 0 \text{ of } \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \beta^2 y = 0, \\ y'' + \frac{1}{x} y' + \beta^2 y &= 0 \text{ of } \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \beta^2 x y = 0, \\ y'' + \frac{2}{x^2} y' + \beta^2 y &= 0 \text{ of } \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \beta^2 x^2 y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

Met als eigenfuncties resp.  $\cos \beta x$ , de Besselfunctie van de orde nul:  $J_0(\beta x)$  en  $\sin(\beta x)/\beta x$ .

Als voorbeeld van de eigenfuncties  $\sin(\beta x)/(\beta x)$  beschouwen we een geval met bolsymmetrie.

De niet-stationaire afkoeling van een bol met een beginverdeling van de temperatuur in de bol.

Een bol met straal  $R$  heeft op  $t = 0$  een temperatuurverdeling

$T = T_r \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$  en voor  $t > 0$  wordt het oppervlak op  $T = 0$  gehouden.

Differentiaalvergelijking en randvoorwaarden zijn:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.3.7)$$

met

$$\left. \begin{aligned} t = 0 \quad T &= T_r \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \\ t > 0 \quad r = R \quad T &= 0 \\ r = 0 \quad T &= \text{eindig.} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

Voer in de dimensieloze variabelen

$$\theta = \frac{T}{T_r}, \quad y = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{at}{R^2} \quad (2.3.9)$$

De differentiaalvergelijking wordt dan

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad (2.3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau = 0 \quad \theta &= (1 - y^2) \\ y = 1 \text{ en } \tau > 0 \quad \theta &= 0 \\ y = 0 \text{ en } \tau > 0 \quad \theta &= \text{eindig} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.11)$$

Oplossen m.b.v. scheiden van variabelen:

$$\theta = F(\tau).G(y) \quad (2.3.12)$$

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{d\tau} = \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dy^2} + \frac{1}{G y} \frac{dG}{dy} = -\lambda^2, \text{ voor } F \text{ volgt}$$

$$F = \exp[-\lambda^2 \tau], \text{ voor } G \text{ volgt} \quad (2.3.13)$$

$$\frac{d^2 G}{dy^2} + \frac{2dG}{y dy} + \lambda^2 G = 0. \quad (2.3.14)$$

De algemene oplossing van deze laatste vergelijking is

$$G = \frac{B}{y} \sin \lambda y + \frac{C}{y} \cos \lambda y. \quad (2.3.15)$$

G moet eindig zijn voor  $y = 0 \rightarrow C = 0$ . Dus

$$\theta = \frac{B}{y} \sin \lambda y \cdot \exp(-\lambda^2 \tau). \quad (2.3.16)$$

Als  $y = 1$  dan  $\theta = 0$  voor alle  $\tau$ .

$$\sin \lambda = 0 \rightarrow \lambda = n\pi \quad \text{met } n = 1, 2, 3, \dots$$

dus

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{y} \sin(n\pi y) \exp[-n^2 \pi^2 \tau]. \quad (2.3.17)$$

De  $B_n$ 's volgen uit de beginvoorwaarde en de orthogonaliteitseigenschap:

$$\tau = 0, \quad \theta = (1 - y^2)$$

$$1 - y^2 = \frac{1}{y} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi y). \quad (2.3.18)$$

Vermenigvuldigen met  $y \sin(m\pi y)$  en integreren naar  $y(0,1)$  levert voor  $B_n$

$$B_n = \frac{12}{(\pi n)^3} (-1)^{n+1}, \quad (2.3.19)$$

zodat

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(\pi n)^3} (-1)^{n+1} \frac{1}{y} \sin(n\pi y) \exp[-n^2 \pi^2 \tau] \quad (2.3.20)$$

of

$$\frac{T}{T_R} = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3} \frac{R}{r} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left[-\frac{n^2 \pi^2 a t}{R^2}\right] \quad (2.3.21)$$

## 2.4. Besselfuncties

Een belangrijke groep eigenfuncties zijn de zogenaamde Besselfuncties, die optreden bij problemen met cilindersymmetrie.

Beschouwen we weer de diffusievergelijking met nu als voorbeeld het uitdrogen van een oneindig lange poreuze, niet-hygroscopische cilinder, die aan de buitenkant met lucht omstroombd wordt, zo dat daar steeds  $c = 0$ .

De diffusievergelijking in cilindercoördinaten luidt:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad (2.4.1)$$

met als rand- en beginvoorwaarden

$$\begin{aligned} t = 0 & \quad 0 < r < R & \quad c = c_0 \\ t > 0 & \quad r = R & \quad c = 0 \\ t > 0 & \quad r = 0 & \quad \frac{\partial c}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

### 32 Fysische Transportverschijnselen II

Ook hier maken we de vergelijking en randvoorwaarden weer dimensieloos en passen scheiden van variabelen toe.

$$\frac{c}{c_0} = X(\xi) \cdot F(\tau) \quad (2.4.3)$$

$$\text{met } \xi = \frac{r}{R} \text{ en } \tau = \frac{Dt}{R^2} \quad (2.4.4)$$

$$\text{We krijgen } \frac{F'}{F} + \beta^2 = 0 \quad (2.4.5)$$

$$\text{en } X'' + \frac{1}{\xi} X' + \beta^2 X = 0 \quad (2.4.6)$$

met  $\xi = 1$ ,  $X = 0$  en

$$\xi = 0, X' = 0 \quad (2.4.7)$$

en  $\tau = 0$ ,  $c/c_0 = 1$ .

$$\text{Dit geeft } F = \exp(-\beta^2 Dt/R^2) \quad (2.4.8)$$

terwijl (2.4.6) als oplossing voor  $X$  de zgn. Besselfuncties van de nulde orde heeft.

De algemene vorm van de *differentiaalvergelijking van Bessel* is:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (2.4.9)$$

Substitutie van de variabele

$$\xi = \frac{x}{\beta} \quad (2.4.10)$$

in deze vergelijking geeft:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\xi} + \left(\beta^2 - \frac{k^2}{\xi^2}\right) y = 0, \quad (2.4.11)$$

hetgeen voor  $k = 0$  gelijk is aan vgl. (2.4.6).

Voor  $k$  niet geheel heeft (2.4.9) als algemene oplossing:

$$y = A \cdot J_k(x) + B \cdot J_{-k}(x) \quad (2.4.12)$$

en voor  $k$  geheel of 0 heeft men

$$y = A \cdot J_k(x) + B \cdot Y_k(x). \quad (2.4.13)$$

Hierin zijn  $J_k(x)$  en  $J_{-k}(x)$  de Besselfunctie van de eerste soort en *orde*  $k$  ( $-k$ ); terwijl  $Y_k(x)$  de Neumannfunctie is (deze functie wordt ook wel met  $N_k(x)$  aangegeven). Deze functies kunnen door reeksontwikkeling uit de differentiaalvergelijking worden afgeleid. Zo vindt men voor  $J_k(x)$ :

$$J_k(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{1}{2} x\right)^{k+2p}}{p!(k+p)!}. \quad (2.4.14)$$

Zij zijn getabelleerd te vinden in handboeken, o.a. Handbook of Chemistry and Physics [F3], Jahnke en Emde [F2] en Abramowitz [F1]. Figuur 2.4.1

geeft het gedrag van  $J_0(x)$  en  $J_1(x)$ , het zijn oscillerende functies, echter in afwijking van de harmonische functies met afnemende amplitude en niet helemaal constante afstand tussen de nulpunten (hoewel deze afstand zeer snel tot  $\pi$  nadert!). Enige eigenschappen van Besselfuncties zijn in tabel 2.4.1 gegeven. De eerste vier nulpunten voor  $J_0(x)$  zijn daar tevens te vinden. De Neumanfunctie  $Y_k(x)$  wordt hier niet verder besproken. Voor  $x = 0$  wordt deze functie  $-\infty$  en daarom van geen praktische waarde voor fysische problemen in een gebied met  $x = 0$ . Verder zij verwezen naar de bibliografie [D6 en D7].

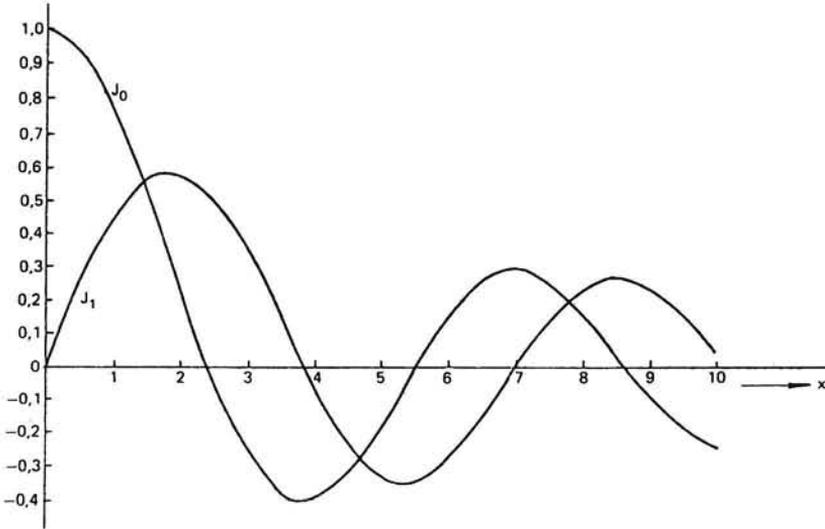


Fig. 2.4.1. Besselfuncties  $J_0(x)$  en  $J_1(x)$ .

In ons voorbeeld is  $k = 0$ , dit geeft  $J_0(\beta\xi)$  en  $Y_0(\beta\xi)$  als oplossingen. Echter is  $Y_0$  voor  $\beta\xi = 0$  oneindig, dus moet  $B = 0$ .

We krijgen

$$X = J_0(\beta\xi) \tag{2.4.15}$$

als oplossing. Nu moet volgens de randvoorwaarden  $X = 0$  voor  $\beta\xi = \beta$ . Dit betekent dat alleen als eigenwaarden, de waarden  $\beta_n$  die de nulpunten van de functie  $J_0(\beta_n)$  geven, in aanmerking komen.

De oplossing van het probleem wordt:

$$\frac{c}{c_0} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \exp\left(-\beta_n^2 \frac{Dt}{R^2}\right) J_0\left(\beta_n \frac{r}{R}\right). \tag{2.4.16}$$

Tenslotte dienen de coëfficiënten  $A_n$  gevonden te worden. Dit kan weer door gebruikmaking van de orthogonaliteitseigenschap. Voor de Besselfuncties is deze te vinden in tabel 2.4.1; toegepast op de beginvoorwaarde  $t = 0$  geeft dit

$$A_n = \frac{\int_0^1 \xi J_0(\beta_n \xi) d\xi}{\int_0^1 \xi J_0^2(\beta_n \xi) d\xi} = \frac{\frac{1}{\beta_n} J_1(\beta_n)}{\frac{1}{2} J_1^2(\beta_n)} = \frac{2}{\beta_n J_1(\beta_n)}. \tag{2.4.17}$$



<i>Recurrentiebetrekking:</i> $J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x}J_k(x) - J_{k-1}(x)$
<i>Gedrag voor <math>x \rightarrow 0</math>:</i> $J_0(0) = 1$ $J_k(0) = 0 \quad (k > 0)$ $J_{-k}(0) = \pm\infty$ $Y_k(0) = -\infty$
<i>Differentiatie:</i> $x \frac{d}{dx} J_k(\lambda x) = kJ_k(\lambda x) - \lambda x J_{k+1}(\lambda x)$ $= \lambda x J_{k-1}(\lambda x) - kJ_k(\lambda x)$ $\frac{d}{dx} J_0(\lambda x) = -\lambda J_1(\lambda x)$ $\frac{d}{dx} J_k(x) = \frac{1}{2}(J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x))$ $x \frac{d}{dx} Y_k(\lambda x) = kY_k(\lambda x) - \lambda x Y_{k+1}(\lambda x)$ $= \lambda x Y_{k-1}(\lambda x) - kY_k(\lambda x)$
<i>Integratie:</i> $\int \lambda x^k J_{k-1}(\lambda x) dx = x^k J_k(\lambda x)$ $\int \lambda x^k Y_{k-1}(\lambda x) dx = x^k Y_k(\lambda x)$ $\int_0^x J_k(\lambda x) J_k(\beta x) x dx = \frac{x}{\lambda^2 - \beta^2} [\lambda J_k(\beta x) J_{k+1}(\lambda x) - \beta J_k(\lambda x) J_{k+1}(\beta x)]$ $\int_0^x x J_k^2(\lambda x) dx = \frac{1}{2} x^2 [J_k^2(\lambda x) - J_{k-1}(\lambda x) J_{k+1}(\lambda x)] \quad (\text{orthogonaliteit})$ $\lambda x J_{k-1}(\lambda x) = 2kJ_k(\lambda x) - \lambda x J_{k+1}(\lambda x)$ $J_{-k}(\lambda x) = (-1)^k J_k(\lambda x) \quad k \text{ geheel!}$ $Y_{-k}(\lambda x) = (-1)^k Y_k(\lambda x) \quad k \text{ geheel!}$
<i>Enkele nulpunten van <math>J_0(\beta)</math>:</i> $\beta_0 = 2,405$ $\beta_1 = 5,52$ $\beta_2 = 8,65$ $\beta_3 = 11,79$

Tabel 2.4.1. Eigenschappen van Besselfuncties.

**Kwantitatief Voorbeeld**

We bekijken het thermische probleem van een cilindrische kolom met een diameter van 0,05 m, die oorspronkelijk op een temperatuur  $T_0$  is en plotseling aan de wand op een temperatuur  $T = 0$  wordt gebracht. Dit maakt het probleem vergelijkbaar met het eerder behandelde vlakke-wandprobleem. En we bepalen weer de tijd waarop de temperatuur in het centrum tot 0,05 is vereffend. Voor lange tijden hanteren we weer alleen de eerste eigenwaarde, met  $n = 0$ , dit geeft:

$$T = T_0 \frac{2}{\beta_0 J_1(\beta_0)} \exp\left[-\beta_0^2 \frac{at}{R^2}\right] J_0\left[\beta_0 \frac{r}{R}\right],$$

waarbij  $\beta_0$  het eerste nulpunt van  $J_0(\beta)$  is, deze heeft de waarde  $\beta_0 = 2,405$ . Voor deze  $\beta_0$  is  $J_1(\beta_0) = 0,519$ , dit geeft voor  $r = 0$ :

$$0,05 = \frac{2}{2,405,0,519} \exp [-3,70 \cdot 10^{-3} t] = 1,60 \exp [-3,70 \cdot 10^{-3} t].$$

Dit geeft  $t = 937\text{s}$ , hetgeen circa tweemaal sneller is dan voor een vlakke wand van  $0,05\text{ m}$  dikte. De warmtestroomdichtheid wordt gevonden uit  $-\lambda \frac{dT}{dr}$ , dit vereist differentiatie van Besselfuncties, zoals gegeven in tabel 2.4.1.

## 2.5. Laplace-transformaties

Een ander middel (naast de methode van scheiden van variabelen) om lineaire partiële differentiaalvergelijkingen in gewone differentiaalvergelijkingen om te zetten, is de techniek van de *Laplace-transformaties* (LT). Dit is een veel gebruikte, enigszins formele techniek om differentiaaloperaties te transformeren tot algebraïsche operaties. Het is niet de bedoeling in dit boek diep op deze transformatietechniek in te gaan, hiervoor wordt verwezen naar de wiskundecolleges. Toegelicht zal hier worden het hanteren van de techniek, hetgeen betrekkelijk eenvoudig is en tot oplossingen leidt van veel voorkomende problemen.

De idee van de Laplace-transformatie is dat aan een functie  $T(x,t)$  door integraal-transformatie een functie  $\bar{T}(x,p)$  wordt toegevoegd op de volgende wijze:

$$\bar{T}(x,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T(x,t) dt. \quad (2.5.1)$$

Als anschouwelijke voorbeelden om de Laplace-transformatietechniek duidelijk te maken nemen we enkele eenvoudige voorbeelden:

1.  $T(t) = c$ , dan:

$$\bar{T}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot c dt = \frac{c \cdot e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = \frac{c}{p}$$

2.  $T(t) = e^{at}$

$$\bar{T}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}$$

3.  $T(t) = \sin(\omega t)$

$$\bar{T}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(\omega t) dt = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) \cdot \frac{-1}{p} de^{-pt} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Voor de diffusievergelijking heeft de Laplace-transformatie de volgende belangrijke eigenschap:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dT}{dt} dt &= T e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} p e^{-pt} T dt = \\ &= -T(x,0) + p \bar{T}(x,p). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Hiermee is duidelijk dat differentiatie tot een algebraïsche operatie (vermenigvuldigen met  $p$ ) wordt teruggebracht. Voor de diffusievergelijking betekent

dit, zoals hieronder in voorbeelden besproken, dat de partiële differentiaalvergelijking overgaat in een gewone differentiaalvergelijking. Deze is meestal eenvoudiger op te lossen. Wel moet men er rekening mee houden dat ook de rand- en beginvoorwaarden getransformeerd worden voor het oplossen van de gewone differentiaalvergelijking.

Van de functie  $\bar{T}(x,p)$  is niet een voor de hand liggende fysische interpretatie te geven. De algebraïsche operaties met  $\bar{T}(x,p)$  zijn eenvoudiger uit te voeren dan de differentiaaloperaties met  $T(x,t)$ , maar de moeilijkheid wordt verschoven zodra  $\bar{T}(x,p)$  moet worden teruggetransformeerd naar het  $x,t$ -vlak. We zullen hier volstaan met het geven van een lijst van veel voorkomende paren  $\bar{T}(x,p)$  en  $T(x,t)$  (zie tabel 2.5.2 aan het eind van dit hoofdstuk); zie ook tabel in Handbook of Chemistry and Physics, Mathematical Tables. Over de techniek van het terugtransformeren zullen we hier niet spreken (zie hiervoor wiskundecolleges).

Enige belangrijke algemene eigenschappen van de Laplace-transformatie zijn in tabel 2.5.1 gegeven. De meeste zijn direct uit de definitieformule (2.5.1) door invullen af te leiden.

Als $f(t)$ gegeven is door:	
1. $F_1(t) + F_2(t)$	dan: $\bar{f}(p) = \bar{F}_1(p) + \bar{F}_2(p)$
2. $c \cdot F_1(t)$	dan: $\bar{f}(p) = c \cdot \bar{F}_1(p)$
3. $F(t,x)$	dan: $\frac{d\bar{F}}{dx} = \frac{d}{dx} \bar{F}(p,x)$
4. $e^{-at} F(t)$	dan: $\bar{f}(p) = \bar{F}(p+a)$
5. $F(t-b)$	dan: $\bar{f}(p) = e^{-bp} \bar{F}(p)$ ( $b > 0$ )
6. $F(at)$	dan: $\bar{f}(p) = \frac{1}{a} \bar{F}\left(\frac{p}{a}\right)$
7. $\int_0^t F(\tau) d\tau$	dan: $\bar{f}(p) = \frac{1}{p} \bar{F}(p)$
8. $\int_0^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau$	dan: $\bar{f}(p) = \bar{F}(p) \cdot \bar{G}(p)$

Tabel 2.5.1. Eigenschappen Laplace-transformatie.

Aan de hand van de hierna te bespreken voorbeelden zal worden aangetoond dat Laplace-transformatie voor de diffusievergelijking als voordelen heeft:

- 1e Er zijn eenvoudige benaderingen voor korte tijden mee te vinden, door reeksontwikkeling naar grote  $p$ -waarden. Scheiden van variabelen geeft juist praktische oplossingen voor grote  $t$ -waarden.
- 2e Er zijn vaak eenvoudige partiële gegevens, bijvoorbeeld over de warmtestroom aan een wand, mee te verkrijgen.

Het nadeel van de LT-methode is dat deze weinig tot het fysisch inzicht bijdraagt.

Een boek dat de oplossingen van de diffusievergelijking volledig met behulp van Laplace-transformaties afleidt is het werk van Tautz, zie bibliografie [A.4], Appendix I.

Als voorbeeld beschouwen we: de niet-stationaire warmte-indringing in een half-oneindig medium dat aanvankelijk op temperatuur nul is en waarvan de wand op  $t \geq 0$  op temperatuur  $T_1$  wordt gehouden.

In plaats van de differentiaalvergelijking voor dit probleem:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.5.3)$$

verkrijgen we door Laplace-transformatie:

$$-T(x,0) + p\bar{T}(x,p) = a \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2}, \quad (2.5.4)$$

waarvan de oplossing is

$$\bar{T}(x,p) = \frac{T(x,0)}{p} + A \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} x\right) + B \exp\left(+\sqrt{\frac{p}{a}} x\right). \quad (2.5.5)$$

De waarden voor A en B volgen uit de getransformeerde randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad t > 0, \quad T(0,t) = T_1 \quad \bar{T}(0,p) &= \frac{T_1}{p} \\ x = \infty, \quad t \geq 0, \quad T(\infty,t) = 0 \quad \bar{T}(\infty,p) &= 0 \end{aligned}$$

Dus:  $A = \frac{T_1}{p}$  en  $B = 0$ , verder is  $T(x,0) = 0$ .

Verder geeft de beginvoorwaarde  $T(x,0) = 0$  dat ook  $\frac{T(x,0)}{p} = 0$ . Dit geeft:

$$\bar{T}(x,p) = \frac{T_1}{p} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} x\right). \quad (2.5.6)$$

Het terugtransformeren is te vinden uit onze tabel en levert op:

$$T(x,t) = T_1 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} = T_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} e^{-z^2} dz. \quad (2.5.7)$$

Voor het beantwoorden van een aantal vragen hoeft men echter niet over deze tabel te beschikken, bijvoorbeeld niet indien men slechts vraagt naar de warmtestroomdichtheid,  $\Phi_w''(t)$ , die in het vlak  $x = 0$  passeert:

$$\Phi_w''(t) = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}. \quad (2.5.8)$$

De getransformeerde warmtestroomdichtheid  $\bar{\Phi}_w''(p)$  is namelijk direct op te schrijven:

$$\bar{\Phi}_w''(p) = -\lambda \left. \frac{d\bar{T}}{dx} \right|_{x=0} = T_1 \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{p}}. \quad (2.5.9)$$

Deze functie is eenvoudig terug te transformeren omdat men zelf kan nagaan dat

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (2.5.10)$$

en dus – hiermee – dat

$$\Phi_w''(t) = T_1 \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}}. \quad (2.5.11)$$

Als tweede voorbeeld beschouwen we de niet-stationaire opwarming van een plaat ( $-L/2 \leq x \leq L/2$ ), die oorspronkelijk op temperatuur nul is en van  $t = 0$  af aan de wanden een temperatuur  $T_1$  krijgt opgedrukt.

Wederom vinden we met  $LT$  vgl. (2.5.5), nu met de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \frac{dT}{dx} &= 0 \\ x = \frac{L}{2} \quad \bar{T} &= \frac{T_1}{p}. \end{aligned}$$

Hieruit volgen de waarden van  $A$  en  $B$  uit vgl. (2.5.5):

$$A = B = \frac{T_1}{p} \left\{ \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} \frac{L}{2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}} \frac{L}{2}\right) \right\}^{-1}. \quad (2.5.12)$$

Dus\*:

$$\begin{aligned} \bar{T}(x,p) &= \frac{T_1}{p} \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} x\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}} x\right)}{\exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} \frac{L}{2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}} \frac{L}{2}\right)} = \\ &= \frac{T_1}{p} \left[ \exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{a}} \left(\frac{L}{2} + x\right)\right\} + \exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{a}} \left(\frac{L}{2} - x\right)\right\} \right] \cdot \\ &\quad \cdot [1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} L\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} 2L\right) \dots]. \quad (2.5.13) \end{aligned}$$

Terugtransformatie (net als in het eerste voorbeeld) levert dan:

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_1} &= \operatorname{erfc} \frac{L/2 + x}{2\sqrt{at}} - \operatorname{erfc} \frac{3L/2 + x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erfc} \frac{5L/2 + x}{2\sqrt{at}} - \dots \\ &+ \operatorname{erfc} \frac{L/2 - x}{2\sqrt{at}} - \operatorname{erfc} \frac{3L/2 - x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erfc} \frac{5L/2 - x}{2\sqrt{at}} - \dots \quad (2.5.14) \end{aligned}$$

De reeksontwikkeling voor dit probleem is net zo nuttig als de reeksontwikkeling die we voor hetzelfde probleem in § 2.2 over eigenwaardeproblemen vonden. De aldaar gevonden oplossing is goed bruikbaar indien  $at/L^2$  groot is; de hier door vgl. (2.5.14) voorgestelde reeksontwikkeling voldoet juist goed indien  $at/L^2$  klein is. Beide vullen elkaar uitstekend aan. Tenslotte is uit (2.5.14) door differentiatie naar  $x$  bij  $x = L/2$  ook de warmtestroomdichtheid door de wand te berekenen. Dit geeft:

$$\Phi_w'' = \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 L^2}{4at}\right) \right\} \cdot T_1. \quad (2.5.15)$$

\*) Er wordt gebruik gemaakt van de volgende regel:  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ , met  $|x| < 1$ .

**Kwantitatief voorbeeld**

We beschouwen hetzelfde geval als het voorbeeld op blz. 24; een 0,05 m dikke wand van beton resp. gipsplaat. Nu echter voor korte tijden ( $< 10$  min).

Voor de temperatuur in het midden geldt met medenemen van de eerste term alleen (twee maal!) dat

$$T = T_1 \cdot 2 \operatorname{erfc} \frac{L}{4\sqrt{at}}$$

Met  $T_1 = 1\text{K}$ ,  $L = 0,05\text{ m}$  en  $a = 4 \cdot 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$  geeft dit:

$$T = 2 \operatorname{erfc} \left( \frac{19,76}{\sqrt{t}} \right)$$

Voor  $t = 240\text{ s}$ :  $T = 2 \operatorname{erfc} 1,28 = 0,142$  (zie tabel 2.6).

De tweede term bevat  $\operatorname{erfc} \frac{3L}{4\sqrt{at}}$  en is  $< 10^{-6}$ . Voor de warmtestroom op dat moment wordt gevonden voor een betonwand:

$$\Phi_w'' = \sqrt{\frac{0,40 \cdot 10^6}{\pi \cdot t}} \left[ 1 - 2 \exp - \left( \frac{L^2}{4 \cdot 4 \cdot 10^{-7} t} \right) \right]$$

Voor  $t = 10\text{ s}$  en  $L = 0,05\text{ m}$ :

$$\Phi_w'' \approx \sqrt{\frac{0,40 \cdot 10^6}{\pi \cdot t}} = 113\text{ W/m}^2.$$

Dit is een aanzienlijke warmtestroom bij een temperatuurstap van 1 K aan de buitenwand, dit kan bijvoorbeeld met luchtkoeling niet worden opgebracht en voor korte tijden zal dan zeker met een andere randvoorwaarde moeten worden gerekend. Met waterkoeling is een dergelijke stapfunctie beter te realiseren.

Als laatste voorbeeld beschouwen we hier: de niet-stationaire opwarming van een half-oneindig medium indien vanaf  $t > 0$  een constante warmtestroom  $\Phi_w''$  aan de wand wordt toegevoerd.

De differentiaalvergelijking en rand- en beginvoorwaarden zijn:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\star)$$

$$-\lambda \frac{dT}{dx} = \Phi_w'', \quad x = 0, \quad t \geq 0$$

$$T = 0, \quad \text{alle } x, \quad t < 0 \quad \text{en voor } x = \infty, \quad t \geq 0.$$

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} e^{-pt} T dt. \quad (\bullet)$$

Met  $(\bullet)$  wordt  $(\star)$ :

$$p\bar{T} = a \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2}$$

$$-\lambda \frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{\Phi_w''}{p}, \quad x = 0 \quad \text{en}$$

$$\bar{T} = 0, \quad x = \infty$$

$$\therefore \bar{T} = A e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x}$$

$$-\lambda \left( \frac{d\bar{T}}{dx} \right)_{x=0} = +\lambda A \sqrt{\frac{p}{a}} = \frac{\Phi_w''}{p} \quad \therefore A = \frac{\sqrt{a} \Phi_w''}{\lambda p \sqrt{p}}$$

$$\text{Dus: } \bar{T} = \frac{\Phi_w'' \sqrt{a}}{\lambda p \sqrt{p}} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x}$$

Met behulp van de tabel van Laplace-transformaties (tabel 2.5.2) volgt dan:

$$T = \frac{\Phi_w''}{\lambda} \left( 2\sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4at}} - x \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right)$$

$$\text{Dus: } T(x=0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Phi_w'' \sqrt{at}}{\lambda}$$

Voor de warmtestroom geldt:

$$\Phi'' = -\lambda \frac{dT}{dx}; \quad \text{hieruit volgt } \bar{\Phi}'' = -\lambda \frac{d\bar{T}}{dx}$$

Invullen van de uitdrukking voor  $\bar{T}$  levert  $\bar{\Phi}'' = \frac{\Phi_w''}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}} x}$ .

$$\text{Dus } \Phi'' = \Phi_w'' \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

### Kwantitatief voorbeeld

We beschouwen een zogenaamde draaiende cilindrische anode van een röntgenbuis met een vermogen van 20 kW. Door focuseren valt hierop een elektronenbundel, de focus is lijnvormig, lengte 10 mm en breedte 1 mm (zie figuur 2.5.1). De dikte van de anode is 2 mm. De energie die op de focus invalt wordt voor praktisch 100% aan het anode-oppervlak in warmte omgezet (het rendement gerekend naar energie in Röntgenstraling is zeer laag). Men kan gebruik maken van een koperen, wolfram of een molybdeen anode. De vraag is hoe groot de piektemperatuur van het oppervlak wordt, indien we aannemen dat de basistemperatuur van de anode 25°C is en dit bij een volgende passage van de focus door koeling van de anode weer op 25°C is teruggebracht. De diameter van de anode is 0,3 m en het toerental (n) 1500 rpm.

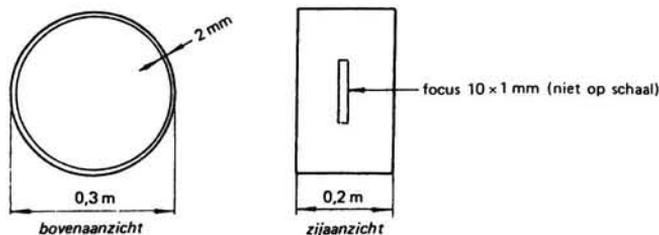


Fig. 2.5.1. Draaiende röntgenanode met focus.

$$\bar{T}(x,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T(x,t) dt$$

$q = \sqrt{\frac{p}{a}}$ ;  $a$  en  $x$  zijn steeds reëel en positief; aan  $\alpha$  en  $h$  zijn geen restricties verbonden.

$\bar{T}(x,p)$	$T(x,t)$
1. $\frac{1}{p}$	1
2. $\frac{1}{p^{\nu+1}}, (\nu > -1)$	$\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}$
3. $\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
4. $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
5. $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
6. $\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t^n, (n \text{ geheel } \geq 0)$
7. $\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$
8. $\sqrt{\pi p}^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
9. $\frac{1}{2} \sqrt{\pi p}^{-\frac{3}{2}}$	$\sqrt{t}$
10. $e^{-qx}$	$\frac{x}{2\sqrt{\pi at^3}} \cdot e^{-x^2/4at}$
11. $\frac{e^{-qx}}{q}$	$\left(\frac{a}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-x^2/4at}$
12. $\frac{e^{-qx}}{p}$	$\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}$
13. $\frac{e^{-qx}}{pq}$	$2 \left(\frac{at}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-x^2/4at} - x \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}$
14. $\frac{e^{-qx}}{q+h}$	$\left(\frac{a}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-x^2/4at} - h \cdot a \cdot e^{hx+ath^2} \cdot \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at} \right\}$
15. $\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$	$a \cdot e^{hx+ath^2} \cdot \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{at}} + h\sqrt{at} \right\}$
16. $\frac{1}{p} \ln p$	$-\ln(Ct), \text{ met } \ln C = \gamma = 0,5772$

Tabel 2.5.2. Enige veel voorkomende paren  $\bar{T}(x,p)$  en  $T(x,t)$  in Laplace-transformaties.



Stofconstanten zijn:

	$\lambda$	$a$
KOPER	335 W/mK	$7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
MOLYBDEEN	103 W/mK	$2,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
WOLFRAAM	112 W/mK	$3,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

We gebruiken de oplossing voor een half-oneindig medium, zoals hierboven besproken. De maximum temperatuur zal aan het oppervlak ( $x = 0$ ) optreden, hier:

$$T(0,t) = T_0 + \frac{\Phi_0''}{\lambda} \cdot 2 \left( \frac{at}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

De warmteflux is op een lijn (// rotatie-as) in het focus aanwezig gedurende  $t = \tau$  sec met:

$$\tau = \frac{\Delta}{n \cdot \pi D^2}$$

met  $\Delta$  breedte van de focus en  $D$  diameter van de anode.

Voor  $\Phi_0''$  hebben we:

$$\Phi_0'' = \frac{20 \cdot 10^{+3}}{10^{-3} \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^9 \text{ W/m}^2.$$

Invullen geeft dan voor

KOPER	$T_{\max} = 392^\circ \text{ C}$
MOLYBDEEN	$T_{\max} = 794^\circ \text{ C}$
WOLFRAAM	$T_{\max} = 834^\circ \text{ C}$

## 2.6. Error- en gammafuncties

### 2.6.1. Error-functie

De *error-functie* (fouten-integraal of foutenfunctie) wordt gegeven door:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-q^2) dq. \quad (2.6.1)$$

Fig. 2.6.1 geeft deze functie, die de integraal is van de Gauss-verdeling die in fig. 2.6.2 is gegeven.

Verder is de complementaire functie gegeven door:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-q^2) dq. \quad (2.6.2)$$

Eigenschappen zijn:

$$\begin{aligned} \text{erf}(0) &= 0 \\ \text{erf}(\infty) &= 1 \\ \text{erf}(x) &= -\text{erf}(-x) \end{aligned}$$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erfc}(x)$$

$$\frac{d \operatorname{erf} x}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$$

Reeksontwikkeling van  $\operatorname{erf}(x)$  voor kleine  $x$  geeft:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots \right], \quad (2.6.3)$$

terwijl voor grote  $x$ :

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\{-x^2\} \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1.3}{4x^5} - \dots \right). \quad (2.6.4)$$

De errorfunctie is getabelleerd in de meeste handboeken te vinden, zie ook tabel 2.6.1.

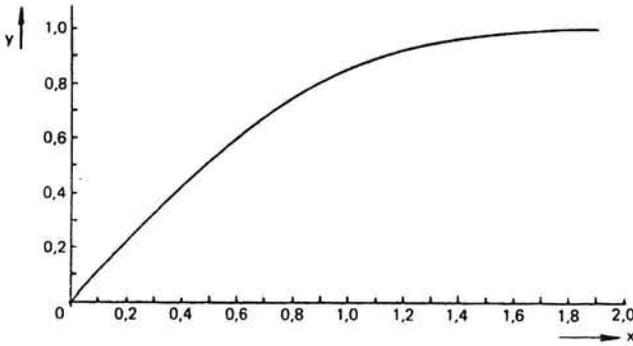


Fig. 2.6.1. Errorfunctie  $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-q^2) dq$ , voor  $x > 0$ .

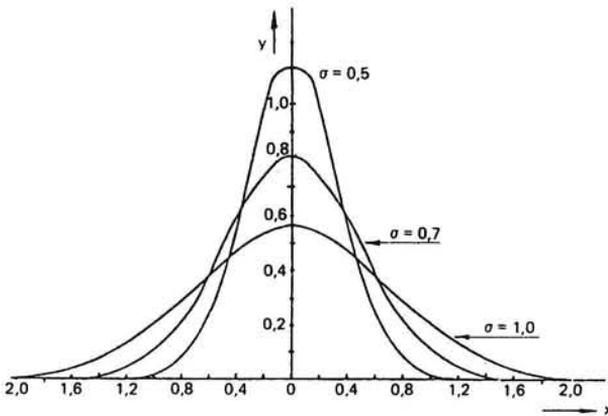


Fig. 2.6.2. Gauss-verdeling  $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-x^2/\sigma^2)$ .

x	erf (x)	x	erf (x)	x	erf (x)
0	0	1,00	0,84270	2,00	0,99532
0,10	0,11246	1,10	0,88021	2,10	0,99702
0,20	0,22270	1,20	0,91031	2,20	0,99814
0,30	0,32863	1,30	0,93401	2,40	0,99931
0,40	0,42839	1,40	0,95229	2,60	0,999764
0,50	0,52050	1,50	0,96611	2,80	0,999925
0,60	0,60386	1,60	0,97635	3,00	0,9999779
0,70	0,67780	1,70	0,98379	3,50	0,9999993
0,80	0,74210	1,80	0,98909		
0,90	0,79691	1,90	0,99279		

Tabel 2.6.1. Errorfunctie.

Behalve de errorfunctie komt ook de  $n$ -maal geïntegreerde foutenfunctie voor:

$$i^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} q \, dq, \quad (2.6.5)$$

waarin  $i^0 \operatorname{erfc} x = \operatorname{erfc} x$  de "nul maal geïntegreerde foutenfunctie" voorstelt.

Door eenmaal partieel integreren kunnen we bewijzen dat

$$i^1 \operatorname{erfc} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x \operatorname{erfc} x. \quad (2.6.6)$$

### 2.6.2. Gammafunctie

Een andere veel voorkomende functie is de *Gammafunctie*. Deze luidt:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (x > 0). \quad (2.6.7)$$

Door partieel integreren leiden we hieruit af:

$$x\Gamma(x) = e^{-t} t^x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \Gamma(x+1). \quad (2.6.8)$$

Herhaling van deze bewerking leert, dat  $\Gamma(x) = (x-1)(x-2) \dots$  is. De Gammafunctie is dus op te vatten als een uitbreiding van de bekende faculteit. Als  $x$  geheel is, komen we uit op  $\Gamma(1) = 1$  en  $\Gamma(n+1) = n!$   
Substitutie van  $t = q^3$  levert:

$$\Gamma(x) = 3 \int_0^\infty e^{-q^3} q^{3x-1} dq. \quad (2.6.9)$$

Voeren we hierin nog  $x = \frac{1}{3}$ , dan krijgen we met behulp van (2.6.8):

$$\int_0^\infty e^{-q^3} dq = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right). \quad (2.6.10)$$

Numerieke waarden voor de gammafuncties zijn te vinden in tabellenboeken. Enige belangrijke waarden zijn:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) &= 2,679 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} = 1,772 \\ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) &= 1,354.\end{aligned}$$

Ook kent men de zogenaamde incomplete gammafunctie:

$$\Gamma_{\text{in}}(x,p) = \int_0^p e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (2.6.11)$$

Meestal gebruikt men als symbool voor de in (2.6.11) gebruikte definitie van de incomplete gammafunctie:

$$\gamma(x,p) \equiv \Gamma_{\text{in}}(x,p),$$

Tevens ziet men gebruikt:

$$\Gamma_{\text{inc}}(x,p) = \int_p^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

hetgeen geeft:

$$\gamma(x,p) = \Gamma(x) - \Gamma_{\text{inc}}(x,p).$$

## 2.7. Dimensie-analyse en samennemen van variabelen

Een beschrijving van een fysisch probleem moet onafhankelijk zijn van onze toevallige keuze van eenheden. Dit leidt tot gebruik van dimensieloze groepen, zie FT I, 1.5. De fysische grootheden die in een gegeven probleem van belang zijn, vindt men uit de fysische formulering van het probleem of door inspectie van de differentiaalvergelijkingen met randvoorwaarden. In het laatste geval vindt men de groepen terug als coëfficiënten in de dimensieloos gemaakte vergelijkingen. Ze geven een verhouding van twee fysische grootheden en kunnen helpen om van te voren te schatten welke grootheden de belangrijkste bijdrage leveren. Een tabel met de belangrijkste dimensieloze groepen is toegevoegd (tabel 2.7.1). Voor geïnteresseerden wordt verder verwezen naar de literatuurlijst.

We kunnen hier als voorbeeld nemen het geval van stationair stoftransport met stroming.

$$(\bar{v} \cdot \nabla)c = D \nabla^2 c. \quad (2.7.1)$$

In het eenvoudige geval van stroming in de x-richting alleen en diffusie uitsluitend in de y-richting hebben we:

$$v \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \quad (2.7.2)$$

Maken we deze vergelijking nu dimensieloos in de variabelen door in te voeren:

Getal van	Symbol	Groep	Verhouding
Archimedes	$N_{Ar}, Ar$	of $\frac{L \cdot g \cdot \Delta \rho}{v^2 \cdot \rho}$	$\frac{\text{opdrijvende kracht}}{\text{traagheidskracht}}$
		of $\frac{L^3 \cdot g \cdot \Delta \rho}{v^2 \cdot \rho}$	$Re \times \frac{\text{opdrijvende kracht}}{\text{visceuze kracht}}$
Biot	$N_{Bi}, Bi$	$\frac{\alpha_u L_i}{\lambda_i}$	$\frac{\text{uitwendig convectief transport}}{\text{inwendig geleidingstransport}}$
Fourier	$N_{FO}, Fo$	$\frac{a \cdot t}{L^2}$	$\frac{\text{verstreken tijd}}{\text{indringtijd}}$
Froude	$N_{FR}, Fr$	$\frac{v^2}{gL}$	$\frac{\text{traagheidskracht}}{\text{zwaartekracht}}$
Galilei	$N_{GA}, Ga$	$\frac{L^3 g}{v^2}$	$Re \times \frac{\text{zwaartekracht}}{\text{visceuze kracht}}$
Graetz	$N_{GZ}, Gz$	$\frac{aL}{vd^2}$	$\frac{\text{radiaal geleidingstransport}}{\text{axiaal convectief transport}}$
Grashoff	$N_{GR}, Gr$	$\frac{L^3 g \beta \Delta T}{\nu^2}$	$Re \times \frac{\text{oprijfkracht}}{\text{visceuze kracht}}$
Lewis	$N_{LE}, Le$	$\frac{a}{D}$	$\frac{\text{warmtediffusie}}{\text{stofdiffusie}}$
Mach	$N_{MA}, Ma$	$\frac{v}{c}$	$\frac{\text{snellheid}}{\text{geluidssnellheid}}$
Nusselt	$N_{NU}, Nu$	$\frac{aL}{\lambda}$	$\frac{\text{totale warmtetransport}}{\text{geleidingstransport}}$
Peclet	$N_{PE}, Pe$	$\frac{vL}{a}$ of $\frac{vL}{D}$	$\frac{\text{convectief transport}}{\text{diffusietransport}}$
Prandtl	$N_{PR}, Pr$	$\frac{\nu}{a}$	$\frac{\text{impulsdiffusie}}{\text{warmtediffusie}}$
Rayleigh	$N_{RA}, Ra$	$\frac{L^3 g \beta \Delta T}{a \cdot \nu}$	Gr.Pr
Reynolds	$N_{RE}, Re$	$\frac{vL}{\nu}$	$\frac{\text{traagheidskracht}}{\text{visceuze kracht}}$
Richardson	$N_{RI}, Ri$	$\frac{g \Delta \rho L}{\rho (\Delta v)^2}$	$\frac{\text{gravitatiekracht}}{\text{traagheidskracht}}$
Schmidt	$N_{SC}, Sc$	$\frac{\nu}{D}$	$\frac{\text{impulsdiffusie}}{\text{stofdiffusie}}$
Sherwood	$N_{SH}, Sh$	$\frac{k_c L}{D}$	$\frac{\text{totaal stoftransport}}{\text{diffusietransport}}$
Weber	$N_{WE}, We$	$\frac{\rho v^2 L}{\sigma}$	$\frac{\text{traagheidskracht}}{\text{oppervlaktespanningkracht}}$

Tabel 2.7.1. Overzicht van de belangrijkste dimensieloze groepen.

$$\left. \begin{aligned} v' &= \frac{v}{v_0} \\ c' &= \frac{c}{c_0} \\ \xi &= \frac{x}{L} \\ \eta &= \frac{y}{L} \end{aligned} \right\} \text{ met } v_0, c_0 \text{ en } L \text{ als gekozen waarden voor een} \\ \text{karakteristieke snelheid, concentratie en lengte.}$$

dan vinden we

$$\left(\frac{v_0 L}{D}\right) \cdot v' \frac{\partial c'}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 c'}{\partial \eta^2} \quad (2.7.3)$$

waarbij  $\frac{v_0 L}{D} = \text{Pécletgetal.}$  (2.7.4)

De dimensieloze  $c'$  zal nu bij gegeven (dimensieloze) randvoorwaarden en gegeven  $v'$  alleen maar van de combinatie  $(v_0 L/D)$  afhangen voor elke  $\xi$  en  $\eta$ . Als de mathematische beschrijving moeilijkheden oplevert, kan dimensie-analyse samen met experimentele resultaten tot goede empirische correlaties leiden. Echter kan dimensie-analyse ook vruchten afwerpen voor het geval dat de differentiaalvergelijkingen wel opstelbaar zijn. Dit kan er namelijk weer toe leiden dat partiële differentiaalvergelijkingen tot gewone getransformeerd kunnen worden, zoals we ook al in vorige hoofdstukken nastreefden. We kunnen namelijk door dimensie-analyse variabelen in groepen samennemen, waardoor het totaal aantal variabelen afneemt. Een voorbeeld is hieronder te vinden. Het samennemen van variabelen voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen is ook los van dimensie-analyse een veel gebruikte methode bij grenslaagproblemen. Men spreekt daarbij over gereduceerde variabelen, die tot zogenaamde affiene oplossingen leiden. Bij het Lévêque-probleem zullen we deze methode gebruiken (zie § 6.2.).

Een voorbeeld van samennemen van variabelen met behulp van dimensie-analyse is het volgende.

We gaan hierbij de diffusievergelijking omzetten in een gewone differentiaalvergelijking. We nemen als voorbeeld de concentratieverdeling door diffusie van een stof B in een homogeen, isotroop, niet-bewegend medium als op  $t = 0$  in een punt ( $r = 0$ ) een hoeveelheid stof  $Q_B$  wordt losgelaten. Aannemende dat het medium oneindig uitgestrekt en de diffusiecoëfficiënt  $D$  constant is, wordt de uitbreiding van B beschreven door:

$$D \left( \frac{\partial^2 c_B}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c_B}{\partial r} \right) = \frac{\partial c_B}{\partial t} \quad (2.7.5)$$

De beginvoorwaarde is

$$t = 0 \quad r \neq 0 \quad c_B = 0. \quad (2.7.6)$$

terwijl gedurende het hele diffusieproces moet gelden:

$$Q_B = \int_0^\infty c_B 4\pi r^2 dr. \quad (2.7.7)$$

Men kan nu bedenken, dat  $c_B$  van een beperkt aantal variabelen afhangt:

$$c_B = f(r, t, Q_B, D). \quad (2.7.8)$$

Omdat er vijf variabelen in het spel zijn, en het aantal gronddimensies hier drie is, moet met twee dimensieloze grootheden de oplossing kunnen worden beschreven. In principe kan daarom (2.7.5) in een gewone differentiaalvergelijking worden omgezet. We kiezen hier als de twee nieuwe dimensieloze variabelen:

$$y = \frac{c_B (Dt)^{\frac{3}{2}}}{Q_B} \quad \text{en} \quad x = \frac{r^2}{Dt}. \quad (2.7.9)$$

Substitutie van  $x$  en  $y$  in (2.7.5) geeft:

$$4x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 4 \frac{dy}{dx} = -x \frac{dy}{dx} - \frac{3}{2} y,$$

of

$$x \frac{d}{dx} \left( 4 \frac{dy}{dx} + y \right) + \frac{3}{2} \left( 4 \frac{dy}{dx} + y \right) = 0. \quad (2.7.10)$$

Een oplossing voor (2.7.10) die tevens aan voorwaarde (2.7.6) voldoet (nl.  $y = 0$  voor  $x = \infty$ ) is:

$$4 \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad \text{of} \quad y = C e^{-\frac{x}{4}}. \quad (2.7.11)$$

Voorwaarde (2.7.7) levert op:

$$\begin{aligned} Q_B &= \int_0^{\infty} \frac{Q_B}{(Dt)^{\frac{3}{2}}} y \cdot 4\pi r^2 dr = 2\pi Q_B C \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{4}} \sqrt{x} dx \\ &= 16\pi Q_B C \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{4}} \sqrt{\frac{x}{4}} d\left(\frac{x}{4}\right) = 8\pi Q_B C \sqrt{\pi}, \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

zodat

$$C = (4\pi)^{-\frac{3}{2}}.$$

De uiteindelijke oplossing voor de puntbron wordt dus:

$$y = (4\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x}{4}} \quad \text{of} \quad c_B = \frac{Q_B}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}. \quad (2.7.13)$$

## 2.8. Benaderende analytische methoden

### 2.8.1. Integraalmethoden

Tot nu toe zijn slechts lineaire gevallen van de diffusievergelijking besproken. De vergelijking kan echter niet lineair zijn als bijvoorbeeld de diffusiecoëfficiënt een functie van de concentratie  $c$  is, terwijl ook gevallen met een niet-lineaire randvoorwaarde (bijvoorbeeld straling  $\phi_w'' = c \cdot T^4$ ) zich kunnen

voordoen. Men kan de vergelijkingen dan uiteraard numeriek oplossen, maar daarnaast zijn er ook analytische benaderingsmethoden, de zgn. integraalmethoden.

In principe benadert men de gezochte oplossing met bijvoorbeeld een polynoom, waarvan de coëfficiënten uit de randvoorwaarden en door integratie van de differentiaalvergelijking bepaald kunnen worden. Deze methode is bijvoorbeeld in de grenslaagbenadering van Von Karman reeds gebruikt.

Literatuur over deze methode is te vinden in "Advances in Heat Transfer", 1 (1964), p. 51 - 122; T. R. Goodman: "Application of integral methods to transient non-linear heat transfer". Zie ook het boek van Eckert en Drake (laatste uitgave!, zie bibliografie op p. I [C. 4]).

Een eenvoudig voorbeeld vinden we bijvoorbeeld bij indringing in een half-oneindig medium:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.8.1)$$

$$\text{met } t = 0 \quad T = T_0 = 0$$

$$t > 0 \quad \phi_w'' = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_w = F(t) \text{ of } G(T). \quad (2.8.2)$$

We nemen nu aan dat er slechts een eindige penetratiediepte  $\delta(t)$  is. Voor  $x > \delta$  is  $T = T_0 = 0$  en alleen voor  $x < \delta$  is er een afwijking van de begin-toestand. Dit betekent tevens dat voor  $x = \delta$ :  $T = 0$  en  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ . Vaak zal men ook nog stellen  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$  voor  $x = \delta$ .

Alle warmte die in het medium in de tijd  $t$  is binnengedrongen, bevindt zich tussen  $0 \leq x < \delta$ . Dit betekent dat de integraal van  $T$  over  $x$  in dit interval de ingedrongen warmte op tijdstip  $t$  geeft.

We vervangen nu de differentiaalvergelijking door een vergelijking in deze integraal.

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial T}{\partial t} dx = a \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = a \left[ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\delta} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_0 \right] \quad (2.8.3)$$

Met  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  voor  $x = \delta$  en toepassing van het theorema van Leibniz voor het differentiëren van een integraal:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx - f(a,t) \frac{da}{dt} + f(b,t) \frac{db}{dt} \quad (2.8.3a)$$

geeft dit:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\delta} \rho c T dx = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_0^{\delta}$$

hetgeen fysisch de warmtebalans over een klein tijdsinterval  $\Delta t$  geeft voor het gebied  $0 < x \leq \delta$ .



De laatste twee termen uit de formule van Leibniz zijn hier verdwenen omdat in het hier besproken voorbeeld  $a(t) = 0$  (en dus  $da/dt = 0$ ) en door de geschikte keuze van het temperatuurnulpunt ( $T_0 = 0$ ) ook  $f(b,t) = 0$ . In sectie 4.3.6 wordt een toepassing van de integraalmethode gegeven waar wel met deze termen rekening moet worden gehouden.

Als randvoorwaarde hebben we overigens nog:

$$\text{voor } x = 0: \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda}F(t) \text{ of } -\frac{1}{\lambda}G(T). \quad (2.8.4)$$

We beschouwen hier alleen het geval dat  $F(t)$  gegeven is. Voor  $T$  voeren we nu een polynoom in  $x$  in, bijvoorbeeld:

$$T = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \quad (2.8.5)$$

Volgens randvoorwaarden:

$$a_1 = -\frac{1}{\lambda}F(t).$$

$$a_0 + a_1 \delta + a_2 \delta^2 = 0$$

$$a_1 + 2a_2 \delta = 0$$

$$\text{Uiteindelijk: } T = \frac{F}{2\lambda\delta}(\delta - x)^2. \quad (2.8.6)$$

Hieruit volgt:

$$\int_0^\delta T \cdot dx = \frac{\delta^2 F}{6\lambda}. \quad (2.8.7)$$

$$\text{En dit geeft voor (2.8.3): } \frac{1}{6\lambda} \cdot \frac{d(\delta^2 F)}{dt} = \frac{a}{\lambda} F. \quad (2.8.9)$$

Dit is een gewone differentiaalvergelijking, waarbij  $F$  een gegeven tijdsfunctie is en  $\delta$  de gezochte tijdsfunctie, met  $\delta(0) = 0$ .

Indien  $F = \text{constant} = q_w$ , dan:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= 6at \quad \text{of} \\ \delta &= \sqrt{6at}. \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

Dit geeft in (2.8.6) voor  $x = 0$

$$T(x = 0) = \frac{q}{2\lambda} \sqrt{6at} = 1,22 \frac{q}{\lambda} \sqrt{at}, \quad (2.8.11)$$

terwijl de exacte theorie geeft:

$$T(x = 0) = \frac{2q}{\lambda} \sqrt{\frac{at}{\pi}} = 1,13 \frac{q}{\lambda} \sqrt{at}. \quad (2.8.12)$$

Dit is op 8% juist t.o.v. de exacte oplossing.

In het bovenstaande is een tweedegraads polynoom gekozen. Men kan ook een derdegraads polynoom nemen, dit zal echter een extra randvoorwaarde voor het bepalen van een vierde coëfficiënt vereisen. Meestal neemt men hiervoor dat voor  $x = \delta$  ook de hogere afgeleiden van  $T(x)$  0 zijn, zodat het verloop naar  $x > \delta$  zo geleidelijk mogelijk is. Doe het zelf voor bovenstaand

voorbeeld, gevonden wordt dan een oplossing die slechts 2% afwijkt van de exacte oplossing.

Ook gevallen met  $G(T)$  gegeven zijn hiermede op te lossen. Tenslotte is ook de randvoorwaarde  $T(x=0) = f(t)$  uit te voeren. Het voorbeeld  $f(t) = c.t$  laat zich eenvoudig doorrekenen (doe zelf met derdegraads polynoom). Ook is de methode goed bruikbaar voor gevallen met een variabele diffusiecoëfficiënt en voor gevallen met brontermen of fase-overgangen.

Een bezwaar van de methode is dat het moeilijk na te gaan is hoe goed de oplossing is. Het blijkt bijvoorbeeld dat soms een hogeregraads polynoom een minder goede benadering geeft. Grotere nauwkeurigheid is met de zogenaamde momentmethode te bereiken. Hierbij voert men niet alleen de integraal  $\theta$  in, met

$$\theta = \int_0^{\delta} T \cdot dx,$$

maar ook de hogere 'momenten' van deze functie:  $M_n = \int_0^{\delta} x^n \cdot T \cdot dx$ .

$n = 0$  geeft  $\theta$ ,  $n = 1$  geeft eerste moment,  $n = 2$  geeft tweede moment. Zie hiervoor verder het artikel van Goodman.

Een belangrijke toepassing van de integraalmethode is voor het geval van de diffusievergelijking met een niet-constante transportcoëfficiënt. We beschouwen hier het geval van:

Niet-stationair stoftransport in een halfoneindig medium met een diffusiecoëfficiënt  $D$  afhankelijk van de concentratie  $c$  van een stof. Oorspronkelijk is er een stofconcentratie 0 en voor  $t > 0$  is er aan de rand plotseling een concentratie  $c_0$ .

De differentiaalvergelijking luidt:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad (2.8.13)$$

en rand- en beginvoorwaarden

$$\begin{aligned} t = 0 \quad x > 0 \quad c = 0 \\ t > 0 \quad x = 0 \quad c = c_0 \\ \quad \quad \quad x = \infty \quad c = 0 \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

en verder:  $D = f(c)$ .

Gebruik van de integraalmethode geeft:

$$t > 0 \quad x = \delta \quad c = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

en stel  $c = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ; dit geeft met randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} c = c_0 \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right)^2 \quad \text{voor} \quad 0 < x < \delta \\ c = 0 \quad \quad \quad \text{voor} \quad x > \delta. \end{aligned}$$

Invullen in de differentiaalvergelijking en integreren naar  $x$  geeft:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} c_0 \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2 dx = \int_0^{\delta} \frac{d}{dx} \left( D \frac{dc}{dx} \right) dx \quad (2.8.15)$$

$$\frac{1}{3} c_0 \frac{d\delta}{dt} = D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{\delta} - D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_0 \quad (2.8.16)$$

$$\frac{1}{3} c_0 \frac{d\delta}{dt} = 0 - D(x=0) \left( -\frac{2c_0}{\delta} \right)$$

$$\delta \cdot d\delta = 6f(c_0) \cdot dt \rightarrow \delta^2 = 12f(c_0) \cdot t.$$

Dit geeft:

$$\delta = \sqrt{12f(c_0) \cdot t} \quad (2.8.17)$$

en

$$\phi_m'' \Big|_{x=0} = -D \cdot \frac{dc}{dx} \Big|_0 = f(c_0) \cdot 2c_0 \sqrt{\frac{1}{12f(c_0)t}} = c_0 \sqrt{\frac{f(c_0)}{3t}} \quad (2.8.18)$$

Indien  $f(c_0) = D_0 + A \cdot c_0$  dan:

$$\phi_m'' \Big|_{x=0} = c_0 \sqrt{\frac{D_0 + A \cdot c_0}{3t}} \quad (2.8.19)$$

$$\text{en als } A = 0: \phi_m'' \Big|_{x=0} = c_0 \sqrt{\frac{D_0}{3t}} = 0,58c_0 \sqrt{\frac{D_0}{t}}, \quad (2.8.20)$$

terwijl penetratietheorie voor geval van constante D geeft:

$$\phi_m'' \Big|_{x=0} = c_0 \sqrt{\frac{D_0}{\pi t}} = 0,565c_0 \sqrt{\frac{D_0}{t}} \quad (2.8.21)$$

De oplossing die met een tweedegraads polynoom hierboven is gevonden bevat alleen  $D(c_0)$ , de waarde van de diffusiecoëfficiënt aan de wand. Men zou graag een 'gemiddelde diffusiecoëfficiënt' in de oplossing hebben. De methode van de momenten kan hier helpen door ook het eerste moment  $\int_0^{\delta} x \cdot c \cdot dx$  te nemen.

