METHODE-CROSS

door

ir. F. A. Marinkelle

TWEEDE DRUK

DELFTSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ N.V. - DELFT - 1962

No. b - 2 PRIJS FL 12,-

HANDLEIDINGEN BIJ HET ONDERWIJS AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE DELFT — ONDER REDACTIE VAN DE CENTRALE COMMISSIE VOOR STUDIEBELANGEN

VOORWOORD

Onder de titel „METHODE CROSS" zijn in dit werkje een aantal problemen behandeld, welker oplossingswijze is voortgesproten uit de indertijd door Hardy Cross gepubliceerde methode. De titel dient dus ruim te worden opgevat en betekent niet, dat al het behandelde van Cross zelf afkomstig is.

Dit werkje dankt zijn ontstaan aan het onder de studenten der afdeling Weg- en Waterbouwkunde aan de T.H. in Delft bestaande verlangen naar een uiteenzetting der „METHODE CROSS" met voorbeelden, op de wijze, waarop deze bij de genoemde afdeling gedoceerd wordt. Dit onderwerp maakt deel uit van het vrij uitgebreide programma derdejaars leerstof in Toegepaste Mechanica, zodat op de colleges onvoldoende tijd is deze methode, welke zich heden in de belangstelling veler technici mag verheugen, volledig aan de hand van voorbeelden toe te lichten.

Uiteraard biedt het boekje wat meer dan de voor het examen vereiste stof. Het is dan ook tevens bruikbaar voor ingenieurs en technici, die hun studie reeds achter de rug hebben. In het bijzonder het tweede deel dat de invloedslijnen behandelt, voorziet, naar schrijvers mening, in een behoefte, daar hem geen Nederlands werkje op dit gebied bekend is, dat de methode Cross voor de bepaling van genoemde lijnen toepast.

De omvang van het boekje is vrij groot geworden, doordat aan de eigenlijke vereffening dikwijls veel rekenwerk voorafgaat. Naar schrijvers mening behoorde ook dit rekenwerk, als essentieel onderdeel van de methode Cross, volledig te worden opgenomen. Men kan dan beter beoordelen of toepassing van de methode Cross in een bepaald geval tot vereenvoudiging leiden zal.

De schrijver spreekt zijn dank uit aan Prof. Ir C.G.J. Vreedenburgh, wiens colleges tot leidraad hebben gestrekt, voor zijn steun bij de samenstelling en zijn toestemming enkele zijner publicaties, o.a. het door zijn Hooggeleerde geleverde convergentiebewijs, in dit boekje te mogen opnemen.

Prof. Dr Ir J.P. Mazure was zo vriendelijk het concept door te lezen en enige nuttige aanwijzingen te geven.

Grote dank is hij ook verschuldigd aan zijn beide medewerkers, de Heren J. Boon en H. van Dijk, die de talloze berekeningen met tabellen en de figuren verzorgden.

Ir F.A. Marinkelle

Delft, Juni 1954.

VOORWOORD BIJ DE TWEEDE DRUK

De nieuwe oplage geeft mij gelegenheid mijn mededeling, dat mij geen Nederlands werkje bekend was, waarin de methode Cross op de bepaling van invloedslijnen wordt toegepast, aan te vullen. Ik had over het hoofd gezien, dat ir O. Bax Stevens in zijn bekende vraagstukkenboek over toegepaste mechanica dit wel reeds had gedaan.

In deel III, 1e gedeelte, vrst 19 t.e.m. 23 past hij de methode Cross toe op de bepaling van invloedslijnen door middel van de grafische methode met behulp van fictieve verbindingen, in deze handleiding "methode II" genoemd.

De geachte schrijver maakte mij attent op dit verzuim, waarvoor nogmaals mijn verontschuldiging.

