



] Schaarb
1976

Instationaire zand- en slibtransportberekening
in het Noordelijk Bekken van de Westerschelde.

afstudeeronderzoek
J. Schaart
juni 1976.

Korte samenvatting.

In verband met het onderzoek naar de eventuele gevolgen voor wat betreft de sedimentatie van het Noordelijk Bekken, dat zal ontstaan na voltooiing van de bochtafsnijding in de Westerschelde nabij Bath, is in het onderhavige onderzoek een berekeningsmethode ontwikkeld waarmee zand- en slibconcentraties in getijstromen kunnen worden berekend.

In het onderzoek zijn een aantal berekeningen uitgevoerd waarmee een indruk verkregen kan worden van de sedimentatie van slibrijk water dat gedurende de eb het Noordelijk Bekken binnenstroomt via een overlaat die gesitueerd is in het huidige vaarwater boven Bath.

Naast bovengenoemde toepassingsmogelijkheid heeft de berekeningsmethode nog een aantal andere toepassings mogelijkheden:

- 1) het berekenen van instationaire snelheidsvertikalen in estuaria (in getijstromen met een horizontale zout-zoetgradiënt).
- 2) het berekenen van wrijvingscoëfficiënten in instationaire stromen.
- 3) het berekenen van instationaire zand- en slibconcentratievertikalen met andere randvoorwaarden aan de bodem dan in het onderhavige onderzoek gebruikt zijn.

Bij bovengenoemde berekeningen wordt uitgegaan van een waterbeweging over een horizontale bodem, waarbij de waterbeweging in horizontale richting uniform is aangenomen en de watersnelheid u , evenals de sedimentatieconcentratie c slechts een functie is van de verticale coördinaat en de tijd.

Na aanname van een relatie voor de turbulente schuifspanning, overeenkomstig Prandtl, en een relatie voor de mengweg, is met behulp van de bewegingsvergelijking voor een waterbeweging, zoals eerder is beschreven, een differentiaalvergelijking af te leiden voor de interne schuifspanningssnelheid.

Voor de oplossing van deze vergelijking zijn begin- en randvoorwaarden nodig.

Als beginvoorwaarde wordt gekozen dat op het tijdstip $t=0$ de interne schuifspanningssnelheid over de gehele vertikaal nul is. De randvoorwaarde aan de bodem wordt samengesteld uit een harmonisch in de tijd verlopende schuifspanningssnelheid en een schuifspanningssnelheid tengevolge van de horizontale zout-zoetgradiënt en tengevolge van het verhang van de waterspiegel.

Aan de oppervlakte wordt gesteld dat de schuifspanningssnelheid gelijk aan nul is.

Met behulp van deze begin- en randvoorwaarden is de vergelijking voor de inwendige schuifspanningssnelheid op te lossen. Dit is numeriek gedaan, waarbij een expliciete differentiemethode is toegepast.

Gevonden wordt dan de interne schuifspanningssnelheidsvertikaal als functie van de tijd. Door integratie van deze schuifspanningssnelheidsvertikalen is de snelheidsvertikaal als functie van de tijd te berekenen. Integreren van deze snelheidsvertikalen en delen door de diepte geeft de gemiddelde snelheid als functie van de tijd.

Uit de, op de eerder beschreven manier, berekende waarden voor de snelheid en de gemiddelde snelheid, samen met de waarden voor de schuifspanningssnelheid aan de bodem, is nu een wrijvingscoëfficiënt te berekenen als functie van de tijd.

De berekening van de sedimentatieconcentraties geschiedt met behulp van de continuïteitsvergelijking voor het sediment. Hierin komt een turbulente uitwisselingscoëfficiënt ϵ voor. Deze coëfficiënt is in dit onderzoek gelijk gesteld aan het produkt van de mengweg L en de absolute waarde van de eerder berekende interne schuifspanningssnelheid.

Voor de oplossing van deze vergelijking zijn eveneens begin- en randvoorwaarden nodig.

Als beginvoorwaarde wordt op een bepaald tijdstip een bekend veronderstelde sedimentconcentratievertikaal ingevoerd. De randvoorwaarde aan de bodem wordt zodanig gekozen dat er geen turbulente opwerveling plaats vindt, en aan de oppervlakte wordt gesteld dat geen sediment door het oppervlak verdwijnt.

Met behulp van een expliciete differentiemethode wordt dan de continuïteitsvergelijking numeriek opgelost met als resultaat de concentratievergelijking van het sediment als functie van de tijd.

Al de bovenstaande berekeningen worden uitgevoerd voor een konstante diepte en een konstante ribbelhoogte. Verder worden nog ingevoerd een horizontale zout-zoetgradiënt, een verhang van de waterspiegel en een val-snelheid voor het sediment.

Naar aanleiding van de resultaten van de berekeningen die uitgevoerd zijn om een inzicht te krijgen in de sedimentatie van het Noordelijk Bekken na afsnijden van de bocht bij Bath kan het volgende opgemerkt worden.

Als geen rekening gehouden wordt met de opwoeling van sediment aan de bodem, zoals in de uitgevoerde berekeningen gebeurd is, blijkt dat als men een schatting wil maken van de maximale hoeveelheid sediment die gedurende één getijperiode kan bezinken, men als redelijke benadering gebruik kan maken van een functie met een negatieve e-macht. Worden de snelheidsvertikalen uitgezet op half-logaritmisch papier dan blijkt dat de meeste snelheidsvertikalen, uitgezonderd de snelheidsvertikalen rond de kentering, benaderd kunnen worden door een logaritmische snelheidsverdeling. Wordt met behulp van deze benadering voor ieder tijdstip waarop de snelheidsvertikaal berekend is de bijbehorende ribbelhoogte bepaald, dan blijkt dat deze sterk varieert gedurende de loop van het getij.

Uit snelheidsmetingen gedaan in verschillende meetpunten

in de Westerschelde wordt hetzelfde resultaat verkregen. Deze "schijnbare" ribbelhoogte wijkt rond de kentering het meest af van de aangenomen ribbelhoogte.

Voor wat betreft de resultaten van de berekening van de wrijvingscoëfficiënten kan worden opgemerkt dat deze in de periode rond maximale eb en maximale vloed ongeveer gelijk zijn aan de wrijvingscoëfficiënt in een stationaire stroom met gelijke diepte en ribbelhoogte. Rond de kentering echter, wijkt de wrijvingscoëfficiënt sterk af van deze waarde.

De voornaamste oorzaken voor het bovenstaande zijn de invloed van het instationair zijn van de beweging en de aanwezige zout-zoetgradiënt.

Gaarne wil ik deze korte samenvatting afsluiten met mijn hartelijke dank te betuigen aan de heer ir. W.T. Bakker voor zijn begeleiding van mijn afstudeeronderzoek.

Inhoud

O. Samenvatting en conclusies.	blz. 1
I. Inleiding en probleemstelling.	blz. 22
-1. Het probleem van de bochtafsnijding van Bath	
-2. De pragmatische aanpak	
-3. Het doel van het onderzoek	
-4. Toepassing van de methode Bijker en ijking van de beginselen van de methode	
-5. Het principe van de instationaire zandtransport-berekening	
-6. Met het onderzoek te bereiken nevendoelen.	
II. De analytische berekening van Kajiura.	blz. 35
-1. Beschrijving	
-2. Het effect van het instationair zijn van de beweging op de analytische benadering van de snelheidsvertikalen in instationaire stromen.	
III. Vergelijking van snelheidsvertikalen en wrijvingscoëfficiënten in stationaire en instationaire stromen.	blz. 53
IV. De benaderende analytische berekeningswijze van Bakker.	blz. 61
V. De numerieke modellen van Bakker: TA1 en SA1.	blz. 76
-1. Het numerieke model TA1	
-2. Het numerieke model SA1.	
VI. Het numerieke model SG1.	blz. 86
-1. Schematisering	
-2. Basisvergelijkingen	
-3. Begin- en randvoorwaarden	
A. Beginvoorwaarden	
B. Randvoorwaarden	
-4. Beschrijving van het numerieke model SG1	
A. Dimensieloos maken van de vergelijkingen	
B. Differentievergelijkingen	
C. De berekening van p	
D. De berekening van c^*	
E. Beschrijving van het programma SG1.	
VII. Berekende gevallen en resultaten.	blz. 126
VIII. Vergelijking van de berekende wrijvingscoëfficiënten.	blz. 135
IX. Benadering van de sedimentatie.	blz. 141
X. Schatting van de aanslibbing van het Noordelijk Bekken.	blz. 144
-Appendix A	blz. 150
-Appendix B	blz. 162
-Appendix C (vergelijking tussen Kajiura en Bakker)	blz. 170
-Literatuurlijst	blz. 172
-Symbolenlijst	blz. 175

0. Samenvatting en conclusies.

In het kader van de onderzoekingen betreffende de bochtafsnijding nabij Bath in de Westerschelde (zie bijlage 1) wordt door de Studiedienst Vlissingen van Rijkswaterstaat onderzoek verricht naar de eventuele aanzanding en aanslibbing van het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken.

In eerste instantie is onderzoek verricht naar het huidige zand- en slibgehalte en het huidige zand- en slibtransport in het oostelijk deel van de Westerschelde.

De berekeningen zijn uitgevoerd met behulp van gegevens verkregen uit gemeten zand- en slibconcentratievertikalen.

De resultaten van deze berekeningen vertoonden echter een dermate grote spreiding dat het noodzakelijk geacht werd, om een nauwkeurige schatting te kunnen maken van de eventuele aanzanding en aanslibbing van het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken, een berekeningsmethode te ontwikkelen waarmee het mogelijk is zand- en slibtransporten te berekenen in een getijstroom met een grotere nauwkeurigheid dan met de tot nu toe gebruikte berekeningsmethoden. Het in dit rapport beschreven onderzoek heeft vooral betrekking op slibtransport (deeltjes $< 50 \mu$) en op de aanslibbing van het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken.

In het onderhavige onderzoek is hiervoor een mathematisch model (SG1) ontwikkeld, waarmee het mogelijk is op redelijke wijze een schatting te maken van het percentage van een gegeven slibfractie dat zal bezinken in het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken.

Naast de hierboven genoemde toepassingsmogelijkheid heeft de berekeningsmethode nog een aantal andere toepassingsmogelijkheden, te weten:

- 1) het berekenen van instationaire snelheidsvertikalen in estuaria (in getijstroom met een horizontale zout-zoet-gradiënt).
- 2) het berekenen van wrijvingscoëfficiënten in instationaire stromen.
- 3) het berekenen van instationaire zand- en slibconcentratievertikalen met andere randvoorwaarden aan de bodem dan in dit onderzoek gebruikt zijn.

Aan het mathematisch model SG1 liggen de mathematische modellen TA1 en SA1 van Bakker ten grondslag.

Met deze modellen kunnen respectievelijk worden uitgerekend de snelheidsverdeling en de zandopwoeling in een oscillerende stroom met korte periode (hoofdstuk V).

In het mathematisch model SG1 wordt uitgegaan van een schematisering waarbij de waterbeweging als uniform in horizontale richting wordt aangenomen en de watersnelheid u , evenals de slibconcentratie c slechts een functie is van de verticale coördinaat y en de tijd t .

Waterstandsvariatiës gedurende het getij worden niet in de berekening opgenomen, er wordt aangenomen dat het water in een horizontaal vlak oscilleert.

In de berekeningen wordt rekening gehouden met de invloed van een horizontale dichtheidsgradiënt, die een over de vertikaal variërend drukverschil veroorzaakt, en met de invloed van een periodiek verhang, bestaande uit een middenstandsverhang en een harmonisch in de tijd verlopend getijverhang.

Voor de turbulente schuifspanning wordt, overeenkomstig Prandtl, de volgende relatie aangenomen:

$$\tau = \rho_w L^2 \frac{du}{dy} \left| \frac{du}{dy} \right| \quad (0.1)$$

waarin L de mengweg voorstelt.

Uit een vergelijking van de verschillende uitdrukkingen die voor de mengweg gebruikt worden (zie hoofdstuk III) blijkt de uitdrukking:

$$L = \kappa y \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \quad (0.2)$$

goed over een te komen met goot- en riviermetingen uitgevoerd door Coleman, terwijl deze bij een stationaire stroom een logaritmisch snelheidsverloop oplevert, hetgeen goed aansluit bij de tradionele concepties.

Uitgaande van de bewegingsvergelijking voor een waterbeweging, zoals eerder beschreven, en van de eerder gedane aannamen wordt vervolgens een differentiaal-vergelijking afgeleid voor de interne schuifspanningssnelheid (vergelijking (6.15)):

$$\frac{1}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{g}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial x} + \frac{\partial^2 (u^* |u^*|)}{\partial y^2} \quad (0.3)$$

waarin:

$$u^* = L \frac{\partial u}{\partial y} \quad (0.4)$$

Vergelijking (0.3) wordt numeriek geïntegreerd met als randvoorwaarde aan de bodem een schuifspanningssnelheid die opgebouwd is uit een stationaire component ten gevolge van het horizontale dichtheidsverschil en ten gevolge van het verhang van de waterspiegel en een harmonisch in de tijd verloopende component ten gevolge van de oscillerende waterbeweging.

Aan de oppervlakte wordt gesteld dat de schuifspanningssnelheid gelijk aan nul is.

Als beginvoorwaarde wordt gekozen dat op het tijdstip waarop met de berekening begonnen wordt ($t=0$) de interne schuifspanningssnelheid over de gehele vertikaal gelijk aan nul is.

Deze aanname is echter niet geheel juist, daar in een oscillerende beweging de interne schuifspanningssnelheid nooit over de gehele vertikaal gelijk aan nul is.

De verstoring die hierdoor ingevoerd wordt is na het berekenen van één getijperiode praktisch geheel verdwenen.

De numerieke integratie van vergelijking (0.3) geschiedt met behulp van een expliciete differentiemethode.

Met deze integratie wordt dus de interne schuifspanningssnelheid u^* gevonden als functie van de tijd t en van de hoogte y .

De snelheid u wordt nu verkregen door integratie van (0.4):

$$u = \int \frac{u^*}{L} dy \quad (0.5)$$

Door integratie van de interne schuifspanningssnelheid u^* wordt de snelheid u verkregen als functie van de tijd t en van de hoogte y .

De over de vertikaal gemiddelde snelheid \bar{u} als functie van de tijd wordt verkregen door de snelheidsvertikalen te integreren en deze uitkomst te delen door de diepte y_h .

Analoog aan de definitie van Jonsson voor de wrijvingscoëfficiënt in een oscillerende stroom met korte periode kan voor een getijstroom voor de wrijvingscoëfficiënt als functie van de tijd de volgende definitie gegeven worden:

$$f_c(t) = \frac{2\tau_b}{\rho_w \bar{u}^2} = \frac{2(u_b^*)^2}{\bar{u}^2} \quad (0.6)$$

In een stationaire stroom geldt voor de Chézy-coëfficiënt C_h :

$$C_h = \frac{\bar{u}}{u_b^*} \sqrt{g} \quad (0.7)$$

Met behulp van (0.6) en (0.7) is nu de Chézy-coëfficiënt in getijstromen als functie van de tijd te berekenen:

$$C_h(t) = \sqrt{\frac{2g}{f_c}} \quad (0.8)$$

De slibconcentratie als functie van de tijd t en de diepte y_h wordt berekend met behulp van de volgende vergelijking (zie voor afleiding hoofdstuk I en VI):

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial c}{\partial y} + wc \right) = 0 \quad (0.9)$$

Uitdrukking (0.9) is afgeleid uit de continuïteitsvergelijking van het sediment en de bewegingsvergelijking van het sediment.

In vergelijking (0.9) is w de valsnelheid van het sediment en is ε een turbulente uitwisselingscoëfficiënt.

Deze coëfficiënt is in dit onderzoek gelijk gesteld aan:

$$\varepsilon = L |u^*| \quad (0.10)$$

Uit een vergelijking van de uitdrukkingen (0.2) en (0.10) voor een stationaire stroom met de al eerder genoemde metingen van Coleman blijkt dat uitdrukking (0.10) redelijke overeenstemming vertoont met de in de metingen gevonden waarden voor ε .

In het mathematisch model SG1 wordt de slibconcentratie c als functie van de tijd t en de diepte y_h door numerieke integratie van (0.10). Aan de bodem geldt als randvoorwaarde dat hier geen opwoeling, dus alleen sedimentatie, plaatsvindt.

Aan de oppervlakte geldt dat de concentratie en het transport van slib gelijk aan nul is.

Indien geen rekening gehouden wordt met opwoeling van slib aan de bodem is uit bovenstaande berekening van het verloop van de concentratie te berekenen welke hoeveelheid slib van de oorspronkelijk aanwezige hoeveelheid slib met een bepaalde valsnelheid gedurende één getijperiode is neergeslagen.

Het in het water aanwezige slib bestaat echter uit een aantal fracties met verschillende valsnelheden.

Om nu een schatting te kunnen maken van de totale hoeveelheid slib die gedurende één getijperiode neerslaat moet voor de verschillende in het water voorkomende slibfracties bovenstaande berekening van het verloop van de concentratie in de tijd uitgevoerd worden.

Als beginvoorwaarde voor de berekening van het concentratieverloop in de tijd wordt op een bepaald tijdstip een bekend veronderstelde concentratievertikaal ingevoerd.

Door de berekende waarden voor de snelheid u als functie van de tijd en de hoogte te vermenigvuldigen met de berekende waarden voor de concentratie als functie van de tijd en de diepte wordt het transport van het sediment verkregen als functie van de tijd en de diepte.

Voor een uitvoerige beschrijving van het mathematisch model SG1 wordt verwezen naar hoofdstuk VI.

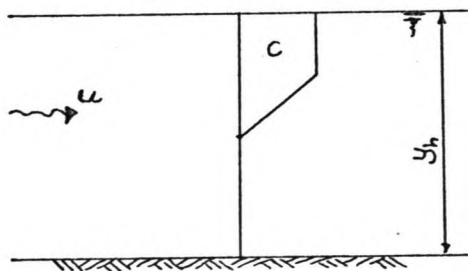
De in dit onderzoek met het mathematisch model SG1 berekende gevallen hebben alle betrekking op het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken. Voor twee verschillende korreldiameters, te weten 50μ ($w = 1.7 \text{ mm/s}$) en 20μ ($w = 0.3 \text{ mm/s}$), is het verloop in de tijd van de concentratie uitgerekend (zie hoofdstuk VII).

De waterdiepte y_h is in alle berekende gevallen gelijk genomen aan 15.4 meter.

In de berekeningen wordt het tijdstip van invoering van de aanvangsconcentratievertikaal gekozen ten tijde van maximale ebstroom.

Dit is het moment waarop slibrijk water via de overlaat in de stroomgeleidingsdam in het huidige Vaarwater boven Bath (zie bijlage 1) het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken binnendringt.

De ingevoerde aanvangsconcentratievertikaal is weergegeven in figuur 1.



figuur 1.

De resultaten van de berekeningen van het verloop van de slibconcentraties in de tijd zijn weergegeven in bijlage 21 tot en met 25. In deze bijlagen is op de horizontale as

de tijd uitgezet en op de verticale as de relatieve hoogte (= hoogte boven de bodem/diepte).

Uit bestudering van deze resultaten blijkt dat het sediment zich in de eerste periode na de lozing over de gehele vertikaal verdeelt.

Wordt nu verondersteld dat op een bepaald moment (in de hier berekende gevallen \pm 1 uur na de lozing) het sediment zich gelijkmatig over de vertikaal heeft verdeeld, zonder dat verlies aan de bodem is opgetreden, dan blijkt, dat voor geringe stroomsnelheden ($< 0.60 \text{ à } 0.70 \text{ m/s}$), het verloop van de gemiddelde concentratie van een bepaalde korrelfractie van het slib redelijk goed benaderd kan worden door een functie met een in de tijd negatief exponentieel verloop (zie hoofdstuk IX).

De nepereringstijd, waaronder wordt verstaan de tijdsduur om de concentratie met een faktor e te reduceren is gelijk aan de tijd, die een korreldeeltje nodig heeft om van de oppervlakte naar de bodem te vallen.

Aan de bodem is als randvoorwaarde gesteld dat daar geen opwerveling van sediment plaatsvindt. Dit is in de hier berekende gevallen wel gerechtvaardigd omdat in het Noordelijk Bekken de stroomsnelheden gering zullen zijn.

Met behulp van bovenstaande benadering voor de sedimentatie is voor het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken (ten oosten van coördinaat 84000) een schatting gemaakt van de maximale aanslibbing per jaar (zie hoofdstuk X). Uitgegaan hierbij is van debietmetingen die uitgevoerd zijn in het hydraulisch model van de Westerschelde in het Waterbouwkundig Laboratorium te Borgerhout en van slibconcentratie metingen, die door de Studiedienst Vlissingen

zijn uitgevoerd in het oostelijk deel van de Westerschelde. De voor de berekeningen benodigde verdeling van de korrelgrootten (=valsnelheidsverdeling) is bepaald uit watermonsters genomen in het Vaarwater boven Bath lit.20 .

De berekende aanslibbing bedraagt maximaal 10^6 ton per jaar. Bij deze berekeningen is verder nog aangenomen, op grond van waarnemingen, dat de waterdiepte gemiddeld 5 meter is en dat de stroomsnelheden altijd kleiner zijn dan 0.6 à 0.7 m/s.

Over de nauwkeurigheid van de hier behandelde methode voor de berekening van de aanslibbing van het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken is nog weinig te zeggen, daar dit nog niet uitvoerig is onderzocht. Een voordeel van deze methode, vooral ten aanzien van de nauwkeurigheid van de berekening, is, dat gerekend wordt met de verschillende slibfracties die in het water voorkomen. Dit in tegenstelling met de tot nu toe toegepaste methoden, waarbij uitgegaan werd van het gemiddelde slibgehalte, die tot een fractie met één valsnelheid werd gekarakteriseerd.

Een ander voordeel van deze berekeningen met het mathematische model SG1 is, dat de invloed van het verloop van de slibconcentratie en de stroomsnelheid over de vertikaal in rekening kan worden gebracht. Dit gebeurde in de tot nu toe gebruikte methoden ter berekening van de slibtransportenniet. Het gebruikte mathematische model SG1 is niet alleen te gebruiken voor de bepaling van het concentratieverloop in de tijd van slib (deeltjes 50), maar ook voor de bepaling

van het concentratieverloop in de tijd van zand (deeltjes $> 50\mu$). Door het invoeren van een andere randvoorwaarde aan de bodem is het ook mogelijk het opwervelingsmechanisme van sediment aan de bodem in de berekeningen te betrekken. De met het mathematisch model berekende snelheidsvertikalen worden op dezelfde manier als dit gedaan is voor gemeten snelheidsvertikalen in de Westerschelde (zie hoofdstuk I, paragraaf 4), benaderd door een logaritmische snelheidsverdeling. (bijlage 18 en 19).

Uit de met het model SG1 berekende snelheidsvertikalen blijkt echter dat deze veronderstelling niet voor de gehele vertikaal opgaat. Het bovenste gedeelte van de snelheidsvertikaal kan redelijk goed benaderd worden door een logaritmische snelheidsverdeling, behalve rond de kentering maar in de buurt van de bodem wijkt de berekende snelheidsverdeling aanzienlijk af van de logaritmische. Met behulp van de benadering van de snelheidsverdeling door een logaritmische snelheidsverdeling wordt op twee manieren een wrijvingscoëfficiënt (Chézy-waarde) bepaald. Allereerst wordt door extrapolatie van de logaritmische snelheidsverdeling de hoogte y_0 bepaald waar de snelheid gelijk aan nul is. De ribbelhoogte is dan gelijk aan 33 maal y_0 .

De op deze manier berekende ribbelhoogte is evenals de ribbelhoogte bepaald uit gemeten snelheidsvertikalen geen konstante gedurende de gehele getijperiode. De "schijnbare" ribbelhoogten r_s wijken in de buurt van de kentering het sterkst af van de ingevoerde konstante ribbelhoogte (bijlage 20). De uit de gemeten snelheidsvertikalen berekende schijnbare ribbelhoogten vertonen ook in de periode rond de kentering zeer grote variaties.

De oorzaken van het bovenstaande moet vooral gezocht wor-

den in het feit dat de beweging instationair is en in de aanwezige zout-zoet-gradiënt.

Vervolgens wordt de Chézy-waarde berekend met:

$$C_h = 18 \log \frac{33y_h}{er_s} \quad (0.11)$$

waarin r_s gelijk is aan de "schijnbare" ribbelhoogte ($=33y_o$).

De tweede manier waarop de Chézy-coëfficiënt wordt bepaald gaat als volgt.

Met behulp van de vergelijking voor een logaritmische snelheidsverdeling:

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_o} \quad (0.12)$$

wordt u_b^* bepaald als κ maal de snelheid in een punt op een hoogte ey_o . De Chézy-coëfficiënt C_h wordt dan berekend uit:

$$C_h = \sqrt{g} \frac{\bar{u}}{u_b^*} \quad (0.13)$$

Met behulp van het computerprogramma SG1 wordt ook het verloop van de Chézy-coëfficiënt in de tijd berekend. De aldus berekende Chézy-coëfficiënt varieert tijdens perioden met maximale stroomsnelheden niet veel, maar rond de kentering vertoont het berekende verloop grote variaties. Dit is wederom toe te schrijven aan het feit dat de beweging instationair is.

Worden de met het computerprogramma SG1 berekende Chézy-coëfficiënten voor een getijstroom, op momenten dat de getijstrooming het best benaderd kan worden door een stationaire stroom, te weten tijdens perioden met maximale stroomsnelheden, vergeleken met de Chézy-coëfficiënt voor een stationaire stroom, dan blijkt dat de Chézy-coëfficiënten in een getijstroom iets hoger liggen.

De oorzaak hiervan moet vooral gezocht worden in het feit

dat de berekende snelheidsverdeling niet logaritmisch is. Het is verder niet uitgesloten, dat een numerieke onnauwkeurigheid van het model ook invloed heeft; dit is niet in detail onderzocht.

Worden de Chézy-coëfficiënten, bepaald uit de door logaritmische snelheidsverdelingen benaderde berekende snelheidsverdelingen, vergeleken met de met het mathematisch model berekende Chézy-coëfficiënten, dan blijken deze waarden nogal af te wijken van de werkelijk optredende wrijvingscoëfficiënten, berekend met het mathematisch model SG1. (zie hoofdstuk VII en bijlage 29 en 30).

Hieruit wordt nogmaals duidelijk dat een benadering van de snelheidsvertikalen in getijstromen door logaritmische snelheidsvertikalen in het algemeen niet juist is.

Dit betekent ook, dat wanneer gebruik gemaakt wordt van de formule van Bijker voor het berekenen van sedimenttransporten in getijstromen, zoals de Westerschelde, aanpassingen nodig zijn voor wat betreft de aan te nemen snelheidsverdeling. In de formule van Bijker (zie (1.1)) wordt namelijk gerekend met een logaritmische snelheidsverdeling.

Uit de berekeningen met het mathematisch model blijkt dat er tengevolge van het instationair zijn van de beweging een variërend faseverschil bestaat tussen de gemiddelde snelheid \bar{u} en de bodemschuifspanningssnelheid u_b^* .

Dit faseverschil is het grootst tijdens de kentering en het kleinst op momenten met maximale stroomsnelheden. (zie bijlage 27 en 28). De oorzaak, dat dit faseverschil rond de kentering het grootst is, is gelegen in het feit dat dan de traagheidsterm overheerst ten opzichte van de andere in de bewegingsvergelijking voorkomende verhangtermen.

In hoofdstuk I van dit rapport worden de probleemstelling en het doel van het onderzoek omschreven.

Het voornaamste doel van dit onderzoek was het geven van een berekeningsmethode voor zand- en slibtransporten in een getijstroom, waarbij de spreiding kleiner is dan bij de tot nu toe toegepaste methoden. Dit doel is nog niet volledig bereikt, omdat de entrainment-functie niet nader is beschouwd. Voor zand zou combinatie van het hier uitgevoerde onderzoek met het onderzoek van Beijl de oplossing kunnen brengen.

Voor slib zal deze entrainment-functie nog veel meer moeilijkheden gaan opleveren.

Voor gevallen waarin opwerveling van slib een zeer geringe rol speelt (bijvoorbeeld bij het lozen van slibrijk water in een watermassa die een geringe snelheid heeft) is het mathematisch model SG1 redelijk goed te gebruiken.

Voorts wordt in paragraaf 4 van dit hoofdstuk een beschrijving gegeven van de methode die door de Studiedienst Vlissingen is toegepast om te onderzoeken in hoeverre de zandtransportberekeningsmethode van Bijker toe te passen is in een getijstroom als de Westerschelde. Paragraaf 5 van dit hoofdstuk geeft een afleiding van de vergelijkingen die het instationaire sedimenttransport beschrijven.

Hoofdstuk II geeft een beschrijving van een analytische berekening van snelheidsvertikalen en wrijvingscoëfficiënten in een getijstroom uitgevoerd door Kajiura.

Kajiura vindt in zijn analytische berekening als benadering voor de snelheidsvertikalen in een getijstroom met geringe diepte een logaritmische snelheidsverdeling.

Dit is volgens de uitgevoerde berekeningen met behulp van het mathematische model SG1 niet geheel

juist.

Uit een nadere analyse van de berekeningen van Kajiura komt echter naar voren dat zijn benadering voor snelheidsvertikalen in een getijstroom voor geringe diepte en een oneindige periode niet exact over gaat in een logaritmische vertikaal. (zie vergelijking (2.26)). Het blijkt dat de snelheidsvertikaal voor deze gevallen opgebouwd is uit een logaritmische term en een lineaire term.

Bij de berekening van de maximaal optredende Chézy-coëfficiënt gedurende de getijperiode voor geringe diepte gaat Kajiura wel uit van de bovengenoemde niet geheel logaritmische snelheidsverdeling.

De door Kajiura berekende maximaal optredende Chézy-coëfficiënt gedurende de getijperiode voor geringe diepte ligt aanzienlijk lager dan de met het computer programma SG1 berekende Chézy-coëfficiënten voor dezelfde diepte.

De verschillen tussen de resultaten van de berekeningen van Kajiura en de resultaten verkregen met het mathematisch model SG1 moeten vooral gezocht worden in het feit dat Kajiura de bodemschuifspanningssnelheid op zodanige wijze schematiseert dat voor de schuifspanningssnelheid over de diepte een uitdrukking wordt verkregen die lineair over de diepte verloopt (zie (2.22)) en in de door Kajiura toegepaste verwaarlozing van hogere orde termen en kleine lineaire termen.

De door Kajiura berekende topwaarde van de Chézy-coëfficiënt voor geringe diepte is gelijk aan (zie hoofdstuk III):

$$\hat{c}_h = \frac{\sqrt{g}}{\kappa} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.50 \right\} \quad (0.14)$$

waarin y_h gelijk is aan de diepte en y_o aan $1/33$ van de ribbelhoogte.

In de figuren 1 tot en met 7 van hoofdstuk II zijn de resultaten van Kajiura's berekeningen weergegeven.

In figuur 1 (blz. 43) is de topwaarde van de door Kajiura berekende wrijvingscoëfficiënt C_k :

$$\hat{C}_k = \frac{g}{\hat{C}_h^2} \frac{\kappa^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - 1.50 \right\}^2} \quad (0.15)$$

uitgezet tegen de verhouding slaglengte/diepte ($=\bar{u}/\omega y_h$) voor verschillende vaste waarden van y_h/y_o . Hieruit blijkt dat voor grote waarden van $\bar{u}/\omega y_h$ ($> 10^2$) de wrijvingscoëfficiënt voor een bepaalde verhouding van y_h/y_o konstant blijft.

Dit is het gebied waar de wrijving overheerst en de traagheid geen enkele rol meer speelt.

Bij afnemende waarden van $\bar{u}/\omega y_h$ ($< 10^1$) neemt de wrijvingscoëfficiënt voor een konstante waarde van y_h/y_o toe. In dit gebied gaat langzamerhand de traagheid een overheersende rol spelen.

In het tussenliggende gebied ($10^1 < \bar{u}/\omega y_h < 10^2$) overheerst de wrijving, maar speelt de traagheid toch al een rol.

In figuur 2 (blz. 43) is het faseverschil in radialen tussen \bar{u} en u_b^* uitgezet tegen de verhouding slaglengte/diepte ($=\bar{u}/\omega y_h$) voor verschillende vaste waarden van y_h/y_o .

Dit faseverschil wordt in het gebied waar de wrijving overheerst praktisch gelijk aan nul ($\bar{u}/\omega y_h > 10^2$) en neemt bij afnemende waarden van $\bar{u}/\omega y_h$, dus waar de traagheid een rol gaat spelen, steeds verder toe.

In de figuren 3 (blz.44) en 4 (blz.44) zijn \hat{C}_k en het faseverschil θ uitgezet als functie van y_h/y_o voor konstante waarden van (slaglengte/ $\frac{1}{33}$ van de ribbelhoogte) ($= \bar{u}/\omega y_o$).

Voor een vaste waarde van $\bar{u}/\omega y_o$ neemt de amplitude van \hat{C}_k af en de fasehoek θ toe bij toenemende waarde van y_h/y_o .

Voor grote waarden van y_h/y_o wordt \hat{C}_k konstant voor een vaste waarde van $\bar{u}/\omega y_o$, waaruit de onafhankelijkheid van \hat{C}_k van de diepte blijkt.

In figuur 5 (blz.45) is voor grote waarden van y_h/y_o \hat{C}_k uitgezet als functie van $\bar{u}/\omega y_o$.

Uit het bovenstaande blijkt dat de wrijvingscoëfficiënt \hat{C}_k toeneemt met afnemende \bar{u} , afnemende periode van de oscillerende beweging in het gebied $\bar{u}/\omega y_h \leq 10^2$ en met afnemende diepte van het water voor grote waarden van $\bar{u}/\omega y_h$.

In de figuren 6 (blz.47) en 7 (blz.48) zijn respectievelijk de verhouding \bar{u}/U , waarin U de snelheid is in het geval er geen wrijving optreedt, en het faseverschil tussen U en u_b^* uitgezet als functie van $U/\omega y_h$ voor vaste waarden van y_h/y_o . Hieruit blijkt dat in de bewegingsvergelijking de traagheid domineert over de wrijving voor kleine waarden van de verhouding $U/\omega y_h (< 10^2$, bijvoorbeeld vrije zwaartekrachtsgolven zonder wrijving) en dat bij groter wordende waarden van $U/\omega y_h$ het effect van de wrijving steeds belangrijker wordt totdat in het limietgeval de verhangkracht evenwicht maakt met de wrijvingskracht.

Het faseverschil neemt bij toenemende waarden

van $U/\omega y_h$ toe van Θ tot $\pi/2$ in het limietgeval. Kajiura verwaarloost in de benadering voor geringe diepte van zijn analytische berekeningen van snelheidsvertikalen in getijstromen de instationaire verschijnselen. In hoofdstuk II, paragraaf 2 is onderzocht hoe groot de fout is als deze verschijnselen verwaarloosd worden. Uit dit onderzoek blijkt dat als in de benadering van instationaire snelheidsvertikalen ook de hogere orde termen worden meegenomen het effect hiervan op de snelheidsvertikaal erg klein is.

Het effect van het instationair zijn van de beweging op de over de vertikaal gemiddelde snelheid blijkt dan voor bijvoorbeeld een diepte van 20 meter niet groter te zijn dan ongeveer 0.7 cm/sec. Uit de berekening gedaan met behulp van het mathematisch model blijkt, zoals eerder vermeld, dat het effect van het instationair zijn van de beweging vooral merkbaar is in de buurt van de bodem.

In hoofdstuk III zijn de snelheidsvertikalen en wrijvingscoëfficiënten in stationaire en instationaire stromen vergeleken die worden verkregen door verschillende aannamen te doen voor wat betreft het verloop van de mengweg en het verloop van de schuifspanning.

De voor de verschillende aannamen verkregen resultaten voor wat betreft het schuifspanningssnelheidsverloop over de diepte, de snelheidsvertikaal en de wrijvingscoëfficiënt zijn weergegeven in tabel 1 van hoofdstuk III. De verschillen blijken aanzienlijk te zijn.

Voor het verloop van de mengweg en het schuifspanningsverloop zijn in de verschillende gevallen de

volgende aannamen gedaan:

- 1) lineair over de diepte verlopende mengweg en konstante schuifspanning.
- 2) lineair over de diepte verlopende mengweg en schuifspanning.
- 3) verloop van de mengweg volgens von Kármán en lineair over de diepte verlopende schuifspanning.
- 4) mengweg $L = \kappa y \sqrt{1-y/y_h}$ en lineair over de diepte verlopende schuifspanning.
- 5) aannamen volgens Kajiura: lineair over de diepte verlopende mengweg, schuifspanning en schuifspanningssnelheid.
- 6) numerieke model SG1: mengweg $L = \kappa y \sqrt{1-y/y_h}$ en het verloop van de schuifspanning over de diepte is het reël berekende verloop.

Verder is in dit hoofdstuk de wrijvingscoëfficiënt gedefinieerd door Jonsson vergeleken met de door Kajiura berekende wrijvingscoëfficiënt. Beide wrijvingscoëfficiënten zijn in bijlage 5 uitgezet als functie van a/r , waarin a de slaglengte is en r de ribbelhoogte.

Uit deze bijlage blijkt dat voor een bepaalde verhouding van y_h/y_o (=diepte/ $\frac{1}{33}$ van de ribbelhoogte) de wrijvingscoëfficiënt gedefinieerd volgens Kajiura nadert tot een konstante waarde bij toenemende waarden van a/r (wrijving overheerst de traagheid) en dat de door Jonsson gedefinieerde wrijvingscoëfficiënt steeds kleiner wordt voor toenemende waarden van a/r . Dit komt omdat Jonsson in zijn beschouwingen uitgaat van een oneindige diepte.

Tenslotte zijn in tabel 1 van hoofdstuk III nog een drietal benaderingen vermeld voor snelheidsvertikalen en wrijvingscoëfficiënten in kort periodieke golven,

te weten, de benadering van Jonsson, de analytische benadering van Bakker en de numerieke benadering van Bakker.

Een beschrijving van de benaderende analytische berekeningsmethode van Bakker voor de snelheidsverdeling en de wrijvingscoëfficiënt in een oscillerende stroom met korte periode wordt gegeven in hoofdstuk IV.

In dit hoofdstuk wordt verder uitgaande van deze analytische benadering een analytische benadering gegeven van snelheidsvertikalen in getijstromen en wordt onderzocht wat het effect is van het instationair zijn van de beweging.

Hieruit blijkt dat, evenals uit de analytische benadering van Kajiura, dat het effect van het instationair zijn van de beweging op de snelheidsvertikaal erg klein is.

De aan het mathematisch model SG1 ten grondslag liggende computerprogramma's, TA1 en SA1 worden behandeld in hoofdstuk V.

Met behulp van het computerprogramma TA1 wordt de snelheidsverdeling en de bodemwrijving berekend in een oscillerende stroom met korte periode en oneindige diepte. Als randvoorwaarde aan de bodem wordt een harmonisch in de tijd verlopende schuifspanningsnelheid aangenomen. De bovenrandvoorwaarde zou eigenlijk als volgt moeten luiden: de schuifspanningsnelheid is nul voor $y_h = \infty$. Daar oneindig numeriek moeilijk te benaderen is, is voor de volgende oplossing gekozen. Gesteld wordt dat de schuifspanningsnelheid nul is op een hoogte waar volgens de analytische benadering van Bakker (zie hoofdstuk IV) de schuifspanningssnelheid nog ongeveer $3^0/00$ is van de waarde die de schuifspanningssnelheid aan de bodem

heeft. Na de berekening van de schuifspannings-
snelheidsvertikalen als functie van de tijd, met
behulp van de "pulsating grid" methode (zie hoofd-
stuk VI, paragraaf 4c), volgt dan de berekening
van de snelheidsvertikalen als functie van de tijd
door integratie van de schuifspanningssnelheids-
vertikalen (zie vergelijking (0.5)).

Met het programma SA1 wordt de opwoeling van zand
in een oscillerende stroom met korte periode be-
rekend. Essentieel verschil tussen de modellen
TA1 en SG1 is het volgende:

$$\kappa Y_{\circ} = 2\pi \kappa a \sqrt{f_w/2} \quad (0.16)$$

Deze grootheid is een maat voor de turbulente
grenslaag. Zoals uit (0.16) blijkt is κY_{\circ} bij be-
nadering evenredig met de slaglengte a . Voor getij-
golven is de slaglengte zeer vele malen groter dan
bij kort periodieke golven.

Dit heeft tot gevolg dat de referentie grootheid κY_{\circ}
ongeveer 1000 maal zo groot is als in het geval van
korte golven. In het geval van korte golven is κY_{\circ}
ongeveer 20 cm.

Deze grote waarde van κY_{\circ} in het geval van getij-
golven heeft tot gevolg dat de dimensieloze groot-
heid $y_{* \max}$:

$$y_{* \max} = \frac{y_h}{\kappa Y_{\circ}} \quad (0.17)$$

voor geringe diepte zeer klein wordt.

De dimensieloze grootheid $y_{* \max}$ bepaalt de in het
mathematisch model te gebruiken dimensieloze stap-
grootte Δy_{*} en de dimensieloze tijdstap Δt_{*} waar-
bij geen instabiliteiten optreden. Door de zeer

kleine waarde voor $y_{* \max}$ in het geval van getijgolven worden Δt_{*} en Δy_{*} ook zeer klein. Dit heeft tot gevolg dat de rekentijden voor getijgolven veel groter zijn dan voor korte golven. Deze rekentijd kan sterk bekort worden door gebruik te maken van een interpolatie van de schuifspanningssnelheid in het gebied net boven de bodem (zie hoofdstuk VI).

