



C10021  
68860

P1019  
4308

Bibliotheek TU Delft  
P 1019 4308



C 216886

HOEKIJZERVERBINDINGEN  
IN HET BIJZONDER DIE DER LANGS-  
AAN DWARSDRAGERS IN BRUGGEN.

# HOEKIJZERVERBINDINGEN

## IN HET BIJZONDER DIE DER LANGS- AAN DWARSDRAGERS ===== IN BRUGGEN. =====

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN  
GRAAD VAN DOCTOR IN DE TECHNISCHE  
WETENSCHAP AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL  
TE DELFT, OP GEZAG VAN DEN  
RECTOR MAGNIFICUS Dr. J. CARDINAAL, w.i.,  
HOOGLEERAAR IN DE AFDEELING DER ALGEMEENE  
WETENSCHAPPEN, VOOR DEN SENAAAT  
TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 24 FEBRUARI, 1913  
DES NAMIDDAGS TE 3 UUR, DOOR

JOHAN HERMAN ADOLF HAARMAN, c. l.,

GEBOREN TE NIJMEGEN.



1019 4308

## VOORREDE.

---

De vroeger door mij gepubliceerde verhandelingen brachten mij niet in zulk een nauwe aanraking met de Technische Hoogeschool, als nu met dit proefschrift het geval is. *Hier* mag het dan ook de juiste plaats worden geacht, eenige woorden van waardeering te richten tot de Hoogleraren, wier colleges ik in de jaren 1897 tot 1901 het voorrecht had te volgen. Het is mij een genoegen hun te kunnen mededeelen, dat, naar mijne ondervinding, men in het jaar 1901 buitengewoon goed onderlegd de Polytechnische School verliet. Tijdens mijne werkzaamheden als Chef van een Constructiebureau heb ik — bij het maken en het beoordeelen van projecten — in het bijzonder de colleges van de Professoren Dr. C. A. SCHELTEMA, *w. i.* en S. G. EVERTS, *c. i.* op hoogen prijs leeren stellen.

De studie, die mij hier bij mijn poging tot het verkrijgen van den graad van „Doctor in de Technische Wetenschappen” als proefschrift dient, was oorspronkelijk opgesteld in het belang van den Dienst der Staatsspoorwegen in Nederlandsch-Indië. Ik draag haar met de meeste hoogachting op aan den Chef van dien Dienst, den Hoofdinspecteur H. F. VAN STIPRIAAN LUISCIUS, *w. i.*, van wien ik steeds een bijzondere belangstelling in de wetenschappelijke behandeling der tot mijn tak van dienst behoorende spoorwegvraagstukken heb mogen ondervinden.

Mijn promotor, Professor J. KLOPPER, *c. i.*, betuig ik mijn dank voor de aangename wijze, waarop hij de aangelegenheden, die aan een promotie vooraf moeten gaan, met mij heeft geregeld.

J. HAARMAN.

## INHOUD.

---

Inleiding.

### HOOFDSTUK I.

#### **De veerkrachtige hefboom met een constanten last.**

Het heffen van een geconcentreerden constanten last:

- a.* door een enkele kracht aan het einde van den hefboom aangrijpend;
- b.* door een moment aan het einde van den hefboom aangrijpend;
- c.* door een koppel en een kracht beide aangrijpend aan het einde van den hefboom;
- d.* door een koppel aangrijpend aan het einde van den hefboom, indien dat einde alleen een hoekverandering kan ondergaan.
- e.* Toepassingen.

### HOOFDSTUK II.

#### **De veerkrachtige hefboom met een last, waarvan de grootte evenredig is met de hefhoogte.**

Het heffen van zulk een last:

- a.* door een enkele kracht aan het einde van den hefboom aangrijpend;
- b.* door een kracht en een tegenwerkend koppel;
- c.* door een koppel aangrijpend aan het einde van den hefboom, indien dat einde alleen een hoekverandering kan ondergaan.

HOOFDSTUK III.

Een met behulp van hoekijzers tot stand gebrachte ijzerverbinding, die wordt getrokken.

HOOFDSTUK IV.

Consoleverbindingen.

- a.* Een met behulp van hoekijzers tot stand gebrachte normale consoleverbinding ;
- b.* Een naar boven verlengde consoleverbinding ;
- c.* Een naar beneden verlengde consoleverbinding ;
- d.* Een naar beneden en boven verlengde consoleverbinding.

HOOFDSTUK V.

Verbindingen van langs- aan dwarsdragers.

HOOFDSTUK VI.

Toepassingen. Symmetrische verbindingen van langs- aan dwarsdragers.

HOOFDSTUK VII.

De onsymmetrische verbinding van langs- aan dwarsdragers.

HOOFDSTUK VIII.

Beschouwingen over de in de hoofdstukken VI en VII berekende sterktecijfers. Aanwijzingen voor de montage.

---

Stellingen.

---

## INLEIDING

---

In het jaar 1906 werden bij de Staatsspoorwegen op Java voor het eerst scheuren ontdekt in de verbindingen van langs- aan dwarsdragers. Was men eerst de meening toegedaan, met een sporadisch geval te doen te hebben, zoo kwam men spoedig daarvan terug toen meerdere scheuren werden geconstateerd. Na het instellen van het „Constructie- en Bruggencontrolebureau” bij het Hoofdbureau der Staatsspoorwegen, welks taak — behalve in het ontwerpen van ijzerconstructie's en het uitoefenen van controle op de bruggen der particuliere spoor- en tramwegmaatschappijen — mede bestond in het behandelen van alle bruggenaangelegenheden der Staatsspoorwegen, werd met een meer geregeld onderzoek der bruggen begonnen, waarbij behalve naar andere gebreken bijzonder gespeurd werd naar het voorkomen van scheuren.

Groote haast moest met het onderzoek worden gemaakt, toen tegen het einde van het jaar 1909 het plan werd opgevat tot het aanschaffen van zwaardere locomotieven met een gewicht van 90 ton, terwijl de toen in dienst zijnde zwaarste machines 58 ton wogen. In verband daarmee werd aan het bruggenbureau opgedragen zoo mogelijk vóór begin 1911 gereed te komen met het onderzoeken en herstellen der bruggen over een gedeelte der lijnen ter lengte van 494 K.M., waarop de machines het eerst in dienst gesteld zouden worden.

Bij die verbeteringen werden 407 hoekijzers in de verbindingen van langs- aan dwarsdragers wegens het vertoonen van scheuren verwisseld.

Het na dien voortgezet onderzoek over de andere lijngedeelten, dat nu nog in vollen gang is, bracht over het jaar 1911 nog de aanwezigheid van 215 gescheurde hoekijzers aan het licht.

Er bestaat alzoo alle aanleiding het type der verbinding aan een meer nauwkeurig theoretisch onderzoek te onderwerpen, dan gewoonlijk bij het maken van een ontwerp geschiedt, weshalve getracht is over de werking en de optredende spanningen van dergelijke verbindingen, eenig meer licht te doen schijnen.

Teneinde meer geleidelijk tot de berekeningen der hoekijzerverbindingen te geraken, gaan daaraan in de hoofdstukken I en II eenige theorieën vooraf, die wel zouden kunnen worden aangeduid met den afzonderlijken titel:

„De beginselen van de werking van den veerkrachtigen hefboom”.\*)

Te vaak ziet men, zoodra er van een hefboomwerking sprake is, de formules van den volkomen onveerkrachtigen hefboom te pas brengen, waardoor in vele gevallen onjuiste gevolgtrekkingen worden gemaakt.

De berekening der hoekijzerverbindingen, in de hoofdstukken III en IV behandeld, kan een toepassing worden geheeten van de in beide voorafgaande hoofdstukken gegeven theoretische beschouwingen over den veerkrachtigen hefboom.

---

\*) In deze studie wordt onder „veerkrachtige hefboom” verstaan een hefboom, die niet volstrekt stijf is; doch onder den invloed van erop werkende krachten van vorm verandert overeenkomstig de regels der toegepaste mechanica.



## HOOFDSTUK I.

### De veerkrachtige hefboom met een constanten last.

I a. Het heffen van een geconcentreerden last door een enkele kracht aan het einde van den hefboom aangrijpend.

Indien een hefboom  $AB$  met volkomen rechte as op een plat vlak wordt geplaatst en in het punt  $C$  belast met een gewicht  $Q$  (zie fig. 1), dan is, indien de hefboom als volkomen *onveerkrachtig*

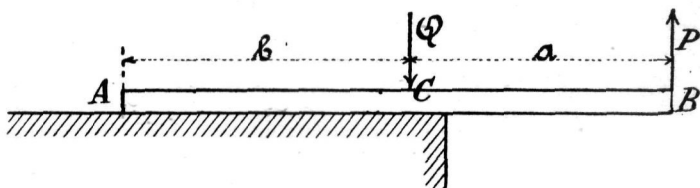


Fig 1.

wordt beschouwd en het gewicht van den hefboom wordt verwaarloosd, de kracht  $P$ , noodig om den last  $Q$  te tillen, te berekenen volgens de bekende formule:

$$P = Q \frac{b}{a + b} \quad (I a 1)$$

in welke formule

$$a = BC.$$

$$b = AC.$$

Denkt men de kracht  $P$  aangroeiende van 0 tot de waarde volgens formule I a 1, dan blijft, in de onderstelling van onveerkrachtigheid van den hefboom, het geheel in rust om de beweging eerst te beginnen, zoodra  $P$  slechts even de bovenberekende grootte overschrijdt.

Is de hefboom veerkrachtig, dan zal men rekening moeten houden met de vormverandering, die de hefboom zelf ondergaat. Worden het vlak, waarop de hefboom rust, en de onderkant van den hefboom onsamendrukbaar gedacht, en groeit de kracht  $P$  aan van  $0$  tot de waarde volgens  $Ia$  1, dan zal de hefboom zich voor elke waarde van  $P$  een draaiingsas zoeken, in fig. 2 aangegeven door een punt  $F$ , dat zich met de aangroeiing van  $P$  verplaatst van  $C$  naar  $A$ . De last wordt daarbij reeds eenigszins getild.

Hebben de hefboom en het steunvlak een onbepaalde lengte, dan zal voor elke waarde van  $P$ , kleiner dan  $Q$ , een evenwichtstoestand ontstaan, waarbij de plaats van het punt  $F$  te bepalen is uit de evenwichtsvoorwaarde, zooals die ook voor den onveerkrachtigen hefboom geldt, n.l. dat de som der momenten van de kracht en den last ten opzichte van het punt  $F$  gelijk  $0$  is.

In het punt  $F$  zal n.l. de reactie van het onsamendrukbaar aangenomen steunvlak als een geconcentreerde kracht op den hefboom aangrijpen. Immers het gedeelte  $FA$  van den hefboom, dat niet aan de vormverandering deelneemt, omdat, vóór zulks noodig is, reeds evenwicht tusschen de krachten ontstaat, blijft in aanraking met het steunvlak en behoudt zijn rechten vorm. Over de lengte  $FA$  werken er dus geen krachten op den hefboom, zoodat de door het steunvlak te leveren reactie, geconcentreerd in het punt  $F$ , zal moeten worden uitgeoefend.

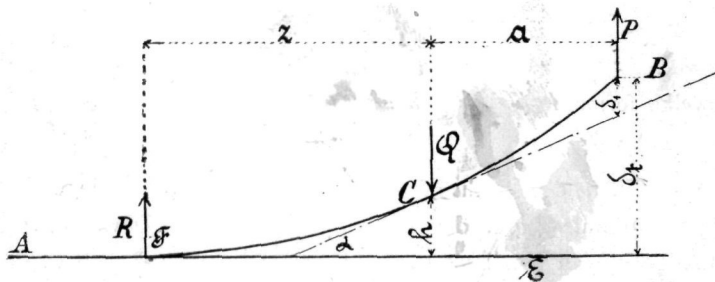


Fig. 2.

Aangezien in  $F$  het deel van den hefboom, dat van vorm verandert, en het deel, dat recht blijft, in elkander overgaan, zal de elastische lijn van het vervormde gedeelte in dat punt raken aan de lijn  $AF$ , zooals in fig. 2 is voorgesteld.

Indien wordt genoemd:

$Q$  de te tillen last;

$P = cQ$  de kracht aan het einde van den hefboom in het punt  $B$  uitgeoefend;

$R$  de reactie, die het steunvlak geeft in het punt  $F$ ;

$a$  de afstand van de krachten  $P$  en  $Q$ ;

$z$  de nog onbekende afstand van de krachten  $Q$  en  $R$ ,

dan zijn de twee volgende evenwichtsvoorwaarden op te stellen:

$$R + P = Q \quad \text{en} \quad Rz = Pa,$$

zoodat  $P = cQ$   $R = Q - P$ ,

of  $R = Q(1 - c)$ , (I a 2)

en  $z = \frac{P}{R} a$ ,

dus  $z = \frac{c}{1 - c} a$ . (I a 3)

De hoogte  $h$ , waarover de last  $Q$  gelicht wordt, is afhankelijk van de afmetingen van den hefboom, waarvan het bij de vormverandering in aanmerking te nemen traagheidsmoment  $I$  gesteld wordt.

De hefhoogte  $h$  is te berekenen uit de vormverandering van den hefboom, die in  $F$  in de richting van het vlak  $AE$  ingeklemd gedacht wordt.

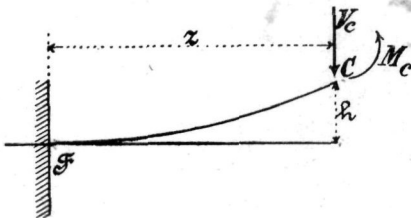


Fig. 3.

Bij het punt  $C$  is de vertikaalkracht  $V_c = R$ , terwijl het moment  $M_c = Rz$ , zoodat

$$\alpha = \frac{Rz \cdot z}{EI} - \frac{Rz^2}{2EI} = \frac{Rz^2}{2EI}$$

en, aangezien

$$h = \frac{Rz^3}{2EI} - \frac{Rz^3}{3EI} = \frac{Rz^3}{6EI}$$

$$R = Q(1-c),$$

en

$$z = \frac{c}{1-c} a,$$

is:

$$h = \frac{Qa^3}{6EI} \frac{c^3}{(1-c)^2}. \quad (\text{I a 4})$$

De verplaatsing van het aangrijpingspunt van de kracht  $P$ , n.l.  $\delta_t$ , is dus te berekenen op:

$$\delta_t = h + a\alpha + \delta_1,$$

indien  $\alpha$  voorstelt de helling van de raaklijn aan de elastische lijn in  $C$  en  $\delta_1$  voorstelt de verplaatsing van het punt  $B$  van den hefboom boven die raaklijn als gevolg van de kracht  $P$ , (zie fig. 2), zoodat

$$\delta_t = \frac{P^2}{(Q-P)^2} \frac{Pa^3}{6EI} + \frac{P}{Q-P} \frac{Pa^3}{2EI} + \frac{Pa^3}{3EI},$$

of

$$\delta_t = \frac{a^3}{6EI} \frac{P(2Q-P)Q}{(Q-P)^2} = \frac{Qa^3}{6EI} \frac{c(2-c)}{(1-c)^2}. \quad (\text{I a 5})$$

Wordt gevraagd voor een bepaald geval, waarvoor de last  $Q$  en het traaghéidsmoment van den hefboom  $I$  benevens de afstand  $a$  bekenden zijn, te berekenen den afstand  $z$  en de kracht  $P$ , die noodig is om den last over een hoogte  $h$  te heffen, zoo zijn deze af te leiden uit de onderstaande drie vergelijkingen.

$$\underline{R} + \underline{P} = \underline{Q}, \quad \underline{Rz} = \underline{Pa}, \quad \frac{\underline{Rz^3}}{6EI} = \underline{h}.$$

Na substitutie van  $R$  en  $P$  leidt dit tot de volgende 3<sup>e</sup> machtsvergelijking:

$$z^3 - \frac{6EIh}{aQ} z - \frac{6EIh}{Q} = 0, \quad (\text{I a 6})$$

waaruit  $z$  is op te lossen, zoodat  $c$  en de grootte van  $P = cQ$  dan te bepalen zijn met behulp der vergelijking *I a 3*.

I b. Het heffen van een geconcentreerden constanten last door een moment, aan het einde van den hefboom aangrijpend.

Ter vereenvoudiging wordt de grootte van het moment  $M$  gesteld gelijk  $m c Q$ , waarin  $m$  een lengte voorstelt,  $c$  een verhoudingsgetal en  $Q$  de grootte van den last.

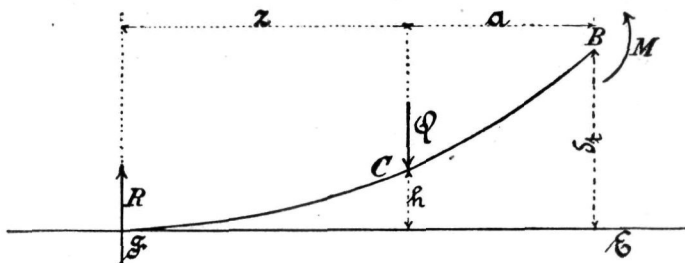


Fig. 4.

In fig. 4 is de belastingstoestand schetsmatig voorgesteld.

Reeds dadelijk valt uit het evenwicht der krachten af te leiden:

$$R = Q. \quad (\text{I b 1})$$

$$M - Qz = 0.$$

$$M = Qz, \quad \sum M = 0$$

of

$$z = \frac{M}{Q} = c m. \quad (\text{I b 2})$$

Voor de hefhoogte van den last geldt de formule:

$$h = M \frac{z^2}{2 EI} - Q \frac{z^3}{3 EI} = \frac{M^3}{6 Q^2 EI},$$

of

$$h = \frac{Q c^3 m^3}{6 EI}, \quad (\text{I b 3})$$

terwijl de verplaatsing van het punt  $B$  te berekenen is op:

$$\begin{aligned} \delta_t &= \frac{M^3}{6 Q^2 EI} + \left( \frac{Mz}{EI} - \frac{Qz^2}{2 EI} \right) a + \frac{M a^2}{2 EI} = \\ &= \frac{M^3}{6 Q^2 EI} + \frac{Q z^2 a}{2 EI} + \frac{M a^2}{2 EI} = \\ &= \frac{Q}{6 EI} c^3 m^3 + \frac{Q}{2 EI} c^2 m^2 a + \frac{Q}{2 EI} c m a^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{Q}{6 EI} (c^3 m^3 + 3 c^2 m^2 a + 3 c m a^2) =$$

$$= \frac{Q}{6 EI} \left\{ (c m + a)^3 - a^3 \right\}.$$

$$\delta_t = \frac{Q a^3}{6 EI} \left\{ \left( \frac{c m}{a} + 1 \right)^3 - 1 \right\}, \quad (\text{I b 4})$$

$$\text{of } \delta_t = \frac{Q a^3}{6 EI} c \frac{m}{a} \left( c^2 \frac{m^2}{a^2} + 3 c \frac{m}{a} + 3 \right).$$

De hoekverandering aan het einde  $B$  van den hefboom,  $\alpha_t$ , is nog te berekenen, als volgt:

$$\alpha_t = \left( \frac{M z}{EI} - \frac{Q z^2}{2 EI} \right) + \frac{M a}{EI} = \frac{M}{2 EI} (z + 2 a)$$

$$\text{of } \alpha_t = \frac{Q c m}{2 EI} (c m + 2 a). \quad (\text{I b 5})$$

I c. Het heffen van een geconcentreerden constanten last door een kracht en een koppel, aangrijpend aan het einde van den hefboom.

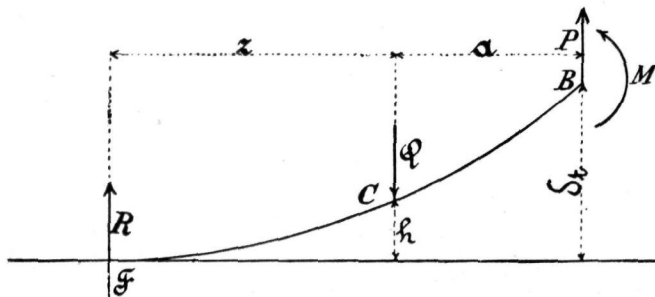


Fig. 5.

In fig. 5 is de belastingtoestand schetsmatig voorgesteld.

$$\text{Stel: } P = c Q$$

$$\text{en } M = m c Q.$$

Uit het evenwicht volgt:

$$R = Q - P = Q (1 - c) \quad (\text{I c 1})$$

$$\text{en} \quad M + P(a + z) - Qz = 0,$$

$$\text{waaruit volgt:} \quad z = \frac{Pa + M}{Q - P},$$

$$\text{of} \quad z = \frac{c}{1 - c} (m + a). \quad (\text{Ic2})$$

Voor de vormverandering valt nog te berekenen:

$$h = \frac{Rz^3}{6EI} = \frac{(Pa + M)^3}{(Q - P)^2 6EI},$$

$$\text{of} \quad h = \frac{Q(a + m)^3}{6EI} \frac{c^3}{(1 - c)^2}. \quad (\text{Ic3})$$

$$\delta_t = \frac{(Pa + M)^3}{(Q - P)^2 6EI} + \frac{(Pa + M)^2 a}{(Q - P) 2EI} + \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Ma^2}{2EI},$$

of

$$\delta_t = \frac{Qa^3}{6EI} c \left\{ \frac{c^2}{(1 - c)^2} \left(1 + \frac{m}{a}\right)^3 + \frac{3c}{(1 - c)} \left(1 + \frac{m}{a}\right)^2 + 2 + 3 \frac{m}{a} \right\}, \quad (\text{Ic4})$$

terwijl

$$\alpha_t = \frac{(Pa + M)^2}{(Q - P) 2EI} + \frac{Pa^2}{2EI} + \frac{Ma}{EI},$$

$$\text{of} \quad \alpha_t = \frac{Qca^2}{2EI} \left\{ \frac{c}{1 - c} \left(1 + \frac{m}{a}\right)^2 + 2 \frac{m}{a} + 1 \right\}. \quad (\text{Ic5})$$

Voor het geval, dat het moment  $M$  in tegengestelde richting werkt, is in de hiervoor afgeleide formules voor  $m$  een negatieve waarde in te voeren.

Bij vergelijking van deze formules met de onder  $a$  en  $b$  afgeleide is het duidelijk, dat het een verkeerde wijze van werken moet worden geacht, eenige te berekenen grootheid eerst volgens de formule  $Ia$  met de kracht  $P$ , en daarna volgens de formule  $Ib$  met het moment  $M$  te berekenen en de uitkomsten te sommeren. Zoals te verwachten was, gaat dus het beginsel van superpositie voor dit geval niet op.

*betrekkingen met lineair.*

I d. Het heffen van een geconcentreerden constanten last door een koppel aangrijpend aan het einde van den hefboom, indien dat einde alleen een hoekverandering kan ondergaan.

De vervormde elastische lijn van den hefboom met de werkzame krachten zijn in fig. 6 schematisch voorgesteld.

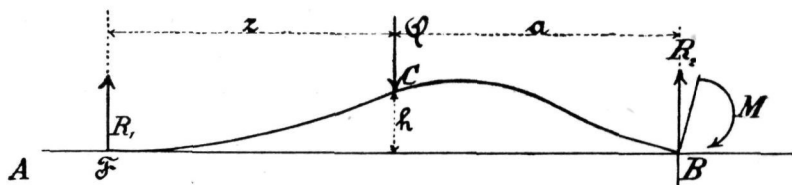


Fig. 6.

Stel:  $M = + cm Q.$

$R_1$  en  $R_2$  benevens  $z$  zijn onbekenden.

Uit het evenwicht volgt:

$$1) R_1 + R_2 = Q. \quad 2) R_1(a + z) = Qa - M,$$

of

$$R_1 = \frac{Qa - M}{a + z}.$$

Een derde vergelijking wordt verkregen uit de gestelde voorwaarde, dat de verplaatsing van het punt  $B$  ten opzichte van  $A$  onder de werking der geteekende krachten gelijk 0 moet zijn.

Zooals hiervoor is aangetoond, mag bij  $F$  een inklemming worden aangenomen en geldt voor de doorbuiging van het punt  $B$ :

$$3) \quad \delta_t = \frac{R_1 z^3}{6 EI} + \frac{R_1 z^2}{2 EI} a + \frac{R_2 a^3}{3 EI} - \frac{M a^2}{2 EI} = 0.$$

of, aangezien  $R_2 a - M = R_1 z,$

$$R_1 z^3 + 3 R_1 z^2 a + 2 R_1 z a^2 - M a^2 = 0.$$

$$R_1 (z + a) (z + 2a) z = M a^2,$$

en aangezien  $R_1 (a + z) = Qa - M,$

$$(z + 2a) z - \frac{M a^2}{Qa - M} = 0.$$



$$z^2 + 2az - a^2 \frac{M}{Qa - M} = 0,$$

waaruit als enkel bruikbaar de positieve wortel is te bepalen:

$$z = a \left( \sqrt{\frac{Qa}{Qa - M} - 1} \right) = a \left( \sqrt{\frac{1}{1 - c \frac{m}{a}} - 1} \right). \quad (\text{Id 1})$$

Uit deze vergelijking volgt:

$$a + z = a \sqrt{\frac{Qa}{Qa - M}},$$

zoodat

$$R_1 = \frac{Qa - M}{a + z} = \frac{Qa - M}{a} \sqrt{\frac{Qa - M}{Qa}}$$

of

$$R_1 = Q \left( 1 - c \frac{m}{a} \right) \sqrt{\left( 1 - c \frac{m}{a} \right)} \quad (\text{Id 2})$$

$$R_2 = Q - R_1 = Q \left\{ 1 - \left( 1 - c \frac{m}{a} \right) \sqrt{\left( 1 - c \frac{m}{a} \right)} \right\}. \quad (\text{Id 3})$$

De hoogte, waarover de last wordt getild,

$$h = \frac{R_1 z^3}{6 EI} = \frac{Q}{6 EI} \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{\frac{3}{2}} a^3 \left\{ \left( \frac{a}{a - cm} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}^3.$$

$$h = \frac{Qa^3}{6 EI} \left\{ 1 - \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^3. \quad (\text{Id 4})$$

De hoekverplaatsing aan het einde van den hefboom bij  $B$  valt te berekenen op:

$$\alpha_t = \frac{Ma}{EI} - \frac{R_1 z^2}{2 EI} - \frac{R_2 a^2}{2 EI}, \text{ en aangezien } R_2 a - M = R_1 z, \text{ is}$$

$$\alpha_t = \frac{1}{2 EI} \left\{ Ma - R_1 z (a + z) \right\} =$$

$$= \frac{Qa^2}{2 EI} \left[ c \frac{m}{a} - \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \left( \frac{a}{a - cm} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \left( \frac{a}{a - cm} \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

welke vergelijking te vervormen is tot:

$$\alpha_t = \frac{Q a^2}{2 E I} \left\{ 1 - \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (\text{Id } 5)$$

Voor een bepaalde verhouding tusschen  $u$  en  $cm$  wordt deze hoekverandering minimum, welke verhouding is te vinden uit de voorwaarde

$$\frac{d \left[ a^2 \left\{ 1 - \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]}{d a} = 0, \quad \text{of}$$

$$\frac{2 a - 2 a \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} c m \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}}{\left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\frac{4 \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\quad}} = 4 - 3 c \frac{m}{a}$$

$$16 - 16 c \frac{m}{a} = 16 - 24 c \frac{m}{a} + 9 c^2 \frac{m^2}{a^2}$$

$$9 c^2 \frac{m^2}{a^2} - 8 c \frac{m}{a} = 0,$$

waaraan voldaan wordt door

$$c \frac{m}{a} = 0 \text{ of } a = \infty,$$

en door 
$$c \frac{m}{a} = \frac{8}{9} \text{ of } a = \frac{9}{8} c m. \quad (\text{Id } 5')$$

Uit het teeken, dat de tweede afgeleide voor deze waarden van  $a$  vertoont, blijkt, dat  $a = \infty$  een maximum en  $a = \frac{9}{8} c m$  een minimumwaarde voor  $\alpha_t$  geeft.

Voor  $a = \infty$  wordt

$$\alpha_{t \max} = \frac{Q \times \infty}{2 E I} \times 0, \text{ hetgeen onbepaald is, zoodat}$$

$$\alpha_{t \max} = \frac{Q}{2 E I} \frac{1 - \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}{a^{-2}} =$$

$$= \frac{Q}{2 E I} \frac{-\frac{1}{2} \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} c m a^{-2}}{-2 a^{-3}} =$$

$$= \frac{Q}{8 E I} a c m \left( 1 - c \frac{m}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} = \infty,$$

terwijl

$$\begin{aligned} \alpha_{t \min} &= \frac{Q}{2EI} \frac{9^2}{8^2} c^2 m^2 \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{8}{9} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= \frac{Q}{2EI} \frac{27}{32} c^2 m^2. \end{aligned} \quad (\text{Id 5''})$$

Indien de totale lengte van den hefboom  $a + b$  bedraagt, zal  $z$  niet grooter dan  $b$  kunnen zijn.

De grootste waarde van  $M$ , waarvoor de onderstelling nog geldig is, dat de veerkrachtige hefboom in  $F$  rakende is aan de lijn  $FB$ , is te bepalen uit de vergelijking  $Id 1$ , waaruit  $cm$  te berekenen is, n.l.

$$b = a \left( \sqrt{\frac{a}{a - cm}} - 1 \right),$$

of

$$cm = a \frac{(2a + b)b}{(a + b)^2}. \quad (\text{Id 6})$$

Krijgt het moment  $M$  een grootere waarde dan  $a \frac{(2a + b)b}{(a + b)^2} Q$ , dan zal de elastische lijn een vorm verkrijgen, als in Fig. 7 is geschetst.

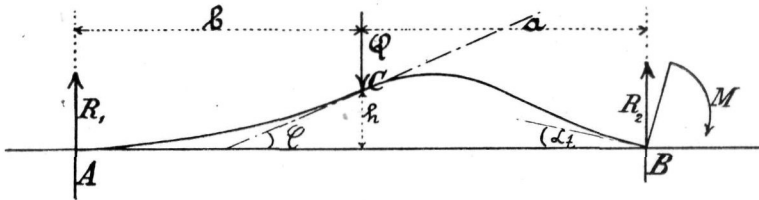


Fig. 7.

Voor dit geval is te bepalen:

$$R_1 = \frac{Qa - M}{a + b} \quad \text{en} \quad R_2 = \frac{Qb + M}{a + b},$$

dus

$$R_1 = Q \frac{a - cm}{a + b} \quad (\text{Id 7})$$

$$R_2 = Q \frac{b + cm}{a + b} \quad (\text{Id 8})$$

Wordt de hoek, dien de raaklijn aan de elastische lijn in  $C$  maakt met de lijn  $AB$ ,  $\varphi$  gesteld, dan is de hefhoogte voor den last

$$h = b\varphi - \frac{R_1 b^3}{3EI} = -a\varphi + \frac{Ma^2}{2EI} - \frac{R_2 a^3}{3EI},$$

of

$$(a+b)h = \frac{3Ma^2b - 2R_1ab^3 - 2R_2a^3b}{6EI} =$$

$$= Q \frac{ab}{6EI} \left\{ 3cm a - 2 \frac{b^2(a-cm) + a^2(b+cm)}{a+b} \right\},$$

of

$$(a+b)h = Q \frac{ab}{6EI} \{ cm(a+2b) - 2ab \},$$

zoodat

$$h = \frac{Q}{6EI} \frac{ab}{a+b} \{ cm(a+2b) - 2ab \}; \quad (\text{Id 9})$$

tevens valt af te leiden, dat

$$(a+b)\varphi = \frac{3Ma^2 + 2R_1b^3 - 2R_2a^3}{6EI}.$$

De hoek  $\alpha_t$ , dien het einde  $B$  van den hefboom na de vormverandering maakt met de lijn  $AB$ , is te berekenen uit de voorwaarde, waaraan de vormverandering moet voldoen, n.l. dat de hefboom, bij  $B$  onder den hoek  $\alpha_t$  ingeklemd, bij  $A$  een doorbuiging gelijk  $o$  ondergaat onder de werking der geteekende krachten.

De daarvoor op te stellen vergelijking luidt:

$$\alpha_t(a+b) - Q \frac{a^3}{3EI} - Q \frac{a^2}{2EI} b + R_1 \frac{(a+b)^3}{3EI} = 0,$$

zoodat

$$\alpha_t = \frac{1}{6EI} \left\{ Q \frac{2a^3 + 3a^2b}{a+b} - R_1 2(a+b)^2 \right\},$$

waarin

$$R_1 = Q \frac{a-cm}{a+b},$$

zoodat

$$\alpha_t = \frac{Q}{6EI} \left\{ 2(a+b)cm - ab \frac{a+2b}{a+b} \right\}. \quad (\text{Id 10})$$

Indien bij de onder *I d* behandelde belastingsgevallen in het punt *B* van den hefboom een kracht  $P = c Q$  werkt, gericht loodrecht op de lijn *AB*, dan zal deze tot gevolg hebben, dat de reactie  $R_2$  met deze kracht is te vermeerderen dan wel te verminderen, al naar de kracht naar onder of naar boven is gericht.

### I e. Toepassing.

Een houten plank, breed 24 cM., dik 4 cM. en lang 7 M., wordt op een vasten bodem gelegd zóódanig, dat zij 2 M. vrij oversteekt. Aan het einde is een gewicht van 40 K.G. bevestigd, terwijl als contragewicht een last van 50 K.G. op de plank is geplaatst op 2,5 M. afstand van het uiterste punt der ondersteuning. (Zie hierbij fig. 8).

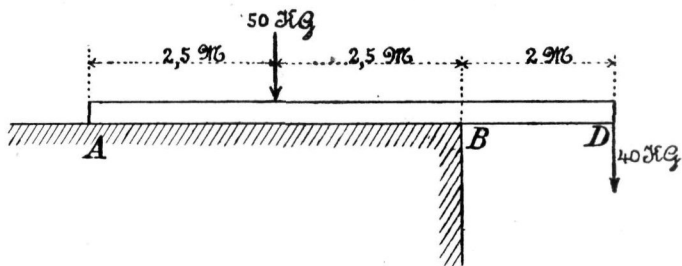


Fig. 8.

Gevraagd wordt de vormverandering van deze veerende plank na te gaan. De elasticiteitsmodulus van hout wordt aangenomen op 100.000 K.G/cm<sup>2</sup>.

