

HANDLEIDING BIJ EENHEID 9,10,11,

HANDLEIDING BIJ EENHEID 9

HYDROSTATICA EN VLOEISTOFBERGING

INHOUD

INHOUD	blz. 9.01
SAMENVATTING	9.02
DOELSTELLINGEN	9.03
DIKTAATGEDEELTE, SUGGESTIES EN STUDIEVRAGEN	9.05
1. INLEIDING	9.05
water als voorbeeld	9.06
waterhuishouding	9.07
2. HET VAT-MODEL	9.09
definities	9.09
dichtheid	9.11
3. BEHOUD VAN MASSA	9.15
communicerende vaten	9.15
massastroom	9.17
debiet	9.21
4. HYDROSTATIKA	9.22
spanning, normaal- en schuifspanning	9.22
isotrope druk	9.24
hydrostatische drukverdeling	9.26
stijghoogte	9.29
5. GRAVITATIE BERGING	9.31
6. KOMPRESSIBILITEIT	9.34
kompressiemodulus	9.34
voorbeeld	9.35
elastische berging	9.36
BEWERINGEN	9.39
VRAAGSTUKKEN	9.42
ANTWOORDEN OF AANWIJZINGEN BIJ STUDIEVRAGEN	9.50
ANTWOORDEN NA AANWIJZINGEN BIJ STUDIEVRAGEN	9.60
KOMMENTAAR OP DE BEWERINGEN	9.63
UITWERKING VAN DE VRAAGSTUKKEN	9.67
ADVIEZEN TOETS 9	9.91

SAMENVATTING

In deze eenheid houden we ons bezig met hydrostatica: we bestuderen vloeistoffen of gassen waarvan de snelheid gelijk aan nul gesteld mag worden. We zullen onderzoeken welke krachten er in een stilstaande vloeistof werken en daaruit een formulering voor de drukverdeling afleiden.

Daarbij komt aan de orde wat de invloed van de dichtheid van de vloeistof is op de drukverdeling. Bij de afleiding van een aantal grootheden wordt gebruik gemaakt van de wet van behoud van massa. Aan deze wet wordt daarom een aparte paragraaf gewijd.

In de eenheid worden tevens een aantal begrippen geïntroduceerd, die noodzakelijk zijn om later te behandelen stromingssystemen (bijv. waterlopen, waterleidingnet, riolering etc.) te beschrijven. Veel van wat in deze eenheid voorkomt zal u bekend zijn: een aantal onderwerpen is reeds op de middelbare school behandeld. Het is echter van groot belang te letten op de manier waarop grootheden worden afgeleid, omdat in de volgende eenheden een analoge werkwijze gevolgd wordt.

Voor de bestudering van deze eenheid is kennis van het oplossen van oppervlakte- en volume-integralen en van (eenvoudige) differentiaalvergelijkingen noodzakelijk (zie wiskunde Analyse 1 en 2)

Vrijwel alle leerstof van de eenheid is in deze studiehandleiding opgenomen: er wordt alleen (eenmaal) verzezen naar eenheid 1: "voorbereiding".

DOELSTELLINGEN

1. Onderscheid kunnen maken tussen het lichaamsmodel en het vatmodel voor een hoeveelheid materie;
2. Onderscheid kunnen maken tussen vatonderdelen zoals: (vaste) wand, scheidingswand, toegang, grensvlak, bodem en (vloeistof-) spiegel en vatgrootheden zoals: volumen, massa-voorraad, (gravitatie-)berging, elastische berging en klokberging;
3. Onderscheid kunnen maken tussen speciale vaten zoals: deelvast, kom of bekken, klok, communicerend vat, (ideaal) stroomvoerend vat, leiding;
4. Een stroming(ssysteem) kunnen beschrijven (schematiseren) m.b.v. de begrippen en grootheden uit de doelstellingen 1, 2 en 3;
5. Definities kennen van de grootheden die de materie-hoeveelheid en/of materie-samenstelling in een vat vastleggen zoals: volumen, massa(-voorraad), homogene samenstelling, gelijkmatige of uniforme massa-verdeling, continue massa-verdeling, (gemiddelde) dichtheid en plaatselijke dichtheid;
6. Voor een vat of combinatie van vaten de onder doelstelling 5 gedefinieerde grootheden kunnen berekenen en de onderlinge verbanden kunnen aangeven;
7. Uit een (grafisch) gegeven 2- of 3-dimensionale dichtheidsverdeling de plaatselijke dichtheden kunnen afleiden;
8. Definities kennen van de grootheden die de veranderingen van materie-hoeveelheden of materie-samenstelling in een vat vastleggen zoals: stromingswisselwerking, (totale) massa-stroom of massa-flux, massabalans en (totale) debiet of volumenstroom (volumenflux);

9. Voor een vat of combinatie van vaten de onder doelstelling 8 gedefinieerde grootheden kunnen berekenen en de onderlinge verbanden kunnen aangeven;
10. Onderscheid kunnen maken tussen volumeen- en oppervlakte interacties ($\sim$ krachten) in vloeibare en/of gasvormige materie;
11. De begrippen normaalspanning, schuifspanning, (isotrope) druk, stijghoogte, (on-)samendrukbaarheid en kompressiemodulus kennen;
12. De wet van Pascal kunnen afleiden voor een stilstaande vloeistof (gas);
13. De drukverdeling in en de stijghoogte voor een stilstaande vloeistof (gas) kunnen berekenen;
14. Krachten kunnen berekenen op vlakken, wanden en lichamen die geheel of gedeeltelijk ondergedompeld zijn in een stilstaande vloeistof met een konstante dichtheid;
15. De (gravitatie-)bergingsvergelijking kunnen afleiden en weten onder welke voorwaarden de vergelijking geldt;
16. De drukverdeling kunnen berekenen in bekkens waarin de massavoorraad of de dichtheid langzaam met de tijd verandert.
M.b.v. deze drukverdeling krachten op wanden en lichamen kunnen berekenen;
17. De elastische- en de klok bergingsvergelijking kunnen afleiden en weten onder welke voorwaarden deze vergelijkingen gelden.

DIKTAATGEDEELTE, SUGGESTIES EN STUDIEVRAGEN

1. INLEIDING

Eenheid 9 is de eerste van een viertal eenheden, te weten de eenheden 9, 10, 11 en 12, die tot onderwerp hebben de *stromingsmechanika*.

Onder stromingsmechanika wordt hier verstaan dat deel van de mechanika dat zich bezig houdt met de bewegingen van en de krachten in en op stromende vloeistoffen en gassen.

Vloeistoffen en gassen hebben in hun mechanisch gedrag veel met elkaar gemeen. Zij zijn onbeperkt vervormbaar en praktisch eindeloos verdeelbaar. De mechanika van stromende vloeistoffen en de mechanica van stromende gassen vallen dan ook voor een belangrijk deel samen.

Opm.: De naam *stromingsmechanika* is hier gekozen als alternatief voor *vloeistofmechanika* in de zin van wat in het Engels *fluid mechanics* wordt genoemd. Het Nederlands kent alleen de termen *vloeistof* en *gas*, die overeenkomen met *liquid* en *gas* in het Engels.

Fluid is in het Engels een verzamelnaam voor vloeistoffen en gassen. Onder *fluid mechanics* valt dus te verstaan de mechanika zowel van vloeistoffen als van gassen, dus ongeveer wat hier met *vloeistofmechanika* of *stromingsmechanika* wordt bedoeld.

In de civiele techniek krijgen we te maken met stromingen zowel van vloeistoffen als van gassen, zoals uit enige voorbeelden moge blijken.

In de tot dusver gebruikte naam *weg- en waterbouwkunde* voor de civiele techniek komt reeds tot uitdrukking dat het water een belangrijk onderwerp van studie voor de civiel-ingenieur is. Niet alleen in de waterbouwkunde en hydrologie, maar ook in de gezondheidstechniek wordt veel aandacht besteed aan de mechanika van het stromende water. We treffen dit aan in kustwateren, rivieren, kanalen, watervoerende grondlagen, waterleidingen en rioleringen, enz.

Het stromende water vormt een belangrijk transportmechanisme voor milieufactoren in de vorm van opgeloste en zwevende stoffen (zout, zuurstof, organismen), warmte (koelwarmte van centrales!) en dergelijke, als ook voor bodemmateriële als zand en slib.

Daarnaast is ook de mechanica van stromende lucht voor de civiel-ingenieur van belang. Hij krijgt hiermee te maken bij de ventilatie van gebouwen en tunnels en ook bij de windbelasting op hoge gebouwen.

Bij de voor de waterbouwkunde belangrijke waterbewegingen van stormvloed en windgolven, speelt de wisselwerking tussen lucht en water een essentiële rol, waarbij dus de mechanica van beide stromende media bestudeerd moet worden.

BEHANDELING VAN DE STROMINGSMECHANICA IN DEZE KURSUS

HERLEES: PAR. 5 VAN EENHEID 1.

De in deze cursus te behandelen stromingsmechanica vormt een inleiding tot later uitvoeriger te behandelen gedeelten van de vloeistofmechanica. We zullen ons daarom in deze cursus twee belangrijke beperkingen opleggen.

In de eerste plaats richten we onze aandacht voornamelijk op een *diskrete* behandeling. De *kontinuiteit* van de stromende *materie* komt daarom slechts ter sprake in zoverre als dit voor een goed begrip van diskrete stromings-systemen onmisbaar is.

In de tweede plaats kiezen we voor de beschrijving van de bewegingen de methode die uitgaat van de *diskretisering* van de *ruimte*. We gaan dus uit van het begrip *vat*. Het lichaamsmodel komt alleen ter sprake voorzover dit voor een goed begrip van het vatmodel nodig is.

Opm.: Bij de mechanica van de continue materie onderscheidt men eveneens twee methoden, die van Lagrange en die van Euler. De methode van Lagrange sluit aan op het lichaamsmodel en die van Euler sluit aan op het vatmodel. De in deze cursus te volgen behandeling van de stromingsmechanica vormt dus een voorbereiding voor de Euler-methode in de vloeistofmechanica.

Water als voorbeeld

De stromingsmechanica vindt in de civiele techniek vooral toepassing bij allerlei problemen met betrekking tot water. Het ligt daarom voor de hand onze aandacht vooral op het stromende water te richten.

We ontwikkelen daarom een systematische behandeling van de stromingsmechanica met water als voorbeeld van stromende materie. Dezelfde systematische behandeling kan echter ook worden toegepast op andere stromende stoffen, bv. olie of lucht.

De systematische behandeling omvat ten eerste een nadere bepaling van het begrip *stroom* en ten tweede het aangeven van de oorzaken voor het optreden van stro-

mingen, d.w.z. het analyseren van krachten in onderling verband. Voor een nadere bepaling van het begrip stroom kunnen we heel wel aanknopen bij een korte beschouwing over *waterhuishouding*.

Waterhuishouding

Water van voldoende goede kwaliteit vormt één der belangrijkste grondstoffen waarvan het voortbestaan van een samenleving afhankelijk is.

De gebruiker die water uit de kraan laat lopen, betreft dit water uit een voorraad die is opgeslagen in een watertoren, in opvangbekkens e.d., die op hun beurt weer worden aangevuld uit watervoerende grondlagen, rivieren, regenval enz. De civiel-ingenieur die voor de watervoorziening verantwoordelijk is, zal zich van de herkomst van het water terdege rekenschap moeten geven. Hij zal zich daarom bezig moeten houden met het kwantificeren van de toe- en afname van watervoorraden en met de hoeveelheden water die van de ene voorraad naar de andere overgaan.

Dit geldt niet alleen voor de waterhoeveelheden die aan de natuur onttrokken worden t.b.v. huishoudelijk, agrarisch, industrieel of ander maatschappelijk gebruik, maar ook voor de hoeveelheden die als afvalwater weer aan de natuur worden teruggegeven. Immers, dit afvalwater kan, vooral in grote hoeveelheden, ontoelaatbare schade aan het natuurlijke milieu toebrengen en bovendien, via de kringloop van het water in de natuur, weer bij de bronnen van de watervoorziening terugkeren en deze verontreinigen.

Bovendien krijgen we in de civiele techniek te maken met hoeveelheden water uit de natuur, zoals zeewater, die door riviermonden, zeesluizen of als zoute kwelstroming door de grond heen, in polders en zoetwatermeren kunnen binnendringen en daardoor de kwaliteit van het zoete water kunnen aantasten.

Het water waar we voor de waterhuishouding in geïnteresseerd zijn, is feitelijk steeds in beweging. We kiezen om deze beweging te beschrijven, een opzet die uitgaat van het onderscheiden van een aantal voorraadruimtes. Deze worden behandeld m.b.v. het *vat-model*. De beweging van het water wordt dan beschreven door de overdrachten van waterhoeveelheden in verloop van tijd tussen de verschillende vaten.

In een globale beschouwing kiezen we als vaten de zichzelf daarvoor min of meer vanzelfsprekend aanbiedende voorraad ruimtes zoals meren, opslagbekkens, tanks e.d. Voor een meer gedetailleerde beschrijving kunnen we die voorraad ruimtes onderverdelen in een aantal kleinere *vaten*, bijvoorbeeld door het aanbrengen van denkbeeldige verticale of horizontale vlakken die de ruimtes in kompartimenten verdelen.

In de praktijk wordt een hoeveelheid water vaak als een *volumen*, bepaald en dus b.v. uitgedrukt in de eenheid m^3 .

In principe is het echter beter om uit te gaan van de *massa*, omdat het *volumen* van een hoeveelheid water niet konstant is. Immers, het *volumen* kan veranderen door *uitzetting* of *inkrimping* afhankelijk van de *temperatuur* en door *kompressie* of *ekspansie* onder invloed van veranderingen in *druk*. Bovendien kan water b.v. van de *vloeibare fase* in de *dampfase* overgaan of omgekeerd en daarbij verandert het *volumen* aanzienlijk. Bij al die *volumen*-veranderingen behoudt de beschouwde hoeveelheid water steeds dezelfde *massa*. We zullen dus uitgaan van de wet van *behoud van massa* en deze toepassen m.b.v. het vat-model.

De toepasbaarheid van deze methode is niet beperkt tot waterhuishoudingsproblemen. Ook bijvoorbeeld bij de berekening van waterstand variaties door getijden en stormvloeden en de daarbij optredende stromingen kan de te behandelen methode worden gebruikt, omdat deze in wezen op een zeer algemene grondgedachte berust.

We werken nu eerst het vat-model nader uit en daarna gaan we verder in op de wet van behoud van massa, zoals die op vaten kan worden toegepast.

HET VAT-MODEL

We beginnen met de eerder (in eenheid 1) ingevoerde begrippen lichaam en vat nauwkeuriger te definiëren om de overeenkomsten en verschillen beter te laten uitkomen.

Definitie 9.1.: Een lichaam is een zichzelf blijvende, beperkte hoeveelheid materie, die een deel van de fysische ruimte kan innemen

Toelichting: Bij het toepassen van het lichaamsmodel beschouwen we een hoeveelheid (b.v. vaste) materie die zijn identiteit behoudt b.v. doordat het steeds door dezelfde molekulen wordt gevormd. De door de materie ingenomen ruimte kan echter met de tijd veranderen. De beweging van de materie wordt beschreven door na te gaan hoe de door het lichaam ingenomen ruimte met de tijd verandert.

Definitie 9.2.: Een vat is een zichzelf blijvend, begreënsd deel van de fysische ruimte, die een hoeveelheid materie kan bevatten.

Toelichting: Bij het toepassen van het vatmodel beschouwen we een deel van de fysische ruimte dat zijn identiteit behoudt, b.v. doordat het steeds dezelfde begrenzing in de fysische ruimte heeft. De door die ruimte bevatte materie kan echter met de tijd veranderen. De beweging van de materie wordt beschreven door na te gaan hoe de door het vat bevatte materie met de tijd verandert.

Studievraag 9.1.: Iemand schenkt water in een drinkglas.

Ga na hoe het drinkglas kan worden opgevat als een vat-model in de zin van d. 9.2 en ga na op welke wijze m.b.v. dit model iets gezegd kan worden over de beweging van het water.

We gaan nu nader in op de aard van de begrenzing van een vat i.v.m. het al of niet doorlaten van materie het vat in of uit.

Definitie 9.3.: Een (vaste) wand van een vat is de (door vaste materie gevormde) begrenzing of een gedeelte van de begrenzing van het vat, waardoorheen geen materie in of uit het vat kan stromen.

Definitie 9.4.: Een toegang van een vat is de begrenzing of een gedeelte van de begrenzing van het vat, waardoorheen materie in of uit het vat kan stromen.

Studievraag 9.2.: Ga na welke wand of wanden bij het drinkglas van de vorige studievraag zijn te onderscheiden en welke toegang of toegangen.

Onder het *volumen* van het vat verstaan we de grootte van de ruimte die door het begrenzende oppervlak wordt omsloten. Dit volumen is konstant indien de wanden en toegangen ten opzichte van elkaar onveranderlijk van plaats zijn. In de praktijk zullen we zo veel mogelijk met dergelijke vaten werken, omdat de berekeningen dan het eenvoudigst blijven.

De totale massa van de materie die zich in het vat bevindt, noemen we de *massa-voorraad* m van het vat. Deze kan in verloop van tijd veranderen, doordat materie door een toegang heen het vat in - of uit kan stromen.

De materie in een vat kan *homogeen* zijn, d.w.z. de chemische en/of fysische samenstelling is konstant in de plaats.

Voorbeelden van homogene materie zijn enkelvoudige chemische stoffen, zuiver water, of een homogeen mengsel van zulke stoffen zoals lucht (mengsel van stikstof, zuurstof, koolzuur, waterdamp enz.).

In een vat kunnen twee of meer verschillende stoffen naast elkaar aanwezig zijn in verschillende delen van de ruimte, b.v. zout en zoet water in een zee-sluis.

Veelal hebben we te maken met water en lucht, waarbij gewoonlijk het water zich onder invloed van de zwaarte onder in het vat bevindt en de lucht daarboven. Het grensvlak tussen lucht en water noemen we de *waterspiegel*.

In dergelijke gevallen kunnen we de ruimte in het vat door het vlak van de waterspiegel in twee gedeelten verdeeld denken, die we als *deelvaten* kunnen opvatten. In het ene deelvast bevindt zich het water, in het andere de lucht.

Bij stijgen of dalen van de waterspiegel neemt het volumen van het ene deelvast toe en die van het andere af.

Opm.: De waterspiegel is vaak als een soort tussenwand op te vatten, indien de transporten van water en lucht door de waterspiegel heen verwaarloosd mogen worden. Dergelijke transporten zijn in feite wel aanwezig, omdat het water kan verdampen in de atmosfeer of daaruit kan kondenseren en omdat stikstof, zuurstof enz. in het water kunnen oplossen. Ook kan water b.v. in de branding tot nevel verstuiven en lucht als luchtbelletjes in het water worden opgenomen. Indien zulke verschijnselen belangrijk zijn, dan moet de waterspiegel als een toegang voor lucht of water worden opgevat.

Een met water en lucht gevuld vat, dat van boven toegankelijk is, zodat vrije uitwisseling van de lucht uit het vat met de atmosfeer mogelijk is, noemen we een *kom* of *bekken*. Meestal zijn we in dat geval alleen geïnteresseerd in de water-voorraad van het bekken.

We spreken van een *klok*, indien het vat van boven door een vaste wand (dak of deksel) is afgesloten, zodat de lucht in het vat wordt omsloten door de wand van boven en de waterspiegel van onderen. Op dit geval wordt in par. 6 nog nader ingegaan.

Dichtheid

Naast de kenmerkende materie-eigenschappen zoals de eerder genoemde samenstelling, kunnen we ook nog letten op de *massa-verdeling* van de massa-voorraad in een vat.

We beschouwen een homogene vloeistof of gas met massa m , die *gelijkmatig* verdeeld is over de ruimte van een vat met volumen V . Onder de (gemiddelde) *dichtheid* ρ van de vloeistof of het gas in het vat verstaan we dan het kottiënt:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Indien we de dichtheid van de vloeistof of het gas en het volumen van het vat kennen, dan is daaruit omgekeerd gemakkelijk de massa-voorraad van het vat te berekenen met:

$$m = \rho V$$

Enkele ronde getallen van dichtheden van homogene stoffen onder normale omstandigheden van druk en temperatuur zijn:

zoet water	1000	kgm ⁻³
zee water	1025	"
olie	800	"
lucht	1,3	"
aardgas	0,8	"

We zien hieruit dat een verhouding van 1 op 1000 tussen de dichtheden van gas- en die van vloeistoffen niet ongewoon is. Dit is van belang om de invloeden van lucht en water in één systeem met elkaar te kunnen vergelijken in gevallen, dat de massa's een rol spelen.

De massa-verdeling van een vloeistof of gas in een vat behoeft in het algemeen niet gelijkmatig (of uniform) te zijn. Bij zo'n ongelijkmatige verdeling geeft de (gemiddelde) dichtheid, zoals hierboven gedefinieerd, te weinig informatie om de massa in deelvaten te kunnen bepalen. We zullen daarom de definitie van de dichtheid wat moeten aanpassen. Dit gebeurt als volgt:

Verdeel de ruimte van het vat (of eventueel het ruimtedeel dat met vloeistof of gas gevuld is) in een N-tal deelruimtes, genummerd met $i = 1, 2, \dots, N$. Elk zo'n deelruimte is op te vatten als een deelvast met een volume ΔV_i . De som van deze volumens is gelijk aan het volume V van het vat, dus

$$\sum_{i=1}^N \Delta V_i = V$$

De maximale waarde van de deelvolumens zij $\Delta V_{\max}$, zodat $\Delta V_i \leq \Delta V_{\max}$ voor elke i .

Laat $\vec{r}_i$ de plaatsvektor zijn van een punt in het deelvast met nummer i , b.v. het middelpunt, en Δm_i de massa-voorraad van dat deelvast.

Dan zal:

$$m = \sum_{i=1}^N \Delta m_i$$

de massa-voorraad van het gehele vat zijn.

We nemen nu aan dat ΔV_i zo klein is, dat we de massa Δm_i als gelijkmatig verdeeld over de ruimte van dat deelvast mogen beschouwen. We kunnen dan weer spreken van de (gemiddelde) dichtheid ρ_i van dat i^e -deelvast, nl. als het kotient,

$$\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$$

Daar er een verband bestaat tussen de zo gevonden ρ_i en de plaats $\vec{r}_i$, noteren we deze dichtheid vaak als $\rho_i = \rho(\vec{r}_i) = \rho(x_i, y_i, z_i)$. Als de massa voorraad Δm_i in de loop der tijd verandert, dus $\Delta m_i = \Delta m_i(t)$, dan wordt de dichtheid ρ_i een functie van de tijd t ; we schrijven dan $\rho_i = \rho_i(t) = \rho(\vec{r}_i, t) = \rho(x_i, y_i, z_i, t)$.

We kunnen de verdeling gaan verfijnen door N te laten toenemen. Als we nu de verdeling "netjes" houden (d.w.z. alle ΔV_i 's ongeveer evengroot) dan gaat bij $N \rightarrow \infty$ de maximale waarde $\Delta V_{\max} \rightarrow 0$. Als we verder aannemen dat de massa Δm_i behalve *gelijkmatig* ook nog *kontinu* verdeeld is over de ruimte van zo'n i^e-deelvast, dan gaat bij $\Delta V_i \rightarrow 0$ ook de massa-voorraad $\Delta m_i \rightarrow 0$.

Onder de bovengenoemde veronderstellingen kunnen we uiteindelijk komen tot de definitie van de *dichtheid* ρ ter plaatse $\vec{r}$ in het vat. Deze dichtheid wordt door de onderstaande limiet

$$\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$$

vastgelegd. Uit dit limietproces volgt verder dat ρ als functie van de plaats $\vec{r} = (x, y, z)$ en van de tijd t te schrijven is; we noteren dan ook $\rho = \rho(\vec{r}, t) = \rho(x, y, z, t)$

Opm.: De aanname van continuïteit van de materie in het vat is een idealisering van de werkelijkheid, omdat de materie uit molekulen bestaat. Daarom hebben we eigenlijk niet met een echte limiet maar met een semi-limiet te maken. Wat we daarmee bedoelen, is dat we bij een zekere mate van verfijning zeer dicht naderen tot een regelmatige continue functie $\rho(x, y, z)$ of $\rho(x, y, z, t)$. Bij te grote verfijning, zodanig dat de deelruimtes ieder nog slechts een klein aantal molekulen omvatten, gaan we echter onregelmatige verschillen van ρ tussen naburige deelruimtes vinden (invloed molukuul-bewegingen). Voor de rest van de cursus nemen we aan dat de materie als continue beschouwd mag worden.

Als voorbeeld van zo'n continue dichtheidsfunctie ρ kunnen we denken aan een brakwatergebied dat bij de monding van de rivier in zee aanwezig is.

In een verticale doorsnede langs de rivieras kunnen we lijnen van gelijke dichtheden aangeven (zie fig. 1).

Als we nu ter plaatse $x = x_0$ de dichtheid als functie

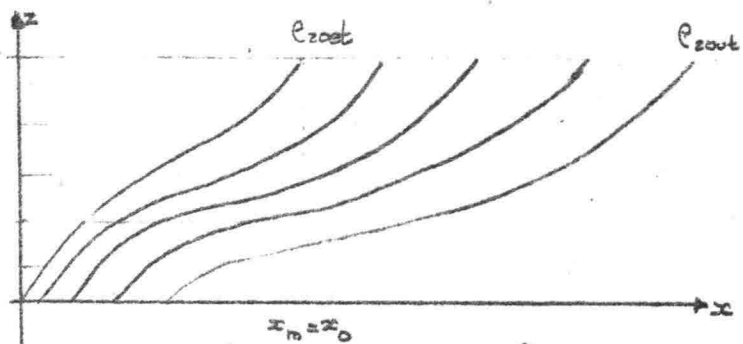
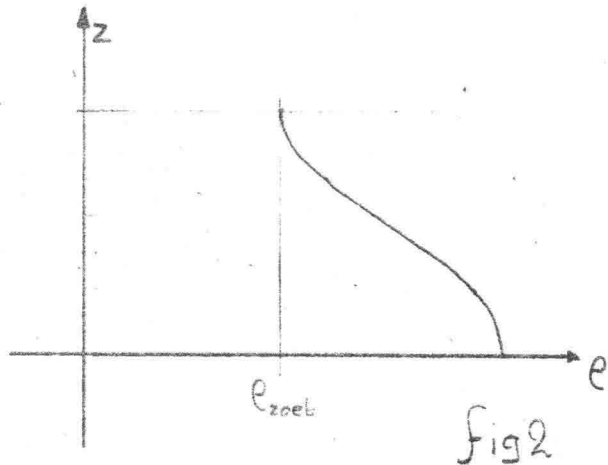


fig 1.

van de diepte gaan meten,
dan vinden we een grafiek
zoals in fig. 2. geschetst
is.

Een ander voorbeeld van
zo'n dichtheidsfunctie is
die van de lucht (zie 1e
jaars kollegediktaat c-18:
Alg.Nat. blz. K-8)



Studievraag 9.3.: Van een vloeistof in een gegeven vat V is in elk punt $\vec{r}$
de dichtheid ρ als functie van de tijd t bekend.

Is de massa-voorraad m te berekenen?

Zo ja, hoe groot is deze m en wat is de afgeleide $\dot{m}$ er-
van?

• BEHOUD VAN MASSA

Uit de fysika en de chemie weten we dat de massa van een bepaalde hoeveelheid stof een konstante waarde heeft, wat voor fysische of chemische veranderingen die stof ook ondergaat.

Deze wet geldt zeer nauwkeurig, althans zolang we niet met relativistische effecten te maken krijgen. Deze effecten zijn verwaarloosbaar klein, tenzij bij zeer grote snelheden die vergelijkbaar zijn met die van de voortplanting van het licht.

Omdat we binnen de technische mechanica in de regel niet met zulke extreem grote snelheden te maken hebben, nemen we hier aan dat de *wet van behoud van massa* algemeen geldig is.

We beschouwen nu een vat dat geheel wordt begrensd door wanden. In dit vat bevindt zich materie in de vorm van een vloeistof of gas, die een massa m heeft. Door de wanden kan geen materie het vat in of uitstromen. Het vat blijft dus steeds dezelfde materie bevatten. Daarom zal voor de materie in het vat de wet van behoud van massa gelden, waaruit dan volgt dat de massavoorraad m in het vat konstant moet zijn.

Dit zal niet alleen gelden voor een geheel door wanden omgeven vat, maar in het algemeen voor ieder vat waar, door wat voor oorzaken dan ook, geen materie in of uit stroomt. (denk b.v. aan zo'n deelvast uit de vorige paragraaf)

We kunnen dit als een voor vaten geldend aksioma opvatten, dat we als volgt formuleren:

De massavoorraad van een vat, waar geen materie in of uit stroomt, is konstant.

We kunnen deze wet dus bijvoorbeeld toepassen op een spaarbekken, waarin verdamping en neerslag verwaarloosd mogen worden en dat niet gevoed wordt, evenmin als voor watertoelevering wordt gebruikt. Het is duidelijk dat de watervoorraad gedurende die omstandigheden konstant zal zijn.

Studievraag 9.4.: *Is in een vat met een konstante massa-voorraad de dichtheid ρ ook konstant?*

En als de materie homogeen is?

Kommuniserende vaten

Zoals we in de inleiding zagen, hebben we gewoonlijk te maken met waterhoeveelheden die aan de ene voorraad onttrokken worden en aan de andere worden toegevoegd. We beschouwen daarom vaten die met elkaar in verbinding staan, zodat waterhoeveelheden kunnen worden uitgewisseld.

We spreken dan van *kommuniserende vaten*.

Een verbinding tussen twee vaten kan gevormd worden door een opening in een scheidingswand, of door een buis, een kanaal of een andere leiding. Zulke leidingen vormen zg. *stroomvoerende vaten*; deze komen in eenheid 10 nader aan de orde. Door zo'n verbinding kan water van het ene vat in het andere overgaan. We idealiseren hier nu de verbinding door aan te nemen, dat iedere hoeveelheid water die het ene vat verlaat, op hetzelfde ogenblik in het andere vat aankomt. We laten dus buiten beschouwing dat een waterhoeveelheid enige tijd onderweg kan zijn van het ene naar het andere vat, bijvoorbeeld doordat zulk een waterhoeveelheid enige tijd nodig heeft om door een verbindingsleiding te stromen.

Een opening in een scheidingswand tussen twee naast elkaar gelegen vaten, vormt een verbinding die zeer dicht een ideale verbinding nabij komt.

Iedere waterhoeveelheid, die van het ene naar het andere vat overgaat, heeft invloed op de watervoorraad van elk der vaten. Deze invloed zullen we een *stroomwisselwerking* tussen de vaten noemen. We beschouwen nu, om zo'n stroomwisselwerking nader te onderzoeken, twee vaten V_1 en V_2 die met *elkaar*, doch *niet* met nog andere vaten verbonden zijn (zie fig. 3).

De stroomwisselwerking geven aan door $W_{(12)}$.

Deze wisselwerking is werkzaam door het vlak AB heen, dat een deel van de begrenzing van V_1 voorstelt en tevens van die van V_2 . AB is dus een wederzijdse toegang van V_1 vanuit V_2 en ook van V_2 vanuit V_1 . De watervoorraad in V_1 heeft de massa m_1 en die in V_2 de massa m_2 . Beide voorraden zullen met de tijd kunnen variëren; daarom schrijven we $m_1(t)$ en $m_2(t)$.

Elke waterhoeveelheid die één van beide vaten verlaat, komt op hetzelfde ogenblik aan in het andere vat. Daarom kunnen we V_1 en V_2 samen ook opvatten als één vat V , waarvan de massavoorraad m gevormd wordt door de massavoorraden van V_1 en V_2 tesamen, dus

$$m = m_1(t) + m_2(t)$$

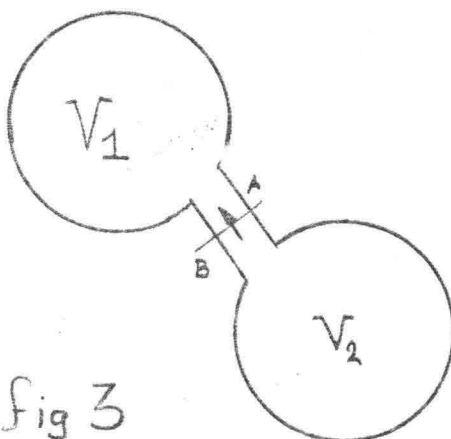


fig 3

Het vat V is een vat dat voldoet aan de omschrijving van het eerder geformuleerde aksioma. Immers, de vaten V_1 en V_2 kommuniseren alleen met elkaar; dus al het water dat van V_1 naar V_2 of omgekeerd gaat, blijft binnen V en er stroomt dan ook geen water het vat V in of uit.

We moeten daarom stellen dat de massavoorraad m konstant blijft, dus

$$m = m_1(t) + m_2(t) = \text{konstant}$$

Door differentiatie naar t vinden we hieruit:

$$\dot{m} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0$$

ofwel

$$\dot{m}_1 = -\dot{m}_2 \quad (1)$$

Hieraan kunnen we de volgende interpretatie geven:

Elke waterhoeveelheid die van het ene vat naar het andere stroomt, behoud daarbij z'n massa Δm . Op het moment dat die waterhoeveelheid het ene vat verlaat, wordt de massavoorraad van dat vat met Δm verminderd. Op datzelfde moment komt de waterhoeveelheid met massa Δm in het andere vat aan. Daardoor wordt op dat moment de watervoorraad van het andere vat met Δm vermeerderd.

Noemen we nu $\dot{m}_1$ de uitwerking van de stroomwisselwerking $W_{(12)}$ op vat V_1 en $\dot{m}_2$ de uitwerking ervan op V_2 , dan kunnen we het gevonden resultaat ook aldus tot uitdrukking brengen:

De uitwerking van de tussen de vaten V_1 en V_2 werksame stromingswisselwerking $W_{(12)}$ op V_2 is tegengesteld aan de uitwerking op V_1 .

Massastroom

We gaan nu nog wat nader in op wat we hierboven de uitwerking van de stroomwisselwerking op één der vaten hebben genoemd.

We beschouwen de massavoorraad van V_1 op twee tijdstippen $t = t_a$ en $t = t_b$, waarbij $t_b > t_a$. Het tijdsinterval (t_a, t_b) heeft een duur $\Delta t = t_b - t_a$. In dit tijdsinterval verandert de massavoorraad van V_1 met

$$\Delta m_1 = m_1(t_b) - m_1(t_a)$$

De gemiddelde verandering per eenheid van tijd is dan in dat interval:

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{m_1(t_b) - m_1(t_a)}{t_b - t_a}$$

We laten nu t_b naderen tot t_a , dus $\Delta t \rightarrow 0$, en we nemen aan dat Δm_1 voldoende groot is om de molukulaire fluktuaties te kunnen verwaarlozen (zie opm. blz 9.13), dan kunnen we de limiet van $\frac{\Delta m_1}{\Delta t}$ bepalen.

We kunnen zo'n limietproces op elk willekeurig tijdstip t uitvoeren en we komen dan tot de formulering van de *massastroom* of *massaflux* S_{12} van V_2 naar V_1 , dus

$$S_{12} = S_{12}(t) = \dot{m}_1(t)$$

Daar Δm_1 toegeschreven kan worden aan de stroomwisselwerking $W_{(12)}$ tussen V_1 en V_2 , kunnen we $S_{12}(t)$ als de *momentane* uitwerking van die wisselwerking op V_1 beschouwen.

De bijdrage Δm_1 waarmee de massavoorraad van V_1 in het tijdsinterval (t_a, t_b) verandert, is te beschouwen als het netto bedrag van de watermassa die in dat interval tussen V_1 en V_2 wordt uitgewisseld; met dien verstande dat de massa van water dat van V_2 naar V_1 gaat, positief en de massa van water dat van V_1 naar V_2 gaat, negatief in rekening wordt gebracht. Dit betekent dat S_{12} kan worden opgevat als de *netto massa* die per tijdseenheid van V_2 naar V_1 gaat. De massastroom S_{12} is positief als er een netto waterstroom van V_2 naar V_1 is en S_{12} is negatief als er een netto waterstroom van V_1 naar V_2 is.

Met (1) en (2) valt af te leiden dat

$$S_{12}(t) = -\dot{m}_2(t) \quad (3)$$

Bij een stroom van V_2 naar V_1 is $S_{12} > 0$ en dan volgt uit (2) en (3) dat m_1 toe- en m_2 afneemt. Bij een stroom van V_1 naar V_2 is $S_{12} < 0$ en dan volgt uit (2) en (3) dat m_1 af- en m_2 toeneemt. Dit valt alles ook direkt fysisch in te zien, door te bedenken dat een stroom die van het ene naar het andere vat gericht is, noodzakelijkerwijs de massavoorraad van het ene vat vermindert en die van het andere evenveel vermeerdert.

Formeel kunnen we evengoed de massavoorraad m_2 van V_2 als uitgangspunt nemen. We definiëren dan:

$$S_{21} = S_{21}(t) = \dot{m}_2(t)$$

als de massastroom van V_1 naar V_2 . Uit (3) volgt dan dat:

$$S_{21}(t) = -S_{12}(t)$$

ofwel

$$S_{12}(t) + S_{21}(t) = 0$$

(4)

voor alle waarden van t .

De twee grootheden S_{12} en S_{21} zijn alleen formeel *wiskundig* verschillend. Zij geven echter hetzelfde fysische verschijnsel weer, namelijk de stroomwisselwerking tussen V_1 en V_2 , die tegengestelde uitwerkingen heeft op de massavoorraden van V_1 en V_2 .

Studievraag 9.5.: Tussen de vaten V_1 en V_2 zijn twee leidingen (zie fig. 4). In leiding A stroomt er per tijdseenheid een massa m_A naar V_1 en in leiding B stroomt er per tijdseenheid een massa m_B naar V_2 .

Bepaal de massastroom per leiding.

Bepaal de massastroom S_{12} tussen V_1 en V_2 en ga na of er een verband bestaat tussen deze en de beide massastromen in de leidingen.

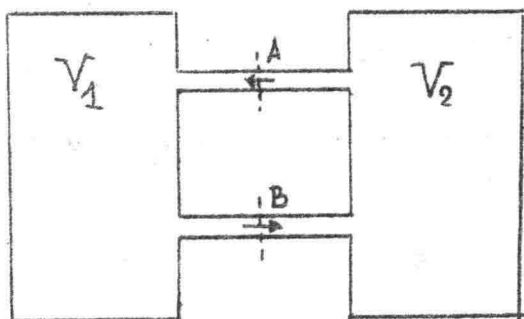


fig 4

In de praktijk komen vaak vaten voor, die met meer dan één ander vat kommuniseren (b.v. een kanaal tussen 2 bekkens).

Voor het eenvoudigste geval, nl. een vat dat met 2 andere vaten communiseert, komen we na dezelfde idealiseringen als in de vorige sectie tot het hiernaast getekende schema.

We zien dat V_1 en V_3 elk één toegang met V_2 hebben en dat V_2 behalve die 2 toegangen eveneens gesloten is.

We kunnen daarom voor het geheel een massa balans optellen.

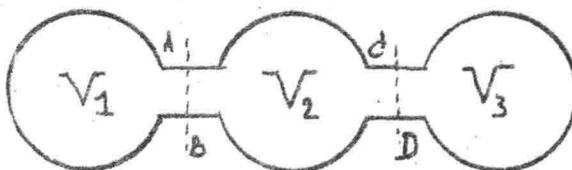


fig 3A

Er geldt:

$$m = m_1(t) + m_2(t) + m_3(t) = \text{konstant}$$

Differentiatie naar de tijd geeft

$$0 = \dot{m}_1(t) + \dot{m}_2(t) + \dot{m}_3(t)$$

Anderzijds hebben we gezien dat voor vaten met één toegang, dus hier V_1 en V_3 , de afgeleiden van hun massavoorraden gelijk zijn aan de massastromen naar die vaten.

We kunnen dus schrijven

$$0 = S_{12} + \dot{m}_2(t) + S_{32}$$

Met de vergelijkingen $S_{12} + S_{21} = 0$ en $S_{32} + S_{23} = 0$ volgt dan:

$$\dot{m}_2(t) = S_{21} + S_{23}$$

We noemen nu $\dot{m}_2(t)$ de totale massastroom S_2 naar V_2 en deze is dus

$$S_2 = S_{21} + S_{23}$$

Studievraag 9.5^A: Waaraan is de totale massastroom S_1 naar V_1 gelijk?

Studievraag 9.5^B: Geldt voor het geval van 3 vaten die elk met de beide andere kommuniseren, bovenstaande afleiding?
Zo ja, wat zijn dan de uitdrukkingen voor S_1 , S_2 en S_3 ?

Debiet

De dichtheid van zuiver water hangt af van de temperatuur en de druk. Natuurlijk water bevat allerlei bijmengselen die de dichtheid beïnvloeden. Een belangrijk voorbeeld is het zoutgehalte van zeewater, waaraan een vergroting van de dichtheid met enkele procenten kan beantwoorden (zie tabel op blz. 9.12).

In geheel met water gevulde vaten kan de druk aanzienlijke waarden bereiken en kan de dichtheid diensgevolge praktisch merkbaar veranderen.

In open bekkens wordt de druk voornamelijk bepaald door de druk van de dampkring en de zwaarte van het bovenliggende water (zie hiervoor par. 4). Bij matig diepe bekkens blijft de druk zo beperkt, dat de invloed op de dichtheid meestal praktisch niet merkbaar is.

In vele gevallen is het toelaatbaar de dichtheid ρ van het water als konstant de benaderen.

In die omstandigheden is het gebruikelijk niet de massa m zelf van een watervoorraad als maat te gebruiken, maar de daarmee evenredige waarde $\frac{m}{\rho}$, die het door de watervoorraad ingenomen volumen voorstelt.

In overeenstemming hiermee wordt dan de stroomwisselwerking bepaald door de grootheid:

$$Q = \frac{S}{\rho}$$

en we noemen dit het *debit* of de *volumen stroom*.

Studievraag 9.6.: Voor de materie in s.9.5. is de dichtheid ρ konstant.

Verder gelden dezelfde gegevens.

Bepaal nu het debit per leiding, het debit van V_1 naar V_2 en ga na of er een verband tussen deze grootheden bestaat

Opm.: Vaak, met name als we over rivieren spreken, wordt Q de *afvoer* genoemd. De S.I.-eenheid van een debit is $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$.

4. HYDROSTATIKA

Spanning, normaalspanning en schuifspanning

In de vorige paragrafen zijn we voorbijgegaan aan de oorzaken waarom vloeibare materie een vat in- of uit kan stromen.

Bij dat stromen spelen interacties een rol. Deze interacties zijn te verdelen in interacties tussen de vloeibare materiedelen onderling en in interacties tussen de vloeibare materie en de omgeving van ons stromingssysteem (b.v. de vatwanden, de zwaarte t.g.v. de aarde).

We zullen ons in deze paragraaf beperken tot de interacties (krachten) die optreden in en op een *stilstaande* (dus: niet-stromende) vloeistof in een vat V . We zullen daarbij steeds water als voorbeeld gebruiken, hoewel de theorie ook op andere vloeistoffen en gassen toepasbaar is.

Voor een *stilstaande* vloeistof zijn alle vloeistofdeeltjes in rust en elk volumendeeltje ΔV_i bevat steeds dezelfde deeltjes.

De dichtheid ρ_i kan dan geen funktie van de tijd zijn en evenzo de dichtheid ρ .

Studievraag 9.7.: Kan ρ nog wel een funktie van de plaats zijn?

We gaan nu nader in op de interacties die in een *stilstaande* vloeistof kunnen voorkomen (verg. eventueel het statische geval van de drukstaaf, de normaalinteraktie enz., die in eenheid 4 beschreven zijn).

Beschouw hiertoe een willekeurig deelvat V_d dat geheel in V ligt. De vloeistof in V_d ondervindt dan twee soorten interacties:

1. *volumeninterakties,*

dit zijn interacties die werken tussen de vloeistof in V_d en de materie buiten V_d , die zich op een afstand van elkaar bevinden (zg. veldinterakties zie eenheid 4, § 2).

2. *oppervlakte interacties,*

dit zijn interacties die werken tussen de vloeistof in V_d en de vloeistof buiten V_d , die tegen elkaar aanliggen; zij bevinden zich dus beide tegen het scheidingsvlak (z.g. kontaktinterakties, zie eveneens eenheid 4, § 2).

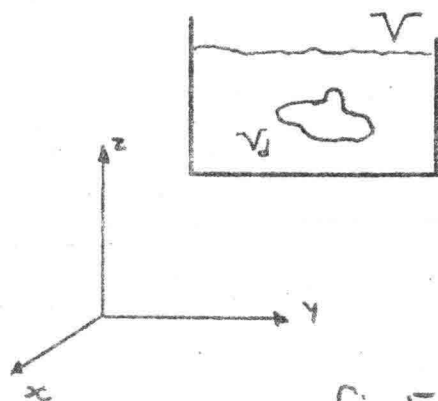


fig 5

Studievraag 9.8.: Bereken de volumeninteractie(s) die op de vloeistof in V_d werkzaam is(zijn), als het vat V in een lokaal zwaarteveld is opgesteld (zie fig. 5). Is (zijn) de oppervlakte interactie(s) voor diezelfde vloeistof te berekenen?

Uit het antwoord op studievraag 9.8 volgt dat we de oppervlakte interacties nog nader moeten onderzoeken.

Beschouw een oppervlakte-elementje ΔA van het oppervlak A van het deelvot V_d .

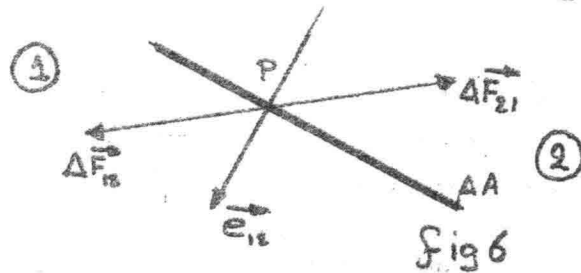
We geven de vloeistof in V_d aan met 1

en de vloeistof buiten V_d met 2.

De eenheidsvektor $\vec{e}_{12}$ staat loodrecht op ΔA in het middelpunt P

ervan en heeft de richting van 2

naar 1 (zie fig. 6).



De vloeistof in 1 grenzend aan ΔA en de vloeistof in 2 grenzend aan ΔA oefenen een oppervlakte-interactie ($\Delta \vec{F}_{12}$, $\Delta \vec{F}_{21}$) op elkaar uit.

We hebben deze interactie geïdealiseerd door aan te nemen dat P het gemeenschappelijk aangrijpingspunt van $\Delta \vec{F}_{12}$ en $\Delta \vec{F}_{21}$ is (zie eenheid 4, § 2).

Aangezien we de materie als kontinu verdeeld beschouwen (zie § 2), mogen we ΔA steeds kleiner laten worden om P , waarbij we ervoor zorgen dat $\vec{e}_{12}$ konstant blijft, en we krijgen dan in de limiet

$$\vec{F}_{12} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_{12}}{\Delta A}$$

We noemen $\vec{F}_{12}$ de spanningsvektor in P die hoort bij de richting $\vec{e}_{12}$.

Studievraag 9.9.: Ligt de werklijn van $\vec{F}_{12}$ altijd langs $\vec{e}_{12}$?

Studievraag 9.10.: Geldt voor een punt P in een vloeistof altijd dat

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \text{ is?}$$

Uit de antwoorden op de bovenstaande studievragen volgt dat we $\vec{F}_{12}$ in het algemeen kunnen ontbinden in een stuk langs $\vec{e}_{12}$ en een stuk loodrecht op $\vec{e}_{12}$, dus in ΔA gelegen.

De ontbondene langs de $\vec{e}_{12}$ is gelijk aan

$$\vec{n}_{12} = (\vec{F}_{12} \cdot \vec{e}_{12}) \vec{e}_{12}$$

en wordt de normaalspanning in P bij de richting $\vec{e}_{12}$ genoemd.

De ontbondene loodrecht op $\vec{e}_{12}$ is gelijk aan

$$\vec{t}_{12} = \vec{F}_{12} - \vec{n}_{12}$$

en wordt de *schuifspanning* in P bij de richting $\vec{e}_{12}$ genoemd.

Voor vloeistoffen waarmee we ons in deze cursus bezig houden, zoals water, geldt dat in een toestand van rust de schuifspanning $\vec{\tau}$ gelijk aan $\vec{0}$ is.

In de hydrostatika treedt dan ook alleen maar een normaalspanning op.

Meestal schrijven we de normaalspanning als

$$\vec{n}_{12} = p \vec{e}_{12}$$

waarin p de *druk* in P bij de richting $\vec{e}_{12}$ wordt genoemd.

We mogen voor de vloeistoffen en gassen die we in deze cursus tegenkomen, veronderstellen dat de druk p steeds groter of gelijk aan nul is. (we gaan voorbij aan kohesie-verschijnselen).

Uit de formule voor de normaalspanning volgt dat $p = \vec{\tau}_{12} \cdot \vec{e}_{12}$ en dat daarom p in het algemeen een functie van $\vec{e}_{12}$ kan zijn. In de volgende sectie zullen we laten zien dat in de hydrostatika van gewone vloeistoffen (water b.v.) de druk onafhankelijk van de richting is.

Isotrope druk

Als er in een punt P van een vloeistof of gas de daar heersende druk onafhankelijk is van de stand van het oppervlakje ΔA , dus onafhankelijk van de richting van $\vec{e}_{12}$, dan zeggen we dat er in P een *isotrope* of *alzijdige* druk heerst.

In de andere gevallen gebruiken we wel de uitdrukking: *anisotrope* druk.

In de hydrostatika geldt voor de druk p de onderstaande wet van Pascal:

Wet van Pascal: *Bij elke stilstaande (gewone) vloeistof heerst er in elk punt van die vloeistof een isotrope druk.*

We kunnen deze wet op de onderstaande manier afleiden:

We nemen om een punt P een klein volumengebiedje ΔV .

Dit gebiedje is zo klein, dat we de dichtheid ρ in ΔV als een konstante mogen beschouwen.

Verder nemen we ΔV in de vorm van een viervlak (piramide), met één vlak ΔA_x loodrecht op de x-as, één vlak ΔA_y loodrecht op de y-as, één vlak ΔA_z loodrecht op de z-as en één vlak ΔA die het viervlak afsluit. De normaalvektor op ΔA is $\vec{e}$ en wijst naar binnen (zie fig. 7).

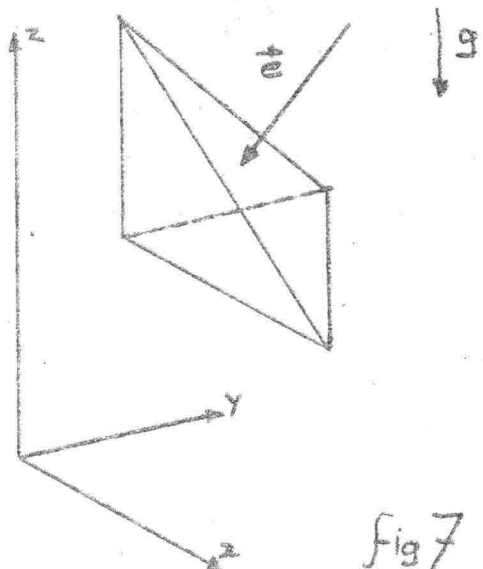


Fig 7

Daar de vloeistof in rust is, moet de som van alle krachten die op ΔV werken (en het gevolg zijn van de optredende volumen- en oppervlakte-interacties) steeds gelijk aan de nulvektor zijn.

Op ΔV werken de volgende krachten:

De volumekracht $\vec{G}$ t.g.v. het lokale zwaarteveld (zie 5.9.8) en deze is

$$\vec{G} = -\rho g \Delta V \vec{e}_z = -\frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z \vec{e}_z$$

De oppervlakte krachten t.g.v. de normaalspanningen en deze zijn

$$\vec{F}_x = p_x \Delta A_x \vec{e}_x = \frac{1}{2} p_x \Delta y \Delta z \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_y = p_y \Delta A_y \vec{e}_y = \frac{1}{2} p_y \Delta x \Delta z \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_z = p_z \Delta A_z \vec{e}_z = \frac{1}{2} p_z \Delta x \Delta y \vec{e}_z$$

$$\vec{F} = p \Delta A \vec{e}$$

Bovengenoemde krachten zijn alle krachten die op ΔV werken, zodat moet gelden

$$\vec{G} + \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z + \vec{F} = \vec{0}$$

Uit deze vektorvergelijking volgen de 3 skalarvergelijkingen door hem inwendig met de eenheidsvectoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ en $\vec{e}_z$ te vermenigvuldigen. We vinden voor de richting:

$$\vec{e}_x : \frac{1}{2} p_x \Delta y \Delta z + p \Delta A \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$\vec{e}_y : \frac{1}{2} p_y \Delta x \Delta z + p \Delta A \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{e}_z : \frac{1}{2} p_z \Delta x \Delta y + p \Delta A \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z - \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

Uit de figuur volgt dat:

$$\Delta A_x = -\Delta A \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x$$

$$\Delta A_y = -\Delta A \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y$$

$$\Delta A_z = -\Delta A \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z$$

zodat we na substitutie en wegdelen van gemeenschappelijke factoren vinden dat

$$\vec{e}_x : p_x = p$$

$$\vec{e}_y : p_y = p$$

$$\vec{e}_z : p_z = p + \rho g \Delta z$$

Als we nu het gebiedje ΔV om P kleiner laten worden met behoud van vorm en stand, dan zal $\Delta z \rightarrow 0$ gaan maar $\vec{e}$ konstant blijven.

Verder kunnen we nu uit het bovenstaande limietproces konkluderen, dat in een punt P de druk p onafhankelijk van de richting is.

Studievraag 9.11.: *Geldt de wet van Pascal ook voor een vat met een stilstaand gas erin?*

Studievraag 9.12.: *Geldt de wet van Pascal ook voor een punt op het grensvlak tussen een stilstaande vloeistof en een stilstaand gas?*

Hydrostatische drukverdeling

Vaak willen we voor een stilstaande vloeistof de druk als functie van de plaats weten. Om deze *drukverdeling* te kunnen bepalen, bekijken we nogmaals een klein volumengebiedje ΔV om een willekeurig punt P met plaats $\vec{r} = (x, y, z)$.

We proberen nu vervolgens uit de evenwichtsvoorwaarde(n) van de op ΔV werkende krachten een verband tussen de druk, plaats en dichtheid af te leiden.

We nemen het gebiedje ΔV zo klein, dat we de dichtheid ρ in ΔV als een konstante mogen beschouwen en we nemen hiervoor de waarde die ρ in punt P heeft, dus $\rho = \rho_P = \rho(x, y, z)$.

Verder nemen we eerst ΔV in de vorm van een horizontaal balkje, in de y-richting, d.w.z. de afmetingen in de y-richting zijn groot t.o.v. die in de andere richtingen (zie fig. 8).

Daar de vloeistof in rust is, moet er in de y-richting een evenwicht van krachten zijn. We hebben hiervoor alleen maar rekening te houden met de oppervlaktekrachten van het linker- en rechter zijvlakje.

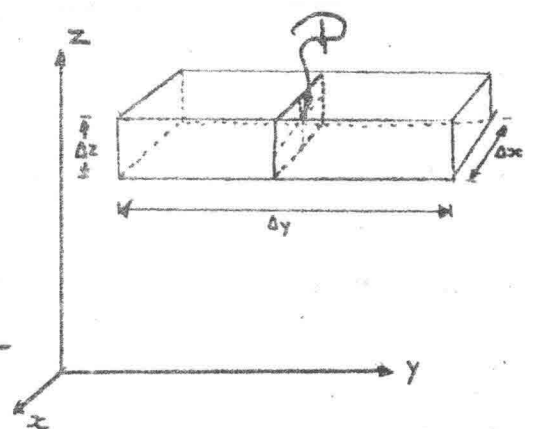


fig 8

Studievraag 9.13.: Ga na dat de oppervlaktekrachten van het voor-, achter-, boven- en ondervlakje geen ontbondene in de y-richting hebben en ga ook na hoe de volumekracht gericht is.

Daar de zijvlakjes erg klein zijn veronderstellen we dat de normaalspanning over zo'n zijvlakje als een konstante beschouwd mag worden en we nemen hiervoor de waarde die de druk in het middelpunt van zo'n vlakje heeft.

Voor het linkervlakje vinden we dan als oppervlakte kracht

$$\vec{F}_L = p(x, y - \frac{1}{2} \Delta y, z) \Delta x \Delta z \vec{e}_y$$

en voor het rechtervlakje

$$\vec{F}_R = -p(x, y + \frac{1}{2} \Delta y, z) \Delta x \Delta z \vec{e}_y$$

Uit de evenwichtsvoorwaarde $\vec{F}_L + \vec{F}_R = \vec{0}$ volgt dan

$$p(x, y - \frac{1}{2} \Delta y, z) - p(x, y + \frac{1}{2} \Delta y, z) = 0$$

Met behulp van de Taylorreeksontwikkeling gaat deze vergelijking over in

$$p(x, y, z) - \frac{1}{2} \Delta y \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} + \frac{(\frac{1}{2} \Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial y^2} + \dots - \{ p(x, y, z) + \frac{1}{2} \Delta y \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} + \frac{(\frac{1}{2} \Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial y^2} + \dots \} = 0$$

of na uitwerken van de akkolades

$$-\Delta y \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} - \frac{2(\frac{1}{2} \Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 p(x, y, z)}{\partial y^3} - \dots = 0$$

Delen door Δy en vervolgens Δy naar nul laten gaan geeft:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Eenzelfde berekening voor een balkje in de x-richting geeft

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

We zien dat voor een stilstaande vloeistof de druk in een horizontaal vlak konstant is.

Voor de drukverdeling in een vertikaal vlak gebruiken we een balkje in de z-richting. Bij het opstellen van de evenwichtsvoorwaarde voor de krachten in de z-richting, moeten we naast de oppervlaktekrachten op het bovenvlakje

$$\vec{F}_B = -p(x,y,z + \frac{1}{2} \Delta z) \Delta x \Delta y \vec{e}_z$$

de oppervlaktekracht op het ondervlakje

$$\vec{F}_O = p(x,y,z - \frac{1}{2} \Delta z) \Delta x \Delta y \vec{e}_z$$

ook nog rekening houden met de volumekracht t.g.v. het zwaarteveld

$$\vec{G} = -\rho g(x,y,z) \Delta x \Delta y \Delta z \vec{e}_z$$

Uit de evenwichtsvoorwaarde $\vec{F}_O + \vec{F}_B + \vec{G} = \vec{0}$ volgt dan

$$p(x,y,z - \frac{1}{2} \Delta z) - p(x,y,z + \frac{1}{2} \Delta z) = \rho g(x,y,z) \Delta z$$

Na uitwerken van de Taylorreeksontwikkelingen van de druktermen, delen door Δz en vervolgens Δz naar nul laten gaan vinden we

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Opm.: 1. Met behulp van de nabla-operator

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} , \quad \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} , \quad \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

kunnen we de bovenstaande 3 vergelijkingen samengevat schrijven als

$$\nabla p = -\rho g \vec{e}_z = \rho \vec{g}$$

2. In de bovenstaande berekeningen hebben we aangenomen dat de druk een continue functie is (continuïteit van de materie), zodat de 3e en hogere oneven afgeleiden alle begrensd zijn.

De limieten voor Δx , Δy en $\Delta z \rightarrow 0$ geven dan bovenstaande uitdrukkingen.

Studievraag 9.14.: Toon voor een stilstaande vloeistof aan dat p en ρ alleen functies van z kunnen zijn.

Uit het antwoord op bovenstaande studievraag volgt voor de druk p in een willekeurig punt P met plaats $\vec{r} = (x,y,z)$ dat

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = -g \rho(z)$$

Integreren geeft

$$p(z) = - \int_{z_R}^z g\rho(z) dz + p(z_R)$$

of

$$p(z) = p(z_R) + \int_z^{z_R} g\rho(z) dz$$

waarin $p(z_R)$ de druk in het (horizontale referentie vlak ter hoogte $z = z_R$ is. De berekende uitdrukking voor $p(z)$ voor een stilstaande vloeistof in het lokale zwaarteveld noemen we de *hydrostatische drukverdeling* in die vloeistof.

Studievraag 9.15.: Is er ook zo'n statische drukverdeling voor een stilstaand gas in het lokale zwaarteveld af te leiden?

Vaak hebben we in een vat zowel een stilstaande vloeistof als een stilstaand gas in het lokale zwaarteveld.

Onder invloed van dat lokale zwaarteveld is er een stilstaand grensvlak (= vloeistofspiegel) tussen het gas en de vloeistof.

Het is dan vaak handig deze spiegel als referentievlak te nemen.

Studievraag 9.16.: Bewijs dat in het lokale zwaarteveld de spiegel van een stilstaande vloeistof altijd horizontaal is.

Stijghoogte

In de praktische vloeistofmechanica hebben we veelal te maken met water als de vloeistof en lucht als het gas.

Voor het water mogen vaak de dichtheid ρ als konstante beschouwen, als we ons beperken tot matig diepe bekkens met homogeen water (zie par. 3, sectie debiet) of tot gevulde vaten waarin de samendrukbaarheid van het water een geringe rol speelt (zie de volgende paragrafen).

We zullen nu de Hydrostatische drukverdeling berekenen van een bekken met water van een konstante dichtheid ρ . De druk van de atmosfeer ter hoogte van het grensvlak is p_a (zie verder fig. 9).

We kiezen als referentievlak het grensvlak, die op een hoogte z_a ligt. De druk in een willekeurig punt op een plaatshoogte z (met $0 \leq z \leq z_a$) wordt

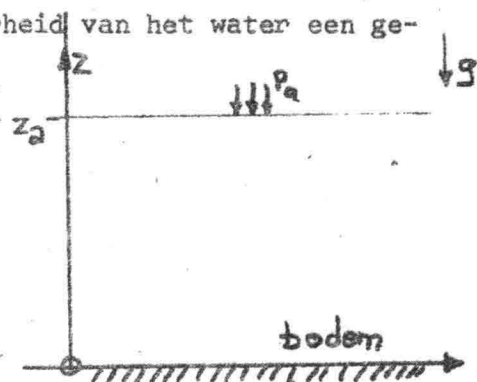


Fig 9

$$p = p_a + \int_z^{z_a} \rho g dz = p_a + \rho g (z_a - z)$$

We kunnen deze vergelijking schrijven als

$$p + \rho g z = p_a + \rho g z_a$$

Daar p_a , ρ , g en z_a konstant zijn, volgt uit de bovenstaande vergelijking dat overal in de vloeistof de uitdrukking $p + \rho g z$ konstant is.

We hebben dus de vergelijking

$$p + \rho g z = \text{konstante}$$

Als we nu links en rechts een konstant p_a aftrekken en vervolgens links en rechts delen door de konstante ρg dan houden we over

$$\frac{p - p_a}{\rho g} + z = \text{konstante}$$

We noemen de uitdrukking in het linkerlid de *stijghoogte* h van de vloeistof ter plaatse van z . In de volgende eenheid zal deze naam en tevens de namen *plaatshoogte* z en *drukhoogte* $\frac{p - p_a}{\rho g}$ nader verklaard worden.

Studievraag 9.17.: *Bewijs dat voor stilstaand water ($\rho = \text{konstant}$) in het lokale zwaarteveld in een bekken geldt:*

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

Studievraag 9.18.: *Geldt voor water ($\rho = \text{konstant}$) in een bekken altijd dat h konstant is?*

Zo nee, geef dan een voorbeeld.

GRAVITATIE BERGING

In de laatste sectie van de vorige paragraaf hebben we gezien, dat de stijghoogte een functie van de tijd kon zijn en dat deze iets te maken had met de stijging of daling van het grensvlak bij bekken (zie §.9.18).

In deze paragraaf zullen we dit verband nader onderzoeken aan de hand van een bekken met één toegang waardoor water in- of uit kan stromen.

We nemen als bekken een van boven open vat met overal dezelfde horizontale doorsnede met oppervlakte A en één toegang bij de bodem van het vat (zie fig. 10).

Het vat is gedeeltelijk gevuld met water, zodanig dat de toegang geheel onder de waterspiegel ligt. Deze waterspiegel is ontstaan onder de invloed van het lokale zwaarteveld en ligt horizontaal.

We nemen aan dat het water als een *homogene, onsamendrukbare* vloeistof beschouwd mag worden.

Omdat we water als homogeen beschouwen, verwaarlozen we dichtheidsverschillen die het gevolg zijn van verschil in samenstelling (b.v. brak, zout en zoet water).

Omdat we water als onsamendrukbaar beschouwen, verwaarlozen we dichtheidsverschillen die het gevolg zijn van druk- en temperatuurveranderingen (zie volgende paragraaf).

Als gevolg van deze veronderstellingen heeft het water een konstante dichtheid ρ . We kunnen dan verder ook de stijghoogte h bepalen (zie vorige paragraaf).

Op een tijdstip t is de massavoorraad van het vat $m(t)$ en we nemen aan dat alles in rust is.

De stijghoogte is dan overal in het water gelijk aan

$$h(t) = z_s(t)$$

waarin $z_s(t)$ de plaats van de waterspiegel op het tijdstip t is.

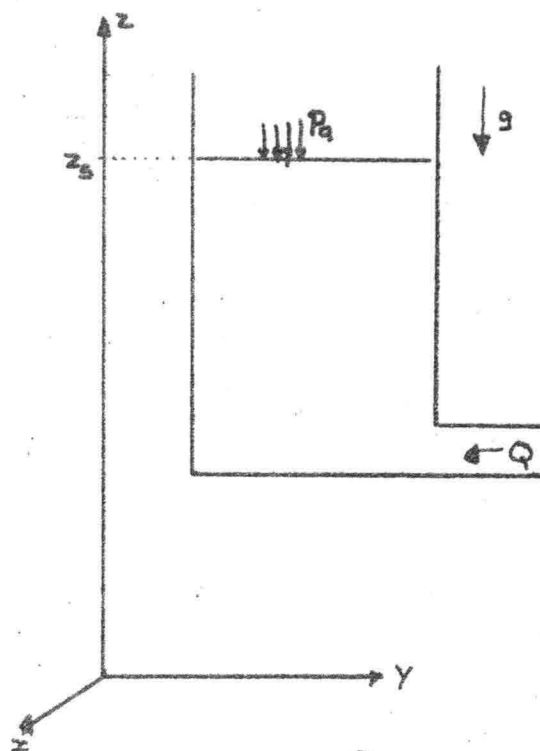


Fig 10

We brengen nu in het tijdsinterval $(t, t + \Delta t)$ een hoeveelheid water met massa Δm door de toegang het vat in, en we veronderstellen dat na het tijdstip $t + \Delta t$ alles weer in rust is.

De massavoorraad op het tijdstip $t + \Delta t$ is dan geworden

$$m(t + \Delta t) = m(t) + \Delta m$$

en de stijghoogte

$$h(t + \Delta t) = z_s(t + \Delta t)$$

waarin $z_s(t + \Delta t)$ de plaats van de waterspiegel op het tijdstip $t + \Delta t$ is.

We willen nu het verschil in stijghoogte in verband brengen met de toegevoerde massa.

Door de massatoevoer van Δm moet het volumen dat het water in het vat inneemt, toenemen met $\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho}$

Studievraag 9.19.: *Waarom is ΔV gelijk aan $\frac{\Delta m}{\rho}$?*

We weten dat deze toename zich uit in een stijging van de waterspiegel en dat daarom ΔV ook gelijk is aan

$$\Delta V = A z_s(t + \Delta t) - A z_s(t) = A \Delta z_s$$

We kunnen verder nagaan dat $\Delta z_s = h(t + \Delta t) - h(t) = \Delta h$, zodat we uiteindelijk de vergelijking

$$A \Delta h = \frac{\Delta m}{\rho}$$

krijgen. De (gemiddelde) toename van de stijghoogte per eenheid van tijd in dat interval wordt dan

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1}{A\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Op dezelfde manier als bij de bepaling van de massastroom (zie par. 3, sectie massastroom) laten we nu $\Delta t \rightarrow 0$ gaan. We vinden dan

$$\dot{h} = \frac{\dot{m}}{A\rho} = \frac{S}{A\rho}$$

waarin S de massastroom naar het vat is.

Daar de dichtheid ρ konstant is, kunnen we $\frac{S}{\rho}$ door het debiet Q vervangen (zie par. 3, sectie debiet) en we vinden dan

$$Q = B \dot{h}$$

waarin we B de *gravitatie-berging* noemen van het beschouwde vat. Deze berging is gelijk aan het oppervlak A van de waterspiegel, dus gelijk aan het oppervlak van de horizontale doorsnede van het vat.

Studievraag 9.20.: *Is het eigenlijk nodig dat de toegang steeds onder de waterspiegel ligt?*

Studievraag 9.21.: *Is de berging van een bekken altijd een konstante?*
Zo nee, wanneer dan niet.

We kunnen nu het drukverloop als functie van de tijd berekenen in een willekeurig punt als het debiet $Q = Q(t)$ bekend is.

Want na integratie van de *bergings-vergelijking* vinden we

$$h(t) = h(0) + \frac{1}{B} \int_0^t Q(t) dt$$

en daaruit weer

$$p(t) = p(0) + \frac{\rho g}{B} \int_0^t Q(t) dt$$

Studievraag 9.22.: *Ga na onder welke voorwaarde bovenstaande berekening uitgevoerd mag worden*

Uit het antwoord op 9.22 blijkt dat niet voor alle vaten een (gravitatie-) bergingsvergelijking is op te stellen.

Voor bekken kunnen we onder de voorwaarde dat op elk moment de stijghoogte overal in het bekken dezelfde waarde $h(t)$ heeft, de bovengenoemde vergelijking gebruiken.

Voor vaten waarin de luchtdruk nogal verandert door de stijging van de spiegel of voor vaten die geheel gevuld zijn met een samendrukbare vloeistof, is dat zonder meer niet mogelijk. In de volgende sectie komen we daarop terug.

