

waterloopkundig laboratorium delft hydraulics laboratory

wiskundige waterbewegingsmodellen in het advies-
werk voor havens en kusten

C.B. Vreugdenhil en H.G. Wind

R 1174 nota VII

februari 1981



INHOUD

	blz.
1. <u>Inleiding</u>	1
2. <u>Typen wiskundige modellen</u>	2
2.1 Niet-viskeuze modellen.....	2
2.1.1 Lineair niet-viskeus model.....	2
2.1.2 Niet-lineair niet-viskeus model.....	3
2.2 Viskeuze modellen.....	3
2.2.1 Lineair viskeus model.....	3
2.2.2 Niet-lineair viskeus model.....	3
2.3 Niet-stationair model.....	3
3. <u>Projekten</u>	5
3.1 <u>Inleiding</u>	5
3.1.1 Strandhoofden en havendammen.....	5
3.1.2 Erosie van de koppen van de eilanden; zandopspuitingen.....	5
3.1.3 Noordzee eiland; onderwatergolfbreker; storten of zuigen van bagger- specie.....	6
3.1.4 Haven uitbreiding Goesse Sas.....	6
3.1.5 Sedimentatie havendammen.....	7
4. <u>Overzicht</u>	8
5. <u>Synthese</u>	9
6. <u>Conclusies</u>	10

Aanhangsel

TABELLEN

- 1 Reken- en ontwikkelingskosten van wiskundige modellen (1980)
- 2 Wiskundige modellen versus probleemstelling

1. Inleiding

De Stuurgroep van het T.O.W. Kustonderzoek heeft, naar aanleiding van het rapport van de Commissie van Drie en de daarop volgende reacties aan de Werkgroep Kuststromingen, gevraagd om na te gaan wat de plaats van wiskundige waterbewegingsmodellen in de adviespraktijk is. Deze vraag is uitgewerkt in de voor u liggende nota door prof. dr. ir. C.B. Vreugdenhil en dr. ir. H.G. Wind.

In het eerste deel van deze nota zal een inventarisatie worden gegeven van typen kuststromingsmodellen. Onderscheid zal worden gemaakt op basis van fysische processen die al of niet in de vergelijkingen zijn meegenomen. Verder is er een schatting gemaakt van zowel de relatieve rekenkosten van ieder type model als van de relatieve ontwikkelingskosten. Deze gegevens zijn in tabel 1 aangegeven.

In het tweede deel van dit stuk wordt, aan de hand van Nederlandse projecten, nagegaan van welke oplossingsmethoden in het advieswerk gebruik gemaakt wordt en welke plaats een wiskundig waterbewegingsmodel hierbij zou kunnen innemen. Op basis van deze gegevens zijn conclusies geformuleerd.

2. Typen wiskundige modellen

De aandrijvende termen voor de kuststromingen zijn:

- a gradienten in de golfspanningen (impuls),
- b druk- (waterstands-) verschillen (zwaartekracht),

Deze aandrijvende krachten kunnen evenwicht maken met:

- c bodemschuifspanning,
- d viskositeit (laterale wrijving),
- e konvektie termen,
- f lokale versnellingstermen.

De viskositeitsterm tezamen met de konvektie termen zijn essentieel voor de beschrijving van door stroom aangedreven neren. Voor een adequate beschrijving van de viskositeitsterm wordt onderzoek verricht in de T.O.W. Projektgroep "Stromen en Transportverschijnselen". Resultaten zullen aan het eind van 1980 beschikbaar komen.

De convectie termen worden belangrijk in gebieden met stroom concentraties. Het effect van deze termen is het concentreren of divergeren van de stroomlijnen. Deze termen zijn niet-lineair in de snelheid. Een stelsel vergelijkingen waarin deze termen ontbreken zal worden aangegeven als een lineair model.

De lokale versnellingsterm $\frac{\partial}{\partial t}$ is belangrijk in niet-stationaire stroombeelden.

De druk- (waterstands-) verschillen kunnen worden opgewekt door getij of door verandering in stralingsdruk. Binnen de brekerzone kunnen deze termen aanleiding tot stromen geven, bijvoorbeeld in het geval van een diffractie neer. In het aanhangsel zijn drie benaderingsmethoden voor deze termen gegeven. De derde methode leidt uiteindelijk tot een vrije waterspiegel.

2.1 Niet-viskeuze modellen

2.1.1 Lineair niet-viskeus model

In dit meest eenvoudige model wordt de waterbeweging gevonden uit een evenwicht tussen de gradient in de stralingsdruk, de bodemschuifspanning en de gradient in het gemiddeld waterniveau.

Een uitbreiding aan dit model kan worden gegeven door de berekening van de set-up, waar overigens impliciet al wel rekening meegehouden is.

