

SNELHEIDSVELD IN DE GRENSLAAG
BIJ GOLVEN EN STROOM

W.G.M. van Kesteren

D-51



Technische Hogeschool Delft,
Afdeling Civiele Techniek,
Vakgroep Kustwaterbouwkunde.

SNELHEIDSVELD IN DE GRENSLAAG
BIJ GOLVEN EN STROOM.

DEEL 1.

W.G.M.van Kesteren.

Begeleider: Ir.W.T.Bakker.

Technische Hoogeschool Delft.
Afdeling Civiele Techniek.
Vakgroep Kustwaterbouwkunde.

februari 1981.

Opmerking:

Zoals de titel reeds aangeeft bestaat het TOW-rapport uit twee delen. Dit deel, deel I, betreft analytische beschouwingen met betrekking tot het snelheidsveld in de grenslaag bij golven en stroom en is een aangevulde en verbeterde versie van het afstudeerrapport. Het tweede deel betreft numerieke berekeningen van het snelheidsveld welke uitgevoerd zijn op de TH-Delft. Van dit deel is geen afstudeerrapport beschikbaar, maar het zal t.z.t. als TOW-rapport verschijnen. Zolang dit deel nog niet beschikbaar is wordt voor wat betreft de numerieke berekeningen verwezen naar het rapport:

Experimenteel onderzoek naar het snelheidsveld in de turbulente bodemgrenslaag in een oscillerende stroming in een golftunnel; deel 1a en b; Th. van Doorn; M 1562, 1982 (D47).

INHOUD.

Pag.

1.	<u>Inleiding.</u>	1.1
2.	<u>Grenslaag bij golven en stroom.</u>	2.1
3.	<u>Samenvatting van bestaande berekeningsmethoden.</u>	
3.1.	Inleiding.	3.1
3.2.	Laminaire grenslaag-oplossing, volgens Stokes.	3.2
3.3.	Turbulente grenslaag-beschouwingen van Jonsson.	3.5
3.4.	Turbulente grenslaag-beschouwingen van Kajiura.	3.8
3.5.	Turbulente grenslaag-model van Lundgren.	3.14
3.6.	Turbulente grenslaag-model van Madsen en Grant.	3.17
3.7.	Evaluatie van de berekeningsmethoden.	3.25
4.	<u>Afleiden van de differentiaalvergelijkingen, welke de stroming en transporten in de grenslaag beheersen.</u>	
4.1.	Algemeen.	4.1
4.2.	Grenslaagbenadering.	4.7
4.3.	Resulterende vergelijkingen.	4.9
5.	<u>Sluitingsrelatie bij turbulent oscillerende stromen.</u>	
5.1.	Algemeen.	5.1
5.2.	Bestaande turbulentiemodellen.	5.2
5.3.	Mengweglengte van Prandtl.	5.5
5.4.	Het $k-\epsilon$ -model.	5.9
6.	<u>Toepassen van het mengweglengte-model.</u>	
6.1.	Beschrijving van het model van Bakker.	6.1
6.1.1.	Inleiding.	6.1
6.1.2.	Oplossing bij golven zonder resulterende stroom.	6.5
6.1.3.	Oplossing bij golven, gecombineerd met een resulterende stroom.	6.11

<u>INHOUD</u> (vervolg)	<u>pag.</u>
6.2. Aanvullende analytische beschouwingen m.b.t. het model van Bakker.	6.17
6.2.1. Differentiaal-vergelijking voor de tijdsafhankelijke snelheden.	6.17
6.2.2. Berekenen snelheidsveld via de differentiaalvergelijking voor de schuifspanningen.	6.18
6.2.3. Wijze van linearisatie van de differentiaalvergelijking voor schuifspanningen.	6.20
6.2.4. Linearisatie voor de oplossing van de eerste harmonische van de snelheid.	6.22
6.2.5. Linearisatie voor de oplossing van de gemiddelde snelheid.	6.25
6.3. Analytische oplossing bij golven zonder stroom.	6.28
6.4. Analytische oplossing bij golven en stroom.	6.33
6.5. Beschouwing van hogere harmonischen.	6.41
6.5.1. Te beschouwen gevallen.	6.41
6.5.2. Invloed tweede harmonische van p.	6.42
6.5.3. Invloed derde harmonische van p.	6.43
7. <u>Energiedissipatie in de grenslaag.</u>	
7.1. Afleiding.	7.1
7.2. Enige toepassingen.	7.6
8. <u>Samenvatting en conclusies.</u>	8.1
9. <u>Aanbevelingen voor verder onderzoek.</u>	9.1

Referenties.

Appendix A, B en C.

Bijlagen 1 t/m 15.

SYMBOLENLIJST.

- a Amplitude orbitaal beweging nabij de bodem (model Bakker)
- \hat{a}_∞ idem (model Stokes)
- a_{1m} idem (model Jonsson)
- a_b idem (model Lundgren)
- $|A|$ idem (model Madsen en Grant)
- A constante in gemiddeld snelheidsprofiel (model Bakker, model Lundgren)
- c concentratie
- C wrijvingsfactor volgens Kajiura
- \hat{C} idem, amplitude.
- C_I constante in analytische oplossing bij vernieuwde turbulent viscositeitsverloop
- C_{II} idem.
- C_1 constante in k- model
- C_2 idem
- C_D idem
- d waterdiepte
- D moleculaire diffusie-coëfficiënt
- D Nikuradse ruwheid in model Kajiura.
- D_L Dikte laminaire binnenlaag, model Kajiura
- D_R Dikte bij ruwe bodem van de binnenlaag, model Kajiura.
- d bovengrens tussenlaag , model Kajiura.
- e Totale energie per massa-eenheid.
- e_{int} Idem, voor interne energie.
- e_{mech} Idem, voor mechanische energie.
- E Energiedissipatie per eenheid van grondoppervlak en tijdseenheid.
- f_w wrijvingscoëfficiënt volgens Jonsson
- f_e overeenkomstige coëfficiënt voor de energiedissipatie, volgens Jonsson.
- f_{cw} wrijvingscoëfficiënt bij combinatie van golven en stroom in model Madsen en Grant.
- g zwaartekrachtversnelling.
- H golfhoogte
- k constante van Boltzman
- k golfgetal
- k Nikuradse ruwheid in model Jonsson. Lundgren.

k_b	Nikuradse ruwheid, in model Madsen en Grant
k_{bc}	idem, voor de invloed van de golven op het gemiddelde snelheidsprofiel
k	turbulente kinetische energie
K_z	Eddy-viscosity (turbulente viscositeit) in model Kajiura
K_z	tijdsonafhankelijke turbulente viscositeit voor de tijdsafhankelijke beweging bij een eerste linearisatie.
K_d	K_z op $z = d$ in model Kajiura.
l	maat grenslaag-dikte, model Madsen en Grant
l	lengte-schaal turbulente beweging.
l_m	mengweglengte
l_{vw}	gemiddelde vrije weglengte gas-moleculen
L	golflengte
L_1	lengteschaal in x_1 richting
L_2	lengteschaal in x_2 richting
m	massa gas-moleculen
n_w	turbulente viscositeit bij alleen golven in model Lundgren
n_c	idem, bij alleen de stroom
n_{cw}	idem, bij de combinatie van golven en stroom.
N	constante in de dikte van de binnenlaag, in model Kajiura.
$P_{l,per}$	Laminaire energie-dissipatie per volume-eenheid en per tijdseenheid, gemiddeld over de periode.
$P_{t,per}$	Idem, voor de turbulente energie-dissipatie.
p	druk in de vloeistof
p^+	dynamische druk
p_0	druk in het buitengebied.
p	schuifspanningssnelheid.
\hat{p}	amplitude van de schuifspanningssnelheid.
\bar{p}	tijdsgemiddelde schuifspanningssnelheid.
p	tijdsafhankelijke schuifspanningssnelheid.
p_n	n^e harmonische van de schuifspanningssnelheid.
p_{bn}	idem, aan de bodem.
\bar{p}_0	nulde harmonische van de schuifspanningssnelheid.
\bar{p}_{bo}	idem, aan de bodem.
\hat{p}_1	amplitude eerste harmonische van de schuifspanningssnelheid.
\hat{p}_{b1}	idem, aan de bodem.

q	turbulente schuifspanning gedeeld door de dichtheid , alle indices genoemd bij p , zijn ook op q van toepassing.
Re_a	Reynoldsgetal, betrokken op de orbitaal-amplitude nabij de bodem.
Re_δ	Reynoldsgetal, betrokken op de grenslaagdikte volgens Jonsson.
R	Reynoldsgetal, idem, in model Kajiura.
s	extra term in diffusie-vergelijking.
S_z	secundaire invloeden in de transportvergelijking voor de grootheid z , in de twee vergelijkingen modellen.
t	tijd
T	periode
T	temperatuur
u	horizontale snelheid, alle indices genoemd bij p , zijn ook op u van toepassing.
u_d	Defectsnelheid, alle indices idem dito
u_∞	Horizontale snelheid buiten de grenslaag in model Stokes
\hat{u}_∞	idem, amplitude
U_1	idem, model Jonsson
U	idem, model Bakker en Kajiura
U_{lm}	maximale horizontale snelheid buiten de grenslaag in model Jonsson.
U	idem, model Kajiura
U_{gem}	over de waterdiepte gemiddelde snelheid in model Bakker.
\bar{u}	idem, over alleen grenslaag- model in dit rapport.
u_i	i^e component van de snelheidsvector.
u^*	schuifspanningssnelheid in model Kajiura
\hat{u}^*	idem amplitude
\hat{u}^*_B	idem aan de bodem.
\hat{u}_f	amplitude schuifspanningssnelheid aan de bodem in model Lundgren.
U_f	bodemschuifspanningssnelheid in model Jonsson.
V	verticale snelheid in model Madsen en Grant
W	verticale snelheid in dit rapport.
w	valsnelheid korrelmateriaal en vloeistof
\underline{u}	snelheidsvector in model Madsen en Grant.
\underline{u}_w	idem, voor golfbewegingen .
\underline{u}_c	idem, voor gemiddelde snelheid
$ \underline{u}_b $	amplitude van de norm van de horizontale tijdsafhankelijke snelheid nabij de bodem in het model van Madsen en Grant.
$ \underline{u}_c $	idem, voor de tijdsgemiddelde snelheid.

- $|u_{*c}|$ norm schuifspanningssnelheid, nabij de bodem behorende bij de gemiddelde schuifspanning aan de bodem in het model van Madsen en Grant.
- $|u_{*cw}|$ idem, behorende bij de maximale schuifspanning aan de bodem.
- V_1 snelheidsschaal x_1 richting.
- V_2 idem, x_2 richting.
- z_0 nul-niveau voor de horizontale snelheid bij een ruwe turbulente grenslaag.
- z_{max} grenslaagdikte model Bakker.
- z_1 hoogte waarop knik in \bar{p}_0 verloop door Bakker wordt aangenomen.
- z_k idem, in dit rapport.
- z_s snijpunten schematisch \bar{p}_0 verloop met \hat{p}_1 verloop volgens model Bakker.
- z grootte in twee-vergelijkingen modellen.
- z^* dimensieloze hoogte boven de bodem; dimensieloos gemaakt met $\kappa \cdot \hat{p}_{b1} \cdot T$.
- z' idem; $z' = \frac{3\pi^3}{16} z^*$.

GRIEKSE LETTER-SYMBOLLEN.

- α factor voor verschoven gemiddelde snelheidsprofiel voor invloed van de golven.
- β reciproce waarde Stokes-lengte
- ψ_n fase n^e harmonische van de horizontale snelheid
- ϕ_n idem, schuifspanningssnelheid.
- θ_n idem, voor q .
- ϕ_c hoek golfrichting en stroomrichting in model Madsen en Grant.
- $\bar{\phi}_c$ hoek golfrichting en gemiddelde schuifspanning aan de bodem in model van Madsen en Grant.
- λ_p maat grenslaagdikte in model Bakker.
- λ warmtegeleidingsvermogen
- ω golffrequentie
- δ grenslaagdikte volgens Jonsson
- δ_w idem, volgens Madsen en Grant
- δ^* golfverdringingsdikte volgens Kajiura
- Δ schaal van de defectlaag volgens Kajiura
- Ω_i i^e component van de uitwendige versnellingsterm in de algemene bewegingsvergelijking.
- ν kinematische viscositeit.
- ρ dichtheid
- γ constante van Euler.
- κ constante van Von Karman
- σ_{ij} spanningstensor.
- σ golffrequentie in model Kajiura.
- τ turbulente schuifspanning.
alle indices genoemd bij p zijn ook op τ van toepassing.
- τ_B turbulente schuifspanning aan de bodem in model Kajiura.
- $\hat{\tau}_B$ idem, amplitude.
- τ_{wm} maximale bodem-schuifspanning volgens Jonsson.
- τ_{cw} gemiddelde schuifspanning bij de combinatie van golven en stroom.
- $\underline{\tau}$ schuifspanningsvector volgens model Madsen en Grant.
- $\underline{\tau}_b$ idem, aan de bodem
- $\underline{\tau}_{bmax}$ maximale schuifspanningsvector. in model Madsen en Grant.

T tijdschaal
 ℓ schaal turbulente snelheidsfluctuaties.
 Λ_1 schaal drukgradiënt in x_1 richting
 Λ_2 idem, in x_2 richting
 Θ schaal, energiedissipatie.

1. Inleiding.

Reeds tientallen jaren houden vele onderzoekers zich bezig met het snelheidsveld in de grenslaag bij de bodem, tengevolge van zwaartekrachtsgolven gecombineerd met een resulterende stroom, die al dan niet een hoek maakt met de golfvoortplantingsrichting. Hierbij is het voornaamste doel uit te vinden wat het verband is tussen de stroomparameters in de grenslaag en de optredende bodemschuifspanning. Deze verbanden zijn essentieel voor de beschrijving en berekening van morfologische problemen in kustgebieden.

In verband met deze morfologische problemen heeft het belang van onderzoek naar het snelheidsveld in de grenslaag betrekking op de volgende onderwerpen:

1. Het verloop van de concentratieverdeling over de hoogte, bij het aanwezige snelheidsveld in de grenslaag; hiervan is met name het bijbehorend verloop van de turbulente uitwisselingscoëfficiënt ('eddy-viscosity') van belang.
2. De bodemrandvoorwaarde voor de concentratieverdeling; deze hangt samen met het bodemtransport en de snelheden in de grenslaag, en wordt voornamelijk bepaald door de schuifspanningen op de bodem.
3. Het totale zandtransport; dit wordt bepaald door de som van bodem en suspensietransport, waarvan de laatste zowel van de concentratieverdeling als van de snelheidsverdeling over de hoogte afhankelijk is.

Omdat de snelheden m.b.t. de oscillerende beweging in de grenslaag t.o.v. het gebied daarbuiten van dezelfde orde van grootte zijn, maar de concentratieverdeling veel groter is, is het grenslaagonderzoek zo belangrijk bij de bestudering van morfologische processen aan een zandkust. Dit kan goed worden geïllustreerd a.h.v. de resultaten van Stone en Summer ⁼²⁴⁼, die uit veldmetingen tot de conclusie komen dat 95% van het totale transport in een kustgebied plaatsvindt in een laag van circa 15 cm boven de bodem.

Naast morfologische belangen kan nog worden genoemd het belang van het grenslaagonderzoek voor demping van golven door de bodemwrijving. Met name in golfvoorspellingsmodellen is men geïnteresseerd in de dissipatie van golfenergie door bodemwrijving. In hoofdstuk 7 zal daarop, zij het vrij summier, nader worden ingegaan.

In deze studie zal voornamelijk de aandacht worden gericht op de snelheidsverdeling in de grenslaag t.g.v. golven en stroom, waarbij deze gelijk van richting zijn. Deze speciale combinatie maakt het mogelijk theoretische verbanden tussen snelheden, schuifspanningen en concentraties verder uit te diepen dan in het drie-dimensionale geval. Vertaling naar het drie-dimensionale geval -niet gelijke richting golven en stroom - is dan een uitbreiding die vanuit het verkregen inzicht verantwoord kan worden gemaakt.

2. Grenslaag bij golven en stroom.

Wat is de grenslaag bij golven en stroom?

Golven die vanuit diep water een kust naderen, zullen bij voldoende kleine waterdiepte de bodem gaan voelen. Zo zullen golven met een periode van 5 sec. de bodem enigermate gewaarworden bij een waterdiepte van circa 20 m. of minder en golven van 15 sec. bij een waterdiepte van circa 180 m of minder. Het 'voelen' van de bodem wordt veroorzaakt door de randvoorwaarde, welke wordt opgelegd door een vaste bodem en inhoudt, dat de snelheidsvector bij de bodem een lengte nul heeft.

De daarmee samenhangende schuifspanningen geven de waterbeweging per definitie een wervelsterkte; aan de bodem wordt er een wervelsterkte opgewekt, welke zich door convectie en diffusie naar het inwendige verspreidt (zie Bakker =2=). Het gebied waar de schuifspanningen een rol spelen strekt zich uit tot vlak boven de bodem, zodat er sprake is van een grenslaag.

Buiten de grenslaag kan de vloeistofbeweging, voor het oscillerende deel, wervelvrij worden beschouwd. De beweging buiten de grenslaag wordt dan aangenomen als potentiaalstroming. Naarmate de golven in ondiep water geraken, wordt de invloed van de bodem sterker. Er ontwikkelt zich, afhankelijk van de bodemruwheid, een turbulente grenslaag. Recent onderzoek van volledig ontwikkelde turbulente grenslagen in stationaire stromen, heeft aangetoond, dat er in de turbulente grenslaag bepaalde coherente structuren aanwezig zijn (zie Kline =11=). Het onderzoek hieromtrent voor uniforme stroom is nog in een beginstadium, en zeker praktisch nog niet bruikbaar. Voor oscillerende stromen, zoals bij golven, is helaas een dergelijk onderzoek nog nooit uitgevoerd, zodat voorlopig zal moeten worden volstaan met de klassieke turbulentie-theorieën.

De overgang van laminair naar turbulente grenslaag bij oscillerende stromen is moeilijk aan te geven. Een poging is gedaan door Riedel en Kamphuis =22= en Jonsson =7=. In bijlage 1 is het resultaat van Riedel en Kamphuis =22= weergegeven.

Voor de turbulente wervelsterkte opgewekt aan de bodem geldt, zoals in het laminaire geval voor zoverdat het oscillerende deel van de beweging betreft, dat deze zich naar het inwendige van de vloeistof door convectie en diffusie verspreidt (Bakker =2=).

Bij aanwezigheid van een resulterende stroom is er in het buitengebied dan sprake van een volledig ontwikkeld turbulent gebied, waarin de turbulente schuifspanning niet door de golven wordt beïnvloed. Dat het buitengebied wervelvrij is, voor zover het de oscillerende beweging betreft, wordt door vrijwel alle onderzoekers, die zich met het onderwerp hebben bezig gehouden, aangenomen. Metingen van de verdeling van de gemiddelde snelheid over de hoogte bij golven in combinatie met stroom lijken deze aanname te rechtvaardigen (b.v. Bakker =4=). Wel kan in het buitengebied sprake zijn van turbulentie-intensiteiten die samenhangen met de oscillerende beweging. (Metingen van Ramaprian et al. =21=.) De genoemde aanname houdt namelijk in dat de turbulentie in het buitengebied, voor zover het de oscillerende beweging betreft, isotroop zou zijn. In een homogeen turbulentieveld sterft de turbulentie dan uit door viskeuze dissipatie (zie Tennekes and Lumley =25=). Doordat de oscillerende beweging periodiek is, volgt er in het buitengebied een periodieke opleving van turbulentie-intensiteit, gevoed vanuit de grenslaag, gevolgd door periodiek uitsterven. Het aanwezig zijn van turbulentie-intensiteiten in het buitengebied is dus niet in tegenspraak met de aanname dat in het buitengebied m.b.t. de oscillerende beweging geen resulterende rotatie bestaat. In navolging van vele onderzoekers zal in dit rapport deze aanname ook worden gedaan.

In deze studie zal zowel de laminaire grenslaag als de turbulente grenslaag worden beschouwd en deze zullen met elkaar worden vergeleken. De laminaire grenslaag heeft het voordeel dat deze toegankelijk is voor een eenvoudige analytische aanpak (zie hoofdstuk 3). Ingeval van een turbulente grenslaag zal vaak de toevlucht moeten worden gezocht in een numerieke berekening. In dit deel zullen met name de analytische beschouwingen m.b.t. de turbulente grenslaag aan de orde komen, toegespitst op het te gebruiken turbulentiemodel. In het tweede deel komen numerieke berekeningen en resultaten aan de orde. De numerieke procedure is voor deze studie ontwikkeld in navolging van Bakker =3= en wordt uitvoeriger beschreven in het tweede deel.

3. Samenvatting van bestaande berekeningsmethoden.

3.1. In deze samenvatting zullen een aantal theoretische beschouwingen en analytische oplossingen gegeven worden voor zowel laminaire als turbulente grenslaag bij oscillerende stroom, al dan niet met een resulterende stroom.

In totaal worden 6 theoriën behandeld. Bij iedere beschrijving daarvan wordt zonodig een definitieschets gegeven, en worden zoveel mogelijk dezelfde symbolen gebruikt als in de originele publicaties.

Behandeld zullen worden achtereenvolgens:

1. Laminaire grenslaag oplossing voor een enkelvoudig harmonische beweging, volgens Stokes.
2. Turbulente grenslaag oplossing volgens Jonsson, toegespitst op het bepalen van de wrijvingscoëfficiënt, bij enkelvoudige harmonische waterbeweging.
3. Turbulente grenslaag beschouwingen van Kajiura voor zowel een hydraulisch ruwe als gladde bodem, bij eveneens enkelvoudig harmonische waterbeweging.
4. Turbulente grenslaag model van Bakker voor een ruwe bodem en bij enkelvoudig harmonische waterbeweging en resulterende stroom, die dezelfde richting hebben; Dit model zal uitvoerig ter sprake komen in hoofdstuk 6.
5. Turbulente grenslaag model van Lundgren voor de combinatie van golven en stroom (evenwijdig en loodrecht gericht)
6. Turbulente grenslaag model van Madsen en Grant voor de combinatie van golven en stroom (onder willekeurige hoek).

In paragraaf 3.7 vindt een korte evaluatie plaats van deze theorieën.

3.2. Laminaire grenslaag oplossing, volgens Stokes.

Door Stokes is de laminaire grenslaag oplossing bepaald. Bij verwaarlozen van de verticale snelheden in de grenslaag en aanname van uniformiteit van de grenslaag, resulteert de bewegingsvergelijking : (zie o.a Lamb =14=)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (3.1)$$

met
$$\sigma_{xz} = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.2)$$

waarin:

u = horizontale snelheid	(m/s)
p = druk in de vloeistof	(N/m ²)
σ_{xz} = schuifspanning in de vloeistof	(N/m ²)
ρ = dichtheid van de vloeistof	(kg/m ³)
ν = kinematische viscositeit van de vloeistof	(m ² /s)

De randvoorwaarden zijn:

$$\begin{aligned} z=0 & \quad u=0 \\ z \rightarrow \infty & \quad u=u_{\infty} \quad \sigma_{xz}=0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Toepassen van de grenslaagbenadering (zie hoofdstuk 4) levert , dat de drukgradiënt in (3.1) constant is over de grenslaag, zodat voor $z \rightarrow \infty$ geldt:

$$\frac{du_{\infty}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (3.4)$$

Invullen van (3.4) in (3.1) en σ_{xz} volgens (3.2) geeft de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du_{\infty}}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.5)$$

met als randvoorwaarden:

$$z=0 \quad u=0 \quad (3.6)$$

$$z \rightarrow \infty : u = \hat{u}_{\infty} \cos(\omega t) \quad (3.7)$$

waarin: $\omega = 2 \pi / T$ T = Golfperiode
 \hat{u}_{∞} = amplitude eerste harmonische van u_{∞}

van (3.5) die voldoet aan de randvoorwaarde is:

$$u = \hat{u}_\infty \{ \cos \omega t - e^{-\beta z} \cos (\omega t - \beta z) \} \quad (3.8)$$

$$\text{met } \beta = \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{\nu T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

$\left(\frac{1}{\beta} \right)$ is de zgn. Stokes-lengte)

Substitutie van (3.8) in (3.2) levert voor de schuifspanning:

$$\sigma_{xz} = \rho \nu \sqrt{2\beta} \hat{u}_\infty e^{-\beta z} \cos (\omega t - \beta z + \frac{1}{4}\pi) \quad (3.10)$$

Dus de schuifspanning loopt 45° in fase voor t.o.v. de snelheid. Om een maat van de grenslaagdikte aan te geven, kan de definitie van Jonsson (=8=) (zie figuur 3.1. en 3.2) aangehouden worden. Uit (3.8) volgt dan voor deze maat, aangegeven met δ :

$$\delta = \frac{\pi}{2\beta} = \pi \left(\frac{\nu}{2\omega} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\pi \nu T \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

Uit (3.10) volgt dan, dat voor $z \approx 3\delta$ de schuifspanning is gereduceerd tot minder dan 1 % van de topwaarde bij de bodem.

Ter aanvulling zal hier nog aangegeven worden, hoe δ afhangt van het Reynoldsgetal naar de grenslaag. (zie ook Jonsson =8= . Dit Reynoldsgetal kan worden gedefinieerd als (zie Riedel =22 =):

$$\text{Re}_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{u}_\infty \hat{a}_\infty}{\nu} \quad (3.12)$$

$$\text{met } \hat{a}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \hat{u}_\infty / \omega \quad (3.13)$$

of zoals ook in veel literatuur voorkomt:

$$\text{Re}_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{u}_\infty \delta}{\nu} \quad (3.14)$$

De indices a en δ zijn in resp. (3.12) en (3.14) toegevoegd ter onderscheiding van de twee definities. Met $\hat{a}_\infty = \hat{u}_\infty / \omega$ en δ volgens (3.11) volgt er uit (3.12) en (3.14):

$$\delta / \hat{a}_\infty = \frac{\text{Re}_\delta}{\text{Re}_a} = \frac{\pi}{(2 \text{Re}_a)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.15)$$

Verder kan m.b.v. de definitie van Jonsson (zie 3.3):

$$\hat{\tau}_b = \rho \frac{1}{2} f_w \hat{u}_\infty^2 \quad (3.16)$$

(met f_w een wrijvingscoëfficiënt en $\hat{\tau}_b$ de maximale schuifspanning aan de bodem.)

aangegeven worden, hoe bij een laminaire grenslaag een dergelijke f_w van Re_a of Re_δ afhangt.

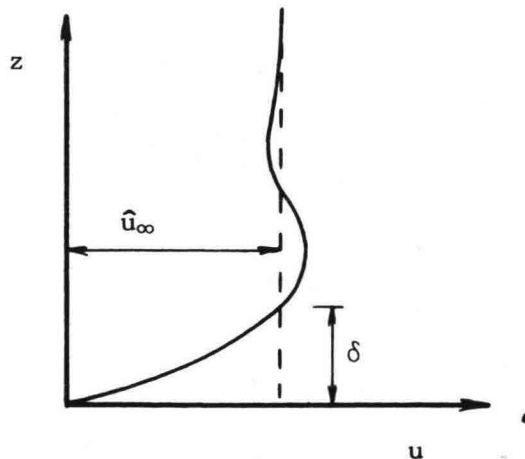
Uit (3.8) en (3.10) volgt voor f_w :

$$f_w = \frac{2\sqrt{2} \nu \beta}{\hat{u}_\infty}$$

ofwel met (3.9) en (3.12):

$$f_w = 2 \cdot Re_a^{-\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

snelheidsver-
deling op tijd-
stip dat \hat{u}_∞ maxi-
maal is



figuur 3.1.

3.3. Turbulente grenslaagbeschouwingen van Jonsson.

Jonsson beperkt zich in al zijn beschouwingen tot zuiver oscillerende ééndimensionale beweging nabij de bodem t.g.v. golven. In de theorie (zie =8=) gaat hij uit van de gelinealiseerde bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (3.18)$$

waarin

U = horizontale snelheid

U_1 = horizontale snelheid buiten de grenslaag

τ = Turbulente schuifspanning

Jonsson neemt in de theorie voor de snelheid U_1 de horizontale snelheid nabij de bodem, welke zou volgen uit de lineaire golftheorie. Voor de berekening wordt aangenomen, dat het snelheidsverloop in de grenslaag op ieder tijdstip logaritmisch verdeeld is, overeenkomstig de snelheidsverdeling bij uniforme stroom:

$$U = U_f 5.75 \log \frac{30 z}{k} \quad (3.19)$$

waarin

U_f = bodemschuifspanningsnelheid gedefinieerd met

$$U_f = (|\tau_w| / \rho)^{\frac{1}{2}}$$

met τ_w = bodemschuifspanning

k = Nikuradse ruwheid.

(n.b. de factor 5.75 is de numerieke waarde van $\frac{1}{\kappa \log e}$ $\kappa=0.4$)

Het logaritmisch snelheidsprofiel wordt aangenomen over een hoogte δ (zie figuur 3.2.). Voor $z > \delta$ wordt de snelheid gelijk aan U_1 genomen. In =8= wordt beschreven hoe, na integratie van (3.18) naar z , met U volgens (3.19) tussen de grenzen $z_0 = k/30$ en $z = \delta$, en integratie naar de tijd van het aldus verkregen resultaat, resulteert in:

$$\frac{30\delta}{k} \log \frac{30\delta}{k} = 1.64 \frac{a_{1m}}{k} \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{f_w}} + \log \frac{1}{4\sqrt{f_w}} = -0.21 + \log \frac{a_{1m}}{k} \quad (3.21)$$

waarin:

a_{1m} = amplitude horizontale waterbeweging buiten de grenslaag.

f_w = wrijvingsfactor gedefinieerd volgens:

$$f_w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau_{wm}}{\frac{1}{2}\rho U_{1m}^2} \quad (3.22)$$

met

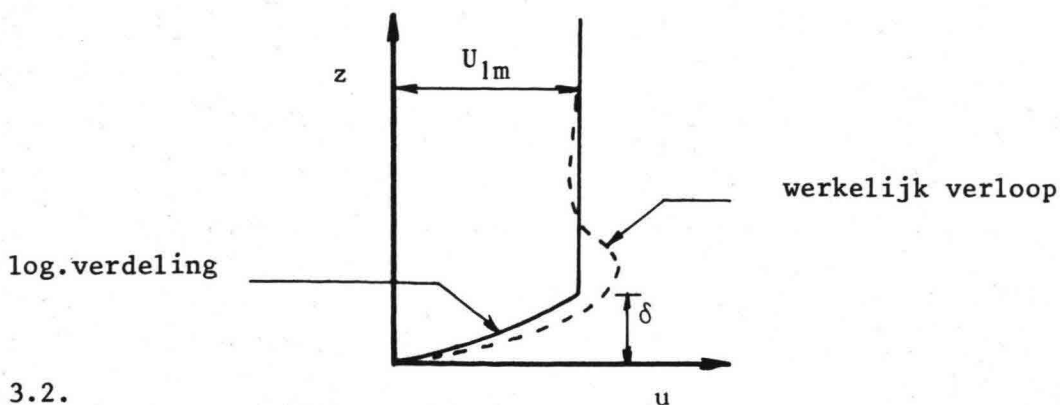
τ_{wm} = maximale bodemschuifspanning

U_{1m} = maximale snelheid buiten de grenslaag.

(opmerking: in het geval van zuiver oscillerende beweging, bestaande uit één harmonische, komt het maximum overeen met de amplitude).

De δ in (3.20) is daarbij aangenomen onafhankelijk te zijn van de tijd. In [7] bepaalt Jonsson uit metingen een aan vergelijking (3.20) en (3.21) overeenkomstig resultaat. Uit de snelheidsmetingen wordt allereerst bepaald een δ , door δ te definiëren als die hoogte boven de bodem waar de maximale snelheid, gezien vanaf de bodem voor het eerst gelijk is aan de maximale snelheid buiten de grenslaag. (zie figuur 3.2)

Vervolgens wordt de momentane bodemschuifspanning berekend door (3.18) te integreren naar z over $z = \frac{k}{30}$ tot $z = 3\delta$. Daartoe worden de numerieke waarden van U en U_1 uit de metingen gebruikt.



figuur 3.2.

Er resulteert wederom bij aanname van een momentaan logaritmische snelheidsprofiel, maar nu behorend bij de 'gemeten' bodemschuifspanning:

$$\frac{30\delta}{k} \log \frac{30\delta}{k} = 1.20 \frac{a_{1m}}{k} \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{f_w}} + \log \frac{1}{4\sqrt{f_w}} = -0.008 + \log \frac{a_{1m}}{k} \quad (3.24)$$

Bij zowel de vergelijking (3.20) en (3.21) als (3.23) en (3.24) is er geen rekening gehouden met de faseverschillen tussen τ_w en U_1 . (Deze bedraagt bij de metingen van Jonsson ca. 25° à 30°).

Jonsson gaat in \approx dieper in op de resultaten van zijn metingen en die van anderen.

Daarbij komt hij tot de volgende conclusies:

- Bij een gladde bodem is de grenslaag volledig turbulent als Reynoldsgetal betrokken op a_{1m} (Re_a genoemd in 3.2) groter is dan ca. 10^5 ; voor een ruwe wand is de grens ca 10^4 .
- In de buurt van de wand is er zuiver oscillerende ruw turbulente grenslaag een gebied te onderscheiden, waar $\frac{U}{U_f}$ enkel een functie is van z/k ; voor grote $\frac{a_{1m}}{k}$ verhoudingen, is dat verband logaritmisch; verderweg van de wand, geldt in de grenslaag, dat $\frac{U-U_1}{U_f}$ enkel een functie van z/δ is. (het laatste gebied wordt 'defect-layer' genoemd, het eerste gebied de 'overlap-layer').
- De fase van de snelheid t.o.v. die in het buitengebied is constant in de 'overlap-layer'.
- Bij kleine waarden van $\frac{a_{1m}}{k}$ is de aanwezigheid van een 'overlap-layer' niet duidelijk; Bij toenemende $\frac{a_{1m}}{k}$ neemt echter de 'overlap-layer' toe en heeft een groter aandeel in de totale grenslaag.

3.4. Turbulente grenslaagbeschouwingen van Kajiura.

Uitgangspunt is weer de vereenvoudigde één-dimensionale bewegingsvergelijking voor de grenslaagbenadering bij aanname van uniformiteit van het snelheidsveld in de horizontale dimensie. (zie =12= en =13=):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (3.25)$$

waarin:

U de snelheid buiten de grenslaag, volgend uit de potentiaalstroming.

u horizontale snelheid.

τ turbulente schuifspanning.

De dikte van de grenslaag wordt aangegeven met δ . Daar δ klein is t.o.v. de golflengte, wordt verondersteld, dat $\frac{\partial U}{\partial z}$ gelijk is aan nul over de grenslaag.

Kajiura beschouwt verder evenals Jonsson een zuiver oscillerende waterbeweging. De randvoorwaarden zijn:

$$\begin{aligned} z=0 & : u=0 \\ z=\delta & : \tau=0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Voor het oplossen van de bewegingsvergelijking gebruikt Kajiura voor de turbulente schuifspanning het eddy-viscosity-model van Boussinesq:

$$\frac{\tau}{\rho} = K_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.27)$$

waarin:

K_z de eddy-viscosity

Verder gaat Kajiura over op complexe grootheden volgens:

$$\begin{aligned} U &= \hat{U} e^{i\sigma t} \\ \tau_B &= \hat{\tau}_B e^{i(\sigma t + \theta)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

waarin:

$$\sigma = \frac{2\pi}{T}; T = \text{golfperiode.}$$

τ_B = schuifspanning aan de bodem.

De amplituden, aangegeven met " $\hat{}$ ", in de rechterleden zijn reëel.

Kajiura definieert in [12] eveneens een wrijvingscoëfficiënt C volgens:

$$C = \frac{\tau_B}{\rho \hat{U}} \quad (3.29)$$

Hierin is C geen functie van de tijd. Uit (3.28) en (3.29) volgt dat C geschreven kan worden als:

$$C = \hat{C} e^{i\theta} \text{ met :}$$

$$\hat{C} = \frac{\hat{\tau}_B}{\rho \hat{U}^2} \quad (3.30)$$

Indien \hat{C} wordt vergeleken met de f_w volgens Jonsson, (zie paragraaf 3.2) dan blijkt, dat geldt:

$$\hat{C} = f_w/2 \quad (3.31)$$

Voor de schaal van de grenslaagdikte worden twee integrale grootheden gedefinieerd:

- de golfverdringingsdikte δ^* :

$$\delta^* = \overline{\int_0^\delta (U-u) dz} / \hat{U} \quad (3.32)$$

- de schaal van de defectlaag Δ :

$$\Delta = \overline{\int_0^\delta (U-u) dz} / \hat{u}_B^* \quad (3.33)$$

waarin:

\hat{u}_B^* de amplitude voor de schuifspanningssnelheid aan de bodem. (zie 3.35).

Met (3.27) ingevuld in de bewegingsvergelijking (3.25) vindt Kaijura de basis-vergelijking in complexe vorm :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} - \frac{i\sigma}{K_z} \cdot u^* = 0 \quad (3.34)$$

waarin:

u^* = de aangepaste schuifspanningssnelheid gedefinieerd volgens:

$$u^* = \frac{1}{\hat{u}_B^*} \cdot \tau \quad (3.35)$$

De basis-vergelijking wordt voor twee gevallen opgelost, te weten een gladde bodem en een ruwe bodem.

Gladde bodem:

De grenslaag wordt opgedeeld in :

- binnenlaag (inner layer): $0 < z < D_L$,

waarin:

$$D_L = \frac{N\nu}{\hat{u}_B^*} \quad (N=12) \quad (3.36)$$

In deze laag wordt aangenomen;

$K_z = \nu$ met ν de kinematische viscositeit.

- tussenlaag (overlap layer): $D_L < z < d$,

waarin:

d de bovengrens van de laag

K_z wordt aangenomen volgens:

$$K_z = \kappa z \hat{u}_B^* \quad (3.37)$$

met κ de constante van von Karman.

- buitenlaag (outer layer): $d < z < \delta$,

met:

$$K_z = K_d = \kappa \hat{u}_B^* d \quad (3.38)$$

Verondersteld wordt, dat $K_d = K \hat{u}_B^* \delta^*$, zodat $d = \Delta K / \kappa$,

met $K \approx 0.02$ (arbitraire keuze).

De tussenlaag vormt samen met de binnenlaag de zgn. wandlaag, (wall layer) en met de buitenlaag de zgn defectlaag (defect layer).

Door te eisen, dat u^* en $\frac{\partial u^*}{\partial z}$ continue zijn op de grenzen, volgt er met de randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} z=0 & : u=0 \\ z \rightarrow \infty & : u^* = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

een oplossing voor (3.34). Hiervoor wordt verwezen naar (=14=).

Uit die oplossing volgt m.b.v. de definitie van de wrijvingscoëfficiënt C (3.29) voor \hat{C} :

$$\frac{\kappa}{2\hat{C}^{\frac{1}{2}}} + \ln \frac{1}{\hat{C}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\kappa N}{2} - 0.06\pi/2 - \gamma + \frac{1}{2} \ln \kappa/N + \ln R \quad (3.40)$$

waarin:

γ de constante van Euler: $\gamma \approx 0.5722$

R Reynoldsgetal gedefinieerd volgens:

$$R = \frac{\bar{U} (\nu/\sigma)^{\frac{1}{2}}}{\nu} \quad (3.41)$$

met $\hat{C} = f_w / 2$ gaat (3.40) over in:

$$\frac{1}{8.1 f_w^{\frac{1}{2}}} + \log \frac{1}{f_w^{\frac{1}{2}}} = -0.137 + \log R \quad (3.42)$$

(zie ook van Overeem =18=).

Ruwe bodem:

Er worden eveneens drie lagen onderscheiden. Daarbij is K_z in de defectlaag (tussenlaag + buitenlaag) gelijk aan de K_z in die laag bij een gladde bodem. In de binnenlaag wordt K_z gerelateerd aan de ruwheidslengte z_0 .

De relatie met de Nikuradse equivalente zandruwheid D is:

$$D = 30 z_0 \quad (3.43)$$

De laagdikte D_R wordt gelijk gesteld aan $D/2$.

Om ook de ruwheden, waarbij geldt:

$$(\delta^*/D)^2 < 1$$

in de beschouwing te betrekken, neemt Kaijura de K_z in de binnenlaag ($0 < z < D_R$) constant volgens:

$$K_z = \alpha \kappa \hat{u}_B^* D_R \quad (3.44)$$

In de tussenlaag ($D_R < z < d$) blijft gelden:

$$K_z = \kappa \hat{u}_B^* z \quad (3.45)$$

Voor het geval $(\delta^*/D)^2 \gg 1$ wordt de tussenlaag reeds aangenomen vanaf $z = z_0$.

Het daarbij gevonden snelheidsprofiel boven $z = D_R$ moet overeenstemmen met de oplossing bij de keuze van K_z , volgens (3.44) en (3.45).

Daaruit volgt dat moet gelden: *

$$1/\alpha = \ln D_R/z_0 \quad (3.46)$$

Daar D_R gelijk wordt gekozen aan $D/2$ ofwel met (3.43) gelijk aan $15z_0$, volgt:

$$1/\alpha = \ln 15 \quad (3.46^a)$$

De oplossing van (3.34) is nu overeenkomstig met de oplossing bij de gladde bodem, zij het, dat overal de kinematische viscositeit ν vervangen moet worden door $\alpha \kappa \hat{u}_B^* D_R$.

Dit toegepast op het verband tussen f_w en R voor de gladde bodem (zie vergelijking (3.40)) levert:

$$\frac{0.98}{4f_w^{1/2}} + \log \frac{1}{4f_w^{1/2}} = -1.733 + \log \frac{\hat{u}}{\sigma z_0} \quad (3.47)$$

(zie ook =18=).

* n.l. met K_z volgens (3.43) volgt bij benadering voor \hat{u} op $z = D_R$: $\hat{u} \approx \frac{\hat{u}_B^*}{\alpha \kappa}$; voor $(\delta^*/D)^2 \gg 1$ volgt voor \hat{u} , voor $z = D_R$ bij benadering: $\hat{u} \approx \frac{\hat{u}_B^*}{\kappa} \ln D_R/z_0$; gelijkstellen levert (3.45).

Daar \hat{U}/σ gelijk is aan amplitude van de orbitaalbeweging ,a, nabij de bodem, en $z_0 = D/30$ is volgens (3.47) f_w een functie van a/D .

In bijlage 2a en 2b zijn zowel voor resp. een gladde bodem als een ruwe bodem het verband van f_w als functie van \hat{U}/σ_0 uitgezet, en het verband van de fase-hoek tussen de schuifspanning aan de bodem en de snelheid aan de bovenrand van de grenslaag, volgend uit invullen van de oplossingen van Kaijura in (3.29).

3.5. Turbulente grenslaagmodel van Lundgren.

Lundgren gaat in =15= uit van hetzelfde model als Jonsson; op ieder tijdstip een logaritmisch verloop. De theorie van Lundgren heeft in tegenstelling tot de andere modellen alleen betrekking op het resulterende snelheidsprofiel bij een ruwe bodem.

Het momentane snelheidsprofiel wordt niet berekend.

Verder wordt de invloed van golven beschouwd op een uniforme stroom gericht volgens een variabele hoek met de voortplantingsrichting van de golven.

Voor de turbulente schuifspanning wordt de hypothese van Boussinesq gebruikt, waarin de 'eddy-viscosity' vectorieel wordt samengesteld uit die t.g.v. de stroom en golven:

$$\tau_{cw} = \rho n_{cw} \frac{dU}{dz} \quad (3.48)$$

waarin

τ_{cw} = gemiddelde schuifspanning t.g.v. stroom bij aanwezigheid van golven.

n_{cw} = turbulente viscositeit bij de combinatie van golven en stroom.

U = gemiddelde stroomsnelheid.

De turbulente viscositeit n_{cw} is opgebouwd uit n_c , alleen t.g.v. stroom en n_w alleen t.g.v. golven:

$n_{cw} = n_c + n_w$ bij gelijke richting van golven en stroom.

$n_{cw}^2 = n_c^2 + n_w^2$ bij stroom, die loodrecht op de golfrichting staat.

Lundgren bepaalt n_c uit:

$$n_c = \kappa^2 z^2 \frac{dU}{dz} \quad (3.49)$$

(κ = constante van Von Karman)

$$\text{en } n_w \text{ uit: } n_w = \frac{|\tau_w/\rho|}{|\partial u/\partial z|} \quad (3.50)$$

waarin

τ_w = schuifspanning t.g.v. golfbeweging

u = horizontale snelheid.

De overstreping in (3.50) geeft aan dat de termen zijn gemiddeld over de periode. Aan de hand van de aldus bepaalde n_w uit metingen in een golftunnel, construeert Lundgren de empirische formule voor n_w :

$$n_w = \frac{\kappa \hat{u}_f z}{1 + 1.34 (f_w/2)^{1/4} z / \delta \exp(z/\delta)} \quad (3.50a)$$

waarin

\hat{u}_f = amplitude schuifspanningsnelheid aan de bodem.

f_w = wrijvingscoëfficiënt volgens Jonsson.

δ = grenslaagdikte volgens Jonsson.