Dit geeft voor de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^{\delta} x \cdot c \cdot dx \right) = \int_0^{\delta} x \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) dx = x D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} D \frac{\partial c}{\partial x} dx \quad (2.8.22)$$

dus

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^{\delta} x \cdot c \cdot dx \right) = 0 - \int_{c_0}^0 D dc. \quad (2.8.23)$$

Voor het geval van een lineair verband van D met c geeft dit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^{\delta} x \cdot c \cdot dx \right) = D_0 c_0 + \frac{1}{2} A c_0^2. \quad (2.8.24)$$

We hebben één voorwaarde meer en moeten nu een derdegraads polynoom gebruiken.

$$\text{Dus } \frac{c}{c_0} = a \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2 + b \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^3.$$

$$\frac{c}{c_0} = 1 \quad \text{als } x = 0 \rightarrow a + b = 1 \rightarrow \frac{c}{c_0} = a \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2 + (1 - a) \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^3 \quad (2.8.25)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} x \cdot c \cdot dx &= \int_0^{\delta} x \cdot c_0 \cdot a \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2 dx + \int_0^{\delta} x \cdot c_0 (1 - a) \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^3 dx \\ &= c_0 a \frac{\delta^2}{12} + c_0 (1 - a) \frac{\delta^2}{20}, \end{aligned}$$

$$\text{zodat: } c_0 \left( \frac{a}{12} + (1 - a) \frac{1}{20} \right) \frac{\partial \delta^2}{\partial t} = D_0 c_0 + \frac{1}{2} A c_0^2$$

en dus:

$$\delta^2 = \left( \frac{D_0 + \frac{1}{2} A c_0}{\frac{a}{30} + \frac{1}{20}} \right) t; \quad (2.8.26)$$

verder is:

$$\phi_m''|_{x=0} = -D \frac{\partial c}{\partial x}|_0 = (D_0 + A c_0) \frac{c_0 (3 - a)}{\delta},$$

zodat

$$\phi_m''|_{x=0} = \frac{c_0}{\sqrt{t}} \frac{(D_0 + A c_0)(3 - a)}{\sqrt{\frac{D_0 + \frac{1}{2} A c_0}{\frac{a}{30} + \frac{1}{20}}}} \quad (2.8.27)$$

De constante  $a$  kan gevonden worden door ook het nulde moment te nemen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} c \cdot dx = \int_0^{\delta} \frac{d}{dx} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) dx = -D \frac{dc}{dx} \Big|_0 \quad (2.8.28)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} c \cdot dx &= c_0 a \int_0^{\delta} \left( 1 - 2 \frac{x}{\delta} + \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right) dx + c_0 (1 - a) \int_0^{\delta} \left( 1 - 3 \frac{x}{\delta} + 3 \frac{x^2}{\delta^2} - \frac{x^3}{\delta^3} \right) dx \\ &= c_0 \delta \left( \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

$$-D \frac{dc}{dx} \Big|_0 = (D_0 + A c_0) \frac{c_0}{\delta} (3 - a)$$

$$\delta \frac{\partial}{\partial t} \delta \left( \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \right) = (D_0 + A c_0) (3 - a)$$

$$\left( \frac{1}{24} a + \frac{1}{8} \right) \frac{\partial \delta^2}{\partial t} = (D_0 + A c_0) (3 - a).$$

$$\text{Met (1) geeft dit } \left( \frac{1}{24} a + \frac{1}{8} \right) \left( \frac{D_0 + \frac{1}{2} A c_0}{\frac{a}{30} + \frac{1}{20}} \right) = (D_0 + A c_0) (3 - a)$$

$$\text{of } \frac{D_0 + \frac{1}{2}Ac_0}{D_0 + Ac_0} = \frac{(3-a)\left(\frac{a}{30} + \frac{1}{20}\right)}{\frac{1}{24}a + \frac{1}{8}} = \frac{4(3-a)(2a+3)}{10(a+3)}. \quad (2.8.29)$$

Stel  $\frac{D_0 + \frac{1}{2}Ac_0}{D_0 + Ac_0} = p$ , dan wordt  $a$  gevonden uit de volgende vierkantsvergelijking:

$$8a^2 + (10p - 12)a + (30p - 36) = 0. \quad (2.8.30)$$

zodat

$$a = \frac{12 - 10p}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{(10p - 12)^2 - 32(30p - 36)}. \quad (2.8.31)$$

Voor waarden van  $p$  tussen 1 en 0,5 respectievelijk behorend bij  $A = 0$  en  $A = \infty$  vinden we voor de massastroomdichtheid langs de wand als functie van de tijd in de tabel 2.8.1 aangegeven waarden.

$p$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$a$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{30} + \frac{1}{20}}}$	$\phi_m''(x=0) = \frac{3-a}{\sqrt{\frac{a}{30} + \frac{1}{20}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{c_0}{\sqrt{t}} \sqrt{D_0 + Ac_0}$
1	1	1	$\sqrt{12}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} c_0 \sqrt{\frac{D_0}{t}}$
0,9	1,054	1,265	3,294	$0,555 c_0 \sqrt{\frac{D_0 + Ac_0}{t}}$
0,8	1,118	1,500	3,162	$0,530 c_0 \sqrt{\frac{D_0 + Ac_0}{t}}$
0,7	1,195	1,717	3,054	$0,502 c_0 \sqrt{\frac{D_0 + Ac_0}{t}}$
0,6	1,291	1,921	2,961	$0,470 c_0 \sqrt{\frac{D_0 + Ac_0}{t}}$
0,5	1,414	2,116	2,880	$0,434 c_0 \sqrt{\frac{D_0 + Ac_0}{t}}$

Tabel 2.8.1.  $a$ - en  $\phi_m''$ -waarden.

### 2.8.2. Storingsrekening

Indien analytische oplossingen voor een vereenvoudigd probleem aanwezig zijn, kan men benaderende oplossingen voor een meer gecompliceerd probleem dikwijls vinden met *storingsrekening* (perturbation method).

De eenvoudige oplossing noemt men dan de nulde-orde benadering en de volgende benaderingen vindt men door het toepassen van een (kleine) storingsparameter  $\epsilon$  (perturbation parameter). De afhankelijk variabele wordt ontwikkeld in een reeks van toenemende machten van de storingsparameter  $\epsilon$ , die voor een kleine  $\epsilon$  reeds snel voor lage machten tot de oplossing zal convergeren.

ren. De reeks wordt in de differentiaalvergelijking ingevuld en termen met gelijke machten van  $\epsilon$  worden aan elkaar gelijkgesteld. Op deze wijze wordt een systeem van meestal eenvoudige differentiaalvergelijkingen verkregen. Deze methode wordt uitvoerig besproken in de literatuur (zie D8 en D9, Appendix I). We zullen het geval behandelen van de potentiaalvergelijking in twee dimensies. We beschouwen daartoe de warmtegeleiding in een vierkante strip, met een lineair temperatuurafhankelijke warmtegeleidingscoëfficiënt\*.

Als differentiaalvergelijking hebben we:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \tag{2.8.32}$$

met

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta T) \tag{2.8.33}$$

en als randvoorwaarden nemen we (zie ook fig. 2.8.1):

$$T = 0 \begin{cases} \text{voor } x = 0 \text{ en } x = L \text{ (elke } y) \\ \text{voor } y = 0 \text{ (elke } x) \end{cases} \tag{2.8.34}$$

$$T = T_1 \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \text{ voor } y = L.$$

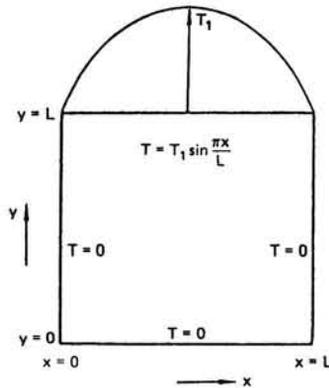


Fig. 2.8.1. Randvoorwaarden van potentiaalprobleem met temperatuurafhankelijke  $\lambda$ .

We voeren in  $\theta = \frac{T}{T_1}$ ,  $X = \frac{\pi x}{L}$  en  $Y = \frac{\pi y}{L}$  en nemen aan dat de afwijking in  $\lambda$  over het gebied 0 tot  $T_1$  klein is en wordt gegeven door

$$\epsilon = \frac{\lambda(T_1) - \lambda(0)}{\lambda(0)} = \beta T_1, \tag{2.8.35}$$

waarbij  $\epsilon$  nu onze storingsparameter is. We krijgen dan:

$$(1 + \epsilon\theta) \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) + \epsilon \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right] = 0, \tag{2.8.36}$$

\*) Zie A. Aziz and J.Y. Benzie in Int. J. Heat Mass Transfer 19 (1976) 271 - 276.

met

$$\left. \begin{aligned} \theta(0, Y) = 0 \text{ en } \theta(\pi, Y) = 0 \\ \theta(X, 0) = 0 \text{ en } \theta(X, \pi) = \sin X \end{aligned} \right\} \quad (2.8.37)$$

In storingsrekening benaderen we nu  $\theta$  met:

$$\theta = \theta_0 + \epsilon \theta_1 + O(\epsilon^2) + \dots \quad (2.8.38)$$

De nulde-orde oplossing vinden we door (2.8.38) in de differentiaalvergelijking in te voeren en alle termen met  $\epsilon^0$  bij elkaar te nemen. Dit geeft:

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial Y^2} = 0 \quad (2.8.39)$$

en dit heeft als oplossing voor de gegeven randvoorwaarden:

$$\theta_0 = \frac{\sinh Y \sin X}{\sinh \pi} \quad (2.8.40)$$

De eerste-orde term vinden we door alle termen met  $\epsilon^1$  samen te nemen, dit geeft:

$$\nabla^2 \theta_1 = - \left[ \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial Y} \right)^2 \right] \quad (2.8.41)$$

Ook deze vergelijking is op te lossen, gegeven nu de randvoorwaarden:

$$\theta_1 = 0 \text{ voor } \begin{cases} X = 0 \text{ en } X = \pi \\ Y = 0 \text{ en } Y = \pi. \end{cases} \quad (2.8.42)$$

$$\theta_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2}{n(n^2 - 4)\pi \sinh^2 \pi} \cdot \left[ (1 - \cosh 2\pi) \frac{\sinh nY}{\sinh n\pi} - (1 - \cos 2Y) \right] \sin nX \quad (2.8.43)$$

en  $\theta = \theta_0 + \epsilon \theta_1$ .

Aziz laat zien dat deze oplossing zeer goed aansluit bij de exacte oplossingen tot waarden van  $|\epsilon| \leq 0,6$ .

### 2.8.3. Methode van de gewogen residuen

Een derde benaderende methode is de methode van gewogen residuen (Engels: Method of Weighted Residuals, afgekort tot MWR).

Bij de MWR wordt de onbekende oplossing ontwikkeld naar een verzameling basisfuncties, de zogenaamde trialfuncties. Deze trialfuncties worden zó gekozen dat zij:

óf aan de randvoorwaarden voldoen (zij voldoen dan in het algemeen niet aan de differentiaalvergelijking),

óf aan de differentiaalvergelijking voldoen (zij voldoen dan in het algemeen niet aan de randvoorwaarden).

Voorts moeten de trialfuncties lineair onafhankelijk zijn en moet de verzameling trialfuncties volledig zijn (een verzameling functies  $\{w_i\}$  is volledig als elke functie ontwikkeld kan worden naar de elementen van deze verzameling:

$f = \sum a_i w_i$ ). Door deze eisen zijn we ervan verzekerd dat de oplossing (mits de verzameling trialfuncties oneindig groot is) ook de exacte oplossing is.

Een benadering voor de exacte oplossing wordt verkregen door niet de hele ontwikkeling te beschouwen, maar een beperkt aantal termen ervan. In de eerste-orde benadering wordt slechts één term bekeken, in de tweede-orde benadering twee termen, enzovoorts.

Heeft men de trialfuncties eenmaal gekozen, dan rest nog het bepalen van de coëfficiënten in de ontwikkeling. Daartoe wordt de oplossing (ook wel trialoplossing geheten) in de differentiaalvergelijking ingevuld. Indien de trialfuncties aan de randvoorwaarden voldoen, zal de trial-oplossing in het algemeen niet aan de differentiaalvergelijking voldoen. We houden een rest (residu) over. Dit residu wordt nu volgens een bepaalde strategie nul gemaakt, waardoor de coëfficiënten in de ontwikkeling bepaald kunnen worden. Eén en ander wordt hieronder toegelicht.

Beschouw de potentiaalvergelijking:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{in het gebied } V(x,y) \quad (2.8.44)$$

met randvoorwaarde  $T = T_0$  op  $S$ , de rand van  $V$ .

$T_0$  kan nog van  $x$  en  $y$  afhangen. Kies nu de verzameling trialfuncties  $\{T_i\}$  zó, dat op de rand geldt  $T_i = 0$ .  $T_i$  kan een functie van  $x$ , van  $y$  of van  $x$  en  $y$  zijn. Kies nu als trial-oplossing:

$$T = T_0 + \sum_{i=1}^N c_i T_i. \quad (2.8.45)$$

Deze voldoet nu voor elke  $c_i$  aan de randvoorwaarden. Indien we dit in (2.8.44) invullen, levert dit het residu:

$$R(c_i, x, y) = \nabla^2 T_0 + \sum_{i=1}^N \nabla^2 c_i T_i. \quad (2.8.46)$$

In het algemeen is dit residu niet gelijk aan nul. Voer nu de weegfuncties  $\{w_j\}$  in en eis:

$$(w_j, R) = 0 \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.8.47)$$

$$\text{waarin: } (w_j, R) = \int_V w_j R dV. \quad (2.8.48)$$

(2.8.47) en (2.8.48) leveren dan:

$$\sum_{i=1}^N B_{ji} c_i = d_j, \quad (2.8.49)$$

$$\text{waarin: } B_{ji} = (w_j, \nabla^2 T_i)$$

$$d_j = -(w_j, \nabla^2 T_0)$$

Met behulp van (2.8.49) kunnen de coëfficiënten  $c_i$  bepaald worden. De resi-



duen worden dus gewogen en gemiddeld over  $V$  nul gemaakt, vandaar de naam: methode van gewogen residuen.

De *weegfuncties*, met behulp waarvan we de residuen gemiddeld nul maken, kunnen op vele manieren gekozen worden. Zonder daar uitgebreid op in te gaan geven we hier twee voorbeelden.

■ *Orderingsmethode*

Kies voor  $w_j$ :

$$w_j = \delta(x - x_j). \quad (2.8.50)$$

Dan geldt:

$$\int_V w_j R dV = R(x_j). \quad (2.8.51)$$

Daar  $R(x_j)$  nul moet zijn, volgen de coëfficiënten met behulp van (2.8.51). In een aantal ( $N$ ) punten van het gebied  $V$  is de oplossing van de differentiaalvergelijking exact (omdat daar de residuen nul zijn). Voor toenemende  $N$  zijn dit steeds meer punten. Voor  $N \rightarrow \infty$  wordt de exacte oplossing bereikt.

■ *Galerkin-methode*

Kies voor  $w_j$ :

$$w_j = T_j. \quad (2.8.52)$$

Voor de weegfuncties worden dus de trialfuncties zelf gekozen. Deze vormen een volledige verzameling functies. Nu is een continue functie nul indien hij orthogonaal is met elke functie van een volledige verzameling functies. Dus het residu is nul als geldt:

$$(w_j, R) = 0. \quad (2.8.53)$$

Met (2.8.53) volgen weer de coëfficiënten in de ontwikkeling.

De Galerkin-methode is in het bijzonder geschikt voor eigenwaardeproblemen.

Bij het gebruik van de MWR is de keuze van een goede probeerfunctie van groot belang. Algemene strategieën zijn hiervoor niet te geven. De keuze van een probeerfunctie berust op fysisch inzicht. Symmetrie-overwegingen en de randvoorwaarden spelen een grote rol.

De MWR is hier slechts zeer summier beschreven. Door de keuzemogelijkheden van weeg- en trialfunctie is de methode zeer uitgebreid. Ook het toepassingsgebied is daardoor zeer groot.

Differentiaalvergelijkingen welke gekoppeld zijn, of met de differentiemethode zeer complex worden, kunnen met de MWR vereenvoudigd worden. Verder zij hier verwezen naar het boek van Finlayson, bibliografie [D10].

Als voorbeeld bespreken we de stationaire temperatuurverdeling in een lange rechthoekige strook met als randvoorwaarde dat drie randen op temperatuur  $T_0$  gehouden worden en de benedenrand op een gegeven temperatuurprofiel  $T_0 + T_0(x - 1)x$  heeft. De strook is  $\frac{1}{2}$ -oneindig in de  $y$ -richting. We vinden als differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0. \quad (2.8.54)$$

met: 
$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0} \quad x = \frac{X}{d}; \quad y = \frac{Y}{d}.$$

zodat

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (2.8.55)$$

met randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0,y) = \theta(1,y) = \theta(x,\infty) = 0 \\ \theta(x,0) = x(1-x) \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.8.56)$$

Het probleem is symmetrisch rond  $x = \frac{1}{2}$ . Neem als trialfunctie:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ x = 0: \theta = 0 \rightarrow a_0 = 0 \\ x = 1: \theta = 0 \rightarrow a_1 = -a_2 \end{aligned} \right\}$$

Een trial-functie die aan randvoorwaarden voldoet, is:

$$x(1-x). \quad (2.8.57)$$

De trial-oplossing luidt dus:

$$\theta_N = \sum_{i=1}^N c_i(y) x^i (1-x)^i. \quad (2.8.58)$$

Voor de eerste orde benadering is  $N = 1$ , dus:

$$\theta_1 = x(1-x) c_1(y). \quad (2.8.59)$$

### 1. Galerkin-methode

(2.8.59) in (2.8.46) levert het residu:

$$R(\theta) = -2c_1 + x(1-x)c_1''. \quad (2.8.60)$$

Wegen met de trialfunctie en orthogonaliseren:

$$\int_0^1 x(1-x)R(\theta)dx = 0. \quad (2.8.61)$$

Dit levert na uitwerken:

$$-2c_1 \frac{1}{6} + c_1'' \frac{1}{30} = 0. \quad (2.8.62)$$

Oplossen:

$$c_1(y) = A \exp(\sqrt{10}y) + B \exp(-\sqrt{10}y). \quad (2.8.63)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1(0) = 1 &\rightarrow A + B = 1 \\ c_1(\infty) = 0 &\rightarrow A = 0 \end{aligned} \right\} B = 1$$

$$c_1 = \exp(-\sqrt{10}y) \quad (2.8.64)$$

en

$$\theta = x(1-x)\exp(-\sqrt{10}y). \quad (2.8.65)$$

## 2. Ordeningsmethode

a.  $x_j = \frac{1}{2}$ .

De weegfunctie is nu  $\delta(x - \frac{1}{2})$ . Daarmee

$$\int_0^1 \delta(x - \frac{1}{2}) R dx = 0. \quad (2.8.66)$$

Dit en (2.8.60) leveren:

$$-2c_1 + \frac{1}{4}c_1'' = 0. \quad (2.8.67)$$

Deze oplossen zoals onder 1 (Galerkin-methode). Resultaat:

$$\theta_1(x,y) = x(1-x)\exp(-\sqrt{8}y). \quad (2.8.68)$$

b.  $x_j = \frac{1}{4}$ .

Op dezelfde wijze als onder a. vinden we nu:

$$\theta_1(x,y) = x(1-x)\exp\left(-\sqrt{\frac{32}{3}}y\right). \quad (2.8.69)$$

$$Nu = -\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} dx.$$

$$\text{Galerkin: } \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\sqrt{10}x(1-x).$$

$$Nu = \sqrt{10} \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{6} \sqrt{10} = 0,527.$$

$$\text{Ordening } x_j = \frac{1}{2}: \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\sqrt{8}x(1-x).$$

$$Nu = \sqrt{8} \int_0^1 x(1-x) dx = 0,471.$$

$$\text{Ordening } x_j = \frac{1}{4}: \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\sqrt{\frac{32}{3}}x(1-x).$$

$$Nu = \sqrt{\frac{32}{3}} \int_0^1 x(1-x) dx = 0,544.$$

De exacte oplossing geeft in dit geval voor Nu:

$$Nu = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = 0,543. \quad (2.8.70)$$

## 3. Numerieke methoden

### 3.1. Inleiding

Voor vele praktische stromingsproblemen met warmteoverdracht is het niet eenvoudig een oplossing te vinden voor de impulsbalans, de massabalans en de energiebalans. Vaak is het niet mogelijk de vergelijkingen zodanig te vereenvoudigen dat een analytische of benaderende oplossing gevonden kan worden door middel van bijvoorbeeld scheiden van variabelen, Laplace transformaties of een integraalmethode. Indien echter alle termen in de driedimensionale transportvergelijkingen van belang zijn en bovendien de vergelijkingen gekoppeld zijn door bijvoorbeeld temperatuurafhankelijke stoffeigenschappen als viscositeit en dichtheid, moet er naar andere manieren gezocht worden om tot de oplossing van een probleem te komen.

Sinds de zeventiger jaren zijn numerieke simulaties van stromings- problemen met warmte- en/of stofoverdracht mogelijk. Hierbij worden met behulp van computers de vergelijkingen die het probleem beschrijven numeriek opgelost.

#### 3.1.1. Numerieke methodiek

Nadat de vergelijkingen, die een probleem beschrijven, zijn geformuleerd worden de randvoorwaarden opgesteld. Vervolgens wordt het domein opgedeeld in een aantal aaneensluitende deelgebiedjes met in elk gebied een roosterpunt. De differentiaalvergelijkingen worden gediscretiseerd. Hierdoor ontstaan uit de oorspronkelijke partiële differentiaalvergelijkingen lineaire algebraïsche vergelijkingen, die eenvoudiger opgelost kunnen worden. Voor elk roosterpunt worden deze opgelost, zodat in een eindig aantal punten de waarden van de onbekende grootheden als snelheidscomponenten  $u$ ,  $v$  en  $w$ , druk  $p$ , temperatuur  $T$  en concentraties  $c_A$ ,  $c_B$  gevonden worden.

Een duidelijk verschil met een analytische oplossingsmethode komt hier naar voren. Waar een analytische methode de onbekenden op elke willekeurige plaats in ruimte en tijd oplost, geeft een numerieke methode een oplossing van de onbekende grootheden in een discreet aantal punten (de roosterpunten) op een discreet aantal tijdstippen.

Er zijn een aantal numerieke methoden bekend, met name de eindige elementenmethode, de eindige differentiemethoden en de eindige volumemethode. Deze methoden verschillen in de keuze van het verloop van de variabelen tussen de roosterpunten en op de wijze waarop men tot de gediscretiseerde vergelijkingen komt. Hierna zal in het kort het principe van de eindige differentie- en de eindige volumemethode besproken worden. Vervolgens wordt er dieper ingegaan op de eindige volumemethode. Voor de eindige elementenmethode zij verwezen naar [D10] en [D17].

### 3.1.2. Het principe van de eindige differentiemethode

Bij het afleiden van de gediscretiseerde vergelijkingen via de eindige differentie methode wordt gebruik gemaakt van Taylor-reeksontwikkelingen. Beschouw een scalaire variabele  $\phi$  als functie van  $x$ . Dan geeft een reeksontwikkeling:

$$\phi(x - \Delta x) = \phi(x) - \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_x + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_x - \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_x \quad (3.1.1)$$

of ook

$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x) + \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_x + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_x + \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_x \quad (3.1.2)$$

Aftrekken van (3.1.1) van (3.1.2) en delen door  $\Delta x$  leidt tot een benadering van de gradiënt van  $\phi(x)$  met *centrale differenties*:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_x = \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.1.3)$$

Hierin geeft  $O$  de orde van de afrondingsfout aan. Optellen van de beide reeksen en delen door  $\Delta x$  geeft een benadering voor de tweede afgeleide van  $\phi$  met centrale differenties:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_x = \frac{\phi(x - \Delta x) - 2\phi(x) + \phi(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.1.4)$$

Invullen van deze benaderingen in de differentiaalvergelijking levert vervolgens een differentievergelijking op. We zien dat de afrondingsfout welke gemaakt wordt in de benaderingen voor de eerste en tweede afgeleiden met centrale differenties van de tweede orde ( $\Delta x$ ) is. Uit de reeksontwikkeling (3.1.1) alleen is een eerste orde benadering te vinden voor de gradiënt:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_x = \frac{\phi(x) - \phi(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.1.5)$$

We noemen dit de benadering van de gradient met *achterwaartse differenties*. Evenzo vinden we een eerste orde benadering van de gradiënt met *voorwaartse differenties* met behulp van (3.1.2):

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_x = \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.1.6)$$

Als voorbeeld van de eindige differentiemethoden doen we hier alleen de Laplace vergelijking (1.5.1) voor een twee-dimensionaal geval

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.1.7)$$

Met  $\Delta x = \Delta y = \Delta$  geeft toepassing van (3.1.4):

$$\frac{\phi(-\Delta, x) - 2\phi(x, y) + \phi(x + \Delta, y)}{\Delta^2} + \frac{\phi(x, y - \Delta) - 2\phi(x, y) + \phi(x, y + \Delta)}{\Delta^2} \quad (3.1.8)$$

en dus:

$$4\phi_P = \phi_W + \phi_E + \phi_N + \phi_S \quad (3.1.9)$$

met  $\phi_P = \phi(x_P, y_P)$  voor het punt  $x_P, y_P$  en  $\phi_W, \phi_E, \phi_N$  en  $\phi_S$  waarden van  $\phi$  voor de vier in het  $x, y$ -vlak omliggende punten ten 'westen', 'oosten', 'noorden' en 'zuiden' van dit punt. De p.d.v. wordt een set van eenvoudige lineaire betrekkingen tussen waarden in discrete punten met direct omliggende punten.

Bij het gebruik van numerieke methoden dienen we ons er rekenschap van te geven dat we met benaderingen werken en dus fouten introduceren. Deze fouten kunnen we beperken door kleinere stappen  $\Delta x$  te nemen. We zeggen dat een numerieke oplossing de juiste is indien de oplossing van de differentievergelijkingen voor  $\Delta x \rightarrow 0$  gelijk wordt aan de werkelijke oplossing van de differentiaalvergelijking. In de wiskunde van de numerieke analyse wordt veel aandacht gegeven aan de volgende voorwaarden voor het benaderen van de juiste oplossing met eindige differenties: nauwkeurigheid, consistentie stabiliteit en convergentie. Enkele aspecten hiervan komen hier aan de orde. Verder zij verwezen naar de literatuur: Ames [D2], Richtmeijer [D4], Mitchel [D5] en Fox [D3].

### 3.1.3. Het principe van de eindige volume methode

Bij deze methode wordt voor de differentiaalvergelijkingen, zoals gegeven in paragraaf 3.1.3, uitgegaan van de als balansvergelijkingen (voor massa, impuls, energie en stof) geformuleerde uitdrukkingen. Voor het oplossen gaat men als volgt te werk:

1. Verdeel het domein in deelgebieden (roostercellen) en definieer in elke roostercel een roosterpunt.
2. Integreer de vergelijkingen (pdv's) over elke roostercel.
3. Gebruik profielen voor de variabelen tussen de roosterpunten om de integralen te kunnen oplossen.

Allereerst dient vastgesteld te worden wat de aard van het rooster moet zijn dat gebruikt zal gaan worden. Er zijn nogal wat mogelijkheden: cartesisch, cilindrisch, sferisch, orthogonaal of niet orthogonaal (boundary fitted) in twee of drie dimensies. Enkele twee-dimensionale roosters zijn gegeven in figuur 3.1.1. De roosterlijnen of roostervlakken hoeven niet altijd op gelijke afstanden van elkaar te liggen. In gebieden waar grote gradiënten in de variabelen voorkomen is een grotere dichtheid van roosterlijnen of -vlakken aan te bevelen dan in gebieden waar

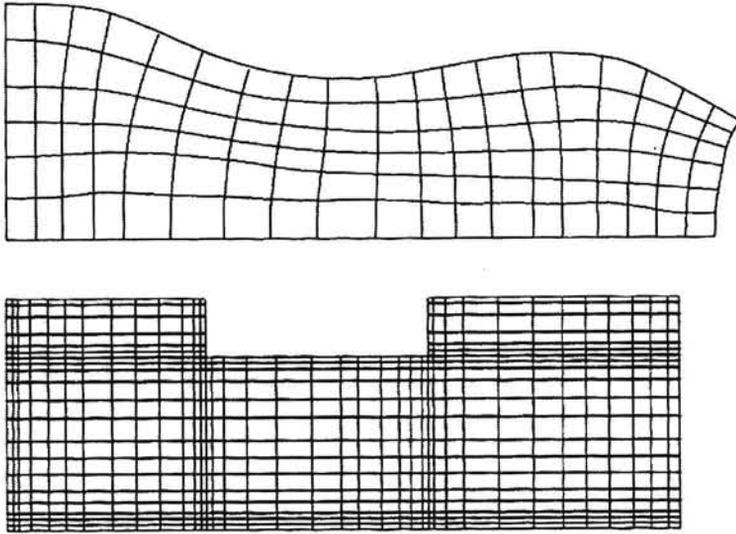


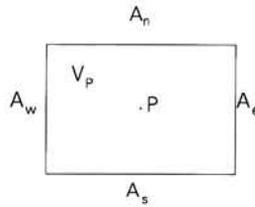
Fig. 3.1.1. Een niet uniform cartesisch en een orthogonaal rooster.

de variabelen weinig variëren. In elke roostercel ligt een roosterpunt, zodanig dat midden tussen twee roosterpunten een roosterlijn of -vlak ligt. Bij niet lineaire roosters liggen de roosterpunten hierdoor niet in het midden van de roostercellen. In de roosterpunten worden de scalaire variabelen, zoals temperatuur en concentratie, bepaald. Ook de stofeigenschappen ( $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $D$ ), vaak temperatuurafhankelijk, worden in de roosterpunten bepaald. Zoals we in 3.3.6 kunnen zien worden er voor de snelheidscomponenten roosterpunten gedefinieerd die midden tussen de roosterpunten voor scalaire variabelen, dus op de roosterlijnen, liggen. We zullen ons hier beperken tot twee-dimensionale gevallen en definiëren het roosterpunt  $P$  met de coördinaten  $x_i$ ,  $y_j$ . Dit punt  $P$  is omgeven door vier naburige punten  $W, E, S$  en  $N$  (west, east, south en north) met de coördinaten  $W(x_{i-1}, y_j)$ ,  $E(x_{i+1}, y_j)$ ,  $S(x_i, y_{j-1})$  en  $N(x_i, y_{j+1})$ . De snelheidsvector heeft component  $u$  in de  $x$ -richting en component  $v$  in de  $y$ -richting.

Ook indien we te maken hebben met een twee-dimensionaal geval praten we over het volume van een roostercel en over oppervlakken tussen de roostercellen. Immers de derde dimensie is wel aanwezig. De gradiënten van alle scalaire variabelen in deze richting zijn echter nul, tevens is de snelheidscomponent in de derde dimensie gelijk aan nul. We veronderstellen dat in de derde richting het rekendomein een eenheidslengte van 1 meter heeft. De oppervlakken welke de roostercel om punt  $P$  omgeven zijn  $A_w, A_e, A_s$  en  $A_n$ . De roostercel om punt  $P$  heeft het volume  $V$  (zie fig. 3.1.2).

Aan de hand van drie gevallen worden de volgende twee stappen, nadat het rooster gedefinieerd is, verduidelijkt.

Het oplossen van de continuïteitsvergelijking (massabalans):

Fig. 3.1.2 roostercel met deelvolume  $V$ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}(\rho \bar{v}) = 0 \quad (3.1.10)$$

Integreren over een roostercel met volume  $V_P$ , als getekend in fig. 3.1.2, geeft voor de eerste term:

$$\int_{V_P} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \frac{\partial M}{\partial t} \quad (3.1.11)$$

waarin  $M$  de totale massa van het volume is.

De tweede term geeft met het divergentie theorema van Gauss:

$$\int_V (\bar{\nabla} \rho \bar{v}) = \int_A (\rho \bar{v}) \cdot \bar{n} dA, \quad (3.1.12)$$

waarin  $A$  het oppervlak is dat het volume  $V_P$  omsluit en  $\bar{n}$  de normaalvector is op dit oppervlak. Is  $u$  de snelheidscomponent in de richting west-oost en  $v$  de snelheidscomponent in de richting zuid-noord dan is deze oppervlakte-integraal gelijk aan:

$$\int_{A_e} (\rho u)_e dA_e + \int_{A_n} (\rho v)_n dA_n + \int_{A_w} (\rho u)_w dA_w + \int_{A_s} (\rho v)_s dA_s. \quad (3.1.13)$$

De aldus gediscrètiseerde continuïteitsvergelijking luidt dan (met  $\dot{m}$  voor de massastroom):

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \dot{m}_e + \dot{m}_n - \dot{m}_w - \dot{m}_s = 0. \quad (3.1.14)$$

Rest nu nog geschikte uitdrukkingen te vinden voor de massastromen door de oppervlakken. Bovenstaande uitdrukking laat zien dat toepassen van de eindige volume methode op de continuïteitsvergelijking resulteert in het opstellen van massabalansen over alle roostercellen.

Het toepassen van de eindige volume methode op een convectie-diffusie vergelijking resulteert evenzo in een balansvergelijking. Beschouwen we de convectie-diffusie vergelijking voor de scalaire grootheid  $\phi$  met een diffusiviteit  $\Gamma$ :



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \bar{\nabla}(\rho\bar{u}\phi) = \bar{\nabla}(\Gamma\bar{\nabla}\phi). \quad (3.1.15)$$

Deze vergelijking wijkt af van de convectie-diffusie vergelijkingen voor temperatuur (1.3.1) en concentratie (1.3.2). Met behulp van de continuïteitsvergelijking zijn ze in elkaar om te schrijven. Ga dit na. Integreer over een roostercel als in figuur 3.1.2 geeft voor de achtereenvolgende termen:

$$\text{term 1: } \int_{V_p} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_p} \rho\phi dV = \frac{\partial}{\partial t}(M\phi). \quad (3.1.16)$$

$$\text{term 2: } \int_{V_p} \bar{\nabla}(\rho\bar{u}\phi) dV = \int_{V_p} (\rho\bar{u}\phi) \cdot \bar{n} dA = \quad (3.1.17)$$

$$\int(\rho u\phi) dA_e + \int(\rho v\phi) dA_n - \int(\rho u\phi) dA_w - \int(\rho v\phi) dA_s = \quad (3.1.18)$$

$$\dot{m}_e\phi_e + \dot{m}_n\phi_n - \dot{m}_w\phi_w - \dot{m}_s\phi_s. \quad (3.1.19)$$

$$\text{term 3: } \int_{V_p} \bar{\nabla}(\rho\bar{\nabla}\phi) dV = \int_{V_p} (\Gamma\bar{\nabla}\phi) \cdot \bar{n} dA = \quad (3.1.20)$$

$$\Gamma_e A_e \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_e + \Gamma_n A_n \frac{\partial\phi}{\partial y} \Big|_n - \Gamma_w A_w \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_w - \Gamma_s A_s \frac{\partial\phi}{\partial y} \Big|_s \quad (3.1.21)$$

Opsomming van de termen 1, 2 en 3 resulteert tenslotte in de volgende balansvergelijking:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(M\phi) + \dot{m}_e\phi_e + \dot{m}_n\phi_n - \dot{m}_w\phi_w - \dot{m}_s\phi_s = \\ & \Gamma_e A_e \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_e + \Gamma_n A_n \frac{\partial\phi}{\partial y} \Big|_n - \Gamma_w A_w \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_w - \Gamma_s A_s \frac{\partial\phi}{\partial y} \Big|_s \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Rest nu tevens nog het vinden van benaderingen voor de waarden van  $\Gamma$  en de gradiënten van  $\phi$  ter plaatse van de oppervlakken. Bovenstaande uitdrukking laat zien, dat integreren van de convectie-diffusie vergelijking over een roostercel leidt tot een balansvergelijking over dit volume.

Een laatste geval als voorbeeld is de stationaire geleiding in een metalen staaf. Veronderstel dat er geen temperatuurverschillen zijn in de doorsnede van de staaf, zodat er slechts temperatuurverschillen in de lengterichting bestaan, en we te maken hebben met een één-dimensionaal geleidingsprobleem. De warmteoverdracht van of naar de staaf wordt dan in de vorm van een bronterm in de energievergelijking opgenomen, welke dan als volgt luidt:

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S''' = 0. \quad (3.1.23)$$

Nu worden de drie stappen uitgevoerd:

1. De staaf wordt opgedeeld in roostercellen.

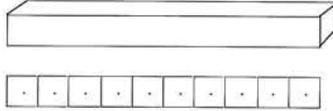


Fig. 3.1.3. Een staaf opgedeeld in drie roostercellen.

We voeren de volgende nomenclatuur in voor drie naast elkaar liggende roostercellen:

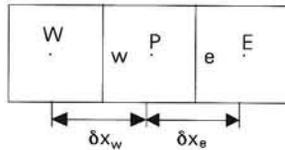


Fig. 3.1.4. Drie aangrenzende roostercellen.

Het roosterpunt P is omgeven door de roosterpunten W (west) en E (east). De scheidingsvlakken tussen de volumina zijn de vlakken w en e. De afstanden tussen de roosterpunten zijn tevens aangegeven in de figuur.

2. Integratie van de differentiaalvergelijking over het volume rond punt P geeft:

$$\int_V \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_V S''' dV = 0. \quad (3.1.24)$$

Indien de doorsnede van de staaf een oppervlak ter grootte A heeft wordt dit:

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) A dx + S_p = 0. \quad (3.1.25)$$

Uitgedrukt in grootheden ter plaatse van de oppervlakken w en e:

$$\lambda_e A_e \frac{dT}{dx} e - \lambda_w A_w \frac{dT}{dx} w + S_p = 0. \quad (3.1.26)$$

Ook dit is weer een balansvergelijking en wel voor energie (warmte).

3. Indien tussen de roosterpunten een lineair temperatuurprofiel verondersteld wordt, resulteert dit in de volgende uitdrukking:

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} + S_P = 0. \quad (3.1.27)$$

Samen met soortgelijke uitdrukkingen voor de andere roosterpunten en de randvoorwaarden voor de uiteinden van de staaf geeft dit een oplosbaar stelsel vergelijkingen. De temperatuur in het punt P kan uitgedrukt worden in de temperaturen van de naburige punten:

$$\left( \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} + \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \right) T_P = \left( \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \right) T_E + \left( \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \right) T_W + S_P = 0. \quad (3.1.28)$$

Of meer algemeen, waarbij de coëfficiënten afhankelijk zijn van de profielbenadering tussen de roosterpunten:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_P. \quad (3.1.29)$$

In het algemeen zal voor een stationair twee-dimensionaal geleidingsprobleem een soortgelijke vergelijking voor de temperatuur in punt P gevonden worden:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b. \quad (3.1.30)$$

Het stelsel vergelijkingen van het type (3.1.30) voor alle roostercellen rond elk punt  $P(x_i, y_j)$  in het domein kan op verschillende manieren worden opgelost, hierover later meer.

### 3.1.4. Vier basisregels

Zoals uit het voorgaande is gebleken sluit de eindige volumemethode goed aan bij de fysische realiteit. Er worden namelijk steeds fysische balanswetten opgesteld. Om nog beter bij deze fysische realiteit aan te sluiten zijn er vier basisregels opgesteld, waaraan de opgestelde gediscrètiseerde vergelijkingen moeten voldoen. Deze basisregels zijn:

Regel 1.

**De fluxen aan beide zijden van een oppervlak tussen twee aangrenzende volumina dienen gelijk aan elkaar te zijn, of:**

$$q_e^i = q_w^{i+1} \quad (3.1.31)$$

Deze regel lijkt triviaal. Echter in het geval van kwadratische profielen tussen de roosterpunten is niet zonder meer aan deze regel voldaan. Ook met lineaire profielen voor de variabele  $\phi$  kan tegen deze regel gezondigd worden, indien de diffusiviteit konstant verondersteld wordt over een volume en er dus een stapsgewijze verandering van de diffusiviteit ter plaatse van het oppervlak tussen de volumina is. De diffusiefluxen zouden dan gedefinieerd kunnen worden als:

$$\Gamma_i (T_{i+1} - T_i) / \delta x \quad \text{en} \quad \Gamma_{i+1} (T_{i+1} - T_i) / \delta x, \quad (3.1.32)$$

hetgeen niet dezelfde expressie is. Het niet voldoen aan deze regel zou betekenen dat niet voldaan kan worden aan de behoudswet over het gehele rekendomein.

Regel 2.

**Alle coëfficiënten in de gediscretiseerde vergelijkingen dienen positief te zijn.**

De invloed van de nabuurpunten is een gevolg van convectie en diffusieprocessen. Dus kan een toename van de waarde in een aangrenzend roosterpunt alleen maar een toename van de waarde in het beschouwde punt opleveren en geen afname. Dit betekent dat alle coëfficiënten in vergelijking (3.1.30) hetzelfde teken moeten hebben. We hebben de vrijheid om dit teken zelf te kiezen, en kiezen voor positieve coëfficiënten. Indien de coëfficiënten niet allen positief zijn, betekent dit dat er fysisch onrealistische oplossingen gevonden zullen worden. Mathematisch betekent het dat er instabiliteiten zullen optreden indien gedurende het iteratieproces, waarmee het stelsel vergelijkingen opgelost wordt, negatieve coëfficiënten optreden.

Regel 3.

**De gelineariseerde bronterm dient een negatieve richtingscoëfficiënt te hebben.**

Teneinde een lineair stelsel vergelijkingen te krijgen zal in de regel de bronterm gelineariseerd worden tot:

$$S = S_C + S_P \phi_P. \quad (3.1.33)$$

In dit geval dient de waarde van  $S_P$  negatief te zijn anders zou de coëfficiënt van  $\phi$  negatief kunnen worden en dat zou in strijd zijn met regel 2. Ook nu moet er weer voor gezorgd worden dat bij het lineariseren aan deze regel voldaan wordt om instabiliteiten tijdens de oplossingsprocedure te voorkomen.

Regel 4.

**De coëfficiënt  $a_p$  moet de som zijn van de coëfficiënten van de buurpunten indien de brontermen nul zijn.** Indien de  $dv$  slechts afgeleiden van de afhankelijke variabele bevat en de functie  $T$  is een oplossing van de  $dv$ , dan is de functie  $T + c$  (met  $c$  een constante) ook een oplossing van de  $dv$ . Dit moet ook tot uiting komen in de gediscretiseerde vergelijking, waaruit regel 4 volgt. Deze regel geldt in alle gevallen voor stromingen met warmte- of stofoverdracht, indien de brontermen gelijk zijn aan 0.

### 3.2. Stationair warmtetransport door diffusie

De differentiaalvergelijking voor het twee-dimensionale stationaire warmtetransport door diffusie luidt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) + S''' = 0, \quad (3.2.1)$$

waarbij  $S'''$  een gegeven warmtebron of put is. De balansvergelijking, na integreren over een rooster cel met roosterpunt P grenzend aan de cellen met roosterpunten E, S, W en N, leidt analoog aan (3.1.30) tot:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + S_C \quad (3.2.2)$$

met

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w}, \quad a_E = \dots \text{enz.} \quad (3.2.3)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + S_P \quad (3.2.4)$$

$$\int S''' dV. = S_C + S_P T_P \quad (3.2.5)$$

Voor een uniform rooster en constante  $\lambda$  wordt (3.2.2):

$$4T_P = T_W + T_E + T_S + T_N + \frac{S_C}{a_E} \quad (3.2.6)$$

zonder bronterm is dit dezelfde vergelijking als (3.1.9) die met eindige differenties was gevonden.

### 3.2.1. Niet homogene materialen

De warmtegeleidingscoëfficiënt kan een functie van de plaats zijn. Bijvoorbeeld voor een geleidingsprobleem door materialen met verschillende  $\lambda$ . Indien een vlak tussen twee rooster cellen samenvalt met de overgang van twee materialen is niet op voorhand duidelijk hoe groot  $\lambda$  op dit vlak is. In eerste instantie bestaat de neiging voor de  $\lambda$  op een tussenvlak het gemiddelde te nemen van de  $\lambda$ 's op de nabijgelegen roosterpunten. Hierbij kan rekening worden gehouden met de eventuele niet-uniformiteit van het rooster. We zullen laten zien dat deze eenvoudige benadering van de warmtegeleidingscoëfficiënt op een tussenvlak niet juist is. Het gaat er om een juiste voorspelling van de warmtestroom door het tussenvlak te vinden. Rekening houdend met materialen met verschillende  $\lambda$  rond het tussenvlak e tussen de punten P en E kan de warmtestroom tussen E en P benaderd worden met:

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{(x_e - x_P)/\lambda_P + (x_E - x_e)/\lambda_E} \quad (3.2.7)$$

Deze warmtestroom dient gelijk te zijn aan de warmtestroom gebaseerd op de warmtegeleidingscoëfficiënt op het tussenvlak:

$$q_e = \frac{\lambda_e (T_P - T_E)}{x_E - x_P}, \quad (3.2.8)$$

waaruit volgt dat, indien het vlak e precies midden tussen de punten P en E ligt dat,

$\lambda_e$  benaderd dient te worden met het harmonisch gemiddelde van  $\lambda_E$  en  $\lambda_P$  :

$$\lambda_e = \frac{2\lambda_P\lambda_E}{\lambda_E + \lambda_P} \quad (3.2.9)$$

Ga zelf na dat dit ook goede benaderingen oplevert, indien een van de materialen een perfecte isolator is, of indien er een groot verschil in warmtegeleidingscoëfficiënt tussen beide materialen is.

### 3.2.2. Randvoorwaarden

Bij het oplossen van partiele differentiaalvergelijkingen met behulp van de eindige volume methode moeten ook de randvoorwaarden in eindige volume vorm worden gegoten. Implementatie van de randvoorwaarden hangt af van de ligging van de volumes en roosterpunten ten opzichte van de rand. Er zullen twee verschillende opties behandeld worden. In beide gevallen wordt er een warmtebalans over het eerste volume langs de rand opgesteld.

#### 1. Extra roosterpunt op de rand.

Aangezien de eerste roostercel aan dient te sluiten aan de rand krijgen we daar een afwijkende ligging van de roosterpunten, zoals in figuur 3.2.1 is aangegeven.

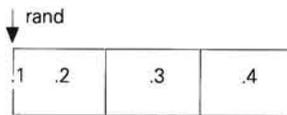


Fig. 3.2.1. Eerste roosterpunt op de rand.

a) Randvoorwaarde van de eerste soort,  $T = T_0$ .

Een warmtebalans over de eerste roostercel aan de rand (volume (2)) levert op:

$$\left(\frac{\lambda A}{\delta x}\right)_e^{(2)}(T_3 - T_2) - \left(\frac{\lambda A}{\delta x/2}\right)_w^{(2)}(T_2 - T_0) + S^{(2)} = 0. \quad (3.2.10)$$

Verondersteld is hierbij dat het temperatuurprofiel tussen de punten (1) en (2) lineair is. Voeren we de nieuwe variabele  $D = \lambda A / \delta x$  in, dan geeft herschikking van bovenstaande balansvergelijking de differentievergelijking voor de temperatuur in het roosterpunt (2):

$$(2D_w^{(2)} + D_e^{(2)}) T_2 = D_e^{(2)} T_3 + 2D_w^{(2)} T_0 + S^{(2)}. \quad (3.2.11)$$

We zien dat deze differentievergelijking afwijkt van de algemene vergelijking (3.1.28) voor de interne roostercellen.

b) Randvoorwaarde van de tweede soort:  $q = q_0$ .

Een warmtebalans over de eerste roostercel geeft:

$$q_0 + S^{(2)} + D_e^{(2)}(T_3 - T_2) = 0. \quad (3.2.12)$$

Dit resulteert voor de vergelijking voor roosterpunt (2) in:

$$D_e^{(2)}T_2 = DD_e^{(2)}T_3 + q_0 + S^{(2)} \quad (3.2.13)$$

c) Randvoorwaarde van de derde soort:  $q = \alpha(T_1 - T_0)$ .

Een warmtebalans over de eerste roosterpunt resulteert voor de vergelijking voor het roosterpunt (2) in:

$$D_e^{(2)}T_2 = DD_e^{(2)}T_3 + \alpha T_1 - \alpha T_0 + S^{(2)}. \quad (3.2.14)$$

Nu hebben we een extra vergelijking voor de temperatuur in het roosterpunt (1) nodig. Deze vinden we uit:

$$\alpha(T_1 - T_0) = \left(\frac{\lambda}{\delta x/2}\right)_e^{(2)}(T_2 - T_1). \quad (3.2.15)$$

De vergelijking voor het roosterpunt (1) wordt dus:

$$T_1 = \left(\frac{2\lambda}{\alpha \cdot \delta x + 2\lambda}\right)_e^{(2)}T_2 + \left(\frac{\alpha \cdot \delta x}{\alpha \cdot \delta x + 2\lambda}\right)_e^{(2)}T_0 \quad (3.2.16)$$

In het algemeen is er een extra vergelijking nodig voor punt (1) terwijl de vergelijking voor punt (2) afwijkt van de algemene vergelijking voor de interne roosterzellen.

### 2. Eerste roosterpunt niet op de wand (virtuele roosterpunt).

Een elegantere manier om de randvoorwaarden te implementeren gaat via het invoeren van een virtueel roosterpunt. Het rekenrooster loopt nu in feite wwn punt over de rand heen, waarbij het volume om dit roosterpunt in zijn geheel buiten het rekendomein valt, zoals in onderstaande figuur is verduidelijkt. Hierbij wordt aangenomen dat het medium buiten het rekenrooster hetzelfde is als dat van het rekendomein.

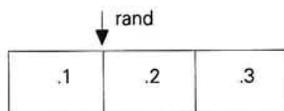


Fig. 3.2.2. Virtuele roosterpunt (1) buiten het rekendomein.

Voor het roosterpunt (2) wordt nu de algemene vergelijking (3.2.2) voor een intern roosterpunt gebruikt. Vervolgens wordt voor het virtuele roosterpunt een vergelijking gevonden, zoanig dat deze vergelijking samen met die voor roosterpunt (2) voldoet aan de randvoorwaarde.

a) Randvoorwaarde van de eerste soort,  $T = T_0$ .

Een vergelijking voor de temperatuur in het virtuele punt wordt gevonden met behulp van twee uitdrukkingen van de warmtestroom door de wand:

$$q = \left(\frac{\lambda A}{\delta x}\right)_e^{(2)}(T_2 - T_1) - \left(\frac{\lambda A}{\delta x/2}\right)_w^{(2)}(T_2 - T_0). \quad (3.2.17)$$

Dit leidt tot:

$$T_1 = -T_2 + 2T_0. \quad (3.2.18)$$

De vergelijking voor het punt (2) is:

$$(D_e^{(2)} + D_w^{(2)}) T_2 = D_e^{(2)} T_3 + 2D_w^{(2)} T_1 + S^{(2)}. \quad (3.2.19)$$

Invullen van (3.2.18) in (3.2.19) leidt tot hetzelfde resultaat als (3.2.11).

b) Randvoorwaarde van de tweede soort,  $q = q_0$ .

De temperatuur in het virtuele roosterpunt moet nu voldoen aan:

$$q_0 = \left(\frac{\lambda A}{\delta x}\right)_e^{(1)}(T_2 - T_1) = -D_e^{(1)}(T_2 - T_1). \quad (3.2.20)$$

Hiermee wordt de vergelijking voor het virtuele punt:

$$D_e^{(1)} T_1 = D_e^{(1)} T_2 + q_0. \quad (3.2.21)$$

Ook nu levert invulling van (3.2.21) in (3.2.19) hetzelfde resultaat als (3.2.13)

c) Randvoorwaarde van de derde soort,  $q = \alpha(T_w - T_0)$ .

De temperatuur in het virtuele roosterpunt moet nu voldoen aan:

$$\left(\frac{\lambda}{\delta x}\right)_e^{(2)}(T_2 - T_1) = \alpha(T_w - T_0) \left(\frac{2\lambda}{\delta x}\right)_e^{(2)}(T_2 - T_w) \quad (3.2.22)$$

Na eliminatie van  $T_w$  wordt de volgende uitdrukking voor de temperatuur in het virtuele roosterpunt verkregen:

$$\left(\alpha + \left(\frac{2\lambda}{\delta x}\right)_e^{(2)}\right) T_1 = \left(-\alpha + \left(\frac{2\lambda}{\delta x}\right)_e^{(2)}\right) T_2 + 2\alpha T_0 \quad (3.2.23)$$

### 3.2.3. Algemene implementatie van de randvoorwaarden

Het gebruik van een virtuele roostercel staat een algemene implementatie van de randvoorwaarden toe. De algemene vergelijking voor een 2D diffusie probleem is voor het roosterpunt (i,j):



$$A_P^{i,j} \phi_{i,j} = A_E^{i,j} \phi_{i+1,j} + A_W^{i,j} \phi_{i-1,j} + A_N^{i,j} \phi_{i,j+1} + A_S^{i,j} \phi_{i,j-1} + S_C^{i,j}. \quad (3.2.24)$$

Indien het volume (i,j) grenst aan een oostrand, en het punt (i+1,j) het virtuele volume buiten het rekendomein is, dan luidt de algemene vergelijking voor dit virtuele roosterpunt (i+1,j):

$$A_P^{i+1,j} \phi_{i+1,j} = A_W^{i+1,j} \phi_{i,j} + S_P^{i+1,j}. \quad (3.2.25)$$

Invullen van  $\phi_{i+1,j}$  uit (3.2.25) in de vergelijking voor  $\phi_{i,j}$  (3.2.24) levert een identieke vergelijking als (3.2.24) op met andere coëfficiënten. De nieuwe coëfficiënten uitgedrukt in de oude worden dan:

$$A_E^{i,j} = 0 \quad (3.2.26)$$

$$A_P^{i,j} = A_P^{i,j} - \frac{A_E^{i,j} A_W^{i+1,j}}{A_P^{i+1,j}} \quad (3.2.27)$$

$$b_P^{i,j} = b_P^{i,j} - \frac{A_E^{i,j} b_W^{i+1,j}}{A_P^{i+1,j}}. \quad (3.2.28)$$

Door dit opnemen van de randvoorwaarde in de algemene vergelijking voor de roostercel grenzend aan de rand hebben alle punten dezelfde vergelijking gekregen. Slechts de waarden van de coëfficiënten variëren van punt tot punt.

### 3.2.4. Niet-lineaire randvoorwaarde of bronterm

De eindige volume methode levert ons steeds een stelsel gekoppelde lineaire vergelijkingen op, welke met een geschikte numerieke methode opgelost kunnen worden. Niet-lineariteiten zouden roet in het eten kunnen gooien. Brontermen of randvoorwaarden kunnen niet lineair van vorm zijn. De coëfficiënten van de gediscretiseerde vergelijkingen zijn dan een functie van de temperatuur. Na linearisatie van de bronterm of randvoorwaarde kan er toch een stelsel lineaire vergelijkingen verkregen worden, dat via een iteratieproces opgelost kan worden. Een voorbeeld van een niet lineariteit geeft de randvoorwaarde welke de warmteoverdracht door straling naar de omgeving beschrijft:  $q_{\text{wand}} \approx T^4$ . In het stelsel lineaire vergelijkingen kan dit benaderd worden met:

$$q_{\text{wand}} \approx T_0^3 T_n, \quad (3.2.29)$$

waarin  $T_0$  de temperatuur aan de wand van de laatste iteratie is en  $T_n$  de temperatuur van de nieuwe iteratie. Een betere vorm van lineariseren geeft de Newton-Raphson linearisatie met voor dit geval als resultaat:

$$q_{\text{wand}} \approx 4T_0^3 T_n - 3T_0^3. \quad (3.2.30)$$

Bij het lineariseren van brontermen moeten we wel op onze hoede zijn om negatieve coëfficiënten te voorkomen.

### 3.3. Instationaire diffusie

Beschouwen we nu de 1D instationaire warmtevergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \text{met } \Gamma = \lambda c_p. \quad (3.3.1)$$

Integreren van deze differentiaalvergelijking over een tijdsinterval van  $t$  tot  $t + \Delta t$  en over een volume dat zich uitstrekt van vlak  $w$  tot vlak  $e$  geeft:

$$\int_w^e (\rho AT)^{t+\Delta t} - (\rho AT)^t dx = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt. \quad (3.3.2)$$

Bovenstaande vergelijking is een balans tussen de energie geaccumuleerd in het eindige volume gedurende de tijd  $\Delta t$  en de netto warmtestroom door geleiding welke gedurende de tijd  $\Delta t$  door de oppervlakken van het volume is gegaan. Indien de warmtestroom door geleiding  $Q$  constant wordt verondersteld gedurende het tijdsinterval  $\Delta t$ , en  $\rho AT$  constant wordt verondersteld over het volume tussen de oppervlakken  $e$  en  $w$  ( $\rho AT = M_P T_P$ ) leidt bovenstaande integratie tot:

$$(M_P T_P)^{n+1} - (M_P T_P)^n = Q_w \Delta t - Q_e \Delta t, \quad (3.3.3)$$

waarin  $n$  het tijdstip  $t = n\Delta t$  en  $n+1$  het tijdstip  $t = (n+1)\Delta t$  voorstelt. De warmtestromen  $Q_w$  en  $Q_e$  kunnen genomen worden op het nieuwe tijdstip  $n+1$ :

$$Q_w^{n+1} = -D_w (\Gamma_P^{n+1} - T_W^{n+1}), \quad \text{met } D_w = \frac{\Gamma A}{\delta x_w} \quad (3.3.4)$$

op het oude tijdstip  $n$ :

$$Q_w^n = -D_w (\Gamma_P^n - T_W^n), \quad (3.3.5)$$

of op een willekeurig ander tijdstip  $t = (n+f)\Delta t$  hier tussen in:

$$Q_w = (1-f)Q_w^n + fQ_w^{n+1} \quad \text{met } 0 \leq f \leq 1. \quad (3.3.6)$$

Substitueren we deze laatste uitdrukking voor de warmtestromen in vergelijking (3.3.3) dan vinden we de volgende gediscretiseerde vergelijking voor het volume met roosterpunt  $P$ :

$$\frac{M_P T_P^{n+1} - M_P T_P^n}{\Delta t} = (1-f) \{-D_w(T_P^n - T_W^n) + D_e(T_E^n - T_P^n)\} + f\{-D_w(T_P^{n+1} - T_W^{n+1}) + D_e(T_E^{n+1} - T_P^{n+1})\} \quad (3.3.7)$$

De temperatuur in het punt P op het nieuwe tijdstip kan nu uitgedrukt worden in temperaturen in P en omliggende roosterpunten op het nieuwe en op het oude tijdstip:

$$\left\{ \frac{M_P}{\Delta t} + f(D_w + D_e) \right\} T_P^{n+1} = f D_w T_W^{n+1} + f D_e T_E^{n+1} + (1-f)_w f D_w T_W^n + (1-f) D_e T_E^n + \left\{ \frac{M_P}{\Delta t} - (1-f)(D_w + D_e) \right\} T_P^n \quad (3.3.8)$$

De verschillende keuzen voor  $f$  leiden tot de volgende methoden:

$f = 0$ : Expliciet schema.

We zien dat voor dit geval de waarde van de temperatuur in het punt P op het nieuwe tijdstip expliciet uitgedrukt wordt in waarden van de bekende temperaturen op het oude tijdstip in de punten P, E en W. Dit is het meest eenvoudige schema, dat zonder iteratieproces eenvoudig is op te lossen. Dit schema hoeft echter niet altijd stabiel te zijn. De coëfficiënt van  $T_P^n$  kan namelijk negatief worden hetgeen zal leiden tot instabiliteiten. Door het beperken van de grootte van de tijdstap kan stabiliteit gewaarborgd worden.

$f = \frac{1}{2}$ : Het schema van Crank-Nicolson.

Dit is een impliciet schema waarin de temperatuur in het punt P op het nieuwe tijdstip uitgedrukt wordt in temperaturen van de omliggende punten op het oude tijdstip en op het nieuwe tijdstip. Dit schema is weliswaar ingewikkelder dan het expliciete schema, echter kan bewezen worden dat dit schema onvoorwaardelijk stabiel is. Oscillaties tijdens het oplossingsproces zijn echter niet uitgesloten en kunnen vermeden worden door weer een juiste keuze van de tijdstap te maken.

$f = 1$ : Het volledig impliciete schema.

Voor dit schema zijn de coëfficiënten altijd positief en is stabiliteit gegarandeerd. De tijdstap is niet aan een maximum gebonden. Het oplossen van een impliciet stelsel vergt per tijdstap meer rekenwerk dan voor een expliciet stelsel. Men moet de  $N$  vergelijkingen door matrix-inversie dan wel via een iteratieve procedure oplossen. Een voordeel is dat men minder tijdstappen kan nemen wegens het ontbreken van een stabiliteitseis aan  $\Delta t$ . Het totale rekenwerk kan daarom toch binnen redelijke grenzen blijven.

