



TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

LUCHTVAART- EN RUIMTEVAARTTECHNIEK

Rapport VTH - 208

**SPANNINGEN ROND EEN BELASTE PEN OF RING IN
EEN ELASTISCHE ORTHOTROPE OF ISOTROPE PLAAT**

door

G.J. Spies

DELFT-NEDERLAND

januari 1976

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
AFDELING DER LUCHTVAART- EN RUIMTEVAARTTECHNIEK

Rapport VTH-208

Spanningen rond een belaste pen of ring in een
elastische orthotrope of isotrope plaat.

door

G.J. Spies

Delft - Nederland

Januari 1976

Inhoud

	blz.
Samenvatting	2
Lijst van notaties	3
1. Inleiding	5
2. Berekening van de spanningsverdeling rond een oneindig stijve, vastgelijmde inclusie (pen of ring) in een orthotrope of isotrope plaat, die wordt belast door een kracht R_x	8
3. Berekening van de spanningsverdeling rond een oneindig stijve pen of ring, die met een perspassing is verbonden met een orthotrope of isotrope plaat; geen belastende kracht	11
4. Combinatie van de gevallen (1) en (2) met een zodanige perspassing dat nergens tussen pen en plaat trekspanningen optreden	15
5. Bespreking van de resultaten en conclusies	17
6. Literatuur	19
7. Tabellen	20
8. Figuren	25
Appendix: Enkele gebruikte HP25 programma's	

Samenvatting

Teneinde enig inzicht te verschaffen in de spanningen die ontstaan bij een pen-gat verbinding in isotroop of orthotroop materiaal (C.R.P.), zijn de spanningen berekend 1^e tengevolge van een oneindig stijve, in een oneindig grote plaat vastgelijmde inclusie, belast door een kracht R_x , 2^e tengevolge van een onbelaste pen met overmaat $t = \frac{\Delta r}{r}$. Door superpositie worden tenslotte de spanningen berekend rond een belaste, overmaatse pen in isotroop materiaal en in orthotroop materiaal.

Lijst van notaties^{*)}

a_k ($k = 1, 2$), elasticiteitsconstante $a_1 = \left[\frac{2c_{12} + c_{33}}{2c_{11}} - \left\{ \left(\frac{2c_{12} + c_{33}}{2c_{11}} \right)^2 - \frac{c_{22}}{c_{11}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$
 $a_2 = \left[\frac{2c_{12} + c_{33}}{2c_{11}} + \left\{ \left(\frac{2c_{12} + c_{33}}{2c_{11}} \right)^2 - \frac{c_{22}}{c_{11}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$

$c_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) elementen van de compliantiematrix C_{ij} in $\epsilon_i = C_{ij} \sigma_j$

$g_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, n = 1, \dots, \infty$) coëfficiënt van de Laurentreeks voor de functie $G_k(z_k)$

$h_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, n = 1, \dots, \infty$) coëfficiënt van de Laurentreeks voor de functie $G_k^0(z)$

i de complexe eenheid $\sqrt{-1}$

i, j, k, l, n positieve gehele getallen gebruikt als indices

p vlaktedruk ($= \frac{R_x}{4}$)

q inwendige overdruk

r straal van een cirkel, poolcoördinaat

t overmaat van een pen $\frac{\Delta r}{r}$

u_k coëfficiënt uit de randvoorwaarde in de verplaatsingen:
 $u_k = c_{12} - c_{11} a_k^2$

v_k coëfficiënt uit de randvoorwaarde in de verplaatsingen:
 $v_k = \frac{c_{22} - c_{12} a_k^2}{a_k}$

$\left. \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}$ Carthesische coördinaten

Lijst van notaties (vervolg)

z complexe coördinaat $x + iy$

z_k complexe coördinaat $x + ia_k y$

z_k' $(z_k^2 + a_k^2 - i)^{\frac{1}{2}}$

z_0 z op de eenheidscirkel

$A_k = \frac{R_x}{4\pi} \frac{a_k (1 + \frac{c_{12}}{c_{22}} a_\ell^2)}{a_k^2 - a_\ell^2} \quad k = 1, 2, \ell = 2, 1$ Coëfficiënt van de logarithmische term in G_k

C.R.P. koolstof-versterkte kunststof

$G_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}$

$G_k^0 = G_k$ aan de rand van de eenheidscirkel

R_x resulterende kracht in x-richting

U spanningsfunctie van Airy

U_k ($k = 1, 2$) elasticiteitsgrootheid $U_k = \frac{u_\ell + v_\ell}{u_k v_\ell - u_\ell v_k}$ zie formule

X } Carthesisch coördinaatstelsel; bij anisotroop materiaal
in de richting van de elastische hoofdassen

Y

θ hoek met de positieve x-as

σ_i tensornotatie voor σ_x , σ_y en τ_{xy}

*) In het algemeen zijn de notaties aangehouden van het diktaat ka83: Composieten [3].

1. Inleiding

Naarmate composieten meer in constructies toegepast worden, wordt het probleem van de verbinding tussen composieten en andere materialen van groter belang. Op de eerste plaats moet hierbij worden gedacht aan de lijmverbinding (niet losneembaar) en de pen-gat verbinding (losneembaar). Dit rapport geeft een eerste aanzet tot de theoretische studie van de pen-gat verbinding, waarbij eenvoudigheidshalve de pen oneindig stijf is gedacht en er geen andere storingen in de nabijheid zijn. In plaats van een oneindig stijve pen kan uiteraard ook aan een oneindig stijve ring gedacht worden, die inwendig door een losse pen wordt belast. Een volgende stap kan zijn de overgang van één enkele naar een rij of zelfs een regelmatig patroon van pennen. De invloed van dergelijke "storingen" op de oplossing die hier wordt gegeven is echter, mits de afstand tussen de pennen niet kleiner is dan in constructies gebruikelijk (ca. 3x de diameter), gering.

Een veel belangrijker beperking van de hier berekende verbinding is, dat pen en plaat langs de gehele omtrek vast verbonden zijn, of dat de pen met een zodanige perspassing in het materiaal van de plaat is bevestigd, dat de gehele omtrek vrij is van trekspanningen.

Aan de berekening van het geval dat deze beide voorwaarden niet gelden, d.i. het in de praktijk het meest gebruikelijke geval, waarbij de krachtsoverdracht slechts plaats vindt door drukspanningen langs een deel van de gatrand, terwijl de rest van de rand door ovalisatie vrij ligt van de pen, en de uitbreiding van die berekening tot het geval van een rij of patroon van gaten met belaste pennen, wordt thans gewerkt. Dit rapport is dan ook slechts bedoeld als een eenvoudige inleiding tot het meer algemene probleem en heeft niet de pretentie op zich een belangrijk constructief probleem op te lossen.

Hier volgt een overzicht van de gebruikte vooronderstellingen:

- a. Het materiaal van de plaat is macroscopisch homogeen.
- b. Het materiaal gedraagt zich onder de hier toegepaste belastingen lineair elastisch en tijds onafhankelijk.
- c. De plaat is zo dun dat van een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand kan worden gesproken.

d. De plaat is oneindig groot, of meer praktisch: er bevinden zich in de nabijheid van het gat geen storende elementen die de spanningsverdeling beïnvloeden.

e. De pen is oneindig stijf of meer praktisch: de pen is zoveel stijver dan het omringende materiaal dat zijn vervormingen verwaarloosbaar klein zijn. Bedacht moet worden, dat dit bijv. door een stalen pen in een glasvezel-polyester plaat een goede benadering is, doch bijv. voor een dergelijke pen in een modern koolstof- of boriumlaminaat in veel mindere mate.

f. Geen enkel breukcriterium wordt overschreden.

Door deze veronderstellingen is het probleem teruggebracht tot de oplossing van de differentiaalvergelijking van Airy's spanningsfunctie U:

$$c_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + (2c_{12} + c_{33}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4}$$

voor de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand van orthotrope platen, met zeer eenvoudige randvoorwaarden, op de wijze die door Mushkelishvili [1] is aangegeven en voor anisotroop materiaal verder is uitgewerkt door Lekhnitski [2].

Het probleem valt geheel binnen het kader van het collegediktaat ka83, Composieten [3], waarvan de notaties hier zoveel mogelijk zijn aangehouden.

Als voorbeeld voor het orthotrope materiaal is gekozen koolstofvezel-versterkte epoxyhars, zoals die momenteel in het laboratorium voor Vormgeving en Fabricage wordt vervaardigd, en waarvoor volgens de laatste metingen [4] geldt:

$$\begin{aligned} E_x &= 12000 \text{ kgf/mm}^2 \\ E_y &= 700 \text{ kgf/mm}^2 \\ \mu_{xy} &= 0,64 \\ G_{xy} &= 350 \text{ kgf/mm}^2 \text{ (gemeten bij Fokker)} \end{aligned}$$

¹⁾ Hoewel deze waarde waarschijnlijk niet correct is, is hij wel aangehouden; verandering van de waarde zal weinig invloed hebben op de numerieke resultaten.