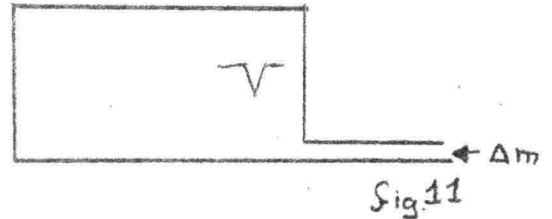
6. KOMPRESSIBILITEIT

Kompressiemodulus

In de vorige paragraaf hebben we steeds aangenomen dat water een onsamendrukbare vloeistof was en dat daardoor de dichtheid van zuiver water niet verandere als de druk toe- of afnam.

We zullen nu nader op de *samendrukbaarheid* of *kompressibiliteit* van materie, m.n. water en lucht, ingaan.

Beschouw een vat V met één toegang, dat geheel gevuld is met een homogene materie die in rust is.



Studievraag 9.23.: *Is de druk p in V isotroop?*

Heeft de druk p in V overal dezelfde waarde?

Heeft de stijghoogte h in V overal dezelfde waarde?

Uit het antwoord op s.9.23 blijkt dat de materie onder invloed van het lokale zwaarteveld wordt samengeperst. Deze samenpersing is afhankelijk van de plaats in het vat.

Vanwege de overzichtelijkheid zullen we eerst een geval bekijken waarin de samenpersing onafhankelijk van de plaats in V is.

Neem daarom een vat V dat opgesteld is in een omgeving waar we de invloeden van het lokale zwaarteveld kunnen verwaarlozen en we de opstelling dus kunnen idealiseren tot een vat V dat geheel gevuld is met materie waarop geen gewichtskrachten werken.

Studievraag 9.24.: *Ga na dat de druk p nu onafhankelijk van de plaats in V is.*

Uit het antwoord op s.9.24 volgt dat de druk p en de dichtheid ρ onafhankelijk zijn van de plaats in V .

Op een tijdstip t is de massavoorraad van het vat $m(t)$ en we nemen aan dat alles in rust is. De dichtheid ρ is dan

$$\rho(t) = \frac{m(t)}{V}$$

en de druk p is eveneens een funktie van de tijd: $p = p(t)$

We brengen nu in het tijdsinterval $(t, t + \Delta t)$ een hoeveelheid materie Δm door de toegang het vat in en we veronderstellen dat na $t + \Delta t$ alles weer in rust is.

De dichtheid ρ is op het tijdstip $t + \Delta t$ dan geworden

$$\rho(t + \Delta t) = \frac{m(t + \Delta t)}{V} = \frac{m(t)}{V} + \frac{\Delta m}{V} = \rho(t) + \Delta \rho$$

en de druk p op dat tijdstip

$$p(t + \Delta t) = p(t) + \Delta p$$

We noemen nu het quotiënt van de druktoename Δp en de relatieve dichtheidstoename $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ de *kompressiemodulus* K , dus

$$K = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta \rho}{\rho}} = \rho \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$$

Het verband tussen de druktoename Δp en de dichtheidstoename $\Delta \rho$ voor een vloeistof of gas is dan

$$\Delta p = \frac{K}{\rho} \Delta \rho$$

We kunnen de dichtheidstoename $\Delta \rho$ behalve door een massatoename Δm in een star vat, ook verkrijgen door een volumename ΔV van een konstante massavoorraad. We kunnen de kompressiemodulus K dan ook schrijven als het quotiënt van de druktoename Δp en de relatieve volumenverandering $-\frac{\Delta V}{V}$, dus

$$K = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} = -V \frac{\Delta p}{\Delta V}$$

Studievraag 9.25.: Ga na dat beide uitdrukkingen dezelfde waarde voor K opleveren.

Voorbeeld

De kompressiemodulus van water is bij kamertemperatuur $\sim 2 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$.

Bij een druktoename $\Delta p = 100 \text{ at.}$ ($\sim 10^7 \text{ Nm}^{-2}$) volgt een relatieve dichtheidstoename van:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{K} \approx \frac{10^7}{2 \cdot 10^9} = 0,5 \cdot 10^{-2} = 0,5\%$$

In de praktijk is de fout van 0,5% die we maken door ρ konstant te nemen, te verwaarlozen t.o.v. andere fouten die optreden, zodat we mogen aannemen dat bij een druktoename van 100 at toch de dichtheid van water niet verandert.

Uit de hydrostatische druk verdeling volgt dat 100 at ongeveer overeen komt met de druk in water ter plaatse van 1000 m onder de spiegel. We mogen in opstelling waarbij de druk niet lager dan 100 at wordt, voortaan het water als onsamendrukbaar beschouwen.

De kompressiemodulus van lucht kunnen we m.b.v. de wet van Boyle voor een ideaal gas afleiden. Er geldt voor een hoeveelheid gas dat $pV = \text{konstant}$. Op dezelfde wijze als bij s.9.25 vinden we dat

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = - \frac{p}{V}$$

en na substitutie in de kompressie formule vinden we dan dat $K = p$ is.

Voor lucht volgt na een druktoename van 100 at dat de relatieve dichtheids-toename gelijk is aan

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{100}{1} = 100$$

Als we nu $\rho = \text{konstant}$ nemen, dan is de fout niet meer te verwaarlozen ($\sim 10^4\%$!)

Als we toestaan dat de fout die we maken door ρ konstant te nemen, 5% mag zijn, dan kunnen we in opstellingen waarin de drukverschillen niet groter dan $\frac{1}{20}$ at. worden, de lucht eveneens als onsamendrukbaar beschouwen (air-conditioning)

Opm.: (1) Als we snelle drukwisselingen toestaan dan wordt de kompressie-modulus iets groter, nl. $K = p \frac{c_p}{c_v} \approx 1,4 p$
(isentropische samenpersing, zie kollegediktaat c18)

(2) Bij atmosferische drukschommeling in ons land blijft $\frac{\Delta p}{p}$ meestal binnen de 5% (nl. $p = 1000 \pm 50 \text{ mbar}$)

Elastische berging

Uit de kompressieformule is eenvoudig de (gemiddelde) toename van de druk per eenheid van tijd in het interval $(t, t + \Delta t)$ te bepalen.

We vinden

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{K}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \frac{K}{\rho V} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Op dezelfde manier als bij de bepaling van de massastroom (zie par. 3) of van de bergingsvergelijking (zie par. 5) laten we nu $\Delta t \rightarrow 0$ gaan. We vinden dan

$$\dot{p} = \frac{K}{\rho V} \dot{m} = \frac{K}{\rho V} S$$

Vaak wordt het quotiënt van $S p^{-1}$ en $\dot{p}$ de *elastische berging* B_{el} van het vat V genoemd; deze is dus gelijk aan

$$B_{el} = \frac{V}{K}$$

Deze berging treedt op bij massa toe- of afvoer in:

1. starre vaten die geheel gevuld zijn met samendrukbare materie;
2. elastische vaten die geheel gevuld zijn met onsamendrukbare materie en
3. elastische vaten die geheel gevuld zijn met samendrukbare materie.

In de laatste 2 gevallen is V dan als functie van de tijd te beschouwen.

In deze cursus zullen we ons voornamelijk bezig houden met starre vaten die geheel met water gevuld zijn en met vaten die zowel lucht als water bevatten (z.g. bekken en klokken).

Voor de gevulde vaten hebben we gezien dat we voor drukken tot ongeveer 100 at het water als onsamendrukbaar mogen beschouwen.

Studievraag 9.26.: Hoe groot is dan de elastische berging?

Studievraag 9.27.: Hoe groot is de gravitatie berging?

Als we nu een gevuld vat in het lokale zwaarteveld hebben, dan volgt uit s.9.26 en s.9.27 dat de stijghoogte h overal in V dezelfde waarde heeft en dat

$$h = \frac{p - p_a}{\rho g} + z$$

is en waarbij $\dot{h} = \frac{\dot{p}}{\rho g} \neq 0$ kan zijn (denk aan een zuiger)

Voor "halfgepulde" vaten blijkt dat het water in de meeste gevallen wederom als onsamendrukbaar beschouwd mag worden.

We zullen ervoor moeten zorgen dat de drukken in water niet hoger dan 100 at worden. We moeten dus oppassen dat er niet teveel water het vat ingevoerd wordt, want anders kan het gebeuren dat de lucht boven het water een druk van meer dan 100 at heeft.

Voor de stijghoogte h kunnen we nu een analoge afleiding maken als bij een open bekken (zie par. 5).

Studievraag 9.28.: Is de druk ter plaatse van de spiegel konstant in de tijd?

Uit het antwoord op s.9.28 en met de afleiding uit par. 5 volgt dan

$$\Delta h = \Delta z_s + \frac{\Delta p_1}{\rho g}$$

Delen door Δt en vervolgens $\Delta t \rightarrow 0$ laten gaan, geeft

$$\dot{h} = \dot{z}_s + \frac{1}{\rho g} \dot{p}_1$$

Uit de wet van Boyle volgt

$$\dot{h} = \dot{z}_s - \frac{1}{\rho g} p_1 \frac{\dot{V}_1}{V_1}$$

Daar het water onsamendrukbaar is volgt daaruit dat

$$\dot{V}_1 = -\dot{V}_w = -A \dot{z}_s$$

en we vinden dan

$$\dot{h} = \dot{z}_s \left\{ 1 + \frac{1}{\rho g} \frac{p_1 A}{V_1} \right\}$$

Verder volgt eveneens uit de onsamendrukbaarheid dat

$$\dot{z}_s = \frac{Q}{A}$$

zodat we uiteindelijk vinden

$$\dot{h} = \frac{Q}{A} \left\{ 1 + \frac{1}{\rho g} \frac{A p_1}{V_1} \right\}$$

We noemen soms het quotiënt van Q en $\dot{h}$ de (gravitatie)-klokberging B_k en deze is dus

$$B_k = \frac{A}{1 + \frac{1}{\rho g} \frac{A p_1}{V_1}}$$

Vaak zullen we te maken hebben met vaten waarbij de B_k gelijk is aan B omdat

$\frac{1}{\rho g} \frac{A p_1}{V_1}$ t.o.v. 1 te verwaarlozen is.

BEWERINGEN

- Bewering 9.1 : De val van een regendruppel, die geen massa verliest door verdamping of massa wint door condensatie, is met het lichaamsmodel niet te beschrijven.
- Bewering 9.2 : Een vat kan niet alleen maar uit toegangen bestaan.
- Bewering 9.3 : De beweging van water kan alleen maar door een vatmodel beschreven worden.
- Bewering 9.4 : Als een materie in een vat homogeen is, dan geldt voor een materiaaleigenschap E , dat deze onafhankelijk van de plaats in dat vat is, dus $\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0$
- Bewering 9.5 : De ijslaag op een meer is geen spiegel en daarom is dat meer dan geen bekken.
- Bewering 9.6 : Een vat V is geheel gevuld met zuiver water (massa m). De dichtheid ρ heeft overal in het vat de waarde $\rho = \frac{m}{V}$
- Bewering 9.7 : De massavoorraad van een vat is konstant, wanneer er geen materie in stroomt.
- Bewering 9.8 : V_1 en V_2 zijn alleen met elkaar verbonden.
Als de massavoorraad in V_1 varieert, dus $\dot{m}_1(t) \neq 0$, dan moet de massavoorraad in V_2 ook variëren en wel zodanig dat $\dot{m}_2(t) = -\dot{m}_1(t)$ voor elk tijdstip.
- Bewering 9.9 : De stroomwisselwerking $\dot{W}_{(12)}$ is volledig bepaald door S_{12} .
- Bewering 9.10 : De stroomwisselwerking $\dot{W}_{(12)}$ is volledig bepaald door Q_{12} .

Bewering 9.11 : In een vloeistof kunnen alleen maar volumensinteracties optreden, als deze vloeistof zich in een gravitatieveld bevindt.

Bewering 9.12 : Als er in water een schuifspanning $\vec{\tau} \neq \vec{0}$ optreedt, dan is deze vloeistof niet in rust.

Bewering 9.13 : In een stilstaande vloeistof zoals water, treedt alleen een normaalspanning op, die altijd isotroop is.

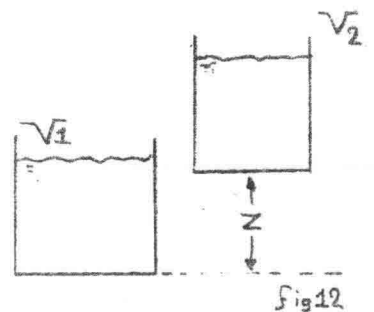
Bewering 9.14 : De hydrostatische drukverdeling geldt alleen voor de stilstaande vloeistof die een konstante dichtheid heeft.

Bewering 9.15 : De waterspiegel staat in het lokale zwaarteveld altijd loodrecht op $\vec{g}$.

Bewering 9.16 : De stijghoogte van stilstaand water met een konstante dichtheid in een bekken ter plaatse z is altijd gelijk aan:

$$h = \frac{p - p_a}{\rho g} + z$$

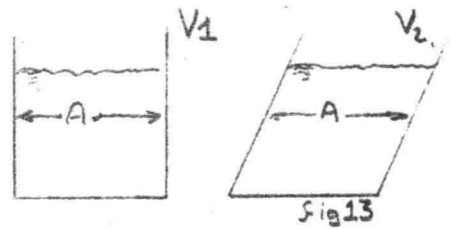
Bewering 9.17 : V_1 en V_2 zijn twee identieke vaten die van boven open zijn. De bodem van V_2 is Z m boven de bodem van V_1 . In V_1 en V_2 staat evenveel water ($\rho = \text{konstant}$).



De stijghoogte h_1 van V_1 is groter dan de stijghoogte h_2 van V_2 . Het zwaarteveld is lokaal en de atmosferische druk boven beide vaten is p_a .

Bewering 9.18 : De gravitatie berging van een vat dat steeds gevuld blijft, is altijd nul.

Bewering 9.19 : V_1 en V_2 zijn twee vaten die van boven open zijn en die een gelijke horizontale doorsnee A hebben.



De berging B_1 van V_1 is altijd gelijk aan de berging B_2 van V_2 .

Bewering 9.20 : Hoe groter de kompressie modulus hoe groter de samenspersing bij een gegeven drukverschil.

Bewering 9.21 : De kompressie-modulus van een homogene materie is nul.

Bewering 9.22 : Als voor een vloeistof in een vat V de elastische berging $B_{el} = 0$ is, dan is deze vloeistof niet samendrukbaar.

Bewering 9.23 : Voor een klok, die met water en lucht gevuld is, geldt dat de gravitatieberging voor het water steeds gelijk is aan de elastische berging van de lucht.

VRAAGSTUKKEN

- v 9.1 De turbine van een waterkrachtcentrale wordt aangedreven door water dat vanuit een hoger gelegen stuwmeer door een pijp naar beneden kan stromen.

Het gebruikte water wordt door een kanaal in een meer geloosd.

De turbine is op te vatten als een vat, waarin een schoepenrad kan ronddraaien. Geef een schematisering van dit stromingsprobleem en benoem alle vaten b.v. klok, bekken enz. Geef verder aan wat de (vaste) wanden, toegangen enz. zijn. Zijn er nog waterspiegels?

- v 9.2 Hiernaast is een schematisering van een bepaald stromingsprobleem getekend.

Hoeveel elementaire vaten zijn er te onderscheiden en van welk type zijn ze?

Zijn er vaten die geheel bestaan uit vaste wanden en zijn er die helemaal geen vaste wanden hebben?

Hoeveel toegangen zijn er?

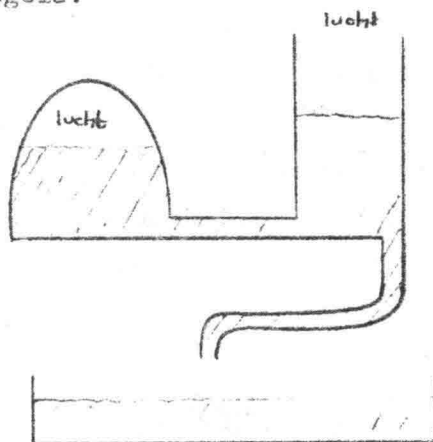


fig 14

- v 9.3 In een meer, dat we geschematiseerd hebben tot een open vat (zie fig. 15 voor de afmetingen), is een konstante hoeveelheid stilstaand water aanwezig.

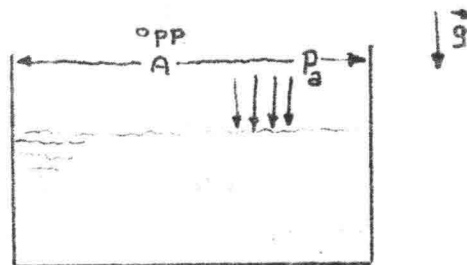


fig 15

De dichtheid ρ van het water is een functie van de hoogte x boven de bodem (zie fig. 16).

Gevraagd:

- De dichtheid in het gebied $0 \leq x \leq \frac{1}{2}x_0$;
- De massa van het water in de onderste helft van het meer;

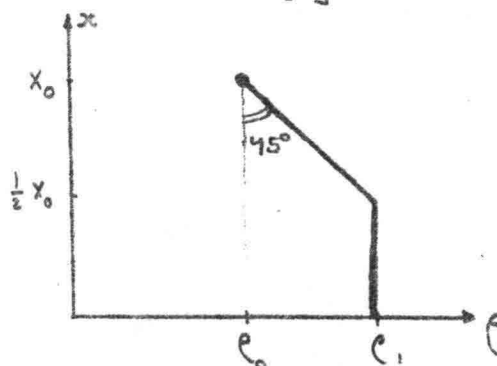


fig 16

- c. De dichtheid in het gebied $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$;
- d. De massa van het water in de bovenste helft van het meer;
- e. De gemiddelde dichtheid voor het hele meer;
- f. Is de massa-verdeling gelijkmatig? Zo ja, waar?
- g. Is het water in het meer homogeen? Zo ja, waar?

v 9.4 In een bepaald watergebied is een stilstaand mengsel van zoet en zout water. We hebben voor een verticale doorsnede van het gebied de lijnen van gelijke dichtheid in een grafiek aangegeven, waarbij we vanwege de overzichtelijkheid steeds hetzelfde dichtheidsverschil

$\Delta\rho$ tussen 2 naast elkaar liggende lijnen hebben genomen (zie fig.17)

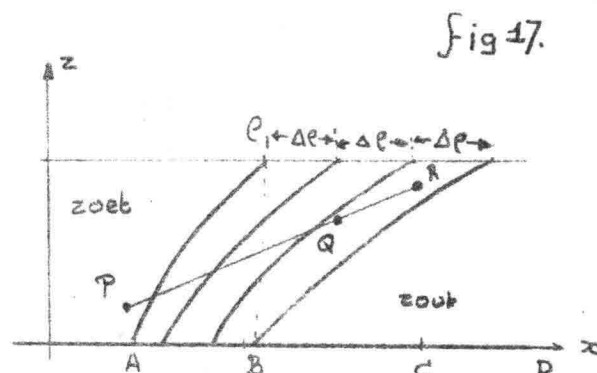
De dichtheid van het zoete water is konstant en is gelijk aan ρ_1 .

De dichtheid van het zoute water is konstant en is gelijk aan ρ_4 .

Gevraagd:

- a. De grafieken van $\rho(z)$ ter plaatse van $x = A$, $x = B$, $x = C$ en $x = D$;
- b. Wat valt over de afgeleide $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ ter plaatse van $x = B$ te zeggen?
- c. Teken de gemiddelde dichtheid als functie van x ;
- d. Verklaar waarom voor de dichtheden in P, Q en R geldt dat

$$\rho_R > \rho_Q > \rho_P.$$

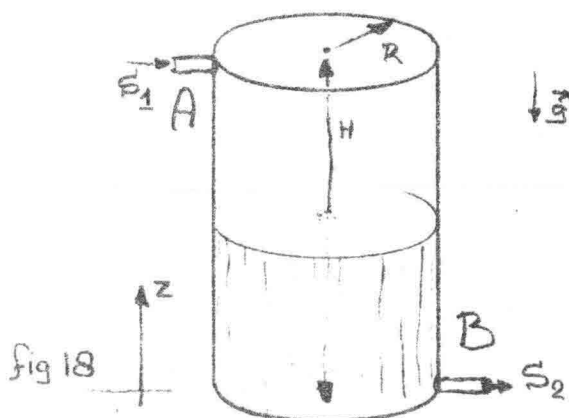


v 9.5 Een cilindrisch vat V heeft een hoogte H en een straal R. Verder zijn bij A en B toegangen tot V. (zie fig. 18)

Op het tijdstip $t=0$ is V voor de helft gevuld met zout water

($\rho_2 = \text{konstant}$). We willen het

zoute water vervangen door zoet water ($\rho_1 = \text{konstant}$, $\rho_1 < \rho_2$) en daarom laten we bij B het zoute water wegstromen met een konstante massastroom S_2 . Verder willen we de waterstand in V niet veranderen en we laten daarom bij A zoet water binnenstromen met een konstante massastroom S_1 .



Gevraagd:

- Bereken S_1 , Q_1 en Q_2 als functie van de vatgegevens, S_2 , ρ_1 en ρ_2 ;
- Bereken het tijdstip t_1 waarop we bij B zoet water hebben;
- Bereken de gemiddelde dichtheid ρ in V ;
- Wat gebeurt er als $S_1 = S_2$?

v.9.6 Hiernaast is een schets van 2 met elkaar communicerende vaten V_1 en V_2 . Beide vaten zijn cilindervormig (straal V_1 is $2R$ en straal V_2 is R) en hebben dezelfde hoogte H .

We veronderstellen dat de leidingen AB en CD twee ideale verbindingen vormen (zie blz. 9.16).

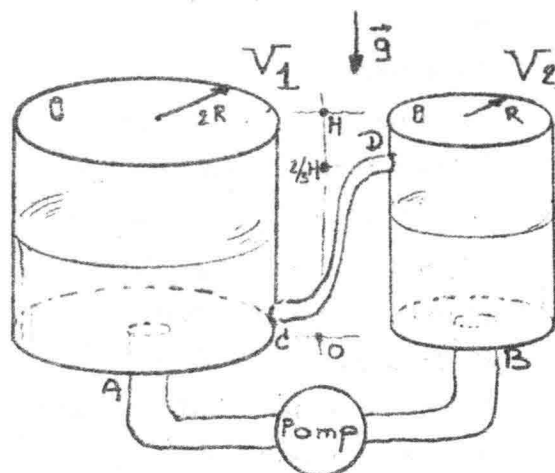


Fig 19

De pomp in leiding AB verpompt per seconde 1 m^3 water ($\rho = \text{konstant}$) van V_1 naar V_2 .

Op het tijdstip $t = t_0$ staat er in V_1 en V_2 evenveel water, waarbij de waterstand in V_2 gelijk is aan H .

Gevraagd:

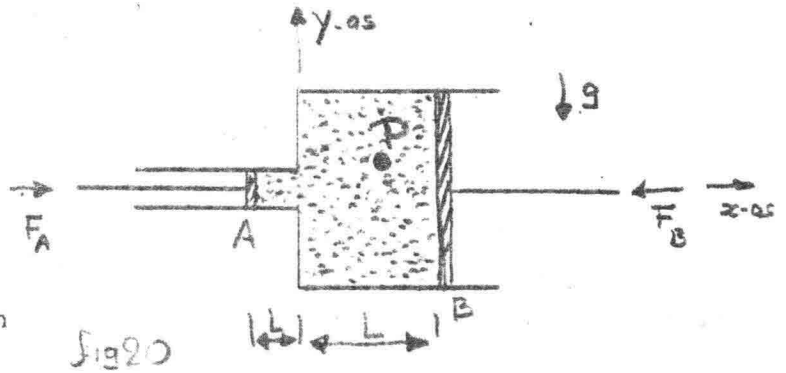
- Bereken voor het tijdstip $t = t_0$ de massavorraden m_1 , m_2 en de waterstand in V_1 ;
- Stel de massabalans op voor V_2 ;
- Bereken het tijdstip t_1 waarop het water ook door CB gaat stromen;
- Bereken op het tijdstip t_1 de waterstand in V_1 .

Na het tijdstip t_1 gaat er door de leiding CD een debiet van $\frac{1}{10} \text{ l m}^3 \text{ s}^{-1}$ van D naar C.

Gevraagd:

- Stel de massabalans op voor V_1 ;
- Bereken het tijdstip t_2 waarop V_1 leeg is;

- v.9.7 Hiernaast is een hydraulische pers geschetst. De zuigers A en B zijn cirkelvormig (straal van A is R , straal van B is $5R$).



De vloeistof tussen de zuigers is als onsamendrukbaar te beschouwen ($\rho = \text{konstant}$).

De versnelling van het lokale zwaarteveld is $\vec{g}$.

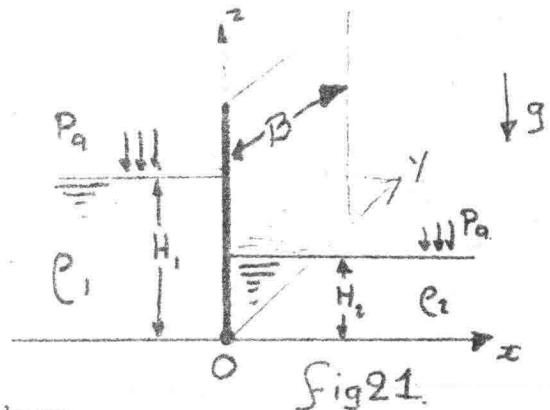
Via de zuigerstangen worden op de zuigers A en B krachten $\vec{F}_A$ en $\vec{F}_B$ uitgeoefend (zie fig.).

Er geldt verder dat alles in rust is.

Gevraagd:

- De druk in een willekeurig punt $P(x, y, z)$;
- Het verband tussen F_A en F_B ;
- De stijghoogte in een willekeurig punt $P(x, y, z)$;
- Het verband tussen F_A en de stijghoogte.

- v.9.8 Links van een verticale sluisdeur (breedte B) staat water ($\rho_1 = \text{konstant}$) en rechts ervan eveneens water ($\rho_2 = \text{konstant}$). De versnelling van het lokale zwaarteveld is $\vec{g}$. De atmosferische druk is p_a .



Gevraagd:

- De totale kracht $\vec{F}$ op de sluisdeur;
- Het totale moment $\vec{L}_O$ om de snijlijn van de deur met bodem;
- Bepaal de verhouding tussen de waterhoogtes en de dichtheden in het geval dat $\vec{F} = \vec{0}$ is;
- Is in geval (c) dan ook $\vec{L}_O = \vec{0}$?

- v.9.9 In een open vat met een konstante doorsnede A hebben we een laag zoet water ($\rho_1 = \text{konstant}$) boven een laag zout water ($\rho_2 = \text{konstant}$). De massavoorraad van het zoete water is m_1 en de massavoorraad van het zoute water is m_2 . De versnelling van het lokale zwaarteveld is $\vec{g}$ en de atmosferische druk is p_a (konstant).

Alles is in rust.

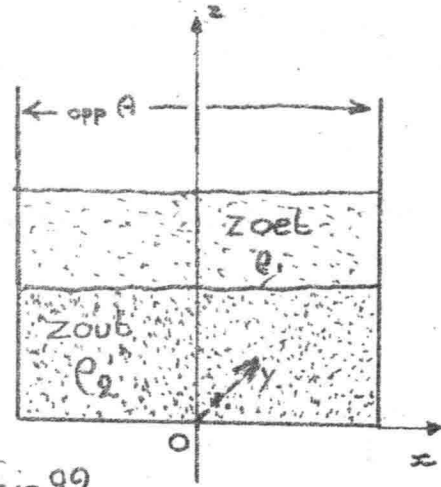
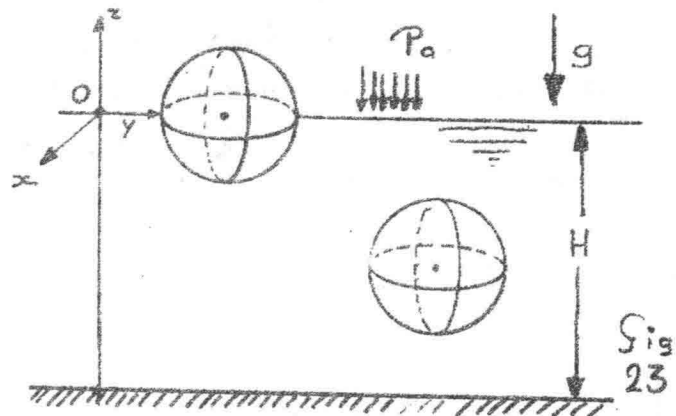


Fig 22

Gevraagd:

- De hoogtes van het wateroppervlak en van het zoet-zout grensvlak boven de bodem;
- De druk in een willekeurig punt P in de vloeistof;
- De stijghoogte in een willekeurig punt P in de vloeistof.

- v.9.10 Een bol (straal R , massa M) bestaat uit een homogeen materiaal met een overall dezelfde dichtheid. De bol drijft op of zweeft in een groot open vat met water ($\rho = \text{konstant}$). Alles is in rust.



De versnelling van het lokale zwaarteveld is $\vec{g}$ en de atmosferische druk is p_a (konstant).

Gevraagd:

- De druk in een willekeurig punt P in het water;
- De kracht die door het water op de bol wordt uitgeoefend in het geval dat de bol voor de helft boven de spiegel uitsteekt (kies O samenval met middelpunt bol);
- De massa M van de bol als funktie van ρ in het geval dat de bol zweeft met zijn middelpunt op de hoogte $\frac{1}{2}H$ boven de bodem ($\frac{1}{2}H > R$).

- v.9.11 In een vierkante uitsnijding van 2×2 meter in de verticale wand van een bak is een houten cilinder aangebracht op de wijze als in de figuur geschetst is. De cilinder kan zonder wrijving om zijn horizontale as draaien. De bak wordt met water gevuld tot een hoogte van 2 meter boven de cilinderas.

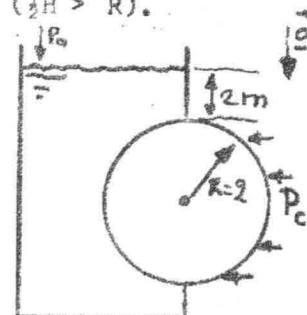


Fig 24.

De dichtheid van water is 1000 kg m^{-3}

De dichtheid van het hout is 700 kg m^{-3} .

- Bereken de opwaartse kracht die de cilinder van het water ondervindt;
- Toon aan dat de cilinder niet als een perpetuüm mobile om zijn as gaat draaien;
- Bereken de totale kracht die de cilinder op zijn as uitoefent.

v.9.12 Zie opgave v.9.5 waarbij V een open vat is en $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ een konstante is
Gevraagd:

- De gravitatie berging van het vat;
- De bergingsvergelijking;
- De stijghoogte als functie van de tijd.

v.9.13 Zie opgave v.9.6 waarbij V_1 en V_2 open vaten zijn.

Gevraagd:

- De gravitatie-bergingen van de vaten en de leidingen;
- De bergingsvergelijkingen voor V_1 en V_2 ;
- Het verband tussen de stijghoogtes van V_1 en V_2 als functie van de tijd.

v.9.14 Zie opgave v.9.7 waarbij $\vec{g} = -g \vec{e}_x$ en zuiger B weg is.

Gevraagd:

- De gravitatie-berging van de pers
- De bergingsvergelijking als zuiger A met een konstante snelheid v_A beweegt tot de verwijding
- De stijghoogte als functie van de tijd in bovengenoemd geval.

v.9.15 Zie opgave v.9.7, waarbij we nu aannemen dat de vloeistof samendrukbaar is en dat de invloed van het lokale zwaarteveld te verwaarlozen is. De kompressie-modulus van de vloeistof is $K = 2 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$.

De grootte van F_A is $\pi R^2 \cdot 10^2 \text{ N}$.

We willen nu de zuiger A verplaatsen naar rechts, zonder dat B van plaats verandert.

Gevraagd:

- Wat moet F_A worden als we A over een afstand van $\frac{1}{10} L$ naar rechts willen verplaatsen?
- Wat wordt de relatieve dichtheidsverandering daardoor?
- Wat is de elastische berging van de pers?

We veronderstellen nu dat we de zuiger met een konstante snelheid $v_A = \frac{1}{1000} L \text{ ms}^{-1}$ naar zijn nieuwe stand bewegen en dat de vloeistof een dichtheid $\rho = 1000 \text{ kgm}^{-3}$ heeft bij het begin.

Gevraagd:

- De elastische bergingsvergelijking;
- De druk als functie van de tijd.

We nemen vervolgens aan dat bij zuiger B een massastroom van 1 kgs^{-1} de pers binnenstroomt.

Verder neemt zuiger A de beginstand weer in en blijft deze behouden.

Gevraagd:

- De druk als functie van de tijd;
- De relatieve dichtheidsverandering per eenheid van tijd;
- De dichtheid als functie van de tijd.

v.9.16 In een cilinder (straal R , lengte L)

kan een zuiger A heen en weer bewegen.

Als de zuiger in z'n onderste stand is, dan is de cilinder voor de helft gevuld met water van een dichtheid $\rho = 1000 \text{ kgm}^{-3}$ en voor de andere helft met lucht met een druk van 10^5 Nm^{-2} .

Het water heeft een kompressiemodulus van $2 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$.

De grootte van de versnelling van het lokale zwaarteveld is 10 ms^{-2} .

Gevraagd:

- De luchtdruk p als functie van de spiegelhoogte z_s .
- De spiegelhoogte z_s waarbij de relatieve dichtheidsverandering van het water gelijk aan 1% is.

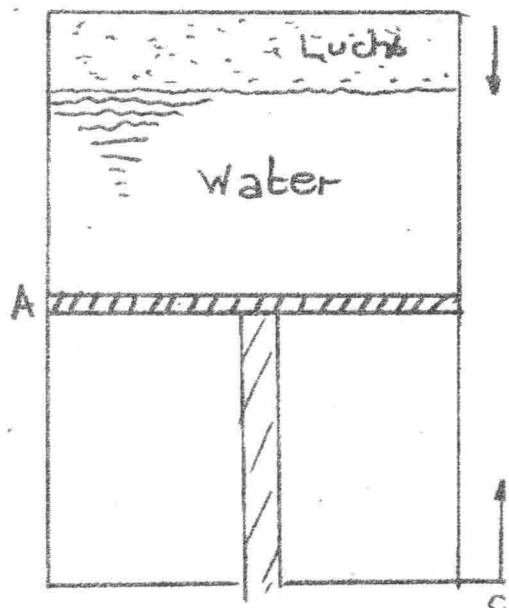


fig 25

Als we nu verder geven dat de zuiger A alleen maar beweegt in het onderste kwart van de cilinder, (dus $0 < z_A < \frac{1}{4}L$) dan wordt gevraagd:

- c. Mag met een nauwkeurigheid van 1% het water als onsamendrukbaar beschouwd worden?
- d. Bereken de klokberging als functie van z_A .
- e. Bereken de lengte L, waarbij we met een nauwkeurigheid van 1% de klokberging mogen vervangen door de gravitatie-berging (bij de gegeven beweging van A !)

ANTWOORDEN OF AANWIJZINGEN BIJ DE STUDIEVRAGEN

Aanwijzingen bij een studievraag worden aangeduid door een accent-teken bij het nummer van de vraag. Het antwoord staat dan enige bladzijden verder bij het onderdeel:

Antwoorden na aanwijzingen bij de studievragen.

- 9.1 De ruimte binnen het drinkglas, d.w.z. alle ruimte onder de glasrand en tot de glaswand, voldoet aan de eigenschappen die een vat moet hebben (zie d. 9.2)

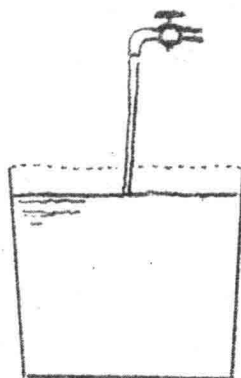


Fig 26

De beweging van het water kan dan beschreven worden door de waterhoeveelheid die in dat glas op elk moment aanwezig is.

Een eenvoudige maat hiervoor is de hoogte van het wateroppervlak boven de bodem van het glas. Je kunt verder over de beweging zeggen dat deze iets te maken zal hebben met de mate waarop het wateroppervlak stijgt. Over de beweging in de vloeistof zelf en in de waterstraal is verder met dit model niets te zeggen.

Opm.: In het vat-model gaat het om de zichzelf blijvende, begrensde ruimte. Als we het glas verplaatsen, b.v. een paar centimeters naar rechts, zodat de waterstraal nog steeds in het glas eindigt, dan is er eigenlijk voor een toeschouwer niets aan het probleem veranderd. Wel geldt dat het glas nu een ander stuk van de ruimte als vat definieert. We hebben zodoende toch een ander probleem in onze vat-theorie !

We zien hieruit nogmaals (staat eigenlijk ook in d 9.2) dat vaten niet bewegen, d.w.z. niet bewegen t.o.v. ons referentiestelsel in de ruimte.

- s. 9.2 Het glas zelf is de vaste wand; we kunnen dit eventueel nog splitsen in de opstaande wand en de bodem. De "eenvoudigste" toegang (het eenvoudigst te beschrijven oppervlak) is de horizontale doorsnee ter hoogte van de glasrand.

Formeel zou je ook het hier-naast getekende oppervlak als toegang kunnen beschouwen mits dit oppervlak maar vastligt. In de praktijk nemen we natuurlijk de eenvoudigste toegang.

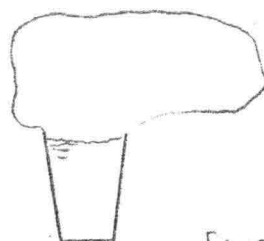


Fig 27

- s. 9.3 Op dezelfde wijze als bij de bepaling van ρ_i kunnen we nu zeggen dat er bij elk volumendeeltje ΔV_i een massa Δm_i hoort. We vinden

$$m = \sum_{i=1}^N \Delta m_i = \sum_{i=1}^N \rho_i \Delta V_i = \sum_{i=1}^N \rho(\vec{r}_i, t) \Delta V_i$$

Na het "verfijningsproces" gaat dit over in de volumenintegraal

$$m = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV = \iiint_V \rho(x, y, z, t) dV$$

Voor de afgeleide kunnen we wederom eerst naar één volumendeeltje kijken

$$\dot{\Delta m}_i = \dot{\rho}_i \Delta V_i = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}_i, t) \Delta V_i$$

Na sommeren en verfijnen vinden we dan

$$\dot{m} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z, t) dV$$

Opm.: De techniek om zo'n integraal te berekenen wordt voor deze eenheid niet vereist en dus ook niet getest. De bedoeling van deze studievraag was de aandacht vestigen op de mogelijkheid dat je de massa m ook kan berekenen, als je de dichtheid als functie van de plaats en de tijd kent.

s. 9.4 Bedenk dat $\rho = \text{konstant}$ betekent, dat ρ zowel in plaats als in tijd konstant is.

$$\text{Dus } \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

s. 9.5 Door leiding A is een massastroom

$$S_{12}^A = m_A$$

Door leiding B is een massastroom

$$S_{21}^B = m_B$$

De massastroom S_{12} is de nettomassa die per tijdseenheid van V_2 naar V_1 gaat, dus

$$S_{12} = m_A - m_B$$

We zien dan dat het volgende verband geldt:

$$S_{12} = S_{12}^A - S_{21}^B$$

Daar $S_{21}^B = -S_{12}^B$ gaat dit over in

$$S_{12} = S_{12}^A + S_{12}^B$$

s. 9.5^A S_1 is de som van alle massastromen S_{1j} , waarbij S_{1j} de massastroom van vat V_j naar vat V_1 is.

We zien uit fig. 3A, dat V_1 alleen met V_2 in verbinding staat, zodat we krijgen

$$S_1 = S_{12}$$

s. 9.5^B We hebben hiernaast zo'n geval getekend. Er geldt weer dat de totale massa konstant blijft, dus

$$m = m_1(t) + m_2(t) + m_3(t) = \text{konstant}$$

Differentiatie geeft

$$0 = \dot{m}_1(t) + \dot{m}_2(t) + \dot{m}_3(t)$$

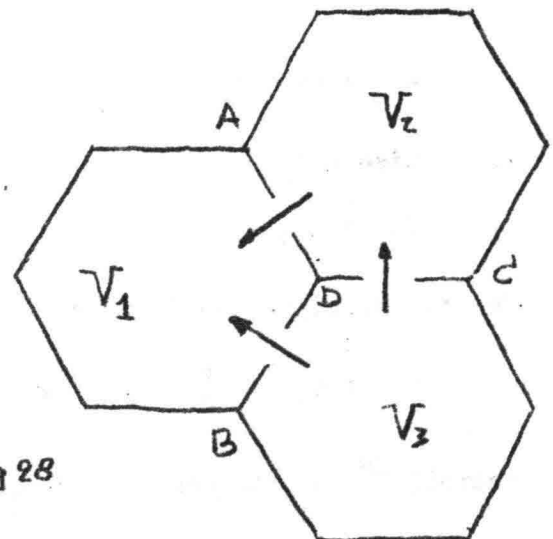


Fig 28

Vanuit V_1 bekeken is V_2 en V_3 te vervangen door een vat V_0 dat twee verbindingen met V_1 heeft (zie s. 9.5).

We weten verder dat de totale massastroom naar V_1 gelijk is aan $\dot{m}_1(t)$, zodat we komen tot (met s. 9.5 !)

$$S_1 = \dot{m}_1(t) = S_{10}^{AD} + S_{10}^{BD}$$

Als we nu verder bedenken dat S_{10}^{AD} het gevolg is van de wisselwerking $W_{(12)}$ en S_{10}^{BD} van $W_{(13)}$ dan kunnen we weer schrijven

$$S_1 = S_{12} + S_{13}$$

Een analoge redenering voor V_2 en V_3 geeft

$$S_2 = S_{21} + S_{23}$$

$$S_3 = S_{31} + S_{32}$$

Verder volgt na optellen van deze 3 vergelijkingen dat

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0$$

want $S_{12} + S_{21} = 0$, $S_{13} + S_{31} = 0$ en $S_{23} + S_{32} = 0$

s. 9.6 Het debiet door leiding A is

$$Q_{12}^A = \frac{\dot{m}_A}{\rho}$$

Het debiet door leiding B is

$$Q_{21}^B = \frac{\dot{m}_B}{\rho}$$

Het debiet van V_2 naar V_1 is

$$Q_{12} = \frac{\dot{m}_A - \dot{m}_B}{\rho} = \frac{\dot{m}_A}{\rho} - \frac{\dot{m}_B}{\rho}$$

en we zien dat

$$Q_{12} = Q_{12}^A - Q_{21}^B$$

Meestal schrijven we Q_{12} als

$$Q_{12} = Q_{12}^A + Q_{12}^B \quad \text{of} \quad Q = Q^A + Q^B$$

waarbij Q^B dan een negatief debiet is

s. 9.7 Ja, b.v. brak water.

s. 9.8 Een volumendeeltje ΔV_i uit V_d ter plaatse van $\vec{r}_i$ heeft de massa

$$\Delta m_i = \rho(\vec{r}_i) \Delta V_i.$$

Daar we in het lokale zwaarteveld zitten ondervindt Δm_i een zwaarte-kracht t.g.v. gravitatie interactie met de aarde (de gravitatie interactie met de rest van de vloeistof mag verwaarloosd worden, zie eenheid 4).

Voor het gehele gebied V_d volgt (zie ook s. 9.3)

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{g} = \vec{g} \sum_{i=1}^N \Delta m_i = m \vec{g}$$

waarin m de totale massa van de vloeistof in V_d is.

De oppervlakte interacties zijn niet zonder meer te berekenen, ze hangen af van de toestand van de vloeistof (zie ook kontakt-interactie in eenheid 4).

s. 9.9 Neen. De spanning(svektor) is wel afhankelijk van de $\vec{e}_{12}$ -richting, maar hij hoeft niet evenwijdig aan die richting te zijn. Lees ook de theorie over kontakt-interacties, eenheid 4, par. 2.

s. 9.10 Mits $\vec{e}_{12} + \vec{e}_{21} = \vec{0}$ is, zie ook s. 9.9.

s. 9.11 Ja, Ga de afleiding maar na ! Nergens is gebruik gemaakt van een eigenschap die een vloeistof wel en een gas niet heeft of omgekeerd.

s. 9.12 Bewijs dat de druk in een punt vlak onder het grensvlak en de druk in een punt vlak boven het grensvlak aan elkaar gelijk worden, als de afstand tussen de punten naar nul gaat.

s. 9.13 Daar de vloeistof in rust is, zijn er geen schuifspanningen.

Alle spanningen zijn normaal, zodat alle oppervlakte-krachten loodrecht staan op de "bijbehorende" oppervlakjes.

De kracht op het voorvlak b.v. heeft de richting van $-\vec{e}_x$ enz.

De volumekracht $\vec{G} = m \vec{g}$ (zie s. 9.8) en $\vec{g} = -g \vec{e}_z$, dus $\vec{G}$ heeft de richting van $-\vec{e}_z$.

s. 9.14 Uit $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ volgt dat p geen funktie van x is.

Uit $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ volgt dat p geen funktie van y is.

Uit deze twee voorwaarden volgt dat p nog wel een funktie van z kan zijn.

We mogen i.p.v. $\frac{\partial p}{\partial z}$ dan verder schrijven $\frac{dp}{dz}$.

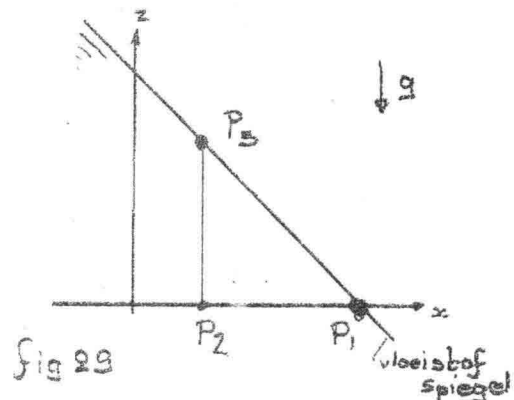
Daar $p = p(z)$ is, geldt voor de afgeleide $\frac{dp}{dz}$ dat deze ook een functie van z is. Het rechterlid van de vergelijking $\frac{dp}{dz} = \rho g$ moet dan ook een functie van z zijn.

In het lokale zwaarteveld is g konstant, dus dan kan p alleen maar een functie van z zijn, dus $p = p(z)$.

Opm.: p mag wel een konstante functie van z zijn !

- s. 9.15 Ja. In de afleiding is nergens gebruik gemaakt van een eigenschap die een vloeistof wel en een gas niet heeft of omgekeerd.
(zie ook s. 9.11 en b.v. het kollegediktaat C-18 Alg.Nat. blz ...)

- s. 9.16 Stel dat een stukje oppervlak AA niet loodrecht op $\vec{g}$ staat. Kies dan 3 punten zoals in fig. Bewijs vervolgens dat P_3 met P_2 moet samenvallen. Houd daarbij rekening met het feit dat de druk in een stilstaand gas in een vrij groot gebied overal hetzelfde is.



- s. 9.17 In de hydrostatika van water ($\rho = \text{konstant}$) is de uitdrukking

$$h = \frac{p - p_a}{\rho g} + z$$

een konstante door de hele vloeistof heen. De partiële afgeleide naar x , y en z zijn dan nul.

We kunnen dit ook berekenen:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p - p_a}{\rho g} + z \right\} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{p - p_a}{\rho g} + z \right\} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{p - p_a}{\rho g} + z \right\} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0$$

$$\text{want } \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

- s. 9.18 Bedenk waaraan h gelijk is.

- s. 9.19 De dichtheid ρ van het water is konstant, d.w.z. konstant zowel in de plaats als in de tijd.
Gebruik nu de definitie voor de dichtheid (zie par. 2, sectie dichtheid).
- s. 9.20 Nee. Het gaat om de watervoorraad in het vat. Het enige belangrijke is de *rusttoestand* van dat water in het vat. Bij een toegang boven de spiegel moeten we "langer" wachten voordat alles weer in rust is. Het limiet proces $\Delta t \rightarrow 0$ is dan niet zo goed mogelijk. Bij de limiet overgang van $\Delta t \rightarrow 0$, zodat we h als funktie van Q krijgen, nemen we stilzwijgend aan dat op elk moment de stijghoogte door de gehele vloeistof in het vat dezelfde waarde heeft. We nemen dus aan dat de stroming in het vat te verwaarlozen is, zodat we de berekening voor de stijghoogte mogen toepassen (zie par. 4, sectie stijghoogte)
- s. 9.21 Neen. Het oppervlakte A van de waterspiegel kan veranderen met toe- of afnemende waterhoogte b.v. een rivier, een meer. In dergelijke gevallen is A als een funktie van z_s op te vatten. In deze cursus zullen we ons alleen bezig houden met vaten waarin de waterspiegel een konstant oppervlak A heeft.
- s. 9.22 Als de stroming in het vat te verwaarlozen is in een tijdsinterval $(0, t)$ dan volgt uit het geldig zijn van de bergingsvergelijking d.m.v. integratie direkt:
- $$h(t) = h(o) + \frac{1}{B} \int_0^t Q(t) dt$$
- Voor de druk $p(t)$ geldt dan ter plaatse van z :
- $$p(t) = \rho g h(t) + z + p_a(t)$$
- en voor de druk $p(o)$:
- $$p(o) = \rho g h(o) + z + p_a(o)$$
- Hieruit volgt
- $$p(t) = p(o) + \frac{\rho g}{B} \int_0^t Q(t) dt$$

als de atmosferische druk p_a een konstante in de tijd is. Meestal zijn de veranderingen in de atmosferische druk te verwaarlozen t.o.v. de andere veranderingen.

Als de atmosferische druk ook verandert dan moeten we schrijven

$$p(t) = p(o) + \frac{\rho g}{B} \int_0^t Q(t) dt + p_a(t) - p_a(o)$$

Merk op dat in een bekken de druk ter plaatse van z kan veranderen zonder dat er massa toe- of afgevoerd wordt.

- s. 9.23 De druk p is isotroop, want de materie is in rust (zie par. 4).
Verder geldt voor de druk p dat

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

zodat deze toeneemt bij toenemende diepte (druk bij bodem is groter dan bij deksel; zie ook s. 9.14).

De stijghoogte h zou overal in V dezelfde waarde hebben, als ρ konstant zou zijn, maar tengevolge van de druktoename bij toenemende diepte is daar de materie meer samengeperst en wordt daar ook een hogere dichtheid verkregen (ga na aan de hand van de def. van de dichtheid)

In het algemeen geldt dus

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = -\rho(z)g$$

Voor de stijghoogte volgt dan

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{dh}{dz} = -\frac{p - p_a}{\rho^2 g} \frac{d\rho}{dz}$$

en dit is in het algemeen ongelijk nul (want $\frac{d\rho}{dz} \neq 0$), zodat we wederom zien dat h alleen maar konstant is als ρ onafhankelijk van de plaats is.

- s. 9.24 Op dezelfde manier als bij de afleiding van de hydrostatische drukverdeling kunnen we afleiden dat

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

en nu ook dat

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

want de volumenkracht $\rho g \Delta V$ valt nu weg !

Uit bovenstaande 3 vergelijkingen volgt dan dat p overal in V dezelfde waarde heeft.

Voor de materie is nu geen enkele reden, makroskopisch gezien, om in het ene gebied meer samengeperst te worden dan in het andere gebied en in afwezigheid van uitwendige volumenkraften, zullen de molekulen zich zo bewegen (moleculaire warmtebeweging), dat de dichtheid overal in V dezelfde waarde heeft (zie ook het diktaat Alg.Nat. voor Civielen, kin. gastheorie).

- s. 9.25 We nemen een vat V dat elastisch is. De massavoorraad in V blijft konstant. Dus er geldt op het tijdstip t

$$m = \rho(t) V(t)$$

en op het tijdstip $t + \Delta t$

$$m = \rho(t + \Delta t) V(t + \Delta t) = (\rho + \Delta \rho)(V + \Delta V)$$

Uit deze vergelijkingen volgt

$$0 = V \Delta \rho + \rho \Delta V$$

daar we $\Delta \rho \Delta V$ t.o.v. de beide andere termen mogen verwaarlozen.

We zien dat

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = - \frac{\Delta V}{V}$$

en na substitutie volgt vanzelf het gevraagde.

Opm.: $\Delta V < 0$ als $\Delta \rho > 0$!

s. 9.26 $B_{el} \approx \frac{V}{2 \cdot 10^9} = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ V} \quad \text{m}^5 \text{N}^{-1}$

In de praktijk is dit gelijk aan nul te stellen. Stel $B_{el} = 0$ en we maken dan pas een fout van 0,05 als V de waarde 10^8 m^3 heeft.

- s. 9.27 Bedenk dat er geen spiegel kan zijn !

- s. 9.28 Nee. Want op het tijdstip t is de druk van de lucht boven het water gelijk aan $p_1(t)$ en neemt de lucht een volume in $V_1(t)$. Op het tijdstip $t + \Delta t$ is $V_1(t + \Delta t) = V_1(t) - A \Delta z_s$ geworden en met de wet van Boyle vinden we dan voor de druk op dat tijdstip

ANTWOORDEN NA AANWIJZINGEN BIJ DE STUDIEVRAGEN

s. 9.4 Hoewel de massavoorraad konstant is (dus $\dot{m} = 0$) hoeft $\Delta \dot{m}_i$ niet gelijk aan nul te zijn.

Uit het antwoord op s. 9.3 blijkt alleen dat de som

$$\sum_{i=1}^N \Delta \dot{m}_i$$

of de integraal

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

nul moet zijn.

Uit de laatste formule is wel te zien dat voor $\rho = \text{konstant}$ in de tijd de massavoorraad eveneens konstant blijft, maar dan mag nog steeds ρ een funktie van de plaats zijn.

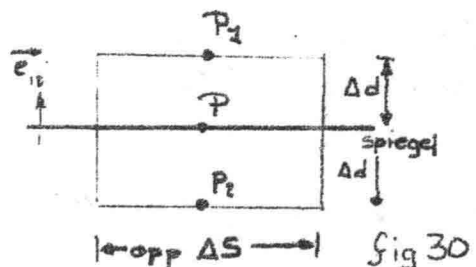
Als de materie homogeen is, dan hoeft de materie niet gelijkmatig over de ruimte verdeeld te zijn en bovendien kan deze verdeling ook nog van de tijd afhangen.

De niet gelijkmatige verdeling kan veroorzaakt worden door druk- en temperatuursverschillen.

Opm.: Vaak wordt onder een homogene materie een stof verstaan, waarvoor alle eigenschappen onafhankelijk van de plaats zijn, b.v. dat dan ook de dichtheid konstant is.

In deze cursus zullen we onder een homogene materie een stof verstaan waarvan de samenstelling door de hele ruimte hetzelfde is. Een enkelvoudige stof zoals zuiver water, is dus altijd homogeen. Andere stoffen zoals lucht of zout water kunnen homogeen van samenstelling zijn.

s. 9.12 Hiernaast een vergroting van een stukje van het grensvlak (spiegel) met de beide punten P_1 en P_2 aan weerszijden. Over een klein gebiedje ΔA mag het grensvlak als een plat vlak beschouwd worden. De stand van het



vlakje ΔA t.o.v. $\vec{g}$ is voorlopig niet belangrijk, wel weten we dat deze niet verandert in de loop der tijd (hydrostatika).

We kiezen een ΔV in de vorm van een kubus met een ribbe Δd , terwijl ΔA samenvalt met de middendoorsnede van deze kubus (zie fig. 30)

Daar alles in rust is, moet weer de som van alle volumen- en oppervlaktekrachten die op ΔV werken, gelijk aan de nulvektor zijn.

Voor de $\vec{e}_{12}$ -richting vinden we (zie ook de afleiding van de wet van Pascal), omdat $\vec{e}_{12} \perp \Delta A$ staat, dat moet gelden

$$-(p_1 + p_2) \Delta A \frac{1}{2} \Delta d (\vec{g} \cdot \vec{e}_{12}) - p_1 \Delta A + p_2 \Delta A = 0$$

of

$$-\frac{1}{2}(p_1 + p_2)(\vec{g} \cdot \vec{e}_{12})\Delta d - p_1 + p_2 = 0$$

We laten nu $\frac{1}{2} \Delta d \rightarrow 0$ gaan en we zien dat $p_1 = p_2$ wordt en dat bovendien de punten P_1 en P_2 samenvallen in het punt P van het grensvlak.

Verder zijn de drukken in P_1 en P_2 tijdens het limietproces steeds isotroop, zodat we mogen konkluderen dat de druk in P ook isotroop is.

- s. 9.16 Met behulp van s. 9.12 en de eigenschap van de hydrostatische drukverdeling voor een stilstaande vloeistof volgt, dat de drukken p_1 en p_2 aan elkaar gelijk zijn.

Eveneens volgt uit de hydrostatische drukverdeling dat

$$p_2 = p(z_2) = p(z_3) + \int_{z_2}^{z_3} g \rho(z) dz$$

Daar $p_1 = p(z_1) = p(z_3)$ (eigenschap van een gas over een klein volumegebied bekeken) volgt

$$p_2 = p_1 + \int_{z_2}^{z_3} g \rho(z) dz$$

Daar $p_1 = p_2$ (liggen in hetzelfde horizontale vlak) volgt dat

$$\int_{z_2}^{z_3} g \rho(z) dz = g \int_{z_2}^{z_3} \rho(z) dz = 0$$

Dit is nul als $\rho(z) = 0$ of als $z_2 = z_3$ (z_2 en z_3 waren willekeurig!).

We zien af van de 1e mogelijkheid en we moeten dus konkluderen dat

$z_2 = z_3$ en dat het grensvlak steeds loodrecht op $\vec{g}$ staat.

Opm.: Het grensvlak kan wel "scheef" staan als de vloeistof stroomt, dus niet hydrostatisch is.

9.18 Als het water in rust is dan geldt dat de stijghoogte h gelijk aan z_a is. Als de vloeistofspiegel "langzaam" stijgt, zodanig dat we de vloeistof in "kwasi-rust" mogen beschouwen, dan is wederom h gelijk aan z_a . Daar de spiegel stijgt is $z_a = z_a(t)$, zodat dan h ook een functie van de tijd is. We zien dat de stijghoogte van water (of een andere vloeistof) een functie van de tijd kan zijn. We komen daar in de volgende paragrafen en eenheden op terug.

9.19 Er geldt op het tijdstip t dat

$$\rho = \frac{m(t)}{V(t)} \quad \text{of} \quad m(t) = \rho V(t)$$

en op het tijdstip $t + \Delta t$ dat

$$\rho = \frac{m(t + \Delta t)}{V(t + \Delta t)} = \frac{m(t) + \Delta m}{V(t) + \Delta V}$$

of ook

$$\rho V(t) + \rho \Delta V = m(t) + \Delta m$$

Met de 1e vergelijking volgt uit de laatste de gevraagde uitdrukking

9.27 $B = 0$, want er is geen spiegel, zodat er niets kan dalen of stijgen.

KOMMENTAAR OP DE BEWERINGEN

- b. 9.1 Onjuist. De valbeweging van zo'n druppel is juist het eenvoudigst met het lichaamsmodel te beschrijven, n.l. door de beweging van het massamiddelpunt (de rotatie en/of vervormingen van zo'n druppel is (zijn) te verwaarlozen). Deze beweging volgt uit de val van een puntmassa die dezelfde massa als de druppel heeft (zie eenheid 5). Een vatbeschrijving levert geen informatie over de plaats, snelheid en versnelling van zo'n regendruppel. Je weet alleen dat die druppel op een gegeven moment wel of niet in het vat is, dit volgt direkt als je het vat gelijk neemt aan de aardatmosfeer met de aarde als bodem.
- b. 9.2 Onjuist. Lees definitie 9.4 nog maar eens. Denk verder aan de deelvaten (kompartimenten) in een vloeistof, waardoorheen de vloeistof kan stromen.
- b. 9.3 Onjuist. Het vatmodel is één van de beschouwingswijzen om de beweging van water te beschrijven (zie par. 1, waterhuishouding).
- b. 9.4 Onjuist. Het woord homogeen heeft alleen betrekking op de chemische en/of fysische samenstelling. Op verschillende plaatsen kan de materie wel dezelfde samenstelling hebben, maar de fysische omstandigheden (zoals druk, temperatuur enz.) kunnen verschillen. Denk bijvoorbeeld aan lucht. De samenstelling ervan is op zeeniveau hetzelfde als die op een kilometer boven dat niveau, maar de dichtheid is anders (zie ook kollegediktaat C -18 blz. K-8).
- b. 9.5 Juist. Bevroren water is geen vloeibaar water en juist het scheidingsvlak tussen vloeibaar water en lucht is de spiegel. Verder staat het water onder de ijslaag niet in vrije verbinding met de atmosfeer. De ijslaag is een vaste wand van het vat dat gevormd wordt door de meerbodem en ijslaag.
- b. 9.6 Onjuist. Ondanks het feit dat zuiver water homogeen is, hoeft de dichtheid nog niet konstant in de plaats te zijn. (zie ook b. 9.4).
- b. 9.7 Onjuist. Er kan nog altijd materie uitstromen.
- b. 9.8 Juist. Zie par. 3. sectie kommuniserende vaten.

b. 9.9 Juist. S_{21} is niet nodig, want die volgt direkt uit de vergelijking $S_{12} + S_{21} = 0$ die voor de wisselwerking $W_{(12)}$ geldt.

b. 9.10 Onjuist. Alleen als ρ konstant is (zie par. 3, sectie debiet).

b. 9.11 Onjuist. De vloeistof in deelvot V_1 en die in deelvot V_2 oefenen op elkaar een gravitatie interactie $G_{(12)}$ uit (zie ook eenheid 4) en daar beide deelvoten geen gemeenschappelijk oppervlak hebben, moet deze interactie ("op afstand!") een volumen-interactie zijn.

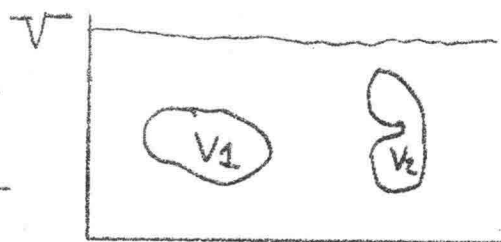


fig 31

Opm.: Als het vat V in een lokaal zwaarteveld is opgesteld, dan is de gravitatie interactie $G_{(10)}$ tussen V_1 en aarde vele malen groter dan die tussen V_1 en V_2 . Op dezelfde wijze als in eenheid 4 mogen we als enige volumen-interactie de interactie tussen de vloeistof en de aarde nemen. (We verwaarlozen voortaan de onderlinge volumen-interacties*!)

b. 9.12 Juist.

Opm.: Bij "niet-gewone" vloeistoffen, zoals verf, teer, glas kunnen wel schuifspanningen optreden, terwijl ze toch in rust zijn.

In deze cursus beperken we ons tot gewone (z.g. Newtonse) vloeistoffen.

b. 9.13 Onjuist. De normaalspanning is een vektor en daarom is normaalspanning afhankelijk van de richting. De grootte van de normaalspanning (t.w. de druk !) is wel isotroop in een stilstaande vloeistof.

b. 9.14 Onjuist. Zie par. 4, sectie hydrostatische drukverdeling, met name s. 9.14 en s. 9.15.

b. 9.15 Onjuist. Zie s. 9.16.

- b. 9.16 Onjuist. Is afhankelijk van de keuze van je assenstelsel.
Kies b.v. de positieve z-as vertikaal naar beneden dan moet h gelijk zijn aan

$$h = \frac{p - p_a}{\rho g} - z$$

De plaats van de oorsprong is niet belangrijk (ga dat na).

- b. 9.17 Juist. Kies de positieve z-as vertikaal omhoog zodat we vinden voor de stijghoogte van V_1

$$h_1 = \frac{p - p_a}{\rho g} + z = \frac{p(z_1) - p_a}{\rho g} + z_1 = z_1$$

en voor de stijghoogte van V_2

$$h_2 = \frac{p - p_a}{\rho g} + z = \frac{p(z_2) - p_a}{\rho g} + z_2 = z_2$$

Daar $z_2 > z_1$ is volgt dat de bewering juist is.

- b. 9.18 Juist. Er kan geen stijging van de waterspiegel optreden.

- b. 9.19 Juist. Want $B_1 = A$ en $B_2 = A$.

Bij de afleiding van de berging ging het om het horizontale oppervlak van de spiegel. Het is dus onbelangrijk hoe de wanden verlopen bij toe- of afnemende waterstand.

- b. 9.20 Onjuist. Uit de definitie voor K volgt voor de samenpersing ($-\Delta V$) dat

$$-\Delta V = K^{-1} V \Delta p$$

We zien dat hoe groter K hoe kleiner het rechterlid wordt bij een gegeven drukverschil Δp .

- b. 9.21 Onjuist. Een homogene materie is best samendrukbaar. Zie voorbeeld in par. 6, sectie kompressiemodulus.

- b. 9.22 Juist. $B_{el} = 0 \rightarrow k = \infty \rightarrow \Delta p = 0$

- b. 9.23 Onjuist. Er geldt dat de elastische berging van lucht $B_{el} = V_1(p_1)^{-1}$ waarin V_1 het volumen van de lucht boven in de klok is.

We kunnen dit als volgt inzien:

Stel op $t + \Delta t$ is de spiegel Az_s gestegen. Beschouw het dan ontstane volumen als het vat waarin de lucht in Δt wordt geperst. Daar verder de zwaartekracht geen invloed heeft op de luchtdruk, mogen we de afleiding voor de elastische berging uit het

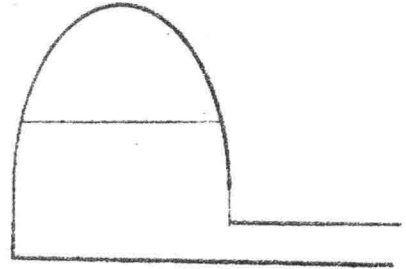


Fig 32.

diktaat volgen. We vinden dan de eerder genoemde uitdrukking als we ons realiseren dat voor lucht $K = p_1$ is.

Als we nu verder naar de gevonden uitdrukking voor de klokberging B_k van het water kijken, dan zien we dat B_{el} daarin is te substitueren. We vinden

$$B_k = \frac{A}{1 + \frac{1}{\rho g} \frac{A}{B_{el}}}$$

In het algemeen is $B_k \neq B_{el} !!$

UITWERKING VAN DE VRAAGSTUKKEN

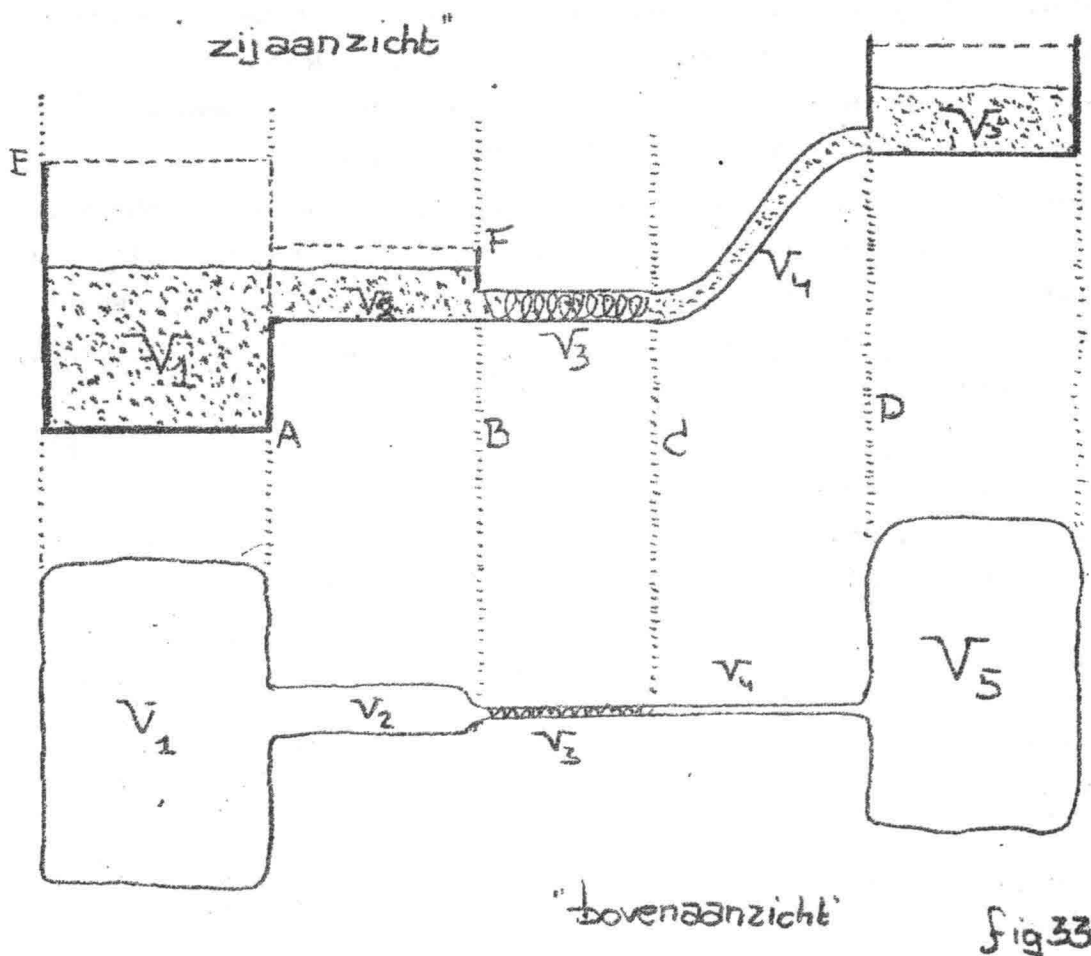
v.9.1 De lucht boven het stuwmeer staat in direkte verbinding met de atmosfeer en daarom is dit stuwmeer als een van boven open vat ofwel bekken (kom) op te vatten.

Voor het kanaal en het meer geldt hetzelfde.