### 3.3.1. Stabiliteit van de expliciete methode

De voorwaarde dat alle coëfficiënten in de differentievergelijking positief moeten zijn leidt zoals uit vergelijking (3.3.8) kan worden ingezien voor het volledig expliciete schema tot de volgende eis:

$$\frac{M_P}{\Delta t} \geq D_e + D_w, \text{ of } \frac{1}{\Delta t} \geq \frac{1}{\Delta t_e} + \frac{1}{\Delta t_w}, \text{ met } \Delta t = \frac{M_P}{D} = \frac{\Delta x^2}{a}. \quad (3.3.9)$$

indien  $D_e = D_w$  luidt deze stabiliteitseis:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2a} \text{ of } a\Delta t/\Delta x^2 = Fo(\Delta) \leq \frac{1}{2}. \quad (3.1.10)$$

Er kan dus kennelijk een maximale tijdstap gedefinieerd worden bij een bepaalde roosterafstand  $\Delta x$ . Dit heeft een fysische betekenis. Beschouw de warmtepenetratie van punt W naar punt P (op een afstand  $\Delta x$  van dit punt W) na de tijd  $\Delta t$ . Indien de temperatuur in punt W een verandering ondergaat van  $T_w^n$  naar  $T_w^{n+1}$  geeft dit volgens de penetratietheorie:

$$\frac{T - T_w^{n+1}}{T_w^n - T_w^{n+1}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x - x_w}{2\sqrt{at}}\right) \quad (3.3.11)$$

In het punt P zal op het tijdstip  $t = \Delta x^2/2a$  de temperatuur gelijk zijn aan:

$$\frac{T_P - T_w^{n+1}}{T_w^n - T_w^{n+1}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx 0,32. \quad (3.3.12)$$

In deze tijd zou de temperatuur in het punt P dus al aanzienlijk zijn toegenomen door de verandering van temperatuur in punt W. Echter bij de berekening van de nieuwe temperatuur in dit punt P wordt geen rekening gehouden met de nieuwe temperatuur in dit buurpunt. Duidelijk is dat, indien de tijdstap te groot is, dit tot onrealistische resultaten aanleiding geeft.

Voor de randpunten zal men in het algemeen een afwijkende eis voor stabiliteit vinden. Om tot de meest stringente eis voor stabiliteit te komen dient men de randpunten mede in de beschouwing te betrekken.

### 3.3.2. Nauwkeurigheid

De nauwkeurigheid van de expliciete en impliciete methoden kan beschouwd worden voor het geval van constante stoffeigenschappen en een equidistant rooster met afstanden tussen de roosterpunten ter grootte  $\Delta x$ . Dan reduceert de algemene differentievergelijking (3.3.7) tot:

$$T_P^{n+1} - T_P^n = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \left\{ (1-f)(T_E^n - 2T_P^n + T_W^n) + f(T_E^{n+1} - 2T_P^{n+1} + T_W^{n+1}) \right\} \quad (3.3.13)$$

Deze differentievergelijking krijgen we ook met de eindige differentiemethode.

De volledig expliciete methode ( $f = 0$ ) verkrijgen we via voorwaartse differentie in de tijd en centrale differentie in de plaats. De nauwkeurigheid van de expliciete methode is dus  $O(\Delta t + \Delta x)$ . (zie § 3.1.2) Met behulp van Taylor-reeksen kan voor dit specifieke geval afgeleid worden dat voor  $a\Delta t/\Delta x^2 = Fo(\Delta) = 1/6$  de afbreekfout  $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$  is. Zowel de fout door  $\Delta t$  als door  $\Delta x$  wordt hiermee kleiner. Voor korte tijden zijn de gradiënten meestal groot. Het heeft daarom zin om bij kleine  $t$  en grote gradiënten in tijd en plaats met  $Fo(D) = 1/6$  te werken en voor grotere  $t$  over te gaan op  $Fo(\Delta) = 1/2$ , hetgeen nog net voldoet aan de stabiliteitseis.

De volledig impliciete methode ( $f = 1$ ) verkrijgen we via achterwaartse differentie in de tijd en centrale differentie in de plaats. Hiervan is de nauwkeurigheid eveneens  $O(\Delta t + \Delta x^2)$ .

De impliciete methode van Crank-Nicolson ( $f = 1/2$ ) kan verkregen worden via centrale differenties zowel in tijd als plaats voor het tijdstip halverwege tussen  $n$  en  $n+1$ . Dit schema is dus nauwkeuriger dan het volledig expliciete en volledig impliciete schema en heeft een afrondingsfout van de orde  $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ . Evenals bij de expliciete methode is er een nauwkeuriger methode, waarbij fouten in  $\Delta x^2$  wegvallen, te verkrijgen via manipulaties met Taylor-reeksen. Indien

$$Fo(\Delta) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2-4f} \right) \quad (3.3.14)$$

is de afbreekfout  $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ . Hierbij wordt tevens aan de stabiliteitseis bij  $f < 0.5$  voldaan. Bovenstaand geval wordt nog gunstiger indien ook nog geldt dat:

$$Fo(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{20}} \quad (3.3.15)$$

met een afbreekfout  $O(\Delta t^2 + \Delta x^6)$ . Aangezien deze methoden in de fout in  $\Delta t$  geen verbetering geven ten opzichte van Crank-Nicolson worden ze toch weinig gebruikt. Zij het dat met een groter aantal tijdstappen en een zelfde aantal  $x$ -stappen een grotere nauwkeurigheid wordt gehaald.

### 3.3.3. Andere discretisatieschema's voor de instationaire diffusievergelijking

a) Methode van Baker en Oliphant.

Door de eerste afgeleide in de tijd te schatten uit de drie waarden voor  $T$  op de tijdstippen  $n+1$ ,  $n$  en  $n-1$  krijgt men samen met centrale differenties voor de plaats

op het tijdstip  $n+1$  een altijd stabiele impliciete methode. Het schema van Baker en Oliphant geeft als differentievergelijking:

$$\frac{3T_P^{n+1} - 4T_P^n + T_P^{n-1}}{2\Delta t} = a \frac{T_E^{n+1} - 2T_P^{n+1} + T_W^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (3.3.16)$$

Ten opzichte van Crank-Nicolson is er het voordeel dat deze methode minder oscillaties geeft. Echter moet men nu tevens de waarden op twee tijdstippen eerder opzoeken voor de berekening.

### Expliciete methoden van Du Fort-Franklin en Saul'ev.

Er zijn twee expliciete schema's die niet de stabiliteitseis  $Fo(\Delta) < 0,5$  hebben. Zij kunnen dus met grotere tijdstappen werken, echter is er nu een consistentie eis. Beide methoden vereisen dat  $\Delta t/\Delta x \rightarrow 0$  als  $\Delta x$  en  $\Delta t \rightarrow 0$  voor consistentie. Indien hiervoor gezorgd kan worden zijn het beide zeer efficiënte schema's. Het schema van Du Fort-Franklin neemt twee stappen voorwaarts in de tijd en is centraal in de plaats en heeft als differentievergelijking:

$$\frac{T_P^{n+1} - T_P^{n-1}}{2\Delta t} = a \frac{(T_E^n - T_P^{n-1}) - (T_P^{n+1} - T_E^n)}{\Delta x^2} \quad (3.3.17)$$

In wezen worden de warmtestromen door de oost en west wand van een controle volume geëvalueerd met behulp van temperaturen op verschillende tijdstippen. Een differentieschema heet consistent als bij substitutie van de oplossing van de differentievergelijkingen in de differentiaalvergelijking een fout overblijft die bij netverfijning naar nul gaat. Dat consistentie van bijvoorbeeld het schema van Crank-Nicolson gewaarborgd is blijkt, indien we de uitdrukking voor de afbreekfout, gevonden met behulp van Taylor-reeksontwikkeling, aan een nadere beschouwing onderwerpen. Deze afbreekfout is:

$$e = \frac{1}{12} a \Delta x^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{1}{6} \Delta t^2 \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \frac{3}{2} a \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \dots \quad (3.3.18)$$

Dit geeft  $e \rightarrow 0$  als  $\Delta x$  en  $\Delta t \rightarrow 0$ . Maar voor Du Fort-Frankel vinden we:

$$e = \frac{1}{6} \Delta t^2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} - \frac{1}{12} a \Delta x^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{a \Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \dots \quad (3.3.19)$$

Indien nu voor  $\Delta t \rightarrow 0$  en  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t/\Delta x$  bijvoorbeeld naar de constante waarde 1 gaat, dan lossen we in feite niet meer de oorspronkelijke vergelijking  $T_t - a T_{xx} = 0$  op, maar  $T_t - a T_{xx} = a T_{tt}$ , hetgeen niet consistent is. De laatste term in (3.3.19) is om te werken met:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \quad (3.3.20)$$

Voor de tweede en derde term samen krijgen we dan:

$$a \left( -\frac{1}{12} \Delta x^2 + \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \quad (3.3.21)$$

We hebben aan de eis voor consistentie voldaan indien

$$\frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} = n^2 \frac{\Delta x^2}{12} \quad (3.3.22)$$

waarbij  $n$  een geheel getal is. We mogen  $n$  niet te groot nemen, maar voor  $n = 3,5$  (overeenkomend met  $Fo(\Delta) \approx 1$ ) kan toch nog redelijk gerekend worden.

Het schema van Saul'ev bestaat uit twee stappen:

$$T_P^{n+1} - T_P^n = \left( \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_E^n - T_P^n - T_P^{n+1} + T_W^{n+1}) \quad (3.3.23)$$

$$T_P^{n+2} - T_P^{n+1} = \left( \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \right) (T_E^{n+2} - T_P^{n+2} - T_P^{n+1} + T_W^{n+1}) \quad (3.3.24)$$

Ook deze methode kent een beperking voor de verhouding van  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

In tabel 3.3.1 zijn al de hiervoor besproken rekenschema's nog eens op een rijtje gezet.

### 3.4. Oplossingsmethoden voor de stationaire diffusievergelijking

De stationaire 1D diffusievergelijking

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.4.1)$$

heeft in het algemeen de volgende gediscretiseerde vorm:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W. \quad (3.4.2)$$

Voor de een-dimensionale situatie zijn de  $n$  vergelijkingen voor de  $n$  roosterpunten eenvoudig direkt op te lossen. In een 3 dimensionale situatie met meerdere gekoppelde differentiaalvergelijkingen is het verkrijgen van een direkte oplossing echter een zeer moeizame weg en ligt een iteratieve oplossingsmethode meer voor de hand. Aan de hand van het 1 dimensionale geval zal een aantal iteratieve oplossingsmethoden besproken worden. Vervolgens wordt een lijn voor lijn iteratieve methode behandeld.

### 3.4.1. Puntsgewijze iteratieve oplosmethoden

#### A. Jacobi

De oplossingsmethode van Jacobi is een expliciete methode. De temperaturen op het nieuwe iteratieniveau  $n+1$  voor alle roosterpunten worden uitgedrukt in temperaturen op het oude iteratieniveau  $n$ :

$$a_P T_P^{n+1} = a_E T_E^n + a_W T_W^n \quad (3.4.3)$$

Op deze manier kunnen voor alle roosterpunten eerst de coëfficiënten bepaald worden, waarna voor alle roosterpunten een nieuwe temperatuur berekend kan worden. Deze methode wordt vaak toegepast in combinatie met onderrelaxatie. Indien  $T_P^n$  de temperatuur is berekend met vergelijking (3.4.3) wordt voor de nieuwe temperatuur in punt P de volgende lineaire combinatie genomen:

$$T_P^{n+1} = (1 - \omega) T_P^n + \omega \hat{T}_P^{n+1}, \quad \text{met } \omega \leq 1. \quad (3.4.4)$$

Op deze manier wordt de verandering in een iteratie ingeperkt om divergentie te voorkomen. Het gebruik van onderrelaxatie komt er op neer dat niet vergelijking (3.4.3) wordt opgelost, maar

$$\frac{a_P}{\omega} T_P^{n+1} = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) a_P T_P^n + a_E T_E^n + a_W T_W^n. \quad (3.4.5)$$

#### B. Gauss Seidel

Indien tijdens het iteratieproces niet eerst alle coëfficiënten bepaald worden, maar gebeurt dit ook punt voor punt, dan wordt voor een van de punten W of E (afhankelijk van de volgorde waarop de punten bezocht worden) de waarde van de temperatuur op het nieuwe iteratie niveau meegenomen. Indien de punten van west naar oost bezocht worden betekent dit:

$$a_P T_P^{n+1} = a_E T_E^n + a_W T_W^{n+1}. \quad (3.4.6)$$

Dit is de oplosmethode van Gauss Seidel.

#### C. Successive Over Relaxation (SOR)

De methode van Gauss Seidel kan versneld tot convergentie geleid worden, indien gebruik gemaakt wordt van overrelaxatie. Daar vergelijking (3.4.6) niet meer volledig expliciet is, blijft stabiliteit gegarandeerd ook voor waarden van  $\omega$  groter dan 1. Het gebruik van overrelaxatie in combinatie met Gauss Seidel staat bekend als de methode van Successive Over-Relaxation (SOR):

$$\frac{a_P}{\omega} T_P^{n+1} = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) a_P T_P^n + a_E T_E^n + a_W T_W^{n+1}. \quad (3.4.7)$$

De waarde van  $\omega$  moet nu voldoen aan  $0 < \omega \leq 2$  om stabiliteit te garanderen.



Nr.	Schema	Typering	Rekenmoduul
1.0		Algemeen zespunts $0 < \theta < 1$	$u_i^{j+1} = u_i^j + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) [\theta \delta^2(u_i^{j+1}) + (1 - \theta)\delta^2(u_i^j)]$
1.1.a.		Expliciet $\theta = 0$	$u_i^{j+1} = u_i^j + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) \delta^2(u_i^j)$
1.1.b.		Binder-Schmidt $\theta = 0, \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$	$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j)$
1.1.c.		Expliciet nauwkeurig $\theta = 0, \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{6}$	$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{1}{6}\delta^2(u_i^j)$
1.2.		Liebmann $\theta = 1$	$u_i^{j+1} = u_i^j + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) \delta^2(u_i^{j+1})$
1.3.		Crank-Nicolson $\theta = \frac{1}{2}$	$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) [\delta^2(u_i^{j+1}) + \delta^2(u_i^j)]$
1.4.		Impliciet nauwkeurig $\theta = \frac{1}{2} - \frac{\Delta x^2}{12a\Delta t}$	$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{1}{2}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) [\delta^2(u_i^{j+1}) + \delta^2(u_i^j)] + \frac{1}{12} [\delta^2(u_i^{j+1}) - \delta^2(u_i^j)]$
1.5.		Impliciet nauwkeurigst $\theta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{20}}{12} \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} = -\frac{1}{\sqrt{20}}$	$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{1}{\sqrt{80}} [\delta^2(u_i^{j+1}) + \delta^2(u_i^j)] + \frac{1}{12} [\delta^2(u_i^{j+1}) - \delta^2(u_i^j)]$
2.0		Baker-Oliphant	$u_i^{j+1} = \frac{4}{3}u_i^j - \frac{1}{3}u_i^{j-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) \delta^2(u_i^{j+1})$
2.1		Gemodificeerde Baker Nauwkeurig	$(1 + \frac{\Delta x^2}{12a\Delta t})u_i^{j+1} = \frac{4}{3}u_i^j - (\frac{1}{3} + \frac{\Delta x^2}{12a\Delta t})u_i^{j-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) \delta^2(u_i^{j+1})$
3.0		Du Fort-Frankel	$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} + \left(\frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\right) [u_{i+1}^j - u_i^{j+1} - u_i^{j-1} + u_{i-1}^j]$
4.0		Saul'ev	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>u_i^{j+1} = u_i^j + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) (u_{i+1}^j - u_i^j - u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1})</math></li> <li><math>u_i^{j+2} = u_i^{j+1} + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) (u_{i+1}^{j+2} - u_i^{j+2} - u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1})</math></li> </ol> <p>Fo(<math>\Delta</math>) = 1: 1. <math>u_i^{j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j)</math> 2. <math>u_i^{j+2} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^{j+2} + u_{i-1}^{j+1})</math></p>

Tabel 3.3.1. Rekenschema's diffusievergelijking.

Nr.	Expl./Impl.	Stabiel indien:	Afbreekfout en consistentie
1.0	Impliciet als $\theta \neq 0$	$0 < \theta < \frac{1}{2}$ als $\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2 - 4\theta}$ $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ altijd	$O(\Delta t + \Delta x^2)$ , consistent
1.1.a.	Expliciet	$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$	$O(\Delta t + \Delta x^2)$ , consistent
1.1.b	Expliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t + \Delta x^2)$ , consistent
1.1.c	Expliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ , consistent
1.2	Impliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t + \Delta x^2)$ , consistent
1.3	Impliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ , consistent
1.4	Impliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ , consistent
1.5	Impliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t^2 + \Delta x^6)$ , consistent
2.0	Impliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ , consistent
2.1	Impliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ , consistent
3.0	Expliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2})$ , consistent als $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$ : $\Delta t \rightarrow 0$ , $\Delta x \rightarrow 0$
4.0	Expliciet	altijd stabiel	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2})$ , consistent als $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$ : $\Delta t \rightarrow 0$ , $\Delta x \rightarrow 0$ .

Tabel 3.3.1. Rekenschema's diffusievergelijking (vervolg).

*Details over puntsgewijze oplosmethoden*

Aan de hand van zeer eenvoudige voorbeelden zal nu wat meer inzicht gegeven worden in de puntsgewijze oplosmethoden van Jacobi en Gauss-Seidel. Een stationair een-dimensionaal geleidingsprobleem leidt tot de volgende differentievergelijking:

$$(D_e + D_w)T_P = D_e T_E + D_w T_W. \quad (3.4.8)$$

Met constante stoffeigenschappen en een equidistant rooster is  $D_e = D_w$  en vinden we dat de temperatuur in het punt P gelijk is aan:

$$T_P = \frac{1}{2}T_E + \frac{1}{2}T_W. \quad (3.4.9)$$

Definiëren we een rooster van 5 punten met de randvoorwaarden gegeven op de punten 1 en 5:  $T_1 = 100$  en  $T_5 = 0$ , dan kunnen we met een iteratieve methode de temperaturen op de tussenliggende punten berekenen. De oplosmethoden van Jacobi en Gauss-Seidel leiden dan tot de volgende resultaten:

*A. Jacobi*

De oplosmethode volgens Jacobi leidt voor het  $m^e$  iteratieniveau tot:

$$T_P^m = \frac{1}{2}T_E^{m-1} + \frac{1}{2}T_W^{m-1}. \quad (3.4.10)$$

Voor een drietal iteraties geeft dit het resultaat zoals weergegeven in onderstaande tabel.

	begin veld	1e iteratie	2e iteratie	3e iteratie	$\infty$ iteratie
1	100	100	100	100	100
2	0	50	50	62,5	75
3	0	0	25	25	50
4	0	0	0	12,5	25
5	0	0	0	0	0

Tabel 3.4.1. Drie iteraties met Jacobi

*B. Gauss Seidel*

Gauss-Seidel levert voor het  $m^e$  iteratieniveau beginnend bij het punt 1:

$$T_P^m = \frac{1}{2}T_E^{m-1} + \frac{1}{2}T_W^m. \quad (3.4.11)$$

Voor de drie eerste stappen in het iteratieproces staan de resultaten in onderstaande tabel.

Vergelijken we de resultaten uit beide tabellen dan wordt duidelijk dat de methode van Gauss-Seidel sneller tot een oplossing zal leiden dan de methode van Jacobi. Indien Gauss-Seidel toegepast wordt met punt 5 als startpunt blijkt de convergentie trager te zijn. Ook het startveld waarvan men uitgaat is hierbij van belang. Het blijkt

dat de snelste convergentie bereikt wordt indien men begint daar waar de afwijkingen van de uiteindelijke oplossing het grootst zijn.

	begin veld	1e iteratie	2e iteratie	3e iteratie	$\infty$ iteratie
1	100	100	100	100	100
2	0	50	62,5	68,75	75
3	0	25	37,5	42,75	50
4	0	12,5	18,75	21,88	25
5	0	0	0	0	0

Tabel 3.4.2. Drie iteraties met Gauss-Seidel

### 3.4.2. Convergentie en divergentie

De methode van Gauss-Seidel geeft niet in alle omstandigheden een oplossing van het probleem. Aan de hand van een eenvoudig voorbeeld kunnen we laten zien, dat ook divergentie op kan treden. Beschouw het volgende stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden:

$$T_1 = 0,4T_2 + 0,2 \quad (3.4.12)$$

$$T_2 = T_1 + 1. \quad (3.4.13)$$

We zien dat na vijf iteraties de oplossing al heel goed benaderd is:

iteratie no.	0	1	2	3	4	5	$\infty$
$T_1$	0	0,2	0,68	0,872	0,949	0,980	1,0
$T_2$	0	1,2	1,68	1,872	1,949	1,980	2,0

Tabel 3.4.3. convergentiegedrag stelsel 3.4.12 en 3.4.13

We kunnen de vergelijkingen (3.4.12) en (3.4.13) ook anders schrijven:

$$T_1 = T_2 - 1 \quad (3.4.14)$$

$$T_2 = 2,5T_1 - 0,5. \quad (3.4.15)$$

met als oplossing via Gauss-Seidel:

iteratie no.	0	1	2	3	4
$T_1$	0	-1	-4	-11,5	-30,25
$T_2$	0	-3	-10,5	-29,25	-76,13

Tabel 3.4.4. Convergentiegedrag stelsel 3.4.14 en 3.4.15

Dit ziet er niet goed uit. Het iteratieproces divergeert. Scarborough vond al in 1958 een criterium waaraan de vergelijkingen zouden moeten voldoen om gegarandeerd

convergentie te verkrijgen met de Gauss-Seidel methode. Voldoende voor convergentie blijkt te zijn indien voldaan is aan (het subscript bp staat voor buurpunten):

$$\frac{\sum |a_{bp}|}{|a_p|} \begin{cases} \leq 1 & \text{voor alle vergelijkingen} \\ < 1 & \text{voor tenminste 1 vergelijking} \end{cases}$$

De eisen dat alle coëfficiënten positief moeten zijn, en dat de gelineariseerde bronterm een negatieve richtingscoëfficiënt moet hebben kunnen in het licht van dit Scarborough criterium bezien worden. Is er namelijk niet aan deze eisen voldaan, dan is eenvoudig in te zien dat ook het Scarborough criterium in gevaar komt.

### 3.4.3. De lijn-voor-lijn oplosmethode

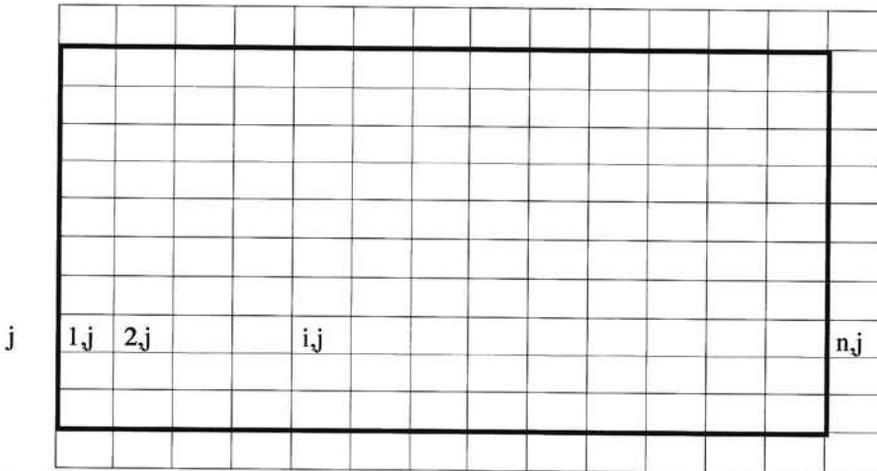
De puntsgewijze oplosmethode heeft als nadeel, dat de convergentie erg traag is. Er zijn andere iteratieve oplosmethoden, welke sneller tot een oplossing leiden. Zo kan men bijvoorbeeld alle vergelijkingen voor punten op een lijn tegelijkertijd oplossen en zo lijn-voor-lijn door het oplosdomein bewegen. Men kan ook voor alle punten in een vlak een oplossing vinden en dan vlak voor vlak door de ruimte bewegen. Men kan tenslotte alle vergelijkingen in alle punten in een 3D ruimte tegelijkertijd oplossen met een directe matrix oplosmethode. Het hangt in feite van het probleem af welke oplosmethode de minste rekentijd zal vergen. Voor een 3D stromingsprobleem, waar tenminste 4 gekoppelde differentiaal vergelijkingen opgelost moeten worden, is een directe oplosmethode ongeschikt alleen al door de geweldig grote hoeveelheid geheugen die voor een dergelijke matrix benodigd is. In de meeste gevallen blijkt een lijn-voor-lijn algoritme de beste resultaten te geven. We beperken ons hier dan ook tot het bespreken van deze lijn-voor-lijn methode.

Toepassen van de eindige volumemethode op een 2D convectie-diffusie vergelijking voor bijvoorbeeld de temperatuur levert een stelsel lineaire vergelijkingen op voor de waarden van de temperaturen in elk roosterpunt als functie van temperaturen in de buurpunten. Beschouwen we een rij punten in het rekendomein en veronderstellen we dat de waarden van de temperaturen op de naburige lijnen bekend zijn, dan kunnen we een oplossing vinden voor de temperaturen op de betreffende lijn. Dit kan met behulp van het Thomas algoritme, of het tdma algoritme (tri-diagonal matrix algorithm), dat er als volgt uit ziet. De vergelijkingen op een lijn hebben de volgende gedaante:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + (b + a_S T_S + a_N T_N). \quad (3.4.16)$$

Indien de temperaturen op de naburige lijnen ten zuiden en noorden van de beschouwde lijn bekend verondersteld kunnen worden, dan is de term tussen de haken in bovenstaande vergelijking bekend. Voor elk punt P van de lijn is de temperatuur uitgedrukt in de temperaturen van de buurpunten. Beschouwen we nu

de lijn  $j$  met  $n$  roostercellen, waarvan de cellen  $(1,j)$  en  $(n,j)$  virtuele roostercellen zijn die buiten het rekendomein vallen (zie figuur 3.4.1).



Figuur 3.4.1. Rooster met  $n$  punten op lijn  $j$

De randvoorwaarde geeft voor het virtuele roosterpunt:

$$T_{i,j} = f(T_{2,j}). \quad (3.4.17)$$

Voor het punt  $(2,j)$  op de beschouwde lijn geldt:

$$T_{2,j} = f(T_{1,j}, T_{3,j}). \quad (3.4.18)$$

Kombineren van 3.4.17 en 3.4.18 resulteert in:

$$T_{2,j} = f'(T_{3,j}). \quad (3.4.19)$$

Met  $T_{3,j} = (T_{2,j}, T_{4,j})$  geeft dit dan weer  $T_{3,j} = f'(T_{4,j})$ . Bewegend van west naar oost wordt op deze manier de temperatuur in elk punt  $(i,j)$  van lijn  $j$  uitgedrukt in de temperatuur van het naburige punt  $(i+1,j)$ . Zo ook voor het op een na laatste, meest oostelijke punt van het domein:  $T_{n-1,j} = f'(T_{n,j})$ . De randvoorwaarde geeft voor het virtuele roosterpunt op de lijn:  $T_{n,j} = g(T_{n-1,j})$ , zodat uit deze laatste twee vergelijkingen  $T_{n,j}$  en  $T_{n-1,j}$  bepaald kunnen worden. Vervolgens wordt  $T_{n-2,j}$  berekend uit  $T_{n-1,j}$ . Nu bewegend van oost naar west, wordt de temperatuur in elk punt  $(i,j)$  bepaald uit de temperatuur in het naburige punt  $(i+1,j)$ . Nu alle temperaturen op de lijn zijn bepaald kan hetzelfde herhaald worden voor de naburige lijn, bijvoorbeeld lijn  $j+1$ , en zo kan elke lijn in het rekendomein bezocht worden. Dit wordt herhaald totdat convergentie is bereikt.

Deze lijn-voor-lijn oplosmethode kan gebruikt worden in combinatie met Jacobi, Gauss-Seidel of Successive Over Relaxation op dezelfde manier als de puntsge- wijze oplosmethoden. Van belang hierbij kan zijn de richting waarin het veld

doorlopen wordt. De voordeligste richting hangt af van de coëfficiënten. Voor een stroming die hoofdzakelijk plaats vindt van oost naar west is de gunstigste richting waarmee het veld doorlopen wordt ook van oost naar west. Vaak bestaat een iteratie uit twee stappen, de eerste stap oost-west wordt bijvoorbeeld gevolgd door een stap west-oost. In het meest algemene geval zal een complete iteratie bestaan uit vier afzonderlijke stappen. Het veld wordt hierbij in alle vier mogelijke richtingen doorlopen (oost-west, west-oost, zuid-noord en noord-zuid).

### 3.5. De convectie-diffusie vergelijking

De 1D convectie-diffusie vergelijking zal nu geïntegreerd worden over eindige volumina en over een eindige tijdstap. Hierna zullen benaderingen gegeven worden van grootheden ter plaatse van de vlakken tussen de eindige volumina. De vergelijking luidt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S''' \quad (3.5.1)$$

Integratie van de eerste term over de tijd  $\Delta t$  en het volume  $\Delta V$  geeft:

$$\int_V \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) dt dV = M^{n+1} T_P^{n+1} - M^n T_P^n \quad (3.5.2)$$

Voor een volledig expliciet schema levert de convectieterm het volgende op:

$$\int_V \int_t^e \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) dV dt = \int_t^e \int_V \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A T) dx dt = (\dot{m}_e^n T_e^n - \dot{m}_w^n T_w^n) \Delta t \quad (3.5.3)$$

Indien het snelheidsveld gegeven is moeten we uitdrukkingen hebben voor de temperaturen op de vlakken  $e$  en  $w$  tussen roosterpunten in. De waarden van deze temperaturen op de tussenvlakken kunnen benaderd worden door bijvoorbeeld:

$$T_e = \frac{1}{2}(T_E + T_P) \text{ en } T_w = \frac{1}{2}(T_W + T_P), \quad (3.5.4)$$

waarmee de convectieterm benaderd wordt door:

$$\frac{1}{2} \dot{m}_e (T_E^n + T_P^n) - \frac{1}{2} \dot{m}_w (T_W^n + T_P^n) \quad (3.5.5)$$

De diffusie term geeft:

$$\int_t^e \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt = \left( \frac{A_e \Gamma_e}{\delta x_e} (T_E^n + T_P^n) - \frac{A_w \Gamma_w}{\delta x_w} (T_P^n + T_W^n) \right) \Delta t \quad (3.5.6)$$

Na wat rangschikken van de termen ziet de gediscretiseerde differentiaalvergelijking er dan als volgt uit:

$$\begin{aligned} \frac{M_P^{n+1}}{\Delta t} T_P^{n+1} &= (D_w + \frac{1}{2} \dot{m}_w) T_W^n + (D_e - \frac{1}{2} \dot{m}_e) T_E^n + \\ & \left( \frac{M_P^n}{\Delta t} - (D_e + D_w) + \frac{1}{2} \dot{m}_w - \frac{1}{2} \dot{m}_e \right) T_P^n. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Het is duidelijk dat twee van de coëfficiënten negatief kunnen worden, hetgeen evenveel voorwaarden oplevert voor stabiliteit. De eerste voorwaarde luidt:

$$D_e \geq \frac{1}{2} \dot{m}_e \text{ of } \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{A}{\Delta x} \right)_e \geq \frac{1}{2} (\rho A u)_e. \quad (3.5.8)$$

Dit is equivalent met de voorwaarde:  $Pe(\Delta)_e \leq 2$  met  $Pe(\Delta) = \rho c_p u \Delta x / \lambda$ . Het cel-Péclet getal geeft de verhouding tussen het transport door convectie en diffusie weer, zodat de voorwaarde voor stabiliteit betekent dat het transport door convectie niet groter mag zijn dan twee maal het transport door diffusie.

De tweede voorwaarde voor stabiliteit volgt uit de coëfficiënt van  $T_P^n$ :

$$\frac{M_P}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\dot{m}_w - \dot{m}_e) \geq D_e + D_w. \quad (3.5.9)$$

Veronderstellen we dat  $\dot{m}_w = \dot{m}_e$  en  $D_e = D_w$  dan levert deze eis uiteindelijk op:

$$\frac{a \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \text{ of } Fo(\Delta) \leq \frac{1}{2}. \quad (3.5.10)$$

Deze eis komt er in feite op neer, dat de tijdstap kleiner moet zijn dan de tijd nodig voor diffusie naar het nabijgelegen roosterpunt. De twee stabiliteitseisen gecombineert levert op:  $Pe(\Delta) \cdot Fo(\Delta) = Co(\Delta) \leq 1$  (het kental van Courant =  $u \Delta t / \Delta x$ ). De fysische betekenis hiervan is dat de afstand afgelegd door het fluïdum in de tijd  $\Delta t$  ( $u \Delta x$ ) kleiner dient te zijn dan  $\Delta x$ . Dit criterium alleen is niet voldoende. Er moet tevens aan een van de twee andere criteria voldaan zijn.

Dat met name het criterium  $Pe(\Delta) \leq 2$  kan leiden tot problemen wordt nu aangetoond aan de hand van een voorbeeld. Beschouw een gegeven propstrooming door een buis en bepaal de temperatuursverdeling in het thermisch inloopegebied indien vanaf  $x = 0$  de wandtemperatuur hoger is dan de temperatuur van het fluïdum dat door de buis stroomt. Dit is een twee-dimensionaal probleem. Kies tien roosterpunten in de  $y$ -richting loodrecht op de wand. Aan de hand van het criterium  $Pe(\Delta) = 2$  kan het minimum aantal roosterpunten in de  $x$ -richting langs de wand bepaald worden.

De lengte van het thermisch inloopegebied is gelijk aan:  $L = 0,1 D Pe$ . Hierin is  $D$  de diameter van de buis en  $Pe$  het Péclet getal betrokken op deze diameter. Het minimum aantal roosterpunten wordt gegeven door:  $\Delta x = 2a/u$ . Het aantal roosterpunten dat met deze  $\Delta x$  nodig is om het gehele thermisch inloopegebied te bestrijken is:



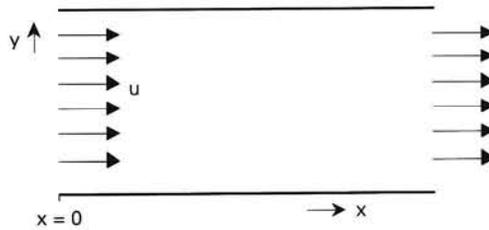


Fig. 3.5.1. Propstroming met konstante wandtemperatuur.

$$N_x = \frac{L}{\Delta x} = 0,05 \text{ Pe}^2. \quad (3.5.11)$$

Is het  $Re$  getal betrokken op de hydraulische diameter van de buis bijvoorbeeld gelijk aan  $Re = 1000$  en is  $Pr = 1$ , dan betekent dit voor het aantal roosterpunten in de  $x$ -richting:  $N_x = 50.000$  en is het totaal aantal roosterpunten gelijk aan  $500.000$ .

Met

$Pr = 1000$  loopt het totale aantal roosterpunten zelfs op tot  $5,0 \cdot 10^{11}$ . Dit is een buitengewoon groot aantal punten voor een betrekkelijk eenvoudig probleem.

### 3.5.1. Upwind differenties

In het voorafgaande is duidelijk geworden dat het benaderen van de temperaturen op de tussenvlakken als het gemiddelde van de temperaturen op de twee omliggende roosterpunten tot een buitengewoon groot aantal roosterpunten aanleiding geeft. Vooral voor gevallen waarin het transport gedomineerd wordt door convectie en de diffusie praktisch te verwaarlozen is lijkt een andere benadering van de temperaturen op de tussenvlakken gewenst. Een benadering welke altijd tot positieve coëfficiënten leidt is die van de upwind differenties. Hierbij wordt voor de temperatuur van het vlak tussen de punten P en E genomen:

$$T_e = T_P \text{ indien } \dot{m}_e > 0 \quad (3.5.12)$$

$$T_e = T_E \text{ indien } \dot{m}_e < 0$$

Voor de temperatuur op een tussenvlak wordt dus de stroomopwaartse waarde genomen. Dat dit een logische benadering is, indien de convectieve overdracht veel groter is dan de diffusieve overdracht, is te illustreren met het volgende voorbeeld. Beschouw de eindige volumina als aan elkaar grenzende goed geroerde vaten met tussen deze vaten dunne buisjes waardoor vloeistof van het ene naar het andere vat stroomt. De wanden van de vaten zijn vervaardigd van een perfecte isolator. De temperatuur in de verbindende buisjes zal die van het stroomopwaartse vat zijn indien de geleiding verwaarloosd kan worden.

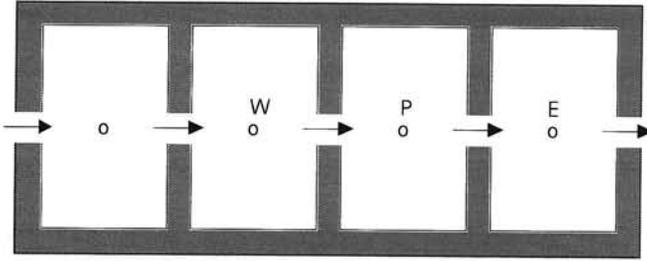


Fig. 3.5.2. Aaneengeschakelde geroerde vaten

Er is ook inzicht te verkrijgen in het waarom van opwind differenties door de 1D convectie-diffusie vergelijking analytisch op te lossen. De 1D vergelijking luidt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial T}{\partial x}). \quad (3.5.13)$$

met de dichtheid  $\rho$ , de snelheid  $u$  en de diffusiviteit  $\Gamma$  constant en de randvoorwaarden

$$x = 0: T = T_P \quad \text{en} \quad x = \Delta x: T = T_E \quad (3.5.14)$$

is de oplossing van deze vergelijking:

$$\frac{T - T_P}{T_E - T_P} = \frac{\exp(\text{Pe} \frac{x}{\Delta x}) - 1}{\exp(\text{Pe}) - 1} \quad \text{met} \quad \text{Pe} = \frac{\rho u \Delta x}{\Gamma}. \quad (3.5.15)$$

Deze oplossing is als functie van het Pe-getal uitgezet in figuur 3.5.3.

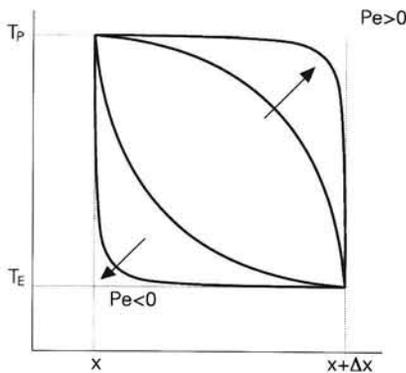


Fig. 3.5.3. Exacte oplossing 1D convectie-diffusie vergelijking.

Voor grote waarden van het Péclet getal blijkt de temperatuur midden tussen de punten  $x$  en  $\Delta x$  nagenoeg gelijk te zijn aan de temperatuur in het stroomopwaartse punt. Voor  $\text{Pe} = 0$  bestaat er een lineair temperatuurprofiel wat te verwachten is bij pure geleiding. Indien zowel convectie als diffusie van belang zijn kunnen de temperatuur en de temperatuurgradient op het tussenvlak tussen twee roosterpunten

P en E benaderd worden met:

$$T_e = \left(\frac{1}{2} + \alpha_e\right)T_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_e\right)T_E \quad (3.5.16)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \beta_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} \quad (3.5.17)$$

De waarden van  $\alpha_e$  en  $\beta_e$  zijn afhankelijk van het Péclet getal.

$$\text{Voor } Pe \rightarrow 0: \quad \alpha_e = 0 \text{ en } \beta_e = 1 \quad (\text{centraal schema})$$

$$\text{Voor } Pe \rightarrow \infty: \quad |\alpha_e| = \frac{1}{2} \text{ en } \beta_e = 1 \quad (\text{upwind schema})$$

$$\text{Voor } 2 \leq Pe \leq \infty: \quad \alpha_e = \frac{1}{2} - \frac{\exp(Pe/2) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (\text{exponentieel schema})$$

$$\beta_e = Pe \frac{\exp(Pe/2)}{\exp(Pe) - 1}$$

$$\text{Voor } 2 \leq Pe \leq \infty: \quad |\alpha_e| = \frac{1}{2} \frac{Pe}{5 + Pe^2} \quad (\text{benadering exponentieel schema})$$

$$\beta_e = \frac{1 + 0,005Pe^2}{1 + 0,05Pe^2}$$

Het exponentiële schema is afgeleid uit de exacte oplossing van de 1D convectie-diffusie vergelijking. Een nadeel van dit exponentiële schema is dat het een erg rekenintensief schema is. Voor het uitrekenen van de exponenten is veel rekentijd nodig. Vandaar het laatste schema, dat een goed benadering is van het exponentiële schema.

### 3.5.2. 2D convectie-diffusie vergelijking

Een uitbreiding naar de 2D convectie-diffusie vergelijking is zeer eenvoudig. In deze paragraaf zullen nog eens alle stappen volgens welke de eindige volumemethode werkt doorlopen worden voor de 2D convectie-diffusie vergelijking in cartesische coördinaten. Hierbij zal gebruik gemaakt worden van het algemene schema met de definities van de temperaturen en temperatuurgradiënten zoals gedefinieerd in de vorige paragraaf met vergelijkingen (3.5.16) en (3.5.17). De 2D convectie-diffusie vergelijking is:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial T}{\partial y}) + S''' \quad (3.5.18)$$

Het rekendomein wordt opgedeeld in volumes, waarvan er een in de onderstaande figuur is weergegeven.

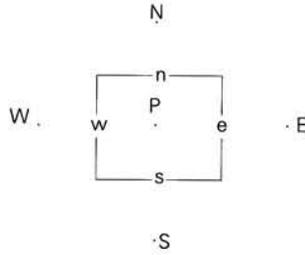


Fig.3.5.4. 2D deelvolume.

Integreren van de  $dv$  over het volume rond punt P geeft als resultaat (zie ook vgl. 3.1.22):

$$\left(\frac{M_P}{\Delta t} T_P - \frac{M_P^o}{\Delta t} T_P^o\right) + (\dot{m}_e T_e + \dot{m}_s T_s - \dot{m}_w T_w - \dot{m}_n T_n) =$$

$$(\Gamma A \frac{\partial T}{\partial x})_e + (\Gamma A \frac{\partial T}{\partial y})_s - (\Gamma A \frac{\partial T}{\partial x})_w - (\Gamma A \frac{\partial T}{\partial x})_n + S. \quad (3.5.19)$$

De waarden met het superscript o zijn genomen op het oude tijdsniveau, de overigen op het nieuwe tijdsniveau. Om de uiteindelijke differentievergelijking handzamer te maken wordt de gediscretiseerde continuïteitsvergelijking gebruikt. Uit de continuïteitsvergelijking volgt:

$$\frac{M_P}{\Delta t} T_P = \frac{M_P^o}{\Delta t} T_P^o + (\dot{m}_w + \dot{m}_n - \dot{m}_e - \dot{m}_s) T_P. \quad (3.5.20)$$

Dit ingevuld in vergelijking (3.5.19) leidt tot:

$$\left(\frac{M_P^o}{\Delta t} T_P^o - \frac{M_P^o}{\Delta t} T_P^o + \dot{m}_e(T_e - T_P) + \dot{m}_s(T_s - T_P) + \dot{m}_w(T_w - T_P) + \dot{m}_n(T_n - T_P)\right) =$$

$$(\Gamma A \frac{\partial T}{\partial x})_e + (\Gamma A \frac{\partial T}{\partial y})_s - (\Gamma A \frac{\partial T}{\partial x})_w - (\Gamma A \frac{\partial T}{\partial x})_n + S. \quad (3.5.21)$$

Vervolgens worden de profielen tussen de roosterpunten benaderd om waarden te vinden voor de temperaturen en de temperatuurgradiënten op de tussenvlakken e, w, n en s. Passen we de benadering toe als in vergelijkingen (3.5.16) en (3.5.17) resulteert dit in:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + b \quad (3.5.22)$$

met

$$a_E = \beta_e D_e - \frac{1}{2} \dot{m}_e + |\alpha_e| |\dot{m}_e|; \quad (3.5.23)$$

$$a_W = \beta_w D_w + \frac{1}{2} \dot{m}_w + |\alpha_w| |\dot{m}_w|; \quad (3.5.24)$$

$$a_N = \beta_n D_n - \frac{1}{2} \dot{m}_n + |\alpha_n| |\dot{m}_n|; \quad (3.5.25)$$

$$a_S = \beta_s D_s + \frac{1}{2} \dot{m}_s + |\alpha_s| |\dot{m}_s|; \quad (3.5.26)$$

$$a_P = \frac{M_P^0}{\Delta t} + a_E + a_W + a_S + a_N - S_P; \quad (3.5.27)$$

$$b = \frac{M_P^0}{\Delta t} T_P^0 + S_C. \quad (3.5.28)$$

De bronterm  $S$  in vergelijking (3.5.21) is gelineariseerd tot  $S_P T_P + S_C$ .

### 3.5.3. Numerieke diffusie

Het gebruik van upwind differenties heeft een groot nadeel dat wij kennen als numerieke diffusie of ook wel als 'false diffusion'. Deze numerieke diffusie kan de nauwkeurigheid van de oplossing in hoge mate nadelig beïnvloeden. Dat zal uit het volgende duidelijk worden.

De convectieve flux van de scalaire grootheid  $\phi$  door bijvoorbeeld het vlak  $e$  is gegeven door:

$$C_e = (\rho u)_e \phi_e = \dot{m}_e \phi_e. \quad (3.5.29)$$

Het centrale (CDS) en het upwind differentie schema (UDS) hebben verschillende benaderingen voor de waarde van  $\phi$  ter plaatse van het vlak  $e$ :

$$\text{CDS: } \phi = (\phi_P + \phi_E)/2. \quad (3.5.30)$$

$$\text{UDS: } \phi_e = \phi_P \text{ voor } u \rightarrow \infty. \quad (3.5.31)$$

Vergelijken we deze benaderingen met een benadering van  $\phi$  welke uit Taylor reeksen volgt. Ontwikkeling rond het punt  $P$  geeft:

$$\phi_P = \phi_e - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e + \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_e + \dots \quad (3.5.32)$$

Ontwikkeling rond het punt  $E$  geeft:

$$\phi_E = \phi_e + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e + \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_e + \dots \quad (3.5.33)$$

Invullen van deze reeksen in de benaderingen van  $\phi_e$  geeft achtereenvolgens voor het centrale schema:

$$\phi_e = \phi_e + \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_e + \dots \quad (3.5.34)$$

en voor het upwind schema:

$$\phi_e = \phi_e - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e + \dots \quad (3.5.35)$$

Hieruit blijkt dat het centrale schema 2<sup>e</sup> orde in  $x$  is, terwijl het upwind schema 1<sup>e</sup> orde in  $x$  is. De fout welke gemaakt wordt met het upwind schema voor het benaderen van de convectieve flux is gelijk aan

$$-\dot{m}_e \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e \quad (3.5.36)$$

Dit heeft de gedaante van een diffusie-term, namelijk  $\Gamma(\partial\phi/\partial x)$ , vandaar de uitdrukking numerieke diffusie. De grootte van deze "diffusie" neemt af met  $\Delta x$ , een fijn rooster is dus gunstiger. Verder heeft deze term weinig te betekenen voor gebieden waar  $\partial\phi/\partial x$  klein is.

Met behulp van de oplossing van het 1D convectie-diffusie probleem is aangetoond dat upwind differenties voor hoge Pe getallen succesvol zijn. Voor een 2D of een 3D stroming is dit echter niet altijd het geval. Dit kan geglustreerd worden aan de hand van het volgende voorbeeld. Beschouw een stroming welke een hoek van 45° maakt met de randen van een rechthoekig rekendomein. De stroming is uniform. Een scalaire grootheid  $\phi$  heeft de waarde 1 op de verticale wand welke aangestroomd wordt en de waarde 0 op de horizontale wand welke aangestroomd wordt (zie figuur 3.5.5). De convectie is zeer groot t.o.v. de diffusie, zodat de diffusie verwaarloosd kan worden. De verspreiding van de scalar  $f$  wordt beschreven door de volgende vergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u f) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = 0. \quad (3.5.37)$$

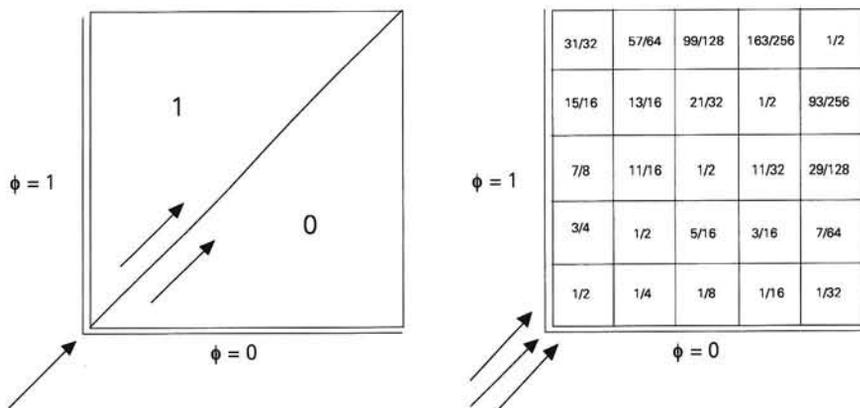
Het centrale differentie schema kan niet gebruikt worden bij het oplossen van deze vergelijking daar het Pe-getal gebaseerd op de roosterafstand nooit kleiner dan 2 kan worden. Toepassing van het upwind differentie schema leidt tot het volgende:

$$\dot{m}_e \phi_e + \dot{m}_n \phi_n = \dot{m}_w \phi_w + \dot{m}_s \phi_s \quad (3.5.38)$$

De massastromen door alle vlakken zijn aan elkaar gelijk indien de roostercellen vierkant zijn. In dat geval herleidt vergelijking (3.5.44) zich met de benaderingen volgens het upwind differentie schema ( $\phi_e = \phi_P$ ,  $\phi_n = \phi_P$ ,  $\phi_w = \phi_W$ ,  $\phi_s = \phi_S$ ) tot:

$$2\phi_P = \phi_W + \phi_S. \quad (3.5.39)$$

De oplossing kan nu eenvoudig gevonden worden en is gegeven in figuur 3.5.5.



Figuur 3.5.5. Illustratie numerieke diffusie.

De exacte oplossing van dit probleem is triviaal. Boven de diagonaal van de linkeronderhoek naar de rechterbovenhoek moet  $\phi = 1$ . Onder deze diagonaal is de oplossing  $\phi = 0$ . Immers er is geen diffusie loodrecht op de stromingsrichting. De numerieke oplossing verkregen met behulp van het upwind differentie schema vertoont uitsmering loodrecht op deze diagonaal. Deze uitsmering als gevolg van de numerieke techniek heeft het karakter van diffusie loodrecht op de stromingsrichting. De numerieke oplossing kan vergeleken worden met de analytische oplossing voor werkelijke diffusie loodrecht op de stromingsrichting. In vergelijking (4.2.12) van paragraaf 4.2.4 is de oplossing gegeven voor het geval dat men twee media met dezelfde thermische eigenschappen maar verschillende temperaturen op  $t = 0$  met elkaar in warmtecontact brengt. Met behulp van de transformatie  $t = s/u$ , waarin  $s$  de afgelegde weg in de richting van de snelheidsvector is en  $u$  de grootte van de snelheid in deze richting, is deze oplossing te gebruiken om een idee te krijgen van de grootte van de schijnbare diffusie. Met  $z$  de coördinaat loodrecht op de snelheidsrichting resulteert de diffusie loodrecht op de stromingsrichting in:

$$T = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{as/u}}\right). \quad (3.5.40)$$

Op de plaats  $z = \frac{3}{2}\sqrt{2} \Delta$  en  $z = 3\sqrt{2} \Delta$  is volgens het numerieke schema  $T = \frac{7}{64}$ . Dit ingevuld in (3.5.40) geeft:

$$\frac{7}{64} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{Pe}(\Delta)\right)^{1/2} \quad (3.5.41)$$

Waaruit volgt dat  $\operatorname{Pe}(\Delta) = 2,85$ . En dus vinden we voor de schijnbare diffusiecoëfficiënt  $\Gamma_{\text{num}}$ :

$$\Gamma_{\text{num}} = \frac{u \Delta}{2,85} \quad (3.5.42)$$

Voor een waterstroming bij kamertemperatuur is de warmtevereffeningscoëfficiënt  $a = 1,4 \cdot 10^{-7}$ . Bij een stroomsnelheid van 1 m/s en een stromingsrichting welke een hoek van  $45^\circ$  maakt met het rooster en een roosterafstand van  $4 \cdot 10^{-7}$  m. is de schijnbare diffusie door het gebruik van het upwind differentieschema gelijk aan de echte warmtediffusie. Met behulp van de hierboven gevonden uitdrukking voor de schijnbare diffusiviteit is de warmtevereffening berekend uit (3.5.40) vergeleken met de numerieke diffusie in figuur 3.5.6. Hieruit blijkt dat de numerieke diffusie inderdaad hetzelfde karakter heeft als de werkelijke diffusie.

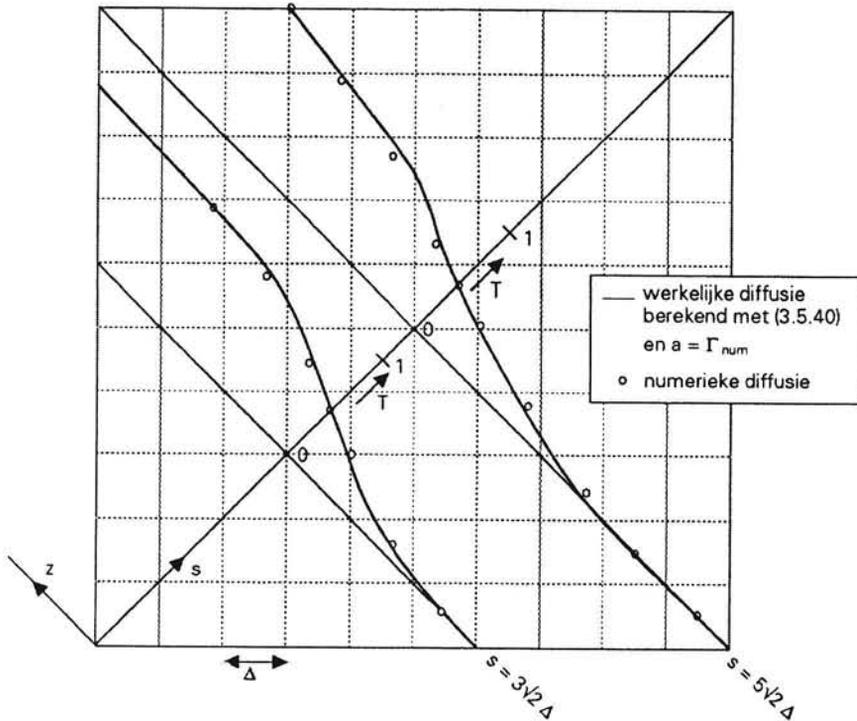


Fig. 3.5.6. Numerieke diffusie vergeleken met werkelijke diffusie.

De numerieke diffusie wordt veroorzaakt door het feit dat niet gebruik gemaakt wordt van de echte stroomopwaartse waarden van  $\phi$ . De goede waarde van  $\phi$  op een tussenvlak zou gevonden moeten worden in de negatieve stromingsrichting en niet voor een horizontaal vlak in de negatieve  $x$ -richting en voor een vertikaal vlak in de negatieve  $y$ -richting. De grootte  $\phi$  stroomt met de verkeerde waarde binnen, waarna er menging plaats vindt in het volume. Men moet zo veel mogelijk proberen de hoofdstromingsrichting en de roosterrichting te laten samenvallen. Uit dit voorbeeld is duidelijk geworden dat er bij een probleem dat gedomineerd wordt door convectie (hoge  $Pe$  getallen) op een betere wijze rekening gehouden dient te worden met de hoek welke de stroming maakt met het rekenrooster. Oplossingen van dit probleem zijn:



1. In gebieden waar de stromingsrichting dit vereist werken met zeer fijne roosters, zodat de Pe-getallen gebaseerd op de roosterafstanden niet te groot worden.
2. Het gebruik van nauwkeuriger interpolatieschema's, zoals hieronder besproken.

### 3.5.4. Voorbeelden van nauwkeuriger differentie schema's.

Hier worden een drietal nauwkeuriger differentieschema's in het kort getoond.

#### 1. Tweede orde upwind.

Bij dit schema wordt de waarde van  $\phi$  op een tussenvlak  $w$  bepaald uit de waarden van  $\phi$  op de twee stroomopwaartse roosterpunten, bijvoorbeeld de punten  $W$  en  $WW$  als in de figuur (zie figuur 3.5.7).

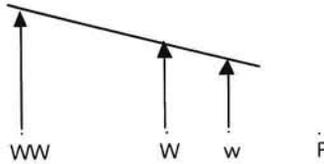


Fig. 3.5.7. Tweede orde upwind schema.

Het voordeel van dit schema is dat de extrapolatie tot een hogere nauwkeurigheid leidt dan het upwind schema. Aan de andere kant is het schema niet onvoorwaardelijk stabiel. Er kunnen negatieve coëfficiënten voorkomen. Bovendien ontstaan er problemen bij de randen met instroom randvoorwaarden.

#### 2. Quadratic Upwind schema.

Hier vindt kwadratische interpolatie plaats tussen de punten  $P$  en de twee stroomopwaartse punten, bijvoorbeeld  $W$  en  $WW$ .

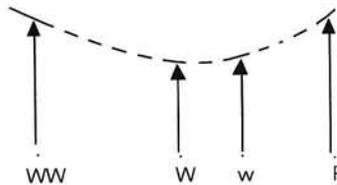


Fig. 3.5.8. Quadratic Upwind schema.

Zowel de convectieve als de diffusieve term wordt met behulp van dit profiel benaderd. Dit schema wordt meestal het Quick-schema genoemd. Aan dit schema kleven ongeveer dezelfde problemen als aan het tweede orde upwind schema: mogelijk negatieve coëfficiënten en problemen met instroom randvoorwaarden. Het schema is wel weer nauwkeuriger dan het eerste orde upwind schema.

3. Skew Upwind Differencing Scheme.

Bij dit schema wordt gebruik gemaakt van de volgende transformatie:

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \rho U \frac{\partial \phi}{\partial s}, \tag{3.5.43}$$

waarin U de lokale snelheid is en s de afstand in de stromingsrichting. Voor hoge Péclet getallen luidt dan de convectie-diffusievergelijking:

$$\rho U \frac{\partial \phi}{\partial s} = S^{\phi} \tag{3.5.44}$$

Een benadering van f op een roostervlak wordt nu gevonden met:

$$\phi_w = \phi_u + \Delta \phi_w \tag{3.5.45}$$

Hierin is  $\phi_w$  de echte stroomopwaartse waarde, welke gevonden wordt uit een interpolatie tussen waarden van  $\phi$  op enkele stroomopwaartse punten (zie figuur 3.5.9).  $\Delta \phi_w$  is een correctie voor de variatie van  $\phi$  tussen de posities u en w. Er zijn verschillende manieren om  $\phi_w$  en  $\Delta \phi_w$  te evalueren. Hiertoe zij verwezen naar de literatuur [D17].

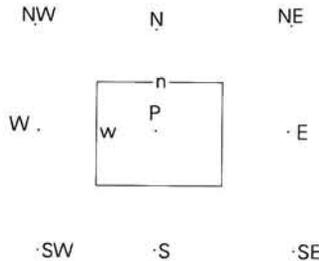


Fig. 3.5.9. Skew Upwind Differencing Scheme.