Deze waarden leiden tot:

$$a_1 = 0,73$$

$$a_2 = 5,70$$

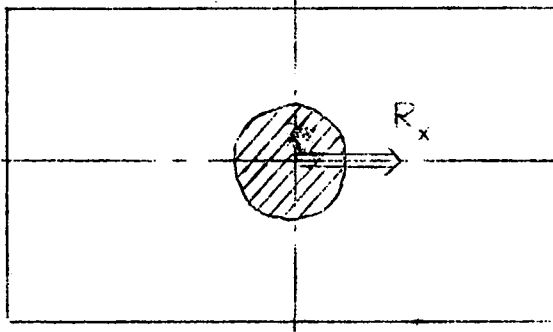
$$c_{11} = 8,3333 \cdot 10^{-5}$$

$$c_{12} = -5,3333 \cdot 10^{-5}$$

$$c_{22} = 1,4286 \cdot 10^{-3}$$

$$c_{33} = 2,8571 \cdot 10^{-3}$$

2. Berekening van de spanningsverdeling rond een oneindig stijve, vastgelijmde inclusie (pen of ring) in een orthotrope of isotrope plaat, die wordt belast door een kracht R_x



Oneindig grote orthotrope plaat.

Materiaalassen X en Y

Oneindig stijve inclusie met straal l , waarop resultante R_x .

De inclusie is aan de gehele rand vast verbonden met de plaat.

Gevraagd de spanningsverdeling in de plaat.

In het oneindige zullen de spanningen nul zijn.

In dit geval is er symmetrie om de X-as, antimetrie om de Y-as. Derhalve zijn de functies $G_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) van de vorm:

$$G_k(z_k) = A_k \ln z_k + g_0^{(k)} + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} g_n^{(k)} z_k^{-n} \quad (k = 1, 2) \quad (1)$$

Alle coëfficiënten zijn reëel, verder is

$$A_k = \frac{R_x}{4\pi} a_k \frac{(1 - c_{12}/c_{22} a_l^2)}{a_k^2 - a_l^2} \quad (k = 1, 2 \text{ en } l = 2, 1) \quad (2)$$

Voor $\ln z_k$ kan worden geschreven:

$$\ln z_k = \ln \left(\frac{1+a_k}{2} z + \frac{1-a_k}{2} \bar{z} \right) = \ln \frac{1+a_k}{2} + \ln z + \ln \left(1 + \frac{1-a_k}{1+a_k} \frac{\bar{z}}{z} \right)$$

Stel $z = re^{i\theta}$ dan is $\bar{z} = re^{-i\theta}$ en $\frac{\bar{z}}{z} = e^{-2i\theta}$.

Daar op de eenheidscirkel $z = e^{i\theta} = z_0$, is $\frac{\bar{z}}{z} = z_0^{-2}$, dus

$$\ln z_k = \ln \frac{1+a_k}{2} + \ln z + \ln \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{a_k-1}{a_k+1} \right)}{z_0^2} \right\} \quad (3)$$

De absolute waarde van $\left(\frac{a_k-1}{a_k+1} \right)$ is kleiner dan 1, die van z_0^2 is gelijk aan 1, derhalve is:

$$\left| \left(\frac{a_k - 1}{a_k + 1} \right) z_o^{-2} \right| < 1$$

waardoor de volgende reeksontwikkeling mogelijk is:

$$\begin{aligned} \ln \left\{ 1 - \left(\frac{a_k - 1}{a_k + 1} \right) z_o^{-2} \right\} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{a_k - 1}{a_k + 1} \right) z_o^{-2} \right]^n = \\ &= \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{a_k - 1}{a_k + 1} \right)^{\frac{n}{2}} z_o^{-n} \end{aligned} \quad (4)$$

Overall in de plaat geldt dus:

$$\begin{aligned} G_k &= A_k \ln \frac{1+a_k}{2} + A_k \ln z - A_k \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{a_k - 1}{a_k + 1} \right)^{\frac{n}{2}} z_o^{-n} + \\ &+ g_o^{(k)} + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} g_n^{(k)} z_k^{-n} \end{aligned} \quad \begin{matrix} k = 1, 2 \end{matrix} \quad (5)$$

In deze vorm van G_k zijn de randvoorwaarden in het oneindige impliciet opgenomen, door eventuele termen voor een homogeen spanningsveld weg te laten; blijven de randvoorwaarden op de eenheidscirkel:

Op de eenheidscirkel geldt (als we verder z schrijven i.p.v. z_o):

$$\begin{aligned} G_k^o &= A_k \ln \frac{1+a_k}{2} + A_k \ln z - A_k \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{a_k - 1}{a_k + 1} \right)^{\frac{n}{2}} z^{-n} + g_o^{(k)} + \\ &+ \sum_{n=2,4,6}^{\infty} h_n^{(k)} z^{-n} \end{aligned} \quad (6)$$

Stel de verplaatsingen u en v langs de cirkelrand gelijk nul, dan luiden de randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \underline{1^e}: \\ 2 \operatorname{Re} \left[u_1 A_1 \ln \frac{1+a_1}{2} + u_2 A_2 \ln \frac{1+a_2}{2} + (u_1 A_1 + u_2 A_2) \ln z - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2u_1 A_1 \sum_{2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a_1-1}{a_1+1} \right)^{\frac{n}{2}} z^{-n} - 2u_2 A_2 \sum_{2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a_2-1}{a_2+1} \right)^{\frac{n}{2}} z^{-n} + \\
 & + u_1 g_o^{(1)} + u_2 g_o^{(2)} + \sum_{2,4,6}^{\infty} \left(u_1 h_o^{(1)} + u_2 h_o^{(2)} \right) z^{-n} = 0 \quad (7)
 \end{aligned}$$

Re $\ln z = \operatorname{Re} \ln e^{i\theta} = 0$, dus de termen met $\ln z$ vervallen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{2,4,6}^{\infty} \left(u_1 h_o^{(1)} + u_2 h_o^{(2)} \right) \cos n\theta &= -u_1 A_1 \ln \frac{1+a_1}{2} - u_2 A_2 \ln \frac{1+a_2}{2} - \\
 & - u_1 g_o^{(1)} - u_2 g_o^{(2)} + 2 \sum_{2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ u_1 A_1 \left(\frac{a_1-1}{a_1+1} \right)^{\frac{n}{2}} + u_2 A_2 \left(\frac{a_2-1}{a_2+1} \right)^{\frac{n}{2}} \right\} \cos n\theta \quad (8)
 \end{aligned}$$

Beschouw de termen waarin θ niet voorkomt:

$$u_1 g_o^{(1)} + u_2 g_o^{(2)} = -u_1 A_1 \ln \frac{1+a_1}{2} - u_2 A_2 \ln \frac{1+a_2}{2} \quad (9)$$

Voor de termen met $\cos n\theta$ geldt voor iedere n ($n = 2, 4, 6 \dots \infty$).

$$u_1 h_n^{(1)} + u_2 h_n^{(2)} = \frac{2}{n} \left\{ u_1 A_1 \left(\frac{a_1-1}{a_1+1} \right)^{\frac{n}{2}} + u_2 A_2 \left(\frac{a_2-1}{a_2+1} \right)^{\frac{n}{2}} \right\} \quad (10)$$

2^e : (de termen $A_k \ln \frac{1+a_k}{2}$ hebben geen imaginair deel en worden dus weggelaten)

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Im} \left[\left(v_1 A_1 + v_2 A_2 \right) \ln z - v_1 A_1 \sum_{2,4,6}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{a_1-1}{a_1+1} \right)^{\frac{n}{2}} z^{-n} - \right. \\
 \left. - v_2 A_2 \sum_{2,4,6}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\frac{a_2-1}{a_2+1} \right)^{\frac{n}{2}} z^{-n} + \sum_{2,4,6}^{\infty} \left(v_1 h_n^{(1)} + v_2 h_n^{(2)} \right) z^{-n} \right] = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

Waar $v_1 A_1 + v_2 A_2 = 0$ vervalt de term met $\ln z$ en levert (11) voor elke n ($n = 2, 4, 6 \dots \infty$):

$$v_1 h_n^{(1)} + v_2 h_n^{(2)} = \frac{2}{n} \left\{ v_1 A_1 \left(\frac{a_1-1}{a_1+1} \right)^{\frac{n}{2}} + v_2 A_2 \left(\frac{a_2-1}{a_2+1} \right)^{\frac{n}{2}} \right\} \quad (12)$$

Wat betreft $g_o^{(1)}$ en $g_o^{(2)}$, hieraan wordt alleen de eis (9) gesteld. Eén van beide kan dus willekeurig worden gekozen. Voor de spanningsberekening zijn ze verder van geen belang.