Nu wordt:

$$Q = 50$$

$$a = 250$$

$$b = 250$$

$$M = 8000 \text{ dus } cm = 160.$$

Bij onderzoek blijkt, dat:

$$a \frac{(2a + b)b}{(a + b)^2} = 187,5 > cm.$$

De vormverandering heeft dus plaats volgens fig. 6.

Volgens formule *Id 1* is te berekenen:

$$z = a \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{cm}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \quad \left[ 1 - \frac{cm}{a} \right]^{\frac{1}{2}} = 0,6$$

$$z = 166,7 \text{ cM.}$$

Zonder eenig bezwaar kan alzoo van de plank bij *A* 83 cM. worden afgenomen, waardoor geen wijziging in de vormverandering wordt teweeg gebracht.

De hoogte, waarover de last van 50 K.G. gelicht wordt, is te berekenen uit formule *Id 4* n.l.:

$$h = \frac{Q a^3}{6 EI} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{cm}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}^3 =$$

$$= \frac{50 \times 250^3}{6 \times 100.000 \times 128} \times 0,4^3 = 0,65 \text{ cM.}$$

De hoekverandering bij *B*, berekend volgens *Id 5*, wordt:

$$\alpha_t = \frac{Q a^2}{2 EI} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{cm}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{50 \times 250^2}{2 \times 100.000 \times 128} \times 0,4 = 0,0488.$$

De doorbuiging van het uiterste punt van de veerende plank bij *D*,  $\delta_D$ , is:

$$\delta_D = 200 \alpha_t + \frac{40 \times 200^3}{3 \times 100.000 \times 128} = 9,76 + 8,33 = 18,09 \text{ cM.}$$

Wordt de plank bij *A* 1,5 M. ingekort, zoodat  $b = 100$ , dan heeft de vormverandering plaats volgens fig. 7, waarvoor dan volgens *Id 9*

$$h = \frac{Q}{6 EI} \frac{ab}{a+b} |cm(a+b) - 2ab| =$$

$$= \frac{50}{6 \times 100.000 \times 128} \frac{250 \times 100}{350} \times (160 \times 450 - 2 \times 250 \times 100) =$$

$$= 1,02 \text{ cM.}$$

Volgens  $I d 10$  is

$$\alpha_t = \frac{Q}{6EI} \left\{ 2(a+b)cm - ab \frac{a+2b}{a+b} \right\} =$$

$$= \frac{50}{6 \times 100.000 \times 128} \left( 2 \times 350 \times 160 - 250 \times 100 \times \frac{450}{350} \right) = 0,0520.$$

In verband hiermede is dan de doorbuiging van het punt  $D$  te berekenen op

$$\delta_D = 200\alpha_t + 8,33 = 200 \times 0,0520 + 8,33 = 10,40 + 8,33 = 18,73 \text{ cM.}$$

Stelt men zich thans de vraag, waar de last van 50 K.G. moet worden geplaatst, om de doorbuiging minimum te doen zijn, en met welke lengte van plank dan volstaan kan worden, zoo is de formule  $I d 5'$  toe te passen. Dan wordt n.l.

$$a = \frac{9}{8} cm = \frac{9}{8} \times 160 = 180 \text{ cM.}$$

Volgens formule  $I d 1$  is dan

$$z = a \left( \frac{1}{\left(1 - c \frac{m}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right) = 180 \cdot \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right) = 360 \text{ cM.}$$

De totale lengte van de plank moet dan bedragen

$$z + 1,80 + 3,60 = 7,40 \text{ M.}$$

De doorbuigingshoek bij  $B$  bedraagt dan volgens  $I d 5''$ :

$$\alpha_{t \min} = \frac{Q}{2EI} \frac{27}{32} c^2 m^2 = \frac{50}{2 \times 100.000 \times 128} \cdot \frac{27}{32} \cdot 160^2 = 0,0422.$$

De doorbuiging bij  $D$  bedraagt dan:

$$\delta_{D \min} = 200 \alpha_{t \min} + 8,33 = 200 \times 0,0422 + 8,33 =$$

$$= 8,44 + 8,33 = 16,77 \text{ cM.}$$

Zoo men de plank bij het aangrijpingspunt van  $Q$  afsnijdt, zoodat

$$a = 180 \text{ en}$$

$$b = 0,$$

zoo zou de hoekverandering bedragen volgens  $I d 10$ :

$$\alpha_t = \frac{Q}{6EI} \left\{ 2(a+b)cm - ab \frac{a+2b}{a+b} \right\} =$$

$$= \frac{50}{6 \times 100.000 \times 128} \{ 2 \times 180 \times 160 - 0 \} = 0,0375,$$

terwijl dan de doorbuiging bij  $D$  bedraagt:

$$\delta_D = 200 \times 0,0375 + 8,33 = 7,50 + 8,33 = 15,83 \text{ cM.}$$



## HOOFDSTUK II.

De veerkrachtige hefboom met een last waarvan de grootte evenredig is met de hefhoogte.

II a. Het heffen van een last, waarvan de grootte evenredig is met de hefhoogte, door een enkele kracht aan het einde van den hefboom aangrijpend.

Voor den vorm, dien de elastische lijn van den hefboom aanneemt, kan naar fig. 9 worden verwezen, welke overeenkomt met fig. 2. Als bij een hefhoogte van de lengte-eenheid de last  $Q$  een

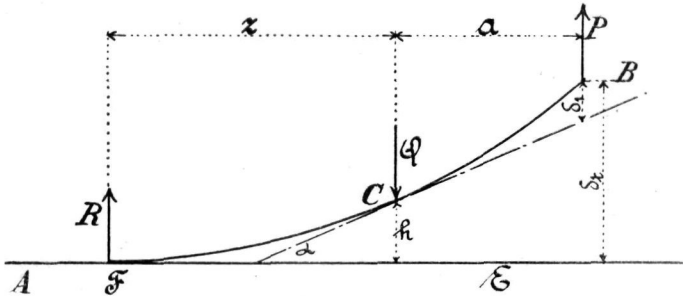


Fig. 9.

grootte  $\varrho$  heeft, wordt bij een hefhoogte  $h$  die last  $Q = h\varrho$ .

De vergelijkingen, welke het verband tusschen de verschillende grootheden aangeven, luiden thans:

$$R + P = Q, \quad Rz = Pa \quad \text{en} \quad h = \frac{Q}{\varrho} = \frac{Rz^{\frac{3}{2}}}{6EI},$$

waaruit volgt:

$$(Q - P)z = Pa \quad \text{en} \quad \frac{Pa z^2}{6EI} = \frac{Q}{\varrho},$$

of

$$Q = P \frac{a + z}{z} \quad \text{en} \quad Q = \frac{Pa z^2}{6EI} \times \varrho,$$

zoodat

$$\frac{P a z^2}{6 E I} \times \varrho = P \frac{a+z}{z},$$

dus

$$a \varrho z^3 = 6 E I (a+z)$$

of

$$z^3 - \frac{6 E I}{a \varrho} z - \frac{6 E I}{\varrho} = 0,$$

waaruit  $z$ , voor een bepaalde constructie een constante zijnde, is op te lossen, n.l.:

$$z = \sqrt[3]{\frac{3 E I}{\varrho}} + \sqrt[3]{\left(\frac{3 E I}{\varrho}\right)^2 - \left(\frac{2 E I}{a \varrho}\right)^3} + \\ + \sqrt[3]{\frac{3 E I}{\varrho} - \sqrt[3]{\left(\frac{3 E I}{\varrho}\right)^2 - \left(\frac{2 E I}{a \varrho}\right)^3}},$$

of

$$z = \sqrt[3]{\frac{3 E I}{\varrho}} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{8}{9} \frac{E I}{a^3 \varrho}}} + \right. \\ \left. + \sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{1 - \frac{8}{9} \frac{E I}{a^3 \varrho}}} \right\}. \quad (\text{II a 1})$$

De waarde van  $z$  is dus verder als een bekende te beschouwen, terwijl

$$Q = P \frac{a+z}{z} \quad (\text{II a 2})$$

en

$$h = P \frac{a+z}{z \varrho} = P \frac{a z^2}{6 E I}. \quad (\text{II a 3})$$

De opheffing van het aangrijppingspunt van de kracht  $P$  is te bepalen:

$$\delta_i = P \frac{a+z}{z \varrho} + P \frac{a^2 z}{2 E I} + P \frac{a^3}{3 E I} = \\ = P \frac{a(z+a)(z+2a)}{6 E I} \quad (\text{II a 4})$$

De hoekverandering, welke de hefboom ondergaat, ter plaatse, waar de kracht  $P$  aangrijpt, is te berekenen uit de formule:

$$\alpha_t = P \frac{az}{2EI} + P \frac{a^2}{2EI} = P \frac{a(a+z)}{2EI}. \quad (\text{II a 5})$$

Indien men voor de in fig. 10 geteekende verbinding veronderstelt, dat de bouten geen aanvangsspanning bezitten, dan kan men de gegeven berekeningswijze toepassen, zoo men de boutkrachten vervangt door een over de lijn  $BB$  gelijkmatig verdeelden last, waarvan de grootte evenredig is aan de hefhoogte, d.i. de uitrekking der bouten.

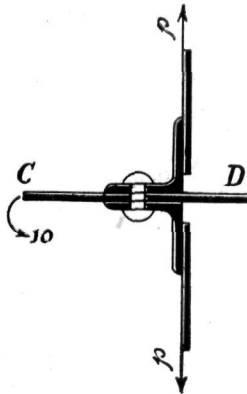
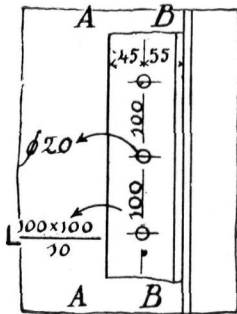


Fig. 10.

In hoofdstuk III zal op deze transformatie van een dergelijke verbinding in eene berekenbare, nader worden teruggekomen.

De trekkrachten  $p$  per lengte-eenheid worden op de in de fig. aangegeven plaats op het hoekijzerbeen overgebracht.

Het traagheidsmoment, in de vorige formules met  $I$  aangeduid, per cM. hoogte  $i$  noemend, is:

$$i = \frac{I}{12} \times 1 \times 1^3 = \frac{I}{12} \text{ cM}^4.$$

De kracht  $\mathcal{E}$  is voor dit geval voor elke cM. hoogte als volgt te berekenen.

De kracht  $\mathcal{Q}_t$ , welke een klinknagel met  $3,14 \text{ cm}^2$  doorsnede en  $1,5 \text{ cm}$ . lengte  $1 \text{ cm}$ . zou uitrekken, is te berekenen uit de formule

$$1 = \frac{\mathcal{Q}_t \times 1,5}{E \times 3,14}, \text{ zoodat } \mathcal{Q}_t = E \times 2,10.$$

Aangezien er een bout over een hoogte van  $10 \text{ cm}$ . voorkomt, bedraagt alzoo de kracht  $\mathcal{Q}$  per  $\text{cm}$ . hoogte

$$\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{Q}_t}{10} = E \times 0,210.$$

Volgens formule IIa 1 is te bepalen:

$$z = \sqrt[3]{\frac{3EI}{\mathcal{Q}}} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{8EI}{9a^3\mathcal{Q}}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{8EI}{9a^3\mathcal{Q}}}} \right\},$$

waarin voor dit geval

$$\sqrt[3]{\frac{3EI}{\mathcal{Q}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times \frac{1}{12}}{0,210}} = 1,006;$$

$$\frac{8EI}{9a^3\mathcal{Q}} = \frac{8 \times \frac{1}{12}}{9 \times 5,5^3 \times 0,210} = 0,002120;$$

$$\sqrt{1 - 0,002120} = 0,9989; \quad \sqrt[3]{1 + 0,9989} = 1,260;$$

$$\sqrt[3]{1 - 0,9989} = 0,105,$$

zoodat 
$$z = 1,006 \times 1,365 = 1,373 \text{ cm}.$$

De kracht  $q$ , welke per  $\text{cm}$ . hoogte door de klinknagels moet worden opgenomen, is te berekenen volgens de formule IIa 2, n.l.:

$$q = p \frac{a + z}{z} = p \frac{5,5 + 1,37}{1,37} = 5,02 p,$$

zoodat de kracht door een klinknagel op te nemen te stellen is

op  $Q_1 = 10 \times 5,02 \text{ } \rho = 50,2 \text{ } \rho$ , gevende een trekspanning in den nagel van  $\sigma_k = \frac{50,2}{3,14} \text{ } \rho = 16,0 \text{ } \rho$ .

Het moment der uitwendige krachten, op het hoekijzer werkend, ten opzichte van het vlak, gaande door de middelpunten der bouten, bedraagt per cM. hoogte  $5,5 \text{ } \rho$ .

Het weerstandsmoment is per cM. hoogte groot  $\frac{1}{6} \text{ cM}^3$ , zoodat de optredende buigspanning te berekenen is op

$$\sigma_b = \frac{5,5 \text{ } \rho}{\frac{1}{6}} = 33,0 \text{ } \rho.$$

Deze spanning zou met het oog op de boutverzwakkingen te vermeerderen, doch met het oog op de boutwerking te verminderen zijn. De boutkop toch verdeelt de druk over een grooter oppervlak, waardoor het optredend moment vermindert.

Uit het bovenstaande mag wel de conclusie worden getrokken, dat de bouten sterker zijn dan het hoekijzer.

De verplaatsing van het uiteinde van het hoekijzer is te berekenen volgens formule IIa 4:

$$\delta_t = \rho \frac{a(z+a)(z+2a)}{6EI} = \rho \frac{5,5 \times 6,87 \times 12,37}{6E \times \frac{1}{12}} = \frac{\rho}{E} \times 934,8 \text{ cM.}$$

Ruw rekenend, zooals dit wel geschiedt, en de lijn  $AA$  als draaiingsas nemend, waardoor de kracht in een klinknagel berekend wordt op

$$Q_2 = 10 \rho \frac{10}{4,5} = 22,22 \text{ } \rho,$$

zal men dus ongeveer een fout maken van

$$\frac{50,2 - 22,2}{50,2} = \frac{28}{50,2} = 56 \text{ } \text{‰}.$$

Wil men de verbinding niet boven de elasticiteitsgrens belasten, dan is daarvoor noodig, dat de buigspanning in het hoekijzerbeen

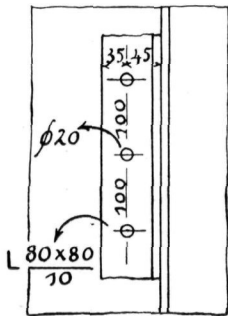
$\sigma_b$  niet boven de 2 ton/cm<sup>2</sup>. stijgt, waarvoor noodig is, dat  $p$  geringer is dan  $\frac{2,000}{33} = 0,06$  ton/cm. of 60 K.G./cM.

De uitrekking (afbuiging) bedraagt dan voor elk hoekijzer

$$\delta_t = \frac{0,060}{2150} \times 934,8 = 0,027 \text{ cM.}$$

Iets sterker wordt de verbinding, indien in stede van een hoekijzer met beenlengte 100 mM. een kleiner wordt toegepast bijv. 80 mM. (zie fig. 11).

Voor deze verbinding geldt evenals voor de hiervoor besprokene :



$$\mathcal{E} = E \times 0,210.$$

Volgens formule II a 1 is

$$z = \sqrt[3]{\frac{3EI}{\mathcal{E}}} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{8EI}{9a^3\mathcal{E}}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{8EI}{9a^3\mathcal{E}}}} \right\},$$

waarin nu  $\sqrt[3]{\frac{3EI}{\mathcal{E}}} = 1,006$  evenals bij het vorig geval.

$$\frac{8EI}{9a^3\mathcal{E}} = \frac{8 \times \frac{1}{12}}{9 \times 4,5^3 \times 0,210} = 0,003871.$$

$$\sqrt{1 - 0,003871} = 0,9981; \quad \sqrt[3]{1 + 0,9981} = 1,260;$$

$$\sqrt[3]{1 - 0,9981} = 0,124,$$

zoodat

$$z = 1,006 \times 1,384 = 1,392 \text{ cM.}$$

$$\text{De kracht } q = p \frac{a+z}{z} = p \cdot \frac{5,89}{1,39} = 4,24 p.$$

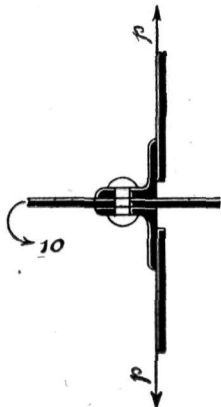


Fig. 11.

De kracht, door een klinknagel op te nemen, bedraagt alzoo

$Q_1 = 10 \times 4,24 \text{ } \rho = 42,4 \text{ } \rho$ , gevend een trekspanning in den nagel van

$$\sigma_k = \frac{42,4}{3,14} \rho = 13,5 \rho,$$

terwijl de maximale buigspanning in het hoekijzerbeen te berekenen is op:

$$\sigma_b = \frac{4,5 \rho}{\frac{1}{6}} = 27 \rho.$$

Ook voor deze verbinding zijn alzoo de bouten eveneens sterker te achten dan het hoekijzer.

Belast tot de elasticiteitsgrens zal  $\rho$  mogen bedragen

$$\frac{2,0}{27} = 0,074 \text{ ton/cm.}$$

De verbinding met behulp van de hoekijzers met 80 mM. beenlengte moet dus sterker geacht worden dan die met hoekijzers van 100 mM. beenlengte, terwijl bij gebruik van hetzelfde aantal bouten van dezelfde diameter de optredende spanning bij gebruik van de kleinere hoekijzers  $\frac{16 - 13,5}{16} = \pm 15 \%$  geringer is dan bij de toepassing der grootere hoekijzers.

De verbindingen zijn beide, zooals uit de beschouwingen volgt, zeer zwak en niet aanbevelenswaard. Toch komt men soortgelijke meermalen tegen, waarbij ze in den regel foutief berekend zijn n.l. als zou de trekkracht in elken nagel voorkomend  $10 \rho$  bedragen, terwijl aan de optredende buigspanning in het hoekijzer zelve dan in 't geheel geen aandacht is geschonken.

### **II b. Het heffen van een last, waarvan de grootte evenredig is met de hefhoogte, door een kracht en een tegenwerkend moment.**

Voor de vormverandering van den veerkrachtigen hefboom wordt verwezen naar figuur 12.

Evenals in geval *II a* wederom stellend  $h = \frac{Q}{\alpha}$ , zijn thans de volgende vergelijkingen op te stellen.

$$R + P = Q \quad R z = P(a - c) \quad \text{en} \quad \frac{R z^3}{6EI} = \frac{Q}{\alpha}$$

De evenwichtsvoorwaarden zouden dezelfde zijn, indien er een enkele kracht  $P$  aangreep op afstand  $a - c$  van het aangrijpingspunt van  $Q$ , mits  $c < a$ .

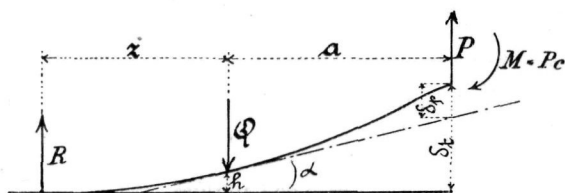


Fig. 12.

In verband met de formule II a 1 is dus neer te schrijven:

$$z = \sqrt[3]{\frac{3EI}{\alpha}} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{8EI}{9(a-c)^3 \alpha}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{8EI}{9(a-c)^3 \alpha}}} \right\}, \quad (\text{II b 1})$$

terwijl verder

$$Q = P \frac{a - c + z}{z}; \quad (\text{II b 2})$$

$$h = P \frac{(a - c) z^2}{6EI}; \quad (\text{II b 3})$$

en

$$R = P \frac{a - c}{z}.$$

$$\delta_t = h + \alpha a + \delta_p =$$

$$= P \frac{(a - c) z^2}{6EI} + P \frac{(a - c) z a}{2EI} + P \frac{a^3}{3EI} - P \frac{c a^2}{2EI}.$$

$$\delta_t = \frac{P}{6EI} \left\{ (a - c)(z^2 + 3az + 2a^2) - a^2 c \right\}. \quad (\text{II b 4})$$



De totale hoekverplaatsing aan het einde van den hefboom

$$\alpha_t = \alpha + \alpha_f = P \frac{(a-c)z}{2EI} + P \frac{a^2}{2EI} - P \frac{ca}{EI}$$

of

$$\alpha_t = \frac{P}{2EI} \left\{ (a-c)(z+a) - ac \right\} \quad (\text{II b 5})$$

**II c. Het heffen van een last, waarvan de grootte evenredig is met de hefhoogte, door een koppel aangrijpend aan het einde van den hefboom, indien dat einde als gevolg van deze krachten alleen een hoekverandering kan ondergaan.**

De vormverandering is voorgesteld in fig. 13.

Als werkend koppel wordt aangenomen  $M = Pc$ .

Evenals in de beide vorige gevallen is  $h = \frac{Q}{\mathfrak{A}}$ , indien wederom  $\mathfrak{A}$  voorstelt de grootte van den last voor de eenheid van hefhoogte. Als vergelijkingen ter oplossing van de onbekenden  $R_1$ ,  $R_2$  en  $z$ , zijn thans op te stellen:

$$1) R_1 z_1 = R_2 a_1 - Pc \quad \text{en} \quad 2) R_1 (a_1 + z_1) = Q a_1 - Pc$$

aangezien  $h = \frac{R_1 z_1^3}{6EI}$  is  $Q = \mathfrak{A} \frac{R_1 z_1^3}{6EI}$

dus  $R_1 (a_1 + z_1) = R_1 \frac{\mathfrak{A} a_1 z_1^3}{6EI} - Pc$ .

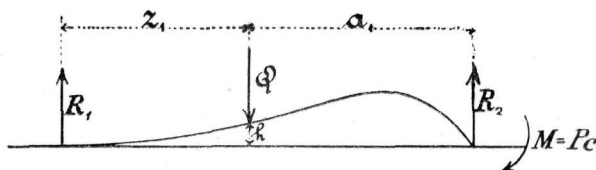


Fig. 13.

Een derde vergelijking wordt geleverd door de voorwaarde in vergelijking te brengen, waaraan de vormverandering moet voldoen n.l. dat, van het aangrijpingspunt van  $R_1$  uitgaande, de totale doorbuiging van het aangrijpingspunt van  $R_2$  na de vormverandering  $\delta_t$  gelijk is aan 0.

$$\delta_t = \frac{R_1 z_1^3}{6 EI} + \frac{R_1 z_1^2 a_1}{2 EI} + \frac{R_2 a_1^3}{3 EI} - \frac{P c a_1^2}{2 EI} = 0.$$

of

$$3) \quad R_1 z_1^3 + 3 R_1 z_1^2 a_1 + 2 R_2 a_1^3 - 3 P c a_1^2 = 0.$$

$$\text{Uit 1) volgt} \quad R_2 a_1 = R_1 z_1 + P c$$

$$\text{Uit 2) volgt} \quad P c = R_1 \frac{\mathcal{A} a_1 z_1^3}{6 EI} - R_1 (a_1 + z_1).$$

Met behulp hiervan  $R_2$  en  $P$  in 3) elimineerend wordt gevonden

$$z_1^3 + 3 z_1^2 a_1 + 3 z_1 a_1^2 + a_1^3 = a_1^3 z_1^3 \frac{\mathcal{A}}{6 EI},$$

of

$$(z_1 + a_1)^3 = a_1^3 z_1^3 \frac{\mathcal{A}}{6 EI},$$

dus

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{A}}{6 EI} - \frac{1}{a_1}}. \quad (\text{II c 1})$$

$z_1$  is alzoo voor een bepaalde constructie een constante. Is de waarde hiervan berekend, dan zijn te bepalen:

$$R_1 = P c \frac{a_1^2}{z_1 (z_1 + a_1) (z_1 + 2 a_1)}. \quad (\text{II c 2})$$

$$Q_1 = P \frac{c}{a_1} \frac{(a_1 + z_1)^2}{z_1 (z_1 + 2 a_1)}. \quad (\text{II c 3})$$

De hoekverplaatsing, welke de hefboom ter plaatse van het aangrijpingspunt van de reactie  $R_2$  ondergaat, is te berekenen op:

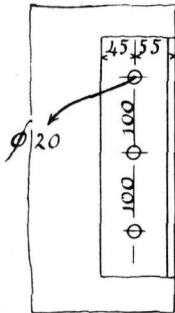
$$\begin{aligned} \alpha_t &= \frac{R_1 z_1^2}{2 EI} + \frac{R_2 a_1^2}{2 EI} - \frac{P c a_1}{EI} = \frac{R_1 z_1^2}{2 EI} + \frac{R_1 z_1 a_1}{2 EI} - \frac{P c a_1}{2 EI} \\ &= \frac{P c}{2 EI} \left\{ \frac{a_1^2 z_1^2 + z_1 a_1^3}{z_1 (z_1 + a_1) (z_1 + 2 a_1)} - a_1 \right\}, \end{aligned}$$

hetgeen verder te vereenvoudigen is tot:

$$\alpha_t = - \frac{P c a}{2 EI} \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2 a_1} \quad (\text{II c 4})$$

Past men dat toe op de hierneven geschetste verbinding (zie

fig. 14) met hoekijzers  $\frac{100 \times 100}{10}$ , waarop per lengte eenheid de



geteekende momenten  $p c$  werken en waarvoor per lengte eenheid de kracht  $\mathcal{E}$  wederom te stellen is op  $E \times 0,210$ , dan is

$$\sqrt[3]{\frac{\mathcal{E}}{6 EI}} = \sqrt[3]{\frac{0,210}{6 \times \frac{1}{12}}} = \sqrt[3]{0,420} = 0,749,$$

terwijl

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{5,5} = 0,1818,$$

zoodat volgens II c 1

$$z_1 = \frac{1}{0,749 - 0,182} = \frac{1}{0,567} = 1,76 \text{ cm.}$$

Volgens III c 3 is dan

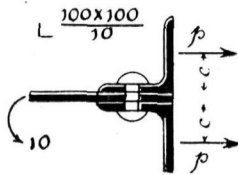


Fig. 14.

$$q_1 = p \frac{c}{a_1} \frac{(a_1 + z_1)^2}{z_1(z_1 + 2a_1)} = p \frac{c}{5,5} \cdot \frac{7,26^2}{1,76 \times 12,76} = p c \frac{52,71}{123,52} = 0,427 p c.$$

Terwijl de optredende buigspanning in het hoekijzer te berekenen is op  $\frac{p c}{\frac{1}{6}} = 6 p c$ , bedraagt alzoo de optredende trekspanning in de verbindingbouten

$$\frac{10 q_1}{3,14} = p c \times \frac{4,27}{3,14} = p c \times 1,36.$$

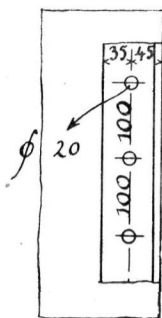
Gewoonlijk worden die nagels slechts op afschuiving berekend, waarbij een gemiddelde schuifspanning gevonden wordt van

$$\frac{10 p}{3,14} = 3,18 p.$$

Zoodra  $c$  een grootere waarde heeft dan 2,4 cm. is de optredende trekspanning in de nagels grooter dan de berekende schuifspanning.

Handwritten calculations in the bottom right corner:  
 $\frac{10 p}{3,14} = 3,18 p$   
 $3,18 p \times 1,36 = 4,33 p$   
 $4,33 p > 3,18 p$   
 $\times 0,084$

Wordt het hoekijzer met beenlengte 100 m.M. vervangen door een met 80 c.M. beenlengte (zie fig. 15), dan is wederom



$$\alpha = E \times 0,210 \text{ en } \sqrt[3]{\frac{\alpha}{6EI}} = 0,749,$$

terwijl

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{4,5} = 0,222,$$

zoodat

$$z_1 = \frac{1}{0,749 - 0,222} = \frac{1}{0,527} = 1,90 \text{ c.M.}$$

Volgens *IIc 3* is dan:

$$\begin{aligned} q_1 &= p c \frac{6,4^2}{4,5 \times 1,9 \times 10,9} = \\ &= p c \times \frac{40,96}{93,195} = p c \times 0,4395. \end{aligned}$$

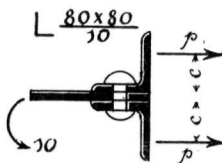


Fig. 15.

Terwijl dus hierbij evenals in het vorig geval de optredende buigspanning in het hoekijzerbeen te berekenen is op  $p c \times 6$ , bedraagt de optredende trekspanning in de bout

$$p c \times \frac{10 \times 0,4395}{3,14} = p c \times 1,4.$$

Voor de hier beschouwde soort verbinding moeten dus, met het oog op de optredende trekkrachten in de bouten, de langbeenige hoekijzers iets gunstiger worden geacht.

### HOOFDSTUK III.

#### Een met behulp van hoekijzers tot stand gebrachte ijzerverbinding, die wordt getrokken.

De hier bedoelde ijzerverbinding is die, voorgesteld in fig. 16. In die figuur is mede in overdreven zin weergegeven, hoe deze verbinding zich onder de werking der krachten  $P$  zal vervormen.

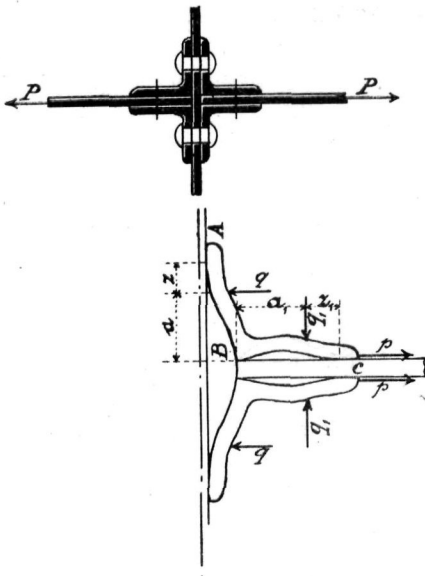


Fig. 16.

Hebben alle hoekijzers een hoogte  $h$ , zoo is de kracht, die per cM. hoogte op elk hoekijzer werkt

$$p = \frac{P}{2h}.$$

Deze krachten  $p$  worden door de bouten en door de wrijving, die tusschen aansluitende oppervlakken optreedt, van de plaat op de hoekijzers overgebracht en daarom gedacht aan te grijpen

in de aanrakingsvlakken van de door de kracht  $P$  belaste staven met de hoekijzers.

Het gedeelte  $AB$  van het hoekijzer bevindt zich nu, behoudens

de opmerking, dienaangaande op blz. 19 reeds gemaakt, in den belastingstoestand, welke hiervoor met *IIb* is aangeduid.

Het de vormverandering tegenwerkend moment  $p c$  is echter nog onbekend.

Het gedeelte *BC* wordt belast volgens *IIc*. Het moment, dat in *B* werkt en mede gelijk moet zijn aan  $p c$ , (aangezien in de doorsnede aldaar slechts één moment kan optreden) is ook nog onbekend. Dit onbekende moment  $p c$  is echter te bepalen uit de voorwaarde, waaraan de vormverandering moet voldoen. De hoek in het hoekijzer bij *B* moet recht blijven, terwijl de hoekverandering  $\alpha_i$  van het gedeelte *AB* en de hoekverandering  $\alpha_{i_1}$  van het gedeelte *BC* van het hoekijzer samen gelijk 0 moeten zijn.

Daarvoor de formules *IIb* 5 en *IIc* 4 gebruikende, luidt de hiervoor op te stellen vergelijking in het algemeen:

$$\alpha_i + \alpha_{i_1} = \frac{p}{2 E \bar{J}} \left\{ (a-c)(z+a) - ac \right\} - \frac{p c a_1}{2 E \bar{J}_1} \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2 a_1} = 0, \quad (\text{III 1})$$

in welke vergelijking  $z$  een functie van  $c$  is n.l.:

$$z = \sqrt[3]{\frac{3 E \bar{J}}{\mathfrak{A}}} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{E i}{(a-c)^3 \mathfrak{A}}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{E i}{(a-c)^3 \mathfrak{A}}}} \right\}$$

terwijl  $z_1$  bij een bepaalde constructie een constante is, n.l. volgens *IIc* 1:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1}{6 E i_1} - \frac{1}{a_1}}}$$

In den regel is  $i = i_1$ , zoodat dan de vergelijking kan luiden:

$$\frac{(a-c)(z+a) - ac}{c} = a_1 \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2 a_1} = \text{constant.} \quad (\text{III 2})$$

Een formule, waaruit  $c$  direct te bepalen is, zal hier wel niet voor te geven zijn. Voor een bepaalde constructie, waarvoor  $\frac{Ei}{\alpha}$  benevens  $a$  bekend zijn, kan in de eerste plaats de waarde van  $z$  berekend worden voor verschillende waarden van  $\frac{c}{a}$  en is met behulp daarvan voor deze zelfde waarden van  $\frac{c}{a}$  die van de breuk  $\frac{(a-c)(z+a)-ac}{c}$  of  $\left(\frac{a}{c}-1\right)(z+a)-a$  te becijferen. Door de waarden van  $\frac{c}{a}$  als abcis en die van de breuk  $\frac{(a-c)(z+a)-ac}{c}$  als ordinaat uit te zetten, is een lijn te construeeren, welke de waarde der breuk voorstelt, en is de waarde van  $\frac{c}{a}$  te vinden, waarvoor die breuk een waarde heeft gelijk aan de constante  $a_1 \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2 a_1}$ , welke een bekende is.

Als de waarden van  $c$  en  $z$  bekend zijn, is voor elke waarde van  $p$ , dat is de kracht per hoogte-eenheid en per hoekijzer, de uitwijking van elk hoekijzer te bepalen volgens de formule II b 4, n.l.

$$\delta_i = \frac{p}{6 Ei} \left\{ (a-c)(z^2 + 3az + 2a^2) - a^2c \right\}.$$

Wordt gesteld

$$A = (a-c)(z^2 + 3az + 2a^2) - a^2c, \quad (\text{III } 3)$$

in welke formule  $c$  en  $z$  de waarden moeten hebben, zooals die bepaald zijn volgens de in dit hoofdstuk III a ontwikkelde methode, dan krijgt — voor een bepaalde verbinding —  $A$  een constante waarde, weshalve  $A$  de constante dier verbinding wordt genoemd, en dan geldt:

$$\delta_i = \frac{pA}{6 Ei}. \quad (\text{III } 4)$$

Het moment, dat in den nek van het hoekijzer optreedt, is dan, zooals bekend, te bepalen op  $m = pc$ .