3.6. De impulsvergelijkingen

Tot nu toe zijn we steeds uitgegaan van een gegeven stromingsveld. Echter in de praktijk zal dit niet het geval zijn en zullen de impulsvergelijkingen ook opgelost dienen te worden. Voor de snelheidscomponent u luidt de impulsvergelijking (gebruik makend van de Einstein conventie):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) - \frac{\partial p}{\partial x_j} + S \tag{3.6.1}$$

Duidelijk is dat de drie vergelijkingen voor de drie snelheidscomponenten via de convectieve term en via de druk aan elkaar gekoppeld zijn. Bovendien is duidelijk, dat de convectieve term niet-linear is. Deze problemen kunnen eenvoudig overkomen worden indien gekozen wordt voor een iteratieve oplosmethode. Het grootste probleem bij het oplossen van het snelheidsveld is het feit, dat er geen vergelijking is voor de druk. Indirect kan de druk verkregen worden via de

continuïteitsvergelijking. Indien het correcte drukveld in de impulsvergelijkingen wordt ingevuld voldoet het verkregen snelheidsveld aan de continuïteitsvergelijking. In feite zou dus het stelsel gekoppelde vergelijkingen voor behoud van impuls en massa via een directe methode opgelost moeten worden. Door de niet-lineariteiten is dit echter geen aantrekkelijke weg en we zullen zien, dat een iteratieve methode een betere mogelijkheid is.

### 3.6.1. Verschoven roosters

Uitgangspunt van de eindige volumemethode is de integratie van de partiële differentiaal vergelijking over een roostercel en het benaderen van onbekenden via profielen tussen waarden in de roosterpunten. Voeren we dit uit voor de drukgradiënt uit de impulsvergelijking voor een 1D stroming:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial p}{\partial x} + S \quad (3.6.2)$$

dan krijgen we:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V -\frac{\partial p}{\partial x} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_W -\frac{\partial p}{\partial x} A dx dt = -(p_e - p_w) A \Delta t \quad (3.6.3)$$

De waarden van de druk op de tussenvlakken e en w van de roostercellen kunnen benaderd worden met behulp van lineaire profielen, waarmee de geïntegreerde drukgradiënt gelijk wordt aan:

$$-\left(\frac{p_P + p_E}{2} - \frac{p_P + p_W}{2}\right) A \Delta t = \frac{p_E - p_W}{2} A \Delta t \quad (3.6.4)$$

Uit dit resultaat blijkt, dat voor de benadering van de drukgradiënt een grover rooster gebruikt wordt, dan het actuele rooster. Bovendien blijkt dat een golvend (zig zag) drukveld als in figuur 3.6.1 door het numerieke schema gezien wordt als een constant drukveld, aangezien voor elk roosterpunt de gediscretiseerde drukgradiënt gelijk aan nul wordt.

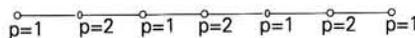


Fig. 3.6.1 Een golvend drukveld

Voor een 2D geval zijn er zelfs vier onafhankelijke oplossingen mogelijk voor het drukveld, zoals uit figuur 3.6.2 blijkt. Voor alle punten is de drukgradiënt, zoals berekend volgens (3.6.4) en een soortgelijke uitdrukking voor de gradiënt in de y-richting, gelijk aan nul.

Een numeriek model, dat een dergelijk niet uniform drukveld aanziet voor een veld met constante druk, is ontoelaatbaar. Beter zou zijn de druk uit te rekenen op een twee maal zo grof rooster. Bij het formuleren van de differentievergelijking van de continuïteitsvergelijking treedt een vergelijkbaar probleem op. Voor het discretiseren van  $\partial u / \partial x$  krijgen we analoog aan de discretisatie van  $\partial p / \partial x$ :

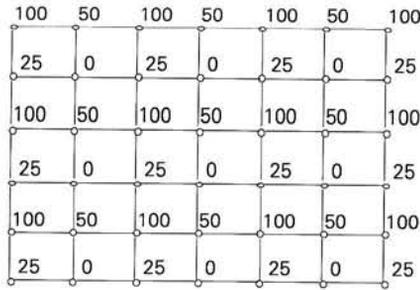


Fig. 3.6.2. Golvend 2D drukveld

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial u}{\partial x} dV dt = \frac{u_E - u_W}{2} A \Delta t \quad (3.6.5)$$

Ook hier zijn dus op dezelfde manier als voor de druk in de figuren 3.6.1 en 3.6.2 weergegeven, golvende snelheidsvelden mogelijk, welke volgens het numerieke schema aan de continuïteitsvergelijking voldoen.

Een oplossing van de hierboven beschreven problematiek kan gevonden worden door roosterpunten voor snelheden en druk niet samen te laten vallen. Indien de roostercellen voor de snelheden verschoven worden ten opzichte van de roostercellen voor de druk, temperatuur en andere scalaire variabelen, zodanig dat de roosterpunten voor de snelheden op de celwanden van de roostercellen voor de druk vallen (zie figuur 3.6.3) zijn beide problemen opgelost.

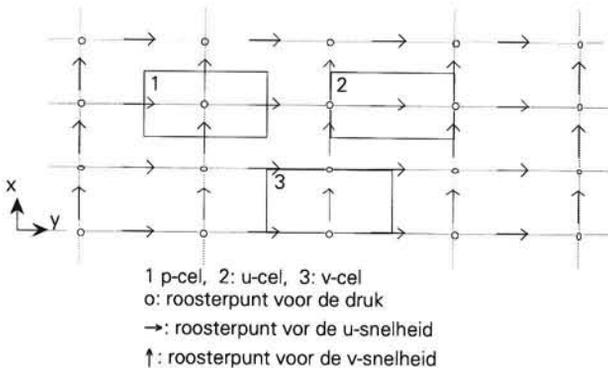


Fig. 3.6.3. Vershoven roosters voor de snelheidscomponenten

De roostercellen voor de snelheidscomponent in de x-richting worden verschoven in de x-richting en de roostercellen voor de snelheidscomponent in de y-richting worden verschoven in de y-richting. De u-impuls- vergelijking wordt nu geïntegreerd over een u-cel, de v-impuls- vergelijking over een v-cel en alle andere vergelijkingen (temperatuur, continuïteit) over een p-cel. De over een u-cel geïntegreerde drukgradiënt resulteert in:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV dt = \frac{p_e - p_w}{2} A \Delta t \quad (3.6.6)$$

Hierin zijn  $p_e$  en  $p_w$  op de celwanden bekend en hoeft er niet verder geïnterpoleerd te worden, zodat de drukgradiënt uitgedrukt wordt in drukken op twee naburige roosterpunten. Evenzo wordt  $\partial u / \partial x$  uit de continuïteitsvergelijking voor een p-cel benaderd met:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial u}{\partial x} dV dt = \frac{u_e - u_w}{2} A \Delta t \quad (3.6.7)$$

Ook nu hoeft er niet meer geïnterpoleerd te worden om de snelheden op de celwanden te krijgen, daar de roosterpunten voor de snelheden op de celwanden zijn gedefinieerd.

### 3.6.2. De 2D impulsvergelijking

Met de invoering van de verschoven roosters voor de snelheidscomponenten moeten we nadere afspraken maken over de nomenclatuur. We spreken af, dat de roosterpunten voor de snelheden op het oostvlak en het noordvlak van een p-cel behoren bij het punt P. Op deze manier ontstaat de nomenclatuur als gegeven in figuur 3.6.4.

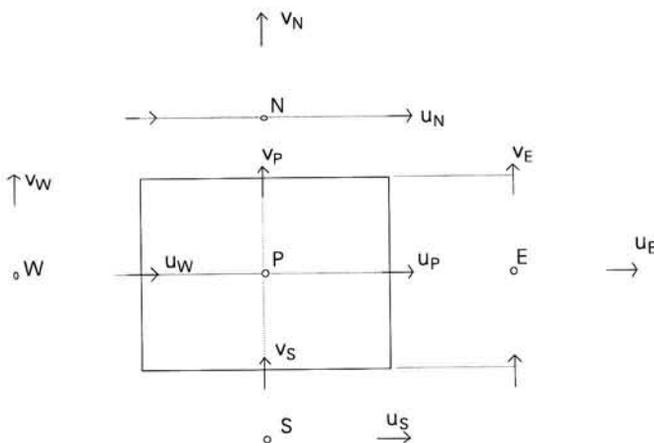


Fig. 3.6.4. p-cel, u-cel and v-cel met nomenclature.

Discretiseren we nu de 2D u-impulsvergelijking welke als volgt luidt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S''' \quad (3.6.8)$$

dan gaat dit geheel analoog met de discretisatie van de 2D convectie- diffusie vergelijking als in paragraaf 3.5.2, resulterend in:

$$a_p^u u_p = a_E^u u_E + a_W^u u_W + a_S^u u_S + a_N^u u_N - A_c(p_E - p_p) + b^u \quad (3.6.9)$$

met identieke uitdrukkingen als (3.5.22) t/m (3.5.28) voor de coëfficiënten. Het bovenschrift  $u$  van de coëfficiënten duidt aan dat we te maken hebben met de coëfficiënten voor de  $u$ -impulsvergelijking. Voor de  $v$ -impuls krijgen we :

$$a_p^v v_p = a_E^v v_E + a_W^v v_W + a_S^v v_S + a_N^v v_N - A_c(p_N - p_p) + b^v \quad (3.6.10)$$

### 3.6.3. Het oplossen van het drukveld

De impulsvergelijkingen (3.6.9) en 3.6.10) kunnen slechts opgelost worden, indien het drukveld gegeven is. Indien slechts een schatting van het drukveld wordt gebruikt, zal het resulterende snelheidsveld na oplossen van de impulsvergelijkingen niet voldoen aan de continuïteitsvergelijking. Vervolgens kan deze continuïteitsvergelijking gebruikt worden om bij het gevonden snelheidsveld het bijpassende drukveld te vinden. Dit is dan weer een nieuwe schatting van het drukveld, waarmee de impulsvergelijkingen weer kunnen worden opgelost. Op deze manier kan iteratief een snelheidsveld gevonden worden dat zowel aan de impulsvergelijkingen als aan de continuïteitsvergelijking voldoet. Zaak is dus met behulp van de continuïteitsvergelijking een vergelijking voor de druk af te leiden. Stel het geschatte drukveld is  $p^*$ . Dit geeft dan met behulp van de impulsvergelijkingen het snelheidsveld  $u^*$  en  $v^*$ :

$$a_p^u u_p^* = a_E^u u_E^* + a_W^u u_W^* + a_S^u u_S^* + a_N^u u_N^* - A_c(p_E^* - p_p^*) + b^u \quad (3.6.11)$$

$$a_p^v v_p^* = a_E^v v_E^* + a_W^v v_W^* + a_S^v v_S^* + a_N^v v_N^* - A_c(p_N^* - p_p^*) + b^v \quad (3.6.12)$$

Veronderstel vervolgens dat het juiste druk- en snelheidsveld gegeven wordt door:

$$p = p^* + p' \quad (3.6.13)$$

$$u = u^* + u' \quad (3.6.14)$$

$$v = v^* + v' \quad (3.6.15)$$

Uitdrukkingen voor de snelheidscorrecties  $u'$  in elk roosterpunt worden gevonden door (3.6.11) af te trekken van (3.6.9), resulterend in:

$$a_p^u u_p' = a_E^u u_E' + a_W^u u_W' + a_S^u u_S' + a_N^u u_N' - A_c(p_E' - p_p') + b^u \quad (3.6.16)$$

Verwaarlozen we de invloed van de naburige punten, dan krijgen we een zeer handzame vergelijking welke de snelheidscorrecties  $u'$  uitdrukt in drukcorrecties:

$$u_p' = \frac{A_c}{a_p^u} (p_p' - p_E') = d_c (p_p' - p_N') \quad (3.6.17)$$

Voor de snelheidscorrecties  $v'$  krijgen we op dezelfde wijze:

$$v'_P = \frac{A_n}{a_p} = (p'_P - p'_N) = d_n (p'_P - p'_N) \quad (3.6.18)$$

Het verwaarlozen van  $a_E^u u'_E + a_W^u u'_W + a_S^u u'_S + a_N^u u'_N$  in (3.6.16) is toegestaan omdat uiteindelijk in de geconvergeerde situatie alle snelheidscorrecties gelijk zullen zijn aan nul. Er zijn echter andere methoden om tot handzame uitdrukkingen te komen voor de snelheidscorrecties. De methode hier beschreven draagt de naam SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations). Andere vergelijkbare methoden zijn SIMPLER, SIMPLEC, SIMPLEST, etc. Hiervoor wordt verwezen naar de literatuur ([D10] en [D17]).

Uitdrukkingen (3.6.17) en (3.6.18) worden nu gebruikt om met behulp van de continuïteitsvergelijking een vergelijking af te leiden voor de drukcorrectie  $p'$ . De 2D continuïteitsvergelijking luidt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.6.19)$$

Integratie over een niet verschoven roostercel (de p-cel van de figuren 3.6.3 en 3.6.4) geeft:

$$\left(\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t}\right)\Delta V + \rho_e A_e u_P + \rho_n A_n v_P - \rho_w A_w u_W - \rho_s A_s v_S = 0 \quad (3.6.20)$$

Verondersteld is dat de dichtheid  $\rho_P$  constant is over de gehele roostercel, en dat de snelheden constant zijn over de wanden van de roostercel. Substitutie van de relaties (3.6.14), (3.6.15), (3.6.17) en (3.6.18) in (3.6.20) leidt tot

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t}\right)\Delta V + \rho_e A_e d_e (p'_P - p'_E) + \rho_n A_n d_n (p'_P - p'_N) - \\ & \rho_w A_w d_w (p'_W - p'_P) - \rho_s A_s d_s (p'_S - p'_P) + \Delta M^* = 0 \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

met

$$\Delta M^* = \rho_e A_e u_P^* + \rho_n A_n v_P^* - \rho_w A_w u_W^* - \rho_s A_s v_S^* \quad (3.6.22)$$

Rangschikking geeft de differentievergelijking voor de drukcorrecties:

$$a_p^p u'_P = a_E^p u'_E + a_W^p u'_W + a_S^p u'_S + a_N^p u'_N + b^p \quad (3.6.23)$$

met de coëfficiënten

$$a_E^p = \rho_e A_e d_e \quad (3.6.24)$$

$$a_W^p = \rho_w A_w d_w \quad (3.6.25)$$

$$a_N^p = \rho_n A_n d_n \quad (3.6.26)$$

$$a_S^p = \rho_s A_s d_s \quad (3.6.27)$$

$$a_P^p = a_E^p + a_W^p + a_N^p + a_S^p \quad (3.6.28)$$

$$b^p = \left( \frac{\rho_P^p - \rho_P^o}{\Delta t} \right) \Delta V - \Delta M^* \quad (3.6.29)$$

Met de drukcorrectievergelijking hebben we nu alle ingrediënten om de impulsvergelijkingen met de continuïteitsvergelijking gekoppeld op te lossen. Het oplossingsalgoritme is:

1. Bereken de coëfficiënten voor de impulsvergelijkingen (3.6.9) en (3.6.10) met beschikbare schattingen van de snelheden  $u$  en  $v$ .
2. Gebruik de best beschikbare schatting van het drukveld ( $p^*$ ) om (3.6.9) en (3.6.10) op te lossen. Dit levert nieuwe schatting op voor het snelheidsveld ( $u^*$  en  $v^*$ ). Dit snelheidsveld voldoet aan de impulsbalans.
3. Gebruik de waarden van  $u^*$  en  $v^*$  om  $b^p$  te bepalen uit (3.6.29) en los de drukcorrectievergelijking (3.6.23) op.
4. Bereken de snelheidscorrecties uit (3.6.17) en (3.6.18)
5. Gebruik de druk- en snelheidscorrectie om nieuwe waarden van  $u, v$  en  $p$  te vinden met (3.6.13), (3.6.14) en (3.6.15). Het snelheidsveld voldoet nu aan de continuïteitsvergelijking.
6. Gebruik het gevonden drukveld als nieuwe schatting en herhaal de stappen 1 t/m 6, totdat convergentie is bereikt.





# **DEEL III**

## **Fysische problemen**



# 4. Transportproblemen in rustende media

## 4.1. Stationaire problemen

Hierbij hebben we te maken met de Laplace-vergelijking

$$\nabla^2 T = 0 \quad (4.1.1)$$

met bijbehorende randvoorwaarden.

De Laplace-vergelijking is belangrijk voor alle potentiaalveldproblemen in de natuurkunde, zoals elektrische velden, potentiaalstroming en warmtegeleiding. Oplossingen uit het ene gebied zijn bruikbaar voor een ander gebied, indien de randvoorwaarden overeenstemmen.

Deze Laplace-vergelijking is voor willekeurige gevallen numeriek (relaxatiemethode) of analoog (elektrisch geleidend papier) zeer goed op te lossen. Analytische oplossingen zijn in een aantal gevallen door scheiden van variabelen te vinden. Een enkel voorbeeld van dit laatste wordt hier behandeld en wel de stationaire geleiding in een strook.

We bekijken de temperatuurverdeling in een lange strook geleidend materiaal, waarvan in fig. 4.1.1 de dwarsdoorsnede is getekend ('koelvin').

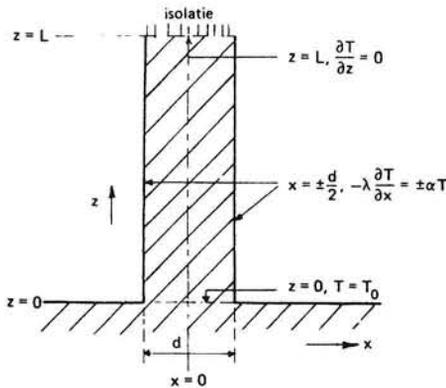


Fig. 4.1.1. Doorsnede van een strook met koelvin met randvoorwaarden.

In de stationaire toestand is de 'overtemperatuur' ten opzichte van de omgeving  $T = T(x, z)$ ;  $T = 0$  voor omgeving. De temperatuurverdeling moet voldoen aan de differentiaalvergelijking 4.1.1 die hier wordt:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (4.1.2)$$

met de randvoorwaarden

$$\left. \begin{array}{l} z = 0, \quad T = T_0, \quad z = L, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \\ \text{en} \\ x = \pm \frac{d}{2}, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \pm \alpha T. \end{array} \right\} \quad (4.1.3)$$

Voert men de dimensieloze grootheden  $\xi = \frac{2x}{d}$ ,  $\zeta = \frac{2z}{d}$ ,  $\theta = \frac{T}{T_0}$  en  $Bi = \frac{\alpha d}{2\lambda}$  \*) in, dan worden de vergelijkingen:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = 0 \\ \text{met} \\ \zeta = 0, \quad \theta = 1, \quad \zeta = \frac{2L}{d}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0 \\ \text{en} \\ \xi = \pm 1, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \pm Bi \theta. \end{array} \right\} \quad (4.1.4)$$

We passen toe de *separatie van variabelen*, d.w.z. we veronderstellen dat  $\theta$  kan worden geschreven als het product van twee functies  $X(\xi)$  en  $Z(\zeta)$ :

$$\theta = X(\xi) \cdot Z(\zeta). \quad (4.15)$$

Invullen in (4.1.4) geeft:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

of

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} \text{ is onafhankelijk van } \xi \text{ en } \zeta.$$

De constante waarde van deze quotiënten kiezen we  $-\mu^2$ . Op deze wijze wordt bereikt dat  $\mu$  reële waarden krijgt.

Aan  $X'' + \mu^2 X = 0$  voldoen  $X = \cos \mu \xi$  en  $X = \sin \mu \xi$  en aan  $Z'' - \mu^2 Z = 0$  voldoen  $Z = e^{\mu \zeta}$  en  $Z = e^{-\mu \zeta}$ , zodat de algemene oplossing van (4.1.4) kan worden geschreven als:

$$\theta = (A \cos \mu \xi + B \sin \mu \xi)(C e^{\mu \zeta} + D e^{-\mu \zeta}). \quad (4.1.6)$$

De grootte van A, B, C, en D volgt uit de randvoorwaarden; de voorwaarde  $\zeta = 2L/d$ ,  $\partial \theta / \partial \zeta = 0$  levert op:

$$0 = (A \cos \mu \xi + B \sin \mu \xi) \mu (C e^{2\mu L/d} - D e^{-2\mu L/d}) \quad (4.1.7)$$

of

$$D = C e^{4\mu L/d}.$$

De oplossing kan dus ook worden geschreven als

$$\theta = (A \cos \mu \xi + B \sin \mu \xi) C' \cosh \mu \left( \frac{2L}{d} - \zeta \right), \quad (4.1.8)$$

waarin  $C' = 2C e^{2\mu L/d}$ .

Omdat het hier gestelde probleem symmetrisch in  $\xi$  is, moet ook  $T(\xi) = T(-\xi)$  zijn; hieruit volgt  $B = 0$ . D.w.z. de verdeling in de  $\xi$ -richting kan alleen beschreven worden met de symmetrische *eigenfunctie*  $\cos \mu \xi$ , zodat

\*) Deze dimensieloze combinatie noemt men het Biot-getal (Bi). De  $\alpha$  slaat op condities buiten, en  $\lambda$  op condities in het materiaal.

$$\theta = A' \cos \mu \xi \cdot \cosh \mu \left( \frac{2L}{d} - \xi \right), \quad \text{met } A' = AC'. \quad (4.1.9)$$

De mogelijke *eigenwaarden*  $\mu$  worden nu bepaald uit de voorwaarde voor  $\xi = \pm 1$ , die oplevert:

$$\text{tg } \mu = \frac{\text{Bi}}{\mu}. \quad (4.1.10)$$

Aan deze transcendente vergelijking voldoet een serie waarden  $\mu_k$ , zoals eerder gegeven in paragraaf 2.2, tabel 2.2.1. De volledige oplossing van (4.1.4) kan nu worden geschreven als een reeks:

$$\theta = \sum_{k=1}^{k=\infty} A'_k \cos \mu_k \xi \cdot \cosh \mu_k \left( \frac{2L}{d} - \xi \right). \quad (4.1.11)$$

De coëfficiënten  $A'_k$  worden zo gekozen dat  $\theta$  voldoet aan de randvoorwaarde  $\theta = 1$  bij  $\xi = 0$ :

$$1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} A'_k \cos \mu_k \xi \cdot \cosh(2\mu_k L/d).$$

Met Fourier-analyse:

$$\int_0^1 \cos \mu_k \xi \, d\xi = A'_k \cosh(2\mu_k L/d) \int_0^1 \cos^2 \mu_k \xi \, d\xi, \quad (4.1.12)$$

of

$$A'_k = \frac{2 \sin \mu_k}{\cosh(2\mu_k L/d) (\sin \mu_k \cos \mu_k + \mu_k)}. \quad (4.1.13)$$

Ga na dat voor  $\text{Bi} = 0$  (volledige isolatie van de strook)  $\theta = 1$  is, en dat voor  $\text{Bi} \ll 1$  (relatief goede geleiding in de x-richting vergeleken bij de warmte-overdracht naar buiten):

$$\begin{aligned} \mu_1 &\approx \sqrt{\text{Bi}}, \quad \mu_2 \approx \pi, \quad \mu_3 \approx 2\pi \quad \text{enz., zodat:} \\ \theta &\approx \frac{\cosh\left[\left(\frac{2L}{d} - \xi\right)\sqrt{\text{Bi}}\right]}{\cosh\left(\frac{2L}{d}\sqrt{\text{Bi}}\right)} = \frac{\cosh\left[(L-z)\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda d}}\right]}{\cosh\left[L\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda d}}\right]} \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

## 4.2. Diffusievergelijking

### 4.2.1. Typen randvoorwaarden

Bij de opwarming (afkoeling) door geleiding in een lichaam hebben we te doen met de diffusievergelijking voor niet-stationair transport zonder stroming:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T. \quad (4.2.1)$$

Bij deze vergelijking horen begin- en randvoorwaarden. Voor de randvoorwaarden zijn verschillende typen te onderscheiden, die men wel noemt:

1. *Randvoorwaarden van de 1e soort*,  $T_w$  is gegeven langs de rand.
2. *Randvoorwaarden van de 2e soort*,  $-\lambda(\partial T/\partial n)_w = \Phi_w''$  (warmtestroom) is gegeven langs de rand,  $\partial n$  is differentiatie langs de normaal.
3. *Randvoorwaarden van de 3e soort*,  $-\lambda(\partial T/\partial n)_w = \alpha(T_w - T_0)$ , met  $T_0$  en  $\alpha$  gegeven ( $T_w$  en  $(\partial T/\partial n)_w$  variabel met de tijd).
4. *Randvoorwaarden van de 4e soort*,  $\lambda(\partial T/\partial n)_w = \lambda_0(\partial T_0/\partial n)_w$  en  $T_w = T_{0w}$ .

Een vijfde type randvoorwaarde treedt op indien aan de wand:  $-\lambda(\partial T/\partial n)_w = c(T_w^4 - T_0^4)$ . Deze niet-lineaire randvoorwaarde treedt op indien stralingswarmtewisseling aan de wand bepalend is voor het instationaire geval. Voor dit geval zijn analytische oplossingen meestal niet te vinden. Indien het temperatuurverschil  $T_w - T_0$  klein is t.o.v.  $T_0$  kan men lineariseren, en vindt men weer de randvoorwaarde van de derde soort. Indien  $T_0$  veel groter is dan  $T_w$ , kan men  $T_w$  verwaarlozen en heeft men bij constante  $T_0$  de randvoorwaarde van de tweede soort. In andere gevallen zal men meestal de integraalmethode of numerieke methoden moeten gebruiken.

Een klassiek boek waar men analytische oplossingen voor zeer veel gevallen afgeleid zal vinden, is het boek van Carslaw en Jaeger [A1]. Uitvoerig worden analytische oplossingen verder behandeld in Luikov [A2] en Tautz [A4]. Voor stoftransport kan verwezen worden naar het boek van Crank [A3]. Menig voorkomend probleem kan voor allerlei geometrische condities in deze boeken gevonden worden.

Bij de oplossingen kan men twee gevallen onderscheiden:

1. Korte tijden, d.w.z. lage waarden van het Fouriergetal  $at/L^2 < 1$ , warmte nog niet volledig tot aan hartlijn of andere zijde lichaam doorgedrongen – *indringingsprobleem*.
2. Lange tijden,  $F_0 = at/L^2 > 1$ , warmte wel in het hele lichaam doorgedrongen, temperatuur gaat asymptotisch naar eindtoestand – *uitsterfprobleem*.

Voor het eerste geval beschikken we over de zogenaamde bronoplossingen, voor het tweede over de Fourier-oplossing met eigenfuncties.

#### 4.2.2. Grafische oplossingen diffusievergelijking

Een groot aantal problemen van de diffusievergelijking met constante coëfficiënten is voor verschillende randvoorwaarden uitgewerkt in grafische oplossingen. Deze zijn in de onder 4.2.1 genoemde boeken te vinden, zie ook uit de bibliografie (appendix I) de VDI-Wärmeatlas [C10] en het artikel van Heisler [C11]. Dit voor de geometrische condities van een  $\frac{1}{2}$ - $\infty$  medium een vlakke plaat, een cilinder en een bol.

Voor de instationaire opwarming zijn in de figuren 4.2.1 tot 4.2.4 voor een vlakke plaat, cilinder en bol de resultaten gegeven voor de randvoorwaarden van de eerste en derde soort. De resultaten zijn dimensieloos in de grafieken uitgezet. Dat wil zeggen dat  $\theta$  de relatieve temperatuur geeft en wel:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0},$$

waarbij  $T_0$  de oorspronkelijke uniforme temperatuur in het medium is en  $T_1$  de sprongtemperatuur aan de wand bij de randvoorwaarde van de eerste soort en de uitwendige temperatuur bij de randvoorwaarde van de derde soort. De tijdsafhankelijkheid is in het Fouriergetal gegeven ( $Fo = at/L^2$  of  $at/R^2$ ), terwijl bij de randvoorwaarde van de derde soort de uitwendige  $a$  gegeven is met het Biot-getal ( $Bi = \alpha L/\lambda$  of  $\alpha R/\lambda$ ).

In het algemeen is in dat geval:

$$\theta = f(Fo, Bi, L/L_0).$$

Tevens is bij de figuren gegeven  $\langle \theta \rangle$ , de gemiddelde temperatuur van het materiaal. Dit is ook direct een maat voor de functie van de maximale warmte  $Q$  die in het materiaal ingedrongen zal zijn voor het tijdstip  $t_\infty$ .

Korte tijd-oplossingen zijn uit deze grafiek minder duidelijk af te lezen.

Voor een plaat (wand) met dikte  $2L$  is daarom in fig. 4.2.5a de oplossing voor de randvoorwaarde van de eerste soort in een aparte figuur voor  $Fo \leq 0,15$  gegeven. Voor zeer lage Fourier-waarden ( $< 0,1$ ) zal de warmte nog slechts beperkt ingedrongen zijn en is de oplossing voor een  $\frac{1}{2}\infty$  medium te gebruiken, deze is in fig. 4.2.5b gegeven voor randvoorwaarden van de derde en eerste soort.

Voor stofoverdrachtsproblemen zijn in het boek van Crank [A3] voor de meest uiteenlopende randvoorwaarden oplossingen gegeven. We geven hier één geval als voorbeeld, fig. 4.2.6. Hier wordt het geval van een bol besproken, die in een vloeistofoplossing wordt gebracht met een eindig volume. Vanuit de oplossing kan een stof met concentratie  $C$  in de bol absorberen. Door diffusie neemt de bol, die oorspronkelijk een concentratie  $0$  heeft, deze stof op, tot de concentratie in bol en volume gelijk zijn. Indien de totaal in de bol op te nemen massa van de oplosbare stof  $M_\infty$  is en dit een fractie  $f$  van de oorspronkelijk in de oplossing aanwezige massa is, dan geeft de grafiek de opgenomen massa  $M$  als functie van de tijd en  $f$ . Dezelfde curve is ook geldig indien de concentraties in bol en oplossing bij  $t = \infty$  niet gelijk zijn, maar bij evenwicht door een verdelingsfactor  $K$  gegeven met:

$$C_B = K.C_0.$$

$C_B$  is concentratie in bol en  $C_0$  in oplossing voor  $t = \infty$ .



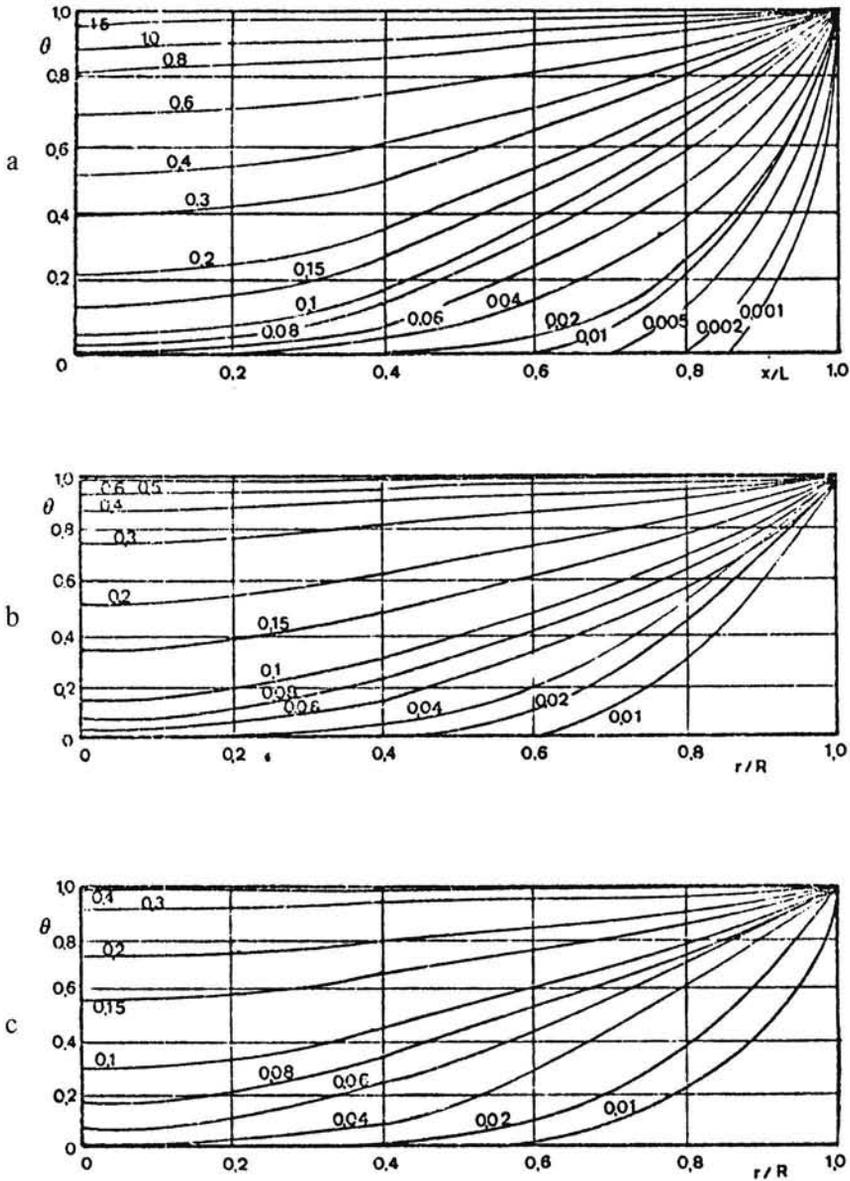


Fig. 4.2.1. Temperatuurverdelingen.

- a. In een wand met dikte  $2L$ .
  - b. In een cylinder met straal  $R$ .
  - c. In een bol met straal  $R$  met randvoorwaarden van de eerste soort.
- De bij de curven gegeven parameter is  $Fo = at/L^2$  of  $at/R^2$ .

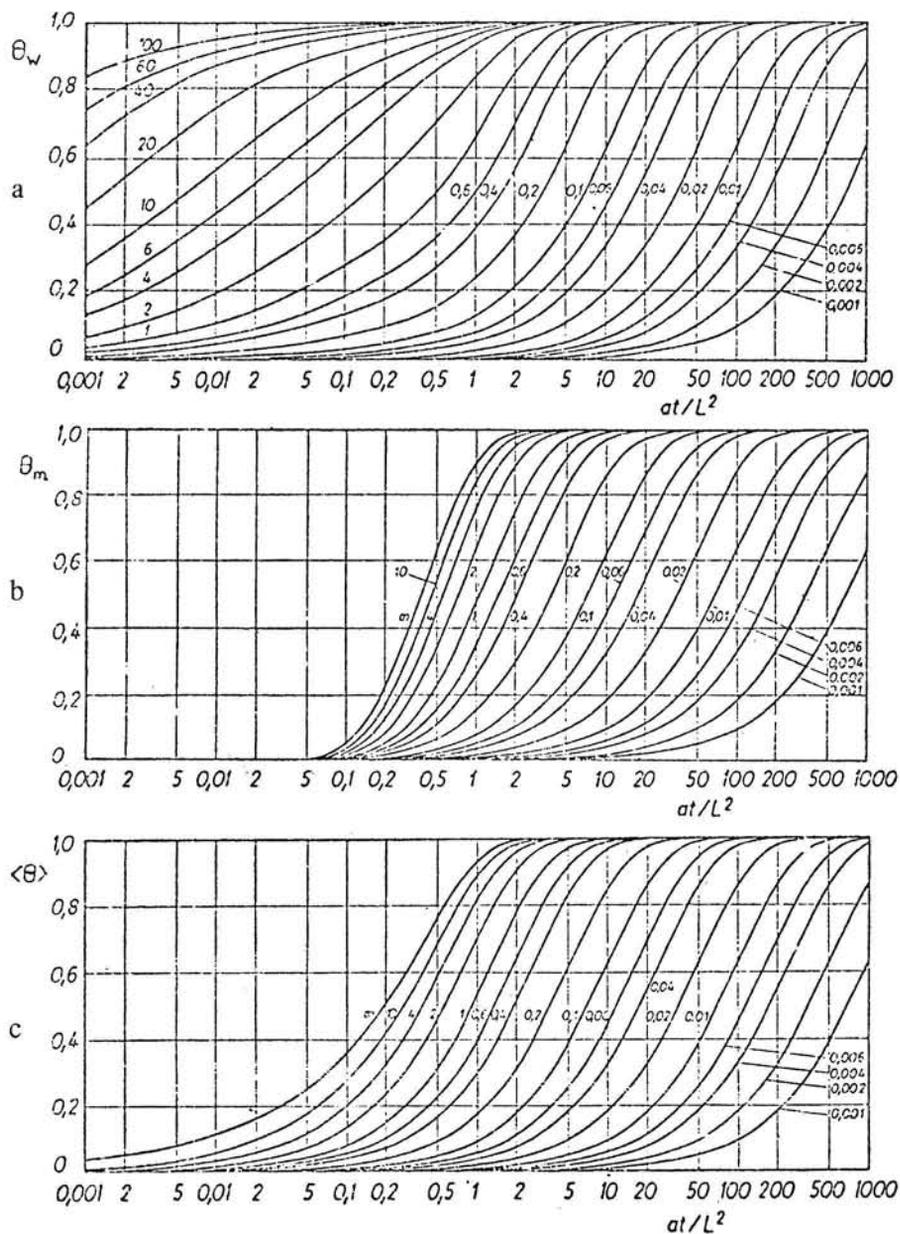


Fig. 4.2.2. Temperatuurverloop in een plaat met een dikte  $2L$ .

- Aan de wand.
- In het midden.
- Gemiddeld.

De randvoorwaarde is van het type van de derde soort. De bij de curven gegeven parameter is  $Bi = \alpha L/\lambda$ . Voor  $Bi = \infty$  heeft men de randvoorwaarde van de eerste soort.

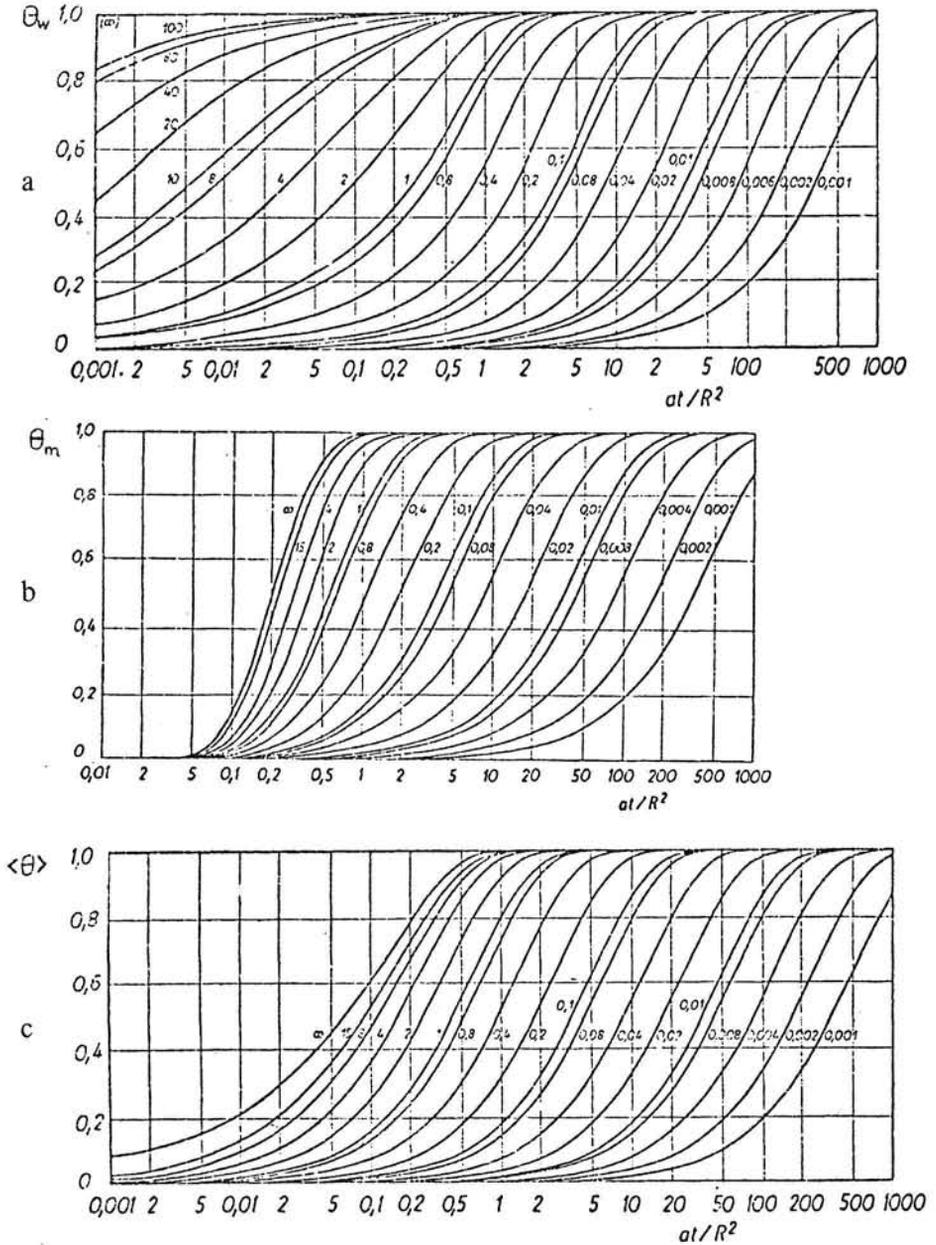


Fig. 4.2.3. Temperatuurverloop in een oneindig lange cilinder met straal R.

- a. Aan de wand.
- b. In het midden.
- c. Gemiddeld.

De randvoorwaarde is van het type van de derde soort. De bij de curven gegeven parameter is  $Bi = \alpha R/\lambda$ . Voor  $Bi = \infty$  heeft men de randvoorwaarde van de eerste soort.

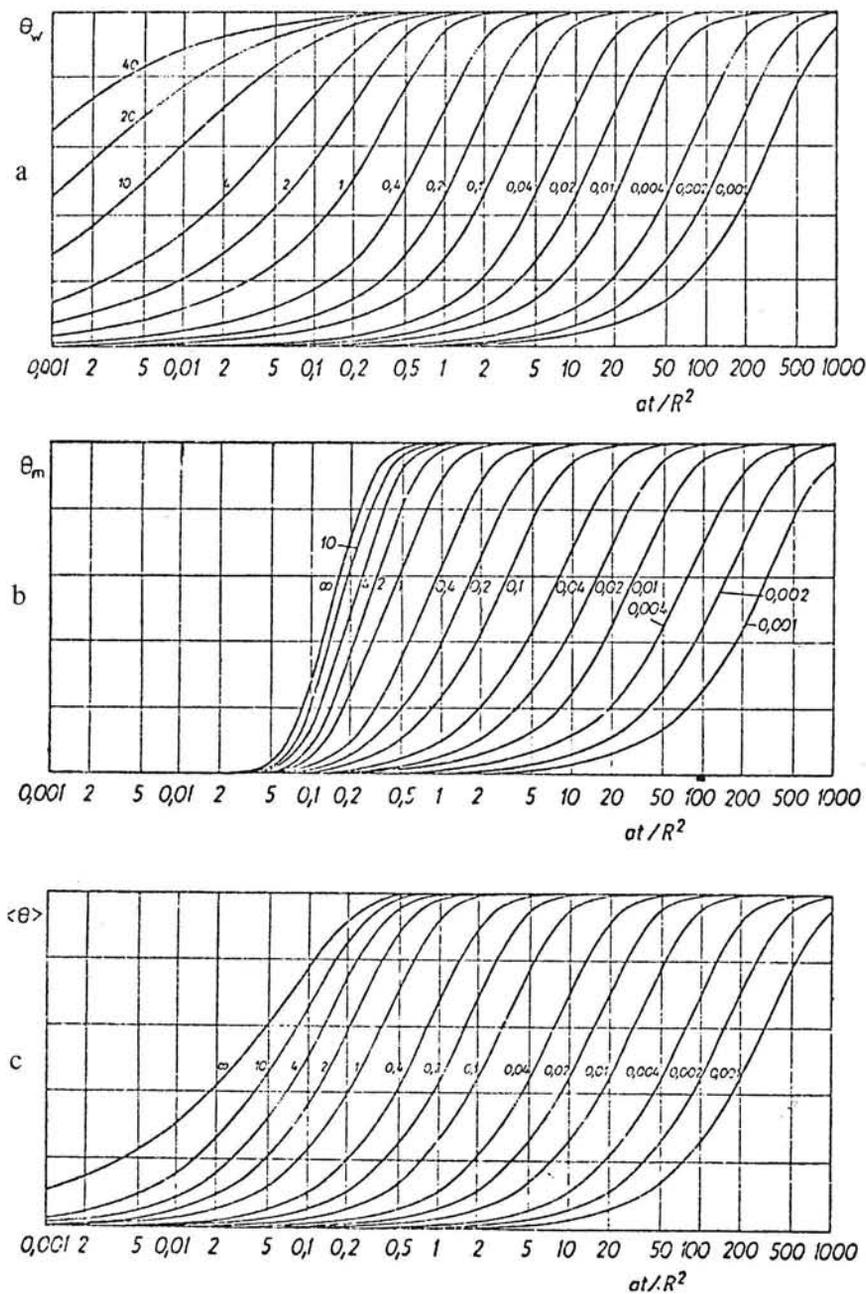


Fig. 4.2.4. Temperatuurverloop in een bol met straal R.

- a. Aan de wand.
- b. In het midden.
- c. Gemiddeld.

De randvoorwaarde is van het type van de derde soort. De bij de curven gegeven parameter is  $Bi = \alpha R/\lambda$ . Voor  $Bi = \infty$  heeft men de randvoorwaarde van de eerste soort.

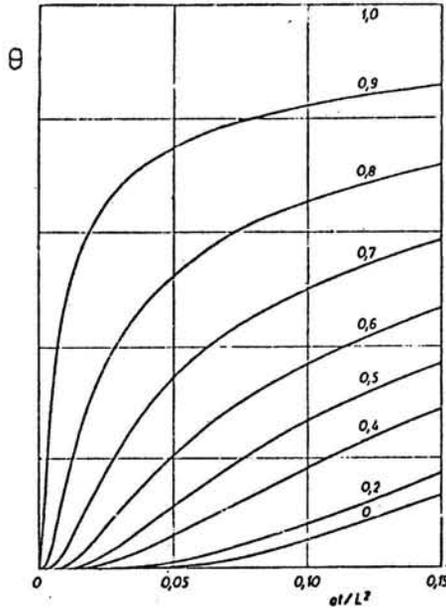


Fig. 4.2.5a. Temperatuurverdeling in een plaat met dikte  $2L$  bij kleine waarden van  $Fo$  en van het type randvoorwaarde van de eerste soort. De bij de curven gegeven parameter is  $x/L$ .

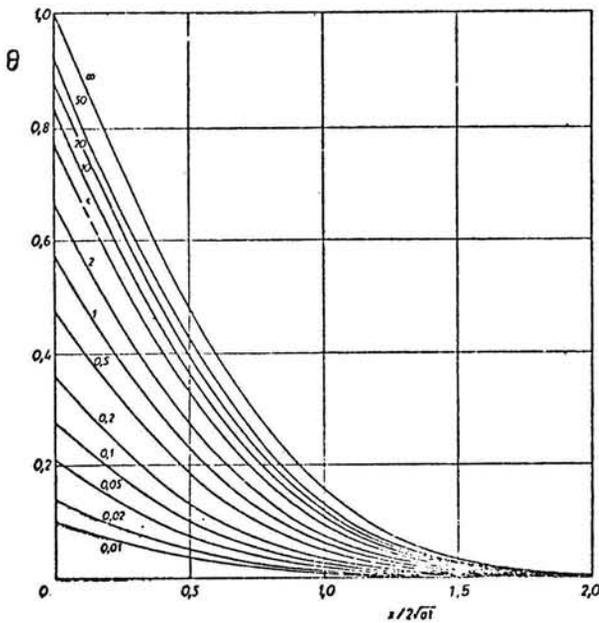


Fig. 4.2.5b. Het verloop van de wandtemperatuur van een half-oneindig medium bij een randvoorwaarde van de derde soort met als parameter  $\alpha L / \lambda$ . Voor  $\alpha = \infty$  heeft men weer de randvoorwaarde van de eerste soort.

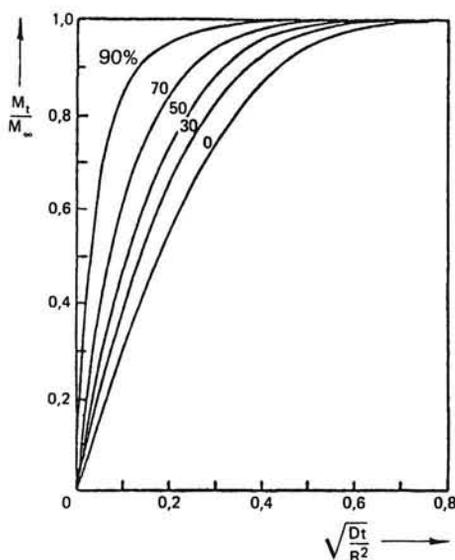


Fig. 4.2.6. De door een bol uit een oplossing met eindige volume over de tijd 0 tot  $t$  opgenomen hoeveelheid stof  $M_t$  ten opzichte van de totaal op te nemen hoeveelheid  $M_\infty$  als functie van  $\sqrt{Dt}$  en met parameter de fractie (percentage) die uit de oplossing uiteindelijk wordt opgenomen.

#### 4.2.3. De bronoplossing

Deze is uit de diffusievergelijking te vinden met de methode van samenemen van variabelen. Voor een puntbron zie § 2.7. Doe het zelf voor een lijn- of vlaktebron. Overigens zijn deze laatste ook uit die van een puntbron te vinden door integratie van een oneindig aantal puntbronnen langs een lijn resp. vlak. De bronoplossingen zijn:

1. Vlaktebron in 1 dimensie:

$$T = \frac{Q''}{\rho c_p (4\pi at)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right). \quad (4.2.2)$$

2. Lijnbron in twee dimensies:

$$T = \frac{Q'}{\rho c_p (4\pi at)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4at}\right). \quad (4.2.3)$$

3. Puntbron in drie dimensies:

$$T = \frac{Q}{\rho c_p (4\pi at)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4at}\right), \quad (4.2.4)$$

waarbij  $Q''$ ,  $Q'$  en  $Q$  de warmte is, gegenereerd resp. per eenheid van oppervlakte, per eenheid van lengte, en totaal. Nemen we bijvoorbeeld de vlaktebron in slechts een richting (+x), dan is  $Q'' = 2 Q_\omega$ , waar  $Q_\omega$  de werkelijke warmte-impuls is, bijvoorbeeld door straling.

De bronplossing is bijzonder geschikt om temperatuurverdelingen (of concentratieverdelingen) en warmtestromen (of stofstromen) na korte tijd te berekenen. Toepassing op niet-oneindig uitgestrekte media is mogelijk door met zogenaamde virtuele bronnen te werken. Een groot aantal problemen kan worden opgelost door superpositie van bronplossingen in de plaats en in de tijd.

Enkele voorbeelden met enkelvoudige bronnen.

- a. Bron  $Q''$ , losgelaten op  $x = b$  en  $t = t'$ . De temperatuur als functie van  $x$  en  $t$  wordt gegeven door:

$$T = \frac{Q''}{\rho c_p} \frac{\exp \left\{ -(x - b)^2 / 4a(t - t') \right\}}{\sqrt{4\pi a(t - t')}} \quad (4.2.5)$$

Zie ook fig. 4.2.7.

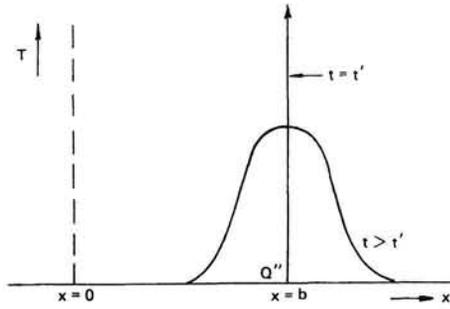


Fig. 4.2.7. Vlakke bron op  $x = b$  en  $t = t'$ .

- b. Bron  $Q''$ , losgelaten op  $x = b$  in een half-oneindig medium ( $x > 0$ ), dat op  $x = 0$  zeer goed is geïsoleerd. Voldaan moet dus worden aan de voorwaarde:  $x = 0, \partial T / \partial x = 0$  (fig. 4.2.8).

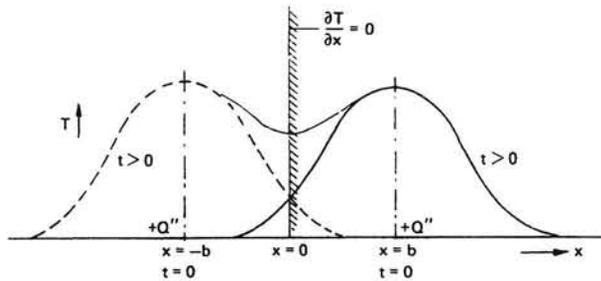


Fig.4.2.8. Vlakke bron op afstand  $b$  van isolerend vlak.

Aan de laatste voorwaarde kan worden voldaan door op  $x = -b$  eveneens een *virtuele bron* te plaatsen. De temperatuur  $T$  volgt uit de som van de bijdragen van beide bronnen:

$$T = \frac{Q''}{\rho c_p} \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \left[ e^{-(x-b)^2/4at} + e^{-(x+b)^2/4at} \right] \quad (4.2.6)$$

Controleer de randvoorwaarde voor  $x = 0$ .

- c. Bron  $Q''$ , losgelaten op  $x = b$  in half-oneindig medium ( $x > 0$ ), waarvan op  $x = 0$   $T = 0$  wordt gehouden. Aan deze voorwaarde kan worden voldaan door op  $x = -b$  een *negatieve* (virtuele) bron te plaatsen met grootte  $Q''$ . De temperatuur wordt verkregen door de bijdragen van beide bronnen te superponeren (zie ook fig. 4.2.9):

$$T = \frac{Q''}{\rho c_p} \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} [e^{-(x-b)^2/4at} - e^{-(x+b)^2/4at}]. \quad (4.2.7)$$

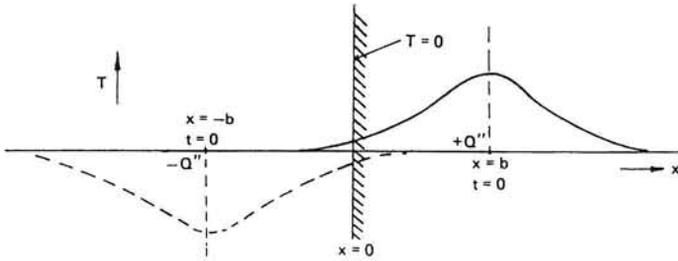


Fig. 4.2.9. Vlakke bron op afstand  $b$  van vlak waar  $T = 0$ .

- d. Bron  $Q''$ , losgelaten op  $x = b$  in een medium begrensd door  $x = 0$  en  $x = L$  ( $b$  is beduidend kleiner dan  $L$ ). Op de eindvlakken geldt bijvoorbeeld de voorwaarde  $\partial T/\partial x = 0$  (zeer goede isolatie). De oplossing van dit probleem wordt door (4.2.6) gegeven zolang de warmtegolf nog ver van  $x = L$  verwijderd is. De voorwaarde hiervoor is dat  $\sqrt{at} \ll L - b$ . Wordt niet meer aan deze voorwaarde voldaan, dan moet, om het probleem ook symmetrisch t.o.v.  $x = L$  te maken, een bron op  $x = 2L - b$  worden aangebracht. Hierdoor dreigt op iets langere termijn de symmetrie t.o.v.  $x = 0$  weer verstoord te raken, zodat voor nog iets langere tijden een virtuele bron bij  $x = -2L + b$  moet worden geplaatst, enz. De temperatuur wordt zo voorgesteld door een reeks:

$$T = \frac{Q''}{\rho c_p} \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} [e^{-(x-b)^2/4at} + e^{-(x+b)^2/4at} + e^{-(x-2L+b)^2/4at} + e^{-(x+2L-b)^2/4at} + e^{-(x-2L-b)^2/4at} + e^{-(x+2L+b)^2/4at} + \dots]. \quad (4.2.8)$$

Hoe groter  $t$  wordt, des te meer termen moet men in (4.2.8) meenemen. Bij dergelijke lange tijden is de bronoplossing minder geschikt dan de Fourier-oplossing, die juist minder termen nodig heeft naarmate  $t$  groter wordt.

4.2.4. Sommatie van bronnen en Greense functies

De oplossing voor een vlaktebron (vgl. 4.2.2) is de respons op een warmte-impuls van de differentiaalvergelijking (4.2.1) met randvoorwaarden. In de wiskunde noemt men dit de Greense functie  $G(x,t)$ ; dat is in het algemeen de respons van het systeem op een puls( $\delta$ )functie, waarbij:

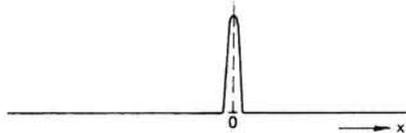


$$\delta(x) = 0 \quad \text{voor } x \neq 0$$

en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

(zie fig. 4.2.10).

Fig. 4.2.10.  $\delta$ -functie.

Voor het één-dimensionale geval is dan voor de diffusievergelijking

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right). \quad (4.2.10)$$

Met een dergelijke  $G(x,t)$  zijn nu allerlei problemen op te lossen.

## a. Sommatie in de plaats

Als

$$T = f(b), \quad t = 0, \quad \text{dan}$$

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G\{(x-b),t\} f(b) db = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(b) \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{4at}\right\} db \quad (4.2.11)$$

Als men twee media met dezelfde thermische eigenschappen maar verschillende temperaturen ( $T_0$  en 0) op  $t = 0$  met elkaar in warmtecontact brengt, krijgt men een eenvoudige oplossing van (4.2.11). Als het contactvlak ligt op  $x = 0$ , dan geldt bijvoorbeeld  $f(b) = T_0$  voor  $x < 0$  en  $f(b) = 0$  voor  $x > 0$ . De temperatuurverdeling wordt dan:

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_0}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^0 e^{-(x-b)^2/4at} db = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} e^{-q^2} dq \\ &= \frac{1}{2} T_0 \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = \frac{1}{2} T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Dezelfde temperatuurverdeling krijgt men, als een half-oneindig medium met  $T = 0$ , vanaf  $t = 0$  aan de wand een constante temperatuur  $T_0/2$  opgedrukt krijgt.

## b. Sommatie in de tijd

Voor het geval dat in een bepaald vlak (bijvoorbeeld  $x = 0$ ) een voortdurende warmteproductie  $\Phi_w''(t)$  plaatsvindt, kan men deze als een achtereenvolgens loslaten van instantane bronnen  $dQ''$  beschouwen. Met  $t'$  als lopende tijdcoördinaat heeft men dan:

$$dQ'' = \Phi_w''(t') dt'.$$

Verder zij bij  $t = 0$  voor alle  $x$ -waarden  $T = 0$ , en  $\Phi_w''(t) = 0$  voor  $t < 0$ .

Aangezien de Greense functie een respons op een temperatuur-functie  $T(x)$  is, moeten we de  $\Phi_w''(t')dt'$  delen door  $(\rho c_p)$  en dan

$$\left. \begin{aligned} \text{of: } T(x,t) &= \int_0^t G(x,t-t') \cdot \frac{\Phi_w''(t')}{\rho c_p} dt' \\ T &= \int_0^t \frac{\Phi_w''(t') \exp -x^2/4a(t-t')}{\rho c_p \sqrt{4\pi a(t-t')}} dt' \end{aligned} \right\} \quad (4.2.13)$$

In het betrekkelijk eenvoudige geval dat voor  $t \geq 0$   $\Phi_w''(t) = \text{constant} = \Phi_w''$  is, vindt men voor de temperatuur:

$$T = \Phi_w'' \left[ \sqrt{\frac{t}{\pi \lambda c_p \rho}} e^{-x^2/4at} - \frac{x}{2\lambda} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right], \quad (4.2.14)$$

en

$$T_{x=0} = \Phi_w'' \sqrt{\frac{t}{\pi \lambda c_p \rho}}. \quad (4.2.15)$$

Men moet hierbij bedenken dat de warmtestroom  $\Phi_w''$  gelijk over de positieve en negatieve  $x$ -richting is verdeeld. Heeft men nu een half-oneindig medium waar op bijvoorbeeld door straling, een constante netto warmtestroom  $\Phi_s''$  terecht komt, dan is

$$T_{x=0} = 2\Phi_s'' \sqrt{t/\pi \lambda c_p \rho}. \quad (4.2.16)$$

Een zeer elegante afleiding van dit resultaat is te vinden in Carslaw en Jaeger, paragraaf 2.9.