Zowel f_w als δ zijn nog een functie van a_b/k (zie ook §3.2).

In bijlage 3 zijn meetresultaten volgens (3.50) gegeven voor twee meetseries. Bovendien is het verloop volgens (3.50a) weergegeven. Het gemiddeld snelheidsprofiel volgt nu door (3.49) en (3.50) vectorieel samen te stellen en in te vullen in (3.48).

Lundgren gaat ervan uit, dat het verhang zonder en met golven gelijk blijft, zodat $\tau_{cw} = \tau_c$. Integratie van (3.48) met als randvoorwaarde

$$z = z_0 : U = 0$$

levert de gemiddelde snelheid op iedere hoogte z .

Buiten de grenslaag nadert het snelheidsprofiel weer de logaritmische verdeling:

$$U = U_f \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} - A \right) \quad (3.51)$$

waarin

U_f de schuifspanningsnelheid gedefinieerd volgens:

$$U_f = (\tau_{cw}/\rho)^{\frac{1}{2}} = (\tau_c/\rho)^{\frac{1}{2}} \quad (3.52)$$

De parameter A geeft de verschuiving van het logaritmisch profiel bij golven en stroom t.o.v. het logaritmisch profiel bij alleen stroom weer (zie ook hoofdstuk 6)

De parameter A kan ook gezien worden als verhoging van de ruwheidshoogte z_0 :

$$U = U_f \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0\alpha} \quad (3.53)$$

waarin

$$\alpha = e^{kA} \quad (3.54)$$

De parameter A hangt af van de hoek, die de golven en stroomrichting met elkaar maken, en van de parameters a_b/k en $\tau_{cw}/\rho u_b^2$. Hierin is:

a_b = amplitude orbitaalbeweging bij de bodem.

k = Nikuradse ruwheid

u_b = Amplitude orbitaalsnelheid bij de bodem,
volgens potentiaaltheorie.

Dit verband tussen A en a_b/k , $\tau_{cw}/\rho u_b^2$ is voor een hoek van 0° en 90° tussen de golf en stroomrichting gegeven in bijlage 4.

3.6. Turbulente grenslaagmodel van Madsen en Grant.

Madsen en Grant beschrijven in [17] een theoretisch model voor de snelheidsverdeling en schuifspanningsverdeling in de grenslaag bij golven en stroom, waarbij deze een willekeurige richting mogen hebben (zie definitieschets in figuur 3.3). Uitgegaan wordt van de bewegingsvergelijking voor de grenslaagbenadering, waarin de convectieve termen verwaarloosd worden:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial z} \quad (3.55)$$

waarin:

- \underline{u} : de snelheidsvector in het x,y vlak (zie figuur 3.4)
 ∇p : de vector $(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y})$
 $\underline{\tau}$: de schuifspanning als vector in het x,y vlak.

Volgens Madsen en Grant betekent verwaarlozen van de convectieve termen t.o.v. $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$ in de meebewegende afgeleide $\frac{D\underline{u}}{Dt}$, dat de stroomsnelheden worden aangenomen van gelijke orde te zijn als de orbitaalsnelheden.

Voor de turbulente schuifspanning wordt weer gebruik gemaakt van de hypothese van Boussinesq, maar nu in vector vorm:

$$\underline{\tau} = \rho \varepsilon \frac{\partial \underline{u}}{\partial z} \quad (3.56)$$

waarin:

ε de turbulente viscositeit.

De turbulente viscositeit wordt gekozen overeenkomstig het logaritmisch snelheidsprofiel voor een ruwe bodem.

$$\varepsilon = \kappa \left| \underline{u}_{*c} \right| \cdot z \quad \text{voor } z > \delta_w \quad (3.57)$$

$$\varepsilon = \kappa \left| \underline{u}_{*cw} \right| \cdot z \quad \text{voor } 0 < z < \delta_w \quad (3.58)$$

Hierin is δ_w de grenslaagdikte voor de golven.

κ de constante van von Karman

$|\underline{u}_{\star c}|$ de norm van de vector van de schuifspannings-
snelheid gedefinieerd volgens:

$$|\underline{u}_{\star c}| = (|\underline{\tau}_c|/\rho)^{\frac{1}{2}} \quad (3.59)$$

$|\underline{u}_{\star cw}|$ idem, maar nu gedefinieerd volgens:

$$|\underline{u}_{\star cw}| = (|\underline{\tau}_{b_{\max}}|/\rho)^{\frac{1}{2}} \quad (3.60)$$

Hierin zijn $\underline{\tau}_c$ en $\underline{\tau}_{b_{\max}}$ de schuifspanningsvector aan de bodem voor resp. de gemiddelde schuifspanning en de maximale schuifspanning.

Overeenkomstig Jonsson, maar nu uitgebreid voor golven en stroom niet in gelijke richting, wordt voor de momentane schuifspanningsvector bij de bodem gedefinieerd:

$$\underline{\tau}_b = \frac{1}{2} \rho f_{cw} (u^2 + v^2) \left\{ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} \quad (3.61)$$

met:

f_{cw} : de wrijvingscoëfficiënt voor de combinatie van golven en stroom.

u : x-component van \underline{u} in de golfrichting op een bepaalde hoogte boven de bodem.

v : idem, maar nu y-component van \underline{u} .

(zie figuur 3.4)

Door middelen van (3.61) over de golfperiode met enkelvoudige harmonische beweging van de bodem t.g.v. de golven, volgt de relatie:

$$|\underline{\tau}_c| = \rho \frac{1}{2} f_{cw} V_2 |\underline{u}_b|^2 \quad (3.62)$$

Met:

$|\underline{u}_b|$ is de amplitude van de norm van de snelheid nabij de bodem t.g.v. de golven, volgend uit de lineaire golftheorie.

V_2 is een parameter, welke een functie is van ϕ_c , de hoek tussen de stroom en de golfvaartplantingsrichting (zie figuur 3.4.), en van de verhouding $|\underline{u}_c|/|\underline{u}_b|$, waarin \underline{u}_c de gemiddelde stroomsnelheid, buiten de grenslaag is. (V_2 is in bijlage 5, figuur 1, weergegeven)

Voor kleine waarden van $|\underline{u}_c|/|\underline{u}_b|$ volgt bij benadering:

$$V_2 = \frac{2}{\pi} \frac{|\underline{u}_c|}{|\underline{u}_b|} (4 - 3 \sin^2 \phi_c)^{\frac{1}{2}} \quad (3.63)$$

Naast (3.62) wordt ook een relatie afgeleid voor de hoek $\bar{\phi}_c$ tussen de gemiddelde schuifspanning aan de bodem en de golfvoortplantingsrichting. Deze relatie is weergegeven in figuur 2 van bijlage 5. Voor kleine waarden van $\frac{|\underline{u}_c|}{|\underline{u}_b|}$ volgt bij benadering:

$$\tan \bar{\phi}_c = \frac{1}{2} \tan \phi_c \quad (3.64)$$

Door de niet-lineariteit hebben dus de gemiddelde schuifspanning aan de bodem en die buiten de grenslaag niet dezelfde richting.

Uit (3.61) wordt eveneens $|\underline{T}_{b_{\max}}|$ bepaald:

$$|\underline{T}_{b_{\max}}| = \rho \frac{1}{2} f_{cw} \alpha |\underline{u}_b|^2 \quad (3.65)$$

$$\text{met } \alpha = 1 + \left(\frac{|\underline{u}_c|}{|\underline{u}_b|}\right)^2 + 2\left(\frac{|\underline{u}_c|}{|\underline{u}_b|}\right) \cos \phi_c$$

Uit resp (3.62) en (3.65) volgen resp.:

$$|\underline{u}_{\star c}| \quad \text{en} \quad |\underline{u}_{\star cw}| \cdot$$

De differentiaalvergelijking (3.55) wordt opgelost door \underline{u} en p te substitueren in:

$$\underline{u} = \underline{u}_w + \underline{u}_c$$

$$p = p_w + p_c$$

met de index 'w' voor golven en 'c' voor de stroom.

Door het middelen van (3.55) over de golfperiode rest:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_c + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \kappa \left| \underline{u}_{*c} \right| z \frac{\partial \underline{u}_c}{\partial z} \right\} \text{ voor } z > \delta_w \quad (3.66)$$

$$\text{en } 0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_c + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \kappa \left| \underline{u}_{*cw} \right| z \frac{\partial \underline{u}_c}{\partial z} \right\} \text{ voor } z < \delta_w \quad (3.67)$$

Dit aftrekken van (3.55) geeft voor alleen de golfbeweging:

$$\frac{\partial \underline{u}_w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p_w + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \kappa \left| \underline{u}_{*c} \right| z \frac{\partial \underline{u}_w}{\partial z} \right\} \text{ voor } z > \delta_w \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \underline{u}_w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p_w + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \kappa \left| \underline{u}_{*cw} \right| z \frac{\partial \underline{u}_w}{\partial z} \right\} \text{ voor } z < \delta_w \quad (3.69)$$

Buiten de grenslaag, $z > \delta_w$, wordt de tweede term in (3.68) verwaarloosd, zodat de Euler-vergelijking overblijft, welke met de gelineariseerde randvoorwaarde aan het wateroppervlak de oplossing van de lineaire golftheorie geeft.

Door de grenslaagbenadering geldt dat de ∇p_w constant is over de grenslaag en gelijk is aan de waarde op de rand.

Deze volgt direct uit (3.68) voor $z = \delta_w$.

Binnen de grenslaag wordt (3.69) opgelost met de randvoorwaarden:

$$z = z_0: \underline{u}_w = \underline{0} \quad \text{met } z_0 = \frac{k_b}{30}$$

k_b de equivalente Nikuradse bodemruwheid

$$z \rightarrow \infty : \underline{u}_w = \underline{u}_{w\infty}$$

De rand $z = \delta_w$ is daarbij naar oneindig verplaatst.

Voor de oplossing van (3.69) is de vectornotatie eigenlijk overbodig, omdat \underline{u}_w alleen uit x-component van de snelheid bestaat.

Verder wordt overgegaan op complexe notatie. Als oplossing wordt gevonden in complexe vorm met:

$$u_{w\infty} = \hat{u}_{w\infty} e^{i\omega t}$$

$$\text{opl.: } u_w = \left\{ 1 - \frac{\ker 2 \left(\frac{z}{T}\right)^{\frac{1}{2}} + i \operatorname{kei} 2 \left(\frac{z}{T}\right)^{\frac{1}{2}}}{\ker 2 \left(\frac{z_0}{1}\right)^{\frac{1}{2}} + i \operatorname{kei} 2 \left(\frac{z_0}{1}\right)^{\frac{1}{2}}} \right\} u_{w\infty} \quad (3.70)$$

$$\text{met } l = \kappa |u_{*cw}| / \omega \quad \text{en } \omega = \frac{2\pi}{T}, T \text{ de golfperiode} \quad (3.71)$$

en kei en ker Kelvinfuncties van de nulde orde.

Voor kleine waarden van z geldt bij benadering:

$$u_w = \left\{ 1 + \frac{0.5}{\ker 2 \left(\frac{z}{1}\right)^{\frac{1}{2}} + i \operatorname{kei} 2 \left(\frac{z}{1}\right)^{\frac{1}{2}}} \right\} \left(\ln \frac{z}{1} + 1.154 + \frac{i\pi}{z} \right) u_{w\infty} \quad (3.72)$$

Uit de oplossing (3.70) blijkt, dat de grenslaagdikte δ_w geschat kan worden op ca 2·1.

De oplossing voor de gemiddelde snelheidsverdeling volgt uit (3.66) en (3.67). Volgens de grenslaagbenadering is de drukgradiënt constant over de hoogte van de grenslaag. Madsen en Grant nemen ook in de buurt van de grenslaag voor $z > \delta_w$, en in de grenslaag aan dat de gemiddelde drukgradiënt constant is en wel gelijk aan nul.

Dit moet wel aangenomen worden wil er uit (3.66) een logaritmisch snelheidsprofiel volgen buiten de grenslaag.

De gemiddelde schuifspanningen zijn qua grootte dan eveneens constant over de hoogte en gelijk aan die op de bodem.

Er volgt voor de norm van gemiddelde snelheidsvector:

$$\kappa |u_{*c}| z \frac{\partial |u_c|}{\partial z} = |u_{*c}|^2 \quad z > \delta_w \quad (3.73)$$

$$\kappa |u_{*cw}| z \frac{\partial |u_c|}{\partial z} = |u_{*c}|^2 \quad z < \delta_w \quad (3.74)$$

met als randvoorwaarde:

$$z = z = k_b/30: |u_c| = 0$$

De oplossingen van (3.73) en (3.74) zijn:

$$z < \delta_w: |u_c| = \frac{|u_{*c}|}{\kappa} \left(\frac{|u_{*c}|}{|u_{*cw}|} \right) \ln \frac{30z}{k_b} \quad (3.75)$$

$$z > \delta_w: |u_c| = \frac{|u_{*c}|}{\kappa} \ln \frac{30z}{k_{bc}} \quad (3.76)$$

waarin k_{bc} een toegevoegde ruweheidswaarde is voor de invloed van golven op het gemiddeld snelheidsprofiel.

Madsen en Grant kiezen nu, vrij arbitrair, δ_w :

$$\delta_w = 2 \cdot 1 = 2 \kappa |u_{*cw}| / \omega \quad (3.77)$$

Gelijkstellen van (3.76) voor $z = \delta_w$ levert dan:

$$\frac{k_{bc}}{k_b} = \left\{ 24 \frac{|u_{*cw}|}{|u_b|} \cdot \frac{|A_b|}{k_b} \right\} \left(1 - \frac{|u_{*c}|}{|u_b|} \cdot \frac{|u_b|}{|u_{*cw}|} \right) \quad (3.78)$$

met:

$$|A_b| = |u_b| / \omega$$

Hierin is gebruik gemaakt van $\frac{|u_{*cw}|}{|u_b|}$ en $\frac{|u_{*c}|}{|u_b|}$, omdat deze m.b.v.

de vergelijkingen resp. (3.60), (3.65) en (3.59), (3.62), (3.63) alleen afhangen van ϕ_c , f_w en $\frac{|u_c|}{|u_b|}$. In figuur 3 van bijlage 5 is het verband (3.78) weergegeven voor $\phi_c = 0^\circ$.

Voor zowel voor het periodieke als voor de gemiddelde snelheid rest nog een onbekende te bepalen: de wrijvingscoëfficiënt f_w .

Deze kan bepaald worden m.b.v. (3.65) en:

$$|\underline{\tau}_{b,\max}| = |\underline{\tau}_c + \underline{\tau}_{w\max}| \quad (3.79)$$

waarin:

$\underline{\tau}_{w\max}$ de schuifspanningsvector t.g.v. golven aan de bodem met maximale norm. Deze volgt uit:

$$\underline{\tau}_{w\max} = \rho \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \kappa |\underline{u}_{*cw}| z \left(\frac{\partial \underline{u}_w}{\partial z} \right)_{\max} \right\} \quad (3.80)$$

Invullen van de oplossing van \underline{u}_w (3.70) in (3.80) en daarna $\underline{\tau}_{w\max}$ in (3.79) geeft samen met $\underline{\tau}_c$ volgens (3.62) en met een hoek tussen $\underline{\tau}_c$ en $\underline{\tau}_{w\max}$ gelijk aan $\bar{\phi}_c$:

$$\left\{ 0.097 \left(\frac{|A_b|}{k_b} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{K}{f_{cw}^{3/4}} \right\}^2 + 2 \left\{ 0.097 \cdot \left(\frac{|A_b|}{k_b} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{K}{f_{cw}^{3/4}} \right\} \cdot \frac{V_2}{2 \alpha^{\frac{1}{4}}} \cdot \cos \bar{\phi}_c = \frac{\alpha^{3/4}}{4} - \frac{V_2^2}{4 \alpha^{\frac{1}{2}}} \quad (3.81)$$

waarin:

$$K = \frac{1}{2 \left(\frac{z_0}{l} \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left\{ \ker^2 2 \left(\frac{z_0}{l} \right)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{kei}^2 2 \left(\frac{z_0}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (3.82)$$

met:

$$z_0 = k_b / 30 \\ \text{en } l = \kappa |\underline{u}_{*cw}| / \omega$$

met $\frac{|A_b|}{k_b} = \frac{|\underline{u}_b|}{\omega}$ en $\frac{|\underline{u}_{*cw}|}{|\underline{u}_b|}$ bepaald uit (3.60) en (3.65) volgt voor z_0/l :

$$z_0/l = \frac{1}{30 \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{2} f_{cw} \alpha \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{|A_b|}{k_b} \right)^{-1} \quad (3.83)$$

Door (3.81) (3.82) en (3.83) is dus f_{cw} impliciet gegeven als functie van $\frac{|\underline{u}_c|}{|\underline{u}_b|}$, $\frac{|\underline{\Delta}_b|}{k_b}$ en ϕ_c .

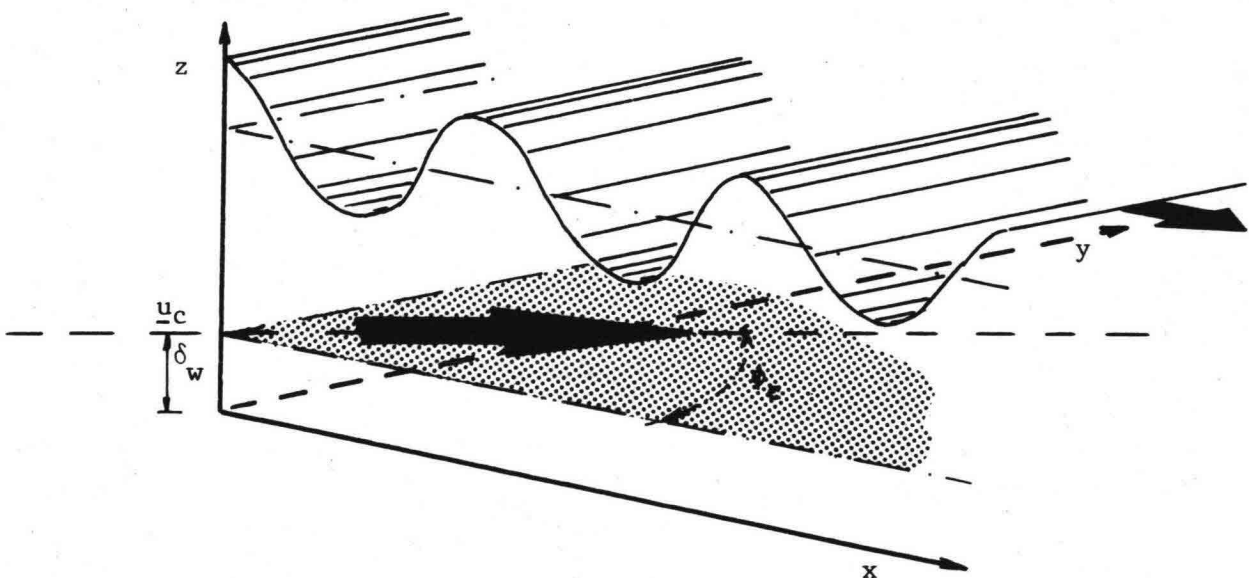
In figuur 4 van bijlage 5 is dit verband weergegeven voor $\phi_c = 0^\circ$ (getrokken lijn) en $\phi_c = 90^\circ$ (gestippelde lijn). De lijnen voor $\phi_c = 0^\circ$ bepalen f_w goed zolang $\phi_c < 60^\circ$.

Voor $\phi_c > 60^\circ$ moet geïterpoleerd worden. Voor het geval zonder resulterende stroom ($|\underline{u}_c| = 0$) is f_w uit figuur 4 van bijlage 5 als functie van $|\underline{\Delta}_b|/k_b$ weergegeven in bijlage 8.

Voor de berekening van de snelheidsprofielen moet een iteratieve procedure gevolgd worden: De berekening kan pas gestart worden als $\frac{|\underline{u}_c|}{|\underline{u}_b|}$, $\frac{|\underline{\Delta}_b|}{k_b}$ en ϕ_c bekend zijn.

De eerste hiervan is onbekend, daar nog niet bekend is op welke hoogte $|\underline{u}_c|$ genomen moet worden.

Door nu deze te schatten, kunnen f_{cw} en $\frac{k_{bc}}{k_b}$ bepaald worden. Nu is het logaritmische snelheidsprofiel boven de grenslaag bekend volgens (3.76). De hieruit volgende snelheid op de hoogte, waar de gemiddelde snelheid bekend is, moet overeenstemmen met die bekende snelheid; dus iteratie nodig.



figuur 3.3.

3.7. Evaluatie van de berekeningsmethoden.

In deze paragraaf zullen de turbulente grenslaagmodellen van Jonsson, Kajiura, Lundgren en Madsen en Grant, zowel onderling als met het in hoofdstuk 6 beschreven model, vergeleken worden. In hoofdstuk 6 wordt het model van Bakker en de in dit rapport gepresenteerde verbeterde versie daarvan beschreven.

De modellen zullen worden vergeleken qua aannamen en kwalitatief qua snelheidsveld.

Een gedetailleerd vergelijken van het snelheidsveld is in verband met het navolgende niet in dit rapport opgenomen.

Een vergelijking van het snelheidsveld in dimensieloze vorm is nauwelijks zinvol, daar de parameters waarmee de grootheden dimensieloos gemaakt worden, niet eenduidig vastliggen. Een belangrijk voorbeeld is de karakteristieke schuifspanningssnelheid aan de bodem.

Voor een eerlijke vergelijking zou het snelheidsveld van verschillende voorbeelden, waar ook metingen van beschikbaar zijn, doorgerekend moeten worden. Daarbij zou in voldoende mate de ruwheid en de golfstroomparameter gevarieerd moeten worden. Hiermee hangt een omvangrijk rekenwerk samen.

Daarom wordt in deze paragraaf volstaan met een kwalitatieve vergelijking van het snelheidsveld aan de hand van de turbulente viscositeit, de gemiddelde snelheid en de wrijvingscoëfficiënt f_w .

Wanneer de aannamen van de verschillende modellen beschouwd worden, zijn er de volgende overeenkomsten en verschillen te constateren:

- Overeenkomsten: - Dezelfde bewegingsvergelijking wordt gebruikt. Dit houdt in, dat in alle modellen de volgende aannamen worden gedaan (zie ook hoofdstuk 4):
- + Grenslaagbenadering is van toepassing.
 - + Zwaartekracht is enige uitwendige kracht.
 - + Stromingsveld is momentaan uniform in de hoofdstroomrichting.
 - + Verwaarlozen van viskeuze schuifspanning in het turbulente stromingsveld.

- In geval van een turbulente ruwe bodem wordt van het nulpunt van het snelheidsveld gebruik gemaakt van de Nikuradse ruwheid.
 - Er wordt een apart gebied (grenslaag) aan de bodem onderscheiden waar de golven invloed hebben op de schuifspanningen. Daarbuiten wordt, voorwat betreft de golfbeweging een potentiaalstroming aangenomen.
 - Als sluitingsrelatie (de relatie die de turbulente schuifspanning aan het snelheidsveld koppelt) wordt de hypothese van Boussinesq gebruikt. De daarin voorkomende turbulente viscositeit wordt onafhankelijk van de tijd verondersteld.
- Verschil:
- De invulling van de turbulente viscositeit in de hypothese van Boussinesq.

Bij de invulling van de turbulente viscositeit wordt in alle modellen gebruik gemaakt van de basis van de mengweglengtemodel van Prandtl. Deze veronderstelt, een aan de kinetische gastheorie analoge uitdrukking voor de turbulente viscositeit (zie ook hoofdstuk 5):

$$\nu_t = l_m \cdot V_t \quad (3.84)$$

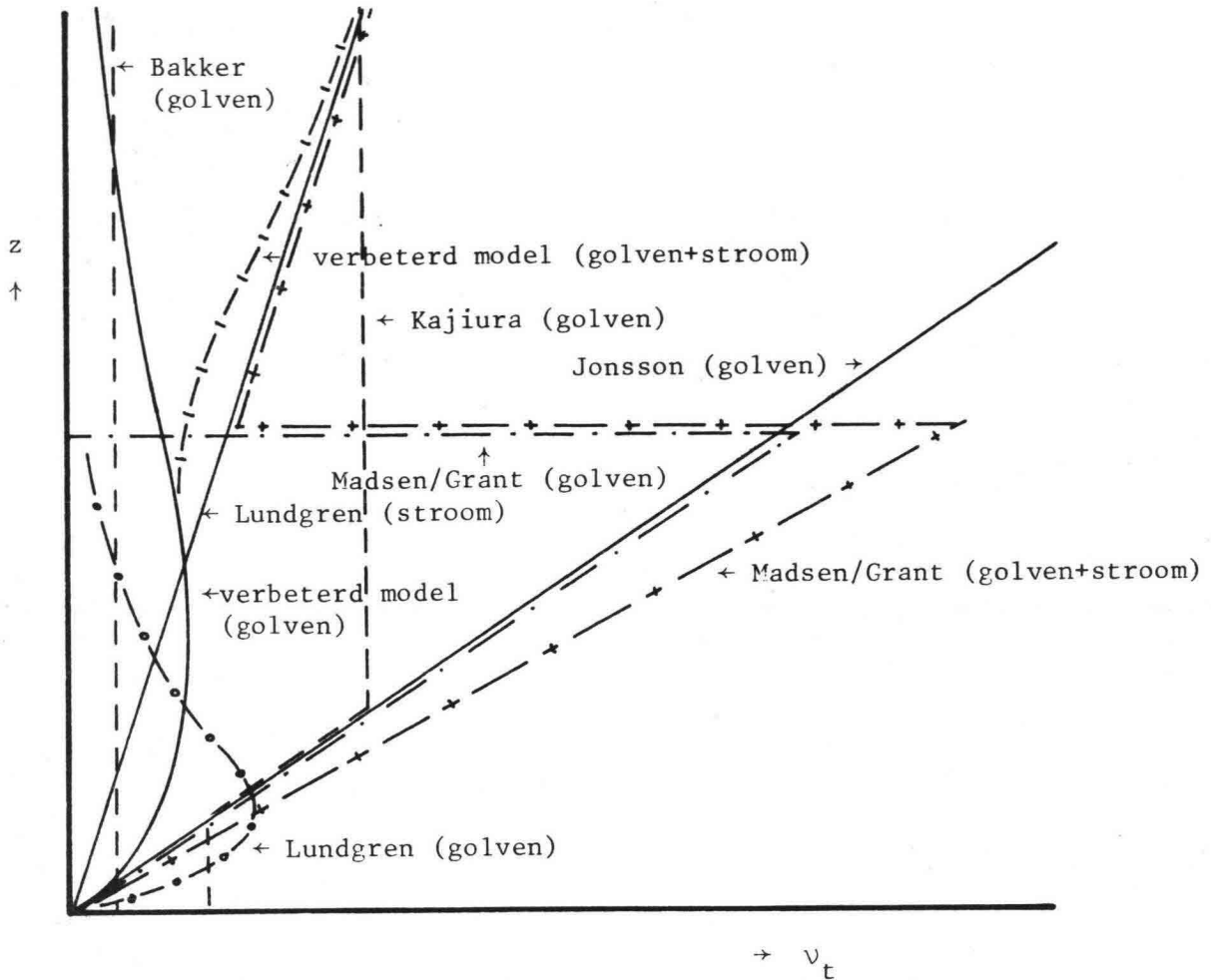
waarin

ν_t = turbulente viscositeit

l_m = mengweglengte

V_t = karakteristieke snelheid van de turbulente beweging

De modellen verschillen in de keuze van l_m en V_t . In figuur 3.4 zijn schematisch (kwalitatief) de verschillende keuzes aangegeven. Uit de figuur blijkt, dat er voor wat betreft de aanname voor de invloed van de golven nogal een variatie in ν_t is. Door het logaritmisch karakter van het snelheidsveld heeft met name de ν_t voor kleine waarden van z invloed op het snelheidsveld. De variatie op grotere hoogte komt dan ook slechts in geringe mate tot uiting in het snelheidsveld.



figuur 3.4.

De verschillen in v_t op grotere hoogte zijn echter wel belangrijk bij het berekenen van een concentratieverdeling, die met name bepaald wordt door de turbulente diffusie. Bij het berekenen van een resulterend suspensietransport van b.v. zand t.g.v. golven, is het nodig een goede keuze van v_t te hebben. De keuze voor v_t , die in dit rapport wordt gepresenteerd, benadert het dichtst de mengweglengte hypothese van Prandtl.

Bij het vergelijken van een snelheidsveld zal, zoals reeds is toegelicht, alleen kwalitatief gekeken worden naar de turbulente viscositeit, het gemiddelde snelheidsprofiel en de wrijvingscoëfficiënt f_w . De turbulente viscositeit is bij het vergelijken van de aannamen reeds besproken. Het gemiddelde snelheidsprofiel, wordt alleen beschouwd in de modellen van Lundgren, Madsen en Grant, Bakker en het in dit rapport gepresenteerde model.

Al die modellen geven aan dat de invloed van de golven op het gemiddelde snelheidsprofiel gezien kan worden als een fictieve vergroting van de bodemruwheid. Als aangenomen wordt, dat het verhang zonder en met golven gelijk blijft, dan bestaat de invloed van de golven uit een verticale verschuiving van het logaritmisch snelheidsprofiel. Dit resulteert in een afname van de gemiddelde afvoer. Omgekeerd bestaat, onder de aanname dat de gemiddelde afvoer constant blijft, de invloed van de golven uit een verhoging van het verhang. Het model van Lundgren gaat er in tegenstelling tot de andere modellen vanuit, dat het verhang zonder en met golven gelijk blijft. In het model van Lundgren komt dan ook niet een parameter voor, die gerelateerd is aan de verhouding tussen de orbitaal-snelheid nabij de bodem (buiten de grenslaag) en het gemiddelde over de hoogte van de tijdsgemiddelde snelheid (vergelijk bijlage 4 met figuur 3 in bijlage 5 en figuur 2 in bijlage 7).

Bij het vergelijken van de wrijvingscoëfficiënt f_w kan geconstateerd worden, dat de eenduidigheid van de definitie f_w te wensen overlaat. Het vergelijken van de verschillende f_w 's is desondanks toch zinvol omdat f_w gezien kan worden als een integrale parameter van het snelheidsveld. De wrijvingscoëfficiënt f_w geeft namelijk de relatie weer tussen een karakteristieke maat voor de schuifspanning aan de bodem en een karakteristieke maat voor de horizontale snelheid buiten de grenslaag. In verband met de eenduidigheid wordt het alleen zinvol geacht de f_w 's volgens de verschillende modellen onderling te vergelijken in geval van alleen golven. Het blijkt, dat bij alle modellen f_w als functie van a/r (a =amplitude orbitaalbeweging bij de bodem; r = Nikuradse ruwheid) bepaald kan worden.

Deze relaties, voor een groot deel ontleend aan [18], zijn weergegeven in bijlage 8. Daaruit blijkt, dat met name bij grote a/r waarden de verschillende modellen niet veel verschillen. Hieraan kan eveneens de conclusie worden verbonden, dat de gedissipeerde energie per tijdseenheid, gemiddeld over de golfperiode, en per eenheid van grondoppervlak in de grenslaag (zie hoofdstuk 7 en bijlage 15) bepaald volgens de verschillende modellen, nagenoeg gelijk zal zijn.

4. Afleiden van de differentiaalvergelijkingen, welke de stroming en transporten in de grenslaag beheersen

4.1. Algemeen

De beweging van een vloeistof binnen bepaalde grenzen t.g.v. uitwendige krachten wordt volledig beschreven met:

$$\text{continuïteit: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \rho u_i \} = 0 \quad (4.1.)$$

bewegingsvergelijking:

$$\rho \frac{Du_j}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} + \rho \Omega_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

waarin $\frac{D}{Dt}$ de operator gedefinieerd door:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.2^a)$$

Hierbij wordt de somconventie aangehouden, d.w.z. wanneer de index i twee maal binnen dezelfde term voorkomt moet worden gesommeerd over $i = 1, 2, 3$.

De gebruikte symbolen zijn als volgt gedefinieerd:

- u_i : snelheidscomponent in de x_i -richting
- p : de druk in de vloeistof
- ρ : massadichtheid van de vloeistof
- Ω_j : component van de versnelling t.g.v. uitwendige krachten
- σ_{ij} : spanningstensor
- σ_{ij} is de spanning in x_j -richting op een oppervlakte-elementje met de normaal in x_i -richting
- t : de tijd
- x_i : plaatscoördinaat in het x_1 - x_2 - x_3 -assenstelsel.

Voor een Newtonse vloeistof, die onsamendrukbaar is, geldt:

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - p \delta_{ij} \quad (4.3.)$$

waarin:

η dynamische viscositeit

δ_{ij} de zgn. Kronecker delta gedefinieerd door:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{ij} = 1 \text{ als } i=j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ als } i \neq j \end{array} \right\} \quad (4.3^a)$$

Dan gaan (4.1.) en (4.2.) over in:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.4.)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \eta \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\} + \Omega_j \quad (4.5.)$$

met ν : kinematische viscositeit van de vloeistof ; $\nu = \eta/\rho$

De samenstelling van een vloeistofelement wordt beschreven met de diffusievergelijking:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{u_i c\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right\} + s \quad (4.6.)$$

waarin: c : grootheid die de samenstelling betreft, per volume eenheid

D : moleculaire diffusie-coëfficiënt

s : restterm, die aangeeft de verandering van een hoeveelheid stof per tijdseenheid en volumeenheid door b.v. een chemische reactie.

Voor beschouwingen betreffende energiedissipatie is het nodig de energiebalans te kennen. Deze luidt algemeen^{*}):

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{u_i \rho e\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ u_j \sigma_{ij} \} \quad (4.7)$$

waarin: e : totale energie per massaeenheid (J/kg)

T : temperatuur (°C)

λ : warmtegeleidingsvermogen ($m^2/s \cdot J/m^3/°C$)

σ_{ij} : volgens (4.3.).

De totale energie e kan worden opgesplitst in interne energie e_{int} en mechanische energie e_{mech} . De balansvergelijking voor e_{mech} volgt uit de bewegingsvergelijkingen, door de vergelijking in x_j -richting te vermenigvuldigen met u_j en daarna te sommeren over $j = 1, 2, 3$.

Toegepast op (4.2) geeft:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{Du_j^2}{Dt} = u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho u_j \Omega_j \quad (4.8a)$$

De mechanische energie kan opgesplitst worden in kinetische energie en potentiële energie. Deze worden in (4.8^a) vertegenwoordigd door resp. de term $\frac{1}{2} \rho \frac{Du_j^2}{Dt}$ en $-\rho u_j \Omega_j$.

Voor de mechanische energie kan dus geschreven worden:

$$\rho \frac{De_{mech}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left\{ \frac{u_j^2}{2} \right\} - \rho u_j \Omega_j = u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \quad (4.8b)$$

^{*}) Energiebronnen als stralingsenergie, inductiewarmte etc. worden buiten beschouwing gelaten.

Aftrekken van (4.8^b), van (4.7) geeft voor e_{int} :

e_{int} :

$$\rho \frac{De_{int}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (4.8^c)$$

Voor een onsamendrukbare Newtonse vloeistof wordt σ_{ij} gegeven door (4.3).

Invullen van (4.3) in (4.8^c) levert:

$$\rho \frac{De_{int}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\} - \rho \nu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} \quad (4.8d)$$

De tweede term in het rechterlid in (4.8^d) vormt de koppeling tussen de mechanische energiebalans en de interne energiebalans.

Deze term geeft de viskeuze vervormingsarbeid neer, die in warmte wordt omgezet en "verloren" is voor de mechanische energie.

In de mechanische energiebalans vormt de term de dissipatieterm.

Indien er sprake is van een turbulent stromingsveld, dan kunnen uit de vergelijkingen (4.4.), (4.5.), (4.6.) en (4.8.) volgens de middellingsprocedure van Reynolds, de vergelijkingen voor de gemiddelde grootheden worden afgeleid. Er resulteert voor een onsamendrukbare

Newtonse vloeistof:

$$\text{Continuïteit: } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.9.)$$

Bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \nu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i' u_j'} + \Omega_j \quad (4.10)$$

Diffusievergelijking:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i' c'} + s \quad (4.11.)$$

Mechanische energievergelijking:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ u_j^2 + \overline{u_j'^2} \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ u_i (u_j^2 + \overline{u_j'^2}) \} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ u_j \overline{u_j' u_i'} + \frac{1}{2} \overline{u_i' u_j'^2} \} = \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ u_i p + \overline{u_i' p'} \} + u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \nu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\} + \\ & + u_j' \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \nu \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \right\} + u_j \Omega_j \end{aligned} \quad (4.12a)$$

* Er is gebruik gemaakt van (4.3).

Hierin zijn u_j , p en c de Reynolds gemiddelde grootheden, d.w.z. gemiddeld over een tijdschaal die groot is t.o.v. die van de turbulente fluctuaties, maar klein t.o.v. die van het totale stroombeeld.

Verder zijn u_j' , p' en c' de turbulente fluctuaties voor resp. u_j , p en c . De overstreping geeft de middeling aan.

Vergelijking(4.12a) kan gesplitst worden in een mechanische energie-vergelijking voor gemiddelde grootheden en een mechanische energie-vergelijking voor de turbulente fluctuatie, ook wel turbulente energie-vergelijking genoemd.

De mechanische energievergelijking voor gemiddelde grootheden volgt eenvoudig uit de bewegingsvergelijking voor gemiddelde grootheden (4.10), door de vergelijking in x_j -richting te vermenigvuldigen met de gemiddelde snelheid u_j in x_j -richting en daarna te sommeren over $j= 1,2,3$.

Er resulteert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_j^2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ u_i \overline{u_j^2} \} &= - \frac{1}{\rho} u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \{ v \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \} \\ &+ u_j \Omega_j - u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \overline{u_i u_j} \} \quad (4.12b) \end{aligned}$$

Het verschil van (4.12a) en (4.12b) levert turbulente energievergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_j'^2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ u_i \overline{u_j'^2} \} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{\rho} \overline{u_i p'} + \frac{1}{2} \overline{u_j'^2} \right\} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\ &+ \overline{u_j' \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ v \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \right\}} \quad (4.12c) \end{aligned}$$

De derde term in het rechterlid van (4.12c) kan als volgt worden opgesplitst:

$$\overline{u_j' \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ v \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \right\}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ v u_j' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \right\} - v \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \quad (4.12d)$$

De eerste term in het rechterlid van (4.12c) geeft weer de secundaire arbeid verricht door de totale turbulente druk. De laatste term geeft weer, de vormveranderingsarbeid door turbulente schuifspanningen en is de produktieterm in de turbulente energiebalans. De tweede term geeft volgens de splitsing in (4.12d) weer resp. de secundaire arbeid verricht door viskeuze schuifspanning in de turbulente beweging en de secundaire viskeuze vormveranderingsarbeid door de turbulentie.

Deze laatste term is de turbulente dissipatie-term in de turbulente energiebalans en geeft evenals de tweede term in het rechterlid van (4.8d) weer de energie, die verloren is in de mechanische energiebalans en omgezet wordt in warmte.

Wordt (4.12c) na substitutie van (4.12d) geïntegreerd over een controlevolume V' met vaste grenzen, dan resulteert de integrale turbulente energievergelijking:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V'} \frac{\overline{u_i'^2}}{2} dV = - \iiint_{V'} \overline{u_j' u_i'} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV - \iiint_{V'} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) dV \quad (4.12^e)$$

Vooruitlopend op de toepassing op stroombeelden bij golven kan uit (4.12e) worden afgeleid, dat onder de aanname van een zuiver periodieke beweging de over de periode gemiddelde gedissipeerde turbulente energie gelijk is aan de gemiddelde waarde van de eerste term in het rechterlid van (4.12e). Het linkerlid is n.l. na middeling gelijk aan nul. De momentane dissipatie is echter niet gelijk aan de eerste term. Om de dissipatie van turbulente energie weer te geven, wordt ingevoerd, de grootheid $P_{t,per}$ gedefinieerd voor een periodieke beweging volgens:

$$P_{t,per} = \frac{\rho}{TV'} \int_T \iiint_{V'} \overline{u_j' u_i'} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV dt \quad (4.12^f)$$

met T de periode

Overeenkomstig kan in het laminaire geval de integrale dissipatie voor een periodieke beweging beschouwd worden. Deze zal worden aangeduid met $P_{1,per}$. Dus:

$$P_{1,per} = \frac{\rho}{TV} \int_T \int_{V'} \nu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dt \quad (4.12g)$$

Voor het tweedimensionale geval kan uit (4.12g) de uitdrukking voor de dissipatie volgens Rayleigh worden afgeleid (zie 5=). Er geldt:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = 2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \quad (4.12h)$$

De laatste term in (4.12h) kan geschreven worden als:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + 4 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (4.12i)$$

De continuïteit (vergelijking (4.9)) levert:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 = 0$$

$$\text{ofwel: } \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 = -2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (4.12j)$$

Invullen van (4.12i) en (4.12j) in (4.12h) levert:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (4.12k)$$

Onder de aanname van een over de periode gemiddelde uniformiteit in x_1 -richting gaat (4.12g) over in:

$$P_{1,per} = \frac{\rho}{TL_2} \int_T \int_{L_2} \nu \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right\} dx_2 dt \quad (4.12l)$$

met L_2 het integratie-interval in x_2 -richting

De uitdrukking van Rayleigh voor de gedissipeerde energie per tijds-eenheid en per eenheid van grondoppervlak, aangegeven met E , komt dan overeen met:

$$E = P_{1,per} L_2 \quad (4.12m)$$

(zie ook hoofdstuk 7).

Daar de interesse uitgaat naar de dissipatie in de grenslaag bij golven zal in het navolgende i.p.v. de mechanische energie vergelijking de dissipatievergelijkingen (4.12f) en (4.12g) beschouwd worden.

4.2. Grenslaag benadering

Een grenslaag wordt gekarakteriseerd door tenminste één dimensie die qua lengte-schaal klein is t.o.v. van de andere dimensie(s). In deze studie wordt de grenslaag in slechts twee dimensies bestudeerd. T.a.v. de derde dimensie wordt uniformiteit in alle van belangrijke grootheden verondersteld.

De beschouwde situatie is schematisch weergegeven in fig. 4.1. Hierin is ook de oriëntatie van het gebruikte assenstelsel aangegeven.

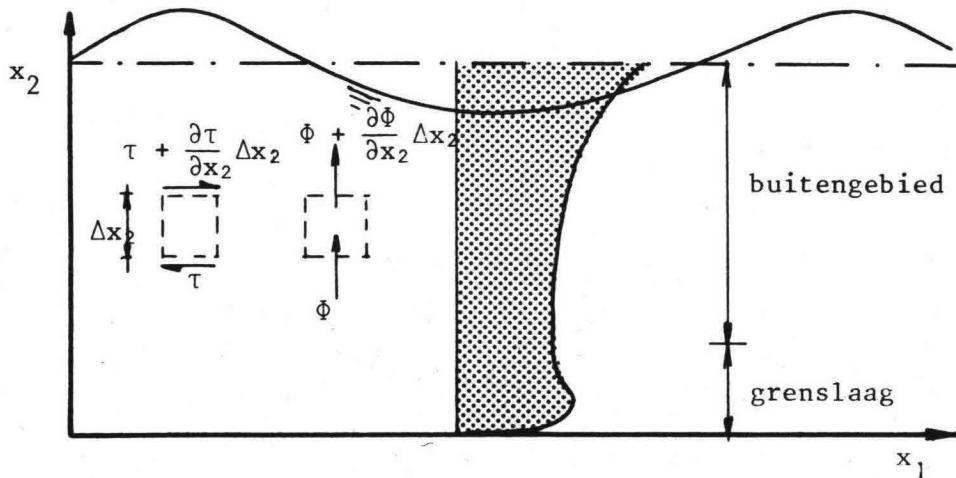


Fig. 4.1.

Indien de verhouding tussen de kleinste en grootste snelheidsschaal ζ wordt genoemd, dan kunnen de vergelijkingen (4.9.) t/, 4.12.) vereenvoudigd worden, door iedere term dimensieloos te maken, waarna termen t.o.v. elkaar worden verwaarloosd als de ene term een factor ζ . of hogere macht van ζ , kleiner is dan de andere term.

Deze procedure is voor het twee-dimensionale geval uitgewerkt in appendix A, en levert bij aanname van x_1 -richting als hoofdstroomrichting (zie fig. 4.1.) het stelsel vergelijkingen:

$$\text{continuïteit: } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.13.)$$

bewegingsvergelijking:

$$\begin{aligned} x_1\text{-richting : } \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right. \\ & \left. - \overline{u_1' u_2'} \right\} + \Omega_1 \end{aligned} \quad (4.14.)$$

x_2 -richting :

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u_2'^2} + \Omega_2 \quad (4.15.)$$

diffusievergelijking:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_1 \frac{\partial c}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial c}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ D \frac{\partial c}{\partial x_2} - \overline{u_2' c'} \right\} + s \quad (4.16.)$$

energiedissipatie:

$$P_{1, \text{per}} = \frac{\rho}{TV'} \int_T \int_{V'} \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2 dt \quad (4.17^a)$$

$$P_{t, \text{per}} = - \frac{\rho}{TV'} \int_T \int_{V'} \overline{u_1' u_2'} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dt \quad (4.17^b)$$

Uit de bewegingsvergelijking in x_2 -richting ((4.15)) kan nog een belangrijke eigenschap van een grenslaag worden afgeleid. Namelijk integratie van (4.15) naar x_2 geeft:

$$p/\rho = - \overline{u_2'^2} + \Omega_2 x_2 + k(x_1) \quad (4.18)$$

waarin:

$k(x_1)$ de integratie constante .