Wordt de dikte van het hoekijzerbeen met  $d$  aangeduid, dan is

het weerstandsmoment van het hoekijzerbeen per cM. hoogte te berekenen op

$$w = \frac{i}{\frac{1}{2}d} = \frac{2i}{d},$$

zoodat de optredende buigspanning in den nek van het hoekijzer te berekenen is op

$$\sigma_i = \frac{p c d}{2i}. \quad (\text{III } 5)$$

Uit formule III a 4 volgt

$$p = \frac{6 E i \delta_i}{A}, \quad (\text{III } 6)$$

in verband waarmede te berekenen valt, dat het moment, dat in den nek van het hoekijzer per cM. lengte optreedt, te berekenen is volgens de formule

$$m = \frac{6 E i c \delta_i}{A}, \quad (\text{III } 7)$$

waaruit weder te berekenen is, dat de optredende buigspanning aldaar ook te bepalen is op

$$\sigma_i = \frac{3 E c d \delta_i}{A}. \quad (\text{III } 8)$$

Bij deze berekening zijn eenige vereenvoudigende veronderstellingen en verwaarloozingen ingevoerd:

- 1<sup>e</sup>. de aanvangsspanningen van de bouten worden verwaarloosd;
- 2<sup>e</sup>. de zich tusschen de hoekijzers bevindende platen en de hoekijzers zélf worden als onsamendrukbaar in rekening gebracht;
- 3<sup>e</sup>. de boutkrachten, die door de onderzijden van de boutkoppen op de hoekijzers worden overgebracht, worden gelijkmatig verdeeld aangenomen over de boutaslijn; ze worden dus in ééne richting geconcentreerd en in de andere richting verdeeld;
- 4<sup>e</sup>. de afronding in den nek is weggedacht.

Ad. 1. Die vereenvoudigingen zijn oorzaak, dat de resultaten der berekeningen niet volkomen zullen overeenkomen met de werkelijkheid. Ze zijn echter noodzakelijk om de verbinding in



een berekenbare te transformeeren, aangezien de genoemde invloeden niet in de berekening zijn op te nemen, zonder weder min of meer gewaagde onderstellingen te doen, waardoor het niet eens zeker zoude zijn, dat men de werkelijkheid meer nabij komt.

De aanvangsspanning in bouten kan naar gelang van de wijze van klinken beduidend verschillen; het is zelfs de vraag, of in met de hand geklonken nagels, nadat ze eens op trek belast zijn, die aanvangsspanning niet is verdwenen.

Ad. 2. De verwaarloozing van de samendrukbaarheid van het ijzer, dat zich tusschen de assen der hoekijzerbeenen bevindt, heeft op de uitkomsten een tegengestelden invloed als die van de beginspanning der bouten. Zoodra dat ijzer samengedrukt wordt, zoodat de dikte overeenkomt met de lengte, die de bouten zouden hebben in spanningloozen toestand, heffen de verwaarloozingen sub 1 en sub 2 genoemd elkaar op; de reactie  $R$  (zie o.a. fig. 9) zal dan echter geen geconcentreerde kracht meer zijn, doch over een zekere breedte worden verdeeld.

Ad. 3. De verdeeling van de boutkrachten  $Q$  over de boutaslijn zal uit den aard der zaak van invloed zijn op de berekening van het moment  $p c$ . Indien men echter voor beide beenen van een hoekijzer van een verbinding volgens fig. 16 dezelfde vereenvoudigingen aanneemt, zal dat van niet veel invloed kunnen zijn op de uitkomst.

Ad. 4. Van meer belang zal de sub 4 genoemde veronderstelling zijn. Vooropgesteld kan worden, dat de nek van het hoekijzer als te slap in rekening wordt gebracht, zoodat voor het moment  $p c$  een te kleine waarde wordt gevonden.

Daartegenover staat, dat bij de berekening van het weerstandsmoment een te geringe dikte wordt ingevoerd, waardoor tevens eenigszins rekening wordt gehouden met het feit, dat de spanningsverdeeling over de nekdoorsnee niet rechtlijnig zal zijn.

Hoe bezwaarlijk het is, nauwkeurig de in den nek van een hoekijzer optredende spanningen en vormveranderingen te berekenen,

blijkt uit de onderzoekingen van E. PREUSZ te Darmstadt, zie „Zeitschrift der Vereines deutscher Ingenieure No. 34 1912”, waarvan de uitkomsten niet met die van eenige gebruikelijke berekeningswijze overeenkomen.

Eindelijk is de door de nekdoorsnee over te brengen trekkracht ook buiten rekening gelaten, omdat bij de bepaling der grootte van het moment  $p c$  de afstand  $c$  gerekend is tot den hoek van het hoekijzer, dus iets te groot is genomen.

De te berekenen cijfers zullen in verband met het vorenstaande niet met de werkelijkheid volkomen overeenkomen; ze zijn niet meer dan benaderingen, die echter wel een beeld geven van de werkwijze eener dergelijke verbinding en geschikt zijn om verschillende verbindingen met elkander te vergelijken.

Teneinde de uitkomsten der gegeven berekeningswijze aan de werkelijkheid te toetsen, zal ze hier worden toegepast op de in fig. 17 geschetste verbinding, waarop Professor RUDELOFF trekproeven heeft verricht, welke proeven in zijne verhandeling getiteld: „Versuche mit Nietverbindungen und Brückenteile, 1912” (Verlag von Leonhard Simion Nf.) aangeduid zijn met proef 18 en 18a.

Voor het hoekijzerbeen, staande loodrecht op de krachtrichting, wordt de kracht  $\mathcal{A}_t$ , die een nagel met 21 mM. diameter en een lengte van 15 mM., 1 cM. zal uitrekken, berekend uit de formule:

$$1 = \frac{\mathcal{A}_t \times 1,5}{E \times 3,14 \times 1,05^2}; \text{ of } \mathcal{A}_t = E \times \frac{3,14 \times 1,1025}{1,5} = E \times 2,31.$$

Aangezien over de hoogte van 40 cM. 3 bouten voorkomen, is voor de cM. lengte van het hoekijzer te berekenen

$$\mathcal{A} = \frac{3 \mathcal{A}_t}{40} = \frac{3 \times 2,31}{40} E = 0,173 E,$$



$$L = \frac{100 \times 100}{10}$$

$$\Delta = E \times 0,173$$

$$a = 5,5 \text{ cM.}$$

$\frac{c}{a}$	$c$	$\sqrt[3]{\frac{3Ei}{a^3}}$	$\frac{8}{9} \frac{Ei}{(a-c)^3 \Delta}$	$\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{Ei}{(a-c)^3 \Delta}}}$	$\sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{Ei}{(a-c)^3 \Delta}}}$	$z$	$\left(\frac{a}{c} - 1\right) (z + a) - a = \mathfrak{B}$
0,3	1,65	1,131	0,007503	1,259	0,156	1,600	11,067
0,4	2,20	1,131	0,011914	1,259	0,182	1,630	5,195
0,5	2,75	1,131	0,02059	1,258	0,218	1,669	1,669
0,6	3,30	1,131	0,04021	1,256	0,273	1,729	— 0,681
0,7	3,85	1,131	0,09532	1,250	0,366	1,828	— 2,359

Voor het hoekijzerbeen, dat evenwijdig is aan de krachtrichting geldt, dat  $\mathcal{A}_1$  eveneens gelijk is aan  $E \times 2,31$ , zoodat in verband met de aanwezigheid van vier nagels over de hoogte van 40 cM., voor de cM. lengte geldt

$$\mathcal{A}_1 = E \frac{4 \times 2,31}{40} = 0,231 \times E.$$

Volgens II c 1 is

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\mathcal{A}_1}{6EI} - \frac{1}{a_1}}}, \text{ waarin } \sqrt[3]{\frac{\mathcal{A}_1}{6EI}} = \sqrt[3]{\frac{E \times 0,231}{6E \times \frac{1}{12}}} = 0,773,$$

terwijl

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{5,5} = 0,182,$$

zoodat

$$z_1 = \frac{1}{0,773 - 0,182} = \frac{1}{0,591} = 1,69 \text{ cM.}$$

De waarde van de breuk  $a_1 \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2a_1}$  is dus te berekenen op

$$5,5 \cdot \frac{1,69 + 5,5}{1,69 + 11} = 5,5 \cdot \frac{7,19}{12,69} = 3,116.$$

In grafiek 1 is de waarde van de breuk

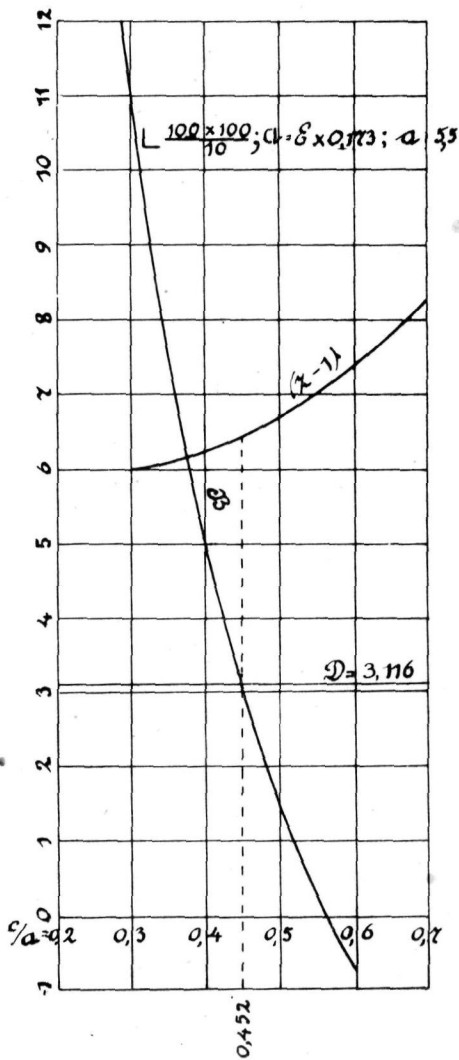
$$\left(\frac{a}{c} - 1\right)(z + a) - a,$$

welke verder aangeduid zal worden met  $\mathfrak{B}$ , voorgesteld met de waarden van  $\frac{c}{a}$  als abscis, terwijl de waarde van de breuk  $a_1 \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2a_1}$ , die verder  $\mathfrak{D}$  genoemd zal worden, op die grafiek door een rechte, evenwijdig aan de nullijn, wordt voorgesteld. Uit de ligging van het snijpunt der lijnen  $\mathfrak{B}$  en  $\mathfrak{D}$  wordt afgeleid, dat

$$\text{voor } \frac{c}{a} = 0,452 \text{ de breuk } \mathfrak{B} = \text{de breuk } \mathfrak{D} = 3,116,$$

zoodat voor de verbinding geldt, dat  $\epsilon$  de constante waarde heeft van  $0,452 \times 5,5 = 2,486$  cM.

Door grafische interpolatie (er is op de grafiek een lijn voor  $(z-1)$  geteekend), wordt gevonden, dat de daarbij behorende



constante waarde van  $z = 1,649$  cM. of rond  $z = 1,65$  cM., terwijl dus  $c = 2,486$  cM.

De constante der verbinding is volgens III 3 te bepalen op:

$$\begin{aligned} A &= (a - c)(z^2 + 3az + 2a^2) - a^2c = \\ &= (5,5 - 2,486)(1,649^2 + 3 \times 5,5 \times 1,649 + 2 \times 5,5^2) - 5,5^2 \times 2,486 = \\ &= 208,94 \text{ rond } 209. \end{aligned}$$

Volgens formule III 5 blijkt, dat de evenredigheidsgrens in het materiaal van het hoekijzer ( $\pm 2,000$  ton/cm<sup>2</sup>.) bereikt wordt, zoodra

$$p = \frac{2i\sigma_i}{cd} = \frac{2 \times \frac{1}{12} \times 2}{2,486 \times 1} = \text{rond } 0,134 \text{ ton/cm.},$$

voor welke waarde van  $p$  de geheele kracht  $K$ , op de verbinding werkend, te bepalen is op

$$K = 2 \times 40 p = 80 \times 0,134 = 10,72 \text{ ton.}$$

Het mag hier wel even worden opgemerkt, dat voor de gevallen, waarin berekend wordt, dat  $\frac{c}{a}$  kleiner is dan 0,5, het grootste moment in het hoekijzerbeen volgens de theorie optreedt in de doorsnede over de centra der bouten, alwaar n.l. het moment gelijk is aan  $p(a - c)$ .

Aangezien echter de druk, door den nagel op het hoekijzerbeen uitgeoefend, zich over een betrekkelijk groot oppervlak verdeelt, waardoor het moment in die doorsnede wederom zeer gereduceerd wordt, zal in die gevallen, waarbij de waarde van  $\frac{c}{a}$  niet veel van 0,5 afwijkt, voor de bepaling van de evenredigheidsgrensbelasting der verbinding de optredende spanning in den nek van het hoekijzer als maatgevend te beschouwen zijn.

De uitkomsten dezer en volgende berekeningen, waarbij blijkt, dat de optredende spanningen in de beide bovenbedoelde doorsneden niet veel verschillen, vindt men bevestigd door het feit, dat bij de, in de inleiding ter sprake gebrachte hoekijzers in de verbindingen van langs- aan dwarsdraggers der spoorwegbruggen,

de scheuren zoowel in den nek als over de boutgaten werden aangetroffen.

In navolging van het behandelde onder *II b* en volgens formule *II b 2* is voor het loodrecht op de krachtrichting staande been per lengte-eenheid

$$q = p \frac{a-c-z}{z} = 0,134 \times \frac{5,5 - 2,486 + 1,649}{1,649} = 0,378 \text{ ton.}$$

De trekkracht, in één bout optredend, is dan te bepalen op:

$$\frac{40 \times 0,378}{3} = 5,04 \text{ ton,}$$

en de trekspanning op

$$\sigma_b = \frac{5,04}{3,14 \times 1,05^2} = 1,46 \text{ ton/cm}^2.$$

Voor het been, dat evenwijdig aan de krachtrichting loopt, geldt volgens *II c 3*:

$$q_1 = p \frac{c}{a_1} \frac{(a_1 + z_1)^2}{z_1(z_1 + 2a_1)} = p \frac{2,486}{5,5} \frac{7,19^2}{1,69 \times 12,69} = p \times 1,098.$$

Voor de belasting, waarbij in den nek van het hoekijzer de elasticiteitsgrens wordt bereikt, bedraagt alzoo de trekspanning in de bouten, gaande door de hoekijzerbeenen, die evenwijdig loopen aan de krachtrichting:

$$\sigma_{b_1} = \frac{40 \times 0,134 \times 1,098}{4 \times 3,14 \times 1,05^2} = 0,425 \text{ ton/cm}^2.$$

De afbuiging (uitrekking) van het hoekijzer, op het oogenblik dat de evenredigheidsgrens bereikt is, dus de kracht  $K$  10,72 ton groot is, is te berekenen volgens formule *III 4*:

$$\delta_i = \frac{p A}{6 E i} = \frac{0,134 \times 209}{6 \times 2150 \times \frac{1}{12}} = 0,0260 \text{ cM.}$$

Vergelijkt men de uitkomsten dezer berekeningen met die der trekproeven door Prof. RUDELOFF op twee dergelijke verbindingen genomen, dan blijkt, dat ook daarbij tusschen de 10 en 11 ton



belasting de evenredigheidsgrens werd bereikt en dat bij de belasting van 10,72 ton gemeten werd

bij proef 18 eene uitbuiging  $\delta_l = 0,0244$  cM.  
 en bij proef 18a „ „  $\delta_l = 0,0378$  cM.

Het blijkt dus, dat de gegeven berekeningswijze niet te zeer afwijkt van, hetgeen in de werkelijkheid kan voorkomen. Uit den aard der zaak kan men betrekkelijk groote afwijkingen verwachten tusschen de uitkomsten der berekeningen en de uitkomsten van proeven, zooals door RUDELOFF gedaan, waarbij blijkbaar met voorbedachten rade de proefstukken werden vervaardigd, zooals zulks in de praktijk geschiedt, zonder die voorzorgen te nemen, die voor eene, in aansluiting met de gegeven theorie te nemen proef, noodzakelijk zouden zijn; men denke daarbij aan de mogelijkheid, dat de hoekijzers niet volmaakt rechthoekig, niet recht of niet volkomen vlak zijn. Het behoeft dan ook geen verwondering te baren, dat de beide proeven 18 en 18<sup>a</sup> zulke verschillende resultaten geven; het is een voldoening te zien, dat de berekende waarde daar tusschen is gelegen.

Niet bij alle door hem genomen proeven komt dat zoo goed uit. De proeven 17 en 17<sup>a</sup> werden genomen op verbindingen, die geheel overeenkwamen met 18 en 18<sup>a</sup>, met dit verschil echter, dat de plaat van 10 mM. dikte niet tusschen de loodrecht op de krachtrichting staande beenen van de hoekijzers was aangebracht. Voor die verbindingen is volgens dit hoofdstuk III te berekenen, dat de evenredigheidsgrens bereikt wordt bij een belasting van  $K = 10,87$  ton, waarbij de afwijking van het hoekijzer zou bedragen  $\delta_l = 0,0251$  cM.; bij de proefnemingen werd geconstateerd, dat werkelijk de evenredigheidsgrens nabij 11 ton belasting was gelegen, doch bij een belasting van 10,87 ton bleek dat

bij proef 17 de afbuiging bedroeg  $\delta_l = 0,015$  cM., en  
 bij proef 17<sup>a</sup> die afbuiging bedroeg  $\delta_l = 0,005$  cM.

Uit den aard der zaak moeten er bijzondere afwijkingen in de proefstukken aanwezig zijn geweest, die de uitkomsten der beide

proeven zoo zeer uiteen hebben doen loopen, hetgeen nog te meer in het oog springt bij de geconstateerde uitbuiging bij 5 ton belasting, welke bij proef 17 bedroeg 0,01 cM. en  
 bij proef 17<sup>a</sup> 0,00 cM.

De belastingen, die voor de evenredigheidsgrenzen werden berekend, komen zeer wel overeen met, hetgeen door RUDELOFF werd geconstateerd. Bijzonder sterk komt de overeenstemming uit bij de proeven 17, 17<sup>a</sup> en 18.

Uit de berekeningen volgt bovendien, dat de bouten, die de beenen, welke evenwijdig aan de krachtrichting loopen, verbinden, lang niet zoo sterk worden belast als die, welke de loodrecht daarop staande beenen verbinden, terwijl de optredende spanning in de laatstgenoemde bouten wederom geringer is dan de buigspanning, die voor den nek van het hoekijzer berekend wordt.

Op de foto's door RUDELOFF bij zijne verhandeling weergegeven treedt duidelijk aan het licht, dat de vormverandering plaats heeft volgens de hier gehuldigde beginselen, terwijl de proeven uitwijzen, dat de breuk dáár ontstaat, waar de berekende spanning het hoogst is, n.l. in den nek van een der hoekijzers.

De gegeven beschouwingen blijken dus wel geschikt te zijn, zich een oordeel te vormen over de optredende spanningen, over de grootte der vormverandering en over de hoogte der belasting, die tot overschrijding der evenredigheidsgrens voert.

Gebruikt men de verbinding van fig. 17 om in het rijdvlak van een brug de langsdragers van het profiel **I** N<sup>o</sup>. 28 (doorsnede 61 cM<sup>2</sup>.) onderling en met de dwarsdraggers te verbinden, en let men slechts op de normale krachten, die in de langsdragers o.a. als secundaire krachten kunnen ontstaan, dan dient opgemerkt, dat reeds bij een optredende trekkracht van 10,72 ton, dus een spanning in den langsdrager van  $\frac{10,72}{61} = 0,176$  ton/cM<sup>2</sup>., de evenredigheidsgrens der verbinding is bereikt. De som der uitrekkingen van de aan beide einden voorkomende verbindingen bedraagt dan



De verbinding wordt stijver en sterker door de hoekijzers met 10 cM. beenlengte te vervangen door kortere hoekijzers met 8 cM. beenlengte, zoodat de verbinding dan het aanzien krijgt, als in fig. 18 is aangegeven.

Voor de bouten geldt dan wederom, dat

$$\mathfrak{A}_t = \mathfrak{A}_{t_1} = E \times 2,31.$$

Voor het hoekijzerbeen, loodrecht op de krachtrichting staande, wordt berekend:

$$\mathfrak{A} = \frac{3 \mathfrak{A}_t}{40} = 0,173 E,$$

zoodat

$$\sqrt[3]{\frac{3 E i}{\mathfrak{A}}} = 1,131,$$

geheel in overeenstemming met het vorig geval.

Voor verschillende waarden van  $\frac{c}{a}$  varieerend van 0,3 tot 0,7 is het op blz. 45 gestelde lijstje voor de waarden van  $z$  en de waarden

$$\mathfrak{B} = \left( \frac{a}{c} - 1 \right) (z + a) - a \text{ te berekenen.}$$

Voor het hoekijzerbeen, dat evenwijdig aan de krachtrichting loopt, geldt:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{2 \times \mathfrak{A}_{t_1}}{40} = E \times \frac{2,31}{20} = E \times 0,1155,$$

zoodat volgens II c 1:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1}{6 E I} - \frac{1}{a_1}}}, \text{ waarin } \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1}{6 E I}} = \sqrt[3]{\frac{0,1155}{6 \times \frac{1}{12}}} = 0,614,$$

$$\text{terwijl } \frac{1}{a_1} = \frac{1}{4,5} = 0,2222,$$

$$\text{zoodat } z_1 = \frac{1}{0,614 - 0,222} = \frac{1}{0,392} = 2,55 \text{ cM.}$$

De waarde van de breuk  $\mathfrak{D} = a_1 \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2 a_1}$  is dus te berekenen op:

$$\mathfrak{D} = 4,5 \cdot \frac{2,55 + 4,5}{2,55 + 9} = 4,5 \cdot \frac{7,05}{11,55} = 2,75.$$

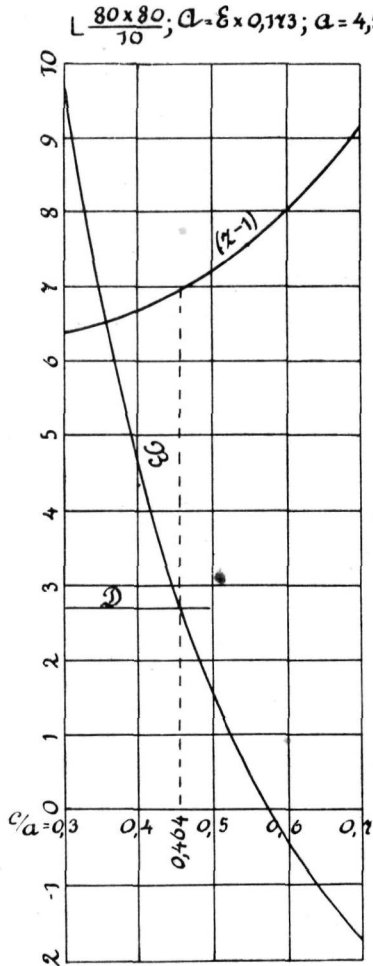
$$L = \frac{80 \times 80}{10}$$

$$\Delta = E \times 0,173$$

$$a = 4,5 \text{ cM.}$$

$\frac{c}{a}$	$c$	$\sqrt[3]{\frac{3 Ei}{\Delta}}$	$\frac{8}{9} \frac{Ei}{(a-c)^3 \Delta}$	$\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{Ei}{(a-c)^3 \Delta}}}$	$\sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{Ei}{(a-c)^3 \Delta}}}$	$z$	$\mathfrak{B} = \left(\frac{a}{c} - 1\right)(z + a) - a$
0,3	1,35	1,131	0,013700	1,259	0,189	1,638	9,822
0,4	1,80	1,131	0,021753	1,258	0,222	1,674	4,761
0,5	2,25	1,131	0,037589	1,256	0,267	1,723	1,723
0,6	2,70	1,131	0,073416	1,252	0,334	1,794	- 0,317
0,7	3,15	1,131	0,17402	1,240	0,450	1,911	- 1,732

Met behulp der grafiek 2 wordt bepaald, dat de waarden der breuken  $\mathfrak{B}$  en  $\mathfrak{D}$  aan elkander gelijk worden voor  $\frac{c}{a} = 0,464$ , voor welke waarde van  $\frac{c}{a}$   $\epsilon = 2,088$  en  $z = 1,705$ .



Grafiek 2.

De constante der verbinding  $A$  is dus nu te berekenen volgens III 3, n.l.:

$$\begin{aligned} A &= (a - c) (z^2 + 3az + 2a^2) - a^2c = \\ &= (4,5 - 2,088) (1,705^2 + 3 \times 4,5 \times 1,705 + 2 \times 4,5^2) - \\ &\quad - 4,5^2 \times 2,088 = 117,94 \text{ of rond } 118. \end{aligned}$$

Volgens formule III 5 blijkt, dat de evenredigheidsgrens in het materiaal van het hoekijzer bereikt wordt, zoodra

$$p = \frac{2i \sigma_i}{cd} = \frac{2 \times \frac{1}{12} \times 2}{2,088 \times 1} = \text{rond } 0,160 \text{ ton/cm.},$$

voor welke waarde van  $p$  de geheele kracht  $K$  wordt:

$$K = 2 \times 40 \times 0,160 = 12,8 \text{ ton.}$$

Voor het loodrecht op de krachtrichting staande been geldt dan, dat per cm.

$$q = p \frac{a - c + z}{z} = 0,160 \cdot \frac{4,117}{1,705} = 0,386 \text{ ton,}$$

zoodat de trekspanning in de bouten bedraagt

$$\sigma_b = \frac{40 \times 0,386}{3 \times 3,462} = 1,49 \text{ ton/cm}^2.$$

Voor het been, evenwijdig aan de krachtrichting loopend, wordt dan volgens II c 3:

$$q_1 = p \frac{c}{a_1} \frac{(a_1 + z_1)^2}{z_1(z_1 + 2a_1)} = p \frac{2,088}{4,5} \cdot \frac{7,05^2}{2,55 \times 11,55} = 0,783 p \text{ ton/cm.}$$

Voor de belasting  $K = 12,8$  ton, bedraagt dus de optredende trekspanning in deze bouten:

$$\sigma_{b_1} = \frac{40 \times 0,783 \times 0,160}{2 \times 3,462} = 0,724 \text{ ton/cm}^2.$$

De schuifspanning, die in deze nagels dan optreedt, is te berekenen op:

$$\tau_1 = \frac{12,8}{4 \times 3,462} = 0,921 \text{ ton/cm}^2.$$

De afbuiging van de hoekijzers is voor die belasting te berekenen op:

$$\delta_l = \frac{p A}{6 E i} = \frac{0,160 \times 118}{6 \times 2150 \times \frac{1}{12}} = 0,00176 \text{ cm.}$$

Uit deze berekeningen volgt, dat de hoekijzerverbinding met hoekijzers van 80 mM. beenlengte volgens fig. 18 sterker en stijver is dan die met hoekijzers van 100 mM. beenlengte en dezelfde dikte, volgens fig. 17.



## HOOFDSTUK IV.

### Consoleverbindingen.

#### IV a. Een met behulp van hoekijzers tot stand gebrachte normale consoleverbinding.

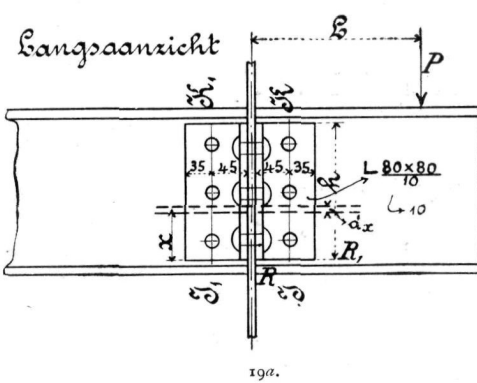
De bedoelde verbinding is in fig. 19 geschetst.

De verbinding moet weerstand kunnen bieden aan een moment  $M = P \varrho$ , welk moment een draaiende beweging om de lijn  $RR$  (zie fig. 19b) tracht te veroorzaken, welke draaiingsas zich in fig. 19a als een punt  $R$  voordoet. \*)

Ter vereenvoudiging wordt aangenomen, dat in stede van de boutrijen continuë verbindingen bestaan, waarvan elk hoogtedeelte  $dx$  bij een verplaatsing in de richting van de lengteassen der klinknagels een reactie uitoefent evenredig met zijn verplaatsing. Wordt een strookje  $dx$  beschouwd, op afstand  $x$  van de draaiingsas  $RR$  gelegen, dan kan dit strookje geacht worden enkel te worden aangegrepen door trekkrachten in de richting van de lengte-as van de console, zoodat die belastingstoestand geheel te vergelijken is met die onder hoofdstuk III besproken.

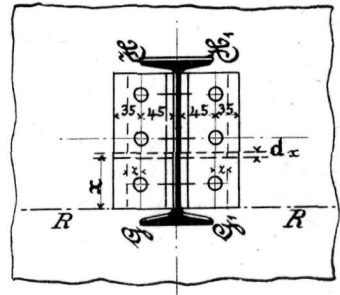
Hierbij is dus verondersteld, dat elk strookje zijn werking uitoefent en zijn vormverandering ondergaat onafhankelijk van de aanwezigheid der aangrenzende strookjes.

\*) Een zoodanige verbinding komt meestal tot stand door de reeds van te voren aan de balkijzers geklonken hoekijzers aan elkaar te bouten, waarbij ze dan tevens aan de vertikaal staande plaat worden verbonden. Steken bij de op de stelplaats aangevoerde deelen de profielijzers ook maar eenigszins buiten de aansluitingsvlakken der hoekijzers uit, dan zal men bij het aandraaien der stelbouten de hoekijzerbeenen moeten ombuigen, waarbij eenige kans op het ontstaan van scheuren bestaat en de verbinding niet dicht kan worden. Ten einde dat euvel te vermijden, laat men de hoekijzers een fractie van een millimeter buiten het profielijzer uitsteken; met het oog daarop is de onderkant der hoekijzers als draaiingsas aangenomen.



19a.

Dwarsdoorsnede.



19b.

Horizontale doorsnede

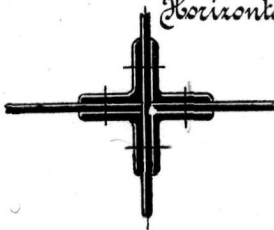


Fig. 19c.

IV A

Volgens formule III 4 is, de lengteverandering der verbinding  $\delta_i$  evenredig met de optredende trekkracht.

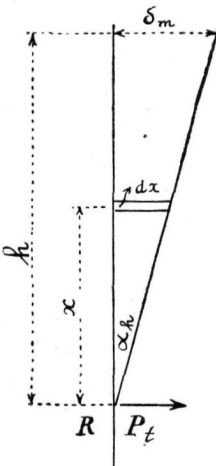


Fig. 20.

Als wordt aangenomen, dat het vastgehouden einde van de console ook na de vormverandering vlak blijft, volgt daaruit, dat de vormverandering van elk strookje  $dx$  evenredig met  $x$  is, en dus de trekkrachten, welke op elk strookje  $dx$  werken, ook evenredig zijn met de afstanden tot de draaiingsas  $RR$ .

Wordt aangenomen, dat de in fig. 19c met een cirkeltje aangegeven ijzervezel na de vormverandering een hoek  $\alpha_h$  maakt met de nullijn, zooals in fig. 20 is geschetst, dan is de afwijking op afstand  $x$  van de draaiingsas  $RR$ :  $\delta_x = x \alpha_h$ .

In overeenstemming met III 6 is dan de in dat strookje voorkomende trekkracht voor één hoekijzer

$$p_x dx = \frac{6 E i}{A} \delta_x dx = \frac{6 E i}{A} \alpha_h x dx.$$

De inwendige krachten moeten evenwicht maken met de uitwendige, zoodat in de eerste plaats de reactie  $P_t$ , door den dwarsdrager op onderkant verbinding uitgeoefend, gelijk is aan de som der elementaire trekkrachten  $p_x dx$  voor beide hoekijzers, dus

$$P_t = 2 \int_0^h \frac{6 E i}{A} \alpha_h x dx = \frac{6 E i h^2}{A} \alpha_h, \quad (\text{IV a 1})$$

terwijl in de tweede plaats de som der momenten van die elementaire trekkrachten om de lijn  $RR$  gelijk moet zijn aan het uitwendig moment  $M$ , zoodat:

$$2 \int_0^h p_x x dx = 2 \int_0^h \frac{6 E i}{A} \alpha_h x^2 dx = \frac{4 E i h^3}{A} \alpha_h = M,$$

waaruit volgt:

$$\alpha_h = M \frac{A}{4 E i h^3}. \quad (\text{IV a 2})$$

De uitwijking van het bovenste deel der verbinding is dan:

$$\delta_m = \alpha_h h, \quad (\text{IV a 3})$$

en de daarbij optredende buigspanning in het hoekijzerbeen in overeenstemming met III 8

$$\sigma_{im} = \frac{3 E c d}{A} \delta_m. \quad (\text{IV a 4})$$

Om de krachten te berekenen, die door de bouten moeten worden opgenomen, wordt eerst van een hoogte element  $dx$  volgens II b 2 berekend

$$q_x dx = p_x dx \frac{a-c+z}{z},$$

zoodat  $q_x dx$ , evenredig zijnde met  $p_x dx$ , evenals deze spankracht evenredig is met den afstand  $x$  tot de as  $RR$ .

Het moment, dat de boutverbindingstrekkkrachten voor beide hoekijzers ten opzichte van de draaiingsas  $RR$  moeten ontwikkelen, is dus:

$$\mathfrak{M}_q = 2 \int_0^h q_x x dx = 2 \frac{a - c + z}{z} \int p_x x dx,$$

zoodat in verband met hetgeen aan *IVa 2* voorafgaat:

$$\mathfrak{M}_q = M \frac{a - c + z}{z}. \quad (\text{IV a 5})$$

Deze formule geeft het middel om de maximale trekspanning in de bouten der verbinding te berekenen; immers de trekkrachten, die in de bouten optreden en evenredig zijn met de afstanden van deze tot de draaiingsas  $RR$ , moeten ten opzichte van deze as een totaal moment hebben, gelijk aan  $\mathfrak{M}_q$ .