2.1.2 Niet-lineair niet-viskeus model

Aan het voorafgaande model zijn nu de convectie termen toegevoegd. Dit maakt dit model geschikt voor het nauwkeuriger beschrijven van stroomconcentraties en -divergenties. Uit tabel 1 blijkt dat de rekenkosten een factor 10 hoger zijn dan van het voorafgaande model. De ontwikkelingskosten zijn van dezelfde orde van grootte.

2.2 Viskeuze modellen

2.2.1 Lineair viskeus model

Een tweede categorie modellen wordt verkregen door het inbrengen van de viskeuze effecten (laterale wrijving). In deze modellen wordt het stromingsveld gevonden uit een evenwicht tussen de gradient in de stralingsdruk, de bodemschuifspanning, de gradient in het gemiddeld waterniveau en de viskeuze effecten. Door het ontbreken van de konvektie termen is dit model niet geschikt voor het beschrijven van door stroom aangedreven neren. De ontwikkelings- en rekenkosten liggen iets hoger dan van het voorafgaande model.

2.2.2 Niet-lineair viskeus model

Door het toevoegen van de niet-lineaire termen aan het voorafgaande model is het mogelijk om neren te berekenen. Volgens tabel 1 zijn zowel de ontwikkelingskosten een factor 2 à 3 en de rekenkosten een factor 10 hoger geworden dan van het voorafgaande model door deze toevoeging. De ontwikkelings- en rekenkosten zijn respectievelijk 10 en 100 maal zo hoog als in het geval van een lineair niet-viskeus model.

2.3 Niet-stationair model

Een verdere uitbreiding van de modellen kan worden verkregen door ook het niet-stationaire effect mee te nemen. Het is dan mogelijk om oscillaties en het opbouwen van het stromingsveld te bestuderen. Er zijn twee modellen die globaal deze mogelijkheden bieden en wel WAQUA en RIPCEL.

In RIPCEL zijn de effecten van golfspanningen ingebouwd. Dit model biedt dan ook de mogelijkheid om voor golfgedreven kuststromen na te gaan welke verwaarlozingen in de basisvergelijkingen toegestaan zijn. Een dergelijk gevoeligheidsonderzoek moet nog worden uitgevoerd. De rekenkosten liggen in de zelfde orde van grootte als van het voorafgaande model. De uitbreiding van RIPCEL naar een gebied van willekeurige vorm kost ongeveer 2 tot 5 maal zoveel als het ontwikkelen van een lineair niet-viskeus model.

3. Projekten

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zal van een aantal projecten kort de probleemstelling omschreven worden. Aangegeven zal worden van welk type wiskundig model voor de oplossing van het probleem gebruik gemaakt zou kunnen worden.

3.1.1 Strandhoofden en havendammen

Strandhoofden zijn aangelegd om de eroderende werking van getij en golfgedreven langsstroom te verminderen (zie schets 1). Het effect van de strandhoofden op het stromingsveld zal afhangen van hun lengte zowel als van de onderlinge afstand. Als er van wordt uitgegaan dat drie-dimensionale effecten geen dominante invloed uitoefenen kan van de hiervoor genoemde modellen gebruik gemaakt worden. Deze opmerking geldt ook voor de nog te noemen gevallen. Met behulp van het lineaire niet viskeuze model kan een indruk verkregen worden van het stromingsveld tussen de strandhoofden inclusief de diffractie-neer.

Voor een nauwkeuriger beschrijving van de stroomconcentratie rondom de kop van het strandhoofd voor de berekening van de erosiekuil is waarschijnlijk het niet-lineair niet-viskeuze model voldoende.

Voor het beschrijven van de neer die wordt opgewekt door de terugbuigende langsstroom of door het getij is het niet-lineaire viskeuze model nodig. Verder wordt met dit model ook informatie verkregen waar de stroom weer gaat aanliggen. Dit punt hangt samen met het mogelijk optreden van kusterosie.

3.1.2 Erosie van de koppen van de eilanden; zandopspuitingen

Rondom de koppen van de eilanden Goeree en Texel treedt erosie op door getij en de langsstroom. De bijbehorende stroombeelden zijn complex. Op basis van informatie over de invloed van een konstruktie of een zandopspuiting op het stromingsbeeld kan een schatting worden gemaakt van de te verwachten sedimentatie- en erosiepatronen voor verschillende alternatieven.

Voor de studie van de grootschalige effecten van de orde van grootte van 1000 m kan het lineair niet-viskeuze model een bijdrage leveren. Zijn effecten op een

kleinere schaal belangrijk, zoals de beschrijving van een zandopspuiting in de vorm van een zanddam dwars op de kust, dan zouden konvektie termen belangrijk kunnen worden. Duidelijk is dit evenwel niet.