De aanvoerpijp is geheel gesloten op de 2 toegangen na ⁱⁿ het algemeen geheel gevuld met water uit het stuwmeer. De pijp is op te vatten als een geheel gevuld vat ofwel stroomvoerend vat.

De turbine is een stroomvoerend vat waarin een schoepenrad (of rotor) aangedreven wordt door het water.

We komen aldus tot de volgende schematisering



- V_1 = meer = bekken of kom
 V_2 = kanaal = " " "
 V_3 = turbine = stroomvoerend vat
 V_4 = pijp = " " "
 V_5 = stuwmeer = bekken of kom

De vaste wanden zijn aangegeven door de dik getrokken lijnen; alle andere wanden door de stippellijnen.

Als toegangen kunnen optreden de wanden bij E, F en G en de scheidingswanden bij A, B, C en D. In het algemeen worden de toegangen bij E, F en G nooit zo genoemd, omdat alleen in bijzondere gevallen door deze wanden vloeistof gaat (b.v. regen). We spreken dan ook vaak van een bekken met één toegang (hier b.v. het stuwmeer) of van een bekken met 2 toegangen (hier b.v. het kanaal).

De waterspiegels treden op in V_1 , V_2 en V_5 ; ze zijn aangegeven met een dunne getrokken lijn. We zouden V_1 en V_2 bij elkaar als een vat V kunnen beschouwen (een bekken) en zodoende zowel V_1 als V_2 als deelvaten van V kunnen beschouwen. Hetzelfde kunnen we voor V_3 en V_4 doen.

Uiteindelijk zouden we V_1 t/m V_5 als één vat kunnen beschouwen, maar dan verliezen we een hoop informatie over de waterbewegingen.

Opm.: In de praktijk nemen we de vaten zodanig, dat in elk vat ongeveer dezelfde stroming (vloeistofverplaatsing) optreedt. Het blijkt dat in V_1 en V_5 het water ongeveer stilstaat en dat de stromingen in V_2 , V_3 en V_4 duidelijk van elkaar te onderscheiden zijn (zie hiervoor eenheid 10 en 11).

v.9.2 We hebben het schema hiernaast nogmaals getekend, maar nu hebben we de vaten genummerd en de scheidingswanden ertussen gestippeld

- V_1 = klok
 V_2 = stroomvoerend vat
 V_3 = bekken
 V_4 = stroomvoerend vat
 V_5 = stroomvoerend vat
 V_6 = bekken

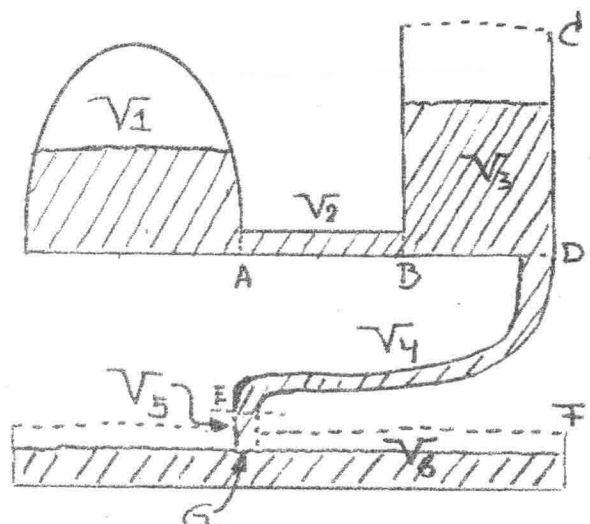


Fig 34

Afgezien van V_5 zijn de namen voor V_1 t/m V_6 op dezelfde manier als in som 1 gegeven. Voor V_5 hebben we het oppervlak van de straal als wand genomen en daarom is V_5 geheel gevuld met vloeistof en dus een stroomvoerend vat. Als we voor V_5 een volumen hadden genomen dat groter was dan de straal, dan zouden we V_5 een bekken moeten noemen (vergelijkbaar met het kanaal in de vorige som).

Op dezelfde wijze als in v 9.1 zijn de vaste wanden, scheidingswanden en spiegels aangegeven.

Er is geen enkel vat dat geheel uit vaste wanden bestaat (V_1 heeft één toegang!).

Er is een vat dat helemaal geen vaste wand heeft, n.l. V_5 .

De toegangen treden op bij de scheidingswanden A, B, D, E en G.

Opm.: (1) We nemen aan dat de spiegel in V_6 zo langzaam stijgt, dat we G als toegang kunnen beschouwen. Als dat niet opgaat dan moeten we V_5 laten lopen van E tot F en de doorsnijding daar ter plaatse als toegang nemen.

(2) De wanden C en F zijn formeel wel als toegang te beschouwen, maar meestal doen we dat niet (zie ook v.9.1)

9.3 a. Uit grafiek volgt dat de dichtheid ρ voor $0 \leq x \leq \frac{1}{2} x_0$ konstant is, dus

$$\rho = \rho_1 = \rho_0 + \frac{1}{2} x_0$$

b. Omdat de dichtheid in de onderste helft konstant is (zie a.) volgt

$$m = \rho_1 \frac{1}{2} A x_0 = \frac{1}{2} \rho_0 x_0 A + \frac{1}{4} A x_0^2$$

c. Uit grafiek volgt dat de dichtheid ρ voor $\frac{1}{2} x_0 \leq x \leq x_0$ te bepalen is uit

$$\frac{\rho(x) - \rho_0}{x - x_0} = -1$$

wat geeft

$$\rho = \rho(x) = \rho_0 + (x_0 - x)$$

d. Met s.9.3 volgt voor de massavoorraad m van de bovenste helft

$$\begin{aligned} m &= A \int_{\frac{1}{2}x_0}^{x_0} \rho(x) dx = A \left\{ \rho_0 x - \frac{1}{2} (x_0 - x)^2 \right\} \bigg|_{x=\frac{1}{2}x_0}^{x=x_0} \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 x_0 A + \frac{1}{8} A x_0^2 \end{aligned}$$

e. De gehele massavoorraad volgt uit (b) en (d) en deze is

$$m = \rho_0 x_0 A + \frac{3}{8} A x_0^2$$

Het totale volumen is $V = A x_0$ en de gemiddelde dichtheid $\bar{\rho}$ wordt

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V} = \rho_0 + \frac{3}{8} x_0$$

Opm.: We hadden ook direkt het gemiddelde van de funktie $\rho(x)$ over het interval $(0, x_0)$ kunnen nemen. Volgens de analyse is dat

$$\bar{\rho} = \frac{1}{x_0 - 0} \int_0^{x_0} \rho(x) dx$$

m.b.v. (a) en (c) wordt dat

$$\bar{\rho} = \frac{1}{x_0} \int_0^{\frac{1}{2}x_0} (\rho_0 + \frac{1}{2}x_0) dx + \frac{1}{x_0} \int_{\frac{1}{2}x_0}^{x_0} \{\rho_0 + (x_0 - x)\} dx =$$

$$= \frac{1}{x_0} \left(\rho_0 x + \frac{1}{2} x_0 x \right) \bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}x_0} + \frac{1}{x_0} \left(\rho_0 x - \frac{1}{2} (x_0 - x)^2 \right) \bigg|_{x=\frac{1}{2}x_0}^{x=x_0} =$$

$$= \rho_0 + \frac{3}{8} x_0$$

f. De massa-verdeling is gelijkmatig in het gebied waar de dichtheid konstant is, dus in de onderste helft.

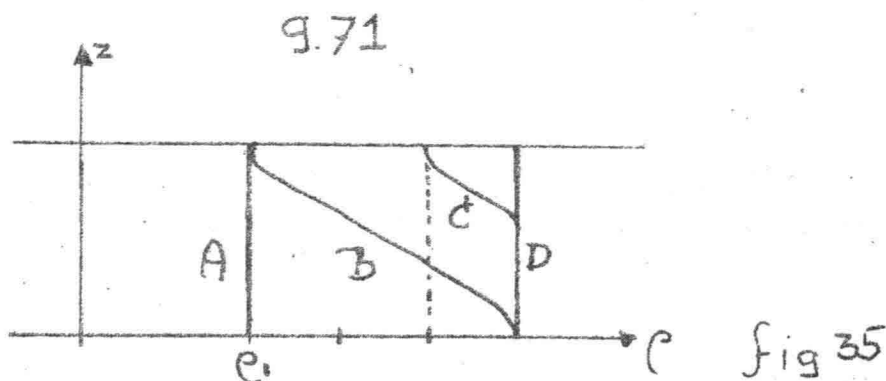
g. Het is zonder meer niet te zeggen of het water ergens homogeen is.

Als we aannemen dat het water onsamendrukbaar is (zie par. 3, debiet) dan is wederom in de onderste helft het water homogeen (een homogeen mengsel van water en zout).

v.9.4 a. We moeten in de gegeven figuur de lijnen $x=A$, $x=B$, $x=C$ en $x=D$ trekken.

Vervolgens moeten we de z-koördinaten bepalen van de snijpunten van deze lijnen met de z.g. dichtheidslijnen ρ_1 , $\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho$, $\rho_3 = \rho_1 + 2\Delta\rho$ en $\rho_4 = \rho_1 + 3\Delta\rho$.

We vinden dan de volgende grafieken



Opm.: De "schuine" stukken van grafiek B en C hoeven geen rechte te zijn. Ze zijn een rechte (dus ρ neemt lineair af) als alle dichtheidslijnen evenwijdig aan elkaar zijn.

b. $\frac{\partial \rho}{\partial z} \approx \frac{\Delta \rho}{\Delta z} < 0$

Uit het verloop van de dichtheidslijnen blijkt dat $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ toeneemt (dus minder negatief wordt) bij toenemende z . De kromme gaat dus vlakker lopen.

c. Met de uitkomst (e) van de vorige som is de gemiddelde dichtheid ter plaatse van x gelijk aan

$$\bar{\rho}(x) = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} \rho(z, x) dz$$

Direkt is in te zien dat voor $x \leq x_A$ de gemiddelde dichtheid gelijk is aan ρ_1 en voor $x \geq x_D$ aan ρ_4 .

Hoe het verloop daartussen in is, is analytisch niet te berekenen (het verloop van de dichtheidslijnen is geschetst) maar zou eventueel met een numeriek proces wel te berekenen zijn. We vinden globaal

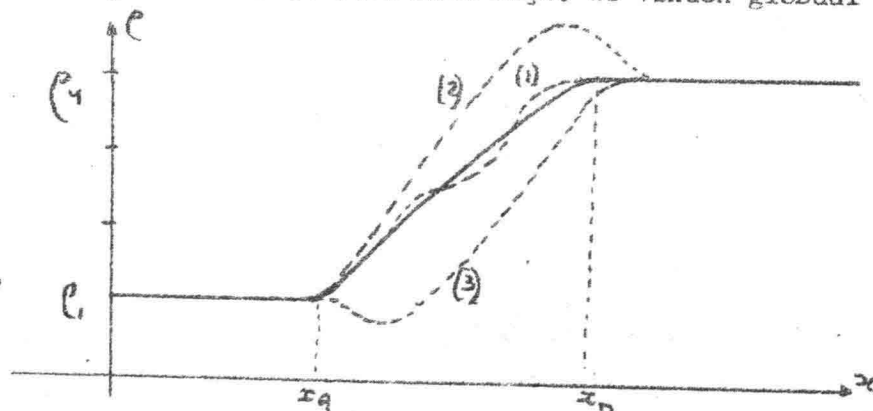


fig 36

Opm.: In gevallen dat de dichtheidslijnen niet zo mooi verlopen (meer bochten !) als in onze opgave, kunnen de gestippelde krommes optreden.

- v 9.5 a. Beide watersoorten zijn onsamendrukbaar ($\rho = \text{konstant}$) zodat voor het konstant blijven van de waterstand nodig en voldoende is dat het instromend debiet $Q_1 = \frac{S_1}{\rho_1}$ gelijk is aan het uitstromend debiet $Q_2 = \frac{S_2}{\rho_1}$

Er moet dus gelden:

$$Q_1 = \frac{S_1}{\rho_1} = \frac{S_2}{\rho_2} = Q_2 \quad \text{m}^3 \text{s}^{-1}$$

en hieruit volgen de gevraagde grootheden:

$$S_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} S_2 \quad \text{kg s}^{-1}$$

$$Q_1 = \frac{S_2}{\rho_2} \quad \text{m}^3 \text{s}^{-1}$$

$$Q_2 = \frac{S_2}{\rho_2} \quad \text{m}^3 \text{s}^{-1}$$

- b. Het volumen op het begintijdstip t_0 door het zoute water ingenomen is gelijk aan

$$V_2(t_0) = \frac{1}{2} H \pi R^2 \quad \text{m}^3$$

Delen door het (konstante) debiet Q_2 geeft dan de benodigde tijd Δt voor het leegstromen.

We vinden

$$\Delta t = \frac{V_2(t_0)}{Q_2} = \frac{\frac{1}{2} H \pi R^2}{\frac{S_2}{\rho_2}} = \frac{1}{2} \pi \frac{\rho_2 H R^2}{S_2} \quad \text{s}$$

Opm.: Als $S_2 = S_2(t)$ dan volgt met het verband tussen het volume V_2 en het uitstromend debiet $Q_2(t)$ dat

$$V_2(t) = V_2(t_0) - \int_{t_0}^t Q_2(t) dt$$

waaruit het eindtijdstip t_1 te berekenen is door de onderstaande vergelijking op te lossen

$$V_2(t_1) = 0 = V_2(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} Q_2(t) dt$$

Bovenstaande integraalvergelijking is niet zo eenvoudig op te lossen (er zijn kolleges voor het oplossen van integraalvergelijkingen, zowel analytisch als numeriek !); in het geval dat $Q_2(t) = Q_2 = \text{konstant}$ dan volgt weer

$$V_2(t_o) = (t_1 - t_o)Q_2 = Q_2 \Delta t$$

of

$$\Delta t = \frac{V_2(t_o)}{Q_2} = \frac{1}{2} \pi \frac{\rho_2 HR^2}{S_2}$$

- c. Op een willekeurig tijdstip t tussen het begintijdstip t_o en het eindtijdstip t_1 is de massavoorraad m_1 van het zoete water gelijk aan

$$m_1(t) = \int_{t_o}^t S_1(t) dt + m_1(t_o) = \frac{\rho_1}{\rho_2} (t - t_o) S_2$$

en de massavoorraad m_2 van het zoute water

$$\begin{aligned} m_2(t) &= m_2(t_o) - \int_{t_o}^t S_2(t) dt \\ &= \rho_2 V_2(t_o) - (t - t_o) S_2 \end{aligned}$$

De totale massavoorraad m is gelijk aan

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t) = \rho_2 V_2(t_o) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} (t - t_o) S_2$$

Daar de waterstand niet verandert, vinden we voor de (gemiddelde) dichtheid dat deze gelijk is aan

$$\rho(t) = \frac{m(t)}{V_2(t_o)} = \rho_2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} (t - t_o) \frac{S_2}{V_2(t_o)}$$

Opm.: (1) Als $t = t_o$ dan volgt $\rho(t_o) = \rho_2$
 (2) Als $t = t_1$ en dus $t_1 - t_o = \Delta t = \frac{V_2(t_o)}{Q_2} = \frac{\rho_2 V_2(t_o)}{S_2}$

$$\text{dan volgt } \rho(t_1) = \rho_2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \rho_2 = \rho_1$$

- d. Als $S_1 = S_2$ dan $Q_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} Q_2$ (dus $Q_1 > Q_2$!)

De waterspiegel zal dus stijgen, we vinden voor de plaats z_s daarvan op een tijdstip t

$$z_s(t) = z_s(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{Q_1 - Q_2}{\pi R^2} dt = \frac{1}{2}H + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\pi \rho_1 R^2} (t - t_0) Q_2$$

Opm.: Bovenstaande formule geldt alleen als $z_s(t) < H$ en $t < t_1$ zijn (met als grensgeval $z_s(t_1) = H$)

Als voor $t = t_2 < t_1$ geldt, dat $z_s(t_2) = H$ ^(is) geworden dan moet daarna gelden $Q_1 = Q_2$ (onsamendrukbaarheid van het water)

en dus kan S_1 niet meer gelijk aan S_2 blijven.

Als voor $t = t_2 > t_1$ geldt, dat $z_s(t_2) < H$ dan volgt uit $S_1 = S_2$ dat $Q_1 = Q_2$ moet zijn, want al het zoute water is weg.

En omdat $Q_1 = Q_2$ is, zal de waterspiegel niet meer veranderen

Voor het grensgeval $t = t_2 = t_1$ en $z_s(t_2) = H$ volgt dat op

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2} \pi \rho_1 H R^2 Q_2}{\rho_2 - \rho_1} + t_0$$

het vat net vol is.

v.9.6 a. $m_1 = m_2 = \rho \frac{1}{2} H \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi \rho H R^2$

de waterstand in V_1 is op dat tijdstip t_0

$$z_1(t_0) = \frac{m_1}{\rho \pi 4 R^2} = \frac{\frac{1}{2} \pi \rho H R^2}{4 \pi \rho R^2} = \frac{1}{8} H$$

- b. Formeel geldt (zie s.9.5, s.9.5^A en s.9.5^B)

$$\dot{m}_2 = S_2 = S_{21}^{AB} + S_{21}^{CD}$$

Daar het water een konstante dichtheid heeft, mag je ook schrijven

$$\dot{m}_2 = \rho Q_2 = \rho Q_{21}^{AB} + \rho Q_{21}^{CD}$$

Zolang de waterstand in V_2 lager is dan z_D , dan is $Q_{21}^{CD} = 0$; we vinden dan

$$\dot{m}_2 = \rho I$$

Als de waterstand in V_2 hoger of gelijk is aan z_D dan vinden we

$$\dot{m}_2 = \rho I + \rho Q_{21}^{CD}$$

waarin Q_{21}^{CD} een negatief getal is !

c. De massavoorraad moet dan gelijk zijn aan

$$m_2(t_1) = \rho \frac{2}{3} H \pi R^2 = \frac{2}{3} \pi \rho H R^2$$

Analoog de vorige som geldt

$$m_2(t_1) = m_2(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{m}_2 dt = m_2(t_0) + \rho I (t_1 - t_0)$$

en we vinden hieruit

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \frac{m_2(t_1) - m_2(t_0)}{\rho I} = t_0 + \frac{\pi \rho H R^2}{\rho I} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) \\ &= t_0 + \frac{\pi H R^2}{6 I} \end{aligned}$$

d. Voor V_1 geldt tot en met t_1 de massabalans

$$\dot{m}_1 = - \rho I$$

en dus

$$m_1(t_1) = m_1(t_0) - \rho I (t_1 - t_0) = \frac{1}{3} \pi \rho H R^2$$

en de waterstand wordt dan

$$z_1(t_1) = \frac{\frac{1}{3} \pi \rho H R^2}{\pi \rho \frac{1}{4} R^2} = \frac{1}{12} H$$

$$e. \dot{m}_1 = - \rho I + \frac{1}{10} \rho I = - \frac{9}{10} \rho I$$

$$f. 0 = m_1(t_1) - \frac{9}{10} \rho I (t_2 - t_1)$$

of

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + \frac{10}{9 \rho I} \frac{1}{3} \pi \rho H R^2 = t_1 + \frac{10 \pi H R^2}{27 I} \\ &= t_0 + \frac{29 \pi H R^2}{54 I} \end{aligned}$$

Opm.: Voor $t \geq t_2$ verpompt de pomp een debiet van $\frac{1}{10} I$; V_1 blijft leeg en V_2 blijft net vol.

- v.9.7 a. Alles is in rust, dus overal heerst de hydrostatische drukverdeling. Vanwege het gegeven assenstelsel vinden we

$$p(y) = p(0) + \int_y^0 \rho g dy = p(0) - \rho g y$$

waarbij voor het stuk AO geldt dat $|y| \leq R$ en voor het stuk OB dat $|y| \leq 5R$ moet zijn.

- b. De oppervlaktekracht op de zuiger kunnen we op de volgende wijze afleiden:

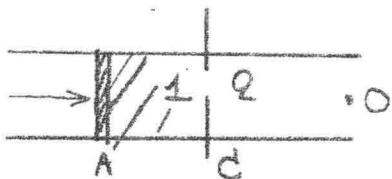


Fig 37

Bekijk een vertikaal oppervlak in de vloeistof ter plaatse van C. Dan wordt de normaalspanning van vloeistof 2 op vloeistof 1 in een punt (x, y, z) van C gegeven door

$$\vec{n}_{12} = p(y)\vec{e}_{12} = -p(y)\vec{e}_x$$

Bekijk nu vlak C vanuit 2 naar 1.

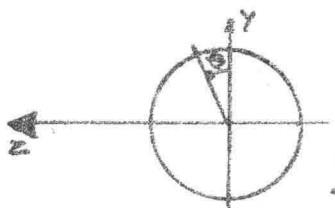


Fig 38

De kracht op een oppervlakte elementje ter plaatse (y, z) is dan

$$\Delta \vec{F}_{12} = \vec{n}_{12} \Delta y \Delta z = -p(y) \Delta y \Delta z \vec{e}_x$$

De totale kracht wordt dan verkregen door de oppervlakte-integraal

$$\vec{F}_{12} = \iint_{\text{opp}} d\vec{F}_{12} = -\vec{e}_x \iint_{\text{opp}} p(y) dy dz$$

Deze integraal is het eenvoudigst met behulp van de poolcoördinaten (r, ϕ) te berekenen (stel $y = r \cos(\phi)$, $z = r \sin(\phi)$ dan moet een opp. elementje $dy dz$ vervangen worden door $r dr d\phi$, zie analyse I & II !!)

We vinden

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -\vec{e}_x \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \{p(0) - \rho g r \cos(\phi)\} d\phi = \\ &= -\vec{e}_x \int_0^R 2\pi p(0) r dr = -\pi R^2 p(0) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Als we nu C naar links laten gaan, zodanig dat C samenvalt met rechteroppervlak van zuiger A dan hebben we de kracht $\vec{F}$ op de zuiger door de vloeistof uitgeoefend. Daar alles in rust is moet voor de zuiger gelden

$$\vec{F}_A + \vec{F} = \vec{0}$$

en hieruit volgt

$$F_A = |\vec{F}_A| = |-\vec{F}| = \pi R^2 p(o)$$

Analoog vinden we

$$F_B = |\vec{F}_B| = \pi(5R)^2 p(o) = 25 \pi R^2 p(o)$$

We zien dat $F_B = 25 F_A$

Opm.: Omdat de (hydrostatische) drukverdeling een lineaire functie van de vloeistofhoogte (hier dus van y) is, geldt voor elk vlak dat gewoon of gespiegeld symmetrisch is t.o.v. een horizontale lijn in dat vlak, dat de oppervlaktekracht gelijk is aan het produkt van het oppervlak en de druk ter plaatse van die horizontale lijn. Ga zelf na als zuiger A geen cirkel maar een vierkantje of een zoute drop is (zie onderstaande figuren).

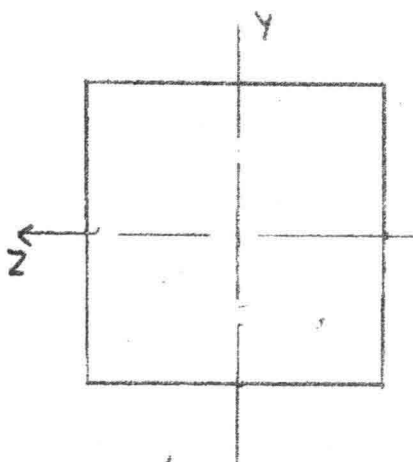


Fig 39

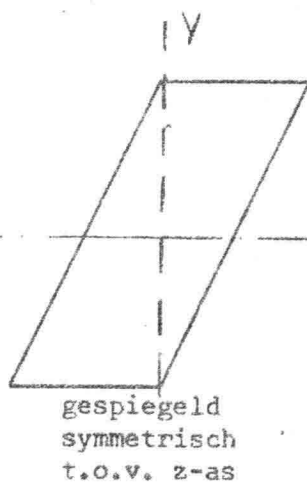


Fig 40

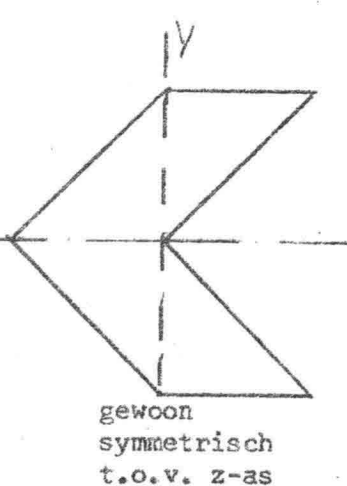


Fig 41

c. Uit (a) volgt dat

$$p(y) + \rho g y = p(o) + \rho g o = p(o)$$

De stijghoogte wordt dan

$$h = \frac{p(y) + \rho g y - p_a}{\rho g} = \frac{p(y) - p_a}{\rho g} + y = \frac{p(o) - p_a}{\rho g}$$

We zien dat de stijghoogte overal in de vloeistof dezelfde waarde heeft (zie ook b.9.16)

d. Met (b) en (c) volgt

$$h = \frac{\frac{F_A}{\pi R^2} - p_a}{\rho g} = \frac{F_A}{\pi g R^2} - \frac{p_a}{\rho g}$$

Opm.: Als $F_A = F_A(t)$, maar zodanig dat de vloeistof steeds als in rust te beschouwen is (b.v. doordat $F_B = F_B(t) = 25F(t)$) dan hebben we hiermee een voorbeeld waarin de stijghoogte als functie van de tijd is te beschouwen, terwijl toch de bergingsvergelijking niet geldig is (zie ook s.9.18).

v.9.8 a. Alles in rust; dus in de vloeistoffen heerst een hydrostatische drukverdeling.

We hebben links in de vloeistof

$$p_1(z) = p_a + \rho_1 g (H_1 - z) \quad \text{voor } 0 \leq z \leq H_1$$

en rechts

$$p_2(z) = p_a + \rho_2 g (H_2 - z) \quad \text{voor } 0 \leq z \leq H_2$$

Op dezelfde wijze als bij v.9.7.b vinden we dat de vloeistof links op de deur een kracht

$$\vec{F}_1 = \vec{e}_x \int_0^{H_1} dz \int_0^B p_1(z) dy = \vec{e}_x B (p_a H_1 + \frac{1}{2} \rho_1 g H_1^2)$$

en rechts (analoog)

$$\vec{F}_2 = -\vec{e}_x B (p_a H_2 + \frac{1}{2} \rho_2 g H_2^2)$$

Nu hebben we rechts nog een kracht van de atmosfeer n.l. over het stuk deur van H_2 tot H_1 . Daar de atmosferedruk overal p_a is, volgt dan voor deze kracht

$$\vec{F}_3 = -\vec{e}_x B p_a (H_1 - H_2)$$

De krachten op stuk H_1 tot H van de deur van de atmosfeer zijn gelijk maar tegengesteld (hoeven we verder niet te berekenen).

We krijgen als totale kracht $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{e}_x B \left(\frac{1}{2} \rho_1 g H_1^2 - \frac{1}{2} \rho_2 g H_2^2 \right)$$

- b. De kracht op een oppervlakte elementje Δz met breedte B van de deur ter plaatse z in de linker vloeistof is gelijk aan

$$\Delta \vec{F}_1 = \vec{e}_x B p_1(z) \Delta z$$

Het moment $\Delta \vec{L}_1$ van deze kracht om O wordt

$$\Delta \vec{L}_1 = z \vec{e}_z \times \vec{e}_x B p_1(z) \Delta z = \vec{e}_y B p_1(z) z \Delta z$$

Het totale moment op de deur t.o.v. de linkervloeistof wordt

$$\vec{L}_1 = \vec{e}_y \int_0^H B p_1(z) z dz = \vec{e}_y B \left(\frac{1}{2} p_a H_1^2 + \frac{1}{6} \rho_1 g H_1^3 \right)$$

Zoals bij (a) vinden we nu ook

$$\vec{L}_2 = -\vec{e}_y B \left(\frac{1}{2} p_a H_2^2 + \frac{1}{6} \rho_2 g H_2^3 \right)$$

en

$$\vec{L}_3 = -\vec{e}_y B \left\{ \frac{1}{2} p_a (H_1^2 - H_2^2) \right\}$$

Zodat het totale moment om O wordt

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = \vec{e}_y B \left(\frac{1}{6} \rho_1 g H_1^3 - \frac{1}{6} \rho_2 g H_2^3 \right)$$

c. $\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$

$$d. \vec{L} = \vec{e}_y B \frac{1}{6} \rho_2 g H_2^3 \left\{ \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} - 1 \right\}$$

v.9.9 a. De waterspiegel is horizontaal (zie s. 9.16).

Op dezelfde wijze kun je ook bewijzen dat het zoet-zout grensvlak horizontaal moet zijn.

We kunnen daarom eenvoudig met de massavoorraad, de dichtheid en het oppervlak van de doorsnede de gevraagde hoogtes berekenen.

We vinden voor de hoogte van de spiegel

$$H_1 = \frac{1}{A} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)$$

en voor de hoogte van het zoet-zout grensvlak

$$H_2 = \frac{1}{A} \left(\frac{m_2}{\rho_2} \right)$$

b. Voor een punt P in de zoete laag (dus $H_2 \leq z \leq H_1$) geldt

$$p_1(z) = p_a + \rho_1 g (H_1 - z)$$

Voor een punt P in de zoute laag (dus $0 \leq z \leq H_2$) geldt

$$p_2(z) = p(H_2) + \rho_2 g (H_2 - z)$$

deze laatste vergelijking is nog te herschrijven met de 1e, want daaruit volgt

$$p(H_2) = p_a + \rho_1 g (H_1 - H_2)$$

zodat na substitutie volgt

$$p_2(z) = p_a + \rho_1 g (H_1 - H_2) + \rho_2 g (H_2 - z)$$

c. Voor een punt P in de zoete laag volgt

$$h_1 = \frac{p_1 - p_a}{\rho_1 g} + z = H_1 = \frac{1}{A} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)$$

Voor een punt P in de zoute laag dat

$$h_2 = \frac{p_2 - p_a}{\rho_2 g} + z = \frac{\rho_1}{\rho_2} (H_1 - H_2) + H_2 = \frac{1}{A} \left(\frac{m_1}{\rho_2} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)$$

Opm.: We zien dat overal in een laag de stijghoogte dezelfde waarde heeft, maar dat dit niet geldt voor overal in de vloeistof; want op het zoet-zout grensvlak treedt een sprong op

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{1}{A} \left(\frac{m_1}{\rho_1} - \frac{m_2}{\rho_2} \right)$$

v.9.10 a. $p(z) = p_a - \rho g z$ met $-H \leq z \leq 0$

Denk aan keuze van het assensysteem!

b. We volgen hetzelfde proces als bij v.9.7.b

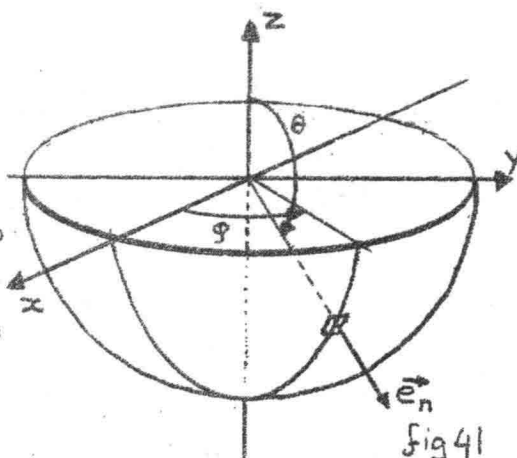
De kracht op een oppervlakte elementje ΔA in de vloeistof ter plaatse (x, y, z) is dan

$$\Delta \vec{F} = - p(z) \Delta A \vec{e}_n$$

waarin $\vec{e}_n = \vec{e}_n(x, y, z)$ de eenheidsnormaalvektor op het oppervlak van de bol in punt (x, y, z) is (zie fig. 41).

De totale kracht door de vloeistof op de bol is dan

$$\vec{F} = - \int \int_{\text{natte opp.}} p(z) \vec{e}_n dA$$



Deze integraal is het eenvoudigst met de bolcoördinaten R, ϕ, θ (zie fig. 41) op te lossen. We vinden dan met

$$\left. \begin{aligned} x &= R \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y &= R \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= R \cos(\theta) \end{aligned} \right\} \text{ en dus } \begin{cases} e_{nx} = \sin(\theta) \cos(\phi) \\ e_{ny} = \sin(\theta) \sin(\phi) \\ e_{nz} = \cos(\theta) \end{cases}$$

dat de integraal overgaat in (zie ook analyse I & II !)

$$\vec{F} = - \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \{p_a - \rho g R \cos(\theta)\} \vec{e}_n R^2 \sin(\theta) d\phi$$

en deze gaat op zijn beurt na uitschrijven van $\vec{e}_n$ weer over in

$$F_x = - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \{p_a - \rho g R \cos(\theta)\} R^2 \sin^2(\theta) \cos(\phi) d\phi$$

$$F_y = - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \{p_a - \rho g R \cos(\theta)\} R^2 \sin^2(\theta) \sin(\phi) d\phi$$

$$F_z = - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \{p_a - \rho g R \cos(\theta)\} R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\phi$$

Na integreren over ϕ houden we over

$$F_x = 0$$

$$F_y = 0$$

$$F_z = -2\pi \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \{p_a - \rho g R \cos(\theta)\} R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

We kunnen dit laatste schrijven als

$$\begin{aligned} F_z &= -2\pi p_a R^2 \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin(\theta) d\{\sin(\theta)\} - 2\pi \rho g R^3 \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \cos^2(\theta) d\{\cos(\theta)\} = \\ &= -\pi p_a R^2 \sin^2(\theta) \Big|_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} - \frac{2}{3} \pi \rho g R^3 \cos^3(\theta) \Big|_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} = \\ &= \pi R^2 p_a + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g \end{aligned}$$

De kracht door het water op de bol uitgeoefend is dus

$$\vec{F} = (\pi R^2 p_a + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g) \vec{e}_z$$

Opm.: Als we de bol wegdenken en we vervolgens de oppervlaktekrachten berekenen op zo'n halve waterbol, dan hebben als kracht op het spiegeloppervlak

$$\vec{F}_s = -\pi R^2 p_a \vec{e}_z$$

en als kracht op de rest van het oppervlak (analoog bovenstaande berekening)

$$\vec{F} = (\pi R^2 p_a + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g) \vec{e}_z$$

De totale oppervlaktekracht is

$$\vec{F}_{op} = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g \vec{e}_z$$

Daar alles in rust is, moet deze gesommeerd met de totale volumekracht

$$\vec{G} = m\vec{g} = -mg \vec{e}_z$$

waar m de massa van de halve waterbol is en dus hier gelijk aan

$$m = \rho V(\frac{1}{2}\text{waterbol}) = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g$$

de nulvektor opleveren, dus $\vec{G} + \vec{F}_{op} = \vec{0}$.

Omdat de totale oppervlaktekracht $\vec{F}_{op}$ de halve waterbol tegen de invloed van het lokale zwaarteveld op zijn plaats houdt, noemen we deze kracht ook wel de *opwaartse kracht* op die halve waterbol.

We hebben hiermee de *wet van Archimedes* aangetoond, n.l. een lichaam dat geheel of gedeeltelijk in een vloeistof is onderdompeld, ondervindt een opwaartse kracht die gelijk in grootte maar tegengesteld in richting is aan de volumekracht van de verplaatste vloeistof.

- c. De bol is geheel ondergedompeld, dus de opwaartse kracht is gelijk aan

$$\vec{F}_{op} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g \vec{e}_z$$

Deze kracht moet evenwicht maken met de gewichtskracht op de bol, dus

$$\vec{F}_{op} + \vec{G}_{bol} = (\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g - Mg) \vec{e}_z = \vec{0}$$

en we vinden hieruit

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

Opm.: We zien hieruit dat de bol overal kan zweven als hij dezelfde dichtheid als het water heeft.

De wet van Archimedes is een belangrijk hulpmiddel voor een heleboel berekeningen !!

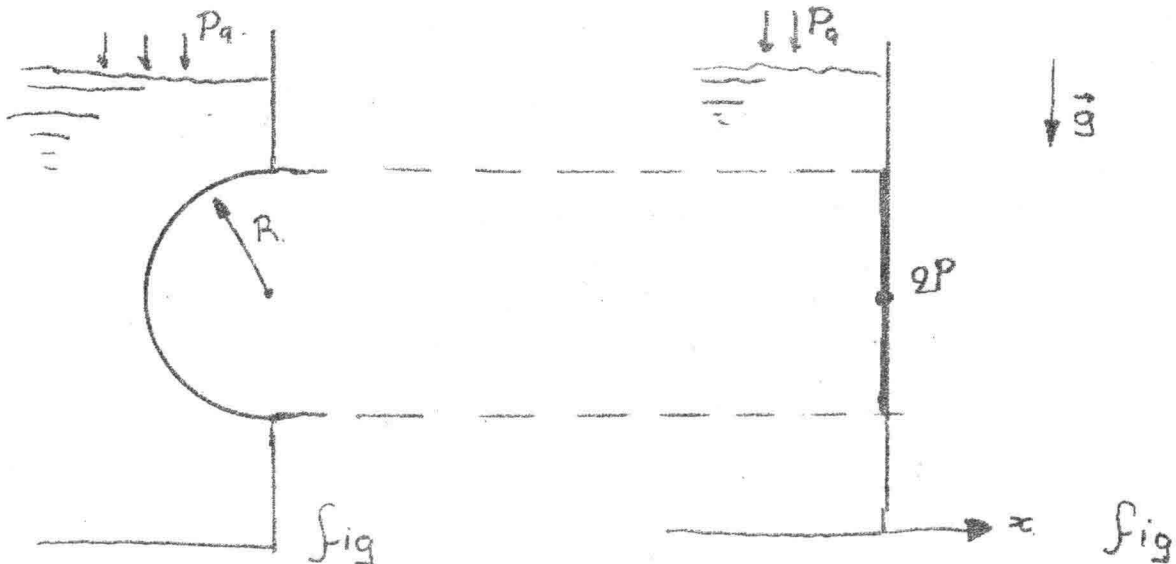
9.11 a. $F_{op} = \pi \cdot 10^4$ Newton

- b. Alle krachten $\Delta \vec{F}$ die door het water op de oppervlakte elementjes ΔA van de cilinder worden uitgeoefend, staan loodrecht op die oppervlakjes (isotropé druk !) en zij gaan derhalve alle door de draaiingsas. Er is dus geen moment t.o.v. die as en de cilinder zal daarom niet gaan draaien.

- c. De kracht op as is

$$\vec{F}_{as} = 8 \cdot 10^4 \vec{e}_x - 4 \cdot 10^3 \pi \vec{e}_z$$

Opm.: De horizontale component in een bepaalde richting (hier b.v. $\vec{e}_x$ -richting) van de oppervlaktekracht op een willekeurige wand (hier b.v. de "cilinder-wand") is altijd gelijk aan de oppervlaktekracht op de verticale wand die de projectie is van de oorspronkelijke wand in de gevraagde horizontale richting. Dus hier voor de $\vec{e}_x$ -richting is fig. te vervangen door fig. Ga dat na!



v.9.12 e. De gravitatieberging B is gelijk aan het oppervlak van de horizontale doorsnede van V, dus $B = A$

f. Formeel is de bergingsvergelijking

$$Q = B \dot{h}$$

waarbij Q het instromend debiet van V en h de stijghoogte van de vloeistof in V is. Dus in deze som geldt dat $Q = Q_1 - Q_2$

We vinden dus

$$Q_1 - Q_2 = A \dot{h}$$

g. Er geldt, dat $Q_1 = Q_2$, dus $\dot{h} = 0$

En hieruit volgt

$$h(t) = h(0) = H$$

Opm.: Alles onder de veronderstelling dat de stroming in het vat te verwaarlozen is (zie ook s. 9.22).

v.9.13 g. De bergingen voor de ideale verbindingen (de stroomvoerende vaten, leidingen AB en CD) zijn nul.

De bergingen voor V_1 en V_2 zijn

$$B_1 = 4\pi R^2$$

$$B_2 = \pi R^2$$

h. Tot het tijdstip $t=t_1$ geldt als bergingsvergelijking voor V_1 dat

$$-I = 4\pi R^2 \dot{h}_1$$

en voor V_2 dat

$$I = \pi R^2 \dot{h}_2$$

Voor het tijdsinterval (t_1, t_2) krijgen we de vergelijkingen

$$-\frac{9}{10} I = 4\pi R^2 \dot{h}_1$$

$$\frac{9}{10} I = \pi R^2 \dot{h}_2$$

Voor het tijdsinterval (t_2, ∞) krijgen we de vergelijkingen

$$0 = 4\pi R^2 \dot{h}_1$$

$$0 = \pi R^2 \dot{h}_2$$

i. Uit alle 3 de gevallen volgt dat

$$\dot{h}_1 = -\frac{1}{4} \dot{h}_2$$

Integreren geeft

$$h_1(t) - h_1(0) = -\frac{1}{4} \{h_2(t) - h_2(0)\}$$

Uit de gegevens en de uitkomst van v.9.6(a) volgt dat $h_1(0) = \frac{1}{8} H$ en $h_2(0) = \frac{1}{4} H$.

We vinden

$$h_2(t) = H - 4h_1(t)$$

v.9.14 e. Berging B is

$$B = 5\pi R^2$$

f. De vloeistof is onsamendrukbaar; het debiet Q dat de "wijde bak" instroomt vanwege de zuigerbeweging is gelijk aan

$$Q = \pi R^2 V_A$$

De bergingsvergelijking in het tijdsinterval $(0, \frac{L}{V_A})$ wordt

$$\pi R^2 V_A = 5\pi R^2 \dot{h}$$

of

$$V_A = 5\dot{h}$$

$$g. h(t) = h(0) + \frac{1}{5} V_A t \quad \text{voor } 0 \leq t \leq \frac{L}{V_A}$$

waarin $h(0)$ de stijghoogte op het tijdstip $t=0$ is

Opm.: Als de zuiger heen en weer beweegt b.v. $z_A = L \cos(\omega t)$, dan volgt daaruit dat

$$h(t) = h(0) + \frac{1}{5} L \cos(\omega t)$$

Alles onder de veronderstelling dat de stroming in het vat verwaarloosbaar klein is.

v.9.15 a. Uit v.9.7.b volgt dat de druk in de vloeistof gelijk is aan

$$p = \frac{F_A}{\pi R^2} = 10^2$$

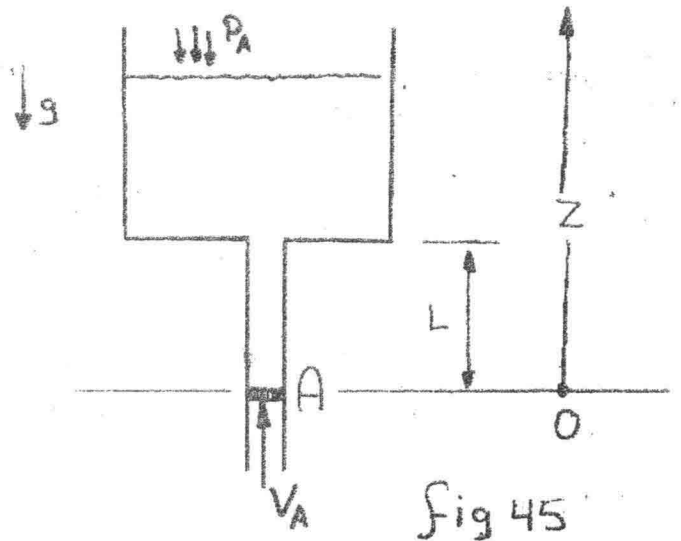
Nm⁻²

Het volumen was

$$V_0 = \pi R^2 L + \pi (5R)^2 L = 26\pi R^2 L$$

en wordt

$$V_1 = \pi R^2 \frac{9}{10} L + \pi (5R)^2 L = 25,9 \pi R^2 L$$



Hieruit volgt voor de druktoename Δp

$$\Delta p = - (V_1 - V_0) \frac{K}{V_0} = \frac{0,1 \pi R^2 L}{26 \pi R^2 L} \cdot 2 \cdot 10^9 \approx 8 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-2}$$

De ΔF_A die daarbij hoort is

$$\Delta F_A = \pi R^2 \Delta p = \pi R^2 \cdot 8 \cdot 10^6 \quad \text{N}$$

De nieuwe F'_A moet dus worden

$$F'_A = 8 \cdot 10^4 F_A$$

$$\text{b. } \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p}{K} \approx \frac{8 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^9} = 4 \cdot 10^{-3} = 0,4 \%$$

$$\text{c. } B_{el} = \frac{V_0}{K} = 1,3 \cdot 10^{-8} \pi R^2 L$$

$$\text{d. } \dot{p} = \frac{1}{B_{el}} \frac{S}{p} = \frac{10^6}{13 \pi R^2 L} S$$

- e. De zuiger beweegt 100 s voordat hij zijn nieuwe plaats heeft bereikt.
Het volumen in het tijdsinterval (0,100) is gelijk aan

$$V(t) = 26 \pi R^2 L - \frac{\pi R^2 L}{1000} t$$

Er geldt verder

$$\dot{p} = - \frac{K}{V} \dot{V} = - \frac{\dot{V}}{B_{el}}$$

en dus

$$p(t) = p(0) - \frac{V(t) - V(0)}{B_{el}} = 10^2 + \frac{10^6}{13} t$$

- f. Zie (d). We vinden met $S = 1$ dat

$$\dot{p} = \frac{10^6}{13 \pi R^2 L}$$

en hieruit volgt

$$p(t) = p(o) + \frac{10^6}{13\pi R^2 L} t = 10^2 + \frac{10^6}{13\pi R^2 L} t$$

$$g. \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{p}}{K} = \frac{10^{-3}}{26\pi R^2 L}$$

h. Daar $\frac{d}{dt} \{\ln(\rho)\} = \frac{\dot{\rho}}{\rho}$ is, volgt na integreren van (g)

$$\ln \{\rho(t)\} - \ln \{\rho(o)\} = \frac{p(t) - p(o)}{K}$$

We vinden

$$\rho(t) = \rho(o) \exp \left(\frac{p(t) - p(o)}{K} \right)$$

Met (f) en de gegeven waarden voor $\rho(o)$ en K volgt

$$\rho(t) = 10^3 \exp \{ (26 \cdot 10^3 \pi R^2 L)^{-1} t \}$$

v.9.16 a. Het volumen van de lucht is

$$V_1(z_s) = \pi R^2 (L - z_s)$$

m³

Als de zuiger in de onderste stand is, dan wordt $z_s = \frac{1}{2}L$. We vinden voor de konstante uit de wet van Boyle

$$p_1(\frac{1}{2}L) V_1(\frac{1}{2}L) = 10^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 L$$

Nm

Met diezelfde wet volgt nu

$$p_1(z_s) = 0,5 \cdot 10^5 \cdot \frac{L}{L - z_s}$$

Nm⁻²

b. Zie par. 6, sectie kompressiemodulus

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{K}$$

waarbij we even aannemen dat de invloed van het zwaarteveld te verwaarlozen is (dus druk in lucht is gelijk aan druk in water).

Met (a) en de gegevens volgt

$$p(z_s) - 10^5 = \frac{1}{100} \cdot 2 \cdot 10^9$$

en hieruit volgt met (a)

$$p(z_s) = 2 \cdot 10^7 + 10^5 = 0,5 \cdot 10^5 \frac{L}{L - z_s}$$

en dus

$$z_s = \frac{200,5}{201,0} L$$

c. Ja. Als we aannemen dat het water onsamendrukbaar is, dan volgt dat de spiegelhoogte voldoet aan

$$\frac{1}{2}L \leq z_s \leq \frac{3}{4}L < \frac{200,5}{201,0}L$$

d. Zie par. 6, sectie elastische berging

$$B_k = \frac{\pi R^2}{1 + \frac{\pi R^2}{10^3 \cdot 10} \frac{p_1(z_s)}{v_1(z_s)}} = \text{met (a)} =$$

$$= \pi R^2 \left\{ 1 + 5 \frac{L}{(L - z_s)^2} \right\}^{-1}$$

Daar het water als onsamendrukbaar genomen mag worden, geldt ook

$$z_s = z_A + \frac{1}{2}L$$

We vinden

$$B_k = \pi R^2 \left\{ 1 + 5 \frac{L}{(\frac{1}{2}L - z_A)^2} \right\}^{-1} \quad m^2$$

e. De gravitatieberging B is πR^2

Om binnen de 1% nauwkeurigheid te blijven bij de gevraagde vervanging moet dus

$$5 \frac{L}{(\frac{1}{2}L - z_A)^2} \leq 10^{-2}$$

zijn voor het interval $0 \leq z_A \leq \frac{1}{4}L$.

Het maximum van het rechterlid wordt bereikt voor $z_A = \frac{1}{4}L$, dus we moeten de L zodanig nemen dat

$$5 \frac{L}{(\frac{1}{4}L)^2} \leq 10^{-2}$$

of

$$L \geq 8 \cdot 10^3$$

m

Opm.: In principe is een meer, kanaal enz. op aarde een klok als we de aardatmosfeer meenemen.

We zien uit bovenstaande uitkomst dat we toch steeds voor dergelijke open vaten de gravitatiebergings kunnen gebruiken (Ga na wat de veronderstellingen waren bij de gravitatiebergings en merk vervolgens op dat een spiegelverhoging van 2000 meter wel erg extreem is !)

ADVIEZEN TOETS 9

Waarschijnlijk beheers je de stof niet voldoende die vastgelegd wordt in de onderstaande adviezentabel.

In de tabel is tevens aangegeven welk gedeelte van de tekst, studievragen, beweringen en vraagstukken je nogmaals moet bestuderen.

advies-nr.	doelstellingen	par	studievraag	bewering	vraagstuk
1	1 t/m 4	(1), 2, 3	9.1, 9.2	9.1 t/m 9.3, 9.5	9.1, 9.2
2	5 t/m 7	2, 3	9.3, 9.4	9.4 9.6 9.7	9.3, 9.4
3	(6), 8, 9	(2), 3	9.5 t/m 9.6	9.8 t/m 9.10	9.5, 9.6
4	10 t/m 12, (13)	4	9.7 t/m 9.18	9.11 t/m 9.17	(9.7 t/m 9.11)
5	13, 14	4	(9.7 t/m 9.18)	(9.11 t/m 9.17)	9.7 t/m 9.11
6	15, 16	5	9.19 t/m 9.22	9.18, 9.19	9.12 t/m 9.14
7	(11), 17	6	9.23 t/m 9.28	9.20 t/m 9.23	9.15, 9.16

HANDLEIDING BIJ EENHEID 10

STROMINGSMECHANICA.

INHOUDSOPGAVE.

I	Inleiding.	- 1005 -
II	Massa- en volumenbalansen.	- 1007 -
II.I	Massabalans van een stromende homogene incompressibele vloeistof door een buis met starre wanden.	- 1010 -
II.II	Volumenbalans van een stromende homogene incompressibele vloeistof door een buis met starre wanden.	- 1012 -
III	Vloeistofsnelheid.	- 1013 -
III.I	Vloeistofdeeltje.	- 1017 -
III.II	Stationaire en niet-stationaire stromen.	- 1020 -
IV	Behoud en balans van impuls.	- 1021 -
IV.I.	De impuls van een stromende vloeistof.	- 1021 -
IV.II	Impulsbalans van een stromende vloeistof.	- 1024 -
IV.III	Vergelijking van Bernoulli.	- 1030 -
V	Traagheid.	- 1038 -
V.I	Traagheid van een rechte buis.	- 1038 -
V.II	Traagheid van gekromde buizen.	- 1042 -
V.III	Combinaties van bergende vaten en leidingen.	- 1044 -
V.IV	Slot.	- 1048 -
VI	Appendix vloeistofdeeltjes.	- 1049 -
	Beweringen.	- 1053 -
	Aanvullende vraagstukken.	- 1055 -
	Uitwerking studievragen.	- 1061 -
	Uitwerking studievragen na aanwijzingen.	- 1072 -
	Commentaar op de beweringen.	- 1076 -
	Uitwerking aanvullende vraagstukken.	- 1078 -
	Studieadviezen.	- 1090 -

SYMBOLENLIJST

A, A^*	- oppervlak dwarsdoorsnede.	- $[m^2]$
A_i	- dwarsdoorsnede.	
α	- constante.	
B	- gravitatieberging van een vat.	- $[m^2]$
$\vec{e}$	- eenheidsvector.	
$\vec{F}, F$	- krachtvector, component	- $[N]$
g	- gravitatieversnelling	- $[m/s^2]$
h_i	- stijghoogte in dwarsdoorsnede A_i	- $[m]$
H_i	- stuwhoogte " " A_i	- $[m]$
ΔH	- stuwhoogteverschil over leiding	- $[m]$
l	- lengte	- $[m]$
m	- massa	- $[kg]$
M	- traagheid	- $[s^2/m^2]$
$\vec{p}$	- impulsvector	- $[Ns]$
p_a	- atmosferische druk	- $[N/m^2]$
p	- druk, impulscomponent	
Q	- debiet, volumestroom	- $[m^3/s]$
ρ	- dichtheid van een vloeistof	- $[kg/m^3]$
s	- gekromde coördinaat	- $[m]$
S_{ij}	- massastroom naar vat i uit vat j	- $[kg/s]$
t	- tijdparameter	- $[s]$
$\vec{v}$	- snelheidsvector	- $[m/s]$
V	- volume	- $[m^3]$
V_i	- balansgebied i	-
(x, y, z)	- coördinaat-assen	
(x', y', z')	- coördinaat-assen	

VEREISTE VOORKENNIS

Wiskunde 1e jaar.

Statistiek 2e jaar.

Natuurkunde 1e jaar.

Eenheid 9.

SAMENVATTING

In deze eenheid beschouwen we stromende vloeistoffen door leidingen. (stroomvoerende vaten).

Onder de aanname van constante dichtheid worden voor deze leidingen massa- en volumenbalansen opgesteld. Hierna introduceren we het begrip vloeistofsnelheid en vloeistofdeeltjes, welke in een aanhangsel vanuit de statische mechanica wordt gedefinieerd.

Naast de wet van behoud van massa geldt voor een vloeistofstroming de wet van behoud van impuls.

Alvorens deze behoudswet toe te passen idealiseren we de vloeistof door weer te veronderstellen dat de dichtheid ervan een constante is en verder dat de schuifspanning ook in de bewegende vloeistof nul is, hetgeen leidt tot het model van de ideale vloeistof.

Voor een dergelijke vloeistof wordt voor leidingen met verscheidene geometrische vormen de impuls balansvergelijking opgesteld, hetgeen aanleiding geeft tot het introduceren van het kwantitatieve begrip traagheid.

Tenslotte leggen we verband tussen de in eenheid 9 behandelde bergende vaten en de in deze eenheid behandelde leidingen en gaan de koppeling daartussen na.

DOELSTELLINGEN

1. De begrippen massastroom, volumenstroom (debiet), stroomvoerendedwarsdoorsnede en stroomsnelheid met elkaar in verband kunnen brengen.

De massa- en volumenbalansvergelijking van een leiding kunnen opstellen.

Voor een onsamendrukbare vloeistof het debiet van een starre buis kunnen bepalen.

2. De idealisering van de onsamendrukbare, de volmaakte en de ideale vloeistof kennen.

De begrippen impuls en impulsoverdracht in een stroming kennen. De impulsbalans vergelijking voor een ^{homogene} ideale vloeistof in een rechte buis kunnen opstellen. Het begrip stuwhoogte kennen in onderscheid met de stijghoogte.

3. Voor een ^{homogene} ideale vloeistof, in enkele buisvormen de vergelijking van Euler-Bernoulli kunnen afleiden en toepassen.

4. Bij niet-stationaire stroming van een ^{homogene} ideale vloeistof in enkele buisvormen de traagheid van de buis kunnen bepalen, alsmede de relatie met het stuwhoogte verschil en het debiet kennen.

5. Van gebogen en nauwer of wijder wordende buizen, open vaten en kanalen de traagheden en bergingen kunnen bepalen en enig inzicht hebben in de daarbij toelaatbare verwaarlozingen.

I. INLEIDING

In deze eenheid behandelen we de mechanica van stromende, vloeibare of gasvormige, materie.

Vloeibare en gasvormige materie onderscheiden zich van vaste materie, doordat vloeistoffen en gassen kunnen vervormen, zonder dat daarbij de samenhang in de materie wordt verbroken.

In een vast lichaam worden de bouwstenen door sterke krachten t.o.v. elkaar in een min of meer strakke structuur op hun plaats gehouden, zodat grote krachten nodig zijn om deze structuur te wijzigen en het lichaam te vervormen.

Bij vloeistoffen en gassen is dit anders. Als we bij voorbeeld een vinger in water steken, dan wijkt dit onmiddellijk. Dagelijks bevinden we ons in de gasvormige materie van de dampkring, zonder dat we er meestal moeite mee hebben er ons doorheen te bewegen.

Deze grote mate van vervormbaarheid heeft ten gevolge, dat de vorm van vloeibare of gasvormige materie bepaald wordt door het vat waarin deze zich bevindt, een tank, buis, kanaal, meer, etc..

Door het grote aanpassingsvermogen van een vloeistof of gas ten aanzien van zijn vorm, kan een vloeistof of gas van het ene vat in een ander gebracht worden, ook al is de vorm van het tweede vat anders dan die van het eerste.

Het overbrengen van vloeistof of gas van het ene naar het andere vat geschiedt vaak door middel van een verbindend tussenvat, waar de vloeistof of het gas doorheen stroomt. Ook dit vermogen om door te stromen is het gevolg van het aanpassingsvermogen ten aanzien van de vorm. In eenheid 9 zijn we ingegaan op de gevolgen van het toenemen of afnemen van de voorraad vloeistof of gas in een vat. Als kenmerkende grootheid daarbij hebben we de berging ingevoerd.

In deze en de volgende eenheid gaan we in op het door een vat heen stromen van vloeistof of gas. Als kenmerkende grootheden zullen we daarbij traagheid en weerstand van een vat invoeren.

Het ontbreken van een eigen vorm bij vloeistoffen en gassen, bemoeilijkt de visuele waarneming van de beweging van de stromende materie.

Door zijn min of meer onveranderlijke vorm is een vast lichaam gemakkelijk te herkennen en dat geldt ook voor zijn onderdelen. Vaste lichamen worden vaak geïdentificeerd door er een naam aan te geven: een bal, een wagen, een wiel, de Aula, enz.

In een homogene vloeistof is het moeilijk, zo al niet onmogelijk, om op het gezicht delen te herkennen. In plaats van de vloeistofhoeveelheden zelf te indentificeren en namen te geven, doen we dat daarom vaak met de ruimte (het vat) waarin zich een

vloeistof (of gas) kan bevinden: een glas, een meer, de rivier de Rijn, enz..
Beweging van een vast lichaam is vaak gemakkelijk visueel vast te stellen, kwalitatief en kwantitatief, doordat we het lichaam steeds blijven herkennen. We zien met één oogopslag of een voertuig rijdt of stilstaat of het snel of langzaam rijdt.

Bewegingen van vloeistoffen of gassen zijn vaak moeilijk of niet direct visueel vast te stellen. Meestal leiden we het bewegen van een vloeistof of gas op indirecte wijze af, b.v. doordat we meegesleepte voorwerpen zien bewegen of doordat we een vloeistof voorraad zien aangroeien of afnemen, b.v. doordat de waterpiegel stijgt of daalt.

Dit brengt een andere beschrijvingswijze van de bewegingstoestand onder invloed van de erop werkende krachten van de niet-vaste materie met zich mee.

In deze eenheid zullen we hierop nader ingaan.

MASSA- EN VOLUMENBALANSEN

In eenheid 9 is de massabalansvergelijking voor een vloeistof in een vat opgesteld. De balansvergelijking is toegepast op enige voorbeelden van vaten met één toegang.

In deze eenheid houden we ons hoofdzakelijk bezig met de stroming door een vat heen. We richten ons op vaten met elk twee toegangen. Vaak zal een van die toegangen de ingang en de andere de uitgang kunnen worden genoemd. We noemen zo'n vat een leiding.

Ter inleiding beschouwen we de massahuishouding van het stelsel bestaande uit twee meertjes A en B, die onderling verbonden zijn door een kanaal C, waardoor water van het ene naar het andere meertje kan stromen.

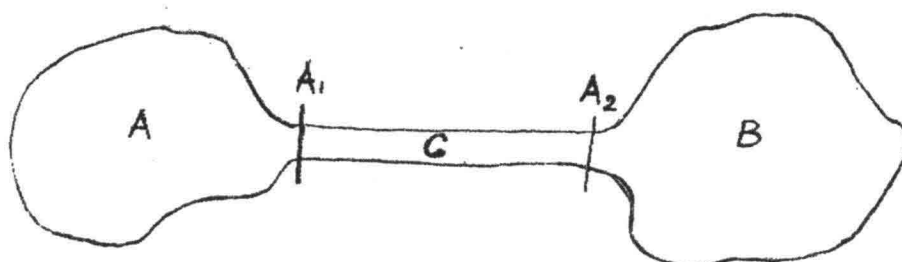


fig. 1.

In dit stelsel zijn A en B bergende vaten en is C een leiding. Stel dat er op tijdstip t vloeistof van A door C naar B stroomt, bijvoorbeeld doordat de gemiddelde waterhoogte in meertje A hoger is dan in meertje B.

Als we veronderstellen, dat er geen vloeistof uit het stelsel verdwijnt of er aan wordt toegevoegd (b.v. regen, verdamping, grondwater, etc.) dan geldt er voor het stelsel een behoudswet van massa. Het stelsel is immers dan te beschouwen als één vat zonder toegang. We zullen aannemen, dat de dichtheid van de vloeistof een constante waarde heeft (homogeen en incompressibel), zodat we behoud van massa ook mogen berekenen als behoud van volumen. In deze eenheid verstaan we onder een homogene vloeistof, een vloeistof waarvan de dichtheid homogeen is, d.w.z. op elke plaats in de vloeistof gelijk is.

Behoud van massa betekent, dat de massavoorraad van het stelsel op elk tijdstip gelijk is.

Op een tijdstip t is de massavoorraad van het stelsel

$$m(t) = m_A(t) + m_B(t) + m_C(t)$$

De massavoorraad van C wordt bepaald tussen de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 , die op vaste plaatsen zijn gekozen.

In een tijdsinterval $(t, t + \Delta t)$ volgend op t stroomt er vloeistof van A naar B, zodat de massavoorraad van het stelsel op tijdstip $(t + \Delta t)$ gelijk is aan:

$$m(t + \Delta t) = m_A(t + \Delta t) + m_B(t + \Delta t) + m_C(t + \Delta t).$$

Nu zegt de wet van behoud van massa, dat $m(t) \equiv m(t + \Delta t)$, dus geldt:

$$m_A(t) + m_B(t) + m_C(t) = m_A(t + \Delta t) + m_B(t + \Delta t) + m_C(t + \Delta t).$$

In het beschouwde tijdsinterval veranderd de massavoorraad van de leiding C dus volgens

$$m_C(t + \Delta t) - m_C(t) = - \{ m_A(t + \Delta t) - m_A(t) \} - \{ m_B(t + \Delta t) - m_B(t) \}$$

Per tijdseenheid wordt dit, als we Δt klein laten worden:

$$\frac{d m_C}{dt} = - \frac{d m_A}{dt} - \frac{d m_B}{dt} \quad (1)$$

Nu is in eenheid 9 voor een vat met één toegang aangetoond, dat de massavoorraads-verandering ervan gelijk is aan de massastroom naar het vat.

Daar A_1 naast een toegang van leiding C ook de toegang tot vat A is, geldt dus dat $\frac{d m_A}{dt} = S_{AC}$, waarbij S_{AC} de massastroom naar het vat uit leiding C is.

Evenzo geldt dat: $\frac{d m_B}{dt} = S_{BC}$.

Substitutie in (1) geeft:

$$\frac{d m_C}{dt} = - S_{AC} - S_{BC} \quad (2)$$

Daar de massastroom van S_{AC} van C naar A gelijk is aan de negatieve waarde van de massastroom van A naar C (S_{CA}) volgt uit (2), dat:

$$\frac{d m_C}{dt} = + S_{CA} + S_{CB} \quad (3)$$

In woorden: De massavoorraadsverandering per tijdseenheid van de leiding C is gelijk aan de massastromen uit A en B naar C.

We noemen (3) de massabalans voor het balansgebied C tussen de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 .

Studievraag 10.1: Als de vloeistof niet-homogeen en onsamendrukbaar is in het stelsel van fig. 1, hoe luidt dan de vergelijking (3)?
(Onder een niet-homogene vloeistof verstaan we een vloeistof waar^{van} de dichtheid van plaats tot plaats verschilt b.v. zout en zoet water).

Studievraag 10.2: Als de vloeistof homogeen is en samendrukbaar hoe luidt (3) dan?

Massabalans voor stromingen van vloeistoffen met constante dichtheid door buizen met starre wanden.

In hoofdstuk 6 van eenheid 9 is voor een geheel met vloeistof gevuld vat met één toegang het elastische bergingsbegrip ingevoerd. Er bleek, dat de massa-voorraadsverandering per tijdseenheid in het vat te schrijven was als:

$$\dot{m}(t) = B \dot{h}(t) \quad (4)$$

waarin $\dot{h}(t)$ de stijghoogteverandering per tijdseenheid voorstelt en B een maat is voor de elastische eigenschappen van de wanden van het vat en de compressibiliteit van de vloeistof. In geval van een incompressibele vloeistof en een vat met starre wanden volgde voor een niet stromende vloeistof dat de berging B nul was. Oftewel voor het vat geldt dan, dat $\dot{m}(t) = 0$.

We beschouwen nu het balansgebied van een buis met starre wanden, geheel gevuld met water, (fig. 2) tussen de loodrecht op de buis-as staande dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 .

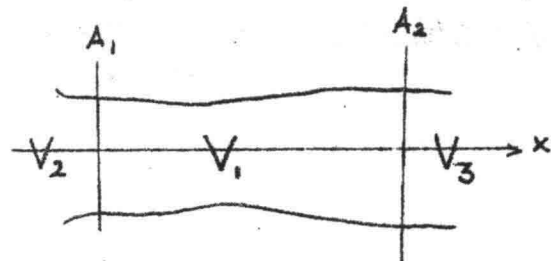


fig. 2.

Zien we nog even af van stroming van de vloeistof, dan geldt in het geval

van incompressibiliteit volgens (4) dat $\dot{m}(t)$ van het balansgebied nul is.

Stroomt de vloeistof echter, dan kan de massavoorraad van het balansgebied wel veranderen als er b.v. door A_1 een vloeistof met een andere dichtheid binnenstroomt, dan er door A_2 uitstroomt (b.v. zout water in zoet water uit).

De massavoorraadsverandering per tijdseenheid van een stromende vloeistof in bovenbeschreven vat zal nul zijn, indien de vloeistof ook nog homogeen is (zie eenheid 9).

Noemen we V_1 het balansgebied, V_2 het gebied links van A_1 en V_3 het gebied rechts van A_2 (zie fig. 2), dan geldt volgens (3) dat in het algemeen geldt, dat

$$\dot{m}_1(t) = S_{12}(t) + S_{13}(t)$$

Voor een starre buis, waardoor een homogeen incompressibele vloeistof stroomt, geldt dan, dat:

$$S_{12}(t) + S_{13}(t) = 0$$

Hetgeen ook te schrijven is, als:

$$S_{12}(t) = S_{31}(t) \quad (5)$$

In woorden: De massastroom van V_2 naar V_1 is gelijk aan de massastroom van V_1 naar V_3 .

Daar de plaatsen van de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 langs de x-as willekeurig gekozen zijn, kunnen we concluderen, dat de massastroom in elke dwarsdoorsnede gelijk is, m.a.w. de massastroom S is onafhankelijk van de plaatscoördinaat * van de buis.

Studievraag 10.3: *Geldt vgl. (5) voor een kanaal, waardoor een vloeistof met constante dichtheid stroomt?*

Studievraag 10.4: *Maak aannemelijk, dat vgl. (5) niet hoeft op te gaan, als de wanden van de buis elastisch zijn.*

II. Volūmenbalansen van stromingen van homogene incompressibele vloeistoffen door buizen met starre wanden.

In eenheid 9 hebben we het debiet (de volumenstroom) Q door een dwarsdoorsnede gedefinieerd als:

$$Q(t) = \frac{S}{\rho}(t) \quad (6)$$

Er geldt dan volgens (5), dat voor een volle starre buis, waardoor een vloeistof stroomt waarvan de dichtheid een constante is, het debiet Q ook alleen een functie van de tijd is en niet van de plaats.

Studievraag 10.5: *Kunnen we uit bovenstaande concluderen dat door elk dwarsprofiel van de buis op een tijdstip t hetzelfde debiet stroomt?*

Studievraag 10.6: *Hoe luidt de conclusie uit (6) als de dichtheid afhankelijk van de plaats is? (Beschouw de buis tussen twee vaten). De vloeistof is incompressibel.*

Studievraag 10.7: *Ga na of de massastroom S of het debiet Q door een kanaal, waarvan de vorm en de hoogte van de waterspiegel niet van de tijd afhangt, onafhankelijk is van de plaats in het kanaal. De dichtheid van de stromende vloeistof is een constante.*

Studievraag 10.8: *Hoe luidt de volumenalans voor de in II.I behandelde buis?*

VLOEISTOFSNELHEID (VERPLICHTE LEESSTOF)

Tot dusver hebben we de beweging van een vloeistof trachten te beschrijven door na te gaan hoe de vloeistof (massa, volumen)-voorraad in verloop van tijd in een onveranderlijk gebied V_1 varieert. Zo zijn we er toe gekomen de begrippen, massa- en volumenstroom in te voeren.

We willen nu vervolgens ingaan op de snelheid waarmee een vloeistof beweegt. Van een mens of dier, een voertuig of een ander vast lichaam dat beweegt, krijgt men vaak al met één oogopslag een indruk van de snelheid waarmee het lichaam beweegt. Van een vloeistof, is het meestal veel moeilijker een indruk van de snelheid te krijgen.