Ir. F.A. Marinkelle

Delft, Mei 1962

INLEIDING

Ter berekening van de momenten in de stijve knooppunten van statisch onbepaalde liggers of raamwerken kunnen vormveranderings- en evenwichtsvergelijkingen worden opgesteld. De eerste vergelijkingen drukken uit, dat de einddoorsneden van de in één knooppunt samenkomende staven geen draaiing ten opzichte van elkaar ondergaan, met andere woorden evenveel draaien. De evenwichtsvergelijkingen volgen onder andere uit de voorwaarde, dat de som der op een knooppunt werkende momenten nul moet zijn. Aldus ontstaan n eerstegraadsvergelijkingen met n onbekenden.

Hardy Cross vond de momenten in genoemde doorsneden door middel van een relaxatie- of iteratie (herhalings) proces.

Dit proces komt dus hierop neer, dat de n eerstegraadsvergelijkingen in M_1, M_2. . . . . M_n langs iteratieve weg worden opgelost. Soortgelijke relaxatiemethoden zijn later door *Southwell* in Engeland ontwikkeld, teneinde de mogelijkheid te scheppen een oplossing te vinden voor de meest uiteenlopende physische vraagstukken [1].

Dit proces blijkt niet altijd te convergeren.

Door middel van een arbeidsbeschouwing [2] is echter te bewijzen, dat de berekening van de momenten in statisch onbepaalde liggers of raamwerken volgens de vereffeningsmethode Cross altijd convergeert. Mathematisch is dit echter slechts voor bepaalde gevallen te bewijzen.

1) *Southwell, R. V.*, Relaxation methods in engineering science. A treatise on approximate computation. London 1943.

Southwell, R. V., Relaxation methods in theoretical physics, A continuation o,t, treatise Relaxation methods in engineering science. Oxford 1946.

Janssonius, G. F., Nieuwe vereffeningsmethoden voor het berekenen van balkroosters, Dissertatie Delft 1948.

2) Zie convergentiebewijs in Hoofdstuk IV.

D E E L   I

Bepaling van knooppuntsmomenten in statisch onbepaalde constructies bij rustende belasting

Hoofdstuk I

BESCHRIJVING DER METHODE CROSS AAN DE HAND VAN EEN EENVOUDIGE CONSTRUCTIE MET PRISMATISCHE STAVEN EN ONVERPLAATSBARE KNOOPPUNTEN, REEKSEN, BASISGEVALLEN

Beschrijving der methode

Aanvankelijk worden bij deze methode de knooppunten, waar momenten werken, die niet alleen uit het evenwicht te bepalen zijn, ingeklemd gedacht, zodat draaiing verhinderd wordt.

De belaste staven zullen dan op de aansluitende knooppunten momenten (zg. *primaire momenten*) uitoefenen, waarvan de grootte volgt uit de inklemmingsvoorwaarde, de belastingen en de staaflengten.

Met behulp van enkele, aan het eind van dit hoofdstuk afgeleide basisgevallen, kan men voor alle mogelijke belastingen de primaire momenten bij prismatische staven berekenen.

Teneinde het draaien van de knooppunten te verhinderen wordt op elk knooppunt een uitwendig moment aangebracht dat evenwicht maakt met de op het betreffende knooppunt werkende primaire momenten. Daarna staat men één der knooppunten toe te draaien, wat verwezenlijkt gedacht kan worden door op dat knooppunt een uitwendig moment te laten aangrijpen, dat gelijk doch tegengesteld is aan het reeds aanwezige uitwendige moment. Tengevolge van de draaiing van dat knooppunt zullen in het algemeen de in dat knooppunt samenkomende staven gebogen worden, waardoor tegenwerkende momenten op het knooppunt uitgeoefend worden. De draaiing zal zover doorgaan totdat de som van de genoemde tegenwerkende momenten (de zg. vereffeningsmomenten) evenwicht maken met het tweede uitwendige moment. De grootte van elk der vereffeningsmomenten is te berekenen uit de voorwaarde, dat ter plaatse van het gedraaide knooppunt alle staafeinden evenveel draaien.

Door deze draaiing zullen bovendien op de omliggende knooppunten, d.z. de knooppunten, die door middel van een staaf aan het gedraaide knooppunt zijn verbonden, momenten (zg. *overdrachtsmomenten*) worden uitgeoefend. Dit geldt natuurlijk slechts voor die knooppunten, die 'tijdelijk' of werkelijk zijn ingeklemd.