3.1.3 Noordzee eiland; onderwatergolfbreker; storten of zuigen van bagger-specie

In deze categorie vallen problemen waarbij een konstruktie offshore, zoals aangegeven in schets 3, is gebouwd. Deze konstruktie zal invloed uitoefenen zowel op het stromingsbeeld door getij als op het golfklimaat. Afhankelijk van de verhouding tussen de lengte van de konstruktie en de afstand tot de kust kunnen vragen gesteld worden over de invloed op de transportkapaciteit nabij de kust of rondom de konstruktie.

Een eerste schatting van het stromingsveld kan dan worden verkregen met het lineaire niet-viskeuze model. Voor gevallen waarbij de snelheidsverdeling in de langsstroom belangrijk is, zoals bij tombolovorming, moeten viskeuze effecten worden meegenomen en kan het lineaire viskeuze model mogelijk uitkomst bieden.

3.2.4 Scheepvaartgeul Goesse Sas

Voor de bouw van een nieuwe sluis, die toegang geeft tot de haven van Goes moet een geul gebaggerd worden naar diep water, zoals globaal aangegeven is in schets 4. De eerste vraag is hoe snel deze geul zal sedimenteren. Deze sedimentatie vindt plaats via een neer die door de vloedstroom wordt aangedreven. De golven woelen zand op op het lage voorland en dit sediment wordt door de neer naar de geul getransporteerd.

Van de situatie zonder geul zijn natuurgegevens bekend. Het is dus mogelijk om het wiskundig model te calibreren. De geul zal waarschijnlijk in geringe mate het aandrijvende mechanisme van de neer beïnvloeden. Een wiskundig model zou gebruikt kunnen worden om een indruk te krijgen van de waterbeweging na het baggeren van de geul. Deze waterbeweging is voor het advieswerk schattenderwijs verkregen en de konklusie is geweest dat (om te sterke sedimentatie te voorkomen) een dam essentieel is.

De volgende vraag is: hoe lang moet deze dam zijn? Als de dam te kort is sedimenteert de geul alsnog. Bij het langer worden van de dam neemt de stroomsnelheid bij de kop toe. Deze hogere stroomsnelheid leidt tot een verhoogde

transportkapaciteit aan de teen van de havendam. Het gewicht van een zwaardere verdediging kan zettingsvloeiingen veroorzaken. De toenemende stroomsnelheid voor de mond van de haven kan tevens hinderlijk zijn voor de scheepvaart.

Voor de eerste vraag zou een lineair viskeus model een goed hulpmiddel zijn. Voor de tweede vraag kunnen de konvektie termen belangrijk worden. Deze overweging leidt tot een niet-lineair viskeus model.

Een kwantitatieve benadering van deze probleemstelling was door het ontbreken van de geschikte hulpmiddelen, afgezien van modelonderzoek, nu niet mogelijk. Voor beide vragen zou het advies met behulp van een niet-lineair viskeus model beter onderbouwd geweest zijn.

3.1.5 Sedimentatie havenmonden

Regelmatig wordt aan het W.L. advies gevraagd over te verwachten waterbeweging in een havenmond. Een recent Nederlands voorbeeld is de haven van Hansweert (zie schets 5). De ervaring is dat het optredende nerenpatroon sterk afhankelijk is van de havenconfiguratie. Verder bestaat de indruk dat de onderwater taluds van de dammen ook een rol spelen bij de stroomverdeling.

Advies over de waterbeweging wordt gegeven op basis van een nat stroommodel, waarin een permanent stroombeeld wordt opgewekt. De calibratie van het model vindt plaats op basis van natuurgegevens. Het is niet duidelijk welke verschillen te verwachten zijn tussen resultaten van een wiskundig model en die van een nat model. Verder is niet bekend of deze verschillen relevant zijn gezien de nauwkeurigheid van de berekeningsmethoden waarin de meetgegevens gebruikt worden. Enerzijds wordt op basis van de waterbeweging een indruk verkregen van het te verwachten sedimentatie patroon. Anderzijds wordt met een wiskundig scheepvaartmodel nagegaan onder welke omstandigheden hinder voor de scheepvaart verwacht kan worden. Een niet-lineair viskeus rekenmodel voor de waterbeweging zou in dit geval nuttig kunnen zijn bij de kwalitatieve beoordeling van verschillende alternatieven. Optimalisatie van het gekozen alternatief zou in een nat model plaats kunnen vinden.