Differentiëren van (4.18.) naar x_1 geeft:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = - \frac{\partial}{\partial x_1} (\overline{u_2'^2}) + \frac{dk}{dx_1} \quad (4.19.)$$

Bij invullen in de bewegingsvergelijking in x_1 -richting (4.14.) kan de eerste term in het rechter lid van (4.19.) volgens de procedure in appendix A t.o.v. de derde term in het rechter lid van (4.14.) worden verwaarloosd. Dus komt $\frac{dk}{dx_1}$ overeen met de drukgradiënt in (4.14.) ofwel (4.19.) wordt:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{dk}{dx_1} \quad (4.20.)$$

Daar k geen functie meer is van x_2 volgt dat de drukgradiënt naar x_1 constant is over de hoogte van de grenslaag en gelijk is aan die in het buiten gebied:

$$\frac{dp_0}{dx_1}$$

4.3. Resulterende vergelijkingen

Het stelsel vergelijkingen, genoemd in par. 4.2. kan verder worden gereduceerd m.b.v. de volgende aannamen:

1. Als uitwendige kracht wordt alleen de zwaartekracht beschouwd (dus geen coriolis-krachten en getij-krachten);
2. Het stromingsveld is momentaan uniform in de hoofdstroomrichting, de x_1 -richting (zie fig. 4.1.); d.w.z. de gradiënten $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ en $\frac{\partial c}{\partial x_1}$ zijn gelijk aan nul;
3. Verwaarlozen van viskeuze schuifspanningen en moleculaire diffusie.

ad 1. De uitwendige versnellingsvector wordt $\underline{\Omega} = (0, -g, 0)$ met de keuze van het assenstelsel als in fig. 4.1.

ad 2. Volgens de continuïteitsvergelijking (4.13.) komt de aanname:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{overeen met:} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0.$$

Voor u_2 volgt dan na integratie met als randvoorwaarde op de wand: $u_2(x_1, 0) = 0$

dat overal u_2 gelijk aan nul is.

Omgekeerd geldt hetzelfde, zodat de aannamen $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$ en $u_2 = 0$ identiek zijn.

In de vergelijkingen (4.14.) t/m (4.17.) vallen dan alle convectieve termen weg.

Van de vergelijkingen (4.13.) t/m (4.17.) blijft dan over:

Bewegingsvergelijking:

$$x_1\text{-richting} : \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{u'_1 u'_2}) \quad (4.21.)$$

$$x_2\text{-richting} : 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{(\overline{u'_1})^2}{2} - g \quad (4.22.)$$

Diffusievergelijking:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{u'_2 c'}) + s \quad (4.23.)$$

Energiedissipatie:

$$P_{t,per} = -\frac{\rho}{TV'} \int_T \int_{V'} \overline{u'_1 u'_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 dt \quad (4.24.)$$

In deze studie staat centraal het snelheidsveld, en niet het turbulente drukveld, zodat vergelijking (4.22.) in het navolgende buiten beschouwing gelaten zal worden.

De turbulente grootheden $\overline{u'_1 u'_2}$ en $\overline{u'_2 c'}$ kunnen worden gedefinieerd als resp.:

$$\text{- turbulente schuifspanning} \quad : \quad \tau = -\rho \overline{u'_1 u'_2} \quad (4.25.)$$

$$\text{- turbulente materiestroomdichtheid:} \quad \Phi = +\overline{u'_2 c'} \quad (4.26.)$$

(voor de oriëntatie van τ en Φ wordt verwezen naar fig. 4.1.).

De grootheden τ en Φ worden bepaald door het snelheidsveld. De hiervoor benodigde extra relaties - sluitingsrelaties genoemd - zullen in hoofdstuk 5 beschreven worden.

Zoals uit de inleiding blijkt gaat de interesse alleen uit naar de concentratie van zand als de aan een vloeistofelementje toegevoegde eigenschap, zodat de diffusievergelijking betrekking heeft op vaste deeltjes van dusdanige afmetingen, dat moleculaire krachten te verwaarlozen zijn t.o.v. de zwaartekracht. Dan kan voor de bezinkterm geschreven worden:

$$s = \frac{\partial}{\partial x_2} \{wc\}$$

met w de valsnelheid van het korrelmateriaal, positief gedefinieerd in negatieve x_2 -richting (zie fig. 4.1.)

In het algemeen is w een functie van de korreldiameter, dichtheid en concentratie.

De vergelijkingen waarmee in de volgende hoofdstukken gewerkt zal worden zijn dan:

Bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp_o}{dx_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \quad (4.27.)$$

Diffusievergelijking:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_2} \{-\phi + wc\} \quad (4.28.)$$

Energiedissipatie:

$$P_{t,per} = \frac{1}{TV'} \int_T \int_{V'} \tau \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 dt \quad *) \quad (4.29.)$$

Voor nadere informatie omtrent de in dit hoofdstuk gepresenteerde afleidingen en vergelijkingen wordt verwezen naar Hinze =6= .

*) Vergelijking (4.29) is ook geldig voor het laminaire geval, zijhet dat voor τ ingevuld moet worden σ_{12} met σ_{12} volgens (4.3) :

$$\sigma_{12} = \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Er resulteert dan (4.17^a).

5. Sluitingsrelatie bij turbulent oscillerende stromen

5.1. Algemeen

Om de turbulente schuifspanningen te koppelen aan de gemiddelde grootheden betreffende het snelheidsveld zijn de afgelopen tientallen jaren diverse modellen ontwikkeld. Deze modellen geven extra vergelijkingen naast de continuïteits- en bewegingsvergelijking zodat het totaal aantal van onbekende grootheden theoretisch op de rand- en beginvoorwaarden na kunnen worden bepaald.

Het meest eenvoudige model is dat van Prandtl (1925) (zie =19-), dat overeenkomstig de kinematische viscositeit, een turbulente viscositeit - een scalaire grootheid - introduceert. Daardoor wordt slechts één algebraïsche vergelijking aan het stelsel toegevoegd. Het andere uiterste is het model van Kolavandin (1969) (zie =16-), dat minimaal 20 extra differentiaal vergelijkingen aan het stelsel toevoegt. De fysische betekenis is daarbij sterk vervaagd.

Vrijwel alle modellen worden toegepast met de aanname van een stationair (of quasistationaire) stromingsveld met volledig ontwikkelde turbulentie.

Bij oscillerende waterbeweging zal in het algemeen de turbulentie zich niet volledig kunnen ontwikkelen, doordat de tijdsafhankelijke turbulente schuifspanningen eveneens tijdsafhankelijke macro-bewegingen (grotere wervels in orde van grootte van de grenslaagdikte) veroorzaken, waarvan de kinetische energie niet gelijktijdig gedissipeerd kan worden door kleinere wervels. Namelijk de dissipatie van de kinetische energie van de grotere wervels vindt plaats door het uiteenvalen van de grotere wervels in kleinere wervels, waarvan de kinetische energie tenslotte door visceuze spanningen wordt omgezet in warmte. Het opsplitsen in kleinere wervels is een gevolg van een niet-lineair mechanisme en maakt dat turbulentie een sterk dempend niet-lineair systeem is (zie Tennekes en Lumley =25=)*). Doordat aldus de productie van turbulentie (de macro bewegingen) en de dissipatie van turbulentie momentaan niet in evenwicht zijn, kan de turbulentie zich niet volledig ontwikkelen.

*) Hiermee hangt samen een bijzondere eigenschap van turbulentie, namelijk dat bijna alle energie geassocieerd is met de macro-turbulente bewegingen (grotere wervels), terwijl de meeste vorticititeit geassocieerd is met de micro-turbulente bewegingen (kleinste wervels).

Naarmate de periode van de oscillerende beweging groter wordt kan de turbulentie zich meer en meer ontwikkelen.

De turbulente grenslaag bij golven en stroom is niet meer als stationair of quasi stationair te beschouwen, en ook niet als volledig turbulent ontwikkeld.

Om toch een dergelijke grenslaag te beschrijven, zal nagegaan moeten worden in hoeverre bestaande turbulentie-modellen zouden kunnen worden toegepast. Daartoe zullen in de volgende paragrafen een tweetal modellen beschouwd worden, te weten het bekende mengweglengte model van Prandtl en het zgn. $k-\epsilon$ -model. Bij beide wordt uitgegaan van de tweedimensionale grenslaag met hoofdstroomrichting de x_1 -richting, zoals in fig. 4.1. schematisch is aangegeven.

5.2. Bestaande turbulentiemodellen

De tot nu toe meest gebruikte relatie tussen de schuifspanning τ en het snelheidsveld is analoog aan de relatie tussen de viskeuze schuifspanning en de snelheidsgradiënt $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$:

$$\tau = \rho \nu_t \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (5.1^a)$$

waarin ν_t = turbulente viscositeit.

Het turbulent viscositeits concept, afkomstig van Boussinesq, kan in algemene vorm geschreven worden als:

$$(\sigma_{ij})_{\text{turb}} = -\rho \overline{u_i' u_j'} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.1^b)$$

Dit concept kan worden uitgebreid door voor ν_t geen scalaire grootheid te nemen, maar b.v. een 2^e of 4^e orde tensor. In praktische gevallen reduceren deze weer tot een scalaire grootheid (zie Hinze =7=).

In (5.1^b) schuilt nog een probleem. Als namelijk $i = j$ moet i.v.m. de continuïteit voor een onsamendrukbaar medium ν_t oneindig groot worden. Om dit te ondervangen kan apart een turbulente druk p_{turb} ingevoerd worden. Er volgt dan voor $-\rho \overline{u_i' u_j'}$:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = -p_{\text{turb}} \cdot \delta_{ij} + \rho \nu_t^* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (*) \quad (5.1^c)$$

*) Vergelijk σ_{ij} volgens (4.3)

waarin δ_{ij} een tweede orde tensor (Kronecker delta) met de eigenschappen: $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$
 $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$

$$\text{en } p_{\text{turb}} = \frac{1}{3} \rho \overline{u_i^2}$$

Verder is dan v_t^* gelijk aan v_t alleen heeft deze nu geen betekenis als $i = j$.

De analogie tussen turbulente viscositeit en de kinematische viscositeit gaat nog verder. Volgens de kinetische gastheorie geldt voor de kinematische viscositeit:

$$\nu \approx \frac{1}{3} l_{vw} \cdot V_{\text{mol}} \quad (5.2.)$$

Hierin is l_{vw} de gemiddelde vrije weglengte van de moleculen en V_{mol} de gemiddelde snelheid van de moleculen (voor ideaal gas geldt $V_{\text{mol}} = \sqrt{3 k T/m}$, waarin k de constante van Boltzman, T temperatuur is (graden Kelvin, en m de massa van één gasmolecuul).

In de praktijk wordt de vrije weglengte berekend uit de gemeten viscositeit.

Prandtl veronderstelt in =20= een analoog verband voor de turbulente viscositeit v_t^* .)

$$v_t = l_m \cdot V_t \quad (5.3.)$$

waarin l_m = mengweglengte

V_t = karakteristieke snelheid van de turbulente bewegingen.

Vrijwel alle mathematische turbulentie modellen, die gebruik maken van een scalaire turbulente viscositeit bevatten deze analogie, zij het dat de mengweglengte l_m , vervangen wordt door een meer algemene lengteschaal l van de turbulente bewegingen.

De modellen verschillen van elkaar door verschil in definitie en berekening van l en V_t . In de paragrafen 5.3. en 5.4. zullen resp. het meng-

*) Opm.: Een groot verschil tussen de kinematische en de turbulente viscositeit is, dat de eerste een eigenschap is van de vloeistof of gas, terwijl de tweede een eigenschap is van het stromingsveld.

weglengthtemodel van Prandtl en het zgn. k - ϵ -model behandeld worden. Naast het turbulent viscositeitsconcept voor de turbulente schuifspanning kunnen nog twee andere modellen onderscheiden worden (voor twee-dimensionale stroming met één hoofdstroomrichting):

$$\tau \sim \rho k \quad (5.4.)$$

en

$$\frac{D\tau}{Dt} = \text{produktie} + \text{diffusie} + \text{herverdeling} + \text{dissipatie} \quad (5.5.)$$

Het eerste model (5.4.) is gebruikt door Bradshaw (zie =17=) en geeft aan dat de turbulente schuifspanning evenredig is met de gemiddelde turbulente kinetische energie k gedefinieerd als

$$k \equiv \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) \quad (5.6.)$$

waarin u_i' de snelheidsfluctuatie in x_i -richting. (De overstreping duidt de middeling aan).

In dit model wordt a.h.w. dezelfde generalisatie toegepast als in (5.1^b) bij het turbulent viscositeitsconcept. Daarin wordt de gehele turbulente spanningstensor gerelateerd aan het stromingsveld via de turbulente viscositeit. Doch het blijkt nodig een deel te schrijven als een turbulente druk welke vergeleken kan worden met (5.6.). Er geldt:

$$p_{\text{turb}} = \frac{2}{3} \rho k$$

Het model (5.4.) kan dan beschouwd worden als het andere uiterste van (5.1^c), waarbij niet een deel van de turbulente spanningstensor aan de turbulente druk wordt gekoppeld, maar de gehele tensor. Voor gemiddelde turbulente kinetische energie k kan een transportvergelijking worden afgeleid uit de algemene Navier Stokes vergelijkingen (vergelijking (4.2.)), door de bewegingsvergelijking in x_i -richting te vermenigvuldigen met u_i' en daarna Reynolds te middelen.

De transport vergelijking van k volgt dan uit sommatie over de x_1' , x_2' en x_3' -richting. Het model voegt slechts één differentiaalvergelijking extra toe, waarin nog de onbekende l , een lengtemaat voor de turbulente bewegingen, algebraïsch bepaald moet worden.

Het model is helaas niet bruikbaar in de buurt van een wand. Bovendien mogen geen maxima in de snelheidsverdeling optreden (zie =16=).

Het tweede model geeft een transportvergelijking voor de schuifspanning. Voor een twee-dimensionale grenslaag volgt deze uit de Navier-Stokes vergelijkingen op dezelfde wijze als hierboven beschreven voor k , alleen nu moet de bewegingsvergelijking in x_1 -richting met u_2 en de x_2 -richting met u_1 vermenigvuldigd worden. De meebewegende afgeleide van τ is dan gelijk aan de som van een produktie-, diffusie-, herverdeling- en een dissipatieterm.

Voor hoge Reynoldsgetallen in de grenslaag kan de laatste term worden verwaarloosd. Dit model is o.a. toegepast door Rotta, Hanjalić, Chou (zie =16=). Het minimaal aantal extra differentiaalvergelijkingen is daarbij 3, zodat dit model voor oscillerende stromen voorlopig niet kan worden aanbevolen. Bovendien is het erg moeilijk de termen in de transportvergelijking fysisch verklaarbaar te beschrijven.

5.3. Mengweglengte model van Prandtl

Het eerste deel van de hypothese van Prandtl is reeds in paragraaf 5.2. gegeven met de vergelijkingen (5.1.) en (5.3.), ofwel samen gevoegd:

$$\frac{\tau/\rho}{\partial u_1/\partial x_2} \equiv v_t = l_m \cdot V_t \quad (5.7.)$$

Het tweede deel van de hypothese betreft V_t . Uitgaande van de veronderstelling, dat de snelheidsfluctuaties in x_1 en x_2 -richting van de orde van grootte zijn van een karakteristieke lengtemaat van de turbulente beweging vermenigvuldigd met de gemiddelde snelheidsgradiënt $\partial u_1/\partial x_2$ definieert Prandtl:

$$V_t \equiv l_m \cdot \left| \partial u_1/\partial x_2 \right| \quad (5.8.)$$

Vergelijking (5.7.) en (5.8.) geven samen het Prandtl mengweglengte model:

$$\tau/\rho = l_m^2 \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (5.9.)$$

De keuze voor l_m blijft in principe open.

Prandtl veronderstelt dat l_m evenredig is met de locale afmetingen van het turbulentie gebied. Zo kiest hij l_m bij wandturbulentie, evenredig met de afstand tot de wand.

Een theoretische afleiding van l_m wordt gegeven door von Karman (=10=) op basis van gelijkvormigheid in het stromingsbeeld. Deze gelijkvormigheidshypothese levert dezelfde turbulente viscositeit op als Prandtl definieert:

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right| \quad (5.10.)$$

maar levert bovendien:

$$l_m \sim \left| \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}} \right| \quad (5.11.)$$

met als evenredigheidsconstante de constante van von Karman: κ . Uit (5.11.) blijkt onmiddellijk dat de gelijkvormigheidshypothese alleen toegepast kan worden als er geen buigpunten in het snelheidsprofiel zijn. Deze buigpunten zijn b.v. aanwezig in een zogstroming, maar ook in een oscillerende grenslaagstroming.

Bovendien blijkt de methode van Von Karman alleen dicht bij een wand redelijke resultaten te geven vergeleken met metingen (zie =16=). Toepassen van een logaritmisch snelheidsprofiel in de grenslaag op (5.11.) levert:

$$l_m = \kappa x_2 \quad (5.12.)$$

Deze keuze voor l_m wordt bij wand-grenslaagberekningen veelvuldig gedaan. De keuze (5.12.) toegepast op het Prandtl-model (5.9.) betekent bij een logaritmisch snelheidsprofiel in de grenslaag bij een wand, dat de schuifspanning constant is in x_2 -richting.

Dit is meestal niet het geval (b.v. uniforme stroom in een kanaal), zodat volgens het Prandtl-model een andere keuze van l_m nodig is. Het Prandtl-model (5.9.) is in principe bedoeld voor stationair, volledig ontwikkelde turbulente grenslagen, en zou daarvoor dus ook gebruikt kunnen worden, doch er zijn twee essentiële nadelen:

1^e: Volgens de 2^e hypothese van Prandtl (5.8.) wordt de karakteristieke turbulente snelheid v_t gelijk aan nul als $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ gelijk aan nul wordt, (l_m wordt eindelijk verondersteld)

2^e: De definitie van V_t volgens de 2^e hypothese van Prandtl geeft alleen een relatie met het lokale snelheidsveld en de lokale afmetingen van het turbulentiegebied.

ad 1. De invloed hiervan op een aldus berekend snelheidsprofiel is niet zo groot, omdat de schuifspanningen, waarvan de gradiënten naar x_2 in de bewegingsvergelijking (b.v. (4.27.)) tenslotte de versnellingen kunnen veroorzaken, door de eerste hypothese (5.7.) al gelijk aan nul zijn als $\partial u_1 / \partial x_2$ gelijk aan nul is. Dit is getracht in fig. 5.1. duidelijk te maken.

De invloed op de turbulente transporten van warmte en materie in x_2 -richting is wel erg groot. Deze worden namelijk eveneens bepaald door V_t en worden dus gelijk aan nul als $\partial u_1 / \partial x_2$ gelijk aan nul wordt. Dit stemt niet overeen met gemeten transporten, zodat eigenlijk sprake zou moeten zijn van een soort brug (fig. 5.1.). Het genoemde nadeel zal bij oscillerende grenslaagstromingen met name van belang zijn voor de concentratieverdeling van b.v. zand.

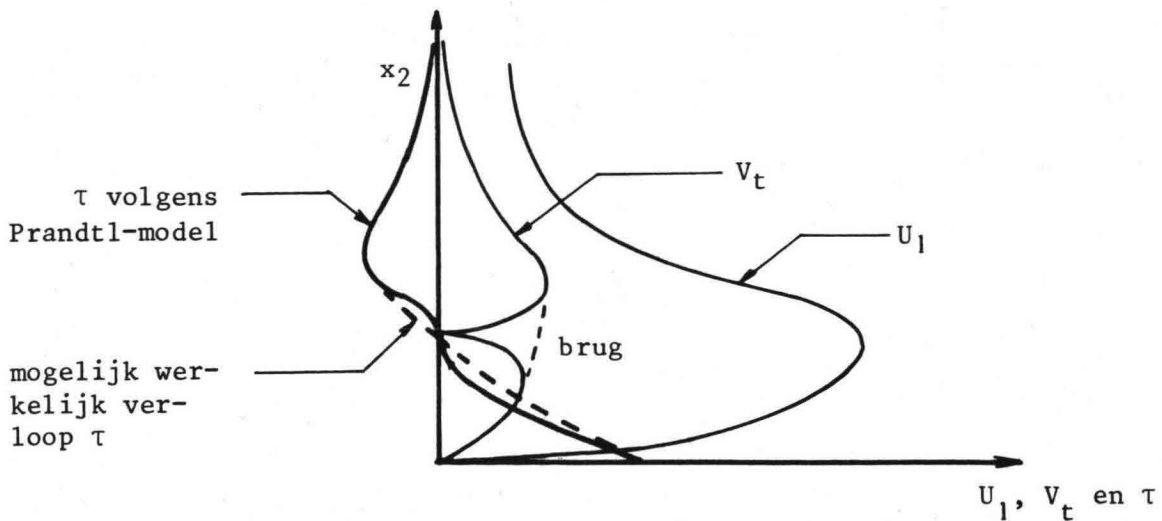


Fig. 5.1.

ad 2. Het nadeel van het uitsluiten van niet-locale invloeden op het verband tussen de turbulente schuifspanning en het snelheidsveld kan duidelijk gemaakt worden aan de hand van een stationaire stroom over een drempel (zie fig. 5.2.).

Daar waar de hoofdstroom de wand weer gaat volgen zijn de snelheidsgradiënten $\partial u_1 / \partial x_2$ klein. Dit volgt eenvoudig door de horizontale snelheden langs een lijn A-B (zie fig. 5.2.) te beschouwen. In A zijn de horizontale snelheden bij de wand negatief, en in B positief, zodat in het omcirkelde gebied de horizontale snelheden in de buurt van de wand klein zijn.

Omdat op de wand de snelheden gelijk zijn aan nul zal in de buurt van de wand de snelheidsgradiënt over het traject A-B ook van teken wisselen. Het omcirkelde gebied is dan ook een gebied met kleine snelheidsgradiënten.

Metingen van turbulente transporten van warmte etc. wijzen op aanwezigheid van een eindige afmeting van de turbulente bewegingen (wervels) en turbulente kinetische energie.

Deze kunnen alleen afkomstig zijn van de hoek van de drempel bij punt C. Er is dus sprake van transport van turbulente grootheden, zoals de afmetingen van de turbulente bewegingen en turbulente kinetische energie, langs een stroomlijn. Bij de beschrijving van de relatie tussen turbulente schuifspanningen en het snelheidsveld zal in stroomgebieden zoals in fig. 5.2. rekening gehouden moeten worden met de genoemde transporten. Dit is het geval bij het in de volgende paragraaf behandelde k - ϵ -model.

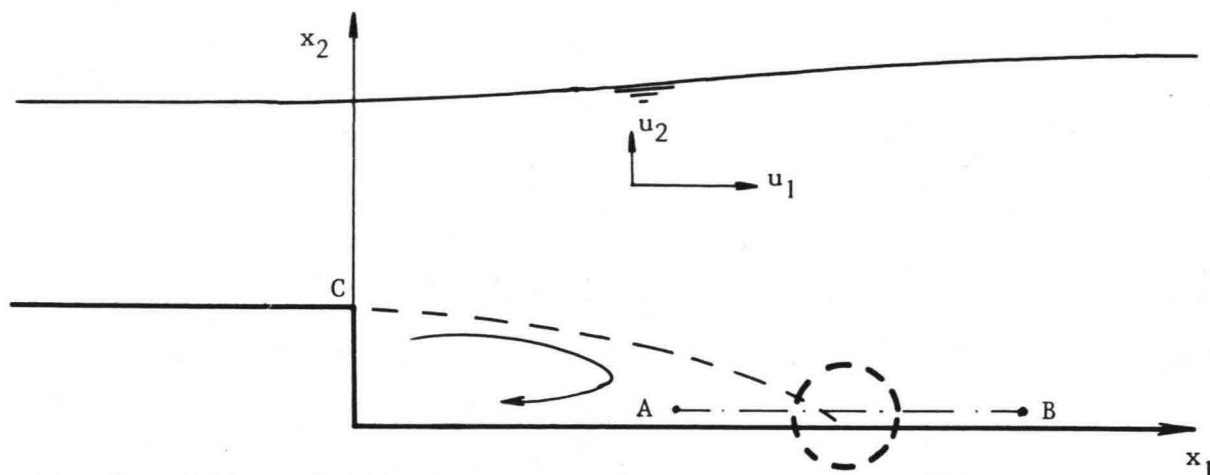


Fig. 5.2.

Voor toepassing van het Prandtl-model (5.9.) op oscillerende grenslaagstromingen is met name het tweede nadeel van invloed. Dit hangt samen met de in paragraaf 5.1. genoemde faseverschuiving tussen productie en dissipatie van turbulentie. Desondanks zal in hoofdstuk 6, gezien de eenvoud, het Prandtl-model worden toegepast op een oscillerende grenslaag. Naast analytische beschouwingen zullen de resultaten worden vergeleken met een numerieke berekening en met metingen in deel II. Om de afwijkingen t.o.v. de metingen in een vervolgstudie nader te onderzoeken, wordt in de volgende paragraaf een turbulent model behandeld dat de nadelen van het Prandtl-model kan ondervangen.

5.4. Het k - ϵ -model

Om de nadelen van het mengweglengte-model te ondervangen veronderstelden Prandtl en Kolmogorov (zie Launder en Spalding =16=) voor de karakteristieke turbulente snelheid:

$$v_t \sim k^{1/2} \quad (5.13.)$$

met k de gemiddelde turbulente kinetische energie gedefinieerd volgens:

$$k \equiv \frac{1}{2} \overline{(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2)} \quad (5.14.)$$

Voor de zgn. twee vergelijkingen modellen waartoe het k-ε-model behoort, wordt uitgegaan van (5.13.) samen met de 1^e hypothese van Prandtl (5.7.):

$$\nu_t = k^{1/2} \cdot l \cdot C_D \quad (5.15.)$$

met C_D een nader te bepalen constante.

Vergelijking (5.15.) wordt wel de Prandtl-Kolmogorov vergelijking voor ν_t genoemd. In de relatie tussen de turbulente schuifspanning en het snelheidsveld zijn k en l nog twee onbekenden. Om de onvolkomenheden van het mengweglengte-model te ondervangen moeten twee extra transportvergelijkingen gevonden worden, welke k en l bepalen. De naam 'twee vergelijkingen-model' duidt dit reeds aan. In het algemeen wordt een transportvergelijking voor k (zoals reeds in paragraaf 5.2. genoemd) en voor een nader te definiëren variabele z bepaald:

$$z \equiv k^m l^n \quad (5.16.)$$

De machten m en n hangen af van het te kiezen twee vergelijkingen-model.

De variabelen k en z volgen beide uit de Navier-Stoker vergelijkingen (4.5.) door hiermee zodanig te manipuleren dat in het linkerlid resp. $\frac{Dk}{Dt}$ en $\frac{Dz}{Dt}$ verschijnt na Reynoldse middeling.

Het rechterlid zal een diffusie, produktie en dissipatieterm bevatten. Gebruik makend van het turbulente viscositeitsconcept en dissipatie die bij grote Reynoldsgetallen bepaald worden door het niet-lineaire mechanisme, dat grote wervels doet vervallen tot kleinere (zoals in paragraaf 5.1. reeds genoemd) volgt er voor $\frac{Dk}{Dt}$ en $\frac{Dz}{Dt}$, (zie =16=):

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_2} \right\} + k \left(\frac{\nu_t}{k} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 - C_D \frac{k}{\nu_t} \right) \quad (5.17.)$$

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{\nu_t}{\sigma_z} \frac{\partial z}{\partial x_2} \right\} + z \left(C_1 \frac{\nu_t}{k} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 - C_2 \frac{k}{\nu_t} \right) + S_z \quad (5.18.)$$

waarin: σ_k = effectieve Prandtl nummer voor de diffusie van turbulente energie

σ_z = idem voor z

C_D = constante voor de mate van dissipatie

$C_2 = \text{idem voor } z$

$C_1 = \text{constante voor de produktie m.b.t. } z$

$S_z = \text{secundaire invloeden die } z \text{ langs een stroomlijn kunnen doen veranderen.}$

Voor stationaire grenslaag stromen bij hoge Reynoldsgetallen vinden Launder en Spalding (=16=) na een optimalisatie van de constanten voor diverse grenslaagstromen dat het zgn. k - ϵ -model, het minst aantal termen bevattend, het beste kan worden toegepast. Hierin is ϵ gedefinieerd als de dissipatiegraad van turbulente mechanische energie:

$$\epsilon \approx k^{3/2} l^{-1} \quad (5.19.)$$

Deze definitie is consistent met de dissipatie welke volgt uit dimensie analyse bij homogene isotrope turbulentie.

De keuze van m en n in (5.16.) zijn dus resp. $\frac{3}{2}$ en -1 .

Voor de constanten σ_k , σ_ϵ , C_D , C_1 , C_2 en S_ϵ wordt gevonden:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k &= 1.0 \\ \sigma_\epsilon &= 1.3 \\ C_D &= 0.09 \\ C_1 &= 1.45 \\ C_2 &= 0.18 \\ S_\epsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.20.)$$

M.b.v. de vergelijkingen (5.15.) en (5.19.) kunnen de vergelijkingen (5.17.) en (5.18.) geschreven worden als:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_2} \right\} + v_t \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 - \epsilon \quad (5.21.)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} \right\} + C_1 v_t \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 - C_2 / C_D \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5.22.)$$

De schuifspanning wordt berekend met:

$$\tau / \rho = v_t \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = C_D \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (5.23.)$$

Een toepassing van een dergelijk model bij lange getijgolven in een estuarium is door Smith en Takhar =23= uitgevoerd. Zij komen tot de conclusie dat vergelijking (5.17.) alleen met 1 volgens een bekende functie van x_2 , - een zgn. één vergelijking-model -, reeds goede resultaten oplevert.

Verder wordt geconcludeerd dat de invloed van de constanten σ_k en C_D slechts marginaal zijn, doch een uitspraak hoe de constanten het beste kunnen worden gekozen wordt niet gedaan. Voor de constante C_1 , C_2 en σ_ϵ worden de waarden aangenomen, zoals in (5.20.), doch over mogelijke invloeden op de oplossing wordt niet gesproken. Voor invoeren van de randvoorwaarden bij de bodem is gebruik gemaakt van wandwetten, zoals bij een stationaire stroming.

De toepassing van het k - ϵ -model volgens vergelijking (5.21.) en (5.22.) voor de grenslaag onder golven is echter geheel onbekend. Een nadere studie zou moeten uitwijzen hoe het k - ϵ -model en met welke randvoorwaarden zonder gebruik van wandwetten zinvol kan worden toegepast. Daarbij is het dan de vraag of de constanten voor de oscillerende grenslaag onder golven eenduidig kunnen worden vastgelegd, zodat er geen sprake zal zijn van 'curve fitting'.

6 Toepassen van het Mengweglengte-model

6.1. Beschrijving van het model van Bakker

6.1.1. Inleiding

Overeenkomstig de modellen genoemd in hoofdstuk 3 maakt Bakker in =2= en =3= gebruik van het turbulente viscositeitsconcept. Doch in plaats van de turbulente viscositeit te kiezen als een arbitraire tijdonafhankelijke functie van de afstand tot aan de bodem, voert Bakker een meer algemeen turbulentiemodel in, namelijk het mengweglengte-model van Prandtl. Alhoewel aan het gebruik van dit model enige nadelen zijn verbonden - zie vorige hoofdstuk - maakt het model 'eenvoudig' een meer algemene berekening van de grenslaag onder golven en stroom mogelijk. Met het laatste wordt bedoeld dat niet a-priori van bepaalde wandwetten wordt uitgegaan (verbanden tussen bodemschuifspanning en snelheid op grote hoogte boven de bodem, waarin nog nader te bepalen wrijvingscoëfficiënten voorkomen), maar dat juist door uit te gaan van een locale relatie tussen schuifspanning en het snelheidsveld^{*}), eventuele wandwetten kunnen worden vastgelegd.

Voor een analytische aanpak blijkt het nodig vereenvoudigingen aan te brengen, maar nu door linealiseren van het verkregen stelsel vergelijkingen bij toepassen van het mengweglengte-model.

De oplossingsmethode van Bakker beperkt zich tot de situatie, waarin stroomrichting en golfvoortplantingsrichting gelijk zijn, en waarin een horizontale bodem en een volledig turbulente grenslaag aanwezig zijn. De bewegingsvergelijking in de grenslaag wordt m.b.v. de grenslaagbenadering:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (6.1.)$$

(zie vergelijking (4.27.).

Hierin zijn de plaatscoördinaten x_1 en x_2 in (4.27.) vervangen door resp. x en z en u_1 door u .

^{*}) Bij toepassen van het mengweglengte-model.

Deze notatie wordt door Bakker gebruikt. Bakker komt in =2= tot de vergelijking (6.1.) door uit te gaan van een balans-vergelijking voor wervelsterkte, welke uit de algemene Navier-Stokes vergelijkingen kan worden afgeleid (zie (4.5.)).

De randvoorwaarden zijn:

$$\left. \begin{array}{l} z = z_{\max} : u = U \quad ; \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \quad (a) \\ z = z_0 : u = 0 \quad ; \quad \tau = \tau_b \quad (b) \end{array} \right\} \quad (6.2.)$$

Hierin is: U = de horizontale snelheid op $z = z_{\max}$
(b.v. volgend uit potentiaaltheorie)

τ_b = bodemschuifspanning

z_{\max} = hoogte, waarover sprake is van grenslaag ontwikkeling

z_0 = hoogte, waarop bij een ruwe bodem en turbulente grenslaag de snelheid gelijk aan nul wordt genomen

Bakker neemt voor z_0 :

$$z_0 = r/33$$

met r de Nikuradse ruwheid.

Uit (6.2.) volgt, dat aangenomen wordt, dat buiten de grenslaag de waterbeweging t.g.v. golven wervelvrij is, maar dat er wel een over de periode gemiddelde wervelsterkte kan bestaan, namelijk die wervelsterkte die samenhangt met een resulterende stroom.

De extra relatie m.b.v. mengweglengtehypothese (zie (5.9.)) met de mengweglengte nabij een wand volgens Prandtl:

$$l_m = \kappa z \quad (6.3.)$$

wordt:

$$\tau = \rho \kappa^2 z^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6.4.)$$

Voor de eenvoud voert Bakker de schuifspanningssnelheid p in, gedefinieerd volgens:

$$p = \kappa z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6.5.)$$

Vergelijking (6.4.) kan dus geschreven worden als:

$$\tau = \rho p |p| \quad (6.6.)$$

In het buitengebied is $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$, ofwel de schuifspanning τ is gelijk aan de over de golfperiode gemiddelde schuifspanning $\bar{\tau}$. Volgens (6.4.) volgt er dan voor de snelheidsgradiënt $\frac{\partial u}{\partial z}$, dat deze gelijk is aan de over de golfperiode gemiddelde snelheidsgradiënt $\frac{d\bar{u}}{dz}$. Vergelijking (6.4.) levert dan enkel een logaritmisch snelheidsprofiel in het buitengebied op als aangenomen wordt dat:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dz} = 0 \quad (6.7.)$$

Uit (6.1.) volgt, dat de over de golfperiode gemiddelde drukgradiënt in de grenslaag en daarbuiten, $\frac{dp_0}{dx}$, gelijk is aan $\frac{d\bar{\tau}}{dz}$. Uit (6.7.) volgt dan, dat beide gradiënten gelijk zijn aan nul, ofwel er is geen aandrijvende drukgradiënt voor de resulterende stroom. In principe wordt het onderste deel van het werkelijke gemiddelde schuifspanningsverloop over de hoogte (zie fig. 6.1.) benaderd met een constante waarde. Verder bepaalt volgens (6.1.) de gemiddelde drukgradiënt in het buitengebied het gemiddeld schuifspanningsverloop.

Invoeren van de randvoorwaarde (6.2.) in (6.1.) en de aanname (6.7.) levert de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial(u-U)}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (6.8.)$$

Door invoeren van de zogenaamde defect-snelheid u_d gedefinieerd volgens:

$$u_d = u - U \quad (6.9.)$$

volgt voor het stelsel vergelijkingen dat moet worden opgelost:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_d}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} & (a) \\
 \tau &= \rho p |p| & (b) \\
 p &= \kappa z \frac{\partial u_d}{\partial z} & (c)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{\partial u_d}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \\ \tau &= \rho p |p| \\ p &= \kappa z \frac{\partial u_d}{\partial z} \end{aligned}} \right\} (6.10.)$$

met de randvoorwaarden:

$$\begin{aligned}
 z = z_{\max} & \quad u_d = 0 \\
 z = z_0 & \quad u_d = -U
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} z = z_{\max} & \quad u_d = 0 \\ z = z_0 & \quad u_d = -U \end{aligned}} \right\} (6.11)$$

Bij gegeven U als functie van de tijd volgt er uit (6.10.) en (6.11.) eenduidig een oplossing.

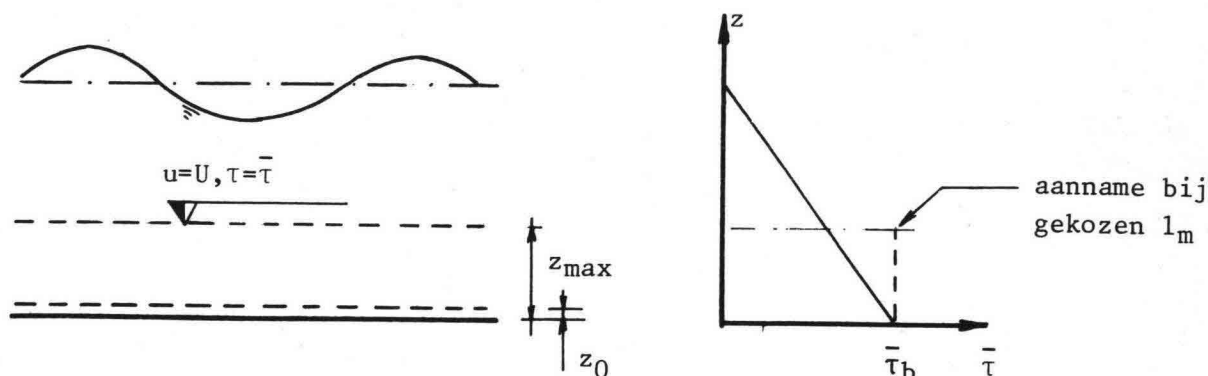


Fig. 6.1.

Het stelsel (6.10.) is niet lineair. Voor een analytische berekening zal (6.10.) gelineariseerd moeten worden.

Bakker beschouwt in (=2=) alleen de eerste harmonische component van de golfbeweging, zodat voor de randvoorwaarde op $z = z_{\max}$ ingevoerd kan worden:

$$U = \bar{U} + \hat{U}_1 \cos(\omega t - \psi_1) \quad (6.12.)$$

waarin: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T =$ periode

$\psi_1 =$ fase U t.o.v. willekeurig gekozen nul-tijdstip

$\hat{U}_1 =$ amplitude eerste harmonische

$\bar{U} =$ gemiddelde snelheid (nulde harmonische)

Voor het berekenen van de tijdsafhankelijke snelheden wordt uitgegaan van de gelineariseerde oplossing van (6.10.) voor het geval dat $\bar{U} = 0$, ofwel bij golven zonder resulterende stroom.

De gemiddelde snelheden volgen uit (6.10^b) en (6.10^c).

Daarbij wordt wel rekening gehouden met de invloed van de golfbeweging op de gemiddelde snelheden, en omgekeerd.

6.1.2. Oplossing bij golven zonder resulterende stroom

Het stelsel (6.10.) wordt als volgt gelineariseerd^{*}):

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (6.13^a)$$

$$\tau/\rho = \hat{p}_1 \cdot p \quad (6.13^b)$$

$$p = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \kappa z \frac{\partial u_d}{\partial z} \quad (6.13^c)$$

(6.13)

met \hat{p}_1 = de amplitude van de eerste harmonische van p .

Voor het oplossen van (6.13.) voert Bakker de variabele q in, gedefinieerd volgens:

$$q = \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_{b1}} \cdot p \quad (6.14.)$$

met \hat{p}_{b1} de waarde van \hat{p}_1 op $z = 0$.

Verder wordt aangenomen dat voor \hat{p}_1 geschreven kan worden:

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_{b1} e^{-2\pi z/\lambda_p} \quad (6.15.)$$

met λ_p een nog nader te bepalen lengtemaat.

^{*}) De linearisatie houdt in, dat de turbulente viscositeit ν_t weer onafhankelijk is van de tijd (zie paragraaf 6.2.).

Differentiëren van (6.13^a) naar z en (6.13^c) naar t geeft na invullen van (6.14.) en (6.15.) de diffusie-achtige differentiaalvergelijking in q :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = K_z \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \quad (6.16.)$$

$$\text{met } K_z = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \kappa z \hat{p}_{b_1} e^{-2\pi z/\lambda_p} \quad (6.17.)$$

Voor het oplossen van (6.16.) neemt Bakker voor K_z een gemiddelde waarde over de hoogte welke volgt uit:

$$\bar{K}_z = \frac{1}{\lambda_p} \int_0^{\infty} K_z dz \quad (6.18.)$$

Uitwerken van (6.18.) met K_z volgens (6.17.) levert:

$$\bar{K}_z = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{\kappa \lambda_p \hat{p}_{b_1}}{4 \pi^2} \quad (6.19.)$$

In paragraaf 6.3. wordt een oplossing van (6.16.) beschreven, waarbij voor K_z een functie van z wordt gekozen welke (6.17.) zó nauwkeurig mogelijk benaderd.

De randvoorwaarden (6.11.) worden voor oplossen van (6.16.) nog gewijzigd in:

$$\begin{array}{ll} z \rightarrow \infty & : \quad q = 0 \quad (a) \\ z = 0 & : \quad q = q_b = \hat{q}_{b_1} \cos \omega t \quad (b) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} * \\ \end{array} \right\} \quad (6.20.)$$

(index b refereert weer naar bodemrandvoorwaarde).

De randvoorwaarde (6.20^a) houdt in dat $z = z_{\max}$ niet als een strakke grens gezien kan worden voor de tijdsafhankelijke snelheden. Er is duidelijk sprake van een demping bij toenemende z van de invloed van de golfbeweging op zowel de tijdsafhankelijke schuifspanningen als gemiddelde schuifspanningen. Dit wordt weergegeven door de randvoorwaarde (6.11^a) te vertalen als (6.20^a).

*) Deze randvoorwaarde legt dus het multijdstip vast.

De oplossing van (6.16.) wordt dan:

$$q = \hat{q}_{b_1} e^{-2\pi z/\lambda_q} \cos(\omega t - 2\pi z/\lambda_q) \quad (6.21.)$$

$$\text{met } \lambda_q = \sqrt{\frac{8\pi^2 \bar{K}_z}{\omega}} \quad (6.22.)$$

Substitutie van (6.14.) en (6.15.) in (6.21.) levert:

$$\lambda_q = \frac{1}{2} \lambda_p \quad (6.23.)$$

De oplossing van p is dan met (6.14.):

$$p = \hat{p}_{b_1} e^{-2\pi z/\lambda_p} \cos(\omega t - 4\pi z/\lambda_p) \quad (6.24.)$$

$$\text{met } \lambda_p = 2 \sqrt{\frac{8\pi^2 \bar{K}_z}{\omega}} \quad (6.25.)$$

Met $\omega = 2\pi/T$ en \bar{K}_z volgens (6.19.) kan voor λ_p geschreven worden:

$$\lambda_p = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \kappa \hat{p}_{b_1} T \quad (6.26.)$$

De oplossing voor u_d volgt uit integratie van (6.13^c) naar z met p volgens (6.24.). Daarbij kan gebruik gemaakt worden van de randvoorwaarden:

$$\left. \begin{array}{ll} z \rightarrow \infty & u_d = 0 & (a) \\ z = z_0 & u_d = -U & (b) \end{array} \right\} \quad (6.27.)$$

met $z_0 = r/33$

en $U = \hat{U}_1 \cos(\omega t - \psi_1)$ (zie vgl. (6.12.)).

Er volgt voor $u_d(z)$:

$$\begin{aligned} u_d(z) &= \hat{u}_{d_1}(z) \cos(\omega t - \phi_1(z)) \\ &= - \int_z^\infty \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \cdot \frac{\hat{p}_{b_1}}{\kappa \xi} e^{-\frac{2\pi\xi}{\lambda_p}} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi\xi}{\lambda_p}\right) d\xi \end{aligned} \quad (6.28.)$$

Overgaan op complexe notatie levert:

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{d_1}(z) &= \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{\hat{p}_{b_1}}{\kappa} |E_1\left\{\frac{2\pi z}{\lambda_p}(1+2i)\right\}| & (a) \\ \phi_1(r) &= -\arg\left[E_1\left\{\frac{2\pi z}{\lambda_p}(1+2i)\right\}\right] + & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.29.)$$

waarin $E_1(x)$ de exponentiële integraal voorstelt gedefinieerd volgens:

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\xi} e^{-\xi} d\xi \quad (6.30.)$$

De onbekende \hat{p}_{b_1} in (6.29.) volgt uit de randvoorwaarde (6.27^b):

$$U_1 = \hat{u}_{d_1}(z_0) = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{\hat{p}_{b_1}}{\kappa} |E_1\left\{\frac{2\pi z_0}{\lambda_p}(1+2i)\right\}| \quad (6.31.)$$

Verder is het multijdstip vastgelegd door de keuze van de randvoorwaarde voor q volgens (6.20^b).