### c. Sommatie in tijd en plaats

Een voorbeeld waarbij zowel sommatie in de plaats als in de tijd een rol spelen is het volgende probleem:

De instationaire opwarming van een half-oneindig medium waar gedurende een discrete tijd vanaf  $t = 0$  tot  $t = \tau$  een constante en uniforme warmteproductie plaatsvindt in het gebied  $0 \leq x \leq h$ .

Fysisch doet zich dit bijvoorbeeld voor bij het reeds eerder besproken (§ 2.5) voorbeeld van de piektemperatuur van een draaiende röntgen-anode. Eerder werd de warmtedissipatie volledig aan het oppervlak van de focus verondersteld, in werkelijkheid dringt de elektronenbundel tot een zekere afstand  $h$  in. We nemen de dissipatie nu constant per volume en tijdseenheid in het gebied  $0 \leq x \leq h$ . De differentiaalvergelijkingen voor  $0 \leq x \leq h$  en  $x \geq h$  zijn resp.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{Q}{\lambda} &= 0 & 0 \leq x \leq h \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_2}{\partial t} &= 0 & x > h \end{aligned} \right\} \quad (4.2.17)$$

met rand- en beginvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} t \leq 0, \quad T_1 = T_0, \quad T_2 = T_0 \quad \text{en} \quad Q = 0 \\ t > 0: \quad x = 0, \quad \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \\ x = h, \quad T_1 = T_2 \quad \text{en} \quad \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x=h} = \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{x=h} \\ x = \infty, \quad T_2 = T_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.18)$$

De bronterm  $\frac{Q}{\lambda}$  in de eerste vergelijking (4.2.17) laten we nu in de differentiaalvergelijking vervallen en vervangen dit door bronnen als beginvoorwaarden over de tijd 0 tot  $\tau$  en over de plaatsen 0 tot  $h$ . Voor de sommatie in de plaats moeten we er rekening mee houden dat  $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ , hetgeen spiegeling van de bron op plaats  $x'$  vereist naar zijn gespiegelde op  $-x'$ . Sommatie over de tijd  $t'$  van 0 tot  $t$  ( $t \leq \tau$ ) en over de plaats  $x'$  van 0 tot  $h$  (inclusief spiegeling!) geeft:

$$T = T_0 + \frac{Q}{\rho c_p} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-t')}} \left\{ \int_0^h \exp \frac{-(x-x')^2}{4a(t-t')} dx' + \int_0^h \exp \frac{-(x+x')^2}{4a(t-t')} dx' \right\} dt' \quad (4.2.19)$$

$$\int_0^h e^{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}} dx' = A = \sqrt{4a(t-t')} \int_{(x-h)/\sqrt{4a(t-t')}}^{x/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq, \quad (4.2.20)$$

$$A = \sqrt{4a(t-t')} \left\{ \int_0^{(h-x)/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq + \int_0^{x/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq \right\}$$

$$\int_0^h e^{-\frac{(x+x')^2}{4a(t-t')}} dx' = B = \sqrt{4a(t-t')} \int_{x/\sqrt{4a(t-t')}}^{(x+h)/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq$$

$$B = \sqrt{4a(t-t')} \left\{ \int_0^{(h+x)/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq - \int_0^{x/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq \right\}$$

$$A + B = \sqrt{4a(t-t')} \left\{ \int_0^{(h-x)/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq + \int_0^{(h+x)/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq \right\}$$

zodat

$$T = T_0 + \frac{Q}{\rho c_p \sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^t \left( \int_0^{(h-x)/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq \right) dt' + \int_0^t \left( \int_0^{(h+x)/\sqrt{4a(t-t')}} e^{-q^2} dq \right) dt' \right\}$$

$$\begin{aligned}
 T &= T_0 + \frac{Q}{2\rho c_p} \left\{ \int_0^t \operatorname{erf} \frac{(h-x)}{\sqrt{4a(t-t')}} dt' + \int_0^t \operatorname{erf} \frac{(h+x)}{\sqrt{4a(t-t')}} dt' \right\} = \\
 &= T_0 + \frac{Q}{2\rho c_p} \left\{ \int_{(h-x)/\sqrt{4at}}^{\infty} \frac{2(h-x)^2}{4a} \frac{\operatorname{erf} p}{p^3} dp + \int_{(h+x)/\sqrt{4at}}^{\infty} \frac{2(h+x)^2}{4a} \frac{\operatorname{erf} p}{p^3} dp \right\}
 \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Nu is  $\int_r^{\infty} \frac{\operatorname{erf} p}{p^3} dp = \int_r^{\infty} \left( \frac{1}{p^3} - \frac{\operatorname{erfc} p}{p^3} \right) dp = \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2} \int_r^{\infty} \operatorname{erfc} p \, d\left(\frac{1}{p^2}\right)$ .

Tweemaal partieel integreren geeft:

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname{erf} p}{p^3} dp = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{erfc} r}{r^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-r^2}}{r} - \operatorname{erfc} r. \tag{4.2.22}$$

Vergelijking (4.2.21) kan men ook schrijven als:

$$T = T_0 + \frac{Qt}{\rho c_p} \left\{ r^2 \int_r^{\infty} \frac{\operatorname{erf} p}{p^3} dp + s^2 \int_s^{\infty} \frac{\operatorname{erf} p}{p^3} dp \right\}, \text{ waarin } r = \frac{(h-x)}{\sqrt{4at}}$$

$$s = \frac{(h+x)}{\sqrt{4at}}$$

dus

$$\begin{aligned}
 T &= T_0 + \frac{Qt}{\rho c_p} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ (1 + 2r^2) \operatorname{erfc} r - \frac{2}{\sqrt{\pi}} r e^{-r^2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ (1 + 2s^2) \operatorname{erfc} s - \frac{2}{\sqrt{\pi}} s e^{-s^2} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Nu is:

$$(1 + 2u^2) \operatorname{erfc} u - \frac{2}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} = 4i^2 \operatorname{erfc} u, \tag{4.2.24}$$

zodat

$$T = T_0 + \frac{Qt}{\rho c_p} \left\{ 1 - 2i^2 \operatorname{erfc} \frac{(h-x)}{\sqrt{4at}} - 2i^2 \operatorname{erfc} \frac{(h+x)}{\sqrt{4at}} \right\} \tag{4.2.25}$$

De piektemperatuur wordt bereikt voor  $t = \tau$  en  $x = 0$ , dus

$$T_{\max} = T_0 + \frac{Q\tau}{\rho c_p} \left\{ 1 - 4i^2 \operatorname{erfc} \frac{h}{2\sqrt{a\tau}} \right\}. \tag{4.2.26}$$

Bijzondere gevallen zijn de limieten voor

$$\frac{h}{\sqrt{a\tau}} \rightarrow \infty \text{ en } \frac{h}{\sqrt{a\tau}} \rightarrow 0.$$

In het eerste geval  $\left(\frac{h}{\sqrt{a\tau}} \rightarrow \infty\right)$  is  $i^2 \operatorname{erfc} \frac{h}{\sqrt{a\tau}} \rightarrow 0$  en dus

$$T_{\max} = T_0 + \frac{Qa\tau}{\lambda}. \tag{4.2.27}$$

$\sqrt{a\tau}$  is de thermische indringdiepte,  $h$  de warmtebronindringdiepte. Als deze laatste veel groter is dan de eerste, is het totale effect een 'adiabatische homogene opwarming' van het gebied  $0 < x < h$  tot een temperatuurverhoging  $T_a (= Qa\tau/\lambda)$ .

In het tweede geval ( $\frac{h}{\sqrt{a\tau}} \rightarrow 0$ ) gebruiken we (4.2.24): reeksontwikkeling van de linker twee termen geeft voor kleine  $x$ :

$$4i^2 \operatorname{erfc} x \approx 1 - \frac{4x}{\sqrt{\pi}}$$

en

$$T_{\max} = T_0 + 2 \frac{Qa\tau}{\lambda} \frac{h}{\sqrt{a\pi\tau}}. \quad (4.2.28)$$

Nu is  $Q \cdot h$  het vermogen dat in het gebied  $0 < x < h$  wordt gedissipeerd per eenheid van oppervlakte voor een oppervlak loodrecht op  $x$ . Dit kunnen we als een warmtestroom  $\phi_w''$  zien, dit geeft:

$$T = T_0 + \frac{2\phi_w'' \sqrt{a\tau}}{\lambda \sqrt{\pi}}, \quad (4.2.29)$$

hetgeen de oplossing is voor het reeds eerder behandelde geval van energiedissipatie alleen in het oppervlak (§ 2.5). Nu is de brondiepte klein t.o.v. de thermische energie.

Het blijkt dat de oplossing volgens vergelijking (4.2.27) tot op 10% goed is voor  $\frac{h}{2\sqrt{a\tau}} > 0,8$  en die van vergelijking (4.2.28) voor  $\frac{h}{2\sqrt{a\tau}} < 0,15$ .

### Kwantitatief voorbeeld

We beschouwen een holle cilindrische koperen röntgenanode. De diameter is 0,318 m ( $\pi D = 1$  m), het toerental 150 omw/s en de energie 500 W. De focus is nu klein, 200  $\mu$  hoog en 20  $\mu$  breed, zie voor principe fig. 2.5.1. We mogen aannemen dat de intensiteit van de indringende elektronenbundel lineair afneemt over een afstand  $x = 0$  tot  $x = h$  en bij  $x = h$  de waarde 0 heeft. De energiedissipatie naar warmte nemen we 100%. Afkoeling van het buitenoppervlak  $x = 0$  naar de omgeving voor de periode van belichting mag verwaarloosd worden. De achtergrondtemperatuur van de anode is 200°C en is na elke omwenteling weer bereikt. We beschouwen elektronenindringdiepten  $h$  van 1,3 en 10  $\mu\text{m}$  respectievelijk. Voor koper veronderstellen we als constant:  $\lambda = 335 \text{ W/mK}$  en  $a = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

$\tau$  is de tijd gedurende welke een bepaalde lijn van de anode door de focus draait,

$$\tau = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{150 \cdot 1} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ s}.$$

Dit geeft  $a\tau = 9 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$  en de thermische indringdiepte is  $\sqrt{a\tau} = 3 \mu\text{m}$ . De warmteproductie per volume en tijdseenheid is:

$$Q = \frac{500}{20 \cdot 200 \cdot 10^{-12} \text{ h}} = 1,25 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{h}} \text{ W/m}^3.$$

Dit geeft met:

$$T_{\max} = 200 + \frac{Qa\tau}{\lambda} \left\{ 1 - 4i^2 \operatorname{erfc} \frac{h}{2\sqrt{a\tau}} \right\}$$

en met behulp van tabellen van  $i^2 \operatorname{erfc} \frac{h}{2\sqrt{a\tau}}$ :

$$\begin{aligned} h = 10 \mu\text{m}, \quad T_{\max} &= 547 \text{ }^\circ\text{C} \\ h = 3 \mu\text{m}, \quad T_{\max} &= 1025 \text{ }^\circ\text{C} \\ h = 1 \mu\text{m}, \quad T_{\max} &= 1276 \text{ }^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

#### 4.2.5. Lijn- en puntbronnen

##### a. Cilindersymmetrische warmtegeleiding, lijnbron

Men laat in een homogeen medium op  $t = 0$  over de gehele, oneindige lengte van de lijn  $x = 0$  en  $y = 0$  per eenheid van lengte in de  $z$ -richting, een hoeveelheid warmte  $Q'$  (J/m) los. Het temperatuurveld  $T(x,y,t)$  wordt in dit geval gegeven door:

$$T = \frac{Q'}{\rho c_p} \frac{\exp -(x^2 + y^2)/4at}{4\pi a t} = \frac{Q'}{\rho c_p} \frac{\exp(-r^2/4at)}{4\pi a t}, \quad (4.2.30)$$

waarin  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  de afstand tot deze 'lijnbron' voorstelt.

Sommatie over tijd en plaats is weer mogelijk, maar leidt veelal tot moeilijke integralen. Vrij eenvoudig is nog de afleiding van (4.2.2) door de vlakke bron  $Q''$  te beschouwen als een som van lijnbronnen in het vlak  $x = 0$ , ter grootte  $Q'' dy$ :

$$T = \frac{Q''}{\rho c_p} \frac{1}{4\pi a t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/4at} dy = \frac{Q''}{\rho c_p} \frac{e^{-x^2/4at}}{\sqrt{4\pi a t}}. \quad (4.2.31)$$

Het temperatuurgebied rondom een dunne draad in een oneindig uitgebreid medium met aanvangstemperatuur  $T = 0$ , die vanaf  $t = 0$  een constante warmteproductie  $\Phi'_w$  (W/m) levert, volgt uit een sommatie over de tijd van lijnbronnen met sterkte  $\Phi'_w dt$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Phi'_w}{\rho c_p} \int_0^t \frac{\exp -r^2/4a(t-t')}{4\pi a(t-t')} dt' = \frac{\Phi'_w}{4\pi\lambda} \int_{r^2/4at}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q} dq = \\ &= \frac{\Phi'_w}{4\pi\lambda} (-0,577 \dots - \ln x' + x' - \frac{(x')^2}{2.2!} + \frac{(x')^3}{3.3!} - \dots), \end{aligned}$$

waarin  $x' = r^2/4at$  (4.2.32)

$$\approx \frac{\Phi'_w}{4\pi\lambda} (-0,577 \dots + \ln \frac{4at}{r^2}), \text{ als } 4at/r^2 \gg 1.$$

Hierin is 0,577 ... de zogenaamde constante van Euler, een transcendent getal. Op deze betrekking berust een niet-stationaire meetmethode voor de bepaling van de warmtegeleidingscoëfficiënt. Gemeten wordt de temperatuur op voldoende kleine afstand van de draad. Uit de helling, die de  $T, \ln t$ -grafiek na korte tijd krijgt, volgt  $\Phi'_w/4\pi\lambda$ , dus  $\lambda$ , zie bibliografie [C12]. Een voordeel van de methode is de mogelijkheid met korte meettijden te werken, waardoor

ook in vloeistoffen en gassen kan worden gemeten, doordat convectie dan nog te verwaarlozen is.

Een probleem waarbij integratie over de plaats te pas komt, is dat van de gloeiende klinknagel (temperatuur  $T_0$ ) die in een koude plaat (temperatuur 0) gebracht wordt. Na enigszins lange tijd en niet te korte afstand van de klinknagel kan men de temperatuur in de plaat beschrijven met een lijnbron (4.2.30) waarin  $Q' = \pi R^2 \rho c_p T_0$  de warmte-inhoud van de klinknagel per eenheid van hoogte voorstelt. Zelfs kan men nog iets verder gaan en de zijdelingse warmte-afgifte van het plaatoppervlak in rekening brengen. De differentiaalvergelijking wordt dan namelijk:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{2\alpha}{h\rho c_p} T, \quad (4.2.33)$$

waarin  $h$  de dikte van de plaat voorstelt. De oplossing van deze vergelijking luidt:

$$T = \frac{Q'}{\rho c_p} \frac{\exp(-r^2/4at)}{4\pi at} \exp(-2\alpha t/h\rho c_p). \quad (4.2.34)$$

Ga na, dat deze oplossing voldoet aan de differentiaalvergelijking en dat men haar kan vinden door oplossing (4.2.30) voorzien van een onbekende factor  $F(t)$  in de vergelijking in te voeren en  $F(t)$  daaruit op te lossen.

#### b. Bolsymmetrische warmtegeleiding, puntbron

In een homogeen medium laat men op  $x = y = z = 0$  en  $t = 0$  een hoeveelheid warmte  $Q$  los; voor  $t < 0$  is overal de temperatuur  $T = 0$ . De bronoplossing voor dit bolsymmetrische geval luidt:

$$T = \frac{Q}{\rho c_p} \frac{\exp(-(x^2 + y^2 + z^2)/4at)}{(4\pi at)^{3/2}} = \frac{Q}{\rho c_p} \frac{\exp(-r^2/4at)}{(4\pi at)^{3/2}}, \quad (4.2.35)$$

waarin  $r$  de afstand tot de puntbron voorstelt. Ga na, dat men door integratie over  $z$  de lijnbron (4.2.30) terugvindt.

Ook hier kunnen we met behulp van sommatie in plaats en tijd veel niet-stationaire geleidingsproblemen berekenen. Leid zelf af, dat voor het temperatuurveld rond een punt, waarin vanaf  $t = 0$  een constante warmtestroom  $\Phi_w$  wordt geproduceerd, geldt:

$$T = \frac{\Phi_w}{4\pi\lambda r} \operatorname{erfc} \frac{r}{\sqrt{4at}}.$$

De met (4.2.35) overeenkomende uitdrukking voor het concentratieveld ten gevolge van diffusie om een punt, waarin vanaf  $t = 0$  een hoeveelheid  $Q_B$  van een stof  $B$  is geïnjecteerd, luidt:

$$c_B = Q_B \frac{\exp(-r^2/4Dt)}{(4\pi Dt)^{3/2}}.$$

Injecteert men deze hoeveelheid in de punt van een kegel met tophoek  $\Omega$ , en is alleen diffusie in de kegel mogelijk, dan moet bovenstaande  $c_B$  met  $4\pi/\Omega$

worden vermenigvuldigd. Waarom mag dat? Bij alle diffusie- (en uiteraard ook warmtegeleidings-)problemen in gassen en vloeistoffen, dient men erop bedacht te zijn, dat stroming ten gevolge van dichtheidsverschillen kan optreden; berekeningen als hierboven zijn dan niet meer toepasbaar.

#### 4.2.6. Penetratietheorie en theorema van Duhamel

##### a. Randvoorwaarden 1<sup>e</sup> (penetratietheorie) en 3<sup>e</sup> soort

Een veel voorkomend geval van warmte-indringing is dat voor  $t > 0$  voor het vlak  $x = 0$  plotseling de temperatuur op  $T = T_1$  wordt gebracht (randvoorwaarde van de 1<sup>e</sup> soort). Dit is als voorbeeld al behandeld bij Laplace-transformaties. Eleganter gaat het ook op met bronoplossingen, zie paragraaf 4.2.4. We vonden:

$$\frac{T}{T_1} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (4.2.36)$$

Dit is ook direct met de methode van samennemen van variabelen uit de differentiaalvergelijking eenvoudig af te leiden. We vinden:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \frac{-T_1}{\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

en dus:

$$\Phi_w'' = -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \frac{\lambda T_1}{\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (4.2.37)$$

Dit is het resultaat van de zogenaamde *penetratietheorie* (in FT I uitvoerig besproken).

Een andere veel voorkomende randvoorwaarde is die van de 3<sup>e</sup> soort, met  $\Phi_w'' = \alpha(T_0 - T_w)$ , voor constante  $\alpha$ . Oplossingen hiervoor zijn door toepassing van Laplace-transformatie op de differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden te vinden. Wij geven hier alleen het resultaat en wel voor het geval dat  $T = 0$  voor  $t = 0$ :

$$\frac{T}{T_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \exp\left[\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}at\right] \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{at}\right) \quad (4.2.38)$$

In fig. 4.2.5b is een grafische oplossing van dit probleem gegeven, met  $\theta = \frac{T}{T_0}$ . Voor de oppervlaktetemperatuur ( $x = 0$ ) geeft dit:

$$\frac{T_w}{T_0} = 1 - \exp\left[\frac{\alpha^2}{\lambda^2}at\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{at}\right], \quad (4.2.39)$$

hetgeen voor kleine  $\left(\frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{at}\right)$ -waarden geeft:

$$\frac{T_w}{T_0} = \frac{2\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{at}{\pi}} \quad (\text{kleine } t). \quad (4.2.40)$$

De warmtestroom wordt gegeven door  $\alpha(T_0 - T_w)$  en dus:



$$\Phi_w'' = \alpha T_0 \exp\left[\frac{\alpha^2}{\lambda^2} at\right] \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{at}\right) \quad (4.2.41a)$$

en voor zeer kleine  $t$ -waarden:

$$\Phi_w'' = \alpha T_0 \left[1 - \frac{2\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{at}{\pi}}\right]. \quad (4.2.41b)$$

### b. Theorema van Duhamel

Tot slot beschouwen we het geval dat als randvoorwaarde, in plaats van de gegeven constante concentratie  $c_0$  aan het oppervlak van een half-oneindig, eendimensionaal medium, de concentratie  $c_0(t)$  een gegeven functie is van de tijd. Voor de oplossing van dit probleem gaan we uit van (4.2.36). Ten tijde  $t = t'$  neemt in een tijdspanne  $dt'$  de oppervlakteconcentratie toe met  $(dc_0/dt')dt'$ . Wat is het gevolg van deze 'deelverandering' in de oppervlakteconcentratie voor de concentratie in het gehele medium?

Volgens (4.2.36) is dat:

$$dc(x, t) = \frac{dc_0(t')}{dt'} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D(t-t')}} dt'; \quad (t > t'). \quad (4.2.42)$$

Sommatie van de bijdragen van elk tijdstip  $t'$  levert:

$$c(x, t) = \int_{t'=0}^{t'=t} \frac{dc_0(t')}{dt'} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D(t-t')}} dt'. \quad (4.2.43)$$

Door partieel integreren krijgen we (voor  $t' = 0$  ook de oppervlakteconcentratie nul!):

$$c(x, t) = - \int_{t'=0}^{t'=t} c_0(t') \frac{\partial}{\partial t'} \left( \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D(t-t')}} \right) dt'. \quad (4.2.44)$$

Of, desgewenst

$$c(x, t) = + \int_{t'=0}^{t'=t} c_0(t') \frac{\partial}{\partial t'} \left( \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D(t-t')}} \right) dt'. \quad (4.2.45)$$

Dit superpositie-principe staat bekend als het theorema van Duhamel (1883); zie bijvoorbeeld Carslaw-Jaeger 1.14 [A1]. We vestigen er ten overvloede nog de aandacht op dat dit algemene resultaat voor willekeurige  $c_0(t)$  ook verkregen kan worden door Laplace-transformatie toe te passen en het resultaat terug te transformeren met het zogenaamde Faltung-theorema (zie Carslaw-Jaeger 12.4 en 12.2).

Ook is voor dit geval nog af te leiden de relatie voor de massaflux  $\Phi_m''$  voor  $x = 0$  bij gegeven  $c_0(t)$ . Immers:

$$d\Phi_m''(t)_{x=0} = \frac{dc_0(t')}{dt'} dt' \cdot \sqrt{\frac{D}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-t'}}$$

Dit geeft:

$$\Phi_m''(t)_{x=0} = \sqrt{\frac{D}{\pi}} \int_0^t \frac{dc_0(t')}{dt'} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-t'}} \cdot dt' \quad (4.2.46)$$

Als  $c_0(t') = k \cdot t'$  dan:

$$\Phi_m''(t)_{x=0} = \sqrt{\frac{D}{\pi}} \cdot k \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-t'}} dt' = 2k \sqrt{\frac{D}{\pi}} \cdot \sqrt{t} \quad (4.2.47)$$

In het bovenstaande is ervan uitgegaan dat  $c_0(t)$  een continue, differentieerbare functie van de tijd is. Dit zal fysisch ook wel meestal zo zijn. Het is denkbaar dat in benadering er ook discontinue sprongen in  $c_0$  zijn op  $N$  tijdstippen  $t'_i$  met discrete stappen van  $\Delta c_0(t'_i)$ .

Ieder van deze sprongen geeft voor  $c(x, t)$  een bijdrage volgens de penetratietheorie die we op (4.2.45) mogen superponeren. We vinden dan in het algemeen:

$$c(x, t) = \int_{t'=0}^{t'=t} c_0(t') \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D(t-t')}} dt' + \sum_{i=1}^{i=N} \Delta c_0(t'_i) \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D(t-t'_i)}} \quad (4.2.45b)$$

#### 4.2.7. Contacttemperatuur bij twee verschillende materialen

Indien twee materialen met verschillende thermische eigenschappen en verschil in begintemperatuur met elkaar in contact worden gebracht zal er op het contactvlak een contacttemperatuur zich instellen. Dit althans bij ideaal contact, geen luchtspleet, volledig vlakke oppervlakken.

In dit geval hebben we twee differentiaalvergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} (\rho c)_a \frac{\partial T_a}{\partial t} &= \lambda_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2}, & 0 < x \leq +\infty \\ (\rho c)_b \frac{\partial T_b}{\partial t} &= \lambda_b \frac{\partial^2 T_b}{\partial x^2}, & 0 > x \geq -\infty \end{aligned} \right\} \quad (4.2.48)$$

en als rand- en beginvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} t = 0 \quad x \leq 0 \quad T &= T_{b0} & x \geq 0 \quad T &= T_{a0} \\ t > 0 \quad x = -\infty \quad T &= T_{b0} & x = +\infty \quad T &= T_{a0} \\ x = 0 \quad T_b &= T_a & \text{en } -\lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial x} &= -\lambda_b \frac{\partial T_b}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.49)$$

Voor elk medium apart heeft de differentiaalvergelijking een oplossing die via Laplace-transformatie te vinden is, van het type van een errorfunctie.

$$\left. \begin{aligned} T_a &= A + \operatorname{Berfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a_a t}} \right) \\ T_b &= C + \operatorname{Derfc} \left( \frac{-x}{2\sqrt{a_b t}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.50)$$

Dit geeft met de randvoorwaarden:

$$x = +\infty \rightarrow A = T_{a0} \quad \text{en} \quad x = -\infty \rightarrow C = T_{b0}$$

$$x = 0: A + B = C + D$$

en

$$-\frac{\lambda_a B}{\sqrt{\pi \cdot a_a t}} = +\frac{\lambda_b D}{\sqrt{\pi \cdot a_b t}}$$

of

$$B = -\frac{\lambda_b \sqrt{a_a}}{\lambda_a \sqrt{a_b}} \cdot D.$$

Dit geeft:

$$B = (T_{b0} - T_{a0}) \frac{\lambda_b \sqrt{a_a}}{\lambda_a \sqrt{a_b} + \lambda_b \sqrt{a_a}}$$

en

$$D = (T_{a0} - T_{b0}) \frac{\lambda_a \sqrt{a_b}}{\lambda_a \sqrt{a_b} + \lambda_b \sqrt{a_a}}$$

en voor  $x = 0$  de contacttemperatuur:

$$T_c = T_{b0} + (T_{a0} - T_{b0}) \frac{\lambda_a \sqrt{a_b}}{\lambda_a \sqrt{a_b} + \lambda_b \sqrt{a_a}}$$

of:

$$T_c = \frac{T_{a0} \lambda_a \sqrt{a_b} + T_{b0} \lambda_b \sqrt{a_a}}{\lambda_a \sqrt{a_b} + \lambda_b \sqrt{a_a}}$$

(4.2.51)

De contacttemperatuur blijkt niet van de tijd af te hangen en stelt zich direct na het contact in.

Het geval van de contacttemperatuur bij twee stukken van hetzelfde materiaal leidt tot een contacttemperatuur die precies midden tussen de twee begintemperaturen in ligt. Dit probleem is reeds bij § 4.2.4 met behulp van sommatie van bronnen opgelost, (vgl. 4.2.12).

Het temperatuurverloop in de materialen als functie van de tijd is in figuur 4.2.11 gegeven. De warmtestroom die door het contactoppervlak gaat wordt gevonden uit:

$$\phi_w'' = -\frac{\lambda_a \cdot B}{\sqrt{\pi \cdot a_a t}} = \frac{\lambda_a \cdot \lambda_b}{\lambda_a \sqrt{a_b} + \lambda_b \sqrt{a_a}} \cdot \frac{T_{a0} - T_{b0}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{t}}. \quad (4.2.52)$$

Initieel dus een zeer hoge warmtestroom die omgekeerd evenredig is met  $\sqrt{t}$ . De totaal overgedragen hoeveelheid warmte  $Q$  van het ene materiaal aan het andere wordt gegeven door:

$$Q = \int_0^t \phi_w'' dt' = \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_a \sqrt{a_b} + \lambda_b \sqrt{a_a}} \cdot \frac{2(T_{a0} - T_{b0})}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{t}. \quad (4.2.53)$$

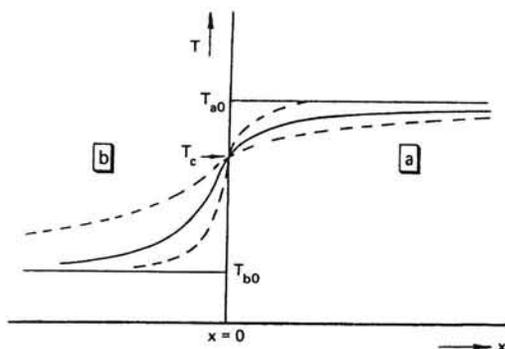


Fig. 4.2.11. Temperatuurverloop bij contact van twee lichamen.

In het geval van een niet-ideaal contact tussen de materialen zal er een extra warmteweerstand zijn. Dit kan bijvoorbeeld doordat er een dun oxidehuidje of een luchtlaag tussen de materialen is. De warmtecapaciteit van deze laag met dikte  $\delta$  kan meestal worden verwaarloosd en men heeft alleen met de (lage) warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda_0$  te rekenen. Indien de stoffeigenschaften van beide materialen gelijk zijn, kan men volgens Pawelski [C13] benaderend aannemen dat in het midden van de laag ( $x = 0$ ) de contacttemperatuur  $T_c$  zoals boven gevonden ontstaat. Door geleiding in het laagje krijgt men dan als randvoorwaarde voor materiaal a op de rand bij  $x = \delta/2$ :

$$-\lambda_a \left. \frac{\partial T_a}{\partial x} \right|_{\frac{\delta}{2}} = \frac{\lambda_0 [T_c - T_a(x = \frac{\delta}{2})]}{\frac{\delta}{2}}. \quad (4.2.54)$$

Het probleem reduceert zich tot het probleem van een half-oneindig medium met randvoorwaarde van de derde soort voor materiaal a en b ieder afzonderlijk.

#### Kwantitatief voorbeeld

Een bekend voorbeeld van het contacttemperatuurprobleem is het geval van de jongen die met zijn tong in een vorstperiode aan een brugleuning 'likt'. Hij loopt het gevaar dat zijn tong 'vastvriest'. We beschouwen numeriek de situatie:

tong: temperatuur  $35^\circ \text{C}$ ,  $\lambda = 0,55 \text{ W/mK}$ ,  $a = 0,17 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

brugleuning: temperatuur  $T_{b0} < 0^\circ \text{C}$ .

Twee typen leuning beschouwen we,

1. stalen leuning,  $\lambda = 40 \text{ W/mK}$ ,  $a = 10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

2. houten leuning,  $\lambda = 0,20 \text{ W/mK}$ ,  $a = 0,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

We berekenen die temperatuur  $T_{b0}$ , waarbij de contacttemperatuur juist  $0^\circ \text{C}$  is

$$0 = \frac{0,55 \sqrt{a_b} \cdot 35 + T_{b0} \cdot \lambda_b \sqrt{0,17 \cdot 10^{-6}}}{0,55 \sqrt{a_b} + \lambda_b \sqrt{0,17 \cdot 10^{-6}}}.$$

Dit geeft in het eerste geval (stalen leuning)  $T_{b0} = -3,7^\circ\text{C}$   
 en in het tweede geval (houten leuning)  $T_{b0} = -81^\circ\text{C}$ .

We zien dat een stalen leuning zeer ongunstig is, maar dat met hout geen probleem behoeft te worden verwacht.

#### 4.2.8. Uitsterfprobleem

Voor langere tijden beschikken we over de oplossing in de vorm van een reeks van eigenfuncties zoals afgeleid in § 2.2 bij het scheiden van variabelen. Voor zeer lange tijden, d.w.z. hoge waarden van het Fourier-getal ( $F_0 = at/L^2$ ) kunnen we met de eerste term van de reeks volstaan. Vaak is het reeds voldoende dat  $F_0 = at/L^2 > 0,25$ .

Voor het geval van een vlakke plaat met voor  $t = 0$ ,  $T = 0$  en voor  $t > 0$ ,  $T = T_1$  voor  $x = \pm L$  vinden we:

$$T_1 - T = \frac{4T_1}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2 at}{4L^2}\right) \cos \frac{\pi x}{2L}. \quad (4.2.55)$$

De warmtestroom per eenheid van oppervlakte aan de rand is:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=\pm L} &= -\frac{4\lambda T_1}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2 at}{4L^2}\right) \cdot \frac{\pi}{2L} \cdot \sin \frac{\pi}{L} \cdot \frac{L}{2} = \\ &= -\frac{4\lambda T_1}{2L} \exp\left(-\frac{\pi^2 at}{4L^2}\right). \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

We kunnen nu een inwendige warmte-overdrachtscoëfficiënt  $\alpha_i$  definiëren op basis van het gemiddelde temperatuurverschil tussen wand en plaat:

$$\alpha_i (T_1 - \langle T \rangle) = \frac{4\lambda T_1}{2L} \exp\left(-\frac{\pi^2 at}{4L^2}\right). \quad (4.2.57)$$

Hierbij is rekening gehouden met het teken; de warmtestroom is de plaat in en daarom negatief, aan  $\alpha_i$  wordt echter geen teken toegekend.

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \left[ T_1 - \frac{4T_1}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2 at}{4L^2}\right) \cdot \cos \frac{\pi x}{2L} \right] dx = \\ &= T_1 - \frac{8T_1}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 at}{4L^2}\right). \end{aligned} \quad (4.2.58)$$

Dit geeft

$$Nu_i = \frac{\alpha_i 2L}{\lambda} = \frac{\pi^2}{2} = 4,93.$$

Analoog kan men voor de cilinder afleiden:

$$Nu_i = 5,8 \quad (\text{met } 2L = D)$$

en voor de bol:

$$Nu_i = 6,6 \quad (\text{met } 2L = D).$$

## 4.2.9. Instationaire diffusieproblemen in meer dimensies

Tot nu toe zijn uitsluitend gevallen beschouwd waarbij de diffusievergelijking alleen diffusie in één richting beschouwde. In het geval van diffusie in twee dimensies krijgen we bij constante stofgrootheden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (4.2.59)$$

met een beginvoorwaarde in het  $x,y$ -vlak en vier randvoorwaarden.

De differentiaalvergelijking (4.2.59) is door samennemen van variabelen te vereenvoudigen, waarbij we invoeren:

$$\zeta = \frac{x}{\sqrt{at}} \quad \text{en} \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{at}},$$

dit geeft

$$-\frac{1}{2}\zeta \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{1}{2}\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}. \quad (4.2.60)$$

Oplossing is nu mogelijk indien de randvoorwaarden eveneens in de coördinaten  $\zeta$  en  $\eta$  eenvoudig te transformeren zijn. Bijvoorbeeld in het geval van een half-oneindig medium in het  $x,y$ -vlak:

$$\left. \begin{aligned} t = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0: \quad T = 1 \\ t > 0, \quad x = 0, \quad y > 0: \quad T = 0 \\ \quad \quad y = 0, \quad x > 0: \quad T = 0 \\ \quad \quad x = \infty, \quad y > 0: \quad T = 1 \\ \quad \quad y = \infty, \quad x > 0: \quad T = 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.61)$$

In dit geval is voor  $\zeta$  en  $\eta$  oneindig, zowel door  $t = 0$  als door  $x$  en  $y$  oneindig de temperatuur  $T = 1$ . De vergelijking (4.2.60) is nu door scheiden van variabelen ( $\eta$  en  $\zeta$ ) tot twee gewone differentiaalvergelijkingen terug te brengen, die afzonderlijk opgelost kunnen worden.

Voor het geval dat het medium in het  $x,y$ -vlak begrensd is bij zowel  $x = 0$  als  $x = L$  en  $y = 0$  en  $y = M$  zijn andere oplossingsmethoden nodig. Het blijkt dat afhankelijk van de randvoorwaarden oplossingen dan gevonden kunnen worden door of sommatie of produkt-neming van de oplossingen die ééndimensionaal zijn verkregen.

We beschouwen allereerst het geval van de randvoorwaarden van de eerste en derde soort met bij  $t = 0$  een uniforme temperatuur ( $T = 0$ ) over het beschouwde gebied. In dat geval zal de algemene oplossing de vorm hebben van:

$$T(x,y,t) = T_0 [1 - F(x,t) \cdot G(y,t)] \quad (4.2.62)$$

We zien direct dat voor  $t = 0$ ,  $T = 0$  als  $F(x,0) = 1$  en  $G(y,0) = 1$ . Indien  $F(x,t)$  nu de randvoorwaarden bij  $x = 0$  en  $x = L$  en  $G(y,t)$  bij  $y = 0$  en  $y = M$  vervult, zal ook de produktfunctie dat doen bij randvoorwaarden van de eerste en derde soort, indien de externe temperatuur  $T_0$  die hierin voor-

komt bij alle vier randen althans hetzelfde is. Bijvoorbeeld bij de randvoorwaarde van de derde soort

$$\left. \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \text{en} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = L, \quad 0 < y < M; \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = a(T_0 - T) \\ \lambda \frac{dF}{dx} \cdot G = a \cdot F \cdot G \\ \lambda \frac{dF}{dx} = aF. \end{array} \quad (4.2.63)$$

Invullen in de differentiaalvergelijking (4.2.59) geeft:

$$G \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + F \frac{\partial G}{\partial t} = a \left[ G \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + F \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right], \quad (4.2.64)$$

hetgeen de som is van de met G resp. F vermenigvuldigde 1-dimensionale diffusievergelijking. Hieraan voldoen is dus ook aan (4.2.59) voldoen.

Als voorbeeld beschouwen we:

De instationaire opwarming van een rechthoek met randvoorwaarden van de *eerste soort*. De differentiaalvergelijking is (4.2.59) met als randvoorwaarden:

$$\begin{array}{l} t = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{en} \quad 0 \leq y \leq M: \quad T = 0 \\ t > 0: \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = L \quad 0 \leq y \leq M: \quad T = T_0 \\ \quad \quad \quad y = 0 \quad \text{en} \quad y = M \quad 0 \leq x \leq L: \quad T = T_0. \end{array}$$

We hebben voor F en G de functies nodig zoals gevonden in § 2.2 bij de afkoeling van een plaat. Dit geeft nu:

$$\begin{aligned} T = T_0 - T_0 \cdot \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{(2n+1)(2k+1)} \cdot \exp \left[ - \left\{ \frac{(2n+1)^2}{L^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(2k+1)^2}{M^2} \right\} \pi^2 at \right] \cdot \cos \left( (2n+1) \pi \frac{x}{L} \right) \cos \left( (2k+1) \pi \frac{y}{M} \right) \end{aligned} \quad (4.2.65)$$

en voor grote t heeft men slechts de eerste eigenwaarde nodig.

$$T = T_0 \left[ 1 - \frac{16}{\pi^2} \exp \left[ - \left( \frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} \right) \pi^2 at \right] \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{\pi y}{M} \right) \right] \quad (4.2.66)$$

Ook het geval met  $L = M = \infty$  laat zich op deze manier behandelen, gebruikmakend van de in § 4.2.6 gegeven penetratietheorie-oplossingen.

In het geval dat men de randvoorwaarde van de *tweede soort* bij  $x = 0$  en  $y = 0$  heeft, kan aangetoond worden dat sommatie de oplossing geeft. We beschouwen het geval van de opwarming van een half-oneindig hoekstuk. De differentiaalvergelijking is weer (4.2.59). Begin- en randvoorwaarden zijn:

$$\left. \begin{aligned}
 t = 0, \quad 0 \leq x \leq L \text{ en } 0 \leq y \leq M: \quad T = 0 \\
 t > 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq \infty \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q \\
 \quad \quad \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q \\
 \quad \quad \quad x = \infty, \quad y = \infty, \quad T = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.67)$$

De oplossing heeft de vorm

$$T = \phi(x, t) + \psi(y, t) \quad (4.2.68)$$

met  $t = 0: \phi = 0$  en  $\psi = 0$ ,

en  $t > 0: \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{q}{\lambda}$  en  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{q}{\lambda}$  voor respectievelijk  $x = 0$  en  $y = 0$ .

$\phi = 0$  en  $\psi = 0$  voor  $x = \infty$  en  $y = \infty$ .

Ook hier is de differentiaalvergelijking (4.2.59) weer de som van de diffusie-vergelijkingen voor  $\phi$  en  $\psi$  afzonderlijk.

$\phi$  en  $\psi$  zijn de oplossingen van paragraaf 4.2.4 en wel vgl. (4.2.14).

$$\begin{aligned}
 T = 2q \left[ \sqrt{\frac{t}{\pi \lambda \rho c_p}} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{x^2}{at}\right) + \exp\left(-\frac{y^2}{at}\right) \right] - \frac{x}{2\lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right. \\
 \left. - \frac{y}{2\lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{at}}\right) \right]. \quad (4.2.69)
 \end{aligned}$$

Fig. 4.2.12 geeft als voorbeeld het temperatuurveld in een dergelijke hoek.

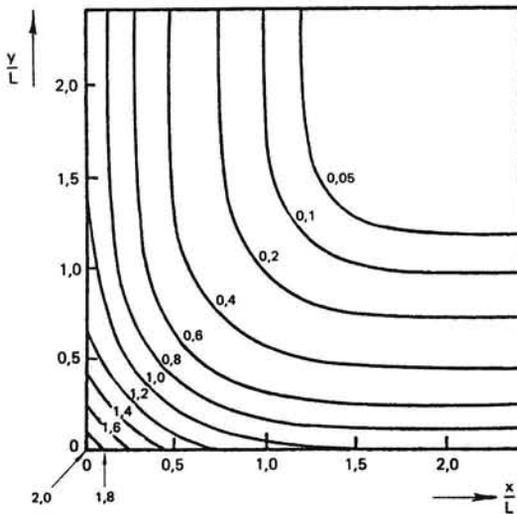


Fig. 4.2.12. Temperatuurveld in een half-oneindig hoekstuk bij de randvoorwaarde van de tweede soort op het tijdstip  $t = 0,25L^2/a$ . De waarde  $L$  is vrij te kiezen.

Bij het hoekpunt is  $T_h = \frac{4q}{\lambda} \sqrt{\frac{at}{\pi}}$ . De isothermen zijn gegeven als  $\frac{T}{\frac{1}{2}T_h}$ .



**Kwantitatief voorbeeld**

We beschouwen de opwarming van een lange betonnen kolom van  $0,3 \times 0,3$  m. Door brand wordt de kolom uitwendig verhit door een constante (stralings)warmtestroom gegeven door

$$q = \epsilon \cdot \sigma \cdot T_0^4,$$

waarbij  $\epsilon = 0,5$ ,  $\sigma = 5,68 \cdot 10^{-8}$  W/m<sup>2</sup>K<sup>4</sup> en  $T_0 = 1050$  K.

Dit geeft  $q = 34,5$  kW/m<sup>2</sup>.

Uit brandveiligheidsoogpunt willen we weten wanneer de oppervlakte-temperatuur  $520^\circ\text{C}$  is geworden, indien deze oorspronkelijk  $20^\circ\text{C}$  was.

Deze wordt het eerst bereikt voor  $x = 0$  en  $y = 0$ , dus

$$T = 2q \sqrt{\frac{t}{\pi \lambda \rho c_p}}.$$

Als gemiddelde stofgrootheden voor beton nemen we  $\lambda = 1,76$  W/mK,  $\rho = 2,4 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup> en  $c_p = 1200$  J/kgK, dan vinden we

$$t = \left( \frac{500}{2,34 \cdot 5 \cdot 10^3} \right)^2 \cdot \pi \cdot 1,76 \cdot 2,4 \cdot 10^3 \cdot 1200 = 835 \text{ s}.$$

Dit wordt dus na ca. 14 minuten al bereikt. Tevens vragen we ons af wanneer de wapening, die op een diepte van 5 cm van het oppervlak zit een temperatuur van  $420^\circ\text{C}$  heeft bereikt. We nemen hiertoe nu aan dat dit gebeurt als de buitenwand al lang een temperatuur die dichtbij de brandtemperatuur ligt, heeft bereikt. Dan kunnen we (4.2.66) als benadering gebruiken.

$$T = 777 - 757 \cdot \frac{16}{\pi^2} \exp \left[ -\frac{2}{0,09} \cdot \pi^2 \cdot \frac{\lambda}{\rho c_p} \cdot t \right] \cos^2 \left( \frac{5\pi}{30} \right),$$

immers deze temperatuur wordt het eerst bereikt voor  $x = y = 0,05$ .

Dit geeft  $t = 7066$  s (bijna 2 uur). De aanname dat het oppervlak een temperatuur van 1050 K heeft is in het licht van deze lange tijd (ca. 2 uur) redelijk.

**4.3. Bewegend-frontproblemen****4.3.1. Algemene probleemstelling**

Er doen zich gevallen van niet-stationair warmte- en stoftransport voor waarbij randvoorwaarden gegeven zijn voor een niet in de tijd gefixeerde rand. Het bekendste voorbeeld is het smelten en stollen van ijs en water. Men krijgt bij bevriezen van water een in het water indringend grensvlak water-ijs dat 'beweegt'. Daarom spreekt men van 'bewegend front' (*moving boundary*)-problemen. Immers op het grensvlak water-ijs zijn door de evenwichtscondities en door de stolwarmte de randvoorwaarden langs deze bewegende rand gegeven. Men noemt deze en dergelijke problemen ook wel het Stefanprobleem. Dit naar aanleiding van het klassieke werk van Stefan [A5] uit 1891. Stefan maakte een studie van de vorming van de ijsslagen in de poolzeeën.

Hetzelfde probleem speelt een rol bij de indringing van de permafrost-lagen in poolgebieden, het bevriezen en ontdooien van toendra's. In de techniek is het van belang bij vele stol- en smeltprocessen in de staal- en metallurgische industrie. Bij zonnewarmte-installaties kan men een warmte-opslag realiseren met zogenaamde phase-change materials, door smelten en stollen wordt warmte hier regeneratief gebruikt en opgeslagen. Bij de ruimtevaart berust de werking van het hitteschild bij re-entry van een ruimteschip ('ablation') op dit mechanisme. Ook in de astrofysica bij de opbouw van sterren speelt dit een rol.

Daarnaast zijn er stoftransportproblemen in de chemie en biologie die tot bewegend-front-problemen leiden. In de volgende paragrafen zal dit kort uiteengezet worden. Voor een volledig overzicht wordt verwezen naar de boeken van Ockerdon [A6] en Crank [A3] en de artikelen van Mori [A7] en Bankof [A8].

#### 4.3.2. Niet-stationaire warmtegeleiding met fase-overgang

Bij het bevriezen of smelten van een stof treedt aan het grensvlak tussen de twee fasen een warmte-effect op, dat medebepalend is voor de snelheid waarmee de vorst- of smeltgrens zich voortbeweegt. Als voorbeeld nemen we hier het indringen van een stolfront in een half-oneindige stilstaande vloeistof ( $x > 0$ ) die op  $t = 0$  overal een temperatuur  $T_0$  heeft (boven het smeltpunt  $T_s$ ) en op  $x = 0$  op een constante temperatuur  $T_1$  wordt gehouden (beneden het smeltpunt).

Onderscheid moet worden gemaakt tussen het gestolde medium a en het vloeibare medium b. (Er is geen stroming in de vloeistof!).

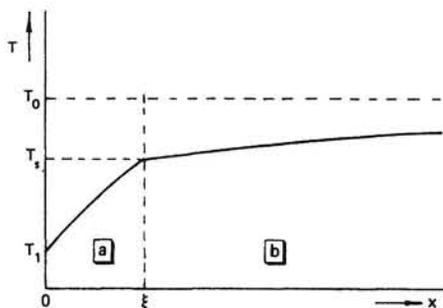


Fig. 4.3.1. Het indringen van een stolfront.

De differentiaalvergelijking voor a en b,

$$\frac{\partial T_a}{\partial t} = a_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial T_b}{\partial t} = a_b \frac{\partial^2 T_b}{\partial x^2} \quad (4.3.1)$$

moeten worden opgelost voor de voorwaarden (zie fig. 4.3.1)

$$x = 0 \quad t > 0 \quad T_a = T_1, \quad (4.3.2)$$

$$x = \xi \quad t > 0 \quad T_a = T_s = T_b, \quad (4.3.3)$$

$$x = \xi \quad t > 0 \quad \lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial x} - r_s \rho_a \frac{d\xi}{dt} = \lambda_b \frac{\partial T_b}{\partial x}, \quad (4.3.4)$$

$$x = \infty \quad t > 0 \quad T_b = T_0, \quad (4.3.5)$$

$$x \geq 0 \quad t = 0 \quad T_b = T_0. \quad (4.3.6)$$

Hierin stelt  $r_s$  ( $\geq 0$ ) de stolwarmte voor en  $\xi$  de positie van het stolfront.

De tweede term van het linkerlid van (4.3.4) is de typisch bij bewegend frontproblemen voorkomende randvoorwaarde. De verplaatsing van het front met de tijd  $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)$  is verbonden aan de faseovergang (of chemische reactie!) die aan het front plaatsvindt. Er zij op gewezen dat hier voor de warmte die bij het front vrijkomt of opgenomen wordt respectievelijk een positief of negatief teken is gekozen. Soms wordt dit andersom gedaan. In ons voorbeeld en ook verder is steeds gelijke dichtheid aan weerszijden van het front ( $\rho_a = \rho_b$ ) genomen. Indien dit niet zo is, zal er nog een lineaire snelheid ontstaan door de uitzetting (inkrimping) van het medium bij het front. Men heeft dan voor het geval a een starre vaste stof is en b een vloeistof die naar het front kan toestromen met snelheid  $v$  dat de continuïteitsvergelijking geeft:

$$\begin{aligned} \rho_b v &= \rho_a \frac{d\xi}{dt} - \rho_b \frac{d\xi}{dt} \\ v &= \left(\frac{\rho_a}{\rho_b} - 1\right) \frac{d\xi}{dt}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Dit geeft in de diffusievergelijking voor medium b nog een extra convectie-term. Deze term verwaarlozen we in het navolgende.

Bij de aanpak van dit probleem wordt van de overweging uitgegaan dat in soortgelijke problemen zonder faseovergang de oplossing kan worden voorgesteld met behulp van een foutenintegraal. Aannemende dat dit ook hier zo is, stellen we:

$$\left. \begin{aligned} T_a &= C_a + D_a \operatorname{erf}(x/2\sqrt{a_a t}), \\ T_b &= C_b + D_b \operatorname{erf}(x/2\sqrt{a_b t}). \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

Deze oplossingen voldoen aan de respectievelijke differentiaalvergelijkingen. Verder levert voorwaarde (4.3.2) op:  $C_a = T_1$ , en voorwaarden (4.3.5) en (4.3.6):  $C_b + D_b = T_0$ .

Voor de bepaling van  $D_a$  en  $D_b$  zijn nog twee voorwaarden beschikbaar; (4.3.3) geeft:

$$T_1 + D_a \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_a t}}\right) = T_0 - D_b \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_b t}}\right)\right] = T_s. \quad (4.3.9)$$

Aan deze vergelijking kan alleen worden voldaan als de indringdiepte van het grensvlak tussen a en b,  $\xi$ , evenredig is met  $\sqrt{t}$ . Dus:

$$\xi = k\sqrt{t}. \quad (4.3.10)$$

Door substitutie van (4.3.10) in (4.3.9) kunnen  $D_a$  en  $D_b$  in de nog onbekende constante  $k$  worden uitgedrukt, zodat voor  $T_a$  en  $T_b$  volgt:

$$\begin{aligned} T_a - T_1 &= (T_s - T_1) \frac{\operatorname{erf}(x/2\sqrt{a_a t})}{\operatorname{erf}(k/2\sqrt{a_a})} \\ T_0 - T_b &= (T_0 - T_s) \frac{\operatorname{erfc}(x/2\sqrt{a_b t})}{\operatorname{erfc}(k/2\sqrt{a_b})}. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Voor de bepaling van  $k$  moet men nog van de voorwaarde (4.3.4) gebruik maken, waaruit een transcendente vergelijking in  $k$  resulteert. Zie bijvoorbeeld vergelijking (4.3.19) in paragraaf 4.3.3, bedenk dat in deze transcendenten vergelijking noch  $x$ , noch  $t$  mag voorkomen. Dit is dan tevens een rechtvaardiging –achteraf– van onze aanpak met foutenintegralen.

Een benaderde oplossing van hetzelfde probleem is eenvoudig te vinden als men aanneemt dat  $T_0 = T_s$  en het temperatuurverloop in  $a$  steeds lineair is. (Waarop komt deze benadering in wezen neer?). Ga na dat voor de indringing van de stolgrens geldt:

$$\xi = \sqrt{\frac{2\lambda_a}{r_s \rho_a} (T_s - T_1) t} \quad (r_s > 0). \quad (4.3.12)$$

Merk op dat de afhankelijkheid van  $t$  dezelfde is als in (4.3.10).

#### 4.3.3. Bewegend-frontproblemen bij stoftransport

Voor stoftransport is de navolgende situatie in directe analogie met het warmtetransport probleem behandeld in 4.3.2. Dit is het geval van een diffusie-gecontroleerde reactie die in een vaste stof of niet-bewegende vloeistof, plaatsvindt. We nemen aan dat op de buitenrand van het medium de concentratie van de reagerende component constant  $c_{A0}$  is. Door diffusie dringt de stof  $A$  in en reageert met een andere component  $B$  in het medium totdat deze component  $B$  verbruikt is. De reactiesnelheid wordt oneindig verondersteld, zodat het transport voor het reactiefront waar  $c_A = 0$  bepalend is. Indien we aannemen dat component  $B$  een diffusieconstante  $0$  heeft, treedt er bij het reactiefront een sprong in  $c_B$  op van de initiële constante  $c_{B0}$  naar  $0$ . Indien één molecuul  $A$  met één van  $B$  reageert, is de molaire hoeveelheid die aan het front per  $m^2$  en per tijdseenheid reageert gegeven door  $c_{B0} \cdot d\xi/dt$ .

In dit geval hebben we als differentiaalvergelijkingen en rand- en beginvoorwaarden:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (4.3.13)$$

met als rand- en beginvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} t = 0 & \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < \infty \quad c_A = 0 \quad \text{en} \quad c_B = c_{B0} \\ \xi = 0 \end{array} \right. \\ t > 0: & \left. \begin{array}{l} x = 0 \quad c_A = c_{A0} \\ x = \xi \quad c_A = 0 \\ -D \frac{\partial c_A}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = c_{B0} \frac{d\xi}{dt} \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.14)$$

De oplossing zal weer van de vorm zijn:

$$c_A = c_{A0} + m \cdot \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right). \quad (4.3.15)$$

Met voor  $x = \xi$ :  $0 = c_{A0} + m \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2\sqrt{Dt}} \right)$ . Dit vereist:  $\xi = k\sqrt{t}$ . (4.3.16)  
Dus:

$$m = \frac{-c_{A0}}{\operatorname{erf} \left( \frac{k}{2\sqrt{D}} \right)}. \quad (4.3.17)$$

Verder frontvoorwaarde geeft:

$$-D \cdot m \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot 2\sqrt{Dt}} \cdot \exp \left[ -\frac{\xi^2}{4Dt} \right] = c_{B0} \frac{d\xi}{dt} \quad (4.3.18)$$

of

$$\frac{c_{A0} \cdot D}{\operatorname{erf} \left( \frac{k}{2\sqrt{D}} \right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi D}} \exp \left[ -\frac{k^2}{4D} \right] = c_{B0} \cdot \frac{1}{2} k. \quad (4.3.19)$$

Dit geeft een transcendente vergelijking in  $\frac{k}{2\sqrt{D}} = z$ :

$$z \cdot \operatorname{erf}(z) \cdot \exp(z^2) = \frac{c_{A0}}{c_{B0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.3.20)$$

Deze vergelijking (4.3.20) heeft oplossingen, zoals gegeven in tabel 4.3.1.

$c_{A0}/c_{B0}$	$z$
10	1,257
4	0,996
2	0,801
1	0,620
0,5	0,465
0,2	0,306
0,1	0,220

Tabel 4.3.1. Oplossingen van de transcendent  
vergelijking (4.3.20).

Een voorbeeld van een dergelijke reactie is het hydrogeneren van vetten in de vloeistoffase. In een dun vloeistoffilmpje om een waterstofbel dringt de waterstof in. De moleculaire beweeglijkheid van de waterstofmoleculen is veel groter dan die van de componenten in de vloeistof. Een ander door Crank besproken voorbeeld is 'tarnishing', verkleuring van een metaaloppervlak door oxidatie.

Is echter de beweeglijkheid van molecuul B ook groot, dan zal de diffusie van B voor  $x > \xi$  ook een rol spelen en krijgt men een zetsel volledig analoog aan het thermische geval met  $D_A = \lambda_a$  en  $D_B = \lambda_b$  en  $\rho c_p = 1$ . Een typisch concentratieverloop in zo'n geval is gegeven in figuur 4.3.2.

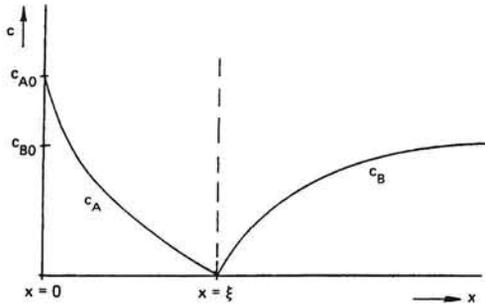


Fig. 4.3.2. Reactiefront bij  $x = \xi$ , als  $A + B \rightarrow$  produkt.

De randvoorwaarde voor het front is dan:

$$x = \xi: -D_A \frac{\partial c_A}{\partial x} = D_B \frac{\partial c_B}{\partial x} \quad (4.3.21)$$

De oplossing wordt dan:

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = 1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_A t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\sqrt{k/D_A}\right)} \quad (4.3.22)$$

$$\frac{c_B}{c_{B0}} = 1 - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_B t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{k/D_B}\right)} \quad (4.3.23)$$

$$\text{met } \xi = \sqrt{kt} \quad (4.3.24)$$

en  $k$  weer op te lossen uit de transcendente vergelijking:

$$1 - \operatorname{erf}\left(\frac{k}{4D_B}\right) = \frac{c_{B0}}{c_{A0}} \sqrt{\frac{D_B}{D_A}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{k}{4D_A}}\right) \exp\left\{k\left(\frac{1}{4D_A} - \frac{1}{4D_B}\right)\right\} \quad (4.3.25)$$

#### 4.3.4. Landau-transformatie en storingsrekening voor bewegend-frontproblemen

In veel gevallen zijn er bij het bewegend front meer ingewikkelde voorwaarden dan hiervoor besproken. Met name kan men in een vloeistofsmelt convectiestromen hebben die een convectie-overdracht geven. Oplossingen van het probleem zijn dan meestal niet meer analytisch te vinden. Men dient dan benaderende of numerieke methoden te gebruiken.

Als voorbeelden van het gebruik van storingsrekening zullen we twee gevallen uit een artikel van Huang en Shih [A9] bespreken. Het eerste geval is ter vergelijking identiek met het reeds analytisch opgeloste geval van § 4.3.3. De vergelijkingen zijn:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq \xi(t). \quad (4.3.26)$$

$$\left. \begin{aligned} c(0,t) &= c_{A0} \\ c(\xi,t) &= 0 \\ -D \frac{dc}{dx} \Big|_{x=\xi} &= c_{B0} \frac{d\xi}{dt} \\ \xi &= 0, \quad t = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.27)$$

We maken deze dimensieloos met

$$U = \frac{c}{c_{A0}}, \quad \tau = \frac{Dt}{L^2}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad (4.3.28)$$

en

$$\xi_f = \frac{\xi}{L} \quad \text{en} \quad \epsilon = \frac{c_{A0}}{c_{B0}} \quad (4.3.29)$$

met  $L$  een nader te specificeren karakteristieke lengte. Dan vinden we

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad 0 \leq X \leq \xi_f(\tau). \quad (4.3.30)$$

$$\left. \begin{aligned} U(0,\tau) &= 1 \\ U(\xi_f,\tau) &= 0 \\ \frac{d\xi_f}{d\tau} &= -\epsilon \frac{dU}{dX} \Big|_{X=\xi_f} \\ \xi_f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.31)$$

Het is nu hier en ook voor andere gevallen nuttig de zogenaamde *Landau-transformatie* toe te passen. Hierbij wordt de plaatscoördinaat  $\delta$  gerekend relatief t.o.v. front ( $\delta = X/\xi_f$ ) en de tijd door  $\xi_f$  vervangen.