Soms is een vrij goede indruk mogelijk van de snelheid van stromend water, doordat het water kleine lichamen meevoert, b.v. een drijvend stukje hout, een schuimvlok, luchtballen of iets dergelijks.

Als we mogen aannemen dat het meegevoerde lichaam ongeveer de snelheid aanneemt van het omringende stromende water, dan is de snelheid van het lichaam een min of meer bruikbare maat voor de snelheid van het water in zijn omgeving. Op dezelfde wijze kunnen door de wind opwarrelende bladeren, stukken papier e.d., een indruk geven van de snelheid van stromende lucht.

Echter vaak is een eerste indruk van de snelheid van stromend water misleidend. Zo bijvoorbeeld wanneer zich op het water door de wind of door een andere oorzaak golfjes vormen. We zien de golven zich voortplanten met een zekere snelheid en dit suggereert een beweging van het water met die snelheid. Dat de snelheid van het water niet die van de golven is, blijkt bijvoorbeeld wanneer op het water een stukje hout drijft. Dit beweegt wat op en neer en heen en weer maar verplaatst zich verder nauwelijks. Dit vormt een aanwijzing dat de voortgaande beweging die we zien in de voortplanting van de golven, niet als een snelheid van het water mag worden uitgelegd.

Een ander voorbeeld is een dun waterstraaltje fig. 4, dat uit een kraan in een glas komt. Het straaltje maakt de indruk van een stilstaand doorzichtig kolommetje materie, dat naar beneden toe dunner wordt. Uit het feit, dat het glas zich langzaam met water vult blijkt, dat het water in het straaltje niet stilstaat, maar in een stromende beweging moet zijn.

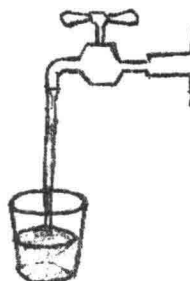
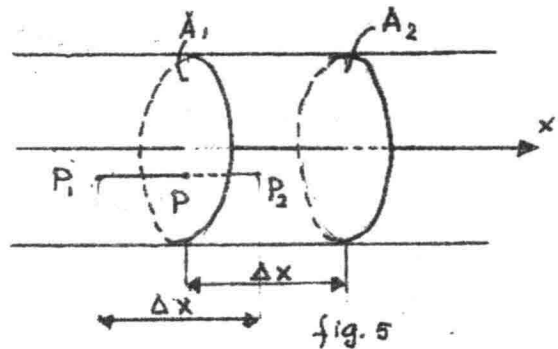


fig. 4.

Het laatste voorbeeld wijst erop dat we de snelheid van een vloeistof in verband moeten kunnen brengen met massastromen.

We willen dit nagaan door een stroming te beschouwen in een leiding met een constant dwarsprofiel A_1 , met oppervlak A , b.v. een cilindrische buis (fig. 5).

We veronderstellen, dat de dichtheid van de stromende vloeistof constant is (in plaats en tijd)



We denken de vloeistof opgebouwd uit deeltjes, waarbij we voorlopig nog in het midden laten wat we onder die vloeistofdeeltjes moeten verstaan.

Als we nu eens bij wijze van gedachteexperiment aannemen, dat de vloeistofdeeltjes in de leiding alle eenzelfde constante snelheid in de asrichting $\vec{e}_x$ van de buis hebben, dus $v_x = v = \text{constant}$.

Beschouw nu een dwarsdoorsnede A_1 loodrecht op de as van de buis. We willen nagaan hoeveel vloeistof in een tijdsinterval (t_1, t_2) door de doorsnede A_1 stroomt. Een willekeurig vloeistofdeeltje dat zich in dat tijdsinterval door A_1 heen beweegt, zal b.v. in dat tijdsinterval een verplaatsing $P_1 P_2$ ondergaan en daarbij in het punt P door A_1 heen gaan. De afstand van P_1 naar P_2 is dan $\Delta x = v \Delta t$, met $\Delta t = t_2 - t_1$ ($\Delta t > 0$).

Alle deeltjes, die in het tijdsinterval (t_1, t_2) door A_1 heen gaan, zullen zich op $t = t_2$ bevinden in een ruimtelijk gebied dat we als volgt kunnen bepalen.

Ieder deeltje dat zich op $t = t_1$ juist in de doorsnede A_1 bevindt en dat dus op $t = t_1$ door deze doorsnede heengaat, zal zich op $t = t_2$ bevinden in een doorsnede A_2 op een afstand $\Delta x = v \Delta t$ van A_1 gelegen. Alle deeltjes die op het tijdstip $t = t_2$ door de doorsnede A_1 heen gaan, bevinden zich op dat tijdstip $t = t_2$ in A_1 . Alle deeltjes, die op tijdstippen $t_1 < t < t_2$ door A_1 heen gaan zullen zich op het tijdstip $t = t_2$ ergens tussen A_1 en A_2 in bevinden.

De vloeistof, die in (t_1, t_2) door A_1 heen gaat, bevindt zich dus op het tijdstip $t = t_2$ in het door A_1 en A_2 begrensde deel van de buis.

Het volumen van dat deel van de buis is $\Delta V = A \Delta x = A v \Delta t$, waarin A de grootte van de dwarsdoorsnede van de buis is. De massa van de vloeistof in het beschouwde deel van de buis is $\Delta m = \rho \Delta V$.

We vinden dus dat in de tijd Δt door A_1 heen een hoeveelheid vloeistof met massa Δm is gestroomd, waaruit we kunnen afleiden, dat:

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho A_1 v \Delta t}{\Delta t} = \rho A_1 v.$$

de massaastroom door A_1 heen is.

Hieruit volgt dat we de snelheid van de vloeistofdeeltjes uit de massaastroom S of het debiet $Q = \frac{S}{\rho}$ kunnen afleiden, door

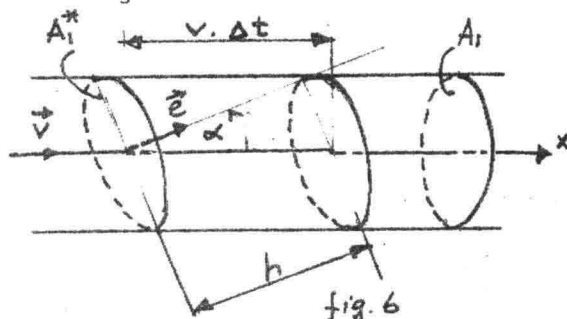
$$v = \frac{S}{\rho A} = \frac{Q}{A} \quad (7)$$

toe te passen.

v is dus een soort gemiddelde snelheid loodrecht op A_1

Studievraag 10.9: In het geval van fig. 4 vinden we dat de watervoorraad in het glas in 1 minuut met 84 gram toeneemt. De dikte van het onderste deel van de straal wordt geschat op 1 mm. Bepaal daaruit de (gemiddelde) stroomsnelheid onder in de straal.

In het voorgaande (zie fig. 5) is het geval behandeld dat de dwarsdoorsnede A_1 en de snelheid van de vloeistofdeeltjes loodrecht op elkaar staan. In fig. 6 beschouwen we nu het geval dat de vloeistofdeeltjes schuin door de dwarsdoorsnede A_1^* heen gaan. De richtingsvector $\vec{e}$ loodrecht op de schuine doorsnede A_1^* is dan niet evenwijdig met de snelheidsvector $\vec{v}$ van de vloeistofdeeltjes, doch maakt daarmee een hoek α .



Het oppervlak A^* van de schuine doorsnede is groter dan het oppervlak A

van de dwarsdoorsnede A_1 loodrecht op de x -as en wel $A^* = A / \cos \alpha$.

Het volumen van de vloeistof die in een tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$ door A_1^* heen is gegaan, is dat van een schuin cilindrisch gebied met een grondvlak A^* en een hoogte h , die we vinden door van de verplaatsingsvector $\vec{v} \cdot \Delta t$ de ontbondene in de richting $\vec{e}$ te nemen, dus $h = \vec{e} \cdot \vec{v} \Delta t$.

We vinden dus voor het volumen $\Delta V = A^* h = A^* \vec{e} \cdot \vec{v} \Delta t$ en dus is $\Delta m = \rho \Delta V$ en

$$S = \rho Q = \frac{\rho \cdot \Delta V}{\Delta t} = \rho A^* \vec{e} \cdot \vec{v}$$

Hier uit volgt dat

$$\frac{S}{\rho A^*} = \frac{Q}{A^*} = \vec{e} \cdot \vec{v} = v \cos \alpha \quad (8)$$

$$v \cos \alpha = \frac{Q}{A^*}$$

Hierin stelt de component van de snelheid $\vec{v}$ loodrecht op A in de richting $\vec{e}$ voor.

Dit is ook als volgt in te zien:

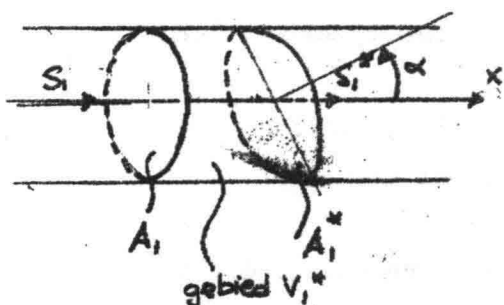
In het gebied V_1^* is er geen massaverandering, dus

$$S_1 = S_1^*$$

m.a.w.

$$\rho A v = \rho A^* v^*$$

$$\vec{v}^* = \frac{A}{A^*} v = v \cos \alpha$$



Vloeistofdeeltje

In het voorgaande is het begrip "vloeistofdeeltje" gebruikt zonder dat daarbij was aangegeven wat daarmee bedoeld werd. Het is nodig om hier nog wel bij stil te staan, omdat het begrip "deeltje" een verschillende betekenis kan hebben afhankelijk van het gebruikte model van de materie.

In de fysica verstaat men onder een "deeltje" een elementaire bouwsteen, bijvoorbeeld een molekuul. Formalisering van hiervan zijn het puntmassamodel (zie eenheid 5) en het starre lichaamsmodel (zie eenheid 8).

In de technische mechanica, met name in de vloeistofmechanica, wordt gewoonlijk gewerkt met een continu model van de materie. Dit model sluit beter aan bij de materie zoals die zich aan ons voordoet.

Onder een vloeistofdeeltje kunnen we een pakketje vloeistof verstaan, dat tenmiste zo groot is, dat de warmtebeweging van dat pakketje (Brownse beweging) te verwaarlozen is. Het pakketje bevat dan b.v. zoiets als 10^{10} molekulen.

Dit geeft dus min of meer een ondergrens aan het begrip vloeistofdeeltje.

De samenstelling van een pakketje vloeistof zal in verloop van tijd veranderen. Sommige molekulen zullen door hun warmtebeweging zover van de groep afdwalen, dat ze na enige tijd niet meer tot het pakketje gerekend kunnen worden. Andere molekulen zullen zich inmiddels van elders bij de groep gevoegd hebben.

De onregelmatige bewegingen van een vloeistofpakketje (of van een lichaampje in de stroom) kunnen blijkens de ervaring vaak aanzienlijk sterker zijn dan wat als warmtebeweging verklaard kan worden. Die sterke onregelmatige bewegingen noemt men turbulentie.

Stromingen met deze verschijnselen noemt men turbulent, die er zonder noemt men laminair.

De meeste stromingen, waarmee de civiel-ingenieur te maken krijgt in open water als zeeën, rivieren, beken, kanalen en in buizen, enz., zijn turbulent. Luchtstromingen (wind, ventilatiestroming) zijn vaak eveneens turbulent. Grondwaterstromingen zijn in de regel laminair. Op het herkennen van turbulente en laminare stromingen wordt nader ingegaan in eenheid 11.

De beschrijving van bovengenoemde onregelmatige beweging (turbulentie) geeft een bovengrens aan de omvang van het vloeistofdeeltje.

Studievraag 10.10: *In hoeverre voldoet een vloeistofdeeltje aan de definitie van een lichaam?*

In een appendix (H.VI) wordt vanuit de statistische mechanica dieper ingegaan op het bepalen van de ondergrens van het pakketje.

Beweging van een vloeistofdeeltje

We kunnen de beweging van een vloeistofdeeltje beschrijven, door de beweging van zijn centrum na te gaan. Onder de baan van het vloeistofdeeltje verstaan we dan de baan van dat centrum. Door van een groot aantal vloeistofdeeltjes de beweging als functie van de tijd na te gaan, komen we tot de beschrijvingswijze van Lagrange van de vloeistof. We volgen dan dus elk vloeistofdeeltje in de tijd.

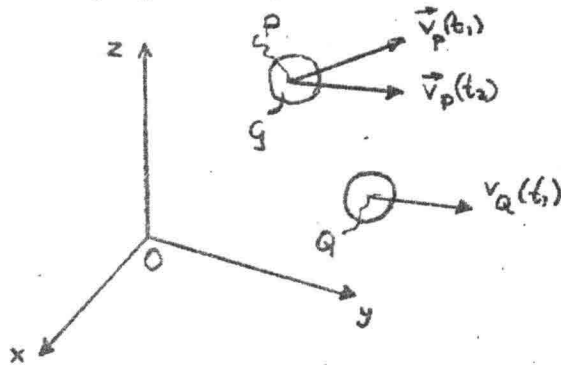
Een andere beschrijvingswijze van de vloeistofbeweging is de volgende. We kiezen nu een willekeurig vast punt P in de fysische ruimte. Op een tijdstip t_1 kunnen we een pakketje vloeistof beschouwen, dat op dat moment zijn centrum juist in P heeft. Laat $\vec{v}_p(t_1)$ de snelheid van het centrum op dat moment zijn. Dan noemen we $\vec{v}_p(t_1)$ de stroomsnelheid in P op het tijdstip t_1 . Het beschouwde pakketje kunnen we bijvoorbeeld zo kiezen, dat het juist de molekulen omvat, die zich bevinden in een klein ruimtelijk gebied G, b.v. een bol met kleine straal om P heen,

Even later, op tijdstip t_2 vatten we de molekulen die zich dan in G bevinden als een pakketje op. Laat dit dan de snelheid $\vec{v}_p(t_2)$ hebben. Op die wijze kunnen we voor P op ieder tijdstip t een waarde van de snelheid $\vec{v}_p$ bepalen, dus $\vec{v}_p = \vec{v}_p(t)$.

Nemen we $(t_2 - t_1)$ heel klein, dan zal zich of $t = t_2$ in G nog een deel van de molekulen kunnen bevinden, die er ook op $t = t_1$ in waren. We mogen verwachten dat $\vec{v}_p(t_2)$ dan weinig van $\vec{v}_p(t_1)$ zal verschillen. We zullen daarom als benadering aannemen, dat $\vec{v}_p(t)$ een continu met t verlopende functie is.

Op dezelfde wijze als in P kunnen we in een willekeurig ander punt Q de stroomsnelheid $\vec{v}_Q(t)$ bepalen.

In ieder punt van de met vloeistof gevulde ruimte vinden we zo een stroomsnelheid. De stroomsnelheid is daarom te schrijven als een functie van de plaatscoördinaten en de tijd, dus $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$.



We nemen nu de snelheid op hetzelfde tijdstip in twee naburige punten, dus b.v. $\vec{v}_P(t_1)$ en $\vec{v}_Q(t_1)$. Wanneer P en Q heel dicht bij elkaar genomen worden, dan kan het vloeistofdeeltje om Q heen gedeeltelijk dezelfde molekulen omvatten als de vloeistof om P heen. We mogen verwachten dat $\vec{v}_P(t_1)$ en $\vec{v}_Q(t_1)$ dan weinig van elkander verschillen. We zullen daarom bij benadering veronderstellen, dat $v(x,y,z,t)$ een continu met x, y en z verlopende functie is.

Deze beschrijvingswijze, waarin ⁱⁿ elk punt van een vast ruimtelijk gebied, het snelheidsverloop in de tijd wordt bepaald, noemen we de beschrijvingswijze van Euler van de vloeistofbeweging.

Stationaire en niet-stationaire vloeistofstromen

In deze eenheid zullen we hoofdzakelijk gebruik maken van de Eulerse beschrijvingswijze van een vloeistofstroming. D.w.z. dat we in een ruimtelijk gebied in elk punt de stroomsnelheid als funktie van de tijd bepalen. Zodat voor dat gebied de stroomsnelheid $\vec{v}$ een funktie van x, y, z en t is.

Geldt nu voor een vloeistofstroming, dat de stroomsnelheid $\vec{v}$ uitsluitend van x, y, z en niet van t afhangt, dan noemen we deze stroming stationair.

Studievraag 10.11: *Als de stroomsnelheid niet van x, y, z en t afhangt, is de stroming dan stationair?*

In het geval, dat de stroomsnelheid $\vec{v}$ op één of meer plaatsen verandert in de tijd t , spreken we van een niet-stationaire stroming.

Studievraag 10.12: *Als $\vec{v}$ geen funktie van t is, is de stroming dan niet-stationair?*

Resumerend kunnen we zeggen, dat een stroming stationair is als in elk punt van de beschouwde ruimte, de vloeistofsnelheid niet van de tijd afhangt. De snelheid kan dus wel van plaats tot plaats verschillen.

In het geval dat in elk punt van de beschouwde ruimte v in de tijd verandert, spreken we van een niet-stationaire stroming.

Studievraag 10.13: *Beweegt een deeltje in een stationaire stroming éénparig?*

BEHOUD EN BALANS VAN IMPULS

In deze paragraaf richten we ons op de behandeling van de wet van behoud van impuls voor een bewegende vloeistof. Daarbij idealiseren we in deze eenheid het gedrag van de vloeistof in twee opzichten.

1. We verwaarlozen de compressibiliteit van de vloeistof. We nemen dus aan dat de vloeistof als incompressibel behandeld mag worden. Bovendien zullen we aannemen dat de vloeistof homogeen is in die zin, dat de dichtheid ρ overal in de vloeistof telkens dezelfde waarde heeft. I.v.m. de incompressibiliteit verandert deze waarde ook niet in de tijd.
2. We verwaarlozen de schuifspanningen die ten gevolge van de bewegingen in de vloeistof optreden. Een denkbeeldige vloeistof, waarin de schuifspanningen nul zouden zijn, ook als de vloeistof in beweging is, noemen we een volmaakte vloeistof.

In eenheid 9 is aangetoond, dat voor een stilstaande vloeistof dan in elk punt een isotrope druk heerst (wet van Pascal) (zie pag. 9.24 e.v.). Voor een bewegende volmaakte vloeistof kan eenzelfde bewijs worden geleverd. Daarbij moet dan nog met een extra term $\Delta m \frac{\partial v}{\partial t} = \rho \Delta V \frac{\partial v}{\partial t}$ rekening worden gehouden t.g.v. de versnelling van de vloeistof. Deze gaat echter naar nul als ΔV naar nul gaat, op analoge wijze als de term $\rho g \Delta V$ (zie 9.26). M.a.w. de wet van Pascal geldt ook voor een bewegende volmaakte vloeistof.

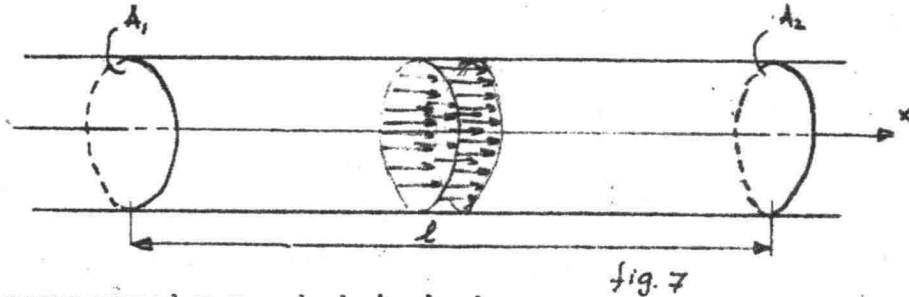
Studievraag 10.14: *Is de drukverdeling in een volmaakte vloeistof hydrostatisch?*

Een vloeistof, die zowel incompressibel als volmaakt is, wordt een ideale vloeistof genoemd. In deze eenheid zullen we homogene ideale vloeistoffen behandelen, dus vloeistoffen waarvan de dichtheid een constante is. We zullen nu nader ingaan op de beweging van een homogene ideale vloeistof in een lokaal zwaarteveld.

.I De impuls van een stromende vloeistof

We beschouwen een cilindrische buis met starre wanden en lengte l tussen de dwarsdoorsneden A_1 en A_2 , die loodrecht staan op de as (x-as) van de buis. (zie fig. 7).

In de buis stroomt een homogene ideale vloeistof met een constante snelheid $\vec{v} = v \vec{e}_x$, d.w.z. de grootte en de richting van de snelheid van elk vloeistof-deeltje is op elk tijdstip gelijk.



De massavoorraad m van de buis is dan

$$m = \rho \Delta V = \rho A \cdot l, \text{ waarin } A \text{ het oppervlak van de dwarsdoorsnedes is.}$$

Onder de impuls van de vloeistof, die zich in de buis bevindt verstaan we dan:

$$\vec{p} = m \vec{v} = \rho \Delta V \vec{v} = \rho \Delta V v \vec{e}_x \quad (9)$$

Dit is dus impuls die werkzaam is in de as richting van de buis.

In H. III (8) vonden we voor de snelheid van de vloeistof, dat

$$\vec{v} = \frac{S}{\rho A} \vec{e}_x$$

Substitutie in (9) geeft dan

$$\vec{p} = \frac{S \cdot \Delta V}{A} \vec{e}_x = S \cdot l \cdot \vec{e}_x \quad (10)$$

In woorden: de grootte van de impuls van de vloeistof in de cilindrische buis is gelijk aan de massastroom keer de lengte van de buis, oftewel de impuls per lengte-eenheid is gelijk aan de massastroom.

Voor het geval de stroming niet-stationair is en de snelheid verandert met de tijd, wordt (9)

$$\vec{p}(t) = \rho \Delta V \cdot \vec{v}(t)$$

en blijft (10) gelden waarin de massastroom S dan een funktie van de tijd is.

We beschouwen vervolgens een taps toelopende buis met cirkelvormige dwarsdoorsnede waarin een homogene ideale vloeistof stationair stroomt tussen de twee

vaste dwarsprofielen A_1 en A_2 . De snelheid van de vloeistofdeeltjes zal in dit geval niet meer loodrecht op de dwarsdoorsnede staan.

Echter als de buis zodanig geleidelijk dunner wordt, dat de

hoek die de wand met de buisas maakt klein is, kunnen we bij benadering aannemen, dat de x-componenten van de snelheden van de vloeistofdeeltjes over de dwarsdoorsnede gelijk zijn.

We kunnen nu niet zonder meer de impuls-voorraad van de buis bepalen, aangezien zowel de snelheidscomponent v_x als het oppervlak A van de dwarsdoorsnede functies van x zijn.

Echter het produkt $v_x(x) \cdot A(x)$ stelt het debiet door de buis in de x-richting voor en deze is voor de door ons beschouwde vloeistof constant langs de buis (zie H II.II).

Beschouwen we een mootje dx op afstand x in de buis, en noemen we het oppervlak ter plaatse van x $A(x)$, dan is de massavoorraad van het mootje

$$dm = \rho A(x) dx$$

De snelheid ter plaatse van x zij $v_x(x)$, dan is de impuls van het mootje in de richting

$$dp_x = \rho A(x) v_x(x) dx$$

Nu geldt dat $Q = A(x) v_x(x) = \text{constant}$, dus

$$dp_x = \rho Q dx = S dx$$

Oftewel de impuls van de gehele buis is:

$$\int_0^l dp_x = \int_0^l \rho Q dx = \int_0^l S dx$$

Dus de grootte van de impulsvoorraad in de x-richting is:

$$p_x = S \cdot l.$$

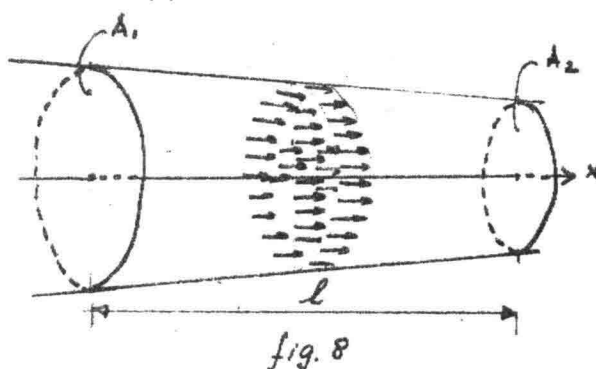


fig. 8

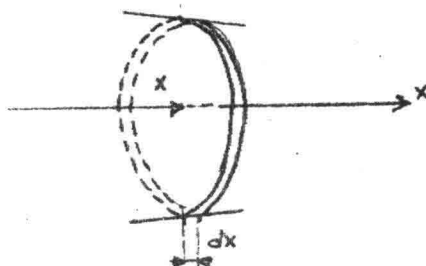


fig. 9

Het is dus hetzelfde resultaat als dat afgeleid is voor een cilindrische buis.

Studievraag 10.15: Ga na hoe (1) verandert als de stroming in de tapse buis niet-stationair is.

Studievraag 10.16: Bepaal de impuls in de x -richting van een homogene ideale vloeistof in een cilindrische buis met behulp van de volgende gegevens:

$$\rho_{VL} = 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \quad Q = 0,2 \text{ [m}^3\text{/s]},$$

$$l_{\text{buis}} = 20 \text{ [m]}, \quad A = 0,5 \text{ [m}^2\text{]}.$$

Studievraag 10.17: Van een tapse buis is de lengte 40 [m]. De diameter van de toegang is 0,5 [m] en die van de uitgang 0,4 [m]. Door de buis stroomt stationair een homogene ideale vloeistof met $\rho_{VL} = 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}$.

In de toegang van de buis wordt een snelheid gemeten van 4 [m/s]. Bepaal de impuls van de buis.

I. Impulsbalans voor een stromende vloeistof.

Duwen we tegen een vast lichaam of vegen we b.v. met een bezem in een plas water, dan is in beide gevallen het gevolg van de kracht die we uitoefenen een beweging van de materie.

Door toepassing van de balansvergelijking van de impuls kunnen we een relatie leggen tussen de uitgeoefende kracht en de beweging van de materie.

Uitwerking van de behoudswet van impuls voor een bepaalde hoeveelheid materie levert:

I. $\frac{dI}{dt} = 0$, als er geen krachten op de materie werken.

II. $\frac{dI}{dt} = \vec{F}$, de verandering van impuls per tijdseenheid is gelijk aan de som van de krachten, die op de materie werken.

III. $\vec{p}_{ab} = - \vec{p}_{ba}$

als twee hoeveelheden materie a en b alleen onderling een wisselwerking hebben, dan is de impulsverandering per tijdseenheid van de materie a t.g.v. de wisselwerking met de materie b gelijk van grootte doch tegengesteld gericht als de impulsverandering per tijdseenheid van de materie b t.g.v. de materie a.

In de eenheden 4 en vooral 5 is dieper op de behoudswet van impuls ingegaan.

We behandelen nu eerst een niet-stationaire stroming van een homogene ideale vloeistof door een cilindrische buis met starre wanden.

In hoofdstuk II van deze eenheid hebben we voor een dergelijke vorm de behoudswet van massa afgeleid voor een vast ruimtelijk gebied hetgeen resulteerde in een gelijke massastroom $S(t) = \rho Q(t)$ voor elk tijdstip t door elke dwarsdoorsnede.

Aangezien het oppervlak A van de dwarsdoorsnede voor elke x gelijk is zal de gemiddelde snelheid volgens uit $\frac{Q(t)}{A} = v(t)$ ook niet van

x afhangen.

We kunnen dus ook zeggen dat op

elk tijdstip telkens de snelheid van de vloeistofdeeltjes in elke doorsnede gelijk is.

We beschouwen nu de impulsverandering in de tijd van de bewegende vloeistof in een balansgebied V_1 begrensd door de starre wanden van de buis en de vast gekozen dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 loodrecht op de asrichting van de buis (zie fig. 10).

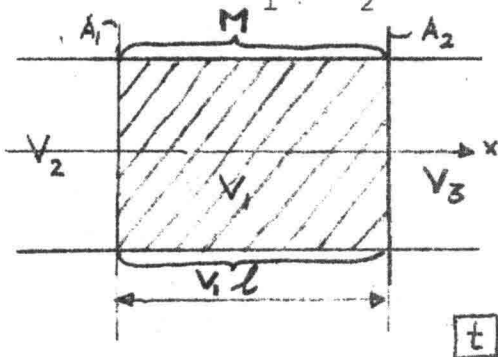


fig. 10

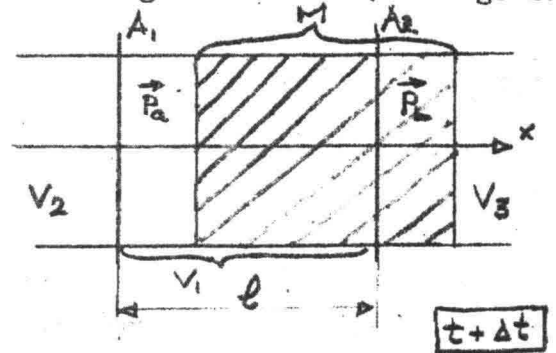
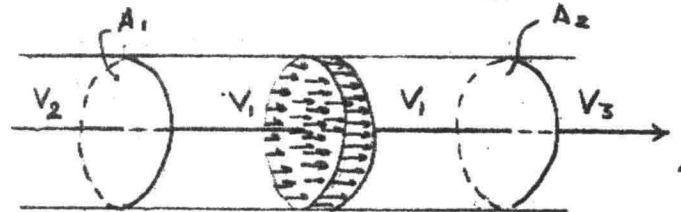


fig. 11

We kunnen nu niet zondermeer de tweede wet van Newton ($\dot{p} = \Sigma F$) op het balansgebied V_1 toepassen, aangezien zich t.g.v. de stroming niet steeds dezelfde massa in V_1 bevindt.

In het tijdsinterval $(t, t + \Delta t)$ is de gearceerde materie M (fig. 10 en 11) over een afstandje verplaatst, en deze bevat wel steeds dezelfde deeltjes, dus daarop mogen we de tweede wet van Newton wel toepassen. We zoeken nu dus een relatie tussen de impulsverandering van V_1 en die van de gearceerde vloeistof M .

Op tijdstip t is de snelheid van de vloeistof (fig. 10) in de gehele buis, en dus ook in het balansgebied V_1 gelijk aan $\vec{v}(t) = v(t) \vec{e}_x$.

De impulsvoorraad van V_1 is dan

$$\vec{p}_1(t) = \rho A \ell v(t) \vec{e}_x (= S(t) \cdot \ell \vec{e}_x) \quad (12)$$

Op tijdstip $t + \Delta t$ (fig. 11) is de snelheid van de vloeistof in de gehele buis $\vec{v}(t + \Delta t) = v(t + \Delta t) \vec{e}_x$.

De impulsvoorraad van V_1 is dan

$$\vec{p}_1(t + \Delta t) = \rho A \ell v(t + \Delta t) \vec{e}_x (= S(t + \Delta t) \cdot \ell \vec{e}_x) \quad (13)$$

Noemen we de impuls van de gearceerde vloeistof M op $t + \Delta t$: $\vec{p}_M(t + \Delta t)$, de impuls van de vloeistof, die dan wel in V_1 is, maar niet tot M behoort

$\vec{p}_a(t + \Delta t)$ en de impuls van de vloeistof die wel tot M behoort maar niet meer in V_1 is $\vec{p}_b(t + \Delta t)$ (zie fig. 11), dan kunnen we de impulsvoorraad van V_1 op $t + \Delta t$ schrijven als:

$$\vec{p}_1(t + \Delta t) = \vec{p}_a(t + \Delta t) + \vec{p}_M(t + \Delta t) - \vec{p}_b(t + \Delta t) \quad (14)$$

Merk op dat $\vec{p}_M(t + \Delta t)$ de impuls op $t + \Delta t$ is van dezelfde vloeistofdeeltjes, die zich op tijdstip t in het balansgebied V_1 bevonden.

De deeltjes zijn echter in het tijdsinterval $(t, t + \Delta t)$ verplaatst met een gemiddelde snelheid (als Δt klein is):

$$\frac{\vec{v}(t) + \vec{v}(t + \Delta t)}{2} = \vec{v}(t + \alpha \Delta t) = v(t + \alpha \Delta t) \vec{e}_x, \text{ met } 0 < \alpha < 1 \quad (15)$$

zodat ze over een afstand $\Delta x = v(t + \alpha \Delta t) \cdot \Delta t$ verplaatst zijn.

Voor de verandering $\vec{p}_1(t + \Delta t) - \vec{p}_1(t)$ van de impulsvoorraad in het balansgebied V_1 geldt dus:

$$\vec{p}_1(t + \Delta t) - \vec{p}_1(t) = \vec{p}_M(t + \Delta t) - \vec{p}_1(t) + \vec{p}_a(t + \Delta t) - \vec{p}_b(t + \Delta t) \quad (16)$$

Oftewel deze is gelijk aan de impulsverandering van de gearceerde vloeistof plus de impuls $\vec{p}_a$ minus de impuls $\vec{p}_b$ op $t + \Delta t$.

Met (15) volgt uit fig. 11 dat de impuls $\vec{p}_a(t + \Delta t)$ gelijk is aan:

$$\begin{aligned} \vec{p}_a(t + \Delta t) &= m_a \vec{v}(t + \Delta t) = \rho A \Delta x \cdot \vec{v}(t + \Delta t) \\ &= \rho A v(t + \alpha \Delta t) \vec{v}(t + \Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (17)$$

Hetzelfde geldt voor: $\vec{p}_b(t + \Delta t)$.

Teneinde hieraan een fysische betekenis te geven, beschouwen we de impuls $\vec{p}_{12}(t, t + \Delta t)$ van de door A_1 van V_2 naar V_1 gestroomde materie in het tijds-interval $(t, t + \Delta t)$.

Deze hoeveelheid impuls is gelijk aan:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{12}(t, t + \Delta t) &= \vec{m}_{12}(t, t + \Delta t) \cdot \vec{v}(t, t + \Delta t) \\ &= \rho A v(t + \alpha \Delta t) \Delta t \cdot v(t + \alpha \Delta t).\end{aligned}$$

Deze is dus niet precies gelijk aan $\vec{p}_a$ (zie fig. 17) want het verschil is

$$\vec{p}_a - \vec{p}_{12} = \rho A (1 - \alpha) v(t) \frac{\partial v}{\partial t} (\Delta t)^2 + O(\Delta t)^3.$$

Studievraag 10.18: *Toon dit aan door beide impulsen in een Taylor-reeks te ontwikkelen.*

Als we nu Δt erg klein nemen dan mogen we het verschil verwaarlozen, zodat uit (16) volgt (voor $\vec{p}_b$ en $\vec{p}_{31}$ geldt hetzelfde) dat de impulsverandering van het balansgebied V_1 gelijk is aan de impulsverandering van de gearceerde vloeistof plus de ingestroomde impuls minus de uitgestroomde impuls.

Dus:

$$\vec{p}_1(t + \Delta t) - \vec{p}_1(t) = \vec{p}_s(t + \Delta t) - \vec{p}_1(t) + \vec{p}_{12}(t, t + \Delta t) - \vec{p}_{31}(t, t + \Delta t) \quad (18)$$

Nu geldt dat $\vec{p}_{12}(t, t + \Delta t) = \vec{p}_{31}(t, t + \Delta t)$, dus verandering van de impulsvoorraad in het balansgebied is gelijk aan de impulsverandering van de gearceerde vloeistof.

Noot: In het geval van een variabel oppervlak van de dwarsdoorsnede langs de buis levert $\vec{p}_{12}(t, t + \Delta t) - \vec{p}_{31}(t, t + \Delta t)$ wel een bijdrage, zoals in de volgende paragraaf zal blijken.

Nu hebben we reeds opgemerkt, dat we op de gearceerde vloeistof Newton 2 wel mogen toepassen, dus voor de impulsverandering per tijdseenheid van V_1 geldt, dat:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_1(t + \Delta t) - \vec{p}_1(t)}{\Delta t} = \sum \vec{F}_{\text{op } V_s}$$

oftewel:

$$\frac{d \vec{p}_1}{dt} = \sum \vec{F}_{op} V_s \quad (19)$$

Aangezien we Δt zeer klein nemen, geldt bij benadering, dat de krachten op V_s dezelfde zijn als die op V_1 . Op dezelfde wijze als bij de instroming kunnen we aantonen, dat we tweede orde termen in Δt verwaarlozen nl.

($\vec{p} = F(t + \Delta t) \Delta t = F(t) \Delta t + O(\Delta t)^2$), zodat we voor (19) kunnen schrijven:

$$\frac{d \vec{p}_1}{dt} = \sum \vec{F}_{op} V_1 \quad (20)$$

De verandering per tijdseenheid van de impulsvoorraad in V_1 is gelijk aan de som van de krachten die op V_1 werken.

Noot: In het geval dat de in- en uitgestroomde impuls niet gelijk zijn luidt (20), dus:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{op} V_1 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_{in} V_1 - \vec{p}_{uit} V_1}{\Delta t}$$

Dit zullen we in de volgende paragraaf gebruiken.

De op V_1 werkende krachten zijn: (zie ook eenheid 9).

1. In de begrenzingen van V_1 werkt de inwendige spanning in de vorm van de isotrope druk, die als oppervlaktekracht in rekening wordt gebracht.
2. Door de zwaartekracht wordt impuls tussen de aarde en de materie in V_1 overgedragen, die als volumekracht in rekening wordt gebracht.

Daar we de impulsverandering per tijdseenheid in de as-richting beschouwd hebben, zijn ook alleen de krachtcomponenten in die richting van belang.

Overdracht van impuls door drukspanningen

In ieder van de dwarsprofielen werkt een interactie door de inwendige spanningen. De spanning is isotroop (wet van Pascal) (zie inleiding IV), en dus volgt dat de werklijn van die interactie loodrecht staat op de dwarsdoorsneden.

In A_1 werkt dan de kracht $\vec{F}_1 = p_1 A \vec{e}_x$ en in A_2 de kracht $\vec{F}_2 = -p_2 A \vec{e}_x$, (21)
als p_1 en p_2 de drukken zijn in de doorsnedes A_1 resp. A_2 van buitenaf (V_2 en V_3)
op de vloeistof binnen V_1 .

Overdracht van x-gerichte impuls door de zwaartekracht.

Veronderstel dat de buis en de richting van de zwaartekracht een hoek α met elkaar maken (fig. 12). De gravitatie wisselwerking tussen de massa in het balansgebied en de aarde geeft een kracht op de massa van

$$\vec{F}_g = \rho A l \vec{g} \quad \text{met} \quad \vec{g} = -g \vec{e}_z$$

De component in de x-richting is dan gelijk aan:

$$F_{x'} = -\rho A l g (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{x'}) \quad (22)$$

(De x' -as en de z -as staan niet loodrecht op elkaar).

Combinatie van (20), (21) en (22) geeft de impuls balansvergelijking voor V_1 in de x' -richting:

$$\frac{d \vec{p}_1}{dt} = (F_1 + F_2 + F_{x'}) \vec{e}_{x'} \quad (23)$$

Nu volgt met (12) en (13), dat:

$$\frac{d \vec{p}_1}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_1(t + \Delta t) - \vec{p}_1(t)}{\Delta t} = \rho A l \frac{dv}{dt} \vec{e}_{x'}$$

Uitwerking van (23) geeft dan:

$$\rho A l \frac{dv}{dt} = (p_1 - p_2) A - \rho A l g (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{x'}) \quad (24)$$

Hierin is $l(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{x'})$ nog te schrijven als

$$l(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{x'}) = -l \cos \alpha = -(z_1 - z_2).$$

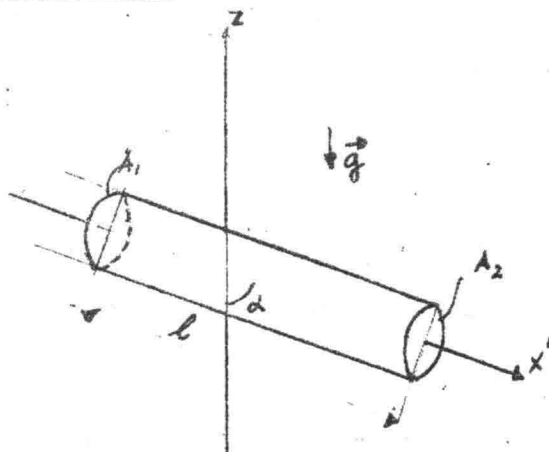


fig. 12

waarin z_1 en z_2 de z -coördinaten van de middelpunten van de dwarsdoorsneden A_1 en A_2 zijn.

Deling van (24) door $\rho g A$ geeft tenslotte:

$$\frac{\ell}{g} \frac{dv}{dt} = \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) = h_1 - h_2 \quad (25)$$

Vergelijking (25) geeft dus aan dat er voor een cilindrische starre buis, waardoor een homogene ideale vloeistof stroomt een relatie bestaat tussen de stijghoogteverschillen over de buis en de impulsverandering per tijdseenheid van de vloeistof in de buis.

Opmerkingen: In eenheid g is de stijghoogte voor een stilstaande vloeistof in een open vat gedefinieerd als $h = \frac{p - p_a}{\rho g} + z$. In vgl. (25) worden stijghoogteverschillen beschouwd dus vallen de termen $\frac{p_a}{\rho g}$ weg (p_a = atmosferische druk). Merk op dat de gemiddelde snelheid van de vloeistof in- en uitstroming $v(t + \alpha \Delta t)$ voor $\Delta t \rightarrow 0$ naar $v(t)$ gaat.

Studievraag 10.19.: Bepaal in het geval van fig. 12 de snelheid van de vloeistof na 3 seconden, als de vloeistof op $t=0$ in rust was. Gegevens: $\alpha = \pi/6$, $\ell = 100$ [m], $\rho = 1000$ [kg/m³], $A = 0,1$ [m²], $p_1 = p_2 = p_a$ en $g = 10$ [m/s²].

V.III

Vergelijking van Bernoulli

Hebben we in het voorgaande een impulsbalans voor een cilindrische buis opgesteld, nu gaan we hetzelfde doen voor een buis, waarvan de wanden weer star zijn, maar het oppervlak van de dwarsdoorsnede langs de rechte buisas variëert. In de buis bevindt zich een homogene ideale vloeistof en de stroming is niet-

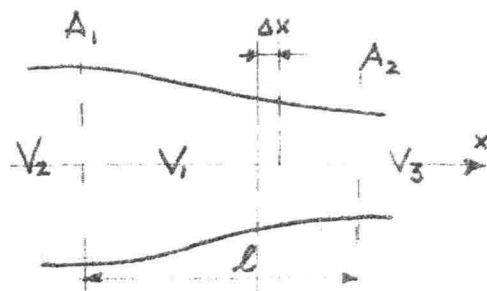


fig. 13

stationair. Ook voor deze buisvorm is in H.II afgeleid, dat voor elk tijdstip t de massastroom dus ook het debiet door elke dwarsdoorsnede van de buis gelijk is. We beschouwen de impulsverandering in de tijd in de x -richting van de buis van de bewegende vloeistof in het balansgebied V_1 .

Nu geldt voor een tijdstip t , dat het debiet in elke dwarsdoorsnede van de buis gelijk is. Aangezien het oppervlak van de dwarsdoorsnede A van de buis een funktie van x is, zal nu ook de snelheid $\vec{v}$ van de vloeistof van x afhangen. De snelheid

is tevens een functie van t , daar de stroming niet-stationair is. Dus er geldt, dat $\vec{v} = \vec{v}(\mathbf{x}, t)$.

Als de buis geleidelijk dunner wordt, dan kunnen we bij benaderling aannemen, dat de x -componenten van de snelheden van de vloeistofdeeltjes over de dwarsdoorsnede gelijk zijn.

Dus er geldt, dat $\vec{v} = v(\mathbf{x}, t) \vec{e}_x$ over de dwarsdoorsnede gelijk is.

Daar de snelheid $\vec{v} = v(\mathbf{x}, t) \vec{e}_x$ van de plaats $\mathbf{x}$ afhangt, kunnen we niet het gehele gebied V_1 beschouwen, maar delen we het gebied op in balansgebiedjes met lengte Δx ter plaatse van elke $\mathbf{x}$. Eén zo'n gebiedje is getekend in fig. 13.

Dit balansgebiedje V_M is in fig. 14 afgebeeld op een grotere schaal voor $\mathbf{x}$.

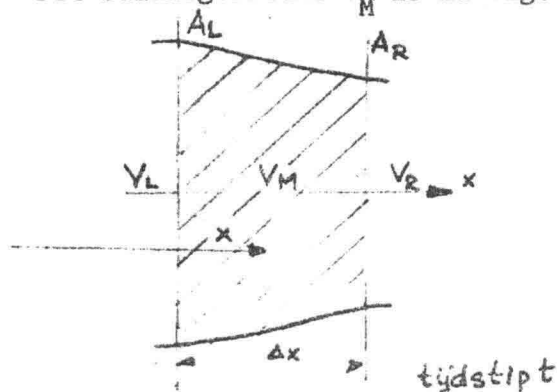


fig. 14

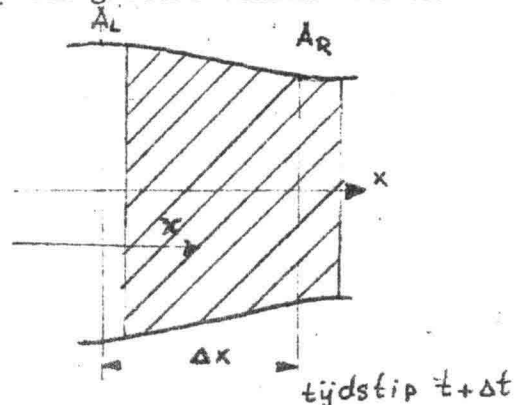


fig. 15

Op tijdstip t (fig. 14) is de snelheid van de vloeistof in de dwarsdoorsnede ter plaatse van $\mathbf{x}$ gelijk aan $\vec{v}(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t) \vec{e}_x$. De snelheden in de doorsnedes A_L en A_R zijn dan resp. $\vec{v}(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta x, t)$ en $\vec{v}(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta x, t)$.

De impulsvoorraad in de x -richting van het balansgebiedje V_M gevormd door A_L , A_R en de starre wanden is dan:

$$\vec{p}_1(t) = \rho \Delta x A(\mathbf{x}) \vec{v}(\mathbf{x}, t) \quad (26)$$

In het tijdsinterval $(t, t + \Delta t)$ (Δt klein) stroomt er door A_L vloeistof in het balansgebied met een gemiddelde snelheid van:

$$\frac{\vec{v}(\mathbf{x} - 1/2 \Delta x, t) + \vec{v}(\mathbf{x} - 1/2 \Delta x, t + \Delta t)}{2} = \vec{v}(\mathbf{x} - 1/2 \Delta x, t + \alpha \Delta t)$$

$$0 < \alpha < 1.$$

Evenzo stroomt er door A_R vloeistof uit het balansgebied met een gemiddelde snelheid van:

$$\vec{v}(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}, t + \alpha t)$$

$$0 < \alpha < 1$$

De snelheden van in- en uitstroming zijn dus ongelijk en dientengevolge zullen er links en rechts verschillende hoeveelheden impuls in en uit het balansgebied stromen. We noemen de impulsvoorraad van het balansgebied V_M op $t + \Delta t$ $\vec{p}_1(t + \Delta t)$, de in het tijdsinterval $(t, t + \Delta t)$ in en uit gestroomde impuls $\vec{p}_{LM}$ resp. $\vec{p}_{RM}$.

Nu hebben we in H.IV.II aangetoond, dat we de impulsbalans voor het balansgebied V_M mogen opstellen, mits we rekening houden met de links en rechts ingestroomde impuls.

Uit (18) volgt dat (zie ook (20)):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_1(t + \Delta t) - \vec{p}_1(t)}{\Delta t} = \int \vec{F}_{op} V_1 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_{LM}(t, t + \Delta t) - \vec{p}_{RM}(t, t + \Delta t)}{\Delta t}$$

Oftewel

$$\frac{d \vec{p}_1}{dt} = \int \vec{F}_{op} V_1 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_{LM}(t, t + \Delta t) - \vec{p}_{RM}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (27)$$

Door de doorsnede A_L waarin de gemiddelde snelheid $\vec{v}(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}, t + \alpha \Delta t)$ heerst, stroomt in het tijdsinterval $(t, t + \Delta t)$ een hoeveelheid massa $\Delta m = \rho A(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}) \cdot \vec{v}(\mathbf{x}, t + \alpha \Delta t) \cdot \Delta t = S_L \cdot \Delta t$ naar V_m . Deze massa heeft een impuls $\vec{p}_{LM}(t, t + \Delta t) = S_L \cdot \vec{v}(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}, t + \alpha \Delta t) \cdot \Delta t$.

We noemen $S_L \cdot \vec{v}(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}, t + \alpha \Delta t)$ de impulsstroom door A_L .

Evenzo stroomt uit V_M via A_R een impuls $\vec{p}_{RM}(t, t + \Delta t) = S_R \cdot \vec{v}(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}, t + \alpha \Delta t) \cdot \Delta t$.

Substitutie in (27) geeft

$$\frac{d \vec{p}_1}{dt} = \int \vec{F}_{op} V_1 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ S_L \vec{v}(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}, t + \alpha \Delta t) - S_R \vec{v}(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}, t + \alpha \Delta t) \}. \quad (28)$$

Nu is in H.II aangetoond dat op een tijdstip t de massastroom van een homogene ideale vloeistof in elke doorsnede gelijk is, dus $S_L = S_R = S$. Zodat (28) te schrijven is als:

$$\frac{d \vec{p}_1}{dt} = \int \vec{F}_{op} v_1 + S \{ \vec{v}(x - \frac{1}{2} \Delta x, t) - \vec{v}(x + \frac{1}{2} \Delta x, t) \}, \quad (29)$$

Voor Δx zeer klein geldt tenslotte, dat

$$\frac{\vec{v}(x - \frac{1}{2} \Delta x, t) - \vec{v}(x + \frac{1}{2} \Delta x, t)}{\Delta x} = - \frac{\partial \vec{v}(x, t)}{\partial x}$$

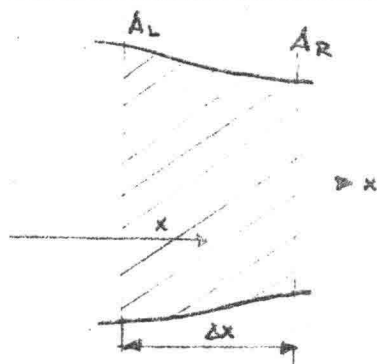
zodat (29) met $S = \rho A(x) v(x, t)$ te schrijven is als:

$$\frac{d \vec{p}_1}{dt} = \int \vec{F}_{op} v_1 - \rho A(x) \Delta x \cdot v(x, t) \frac{\partial \vec{v}(x, t)}{\partial x} \quad (30)$$

Oftewel de verandering van de impulsvoorraad in het balansgebied V_M is gelijk aan de impulsverandering ten gevolge van de op de vloeistof werkende krachten plus de som van de impulsstromen van de in- en uitgestroomde vloeistof positief gerekend naar V_M toe.

Veronderstellen we de doorsnede nu weer even constant, oftewel de snelheid onafhankelijk van x , dan verkrijgen we weer het resultaat (20).

Overdracht van x-gerichte impuls door drukspanningen.



De inwendige druk in de vloeistof is weer isotroop (wet van Pascal).

Noemen we de druk in doorsnede x $p(x)$ en het oppervlak van de dwarsdoorsnede $A(x)$, dan geldt in dwarsdoorsnede A_L voor de druk $P_L = p(x - \frac{1}{2} \Delta x)$ en voor het oppervlak $A(x - \frac{1}{2} \Delta x)$. Evenzo geldt in de dwarsdoorsnede A_R dat $P_R = p(x + \frac{1}{2} \Delta x)$ en $A(x + \frac{1}{2} \Delta x)$.

In dwarsdoorsnede A_L werkt dan de kracht:

$$\vec{F}_L = p(x - \frac{1}{2} \Delta x) \cdot A(x - \frac{1}{2} \Delta x) \vec{e}_x \text{ op } V_M.$$

Evenzo werkt in dwarsdoorsnede A_R een kracht

$$\vec{F}_R = - p(x + \frac{1}{2} \Delta x) \cdot A(x + \frac{1}{2} \Delta x) \vec{e}_x \text{ op } V_M.$$

Zodat de resulterende kracht op V_M gelijk is aan

$$\vec{F}_p = \vec{F}_L + \vec{F}_R = \left\{ p\left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right) A\left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right) - p\left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right) A\left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right) \right\} \vec{e}_x.$$

Aangezien Δx klein is volgt, dat

$$\vec{F}_p = \left\{ -A(x) \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x - p(x) \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \right\} \vec{e}_x \quad (31)$$

Daarmee zijn echter niet alle drukkracht, -componenten in de x-richting op het balansgebied beschouwd.

De buiswanden lopen namelijk niet evenwijdig aan de x-as en zullen daarom een component in de x-richting leveren.

Daar de druk isotroop is, oftewel in elk punt heerst in alle richtingen dezelfde druk en we alleen geïnteresseerd zijn in de x-component van de door de druk geleverde kracht, beschouwen we de druk in de x-richting. (zie fig. 16).

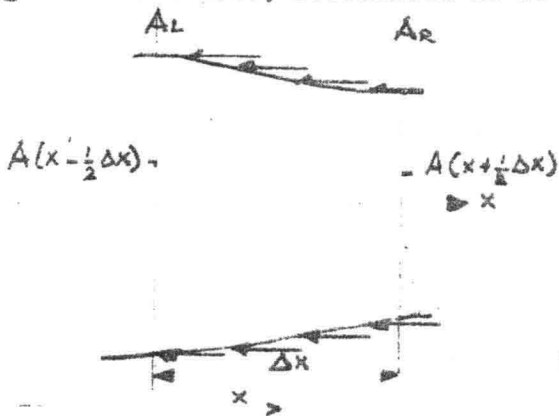


fig. 16

Over de lengte Δx varieert de druk van $p\left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right)$ tot $p\left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)$, zodat voor kleine Δx de gemiddelde druk over de buiswand gelijk is aan $\frac{p\left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right) + p\left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)}{2} = p(x)$. De kracht die deze druk op de vloeistof uitoefend is gelijk aan:

$$\vec{F}_w = -p(x) \left\{ A\left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right) - A\left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right) \right\} \vec{e}_x$$

We zijn alleen geïnteresseerd in de kracht in de x-richting. Aangezien de kracht gelijk is aan de druk maal het oppervlak loodrecht op de

richting van de druk is, en dit oppervlak loodrecht op de x-richting gelijk is aan $A\left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right) - A\left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)$ volgt bovenstaande uitdrukking voor $\vec{F}_w$.

Hetgeen te schrijven is als:

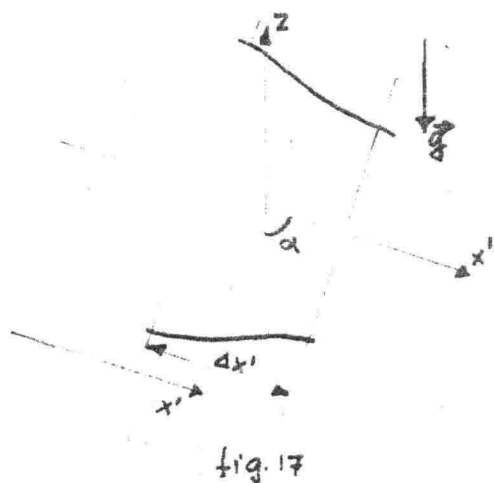
$$\vec{F}_w = +p(x) \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \vec{e}_x \quad (32)$$

Opmerking: Dit is ook te berekenen door de kracht te bepalen, die loodrecht op de buiswanden staat en daarvan de x-component te nemen.

Gezamenlijk leveren de drukkrachten, dus (31) + (32):

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_w = -A(x) \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \vec{e}_x \quad (33)$$

Overdracht van x' -gerichte impuls door de zwaartekracht.



Veronderstel dat de buis en de richting van de zwaartekracht een hoek α met elkaar maken. (Dus de z -as staat niet loodrecht op de x' -as!). Dan geeft de gravitatie wisselwerking met de aarde een kracht op de massa in het balansgebied van (zie fig. 17).

$$\vec{F}_g = \rho A(x') \Delta x' \cdot \vec{g} \quad \text{met} \quad \vec{g} = -g \vec{e}_z$$

De component in de x' -richting is dan gelijk aan:

$$F_{x'} = -\rho A(x') \cdot \Delta x' \cdot g (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{x'})$$

Nu geldt dat:

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_{x'}) = -\cos \alpha$$

Uit fig. 18 blijkt dat

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{z_L - z_R}{x'_R - x'_L} = \frac{z(x' - \frac{1}{2} \Delta x') - z(x' + \frac{1}{2} \Delta x')}{\Delta x'} = \\ &= -\frac{\partial z}{\partial x'} \quad (\text{voor } \Delta x' \text{ klein}). \end{aligned}$$

$$\text{Dus } F_{x'} = -\rho A(x') \Delta x' \cdot g \cdot \frac{\partial z}{\partial x'} \quad (34)$$

De som van de krachten in de x' -richting op V_M is dan (33), (34):

$$\sum \vec{F}_{\text{op } V_1} = \left\{ -A(x') \frac{\partial p}{\partial x'} \Delta x' - \rho A(x') \Delta x' g \frac{\partial z}{\partial x'} \right\} \vec{e}_{x'}$$

Substitutie in de impulsbalans (30) geeft dan

$$\frac{d \vec{p}_1}{dt} = \left\{ -A(x') \frac{\partial p}{\partial x'} \Delta x' - \rho A(x') \Delta x' g \frac{\partial z}{\partial x'} \right\} \vec{e}_{x'} - \rho A(x') \Delta x' v(x'_1 t) \frac{\partial v(x'_1 t)}{\partial x'} \vec{e}_x$$

Met $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \rho A(\kappa') \Delta x' \frac{\partial v(\kappa'; t)}{\partial t}$ volgt dan na delen door $A(\kappa') \Delta x'$ dat:

$$\rho \frac{\partial v(\kappa'; t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \kappa'} \left\{ p + \rho g z + \rho \frac{v^2(\kappa'; t)}{2} \right\} \quad (35)$$

In (35) staat in het linkerlid de impuls per volumeneenheid, wat ook wel de impulsdichtheid wordt genoemd.

In woorden luidt (35):

De impulsdichtheidsverandering per tijdseenheid van het balansgebied met lengte $\Delta x'$ is gelijk aan de negatieve waarde van de verandering over de lengte $\Delta x'$ van de som van invloeden van druk, zwaartekracht en impulsdichtheidsstromen. Vergelijking (35) geldt voor een niet-stationaire stroming van een homogene ideale vloeistof door een buis met starre wanden.

Veronderstellen we de stroming stationair oftewel de snelheid $\vec{v}$ is onafhankelijk van de tijd, dan volgt uit (35), dat:

$$- \frac{\partial}{\partial \kappa'} \left(p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

oftewel integratie geeft:

$$p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} = \text{constant} \quad (36)$$

Dit geldt in de lengterichting van de buis.

Vergelijking (36) is een bijzonder geval van de stelling van Bernoulli, terwijl (35) een bijzonder geval is van wat de vergelijking van Euler-Bernoulli genoemd kan worden. We hebben hier te maken met bijzondere gevallen, aangezien we werken met het model van de homogene ideale vloeistof. Voor een vloeistof, waaraan we deze restricties niet stellen worden de vergelijkingen uitgebreider.

In eenheid 9 is de stijghoogte h gedefinieerd als:

$$h = \frac{p - p_a}{\rho g} + z$$

Daar p_a (de atmosferische druk) constant verondersteld is kan (35) geschreven worden als:

$$\rho \frac{\partial v(\kappa'; t)}{\partial t} = - \rho g \frac{\partial}{\partial \kappa'} \left\{ h + \frac{v^2(\kappa'; t)}{2g} \right\} \quad (37)$$

We definiëren nu als stuwhoogte H ter plaatse van doorsnede x' op tijdstip t

$$H(x';t) = h(x';t) + \frac{v^2(x';t)}{2g} = \frac{p(x') - p_a}{\rho g} + z(x') + \frac{v^2(x';t)}{2g}.$$

zodat (37) te schrijven is als:

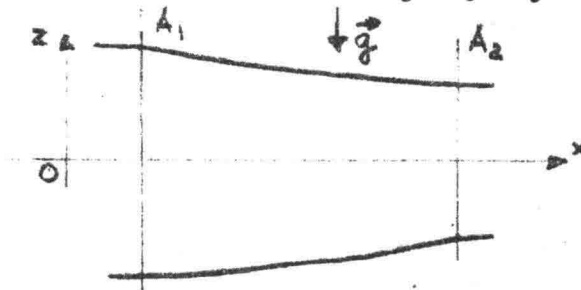
$$\rho \frac{\partial v(x';t)}{\partial t} = - \rho g \frac{\partial H(x';t)}{\partial x'} \quad (38)$$

en (36) als we te maken hebben met stationaire stroming: $\rho g H(x') = \text{constant}$, in de langsrichting van de buis.

Daar ρ en g constant zijn, kunnen we in geval van stationaire stroming ook zeggen, dat de stuwhoogte in de langsrichting van de buis constant is.

Studievraag 10.20: Bepaal de relatie tussen de vergelijkingen (25) en (35).

Studievraag 10.21:



In bovenstaande starre buis stroomt een homogene ideale vloeistof stationair. In doorsnede A_1 meten we een druk p_1 en in doorsnede A_2 een druk p_2 . Druk de snelheid in doorsnede A_1 uit in het gemeten drukverschil. (Maak gebruik van de volumebalans!).

Traagheid

Duwen we tegen een slede, die op het ijs staat, dan zal de slede bij het loslaten ervan niet plotseling stoppen, echter nog geruime tijd verder bewegen alvorens tot stilstand te komen.

Bij het aanduwen van een slingerende schommel hangt het van het moment van duwen af hoe groot de kracht is die we moeten uitoefenen. Als de schommel naar ons toe beweegt, moeten we veel harder duwen om de schommel van richting om te keren, dan wanneer we even gewacht zouden hebben.

We weten allemaal wat er gebeurt als we in een auto zitten, waarvan de bestuurder plotseling op de rem gaat staan.

Newton merkte reeds op bij de formulering van zijn wetten, dat een massa in zijn beweging volhardt als er geen krachten op werken, en als we de snelheid van een massa willen veranderen, moeten we er een kracht op uitoefenen.

In een vloeistofstroming doet zich hetzelfde verschijnsel voor. Een vloeistof, die in een buis naar rechts stroomt, waarop een kracht naar links werkt zal eerst nog een tijdje naar rechts stromen, alvorens van richting om te keren.

We noemen dit verschijnsel de traagheid (inertie) van de materie. Deze traagheid gaan we nu voor een vloeistofstroming kwantificeren.

Traagheid van een rechte buis

We beschouwen in dit hoofdstuk niet-stationaire stromingen.

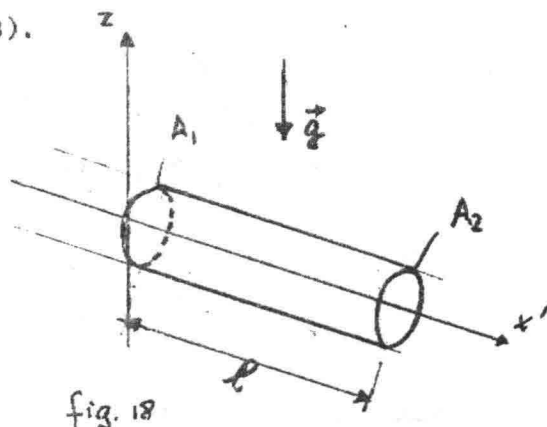
In hoofdstuk IV.II is voor een homogene ideale vloeistof, die niet stationair door een cilindrische buis met starre wanden stroomt, de balansvergelijking voor een vast gebied afgeleid. (zie fig. 18).

Deze luidt (25):

$$\frac{\ell}{g} \frac{dv}{dt} = h_1 - h_2. \quad (39)$$

waarin ℓ de lengte van de buis voorstelt, $\frac{dv}{dt}$ de snelheidsverandering van de vloeistof in het vaste gebied en $(h_1 - h_2)$ het

stijghoogteverschil tussen de dwarsprofielen A_1 en A_2 . We willen de traagheden van meerdere buisvormen bepalen en daarvoor vergelijkbare uitdrukkingen krijgen.



In buizen met een variabele dwarsdoorsnede langs de buisas is de snelheid tevens een functie van x ; terwijl het debiet $Q(t)$ er niet van afhankelijk is. Aangezien $Q(t)$ onafhankelijk van x voor elke buisvorm geldt, schrijven we balansvergelijking (39) voor de cilindrische buis als:

$$\frac{\ell}{gA} \frac{dQ}{dt} = h_1 - h_2 \quad (40)$$

waarin A het oppervlak van de dwarsdoorsnede is.

We schrijven nu (40) als:

$$M \frac{dQ}{dt} = h_1 - h_2 \quad (41)$$

waarin $M = \frac{\ell}{gA}$ de traagheid van de rechte starre cilindrische buis wordt genoemd.

Merk op dat we (41) ook kunnen schrijven als

$$M \frac{dQ}{dt} = H_1 - H_2 \quad (42)$$

waarin $H_1 - H_2$ het stuwhoogteverschil tussen A_1 en A_2 is.

Studievraag 10.22: *Verklaar waarom (42) in dit geval volgt uit (41).*

Studievraag 10.23: *Veronderstel dat de buisas loodrecht op de richting van de zwaartekracht staat. Zal de traagheid van de buis dan veranderen?*

Studievraag 10.24: *Twee cilindrische buizen hebben hetzelfde volume. Welke cilindrische buis heeft de grootste traagheid, de dunne lange of de korte dikke?*

Studievraag 10.25: *Hoe groot is de traagheid van een rechte cilindrische buis in het geval van een stationaire stroming?*

Studievraag 10.26: *Zal voor een kanaal met constante waterhoogte en dwarsdoorsnede, waarin een homogene ideale vloeistof stroomt vgl. (41) ook gelden?*

We beschouwen nu een rechte buis, met lengte l , waarvan de dwarsdoorsnede langs de buis varieert. We denken ons de buis nu opgedeeld in n mootjes met lengte $\Delta x'$. In hoofdstuk IV.III is voor één zo'n mootje de Euler-Bernoulli vergelijking afgeleid (35). Vgl. (35) luidt voor het balansgebiedje tussen A_L en A_R en de starre wanden (zie. fig. 19).

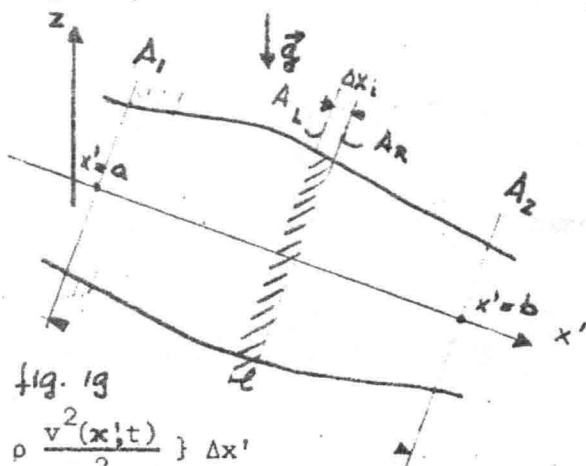


fig. 19

$$\rho \frac{\partial v(x';t)}{\partial t} \Delta x' = - \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ p + \rho g z + \rho \frac{v^2(x';t)}{2} \right\} \Delta x' \quad (43)$$

Hetgeen te schrijven is als:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v(x';t)}{\partial t} \Delta x' = - \frac{\partial H(x';t)}{\partial x'} \Delta x' \quad (44)$$

Willen we nu de buis als geheel beschouwen tussen de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 , dan moeten we de invloed van alle mootjes tussen A_1 en A_2 sommeren.

Om de traagheden van meerdere buisvormen te kunnen vergelijken, schrijven we (44) als:

$$\frac{\Delta x'}{g A(x')} \frac{dQ(t)}{dt} = - \frac{\partial H(x';t)}{\partial x'} \Delta x' \quad (45)$$

Sommatie van alle gebiedjes tussen $x = a$ (A_1) en $x = b$ (A_2) geeft dan voor de gehele buis:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x'_i}{g A(x'_i)} \frac{dQ(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x'_i;t)}{\partial x'_i} \Delta x'_i \\ & \sum_{i=1}^n \Delta H_i(x'_i;t) = - \{ H(b;t) - H(a;t) \} \end{aligned} \quad (46)$$

Voor $\Delta x'_1 \neq 0$ is het linkerlid te schrijven, als:

$$\int_a^b \frac{dQ(t)}{dt} \frac{1}{gA(x')} dx'$$

Aangezien $\frac{dQ(t)}{dt}$ onafhankelijk van x' is, is (46) te schrijven als:

$$\int_a^b \frac{1}{gA(x')} dx' \cdot \frac{dQ}{dt} = H(a,t) - H(b,t) \quad (47)$$

Stellen we de doorsnede langs de buis onafhankelijk van x' , dan volgt uit (47) dat:

$$\frac{l}{gA} \frac{dQ}{dt} = H(a,t) - H(b,t), \text{ hetgeen het}$$

resultaat (42) voor een rechte cilindrische buis is.

Schrijven we nu (47) als

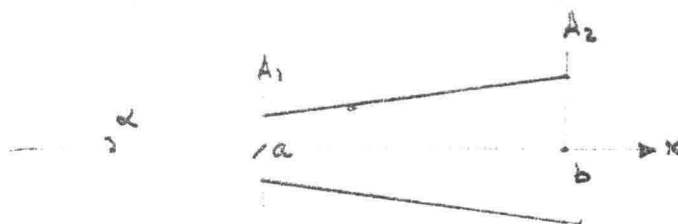
$$M \cdot \frac{dQ(t)}{dt} = H(a,t) - H(b,t) \quad (48)$$

dan volgt voor de traagheid M van de rechte buis met variërend dwarsprofiel langs de buis, dat

$$M = \frac{1}{g} \int_a^b \frac{1}{A(x')} dx' \quad (49)$$

Studievraag 10.27: Bewijs dat de traagheid M van een stuk buis in de vorm van een afgeknotte kegel (voor α klein) bij benadering gelijk is aan

$$M = \frac{1}{g\pi\alpha^2 a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$



.II

Traagheid van gekromde buizen.