De fase-verschuiving tussen q_b volgens (6.20^b) en U , aangegeven met ψ_1 , volgt dan uit:

$$\psi_1 = \phi_1(z_0) - \pi = -\arg\left[E_1\left\{\frac{2\pi z_0}{\lambda_p}(1+2i)\right\}\right] \quad (6.32.)$$

Voor kleine waarden van $\frac{2\pi z_0}{\lambda_p}$, d.w.z.

$$\frac{2\pi z_0}{\lambda_p} \ll 1$$

kunnen (6.31.) en (6.32.) benaderd worden met (zie appendix B):

$$\hat{U}_1 = -\sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{\hat{p}_{b_1}}{\kappa} \ln\left(\sqrt{5} e^\gamma \cdot \frac{2\pi z_0}{\lambda_p}\right) \quad (6.33.)$$

$$\psi_1 = \arctg\left\{\frac{\arctg 2 - \frac{4\pi z_0}{\lambda_p}}{-\ln\left(\sqrt{5} e^\gamma \cdot \frac{2\pi z_0}{\lambda_p}\right)}\right\} \quad (6.34.)$$

met γ de constante van Euler: $\gamma = 0.57721\ 566 \dots$

De oplossing van \hat{p}_{b_1} uit (6.31.) wordt nog bemoeilijkt door de afhankelijkheid van λ_p van \hat{p}_{b_1} volgens (6.26.).

Door \hat{U}_1 , dimensieloos gemaakt met \hat{p}_{b_1} , en z_0 , dimensieloos gemaakt met $\kappa \cdot \hat{p}_{b_1} \cdot T$, tegen elkaar uit te zetten, is een eenvoudige grafische bepaling van \hat{p}_{b_1} mogelijk.

Laat \hat{U}_1^* en z_0^* de dimensieloos gemaakte variabelen \hat{U} en z_0 zijn, dan wordt (6.31.) m.b.v. (6.26.):

$$\hat{U}_1^* = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{\kappa} |E_1 \{ \pi^2 \sqrt{\frac{3\pi}{32}} z_0^* (1 + 2i) \}| \quad (6.35.)$$

ofwel voor $\pi^2 \sqrt{\frac{3\pi}{32}} z_0^* \ll 1$:

$$\hat{U}_1^* = -\sqrt{\frac{3\pi}{8}} \cdot \frac{1}{\kappa} \ln (\sqrt{5} \cdot e^\gamma \pi^2 \sqrt{\frac{3\pi}{32}} z_0^*) \quad (6.35^a)$$

Voor z_0^* kan geschreven worden:

$$z_0^* = \frac{z_0}{\kappa \hat{p}_{b_1} T} = \frac{z_0}{\kappa \hat{U}_1 T} \hat{U}_1^* = \frac{r/33}{\kappa 2\pi a} \hat{U}_1^*$$

ofwel:

$$\hat{U}_1^* = 66\pi \kappa \left(\frac{a}{r}\right) z_0^* \quad (6.36.)$$

Hierin is a de amplitude van de orbitaalbeweging nabij de grenslaag. Bij gegeven \hat{U}_1 , a/r en z_0 volgt dan uit het snijpunt van (6.35.) en (6.36.) \hat{U}_1^* en z_0^* en dus \hat{p}_{b_1} .

In bijlage 6^a is U_1^* en ψ_1 uitgezet tegen z_0^* volgend uit resp. (6.31.) en (6.32.). Uit de definitie van u_d volgt dat deze lijnen overeen komen met de oplossing voor $\hat{u}_{d_1}^*$ en $\phi_1 + \pi$ als functie van z^* volgens resp. (6.29^a) en 6.29^b).

Door eliminatie van z_0^* uit (6.35.) en (6.36.) resulteert er een eenduidig verband tussen \hat{U}_1^* en a/r én ψ_1 en a/r .

Dit verband is weergegeven in bijlage 7. Dit verband kan vergeleken worden met het verband tussen f_w en a/r zoals o.a. Jonsson vindt uit metingen (zie hoofdstuk 3, vergelijking (3.21.)). Daarbij is f_w gedefinieerd als:

$$f_w = \frac{\tau_{bmax}}{\frac{1}{2}\rho u_{max}^2} \quad (6.37.)$$

In het geval dat enkel de eerste harmonischen worden beschouwd is u_{max} gelijk aan \hat{U}_1 . Voor τ_{bmax} zou na lineariseren met (6.13^b) volgen:

$$\tau_{bmax} = \hat{\tau}_{b1} = \rho \hat{p}_{b1}^2 \quad (6.38.)$$

Doch zoals uit figuur 6.2. blijkt is dit niet de werkelijke τ_{bmax} maar een factor lager. De factor bedraagt volgens (6.13^c): $8/3\pi$.

Indien de definitie van Jonsson (6.37.) aangehouden wordt, dan volgt dus voor f_w :

$$f_w = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{\hat{U}_1^* 2} \quad (6.39.)$$

Voor $\pi^2 \sqrt{\frac{3\pi}{32}} z_0^* \ll 1$ volgt dan uit (6.35^a), (6.36.) en (6.39.) voor het verband tussen f_w en a/r :

$$\frac{\kappa 4 \sqrt{2}}{\ln 10 4 \sqrt{f_w}} + \log \frac{1}{4 \sqrt{f_w}} = \log \frac{a}{r} - \log \left(\sqrt{5} e^{\gamma} \frac{3\pi^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{66\kappa} \cdot 4 \sqrt{2} \right) \quad (6.40.)$$

Het verband tussen f_w en a/r volgend uit (6.35.), (6.36.) en (6.39.) is weergegeven in bijlage 8.

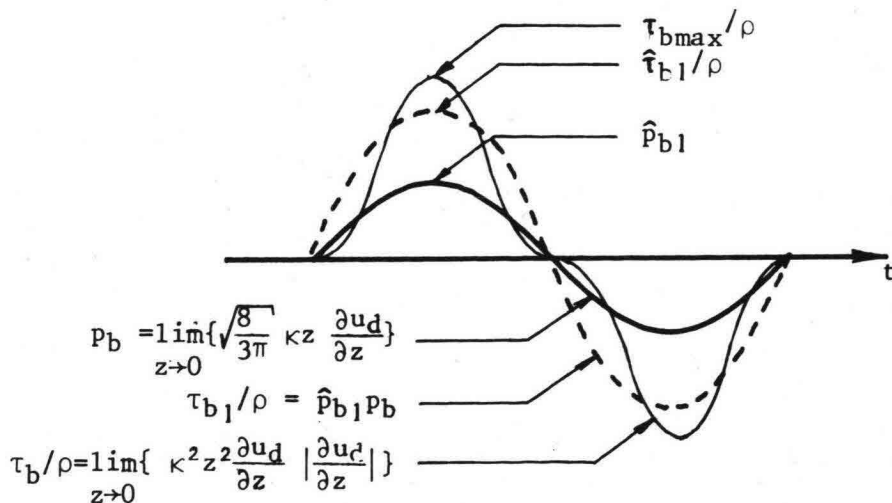


Fig. 6.2.

6.1.3. Oplossing bij golven gecombineerd met een resulterende stroom

In (=3) beschouwt Bakker alleen de oplossing voor de gemiddelde snelheden analytisch. Daarbij wordt gebruik gemaakt van het verband tussen \hat{u}_d^* en z^* - wat overeenkomt met het verband tussen \hat{U}_1^* en z_0^* (zie (6.35.)) - zoals deze analytisch is bepaald voor het geval van alleen golven.

In (=3) is echter de definitie van p aangehouden volgens (6.10^c):

$$p = \kappa z \frac{\partial u_d}{\partial z} \quad (6.41.)$$

en niet volgens de gelinealiseerde vorm van (6.13^c):

$$p = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \kappa z \frac{\partial u_d}{\partial z} \quad (6.41^a)$$

Daardoor is de \hat{p}_{b_1} in (=3) een factor $\sqrt{\frac{3\pi}{8}}$ groter dan in (=2). Dus in de in paragraaf 6.12. beschreven oplossing bij golven zonder resulterende stroom moet de \hat{p}_{b_1} vervangen worden door $\sqrt{\frac{8}{3\pi}} \hat{p}_{b_1}$, waarbij de laatste \hat{p}_{b_1} de amplitude van de eerste harmonische van p volgens (6.41.) is.

Voor de berekening van de gemiddelde snelheid wordt gebruik gemaakt van de volgende vergelijking (zie stelsel (6.10.)).

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau} &= \rho \overline{|p|} & (6.42^a) \\ \bar{p} &= \kappa z \frac{\partial \bar{u}_d}{\partial z} & (6.42^b) \end{aligned} \right\} (6.42.)$$

De overstreping duidt middeling over de golfperiode aan.

De randvoorwaarden zijn (zie (6.11.)):

$$\left. \begin{aligned} z = z_{\max} & : \quad \bar{u}_d = 0 \\ z = z_0 & : \quad \bar{u}_d = -\bar{U} \end{aligned} \right\} (6.43.)$$

De schuifspanningssnelheid p kan in harmonischen uitgeschreven worden. Er volgt bij beschouwen van alleen de nulde en eerste harmonischen:

$$p = p_0 + \hat{p}_1 \cos(\omega t - \theta_1) \quad (6.44.)$$

Bakker benadert de relatie (6.42^a) in =3= als volgt:

$$\frac{\bar{p}}{\hat{p}_1} < \frac{4}{\pi} : \bar{\tau} \approx \rho \frac{4}{\pi} \bar{p} \hat{p}_1 \quad (6.45.)$$

$$\frac{\bar{p}}{\hat{p}_1} > \frac{4}{\pi} : \bar{\tau} \approx \rho \bar{p}^2 \quad (6.46.)$$

Zoals reeds in paragraaf 6.1.1. is vermeld neemt Bakker $\bar{\tau}$ constant aan over de grenslaag, zodat ook geldt:

$$\bar{\tau} \approx \rho \frac{4}{\pi} \bar{p}_b \hat{p}_{b_1} \quad \text{als} \quad \bar{p}_b / \hat{p}_{b_1} < \frac{4}{\pi} \quad (6.47.)$$

$$\bar{\tau} \approx \rho \bar{p}_b^2 \quad \text{als} \quad \bar{p}_b / \hat{p}_{b_1} > \frac{4}{\pi} \quad (6.48.)$$

Met \bar{p}_b en \hat{p}_{b_1} resp. de gemiddelde en de amplitude van de eerste harmonische van de schuifspanningssnelheid aan de bodem.

Voor \hat{p}_1 wordt de oplossing aangehouden volgend uit paragraaf 6.1.2., zij het dat \hat{p}_1 een factor $\sqrt{\frac{3\pi}{8}}$ groter is, zoals reeds genoemd:

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_{b_1} e^{-2\pi z / \lambda_p} \quad (6.49.)$$

$$\text{met } \lambda_p = \frac{32}{3\pi^2} \kappa \hat{p}_{b_1} T \quad (6.50.)$$

((6.50.) volgt dus uit (6.26.) door \hat{p}_{b_1} te vervangen door $\sqrt{\frac{8}{3\pi}} \hat{p}_{b_1}$).

Het geval dat $\bar{p}_b / \hat{p}_{b_1} > \frac{4}{\pi}$ levert met (6.42^b) het logarithmisch snelheidsprofiel, daar met (6.49.) \bar{p} / \hat{p}_1 altijd groter zal zijn dan $\frac{4}{\pi}$, zodat (6.46.) gebruikt kan worden.

Voor het geval $\bar{p}_b / \hat{p}_{b_1} < \frac{4}{\pi}$ moet bepaald worden voor welke z (6.45.) overgaat in (6.46.). Noem deze waarde van z , z_1 , dan volgt voor $z < z_1$ uit (6.45.) en (6.47.):

$$\bar{\tau} / \rho = \frac{4}{\pi} \bar{p} \hat{p}_1 = \frac{4}{\pi} \bar{p}_b \hat{p}_{b_1}$$

Met (6.49.) volgt hieruit:

$$\bar{p} = \bar{p}_b e^{2\pi z / \lambda_p} \quad (6.51.)$$

Voor $z > z_1$ volgt uit (6.46.) en (6.47.):

$$\bar{p} = \left(\frac{4}{\pi} \bar{p}_b \hat{p}_{b_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.52.)$$

Uit het snijpunt van (6.51.) en (6.52.) volgt z_1 :

$$z_1 = \frac{\lambda_p}{4\pi} \ln \frac{4}{\pi} \frac{\hat{p}_{b_1}}{\bar{p}_b} \quad (6.53.)$$

De gemiddelde defect-snelheid \bar{u}_d volgt nu uit integratie van (6.42^b) naar z :

$$\text{voor } z > z_1 : u_d(z) = - \int_z^{z_{\max}} \frac{\bar{p}}{\kappa z} dz = - \left(\frac{4}{\pi} \bar{p}_b \hat{p}_{b_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z_{\max}}{z} \quad (6.54.)$$

$$\begin{aligned} \text{voor } z < z_1 : u_d(z) &= u_d(z_1) - \int_z^{z_1} \frac{\bar{p}}{\kappa z} dz \\ &= - \left(\frac{4}{\pi} \bar{p}_b \hat{p}_{b_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z_{\max}}{z_1} - \frac{\bar{p}_b}{\kappa} \left\{ \text{Ei} \left(\frac{2\pi z_1}{\lambda_p} \right) - \text{Ei} \left(\frac{2\pi z}{\lambda_p} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.55.)$$

met Ei de exponentiële integraal gedefinieerd volgens:

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{\xi}}{\xi} d\xi \quad (6.56.)$$

Invoeren van de randvoorwaarde (6.43^b) geeft:

$$\bar{u} = \left(\frac{4}{\pi} \bar{p}_b \hat{p}_{b_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z_{\max}}{z_1} + \frac{\bar{p}_b}{\kappa} \left\{ \text{Ei} \left(\frac{2\pi z_1}{\lambda_p} \right) - \text{Ei} \left(\frac{2\pi z_0}{\lambda_p} \right) \right\} \quad (6.57.)$$

Voor de gemiddelde snelheid \bar{u} volgt met

$$\bar{u} = \bar{u}_d + \bar{u}:$$

$$z < z_1 : \bar{u} = \frac{\bar{p}_b}{\kappa} \left\{ \text{Ei} \left(\frac{2\pi z}{\lambda_p} \right) - \text{Ei} \left(\frac{2\pi z_0}{\lambda_p} \right) \right\} \quad (6.58.)$$

$$z > z_1 : \bar{u} = \frac{\bar{p}_b}{\kappa} \left\{ \text{Ei} \left(\frac{2\pi z_1}{\lambda_p} \right) - \text{Ei} \left(\frac{2\pi z_0}{\lambda_p} \right) \right\} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{4}{\pi} \bar{p}_b \cdot \hat{p}_{b_1} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{z}{z_1} \quad (6.59.)$$

Voor $z = z_1$ volgt er met (6.53.):

$$\bar{u}(z_1) = \frac{\bar{p}_b}{\kappa} \left\{ \text{Ei} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{\pi} \frac{\hat{p}_{b_1}}{\bar{p}_b} \right) \right) - \text{Ei} \left(\frac{2\pi z_0}{\lambda_p} \right) \right\}$$

Voor zeer kleine waarde van $\frac{2\pi z}{\lambda_p}$, $\frac{2\pi z}{\lambda_p} \ll 1$, nadert $Ei\left(\frac{2\pi z}{\lambda_p}\right)$ tot $\ln\left(\frac{2\pi z}{\lambda_p}\right)$. Vergelijking (6.58.) nadert dus tot het logaritmisch snelheidsprofiel:

$$\bar{u} = \frac{\bar{p}_b}{\kappa} \ln z/z_0 \quad (6.60.)$$

Op dezelfde wijze als in paragraaf 6.1.2. kan z dimensieloos gemaakt worden met $\kappa \hat{p}_{b1}$ T. Er volgt dan met λ_p volgens (6.50.):

$$\frac{2\pi z_0}{\lambda_p} = \frac{3}{16} \pi^3 z_0^* \quad (6.61.)$$

In bijlage 6^b is de functie $f(z^*)$ uitgezet, waarbij $f(z^*)$ is gedefinieerd als:

$$f(z^*) = Ei\left(\frac{3}{16} \pi^3 z^*\right) - Ei\left(\frac{3}{16} \pi^3 \cdot 10^{-3}\right) \quad (6.62.)$$

De gemiddelde snelheid voor $z < z_1$ volgt uit deze figuur met:

$$\bar{u} = \frac{\bar{p}_b}{\kappa} \{f(z^*) - f(z_0^*)\} \quad (6.63.)$$

en voor $z > z_1$ volgt:

$$\bar{u} = \frac{\bar{p}_b}{\kappa} \{f(z_1^*) - f(z_0^*)\} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{4}{\pi} \frac{\bar{p}_b}{\hat{p}_{b1}}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{z^*}{z_1^*} \quad (6.64.)$$

In bijlage 6^b is verticaal z^* logaritmisch uitgezet zodat de tweede term in (6.64.) beschreven wordt door -en rechte. De rechte raakt in bijlage 6^b in $z^* = z_1^*$ aan de kromme $f(z^*)$. De helling van de rechte volgt uit delen van de tweede term in (6.64.) door \bar{p}_b/κ : de helling is dan

$$\left(\frac{4}{\pi} \frac{\hat{p}_{b1}}{\bar{p}_b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

De waarde van z_1^* is volgens (6.53.) en (6.50.):

$$z_1^* = \frac{8}{3\pi^3} \ln \frac{4}{\pi} \frac{\hat{p}_{b1}}{\bar{p}_b} \quad (6.65.)$$

Indien aangenomen wordt dat zowel met als zonder golven de gemiddelde schuifspanning aan de bodem gelijk blijft, of vertaald naar een werkelijke situatie dat het tijdgemiddelde verhang gelijk blijft, dan is er volgens (6.58.) en (6.59.) blijkbaar een verschuiving van de logaritmische snelheidsverdeling opgetreden, zoals schematisch is aangegeven in fig. 6.3.

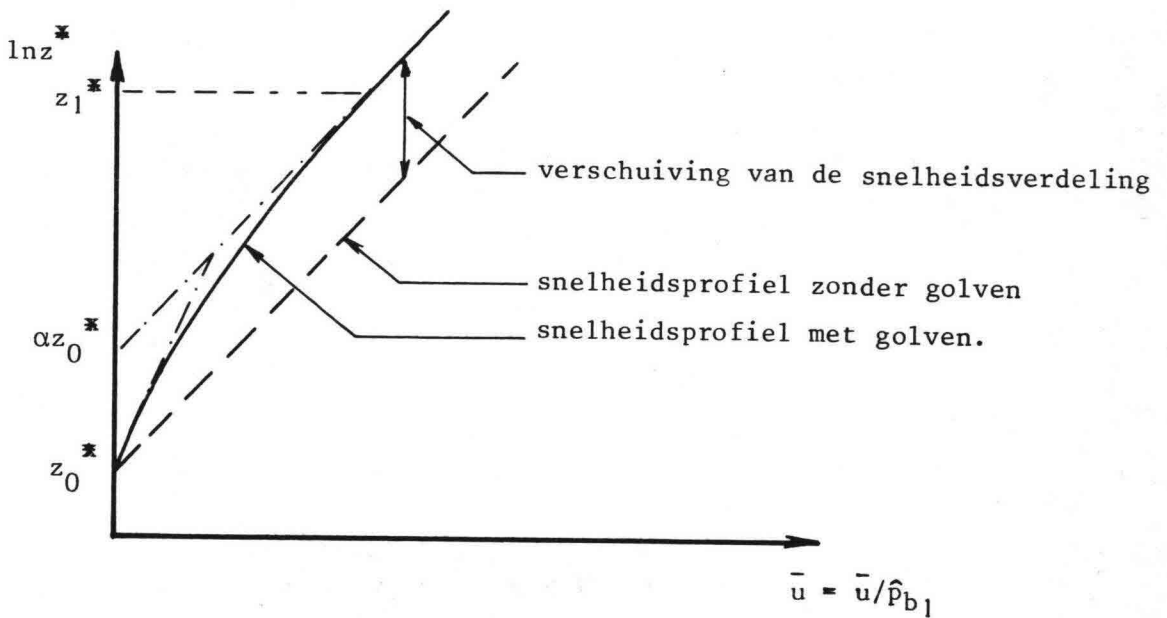


Fig. 6.3.

Deze verschuiving kan beschouwd worden als een schijnbare verhoging van de ruwheid en kan weergegeven worden met de factor α . Deze volgt uit:

$$\frac{1}{\kappa} \left(\frac{4}{\pi} \hat{p}_{b1} \bar{p}_b \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{z_1}{\alpha z_0} = \frac{\bar{p}_b}{\kappa} \left\{ \text{Ei} \left(\frac{2\pi z_1}{\lambda_p} \right) - \text{Ei} \left(\frac{2\pi z_0}{\lambda_p} \right) \right\}$$

ofwel met λ_p volgens (6.50.) en z_1 volgens (6.53.)

$$\ln \alpha = \ln \left\{ \frac{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\hat{p}_{b1}}{\bar{p}_b} \cdot \frac{4}{\pi} \right)}{\frac{3}{16} \pi^3 z_o^*} \right\} - \left(\frac{\pi}{4} \frac{\bar{p}_b}{\hat{p}_{b1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \text{Ei} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{\pi} \frac{\hat{p}_{b1}}{\bar{p}_b} \right) \right) - \text{Ei} \left(\frac{3\pi^3}{16} z_o^* \right) \right\} \quad (6.66.)$$

Daar z_o^* bepaald kan worden met (6.36.) is α enkel nog een functie van \hat{p}_{b1}/\bar{p}_b , \hat{U}_1^* en a/r .

Maar ook \hat{U}_1^* is volgens (6.35.) en (6.36.) enkel een functie van a/r (zie bijlage 7), zodat α nog afhangt van \hat{p}_{b1}/\bar{p}_b en a/r . Dit verband is weergegeven in bijlage 7. Voor $z > z_1$ kan het gemiddeld snelheidsprofiel dus worden weergegeven met:

$$\bar{u} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{4}{\pi} \hat{p}_{b1} \bar{p}_b \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{z}{\alpha z_o} \quad (6.67.)$$

Om tenslotte het gemiddelde snelheidsprofiel vast te leggen moet \bar{p}_b nog bepaald worden. Dit kan op twee manieren, afhankelijk van de randvoorwaarde voor de gemiddelde snelheid:

- 1^e : Op een bepaalde hoogte boven de bodem wordt \bar{U} gegeven
b.v. op $z = z_{\max}$.
- 2^e : De over de waterdiepte gemiddelde snelheid U_{gem} is gegeven.

ad 1. Aangenomen wordt dat $z_{\max} > z_1$ zodat voor \bar{U} geldt:

$$\bar{U} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{4}{\pi} \hat{p}_{b1} \bar{p}_b \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{z_{\max}}{\alpha z_o} \quad (6.68.)$$

ad 2. De over de hoogte gemiddelde snelheid kan worden benaderd door (6.67.) te integreren over de waterdiepte. Er volgt dan voor U_{gem} :

$$U_{\text{gem}} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{4}{\pi} \hat{p}_{b1} \bar{p}_b \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{h}{e \alpha z_o} \quad (6.69.)$$

met h de gemiddelde waterdiepte
en e grondtal van de natuurlijke logaritme

Zowel uit (6.68.) als uit (6.69.) moet \bar{p}_b op iteratieve wijze worden bepaald. Bij gegeven \hat{U}_1 , a/r en z_o ligt \hat{p}_{b1} vast. De factor α hangt dan nog alleen af van \hat{p}_{b1}/\bar{p}_b , zodat ook \bar{p}_b via (6.68.) of (6.69.) vast ligt.

6.2. Aanvullende analytische beschouwingen m.b.t. het model van Bakker6.2.1. Differentiaal vergelijking voor de tijdsafhankelijke snelheden

Bakker gaat in =2= en =3= uit van het stelsel vergelijkingen (6.10.):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_d}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} & (a) \\ \tau &= \rho p |p| & (b) \\ p &= l_m \frac{\partial u_d}{\partial z}, \quad l_m = \kappa z & (c) \end{aligned} \right\} \quad (6.70.)$$

met de randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} z = z_{\max} & \quad u_d = 0 \\ z = z_0 & \quad u_d = -U \end{aligned} \right\} \quad (6.71.)$$

waarin U een gegeven periodieke functie in de tijd is.

De grootheden u_d , τ en p kunnen gesplitst worden in een over de golfperiode gemiddeld deel, en een tijdsafhankelijk deel. Er kan dan worden gedefinieerd:

$$\left. \begin{aligned} u_d &\equiv \bar{u}_d + \tilde{u}_d & (a) \\ \tau &\equiv \bar{\tau} + \tilde{\tau} & (b) \\ p &\equiv \bar{p} + \tilde{p} & (c) \end{aligned} \right\} \quad (6.72.)$$

Hierin duidt de overstreping de middeling aan, en de slinger het tijdsafhankelijk deel. Uit de definitie volgt:

$$\int_0^T \tilde{u}_d dt = \int_0^T \tilde{\tau} dt = \int_0^T \tilde{p} dt \equiv 0 \quad (6.73.)$$

Invullen van (6.72.) in (6.70^a) geeft:

$$\frac{\partial \tilde{u}_d}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial z} \quad (6.74.)$$

Maar bij de afleiding van (6.70^a) wordt aangenomen dat $d\bar{\tau}/dz = 0$.
 Beschouwen van de oorspronkelijke vereenvoudigde bewegingsvergelijking voor de grenslaag (vergelijking (6.1.)) levert m.b.v. (6.72.) ook (6.74.) op zonder de aanname $\frac{d\bar{\tau}}{dz} = 0$.
 Vergelijking (6.1.) geeft:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (6.75.)$$

Invoeren van de randvoorwaarde (6.2^a)

$$z > z_{\max}: u = U, \quad \partial \tau / \partial t = 0^* \quad (6.76.)$$

in (6.75.) geeft:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{\tau}}{dz} \quad (6.76^a)$$

Aftrekken van (6.76^a) van (6.75.) geeft met de definitie van de defectsnelheid u_d volgens (6.9.) de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z} \quad (6.77.)$$

Invullen van (6.72.) geeft dan (6.74).

De aanname $d\bar{\tau}/dz = 0$ heeft dus enkel betrekking op de keuze van de mengweglengte in het model van Prandtl: $l_m = \kappa z$; dit i.v.m. het logaritmisch snelheidsprofiel wat buiten de grenslaag wordt verwacht bij een resulterende stroom.

6.2.2. Berekenen snelheidsveld via de differentiaalvergelijking voor de schuifspanningen

In navolging van Bakker kan een nieuwe grootheid q worden gedefinieerd met:

$$q \equiv \tau / \rho \quad (6.78.)$$

*) τ is dus geen functie meer van de tijd, zodat volgens (6.72^b) $\tau = \bar{\tau}$.

Deze q wijkt dus enigszins af van de definitie van Bakker in =2= (zie (6.14.)). Gebruikmakend van (6.72.) kan het stelsel (6.70.) dan geschreven worden als:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_d}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{q}}{\partial z} & (a) \\ q &= p |p| & (b) \\ p &= l_m \frac{\partial u_d}{\partial z}, \quad l_m = \kappa z & (c) \end{aligned} \right\} \quad (6.79.)$$

Overeenkomstig (6.72.) is ook q opgesplitst in \bar{q} en \tilde{q} . Differentiëren van (6.79^a) naar z en (6.79^c) naar t geeft na substitutie het stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} &= \kappa z \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial z^2} & (a) \\ q &= p |p| & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.80.)$$

Door (6.79^b) naar t te differentiëren kan (6.80.) ook nog geschreven worden als:

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = 2 v_t \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial z^2} \quad (6.81.)$$

$$\text{met } v_t = \kappa z \sqrt{|q|} \quad (6.81^a)$$

Hierin is v_t de turbulente viscositeit volgens het mengweglengte model van Prandtl ($q = v_t \frac{\partial u}{\partial z}$, $v_t = l_m^2 \frac{\partial u}{\partial z}$).

Vergelijking (6.81^a) volgt uit (6.4.) en de definitie van q .

Deze vergelijking is sterk niet-lineair en is veel moeilijker te lineariseren dan het stelsel (6.80.). Bovendien is de invloed van hogere harmonischen m.b.v. (6.80.) na te gaan (zie paragraaf 6.5.).

Vergelijking (6.81.) is alleen numeriek goed op te lossen doch dan kan evengoed rechtstreeks de differentiaal vergelijking voor de defectsnelheid worden opgelost (zie deel II). Bakker geeft in =3= een beschrijving van een programma dat (6.80.) numeriek oplost. Nadeel is daarbij dat de randvoorwaarden voor de snelheidsverdeling niet

direct kunnen worden ingevoerd, maar moeten worden getoetst aan de snelheidsverdeling op de rand welke volgt uit het numeriek berekende p -veld bij geschatte randvoorwaarden van p . Er is dan een iteratieve procedure nodig om de gewenste randvoorwaarde voor de snelheidsverdeling gelijk te krijgen aan de berekende. Voor een verdere beschrijving van de problematiek hieromtrent wordt verwezen naar deel II.

6.2.3. Wijze van linearisatie van de differentiaalvergelijking voor schuifspanningen

Indien we een oplossing van het stelsel (6.80.) beschouwen t/m de eerste harmonischen, dan is een linearisatie nodig.

Hiertoe moet de niet-lineaire betrekking (6.80^b) beschouwd worden.

Daar q en p periodieke functies van de tijd zijn kunnen deze ontwikkeld worden in een Fourier-reeks:

$$q = \bar{q}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{q}_n \cos(n\omega t - \theta_n) \quad (6.82.)$$

$$p = \bar{p}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_n \cos(n\omega t - \phi_n) \quad (6.83.)$$

hierin is \bar{q}_0 , \bar{p}_0 de nulde harmonische component

\hat{q}_n , \hat{p}_n de amplitude van n^e harmonische component

θ_n , ϕ_n de fase van de n^e harmonische component

Met (6.72.) volgt dat:

$$\bar{q} = \bar{q}_0, \quad \tilde{q} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{q}_n \cos(n\omega t - \theta_n) \quad (6.84.)$$

$$\bar{p} = \bar{p}_0, \quad \tilde{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_n \cos(n\omega t - \phi_n) \quad (6.85.)$$

Uit Fourier-analyse van vergelijking (6.80^b) kunnen relaties worden verkregen tussen \bar{q}_0 , \hat{q}_n , θ_n en \bar{p}_0 , \hat{p}_n , ϕ_n ($n = 1 \dots \infty$). Indien alleen de nulde en eerste harmonischen van p worden beschouwd, ofwel via (6.70^c) alleen van u_d , dan zijn de genoemde relaties t/m de eerste harmonische eenvoudig analytisch te bepalen. De berekening staat beschreven in appendix C. Voor de relaties bij meenemen van hogere harmonischen is het nodig gebruik te maken van een numerieke methode. De relaties tussen de harmonischen van p en q zijn namelijk niet expliciet te schrijven. Voor het geval dat de waterbeweging uit zuiver oneven harmonischen bestaat, zijn de relaties tussen \bar{q}_0 , \hat{q}_n , θ_n en \bar{p}_0 , \hat{p}_n , ϕ_n bepaald t/m de derde harmonische. Een voorbeeld van een dergelijke periodieke functie is gegeven in figuur 6.4. Voor een dergelijke functie geldt:

$$f(t) = -f(t + \frac{1}{2}T)$$

met T de periode.

De relaties zijn weergegeven in bijlage 10.

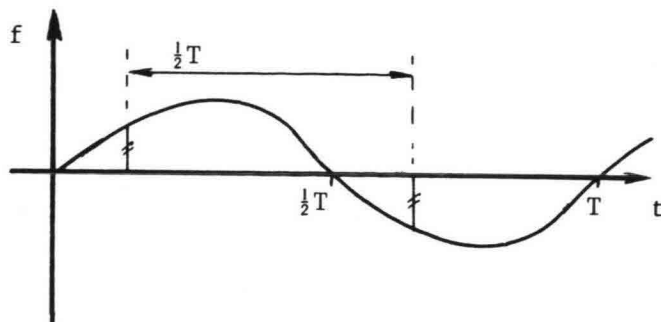


Fig. 6.4.

Voor het geval dat zowel oneven als even harmonischen een rol spelen zijn de relaties tussen \bar{q}_0 , \hat{q}_n , θ_n en \bar{p}_0 , \hat{p}_n , ϕ_n bepaald t/m de tweede harmonische.

De gevonden relaties zijn weergegeven in de bijlagen 9^a t/m 9^e.*) Daar de relaties t/m de eerste harmonische (zie bijlage 9^a) het belangrijkste zijn voor een analytische oplossing zullen die relaties in het navolgende beschouwd worden.

De andere relaties zijn met name van belang voor het afschatten van de invloed van de hogere harmonischen. Dit komt in paragraaf 6.5. aan de orde.

Uit appendix C volgen de volgende relaties tussen $\bar{q}_0, \hat{q}_1, \theta_1$ en $\bar{p}_0, \hat{p}_1, \phi_1$:

voor $\bar{p}_0 < \hat{p}_1$:

$$\bar{q}_0 / \hat{p}_1^2 = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) + \frac{3}{\pi} \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \cos \left\{ \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \right\} \quad (6.86.)$$

$$\hat{q}_1 / \hat{p}_1^2 = \frac{4}{\pi} \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) + \frac{4}{3\pi} \left(\left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + 2 \right) \cos \left\{ \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \right\} \quad (6.87.)$$

$$\theta_1 = \phi_1$$

voor $\bar{p}_0 > \hat{p}_1$:

$$\bar{q}_0 / \hat{p}_1^2 = \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \quad (6.88.)$$

*) Zowel in bijlage 9a t/m 9e als in bijlage 10 zijn de fasen ϕ_n en θ_n gegeven t.o.v. p_1 , d.w.z. de fase ϕ_1 is op nul gesteld.

$$\hat{q}_1 / \hat{p}_1^2 = 2 \bar{p}_0 / \hat{p}_1 \quad (6.89.)$$

$$\theta_1 = \phi_1$$

Vergelijking (6.86.) en (6.87.) kunnen worden benaderd met derdegraads polynomen (zie appendix C):

$$\bar{q}_0 / \hat{p}_1^2 \approx \frac{4}{\pi} \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) + \left(2 \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi} \right) \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^3 \quad (6.90.)$$

$$\hat{q}_1 / \hat{p}_1^2 \approx \frac{8}{3\pi} + \left(4 - \frac{8}{\pi} \right) \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \left(\frac{16}{3\pi} - 2 \right) \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^3 \quad (6.91.)$$

De eerste termen in (6.90.) en (6.91.) komen overeen met de aannamen van Bakker in =2= en =3= (zie resp. vergelijking (6.45.) en de combinatie van (6.13^b) en (6.13^c)).

6.2.4. Linearisatie voor de oplossing van de eerste harmonische van de snelheid

Bij de linearisatie in een beschouwing t/m de eerste harmonischen kan voor $\partial p / \partial t$ geschreven worden:

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx -\hat{p}_1 \omega \sin(\omega t - \phi_1) \quad (6.92.)$$

Evenzo voor $\partial q / \partial t$:

$$\frac{\partial q}{\partial t} \approx -\hat{q}_1 \omega \sin(\omega t - \theta_1) \quad (6.93.)$$

Daar volgens (6.87^a) en (6.89^a) $\phi_1 = \theta_1$ volgt uit (6.92.) en (6.93.):

$$\partial q / \partial t \approx \hat{q}_1 / \hat{p}_1 \partial p / \partial t \quad (6.93^a)$$

In een benadering t/m de eerste harmonische kan dus in vergelijking (6.80.) $\partial p / \partial t$ door $\partial q / \partial t$ vervangen worden door gebruik te maken van (6.93^a).

De gelineariseerde differentiaalvergelijking voor de tijdsafhankelijke schuifspanning wordt dan:

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = K_z \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial z^2} \quad (6.94.)$$

met $K_z = \kappa z \hat{q}_1 / \hat{p}_1 \quad (6.94^a)$

Voor de tijdsafhankelijke beweging komt de linearisatie neer op een tijds-onafhankelijke turbulente viscositeit, die volgens (6.81) tweemaal de werkelijke turbulente viscositeit (die ook voor de gemiddelde snelheid geldt) blijkt te vervangen. Het viscositeitsconcept van Boussinesq luidt dan ook alleen voor de tijdsafhankelijke schuifspanning:

$$\tilde{q} = K_z \frac{\partial \tilde{u}_d}{\partial z} \quad (6.94^b)$$

Voor de tijdsgemiddelde schuifspanning geldt deze relatie niet. De gemiddelde defect-snelheid moet dan ook berekend worden via de gedefinieerde schuifspanningssnelheid, dus uit:

$$\bar{p} = l_m \frac{\partial \bar{u}_d}{\partial z}, \quad l_m = \kappa z \quad (6.94^c)$$

M.b.v. de oplossing van Bakker voor p_1 kan een eerste schatting van K_z gemaakt worden:

$$p_1 = \hat{p}_{b_1} e^{-2\pi z/\lambda_p} \quad (6.95.)$$

$$\lambda_p = \frac{32}{3\pi^2} \kappa \hat{p}_{b_1} T \quad (6.96.)$$

(zie resp. de vergelijkingen (6.49.) en (6.50.)).

Hiermee is voor verschillende waarden van $\bar{p}_b / \hat{p}_{b_1}$ de dimensieloze diffusie-constante K_z^* bepaald m.b.v. (6.86.) t/m (6.89.).

Hierbij is K_z^* gedefinieerd als:

$$K_z^* = \frac{K_z}{\kappa \hat{p}_{b_1} \lambda_p / 2\pi} \quad (6.96^a)$$

Dimensieloos maken van q met $\hat{p}_{b_1}^2$, t met T en z met $\kappa \hat{p}_{b_1} T$, geeft voor de dv (6.94):

$$\frac{\partial q^*}{\partial t^*} = \frac{16}{3\pi^3} K_z^* \frac{\partial^2 q^*}{\partial z^{*2}}$$

met q^* , z^* , t^* en K_z^* de dimensieloze grootheden en variabelen.

Bij de berekening van K_z^* is gebruik gemaakt van de aanname $\frac{d\bar{t}}{dz} = 0$, ofwel $\frac{d\bar{q}_0}{dz} = 0$. Voor het geval dat $\bar{p}_{b_0} / \hat{p}_{b_1} < 1$, volgt \bar{q}_0 uit (6.86.):

$$\bar{q}_0 / \hat{p}_{b_1}^2 = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\bar{p}_{b_0}}{\hat{p}_{b_1}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \arcsin \left(\frac{\bar{p}_{b_0}}{\hat{p}_{b_1}} \right) + \frac{3}{\pi} \frac{\bar{p}_{b_0}}{\hat{p}_{b_1}} \cos \left\{ \arcsin \left(\frac{\bar{p}_{b_0}}{\hat{p}_{b_1}} \right) \right\} \quad (6.97.)$$

Daar \bar{q}_0/\hat{p}_1^2 met \hat{p}_1 volgens (6.95.) gelijk is aan:

$$\bar{q}_0/\hat{p}_1^2 = \bar{q}_0/\hat{p}_{b_1}^2 e^{4\pi z/\lambda_p}$$

kan uit (6.86.) en (6.97.) bij iedere waarde van $\bar{p}_{b_0}/\hat{p}_{b_1}$ de grootte van \bar{p}_0/\hat{p}_1 als functie van $2\pi z/\lambda_p$ bepaald worden.

Substitutie van de aldus bepaalde \bar{p}_0/\hat{p}_1 in (6.87.) geeft samen met (6.95.) $\hat{q}_1/\hat{p}_{b_1}^2$ als functie van $2\pi z/\lambda_p$.

Daar $2\pi z/\lambda_p$ met λ_p volgens (6.96.) geschreven kan worden als:

$$2\pi \frac{z}{\lambda_p} = \frac{3\pi^3}{16} z^* \quad (6.98.)$$

kan bij iedere waarde van $\bar{p}_{b_0}/\hat{p}_{b_1}$ de grootte van K_z^* als functie van $2\pi z/\lambda_p$ ofwel $\frac{3\pi^3}{16} z^*$ bepaald worden. Het resultaat is weergegeven in bijlage 11.

Hierin is verticaal uitgezet z^* en horizontaal K_z^* . Voor $\bar{p}_{b_0}/\hat{p}_{b_1} = 0$ wordt de kromme verkregen zoals Bakker deze in =2= aanneemt. Namelijk (zie (6.17.)):

$$K_z = \frac{8}{3\pi} \kappa z \hat{p}_{b_1} e^{-2\pi z/\lambda_p} \quad (6.99^a)$$

(n.b. incl. de correctie voor \hat{p}_{b_1}).

Dimensieloos maken met $\kappa \hat{p}_{b_1} \lambda_p/2\pi$ geeft voor K_z^* :

$$K_z^* = \frac{8}{3\pi} \frac{2\pi z}{\lambda_p} \cdot e^{-2\pi z/\lambda_p} \quad (6.99^b)$$

Voor de analytische oplossing benadert Bakker (6.99^a) met een constante waarde (zie (6.19.)):

$$\bar{K}_z = \frac{8}{3\pi} \frac{\kappa \lambda_p \hat{p}_{b_1}}{4\pi^2} \quad (6.99^c)$$

ofwel in dimensieloze vorm:

$$\bar{K}_z^* = \frac{4}{3\pi^2} \quad (6.99^d)$$

In paragraaf 6.3 zal een oplossing worden gegeven, waarbij (6.99^a) nauwkeuriger benaderd wordt.

Voor grote waarden van $\bar{p}_{b_0}/\hat{p}_{b_1}$ ($> .2 \text{ á } .3$) worden de krommen in bijlage 11 redelijk benaderd door rechte lijnen door de oorsprong. De helling van de rechte kan worden bepaald door de limiet te beschouwen van \hat{q}_1/\hat{p}_1 als $z \rightarrow \infty$. Uit (6.88) en (6.89) volgt voor deze limiet:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{q}_1 / \hat{p}_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} 2 \bar{p}_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} 2 \sqrt{\bar{q}_0 - \frac{1}{2} \hat{p}_1^2} = 2 \sqrt{\bar{q}_0} \quad (6.100.)$$

Voor K_z volgens (6.94^a) volgt dan de benadering:

$$K_z = 2\kappa z \sqrt{\bar{q}_0} \quad (6.101.)$$

ofwel de dimensieloze vorm:

$$K_z^* = 2 \frac{3\pi^3}{16} z^* \sqrt{\bar{q}_0^*} \quad (6.101^a)$$

Hierin wordt $\bar{q}_0^* = \frac{\bar{q}_0}{\hat{p}_{b1}^2}$ enkel bepaald door $\bar{p}_{b0} / \hat{p}_{b1}$ via (6.97.).

In paragraaf 6.4. zal een oplossing voor het snelheidsveld worden gegeven indien K_z gekozen wordt volgens (6.101.).

De diffusie-achtige constante K_z , welke voor de tijdsafhankelijke schuifspanningen de turbulente viscositeit in een eerste benadering bepaalt, heeft voor kleine z , d.w.z. $z \rightarrow 0$, een grote invloed op de oplossing. Met name de evenredigheid van K_z met z is dan van belang. Deze evenredigheid wordt bepaald door de limiet van de afgeleide van K_z naar z voor $z \rightarrow 0$. Deze volgt eenvoudig uit differentiatie van (6.94^a). Gebruik makend van het feit dat

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\hat{q}_1}{\hat{p}_1} \right\}$$

volgens (6.87) en (6.89) bestaat, volgt er voor $\frac{dK_z}{dz} \Big|_0$:

$$\frac{dK_z}{dz} \Big|_0 = \kappa \frac{\hat{q}_{b1}}{\hat{p}_{b1}} \quad (6.101b)$$

6.2.5. Linearisatie voor de oplossing van de gemiddelde snelheid

De gemiddelde snelheid kan uit het stelsel (6.79.) enkel bepaald worden uit de vergelijkingen (6.79^b) en (6.79^c) door deze te middelen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \overline{p | p|} & (a) \\ \bar{p} &= \kappa z \frac{d\bar{u}_d}{dz} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.102.)$$

Zoals in paragraaf 6.2.1. is beschreven moet worden aangenomen dat voor $\bar{\tau}$ en dus voor \bar{q} geldt:

$$\frac{d\bar{q}}{dz} = 0$$

Ontwikkelen in een Fourier-reeks van q en p (zie (6.82.) en (6.83.)) maakt het mogelijk in een benadering t/m de eerste harmonische, \bar{p} (ofwel met de notatie in par. 6.2.3.: \bar{p}_0) als functie van z te bepalen indien \bar{q}_0 , \hat{q}_1 en \hat{p}_1 als functie van z bekend zijn.

Nu is in paragraaf (6.2.4.) geen p_1 beschouwd, maar wordt de differentiaalvergelijking voor q_1 gelineariseerd. Oplossen daarvan geeft met de bewegingsvergelijking (6.79^a) onmiddellijk de oplossing voor de eerste harmonische van de snelheid.