Ook voor de nagelverbinding, welke het andere been van de hoekijzers met de eigenlijke console verbindt, geldt:

$$q_{1x} dx = p_x dx \frac{c}{a_1} \frac{(a_1 + z_1)^2}{z_1(z_1 + 2a_1)},$$

waaruit volgt, dat het moment van de trekkrachten, die in deze bouten optreden, ten opzichte van de lijn, welke met de lijn  $RR$  in een horizontaal liggend vlak loodrecht op die lijn staat, en in figuur 19a aangegeven is met  $RR_1$ , volgens de onderstaande formule te berekenen is, n.l.:

$$\mathfrak{M}_{q_1} = \frac{M}{2} \frac{c}{a_1} \frac{(a_1 + z_1)^2}{z_1(z_1 + 2a_1)} \quad (\text{IV a 6})$$

Voor de bepaling van den druk  $P_t$ , door den dwarsdrager op het ondereinde der verbinding uitgeoefend, kan de formule *IVa 1* in verband met *IVa 2*, worden vervormd tot

$$P_t = \frac{3}{2} \frac{M}{h}. \quad (\text{IV a 7})$$

#### IV b. Een naar boven verlengde console-verbinding.

Het geval zal nader worden beschouwd, dat in het gedeelte der hoekijzers, die boven de onder  $a$  beschouwde verbinding uitsteken, slechts twee even hoog gelegen klinknagels voorkomen; zie hierbij de schets volgens fig. 21.

De in de horizontale doorsnede met een cirkeltje aangegeven ijzervezel van het hoekijzer zal een vormverandering ondergaan,

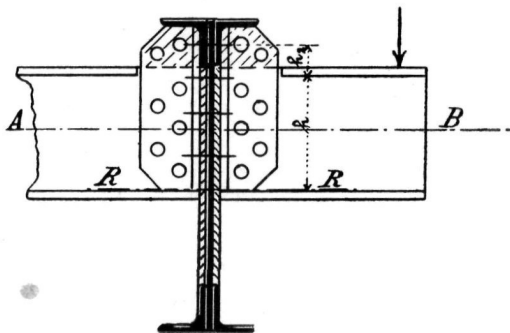


Fig. 21a.

*Horizontale doorsnede over AB*

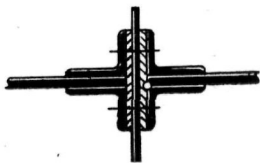


Fig. 21b.

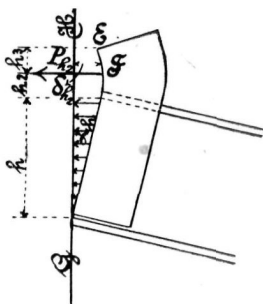


Fig. 21c.

zoals in fig. 21c overdreven is aangegeven. Over de hoogte  $h$  zal de vezel kunnen worden geacht recht te blijven, terwijl op de hoogte  $h_2$  boven bovenkant console een kracht  $P_{h2}$  aangrijpt, die het gevolg is van de aanwezigheid van de beide daar gelegen klinknagels.

In overeenstemming met hetgeen onder *III* is afgeleid, moet worden aangenomen, dat een kracht  $Q$  in een verbindingbout een over een bepaalde hoogte der nekdoorsnee verdeelde kracht  $P$  opwekt.

Wordt aangenomen, dat de afwijkingshoek voor de console-langsdrager  $\alpha_h$  is, zooals aangegeven in fig. 21c, dan is volgens *IV a 2* het moment  $M_h$ , dat door de beide hoekijzers over de hoogte  $h$  wordt opgenomen:

$$M_h = \frac{4 E i h^3}{A} \alpha_h, \quad (\text{IV b 1})$$

waarin  $A$  te bepalen is volgens *III 3* en voor een bepaalde verbinding een constante is.

Wordt het traagheidsmoment der beide hoekijzers met het oog op buiging in den zin als over de hoogte  $h_2$  plaats heeft en in fig. 21c is aangegeven,  $\mathfrak{J}$  genoemd, dan is in de veronderstelling, dat de buiging van 't hoekijzer in dwarsrichting geen invloed heeft op de thans beschouwde, de uitbuiging  $\delta_{h_2}$  ter plaatse van de bovenste bouten (zie fig. 21c):

$$\delta_{h_2} = (h + h_2) \alpha_h - P_{h_2} \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}}. \quad (\text{IV b 2})$$

Bij de gewone afmetingen van verbindingen als de beschouwde in spoorwegbruggen kan bij benadering de kracht  $P_{h_2}$  worden beschouwd als de resultante van de over de hoogte  $h_2 + h_3$  in de beide verbindingshoekijzers voorkomende elementaire krachten  $p$ , terwijl  $\delta_{h_2}$  dan is op te vatten als een gemiddelde uitbuiging van de hoekijzers over die hoogte  $h_2 + h_3$ .

Voert men deze benadering in, dan is in verband met *III 4*; en met

$$p = \frac{P_{h_2}}{2 (h_2 + h_3)},$$

$$\delta_{h_2} = \frac{p A}{6 E i} = \frac{P_{h_2} A}{12 E i (h_2 + h_3)}, \quad (\text{IV b 3})$$

zoodat in verband met *IV b 2* :

$$P_{h_2} \frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} = (h + h_2) \alpha_h - P_{h_2} \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}},$$

of

$$P_{h_2} \left( \frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}} \right) = (h + h_2) \alpha_h,$$

of

$$P_{h_2} = \frac{h + h_2}{\frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}}} \times \alpha_h. \quad (\text{IV b 4})$$

Het moment door deze over de hoogte  $(h_2 + h_3)$  verdeelde kracht ten opzichte van de draaiingsas

$$M_{h_2} = P_{h_2} \times (h + h_2),$$

of

$$M_{h_2} = \frac{(h + h_2)^2}{\frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}}} \times \alpha_h. \quad (\text{IV b 5})$$

Bij een uitwijkingshoek  $\alpha_h$  bedraagt dus het totale moment, dat door de verbinding wordt geleverd, om evenwicht te maken met het uitwendig moment :

$$M = M_h + M_{h_2},$$

$$M = \left\{ \frac{4 E i h^3}{A} + \frac{(h + h_2)^2}{\frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}}} \right\} \times \alpha_h, \quad (\text{IV b 6})$$

waaruit volgt

$$\alpha_h = M : \left\{ \frac{4 E i h^3}{A} + \frac{(h + h_2)^2}{\frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}}} \right\}. \quad (\text{IV b 7})$$

Deze formule geeft dus de stijfheid der verbinding, m. a. w. de hoek  $\alpha_h$ , die een gegeven uitwendig koppel  $M$  doet ontstaan.

Wordt eerst  $\alpha_h$  met behulp van deze formule bepaald, dan is  $M_h$  volgens formule *IV b 1* te berekenen en daarbij de verbinding

ding voor dat deel met hoogte  $h$  tot het geval onder *IV a* besproken teruggebracht;  $M_{h_2}$  is dan 't verschil van  $M$  en  $M_h$ .

De optredende maximale buigspanning in het hoekijzer is te berekenen volgens het onder *III* besprokene, als de grootste uitwijking van de vervormde elastische lijn, zooals die in fig. 22 is geteekend, bekend is.

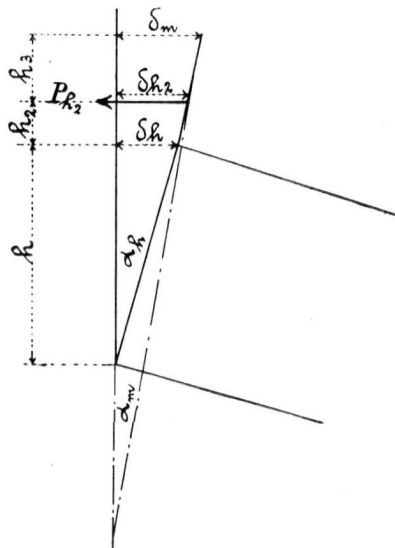


Fig. 22.

Uit de formules *IV b 3* en *IV b 4* is af te leiden:

$$\delta_{h_2} = (h + h_2) \alpha_h \frac{A \mathfrak{J}}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}. \quad (\text{IV b 8})$$

Wordt gesteld:

$$\mu_1 = \frac{A \mathfrak{J}}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}, \quad (\text{IV b 9})$$

dan is  $\mu_1$  afhankelijk van de afmetingen der constructie en wordt:

$$\delta_{h_2} = \mu_1 (h + h_2) \alpha_h. \quad (\text{IV b 10})$$



Het is waarschijnlijk, dat het bovenste punt der verbinding, een afbuiging  $\delta_m$  (zie fig. 22) zal vertoonen, die grooter is dan  $\delta_{h_2}$ .

Wordt voor de berekening van de grootte van  $\delta_m$  de kracht  $P_{h_2}$  gelijkmatig verdeeld over de hoogte  $h_2 + h_3$ , dan wordt:

$$\delta_m = \alpha_h (h + h_2 + h_3) - \frac{P_{h_2} (h_2 + h_3)^3}{8 E \mathfrak{J}},$$

of in verband met *IV b 4*:

$$\delta_m = \alpha_h \left[ h + h_2 + h_3 - \frac{3 i (h + h_2) (h_2 + h_3)^4}{2 \{ A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3) \}} \right].$$

Wordt gesteld:

$$\mu_2 = \frac{i (h + h_2) (h_2 + h_3)^3}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}, \quad (\text{IV b 11})$$

dan is

$$\delta_m = \alpha_h \left\{ h + (h_2 + h_3) \left( 1 - \frac{3}{2} \mu_2 \right) \right\}. \quad (\text{IV b 12})$$

Of de afwijking  $\delta_m$  werkelijk de grootste is, die voorkomt, kan worden gecontroleerd door voor het bovenste punt der verbinding de hoekverandering  $\alpha_m$  te berekenen. Wordt daarvoor een waarde gevonden grooter dan 0, dan is  $\delta_m$  de grootste uitwijking; wordt voor  $\alpha_m$  een waarde kleiner dan 0 gevonden, dan ligt de doorsnede, die de grootste uitwijking vertoont, lager.

Aangezien berekend wordt:

$$\alpha_m = \alpha_h - \frac{P_{h_2} (h_2 + h_3)^2}{6 E \mathfrak{J}},$$

of in verband met *IV b 4* en *IV b 11*

$$\alpha_m = \alpha_h \left\{ 1 - \frac{2 i (h + h_2) (h_2 + h_3)^3}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \right\} = \alpha_h (1 - 2 \mu_2),$$

gaat de voorwaarde  $\alpha_m > 0$

over in de voorwaarde  $\mu_2 < \frac{1}{2}$ . (IV b 13)

Bij de berekening van  $\delta_m$  blijkt reeds dadelijk, of aan die voorwaarde voldaan wordt.

In den regel zal  $\delta_m$  grooter zijn dan  $\delta_{h_2}$  en  $\delta_{h_1}$ , zoodat dan de maximale buigspanning in het hoekijzerbeen in overeenstemming met formule III 8 te berekenen is op:

$$\sigma_{im} = 3 \frac{E \delta_m c d}{A}, \quad (\text{IV b 14})$$

in welke formule  $d$  de dikte van het hoekijzerbeen voorstelt.

Voor de berekening van de trekkrachten, optredend in de verbindingsbouten, die evenwijdig loopen aan het vlak van teekening van fig. 21a, wordt het totale moment, door die bouten op te nemen, in overeenstemming met IV a 5 berekend op:

$$\mathfrak{M}_q = M \frac{a - c + z}{z}. \quad (\text{IV b 15})$$

Over de hoogte  $h$  der verbinding zijn de trekkrachten in de bouten evenredig met hunne afstanden tot de lijn  $RR$  (zie fig. 21a).

De trekkracht  $Q_{h_2}$  in de bovenste bouten is blijkens formule IV b 10 evenredig te stellen met den afstand  $h + h_2$  tot de as  $RR$ , mits gecorrigeerd door vermenigvuldiging met den coëfficiënt  $\mu_1$ , berekend volgens IV b 9; zulks in verband met de afbuiging van het hoekijzer over de hoogte  $h_2$ .

Wordt de kracht in één der bouten  $x$  gesteld, dan zijn dus de trekkrachten in de andere bouten in  $x$  uit te drukken en is ten slotte  $x$  te bepalen uit de voorwaarde, dat de som der momenten van de trekkrachten in de bouten optredend, ten opzichte van de lijn  $RR$  gelijk moet zijn aan  $\mathfrak{M}_q$ , berekend volgens IV b 15.

Voor de berekening van de reactie  $P_t$ , die op het ondereinde van de hoekijzers wordt uitgeoefend, wordt gebruik gemaakt van de formule  $P_t = P_h + P_{h_2}$ , waarin  $P_h$  voorstelt de som van de elementaire krachten  $p$  van beide hoekijzers over de hoogte  $h$ , zoodat in overeenstemming met IV a 1.

$$P_h = \frac{6 E i h^2}{A} \alpha_h. \quad (\text{IV b 16})$$

Na substitutie van  $P_{h_2}$  volgens *IV b 4*, blijkt:

$$P_t = \left( \frac{6 E i h^2}{A} + \frac{h + h_2}{\frac{12 E i (h_2 + h_3)}{A} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}}} \right) \alpha_{h_2}. \quad (\text{IV b 17})$$

De kracht  $P_{h_2}$  oefent op het hoekijzer een moment  $P_{h_2} \times h_2$  uit en buigt het hoekijzer in anderen zin, als waarvoor formule *IV b 14* werd afgeleid. Wordt het weerstandsmoment van de beide hoekijzers met het oog op deze buiging  $W_{\mathfrak{J}}$  genoemd, dan geldt voor de daardoor optredende buigspanning:

$$\sigma_{\mathfrak{J}} = \frac{P_{h_2} \times h_2}{W_{\mathfrak{J}}}. \quad (\text{IV b 18})$$

#### IV c. Een naar beneden verlengde console-verbinding.

De bedoelde verbinding is in fig. 23 geschetst.

De beide verbindingshoekijzers loopen, in stede van bij de flens van den langsdrager te eindigen, verder naar beneden door, zooals op de teekening is aangegeven, waardoor een hoogere verbinding verkregen wordt, beter in staat weerstand te bieden aan het optredend moment.

Van den langsdrager is aan de eene zijde de flens gedeeltelijk verwijderd.

Bij voldoende lengte van het dóórlopende hoekijzer zal de vormverandering, die de consoleverbinding ondergaat, kunnen worden voorgesteld als in fig. 24 is geschetst. In deze figuur geeft de lijn  $ABD$  den vorm aan, dien de ijzervezel van het hoekijzer, in fig. 23c met een kleinen cirkel aangegeven, ondergaat onder de werking van een bepaald moment  $M$ , dat ondersteld wordt op de console te werken.

Voor de eenvoudigheid wordt ondersteld, dat alleen over de hoogte  $AB$  van den langsdrager de krachten werken, die onder *III* zijn aangeduid met  $p_x dx$  en evenredig zijn met den afstand tot de vertikale as van den dwarsdrager.

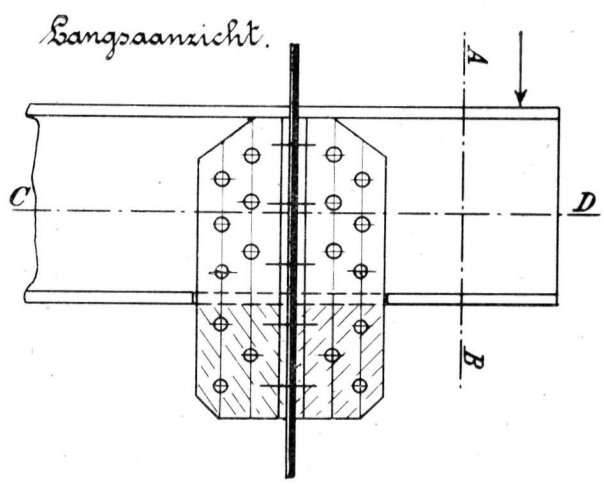


Fig. 23a.

*Dwarsdoorsnede over AB.*

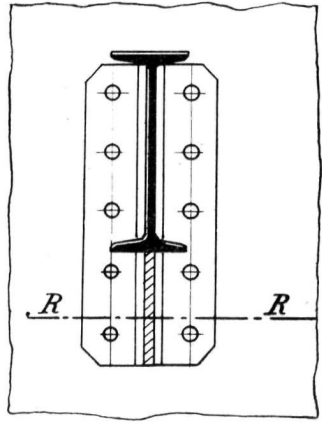


Fig. 23b.

*Doorsnede over CD.*

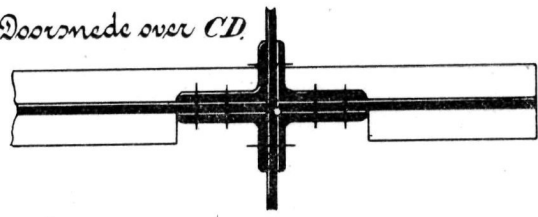


Fig. 23c.

IV C

Over de hoogte  $BD$  van de hoekijzers wordt de werking van de boutverbinding verwaarloosd.

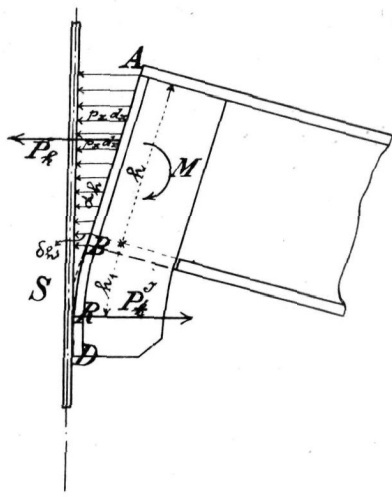


Fig. 24.

Wanneer de afstand  $h_1$  van  $R$  tot  $B$  blijkt bij berekening onafhankelijk te zijn van het moment  $M$ , en alleen af te hangen van de afmetingen der ijzerdeelen.

Wordt gesteld, dat de uitwijking bij  $B$   $\delta_{h_1}$  zal bedragen en de hoekverandering, die de lijn  $AB$  na de vormverandering heeft ondergaan,  $\alpha_h$ , dan geldt voor een willekeurig punt op afstand  $x$  van  $B$ , dat de uitwijking bedraagt:

$$\delta_x = \delta_{h_1} + \alpha_h x.$$

Volgens III 4 is:

$$\delta_x = \frac{p_x}{6 E i} A,$$

zoodat

$$p_x dx = \frac{6 E i}{A} \delta_x dx = \frac{6 E i}{A} (\delta_{h_1} + \alpha_h x) dx,$$

zoodat, indien de resultante der elementaire krachten  $p_x dx$  voor beide hoekijzers gelijk  $P_h$  gesteld wordt,

Onder de werking der geteekende krachten zal het hoekijzer over de hoogte  $BD$  worden gebogen. Indien de hoogte  $BD$  daartoe voldoende lang is, zal de toestand ontstaan, zooals die in fig. 24 geschetst is, waarbij n.l. de vervormde ijzervezel in een punt  $R$  rakende zal zijn aan de rechte lijn, die de onvervormde ijzervezel voorstelt.

De afstand  $h_1$  van  $R$  tot  $B$  blijkt bij berekening onafhankelijk te zijn van het

$$P_h = 2 \int_0^h p_x dx = \frac{12 E i}{A} \int_0^h (\delta_{h_1} + \alpha_h x) dx,$$

of

$$P_h = \frac{12 E i h}{A} (\delta_{h_1} + \frac{1}{2} \alpha_h h). \quad (\text{IV c 1})$$

Aangezien de krachten met elkaar in evenwicht zijn, zal de reactie in  $R$ ,  $P_t$  genoemd, gelijk zijn aan  $P_h$ .

Uit een beschouwing der vormverandering van het deel  $BR$  volgt nu:

$$\delta_{h_1} = \alpha_h h_1 - P_h \frac{h_1^3}{3 E \mathfrak{J}} = P_h \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}} h_1 - P_h \frac{h_1^3}{3 E \mathfrak{J}},$$

of

$$\delta_{h_1} = P_h \frac{h_1^3}{6 E \mathfrak{J}}, \quad (\text{IV c 2})$$

terwijl

$$\alpha_h = P_h \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}}, \quad (\text{IV c 3})$$

in welke laatste formules dus  $\mathfrak{J}$  het traagheidsmoment van het hoekijzer voorstelt, dat met het oog op de richting der buiging in rekening behoort te worden gebracht.

Worden de waarden van  $\delta_{h_1}$  en  $\alpha_h$  in  $IV c 1$  gesubstitueerd, dan krijgt men:

$$P_h = P_h \frac{12 E i h}{A} \frac{h_1^2}{6 E \mathfrak{J}} \left( h_1 + \frac{3}{2} h \right),$$

waaruit de volgende vergelijking ter berekening van  $h_1$  valt af te leiden:

$$h_1^3 + \frac{3}{2} h h_1^2 - A \frac{\mathfrak{J}}{2 i h} = 0.$$

Bij substitutie van  $h_1 = x - \frac{1}{2} h$  wordt verkregen:

$$x^3 - \frac{3}{2} x^2 h + \frac{3}{4} x h^2 - \frac{1}{8} h^3 + \frac{3}{2} h \left( x^2 - x h + \frac{1}{4} h^2 \right) - A \frac{\mathfrak{J}}{2 i h} = 0,$$

of

$$x^3 - \frac{3}{4} h^2 x + \left[ \frac{1}{4} h^3 - A \frac{\mathfrak{J}}{2 i h} \right] = 0, \quad (\text{IV c 4})$$

waaruit  $x$  is op te lossen.

De grootte van  $h_1$  is dan te bepalen uit de vergelijking

$$h_1 = x - \frac{1}{2} h, \quad (\text{IV c 5})$$

en verder als een bekende te beschouwen.

*Deze berekening, en hetgeen hieruit zal worden afgeleid, is alleen geldig, als voor  $h_1$  een kleinere waarde dan de lengte  $BD$  wordt gevonden.*

Het moment van de inwendige krachten moet gelijk zijn aan dat der uitwendige krachten. Dus moet het moment der inwendige krachten  $p_x dx$  om de draaiingsas  $RR$ , alwaar de resultante  $P_h$  aangrijpt, gelijk zijn aan het uitwendig moment  $M$ .

Zooals te voren werd toegelicht, is te schrijven

$$p_x dx = \frac{6 E i}{A} (\delta_{h_1} + \alpha_h x) dx;$$

als  $x$  de afstand tot onderkant langsdrager is.

Aangezien volgens *IV c 2*

$$\delta_{h_1} = P_h \frac{h_1^3}{6 E \mathfrak{J}},$$

en volgens *IV c 3*

$$\alpha_h = P_h \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}}$$

dus

$$\delta_{h_1} = \frac{1}{3} h_1 \times \alpha_h, \quad (\text{IV c 6})$$

wordt:

$$p_x dx = \frac{6 E i}{A} \alpha_h \left( x + \frac{1}{3} h_1 \right) \cdot$$

Het moment van deze elementaire kracht ten opzichte van de as, in fig. 24 met  $R$  aangeduid, is alzoo te bepalen op:

$$p_x (x + h_1) dx = \frac{6 E i}{A} \alpha_h \left( x + \frac{1}{3} h_1 \right) (x + h_1) dx,$$

zoodat de onder volgende vergelijking valt neer te schrijven voor beide hoekijzers:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^h \frac{12 E i}{A} \alpha_h \left( x + \frac{1}{3} h_1 \right) (x + h_1) dx = \\ &= \frac{12 E i \alpha_h}{A} \int_0^h \left( x^2 + \frac{4}{3} x h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) dx = \\ &= \frac{12 E i \alpha_h}{A} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} x^2 h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 x \right) \Big|_0^h = \\ &= \frac{4 E i \alpha_h}{A} (h^3 + 2 h^2 h_1 + h h_1^2); \end{aligned}$$

of

$$M = \frac{4 E i \alpha_h}{A} h (h + h_1)^2,$$

zoodat

$$\alpha_h = M \frac{A}{4 E i (h + h_1)^2 h}, \quad (\text{IV c 7})$$

terwijl dus uit IV c 3 volgt:

$$P_h = \frac{2 E \mathfrak{J} \alpha_h}{h_1^2}$$

of

$$P_h = M \frac{A \mathfrak{J}}{2 i h h_1^2 (h + h_1)^2}. \quad (\text{IV c 8})$$

Van het bovenste hoogte-element van de verbindingshoekijzers bij  $A$  (zie fig. 24) wordt de verplaatsing:

$$\delta_m = \alpha_h \left( h + \frac{1}{3} h_1 \right). \quad (\text{IV c 9})$$

Volgens III 8 is dan de optredende buigspanning:

$$\sigma_{i m} = \frac{3 E c d \delta_m}{A}. \quad (\text{IV c 10})$$



Teneinde ook voor dit geval een formule af te leiden, waaruit meer direct de optredende trekkrachten in de bouten van het korte been der verbindingshoekijzers (zie fig. 23) kunnen worden berekend, wordt als volgt geredeneerd.

Wordt in fig. 24 de rechte lijn  $AB$  doorgetrokken, tot waar deze het verlengde van de rechte  $DR$  snijdt, en wordt dat snijpunt met  $S$  aangeduid, dan volgt uit de formule IV c 6, luidende

$$\delta_{h_1} = \alpha_h \times \frac{h_1}{3}, \text{ dat de afstand } BS = \frac{1}{3} h_1.$$

Wordt in  $S$  een lijn gedacht loodrecht staande op het vlak van tekening, dan zijn de optredende trekkrachten in de bouten evenredig met hunne afstanden tot die lijn, terwijl het totale moment dier trekkrachten ten opzichte van de lijn  $RR$  van fig. 23b, gelegen op afstand  $h + h_1$  van bovenkant verbinding, gelijk moet zijn aan:

$$\mathfrak{M}_q = M \frac{a - c + z}{z}. \quad (\text{IV c 11})$$

De reactie, over de lijn  $RR$  optredend, is volgens formule IV c 3 te bepalen op

$$\mathfrak{P}_4 \mathfrak{R}_t = P_h = \frac{2 E \mathfrak{J}}{h_1^2} \alpha_h.$$

Door de kracht  $P_t$  wordt op de hoekijzers een moment  $P_t \times h_1$  uitgeoefend, tengevolge waarvan de optredende buigspanning zal bedragen:

$$\sigma_{\mathfrak{J}} = \frac{P_t h_1}{W_{\mathfrak{J}}}. \quad (\text{IV c 12})$$

*Blijkt, dat de volgens IV c 5 berekende hoogte  $h_1$  grooter zou moeten zijn dan de bij de verbinding beschikbare, in fig. 24 aangeduid met  $BD$ , dan zal de vormverandering plaats grijpen als in fig. 25 is aangegeven.*

De reactie  $P_h$  zal dan in het punt  $D$  aangrijpen. Bij de vormverandering zal echter de ijzervezel  $ABD$  bij  $D$  niet meer rakende zijn aan de lijn, die den onvervormden vezel aangeeft. In het

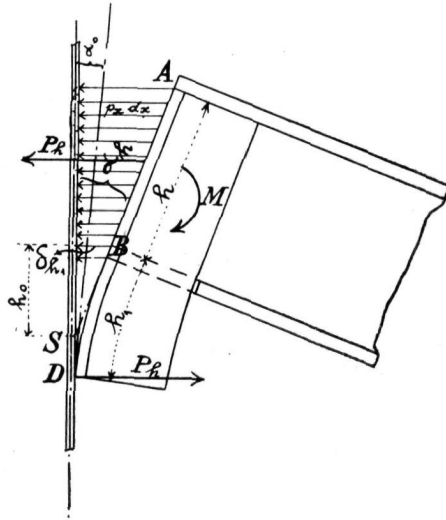


Fig. 25.

punt  $D$  zal de vervormde ijzervezel een hoek  $\alpha_0$  maken met de as van de verbinding.

Bij de verdere beschouwingen is  $h_1$  een bekende grootheid en treedt thans als onbekende de hoek  $\alpha_0$  op.

Wordt de uitwijking bij  $B$  overeenkomstig het vorige geval  $\delta_{h_1}$  genoemd en de hoekverandering, die de lijn  $AB$  onder de werking van het moment ondergaat,  $\alpha_h$ , dan zal overeenkomstig *IV c 1*:

$$P_h = \frac{12 E i h}{A} \left( \delta_{h_1} + \frac{1}{2} \alpha_h h \right), \quad (\text{IV c 13})$$

benevens:

$$\delta_{h_1} = \alpha_h h_1 - P_h \frac{h_1^3}{3 E \mathfrak{J}}, \quad (\text{IV c 14})$$

waaruit volgt:

$$P_h = \frac{3 E \mathfrak{J}}{h_1^3} (\alpha_h h_1 - \delta_{h_1}), \quad (\text{IV c 15})$$

zoodat in verband met *IV c 13*

$$\frac{3 E \mathfrak{J}}{h_1^3} (\alpha_h h_1 - \delta_{h_1}) = \frac{12 E i h}{A} \left( \delta_{h_1} + \frac{1}{2} \alpha_h h \right),$$

en dus

$$\delta_{h_1} = \alpha_h h_1 \left\{ 1 - \frac{h + 2 h_1}{2 h_1 + \frac{\mathfrak{J} A}{2 i h h_1^2}} \right\}.$$

Wordt nog gesteld:

$$h_0 = h_1 \left\{ 1 - \frac{h + 2 h_1}{2 h_1 + \frac{\mathfrak{J} A}{2 i h h_1^2}} \right\}, \quad (\text{IV c 15})$$

zoo is  $h_0$  voor een bepaalde constructie een te berekenen constante afstand en is

$$\delta_{h_1} = \alpha_h h_0. \quad (\text{IV c 16})$$

Indien dus in fig. 25 de lijn  $AB$  verlengd wordt, tot waar deze de rechte lijn, die den onvervormden ijzervezel voorstelt, snijdt, dan is dat snijpunt,  $S$  genoemd, zóó gelegen, dat de afstand  $BS$  gelijk  $h_0$  is en berekend kan worden volgens de formule *IV c 15*.

Overeenkomstig de voorgaande beschouwingen kan dus thans worden neergeschreven:

$$M = \int_0^h \frac{12 E i}{A} \alpha_h (x + h_0) (x + h_1) dx.$$

of

$$\begin{aligned} M &= \frac{12 E i}{A} \alpha_h \int_0^h \left\{ x^2 + (h_0 + h_1) x + h_0 h_1 \right\} dx = \\ &= \frac{12 E i}{A} \alpha_h \left\{ \frac{x^3}{3} + (h_0 + h_1) \frac{x^2}{2} + h_0 h_1 x \right\}_0^h; \end{aligned}$$

dus:

$$M = \frac{2 E i h}{A} \alpha_h \left\{ 2 h^2 + 3 (h_0 + h_1) h + 6 h_0 h_1 \right\},$$

waaruit volgt:

$$\alpha_h = M \frac{A}{2 E i h \left\{ 2 h^2 + 3 (h_0 + h_1) h + 6 h_0 h_1 \right\}}. \quad (\text{IV c 17})$$

In verband met *IV c 13* is dan verder:

$$P_h = \frac{12 E i h}{A} \alpha_h \left( h_0 + \frac{1}{2} h \right) =$$

$$= M \frac{6 (h_0 + \frac{1}{2} h)}{2 h^2 + 3 (h_0 + h_1) h + 6 h_0 h_1} \cdot \quad (\text{IV c 18})$$

De grootste uitwijking wordt:

$$\delta_m = \alpha_h (h_0 + h) = M \frac{A (h_0 + h)}{2 E i h \{ 2 h^2 + 3 (h_0 + h_1) h + 6 h_0 h_1 \}},$$

(IV c 19)

zoodat in verband met III 8, luidende

$$\sigma_{im} = \frac{3 E c d \delta_m}{A},$$

voor de optredende maximale buigspanning in het hoekijzer wordt gevonden:

$$\sigma_{im} = M \frac{3 c d (h_0 + h)}{2 i h \{ 2 h^2 + 3 (h_0 + h_1) h + 6 h_0 h_1 \}} \cdot \quad (\text{IV c 20})$$

Voor de berekening van de optredende trekkrachten in de bouten, die door de korte beenen der verbindingshoekijzers gaan, kan op analoge wijze worden geredeneerd als voor het vorig geval.

De trekkrachten in de nagels zijn evenredig met de afstanden der nagels tot de lijn, horizontaal door  $S$  aangebracht, welk punt  $S$  op afstand  $h + h_0$  onder bovenkant verbinding is gelegen, terwijl het moment van die trekkrachten om onderkant verbinding bij  $D$  gelijk is aan:

$$\mathcal{M}_g = M \frac{a - c + z}{z}. \quad (\text{IV c 21})$$

De reactie door het bevestigingsvlak op onderkant verbinding uitgeoefend is in overeenstemming met IV c 13 en IV c 16 te bepalen op:

$$P_t = P_h = \frac{6 E i h}{A} (h + 2 h_0) \alpha_h. \quad (\text{IV c 22})$$

De buigspanning, door deze kracht in de hoekijzers opgewekt, is te berekenen op:

$$\sigma_{\mathfrak{J}} = \frac{P_t h_1}{W_{\mathfrak{J}}} \quad (\text{IV c 21})$$

Bij de berekening van  $W_{\mathfrak{J}}$  is een eventueel voorkomende vulplaat niet in aanmerking te nemen.

*Opmerking:*

Indien niet de beide hoekijzers naar beneden zijn verlengd, maar zulks slechts met één der hoekijzers het geval is, zal de verbinding eenigszins scheef worden belast. Wordt daar geen rekening mede gehouden, of wordt die scheeve werking door de aanwezigheid van een langsverband te niet gedaan, dan zijn de hier onder *IV c* gegeven formules eveneens van toepassing, waarbij dan echter voor de bepaling van het traagheidsmoment  $\mathfrak{J}$  en het weerstandsmoment  $W_{\mathfrak{J}}$  met de aanwezigheid van slechts één hoekijzer rekening te houden is.

**IV d. Een naar beneden en boven verlengde console-verbinding.**

Evenals bij *IV b* zal het geval worden beschouwd, dat er één horizontale boutrij geplaatst is boven bovenkant langsdruager.

De verbinding is in fig. 26*a*, *b*, *c*, en *d* geschetst.