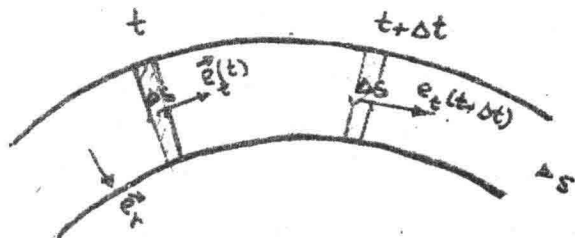
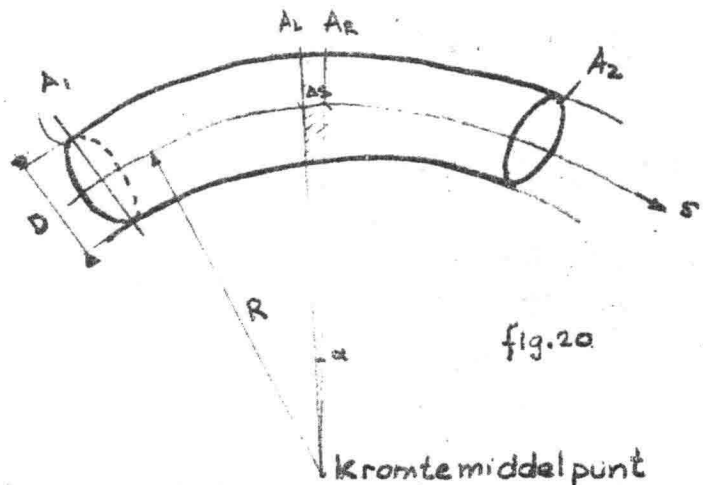
In het voorgaande hebben we ons gericht op de bepaling van de traagheden van buizen, waarvan de buisas geen krommingen vertoonde. In de praktijk zijn echter in een buizenstelsel vaak gekromde buisstukken aanwezig.

Teneinde de invloed van de kromming van een buis op de traagheid ervan na te gaan, beschouwen we een bochtstuk met kromtestraal R van een buis met starre wanden en overal dezelfde dwarsdoorsnede. Door de buis stroomt stationair een homogene ideale vloeistof.

De plaatscoördinaat langs de buisas noemen we s . We denken het bochtstuk weer opgedeeld in n mootjes met lengte Δs .

We beschouwen weer het balansgebiedje tussen de dwarsprofielen A_L en A_R en de starre wanden. Alvorens op de traagheid van de buis in te gaan, volgen we even de vloeistof M uit het balansgebiedje in de tijd.

We definiëren de eenheidsvector $\vec{e}_t$ langs de buisas in de richting van de stroming en de eenheidsvector $\vec{e}_r$ loodrecht op de buisas gericht naar het kromtemiddelpunt.



Op tijdstip t is de impuls van de massa in het balansgebiedje (zie fig. 21)

$$\vec{p}(t) = \rho \cdot A \cdot \Delta s \cdot \vec{v}(t) = \rho A \Delta s v(s) \vec{e}_t(t)$$

Op tijdstip $t + \Delta t$ is de materie M in de buis een stukje opgeschoven.

De impuls is dan (de grootte van $\vec{v}$ is constant, want we hebben een stationaire stroom)

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \rho A \Delta s \vec{v}(t + \Delta t) = \rho A \Delta s v(s) \vec{e}_t(t + \Delta t)$$

De impulsverandering van de gevolgde massa is per tijdseenheid:

$$\frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = \rho A \Delta s v(s) \frac{\vec{e}_t(t + \Delta t) - \vec{e}_t(t)}{\Delta t} \quad (50)$$

$$\text{Nu is } \frac{\vec{e}_t(t + \Delta t) - \vec{e}_t(t)}{\Delta t} = \Delta e \cdot \vec{e}_r$$

$$\text{en } \Delta e = |\vec{e}_t| \cdot \alpha = 1 \cdot \frac{\Delta s}{R}$$

In het limietgeval wordt (50) dan

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho A \frac{v(s)}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\text{Nu is } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(s)$$

Dus volgens de tweede wet van Newton is de kracht op de vloeistofmassa in het balansgebiedje gelijk aan:

$$\vec{F} = \rho A \frac{v^2(s)}{R} \vec{e}_r \quad (51)$$

M.a.w. er werkt een kracht op de vloeistof loodrecht op de buisas in de richting van het kromtemiddelpunt.

Deze kracht kan alleen geleverd worden door de wanden in de vorm van een drukverschil, dus we kunnen concluderen dat de druk in de buitenbocht van de buis hoger zal zijn dan in de binnenbocht.

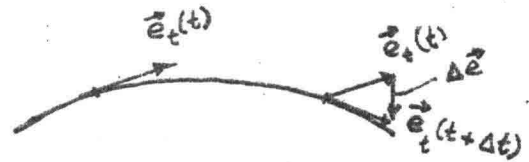
(Voor de mensen, die eenheid 5 reeds bestudeerd hebben is (51) de bekende centripetale kracht).

In de richting van de buisas treden dus geen krachten op t.g.v. de richtingsverandering van de stroming.

Beschouwen we nu een niet-stationaire stroming door de buis, dan kunnen we uit bovenstaande concluderen dat in de richting van de buisas de Euler-Bernoulli vergelijking die voor een rechte buis is afgeleid voor een mootje ook hier geldt.

Dus voor het balansgebiedje tussen de vaste dwarsprofielen A_L en A_R en de starre wanden (zie fig. 20) geldt in de asrichting van de buis:

$$\rho \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \rho g z + \rho \frac{v^2(s,t)}{2} \right) \quad (52)$$



We kunnen dus concluderen, dat indien de gemiddelde snelheid van de vloeistofstroming in een dwarsdoorsnede steeds gericht blijft langs de buisas, de vergelijking van Euler-Bernoulli (52) blijft gelden voor een kromme buis.

Studievraag 10.28: Door een bochtstuk van een cilindrische buis waarvoor $\frac{D}{R} = 10$ stroomt een homogene ideale vloeistof met een debiet $Q = 1[\text{m}^3/\text{s}]$. $\rho_{VL} = 1000[\text{kg}/\text{m}^3]$. Als het oppervlak van de doorsnede $A = 0,5[\text{m}^2]$ is, bepaal dan het drukverschil over de doorsnede. D is de diameter van de buis.

Studievraag 10.29: Als A een functie is van s hoe luidt dan vgl. (52)

We concluderen, dus dat de traagheid van een licht gekromde buis weinig zal afwijken van die van een rechte buis.

Studievraag 10.30: Bepaal de traagheid van een bochtstuk van een buis in geval van niet-stationaire stroming. Beschouw de gevallen van een constante dwarsdoorsnede en niet-constante dwarsdoorsnede.

.II

Combinaties van bergende vaten en leidingen.

In hoofdstuk II hebben we de massabalans van een leiding (kanaal) bepaald, die gelegen was tussen twee bergende vaten (meertjes). Daarna hebben we ons beperkt tot het beschouwen van leidingen waarin en waaruit vloeistof stroomde zonder ons af te vragen waar deze vloeistof vandaan kwam of waar deze bleef. We hebben drukverschillen over de leidingen verondersteld, zonder na te gaan hoe deze ontstonden.

Om nu dit onvolledige beeld van de vloeistofstroming door een leiding te completeren, beschouwen we een combinatie van het in eenheid 9 geïntroduceerde bergende vat en een leiding.

De vloeistof in de configuratie veronderstellen we weer ideaal, en de buis- en vatwanden star, zodat het vat alleen een gravitatieberging

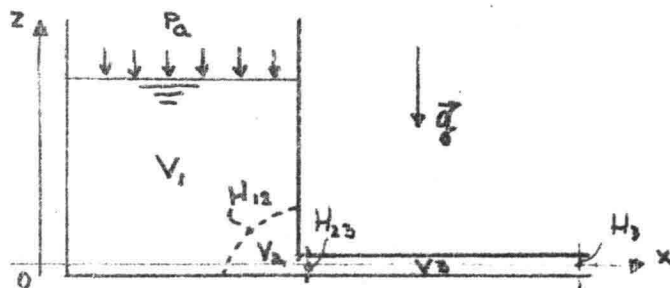


fig. 22

heeft, en de berging van de leiding nul is (zie eenheid 9). Boven het vrije vloeistofoppervlak van het vat, heerst de atmosferische druk p_a .

We onderscheiden nu de volgende drie gebieden in de configuratie naar gelang de bewegingstoestand van de vloeistof, die er zich bevindt.

- Het vat V_1 met uitzondering van het gebied dat de toegang vormt tot de buis. In V_1 is de vloeistof min of meer in rust.
- De buis V_3 waarin de vloeistof stroomt.
- Een gebiedje V_2 , dat het overgangsgebied vormt tussen het vat V_1 en de buis V_3 . De vloeistof hierin stroomt nog aanmerkelijk.

We veronderstellen de buis relatief nauw t.o.v. het vat V_1 , d.w.z. dat het volumen per eenheid van lengte van de buis klein is t.o.v. die van het vat.

We beschouwen eerst het geval, dat er in de buis een stationaire stroming in de x-richting plaats heeft, m.a.w. de snelheid in de cilindrische buis is constant.

Met en we de snelheid in het gebied V_2 , dan zal deze afnemen, naarmate we ons verder van de toegang van V_3 verwijderen, aangezien het stroomvoerend oppervlak steeds toeneemt. (De snelheid neemt snel af).

Op een gegeven plaats (b.v. grens $V_1 V_2$) is de gemeten snelheid verwaarloosbaar klein d.w.z. dat we kunnen veronderstellen, dat de vloeistof in het gebied V_1 nagenoeg in rust is.

Voor een dergelijke situatie hebben we in eenheid 9 aangetoond, dat dan de stijghoogte in het vat V_1 :

$$h = \frac{p - p_a}{\rho g} + z \quad \text{constant is}$$

Door een verband te bepalen tussen de zakking van het vloeistofoppervlak Δh per tijdseenheid Δt en de massastroom door het oppervlak volgde de relatie.

$$B \frac{dh}{dt} = Q$$

waarin B het bergend oppervlak van het vat voorstelt en $\frac{dh}{dt}$ de verandering van de stijghoogte per tijdseenheid in het vat t.g.v. het uitgestroomde constante debiet Q.

Studievraag 10.31: Als $Q = 0,1 \text{ [m}^3/\text{s]}$ in het vat stroomt, het oppervlak van het vat $1000 \text{ [m}^2]$ is, bepaal dan de verandering van de stijghoogte per seconde.

We beschouwen nu een niet-stationaire stroming in de x-richting door de buis.

M.a.w. het debiet en de snelheid zijn een functie van de tijd.

Voor een dergelijke stroming is in deze eenheid afgeleid, (zie vgl. 41), dat het stijghoogteverschil over de buis bepaald wordt door

$$\Delta h_{\text{buis}} = M \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (53)$$

Met $M = \frac{l}{gA}$ de traagheid van de buis

Noemen we de stijghoogte t.p.v. de grens $V_1 V_2 h_{12}$, t.p.v. de grens $V_2 V_3 h_{23}$ en die aan het eind van de buis h_3 dan is (53) te schrijven als

$$h_{23} - h_3 = M \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (54)$$

Voor het vat V_1 blijft dezelfde redenering t.a.v. de berging ervan gelden zoals eerder opgezet, ondanks het feit dat het debiet Q een functie van de tijd is, dus

$$B \frac{dh_{12}}{dt} = Q(t) \quad (55)$$

Echter nu het debiet ook in het vat varieert in de tijd, zal ook het vat een traagheid bezitten. Aangezien de traagheid M van een leiding gelijk is aan de $\frac{\text{lengte}}{\text{g.oppervlak}}$ en het stroomvoerend oppervlak van het vat zeer groot t.o.v. die van de buis is de traagheid van het vat te verwaarlozen.

Eigenlijk volgt dit al uit de redenering t.a.v. de constante stijghoogte over V_1 , want stel dat het vat een significante traagheid zou hebben, dan zouden er ook stijghoogteverschillen over V_1 moeten bestaan.

M.a.w. we kunnen de redenering ook omdraaien en uit de kleine traagheid van het vat concluderen, dat de stijghoogte in het vat op elk tijdstip overal in het vat gelijk is en daaruit de bergingsvergelijking afleiden.

Om nu een relatie te leggen tussen het gebied V_1 en V_3 beschouwen we het gebied V_2 .

In dit gebied hebben we niet met een rusttoestand zoals in V_1 te maken en ook

niet helemaal met een stromingstoestand zoals in V_3 .

In het geval, dat de lengte van de buis V_3 groot is t.o.v. het oppervlak van de dwarsdoorsnede en deze klein is t.o.v. van het vat, kunnen we bij benadering concluderen, (V_2 is dus op te vatten als een vrij kort stuk buis met variërende diameter) dat de traagheid van het gebied V_2 verwaarloosbaar is t.o.v. die van V_3 nl. $M = \int \frac{dx'}{gA}$ en de lengte van V_2 is klein t.o.v. die van V_3 , terwijl het stroomvoerend oppervlak van V_2 niet kleiner is dan die van V_1 . Daar V_2 een vast gekozen gebied is heeft V_2 geen bergende eigenschappen. Over V_3 geldt: $M \frac{dQ}{dt} = - \Delta H$.

We kunnen dus concluderen, dat het stuwhoogteverschil over V_2 bij benadering nul zal zijn.

Opmerking: Als de instroomopening van V_1 niet klein is t.o.v. het vat en de lengte van V_3 niet groot is t.o.v. zijn dwarsdoorsnede, dan mogen we de traagheid van V_2 niet verwaarlozen.

Resumerend kunnen we dus stellen dat voor het vat geldt

$$B \frac{dH_{12}}{dt} = Q(t) \quad (56)$$

(de snelheid in het vat is ongeveer nul).

en voor de buis

$$H_{12} - H_3 = M \frac{dQ}{dt} \quad (57)$$

In het geval, dat de stuwhoogte in de rechter uitgang van de buis constant is dan volgt door differentiatie van (56) en substitutie in (57) dat voor het debiet in de configuratie geldt

$$BM \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - Q(t) = 0$$

Op o.a. deze lineaire differentiaalvergelijking komen we in eenheid 13 terug.

Studievraag 10.32: Zet zelf een redenering op voor het geval de buis geen constante diameter dus $A = A(x)$, heeft.

SLOT

In deze eenheid is steeds gewerkt met vloeistoffen, waarvan de inwendige schuifspanningen verwaarloosbaar zijn.

In vele praktische problemen geeft dit geïdealiseerde model snel een globaal inzicht in de stroming van een vloeistof.

Echter in het algemeen hebben vloeistoffen wel een inwendige wrijving en ondervinden ze wrijvingskrachten van de wanden waar ze langs stromen.

Teneinde dus een kwantitatief beter beeld te verkrijgen van de stroming en vooral stromingswijze (turbulent of laminair), zullen we rekening moeten houden met de genoemde schuifspanningen.

Dit completere beeld van de vloeistofstroming zullen we in eenheid 11 behandelen.

APPENDIX VLOEISTOFDEELTJE. (AANBEVOLEN, WORDT NIET GETOETST).

In de eenheid hebben we het begrip vloeistofdeeltje nogal gevoelsmatig geïntroduceerd. We verstonden er een pakketje vloeistof onder, waarvan de afmetingen werden bepaald door de warmtebeweging van de molukulen en de beschrijving van turbulentie in een stroming.

We willen hier nu nagaan hoe we zulk een pakketje kunnen bepalen, uitgaande van het meer gedetailleerde moleculaire model.

Studieopgave: Teneinde de volgende stof beter te begrijpen adviseren wij U de paragrafen over "statistische mechanica" en ideaal gas" in deel II van het collegedictaat algemene natuurkunde (c-18) te herlezen.

De molekulen in een gas of vloeistof hebben ten gevolge van hun inwendige energie (warmte) een onregelmatige beweging. We beschouwen nu alleen de x-component van de beweging van de molekulen in een vloeistofstroming en stellen daarvan de kansdichtheidsfunctie op.

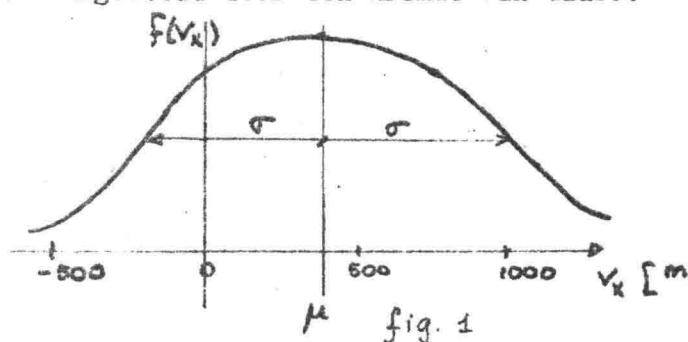
Deze functie geeft aan met welke waarschijnlijkheid molukulen een snelheid aannemen die ligt tussn v_x en $v_x + dv_x$.

Deze waarschijnlijkheid is bij een ideaal gas en bij benadering voor een vloeistof normaal verdeeld, d.w.z. hij wordt voorgesteld door een kromme van Gauss.

(zie fig. 1) In formulevorm:

$$f(v_x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v_x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

waarin μ en σ constanten zijn, waarvan de betekenis hieronder blijkt



Uit deze verdeling bepalen we de verwachtingswaarde van de snelheid van een molukul in de x-richting. We vinden

$$\mu = E \{v_x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x f(v_x) dv_x \quad (\text{vaak gemiddelde snelheid genoemd}).$$

Vervolgens bepalen we ook de standaardafwijking die bepaald wordt als positieve wortel van:

$$\sigma^2 = E \{v_x - \mu\}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (v_x - \mu)^2 f(v_x) dv_x.$$

Deze standaardafwijking hangt af van de temperatuur en is onafhankelijk van de aggregatietoestand (vast, vloeibaar of gasvormig) en van de gemiddelde beweging. Voor een ideaal gas (zie c-18) in rust geldt (de gemiddelde beweging μ is nul), dat

$$\sigma^2 = E \{v_x^2\} = \frac{1}{3} E \{v_x^2 + v_y^2\} = \frac{1}{3} E \{v^2\} = \frac{R}{M} \cdot T$$

waarin $R = \frac{p \cdot V}{T}$ de algemene gasconstante voor 1 kilomol (kilogrammolekuul) is ($R = 8314 \text{ Nm/kmol } ^\circ\text{K}$), M de moleculaire massa (in kg/kmol) en T de absolute temperatuur (kelvin).

Voor een ideaal gas in rust geldt dus voor de standaardafwijking van de snelheidscomponent in de x-richting

$$\sigma = \left(\frac{R}{M} \cdot T \right)^{\frac{1}{2}}$$

We houden dit ook voor een vloeistof en ook bij een gemiddelde snelheid $\mu \neq 0$ aan.

Vraag-appendix 1: *Hoe groot is σ voor water bij een temperatuur van 10 graden celsius.*

We beschouwen nu een groep van n molekulen binnen de vloeistof en bepalen op meerdere tijdstippen de gemiddelde snelheid van deze groep. De x-component van die gemiddelde snelheid, $v_{x,\text{gem}}$, zal de ene keer een wat andere waarde hebben dan de andere keer. Soms zullen in de groep de molekulen met $v_x > \mu$ (gemiddelde snelheid van de stroming) wat sterker vertegenwoordigd zijn dan die met $v_x < \mu$, zodat $v_{x,\text{gem}} > \mu$. Op een ander tijdstip is het juist omgekeerd, zodat dan $v_{x,\text{gem}} < \mu$.

De gemiddelde snelheid van de groep in de x-richting blijkt willekeurig met de tijd te variëren en is dus een stochastische variabele.

De kansverdeling van deze variabele is weer ongeveer een normale verdeling met een verwachtingswaarde:

$$\mu_g = E\{v_{x,gem}\} = \mu$$

en een standaardafwijking
bepaald door

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 \quad (\text{zie fig. 2}).$$

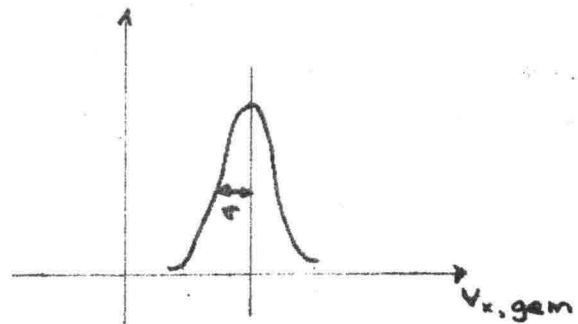


fig. 2

We beschouwen nu een aaneenge-

sloten groep van molekulen en noemen dit een pakketje vloeistof. Midden in de groep kiezen we een punt, dat een snelheid heeft gelijk aan de gemiddelde snelheid van alle molekulen van de groep. Dit punt noemen we het centrum van het pakketje. Het centrum heeft een snelheid $v_{x,gem}$ in de x-richting, die gemiddeld overeenkomt met de verwachtingswaarde μ , doch daar als gevolg van de warmte-energie op grillige wijze om heen slingert.

Een maat voor de grootte van die afwijkingen wordt bepaald door de standaardafwijking σ_g .

Bij een vloeistof, die geheel in rust is, is $\mu_g = \mu = 0$. Het centrum van het pakketje vertoont dan alleen de grillige beweging als gevolg van de warmte-energie. Deze grillige beweging is analoog aan de Brownse beweging van vetbolletjes in melk.

Opmerking: Een pakketje vloeistof bestaat niet steeds uit dezelfde molekulen.

Sommige molekulen dwalen zover van de groep af, dat ze niet meer tot het pakketje behoren. Andere molekulen van andere pakketjes hebben dan hun plaats ingenomen. Ook de vorm van een pakketje is niet altijd gelijk.

In de tijd kan het zeer verschillende vormen aannemen.

Vraag-appendix 2: Hoe groot moet tenmiste de massa zijn van een pakketje water zijn in een stroming met een gemiddelde snelheid $\mu = 1 \text{ [m/s]}$, opdat de standaarddeviatie van de Brownse beweging van het pakketje hoogstens 1% is van de gemiddelde snelheid $v_{x,gem}$. (Stel de temperatuur van het water b.v. 10°C).

Vervolgens bepalen we ook de standaardafwijking die bepaald wordt als positieve wortel van:

$$\sigma^2 = E \{v_x - \mu\}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (v_x - \mu)^2 f(v_x) dv_x.$$

Deze standaardafwijking hangt af van de temperatuur en is onafhankelijk van de aggregatietoestand (vast, vloeibaar of gasvormig) en van de gemiddelde beweging. Voor een ideaal gas (zie c-18) in rust geldt (de gemiddelde beweging μ is nul), dat

$$\sigma^2 = E \{v_x^2\} = \frac{1}{3} E \{v_x^2 + v_y^2\} = \frac{1}{3} E \{v^2\} = \frac{R}{M} \cdot T$$

waarin $R = \frac{p \cdot V}{T}$ de algemene gasconstante voor 1 kilomol (kilogrammolekuul) is ($R = 8314 \text{ Nm/kmol } ^\circ\text{K}$), M de moleculaire massa (in kg/kmol) en T de absolute temperatuur (kelvin).

Voor een ideaal gas in rust geldt dus voor de standaardafwijking van de snelheidscomponent in de x-richting

$$\sigma = \left(\frac{R}{M} \cdot T \right)^{\frac{1}{2}}$$

We houden dit ook voor een vloeistof en ook bij een gemiddelde snelheid $\mu \neq 0$ aan.

Vraag-appendix 1: *Hoe groot is σ voor water bij een temperatuur van 10 graden celsius.*

We beschouwen nu een groep van n molekulen binnen de vloeistof en bepalen op meerdere tijdstippen de gemiddelde snelheid van deze groep. De x-component van die gemiddelde snelheid, $v_{x,\text{gem}}$, zal de ene keer een wat andere waarde hebben dan de andere keer. Soms zullen in de groep de molekulen met $v_x > \mu$ (gemiddelde snelheid van de stroming) wat sterker vertegenwoordigd zijn dan die met $v_x < \mu$, zodat $v_{x,\text{gem}} > \mu$. Op een ander tijdstip is het juist omgekeerd, zodat dan $v_{x,\text{gem}} < \mu$.

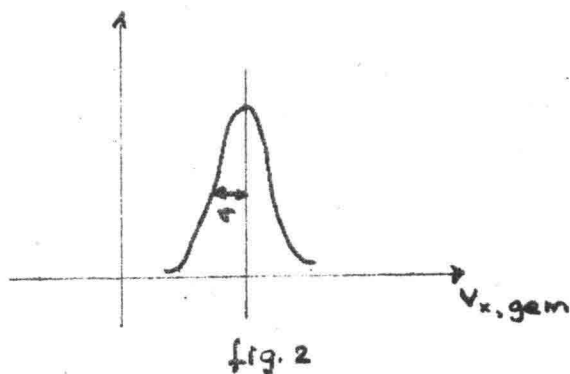
De gemiddelde snelheid van de groep in de x-richting blijkt willekeurig met de tijd te variëren en is dus een stochastische variabele.

De kansverdeling van deze variabele is weer ongeveer een normale verdeling met een verwachtingswaarde:

$$\mu_g = E\{v_{x,gem}\} = \mu$$

en een standaardafwijking
bepaald door

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 \quad (\text{zie fig. 2}).$$



We beschouwen nu een aaneenge-

sloten groep van molekulen en noemen dit een pakketje vloeistof. Midden in de groep kiezen we een punt, dat een snelheid heeft gelijk aan de gemiddelde snelheid van alle molekulen van de groep. Dit punt noemen we het centrum van het pakketje. Het centrum heeft een snelheid $v_{x,gem}$ in de x-richting, die gemiddeld overeenkomt met de verwachtingswaarde μ , doch daar als gevolg van de warmte-energie op grillige wijze om heen slingert.

Een maat voor de grootte van die afwijkingen wordt bepaald door de standaardafwijking σ_g .

Bij een vloeistof, die geheel in rust is, is $\mu_g = \mu = 0$. Het centrum van het pakketje vertoont dan alleen de grillige beweging als gevolg van de warmte-energie. Deze grillige beweging is analoog aan de Brownse beweging van vetbolletjes in melk.

Opmerking: Een pakketje vloeistof bestaat niet steeds uit dezelfde molekulen.

Sommige molekulen dwalen zover van de groep af, dat ze niet meer tot het pakketje behoren. Andere molekulen van andere pakketjes hebben dan hun plaats ingenomen. Ook de vorm van een pakketje is niet altijd gelijk. In de tijd kan het zeer verschillende vormen aannemen.

Vraag-appendix 2: Hoe groot moet tenmiste de massa zijn van een pakketje water zijn in een stroming met een gemiddelde snelheid $\mu = 1 \text{ [m/s]}$, opdat de standaarddeviatie van de Brownse beweging van het pakketje hoogstens 1% is van de gemiddelde snelheid $v_{x,gem}$. (Stel de temperatuur van het water b.v. 10°C).

Het antwoord op bovenstaande vraag geeft dus min of meer een ondergrens aan de afmetingen van een waterdeeltje.

De bovengrens aan de afmetingen van een vloeistofpakketje wordt bepaald door de beschrijving van het verschijnsel turbulentie.

In een turbulente stroming bewegen de vloeistofpakketjes op min of meer willekeurige wijze door elkaar heen, zodat we dan een vloeistofpakketje een zodanige afmeting moeten geven, opdat we de statistische eigenschappen van zijn beweging kunnen bepalen.

Nemen we deze afmeting te groot, dan middelen we over een te groot aantal molekulen om nog inzicht te krijgen in de onderlinge willekeurige beweging van kleinere pakketjes. De orde van grootte van de hierdoor bepaalde bovengrens ligt ongeveer een factor tien hoger dan de ondergrens.

BEWERINGEN

Bewering 10.1: Voor een vloeistof, die door een rechte buis met starre wanden stroomt, geldt dat de massastroom S in elke dwarsdoorsnede op een bepaald tijdstip gelijk is.

Bewering 10.2: Voor een homogene incompressibele vloeistof, die door een rechte buis met starre wanden stroomt, geldt voor het debiet Q , dat $Q = \frac{S}{\rho}$ (ρ de dichtheid van de vloeistof).

Bewering 10.3: Een homogene ideale vloeistof stroomt door een rechte cilindrische buis met starre wanden. Voor de snelheid in de as-richting geldt, dat $v_{\text{gem}} = \frac{Q}{A}$, waarin A het oppervlak van de dwarsprofiel loodrecht op de buisas voorstelt.

Bewering 10.4: Voor een ideale vloeistof geldt dat deze ook volmaakt is. Geldt het omgekeerd ook.

Bewering 10.5: De impuls van een homogene ideale vloeistof in een rechte buis met starre wanden en lengte l is:

$$\vec{p} = S(t) \cdot l$$

Bewering 10.6: De impulsbalans van een homogene ideale vloeistof stromend in een rechte cilindrische buis met starre wanden luidt bij afwezigheid van de zwaartekracht:

$$\rho \cdot l \frac{dv}{dt} = (p_1 - p_2)$$

,waarin

ρ de dichtheid van de vloeistof.

l de lengte van de buis.

$p_1 - p_2$ het drukverschil over de buis.

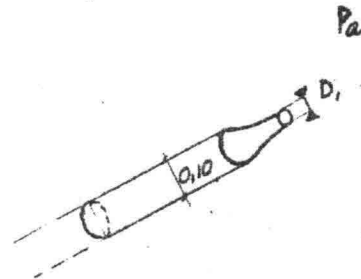
Bewering 10.7: Voor een stationaire stroming van een homogene ideale vloeistof door een leiding (kanaal, of buis) met starre wanden geldt, dat de strahhoogte langs de leiding-as constant is.

- Bewering 10.8: Voor een niet-stationaire stroming van een homogene ideale vloeistof door een rechte buis met starre wanden is de versnelling van de vloeistof op een tijdstip t in een vast balansgebied onafhankelijk van het stuwhoogteverschil over dat gebied.
- Bewering 10.9: Voor een homogene ideale vloeistof, die niet-stationair in een rechte buis stroomt, geldt de Euler-Bernoulli vergelijking zowel in de stroomrichting als loodrecht daarop.
- Bewering 10.10: Voor een stationaire stroming van een vloeistof door een cilindrische rechte buis met starre wanden is de traagheid van de buis $M = \frac{\rho l}{gA}$, waarin l de lengte van de buis is en A het oppervlak van de dwarsdoorsnede loodrecht op de buisas.
- Bewering 10.11: De relatie tussen de stuwhoogte en het debiet van een homogene ideale vloeistof die door een rechte buis met starre wanden is $Q = M \frac{\partial H}{\partial t}$
- Bewering 10.12: Een niet-stationaire stroming van een homogene ideale vloeistof door een rechte buis met starre wanden betekent dat er altijd een traagheid optreedt.
- Bewering 10.13: Voor een gekromde starre cilindrische buis, waarvan de kromtestraal groot is, geldt dat de traagheid ongeveer gelijk is aan die van een rechte starre buis met dezelfde afmetingen.
- Bewering 10.14: Het stuwhoogteverschil over een kort breed stuk buis is verwaarloosbaar t.o.v. een lang dun stuk buis.
De buizen hebben dezelfde volume.
- Bewering 10.15: De vergelijking voor de configuratie van bergend star vat en rechte cilindrische starre buis luidt in geval van stationaire stroming (zie IV.III) $Q = B \frac{dh_{12}}{dt}$

AANVULLENDE VRAAGSTUKKEN

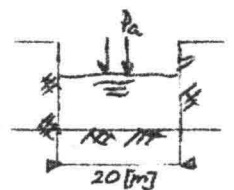
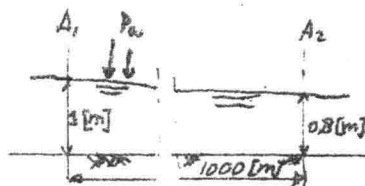
1. De plaatselijke brandweer gebruikt brandslangen met een diameter van $0,10[m]$. Op de slangen is een spuitstuk bevestigd. Dwarsdoorsnedes van de slang en spuitstuk zijn cirkelvormig.

Het water, dat door de buis stroomt is op te vatten als homogeen en incompressibel, terwijl de wanden van de buis en spuitstuk star zijn. De dichtheid van het water is $1000[kg/m^3]$. Tijdens de oefening blijkt dat één brandslang per minuut $150\pi[kg]$ water levert, terwijl de stroming stationair is.



- Bepaal de stroomsnelheid van het water in de slang.
- Bepaal de diameter van het spuitstuk als het water eruit spuit met een snelheid van $25[m/s]$.
- Hoe groot is de massaastroom in de slang?
En in het spuitstuk?

2. In een rivier met rechthoekige dwarsdoorsnede heerst tussen de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 een stationaire stroming van water, die als homogeen en incompressibel beschouwd mag worden. De dichtheid is $1000[kg/m^3]$.

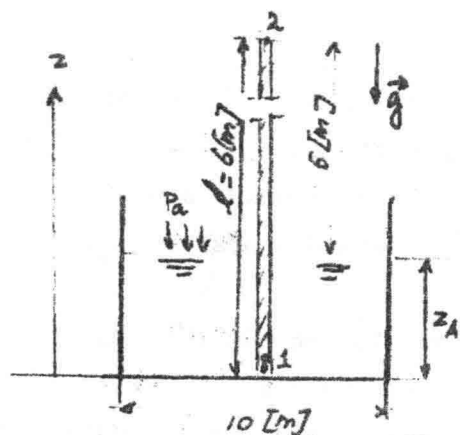


De vloeistofhoogte t.p.v. A_1 blijkt op een bepaald tijdstip t $1[m]$ te zijn, terwijl die t.p.v. A_2 op datzelfde tijdstip $0,8[m]$ is.

De afstand tussen de dwarsdoorsnedes is $1000[m]$. De snelheid in doorsnede A_1 blijkt $1[m/s]$ te zijn bij een meting op het tijdstip t .

De breedte van de rivier is steeds $20[m]$. De afstand tussen de dwarsdoorsnedes is $1000[m]$.

- Hoe groot is de snelheid in doorsnede A_2 ?
 - Hoe luidt de massabalans voor het gebied tussen A_1 en A_2 ?
 - Hoe luidt deze nadat de stroming op $t = t_1$ niet-stationair wordt?
 - Als in het tijdsinterval $(t_1, t_1 + 10)$ de vloeistofspiegel tussen A_1 en A_2 gelijkmatig in zijn geheel $0,001[m]$ stijgt, terwijl de snelheid in A_1 $1[m/s]$ blijft, hoe groot is dan de vloeistofsnelheid in A_2 ?
- (Beschouw steeds dezelfde hoogtes in A_1 en A_2).



Een vat met breedte $10[m]$, lengte $100[m]$ is gevuld met homogeen ideaal water. De waterhoogte is $z_A = 1[m]$ op tijdstip $t = 0$. Boven de waterspiegel heerst de atmosferische luchtdruk $p_a = (1 \text{ atm}) = 10^5 [N/m^2]$. In het vat staat een cilindrische starre buis met lengte $6[m]$, oppervlak dwarsdoorsnede $0,2[m^2]$ waardoor we het water uit het vat willen zuigen. De dichtheid van het water is $\rho = 1000 [kg/m^3]$. Op $t = 0$ is de buis

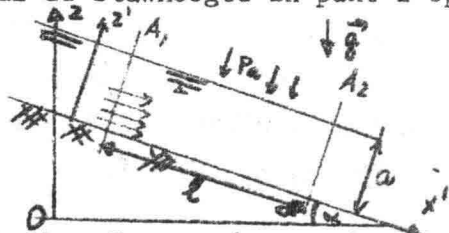
geheel gevuld met water en het water is overal in rust. De gravitatie versnelling $\vec{g} = -10 \vec{e}_z [m/s^2]$.

- Bepaal de stijghoogte in punt 1 van de buis op $t = 0$.

We veronderstellen, dat deze stijghoogte in punt 1 voor alle te beschouwen tijdstippen constant blijft.

Voor $t \geq 0$ heeft de vloeistof in de buis een versnelling $\frac{dv}{dt} = 0,5 [m/s^2]$ in de z -richting.

- Bepaal de druk in punt 2 van de buis, opdat deze versnelling optreedt.
- Hoeveel $[kg]$ vloeistof stroomt er in de eerste $10[s]$ uit de buis.
- Hoe groot is de impulsvoorraad in de buis op $t = 1$.
- Hoe groot is de impulsstroom in de buis op $t = 1$.
- Bepaal de stuwhoogte in punt 2 op $t = 2$.

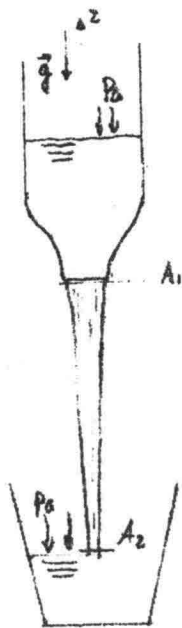


Een homogene ideale vloeistof stroomt via een kanaal van een helling met $\sin \alpha = \frac{1}{10}$. De gravitatieversnelling is $\vec{g} = -10 \vec{e}_z$. De atmosferische druk is $p_a = 10^5 [N/m^2]$.

De vloeistofhoogte is steeds $a = 1 [m]$. De breedte van het rechthoekig kanaal is $b = 10 [m]$. De afstand tussen de dwarsprofielen is $l = 100 [m]$.

- Bepaal de druk in de vloeistof op diepte z' .
- Bepaal de impulsbalansvergelijking in het $(x' - z)$ stelsel voor het gebied V_1 tussen A_1 en A_2 .
- Hoe groot is de versnelling van de vloeistof in V_1 .
- Hoe groot is het debiet op $t = 5[s]$, als de snelheid van de vloeistof op $t = 0[1[m/s]]$ in de x' -richting is.
- Is een volmaakte vloeistof ideaal?
- Is een ideale vloeistof onsamendrukbaar?

5.



Een vat gevuld met water loopt leeg in een glas. De hoogte van het straaltje is $0,20[m]$. De diameter van het straaltje is in de bovenste doorsnede A_1 twee keer die van de onderste doorsnede A_2 . $\vec{g} = -10 \vec{e}_z [m/s^2]$.

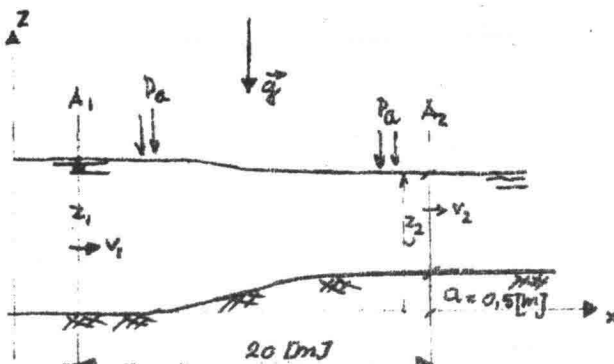
Neem aan dat het water als een homogene ideale vloeistof mag worden beschouwd en dat de druk in het straaltje overal gelijk mag worden gesteld aan die van de atmosfeer. De dwarsdoorsnede van het straaltje is cirkelvormig.

- Geldt voor dit stromingsprobleem in het straaltje de vergelijking van Euler-Bernoulli en hoe luidt deze in dit geval?

We veronderstellen de stroming stationair.

- Hoe luidt vgl. a dan?
- Bepaal de snelheid in de onderste doorsnede van het straaltje water.

6.



In een rechthoekig kanaal bevindt zich een drempel met hoogte $a = 0,5[m]$. In het kanaal stroomt stationair water, dat als homogene ideale vloeistof beschouwd mag worden. De dichtheid ervan is $\rho = 1000[kg/m^3]$. De gravitatieversnelling $\vec{g} = -10 \vec{e}_z [m/s^2]$. In dwarsdoorsnede A_1 is de vloeistofhoogte $z_1 = 2[m]$ en de stroomsnelheid

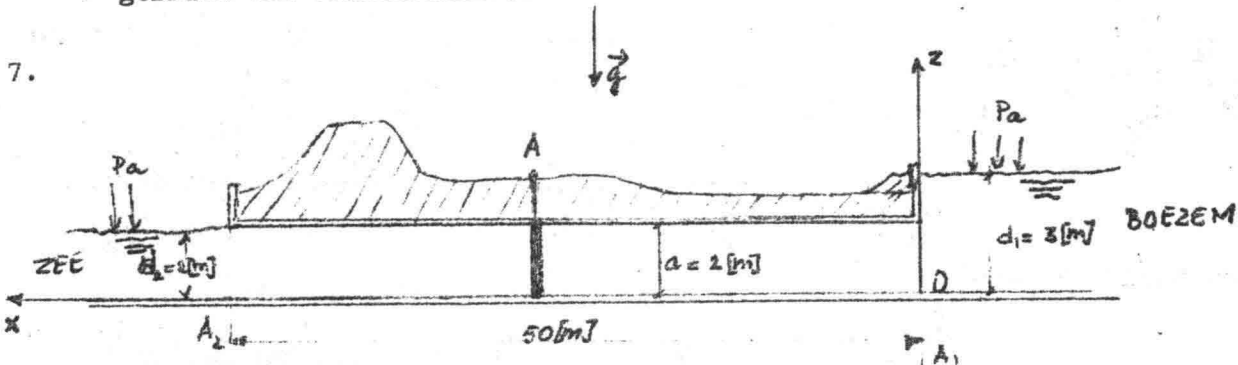
$$\vec{v}_1 = 1 \vec{e}_x [\text{m/s}].$$

De breedte van het kanaal is 10[m]. De onderlinge afstanden tussen de dwarsdoorsneden A_1 en A_2 is 20[m]. Boven de vloeistof heerst de atmosferische druk p_a .

a) Is de vergelijking van Bernoulli op de stroming tussen A_1 en A_2 van toepassing?

Hoe luidt deze in dit geval? (Bereken de stijghoogtes in de dwarsdoorsneden).

b) Probeer een relatie te vinden voor de vloeistofsnelheid in doorsnede A_2 waarin deze is uitgedrukt in de snelheid v_1 en de hoogte z_1 in doorsnede A_1 . (Maak gebruik van volumebalans).



Een betonnen duiker met vierkante dwarsdoorsnede, ribbe $a = 2[\text{m}]$, en lengte 50[m] is onder een dijk doorgelegd en vormt de verbinding tussen een boezem en de zee. In de duiker bevindt zich ter plaatse van A een beweegbare schuif. Op het tijdstip $t = 0$ is de waterhoogte in de boezem 3[m] en aan de zeezijde 2[m]. Op het tijdstip $t = 0$ veronderstellen we dat de schuif razendsnel wordt opgehaald. De gravitatieversnelling $g = 10[\text{m/s}^2]$. Het water mag als homogene ideale vloeistof beschouwd worden met een dichtheid $\rho = 1000[\text{kg/m}^3]$.

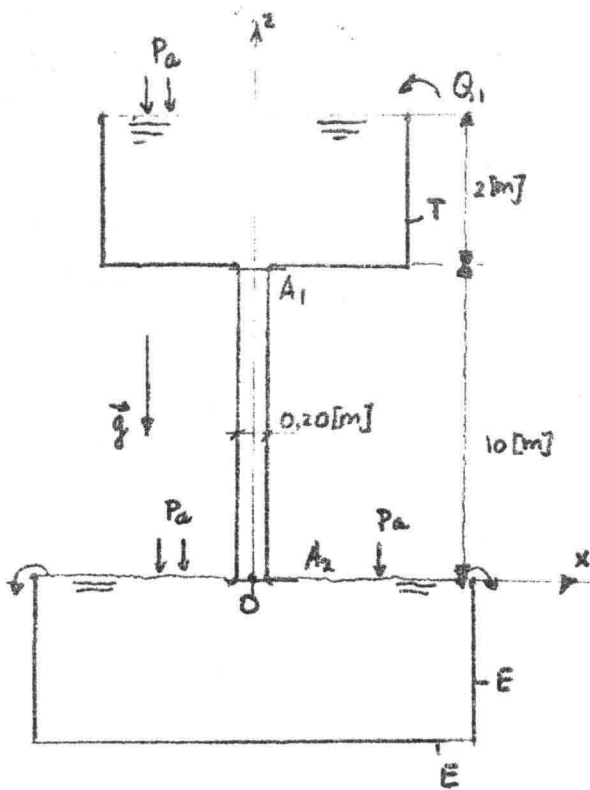
a) Hoe groot is de traagheid van de duiker?

b) Hoe groot is de versnelling van de vloeistof in de duiker, als de schuif net is opgehaald?

c) Als het boezempeil en zeepeil de eerste 10[s] niet veranderen, hoeveel $[\text{m}^3]$ water stroomt er dan in dat tijdsinterval uit de boezem.

d) Geldt er voor de duiker, tussen A_1 en A_2 dat

$$M \frac{dH}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad \begin{aligned} (Q_1 &= \text{debiet door } A_1 \\ Q_2 &= \text{ " " } A_2) \end{aligned}$$



Een cilindrische vat T met hoogte 2[m] en diameter 4[m] is aan de onderzijde verbonden met een cilindrische buis met diameter 0,20[m] en lengte 10[m].

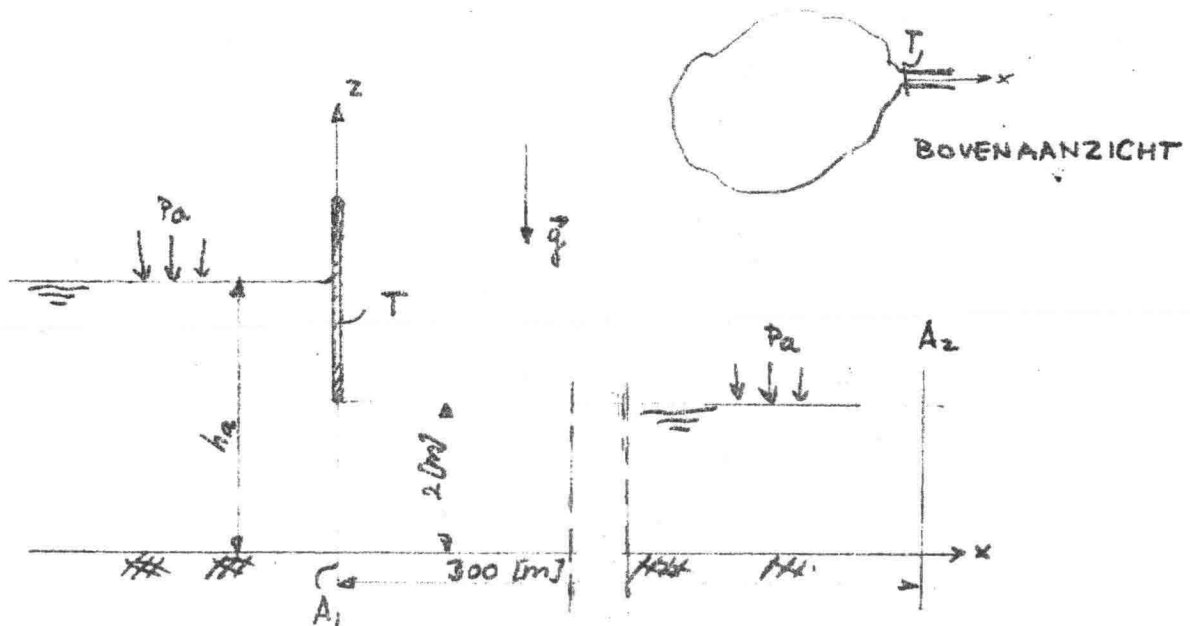
We houden het vat steeds gevuld met water, dat als homogene incompressibele vloeistof beschouwd mag worden, door een debiet Q_1 toe te voegen.

Het vat E heeft steeds dezelfde vloeistofhoogte, doordat het overloopt. De vloeistofsnelheden in de vaten T en E zijn verwaarloosbaar. De gravitatieversnelling is $g = 10[\text{m/s}^2]$. De dichtheid van het water is $\rho = 1000[\text{kg/m}^3]$.

Op $t = 0$ veronderstellen we de vloeistof in rust, waarna het water gaat bewegen. Aan de vloeistofspiegels heerst de atmosferische druk p_a .

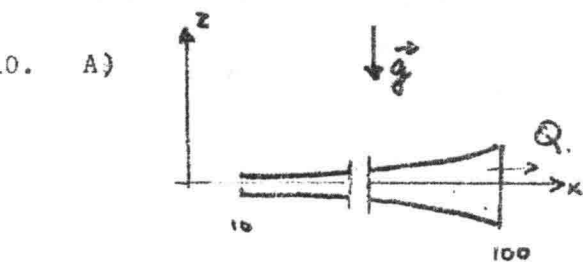
- Bepaal de traagheid van de buis
- Bepaal de relatie tussen het debiet door de buis en het stijghoogteverschil over de uiteinden van de buis

- Bepaal Q_1 als functie van de tijd.
- Is de stroming in de buis stationair?



Een groot meer met een oppervlak van $5000[\text{m}^2]$ heeft op $t = 0$ overal de vloeistofhoogte $h_a[\text{m}]$. Het meer is via een schuif T verbonden met een nauw kanaal, waardoor het water vrij kan wegstromen. De schuif staat op $t = 0$ open en de vloeistofhoogte in het kanaal is $2[\text{m}]$. Voor $t \leq 0$ was het water overal in rust. Het water mag beschouwd worden als homogene incompressibele vloeistof met een dichtheid $\rho = 1000[\text{kg}/\text{m}^3]$. De vloeistofhoogte in het kanaal is in het door ons beschouwde tijdsinterval steeds $2[\text{m}]$. De gravitatieversnelling $g = +10[\text{m}/\text{s}^2]$. De breedte van het kanaal is $5[\text{m}]$.

- Hoe groot is de traagheid van het balansgebied in het kanaal tussen A_1 en A_2 .
- Hoe groot is de versnelling van de vloeistof in het balansgebied op tijdstip $t = 0^+$ (0^+ is het tijdstip direct volgend op $t = 0$).
- Bepaal de relatie tussen de berging en de stijghoogte in het meer.
- Bepaal de vergelijking voor het debiet van de gehele configuratie.



We beschouwen een buis met cirkelvormige dwarsdoorsnede. De straal van de buis op plaats x is gegeven door $z = 10^{-5} x^2$.

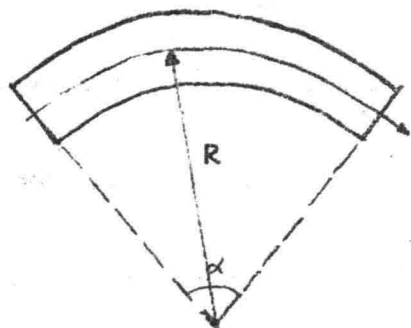
In de buis stroomt een homogeen incompressibele vloeistof met $\rho = 500[\text{kg}/\text{m}^3]$.

De gravitatieversnelling is

$$g = -10 \vec{e}_z [\text{m}/\text{s}^2].$$

- Bepaal de traagheid van het balansgebied tussen $x = 10$ en $x = 100$.
- Hoe groot is het drukverschil over het balansgebied uitgedrukt in de snelheid op $x = 100$ als de stroming stationair is.

B)



Beschouw de gekromde buismoot met constante cirkelvormige dwarsdoorsnede met middelpunthoek $\alpha = 0,5[\text{rad}]$ en $R = 100[\text{m}]$.

Het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de buis $0,5[\text{m}^2]$. De versnelling van de zwaartekracht is $g = 10[\text{m}/\text{s}^2]$.

- Bepaal de traagheid van de moot.
- Welk gegeven is hier vergeten?

ANTWOORDEN OF AANWIJZINGEN BIJ DE STUDIEVRAGEN

Aanwijzingen worden gemerkt met ('), de uitwerking volgt verderop in de eenheid.

S.10.1. In de afleiding van formule (3) is nergens gebruik gemaakt van de eigenschappen t.a.v. homogeniteit en onsamendrukbaarheid, dus (3) geldt in principe voor alle vloeistoffen, waarvoor een behoudswet van massa geldt.

Er is echter een verschil in interpretatie van (3). In het geval van een homogene onsamendrukbare vloeistof is de dichtheid van de vloeistof een constante.

Voor de massa m_C geldt, dat deze gelijk is aan $\rho_C \cdot V_C$ (V_C = volume van het balansgebied). Nu is ρ_C een constante, dus is

$$\frac{dm_C}{dt} = \rho_C \frac{dV_C}{dt}$$
 m.a.w. de massaverandering in het gebied C wordt geheel veroorzaakt door een volumeverandering in C, t.g.v. een vloeistofspiegelrijzing of daling. In dit geval kunnen we dus ook de massavoorraadsverandering van C meten aan de vloeistofspiegelverandering van C.

In het geval van een iet-homogene vloeistof geldt voor

$$\frac{dm_C}{dt} = \frac{d\rho_C}{dt} \cdot V_C + \rho_C \frac{dV_C}{dt}$$

M.a.w. de massaverandering in C heeft nu twee oorzaken:

- 1e Doordat er bv. links vloeistof met een andere dichtheid C binnenstroomt dan er rechts uitstroomt.
- 2e Doordat de vloeistofspiegel van C stijgt of daalt t.g.v. links en rechts ingestroomde vloeistof. In dit geval kunnen we de massavoorraadsverandering dus niet meer uitsluitend aan de vloeistofspiegelverandering van C meten, maar moeten we er rekening mee houden, dat ook de dichtheid in C verandert is. De enige bestrouwbare meetmethode is in dit geval het wegen van de vloeistof in C op verschillende tijdstippen. (Dit is echter meestal onmogelijk)

S.10.2. Formule (3) blijft gelden, zoals boven beschreven. We moeten de massavoorraadsverandering in C nu als volgt interpreteren.

- Links en rechts stromen er bepaalde volumina vloeistof in en uit, waardoor de vloeistofspiegel in C stijgt of daalt.
- Ten gevolge van de samendrukking van de vloeistof in C verandert het volume en daardoor ook de dichtheid in C.

We moeten, dus weer op verschillende tijdstippen de vloeistof in C wegen om de massavoorraadsverandering in C in de tijd te meten.

10.3. In het algemene geval geldt vgl. (3),

$$\frac{dm_C}{dt} = S_{CA} + S_{CB}, \text{ waarin C het}$$

balansgebied (kanaal) voorstelt.

Aangezien we met een homogene incompressibele vloeistof te maken hebben, kan de massavoorraad in het kanaal alleen nog veranderen doordat het vloeistofniveau varieert. (aanname: Het kanaal heeft een ondoorlatende bodem en wanden). Aangezien dit mogelijk is, geldt vgl. (5) dus niet.

10.4. In het algemene geval, geldt formule (3),

$$\frac{dmc}{dt} = S_{CA} + S_{CB}, \text{ waarin C nu de buis (het balansgebied) voorstelt.}$$

Als de wanden van de buis elastisch zijn kan de massavoorraad in de buis in de tijd variëren, omdat het volume van C in de tijd kan variëren. (Vergelijk met kanaal met variabele hoogte van vloeistofspiegel), dus (5) geldt niet.

10.5. We hebben gezien dat voor een starre buis, waardoor een homogene incompressibele vloeistof stroomt, vergelijking (5) geldt.

Oftewel, dat de massastroom S op een tijdstip t in elke dwarsdoorsnede gelijk is. Daar de dichtheid van een homogene incompressibele vloeistof een constante is, geldt dus ook (zie 6) dat het debiet op een tijdstip t in elke dwarsdoorsnede van de buis gelijk is.

10.6. In het geval van een incompressibele vloeistof door een buis met starre wanden, is het volume van het balansgebied (de buis) constant in de tijd. Aangezien de vloeistof onsamendrukbaar is, zal het volume daarvan ook niet veranderen in de tijd. Het is dus aannemelijk dat er voor het balansgebied een behoud van volumens geldt. D.w.z. dat er links evenveel volumens per tijdseenheid moet instromen als er rechts per tijdseenheid uitstroomt.

$$\text{Oftewel } Q_L(t) = Q_R(t).$$

De eis van homogeniteit van de vloeistof is dus niet noodzakelijk voor het gelijk zijn van het debiet in



elke dwarsdoorsnede.

N.B. De massavoorraad in de buis kan nog wel veranderen, doordat er links en rechts vloeistof met verschillende dichtheid in- en uitstroomt.

Deze studievraag heeft slechts een informatief karakter en wordt niet getoetst.

S.10.7. In het algemene geval geldt:

$$S_{cA} + S_{cB} = \frac{dmc}{dt}$$

met C het balansgebied (kanaal).

Aangezien de waterhoogte constant is in de tijd, varieert het volumen in het balansgebied niet. De vloeistof is homogeen incompressibel, dus de dichtheid is een constante.

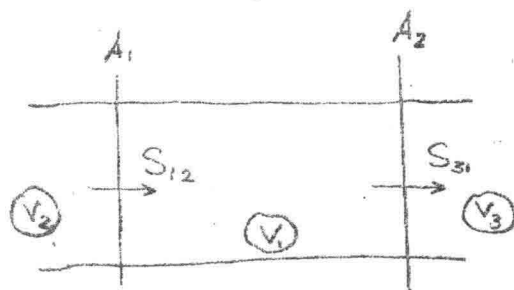
Er volgt, dan met (5) en (6), dat zowel de massastroom $S(t)$ als het debiet $Q(t)$ op een tijdstip t in elke dwarsdoorsnede gelijk is.

S.10.8. Voor een starre buis, waardoor een homogene incompressibele vloeistof stroomt, geldt dat de massastroom die links de buis instroomt, gelijk is aan de massastroom, die op dat tijdstip rechts de buis uitstroomt (5).

$$S_{12}(t) = S_{31}(t)$$

Aangezien de dichtheid een constante is, geldt dus ook dat

$$\frac{S_{12}(t)}{\rho} = \frac{S_{31}(t)}{\rho}$$



Oftewel: $Q_{12}(t) = Q_{31}(t)$

Het debiet naar V_1 toe op tijdstip t is gelijk aan het debiet uit V_1 op tijdstip t . Dit is ook te schrijven, als:

$$Q_{12}(t) + Q_{13}(t) = 0$$

Dit is dus de volumenbalans voor de buis.

N.B. In het algemene geval luidt, deze

$$Q_{12}(t) + Q_{13}(t) = \frac{dV_1}{dt}$$

10.9. Bedenk dat $S = \frac{dm}{dt}$ voor een vat met één toegang.
Bovendien geldt, dat $S = \rho \cdot Q = \rho \cdot A \cdot v_{\text{gem}}$.
 $\rho = 1000[\text{kg/m}^3]$.

10.10. Zie definitie "lichaam" g.1 op pag. 9.09 van eenheid 9.

10.11. Onder een stationaire stroming verstaan we een stroming waarvan de stroomsnelheid niet van de tijd t afhangt. De stroomsnelheid mag nog wel van de plaatscoördinaten x, y en z afhangen. Is dit ook niet het geval dan noemen we de stroming niet steeds stationair, aangezien aan het criterium, dat de stroomsnelheid onafhankelijk van de tijd is, voldaan wordt.

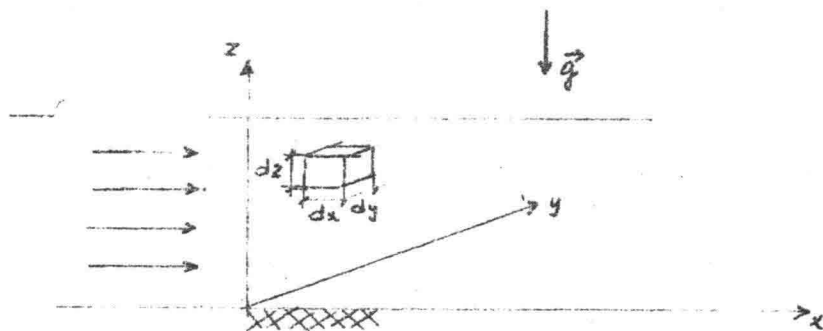
Noot: In een compressibele vloeistof wordt voor stationairiteit geëist, dat zowel de stroomsnelheid van de vloeistof als de druk in de vloeistof in elk punt onafhankelijk van de tijd zijn. In principe moet deze eis tevens gesteld worden aan een incompressibele vloeistof, daar dit een limietgeval is van een compressibele vloeistof.

10.12. In dit geval is de stroming stationair (zie S.10.11.)

10.13. Een deeltje beweegt eenparig, als de snelheid ervan constant is naar grootte en richting.

In een stationaire stroming varieert de snelheid in het algemeen met x, y en z , dus het deeltje beweegt niet éénparig.

10.14.



We beschouwen een stroming van een volmaakte vloeistof in een kanaal.

We nemen hieruit een mootje met afmetingen dx, dy en dz , dat in rust is t.o.v.

Oxyz. Op dit mootje passen we de tweede wet van Newton toe in de z -richting. In de vloeistof geldt de wet van Pascal, oftewel dat de druk in een punt in alle richtingen gelijk is.

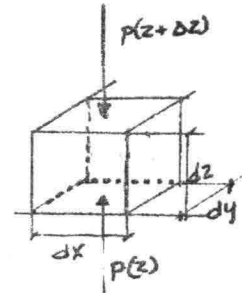
In de z-richting werken de volgende krachten:

Op het ondervlak geeft de druk een kracht

$$\vec{F}_o = p(z) \cdot dx \cdot dy \cdot \vec{e}_z$$

Op het bovenvlak geeft de druk een kracht

$$\vec{F}_b = -p(z + dz) \cdot dx \cdot dy \cdot \vec{e}_z = \left\{ -p(z) \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right\} dx \cdot dy \cdot \vec{e}_z.$$



De gravitatie-wisselwerking geeft op de massa in het blokje een kracht:

$$\vec{F}_v = -\rho g \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{e}_z.$$

Nu geldt volgens Newton 2:

$$\vec{F}_o + \vec{F}_b + \vec{F}_v = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t} \cdot \vec{e}_z.$$

Uitwerking geeft, dat:

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} + \rho g = -\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad (A)$$

In eenheid 9 is de hydrostatische drukverdeling gedefiniëerd als:

$$p(z) = p(z_R) + \int_z^{z_R} \rho g \cdot dz \quad (z_R = \text{referentiehoogte}).$$

Aangezien in (A) de dichtheid nog van x, y, z en t afhangt (vloeistof niet homogeen en compressibel) geeft integratie van (A)

$$p(z) = p(z_R) + \int_z^{z_R} \rho g \cdot dz + \int_z^{z_R} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \cdot dz$$

Dus opdat de drukverdeling hydrostatisch is, moet gelden, dat

$$\int_z^{z_R} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \cdot dz = 0$$

Hieruit volgt, dat er moet gelden:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

Aangezien $\rho = \rho(z)$ in het algemeen ongelijk aan nul is, volgt dat

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

oftewel de vloeistof mag geen versnelling in de z-richting hebben.

Als dit het geval is, dan is er in de vloeistof een hydrostatische drukverdeling.

10.15. In het geval van een niet-stationaire stroming, is in H.II aangetoond, dat op een tijdstip t de massastroom $S(t)$ in elke dwarsdoorsnede gelijk is.

Echter van tijdstip tot tijdstip kan dit variëren.

Dit betekent, dat (11) verandert in

$$p_x(t) = S(t) \cdot l.$$

M.a.w. de impulsvoorraad in de x-richting op tijdstip t is gelijk aan de massastroom door de buis op tijdstip t maal de lengte van de buis. De impulsvoorraad varieert dus met de tijd.

10.16. Pas de afleiding van S.10.15 toe.

10.17. Maak gebruik van het feit dat het debiet $Q = v_{\text{gem}} \cdot A$ in elke dwarsdoorsnede gelijk is.

10.18. We vonden in (17) voor de impuls op $t + \Delta t$: $\vec{p}_a(t + \Delta t)$:

$$\vec{p}_a(t + \Delta t) = \rho A \cdot v(t + \alpha \Delta t) \cdot \vec{v}(t + \Delta t) \cdot \Delta t.$$

$$\text{Met } f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} +$$

volgt voor de componenten

$$p_a(t + \Delta t) = \rho A \{ v^2(t) \Delta t + (1 + \alpha) v(t) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot (\Delta t)^2 \} + O(\Delta t^3)$$

Evenzo volgt voor $p_{12}(t, t + \Delta t)$, dat:

$$p_{12}(t, t + \Delta t) = \rho A \{ v^2(t) \Delta t + 2\alpha v(t) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot (\Delta t)^2 \} + O(\Delta t^3)$$

Het verschil is dan

$$p_a(t + \Delta t) - p_{12}(t, t + \Delta t) = \rho A (1 - \alpha) v(t) \frac{\partial v}{\partial t} (\Delta t)^2 + O(\Delta t^3)$$

3.10.19. Voor een starre buis in fig. 12 geldt voor een homogene incompressibele vloeistof vergelijking (25).

$$\frac{\ell}{g} \frac{dv}{dt} = \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right)$$

Met de gegevens: $p_1 = p_2 = p_a$ en $z_1 - z_2 = \ell \cos \alpha = 100 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}$ volgt dat:

$$\frac{\ell}{g} \frac{dv}{dt} = 50 \sqrt{3}$$

oftewel

$$\frac{dv}{dt} = 5 \sqrt{3}$$

Integratie geeft:

$$v(t) = v(0) + 5 \sqrt{3} t$$

Op $t = 0$ was de vloeistof in rust, dus de snelheid van de vloeistof is na 3 seconden:

$$v(3) = 5 \sqrt{3} \cdot 3 = 15 \sqrt{3} \text{ [m/s]}.$$

3.10.20. Vgl. (35) is afgeleid voor een starre buis, waarvan het oppervlak van de dwarsdoorsnede langs de buis-as varieert.

Het debiet van een homogene incompressibele vloeistof door deze buis is alleen een functie van de tijd en er geldt dat:

$$Q(t) = A(x) \cdot v(x, t)$$

Als we het oppervlak $A(x)$ constant veronderstellen langs de buis-as, dan volgt dat:

$$Q(t) = A \cdot v(x, t)$$

Oftewel de snelheid is ook alleen een functie van de tijd.

Dit gesubstitueerd in (35) levert dat:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z)$$

Integratie langs de buis geeft tenslotte:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \cdot l = p_{(x=0)} + \rho g z_{(x=0)} - p_{(x=l)} - \rho g z_{(x=l)}$$

Delen door ρg geeft dan vgl. (25).

Conclusie: (25) is een bijzonder geval van (35)

10.21. Maak gebruik van (36)

10.22. Aangezien het debiet $Q(t)$ op een tijdstip t in elke dwarsdoorsnede gelijk is, en het oppervlak van de dwarsdoorsnede in dit geval constant is, volgt hieruit dat de gemiddelde snelheid in elke dwarsdoorsnede gelijk is.

Doordat we in (41) en (42) het verschil in hoogtes in twee dwarsdoorsnedes beschouwen vallen deze tegen elkaar weg. M.a.w. (41) is identiek aan (42).



Er geldt in dit geval (39):

$$\frac{l}{g} \frac{dv}{dt} = \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right)$$

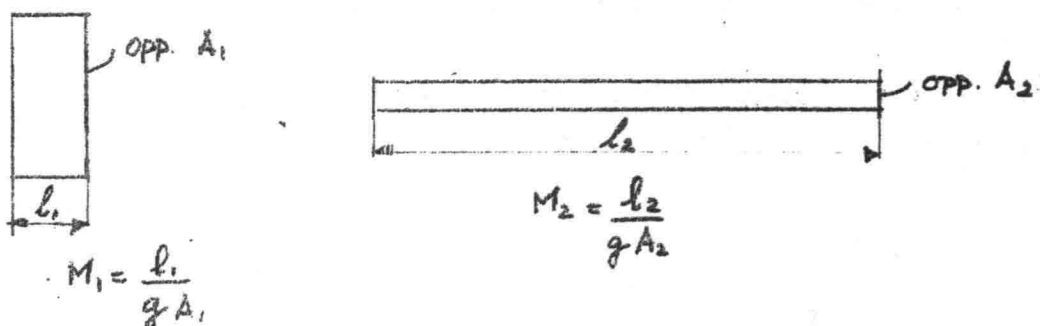
Nu is $z_1 = z_2$, daar de z -as loodrecht op de buis staat m.a.w.

$$\frac{l}{gA} \frac{dQ}{dt} = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g}$$

Hierin is $M = \frac{l}{gA}$, dus de traagheid van de buis verandert niet.

Het stijghoogteverschil over de buis blijkt in dit geval vereenvoudigd te kunnen worden tot drukverschillen.

10.24.



Er geldt dat $\ell_1 A_1 = \ell_2 A_2$.

De traagheden van de buizen verhouden zich als:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\ell_1 g A_2}{g A_1 \ell_2} = \frac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1}$$

Substitutie van $\ell_1 A_1 = \ell_2 A_2$ geeft

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{A_2^2}{A_1^2} \ll 1.$$

M.a.w. de traagheid van de dunne lange buis is veel groter dan die van de korte dikke.

- .10.25. Voor de rechte cilindrische buis geldt in het geval van een homogene incompressibele vloeistof dat

$$M \frac{dQ}{dt} = (h_1 - h_2).$$

Nu geldt in het geval van een stationaire stroming, dat het debiet Q constant is in de tijd, m.a.w. we vinden, dat

$$h_1 - h_2 = 0$$

De traagheid $M = \frac{\ell}{gA}$ blijft onafhankelijk

van de stromingstoestand dezelfde waarde houden, echter in het geval van een stationaire stroming is de invloed van de traagheid op het stijghoogteverschil over de buis nihil.

- .10.26. Tot nu toe hebben we meestal gewerkt met rechte cilindrische buizen als we het over leidingen met een constant oppervlak langs de buis-as hadden.

Beschouwen we een kanaal met een constante rechthoekige doorsnede, waarin de waterhoogte constant is, dan verandert de afleiding van de traagheid in principe niet. Dus vgl. (41) zal blijven gelden.