Hoofdstuk VI geeft vervolgens een beschrijving van het mathematisch model SG1.

In hoofdstuk VII worden de verschillende gevallen die berekend zijn en de verkregen resultaten behandeld.

De karakteristieken van de berekende gevallen zijn weergegeven in tabel 1 van hoofdstuk VII.

In hoofdstuk VIII worden de op de verschillende manieren berekende wrijvingscoëfficiënten met elkaar vergeleken. (zie eerder in deze samenvatting).

Tenslotte worden in de hoofdstukken IX en X, zoals reeds is vermeld, respectievelijk een benadering van de sedimentatie en de te verwachten aanslibbing in het oostelijk van het Noordelijk Bekken behandeld.

Tot slot van deze samenvatting volgen hieronder enkele punten, die nog nader uitgewerkt dienen te worden.

Deze punten zijn:

- a) de nauwkeurigheid van het mathematisch model SG1.
- b) de nauwkeurigheid van de benadering van de sedimentatie door een negatief-exponentiële functie.
- c) een randvoorwaarde aan de bodem, waarin rekening gehouden wordt met de opwoeling van sediment.
- d) de invloed van de bovenafvoer van de Westerschelde en het geulenstelsel op de sedimentatie.
- e) een betere en nauwkeuriger bepaling van de frequentieverdeling van de valsnelheden.

f) onderzoek naar de nauwkeurigheid van en de te maken aanpassingen in de bestaande methoden ter bepaling van de zandtransporten in een getijrivier als de Westerschelde ter verkrijging van nauwkeuriger resultaten.

Een onderzoek naar het onder f) genoemde wordt momenteel uitgevoerd door Beijl (Westerschelde) en Boender (Waddenzee) in het kader van hun afstudeerwerk.

I. Inleiding en probleemstelling

I.1 Het probleem van de bochtafsnijding bij Bath.

Ter verbetering van de scheepvaartroute van en naar Antwerpen zijn plannen gemaakt de nu bestaande bocht in het vaarwater bij Bath af te snijden.

In het kader van deze bochtafsnijding zal over de Platen van Valkenisse en de Platen van Walsoorden een leidam worden aangelegd waarvan de kruin ongeveer op N.A.P. komt te liggen. Deze leidam zal aansluiten op een hoge leidam ten noorden van de nieuwe bocht, welke dam aan de oostzijde, via een overlaat in het huidige Vaarwater boven Bath, zal aansluiten op de thans reeds aanwezige leidam over de Ballastplaat (zie bijlage 1). De vraag is nu: Wat gebeurt er met het gebied ten noorden van de leidam, het zogenaamde Noordelijk Bekken ?

De in- en uitstroming van het water in dit gebied zal voornamelijk plaatsvinden door de vloodschaar, het Schaar van Waarde, over de leidam over de Platen van Valkenisse en de Platen van Walsoorden en over de overlaat in het huidige Vaarwater boven Bath (zie bijlage 1).

Als de stroomsnelheden na aanleg van de leidam in het Noordelijk Bekken te laag worden is het waarschijnlijk dat het Noordelijk Bekken na verloop van tijd gaat aanzanden/-slibben.

Tengevolge van deze aanzanding/ -slibbing zal in verband met de komberging van het bovenstroomse gebied en de profielsverandering de hoeveelheid water die door de nieuwe vaargeul zal stromen steeds groter worden, wat gepaard zal gaan met steeds groter wordende stroomsnelheden.

Deze grotere stroomsnelheden hebben een grotere uitschuring van de nieuwe vaargeul tot gevolg en zijn nadelig voor de scheepvaart, waardoor het voordeel van de bochtafsnijding weer te niet wordt gedaan.

I.2 De pragmatische aanpak.

Om een beter inzicht te krijgen in de zand- en slibtransportver-

schijnselen in de Westerschelde, in eerste instantie vooral ten behoeve van de schatting van de eventuele aanzanding en aanslibbing van het Noordelijk Bekken na voltooiing van de bochtafsnijding bij Bath, heeft de Studiedienst Vlissingen van Rijkswaterstaat getracht een empirisch verband op te stellen tussen de gemiddelde stroomsnelheid in de vertikaal, de waterdiepte en het zandtransport. [lit. 1 en lit. 2] Uitgegaan hierbij is van vertikaalmetingen in het oostelijk deel van de Westerschelde.

Bij de berekening van het zandtransport is uitgegaan van de volgende beschrijving van het totale zandtransport over een hoogte van y_h meter:

$$S = \int_0^{y_h} c u dy$$

Hierin is c het zandgehalte (minerale deeltjes > 0.05 mm) en u de stroomsnelheid op een hoogte y .

Met behulp van bovenstaande uitdrukking voor S is voor ieder meetpunt op een aantal tijdstippen de waarde van S bepaald.

Verder zijn op dezelfde tijdstippen de gemiddelde stroomsnelheden in de vertikaal en de momentane waterdiepten bepaald. Door de gemeten stroomsnelheden in de vertikaal onder te verdelen in een aantal klassen en vervolgens per klasse de berekende transporten S uit te zetten tegen de waterdiepte is getracht een verband te vinden tussen de waterdiepte en het transport S .

Uit de verkregen puntenwolken blijkt dat de spreiding van de meetresultaten nogal groot is en dat een verband tussen zandtransport en waterdiepte uit deze gegevens niet duidelijk kan worden aangetoond.

Tussen de uitersten der gevonden transporten behorend bij één bepaalde stroomsnelheid blijkt ongeveer een faktor 2 à 3 aanwezig te zijn.

Vervolgens zijn het rekenkundig gemiddelde (μ) en de bijbehorende standaardafwijking (σ) van de gevonden transporten voor iedere snelheidsklasse bepaald en is het gemiddelde μ van het transport S uitgezet tegen de gemiddelde stroomsnelheid in het vertikaal, dus onafhankelijk van de diepte. Tevens zijn ($\mu - \sigma$) en ($\mu + \sigma$) uitgezet tegen de gemiddelde stroomsnelheid.

Uit de verkregen resultaten blijkt dat er een zeer redelijk verband bestaat tussen de gemiddelde stroomsnelheid in de vertikaal en het zandtransport.

Tenslotte blijkt dat, als aangenomen wordt dat S evenredig is met een zekere macht van de gemiddelde snelheid, deze macht niet konstant is, maar toeneemt bij hogere snelheden. Het grote nadeel van deze aanpak is de grote spreiding van de meetresultaten.

Bij kleine snelheden is de spreiding σ ongeveer gelijk aan het gemiddelde μ en bij grotere snelheden neemt σ af tot ongeveer 0.56μ .

Men zou zich kunnen afvragen of deze resultaten niet zijn te verbeteren door van een theoretisch verband, zoals de transportformule van Bijker, uit te gaan. Ook bij een dergelijke methode wordt echter te sterk geschematiseerd, zoals blijkt uit paragraaf I-4.

Beijl [lit.22] onderzoekt, in het kader van zijn afstudeerwerk, de nauwkeurigheid, wanneer van de methode Bijker wordt uitgegaan.

Door uit te gaan betere aannamen voor de in de formules van Bijker voorkomende konstanten, dan tot nu toe het geval was wordt getracht de nauwkeurigheid van deze methode te verhogen.

De aannamen worden geijkt aan de door de Studiedienst Vlis-singen uitgevoerde materiaaltransportmetingen.

Het mag worden verwacht dat zandtransporten nauwkeuriger zijn te bepalen, indien kan worden beschikt over een mathematisch model, waarin, naast de door Bijker beschouwde facetten, de volgende effecten zijn verdisconteerd:

- 1) voor wat betreft de snelheidsvertikalen het effect van het instationair zijn van de beweging en de invloed van de zoutgradiënt.
- 2) voor wat betreft de zandgehalten het effect van het instationair zijn van de beweging.

Het onderhavige rapport handelt over een dergelijk model. Bij de vertikaalmetingen, uitgevoerd door de Studiedienst Vlissingen in het oostelijk deel der Westerschelde, worden naast stroomsnelheden en zandgehalten ook slibgehalten bepaald.

Verder worden in dit gebied regelmatig oppervlaktebemonsteringen uitgevoerd.

Uit analyse van de oppervlaktebemonsteringen, [lit.3], blijkt een duidelijke invloed van het seizoen op het slibgehalte.

Voor de verschillende meetpunten is vervolgens voor de betreffende seizoenen getracht een verband te vinden tussen het slibgehalte aan de oppervlakte en het gemiddelde slibgehalte in de vertikaal.

Deze verhouding blijkt echter niet alleen gedurende het getij, maar ook gedurende het jaar min of meer schommelingen te vertonen.

Uit een nader onderzoek van de meetgegevens van een meetpunt in het Vaarwater boven Bath blijkt, dat ondanks de grote variaties in slibgehalte gedurende het getij en de grote variaties in de verhouding tussen slibgehalte aan de oppervlakte en gemiddeld slibgehalte in de vertikaal, door het regelmatig uitvoeren van oppervlaktebemonsteringen, aangevuld met

een aantal vertikaalmetingen een goed inzicht in het verloop van de gemiddelde slibgehalten gedurende het jaar verkregen kan worden.

Bij verdere bestudering van het slibgehalte en het slibtransport in het oostelijk deel van de Westerschelde zijn de meetgegevens van een paar andere meetpunten, te weten twee meetpunten ten zuiden van Hansweert, nader onderzocht en is getracht een schatting te geven van het huidige jaarlijkse slibtransport tussen Perkpolder en Bath [lit.4]. Daar het slibtransport o.a. afhangt van de rivierafvoer, welke een statistische variatie vertoont, hebben de beschouwingen betreffende het slibtransport een sterk statistisch karakter.

De belangrijkste oorzaken van het slibtransport zijn convectietransport door de rivierafvoer en diffusietransport door de getijwerking.

Door vermenigvuldiging van momentane concentraties met momentane getijdebieten wordt een momentaan slibtransport bepaald, waaruit een gemiddeld transport over de getijperiode berekend kan worden.

De resultaten van deze berekeningen voor een geheel jaar zijn:

$$\begin{array}{l} S_{\text{Bath}} = (0.75 \pm 1.2) * 10^6 \text{ ton/jaar} \\ S_{\text{Perkpolder}} = (0.6 \pm 2) * 10^6 \text{ ton/jaar} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} S_{\text{Bath}} \\ S_{\text{Perkpolder}} \end{array}} \right\} \text{metingen}$$

Nadeel van deze berekeningen is wederom de grote spreiding in de uitkomsten.

Wordt echter het transport ten gevolge van de rivierafvoer opgeteld bij het met behulp van theoretische beschouwingen te vinden diffusie-transport dan resulteert dit in de volgende transporten:

$$\begin{array}{l} S_{\text{Bath}} = 0.6 * 10^6 \text{ ton/jaar} \\ S_{\text{Perkpolder}} = 0.35 * 10^6 \text{ ton/jaar} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} S_{\text{Bath}} \\ S_{\text{Perkpolder}} \end{array}} \right\} \text{diffusie ("theorie")}$$

De waarde van de laatstgenoemde getallen hangt voor een belangrijk deel af van de nauwkeurigheid van de gebruikte diffusiecoëfficiënten en concentratiegradiënten.

In het algemeen kan gezegd worden dat tot nu toe de slibtransporten dusdanig onnauwkeurig te bepalen zijn dat het moeilijk is een juiste uitspraak te doen over de resulterende sedimentatie of erosie van slib in het gebied tussen Perkpolder en Bath.

I.3 Het doel van het onderzoek.

Het doel van het onderzoek is tweeledig.

Ten eerste: het geven van een berekeningsmethode voor zand- en slibtransporten in een getijstroom, waarbij de spreiding kleiner is dan bij de pragmatische aanpak.

Ten tweede: het geven van kwantitatieve resultaten die voor het onderzoek naar de bochtafsnijding op de volgende punten van belang kunnen zijn:

- 1) de invloed van de versnelling van het water op het eb- en vloedtransport, afhankelijk van de diepte.
- 2) de hoeveelheid slib die per jaar maximaal kan bezinken.

I.4 Toepassing van de methode Bijker en ijking van de beginselen van de methode.

Een eerste aanzet om te komen tot een berekeningsmethode voor zand- en slibtransporten in een getijstroom, waarbij de spreiding kleiner is dan bij de pragmatische aanpak, wordt gegeven in het memo van de Studiedienst Vlissingen: "Toetsing van zandconcentratie-vertikalen in de Westerschelde aan de aannemen van de zandtransportberekeningsmethode van Bijker". [lit.5]. Aan de hand van snelheids- en zandgehalte-vertikalen in de Westerschelde is nagegaan in hoeverre de methode Bijker bruikbaar is voor het berekenen van zandtransporten in een getijrivier als de Westerschelde en welke getallen moeten worden in-

gevuld voor de konstanten voorkomende in de formules van Bijker. In het hier bedoelde memo wordt uitgegaan van de formules van Bijker waarin de golfinvloed is verwaarloosd.

De formule voor het bodemtransport S_b wordt dan:

$$S_b = bD \frac{\bar{u}}{C_h} \sqrt{g} e^{-0.27 \frac{\Delta DC_h^2}{\mu \bar{u}^2}} \quad (1.1)$$

De golfinvloed kan verwaarloosd worden omdat de metingen van de vertikalen uitgevoerd zijn bij rustig weer.

Voor het transport in suspensie S_s vindt Bijker:

$$S_s = 1.83 S_b (I_1 \ln \frac{33y_h}{r} + I_2) \quad (1.2)$$

waarin I_1 en I_2 de Einstein-integralen zijn [lit.5 en 6].

Bij de afleiding van bovenstaande formules wordt uitgegaan van een logarithmische snelheidsverdeling:

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (1.3)$$

$$u_b^* = \frac{\kappa}{\bar{u}} \frac{g}{C_h^2} \quad (1.4)$$

en van een zandconcentratieverdeling afgeleid door Vanoni [lit.7] :

$$\frac{c_y}{c_a} = \left[\frac{\{1 - (y/y_h)\} (a/y_h)}{(y/y_h) \{1 - (a/y_h)\}} \right]^{w/\kappa u^*} \quad (1.5)$$

Voor c_a neemt Bijker de concentratie in de bodemlaag ter hoogte van 1 ribbelhoogte.

Deze bodemconcentratie wordt gelijk gesteld aan:

$$c_r = \frac{S_b}{6.35 r u_b^*} \quad (1.6)$$

Substitutie van (1.1) en (1.4) in (1.6) geeft:

$$c_r = \frac{bD}{6.35 r} e^{-0.27 \Delta gD / \mu (u_b^*)^2} \quad (1.7)$$

Na invoering van $c_r' = \rho_s * 10^6 * c_r$ en $\rho_s = 2.65 \text{ kg/dm}^3$ wordt de volgende uitdrukking voor de bodemconcentratie in mg/l ($=c_r'$) verkregen:

$$\log c_r' - \log \frac{10^5 D}{r} = \log (4.17 b) - \frac{0.1935}{\mu} \frac{gD}{(u_b^*)^2} \quad (1.8)$$

De beschikbare meetgegevens van vier meetpunten, te weten één meetpunt in het Zuidergat, één in het Middलगat en twee in het Vaarwater boven Bath zijn op de volgende punten onderzocht:

- 1) het snelheidsprofiel
- 2) het zandgehalte-profiel
- 3) het zandgehalte aan de bodem.

Uit het onderzoek van het snelheidsprofiel zijn voor alle meetpunten voor een aantal tijdstippen y_h , u_b^* , \bar{u} , y_o , r en C_h bepaald. De waarden voor \bar{u} , y_o en r zijn vervolgens uitgezet tegen de tijd met als gemeenschappelijk "multitijdstip" de kentering van vloed naar eb (bijlage 2).

Uit het onderzoek naar het zandgehalte-profiel is een gemiddelde waarde van de valsnelheid w over de getijperiode en een waarde van D bepaald.

In het onderzoek naar het zandgehalte aan de bodem zijn de verkregen waarden van r uit het onderzoek van het snelheidsprofiel gerangschikt in drie categorieën:

- 1) waarden passend in de conceptie Bijker
- 2) waarden geheel in strijd met de conceptie Bijker (de zeer grote waarden van r gevonden kort voor of kort na de kentering)
- 3) waarden die misschien toch nog wel bruikbaar zijn in de conceptie Bijker.

Vervolgens zijn c'_r , $\frac{gD}{(u_b^*)^2}$ en $\frac{D}{r}$ bepaald en zijn $(\log c'_r - \log \frac{10^5 D}{r})$ en $\frac{gD}{(u_b^*)^2}$ tegen elkaar uitgezet.

Het verband tussen c'_r en $\frac{gD}{(u_b^*)^2}$ is volgens (1.8) lineair.

Door de verkregen puntenwolken van deze lijn en uit het snijpunt met de c'_r -as is met behulp van (1.8) de grootte van b en μ bepaald.

	Vaarwater boven Bath meetpunt 3	Zuidergat meetpunt 1	Middelgat meetpunt 2	Vaarwater boven Bath boei 76
\bar{w} (cm/s)	0.804	1.15	2.86	1.04
D (mm)	0.108	0.130	0.235	0.121
b	1.94	2.05	4.45	3.6
μ	0.133	0.132	0.159	0.140

In bovenstaande tabel zijn voor de verschillende meetpunten de gevonden waarden voor \bar{w} , D, b, en μ vermeld.

Uit deze resultaten kunnen de volgende conclusies worden getrokken:

- 1) Hoewel de snelheidsvertikaal in de getijstroom in het algemeen wel door een logaritmische kan worden benaderd, is de daaruit volgende "ribbelhoogte" geen konstante gedurende de getijperiode.

In de uren rond de kentering worden t.g.v. instationaire effecten schijnbare "ribbelhoogten" gevonden van enkele meters. Reële ribbelhoogten van enkele centimeters worden pas 2 à 3 uur na de kentering gevonden.

De gevonden minimale ribbelhoogten bij eb zijn vrijwel steeds aanzienlijk hoger dan bij vloed.

- 2) De valsnelheid gedurende het getij is geen konstante. De gemiddelde waarden voor de valsnelheid staan vermeld in de tabel. Op bijlage 3 is de correlatie tussen \bar{u} en w weergegeven waarin een grote spreiding aanwezig is.
- 3) In de bodemtransportformule van Bijker voldoet voor het Westerscheldegebied het beste een b van 2 à 4 en een ribbelfactor μ van 0.13 à 0.15.
- 4) In de formule van Bijker zou om betere resultaten te verkrijgen rekening gehouden moeten worden met instationaire effecten.

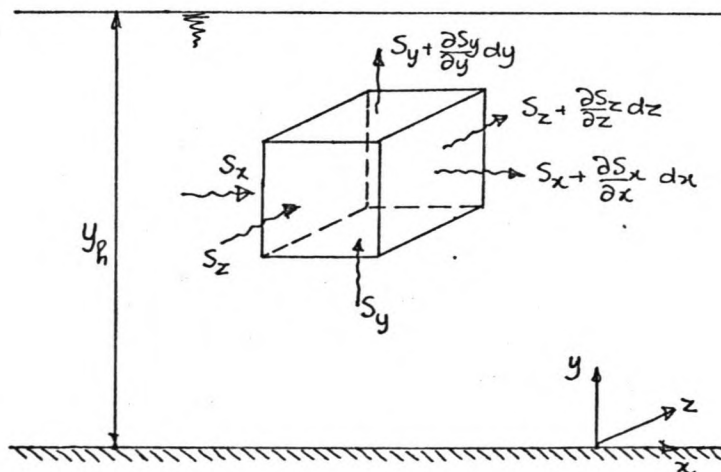
Wat conclusie 4 betreft nog het volgende:

Het rekening houden met instationaire effecten in zand- en slibtransportberekeningen in een getij-stroom is één van de belangrijkste onderdelen van dit onderzoek.

In de volgende hoofdstukken zal hier dieper op worden ingegaan.

I.5 Het principe van de instationaire zandtransportberekening.

Wordt in een open waterloop een volume-elementje met afmetingen dx , dy en dz beschouwd dan is met behulp van de continuïteitsvoorwaarde de verandering van de concentratie van het sediment in dat volume-elementje te bepalen.



Op het tijdstip t is de concentratie in het blokje gelijk aan c , na een tijdje dt wordt de concentratie:

$$c + \frac{\partial c}{\partial t} dt \quad (1.9)$$

waarin c gelijk is aan de concentratie van het zwevend materiaal.

In de X-richting is de toevoer van sediment:

$$S_x dy dz dt \quad (1.10)$$

en de afvoer:

$$\left[S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} \right] dx dy dz dt \quad (1.11)$$

Het verschil tussen (1.10) en (1.11) is gelijk aan:

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} dx dy dz dt \quad (1.12)$$

Voor de y- en z-richting geldt hetzelfde als voor de x-richting.

De verandering van de transporten in de y- en z-richting gedurende het tijdje dt zijn respectievelijk:

$$\frac{\partial S_y}{\partial y} dx dy dz dt \quad (1.13)$$

en:

$$\frac{\partial S_z}{\partial z} dx dy dz dt \quad (1.14)$$

De totale verandering van het transport van sediment moet volgens de continuïteitsvoorwaarde gelijk zijn aan de verandering van de hoeveelheid sediment binnen het volume-elementje $dx dy dz$.

De verandering van de hoeveelheid sediment binnen het volume-elementje wordt op de volgende manier bepaald:

hoeveelheid sediment binnen het volume-elementje ten tijde (t + dt) verminderd met de hoeveelheid sediment binnen het volume-elementje ten tijde t.

Deze verandering is dus gelijk aan:

$$\frac{\partial c}{\partial t} dx dy dz dt = (c + \frac{\partial c}{\partial t} dt) dx dy dz dt - c dx dy dz dt \quad (1.15)$$

De continuïteitsvoorwaarde wordt nu:

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} dx dy dz dt + \frac{\partial S_y}{\partial y} dx dy dz dt + \frac{\partial S_z}{\partial z} dx dy dz dt +$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} dx dy dz dt = 0 \quad (1.16)$$

Na deling door dx dy dz dt en met gebruikmaking van de operator ∇ wordt (1.16):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla_i S_i = 0 \quad (1.17)$$

Het transport S_i kan op de volgende manier beschreven worden:

$$S_i = cu_i + \epsilon_i \nabla_i c + cw_i \quad (1.18)$$

waarin cu_i , $\epsilon_i \nabla_i c$ en cw_i het transport door convectie, het transport door diffusie en het transport door eigenbeweging zijn.

Substitutie van (1.18) in (1.17) geeft:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla_i cu_i - \nabla_i (\epsilon_i \nabla_i c) + \nabla_i cw_i = 0 \quad (1.19)$$

Voor een incompressibele vloeistof geldt dat de divergentie nul is:

$$\nabla_i u_i = 0 \quad (1.20)$$

Met behulp van (1.20) gaat vergelijking (1.19) over in:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \nabla_i c - \nabla_i (\epsilon_i \nabla_i c) + \nabla_i c w_i = 0 \quad (1.21)$$

Vergelijking (1.21) is de continuïteitsvoorwaarde voor zwevend materiaal in een incompressibele vloeistof.

I.6 Met het onderzoek te bereiken nevendoelen.

Met het onderzoek naar instationaire zand- en slibtransportberekeningen in een getijstroom is tevens een betere kennis van de snelheidsvertikalen en de wrijvingscoëfficiënten in instationaire stromen te verkrijgen, waardoor het maken van betere getijberekeningen mogelijk wordt.

II. De analytische berekening van Kajiura.

Om de uit het onderzoek verkregen kennis omtrent de snelheidsvertikalen en de wrijvingscoëfficiënten in instationaire stromen te kunnen vergelijken met analytische berekeningen van de snelheidsvertikalen en de wrijvingscoëfficiënten in instationaire stromen wordt in dit hoofdstuk een uitvoerige beschrijving en nadere uitleg gegeven van de analytische berekeningen die Kajiura geeft in zijn artikel:

"On the bottom friction in an oscillatory current". [lit.8].

In deze beschrijving zijn de symbolen die Kajiura gebruikt aangepast aan de in dit onderzoek gebruikte symbolen.

In paragraaf II.1 wordt de analytische berekening van Kajiura met betrekking tot de snelheidsvertikalen en wrijvingscoëfficiënten in instationaire stromen beschreven en in paragraaf II.2 wordt onderzocht wat in de benaderingen het effect is van het instationair zijn van de beweging.

II.1 Beschrijving.

Voor de berekening van de snelheidsverdeling en de wrijvingscoëfficiënten in een turbulente instationaire stroom over een ruwe bodem gaat Kajiura uit van de volgende gelijneariseerde bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial y_h}{\partial x} + \frac{\partial(\tau/\rho_w)}{\partial y} \quad (2.1)$$

Hierin is verondersteld dat de beweging overwegend horizontaal is en het water een konstante dichtheid ρ_w heeft en dat de diepte konstant is.

In vergelijking (2.1) is u de snelheid in de x -richting en is y_h de diepte.

De schuifspanning in de x -richting is in de vergelijking gegeven door τ^* .

* In zijn artikel geeft Kajiura τ/ρ_w weer door τ .

Verder stelt $\frac{\partial y_h}{\partial x}$ de helling van het wateroppervlak voor.

Kajiura stelt voor:

$$-g \frac{\partial y_h}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.2)$$

In het geval van kort periodieke golven is U de snelheid die optreedt op grote afstand van de bodem. Deze snelheid is alleen een functie van de tijd (niet van de diepte y).

Vergelijking (2.2) ingevuld in (2.1) geeft:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u - U) = \frac{\partial(\tau/\rho_w)}{\partial y} \quad (2.3)$$

Vergelijking (2.3) wordt met de gemiddelde snelheid \bar{u} in plaats van de snelheid u:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} - U) = \frac{1}{\rho_w y_h} (\tau_s - \tau_b) \quad (2.3^a)$$

waarin τ_s de schuifspanning aan de oppervlakte is en τ_b de schuifspanning aan de bodem.

In dit geval is τ_s gelijk aan nul.

De totale diepte is gelijk aan y_h .

De bodemschuifspanningssnelheid u_b^* wordt gedefinieerd door:

$$\frac{\tau_b}{\rho_w} = u_b^* \left| u_b^* \right| \quad (2.4)$$

Met behulp van een energiebeschouwing (zie hoofdstuk IV) is het mogelijk voor een periodieke beweging ($u_b^* = \hat{u}_b^* \cos(\omega t + \varepsilon)$) de schuifspanning τ zodanig te schematiseren dat τ een harmonisch in de tijd verlopende functie wordt.

De vergelijking voor de bodemschuifspanning wordt dan:

$$\frac{\tau_{b,schem}}{\rho_w} = \tilde{u}_b^* u_b^* \quad (2.5)$$

waarin:

$$\tilde{u}_b^* = \frac{8}{3\pi} \hat{u}_b^* \quad (2.6)$$

De relatie tussen de inwendige schuifspanningssnelheid wordt door Kajiura op de volgende manier beschreven.

Op grond van dimensie analyse kan gesteld worden dat de turbulente viscositeit ε_y evenredig is met de karakteristieke turbulente snelheid (= het gemiddelde van de absolute waarde van de fluctuaties van de snelheid loodrecht op de hoofdstroom) en met de lengte waarover de turbulente wervel werkzaam is.

Verder geldt per definitie analoog aan de visceuze schuifspanningen dat de schuifspanning in een turbulente stroom gelijk is aan:

$$\frac{\tau_{\text{schem}}}{\rho_w} = \varepsilon_y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.7)$$

Met dat verschil dat ε_y geen konstante is. (Noch in de tijd, noch in de plaats).

In zijn artikel neemt Kajiura aan dat de turbulente viscositeit evenredig is met de afstand tot de bodem en dat de karakteristieke turbulente snelheid evenredig is met \tilde{u}_b^* .

De turbulente viscositeit ε_y wordt dan:

$$\varepsilon_y = \kappa \tilde{u}_b^* y \quad (2.8)$$

waarin κ de konstante van von Kármán is (= 0.4)

De benadering voor de inwendige schuifspanningssnelheid u^* wordt aangegeven door:

$$u^* = \frac{\tau_{\text{schem}}}{\rho_w \tilde{u}_b^*} \quad (2.9)$$

De geschematiseerde interne schuifspanning τ_{schem} is dus gelijk aan:

$$\tau_{\text{schem}} = \rho_w \tilde{u}_b^* u^* \quad (2.9^a)$$

De met behulp van vergelijking (2.9) berekende interne schuifspanningssnelheid u^* is kleiner dan de werkelijk optredende

interne schuifspanningssnelheid, daar in deze benadering gewerkt wordt met de grotere u_b^* in plaats van met u^* . Combinatie van (2.7), (2.8) en (2.9) geeft:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u^*}{\kappa y} \quad (2.10)$$

De periodiek in de tijd verlopende beweging kan met behulp van complexe getallen op de volgende manier worden beschreven:

$$u^* = \text{Re} \left[u^{*'} e^{i\omega t} \right] \quad (2.11)$$

waarin $u^{*'}$ de complexe amplitude is.

Voor de eenvoud wordt in het vervolg het accent van de complexe amplitude weggelaten.

Uit (2.3), (2.9) en (2.10) wordt de volgende differentiaalvergelijking afgeleid voor de schuifspanningssnelheid u^* :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - i \frac{\kappa^2}{y} u^* = 0 \quad (2.12)$$

waarin:

$$\kappa^2 = \dot{\omega} / (\kappa u_b^*) \quad (2.13)$$

De oplossing van deze vergelijking is met $u^* = 0$ voor $y = y_h$:

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \left(\frac{z}{z_0} \right) \frac{z_1 (z e^{-i\pi/4}, c_h)}{z_1 (z_0 e^{-i\pi/4}, c_h)} \quad (2.14)$$

waarin:

$$z = 2 \kappa y^{\frac{1}{2}}, \quad z_0 = 2 \kappa y_0^{\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad z_h = 2 \kappa y_h^{\frac{1}{2}}$$

In de uitdrukking voor z_0 is y_0 de ruweheidsmaat voor de bodem. De complexe faktor c_h kan worden geschreven als $c_1 + ic_2$. Deze faktor c_h kan bepaald worden uit de randvoorwaarde $u^* = 0$ voor $y = y_h$, d.w.z.:

$$z_1 (z_h e^{-i\pi/4}, c_h) = 0 \quad (2.15)$$

De functie $Z_n(Y, c_h)$ is gelijk aan:

$$Z_n(Y, c_h) = (c_1 + ic_2) J_n(Y) + N_n(Y) \quad (2.16)$$

$J_n(Y)$ en $N_n(Y)$ zijn respectievelijk Bessel en Neumann functies van de orde n .

Voor kleine waarden van Y kan $Z_n(Y, c_h)$ op de volgende manier in een reeksontwikkeling worden geschreven. (zie appendix A):

$$\begin{aligned} Z_0(z e^{-i\pi/4}, c_h) &= (c_1 + \frac{1}{2}) - (\frac{z}{2})^2 c_2 + \frac{2}{\pi} (\gamma + \ln \frac{z}{2} - 1) + \\ &+ i \left\{ c_2 + \frac{2}{\pi} (\gamma + \ln \frac{z}{2}) + (\frac{z}{2})^2 (c_1 + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

en:

$$\begin{aligned} Z_1(z e^{-i\pi/4}, c_h) &= (\frac{z}{2}) e^{-i\pi/4} \left[(c_1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\pi} (\frac{z}{2})^2 - \frac{1}{2} (\frac{z}{2})^2 \right. \\ &\left. \left\{ c_2 + \frac{2}{\pi} (\gamma + \ln \frac{z}{2} - \frac{5}{4}) \right\} + i \left\{ c_2 + \frac{2}{\pi} (\gamma + \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{2}) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} (\frac{z}{2})^2 (c_1 + \frac{1}{2}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

waarin γ de konstante van Euler is (= 0.5772.....).

Uit deze reeksontwikkeling zijn de waarden c_1 en c_2 te bepalen voor kleine waarden van z_h ($z_h < 1$) en voor grote waarden van z_h ($z_h > 3$).

Voor kleine z_h is dit uitgevoerd in appendix A.

De resultaten van deze bewerking zijn:

$$\text{voor } z_h < 1: c_1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{z_h}{2} \right)^2 \quad (2.19)$$

$$\text{en: } c_2 = -\frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{z_h}{2} - \frac{3}{4} \right) \quad (2.20)$$

$$\text{voor } z_h > 3: c_1 = -1 \text{ en } c_2 = 0 \quad (2.21)$$

De oplossing van vergelijking (2.14) wordt nu voor kleine waarden van z_h en van z_o/z_h :

$$\frac{\tau_{schem}}{\tau_{b,schem}} = \frac{u^*}{u_b^*} = \frac{1 - (z/z_h)^2}{1 - (z_o/z_h)^2} = \left(1 - \frac{y}{y_h}\right) \quad (2.22)$$

en voor grote waarden van z_h :

$$\frac{\tau_{schem}}{\tau_{b,schem}} = \frac{u^*}{u_b^*} = -i\pi \left(\frac{z}{z_h}\right) e^{-i\pi/4} H_1^{(2)}(ze^{-i\pi/4}) \quad (2.23)$$

waarin $H_1^{(2)}(ze^{-i\pi/4})$ een Hankelfunctie is van de tweede soort.

Uit (2.22) blijkt dat voor kleine waarden van z_h (geringe diepte) de schuifspanningssnelheid van de bodem naar het oppervlak lineair afneemt met de diepte en uit (2.23) blijkt dat voor grote waarden van z_h (grote diepte) de schuifspanningssnelheid exponentieel afneemt.

Vergelijking (2.10) wordt na substitutie van de parameter y door z :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2u^*}{\kappa z} \quad (2.24)$$

Substitutie van de oplossing (2.14) van de differentiaalvergelijking (2.12) in (2.24) geeft:

$$\frac{u}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{z_o (z_o e^{-i\pi/4}, c_h) - z_o (ze^{-i\pi/4}, c_h)}{(z_o/2) e^{-i\pi/4} z_1 (z_o e^{-i\pi/4}, c_h)} \quad (2.25)$$

met inachtneming van de randvoorwaarde dat $u = 0$ voor $z = z_o$.

Uit vergelijking (2.25) kan eenvoudig de snelheidsverdeling afgeleid worden voor kleine waarden van z ($z < 1$).

(zie voor deze afleiding appendix A).

De snelheidsverdeling wordt dan uitgedrukt in y :

$$\frac{u}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_o} - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{y - y_o}{y_h} \right) \quad (2.26)$$

Kajiura verwaarloost (of vergeet?) in zijn artikel ook de term $\frac{1}{\kappa} \left(\frac{y-y_0}{y_h} \right)$ en komt dan op een snelheidsverdeling die over de gehele diepte logaritmisch verloopt. Door substitutie van de gemiddelde snelheid:

$$\bar{u} = \frac{1}{y_h} \int_{y_0}^{y_h} u dy = \frac{2}{z_h} \int_{z_0}^{z_h} uz dz \quad (2.27)$$

in vergelijking (2.25) gaat deze over in:

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa z_h^2} \left[4i + \frac{(z_h^2 - z_0^2) z_0 (z_0 e^{-i\pi/4}, c_h)}{(z_0/2) e^{-i\pi/4} z_1 (z_0 e^{-i\pi/4}, c_h)} \right] \quad (2.28)$$

Daar z_0 in het algemeen erg klein is en $\left(\frac{z_0}{z_h}\right)^2 \ll 1$ is, is vergelijking (2.28) te schrijven als:

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = \alpha_1 + i\alpha_2 = Ae^{i\theta} \quad (2.29)$$

Hierin is:

$$\alpha_1 = -\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) \left\{ c_2 + \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{z_0}{2} \right) \right\} > 0 \quad (2.30)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\pi}{\kappa}\right) \left\{ c_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{z_h}\right)^2 \right\} \leq 0 \quad (2.31)$$

$$A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad (2.32)$$

$$\theta = \arctg (\alpha_2 / \alpha_1) \leq 0 \quad (2.33)$$

Voor kleine waarden van z_h (geringe diepte) worden de waarden van A en θ (zie appendix A):

$$A = \frac{1}{\kappa} \left\{ 2 \ln \left(\frac{z_h}{z_0}\right) - \frac{3}{2} \right\} \quad (2.34)$$

$$\theta = 0 \quad (2.35)$$

Voor grote waarden van z_h (grote diepte) worden A en θ :

$$A = \frac{\pi}{\kappa} \left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\gamma + \ln \frac{z_0}{z}\right)^2 + \frac{1}{4} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

$$\theta = \arctg \left\{ \left(\frac{\pi}{4}\right) / \left(\gamma + \ln \frac{z_0}{z}\right) \right\} \quad (2.37)$$

De wrijvingscoëfficiënt C_h wordt met behulp van (2.29) gedefinieerd door:

$$\frac{\tau_{b,schem}}{\rho_w} = \tilde{u}_b^* u_b^* = C_k \left(\frac{8}{3\pi}\right) \frac{\Lambda_-}{uu} \quad (2.38)$$

waarin:

$$C_k = A^{-2} e^{i\theta} \quad (2.39)$$

Uit de uitdrukkingen voor A, θ en C_k blijkt dat voor kleine

waarden van z_h ($z_h < 1$, d.w.z. $y_h < \frac{\kappa u_b^*}{4\omega}$) de wrijvingscoëfficiënt

C_k alleen afhankelijk is van z_h/z_0 en onafhankelijk is van de golfperiode en golfamplitude.

Voor grote waarden van z_h ($z_h > 3$) is de wrijvingscoëfficiënt C_h een functie van z_0 , waaruit blijkt dat C_k onafhankelijk is van de diepte maar afhankelijk van de golfperiode en golfamplitude.

Door combinatie van (2.29) en (2.39) kan de amplitude van C_k ($=\hat{C}_k$) weergegeven worden als een functie van $\bar{u}/\omega y_h$ (=slaglengte/diepte) met y_h/y_0 als parameter.

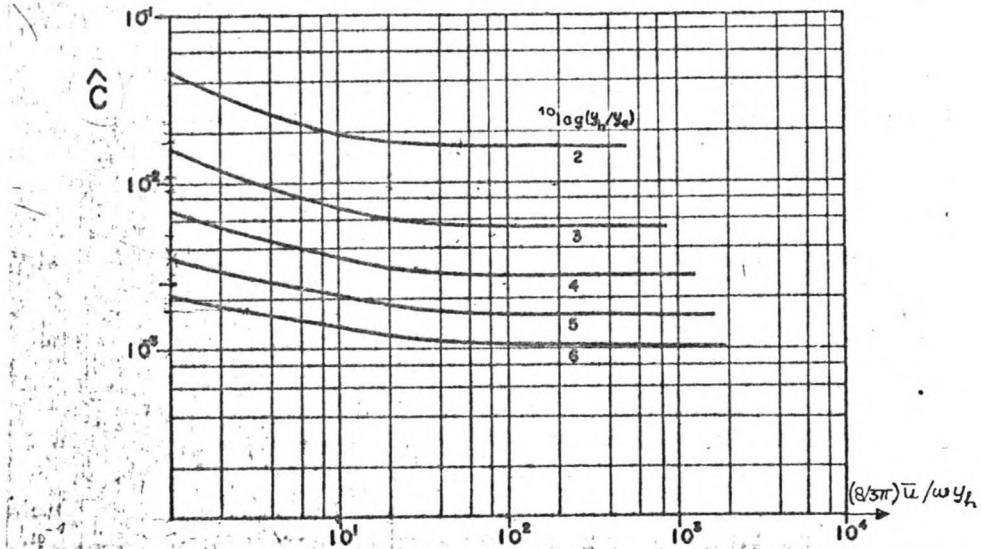
Zie figuur 1 op volgende bladzijde. *)

*) Kajiura maakt in de figuren in zijn artikel, die hier zijn overgenomen, gebruik van de ¹⁰log in plaats van, zoals in de afleidingen, de natuurlijke logaritme. Voor beide functies maakt hij gebruik van de notatie "log" zonder het grondtal te noemen, hetgeen gemakkelijk tot verwarring aanleiding geeft.

De slaglengte is gelijk aan:

$$a = \frac{\bar{u} T}{2\pi} = \frac{\bar{u}}{\omega} \quad (2.40)$$

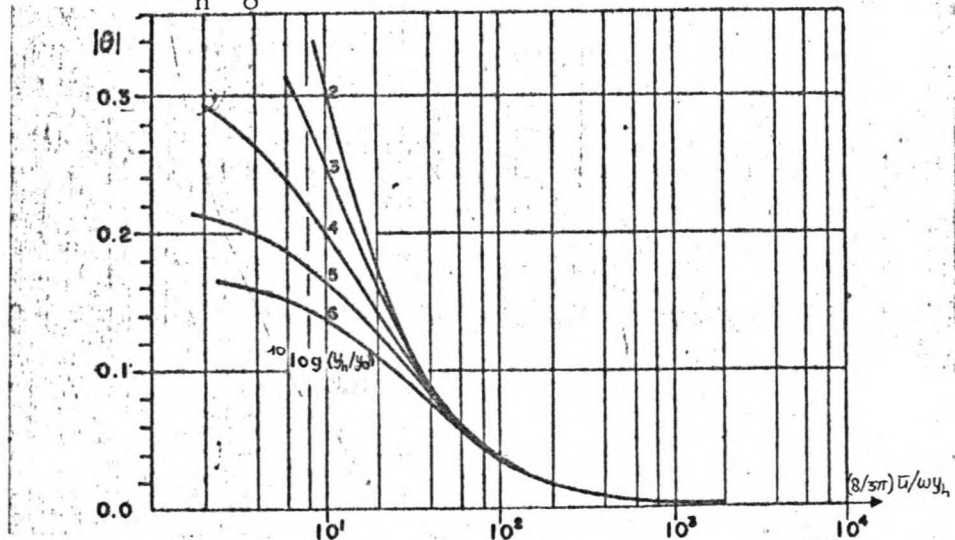
Op de horizontale as staat dus op een bepaalde schaal de verhouding slaglengte/diepte uit.



figuur 1. Amplitude \hat{C}_k van de wrijvingscoëfficiënt C_k als functie van $\bar{u}/\omega y_h$.