De vormverandering van de in fig. 26*c* met een cirkeltje aangegeven ijzervezel van het verbindingshoekijzer is in fig. 26*d* overgedreven weergegeven.

Over de hoogte  $h$  zal die vervormde lijn recht blijven, terwijl op afstand  $h_1$  van onderkant langsdruager de reactie  $P_t$  aangrijpt, in welker aangrijpingspunt de vervormde elastische lijn zal raken aan de onvervormde.

De trekkrachten der bouten, die over de hoogte  $h_1$  voorkomen, worden verwaarloosd, terwijl als gevolg van de aanwezigheid der bouten, die op een afstand  $h_2$  van bovenkant langsdruager zijn gelegen, een kracht  $P_{h_2}$  zal worden uitgeoefend, waarvan de grootte evenredig is met de in fig. 26*d* aangegeven afwijking  $\delta_h$ . De kracht  $P_{h_2}$  oefent op de verbindingshoekijzers een buigende wer-

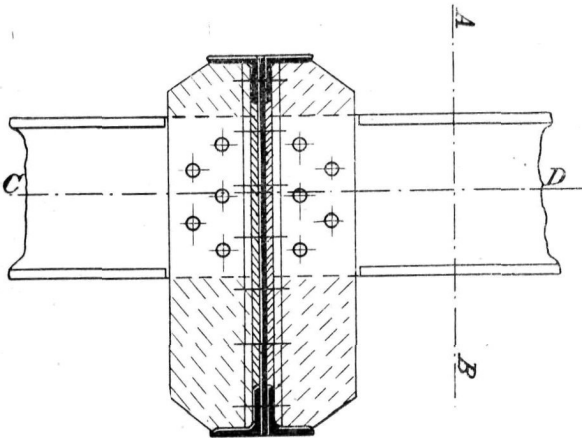


Fig. 26a.

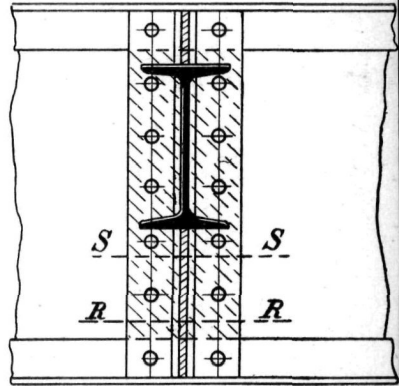


Fig. 26b.

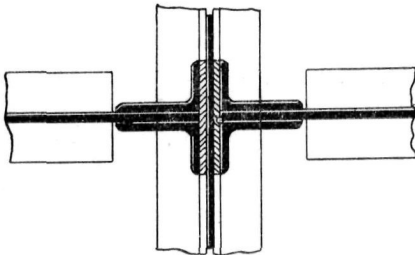


Fig. 26c.

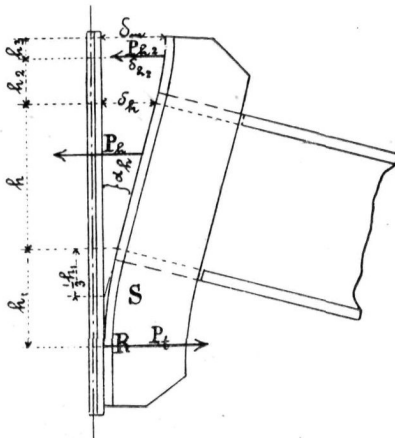


Fig. 26d.

king uit, waardoor de geteekende elastische lijn over de hoogte  $h_2 + h_3$  afgebogen wordt.

Wederom wordt eerst aangenomen, dat de hoekijzers naar beneden toe zóó lang zijn, dat in het aangrijpingspunt van  $P_t$  het hoekijzer raakt aan den dwarsdrager.

De resultante der trekkkrachten over de hoogte  $h$ ,  $P_h$ , is de som der elementaire trekkkrachten

IV d.

en dus overeenkomstig *IV c 1*:

$$P_h = \frac{12 E i h}{A} \left( \delta_{h_1} + \frac{1}{2} \alpha_h h \right). \quad (\text{IV d 1})$$

In overeenstemming met hetgeen onder *IV b 2* is afgeleid, is

$$\delta_{h_2} = \delta_{h_1} + \alpha_h (h + h_2) - P_{h_2} \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}}. \quad (\text{IV d 2})$$

Aangezien de krachten met elkander in evenwicht zijn, geldt:

$$P_t = P_h + P_{h_2}. \quad (\text{IV d 3})$$

Nu is, in verband met de vormverandering van de verbindingshoekijzers over de hoogte  $h_1$ :

$$\alpha_h = P_t \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}}, \quad (\text{IV d 4})$$

en

$$\delta_{h_1} = \alpha_h h_1 - P_t \frac{h_1^3}{3 E \mathfrak{J}} = P_t \frac{h_1^3}{6 E \mathfrak{J}}. \quad (\text{IV d 5})$$

In verband met *IV d 4* en *IV d 5* is *IV d 1* te vervormen tot:

$$P_h = \frac{12 E i h}{A} \left( P_t \frac{h_1^3}{6 E \mathfrak{J}} + \frac{1}{2} P_t \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}} h \right) = P_t \frac{i h h_1^2}{A \mathfrak{J}} (2 h_1 + 3 h),$$

of

$$P_h = P_t \frac{i h h_1^2}{A \mathfrak{J}} (2 h_1 + 3 h). \quad (\text{IV d 6})$$

$P_{h_2}$  kan weer bij benadering beschouwd worden als de resultante van de over de hoogte  $(h_2 + h_3)$  verdeelde elementaire krachten.

In overeenstemming met hetgeen onder *IV b 3* is afgeleid, geldt dan, dat

$$\delta_{h_2} = \frac{P_{h_2} A}{12 E i (h_2 + h_3)}. \quad (\text{IV d 7})$$

Wordt dit gesubstitueerd in *IV d 2* zoo wordt, mede in verband met *IV d 5* en *IV d 4*, verkregen:

$$P_{h_2} \frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} = P_t \frac{h_1^3}{6 E \mathfrak{J}} + P_t \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}} (h + h_2) - P_{h_2} \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}},$$

of

$$P_{h_2} = 2 P_t \frac{i h_1^2 (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} (h_1 + 3 h + 3 h_2). \quad (\text{IV d 8})$$

Wordt de waarde van  $P_{h_2}$  volgens deze formule en die van  $P_h$  volgens formule *IV d 6* gesubstitueerd in de formule *IV d 3*, dan ontstaat de vergelijking:

$$P_t = P_t \frac{i h_1^2 h}{A \mathfrak{J}} (2 h_1 + 3 h) + 2 P_t \frac{i h_1^2 (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} (h_1 + 3 h + 3 h_2),$$

waaruit volgt:

$$\left\{ \frac{2 i h}{A \mathfrak{J}} + \frac{2 i (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \right\} h_1^3 + \left\{ \frac{3 i h^2}{A \mathfrak{J}} + \frac{6 i (h + h_2) (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \right\} h_1^2 - 1 = 0. \quad (\text{IV d 9})$$

Wordt gesteld:

$$S = \frac{2 i h}{A \mathfrak{J}} + \frac{2 i (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}, \quad (\text{IV d 10})$$

en

$$T = \frac{3 i h^2}{A \mathfrak{J}} + \frac{6 i (h + h_2) (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}, \quad (\text{IV d 11})$$

dan is *IV d 9* te vervormen tot:

$$S h_1^3 + T h_1^2 - 1 = 0,$$

of

$$h_1^3 + \frac{T}{S} h_1^2 - \frac{1}{S} = 0.$$

Met

$$h_1 = x - \frac{1}{3} \frac{T}{S}$$

gaat die vergelijking over in:

$$x^3 - \frac{1}{3} \left( \frac{T}{S} \right)^2 x + \left\{ \frac{2}{27} \left( \frac{T}{S} \right)^3 - \frac{1}{S} \right\} = 0, \quad (\text{IV d 12})$$

welke vergelijking is op te lossen, waarna  $h_1$  te berekenen is uit de formule:



$$h_1 = x - \frac{1}{3} \frac{T}{S}, \quad (\text{IV d 13})$$

en  $h_1$  in de nu volgende beschouwingen een bekende is.

*Willen de voorgaande beschouwingen over de vormverandering, die zal plaats grijpen, juist zijn, dan moet blijken, dat  $h_1$  kleiner is dan de lengte van het deel der verbindingshoekijzers, dat beneden de langsdragers uitsteekt. Zou  $h_1$  een grootere waarde blijken te verkrijgen, dan moet volgens andere beginselen gerekend worden, waartoe verwezen wordt naar de formules IV d 28 en volgende.*

Uit de formules IV d 4 en IV d 5 volgt weer:

$$\delta_{h_1} = \frac{1}{3} h_1 \times \alpha_h, \quad (\text{IV d 14})$$

hetgeen wil zeggen, dat het verlengde van het stuk  $h$  der beschouwde vezel (zie fig. 26d) de nullijn snijdt op een afstand van bovenkant verbinding gelijk

$$h_3 + h_2 + h + \frac{1}{3} h_1.$$

Wordt het moment, door de krachten  $p$  over de hoogte  $h$  om de draaiingsas  $RR$  (fig. 26b) uitgeoefend, met  $M_h$  aangeduid, dan is overeenkomstig het onder IV c behandelde:

$$M_h = \frac{4 E i h (h + h_1)^2}{A} \alpha_h.$$

Het moment, door de kracht  $P_{h_2}$  om die as uitgeoefend, bedraagt

$$P_{h_2} (h_1 + h + h_2).$$

Teneinde  $P_{h_2}$  in  $\alpha_h$  uit te drukken wordt gebruik gemaakt van de formules IV d 2, IV d 7 en IV d 14 en wordt verkregen:

$$P_{h_2} \frac{A}{12 E i h (h_2 + h_3)} = \alpha_h \left( h + h_2 + \frac{1}{3} h_1 \right) - P_{h_2} \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}},$$

of

$$P_{h_2} = \frac{\frac{1}{3} h_1 + h + h_2}{A} \times \alpha_h. \quad (\text{IV d 15})$$

$$\frac{h_2^3}{12 E i (h_2 + h_3)} + \frac{1}{3 E \mathfrak{J}}$$

Aangezien de inwendige krachten evenwicht moeten maken met het uitwendig moment  $M$  is:

$$\text{of} \quad M_h + P_{h_2} (h_1 + h + h_2) = M,$$

$$\left\{ \frac{4 E i h (h + h_1)^2}{A} + \frac{(h_1 + h + h_2) \left( \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 \right)}{A} \frac{h_2^3}{h_2^3} \right\} \alpha_h = M$$

$$\frac{4 E i}{A} \left\{ h (h + h_1)^2 + \frac{(h_1 + h + h_2) (h_1 + 3 h + 3 h_2) (h_2 + h_3) \mathfrak{J} A}{\mathfrak{J} A + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \right\} \alpha_h = M.$$

Wordt gesteld:

$$\mu_1 = \frac{A \mathfrak{J}}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \quad (\text{IV d 16})$$

en

$$U = h (h + h_1)^2 + (h_2 + h_3) (h_1 + h + h_2) (h_1 + 3 h + 3 h_2) \mu_1, \quad (\text{IV d 17})$$

dan is:

$$\frac{4 E i}{A} U \alpha_h = M,$$

dus

$$\alpha_h = M \frac{A}{4 E i U}, \quad (\text{IV d 18})$$

Voor de uitwijking  $\delta_{h_2}$  is in overeenstemming met *IV b 8* af te leiden:

$$\delta_{h_2} = \alpha_h \left( \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 \right) \frac{A \mathfrak{J}}{A \mathfrak{J} + 4 i (h_2 + h_3) h_2^3}, \quad (\text{IV d 19})$$

of

$$\delta_{h_2} = \alpha_h \left( \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 \right) \mu_1. \quad (\text{IV d 20})$$

Ten einde de uitwijking van het bovenste punt van de hoek-ijzerverbinding  $\delta_m$  te berekenen, wordt de kracht  $P_{h_2}$  gelijkmatig verdeeld gedacht over de hoogte  $h_2 + h_3$  en wordt voor de uitwijking in overeenstemming met geval *IV b* berekend:

$$\delta_m = \alpha_h \left( \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 + h_3 \right) - \frac{P_{h_2} (h_2 + h_3)^3}{8 E \mathfrak{J}},$$

of, in verband met *IV d 15* :

$$\delta_m = \alpha_h \left[ \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 + h_3 - \frac{3 i \left( \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 \right) (h_2 + h_3)^4}{2 \{ A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3) \}} \right].$$

Wordt gesteld:

$$\mu_2 = \frac{i \left( \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 \right) (h_2 + h_3)^3}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}, \quad (\text{IV d 21})$$

dan is:

$$\delta_m = \alpha_h \left\{ \frac{1}{3} h_1 + h + (h_2 + h_3) \left( 1 - \frac{3}{2} \mu_2 \right) \right\}. \quad (\text{IV d 22})$$

De afbuiging  $\delta_m$  zal de grootste zijn, die voorkomt, zoo de voor het bovenste punt te berekenen afwijkingshoek  $\alpha_m$  grooter is dan o.

$$\alpha_m = \alpha_h - \frac{P_{h_2} (h_2 + h_3)^2}{6 E \mathfrak{J}},$$

of in verband met *IV d 15* en *IV d 21*

$$\alpha_m = \alpha_h \left\{ 1 - \frac{2 i \left( \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 \right) (h_2 + h_3)^3}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \right\} = \alpha_h (1 - 2 \mu_2),$$

zoodat  $\delta_m$  de grootst voorkomende afwijking is, indien

$$\mu_2 < \frac{1}{2}, \quad (\text{IV d 23})$$

terwijl dan de maximale buigspanning, in het hoekijzerbeen optredend, berekend wordt op:

$$\sigma_{im} = 3 \frac{E \delta_m c d}{A}. \quad (\text{IV d 24})$$

Voor de berekening van de trekkrachten, die in de verbindingsbouten optreden, wordt opgemerkt, dat, die over de hoogte  $h$  voorkomen, evenredig zijn met hunne afstanden tot de lijn  $SS$  (zie fig. 26), die op een afstand  $h_3 + h_2 + h + \frac{1}{3} h_1$ , van bovenkant verbinding is gelegen. Ook de trekkracht in de bovenste bouten kan evenredig gesteld worden met den afstand tot de lijn

$SS$ , mits de aldus verkregen waarde wordt gecorrigeerd door vermenigvuldiging met den coëfficiënt  $\mu_1$ , berekend volgens *IV d 16*, zulks wederom in verband met de buiging van dat deel der verbinding, dat boven de langsdragers uitsteekt.

De trekkrachten kunnen nu worden berekend uit de voorwaarde, dat hun moment om de lijn  $RR$ , die op afstand  $h_3 + h_2 + h + h_1$  van bovenkant verbinding gelegen is, gelijk moet zijn aan

$$\mathfrak{M}_y = M \frac{a - c + z}{z}. \quad (\text{IV d 25})$$

De kracht  $P_{h_2}$ , te berekenen volgens *IV d 15*, oefent op het hoekijzer ook een buigende werking uit in anderen zin, als tot nog toe beschouwd werd. De daardoor veroorzaakte buigspanning in de hoekijzers is te berekenen op:

$$\sigma_{\mathfrak{J}_2} = \frac{P_{h_2} h_2}{W_{\mathfrak{J}}}. \quad (\text{IV d 26})$$

Ook de kracht  $P_t$ , die over de lijn  $RR$  werkt, en uit *IV d 4* te berekenen is, oefent een zelfde buigende werking op het hoekijzer uit, tengevolge waarvan de buigspanning zal bedragen:

$$\sigma_{\mathfrak{J}_t} = \frac{P_t h_1}{W_{\mathfrak{J}}}. \quad (\text{IV d 27})$$

*Blijkt, dat de volgens formule IV d 13 berekende waarde van  $h_1$  grooter is dan de lengte aan het ondereinde der verbinding aanwezig, dan zal de vormverandering zóódanig plaats grijpen, dat de beweging een draaiende is om den onderkant der verbindingshoekijzers, terwijl aldaar de vervormde elastische lijn niet zal raken aan de nullijn.*

Die vormverandering is in fig. 27 overdreven weergegeven.

De hoek, dien de vervormde elastische lijn in haar uiteinde bij  $R$  maakt met de nullijn, wordt met  $\alpha_o$  aangeduid. Deze hoek is dus nog een onbekende, terwijl de afmeting  $h_1$  een bekende is.

Evenals voor het hiervoren besproken geval gelden de formules:

$$\text{IV d 1.} \quad P_h = \frac{12 E i h}{A} \left( \delta_{h_1} + \frac{1}{2} \alpha_h h \right),$$

$$IV d 2. \quad \delta_{h_2} = \delta_{h_1} + \alpha_h (h + h_2) - P_{h_2} \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}},$$

$$IV d 3. \quad P_t = P_h + P_{h_2}.$$

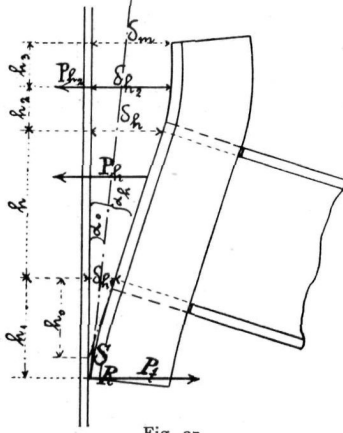


Fig. 27.

In verband met de vormverandering over de hoogte  $h_1$  is:

$$\alpha_o = \alpha_h + P_t \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}},$$

of

$$\alpha_h = \alpha_o + P_t \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}}, \quad (\text{IV d 28})$$

terwijl voor de vormverandering tevens geldt:

$$\delta_{h_1} - \alpha_h h_1 + P_t \frac{h_1^3}{3 E \mathfrak{J}} = 0. \quad (\text{IV d 29})$$

Daar voorts, volgens *IV d 7*:

$$\delta_{h_2} = \frac{P_{h_2} A}{12 E i (h_2 + h_3)},$$

wordt in verband met *IV d 2*:

$$P_{h_2} \frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} = \delta_{h_1} + \alpha_h (h + h_2) - P_{h_2} \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}},$$

waaruit volgt:

$$P_{h_2} = \left\{ \delta_{h_1} + \alpha_h (h + h_2) \right\} : \frac{1}{12 E} \left\{ \frac{A}{i (h_2 + h_3)} + \frac{4 h_2^3}{\mathfrak{J}} \right\}. \quad (\text{IV d } 30)$$

In verband met *IV d 1* en *IV d 30* is de vergelijking *IV d 3* te vervormen tot:

$$P_t = \frac{12 E i h}{A} \left( \delta_{h_1} + \frac{1}{2} \alpha_h h \right) + \frac{12 E i \mathfrak{J} (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \left\{ \delta_{h_1} + \alpha_h (h + h_2) \right\}. \quad (\text{IV d } 31)$$

Wordt dit gesubstitueerd in formule *IV d 29*, dan wordt verkregen:

$$\begin{aligned} & \delta_{h_1} - \alpha_h h_1 + \frac{4 i h h_1^3}{A \mathfrak{J}} \left( \delta_{h_1} + \frac{1}{2} \alpha_h h \right) + \\ & + \frac{4 i h_1^3 (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \left\{ \delta_{h_1} + \alpha_h (h + h_2) \right\} = 0, \end{aligned}$$

of

$$\delta_{h_1} = \alpha_h h_1 \frac{1 - \frac{2 i h^2 h_1^2}{A \mathfrak{J}} - \frac{4 i h_1^2 (h_2 + h_3) (h + h_2)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}}{1 + \frac{4 i h h_1^3}{A \mathfrak{J}} + \frac{4 i h_1^3 (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}}.$$

Wordt gesteld

$$h_0 = h_1 \times \frac{1 - \frac{2 i h^2 h_1^2}{A \mathfrak{J}} - \frac{4 i h_1^2 (h_2 + h_3) (h + h_2)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}}{1 + \frac{4 i h h_1^3}{A \mathfrak{J}} + \frac{4 i h_1^3 (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}}, \quad (\text{IV d } 32)$$

dan wordt

$$\delta_{h_1} = \alpha_h \times h_0, \quad (\text{IV d } 33)$$

waarin  $h_0$  een grootheid is, alleen afhankelijk van den aard der verbinding en onafhankelijk van de grootte van het optredend moment.

Wordt van de afgebogen elastische lijn het gedeelte over de hoogte  $h$ , dat recht blijft, verlengd, dan wordt de nullijn gesneden in een punt, dat op afstand  $h_3 + h_2 + h + h_0$  gelegen is van bovenkant verbinding.

Wordt het moment door de krachten  $p$ , over de hoogte  $h$  voorkomend, om de draaiingsas  $R$  (zie fig. 27) met  $M_h$  aangeduid,

dan is overeenkomstig *IV c 17*:

$$M_h = \frac{2 E i h}{A} \{ 2 h^2 + 3 (h_0 + h_1) h + 6 h_0 h_1 \} \alpha_h.$$

Het moment, door de kracht  $P_{h_2}$  om die as uitgeoefend, bedraagt  $P_{h_2} (h_1 + h + h_2)$ . Teneinde  $P_{h_2}$  in  $\alpha_h$  uit te drukken, wordt gebruik gemaakt van de formule *IV d 30* en *IV d 33* en wordt verkregen:

$$P_{h_2} = \alpha_h (h_0 + h + h_2) \frac{12 E i \mathfrak{J} (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)}. \quad (\text{IV d 34})$$

Voor het evenwicht der krachten is noodig

$$M_h + P_{h_2} (h_1 + h + h_2) = M,$$

of

$$\left[ \frac{4 E i h}{A} \left\{ h^2 + \frac{3}{2} (h_0 + h_1) h + 3 h_0 h_1 \right\} + \frac{12 E i \mathfrak{J} (h_2 + h_3) (h_0 + h + h_2) (h_1 + h + h_2)}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \right] \alpha_h = M.$$

$$\frac{4 E i}{A} \left[ h \left\{ h^2 + \frac{3}{2} (h_0 + h_1) h + 3 h_0 h_1 \right\} + \frac{3 (h_2 + h_3) (h_0 + h + h_2) (h_1 + h + h_2) A \mathfrak{J}}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \right] \alpha_h = M.$$

Wordt gesteld in overeenstemming met *IV d 16*

$$\mu_1 = \frac{A \mathfrak{J}}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \quad (\text{IV d 35})$$

en

$$U_1 = h \left\{ h^2 + \frac{3}{2} (h_0 + h_1) h + 3 h_0 h_1 \right\} + 3 (h_2 + h_3) (h_0 + h + h_2) (h_1 + h + h_2) \mu_1, \quad (\text{IV d 36})$$

dan is

$$\frac{4 E i}{A} U_1 \alpha_h = M,$$

dus

$$\alpha_h = M \frac{A}{4 E i U_1}. \quad (\text{IV d 37})$$

Voor de uitwijking  $\delta_{h_2}$  is in verband met de formules *IV d 2*, *IV d 33* en *IV d 7* te berekenen:

$$\delta_{h_2} = \alpha_h (h_0 + h + h_2) \frac{A \mathfrak{J}}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)},$$

dus in verband met *IV d 35*:

$$\delta_{h_2} = \alpha_h (h_0 + h + h_2) \mu_1 \quad (\text{IV d 38})$$

Voor de uitwijking van het bovenste punt van de hoekijzers  $\delta_m$  wordt dan berekend, zoo de kracht  $P_{h_2}$  gelijkmatig wordt verdeeld over de hoogte  $h_2 + h_3$ ,

$$\delta_m = \alpha_h (h_0 + h + h_2 + h_3) - \frac{P_{h_2} (h_2 + h_3)^3}{8 E \mathfrak{J}},$$

of in verband met *IV d 34*

$$\delta_m = \alpha_h \left[ (h_0 + h + h_2 + h_3) - \frac{3 i (h_0 + h + h_2) (h_2 + h_3)^4}{2 \{ A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3) \}} \right].$$

Wordt wederom gesteld

$$\mu_2 = \frac{i (h_0 + h + h_2) (h_2 + h_3)^3}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \quad (\text{IV d 39})$$

dan is

$$\delta_m = \alpha_h \left\{ h_0 + h + (h_2 + h_3) \left( 1 - \frac{3}{2} \mu_2 \right) \right\} \quad (\text{IV d 40})$$

In overeenstemming met vorig mede onder *IV d* besproken geval, zal  $\delta_m$  de grootste uitwijking zijn, die voorkomt, zoo

$$\mu_2 < \frac{1}{2}, \quad (\text{IV d 41})$$

terwijl de maximale buigspanning in het hoekijzerbeen dan te berekenen zal zijn op:

$$\sigma_{im} = 3 \frac{E \delta_m c d}{A}. \quad (\text{IV d 42})$$

Voor de berekening van de trekkrachten in de bouten, wordt wederom opgemerkt, dat die alle evenredig gesteld kunnen worden



aan hunne afstanden tot de lijn door  $S$  (zie fig. 27), mits die krachten voor de bovenste bouten worden gecorrigeerd door vermenigvuldiging met den coëfficiënt  $\mu_1$  volgens *IV d 35*, terwijl het totale moment dier trekkrachten om de lijn  $RR$ , gelegen bij onderkant verbinding, gelijk moet zijn aan:

$$\mathfrak{M}_q = M \frac{\alpha - c + z}{z} \quad (\text{IV d 43})$$

De kracht  $P_{h_2}$ , te berekenen volgens *IV d 34*, oefent op het hoekijzer een buigende werking uit en wekt een buigspanning op:

$$\sigma_{\mathfrak{J}_2} = \frac{P_{h_2} h_2}{W_{\mathfrak{J}}} \quad (\text{IV d 44})$$

Ook de reactie  $P_t$  oefent een soortgelijke werking op het hoekijzer uit.

Volgens formule *IV d 29* is:

$$\delta_{h_1} - \alpha_h h_1 + P_t \frac{h_1^3}{3 E \mathfrak{J}} = 0, \text{ terwijl } \delta_{h_1} = \alpha_h h_0, \text{ zoodat}$$

$$P_t = \frac{3 E \mathfrak{J} (h_1 - h_0)}{h_1^3} \alpha_h \quad (\text{IV d 45})$$

Door deze kracht wordt in het hoekijzer opgewekt een buigspanning:

$$\sigma_{\mathfrak{J}_t} = \frac{P_t h_1}{W_{\mathfrak{J}}} \quad (\text{IV d 46})$$

## HOOFDSTUK V.

---

### Verbindingen van langs- aan dwarsdragers.

---

In vele der tegenwoordige bruggen zijn de langsdragers aan de dwarsdragers bevestigd door middel van een der onder hoofdstuk IV beschouwde consoleverbindingen. Twee opvolgende langsdragers zijn dus met elkaar en met den tusschengelegen dwarsdrager door een veerende ijzerverbinding verbonden. In zekeren zin vormen de langsdragers dus een doorgaande verbinding, waarbij echter de plaatsen van bevestiging met de dwarsdragers — bij het optreden van een bepaald moment — beduidend grootere vormverandering ondergaan dan de andere deelen van den langsdrager.

Wordt ter vereenvoudiging aangenomen, dat bij een gelijkmatig verdeelde belasting van  $g$  per lengte-eenheid, de nabij het midden van een brug gelegen dwarsdragers geen hoekverandering ondergaan, dan kan aan de hand van de voorgaande beschouwingen op betrekkelijk eenvoudige wijze een berekening worden opgezet, welke, hoewel niet in allen deele juist, toch gegevens verstrekt om verschillende soorten van verbindingen met elkaar te kunnen vergelijken.

In fig. 28*a* is de constructie schetsmatig aangegeven.

Fig. 28*b* stelt de vervormde langsdrager met de verbindingen voor.

Bij de volgende beschouwingen wordt aangenomen, dat de dwarsdragers verschuifbaar op de hoofdliggers zijn opgelegd, zoodat in de langsdragers geen normale krachten kunnen optreden en de afstandswijziging der dwarsdragers, die het gevolg is der vormverandering van de langsdragers en de verbindingshoekijzers, tot

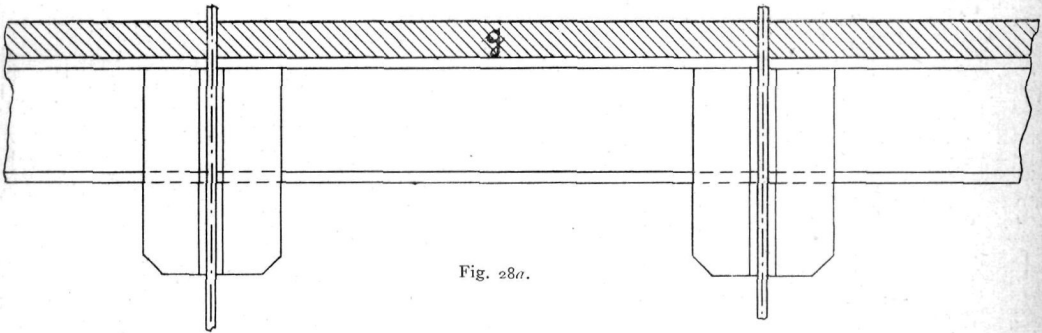


Fig. 28a.

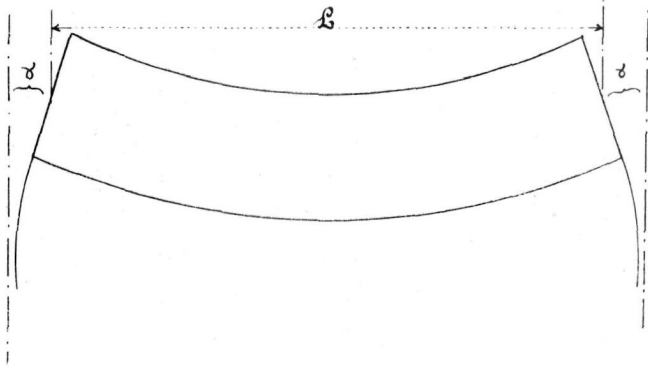


Fig. 28b.

stand kan komen, zonder dat daardoor normale krachten in de langsdragers worden opgewekt.

In hoofdstuk VIII zal nader worden besproken, wat het gevolg is van vaste oplegging der dwarsdragers.

Wordt het moment, dat in de consoleverbinding voorkomt, en alsnog onbekend is,  $M$  genoemd, dan moet de vormverandering van het geheel aan de voorwaarde voldoen, dat de hoekverandering, die de consoleverbinding ondergaat onder de werking van het moment  $M$ , gelijk is aan die, welke de eigenlijke langsdruager aan zijn einde ondergaat, door de daarop werkende krachten en de de vormverandering tegenwerkende momenten  $M$ .

In verband met deze voorwaarde is een vergelijking op te stellen, waaruit het moment  $M$  te berekenen is.

Wordt voor de consoleverbinding  $\alpha_{M=1}$  de hoekverandering genoemd, die veroorzaakt wordt door een moment  $M = 1$ , zoo is deze  $\alpha_{M=1}$  te berekenen:

**Voor geval IV a**

volgens formule *IV a 2*

$$\alpha_{M=1} = \frac{A}{4 E i h^3};$$

**Voor geval IV b**

volgens formule *IV b 7*

$$\alpha_{M=1} = 1 : \left\{ \frac{4 E i h^3}{A} + \frac{(h + h_2)^2}{\frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} + \frac{h_2^3}{3 E i}} \right\};$$

**Voor geval IV c**

volgens één der beide formules *IV c 7*

$$\alpha_{M=1} = \frac{A}{4 E i (h + h_1)^2 h},$$

of *IV c 17*

$$\alpha_{M=1} = \frac{A}{2 E i h \{ 2 h^2 + 3 (h_0 + h_1) h + 6 h_0 h_1 \}};$$

**Voor geval IV d**

volgens één der beide formules *IV d 18*

$$\alpha_{M=1} = \frac{A}{4 E i U},$$

waarin  $U$  te berekenen is met de formules *IV d 16* en *IV d 17*,

of de formule *IV d 37*

$$\alpha_{M=1} = \frac{A}{4 E i U_1},$$

waarin  $U_1$  te berekenen is met de formules *IV d 35* en *IV d 36*.

Wordt de waarde  $\alpha_{M=1}$  als bekende ingevoerd, dan is de hoekverandering der consoleverbinding door een moment  $M$  te berekenen op:

$$\alpha_k = M \alpha_{M=1}.$$

(V I

De belastingstoestand van den langsdrager, die in het midden ingeklemd kan gedacht worden, is in fig. 29 voorgesteld.

Indien het traagheidsmoment van den langsdrager  $J$  genoemd wordt, en de totale lengte  $L$ , is de hoekverandering, die de langsdrager aan het einde ondergaat, te berekenen op:

$$\alpha_h = \frac{\frac{1}{2} g L \left(\frac{1}{2} L\right)^2}{2 E J} - \frac{g \left(\frac{1}{2} L\right)^3}{6 E J} - \frac{M \frac{1}{2} L}{E J}$$

of

$$\alpha_h = \frac{g L^3}{24 E J} - \frac{M L}{2 E J}.$$

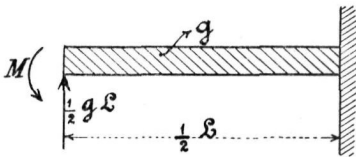


Fig. 29.

De vergelijking, waaruit  $M$  te berekenen is, luidt dus als volgt:

$$M \alpha_{M=1} = \frac{g L^3}{24 E J} - \frac{M L}{2 E J},$$

waaruit volgt

$$M = \frac{g L^3}{12 \left(L + 2 E J \alpha_{M=1}\right)}. \quad (\text{V } 2)$$

Is  $M$  met behulp van deze formule bepaald, dan zijn de optredende spanningen in de consoleverbindingen te berekenen, zooals in hoofdstuk IV is toegelicht.

## HOOFDSTUK VI.

---

### Toepassingen. Symmetrische verbindingen van langs- aan dwarsdragers.

---

Bij een spoorwegbrug van 60 M. spanwijdte heeft de dwarsdrager een hoogte van 960 mM.; voor den langsdrager met een theoretische lengte van 5000 mM. is berekend, dat I D N P n<sup>o</sup>. 47<sup>5</sup> benut moet worden.