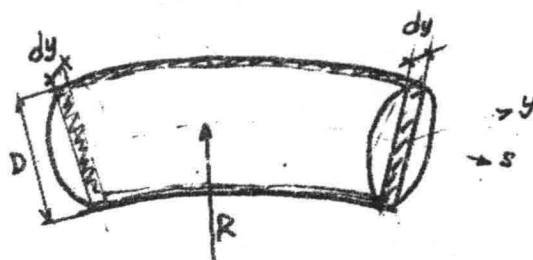
- .10.27. Voor de traagheid van de buis geldt, dat

$$M = \int_a^b \frac{1}{g A(x)} dx = \frac{1}{g} \int_a^b \frac{1}{\pi x^2 \tan^2 \alpha} dx$$

$$= \frac{1}{g \pi \tan^2 \alpha} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^b = \frac{1}{g \pi \tan^2 \alpha} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

De eis, dat α klein moet zijn, volgt uit het feit, dat vgl. (49) is afgeleid voor een buis, waarvan het oppervlak langzaam varieert langs de buisas. Dan geldt nl. dat de x-componenten van de snelheden van de vloeistofdeeltjes over de dwarsdoorsnede ongeveer gelijk zijn.

- 10.28. Stel de impulsbalans op voor een mootje als getekend in de figuur en maak daarbij gebruik van (51).



- 10.29. Waarvoor is vgl. (52) afgeleid?

- 10.30. Beschouw hier alleen fichte krommingen oftewel R groot.

- 10.31. Voor de gravitatieberging B geldt in het geval van een homogene incompressibele vloeistof, dat $B = A$ (opp. vloeistofspiegel). Dus

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0,1}{1000} = 10^{-4} [\text{m/s}]$$

- 10.32. Daar we met stuwhoogteverschillen gewerkt hebben, verandert er niets aan de afleiding.

vr. ap. 1: De standaardafwijking van de warmtebeweging is

$$\sigma = \sqrt{\frac{R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{8314 \cdot 283}{18}} = 360 [\text{m/s}]$$

vr. ap. 2: Er moet gelden dat de standaardafwijking van de groep gelijk is aan:

$$\sigma_g = \frac{1}{100} [\text{m/s}]. \quad (\text{A})$$

Voor de standaardafwijking van de groep geldt:

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \sigma$$

De standaardafwijking van 1 molekuul is 360[m/s] (zie ap. 1). dus het aantal molekulen waaruit een groep minstens moet bestaan, opdat aan A voldaan is, volgt uit

$$n = \frac{\sigma^2}{\sigma_g^2} = (360)^2 \cdot 10^4 = 1,3 \cdot 10^9 \text{ molekulen.}$$

Volgens Avogadro bestaat 1 g mol uit ongeveer $6 \cdot 10^{23}$ molekulen, met een massa van $18 \cdot 10^{-3}$ [kg] voor water.

Dus de massa van het pakketje is

$$m_p = \frac{1,3 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^{23}} \cdot 18 \cdot 10^{-3} \sim 4 \cdot 10^{-17} \text{ [kg]}$$

ANTWOORDEN NA AANWIJZINGEN BIJ DE STUDIEVRAGEN

- 10.9. We stellen, dat er zich op tijdstip $t = 0[s]$ in het glas $m_0[kg]$ water bevond. Op $t = 60[s]$ is dit toegenomen tot $m_0 + 84 \cdot 10^{-3}[kg]$. We nemen nu aan dat er per tijdseenheid steeds evenveel water in het glas stroomde, zodat

$$S = \frac{m_0 + 84 \cdot 10^{-3} - m_0}{60} = \frac{84 \cdot 10^{-3}}{60} \left[\frac{kg}{s} \right]$$

(Eigenlijk is S een gemiddelde massastroom).

Voor de massastroom S geldt, dat:

$$S = \rho \cdot Q \rightarrow$$

Het debiet is

$$Q = \frac{S}{\rho} = \frac{84 \cdot 10^{-6}}{60} [m^3/s].$$

Met $Q = A \cdot v_{\text{gem}}$ en

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (10^{-3})^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-6} [m^2]$$

volgt voor de gemiddelde stroomsnelheid onder in de straal

$$v_{\text{gem}} = \frac{84}{60} \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4}{\pi \cdot 10^{-6}} \approx 1,8 [m/s].$$

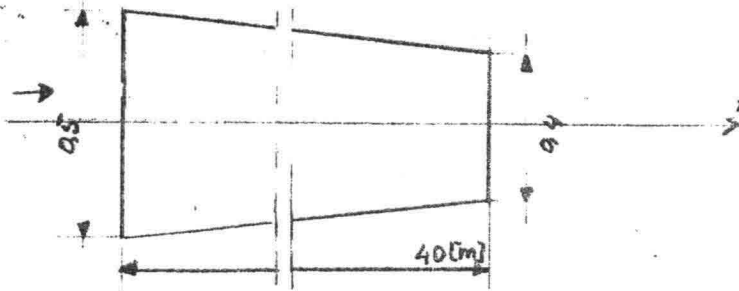
- 10.10. In eenheid 9 is een lichaam gedefinieerd, als een zichzelf blijvende beperkte hoeveelheid materie, die een deel van de fysische ruimte kan innemen. Een vloeistofdeeltje kan in de tijd van samenstelling veranderen, d.w.z. er verdwijnen molekulen, waarvoor andere van buiten in de plaats komen. Dus hier voldoet een vloeistofdeeltje niet aan de definitie van een lichaam. Verder zijn er geen tegenspraken.

- 10.16. Voor de grootte van de impulsvoorraad in de as-richting op tijdstip t geldt voor de buis, waarin een homogene ideale vloeistof stroomt, dat

$$p_x(t) = S(t) \cdot l$$

$$= \rho Q(t) \cdot l = 10^3 \cdot 0,2 \cdot t \cdot 20 = \underline{4 \cdot 10^3 t} [kgm/s].$$

S.10.17.



De homogene ideale vloeistof stroomt stationair in de buis.

In de toegang met oppervlak $A = \frac{\pi}{4} \cdot (5 \cdot 10^{-1})^2 = \frac{25\pi}{4} \cdot 10^{-2} [\text{m}^2]$ meten we een snelheid van $4 [\text{m/s}]$, dus het debiet is:

$$Q = v \cdot A = 25\pi \cdot 10^{-2} [\text{m}^3]$$

Deze is in elke doorsnede gelijk.

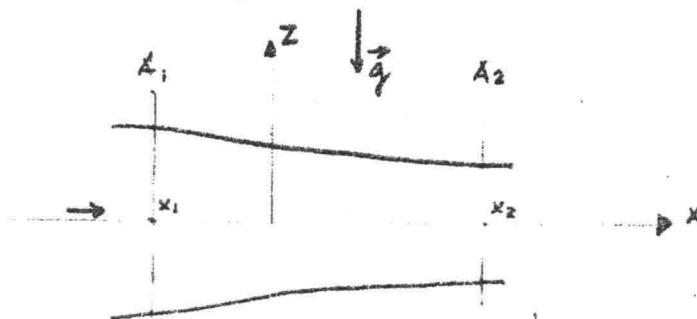
De massastroom is dan:

$$S = \rho \cdot Q = 250\pi [\text{kg/s}].$$

Hieruit volgt voor de impulsvoorraad van de buis in de as-richting.

$$p_x = S \cdot l = 10^4 \cdot \pi [\text{kgm/s}].$$

S.10.21.



We hebben te maken met een stationaire stroming van een homogene ideale vloeistof door een starre buis.

Volgens de stelling van Bernoulli geldt, dat

$$p(x) + \rho g z(x) + \rho \frac{v^2(x)}{2}$$

constant is in de as-richting van de buis.

Dus er geldt, dat

$$p_1 + \rho g \cdot 0 + \rho \frac{v_1^2(x_1)}{2} = p_2 + \rho g \cdot 0 + \rho \frac{v_2^2(x_2)}{2}$$

oftewel de snelheid in dwarsdoorsnede A_1 volgt uit:

$$v_1^2(x_1) = 2 \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{\rho} + v_2^2(x_2). \quad (I)$$

Nu geldt bovendien dat het debiet Q in de buis constant is.

Noemen we het oppervlak van de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 resp. A_1^* en A_2^* dan geldt, dat:

$$v_1 \cdot A_1^* = v_2 \cdot A_2^* \rightarrow v_2 = \frac{A_1^*}{A_2^*} v_1$$

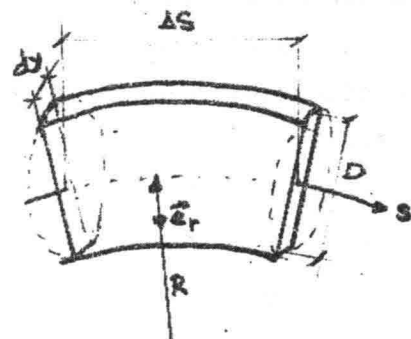
Substitutie in (I) en uitwerking ervan geeft dan:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_1^*}{A_2^*}\right)^2\right)}}$$

We hadden in de figuur aangenomen dat de vloeistof naar rechts stroomde.

- 10.28. We beschouwen het nevenstaande mootje. Volgens (51) werkt op dit mootje een kracht t.g.v. de richtingsverandering van de stroming, die gelijk is aan:

$$\vec{F} = \rho \, dy \cdot D \cdot \Delta s \frac{v^2(s)}{R} \vec{e}_r.$$



Aangezien we de zwaartekracht buiten beschouwing hebben gelaten, moet deze kracht door een drukverschil door de buiswanden geleverd worden. Noemen we de druk in de buitenbocht p_{bu} en die in de binnenbocht p_{bi} , dan moet er bij benadering gelden, dat

$$p_{bu} \cdot dy \cdot \Delta s \cdot \vec{e}_r - p_{bi} \cdot dy \cdot \Delta s \cdot \vec{e}_r = \frac{dp}{dt} = \vec{F}$$

Uitwerking levert:

$$p_{bu} - p_{bi} = \rho \frac{D}{R} v^2(s) \quad [N/m^2]$$

Substitutie van de gegevens geeft:

$$p_{bu} - p_{bi} = 40 [N/m^2]$$

Dit drukverschil heerst alleen in de middenlangsdoorsnede. In andere langsdoorsnedes is dit drukverschil kleiner aangezien de afstand tussen de buiswanden daar kleiner is dan D.

S.10.29. Vgl. (52) is afgeleid voor een niet-stationaire stroming van een homogene ideale vloeistof door een starre gekromde buis, waarvan het oppervlak van de dwarsdoorsnede constant is langs de buis-as.

De snelheid $\vec{v}(s,t)$ veranderde alleen van richting en niet van grootte.

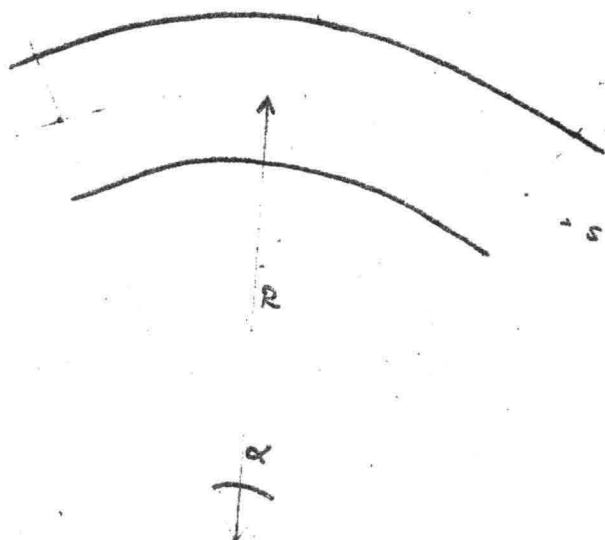
In het geval van een variabel oppervlak langs de buis-as verandert tevens de grootte van $v(s,t)$.

M.a.w. vgl. (52) is ook van toepassing op een buis met variabel oppervlak langs de buisas.

S.10.30. We beschouwen een bochtstuk met ~~keunte~~straal R en middelpunts-hoek α . We veronderstellen de dwarsdoorsnede cirkelvormig met oppervlak A.

Uit (52) volgt dan voor de traagheid van de buis: (zie ook 49)

$$M = \frac{1}{gA} \int_0^{R\alpha} ds = \frac{R \cdot \alpha}{gA}$$



In het geval het oppervlak A een funktie van s is volgt voor de traagheid

$$M = \frac{1}{g} \int_0^{R\alpha} \frac{ds}{A(s)}$$

COMMENTAAR OP DE BEWERINGEN

- 10.1. Onjuist. Dit geldt uitsluitend als de vloeistof homogeen en incompressibel is.
- 10.2. Juist. Op deze wijze is het debiet Q in eenheid 9 gedefinieerd. (pag. 9.21).
In principe hoeft de vloeistof niet homogeen en incompressibel te zijn en de buis niet recht en star.
Echter dan geldt $Q(t) = \frac{S(t)}{\rho(x,t)}$, slechts in een bepaalde dwarsdoorsnede op een bepaald tijdstip t .
- 10.3. Juist. Zo is de gemiddelde snelheid gedefinieerd. (zie 7).
- 10.4. Een ideale vloeistof is een incompressibele volmaakte vloeistof. Dus de eerste bewering is juist. Het omgekeerde echter niet.
- 10.5. Onjuist. De grootte van de impuls op tijdstip t is gelijk aan de massastroom op t maal de lengte van de buis.
- 10.6. Juist. (zie (24)).
- 10.7. Juist. In het geval van een stationaire stroming in het kanaal verandert de waterhoogte erin niet in de tijd (anders zou de snelheid een functie van de tijd zijn en de stroming dus niet-stationair) (zie aanv. vr. 2).
In dat geval is de vloeistofspiegel op te vatten als een "vaste" wand en geldt de vergelijking van Bernoulli, zoals deze voor de buis is afgeleid. (35).
- 10.8. Onjuist. Volgens (38) geldt, dat

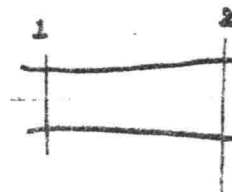
$$\rho \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - \rho g \frac{\partial H(x,t)}{\partial x}$$

M.a.w. de versnelling van de vloeistof op tijdstip t in een vast balansgebiedje met lengte dx is afhankelijk van het stuwhoogteverschil over het mootje.

(Een groter balansgebied is op te vatten als een som van deze mootjes).

- 10.9. Onjuist. De Euler-Bernoulli vergelijking geldt alleen in de as-richting van de buis. De buis moet bovendien starre wanden hebben.
- 10.10. Onjuist. De vloeistof moet homogeen en ideaal zijn.
- 10.11. Onjuist. Deze relatie luidt:

$$M \frac{dQ}{dt} = - \Delta H = H_1 - H_2.$$



M = traagheid van de buis.

b.10.12. In principe is deze uitspraak juist, echter voor een stationaire stroming is er ook altijd een traagheid. De bewering had beter geformuleerd kunnen worden als:.....betekent dat de traagheid een stuwhoogteverschil over de buis veroorzaakt.

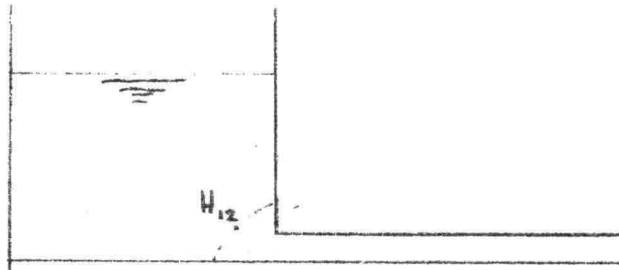
Bij een stationaire stroming is dit niet het geval.

b.10.13. Juist. Eigenlijk kunnen we beter eisen dat de verhouding tussen de diameter van de buis en de kromtestraal: $\frac{D}{R}$ klein is (zie S.10.28).

b.10.14. Juist. In S.10.24 hebben we gezien dat de traagheid van een kort dik stuk buis klein is t.o.v. van die van een lang dun stuk.

Daar het stuwhoogteverschil over een buis recht evenredig met de traagheid ervan is, volgt dus het gestelde.

b.10.15.



In het geval van een stationaire stroming van de homogene ideale vloeistof zijn de stuwhoogteverschillen t.g.v. de traagheid nul.
Daar de snelheid in het vat ongeveer nul is volgt dus, dat de bewering juist is.

UITWERKING AANVULLENDE VRAAGSTUKKEN

1. a) Per minuut levert de brandslang 150π [kg] water. Aangezien de stroming stationair is betekent dit, dat de massastroom in de brandslang gelijk is aan:

$$S = \frac{150\pi}{60} = 2,5\pi [\text{kg/s}].$$

Het debiet is: $Q = \frac{S}{\rho} = 2,5 \cdot 10^{-3} \pi [\text{m}^3/\text{s}].$

Daar $Q = v \cdot A$ (A = opp. dwarsdoorsnede) volgt voor de stroomsnelheid in de buis

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \pi}{\frac{\pi}{4} \cdot 10^{-2}} = 1 [\text{m/s}].$$

- b) De diameter van het spuitstuk volgt, uit de relatie

$$A = \frac{Q}{v}.$$

Daar het debiet in elke dwarsdoorsnede gelijk is, en de snelheid in het spuitstuk $25 [\text{m/s}]$ is, volgt

$$\frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \pi}{25}$$

$$\text{oftewel } D_1^2 = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{en voor de diameter } D_1 = 2 \cdot 10^{-2} [\text{m}].$$

- c) De massastroom is in elke dwarsdoorsnede steeds $2,5\pi [\text{kg/s}]$, aangezien we met een stationaire stroming van homogeen incompressibel water, door een starre buis te maken hebben.

- 2a. In het geval, dat de stroming stationair is, is de snelheid in de rivier overal onafhankelijk van de tijd. Dit betekent, dat ook de vloeistofhoogte in de tijd niet zal veranderen. Zou dit namelijk wel het geval zijn, dan zou of wel de snelheid of wel de druk in de vloeistof in de tijd veranderen en dus de vloeistof niet meer stationair stromen. (zie ook noot S.10.11).
We kunnen de vloeistofspiegel dus als een onveranderlijke wand opvatten en er geldt dan, dat het debiet in elke dwarsdoorsnede gelijk en constant is. (stationair

stromende homogene incompressibele vloeistof).

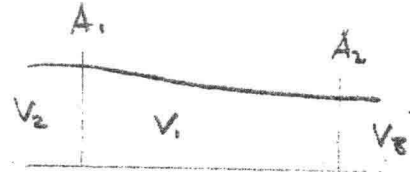
De snelheid in A_2 volgt dus uit:

$$Q_{A_1} = Q_{A_2} \rightarrow$$

$$v_1 \cdot A_1^* = v_2 \cdot A_2^* \rightarrow v_2 = 1,25 [\text{m/s}].$$

b) In principe geldt steeds dat

$$\frac{dm_1}{dt} = S_{12} + S_{13}$$



Daar we te maken hebben met een homogene incompressibele vloeistof en de vloeistofhoogte in V_1 niet variëert t.g.v. de stationaire stroming is de massabalans te schrijven als

$$S_{12} + S_{13} = 0$$

c) Voor een niet-stationaire stroming luidt de massabalans

$$\frac{dm_1}{dt} = S_{12} + S_{13}$$

In dit geval kan de vloeistofspiegel namelijk wel stijgen en dalen.

d) De massavoorraad in V_1 verandert in het tijdsinterval $(t_1, t_1 + 10)$ met een hoeveelheid van

$$\begin{aligned} m_1(t_1 + 10) - m_1(t_1) &= l * b * 0,001 * \rho \\ &= 1000 * 20 * 0,001 * \rho \\ &= 20.000 [\text{kg}]. \end{aligned}$$

Dit betekent, dat de massavoorraad per tijdseenheid $(\frac{dm_1}{dt})$ gelijk is aan

$$\frac{2 \cdot 10^4}{10} = 2 \cdot 10^3 [\text{kg/s}]$$

Nu geldt voor V_1 de massabalans

$$\frac{dm_1}{dt} = S_{12} + S_{13}$$

$$S_{12} = \rho Q_{12} = 1000 \cdot 1 \cdot 20 = 20.000 [\text{kg/s}]$$

M.a.w.

$$S_{13} = \frac{dm_1}{dt} - S_{12} = 2.000 - 20.000 = -18.000 [\text{kg/s}].$$

Dus S_{31} (de massastroom van V_1 naar V_3)

$$S_{31} = + 18.000 [\text{kg/s}].$$

Nu volgt de snelheid uit

$$S_{31} = \rho Q_{31} = \rho v_{A_2} \cdot b \cdot h_{A_2}$$

$$18000 = 1000 v \cdot 20 \cdot 0,8$$

$$v_{A_2} = \frac{18}{16} = 1,125 [\text{m/s}].$$

- 3 a) De druk in de vloeistof (op $t = 0$ in rust) is hydrostatisch verdeeld.

Op diepte z is de druk dan:

$$p(z) = p_a + \rho g(z_a - z) \quad 0 < z < z_a$$

Dus in punt 1 is de druk

$$p_1(0) = p_a + \rho g z_a.$$

Hieruit volgt, dat de stijghoogte in punt 1 gelijk is aan:

$$h_1 = \frac{p_1(0) - p_a - \rho g(0)}{\rho g} = z_a [\text{m}] = 1 [\text{m}].$$

Deze stijghoogte nemen we nu constant voor $t > 0$. Dit is om twee redenen niet helemaal netjes, nl. - de vloeistofspiegel zal zakken door het afzuigen. Het vat is echter groot en voor de hier beschouwde 10[s] zal het bij benadering juist zijn.

- Er treden tijdens dat afzuigen verticale versnellingen op, zodat de drukverdeling niet meer hydrostatische zal zijn (zie S.10.14).

Deze versnellingen veronderstellen we echter klein.

- b) Voor het water in de cilindrische starre buis geldt de impulsbalansvergelijking

$$\frac{\ell}{g} \frac{dv}{dt} = h_1 - h_2 \quad \text{in de as (z)-richting van de buis.}$$

Hieruit volgt dat

$$h_2 = - \frac{\ell}{g} \frac{dv}{dt} + h_1$$

Substitutie van de gegevens levert

$$h_2 = 0,70[\text{m}].$$

$$\text{Nu is } h_2 = \frac{p_2 - p_a}{\rho g} + \ell$$

$$\Rightarrow p_2 = \rho g(h_2 - \ell) + p_a.$$

$$p_2 = 10^4(0,7 - 6) + 10 \cdot 10^4$$

$$= 4,7 \cdot 10^4 [\text{N/m}^2].$$

Het is aannemelijk dat $p_2 < p_a$, aangezien de vloeistof naar boven stroomt.

- c) De snelheid in de buis voor $t > 0$ is gelijk aan:

$$v = \int_0^t \frac{dv}{dt} dt = 0,5t + C.$$

Op $t = 0$ was de vloeistof in rust, dus

$$v = 0,5t.$$

Het debiet op tijdstip t is dan

$$Q(t) = A \cdot v(t) = 0,10t$$

Oftewel in de eerste 10[s] stroomt er een volume

$$V = \int_0^{10} Q(t) dt = 5 [\text{m}^3]$$

water uit de buis.

De massa hiervan is $\rho \cdot V = 5000[\text{kg}]$.

d) De massastroom van de vloeistof op tijdstip t is:

$$S(t) = \rho Q(t) = \rho A v(t) = 100t \text{ (zie c)}$$

M.a.w. de impuls in de buis op $t = 1$ is gelijk:

$$p(1) = S(1) \cdot l = 100 \cdot 6 = 600[\text{Ns}].$$

e) De impulsstroom op $t = 1$ is gelijk

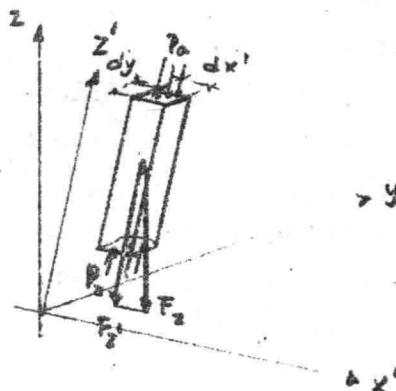
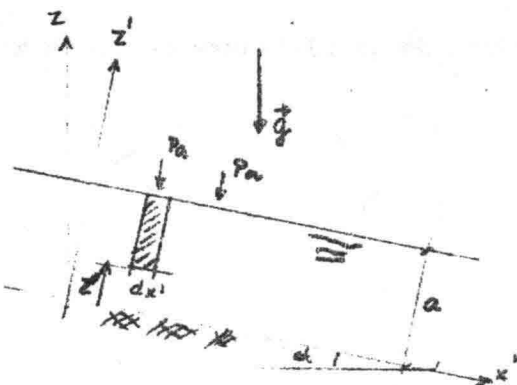
$$S(1) \cdot v(1) = 100 \cdot 0,5 = 50[\text{N}].$$

f) De stuwhoogte op tijdstip $t = 2$ in punt 2

$$h_2 + \frac{v_2^2(1)}{2g} = 0,7 + 0,05 = 0,75[\text{m}].$$

De snelheid is namelijk in deze starre cilindrische buis met het (h.i.) water in elke doorsnede gelijk.

4. a.



We beschouwen een mootje met afmetingen dx' , dy en lengte $(a - z')$.

Op dit mootje werkt in de z -richting de gravitatiewisselwerking met de aarde ter grootte van

$$F_z = \rho g(a - z') dx' dy.$$

Deze geeft een component in de z' -richting

$$F_{z'} = \rho g(a - z') \cos \alpha dx' dy'.$$

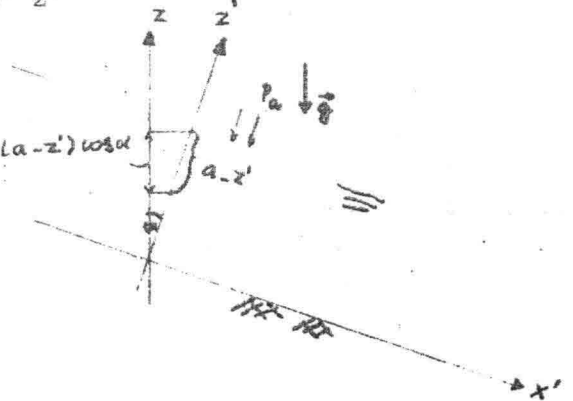
Aangezien we in de z' richting geen versnellingen zijn, volgt uit de impulsbalans voor het mootje:

$$p(z') dx' dy \vec{e}_{z'} - p_a dx' dy \vec{e}_{z'} - F_{2'} \vec{e}_{z'} = \vec{0}$$

oftewel

$$p(z') = p_a + \rho g(a - z') \cos \alpha \quad (I) \quad (a - z') \cos \alpha$$

Dus de laatste term is niet $\rho g(a - z')$, maar de projectie van $\rho g(a - z')$ op de z -as. (zie fig.)



b) Eigenlijk is snel in te zien, dat vgl. (25) hier van toepassing is, dus:

$$\frac{l}{g} \frac{dv}{dt} = h_1 - h_2 = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{z_1}{1} - \frac{p_2}{\rho g} - \frac{z_2}{1} \quad (II)$$

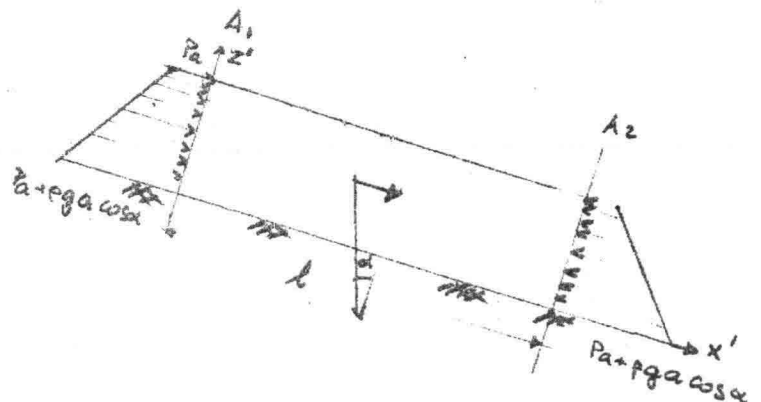
Dus geen z'_1 .

We zullen dit nogmaals aantonen. We stellen de impulsbalans op in de x' -richting. De vloeistof links van A_1 oefent op het balansgebied een druk uit die verdeeld is, zoals in nevenstaande figuur is aangegeven (zie a(I)).

Hetzelfde is het geval in doorsnede A_2 , dus de drukkrachten elkaar op.

De vloeistofmaterie in het balansgebied ondervindt t.g.v. de gravitatiewisselwerking in de x' -richting de kracht

$$\vec{F}_{x'} = \rho g l b a \sin \alpha \vec{e}_{x'}$$



Volgens de tweede wet van Newton geldt nu dat

$$\vec{F}_{x'} = m_c \frac{dv}{dt} \vec{e}_{x'} \quad (m_c = \text{massabalansgebied})$$

oftewel

$$\rho g \ell b a \sin \alpha \vec{e}_{x'} = \rho \ell b a \frac{dv}{dt} \vec{e}_{x'}$$

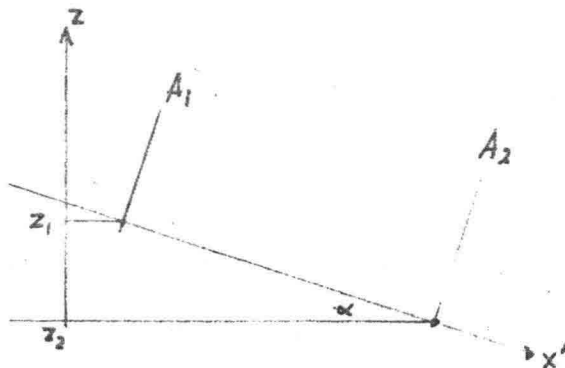
Dus

$$\frac{\ell}{g} \frac{dv}{dt} = \ell \sin \alpha$$

$$\text{Nu is } \ell \sin \alpha = z_1 - z_2.$$

M.a.w.

$$\frac{\ell}{g} \frac{dv}{dt} = z_1 - z_2$$



Dit is dezelfde uitdrukking als b(II), want er geldt dat $p_1 = p_2$.

N.B. z_1 en z_2 worden gekozen waar A_1 en A_2 de x' -as snijden. Meestal worden de z -coörd-en van de snijpunten van de leiding-as en de beschouwde doorsnedes gekozen.

c) Substitutie van de gegeven waarden in

$$\frac{\ell}{g} \frac{dv}{dt} = \ell \sin \alpha (= z_1 - z_2)$$

geeft

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1 [\text{m/s}^2]$$

$$\text{d) } v = \int \frac{dv}{dt} dt = \int dt = t + C$$

$$\text{Op } t = 0 \text{ is } v = 1 [\text{m/s}] \rightarrow$$

$$v(t) = t + 1 [\text{m/s}].$$

Het debiet op $t = 5$ is dan dus

$$Q(5) = A v(5) = 20.1 * 6 = 120 [\text{m}^3/\text{s}].$$

e) Een volmaakte vloeistof is een vloeistof zonder schuifspanningen.

Een ideale vloeistof is een incompressibele volmaakte vloeistof.

Dus het antwoord luidt: nee

f) Ja (zie e.)

5. a) In het meest algemene geval luidt Euler-Bernoulli in dit probleem voor een mootje dz.

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2(z,t)}{2g} \right\}$$

Aangezien de druk overal in het straaltje p_a (constant) is, volgt:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ z + \frac{v^2(z,t)}{2g} \right\}$$

- b) In het geval van een stationaire stroming is de snelheid onafhankelijk van de tijd dus:

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left\{ z + \frac{v^2(z,t)}{2g} \right\} = 0$$

Integratie geeft dat

$$\frac{v^2(z,t)}{2g} + z = \text{constant langs (I) het straaltje. (vergelijking van Bernoulli)}$$

- c) Toepassing van b(I) geeft als we de hoogte in A_2 z_2 noemen en de snelheid v_2 en in A_1 resp. z_1 en v_1 dat

$$\frac{v_1^2(z_1,t)}{2g} + z_1 = \frac{v_2^2(z_2,t)}{2g} + z_2$$

Aangezien $z_1 - z_2 = 0,20[m]$, volgt dat

$$v_2^2(z_2,t) - v_1^2(z_1,t) = + 2g \cdot 0,2 = 4 \quad (\text{II})$$

Voor deze stroming geldt tevens dat het debiet in elke doorsnede gelijk is.

M.a.w.

$$Q_{A_1} = Q_{A_2}$$

Noemen we A_1^* en A_2^* de oppervlaktes van A_1 resp. A_2 dan geldt er, dat

$$v_1 A_1^* = v_2 A_2^*$$

$$\text{Oftewel } v_1 \cdot \frac{\pi}{4} D_1^2 = v_2 \cdot \frac{\pi}{4} D_2^2$$

Gegeven is dat

$$D_1 = 2D_2$$

Substitutie geeft

$$v_1 = \frac{v_2}{4}$$

Substitutie in II geeft tenslotte

$$\frac{15}{16} v_2^2 = 4$$

Oftewel:

$$v_2 = \underline{\underline{\frac{8}{15} \sqrt{15} \text{ [m/s]}}}$$

N.B. We hadden in dit vraagstuk ook de snelheid in A_1 kunnen geven om daarmee de diameter in doorsnede A_2 te bepalen. Doe het zelf maar eens.
Een verticale waterstraal (naar beneden) snoert dus altijd in bij aanwezigheid van gravitatie).

- 6 a) Daar we te maken hebben met een stationaire stroming zal de vloeistofhoogte in het kanaal niet veranderen in de tijd.
M.a.w. we kunnen de vloeistofspiegel als een "vaste" wand beschouwen.
Aangezien we met een homogene ideale vloeistof te maken hebben, zal de vergelijking van Bernoulli geldig zijn.
In een buis gebruikten we de buisas als referentie, echter in deze stromingsvorm is moeilijk zo'n as aan te wijzen.
In deze stroming geldt echter dat de stijghoogte constant is over de dwarsdoorsnede. In dwarsdoorsnede A_1 is deze op hoogte z

$$h_1 = \frac{p_1(z) - p_a}{\rho g} + z \quad (0 < z < z_1)$$

$$= \frac{p_a + \rho g (z_1 - z) - p_a}{\rho g} + z = z_1$$

Dus de stijghoogte in dwarsdoorsnede A_1 is

$$h_1 = z_1 [\text{m}].$$

Evenzo is de stijghoogte in doorsnede A_2

$$h_2 = z_2 [\text{m}]$$

Nu volgt uit Bernoulli (stationaire stroming) dat de stuwhoogte in elke dwarsdoorsnede gelijk is:

M.a.w.

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{I})$$

(In een buis geldt dit langs de buis-as.)

b) De volumebalansvergelijking voor het balansgebied luidt:

$$b z_1 v_1 = b(z_2 - a) v_2 \quad (\text{II})$$

Oftewel

$$v_1 z_1 = (z_2 - a) v_2.$$

We willen nu v_2 uitdrukken in v_1 en z_1 .

We lossen daartoe z_2 uit (II) op en vinden:

$$z_2 = z_1 \frac{v_1}{v_2} + a$$

Deze gelijkheid substitueren we in (I). Hetgeen resulteert in:

$$v_2^3 + \{ 2ga - v_1^2 - 2gz_1 \} v_2 + 2gz_1 v_1 = 0$$

Dus de relatie is een 3de machtsvergelijking die we niet zo maar even kunnen oplossen. Meestal gebeurt dit iteratief.

Substitutie van de gegeven waarden geeft:

$$\underline{\underline{v_2^3 - 31 v_2 + 40 = 0}}$$

- a) De traagheid van de duiker met constante vierkante dwarsdoorsnede is:

$$M = \frac{\ell}{gA} = \frac{50}{10.4} = \frac{5}{4} \left[\frac{s^2}{m} \right]$$

- b) De verandering van het debiet wordt bepaald door:

$$M \frac{dQ}{dt} = H_1 - H_2.$$

(H_i = stijghoogte in dwarsdoorsnede A_i)

Uitwerking levert, dat

$$\frac{5}{4} \frac{dQ}{dt} = 3 - 2 \rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{4}{5}.$$

Met $Q = A \cdot v(x,t) = A v(t)$ volgt

$$\text{ddt: } A \frac{dv}{dt} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

- c) Doordat de peilen de eerste 10[s] niet veranderen blijft het stuw (stijg-)hoogteverschil over de duiker aanwezig. Uit (b) volgt:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{4}{5} \rightarrow Q(t) = \frac{4}{5} t$$

Dus het aantal [m^3] water dat in (0,10) uit de boezem stroomt is:

$$\int_0^{10} Q(t) dt = \frac{2}{5} t^2 \Big|_0^{10} = 40 [m^3].$$

- d) Nee. zie b.

- a) De traagheid van de buis tussen de vaste dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 is:

$$M = \frac{\ell}{gA} = \frac{10}{10 \cdot \frac{\pi}{4} (0,1)^2} = \frac{400}{\pi}$$

- b) De relatie tussen het debiet en het stijghoogteverschil over het vaste balansgebied tussen A_1 en A_2 is:

$$M \frac{dQ}{dt} = h_1 - h_2$$

(h_i = stijghoogte in dwarsdoorsnede A_i).

c) Voor het debiet in de buis geldt

$$\frac{400 \cdot dQ}{\pi \, dt} = 10 \quad (h_i = \frac{p_i - p_a}{\rho g} + z_i)$$

$$\rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\pi}{40} \rightarrow Q(t) = \frac{\pi}{40} t \cdot [\text{m}^3/\text{s}] \quad (1)$$

Daar het debiet in elke dwarsdoorsnede gelijk moet zijn, geldt dus ook dat het debiet Q_1 welke aan vat T toegevoerd moet worden gelijk is aan

$$Q_1 = \frac{\pi}{40} t \, [\text{m}^3/\text{s}]$$

d) Aangezien $Q(t) = A(z) v(z, t)$ en de dwarsdoorsnede langs de buis constant is volgt dat

$$Q(t) = A \cdot v(t)$$

Met (1) volgt, dat $v(t) = \frac{1}{10} t$, dus de vloeistof stroomt niet-stationair.

9 a) De traagheid van het balansgebied tussen A_1 en A_2 is:

$$M = \frac{\ell}{gA} = \frac{300}{10 \cdot 10} = 3 [\text{s}^2/\text{m}^2].$$

b) De verandering van het debiet per tijdseenheid volgt uit de relatie

$$M \frac{dQ}{dt} = h_1 - h_2.$$

(h_1 = stijghoogte in dwarsdoorsnede A_1).

Met $h_1 - h_2 = h_a - 2$ volgt dat

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{h_a - 2}{3}$$

oftewel met $Q = A \cdot v(t)$ (A constant)

$$\frac{dv(o^+)}{dt} = \frac{Q}{A} = \frac{h_a - 2}{30}$$

Dus de versnelling op tijdstip $t = o^+$ is $\frac{h_a - 2}{30}$.

Voor grotere t zal h_a afnemen dus ook de versnelling van het water.

- c) Aangezien het volume van het meer groot is t.o.v. die van het kanaal, mogen we veronderstellen dat de snelheid in het meer ongeveer nul is zodat er geldt dat

$$B \frac{dh_a}{dt} = Q \quad \text{met } B = 5000 [\text{m}^2].$$

- d) Voor het kanaal geldt bij benadering dat:

$$\begin{aligned} M \frac{dQ}{dt} &= h_a - h_2 \\ &= h_a - 2 \end{aligned}$$

Differentiatie naar de tijd en substitutie van c geeft

$$BM \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} - Q(t) = 0$$

- a) De traagheid van de buis volgt uit

$$M = \frac{1}{g} \int \frac{dx}{A(x)}$$

omdat het oppervlak van de dwarsdoorsnede varieert langs de x-as.

Het oppervlak ter plaatse van x is:

$$A(x) = \pi \cdot 10^{-10} x^4.$$

Dus

$$M = \frac{10^{10}}{10 \cdot \pi} \int_{10}^{100} \frac{dx}{x^4} = \frac{10^9}{\pi} \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_{10}^{100} = \frac{10^6}{3\pi} - \frac{10^3}{3\pi}$$

We zien hieruit, dat de traagheid vooral bepaald wordt door het nauwe buisgedeelte.

- b) Voor het balansgebied, geldt:

$$M \frac{dQ}{dt} = (H_1 - H_2)$$

Aangezien de stroming stationair is geldt er dat $\frac{dQ}{dt} = 0$, dus

$$\begin{aligned} H_1 &= H_2 & (H_1 \text{ is stuwhoogte op } x = 10) \\ & & (H_2 \text{ " " op } x = 100). \end{aligned}$$

Uitwerking levert dat:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Nu geldt dat $z_1 = z_2$ en uit het feit dat Q constant is volgt dat

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{10^{-6}\pi}{10^{-2}\pi} = 10^4.$$

Het drukverschil over de buis is dan dus:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

Met $v_1^2 = 10^8 v_2^2$, volgt er dat

$$p_1 - p_2 = 250 (v_2^2 - 10^8 v_2^2)$$

$$\approx -250 \cdot 10^8 v_2^2$$

Stel b.v. $v_1 = 1 \text{ [m/s]} \rightarrow v_2 = 10^{-4} \text{ [m/s]}$

$$\rightarrow p_1 - p_2 \approx -250 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

c) De traagheid van de moot wordt bepaald door

$$M = \frac{1}{g} \int_{s=0}^{s=R\alpha} \frac{ds}{A} = \frac{1}{10 \cdot A} R\alpha = \frac{50}{5} = 10 \text{ [s}^2/\text{m}^2]$$

d) Dat we te maken hebben met een homogene ideale vloeistof.

ADVIEZEN TOETS 10 (Lees de doelstelling bij het adviesnummer)

1. Bestudeer opnieuw Hoofdstuk II, de bijbehorende studievragen, de beweringen 10.1 t/m 10.3 en de aanvullende vraagstukken 1 en 2.
Probeer zelf vraagstukken te verzinnen.
2. Bestudeer opnieuw de hoofdstukken III en IV, de bijbehorende studievragen, de beweringen 10.4 t/m 10.6 en de aanvullende vraagstukken 3 en 4. Verander de gegevens in de vraagstukken en maak ze nogmaals.
3. Bestudeer opnieuw hoofdstuk IV, de bijbehorende studievragen, de beweringen en 10.7 t/m 10.9 en de aanvullende vraagstukken 5 en 6.
Probeer zelf nieuwe vraagstukken te ontwerpen en laat ze controleren op een instructie.
4. Bestudeer opnieuw hoofdstuk V, de bijbehorende studievragen, de beweringen 10.10 t/m 10.12 en de aanvullende vraagstukken 7 en 8.
Maak zelf nieuwe vraagstukken.
5. Bestudeer opnieuw hoofdstuk V, de bijbehorende studievragen, de beweringen 10.13 t/m 10.15 en de aanvullende vraagstukken 9 en 10.
Probeer zelf varianten te verzinnen.

HANDLEIDING BIJ EENHEID 11

STROMINGSWEERSTANDEN

INHOUDSOPGAVE

	pag.
I. Inleiding.	1104
II. Stroomweerstand in laminaire stromen.	1107
II.I. Viscositeit en laminaire stromen.	1107
II.II. Stroming door een poreus materiaal.	1122
II.III. Criterium voor laminaire en turbulente stroming.	1124
III. Turbulente stroming in een kanaal of buis.	1125
III.I. Stromingsweerstand volgens Chezy.	1127
III.II. Grenslagen.	1130
III.III. Stroming bij profielverandering.	1130
IV. Buis met niet stationaire volumestroom.	1133
Resumé.	1137
Beweringen.	1138
Aanvullende vraagstukken.	1140
Antwoorden of aanwijzingen bij de studievragen.	1146
Antwoorden na aanwijzingen bij de studievragen.	1158
Commentaar op de beweringen.	1163
Uitwerking aanvullende vraagstukken.	1166
Adviezen toets 11.	1184

SYMBOLENLIJST

A	oppervlakte, dwarsdoorsnede	- [m ²]
a	diepte, straal	- [m]
b	afmeting	- [m]
C	constante van Chezy	- [m ² /s]
c	vormcoëfficiënt	- [-]
d	diepte, diameter, dwarsafmeting	- [m]
D	diameter	- [m]
$\vec{e}$	eenheidsvector	- [-]
$\vec{F}$	spanningsvector	- [N/m ²]
$\vec{F}$	krachtvector	- [N]
$\vec{G}$	krachtvector	- [N]
$\vec{g}$	gravitatieversnelling	- [m/s ²]
h _i	stijghoogte	- [m]
H _i	stijghoogte	- [m]
I	sin α	- [-]
K	doorlating	- [m ² /s]
k	doorlatendheid	- [m/s]
l	lengte	- [m]
M	traagheid	- [s ² /m ²]
m	massa	- [kg]
p	druk, impulscomponent	- [N/m ²], [Ns]
Q	debiet	- [m ³ /s]
q	specifiek debiet	- [m/s]
R	weerstand	- [s/m ²]
r	straal	- [m]
S	massastroom (soms dwarsdoorsnede)	- [kg/s]
t	tijd	- [s]
$\vec{v}$	snelheidsvector	- [m/s]
v _{gem}	gemiddelde snelheid	- [m/s]
(x, y, z)	coördinaatassen.	
(x ¹ , y ¹ , z ¹)		
α	- hoek	
δ	- kleine hoogte	- [m]
μ	- contractiecoëfficiënt	
η	- dynamische viscositeit	- [Ns/m ²]
ρ	- dichtheid	- [kg/m ³]
ν	- kinematische viscositeit	- [m ² /s]
τ	- schuifspanning	- [N/m ²]

SAMENVATTING

In deze eenheid beschouwen we vloeistoffen, die nog wel onsamen-drukbaar en homogeen zijn, echter waarvan we de schuifspanningen binnen de vloeistof niet meer verwaarlozen.

Er zal blijken, dat afhankelijk van de viscositeit (coëfficiënt van inwendige wrijving) en de snelheid van de vloeistof en de geometrische vorm van de leiding waardoor de vloeistof stroomt, twee stromingswijzen van de vloeistof mogelijk zijn en wel laminaire en turbulente stroming.

Voor beide stromingswijzen worden bij stationaire stroming de relaties bepaald tussen de stuwhoogte verschillen en het debiet in enkele geometrische configuraties, hetgeen resulteert in de zgn. toestandsvergelijkingen, waaruit b.v. de weerstanden van de geometrie volgen.

In laminaire stroming van een vloeistof blijkt de schuifspanning recht evenredig met de verandering van de snelheid over de doorsnede, terwijl in een turbulente stroming de schuifspanning evenredig is met het kwadraat van die verandering.

Dit geeft reeds het vermoeden, dat de weerstandsverliezen in een turbulente stroom groter zullen zijn, dan in een laminaire.

In de praktijk betekent dit, dat we turbulentie proberen te vermijden door stroomlijning van een profiel in de stroomrichting. Om de invloed van plotselinge veranderingen in een dwarsprofiel op het weerstandsverlies in een geometrie te laten zien worden de zgn. Carnot-verliezen bepaald.

Tenslotte worden de toestandsvergelijkingen voor een buis met niet-stationair debiet $Q(t)$ afgeleid, waarbij we naast een weerstandseffect bovendien een traagheidseffect in de buis in rekening brengen.

DOELSTELLINGEN

1. Het onderscheid kennen tussen laminaire en turbulente stromingen.
De betekenis kennen van het getal van Reynolds voor het onderscheid tussen laminaire en turbulente stroming.
Zelf in een probleem uit kunnen maken of de stroom laminair dan wel turbulent is.
2. De wetten van Poiseuille en Darcy kennen bij laminaire stromen.
De weerstand en de doorlating van een buis of kanaal of grond-lichaam kunnen bepalen en het verband daarvan met hoogtes en volumestromen.
De samenstelling van weerstanden en doorlatingen in serie en parallel kennen.
3. De wetten van Chézy en Carnot kunnen toepassen bij turbulente stromen voor het bepalen van weerstanden en doorlatingen en daarbij blijk geven van het inzicht dat het verband tussen hoogtes en volumestromen niet-lineair is en verschillend kan zijn voor de twee stroomrichtingen.
4. Het kunnen opstellen van vergelijkingen door stroomvoerende vaten met traagheid en tevens weerstand en voor combinaties van vaten met hetzij traagheid dan wel weerstand.
5. Fysische dimensies kennen van de gebruikte grootheden.

INLEIDING

In de eenheden 9 en 10 is steeds uitgegaan van de aanname dat we te maken zouden hebben met vloeistoffen, waarin alleen isotrope druk en geen schuifspanningen optreden.

In deze eenheid gaan we rekening houden met de schuifspanningen, waarbij we onderscheid maken tussen laminaire en turbulente stroming van de vloeistof.

In eenheid 9 is voor de spanningsvector $\vec{f}$ in een punt in een vloeistof afgeleid, dat:

$$\vec{f} = p \vec{e}_n - \tau \vec{e}_t$$

De isotrope druk P is zo gedefinieerd, dat deze positief is bij drukspanning. Dit in tegenstelling tot de definitie van positieve spanning bij wisselwerkingen tussen puntmassa's.

Aangezien in een vloeistof bijna nooit trekspanningen kunnen optreden (de uitzondering is cohesie), wordt hier druk positief gekozen en er geldt dus altijd $p \geq 0$.

Het minteken voor de schuifspanning τ is een gevolg van de gehanteerde tekenconventie in de Toegepaste Mechanica.

Zoals boven reeds is vermeld maken we onderscheid tussen laminaire en turbulente stroming van de vloeistof.

Ter verduidelijking van deze stromingswijzes geven we het volgende voorbeeld.

We beschouwen een stationaire stroming door een buis en meten de snelheid in een vast punt P (zie figuur 1) met een daarvoor geschikt instrument b.v. een klein meetschroefje, dat door de waterstroom rond wordt gedraaid.

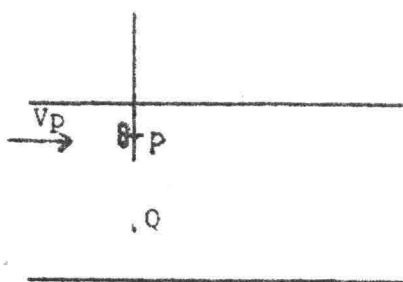
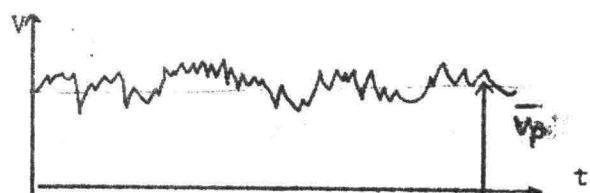
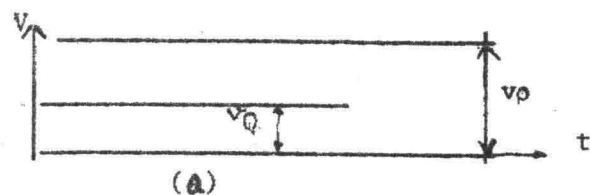


fig.1



(b) fig.2

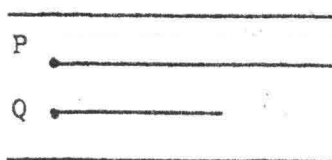
We registreren de snelheid v in P als functie van de tijd t .
In een bepaald geval vinden we een registratie als aangegeven in fig.2a, d.w.z. een constante waarde v_p . De stromingswijze in de buis noemen we dan laminair.

Op een andere plaats b.v. Q vinden we dan eveneens een constante snelheid met een (andere) waarde

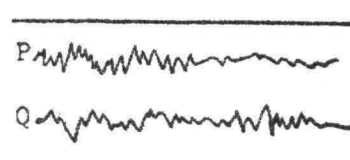
In een ander geval vinden we een registratie als aangegeven is fig. 2b. De gemeten snelheid vertoont hier onregelmatige fluctuaties t.o.v. een constante gemiddelde waarde v_p . Dit wijst erop dat de stroming turbulent is.

De waarde v_p noemen we de snelheid van de hoofdstroming in P.
De onregelmatige fluctuaties van v_p noemen we de turbulentie.

Een andere wijze om het verschil tussen laminaire en turbulente stroming te constateren is aangegeven in fig. 3.



(A)



(B)

fig. 3.

In een buis of open kanaal wordt op een zeker tijdstip op een plaats P een klein voorwerp (drijver) in de stroming gebracht, dat door de vloeistof wordt meegevoerd.

In een laminaire stroming (fig.3a) zal de baan van de drijver een gladde rechte (of kromme) lijn zijn.

In een turbulente stroming, vertoont de baan van de drijver onregelmatige afwijkingen van een gladd~~e~~ lijn.

Opmerkingen:

1. de stroming, resp. de hoofdstroming was in de gegeven voorbeelden stationair in de tijd.
Een laminaire stroming, resp. de hoofdstroming bij optreden van turbulentie kunnen in het algemeen van de plaats en van de tijd afhangen.
2. Behalve het optreden van fluctuaties in de snelheid of de baan van een drijver kunnen ook het optreden van onregelmatige druk of onregelmatig veranderende oneffenheden in de vloeistofspiegel wijzen op turbulentie. Niet alle onregelmatigheden zijn echter aan turbulentie toe te schrijven.
3. De meting met een meetschroefje is een voorbeeld van een Euler-beschrijving van de stroming; de bepaling van de baan van een drijver is een voorbeeld van een Lagrange-beschrijving.
4. Praktische voorbeelden van laminaire en turbulente (*) stroming vindt

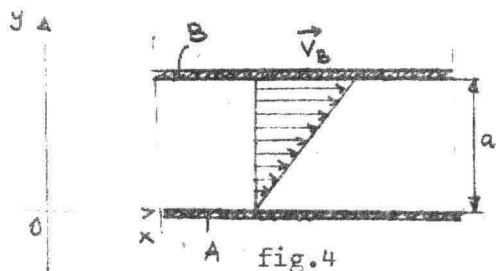
U bij :

- het kielzog van een schip (*)
- een langzaam lopende waterkraan
(overgang laminair naar turbulent)
- een lucifer in waterstraal (*)
- de rook uit een schroosteen (*)
- cumule^us-wolken die aan de horizon zichtbaar zijn (*)

Soms is turbulentie hoorbaar b.v. bij het ruisen van een beek.

II. STROOMWEERSTANDEN IN LAMINAIRE STROMEN

II.I. Viscositeit en laminaire stromen.



We beschouwen twee oneindig lange platen A en B waar tussen zich een viskeuze vloeistof bevindt, dwz. een vloeistof, die inwendige wrijving heeft. Veronderstel dat we plaat A in rust houden t.o.v. het inertiaalstelsel Oxy en dat plaat B met een constante snelheid $v \vec{e}_x$ beweegt.

In het algemeen zal er bij een vloeistofstroming langs een wand een slip optreden en zal de snelheid van de vloeistofdeeltjes niet gelijk zijn aan de snelheid van de wand. Deze slip is echter alleen bij zeer lage dichtheden van belang, zodat voor normale viskeuze vloeistoffen gesteld mag worden, dat de vloeistof door adhesie aan de wand blijft "plakken" d.w.z. de snelheid ervan t.o.v. de wand is nul.

De vloeistofdeeltjes, die tegen plaat A aanliggen zullen dus in rust zijn, terwijl de vloeistofdeeltjes, die tegen plaat B aanliggen de snelheid $v \vec{e}_x$ zullen krijgen. We veronderstellen de stroming van de vloeistof stationair.

Om deze stromingstoestand als die in fig.4 in stand te houden blijkt empirisch, dat op de beide platen krachten moeten worden uitgeoefend.

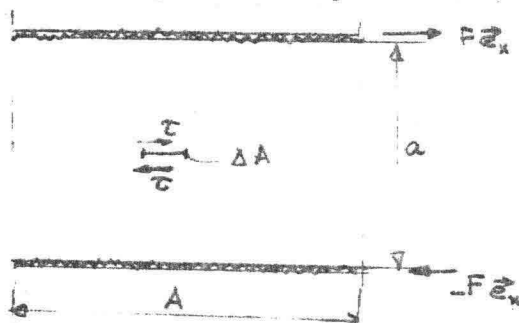


fig. 5

Over een oppervlak A (zie fig.5) moet een kracht $F \vec{e}_x$ naar links op de onderste plaat werken.

Deze krachten worden op de vloeistof overgebracht.

Beschouwen we namelijk een doorsnede op afstand y van de plaat A, dan (fig.6) blijkt uit een evenwichtsbeschouwing in de x-richting van het mootje met volumen Ay , dat in de doorsnede een kracht moet werken, aangezien de vloeistof niet versneld wordt en er geen andere krachten op het mootje werken.

(De drukkrachten links en rechts heffen elkaar op)

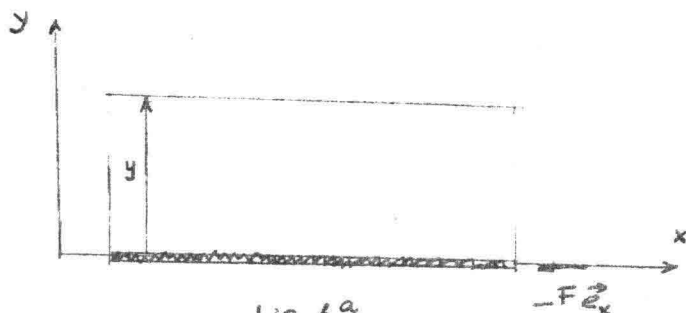


fig. 6^a

We maken hieruit op dat er in de vloeistof een schuifspanning $\tau = F/A$ heerst en wel zodanig dat op ieder vlakje ΔA evenwijdig met de beide platen, door de vloeistof boven dat vlakje (fig.5) op de vloeistof daaronder een kracht $\tau \Delta A \vec{e}_x$ naar rechts wordt uitgeoefend en tevens (beginsel van actie en reactie) door de onderste vloeistof op de bovenste vloeistof een kracht $-\tau \Delta A \vec{e}_x$ naar links. Bij veel stoffen b.v. water, olie, lucht etc. geldt bij laminaire stroming voor de schuifspanning τ de wet van Newton.

$$\tau = \eta \frac{v_x}{y} \quad (1)$$

Hierin stelt η de dynamische viscositeit van de vloeistof voor.

Bij deze stoffen vinden we dan ook in het bovenstaande probleem, daar τ constant is, dat:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\tau}{\eta} = \text{constant} \quad (2)$$

Daar

$$\begin{aligned} v_x &= 0 & \text{voor } y &= 0 \\ v_x &= & \text{voor } y &= a \end{aligned}$$

vinden we na integratie van (2)

$$v_x = \frac{v_b}{a} y \quad (\text{zie figuur 4}) \quad (3)$$

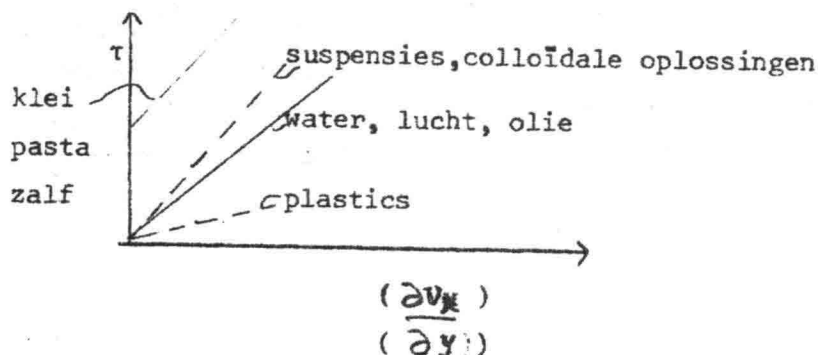
Oftewel het snelheidsverloop is lineair over de hoogte.

Uit (3) volgt tevens de grootte van de schuifspanning nl.

$$\tau = \eta \frac{v_b}{a} \quad (3a)$$

Opmerkingen:

1. De dynamische viscositeit η is vrijwel onafhankelijk van de druk, echter wel afhankelijk van de temperatuur.
2. Er zijn vele media, die niet aan de wet van Newton voldoen met η constant,



zoals blijkt uit nevenstaande grafiek. Bovendien geldt (1) alleen voor laminaire stromen.

3. Vaak wordt η geschreven als $\rho \nu$ met de ρ de dichtheid en ν de kinematische viscositeit. De fysische dimensie van ν is nl. $[m^2/s]$ hetgeen een kinematische grootte is.

tabel 1: Enkele gegevens over dichtheid en viscositeitVerschillende stoffen bij 20°C.

	ρ (kg/m ³)	ν (m ² /sec)	η ($\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{sec}}$)
kwik	13600	$0,114 \cdot 10^{-6}$	$15,50 \cdot 10^{-4}$
ether	720	$0,316 \cdot 10^{-6}$	$2,275 \cdot 10^{-4}$
benzol	880	$0,75 \cdot 10^{-6}$	$6,60 \cdot 10^{-4}$
water	1000	$1,01 \cdot 10^{-6}$	$10,1 \cdot 10^{-4}$
spiritus	850	$1,51 \cdot 10^{-6}$	$12,8 \cdot 10^{-4}$
lucht (bij 760 mm hg)	1,2	$14,9 \cdot 10^{-6}$	$0,179 \cdot 10^{-4}$
glycerine	1250	$850 \cdot 10^{-6}$	$10625 \cdot 10^{-4}$

De invloed van de temperatuur op ν

T °C	ν van water (m ² /sec)	ν van lucht (m ² /sec) (bij $p = 760$ mm hg)
0	$1,80 \cdot 10^{-6}$	$13,0 \cdot 10^{-6}$
10	$1,30 \cdot 10^{-6}$	$13,9 \cdot 10^{-6}$
20	$1,01 \cdot 10^{-6}$	$14,9 \cdot 10^{-6}$
40	$0,661 \cdot 10^{-6}$	$17 \cdot 10^{-6}$
60	$0,482 \cdot 10^{-6}$	$19,2 \cdot 10^{-6}$
80	$0,368 \cdot 10^{-6}$	$21,7 \cdot 10^{-6}$
100	$0,296 \cdot 10^{-6}$	$24,5 \cdot 10^{-6}$

Gegevens voor atmosferische lucht volgens standaardatmosfeer: ARDC 1959

hoogte	t °C	ρ (kg/m ³)	ν (m ² /sec)	η ($\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{sec}}$)
zeeniveau	15	1,225	$14,6 \cdot 10^{-6}$	$0,1788 \cdot 10^{-4}$
1000 m	8,5	1,111	$15,8 \cdot 10^{-6}$	$0,1755 \cdot 10^{-4}$
5000 m	- 17,47	0,735	$22,1 \cdot 10^{-6}$	$0,1624 \cdot 10^{-4}$
10000 m	- 49,90	0,412	$35,3 \cdot 10^{-6}$	$0,1454 \cdot 10^{-4}$
20000 m	-56,5	0,088	$159,9 \cdot 10^{-6}$	$0,1407 \cdot 10^{-4}$

 ρ = dichtheid ν = kinematische viscositeit = η / ρ η = dynamische viscositeit

kg = kg massa.

Met behulp van de wet van Newton zijn alle viskeuze schuifspanningen in een vloeistof te bepalen, d.w.z. alle schuifspanningen, die het gevolg zijn van de inwendige wrijving van de vloeistof zijn met (1) te bepalen.

Studievraag 11.1: Bepaal de schuifspanning in water bij laminare stationaire stroming tussen twee platen. Gegeven $v_b = 10^{-2}$ [m/s] en $a = 10^{-2}$ [m]. Voor gegevens van water zie tabel 1. $T = 20^\circ\text{C}$.

Een in de praktijk veel voorkomend stroomvoerend vat is de buis.

Voor deze geometrie zullen we in eerste instantie het snelheidsverloop over de dwarsdoorsnede bepalen.

We beschouwen een stationaire stroming door een cilindrische rechte buis met constante diameter $d=2a$. De vloeistofdeeltjes bewegen evenwijdig met de buis, die we als x-as kiezen.

Zulk een stroming noemen we laminair. De vloeistof stroomt in de x-richting, en is onsamendrukbaar, en homogeen.

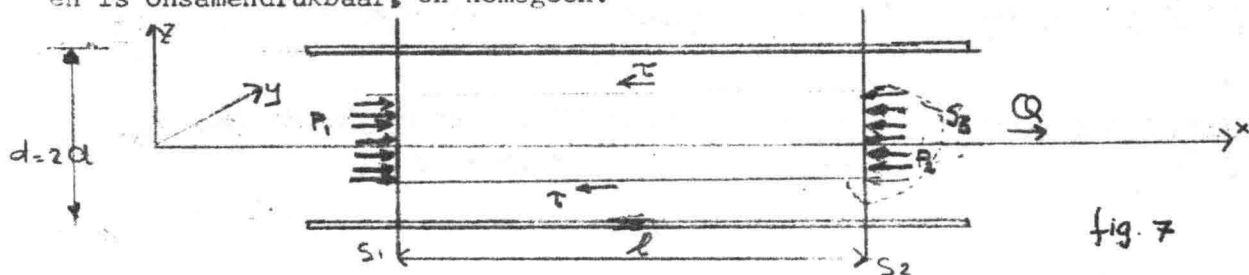


fig. 7

De vloeistofbeweging in de buis is stationair d.w.z. dat de snelheid v van de vloeistofdeeltjes een functie is van de plaats, dus $v = v(x, y, z)$. echter niet van de tijdparameter t , dus $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

Omdat we te maken hebben met een homogene onsamendrukbare vloeistof is het debiet Q door de buis onafhankelijk van x (zie eenheid 10). Daar de doorsnede $A = \pi a^2$ onafhankelijk van x is, zal dus ook de snelheid v onafhankelijk van x moeten zijn. Met andere woorden er geldt dat $v = v(y, z)$. We veronderstellen de stroming rotatiesymmetrisch, er volgt dan dat $v = v(r)$ met $r^2 = y^2 + z^2$.

Teneinde de snelheidsverdeling van de vloeistof over de dwarsdoorsnede van de buis te bepalen, stellen we een impulsbalans op. We kiezen een balansgebied GB, dat begrensd wordt door twee dwarsprofielen S_1 en S_2 op afstand l van elkaar en verder door een cilindermantel S_3 met straal $r < a$. We stellen de balans op voor de x -gerichte impuls. Voorlopig laten we de invloed van de zwaartekracht buiten beschouwing. Gezien het stationair zijn van de vloeistofstroom betekent dit, dat de druk p alleen nog van de x kan afhangen dus $p = p(x)$.

Studievraag 11.2: *Probeer aannemelijk te maken, dat de druk p niet van y en z afhankelijk is.*

In de dwarsdoorsnedes S_1 resp. S_2 werkt in de x -richting een drukkracht $\vec{F}_1 = p_1 \pi r^2 \vec{e}_x$ resp. $\vec{F}_2 = -p_2 \pi r^2 \vec{e}_x$.

(p_1 is de druk op S_1 , p_2 de druk op S_2 . De drukkracht van S_3 op GB werkt niet in de x -richting).

Daar we te maken hebben met een laminaire viskeuze stroom geldt langs de cilinder S_3 de wet van Newton.

Langs S_3 werkt dus een schuifspanning $\tau = -\eta \frac{dv}{dr}$.

Het min-teken ontstaat, doordat we nu niet zoals in fig. 6a vanuit de wand meten, maar naar de wand toe (fig. 7).

Aangezien de stroming rotatiesymmetrisch is, geldt dat:

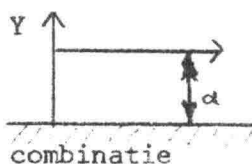


fig. 6a en 7.

$$\begin{aligned} r &= a - y \\ \text{zodat} \\ \tau &= \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial r} \frac{dr}{dy} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial r} \end{aligned}$$

Dit resulteert in een schuifkracht lang S_3 ter grootte van :

$$\vec{F}_3 = -\tau \cdot \text{opp} \vec{S}_3 \cdot \vec{e}_x = -\tau \cdot 2\pi r l \vec{e}_x = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} \vec{e}_x$$

in de richting

Omdat de snelheid v alleen een funktie is van de straal r van de buis en niet van de tijd, geldt voor de impulsbalans in de x-richting, dat:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{d}{dt} (p) = 0$$

Oftewel:

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 + 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} \vec{e}_x = 0$$

Hier uit volgt, dat

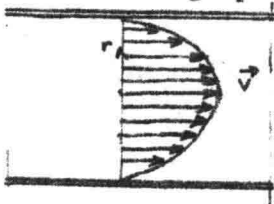
$$\frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = - \frac{p_1 - p_2}{\eta l} \quad (4)$$

De randvoorwaarde $v=0$ op $r=a$ geeft bij integratie van (2) de snelheidsverdeling volgens Poiseuille:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} (a^2 - r^2) \quad (5)$$

Ook wel wet van Poiseuille genoemd.

De wet is tegelijkertijd door Hagen en door Poiseuille empirisch opgesteld. Vaak wordt daarom ook wel van de wet van Hagen of van Hagen-Poiseuille gesproken.



snelheidsverdeling in de buis.

fig. 8

Opmerking: De stroming van het bloed in de aderen is b.v. een Poiseuille stroming.

In het voorgaande hebben we vooralsnog de invloed van de zwaartekracht buiten beschouwing gelaten.

Teneinde de invloed ervan duidelijk te maken, plaatsen we de buis vertikaal in een lokaal gravitatieveld met versnelling

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z$$

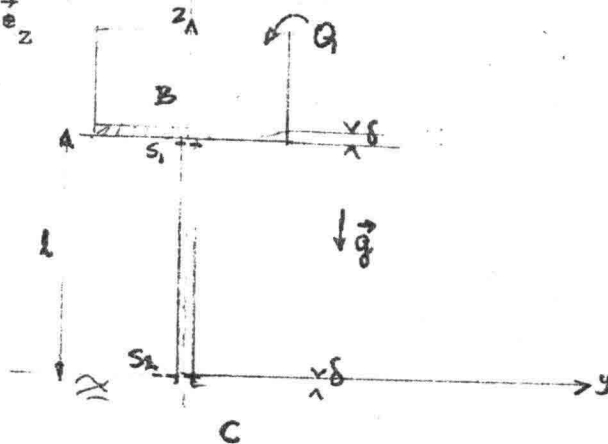


fig. 9

We beschouwen daartoe de opstelling van fig. 9.