Uit (10) en (12) kunnen alle $h_n^{(1)}$ en $h_n^{(2)}$ waarden worden berekend. Gemakkelijk is in te zien dat

$$h_n^{(k)} = \frac{2}{n} A_k \left(\frac{a_k - 1}{a_k + 1} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (13)$$

Substitueer dit in (6) dan volgt:

$$G_k^o = A_k \ln z = A_k \ln \left\{ \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 + a_k^2 - 1}}{1 + a_k} \right\} \quad (14)$$

Nu de functies $G_k(z_k)$ langs de contour deze vorm hebben, hebben ze die ook in het gehele veld, zodat:

$$G_k(z_k) = A_k \ln \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 + a_k^2 - 1}}{1 + a_k} \quad (15)$$

Differentiëren naar z_k levert:

$$\begin{aligned} G_k'(z_k) &= \frac{A_k(1 + a_k)}{z_k + \sqrt{z_k^2 + a_k^2 - 1}} \cdot \frac{d(z_k + \sqrt{z_k^2 + a_k^2 - 1})}{dz_k} = \\ &= A_k \left[\frac{z_k + z_k'}{(z_k')^2 + z_k z_k'} \right] = \frac{A_k}{z_k'} \end{aligned} \quad (16)$$

waarin:

$$z_k' = \sqrt{z_k^2 + a_k^2 - 1}$$

$$A_k = \frac{R_x}{4\pi} \frac{a_k \left(1 - \frac{c_{12}}{c_{22}} a_l^2 \right)}{a_k^2 - a_l^2}$$

$k = 1, 2$ en $l = 2, 1$

De Tenslotte worden de spanningen berekend met

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -2 \operatorname{Re} \sum a_k^2 G_k'(z_k) \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} \sum G_k'(z_k) \\ \tau_{xy} &= 2 \operatorname{Im} \sum a_k G_k'(z_k) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Deze formules gelden voor het gehele gebied. Uitgewerkt voor de contour:

$$\begin{aligned} z_k' &= \sqrt{(\cos \theta + i a_k \sin \theta)^2 + a_k^2 - 1} = \\ &= a_k \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned} \quad (18)$$

$$G_k' = A_k \frac{a_k \cos \theta - i \sin \theta}{a_k^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \quad (19)$$

Dit levert voor de spanningen:

$$\frac{\sigma_x}{p} = - \frac{2}{\pi \cos \theta} \left[\frac{(a_1^2 + a_2^2 + \mu_{12}) \operatorname{tg}^2 \theta + a_1^2 a_2^2}{(a_1^2 + \operatorname{tg}^2 \theta) (a_2^2 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \right] \quad (20)$$

$$\frac{\sigma_y}{p} = \frac{2}{\pi \cos \theta} \left[\frac{\operatorname{tg}^2 \theta - \mu_{12}}{(a_1^2 + \operatorname{tg}^2 \theta) (a_2^2 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \right] \quad (21)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{p} = \frac{-2 \operatorname{tg} \theta}{\pi \cos \theta} \left[\frac{\operatorname{tg}^2 \theta - \mu_{12}}{(a_1^2 + \operatorname{tg}^2 \theta) (a_2^2 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \right] \quad (22)$$

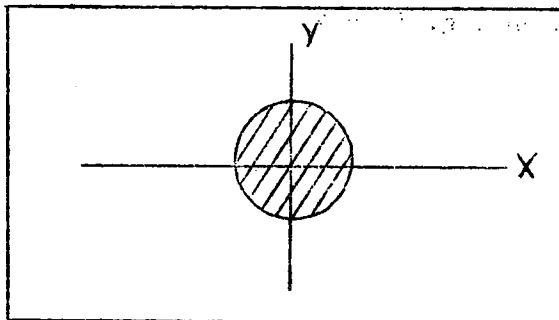
Dit levert voor $\theta = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{p} &= + \frac{2}{\pi} \\ \frac{\sigma_y}{p} &= + \frac{2}{\pi} \frac{c_{12}}{c_{22}} = + \frac{2}{\pi} \mu_{12} \frac{E_2}{E_1} \\ \frac{\tau_{xy}}{p} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{onafhankelijk van het materiaal } \mp 0,64 \\ &\text{voor isotroop materiaal } \mp 0,21, \text{ voor} \\ &\text{CRP } \mp 0,024 \end{aligned}$$

In de punten $\theta = \pm 90^\circ$ vindt men $\sigma_x = \sigma_y = 0$ en $\frac{\tau_{xy}}{p} = \mp \frac{2}{\pi} \approx \mp 0,64$, onafhankelijk van het materiaal. Voor een unidirectionaal laminaat zou een dergelijk hoge schuifspanning maatgevend zijn.

Zie voor de resultaten tabel 1 en 2 en fig. 1 en 2.

3. Berekening van de spanningsverdeling rond een oneindig stijve pen of ring, die met een perspassing is verbonden met een orthotrope of isotrope plaat; geen belastende kracht



Randvoorwaarde: de verplaatsing langs de eenheids-cirkel
 tangential = 0, radiaal = $t \left(= \frac{\Delta r}{r} \right)$
 (dus geen slip langs de pen)
 Slechts stoorspanningen, dus alleen negatieve machten van z_k

Wegens symmetrie om x- en y-as heeft G_k de vorm:

$$G_k(z_k) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} g_n^{(k)} z_k^{-n} \quad (k = 1, 2) \quad (23)$$

De coëfficiënten zijn reëel.

Aan de cirkelrand is de verplaatsing:

$$u = t \cos \theta$$

$$v = t \sin \theta$$

Er valt van de reeksen slechts één term te verwachten: stel

$$G_k^0 = g^{(k)} z^{-1} \quad (24)$$

dan worden de randvoorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left[\left(u_1 g^{(1)} + u_2 g^{(2)} \right) z^{-1} \right] &= t \cos \theta \\ 2 \operatorname{Im} \left[\left(v_1 g^{(1)} + v_2 g^{(2)} \right) z^{-1} \right] &= t \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 g^{(1)} + u_2 g^{(2)} &= \frac{t}{2} \\ v_1 g^{(1)} + v_2 g^{(2)} &= -\frac{t}{2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

zodat:

$$\left. \begin{aligned} g^{(1)} &= \frac{u_2 + v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \frac{t}{2} \\ g^{(2)} &= \frac{-(u_1 + v_1)}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \frac{t}{2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$G_k^0 = + \frac{t}{2} \frac{u_\ell + v_\ell}{u_k v_\ell - u_\ell v_k} z^{-1} \quad (k = 1, 2 \text{ en } \ell = 2, 1) \quad (28)$$

Hierin is:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= c_{12} - c_{11} a_k^2 \\ v_k &= \frac{c_{22} - c_{12} a_k^2}{a_k} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Noem:

$$\frac{u_\ell + v_\ell}{u_k v_\ell - u_\ell v_k} = U_k \quad (30)$$

In het gehele veld geldt nu:

$$G_k(z_k) = \left(\frac{t}{2}\right) U_k \frac{1 + a_k}{z_k + z_k'}$$

waarin:

$$z_k' = \sqrt{z_k^2 + a_k^2 - 1}$$

$$G_k'(z_k) = - \frac{t}{2} U_k \frac{1 + a_k}{(z_k + z_k')^2} \frac{d(z_k + z_k')}{dz_k}$$

$$\frac{d(z_k + z_k')}{dz_k} = 1 + \frac{d\sqrt{z_k^2 + a_k^2 - 1}}{dz_k} = 1 + \frac{z_k}{\sqrt{z_k^2 + a_k^2 - 1}} = \frac{z_k + z_k'}{z_k'}$$

dus:

$$G_k'(z_k) = - U_k \frac{t}{2} \frac{(1 + a_k)}{z_k'(z_k + z_k')} \quad (31)$$

Dan volgen de spanningen uit:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -2 \sum_1^2 a_k^2 \operatorname{Re} G_k' \\ \sigma_y &= 2 \sum_1^2 \operatorname{Re} G_k' \\ \tau_{xy} &= 2 \sum_1^2 a_k \operatorname{Im} G_k' \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Werken we dit uit aan de cirkelomtrek:

$$z_k = \cos \theta + i a_k \sin \theta$$

$$z_k' = a_k \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_k'(z_k + z_k')} &= \{(a_k \cos \theta + i \sin \theta) (1 + a_k) - (\cos \theta + i \sin \theta)\}^{-1} = \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \frac{1}{1+a_k} - i \cos \theta \sin \theta}{a_k^2 \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + (a_k^2 + 1) \cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \frac{1}{1+a_k} - i \cos \theta \sin \theta}{a_k^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Dus aan de cirkelomtrek is:

$$\begin{aligned} G_k'(z_k) &= -U_k \frac{t}{2} \frac{\{(1 + a_k) \cos^2 \theta - 1\} - i (1 + a_k) \cos \theta \sin \theta}{a_k^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \\ &= -U_k \frac{t}{2} \left(\frac{a_k \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{a_k^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} - i (1 + a_k) \frac{\cos \theta \sin \theta}{a_k^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Uitwerking van σ_x , σ_y en τ_{xy} levert:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{t} &= \sum_1^2 a_k^2 U_k \left(\frac{a_k - \operatorname{tg}^2 \theta}{a_k^2 + \operatorname{tg}^2 \theta} \right) \\ \frac{\sigma_y}{t} &= - \sum_1^2 U_k \frac{a_k - \operatorname{tg}^2 \theta}{a_k^2 + \operatorname{tg}^2 \theta} \\ \frac{\tau_{xy}}{t} &= \sum_1^2 a_k (1 + a_k) U_k \frac{\operatorname{tg} \theta}{a_k^2 + \operatorname{tg}^2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(waarbij voor $\theta = 90^\circ + k\pi \frac{\operatorname{tg} \theta}{a_k^2 + \operatorname{tg}^2 \theta} = 0$)

Deze uitkomsten zijn niet zonder meer bruikbaar voor het isotrope geval. De oplossing daarvan (in poolcoördinaten) is echter al zeer lang bekend. Volgens [5] geldt, voor een oneindig grote plaat met inwendige overdruk q in het gat:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{q} &= -\frac{1}{r^2} \\ \frac{\sigma_\theta}{q} &= +\frac{1}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\epsilon_\theta = t = \frac{\sigma_\theta}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E} = \frac{q}{2} \frac{(1 + \mu)}{E}$$

zodat aan de omtrek van het eenheidsgat:

$$t = \frac{\Delta r}{r} = q \frac{(1 + \mu)}{E} \quad (36)$$

dus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{t} &= -\frac{E}{1 + \mu} \cdot \frac{1}{r^2} \\ \frac{\sigma_\theta}{t} &= +\frac{E}{1 + \mu} \cdot \frac{1}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Hieruit volgt aan de omtrek van de eenheidscirkel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{t} &= -\frac{E}{1 + \mu} \cos 2\theta \\ \frac{\sigma_y}{t} &= +\frac{E}{1 + \mu} \cos 2\theta \\ \frac{\tau_{xy}}{t} &= -\frac{E}{1 + \mu} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

De numerieke uitkomsten van (34) zijn weergegeven in tabel 3 en figuur 3.