4. Overzicht

In tabel 1 zijn de praktijkvoorbeelden samengevat. Daarbij is aangegeven welke modellen in staat zijn loslaatverschijnselen en de door de stroming aangedreven neren weer te geven (dit te onderscheiden van circulaties tengevolge van gradienten in de golfspanning). Verder is een schatting gegeven van de relatieve rekenkosten en de relatieve ontwikkelingsinspanning.

5. Synthese

In tabel 2 is aangegeven welke wiskundige modellen minimaal noodzakelijk zijn voor het oplossen van de probleemstelling. Deze tabel kan uitgebreid worden met andere voorbeelden. Voor wat betreft de problemen waarvoor advies aan het W.L. wordt gevraagd zijn hier de hoofdgroepen aangegeven.

Uit tabel 2 volgt dat het lineaire niet-viskeuze model in een aantal gevallen een waardevolle bijdrage kan leveren. De eenvoud van dit model biedt verder de mogelijkheid om te gelegenertijd een sedimentbalans aan dit model te koppelen. Een nadeel van dit model is dat het vaak slechts bruikbaar is in die situaties waar, zij het met enige moeite, nog wel een goede schatting van het stroombeeld te maken is. Moeilijke problemen, die dan ook aanleiding geven tot andere kostbare onderzoeksmethoden, vereisen een niet-lineair viskeus model.

6. Konklusies

Het lineair niet-viskeus model kan een nuttig hulpmiddel zijn voor eenvoudige kustproblemen. Gezien de kosten en de mogelijke verdere ontwikkelingen via een zandbalans zou een dergelijk type programma beschikbaar moeten worden gemaakt. Voor meer complexe gevallen is dit model niet voldoende. Hiervoor is een niet-lineair viskeus model het geschikte model. In beide modellen moeten onregelmatige randen en bodemliggingen verwerkt kunnen worden. De plaats van RIPCEL is aangegeven op diverse plaatsen in het aanhangsel.

Het is niet nodig dat de verandering in gemiddeld waterniveau als bekende grootheid in het rekenproces naar voren komt. Wel moet impliciet met deze term rekening gehouden worden (rigid-lid benadering).

	niet-viskeus		viskeus		niet- stationair
	lin.	niet-lin.	lin.	niet-lin.	
convectie	- -	+ +	- -	+ +	+
vrije waterspiegel	- +	- +	- +	- +	+
viskositeit	- -	- -	+ +	+ +	+
neren	- -	- -	- -	+ +	+
relatieve reken- kosten	1 2-5	10 20	10 20-50	100 200	200
relatieve ont- wikkelingskosten	1 +1*)	2 +1*)	3-5 +1*)	10 +3*)	2 -5**)

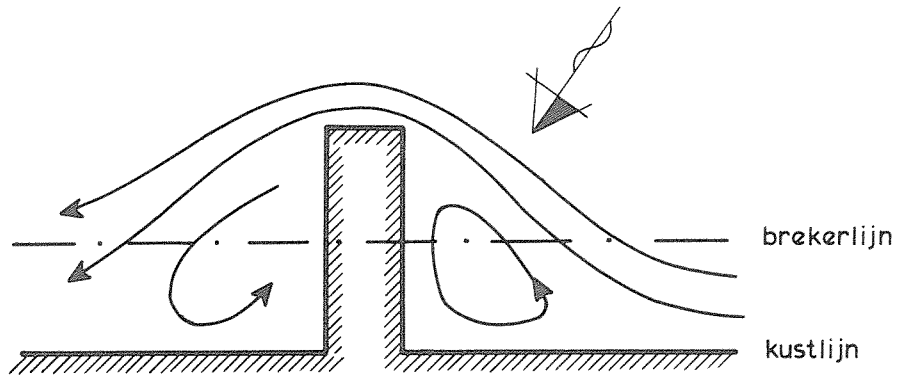
*) uitbreiding t.o.v. voorgaande model

***) op basis van WAQUA of RIPCEL

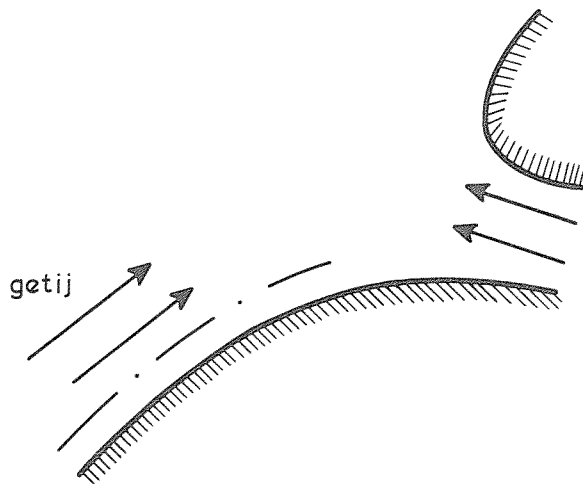
Tabel 1 Reken- en ontwikkelingskosten van wiskundige modellen (1980)