De waterstand in bak B wordt steeds op het niveau δ gehouden door vloeistof in de bak bij te gieten (debiet Q).

Het vloeistofniveau C onderaan de buis is constant en staat een niveau δ boven de uitstroomopening van de buis.

De grootte δ veronderstellen we zeer klein.

We kunnen nu geen mootje uit de buis beschouwen aangezien de schuifspanning τ een drukverloop in de buis geeft en daarom nemen we een vloeistofmoot (cilindervormig) over de gehele lengte l van de buis.

De stroming in de buis veronderstellen we weer laminair en stationair, en we verwaarlozen de invloed van de vloeistofhoogtes δ ($\delta \ll l$).

De vloeistofspiegels B en C staan in direkt contact met de buitenlucht, dus er heerst een atmosferische druk p_a .

Bij het opstellen van de impulsbalans moeten we ook de volumekracht $\vec{G}$ van de vloeistofcilinder in rekening brengen.

De impulsbalans voor het gebied, begrensd door S_1, S_2 en de cilindermantel S_3 , levert dan:

$$\vec{G} + \vec{F}_{S_1} + \vec{F}_{S_2} + \vec{F}_{S_3} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

Oftewel:

$$-p_a \pi r^2 \vec{e}_z + p_a \pi r^2 \vec{e}_z - p g l \pi r^2 \vec{e}_z - 2\pi r l \eta \frac{dv \vec{e}_z}{dr} = \vec{0}$$

Hieruit volgt, dat:

$$-\frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = + \frac{\rho g}{\eta} = + \frac{\rho g}{\eta} \quad (6)$$

Integratie van (6) met randvoorwaarde $v=0$ op $r=a$ levert:

$$v(r) = \frac{\rho g}{4\eta} (a^2 - r^2) \quad (7)$$

Na deze introductie van de zwaartekracht bij een verticale buis gaan we terug naar de horizontale buis, die nu geplaatst is in een lokaal gravitatieveld.

De vloeistof stroomt weer laminair en stationair en voldoet aan de wet van Newton.

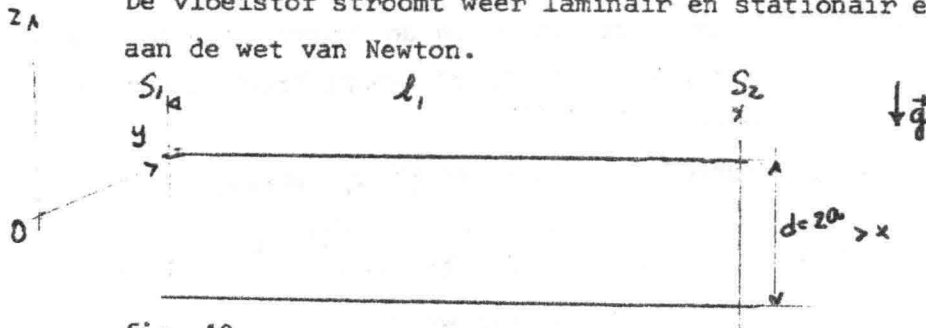


fig. 10

De zwaartekracht, die nu op de vloeistofmaterie werkt geeft een drukverloop over de dwarsdoorsnede van de buis.

Veronderstellen we de druk op de oppervlaktes van de dwarsdoorsnedes S_1 en S_2 resp. p_1 en p_2 , dan is het drukverloop over S_1 (zie fig. 11a) en de drukverloop over S_2 (zie fig. 11b).

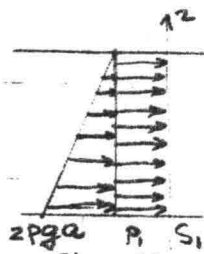


fig. 11a

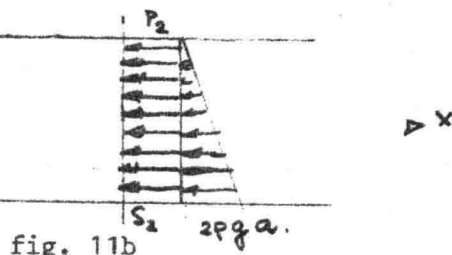


fig. 11b

De drukbijdrage van de zwaartekracht is dus in elk punt op hoogte z in beide dwarsdoorsnedes gelijk en levert dus geen bijdrage aan de impulsbalans voor een gebied begrensd door S_1, S_2 en de cilindermantel S_3 .

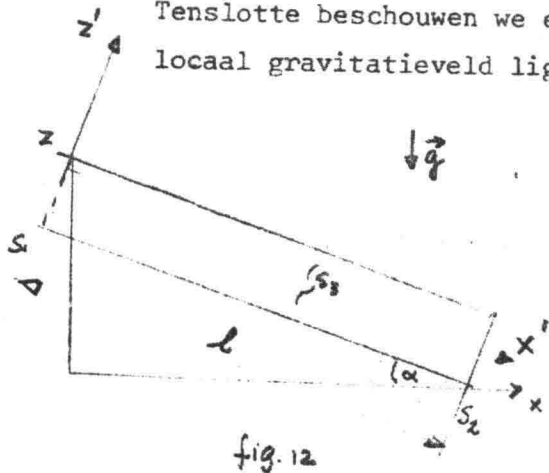
Uitwerking van de impulsbalans levert dus voor de snelheidsverdeling over de dwarsdoorsnede (zie (5))

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta} (a^2 - r^2) \quad (8)$$

Studievraag 11.3:

Toon wiskundig aan, dat de snelheidsverdeling (8) juist is.

Tenslotte beschouwen we een buis, die onder een helling in een lokaal gravitatieveld ligt.



De stroming veronderstellen we weer laminair en stationair en de vloeistof voldoet aan de wet van Newton.

De buis maakt een hoek $(\pi - \alpha)$ met de positieve x-as. De zwaartekrachtsversnelling is $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$

De drukverdelingen in de dwarsdoorsnede S_1 en S_2 t.g.v. de (volume) zwaartekracht is weer hydrostatisch.

Veronderstellen we de (oppervlakte)-druk in S_1 en S_2 p_1 resp. p_2 dan levert een impulsbalans voor het gebied omsloten door S_1 , S_2 en S_3 rekening houdend met de vloeistofmaterie in de cilinder.

(hydrostatische verdelingen vallen tegen elkaar weg)

$$p_1 \pi r^2 \vec{e}_{x'} - p_2 \pi r^2 \vec{e}_{x'} + p g l \pi r^2 \cos \alpha \vec{e}_{x'} + \eta r l \frac{dv}{dr} \vec{e}_{x'} = \vec{0}$$

Uitwerking levert met de randvoorwaarde

$v=0$ op $r=a$

$$v(r) = \frac{(a^2 - r^2)}{4 \eta l} \{ (p_1 - p_2 + p g l \cos \alpha) \} \quad (9)$$

Nu geldt dat $l \cos \alpha = z_1 - z_2$

met z_1 de plaatshoogte het middelpunt van S_1 en z_2 de plaatshoogte van het middelpunt S_2 .

Oftewel (9) is te schrijven, als

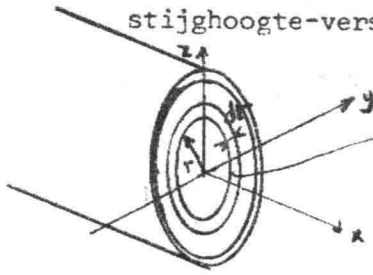
$$v(r) = \frac{a^2 - r^2}{4 \eta l} \{ p_1 + p g z_1 - (p_2 + p g z_2) \} \quad (10)$$

De stijghoogte was gedefinieerd als

$p g h_i = p_i + p g z_i$, dus de snelheidsverdeling in een buis, met laminaire, stationaire stroming van een vloeistof, die voldoet aan (1) is:

$$v(r) = p g \frac{(a^2 - r^2)}{4 \eta l} \{ h_1 - h_2 \} \quad (11)$$

Met de kennis van het verloop van de snelheid over de doorsnede kunnen we de relatie bepalen tussen de volumestroom Q en de stijghoogte-verschil ($h_1 - h_2$)



$2\pi r =$ omtrek. $\rightarrow$ opp. $2\pi r dr$.

Het debiet Q is gelijk aan

$$Q = \int_A v dA, \quad \text{oftewel met (11)}$$

fig. 13

$$Q = \int_0^a v \cdot 2\pi r dr = \frac{\rho g \pi a^4}{8 l \eta} (h_1 - h_2) \quad (12)$$

Deze formule geldt strikt genomen met h_1 en h_2 in de middelpunten van S_1 resp. S_2 echter de stijghoogte is ongeveer constant over deze doorsnedes.

Studievraag 11.4: Maak aannemelijk, dat de stijghoogte alleen afhangt van y , dus constant is over de dwarsdoorsnede.

Vgl. (12) is ook te schrijven als

$$Q = K (h_1 - h_2) \quad (13)$$

We noemen K in (13) de doorlating van de buis en deze is:

$$K = \rho g \frac{\pi a^4}{8 l \eta} = \rho g \frac{\pi d^4}{128 l \eta} \quad (14)$$

Omgekeerd is ook te stellen, dat:

$$(h_1 - h_2) = R Q \quad (15)$$

met $R = (K)^{-1}$ de weerstand van de buis.

In het algemeen kan voor een buis met constante, doch willekeurig gevormde dwarsdoorsnede, de doorlating van de buis bepaald worden met:

$$K = c \rho g \frac{d^4}{l \eta}$$

Waarin l de lengte, d een kenmerkende dwarsafmeting en C een vormcoëfficiënt van de buis is.

Voor een buis met elliptische dwarsdoorsnede geldt b.v.

Als we voor d nemen: $d = \sqrt[4]{\frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}}$ dan is $c = \frac{\pi}{4}$

met a, b de lange en korte halve as van de ellips

Voor een buis of open kanaal met rechthoekige dwarsdoorsnede



dan is $c = \frac{16}{k_0}$

Als $d = \sqrt[4]{ab^3}$

voor een buis

De waarde van K_0 voor verschillende waarden van $\frac{b}{a}$ worden gegeven in onderstaand tabel ($\frac{b}{a} = 1$ correspondeert met een vierkante buis en $\frac{b}{a} = 0$ met een spleet).

TABEL II

$\frac{b}{a} =$	1,0	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0
k_0	28.44	25.73	23.22	21.09	19.17	17.49	16.04	14.80	13.73	12.81	12.00

De beweging van een vloeistof in een open kanaal met lengte l en breedte a en diepte D is dezelfde als in een helft van een rechthoekige buis met de afmetingen $l, a, 2D$.

De doorlating van het kanaal is twee keer zo klein als die van de buis.

Voor een kanaal hebben we dus (als $a \geq 2D$).

$$c = \frac{4}{k_0}$$

$$d = \sqrt[4]{D^3 a}$$

Met K_0 bepaalt uit bovenstaande tabel als men $\frac{2D}{a}$ i.p.v. $\frac{b}{a}$ kiest.

Studievraag 11.5:

Door een buis met straal $a = 0,5$ [m] wordt een vloeistof gepompt, over een afstand van 1000 [m]

$$\eta_{vl} = 0,5 \left[\frac{kg}{ms} \right] \text{ en } \rho = 900 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

Bepaal de weerstand van de buis.

Aan welke eisen moet de stroming voldoen ?

Studievraag 11.6: *Bepaal de fysische dimensies van R en K.*

Met de snelheidsverdeling van Poiseuille hebben we de snelheid op elk punt in de dwarsdoorsnede bepaald.

Een vaak gehanteerde snelheidsgrootte is de gemiddelde snelheid over de dwarsdoorsnede gedefinieerd door

$$v_{\text{gem}} = \frac{Q}{A} \quad \begin{array}{l} Q = \text{volumestroom} \\ A = \text{oppervlak dwarsdoorsnede} \end{array}$$

In eenheid 10 hebben we de gemiddelde snelheid gedefinieerd als

$$v_{\text{gem}} = \frac{S}{A} = \frac{Q}{A}$$

Studievraag 11.7: *Bepaal de maximale snelheid in de Poiseuille verdeling in de buis met cirkelvormige doorsnede als deze horizontaal ligt. Bepaal tevens de gemiddelde snelheid.*

Studievraag 11.8: *Wat is het effect op de resultaten van een snelheidsverdeling, als een geïdealiseerd tot ideale vloeistof?*
Bij welke waarden van η verschillen de resultaten van de berekeningen minder dan bijv. 5% van de juiste waarden?

Studievraag 11.9: *Verklaar de invloed van de verhouding $\frac{b}{a}$ op K_0 in tabel II.*

Opmerkingen

1. We hebben nog steeds te maken met laminaire stationaire stroming van een vloeistof, die aan de wet van Newton voldoet.
2. Als we te maken hebben met stationaire stroming door een rechte buis met variabel dwarsprofiel moet vgl. (13) geschreven worden als:

$$Q = K (H_1 - H_2) \quad (15a)$$

waarbij de snelheid in S_1 en S_2 in overeenkomstige punten b.v. de middelpunten moet worden gekozen.

In (13) geldt namelijk dat $\frac{v_1^2}{2g}$ in $S_1 = \frac{v_2^2}{2g}$ in S_2 .

De in (15a) gebruikte grootheid

$$H_i = \frac{p_i}{\rho g} + z_i + \frac{v_i^2}{2g} \text{ is de in}$$

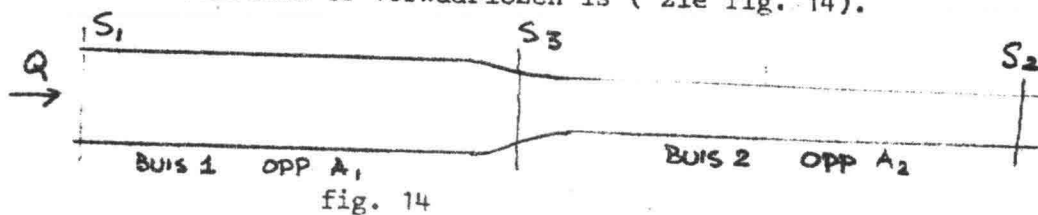
eenheid 10 geïntroduceerde stuwhoogte.

3. Op plaatsen waar buizen of andere stroomvoerende leidingen overgaan in andere vaten, evenals in de nabijheid van vloeistof spiegels van verticale buizen is de Poiseuille verdeling niet meer van toepassing.
Meestal wordt de afwijking van de Poiseuille-verdeling verwaarloosd. In het eerste geval speelt de ontwikkeling in de grenslaag een rol, terwijl in het tweede geval de oppervlakte-spanning een belangrijke rol speelt.
4. Een relatie tussen het (stuw-of stijg-) hoogte-verval en het debiet kan als een toestandsvergelijking van de buis worden opgevat.

Buizen in serie en parallel.

We beschouwen opnieuw laminaire, stationaire stroming van een vloeistof, die voldoet aan de wet van Newton.

Veronderstel dat twee buizen met verschillende dwarsdoorsnedes gekoppeld zijn via een geleidelijke overgang, waarvan de extra weerstand te verwaarlozen is (zie fig. 14).



Het debiet Q stroomt van links naar rechts.

Dan geldt er voor buis 1, dat het debiet Q van de vloeistof gelijk is aan (15A)

$$(H_1 - H_3) = R_1 Q$$

(16)

Met $(H_1 - H_3)$ het verschil in stuw hoogte in punt 1 en 3.

R_1 is de weerstand van buis 1.

Het debiet Q door buis 1, gaat ook door buis 2 (behoud van volume), dus voor buis 2 geldt, dat

$$H_3 - H_2 = R_2 Q \quad (17)$$

R_2 is de weerstand van buis 2.

Sommatie van de vlg (16) en (17) geeft:

$$(H_1 - H_2) = (R_1 + R_2) Q.$$

Oftewel voor twee buizen in serie (de een achter de ander) kunnen de weerstanden van elk der buizen opgeteld worden in de toestandsvergelijking voor de totale stroomgeometrie.

Voor de doorlatingen is het verband ingewikkelder.

Dit geldt ook voor meer dan twee buizen.

Beschouwen we twee buizen, die parallel (naast elkaar) aan elkaar lopen, met doorlatingen resp. K_1 en K_2 , dan geldt, dat het debiet Q zich splitst in twee debieten Q_1 en Q_2 zodanig dat $Q_1 + Q_2 = Q$ (wet van behoud

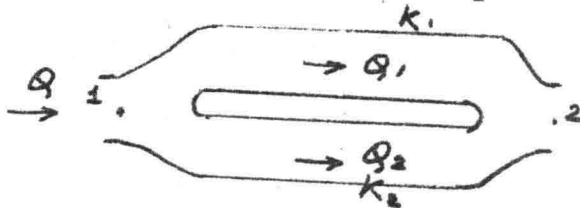


fig. 15

van volumens)

Voor buis (K_1) geldt:

$$Q_1 = K_1 (H_1 - H_2) \quad (18)$$

Voor buis (K_2) geldt:

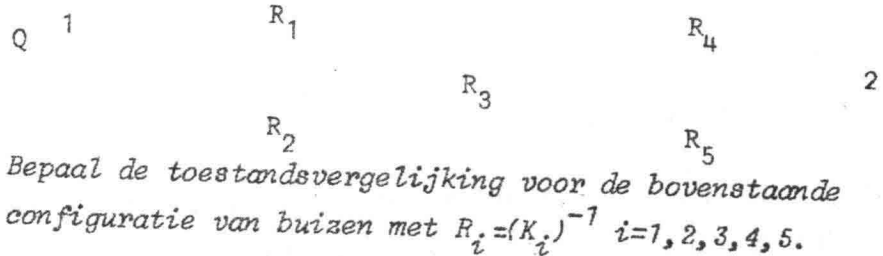
$$Q_2 = K_2 (H_1 - H_2) \quad (19)$$

Sommatie van (18) en (19) geeft

$$Q = (K_1 + K_2) (H_1 - H_2)$$

Dus voor twee (meer) parallelle buizen kunnen de doorlatingen van elk der buizen worden opgeteld in de toestandsvergelijking voor het gehele stelsel. Nu is het verband van de weerstanden de moeilijkere.

Studievraag 11.10:



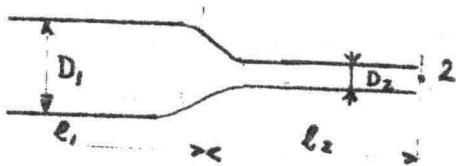
Bepaal de toestandsvergelijking voor de bovenstaande configuratie van buizen met $R_i = (K_i)^{-1}$ $i=1, 2, 3, 4, 5$.

We zagen dat van buizen in serie de weerstanden van de buizen gesommeerd mogen worden teneinde de weerstand van de gehele configuratie te bepalen.

Intuïtief voelen we aan dat vernauwingen (bottlenecks) in buizen (of andere geometriën) een hogere weerstand zullen hebben dan wijde delen van de buis

VOORBEELD

We beschouwen twee buizen met cirkelvormige dwarsdoorsnede, die onderling verbonden zijn.



We veronderstellen, dat de verbinding tussen de buizen geen extra wrijving oplevert.

De diameter van buis 1 is $D_1 = 1 \text{ [m]}$, terwijl $D_2 = 0,1 \text{ [m]}$.

De lengtes l_1 en l_2 zijn b.v. 50 [m] .

Uit het feit, dat de buizen in serie liggen, volgt voor de toestandsvergelijking voor de totale configuratie

$$\begin{aligned} (H_1 - H_2) &= (R_1 + R_2) Q \\ &= R_2 \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) Q \end{aligned} \quad (20)$$

Uit (14) en (15) volgt voor de weerstand

$$R_1 = \frac{128 \ln}{\rho g \pi D_1^4} \quad \text{en voor } R_2 = \frac{128 \ln}{\rho g \pi D_2^4}$$

Substitutie in (20) levert:

$$H_1 - H_2 = \frac{128 \ln}{\rho g \pi D_2^4} \left(\frac{l_1 D_2^4}{D_1^4 l_2} + 1 \right) Q$$

Substitutie van de gegeven waarden in de verhouding

$$\frac{R_1}{R_2} \text{ geeft:}$$

$$H_1 - H_2 = R_2 (10^{-4} + 1) Q.$$

Er blijkt uit dat de invloed van de weerstand R_1 10.000 keer kleiner is dan de weerstand R_2 en dus meestal te verwaarlozen.

Studievraag 11.11: Bepaal de verhouding $\frac{R_2}{R_1}$ als we eisen dat de weerstand R_1 5 procent of minder is van de weerstand R_2 als $D_1 = 1 [m]$ en $D_2 = 0,1 [m]$.

OPMERKING: Steeds werd aangenomen dat de verbinding tussen de twee buizen geen extra wrijving geeft.

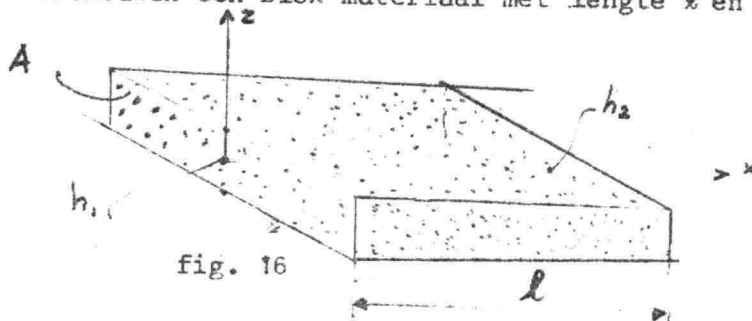
Als de overgang geleidelijk is, kan men dit binnen zekere grenzen verdedigen, echter bij abrupte overgangen is dit zeker niet het geval. Ook blijkt dat de weerstandsverliezen bij een versnellende stroom (van grote naar kleine diameter) kleiner zijn dan bij een vertragende stroom (omgekeerd).

II.II. Stroming door een poreus materiaal.

In een doorlatend, korrelig materiaal (bv. grond) vormen de poriën kanaaltjes waar vloeistof doorheen kan stromen (grondwaterstroming). De stroming veronderstellen we laminair en stationair.

We beschouwen een vloeistof die voldoet aan de wet van Newton.

We beschouwen een blok materiaal met lengte ℓ en constant dwarsprofiel A.



Stel dat er door oppervlak A een debiet Q in de x-richting gaat.

We noemen dan $\vec{q} = q \vec{e}_x = \frac{Q}{A} \vec{e}_x$ het specifieke debiet (ook wel de filtersnelheid) (21)

(een debiet per oppervlakte eenheid noemen we specifiek debiet met fysische dimensie $[m/s]$, dus de dimensie van een snelheid).

Tussen het specifieke debiet q en het stijghoogteverschil $(h_1 - h_2)$ bestaat een relatie

$$q = k \frac{(h_1 - h_2)}{\ell} \quad (22)$$

Deze formule (22) wordt de wet van Darcy genoemd.

Hierin is k de doorlatendheid van de grond..De doorlatendheid is afhankelijk van de grootte van de korrels en de poriën tussen de korrels en de soort vloeistof.

Soms schrijft men de doorlatendheid dan ook als:

$$k = \frac{c \cdot g}{v \cdot d} \quad (23)$$

waarin α een coëfficiënt is voor de vorm van de korrels.

δ : een maat is voor de afmetingen van de korrels

v : de kinematische viscositeit is van de vloeistof.

g . de grootte is van de zwaartekrachtsversnelling.

In tabel III is de k -waarde van enkele materialen opgenomen, als er water door stroomt.

Met (21) en (22) is de toestandsvergelijking voor een poreus materiaal te bepalen nl.

$$Q = qA = k \frac{A}{l} (h_1 - h_2) \quad (24)$$

Oftewel de doorlating K van het blok is

$$K = k \frac{A}{l}$$

Tabel III

materiaal	k-waarde voor <u>water</u> door materiaal
grofzand	$10^{-4} - 10^{-3} \text{ [m/s]}$
fijnzand	$10^{-5} - 10^{-4} \text{ [m/s]}$
veen	$10^{-9} - 10^{-7} \text{ [m/s]}$
klei	$10^{-11} - 10^{-9} \text{ [m/s]}$

Studievraag 11.12: Bepaal de doorlating K van een grondlichaam bestaande uit grofzand (k -waarde 10^{-3} [m/s]) met lengte $l = 20 \text{ [m]}$ en dwars doorsnede A met oppervlak $10 \text{ [m}^2\text{]}$ in de lengterichting van het lichaam.

De getransporteerde vloeistof is water.

Studievraag 11.13: Bepaal de fysische dimensies van k en $\frac{c}{\delta}$

II.III. Criterium voor laminaire of turbulente stroming.

(Getal van Reynolds)

In het voorgaande hebben we steeds verondersteld, dat de stroming laminair was. In de civiele praktijk komt een zuiver laminaire stroming weinig voor en hebben we meestal te maken met turbulente stroming. De wijze waarop een vloeistof stroomt wordt vooral bepaald door de grootte van het getal van Reynolds (Re)

Voor dit getal geldt:

$$R_e = \frac{\rho v \cdot d}{\eta} \quad (= \quad \frac{v \cdot d}{\nu}) \quad (25)$$

waarbij

- v : een kenmerkende snelheid van de stroom (meestal wordt hiervoor gekozen de gemiddelde snelheid over de dwarsdoorsnede)
- d : een kenmerkende dwarsafmeting van de stroomvoerende configuratie (bv. voor een cirkelvormige buis de diameter)
- ρ : de dichtheid van de vloeistof.
- η : de dynamische viscositeit van de vloeistof.
- ν : de kinematische viscositeit van de vloeistof.

Als we voor een cilindrische rechte buis de diameter ervan voor de kenmerkende dwarsafmeting d kiezen, dan geldt dat de stroming laminair is als $Re < 300$ en turbulent als $Re > 2300$ (proefondervindelijk vastgesteld).

Het overgangsgebied $300 < Re < 2300$, waarin beide stromings wijzen naast elkaar voor kunnen komen wordt in deze eenheid niet beschouwd.

Voor een kanaal, waarvan de waterhoogte klein is t.o.v. de breedte van het kanaal, geldt dat de stroming laminair is, als:

$$Re < 1200$$

en turbulent als:

$$Re > 2300.$$

Voor de kenmerkende dwarsafmeting wordt in dit geval de waterhoogte gekozen.

U zult opgemerkt hebben, dat deze Re -waarden vier keer zo hoog zijn dan in het geval van de buis.

Dit hangt samen met de andere snelheidsverdeling in het kanaal en de vorm van de dwarsdoorsnede.

Hierop gaan we echter niet in.

In het algemeen kunnen we stellen, dat in een bepaalde leiding, de kleinste dwarsafmeting de grootste invloed heeft op het getal van Reynolds, aangezien de invloed van de wanden op de stroming langs die dwarsafmeting het grootst is.

Studievraag 11.14: Van een ronde buis is de diameter $0,10 \text{ [m]}$. Het debiet is $0,10 \text{ [m}^3/\text{s}]$. Is de stroming laminair of turbulent?
Wat kunt U zeggen van de viscositeit als de stroming laminair is?

Studievraag 11.15: Door een kanaal met breedte 20 [m] en diepte 3 [m] stroomt water.
Het debiet is $9 \text{ [m}^3/\text{s}]$.
De kinematische viscositeit van water is $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ bij 20°C .
Is de stroming turbulent of laminair?

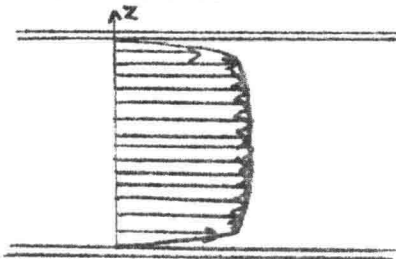
III Turbulente stroming in een kanaal of buis

Bij grote waarden van het getal van Reynolds wordt de stroming steeds en overall in de dwarsdoorsnede turbulent.

Laminaire stroming is dan alleen nog mogelijk zeer dicht langs de wand, in de zgn. laminaire sublaag.

Teneinde dit duidelijk te maken beschouwen we de snelheidsverdeling bij een turbulente stroming door een buis.

De hoofdstroming (zie inleiding) vertoont dan een verdeling als



aangegeven in nevenstaand figuur.

De snelheidsverdeling van de hoofdstroming is vergeleken met de Poiseuille verdeling bij laminaire stromen, over een groot deel van het dwarsprofiel gelijkmatiger,

doch nabij de wand (bodem) wordt de verandering van de snelheid met de plaats ($\frac{\partial v}{\partial z}$) zeer groot.

Voor de hoofdstroming moet gerekend worden met impulstransporten t.g.v. turbulente schuifspanningen, die men ook wel schuifspanning van Reynolds noemt.

Naast deze turbulente schuifspanningen treden echter ook nog viskeuze schuifspanningen op.

In een stroming door een buis of een kanaal kunnen we nu drie gebieden onderscheiden.

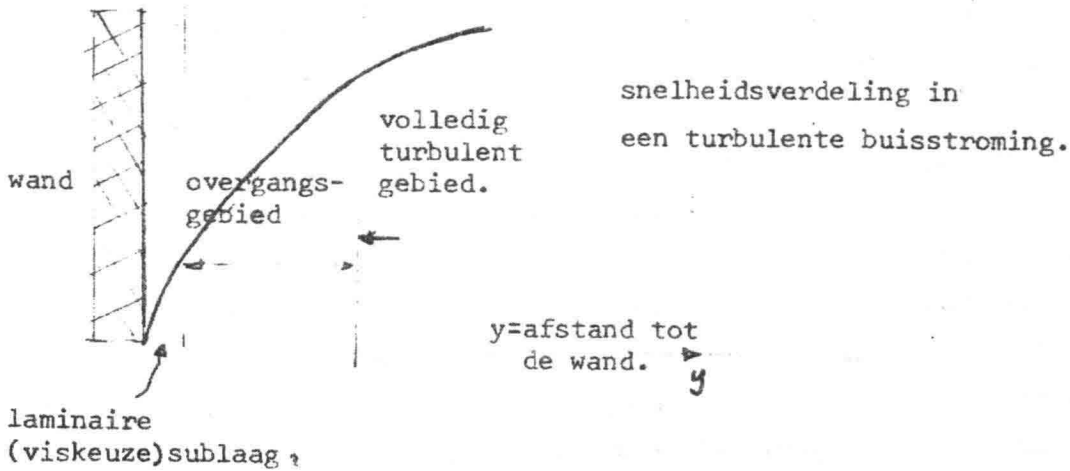
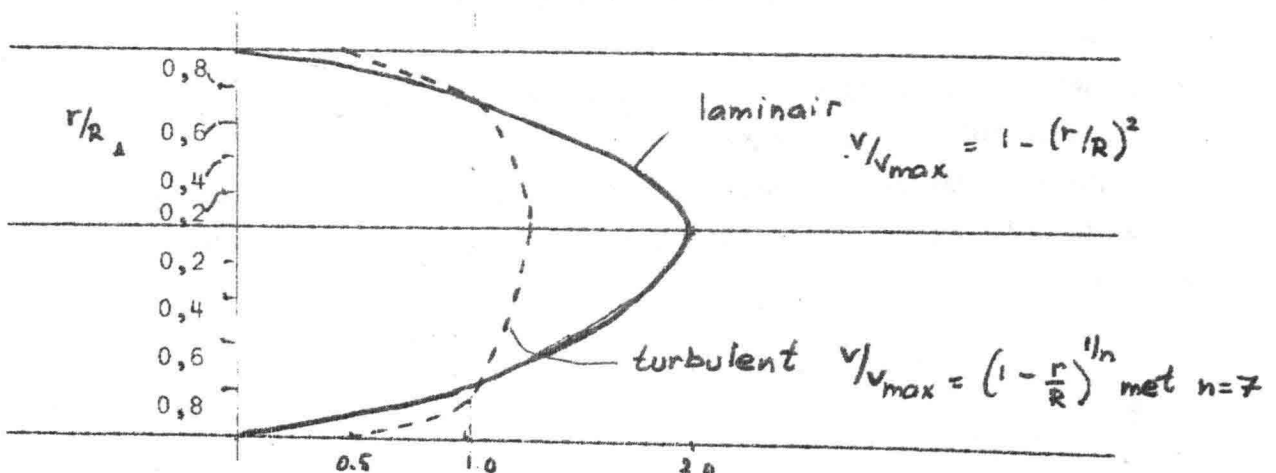


fig. 17

1. Viskeuze (laminaire) sublaag- Hier zijn alleen viskeuze schuifspanningen werkzaam, omdat naar de wand toe de turbulente fluctuaties steeds kleiner worden.
Deze laag is zeer dun.
2. Overgangsgebied waar turbulente en viskeuze schuifspanningen van dezelfde orde van grootte zijn.
3. Volledig turbulente gebied waar de viskeuze schuifspanningen t.o.v. de turbulente schuifspanningen verwaarloosbaar zijn.

De grootte van de drie onderscheiden gebieden is sterk afhankelijk van de waarde van het getal van Reynolds. Hoe groter het getal van Reynolds is, des te kleiner zijn de viskeuze sublaag en het overgangsgebied.

fig.18 Volledig ontwikkelde snelheidsprofielen voor stromingen door gladde buizen met cirkelvormige doorsneden.



We zien in fig. 18 in dezelfde buis duidelijk het verschil tussen de snelheidsprofielen voor laminaire stroming en die voor turbulente stroming. Dit verschil wordt veroorzaakt door de grotere turbulente schuifspanningen ten gevolge van de turbulente beweging van de vloeistof.

Voor de drie onderscheiden gebieden zijn experimenteel of met behulp van een theorie formules opgesteld waarmee de snelheidsverdeling bepaald kan worden.

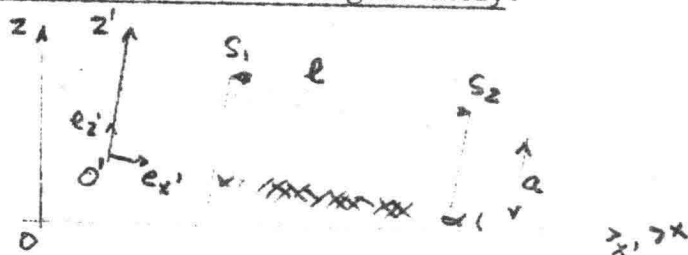
Voor de viskeuze sublaag geldt de theorie die voor een laminaire stroming is afgeleid. (zie hoofdstuk II van deze eenheid).

Voor het overgangsgebied en het volledig turbulente gebied zijn de formules aanzienlijk ingewikkelder dan voor een laminaire stroming.

De formulering van de snelheidsverdeling van de hoofdstroom valt buiten het kader van b 8.

We vermelden enkele in de praktijk gebruikte weerstandsformules zonder op de theoretische achtergrond in te gaan.

III.I Stromingsweerstand volgens Chézy:



We beschouwen een kanaal met een verhang $I = \sin \alpha$, diepte a en breedte $b \gg a$.

We kiezen twee inertiaal stelsels Oxz met $\vec{e}_z$ evenwijdig aan de zwaartekracht en $O'x'z'$ met $\vec{e}_{x'}$ evenwijdig aan de bodem van het kanaal in de stroomrichting.

We veronderstellen, dat de stroming in het kanaal turbulent is ($Re > 9200$) met stationaire hoofdstroming, oftewel dat het debiet door elke dwarsdoorsnede gelijk is en constant.

Uit de veronderstelling van een constante dwarsdoorsnede volgt dan dat de waterhoogte a overal gelijk is.

Daar we het kanaal breed verondersteld hebben laten we de invloed van de oevers buiten beschouwing.

Uit de aanname, dat de hoofdstroming stationair is, in de x' -richting volgt dat de gemiddelde druk over de hoogte verloopt volgens de hydrostatische drukverdeling.

Als we een impulsbalans opstellen voor een balansgebied bestaande uit een kanaalgedeelte met lengte l tussen de twee dwarsprofielen S_1 en S_2 , dan volgt dat de schuifspanning toeneemt met de afstand tot de bodem en volgt voor het debiet Q : (zie aanvullend vraagstuk 1)

$$Q = abC\sqrt{aI} \quad (26)$$

waarin: a : de waterhoogte

C : de constante van Chézy

b : de breedte van het kanaal

I : het verhang van het kanaal

Dit is de zgn. formule van Chézy. Chézy heeft (26) uit empirische gegevens afgeleid.

Studievraag 11.16: *Ga de invloed na van elk der parameters a , b , c en I op het debiet Q in (26).*

Onder de aannames t.a.v. gelijke snelheidsverdeling en gelijke drukverdeling in beide dwarsdoorsnedes S_1 en S_2 volgt voor het stijghoogteverschil over een lengte l :

$$h_1 - h_2 = lI \quad (27)$$

Substitutie van (26) door eliminatie van I geeft

$$h_1 - h_2 = \frac{l}{\frac{3}{2} \frac{2}{a} \frac{2}{b} C^2} Q^2 \quad (28)$$

Met $Q = Av_{\text{gem}}$ (v_{gem} is de gemiddelde snelheid over de doorsnede,
 A is het oppervlak van de dwarsdoorsnede)

volgt:

$$h_1 - h_2 = \frac{A |v_{\text{gem}}|}{\frac{3}{2} \frac{2}{a} \frac{2}{b} C^2} Q = \frac{l |v_{\text{gem}}|}{a C^2 A} Q \quad (A = ab) \quad (29)$$

De weerstand R van het kanaal is dus:

$$R = \frac{l |v_{\text{gem}}|}{a C^2 A} \quad (30)$$

Uit (30) zien we, dat de weerstand R snelheidsafhankelijk is, d.w.z. als de gemiddelde snelheid toeneemt, ook de weerstand toeneemt in tegenstelling tot wat we bij laminaire stroomweerstanden vonden (H.II.)

Studievraag 11.17: Ga de invloed na van elk der factoren in het rechterlid van (30) op de weerstand.

In de Nederlandse praktijk wordt vaak de formule van Chézy als volgt gebruikt:

$$v_{\text{gem}} = C \sqrt{\frac{a_0(h_1 - h_2)}{L}}$$

In plaats van de coëfficiënt C , die de dimensie $\text{m}^{1/2}\text{s}^{-1}$ heeft, wordt vaak een dimensieloze coëfficiënt $\lambda = 8C^2/g$ ingevoerd, waarvan de grootte te stellen is op:

$$\lambda = \frac{8g}{C^2} \quad \lambda = \frac{C^2}{g} = 50 \text{ à } 1000, \text{ met een geschikte middelwaarde van } 200.$$

Dan is het verband met (30)

$$R = \frac{8}{\lambda} \frac{L |v_{\text{gem}}|}{aAg} \quad (31)$$

Voor een rechte buis met constante cirkelvormige dwarsdoorsnede vinden we voor de weerstand:

$$R = 4 \frac{L |v_{\text{gem}}|}{aA} \frac{1}{C(C+7,7)} \quad (32)$$

Studievraag 11.18: Bepaal de weerstand van een buis met $a = 0,5 \text{ [m]}$
 $Q = 1 \text{ [m}^3/\text{s]}$, $C = 50$ en de lengte 10^3 [m] is.
 De kinematische viscositeit van de vloeistof is $10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s}]$.
 Wat zou de weerstand zijn als de vloeistof laminair stroomde?

III.II Grenslagen

In de inleiding van hoofdstuk III hebben we reeds een introductie gegeven van het begrip grenslaag. Bij elke stroming van een vloeistof of gas langs een wand (oever, bodem, buiswand, brugpijler, scheepswand, enz) wordt de stromende materie afgremd, waardoor een laminaire sublaag ontstaat. *hydr. ruis?*

Het invoeren van het concept van de grenslagen is daarom belangrijk, omdat:

- ermee na is te gaan, hoe een stroming zich in de lengterichting van een buis of kanaal ontwikkelt.
 - Het loslaten van grenslagen bij scherpe overgangen in een dwarsdoorsnede in de lengterichting extra weerstanden geeft en daarom vaak moet worden voorkomen (zie ook volgend hoofdstuk)
- Hierin ligt ook de reden dat vele uitstroomopeningen en lichamen die door een vloeistof of gas bewegen gestroomlijnd worden.

III.III Stroming bij profielverandering.

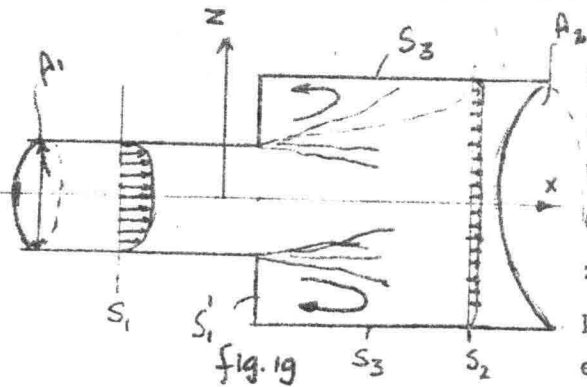
Bij min of meer plotselinge veranderingen van het dwarsprofiel van een buis of kanaal (verwijdingen, vernauwingen, drempels, bochten, obstakels) kan een aanvankelijk matig turbulente of laminaire stroming door het loslaten van de grenslaag plaatselijk een sterk met de tijd fluktuierende stroming vormen (turbulentie). De turbulentie neemt meestal toe als de gemiddelde snelheid afneemt in de stroomrichting (vertraagde stroming) b.v. bij een verwijding.

Bij een vernauwing neemt de gemiddelde snelheid toe (versnelde stroming), waardoor de turbulentie niet zo erg zal toenemen.

In een vertragsingsgebied worden plaatselijk de snelheidsveranderingen zeer groot, wat aanleiding geeft tot zeer grote turbulente schuifspanningen en dus weerstand.

} Energieverlies
hoofdstroom

Wrijvingsverlies volgens Carnot bij een stroomvertraging.



We behandelen weer stationaire turbulente hoofdstromen.

We beschouwen een stroming met debiet Q (constant) door een buis, die zich plotseling verwijdt van een dwarsprofiel met oppervlak A_1 naar één met een oppervlak A_2 ($A_2 > A_1$).

De grenslaag in het nauwe buisgedeelte zal de plotselinge verwijding niet kunnen volgen en loslaten. Het gevolg is dat de grenslaag zich kegelvormig turbulent ontwikkelt. Dientengevolge ontstaat er rondom de buis bij de verwijding een neer (aangegeven door ($\curvearrowright$)).

Verderop in de buis wordt de hoofdstroom weer meer gelijkmatig (zonder neren).

Teneinde de wrijvingverliezen t.g.v. de grenslaagloslating uit te drukken in een weerstand gaan we de wet van behoud van impuls toepassen in de stroomrichting op een balansgebied begrensd door S_1 , S_1' , S_2 en S_3 .

Empirisch blijkt, dat de druk langs S_1' ongeveer overeenkomt met de druk in S_1 en dat de schuifspanningen langs S_3 te verwaarlozen zijn t.o.v. de grote turbulente schuifspanningen in het inwendige van de buis.

Opstellen van de balansvergelijking levert dan: (zie aanvullend vraagstuk 2)

$$H_1 - H_2 = \frac{1}{2g} (v_{1, \text{gem}} - v_{2, \text{gem}})^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 \quad (33)$$

N.B. Daar de snelheden in de in de dwarsdoorsneden S_1 en S_2 niet meer gelijk zijn, moeten we hier werken met de stuwhoogtes in plaats van met de stijghoogtes.

Formule (33) staat bekend als het stuwhoogteverlies volgens Carnot bij stroomvertraging.

Studievraag 11.19:

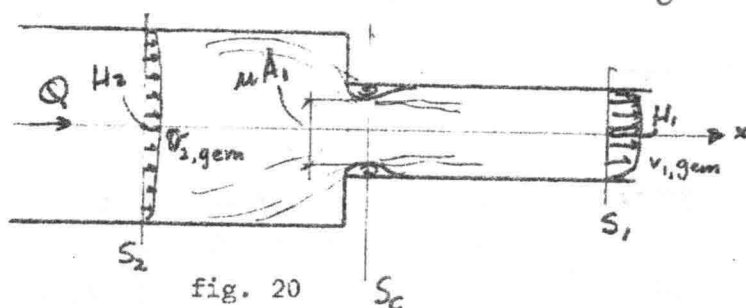
Bepaal zelf R en K als gegeven is dat

$$Q = A_1 v_{1, \text{gem}} = A_2 v_{2, \text{gem}}$$

Studievraag 11.20:

In een kanaal met vrije waterspiegel loopt de waterstand op als gevolg van een Carnot-verlies in een verwijding. Toon dit aan.

Carnotverlies in een versnellingsgebied.



Bij omkering van de stroomrichting zal zich een stroming ontwikkelen als aangegeven in fig. 8. De stroming "legt" zich tegen de overgangswand aan en vertoont daardoor bij het betreden van het nauwere buisgedeelte een insnoering tot een stroomdoorsnede μA_1 t.p.v. S_C . Daarna verwijdt de stroming zich onder vorming van een dissipatiegebied, tot er verderop weer een stationaire stroom ontstaat over het volle ter beschikking staande profiel A_1 in S_1 .

Tussen S_2 en S_C is de stroming vrijwel stationair. Daarom mag de stuwhoogte in S_C gelijk gesteld worden aan die in S_2 (verwaarlozing van wandwrijvingsverliezen).

Tussen S_C en S_1 rekenen we dan met het Carnotverlies:

$$H_2 - H_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g} \left(\frac{1}{\mu A_1} - \frac{1}{A_1} \right)^2 = \frac{1}{2g} \left(\frac{1-\mu}{\mu A_1} \right)^2 v_{1, \text{gem}}^2 \quad (34)$$

We noemen μ de contractiecoëfficiënt.

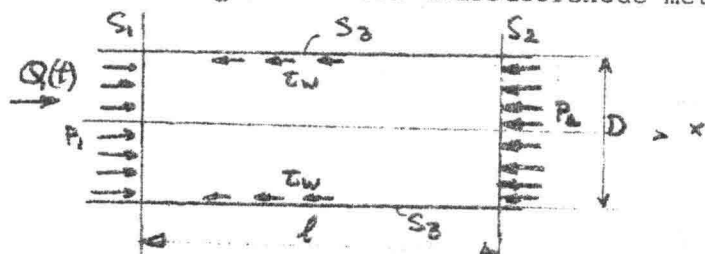
Studievraag 11.21:

Bepaal zelf R en K .

Een recente toepassing van de Carnotverliezen bij plotselinge profielveranderingen vinden we bij de berekening van de weerstandsverliezen bij de geplande stormstuwcaissondam in de Oosterschelde (bijv. stapeling van stortsteen).

IV. Buis met niet-stationaire volumestroom Q.

We beschouwen een variabele volumestroom $Q(t)$ door een cilindrische buis met lengte l en een dwarsdoorsnede met oppervlakte A .



We laten in eerste instantie de invloed van de zwaartkracht buiten beschouwing en stellen de impulsbalansvergelijking (Newton2) op voor het gebied begrensd door S_1 , S_2 en S_3 in de x -richting.

In S_1 resp. S_2 werkt in de x -richting een drukkracht:

$$\vec{F}_1 = p_1 A \vec{e}_x \quad \text{resp.} \quad \vec{F}_2 = -p_2 A \vec{e}_x.$$

Langs S_3 werkt een schuifspanning $\vec{\tau}_w = -\tau_w \vec{e}_x$ en dus een schuifkracht:

$$\vec{F}_3 = -\tau_w D l \vec{e}_x \quad \text{in de } x\text{-richting.}$$

Aangezien de volumestroom $Q(t)$ varieert met de tijd en A constant is zal ook de gemiddelde snelheid van de stroom met de tijd variëren. Toepassing van $\vec{F} = \dot{p}$ geeft:

$$F_1 + F_2 + F_3 = \rho l A \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Substitutie geeft:

$$(p_1 - p_2) A - \tau_w D l = \rho l \frac{dQ}{dt}$$

Oftewel

$$p_1 - p_2 = \frac{\tau_w D l}{A} + \frac{\rho l}{A} \frac{dQ}{dt}$$

Dit is te schrijven als:

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = \frac{\pi D r l}{\rho g A} + \frac{1}{A g} \frac{dQ}{dt} \quad (35)$$

Nemen we de invloed van de zwaartekracht mee en realiseren we ons dat uit het behoud van volumen volgt, dat op elk tijdstip het snelheidsprofiel in elke doorsnede gelijk moet zijn (vloeistof onsamendrukbaar) dan is (35) te schrijven als:

$$H_1 - H_2 = \frac{\pi D r l}{\rho g A} + \frac{1}{g A} \frac{dQ}{dt} \quad (36)$$

Tot nu toe hebben we ons, zoals U gemerkt zult hebben, nog niet uitgesproken over de stromingswijze van de vloeistof, laminair of turbulent, m.a.w. vgl. (36) geldt voor beide stromingswijzes.

Laminaire stroming:

Bij een constant debiet ($\frac{dQ}{dt} = 0$), vonden we in hoofdstuk II:

$$H_1 - H_2 = RQ \quad (37)$$

(Poisseuille-verdeling en $\tau = -\eta \frac{\partial v}{\partial r}$,)

$$\text{met } R = \frac{128 \ln}{\rho g \pi D^4}$$

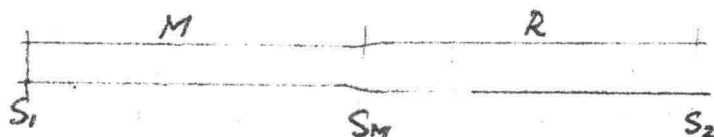
Daarom stellen we (36) als volgt voor:

$$H_1 - H_2 = M \frac{dQ}{dt} + RQ \quad (38)$$

met de traagheid $M = \frac{1}{gA}$ (zie ook eenheid 10).

Opmerking: Bij een nadere analyse blijken M en R iets groter te zijn als gevolg van de wederkerige beïnvloeding van de wrijving en de traagheid.

Resultaat (38) is ook te bereiken door in gedachte twee buizen in serie te nemen, waarbij we aan de ene uitsluitend een traagheid M en aan de andere uitsluitend een weerstand R toe kennen.



Er geldt dan dat

$$H_1 - H_M = M \frac{dQ}{dt} \quad \text{en} \quad H_M - H_2 = RQ$$

Opgeteld geeft dit

$$H_1 - H_2 = M \frac{dQ}{dt} + RQ$$

dus vgl. (38).

Turbulente stroming.

In het geval, dat we met een stationaire hoofdstroming te maken hebben vonden we dat met (30)

$$R = \frac{1}{aC^2 A} |v_{\text{gem}}| \quad \text{en} \quad \frac{dQ}{dt} = 0, \quad \text{dat}$$

$$H_1 - H_2 = RQ.$$

Beschouwen we (36) dan wordt dit

$$H_1 - H_2 = RQ + \frac{1}{gA} \frac{dQ}{dt} \quad (39)$$

Ook hier kunnen we in eerste benadering dezelfde traagheid $M = \frac{1}{gA}$ substitueren, waarbij we ons wel dienen te realiseren dat dit eenvoudige beeld bij een nadere analyse niet helemaal meer opgaat echter bij benadering voldoet (39) meestal.

Opmerking: Voor een turbulente stroming is moeilijk met serie- en paralleltakken te werken, aangezien de weerstand R snelheidsafhankelijk is.

Studievraag 11.22: Als het debiet Q van water door een buis met een straal $0,01[m]$ en een lengte $10[m]$ gegeven is als $Q = C e^{1/10 t^3} [m^3/s]$, bepaal dan het stuwhoogteverschil als functie van de tijd. C is zodanig, dat de stroming laminair is. $\eta_{\text{water}} = 10^{-3} \left[\frac{kg}{ms} \right]$.

RESUME

Stationaire stromen van homogene incompressibele vloeistoffen.

Laminair:

	R (Poisseuille)	R (Darcy)
Cilindrische buis	$\frac{128 \ln}{\rho g \pi D^4}$	
Breed kanaal met konstante dwarsdoorsnede	$\left(\frac{4 \ln}{3 \rho g \pi d^4} \right) \frac{3 \ln}{d^3 b \rho g}$	
Rechthoekig blok		$\frac{1}{kA}$

Turbulent:

	R (Chézy)	R (Carnot)
Cilindrische buis	$\frac{8 \ln v_{gem} }{D A C(C+1,7)}$	$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2$ (vertraagd)
Breed kanaal A konstant)	$\frac{\ln v_{gem} }{d C^2 A}$	$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(\frac{1}{\mu A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2$ (versneld)

Niet-stationaire stromen (Laminair en turbulent)

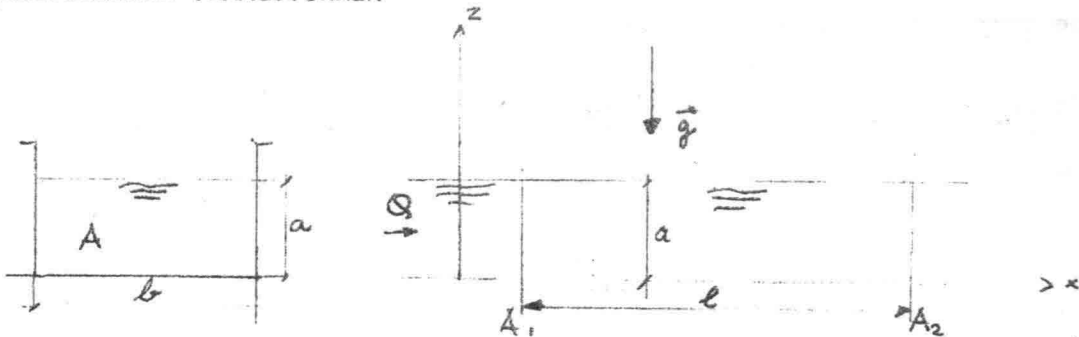
	R	M
Cil. buis	zie boven	$\frac{1}{gA}$
Breed kanaal	" "	$\frac{1}{gA}$

BEWERINGEN

- Bewering 11.1 : In een laminaire stationaire stroming van een viskeuze vloeistof door een rechte buis is de schuifspanning in de vloeistof recht evenredig met de dynamische viscositeit en de snelheidsverandering in de stroomrichting.
- Bewering 11.2 : In een stationaire turbulente stroming geeft een snelheidsmeting in een vast punt een constante waarde.
- Bewering 11.3 : Voor waarden van het Reynoldsgetal groter dan 300 is de stroming in een buis, met constante cirkelvormige dwarsdoorsnede, turbulent.
- Bewering 11.4 : In een buis, met constante cirkelvormige dwarsdoorsnede, is de schuifspanning een lineaire funktie van de straal van de buis.
- Bewering 11.5 : De wet van Darcy betreft uitsluitend stationaire laminaire stromen.
- Bewering 11.6 : Als twee buizen in serie staan, dan mogen de doorlatingen van de twee buizen worden opgeteld bij de bepaling van de toestandsvegelijking voor de totale configuratie.
- Bewering 11.7 : Een stroming is laminair voor waarden van het Reynoldsgetal die kleiner zijn dan 1200.
- Bewering 11.8 : De weerstand van een kanaal bij stationaire turbulente stroming is recht evenredig met de kinematische viscositeit.

- Bewering 11.9 : De weerstand, die optreedt bij een plotselinge verandering van het dwarsprofiel in een buis met een cirkelvormige dwarsdoorsnede is onafhankelijk van de richting van de stroming.
- Bewering 11.19: Als het debiet in een buis niet varieert in de tijd, dan is de traagheid van een buis nul.
- Bewering 11.11: De fysische dimensie van de dynamische viscositeit is $\left[\frac{Ns}{m^2} \right]$.
- Bewering 11.12: In een kanaal is de snelheidsverdeling lineair met de diepte als de stroming laminair is.
- Bewering 11.13: De waarde van de constante van Chézy is gemiddeld $45 \left[m^{\frac{1}{2}}/s. \right]$
- Bewering 11.14: Voor waarden van het Reynoldsgetal kleiner dan 1200 is de stroming in een kanaal laminair.
- Bewering 11.15: Voor een laminaire stroming van water geldt de wet van Newton.
-

AANVULLENDE VRAAGSTUKKEN

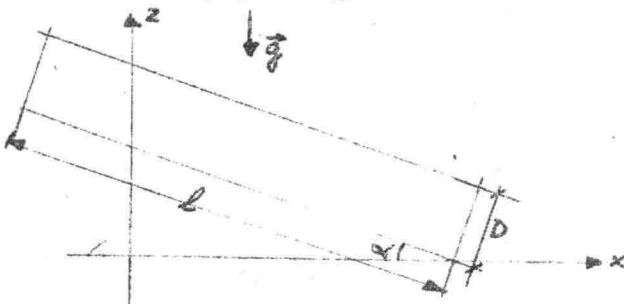


1. In een kanaal, dat horizontaal ligt, stroomt stationair en laminair water in de x-richting door een constante dwarsdoorsnede $A (a \times b)$, ($b \gg a$).

- a) Bepaal de snelheidsverdeling in de dwarsdoorsnede.
- b) Bepaal de maximale en de gemiddelde snelheid en de onderlinge verhouding.
- c) Bepaal de weerstand van het kanaal over een lengte l .

N.B. Boven het water heerst de atmosferische druk p_a .

2. Leid zelf de weerstandsformules van Carnot af door impulsbalansen op te stellen voor de gegeven gebieden (zie III.II).



3.

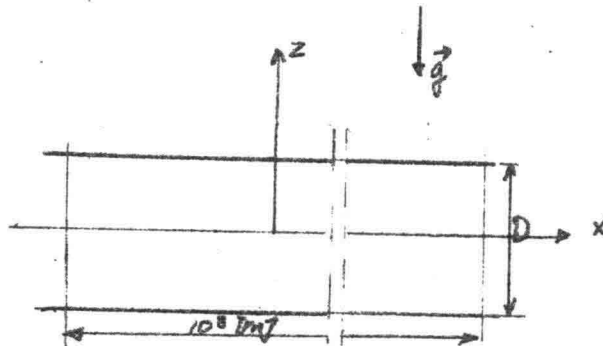
Door een cilindrische buis met diameter $D = 0,2 \text{ [m]}$ stroomt stationair een vloeistof met kin. viscositeit $\nu = 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s]}$. De buis maakt een helling $\alpha = \pi/6$ met een horizontaal vlak. De lengte l van de buis is 50 [m] . De constante van Chézy is bij turbulente stroming $C = 50 \text{ [m}^{1/2}/\text{s]}$. Aan beide uiteinden van de buis heerst de atmosferische druk p_a . De zwaartekrachtsversnelling is $g = -10 \vec{e}_z \text{ [m/s}^2]$.

- a) Bereken de gemiddelde snelheid in de buis.
- b) Is de stromingswijze turbulent?

c) Hoe groot is het debiet?

d) Hoe groot is de weerstand?

4.

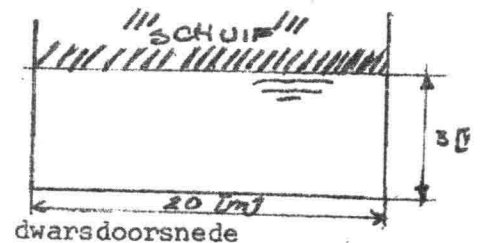
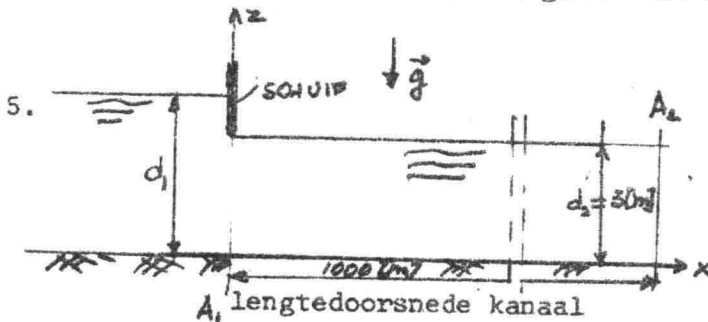


Door een rechte cilindrische buis ($D = 0,5 \text{ [m]}$) stroomt stationair vloeistof met een debiet van $1 \text{ [m}^3/\text{s]}$. De lengte van de buis is 10^3 [m] . De waarde van de constante van Chézy is $C = 45 \text{ [m}^{1/2}/\text{s]}$. De zwaartekrachtsversnelling is $\vec{g} = -10 \vec{e}_z \text{ [m/s}^2]$. De kin. viscositeit van de vloeistof is $\nu = 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s}]$.

a) Bepaal de weerstand van de buis.

b) Hoe groot is het stijghoogteverschil over de buis?

c) Wat is de waarde van het getal van Reynolds?

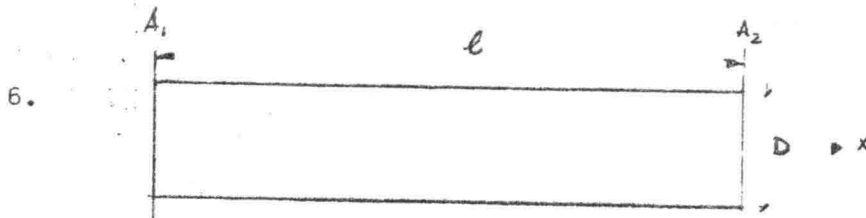


Onder invloed van een konstant hoogteverschil $d_1 - d_2 = 0,1 \text{ [m]}$ stroomt water stationair door een kanaal rechts van de schuif. Boven het vrije wateroppervlak heerst de atmosferische druk p_a . De Chézyconstante is $50 \text{ [m}^{1/2}/\text{s}]$. De versnelling van de zwaartekracht is $\vec{g} = -10 \vec{e}_z \text{ [m/s}^2]$. Voor de verdere gegevens zie de figuren. Links van de schuif is een groot meer. $\nu(\text{water}) = 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s}]$

a) Bepaal de gemiddelde snelheid in het kanaal.

b) Is de stromingswijze turbulent?

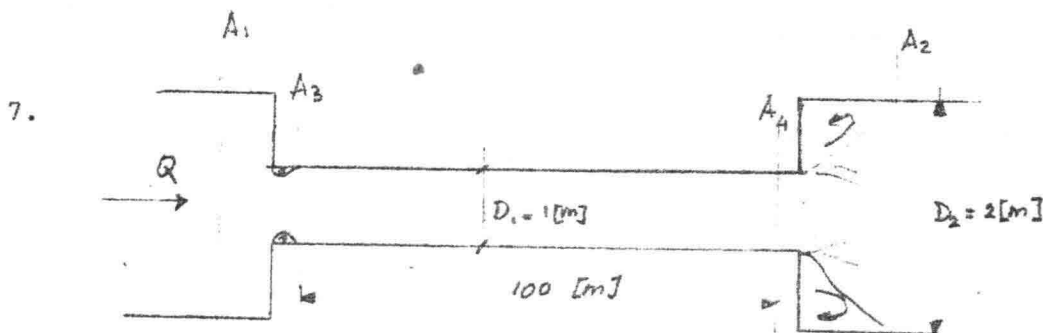
- c) Bepaal de weerstand van het kanaal.
- d) Hoe groot mag $(d_1 - d_2)$ zijn opdat de stroming laminair wordt in het kanaal?
- e) Hoe groot is dan de maximale snelheid en waar treedt deze op?



Door een cilindrische buis met diameter $1,0 \text{ [m]}$ stroomt water niet-stationair met een debiet:

$Q = 2,10^{-4} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) [\text{m}^3/\text{s}]$. De lengte van de buis is 100 [m] . De viscositeit van het water is $\nu = 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$. De constante van Chezy is $C = 50 [\text{m}^2/\text{s}]$.

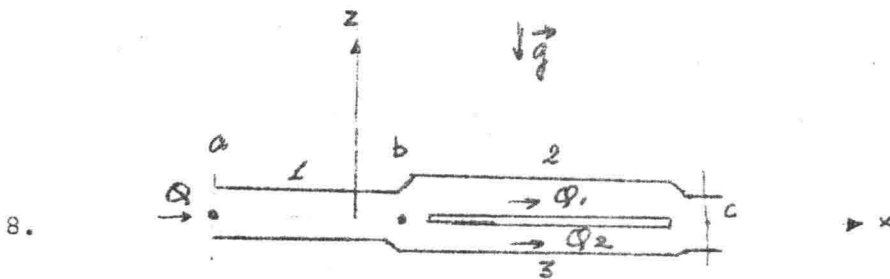
- a) Bepaal de stromingswijze van het water.
- b) Bepaal de weerstand van de buis.
- c) Bepaal de traagheid van de buis.
- d) Bepaal het stuwhoogteverschil over de buis.



Een buis met cirkelvormige dwarsdoorsnede verspringt twee keer van profiel.

Door de buis stroomt stationair water onder invloed van een drukverschil over de uiteinden. De zwaartekracht wordt verwaarloosd. Gegeven $\nu_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$, $C = 50 [\text{m}^2/\text{s}]$, $Q = 1 [\text{m}^3/\text{s}]$. Contractiecoëfficiënt $\mu = 0,7$. Voor verdere gegevens, zie de figuur.

- a) Bepaal de instroom weerstand.
- b) Bepaal de weerstand van het dunne gedeelte.
- c) Bepaal de uitstroomweerstand.
- d) Bepaal de totale weerstand tussen A_1 en A_2 .
- e) Bepaal de vereiste stijghoogte over de geometrie tussen A_1 en A_2 .



Drie cilindrische buizen zijn zodanig gekoppeld, dat de verbindingen geen extra weerstand opleveren.

De diameters van de dwarsdoorsneden van de buizen zijn resp.

$$D_1 = 0,1 [\text{m}], D_2 = 5 \cdot 10^{-2} [\text{m}] \text{ en } D_3 = 10^{-1} [\text{m}].$$

De lengtes zijn $l_1 = 10 [\text{m}]$, $l_2 = 20 [\text{m}]$ en $l_3 = 20 [\text{m}]$.

Door de buizen stroomt laminair en stationair water met $\nu = 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$.

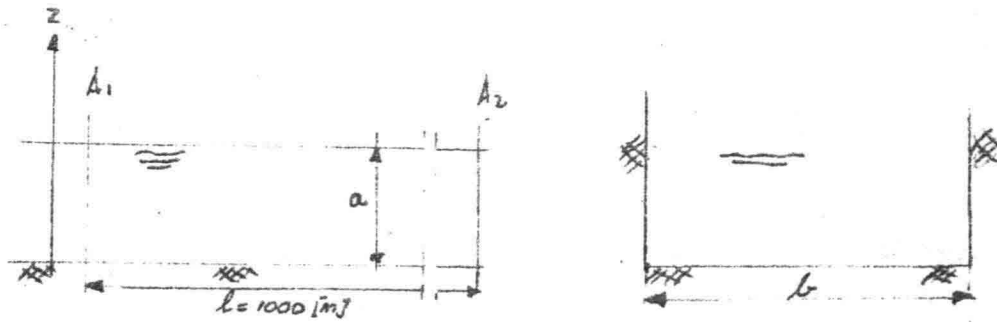
De zwaartekrachtsversnelling is $\vec{g} = 10 \vec{e}_z [\text{m}/\text{s}^2]$.

- a) Bepaal de weerstand van elk der buizen.
- b) Bepaal de totale weerstand van de configuratie.
- c) Wat is het maximale debiet Q opdat de stroming laminair blijft?
- d) Wat is dan de grootst optredende snelheid?

9. Wat is de fysische dimensie van de

- doorlatendheid k ?
- de traagheid M ?
- de weerstand R ?
- de dynamische viscositeit η ?

10.



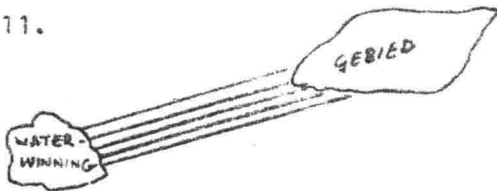
Door een slootje met constante dwarsafmeting diepte $a = 1 \text{ [m]}$ en breedte $b = 5 \text{ [m]}$, stroomt water stationair met een debiet van $5 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3/\text{s]}$.

$\nu_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s}]$. Chézyconstante $C = 50 \text{ [m}^{1/2}/\text{s}]$.

De zwaartekrachtsversnelling $\vec{g} = 10 \vec{e}_z \text{ [m/s}^2]$. De lengte van het kanaal is 1000 [m] .

- Is de stroming laminair?
- Bereken de maximale snelheid, die in de dwarsdoorsnede optreedt.
- Voor welk debiet wordt de stroming volledig turbulent?
- Wat is dan de weerstand van het kanaal?

11.



Voor bevoeding van een gebied met water is een debiet vereist van $0,5 \text{ [m}^3/\text{s}]$.

We hebben daartoe **20** cilindrische buizen met elk een diameter van 10^{-1} [m] en een lengte van 50 [m] .

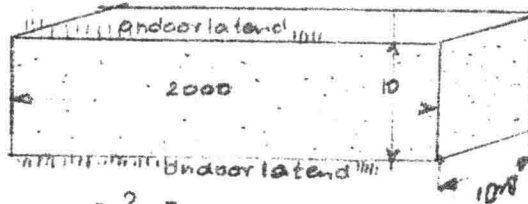
De afstand tussen waterwinplaats en het gebied is 200 [m] . De stroming in de buizen is stationair $\nu_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-3} \text{ [m}^2/\text{s}]$, Constante van Chezy is $C = 50 \text{ [m}^{1/2}/\text{s}]$.

We leggen 4 buizen in serie vijf keer parallel naast elkaar. Door elke buis stroomt evenveel water.

- Is de stroming turbulent?
- Hoe groot is de totale weerstand.

c) Welk stijghoogteverschil is noodzakelijk om de stroming te handhaven.

12. Onder invloed van een stijghoogteverschil tussen de uiteinden van een grondlichaam stroomt laminair en stationair water van links naar rechts



$$v_{H_2O} = 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s]}. \quad .$$

De doorlatendheid van de grond is $k = 10^{-5} \text{ [m/s]}$.

Voor verdere gegevens zie figuur.

a) Bepaal de weerstand van het grondlichaam.

b) Wat zal het debiet zijn als het stijghoogteverschil 5 [m] is ?

c) Bepaal ook het specifieke debiet.