We krijgen dan als vergelijkingen met  $\delta$  en  $\xi_f$  als onafhankelijk veranderlijken

$$\epsilon \left[ \delta \frac{\partial U}{\partial \delta} - \xi_f \frac{\partial U}{\partial \xi_f} \right] \left( \frac{\partial U}{\partial \delta} \Big|_{\delta=1} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta^2}. \quad (4.3.32)$$

$$\left. \begin{aligned} U(0,\xi_f) &= 1 \\ U(1,\xi_f) &= 0 \\ \frac{d\tau}{d\xi_f} &= -\frac{\xi_f}{\epsilon \frac{\partial U}{\partial \delta} \Big|_{\delta=1}} \\ \tau(\xi_f) &= 0 \quad \text{voor} \quad \xi_f = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.33)$$

Bij storingsrekening ontwikkelen we nu  $U$  naar een reeks in  $\epsilon$  als storingsparameter:

$$U = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \dots \quad (4.3.34)$$

Door samennemen van gelijke machten in  $\epsilon$  na invullen in (4.3.32) leidt dit tot

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \delta^2} = 0 \quad (4.3.35)$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \delta^2} = \left( \delta \frac{\partial U_0}{\partial \delta} - \xi_f \frac{\partial U_0}{\partial \xi_f} \right) \frac{\partial U_0}{\partial \delta} \Big|_{\delta=1} \quad (4.3.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \delta^2} &= \left( \delta \frac{\partial U_0}{\partial \delta} - \xi_f \frac{\partial U_0}{\partial \xi_f} \right) \frac{\partial U_1}{\partial \delta} \Big|_{\delta=1} \\ &+ \left( \delta \frac{\partial U_1}{\partial \delta} - \xi_f \frac{\partial U_1}{\partial \xi_f} \right) \frac{\partial U_0}{\partial \delta} \Big|_{\delta=1} \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

etc.

met als randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} U_0(0, \xi_f) &= 1 \\ U_i(0, \xi_f) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots \\ U_i(1, \xi_f) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.3.38)$$

en dus

$$U_0 = 1 - \delta \quad (4.3.39)$$

$$U_1 = \frac{1}{6}(\delta^3 - \delta) \quad (4.3.40)$$

$$U_2 = \frac{\delta^5}{40} - \frac{\delta^3}{36} + \frac{19\delta}{360} \quad (4.3.41)$$

$$U_3 = \frac{\delta^7}{336} + \frac{\delta^5}{80} + \frac{17\delta^3}{2160} - \frac{353\delta}{15120} \quad (4.3.42)$$

Dit resulteert in:

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_{A0}} &= \left( 1 - \frac{x}{\xi} \right) + \epsilon \cdot \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{x^3}{\xi^3} - \frac{x}{\xi} \right) + \\ &+ \epsilon^2 \cdot \left( \frac{19}{360} \frac{x}{\xi} - \frac{1}{36} \frac{x^3}{\xi^3} - \frac{1}{40} \frac{x^5}{\xi^5} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

Dit ingevuld in de randvoorwaarde bij het bewegend front geeft:

$$\begin{aligned} c_{B0} \frac{d\xi}{dt} &= -D \frac{dc}{dx} \Big|_{x=\xi} = -D c_{A0} \left[ -\frac{1}{\xi} + \epsilon \frac{1}{6} \left( \frac{3}{\xi} - \frac{1}{\xi} \right) + \right. \\ &\left. + \epsilon^2 \left( \frac{19}{360} \frac{1}{\xi} - \frac{3}{36} \frac{1}{\xi} - \frac{5}{40} \frac{1}{\xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

$$\text{of:} \quad \frac{1}{D} \xi \frac{d\xi}{dt} = \epsilon - \frac{1}{3} \epsilon^2 + 0,156 \epsilon^3. \quad (4.3.45)$$

Nu stellen we weer

$$\begin{aligned} \xi &= k\sqrt{t} \quad \text{en} \quad z = \frac{k}{2\sqrt{D}}; \quad \text{dit geeft} \\ z &= \sqrt{\frac{1}{2}(\epsilon - \frac{1}{3}\epsilon^2 + 0,156\epsilon^3)}. \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

Dit geeft voor  $\epsilon = 0,1$ :  $z = 0,220$  (exact 0,220);  $\epsilon = 0,2$ :  $z = 0,306$  (exact 0,306);  $\epsilon = 0,5$ :  $z = 0,467$  (exact 0,465) en  $\epsilon = 1$ :  $z = 0,641$  (exact 0,620).



## 4.3.5. Stolling met convectieve warmte-overdracht

Een belangrijk voorbeeld is: het stollen van een vloeistof met een convectieve overdrachtscoëfficiënt aan het stolfront, terwijl het koelen gebeurt door contact met een koude wand (zie fig. 4.3.3) met een convectieve overdrachtscoëfficiënt  $\alpha_0$ .

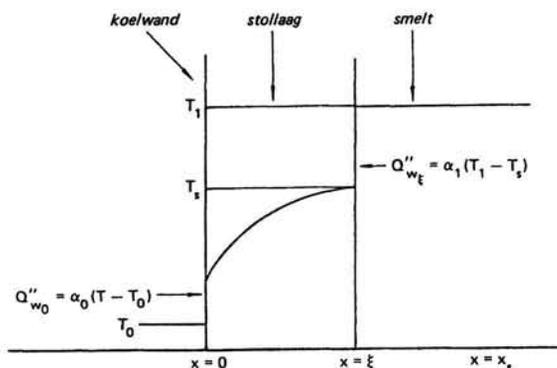


Fig. 4.3.3. Temperatuurverloop bij stollen aan wand met convectie-overdracht.

De vergelijkingen voor dit geval zijn:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq \xi(t). \quad (4.3.47)$$

$$\left. \begin{aligned} x = 0: \quad -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} &= \alpha_0 [T_0 - T(0,t)] \\ x = \xi \quad \left\{ \begin{aligned} T &= T_s \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} &= r_s \rho \frac{d\xi}{dt} + \alpha_1 (T_s - T_1) \quad (r_s < 0) \\ \xi &= 0 \quad \text{voor } t = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.48)$$

We maken weer dimensieloze vergelijkingen met

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{T_s - T}{T_s - T_0}, \quad \tau = \frac{\lambda t}{\rho c_p X_s^2}, \quad \epsilon = \frac{c_p (T_0 - T_s)}{r_s} \\ X &= \frac{x}{X_s}, \quad \xi_f = \frac{\xi}{X_s}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.49)$$

Hier nemen we nu voor de karakteristieke lengte  $X_s$  de eindwaarde voor de laagdikte  $\xi$  als  $t \rightarrow \infty$ , deze is te vinden uit de warmtebalans:

$$X_s = \frac{\lambda(T_s - T_0)}{\alpha_1(T_1 - T_s)} - \frac{\lambda}{\alpha_0}. \quad (4.3.50)$$

Nu voeren we tevens in:

$$B = \frac{\alpha_0 X_s}{\lambda}. \quad (4.3.51)$$

Dit geeft

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad 0 \leq X \leq \xi_f \quad (4.3.52)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_{X=0} = \text{Bi}[U(0, \tau) - 1] \quad (4.3.53)$$

$$\frac{d\xi_f}{d\tau} = -\epsilon \left[ \left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_{X=\xi_f} + \frac{\text{Bi}}{1 + \text{Bi}} \right] \quad (4.3.54)$$

$$\xi_f(0) = 0. \quad (4.3.55)$$

Weer passen we de Landau-transformatie toe, dit geeft

$$\epsilon \left[ \delta \frac{\partial U}{\partial \delta} - \xi_f \frac{\partial U}{\partial \xi_f} \right] \left[ \left. \frac{\partial U}{\partial \delta} \right|_{\delta=1} + \frac{\text{Bi} \cdot \xi_f}{1 + \text{Bi}} \right] = \frac{\partial^2 U}{\partial \delta^2}, \quad 0 \leq \delta \leq 1 \quad (4.3.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} &= \text{Bi} \cdot \xi_f [U(0, \xi_f) - 1] \\ U(1, \xi_f) &= 0 \\ \epsilon \frac{d\tau}{d\xi_f} &= - \left[ \frac{1}{\xi_f} \frac{\partial U}{\partial \delta} \Big|_{\delta=1} + \frac{\text{Bi}}{1 + \text{Bi}} \right]^{-1} \\ \tau(\xi_f) &= 0 \quad \text{voor } \xi_f = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.57)$$

Ontwikkeling in de storingsparameter  $\epsilon$  geeft voor

$$U = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \epsilon^3 U_3 + \dots \quad (4.3.58)$$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \delta^2} = 0 \quad (4.3.59)$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \delta^2} = \left( \delta \frac{\partial U_0}{\partial \delta} - \xi_f \frac{\partial U_0}{\partial \xi_f} \right) \left[ \left. \frac{\partial U_0}{\partial \delta} \right|_{\delta=1} + \frac{\text{Bi} \cdot \xi_f}{1 + \text{Bi}} \right] \quad (4.3.60)$$

etc.

met

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} &= \text{Bi} \cdot \xi_f [U_0(0, \xi_f) - 1] \\ \frac{\partial U_1}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} &= \text{Bi} \cdot \xi_f U_1(0, \xi_f) \quad \text{etc.} \\ U_i(1, \xi_f) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.61)$$

Dit geeft

$$U_0 = \frac{\text{Bi} \cdot \xi_f}{1 + \text{Bi} \cdot \xi_f} (1 - \delta) \quad (4.3.62)$$

$$U_1 = \frac{\text{Bi}^3 \xi_f^2 (1 - \xi_f)}{6 \cdot (1 + \text{Bi})(1 + \text{Bi} \xi_f)^4} \cdot [(1 + \text{Bi} \cdot \xi_f)(3 + \text{Bi} \cdot \xi_f \delta) \delta^2 - (3 + \text{Bi} \xi_f)(1 + \text{Bi} \cdot \xi_f \delta)] \quad (4.3.63)$$

etc.

De plaats  $x = \xi$  van het front leiden we af uit:

$$\epsilon \frac{d\tau}{d\xi_f} = - \frac{\xi_f}{\frac{\text{Bi}\xi_f}{1 + \text{Bi}} + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \left. \frac{\partial U_i}{\partial \delta} \right|_{\delta=1}} \quad (4.3.64)$$

en dus:

$$\epsilon \tau = - \int_0^{\xi_f} \frac{\xi_f d\xi_f}{\frac{\text{Bi}\xi_f}{1 + \text{Bi}} + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \left. \frac{\partial U_i}{\partial \delta} \right|_{\delta=1}} \quad (4.3.65)$$

We ontwikkelen  $\epsilon \tau$  als volgt:

$$\epsilon \tau = a_0 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2 + \dots \quad (4.3.66)$$

Oplossen met de gegeven  $U_0$  etc. voor elke macht in  $\epsilon$  geeft:

$$a_0 = - \frac{1 + \text{Bi}}{\text{Bi}} \left[ \xi_f + \frac{1 + \text{Bi}}{\text{Bi}} \ln(1 - \xi_f) \right] \quad (4.3.67)$$

$$a_1 = - \frac{1 + \text{Bi}}{3\text{Bi}} \left[ \xi_f + \frac{\xi_f}{(1 + \text{Bi})(1 + \text{Bi}\xi_f)} + \frac{3 + 3\text{Bi} + \text{Bi}^2}{(1 + \text{Bi})^2} \ln(1 - \xi_f) + \frac{\ln(1 + \text{Bi}\xi_f)}{\text{Bi}(1 + \text{Bi})^2} \right] \quad (4.3.68)$$

Verder is:

$$\epsilon \tau = \epsilon \cdot \frac{\lambda}{\rho c_p X_s^2} t = a_0 + a_1 \epsilon + \dots \quad (4.3.69)$$

Dit geeft een direct verband tussen  $\xi = X_s \xi_f$  en  $t_0$ . Waarden van  $a_0$  en  $a_1$  zijn voor enkele Biot- en  $\xi_f$ -waarden in tabel (4.3.2) gegeven. Tot  $\xi = 1$  blijven voor  $\text{Bi} \leq 1$  de waarden van  $a_0$  en  $a_1$  voldoende te zijn.

Verder zij verwezen naar Huang [A9].

$\xi_f$	$a_0$			$a_1$		
	$\text{Bi} = 0,1$	$\text{Bi} = 0,5$	$\text{Bi} = 1$	$\text{Bi} = 0,1$	$\text{Bi} = 0,5$	$\text{Bi} = 1$
0,05	5,6565	0,312	0,105	0,0142	0,004	0,003
0,10	11,65	0,6482	0,221	0,059	0,016	0,010
0,20	24,8	1,408	0,493	0,251	0,065	0,041
0,50	78,4	4,738	1,773	2,05	0,498	0,297
0,80	186	12,09	4,838	8,41	1,918	1,093
0,95	352	24,1	10,08	20,9	4,6	2,59

Tabel 4.3.2. Waarden voor  $a_0$  en  $a_1$  in (4.3.69).

#### 4.3.6. Integraalmethode bij stollingsproblemen met convectieve overdracht

We beschouwen een half-oneindige vloeistoflaag die oorspronkelijk op een temperatuur  $T_1$  is ( $T_1 > T_s$ , smelttemperatuur) en vanaf  $t = 0$  aan het grensvlak  $x = 0$  in contact komt met een vaste wand (half-oneindig te nemen) die een uniforme temperatuur  $T_0$  heeft en een warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda$  en een  $\rho c_p$  heeft, die gelijk is aan de  $\lambda$  en  $\rho c_p$  van het gestolde materi-

aal. Aan de vloeistofzijde van het stolfront veronderstellen we uitsluitend convectieve overdracht, gegeven door  $\alpha(T_1 - T_s)$ .

Voor de wand en de stollaag gelden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{voor } -\infty < x < \xi. \quad (4.3.70)$$

$$\left. \begin{aligned} t = 0 \quad x = 0 \quad T &= T_s \\ x > 0 \quad T &= T_1 \\ x < 0 \quad T &= T_0 \\ \xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.71)$$

en

$$t > 0 \quad \left. \begin{aligned} x = -\infty: T &= T_0 \\ x = \xi \quad \left\{ \begin{aligned} T &= T_s \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + r_s \rho \frac{d\xi}{dt} &= \alpha(T_1 - T_s) \quad (r_s < 0) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

Het temperatuurverloop is zoals gegeven in figuur 4.3.4.

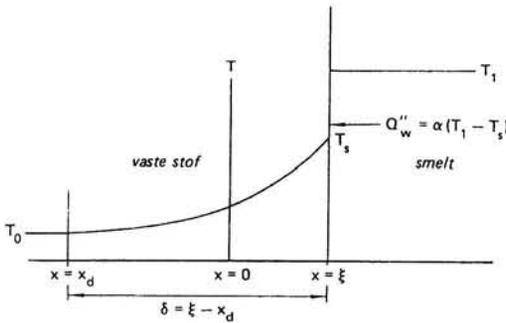


Fig. 4.3.4. Temperatuurverloop bij stolling met convectie in smelt.

We passen de integraalmethode toe en beschouwen de warmte-indringing voor een eindige dikte  $\delta$ ,  $\delta = \xi - x_d$ , in het vaste materiaal, gerekend van  $x = \xi$  (zie fig. 4.3.4).

$$\text{Stel nu: } \theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0} = 1 + a_1 \frac{(x - \xi)}{\delta} + a_2 \frac{(x - \xi)^2}{\delta^2}. \quad (4.3.72)$$

$$\text{Als } x = x_d = \xi - \delta, \text{ dan } \theta = 0 = 1 - a_1 + a_2 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 = \frac{a_1}{\delta} - 2 \frac{a_2}{\delta}.$$

Dit levert dan:

$$\theta = 1 + 2 \frac{(x - \xi)}{\delta} + \frac{(x - \xi)^2}{\delta^2}. \quad (4.3.73)$$

Toepassing van het theorema van Leibniz (zie sectie 2.8.1) over het gebied  $x = \xi$  tot  $x = x_d$  geeft hier:

$$\frac{d}{dt} \int_{\xi-\delta}^{\xi} \theta \, dx + \frac{d\xi}{dt} = a \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{\xi-\delta}^{\xi} \quad (4.3.74)$$

Invullen van  $\theta$  en integreren geeft:

$$\frac{1}{3} \frac{d\delta}{dt} = \frac{2a}{\delta} - \frac{d\xi}{dt} \quad (4.3.75)$$

Combinatie met de randvoorwaarde aan het stolfront:

$$\frac{2a}{\delta} \frac{c_p(T_s - T_0)}{r_s} + \frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha(T_1 - T_s)}{\rho r_s} = \frac{q}{\rho r_s} \quad (4.3.76)$$

met  $q = \alpha(T_1 - T_s)$  vinden we als differentiaalvergelijking voor  $\delta$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta}{3} = \frac{2a}{\delta} - \frac{1}{\rho r_s} \left( q - \frac{2\lambda(T_s - T_0)}{\delta} \right) \quad (4.3.77)$$

Met invoering van de dimensieloze grootheden  $\tau = q^2 c_p t / \lambda \rho r_s^2$ ,  $Y = c_p q \delta / \lambda r_s$  en  $Ste = -c_p(T_s - T_0) / r_s$  ( $Ste > 0$ ) gaat deze differentiaalvergelijking over in:

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = \frac{6(1 + Ste)}{Y} - 3 \quad (4.3.78)$$

met beginvoorwaarde  $Y = 0$  voor  $\tau = 0$ .

Na integratie vinden we als oplossing:

$$3\tau = -Y + 2(1 + Ste) \ln [2(1 + Ste) / (2(1 + Ste) - Y)] \quad (4.3.79)$$

Voor  $\tau \rightarrow \infty$  nadert  $Y$  tot de constante waarde  $Y = 2(1 + Ste)$ . Voor de dimensieloze dikte van de afgesmolten laag  $X = c_p q \xi / \lambda r_s$  ( $r_s < 0$ ) vinden we nu uit (4.3.76):

$$\frac{dX}{d\tau} = 1 - 2 Ste/Y \quad (4.3.80)$$

Na integratie en combinatie met (4.3.78) vinden we:

$$X = \frac{-Ste Y}{3(1 + Ste)} + \frac{\tau}{1 + Ste} = \frac{-Y}{3} + \frac{2}{3} \ln [2(1 + Ste) / (2(1 + Ste) - Y)] \quad (4.3.81)$$

Voor  $\tau \rightarrow \infty$  hangen  $X$  en  $\tau$  lineair samen;  $X = -2Ste/3 + \tau/(1 + Ste)$ . Voor lange tijden is dus enerzijds  $Y$  constant, d.w.z.  $\delta$  gerekend vanaf het bewegend stolfront blijft hetzelfde en anderzijds beweegt het stolfront met een constante snelheid  $d\xi/dt$ . Een warmtebalans geeft dan direct voor de warmte-toevoer door convectie en afvoer door smelten en verplaatsing van het temperatuurprofiel in de vaste stof:

$$\alpha(T_1 - T_s) = \rho r_s \frac{d\xi}{dt} - \rho c_p (T_s - T_0) \frac{d\xi}{dt}$$

en dus:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{Ste}{(1 + Ste)} \cdot \frac{\alpha(T_1 - T_s)}{\rho r_s}$$

Het extreem in  $X$  treedt op voor  $dX/d\tau = 0$ , dus voor  $Y = 2Ste$ . De bijbehorende dimensieloze tijd volgt dan uit (4.3.79);

$$3\tau = -2Ste + 2(1 + Ste) \ln(1 + Ste).$$

Voor  $Ste = 2$  zijn de resultaten voor  $X$  en  $Y$  als functie van  $\tau$  in fig. 4.3.5 weergegeven.

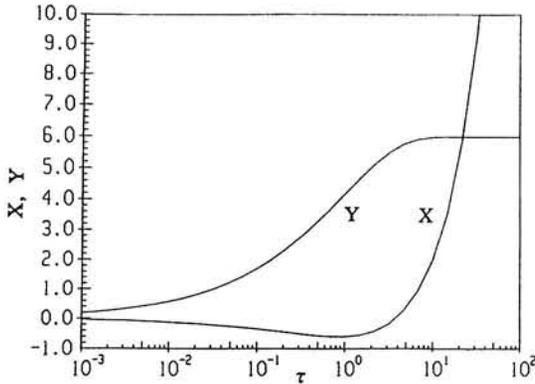


Fig. 4.3.5. De dimensieloze dikte van de afgesmolten laag  $X$  en de dimensieloze dikte van het temperatuurprofiel  $Y$  als functie van de dimensieloze tijd  $\tau$  zoals verkregen met de integraalmethode voor het geval  $Ste = 2$ .

We zien dat  $X$  eerst daalt, d.w.z. dat  $\xi$  met  $\sqrt{t}$  toeneemt ( $r_s < 0!$ ), de zich op de onderkoelde wand vormende stollaag. Maar vanaf  $\tau = 1$  neemt  $\xi$  minder toe en zal tenslotte afnemen, het smelten in de vloeistof die een temperatuur heeft boven de smelttemperatuur. In feite zal er eerst stolling plaats vinden, waarna echter de convectieve overdracht vanuit de vloeistof groter wordt dan de geleiding in het gestolde en koude materiaal en er smelten optreedt.

Dit gebeurt bij het smelten van schrot in vloeibaar staal. We zullen hiervan een voorbeeld behandelen.

#### Kwantitatief voorbeeld

Een bad met vloeibaar staal heeft een constante temperatuur van  $1550^\circ\text{C}$ . Hierin laat men schroot smelten dat er met een temperatuur van  $50^\circ\text{C}$  wordt ingebracht. De smelttemperatuur van staal en schroot is  $1450^\circ\text{C}$ . Warmte-overdracht vanuit de vloeistof voor schrot heeft plaats door convectie, met een warmte-overdrachtscoëfficiënt  $\alpha = 5 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2\text{K}$ . We vragen ons af wanneer resp. 0,1 m en 0,2 m van het schrot (aan één zijde) is weggesmolten.

Stofconstanten, onafhankelijk van temperatuur, zijn:

$$\text{vloeibaar staal, } a = 5,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 20 \text{ W/mK}$$

$$\text{vaste stof, } a = 10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 30 \text{ W/mK}, \\ \rho = 7,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{stolwarmte } |r_s| \text{ is } 2,8 \cdot 10^5 \text{ J/kg.}$$

Met de gegeven constanten volgt direct:

$$t[s] = 176,4 \tau, \delta[m] = 0,042 Y \text{ en } \xi[m] = 0,042 X.$$

De maximum stoldikte

$$X_{\max} = -2Ste/3 + \frac{2}{3} \ln(1 + Ste)$$

is hier gelijk aan  $X_{\max} = -0,6009$ , overeenkomend met 25,2 mm. Deze wordt gevonden voor  $\tau = 0,8639$ , overeenkomend met 152 s. Hierna smelt het schrot weg. Uit de lange tijden-benadering volgt dat 0,1 m schrot is weggesmolten na 2316 s en dat na 3226 s 0,2 m is weggesmolten.

Indien voor korte tijden ( $t < 10$  s) in de vloeistof niet convectieve overdracht, maar geleiding en afkoeling in een dunne laag wordt aangenomen, kan de oplossing van het probleem gebruikt worden van § 4.3.2, waarbij we op  $x = 0$  steeds  $T_0$  veronderstellen. Dan wordt gevonden:

$$\xi = 0,63 \cdot 10^{-2} \sqrt{t}.$$

In werkelijkheid loopt de temperatuur bij  $x = 0$  op tot boven  $T_0$ . Dit betekent dat voor het begin bovenstaande relatie voor  $\xi$  een overschatting van de stolsnelheid geeft.

#### 4.4. Diffusievergelijking met brontermen

##### 4.4.1. Niet-stationaire warmtegeleiding met warmteproductie in het medium

De instationaire warmtegeleiding met warmteproductie in het medium wordt beschreven door de diffusievergelijking met een bron(put)term:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c_p}. \quad (4.4.1)$$

Voor deze vergelijking kan men, als de warmteproductie  $q$  [ $W/m^3$ ] niet afhangt van  $T$ , een volledige oplossing verkrijgen door bij de oplossing  $T'(x,y,z,t)$  van de homogene vergelijking nog een *particuliere oplossing*, bijvoorbeeld  $F(x,y,z) + G(t)$  op te tellen:

$$T = T'(x,y,z,t) + F(x,y,z) + G(t).$$

Na substitutie hiervan in (4.4.1) ziet men dat voldaan moet worden aan:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = a \nabla^2 T', \quad (4.4.2)$$

en

$$\frac{dG}{dt} = a \nabla^2 F + \frac{q}{\rho c_p}. \quad (4.4.3)$$

Hierbij moet  $F + G$  aan de randvoorwaarden van het gestelde probleem worden aangepast.

In het geval van warmtegeleiding en constante warmteproductie in een lange cilinder levert (4.4.3) (omdat het linker- en rechterlid beide constant moeten zijn):

$$\frac{dG}{dt} = C_1$$

en

$$\frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = C_1 - \frac{q}{\rho c_p}$$

en dus:

$$F(x, y, z) + G(t) = \frac{1}{4} \left( \frac{C_1}{a} - \frac{q}{\lambda} \right) r^2 + C_2 + C_1 t, \quad (4.4.4)$$

met constante  $C_1$  en  $C_2$ .

We onderzoeken de particuliere oplossingen voor de volgende gevallen:

- a. Heeft men bijvoorbeeld als randvoorwaarden van het oorspronkelijke probleem:  $T = T_0$  voor  $r = R$  (een cilinder die aan de wanden constant op  $T_0$  wordt gehouden, dan vindt men:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{qR^2}{4\lambda} + T_0,$$

zodat dan de particuliere oplossing wordt:

$$F + G = T_0 + \frac{q}{4\lambda} (R^2 - r^2). \quad (4.4.5)$$

Dit is de stationaire temperatuurverdeling die zich na voldoende lange tijd in de cilinder instelt.

- b. Een ander voorbeeld is het geval dat de cilinder volmaakt is geïsoleerd:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{voor } r = 0 \text{ en } r = R. \text{ Dan vinden we:}$$

$$C_1 = \frac{q}{\rho c_p}, \quad C_2 = 0.$$

De waarde voor  $C_2$  volgt uit de eis dat ten tijde  $t = 0$  nog geen warmte in de cilinder is ontwikkeld. De particuliere ('asymptotische') oplossing wordt dus:

$$F + G = \frac{q}{\rho c_p} t. \quad (4.4.6)$$

Volgens de particuliere oplossing is de temperatuur van de cilinder onafhankelijk van  $r$  en neemt hij lineair met de tijd toe. Ook deze oplossing geldt na voldoende lange tijd, als de begintemperatuurverdeling is vereffend.

- c. Het geval dat aan het oppervlak een warmte-overdrachtscoëfficiënt  $\alpha$  aanwezig is. De particuliere oplossing volgt nu uit het feit dat voor  $t \rightarrow \infty$   $T$  eindelijk moet blijven ( $C_1 = 0$ ) en verder uit de randvoorwaarde bij  $r = R$ :

$$-\lambda \frac{dF}{dr} = \alpha F(R),$$

waarbij  $T = 0$  voor  $r > R$ . Dit geeft:

$$C_2 = \frac{qR}{2} \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{R}{2\lambda} \right]$$



en de particuliere oplossing is:

$$F + G = \frac{qR}{2\alpha} + \frac{q}{4\lambda} [R^2 - r^2]. \quad (4.4.7)$$

De temperatuur aan de wand na lange tijd is dan:

$$T_w(t \rightarrow \infty) = \frac{qR}{2\alpha}.$$

Aangezien de particuliere oplossing in al deze gevallen die is, waartoe de volledige oplossing bij een grote waarde van  $t$  nadert, komt het oplossen van de homogene vergelijking (4.4.2) weer op een 'uitsterf'-probleem neer. Met behulp van de theorie van § 4.2.8 is dit gemakkelijk te doen. Zo vindt men voor geval a met beginvoorwaarde  $T = T_0$  in de gehele cilinder (als  $\xi = r/R$  is):

$$T - T_0 = \frac{qR^2}{4\lambda} \left[ (1 - \xi^2) + \sum_0^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2 at/R^2} J_0(\beta_n \frac{r}{R}) \right], \quad (4.4.8)$$

waarin

$$A_n = - \frac{\int_0^1 (1 - \xi^2) \xi J_0(\beta_n \xi) d\xi}{\int_0^1 \xi J_0^2(\beta_n \xi) d\xi}. \quad (4.4.9)$$

Hoe wordt de oplossing als er ten tijde  $t = 0$  in de cilinder een gegeven begintemperatuurverdeling  $T_0 + (qR^2/4\lambda)f(\xi)$  aanwezig is? In bepaalde gevallen kan een vraagstuk over warmtegeleiding met uniforme warmteproductie ook handig opgelost worden door een superpositie van bronoplossingen in de plaats en in de tijd. Dit geldt vooral als men de temperatuurverdeling na een korte tijd wil weten (zie paragraaf 4.2.4).

#### 4.4.2. Niet-stationaire diffusie met homogene chemische reactie

Bij stoftransport in een medium kan door chemische reactie een productieterm ontstaan. Bij een eerste-orde-reactie geeft dat een lineair van de concentratie afhankelijke bron(put)term. In het geval dat er in een stilstaand medium een component B wordt omgezet met een reactiesnelheid  $r_B = -kc_B$  (eerste-orde-reactiesnelheidsvergelijking), dan wordt de diffusievergelijking met constante  $D_B$ :

$$\frac{\partial c_B}{\partial t} = D_B \nabla^2 c_B - kc_B. \quad (4.4.10)$$

Deze vergelijking kan vereenvoudigd worden door invoering van een nieuwe variabele  $u = c_B e^{kt}$ , er wordt verkregen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_B \nabla^2 u, \quad (4.4.11)$$

waarmee de differentiaalvergelijking tot een bekend type is teruggebracht. Fysisch zou men kunnen zeggen dat deze  $u$  uitsluitend de *reactie* verdisconteert:

immers bij een uniforme aanvangsconcentratie  $c_{B0}$  zou zonder diffusie de concentratie als functie van de tijd verlopen als  $c_{B0} \exp(-kt)$ . In dat geval zou  $u$  dus een constante zijn. We moeten nu derhalve de invloed van de *diffusie* op deze  $u$  in rekening brengen. De oplossing van (4.4.11) wordt echter bemoeilijkt doordat ten gevolge van de transformatie de rand- of beginvoorwaarden gecompliceerder worden.

We zullen hier een geval behandelen van niet-stationaire absorptie en diffusie van een gas B in een half-oneindig uitgestrekt star medium ( $x > 0$ ), waarin B volgens een eerste-orde-reactie ontleedt. De volgende condities worden aangenomen:

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \quad t > 0 \quad c_B = c_{B,0} \rightarrow u = c_{B,0} e^{kt}, \\ x = \infty \quad t > 0 \quad c_B = 0 \rightarrow u = 0 \\ x \geq 0 \quad t = 0 \quad c_B = 0 \rightarrow u = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.12)$$

Op (4.4.11) met deze randcondities in  $u$  passen we Laplace-transformatie toe:

$$L\{u(x,t)\} = \bar{u}(p,x) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x,t) dt.$$

Dit geeft voor vergelijking en randvoorwaarden:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = \frac{p}{D_B} \bar{u}; \quad (4.4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \quad \bar{u} = \int_0^{\infty} e^{-pt} c_{B,0} e^{kt} dt = \frac{c_{B,0}}{(p-k)}; \\ x = \infty, \quad \bar{u} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.14)$$

De oplossing hiervan luidt:

$$\bar{u} = \frac{c_{B,0}}{(p-k)} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{D_B}} \cdot x\right). \quad (4.4.15)$$

Terugtransformeren via de tabel van Carslaw-Jaeger geeft dan:

$$\begin{aligned} u = c_{B,0} \cdot \frac{1}{2} e^{kt} \left\{ e^{x\sqrt{k/D_B}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_B t}} + \sqrt{kt}\right) + \right. \\ \left. + e^{-x\sqrt{k/D_B}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_B t}} - \sqrt{kt}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Voor de concentratie als functie van plaats en tijd vinden we dus

$$\begin{aligned} c_B = \frac{1}{2} c_{B,0} \left\{ e^{x\sqrt{k/D_B}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_B t}} + \sqrt{kt}\right) + \right. \\ \left. + e^{-x\sqrt{k/D_B}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_B t}} - \sqrt{kt}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Het is eenvoudig na te gaan dat de gegeven oplossing voldoet aan de gestelde rand- en beginvoorwaarden en dat voor de absorptiesnelheid aan het oppervlak  $x = 0$  geldt:

$$\Phi_m'' = -D_B \frac{\partial c_B}{\partial x} \Big|_{x=0} = c_{B,0} \left\{ e^{-kt} \sqrt{\frac{D_B}{\pi t}} + \sqrt{kD_B} \operatorname{erf} \sqrt{kt} \right\}, \quad (4.4.18)$$

met als bijzondere oplossingen

$$kt \ll 1 \quad \Phi_m'' \approx c_{B,0} \sqrt{\frac{D_B}{\pi t}} \quad (\text{diffusie zonder reactie; } (4.4.19)$$

eenvoudige 'penetratietheorie')

$$kt > 4 \quad \Phi_m'' \approx c_{B,0} \sqrt{kD_B} \quad (\text{want } \operatorname{erf} 2 \approx 1). \quad (4.4.20)$$

In het laatste geval is de concentratieverdeling stationair geworden omdat voor  $kt \gg 1$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{D_B t}} + \sqrt{kt} \right) \approx 0 \\ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{D_B t}} - \sqrt{kt} \right) \approx 2 \end{array} \right\} \frac{c_B}{c_{B,0}} = e^{-x\sqrt{k/D_B}} \quad (4.4.21)$$

Deze oplossing volgt ook uit (4.4.10), als  $\frac{\partial c_B}{\partial t} = 0$  wordt gesteld. Uiteraard geldt deze lange-tijd-oplossing alleen als er geen uitputting optreedt. De reactie moet ook na een grote omzetting nog steeds eerste-orde blijven met dezelfde  $k$ .

Een differentiaalvergelijking van het type (4.4.10) kan ook worden opgesteld voor de neutronen-huishouding in een hoeveelheid materiaal, waarin neutronen door kernsplijting worden gereproduceerd. De term  $k c_B$  komt dan voor met het *positieve* teken. Het is onder andere mogelijk hiermee onder bepaalde voorwaarden voor het weglekken van neutronen aan het oppervlak, de grootte van de kritieke massa te berekenen.

We zullen als voorbeeld bespreken de chemische reactie in een natte-wand-kolom. Hierbij stroomt een vloeistoffilm langs een vaste wand en is in contact met een gas. Een component A uit het gas lost op in de vloeistof en reageert daar volgens een eerste-orde-reactie. In de stromende vloeistoffilm zal in het algemeen een snelheidsprofiel zijn met de maximale snelheid bij het vloeistof-gas-grensvlak en snelheid nul aan de wand. We nemen nu aan dat de chemische reactie alleen in een buitenste laag met dikte  $\delta$  plaatsvindt, waarbij  $\delta$  zo klein is dat hier overal de vloeistofsnelheid gelijk is aan de maximale,  $v_m$ . We veronderstellen tevens dat  $v_m$  niet van  $x$  afhangt (zie figuur 4.4.1) en dat de situatie stationair is.

De transportvergelijking met één convectieterm en met een eerste-orde-reactie geeft dan

$$v_m \frac{\partial c_A}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} - k \cdot c_A, \quad (4.4.22)$$

met als randvoorwaarden

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \quad c_A = 0 \quad y \geq 0 \\ x > 0 \quad c_A = c_0 \quad y = 0 \\ x > 0 \quad c_A = 0 \quad y = \infty \end{array} \right\} \quad (4.4.23)$$

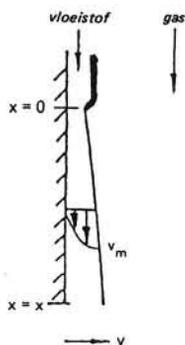


Fig. 4.4.1. Reactie in natte-wand-kolom.

waarbij  $c_0$  de evenwichtsconcentratie aan het grensvlak is, er wordt geen stoftransport-limitatie in het gas verondersteld.

De vergelijking (4.4.22) reduceert tot die voor instationaire diffusie in een stilstaand medium indien we invoeren  $\tau = x/v_m$ . We kunnen daarom rechtstreeks de reeds gevonden oplossing (4.4.17) overnemen, door voor  $t$  in te vullen  $(x/v_m)$ . Met name wordt de stofoverdrachtsstroom:

$$\Phi_m'' = c_0 \sqrt{kD} \left[ \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{kx}{v_m}} \right) + \sqrt{\frac{v_m}{\pi k x}} \exp \left( -\frac{kx}{v_m} \right) \right] \quad (4.4.24)$$

Indien  $D$  bekend is valt  $k$  te bepalen uit een meting van  $\Phi_m''$  voor één of enkele  $x$  en  $v_m$ -waarden.

#### 4.4.3. Methode van Danckwerts voor eerste-orde reacties

Zoals gesteld is de diffusievergelijking met een eerste-orde reactie door invoeren van  $u' = c \cdot e^{kt}$  te vereenvoudigen. Echter worden de randvoorwaarden van een meer ingewikkelde vorm. Een voor bepaalde rand- en beginvoorwaarden vergelijkbare, maar het probleem van de getransformeerde randvoorwaarden omzeilende methode is door Danckwerts gegeven. Hij toonde aan dat de oplossing van de diffusievergelijking

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c - kc \quad (4.4.10)$$

gegeven wordt door

$$c = k \int_0^t C_1 e^{-kt'} dt' + C_1 e^{-kt} \quad (4.4.25)$$

met  $C_1$  als oplossing voor de vergelijking

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D \nabla^2 C_1 \quad (4.4.26)$$

met dezelfde rand- en beginvoorwaarden voor  $C_1$  als voor  $c$ . Echter is dit alleen mogelijk indien

- 1°. De beginvoorwaarde is:  $t = 0, C_1 = 0$  voor alle  $x, y$  en  $z$  in het medium. In feite is vereist dat voor  $t = 0, c = \text{constant}$ .

- 2°. De randvoorwaarden zijn van de eerste soort met langs de rand altijd een constante concentratie  $C_w$  of van de derde soort met constante overdrachtscoëfficiënt en constante concentratie  $C_w$  buiten het medium.

Het bewijs voor deze oplossingsmethode is door invullen snel te vinden. We doen het hier voor één dimensie; voor  $\partial c/\partial t$  vinden we:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k.C_1 e^{-kt} - k.C_1 e^{-kt} + \frac{\partial C_1}{\partial t} e^{-kt} = \frac{\partial C_1}{\partial t} e^{-kt} \quad (4.4.27)$$

en voor  $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = k \int_0^t \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} e^{-kt'} dt' + \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} e^{-kt}. \quad (4.4.28)$$

Indien we voor  $\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}$  invullen volgens de differentiaalvergelijking:  $\frac{1}{D} \frac{\partial C_1}{\partial t}$ , dan:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{k}{D} \int_0^t \frac{\partial C_1}{\partial t'} e^{-kt'} dt' + \frac{1}{D} \frac{\partial C_1}{\partial t} e^{-kt} \quad (4.4.29)$$

en met invullen van  $\frac{\partial C_1}{\partial t}$  uit (4.4.27) geeft:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = kc + \frac{\partial c}{\partial t} \quad (4.4.30)$$

Voor  $t = 0$  is tevens  $c = C_1$ , beginvoorwaarde gelijk. Voor randvoorwaarde  $C_1 = C_w$  (constant) geldt:

$$c = kC_w \int_0^t e^{-kt'} dt' + C_w e^{-kt} = C_w \quad (4.4.31)$$

en ook hier dus dezelfde voorwaarde.

Bij de randvoorwaarde van de derde soort:

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = h(C_w - C_1) \quad (4.4.32)$$

vinden we

$$\frac{\partial c}{\partial x} = k \int_0^t \frac{\partial C_1}{\partial x} e^{-kt'} dt' + \frac{\partial C_1}{\partial x} e^{-kt} = h(C_w - c). \quad (4.4.33)$$

Ook in dit geval vinden we dus weer de oorspronkelijke randvoorwaarde.

De oplossingen voor  $C_1$  van (4.4.26) zijn met standaardmethoden zoals in § 4.2 gegeven, te vinden. Dikwijls nemen ze de vorm aan van oneindige reeksen, waarin plaats en tijdafhankelijkheid gescheiden zijn.

$$\frac{C_1}{C_w} = 1 - \sum_n f(x,y,z,\lambda_n) \exp[-\lambda_n t]. \quad (4.4.34)$$

Indien we (4.4.25) hierop toepassen, vinden we voor  $c$ :

$$\frac{c}{C_w} = 1 - \sum_n \left( \frac{k}{k + \lambda_n} \right) f(x, y, z, \lambda_n) - \sum_n \left( \frac{\lambda_n}{k + \lambda_n} \right) f(x, y, z, \lambda_n) \cdot \exp [-(\lambda_n + k)t]. \quad (4.4.35)$$

Hierin is  $\left[ 1 - \sum_n \frac{k}{k + \lambda_n} \cdot f(x, y, z, \lambda_n) \right]$  de stationaire oplossing die voor grote  $t$  geldt. Deze oneindige reeksen zijn meestal niet eenvoudig te hanteren. Het is voor  $t \rightarrow \infty$  beter om de Poissonvergelijking op te lossen die ontstaat als in (4.4.10) de  $\partial c / \partial t$  nul gesteld wordt.

We passen dit toe op het geval van diffusie en chemische reactie in een bol. We moeten dus allereerst oplossen:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D \left[ \frac{\partial^2 C_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C_1}{\partial r} \right] \quad (4.4.36)$$

met

$$\left. \begin{array}{l} t = 0, \quad C_1 = 0 \quad 0 \leq r \leq R \\ t > 0, \quad C_1 = C_w \quad r = R \\ \frac{\partial C_1}{\partial r} = 0 \quad r = 0. \end{array} \right\} \quad (4.4.37)$$

Door scheiden van variabelen vinden we (zie § 2.3)

$$C_1 = T(t) \cdot G(r)$$

$$\text{en dus } \frac{T'}{T} = -\lambda^2 \quad \text{en } G'' + \frac{2}{r} G' + \frac{\lambda^2}{D} G = 0. \quad (4.4.38)$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking voor  $G$  kent  $(\sin(ar))/r$  en  $(\cos(ar))/r$ -termen, gezien de symmetrie in  $r = 0$  kan  $\cos(r)$  niet, dus we vinden:  $G = \frac{A}{r} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}} r\right)$ .

Bij  $r = R$  is  $C_1$  constant ( $C_w$ ) en uiteindelijk:

$$C_1 = C_w \left[ 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{r} \sin\left(n\pi \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{Dn^2\pi^2}{R^2} t\right) \right] \quad (4.4.39)$$

Met de beginvoorwaarde en orthogonaliteitseigenschap zijn de waarden voor  $A_n$  te vinden, zie § 2.3. Dit geeft:

$$C_1 = C_w \left[ 1 - 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} R}{n\pi r} \sin\left(n\pi \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{Dn^2\pi^2}{R^2} t\right) \right] \quad (4.4.40)$$

en dus met (4.4.25):

$$c = k C_w \int_0^t e^{-kt'} dt' + C_w e^{-kt} - 2 C_w \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} R}{n\pi r} \sin\left(n\pi \frac{r}{R}\right) \cdot \left[ k \int_0^t \exp\left[-\left(k + \frac{Dn^2\pi^2}{R^2}\right) t'\right] dt' + \exp\left[-\left(k + \frac{Dn^2\pi^2}{R^2}\right) t\right] \right] \quad (4.4.41)$$

Dit geeft (zie ook 4.4.35):

$$c = C_w \left[ 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{k + \frac{Dn^2\pi^2}{R^2}} \cdot \frac{(-1)^{n+1} R}{n\pi r} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) + \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D n^2 \pi^2 / R^2}{k + Dn^2 \pi^2 / R^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1} R}{n\pi r} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left[-\left(\frac{Dn^2 \pi^2}{R^2} + k\right)t\right] \right] \quad (4.4.42)$$

of

$$c = C_w \left[ 1 - \frac{2R}{\pi r} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{kR^2/D + n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \frac{kR^2}{D} + n^2 \pi^2 \exp\left[-\left(k + \frac{Dn^2 \pi^2}{R^2}\right)t\right] \right\} \right] \quad (4.4.43)$$

Voor  $t \rightarrow \infty$  vinden we de stationaire verdeling, met  $c_{st}$ :

$$c_{st} = C_w \left[ 1 - \frac{2R}{\pi r} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{kR^2}{kR^2 + n^2 \pi^2 D} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \right] \quad (4.4.44)$$

Deze reeks in  $\sin(n\pi r/R)$  is weinig doorzichtig. De stationaire oplossing vinden we ook uit:

$$0 = D\nabla^2 C - kC \quad (4.4.45)$$

met bijbehorende randvoorwaarden (4.4.37) voor  $t > 0$ . In bolcoördinaten met alleen  $r$ -afhankelijkheid:

$$\frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dC}{dr} - \frac{k}{D} C = 0. \quad (4.4.46)$$

De algemene oplossing van deze vergelijking is reeds in § 2.3 gegeven en luidt:

$$C = \frac{A}{r} \sin \sqrt{-\frac{k}{D}} r + \frac{B}{r} \cos \sqrt{-\frac{k}{D}} r \quad (4.4.47)$$

of met  $k$  en  $D$  beide  $> 0$ :

$$C = \frac{A}{r} \sinh\left(\sqrt{\frac{k}{D}} r\right) + \frac{B}{r} \cosh\left(\sqrt{\frac{k}{D}} r\right). \quad (4.4.48)$$

Nu is  $\frac{dC}{dr} = 0$  voor  $r = 0$ , hetgeen  $B = 0$  maakt en verder met voor  $r = R$ ,  $C = C_w$  vinden we:

$$C = C_w \cdot \frac{R}{r} \frac{\sinh\left(\sqrt{k/D} r\right)}{\sinh\left(\sqrt{k/D} R\right)} \quad (4.4.49)$$

met als stofstroom aan de wand:

$$\Phi_m'' = \frac{DC_w}{R} \left[ 1 - \sqrt{\frac{k}{D}} R \cdot \text{coth}\left(\sqrt{\frac{k}{D}} R\right) \right] \quad (4.4.50)$$

Nu moeten (4.4.44) en (4.4.49) identiek zijn, hetgeen betekent:

$$\frac{\sinh\left(\sqrt{k/D} r\right)}{\sinh\left(\sqrt{k/D} R\right)} = \frac{r}{R} - \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{kR^2}{kR^2 + n^2 \pi^2 D} \cdot \sin(n\pi r/R). \quad (4.4.51)$$

Met behulp van (4.4.43) is voor grote waarden van  $t$  het uitsterven naar de stationaire waarde eenvoudig te vinden, aangezien dan met de eerste eigenwaarde kan worden volstaan, voor de term met de tijdsfunctie, terwijl de reeks in  $\sin(n\pi r/R)$  met behulp van (4.4.49) kan worden vereenvoudigd.

Deze vergelijking is karakteristiek voor de reactie met diffusie in een katalysatordeeltje. De instationaire oplossing is belangrijk indien er nog geen lange tijden sinds het begin van de reactie en diffusie verlopen is, d.w.z. als

$$t < \frac{R^2}{kR^2 + D\pi^2} = \frac{1}{k + D\pi^2/R^2} \quad (4.4.52)$$

Alleen indien zowel  $k$  als  $D$  klein zijn, kunnen dit lange tijden worden. Voor kleine  $R$  en grote  $k$  zal de stationaire toestand ook reeds snel bereikt zijn, echter wordt de diffusie dan minder benut en vindt de reactie vooral in de buitenschil plaats.

We krijgen dan:

$$c = C_w \left[ \frac{R}{r} \frac{\sinh(\sqrt{k/D}r)}{\sinh(\sqrt{k/D}R)} - \frac{2D\pi^2}{kR^2 + D\pi^2} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) \exp\left(-\frac{D\pi^2 - kR^2}{R^2} t\right) \right] \quad (4.4.53)$$

Door differentiatie bij  $r = R$  is ook de stofstroom te vinden die door de cosinusterm voor  $\pi$  een waarde geeft groter dan die voor de stationaire toestand (4.4.50). De dimensieloze grootheid  $\sqrt{k/D}R$ , die karakteristiek is voor de diffusie met eerste-orde chemische reactie, wordt wel de *Thiele-modulus*  $\varphi$  genoemd. De effectiviteit van een bolletje (bijv. katalysatordeeltje) voor chemische reactie kan erin worden uitgedrukt. Indien de reactie in de gehele bol zou plaatsvinden bij de concentratie  $C_w$ , dan is de stofstroom die hiervoor nodig is:

$$\Phi_m'' = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)(-kC_w). \quad (4.4.54)$$

De verhouding van (4.4.54) en (4.4.50) geeft voor de stationaire toestand de effectiviteit:

$$\eta = \frac{3\coth\varphi}{\varphi} - \frac{3}{\varphi^2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (4.4.55)$$

met

$$\varphi = \sqrt{k/D}R.$$

Men noemt  $\eta$  de *effectiviteitsfactor*, die de benutting van het katalysatordeeltje geeft. Kleine  $\varphi$  geeft een hoge benuttingsgraad en omgekeerd. Figuur 4.4.2. geeft  $\eta$  als functie van  $\varphi$  weer, voor grote  $\varphi$  is  $\eta$  omgekeerd evenredig met  $\varphi$ .



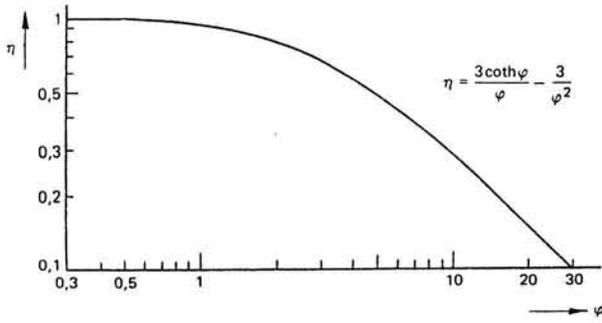


Fig. 4.4.2. Effectiviteit  $\eta$  van een katalysatorbolletje als functie van Thiele-modulus  $\phi$ .

# 5. Impulstransport

## 5.1. Inleiding

Overdrachtsproblemen met convectie zijn in het algemeen gecompliceerder dan die met diffusietransport alleen. Ze vereisen namelijk oplossing van zowel de warmte- (resp. stof-) transportvergelijkingen als van de impulstransport- (Navier-Stokes-) vergelijkingen. Bij gedwongen convectie zijn deze vergelijkingen in het algemeen onafhankelijk en separaat oplosbaar. Hoewel hier door temperatuur- of concentratie-afhankelijke stofconstanten ( $\eta, \lambda, D$ ) er toch koppeling kan optreden. Bij natuurlijke convectie, waarbij de stroming juist ontstaat door dichtheidsverschillen samenhangend met temperatuur of concentratieverschillen zijn de vergelijkingen steeds gekoppeld.

De oplossingen van de Navier-Stokes-vergelijkingen worden in stromingsleerboeken behandeld (zie bibliografie), hier zullen slechts enkele gevallen besproken worden. Aangezien stof- en warmte-overdracht meestal plaatsvinden langs vaste oppervlakken zijn de grenslaagstromingen van groot belang. Op de laminaire grenslaag wordt hier nader ingegaan. Turbulente stromingen vallen buiten het bestek van dit boek, verwezen zij naar de literatuur.

Een aantal bijzondere gevallen van de Navier-Stokes-vergelijkingen worden verkregen door verwaarlozing van termen in de volledige vergelijkingen. Door het dimensieloos maken van deze vergelijkingen met behulp van:

$$\bar{v}^* = \frac{v}{V_0}, \quad \chi = \frac{x}{L}, \quad \zeta = \frac{y}{L}, \quad \xi = \frac{z}{L} \quad (5.1.1)$$

worden de Navier-Stokes-vergelijkingen voor stationaire stroming:

$$(\bar{v}^* \cdot \nabla) \bar{v}^* = - \left( \frac{\nabla p}{\rho V_0^2} \right) + \frac{\eta}{\rho V_0 L} \nabla^2 \bar{v}^* \quad (5.1.2)$$

of:

$$(\bar{v}^* \cdot \nabla) \bar{v}^* = - \nabla Eu + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{v}^*,$$

waarin het Euler- en Reynoldsgetal respectievelijk zijn:

$$Eu = \frac{p}{\rho V_0^2} \quad \text{en} \quad Re = \frac{\rho V_0 L}{\eta}. \quad (5.1.3)$$

Bij deze schrijfwijze kunnen we twee extreme gevallen van impulstransport onderscheiden:

- $Re \rightarrow \infty$ , de visceuze term  $\nabla^2 \bar{v}^*$  is te verwaarlozen. Men krijgt dan de zogenaamde wrijvingsloze *potentiaalstroming*. Komt in werkelijkheid slechts voor bij grote Reynolds-waarden op enige afstand van vaste wanden ( $L$  groot). Men heeft alleen convectief transport van impuls.
- $Re \rightarrow 0$ , de visceuze term overheerst en de traagheidsterm  $(\bar{v}^* \cdot \nabla) \bar{v}^*$  kan worden verwaarloosd. Dit geeft de zogenaamde *kruipstroming*, hierbij is er alleen een diffusie(viscositeits)transport van impuls.

Daarnaast zijn er de zogenaamde *grenslaagstromingen*. Dicht bij een wand overheersen de wrijvingseffecten in een dunne grenslaag, terwijl, ver van de wand, men een potentiaalstroming heeft. Doordat de grenslaagstroming in

een zeer dunne laag plaatsvindt, is het mogelijk een aantal deeltermen uit traagheids- en viscositeitskrachten te verwaarlozen.

Ook bij de Navier-Stokes-vergelijkingen behoren bepaalde randvoorwaarden. Fysisch zal voor een continuüm steeds gelden dat door wrijving langs de wand  $\bar{v}_{\text{wand}} = 0$  (*no-slip-conditie*). Alleen bij zeer verdunde gassen kan er sprake zijn van een zekere slipsnelheid van het gas langs de wand. Potentiaalstromingen voldoen aan een differentiaalvergelijking van lagere orde dan de volledige Navier-Stokes-vergelijkingen en hierbij kunnen minder randvoorwaarden gesteld worden. Omdat wrijving verwaarloosd wordt, kan nu niet  $\bar{v}_w = 0$  gesteld worden, maar alleen de normale component  $v_n = 0$  aan de wand. De tangentiële component  $v_t$  is nu niet 0. Dit betekent dat potentiaalstroming fysisch niet gerealiseerd wordt dichtbij een wand. Op enige afstand van de wand, bijvoorbeeld bij het instroomgebied van een breed kanaal of in het gebied rond het voorste stuwpunt van een lichaam, waar de wand-invloed nog beperkt is, geeft potentiaalstroming een goede benadering van het stromingsveld. Ook de stroming in de atmosfeer op enige afstand van de grond is hier goed mee te beschrijven.

## 5.2. Stromingen van incompressibele media

### 5.2.1. Potentiaalstroming

Voor grote *Re*-waarden verwaarlozen we de viscositeitsterm. We krijgen:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\nabla p + \rho \bar{g}, \quad (5.2.1)$$

de zogenaamde vergelijking van Euler.

Het is aan te tonen (bijvoorbeeld door uitschrijven) dat:

$$(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \bar{v} \times \text{rot } \bar{v}. \quad (5.2.2)$$

Nu zal de vector  $\bar{v} \times \text{rot } \bar{v}$  steeds loodrecht op  $\bar{v}$  staan en dus ook loodrecht op de aan  $\bar{v}$  rakende stroomlijnen. Voor de component van (5.2.1) langs een stroomlijn *l* is deze term 0. Dit geeft voor een stationaire stroming voor de componenten langs *l*:

$$\frac{1}{2} \rho g \text{grad}_l v^2 = -\text{grad}_l (p + \rho gh), \quad (5.2.3)$$

waarbij we voor  $\rho \bar{g}$  hebben gesteld, met *h* als coördinaat in verticale richting naar boven:

$$\rho \bar{g} = -\text{grad} (\rho gh). \quad (5.2.4)$$

Indien nu de dichtheid  $\rho$  constant is (incompressibel medium) vinden we dat voor een stationaire, wrijvingsloze stroming met constante dichtheid langs een stroomlijn geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{grad}_l (\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh) = 0 \\ \text{of} \\ \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh = C_l \quad (\text{langs } l), \end{array} \right\} \quad (5.2.5)$$

de wet van Bernoulli.

Bij een rotatievrije stroming is  $\text{rot } \bar{v} = 0$  en dan geldt voor een stationaire incompressibele stroming de wet van Bernoulli in het gehele veld:

$$\text{grad} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\text{grad} (p + \rho gh) \tag{5.2.6}$$

of

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh = C^{\text{te}}. \tag{5.2.7}$$

In het geval van  $\text{rot } \bar{v} = 0$  kan men een potentiaalfunctie invoeren:

$$\bar{v} = -\text{grad } \Phi = -\nabla \Phi, *) \tag{5.2.8}$$

immers voor een gradiëntveld geldt:

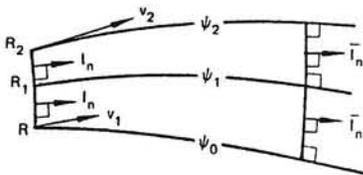
$$\text{rot grad } \Phi = 0.$$

De continuïteitsvergelijking wordt dan

$$-\nabla \cdot \bar{v} = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi = 0. \tag{5.2.9}$$

De stroming is dus met de potentiaalvergelijking te beschrijven en men noemt dit *potentiaalstroming*. Lijnen van constante  $\Phi$  zijn potentiaallijnen,  $\bar{v}$  staat hier steeds loodrecht op. In de ruimte heeft men vlakken van constante  $\Phi$ . Daarnaast zijn er stroomlijnen, dat zijn lijnen die steeds raken aan de snelheid en dus orthogonaal (1) met de potentiaallijnen zijn. Langs een dergelijke lijn is de stroomfunctie  $\psi$  constant. In de ruimte krijgen we een verzameling van stroomlijnen die vlakken van constante  $\psi$  vormen. De door een  $\psi$ -vlak omgeven ruimte noemt men een stroombuis.

In figuur 5.2.1 is de definitie van de stroomfunctie nader toegelicht voor het twee-dimensionale geval.



$$\psi_2 - \psi_1 = \int_{R_1}^{R_2} \bar{v} d\bar{l}_n = \int_{R_1}^{R_2} (v_x dy - v_y dx)$$

$$d\psi = v_x dy - v_y dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx.$$

Fig. 5.2.1. Definitie stroomlijnen.

De relatie tussen stroomfunctie en snelheid is  $l$  voor een tweedimensionale rotatievrije stroming is (fig. 5.2.1):

$$v_x = + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{en} \quad v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{5.2.10}$$

en voor een cilinder-symmetrische stroming in een plat vlak:

\*) In veel stromingsleer-boeken gebruikt men het +-teken. Om consistent met (1.2.1) te zijn (iets stroomt in de richting van afnemende functiewaarden) is hier het -- teken gehanteerd.

$$v_r = +\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{en} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (5.2.11)$$

Door deze stroomfunctie wordt steeds automatisch aan de continuïteitsvergelijking voldaan, bijvoorbeeld

$$\text{div } \bar{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

hetzelfde voor de cilindercoördinaten.

Aangezien een potentiaalstroming rotatievrij is, zal voor een tweedimensionale stroming:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0,$$

dus

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi = 0. \quad (5.2.12)$$

Dit volgt trouwens ook uit het feit dat de  $\psi$ - en  $\Phi$ -functies orthogonaal zijn en  $\nabla^2 \Phi = 0$ .