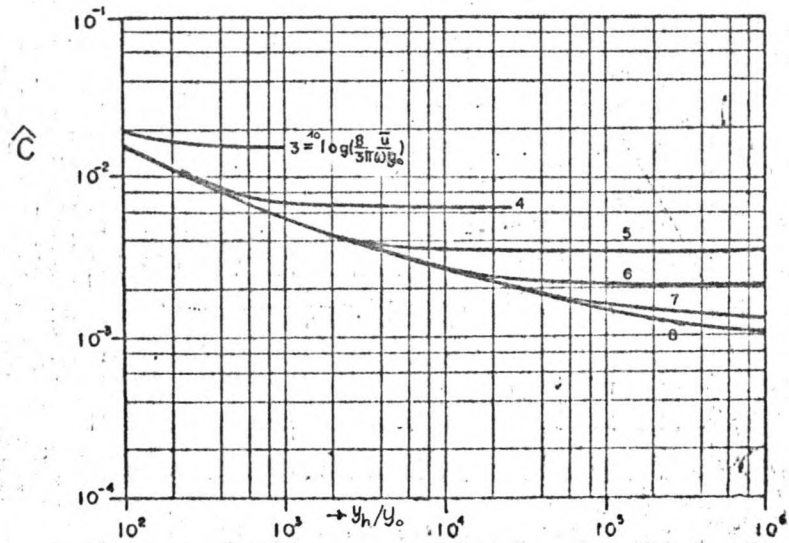
Voor kleine waarden van $\bar{u}/(\omega y_h)$ neemt \hat{C}_k voor een vaste waarde van y_h/y_0 toe met afnemende waarden van $\bar{u}/(\omega y_h)$ en voor grote waarden van $\bar{u}/(\omega y_h)$ ($\bar{u}/\omega y_h > 10^2$) blijft \hat{C}_k konstant.

De fase-hoek $|\theta|$ uitgezet tegen $\bar{u}/(\omega y_h)$ voor verschillende waarden van y_h/y_0 levert figuur 2.

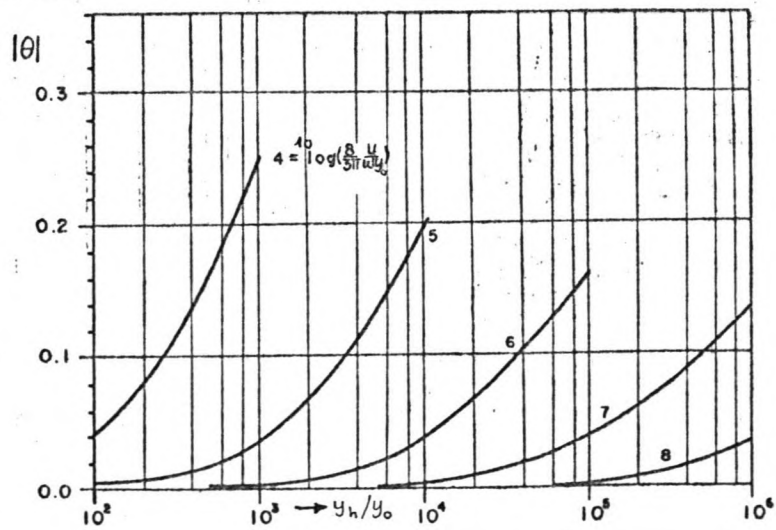


Figuur 2. Fase θ van de wrijvingscoëfficiënt als functie van $\bar{u}/\omega y_h$.

Voor een vaste waarde van $\bar{u}/(\omega y_0)$ (= 33 maal slaglengte/ribbelhoogte) neemt de amplitude C_h af en de fasehoek toe bij toenemende waarden van y_h/y_0 . Dit wordt weergegeven in de figuren 3 en 4.



Figuur 3. Amplitude \hat{C}_k van de wrijvingscoëfficiënt C_k als functie van y_h/y_0 .

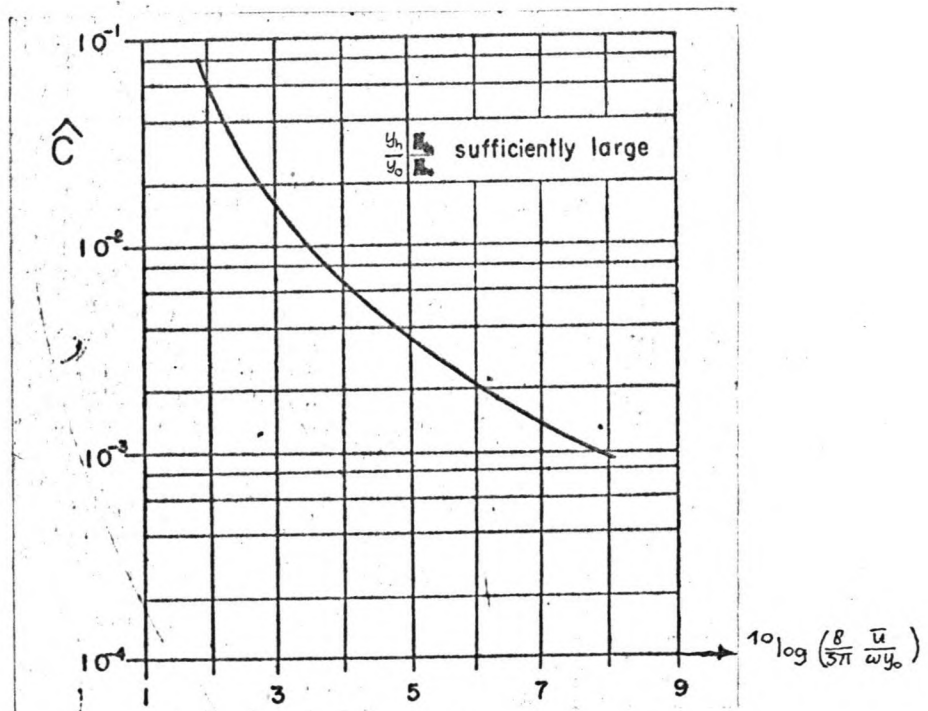


Figuur 4. Fase θ van de wrijvingscoëfficiënt C_k als functie van y_h/y_0 .

Voor grote waarden van y_h/y_0 wordt \hat{C}_k konstant voor een vaste waarde van $\bar{u}/(\omega y_0)$, waaruit de onafhankelijkheid van \hat{C}_k van de diepte y_h blijkt.

Voor grote waarden van y_h/y_0 kan \hat{C}_k als een functie van $\bar{u}/(\omega y_0)$ gegeven worden, dus als functie van slag-lengte/ribbelhoogte, zie figuur 5.

Uit het voorgaande blijkt dat de wrijvingscoëfficiënt \hat{C}_k toeneemt met afnemende \bar{u} , afnemende periode van de oscillerende beweging in het gebied $\bar{u}/(\omega y_h) \leq 10^2$ en met afnemende diepte van het water voor grote waarden van \bar{u} van $\bar{u}/(y_h)$.



Figuur 5. Amplitude \hat{C}_k van de wrijvingscoëfficiënt C_k als functie van $\bar{u}/(\omega y_0)$ voor voldoende grote waarden van y_h/y_0 .

De afhankelijkheid van $\frac{\tau_{b,schem}}{\rho_w}$ en \bar{u} van de drukgradiënt U wordt door Kajiura op de volgende manier afgeleid.

Substitutie van (2.5) en (2.29) in (2.3^a) geeft:

$$u_b^* = U e^{i\delta} / \left\{ \alpha_1^2 + \left[\alpha_2 - \frac{\tilde{u}_b^*}{\omega y_h} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.41)$$

waarin:

$$\operatorname{tg} \delta = \left\{ \frac{\tilde{u}_b^*}{\omega y_h} - \alpha_2 \right\} / \alpha_1 \quad (2.42)$$

Uit $\alpha_1 > 0$ en $\alpha_2 \leq 0$ volgt dat $\delta \geq 0$ is.

Nu wordt gesteld dat $\frac{\tilde{u}_b^*}{\omega y_h} = \eta$, hieruit volgt dat

$$\tilde{u}_b^* = (3\pi/8)\eta\omega y_h e^{i\delta}.$$

Als U reëel wordt verondersteld wordt (2.41):

$$\eta^2 \left\{ \alpha_1^2 + (\alpha_2 - \eta)^2 \right\} = \left(\frac{8}{3\pi} \frac{U}{\omega y_h} \right)^2 \quad (2.43)$$

α_1 en α_2 zijn functies van z_h en z_o en verder is η gelijk aan $4/\kappa z_h^2 = 10/z_h^2$.

Voor kleine waarden van η wordt uit het bovenstaande de volgende uitdrukking verkregen:

$$\eta^2 = \left(\frac{8}{3\pi} \right)^2 \frac{U^2}{(\omega y_h)^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \quad \text{en } \delta = -\theta \quad (2.44)$$

zodat:

$$\frac{\tau_{b,schem}}{\rho_w} = \left(\frac{8}{3\pi} \right) \frac{e^{i\theta}}{A^2} U^2 \quad (2.45)$$

Voor grote waarden van η wordt de volgende uitdrukking verkregen:

$$\eta^2 = \left(\frac{8}{3\pi} \right) \frac{U}{\omega y_h} \quad \text{en } \delta = \frac{\pi}{2} \quad (2.46)$$

zodat:

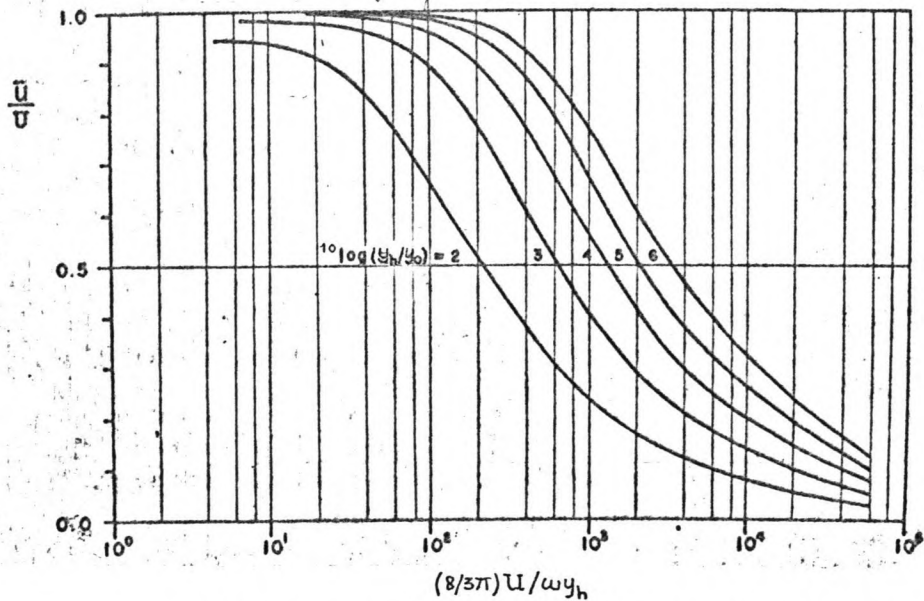
$$\frac{\tau_{b,schem}}{\rho_w} = (\omega y_h) e^{i\pi/2} U \quad (2.47)$$

Uit (2.29) en (2.41) volgt nu:

$$\frac{\hat{u}}{U} = \left[\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_2 - \eta)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.48)$$

zodat $\hat{u}/U \approx 1$ voor kleine waarden van η en $\hat{u}/U \approx \eta^{-1}$ voor grote waarden van η . Het faseverschil tussen U en u wordt gegeven door $\delta + \theta$.

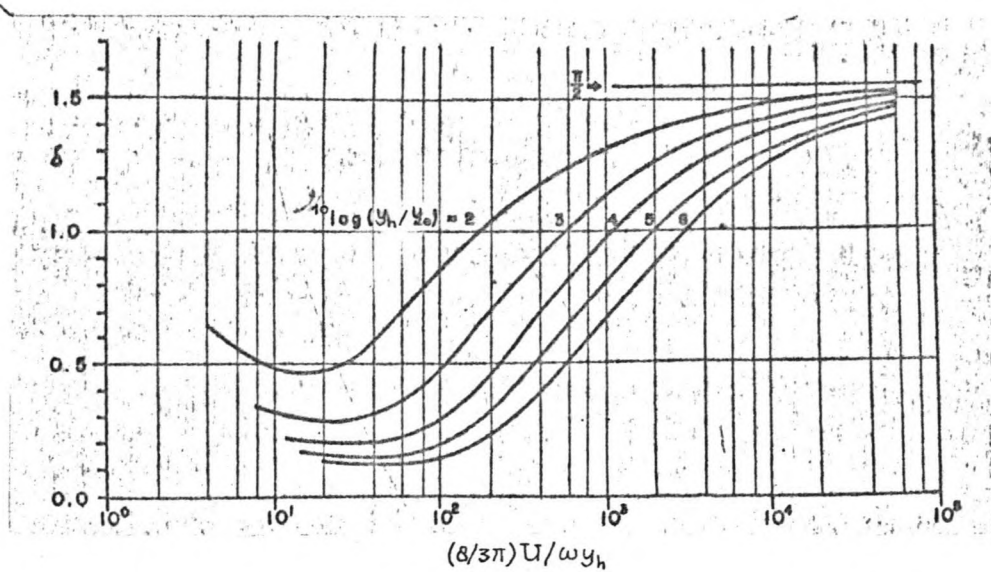
De verhouding \hat{u}/U kan worden uitgezet tegen $U/(\omega y_h)$ voor verschillende waarden van y_h/y_0 . Dit geeft figuur 6.



Figuur 6. De verhouding \hat{u}/U als functie $U/\omega y_h$.

Uit bovenstaande blijkt dat in de bewegingsvergelijking de versnelling van het water domineert over de wrijving voor $U/(\omega y_h) < 10^2$ (bijvoorbeeld in het geval van vrije zwaartekrachtsgolven zonder wrijving) en dat bij toename van $U/(\omega y_h)$ het effect van de wrijving steeds belangrijker wordt totdat in het limietgeval ($U/(\omega y_h) > 10^5$) de verhangkracht evenwicht maakt met de wrijvingskracht.

Figuur 7 laat het faseverschil δ zien tussen U en u_b^* . Dit varieert van $|\theta|$ tot $\pi/2$ met toenemende $U/(\omega y_h)$.



Figuur 7. Faseverschil δ tussen u_b^* en U als functie van $U/\omega y_h$.

II.2 Het effect van het instationair zijn van de beweging op de analytische benadering van de snelheidsvertikalen in instationaire stromen.

Voor een nader onderzoek naar het effect van het instationair zijn van de beweging op de analytische benadering van de snelheidsvertikalen in instationaire stromen wordt met betrekking tot de analytische benadering van Kajiura uitgegaan van vergelijking (2.14):

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \left(\frac{z}{z_0}\right) \frac{z_1(z_0 e^{-i\pi/4}, c_h)}{z_1(z_0 e^{-i\pi/4}, c_h)}$$

Hoewel Kajiura zelf al toont, waartoe deze vorm nadert voor zeer kleine waarden van z_h (d.w.z. voor een golfperiode die naar oneindig nadert) (zie vergelijking (2.22)) en ook waartoe u/u_b^* onder deze condities nadert (zie vergelijking (3.17) van zijn artikel, geamendeerd tot vergelijking (2.26) in dit

rapport), is het in verband met het volgende van belang de grootte van de fout te kwantificeren die gemaakt wordt indien instationaire verschijnselen worden verwaarloosd, dat wil zeggen indien van de vergelijkingen (2.22) en (2.26) wordt uitgegaan. Gezocht wordt dus een wat nauwkeuriger benadering, waarin ook termen z_h en z/z_h kwadratisch voorkomen worden meegenomen.

Waar in eerste orde van z_h geen faseverschil tussen verhang en snelheid wordt gevonden, levert de tweede-orde benadering wel een faseverschil.*)

Voor kleine waarden van z_h ($z_h < 1$, geringe diepte) kan vergelijking (2.14) als volgt worden geschreven (zie appendix A formule (A65)):

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{z^2}{z_h^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} \right] + \frac{\pi}{4} i \left[z^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \right\} \right] \quad (2.49)$$

Vergelijking (2.49) kan ook als volgt geschreven worden:

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \frac{u_z^*}{u_b^*} + i \frac{u_i^*}{u_b^*} \quad (2.50)$$

Stel nu:

$$u = u_z + i u_i \quad (2.51)$$

dan is:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + i \frac{\partial u_i}{\partial z} \quad (2.52)$$

*) De wijze van aanpak is in principe hetzelfde als welke Bakker [lit.] gebruikt om het gedrag van u en u_i bij de analytische benadering genoemd in hoofdstuk III na te gaan.

Volgens (2.24) is de inwendige schuifspanningssnelheid u^* gelijk aan:

$$u^* = \frac{\kappa z}{2} \frac{\partial u}{\partial z}$$

Invullen van (2.52) in (2.24) geeft na delen door u_b^* :

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \frac{\kappa z}{2u_b^*} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + i \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) \quad (2.53)$$

Vergelijking (2.49) en (2.53) geven 2 uitdrukkingen voor u^*/u_b^* . Dit houdt in dat zowel de reële delen als de imaginaire delen aan elkaar gelijk moeten zijn.

Gelijkstellen van de reële delen van (2.49) en (2.53) geeft, als verondersteld wordt dat u_b^* reëel is:

$$\frac{\kappa z}{2} \frac{u_r}{z} = u_b^* \frac{\pi}{4} \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{z^2}{z_h^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{z_h^2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} \right] \quad (2.54)$$

Na integreren en met inachtneming van de randvoorwaarde

$u_r = 0$ op $z = z_0$ gaat (2.54) over in (zie appendix A formule (A69)):

$$u_r = \frac{2u_b^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} - \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{z^2}{z_h^2} + \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{z_0^2}{z_h^2} \quad (2.55)$$

Vergelijking (2.55) uitgedrukt in y wordt:

$$u_r = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} - \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{y}{y_h} + \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{y_0}{y_h} \quad (2.56)$$

Dit is de momentane verdeling van de snelheid in een stationaire stroom.

Gelijkstellen van de imaginaire delen van (2.49) en (2.53) geeft (zie (A70)):

$$\frac{\kappa z}{2} \frac{\partial u_i}{\partial z} = u_b^* \frac{\pi}{4} \left[z^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \right\} \right] \quad (2.57)$$

Integreren geeft:

$$u_i = \frac{u_b^*}{2\kappa} \left[z^2 \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{8} \frac{z^4}{z_h^2} + C \right] \quad (2.58)$$

Gesteld wordt nu dat $u_i = 0$ voor $z = 0$ in plaats van $u_i = 0$ voor $z = z_0$, hierdoor wordt een eenvoudiger uitdrukking voor u_i verkregen (z_0 is immers erg klein). De integratie konstante C is dan gelijk aan nul.

De over de vertikaal gemiddelde u_i wordt:

$$\bar{u}_i = \frac{-79}{720} \frac{u_b^*}{\kappa} z_h^2 \approx -\frac{1}{9} \frac{u_b^*}{\kappa} z_h^2 \quad (2.59)$$

Vergelijking (2.59) uitgedrukt in y wordt:

$$\bar{u}_i = -\frac{4}{9} \frac{u_b^* K^2}{\kappa} y_h \quad (2.60)$$

Door voor K^2 uitdrukking (2.13) in te vullen en ω gelijk te stellen aan $2\pi/T$ wordt (2.60):

$$\bar{u}_i = \frac{-8\pi}{9\kappa^2} \frac{y_h}{T} \quad (2.61)$$

(2.61) laat zien dat \bar{u}_i , en dus u_i , in deze benadering onafhankelijk is van u_b^* en dus ook van u .

De term \bar{u}_i geeft de gemiddelde invloed van het instationaire effect.

Voor een getij waarvoor geldt $T = 44.700$ sec. wordt (2.61)

met $\kappa = 0.4$:

$$\bar{u}_i = -0.359 * 10^{-3} * y_h \quad (2.62)$$

Voor een diepte y_h van 20 meter is $\bar{u}_i = -0.718$ cm/sec.

Hieruit blijkt dat de invloed van het instationair zijn van de beweging op de snelheidsvertikalen in instationaire stromen erg klein is.

III. Vergelijking van snelheidsvertikalen en wrijvingscoëfficiënten
in stationaire en instationaire stromen.

In dit hoofdstuk zullen eerst enkele opmerkingen worden gemaakt over snelheidsvertikalen en wrijvingscoëfficiënten in stationaire stromen. Daarna zullen deze worden vergeleken met de snelheidsvertikalen en wrijvingscoëfficiënten in instationaire stromen verkregen uit de analytische berekeningsmethode van Kajiura (zie hoofdstuk II).

Tenslotte zullen nog enige opmerkingen gemaakt worden over de te berekenen wrijvingscoëfficiënten met behulp van het numerieke model SG1 (zie voor beschrijving van dit model hoofdstuk VI).

Eerst zal de snelheidsvertikaal en de wrijvingscoëfficiënt in een stationaire stroom worden bepaald, waarbij verondersteld wordt dat de schuifspanning konstant is over de diepte.

In zijn mengwegtheorie neemt Prandtl voor de turbulente schuifspanning de volgende relatie aan.

$$\tau = \rho_w L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.1)$$

waarin L gelijk is aan de mengweg.

In bovenstaande uitdrukking is de viskeuze wrijving buiten beschouwing gelaten.

Voor een konstante schuifspanning (τ_b) over de hoogte kan voor (3.1) geschreven worden :

$$\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho_w}} = L \frac{du}{dy} = u_b^* \quad (3.2)$$

waarin u_b^* gelijk is aan de schuifspanningssnelheid aan de bodem.

Wordt aangenomen, in navolging van Prandtl, dat de mengweg evenredig is met de afstand tot de bodem, dan geeft vergelijking (3.2) na invullen van $L = \kappa y$ ($\kappa =$ konstante van von Kármán) en na integreren met inachtneming van de randvoorwaarde dat de snelheid nul is op $y = y_0$ (y_0 is 1/33 van de ribbelhoogte r):

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (3.3)$$

Integreren van (3.3) tussen de grenzen y_0 en y_h en delen door de diepte geeft de gemiddelde snelheid (zie appendix B):

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - 1 \right\} \quad (3.4)$$

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_o} e$$

Bij de bodem kan uit een evenwichtsbeschouwing voor de schuifspanning τ_b het volgende afgeleid worden:

$$\tau_b = \rho_w g y_h I \quad (3.5)$$

waarin I het verhang is.

Met behulp van (3.2) en de experimentele formule van Chézy,

$\bar{u} = C_h \sqrt{y_h I}$, kan voor de coëfficiënt van Chézy, C_h , het volgende worden afgeleid:

$$C_h = \frac{\bar{u}}{u_b^*} \sqrt{g} \quad (3.6)$$

Invullen van (3.4) in (3.6) geeft:

$$C_h = \frac{1}{\kappa} \sqrt{g} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - 1 \right\} \quad (3.7)$$

Dit is de wrijvingscoëfficiënt in een stationaire stroom waarvoor geldt dat de schuifspanning konstant over de diepte is en de meengweg L lineair over de diepte verloopt.

Uit evenwichtsbeschouwingen blijkt echter dat de schuifspanning niet konstant is maar driehoekig verloopt:

$$\tau = \tau_b \left(1 - \frac{y}{y_h} \right) \quad (3.8)$$

Integreren van (3.1) na invullen van (3.8) en $L = \kappa y$ geeft met de randvoorwaarde $u=0$ op $y=y_o$ (zie appendix B):

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} - \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) + \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) - 2\sqrt{1 - \frac{y_o}{y_h}} + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_o}{y_h}} \right) + \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_o}{y_h}} \right) \right\} \quad (3.9)$$

Integreren van (3.9) tussen de grenzen y_o en y_h en delen door de diepte geeft na uitwerken de volgende uitdrukking voor de gemiddelde snelheid (zie appendix B):

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ \frac{y_h}{y_o} - 1.28 \right\} \quad (3.10)$$

De wrijvingscoëfficiënt C_h wordt dan met behulp van (3.6):

$$C_h = \frac{1}{\kappa} \sqrt{g} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.28 \right\} \quad (3.11)$$

Dit is de wrijvingscoëfficiënt in een stationaire stroom waarvoor geldt dat zowel de schuifspanning als de mengweg L lineair over de diepte verlopen.

Von Kármán leidt met behulp van zijn gelijkvormigheidstheorie [lit.9] voor de mengweg L het volgende af:

$$L = 2 \kappa y_h \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \quad (1 - 1 - \frac{y}{y_h}) \quad (3.12)$$

en voor de snelheid u :

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} + \right. \\ \left. - \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right\} \quad (3.13)$$

De gemiddelde snelheid \bar{u} en de wrijvingscoëfficiënt C_h worden dan respectievelijk (zie appendix B):

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.14 \right\} \quad (3.14)$$

en:

$$C_h = \frac{1}{\kappa} \sqrt{g} \left\{ \frac{y_h}{y_0} - 1.14 \right\}. \quad (3.15)$$

Wordt echter voor de mengweg de volgende aanname gedaan:

$$L = \kappa y \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \quad (3.16)$$

dan geeft dit na invullen van (3.16) in (3.8) en (3.1):

$$\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho_w}} = u^* = \kappa y \frac{du}{dy} \quad (3.17)$$

Deze vergelijking is identiek met vergelijking (3.2) en heeft als oplossing:

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}$$

Uit een vergelijking van de verschillende eerder genoemde uitdrukkingen voor de mengweg L (zie bijlage 4) blijkt dat kromme 3 ($L = \kappa y \sqrt{1 - y/y_h}$) redelijke overeenstemming vertoont met de goot- en riviermetingen van Coleman [lit.10].

Bovenstaande geldt voor snelheidsverdelingen en wrijvingscoëfficiënten in stationaire stromen.

Kajiura heeft in zijn artikel [lit.8], zie ook hoofdstuk II, voor een instationaire stroom (getijstroom) met geringe diepte en een oneindig grote trillingstijd voor de momentane snelheidsvertikaal de volgende uitdrukking gevonden:

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} - \frac{u_b^*}{\kappa} \left(\frac{y - y_0}{y_h} \right) \quad (3.18)$$

Voor de gemiddelde momentane snelheid en de topwaarde van de wrijvingscoëfficiënt C_k vindt hij respectievelijk:

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.50 \right\} \quad (3.19)^*$$

en:

$$C_k = \frac{2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.50 \right\}^2} \quad (3.20)$$

Deze wrijvingscoëfficiënt is als volgt gedefinieerd:

$$\frac{\tau_{b, \text{schem}}}{\rho_w} = \tilde{u}_b^* u_b^* = C_k \left(\frac{8}{3\pi} \right) \hat{u} \bar{u} \quad (3.21)$$

waarin $C_k = \hat{C}_k e^{i\theta}$.

Voor geringe diepte is θ echter ongeveer gelijk aan nul.

In zijn berekeningen gaat Kajiura uit van een lineair verlopende mengweg $L = \kappa y$ en van een schuifspanning die met behulp van een energiebeschouwing zodanig geschematiseerd is dat τ voor de periodieke getijbeweging een harmonisch in de tijd verlopende funktie is.

De werkelijke schuifspanning aan de bodem is gelijk aan:

$$\tau_b = \rho_w \left| u_b^* \right| u_b^* \quad (3.22)$$

De geschematiseerde schuifspanning aan de bodem wordt:

$$\tau_{b, \text{schem}} = \rho_w \tilde{u}_b^* u_b^* \quad (3.23)$$

waarin:

$$\tilde{u}_b^* = \frac{8}{3\pi} \hat{u}_b^* \quad (3.24)$$

* zie vergelijking (2.29) en (2.34).

Kajiura vindt dan voor de verdeling van de momentane schuifspannings-snelheid u^* voor geringe diepte de volgende formule:

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \left(1 - \frac{y}{y_h} \right) = \left[\frac{\tilde{u}_b^* u^*}{\tilde{u}_b^* u_b^*} = \frac{\tau_{schem}}{\tau_{b,schem}} \right] \quad (3.25)$$

Uit de vergelijkingen (3.25) en (3.1) is de vergelijking voor de momentane snelheidsverdeling (3.18) af te leiden.

Vergelijking (3.19) ontstaat door vergelijking (3.18) te integreren tussen de grenzen y_0 en y_h en te delen door de diepte (zie appendix A). Wordt de door Kajiura verkregen uitdrukking voor de gemiddelde momentane snelheid (3.19) vergeleken met de uitdrukking voor de gemiddelde snelheid in een stationaire stroom met een driehoekig verlopende schuifspanning en een lineair over de diepte verlopende mengweg (3.10) dan is het enige verschil in deze twee uitdrukkingen dat in (3.10) een factor 1.28 voorkomt en in (3.19) een factor 1.50.

De reden van dit verschil is de door Kajiura toegepaste schematisering van de schuifspanning in een instationaire stroom.

Door deze schematisering vindt Kajiura namelijk voor de verdeling van de momentane schuifspanningssnelheid een lineair over de hoogte verlopen- de functie (zie (3.25)), dit in tegenstelling tot het verloop van de schuifspanningssnelheden volgens een wortelfunctie in een stationaire stroom ($u^* = \sqrt{\tau / \rho_w}$).

In het numerieke model SG1 wordt een wrijvingscoëfficiënt f_c berekend die op de volgende wijze gedefinieerd wordt:

$$\frac{1}{2} f_c \bar{u}^2 = \frac{\tau_b}{\rho_w} \quad (3.26)$$

Met behulp van formule (3.6) kunnen voor de drie verschillende gevallen in een stationaire stroom de wrijvingscoëfficiënten uitgedrukt worden in f_c .

Voor stationaire stromen volgt uit (3.26):

$$\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho_w}} = u_b^* = \bar{u} \sqrt{\frac{f_c}{2}} \quad (3.27)$$

Uit formule (3.6) volgt:

$$u_b^* = \frac{\bar{u}}{c_h} \sqrt{g} \quad (3.28)$$

Invullen van (3.28) in (3.27) geeft:

$$f_c = \frac{2g}{C_h^2} \quad (3.29)$$

Invullen van respectievelijk (3.7), (3.11) en (3.15) in (3.29) geeft:

$$f_{c1} = \frac{2\kappa^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - 1 \right\}^2} \quad (3.30)$$

$$f_{c2} = \frac{2\kappa^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - 1.28 \right\}^2} \quad (3.31)$$

$$f_{c3} = \frac{2\kappa^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - 1.14 \right\}^2} \quad (3.32)$$

Uit een vergelijking tussen de door Kajiura gedefinieerde wrijvingscoëfficiënt C_k in (3.21) en de definitie van f_c in (3.26) blijkt dat, rekening houdend met het feit dat in (3.21) sprake is van een geschematiseerde bodemschuifspanning en dat in (3.26) de werkelijke bodemschuifspanning gebruikt wordt, C_k gelijk is aan $f_c/2$.

Voor een instationaire stroom (getijstroom) wordt de topwaarde van de wrijvingscoëfficiënt f_c dan:

$$\hat{f}_{c4} = 2\hat{C}_k = \frac{2\kappa^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - 1.50 \right\}^2} \quad (3.33)$$

Invullen van een bepaalde waarde voor y_h (bijvoorbeeld $y_h = 20$ m) en voor y_o (bijvoorbeeld $y_o = 0.002$ m) in de uitdrukkingen voor de verschillende wrijvingscoëfficiënten in stationaire en in instationaire stromen geeft met $\kappa = 0.4$ de resultaten zoals weergegeven in tabel 1.

Uit de tabel blijkt dat de topwaarde van de wrijvingscoëfficiënten f_c in een instationaire stroom volgens de theorie van Kajiura iets hoger ligt dan de wrijvingscoëfficiënt f_c in een stationaire stroom met een lineair verlopende schuifspanning en een mengweg die gelijk is aan $L = \kappa y$.

In een getijstroom zal gedurende het getij de wrijvingscoëfficiënt voor geringe diepte weinig variatie vertonen, daar de al eerder genoemde fasehoek ongeveer nul is.

In het numerieke model SG1 wordt de wrijvingscoëfficiënt uitgerekend met behulp van uitdrukking (3.26).

Hierin wordt gerekend met de werkelijk optredende schuifspanning die berekend wordt uitgaande van een harmonisch verlopende schuifspanning aan de bodem en waarbij rekening wordt gehouden met een zoutgradiënt in de lengte-richting van de stroom.

In het numerieke model SG1 wordt gewerkt met een mengwegverloop volgens (3.16):

$$L = \kappa y \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}$$

Verder zijn in tabel 1 ook nog de benaderingen voor snelheidsvertikalen en wrijvingscoëfficiënten in golven ($\hat{u}T \ll y_h$) gegeven volgens de benadering van Jonsson, de analytische benadering van Bakker (zie hoofdstuk IV) en de numerieke benadering van Bakker (zie hoofdstuk V).

In bijlage 5 is tenslotte de wrijvingscoëfficiënt f_c uitgezet tegen de verhouding slaglengte/ribbelhoogte ($= a/r$).

De verschillende waarden van f_c zijn op twee manieren bepaald.

Ten eerste met behulp van de formules die Kajiura heeft ontwikkeld voor \hat{C}_k en de betrekking $\hat{f}_c = 2\hat{C}_k$.

Ten tweede is uitgezet de door Jonsson [lit.11] gevonden betrekking tussen a/r en f_c :

$$\frac{a}{r} = 1.2 * \frac{1}{4 \sqrt{f_c}} 10^{1/4 \sqrt{f_c}} \quad (3.34)$$

Uit bijlage 5 blijkt dat voor waarden van $a/r > 10$ de waarden voor f_c van Kajiura en Jonsson weinig verschil vertonen, met dien verstande dat volgens Kajiura bij een bepaalde verhouding tussen y_h en y_o (bij geringe diepte) de wrijvingscoëfficiënt na een bepaalde waarde van a/r konstant blijft (wrijving overheerst over de versnelling van het water).

Vergelijking (3.34) is daarentegen onafhankelijk van de diepte. Jonsson heeft zijn betrekking afgeleid voor kleine slaglengten a (korte golven) en in principe oneindige waarden voor y_h/y_0 . In bijlage 5 is dit geëxtrapoleerd naar waarden van f_c die behoren bij grote slaglengten (getijgolven).

De vergelijking van Kajiura zijn geëxtrapoleerd naar waarden van f_c behorende bij kleine slaglengten.

TABEL 1

Berekeningen voor snelheidsvervalten en wrijvingscoëfficiënten in getijden ($\hat{U}T \gg y_h$)

schematisering (auteur)	mengweg L	schuifspanningsverloop over de diepte	schuifspanningssnelheidsverloop over de diepte	snelheidsvervalten
1) stationair	$L = \kappa y$	$\tau = \text{konstant} = \tau_b$	$U^* = \text{konstant} = U_b^*$	$u = \frac{U_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}$
2) stationair	$L = \kappa y$	$\tau = \tau_b \left(1 - \frac{y}{y_h}\right)$	$U^* = U_b^* \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}$	$u = \frac{U_b^*}{\kappa} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} - \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}\right) + \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}\right) + 2\sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}}\right) + \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}}\right) \right\}$
3) stationair (Von Kármán)	$L = 2\kappa y_h \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}\right)$	$\tau = \tau_b \left(1 - \frac{y}{y_h}\right)$	$U^* = U_b^* \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}$	$u = \frac{U_b^*}{\kappa} \left\{ \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}\right) + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} + \dots - \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}}\right) - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right\}$
4) stationair	$L = \kappa y \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}$	$\tau = \tau_b \left(1 - \frac{y}{y_h}\right)$	$U^* = U_b^* \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}$	$u = \frac{U_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}$
5) instationair dreinig grade periodiek (Kajiura)	$L = \kappa y$	$\tau_{\text{schem}} = \tau_b \text{schem} \left(1 - \frac{y}{y_h}\right)$	$U^* = U_b^* \left(1 - \frac{y}{y_h}\right)$	$u = \frac{U_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} - \frac{U_b^*}{\kappa} \left(\frac{y - y_0}{y_h}\right)$
6) numerieke model Sea1	$L = \kappa y \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}}$	reële berekende verloop (ongeveer lineair)	reële berekende verloop $U_x = \sqrt{\tau/\rho \omega}$	reële berekende verloop (ongeveer logaritmisch)
Berekeningen voor snelheidsvervalten en wrijvingscoëfficiënten in golven ($\hat{U}T \ll y_h$)				
7) Jonsson	$L = \kappa y$			$u = \frac{U^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}$ voor $y \leq \delta$ en $u = \frac{U^*}{\kappa} \ln \frac{\delta}{y}$ voor $y \geq \delta$ δ varieert gedurende de golfperiode, zie Bijl. 18] formule (4.13) en (4.14)
8) Bakker (analytisch)	$L = \kappa y$	$\tau = \text{konstant}$	$U^* = U_b^* e^{-2\pi y/\lambda} \cos(\omega t - \frac{4\pi y}{\lambda})$	$u = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{U_b^*}{\kappa} e^{i\omega t} \left[E_1 \left\{ \frac{\pi U_b^* (1 + zi)}{33} \right\} - E_1 \left\{ \pi U_b^* (1 + zi) \right\} \right]$
9) Bakker (numeriek TPA)	$L = \kappa y$	reële berekende verloop	reële berekende verloop	reële berekende verloop

VERVOLG TABEL 1

C_h (Chezy coefficient)	$f_c = 2g / C_h^2$	C_h voor $y_h = z_{om}$ $y_0 = 0.002m$	f_c voor $y_h = z_{om}$ $y_0 = 0.002m$
1) $C_h = \frac{1}{K} \sqrt{g} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1 \right\}$	$f_{c1} = \frac{2K^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1 \right\}^2}$	66	0.0045
2) $C_h = \frac{1}{K} \sqrt{g} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.28 \right\}$	$f_{c2} = \frac{2K^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.28 \right\}^2}$	63	0.0051
3) $C_h = \frac{1}{K} \sqrt{g} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.14 \right\}$	$f_{c3} = \frac{2K^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.14 \right\}^2}$	64	0.0049
4) $C_h = \frac{1}{K} \sqrt{g} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1 \right\}$	$f_{c4} = \frac{2K^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1 \right\}^2}$	66	0.0045
5) $\hat{C}_h = \frac{1}{K} \sqrt{g} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.50 \right\}$	$\hat{f}_{c4} = 2\hat{C}_h^2 = \frac{2K^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1.50 \right\}^2}$	61	0.0054
6) $C_h = \frac{U}{U_*} \sqrt{g}$	$f_c = \frac{2U_*^2}{U^2}$	-	-
7)	per definitie: $f_w = \frac{2}{U_*^2} \frac{U_*^2}{U_*^2}$ U_* is de snelheid op grotere afstand van de bodem.		
8)	$f_w = \frac{3\pi}{4} \frac{(\hat{U}_*^*)^2}{(U_*^*)^2}$		zie bijlage 5 en bijlage 8 voor vergelijking met waarden van f_c
9)	$f_w = \frac{3\pi}{4} \frac{(\hat{U}_*^*)^2}{U_*^2}$ U_* is de amplitude van de eerste harmonische van U .		

IV. De benaderende analytische berekeningswijze van Bakker.

In dit hoofdstuk wordt in paragraaf 1 een beschrijving gegeven van de benaderende analytische berekeningswijze van Bakker en in paragraaf 2 wordt uitgaande van deze benadering een benadering gegeven voor snelheidsvertikalen in getijstromen. Tevens wordt onderzocht wat in deze benadering het effect is van het instationair zijn van de beweging.

IV.1 Beschrijving.

In zijn benaderende analytische berekeningswijze geeft Bakker [lit.12] een oplossing voor de bodemwrijving en de snelheidsverdeling in een oscillerende stroom met korte periodieke golven.

Uitgegaan wordt daarbij van de niet lineaire differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 \left(\kappa^2 y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right)}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

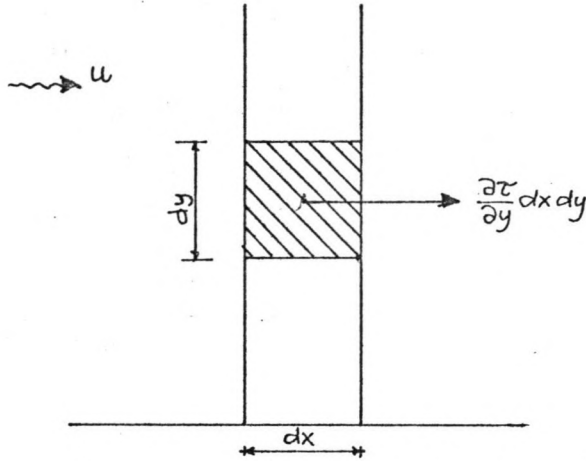
Deze differentiaalvergelijking kan afgeleid worden uit de bewegingsvergelijking van een waterbeweging over een horizontale bodem waarvoor geldt dat de snelheid uniform verdeeld is in horizontale richting. Tevens wordt uitgegaan van de veronderstelling dat de mengweg L lineair over de diepte verloopt en dat de turbulente schuifspanning door de volgende relatie wordt weergegeven:

$$\tau = \rho_w L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.2)$$

Om een analytische oplossing van (4.1) mogelijk te maken moet eerst de interne schuifspanning τ (uitdrukking (4.2)) gelineariseerd worden.