13. Door een cilindrische rechte buis ($D = 0,4 \text{ [m]}$) stroomt water onder invloed van een in de tijd variërende stijghoogteverschil $\Delta h = 2 \sin \frac{\pi}{3} t \text{ [m]}$. De lengte van de buis is $l = 5 \text{ [m]}$, $v_{H_2O} = 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s]}$.

a) Hoe groot is de traagheid van de buis?

b) Als we de weerstand van de buis verwaarlozen, welk debiet ontstaat er dan?

c) Hoe luidt de toestandsvergelijking voor de buis als we geen verwaarlozingen toepassen?

Uit welke vergelijking moet dan het debiet worden bepaald?

ANTWOORDEN OF AANWIJZINGEN BIJ DE STUDIEVRAGEN

S.11.1 Water is een vloeistof, die bij laminaire stroming voldoet aan de wet van Newton, dus

$$\tau = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

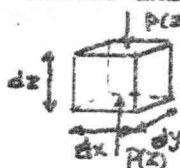
Volgens (3^A) geldt, dan dat

$\tau = \eta \frac{v_b}{a}$, aangezien de stroming stationair is d.w.z. v_x is geen functie van de tijd.

Dus $\tau = \eta = 10^{-3} \text{ [N/m}^2\text{]}.$

S.11.2 In de rechte buis, verstonden we onder laminaire stroming, een stroming, waarbij de vloeistofdeeltjes evenwijdig met de buis-as bewegen. M.a.w. er zijn geen snelheidscomponenten in de y en z richting.

Veronderstellen we b.v. p een functie van z en stellen we een impulsbalans op in de z-richting, dan geldt volgens de tweede axioma van Newton.



$$-\frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho dx dy dz \frac{dv_z}{dt},$$

aangezien we de zwaartekracht

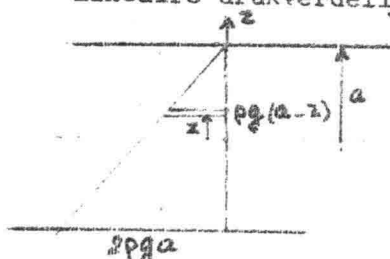
verwaarloosd hebben.

Aangezien $v_z = 0$ volgt dat $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$

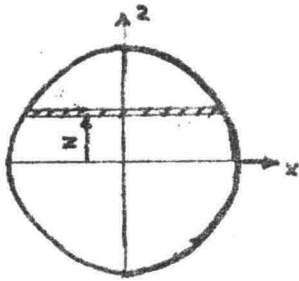
oftewel p is geen functie van z.

Evenzo volgt uit een impulsbalans in de y-richting, dat p geen functie van y is.

s.11.3 Bij de stroming door de buis hebben we te maken met naast een uniforme drukverdeling t.g.v. oppervlakte krachten een lineaire drukverdeling t.g.v. de zwaart (volume) kracht.



Beschouwen we even alleen de verdeling t.g.v. de zwaartekracht, dan is op hoogte z de druk $\rho g (a-z)$.



Integratie van de lineaire drukverdeling over de cirkelvormige dwarsdoorsnede geeft als kracht:

$$F = \int_{-a}^{+a} \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{+\sqrt{a^2-z^2}} \rho g (a-z) dx dz$$

$$= \int_{-a}^{+a} 2 \rho g a \sqrt{a^2-z^2} dz - \int_{-a}^{+a} 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2} dz.$$

Beschouwen we eerst de tweede term van het rechterlid:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2} dz &= \int_{-a}^0 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2} dz + \int_0^a 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2} dz \\ &= - \int_0^{-a} 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2} dz + \int_0^a 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2} dz \\ &= - \int_0^a 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2} dz + \int_0^a 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2} dz = 0 \end{aligned}$$

De laatste stap is als volgt in te zien:

De functie $f(z) = 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2}$ is antisymmetrisch want $f(-z) = -f(z)$. Dus substitutie van de integratie parameter $(-z)$ i.p.v. z in de eerste term geeft:

$$- \int_0^{+a} 2 \rho g z \sqrt{a^2-z^2} dz.$$

$$\text{M.a.w. } F = \int_{-a}^{+a} 2 \rho g a \sqrt{a^2-z^2} dz.$$

Substitutie van $z = ay$ geeft

$$F = 2 \rho g a^3 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-y^2} dy = (\text{symmetrisch}) = 4 \rho g a^3 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

Met $y = \sin \theta$ $0 < \theta < \pi/2$ volgt

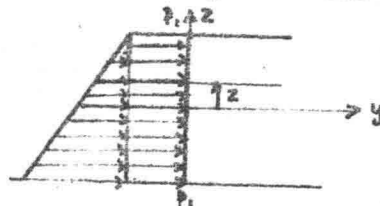
$$F = 4 \rho g a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 4 \rho g a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \rho g \pi a^3 + 4 \rho g a^3 \left[\frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \underline{\underline{\rho g \pi a^3}}$$

Dit resultaat vinden we aan beide dwarsdoorsnedes van de buis. M.a.w. de invloed van de zwaartekracht valt eruit en dus is resultaat (8) juist. (zie afleiding (4)).

S.11.4 In studievraag 11.3 zagen we dat de druk op hoogte z gelijk was aan



$$p(z) = p_1 + \rho g (a-z)$$

Oftewel:

$$p(z) + \rho g z = p_1 + \rho g a.$$

Links en rechts delen door ρg geeft

$$\frac{p(z)}{\rho g} + z = \frac{p_1}{\rho g} + a$$

Oftewel de stijghoogte op willekeurige hoogte z is gelijk aan de constante waarde $(p_1 + \rho g a) / \rho g = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + a.$

S.11.5¹ Pas (14) en (15) toe en realiseer U onder welke voorwaarden deze formules gelden.

S.11.6¹ Maak gebruik van de betrekkingen:

$$h_1 - h_2 = RQ \text{ en } Q = K (h_1 - h_2)$$

S.11.7 De snelheidsverdeling van Poiseuille luidt voor een horizontale buis:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \ell \eta} (a^2 - r^2)$$

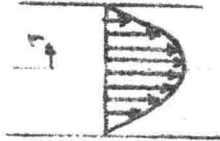
De maximale snelheid treedt op als

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \text{ oftewel } \frac{p_1 - p_2}{4 \ell \eta} (-2r) = 0$$

H.u.v. dat $r = 0.$

Dus $v_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{4 \ell \eta} a^2$, treedt op in het midden van de buis.

De totale verdeling ziet er als volgt uit:



De gemiddelde snelheid is op twee manieren te berekenen (in principe dezelfde).

$$\text{Namelijk: } v_{\text{gem}} = \frac{Q}{A} = \frac{(P_1 - P_2) \frac{\pi}{8} \frac{a^4}{\ell \eta}}{\pi a^2} = \frac{(P_1 - P_2)}{8} \frac{a^2}{\ell \eta}$$

De gemiddelde snelheid is ook te bepalen met

$$v_{\text{gem}} = \frac{1}{A} \int_A v(r) dA \quad A = \text{opp. dwarsdoorsnede}$$

(In feite is $\int_A v(r) dA$ het debiet)

We zien uit een vergelijking van v_{gem} en v_{max} dat in de Poiseuille-verdeling geldt:

$$v_{\text{max}} = 2 v_{\text{gem}}.$$

Dit is een belangrijk resultaat, aangezien we met kennis van één van de twee de ander kunnen bepalen.

Voor een niet horizontale buis volgt hetzelfde, met dit verschil dat er nu i.p.v. $P_1 - P_2$ stijghoogteverschil $h_1 - h_2$ in de uitdrukkingen komt.

S.11.8¹ In een ideale vloeistof treden geen schuifspanningen op, dus laat in de viskeuze vloeistof de schuifspanningen naar nul gaan en bedenk dan de gevolgen voor de stroom.

S.11.9 Des te groter de breedte a van de rechthoekige doorsnede des te kleiner wordt k_0 (b constant verondersteld.).

Het gevolg van een verbreding is dat de invloed van de zijwanden op de stroming steeds kleiner worden en dus de weerstand van de geometrie afneemt oftewel de doorlating toeneemt. De c waarde is $c = \frac{16}{k_0}$, dus als k_0 afneemt neemt c en dus de doorlating k toe, hetgeen in overeenstemming is met de bovenstaande verwachting.

S.11.10.



We veronderstellen, dat de onderlinge verbindingen der buizen geen extra weerstand geven.

De toestandsvergelijking voor buis 1 is:

$$Q_1 = K_1 (H_1 - H_A)$$

Evenzo voor buis 2:

$$Q_2 = K_2 (H_1 - H_A)$$

Combinatie geeft

$$Q_1 + Q_2 = (K_1 + K_2) (H_1 - H_A)$$

$$Q = (K_1 + K_2) (H_1 - H_A) \rightarrow H_1 - H_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot Q. \quad (A)$$

Voor buis 3 geldt:

$$R_3 Q = H_A - H_B$$

Combinatie met A geeft:

$$\left\{ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right\} Q = H_1 - H_A + H_A - H_B = H_1 - H_B \quad (B)$$

Voor de configuratie van buis 4 en 5 geldt:

$$Q = \left\{ \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right\} = H_B - H_2.$$

Combinatie met (B) geeft tenslotte:

$$\left\{ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right\} Q = H_1 - H_2.$$

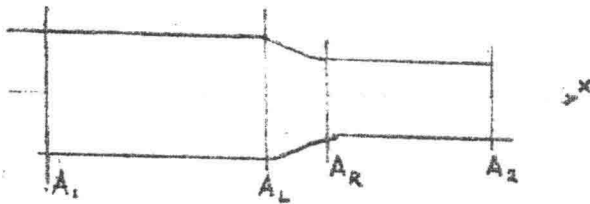
Met andere woorden de toestandsvergelijking van de totale geometrie is:

$$H_1 - H_2 = \left\{ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right\} Q$$

Hieruit volgt dat de totale weerstand van de configuratie gelijk is aan

$$R^* = \left\{ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right\}.$$

Waarom zouden we voor de gekoppelde buizen de toestandsvergelijking $H_1 - H_2 = R Q$ i.p.v. $h_1 - h_2 = R Q$ gebruiken?



We beschouwen daartoe de verbinding tussen de twee rechte buizen met verschillend oppervlak van dwarsdoorsnede.

De weerstand van een cilindrische buis is:

$$R = \frac{128 \ell \eta}{\pi g D^4}, \text{ waarin } \ell \text{ de lengte van de buis is.} \quad (1)$$

Voor de buis tussen A_L en A_1 geldt de toestandsvergelijking (bij stationaire stroming):

$$h_1 - h_L = R_1 Q \quad (2)$$

Evenzo geldt voor de buismoot tussen A_R en A_2

$$h_R - h_2 = R_2 Q \quad (3).$$

Door beide buizen gaat nl. steeds hetzelfde debiet Q .

Als nu het verbindingstuk tussen A_L en A_R klein is t.o.v. de buizen dan volgt uit (1) dat de weerstand ervan gering is. We kunnen dan bij benadering Bernoulli toepassen, waaruit we concluderen dat $H_L = H_R$, oftewel de stuwhoogte is gelijk in beide doorsneden.

Dus schrijven we (2) en (3) in stuwhoogterelaties dan geeft sommatie ervan:

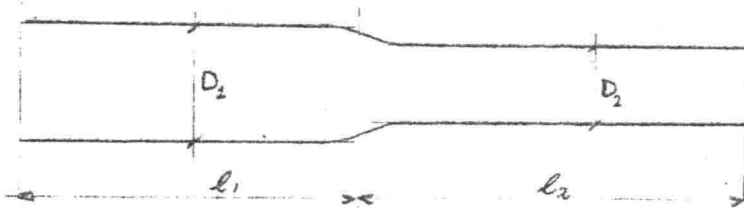
$$H_1 - H_2 = (R_1 + R_2) Q$$

hetgeen bij de stijghoogterelaties niet het geval zou zijn, daar $h_L \neq h_R$.

Opm: Bij het opstellen van de impulsbalansvergelijking voor een buis met variabele dwarsdoorsnede, volgt op dezelfde wijze als voor de traagheid in eenheid 10 dat er geldt dat $H_L - H_R = R Q$ i.p.v.

$$h_L - h_R = R Q !$$

11. We hadden twee buizen in serie met verschillende lengtes en diameters.



Gegeven zijn de diameters: $D_1 = 1[m]$ en $D_2 = 0,1[m]$. De eis, is dat de weerstand R_1 5 procent of minder is van die R_2 .

Oftewel

$$R_1 \leq \frac{5}{100} R_2.$$

Daar we ons nog steeds bezighouden met stationaire laminaire stromen moet gelden dat

$$\frac{128 \ell_1 \eta}{\rho g \pi D_1^4} \leq \frac{5}{100} \frac{128 \ell_2 \eta}{\rho g \pi D_2^4}$$

oftewel

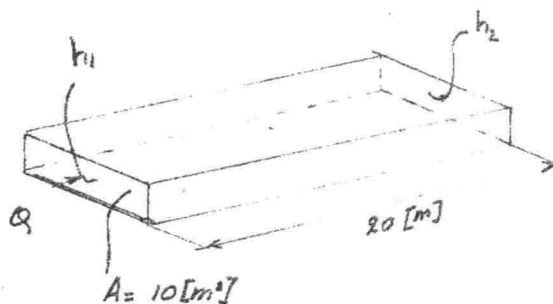
$$\frac{\ell_1}{\ell_2} \leq \frac{5}{100} \frac{D_1^4}{D_2^4} = \frac{5}{100} \frac{1}{10^{-4}} = \underline{\underline{500}}$$

M.a.w. buis 1 moet 500 keer langer zijn dan buis 2.

Ook kunnen we zeggen dat buis 2 maar 1/500 van de lengte van buis 1 hoeft te hebben om toch nog een 20 * zo grote weerstand te leveren.

Hieruit blijkt dus de grote invloed van de diameter op de weerstand van een buis.

- 12.



De toestandsvergelijking voor het lichaam luidt bij laminaire stationaire stroming:

$$Q = K(h_1 - h_2)$$

met

$$K = k \frac{A}{l}.$$

Dus de doorlating is $K = 10^{-3} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{2} 10^{-3}$

oftewel de weerstand is $\frac{1}{K} = 500 \cdot [s/m^2]$.

S.11.13. De fysische dimensie van de doorlatendheid is te bepalen met (22)

$$q = k \frac{(h_1 - h_2)}{l}$$

oftewel $[k] = \frac{[q] [l]}{[h_1 - h_2]} = \frac{[m/s] [m]}{[m]} = [m/s]$.

De fysische dimensie van c/δ volgt uit (2.3)

$$\left| \frac{c}{\delta} \right| = \frac{[k] [v]}{[g]} = \frac{[m/s] [m^2/s]}{[m/s^2]} = [m^2].$$

S.11.14.



De gemiddelde snelheid in de stroming is gelijk aan:

$$v_{\text{gem}} = \frac{Q}{A} = \frac{0,1}{\frac{\pi}{4} \cdot (0,1)^2} = \frac{4 \cdot 10^{-1}}{\pi \cdot 10^{-2}} = \frac{40}{\pi} [m/s].$$

De waarde van het Reynoldsgetal is:

$$R_e = \frac{v_{\text{gem}} \cdot D}{\nu} = \frac{\frac{40}{\pi} \cdot 0,1}{\nu} = \frac{4}{\pi \nu}$$

We moeten van de vloeistof, die door de buis dus nog de kinematische viscositeit kennen teneinde de stromingswijze te kunnen bepalen.

In een buis is de stroming laminair als de R_e -waarde kleiner is dan 300
M.a.w.

$$\frac{4}{\pi \nu} < 300$$

oftewel

$$\nu > \frac{4}{360\pi} = 4,2 \cdot 10^{-3} [\text{m}^2/\text{s}].$$

In vergelijking met water $\nu = 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$ is de vereiste viscositeit veel groter, d.w.z. we zullen met een zeer "stropige" vloeistof te maken hebben.

15. Is het nodig eerst de snelheidsverdeling in een kanaal te bepalen? Moeten we daaruit de gemiddelde snelheid in de dwarsdoorsnede bepalen?
16. Het debiet (volumenstroom) van een stationaire turbulente stroming door een hellend kanaal met grote breedte-diepte verhouding is

$$Q = abc \sqrt{aI} = a\sqrt{a} bc\sqrt{I} [\text{m}^3/\text{s}].$$

- variatie van de diepte a heeft een niet-lineaire variatie $a\sqrt{a}$ van het debiet tot gevolg.
- variatie van de breedte b heeft een lineaire variatie van Q tot gevolg.
- De constante van Chèzy

$$C = \frac{\sqrt{g}}{X} (\ln \frac{a}{\epsilon} - 1). \quad (\text{A})$$

volgt uit de snelheidsverdeling van Prandtl-Von Kármán, nl.

$$v'_x = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln \left(\frac{y' + \epsilon}{\epsilon} \right) \quad (\text{B})$$

De verdeling is in de handleiding niet behandeld omdat het erop ingaan te veel inzicht en wiskunde zou vergen.

In (B) is v'_x de stroomsnelheid (gemiddeld) op afstand y' van de wand. κ is de constante van Von Kármán ($\kappa \approx 0,4$).

ϵ is een maat, die afhangt van de ruwheid van de wand en de dikte van de laminaire sublaag. De τ is de schuifspanning langs de bodem.

Formule (A) en (B) behoren niet tot de stof.

Door (B) te integreren over de doorsnede volgt het debiet Q .

De waarde van de constante van Chèzy varieert met de hoogte en de wandruwheid.

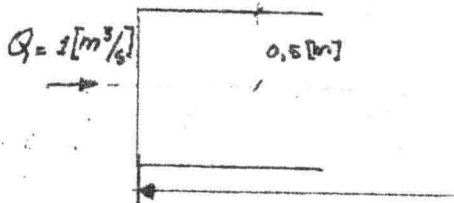
Meestal wordt een gemiddelde waarde gekozen die ligt omstreeks $45 [\text{m}^{1/2}/\text{s}]$.

- Variatie van de helling $J = \sin \alpha$ heeft een niet-lineaire variatie $\sqrt{J}$ van het debiet tot gevolg.

De meest voor de hand liggende wijze waarop dus het debiet van een kanaal bij turbulente stroming te vergroten is, is verhoging van de waterstand.

S.11.17. Probeer op dezelfde wijze als in S.11.16 de invloed van de factoren op de weerstand R na te gaan.

S.11.18.



De weerstand van de buis is bij turbulente stationaire stroming:

$$R = \frac{4 \ell |v_{\text{gem}}|}{\pi D^5} \frac{1}{C(C + 7,7)}$$

Allereerst zullen we bekijken of de vloeistof laminair dan wel turbulent stroomt. De waarde van het getal van Reynolds is:

$$R_e = \frac{v_{\text{gem}} \cdot D}{\nu}$$

$$v_{\text{gem}} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{\pi} \rightarrow R_e = \frac{1}{\pi} \frac{1}{10^{-6}} > 10^6 \Rightarrow$$

Dus de stroming is zeker turbulent.

De weerstand van de buis is dus

$$R = \frac{4 \ell |v_{\text{gem}}|}{\pi D^5} \frac{1}{C(C + 7,7)} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{\pi}}{5 \cdot 10^{-1} \pi \cdot 25 \cdot 10^{-2} (50(50 + 7,7))}$$

$$= \frac{16 \cdot 10^2}{125 \cdot 10^{-3} (2500 + 385)} = \frac{16 \cdot 10^5}{125 \cdot 2885} = \frac{16 \cdot 10^5}{3,5 \cdot 10^5} =$$

$$= 4,6 [\text{s/m}^2]$$

In het geval de stroming laminair zou zijn is de weerstand

$$R = \frac{128 \ell \eta}{\rho g \pi D^4}$$

onafhankelijk van de vloeistofsnelheid.

- 1.19. De Carnot vergelijking voor een verwijding bij stroomvertraging is

$$H_1 - H_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2.$$

De relatie tussen de stuwhoogte en het debiet luidt dus:

$$H_1 - H_2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 \cdot Q$$

M.a.w. de weerstand van de verwijding is

$$R = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2.$$

Hierin kan Q nog geschreven worden als $Q = A_1 \cdot v_{1,gem} = A_2 \cdot v_{2,gem}$.

Het blijkt, dus dat bij een verwijding de weerstand, evenals bij Chézy, snelheidsafhankelijk is. De doorlating $k = (R)^{-1}$

20. Schrijf de stuwhoogteverandering uit in deeltermen en toon het gestelde daarmee aan. Maak voorlopig gebruik van (33).

21. Bij een plotselinge vernauwing in een buis is de weerstand te bepalen uit (34) en deze is

$$R = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(\frac{1}{\mu A_1} - \frac{1}{A_1} \right)^2$$

We zien dus (vgl. S.11.19), dat de Carnotweerstand verschillend zijn, al naar gelang we te maken hebben met een vernauwing dan wel een verwijding in de stroomrichting. De doorlating K is gedefinieerd als $(R)^{-1}$.

22. We hebben te maken met laminaire stroming dus de weerstand van de buis wordt bepaald uit de wet van Poiseuille en is:

$$R = \frac{128 \ell \eta}{\rho g \pi D^4} = \frac{128 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{10^4 \pi 1610^{-8}} = \frac{128}{16\pi} \cdot 10^2 = \frac{800}{\pi}$$

De traagheid van de buis is

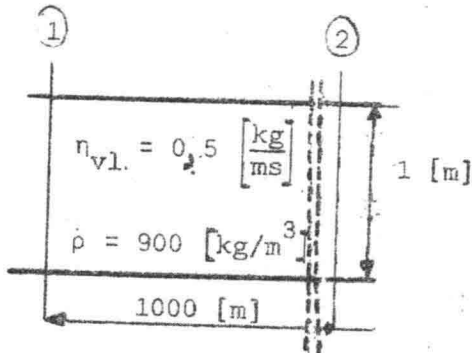
$$M = \frac{\ell}{gA} = \frac{10}{10^4 \pi 10^{-4}} = \frac{10^4}{4\pi} = \frac{2500}{\pi}$$

De toestandsvergelijking voor de buis bij niet-stationaire stroming luidt:

$$H_1 - H_2 = R Q + M \frac{dQ}{dt}$$

ANTWOORDEN NA AANWIJZINGEN BIJ DE STUDIEVRAGEN.

s.11.5.



De weerstand van de buis bij laminaire stationaire stroming van een vloeistof, die voldoet aan de wet van Newton is

$$R = \frac{128 \ell \eta}{\rho g \pi D^4} = \frac{128 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{10^4 \pi \cdot 5^4 \cdot 10^{-4}}$$

$$= \frac{64 \cdot 10^3}{\pi \cdot 625} = \frac{64 \cdot 40}{\pi \cdot 25} \approx 32$$

De eisen t.a.v. de vloeistofstroming zijn boven vermeld.

s.11.6. De toestandsvergelijking:

$$h_1 - h_2 = RQ \text{ geeft } [R] = \frac{[m]}{[m^3/s]} = \left[\frac{s}{m^2} \right]$$

en

$$Q = K(h_1 - h_2) \text{ geeft } [K] = \frac{[m^3/s]}{[m]} = [m^2/s] = [R]^{-1}$$

s.11.8. We vonden rekening houdend met de inwendige wrijving van de vloeistof bij stationaire stroming de Poiseuille-verdeling in de buis.

nl.

$$v(r) = \frac{\rho g (h_1 - h_2)}{4\ell \eta} (a^2 - r^2) \quad (A)$$

en voor de weerstand:

$$R = \frac{128 \ell \eta}{\rho g \pi D^4} \quad (B)$$

Over de buis staat een stijghoogteverschil ($h_1 - h_2$) bij een debiet Q , zodanig dat:

$$R \cdot Q = (h_1 - h_2).$$

We veronderstellen nu, dat we het stijghoogteverschil ($h_1 - h_2$) over de buis kunnen handhaven, en we laten η (dynamische viscositeit = coëfficiënt van inwendige wrijving) in de tijd naar nul gaan.

De vloeistof wordt dus volmaakt.

Het gevolg hiervan op de snelheidsverdeling is zo blijkt uit (A), dat als η naar nul gaat in de tijd, de vloeistofsnelheid naar oneindig zou gaan. Echter (A) geldt voor stationaire stroming en als de snelheid verandert in de tijd wordt de stroming niet-stationair. M.a.w. de theorie van stationaire laminaire stromen gaat niet meer op.

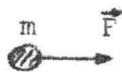
In eenheid 10 hebben we gezien, dat er bij ^{niet-}stationaire stromen een traagheidseffect in de vloeistof optreedt, waarvan de toestandsvergelijking luidt, als de vloeistof volmaakt is:

$$h_1 - h_2 = M \frac{dQ}{dt} \quad (M = \frac{\ell}{gA}). \quad (C)$$

In de vloeistof, die wij beschouwen blijkt uit (B) dat de weerstand van de buis naar nul gaat.

Uit (C) blijkt dan dat de vloeistof zodanig versneld gaat stromen, dat de relatie (C) opgaat.

Denken we nog even terug aan de puntmassa waarop een kracht werkt, dan volgt uit de


 tweede wet van Newton

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (D)$$

Vergelijken we (D) met (C), dan zien we dat het stijghoogteverschil $\Delta h = \Delta \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)$ een maat van de "kracht" op het vloeistoflichaam voorstelt en Q een maat van de "snelheid" van het lichaam.

Trekken we deze analogie nog even door dan komen we tot de conclusie dat de volmaakte vloeistof alleen met constante snelheid kan stromen als de "kracht" Δh nul is oftewel $\frac{dQ}{dt} = 0 \rightarrow Q$ is constant.

De studievraag zoals die geformuleerd is in 11.8, is dus een zinloze vraagstelling, aangezien we in een stroming, waarin wrijving optreedt te maken hebben met stationaire stroming en in een stroming zonder wrijving met niet-stationaire stroming, tenzij $\Delta h = 0$.

Resumerend kunnen we zeggen, dat het model van de volmaakte vloeistof bij stationaire stroming slechts dan opgaat als er geen stijghoogteverschil over de buis bestaat en dus het debiet constant is. In het geval van niet-stationaire stroming is er een toepassing bij snel wisselende stroomrichtingen, waarop we hier niet ingaan.

- 1.15. Voor een laminaire stroming is vereist, dat de waarde van het getal van Reynolds

$$\frac{v_{\text{gem.}} \cdot d}{\nu} < 1200 \quad (4*300).$$

waarin d de diepte van het kanaal representeerd.

Voor turbulente stroming moet gelden:

$$\frac{v_{\text{gem.}} \cdot d}{\nu} > 9200 \quad (4*2300)$$

Aangezien we het debiet kennen, is het niet nodig de snelheidsverdeling te bepalen.

Er geldt, dat:

$$v_{\text{gem}} = \frac{Q}{A} = \frac{9}{20*3} = \frac{3}{20} = 0,15 \text{ [m}^3/\text{s]}$$

De waarde van het getal van Reynolds is

$$Re = \frac{v_{\text{gem.}} \cdot d}{\nu} = \frac{0,15 \cdot 3}{10^{-6}} = 4,5*10^5 (> 9200)$$

M.a.w. de stromingswijze in het kanaal is turbulent. Vergelijk hiermee een schaalmodel van het kanaal waarin de stroming laminair zou worden.

De moraal: Te sterke schaalverkleining is niet toelaatbaar, want het model moet dezelfde stromingswijze hebben als het prototype.

s.11.17. De weerstand R van het kanaal is:

$$R = \frac{l \cdot |v_{\text{gem}}|}{a C^2 A} = \frac{l |v_{\text{gem}}|}{a^2 b C^2}$$

met

$$C = \frac{\sqrt{g}}{k} \left(\ln \frac{a}{\epsilon} - 1 \right) \text{ (zie s.11.16)}$$

(Deze formule wordt niet getoetst, is gegeven ter informatie).

- variatie van de lengte van het kanaal waarover de weerstand berekend wordt heeft een lineaire variatie van R tot gevolg.
- variatie van de gemiddelde snelheid heeft een lineaire variatie van R tot gevolg.
- variatie van de diepte a heeft een niet-lineaire variatie $\frac{1}{a^2}$ van R tot gevolg waarbij we eigenlijk rekening moet houden met de invloed van de diepte a op de constante van Che zy.
- variatie van de breedte b heeft een omgekeerd evenredige variatie van R tot gevolg.

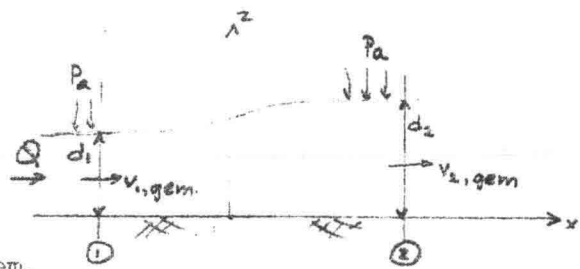
Om dus de weerstand van een kanaal te verkleinen is de meest voor de hand liggende wijze, het vergroten van de diepte a. (zie ook conclusie s.11.16).

s.11.20. We nemen aan, dat de toestandsvergelijking (33) die voor een buis geldt, ook bij benadering voor een kanaal geldt.

Dan geldt dus:

$$H_1 - H_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2$$

Aangezien $H_i = \frac{p_i}{\rho g} + z_i + \frac{v_i^2}{2g}$ gem. en $Q = v_{1, \text{gem}} A_1 = v_{2, \text{gem}} A_2$



volgt, dat.

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 + \frac{v_{1, \text{gem}}^2 - v_{2, \text{gem}}^2}{2g} = \frac{1}{2g} (v_{1, \text{gem}} - v_{2, \text{gem}})^2 \quad (I)$$

Daar de stijghoogte constant is in een dwarsdoorsnede geldt in doorsnede 1:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_A + \rho g d_1 \quad (p_A \text{ is atm. druk})$$

Evenzo geldt in doorsnede 2:

$$p_2 + \rho g z_2 = p_A + \rho g d_2$$

Substitutie in (I) geeft:

$$d_1 - d_2 = - \frac{v_{1,gem} v_{2,gem}}{g}$$

Aangezien $v_{1,gem}$ en $v_{2,gem}$ beiden positief zijn verondersteld, volgt dat:

$$d_1 < d_2$$

Oftewel de waterhoogte in doorsnede 2 is groter dan in doorsnede 1.

COMMENTAAR OP DE BEWERINGEN.

- b.11.1. In een stationaire stroming door een buis met constante dwarsdoorsnede is de snelheidsverdeling in elke doorsnede gelijk. Loodrecht op de stroomrichting is de snelheid wel afhankelijk van de plaats in de doorsnede, dus levert de wet van Newton $\tau = -\eta \frac{\partial v}{\partial r}$ voor de schuifspanning wel een waarde. Dus de bewering is onjuist.
- b.11.2. In een stationaire turbulente stroming geeft een snelheidsmeting in een vast punt een met de tijd fluctuerende snelheid te zien. De gemiddelde waarde over een bepaalde tijd blijkt echter wel constant te zijn. Dus de bewering is onjuist. Herlees ook de inleiding.
- b.11.3. Voorwaarden van het getal van Reynolds beneden 300 is de stroming in een cirkelvormige buis laminair.
Voor waarden groter dan 2300 turbulent.
Voor waarden tussen 300 en 2300 komen beide stromingswijzers voor (niet beschouwd).
Dus de bewering is onjuist.
- b.11.4. We vonden voor de snelheidsverdeling over de dwarsdoorsnede bij laminaire stroming
- $$v(r) = \frac{(h_1 - h_2) \rho g}{4\ell\eta} (a^2 - r^2)$$
- M.a.w.
- $$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{(h_1 - h_2) \rho g}{4\ell\eta} \cdot 2r$$
- M.a.w. voor een stationaire laminaire stroming is het juist, dus de bewering is onjuist.
- N.B. In feite moet de vloeistof ook nog voldoen aan de wet van Newton, echter in deze eenheid worden alleen vloeistoffen, die daaraan voldoen behandeld.
- b.11.5. Deze bewering is juist.

b.11.6. Deze bewering is in principe alleen juist voor laminaire stationaire stromen. Voor niet-stationaire laminaire stromen geldt het bij benadering. Voor turbulente stromen is het echter oppassen geblazen, want dan zijn de doorlatingen afhankelijk van de gemiddelde snelheid in de buis, en als daar veranderingen in optreden, dan veranderen ook de doorlatingen.

b.11.7. Deze bewering is onjuist, daar dit uitsluitend geldt voor vloeistofdwarsdoorsneden, waarbij de diepte-breedte verhouding klein is en bovendien een vrije vloeistofoppervlak aanwezig is, zoals bv. kanalen.

b.11.8. De weerstand van een kanaal is volgens Chézy, zie (30):

$$R = \frac{l \{v_{\text{gem}}\}}{a C^2 A}$$

dus onafhankelijk van v , m.a.w. de bewering is onjuist.

b.11.9. Deze bewering is onjuist. Zie afleiding Carnotverliezen (33) en (34).

b.11.10. Voor een niet-stationaire stroming door een buis met constante dwarsdoorsnede luidt de toestandsvergelijking:

$$H_1 - H_2 = RQ + M \frac{dQ}{dt}$$

Als $Q \neq Q(t)$, dan wordt dit

$$H_1 - H_2 = R \cdot Q.$$

M.a.w. de bijdrage van de traagheid aan het stuwhoogteverschil is nul echter de traagheid zelf is niet nul, dus de bewering is onjuist.

b.11.11. De fysische dimensie van η volgt uit de wet van Newton

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

m.a.w.

$$[\eta] = \frac{[\tau]}{\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]} = \frac{\left[\frac{N}{m^2}\right]}{\left[\frac{1}{s}\right]} = \left[\frac{N}{m^2/s}\right] = \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$$

De bewering is dus juist.

b.11.12. Deze bewering is onjuist. Zie aanvullende vraagstuk 1.

b.11.13. $\frac{C^2}{g}$ is gemiddeld 200 → C is gemiddeld 45.

Dus de bewering is juist.

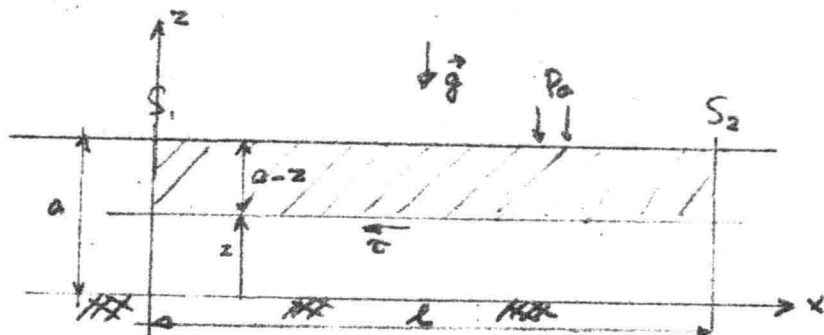
b.11.14. Deze bewering is juist, mits voor de kenmerkende diameter de diepte van het kanaal gekozen wordt.

b.11.15. Voor water geldt bij laminaire stroming de wet van Newton, dus de bewering is juist.

We beschouwen in het algemeen slechts die vloeistoffen, die bij laminaire stroming voldoen aan de wet van Newton.

UITWERKING AANVULLENDE VRAAGSTUKKEN

1.



A. Water is één der vloeistoffen, die bij laminaire stroming voldoen aan de wet van Newton.

We stellen nu de impulsbalans in de x-richting op voor het vaste gearceerde gebied begrensd door S_1, S_2 en de horizontaal op willekeurige hoogte z ($z < a$).

Laten we de invloed van de zwaartekracht buiten beschouwing (links valt tegen rechts weg) en veronderstellen we in S_1 een druk p_1 en in S_2 een druk p_2 , zodanig dat $p_1 > p_2$, dan werkt er op S_1 een kracht:

$$\vec{F}_1 = p_1(a-z) \cdot b \cdot \vec{e}_x. \text{ Op } S_2 \text{ werkt: } \vec{F}_2 = -p_2(a-z)b \vec{e}_x$$

Op het ondervlak werkt de schuifspanning bepaald door de wet van Newton $\tau = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$ dus een kracht:

$$\vec{F}_3 = -\tau l \cdot b = -\eta l b \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Aan de bovenkant werkt alleen de atmosferische druk. p_a loodrecht op de x-richting, dus levert geen bijdrage. De invloed van de zijwanden verwaarlozen we, daar de breedte groot is t.o.v. de diepte.

Het water stroomt stationair d.w.z. daar de dwarsdoorsnede constant is, is in elke doorsnede dezelfde snelheidsverdeling, hetgeen tot twee conclusies leidt:

- De door S_1 binnengestroomde impuls is gelijk aan de door S_2 uitgestroomde impuls.
- De impuls verandering van het gearceerde gebied is nul.

$$\text{Dus } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Substitutie geeft:

$$\eta \ell \frac{\partial v_x}{\partial z} = (p_1 - p_2) (a - z)$$

Integratie levert:

$$v_x(z) = \frac{p_1 - p_2}{\ell \eta} (az - \frac{1}{2} z^2) + C$$

Op de bodem geldt, dat $v_x(0) = 0$, +

$$v_x(z) = \frac{p_1 - p_2}{\ell \eta} (az - \frac{1}{2} z^2).$$

B. De maximale snelheid treedt op als

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \rightarrow z = a$$

Dus

$$v_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{2\ell \eta} a^2$$

De gemiddelde snelheid volgt uit:

$$\begin{aligned} v_{\text{gem}} &= \frac{1}{A} \int_A v(z) dA \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a v(z) dz = \frac{p_1 - p_2}{3\ell \eta} a^2. \end{aligned}$$

$$\text{Dus: } \frac{v_{\max}}{v_{\text{gem}}} = \frac{3}{2}$$

C. De weerstand van het kanaal volgt uit de relatie
 $R \cdot Q = (h_1 - h_2) \quad (1)$

$$\text{Het debiet } Q = v_{\text{gem}} \cdot A = \frac{p_1 - p_2}{3\ell \eta} a^3 b \text{ [m}^3/\text{s}] \quad (2)$$

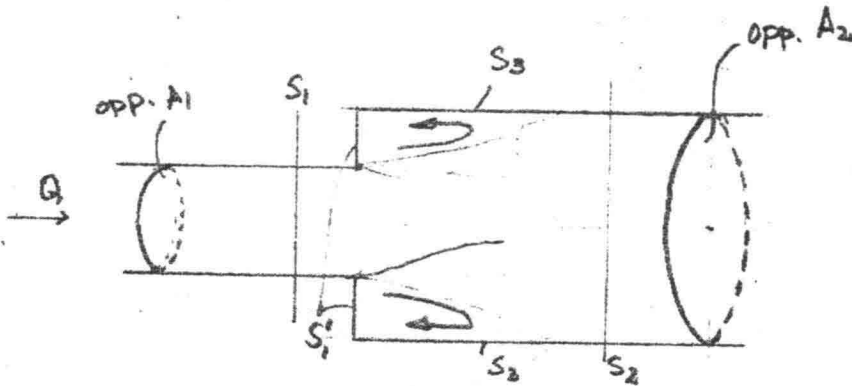
Dan volgt uit (1) en (2):

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{3\ell \eta}{a^3 b \rho g} Q$$

M.a.w.

$$R = \frac{3\lambda\eta}{a^3 b p g} \left[\frac{s}{m^2} \right]$$

2.



We stellen de impulsbalans op voor het vaste gebied \$G\$ begrensd door \$S_1\$, \$S_1'\$, \$S_3\$ en \$S_2\$, dat het dissipatiegebied met de neren insluit.

We werken met de gemiddelde snelheden over de doorsneden, oftewel de snelheidsverdeling in \$S_1\$ en \$S_2\$ is uniform, met

$$v_{1,gem} = \frac{Q}{A_1} \text{ en } v_{2,gem} = \frac{Q}{A_2}$$

We beschouwen de x-gerichte impuls en laten de zwaartekracht buiten beschouwing.

In \$S_1\$ werkt een druk \$p_1\$ en daardoor een drukkracht \$\vec{p}_1 A_1 \vec{e}_x\$. Deze draagt in een tijd \$dt\$ een hoeveelheid \$\vec{p}_1 A_1 \vec{e}_x dt\$ een x-gerichte impuls naar \$G\$ over.

Verder gaat in de tijd \$dt\$ een volumen \$Qdt\$ door \$S_1\$ heen naar \$G\$ met een impulsinhoud

$$\rho Q dt v_{1,gem} \vec{e}_x$$

De totale toevoer van x-gerichte impuls naar \$G\$ door \$S_1\$ in \$dt\$ is:

$$d\vec{p}_1 \vec{e}_x = \vec{p}_1 A_1 \vec{e}_x dt + \rho Q v_{1,gem} \vec{e}_x dt.$$

Empirisch blijkt, dat de druk langs S_1^1 ongeveer overeenkomt met de druk in S_1 . Door S_1^1 wordt in een tijd dt de hoeveelheid $dp_1^1 \vec{e}_x = p_1 (A_2 - A_1) \vec{e}_x dt$ aan x-gerichte impuls overgedragen. Door S_2 heen gaat in dt een volumen Qdt uit G weg.

We brengen dit in rekening als $-Qdt$ naar binnen

Er werkt een druk p_2 . Als aangevoerde x-impuls brengen we

$$dp_2 \vec{e}_x = -p_2 A_2 \vec{e}_x dt - p Q v_{2,gem} \vec{e}_x dt$$

in rekening.

De schuifspanningen langs S_3 worden verwaarloosd (de grote schuifspanningen in het gebied treden hier zozeer langs de wanden, maar in het inwendige op). We stellen dus

$$dp_3 \vec{e}_x = \vec{0}, \text{ voor de door } S_3 \text{ heen naar G in } dt \text{ overgedragen impuls.}$$

Binnen het gebied G vertoont de impuls wel fluctuaties, echter blijft gemiddeld constant (stationaire stroom), dus

$$dp_g \vec{e}_x = \vec{0}$$

Opstellen van de balans levert dan na enig herleiden:

$$p_2 - p_1 = p \frac{Q}{A_2} (v_{1,gem} - v_{2,gem}) = p v_{2,gem} (v_{1,gem} - v_{2,gem}) \quad (A)$$

Aangezien $v_{1,gem} > v_{2,gem}$ is, geldt dat $p_2 > p_1$, oftewel de druk loopt in stroomafwaartse richting op.

Tot dusverre lieten we de zwaartekracht buiten beschouwing.

Nemen we deze invloed mee, dan verandert vgl. (A) in:

$$\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) = -\frac{Q}{g A_2} (v_{1,gem} - v_{2,gem})$$

Oftewel

$$h_1 - h_2 = -\frac{Q}{g A_2} (v_{1,gem} - v_{2,gem}) \quad (B)$$

Nu geldt voor de stuwhoogte t.p.v. dwarsdoorsnede S_i ($i=1,2$):

$$H_i = h_i + \frac{v_{i,gem}^2}{2g}$$

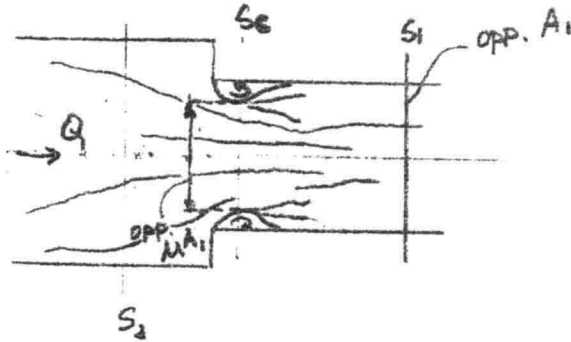
Oftewel (B) is te schrijven als:

$$H_1 - H_2 = -\frac{Q}{g A_2} (v_{1,gem} - v_{2,gem}) + \frac{v_{1,gem}^2 - v_{2,gem}^2}{2g}$$

Hetgeen te schrijven is als:

$$H_1 - H_2 = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 \quad \begin{array}{l} \text{(zie 33)} \\ \text{q.e.d. (quod est demonstrandum)} \end{array}$$

Draait de stroming van richting om, dan hebben we te maken met onderstaand stroombeeld.



Opstellen van de impulsbalans voor het gebied tussen S_c en S_1 levert (34)

Toon dit zelf aan.

Opm. Tussen S_2 en S_c is de stroming vrijwel stationair en verlies-

vrij, dus Bernoulli geldt bij benadering m.a.w. $H_c \approx H_2$.

Opm.: Deze afleidingen worden niet getoetst.

De toestandvergelijking voor de buis luidt, i.v.m. de stationaire stroming

$$\Delta H = R \cdot Q$$

In geval van laminaire stroming is de weerstand

$$R = \frac{128 \ell \eta}{\rho g \pi D^4}$$

en volgt de gemiddelde snelheid uit

$$v_{\text{gem}} A \cdot R = \Delta h \rightarrow v_{\text{gem}} = \frac{\Delta h}{R \cdot A}$$

Het stijghoogteverschil over de buis is, aangezien beide uiteinden in contact staan met de atmosferische druk, gelijk aan:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \ell \sin \alpha = 25 [\text{m}].$$

Dus:

$$v_{\text{gem}} = \frac{25}{\frac{128 \ell \eta}{\rho g \pi D^4} \cdot \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{10}{16 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^5}{16} [\text{m/s}]$$

In geval van turbulente stroming is de weerstand

$$R = \frac{4 \ell |v_{\text{gem}}|}{a A C(C + 7,7)}$$

en volgt de gemiddelde snelheid uit

$$\Delta h = \frac{4 \ell |v_{\text{gem}}|}{a A C(C + 7,7)} v_{\text{gem}} A \Rightarrow$$

$$(v_{\text{gem}})^2 = \frac{\Delta h \cdot a C(C + 7,7)}{4 \ell} = \frac{25 \cdot 57,7}{2}$$

$$v_{\text{gem}} \approx 27 \text{ [m/s]}.$$

$$b) Re = \frac{v_{\text{gem}} \cdot D}{\nu} = \frac{27 \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{10^{-6}} = 54 \cdot 10^5 \gg 2300$$

In het geval van veronderstelde ^{laminair} stroming is Re nog veel groter dus we hebben te maken met turbulente stroming en de

$$v_{\text{gem}} \approx 27 \text{ [m/s]}.$$

$$c) \text{ Het debiet } Q = v_{\text{gem}} \cdot A \approx 27 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 27 \cdot \pi \cdot 10^{-2} \text{ [m}^3/\text{s]}.$$

1) De weerstand van de buis wordt bepaald door:

$$R = \frac{4 \ell |v_{\text{gem}}|}{a A C(C + 7,7)} \approx \frac{4 \cdot 50 \cdot 27}{10^{-1} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot 10^{-2} (50)(50 + 7,7)} \approx 500$$

Alvorens de weerstand van de buis te bepalen zullen we moeten onderzoeken of de vloeistof laminair dan wel turbulent stroomt.

De gemiddelde snelheid volgt uit:

$$v_{\text{gem}} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} \cdot 25 \cdot 10^{-2}} = \frac{400}{25\pi} = \frac{16}{\pi} \text{ [m/s]}.$$

$$\text{De waarde van het Re-getal is } \frac{v_{\text{gem}} \cdot D}{\nu} = \frac{\frac{16}{\pi} \cdot 5 \cdot 10^{-1}}{10^{-6}} = \frac{8}{\pi} 10^6$$

Deze waarde is veel groter dan 2300, dus de stroming in de buis is turbulent.

a) De weerstand van de buis is

$$R = \frac{4 \ell |v_{\text{gem}}|}{a A C(C + 7,7)} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot \frac{16}{\pi}}{2,5 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} 45(45 + 7,7)} \approx 160$$

b) Het stijghoogteverschil wordt bepaald door

$$\Delta h = R \cdot Q \approx 160 \cdot v_{\text{gem}} \cdot A$$

$$\approx 160 \cdot \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 25 \cdot 10^{-2}$$

$$\approx 160 [\text{m}].$$

Aangezien de buis horizontaal ligt kunnen we het drukverschil over de buis bepalen uit

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} \approx 160 [\text{m}] \rightarrow p_1 - p_2 = 1600 \rho \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

c) Voor de waarde van het Re-getal zie boven.

a) We nemen voorlopig aan, dat de stromingswijze in het kanaal turbulent is. Later zullen we dit controleren. Er geldt dan voor het balansgebied tussen de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 , dat

$$h_1 - h_2 = R \cdot Q \quad (h_i \text{ is stijghoogte in } A_i)$$

met

$$R = \frac{\lambda |v_{\text{gem}}|}{d_1 C^2 A}$$

Met $Q = A \cdot v_{\text{gem}}$ volgt uit (1) dat

$$v_{\text{gem}}^2 = (h_1 - h_2) \frac{d_1 C^2}{\lambda}$$

Substitutie van de gegeven waarden geeft

$$v_{\text{gem}}^2 = \frac{0,1 \cdot 3 \cdot 50^2}{1000} = \frac{750}{1000} = 0,75$$

en

$$v_{\text{gem}} \approx 0,86 [\text{m/s}]$$

b) Voor het getal van Reynolds volgt dan dat:

$$\frac{v_{\text{gem}} \cdot d_1}{10^{-6}} \approx 2,6 \cdot 10^6 \gg 9200$$

dus de aanname t.a.v. de turbulente stroming was juist.

c) De weerstand van het kanaal is:

$$R = \frac{h_1 - h_2}{Q} = \frac{0,1}{60 \cdot 0,86} \approx 0,002 \left[\frac{\text{s}}{\text{m}} \right]$$

d) Er moet dan gelden, dat:

$$\frac{v_{\text{gem}} \cdot d_1}{v} \leq 1200 \rightarrow v_{\text{gem}} \leq \frac{1200 \cdot 10^{-6}}{2}$$

$$\leq 6 \cdot 10^{-4} [\text{m/s}].$$

In het geval van een laminaire stroming is de weerstand van het kanaal:

$$R = \frac{3\eta}{d_1^3 \text{bpg}} \left[\frac{\text{s}}{\text{m}^2} \right] \quad (\text{zie a.v. 1})$$

$$= \frac{3\eta v}{d_1^3 \text{bg}}$$

Substitutie van de gegeven waarden geeft

$$R = \frac{3 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}}{27 \cdot 20 \cdot 10} = \frac{15}{27} \cdot 10^{-6} = \frac{5}{9} \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{s}}{\text{m}} \right]$$

(De weerstand is dus veel kleiner dan in het geval van turbulente stroming).
Uit

$$h_1 - h_2 = R \cdot Q \text{ volgt dat}$$

$$h_1 - h_2 \leq \frac{5}{9} \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^{-4} [\text{m}]$$

$$\leq 3,3 \cdot 10^{-9} [\text{m}].$$

e) De maximale snelheid in de stroming treedt op aan het oppervlak en deze is.
(zie A.v. 1b).

$$v_{\max} = \frac{h_1 - h_2}{2\ell\eta} \cdot d_1^2 = \frac{3,3 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} \cdot 9 = 15 \cdot 10^{-9} [\text{m/s}].$$

- 6 a) Het maximale debiet, dat in de buis optreedt is maximaal als

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \text{ maximaal is.}$$

Dit maximum is 1.

Dus het max. debiet is:

$$Q = 2 \cdot 10^{-4} [\text{m}^3/\text{s}].$$

De gemiddelde snelheid bij dat debiet is:

$$v_{\text{gem}} = \frac{Q}{A} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{0,78} = 2,56 \cdot 10^{-4} [\text{m/s}].$$

Het getal van Reynolds is dan:

$$R_e = \frac{v_{\text{gem}} \cdot D}{\nu} = \frac{2,56 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0}{10^{-6}} = 256$$

Voor een buis is de stroming laminair als $R_e < 300$, dus de stromingswijze is laminair.

- b) De weerstand van de buis is in dat geval

$$R = \frac{128\ell\eta}{\rho g \pi D^4} = \frac{128\ell\nu}{g \pi D^4} = \frac{128 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot \pi \cdot 1} \approx 4 \cdot 10^{-4} [\text{s/m}^2]$$

- c) De traagheid van de buis volgt uit

$$M = \frac{\ell}{gA} = \frac{100}{10 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{40}{\pi} \approx 12,7 [\text{s}^2/\text{m}^2]$$

- d) Voor het balansgebied tussen de dwarsdoorsneden A_1 en A_2 geldt:

$$h_1 - h_2 = R Q + M \frac{dQ}{dt}$$

met h_i is stijghoogte in A_i .

Hieruit volgt met $Q = 2 \cdot 10^{-4} \sin \frac{\pi}{2} t [\text{m}^3/\text{s}]$:

$$h_1 - h_2 = 8 \cdot 10^{-8} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) + 4 \cdot 10^{-4} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) [\text{m}].$$

- 7 a) De stroming in de buis is turbulent want in de wijde buisgedeeltes geldt, dat

$$R_e = \frac{v_{\text{gem}} \cdot D_2}{\nu} = \frac{Q D_2}{A \nu} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{10^{-6}} = \frac{2}{\pi} \cdot 10^6 (> 2300).$$

(In de nauwere buis is R_e 2 keer zo groot).

Volgens Carnot is dan het instroomweerstand bij de linkse profielverspringing:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(\frac{1}{\mu A} - \frac{1}{A} \right)^2 [\text{s/m}^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \left(\frac{1}{0,7 \cdot \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \right)^2 = 0,015 [\text{s/m}^2]. \end{aligned}$$

Deze weerstand treedt op tussen de dwarsprofielen A_1 en A_3 .

- b) De weerstand van de tussenbuis tussen de dwarsprofielen A_3 en A_4 wordt bepaald door Chzy en is:

$$R_2 = \frac{8 \xi |v_{\text{gem}}|}{D_1 \cdot A \cdot C(C + 7,7)} = \frac{8 \cdot 100 \cdot 4/\pi}{1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 50 \cdot 57,7} = \approx 0,45 [\text{s/m}^2]$$

- c) De uitstroomweerstand in het vertraginggebied tussen de dwarsprofielen A_4 en A_2 is

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \cdot \left(\frac{4}{\pi D_1^2} - \frac{4}{\pi D_2^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{10} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right)^2 = \frac{3}{20\pi} = 0,045 [\text{s/m}^2] \end{aligned}$$

- d) De beschouwde buisgedeeltes stonden in serie: met: (Q is in elke doorsnede gelijk)

$$H_1 - H_3 = R_1 Q;$$

$$H_3 - H_4 = R_2 Q$$

$$H_4 - H_2 = R_3 Q +$$

$$H_1 - H_2 = (R_1 + R_2 + R_3) Q.$$

Dus de totale weerstand is

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \approx 0,50 [\text{s/m}^2].$$

d) Aangezien de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 hetzelfde oppervlak hebben, zullen de gemiddelde snelheden daar gelijk zijn, zodat

$$h_1 - h_2 = R \cdot Q \approx 0,50 \cdot 1 \approx 0,50 [\text{m}]$$

8 a) De stroming is laminair, dus de weerstand van de buizen zijn:

$$R_1 = \frac{128 \ell_1 \eta}{\rho g \pi D_1^4} = \frac{128 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{10^4 \pi 10^{-4}} \approx 0,4 [\text{s/m}^2]$$

$$R_2 = \frac{128 \ell_2 \eta}{\rho g \pi D_2^4} = \frac{128 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{10^4 \pi 625 \cdot 10^{-8}} \approx 12,8 [\text{s/m}^2]$$

$$R_3 = 2R_1 \approx 0,8 [\text{s/m}^2] \quad (\ell_3 = 2\ell_1).$$

b) Voor de stuwhoogteverschillen geldt:

$$H_a - H_b = R_1 Q \quad (1)$$

$$H_b - H_c = R_2 Q_1$$

$$H_b - H_c = R_3 Q_2 \quad (2).$$

Met

$$Q_1 + Q_2 = Q.$$

(2) schrijven we nu als

$$Q_1 = K_2 (H_b - H_c)$$

$$\text{met } K_2 = (R_2)^{-1}$$

$$Q_2 = K_3 (H_b - H_c) + \quad (3)$$

$$K_3 = (R_3)^{-1}$$

$$Q = (K_2 + K_3) (H_b - H_c)$$

$$Q = \left(\frac{1}{12,8} + \frac{1}{0,8} \right) (H_b - H_c) = (1,33) (H_b - H_c)$$

Dus er geldt: $(H_b - H_c) = 0,75 \cdot Q.$

(4)

Met (1) volgt dan dat

$$\begin{aligned} H_a - H_c &= (R_1 + 0,75)Q \\ &= (0,4 + 0,75)Q \\ &= 1,15 Q. \end{aligned}$$

Dus de totale weerstand van de configuratie is

$$R_{\text{tot}} = 1,15 [\text{s/m}^2].$$

c) Het maximale debiet wordt bepaald, door de waarde van de gemiddelde snelheid, zodanig dat

$$R_e = \frac{v_{\text{gem}} \cdot D}{v} \leq 300.$$

Nu is de gemiddelde snelheid in buis 1 maximaal:

$$v_{\text{gem},1} \leq \frac{300 \cdot v}{D_1} = 3 \cdot 10^{-3} [\text{m/s}].$$

De vraag is nu of de stroming in buis 2 en 3 ook laminair blijft.

Uit (4) volgt dat, als het debiet Q maximaal is, dat:

$$\begin{aligned} H_b - H_c &= 0,75 Q = 0,75 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-2} \\ &= \frac{9}{16} \pi \cdot 10^{-5} [\text{m}]. \end{aligned}$$

Uit (3) volgt dan; dat voor buis 2 geldt:

$$\begin{aligned} Q_1 &= k_1 (H_b - H_c) = 0,08 \cdot \frac{9}{16} \pi \cdot 10^{-5} = \frac{9}{2} \pi \cdot 10^{-7} [\text{m}^3/\text{s}], \\ \rightarrow v_{\text{gem},2} &= \frac{9/2 \pi \cdot 10^{-7}}{\frac{\pi}{4} \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = \frac{36}{50} \cdot 10^{-3} = 0,72 \cdot 10^{-3} [\text{m/s}]. \end{aligned}$$

De toelaatbare maximale snelheid in buis 2 opdat de stroming laminair blijft is

$$v_{\text{gem},2} < \frac{300 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^{-3} [\text{m/s}].$$

Dus in buis 2 is de stroming laminair.

Aangezien buis 3 dezelfde diameter heeft als buis 2 en $Q_2 = Q - Q_1 < Q$ zal de stroming in buis 3 ook laminair zijn.

$$\text{Dus } Q_{\max} = \frac{3}{4} \pi \cdot 10^{-5} [\text{m}^3/\text{s}].$$

d) De grootst optredende snelheid treedt dus op in buis 1 en is (zie boven)

$$v_{\text{gem},1} = 3 \cdot 10^{-3} [\text{m/s}].$$

9 De doorlatendheid k is gedefiniëerd als

$$q = k \frac{(h_1 - h_2)}{l} \text{ voor een rechthoekig blok}$$

met $q = \frac{Q}{A}$ (specifiek debiet) $[\text{m/s}]$

$h_1 - h_2$ (stijghoogteverschil over het blok) $[\text{m}]$

l (lengte blok) $[\text{m}]$.

$$\text{M.a.w. } [k] = \frac{[\text{m/s}] \cdot [\text{m}]}{[\text{m}]} = [\text{m/s}].$$

- De traagheid M is gedefinieerd als

$$M \cdot \frac{dQ}{dt} = (H_1 - H_2)$$

met $H_1 - H_2$ (stuwhoogteverschil over leiding) $[\text{m}]$

Q (debiet) $[\text{m}^3/\text{s}]$

$$\text{Dus: } [M] = \frac{[\text{m}]}{[\text{m}^3/\text{s}^2]} = [\text{s}^2/\text{m}^2].$$

- De weerstand R is gedefinieerd als

$$H_1 - H_2 = R Q$$

$$[R] = \frac{[\text{m}]}{[\text{m}^3/\text{s}]} = [\text{s}/\text{m}^2]$$

- De dynamische viscositeit η levert de relatie tussen

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

τ = schuifspanning $[N/m^2]$

$$[\eta] = \frac{[N/m^2]}{[1/s]} = \left[\frac{Ns}{m^2} \right] = \left[\frac{kg}{ms} \right]$$

10 a) De stroming in een kanaal is laminair als

$$R_e = \frac{v_{gem} \cdot a}{\nu} < 1200$$

Nu is de gemiddelde snelheid van het water:

$$v_{gem} = \frac{Q}{A} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5} = 10^{-3} [m/s].$$

Dus

$$R_e = \frac{10^{-3} \cdot 1}{10^{-6}} = 10^3 = 1000 < 1200$$

M.a.w. de stroming is laminair.

b) Voor een laminaire stroming in een kanaal geldt dat

$$\frac{v_{max}}{v_{gem}} = \frac{3}{2} \quad (\text{zie. A.V. 1c})$$

Dus

$$v_{max} = \frac{3}{2} \cdot 10^{-3} [m/s].$$

Deze snelheid treedt op aan het oppervlak.

c) De stroming is volledig turbulent als:

$$R_e = \frac{v_{gem} \cdot a}{\nu} > 9200$$

oftewel

$$v_{gem} > \frac{9200 \cdot 10^{-6}}{1} = 92 \cdot 10^{-3} [m/s].$$

Het debiet moet dus groter zijn dan

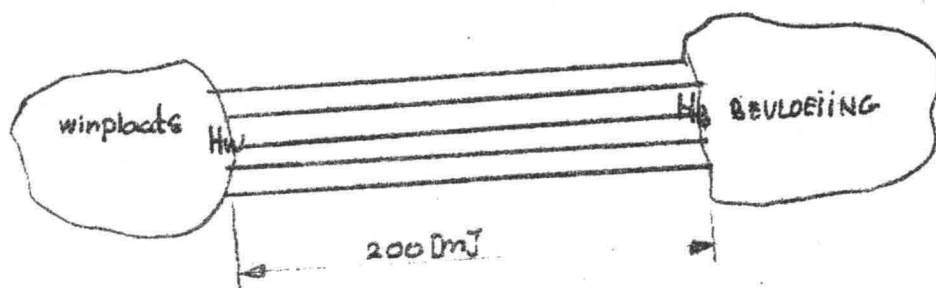
$$Q > 9,2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = 4,6 \cdot 10^{-2} [m^3/s].$$

- d) De weerstand van het kanaal wordt bepaald door de formule van Chezy. Voor het gebied tussen de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 geldt

$$R = \frac{l |v_{\text{gem}}|}{a C^2 \cdot A}$$

$$= \frac{1000 \cdot 9,2 \cdot 10^{-3}}{1.2500 \cdot 5} = 7,3 \cdot 10^{-4} [\text{s/m}^2]$$

- 11 a) We leggen 4 identieke buizen in serie, m.a.w. de weerstand van de achter elkaar liggende buizen is die van één buis met een lengte van 200[m] en een diameter van 10^{-1} [m].
Van deze buizen liggen er vijf parallel aan elkaar.



Er is voor bevoeiing een debiet vereist van $0,5 [\text{m}^3/\text{s}]$. Daar door elke buis evenveel stroomt, zal dit per buis een debiet van $0,1 [\text{m}^3/\text{s}]$ betekenen.

De gemiddelde snelheid in de buis wordt dan

$$v_{\text{gem}} = \frac{Q}{A} = \frac{0,1}{\frac{\pi}{4} 10^{-2}} = \frac{40}{\pi} = 12,7 [\text{m/s}]$$

Het getal van Reynolds is bij deze waarde

$$R_e = \frac{12,7 \cdot 10^{-1}}{10^{-6}} = 12,7 \cdot 10^5 > 2300$$

Dus de stroming in de buizen is turbulent.

- b) De weerstand per buis wordt bepaald door:

$$H_A - H_B = R Q$$

$$\text{met } R = \frac{8 l |v_{\text{gem}}|}{D \cdot A \cdot C(C + 7,7)} = \frac{8 \cdot 200 \cdot 12,7}{10^{-1} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-2} \cdot 50 \cdot 57,7} = 9000 [\text{s/m}^2]$$

Daar de buizen parallel liggen moeten de doorlatingen worden opgeteld, zodat

$$Q = (K_1 + \dots + K_5)(H_W - H_B)$$

$$= \frac{5}{9000} (H_W - H_B)$$

Dus de weerstand van de totale configuratie is:

$$R = \frac{9000}{5} = 1800 [\text{s/m}^2].$$

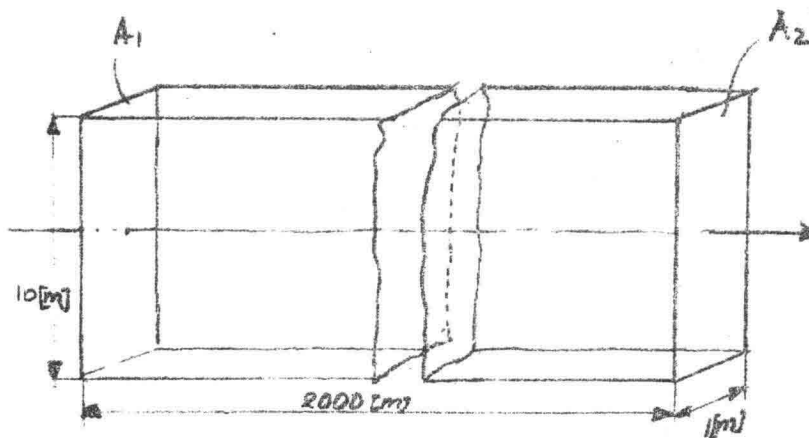
c) Het vereiste stijghoogteverschil is dan: (alle buizen hebben dezelfde diameter)

$$\rightarrow H_W - H_B = h_w - h_b$$

$$h_w - h_b = R \cdot Q$$

$$= 1800 \cdot 0,5 = \underline{\underline{900 [\text{m}]}}$$

12



a) Voor het balansgebied tussen de dwarsdoorsnedes A_1 en A_2 geldt bij laminaire stroming:

$$q = k \frac{(h_1 - h_2)}{l}$$

Met

$$\frac{Q}{A} = q \text{ volgt dat}$$

$$Q = \frac{kA}{l} (h_1 - h_2) \text{ oftewel}$$

$$(h_1 - h_2) = \frac{\ell}{kA} \cdot Q, \quad (1)$$

dus de weerstand

$$R = \frac{\ell}{kA} = \frac{2000}{10^{-5} \cdot 10} = 2 \cdot 10^7 \text{ [s/m}^2\text{]}.$$

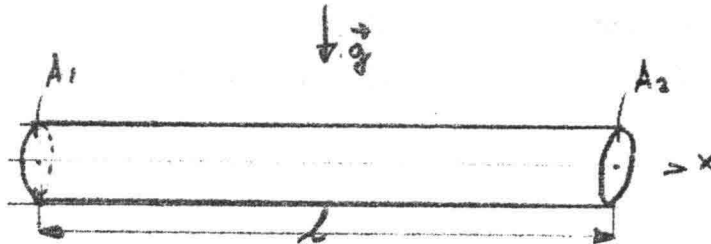
b) Uit (1) volgt dat

$$Q = \frac{1}{R} (h_1 - h_2) = \frac{5}{2 \cdot 10^7} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^3\text{/s]}$$

c) Het specifieke debiet is dan

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{2,5 \cdot 10^{-7}}{10} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ [m/s]}.$$

13



a) We veronderstellen, dat

$$\Delta h = h_1 - h_2 = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} t \text{ [m]}.$$

De traagheid van de buis is onafhankelijk van de stromingstoestand:

$$M = \frac{\ell}{gA} = \frac{5}{10 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 16 \cdot 10^{-2}} = 4 \text{ [s}^2\text{/m}^2\text{]}$$

met

$$M \frac{dQ}{dt} = \Delta h.$$

b) Bij verwaarlozing van de traagheid volgt het debiet in de buis uit:

$$M \frac{dQ}{dt} = \Delta h$$

oftewel

$$\frac{dQ}{dt} = 0,5 \sin \frac{\pi}{3} t$$

Dus $Q = -\frac{1,5}{\pi} \cos \frac{\pi}{3} t + \text{constante}.$

De constante wordt bepaald m.b.v. beginvoorwaarden. (Hier niet gegeven).

- c) De toestandsvergelijking voor de buis voor het geval dat we de weerstand niet verwaarlozen is: (zie (36)).

$$H_1 - H_2 = \frac{\pi D \tau \ell}{\rho g A} + \frac{\ell}{g A} \frac{dQ}{dt}$$

Dit is in ons geval (constante dwarsdoorsnede) te schrijven als

$$h_1 - h_2 = \frac{\pi D \tau \ell}{\rho g A} + \frac{\ell}{g A} \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

Afhankelijk of de stroming laminair dan wel turbulent is vinden we verschillende weerstanden voor de buis.

In het algemeen kunnen we (1) schrijven als

$$h_1 - h_2 = R Q + M \frac{dQ}{dt}.$$

waarin R afhangt van de stromingswijze.

Het debiet Q wordt dus bepaald uit de vergelijking:

$$R Q + 4 \frac{dQ}{dt} = 2 \sin \frac{\pi}{3} t.$$

Het oplossen van deze vergelijking gaat het kader van deze eenheid te boven

ADVIEZEN TOETS 11. (Lees ook de bijbehorende doelstelling!).

1. Bestudeer opnieuw hoofdstuk I (II) en (III), speciaal II.III, de bijbehorende studievragen, de beweringen 11.1 t/m 11.3, 11.7 en 11.14 en de aanvullende vraagstukken 3,4,5,6,10 en 11. Verander de gegevens en verzin nieuwe sommen.
2. Bestudeer opnieuw hoofdstuk I en II, de bijbehorende studievragen, de beweringen 11.4 t/m 11.6, 11.12 en 11.15 en de aanvullende vraagstukken 1, 8,10 en 12. Maak zelf sommen door gegevens te veranderen.
3. Bestudeer opnieuw hoofdstuk III, de bijbehorende studievragen, de beweringen 11.8, 11.9 en 11.13 en de aanvullende vraagstukken 2,3,4,5,6,7,10 en 11. Verzin zelf sommen en probleempjes b.v. door gegevens te wijzigen.
4. Bestudeer opnieuw hoofdstuk IV, de bijbehorende studievragen, de beweringen 11.10 en de aanvullende vraagstukken 6,8 en 13. Bekijk nogmaals hoofdstuk V van eenheid 10.
5. Ga de fysische dimensies na van alle gebruikte grootheden. Kijk nog eens naar bewering 11.9 en het aanvullende vraagstuk 9.