	lineair niet-viskeus	niet-lineair niet-viskeus	lineair viskeus	niet-lineair viskeus
stroming tussen de strandhoofden inclusief diffractie neer	X			
stroomconcentratie rondom de kop van een strandhoofd		X		
beschrijven van de neer opgewekt door terugbuigende langsstroom				X
grootschalige stroming rondom de koppen van de eilanden	X			
Noordzee eiland; onderwatergolfbreker; storten of zuigen van bagger specie (grootschalig)	X			
idem, maar nu meer detail vereist in de stroomverdeling			X	
Goesse Sas; globale beschrijving stromingsveld (+ natuurmetingen)			X	
Goesse Sas; stromingsveld nabij de havenmond				X
sedimentatie havenmonden				X

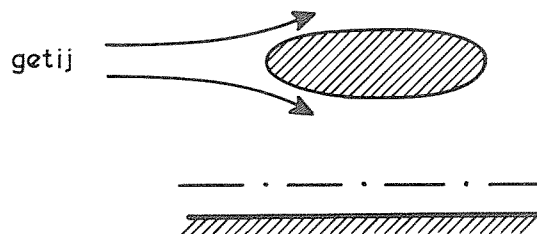
Tabel 2 Minimaal gewenste model van de probleemstelling



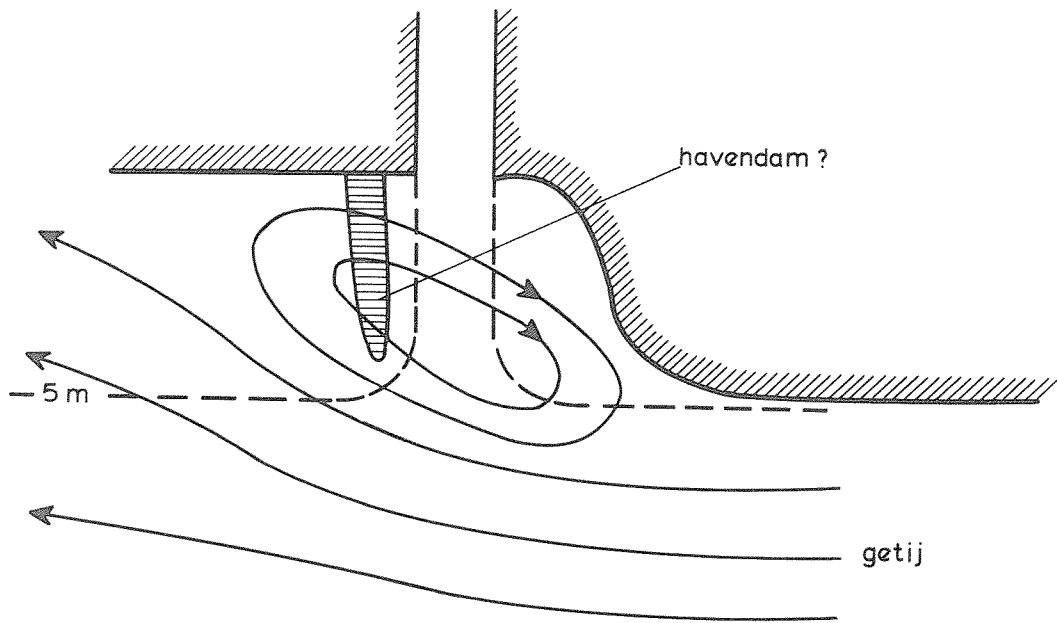
schets 1 strandhoofden en havendammen



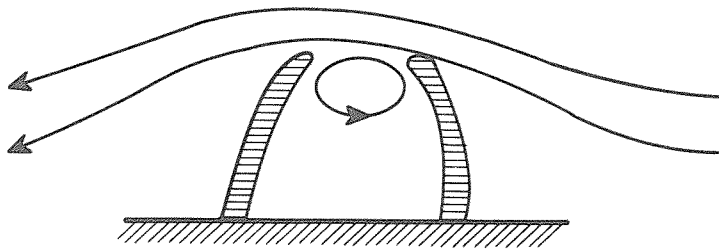
schets 2 Erosie koppen van eilanden
zandopspuitingen