Voor de verbinding van den langsdrager zal gebruik gemaakt worden van hoekijzers van  $\frac{100 \times 150}{12}$ , waarvan het lange been met den langsdrager en het korte been met den dwarsdrager zal worden verbonden. De verbindingsbouten zullen 23 mM. diameter verkrijgen, terwijl er naar gestreefd zal worden — vooral in het bovendeel der verbinding — de bouten op een gemiddelden afstand van 100 mM. te plaatsen.

Men kan nu de verbinding uitvoeren volgens elk der typen *IV a*, *IV b*, *IV c*, *IV d*, dan wel volgens het type, dat in het Pruisische Erlass van 1 Mei 1903 wordt voorgeschreven en in hoofdstuk VII zal worden behandeld, waarbij één hoekijzer over de geheele hoogte doorloopt en het andere binnen de flenzen van den langsdrager wordt afgesneden, welk type dus eenigszins te vergelijken is met *IV d*.

De verbindingen zijn in de figuren 30 t/m 34 geschetst.

Teneinde er de berekeningen van Hoofdstuk IV op te kunnen toepassen, zijn eerst de constanten  $c$ ,  $z$ ,  $z_1$  en  $A$ , die onafhankelijk van de hoogte der verbinding en dus voor alle dezelfde zijn, bepaald op de in Hoofdstuk III gegeven wijze.

Voor het lange been der verbindingshoekijzers worden enkel de, het dichtst bij den dwarsdrager geplaatste, verbindingsbouten in rekening gebracht, aangezien de invloed van de meer naar het eind van het been geplaatste bouten — in verband met de optredende vormverandering — van geen beteekenis kan zijn voor de berekeningen, zooals die onder III zijn behandeld; wél zijn die nagels van belang voor het overbrengen van het optredend moment van den langsdrager op de hoekijzers.

Aangezien de traagheidsmomenten der doorsneden van beide beenen van het verbindingshoekijzer gelijk zijn n.l.  $i = i_1$ , geldt de vergelijking III 2:

$$\frac{(a-c)(z+a) - ac}{c} = a_1 \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2a_1},$$

waarin  $z$  een functie van  $c$  is; n.l. geldt voor het korte been:

$$z = \sqrt[3]{\frac{3 E i}{\mathcal{A}}} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{E i}{(a-c)^3 \mathcal{A}}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{E i}{(a-c)^3 \mathcal{A}}}} \right\},$$

terwijl voor het lange been  $z_1$  de constante waarde heeft volgens de formule

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\mathcal{A}_1}{6 E i_1} - \frac{1}{a_1}}}.$$

In verband met hetgeen in fig. 16 is aangeduid, is voor het korte been:

$$a = 5,5$$

$$i = \frac{1}{12} \times 1 \times 1,2^3 = 0,144,$$

terwijl volgens hoofdstuk II sub  $a$  de kracht  $\mathcal{A}$  per cM. hoogte, noodig om de verbindingsbouten 1 cM. uit te rekken, te berekenen is op de volgende wijze.

Aangezien gerekend wordt, dat de vormverandering symmetrisch is ten opzichte van den dwarsdrager, is bij de berekening van de kracht  $\mathcal{Q}_t$ , voor de lengte van den bout (n.l. voor het korte been van het hoekijzer) te nemen  $l = 2,7$  cM. —, en de kracht  $\mathcal{Q}_t$ , welke bij die lengte een klinkbout van 23 mM. diameter 1 cM. zou uitrekken, wordt, indien

$d$  = de dikte van den bout = 2,3 cM. en

$E$  = de elasticiteits modulus;

$$\mathcal{Q}_t = \frac{E \times \pi d^2}{4 l} = E \frac{3,14 \times 2,3^2}{4 \times 2,7} = E \times 1,538.$$

Daar in het bovenste deel der verbinding — en dit deel is voor de stijfheid van overwegend belang — over de hoogte van 20 cM. 2 bouten voorkomen, wordt de kracht  $\mathcal{Q}$ :

$$\mathcal{Q} = \frac{2 \mathcal{Q}_t}{20} = E \times 0,1538,$$

zoodat de verhouding

$$\frac{E i}{\mathcal{Q}} = \frac{E \times 0,144}{E \times 0,1538} = 0,936.$$

Voor het korte been valt nu voor verschillende waarden van  $\frac{c}{a}$  de waarde van  $z$  en daarna de waarde van den vorm  $\left(\frac{a}{c} - 1\right)(z + a) - a$  te bepalen en in een lijst te rangschikken, (zie bldz. 89).

Voor het lange been van het verbindingshoekijzer geldt:

$$a_1 = 5,5$$

$$i_1 = i = 0,144.$$

De lengte van de verbindingsbouten tot het middenvlak van den langsdraager is  $l_1 = 2,055$  cM. De kracht  $\mathcal{Q}_{t_1}$ , die een klinknagel 1 cM. uitrekt, is te berekenen volgens de formule:

$$\mathcal{Q}_{t_1} = \frac{E \times \pi d^2}{4 l_1} = E \frac{3,14 \times 2,3^2}{4 \times 2,055} = E \times 2,0208.$$



Kort been  $\perp \frac{150 \times 100}{12} \quad a = 5,5 \quad \frac{Ei}{\alpha} = 0,936.$

$\frac{c}{a}$	$\sqrt[3]{\frac{3Ei}{\alpha}}$	$\frac{8}{9} \frac{Ei}{(a-c)^3 \alpha}$	$\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{Ei}{(a-c)^3 \alpha}}}$	$\sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{Ei}{(a-c)^3 \alpha}}}$	$z$	$\left(\frac{a}{c} - 1\right)(z + a) - a$
0,1	1,411	0,00686	1,260	0,151	1,99	61,91
0,2	1,411	0,00977	1,259	0,170	2,02	24,58
0,3	1,411	0,01458	1,258	0,194	2,05	12,12
0,4	1,411	0,0231	1,258	0,227	2,10	5,90
0,5	1,411	0,0400	1,256	0,273	2,16	2,16
0,6	1,411	0,0781	1,251	0,342	2,25	-0,33
0,7	1,411	0,1852	1,239	0,460	2,40	-2,11

Aangezien voor het bovendee! der verbinding over een hoogte van 20 cM. weer twee klinknagels aanwezig zijn, wordt:

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{2 \mathcal{Q}_{t_1}}{20} = E \times 0,2021,$$

zoodat

$$\sqrt[3]{\frac{\mathcal{Q}_1}{6 E t_1}} = \sqrt[3]{\frac{0,2021}{6 \times 0,144}} = 0,616,$$

zoodat

$$z_1 = \frac{1}{0,616 - \frac{1}{5,5}} = \frac{5,5}{2,388} = 2,30,$$

en de constante waarde van de breuk

$$a_1 \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2a_1} = 5,5 \frac{2,3 + 5,5}{2,3 + 11} = 3,224.$$

Langs grafischen weg, zie grafiek 3, wordt gevonden, dat, indien  $\frac{c}{a} = 0,467$ , dus  $c = 0,467 \times 5,5 = 2,57$  cM., de vorm  $\left(\frac{a}{c} - 1\right)(z + a) - a$  dezelfde waarde verkrijgt als  $a_1 \frac{z_1 + a_1}{z_1 + 2a_1}$ , terwijl dan  $z = 2,13$  cM.

De constante der verbinding  $A$  is nu met behulp der formule III 3 te berekenen:

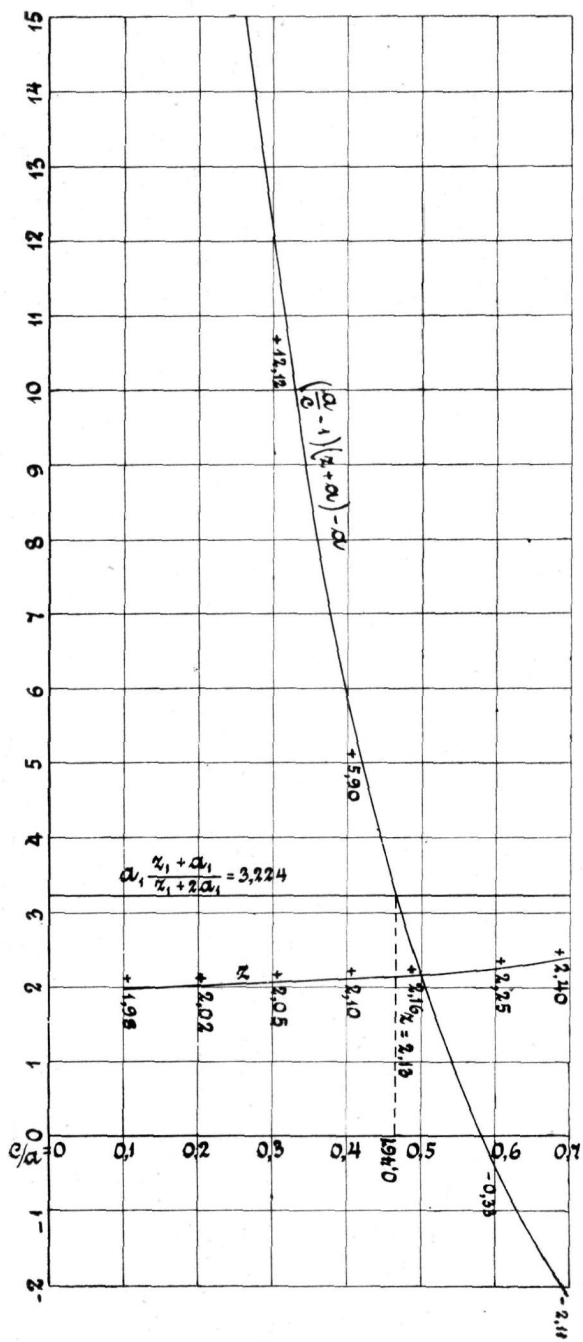
$$\begin{aligned} A &= (a - c)(z^2 + 3az + 2a^2) - a^2c = \\ &= (5,5 - 2,57)(2,13^2 + 3 \times 5,5 \times 2,13 + 2 \times 5,5^2) - 5,5^2 \times 2,57 = \\ &= 215,8. \end{aligned}$$

Deze waarde van  $A$  is voor alle te beschouwen verbindingen geldig.

Voor alle gevallen wordt als belasting van de langsdragers aangenomen een gelijkmatig verdeelde last van  $g$  per lengte-eenheid, die in de onderstelling van oplegging aan de einden (de gewone aanname) een buigspanning van  $t = 0,700$  ton/cM<sup>2</sup>. in den langsdruager veroorzaakt.

Wordt het weerstandsmoment van den langsdruager  $W$  genoemd en zijne lengte  $L$ , dan moet dus

$$0,700 = \frac{g L^2}{8 W},$$



Grafiek 3.

zoodat voor deze gevallen, waarvoor  $L = 500$  cM. en  $W = 2375$  cM<sup>3</sup>,

$$g = \frac{8 \times 0,700 \times 2375}{500^2} = 0,0532 \text{ ton/cM.}$$

In de formule  $V 2$  is dus voor  $g L^3$  steeds in te vullen

$$0,0532 \times 500^3 = 6.650.000 \text{ ton cM}^2.$$

De belasting  $0,0532$  ton/cM. zou bij vrije oplegging aan de einden een max. moment voor het midden van den langsdruager opleveren van  $1662,5$  ton cM.

### Verbinding VI a — in overeenstemming met IV a.

Voor de verbinding volgens fig. 30, overeenkomend met geval  $IV a$ , geldt voor de hoekverandering, die de eenheid van moment  $M = 1$  ton cM. de verbinding doet ondergaan, volgens  $V 1$  en  $IV a 2$ :

$$\alpha_{h, M=1} = \frac{A}{4 E i h^3},$$

in welke formule  $h = 40$ , zoodat

$$\alpha_{h, M=1} = \frac{215,8}{4 \times 2150 \times 0,144 \times 40^3} = 0,000.002.723.$$

Volgens  $V 2$  is het in de verbinding optredend moment te berekenen op

$$M = \frac{g L^3}{12 (L + 2 E J \alpha_{M=1})} = \frac{6.650.000}{12 (500 + 2 \times 2150 \times 56410 \times 0,000.002.723)} = 477 \text{ ton cM.,}$$

zoodat:

$$\alpha_h = M \alpha_{h, M=1} = 477 \times 0,000.002.723 = 0,001.299,$$

en de maximale uitwijking van het hoekijzer volgens  $IV a 3$ :

$$\delta_m = \alpha_h \times h = 0,001299 \times 40 = 0,05196 \text{ cM.}$$

De maximale trekkracht, die boven in de verbindingshoekijzers over de hoogte  $1$  cM. voorkomt, is dan volgens  $III 6$ :

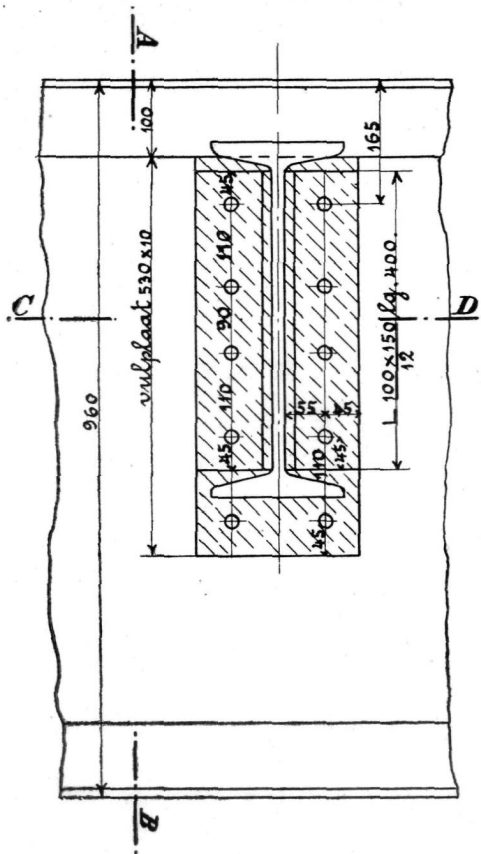


Fig. 30a.

*Doornede over AB*

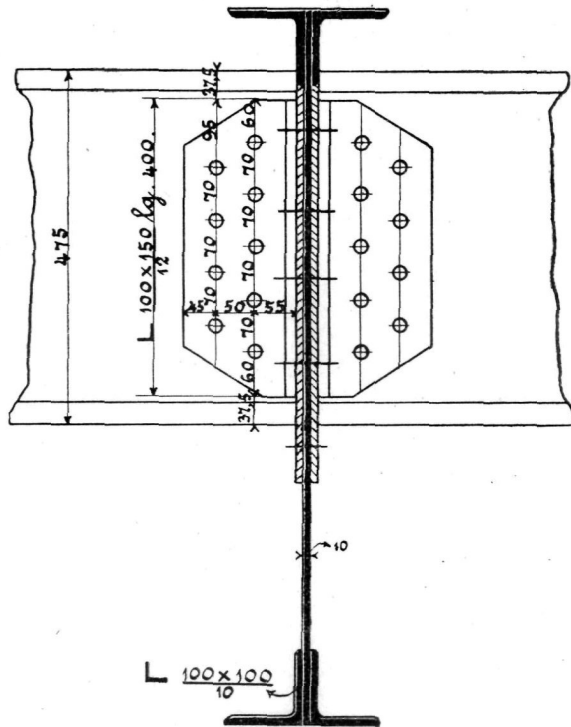


Fig. 30b.

*Doornede over CD.*

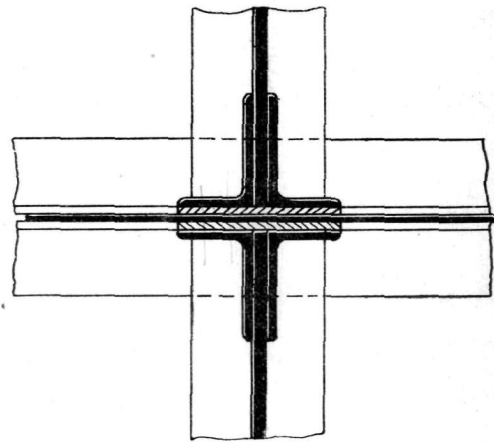


Fig. 30c.

VI A

$$\rho = \frac{6 E i \delta_m}{A} = \frac{6 \times 2150 \times 0,144 \times 0,05196}{215,8} = 0,447 \text{ ton/cm.}$$

en de optredende maximale buigspanning in den hoek van de verbindingshoekijzers volgens *IV a 4*:

$$\sigma_{im} = \frac{3 E c d \delta_m}{A} = \frac{3 \times 2150 \times 2,57 \times 1,2 \times 0,05196}{215,8} = 4,80 \text{ ton/cm}^2.$$

Teneinde de optredende trekkrachten in de, door het korte been van de verbindingshoekijzers aangebrachte, bouten te bepalen, worde opgemerkt, dat het totale moment door de nagels geleverd ten opzichte van onderkant hoekijzer volgens *IV a 5*, is:

$$\mathcal{M}_q = M \frac{a - c + z}{z} = 477 \frac{5,5 - 2,57 + 2,13}{2,13} = 1133 \text{ ton cm.}$$

Wordt de kracht, in de beide bovenste nagels voorkomende,  $x$  gesteld, dan is het moment van die kracht ten opzichte van onderkant hoekijzers  $x \times 35,5$  ton cm.; voor de daaronder gelegen bouten is dan dat moment  $\frac{24,5}{35,5} x \times 24,5$ , enz. Voor de som der momenten aller bouten valt dus neer te schrijven:

$$\frac{x}{35,5} (35,5^2 + 24,5^2 + 15,5^2 + 4,5^2) = 1133,$$

dus

$$x = \frac{35,5 \times 1133}{2121} = 18,96 \text{ ton.}$$

In elke bovenste nagel komt dan een trekkracht van 9,48 ton, gevende een normale trekspanning van

$$\sigma = \frac{9,48}{3,14 \times 1,15^2} = 2,28 \text{ ton/cm}^2.$$

De reactie, op het ondereinde der verbinding uitgeoefend, is volgens formule *IV a 7*:

$$P_t = \frac{3}{2} \frac{M}{h} = \frac{3}{2} \frac{477}{40} = 17,9 \text{ ton.}$$

## Verbinding VI b — in overeenstemming met IV b.

Voor de in fig. 31 geteekende verbinding geldt evenals voor de vorige, dat:

$$c = 2,57 \quad z = 2,13 \quad A = 215,8 \quad i = 0,144,$$

terwijl de belasting wederom bedraagt  $g = 0,0532$  ton/cM.

Voor de hoogte  $h$  is weer in te voeren de hoogte der eigenlijke verbinding tusschen langs- en dwarsdrager, zoodat  $h = 40$ , terwijl dan  $h_2 = 6,5$  en  $h_3 = 4,5$ , uitgedrukt in cM.

Overeenkomstig  $V_1$  en  $IVb7$  is te berekenen:

$$\alpha_{M=1} = 1 : \left\{ \frac{4 E i h^3}{A} + \frac{\frac{(h + h_2)^2}{A}}{\frac{12 E i (h_2 + h_3)}{A} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}}} \right\},$$

in welke formule voor  $\mathfrak{J}$  zal worden ingevoerd het traagheidsmoment der twee hoekijzers met de vulplaat, zoodat  $\mathfrak{J} = 1900$  cM<sup>4</sup>. Wel is waar is de vulplaat slechts met één bout verbonden, maar verondersteld is, dat de wrijving de plaat in de vormverandering der hoekijzers zal doen deelen. Trouwens, indien voor  $\mathfrak{J}$  enkel het traagheidsmoment der hoekijzers werd ingevoerd, zou de weldra te berekenen coëfficiënt  $\mu_1$  in plaats van 0,996 worden 0,997, en dus een te verwaarloozen wijziging ondergaan.

Zooals reeds berekend werd, is

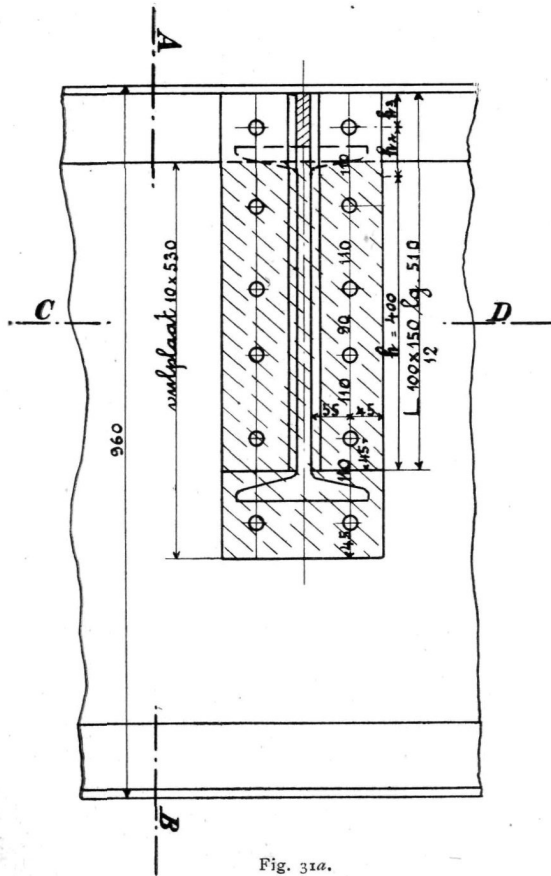
$$\frac{4 E i h^3}{A} = \frac{1}{0,000002723} = 368000,$$

terwijl

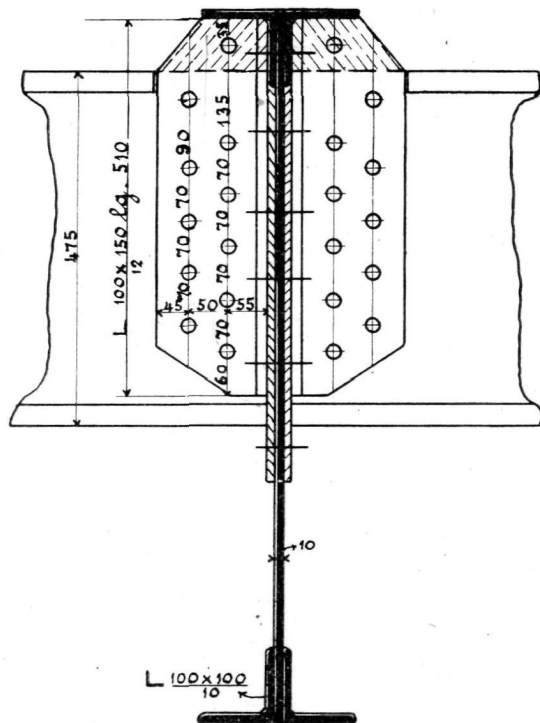
$$\begin{aligned} \frac{A}{12 E i (h_2 + h_3)} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}} &= \frac{215,8}{12 \times 2150 \times 0,144 \times 11} + \\ + \frac{6,5^3}{3 \times 2150 \times 1900} &= 0,005281 + 0,000022 = 0,005303, \end{aligned}$$

zoodat

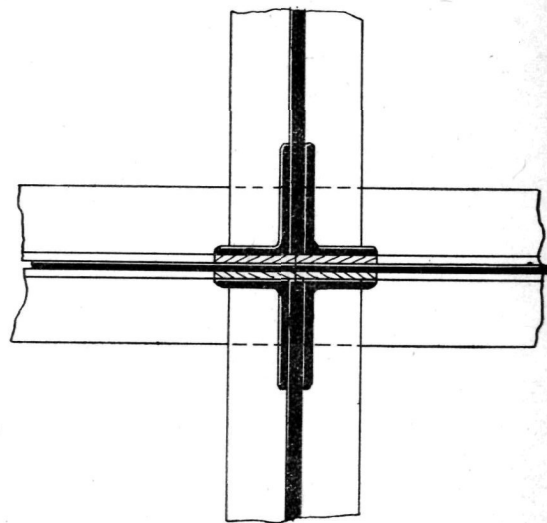
$$\frac{\frac{(h + h_2)^2}{A}}{\frac{12 E i (h_2 + h_3)}{A} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}}} = \frac{46,5^2}{0,005303} = 407000.$$



Doorsnede over AB



Doorsnede over CD.



VTB



Dus wordt:

$$\alpha_{M=1} = 1 : (368000 + 4070000) = \frac{1}{775000} = 0,000001290.$$

Volgens *V 2* is thans te berekenen:

$$M = \frac{g L^3}{12 (L + 2 E J \alpha_{M=1})} =$$

$$= \frac{6650000}{12 (500 + 2 \times 2150 \times 56410 \times 0,000001290)} = 682 \text{ ton cM.}$$

De hoekverandering van de uiteinden der langsdragers wordt:

$$\alpha_h = M \alpha_{M=1} = 682 \times 0,000001290 = 0,000880.$$

De afwijking van de hoekijzers, op hoogte  $h = 40$  cM. boven onderkant verbinding, is dan te berekenen op:

$$\delta_h = \alpha_h h = 0,000880 \times 40 = 0,0352 \text{ cM.}$$

In overeenstemming met *III 8* is de buigspanning, optredend in den hoek van de verbindingshoekijzers als gevolg der afwijking  $\delta_h$ , te berekenen op:

$$\sigma_i = \frac{3 E c d}{A} \delta_h = \frac{3 \times 2150 \times 2,57 \times 1,2 \times 0,0352}{215,8} = 3,24 \text{ ton/cm}^2$$

Volgens *IV b 12* is de uitwijking aan het boveinde der verbinding

$$\delta_m = \alpha_h \left\{ h + (h_2 + h_3) \left( 1 - \frac{3}{2} \mu_2 \right) \right\},$$

waarin volgens *IV b 11*:

$$\mu_2 = \frac{i (h + h_2) (h_2 + h_3)^3}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} =$$

$$= \frac{0,144 \times 46,5 \times 11^3}{215,8 \times 1900 + 4 \times 0,144 \times 6,5^3 \times 11} = 0,02165,$$

zoodat

$$\delta_m = 0,000880 \left\{ 40 + 11 \left( 1 - \frac{3}{2} \times 0,02165 \right) \right\} = 0,0447 \text{ cM.}$$

Aangezien  $\mu_2 < \frac{1}{2}$  is  $\delta_m$  de grootste uitwijking, die voorkomt. De optredende buigspanning, die met deze uitbuiging gepaard gaat, bedraagt volgens *IV b 14*:

$$\sigma_{im} = 3 \frac{E \delta_m c d}{A} = \frac{3 \times 2150 \times 0,0447 \times 2,57 \times 1,2}{215,8} = 4,12 \text{ ton/cm}^2.$$

Om de optredende trekspanningen in de door het korte been van de verbindingshoekijzers aangebrachte bouten te berekenen, worde opgemerkt dat, indien de trekkraft in de op één na hoogste nagels evenals in het vorig geval  $x$  gesteld wordt, de kracht in de beide bovenste nagels te stellen is op:

$$\frac{46,5}{35,5} \times x \times \mu_1;$$

hierin is volgens *IV b 9*:

$$\mu_1 = \frac{A \mathfrak{J}}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} = 0,996.$$

De kracht in de beide bovenste nagels =  $\frac{46,5}{35,5} \times 0,996 x$  en het moment ten opzichte van de draaiingsas *RR*:

$$\frac{46,5^2}{35,5} \times 0,996 \times x.$$

In aansluiting met het vorig geval is nu het totale moment der nagels ten opzichte van de draaiingsas *RR*:

$$\frac{x}{35,5} (46,5^2 \times 0,996 + 35,5^2 + 24,5^2 + 15,5^2 + 4,5^2) = \mathfrak{M}_q,$$

of

$$\frac{x}{35,5} \times 4270,28 = \mathfrak{M}_q,$$

terwijl volgens *IV b 15*:

$$\mathfrak{M}_q = M \frac{a-c+z}{z} = 682 \times \frac{5,06}{2,13} = 1620 \text{ ton cm.},$$

zoodat  $x$  te berekenen is uit de vergelijking:

$$\frac{x}{35,5} \times 4270,28 = 1620$$

dus

$$x = \frac{35,5 \times 1620}{4270,28} = 13,47 \text{ ton.}$$

Voor de beide bovenste nagels bedraagt de trekkracht:

$$\frac{46,5}{35,5} \times 0,996 \times 13,47 = 17,16 \text{ ton.}$$

De optredende trekspanning in die nagels bedraagt dus:

$$\sigma = \frac{17,16}{2 \times 4,51} = 2,11 \text{ ton/cm}^2.$$

Voor de berekening van  $P_t$  wordt gebruik gemaakt van formule *IV b 17*.

$$P_t = \left\{ \frac{6 E i h^2}{A} + \frac{h + h_2}{A} \frac{h_2^3}{12 E i (h_2 + h_3) + 3 E \mathfrak{J}} \right\} \alpha_n,$$

$$\frac{6 E i h^2}{A} = \frac{6 \times 2150 \times 0,144 \times 40^2}{215,8} = 13770,$$

$$\frac{h + h_2}{A} \frac{h_2^3}{12 E i (h_2 + h_3) + 3 E \mathfrak{J}} = \frac{46,5}{0,005303} = 8760,$$

zoodat

$$P_t = 22530 \times 0,000880 = 19,8 \text{ ton.}$$

De kracht  $P_{h_2}$  is volgens formule *IV b 4* te berekenen op:

$$P_{h_2} = \frac{h + h_2}{A} \frac{h_2^3}{12 E i (h_2 + h_3) + 3 E \mathfrak{J}} \times \alpha_n = 8760 \times 0,000880 = 7,71 \text{ ton,}$$

en doet in de hoekijzers een buigspanning optreden, die volgens *IV b 18* wordt:

$$\sigma_{\mathfrak{J}} = \frac{P_{h_2} \times h_2}{W_{\mathfrak{J}}}, \text{ waarin } W_{\mathfrak{J}} = \frac{1298}{10,11} = 128,4 \text{ cm}^3,$$

zoodat

$$\sigma_{\mathfrak{J}} = \frac{7,71 \times 6,5}{128,4} = 0,390 \text{ ton/cm}^2.$$

De coëfficiënt  $\mu_1$  verkrijgt een waarde die  $\pm 0,5 \%$  van 1 verschilt, terwijl ook de grootte van den factor  $(1 - \frac{3}{2} \mu_2)$  slechts weinig van 1 afwijkt. Er zou dus bij deze en bij grotere sterkte van hoekijzers slechts een geringe fout worden gemaakt door de afbuiging van de hoekijzers over de hoogte  $h_2 + h_3$ , voor zoover die een gevolg is van het optreden der kracht  $P_{h_2}$ , geheel te verwaarloozen en dus  $\mu_1$  en  $1 - \frac{2}{3} \mu_2$  gelijk 1 te stellen.

#### Verbinding VI c — in overeenstemming met IV c.

Wordt de verbinding uitgevoerd volgens fig. 32, dus overeenkomstig hetgeen onder IV c werd besproken, dan is allereerst  $x$  te berekenen uit de vergelijking IV c 4, en wordt gevonden:

$$x = \sqrt[3]{A \frac{\mathfrak{J}}{4 i h} - \frac{h^3}{8}} + \sqrt{A \frac{\mathfrak{J}}{4 i h} \left( A \frac{\mathfrak{J}}{4 i h} - \frac{h^3}{4} \right)} + \\ + \sqrt[3]{A \frac{\mathfrak{J}}{4 i h} - \frac{h^3}{8}} - \sqrt{A \frac{\mathfrak{J}}{4 i h} \left( A \frac{\mathfrak{J}}{4 i h} - \frac{h^3}{4} \right)}.$$

In die formule stelt  $\mathfrak{J}$  het traagheidsmoment voor van de beide van een vulplaat voorziene hoekijzers der verbinding, zoodat  $\mathfrak{J} = 1900 \text{ cm}^4$ .