Wordt verondersteld dat $\frac{\partial u}{\partial y}$ harmonisch in de tijd verloopt dan wordt de schuifspanning zodanig gelineariseerd dat een harmonisch in de tijd verloopende τ ontstaat. Dit is mogelijk als gesteld wordt dat de energiedissipatie in het niet

gelineariseerde en in het gelineariseerde geval gelijk is.
 Wordt uitgegaan van een waterelement $dx dy$ (zie figuur 1)



figuur 1

waarop een kracht werkt die gelijk is aan $\frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy$ dan is de energiedissipatie per eenheid van tijd dt gelijk aan:

$$dE = u \frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy dt \quad (4.3)$$

Integreren van (4.3) over de diepte en over de golfperiode geeft de totale energiedissipatie per eenheid van lengte in de x-richting:

$$E = \int_0^T \int_0^{\infty} u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy dt \quad (4.4)$$

Partiële integratie geeft met inachtneming van de randvoorwaarde dat de snelheid nul is aan de bodem ($y=0$) en dat de schuifspanning nul is op grote afstand van de bodem ($y=\infty$):

$$E = - \int_0^T \int_0^{\infty} \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy dt \quad (4.5)$$

Invullen van (4.2) geeft:

$$E = -\rho_w \int_0^T \int_0^{\infty} \kappa^2 y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} dy dt \quad (4.6)$$

Om nu uitdrukking (4.2) zodanig te schematiseren dat τ harmonisch gaat verlopen en dat de energiedissipatie gelijk blijft wordt verondersteld dat (4.2) op de volgende manier in geschematiseerde vorm weergegeven kan worden:

$$\frac{\tau_{\text{schem}}}{\rho_w} = A \kappa^2 y^2 \frac{\widehat{\partial u}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.7)$$

Als verondersteld wordt dat $\frac{\partial u}{\partial y}$ harmonisch verloopt, verloopt τ_{schem} ook harmonisch. In (4.7) is $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial y}$ de amplitude van

$\frac{\partial u}{\partial y}$ en A is een konstante.

De konstant A kan bepaald worden door vergelijken van (4.6) met de geschematiseerde energiedissipatie E_{schem} die verkregen wordt door (4.7) in te vullen in (4.5):

$$E_{\text{schem}} = -A \rho_w \int_0^T \int_0^\infty \kappa^2 y^2 \frac{\widehat{\partial u}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dy dt \quad (4.8)$$

Substitutie van $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\widehat{\partial u}}{\partial y} \sin \omega t$ in (4.6) en (4.8) geeft respectievelijk:

$$\frac{dE}{dy} = -\kappa^2 y^2 \rho_w \left(\frac{\widehat{\partial u}}{\partial y} \right)^3 \left\{ 2 \int_0^{T/2} \sin^3 \omega t dt \right\} \quad (4.9)$$

en:

$$\frac{dE_{\text{schem}}}{dy} = -A \kappa^2 y^2 \rho_w \left(\frac{\widehat{\partial u}}{\partial y} \right)^3 \left\{ \int_0^T \sin^2 \omega t dt \right\} \quad (4.10)$$

De term tussen de accoladen in (4.9) is gelijk aan $\frac{4T}{3\pi}$ en de term accoladen in (4.10) is gelijk aan $\frac{T}{2}$.

Gelijkstellen van (4.9) en (4.10) geeft dat A gelijk is aan $\frac{8}{3\pi}$. De geschematiseerde schuifspanning wordt nu:

$$\frac{\tau_{\text{schem}}}{\rho_w} = \frac{8}{3\pi} \kappa^2 y^2 \frac{\widehat{\partial u}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.11)$$

Vergelijking (4.11) is nog niet eenvoudig te gebruiken daar $\frac{\partial u}{\partial y}$ nog een onbekende functie van y is.

Ter vereenvoudiging wordt gesteld:

$$u^* = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \kappa y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.12)$$

Een vergelijking tussen de schematisering van Bakker en die van Kajiura (zie hoofdstuk II) zal worden gegeven in appendix C.

Substitutie van (4.11) en (4.12) in (4.1) geeft:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \kappa y \frac{\partial^2 \hat{u}^* u^*}{\partial y^2} \quad (4.13)$$

Naar analogie van oplossingen van soortgelijk niet-lineaire differentiaalvergelijkingen als vergelijking (4.1) kan gesteld worden dat \hat{u}^* een negatieve exponentiële functie van y is.

Nu wordt gesteld:

$$\hat{u}^* = \hat{u}_b^* e^{-2\pi y/\lambda} \quad (4.14)$$

waarin \hat{u}_b^* een konstante is, die gelijk is aan de bodemschuifspanningssnelheid en waarin λ de golflengte van u^* is, die later zal worden bepaald.

Introductie van de hulpfunctie:

$$q = u^* e^{-2\pi y/\lambda} \quad (4.15)$$

doet vergelijking (4.13) veranderen in:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \hat{u}_b^* \kappa y e^{-2\pi y/\lambda} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \quad (4.16)$$

Gesteld wordt dat in vergelijking (4.16) de faktor:

$$K(y) = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \hat{u}_b^* \kappa y e^{-2\pi y/\lambda} \quad (4.17)$$

die een funktie van y is, een soort turbulente viscositeit is. De maximale waarde voor deze faktor K wordt gevonden voor $y = \lambda/2\pi$ en is gelijk aan:

$$K_{\text{top}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{\kappa \lambda}{2\pi e} \hat{u}_b^* \quad (4.18)$$

Voor $y = \lambda$ is K afgenomen tot 3% van de topwaarde. Het is daarom niet onrealistisch om voor K de gemiddelde waarde te nemen over een lengte $0 < y < \lambda$.

De gemiddelde waarde voor K is dan gelijk aan:

$$\bar{K} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{\kappa \lambda}{4\pi^2} \hat{u}_b^* \quad (4.19)$$

Een oplossing van vergelijking (4.16), na invoering van een konstante waarde voor K ($= \bar{K}$ uit uitdrukking (4.19)) is nu, naar analogie van soortgelijke vergelijkingen, gelijk aan:

$$q = \hat{q}_0 e^{-2\pi y/\lambda_q} \cos\{\omega t - (2\pi y/\lambda_q)\} \quad (4.20)$$

waarin λ_q de golflengte van q .

Substitutie van (4.20) in (4.15) geeft:

$$u^* = \hat{q}_0 e^{-2\pi y(1/\lambda_q - 1/\lambda)} \cos\{\omega t - (2\pi y/\lambda_q)\} \quad (4.21)$$

De amplitude van p is volgens (4.14) gelijk aan $\hat{u}_b^* e^{-2\pi y/\lambda}$ en

volgens (4.21) gelijk aan $\hat{q}_0 e^{-2\pi y(1/\lambda_q - 1/\lambda)}$. Worden deze twee uitdrukkingen aan elkaar gelijk gesteld dan volgt hieruit:

$$\lambda = 2\lambda_q \quad (4.22)$$

Dus de uitdrukking voor p wordt dan:

$$u^* = \hat{u}_b^* e^{-2\pi y/\lambda} \cos\{\omega t - (4\pi y/\lambda)\} \quad (4.23)$$

Uit een nader onderzoek van λ kan een bovengrens en een schatting gegeven worden voor deze grootte. De bovengrens is

dan gelijk aan:

$$\lambda < 8 \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{\kappa}{e} \hat{u}_b^* T \quad (4.24)$$

en de schatting van λ is gelijk aan:

$$\lambda \approx \frac{4}{\kappa} \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \hat{u}_b^* T \quad (4.25)$$

Uitgaande van de gevonden uitdrukking van u^* in (4.23) is nu de verdeling van de snelheid u af te leiden.

In (4.12) is gesteld dat:

$$u^* = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \kappa y \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dit geeft tezamen met (4.23):

$$\sqrt{\frac{8}{3\pi}} \kappa y \frac{\partial u}{\partial y} = \hat{u}_b^* e^{-ky} \cos(\omega t - 2ky) \quad (4.26)$$

waarin:

$$k = 2\pi/\lambda \quad (4.27)$$

en waarin \hat{u}_b^* beschouwd wordt als een konstante, die in het vervolg nader zal worden bekeken.

Met behulp van de complexe schrijfwijze kan de snelheidsverdeling als volgt worden geschreven:

$$u = \sqrt{\frac{37\pi}{8}} \frac{\hat{u}_b^*}{\kappa} e^{i\omega t} \int \frac{e^{-k(1+2i)y}}{y} dy \quad (4.28)$$

De snelheid u is gelijk aan het reële deel van het rechterlid van (4.28).

In een stationaire turbulente stroom is de snelheidsverdeling logaritmisch met aan de bodem de randvoorwaarde:

$$u = 0 \quad \text{op } y_0 = \frac{r}{33} \quad (r = \text{ribbelhoogte}) \quad (4.29)$$

Vergelijking (4.28) kan nu geschreven worden als een bepaalde integraal en wel op de volgende manier:

$$u = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{u_b^*}{\kappa} e^{i\omega t} \left[E_1 \left\{ \frac{rk(1+2i)}{33} \right\} - E_1 \left\{ yk(1+2i) \right\} \right] \quad (4.30)$$

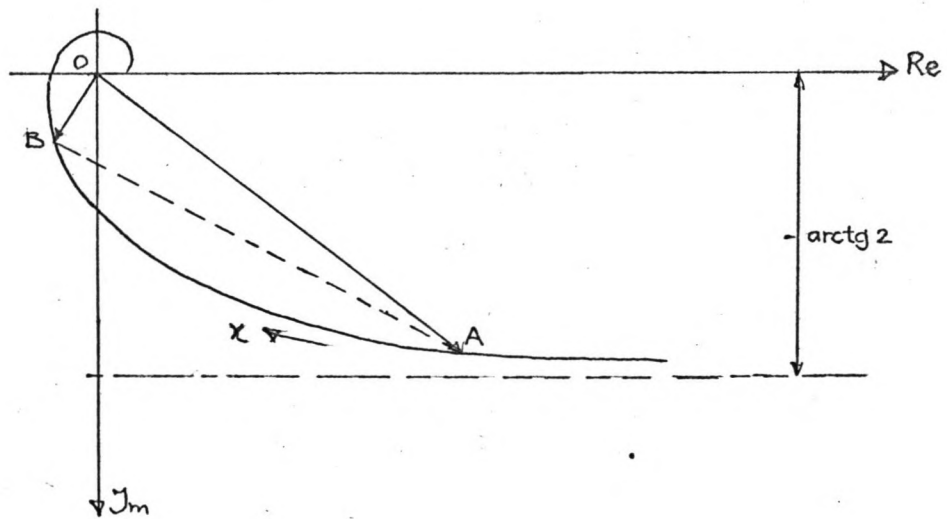
$E_1 \left\{ \frac{rk(1+2i)}{33} \right\}$ en $E_1 \left\{ yk(1+2i) \right\}$ zijn exponentiële integralen,

die getabelleerd zijn in bijvoorbeeld "Handbook of Mathematical Functions" van Abramowitz en Stegun [lit.13].

De snelheidsverdeling is nu bekend op de schaalfactoren

u_b^* en λ na.

Wordt nu met behulp van eerder genoemde wiskundige tafels de functie $E_1 \left\{ x(1+2i) \right\}$ uitgezet dan ontstaat de volgende figuur:



figuur 2.

De vector OA in bovenstaande figuur 2 stelt de waarde van de exponentiële functie voor, voor $x = \frac{rk}{33} \left(2\pi \frac{r/33}{\lambda} \right)$ en de vector OB is de waarde van de exponentiële functie voor $x = yk \left(= 2\pi \frac{y}{\lambda} \right)$. De vector BA is het verschil tussen de twee exponentiële functies en geeft in zekere zin de snelheid u weer. (zie vergelijking (4.30)).

De vector is gelijk aan:

$$|BA| e^{i \arg(BA)} \quad (4.31)$$

Uit (4.30) volgt dan:

$$\frac{\dot{u}}{\hat{u}_b^*} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{\kappa} |BA| \{ \cos \omega t + \arg (BA) \} \quad (4.32)$$

Hieruit kan het volgende geconcludeerd worden:

- 1) De snelheid is evenredig met BA. B hangt af van de relatieve hoogte y/λ en A hangt af van de relatieve ribbelhoogte r/λ .
- 2) B gaat naar nul voor grote waarden van y/λ ; vector OA is gelijk aan de snelheid \dot{U} op $y = \infty$. Hieruit volgt:

$$\frac{\hat{u}(y)}{\dot{U}} = \frac{|BA|}{|OA|} \quad (4.33)$$

In het geval dat BA groter is dan OA is de amplitude van de orbitaal-beweging groter dan de amplitude van u.

- 3) Het faseverschil tussen de schuifspanning aan de bodem en \dot{U} is gelijk aan $\arg(OA)$.

Als y gelijk wordt aan $r/33$ dan vallen de punten A en B samen en is \hat{u} gelijk aan nul.

Uit (4.30) volgt voor de randvoorwaarde voor u op $y = \infty$ een relatie tussen de amplitude van de bodemschuifspanningssnelheid \hat{u}_b^* en de amplitude van de snelheid op grote afstand van de bodem \hat{U} :

$$\hat{U} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{\hat{u}_b^*}{\kappa} \left| E_1 \left\{ \frac{2\pi r(1+2i)}{33\lambda} \right\} \right| \quad (4.34)$$

Om de resultaten van zijn analytische berekening te vergelijken met die van Jonsson introduceert Bakker evenals Jonsson een faktor f_w :

$$f_w = \frac{\tau_{\text{bodem}}}{\frac{1}{2} \rho_w u^2} \quad (4.35)$$

Invullen van de geschematiseerde bodemschuifspanningssnel-

heid u_b^* die gelijk is aan:

$$\sqrt{\hat{\tau}_{b, \text{schem}} / \rho_w} = \sqrt{\frac{8}{3\pi} \hat{\tau}_{b, \text{schem}} / \rho_w} \quad (4.36)$$

geeft:

$$f_w = \frac{3\pi}{4} \frac{(\hat{u}_b^*)^2}{U^2} \quad (4.37)$$

Met behulp van (4.34) kan f_w uitgedrukt worden in r/λ :

$$f_w = \frac{2\kappa^2}{\left[E_1 \left\{ \frac{2\pi r}{33\lambda} (1+2i) \right\} \right]^2} \quad (4.38)$$

Jonsson vindt uit zijn experimenten het volgende verband:

$$\frac{a}{r} = 1,2 \frac{1}{4\sqrt{f_w}} 10^{1/(4\sqrt{f_w})} \quad (4.39)$$

waarin:

$$a = \frac{\hat{U}r}{2\pi} \quad (= \text{slaglengte}) \quad (4.40)$$

Om de resultaten van vergelijking (4.38) te vergelijken met de resultaten van (4.39) wordt r/λ uitgedrukt in a/r .

Uit (4.25) kan worden afgeleid:

$$\frac{\lambda}{r} = 8\sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{\hat{U} \kappa T}{2\pi r} \frac{\hat{u}_b^*}{\hat{U}} \quad (4.41)$$

Uit (4.37) volgt:

$$\frac{\hat{u}_b^*}{\hat{U}} = \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \sqrt{f_w} \quad (4.42)$$

Substitutie van (4.42) in (4.41) geeft:

$$\frac{a}{r} = \frac{3\pi}{8\kappa\sqrt{2}} \frac{1}{4\sqrt{f_w}} \frac{\lambda}{r} \quad (4.43)$$

Uitgaande van een bepaalde waarde voor r/λ is uit (4.38) f_w te bepalen en uit (4.43) a/r .

De resultaten van (4.39) en (4.43) zijn weergegeven in de grafiek van bijlage 5a.

IV.2 Analytische benadering van snelheidsvertikalen in getijstroom en het effect van het instationair zijn van de beweging.

Uitgaande van zijn analytische benadering heeft Bakker [lit.23] voor de snelheidsvertikalen in een oscillerende stroom met korte periode een benadering gegeven voor snelheidsvertikalen in getijstroom.

Verder is onderzocht wat in deze benadering het effect is van het instationair zijn van de beweging.

In deze benadering wordt uitgegaan van de in hoofdstuk II genoemde bewegingsvergelijking (2.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial y_h}{\partial x} + \frac{\partial(\tau/\rho_w)}{\partial y} \quad (4.44)$$

Deze vergelijking kan ook als volgt geschreven worden:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u - U) = \frac{\partial(\tau/\rho_w)}{\partial y} \quad (4.45)$$

waarin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial y_h}{\partial x} \quad (4.46)$$

Gesteld wordt nu:

$$\frac{\tau}{\rho_w} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.47)$$

waarin ε gelijk is aan de turbulente viscositeit. Aangenomen wordt dat ε geen functie is van de tijd t en de hoogte y .

Vermenigvuldigen van (4.45) met ε en differentiëren naar y

geeft een vergelijking in τ :

$$\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \quad (4.49)$$

Als randvoorwaarde aan de bodem geldt:

$$\tau_{b,schem} = \hat{\tau}_{schem,b} \sin \omega t \text{ voor } y=0 \quad (4.50)$$

waarin $\tau_{b,schem}$ de geschematiseerde schuifspanning aan de bodem is. In werkelijkheid is de maximale waarde van de schuifspanning aan de bodem gelijk aan $\frac{3\pi}{8}$ maal de maximale waarde van de geschematiseerde bodemschuifspanning, bij aanname van een korrekte energiedissipatie (zie hoofdstuk IV, paragraaf 1):

$$\hat{\tau}_b = \frac{3\pi}{8} \tau_{b,schem} \quad (4.51)$$

Aan het oppervlak is de schuifspanning nul:

$$\tau = 0 \text{ voor } y = y_h \quad (4.52)$$

Als oplossing voor τ wordt dan gevonden:

$$\frac{\tau}{\hat{\tau}_{b,schem}} = \text{Re} \left[e^{i\omega t} \frac{\sinh \left\{ 2\pi (y_h - y) (1+i)/\lambda \right\}}{\sinh \left\{ 2\pi y_h (1+i)/\lambda \right\}} \right] \quad (4.53)$$

waarin:

$$\lambda = \sqrt{4\pi\epsilon T}$$

In het vervolg is aangenomen dat λ groot is ten opzichte van y_h . Wordt de faktor met \sinh in een reeks ontwikkeld dan wordt (4.53) in tweede orde benadering:

$$\frac{\tau}{\tau_{b,schem}} = \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} \left(1 - \frac{y}{y_h}\right) \left\{ 1 + \frac{8\pi^2}{6\lambda^2} iy(y-2y_h) \right\} \right] \quad (4.55)$$

De reële faktor na de e-macht $e^{i\omega t}$ geeft in eerste benadering de schuifspanning van een stationaire stroom. De imaginaire faktor geeft de invloed van het instationaire effect, in eerste benadering $\frac{\pi}{2}$ radialen verschoven ten opzichte van het stationaire effect.

Vergelijking (4.55) kan ook als volgt worden geschreven:

$$\tau = \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} (\tau_r + i \tau_i) \right] \quad (4.56)$$

Uit de door Prandtl afgeleide uitdrukking voor de schuifspanning:

$$\tau = \rho_w L^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4.57)$$

waarin de lengte L gelijk gesteld wordt aan:

$$L = \kappa y \sqrt{1 - y/y_h} \quad (4.58)$$

wordt vervolgens de snelheid berekend.

Combinatie van (4.57) en (4.58) geeft:

$$\tau = \rho_w \kappa^2 y^2 \left(1 - \frac{y}{y_h}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4.59)$$

Stel nu:

$$u = u_r + i u_i \quad (4.60)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du_r}{dy} + i \frac{du_i}{dy} \quad (4.61)$$

$$\left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \left(\frac{du_r}{dy} \right)^2 - \left(\frac{du_i}{dy} \right)^2 + 2i \frac{du_r}{dy} \frac{du_i}{dy} \quad (4.62)$$

Bij het aangeven van een complexe vorm $z_r + iz_i$ zal in

het vervolg steeds worden bedoeld: $\text{Re} \left[e^{i\omega t} (z_r + iz_i) \right]$

De faktor $\left(\frac{du_i}{dy}\right)^2$ wordt in eerste instantie verwaarloosd.

Vergelijking (4.59) geeft dan na invullen van (4.62):

$$\tau = \rho_w \kappa^2 y^2 \left(1 - \frac{y}{y_h}\right) \left[\left(\frac{du_i}{dy}\right)^2 + 2i \frac{du_r}{dy} \frac{du_i}{dy} \right] \quad (4.65)$$

Gelijkstellen van de reële delen van (4.55) en (4.65)

geeft:

$$\left(\frac{du_r}{dy}\right)^2 = \frac{\hat{\tau}_{b,schem} / \rho_w}{\kappa^2 y^2} \quad (4.66)$$

$$\left(\frac{du_r}{dy}\right)^2 = \frac{u_b^*}{\kappa y} \quad (4.67)$$

waarin:

$$u_b^* = \sqrt{\hat{\tau}_{b,schem} / \rho_w} \quad (4.68)$$

Uit (4.67) volgt voor de snelheid u_r :

$$u_r = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (4.69)$$

Gelijkstellen van de imaginaire delen van (4.55) en (4.65) geeft na invoeren van (4.67):

$$\frac{du_i}{dy} = \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{2\pi^2}{3\lambda^2} (y - 2y_h) \quad (4.70)$$

$$u_i = \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{\pi^2}{3\lambda^2} (y^2 - 4y_h y + c) \quad (4.71)$$

Dit is te vergelijken met vergelijking (2.58).

Een aanname $u_i = 0$ voor $y = 0$ lijkt even goed als $u_i = 0$.

voor $y = y_0$ (immers y_0 is klein en eigenlijk een rekenkundige grootheid); bovendien maakt de aanname $u_i = 0$ voor $y = 0$ de uitdrukkingen veel eenvoudiger.

De uitdrukking voor u_i wordt dan:

$$u_i = \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{\pi^2}{3\lambda^2} y (y - 4y_h) \quad (4.72)$$

Nu blijkt dus, dat het gerechtvaardigd was $(\frac{du_i}{dy})^2$ te verwaarlozen: deze was van de orde y^2/λ^4 , terwijl reeds verondersteld is dat y/λ klein is.

De over de vertikaal gemiddelde u_i , wordt dan:

$$\bar{u}_i = - \frac{5\pi^2}{9} \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{y_h^2}{\lambda^2} \quad (4.73)$$

Wordt voor de turbulente viscositeit de volgende uitdrukking gebruikt:

$$\epsilon = \frac{1}{6} \kappa u_b^* y_h \quad (4.74)$$

dan wordt λ gelijk aan (zie (4.54)):

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{3} \kappa u_b^* y_h T} \quad (4.75)$$

waarin u_b^* gelijk is aan $\sqrt{8/3\pi}$ maal de maximaal gedurende het getij optredende schuifspanningssnelheid.

Substitutie van (4.75) in (4.73) geeft:

$$\bar{u}_i = -\frac{5}{6} \frac{\pi}{\kappa^2} \frac{y_h}{T} \quad (4.76)$$

Deze formule is te vergelijken met (2.61).

Voor een getij waarvoor geldt $T = 44700$ sec. wordt (4.76)

met $\kappa = 0.4$:

$$\bar{u}_i = - 0.367 \cdot 10^{-3} y_h \quad (4.77)$$

Voor een diepte van 20 meter is $\bar{u}_i = -0.724$ cm/sec.

Hieruit blijkt, evenals bij de benadering door Kajiura (zie hoofdstuk II), dat de invloed van het instationair zijn van de beweging op de snelheidsvertikalen in instationaire stromen erg klein is.

V. De numerieke modellen van Bakker: TA1 en SA1.

Voor de berekening van de bodemwrijving, de snelheidsverdeling en de zandconcentraties in een oscillerende beweging met korte periode heeft Bakker twee numerieke modellen ontwikkeld. [lit.12 en 14].

Met de twee numerieke modellen TA1 en SA1 kunnen respectievelijk de bodemwrijving, de snelheidsverdeling en de zandconcentraties in een oscillerende stroom met korte periode worden berekend.

In dit hoofdstuk worden beide modellen achtereenvolgens beschreven.

V.1 Het numerieke model TA1.

In de numerieke berekening van de snelheidsverdeling in een oscillerende stroom met korte periode wordt uitgegaan van de volgende veronderstelling:

1) De snelheid is een functie van de hoogte y en de tijd t .

Er wordt verondersteld dat in horizontale richting de stroom uniform is.

De drukgradiënt werkt in horizontale richting en de druk is alleen een functie van x en van t .

2) Voor de turbulente schuifspanning wordt, overeenkomstig Prandtl, de volgende relatie aangenomen:

$$\tau = \rho_w L^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (5.1)$$

waarin de lengte L evenredig is met de afstand tot de bodem:

$$L = \kappa y \quad (5.2)$$

3) In verband met de randvoorwaarden worden twee gevallen beschouwd:

a) de beweging van het water op grote afstand van de bodem is zodanig, dat een harmonische schuifspannings-snelheid aan de bodem resulteert;

b) de snelheid U op grote afstand van de bodem verloopt harmonisch in de tijd.

De snelheid op een hoogte y_0 ($=1/33$ van de ribbelhoogte) wordt gelijk aan nul gesteld.

Uitgaande van de bewegingsvergelijking voor een waterbeweging, zoals eerder beschreven, wordt een differentiaalvergelijking afgeleid voor de interne schuifspanningsnelheid (zie ook hoofdstuk VI):

$$\frac{1}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 (|u^*| u^*)}{\partial y^2} \quad (5.3)$$

In de berekeningen, uitgevoerd met het mathematisch model TA1, wordt geen rekening gehouden met dichtheidsverschillen. Vergelijking (5.3) wordt vervolgens met behulp van een explicietedifferentiemethode opgelost. Daartoe wordt (5.3) eerst dimensieloos gemaakt met behulp van de volgende dimensieloze parameters:

$$p_* = \frac{u^*}{U_0} = \frac{\kappa y}{U_0} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.4)$$

$$y_* = \frac{y}{\kappa Y_0} \quad (5.5)$$

$$t_* = \frac{t}{T_0} \quad (5.6)$$

waarin U_0 de maximale schuifspanningssnelheid \hat{u}_b^* aan de bodem is, T_0 de periode van de periodieke beweging en κY_0 de referentie lengte.

Opgemerkt dient te worden dat er een principieel verschil bestaat tussen u^* gedefinieerd in (4.12) en p_* gedefinieerd in (5.4). In (4.12) is u^* gelijk aan de geschematiseerde schuifspanningssnelheid en p_* is de werkelijke schuifspanningsnelheid $\sqrt{\tau/\rho_w}$. Verder heeft u^* een dimensie en p_* niet.

Substitutie van (5.4), (5.5) en (5.6) in (5.3) geeft:

$$\frac{\partial p_{*}}{\partial t_{*}} = \frac{U_{0} T_{0}}{Y_{0}} y_{*} \frac{\partial^2 (p_{*} | p_{*} |)}{\partial y_{*}^2} \quad (5.7)$$

U_{0} , T_{0} en Y_{0} worden nu op zodanige wijze gekozen dat

$$U_{0} T_{0} = Y_{0}$$

Volgens (4.35) is de amplitude van schuifspanningssnelheid aan de bodem gelijk aan:

$$\sqrt{\hat{\tau}_b / \rho_w} = \sqrt{\frac{1}{2} f_w \hat{U}^2} \quad (5.8)$$

De referentiesnelheid U_{0} wordt dan:

$$U_{0} = \hat{U} \sqrt{\frac{f_w}{2}} \quad (5.9)$$

Uit $U_{0} T_{0} = Y_{0}$ volgt de lengteschaal Y_{0} :

$$Y_{0} = U_{0} T_{0} = \hat{U} T \sqrt{\frac{f_w}{2}} \quad (5.10)$$

De referentiehoogte $\kappa Y_{0} = \kappa \hat{U} T \sqrt{f_w/2}$ is gelijk aan

$2\pi \kappa a \sqrt{f_w/2}$ (a = slaglengte van de orbitaalbeweging, deze is voor korte golven $\pm 1m$).

Bovenstaande ingevuld in vergelijking (5.7) geeft de volgende vergelijking, die numeriek opgelost moet worden:

$$\frac{\partial p_{*}}{\partial t_{*}} = y_{*} \frac{\partial^2 (p_{*} | p_{*} |)}{\partial y_{*}^2} \quad (5.11)$$

Deze vergelijking wordt opgelost met als randvoorwaarde aan

de bodem:

$$(p_*)_b = \sin 2 \pi t_* \quad \text{voor } y_* = 0 \quad (5.12)$$

en met als randvoorwaarde aan de oppervlakte:

$$p_* = 0 \quad \text{voor } y_* = y_* \text{ max} \quad (5.13)$$

De randvoorwaarde aan de oppervlakte is eigenlijk $p_* = 0$ voor $y_* = \infty$.

Omdat oneindig moeilijk numeriek te benaderen is wordt (5.13) gebruikt als randvoorwaarde aan de oppervlakte.

Uit de analytische benadering van Bakker (zie hoofdstuk IV) blijkt dat de maximale waarde van p_* op $y_* = 1$ ongeveer 3 0/00 is van de maximale waarde van p_* aan de bodem. In de berekeningen uitgevoerd met TA1 is daarom voor $y_* \text{ max}$ altijd de waarde één gekozen.

Als beginvoorwaarde wordt gekozen:

$$p_* = 0 \quad \text{voor } t_* = 0 \quad (5.14)$$

De beginvoorwaarde komt niet overeen met de periodieke oplossing voor p_* op ieder tijdstip t_* . Voor een periodieke oplossing voor p_* geldt dat op geen enkel tijdstip in de hele vertikaal p_* gelijk aan nul is. De beginvoorwaarde veroorzaakt zodoende aan het begin van het rekenproces een verstoring, die, nadat een aantal golfperioden zijn berekend, is verdwenen.

Om het proces van het verdwijnen van de verstoring te versnellen worden gedurende de helft van het aantal te berekenen golfperioden correcties uitgevoerd.

De correctie die op de berekende waarden wordt toegepast is de volgende. Na $(n + \frac{1}{2})T$ is de berekende schuifspanningssnelheid a en na T is deze b. De correctie wordt dan

$(b - a)/2$; (zie ook hoofdstuk VI, paragraaf 3).

Voor de berekening van p_* als functie van y_* en t_* wordt gebruik gemaakt van een expliciete differentiemethode.

Differentiaalvergelijking (5.11) wordt daartoe op de volgende manier als differentievergelijking geschreven:

$$\begin{aligned}
 p_* [y_*, t_* + \Delta t_*] = & \frac{y_* (\Delta t_*)}{(\Delta y_*)^2} \left\{ p_* [y_* - \Delta y_*, t_*] \cdot \text{abs}(p_* [y_* - \Delta y_*, t_*]) \right. \\
 & - 2p_* [y_*, t_*] \cdot \text{abs}(p_* [y_*, t_*]) + \\
 & \left. + p_* [y_* + \Delta y_*, t_*] \cdot \text{abs}(p_* [y_* + \Delta y_*, t_*]) \right\} + \\
 & + p_* [y_*, t_*] \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

De faktor $(\Delta t_*)/(\Delta y_*)^2$ wordt zo gekozen dat het numerieke rekenproces niet instabiel wordt.

Uit oplossingen van soortgelijke lineaire differentiaalvergelijkingen is gebleken dat als aan de voorwaarde:

$$\Delta t_* \leq \frac{(\Delta y_*)^2}{2 |p_* \max| y_* \max} \tag{5.16}$$

wordt voldaan er geen instabiliteiten optreden.

Hierin is $|p_* \max|$ de maximaal optredende p_* en $y_* \max$ is de maximale hoogte tot waar de berekening wordt uitgevoerd.

De minimale waarde van Δy_* wordt bepaald uit de voorwaarde dat de snelheid u gelijk is aan nul op een afstand $y_0 = 1/33 r$ boven de bodem. In dimensieloze vorm is deze afstand gelijk aan:

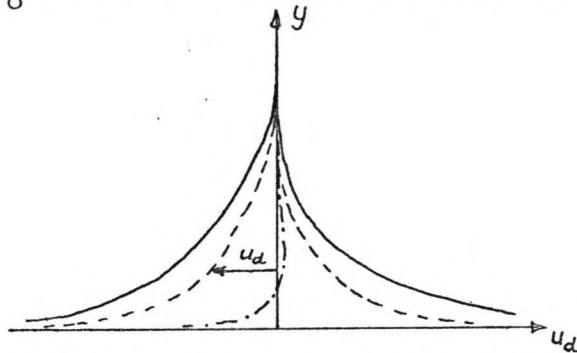
$$\Delta y_* = \frac{r}{33 \kappa y_0} \tag{5.17}$$

Om de rekestijd te bekorten wordt de berekening uitgevoerd volgens de "pulsating grid" methode. Voor een beschrijving van deze methode wordt verwezen naar hoofdstuk VI.

Daarna wordt met behulp van numerieke integratie van de verkregen waarden voor p_* de dimensieloze snelheid $(U-u)/U_0$ berekend:

$$\frac{U-u}{U_0} = \int \frac{p_*}{\kappa y_*} dy_* \quad (5.18)$$

De snelheid $U-u$ wordt de "defect velocity" u_d genoemd. $(U-u)/U_0$ is dus de dimensieloze "defect velocity".



Op een afstand $y_0 = r/33$ van de bodem is de snelheid u gelijk aan nul. Voor $(u_d)_*$ wordt dan gevonden:

$$(u_d)_* = \frac{U}{U_0} \quad (5.19)$$

Met behulp van uitdrukkingen (5.9) voor U_0 gaat (5.19) over in:

$$(u_d)_* = \frac{U}{\hat{U} \sqrt{f_w/2}} \quad (5.20)$$

Uit de berekende waarden voor $(u_d)_*$ op een afstand $y_0 = r/33$ boven de bodem kan een eerste orde benadering voor de wrijvingscoëfficiënt verkregen worden.

Jonsson definieert de wrijvingscoëfficiënt als volgt (zie (4.35)):

$$f_w = \frac{2 \hat{\tau}_b}{\rho_w \hat{U}^2} \quad (5.21)$$

waarin $\hat{\tau}_b$ de maximale waarde van de schuifspanning van de

bodem is, veroorzaakt door een harmonisch verlopende snelheid U ver van de bodem. De schuifspanning τ verloopt niet harmonisch in de tijd.

In de schematisatie van het mathematische model TA1 verloopt U echter niet harmonisch.

Daarom lijkt het niet juist de wrijvingscoëfficiënt hier als volgt uit te drukken:

$$f_w \stackrel{?}{=} \frac{2(u_b^*)^2}{U^2} \quad (5.22)$$

Een betere benadering voor f_w wordt gegeven door:

$$f_w = \frac{3\pi}{8} \frac{2(u_b^*)^2}{U_1^2} \quad (5.23)$$

waarin U_1 de eerste harmonische is van de snelheid U .

In uitdrukking (5.23) voor de wrijvingscoëfficiënt f_w is u_b^* de topwaarde van de aan de bodem ingevoerde schuifspanningssnelheid:

De snelheid U_1 is de eerste harmonische van de met het mathematische model TA1 berekende snelheid U op grote afstand van de bodem.

De coëfficiënt $3\pi/8$ komt voort uit het feit dat de geschematiseerde harmonische schuifspanning een amplitude moet hebben, gelijk aan $8/3\pi$ maal de maximale waarde van de werkelijke, niet harmonische schuifspanning, in verband met de gelijk blijvende energiedissipatie (zie hoofdstuk IV).

De dimensieloze hoogte y_* :

$$y_* = \frac{y}{\kappa y_0} = \frac{y}{\kappa \hat{U} T \sqrt{f_w/2}}$$

kan ook als volgt geschreven worden:

$$y_* = \frac{y}{2\pi \kappa a \sqrt{f_w/2}} \quad (5.24)$$

waarin a gelijk is aan de slaglengte:

$$a = \frac{\hat{U}_T}{2\pi} \quad (5.25)$$

Voor de dimensieloze hoogte $(y_o)_*$ waarop de snelheid gelijk aan nul is geldt:

$$\begin{aligned} (y_o)_* &= \frac{y_o}{2\pi \kappa a \sqrt{f_w/2}} \\ &= \frac{r}{66\pi \kappa a \sqrt{f_w/2}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Uit (5.26) volgt voor de verhouding a/r:

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{66\pi \kappa \sqrt{f_w/2}} \quad (5.27)$$

Invullen van (5.25) geeft:

$$\frac{a}{r} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{66\pi \kappa} \frac{U_1}{\hat{u}_b^*} \quad (5.28)$$

Uit (5.22) en (5.28) volgt dus een relatie tussen f_w en a/r (bijlage 5b). Voor een gegeven waarde van a/r volgt uit bijlage 5b de grootte van f_w .

V.2 Het numerieke model SA1.

In het numerieke model SA1 worden zandconcentraties in een oscillerende beweging met korte periode uitgerekend. Deze berekeningen worden uitgevoerd met behulp van de in paragraaf I.5 afgeleide continuïteitsvergelijking van het sediment:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial c}{\partial y} + w c \right) = 0 \quad (5.29)$$

De turbulente diffusiecoëfficiënt ε wordt op de volgende wijze gedefinieerd:

$$\varepsilon = \kappa y \left| u^* \right| \quad (5.30)$$

Voordat vergelijking (5.29) als differentievergelijking geschreven wordt, worden eerst de in vergelijking (5.29) voorkomende parameters dimensieloos gemaakt, op dezelfde manier als gebeurd is in het numerieke model TA1:

$$y_* = \frac{y}{\kappa Y_0} \quad (5.31)$$

$$p_* = \frac{\kappa y \frac{\partial u}{\partial y}}{U_0} \quad (5.32)$$

$$\varepsilon_* = \frac{\varepsilon}{\kappa^2 Y_0 U_0} = y_* \left| p_* \right| \quad (5.33)$$

De referentie diffusiecoëfficiënt ε_0 is gelijk aan $\kappa^2 Y_0 U_0$.

De dimensieloze valsnelheid w_* wordt:

$$w_* = \frac{w}{\kappa U_0} \quad (5.34)$$

Substitutie van (5.31) tot en met (5.34) in (5.29) geeft:

$$\frac{\partial c}{\partial t_*} = \varepsilon_* \frac{\partial^2 c}{\partial y_*^2} + \left(\frac{\partial \varepsilon_*}{\partial y_*} + w_* \right) \frac{\partial c}{\partial y_*} \quad (5.35)$$

Differentiaalvergelijking (5.35) wordt op de volgende manier als differentievergelijking geschreven:

$$\frac{c^1 [y_*] - c [y_*]}{\Delta t_*} = \varepsilon_* y_* \frac{c [y_* + \Delta y_*] - 2c [y_*] + c [y_* - \Delta y_*]}{(\Delta y_*)^2} + \left(\frac{\varepsilon_* [y_* + \Delta y_*] - \varepsilon_* [y_* - \Delta y_*]}{2 \Delta y_*} + w_* \right) \frac{c [y_* + \Delta y_*] - c [y_* - \Delta y_*]}{2 \Delta y_*} \quad (5.36)$$

De berekening van c wordt op dezelfde manier uitgevoerd als de berekening van p_* (zie TA1).

Eerst wordt p_* uitgerekend in alle punten op een zeker tijdstip t_* en daarna ε_* met behulp van vergelijking (5.33) en c op dezelfde manier als p_* , beide in dezelfde punten en op dezelfde tijd als p_* . Berekende waarden van c die kleiner zijn dan nul worden gelijk gesteld aan nul.

Als beginvoorwaarde wordt gekozen $p_* = c = 0$ en als randvoorwaarde ver van de bodem: $c = p_* = 0$ op $y_* = y_* \max$.

In dit programma is bij de beschouwing van het mechanisme van de zandopwoeling geen aandacht besteed aan de bodemconcentratie. De randvoorwaarde aan de bodem wordt hier als volgt aangenomen:

$$c_y = 0 = \left| p_y = 0 \right| \quad (5.37)$$

Voor een stroomdiagram van het programma SA1 zie bijlage 7.

VI. Het numerieke model SG1

In het nu volgende hoofdstuk wordt een beschrijving gegeven van het numerieke model SG1. Met dit model is het mogelijk instationaire snelheidsvertikalen en instationaire zand- en slibconcentratievertikalen in getijstroom met een zout-zoet gradiënt te berekenen. In paragraaf VI-1 wordt eerst de schematisering die aan het model ten grondslag ligt beschreven, vervolgens worden in paragraaf VI-2 en VI-3 respectievelijk de basisvergelijkingen en de begin- en randvoorwaarden behandeld. Tenslotte volgt in paragraaf VI-4 een beschrijving van de numerieke oplossing van de basisvergelijkingen en een beschrijving van het computerprogramma SG1. Verder worden in dit hoofdstuk de verschillen aangegeven met de eerder in hoofdstuk V beschreven computerprogramma's TA1 en SA1, die aan het computerprogramma SG1 ten grondslag liggen.

VI-1 Schematisering

De schematisering van de instationaire waterbeweging is een benadering waarbij de waterbeweging als uniform in horizontale richting wordt aangenomen en de watersnelheid u , evenals de sedimentconcentratie c slechts een functie is van de verticale coördinaat y en de tijd t . Op het tijdstip $t=0$ wordt de verdeling van de concentratie van het sediment bekend verondersteld.