Dus zowel \bar{p}_0 als \hat{p}_1 moeten nog worden bepaald.

Dat kan m.b.v. de relaties (6.86.) t/m (6.89.). Voor het benaderen van \bar{p}_0 is het echter handig om voor \hat{p}_1 een functie te kiezen. De meest eenvoudige vorm is de oplossing van Bakker voor \hat{p}_1 (zie par. 6.1.) en ook (6.95.) en (6.96.):

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_{b_1} e^{-2\pi z/\lambda_p} \quad (6.103.)$$

$$\lambda_p = \frac{3.2}{3\pi^2} \kappa \hat{p}_{b_1} T \quad (6.104.)$$

De functie $\bar{p}_0(z)$ kan dan worden bepaald uit (6.86.) en (6.88.). Vergelijking (6.86.) kan nog worden benaderd met (6.90.). Doordat \bar{q}_0 constant is aangenomen over de hoogte geldt (6.90.) of (6.88.) ook aan de bodem.

Aangezien \bar{p}_0 daar gelijk is aan \bar{p}_b kan m.b.v. (6.90.) en (6.88.) \bar{p}_0 als functie van \bar{p}_b , \hat{p}_{b_1} en z worden bepaald.

Dus de functie \bar{p}_0 volgt uit gelijkstellen van (6.105^a), resp. (6.105^b) met (6.106^a) als $\bar{p}_{b_0}/\hat{p}_{b_1} < 1$ of resp. met (6.106^b) als $\bar{p}_{b_0}/\hat{p}_{b_1} > 1$:

$$\bar{p}_0 < \hat{p}_1 : \bar{q}_0 = \left\{ \frac{4}{\pi} \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) + \left(2 \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi} \right) \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^3 \right\} \hat{p}_1^2 \quad (6.105^a)$$

$$\bar{p}_0 \geq \hat{p}_1 : \bar{q}_0 = \bar{p}_0^2 + \frac{1}{2} \hat{p}_1^2 \quad (6.105^b)$$

$$\bar{p}_{b_0} < \hat{p}_{b_1} : \bar{q}_0 = \left\{ \frac{4}{\pi} \left(\frac{\bar{p}_{b_0}}{\hat{p}_{b_1}} \right) + \left(2 \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi} \right) \left(\frac{\bar{p}_{b_0}}{\hat{p}_{b_1}} \right)^2 + \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \left(\frac{\bar{p}_{b_0}}{\hat{p}_{b_1}} \right)^3 \right\} \hat{p}_{b_1}^2 \quad (6.106^a)$$

$$\bar{p}_{b_0} \geq \hat{p}_{b_1} : \bar{q}_0 = \bar{p}_{b_0}^2 + \frac{1}{2} \hat{p}_{b_1}^2 \quad (6.106^b)$$

met \hat{p}_1 volgens (6.103.).

Hieruit volgt \bar{p}_0/\hat{p}_{b_1} als functie van $\frac{z}{\kappa \hat{p}_{b_1} T}$ en $\bar{p}_{b_0}/\hat{p}_{b_1}$.

Voor $\bar{p}_{b_0}/\hat{p}_{b_1}$ gelijk aan 0.01, 0.1, 0.5 en 1 is in bijlage 12 die functie gegeven. Hierin is met stippellijnen aangegeven wat Bakker in zijn berekening heeft aangehouden^{*}). Deze wijkt bij grote waarden van $\bar{p}_{b_0}/\hat{p}_{b_1}$ sterk af van wat \bar{p}_0/\hat{p}_{b_1} als functie van $z/(\kappa \hat{p}_{b_1} T)$ zou moeten zijn bij de

^{*}) Bakker benadert (6.105^a) en (6.106^a) door $\frac{4}{\pi} \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)$ resp. $\frac{4}{\pi} \left(\frac{\bar{p}_{b_0}}{\hat{p}_{b_1}} \right)$.

gekozen functie voor \hat{p}_1 , welke Bakker tenslotte ook gebruikt. Verder blijkt dat voor grote waarden van $\frac{z}{\kappa \hat{p}_{b_1} T}$, $\bar{p}_o / \hat{p}_{b_1}$ nadert tot $\sqrt{\bar{q}_o / \hat{p}_{b_1}}$.

Dit volgt eenvoudig uit (6.103.) en 6.105^b).

Bij de berekening van de gemiddelde snelheid in paragraaf 6.4. zal op grond van hetgeen gevonden is in bijlage 12 een eenvoudiger functie voor \bar{p}_o gekozen worden dan Bakker doet, namelijk

$$z < z_k : \frac{\bar{p}_o}{\hat{p}_{b_1}} = \frac{\bar{p}_{b_o}}{\hat{p}_{b_1}} + A \frac{z}{\kappa \hat{p}_{b_1} T} \quad (6.107.)$$

$$z \geq z_k : \frac{\bar{p}_o}{\hat{p}_{b_1}} = \frac{\sqrt{\bar{q}_o}}{\hat{p}_{b_1}} \quad (6.108.)$$

met:

$$\sqrt{\bar{q}_o} = \hat{p}_{b_1} \left\{ \frac{4}{\pi} \left(\frac{\bar{p}_{b_o}}{\hat{p}_{b_1}} \right) + \left(2 \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi} \right) \left(\frac{\bar{p}_{b_o}}{\hat{p}_{b_1}} \right)^2 + \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \left(\frac{\bar{p}_{b_o}}{\hat{p}_{b_1}} \right)^3 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ als } \bar{p}_{b_o} < \hat{p}_{b_1}$$

$$\sqrt{\bar{q}_o} = \hat{p}_{b_1} \left\{ \left(\frac{\bar{p}_{b_o}}{\hat{p}_{b_1}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ als } \bar{p}_{b_o} > \hat{p}_{b_1} \quad (6.109.)$$

z_k = de hoogste waarop de knik in \bar{p}_o aanwezig is en volgt uit:

$$\sqrt{\bar{q}_o} / \hat{p}_{b_1} = \bar{p}_{b_o} / \hat{p}_{b_1} + A \cdot \frac{z_k}{\kappa \hat{p}_{b_1} T} \quad (6.110.)$$

A = nader te bepalen constante.

De constante A kan eenvoudig worden bepaald door de lijn gegeven door (6.107.) de werkelijke kromme voor $\bar{p}_o / \hat{p}_{b_1}$ (zie bijlage 12) te laten snijden in het punt waar geldt^{*}):

$$\frac{\bar{p}_o}{\hat{p}_{b_1}} = \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_{b_1}} \quad (6.111.)$$

Deze punten zijn eveneens aangegeven in bijlage 12. Uit (6.111.) en (6.103.) volgt dat ze allen op de lijn bepaald door (6.103.) moeten liggen. Stel in een snijpunt is $z = z_s$, dan volgt z_s uit (6.105^b) en (6.103.):

$$\bar{q}_o = \bar{p}_o^2 + \frac{1}{2} \hat{p}_1^2 = \frac{3}{2} \hat{p}_1^2 = \frac{3}{2} \hat{p}_{b_1}^2 e^{-\frac{3\pi^3}{16} \frac{z_s}{\kappa \hat{p}_{b_1} T} \cdot 2}$$

^{*}) Deze bepalingswijze van A is arbitrair, maar blijkt tot redelijke oplossingen te leiden.

ofwel:

$$z_s = -\frac{8}{3\pi^3} \kappa \hat{p}_{b_1} T \ln \left\{ \frac{2}{3} \frac{\bar{q}_o}{\hat{p}_{b_1}^2} \right\} \quad (6.112.)$$

Bovendien geldt in het snijpunt met (6.107.):

$$\frac{\bar{p}_o}{\hat{p}_{b_1}} = \frac{\bar{p}_{b_o}}{\hat{p}_{b_1}} + A \cdot \frac{z_s}{\kappa \hat{p}_{b_1} T} \quad (6.113.)$$

Daar $\bar{p}_o = \hat{p}_1$ en $\hat{p}_1^2 = \frac{2}{3} \bar{q}_o$ (zie (6.112.)) volgt uit (6.113.) na substitutie van (6.112.):

$$A = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \frac{\bar{q}_o}{\hat{p}_{b_1}^2}} - \frac{\bar{p}_{b_o}}{\hat{p}_{b_1}}}{-\frac{8}{3\pi^3} \cdot \ln \left\{ \frac{2}{3} \frac{\bar{q}_o}{\hat{p}_{b_1}^2} \right\}} \quad (6.114.)$$

Daar $\bar{q}_o / \hat{p}_{b_1}^2$ volgens (6.106^a) of (6.106^b) enkel een functie is van $\bar{p}_{b_o} / \hat{p}_{b_1}$ is A enkel een functie van $\bar{p}_{b_o} / \hat{p}_{b_1}$.

6.3. Analytische oplossing bij golven zonder stroom

Voor het berekenen van de snelheid t/m de eerste harmonische in de grenslaag bij golven zonder stroom wordt uitgegaan van de linearisatie gegeven in paragraaf 6.2.4. De snelheid kan dan berekend worden uit het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= K_z \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} & (a) \\ \frac{\partial u_d}{\partial t} &= \frac{\partial q}{\partial z} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.115.)$$

(zie resp. vergelijking (6.94.) en (6.79^a)).

$$\text{met } K_z = \kappa z \hat{q}_1 / \hat{p}_1 \quad (6.116.)$$

De randvoorwaarden zijn (zie (6.71.)):

$$\left. \begin{aligned} z = z_{\max} & \quad u_d = 0 & (a) \\ z = z_o & \quad u_d = -U & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.117.)$$

Daar er sprake is van uitdemping van u_d voor $z \rightarrow z_{\max}$ (zie b.v. Bakker = 2-) kan de randvoorwaarde (6.117^a) geschreven worden als:

$$z \rightarrow \infty \quad u_d = 0 \quad (6.117^c)$$

Voor k_z kan m.b.v. (6.91.) en de oplossing van p_1 volgens Bakker, (6.95.) en (6.96.), geschreven worden:

$$K_z = \kappa z \frac{8}{3\pi} \cdot \hat{p}_{b_1} e^{-2\pi z/\lambda_p} \quad (6.118.)$$

$$\text{met } \lambda_p = \frac{32}{3\pi^2} \kappa \hat{p}_{b_1} T \quad (6.119.)$$

Alvorens over te gaan op het oplossen van het stelsel (6.115.) worden u_d , q , t en z dimensieloos gemaakt, en wel als volgt:

$$\left. \begin{aligned} q' &= \frac{q}{\hat{p}_{b_1}^2} & (a) \\ z' &= 2\pi \frac{z}{\lambda_p} = \frac{3\pi^3}{16} \frac{z}{\kappa \hat{p}_{b_1} T} & (b) \\ u_d' &= \frac{u_d}{\hat{p}_{b_1}}, \quad U' = \frac{U}{\hat{p}_{b_1}} & (c) \\ t' &= t/T, \quad T = \text{periode golfbeweging} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (6.120.)$$

Het stelsel (6.115.) wordt dan na substitutie van (6.118.):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q'}{\partial t'} &= \frac{\pi^2}{2} z' e^{-z'} \frac{\partial^2 q'}{\partial z'^2} & (a) \\ \frac{\partial u_d'}{\partial t'} &= \frac{3\pi^3}{16} \cdot \frac{1}{\kappa} \frac{\partial q'}{\partial z'} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.121.)$$

met de randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} z' \rightarrow \infty \quad u_d' &\rightarrow 0 & (a) \\ z' = z'_0 \quad u_d' &= -U' & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.122.)$$

ofwel daar hier alleen golven wordt beschouwd:

$$\left. \begin{aligned} z' \rightarrow \infty \quad q' \rightarrow 0 & \quad (a) \\ z' = z'_0 \quad q' = q'_b & \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.123.)$$

Daar q' begrensd is als $z' \rightarrow 0$ kan (6.123^a) geschreven worden als:

$$z' = 0 \quad q' = q'_b \quad (6.123^a)$$

Voor het oplossen van (6.121.) wordt overgegaan op complexe notatie:

$$\left. \begin{aligned} q' &= \operatorname{Re} \{q'_c\} = \operatorname{Re} \{\hat{q}'_{1c} e^{i\omega t}\} & (a) \\ u'_d &= \operatorname{Re} \{u'_{dc}\} = \operatorname{Re} \{\hat{u}'_{d1c} e^{i\omega t}\} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.124.)$$

Daarbij is de schrijfwijze van q' en u'_d in harmonischen aangehouden, zoals deze is gegeven in (6.82.) en (6.83.):

$$\left. \begin{aligned} q' &= \hat{q}'_1 \cos(\omega t - \theta_1) & (a) \\ u'_d &= \hat{u}'_{d1} \cos(\omega t - \psi_1) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.125.)$$

met $\omega = 2\pi/T$

Uit (6.124.) volgt dan dat:

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}'_1 &= |\hat{q}'_{1c}| & (a) \\ \theta_1 &= -\arg \hat{q}'_{1c} & (b) \\ \hat{u}'_{d1} &= |\hat{u}'_{d1c}| & (c) \\ \psi_1 &= -\arg \hat{u}'_{d1c} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (6.126.)$$

Het stelsel (6.121.) kan m.b.v. (6.124.) in complexe vorm geschreven worden als:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{\pi} i \hat{q}'_{1c} &= z' e^{-z'} \frac{d^2 \hat{q}'_{1c}}{dz'^2} & (a) \\ \kappa \frac{32}{3\pi^2} i \hat{u}'_{d1c} &= \frac{d\hat{q}'_{1c}}{dz'} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.127.)$$

Voor het oplossen van (6.127^a) kan de functie:

$$\xi = z' e^{-z'} \quad (6.128.)$$

benaderd worden met een kwadratische functie en een negatieve exponentiële functie. Een exacte oplossing van (6.127^a) is echter volgens Kamke = 9= niet mogelijk. Daarom wordt (6.128.) benaderd met:

$$\xi_1 = a e^{-bz'} \quad \text{voor} \quad \eta \leq z' \leq \infty \quad (6.129.)$$

$$\xi_2 = cz' + dz'^2 \quad \text{voor} \quad 0 \leq z' \leq \eta \quad (6.130.)$$

In bijlage 13 is (6.128.) weergegeven.

Het verloop van de turbulente viscositeit heeft de grootste invloed op het snelheidsprofiel dicht bij de bodem. Daarom moet $d\xi/dz'$ voor $z' \rightarrow 0$ goed benaderd worden.

Uit een visuele minimalisatie volgen dan de volgende waarden voor

$$\left. \begin{aligned} a &\approx 0.761 \\ b &\approx 0.562 \\ c &\approx 0.610 \\ d &\approx -0.314 \\ \eta &\approx 1.3 \end{aligned} \right\} \quad (6.131.)$$

De oplossing van (6.127.) kan nu worden bepaald op ieder van de gebieden voor z' met op $z' = \eta$ twee aansluitvoorwaarden. Er zijn immers per gebied twee oplossingen. Noem gebied I het gebied voor $\eta < z' < \infty$ en gebied II $0 < z' < \eta$, dan zijn de aansluitvoorwaarden:

$$\hat{q}'_1(\eta)_I = \hat{q}'_1(\eta)_{II} \quad (6.132^a)$$

$$\hat{u}'_{dl}(\eta)_I = \hat{u}'_{dl}(\eta)_{II} \quad (6.132^b)$$

Oplossing gebied I

De op te lossen differentiaalvergelijking luidt:

$$\frac{4}{\pi} i \hat{q}'_1 c = a e^{-bz'} \frac{d^2 \hat{q}'_1}{dz'^2} \quad (6.133.)$$

met als randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} z' \rightarrow \infty \quad \hat{q}'_{1c} &\rightarrow 0 & (a) \\ z' = \eta \quad \frac{d\hat{q}'_{1c}}{dz'} &= \frac{3 \cdot 2}{3 \pi^2} i \hat{u}_{d1c}(\eta)_I & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.134.)$$

Oplossing van (6.133.) die voldoet aan de randvoorwaarde (6.134^a) is:

$$\hat{q}'_{1c} = -C_I \frac{2}{\pi} i \left\{ \ker_o \left(\frac{2}{b} \sqrt{\frac{4}{\pi a}} e^{\frac{1}{2}bz'} \right) + i \operatorname{kei}_o \left(\frac{2}{b} \sqrt{\frac{4}{\pi a}} e^{\frac{1}{2}bz'} \right) \right\} \quad (6.135.)$$

(zie Abramowitz =I=)

met C_I een constantë die volgt uit de randvoorwaarde (6.134^b).

Oplossing gebied II

De op te lossen differentiaalvergelijking luidt:

$$\frac{4}{\pi} i \hat{q}'_{1c} = (cz' - dz'^2) \frac{d^2 \hat{q}'_{1c}}{dz'^2} \quad (6.136.)$$

met als randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} z' = 0 \quad \hat{q}'_{1c} &= \hat{q}'_{1b_c} & (a) \\ z' = \eta \quad \frac{d\hat{q}'_{1c}}{dz'} &= \kappa \frac{32}{3 \pi^2} i \hat{u}_{d1c}(\eta)_{II} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.137.)$$

Vergelijking (6.136.) is de zgn. hypergeometrische differentiaalvergelijking en heeft als algemene oplossing

$$\begin{aligned} \hat{q}'_{1c} &= C_{II.1} \left(\frac{d}{c} z' \right) F(A+1, B+1; 2; \frac{d}{c} z') \\ &+ C_{II.2} \left(\frac{d}{c} z' \right) \left[F(A+1, B+1; 2; \frac{d}{c} z') \cdot \ln \left(\frac{d}{c} z' \right) \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{c} z' \right)^n \frac{(A+1)_n (B+1)_n}{(n+1)! n!} \{ \psi(A+1+n) - \psi(A+1) \\ &+ \psi(B+1+n) - \psi(B+1) - \psi(2+n) + \psi(2) - \psi(1+n) + \psi(1) \} \\ &+ \left. \frac{1}{A \cdot B} \left(\frac{d}{c} z' \right)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (6.138.)$$

Hierin is: $C_{II.1}$, $C_{II.2}$: constanten welke volgen uit de randvoorwaarden (6.137.)

F : hypergeometrische functie (zie Abramowitz = 1. =)

ψ : digamma functie (zie Abramowitz = 1 =)

$$(A + 1)_n = (A + 1) (A + 2) (A + 3) \dots (A + 1 + n - 1) \quad (6.139.)$$

A , B , twee constanten welke volgen uit:

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{d} i & (a) \\ A + B &= -1 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.140.)$$

De randvoorwaarde (6.137^a) is eenvoudig in te voeren, daar alle termen in (6.138.) tot nul naderen als z' tot nul nadert, op de laatste term na. Er volgt dan:

$$C_{II.2} = \hat{q}'_{1bc} \cdot A \cdot B = \frac{4}{\pi} \frac{1}{d} i \hat{q}'_{1bc} \quad (6.141.)$$

De constante $C_{II.1}$ volgt dan uit (6.137^b).

Bij het schrijven van dit rapport was de oplossing voor $C_{II.1}$ en C_I nog niet voltooid, en de hier gegeven informatie moet dan ook gezien worden als een basis om in een vervolgstudie het resultaat te kwantificeren. Alhoewel vergelijking (6.138.) er hopeloos uitziet, moet bedacht worden dat met een gunstige keuze van d en $c, \frac{d}{c} z'$ klein kan blijven. In de reeksen, waarin F kan worden ontwikkeld, behoeven dan slechts enkele termen te worden meegenomen. Hierop wordt hier verder niet ingegaan.

6.4. Analytische oplossing bij golven en stroom

Voor het berekenen van de snelheidsverdeling in de grenslaag wordt voor het tijdsafhankelijke deel uitgegaan van de linearisatie gegeven in paragraaf 6.2.4. en voor de gemiddelde snelheid van de linearisatie gegeven in paragraaf 6.2.5.

Om het tijdsafhankelijk en gemiddelde deel te splitsen wordt de notatie van (6.72.) gebruikt:

$$\begin{array}{ll}
 q = \bar{q} + \tilde{q} & \text{(a)} \\
 u_d = \bar{u}_d + \tilde{u}_d & \text{(b)}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}} \right\} \quad (6.142.)$$

De overstreping duidt op het gemiddelde deel, de slinger op het tijdsafhankelijk deel. Zoals in paragraaf 6.2.2. en 6.2.4. is beschreven kan \tilde{u}_d opgelost worden uit het stelsel:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = K_z \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial z^2} & \text{(a)} \\
 \frac{\partial \tilde{u}_d}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial z} & \text{(b)}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}} \right\} \quad (6.143.)$$

met de randvoorwaarden:

$$\begin{array}{ll}
 z = z_{\max} & \tilde{u}_d = 0 & \text{(a)} \\
 z = z_0 & \tilde{u}_d = -\tilde{U} & \text{(b)}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}} \right\} \quad (6.144.)$$

Ook nu is er weer sprake van demping van \tilde{u}_d als $z \rightarrow z_{\max}$ (zie (6.3.)) zodat (6.144^a) vervangen kan worden door:

$$z \rightarrow \infty \quad \tilde{u}_d = 0$$

Zoals in paragraaf 6.2.4. is aangegeven en zoals ook uit bijlage 11 blijkt, kan voor waarden van $\bar{p}_{b_0} / \hat{p}_{b_1} > 0,2 \text{ à } 0,3 K_z$ benaderd worden met:

$$K_z = \sigma z \quad (6.145.)$$

met σ een constante die in 6.2.4. bepaald is als (zie vergelijking (6.101)):

$$\sigma = 2\kappa \sqrt{\bar{q}_0} \quad (6.146.)$$

Oplossingen van (6.143.) zullen worden beschouwd voor alle waarden van $\bar{p}_{b_0} / \hat{p}_{b_1} > 0$.

In paragraaf 6.2.5. is aangegeven hoe de gemiddelde snelheid kan worden berekend.

Het stelsel vergelijkingen is:

$$\bar{p}_o = \kappa z \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (a)$$

$$\bar{p}_o / \hat{p}_{b_1} = \bar{p}_{b_o} / \hat{p}_{b_1} + A \cdot \frac{z}{\kappa \hat{p}_{b_1} T} \quad \text{als } z < z_k \quad (b)$$

$$\bar{p}_o / \hat{p}_{b_2} = \sqrt{\bar{q}_o} / \hat{p}_{b_1} \quad \text{als } z > z_k \quad (c)$$

$$\text{waarin } A = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \bar{q}_o / \hat{p}_{b_1}^2} - \bar{p}_{b_o} / \hat{p}_{b_1}}{-\frac{8}{3\pi^3} \ln \left\{ \frac{2}{3} \bar{q}_o / \hat{p}_{b_1}^2 \right\}} \quad (\text{zie (6.114.)}) \quad (7.148.)$$

$$z_k = \frac{\kappa \hat{p}_{b_1} T}{A} \left\{ \frac{\sqrt{\bar{q}_o}}{\hat{p}_{b_1}} - \frac{\hat{p}_{b_o}}{\hat{p}_{b_1}} \right\} \quad (\text{zie (6.110.)}) \quad (6.149.)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$z = z_o \quad u_{d_o} = -U_o \quad (a)$$

$$z = z_{\max} \quad u_{d_o} = 0 \quad (b)$$

Hoewel de differentiaalvergelijking in (6.147.) van de eerste orde is zijn er twee randvoorwaarden nodig, omdat \bar{p}_{b_o} nog onbekend is.

Zoals in 6.3. worden q , u_d , p , z en t , dimensieloos gemaakt:

$$q^* = q / \hat{p}_{b_1}^2$$

$$u_d^* = u_d / \hat{p}_{b_1}$$

$$p^* = p / \hat{p}_{b_1}$$

$$z^* = \frac{z}{\kappa \hat{p}_{b_1} T} \quad (*)$$

$$t^* = t / T$$

*) n.b. wijkt af van (6.120.).

Daarmee worden de volgende twee stelsels vergelijkingen verkregen:

voor de tijdsafhankelijke snelheid:

$$\frac{\partial \tilde{q}^*}{\partial t^*} = 2 \sqrt{\tilde{q}_0^*} z^* \frac{\partial^2 \tilde{q}^*}{\partial z^{*2}} \quad (a)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_d^*}{\partial t^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \tilde{q}^*}{\partial z^*} \quad (b)$$

$$z^* \rightarrow \infty \quad \tilde{u}_d^* \rightarrow 0 \quad (c)$$

$$z^* = z_0^* \quad \tilde{u}_d^* = -\tilde{U}^* \quad (d)$$

(6.152.)

en van de gemiddelde snelheid:

$$\bar{p}_0^* = \kappa z^* \frac{d\bar{u}_d^*}{dz^*} \quad (a)$$

$$\bar{p}_0^* = \hat{p}_{b_0}^* + A z^* \quad \text{als } z^* > z_k^* \quad (b)$$

$$\bar{p}_0^* = \sqrt{\tilde{q}_0^*} \quad \text{als } z^* < z_k^* \quad (c)$$

$$\text{met } A = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{q}_0^* - \bar{p}_{b_0}^*}{-\frac{8}{3\pi^2} \cdot \ln\{\frac{2}{3} \tilde{q}_0^*\}} \quad (d)$$

$$z_k^* = \frac{1}{A} \{\sqrt{\tilde{q}_0^*} - \bar{p}_{b_0}^*\} \quad (e)$$

$$z^* = z_0^* \quad \bar{u}_{d_0}^* = -\bar{U}_0^* \quad (f)$$

$$z^* = z_{\max}^* \quad \bar{u}_{d_0}^* = 0 \quad (g)$$

(6.153.)

Oplissing stelsel (6.152.)

Op dezelfde wijze als in paragraaf 6.3. worden de randvoorwaarden 6.152^c) en (6.152^d) vervangen door:

$$z^* \rightarrow \infty \quad \tilde{q}^* \rightarrow 0 \quad (a)$$

$$z^* = 0 \quad \tilde{q}^* = \tilde{q}_b^* \quad (b)$$

(6.154.)

Eveneens wordt op dezelfde wijze overgegaan op complexe notatie:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}^* &= \operatorname{Re} \{ \tilde{q}_c^* \} = \operatorname{Re} \{ \hat{q}_{1c}^* e^{i 2\pi t^*} \} & (a) \\ \tilde{u}_d^* &= \operatorname{Re} \{ u_{dc}^* \} = \operatorname{Re} \{ \hat{u}_{d1c}^* e^{i 2\pi t^*} \} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.155.)$$

Invullen van (6.155^a) in 6.152^a) geeft de complexe differentiaalvergelijking:

$$\hat{q}_{1c}^* i 2\pi = 2 \sqrt{q_0^*} z^* \frac{d^2 \hat{q}_{1c}^*}{dz^{*2}} \quad (6.156.)$$

met als randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} z^* \rightarrow \infty \quad \hat{q}_{1c}^* &\rightarrow 0 & (a) \\ z^* = 0 \quad |\hat{q}_{1c}^*| &= |\hat{q}_{1b}^*| = \hat{q}_{1b}^* & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.157.)$$

De oplossing die voldoet aan de randvoorwaarden is:

$$\hat{q}_{1c}^* = \hat{q}_{1b}^* (\zeta) (\operatorname{kei}_1(\zeta) - i \operatorname{ker}_1(\zeta)) \quad (6.158.)$$

(zie Abramowitz = 1=)

$$\text{met } \zeta = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{q_0^*}}} z^* \quad (6.159.)$$

De complexe snelheid volgt uit de complexe vorm van vergelijking (6.152^b):

$$2\pi i \cdot \hat{u}_{d1c}^* = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{q}_{1c}^*}{dz^*} \quad (6.160.)$$

Invullen van (6.158.) geeft voor \hat{u}_{d1c}^* :

$$\hat{u}_{d1c}^* = \hat{q}_{1b}^* \sqrt{2} \frac{1}{2 \sqrt{q_0^*} \kappa} \{ (\operatorname{ker}_0(\zeta) + \operatorname{kei}_0(\zeta)) + i (\operatorname{kei}_0(\zeta) - \operatorname{ker}_0(\zeta)) \} \quad (6.161.)$$

Voor het bepalen van de reële oplossingen is het handig de Kelvin-functies ker en kei te schrijven als (zie Abramowitz = 1 =):

$$\left. \begin{aligned} \text{ker}_n &= N_n \cos \Phi_n & (a) \\ \text{kei}_n &= N_n \sin \Phi_n & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.162.)$$

Er volgt dan voor de reële oplossing van \tilde{u}_d en \tilde{q} :

$$\tilde{u}_d^* = \hat{q}_{1b}^* \frac{1}{\sqrt{\hat{q}_o^*}} \frac{1}{\kappa} N_o(\zeta) \cos(2\pi t + \Phi_o(\zeta) - \frac{1}{4}\pi) \quad (6.163.)$$

$$\tilde{q}^* = \hat{q}_{1b}^* \zeta N_1(\zeta) \cos(2\pi t + \Phi_1(\zeta) - \frac{1}{2}\pi) \quad (6.164.)$$

Voor kleine waarden van ζ gelden de volgende benaderingen:

$$\left. \begin{aligned} \zeta \rightarrow 0: N_o(\zeta) &\rightarrow \left| \ln \frac{1}{2} \zeta \right| & (a) \\ \zeta N_1(\zeta) &\rightarrow 1 & (b) \\ \Phi_o(\zeta) &\rightarrow 0 & (c) \\ \Phi_1(\zeta) &\rightarrow -\frac{3}{4}\pi & (d) \end{aligned} \right\} \quad (6.165.)$$

Uit (6.165^c) en (6.165^d) volgt dat als $z^* \rightarrow 0$, \tilde{q}^* en \tilde{u}_d^* blijkbaar π rad in fase verschillen ofwel \tilde{q}^* en $-\tilde{u}_d^*$ zijn in fase. Doch de oplossing voor \tilde{u}_d^* is slechts van belang voor $z^* > z_o^*$.

In de oplossing voor \tilde{u}_d^* (6.163.) komen nog de onbekenden \hat{q}_{1b}^* en \bar{q}_o^* voor. Deze zijn volgens (6.86.) t/m (6.89.) enkel afhankelijk van $\bar{p}_{bo} / \hat{p}_{b1}$. In bijlage 14^a is oplossing (6.163.) dan ook voor verschillende waarden van $\bar{p}_{bo} / \hat{p}_{b1}$ uitgezet, te weten 0,01, 0,05, 0,1 en 0,2.

Er staat uitgezet \hat{u}_{d1}^* en ψ_1 tegen z^* , waarbij geldt:

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{d1}^* &= \hat{q}_{1b}^* \frac{1}{\sqrt{\hat{q}_o^*}} \frac{1}{\kappa} N_o(\zeta) & (a) \\ \psi_1 &= \Phi_o(\zeta) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.166.)$$

met ψ_1 het faseverschil tussen $-\tilde{u}_d^*$ en \tilde{q}^* zoals volgt uit (6.163) t/m (6.165). Uit de figuur blijkt duidelijk dat voor kleine waarden van $\bar{p}_{bo} / \hat{p}_{b1}$ sterke afwijking optreedt t.o.v. oplossingen van b.v. Bakker (zie bijlage 6^a). Dit hangt samen met het meer afwijken van K_z en $\frac{dK_z}{dz}|_{z=0}$ als $\frac{\bar{p}_{bo}}{\hat{p}_{b1}}$ kleiner wordt (zie bijlage 11). Daarentegen wordt de tendens in de metingen voor grotere waarden van $\frac{\bar{p}_{bo}}{\hat{p}_{b1}}$ beter weergegeven.

Vergelijking (6.163.) kan ook in niet-dimensieloze vorm geschreven worden. Er volgt:

$$\tilde{u}_d = \frac{\hat{q}_{1b}}{\sqrt{q_0}} \frac{1}{\kappa} N_0(\zeta) \cos\left(\omega t + \Phi_0(\zeta) - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (6.167.)$$

$$\zeta = 2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} \cdot \frac{z}{\kappa T}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.168.)$$

Indien q_0 bekend is uit b.v. een bekend verhang in de gemiddelde stand van het wateroppervlak en z_0 is gegeven, dan volgt \hat{q}_{1b} direct uit de randvoorwaarde (6.144^b) m.b.t. de amplitude van \tilde{u}_d :

$$\hat{U}_1 = \frac{\hat{q}_{1b}}{\sqrt{q_0}} \frac{1}{\kappa} N_0(\zeta_0) \quad (6.169.)$$

$$\zeta_0 = 2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{q_0}} \cdot \frac{z_0}{\kappa T}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.170.)$$

Uit de relaties (6.86.) en (6.87.) volgen dan onmiddellijk \hat{p}_{b1} en \bar{p}_{b0} .

De opgelegde fase van \tilde{U} in (6.144^b) is in (6.164.) teruggebracht tot de opgelegde fase in \tilde{q}_b namelijk gelijk aan $-\frac{5}{4}\pi^*$. Doch het gaat om het faseverschil tussen \tilde{U} en \tilde{q}_b , welke volgens (6.166b) gelijk is aan $\Phi_0(\zeta_0)$. De faseverschuiving tussen $-\tilde{u}_d$ en \tilde{U} bedraagt dan $\Phi_0(\zeta) - \Phi_0(\zeta_0)$.

Oplossing stelsel (6.153.)

De oplossing voor \bar{u}_d^* volgt eenvoudig uit integratie van (6.153^a) naar z^* . In (6.153.) heeft het eigenlijk weinig zin de defectsnelheid te berekenen, daar geldt:

$$\frac{d\bar{u}_d^*}{dz^*} = \frac{d\bar{u}_0^*}{dz^*}$$

Er volgt nu voor \bar{u}_0^*

$$\left. \begin{aligned} z^* < z_k^*: \bar{u}_0^* &= \frac{1}{\kappa} \left\{ \bar{p}_{b0}^* \ln \frac{z^*}{z_0^*} + A(z^* - z_0^*) \right\} & (a) \\ z^* > z_k^*: \bar{u}_0^* &= \frac{1}{\kappa} \left\{ \bar{p}_{b0}^* \ln \frac{z_k^*}{z_0^*} + A(z_k^* - z_0^*) \right\} & \\ &+ \frac{1}{\kappa} \sqrt{q_0^*} \ln \frac{z^*}{z_k^*} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6.171.)$$

*) Zie vergelijking (6.164) en (6.165).

$$\text{met } A = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \bar{q}_o^*} - \bar{p}_{b_o}^*}{-\frac{8}{3\pi} \cdot \ln \left\{ \frac{2}{3} \bar{q}_o^* \right\}} \quad (6.172)$$

$$\text{en } z_k^* = \frac{1}{A} \{ \sqrt{\bar{q}_o^*} - \bar{p}_{b_o}^* \} \quad (6.173.)$$

Daar \bar{q}_o^* weer enkel een functie is van $\bar{p}_{b_o}^*$, en dus A en z_k^* ook, is \bar{u}_o^* enkel als functie van z^* , $\bar{p}_{b_o}^*$ en z_o^* te beschrijven.

In bijlage 14^b is dat gedaan voor $\bar{p}_{b_o}^*$ gelijk aan resp. 0.01, 0.05, 0,1 en 0,2.

Hierbij is op dezelfde wijze als in de figuur van \bar{u}_o^* van Bakker in bijlage 6^b de extra variabele z_o^* geëlimineerd door de figuur te normaliseren op 10^{-3} . Dat wil zeggen, dat niet \bar{u}_o^* wordt uitgezet, maar een functie f gedefinieerd als:

$$f(z^*) = \kappa \frac{\bar{u}_o^*(z^*) - \bar{u}_o^*(10^{-3})}{\bar{p}_{b_o}^*} \quad (6.174.)$$

Invullen van (6.171.) in (6.174.) levert met $z_k^* > 10^{-3}$:

$$\left. \begin{aligned} f(z^*) &= \{ \ln z^* \cdot 10^3 + A (z^* - 10^{-3}) / \bar{p}_{b_o}^* \} \text{ als } z^* < z_k^* \quad (a) \\ f(z^*) &= \{ \ln z_k^* \cdot 10^3 + (z_k^* - 10^{-3}) / \bar{p}_{b_o}^* \} \text{ als } z^* > z_k^* \quad (b) \\ &+ \frac{\sqrt{\bar{q}_o^*}}{\bar{p}_{b_o}^*} \ln \frac{z^*}{z_k^*} \end{aligned} \right\} \quad (6.175.)$$

De functie $f(z^*)$ is tenslotte in bijlage 14^b uitgezet.

Vergeleken met de oplossing van Bakker (zie bijlage 6^b) worden de numerieke berekeningen beter benaderd.

Indien het verhang is gegeven, blijkt uit de randvoorwaarde voor de tijdsafhankelijke snelheid direct een waarde voor \hat{p}_{b_1} en \bar{p}_{b_o} te volgen. Het gemiddeld snelheidsverloop ligt dan met (6.171.) vast, en kan de gemiddelde snelheid over de hoogte worden berekend.

Indien het verhang niet bekend is, maar op hoogte $z = z_{\max}$ een randvoorwaarde voor de gemiddelde snelheid gegeven is dan moet via iteratie de waarde van $p_{b_o}^* = \bar{p}_{b_o} / \hat{p}_{b_1}$ bepaald worden. De procedure is:

1. gegeven $z_0, \hat{U}_1, \bar{U}_0, T$
2. schat $\bar{p}_{b_0}^*$
3. bepaal in bijlage 14^a het snijpunt van $\hat{u}_{d_1}^*$ (z^*) en

$$z_0^* = \frac{z_0}{\kappa U_1 T} \hat{U}_1^*$$

Dit geeft een waarde voor z_0^* en \hat{U}_1^* en dus voor \hat{p}_{b_1}

4. bepaal uit bijlage 14^b de bijbehorende waarde voor \bar{p}_{b_0}
5. bepaal $\bar{p}_{b_0} / \hat{p}_{b_1}$
6. terug naar 1.

6.5. Beschouwing van hogere harmonischen

6.5.1. Te beschouwen gevallen

In paragraaf 6.2.3. is reeds de Fourier analyse van de relatie

$$q = p |p| \tag{6.176.}$$

beschreven voor de nulde en eerste harmonischen.

Daarbij werden q en p uitgeschreven als:

$$q = \bar{q}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{q}_n \cos (n\omega t - \theta_n) \tag{6.177.}$$

$$p = \bar{p}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_n \cos (n\omega t - \phi_n) \tag{6.178.}$$

Voor de analytische oplossingen wordt (6.176.) gelineariseerd. De aldus berekende \hat{q}_1 of \hat{p}_1 zal dus in het algemeen afwijken van die in (6.177.) resp. (6.178.). Met behulp van een Fourier-analyse waarin ook de hogere harmonischen voorkomen is dan na te gaan of deze veel of weinig bijdragen aan de genoemde afwijking. Die invloed zal nader bekeken worden voor twee gevallen bij alleen golven, dus zonder resulterend waterspiegelverhang.

De gevallen zijn:

- 1^e. Waterbeweging bevat zowel oneven als even harmonischen; de invloed wordt nagegaan van de tweede harmonische van p .
- 2^e. Waterbeweging bevat enkel oneven harmonischen (zie fig. 6.4., pag. 110); de invloed wordt nagegaan van de derde harmonische van p .

In beide gevallen is geen resulterend waterspiegelverhang, zodat $\bar{\tau} = 0$ ofwel $\bar{q}_0 = 0$. Buiten de grenslaag kunnen dan nog wel door golven opgewekte driftsnelheden voorkomen, zolang de gradiënt van die snelheden over de hoogte maar gelijk aan nul blijft.

6.5.2. Invloed tweede harmonische van p

In bijlage 9^b t/m 9^e zijn voor resp. $\frac{\sqrt{\bar{q}_0}}{\hat{p}_1}$, \hat{q}_1/\hat{p}_1^2 en θ_1 , \hat{q}_2/\hat{p}_1^2 en θ_2 , \hat{q}_3/\hat{p}_1^2 en θ_3 de relatie met \bar{p}_0/\hat{p}_1 , \hat{p}_2/\hat{p}_1 en ϕ_2 weergegeven, zoals deze volgen uit Fourier-analyse.

Voor het geval de schuifspanningssnelheid gedurende de gehele periode gelijk is van teken, zijn wel expliciete uitdrukkingen te vinden (zie appendix C).

Hierbij zijn θ_1 , θ_2 , θ_3 en ϕ_2 de fasen t.o.v. p_1 .

Dat wil zeggen de fase van de eerste harmonische van p is op nul gesteld. Om het verloop duidelijk te maken is gekozen voor maar één waarde van \hat{p}_2/\hat{p}_1 namelijk 0,2. Het gaat immers enkel om een af-schatting van de invloed. Mocht deze groot blijken, dan kunnen altijd nog meerdere waarden van \hat{p}_2/\hat{p}_1 beschouwd worden.

Doordat $\bar{q}_0 = 0$ is verondersteld, treedt er een bijzondere omstandigheid op. Voor eindige waarden van \hat{p}_1 blijkt uit bijlage 9^b dat de waarden voor \bar{p}_0/\hat{p}_1 slechts in een nauwe band kan variëren met ϕ_2 . Namelijk doordat geldt $\bar{q}_0 = 0$, en \hat{p}_1 is eindig, moeten we combinaties van $\sqrt{\bar{q}_0}/\hat{p}_1$ en \bar{p}_0/\hat{p}_1 zoeken op de horizontale as in bijlage 9^b. Uit bijlage 9^c blijkt dan, dat als \bar{p}_0/\hat{p}_1 binnen die band blijft \hat{q}_1/\hat{p}_1^2 vrijwel gelijk blijft aan de waarde bij $\bar{p}_0/\hat{p}_1 = 0$ (spreiding van ca. 0,025 op de 0,87, dus een afwijking kleiner dan ca. 3%).

Bovendien is de waarde van \hat{q}_1/\hat{p}_1^2 in $\bar{p}_0/\hat{p}_1 = 0$ t.o.v. \hat{q}_1/\hat{p}_1^2 bij $\hat{p}_2/\hat{p}_1 = 0$ slechts 0,02 op de 0,85 verhoogd.

Een totale maximale afwijking dus van ca. 5%. Dit terwijl inmiddels \hat{p}_2 al 20% bedraagt van \hat{p}_1 .

Uit de onderste figuur in bijlage 9^c blijkt de fase van q_1 nog in veel geringere mate te worden beïnvloed.

Geconcludeerd kan dus worden dat de invloed van de tweede harmonische van p (\hat{p}_2 en ϕ_2) op de eerste harmonische van q (\hat{q}_1 en θ_1) bijzonder gering is, zodat de linearisatie, die in paragraaf 6.2.4. is toegepast, gehandhaafd kan blijven voor wat betreft de invloed van \hat{p}_2 en ϕ_2 .

6.5.3. Invloed derde harmonische van p

In dit geval is er sprake van enkel oneven harmonischen van zowel p als van q . Het heeft dus geen zin om variatie van \bar{p}_0/\hat{p}_1 te bekijken. In bijlage 10 is dan ook op de horizontale as \hat{p}_3/\hat{p}_1 te vinden i.p.v. \bar{p}_0/\hat{p}_1 . Uitgezet zijn de relaties tussen \hat{q}_1/\hat{p}_1^2 , θ_1 , \hat{q}_3/\hat{p}_1^2 en θ_3 met \hat{p}_3/\hat{p}_1 en ϕ_3 . Indien we weer $\hat{p}_3/\hat{p}_1 = 0,2$ beschouwen dan blijkt dat \hat{q}_1/\hat{p}_1^2 varieert met 0,13 op de 0,85 ofwel binnen een marge van ca. 15%. De fase van q_1 varieert slechts met maximaal 6%. De invloed t.o.v. de tweede harmonische is dus veel sterker, doch als de tweede overheerst, zoals bijvoorbeeld bij cnoïdale golven, dan zal \hat{p}_3/\hat{p}_1 veel kleiner zijn dan 0,2 zodat de totale invloed op \hat{q}_1/\hat{p}_1^2 gering blijft (zeker op de fase van q_1 : θ_1) en de linearisatie gegeven in 6.2.4. niet ondermijnd wordt.

7. Energiedissipatie in de grenslaag.

7.1. Afleiding

In hoofdstuk 4 is afgeleid dat de dissipatie van energie per eenheid van tijd en volume in de grenslaag gegeven wordt door:

$$P_{\text{per}} = \frac{1}{T V'} \int \int \tau \frac{\partial u}{\partial z} dz dt \quad * \quad (\text{J/sm}^3) \quad (7.1)$$

In de laminaire grenslaag volgt met

$$\tau \rightarrow \sigma_{xz} = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial z}$$

voor P_{per} :

$$P_{\text{l.per}} = \frac{\rho}{T V'} \int \int \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz dt \quad (7.2)$$

In de turbulente grenslaag wordt met de hypothese van Boussinesq (zie hoofdstuk 5) analoog aan (7.2) gevonden:

$$P_{\text{t.per}} = \frac{\rho}{T V'} \int \int \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz dt \quad (7.3)$$

De totale energiedissipatie per tijdseenheid, gemiddeld over de golfperiode, en per eenheid van grondoppervlak, aangeduid met E , kan worden bepaald met:

$$E = P_{\text{per}} d = \frac{1}{T} \int_0^d \int \tau \frac{\partial u}{\partial z} dz dt \quad (\text{J/sm}^2) \quad (7.4)$$

met d = gemiddelde waterdiepte; het integratie-interval L_z is $z_0 < z < d$

$z_0 = 0$ voor laminaire grenslaag

$z_0 = r/30$ voor volledig turbulente grenslaag, met r de equivalente Nikuradse ruwheid.