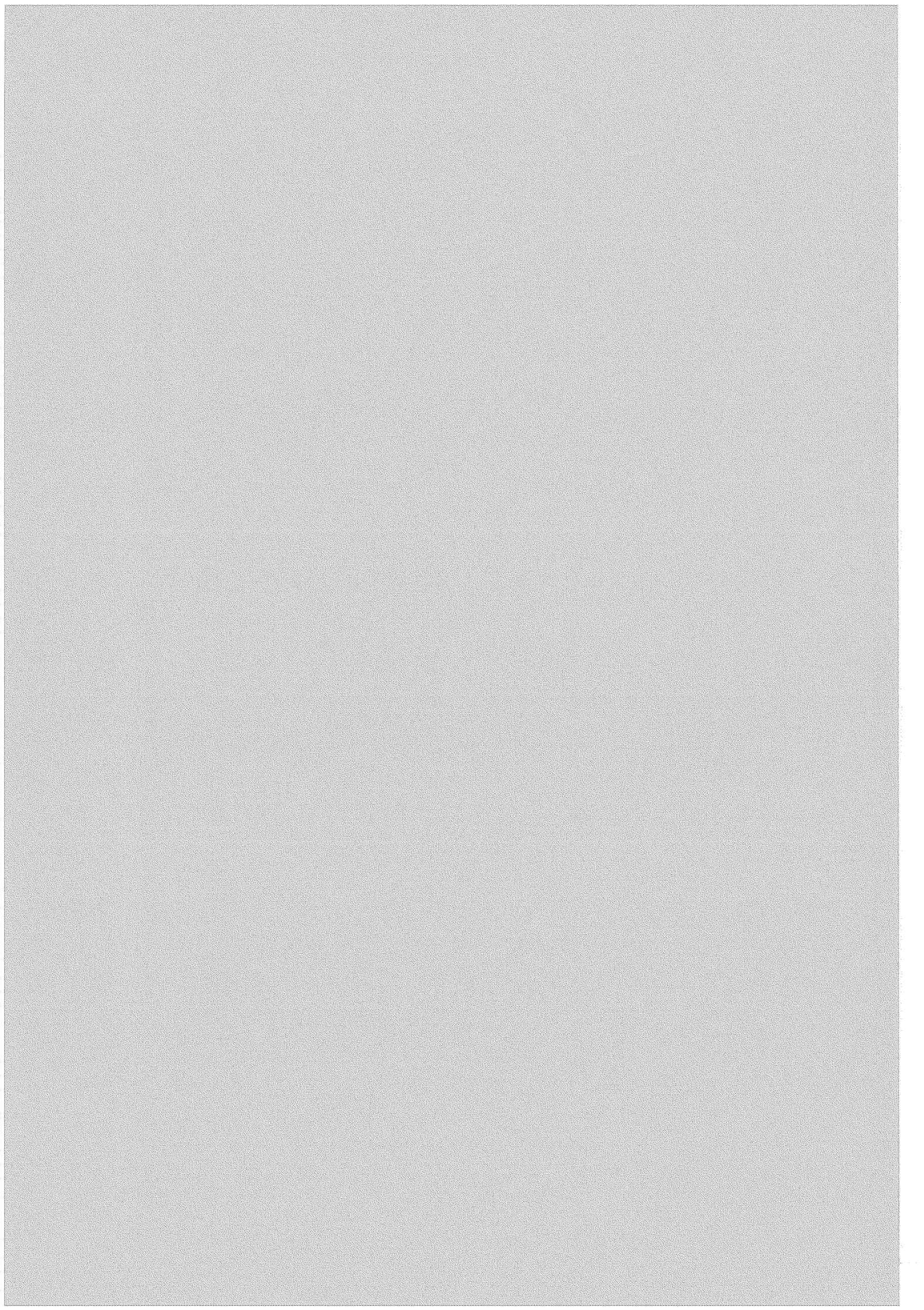
schets 3 Noordzee - eiland
storten of zuigen van baggerspecie
onderwater golfbreker



schets 4 Havenuitbreiding Goesse Sas



schets 5 Sedimentatie havenmonden



AANHANGSEL

	blz.
1. <u>Uitgangspunt</u>	I
2. <u>Basisvergelijkingen</u>	I
3. <u>Niet-viskeus model</u>	III
4. <u>Viskeus model</u>	V
5. <u>Niet-stationair model</u>	V

INVENTARISATIE KUSTSTROMINGSMODELLEN

1. Uitgangspunt

Op grond van de bestaande kennis en ervaring is het essentieel dat een kuststromingsmodel in ieder geval de volgende eigenschappen heeft:

- a aandrijving door golfspanningen,
- b bodemwrijving,
- c druk- (waterstands-) verschillen,
- d variabele diepte,
- e "willekeurige" randen,

Andere punten waarvan het belang en de mogelijkheid om er rekening mee te houden nader onderzocht moeten worden zijn:

- f convectietermen (niet verwaarloosbare versnellingskrachten),
- g viscositeit (laterale wrijving),
- h variaties waterstand door stroming,
- i stroomrefractie,
- j onregelmatige golven,
- k niet-stationair gedrag.