De horizontale x -as wordt positief aangenomen in eb-richting (zeewaarts).

Verder wordt verondersteld dat het water in horizontale zin een zoutgradiënt vertoont, zodanig dat het over een bepaalde afstand x een verschil in soortelijk gewicht vertoont van $(\rho_{x1} - \rho_{x2}) \text{ kg/m}^3$. In verticale zin worden geen dichtheidsverschillen aangenomen.

Het verhang van de waterspiegel wordt gelijk gesteld aan:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{d\bar{h}}{dx} + \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_h) \quad (6.1)$$

waarin $\frac{d\bar{h}}{dx}$ het over het getij gemiddelde verhang (middenstandsverhang) voorstelt en \hat{I} de topwaarde van het periodieke verhang.

Tengevolge van dit verhang en van de zoutgradiënt ontstaat een over de vertikaal gemiddeld snelheidsverloop, dat bij benadering kan worden voorgesteld door:

$$\bar{u} = \bar{u} + \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (6.2)$$

waarbij geldt:

$$u_o = \bar{u} + \hat{u} \sin \varphi_u \quad (6.3)$$

waarin \bar{u} de over de vertikaal en over het getij gemiddelde reststroom voorstelt en \hat{u} de amplitude van de over de vertikaal gemiddelde getijstroom.

Waterstandsvariatiën gedurende het getij worden niet in de beschouwing opgenomen; er wordt aangenomen dat het water in het horizontale vlak oscilleert.

De valsnelheid in stil water van het sediment wordt gelijk gesteld aan w m/s.

VI-2 Basisvergelijkingen.

Wordt uitgegaan van een waterbeweging over een horizontale bodem waarvoor geldt dat de snelheid uniform verdeeld is in horizontale richting ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$) dan geldt voor een water-elementje met afmetingen dx , dy en dz de volgende bewegingsvergelijking:

$$\rho_w \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p_r}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (6.4)$$

Hierin is p_r de hydrostatische waterdruk:

$$p_r = \rho_w g (y_h - y) \quad (6.5)$$

De eerste term van het rechterlid van (6.4), de drukgradiënt in de x-richting, kan met behulp van (6.5) als volgt geschreven worden:

$$-\frac{\partial p_r}{\partial x} = -\rho_w g \frac{\partial y_h}{\partial x} - g(y_h - y) \frac{\partial \rho_w}{\partial x} \quad (6.6)$$

Aangenomen wordt een snelheid U, die alleen een functie van t is, zodanig dat geldt:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial y_h}{\partial x} \quad (6.7)$$

Voor de turbulente schuifspanning wordt de volgende relatie aangenomen:

$$\tau = \rho_w L^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (6.8)$$

waarin L gelijk is aan de mengweg.

Voor deze mengweg L wordt in dit model de volgende uitdrukking aangenomen (zie hoofdstuk III):

$$L = \kappa y \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \quad (6.9)$$

Dit in tegenstelling met de aangenomen mengweg $L = \kappa y$ in de modellen TA1 en SA1. Dat in het model SG1 gewerkt wordt met een mengweg verloop volgens (6.9) is gebaseerd op de volgende redenen.

De dikte van de laag waarin turbulente schuifspanningen optreden is in een oscillerende stroom met een grote periode (getijgolven) veel groter dan het geval is in een oscillerende stroom met een kleine periode (korte golven).

Wordt nu voor de gehele diepte de lineair over de diepte verlopende mengweg aangenomen dan zal dit resulteren in grote onnauwkeurigheden in de berekeningen. Daar uit rivier- en gootmetingen van Coleman blijkt dat de mengweg niet lineair over de diepte verloopt, maar goed be-

naderd wordt door (6.9) wordt in het model SG1 deze uitdrukking voor de mengweg gebruikt.

Deze uitdrukking heeft tevens het voordeel, dat bij zeer grote perioden een logaritmische snelheidsvertikaal zou moeten resulteren, hetgeen zeer eenvoudig te controleren is.

Wordt echter gewerkt in een dunne laag boven de bodem waar turbulente schuifspanningen optreden dan is (6.9) goed te benaderen door een lineair over de hoogte verloopende mengweg.

Substitutie van (6.6), (6.7), (6.8) en (6.9) in (6.4) geeft na delen door ρ_w :

$$\frac{\partial(u-U)}{\partial t} = -\frac{g}{\rho_w} (y_h - y) \frac{\partial \rho_w}{\partial x} + \frac{\partial(L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} \quad (6.10)$$

Differentiëren van (6.10) naar y geeft:

$$\frac{\partial^2(u-U)}{\partial t \partial y} = \frac{g}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial x} + \frac{\partial^2(L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y^2} \quad (6.11)$$

Het linkerlid uitgewerkt geeft vanwege het feit dat U onafhankelijk is van y:

$$\frac{\partial^2(u-U)}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \quad (6.12)$$

Vergelijking (6.11) gaat dan over in:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} = \frac{g}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial x} + \frac{\partial^2(L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y^2} \quad (6.13)$$

Invoeren van de inwendige schuifspanningssnelheid u^*

$$u^* = L \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.14)$$

in (6.13) geeft:

$$\frac{1}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{g}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial x} + \frac{\partial^2 (u^* |u^*|)}{\partial y^2} \quad (6.15)$$

Met inachtneming van de randvoorwaarden aan de bodem en het oppervlak en de beginvoorwaarde (zie paragraaf VI-3) is uit (6.15) de verdeling van u^* over de diepte op ieder tijdstip te bepalen.

Uit de hier gevonden u^* volgt u (behoudens een integratiekonstante) uit vergelijking (6.14):

$$u = \int \frac{u^*}{L} dy \quad (6.16)$$

De zand- en slibconcentratievertikalen worden berekend met behulp van de continuïteitsvergelijking voor zwevend materiaal die er in y -richting als volgt uitziet (zie (5.29)):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\varepsilon \frac{\partial c}{\partial y} - w c \right) = 0 \quad (6.20)$$

Voor een afleiding van (6.20) wordt verwezen naar hoofdstuk I, paragraaf 5.

De term tussen haakjes in (6.20) stelt dus het sedimenttransport door diffusie en eigenbeweging voor in neerwaartse y -richting. Het convectieve transport is hier gelijk aan nul, omdat de snelheid in de y -richting gelijk aan nul is. De turbulente uitwisselingscoëfficiënt ε is hier gelijk genomen aan:

$$\varepsilon = L |u^*| \quad (6.21)$$

hierin is de mengweg gelijk aan (6.9).

De turbulente uitwisselingscoëfficiënt ε is hier dus een functie van y en t .

In een stationaire stroom geldt voor ε ook:

$$\varepsilon = L |u^*| \quad (6.22)$$

In bijlage 8 is het verloop van ε zoals dit in een stationaire stroom zou optreden vergeleken met de al eerder genoemde metingen van Coleman. Hieruit blijkt dat de benadering volgens (6.22) redelijke overeenstemming vertoont met de metingen.

VI-3 Begin- en randvoorwaarden.

A. Beginvoorwaarden.

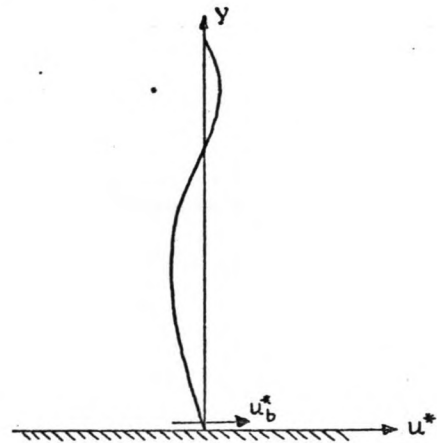
Als beginvoorwaarde voor de inwendige schuifspanningssnelheid u^* wordt gekozen:

$$u^* = 0 \quad (6.23)$$

in de gehele vertikaal.

De beginvoorwaarde komt niet overeen met een periodieke oplossing voor u^* op ieder tijdstip t . Voor een periodieke oplossing voor u^* geldt namelijk dat u^* op geen enkel tijdstip in de gehele vertikaal gelijk is aan nul.

Figuur 1 laat het moment zien waarop u_b^* net van teken gaat veranderen (van negatief naar positief). Hieruit blijkt dat als gestart wordt met de beginvoorwaarde $u^* = 0$ voor iedere y er een schuifspanningssnelheid geïntroduceerd wordt bij het starten van het periodieke proces die overwegend negatief is.



figuur 1.

Deze schuifspanningssnelheid kan gezien worden als een verstoring gesuperponeerd op het periodieke proces.

Na het berekenen met behulp van vergelijking (6.15) van de

schuifspanningssnelheid u^* gedurende een aantal golfperiodes zal weinig meer te merken zijn van deze verstoring. Om echter de verstoring sneller kleiner te maken is in het rekenproces een correctie aangebracht. (zie ook hoofdstuk V).

De beginvoorwaarde voor de berekening van de sedimentconcentraties c is op de volgende manier gekozen.

Op een bepaald tijdstip t wordt de verdeling van de sedimentconcentraties over de vertikaal bekend verondersteld. Uitgaande van deze concentratieverdeling worden de concentraties berekend in de vertikaal gedurende het verdere verloop van het getij, met behulp van vergelijking (6.20).

B. Randvoorwaarden.

Vergelijking (6.15) wordt in het numerieke model SG1 opgelost uitgaande van een bodemschuifspanningssnelheid die gelijk is aan:

$$u_b^* = \bar{u}_b^* + \hat{u}_b^* \sin(\omega t + \varphi_{u^*}) \text{ voor } y=0 \quad (6.24)$$

waarin ω de hoeksnelheid van het getij is en φ_{u^*} een fasehoek.

Uit (6.24) blijkt dat de bodemschuifspanningssnelheid opgebouwd wordt gedacht uit twee componenten te weten de component \bar{u}_b^* en de component $\hat{u}_b^* \sin(\omega t + \varphi_{u^*})$.

De eerste component is de bodemschuifspanningssnelheid tengevolge van een zoutgradiënt in de lengterichting van de stroom en het verhang van de waterspiegel. De tweede component is de bodemschuifspanningssnelheid tengevolge van het harmonische getij.

Een eerste bepaling van \bar{u}_b^* en \hat{u}_b^* kan als volgt geschieden.

Vergelijking (6.4) geïntegreerd over de golfperiode geeft voor $z=0$:

$$\rho_w \overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = - \overline{\frac{\partial p_r}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial \tau}{\partial y}} \quad (6.25)$$

De randvoorwaarde aan de bodem wordt op zodanige wijze gekozen, dat een harmonisch getij zoveel mogelijk wordt benaderd, waarbij eventueel nog een resulterende stroom \bar{u} mag optreden:

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) + \bar{u}(y) \quad (6.26)$$

waarin \hat{u} de lokale snelheidsamplitude is en $\bar{u}(y)$ de over het getij, doch niet over de vertikaal, gemiddelde snelheid is. In (6.26) is φ_u de fasehoek van de snelheid.

Voor de hydrostatische druk p_r geldt in een analoge notatie:

$$p_r = \hat{p}_r \sin(\omega t + \varphi_p) + \bar{p}_r \quad (6.27)$$

Bij middeling over het getij is volgens (6.26) $\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}$ gelijk aan nul, dus geldt:

$$\overline{\frac{\partial \tau}{\partial y}} = \overline{\frac{\partial p_r}{\partial x}} \quad (6.28)$$

Uitdrukking (6.5) voor p_r ingevuld in (6.28) geeft:

$$\overline{\frac{\partial \tau}{\partial y}} = g (y_h - y) \frac{\partial \rho_w}{\partial x} + \rho_w g \overline{\frac{\partial y_h}{\partial x}} \quad (6.29)$$

Integreren van (6.29) naar y geeft:

$$\bar{\tau} = g (y_h y - \frac{1}{2} y^2) \frac{\partial \rho_w}{\partial x} + \rho_w g y \overline{\frac{\partial y_h}{\partial x}} + \text{konstante} \quad (6.30)$$

De integratiekonstante in (6.30) kan bepaald worden uit de randvoorwaarden dat $\bar{\tau}$ aan de oppervlakte ($y=y_h$) gelijk aan nul is.

Vergelijking (6.30) gaat dan over in:

$$\bar{\tau} = - \frac{1}{2} g (y_h - y)^2 \frac{\partial \rho_w}{\partial x} - \rho_w g (y_h - y) \overline{\frac{\partial y_h}{\partial x}} \quad (6.31)$$

Hierin zijn $\frac{\partial \rho_w}{\partial x}$ ($= \frac{d \rho_w}{dx}$) en $\frac{\partial y_h}{\partial x}$ ($= \frac{dy_h}{dx}$) van elkaar onafhankelijke konstanten. De verhouding tussen deze beide konstanten bepaalt de richting van de over het getij en over de vertikaal gemiddelde stroom.

Hergroeperen van vergelijking (6.31) geeft:

$$\frac{\bar{\tau}}{\rho_w} = -g(y_h - y) \left\{ \frac{1}{2} \frac{(y_h - y)}{\rho_w} \frac{d \rho_w}{dx} + \frac{dy_h}{dx} \right\} \quad (6.32)$$

Direkt valt hieruit in te zien, dat als het middenstandsverhang $-\frac{dy_h}{dx}$ groter is dan $\frac{1}{2} \frac{y_h}{\rho_w} \frac{d \rho_w}{dx}$, $\bar{\tau}$ over de gehele vertikaal $0 < y < y_h$ negatief is. M.a.w. onder deze voorwaarden kan een resulterende stroom in ebrichting worden verwacht.

Als geldt: $0 < -\frac{dy_h}{dx} < \frac{1}{2} \frac{y_h}{\rho_w} \frac{d \rho_w}{dx}$ zal de resulterende schuifspanning aan de oppervlakte in ebrichting en aan de bodem in vloedrichting zijn. Het is dan niet zonder meer in te zien in welke richting de resulterende stroom is.

Volgens (6.8) en (6.14) geldt aan de bodem:

$$\frac{\tau_b}{\rho_w} = u_b^* |u_b^*| \quad (6.33)$$

Substitutie van $\frac{\tau_b}{\rho_w}$ volgens (6.32) in het linkerlid van (6.33) en van u_b^* volgens (6.24) in het rechterlid van (6.33) en middelen over de getijperiode geeft:

$$-g y_h \left(\frac{1}{2} \frac{y_h}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx} + \frac{dy_h}{dx} \right) = (\bar{u}_b^* + \hat{u}_b^* \sin \omega t) \left| \bar{u}_b^* + \hat{u}_b^* \sin \omega t \right| \quad (6.34)$$

Vergelijking (6.34) kan ook op de volgende manier weergegeven worden:

$$-g y_h \left(\frac{1}{2} \frac{y_h}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx} + \frac{dy_h}{dx} \right) = (\bar{u}_b^*)^2 B \left(\frac{\hat{u}_b^*}{\bar{u}_b^*} \right) \quad (6.35)$$

waarin:

$$B(a) = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} (1 + a \sin \omega t) |1 + a \sin \omega t| dt \quad (6.36)$$

Door Bijker [lit.15] is de integraal $B(a)$ numeriek bepaald. Voor $0.4 < a < g$ zijn de waarden van $B(a)-1$ weergegeven op bijlage 9 [lit.15]. ($\varphi = 90^\circ$).

Voor $a < 1$ is $B(a)$ gelijk aan $(1 + \frac{1}{2}a^2)$.

Voor grote waarden van a nadert $B(a)$ tot:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} B(a) = \frac{4}{\pi} a \quad (6.37)$$

Volgens (6.24) en (6.33) geldt als $\bar{u}_b^* < \hat{u}_b^*$ is, dat:

$$(\tau_{b,max} - \tau_{b,min}) / 2 \rho_w = (\bar{u}_b^*)^2 + (\hat{u}_b^*)^2 \quad (6.38)$$

waarin $\tau_{b,max}$ en $\tau_{b,min}$ respectievelijk de maximale en minimale schuifspanning aan de bodem zijn.

Met verwaarlozen van de instationaire effecten wordt gevonden, dat de "amplitude" van de schuifspanning aan de bodem gelijk is aan $\rho_w g y_h \hat{I}$, waarin \hat{I} de "amplitude" van het verhang voorstelt, ofwel:

$$\frac{\tau_{b,max} - \tau_{b,min}}{2 \rho_w} \approx g y_h \hat{I} \quad (6.39)$$

zodat uit (6.38) wordt gevonden:

$$(\bar{u}_b^*)^2 + (\hat{u}_b^*)^2 \approx gy_h \hat{I} \quad (6.40)$$

In het triviale geval, dat geldt:

$$\frac{1}{2} \frac{y_h}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx} + \frac{d\bar{y}_h}{dx} = 0 \quad (6.41)$$

is uiteraard $\bar{u}_b^* = 0$ en volgt \hat{u}_b^* uit (6.40)

Dit geval verder buiten beschouwing latend, volgt uit (6.35) en (6.40):

$$\hat{I} / \left| \frac{d\bar{y}_h}{dx} + \frac{1}{2} \frac{y_h}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx} \right| = \frac{1 + (\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*)^2}{B(\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*)} \quad (6.42)$$

Volgens (6.37) nadert voor grote waarden van $\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*$

het rechterlid van (6.42) tot:

$$\frac{1 + (\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*)^2}{B(\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*)} \approx \frac{\pi}{4} \left(\frac{\hat{u}_b^*}{\bar{u}_b^*} + \frac{\bar{u}_b^*}{\hat{u}_b^*} \right) \quad (\hat{u}_b^* \gg \bar{u}_b^*) \quad (6.45)$$

In bijlage 10 is, uitgaande van de door Bijker berekende waarden van $B(a)$, voor waarden $0,4 \leq (\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*) \leq 8,5$ het

rechterlid van (6.42) uitgezet tegen $\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*$. Daar de grootte van het linkerlid van (6.42) bekend is, volgt hieruit de waarde van $\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*$. Uit bijlage 10

(voor $\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^* \leq 8,5$) of uit combinatie van (6.42) en (6.43) (voor $\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^* \geq 8,5$) kan de waarde van $\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*$ worden afgeleid.

Uit (6.40) volgen dan \bar{u}_b^* en \hat{u}_b^* .

De randvoorwaarde aan de oppervlakte is:

$$u^* = 0 \text{ voor } y = y_h \quad (6.44)$$

Voor de numerieke berekening van de concentratievertikalen volgens vergelijking (6.20) worden de volgende randvoorwaarden aangenomen.

Ten eerste de randvoorwaarde aan de oppervlakte. Hier geldt dat het transport door het wateroppervlak nul moet zijn, daar sedimentdeeltjes dit vlak niet kunnen passeren. In formulevorm geeft dit:

$$\varepsilon \frac{\partial c}{\partial y} + w_y c = 0 \quad (6.45)$$

Daar ε nul is aan de oppervlakte volgt hieruit als randvoorwaarde voor de oppervlakte:

$$c = 0 \text{ voor } y = y_h \quad (6.46)$$

In het SG1-programma is de randvoorwaarde zo gekozen dat het slibtransport door het oppervlak nul is, terwijl het hoogste punt, waarin de concentratie berekend is, een zekere afstand onder het oppervlak is gekozen.

De randvoorwaarde aan de bodem is op zodanige wijze gekozen dat hier geen turbulente opwerveling plaats vindt:

$$\varepsilon \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \text{ voor } y = 0 \quad (6.47)$$

Deze voorwaarde resulteert in:

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \text{ voor } y = 0 \quad (6.48)$$

Door als randvoorwaarde aan de bodem vergelijking (6.48) te kiezen is het mogelijk een schatting te maken van de maximale hoeveelheid sediment dat gedurende een bepaalde tijd zal sedimenteren. Door deze randvoorwaarde wordt namelijk alleen de turbulente opwerveling van sediment aan de bodem uitgeschakeld en niet het mechanisme van de sedimentatie.

Enkele verschillen in begin- en randvoorwaarden tussen TA1/SA1 en SG1 zijn de volgende.

In TA1/SA1 wordt als randvoorwaarde aan de bodem alleen

een harmonische component van de schuifspanningssnelheid u^* ingevoerd. De sedimentconcentratie aan de bodem wordt in deze programma's gelijk genomen aan de absolute waarde van de bodem schuifspanningssnelheid. De beginwaarde voor de berekening van de sedimentopwoekering onder kortperiodieke golven wordt in SA1 zo gekozen dat de concentratie in de gehele vertikaal gelijk aan nul is op het tijdstip $t=0$.

VI-4 Beschrijving van het numerieke model.

A. Dimensieloos maken van de vergelijkingen.

Alvorens over te gaan op de beschrijving van het numerieke proces heeft het zin een aantal referentieschalen in te voeren waarmee de te gebruiken vergelijkingen dimensieloos gemaakt kunnen worden.

In de numerieke berekening voor de berekening van de interne schuifspanningssnelheid en de sedimentconcentratie wordt uitgegaan van respectievelijk vergelijking (6.15) en vergelijking (6.20):

$$\frac{1}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{g}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial x} + \frac{\partial^2 (u^* |u^*|)}{\partial y^2} \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0 \quad (6.20)$$

In vergelijking (6.20) is s_y gelijk aan:

$$s_y = -\epsilon \frac{\partial c}{\partial y} - w c \quad (6.49)$$

Door invoering van een drietal dimensieloze parameters is het mogelijk vergelijking (6.15) dimensieloos te maken.

Deze drie dimensieloze parameters zijn gelijk aan:

$$p_* = \frac{\kappa_y \sqrt{1 - y/y_h} \frac{\partial u}{\partial y}}{u_o} = \frac{u^*}{u_o} \quad (6.50)$$

$$y_* = \frac{y}{\kappa Y_0} \quad (6.51)$$

$$t_* = \frac{t}{T_0} \quad (6.52)$$

Hierin zijn U_0 , Y_0 en T_0 respectievelijk een referentiesnelheid, een referentielengte en een referentietijd.

Substitutie van (6.50) tot en met (6.52) in (6.15) geeft na enig uitwerken:

$$\frac{\partial p_*}{\partial t_*} = y_* \sqrt{1 - \frac{y_*}{y_* \max}} \left[\frac{U_0 T_0}{Y_0} \frac{\partial^2 (p_* | p_* |)}{\partial y_*^2} + \kappa^2 \frac{Y_0}{U_0 T_0} \frac{g T_0^2}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial x} \right] \quad (6.53)$$

U_0 , Y_0 en T_0 worden nu zo gekozen dat:

$$U_0 Y_0 = T_0$$

Vergelijking (6.53) wordt dan:

$$\frac{\partial p_*}{\partial t_*} = y_* \sqrt{1 - \frac{y_*}{y_* \max}} \left[\frac{\partial^2 (p_* | p_* |)}{\partial y_*^2} + \kappa^2 \frac{g T_0^2}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial x} \right] \quad (6.54)$$

De referentiesnelheid U_0 wordt op zodanige wijze gekozen dat de topwaarde van de component van de bodemschuifspanningssnelheid tengevolge van het harmonische getij dimensieloos gelijk is aan 1.

Uit de definitie van de wrijvingscoëfficiënt f_c (zie (3.26)) volgt dan dat deze schuifspanningssnelheid gelijk is aan:

$$\sqrt{\frac{\hat{\tau}_b}{\rho_w}} = \sqrt{\frac{1}{2} f_c \hat{u}^2} \quad (6.55)$$

De referentiesnelheid U_0 wordt dan:

$$U_0 = \hat{u} \sqrt{\frac{f_c}{2}} \quad (6.56)$$

De referentielengte Y_0 wordt nu met behulp van (6.56):

$$Y_0 = U_0 T_0 = \hat{u} T_0 \sqrt{\frac{f_c}{2}} \quad (6.57)$$

Voor het dimensieloos maken van vergelijking (6.20) moeten eerst nog drie andere dimensieloze parameters gedefinieerd worden.

Dit zijn een dimensieloze diffusiecoëfficiënt ϵ_* , een dimensieloze valsnelheid w_* en een dimensieloos sedimenttransport S_* . Deze drie parameters worden op de volgende wijze gedefinieerd:

$$\epsilon_* = \frac{\epsilon}{\kappa^2 Y_0 U_0} = \frac{\kappa y \sqrt{1-y/y_h} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|}{\kappa^2 Y_0 U_0} \quad (6.58)$$

$$w_* = \frac{w}{\kappa U_0} \quad (6.59)$$

$$S_* = \frac{S}{\kappa U_0} \quad (6.60)$$

De uitdrukking voor ϵ_* wordt na invullen van (6.50) en (6.51) in (6.58):

$$\epsilon_* = y_* \sqrt{1 - y_*/y_* \max} \left| p_* \right| \quad (6.61)$$

De vergelijkingen (6.20) en (6.49) gaan in dimensieloze vorm over in:

$$\frac{\partial c}{\partial t_*} = - \frac{\partial S_*}{\partial y_*} \quad (6.62)$$

waarin:

$$S_* = -\epsilon_* \frac{\partial c}{\partial y_*} - w_* c \quad (6.63)$$

B. Differentievergelijkingen

Om p_* en c_* als functie van y_* en t_* te vinden wordt in het numerieke model gebruik gemaakt van een expliciete differentiemethode.

De differentiaalvergelijkingen (6.54) en (6.62) worden daar toe als volgt in differentievorm geschreven:

$$\frac{p_*^1[y_*] - p_*[y_*]}{\Delta t_*} = y_* \sqrt{1 - \frac{y_*}{y_{* \max}}} \left[\frac{p_*[y_* - \Delta y_*] \cdot \text{abs}(p_*[y_* - \Delta y_*]) - 2p_*[y_*] \cdot \text{abs}(p_*[y_*])}{(\Delta y_*)^2} + \frac{p_*[y_* + \Delta y_*] \cdot \text{abs}(p_*[y_* + \Delta y_*])}{(\Delta y_*)^2} \right] + \frac{\kappa^2 g T_o^2}{\rho_w} \left[\frac{\rho_w[x + \Delta x] - \rho_w[x]}{\Delta x} \right] \quad (6.64)$$

en:

$$\frac{c^1[y_*] - c[y_*]}{\Delta t_*} = - \frac{s_*[y_* + \frac{1}{2}\Delta y_*] - s_*[y_* - \frac{1}{2}\Delta y_*]}{\Delta y_*} \quad (6.65)$$

waarin:

$$s_*[y_* + \frac{1}{2}\Delta y_*] = - \varepsilon_*[y_* + \frac{1}{2}\Delta y_*] \cdot \frac{c[y_* + \Delta y_*] - c[y_*]}{\Delta y_*} \quad (6.66)$$

$s_*[y_* - \frac{1}{2}\Delta y_*]$ heeft een analoge berekening als (6.66).

In de differentievergelijkingen (6.64) en (6.65) zijn de waarden voor p_* en c op het tijdstip $t_* + \Delta t_*$ met, en op tijdstip t_* zonder accent aangegeven.

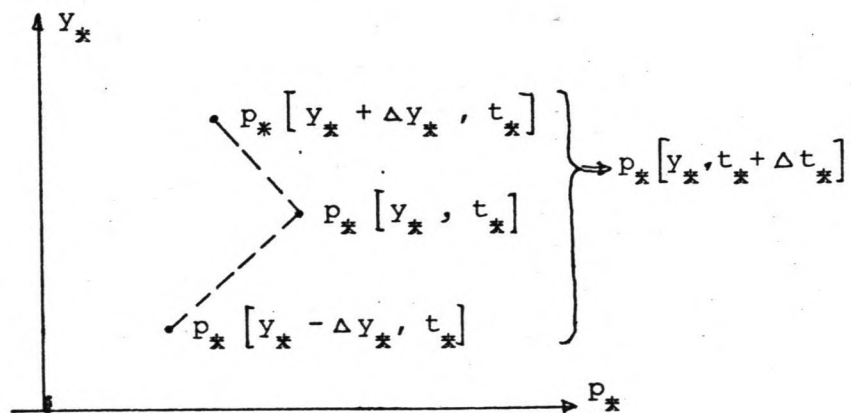
Uitwerken van de differentievergelijkingen geeft voor de berekening van p_* :

$$\begin{aligned}
 p_*^1[y_*] - p_*[y_*] &= y_* \sqrt{1 - \frac{y_*}{y_* \max}} \left[\frac{\Delta t_*}{(\Delta y_*)^2} \left\{ p_*[y_* - \Delta y_*] \cdot \text{abs}(p_*[y_* - \Delta y_*]) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2p_*[y_*] \cdot \text{abs}(p_*[y_*]) + p_*[y_* + \Delta y_*] \cdot \text{abs}(p_*[y_* + \Delta y_*]) \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\kappa_{gT_o}^2}{\rho_w} \left\{ \frac{\rho_w[x + \Delta x] - \rho_w[x]}{\Delta x} \right\} \cdot \Delta t_* \right] \quad (6.67)
 \end{aligned}$$

en voor de berekening van c , na substitutie van (6.66) in (6.65):

$$\begin{aligned}
 c^1[y_*] - c[y_*] &= \frac{\Delta t_*}{(\Delta y_*)^2} \left[\left\{ \varepsilon_* \left[y_* + \frac{1}{2} \Delta y_* \right] + \frac{1}{2} w_* \Delta y_* \right\} \cdot c[y_* + \Delta y_*] + \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \varepsilon_* \left[y_* + \frac{1}{2} \Delta y_* \right] + \varepsilon_* \left[y_* - \frac{1}{2} \Delta y_* \right] \right\} \cdot c[y_*] + \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \varepsilon_* \left[y_* - \frac{1}{2} \Delta y_* \right] - \frac{1}{2} w_* \Delta y_* \right\} \cdot c[y_* - \Delta y_*] \right] \quad (6.68)
 \end{aligned}$$

Met bovenstaande vergelijkingen is het mogelijk p_* en c op een tijdstip $[t_* + \Delta t_*]$ uit te rekenen uitgaande van de waarden voor p_* en c in drie punten te weten $[y_* + \Delta y_*]$, $[y_*]$ en $[y_* - \Delta y_*]$ en tijdstap Δt_* eerder, zie figuur 2.



figuur 2.

De faktor $\frac{\Delta t_*}{(\Delta y_*)^2}$ in (6.67) en (6.68) kan vrij worden geko-

zen mits wordt vermeden dat instabiliteiten in het rekenproces optreden.

Zoals in hoofdstuk V, paragraaf 1 reeds vermeld is wordt aan de voorwaarde dat er geen instabiliteiten in het rekenproces optreden voldaan als Δt_* op zodanige wijze wordt gekozen dat:

$$\Delta t_* \leq \frac{(\Delta y_*)^2}{2 |p_{* \max}| y_{* \max}} \quad (6.69)$$

Hierin is $|p_{* \max}|$ de maximaal optredende p_* tengevolge van de harmonische getijbeweging en $y_{* \max}$ is de maximale hoogte tot waar de berekening wordt uitgevoerd.

Wordt op deze manier de maximale tijdstap bepaald waarbij nog net geen instabiliteiten optreden dan blijkt dat het aantal berekeningen die gedurende één golfperiode uitgevoerd moeten worden zeer groot te zijn [lit.12].

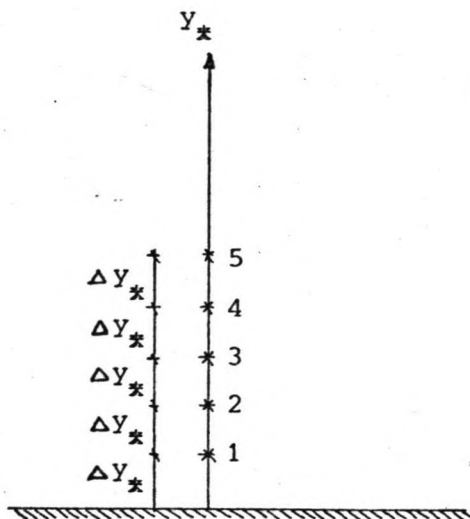
Om nu de rekentijd te bekorten is evenals dit gedaan is voor de zandopwoekering onder het periodieke golven voor de berekening van p_* en c gebruik gemaakt van de zogenaamde "pulsating grid" methode. Deze methode zal in de volgende paragraaf voor de berekening van p_* worden behandeld. De berekening van c geschiedt analoog aan die van p_* met dien verstande dat er voor wat betreft de berekening van c in de hogere lagen enige aanvullingen gemaakt zijn. Deze worden beschreven in paragraaf VI-4.D.

C. De berekening van p_* .

In deze paragraaf zal zoals eerder vermeld de "pulsating grid" methode beschreven worden voor de berekening van p_* .

Deze methode is erg nauwkeurig en geeft veel informatie in de buurt van de bodem en relatief weinig op enige afstand van de bodem.

Om dit te bereiken wordt een rooster aangenomen bij de bodem bestaande uit vijf punten met een onderlinge afstand, die gelijk is aan Δy_* .



figuur 3.

Het tweede ($y_* = 2 \Delta y_*$) en het vierde ($y_* = 4 \Delta y_*$) punt van het eerste rooster vallen samen met de eerste twee punten van het tweede rooster, het tweede en het vierde punt van het tweede rooster vallen weer samen met de eerste twee punten van het derde rooster, enzovoort.

In de berekening worden iedere keer als het aantal tijdstappen

($= \frac{t_*}{\Delta t_*}$) oneven is alleen in het eerste rooster de waarden

voor p_* uitgerekend, als het aantal tijdstappen deelbaar is door twee dan worden ook de waarden voor p_* in het tweede rooster uitgevoerd (zie figuur 4).

Ieder grid bestaat uit vijf punten.

Het totale aantal roosters is gelijk aan m , waarvan het laatste rooster de gehele lengte van $y_* = 0$ tot $y_* = y_{*, \max}$ omvat.

Het eerste rooster heeft een lengte gelijk aan $2^{-m+1} \cdot y_{*, \max}$. De afstand Δy_* is gelijk aan $\frac{1}{4}$ van de lengte van het

	1	4	8	12	16	20	24 → hoogte boven de bodem $y_*/\Delta y_*$
t_* $\frac{t_*}{\Delta t_*}$ is deelbaar door 8)	1 2 3 4 5	① ② ③ ④ ⑤	I II III IV V				
$t_* + \Delta t_*$	1 2 3 4						
$t_* + 2\Delta t_*$	1 2 3 4 5	① ② ③ ④					
$t_* + 3\Delta t_*$	1 2 3 4						
$t_* + 4\Delta t_*$	1 2 3 4 5	① ② ③ ④ ⑤	I II III IV V				

figuur 4, schema van berekening m.b.v. "pulsating grid".

eerste rooster, wat gelijk is aan $2^{-m-1} \cdot y_{* \max}$.

Uit de stabiliteitsvoorwaarde volgt de maximale tijdstap

waarbij het rekenproces nog niet instabiel wordt:

$$\Delta t_* = 2^{-m-4} \cdot y_{* \max} \quad (6.70)$$

In het rekenprogramma is voor Δt_* aangenomen dat deze gelijk is aan $2^{-m-5} \cdot y_{* \max}$. Dit is gedaan omdat in de praktijk is

gebleken dat voor vergelijkingen zoals vergelijking (6.67) het rekenproces bij de keuze van $\Delta t_* = 2^{-m-4} \cdot y_{* \max}$ toch nog instabiel werd.

In het algemeen geldt:

$$\Delta y_* = 2^{-m-1} \cdot y_{* \max} \quad (6.71)$$

Als $\Delta t_* = 2^{-m-5} \cdot y_{* \max}$ dan blijkt dat het aantal basisberekeningen per golfperiode gelijk is aan $128/\Delta y_*$.

De berekening van de p_* -waarden met behulp van vergelijking (6.67) gaat als volgt (zie figuur 4).

Gesteld wordt dat de waarden voor p_* in de punten 1 tot en met 5, ① tot en met ⑤, I tot en met V en ① tot en met ⑤ bekend zijn op het tijdstip t_* , dat deelbaar is door 8. Op het tijdstip $t_* + t_*$ kunnen de waarden voor p_* in de punten 2, 3 en 4 gevonden worden uit de waarden voor p_* in de punten 1, 2, 3, 4 en 5 op tijdstip t_* .

In punt 1 op tijdstip $t_* + \Delta t_*$ wordt p_* gevonden uit de randvoorwaarde aan de bodem en p_* in punt 5 wordt niet uitgerekend.

Op het tijdstip $t_* + 2\Delta t_*$ wordt p_* in de punten 2 en 3 gevonden uit de waarden voor p_* in de punten 1, 2, 3 en 4 op het tijdstip $t_* + \Delta t_*$, p_* in de punten ②, ③ en ④ wordt gevonden uit p_* in de punten 1 tot en met 5 op het tijdstip t_* . De waarde voor p_* in het punt 1 op het tijdstip $t_* + 2\Delta t_*$ wordt gevonden uit de randvoorwaarde aan de bodem, verder is p_* in de punten 1 en 2 gelijk aan de p_* in respectievelijk de punten 2 en 4.

De waarde voor p_* in het punt 5 wordt gevonden door extrapolatie tussen de punten ② en ③ met behulp van de extrapolatieformule, die er in zijn algemene gedaante als volgt uitziet:

$$p_*[5, j-1] = \frac{1}{6}(-p_*[3, j-1]) + 4 \cdot \frac{1}{8}p_*[2, j] + 3 \cdot \frac{1}{4}p_*[3, j] - \frac{3}{8}p_*[4, j] \quad (6.72)$$

Hierin is de index j het nummer dat het rooster aangeeft waarin de punten zich bevinden.

Op het tijdstip $t_* + 2\Delta t_*$ worden de waarden voor Δy_* en Δt_* in vergelijking (6.67) verdubbeld voor het berekenen van p_* in de punten 2, 3 en 4.

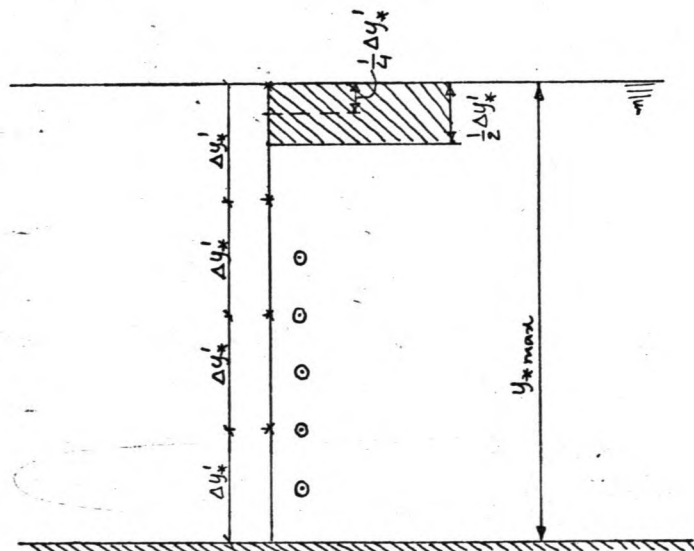
Als $t_* = t_* + 3\Delta t_*$ worden alleen de p_* -waarden voor het eerste rooster uitgerekend.

De berekeningen van p_* op de volgende tijdstippen gaat op dezelfde manier als hierboven beschreven (zie ook figuur 4).

De berekende waarden van p_* worden opgeslagen in een tweedimensionaal p_* -array $[1:5, 1:m]$, waarin m het aantal roosters aangeeft.

D. De berekening van c.

De berekening van de sedimentconcentratie c wordt ook uitgevoerd volgens de eerder beschreven "pulsating-grid" methode. Zoals in paragraaf VI-4c al vermeld is geeft deze methode veel informatie in de buurt van de bodem en relatief weinig op enige afstand van de bodem. Daar in het onderhavige geval ook getracht wordt enig inzicht te verkrijgen in het verloop van de sedimentconcentratie op enige afstand van de bodem, zal er dus voor wat betreft de berekening van c meer aandacht besteed moeten worden aan de berekening van het grofste rooster, speciaal wat betreft de randvoorwaarde aan de oppervlakte.



figuur 5. Het grofste en één na grofste rooster.

In figuur 5 zijn de vier punten van het grofste rooster weergegeven, liggend op een onderlinge afstand $\Delta y_*^1 = \frac{1}{4} y_{* \max}^1$. Verder zijn met de cirkeltjes de vijf punten van het één na grofste rooster weergegeven, dat een faktor 2 fijner is dan het grofste rooster.

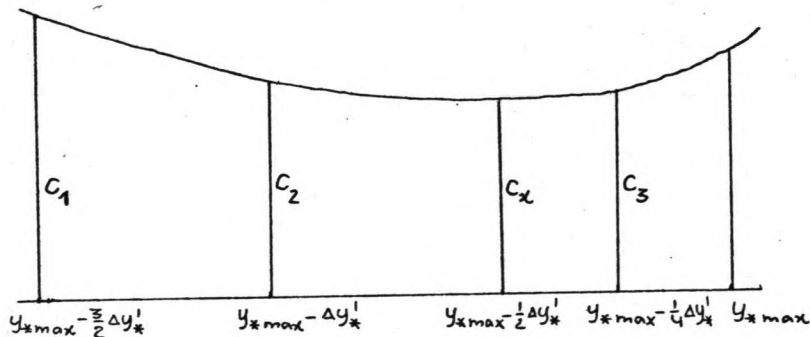
Beschouwd wordt nu de gemiddelde concentratie in de bovenste waterlaag ter hoogte van $\frac{1}{2} \Delta y_*^1 = \frac{1}{8} y_{* \max}^1$. In figuur 5 is deze laag gearceerd weergegeven.