Op dezelfde wijze als in paragraaf 6.2. worden τ en U gesplitst in een tijdsgemiddeld deel en een tijdsafhankelijk deel:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \bar{\tau} + \tilde{\tau} \\ u &= \bar{u} + \tilde{u} \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

*) De plaatscoördinaten x_1 en x_2 in hoofdstuk 4 zijn vervangen door resp. x en z . Overeenkomstig zijn de snelheden u_1 en u_2 vervangen door resp. u en w .

Buiten de grenslaag wordt de stroming voor wat betreft de golfbeweging wervelvrij beschouwd, ofwel buiten de grenslaag is de schuifspanning geen functie meer van de tijd.

Gebruikmakend van (7.5) kan dan bij aanname dat de grenslaag zich uitstrekt van $z = z_0$ tot $z = z_{\max}$, voor E geschreven worden:

$$E = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{z_0}^{z_{\max}} \tilde{\tau} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} dz dt + \frac{d}{dz} \int_{z_0}^{\bar{z}} \tilde{\tau} \frac{d\tilde{u}}{dz} dz \quad (7.6)$$

I II

De eerste integraal in (7.6) aangegeven met E_I kan als volgt worden uitgeschreven:

$$E_I = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{z_0}^{z_{\max}} [\tilde{\tau} \tilde{u}] dz dt - \frac{1}{T} \int_0^T \int_{z_0}^{z_{\max}} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial z} dz dt \quad (7.7)$$

Daar voor $z \geq z_{\max}$ geldt $\tilde{\tau} = 0$ en op $z = z_0$ geldt $\tilde{u} = 0$ is de eerste term in (7.7) gelijk aan nul.

Voor de tweede term in (7.7) kan gebruik gemaakt worden van de bewegingsvergelijking (4.27):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (7.8)$$

In paragraaf 6.2.1. wordt aangetoond, dat deze vergelijking geschreven kan worden als:

$$\frac{\partial \tilde{u}_d}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial z} \quad (7.9)$$

met u_d de defectsnelheid gedefinieerd volgens:

$$u_d = u - U, \quad U = u(t, z_{\max}) \quad (7.10)$$

Invullen van (7.9) en (7.10) in (7.7) levert:

$$E_I = - \frac{\rho}{T} \int_0^T \int_{z_0}^{z_{\max}} \tilde{u}_d \frac{\partial \tilde{u}_d}{\partial t} dz dt - \frac{1}{T} \int_0^T \int_{z_0}^{z_{\max}} \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial z} dz dt \quad (7.11)$$

De eerste term in (7.11) is gelijk aan nul. Namelijk integratie naar de tijd levert, gezien de periodiciteit van u_d :

$$\int_0^T \int_{z_0}^{z_{\max}} \tilde{u}_d \frac{\partial \tilde{u}_d}{\partial t} dz dt = \int_{z_0}^{z_{\max}} \left\{ \int_0^T \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_d^2}{\partial t} dt \right\} dz = 0$$

Voor E_I volgt nu na integratie naar z in de tweede term:

$$E_I = -\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{U} [\tilde{\tau}]_{z_0}^{z_{\max}} dt \quad (7.12)$$

Substitutie van de randvoorwaarden voor :

$$z = z_{\max} : \tilde{\tau} = 0$$

$$z = z_0 : \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_b$$

levert tenslotte voor E_I :

$$E_I = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{U} \tilde{\tau}_b dt \quad (7.13)$$

Voor het oplossen van de tweede integraal in (7.6) wordt een lineaire verdeling van de tijdsgemiddelde schuifspanning over de hoogte verondersteld zoals weergegeven in fig. (6.1).

Buiten de grenslaag is de schuifspanning in het buitengebied gelijk aan de gemiddelde schuifspanning, en wordt volledig bepaald door de gemiddelde drukgradiënt naar x , welke gezien de grenslaagbenadering voor de gesuperponeerde stroom constant is over de gehele waterdiepte. Dit resulteert in een lineair verband in z voor $\bar{\tau}$. In de grenslaag voor de golfbeweging, volgt uit de grenslaagbenadering dat de tijdsafhankelijke drukgradiënt naar x constant is over de hoogte van de grenslaag. De tijdsgemiddelde drukgradiënt naar x in de grenslaag is dan gelijk aan die in het buitengebied. Uit de vereenvoudigde bewegingsvergelijking (7.8) volgt dan na middelen over de periode, het lineaire verband in z voor de tijdsgemiddelde schuifspanning.

Het lineaire verband wordt gegeven door:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_b (1 - z/d) \quad (7.14)$$

Voor E_{II} volgt dan:

$$\begin{aligned} E_{II} &= \int_{z_0}^d \bar{\tau}_b (1-z/d) \frac{d\bar{u}}{dz} dz = \bar{\tau}_b \bar{u}(d) - \frac{\bar{\tau}_b}{d} \int_{z_0}^d z \frac{d\bar{u}}{dz} dz \\ &= \bar{\tau}_b \bar{u}(d) - \frac{\bar{\tau}_b}{d} [z \bar{u}]_{z_0}^d + \frac{\bar{\tau}_b}{d} \int_{z_0}^d \bar{u} dz = \frac{\bar{\tau}_b}{d} \int_{z_0}^d \bar{u} dz \quad (7.15) \end{aligned}$$

Ter vereenvoudiging kan ingevoerd worden de gemiddelde snelheid over de hoogte, aangegeven met \bar{u} . Dus

$$\bar{u} = \frac{1}{d} \int_{z_0}^d \bar{u} dz \quad (7.16)$$

De totale energiedissipatie per golfperiode en grondoppervlak wordt dan volgens (7.6):

$$E = \bar{\tau}_b \bar{u} + \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{U} \tilde{\tau}_b dt \quad (7.17)$$

Daar de grootte van de golfbeweging afhangt, is de dissipatie niet simpel een superpositie van de dissipatie bij alleen een uniforme stroom, gegeven het verhang, en de dissipatie bij alleen een golfbeweging. Wel kan de laatste term als de bijdrage worden beschouwd in E van de dissipatie in de grenslaag bij golven.

De laatste term in (7.17) kan nog eenvoudig in harmonische componenten worden uitgeschreven.

$$\begin{aligned} \text{Stel } \tilde{U} &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \cos(n\omega t - \psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \{ \cos\psi_n \cos n\omega t + \sin\psi_n \sin n\omega t \} \\ \tilde{\tau}_b &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\tau}_{bn} \cos(n\omega t - \theta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\tau}_{bn} \{ \cos\theta_n \cos n\omega t + \sin\theta_n \sin n\omega t \} \end{aligned} \quad (7.18)^*$$

In de laatste term in (7.17) staat het produkt $\hat{U} \hat{\tau}_b$.

Neem nu een willekeurig produkt term uit de produkt reeks, welke volgt uit (7.18):

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{bn} \hat{U}_m \{ \cos\psi_m \cos\theta_n \cos m\omega t \cos n\omega t + \cos\psi_m \sin\theta_n \cos m\omega t \sin n\omega t \\ + \sin\psi_m \cos\theta_n \cos n\omega t \sin m\omega t + \sin\psi_m \sin\theta_n \sin n\omega t \sin m\omega t \} \end{aligned} \quad (7.19)$$

*) $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Uit de goniometrie volgt:

$$\begin{aligned}
 \cos m \omega t \cos n \omega t &= \frac{1}{2} \cos (n+m) \omega t + \frac{1}{2} \cos (n-m) \omega t & (a) \\
 \cos m \omega t \sin n \omega t &= \frac{1}{2} \sin (n+m) \omega t + \frac{1}{2} \sin (n-m) \omega t & (b) \\
 \sin m \omega t \cos n \omega t &= \frac{1}{2} \sin (n+m) \omega t - \frac{1}{2} \sin (n-m) \omega t & (c) \\
 \sin m \omega t \sin n \omega t &= -\frac{1}{2} \cos (n+m) \omega t + \frac{1}{2} \cos (n-m) \omega t & (d)
 \end{aligned}
 \quad (7.20)$$

Bij middelen van (7.20^a) t/m (7.20^d) over de golfperiode volgt er alleen uit (7.20^a) en (7.20^d) een van nul verschillende oplossing als $m = n$.

Voor 2e term in (7.17) resulteert dan:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{U} \tilde{\tau}_b dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\tau}_{bn} \hat{U}_n \left\{ \frac{1}{2} \cos \psi_n \cos \theta_n + \frac{1}{2} \sin \psi_n \sin \theta_n \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\tau}_{bn} \hat{U}_n \cos (\psi_n - \theta_n)
 \end{aligned}$$

De totale energiedissipatie kan dus nog geschreven worden als:

$$E = \overline{\tau}_b \bar{u} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\tau}_{bn} \hat{U}_n \cos (\psi_n - \theta_n) \quad (7.21)$$

Indien alleen de snelheden en schuifspanningen t/m de eerste harmonische worden beschouwd wordt (7.21)

$$E_1 = \overline{\tau}_b \bar{u} + \frac{1}{2} \hat{\tau}_{b1} \hat{U}_1 \cos (\psi_1 - \theta_1) \quad (J/sm^2) \quad (7.22) \quad *$$

*) De index 1 bij E geeft aan dat alleen de eerste harmonische beschouwd wordt.

7.2. Enige toepassingen.

Jonsson definieert overeenkomstig de relatie tussen $\hat{\tau}_{b1}$ en \hat{U}_1 (zie vgl. 3.21)*):

$$\hat{\tau}_{b1} = \frac{1}{2} \rho f_w \hat{U}_1^2 \quad (7.23)$$

voor de over de golfperiode gemiddelde energiedissipatie per eenheid van grondoppervlak en tijdseenheid:

$$E_d = \frac{2}{3\pi} \rho f_e \hat{U}_1^3 \quad (\text{zie } 9) \quad (7.24)$$

waarin f_e een wrijvingsfactor is overeenkomstig f_w , maar nu voor de energie.

Passen we (7.22) toe op een laminaire grenslaag bij een zuiver oscillerende beweging dan volgt (zie paragraaf 3.1):

$$\hat{\tau}_{b1} = \frac{1}{2} \rho f_w \hat{U}_1^2 \quad (7.25)$$

$$\text{met } f_w = \frac{2}{\text{Re}_a^{\frac{1}{2}}}, \text{ Re}_a \text{ volgens (3.12)} \quad (7.26)$$

$$\text{en } \psi_1 - \theta_1 = 45^\circ \quad (7.27)$$

(zie 3.8) en (3.10))

Voor E_1 volgt dan:

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rho f_w \hat{U}_1^3 \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (7.28)$$

Vergelijken van E_1 met E_d volgens (7.24) geeft

$$f_e = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16} f_w \quad (7.29)$$

*) U_{1m} in (3.22) komt overeen met \hat{U}_1 hier.

Een andere aanpak voor de energiedissipatie door viskeuze krachten is die van Eagleson =5= .

Daarbij gaat hij uit van de uitdrukking van Rayleigh voor de gedissipeerde energie per eenheid van oppervlak en tijdseenheid (deze uitdrukking is eveneens in hoofdstuk 4 afgeleid):

$$E = \rho \frac{1}{T} \frac{k}{\omega} \int_0^d \int_0^L v \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx dz \quad (\text{J/sm}^2) \quad (7.30)$$

waarin : $k =$ golfgetal $= 2\pi/L$

$L =$ golflengte

$d =$ waterdiepte

$\omega =$ golffrequentie $= \frac{2\pi}{T}$, T de golfperiode

$u, w =$ resp. horizontale en verticale snelheid.

$x, z =$ resp. horizontale en verticale coördinaat.

De tweede term tussen de haken geeft de interne demping weer, de eerste term de rotatiedemping. De laatste is afwezig bij golven op diep water. In ondiep water overheerst die term.

In ondiep water kan (7.30) vereenvoudigd worden tot:

$$E = \rho \frac{1}{T} \frac{k}{\omega} \int_0^d \int_0^L v \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dx dz \quad (7.31)$$

Eagleson gebruikt nu de oplossing van Hough voor de Navier Stokes vergelijking bij meenemen van viskeuze schuifspanningen, maar verwaarlozen van de niet-lineaire convectieve termen. Er volgt voor als $\beta \gg k$:

$$E = + \frac{1}{2} \rho v \beta \left(\frac{k c H}{2 \sinh kd} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{k}{\beta} \sinh 2 kd + \dots \right) \quad (7.32)$$

met c de voortplantingssnelheid volgens:

$$c = (g/k \tanh kd)^{\frac{1}{2}} \quad (7.33)$$

$$\text{en } \beta = \left(\frac{\pi}{T v} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (zie ook (3.9))} \quad (7.34)$$

De 2e en hogere termen tussen de haken in (7.32) geven de interne demping weer. Voor alleen de rotatiedemping volgt:

$$E = + \frac{1}{2} \rho \sqrt{\pi \nu / T} \left(\frac{k c H}{2 \sinh kd} \right)^2 \quad (7.35)$$

In de lineaire golftheorie geldt voor de amplitude van de orbitaal snelheid nabij de bodem:

$$\hat{U}_1 = \frac{\pi H}{T} \frac{1}{\sinh kd} \quad (7.36)$$

Deze snelheid kan worden beschouwd als de snelheid net buiten de grenslaag. Verder is

$$c = L/T \\ \text{en } k = 2 \pi / L$$

zodat (7.35) vereenvoudigd kan worden tot:

$$E = + \frac{1}{2} \rho \sqrt{\pi \nu / T} \hat{U}_1^2 \quad (7.37)$$

Met (3.11), (3.14) en (3.15) volgt:

$$E = - \frac{1}{2} \rho \frac{1}{\sqrt{2 \text{Re}_a}} \hat{U}_1^3 \quad (7.38)$$

Dit komt overeen met (7.28), na invullen van f_w uit (7.26).

Voor zuiver ruw turbulente oscillerende beweging en bij beschouwen van alleen de eerste harmonischen wordt voor f_w enkel een afhankelijkheid van a/r gevonden. (zie paragraaf 6.1 en bijlage 8). Hetzelfde geldt voor ψ_1 (zie bijlage 7, figuur 1), waarbij $\theta_1 = 0$ is gekozen. Dan volgt uit (7.22) dat E_1 enkel een functie is van \hat{U}_1 en a/r , of als E_1 dimensieloos wordt gemaakt met $\rho \hat{U}_1^3$, is $\frac{E_1}{\rho \hat{U}_1^3}$ enkel nog een functie van a/r .

Dit verband is, gebruikmakend van de analytische resultaten van Bakker voor het verband tussen f_w en a/r en ψ_1 en a/r , weergegeven in bijlage 15. Dit in tegenstelling tot het laminaire geval, waarbij $\frac{E_1}{\rho \hat{U}_1^3}$ enkel Reynolds afhankelijk is (zie (7.38)).

8. Samenvatting en conclusies.

In het kort kan de doelstelling voor deze studie als volgt worden geformuleerd:

Op zowel analytische als numerieke wijze te onderzoeken, of de door Bakker gepresenteerde berekeningsmethode van de snelheidsverdeling in de grenslaag verbeterd kan worden, zodanig, dat de verschillen met metingen gereduceerd kunnen worden. Daarbij moeten een drietal facetten beschouwd worden:

- aantal te beschouwen harmonischen
- voldoen van mengweglengte hypothese
- numerieke procedure.

Daarnaast te onderzoeken hoe de energieverliezen in de grenslaag kunnen worden berekend.

In dit deel van het rapport worden de analytische beschouwingen en berekeningen beschreven. Eerst is een literatuuroverzicht gegeven (hoofdstuk 3) van berekeningsmethoden van de snelheidsverdeling in de grenslaag bij golven en stroom.

In hoofdstuk 4 wordt beschreven, welke termen nu precies verwaarloosd mogen worden in de algemene vergelijkingen, die transport van impuls, warmte en concentratie van materiaal beheersen, in een turbulente grenslaag. Hieruit resulteert ondermeer een eenvoudige bewegingsvergelijking. Echter om deze vergelijking op te kunnen lossen is een extra relatie tussen de interne turbulente schuifspanning en het snelheidspatroon nodig.

Voor stationaire en quasi-stationaire stromingen, wordt deze zgn. sluitingsrelatie door diverse hypothesen gegeven, welke allen in het verleden intensief bestudeerd en getest zijn. Voor sterk tijdsafhankelijke waterbeweging zoals bij golven, is er echter bijzonder weinig bekend, over de mogelijke toepassing bij niet-stationaire waterbeweging van de diverse hypothesen voor stationaire waterbeweging.

Uitzondering is de tweedelige mengweglengte hypothese van Prandtl. De problemen omtrent toepassing daarvan bij niet-stationaire waterbeweging en eventuele toepassingsmogelijkheden van andere hypothesen worden in hoofdstuk 5 beschreven.

In hoofdstuk 6 wordt uitvoerig de toepassing van het mengweglengte model voor de twee-dimensionale *) oscillerende grenslaag bij golven en stroom beschreven. De meeste aandacht wordt daarbij besteed aan analytische oplossingen, waartoe linearisatie van de vergelijkingen noodzakelijk is. Oplossingen worden gegeven voor de nulde en eerste harmonischen van de horizontale snelheid in de grenslaag. Verder wordt aandacht besteed aan de invloed van hogere harmonischen, via de niet-lineariteit van het stelsel op te lossen vergelijkingen, op de reeds verkregen oplossingen voor de nulde en eerste harmonischen.

Een nieuw analytisch berekeningsmodel wordt gegeven, dat nauwkeuriger dan de bestaande modellen aansluit bij het werkelijk verloop van de turbulente viscositeit **).

In hoofdstuk 7 zal tenslotte worden ingegaan op de energiedissipatie door turbulente en viskeuze schuifspanningen in de grenslaag.

*)

De golfvoortplantingsrichting en resulterende stroomrichting zijn daarbij gelijk.

**)

Helaas heeft de tijd ontbroken, de gevonden formules kwantitatief uit te werken tot momentane snelheidsverticalen.

In het tweede deel van dit rapport wordt de ontwikkeling en toepassing van een nieuwe computer-programma beschreven, waarmee de snelheidsverdeling in de grenslaag kan worden berekend, uitgaande van de vereenvoudigde bewegingsvergelijking en de mengweglengte hypothese van Prandtl. Voor een wat meer uitgebreide samenvatting en conclusies, omtrent het computerprogramma en de toepassing daarvan wordt verwezen naar het tweede deel.

Met betrekking tot hetgeen in de voorafgaande hoofdstukken is beschreven, kan het volgende worden geconcludeerd:

m.b.t. de analytische beschouwingen:

1. Bij de analytische berekening reduceert door de linearisatie de mengweglengte hypothese tot het turbulente viscositeitsconcept met een tijdsonafhankelijke turbulente viscositeit. Het verloop hiervan over de hoogte is met name voor golven met zwakke stroom belangrijk voor het uiteindelijk resultaat.
2. De invloed van de resulterende stroom op de snelheidsverticalen van zowel de gemiddelde snelheid als de eerste harmonische component is m.b.v. de analytische berekening duidelijk aan te geven. De gevonden tendens komt overeen met metingen, maar is kwantitatief.
3. Indien alleen de snelheden in de grenslaag worden beschouwd t.g.v. golven, dan is de invloed van de tweede harmonische van de horizontale snelheid op de oplossing van de eerste harmonische erg klein (orde van grootte: enkele procenten). Indien de waterbeweging uit vrijwel alleen oneven harmonischen bestaat, dan is de invloed van de derde harmonische van de horizontale snelheid op de eerste harmonische aanzienlijk groter dan in het eerst genoemde geval. (orde van grootte: 10%). Dit laatste geldt alleen voor de amplitude van de eerste harmonische van de horizontale snelheid. De invloed op de fase is erg klein (maximale verschuiving ca. 5°).

4. In eerste benadering kan bij de aanname van een wervelvrij buitengebied (voor wat betreft de oscillerende beweging) de energie dissipatie per oppervlakte eenheid en per periode berekend worden uit de horizontale snelheid aan de bovenrand van de grenslaag en de schuifspanningen aan de bodem.
5. De verschillen tussen analytisch berekende en gemeten snelheidsverticalen leiden samen met de resultaten van de numerieke berekening (zie daarvoor deel 2) tot de conclusie, dat de verschillen te wijten zijn aan het gekozen turbulentiemodel.
6. Een argument voor het toepassen van een ander turbulentiemodel, kan worden gevonden in het feit, dat zowel de numerieke (zie deel 2) als de analytische berekeningen grote afwijkingen met de metingen vertonen, daar waar de momentane snelheidsprofielen bultvormig zijn.
Omdat daar de snelheden groot zijn (vaak groter dan in het buitengebied) en de concentraties van materiaal relatief t.o.v. de bodemrandvoorwaarde ook groot kunnen zijn, zal bij berekening van het resulterend transport de foutinvloed op de genoemde hoogte groot zijn. De invloed op de fout wordt destemmer duidelijk als het resulterend transport beschouwd wordt als het verschil tussen een heen-en terugwaarts transport, welke beide groot zijn t.o.v. het resulterend transport.
Omdat zowel de concentratieverdeling als de snelheidsverdeling afhankelijk zijn van het turbulentiemodel, kan het bij het berekenen van resulterende transporten van belang zijn een ander fysisch reëel turbulentiemodel te gebruiken.

9. Aanbevelingen voor verder onderzoek.

Voor voortzetting van het analytisch onderzoek naar de snelheidsverdeling in de grenslaag, zijn op grond van het voorafgaande de volgende aanbevelingen te doen:

- uitbreiden en uitwerken van de analytische oplossing bij verbeterd verloop van de turbulente viscositeit.
- uitbreiden van de analytische berekeningsmethode voor het driedimensionale geval, waarbij golfvoorplantingsrichting en resulterende stroom niet gelijk gericht zijn.
- Nagaan, of toepassen van een ander turbulentie-model, zoals in hoofdstuk 5.4 beschreven is, haalbaar is. Met name zou dit getoetst kunnen worden aan metingen m.b.t. de turbulente schuifspanningen bij de combinatie van golven en stroom.

Referenties.

1. Abramowitz, M. and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical functions. Dover Publ. Inc. New York, 9 th ed., 1970.
2. Bakker, W.T., Bottom Friction and velocity Distribution in an Oscillatory Flow, Memo 72-23, 1973. Rijkswaterstaat, Directorate for Watermanagement and Hydraulic Research, Department for Coastal Research.
3. Bakker, W.T., en Th. van Doorn, De snelheden bij de bodem bij een combinatie van gelijk gerichte stroom en golven. Rijkswaterstaat Directie Waterhuishouding en Waterbeweging District Kust en Zee, Studiedienst Vlissingen Notitie WWKZ-78 V 203^d, 1978.
4. Bakker, W.T., en Th. van Doorn, Near Bottom velocities in waves with a current, Proc. 16 th. Coastal Eng. Hamburg, 1978.
5. Eagleson, P.S. Laminair damping of oscillatory waves. Journal of the Hydr. Div. ASCE, vol 88, No Hy 3, 1962.
6. Hinze, J.O. Stromingsleer, voortgezette cursus, deel I en II, Th. Delft, Laboratorium voor Aero-en Hydrodynamica, 1977.
7. Jonsson, I.G. A new approach to oscillatory, rough turbulent boundary layers. Series paper 17,15 VA. Tech. Univ. Denmark, 1978.
8. Jonsson, I.G. Measurements in the turbulent wave boundary-layer. Proc. 10th Congress Int. Ass. Hydr. Res., London, vol. 1, paper 1.12, 85-92.

9. Kamke, E. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. B.G.Teubner Stuttgart, 1977.
10. Karman, von. Mechanische Ähnlichkeit und turbulenz. Proc. 3th.Congress. Appl. Mech. 1930, pt.1, p.85.
11. Kline, S.J. et al. The structure of turbulent boundary layers. Journ. of Fluid Mech.Vol. 30, 1967, part 4, pp.741-773.
12. Kajiura, K. On the bottom friction in an oscillatory current. Bull, of the Earthquake Res.Inst. vol.42, 1964, pp. 147-1.
13. Kajiura,K. A model of the Bottom boundary layer in water waves. Bull. of the Earthquake Res.Inst. vol.46, 1968, pp.75-123.
14. Lamb, H. sir. Hydrodynamics. 6th. ed. Cambrigde Univ.Press., 1975.
15. Lundgren, H. Turbulent currents in the presence of waves. Proc.13 th. Coastel Eng. Conf. 1972, vol II pp. 623-634.
16. Launder, B.E. and D.B.Spalding. Lectures in mathematical models of turbulence, Academic Press, 1972.
17. Madsen, O.S. and W.D.Grant. Combined wave and current Interaction with a rough bottom. Journal of Geoph.Research, vol.84, no C4, 1979.
18. Overeem, J.van. Literatuuronderzoek naar de formules voor bodemschuifspanning en wrijvingscoëfficient, zowel voor golven als stroom . Afstudeer-verslag TH.Delft, afd. Civiele Techniek, Vakgroep Vloeistofmechanica, 1978.
19. Prandtl, L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, 1925, ZAMM 5, 136.

- 20 . Prandtl, L. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildeten Turbulenz, 1945, Nachrichten von der Akademie der Wissenschaft Göttingen.
- 21 . Ramaprian, B.R. and A.Mueller, Transitional Periodic Boundary Layer Study. Journal of the Hydr. Div. vol.106, no.Hy 12, dec.1980.
- 22 . Riedel, R.H. and J.W.Kamphuis, A shear plate for use in oscillatory flow. Journal of Hydr.Res., 1973, no 2, pp.137-156.
- 23 . Smith, T.J. and H.S.Takkar. On the calculation of the with averaged flow due to long waves in an open channel. Journal of Hydr.Res., vol.17, no.4, 1979, pp.329-340.
- 24 . Stone, R.O. and H.J.Summers. Study of subaqueous and subaerial sand ripples. University S.Cal. Depart.Geol.Sci. Report 72-1, 293 p.
- 25 . Tennekes, H. and J.L.Lumley, A first Course in turbulence. The MIT-Press. 5 th, print, 1978.

Appendix A.

In deze appendix wordt de grenslaagbenadering toegepast op de vergelijkingen (4.9) t/m (4.11) en (4.12^f) en (4.12^g) uit hoofdstuk 4.

Voordat de vergelijkingen vereenvoudigd worden, wordt allereerst het aantal onbekenden gereduceerd, door de stromingstoestand als tweedimensionaal te beschouwen (x_1 - en x_2 -richting). Met betrekking tot de derde dimensie (x_3 -richting) wordt aangenomen, dat alle grootheden uniform verdeeld zijn.

Veronderstel nu de volgende schalen:

- snelheidsschalen: x_1 richting: V_1 deze kan worden gedefinieerd door

$$V_1 = \hat{u}_1 + \bar{u}, \text{ waarin} \quad (A1)$$

\hat{u}_1 amplitude horizontale snelheid nabij de bodem buiten de grenslaag t.g.v. golven.

\bar{u} gemiddelde horizontale snelheid nabij de bodem buiten de grenslaag.

x_2 richting: V_2 deze kan worden gedefinieerd door:

$$V_2 = \hat{u}_2, \text{ waarin} \quad (A2)$$

\hat{u}_2 amplitude verticale snelheid, nabij de bodem buiten de grenslaag t.g.v. golven.

- tijdschaal: T daar de interesse uitgaat naar de grenslaagontwikkeling bij golven zal als tijdschaal de golfperiode T een voor de hand liggende keuze zijn, dus

$$T = T.$$

- lengteschalen: x_1 richting : L_1

x_2 richting : L_2

Beide volgen via de continuïteitsvergelijking uit de snelheidsschalen en tijdschaal. (zie(A9)).

- schaal turbulente snelheidsfluctuaties: l

aangenomen wordt, dat de snelheidsfluctuaties in de twee dimensies van dezelfde orde van grootte zijn.

- schaal concentratie: C

Toegepast op een zandconcentratie zou voor C de bodemconcentratie genomen kunnen worden. Evenals de navolgende schalen is de keuze voor C voor de grenslaagbenadering verder niet relevant.

- schaal drukgradiënten: x_1 -richting: Λ_1 , voor golven gecombineerd met een resulterende stroom kan een maat hiervoor zijn:
- $$\Lambda_1 = \rho g I + \hat{p}^+ / L_1 \quad , \text{ waarin}$$
- \hat{p}^+ de amplitude van druk nabij de bodem verminderd met de hydrostatische druk
 I energieverhang van de resulterende stroom.

x_2 -richting: Λ_2 , in deze richting ligt het voor de hand, gezien de gekozen orientatie weergegeven in fig.4.1 ,als maat te kiezen de hydrostatische drukgradiënt:

$$\Lambda_2 = \rho g$$

De keuze voor Λ_1 en Λ_2 is voor de grenslaag benadering niet essentiël.

- schaal energiedissipatie: Θ

Zoals uit hoofdstuk 7 blijkt, geldt, dat de energiedissipatie in de grenslaag per eenheid van tijd en grondoppervlak bij het geval van alleen golven evenredig is met $\rho \hat{u}_1^3$. Dit geldt voor zowel een laminaire als een turbulente grenslaag. Voor een uniforme stroom geldt eveneens dat de dissipatie evenredig is met $\rho \bar{u}$. (\hat{u}_1 en \bar{u} gekozen, zoals is aangegeven bij de snelheidschalen). Een keuze voor Θ zou dan kunnen zijn:

$$\Theta = \rho (\hat{u}_1 + \bar{u})$$

doch deze is voor toepassing van de grenslaagbenadering niet van belang.

Aannemen van de aanwezigheid van een grenslaag houdt in dat er een laag nabij de bodem kan worden onderscheiden ,waarin de snelheden evenwijdig aan de bodem sterk overheersen. In het hier beschouwde geval wordt de bodem evenwijdig aan de x_1 -as verondersteld, en zal de verwachting zijn dat de x_1 -richting de hoofdstroomrichting zal zijn (zie fig. 4.1).

Of er sprake is van een grenslaag hangt dan af van de verhouding van de verticale en horizontale snelheidschalen.

Gesteld wordt dat er sprake is van een hoofdstroomrichting als :

$$\zeta = v_2/v_1 \ll 1$$

Dit is zeker het geval als de resulterende stroom overheerst:

$$\bar{u} \gg \hat{u}_1 \quad (\text{A4})$$

Namelijk voor de golfbeweging nabij de bodem geldt meestal:

$$\hat{u}_2 \leq \hat{u}_1 \quad (\text{A5})$$

zodat via (A1) aan (A3) wordt voldaan.

Voor de gevallen dat (A4) niet geldt is een veilige voorwaarde voor het veronderstellen van een grenslaag:

$$\hat{u}_2 \ll \hat{u}_1 \quad (\text{A6})$$

We kunnen \hat{u}_2/\hat{u}_1 afschatten m.b.v. de lineaire golftheorie (zie bv. Lamb =14=):

$$\hat{u}_2/\hat{u}_1 = \tanh kx_2 \quad (\text{A7})$$

waarin:

$k=2\pi/L$, L = golflengte

x_2 de verticale ordinaat zódanig, dat $x_2=0$ op de bodem.

In de turbulente grenslaag is volgens hoofdstuk 6 een maat voor de dikte van de grenslaag:

$$\kappa \hat{p}_{b1} T$$

waarin:

κ constante van von Karman: $\kappa=.4$

\hat{p}_{b1} amplitude van de schuifspanningssnelheid aan de bodem

Indien $\hat{u}_2/\hat{u}_1 \ll 1$ dan geldt voor (A7) bij benadering:

$$\hat{u}_2/\hat{u}_1 \approx 2\pi x_2/L$$

Een maat voor de grootste verhouding \hat{u}_2/\hat{u}_1 van belang voor de grenslaag is de waarde op $x_2 = \kappa \hat{p}_{b1} T$, ofwel aan (A6) zal voldaan worden als:

$$\frac{\kappa \hat{p}_{b1} T}{L} \ll 1 \quad (\text{A8})$$

In de grenslaagbenadering wordt nagegaan, welke termen in de diverse balansvergelijkingen op grond van (A3) kunnen worden verwaarloosd. Daartoe worden de grootheden en variabelen dimensieloos gemaakt m.b.v. de gedefinieerde schalen. De vergelijkingen (4.9) t/m (4.11) en (4.12^f) en (4.12^g) kunnen dan voor het twee-dimensionale geval als volgt worden uitgeschreven: *)

continuïteitsvergelijking:

$$\frac{V_1}{L_1} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{V_2}{L_2} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0 \quad (\text{A9})$$

bewegingsvergelijking:

x_1 -richting:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{T} \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + \frac{V_1^2}{L_1} u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{V_1 V_2}{L_2} u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} &= - \Lambda_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} \\ + \frac{V_1}{L_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1^*} \left\{ \nu \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} \right\} + \frac{V_1}{L_2} \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left\{ \nu \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \right\} &- \frac{\ell^2}{L_1} \frac{\partial (\overline{u_1^* u_1^*})^*}{\partial x_1^*} \\ - \frac{\ell^2}{L_2} \frac{\partial (\overline{u_1^* u_2^*})^*}{\partial x_2^*} & \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

x_2 -richting:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{T} \frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + \frac{V_1 V_2}{L_1} u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + \frac{V_2^2}{L_2} u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} &= - \Lambda_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_2^*} \\ + \frac{V_2}{L_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1^*} \left\{ \nu \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} \right\} + \frac{V_2}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left\{ \nu \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right\} &- \frac{\ell^2}{L_1} \frac{\partial (\overline{u_1^* u_2^*})^*}{\partial x_1^*} \\ - \frac{\ell^2}{L_2} \frac{\partial (\overline{u_2^* u_2^*})^*}{\partial x_2^*} & \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

diffusievergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{C}{T} \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \frac{V_1 C}{L_1} u_1^* \frac{\partial c^*}{\partial x_1^*} + \frac{V_2 C}{L_2} u_2^* \frac{\partial c^*}{\partial x_2^*} &= \frac{C}{L_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1^*} \left\{ D \frac{\partial c^*}{\partial x_1^*} \right\} \\ + \frac{C}{L_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left\{ D \frac{\partial c^*}{\partial x_2^*} \right\} - \frac{\ell C}{L_1} \frac{\partial (\overline{u_1^* c^*})^*}{\partial x_1^*} &- \frac{\ell C}{L_2} \frac{\partial (\overline{u_2^* c^*})^*}{\partial x_2^*} \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

*)

De extra termen die in vergelijking (4.10) en (4.11) voorkomen worden hier voor de eenvoud weggelaten, omdat ze op de orde van grootte beschouwing niet van invloed zijn.

energiedissipatie:

turbulent:

$$\begin{aligned} \Phi_{t,per}^* = & - \frac{\rho}{T^* V_1^*} \int_{T^*} \int_{V_1^*} \left\{ \frac{\ell^2 V_1}{L_1} (\overline{u_1'^2}) + \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\ell^2 V_1}{L_2} (\overline{u_1' u_2'}) + \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \right. \\ & \left. + \frac{\ell^2 V_2}{L_1} (\overline{u_2' u_1'}) + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + \frac{\ell^2 V_2}{L_2} (\overline{u_2'^2}) + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right\} dx_1^* dx_2^* dt^* \end{aligned} \quad (A13)$$

laminair:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,per}^* = & \frac{\rho}{T^* V_1^*} \int_{T^*} \int_{V_1^*} \nu \left\{ 2 \frac{V_1^2}{L_1^2} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} \right)^2 + 2 \frac{V_2^2}{L_2^2} \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{V_1}{L_2} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{V_2}{L_1} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} \right)^2 \right\} dx_1^* dx_2^* dt^* \end{aligned} \quad (A14)$$

Indien aangenomen wordt, dat $\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*}$ ongelijk aan nul kan zijn, dan volgt uit de continuïteitsvergelijking, dat de verhoudingen V_1/L_1 en V_2/L_2 een overeenkomende tijdschaal aangeven. De schalen L_1 en L_2 kunnen zó gekozen worden dat die tijdschaal overeenkomt met T , dus

$$\frac{L_2}{V_2} = \frac{L_1}{V_1} = T \quad (A15)$$

Om de diverse termen met elkaar te vergelijken worden de vergelijkingen (A9) t/m (A14) vermenigvuldigd met resp. :

$$(A9): L_1/V_1$$

$$(A10): L_1/V_1^2$$

$$(A11): L_1/V_1^2$$

$$(A12): T/C$$

$$(A13): L_2/V_1$$

$$(A14): (L_2/V_1)^2$$

De vergelijkingen (A9) t/m (A14) gaan dan met toepassing van (A15) over in:

continuïteit:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0 \quad (A16)$$

bewegingsvergelijking:

x_1 -richting:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} &= - \frac{T\Lambda_1}{V_1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{TV_1^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1^*} \left\{ v \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{V_1^2}{V_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left\{ v \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \right\} \right] - \frac{\ell^2}{V_1^2} \left[\frac{\partial (\overline{u_1^* u_1^*})^*}{\partial x_1^*} + \frac{V_1}{V_2} \frac{\partial (\overline{u_1^* u_2^*})^*}{\partial x_2^*} \right] \quad (A17) \end{aligned}$$

x_2 -richting:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} \left[\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right] &= - \frac{T\Lambda_2}{V_1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_2^*} + \frac{V_2}{V_1} \frac{1}{TV_1^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1^*} \left\{ v \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{V_1^2}{V_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left\{ v \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right\} \right] - \frac{\ell^2}{V_1^2} \left[\frac{\partial (\overline{u_1^* u_2^*})^*}{\partial x_1^*} + \frac{V_1}{V_2} \frac{\partial (\overline{u_2^* u_2^*})^*}{\partial x_2^*} \right] \quad (A18) \end{aligned}$$

diffusievergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial c^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial c^*}{\partial x_2^*} &= \frac{1}{TV_1^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1^*} \left\{ D \frac{\partial c^*}{\partial x_1^*} \right\} + \frac{V_1^2}{V_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left\{ D \frac{\partial c^*}{\partial x_2^*} \right\} \right] \\ &- \frac{\ell}{V_1} \left[\frac{\partial (\overline{u_1^* c^*})^*}{\partial x_1^*} + \frac{V_1}{V_2} \frac{\partial (\overline{u_2^* c^*})^*}{\partial x_2^*} \right] \quad (A19) \end{aligned}$$

energiedissipatie:

$$\begin{aligned} \text{turbulent:} \quad T\Theta \frac{V_2}{V_1} P_{t,per}^* &= - \frac{\ell^2}{T^* V_1^*} \rho \int_{T^*} \int_{V^*} \left\{ \frac{V_2}{V_1} (\overline{u_1^*{}^2})^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + (\overline{u_1^* u_2^*})^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \right. \\ &+ \left. \frac{V_2^2}{V_1^2} (\overline{u_2^* u_1^*})^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + \frac{V_2}{V_1} (\overline{u_2^*{}^2})^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right\} dx_1^* dx_2^* dt^* \quad (A20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{laminair:} \quad T^2\Theta \frac{V_2^2}{V_1^2} P_{1,per}^* &= \frac{\rho}{T^* V_1^*} \int_{T^*} \int_{V^*} v \left\{ 2 \frac{V_2^2}{V_1^2} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} \right)^2 + 2 \frac{V_2^2}{V_1^2} \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{V_2^2}{V_1^2} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} \right)^2 \right\} dx_1^* dx_2^* dt^* \quad (A21) \end{aligned}$$

Als voorwaarde (A3) aangenomen wordt, dan kunnen de vergelijkingen (A17) t/m (A21) vereenvoudigd worden, door termen van dezelfde 'soort' t.o.v elkaar te verwaarlozen, als de ene term een factor $\zeta = V_2/V_1$, of hogere macht van ζ , verschilt van de andere term.

Bovendien kunnen de twee bewegingsvergelijkingen, in x_1 -richting en x_2 -richting, met elkaar vergeleken worden. Deze vergelijkingen ((A17) en (A18)) zijn zō geschreven, dat de termen met de turbulente Reynoldse spanningen van dezelfde orde zijn of lager. Namelijk een versnelling t.g.v. de gradient $\frac{\partial \overline{u_1 u_1}}{\partial x_1}$ in (A17) in x_1 -richting en een versnelling t.g.v. gradient $\frac{\partial \overline{u_2 u_2}}{\partial x_1}$ in (A18) in x_2 -richting zullen op grond van de aanname, dat de turbulente fluctuaties in beide richtingen van dezelfde orde van grootte zijn, ook van dezelfde orde van grootte moeten zijn. Hetzelfde geldt voor de gradiënten $\frac{\partial \overline{u_1 u_2}}{\partial x_2}$ in (A17) en $\frac{\partial \overline{u_2 u_2}}{\partial x_2}$ in (A18) . De grenslaag benadering houdt bovengenoemde vereenvoudiging in en levert voor de vergelijkingen (A17) t/m (A21), geschreven in niet - dimensieloze vorm:

bewegingsvergelijking:

x_1 -richting:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \overline{u_1 u_2} \right\} \quad (\text{A22})$$

x_2 -richting:

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \{ \overline{u_2^2} \} \quad (\text{A23})$$

diffusievergelijking:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_1 \frac{\partial c}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial c}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ D \frac{\partial c}{\partial x_2} - \overline{u_2 c} \right\} \quad (\text{A24})$$

energiedissipatie:

$$\text{turbulent: } P_{t,per} = - \frac{\rho}{TV} \int_T \int_V \overline{u_1 u_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dt \quad (\text{A25})$$

$$\text{laminair: } P_{l,per} = \frac{\rho}{TV} \int_T \int_V \nu \left(\frac{u_1}{x_2} \right)^2 dx_1 dx_2 dt \quad (\text{A26})$$

Appendix B

In deze appendix wordt een benadering gegeven voor de complexe integraal E_1 voor kleine waarden van $a = \frac{2\pi z_0}{\lambda_p}$. Voor het imaginaire en reële deel van E_1 kan resp. geschreven worden (zie Abramowitz [1]) :

$$\text{Im}\{E_1(a+bi)\} = \int_0^1 \frac{e^{-at} \sin bt}{t} dt - \arctan \frac{b}{a} \quad (\text{B1})$$

$$\begin{aligned} \text{Re}\{E_1(a+bi)\} &= \int_0^1 \frac{e^{-at} (1-\cos bt)}{t} dt - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \\ &+ E_1(a) \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Voor toepassing op vergelijking (6.31) moet gelden:

$$b = 2a$$

Voor kleine waarden van a , d.w.z. $a \ll 1$, kan bij het oplossen van de integralen in (B1) en (B2) gebruik worden gemaakt van de Taylor-ontwikkeling van de functies e^{-x} , $\sin x$ en $\cos x$ om $x=0$:

$$\int_0^1 \frac{e^{-at} \sin bt}{t} dt \approx \int_0^1 \frac{(1-at)bt}{t} dt = (1-\frac{1}{2}a)b \quad (\text{B3})$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-at} (1-\cos bt)}{t} dt \approx \int_0^1 \frac{(1-at)\frac{1}{2}(bt)^2}{t} dt = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}a)\frac{1}{2}b^2 \quad (\text{B4})$$

Met $b = 2a$ en $a \ll 1$ kan m.b.v. (B3) en (B4) voor (B1) en (B2) geschreven worden:

$$\text{Im}\{E_1(a(1+2i))\} \approx 2a - \arctan 2 \quad (\text{B5})$$

$$\text{Re}\{E_1(a(1+2i))\} \approx -\frac{1}{2} \ln 5 + E_1(a) \quad (\text{B6})$$

waarin $E_1(a)$ nog benaderd kan worden met (zie [1]) :

$$E_1(a) \approx -\gamma - \ln a \quad (\text{B7})$$

met γ de constante van Euler: $\gamma \approx .5772\dots$

Er volgt dan bij benadering voor de norm en het argument van $E_1(a+bi)$:

$$|E_1(a(1+2i))| \approx -(\ln a + \gamma + \frac{1}{2}\ln 5) \approx -\ln(3.96a) \quad (\text{B8})$$

$$\arg\{E_1(a(1+2i))\} \approx \arctan\left\{\frac{2a - \arctan 2}{-\frac{1}{2}\ln 5 - \gamma - \ln a}\right\} \quad (\text{B9})$$

APPENDIX C.

In deze appendix worden de analytische relaties afgeleid tussen \bar{q}_0 , \hat{q}_1 , θ en \bar{p}_0 , \hat{p} , ϕ .