4. Combinatie van de gevallen (1) en (2) met een zodanige perspassing dat nergens tussen pen en plaat trekspanningen optreden

Daar verondersteld is dat alle vervormingen elastisch zijn, mogen de spanningen volgend uit de hiervoor besproken gevallen worden gesuperponeerd. Daarbij wordt de perspassing zodanig gekozen dat in het maatgevende punt $\theta = 180^\circ$ de totale spanning juist nul wordt. Zowel in het orthotrope als in het isotrope geval is daar

$$\frac{\sigma_x}{p} = \frac{\sigma_r}{p} = \frac{2}{\pi}$$

Uit tabel 3 blijkt, dat voor C.R.P. per % overmaat in dit punt een spanning $\sigma_x = -22,78 \text{ kgf/mm}^2$ ontstaat. Om dit op $-\frac{2}{\pi} \cdot p$ te brengen moeten de cijfers van deze tabel dus worden vermenigvuldigd met $\frac{2p}{\pi \cdot 22,78}$, d.w.z. er is een overmaat nodig groot

$$t = \frac{2}{\pi \cdot 22,78} \cdot p \% = \frac{p}{35,78} \%$$

Voor het isotrope geval is de spanning in ditzelfde punt even groot, dus $\sigma_x = \sigma_r = \frac{2}{\pi} p$.

In het vorige hoofdstuk is afgeleid dat in dit geval door overmaat t een spanning ontstaat groot $\sigma_r = -\frac{Et}{1+\mu}$, dus als $\sigma_r = q = -\frac{2}{\pi} p$ moet zijn, dan is een overmaat t nodig groot

$$t = \frac{2(1+\mu)}{\pi E} p$$

of

$$t = \frac{200(1+\mu)}{\pi E} p \%$$

Voor Al-plaat geldt $E = 7200 \text{ kgf/mm}^2$ en $\mu = \frac{1}{3}$, dus $t = \frac{p}{84,82} \%$.

Uit de tabellen 1 en 2 kan $\frac{\sigma_r}{p}$ worden berekend tengevolge van de belaste pen; het resultaat is weergegeven in tabel 4, 2^e kolom; merkwaardigerwijs (?) blijkt deze belasting onafhankelijk te zijn van het materiaal en gelijk aan $\frac{\sigma_r}{p} = -\frac{2}{\pi} \cos \theta$ (zie figuur 4).

De radiale drukspanningen tengevolge van de perspassing, gereduceerd volgens het bovenstaande tot een waarde $-\frac{2}{\pi}$ in het punt $\theta = 180^\circ$ (uiteraard is de radiale spanning in het isotrope geval constant) zijn eveneens weergegeven in tabel 4, waarna de totale radiale spanning is berekend door superpositie. Zowel voor C.R.P. als voor iso-

troop materiaal is het resultaat weergegeven in figuur 4. Voor isotroop materiaal wordt dus de radiale spanning $\frac{\sigma_r}{p} = -\frac{2}{\pi} (\cos \theta + 1)$, voor anisotroop materiaal fluctueert de lijn daar omheen (fig. 4).

N.B. Met de formules (20, 21 en 22) uit hoofdstuk 2 en

$$\frac{\tau_{r\theta}}{p} = -\cos \theta \sin \theta \frac{\sigma_x}{p} + \cos \theta \sin \theta \frac{\sigma_y}{p} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\tau_{xy}}{p}$$

volgt:

$$\frac{\tau_{r\theta}}{p} = -\frac{2}{\pi} \sin \theta$$

Integreert men de horizontaal ontbondene van $\sigma_r = \sigma_r \cos \theta$ van 0 tot 2π , dan vindt men $2p$.

Integreert men de horizontaal ontbondene van $\tau_{r\theta} = -\tau_{r\theta} \sin \theta$ eveneens van 0 tot 2π , dan vindt men ook $2p$. De resultante $R_x = 4p$ wordt dus voor de ene helft overgedragen via de radiale spanningen, voor

de andere helft door tangentialen (schuif-) spanningen.

Tenslotte worden in tabel 5 de spanningen σ_x , σ_y en τ_{xy} berekend tengevolge van de samengestelde belasting door R_x en door de hiervoor berekende perspassing die de grootste radiale spanning (voor $\theta = 180^\circ$) juist nul maakt. Daarvoor worden de spanningen uit tabel 1 opgeteld bij die van tabel 3, gedeeld door 35,78 voor het orthotrope materiaal, en de spanningen uit tabel 2 opgeteld bij de voor het isotrope materiaal geldende spanningen, tengevolge van de perspassing, berekend met:

$$\frac{\sigma_x}{p} = -\frac{2}{\pi} \cos 2\theta$$

$$\frac{\sigma_y}{p} = +\frac{2}{\pi} \cos 2\theta$$

$$\frac{\tau_{xy}}{p} = -\frac{2}{\pi} \sin 2\theta$$

Het resultaat is, behalve in tabel 5, weergegeven in de figuren 5 en 6.

5. Bespreking van de resultaten en conclusies

Het gaat hier in hoofdzaak om de resultaten betreffende de orthotrope plaat (koolstofvezelversterkte epoxyhars); de resultaten voor de isotrope plaat dienen meer ter vergelijking.

De elasticiteitsgrootheden van de als voorbeeld genomen orthotrope plaat (C.R.P.) zijn in de inleiding genoemd.

1) Het blijkt dat, onafhankelijk van het materiaal en van de perspassing de helft van de belasting R_x wordt overgedragen door radiale, de andere helft door tangentiale (schuif-)spanningen langs de rand.

2) De stoorspanningen tengevolge van de belasting R_x dempen veel langzamer uit dan die tengevolge van de perspassing; de eerste r.l. omgekeerd evenredig aan r , de tweede omgekeerd evenredig aan r^2 .

3) Voor het C.R.P. blijkt, zonder perspassing, σ_x op te lopen tot bijna $2p$ bij $\theta \approx 80^\circ$ vergeleken met een max. van ca. $0,76 p$ bij $\approx 40^\circ$ voor isotroop materiaal. Daarentegen blijft σ_y beneden ca. $5,5\%$ van p , vergeleken bij meer dan 21% van p in isotroop materiaal. De schuifspanningen zijn in beide gevallen maximaal onder 90° met de X-as en bedragen 64% van p .

Gezien de lage schuifsterkte van C.R.P. zal dit bij breuk vermoedelijk maatgevend zijn, mogelijk gecombineerd met de hoge σ_x -waarde in de onmiddellijke nabijheid.

4) De radiale spanning tussen pen en gat is onafhankelijk van het materiaal en bedraagt $\sigma_r = -\frac{2}{\pi} p \cos \theta$. Indien er geen perspassing is wordt de lijmverbinding maximaal belast in het punt $\theta = 180^\circ$ en wel met een trekspanning groot $0,64 p$.

Dit betekent, dat een ingelijmde pen of ring slechts een zeer geringe kracht kan overdragen, daar de lijm-trek sterkte van de orde van $5 \text{ à } 8 \text{ kgf/mm}^2$ bedraagt en daarbij nog weinig betrouwbaar is.

5) De perspassing als verbindingsmethode wordt in de werktuigbouw veel toegepast, in de lucht- en ruimtevaart echter niet. Voor C.R.P. blijkt een overmaat van $\frac{p}{35,78} \%$, voor aluminium plaat een van $\frac{p}{84,2} \%$ nodig. De grootste radiale drukspanning tengevolge van de perspassing alléén bedraagt voor C. R.P. ruim $0,86 p$ voor $\theta \approx 50^\circ$, voor de belaste pen met perspassing ca. $1,32 p$ op $\theta = 40^\circ$. Dit is iets ongunstiger dan voor isotroop materiaal, waar het maximum ca. $1,27 p$ bedraagt bij $\theta = 0^\circ$ (zie fig. 4).

6) Voor de sterkte van de orthotrope plaat zijn vooral van belang de spanningen σ_x , σ_y en τ_{xy} door de gecombineerde belastingen R_x en de perspassing. σ_x blijkt bij $\theta \approx 95^\circ$ een zeer hoge waarde te hebben (ca. $4p$, zie fig. 5). Echter ook de toelaatbare waarde van σ_x is hoog, zodat dit nog niet direct aanleiding tot breuk behoeft te zijn. σ_y blijft kleiner dan $0,2 p$ en zal dus niet maatgevend zijn; τ_{xy} wordt bijna gelijk p bij 65° en daar de toelaatbare waarde laag ligt, mag verondersteld worden dat de schuifspanning maatgevend zal blijken te zijn. Figuur 6 laat zien, dat σ_x bij isotroop materiaal veel kleiner blijft.