Deze gemiddelde concentratie wordt gelijk gesteld aan de concentratie in het midden van deze laag, dus aan de concentratie op een hoogte $y_* = y_{* \max}^1 - \frac{1}{4} \Delta y_*^1$.

Tussen de concentraties c en c^1 , respectievelijk op de tijdstippen $t_* + \Delta t_*$ en t_* bestaat de volgende relatie:

$$c^1 \left[y_{* \max}^1 - \frac{1}{4} \Delta y_*^1 \right] - c \left[y_{* \max}^1 - \frac{1}{4} \Delta y_*^1 \right] \frac{\Delta t_*}{\frac{1}{2} \Delta y_*^1} = S_* \left[y_{* \max}^1 - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] \quad (6.73)$$

Volgens (6.63) moet voor het berekenen van $S_* \left[y_{* \max}^1 - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right]$ in (6.73) de concentratie en de concentratiegradiënt op een hoogte $y_* = y_{* \max}^1 - \frac{1}{2} \Delta y_*^1$ bekend zijn.



figuur 6. Definitie van c_1 , c_2 en c_3 .

In figuur 6 zijn de concentraties op de hoogten $y_* = y_{* \max}^1 - \frac{3}{2} \Delta y_*^1$, $y_* = y_{* \max}^1 - \Delta y_*^1$ en $y_* = y_{* \max}^1 - \frac{1}{4} \Delta y_*^1$ respectievelijk met c_1 , c_2 en c_3 aangegeven.

Gezocht wordt de concentratie c_x en de concentratiegradiënt in het punt $y_* = y_{* \max} - \frac{1}{2} \Delta y_*^1$.

De concentratie c_x in het punt $y_* = y_{* \max} - \frac{1}{2} \Delta y_*^1$ wordt gevonden uit de tweede afgeleide $\frac{\partial^2 c}{\partial y_*^2}$. Onder verwaarlozing

van de derde en hogere afgeleiden geldt hiervoor:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y_*^2} = \frac{c_1 - 2c_2 + c_3}{(\Delta y_*^1)^2} \quad (6.74)$$

Wordt in de berekening van $\frac{\partial^2 c}{\partial y_*^2}$ alleen c_1 , c_2 en c_3 betrokken, dan wordt het volgende gevonden:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y_*^2} = \frac{\frac{c_3 - c_2}{3 \Delta y_*^1 / 4} - \frac{c_2 - c_1}{\Delta y_*^1 / 2}}{5 \Delta y_*^1 / 8} \quad (6.75)$$

Gelijkstellen van (6.74) en (6.75) geeft:

$$c \left[y_{* \max} - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] = (-3c_1 + 10c_2 + 8c_3) / 15 \quad (6.76)$$

De concentratiegradiënt ter hoogte van $y_* = y_{* \max} - \frac{1}{4} \Delta y_*^1$ kan worden gevonden met behulp van een Taylorreeksontwikkeling:

$$\frac{\partial c}{\partial y_*} \left[y_{* \max} - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] = \frac{\partial c}{\partial y_*} \left[y_{* \max} - \frac{5}{4} \Delta y_*^1 \right] + \frac{3}{4} \Delta y_*^1 \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial y_*^2} \quad (6.77)$$

Substitutie in (6.77) van (6.75) geeft:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial y_*} \left[y_{* \max} - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] &= \frac{c_2 - c_1}{\frac{1}{2} \Delta y_*^1} + \frac{12c_1 - 20c_2 + 8c_3}{5 \Delta y_*^1} \\ &= \frac{2c_1 - 10c_2 + 8c_3}{5 \Delta y_*^1} \end{aligned} \quad (6.78)$$

De nieuwe concentratie in het punt $y_* = y_{* \max} - \frac{1}{4} \Delta y_*$ kan nu gevonden worden uit (6.73), (6.63), (6.76) en (6.78):

$$c^1 \left[y_{* \max} - \frac{1}{4} \Delta y_*^1 \right] - c \left[y_{* \max} - \frac{1}{4} \Delta y_*^1 \right] =$$

$$\frac{4 \Delta t_*}{15 (\Delta y_*^1)^2} \left[-\varepsilon_* \left[y_{* \max} - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] (3c_1 - 15c_2 + 12c_3) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} w_* \Delta y_*^1 (-3c_1 + 10c_2 + 8c_3) \right] \quad (6.79)$$

De berekende concentraties c worden evenals p_* opgeslagen in een twee-dimensionaal array $[1:5, 1:m]$, waarin m wederom het aantal roosters is.

De concentraties in het grootste, respectievelijk één na grootste rooster staan hierbij op de m^{de} , respectievelijk op de $(m-1)^{\text{de}}$ rij. De punten van het rooster worden van onder naar bovengaand genummerd. De concentratie in de punten van het grofste rooster (zie figuur 5) worden dus van onder naar bovengaand respectievelijk als $c [1, m]$ tot en met $c [4, m]$ in de array opgeslagen, de concentraties in de punten van het één na grofste rooster als $c [1, m-1]$ tot en met $c [5, m-1]$, enzovoort.

In het SA1-programma, voor zandopwoekering onder kort-periodieke golven wordt verondersteld dat de concentratie aan de oppervlakte nul blijft (m.a.w. $c [4, m] \equiv 0$). In het SG1-programma (voor getijgolven) wordt in de array als $c [4, m]$ opgeslagen de waarde van c in het punt $y_* = y_{* \max} - \frac{1}{4} \Delta y_*^1$. De in figuur 6 weergegeven punten c_1 , c_2 en c_3 dus in de array respectievelijk als $c [5, m-1]$, $c [3, m]$ en $c [4, m]$.

De concentratie in het punt $c [3, m]$ wordt gevonden uit (6.65), waarbij $S_* \left[y_* + \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right]$ het transport ter hoogte $y_{* \max} - \frac{1}{2} \Delta y_*^1$ voorstelt.

Dit is volgens (6.63), (6.76) en (6.78) gelijk aan:

$$S_* \left[y_* \max - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] = - \epsilon_* \left[y_* \max - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] \cdot \frac{2c [5,m-1] - 10c [3,m] + 8c [4,m]}{5 \Delta y_*^1} - \frac{1}{15} w_* (-3c [5,m-1] + 10c [3,m] + 8c [4,m]) \quad (6.80)$$

Verder is in (6.65) het transport ter hoogte van $y_* \max - \frac{3}{2} \Delta y_*^1$, volgens (6.66) gelijk aan:

$$S_* \left[y_* \max - \frac{3}{2} \Delta y_*^1 \right] = - \epsilon_* \left[y_* \max - \frac{3}{2} \Delta y_*^1 \right] \cdot \frac{c [3,m] - c [2,m]}{\Delta y_*^1} + w_* \frac{c [3,m] + c [2,m]}{2} \quad (6.81)$$

Met behulp van (6.65) wordt dus gevonden dat een nieuwe waarde van $c^1 [3,m]$ ten tijde $t_* + \Delta t_*$ kan worden gevonden uit waarde $c [3,m]$ ten tijde t_* door hieraan de volgende hoeveelheid toe te voegen:

$$c^1 [3,m] - c [3,m] = \frac{\Delta t_*}{15 (\Delta y_*^1)^2} \left[c [4,m] \cdot (24 \epsilon_* \left[y_* \max - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] + 8 w_* \Delta y_*^1) + c [3,m] \cdot (-30 \epsilon_* \left[y_* \max - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] + \frac{5}{2} w_* \Delta y_*^1 + -15 \epsilon_* \left[y_* \max - \frac{3}{2} \Delta y_*^1 \right]) + c [5,m-1] \cdot (6 \epsilon_* \left[y_* \max - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right] - 3 w_* \Delta y_*^1) + c [2,m] \cdot (15 \epsilon_* \left[y_* \max - \frac{3}{2} \Delta y_*^1 \right] - \frac{15}{2} w_* \Delta y_*^1) \right] \quad (6.82)$$

Evenzo valt de toename per tijdstap van $c [4,m]$ af te leiden uit (6.80):

$$\begin{aligned}
 c^1 [4,m] - c [4,m] = & \frac{4\Delta t_*}{15(\Delta Y_*^1)^2} \left[-c [4,m] \cdot (12\varepsilon_* [y_* \max - \frac{1}{2}\Delta Y_*^1] + 4w_* \Delta Y_*^1) + \right. \\
 & + c [3,m] \cdot (15\varepsilon_* [y_* \max - \frac{1}{2}\Delta Y_*^1] - 5w_* \Delta Y_*^1) + \\
 & \left. - c [5,m-1] \cdot (3\varepsilon_* [y_* \max - \frac{1}{2}\Delta Y_*^1] - \frac{3}{2} \cdot w_* \Delta Y_*^1) \right] \quad (6.83)
 \end{aligned}$$

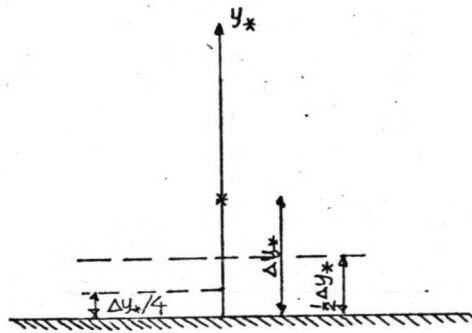
Op bovenstaande manier is het dus goed mogelijk de concentraties in de bovenste waterlagen te bepalen. Nu zal nog worden bekeken hoe het beste aan de randvoorwaarde aan de bodem kan worden voldaan.

Door de onderste laag verdwijnt volgens de aanname slechts transport tengevolge van de valsnelheid van het sediment.

De opwerveling wordt aan de bodem gelijk aan nul gesteld:

$$s_* [0] = -w_* \cdot c [0] \quad (6.84)$$

In figuur 7 is het onderste gedeelte van het eerste rooster weergegeven.



figuur 7. Onderste gedeelte eerste rooster.

Uit (6.66) wordt voor het transport ter hoogte van $y_* = \frac{1}{2} y_*$ gevonden:

$$\begin{aligned}
 s_* \left[\frac{1}{2} \Delta y_* \right] = & - \varepsilon_* \left[\frac{1}{2} \Delta y_* \right] \cdot \frac{c[\Delta y_*] - c[0]}{\Delta y_*} \\
 & - w_* \cdot \frac{c[\Delta y_*] + c[0]}{2} \quad (6.85)
 \end{aligned}$$

Uit (6.62) volgt de toename van de gemiddelde concentratie in de onderste laag met een hoogte $\frac{1}{2} \Delta y_*$.

Hoewel dit gemiddelde in feite het beste de concentratie ter hoogte van $y_* = \frac{1}{4}\Delta y_*$ representeert (zie figuur 7), wordt deze in verband met de kleine afstand tussen de roosterpunten van het eerste grid gelijk gesteld aan de concentratie op een hoogte $y_* = 0$. Dan laat de continuïteitsvergelijking (6.62) zich voor de onderste laag als volgt in differentievorm schrijven:

$$\frac{c^1 [0] - c [0]}{\Delta t_*} = - \frac{s_* [1/2 \Delta y_*] - s_* [0]}{\Delta y_*/2} \quad (6.86)$$

Substitutie van (6.84) en (6.85) in vergelijking (6.86) geeft:

$$c^1 [0] - c [0] = \frac{2 \Delta t_*}{(\Delta y_*)^2} \left(\varepsilon_* \left[\frac{1}{2} \Delta y_* \right] + \frac{1}{2} w_* \Delta y_* \right) \cdot (c[\Delta y_*] - c [0]) \quad (6.87)$$

Tenslotte zal nog worden nagegaan welke hoeveelheid sediment op het tijdstip t_* aan de vloeistof is onttrokken. De materiaalbalans van de met sediment beladen vloeistof kan worden gevonden door integratie van (6.62) naar y_* en naar t_* :

$$\int_0^{t_*} s_* [0] dt = \left[\int_0^{y_* \max} c dy_* \right]_{t=t_*} - \left[\int_0^{y_* \max} c dy_* \right]_{t=0} \quad (6.88)$$

Hierin stelt $s_* [0]$ in het linkerlid de hoeveelheid aan de vloeistof onttrokken sediment voor, dat wel zeggen de hoeveelheid bezinkend sediment per tijdseenheid.

De hoeveelheid bezinkend sediment per tijdseenheid volgt uit (6.84). Substitutie van (6.84) in (6.88) geeft na enig omwerken:

$$w_* \int_0^{t_*} c [0] dt_* + \left[\int_0^{y_* \max} c dy_* \right]_{t=t_*} = \left[\int_0^{y_* \max} c dy_* \right]_{t=0} \quad (6.89)$$

De eerste term van het linkerlid van (6.89) geeft in dimensieloze vorm de totale sedimentatie weer. De som van de termen van het linkerlid van (6.89) moet, afgezien van numerieke onnauwkeurigheid, een konstante opleveren.

E. Beschrijving van het programma SG-1.

In bijlage 11 is het stroomschema van het programma SG1 weergegeven en in de bijlage 12a tot en met 12s is een gehele uitvoer van het programma SG1 weergegeven met enkele verklaringen voor de verschillende in het programma voorkomende onderdelen.

Aan de hand van bijlage 12a tot en met 12s volgen in het onderstaande nog enkele aanvullende opmerkingen. Voordat met de berekening van de dimensieloze schuifspanningssnelheid p_* wordt begonnen, worden eerst de dimensieloze schuifspanningssnelheden tengevolge van de horizontale zout-zoetgradiënt uitgerekend. Deze grootheden worden in het programma SALT1 en SALT2 genoemd.

SALT1 is de dimensieloze schuifspanningssnelheid tengevolge van de horizontale zout-zoetgradiënt aan de bodem en SALT2 is de bijdrage aan de in de tijd veranderende dimensieloze schuifspanningssnelheid op verschillende hoogten boven de bodem tengevolge van het horizontale dichtheidsverschil.

Volgens (6.31) is de over het getij gemiddelde schuifspanning tengevolge van een horizontale zout-zoetgradiënt en het verhang van de waterspiegel gelijk aan:

$$\bar{\tau} = -\frac{1}{2} g (y_h - y)^2 \frac{d\rho_w}{dx} - \rho_w g (y_h - y) \frac{\bar{dy}_h}{dx} \quad (6.90)$$

Voor de bodem $y=0$ geldt:

$$\frac{\bar{\tau}}{\rho_w} = -\frac{1}{2} \frac{g}{\rho_w} y_h^2 \frac{d\rho_w}{dx} - g y_h \frac{\bar{dy}_h}{dx} \quad (6.91)$$

De eerste term van het rechterlid van (6.91) stelt de bijdrage aan de schuifspanning voor van het horizontale dichtheidsverschil en de tweede term de bijdrage tengevolge van het verhang van de waterspiegel.

Dimensieloos maken van de eerste term van het rechterlid van (6.91) geeft:

$$p_* b = \sqrt{\kappa^2 \frac{g T_o}{2 \rho_w} y_*^2 \max \frac{d\rho_w}{dx}} \quad (6.92)$$

In programmataal wordt dit met $\kappa = 0.4$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ en $T_o = 44700 \text{ s}$:

$$\text{SALT1} = 0.4 * 9.995 * (10 ** 4) * \text{SQRT}((\text{YMAX} ** 2) * \text{DELRO} / (\text{ROMEAN} * \text{WAY})) \quad (6.93)$$

waarin:

DELRO = dichtheidsverschil

ROMEAN = gemiddelde dichtheid

WAY = afstand waarover het dichtheidsverschil geldt.

Voor de schuifspanningssnelheid tengevolge van het verhang van de waterspiegel wordt in het programma een konstante, DELH genaamd, ingevoerd.

De bijdrage aan de verandering in de tijd van de schuifspanningssnelheid op verschillende hoogten boven de bodem is voor wat betreft het horizontale dichtheidsverschil in dimensieloze vorm gelijk aan de tweede term van het rechterlid van (6.54) en wordt SALT2 genoemd:

$$\begin{aligned} \text{SALT2} &= \kappa^2 \frac{g T_o^2}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx} \\ &= 31.97 * (10 ** 8) * \text{DELRO} / (\text{ROMEAN} * \text{WAY}) \quad (6.94) \end{aligned}$$

Na de berekening van SALT1 en SALT2 volgt op ieder tijdstip t_* de berekening van p_* en c in het onderste rooster. De randvoorwaarde aan de bodem voor p_* wordt op de volgende manier ingevoerd:

$$\text{PNUL2:} = (\text{PNUL1} - \text{SALT1} + \text{DELH}) \quad (6.95)$$

waarin PNUL1 de harmonische component van de dimensieloze schuifspanningssnelheid voorstelt en SALT1 en DELH de hierboven beschreven componenten.

Voor de berekening van p_* in de eerste vier punten van het eerste rooster wordt vervolgens de procedure "GRID(J)" aangeroepen waarin met behulp van differentievergelijking (6.67) de dimensieloze schuifspanningssnelheid p_* wordt uitgerekend.

De differentievergelijking wordt in het computerprogramma op de volgende manier weergegeven:

$$\begin{aligned} P(/I,A/) := & \text{PNU} + Y * \text{SQRT}(1 - Y/Y\text{MAX}) * \text{DELLTY} * (\text{PKOUD} + \\ & - 2\text{PKNU} + \text{PKNIEW}) + Y * \text{SQRT}(1 - Y/Y\text{MAX}) * \text{SALT2} \end{aligned} \quad (6.96)$$

waarin P(/I,A/) de dimensieloze schuifspanningssnelheid in het I^{de} punt van het A^{de} rooster op het tijdstip $t_* + \Delta t_*$ voorstelt. In de differentievergelijking (6.67) wordt P(/I,A/) voorgesteld door $p_*^1 [y_*]$.

De in differentievergelijking (6.67) voorkomende grootheden zijn in vergelijking (6.96) als volgt benoemd:

$$\text{PNU} = p_* [y_*] \text{ op tijdstip } t_*$$

$$\text{PKOUD} = p_* [y_* - \Delta y_*] \cdot \text{abs}(p_* [y_* - \Delta y_*]) \text{ op tijdstip } t_*$$

$$\text{PKNU} = p_* [y_*] \cdot \text{abs}(p_* [y_*]) \text{ op tijdstip } t_*$$

$$\text{PKNIEW} = p_* [y_* + \Delta y_*] \cdot \text{abs}(p_* [y_* + \Delta y_*]) \text{ op tijdstip } t_*$$

$$\text{PNIEW} = p_* [y_* + \Delta y_*] \text{ op tijdstip } t_*$$

$$\text{DELLTY} = \Delta t_* / (\Delta y_*)^2$$

$$Y = y_* = \text{hoogte boven de bodem}$$

$$Y\text{MAX} = y_{* \text{ max}} = \text{diepte}$$

Vanaf het moment dat de bekend veronderstelde sedimentconcentratievertikaal wordt ingelezen worden ook op ieder tijdstip t_* de concentraties uitgerekend in de eerste vier punten van het onderste rooster.

De concentratie aan de bodem wordt berekend met behulp van vergelijking (6.87). Deze vergelijking wordt in het computerprogramma op de volgende manier geschreven:

$$\text{CNUL} := \text{CNUL} + 2 * \text{DELY} * (\text{EPSNEW} + \text{WY}) * (\text{CNEW} - \text{CNUL}) \quad (6.97)$$

waarin:

$$\text{EPSNEW} := .25 * \text{DELY} * \text{SQRT}(1 - .5 * \text{DELY} / \text{YMAX}) * \text{ABS}(\text{PNUL2} + \text{PNIEW}) \quad (6.98)$$

De verschillende parameters die voorkomen in vergelijking (6.97) en (6.98) stellen het volgende voor:

CNUL in het linkerlid = $c^1 [0]$ = concentratie aan de bodem op tijdstip $t_* + \Delta t_*$
 CNUL in het rechterlid = $c [0]$ = concentratie aan de bodem op tijdstip t_*

$\text{DELY} = 2 \Delta t_* / (\Delta y_*)^2$
 $\text{EPSNEW} = \varepsilon_* \left[\frac{1}{2} \Delta y_* \right]$

$$\text{DELY} = \Delta y_*$$

$$\text{WY} = .5 * w_* \Delta y_*$$

$$\text{CNEW} = c [\Delta y_*] \text{ op tijdstip } t_*$$

Met behulp van de procedure GRID(J) worden nu de concentraties in de eerste vier punten van het eerste rooster uitgerekend met behulp van differentievergelijking (6.68) die in het programma als volgt wordt geschreven:

$\text{C}(/I,A/) := \text{CNEW} + \text{DELLTY} * ((\text{EPSNEW} + \text{WY}) * \text{CNEW} +$
 $- (\text{EPSNEW} + \text{EPSOLD}) * \text{CNEW} + (\text{EPSOLD1} - \text{WY}) * \text{COLD}) \quad (6.99)$

waarin:

$$\text{EPSNEW} := .5 * (\text{Y} + .5 * \text{DELLY}) * \text{SQRT}(1 - (\text{Y} + .5 * \text{DELLY}) / \text{YMAX}) * \text{ABS}(\text{PNU} + \text{PNIEW}) \quad (6.100)$$

De verschillende parameters voorkomende in vergelijking (6.99) en (6.100) zijn gelijk aan de volgende parameters voorkomende in differentievergelijking (6.68):

$$C_{NOW} = c [y_{*}] \text{ op tijdstip } t_{*} + \Delta t_{*}$$

$$EPS_{NEW} = \epsilon_{*} [y_{*} + \frac{1}{2} \Delta y_{*}]$$

$$WY = \frac{1}{2} w_{*} \Delta y_{*}$$

$$C_{NEW} = c [y_{*} + \Delta y_{*}] \text{ op tijdstip } t_{*}$$

$$EPS_{OLD} = \epsilon_{*} [y_{*} - \frac{1}{2} \Delta y_{*}]$$

$$C_{OLD} = c [y_{*} - \Delta y_{*}] \text{ op tijdstip } t_{*}$$

$$P_{NU} = p_{*} [y_{*}] \text{ op tijdstip } t_{*}$$

$$P_{NIEW} = p_{*} [y_{*} + \Delta y_{*}] \text{ op tijdstip } t_{*}$$

Als het aantal tijdstappen ($=t_{*}/\Delta t_{*}$) oneven is worden alleen de waarden van p_{*} en c uitgerekend in het eerste rooster met behulp van vergelijkingen (6.95) tot en met (6.100).

Als het aantal tijdstappen deelbaar is door twee worden ook de waarden van p_{*} en c uitgerekend in het tweede rooster met behulp van vergelijkingen (6.96), (6.99) en (6.100). In het geval dat het aantal tijdstappen deelbaar is door vier worden vervolgens de waarden van p_{*} en c in het derde rooster, enzovoort (zie ook paragraaf VI.4). De berekening van de concentratie c in het m^{de} rooster (totaal aantal roosters is gelijk aan m) geschiedt met behulp van de differentievergelijkingen (6.82) en (6.83). De vergelijkingen worden in het computerprogramma als volgt geschreven:

$$\begin{aligned} c(3, m/) := & C_{NOW} + DELTY * (C_{NEW} * (24 * EPS_{NEW} + 16 * WY) + \\ & + C_{NOW} * (-30 * EPS_{NEW} - 15 * EPS_{OLD} + 5 * WY) + \\ & + 15 * C_{OLD} * (EPS_{OLD} - WY) + 6 * c(/5, m-1) * \\ & * (EPS_{NEW} - WY)) / 15 \end{aligned} \quad (6.101)$$

en:

$$\begin{aligned}
c(/4,m/) := & \text{CNEW} + 4 * \text{DELLTY} * (-\text{CNEW} * (12 * \text{EPSNEW} + 8 * \text{WY}) + \\
& + \text{CNOW} * (15 * \text{EPSNEW} - 10 * \text{WY}) + \\
& - 3 * c(/5,m-1/) * (\text{EPSNEW} - \text{WY})) / 15 \qquad (6.102)
\end{aligned}$$

waarin:

$c(/3,m/)$ = de concentratie in het derde punt van het m^{de} rooster op het tijdstip $t_* + \Delta t_*$

CNOW = de concentratie in het derde punt van het m^{de} rooster op het tijdstip t_*

CNEW = $c(/4,m/)$ op het tijdstip t_*

$$\text{EPSNEW} = \varepsilon_* \left[y_{* \text{ max}}^1 - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right]$$

$$\text{WY} = \frac{1}{2} w_* \Delta y_*^1$$

$$\text{EPSOLD} = \varepsilon_* \left[y_{* \text{ max}}^1 - \frac{1}{2} \Delta y_*^1 \right]$$

COLD = $c(/2,m/)$ op het tijdstip t_*

$c(/4,m/)$ in vergelijking (6.102) = de concentratie in het vierde punt van het m^{de} rooster op het tijdstip $t_* + \Delta t_*$

$$\text{DELLTY} = \Delta t_* / (\Delta y_*^1)^2$$

In het bovenstaande is y_*^1 gelijk aan $\frac{1}{4} y_{* \text{ max}}^1$.

Tijdens de berekening worden iedere PRINTN tijdstappen 11 waarden van p_* en c op verschillende hoogten boven de bodem plus de waarde van p_* en c aan de bodem afgedrukt.

Het aantal tijdstappen per golfperiode is (zie paragraaf VI.4) gelijk aan $2^{m+5} / y_{* \text{ max}}^1$. De punten in het j^{de} rooster worden iedere $(2^{j-1})^{\text{de}}$ tijdstap uitgerekend (d.w.z. het eerste rooster wordt iedere tijdstap berekend, het tweede rooster als het aantal tijdstappen deelbaar is door twee, het derde als het aantal tijdstappen deelbaar is door vier, enzovoort).

Uit bovenstaande volgt dat de punten van het m^{de} rooster

per golfperiode:

$$(2^{m+5}/y_{* \max})/2^{m-1} = 2^6/y_{* \max} = 64/y_{* \max}$$

maal wordt uitgerekend.

Gedurende de laatste golfperiode dat p_* en c berekend worden, wordt het aantal malen dat de punten in het m^{de} rooster worden berekend geteld (variabele TIM). Als deze variabele de waarde $TIMMAX = 2/y_{* \max}$ heeft bereikt worden de waarden van p_* , respectievelijk c , voor de verschillende roosterpunten opgeslagen in respectievelijk het UT-array (UT [1:mmm, 1:32]) en het CONC-array (CONC [1:mmm, 1:32]), waarin mmm gelijk is aan $3m$.

Als dit gebeurd is wordt de variabele TIM weer nul.

De bijbehorende y_* waarden worden opgeslagen in het array YY [1:mmm].

Na het bovenstaande worden met behulp van Fourier-analyse de modulus en de fase van de eerste en tweede harmonische van p_* berekend. Dit geschiedt met behulp van de procedure FORIER(ARRAY). Ook worden het gemiddelde en het maximum en minimum van p_* bepaald.

Na de Fourier-analyse worden de p_* -waarden, opgeslagen in het UT-array, geïntegreerd, waardoor de snelheid u verkregen wordt.

De integratie wordt rij voor rij uitgevoerd (variabele y_* en konstante t_*) van grote y_* -waarden naar kleine y_* -waarden.

Iedere p_* -waarde in het UT-array wordt vervangen door een waarde voor u op dezelfde plaats en dezelfde tijd met behulp van de trapeziumregel.

Volgens (6.50) is:

$$p_* = \frac{\kappa y \sqrt{1-y/y_h}}{u_0} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Hieruit volgt dat u gelijk is aan:

$$u = \frac{U_0}{\kappa} \int \frac{P_*}{\kappa y \sqrt{1-y/y_h}} dy \quad (6.103)$$

In het computerprogramma wordt het volgende uitgerekend:

$$UT [j, TIME] = \sum_{n=mmm}^1 (UT [n, TIME] + UT [n-1, TIME]) \frac{\Delta y_* [n]}{2\kappa y_* [n] \sqrt{1 - \frac{y_* [n]}{y_* \max}}} \quad (6.104)$$

waarin n loopt van mmm tot j en waarin $\Delta y_* [n]$ gelijk is aan $y_* [n] - y_* [n-1]$.

Uit (6.103) en (6.104) volgt:

$$UT [j, TIME] = \frac{-u}{U_0} + f(t) \quad (6.105)$$

Het minteken in (6.105) komt voort uit het feit dat geïntegreerd wordt van hoge y_* -waarden naar lage y_* -waarden. Tijdens de integratie wordt als randvoorwaarde gesteld dat de snelheid u gelijk is aan nul op $y_* = y_* \max$ in plaats van $u = U$ op $y_* \max$.

Hieruit volgt dat de funktie van t in (6.105) gelijk is aan U/U_0 en dat de berekende waarde van $UT [j, TIME]$ gelijk is aan:

$$UT [j, TIME] = \frac{U-u}{U_0} \quad (6.106)$$

Dit wordt met uitdrukking (6.56) voor U_0 :

$$UT [j, TIME] = \frac{U-u}{\frac{\Delta}{u} \sqrt{f_c/2}} \quad (6.107)$$

In het programma SG1 wordt, om rekentijd te bekorten, afgeweken van de voorwaarde dat de afstand tussen de roosterpunten van het eerste rooster gelijk moet zijn aan $1/33r$, zoals in de programma's TA1 en SA1 (zie hoofdstuk V).

Om echter toch een goed inzicht te krijgen in het verloop van de snelheid dicht bij de bodem, wordt in het programma

SG1 allereerst het verloop van p_* in de laag net boven de bodem benaderd door een 7e-graads polynoom.

Bij de integratie van p_* naar u wordt de waarde van de snelheid op $r/33$ bepaald door integratie van de 7e-graads polynoom.

Hierdoor is het mogelijk om de snelheid te berekenen dicht bij de bodem.

Bijlage 31 toont de oppervlaktesnelheid op twee manieren berekend, te weten:

- 1) zonder toepassen van de interpolatie, met een roosterafstand gelijk aan $1/16$ van de diepte ($y_o = y_h/16$)
- 2) eveneens met $y_o = y_h/16$, maar met een roosterafstand gelijk aan $1/8$ van de diepte en toepassen van de interpolatie.

Evenals voor p_* is gebeurd worden vervolgens met behulp van Fourier-analyse de modulus en de fase van de eerste en tweede harmonische van u bepaald. Ook worden het gemiddelde en het maximum en minimum van u bepaald.

De integratie van de snelheid u naar de gemiddelde snelheid \bar{u} (UMEAN-array) en de integratie van de concentratievertikaal geschiedt op analoge wijze als de integratie van p_* naar u .

In het UMEAN-array is het volgende opgeslagen:

$$\text{UMEAN}[j, \text{TIME}] = \frac{U - \bar{u}}{\bar{u} \sqrt{f_c/2}}$$

De integratie van de concentratievertikaal is nodig voor het opstellen van de sedimentbalans.

Uit deze integratie volgt de op op dat moment in de vertikaal aanwezige totale hoeveelheid sediment, dit getal wordt iedere keer dat de integratie wordt uitgevoerd opgeslagen in het CINT-array. Op ieder tijdstip dat de concentra-

tie in het eerste rooster wordt uitgerekend wordt ook de hoeveelheid sediment die gedurende een tijdstap Δt_* bezonken is berekend.

De som van de totale hoeveelheid sediment in een vertikaal en de bezonken hoeveelheid sediment gedurende een bepaalde periode wordt opgeslagen in het CTOT-array.

Het transport van sediment als functie van de tijd en van de diepte wordt berekend door het produkt van de waarden voor u , verzameld in het UT-array, en de waarden voor c , verzameld in het CONC-array.

Vervolgens worden berekend de waarden voor de wrijvingscoëfficiënt f_c als functie van r/y_h (= ribbelhoogte/diepte) en als functie van de tijd.

Uit (6.55) volgt dat:

$$f_c = \frac{2 \hat{\tau}_b / \rho_w}{\hat{u}^2} = \frac{2 (\hat{u}_b^*)^2}{\hat{u}^2} \quad (6.108)$$

Bovenstaande is eigenlijk de topwaarde van f_c . Wordt echter f_c als functie van de tijd bekeken dan gaat (6.108) over in:

$$f_c = \frac{2 (\hat{u}_b^*)^2}{\hat{u}^2} \quad (6.109)$$

In het UT-array zijn na de integratie van p_* naar u de volgende waarden opgeslagen:

$$UT [i, TIME] = \frac{U-u}{\hat{u} \sqrt{f_c/2}} \quad (6.110)$$

In het UP-array zitten nog de waarden voor p_* :

$$UP [i, TIME] = \frac{u^*}{\hat{u} \sqrt{f_c/2}} \quad (6.111)$$

Tenslotte zijn in het UMEAN-array de waarden voor de gemiddelde snelheid \bar{u} opgeslagen:

$$\text{UMEAN} [i, \text{TIME}] = \frac{U - \bar{u}}{\hat{u} \sqrt{f_c/2}} \quad (6.112)$$

Daar als randvoorwaarde aan de bodem geldt dat de snelheid u gelijk is aan nul op $1/33$ van de ribbelhoogte r , is het met behulp van (6.110) tot en met (6.112) mogelijk de wrijvingscoëfficiënt f_c volgens (6.109) uit te rekenen.

Daar vlak bij de bodem geldt dat $u=0$, geldt voor een bepaald tijdstip voor dit punt dicht bij de bodem volgens (6.110):

$$\text{UT} [i, \text{TIME}] = \frac{U}{\hat{u} \sqrt{f_c/2}} \quad (6.113)$$

Uitdrukking (6.113) gesubstitueerd in (6.112) geeft:

$$\text{UMEAN} [i, \text{TIME}] = \text{UT} [i, \text{TIME}] - \frac{\bar{u}}{\hat{u} \sqrt{f_c/2}} \quad (6.114)$$

Hieruit volgt:

$$\bar{u} = (\text{UT} [i, \text{TIME}] - \text{UMEAN} [i, \text{TIME}]) * \hat{u} \sqrt{f_c/2} \quad (6.115)$$

Uit (6.111) volgt voor een punt net boven de bodem:

$$\hat{u} \sqrt{f_c/2} = \frac{u_b^*}{\text{UP} [i, \text{TIME}]} \quad (6.116)$$

Substitutie van (6.116) in (6.115) geeft:

$$\frac{u_b^*}{\bar{u}} = \frac{\text{UP} [i, \text{TIME}]}{\text{UT} [i, \text{TIME}] - \text{UMEAN} [i, \text{TIME}]} \quad (6.117)$$

Uitdrukking (6.117) ingevuld in (6.109) geeft voor f_c :

$$f_c [i, \text{TIME}] = \frac{2 \{ \text{UP} [i, \text{TIME}] \}^2}{\{ \text{UT} [i, \text{TIME}] - \text{UMEAN} [i, \text{TIME}] \}^2}$$

Met behulp van vergelijking (3.29):

$$f_c = \frac{2g}{c_h^2}$$

uit hoofdstuk III is; als de waarden van f_c als functie van r/y_h en de tijd bekend zijn, de Chézy-coëfficiënt C_h als functie van r/y_h en de tijd te bepalen:

$$CH [i, TIME] = \sqrt{\frac{2g}{FC [i, TIME]}} \quad (6.119)$$

Ter vergelijking worden ook berekend de waarden voor f_c en C_h als functie van r/y_h voor een stationaire stroom. In het computerprogramma SG1 worden f_c en C_h in een stationaire stroom als volgt berekend:

$$\begin{aligned} FC &= \frac{2 \kappa^2}{\left\{ \ln \left(\frac{33 * YMAX}{e * 33 * YY [i]} \right) \right\}^2} \\ &= \frac{0.32}{\left\{ \ln \left(\frac{YMAX}{2.718 * YY [i]} \right) \right\}^2} \end{aligned} \quad (6.120)$$

en:

$$CH = \sqrt{\frac{2g}{FC}} = \sqrt{\frac{10}{.16}} * \ln \left(\frac{YMAX}{2.718 * YY [i]} \right) \quad (6.121)$$

Tenslotte nog een opmerking over de bepaling van de afstand tussen de roosterpunten van het eerste (het kleinste) rooster.

In de programma's TA1 en SA1 wordt deze Δy_* bepaald door de in hoofdstuk V gegeven relatie:

$$\Delta y_* = \frac{r}{33 \kappa Y_o} \quad (5.17)$$

Hieruit volgt bij een bepaalde ribbelhoogte r de minimale waarde voor Δy_* .

Uit de stabiliteitsvoorwaarde volgt (6.71):

$$\Delta y_* = 2^{-m-1} y_* \max \quad (6.71)$$

Gelijkstellen van deze twee uitdrukkingen geeft als $y_* \max$

bekend is het aantal roosters m .

In het programma SG1 wordt echter geen gebruik gemaakt van relatie (5.17) ter bepaling van de minimale waarde voor y_* . Het blijkt namelijk dat als r erg klein wordt, Δy_* ook erg klein wordt, wat resulteert in een groot aantal roosters. Dit heeft tot gevolg dat de rekentijd erg toeneemt.

Daarom wordt in het programma SG1 een keuze gemaakt voor m , die niet al te hoog ligt, bijvoorbeeld 3 of 4.

Met behulp van (6.71) wordt dan y_* uitgerekend.

Er bestaat dus in het programma SG1 geen direct verband meer tussen r en y_* . De ribbelhoogte r wordt in dit programma ingevoerd door het inlezen van een waarde voor de variabele R die gelijk is aan:

$$R = \frac{r}{\Delta y} = \frac{\text{ribbelhoogte (in m)}}{\text{roosterafstand (in m)}}$$

Deze variabele R is van belang bij de berekening van de snelheid u in het gebied net boven de bodem, zie eerder deze paragraaf.

In de bijlagen 13a tot en met 13r is een uitvoer weergegeven van één van de berekende gevallen, waarin alles wat met het programma SG1 wordt uitgerekend staat vermeld.

VII. Berekende gevallen en resultaten.

De verschillende gevallen die uitgerekend zijn met het computerprogramma SG1 hebben alle betrekking op de situatie na de uitvoering van de bochtafsnijding bij Bath. Deze situatie is weergegeven op bijlage 1.

Op bijlage 14 zijn een aantal vloed- en ebwegen weergegeven, die berekend zijn met behulp van stroomsnelheids gegevens van het hydraulische model in Borgerhout.

Hieruit blijkt dat de komberging van het Noordelijk Bekken grotendeels wordt gevuld vanuit de zeezijde.

Water dat met eb de overlaat passeert, dringt niet verder het bekken binnen dan ca. 5 km.

Op bijlage 15 is de verhouding weergegeven tussen het momentane slibgehalte en het over het getij gemiddelde slibgehalte bij Bath als functie van de tijd.

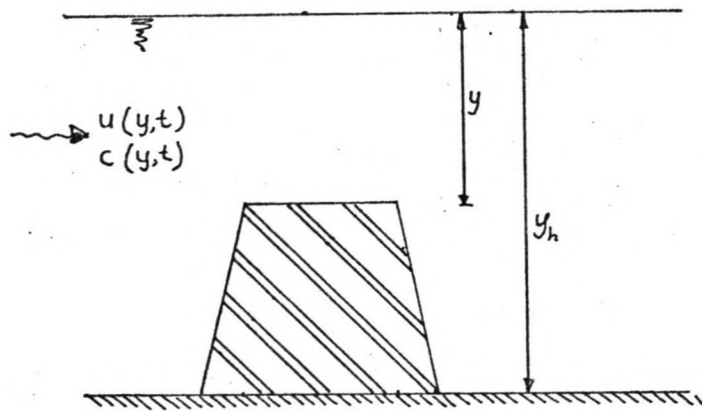
Daaruit blijkt, dat het slibgehalte per getij gedurende ongeveer 6 uur hoger is dan het gemiddelde slibgehalte.

Water met dit slibgehalte dringt slechts ongeveer 2 km. het bekken binnen.

De maximale snelheid, die het water met dit slibgehalte bereikt, bedraagt niet meer dan ca. 0.30 m/s.

Met de uitgevoerde berekeningen is geprobeerd een indruk te krijgen van de orde van grootte van de hoeveelheid slib die, binnenkomend via de overlaat, binnen het bekken zal bezinken.

Voor de schematisering van de water- en sedimentbeweging over de overlaat is uitgegaan van een coördinatenstelsel, dat met de over de vertikaal gemiddelde watersnelheid meebeweegt. Op een bepaald moment wordt slibrijk water met een bepaalde gemiddelde snelheid over de overlaat gevoerd, waarvan de concentratie-verdeling bekend verondersteld wordt.



figuur 1.

In totaal zijn vijf gevallen uitgerekend waarvoor steeds geldt:

$$y_h = 15.4 \text{ m}$$

$$r = 0.03 \text{ m}$$

$$\hat{u} = 0.30 \text{ m/s}$$

In het geval van een stationaire stroom zou gelden:

$$C_h = 18 \log \left(12 \cdot \frac{y_h}{r} \right) = 68.2 \sqrt{\text{m/s}}$$

en:

$$u_b^* = u \sqrt{g/C_h} = 1.378 \text{ cm/s}$$

Voor het verhang I wordt dan gevonden:

$$I = u^2 / C_h y_h^2 = 1.256 \times 10^{-6}$$

In de berekende gevallen wordt de maximale schuifspanningssnelheid aan de bodem gelijk genomen aan de bovenstaande 1.378 cm/s.

De referentiesnelheid U_0 , gedefinieerd in paragraaf VI.4, is gelijk aan deze schuifspanningssnelheid. De topwaarde van het periodieke verhang wordt gelijk genomen aan 1.256×10^{-6} .