Deze relaties volgen uit de betrekkingen tussen q en p :

$$q = p|p|. \quad (C.1)$$

Daar zowel q als p periodiek zijn, kunnen q en p in een Fourierreeks ontwikkeld worden:

$$\left. \begin{aligned} q &= \bar{q}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_{nc} \cos \theta_n \cos n\omega t + q_{ns} \sin \theta_n \sin n\omega t & (a) \\ p &= \bar{p}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{nc} \cos \theta_n \cos n\omega t + p_{ns} \sin \phi_n \sin n\omega t & (b) \end{aligned} \right\} (C.2)$$

$$\text{met } \omega = 2\pi/T$$

waarin: q_{nc} , q_{ns} , p_{nc} en p_{ns} volgen uit:

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_n^2 &= q_{nc}^2 + q_{ns}^2, \quad \tan \theta_n = q_{ns}/q_{nc} \\ \hat{p}_n^2 &= p_{nc}^2 + p_{ns}^2, \quad \tan \phi_n = p_{ns}/p_{nc} \end{aligned} \right\} (C.3)$$

Beschouwen we enkel de eerste harmonische van p , dan kunnen als volgt \bar{q}_0 , q_{nc} en q_{ns} bepaald worden:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T p|p| dt & (a) \\ q_{nc} &= \frac{2}{T} \int_0^T p|p| \cos n\omega t dt & (b) \\ q_{ns} &= \frac{2}{T} \int_0^T p|p| \sin n\omega t dt & (c) \\ \text{met } p &= \bar{p}_0 + p_{1c} \cos \phi_1 \cos \omega t + p_{1s} \sin \phi_1 \sin \omega t & (d) \end{aligned} \right\} (C.4)$$

Voor de eenvoud wordt $\phi_1 = 0$ gesteld. De uit (C.4) berekende fasen, moeten dan nog worden verschoven met $+n\phi_1$ om de werkelijke fasen te krijgen. Dus daar dan $p_{1c} = \hat{p}_a$:

$$p = \bar{p}_0 + \hat{p}_{1c} \cos \omega t \quad (\text{C.5})$$

Enkel als p de vorm van (C.4^d) heeft zijn eenvoudig de integralen in (C.4) uit te rekenen. Bij meenemen van meer harmonischen is men aangewezen op een numerieke methode, behalve als

$$p > 0 \text{ of } p < 0 \text{ voor } 0 < t < T$$

Dan wordt de relatie (C.1) eenvoudig

$$\begin{aligned} q &= p^2 \text{ als } p > 0 & (\text{a}) \\ q &= -p^2 \text{ als } p < 0 & (\text{b}) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Oplossing \bar{q}_0, \hat{q}_n en θ_n met p volgens (C.4^d):

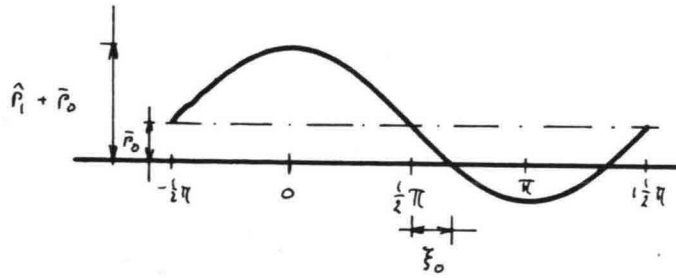
Te onderscheiden zijn de gevallen:

$$\begin{aligned} 1e: \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} > 1 \\ 2e: \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} < 1 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

In het eerste geval geldt (C.6^a).

Daar de oplossing op dezelfde wijze gevonden wordt als in het meer algemene geval, dat voor $0 < t < T$ $p > 0$, waarin p uit een onbepaald aantal harmonischen kan zijn opgebouwd, komt dit in het volgende punt aan de orde. In het tweede geval moet onderscheid gemaakt worden in het positieve en negatieve deel van p . Uit figuur C.1 volgt, dat voor:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\pi - \arcsin\left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right) < t < \frac{1}{2}\pi + \arcsin\left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right) : p > 0 \\ \text{en voor:} \\ \frac{1}{2}\pi + \arcsin\left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right) < t < \frac{3}{2}\pi - \arcsin\left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right) : p < 0 \end{aligned}$$



figuur C.1

In het navolgende zal alleen voor \bar{q}_0 de relatie met \bar{p}_0 en \hat{p}_1 worden afgeleid. De andere relaties volgen op analoge wijze bij toepassing van de goniometrische relaties (7.20). De berekening van \bar{q}_0 gaat als volgt:

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{p}_0 + \hat{p}_1 \cos \omega t) |\bar{p}_0 + \hat{p}_1 \cos \omega t| dt \quad (\text{C.8})$$

Voor de eenvoud wordt ωt vervangen door ξ . Verder wordt \hat{p}_1 buiten de integraal gebracht, en wordt de integraal gesplitst in een deel waarbij $p > 0$ en een deel, waarbij $p < 0$:

$$\bar{q}_0 = \hat{p}_1^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} + \cos \xi \right)^2 d\xi - \int_{\xi_0}^{2\pi - \xi_0} \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} + \cos \xi \right)^2 d\xi$$

$$\text{met } \xi_0 = \frac{1}{2}\pi + \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \quad (\text{C.9})$$

De integraal kan als volgt worden uitgeschreven:

$$\left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} + \cos \xi \right)^2 = \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \frac{1}{2} + 2 \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \cos \xi + \frac{1}{2} \cos 2\xi \quad (\text{C.10})$$

De primitieve van (C.10) is:

$$\left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 \right\} \xi + 2 \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \sin \xi + \frac{1}{4} \sin 2\xi$$

De 1e integraal in (C.9) levert dan:

$$\left\{ \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\} 2\xi_0 + 4 \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \sin \xi_0 + \frac{1}{2} \sin 2\xi_0$$

De 2e integraal levert:

$$\left\{ \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\} (2\pi - 2\xi_0) + - 4 \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \sin \xi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\xi_0$$

Voor \bar{q}_0 volgt dan:

$$\bar{q}_0 = \hat{p}_1^2 \frac{1}{2\pi} \left[\left\{ \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\} (4\xi_0 - 2\pi) + 8 \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \sin \xi_0 + \sin 2\xi_0 \right]$$

Daar $\xi_0 = \frac{1}{2}\pi + \arcsin(\bar{p}_0/\hat{p}_1)$

volgt er tenslotte voor \bar{q}_0 :

$$\bar{q}_0 = \hat{p}_1^2 \left[\frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\} \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) + \frac{3}{\pi} \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \cos \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \right] \quad (\text{C.11}^a)$$

Op analoge wijze kan worden gevonden:

$$\hat{q}_1 = \hat{p}_1^2 \left[\frac{4}{\pi} \frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) + \frac{4}{3\pi} \left(\left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 + 2 \right) \cos \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \right] \quad (\text{C.11}^b)$$

$$\theta_1 = 0 \quad (\text{na verschuiven } \theta_1 = \phi_1) \quad (\text{C.11}^c)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_2 = \hat{p}_1^2 \left[\frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \left\{ \left(\frac{5}{4} - \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 \right) \cos \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5}{6} \cos^3 \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \right\} \right] \quad (\text{C.11}^d) \end{aligned}$$

$$\theta_2 = 0 \quad (\text{na verschuiven } \theta_2 = 2\phi_1) \quad (\text{C.11}^e)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_3 = \frac{4}{\pi} \hat{p}_1^2 \left[\left(1 - \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 \right) \cos \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) + \frac{1}{3} \left(2 \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right)^2 - 5 \right) \cos^3 \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \right. \\ \left. + \frac{4}{5} \cos \arcsin \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1} \right) \right] \quad (\text{C.11}^f) \end{aligned}$$

$$\theta_3 = 0 \quad (\text{na verschuiven } \theta_3 = 3\phi_1) \quad (\text{C.11}^g)$$

In bijlage 9a zijn deze (C.8) en (C.11) relaties weergegeven. De relaties (C.11^a) en (C.11^b) kunnen in verband met het rekenwerk benaderd worden met polynomen:

$$\frac{\bar{q}_0}{\hat{p}_1^2} = a_1 + a_2 \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right) + a_3 \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right)^2 + a_4 \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right)^3 \quad (\text{C.12}^a)$$

$$\frac{\hat{q}_1}{\hat{p}_1^2} = b_1 + b_2 \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right) + b_3 \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right)^2 + b_4 \left(\frac{\bar{p}_0}{\hat{p}_1}\right)^3 \quad (\text{C.12}^b)$$

met $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3$, en b_4 nader te bepalen constanten.

De benadering met de derde graads polynomen eist vier voorwaarden welke zo gekozen worden dat de aansluitingen glad verlopen, dus:

$$\text{voor (C.11}^a\text{): } \bar{p}_0/\hat{p}_1 = 0 : \bar{q}_0/\hat{p}_1^2 = 0 \text{ en } \frac{d(\bar{q}_0/\hat{p}_1^2)}{d(\bar{p}_0/\hat{p}_1)} = 4/\pi$$

$$\bar{p}_0/\hat{p}_1 = 1 : \bar{q}_0/\hat{p}_1^2 = 1.5 \text{ en } \frac{d(\bar{q}_0/\hat{p}_1^2)}{d(\bar{p}_0/\hat{p}_1)} = 2$$

$$\text{voor (C.11}^b\text{): } \bar{p}_0/\hat{p}_1 = 0 : \hat{q}_1/\hat{p}_1^2 = 8/3\pi \text{ en } \frac{d(\hat{q}_1/\hat{p}_1^2)}{d(\bar{p}_0/\hat{p}_1)} = 0$$

$$\bar{p}_0/\hat{p}_1^2 = 1 : \hat{q}_1/\hat{p}_1^2 = 2 \text{ en } \frac{d(\hat{q}_1/\hat{p}_1^2)}{d(\bar{p}_0/\hat{p}_1)} = 2$$

Er resulteert dan:

$$\bar{q}_0/\hat{p}_1^2 = 4/\pi(\bar{p}_0/\hat{p}_1) + (2 \frac{1}{2} - 8/\pi) (\bar{p}_0/\hat{p}_1)^2 + (4/\pi - 1) (\bar{p}_0/\hat{p}_1)^3 \quad (\text{a})$$

$$\hat{q}_1/\hat{p}_1^2 = 8/3\pi + (4 - 8/\pi) (\bar{p}_0/\hat{p}_1)^2 + (16/3\pi - 2) (\bar{p}_0/\hat{p}_1)^3 \quad (\text{b})$$

} (C.13)

Oplossing $\bar{q}_0, \bar{q}_n, \theta_n$ met $p > 0$ over gehele periode.

In dit geval geldt (C.6^a). Veronderstellen we nu dat p geschreven kan worden als in (C.2^b). Daarbij wordt ϕ_1 nog niet gelijk aan nul gekozen. De algemene vorm van de integraal voor \bar{q}_0 luidt dan na overgang op de variabele ξ :

$$\bar{q}_0 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} \left[\bar{p}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_{0nc} \cos n\xi \phi_n \cos n\xi + p_{ns} \sin\phi_n \sin n\xi) \right]^2 d\xi \quad (C.14)$$

Er volgt voor de kruisterm:

$$\bar{p}_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (p_{nc} \cos\phi_n \cos n\xi + p_{ns} \sin\phi_n \sin n\xi)$$

dat deze na integratie over de periode gelijk is aan nul.

Dus de enigste term waar \bar{p}_0 in voor zal komen is \bar{p}_0^2 .

Voor het kwadraat van de somreeks kan een willekeurige term beschouwd worden :

$$\begin{aligned} & (p_{nc} \cos\phi_n \cos n\xi + p_{ns} \sin\phi_n \sin n\xi) (p_{mc} \cos\phi_m \cos m\xi + p_{ms} \sin\phi_m \sin m\xi) = \\ & p_{nc} p_{mc} \cos\phi_n \cos\phi_m \cos n\xi \cos m\xi \quad (a) \\ & + p_{nc} p_{ms} \cos\phi_n \sin\phi_m \cos n\xi \sin m\xi \quad (b) \\ & + p_{ns} p_{mc} \sin\phi_n \cos\phi_m \sin n\xi \cos m\xi \quad (c) \\ & + p_{ns} p_{ms} \sin\phi_n \sin\phi_m \sin n\xi \sin m\xi \quad (d) \end{aligned} \quad (C.15)$$

Met de goniometrische relaties (7.20) volgt na integratie over de periode dat alleen de termen (C.15a) en (C.15d) een bijdrage leveren, en nog wel alleen als $n=m$. Het kwadraat van de somreeks levert dan na integratie over de periode:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (p_{nc}^2 \cos^2\phi_n + p_{ns}^2 \sin^2\phi_n) = \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{p}_n^2$$

Voor \bar{q}_0 volgt dan:

$$\bar{q}_0 = \bar{p}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_n^2 \quad (\text{C.16})$$

De berekening van q_{mc} en q_{ms} gaat analoog. Indien p ontwikkeld wordt in een reeks tot $n=N$, dan resulteert voor $N=1$:

$$\bar{q}_0 = \bar{p}_0^2 + \frac{1}{2} \hat{p}_1^2$$

$$\hat{q}_1 = 2 \bar{p}_0 \hat{p}_1$$

$$\theta_1 = 0 \quad (\text{dus na verschuiven } \theta_1 = \phi_1) \quad (\text{C.17})$$

$$\hat{q}_2 = \frac{1}{2} \hat{p}_1^2$$

$$\theta_2 = 0 \quad (\text{dus na verschuiven van } \theta_2 = 2\phi_1)$$

$$\hat{q}_n = 0 \quad \text{voor } n > 2$$

en voor $N=2$:

$$\bar{q}_0 = \bar{p}_0^2 + \frac{1}{2} \hat{p}_1^2 + \frac{1}{2} \hat{p}_2^2$$

$$\hat{q}_1 = \hat{p}_1 (4\bar{p}_0^2 + 4\bar{p}_0 \hat{p}_2 \cos \phi_2 + \hat{p}_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{\sin \phi_2}{2\bar{p}_0 / \hat{p}_2 + \cos \phi_2} \right) (+ \pi \text{ als } 2\bar{p}_0 / \hat{p}_2 + \cos \phi_2) \quad (\text{C.18})$$

$$\hat{q}_2 = \hat{p}_1 \left(\frac{1}{2} \hat{p}_1^2 + 2\bar{p}_0 \hat{p}_2 \cos \phi_2 + 4\bar{p}_0^2 \hat{p}_2^2 / \hat{p}_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

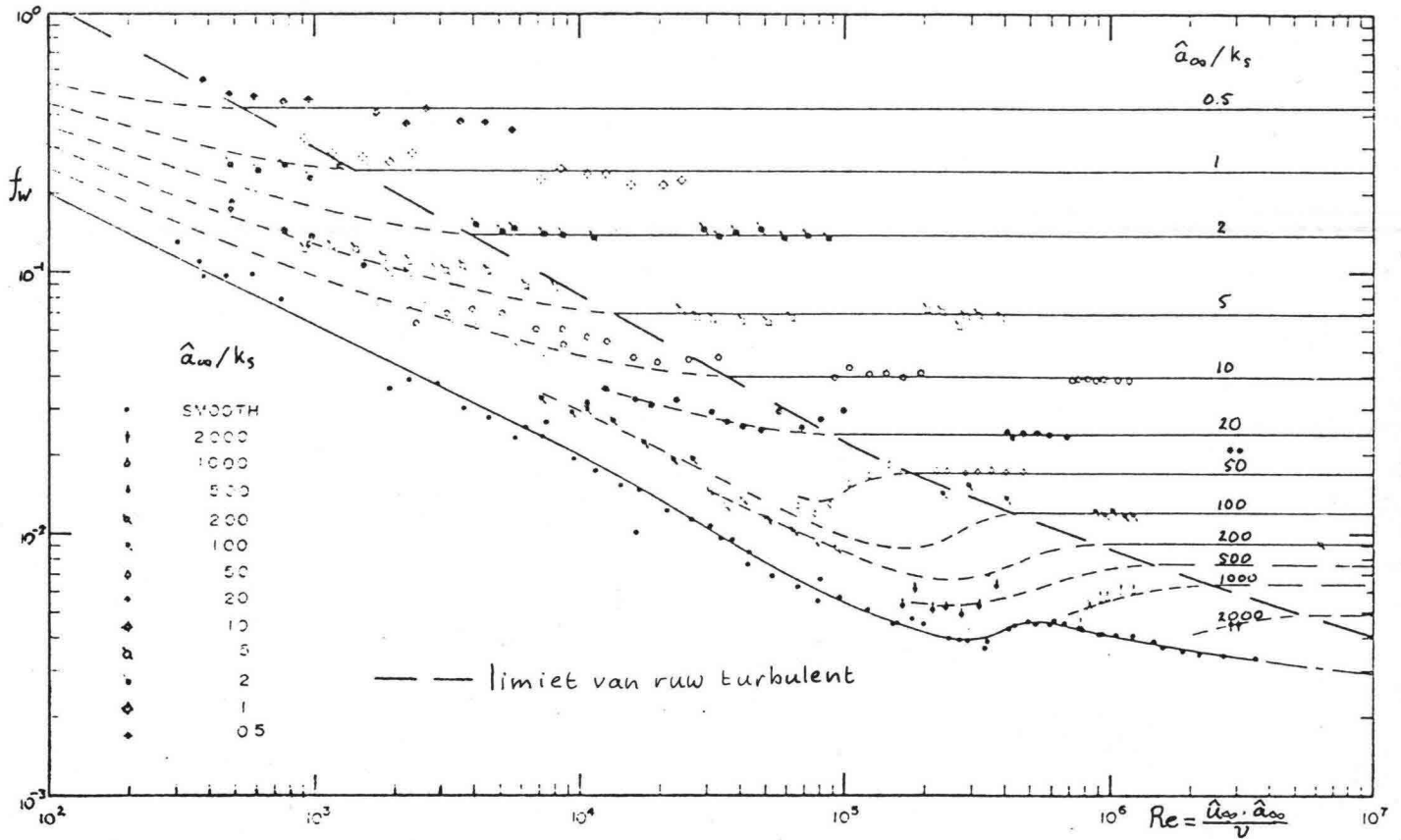
$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{2\bar{p}_0 \hat{p}_2 \sin \phi_2}{\frac{1}{2} \hat{p}_1^2 + 2\bar{p}_0 \hat{p}_2 \cos \phi_2} \right) (+ \pi \text{ als } \frac{1}{2} \hat{p}_1^2 + 2\bar{p}_0 \hat{p}_2 \cos \phi_2)$$

$$\hat{q}_3 = \hat{p}_2 \hat{p}_1$$

$$\theta_3 = \phi_2$$

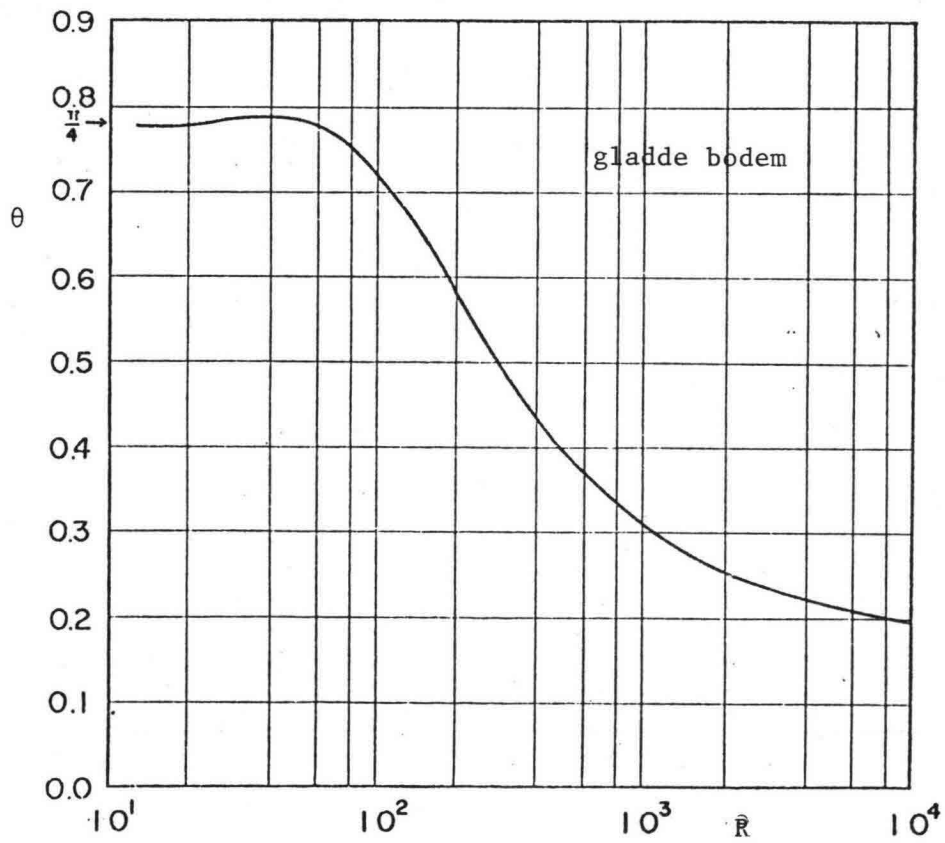
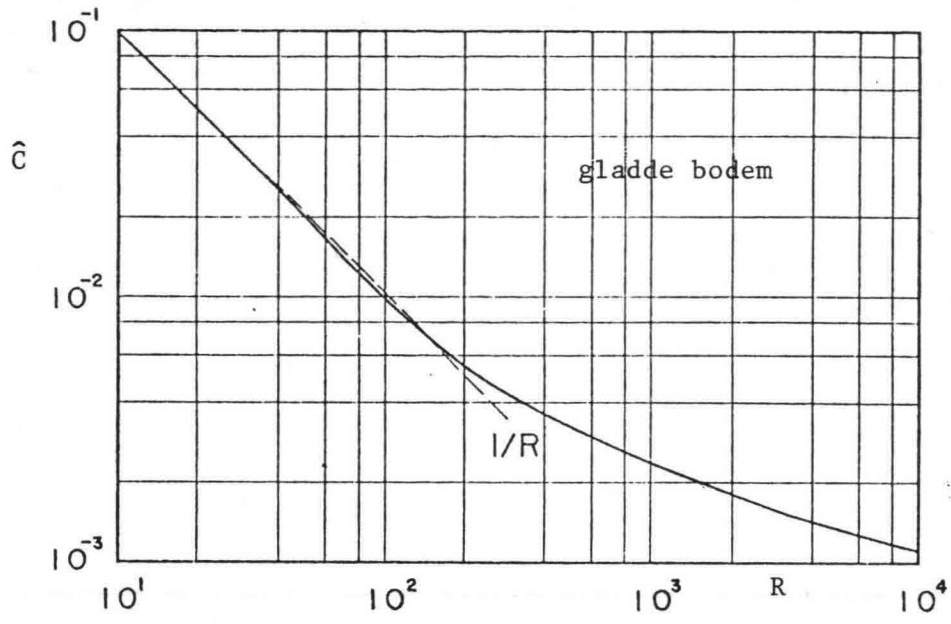
$$\hat{q}_n = 0 \quad \text{voor } n > 3$$

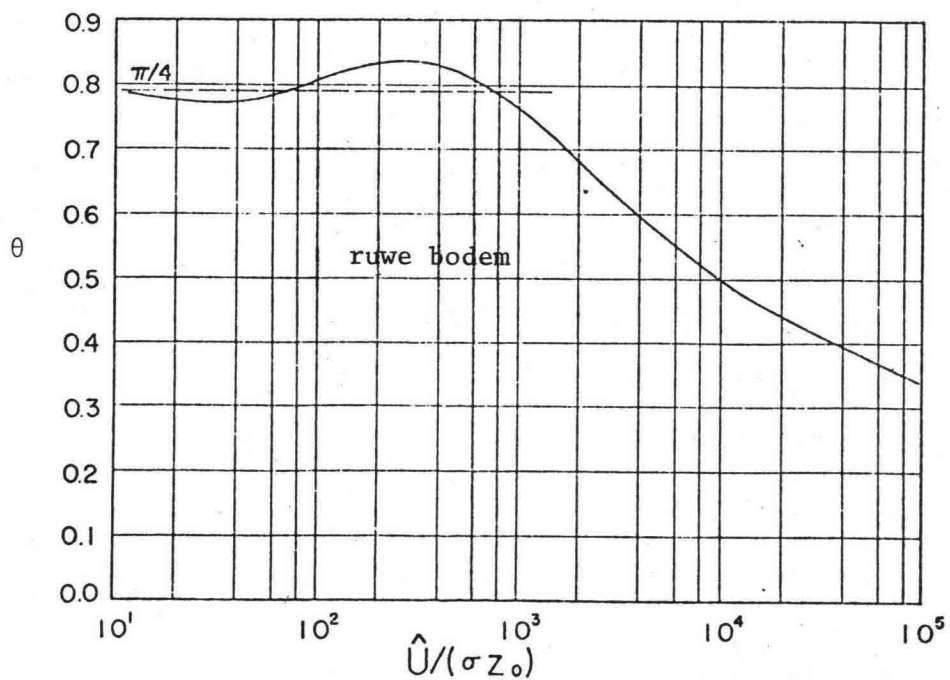
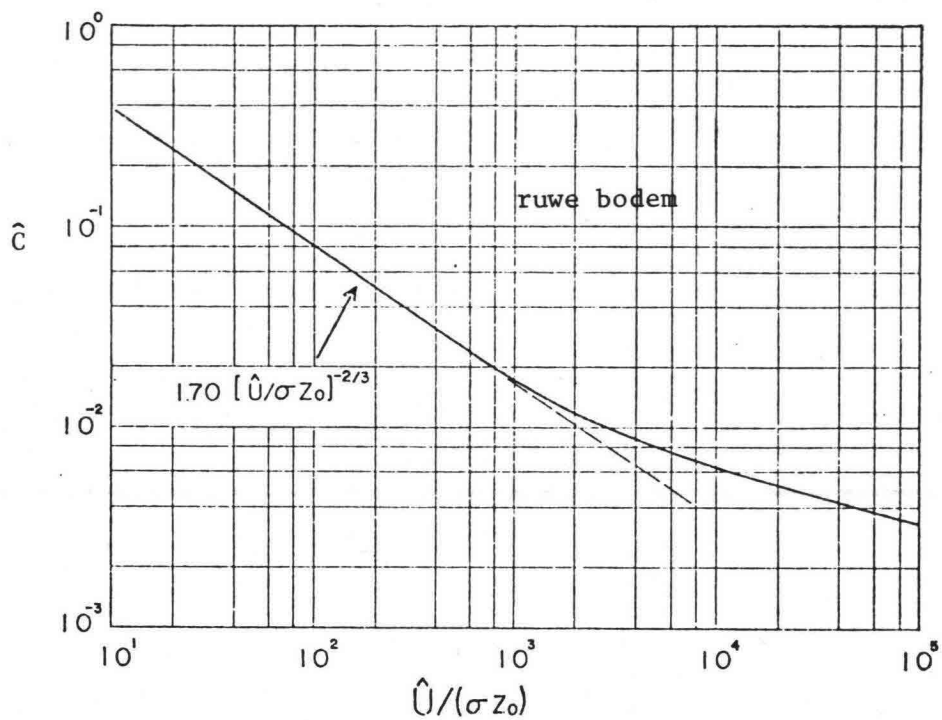
n.b. Zowel $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ als ϕ_2 moeten nog verschoven worden.

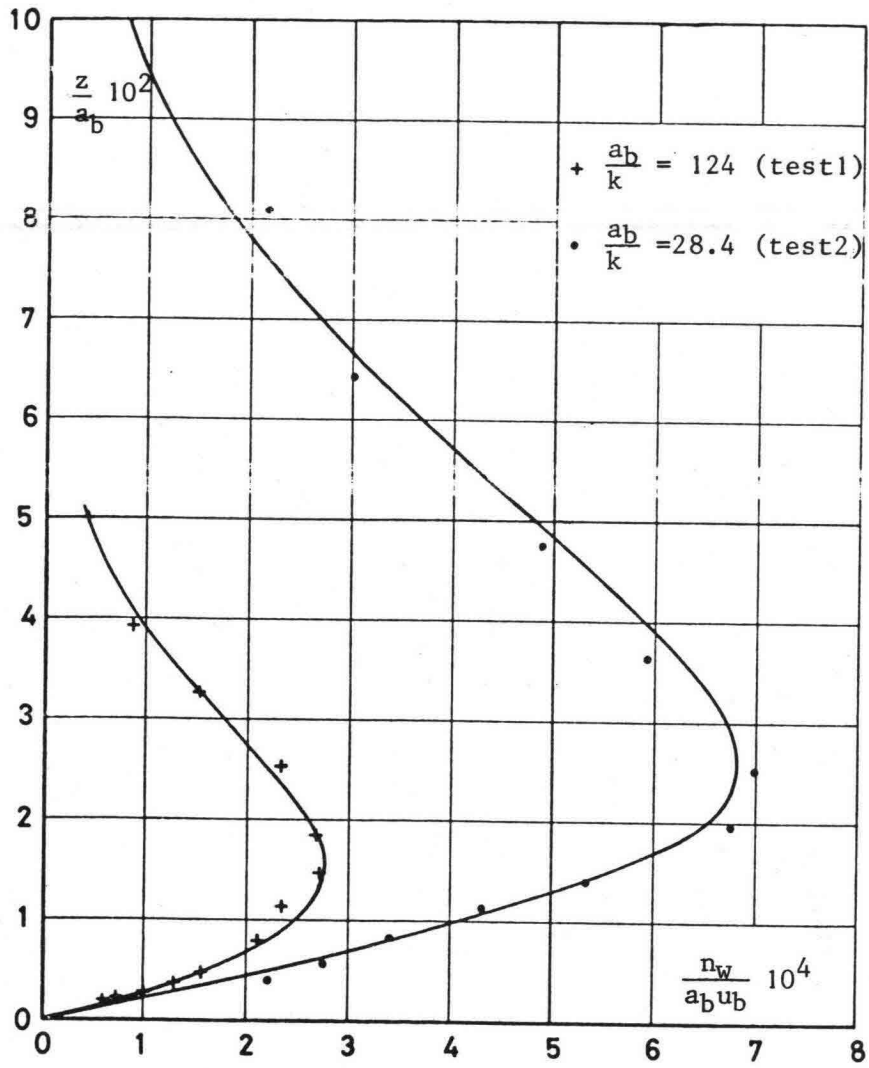


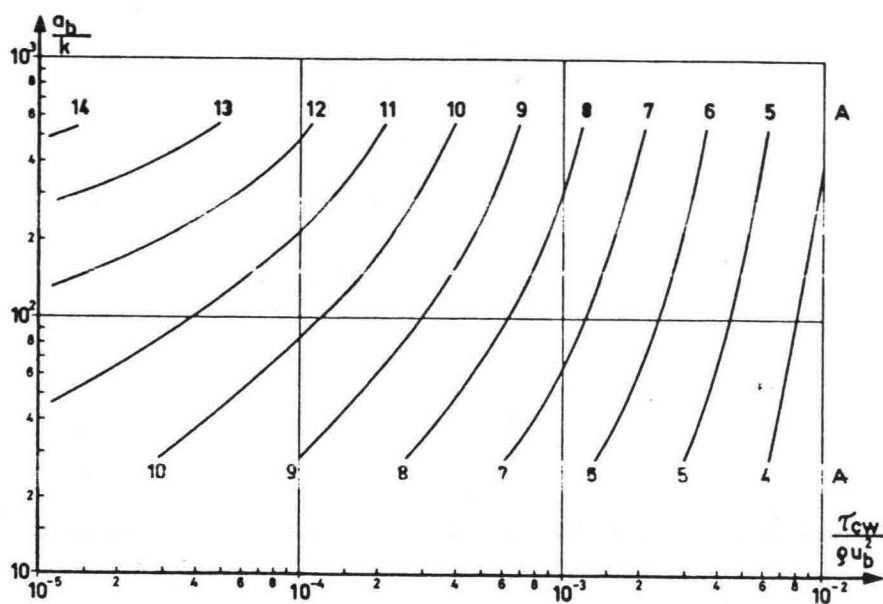
naar Riedel en Kamphuis =22=

\hat{a}_∞ / k_s geeft aan de verhouding tussen de amplitude van de orbitaalbeweging nabij de bodem boven de grenslaag en de Nikuradse ruwheid.

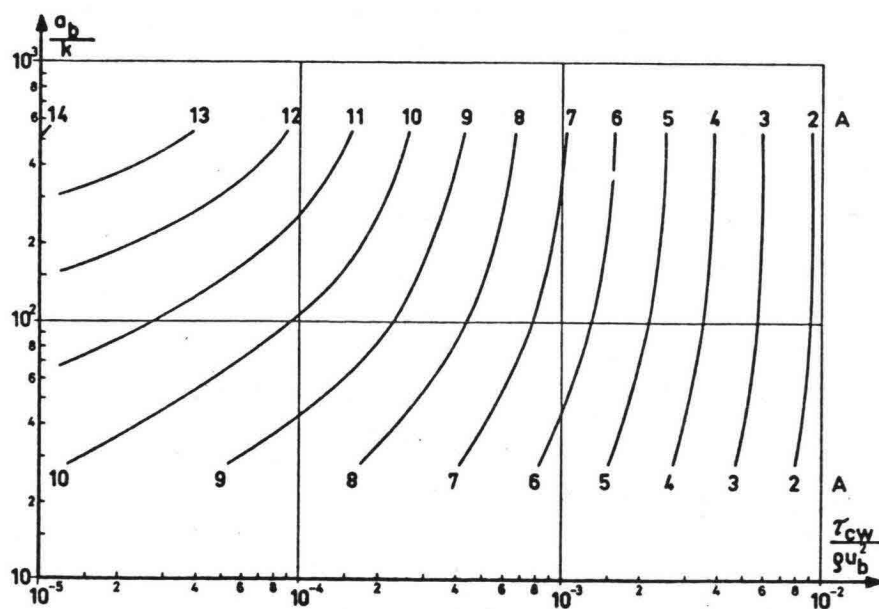








hoek tussen golf- en stroomrichting is 0°



hoek tussen golf- en stroomrichting is 90°

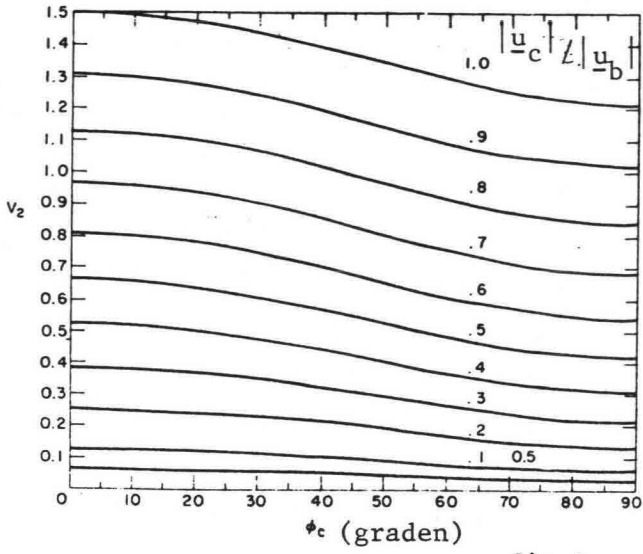


fig.1.

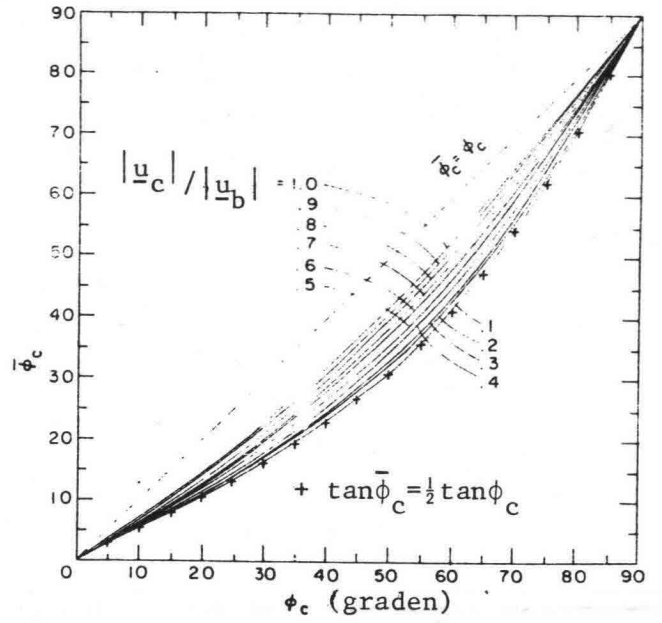


fig.2.

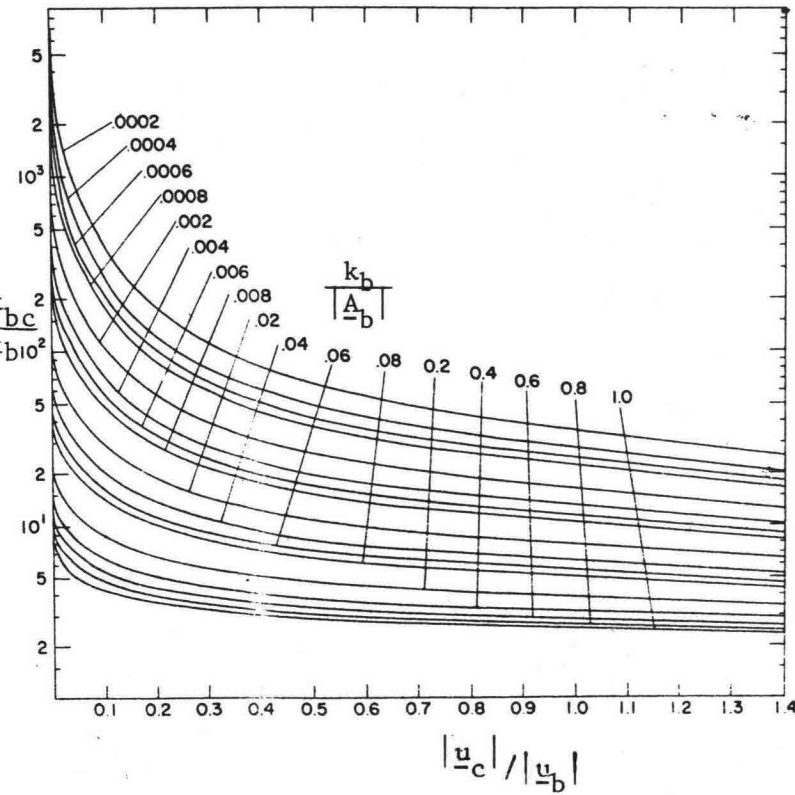


fig.3.

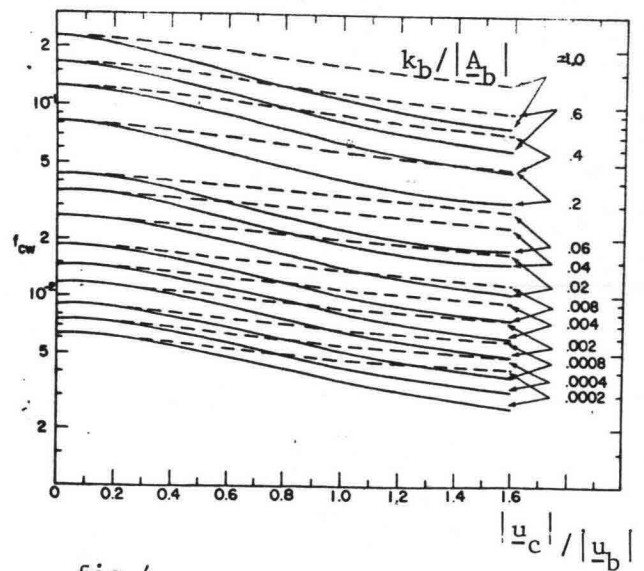
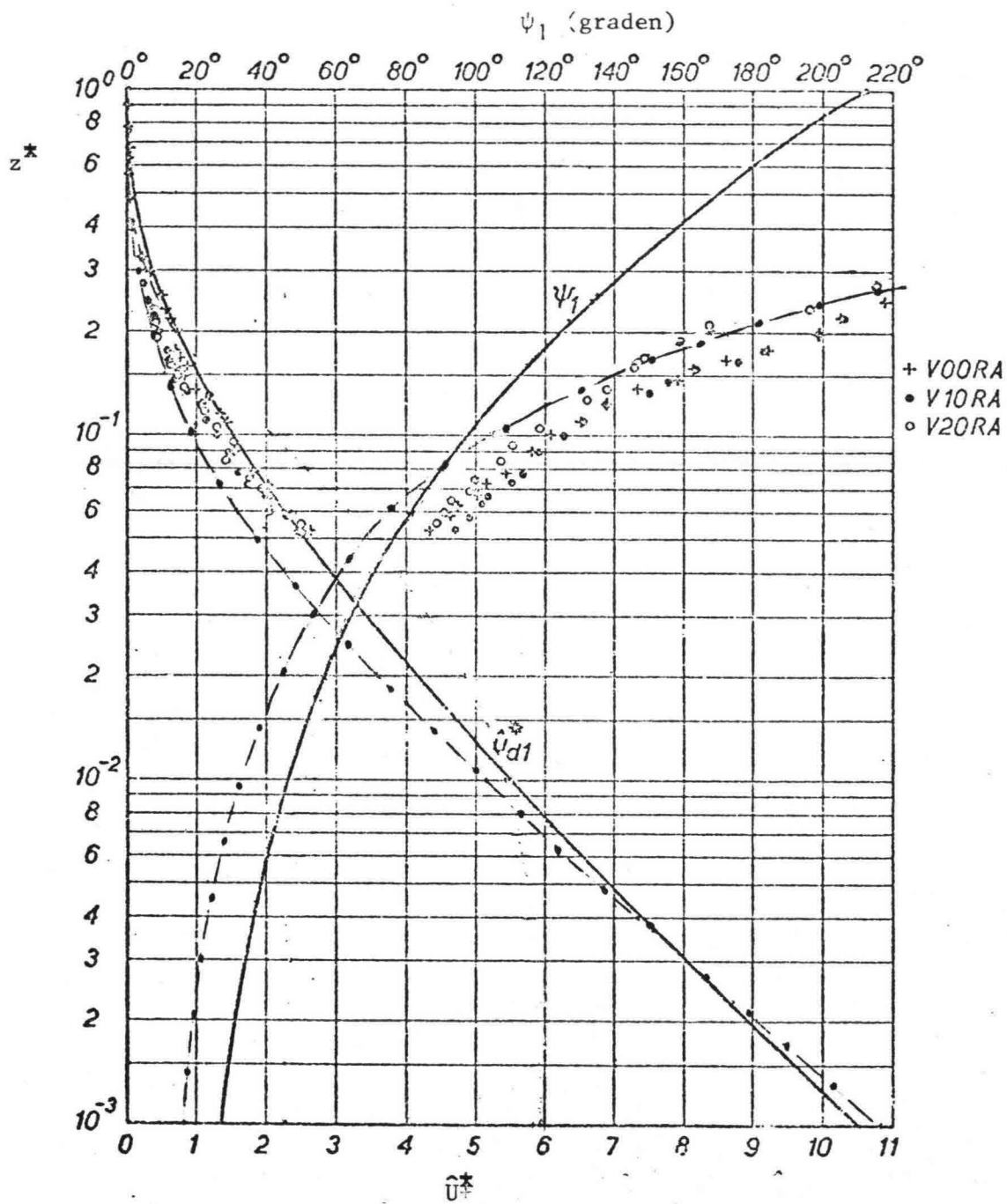


fig.4.



————— Bakker numeriek (V10RA); zie deel II .
 -.-.-.-.- Bakker analytisch

De meetresultaten van de bovengenoemde proeven komen in deel II aan de orde.

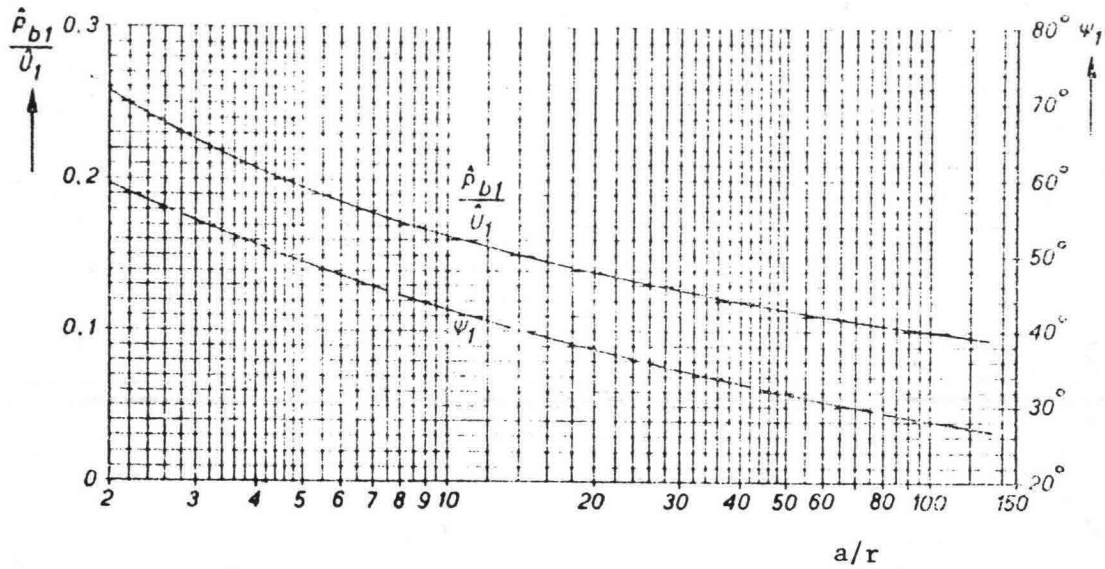


fig.1.