Als voorbeelden bespreken we hier twee gevallen:

a. *Puntbron* op  $r = 0$  met sterkte  $Q \text{ m}^3/\text{s}$ .

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = c \text{te}$$

en dus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{c}{r^2};$$

dit geeft

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{c}{r^2}.$$

Uit de continuïteitsvergelijking volgt  $v_r 4\pi r^2 = Q$  dus

$$\Phi = +\frac{Q}{4\pi r} + B. \quad (5.2.13)$$

Stel  $\Phi = 0$  voor  $r = \infty$ , dan  $B = 0$ .

In fig. 5.2.2 is het stroom- en potentiaalveld voor een combinatie van een bron en put getekend.

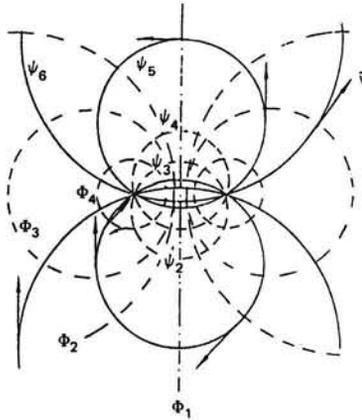


Fig. 5.2.2. Stroomlijn ( $\psi$ ) en potentiaallijnen  $\phi$  van een dipool- (bronput-)stromingsveld. Richting (niet grootte) van  $v$  is gegeven in een aantal punten.

b. *Stroming om cilinder.* We beschouwen de tweedimensionale stroming om een cilinder met op grote afstand van de cilinder een constante snelheid  $V_\infty$  in de  $x$ -richting. Langs de cilinderwand zal  $v_n = 0$  zijn, tevens is er symmetrie om de  $x$ -as.

Het gaat hier om een potentiaalstroming. Voer in de stroomfunctie  $\psi$ , zodat:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{en} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{5.2.14}$$

Met de continuïteitsvergelijking geeft dit:

$$\nabla^2 \psi = 0. \tag{5.2.15}$$

In cilindercoördinaten:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{5.2.16}$$

Randvoorwaarden:

voor  $r = a$ ,  $v_r = 0$  dus

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{r=a} = 0,$$

wegens symmetrie:

$\theta = 0$ ,  $v_\theta = 0$ , dus:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{\theta=0} = 0. \tag{5.2.17}$$

Als  $r \rightarrow \infty$ ,

$$|\bar{v}| = V_\infty.$$

Probeer oplossing potentiaalvergelijking (5.2.16) met scheiding van variabelen:

$$\psi = F(r).G(\theta). \tag{5.2.18}$$

Dit geeft:

$$r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} = -\frac{G''}{G} = +\lambda^2, \quad (5.2.19)$$

dus  $G'' + \lambda^2 G = 0$ ;

$$G(\theta) = A \sin \lambda \theta + B \cos \lambda \theta, \quad (5.2.20)$$

en

$$r^2 F'' + r F' - \lambda^2 F = 0, \quad (5.2.21)$$

dit is de differentiaalvergelijking van Euler en:

$$F(r) = Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}.$$

Nu volgens randvoorwaarde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= 0, \\ (Ca^\lambda + Da^{-\lambda})(\lambda A \cos \lambda \theta - B \lambda \sin \lambda \theta) &= 0, \end{aligned}$$

dus

$$D = -Ca^{2\lambda}. \quad (5.2.22)$$

Voor  $\theta = 0$   $\partial \psi / \partial r = 0$ , nu is  $\cos \lambda \theta \neq 0$  voor  $\theta = 0$  dus:  $B = 0$ , geeft met  $D = -Ca^{2\lambda}$ :

$$\psi = A \sin(\lambda \theta) \cdot \left( r^\lambda - \frac{a^{2\lambda}}{r^\lambda} \right). \quad (5.2.23)$$

Verder voor  $r = \infty$ :

$$v^2 = V_\infty^2 = (v_r^2 + v_\theta^2),$$

met  $v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$  en  $v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$ :

$$v_r^2 + v_\theta^2 = A^2 \lambda^2 \left[ \cos^2 \lambda \theta \left( r^{\lambda-1} - \frac{a^{2\lambda}}{r^{\lambda+1}} \right)^2 + \sin^2 \lambda \theta \left( r^{\lambda-1} + \frac{a^{2\lambda}}{r^{\lambda+1}} \right)^2 \right] \quad (5.2.24)$$

Wil nu voor  $r \rightarrow \infty$ ,  $V_\infty$  eindig blijven, dan moet

$$\lambda = 1 \text{ en } A = V_\infty.$$

Dus:

$$\psi(r, \theta) = V_\infty \cdot r \cdot \sin \theta \cdot \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (5.2.25)$$

Het stroomlijnenveld zoals door (5.2.25) gevonden is gegeven in fig. 5.2.3.

Langs de cilinderwand vinden we voor  $v$ :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad \text{voor } r = a, v_r = 0$$

en

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad \text{voor } r = a:$$

$$V_{r=a} = V_{\theta} = -2V_{\infty} \sin \theta. \quad (5.2.26)$$

Dit geeft in specifieke punten aan de wand:

$$\theta = 0 = \pi, \quad V_{r=a} = 0 \quad (\text{stuwpunten}),$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad V_{r=a} = -2V_{\infty} \quad (\text{richting tegen toename } \theta),$$

$$\text{of } V_{x,r=a} = 2V_{\infty} \quad (\text{d.i. richting: } +x),$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}, \quad V_{r=a} = 2V_{\infty}, \quad V_{x,r=a} = 2V_{\infty}.$$

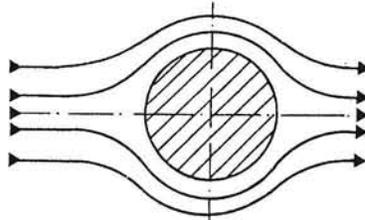


Fig. 5.2.3. Stroomlijnen bij stroming om cirkelcilinder.

Voor de druk geldt Bernoulli en dus langs de wand:

$$P_{r=a} + \frac{1}{2} \rho V_{r=a}^2 = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2$$

$$P_{r=a} = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 [1 - 4 \sin^2 \theta], \quad (5.2.27)$$

dus:  $\theta = 0$  en  $\pi$ :  $P_{r=a} = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2$  (stuwdruk)

$\theta = \frac{\pi}{6}$  :  $P_{r=a} = p_{\infty}$  (statische druk)

$\theta = \frac{\pi}{4}$  :  $P_{r=a} = p_{\infty} - \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2$  (onderdruk)

$\theta = \frac{\pi}{2}$  en  $\frac{3\pi}{2}$ :  $P_{r=a} = p_{\infty} - \frac{3}{2} \rho V_{\infty}^2$  (maximale onderdruk).

De drukverdeling langs de wand is gegeven in fig. 5.2.4.

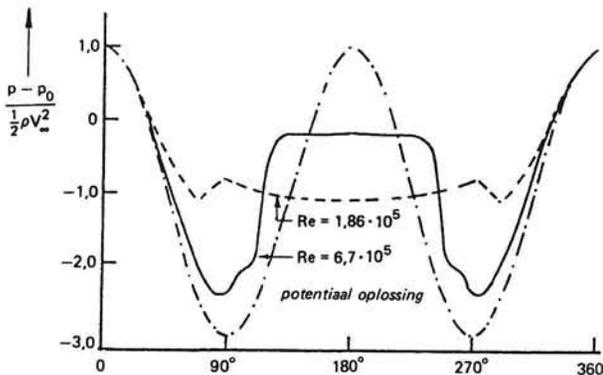


Fig. 5.2.4. Drukverdeling aan cilinderwand.



Met de drukverdeling is ook de kracht op de cilinder te berekenen:

$$\begin{aligned} F_x &= -\int_0^{2\pi} [p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1 - 4\sin^2 \theta)] \cos \theta \cdot a \cdot d\theta \\ F_y &= -\int_0^{2\pi} [p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1 - 4\sin^2 \theta)] \sin \theta \cdot a \cdot d\theta. \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

Wegens symmetrie zijn zowel  $F_x$  als  $F_y = 0$ .

We zien dat voor potentiaalstroming er geen resulterende kracht op de cilinder is. Dit noemt men wel de *paradox van d'Alembert*. In werkelijkheid is er door wrijving een kracht. In fig. 5.2.4 is ook voor hoge Reynolds-waarden de werkelijke drukverdeling gegeven, deze resulteert wel in een kracht in de x-richting. Overigens blijkt dichtbij het eerste stuwpunt  $|\theta| < 45^\circ$  de potentiaaloplossing te voldoen. Op enige afstand van de cilinder is dit in het gehele veld het geval.

### 5.2.2. Kruipstroming

Indien de visceuze effecten overheersen ( $Re \rightarrow 0$ , hoge viscositeit) krijgen we:

$$0 = -\text{grad } p + \eta \nabla^2 \bar{v} + \rho \bar{g}. \quad (5.2.29)$$

Dit beschrijft de zogenaamde *kruipstroming* (creeping flow) en indien er geen zwaartekrachtseffecten zijn:

$$\nabla^2 \bar{v} = \frac{1}{\eta} \nabla p. \quad (5.2.30)$$

Voor een gegeven drukveld ( $\nabla p$ ) leidt dit tot de Poissonvergelijking.

Voor een twee-dimensionale stroming tussen twee vlakke evenwijdige platen met afstand  $h$  tussen de platen vinden we:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.31)$$

Randvoorwaarden zijn:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{voor } z = 0 \quad \text{en } z = h \\ v &= 0 \quad \text{voor } z = 0 \quad \text{en } z = h. \end{aligned}$$

Oplossing geeft een parabolische snelheidsverdeling: langs elke lijn loodrecht op de platen

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{6z(h-z)}{h^2} \cdot \langle u \rangle \\ v &= \frac{6z(h-z)}{h^2} \cdot \langle v \rangle \end{aligned} \right\} \quad (5.2.32)$$

met  $\langle u \rangle$  en  $\langle v \rangle$  de lokale over  $z$  gemiddelde snelheidscomponenten.

Invullen van (5.2.32) in de oorspronkelijke vergelijkingen (5.2.31) geeft:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{12\eta}{h^2} \langle u \rangle \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{12\eta}{h^2} \langle v \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.33)$$

We zien dat  $\langle u \rangle$  en  $\langle v \rangle$  (functies van  $x$  en  $y$ , maar niet van  $z$ ) gegeven worden door de componenten van grad  $p$ . We kunnen ze als componenten van een twee-dimensionale potentiaalstroming zien, met als potentiaal:

$$\phi = -\frac{ph^2}{12\eta}.$$

Dit leidt tot de paradoxale situatie dat een puur visceuze stroming als model van een wrijvingsloze potentiaalstroming kan dienen. Hele Shaw gebruikte dit voor een modeltechniek, waarbij een visceuze vloeistof tussen twee dicht op elkaar liggende platen werd geleid. Door het aanbrengen van twee-dimensionale lichamen tussen de platen kan de potentiaalstroming om een lichaam zichtbaar worden gemaakt.

Ook de stroming door een gepakt bed en door poreus gesteente en grond (grondwaterstroming en petroleumwinning) wordt door de vergelijkingen (5.2.29) bepaald. In het Hele Shaw-experiment is door het aanbrengen van korreltjes tussen de platen te bewerkstelligen dat traagheidseffecten bij zelfs redelijke afstanden tussen de platen verwaarloosd mogen worden.

Oplossing van (5.2.29) voor de stroming om een bol (zie Lamb, B9) leidt tot de wet van Stokes voor de weerstand van een bol, die slechts voor waarden  $Re \ll 1$  de juiste oplossing geeft. Voor  $Re \approx 1$  dienen reeds traagheidstermen meegenomen te worden.

We zullen twee eenvoudige gevallen van zuiver visceuze stroming beschouwen.

a. Instationaire stroming veroorzaakt door een bewegende plaat. Een half-eindige vloeistofmassa bevindt zich langs een plaat die met de  $x$ -as samenvalt. Vanaf  $t = 0$  gaat deze plaat met snelheid  $V_0$  in de  $x$ -richting bewegen. Voor het stromingsveld hebben we alleen met de snelheid  $u$  in de  $x$ -richting te doen. De Navier-Stokes-vergelijking wordt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.2.34)$$

met als randvoorwaarde

$$\left. \begin{aligned} t > 0 \quad y = 0 \quad u &= V_0 \\ \quad \quad y = \infty \quad u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2.35)$$

en beginvoorwaarde

$$t = 0 \quad u = 0.$$

Voor deze vergelijking, die volledig gelijk is aan de diffusievergelijking, hebben we bij deze randvoorwaarden reeds in § 4.2.6 de penetratietheorie-oplossing gevonden:

$$u = V_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \right) \right] \quad (5.2.36)$$

waarbij  $v = \nu$  op de plaats van  $a$  (D) is gekomen. We zien dat de stroming zich geleidelijk in de tijd uitbreidt over het gehele  $y$ -bereik. De penetratiediepte  $\delta$  van het snelheidsveld is evenredig met  $\sqrt{\nu t}$ .

b. De stationaire stroming in een rechthoekig kanaal. We beschouwen de laminaire (visceuze) axiale stroming in een rechthoekig kanaal met afmetingen  $2b$  en  $2c$  onder invloed van een constante drukgradiënt ( $dp/dx$ ) in de axiale ( $x$ -)richting. De Navier-Stokes-vergelijking wordt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) \quad (5.2.37)$$

met  $u$  de snelheid in de  $x$ -richting.

De randvoorwaarden zijn:

$$\left. \begin{array}{l} y = \pm b, \quad u = 0 \\ z = \pm c, \quad u = 0 \end{array} \right\} \quad (5.2.38)$$

Vergelijking (5.2.37) is de Poissonvergelijking, met een constant rechterlid. De oplossing van deze inhomogene vergelijking is te vinden uit een particuliere oplossing en de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking. Voor de particuliere oplossing proberen we een afhankelijkheid alleen van  $y$ , dus:

$$u = K \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (5.2.39)$$

Dit is een particuliere oplossing als:

$$K = -\frac{b^2}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) \quad (5.2.40)$$

We zoeken de oplossing van de homogene vergelijking door scheiden van variabelen.

$$u = Y(y) \cdot Z(z).$$

Dit geeft ingevuld in de differentiaalvergelijking

$$\text{of} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \\ \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2 \end{array} \right\} \quad (5.2.41)$$

Hieruit volgt voor  $Y$  en  $Z$ :

$$Y = A \exp(-i\lambda y) + B \exp(i\lambda y) \quad (5.2.42)$$

en

$$Z = C \exp(\lambda z) + D \exp(-\lambda z).$$

Vanwege de symmetrie is  $A = B$  en  $C = D$ . De algemene oplossing kan dus geschreven worden als

$$\left. \begin{aligned} \text{of} \quad u &= A' [\exp(\lambda z) + \exp(-\lambda z)] [\exp(i\lambda y) + \exp(-i\lambda y)] \\ u &= A'' \cosh(\lambda z) \cos(\lambda y) \end{aligned} \right\} (5.2.43)$$

De eigenwaarden  $\lambda$  moeten voldoen aan de randvoorwaarde dat voor  $y = \pm b$ ,  $u = 0$  voor iedere  $z$ , zodat  $\cos(\lambda b) = 0$ ,

$$\lambda_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{b}, \quad \text{met } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2.44)$$

De volledige oplossing wordt dus

$$u = -\frac{b^2}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cosh(\lambda_n z) \cos(\lambda_n y). \quad (5.2.45)$$

Voor  $z = \pm c$  is  $u = 0$  en met de orthogonaliteitseigenschappen vinden we dan:

$$\frac{b^2}{2\eta} \frac{dp}{dx} \int_{-b}^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \cos(\lambda_n y) dy = A_n \cosh(\lambda_n c) \int_{-b}^b \cos^2(\lambda_n y) dy \quad (5.2.46)$$

Dit geeft met partieel integreren en  $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$$\frac{b^2}{2\eta} \frac{dp}{dx} \cdot \frac{4(-1)^n}{\lambda_n^3 b^2} = A_n \cosh(\lambda_n c) b$$

zodat

$$u = -\frac{1}{2\eta} \left(\frac{dp}{dx}\right) \left[ b^2 - y^2 - \frac{4}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cdot \frac{\cosh(\lambda_n z)}{\cosh(\lambda_n c)} \cdot \cos(\lambda_n y) \right] \quad (5.2.47)$$

### 5.2.3. Wervelsterkte en diffusievergelijking

Bij twee-dimensionale stromingen kan het zin hebben het begrip *wervelsterkte* (*vorticity*) in te voeren en wel:

$$\bar{w} = \text{rot } \bar{v}, \quad (5.2.48)$$

met voor twee-dimensionale stroming slechts één component:

$$w = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (5.2.49)$$

Door de twee vergelijkingen voor de componenten  $u$  en  $v$  van de Navier-Stokes-vergelijkingen naar resp.  $\partial/\partial y$  en  $\partial/\partial x$  te differentiëren vinden we na aftrekking van de eerste van de tweede en toepassing van de continuïteitsvergelijking voor een vloeistof met constante dichtheid:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla w = \nu \cdot \nabla^2 w. \quad (5.2.50)$$

Op deze wijze krijgt de Navier-Stokes-vergelijking het karakter van de diffusievergelijking voor warmte- en stoftransport. Vergelijking (5.2.50) noemt men wel de wervel-transportvergelijking.

We zullen als voorbeeld beschouwen een twee-dimensionaal geval: een wervel

in het  $x, y$ -vlak met de wervelvector dus langs de  $z$ -as. Op  $t = 0$  is de wervel met sterkte  $\Gamma$  aangebracht op  $r = 0$ . In cilindercoördinaten krijgen we:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (5.2.51)$$

en wegens  $\theta$ -symmetrie zal  $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ , dus:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right). \quad (5.2.52)$$

Dit is de diffusievergelijking voor een lijnbron waarvan de oplossing is:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp \left[ -\frac{r^2}{4\nu t} \right]. \quad (5.2.53)$$

We zien dat een dergelijke wervel door wrijving zich in de tijd over het hele vlak uitspreidt, waarbij  $w \rightarrow 0$  voor  $t \rightarrow \infty$ .

Het voordeel van de werveltransportvergelijking is ook dat de druktermen (grad  $p$ ) geëlimineerd zijn. Indien we tevens een stroomfunctie  $\psi$  invoeren, zo dat voor het twee-dimensionale geval:

$$u = + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{en} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.2.54)$$

dan wordt w:

$$w = -\nabla^2 \psi. \quad (5.2.55)$$

De stroomfunctie  $\psi$  zorgt bij de twee-dimensionale stroming dat aan de continuïteitsvergelijking automatisch voldaan wordt. De werveltransportvergelijking wordt dan

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (5.2.56)$$

Het stelsel (5.2.55) en (5.2.56) moet nu met passende rand- en beginvoorwaarden worden opgelost.

### 5.3. Grenslaagstromingen

#### 5.3.1. Grenslaagvergelijkingen

Zoals in 5.1 besproken is de potentiaalstroming fysisch geen goede oplossing voor stromingen dichtbij wanden. Daar spelen zowel traagheids- als wrijvingskrachten een rol. De volledige Navier-Stokesvergelijkingen oplossen is echter niet eenvoudig. Daarom heeft Prandtl in 1904 het idee van de *grenslaag* ingevoerd. Hij neemt aan dat de wrijvingskrachten alleen een rol spelen in een zeer dunne laag langs de wand. Daarbuiten neemt hij potentiaalstroming aan. Door de grenslaag dun ten opzichte van de andere dimensies van een stromingsprobleem te beschouwen zijn de Navier-Stokesvergelijkingen door Prandtl vereenvoudigd. We zullen hier het geval van de tweedimensionale grenslaag langs een vlakke plaat bespreken. We beschouwen de ontwikkeling van de laag langs een met een constante snelheid  $V$  aangestroomde wand die

op  $x = 0$  begint (zie fig. 5.3.1). We voeren een grenslaagdikte  $\delta$  in, zodanig dat voor  $y \geq \delta$  de snelheid in de  $x$ -richting ( $v_x$ ) praktisch gelijk aan de ongestoorde snelheid  $V$  is. Uiteraard zal  $v_x$  asymptotisch tot  $V$  naderen, men kan definiëren  $\delta_{99}$ , die dikte waarbij  $v_x/V = 0,99$ , ook  $\delta_{95}$  en  $\delta_{98}$  worden gebruikt en leiden tot iets verschillende numerieke waarden voor de grenslaagdikte.

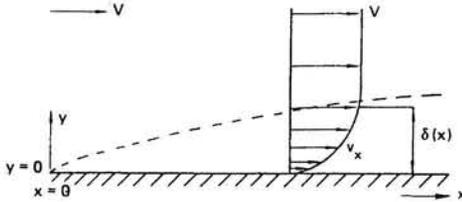


Fig. 5.3.1. Laminaire grenslaag.

Prandtl veronderstelde nu  $\delta$  als zeer klein, d.w.z.  $\delta/x \ll 1$ . In dat geval kan voor de grenslaag door orde van grootte-schatting een aantal termen uit de Navier-Stokes-vergelijking worden verwaarloosd. We beschouwen alleen het tweedimensionale geval met  $\rho$  is constant.

Continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (5.3.1)$$

Bewegingsvergelijkingen

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right] \quad (5.3.2)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left[ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right]. \quad (5.3.3)$$

Bij de orde van grootte-schatting gaan we nu als volgt tewerk. De snelheid in de grenslaag zal in hoofdzaak in de  $x$ -richting zijn en van de orde van grootte van de ongestoorde snelheid  $V$  dus:

$$v_x = O(V), \quad (5.3.4)$$

terwijl  $\frac{\partial v_x}{\partial x}$  in de grenslaag als orde heeft:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{V}{x}\right). \quad (5.3.5)$$

Wegens de continuïteitsvergelijking (5.3.1) moet dan ook

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = O\left(\frac{V}{x}\right) \quad (5.3.6)$$

en dus

$$v_y = O\left(\frac{V\delta}{x}\right). \quad (5.3.7)$$

Aangezien  $\frac{\delta}{x} \ll 1$  zal de orde van  $v_y$  veel kleiner zijn dan van  $v_x$ . In de bewegingsvergelijking (5.3.2) krijgen we nu als orde van grootte van de termen:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \text{ en } v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \text{ zijn van } O\left(\frac{V^2}{x}\right) \quad (5.3.8)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{V}{x^2}\right) \text{ en } \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{V}{\delta^2}\right). \quad (5.3.9)$$

Aangezien  $\frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{\delta^2}$  is de eerste term te verwaarlozen. Dit geeft voor (5.3.2):

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (5.3.10)$$

Hierin zijn de termen uit het linkerlid  $O(\rho V^2/x)$  en de tweede term rechts  $O(\eta V/\delta^2)$ . Aangezien de wrijvingskracht de traagheidskracht in de x-richting in de grenslaag zal beïnvloeden moeten deze onderling van dezelfde orde van grootte zijn, dus

$$O\left(\frac{\rho V^2}{x}\right) = O\left(\frac{\eta V}{\delta^2}\right) \quad (5.3.11)$$

of

$$O\left(\frac{\rho V x}{\eta} \cdot \frac{\delta^2}{x^2}\right) = 1.$$

Dit betekent:

$$\frac{\delta}{x} \approx \left(\frac{\rho V x}{\eta}\right)^{-\frac{1}{2}} = \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.3.12)$$

De grenslaag is dus alleen klein t.o.v.  $x$  als

$$\text{Re}_x \gg 1. \quad (5.3.13)$$

De dikte is dan omgekeerd evenredig met  $\sqrt{\text{Re}_x}$  en recht evenredig met  $x$ . Voor de bewegingsvergelijking in de y-richting (5.3.3) vinden we dat alle termen die een snelheid bevatten alle een of twee orden van grootte kleiner zijn dan de termen uit (5.3.2). Hieruit kan worden geconcludeerd dat deze termen 0 gesteld kunnen worden voor  $\delta/x \ll 1$  en ook  $\partial p/\partial y = 0$ . Als tweedimensionale grenslaagvergelijkingen krijgen we tenslotte:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (5.3.14a)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (5.3.14b)$$

Aangezien  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  zal  $\frac{\partial p}{\partial x}$  constant over de grenslaag zijn en dus gelijk aan die van de stroming aan de rand van de grenslaag. Voor een stroming met uniforme snelheid langs een plaat is  $\partial p/\partial x = 0$  in het buitengebied en dus ook in de grenslaag. Voor een stroming langs een gekromd oppervlak is er wel een  $\partial p/\partial x$  in het buitengebied die door de wet van Bernoulli voor potentiaalstroming bepaald is:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{constant} \quad (5.3.15)$$

en dus

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -V \frac{dV}{dx} \quad (5.3.16)$$

De eis dat  $Re_x \gg 1$  (vgl. (5.3.13)) betekent dat:

$$x \gg \frac{\nu}{V} \quad (5.3.17)$$

hetgeen voor water betekent dat met  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  en  $V = 1 \text{ m/s}$ :

$$x \gg 10^{-6} \text{ m},$$

hetgeen reeds bij een zeer korte afstand  $x$  het geval is. Voor lucht met  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  en  $V = 1 \text{ m/s}$ :

$$x \gg 10^{-5} \text{ m}.$$

Het blijkt dat voor zeer hoge Reynolds-getallen

$$Re_x \geq 5 \cdot 10^5 \quad (5.3.18)$$

de grenslaag turbulent wordt.

In het turbulente geval is de grenslaag aanzienlijk dikker; dit is in fig. 5.3.2 geschetst.

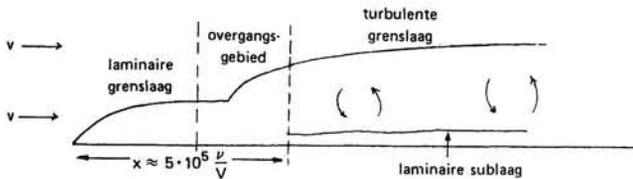


Fig. 5.3.2. Grenslaag langs vlakke plaat.

Zeer dichtbij de wand is de turbulente grenslaag een laminaire sub-laag aanwezig. Deze laag is van belang bij warmte-overdracht bij  $Pr \gg 1$ . Voor grenslaagtheorie en turbulentie zij verder verwezen naar boeken van H. Schlichting en J.O. Hinze (zie bibliografie).

### 5.3.2. Oplossing laminaire grenslaagvergelijkingen

Er zijn twee manieren om de grenslaagvergelijkingen voor het laminaire geval op te lossen – nl. met een exacte methode met affiene transformaties en met de benaderende integraalmethode. Bij de affiene transformatie maakt men gebruik van het samennemen van de variabelen  $x$  en  $y$  in een bepaalde combinatie tot één gereduceerde variabele  $\eta$ . Gezien de gevonden relatie (5.3.12)

voor  $\delta/x$  (evenredig met  $Re_x^{-\frac{1}{2}}$ ) ligt het voor de hand in te voeren:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/V}} \quad (5.3.19)$$

hetgeen evenredig is met  $y/\delta$ .



Door invoering van deze variabele en door over te gaan op de stroomfunctie  $\psi$  blijken de partiële differentiaalvergelijkingen over te gaan in een gewone differentiaalvergelijking. Deze kan overigens niet analytisch, maar alleen benaderend of numeriek worden opgelost.

Overgaan tot de stroomfunctie geeft voor (5.3.14b) met  $\partial p / \partial x = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (5.3.20)$$

en met

$$\left. \begin{aligned} \psi &= A(x)f(\eta) \\ \eta &= \frac{y}{\sqrt{x\nu/V}} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.21)$$

geeft dit:

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0. \quad (5.3.22)$$

Deze vergelijking is door Blasius numeriek opgelost (zie bibliografie stromingsleer). Als oplossing wordt dan gevonden met:

$$A(x) = \sqrt{\nu x V}$$

de functiewaarden voor  $f$  en  $f''$  zoals voor diverse  $\eta$ -waarden in tabel 5.3.1 gegeven. Bij het gebruik moet men bedenken dat voor de snelheid  $v_x$  geldt:

$$v_x = V f'(\eta).$$

$\eta$	$f$	$f'$
0	0	0
0,4	0,02666	0,133
0,8	0,1061	0,265
1,0	0,1656	0,330
3,0	1,397	0,846
5,0	3,28	0,992

Tabel 5.3.1. Numeriek berekende functiewaarden  $f$  en  $f'$ .

We zien dat voor  $\eta = 5$  de snelheid  $v_x$  reeds 99,2% van de ongestoorde snelheid  $V$  is.

We zullen hier tevens de integraalmethode van Von Karman volgen. Bij deze integraalmethode worden de grenslaagvergelijkingen in de  $y$ -richting geïntegreerd. Voor de continuïteitsvergelijking krijgen we:

$$\int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = - \int_0^h \frac{\partial v_y}{\partial y} dy$$

of

$$\frac{d}{dx} \int_0^h v_x dy = -v_y(h). \quad (5.3.23)$$

De integraal in het linkerlid geeft de verandering van het horizontale debiet in de grenslaag, dat gecompenseerd wordt door een zijdelingse stroming bij  $y = h$ .

De bewegingsvergelijking (5.3.14b) kan gebruik makend van de continuïteitsvergelijking (5.3.14a) ook naar  $y$  geïntegreerd worden, hier stellen we de impulsbalans op. Tussen  $x$  en  $x + dx$  over een hoogte  $h$  verandert de impuls met:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_0^h \rho v_x^2 dy \right\}$$

doordat er een  $v_y(h)$  is (zie 5.3.23) komt er een deel van de massa met snelheid  $V$  in de laag; dit geeft een impulsverandering

$$-V \frac{d}{dx} \int_0^h \rho v_x dy.$$

De totale impulsverandering moet gelijk zijn aan de schuifkracht langs de wand, dus:

$$\frac{d}{dx} \int_0^h \rho v_x^2 dy - V \frac{d}{dx} \int_0^h \rho v_x dy = -\nu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \tag{5.3.24}$$

De integraalmethode geeft een duidelijk fysisch beeld van wat er in de grenslaag gebeurt. De grenslaag zoals getekend in fig. 5.3.3 neemt in dikte toe.

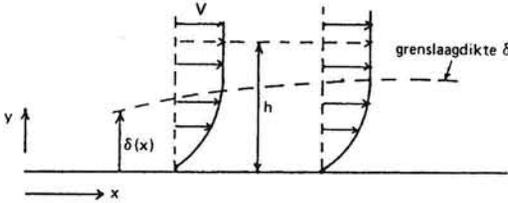


Fig. 5.3.3. Massa en impulsbalans grenslaag.

De toename van de hoeveelheid vloeistof stromend in deze laag is volgens (5.3.23) gelijk aan de in de grenslaag aan de rand opgenomen hoeveelheid vloeistof (met snelheid  $-v_y$ ). Deze instromende hoeveelheid vloeistof heeft tevens een snelheid  $V$  in de  $x$ -richting en een bijbehorende impuls, die samen met de wandwrijving de impulsverandering in de grenslaag verantwoordelijk is, vergelijking (5.3.24).

Ook bij de integraalmethode gaan we er nu vanuit dat het stromingsveld alleen een functie van  $\zeta = y/\delta$  is. We benaderen nu de snelheden door aan de volgende machtreksen:

$$\text{en } \left. \begin{aligned} \frac{v_x}{V} &= a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + a_4 \zeta^4 \\ \frac{v_y}{V} &= b_0 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + b_3 \zeta^3 + b_4 \zeta^4 \end{aligned} \right\} \tag{5.3.25}$$

Indien we  $v_y$  bij de vierde macht afbreken, dan volgt hieruit met de continuïteitsvergelijking dat

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \rightarrow a_4 = 0.$$

Als randvoorwaarden hebben we

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \quad \zeta = 0 \quad v_x = 0 \rightarrow a_0 = 0 \\ y = \delta, \quad \zeta = 1 \quad \frac{v_x}{V} = 1 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.26)$$

We laten  $\frac{v_x}{V}$  continu in de afgeleide verlopen aan de rand  $y = \delta$ , zodat:

$$\zeta = 1, \quad \frac{\partial v_x}{\partial \zeta} = 0 \rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0. \quad (5.3.27)$$

Tevens volgt uit de bewegingsvergelijking (5.3.14b) voor  $\zeta = 0$  dat aangezien de andere termen daar 0 zijn:

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial \zeta^2} = 0 \rightarrow 2a_2 = 0. \quad (5.3.28)$$

Met deze vergelijkingen zijn  $a_1$  en  $a_3$  op te lossen; dit geeft

$$\frac{v_x}{V} = \frac{1}{2}(3\zeta - \zeta^3). \quad (5.3.29)$$

Deze vergelijking (5.3.29) in de geïntegreerde impulsbalans (5.3.24) geeft nu voor  $h = \delta$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^1 (v_x^2 - V v_x) d\zeta \right] = -\nu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

of

$$V^2 \frac{d}{dx} \left( -\frac{39}{280} \cdot \delta \right) = -\nu \frac{1,5}{\delta} V. \quad (5.3.30)$$

Dus:

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 = \frac{280}{13} \cdot \frac{\nu x}{V} \\ \text{of} \quad \frac{\delta}{x} = 4,64 \cdot \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.31)$$

Met de integrale continuïteitsvergelijking is nu ook  $v_y$  te vinden, dit geeft:

$$\frac{v_y}{V} = -\frac{d}{dx} \left( \delta \int_0^{\zeta} \frac{v_x}{V} d\zeta \right) = (0,75\zeta^2 - 0,375\zeta^4) \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

en dus met (5.3.31):

$$\frac{v_y}{V} = \frac{3}{16} \left( \frac{\delta}{x} \right) (2\zeta^2 - \zeta^4). \quad (5.3.32)$$

De schuifspanning langs de wand wordt:

$$\frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 0,646 \cdot \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.3.33)$$

## 6. Diffusie en geleiding in stromende media

### 6.1. Stationair transport in stromingen met uniforme snelheid

Het diffusietransport in een stromingsveld met één uniforme snelheid (constant in grootte en richting) over het hele veld wordt met een sterk vereenvoudigde transportvergelijking beschreven. Een dergelijke stroming noemt men wel propstrooming. In het geval dat er geen tijdsafhankelijkheid is, reduceren de vergelijkingen (1.3.1) en (1.3.2) met slechts één convectieve term in de x-richting tot:

$$\rho c_p V \frac{\partial T}{\partial x} = (\nabla \lambda \nabla T) + q \quad (6.1.1)$$

en voor de stofdiffusie:

$$V \frac{\partial c}{\partial x} = (\nabla D \nabla c) + r. \quad (6.1.2)$$

Voor het geval dat geleiding (diffusie) slechts belangrijk is in de richtingen loodrecht op de stroming en voor  $\lambda$  constant krijgen we met invoeren van de nieuwe variabele  $\tau$ :

$$\tau = \frac{x}{V} \quad (6.1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q}{\rho c_p}. \quad (6.1.4)$$

We zien dat de vergelijking (6.1.4) nu geheel gelijk is aan de vergelijking voor instationaire diffusie in een rustend medium, met als tijd de variabele  $\tau$ . Alle in hoofdstuk 4 gevonden oplossingen zijn bij de passende rand- en beginvoorwaarden zonder meer te gebruiken. Een enkel geval, diffusie met chemische reactie in een propstroom, is als voorbeeld trouwens reeds in § 4.4.2 besproken.

Het verwaarlozen van diffusie in de stromingsrichting is meestal gerechtvaardigd. De convectie in die richting overheerst, men kan dit in het kental van Péclet uitdrukken dat de verhouding van convectie en geleiding's termen in die richting geeft:

$$Pe = \frac{V \cdot L}{a} \quad (6.1.5)$$

met  $L$  een karakteristieke lengte in de stromingsrichting. Indien  $Pe > 1$  is de gemaakte verwaarlozing correct.

Men kan zich afvragen of de situatie van een stroming met constante snelheid voor overdrachtsproblemen langs een wand een zinvolle benadering is. Immers langs de wand bevindt zich een stromingsgrenslaag, waarin de snelheid naar 0 gaat.

Er zijn situaties waarbij echter de stromingsgrenslaag veel dunner is dan de diffusie indringdiepte voor thermische- of stoftransportverschijnselen. Dit wordt gekarakteriseerd door de kentallen  $Pr = \nu/a$  en  $Sc = \nu/D$ . Indien deze klein zijn ( $\ll 1$ ) kunnen de hierna gegeven oplossingen met vrucht gebruikt worden. Een belangrijk voorbeeld is warmtetransport in een vloeibaar metaal. Hier heeft men een zeer grote warmtegeleidingscoëfficiënt ( $Pr \sim 0,01$ ) en

daardoor dringt een thermisch front diep in de stroming door. Daarnaast zijn er stromingen van sommige niet-Newtonse vloeistoffen, die een viscositeitsgedrag hebben dat de snelheidsafname bij de wand tot een uiterst minime laag beperkt, bijv. Bingham-gedrag. Voor stroming van sommige dikke suspensies (kolenstof in water, tomatenpuree) is dit het geval. Tenslotte kan zich nog de situatie voordoen dat er diffusie is vanuit een 'punt' in een vrije stroming ver van een wand. Injectie van kleurstof, thermische puls, en dergelijke. De bronoplossingen van paragraaf 4.2.3 mogen dan gebruikt worden.

### 6.1.1. Transport in propstroming langs een vlakke plaat

In het geval van een stroming in een half-oneindig medium langs een vlakke plaat met uniforme snelheid evenwijdig aan de plaat wordt voor de stationaire situatie de diffusievergelijking voor warmtetransport

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.1.6)$$

met  $\tau = x/V$  en bij uitsluiting van temperatuurverschillen in de z-richting. Hierbij horen twee randvoorwaarden, nl. voor  $y = 0$  en  $y = +\infty$  en een beginvoorwaarde voor  $\tau = x = 0$ . We nemen de situatie van de penetratie *theorie* als eerste voorbeeld:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \quad : \quad T = 0 \\ x > 0 \quad : \quad \left. \begin{array}{l} y = 0 \quad T = T_1 \\ y = \infty \quad T = 0. \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (6.1.7)$$

De plaat heeft dus een constante wandtemperatuur voor  $x > 0$ . We kunnen rechtstreeks de gevonden oplossing (4.2.36) gebruiken met  $t = \tau$ :

$$\frac{T}{T_1} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{ax/V}}\right). \quad (6.1.8)$$

Voor de warmteoverdracht aan de wand vinden we:

$$\Phi_w'' = \frac{\lambda T_1}{\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x/V}}. \quad (6.1.9)$$

Dit betekent dat er lokaal als functie van  $x$  langs de plaat een warmteoverdrachtscoëfficiënt  $\alpha_x$  is gegeven door:

$$\alpha_x = \frac{\Phi_w''}{(T_1 - 0)} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x/V}}$$

en uitgedrukt in het kental van Nusselt:

$$\operatorname{Nu}_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi a/xV}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Pe}_x^{1/2} = 0,56 \operatorname{Re}_x^{1/2} \cdot \operatorname{Pr}^{1/2} \quad (6.1.10)$$

Met 6.1.10 hebben we ons resultaat in bekende dimensieloze kentallen uitgedrukt.

Naast de lokale warmteoverdracht kunnen we geïnteresseerd zijn in de totale overdracht voor  $x$  van 0 tot  $L$ , dit is:

$$\Phi_w = \int_0^L \Phi_w'' dx = 2 \frac{\lambda T_1}{\sqrt{\pi a}} V^{1/2} L^{1/2} \quad (6.1.11)$$

dit geeft met

$$\alpha_L = \frac{\Phi_w}{LT_1} :$$

$$Nu_L = \frac{\alpha_L L}{\lambda} = 1,13 Re_L^{1/2} Pr^{1/2}. \quad (6.1.12)$$

Naast het voorbeeld van een constante wandtemperatuur langs de plaat, kunnen we het geval van constante warmtestroom aan de plaatwand beschouwen. Aangezien dit een andere randvoorwaarde is mag de penetratietheorie oplossing (6.1.8) niet gebruikt worden. Nu zijn de rand en beginvoorwaarden:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 : T = 0 \\ x > 0 : y = 0 \quad -\lambda \frac{dT}{dy} = q \\ y = \infty \quad T = 0. \end{array} \right\} \quad (6.1.13)$$

De oplossing wordt nu overeenkomstig (4.2.14)

$$T = \frac{2q}{\lambda} \left[ \sqrt{\frac{\alpha x}{V}} \frac{\exp\left(-\frac{y^2 V}{4\alpha x}\right)}{\pi} - \frac{y}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha x/V}}\right) \right] \quad (6.1.14)$$

en langs de plaat:

$$T(y=0) = \frac{2q}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha x}{\pi V}}. \quad (6.1.15)$$

Dit geeft een lokale  $\alpha_x$ :

$$\alpha_x = \frac{q}{T} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\pi V}{\alpha x}} \quad (6.1.16)$$

en dus

$$Nu_x = 0,89 Re_x^{1/2} Pr^{1/2} \quad (6.1.17)$$

$$\text{en} \quad Nu_L = 1,77 Re_L^{1/2} Pr^{1/2} \quad (6.1.18)$$

We zien dat de constante in (6.1.17) en (6.1.18) een factor 1,57 groter is dan die in respectievelijk (6.1.10) en (6.1.12).

### 6.1.2. Transport in propstroming in een ronde buis

We beschouwen de opwarming van een vloeistof die met uniforme snelheid door een buis stroomt. Dit betekent dat in cylindercoördinaten  $V$  onafhan-

kelijk van  $r$  en de axiale richting  $z$  is. We hebben bij constante buiswandtemperatuur als differentiaalvergelijking en randvoorwaarden:

$$V \frac{\partial T}{\partial z} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (6.1.19)$$

$$\text{met} \quad \left. \begin{array}{l} z = 0 : T = 0 \\ z > 0 : r = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ \quad \quad \quad r = R \quad T = T_0. \end{array} \right\} \quad (6.1.20)$$

Het probleem is nu geheel identiek aan het reeds in § 2.4 besproken geval van instationaire diffusie in een cylinder. Indien we voor de daar gebruikte  $t$  nu nemen  $z/V$  dan wordt de oplossing:

$$T = T_0 - T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\beta_n J_1(\beta_n)} \cdot J_0\left(\beta_n \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{\beta_n^2 az}{R^2 V}\right) \quad (6.1.21)$$

Voor grote  $z$ -waarden, lange buis kunnen we alleen de eerste eigenwaarde meenemen, we vinden:

$$T = T_0 - 1,6 T_0 J_0\left(2,405 \frac{r}{R}\right) \exp\left(-5,78 \frac{az}{R^2 V}\right). \quad (6.1.22)$$

Voor de warmtestroom van de wand krijgen we

$$\begin{aligned} |\Phi_w''| &= 1,6 \lambda T_0 \frac{2,405}{R} J_1(2,405) \exp\left(-5,78 \frac{az}{R^2 V}\right) \\ &= 2 \frac{\lambda T_0}{R} \exp\left(-5,78 \frac{az}{R^2 V}\right). \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

De gemiddelde vloeistoftemperatuur  $\langle T \rangle$  van de stromende vloeistof op plaats  $z$  wordt gegeven door:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^R T V \cdot 2\pi r \, dr}{\int_0^R V \cdot 2\pi r \, dr} \quad (6.1.24)$$

$$\text{geeft} \quad \langle T \rangle = T_0 - \frac{3,2 T_0}{R^2} \exp\left(-5,78 \frac{az}{R^2 V}\right) \int_0^R r J_0\left(2,405 \frac{r}{R}\right) dr$$

en met  $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$  geeft dit:

$$\langle T \rangle = T_0 - 0,69 T_0 \exp\left(-5,78 \frac{az}{R^2 V}\right). \quad (6.1.25)$$

De lokale warmteoverdrachtscoëfficiënt  $\alpha$  wordt gegeven door:

$$\alpha = \frac{\Phi_w''}{T_0 - \langle T \rangle} = \frac{2\lambda}{0,69 R} \quad (6.1.26)$$

en het Nusselt getal voor:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha 2R}{\lambda} = 5,78. \quad (6.1.27)$$

We zien dat voor grote  $z$  het lokale Nusselt-getal onafhankelijk van  $z$  wordt. Deze 'thermisch volledig ingestelde' stroming krijgt men indien  $az/R^2 V$  voldoende groot is. Men drukt dit wel uit in het Graetz-getal, de voorwaarde luidt dan met  $D = 2R$ :

$$\text{Gz} = \frac{az}{D^2 V} > 0,1. \quad (6.1.28)$$

Uiteraard zal ook hier bij een andere randvoorwaarde dan die van constante wandtemperatuur een andere oplossing gevonden worden.

### 6.1.3. Diffusie vanuit een puntbron in een propstroom

Indien vanuit een injectienaald geplaatst in een stroming met uniforme snelheid  $V$  in de  $x$ -richting, een stof continu in de stroom wordt geïnjecteerd, zal deze zich door diffusie en convectie verspreiden. In dit geval schrijven we in cylindercoördinaten en met verwaarlozing van diffusie in  $x$ -richting:

$$V \frac{\partial c}{\partial x} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad (6.1.29)$$

met:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0: \quad \Delta t Q_A = 2\pi r \Delta x \left( -D \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \\ x < 0: \quad c = 0 \\ r = \infty: \quad c = 0. \end{array} \right\} \quad (6.1.30)$$

Hierin is  $\Delta t Q_A$  de hoeveelheid stof die in een plak loodrecht op de stromingsrichting met dikte  $\Delta x = V \Delta t$  terecht komt, door injectie bij  $x = y = z = 0$ . We hebben hier na invoering van  $\tau = x/V$  weer het analoge geval van de instationaire diffusievergelijking. De randvoorwaarde is nu dat voor een zeer korte tijdsduur ' $\Delta \tau$ ' er een puls met sterkte  $Q_A \cdot \Delta \tau$  is geïnjecteerd in de plak. Aangezien er geen stofdiffusie vanuit de bewegende plak in  $x$ -richting is aangenomen, blijft alle materie die geïnjecteerd is in de tijd  $\Delta \tau$  in deze plak. We kunnen dus de 2-dimensionale bronoplossing (vergelijking 4.2.3) met bronsterkte per strekkende meter  $Q_A \Delta \tau / \Delta x$  gebruiken, dit geeft voor het concentratieveld:

$$\begin{aligned} c &= \frac{Q_A}{V} \frac{1}{4\pi D x / V} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dx/V}\right) \\ &= \frac{Q_A}{4\pi D x} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{4Dx/V}\right) \end{aligned} \quad (6.1.31)$$



**Kwantitatief voorbeeld.**

We beschouwen de injectie van een kleine stroom water verontreinigd met zoutzuur in een waterstroom in een zeer breed kanaal. Stel dat de watersnelheid in het kanaal 0,5 m/s is, de injectiebuis een diameter van 0,05 m heeft en het kanaal 3 m breed en 3 m diep is en dat er 1 g/s HCl wordt geïnjecteerd. De moleculaire diffusiecoëfficiënt van HCl in water is  $2,6 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ . Door turbulentie zal de diffusie veel groter zijn en daarom veronderstellen we nu een uniforme 'turbulente' diffusiecoëfficiënt  $D = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ . We controleren eerst de verwaarlozing van diffusie in de stromingsrichting:

$$Pé = \frac{0,5 \text{ L}}{10^{-4}} = 5000 \text{ L}$$

voor

$$L > 0,2 \text{ mm}$$

is dus reeds aan de voorwaarde voldaan. Stroomopwaarts zal reeds geen HCl gevonden worden bij waarden van L van 1 mm en ook stroomafwaarts is 0,2 mm zeer klein t.o.v. de andere afmetingen in het probleem. We vinden voor c langs de axiale as door het injectiepunt ( $r = 0$ )

$$c = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-4} x}$$

Bij een afstand x van 1 meter is de maximale concentratie in het water:

$$c(1) = 0,8 \text{ kg/m}^3.$$

Bij moleculaire diffusie alleen zou deze concentratie veel hoger zijn. De zijdelingse uitbreiding op  $x = 1 \text{ m}$  kunnen we bepalen door daarvoor te stellen dat de concentratie tot 0,01 van de concentratie op de as is afgenomen. Dit geeft:

$$0,01 = \exp\left(-\frac{r^2 \cdot 0,5}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 1}\right)$$

$$r = 0,061 \text{ m}.$$

Dit is dus een ten opzichte van de kanaalbreedte zeer beperkte uitbreiding.

**6.2. Lévêque-probleem**

Een ander eenvoudig geval is het diffusietransport in een stroming langs een plaat met een snelheidsverdeling loodrecht op de plaat, maar altijd in de richting van de plaat. We hebben dus:

$$V = Cy^\alpha x^\beta. \quad (6.2.1)$$

Dit geeft bijvoorbeeld:

1.  $\alpha = 0, \beta = 0$ ; stroming met uniforme snelheid
2.  $\alpha = 1, \beta = 0$ ; stroming met constante snelheidsgradiënt, het oorspronkelijke *Lévéque probleem*
3.  $\alpha = 1, \beta = -1/2$ ; stroming die bij benadering in de zich ontwikkelende grenslaag voorkomt.

De differentiaalvergelijking voor het geval van stoftransport wordt:

$$C y^{\alpha} x^{\beta} \frac{\partial c_A}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (6.2.2)$$

met

$$\left. \begin{array}{lll} y = 0 & x \geq 0 & c_A = c_{A0} \\ y = \infty & x > 0 & c_A = 0 \\ y > 0 & x = 0 & c_A = 0. \end{array} \right\} \quad (6.2.3)$$

We passen nu de methode van samennemen van variabelen toe in de algemene vorm:

$$\eta = y^m \cdot x^n. \quad (6.2.4)$$

Hierbij moeten  $m$  en  $n$  nog nader bepaald worden. In feite betekent het invoeren van  $\eta$  dat in het  $x$ - $y$  vlak langs lijnen van constante  $\eta$ , ook wel de gereduceerde variabele genoemd,  $c_A$  constant zal zijn. Voor de randvoorwaarden zal dit ook zo moeten zijn, hetgeen in dit geval met  $c_A = 0$  voor  $y = \infty$  en voor  $x = 0$  betekent dat  $m$  en  $n$  in teken moeten verschillen. Indien de randvoorwaarde voor  $y = 0$ , niet een constante, maar een met  $x$  variabele  $c_A$  zou zijn, is invoeren van  $\eta$  op deze wijze niet mogelijk. In figuur 6.2.1 is een hypothetisch concentratieveld getekend dat hier aan voldoet. Het moet overigens nog bewezen worden dat er een combinatie voor  $m$  en  $n$  mogelijk is die voldoet aan de vergelijkingen.

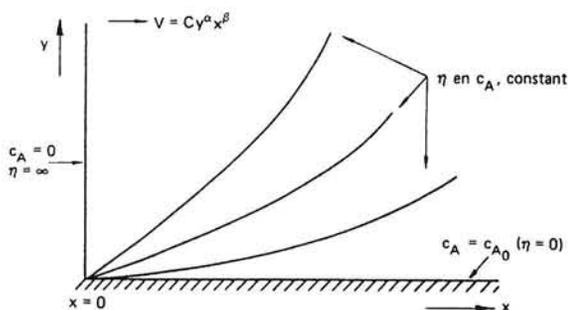


Fig. 6.2.1. Lijnen van constante concentratie in het Lévéque-probleem.

We vinden bij transformatie naar  $\eta$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc_A}{dx} &= n \cdot y^m \cdot x^{n-1} \frac{dc_A}{d\eta} = \frac{n \cdot \eta}{x} \frac{dc_A}{d\eta} \\ \frac{d^2c_A}{dy^2} &= \frac{m^2 \eta^2}{y^2} \frac{d^2c_A}{d\eta^2} + \frac{m(m-1)\eta}{y^2} \frac{dc_A}{d\eta} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.5)$$

Substitutie van (6.2.5) in (6.2.2) geeft:

$$\frac{d^2c_A}{d\eta^2} + \frac{(m-1)dc_A}{m\eta} \frac{d\eta}{d\eta} - \frac{nC}{m^2 D} y^{\alpha+2} x^{\beta-1} \frac{1}{\eta} \frac{dc_A}{d\eta} = 0. \quad (6.2.6)$$

$\eta$  is inderdaad de enige onafhankelijke variabele in deze differentiaalvergelijking als:

$$\frac{\alpha + 2}{\beta - 1} = \frac{m}{n}.$$

We kiezen  $m = 1$ , zodat  $n = (\beta - 1)/(\alpha + 2)$ .

Invullen van  $m$  en  $n$  in betrekking (6.2.6) geeft:

$$\frac{d^2c_A}{d\eta^2} - \frac{\beta - 1}{\alpha + 2} \frac{C}{D} \eta^{\alpha+1} \frac{dc_A}{d\eta} = 0. \quad (6.2.7)$$

De getransformeerde randvoorwaarden zijn:

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0 \quad c_A &= c_{A_0} \\ \eta = \infty \quad c_A &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

De laatste voorwaarde betekent dat i.v.m.  $c_A = 0$  voor  $x = 0$  en met  $m$  positief,  $n$  negatief moet zijn, dus  $\beta < 1$ . Eenmaal integreren van (6.2.7) geeft:

$$\frac{dc_A}{d\eta} = c_1 \exp \left\{ -\frac{1 - \beta}{(\alpha + 2)^2} \frac{C}{D} \eta^{\alpha+2} \right\}$$

zodat

$$c_A = c_1 \int_0^\eta \exp \left\{ -\frac{1 - \beta}{(\alpha + 2)^2} \frac{C}{D} \eta^{\alpha+2} \right\} d\eta + c_2. \quad (6.2.9)$$

Met de voorwaarde bij  $\eta = 0$  volgt:  $c_2 = c_{A_0}$ .

Tevens vinden we uit de randvoorwaarde bij  $\eta = \infty$ :

$$c_1 = \frac{-c_{A_0}}{\int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1 - \beta}{(\alpha + 2)^2} \frac{C}{D} \eta^{\alpha+2} \right\} d\eta}. \quad (6.2.10)$$

Door substitutie van  $\zeta = \frac{1 - \beta}{(\alpha + 2)^2} \frac{C}{D} \eta^{\alpha+2}$  is de noemer van (6.2.10) te schrijven

als

$$\begin{aligned} & \left( \frac{D}{(1-\beta)(\alpha+2)^\alpha C} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}} d\zeta = \\ & = \left( \frac{D}{(1-\beta)(\alpha+2)^\alpha C} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha+2}\right) \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

met  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ .

Hierin stelt  $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)$  de gammafunctie voor:  $\Gamma(n+1) = n!$

Enkele belangrijke waarden zijn:  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1,772$   
 $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2,679$   
 $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1,354$ .

We krijgen dus als oplossing:

$$\begin{aligned} c_A = c_{A_0} - & \frac{c_{A_0}}{\left( \frac{D}{(1-\beta)(\alpha+2)^\alpha C} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)} \\ & \cdot \int_0^\eta \exp\left\{-\frac{1-\beta}{(\alpha+2)^2} \frac{C}{D} \eta^{\alpha+2}\right\} d\eta \end{aligned}$$

waarbij de integraal na invoeren van  $\zeta$  geschreven kan worden als:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{D}{(1-\beta)(\alpha+2)^\alpha C} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \int_0^\zeta e^{-\zeta} \zeta^{-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}} d\zeta = \\ & \left( \frac{D}{(1-\beta)(\alpha+2)^\alpha C} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \cdot \Gamma_{in}\left(\frac{1}{\alpha+2}, \zeta\right) \end{aligned}$$

waarbij  $\Gamma_{in}$  de incomplete  $\Gamma$ -functie voorstelt.

Op deze wijze krijgen we:

$$c_A = c_{A_0} \left\{ 1 - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)} \cdot \Gamma_{in}\left(\frac{1}{\alpha+2}, \zeta\right) \right\} \quad (6.2.12)$$

met  $\zeta = \frac{(1-\beta)}{(\alpha+2)^2} \frac{C}{D} y^{\alpha+2} x^{\beta-1}$ .

De uitdrukking voor de lokale stofoverdrachtscoëfficiënt  $k_c$  volgt uit:

$$k_c = -\frac{D}{c_{A_0}} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{D}{c_{A_0}} x^{\frac{\beta-1}{\alpha+2}} \frac{dc_A}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{Dc_1}{c_{A_0}} x^{\frac{\beta-1}{\alpha+2}} \quad (6.2.13)$$

Na substitutie van (6.2.10) en (6.2.11) in (6.2.13) vindt men:

$$k_c = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)} \left\{ (1-\beta)(\alpha+2)^\alpha C D^{\alpha+1} x^{\beta-1} \right\}^{\frac{1}{\alpha+2}} \quad (6.2.14)$$

Toepassing op de gevallen 1, 2 en 3:

1. propstrooming:  $v_x = v_\infty = C$ ;  $\alpha = \beta = 0$

$$k_c = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left( \frac{v_\infty D}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{v_\infty D}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (penetratietheorie)}. \quad (6.2.15)$$

2. constante snelheidsgradiënt :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $C = \frac{dv_x}{dy}$

$$k_c = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left\{ \frac{3CD^2}{x} \right\}^{\frac{1}{3}} = 0,539 \left( \frac{CD^2}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ (Lévéque-probleem)}. \quad (6.2.16)$$

3. zich ontwikkelende grenslaag:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -\frac{1}{2}$ ,  $C = 0,332 \left( \frac{v_\infty^3}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$k_c = 0,426 \left( \frac{v_\infty D}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{D}{\nu} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (6.2.17)$$

### 6.3. Laminaire buisstroming

In de vorige paragraaf bekeken we gevallen voor een stroming langs een plaat. Analoge gevallen betreffen laminaire stroming in een buis. Analytische oplossingen zijn ook hiervoor bekend. De cilindersymmetrie leidt dan tot Bessel-functies. Deze gevallen zijn het eerst door Graetz bestudeerd en oplossingen zijn te vinden in de literatuur gegeven onder B en C van de toegevoegde literatuurlijst. Hierbij dient steeds weer onderscheid te worden gemaakt naar type randvoorwaarde, bijvoorbeeld constante wandtemperatuur of gegeven warmtestroom aan de wand.

Wij zullen de volledige oplossing voor Poiseuille-stroming in buizen niet afleiden. Voor propstrooming is het minder complex en deze is reeds in 6.1.2 behandeld.

Voor de Poiseuille-stroming kunnen we voor korte buizen echter een goede benadering afleiden met de Lévéque-oplossing voor de vlakke plaat, terwijl voor zeer lange buizen eveneens een Nu-waarde eenvoudig af te leiden valt.