Uiteraard zullen daardoor de eventueel daar reeds aanwezige uitwendige momenten, die de inklemmingen bewerkstelligen, vermeerderd worden met de tegengestelden van de overdrachtsmomenten.

De vereffenings- en overdrachtsmomenten moeten uiteraard opgeteld worden bij het (de) eventueel reeds aanwezige primaire moment(en).

Hiermede zijn de momenten in het knooppunt vereffend.

Nu wordt een tweede knooppunt toegestaan te draaien waarbij het eerst losgelatene in de nieuwe stand wordt ingeklemd en de andere ingeklemd blijven. Men gaat zo door totdat men alle 'tijdelijke' inklemmingen een keer heeft losgelaten.

De eerste vereffening is hiermede voltooid.

De overblijvende uitwendige momenten blijken in het algemeen kleiner te zijn dan die, welke voor de vereffening aanwezig waren. Het proces wordt nu zo lang voortgezet totdat de te vereffenen momenten te verwaarlozen zijn. De constructie heeft dan de natuurlijke stand bereikt.

De methode blijkt te convergeren naar deze natuurlijke stand.

Aan de hand van de in figuur 1 geschetste constructie wordt bovenstaand proces nader toegelicht.

Eerst worden de knooppunten B en C van deze constructie ingeklemd gedacht.

Opmerking: Het moment dat een staafeinde Q van de staaf PQ uitoefent op knooppunt Q, duiden we aan met M_{qp}.

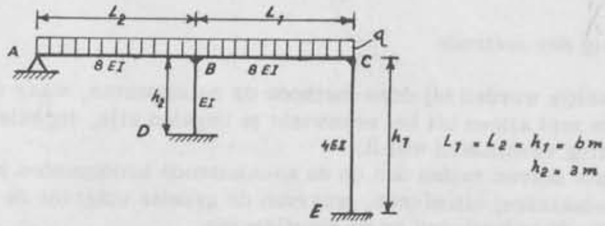


Fig. 1

Voor de *primaire momenten,* (dit zijn dus de momenten, die de belaste staven op de ingeklemde knooppunten uitoefenen) vinden we dan:

$$M_{BA} = -\frac{1}{8}.q.L_2^{\,2} = -\frac{1}{8}.1.6^2 = -4{,}5 \text{ tm},$$

$$M_{BC} = -M_{CB} = +\frac{1}{12}.q.L_1^{\,2} = +3{,}0 \text{ tm}.$$

Om draaiing van de knooppunten B en C te verhinderen moeten daar dus uitwendige momenten op worden aangebracht en wel

$$M_B = -(-4{,}5 + 3{,}0) = +1{,}5 \text{ tm} \quad \text{en} \quad M_C = +3{,}0 \text{ tm}.$$

Nu wordt één der knooppunten bijv. C losgelaten, waartoe dus een tweede uitwendig moment M_C' groot -3,0 tm aangebracht wordt.

De vereffeningsmomenten M_{ce} en M_{cb}, die de staven CE en CB op het knooppunt C uitoefenen worden gevonden uit de wetenschap, dat een moment $-M_{ce}$, dat dus op staaf CE werkt, aan dit uiteinde een draaiing

$$\varphi = -\frac{M_{ce}.h_1}{4.4EI}$$

geeft en dat het moment $-M_{cb}$ aan het uiteinde C van staaf CB een zelfde draaiing

$$\varphi = -\frac{M_{cb}.L_1}{4.8EI}$$

geeft.

Wordt $\frac{4.4EI}{h_1} = k_{ce}$ en $\frac{4.8EI}{L_1} = k_{cb}$ gesteld, dan is

$$\varphi = -\frac{M_{ce}}{k_{ce}} \quad \text{en} \quad \varphi = -\frac{M_{cb}}{k_{cb}}.$$

Eliminatie van φ geeft:

$$M_{ce} : M_{cb} = k_{ce} : k_{cb} = \frac{4.4EI}{h_1} : \frac{4.8EI}{L_1} = \frac{1}{6} : \frac{2}{6} = 1 : 2;$$

k_{ce} en k_{cb} worden de stijfheden van de beschouwde staven genoemd.