In de volgende paragrafen worden drie modeltypen onderscheiden.

2. Basisvergelijkingen

De algemene basisvergelijkingen voor niet-stationaire stroming zijn te vinden in het rapport R 1174-1 "A method of computation for unsteady wave-driven coastal currents". De meeste hier te bespreken modellen zijn (kwasi-) stationair. De vergelijkingen zijn dan:

$$(hu)_x + (hv)_y = 0 \tag{1}$$

$$uu_x + vu_y + g\zeta_x + ru + \frac{1}{\rho h} \{(S_{11})_x + (S_{21})_y\} + \\ - \frac{1}{\rho h} \{(h\tau_{11})_x + (h\tau_{21})_y\} = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
uv_x + vv_y + g\zeta_y + rv + \frac{1}{\rho h} \{(S_{12})_x + (S_{22})_y\} + \\
- \frac{1}{\rho h} \{(h\tau_{12})_x + (h\tau_{22})_y\} = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

waarin:

- h = waterdiepte
 u, v = snelheidscomponenten in x, y richting
 ζ = waterspiegelhoogte boven referentievlak
 r = "wrijvingscoëfficiënt"
 S_{ij} = golfspanning

Indices x en y geven differentiaties aan.

De turbulente spanningen worden beschreven door

$$\tau_{ji}/\rho = \varepsilon \{(u_i)_{x_j} + (u_j)_{x_i} - (u_i)_{x_i} \delta_{ij}\} \tag{4}$$

met $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$, anders 0; ε is de effectieve viscositeitscoëfficiënt.

Uit de vergelijkingen (2) en (3) kan de waterspiegelhoogte worden geëlimineerd door de rotatie ervan te nemen; die geeft de vergelijking voor de vorticititeit

$$\omega = u_y - v_x:$$

$$\begin{aligned}
u\omega_x + v\omega_y + \omega(u_x + v_y) + r\omega + ur_y - vr_x + F(h) + \\
- \varepsilon(\omega_{xx} + \omega_{yy}) - (u_y + v_x)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

waarin $F(h)$ wordt gegeven door (9). Anderzijds kan bij gegeven snelheidsverdeling de waterspiegelhoogte ζ uit (2) en (3) bepaald worden door de divergentie ervan te nemen; dit geeft de drukvergelijking

$$\begin{aligned}
-g(\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) = & u(u_x + v_y)_x + v(u_x + v_y)_y + u_x^2 + 2v_x u_y + v_y^2 + \\
& + (ru)_x + (rv)_y + G(h) - \varepsilon(u_x + v_y)_{xx} - \varepsilon(u_x + v_y)_{yy} + \\
& - 2\varepsilon_x(u_{xx} + u_{yy}) - 2\varepsilon_y(v_{xx} + v_{yy}) - (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})(u_x - v_y) + \\
& - 2\varepsilon_{xy}(u_y + v_x)
\end{aligned} \tag{6}$$

waarin $G(h)$ wordt gegeven door (11). In het volgende worden vgl. (5) en (6) vereenvoudigd door verwaarlozing van diverse termen.

3. Niet-viskeus model

In het eenvoudigste geval worden alleen de punten a ... e in rekening gebracht. Bij de formulering kan de stroomfunctie Ψ gebruikt worden:

$$hu = \Psi_y \quad hv = -\Psi_x \quad (7)$$

waarin u en v de gemiddelde snelheidscomponenten zijn.

Hierdoor wordt automatisch aan de (stationaire) continuïteitsvergelijking (1) voldaan. Uit de vorticiïteitsvergelijking (5) volgt

$$\left(\frac{r}{h} \Psi_x\right)_x + \left(\frac{r}{h} \Psi_y\right)_y + F(h) = 0 \quad (8)$$

waarin r de bodemwrijvingscoëfficiënt is (afhankelijk van de orbitaalsnelheid maar niet van u , v) en

$$F(h) = \left[\frac{1}{\rho h} \{(S_{11})_x + (S_{21})_y\} \right]_y - \left[\frac{1}{\rho h} \{(S_{12})_x + (S_{22})_y\} \right]_x \quad (9)$$