Nu geldt dus:

$$\hat{u}_b^* = 1.378 \text{ cm/s} (=U_0)$$

$$\hat{I} = 1.256 \times 10^{-6}$$

De dimensieloze diepte $y_{* \max}$ is volgens (6.51) gelijk aan:

$$y_{* \max} = \frac{y_h}{\kappa y_o} = \frac{y_h}{\kappa U_o T_o}$$

Met $T_o = 44700 \text{ s}$, $y_h = 15.4 \text{ m}$, $U_o = 1.378 \text{ cm/s}$ en $\kappa = 0.4$ wordt $y_{* \max}$:

$$y_{* \max} = 6.25 \cdot 10^{-2} = 1/16$$

Het aantal roosters m is in alle gevallen gelijk aan 3. Volgens (6.71) is de afstand tussen de punten van het eerste rooster in dimensieloze vorm gelijk aan:

$$\Delta y_* = 2^{-m-1} \cdot y_{* \max}$$

Voor de hier berekende gevallen wordt Δy_* dus gelijk aan 2^{-8} .

Uitgedrukt in meters geeft dit:

$$\Delta y = \kappa U_o T_o \Delta y_* = 0.96 \text{ m}$$

In de gevallen waar gerekend wordt met een horizontale zoutgradiënt wordt het volgende ingevoerd:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dichtheid te Hansweert} = 1016 \text{ kg/m}^3 \\ \text{dichtheid te Bath} = 1012 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{D E L R O} = 4 \\ \text{R O M E A N} = 1014 \end{array}$$

de afstand tussen Hansweert en Bath = 15000 m (=WAY).

Dit ingevuld in de term $\frac{1}{2} \frac{y_h}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx}$ geeft:

$$\frac{1}{2} \frac{y_h}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx} = \frac{1}{2} * \frac{15.4}{1014} * \frac{4}{15000} = 2.021 * 10^{-6}$$

De grootheden $\frac{dy_h}{dx}$, de korreldiameter D en de valsnelheid w zijn in de verschillende gevallen als volgt gekozen.

Tabel 1. Karakteristieken van de berekende gevallen				
geval	$\frac{\bar{d}y_h}{dx}$	korreldia- meter	valsnelheid in mm/s	tijdstip inlezen van concentraties
1	$-1.892 \cdot 10^{-6}$	20 μ	0.30	1.25 T
2	$-1.892 \cdot 10^{-6}$	50 μ	1.70	1.25 T
3	$-1.529 \cdot 10^{-6}$	20 μ	1.30	1.25 T
4	0	50 μ	1.70	1.25 T
5	$-1.892 \cdot 10^{-6}$	50 μ	1.70	1.4375 T

Geval 1 zou als basisberekening beschouwd kunnen worden terwijl de gevallen 2, 3, 4 en 5 varianten hierop zijn. In de gevallen 2 en 5 is het stroompatroon gelijk aan dat van geval 1. In geval 2 en 5 wordt echter het gedrag van een grover sediment, met korreldiameter 50 μ in plaats van 20 μ bekeken. Verder wordt de bekend veronderstelde concentratieverdeling in geval 5 op een later tijdstip ingelezen, om te onderzoeken of met behulp van het computerprogramma SG1 het gedrag van de sedimentatie rond de kentering is na te bootsen. In geval 3 is het verhang dat de dichtheidsgradiënt moet compenseren kleiner gekozen, zodat een resulterende stroming in de vloedrichting ontstaat. In geval 4 is aangenomen dat er geen zout-zoet-gradiënt is, daarom is in dit geval $\frac{\bar{d}y_h}{dx}$ gelijk aan nul.

Tabel 2. Grootte van $\bar{u}_b^* / \hat{u}_b^*$					
geval	$\frac{d\bar{y}_h}{dx}$	$\frac{d\bar{y}_h}{dx} + \frac{1}{2} \frac{y_h}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dx}$	$\frac{1 + (\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*)^2}{B(\hat{u}_b^* / \bar{u}_b^*)}$	$\frac{\hat{u}_b^*}{\bar{u}_b^*}$	$\frac{\bar{u}_b^*}{\hat{u}_b^*}$
1, 2 en 5	-1.892×10^{-6}	0.129×10^{-6}	9.71	12.28	0.08141
3	-1.529×10^{-6}	0.492×10^{-6}	2.55	3.02	0.3314
4	0	0	-	∞	0

In tabel 2 zijn de waarden voor een aantal uit de basisgegevens af te leiden grootheden weergegeven, die in paragraaf VI-3b ter sprake zijn gekomen.

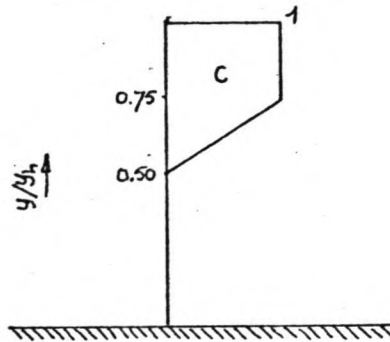
De tweede en derde kolom van tabel 2 worden berekend met behulp van de eerder gegeven waarden voor de verschillende grootheden. De waarden in de vierde kolom worden bepaald uit formule (6.42) en de waarden in de vijfde kolom uit bijlage 10 en formule (6.43).

In het programma wordt als multistap aangehouden, dat de harmonische component van u_b^* gelijk is aan nul, met andere woorden op het tijdstip $t=0$ is u_b^* gelijk aan \bar{u}_b^* , terwijl u_b^* toeneemt.

In de gevallen 1, 2, 3 en 4 wordt vervolgens gedurende 1.25 getijperiode en in geval 5 gedurende 1.4375 getijperiode alleen de interne schuifspanningssnelheid berekend. Na één periode is het numerieke model ingespeeld, dat wil zeggen dat op iedere hoogte de grootte van u^* zich aan de periodiciteit heeft aangepast (zie ook paragraaf VI.3a).

Alle in de bijlagen weergegeven resultaten hebben betrekking op de tweede berekende getijperiode, waarbij als multistap-

stip het moment wordt gekozen, dat het model wordt geacht te zijn ingespeeld (dus na één doorgerkende periode). Na 1.25 getijperiode heeft u_b^* zijn maximale waarde in eb-richting bereikt. In de gevallen 1, 2, 3 en 4 wordt dit als multijdstip voor het "lozen" van de slibconcentratie genomen. In geval 5 wordt als multijdstip voor het "lozen" van de slibconcentratie 1.4375 getijperiode genomen, dit is gelijk aan ca. 1 uur voor laag water. Het aangenomen verloop van de beginconcentratie in de gevallen 1, 2, 3 en 4 is weergegeven in figuur 2; deze wordt gelijk aan 1 gesteld in de bovenste laag ter hoogte van $1/4$ van de waterdiepte en van hieraf neemt deze lineair af tot nul ter hoogte van de halve waterdiepte.



figuur 2.

In geval 5 wordt op het tijdstip $t = 1.4375 T$ een concentratievertikaal ingelezen zoals weergegeven in bijlage 16.

Dit is een concentratievertikaal die overeenkomt met een meting gedaan in het vaarwater boven Bath op een tijdstip ca. 1 uur voor laag water.

De met het computerprogramma gevonden, over de vertikaal gemiddelde snelheden als functie van de tijd zijn weergegeven in bijlage 17a en 17b.

De bijbehorende snelheidsvertikalen staan in bijlagen 18a en 18b.

Bijlagen 19a, 19b en 19c tonen deze snelheidsvertikalen opnieuw, doch nu op half-logaritmisch papier uitgezet. Bijlage 19a geeft de snelheidsvertikalen van geval 1, 2 en 5, bijlage 19b van geval 3 en bijlage 19c van geval 4. In geval de stroom stationair zou zijn geweest, en wanneer dichtheidsgradiënten geen rol zouden spelen, zouden bijlagen 19a, b en c rechte lijnen moeten vertonen, die alleen de y-as in het punt $y=y_0$ zouden snijden, waarbij y_0 gelijk is aan $r/33$.

In werkelijkheid zijn de snelheidsvertikalen op half-logaritmisch papier inderdaad tamelijk rechtlijnig, maar zij snijden de y-as niet alleen in hetzelfde punt; de schijnbare ribbelhoogte varieert sterk gedurende het getij.

Overeenkomstig de bewerking van in de Westerschelde gemeten snelheidsvertikalen [lit.5] is deze schijnbare ribbelhoogte gelijk gekozen aan 33 maal de schijnbare z_0 , waarbij deze laatste volgt uit de y-coördinaat van het snijpunt van de doorgetrokken snelheidsvertikaal met de y-as (zie bijlage 19).

In bijlagen 20a, b en c is de schijnbare ribbelhoogte uitgezet tegen de tijd. Ter verduidelijking is tevens de bijbehorende over de vertikaal gemiddelde stroomsnelheid aangegeven (overeenkomstig bijlagen 17).

Uit de bijlagen 18 tot en met 20 blijkt, dat de eb- en vloedvertikalen essentieel van elkaar in karakter verschillen en de stroomvertikaal bij de kentering van vloed naar eb eveneens sterk afwijkt in karakter van van de stroomvertikaal bij kentering van eb naar vloed.

De schijnbare ribbelhoogten bij eb zijn veel groter dan die bij vloed; een verschijnsel dat ook in de natuur werd

waargenomen [lit.5]. De schijnbare ribbelhoogte lijkt minima te vertonen bij kentering van vloed naar eb en ten tijde van maximale vloedsnelheid.

In de bijlagen 21 tot en met 25 is aangegeven hoe de slibconcentraties in de tijd verlopen. Op de horizontale as in de tijd uitgezet, op de verticale de relatieve hoogte (= hoogte boven de bodem/waterdiepte).

Getekend zijn de lijnen met een konstant slibgehalte.

De bijlagen 21a, b tot en met 25a, b hebben respectievelijk betrekking op de gevallen 1, 2, 3, 4 en 5.

De tijdschaal op de horizontale as in de bijlagen a is een kwart van de tijdschaal in de bijlagen b. Bijlagen 21a, 22a, 23a, 24a en 25a tonen dus als het ware een detail van de bijlagen 21b, 22b, 23b, 24b en 25b.

De bijlagen tonen duidelijk het beeld hoe het slib zich eerst vanuit de bovenste lagen verdeelt over de totale vertikaal, terwijl het val-mechanisme ook duidelijk naar voren komt. In de bijlagen is tevens met een lijn de val-snelheid in stil water weergegeven. In sommige bijlagen is tevens opwerveling naar hogere lagen en toename van de concentratie aldaar te zien, wanneer de watersnelheden, en dus de turbulentie, weer toeneemt.

Bijlage 25 geeft het percentage oorspronkelijk in het water aanwezige slib, dat bezonken is, als funktie van de tijd.

VIII. Vergelijking van de wrijvingscoëfficiënten.

In dit hoofdstuk zullen de op verschillende manieren en voor de verschillende stroomcondities berekende wrijvingscoëfficiënten onderling met elkaar worden vergeleken.

In bijlage 27 is voor geval 4 (zonder zoutgradiënt) het verloop in de tijd weergegeven van de aangenomen bodemschuifspanningssnelheid u_b^* en de met het computerprogramma berekende, over de vertikaal gemiddelde snelheid \bar{u} .

Opvallend is het faseverschil tussen \bar{u} en u_b^* . Uit de figuren in bijlage 27 blijkt dat het faseverschil het grootst is bij de kenteringen en dat het faseverschil nul is op het moment van maximale over de vertikaal gemiddelde stroomsnelheden. Het met het computerprogramma berekende verloop van \bar{u} is namelijk niet zuiver harmonisch, maar \bar{u} bezit hogere harmonischen.

Tijdens de kenteringen is dit faseverschil ongeveer 5 minuten. De oorzaak van dit faseverschil rond de kentering is in dit geval het instationair zijn van de beweging (het rond de kentering overheersen van de traagheidsterm ten opzichte van de andere in de bewegingsvergelijking voorkomende verhangtermen).

In bijlage 29 zijn voor geval 1 (= geval 2 en 5) dezelfde grootheden uitgezet als functie van de tijd als in bijlage 27 gedaan is. In deze gevallen wordt rekening gehouden met een horizontale zout-zoet-gradiënt. In deze gevallen valt ook weer het faseverschil tussen \bar{u} en u_b^* op. Het faseverschil is hier het grootst bij de kentering van eb naar vloed (ongeveer 12 minuten). Op de momenten met maximale over de vertikaal gemiddelde stroomsnelheden en op het moment van de kentering van vloed naar eb is het faseverschil praktisch gelijk aan nul.

Dat het aanwezige faseverschil in dit geval groter is dan in

geval 4 is het gevolg van de aanwezige horizontale zout-zoet-gradiënt. Evenals in geval 4 speelt ook het instationair zijn van de beweging een rol in dit faseverschil. In het geval dat de beweging stationair zou zijn en dat er geen dichtheidsverschillen aanwezig zouden zijn volgt het snelheidsverloop uit:

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (8.1)$$

Uit de wet van de Chézy wordt dan voor de over de vertikaal gemiddelde snelheid \bar{u} gevonden:

$$\bar{u} = \frac{C_h}{\sqrt{g}} u_b^* \quad (8.2)$$

In de berekende gevallen wordt uitgegaan van de volgende gegevens (zie hoofdstuk VII):

$$y_h = 15.4 \text{ m}$$

$$r = 0.03 \text{ m}$$

$$C_h = 68.2 \text{ m/s}$$

Voor wat betreft de berekening van de Chézy-coëfficiënt als functie van de tijd staan in het instationaire geval met een horizontale zout-zoet-gradiënt drie manieren van berekening ter beschikking:

- 1) Uitgaande van de aangenomen bodemschuifspanningssnelheid en de met het computerprogramma berekende over de vertikaal gemiddelde snelheid \bar{u} wordt de Chézy-coëfficiënt berekend met:

$$\left[C_h \right]_I = \sqrt{g} \frac{\bar{u}}{u_b^*} \quad (8.3)$$

In bijlagen 28 en 29 is het verloop van de Chézy-waarden als functie van de tijd grafisch weergegeven voor de gevallen 4 en 1 (= geval 2 en 5).

Met het oog op deze berekening van de Chézy-coëfficiënt als functie van de tijd is nog het volgende op te merken. Op de momenten dat \bar{u} gelijk aan nul is, is de Chézy-coëfficiënt ook gelijk aan nul en op de momenten dat u_b^* gelijk aan nul is, is de Chézy-coëfficiënt onbepaald (zie bijlagen 27 en 30).

In de gevallen waarin rekening gehouden wordt met een horizontaal dichtheidsverschil treedt éénmaal per getijperiode een moment op (tijdens de kentering van eb naar vloed) waarop C_h onbepaald is. Op het moment van de kentering van vloed naar eb is in deze gevallen zowel \bar{u} als u_b^* nul (zie bijlage 30).

Uit een vergelijking van de berekende Chézy-waarden als functie van de tijd met de Chézy-waarde voor het geval dat de stroming stationair zou zijn blijkt dat op de momenten dat de snelheidsverdeling in een getijstroom het best benaderd kan worden door een logaritmische snelheidsverdeling, dat wil zeggen tijdens perioden met maximale stroomsnelheden, de verschillen tussen beide coëfficiënten gering zijn.

De met behulp van het computerprogramma berekende Chézy-coëfficiënten liggen in het algemeen tijdens de perioden met maximale stroomsnelheden iets hoger dan de Chézy-coëfficiënten voor een stationaire stroom. De oorzaak hiervan moet vooral gezocht worden in het feit dat de snelheidsverdeling niet geheel logaritmisch is.

Mogelijkerwijs speelt ook de nauwkeurigheid van het rekenproces een rol; dit is niet in extenso nagegaan.

Hoewel op bovenstaande manier berekende wrijvingscoëfficiënten eigenlijk de enige theoretisch juiste is worden ook nog twee andere wijzen van aanpak in beschouwing genomen, die ten opzichte van de onder 1) besproken methode

het voordeel hebben, dat ze kunnen worden toegepast bij het bepalen van de Chézy-waarde uit snelheidsvertikalen, die gevonden zijn uit natuurmetingen [lit.5].

Het belang van een vergelijking van deze twee methoden met de methode genoemd onder 1) is de nauwkeurigheid van de methode 2) en 3) na te gaan.

Deze twee methoden beide behandeld in [lit.5] (zie ook paragraaf I-4) zijn:

2) De Chézy-coëfficiënt wordt berekend met:

$$\left[c_h \right]_{II} = 18 \log \frac{33y_h}{er_s} \quad (8.4)$$

waarin $r_s = 33y_o$ de schijnbare ribbelhoogte is. Deze schijnbare ribbelhoogte r_s wordt, voor de gevallen 1 en 4, bepaald uit bijlage 19a en 19c en is weergegeven in de bijlagen 20a en 20c.

3) Met behulp van vergelijking (8.1) wordt u_b^* bepaald als κ maal de snelheid in een punt op een hoogte ey_o , waarbij y_o en u_b^* gevonden worden uit bijlage 19a en 19b.

De Chézy-coëfficiënt wordt nu berekend uit:

$$\left[c_h \right]_{III} = \sqrt{g} \frac{\bar{u}}{u_b^*} \quad (8.5)$$

Als de snelheidsverdeling geheel logaritmisch zou zijn, zou de op bovengenoemde manier bepaalde u_b^* gelijk moeten zijn aan de werkelijk optredende bodemschuifspanningssnelheid (= in het computerprogramma aangenomen bodemschuifspanningssnelheid).

In bijlage 28 en 30 zijn naast de met de computer berekende Chézy-coëfficiënten, ook de volgens methode 2) en 3) berekende Chézy-coëfficiënten weergegeven als functie

van de tijd.

Uit bijlage 28 en 30 blijkt nu dat de methoden 2) en 3) beide gedurende het gehele getij aanzienlijk afwijken van de met methode 1) berekende Chézy-coëfficiënten.

De grootste afwijkingen ontstaan rond de Kentering.

Hier wijkt het verloop van de Chézy-coëfficiënten berekend volgens de methoden 2) en 3) zeer sterk af van het werkelijke verloop.

Hieruit kan dus geconcludeerd worden dat met de methoden 2) en 3) tijdens perioden met maximale stroomsnelheden wel enig inzicht in het verloop van de wrijvingscoëfficiënten verkregen kan worden, maar dat rond de kentering aan de met deze methoden berekende Chézy-coëfficiënten niet te veel waarde moet worden gehecht.

Tenslotte wordt nu nog de maximaal optredende wrijvingscoëfficiënt volgens de methode Kajiura berekend (zie hoofdstuk II).

In zijn analytische benadering van instationaire stromen komt Kajiura voor de amplitude van de Chézy-coëfficiënt voor geringe diepte tot de volgende uitdrukking:

$$\hat{C}_k = \frac{\sqrt{g}}{\kappa} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - 1.50 \right\} \quad (8.6)$$

In het geval dat $y_h = 15.4$ m en $y_o = 1/33r = 0.03/33$ volgt uit (8.6) voor \hat{C}_k :

$$\hat{C}_k = 65 \sqrt{m}/s$$

Het faseverschil tussen \bar{u} en u_b^* is volgens Kajiura in dit geval praktisch gelijk aan nul.

Kajiura gaat in zijn berekeningen ervan uit, dat geen dichtheidsverschillen optreden.

De oorzaak van het feit dat de waarde \hat{C}_k nogal afwijkt van de met behulp van methode 1) berekende Chézy-coëffi-

ciënt is vooral te wijten aan de door Kajiura toegepaste schematisering van de bodemschuifspanningssnelheid (zie hoofdstuk 2 en [lit.8]).

Door deze schematisering komt Kajiura tot de conclusie dat de momentane snelheidsverdeling in een getijstroom met geringe diepte benaderd kan worden door de volgende uitdrukking:

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ \ln \frac{y}{y_0} - \frac{y - y_0}{y_h} \right\} \quad (8.7)$$

Uit de met behulp van de computer berekende snelheidsvertikalen blijkt dat dit vooral in de buurt van de bodem niet juist is.

IX. Benadering van de sedimentatie.

Uit een bestudering van de resultaten van de verschillende, met het computerprogramma SG1 berekende gevallen, voor wat betreft de sedimentatie blijkt, dat het valmechanisme globaal op de volgende wijze kan worden benaderd.

In de eerste periode na de lozing van het sediment volgens een concentratieverdeling zoals weergegeven in figuur 2 van hoofdstuk VII, verdeelt het sediment zich over de gehele vertikaal. Daar de verdeling van de beginconcentratie vrij extreem gekozen is kan deze tijd maximaal op 1 uur gesteld worden.

Verondersteld wordt nu dat op dat moment het sediment zich gelijkmatig over de vertikaal heeft verdeeld, zonder dat verlies aan de bodem is opgetreden. Op dat moment is dan de concentratie aan de bodem gelijk aan de over de vertikaal gemiddelde sedimentconcentratie \bar{c} , waarbij de totale hoeveelheid ingebracht sediment per strekkende meter rivierbreedte gelijk is aan $\bar{c}y_h$. Per tijdseenheid wordt aan het water een hoeveelheid sediment onttrokken gelijk aan $w\bar{c}$. De continuïteitsvergelijking voor het sediment geeft dus:

$$y_h \frac{d\bar{c}}{dt} + w\bar{c} = 0 \quad (9.1)^*$$

Hierbij geldt de randvoorwaarde:

$$\bar{c} = \bar{c}_0 \quad \text{voor } t = t_1 \quad (9.2)$$

Hierin is t_1 het tijdstip waarop de concentratie als gelijkmatig over te vertikaal kan worden aangenomen.

De oplossing van vergelijking (9.1) geeft dan:

$$\bar{c} = \bar{c}_0 e^{-(t - t_1)/T_0} \quad (9.3)$$

Hierin is T_0 een "nepereringstijd", dat wil zeggen de

*) Voor een afschatting van de in deze benadering gemaakte fout wordt verwezen naar bijlage 32

tijd die nodig is om de over de vertikaal gemiddelde concentra-
tie met een faktor e te laten dalen:

$$T_o = \frac{y_h}{w} \quad (9.4)$$

De fractie neergeslagen materiaal is dan:

$$f = 1 - e^{-(t - t_1)/T_o} \quad (9.5)$$

Bij de valsnelheden, zoals deze gebruikt zijn in de ver-
schillende berekende gevallen, is de nepereringstijd weer-
gegeven in de volgende tabel 1.

Tabel 1. De nepereringstijds in geval 1 en 2					
geval	korreldia- meter	valsnel- heid	T_o	begintijd t_1	
				t.o.v. $t=0$	t.o.v. $t=3^h.6^m$
1	20μ	0.3	$14^h.15^m.33^s$	$4^h.0^m$	$0^h.54^m$
2	50μ	1.7	$2^h.30^m.59^s$	$3^h.45^m$	$0^h.39^m$

Ook is in tabel 1 in de één na laatste kolom, een begin-
tijdstip t_1 aangegeven (genomen ten opzichte van de aanvang
van de tweede met het computerprogramma berekende periode)
tot welke bij de vereenvoudigde berekening wordt aangenomen,
dat geen sediment bezinkt.

In de laatste kolom is dit begin tijdstip gekozen ten op-
zichte van het tijdstip van invoeren van de verdeling van
de beginconcentratie (dat is $1/4$ getijperiode na het eerst
genoemde tijdstip = $3^h.6^m$).

Het resultaat van deze berekening is ook weergegeven in
bijlage 26. De overeenstemming met het computerprogramma
is zeer goed voor het fijne sediment (20μ) en redelijk
goed voor het grovere sediment (50μ).

De benadering geeft iets te lage waarden voor het gesedimenteerde materiaal. De in de laatste twee regels genoemde conclusies waren te verwachten. Immers de hypothese dat het sedimentgehalte aan de bodem gelijk is aan het gemiddelde gehalte gaat beter op naarmate het sediment fijner is en daar de bodemconcentratie groter is dan de gemiddelde concentratie zullen bij de vereenvoudigde benadering de gesedimenteerde hoeveelheden onderschat worden.

X. Schatting van de aanslibbing van het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken.

Het voornaamste doel van het verrichte onderzoek is, zoals beschreven in hoofdstuk I, het ontwikkelen van een instationaire zand- en slibtransportberekening, om een beter inzicht te verkrijgen in de eventuele gevolgen van de bochtafsnijding bij Bath, voor wat betreft de aanslibbing van het Noordelijk Bekken, dan tot nu toe mogelijk was.

In de voorgaande hoofdstukken, en met name in de hoofdstukken VI en VII, is een mathematisch model ontwikkeld waarmee het mogelijk is de concentratieverdeling in de vertikaal te berekenen als functie van de tijd en daaruit het transport van het sediment en de hoeveelheid gesedimenteed materiaal te bepalen bij de aangenomen begin- en randvoorwaarden.

Nadere bestudering van de uitkomsten van de verschillende berekende gevallen heeft geleid tot de aanname dat het concentratieverloop van een bepaalde korrelgrootte-fractie benaderd kan worden door een negatief-exponentiële functie met een nepereringstijd, gelijk aan de tijd die een korreldeeltje nodig heeft om in stil water van het oppervlak naar de bodem te vallen (zie hoofdstuk IX).

Als randvoorwaarde aan de bodem is in dit geval, evenals in het mathematische model SG1, aangenomen dat de opwoeling van het sediment verwaarloosd kan worden. Deze laatste aanname is alleen gerechtvaardigd, als de watersnelheden gering zijn.

Met behulp van bovenstaande berekening wordt dus eigenlijk een bovengrens gevonden voor de te verwachten sedimentatie.

In het nu volgende zal met behulp van het eerder genoemde gesimplificeerde sedimentatiemechanisme de te verwachten maximale hoeveelheid slib berekend worden die per jaar in het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken na realisatie van de bochtafsnijding kan bezinken. [lit.19]. Voordat met deze berekening begonnen kan worden zal eerst een indruk van de korrelgrootteverdeling van het slib in het Noordelijk Bekken moeten worden verkregen.

Door de Studiedienst Vlissingen van Rijkswaterstaat is onlangs begonnen met een onderzoek naar deze korrelgrootteverdeling (eigenlijk valsnelheidsverdeling). [lit.20].

Met behulp van een balans, die gehangen wordt in een monster Westerscheldewater met alleen deeltjes $< 50 \mu$, wordt op een aantal tijdstippen het gewicht afgelezen van de hoeveelheid slib, die zich verzameld heeft op het schaalte van de balans. Als bekend is hoeveel milligram slib per liter in het monster aanwezig is en hoe groot het monster is kan voor een aantal tijdstippen bepaald worden hoe groot het percentage slib is, dat bezonken is sinds het begin tijdstip waarop nog niets bezonken was.

Uit hoofdstuk IX blijkt dat de sedimentatie bij geringe stroomsnelheden benaderd kan worden door:

$$f = 1 - e^{-(w t/y_h)} \quad (10.1)$$

waarin f de fractie van het slib is met een valsnelheid w , die bezinkt in de tijd t bij een waterdiepte y_h .

Uit het onderzoek naar de korrelgrootteverdeling van het slib in het water van de Westerschelde in de buurt van Bath is de volgende geschematiseerde valsnelheidsverdeling af te leiden:

valsnelheid w (m/s)	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}
percentage p (%)	42	14	14	14	16

Van de totale hoeveelheid aanwezig slib is nu na een tijd t een fractie:

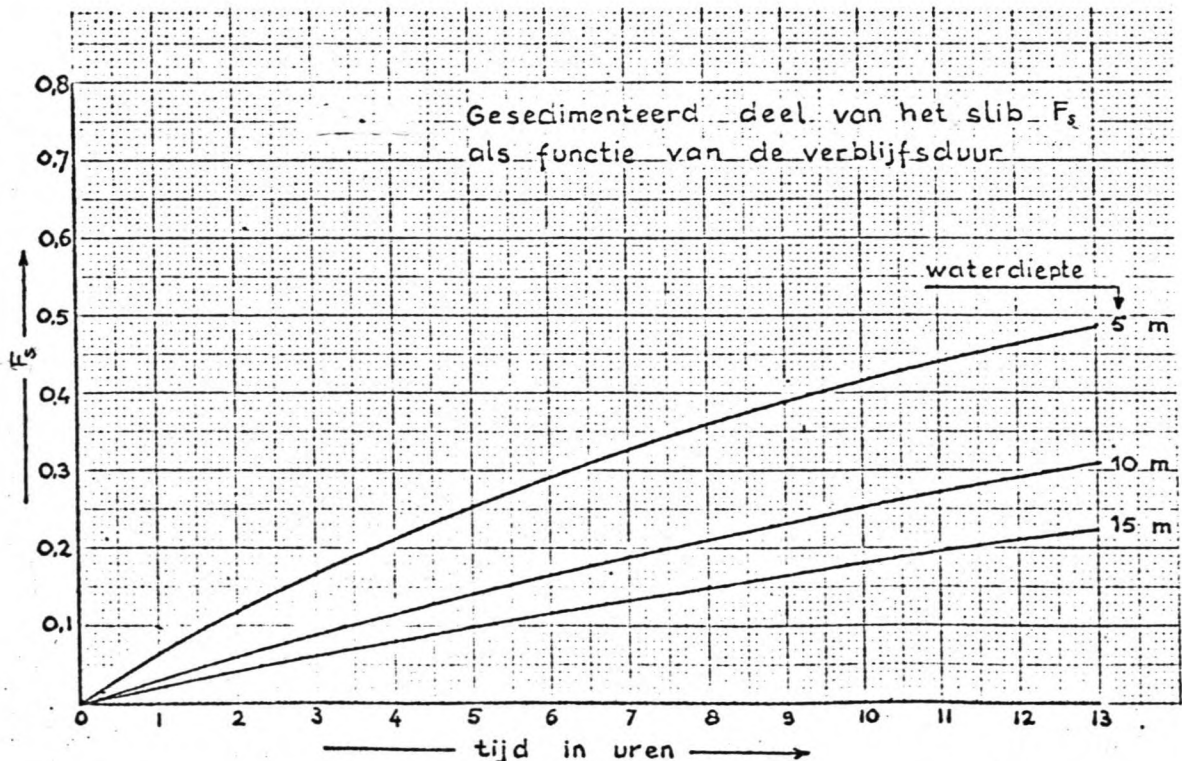
$$F_s = \sum_{i=1}^5 p_i \left\{ 1 - e^{-\left(w_i t / y_h \right)} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^5 p_i f_i \quad (10.2)$$

gesedimenteerd.

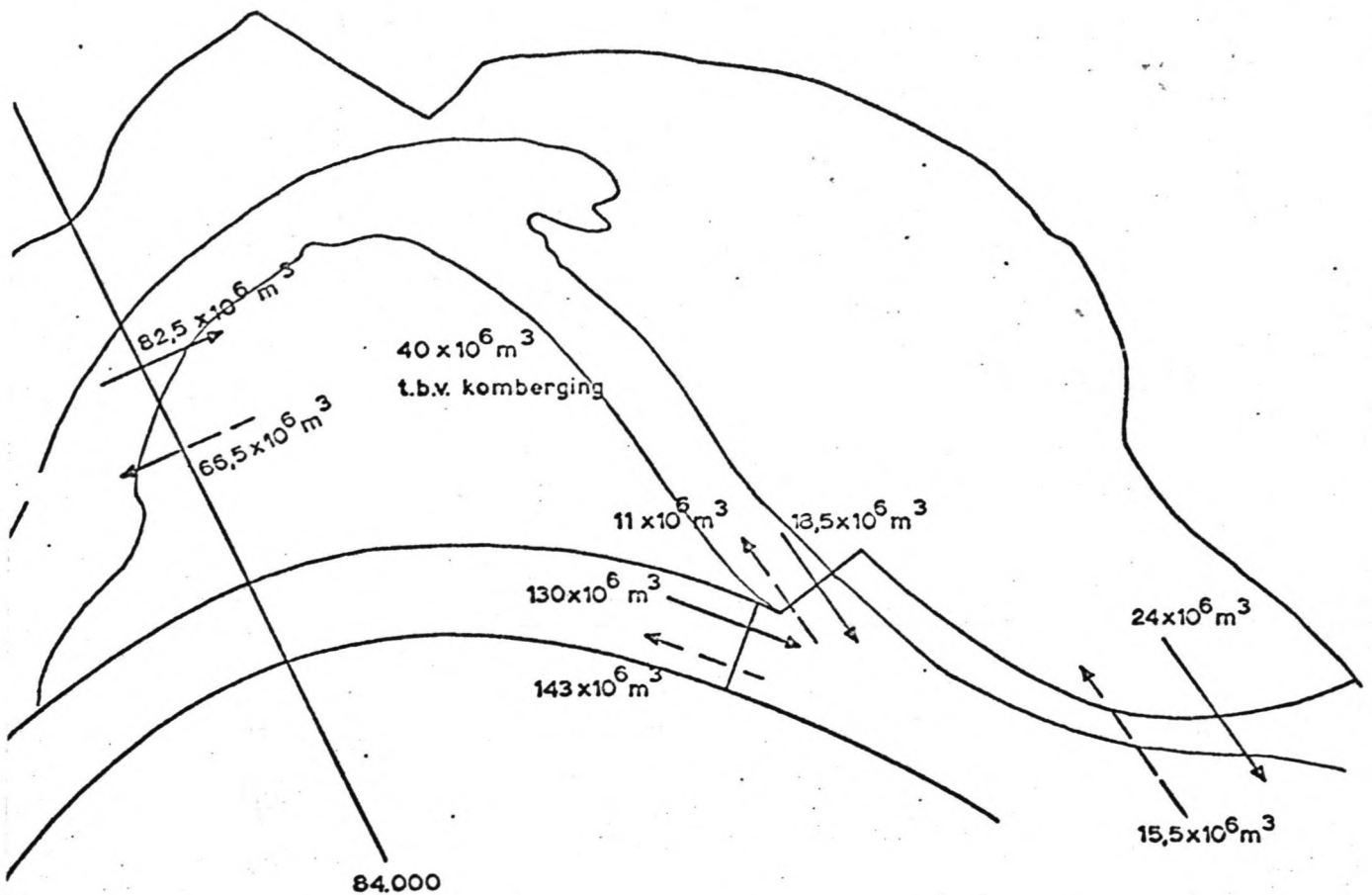
Als nu van een bepaalde hoeveelheid water de verblijftijd en het slibgehalte bekend zijn is het mogelijk de hoeveelheid slib die uit het water bezinkt te bepalen op bovenstaande manier.

De waarde van F_s is in onderstaande grafiek (figuur 1) uitgezet als functie van de verblijftijd van het slib in het Noordelijk Bekken bij een gegeven waterdiepte.



figuur 1.

Uit modelmetingen, uitgevoerd in het Waterbouwkundig Laboratorium te Borgerhout (België), is gebleken dat ten oosten van coördinaat 84000, na realisering van de bochtafsnijding bij Bath, de stroomsnelheden, zowel tijdens vloed als eb, altijd kleiner zullen zijn dan 0.60 à 0.70 m/s. Ten westen van de coördinaat 84000 zijn de snelheden van die orde van grootte, dat in eerste instantie gesteld kan worden, dat daar praktisch geen aanslibbing mogelijk is.



figuur 2.

-In de berekening zal nu verder alleen rekening gehouden worden met de aanslibbing ten oosten van de coördinaat 84000.

De vloed- en ebvermogens zijn aan de hand van modelgegevens voor een gemiddeld getij in figuur 2 weergegeven. [lit.21] .

Uit een bestudering van de eb- en vloedwegen, die de waterdeeltjes in het Noordelijk Bekken doorlopen, komt een gemiddelde waterdiepte van 5 meter als het meest reëel naar voren; in het vervolg is hiermee gerekend.

De berekening van de aanslibbing van het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken wordt nu op de volgende manier uitgevoerd.

Van het door raai 84000 en het over de leidam over de Ballastplaat en het over de overlaat in het vaarwater boven Bath binnenstromende water is per uur de totale hoeveelheid binnenstromend water en de verblijftijd in het bekken van die hoeveelheid water geschat.

Als de verblijftijd bekend is kan met behulp van figuur 1 het percentage van het oorspronkelijk aanwezige slib bepaald worden dat gedurende deze tijd zal bezinken.

In het nu volgende zal een voorbeeld van een dergelijke berekening worden gegeven.

De hoeveelheid water die tussen 3 uur en 4 uur na de laagwaterkentering ter plaatse van de coördinaat 84000 het bekken binnenstroomt is gelijk aan $0.13 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, de slibconcentratie gedurende dit uur is 28 mg/l en de verblijftijd is 6 uur.

Uit figuur 1 blijkt dan dat gedurende deze 6 uur 29% van het oorspronkelijk aanwezige slib bezinkt. De totale hoeveelheid slib die tussen 3 uur en 4 uur na laagwaterkentering het bekken binnenkomt is gelijk aan 0.38 ton, zodat van deze hoeveelheid $0.29 \cdot 0.38 = 0.11$ ton per getij bezinkt.

Deze berekening is voor raai 84000 uitgevoerd voor de intervallen 0 - 1, 1 - 2, 2 - 3, 3 - 4, 4 - 5 en 5 - 6 uur na de laagwaterkentering. Voor de oostelijke begrenzing van het Noordelijk Bekken is hetzelfde gedaan maar nu met 6 intervallen van een uur voor de laagwaterkentering. In deze berekeningen is rekening gehouden met de variatie van het slibgehalte gedurende het getij. Deze gegevens zijn verkregen uit metingen uitgevoerd in het oostelijk deel van de Westerschelde. Deze metingen zijn verwerkt in [lit.4] .

In de onderstaande tabel zijn de resultaten per getij weergegeven.

De totale hoeveelheid slib die, berekend op de bovengenoemde manier, per jaar in het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken zal bezinken is gelijk aan 10^6 ton. [lit.19] .

	inkomend ₃ debiet(m ³)	slibgehal- te C(mg/l)	inkomend slib(kg)	bezonken fractie	hoeveelheid bezonken slib(kg)
Raai 84000	82500000.00	36.5	3010000.00	0.28	850000.00
Raai Ballast- plaat	26500000.00	54.7	1450000.00	0.33	480000.00
totaal per getij	109000000.00	40.9	4460000.00	0.30	1330000.00

Appendix A

In deze appendix worden eerst met behulp van Bessel- en Neumannfuncties, de functies $Z_0(z e^{-i\pi/4}, c_h)$ en $Z_1(z e^{-i\pi/4}, c_h)$ uitgewerkt. Daarna volgen voor kleine waarden van z_h (geringe diepte) nadere uitwerkingen van de in hoofdstuk II gebruikte uitdrukkingen.

De algemene uitdrukkingen voor de reeksontwikkelingen van Bessel- respectievelijk Neumannfuncties van de orde n zijn gelijk aan lit.13 :

$$J_n(Y) = \left(\frac{1}{2}Y\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/4 Y^2)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (A.1)$$

$$N_n(Y) = \frac{-(1/2Y)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4} Y^2\right)^k +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2}Y\right) J_n(Y) +$$

$$- \frac{\left(\frac{1}{2}Y\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k+1) + \psi(n+k+1) \frac{\left(-\frac{1}{4} Y^2\right)^k}{k! (n+k)!} \quad (A.2)$$

waarin:

$$\psi(m) = -\gamma + \sum_{k=1}^{m-1} k^{-1} \quad (m \geq 2) \quad (A.3)$$

en:

$$\psi(1) = -\gamma \quad (\gamma = \text{konstante van Euler} = 0.5772\dots) \quad (A.4)$$

Volgens (2.16) is $Z_0(z e^{-i\pi/4}, c_h)$ gelijk aan:

$$(c_1 + ic_2) J_0(z e^{-i\pi/4}) + i N_0(z e^{-i\pi/4}) \quad (A.5)$$

De nulde-orde Bessel- en Neumannfuncties zijn respectievelijk lit.13 :

$$J_0(Y) = 1 - \frac{1/4Y^2}{(1!)^2} + \frac{(1/4Y^2)^2}{(2!)^2} - \frac{(1/4Y^2)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (A.6)$$

$$N_0(Y) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{1}{2} Y \right) + \gamma J_0(Y) + \frac{2}{\pi} \frac{1/4Y^2}{(1!)^2} - (1 + \frac{1}{2}) \frac{(1/4Y^2)^2}{(2!)^2} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \frac{(1/4Y^2)^3}{(3!)^2}$$

(A.7)

Wordt voor Y nu $ze^{-i\pi/4}$ ingevuld en wordt verondersteld dat een tweede orde benadering voldoende nauwkeurig is, hetgeen geldt voor kleine waarden van $ze^{-i\pi/4}$, dan gaan (A.6) en (A.7) over in:

$$J_0(ze^{-i\pi/4}) = 1 - \frac{1/4z^2 e^{-i\pi/2}}{1} = 1 + \frac{i}{4} z^2$$

(A.8)

$$N_0(ze^{-i\pi/4}) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{ze^{-i\pi/4}}{2} + \gamma \right) \left(1 + \frac{iz^2}{4} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{iz^2}{4} \right)$$

(A.9)

Invullen van (A.8) en (A.9) in (A.5) geeft na uitwerken:

$$Z_0(ze^{-i\pi/4}, c_h) = (c_1 + \frac{1}{2}) - \left(\frac{z}{2} \right)^2 \left(c_2 + \frac{2}{\pi} (\ln \frac{z}{2} + \gamma - 1) + i c_2 + \frac{2}{\pi} (\ln \frac{z}{2} + \gamma) + \left(\frac{z}{2} \right)^2 \left(c_1 + \frac{1}{2} \right) \right)$$

(A.10)

$Z_1(ze^{-i\pi/4}, c_h)$ is te bepalen met behulp van de eerste orde Bessel- en Neumannfuncties.