7) Tenslotte wordt opgemerkt, dat alle berekeningen zijn uitgevoerd met een programmeerbare zakrekenmachine (HP25). Daar dit momenteel nog een nieuwe mogelijkheid is, zijn in de appendix enkele van de gebruikte, zeer eenvoudig op te stellen en te hanteren programma's weergegeven.

6. Literatuur

1. Muskhelishvili: Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Noordhoff, Groningen, 1953.
2. Lekhnitskii: Anisotropic plates, Gordon and Breach, London, 1968.
3. Spies: Composieten, collegedictaat ka 83, T.H.-Delft, Afdeling der Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek, 1972.
4. Tempelman: De bepaling van elasticiteitsconstanten van unidirectioneel gewikkelde koolstof-, Kevlar- en glascylinders, afstudeerwerk T.H.-Delft, Afdeling der Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek, 1975.
5. Love: The mathematical theory of elasticity, 1927.

Tabel 1

Spanningsverdeling aan de rand van de
pen, 1e kwadrant bij koolstof-epoxy
unidirectionaal composiet: ($a_1 = 0,73$,
 $a_2 = 5,70$, $\mu_{12} \frac{E_1}{E_2} = 0,03733$).

θ graden	σ_x/p	σ_y/p	τ_{xy}/p
0	-0,64	-0,024	0
10	-0,65	-0,022	0,004
20	-0,68	-0,016	0,006
30	-0,74	-0,008	0,005
40	-0,83	-0,001	0,001
50	-0,97	+0,012	-0,014
60	-1,20	0,024	-0,041
70	-1,56	0,040	-0,109
80	-1,91	0,055	-0,31
85	-1,51	0,044	-0,51
90	0	0	-0,64

Tabel 2
Spanningsverdeling aan de rand van
de pen, 1e kwadrant in isotroop
materiaal.

θ graden	σ_x/p	σ_y/p	τ_{xy}/p
0	-0,64	-0,212	0
10	-0,65	-0,184	0,032
20	-0,69	-0,106	0,039
30	-0,74	0	0
40	-0,76	0,106	-0,089
50	-0,73	0,184	-0,219
60	-0,64	0,212	-0,368
70	-0,47	0,184	-0,505
80	-0,25	0,106	-0,602
85	-0,13	0,055	-0,628
90	0	0	-0,637

Tabel 3

Spanningen in orthotrope plaat (C.R.P.)

rond een oneindig stijve pen of ring

met perspassing $\frac{\Delta r}{r} = t$

θ graden	$\frac{\sigma_x}{t} \cdot 10^{-2}$ kgf/mm ²	$\frac{\sigma_y}{t} \cdot 10^{-2}$ kgf/mm ²	$\frac{\sigma_{xy}}{t} \cdot 10^{-2}$ kgf/mm ²
0	-22,78	6,150	0,000
10	-22,37	5,617	- 5,271
20	-21,23	4,225	-10,446
30	-19,47	2,421	-15,486
40	-17,06	0,608	-20,396
50	-13,50	-0,99	-25,068
60	- 7,21	-2,333	-28,822
70	7,04	-3,572	-29,247
80	48,34	-5,311	-20,780
85	88,70	-6,669	-11,582
90	115,18	-7,523	0,000

Tabel 4

Radiale spanningen tengevolge van een belasting R_x en een aangepaste perspassing van de pen of ring

θ graden	σ_r/p orthotroop en isotroop	σ_r/p door perspassing (C.R.P.)	σ_r/p totaal (C R.P.)	σ_r/p door perspassing (isotroop)	σ_r/p totaal (isotroop)
0	-0,6366	-0,6366	-1,2732	-0,6366	-1,2732
10	-0,6270	-0,6520	-1,2790	-	-1,2636
20	-0,5982	-0,6977	-1,2959	-	-1,2348
30	-0,5513	-0,7660	-1,3173	-	-1,1879
40	-0,4876	-0,8342	-1,3218	-	-1,1242
50	-0,4092	-0,8621	-1,2713	-	-1,0458
60	-0,3184	-0,7969	-1,1153	-	-0,9550
70	-0,2177	-0,5906	-0,9083	-	-0,8543
80	-0,1105	-0,3018	-0,4123	-	-0,7471
90	0,0000	-0,2103	-0,2103	-	-0,6366
100	0,1105	-0,3018	-0,1913	- constant	-0,5261
110	0,2177	-0,5906	-0,3729	-	-0,4189
120	0,3184	-0,7969	-0,4785	-	-0,3182
130	0,4092	-0,8621	-0,4529	-	-0,2274
140	0,4876	-0,8342	-0,3466	-	-0,1490
150	0,5513	-0,7660	-0,2147	-	-0,0853
160	0,5982	-0,6977	-0,0995	-	-0,0384
170	0,6270	-0,6520	-0,0250	-	-0,0096
180	0,6366	-0,6366	0	-	0

Tabel 5

De gecombineerde spanningen in orthotroop (C.R.P.) en isotroop materiaal

θ graden	σ_x/p (C.R.P.)	σ_y/p (C.R.P.)	τ_{xy}/p (C.R.P.)	σ_x/p isotroop	σ_y/p isotroop	τ_{xy}/p isotroop
0	-1,28	0,148	0,000	-1,273	0,424	0,000
10	-1,275	0,135	-0,143	-1,250	0,414	-0,185
20	-1,27	0,102	-0,286	-1,179	0,382	-0,371
30	-1,28	0,060	-0,423	-1,053	0,318	-0,551
40	-1,31	0,016	-0,569	-0,867	0,217	-0,716
50	-1,35	-0,016	-0,715	-0,619	0,073	-0,846
60	-1,40	-0,041	-0,846	-0,318	-0,106	-0,919
70	-1,36	-0,060	-0,926	-0,014	-0,304	-0,914
80	-0,56	-0,093	-0,89	0,345	-0,492	-0,819
85	0,97	-0,142	-0,83	0,498	-0,572	-0,738
90	3,22	-0,210	-0,64	0,637	-0,637	-0,637
95	3,99	-0,230	-0,19	0,756	-0,682	-0,517
100	3,26	-0,203	+0,27	0,852	-0,704	-0,384
110	1,76	-0,140	0,708	0,962	-0,672	-0,096
120	1,00	-0,089	0,764	0,955	-0,530	+0,184
130	0,59	-0,040	0,637	0,840	-0,294	0,408
140	0,35	0,018	0,571	0,646	0,004	0,538
150	0,20	0,076	0,438	0,417	0,318	0,551
160	0,09	0,134	0,298	0,204	0,594	0,448
170	0,02	0,179	0,151	0,054	0,782	0,250
180	0,00	0,196	0,000	0,000	0,849	0,000