De waarden  $A$ ,  $i$ ,  $h$ ,  $z$  en  $c$  zijn dezelfde als voor de beide hiervoor besproken verbindingen, zoodat

$$A \frac{\mathfrak{J}}{4 i h} = 215,8 \cdot \frac{1900}{4 \times 0,144 \times 40} = 17800, \\ \frac{h^3}{8} = \frac{40^3}{8} = 8000 \text{ en } \frac{h^3}{4} = 16000,$$



zoodat mede volgens *IV c 5*

$$h_1 = \sqrt[3]{17800 - 8000 + \sqrt{17800(17800 - 16000)}} + \\ + \sqrt[3]{9800 - \sqrt{17800 \times 1800} - \frac{1}{2} \times 40} = 20,97 \text{ cM.}, \\ \text{of rond } 21 \text{ cM.}$$

De afwijkingshoek  $\alpha_h$ , die tengevolge van het optreden van de eenheid van moment n.l. 1 ton M. in de verbinding ontstaat, is te berekenen volgens de formule *V 1* en *IV c 7*:

$$\alpha_{M=1} = \frac{A}{4 E i (h + h_1)^2 h} = \frac{215,8}{4 \times 2150 \times 0,144 \times 61^2 \times 40} = \\ = 0,000001171.$$

Volgens *V 2* wordt het in de verbinding optredend moment berekend uit:

$$M = \frac{g L^3}{12 (L + 2 E J \alpha_{M=1})} = \\ = \frac{6650000}{12 (500 + 2 \times 2150 \times 56410 \times 0,000001171)} = 707 \text{ ton cM.}$$

De plaatsgrijpende hoekverandering wordt dus:

$$\alpha_h = M \times \alpha_{M=1} = 707 \times 0,0000011708 = 0,000828.$$

Volgens *IV c 9* is dan

$$\delta_m = \alpha_h \left( h + \frac{1}{3} h_1 \right) = 0,000828 \times 47 = 0,0390 \text{ cM.},$$

zoodat de in het hoekijzer voorkomende maximale trekkracht over de hoogte van 1 cM. te bepalen is volgens *III 6*:

$$p = \frac{6 E i \delta_m}{A} = \frac{6 \times 2150 \times 0,144 \times 0,0390}{215,8} = 0,336 \text{ ton/cM.},$$

en de maximale buigspanning in het hoekijzer volgens *IV c 10*:

$$\sigma_{im} = \frac{3 E c d \delta_m}{A} = \frac{3 \times 2150 \times 2,57 \times 1,2 \times 0,039}{215,8} = 3,59 \text{ ton/cm}^2.$$

Ter berekening van de optredende trekkrachten in de bouten, die de korte beenen der hoekijzers verbinden, worde ingevoerd, dat die trekkrachten evenredig zijn met den afstand tot de lijn, die op een afstand van  $(h + \frac{x}{3} h_1) = 47$  cM. van af bovenkant verbindingshoekijzers is gelegen, en dat de som der momenten van die trekkrachten tenopzichte van de lijn, die op afstand  $(h + h_1) = 61$  cM. van bovenkant hoekijzers is gelegen, gelijk is aan  $\mathcal{M}_q$ , te berekenen volgens de formule *IV c 11*.

$$\mathcal{M}_q = M \frac{a - c + z}{z} = 707 \cdot \frac{5,5 - 2,57 + 2,13}{2,13} = 1679 \text{ ton cM.}$$

Wordt de gezamenlijke trekkracht in de beide hoogst gelegen bouten  $x$  gesteld, dan is die voor de daaronder gelegene te bepalen op

$$\frac{x}{35,5 + 7} (24,5 + 7) = \frac{31,5}{42,5} x, \text{ enz.}$$

Het moment voor de bovenste bouten ten opzichte van de boven aangeduide lijn  $RR$  is dan:

$$x \times (35,5 + 21) = x \times 56,5,$$

voor de daar onmiddellijk onder gelegene

$$x \frac{31,5}{42,5} \times (24,5 + 21) = x \times \frac{31,5 \times 45,5}{42,5},$$

voor de 3<sup>e</sup> rij bouten:

$$x \frac{15,5 + 7}{35,5 + 7} \times (15,5 + 21) = x \times \frac{22,5 \times 36,5}{42,5},$$

en voor de 4<sup>e</sup> rij bouten:

$$x \frac{4,5 + 7}{35,5 + 7} \times (4,5 + 21) = x \times \frac{11,5 \times 25,5}{42,5}.$$

De som dier momenten, n.l.

$$\frac{x}{42,5} (42,5 \times 56,5 + 31,5 \times 45,5 + 11,5 \times 25,5) = \frac{x}{42,5} \times 4949,$$

moet gelijk zijn aan  $\mathcal{M}_q$ , zoodat  $x$  te berekenen is uit de vergelijking:

$$\frac{x}{42,5} \times 4949 = 1679, \text{ zoodat } x = 14,40 \text{ ton.}$$

Elk der twee bovenste bouten ondervindt dus een trekkracht van 7,20 ton, gevende een trekspanning van

$$\sigma = \frac{7,20}{3,14 \times 1,15^2} = \frac{7,20}{4,15} = 1,735 \text{ ton/cm}^2.$$

De reactie, die over de lijn  $RR$  op de hoekijzers wordt uitgeoefend, is te berekenen volgens de formule  $IVc3$ ;

$$P_t = P_h = \frac{2 E \delta}{h^2} \alpha_h = \frac{2 \times 2150 \times 1900}{21^2} \times 0,000828 = 15,34 \text{ ton},$$

en de buigspanning in de hoekijzers volgens  $IVc23$ , waarin  $W_g = 128,4 \text{ cm}^3$ :

$$\sigma_g = \frac{P_t h_1}{W_g} = \frac{15,34 \times 21}{128,4} = 2,520 \text{ ton/cm}^2.$$

#### Verbinding VI d — in overeenstemming met IV d.

Wordt de verbinding uitgevoerd, zooals in fig. 33 is voorgesteld, dus in overeenstemming met hetgeen onder  $IVd$  is besproken, dan dienen allereerst berekend te worden, de waarden van de vormen  $S$  en  $T$  volgens de formules  $IVd10$  en  $IVd11$ , n.l.:

$$S = \frac{2 i h}{A \delta} + 2 \frac{i (h_2 + h_3)}{A \delta + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \text{ en}$$

$$T = \frac{3 i h^2}{A \delta} + 6 \frac{i (h_2 + h_3)}{A \delta + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} (h + h_2),$$

in welke formules weer:

$h = 40$ ;  $h_2 = 6,5$ ;  $h_3 = 4,5$ , zoodat  $h_2 + h_3 = 11$  en  $h + h_2 = 46,5$ , terwijl de andere letters dezelfde waarden hebben als voor geval  $VIc$ .

$$S = 2 \cdot \frac{0,144 \times 40}{215,8 \times 1900} + 2 \cdot \frac{0,144 \times 11,0}{215,8 \times 1900 + 4 \times 0,144 \times 6,5^3 \times 11,0} =$$

$$= 0,00003579,$$

$$\text{terwijl } T = \frac{3}{2} \times 40 \times 0,00002810 + 3 \times 46,5 \times 0,00000769 =$$

$$= 0,002759.$$



Wordt in de derdemachtsvergelijking volgens *IV d 12*:

$$x^3 - p x + q = 0.$$

waarin dus:

$$p = \frac{1}{3} \left( \frac{T}{S} \right)^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{0,002759}{0,00003579} \right)^2 = \frac{77,09^2}{3} = 1981.$$

$$q = \frac{2}{27} \left( \frac{T}{S} \right)^3 - \frac{1}{S} = \frac{2}{27} \times 77,09^3 - \frac{1}{0,00003579} = 5995,$$

als nieuwe onbekende  $\varphi$  ingevoerd, waarvoor:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{2} q}{\frac{1}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p}} = \frac{299,5}{\sqrt{660^3}}, \text{ zoodat } \varphi = 79^\circ 49' 3'',$$

dan zijn de wortels der vergelijking:

$$x_1 = -2 \sqrt{\frac{1}{3} p} \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi = -2 \sqrt{660} \cdot \cos. 26^\circ 36' 21''$$

$$x_2 = -2 \sqrt{\frac{1}{3} p} \cdot \cos \left( \frac{1}{3} \varphi + 120^\circ \right) = -2 \sqrt{660} \cdot \cos. 146^\circ 36' 21''$$

en

$$x_3 = -2 \sqrt{\frac{1}{3} p} \cdot \cos \left( \frac{1}{3} \varphi + 240^\circ \right) = -2 \sqrt{660} \cdot \cos. 266^\circ 36' 21''.$$

Bruikbaar is slechts de wortel  $x_2 = 42,90$ , daar de beide anderen voor  $h_1$  volgens formule *IV d 13* een negatieve waarde zouden geven. Volgens die formule is nu:

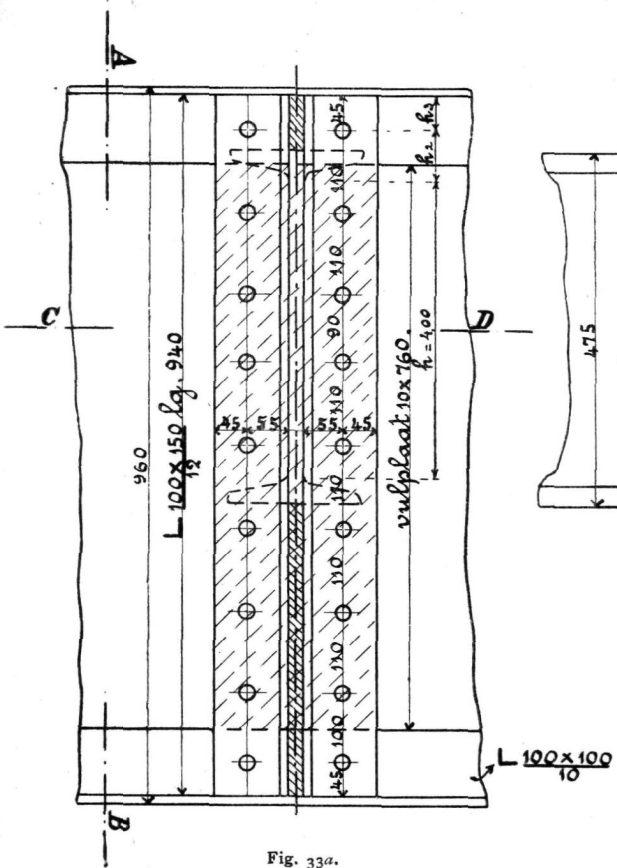
$$h_1 = x - \frac{1}{3} \frac{T}{S} = 42,90 - \frac{1}{3} \times 77,09 = 17,2 \text{ cM.}$$

Volgens formule *V 1* en *IV d 18* is de afwijkingshoek der verbinding tengevolge van een moment van 1 ton cM.:

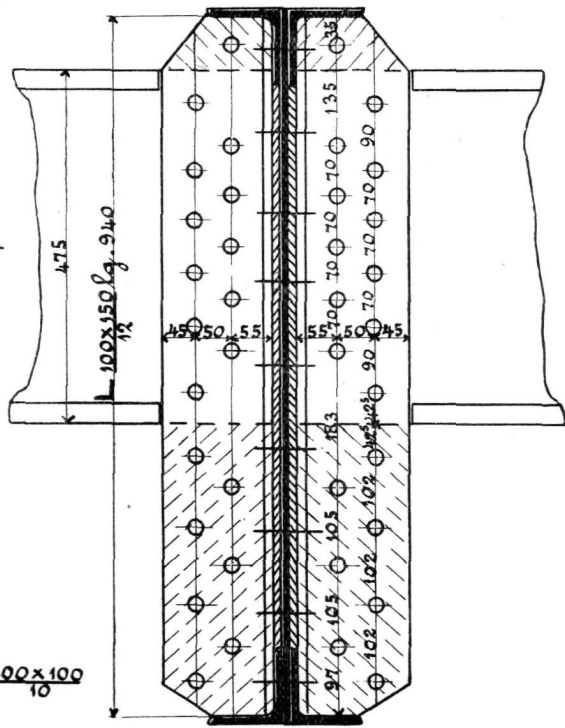
$$\alpha_{M=1} = \frac{A}{4 E i U},$$

waarin volgens *IV d 17*

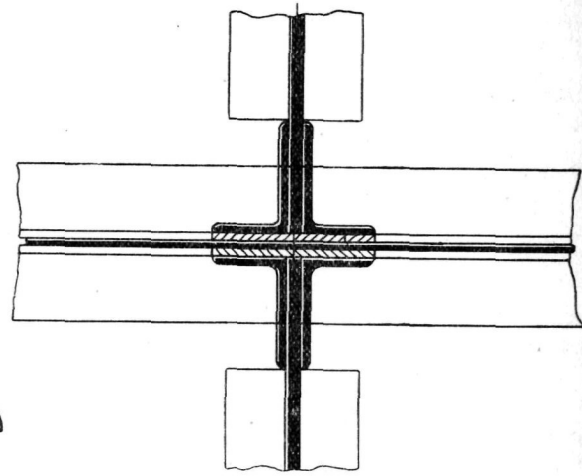
$$U = h(h + h_1)^2 + (h_2 + h_3)(h_1 + h + h_2)(h_1 + 3h + 3h_2) \mu_1,$$



Doornede over AB.



Doornede over CD.



VI d.

terwijl volgens *IV d 16*

$$\mu_1 = \frac{A \mathfrak{J}}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} = 0,996,$$

zooals reeds werd berekend bij *VI b*; zoodat

$$U = 40 \times 57,2^2 + 11 \times 156,7 \times 63,7 \times 0,996 = 240210,$$

in verband waarmede:

$$\alpha_{M=1} = \frac{215,8}{4 \times 2150 \times 0,144 \times 240210} = 0,0000007255.$$

Volgens *V 2* is dan:

$$M = \frac{g L^3}{12 (L + 2 E J \alpha_{M=1})} =$$

$$= \frac{6650000}{12 (500 + 2 \times 2150 \times 56410 \times 0,0000007255)} = 819 \text{ ton cM.},$$

zoodat

$$\alpha_h = M \alpha_{M=1} = 819 \times 0,0000007255 = 0,000594.$$

Volgens *IV d 22* is de maximale uitwijking:

$$\delta_m = \alpha_h \left\{ \frac{1}{3} h_1 + h + (h_2 + h_3) \left( 1 - \frac{3}{2} \mu_2 \right) \right\},$$

waarin volgens *IV d 21*

$$\mu_2 = \frac{i \left( \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 \right) (h_2 + h_3)^3}{A \mathfrak{J} + 4 i h_2^3 (h_2 + h_3)} =$$

$$= \frac{0,144 \times 52,23 \times 11^3}{215,8 \times 1900 + 4 \times 0,144 \times 6,5^3 \times 11} = 0,02431,$$

zoodat:

$$\delta_m = 0,000594 \left\{ 5,73 + 40 + 11 \left( 1 - \frac{3}{2} \times 0,02431 \right) \right\} = 0,0334 \text{ cM.}$$

Aangezien aan de voorwaarde *IV d 23* voldaan wordt, n.l.  $\mu_2 < \frac{1}{2}$ , is  $\delta_m$  de grootste uitwijking, die voorkomt, zoodat de maximale buigspanning in het hoekijzerbeen volgens *IV d 24*:

$$\sigma_{im} = \frac{3 E \delta_m c d}{A} = \frac{3 \times 2150 \times 0,0334 \times 2,57 \times 1,2}{215,8} = 3,08 \text{ t/cM}^2.$$

De trekkrachten der bouten in de korte beenen der hoekijzers zijn evenredig met de afstanden tot de lijn, die op afstand  $\frac{1}{3} h_1 = 5,7$  cM. van onderkant stijve verbinding met hoogte  $h$  is gelegen, mits voor de beide bovenste bouten die kracht vermenigvuldigd wordt met den coëfficiënt  $\mu_1 = 0,996$ .

Het gezamenlijke moment van die trekkrachten om de lijn  $RR$  op afstand  $(h_1 + h + h_2 + h_3) = 68,2$  cM. van bovenkant hoekijzers gelegen, moet volgens  $IV d 25$  gelijk zijn aan

$$\mathfrak{M}_q = M \frac{a - c + z}{z} = 819 \times \frac{5,06}{2,13} = 1945 \text{ ton cM.}$$

Wordt de trekkracht der twee bouten, in de tweede rij van boven af gelegen, weer  $x$  gesteld, dan is die der bovenste bouten :

$$0,996 \times x \times \frac{46,5 \times 5,7}{35,5 + 5,7} = 0,996 \times x \times \frac{52,2}{41,2},$$

en die der meer naar beneden gelegen bouten  $x \times \frac{30,2}{41,2}$  enz.

De momenten om de lijn  $RR$  worden dan :

voor de bovenste bouten	$x \times 0,996 \times \frac{52,2}{41,2} \times 63,7 ;$
„ „ bouten met trekkracht $x$	$x \times \frac{41,2}{41,2} \times 52,7 ;$
„ „ 3 <sup>e</sup> rij bouten	$x \times \frac{30,2}{41,2} \times 41,7 ;$
„ „ 4 <sup>e</sup> „ „	$x \times \frac{21,2}{41,2} \times 32,7 ;$
„ „ 5 <sup>e</sup> „ „	$x \times \frac{10,2}{41,2} \times 21,7.$

De som dier momenten, n.l.

$$\frac{x}{41,2} \left( 0,996 \times 52,2 \times 63,7 + 41,2 \times 52,7 + 30,2 \times 41,7 + 21,2 \times 32,7 + 10,2 \times 21,7 \right) = \frac{x}{41,2} \times 7657,0,$$

moet gelijk zijn aan  $\mathfrak{M}_q = 1945$ , zoodat

$$x = \frac{41,2 \times 1945}{7657} = 10,47 \text{ ton.}$$

In de beide bovenste bouten is de trekkracht dan :

$$0,996 \times \frac{52,2}{41,2} \times 10,47 = 13,22 \text{ ton,}$$

zoodat de in die bouten optredende trekspanning

$$\sigma = \frac{13,22}{2 \times 4,15} = 1,59 \text{ ton/cm}^2.$$

Volgens de formule  $IV d 4$  is de over de lijn  $RR$  optredende reactie :

$$P_t = \frac{2 E \mathfrak{J}}{h_1^2} \alpha_h = \frac{2 \times 2150 \times 1900}{17,2^2} \times 0,000594 = 16,42 \text{ ton,}$$

zoodat de volgens  $IV d 27$  te berekenen buigspanning in de hoekijzers

$$\sigma_{\mathfrak{J}_t} = \frac{P_t h_1}{W_{\mathfrak{J}}} = \frac{16,42 \times 17,2}{128,4} = 2,200 \text{ ton/cm}^2.$$

## HOOFDSTUK VII.

### De onsymmetrische verbinding van langs- aan dwarsdragers.

Ten slotte worde de verbinding, in fig. 34 geschetst, onderzocht; deze verbinding, waarbij het eene hoekijzer zoowel naar boven- als naar beneden is verlengd en het andere binnen de flenzen van den langsdrager is afgesneden, wordt bijzonder aanbevolen in de Pruisische voorschriften voor het ontwerpen van ijzeren bruggen van 1 Mei 1903.

De verbinding heeft eenige overeenkomst met die onder *IV d* besproken, met *dit* verschil echter, dat het enkele hoekijzer over de hoogte  $h_2 + h_3$  niet meer de vormverandering zal ondergaan, zooals die onder *III* is besproken, doch voor doorsneden verder van bovenkant langsdrager gelegen meer en meer neiging zal vertoonen, de vormverandering als onder *II a* besproken aan te nemen.

Bovendien zal over de hoogte  $h_2 + h_3$  het verbindingshoekijzer als gevolg van de werking van de kracht  $P_{h_2}$ , thans slechts in één bout optredend, eenigszins worden gewrongen, welke wringende werking zich ook nog zal doen gevoelen over dat deel der verbinding, dat nabij den bovenkant van den langsdrager is gelegen, waardoor ook aldaar de vormverandering van een elementair hoogtedeel der hoekijzers niet geheel overeen zal komen met die, onder *III* besproken.

Echter is de invloed van de onsymmetrie der verbinding niet te overschatten. De kracht  $P_{h_2}$  zal slechts over de hoogte  $h_2$  haar invloed doen gelden, en doordat deze klein is, zal de aard der

vormverandering van het hoekijzer, alwaar de uitwijking  $\delta_{h_2}$  is (zie fig. 26d) niet veel kunnen verschillen van die ter plaatse, waar in die figuur  $\delta_h$  ingeschreven is.

Wordt de verbinding desalniettemin berekend op soortgelijke wijze als onder *IVd* is geschied, dan wordt ze te stijf aangenomen.

Bij de berekening dient er op te worden gelet, dat voor het traagheidsmoment  $\mathfrak{J}$  thans slechts dat van één hoekijzer in aanmerking komt, weshalve het traagheidsmoment met  $\mathfrak{J}_1$  zal worden aangeduid, terwijl voor  $P_{h_2}$  ook de trekkracht van slechts één bout moet worden ingevoerd.

De onderstaande formules zijn gelijkloidend met die voor geval *IVd*:

$$P_t = P_h + P_{h_2}; \quad (\text{VII 1})$$

$$P_h = \frac{12 E i h}{A} \left( \delta_{h_1} + \frac{1}{2} \alpha_h h \right); \quad (\text{VII 2})$$

$$\alpha_h = P_t \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}_1}; \quad (\text{VII 3})$$

$$\delta_{h_1} = P_t \frac{h_1^3}{6 E \mathfrak{J}_1}; \quad (\text{VII 4})$$

$$P_h = P_t \frac{i h h_1^2}{\mathfrak{J}_1 A} (2 h_1 + 3 h). \quad (\text{VII 5})$$

Het in *IVd* gegeven verband tusschen  $P_{h_2}$  en  $\delta_{h_2}$  wordt, nu de verbinding slechts eenzijdig is:

$$\delta_{h_2} = P_{h_2} \frac{A}{6 E i (h_2 + h_3)}. \quad (\text{VII 6})$$

In overeenstemming met *IVd 2* is:

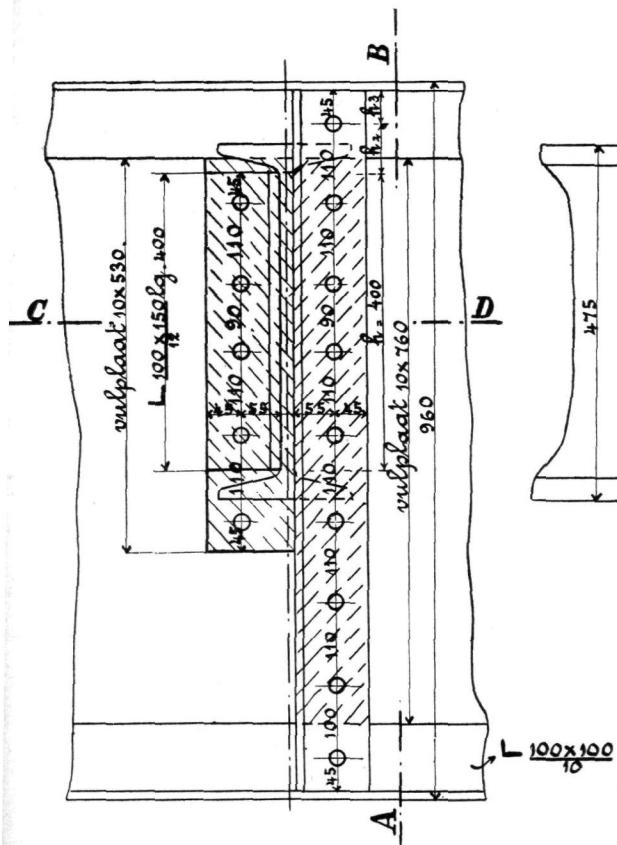
$$\delta_{h_2} = \delta_{h_1} + \alpha_h (h + h_2) - P_{h_2} \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}_1}, \quad (\text{VII 7})$$

zoodat

$$P_{h_2} \frac{A}{6 E i (h_2 + h_3)} = P_t \frac{h_1^3}{6 E \mathfrak{J}_1} + P_t \frac{h_1^2}{2 E \mathfrak{J}_1} (h + h_2) - P_{h_2} \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{J}_1};$$

waaruit volgt:

$$P_{h_2} = P_t \frac{i h_1^2 (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{J}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)} (h_1 + 3 h + 3 h_2) \quad (\text{VII 8})$$



Doorsnede over AB.

Doorsnede over CD

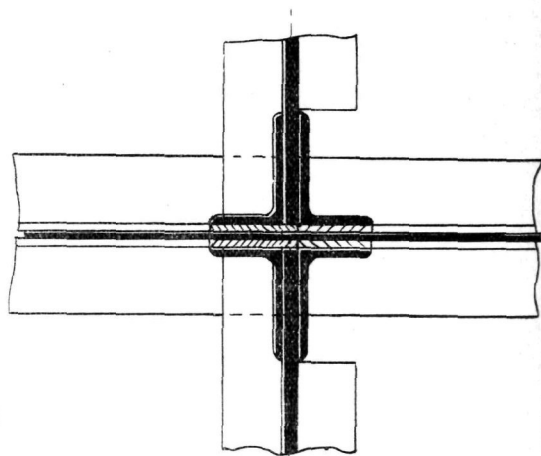
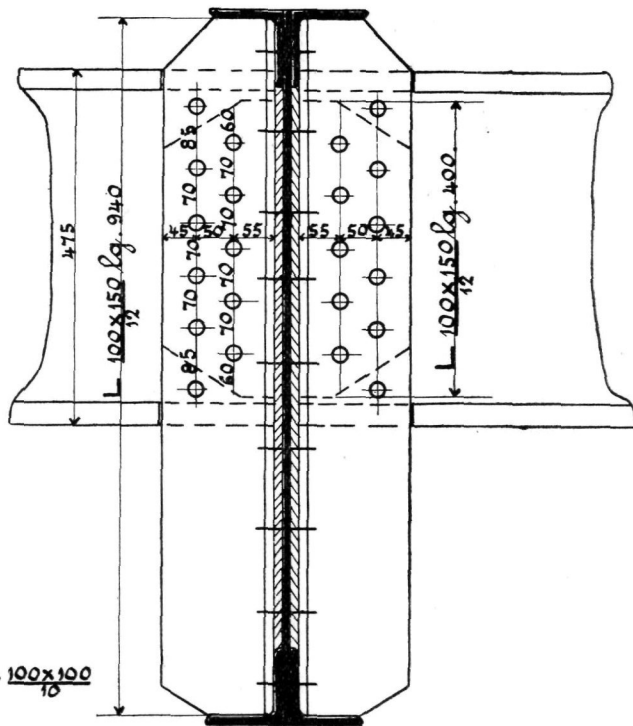


Fig. 34c.

Fig. 34a.

Fig. 34b.

VII



De waarden van  $P_{h_2}$  en  $P_h$  in formule VII 1 ingevuld geven:

$$P_t = P_t \frac{i h h_1^2}{A \mathfrak{A}_1} (2 h_1 + 3 h) + P_t \frac{i h_1^2 (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{A}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)} (h_1 + 3 h + h_2);$$

dus

$$\left\{ \frac{2 i h}{A \mathfrak{A}_1} + \frac{i (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{A}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \right\} h_1^3 + \left\{ \frac{3 i h^2}{A \mathfrak{A}_1} + \frac{3 i (h + h_2) (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{A}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)} \right\} h_1^2 - 1 = 0. \quad (\text{VII 9})$$

Wordt gesteld:

$$S = \frac{2 i h}{A \mathfrak{A}_1} + \frac{i (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{A}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)}, \quad (\text{VII 10})$$

$$\text{en} \quad T = \frac{3 i h^2}{A \mathfrak{A}_1} + \frac{3 i (h + h_2) (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{A}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)}, \quad (\text{VII 11})$$

dan is VII 9 te vervormen tot:

$$S h_1^3 + T h_1^2 - 1 = 0 \quad \text{of} \quad h_1^3 + \frac{T}{S} h_1^2 - \frac{1}{S} = 0.$$

Met  $h_1 = x - \frac{1}{3} \frac{T}{S}$  gaat die vergelijking over in

$$x^3 - \frac{1}{3} \left( \frac{T}{S} \right)^2 x + \left\{ \frac{2}{27} \left( \frac{T}{S} \right)^3 - \frac{1}{S} \right\} = 0, \quad (\text{VII 12})$$

welke vergelijking is op te lossen, waarna  $h_1$  te berekenen is uit de formule:

$$h_1 = x - \frac{1}{3} \frac{T}{S}, \quad (\text{VII 13})$$

$$\text{waarna weer} \quad \delta_{h_1} = \frac{1}{3} h_1 \times \alpha_h. \quad (\text{VII 14})$$

De formule IV d 15 gaat voor dit geval over in

$$P_{h_2} = \frac{\frac{1}{3} h_1 + h + h_2}{A} \times \alpha_h, \quad (\text{VII 15})$$

$$\frac{1}{6 E i (h_2 + h_3)} + \frac{h_2^3}{3 E \mathfrak{A}_1}$$

terwijl,

$$\text{zoo wordt gesteld: } \mu_1 = \frac{A \mathfrak{J}_1}{A \mathfrak{J}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)}, \quad (\text{VII 16})$$

$$U = h (h + h_1)^2 + \frac{1}{2} (h_2 + h_3) (h_1 + h + h_2) (h_1 + 3 h + 3 h_2) \mu_1, \quad (\text{VII 17})$$

en

$$\alpha_h = M \frac{A}{4 E i U}. \quad (\text{VII 18})$$

De uitwijking  $\delta_{h_2}$  is dan te berekenen op:

$$\delta_{h_2} = \alpha_h \left( \frac{1}{3} h_1 + h + h_2 \right) \mu_1 \quad (\text{VII 19})$$

en de daarbij opgewekte buigspanning is het hoekijzerbeen op:

$$\sigma_i = 3 \frac{E \delta_{h_2} c d}{A}. \quad (\text{VII 20})$$

Voor de berekening van de trekkrachten, die in de verbindingbouten optreden, wordt wederom opgemerkt, dat de trekkrachten, die over de hoogte  $h$  verdeeld zijn, evenredig zijn met hunne afstanden tot de lijn gelegen op een afstand  $\frac{1}{3} h_1$  van onderkant stijve verbinding. Ook de trekkracht in de bovenste bout wordt evenredig gesteld aan den afstand tot die lijn, waarbij echter op de meer vermelde wijze de coëfficiënt  $\mu_1$ , berekend volgens VII 16 wordt ingevoerd.

De som van de momenten der trekkrachten in de bouten om de lijn  $RR$  kan wederom worden gelijk gesteld aan:

$$\mathfrak{M}_q = M \frac{a - c + z}{z} \quad (\text{VII 21})$$

De kracht  $P_{h_2}$ , te berekenen volgens VII 15, oefent op het hoekijzer een buigende werking uit, waardoor een buigspanning wordt opgewekt van

$$\sigma_{\mathfrak{J}_2} = \frac{P_{h_2} h_2}{W_{\mathfrak{J}_1}}. \quad (\text{VII 22})$$

Ook de kracht  $P_t$ , over de lijn  $RR$  verdeeld, en volgens VII 3 te berekenen, oefent een buigend moment op het hoekijzer uit,

waardoor de buigspanning wordt:

$$\sigma_{\mathfrak{A}_1} = \frac{P_i h_1}{W_{\mathfrak{A}_1}}. \quad (\text{VII } 23)$$

De uitwijking  $\delta_m$  is hier niet nader berekend met het oog op de groote onzekerheid in de vormveranderingen en de spanningen van het bovendee van het hoekijzer.

Voor de verbinding, in fig. 34 geschetst, geldt:

$h = 40$ ;  $h_2 = 6,5$ ;  $h_3 = 4,5$ , zoodat  $h_2 + h_3 = 11$  en  $h + h_2 = 46,5$ , terwijl het traagheidsmoment van het enkele hoekijzer, dat met het oog op buiging moet worden in rekening gebracht  $\mathfrak{A}_1 = 649 \text{ cm}^4$ .

Volgens VII 10 is:

$$S = \frac{2 i h}{A \mathfrak{A}_1} + \frac{i (h_2 + h_3)}{A \mathfrak{A}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)} = \frac{2 \times 0,144 \times 40}{215,8 \times 649} +$$

$$+ \frac{0,144 \times 11,0}{215,8 \times 649 + 2 \times 0,144 \times 6,5^3 \times 11,0} = 0,00009349.$$

Volgens VII 11 is:

$$T = \frac{3 i h^2}{A \mathfrak{A}_1} + \frac{3 i (h_2 + h_3) (h + h_2)}{A \mathfrak{A}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)} =$$

$$\frac{3}{2} \times 40 \times 0,00008225 + 3 \times 46,5 \times 0,000011240 = 0,006503.$$

In de derdemachtsvergelijking VII 12, van den vorm

$$x^3 - p x + q = 0, \quad \text{is } p = \frac{1}{3} \left( \frac{T}{S} \right)^2 = \frac{1}{3} \times 69,56^2 = 1612,8$$

$$\text{en } q = \frac{2}{27} \left( \frac{T}{S} \right)^3 - \frac{1}{S} = \frac{2}{27} \times 69,56^3 - \frac{1}{0,00009349} = 14235.$$

Wordt gesteld:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{2} q}{\frac{1}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p}} = \frac{7117}{\sqrt{537,7^3}}, \quad \text{dan is } \varphi = 55^\circ 11' 37'',$$

en zijn de wortels der vergelijking:

$$x_1 = -2 \sqrt{\frac{1}{3} p} \cdot \cos \frac{1}{3} \varphi = -2 \sqrt{537,7} \cdot \cos 18^\circ 23' 54''.$$

$$x_2 = -2 \sqrt{\frac{1}{3} p \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \varphi + 120^\circ\right)} = -2 \sqrt{537,7} \cdot \cos 138^\circ 23' 54''.$$

en

$$x_3 = -2 \sqrt{\frac{1}{3} p \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \varphi + 240^\circ\right)} = -2 \sqrt{537,7} \cdot \cos 258^\circ 23' 54''.$$

Van deze wortels is alleen  $x_2 = 34,68$  grooter dan  $\frac{1}{3} \frac{T}{S}$ , zoodat volgens VII 13:

$$h_1 = x - \frac{1}{3} \frac{T}{S} = 34,68 - \frac{69,56}{3} = 11,49 \text{ of rond } 11,5 \text{ cM.}$$

$$\text{Volgens formule VII 18 geldt } \alpha_h = M \frac{A}{4 E i U},$$

terwijl volgens VII 17

$$U = h(h + h_1)^2 + \frac{1}{2}(h_2 + h_3)(h_1 + h + h_2)(h_1 + 3h + 3h_2) \mu_1,$$

en volgens VII 16

$$\mu_1 = \frac{A \mathfrak{A}_1}{A \mathfrak{A}_1 + 2 i h_2^3 (h_2 + h_3)} = \frac{215,8 \times 649}{215,8 \times 649 + 2 \times 0,144 \times 6,5^3 \times 11,0} = 0,994,$$

zoodat

$$U = 40 \times 51,5^2 + \frac{1}{2} \times 11 \times 58 \times 151 \times 0,994 = 153960 \text{ rond } 154000,$$

zoodat ten slotte

$$\alpha_{M=1} = \frac{215,8}{4 \times 2150 \times 0,144 \times 154000} = 0,000001132.$$

Volgens V 2 is nu te berekenen:

$$M = \frac{g L^3}{12 (L + 2 E J \alpha_{M=1})} = \frac{6650000}{12 (500 + 2 \times 2150 \times 56410 \times 0,000001132)} = 716 \text{ ton cM.}$$

zoodat

$$\alpha_h = M \alpha_{M=1} = 716 \times 0,000001132 = 0,000811.$$

Volgens VII 19 is dan

$$\delta_{h_2} = \alpha_h \left(\frac{1}{3} h_1 + h + h_2\right) \mu_1 = 0,000811 \times 50,3 \times 0,994 = 0,0405 \text{ c.M.,}$$

in verband waarmede volgens VII 20

$$\sigma_{i_2} = \frac{3 E \delta_{h_2} c d}{A} = \frac{3 \times 2150 \times 0,0405 \times 2,57 \times 1,2}{215,8} = 3,73 \text{ ton/cm}^2.$$

De afwijking bij bovenkant stijve verbinding

$$\delta_h = \alpha_h \left( \frac{1}{3} h_1 + h \right) = 0,000811 \times 43,8 = 0,0355 \text{ cM.};$$

aldaar bedraagt dus de optredende buigspanning in het hoekijzerbeen

$$\sigma_i = \frac{3 \times 2150 \times 0,0355 \times 2,57 \times 1,2}{215,8} = 3,27 \text{ ton/cm}^2.$$

De toestand in het bovendeel van het verlengde hoekijzer is niet nader te berekenen. De in dat deel optredende grootste spanning zal wel grooter zijn dan die in het bovenste punt der stijve verbinding, waarvoor de waarde 3,27 ton/cm<sup>2</sup>. werd gevonden; het ligt voor de hand er de voor  $\sigma_{i_2}$  gevonden waarde voor aan te houden.