Volgens (A.1) is de eerste orde Besselfunctie gelijk aan:

$$J_1(Y) = \left(\frac{1}{2} Y \right)^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/4Y^2)^k}{k! \Gamma(1+k+1)} = \frac{1}{2} Y \left\{ 1 - \frac{1}{8} Y^2 + \dots \right\}$$

(A.11)

En volgens (A.2) is de eerste orde Neumannfunctie gelijk aan:

$$N_1(Y) = \frac{-(1/2Y)^{-1}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4} Y^2 \right)^k + \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{1}{2} Y \right) J_1(Y) + \frac{-(\frac{1}{2} Y)^1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \psi(k+1) + \psi(1+k+1) \right\} \frac{(-\frac{1}{4} Y^2)^k}{k! (1+k)!}$$

(A.12)

Met $Y = ze^{-i\pi/4}$ gaan (A.11) en (A.12) respectievelijk over in:

$$J_1(ze^{-i\pi/4}) = \frac{1}{2} ze^{-i\pi/4} - \frac{1}{16} z^3 e^{-3i\pi/4} + \dots \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} N_1(ze^{-i\pi/4}) &= \frac{-(1/2ze^{-i\pi/4})^{-1}}{\pi} + \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{1}{2} ze^{-i\pi/4} \right) \right\} * \\ &* \left\{ \frac{1}{2} ze^{-i\pi/4} - \frac{1}{16} Y^3 e^{-3i\pi/4} \right\} + \\ &- \frac{\left(\frac{1}{2} e^{-i\pi/4} \right)}{\pi} \left\{ (-2\gamma+1) + (-2\gamma + \frac{5}{2}) \frac{\left(\frac{1}{4} z^2 e^{-i\pi/2} \right)}{1!2!} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Invullen van (A.13) en (A.14) in (A.5) geeft na uitwerken:

$$\begin{aligned} z_1(ze^{-i\pi/4}, c_h) &= \left(\frac{z}{2} \right) e^{-i\pi/4} \left[\left(c_1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2} \right)^2 + \right. \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^2 \left(c_2 + \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{5}{4} \right) + \right. \\ &\left. \left. + i \left\{ c_2 + \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^2 \left(c_1 + \frac{1}{2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Uit de randvoorwaarde $u^* = 0$ (=inwendige schuifspanningssnelheid) voor $y = y_h$. d.w.z.:

$$z_1(z_h e^{-i\pi/4}, c_h) = 0$$

is de complexe faktor $c_h = c_1 + ic_2$ te bepalen.

Voor kleine waarden van z_h ($z_h < 1$) worden c_1 en c_2 op de volgende manier bepaald.

$z_1(z_h e^{-i\pi/4}, c_h)$ is alleen gelijk aan nul als zowel het reële en het imaginaire deel van $z_1(z_h e^{-i\pi/4}, c_h)$ gelijk aan nul is, d.w.z.:

$$\left(c_1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{z_h}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{z_h}{2} \right)^2 \left(c_2 + \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z_h}{2} + \gamma - \frac{5}{4} \right) \right) = 0 \quad (\text{A.16})$$

en:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z_h}{2} \right)^2 \left(c_1 + \frac{1}{2} \right) + \left(c_2 + \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z_h}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) \right) = 0 \quad (\text{A.17})$$

Uit (A.16) volgt:

$$(c_1 + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{z_h}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{z_h}{z}\right)^2 (c_2 + \frac{2}{\pi} (\ln \frac{z_h}{z} + \gamma - \frac{5}{4})) \quad (\text{A.17.a})$$

Dit invullen in (A.17) geeft voor $z_h < 1$:

$$c_2 = -\frac{2}{\pi} (\ln \frac{z_h}{2} + \gamma - \frac{3}{4}) \quad (\text{A.18})$$

Substitutie van (A.18) in (A.16) geeft voor $z_h < 1$:

$$c_1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{z_h}\right)^2 \quad (\text{A.19})$$

In het nu volgende gedeelte volgt de uitwerking van een aantal uitdrukkingen, die gebruikt zijn in hoofdstuk II, paragraaf 1.

Allereerst vergelijking (2.25):

$$\frac{u}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{z_0(z_0 e^{-i\pi/4, c_h}) - z_0(z e^{-i\pi/4, c_h})}{(z_0/2)e^{-i\pi/4} z_1(z_0 e^{-i\pi/4, c_h})} \quad (\text{A.20})$$

Invullen in de verschillende Z-funkties van de eerder verkregen resultaten geeft:

$$z_0(z_0 e^{-i\pi/4, c_h}) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{z_0}{z_h}\right)^2 - \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z_0}{z_h}\right) - \frac{1}{2\pi} + i \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z_0}{z_h}\right) + \frac{6}{4\pi} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z_0}{z_h}\right)^2 \right\} \quad (\text{A.21})$$

$$z_0(z e^{-i\pi/4, c_h}) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{z_h}\right)^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z}{z_h}\right) - \frac{1}{2\pi} + i \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z}{z_h}\right) + \frac{6}{4\pi} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{z_h}\right)^2 \right\} \quad (\text{A.22})$$

$$z_1(z_0 e^{-i\pi/4, c_h}) = \left(\frac{z_0}{2}\right) e^{-i\pi/4} \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{z_0} - \frac{4}{z_h}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} + i \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_0}{z_h}\right)^2 \right\} \right] \quad (\text{A.23})$$

Substitutie van (A.21), (A.22) en (A.23) in (A.29) geeft:

$$\frac{u}{u_b^*} = \frac{1}{K} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{2\pi} - \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z_h} - \frac{1}{2\pi} \right\} + \dots}{\left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_0}{z_h}\right)^2 \right\} - \dots} \right. \\ \left. + i \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{z^2 - z_0^2}{z_h^2} \right) \right\} \right. \\ \left. - i \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{z_0^2} - \frac{4}{z_h^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right) \right\} \right] \quad (\text{A.24})$$

Vergelijking (A.24) kan ook op de volgende manier geschreven worden:

$$\frac{u}{u_b^*} = \frac{A + iB}{C - iD} \quad (\text{A.25})$$

waarin:

$$A = \left(\frac{z}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{2\pi} \right\} - \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z_h} - \frac{1}{2\pi} \right\} \quad (\text{A.26})$$

$$B = \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{z^2 - z_0^2}{z_h^2} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$C = \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_0}{z_h}\right)^2 \right\} \quad (\text{A.28})$$

$$D = \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{z_0^2} - \frac{4}{z_h^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right) \right\} \quad (\text{A.29})$$

Vermenigvuldigen van (A.25) met $\frac{C + iD}{C + iD}$ geeft:

$$\frac{u}{u_b^*} = \frac{A + iB}{C - iD} * \frac{C + iD}{C + iD} = \frac{AC - BD}{C^2 + D^2} + i \frac{BC + AD}{C^2 + D^2} \quad (\text{A.30})$$

In het algemeen is z_0 erg klein en $\left(\frac{z_0}{z_h}\right)^2 \ll 1$. De verschillende factoren van (A.30) kunnen dan als volgt benaderd worden

($C \approx 0$ en $D \approx \frac{1}{\pi}$):

$$C^2 + D^2 \approx \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \quad (\text{A.31})$$

$$AC = BC \approx 0 \quad (\text{A.32})$$

$$BD \approx \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z_0}{z_h}\right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{z^2}{z_h^2} - \frac{z_0^2}{z_h^2}\right) \right\} \quad (\text{A.33})$$

$$AD \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{2\pi} \right\} \quad (\text{A.34})$$

(A.31) tot en met (A.34) ingevuld in (A.30) geeft:

$$\frac{u}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{-\frac{1}{\pi} \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_0}{z} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{z^2}{z_h^2} - \frac{z_0^2}{z_h^2}\right)}{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2} \right] + \frac{i}{\kappa} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{2\pi} \right\} \frac{1}{\pi}}{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2} \right] \quad (\text{A.35})$$

Uitwerken van het reële deel van (A.35) geeft:

$$\frac{u}{u_b^*} = -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{z^2}{z_h^2} - \frac{z_0^2}{z_h^2}\right) \quad (\text{A.36})$$

Met $z = 2 Ky^{1/2}$, $z_0 = 2 Ky_0^{1/2}$ en $z_h = 2 Ky_h^{1/2}$ gaat vergelijking (A.36) over in:

$$\frac{u}{u_b^*} = +\frac{1}{\kappa} \ln \frac{Y}{Y_0} - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{Y - Y_0}{Y_h}\right) \quad (\text{A.37})$$

(A.37) is de momentane snelheidsverdeling over de diepte. De invloed van het imaginaire deel van (A.35) op de snelheidsverdeling is zo gering dat deze invloed hier verwaarloosd is (zie ook paragraaf II.2).

De tweede vergelijking die uitgewerkt zal worden is vergelijking (2.28):

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa z_h^2} \left\{ 4i + \frac{(z_h^2 - z_o^2) z_o (z_o e^{-i\pi/4, c_h})}{(z_o/2) e^{-i\pi/4} z_1 (z_o e^{-i\pi/4, c_h})} \right\} \quad (A.38)$$

Daar z_o in het algemeen erg klein is en $(\frac{z_o}{z_h})^2 \ll 1$ is, is vergelijking (A.38) ook te schrijven als:

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{4i}{z_h^2} + \frac{z_o (z_o e^{-i\pi/4, c_h})}{(\frac{z_o}{2}) e^{-i\pi/4} z_1 (z_o e^{-i\pi/4, c_h})} \right\} \quad (A.39)$$

Invullen in (A.39) van de verschillende Z-functies geeft:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{4i}{z_h^2} + \right. & \left. \frac{\left[-\frac{1}{\pi} \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 - \left(\frac{z_o}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z_o}{z_h}\right) - \frac{1}{2\pi} \right\} + \dots \right]}{\left(\frac{z_o}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 \right\} + \dots} \right. \\ & \left. + i \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} + \frac{z_o}{z_h} + \frac{6}{4\pi} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 \right\} \right. \\ & \left. - i \left(\frac{z_o}{2}\right)^2 \left\{ \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{z_o} - \frac{1}{z_h}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z_o}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} - \frac{1}{\pi}\right) \right\} \right\} \quad (A.40) \end{aligned}$$

Vergelijking (A.40) kan ook op de volgende manier geschreven worden:

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{4iB}{z_h^2} + \frac{z_h^2 A}{z_h^2 B} \right\} \quad (A.41)$$

waarin:

$$\begin{aligned} A = & -\frac{1}{\pi} \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 - \left(\frac{z_o}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z_o}{z_h}\right) - \frac{1}{2\pi} \right\} + \\ & + i \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} + \frac{6}{4\pi} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 \right\}. \quad (A.42) \end{aligned}$$

$$B = \left(\frac{z_o}{2}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 \right\} +$$

$$- i \left(\frac{z_o}{2}\right)^2 \left\{ \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{z_o} - \frac{1}{z_h}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z_o}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} - \frac{1}{\pi}\right) \right\}$$

(A.43)

De verschillende factoren in (A.41) kunnen nu op de volgende manier benaderd worden:

$$z_h^2 B \approx - z_h^2 \frac{i}{\pi} \quad (A.44)$$

$$4iB \approx \frac{4}{\pi} \quad (A.45)$$

$$z_h^2 A \approx - \frac{4}{\pi} + \frac{2i z_h^2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} + \frac{6iz_h^2}{4\pi} \quad (A.46)$$

(A.44) tot en met (A.46) ingevuld in (A.41) geeft:

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \left\{ 2 \ln \frac{z_h}{z_o} - \frac{3}{2} \right\} \quad (A.47)$$

Uitgedrukt in y wordt (A.47):

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - \frac{3}{2} \right\} \quad (A.48)$$

Volgens vergelijking (2.29) kan (A.47) ook als volgt geschreven worden:

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = A e^{i\theta} \quad (A.49)$$

In het hier uitgewerkte geval voor geringe diepte ($z_h < 1$) zijn A respectievelijk θ dus gelijk aan:

$$A = \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - \frac{3}{2} \right\} \quad \text{en} \quad \theta = 0 \quad (A.50)$$

De wrijvingscoëfficiënt c_k wordt volgens (2.39) met behulp van (A.50):

$$c_k = \frac{\kappa^2}{\left\{ \ln \frac{y_h}{y_o} - \frac{3}{2} \right\}^2} \quad (A.51)$$

De gemiddelde snelheid u voor geringe diepte kan ook gevonden worden met behulp van (A.37). Integreeren en delen door $(y_h - y_o)$ van (A.37) geeft:

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = \frac{1}{y_h - y_o} \int_{y_o}^{y_h} \left(\frac{1}{\kappa} \ln y - \frac{1}{\kappa} \ln y_o - \frac{y}{\kappa y_h} + \frac{y_o}{\kappa y_h} \right) dy \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\bar{u}}{u_b^*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y_h}{y_o} - 1 - \frac{1}{2} \right) * \frac{y_h}{y_h - y_o} + \frac{y_o}{\kappa (y_h - y_o)} - \frac{y_o^2}{2 \kappa y_h (y_h - y_o)} \quad (\text{A.53})$$

Daar y_o erg klein is ten opzichte van y_h kunnen de twee laatste termen in (A.53) verwaarloosd worden en is de faktor

$\frac{y_h}{y_h - y_o}$ ongeveer gelijk aan 1. Vergelijking (A.53) gaat dan over in vergelijking (A.48).

Tenslotte zullen in deze appendix uitgaande van vergelijking (2.14) de in hoofdstuk II, paragraaf 2 gebruikte uitdrukkingen worden afgeleid.

Vergelijking (2.14):

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \left(\frac{z}{z_o} \right) \frac{z_1 (z e^{-i\pi/4}, c_h)}{z_1 (z_o e^{-i\pi/4}, c_h)}$$

gaat na invullen van de verschillende Z-funkties over in:

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \frac{\left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} + \dots \right]}{\left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \left(\frac{z_o}{z_h} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z_o}{z_h} \right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} + \dots \right]}$$

$$\frac{iz^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{z_h}\right)^2 \right\}}{iz_o^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 \right\}} \quad (\text{A.54})$$

Evenals (A.24) en (A.40) kan (A.54) ook op de volgende manier geschreven worden:

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \frac{A + iB}{C + iD} \quad (\text{A.55})$$

waarin:

$$A = \frac{4}{\pi} \left(1 - \left(\frac{z}{z_h}\right)^2\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_h}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} \quad (\text{A.56})$$

$$B = z^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{z_h}\right)^2 \right\} \quad (\text{A.57})$$

$$C = \frac{4}{\pi} \left(1 - \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} \quad (\text{A.58})$$

$$D = z_o^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z_o}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 \right\} \quad (\text{A.59})$$

Vermenigvuldigen van (A.55) met $\frac{C - iD}{C - iD}$ geeft:

$$\frac{u^*}{u_b^*} = \frac{A + iB}{C + iD} * \frac{C - iD}{C - iD} = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} + i \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} \quad (\text{A.60})$$

Met inachtneming van het feit dat z_o erg klein is en dat $\left(\frac{z_o}{z_h}\right)^2 \ll 1$ kunnen de verschillende factoren in (A.60) door de

volgende uitdrukkingen worden benaderd:

$$C^2 + D^2 \approx \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \quad (\text{A.61})$$

$$AC \approx \frac{4}{\pi} \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{z^2}{z_h^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_h}\right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} \right] \quad (\text{A.62})$$

$$BD = AD \approx 0 \quad (\text{A.63})$$

$$BC \approx \frac{4}{\pi} \left[z^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \right\} \right] \quad (\text{A.64})$$

Invullen van (A.61) tot en met (A.64) in (A.60) geeft:

$$\begin{aligned} \frac{u_r^*}{u_b^*} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{z^2}{z_h^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} + \right. \\ \left. + i \frac{\pi}{4} \left\{ z^2 \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \right\} \right] \quad (\text{A.65}) \end{aligned}$$

Gelijkstellen van de reële delen van (2.49) en (2.53) (zie hoofdstuk II, paragraaf 2) geeft (2.54):

$$\frac{\kappa z}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z} = u_b^* \frac{\pi}{4} \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{z^2}{z_h^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{\pi} \right\} \right] \quad (\text{A.66})$$

Na integratie gaat (A.66) over in:

$$u_r = \frac{u_b^*}{2\kappa} \left[4 \ln z - 2 \frac{z^2}{z_h^2} - \frac{z^4}{16} \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{64} z^4 + C \right] \quad (\text{A.67})$$

De integratiekonstante C wordt gevonden uit de randvoorwaarde $u_r = 0$ op $z = z_0$:

$$C = -4 \ln \frac{z}{z_0} + 2 \frac{z_0^2}{z_h^2} \quad (\text{A.68})$$

Na invullen van (A.68) in (A.67) en na verwaarlozing van de termen met z^4 , die zeer klein zijn ten opzichte van de andere termen in (A.67), gaat (A.67) over in:

$$u_r = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \frac{u_b^*}{\kappa} + \left(\frac{z_0}{z_h} \right)^2 \frac{u_b^*}{\kappa} \quad (\text{A.69})$$

Vergelijking (A.69) is gelijk aan vergelijking (A.36).

Gelijkstellen van de imaginaire delen van (2.49) en (2.53) (zie hoofdstuk II, paragraaf 2) geeft (2.57):

$$\frac{\kappa z}{2} \frac{\partial u_i}{\partial z} = u_b^* \frac{\pi}{4} \left[z^2 \left\{ \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{z_h} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{z_h} \right)^2 \right\} \right] \quad (\text{A.70})$$

Na integratie gaat (A.70) over in:

$$u_i = \frac{\tilde{u}_b^*}{2\kappa} \left[z^2 \ln \frac{z}{z_h} - \frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{8} \frac{z^4}{z_h^2} + C \right] \quad (\text{A.71})$$

Om een eenvoudiger uitdrukking te krijgen voor u_i wordt gesteld dat $u_i = 0$ voor $z = 0$ in plaats van $u_i = 0$ voor $z = z_0$.

De integratieconstante C wordt dan gelijk aan nul.

Integreren van (A.71) tussen de grenzen y_0 en y_h en delen door de diepte y_h wordt vergelijking (2.59) verkregen.

Appendix B

Enkele van de integraties, waarvan in hoofdstuk III alleen het eindresultaat is vermeld, zullen in deze appendix worden uitgevoerd.

Allereerst volgt nu de integratie van u volgens vergelijking (3.1) ter verkrijging van \bar{u} in een stationaire stroom met een konstante schuifspanning τ_b over de hoogte.

Integreren van (3.1):

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (\text{B.1})$$

tussen de grenzen y_0 en y_h en delen door de diepte geeft de gemiddelde snelheid \bar{u} .

De integratie verloopt als volgt:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{y_h - y_0} \int_{y_0}^{y_h} \frac{u_b^*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} dy \quad (\text{B.2}) \\ &= \frac{1}{y_h - y_0} \frac{u_b^*}{\kappa} \left[y \ln \frac{y}{y_0} - y \right]_{y_0}^{y_h} \\ &= \frac{u_b^*}{(y_h - y_0)} \left[y_h \ln \frac{y_h}{y_0} - y_h - y_0 \ln \frac{y_0}{y_0} - y_0 \right] \end{aligned}$$

Verwaarlozen van y_0 ten opzichte van y_h ($y_0 \ll y_h$) geeft:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{u_b^*}{\kappa y_h} \left[y_h \ln \frac{y_h}{y_0} - y_h \right] \\ &= \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ \ln \frac{y_h}{y_0} - 1 \right\} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Ten tweede zullen de integraties uitgevoerd worden ter verkrijging van u en \bar{u} in een stationaire stroom met een driehoekig verlopende schuifspanning over de diepte.

Voor de integratie van u wordt uitgegaan van vergelijking (3.1):

$$\tau = \rho_w L^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (\text{B.4})$$

waarin:

$$\tau = \tau_b \left(1 - \frac{y}{y_h}\right) \quad (\text{B.5})$$

(B.5) invullen in (B.4) en daarin L gelijkstellen aan y geeft:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho_w}} \frac{\sqrt{1 - y/y_h}}{y} \quad (\text{B.6})$$

Hieruit volgt voor u:

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_b^*}{\kappa} \int \frac{\sqrt{1 - y/y_h}}{y} dy \\ &= \frac{u_b^*}{\kappa} \int \frac{\sqrt{1 - y/y_h}}{y/y_h} d(y/y_h) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Stel voor de uitwerking van deze integraal:

$$x = \sqrt{1 - y/y_h} \quad (\text{B.8})$$

dan is:

$$\frac{y}{y_h} = 1 - x^2 \text{ en } d\left(\frac{y}{y_h}\right) = -2x dx \quad (\text{B.9})$$

Invullen van (B.8) en (B.9) in (B.7) geeft:

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \int \frac{-2x^2}{1-x^2} dx \quad (\text{B.10})$$

Uitwerken van (B.10) gaat op de volgende manier; met behulp van lit.16 :

$$\begin{aligned} u &= \frac{-2 u_b^*}{\kappa} \left\{ -x + \int \frac{dx}{1-x^2} \right\} + c \\ &= \frac{-2 u_b^*}{\kappa} \left\{ -x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right\} + c \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Invullen van (B.8) geeft:

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} - \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) + \right. \\ \left. + \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) \right\} + c \quad (B.12)$$

Met behulp van de randvoorwaarde dat $u=0$ voor $y=y_0$ wordt de integratieconstante c gelijk aan:

$$c = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} - \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) \right\} \quad (B.13)$$

Invullen van (B.13) in (B.12) geeft:

$$u = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} - \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) + \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) + \right. \\ \left. - 2\sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) + \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) \right\} \quad (B.14)$$

Integreren van (B.13) tussen de grenzen y_0 en y_h en delen door de diepte geeft de gemiddelde snelheid \bar{u} :

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{1}{y_h - y_0} \left[\int_{y_0}^{y_h} 2\sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} dy + \int_{y_0}^{y_h} -2\sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} dy + \right. \\ \left. + \int_{y_0}^{y_h} -\ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) dy + \int_{y_0}^{y_h} \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) dy + \right. \\ \left. + \int_{y_0}^{y_h} \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) dy + \int_{y_0}^{y_h} -\ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) dy \right] \quad (B.15)$$

De uitwerking van de tussen haken staande integralen volgt hieronder waarbij de achtereenvolgende integralen zijn genummerd van 1 tot en met 6:

integraal 1:
$$\int_{y_0}^{y_h} 2\sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} dy = \int_{y_0}^{y_h} 2 y_h \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} d\left(\frac{y}{y_h}\right)$$
$$= \left[-\frac{4}{3} y_h \left(1 - \frac{y}{y_h}\right)^{3/2} \right]_{y_0}^{y_h}$$
$$= \frac{4}{3} y_h \left(1 - \frac{y_0}{y_h}\right)^{3/2}$$

integraal 2:
$$-2 \int_{y_0}^{y_h} \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} dy = -2 y_h \int_{y_0}^{y_h} \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} d\left(\frac{y}{y_h}\right)$$
$$= \left[-2 y \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right]_{y_0}^{y_h}$$
$$= -2y_h \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} + 2 y_0 \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Integraal 3: } & - \int_{y_0}^{y_h} \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) dy = \\
 & = - \int_{y_0}^{y_h} \left\{ \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) \right\} \left(-2y_h \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) d \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) \\
 & = 2y_h \int_{y_0}^{y_h} \left\{ \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) + \right. \\
 & \quad \left. - \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) \right\} d \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) \\
 & = 2y_h \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) - \frac{1}{4} \right\} + \right. \\
 & \quad \left. - \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) \right]_{y_0}^{y_h} \\
 & = 2y_h \left[\frac{y_0}{2y_h} \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{y_0}{y_h} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Integraal 4: } & \int_{y_0}^{y_h} \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) dy = \left[y \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) \right]_{y_0}^{y_h} \\
 & = y_h \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) - y_0 \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right)
 \end{aligned}$$

integraal 5:
$$\int_{y_0}^{y_h} \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) dy$$

De integraal is op dezelfde manier te bepalen als integraal 3. De uitkomst van integraal 5 is dan:

$$\text{integraal 6: } \int_{y_0}^{y_h} - \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) dy = \left[-y \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) \right]_{y_0}^{y_h}$$

$$= -y_h \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) + y_0 \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right)$$

Invullen van de uitkomsten van de integralen 1 tot en met 6 in (B.15) geeft na enig omwerken:

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} - \frac{2}{3} \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} - \frac{2}{\sqrt{1 - y_0/y_h}} + \frac{y_h}{y_h - y_0} \frac{(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}})}{(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}})} \quad (\text{B.16})$$

Daar $y_0 \ll y_h$ kan in (B.16) de faktor $\frac{y_0}{y_h}$ verwaarloosd worden t.o.v. 1 in de eerste twee termen van (B.16) en in de laatste term van (B.16) kan y_0 in de faktor

$$\frac{y_h}{y_h - y_0} \text{ verwaarloosd worden t.o.v. } y_h. \text{ Vergelijking (B.16)}$$

gaat dan over in:

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} - \frac{2}{3} - 2 + \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) - \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) \quad (\text{B.17})$$

Verwaarlozen van $\frac{y_0}{y_h}$ t.o.v. 1 in de derde term van (B.17)

en ontwikkelen van $\sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}}$ in de vierde term van (B.17) geeft uiteindelijk de volgende benadering voor \bar{u} :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{u_b^*}{\kappa} \left[-\frac{2}{3} - 2 + \ln 2 - \ln \left(1 - 1 + \frac{y_0}{2y_h} \right) \right] \\ &= \frac{u_b^*}{\kappa} \left[-\frac{8}{3} + \ln 2 + \ln 2 + \ln \frac{y_h}{y_0} \right] \\ &= \frac{u_b^*}{\kappa} \left(\ln \frac{y_h}{y_0} - 1.28 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

De faktor $\frac{y_0}{y_h}$ kan in de vierde term van (B.17) niet verwaarloosd worden t.o.v. 1 daar dan het getal waar de logaritme van bepaald moet worden nul wordt, daarom wordt

$\sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}}$ in een reeks ontwikkeld.

Tenslotte zal de integratie uitgevoerd worden ter bepaling van \bar{u} uitgaande van de snelheidsverdeling die verkregen wordt door uit te gaan van een driehoekig over de diepte verlopende schuifspanning en de door von Kármán afgeleide uitdrukking voor de mengweg L (zie (3.12)).

De vergelijking voor de snelheid u is dan (zie(3.13)):

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) + \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} + \right. \\ &\quad \left. - \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Integreren van (B.19) tussen de grenzen y_0 en y_h en delen door de diepte geeft de gemiddelde snelheid \bar{u} :

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} \frac{1}{y_h - y_0} \left[\int_{y_0}^{y_h} \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} \right) dy + \int_{y_0}^{y_h} \sqrt{1 - \frac{y}{y_h}} dy + \right.$$

$$+ \int_{y_0}^{y_h} - \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) dy + \int_{y_0}^{y_h} - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \quad (B.20)$$

De uitwerking van de in (B.20) voorkomende integralen gaat op dezelfde manier als de uitwerking van de integralen in (B.15). De resultaten zijn dan:

$$\begin{aligned} \text{integraal 1: } \int_{y_0}^{y_h} \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) dy = \\ -2y_h \left[\frac{y_0}{2y_h} \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{y_0}{y_h} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{integraal 2: } \int_{y_0}^{y_h} \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} dy = \frac{2}{3} y_h \left(1 - \frac{y_0}{y_h} \right)^{3/2}$$

$$\begin{aligned} \text{integraal 3: } \int_{y_0}^{y_h} - \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) dy = \\ = y_0 \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) - \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{integraal 4: } \int_{y_0}^{y_h} - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} dy = y_0 \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} - y_h \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}}$$

Invullen van de uitkomsten van de integralen 1 tot en met 4 in (B.20) geeft na enig omwerken:

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} \left\{ \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} \right) + \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y_0}{y_h}}} + \frac{1}{2} \right\} \quad (B.21)$$

Door dezelfde verwaarlozingen in te voeren in (B.21) als dat gedaan is in (B.16) geeft voor \bar{u} het volgende resultaat:

$$\bar{u} = \frac{u_b^*}{\kappa} \left(\ln \frac{y_h}{y_0} - 1.14 \right) \quad (B.22)$$

Appendix C

In hun analytische benaderingen gaan Kajiura en Bakker uit van een verschillende schematisering van de schuifspanningssnelheid.

De uitdrukking voor de schuifspanning:

$$\frac{\tau}{\rho_w} = L^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (C.1)$$

wordt door Bakker vervangen door:

$$\frac{\tau_{\text{schem}}}{\rho_w} = A L^2 \frac{\widehat{\partial u}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (C.2)$$

Hierin is A gelijk aan $\frac{8}{3\pi}$. De faktor A komt voort uit het feit dat de energiedissipatie gelijk moet blijven bij de overgang van (C.1) naar (C.2).

De faktor $8/3\pi$ wordt door Bakker gelijk verdeeld over $\frac{\widehat{\partial u}}{\partial y}$ en $\frac{\partial u}{\partial y}$. Voor de schuifspanningssnelheid $u^* = L \frac{\partial u}{\partial y}$ en de topwaarde van de schuifspanningssnelheid wordt dan respectievelijk gevonden:

$$u^* = \frac{8}{3\pi} L \frac{\partial u}{\partial y} \quad (C.3)$$

en:

$$\widehat{u}^* = \frac{8}{3\pi} L \frac{\widehat{\partial u}}{\partial y} \quad (C.4)$$

De bodemschuifspanningssnelheid u_b^* en de amplitude van de bodemschuifspanningssnelheid \widehat{u}_b^* worden dan respectievelijk

$$u_b^* = \frac{8}{3\pi} L \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b \quad (C.5)$$

en:

$$\widehat{u}_b^* = \frac{8}{3\pi} L \left(\frac{\widehat{\partial u}}{\partial y} \right)_b \quad (C.6)$$

Kajiura trekt in zijn schematisering de faktor $8/3\pi$ in zijn geheel bij de amplitude van de bodemschuifspannings-

snelheid u_b^* .

De geschematiseerde bodemschuifspanning $\tau_{b,schem}$ ziet er dan als volgt uit:

$$\frac{\tau_{b,schem}}{\rho_w} = \frac{8}{37\pi} \hat{u}_b^* u_b^* = \tilde{u}_b^* u_b^* \quad (C.7)$$

De interne schuifspanning wordt door Kajiura als volgt gedefinieerd:

$$\tau_{schem} = \rho_w \tilde{u}_b^* u^* \quad (C.8)$$

Bij Kajiura komt in de uitdrukking voor de inwendige schuifspanning dus de factor \tilde{u}_b^* voor, dit in tegenstelling met Bakker die voor de inwendige geschematiseerde schuifspanning de volgende uitdrukking verkrijgt:

$$\tau_{schem} = \rho_w \hat{u}_b^* u^* \quad (C.9)$$

De door Kajiura gebruikte u_b^* is gelijk aan $3\pi/8$ maal de door Bakker gebruikte u_b^* en \hat{u}_b^* in de benadering van Kajiura is $8/37\pi$ maal de door Bakker gebruikte \hat{u}_b^* . Een ander essentieel verschil is dat Bakker voor de factor $L \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}$ een negatief exponentieel verloop over de hoogte aanhoudt (zie vergelijking (4.14), terwijl Kajiura hiervoor een over de gehele hoogte konstante factor \hat{u}_b^* aanhoudt.

Literatuuroverzicht

1. Kooiker, E.P.
Eerste bericht betreffende een empirische methode ter bepaling van zandtransporten in de Westerschelde.
Rijkswaterstaat, Studiedienst Vlissingen, Memo 74.7.
2. Kooiker, E.P.
Tweede bericht betreffende een empirische methode ter bepaling van zandtransporten in de Westerschelde.
Rijkswaterstaat, Studiedienst Vlissingen, Memo 75.8.
3. Kooiker, E.P.
Het slibgehalte in het oostelijk deel der Westerschelde.
Eerste bericht.
Rijkswaterstaat, Studiedienst Vlissingen, Memo 75.2.
4. Bakker, W.T.
Het huidige slibgehalte en slibtransport in het oostelijk deel van de Westerschelde. Tweede bericht.
Rijkswaterstaat, Studiedienst Vlissingen, Memo 75.10.
5. Bakker, W.T.
Toetsing van zandconcentratie-vertikalen in de Westerschelde aan de aannamen van de zandtransportberekeningsmethode van Bijker.
Rijkswaterstaat, Studiedienst Vlissingen, Memo 75.3.
6. Bijker, E.W.
Lecture notes for Topics in Coastal Engineering.
Collegedictaat T.H. Delft.
7. Vanoni, V.A.
Transportation of suspended sediment by water.
ASCE, paper 2267, 1946, volume III.
8. Kajiura, K.
On the bottom friction in an oscillatory current.
Bulletin of the Earthquake Research Institute.
Volume 42 (1964), pages 147-174.
9. Kármán, Th. von
Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz.
Proc. 3rd Int. Congress for Applied Mechanics.
Volume 1, 1930, pages 85-92.
10. Coleman, N.L.
Flume studies of the sediment transfer coefficient.
Water Resources Research.
Volume 6, nr. 3, June 1970.

11. Jonsson, J.G.
Measurements in the turbulent wave boundary layer.
10th I.A.H.R. congress, London.
Volume I, pages 85-92, 1963.
12. Bakker, W.T.
Bottom friction and velocity distribution in an oscillatory flow.
Rijkswaterstaat, Directie waterhuishouding en waterbeweging, afdeling kustonderzoek.
Memo 72-23, januari 1973.
13. Abramowitz, M. and Stegun, I.A.
Handbook of mathematical functions.
National Bureau of Standards, 1964.
14. Bakker, W.T.
Sand concentration in an oscillatory flow.
Rijkswaterstaat, Directie waterhuishouding en waterbeweging, afdeling kustonderzoek.
Memo 72-28, januari 1973.
15. Bijker, E.W.
Some considerations about scales for coastal models with movable bed.
Waterloopkundig Laboratorium Delft,
Publikatie nr. 50, 1967.
16. Carmichael, R.O. en Smith, E.R.
Mathematical Tables and Formules,
Dover Publications, Inc., New York.
17. Bakker, W.T.
Sand concentration in an oscillatory flow,
Rijkswaterstaat, Studiedienst Vlissingen, Memo 74.5b.
18. Jonsson, J.G.
Derivation of formulae for phenomena in the turbulent wave boundary layer.
Coastal engineering and hydraulic laboratory of the Technical University of Denmark.
Basic research progress reports, 9, 1965.
19. Ebbens, E.H.
Berekening aanslibbing Noordelijk Bekken na de bochtafsnijding bij Bath.
Rijkswaterstaat, Studiedienst Vlissingen, Memo 76.7.
20. Ebbens, E.H., van Eijck, G.J. en Bakker W.T.
Bepaling van valsnelheden van slib met een sedimentatiebals.
Rijkswaterstaat, Studiedienst Vlissingen, Memo 76.8.

21. Schatting van de te verwachten aanslibbing in het oostelijk deel van het Noordelijk Bekken na de verwezenlijking van de bochtafsnijding bij Bath.
Waterbouwkundig Laboratorium Borgerhout, oktober 1975.
22. Beijl, P.
Afstudeeronderzoek.
Vakgroep kustwaterbouwkunde, T.H. Delft.

Symbolenlijst

<u>Symbool</u>	<u>Definitie</u>	<u>Dimensie</u>
a	slaglengte	L
b	coëfficiënt voorkomende in de formule van Bijker	
C_h	Chézy-wrijvingscoëfficiënt	$L^{1/2}T^{-1}$
C_k	Kajiura's wrijvingscoëfficiënt	
C_k	amplitude van Kajiura's wrijvingscoëfficiënt	
c	sediment concentratie	
\bar{c}	over de vertikaal gemiddelde concentratie	
\bar{c}	over het getij gemiddelde concentratie	
c_a	concentratie op een afstand a boven de bodem	
D	korreldiameter	
E	energiedissipatie per eenheid van lengte	MLT^{-3}
E_{schem}	geschematiseerde energiedissipatie per eenheid van lengte	MLT^{-3}
f_c	dimensieloze wrijvingscoëfficiënt	
f_w	dimensieloze wrijvingscoëfficiënt in een golfbeweging met korte periode, gedefinieerd door Jonsson	
g	zwaartekrachtsversnelling	LT^{-2}
I	verhang van de waterspiegel	
\hat{I}	amplitude van het verhang van de waterspiegel	
I_1, I_2	parameters in de vergelijking van Einstein	
K_y	turbulente viscositeit	L^2T^{-1}
k	golfgetal $2\pi/L$	L^{-1}
L	mengweg	L^{-1}
m	aantal roosters	
p_r	hydrostatische waterdruk	$ML^{-1}T^{-2}$
\bar{p}_r	over het getij gemiddelde hydrostatische waterdruk	$ML^{-1}T^{-2}$

<u>Symbool</u>	<u>Definitie</u>	<u>Dimensie</u>
\hat{p}_r	amplitude van de hydrostatische waterdruk	$ML^{-1}T^{-2}$
p_*	dimensieloze schuifspanningssnelheid	
$p_{* \max}$	maximale dimensieloze schuifspanningssnelheid aan de bodem t.g.v. de harmonische beweging (= p_{*b})	
q	hulpfunctie in de analytische berekening van Bakker	LT^{-1}
\hat{q}_o	amplitude van q	LT^{-1}
r	ribbelhoogte	L
S	totale sediment transport	L^3T^{-1}
S_b	transport aan de bodem	L^3T^{-1}
S	transport in suspensie	L^3T^{-1}
S_x	transport in x-richting	L^3T^{-1}
S_y	transport in y-richting	L^3T^{-1}
S_z	transport in z-richting	L^3T^{-1}
S_*	dimensieloos sedimenttransport	
T	golfperiode	T
T_o	referentietijd of nepereringstijd	T
t	tijd	T
t_*	dimensieloze tijd (= t/T_o)	
Δt_*	dimensieloze tijdstap	
U	snelheid op grote afstand van de bodem	LT^{-1}
\hat{U}	amplitude van U	LT^{-1}
U_o	referentiesnelheid	LT^{-1}
u	momentane snelheid	LT^{-1}
\bar{u}	gemiddelde snelheid	LT^{-1}
\bar{u}	over de vertikaal en over het getij gemiddelde resstroom	LT^{-1}
\hat{u}	amplitude van de over de vertikaal gemiddelde stroom	LT^{-1}
u_d	defect velocity	LT^{-1}

<u>Symbol</u>	<u>Definitie</u>	<u>Dimensie</u>
u_r	reële deel van de complexe uitdrukking voor u	LT^{-1}
u_i	imaginaire deel van de complexe uitdrukking voor u	LT^{-1}
\bar{u}_i	gemiddelde van u_i	LT^{-1}
u^*	interne schuifspanningssnelheid	LT^{-1}
u^{*1}	complexe amplitude van de interne schuifspanningssnelheid	LT^{-1}
u_b^*	schuifspanningssnelheid aan de bodem	LT^{-1}
\hat{u}_b^*	amplitude van de harmonische komponent van u_b^*	LT^{-1}
\tilde{u}_b^*	geschematiseerde amplitude van de schuifspanningssnelheid aan de bodem volgens Kajiura = $\frac{8}{3}\pi u_b^*$	LT^{-1}
u_b^{-*}	schuifspanningssnelheid aan de bodem t.g.v. een zout-zoetgradiënt en het verhang	LT^{-1}
u_r^*	reële deel van de complexe uitdrukking voor u^*	LT^{-1}
u_i^*	imaginaire deel van de complexe uitdrukking voor u^*	LT^{-1}
w	valsnelheid	LT^{-1}
\bar{w}	gemiddelde valsnelheid	LT^{-1}
w^*	dimensieloze valsnelheid	
x	horizontale coördinaat	L
y_o	referentielengte	L
y	vertikale coördinaat	L
y_o	1/33 van de ribbelhoogte	L
y_h	waterdiepte	L
y^*	dimensieloze hoogte	
y^*_{max}	dimensieloze waterdiepte	

<u>Symbol</u>	<u>Definitie</u>	<u>Dimensie</u>
Δy_*	afstand tussen roosterpunten (dimensieloos)	
Δy_*^1	afstand tussen roosterpunten van het grofste rooster	
z	horizontale coördinaat in breedterichting	L
δ	konstante van Euler	
δ	faseverschil tussen u_b^* en U	
Δ	relatieve dichtheid van zand in water	
ϵ	diffusiecoëfficiënt van sediment	
ϵ_*	dimensieloze diffusiecoëfficiënt	
κ	konstante van von Kármán	
λ	golflengte van u^{*1} (analytische berekening van Bakker)	L
λ_q	golflengte van q (analytische berekening van Bakker)	L
μ	ribbelfactor	
ρ_w	dichtheid van water	ML ⁻³
ρ_s	dichtheid van sediment	ML ⁻³
	schuifspanning	ML ⁻¹ T ⁻²
τ_s	schuifspanning aan het oppervlak	ML ⁻¹ T ⁻²
τ_b	schuifspanning aan de bodem	ML ⁻¹ T ⁻²
$\tau_{b,schem}$	geschematiseerde schuifspanning aan de bodem	ML ⁻¹ T ⁻²
τ_{schem}	geschematiseerde schuifspanning	ML ⁻¹ T ⁻²
$\tau_{b,max}$	maximale bodemschuifspanning	ML ⁻¹ T ⁻²
$\tau_{b,min}$	minimale bodemschuifspanning	ML ⁻¹ T ⁻²
φ_u	fasehoek van u	
φ_{y_h}	fasehoek van y_h	
φ_{u^*}	fasehoek van u^*	
φ_{p_r}	fasehoek van p_r	

<u>Symbol</u>	<u>Definitie</u>	<u>Dimensie</u>
ω	hoeksnelheid	T^{-1}
θ	faseverschil tussen \bar{u} en u_b^*	
∇_i	gradiënt in x-, y- of z-richting	