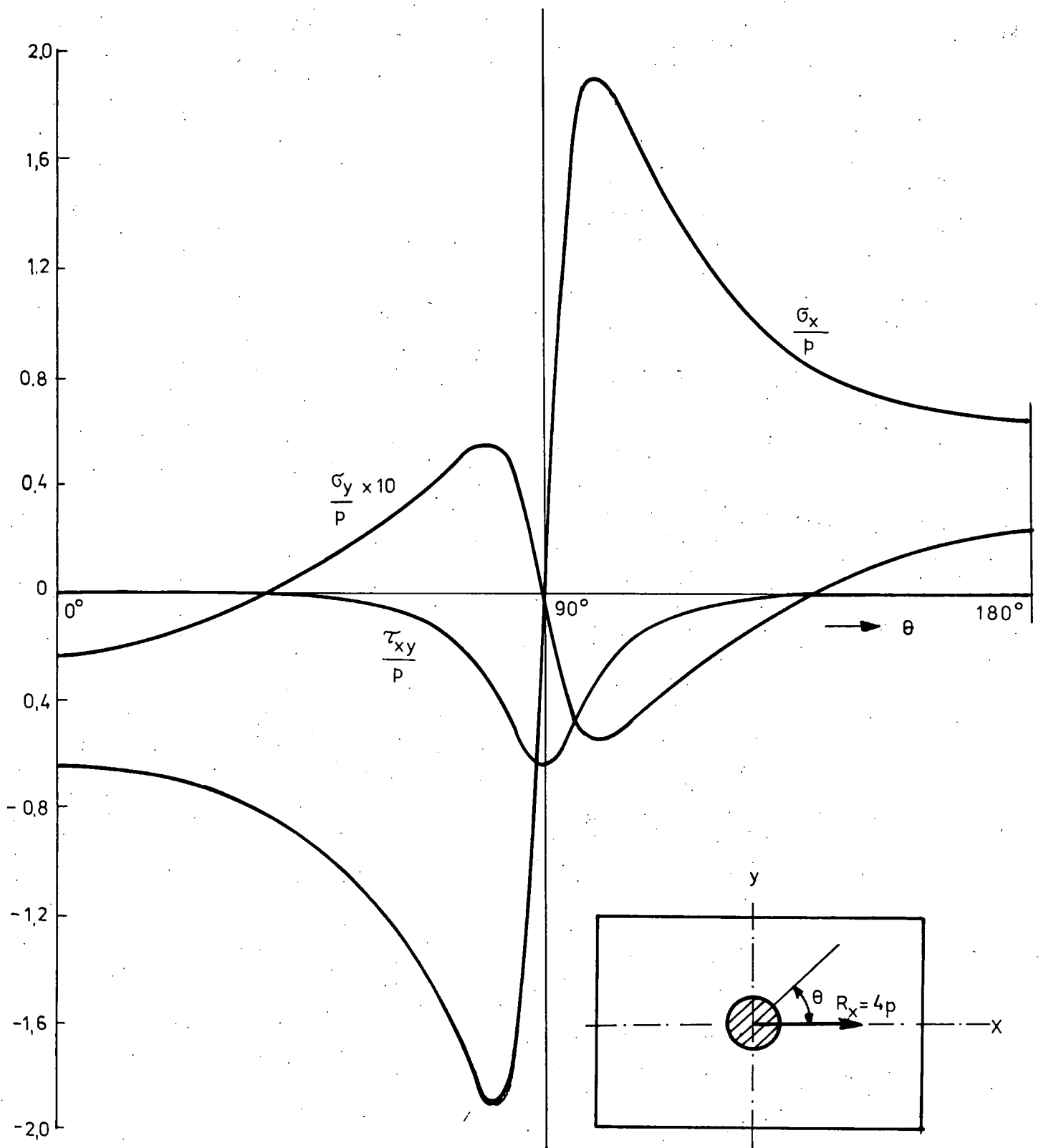


FIG.1. SPANNINGEN ROND EEN ∞ STIJVE PEN, VASTGELIJMD IN ORTHOTROPE PLAAT.

(CRP, $a_1 = 0,73$, $a_2 = 5,70$, $\mu_{12} \frac{E_2}{E_1} = -0,0373$)

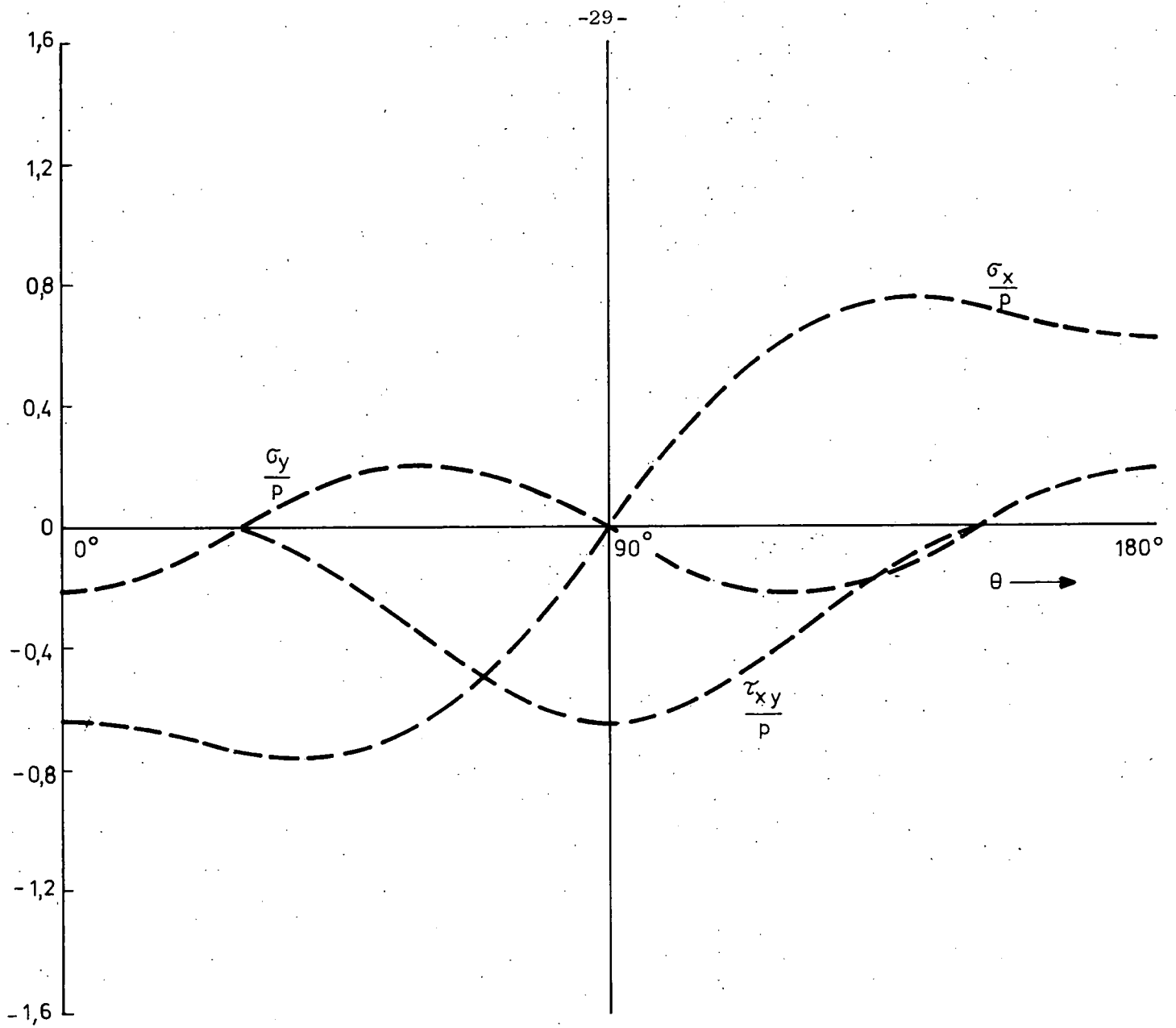


FIG. 2: SPANNINGEN ROND EEN ∞ STIJVE PEN, VASTGELIJMD IN ISOTROPE PLAAT

$$(a_1 = a_2 = 1 ; \mu = \frac{1}{3})$$

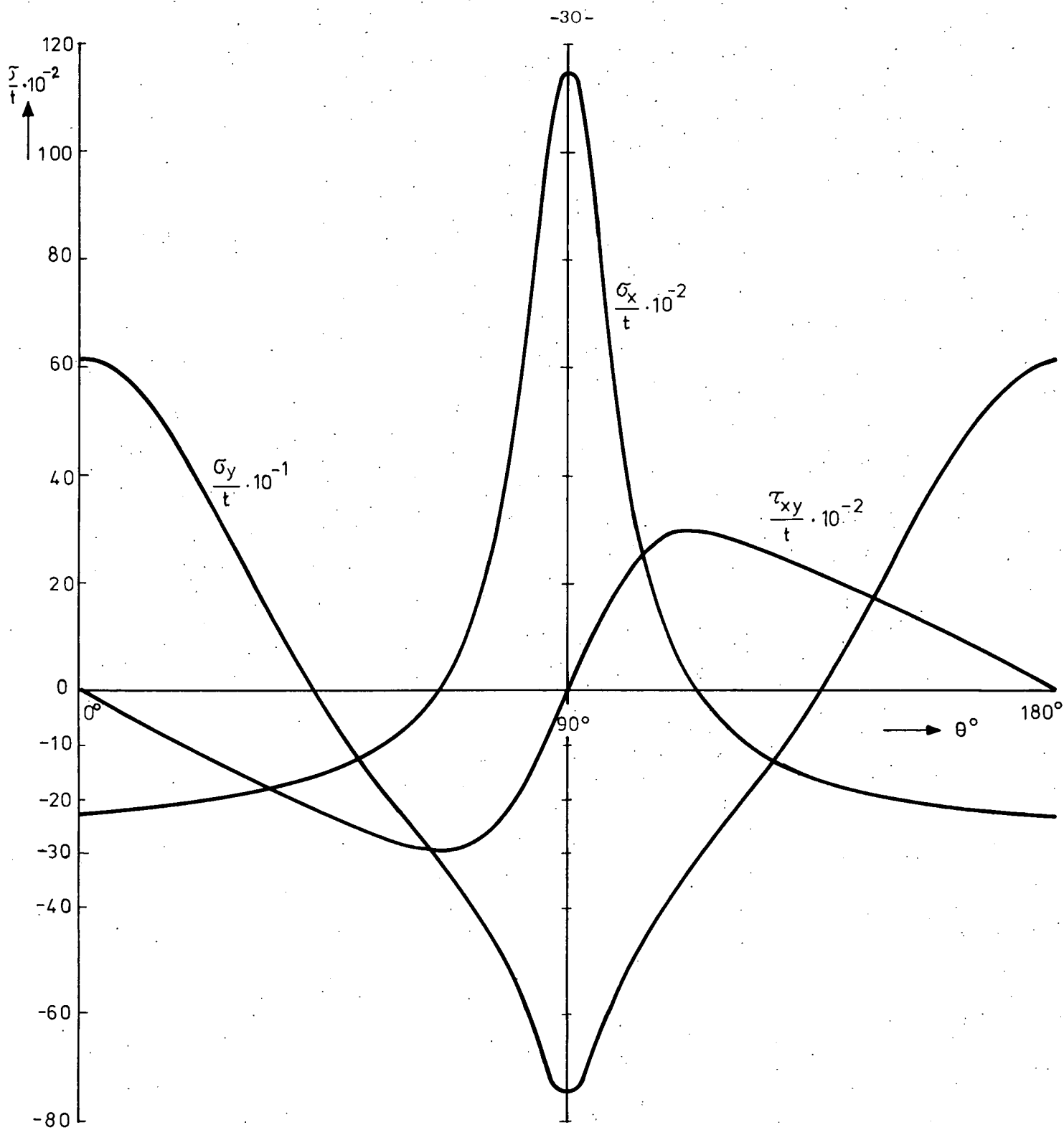


FIG. 3: SPANNINGEN ROND EEN OVERMAATSE, ∞ STIJVE PEN, IN kg/mm^2 PER % OVERMAAT
 ($100t = 100 \frac{\Delta z}{z} = \text{OVERMAAT IN \%}$), $\frac{\sigma_y}{100t}$ IS 10 x VERGROOT (DUS $\frac{\sigma_y}{10t}$)
 PLAAT CRP, $a_1 = 0,73$ $a_2 = 5,70$