S_{ij} zijn de stralingsspanningen voor regelmatige of onregelmatige golven. Als er geen rekening wordt gehouden met stroomrefractie zijn ze niet afhankelijk van u , v . Vgl. (8) beschrijft een lineair niet-viskeus model (in ander verband ook wel wrijvingsmodel genoemd). De waterdiepte wordt bekend verondersteld (rigid-lid benadering). Er wordt impliciet wel rekening gehouden met een drukgradient, die de rol speelt van de waterstandsvariatie ζ bij een vrije waterspiegel. Daarvoor geldt de volgende vergelijking:

$$g(\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) + (r\Psi_y)_x - (r\Psi_x)_y + G(h) = 0 \quad (10)$$

waarin

$$G(h) = \left[\frac{1}{\rho h} \{(S_{11})_x + (S_{21})_y\} \right]_x + \left[\frac{1}{\rho h} \{(S_{12})_x + (S_{22})_y\} \right]_y \quad (11)$$

De keuze van de waterdiepte in (8) kan op verschillende manieren gemaakt worden:

- a h is de onverstoorde waterdiepte h_0 ,
- b uit (10) kan bij $\Psi = 0$ de statische set-up ζ_0 berekend worden; in (8) wordt $h = h_0 + \zeta_0$ gekozen; dit vereist het oplossen van de extra vgl. (10),
- c zowel bij a als b kan achteraf de druk (\approx waterstandsvariatie) bepaald worden door (10) op te lossen bij de berekende Ψ . Een echte vrije water-spiegel wordt verkregen door dit proces iteratief te herhalen. In iedere iteratie-stap moeten de twee Poisson-vergelijkingen (8) en (10) worden opgelost.

Stroomrefractie zou op een soortgelijke manier door middel van een iteratie-proces in rekening kunnen worden gebracht. Het is echter twijfelachtig of er dan een stationaire stroming ontstaat. Daarom is het beter eerst het Ripcel-onderzoek op dat punt af te wachten.

Door het in rekening brengen van de convectietermen ontstaat een niet-lineair niet-viskeus model, te beschouwen als limiet geval van viskeuze stroming voor $Re \rightarrow \infty$. Uit de definitie van ω volgt nu met (7):

$$\left(\frac{1}{h} \psi_x\right)_x + \left(\frac{1}{h} \psi_y\right)_y = \omega \quad (12)$$

Uit de vorticititeitsvergelijking (5) ontstaat:

$$\psi_y \left(\frac{\omega}{h}\right)_x - \psi_x \left(\frac{\omega}{h}\right)_y + r\omega + \frac{1}{h} (\psi_x r_x + \psi_y r_y) + F(h) = 0 \quad (13)$$

Met de rigid-lid benadering vormen (12) en (13) een niet-lineair stelsel vergelijkingen voor ω en ψ , dat iteratief opgelost moet worden. Een dergelijke rekentechniek is ongebruikelijk en fysisch onduidelijk. Ook hier is het beter het Ripcel onderzoek naar het belang van de convectietermen af te wachten.

4. Viskeus model

Uitbreiding van model (8) met viskositeitstermen leidt tot de eenvoudigste vorm van een lineair viskeus model (Stokes, $Re = 0$), in $\omega - \psi$ formulering:

$$r\omega + \frac{1}{h} (\psi_x r_x + \psi_y r_y) + F(h) - \varepsilon (\omega_{xx} + \omega_{yy}) + \\ + \frac{1}{h^2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) (\psi_y h_x - \psi_x h_y) = 0 \quad (14)$$

op te lossen samen met (12). Dit zijn twee gekoppelde lineaire vergelijkingen (rigid-lid benadering). De druk of waterstandsvariatie kan hier berekend worden uit een uitbreiding van (10).

Toevoeging van de convectietermen leidt tot een niet-lineair viskeus model:

$$\psi_y \left(\frac{\omega}{h}\right)_x - \psi_x \left(\frac{\omega}{h}\right)_y + r\omega + \frac{1}{h} (\psi_x r_x + \psi_y r_y) + F(h) + \\ - \varepsilon (\omega_{xx} + \omega_{yy}) + \frac{1}{h^2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) (\psi_x h_x - \psi_y h_y) = 0 \quad (15)$$

op te lossen samen met (12). Het Reynoldsgetal Re is van de orde van 10-100. Met de rigid-lid benadering is de oplossing van (12) en (15) vergelijkbaar met de "standaard" Navier-Stokes vergelijkingen. De waterstand ζ kan weer met een uitbreiding van (10) bepaald worden, waardoor het equivalent van een compressibel Navier-Stokes model ontstaat.

5. Niet-stationair model

Het niet-stationaire gedrag is waarschijnlijk een laatste graad van perfectie, zodat in deze categorie slechts modellen thuishoren die alle punten a ... k omvatten. Er bestaan twee programma's die dat enigszins benaderen:

- Waqua ; hierin ontbreken golfspanningen,
- Ripcel; dit is slechts opgezet voor een "vierkant" gebied.