Het gezamenlijke moment van de in de bouten optredende trekkkrachten om de lijn  $RR$  gelegen op afstand  $h_1 + h + h_2 + h_3 = 62,5$  cM. onder bovenkant verbinding, bedraagt volgens VII 21

$$\mathcal{M}_q = M \frac{a - c + z}{z} = 716 \times \frac{5,06}{2,13} = 1700 \text{ ton cM.}$$

Wordt de trekkkracht in de beide bovenste bouten der vaste verbinding  $x$  ton gesteld, dan is die voor de allerhoogst gelegen

bout te berekenen op  $\frac{1}{2} x \times 0,994 \times \frac{50,3}{39,3}$  ton; de momenten der

trekkkrachten om de lijn  $RR$  worden nu:  $x \times 0,497 \times \frac{50,3}{39,3} \times 58,$

$x \times \frac{39,3}{39,3} \times 47,$   $x \times \frac{28,3}{39,3} \times 36,$   $x \times \frac{19,3}{39,3} \times 27$  en  $x \times \frac{8,3}{39,3} \times 16$

ton cM., in totaal  $\frac{4969,8}{39,3} x$  ton cM.

Dit is weer gelijk aan  $\mathcal{M}_q = 1700$  ton cM., zoodat

$$x = \frac{39,3}{4969,8} \times 1700 = 13,44 \text{ ton.}$$

De trekspanning in de 2<sup>e</sup> rij bouten wordt dan

$$\frac{13,44}{2 \times 4,15} = 1,62 \text{ ton/cm}^2 \text{ en die in de bovenste bout}$$

$$\sigma = \frac{0,497 \times \frac{50,3}{39,3} \times 13,44}{4,15} = 2,06 \text{ ton/cm}^2.$$

De reactie  $P_t$  is volgens VII 3:

$$P_t = \frac{2 E \mathfrak{J}_1}{h_1^2} \alpha_h = \frac{2 \times 2150 \times 649}{11,5^2} \times 0,000811 = 17,1 \text{ ton},$$

welke kracht in het hoekijzer een buigspanning opwekt van

$$\sigma_{\mathfrak{J}_1} = \frac{P_t h_1}{W_{\mathfrak{J}_1}} = \frac{17,1 \times 11,5}{64,2} = 3,063 \text{ ton/cm}^2.$$

## HOOFDSTUK VIII.

### Beschouwingen over de in de hoofdstukken VI en VII berekende sterktecijfers.

#### Aanwijzingen voor de montage.

De uitkomsten der berekeningen van de beide laatste hoofdstukken zijn in onderstaande tabel samengevat.

Verbinding als berekend onder	<i>VI a</i>	<i>VI b</i>	<i>VI c</i>	<i>VI d</i>	<i>VII</i>
$h_t$ in cM.	40	51	61	68,2	62,5
$M$ in ton cM.	477	682	707	819	716
$\alpha_h$	0,001299	0,000880	0,000828	0,000594	0,000811
$\sigma_{im}$ in ton/cm <sup>2</sup> .	4,80	4,12	3,59	3,08	3,27 <sup>3,13</sup>
$\sigma$ in ton/cm <sup>2</sup> .	2,28	2,11	1,74	1,59	2,06
$P_t$ in tons.	17,9	19,8	15,3	16,4	17,1
$\sigma_{\mathfrak{A}_t}$ in ton/cm <sup>2</sup> .			2,52	2,20	3,06

Hierin is, als steeds:

$M$  het moment, dat door de verbinding wordt opgenomen,

$\alpha_h$  de draaiing, die het einde van den langsdraager ondergaat,

$\sigma_{im}$  de maximale buigspanning, die voor het hoekijzerbeen is berekend,

$\sigma$  de maximale trekspanning, die voor de bouten is berekend,

$P_t$  de reactie, die op het onderende der verbinding wordt uitgeoefend,

terwijl  $h_t$  de totale werkzame hoogte der verbindingshoekijzers is.

Het behoeft niet herhaald, dat de gegeven uitkomsten slechts betrekkelijke waarde hebben. Behalve het vroeger reeds opgemerkte komt als een nieuwe bron van afwijkingen de omstandigheid, dat de spanningen tot bij de vloeigrens zouden oploopen. In de eerste plaats zal daardoor bij een gegeven moment de grootste spanning reeds kleiner blijven, maar — en dit zal waarschijnlijk van meer gewicht zijn — bovendien zal de verbinding daardoor slapper worden,  $\alpha_{M=1}$  wordt dan grooter en het door de verbinding op te nemen moment zal dus afnemen.

Het moment, dat de grootste spanning  $\sigma_{im}$  tot de vloeigrens zou opvoeren, worde  $M_e$  genoemd. De hiermee overeenkomende waarde der andere grootheden zijn in onderstaand tabelletje vereenigd.

Verbinding als berekend onder	<i>VIa</i>	<i>VIb</i>	<i>VIc</i>	<i>VI d</i>	<i>VII</i>
$h_t$ in cM.	40	51	61	68,2	62,5
$M_e$ in ton cM.	199	334	394	532	384
$\alpha_{he}$	0,000541	0,000430	0,000462	0,000386	0,000435
$\sigma_{ime}$ in ton/cM <sup>2</sup> .	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
$\sigma_e$ in ton/cM <sup>2</sup> .	0,95	1,03	0,97	1,03	1,10
$P_{te}$ in ton	7,47	9,60	8,53	10,65	9,15
$\sigma_{g_{te}}$ in ton/cM <sup>2</sup> .			1,42	1,43	1,87

Wordt het moment  $M_e$  in een der verbindingen overschreden, dan zal het materiaal tot boven de vloeigrens worden belast, waarmede blijvende vormveranderingen gepaard gaan. Wordt nu de verbinding ontlast, dan zal de constructie niet geheel tot den ouden toestand terugkeeren; in de gevaarlijke punten ontstaan spanningen van tegengesteld teeken, terwijl op andere plaatsen een deel der door de belasting opgewekte spanning werkzaam blijft. Bij volgende belasting zullen in de gevaarlijke punten de spanningen weer tot hun vroegere waarden naderen, enz. Klaarblijkelijk



wordt het materiaal afwisselend op trek en druk belast; breuk is onvermijdelijk, wanneer de spanningswisseling te groot wordt.

Vóór dat wordt uitgemaakt, welke der berekende verbindingen de voorkeur verdient, is nog te onderzoeken, in hoeverre het inklemmingsmoment van de langsdragers, dat van de verbindingshoekijzers door de bouten in de lange beenen op 't lijf van den langsdruager wordt overgebracht, door groote stijfheid der verbinding te hoog zou kunnen worden. Dit moment kan worden berekend door het moment  $M$  te verminderen met  $\varrho a$ , als  $\varrho$  de vertikaalkracht in de verbinding is, en  $a$  de afstand van den dwarsdrager tot de hartlijn van de thans beschouwde boutverbinding.

Wordt  $\varrho = \frac{1}{2} \times L \times g = \frac{1}{2} \times 500 \times 0,0532 = 13,3$  ton en  $a = 10$  cM. gesteld, dan is  $\varrho \times a = 133$  ton cM., en wordt voor de verschillende verbindingen *VIa*; *VIb*; *VIc*; *VI d* en *VII* het moment

$$M_i = M - 133 \text{ ton cM.} \quad 344; 549; 374; 686 \text{ en } 583 \text{ ton cM.}$$

Het moment  $M_i$  moet door de boutverbinding op het lijf van den langsdruager worden overgebracht. De nagels in die verbinding hebben een diameter van 2,3 c.M. en bezitten dus voor elke boutsnede een schuifvlak van 4,15 cM<sup>2</sup>. Voor elk der beschouwde verbindingen is het totale traagheidsmoment van de nagelschuifvlakken ten opzichte van de as der verbinding,  $\mathfrak{J}_n$ , als volgt te berekenen:

$$VIa) \quad \mathfrak{J}_n = 2 \times 8,3 (3,5^2 + 7^2 + 10,5^2 + 14^2) = 6100,5 \text{ cM}^4, \\ \text{zoodat het weerstandsmoment}$$

$$W_n = 6100,5 : 14 = 436 \text{ cM.}^3$$

*VI b*) en *VI c*) Wordt de invloed van de onsymmetrisch gelegen bouten verwaarloosd, dan is het weerstandsmoment even groot als voor *VI a*, n.l.  $W_n = 436 \text{ cM}^3$ .

$$VI d) \quad \mathfrak{J}_n = 2 \times 8,3 (3,5^4 + 7^2 + 10,5^2 + 14^2 + 19,5^2) \\ = 12413 \text{ cM}^4. \text{ en}$$

$$W_n = 12413 : 19,5 = 637 \text{ cM.}^3$$

$$VII) \quad \mathfrak{J}_n = 2 \times 8,3 (3,5^2 + 7^2 + 10,5^2 + 14^2) + 2 \times 4,15 \times 19^2 \\ = 9096,8 \text{ cm}^4 \text{ en}$$

$$W_n = 9096,8 : 19 = 479 \text{ cm}^3.$$

Voor de verbindingen  $VIa$ ;  $VIb$ ;  $VIc$ ;  $VI d$ ;  $VII$  bedraagt dus de

$$\text{max. schuifspanning } t_n = \frac{M_i}{W_n} 0,787; 0,860; 0,899; 1,08; 1,22 \text{ ton/cm}^2.$$

Het moment  $M_i$  moet door den langsdrager, waar die met de lange beenen der hoekijzers is verbonden, worden opgenomen. Met uitzondering van  $VIa$  wordt bij de verbindingen de langsdrager daar ter plaatse aanzienlijk verzwakt. Bij de verbinding  $VI d$  komt het grootste moment  $M_i$  voor en is tevens de verzwaking het grootst.

Het weerstandsmoment van den langsdrager, waarvan alle flenzen zijn verwijderd, bedraagt:

$$W_{l_1} = \frac{1}{6} \times 1,71 \times 47,5^2 = 646 \text{ cm}^3,$$

zoodat de optredende buigspanning in den langsdrager voor verbinding  $VI d$ :

$$\sigma_{l_1} = \frac{M_i}{W_{l_1}} = \frac{686}{646} = 1,062 \text{ ton/cm}^2.$$

De spanningen, die in de andere verbindingen in den verzwakten langsdrager voorkomen, zijn alle kleiner.

Aangezien de spanningen  $t_n$  en  $\sigma_{l_1}$  laag zijn ten opzichte van de in de eerste tabel van dit hoofdstuk opgenomen spanningen, zijn ze bij vergelijking der deugdelijkheid der verbindingen van ondergeschikt belang.

Bij die vergelijking blijkt geenszins verbinding  $VII$  de voorkeur te verdienen. De verbinding  $VI d$  is in alle opzichten meer aanbevelenswaardig, maar ook  $VIc$  moet beter geacht worden. Voor het geval  $VII$  was de spanning  $\sigma_{i m}$ , die daarvoor lager werd

berekend dan voor *VIc*, niet bevredigend te benaderen, waarom daarvoor een globale waarde werd aangehouden, die zeer wel te klein kan zijn geraamd. De andere grootheden  $\sigma$ ,  $P_t$  en  $\sigma_{\mathfrak{A}_t}$  zijn voor de verbinding *VIc* kleiner dan voor verbinding *VII*. Bij deze laatste moet het een bijzonder nadeel worden geacht, dat de spanning  $\sigma_{\mathfrak{A}_t}$ , ver boven de evenredigheidsgrens is gelegen, zoodat het zeer waarschijnlijk is, dat niet alleen in het bovendeel maar ook in het naar beneden verlengde deel der verbinding de evenredigheidsgrens wordt overschreden. Een belangrijke factor is ook de optredende trekspanning in de bouten  $\sigma$ , aangezien de op trek belaste nagels zooveel neiging vertoonen los te werken. Ook met het oog daarop is verbinding *VIc* te verkiezen boven verbinding *VII*, terwijl ten slotte de onsymmetrie der verbinding *VII* er slechts aanleiding toe kan geven, dat de optredende spanningen in het linker en rechter deel der verbinding niet even hoog zijn, hetgeen zeker geen voordeel kan worden genoemd.

Het is bekend, dat in het algemeen het plotseling wijzigen van de doorsnede van een staaf, zooals dat met de langsdragers bij deze verbindingen geschiedt, aanleiding kan geven tot het ontstaan van scheuren. Tot nog toe kwam mij geen geval ter oore, dat in een verbinding, waarbij de helft der flenzen van den langsdragers is verwijderd, scheuren ontstonden, zelfs indien zulks geschiedde op de wijze als in fig. 35 aangegeven is. Veiliger zal het echter zijn een meer geleidelijken overgang der beide profielen tot stand te brengen, zooals fig. 36 aangeeft.

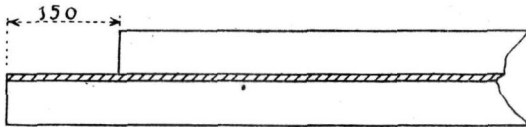


Fig. 35.

Worden voor de verbinding *VI d* de flenzen rechthoekig (volgens fig. 35) van den langsdragers afgenomen, dan zal de kans op

het ontstaan van scheuren grooter zijn, dan voor de verbinding *VII*, omdat het verschil in doorsneden grooter is. Wordt de verbinding *VI d* toegepast, dan is het raadzaam als eisch daarbij te stellen, de flenzen van den langsdrager af te nemen op de wijze als in fig. 36 voor ééne zijde is aangegeven, waarna de verbinding *VI d* boven alle andere te verkiezen zal zijn.

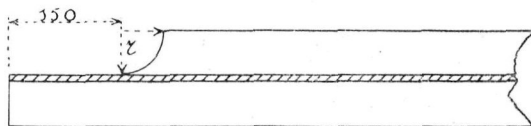


Fig. 36.

In de inleiding werd vermeld, dat de aanleiding tot het bestudeeren van dit onderwerp was, het vinden van scheuren in de verbindingshoekijzers van langs- aan dwarsdrager. Die verbindingen waren alle van het type *IV a*. De typen *IV b*, *IV c* en *IV d* zijn in de bruggen der S.S. op Java niet aanwezig, terwijl de verbinding *VII* slechts voorkomt in bruggen, die in de laatste 10 jaar werden geleverd. In deze verbindingen blijken geen scheuren te ontstaan.

Het aantal gescheurde hoekijzers in de verbindingen *IV a* zal  $\pm 5\%$  bedragen van het aantal verbindingen, dat onderzocht werd. Is dat, van den eenen kant beschouwd, een respectabel aantal, ook met het oog op den arbeid, die aan een verbetering verbonden is, zoo blijkt aan den anderen kant, dat in het algemeen zulk een verbinding, waarvoor een buigspanning van tusschen de 4 en 5 ton/cm<sup>2</sup>. wordt berekend, zich zoodanig zet, dat bij de daarna optredende positieve en negatieve spanningen de spanningswisseling niet tot een breuk voert.

Voor het ontstaan van scheuren moeten dus nog bijzondere oorzaken aanwezig wezen, die zijn:

- 1<sup>e</sup>. slechte materiaalkwaliteit en
- 2<sup>e</sup>. minder zorgvuldige montage,

welke oorzaken één van beide dan wel gecombineerd kunnen vóórkomen.

Het leveren van slecht materiaal moet bij de keuring worden voorkomen. Voor de hoekijzers, die voor de hier besproken verbindingen worden gebruikt, is het wenschelijk het materiaal in het bijzonder dwars op de walsrichting te onderzoeken.

Als tweede oorzaak werd de minder zorgvuldige montage genoemd, waarmede bedoeld wordt de montage van die bruggen, waarbij het rijvlak ondergelegen is en de dwarsdragers niet zijn opgelegd, maar vast met de knooppunten van de hoofdliggers zijn verbonden. De berekening van hoofdstuk V werd opgezet in de onderstelling, dat er geen normale krachten in de langsdragers zouden optreden; het behoeft geen nader betoog, dat het voor de verbinding zeer ongunstig moet zijn, behalve het berekende moment bovendien een trekkracht te moeten opnemen.

Wordt een brug zoodanig gemonteerd, dat in onbelasten toestand de staven van den onderrand en de langsdragers een even groote lengte hebben, en de dwarsdragers dan zuiver recht zijn, dan zullen bij belasting der brug, zooals bekend is, de onderranden worden uitgerekt, waarbij door de dwarsdragers, die zelve daarbij dan een buiging zullen ondergaan, op de langsdragers trekkrachten worden overgebracht, waarvan een gedeelte, dat met de mobiele belasting samenhangt, telkens weer verdwijnt. Die trekkrachten belasten de hoekijzerverbindingen in de gevaarlijke punten in denzelfden zin als het moment  $M$  en werken er dus toe mede, in de verbinding de spanningswisseling gevaarlijk te doen worden.

*Er zij hier even op gewezen, dat voor een eventueele bepaling dier trekkrachten, niet zal mogen worden gerekend, alsof de verbinding van langs- aan dwarsdragers vast ware. Bij de berekening is de vormverandering van de hoekijzerverbindingen in rekening te brengen en zal de geringe stijfheid dier verbinding oorzaak zijn, dat voor die trekkrachten veel kleinere waarden worden gevonden dan thans algemeen aangenomen wordt, dat erin vóórkomen (zie Hoofdstuk III).*

Wordt tijdens de montage de brug zóódanig in elkaar geklonken,

dat in onbelasten toestand de onderranden langer zijn dan de langsdragers, dan worden de op de langsdragers later over te brengen trekkrachten uit den aard der zaak grooter.

Die fout nu is bij de oudere bruggen op Java begaan, wat nog te zien is aan het doorhangen dier bruggen, en het schijnt wel, dat dit als laatste oorzaak van het ontstaan der scheuren moet worden aangemerkt. Toen de verbindingen werden losgemaakt en de hoekijzers verwisseld, werden de trekkrachten in de langsdragers en in die verbindingen, terwijl de brug door zijn eigen gewicht belast was, tot nul teruggebracht. Dat is gebleken voldoende te zijn om in den vervolge scheuren te voorkómen.

Het is mogelijk op een wijze te monteeren, dat er bij belaste brug in het geheel geen trekkrachten van de onderranden op de langsdragers worden overgebracht. Zooals bekend is wordt een brug over het algemeen in een zeeg gemonteerd (d. w. z. in eenigszins opgebogen stand), om te verkrijgen, dat de brug in volbelasten toestand, wat het stavenstelsel betreft, zoo nauw mogelijk overeenkomt met het systeem, waarvan bij de berekening werd uitgegaan.

Te dien einde moet men eischen, dat de gedrukte staven zooveel te lang worden aangemaakt, als met hunne indrukking in volbelasten toestand overeenkomt en de getrokken staven zooveel te kort worden aangemaakt, als met hunne uitrekking overeenkomt. Die staven met veranderde lengten passen slechts dán goed in elkaar, zoo de onderrand in een eenigszins opgebogen stand geplaatst wordt. Op de langsdragers wordt een dergelijke herleiding der lengte niet toegepast, zoodat dan bij bruggen met ondergelegen rijvlak de gezamenlijke langsdragers langer dan de gezamenlijke onderranden op de bouwplaats worden aangevoerd.

Men moet er nu naar streven dit verschil in lengte tijdens de montage te behouden door de volgende regels in acht te nemen \*):

\*) Deze regels zijn ontleend aan Art. 30 van het reglement 10 der Staatsspoorwegen op Java van het jaar 1910. Slechts dié voorschriften zijn overgenomen, die op de hier behandelde kwestie betrekking hebben.

### I. Algemeene bepalingen.

2. Verbindingen moeten met behulp van eenige stalen driften, die zuiver in de klinknagelgaten passen, zoo nauwkeurig mogelijk overeenkomstig de teekening worden gesteld, waarna elk tweede gat van een vast aan te draaien stelbout wordt voorzien.

3. De verbindingen worden daarna geklonken, de opengebleven gaten eerst; de stalen driften worden eerst verwijderd nadat een voldoende aantal nagels afgeklonken is, zoodat geen verschuiving in de verbinding meer kan plaats hebben.

### III. Vakwerkbruggen.

(De wijdte van deze bruggen is in den regel grooter dan 18 M.)

1. Deze bruggen moeten in een zeeg worden gemonteerd, zooals die op de teekening is aangegeven. Deze zeeg wordt verkregen door het verschil in hoogteligging der tijdelijke ondersteuningspunten, die in den regel onder de knooppunten worden geplaatst. De hoogte der steunpunten moet zoodanig zijn, dat de aslijn van de onderranden den stand aanneemt, zooals die op de teekening is aangegeven. Alleen in dien stand van den onderrand passen de deelen van den hoofdligger in elkander.

2. Het is noodzakelijk om tijdens den geheelen duur der montage de juiste hoogteligging van den onderrand te onderhouden.

Geregelde waterpassingen moeten worden uitgevoerd om te zien, of wijziging in de hoogteligging der steunpunten noodig is.

3. Bij het opstellen der hoofdliggers moet er nauwkeurig op worden gelet, dat de verbindingen goed in elkander worden gesteld.

Men moet dat bewerkstelligen door de staven eenigszins te wringen middels het inslaan van zuiver passende stalen driften in de klinknagelgaten der verbindingen, welke driften zoo ver mogelijk uit elkander moeten worden geplaatst, teneinde te bereiken, dat,

ook dáár, waar het daartoe noodige moment eenige waarde bezit, met geringe krachten (drukkingen tegen de zijvlakken van de boutgaten) kan worden volstaan.

4. Eerst na het inslaan van die driften zijn in het algemeen de bij de bruggen geleverde stelbouten, die kleiner diameter hebben dan de klinknagelgaten, om het andere gat aan te brengen en stevig aan te draaien.

5. De driften mogen niet eerder worden verwijderd, dan nadat een voldoende aantal nagels in de verbinding is afgeklonken, zoodat geen verschuiving der verbindingsdeelen ten opzichte van elkander meer kan plaats hebben.

6. Door die werkwijze worden goed aansluitende verbindingen verkregen en moet getracht worden in de staven zoodanige secundaire spanningen op te wekken, dat zij ten opzichte van de — bij het gebruik optredende — secundaire spanningen een negatief teeken vertoonen.

7. Bijzondere aandacht dient te worden geschonken aan de omstandigheid, dat bij vakwerkbruggen de totale lengte van de langsdragers afwijkt van de terzelfder hoogte gelegen randen der hoofdliggers.

Bij bruggen met ondergelegen rijvlak is de totale lengte der onderranden kleiner dan die der langsdragers; bij bruggen met bovengelegen rijvlak zijn de aaneengesloten bovenranden langer dan het rijvlak.

Bij het opstellen van bruggen, waarbij de langsdragers middels de dwarsdragers krachten op de onderranden of bovenranden kunnen overbrengen, heeft dus het rijvlak bij bruggen met ondergelegen rijvlak neiging de verbindingen van de onderranden uit elkaar te trekken, terwijl bij de bruggen met bovengelegen rijvlak de verbindingen van langs- met dwarsdragers uit elkander zullen worden getrokken.



Bij de bruggen met ondergelegen rijvlak is het daarom aan te bevelen om, indien de constructie het toelaat, de lasschen van de onderranden te klinken, alvorens de langs- en dwarsdragers in te brengen.

Bij de bruggen met bovengelegen rijvlak zal men in het algemeen de verbindingen van langs- met dwarsdragers eerst vastklinken, nadat de brug van zijn tijdelijke steunpunten is gelicht en alleen nabij de eindknooppunten ondersteund is.

8. Het verdient aanbeveling de knoopplaten aan de onderranden van de brug, die tijdens de montage de geheele ijzerconstructie te dragen krijgen, reeds dadelijk aan de onderranden vast te klinken, om verschuiving tegen te gaan. Wordt deze werkwijze niet gevolgd, dan zal men een voldoende aantal passende stalen driften toepassen, opdat verschuiving niet kunne optreden.

Zou het mogelijk zijn, volgens dit voorschrift te werk gaande, de verbindingen volkomen zuiver te doen passen, dan zouden onder alle omstandigheden slechts drukkrachten in de langsdragers kunnen optreden en zouden die krachten kleiner worden, naarmate de belasting meer nadert tot die, waarop de brug berekend is. Men kan echter niet verwachten, dat het oorspronkelijk aanwezige verschil in lengte tusschen de langsdragers en de onderranden geheel behouden blijft, in dien zin, dat bij volbelaste brug de lengten dier beide constructiedeelen precies gelijk zouden zijn, zonder dat de langsdragers meer worden uitgerekt. Immers alle, in de verschillende verbindingen vóórkommende, kleine spelingen, die men toch niet geheel zal kunnen vermijden, zijn oorzaak, dat het oorspronkelijk aanwezige verschil geringer wordt. Men zou dus altijd nog het optreden van geringe trekkrachten in de langsdragers en in de verbindingen kunnen verwachten, ware het niet, dat door het afbuigen der langsdragers van de dwarsdragers ook 'de afstand dezer laatste bij belasting van de langsdragers grooter wordt, zie

fig. 29, zonder dat daarbij normale krachten in de langsdragers worden opgewekt.

Bij beschouwing van de uiteinden der lengteas van den langsdruager blijkt in het algemeen:

voor de typen  $IVa; IVb; IVc; IVd$  en  $VII$   
 die afstandsvermeerdering  
 te zijn:  $2 \times \frac{1}{2} h \alpha_h$  en  $2 \times \left( \frac{1}{2} h + \frac{1}{3} h_1 \right) \alpha_h$ ;

met de op bladz. 119 gegeven getallen wordt dit:

voor de verbindingen  $VIa; VIb; VIc; VI d$  en  $VII$   
 een afstandsvermeerdering van 0,052; 0,035; 0,045; 0,031 en 0,039 cM.

Bij een zorgvuldige montage behoeven de bovengenoemde onvermijdelijke spelingen deze bedragen niet te overschrijden, zoodat dan de beide invloeden elkaar ongeveer opheffen.

Het verschil, dat tusschen de op het werk aangevoerde langsdragers en onderrandstaven bestaat, kan voor een veldlengte van 500 cM., die voor de toepassingen werd aangehouden, in het ruwe gesteld worden op de uitrekking van een staaf van 500 cM. lengte, zoo die belast wordt, tot een bruto spanning van  $\pm 0,8$  ton/cM.<sup>2</sup> optreedt, dus op  $\pm 0,20$  cM.

Bij de afname van bruggen is erop te letten, dat bovenbedoeld verschil, dat zich bij een brug van 50 M. lengte aan de beide einden zou sommeeren tot 1,0 cM., werkelijk in onbelasten toestand aanwezig is, terwijl het de taak van den monteur is, te zorgen, dat tijdens het monteeren de voordeelen, welke met dat verschil in verband staan, zooveel mogelijk behouden blijven. --

STELLINGEN.

## STELLINGEN.

---

### I.

De berekening der raillassen door Dr. H. ZIMMERMANN is slechts juist voor geringe raddrukken, korte laschplaten en groote speelruimten tusschen rails en laschplaten in vertikalen zin; bij de lussen met lange laschplaten, zooals tegenwoordig algemeen toegepast worden, verkrijgen de rails en de laschplaten meer aanrakingspunten dan in de theorie van ZIMMERMANN wordt aangenomen.

### II.

Bij een verbeterde berekening blijkt een lasch over het algemeen stijver te zijn (d. w. z. de drukverdeeling over de dwarsliggers gelijkmatiger) dan de berekening van ZIMMERMANN aangeeft.

### III.

Aan het gebruik van lange raillaschplaten is het nadeel verbonden, dat een op de rail komend rad tegen den opgeheven railkop stoot; in de berekening blijkt dit, doordat de druk van het nog niet belaste raileinde op de laschplaten een negatieve waarde verkrijgt.

### IV.

Voor de sub III bedoelde druk wordt bij de verbeterde berekening voor een bepaalde laschconstructie te eerder een negatieve waarde gevonden, naarmate de raddruk minder groot en de ballast minder samendrukbaar (de ballastcoëfficiënt hooger) is; dit is in overeenstemming met de ondervinding (het stooten van lichte rijtuigen op de baan, en het stooten van alle voertuigen op bruggen).

## V.

Het is daarom wenschelijk, het thans algemeen gebruikte type van laschplaten niet te lang te nemen.

## VI.

Het in de derde stelling bedoelde euvel wordt ondervangen, door in stede van de rails de laschplaten op de laschdwarsliggers of den laschdwarsligger te doen steunen en den railvoeten geen steun te geven.

## VII.

De normale dwarsliggerlengte, dat is de lengte, waarbij de door de rails uitgeoefende druk zooveel mogelijk gelijkmatig over den ballast wordt verdeeld, is voor elke spoorwijdte iets kleiner dan het dubbele dier spoorwijdte.

## VIII.

Heeft men voor een zekere spoorlengte een bepaalde totale lengte aan dwarsliggers beschikbaar, dan is de keuze van een kleinere dan de normale dwarsliggerlengte een voordeel voor de rail en een nadeel voor den ballast, terwijl de keuze van een grootere dwarsliggerlengte nadeelig is zoowel voor de rail als voor den ballast.

## IX.

Het is niet rationeel, bij het theoretisch onderzoek naar den invloed, dien een vermindering van den dwarsliggerafstand op den maximalen ballastdruk zal hebben, met den dwarsliggerafstand ook den radstand te doen afnemen, zooals vaak gebruikelijk is.

## X.

Indien op een baan drie-assige locomotieven rijden, waarvan de totale radstand ongeveer gelijk is aan drie dwarsliggerafstanden, dan is door verzwaring van het railprofiel slechts geringe vermindering van den ballastdruk te verkrijgen, en moet daartoe de dwarsliggerafstand worden verkleind.

## XI.

De railbevestiging, toegepast bij den bovenbouw voor hoofdlijnen der Staatsspoorwegen op Java, Model 1909, waarbij de rail en de onderlegplaat door middel van drie centraal belaste tirefonds en eenigszins veerende klemplaten op den houten dwarsligger worden bevestigd, is zeer doelmatig.

## XII.

Indien in een brug de bovenflenzen van de langsdragers door koppelplaten zijn verbonden en de bevestiging aan de dwarsdragers bovendien geschiedt door middel van hoekijzers, die de lijfplaten der beide deelen verbinden, dan zal bij het opnemen van het moment de hoekijzerverbinding zoo weinig voor haar rekening nemen, dat haar invloed daarbij wel verwaarloosd kan worden. De koppelplaten moeten dus voldoende sterk en voldoende aangesloten zijn, om het geheele overgangsmoment op te nemen.

## XIII.

Voor bruggen, die zonder zeeg worden opgeleverd en waarbij de dwarsdragers vast met de hoofdliggers zijn verbonden, is het wenschelijk, in het ontwerp de lengte der langsdragers iets van de systeemplengte te doen afwijken in dien zin, dat in onbelasten toestand spanningen worden opgewekt, die tegengesteld zijn aan en in absolute waarde kleiner zijn dan de anders bij belasting opgewekte secundaire spanningen.

## XIV.

Het is verkeerd, bij den aanmaak van een brug de gaten in de verbindingen van de dwarsdragers met de hoofdliggers met geringen diameter voor te ponsen en ze eerst tot den definitieven diameter op te boren (z. g. doorboren), nadat de brug met het rijvlak voorloopig is ineengezet.

## XV.

In afwijking van de thans algemeen gevolgde regels bij het monteeren van bruggen is het wenschelijk, de langs- en wind-

verbanden, waarin secundaire trekkrachten worden opgewekt, vast te klinken, alvorens de brug door zijn eigen gewicht wordt belast.

## XVI.

Een montage-uitvoering van een zonder zeeg op te leveren GERBERbrug, waarbij tijdens den vrijuitbouw zonder nadere overwegingen de theoretische steunpunten van de beide landoverspanningen in een plat vlak worden gelegd en de verhooging in het midden, die vóór het inbrengen der laatste staven aanwezig moet zijn, wordt verkregen door het geven van een bepaalde lengte aan de naderhand buiten gebruik te stellen staven, die in de middenoverspanning boven de scharnieren zijn gelegen, moet worden afgekeurd.

## XVII.

Bij den aanleg van lijnen, die een groote toekomst hebben en waarvan te voorzien is, dat over eenige tientallen van jaren het railprofiel zal worden verzwaard, is het raadzaam bij het ontwerpen van wissels reeds dadelijk de puntstukken langer te maken dan noodzakelijk is, ten einde naderhand geen last te hebben bij het verwisselen van den bovenbouw.

## XVIII.

Bij eindportalen van bruggen, die dienen om de krachten van het bovenwindverband naar de beneden-knooppunten over te brengen, kan voor de meeste in de praktijk voorkomende gevallen de plaats der buigpunten in de stijlen op eenvoudige wijze met behulp van de lengte-afmetingen der staven en onafhankelijk van hunne doorsneden worden bepaald, zonder daarbij meer dan 2,5 0/0 fout te maken.

## XIX.

Een voorschrift, dat, ten einde de veiligheid van gedrukte staven te verzekeren, slechts een bepaalde zekerheid volgens de formule van EULER eischt, moet onvolledig worden geacht.

## XX.

Voor een spoorwegmaatschappij in overzeesche gewesten is het raadzaam zich reeds tijdens den aanleg der lijn een stel weloverwogen type-teekeningen te laten maken van de te bezigen wissels, die zooveel mogelijk uit dezelfde onderdeelen moeten worden samengesteld, en van die types niet zonder noodzaak af te wijken.

## XXI.

Voor een bureau, belast met de beoordeeling van de zekerheid van nog uit te voeren ontwerpen, mag het een rationeele werkwijze geacht worden, de goedkeuring voor de uitvoering te weigeren, indien door den ontwerper niet bevredigend de voldoende sterkte kan worden aangetoond.

## XXII.

Het is wenschelijk, dat de Nederlandsch-Indische Regeering van de thans opkomende neiging der inlanders, zich te bekwamen voor betrekkingen, die tot nog toe alleen door Europeanen werden waargenomen, gebruik maakt, om zich van goedkoopere arbeidskrachten te voorzien; en een voor alle takken van dienst geldende bepaling máakt, waarin de verhouding wordt vastgelegd van de aan inlander en aan Europeaan toe te kennen bezoldiging voor de waarneming van dezelfde betrekking.

## XXIII.

Bij het in vasten dienst nemen van inlandsch personeel voor de onder XXII bedoelde betrekkingen zal het met het oog op het verschil in bezoldiging van Europeanen en inlanders wenschelijk zijn, het corps inlandsche ambtenaren afgescheiden te houden van dat der Europeesche ambtenaren.

---