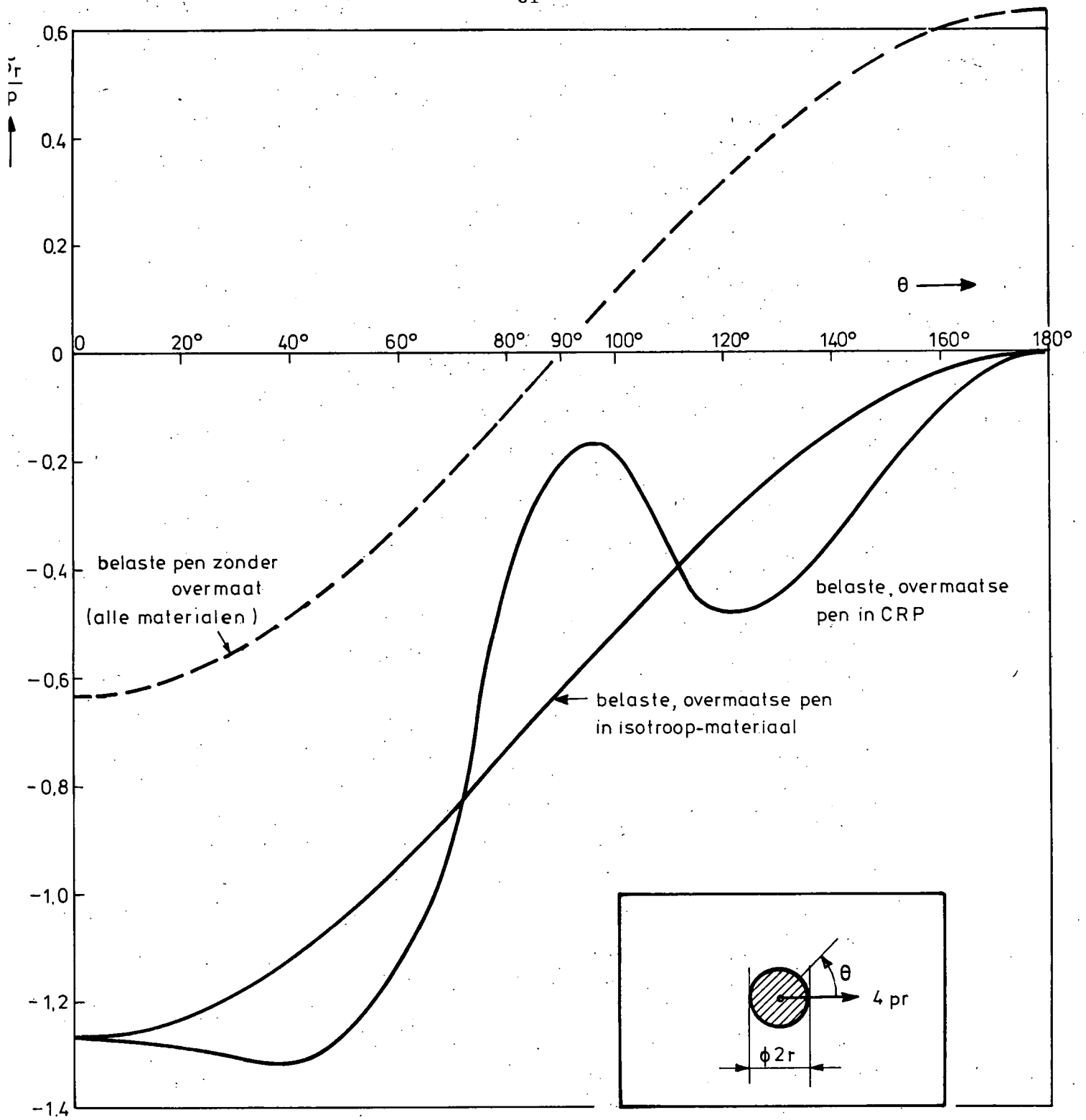


FIG. 4 : RADIALE SPANNING IN ISOTROOP EN ANISOTROOP MATERIAAL (CRP) ROND EEN ∞ STIJVE PEN OF RING, MET EN ZONDER PERSPASSING.

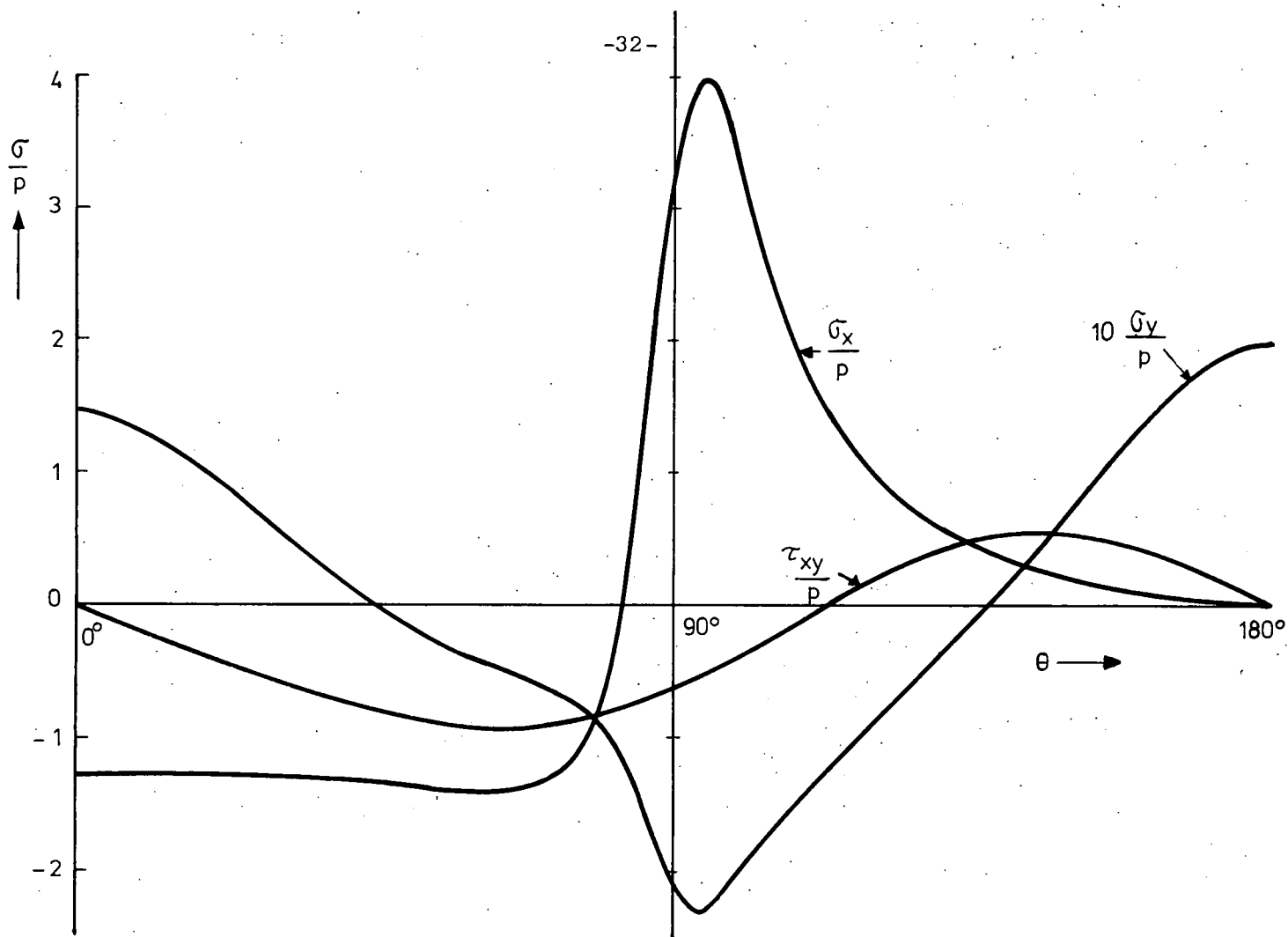


FIG. 5: DE GECOMBINEERDE SPANNINGEN IN ORTHOTROOP MATERIAAL (C.R.P.)