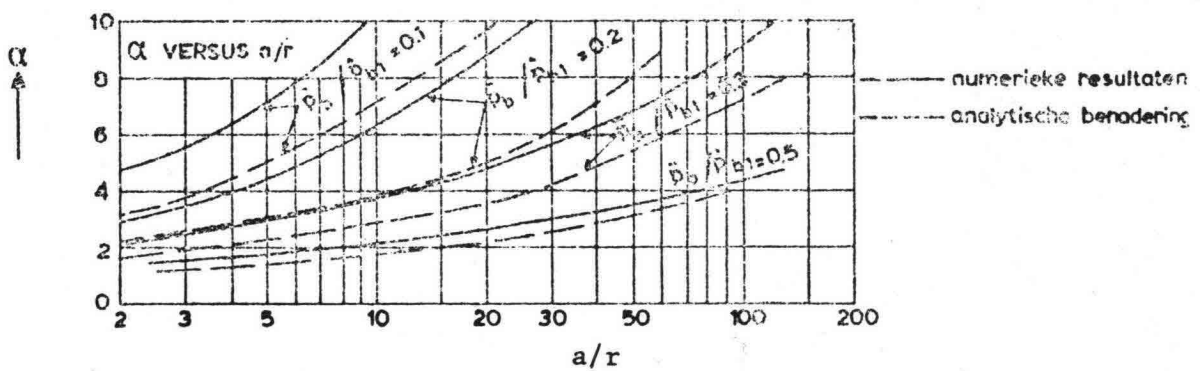
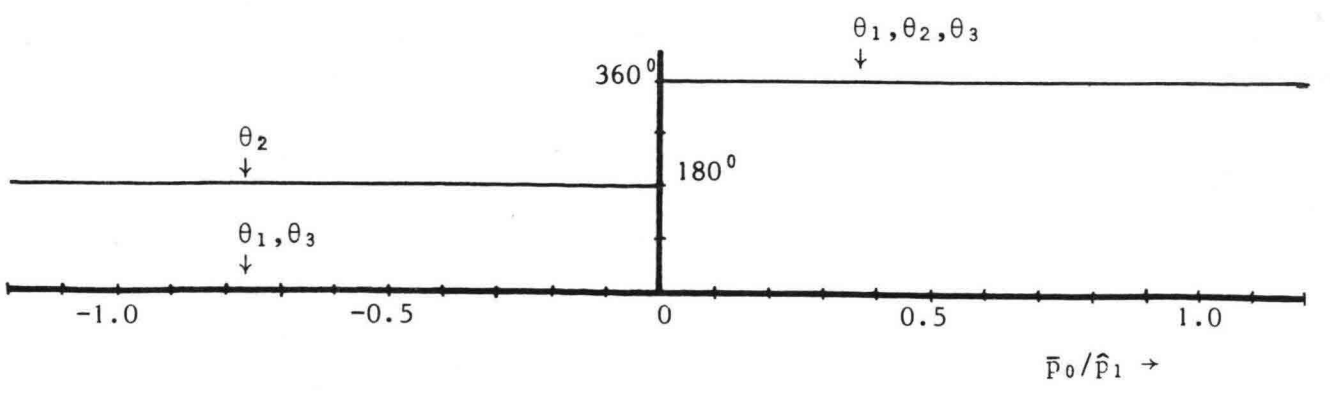
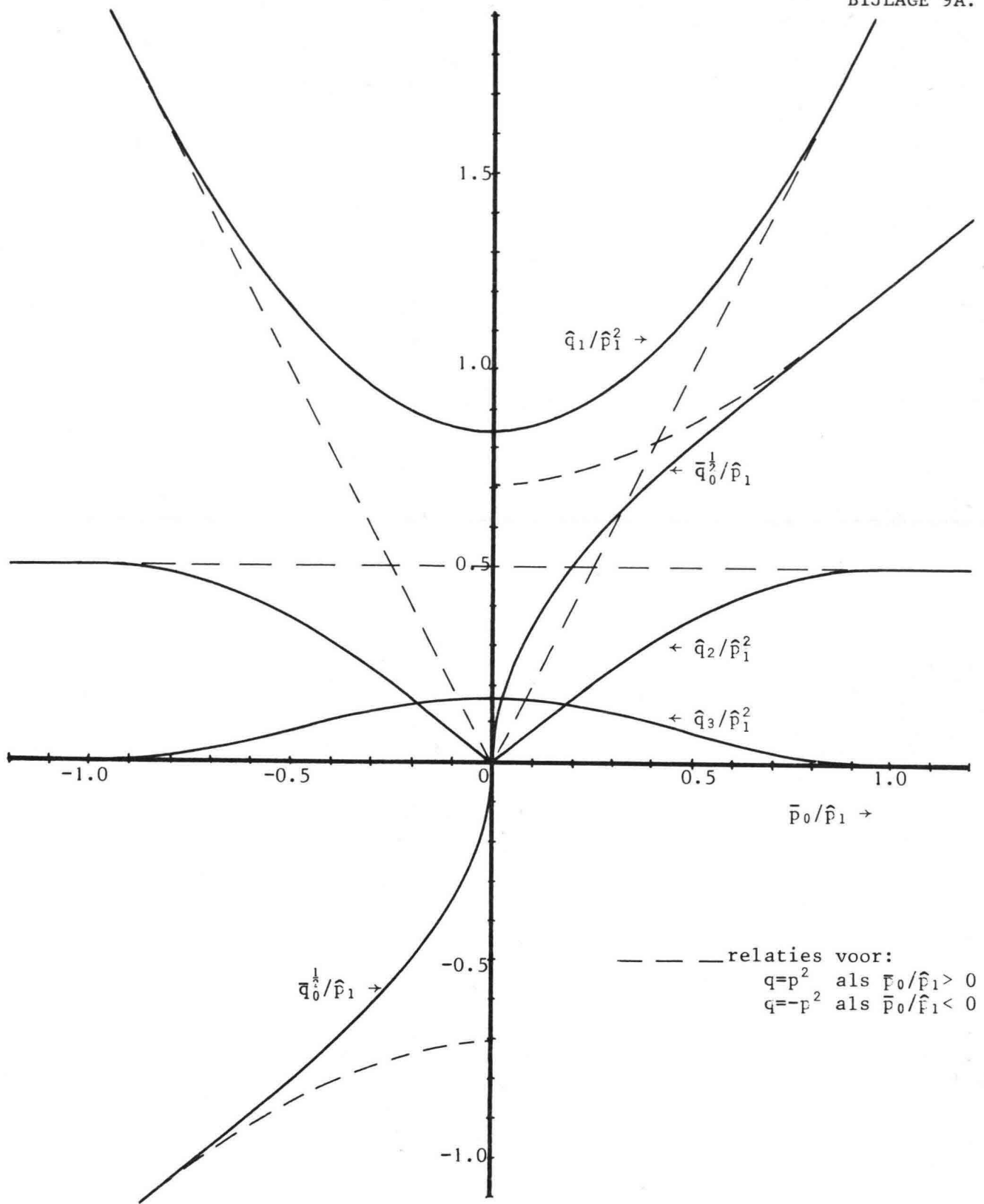
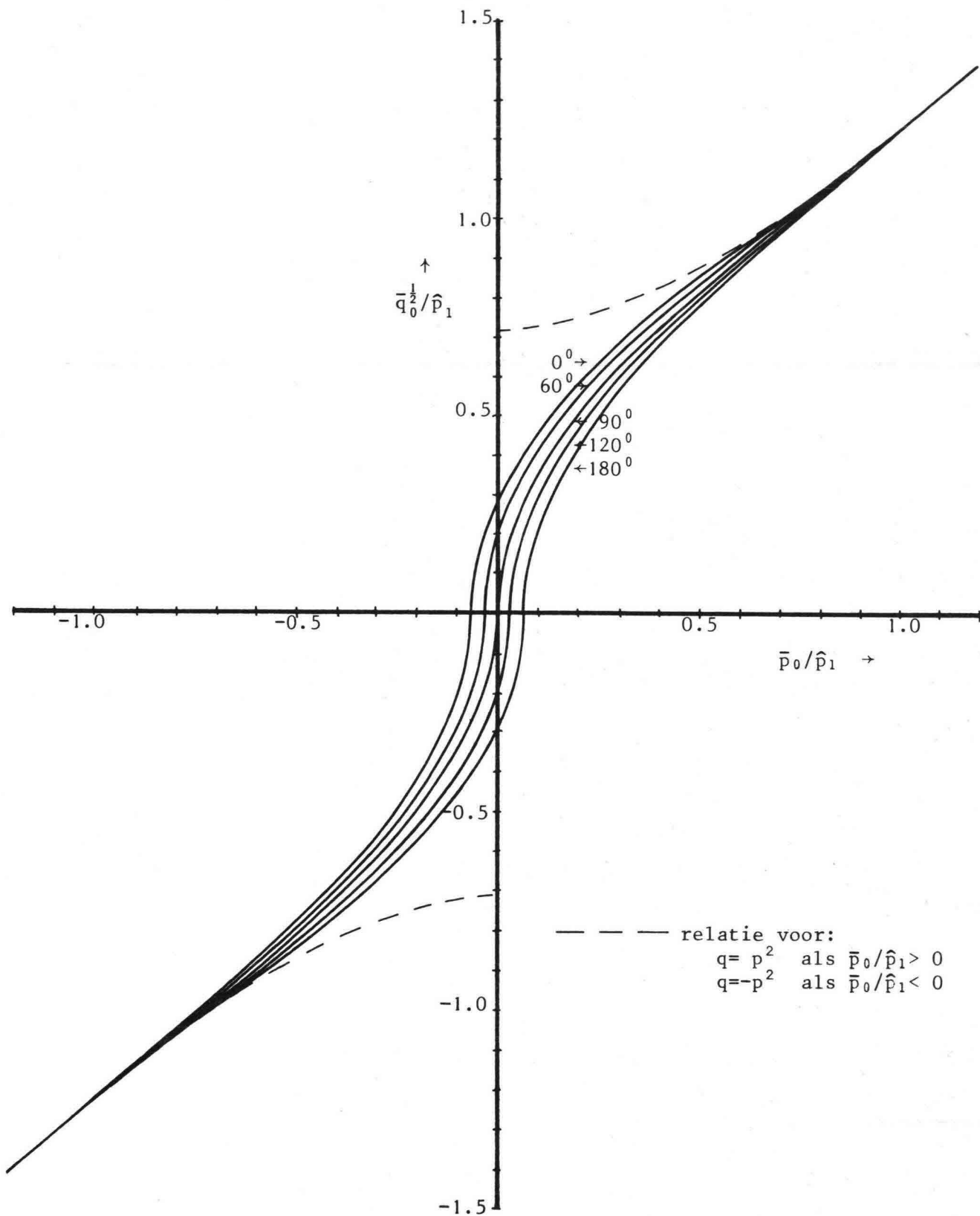
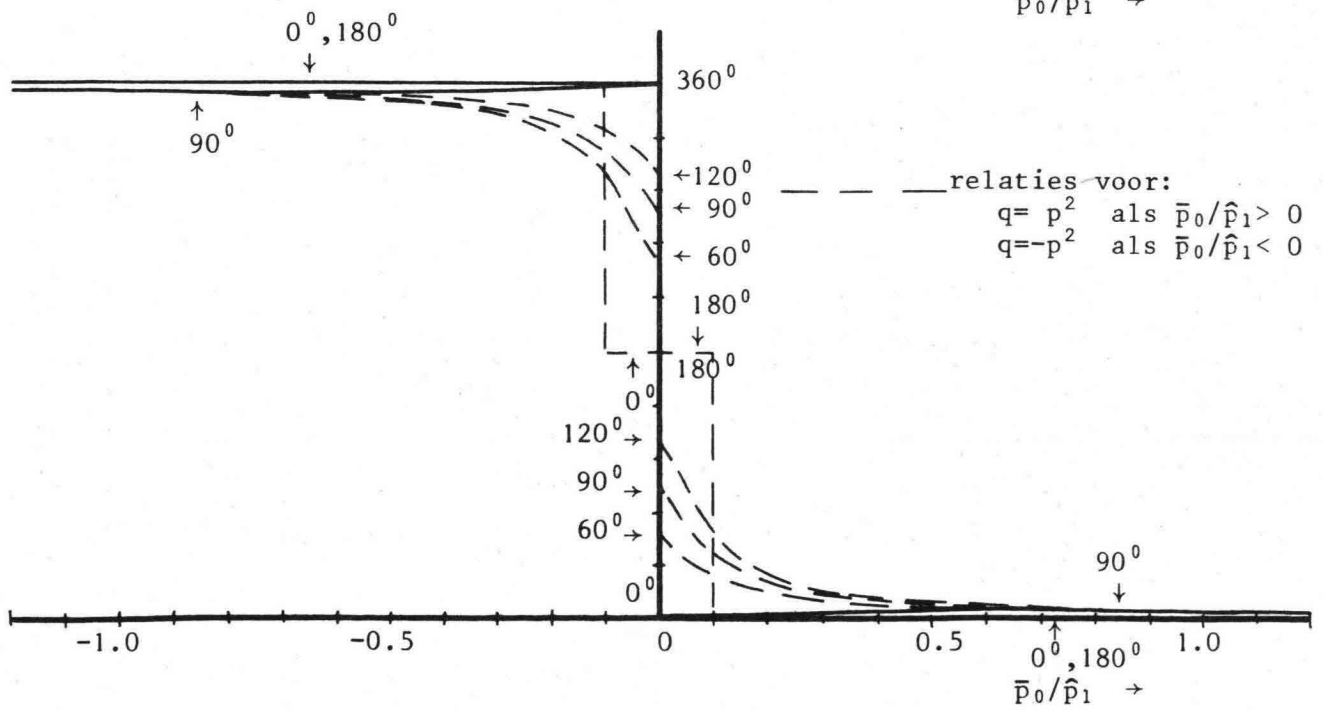
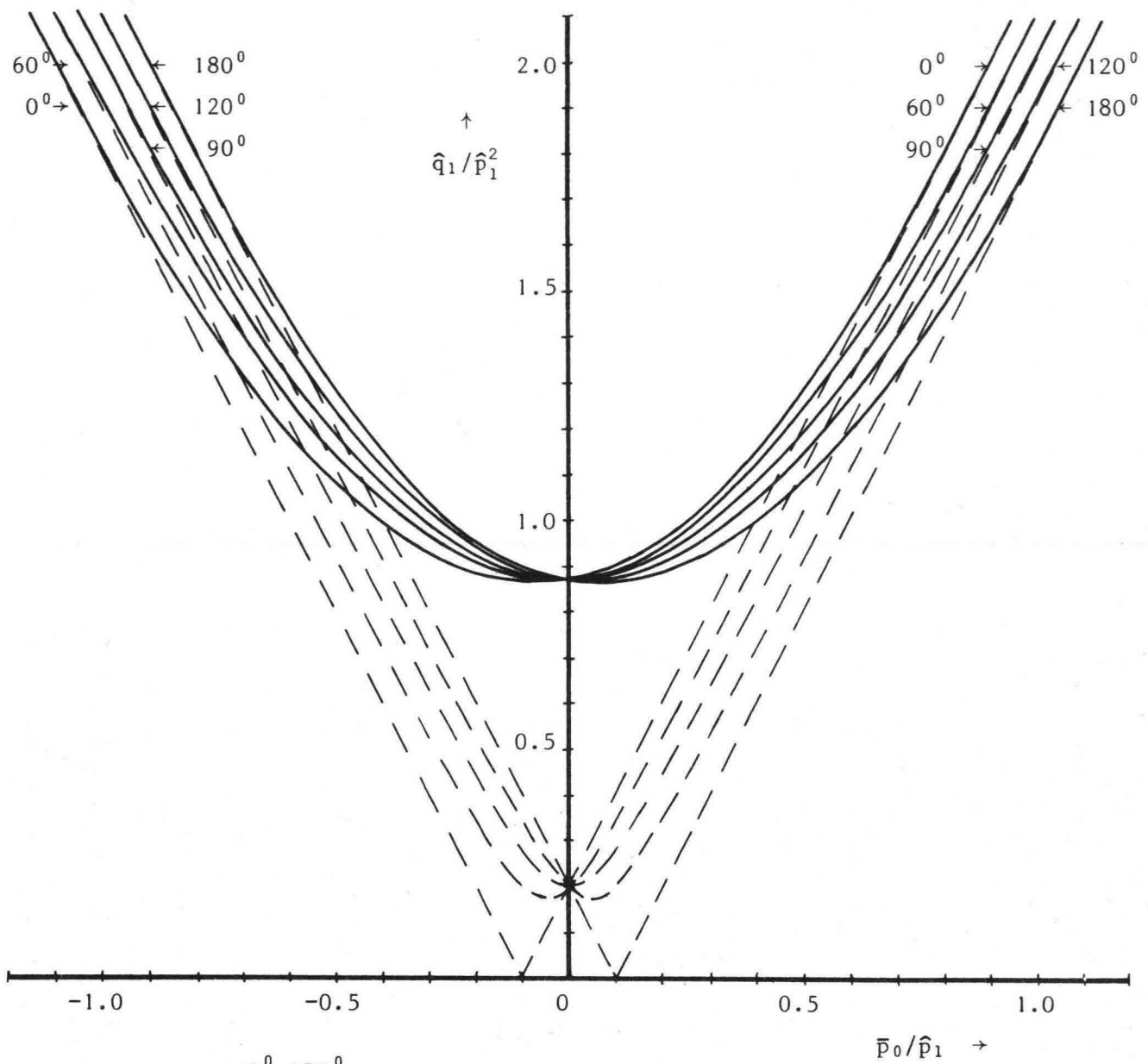


fig.2.

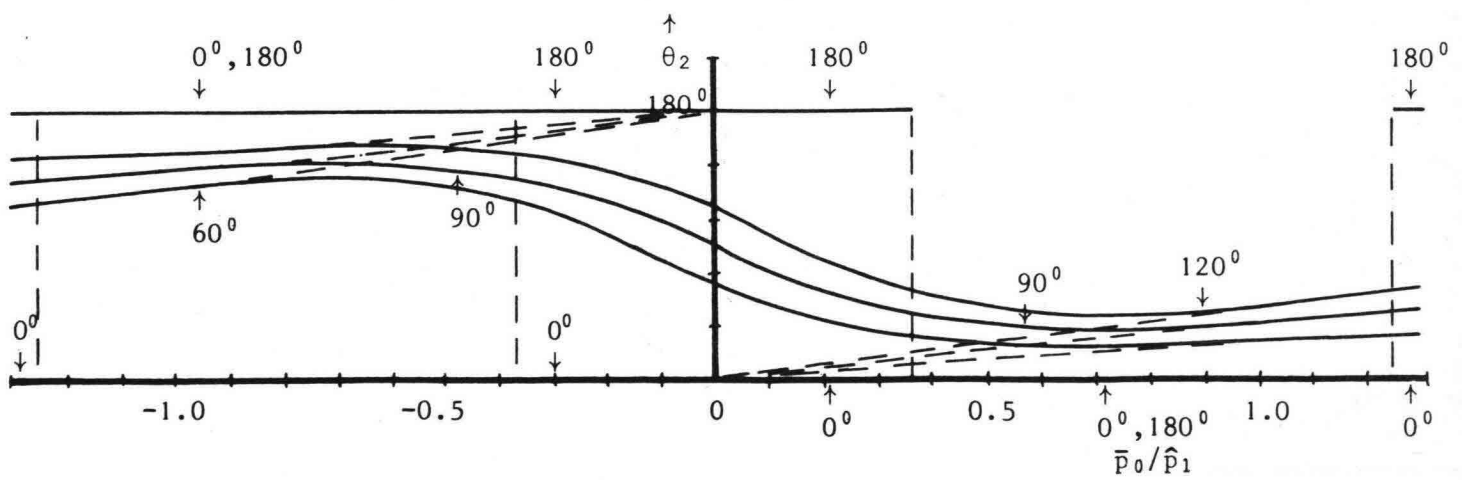
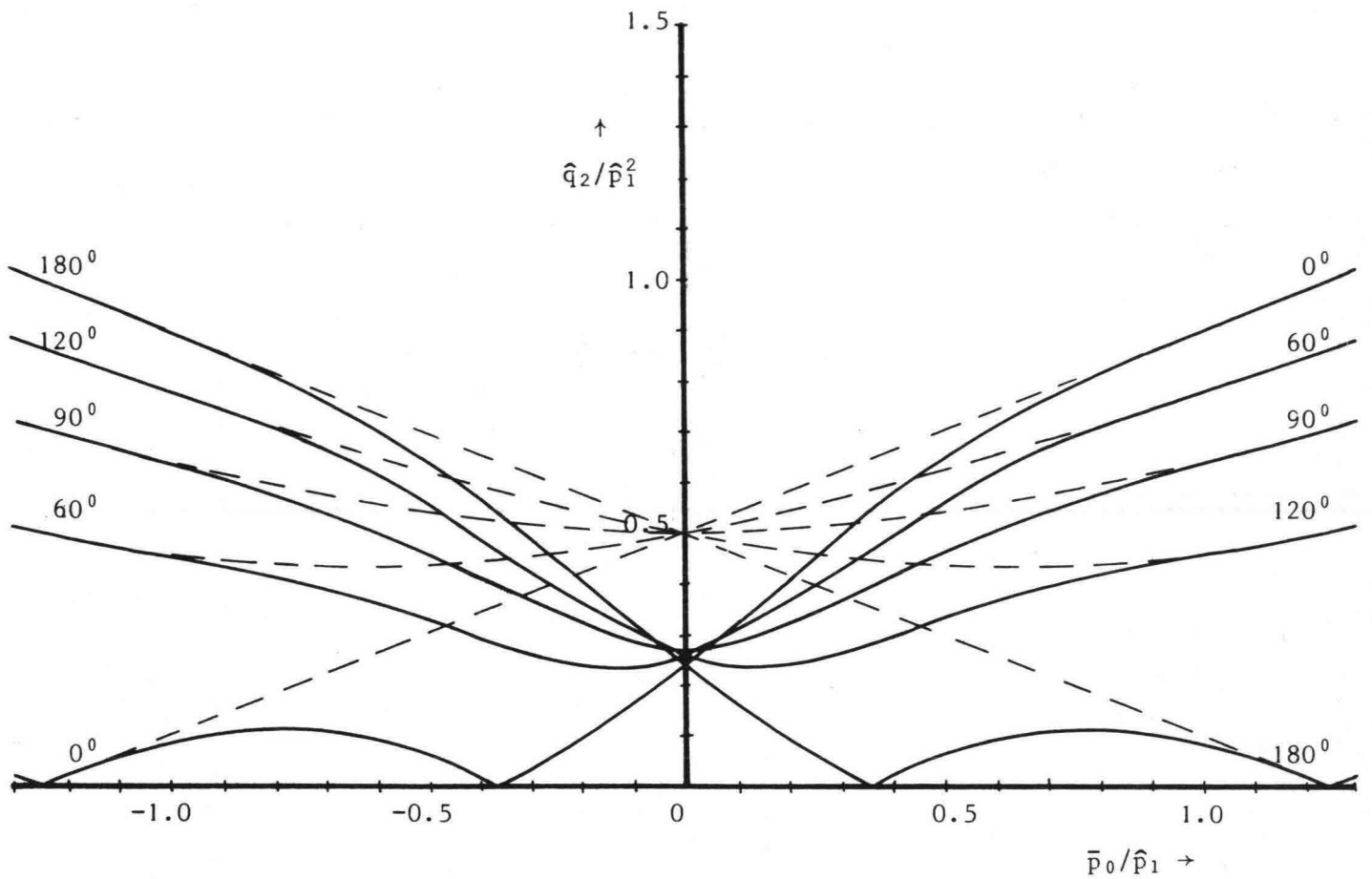




De bijgeschreven waarden geven aan het faseverschil tussen p_2 en p_1 : ϕ_2 .
 De figuur geldt voor $\hat{p}_2 / \hat{p}_1 = 0.2$.

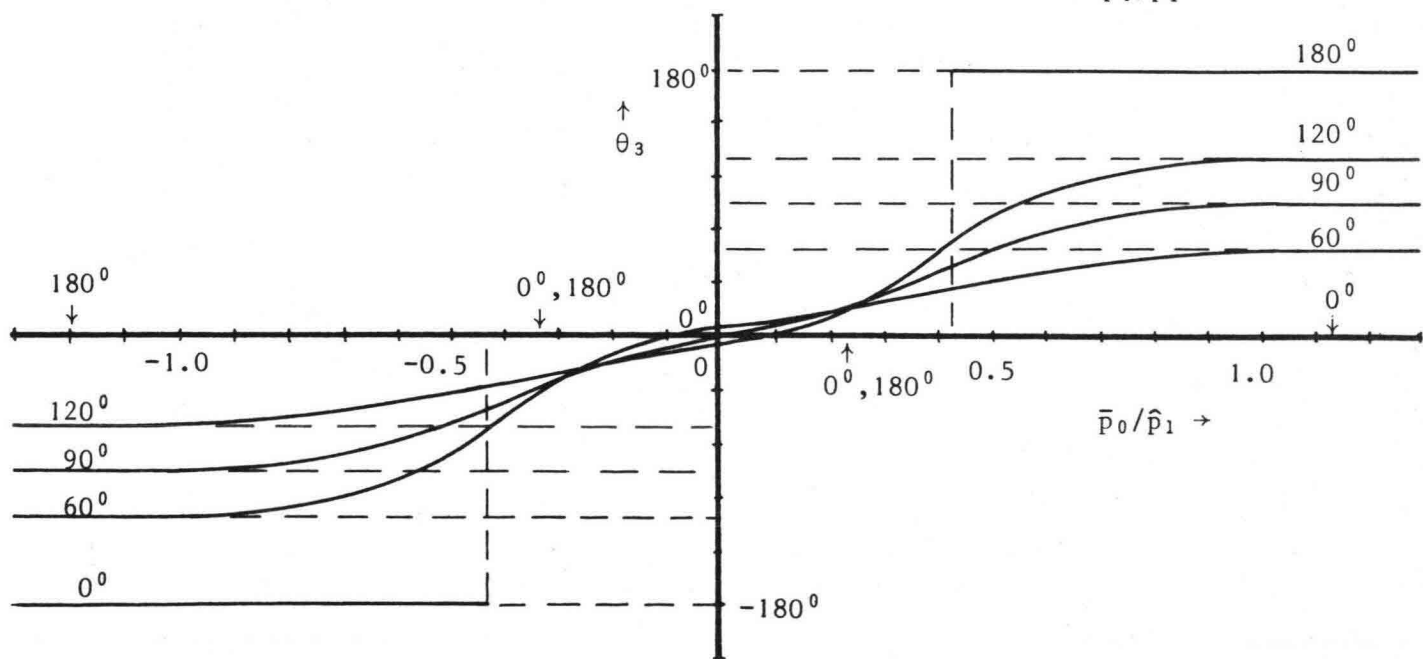
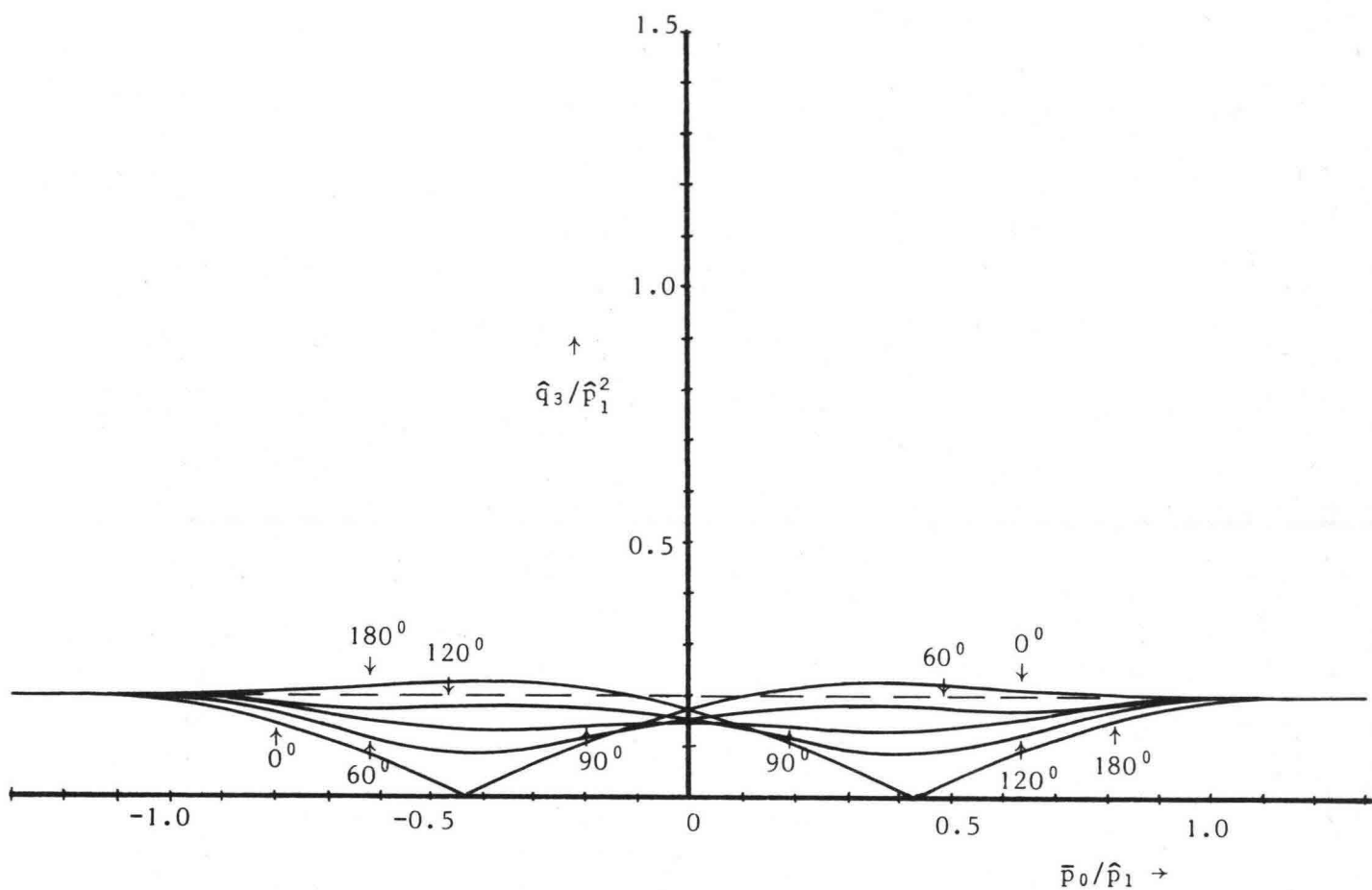


De bijgeschreven waarden geven aan het faseverschil tussen p_2 en $p_1 : \phi_2$.
 De figuren gelden voor $\hat{p}_2 / \hat{p}_1 = 0.2$.



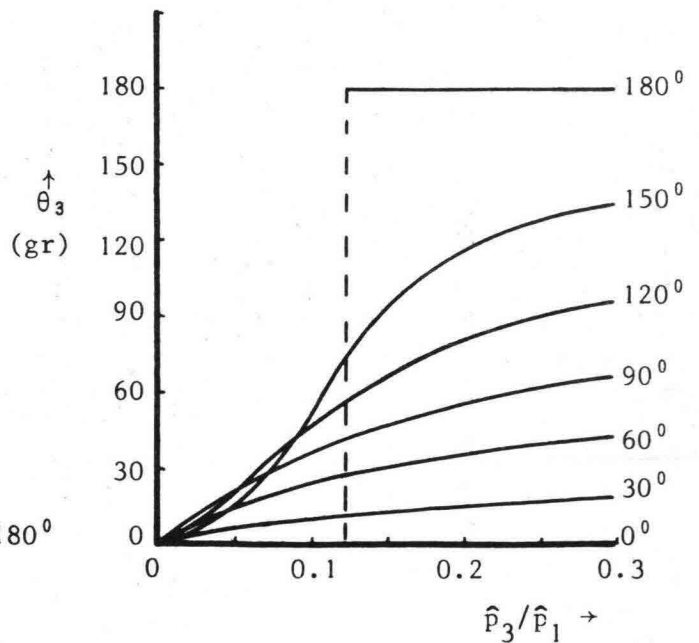
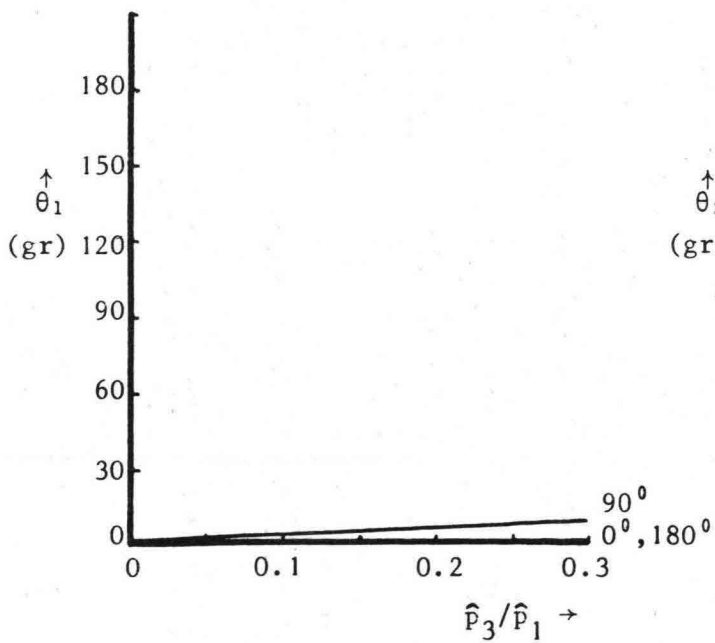
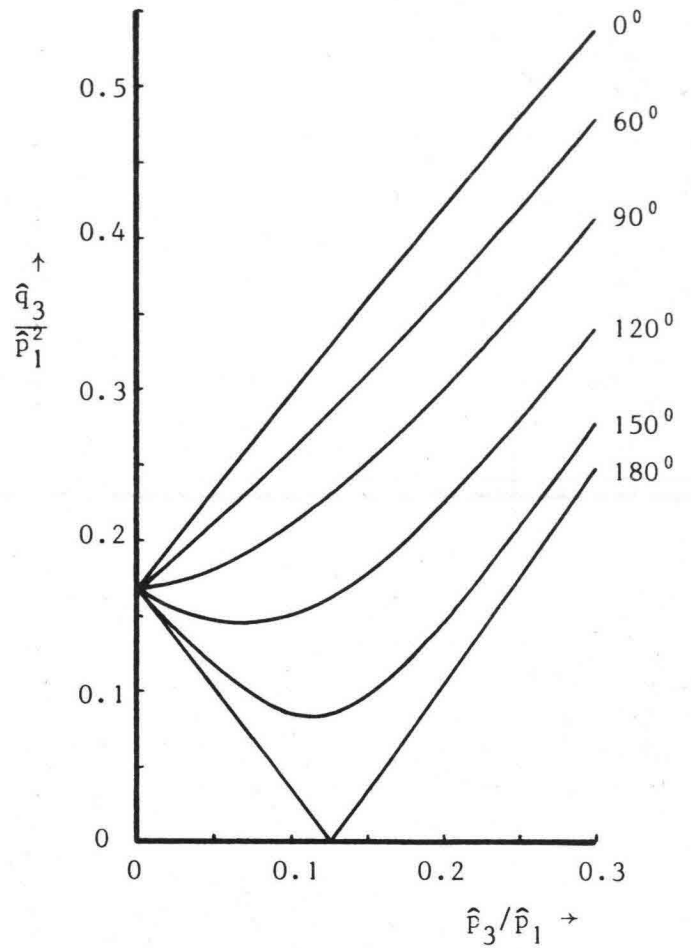
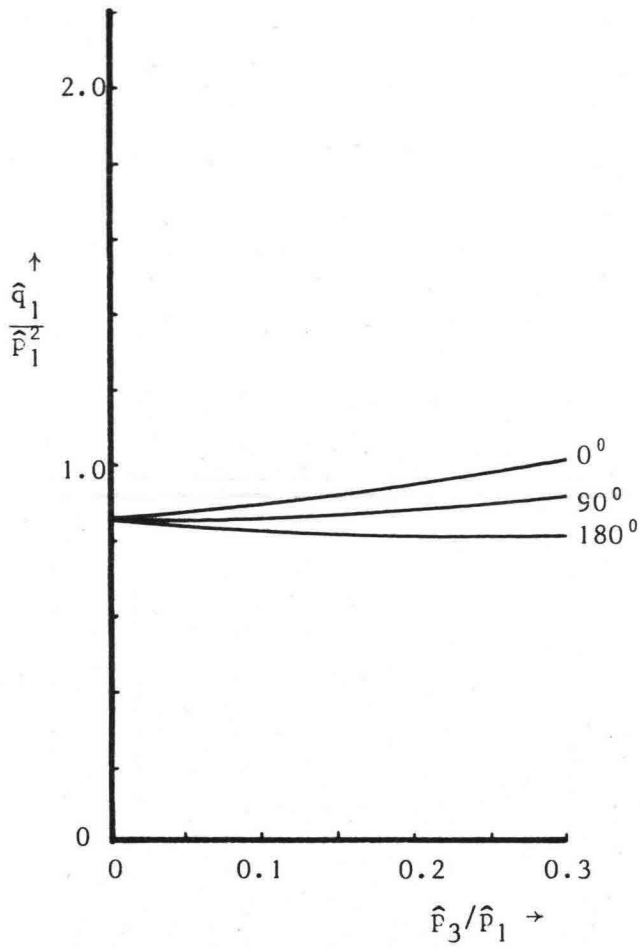
— — — — — relaties voor:
 $q = p^2$ als $\bar{p}_0/\hat{p}_1 > 0$
 $q = -p^2$ als $\bar{p}_0/\hat{p}_1 < 0$

De bijgeschreven waarden geven aan het faseverschil tussen p_2 en p_1 : ϕ_2 .
 De figuren gelden voor $\hat{p}_2/\hat{p}_1 = 0.2$.

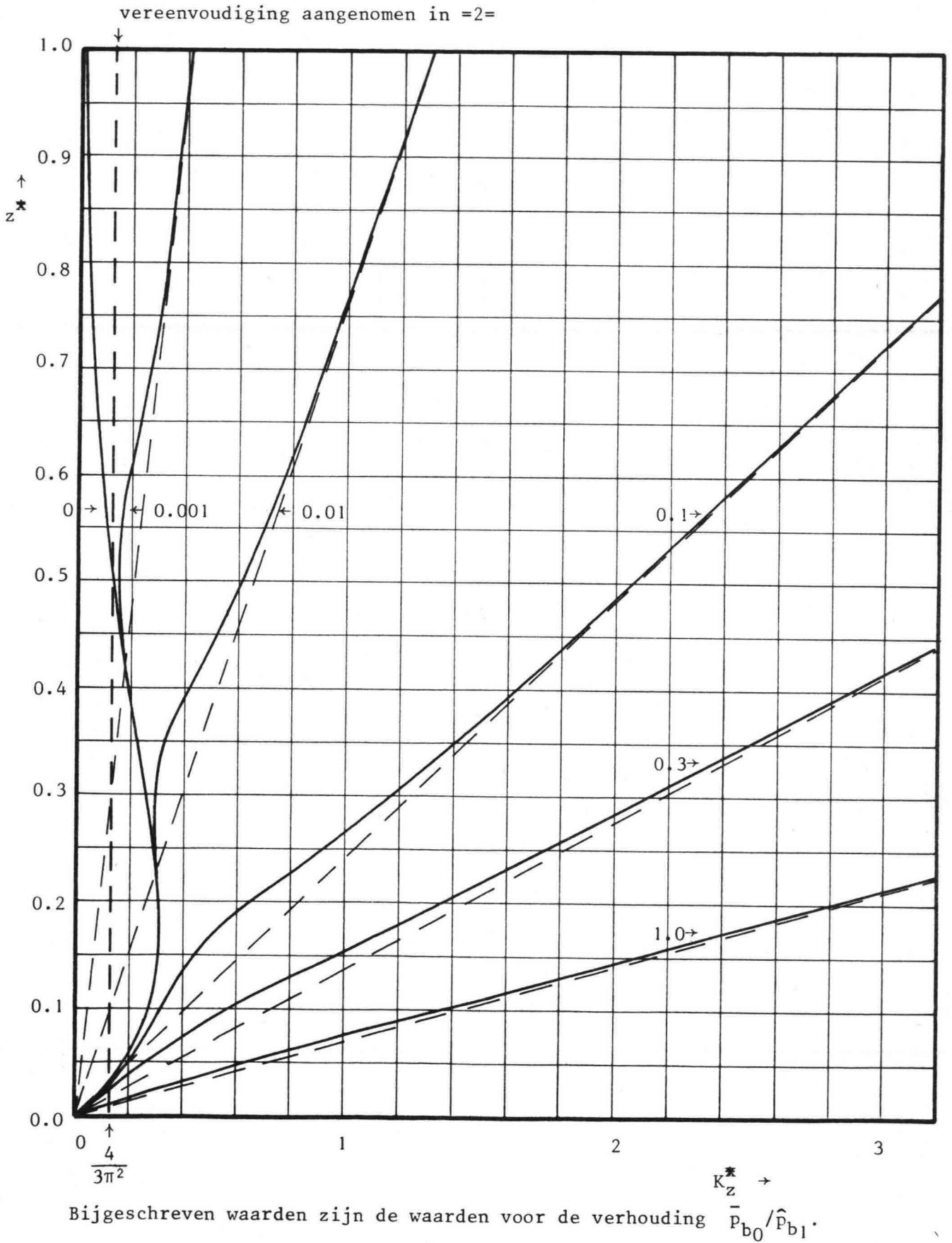


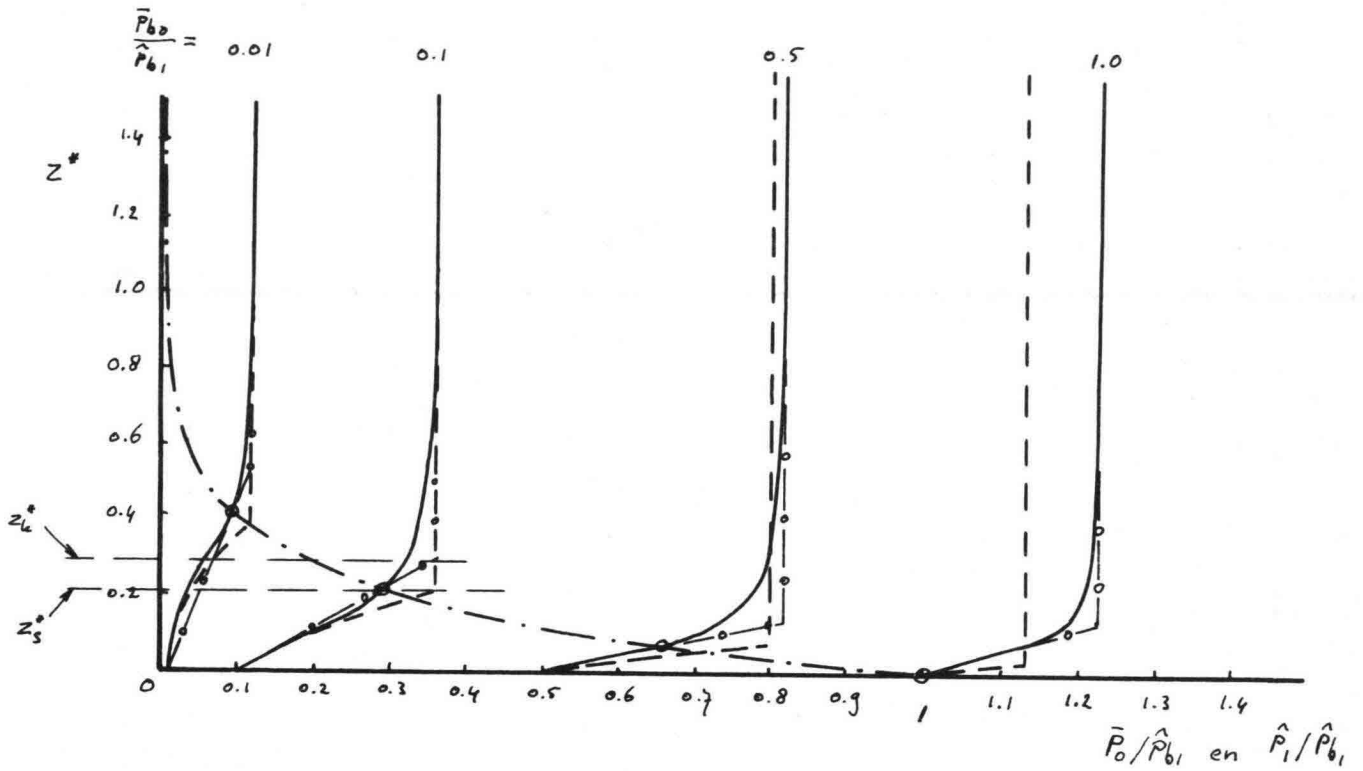
--- relaties voor:
 $q = p^2$ als $\bar{p}_0 / \hat{p}_1 > 0$
 $q = -p^2$ als $\bar{p}_0 / \hat{p}_1 < 0$

De bijgeschreven waarden geven aan het faseverschil tussen p_2 en $p_1 : \phi_2$.
 De figuren gelden voor $\hat{p}_2 / \hat{p}_1 = 0.2$.



De bijgeschreven waarden geven aan het faseverschil tussen p_3 en p_1 : ϕ_3





- verloop bij benadering tot en met de eerste harmonische
- - - - - aanname Bakker voor \bar{p}_0/\hat{p}_{b1}
- · - · - · - aanname Bakker voor \hat{p}_1/\hat{p}_{b1}
- — ○ — ○ — aanname in § 6.2.5.