#### 6.3.1. Lévéque-oplossing voor thermisch inloopgebied

Indien de warmte-indringing in de buis zich nog tot het gebied dichtbij de buiswand beperkt, kan de Lévéque-oplossing gebruikt worden. Wij doen dat voor het geval van constante wandtemperatuur  $T_w$  en inlaattemperatuur  $T_0$ . We stellen dat de snelheidsverdeling langs de wand benaderd kan worden door

$$v = C.y, \quad (6.3.1)$$

waarbij  $y$  de afstand tot de buiswand is. De werkelijke snelheidsverdeling in de buis is volgens Poiseuille:

$$v = 2 \cdot \langle v \rangle \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (6.3.2)$$

waarbij  $r = (R - y)$  en  $\langle v \rangle$  de gemiddelde snelheid. Dit geeft

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{4 \langle v \rangle}{R} = C. \quad (6.3.3)$$

Dit ingevuld in Lévêque-oplossing (6.2.16) geeft:

$$\alpha = 0,539 \cdot \lambda \left( \frac{C}{a \cdot x} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,855 \cdot \lambda \left( \frac{\langle v \rangle}{a \cdot x \cdot R} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (6.3.4)$$

Dit betekent dat Nu betrokken op de pijpdiameter  $d = 2R$ :

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = 1,07 \left( \frac{\langle v \rangle \cdot d^2}{a x} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,07 Gz^{-\frac{1}{3}} \quad (6.3.5)$$

of ook

$$Nu = 1,07 \cdot \left( \frac{x}{d} \right)^{-\frac{1}{3}} \cdot Pe^{\frac{1}{3}} = 1,07 \left( \frac{x}{d} \right)^{-\frac{1}{3}} Re^{\frac{1}{3}} Pr^{\frac{1}{3}}.$$

Indien we middelen over een lengte  $L$  vinden we:

$$\langle Nu \rangle = 1,62 \cdot \left( \frac{d}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot Re^{\frac{1}{3}} Pr^{\frac{1}{3}}. \quad (6.3.6)$$

Voor het geval van constante warmtestroom aan de wand vinden we:

$$\langle Nu \rangle = 1,93 \cdot \left( \frac{d}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot Re^{\frac{1}{3}} Pr^{\frac{1}{3}}. \quad (6.3.7)$$

Deze oplossingen die afgeleid zijn voor korte buizen, blijken een goede benadering te zijn tot waarden van het zogenaamde Graetz-getal van

$$Gz = \frac{L \cdot a}{d^2 \cdot \langle v \rangle} = \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{Pr \cdot Re} < 0,01. \quad (6.3.8)$$

### 6.3.2. Thermisch volledig ingestelde stroming

Voor een lange buis krijgen we de situatie dat de temperatuurprofielen in de diverse doorsneden gelijkvormig worden als functie van  $r/R$ . Men spreekt dan van thermisch volledig ingestelde stroming. Voor het geval van de propstroom, paragraaf 6.1.2, zien we direct uit de vergelijking (6.1.22) dat het profiel ten opzichte van  $T = T_0$  op een numerieke factor na op elke  $x$  gegeven wordt door de eerste eigenwaardefunctie  $J_0(\beta_0 r/R)$ . In feite zal voor al dit soort gevallen bij een niet  $x$ -afhankelijke randvoorwaarde voor grote  $x$  alleen de eerste eigenwaarde en alleen een term met  $r/R$  en de factor  $\exp(-\beta_0 a x / R^2 v)$  een rol spelen.

Dit betekent in het algemeen dat voor:

$$Gz > 0,1$$

het temperatuurprofiel gegeven zal zijn door:

$$\frac{T_w - T}{T_w - \langle T \rangle} = f\left(\frac{r}{R}\right) \quad (6.3.9)$$

en dus

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T_w - T}{T_w - \langle T \rangle} \right) = 0. \quad (6.3.10)$$

Nu is

$$\alpha(T_w - \langle T \rangle) = +\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = -\lambda(T_w - \langle T \rangle) \frac{\partial f}{\partial r} \quad (6.3.11)$$

en dus

$$\alpha = -\lambda \frac{\partial f}{\partial r} \quad (6.3.12)$$

en aangezien  $f$  geen functie van  $x$  is, volgt ook  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$ .

Dit wil zeggen dat  $\alpha$  en dus  $Nu$  bij grote lengten constant zijn en alleen afhangen van randvoorwaarden en snelheidsverdeling, maar niet van  $L/d$ ,  $Re$  of  $Pr$ . De waarden voor  $Nu$  zijn door integratie van de energievergelijking over een doorsnede van de buis direct te vinden. Voor het geval van propstroom in een ronde buis met een constante wandtemperatuur is reeds in § 6.1 in vergelijking (6.1.27) gevonden dat daar  $Nu = 5,78$ .

Voor het geval van Poiseuille-stroming in een buis met als randconditie een constante warmtestroom gebruiken we de hierboven gegeven methode.

Voor grote buislengte wordt het temperatuurprofiel als volledig ontwikkeld beschouwd en dus bij constante warmtestroom per oppervlakte-eenheid:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_w}{\partial x} = \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} = \frac{\Phi'' \cdot 2\pi r_0}{\rho c_p \langle v \rangle \pi r_0^2} = \frac{2\Phi''}{\rho c_p \langle v \rangle \cdot r_0}. \quad (6.3.13)$$

De energievergelijking is

$$\rho c_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (6.3.14)$$

Randvoorwaarden zijn:

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w = \Phi'' = \alpha(T_w - \langle T \rangle) \quad (6.3.15)$$

en verder

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{voor } r = 0 \text{ en } r = r_0, \quad T = T_w.$$

Voor  $v_x$  geldt:

$$v_x = 2\langle v \rangle \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (6.3.16)$$

Aangezien  $\frac{\partial T}{\partial x}$  een constante is, kan (6.3.14) direct naar  $r$  geïntegreerd worden.

Eerste integratie geeft met randvoorwaarde voor  $r = 0$ :

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2 \cdot \rho \cdot c_p \langle v \rangle}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \int r \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] dr$$

en dus:

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2\rho c_p \langle v \rangle}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} \frac{r^4}{r_0^2} \right] \quad (6.3.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{als } r = 0.$$

Uiteindelijk:

$$T_w - T = \frac{\rho c_p \langle v \rangle}{8 \cdot \lambda \cdot r_0^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left[ 3r_0^4 - 4r_0^2 r^2 + r^4 \right] \quad (6.3.18)$$

(  $r = r_0$ ,  $T = T_w$  )

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{r_0} v_x \cdot T 2\pi r dr}{\langle v \rangle \cdot \pi r_0^2} \quad (6.3.19)$$

$$T_w - \langle T \rangle = \frac{11}{48} \cdot \frac{\rho c_p \langle v \rangle r_0^2}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6.3.20)$$

Samen met (6.3.13) en (6.3.15) geeft dit:

$$\left( \frac{\alpha 2r_0}{\lambda} \right) = Nu = \frac{48}{11} = 4,36.$$

In tabel 6.3.1 is een overzicht gegeven van Nu-waarden voor thermisch volledig ingestelde stroming bij verschillende condities. Er moet op gewezen worden dat de  $\alpha$ - en Nu-waarden volgens (6.3.11) betrekking hebben op  $T_w - \langle T \rangle$ , terwijl dit in de L ev eque-oplossing  $T_w - T_0$  is. Voor kleine  $L$  is dit echter een te verwaarlozen verschil. De  $\langle Nu \rangle$ -waarden gebaseerd op  $T_w - \langle T \rangle$  zoals uit volledige oplossingen bekend zijn gegeven in figuur 6.3.1 over het gehele gebied van  $x/D$  tussen 0 en  $\infty$ . Hierin is  $\langle v \rangle$  de gemiddelde snelheid van de stroming in de buis.

Geometrie	Snelheidsverdeling	Randvoorwaarden	Nu
Ronde buis	Parabolisch	$T = C$	3,66
"	"	$\Phi'' = C$	4,36
"	Propstroom	$T = C$	5,78
"	"	$\Phi'' = C$	8,00
Platte doos	Parabolisch	$T = C$	7,60
"	"	$\Phi'' = C$	8,23

Tabel 6.3.1. Nu-waarden voor lange buizen en laminaire stroming.



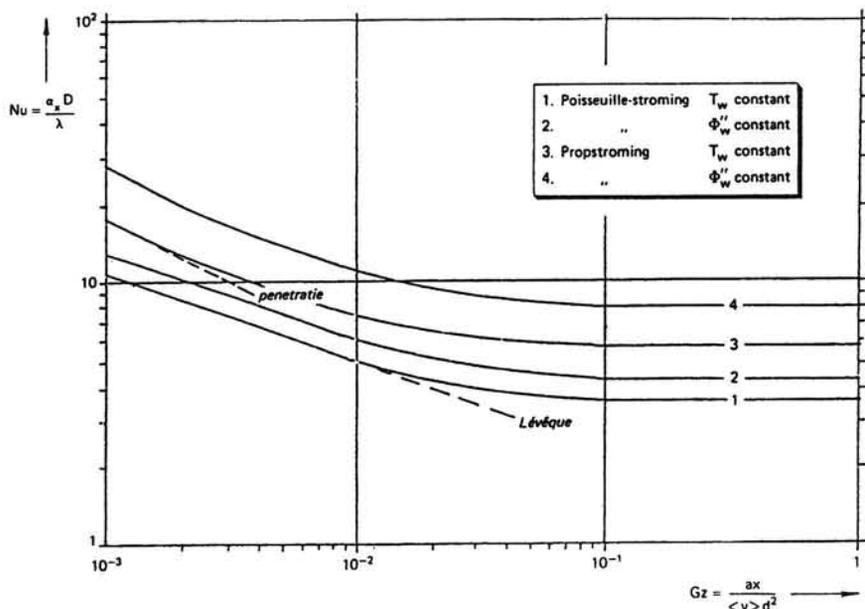


Fig. 6.3.1. De lokale Nusselt voor buisstroming als functie van het Graetz-getal.

#### 6.4. Transport in laminaire grenslagen

De grenslaagtheorie die in paragraaf 5.3.1 ontwikkeld is voor impuls-transport valt uit te breiden voor warmte- en stoftransport in de grenslaag. We zullen hier alleen het warmtetransport bespreken, voor stoftransport verloopt alles volledig analoog. Ook hier kunnen twee wegen ingeslagen worden: die met affiene transformaties zoals in paragraaf 5.3.2 besproken voor de stromingsgrenslaag én de integraalmethode.

Hier zal alleen de tweede methode worden besproken. De affiene methode, in het Engels wel "Similarity Analysis" genoemd, is eveneens zeer bruikbaar. We verwijzen hiervoor naar de literatuur, zie bibliografie: Kays [C7].

##### 6.4.1. Integraalmethode-oplossingen

In de situatie van een grenslaagstroming langs een vlakke plaat veronderstellen we dat ook het warmtetransport in een dunne laag langs de wand plaatsvindt. De dikte van deze laag hoeft niet gelijk te zijn aan de dikte  $\delta$  van de stromingsgrenslaag, daarom voeren we de thermische grenslaagdikte  $\delta_T$  in, die weer bepaald wordt doordat de temperatuur aan de buitenwand van de laag daar tot op 99% (resp. 95%) van de temperatuur van de ongestoorde stroming is genaderd. Deze dikte kan zowel groter als kleiner dan de stromingsgrenslaagdikte zijn.

De energievergelijking voor een twee-dimensionale grenslaagstroming met hoofdstroomrichting  $x$  wordt

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (6.4.1)$$

Hierin is nu de term  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  verwaarloosd, aangezien deze t.o.v.  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  een orde

$\left(\frac{\delta_T}{x}\right)^2$  kleiner is en  $\frac{\delta_T}{x} \ll 1$  wordt verondersteld. Als randvoorwaarden veronderstellen we een wandtemperatuur  $T_w$  en een temperatuur  $T_0$  buiten de grenslaag.

Oplossing is mogelijk via samennemen van variabelen (affiene oplossing), hier zal echter de integraalmethode (§ 5.3.2) weer gevolgd worden. Integratie van de energievergelijking geeft:

$$\int_0^h v_x \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_0^h v_y \frac{\partial T}{\partial y} dy = a \int_0^h \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy. \quad (6.4.2)$$

De eerste term geeft:

$$\int_0^h v_x \frac{\partial T}{\partial x} dy = \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (v_x T) dy - \int_0^h T \frac{\partial v_x}{\partial x} dy. \quad (6.4.3)$$

In de tweede term van het rechterlid is  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$  wegens de continuïteitsvergelijking en (6.4.2) wordt

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (v_x T) dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} (T v_y) dy = -a \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (6.4.4)$$

Indien nu de thermische grenslaagdikte  $\delta_T \leq \delta$  dan voor  $h \geq \delta_T$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial y} (T v_y) dy = T_0 \cdot v_y(h) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h T_0 \cdot v_x dy; \quad (6.4.5)$$

dit laatste wegens de geïntegreerde continuïteitsvergelijking (5.3.23). We vinden als geïntegreerde energievergelijking:

$$\frac{d}{dx} \int_0^h v_x (T_0 - T) dy = a \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (6.4.6)$$

Door het opstellen van een warmtebalans over een stuk  $dx$  van de grenslaag vinden we ook direkt (6.4.6). De verandering van de warmte-inhoud van de laag is gelijk aan de overdracht aan de wand en de warmte die bij de rand  $h = \delta_T$  de laag uitstroomt met temperatuur  $T_0$ .

Voor het temperatuurprofiel in de thermische grenslaag veronderstellen we analoog met (5.3.25) een derdegraads polynoom in  $\eta$  met

$$\eta = \frac{y}{\delta_T}. \quad (6.4.7)$$

We nemen de temperatuur relatief t.o.v.  $T_w$  en  $(T_0 - T_w)$ , dus

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = c_0 + c_1 \eta + c_2 \eta^2 + c_3 \eta^3, \quad (6.4.8)$$

met als randvoorwaarden:

$$\eta = 0, \quad T = T_w, \quad \text{dus} \quad c_0 = 0$$

$$\eta = 1, \quad T = T_0, \quad \text{dus} \quad 1 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$\eta = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \text{dus} \quad 0 = c_1 + 2c_2 + 3c_3$$

$$\eta = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \text{ dus } 0 = 2c_2$$

De laatste conditie wordt gevonden omdat in (6.4.1)  $v_x$  en  $v_y$  nul zijn bij  $\eta = 0$ .

Oplossen van  $c_1$ ,  $c_2$  en  $c_3$  geeft:

$$\theta = \frac{1}{2}(3\eta - \eta^3). \quad (6.4.9)$$

Deze uitdrukking voor  $T$  samen met die voor  $v_x$  (5.3.29) kan nu ingevuld worden in de geïntegreerde energievergelijking (6.4.6). We voeren tevens in  $\epsilon = \frac{\delta_T}{\delta}$  en beschouwen afzonderlijk  $\epsilon \leq 1$  en  $\epsilon > 1$ . Immers (6.4.5) en (6.4.6) gelden voor  $\epsilon \leq 1$ .

Voor  $\epsilon \leq 1$  vinden we na substitutie en integratie tot  $h = \delta_T$  of  $\eta = 1$ :

$$\frac{d}{dx} [\delta_T \int_0^1 (1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3)(\frac{3}{2}\epsilon\eta - \frac{1}{2}\epsilon^3\eta^3) d\eta] = \frac{3a}{2V_0\delta_T}. \quad (6.4.10)$$

Uitvoering van de integratie geeft:

$$\frac{d}{dx} [\delta_T (\frac{3}{20}\epsilon - \frac{3}{280}\epsilon^3)] = \frac{3a}{2V_0\delta_T}$$

of

$$\epsilon(1 - \frac{1}{14}\epsilon^2) \frac{d\delta_T}{dx} = \frac{10a}{V_0} \cdot \frac{1}{\delta_T}. \quad (6.4.11)$$

Nu is  $\delta_T = \epsilon\delta$  en voor  $\delta$  kunnen we de oplossing voor de stromingsgrenslaag (5.3.31) gebruiken, dus:

$$\frac{\delta_T}{\epsilon} = \delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{V_0}}; \quad (6.4.12)$$

dit geeft dan:

$$\epsilon^3(1 - \frac{1}{14}\epsilon^2) = 0,929 \frac{a}{\nu} = 0,929 \text{Pr}^{-1} \quad (6.4.13)$$

met

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}. \quad (6.4.14)$$

Zolang  $\epsilon < 1$  is  $\frac{1}{14}\epsilon^2 \ll 1$ , dus dan

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \epsilon = 0,976 \cdot \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{Pr} > 1). \quad (6.4.15)$$

De thermische grenslaag  $\delta_T$  is dus kleiner dan de stromingsgrenslaag als  $\text{Pr} \geq 1$ . Deze thermische grenslaag wordt zelfs zeer dun voor hoge Prandtl-waarden (water  $\text{Pr} = 10$ , olie  $\text{Pr} = 10^3$ , gesmolten polymeer  $\text{Pr} = 10^5$ ).

Voor het geval dat  $\epsilon > 1$  moet de geïntegreerde energiebalans gesplitst worden in een deel voor  $y$  tussen 0 en  $\delta$  en een deel voor  $\delta < y < \delta_T$ . In dat laatste deel is  $v_x$  constant en gelijk aan  $V_0$ . Voor het deel tussen 0 en  $\delta$  vinden we nu dat (6.4.5) wordt:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (T v_y) dy = T(\delta) v_y(\delta) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} T(\delta) v_x dy. \quad (6.4.16)$$

Dit is de warmte die de stromingsgrenslaag aan de rand uitstroomt. Echter is dit wel gelijk en tegengesteld aan de warmte die daar het deel van de thermische grenslaag van  $\delta$  tot  $\delta_T$  instroomt, dit heft elkaar uiteraard op. Wel blijft er een instroming aan de buitenwand  $\delta_T$ , immers voor  $y > \delta$  is er in het ongestoorde stromingsveld een van  $x$  afhankelijke, maar voor  $y$  constante  $v_y(\delta)$ . De geïntegreerde energievergelijking gesplitst over de twee delen:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x T dy + \frac{d}{dx} \int_{\delta}^{\delta_T} V_0 T dy + v_y(\delta) T_0 = -a \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (6.4.17)$$

Nu is

$$v_y(\delta) = -\frac{d}{dx} \int_0^h v_x dy = -\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x dy - \frac{d}{dx} \int_{\delta}^h V_0 dy,$$

waarbij  $h > \delta$  kan zijn, immers voor  $h > \delta$  is  $v_x$  constant. Dit geeft nu:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x (T - T_0) dy + \frac{d}{dx} \int_{\delta}^{\delta_T} V_0 (T - T_0) dy = -a \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6.4.18)$$

We kunnen nu in (6.4.18) de polynomen voor  $v_x$  en  $T$  invullen (5.3.29) en (6.4.9); dit geeft met  $\epsilon = \frac{\delta_T}{\delta}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[ \delta_T \int_0^{\frac{1}{\epsilon}} (1 - \frac{3}{2} \eta + \frac{1}{2} \eta^3) (\frac{3}{2} \epsilon \eta - \frac{1}{2} \epsilon^3 \eta^3) d\eta + \right. \\ & \left. + \delta_T \int_{\frac{1}{\epsilon}}^1 (1 - \frac{3}{2} \eta + \frac{1}{2} \eta^3) d\eta \right] = \frac{3a}{2V_0 \delta_T}. \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

Na uitwerking zoals bij  $\epsilon < 1$  wordt gevonden:

$$\epsilon^2 - \epsilon + \frac{2}{3} - \frac{1}{35\epsilon^2} = \frac{13}{35} \text{Pr}^{-1} \quad (\epsilon > 1). \quad (6.4.20)$$

Voor  $\epsilon \gg 1$ :

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \epsilon = 0,61 \text{Pr}^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{Pr} \ll 1). \quad (6.4.21)$$

Voor vloeistoffen met kleine Prandtl-waarden (vloeibare metalen) is de thermische grenslaag veel dikker dan de stromingsgrenslaag.

#### 6.4.2. Warmte-overdrachtsrelaties voor laminaire grenslagen

Bij de warmte-overdrachtsrelaties dient nu ook een onderscheid tussen hoge en lage Prandtl-waarden te worden gemaakt. De in 6.4.1 gevonden grenslaagoplossingen zullen tot verschillende relaties leiden.

a.  $\text{Pr} \geq 1$ . De in 6.4.1 gevonden temperatuurverdeling wordt na substitutie van (6.4.15) en (6.4.12) in (6.4.9)

$$\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = \frac{1}{2} \left[ 0,663 \left( \frac{y}{x} \right) \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}_x^{\frac{1}{3}} - 0,011 \left( \frac{y}{x} \right)^3 \text{Re}_x^{\frac{3}{2}} \text{Pr} \right] \quad (\text{Pr} > 1). \quad (6.4.22)$$

De warmte-overdracht aan de wand wordt gevonden met:

$$\Phi_w'' = -\lambda \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} = 0,331 \frac{\lambda}{x} \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}_x^{\frac{1}{3}} (T_w - T_0)$$

en met de warmte-overdrachtscoëfficiënt  $\alpha_x$  betrokken op  $(T_w - T_0)$  vinden we

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = 0,331 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}_x^{\frac{1}{3}} \quad (\text{Pr} > 1) \quad (6.4.23)$$

en de over de lengte van  $\alpha$  van 0 tot L een gemiddelde  $\text{Nu}_L$ :

$$\text{Nu}_L = 0,663 \text{Re}_L^{\frac{1}{2}} \text{Pr}_L^{\frac{1}{3}} \quad (\text{Pr} > 1). \quad (6.4.24)$$

b.  $\text{Pr} \ll 1$ , de temperatuurverdeling in dit geval wordt:

$$\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = \frac{1}{2} \left[ 1,06 \left( \frac{y}{x} \right) \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}_x^{\frac{1}{2}} - 0,044 \left( \frac{y}{x} \right)^3 \text{Re}_x^{\frac{3}{2}} \text{Pr}_x^{\frac{3}{2}} \right] \quad (\text{Pr} \ll 1). \quad (6.4.25)$$

De warmte-overdracht aan de wand wordt gevonden met

$$\Phi_w'' = -\lambda \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} = 0,53 \frac{\lambda}{x} \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}_x^{\frac{1}{2}} (T_w - T_0)$$

en dit geeft

$$\left. \begin{aligned} \text{Nu}_x &= 0,53 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}_x^{\frac{1}{2}} = 0,53 \text{Pé}_x^{\frac{1}{2}} \\ \text{Nu}_L &= 1,06 \text{Re}_L^{\frac{1}{2}} \text{Pr}_L^{\frac{1}{2}} = 1,06 \text{Pé}_L^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \text{Pr} \ll 1. \quad (6.4.26)$$

Zoals in § 6.1.1 is opgemerkt is voor vloeistoffen met lage Prandtl-waarden de overdracht ook met penetratietheorie voor een propstroom te berekenen. Dit geeft dezelfde relatie als hierboven gevonden, met een klein verschil in constante. Voor  $\text{Nu}_x$  wordt dan als constante  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56$  (6.1.10) gevonden.

Duidelijk treedt er verschil in de relaties voor hoge en lage Prandtl-waarden naar voren in de exponent bij het Prandtl-getal. De Reynolds-afhankelijkheid is dezelfde. Voor Prandtl-waarden dichtbij 1 (lucht Prandtl  $\approx 0,74$ ) geeft (6.4.23) de redelijkste benadering. Beter is voor gegeven Pr met (6.4.20)  $\epsilon$  op te lossen en met (6.4.12) te substitueren in (6.4.9).

### 6.4.3. Vrije convectie langs een verticale plaat

Een temperatuurveld in een vloeistof of gas zal door de dichtheidsverschillen die daarmee samenhangen een stroming – de natuurlijke convectie – doen ontstaan. In dit geval zijn energie en bewegingsvergelijkingen door de dichtheidsterm gekoppeld. In het volgende wordt het eenvoudigste geval van de vrije convectiegrenslaag langs een verticale warme wand in een overigens in rust zijnd medium besproken.

Ook hier kan de grenslaagbenadering gebruikt worden en kunnen termen in de Navier-Stokes- en energievergelijking door orde van grootte-beschouwingen worden verwaarloosd. Figuur 6.4.1 geeft de situatie weer in het  $x,y$ -vlak.  $T_w$  is een constante wandtemperatuur en  $T_0$  de temperatuur in de ongestoorde toestand buiten de grenslaag. De snelheid in de ongestoorde toestand is 0, een snelheids- en een temperatuurprofiel zoals geschetst zullen ontstaan.

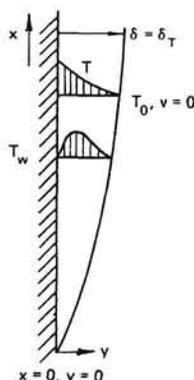


Fig. 6.4.1. Vrije convectie-grenslaag langs een verticale wand.

In de Navier-Stokes-vergelijkingen komt nu een term  $-\partial p/\partial x + \rho g_x$  voor, die door de dichtheidsverschillen de stroming in de  $x$ -richting induceert. In het ongestoorde deel van het veld is  $dp/dx = -\rho_0 g$ , met  $g$  de numerieke waarde van de  $g_x$ -component, waarbij  $g_x$  zelf negatief is doordat deze in de negatieve  $x$ -richting werkt. Aangezien in de grenslaagbenadering weer  $\partial p/\partial y \approx 0$ , is in de grenslaag  $\partial p/\partial x$  constant en gelijk aan  $-\rho_0 g$ . Dit geeft voor de 'bron'-term in de bewegingsvergelijking:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g = (\rho_0 - \rho)g. \quad (6.4.27)$$

Voor het medium geldt een thermische uitzetting die bij kleine temperatuurverschillen gegeven is door:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T_0} (T - T_0). \quad (6.4.28)$$

Na invoeren van de kubieke uitzettingscoëfficiënt  $\beta$ ,

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \quad (6.4.29)$$

geeft dit:

$$(\rho_0 - \rho) \cdot g = \rho_0 g \beta (T - T_0). \quad (6.4.30)$$

De grenslaagvergelijkingen worden nu:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.4.31)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \beta g(T - T_0) \quad (6.4.32)$$

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (6.4.33)$$

waarbij  $\rho = \rho_0$  gesteld is in alle termen behalve in de  $\rho g_x$ -term, met als randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \quad v_x = v_y = 0 \quad \text{en} \quad T = T_0 \\ y = 0 \quad v_x = v_y = 0 \quad \text{en} \quad T = T_w \\ y = \infty \quad v_x = 0 \quad \text{en} \quad T = T_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.34)$$

Voor oplossing van deze vergelijkingen kan de integraalmethode toegepast worden, dit geeft

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta v_x^2 dy = -\nu \frac{dv_x}{dy} \Big|_{y=0} + \int_0^\delta \beta g(T - T_0) dy \quad (6.4.35)$$

en

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta (T_0 - T) v_x dy = a \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0}, \quad (6.4.36)$$

terwijl de geïntegreerde continuïteitsvergelijking identiek is aan die bij de gedwongen grenslaagstroming.

We benaderen snelheids- en temperatuurprofiel weer met polynomen:

$$v_x = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (6.4.37)$$

en

$$\frac{T - T_0}{T_w - T_0} = b_0 + b_1 \left(\frac{y}{\delta_T}\right) + b_2 \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^2$$

met randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \quad v_x = 0 \\ y = \delta, \quad v_x = 0 \\ y = \delta, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.4.38)$$

geeft:

$$v_x = v_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) \left\{ 1 - \left(\frac{y}{\delta}\right) \right\}^2, \quad (6.4.39)$$

waarbij gesteld is:  $a_1 = v_1$  (dimensie snelheid) en met

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \quad T = T_w \\ y = \delta_T, \quad T = T_0 \\ y = \delta_T, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.4.40)$$

geeft:

$$\frac{T - T_0}{T_w - T_0} = \left\{ 1 - \left( \frac{y}{\delta_T} \right) \right\}^2. \quad (6.4.41)$$

We nemen nu aan dat  $\delta = \delta_T$ , immers de thermische verschillen induceren nu de stroming, dus voor niet te extreme Prandtl-getallen ( $0,1 < Pr < 10$ ) zullen de grenslagen nagenoeg samenvallen. We kunnen nu deze polynomen in de geïntegreerde vergelijkingen invoeren en deze naar  $\delta$  en  $v_1$  oplossen. De impulsvergelijking geeft

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} (v_1^2 \delta) = \frac{1}{3} g\beta (T_w - T_0) \delta - \frac{\nu v_1}{\delta} \quad (6.4.42)$$

en de energievergelijking

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dx} (v_1 \delta) = \frac{2a}{\delta}. \quad (6.4.43)$$

Hierin zijn  $\delta$  en  $v_1$  functies van  $x$ . Indien verondersteld wordt:

$$\text{en} \quad \left. \begin{aligned} v_1 &= p x^q \\ \delta &= m x^n \end{aligned} \right\} \quad (6.4.44)$$

kunnen  $q$  en  $n$  bepaald worden door invulling in (6.4.42) en (6.4.43) en door gelijkstellen van exponenten wordt gevonden:

$$q = \frac{1}{2} \quad \text{en} \quad n = \frac{1}{4}.$$

Nu kunnen ook de coëfficiënten met (6.4.42) en (6.4.43) bepaald worden:

$$p = 5,17\nu \left( Pr + \frac{20}{21} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{g\beta(T_w - T_0)}{\nu^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$m = 3,93 \left( \frac{a}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \left( Pr + \frac{20}{21} \right)^{\frac{1}{4}} \left\{ \frac{g\beta(T_w - T_0)}{\nu^2} \right\}^{-\frac{1}{4}}$$

en dus

$$\frac{\delta}{x} = 3,93 Pr^{-\frac{1}{2}} (0,952 + Pr)^{\frac{1}{4}} Gr_x^{-\frac{1}{4}} \quad (6.4.45)$$

met

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_w - T_0)x^3}{\nu^2}. \quad (6.4.46)$$

Voor de warmte-overdracht vinden we:

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = \frac{0,508 Pr^{\frac{1}{2}}}{(0,952 + Pr)^{\frac{1}{4}}} Gr_x^{\frac{1}{4}}. \quad (6.4.47)$$

Het snelheidsprofiel is nu bekend en gegeven door (6.4.39) en (6.4.44) met de nu bepaalde waarden van  $p$  en  $q$ . Het is een kubisch profiel, waarin de gemiddelde snelheid en de maximale snelheid gegeven zijn door:



$$\langle v \rangle = \frac{1}{12} v_1 \quad \text{en} \quad v_{\max} = \frac{16}{9} \langle v \rangle. \quad (6.4.48)$$

Het temperatuurprofiel is kwadratisch in  $y$ . De snelheids- en temperatuurprofielen zijn in figuur 6.4.2 gegeven.

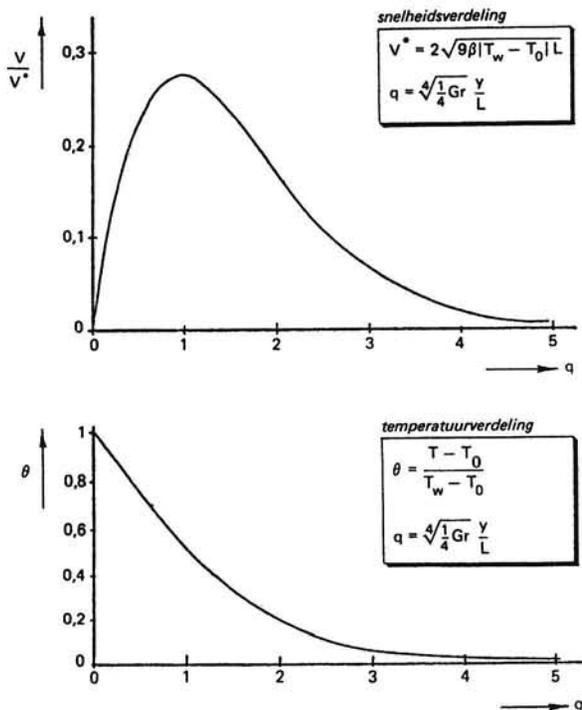


Fig. 6.4.2. Snelheids- en temperatuurprofielen bij laminaire vrije convectie langs een wand voor lucht.

Hoewel de oplossing benaderend is en aanneemt  $\delta = \delta_T$  blijkt de geldigheid van (6.4.47) binnen 10% te zijn voor het Prandtl-gebied van 0,01 tot 1000. Dit blijkt uit vergelijking met exacte oplossingen die in de literatuur gegeven zijn. Voor gassen met  $Pr$  rond 1 (bijvoorbeeld lucht,  $Pr = 0,71$ ) vinden we als goede benadering voor de warmte-overdracht:

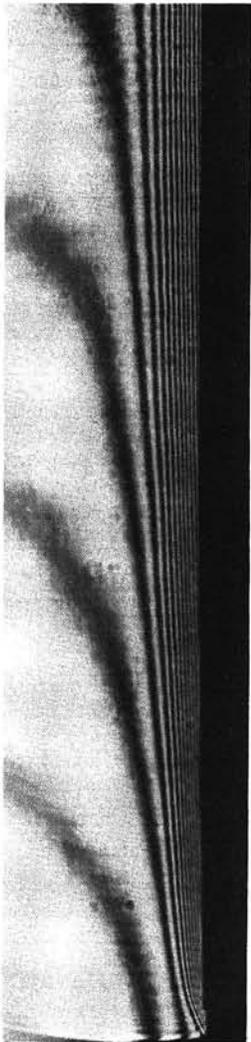
$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0,39 \sqrt[4]{Gr_x Pr} \quad (6.4.49)$$

Naast de lokale  $Nu_x$  wordt ook de gemiddelde  $Nu_L$  over de lengte van  $x = 0$  tot  $x = L$  gebruikt. Dit geeft voor gassen:

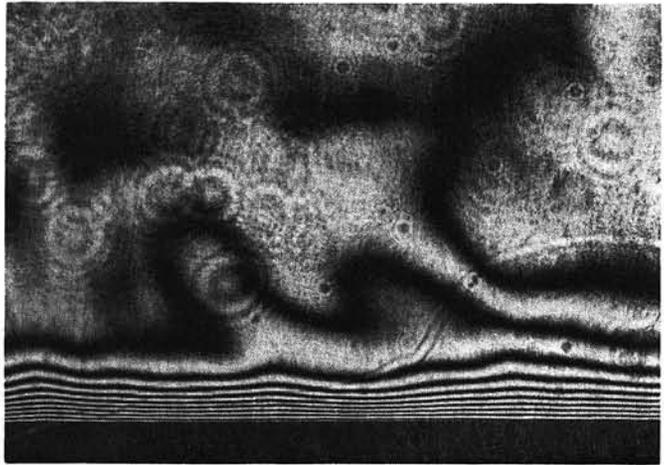
$$Nu_L = \frac{\alpha_L L}{\lambda} = 0,52 \sqrt[4]{Gr_L \cdot Pr}. \quad (6.4.50)$$

Een benadering voor een breed gebied van  $Pr$ -waarden is:

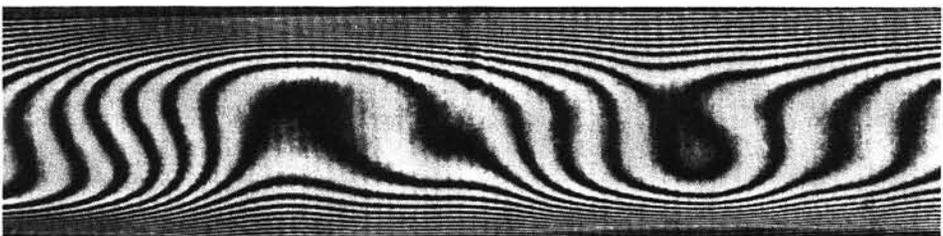
$$Nu_L = \left[ \frac{Pr \cdot Gr_L}{2,435 + 4,884 Pr^{1/2} + 4,953 Pr} \right]^{1/4} \quad (6.4.51)$$



a



b



c

Fig. 6.4.3. Interferometrische opname van de temperatuur van velden bij vrije convectie in lucht.

- a. Langs verticale plaat,  $\Delta T = 22\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- b. Aan bovenkant horizontale plaat,  $\Delta T = 22\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- c. In een horizontale spleet (spouw),  $\Delta T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$ , spleetbreedte 30 mm.

Het temperatuurveld dat langs een warme plaat in lucht ontstaat kan zichtbaar gemaakt worden in een interferometer. In fig. 6.4.3 zijn enige interferometeropnamen van enige natuurlijke convectievelden gegeven.

Voor ideale gassen is  $\beta = 1/T$  en wordt het getal van Grashof  $Gr_x$  gegeven door:

$$Gr_x = \frac{gx^3(T_w - T_0)}{T_0 \nu^2}$$

Ook deze grenslaag zal bij hogere x-waarden turbulent worden. De grenslaag is laminair tot  $Gr_x < 10^8$  en volledig turbulent voor  $Gr_x > 5 \cdot 10^9$ . Het tussengelegen gebied is een overgangsgebied, waar met beperkte nauwkeurigheid tot  $Gr = 10^9$  de laminaire oplossing gebruikt kan worden.

# Appendix I. Bibliografie

## A. Diffusietransport zonder stroming

- A1. H.S. Carslaw  
J.C. Jaeger "Conduction of heat in solids"  
Oxford, Un. Press, 1959
- A2. A.V. Luikov "Analytical heat diffusion theory"  
Academic Press, New York, 1968
- A3. J. Crank "The mathematics of diffusion"  
Oxford, Un. Press, 1957
- A4. H. Tautz "Wärmeleitung und Temperatenausgleich"  
Akademie-Verlag, Berlin, 1971
- A5. J. Stefan "Über die Theorie der Eisbildung im Polarmeere"  
Ann. Phys. u. Chemie 42 (1891), 269–286
- A6. J.R. Ockenden and W.R. Hodgkins "Moving boundary problems in heat flow and diffusion", Oxford, Clarendon, 1975
- A7. A. Mori and K. Araki "Methods for analysis of the moving boundary-surface problem",  
Intern. Chem. Eng. 16 (1976), 734–743
- A8. S. Bankoff "Heat conduction or diffusion with change of phase", Adv. in Chem. Eng. 5 (1964), 75–150
- A9. Ching-Lim Huang and Yen-Pingh Shih "Perturbation solutions of planar diffusion-controlled moving-boundary problems",  
Int. J. Heat and Mass Transfer 18 (1975), 689–695
- A10. G.E. Myers "Analytical methods in conduction heat transfer",  
McGraw-Hill, 1971
- A11. V.S. Arpaci "Conduction heat transfer"  
Addison-Wesley, 1966
- A12. M.N. Özisik "Heat conduction"  
John Wiley, 1980
- A13. U. Grigull und H. Sander "Wärmeleitung"  
Springer, 1979

## B. Stromingsleer en algemene transportverschijnselen

- B1. R.B. Bird and Steward Lightfoot "Transport phenomena"  
Wiley, New York, 1960
- B2. W.M. Rohsenov and H.Y. Choi "Heat, mass and momentum transfer"  
Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1961
- B3. H. Schlichting "Grenzschicht Theorie"  
G. Braun, Karlsruhe
- B4. J.O. Hinze "Turbulence"  
McGraw-Hill, 1976
- B5. Weltly, Wicks and Wilson "Fundamentals of momentum, heat and mass transfer", Wiley & Sons, New York
- B6. J.O. Hirschfelder, C.F. Curtiss and R.B. Bird "Molecular theory of gases and liquids"  
John Wiley, New York, 1964
- B7. H.J.M. Hanley "Transport phenomena in fluids"  
Marcel Dekker, New York, 1969

- B8. S. Bretsznajder "Prediction of transport and other physical properties of fluids", Pergamon Press, Oxford, 1971
- B9. H. Lamb "Hydrodynamics"  
Cambridge Un. Press, 1932
- B10. G. Levich "Physicochemical hydrodynamics"  
Prentice Hall, 1962
- B11. D. Hershey "Transport analysis"  
Plenum Press, 1973
- B12. D.J. Tritton "Physical fluid dynamics"  
Van Nostrand Reinhold, 1977
- B13. B.K. Batchelor "An introduction to fluid dynamics"  
Cambridge Univ. Press, 1967
- B14. H. Tennekes and J.L. Lumley "A first course in turbulence"  
The MIT Press, 1974

### C. Warmtetransport

- C1. A.J. Chapman "Heat transfer"  
McMillan comp., New York
- C2. W.H. McAdams "Heat transmission"  
McGraw-Hill, New York
- C3. U. Grigull, Gröber und Erk "Die Grundgesetze der Wärmeübertragung"  
Springer, Berlijn, 1955
- C4. E.R.G. Eckert and R.M. Drake "Analysis of heat and mass transfer"  
McGraw-Hill, New York, 1972
- C5. Hsu "Engineering heat transfer"  
McGraw-Hill, New York
- C6. M. Jakob "Heat transfer I + II"  
Wiley, New York, 1967
- C7. W.M. Kays "Convective heat and mass transfer"  
D. v. Nostrand Comp. Inc., New York
- C8. F. Kreith "Principles of heat transfer"  
International Textbook Company, Londen
- C9. F.J. Bayley e.a. "Heat transfer"  
Nelson, 1972
- C10. VDI "Wärmeatlas"  
1983
- C11. M.P. Heisler "Temperature charts for induction and constant-temperature heatings", Trans. ASME, 1947, 69, no. 3
- C12. D.A. de Vries and A.J. Peck Austr. J. Phys. 11 (1958) p. 255
- C13. O. Pawelski "Berechnung der Wärmedurchgangszahl für das Warmwalzen und Smieden", Archiv für das Eisenhüttenwesen 40 (1969), 10, 821-827

## D. Wiskundige methoden

- D1. R.D. Kersten "Engineering differential systems"  
McGraw-Hill, New York, 1969
- D2. W.F. Ames "Numerical methods for partial differential equations", Thomas Nelson & Sons Ltd., London
- D3. L. Fox "Numerical solution of ordinary and partial differential equations"  
Oxford Un. Press, Fair Lawn, New Jersey
- D4. R.D. Richtmijer and K.W. Morton "Difference methods for initial value problems"  
Interscience, John Wiley, New York
- D5. A.R. Mitchell "Computational methods in partial differential equations"
- D6. V.G. Jenson and G.V. Jeffreys "Mathematical methods in chemical engineering"  
Academic Press, 1969
- D7. Gray and Mathews "A treatise on Bessel functions"  
Dover, New York
- D8. M. van Dyke "Perturbation methods in fluid mechanics"  
Parabolic Press, Stanford, CA, 1975
- D9. A.H. Nayfeh "Perturbation methods"  
John Wiley, 1973
- D10. B.A. Finlayson "The method of weighted residuals and variational principles, with application in fluid mechanics, heat and mass transfer"  
Academic Press, 1972
- D11. D.B. Spalding "A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second order derivatives"  
Int. J. for numerical methods in engineering, vol. 4 (1972), 551-559
- D12. A.K. Runchal "Convergence and accuracy of three finite difference schemes for a two-dimensional conduction and convection problem"  
Int. J. for numerical methods in engineering, vol. 4 (1972), 541-550
- D13. G. Strang and G.J. Fix "An analysis of the finite element method"  
Prentice Hall, 1973
- D14. A.J. Baker "Finite element computational fluid mechanics"  
McGraw-Hill, 1983
- D15. P.J. Roache "Computational fluid dynamics"  
Hermosa Publ., 1972
- D16. S.V. Patankar "Numerical heat transfer and fluid flow"  
McGraw-Hill, 1980
- D17. W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, G.E. Schneider and R.H. Pletcher "Handbook of numerical heat transfer"  
John Wiley & Sons, 1988

**E. Dimensie analyse**

- E1. H.L. Langhaar "Dimensional analysis and theory of models"  
Wiley, New York, 1951
- E2. P.W. Bridgeman "Dimensional analysis"  
Yale University Press, 1931
- E3. A. Klinkenberg "Chem. Eng. Sci."  
4 (1955) 130, 167
- E4. J. Pawlowski "Die Ähnlichkeitstheorie"  
Springer, 1971
- E5. H. Görtler "Dimensions analyse"  
Springer, 1975
- E6. E. de St. Q. Isaacson "Dimensional methods in engineering and physics"  
Arnold, 1975

**F. Mathematische tabellen**

- F1. M. Abramowitz and I.A. Segun "Handbook of mathematical functions"  
Dover, New York, 1965
- F2. Jahnke, Emde und Lösch "Tables of higher functions"  
McGraw-Hill, 1960
- F3. R.C. Weast "Handbook of chemistry and physics"  
The Chem. Rubber Comp.

# Appendix II. Enkele stofeigenschappen

## 1. Warmtegeleiding en viscositeiten

Stof	temp. °C	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\lambda$ , W/mK	$a$ , m <sup>2</sup> /s	$\nu$ , m <sup>2</sup> /s
water	0	1000	0,552	$0,131 \times 10^{-6}$	$1,792 \times 10^{-6}$
	20	998	0,598	$0,143 \times 10^{-6}$	$1,004 \times 10^{-6}$
	50	988	0,641	$0,155 \times 10^{-6}$	$0,554 \times 10^{-6}$
	100	958	0,682	$0,169 \times 10^{-6}$	$0,295 \times 10^{-6}$
stoom (verz.)	149	1,70	0,0292	$8,0 \times 10^{-6}$	$14,6 \times 10^{-6}$
	0	1,25	0,0243	$18,7 \times 10^{-6}$	$13,3 \times 10^{-6}$
lucht (1 atm.)	20	1,16	0,0257	$21,4 \times 10^{-6}$	$15,1 \times 10^{-6}$
	60	1,06	0,0285	$26,7 \times 10^{-6}$	$18,9 \times 10^{-6}$
	100	0,91	0,0314	$32,8 \times 10^{-6}$	$23,1 \times 10^{-6}$
	200	0,72	0,0386	$50,5 \times 10^{-6}$	$34,6 \times 10^{-6}$
	500	0,44	0,0570	$114,2 \times 10^{-6}$	$78,5 \times 10^{-6}$
	1000	0,26	0,0770	$235 \times 10^{-6}$	$173 \times 10^{-6}$
	benzeen	20	879	0,153	$0,10 \times 10^{-6}$
glycerine	20	1261	0,27	$0,092 \times 10^{-6}$	$1189 \times 10^{-6}$
aluminium	20	2700	229	$94,6 \times 10^{-6}$	—
staal	20	7800	40	$10 \times 10^{-6}$	—
staal (roestvrij)	20	8000	25	$7,1 \times 10^{-6}$	—
koper	20	8300	372	$107 \times 10^{-6}$	—
beton	20	2200	1,28	$0,66 \times 10^{-6}$	—
ijs	0	917	2,2	$1,2 \times 10^{-6}$	—
glas	20	2500	1,16	$0,6 \times 10^{-6}$	—
steen	20	2200	2,0	$1,2 \times 10^{-6}$	—
glaswol	25	120	0,046	$0,58 \times 10^{-6}$	—
asbest	20	2000	0,7	$0,443 \times 10^{-6}$	—
zand	20	1500	0,3	$0,25 \times 10^{-6}$	—

## 2. Diffusiecoëfficiënten (20 °C)

Stof	Sc. in lucht*	Sc. in water*
NH <sub>3</sub>	0,61	570
benzeen	1,71	
CO <sub>2</sub>	0,96	559
H <sub>2</sub>	0,22	
He	0,22	
O <sub>2</sub>	0,74	558
H <sub>2</sub> O	0,60	
naftaleen	2,57	
glycerine		1630
HCl		381

\*) met  $\nu_{\text{lucht}}$  en  $\nu_{\text{water}}$  is D te vinden:  $D = \frac{\nu}{Sc}$ .





# Trefwoordenlijst

- 2D convectie-diffusie vergelijking 92  
 2D impulsvergelijking 102
- achterwaartse differenties 62  
 affiene methode 194  
 affiene oplossingen 47  
 affiene transformaties 177, 194  
 afkoeling 22  
 afrondingsfout 62  
 algemene transportvergelijkingen 14  
 analytische benaderingsmethoden 49  
 asymptotische oplossing 153
- basisregels 68  
 beginvoorwaarden 17  
 behoudswetten 14  
 benadering exponentieel schema 92  
 Bernoulli 165  
 Besselfuncties 30, 31, 32, 33  
 bewegend-frontproblemen 138, 141, 143, 145  
 bewegend-frontproblemen bij stoftransport 141  
 Bingham-gedrag 182  
 Biot-getal 26, 113  
 Blasiusoplossing 178  
 bolcoördinaten 14  
 bolsymmetrisch probleem 30  
 bolsymmetrische warmtegeleiding 128  
 boundary fitted 63  
 bronoplossing 112, 119, 120, 154  
 bronterm lineariseren 69
- cartesiaanse coördinaten  
 cartesisch rooster 63  
 cel-Pécletgetal 89  
 centraal schema 92, 95  
 centrale differenties 62  
 cilindercoördinaten 14  
 cilindersymmetrie 31  
 cilindersymmetrische warmtegeleiding 127  
 cilindrisch rooster 63  
 complementaire error-functie 42  
 consistent 79  
 consistentie 79  
 constante van Euler 127  
 contacttemperatuur 131, 132  
 continuïteitsvergelijking 14  
 continuümbeschouwing 10  
 convectie-diffusie vergelijkingen 66, 88  
 convectieve overdracht 148  
 convectieve overdrachtscoëfficiënt 146  
 convergentie 85  
 coördinatentransformaties 12, 13  
 creeping flow 170
- differentiaalvergelijking van Bessel 32  
 differentiaalvergelijking van Euler 168  
 differentievergelijking 62  
 diffuse en chemische reactie in een bol 159  
 diffusiecoëfficiënt 51, 209  
 diffusievergelijking 14, 15, 16  
 diffusievergelijking in cilindercoördinaten 3  
 diffusievergelijking met brontermen 152  
 dimensie-analyse 45  
 dimensieloos 22  
 dimensieloze groepen 46  
 dimensieloze variabelen 22, 30  
 directe matrix oplosmethode 86  
 discretiseren 61  
 divergentie 85  
 drukcorrecties 104
- eerste-orde reactie 21, 154, 157  
 effectiviteit 162  
 effectiviteit van een poreuze vaste katalysat  
     voor gasreacties 21  
 effectiviteitsfactor 161  
 eigenfunctie 110, 22, 23, 28, 29, 112, 134  
 eigenwaarden 22, 23, 28, 29, 111  
 eindige-elementenmethode 61  
 eindige-volumemethode 63, 68  
 Einstein conventie 99  
 elliptisch 16, 18  
 empirische correlaties 47  
 energievergelijking 14  
 enkelvoudige bronnen 120  
 error-functie 42, 131  
 Euler 127  
 Eulergetal 163  
 exacte oplossing 1D convectie-diffusie  
     vergelijking 91  
 expliciet schema 76  
 expliciete methode 77  
 expliciete methode van Du Fort-Frankel 79  
 expliciete methode van Saul'ev 79  
 exponentieel schema 92  
 extern medium 26
- false diffusion 94

- Faltung-theorema 130  
 fase-overgang 139, 140  
 Fick 11  
 Fourier 11  
 Fourier-analyse 23, 24, 111  
 Fourier-getal 24, 113, 134  
 Fourier-oplossing 112  
 Fourier-reeks 30  
 foutenintegraal  
 frontvoorwaarde 142
- Galerkin-methode 58, 59  
 gammafunctie 44, 189  
 Gauss Seidel 81, 84  
 gediscretiseerde continuïteitsvergelijking 65  
 gereduceerde variabelen 47  
 geschatte drukveld 103  
 getal van Grashof 204  
 gewone differentiaalvergelijkingen 21  
 golfvergelijking 16  
 golvend 2D drukveld 101  
 grafische oplossing 27, 112, 129  
 Greense functies 121  
 grenslaag 174, 194  
 grenslaagstromingen 163, 174  
 grenslaagvergelijkingen 174
- harmonische functies 22  
 homogene chemische reactie 154  
 homogene vergelijking 152  
 hyperbolische vergelijkingen 16, 18
- implementatie van de randvoorwaarden 71, 73  
 impliciete methode van Crank-Nicolson 78  
 incomplete gammafunctie 45, 189  
 incompressibel medium 164  
 indringdiepte 140  
 indringingsprobleem 112  
 instantane bronnen 122  
 instationaire diffusieproblemen in meer dimensies 135  
 instationaire warmtevergelijking 75  
 integraalmethode 48, 148, 149, 177  
 integraalmethode van Von Karman 178  
 intern medium 26
- Jacobi 81, 84  
 jury-problem 18
- katalysatorbolletje 162  
 kental van Courant 89  
 kental van Graetz 191  
 kental van Nusselt 182  
 kental van Péclet 181
- kruipstroming 163, 170  
 kubieke uitzettingscoëfficiënt 199
- laminaire grenslaag 163  
 laminaire grenslaagvergelijkingen 177  
 laminaire sub-laag 177  
 Landau-transformatie 143, 144, 147  
 Laplace (potentiaal)vergelijking 15  
 Laplace-transformatie 35, 36, 41, 155  
 Laplace-transformatie van diffusievergelijking 35  
 Laplace-vergelijking 16, 109  
 Leibniz 49  
 Lévêque-oplossing 190  
 Lévêque-probleem 47, 186, 187  
 lijn-voor-lijn iteratieve methode 80, 86  
 lijnbron 119, 127  
 linearisatie van de bronterm 69, 74  
 linearisatie van de randvoorwaarde 74  
 locale stofoverdrachtscoëfficiënt 189  
 locale warmteoverdracht 183
- marching solutions 18  
 materie-element 15  
 materiële afgeleide 15  
 method of weighted residuals 56  
 methode van Baker en Oliphant 78  
 methode van Danckwerts 157  
 methode van gewogen residuen 56  
 momentmethode 51  
 moving boundaries 138
- natuurlijke convectie 198  
 nauwkeurigheid 77, 94  
 Navier-Stokes vergelijkingen 13, 14, 163  
 negatieve (virtuele) bron 121  
 netverfijning 79  
 Neumannfunctie 32  
 Newton 11  
 Newton-Raphson linearisatie 75  
 niet-constante transportcoëfficiënt 51  
 niet-homogene materialen 70  
 niet-lineaire diffusievergelijking 48  
 niet-lineaire randvoorwaarde 112  
 niet-Newtonse vloeistoffen 182  
 niet-stationair stoftransport 138  
 niet-stationair transport 15, 16  
 niet-stationair warmtetransport 138  
 niet-stationaire afkoeling van een bol 30  
 niet-stationaire afkoeling van een wand 25  
 niet-stationaire geleidingsproblemen 128  
 niet-stationaire opwarming van een half-oneindig medium 37  
 niet-stationaire warmte-indringing in een half-oneindig medium 37

- niet-stationaire warmtegeleiding 139, 152  
 no-slip-conditie 164  
 numerieke diffusie 94, 95, 97  
 numerieke methoden 61
- ordeningsmethode 58  
 orthogonaal rooster 63  
 orthogonaal stelsel van eigenfuncties 29  
 orthogonaliteitseigenschap 23, 24  
 overrelaxatie 81
- parabolische vergelijkingen 16, 18  
 paradox van d'Alembert 170  
 particuliere oplossing 152, 153, 154  
 partiële differentiaalvergelijkingen 16  
 penetratietheorie 49, 129, 182  
 perturbation method 54  
 perturbation parameter 54  
 Péclet-getal 47  
 Poiseuille-stroming 190  
 Poissonvergelijking 159  
 positieve coëfficiënten 55  
 potentiaalfunctie 165  
 potentiaallijnen 165  
 potentiaalstroming 163, 164, 165  
 potentiaalveldproblemen 109  
 Prandtlgetal 181  
 propstroming 90, 182  
 pulsfunctie 121  
 puntbron 48, 119, 127, 128  
 puntsgewijze iteratieve oplosmethoden 81
- quadratic upwind schema 98  
 quick-schema 98
- randconditie 28  
 randvoorwaarde van de derde soort 71, 73, 112, 115, 116, 117, 118, 129, 135, 136, 158  
 randvoorwaarde van de eerste soort 71, 73, 112, 118, 129, 135, 136, 158  
 randvoorwaarde van de tweede soort 71, 73, 112, 136  
 randvoorwaarde van de vierde soort 112  
 randvoorwaarden 17  
 reactie met diffusie in een katalysatordeeltje 161  
 recurrentiebetrekking 34  
 rekenschema's diffusievergelijking 82, 83  
 Reynoldsgetal 163  
 Ritz-Galerkin 24  
 roostercellen 101  
 roosterpunten 61  
 roosters 63
- samennemen van variabelen 45, 47, 119, 135
- Saul'ev 79, 80  
 scheiden van variabelen 22, 30, 110  
 schema van Crank-Nicolson 76  
 schijnbare diffusiecoëfficiënt 96  
 Schmidtgetal 181  
 separatie van variabelen 110  
 sferisch rooster 63  
 Shaw-experiment 171  
 similarity analysis 194  
 SIMPLE 104  
 skew upwind differencing scheme 99  
 smelten 151  
 snelheidscorrecties 103, 104  
 sommatie in de plaats 122  
 sommatie in de tijd 122  
 sommatie in de tijd en plaats 123  
 sommatie van bronnen 121  
 stabiliteit 77  
 stabiliteitseis 77  
 Stafanprobleem 138  
 stationair transport 15, 16  
 stationaire 1D diffusievergelijking 80  
 stationaire problemen 109  
 stationaire stroming 163  
 stoftransport 194  
 stolfront 150  
 stolling 146  
 stollingsproblemen 148  
 stolwarmte 140  
 storingsparameter 54, 147  
 storingsrekening 54, 143, 144  
 stralingswarmtewisseling 112  
 stromingsgrenslaag 197  
 stroombuis 165  
 stroomfunctie 165  
 stroomlijn 164, 165  
 substantiële afgeleide 15  
 successive over relaxation 81  
 superponeren 121, 154  
 superpositie 121, 154  
 superpositie-principe 130
- tdma algorithm 86  
 temperatuurafhankelijke  
 warmtegeleidingscoëfficiënt 55  
 theorema van Duhamel 129, 130  
 theorema van Leibniz 49, 149  
 thermisch inloopegebied 89, 190  
 thermisch volledig ingestelde stroming 185, 191  
 thermische grenslaag 197  
 thermische indringdiepte 126  
 thermo-diffusie 11  
 Thiele-modulus 161, 162  
 Thomas algorithm 86

totale warmteoverdracht 183  
transcendente vergelijking 111 141, 142, 143  
transportcoëfficiënt 10  
tri-diagonal matrix algorithm 86  
trial-oplossing 57  
trialfuncties 56  
turbulente diffusiecoëfficiënt 186  
turbulente grenslaag 177  
turbulente stromingen 163  
tweede orde upwind 98

uitsterfprobleem 112, 134, 154, 90  
upwind schema 92, 95

variabele diffusiecoëfficiënt 51  
vergelijking van Euler 164  
vergelijking van Sturm-Liouville 28  
vershoven roosters 101  
virtuele bron 120  
virtuele rooster cel 72  
vlaktebron 119, 121  
volledig expliciet schema 88  
volledig expliciete methode 78  
volledig impliciet schema 76  
volledig impliciete methode 78  
Von Karman 178  
voorwaarden voor stabiliteit 89  
voorwaartse differenties 62  
vorticity 173  
vrije convectie langs een verticale plaat 198

warmtebronindringdiepte 126  
warmtegeleiding 55, 109  
warmtegeleidingscoëfficiënt 10, 55  
warmteoverdracht door straling 74  
warmteoverdrachtscoëfficiënt 182  
warmteproductie 152  
warmtetransport 194  
weegfuncties 57  
wervel-transportvergelijking 173  
wervelsterkte 173  
wet van Fiek 11  
wet van Fourier 11  
wet van Newton 11  
wet van Bernoulli 165





9 789065 620590

## **Fysische Transportverschijnselen II**

Dit boek is een synthese van het dictaat Kramers/Schenk en de uitgereikte collegestencils uit de jaren '60 en '70. Het verschil tussen de oorspronkelijke opzet en deze is de volgorde van behandeling van de stof. Terwijl het oorspronkelijke dictaat opgezet was vanuit de fysische problemen waarbij de wiskundige hulpmiddelen door de hoofdstukken heen verweven waren, is dit bij de blokcollege-opzet veranderd. Eerst worden nu de wiskundige hulpmiddelen behandeld, wel steeds aan de hand van een fysisch voorbeeld, daarna worden de fysische problemen systematisch behandeld.

Voor veel studenten behoort de bespreking van de wiskundige methoden een recapitulatie te zijn. Voor een aantal is dit echter wel nodig. Gezien de toenemende mogelijkheden voor computerberekeningen is tevens aandacht aan de numerieke methoden gegeven. In deze derde druk is het hoofdstuk over numerieke methoden nog verder uitgebreid en aangepast aan nieuwe ontwikkelingen, met name in de numerieke stromingsleer. Dit weerspiegelt het sterk groeiende belang van numerieke simulatie in dit vakgebied. Uiteraard worden alleen die methoden behandeld die voor FT-problemen van belang zijn. Bovendien worden ze steeds geïllustreerd met voorbeelden van warmte- en stoftransport.

Inhoud:

### **Deel I. Fysische basisvergelijkingen**

1. Inleiding

### **Deel II. Wiskundige methoden**

2. Analytische methoden

3. Numerieke methoden

### **Deel III. Fysische problemen**

4. Transportproblemen in rustende media

5. Impulstransport

6. Diffusie en geleiding in stromende media

Appendix 1. Bibliografie

Appendix 2. Enkele stofeigenschappen

Trefwoordenlijst

**Uitgegeven door de VSSD**

URL: <http://www.vssd.nl/hlf/c014.htm>

ISBN-10 90-6562-059-1

ISBN-13 978-90-6562-059-0

ISBN 90-6562-059-1



9 789065 620590