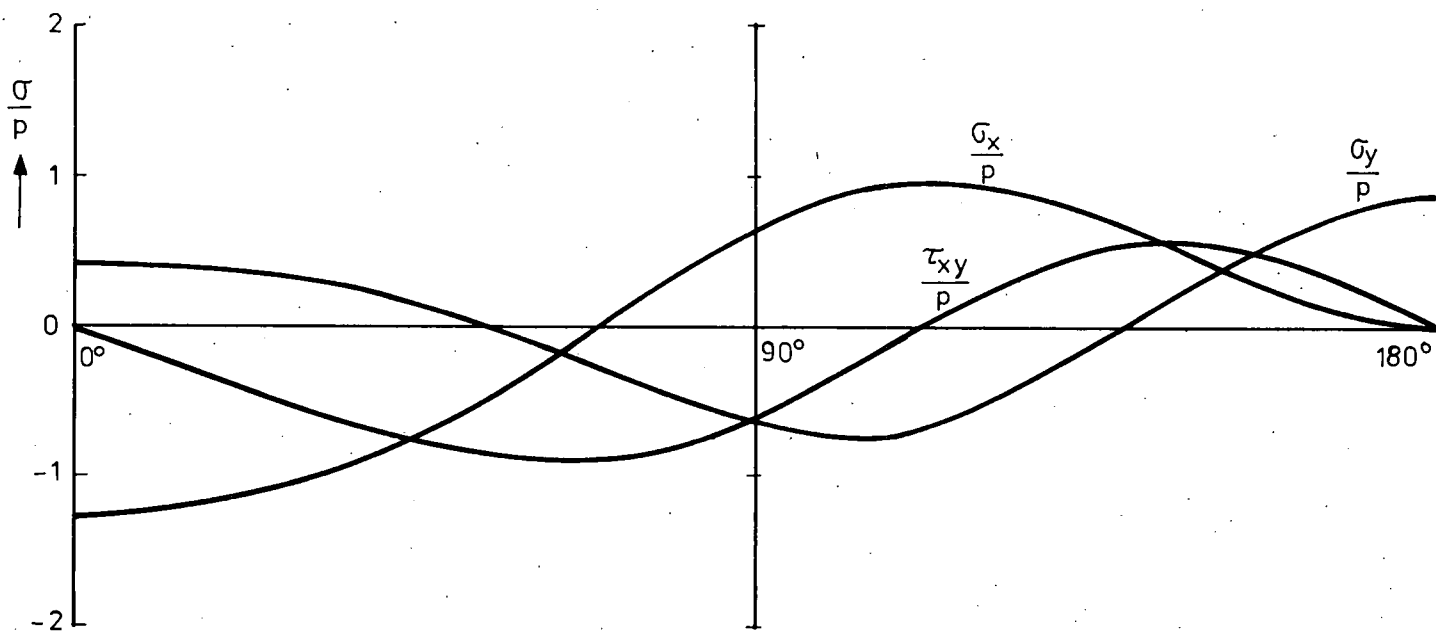


FIG. 6: DE GECOMBINEERDE SPANNINGEN IN ISOTROOP MATERIAAL

HP-25 Program Form

Title Spanning rond een oneindig stijve pers met belasting $R_x = 4p$ Page 1 of 1

Switch to PRGM mode, press **f** **PRGM**, then key in the program.

DISPLAY		KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS	REGISTERS
LINE	CODE							
00								$R_0 - \mu_{12}$
01		$\uparrow$						
02		f sin						$R_1 - a_1^2$
03		$\frac{1}{x}$						
04		f cos						$R_2 - a_2^2$
05		STO 5						$R_3 - (tg^2 \theta)$
06		$\div$						
07		STO 4						$R_4 - (tg \theta)$
08		gx^2						
09		STO 3						$R_5 - (\cos \theta)$
10		RCL 1						
11		RCL 2						$R_6 - (\text{zie 33})$
12		+						
13		RCL 0						
14		+	teller	$\frac{\sigma_x}{p}$				
15		x						
16		RCL 1						
17		RCL 2						
18		x						
19		+						
20		RCL 1						
21		RCL 3						
22		+						
23		RCL 2						
24		RCL 3						
25		+						na programmeren zet
26		x						schakelaar op "run"
27		RCL 5						vul R_0, R_1 en R_2
28		x						Clear program
29		$g\pi$						tik in θ (in graden)
30		x						f fix 4
31		2						druk op R/S
32		$\div$						$\rightarrow \sigma_x/p$
33		STO 6						druk op R/S
34		$\div$						$\rightarrow \sigma_y/p$
35		CHS						druk op R/S
36		R/S $\rightarrow \sigma_x/p$						$\rightarrow \tau_{xy}/p$
37		RCL 3						Daarna: clear program
38		RCL 10						tik in nieuwe θ
39		-						druk op R/S etc.
40		RCL 6						
41		$\div$						N.B.1. programma
42		R/S $\rightarrow \sigma_y/p$						werkt ook voor iso-
43		CHS						troop materiaal
44		RCL 4						N.B.2. programma
45		x						werkt niet voor
46		R/S $\rightarrow \tau_{xy}/p$						$\theta = 90^\circ$!
47								
48								
49								

HP-25 Program Form

Title Pen met perspassing in orthotrope plaat, berekening U_1 en U_2 Page 1 of 2

Switch to PRGM mode, press **[F]** **PRGM**, then key in the program.

DISPLAY		KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS	REGISTERS
LINE	CODE							
00								R_0
01		RCL 4	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} U_1$					$(u_1 v_2 - u_2 v_1)$
02		RCL 3						
03		RCL 1						$R_1 - a_1$
04		gx^2						
05		STO 6						
06		x	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} v_2$					$R_2 - a_2$
07		-						
08		RCL 5						$R_3 - c_{11}$
09		RCL 4						
10		RCL 2						$R_4 - c_{12}$
11		gx^2	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} u_2$					$R_5 - c_{22}$
12		STO 7						
13		x						$R_6 - (a_1^2)$
14		-						
15		RCL 2						$R_7 - (a_2^2)$
16		$\div$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} v_1$					
17		x						
18		STO 0						
19		RCL 4						
20		RCL 3						
21		RCL 7	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 2e \text{ keer}$					
22		x						
23		-						
24		RCL 5						
25		RCL 4						
26		RCL 6	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} RCL 6$					
27		x						
28		-						
29		RCL 1						
30		$\div$						
31		x	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} RCL 1$					
32		STO-0						
33		RCL 4						
34		RCL 3						
35		RCL 7						
36		x	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} RCL 6$					
37		-						
38		RCL 5						
39		RCL 4						
40		RCL 7						
41		x	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} RCL 1$					
42		-						
43		RCL 2						
44		$\div$						
45		+						
46		RCL 0	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} RCL 6$					
47		$\div$						
48		R/S $\rightarrow U_1$ CHS						
49		R/S $\rightarrow U_2$						

na programmeren zet
schakelaar op "run"
vul R_1 t/m R_5
Clear progr; R/S
Dit levert U_1
Breng daarna de
wijzigingen van
35,40,43,48 en 49
aan,
clear program; R/S
Dit levert U_2
N.B. programma
werkt niet voor
isotrope plaat!

HP-25 Program Form

Title Pen met perspassing in orthotrope plaat; berekening $\frac{\sigma_x}{t}$, $\frac{\sigma_y}{t}$ en $\frac{\tau_{xy}}{t}$ Page 2 of 2

Switch to PRGM mode, press  **PRGM**, then key in the program.

DISPLAY		KEY ENTRY	X	Y	Z	T	COMMENTS	REGISTERS
LINE	CODE							
00								$R_0 (tg\theta)$
01		f tg						
02		STO 0						
03		gx^2						$R_1 a_1$
04		STO 7						
05		RCL 1						
06		RCL 7						$R_2 a_2$
07		-						
08		RCL 1						
09		gx^2						$R_3 U_1$
10		RCL 7						
11		+						
12		$\div$						$R_4 U_2$
13		STO 5						
14		RCL 2						$\left(\frac{a_1 - tg^2 \theta}{a_1 + tg^2 \theta} \right)$
15		RCL 7						
16		-						$\left(\frac{a_2 - tg^2 \theta}{a_2 + tg^2 \theta} \right)$
17		RCL 2						
18		gx^2						R_6
19		RCL 7						
20		+						$R_7 (tg^2 \theta)$
21		$\div$	1e keer σ_x en σ_y	2e keer τ_{xy}				
22		STO 6						
23		RCL 5		RCL 0				
24		RCL 3		RCL 1				
25		x		RCL 7				
26		RCL 1		+				na programmeren zet
27		gx^2		$\div$				schakelaar op "run"
28		x		RCL 3				vul R_1 t/m R_4
29		RCL 6		x				Clear program
30		RCL 4		RCL 1				tik in θ in graden
31		x		$\uparrow$				$R/S \rightarrow \sigma_x/t$
32		RCL 2		gx^2				$R/S \rightarrow \sigma_y/t$
33		gx^2		+				Na deze voor alle
34		x		x				θ 's berekend te
35		+		RCL 0				hebben wijzig.
36		$R/S \rightarrow \sigma_x/t$		RCL 2				programma vanaf 23
37		RCL 5		RCL 7				Clear program
38		RCL 3		+				tik in θ
39		x		$\div$				$R/S \rightarrow \tau_{xy}/t$
40		RCL 6		RCL 4				
41		RCL 4		x				N.B. programma
42		x		RCL 2				werkt niet voor
43		+		$\uparrow$				$\theta = 90^\circ$, neem
44		CHS		gx^2				89,999 $^\circ$
45		$R/S \rightarrow \sigma_y/t$		+				
46				x				
47				+				
48				$R/S \rightarrow \tau_{xy}/t$				
49								

Rapport 208



60141070318