Hieruit volgen de *vereffeningscoëfficiënten*: $(\mu_i = \frac{k_i}{\Sigma k_i})$

$$\mu_{ce} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad \mu_{cb} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

Voor de vereffeningsmomenten wordt nu gevonden:

$$M_{ce} = +3{,}0.\frac{1}{3} = +1{,}0 \text{ tm} \quad \text{en} \quad M_{cb} = +3{,}0.\frac{2}{3} = +2{,}0 \text{ tm}.$$

Door het draaien van knooppunt C zullen op de werkelijk en 'tijdelijk' ingeklemde knooppunten E en B zgn. overdrachtsmomenten worden uitgeoefend. Deze momenten, die bij de ter plaatse werkende primaire momenten kunnen worden opgeteld zijn de helft van de aan het andere einde van de staven werkende vereffeningsmomenten. Immers werkt op een ligger, die aan het ene uiteinde is ingeklemd en aan het andere uiteinde is opgelegd ter plaatse van dit uiteinde een moment + M, dan is het moment, dat aan het ingeklemde uiteinde op het knooppunt wordt uitgeoefend $+\frac{1}{2}$ M. Het op het knooppunt B werkende uitwendige moment $M_B = +1{,}5$ tm zal door het op B werkende overdrachtsmoment, groot +2,0. +0,5 tm = 1,0 tm, vermeerderd worden met -1,0 tm, waardoor dit moment +0,5 tm wordt.

Vervolgens wordt het knooppunt C in zijn nieuwe stand ingeklemd en daarna het knooppunt B losgelaten, wat dus verwezenlijkt wordt door een tweede uitwendig moment $M_B' = -0{,}5$ tm. Voor de volgorde van loslaten der knooppunten wordt overigens verwezen naar de gespatiëerde zinsnede op bl. 31.

Ter bepaling van de vereffeningsmomenten is het nodig de verhouding van de stijfheden in dit punt te kennen.
(N.B. knooppunt A is een scharnier).

Dus $\quad k_{ba} : k_{bd} : k_{bc} = \frac{3.8EI}{L_2} : \frac{4.EI}{h_2} : \frac{4.8EI}{L} = 3 : 1 : 4.$

De *vereffeningscoëfficiënten* worden:

$$\mu_{ba} = \frac{3}{3+1+4} = \frac{3}{8}; \quad \mu_{bd} = \frac{1}{3+1+4} = \frac{1}{8} \quad \text{en} \quad \mu_{bc} = \frac{4}{3+1+4} = \frac{1}{2}.$$

Hieruit volgen de vereffeningsmomenten:

$$M_{ba} = +0{,}5.\frac{3}{8} = +\frac{3}{16} \text{ tm}; \quad M_{bd} = +0{,}5.\frac{1}{8} = +\frac{1}{16} \text{ tm} \quad \text{en} \quad M_{bc} = +0{,}5.\frac{1}{2} = +\frac{1}{4} \text{ tm}$$

Voor de overdrachtsmomenten in D en C vindt men resp.

$$+\frac{1}{2}.\frac{1}{16} = +\frac{1}{32} \quad \text{en} \quad +\frac{1}{2}.\frac{1}{4} = +\frac{1}{8} \text{ tm}.$$

In C is dus nu weer ter handhaving van de inklemming een uitwendig moment, groot $-\frac{1}{8}$ tm nodig.

Hiermede is de eerste vereffening voltooid.

Daarna wordt het bovenomschreven vereffeningsproces zolang herhaald met uiteraard andere en in het algemeen steeds kleiner wordende nog te vereffenen momenten, totdat deze te verwaarlozen klein worden.

De resultaten zijn in de hiernavolgende tabel verzameld.

Opgemerkt zij, dat onder de berekende vereffeningsmomenten een golflijntje wordt geplaatst, teneinde te voorkomen, dat bij een volgende vereffening van dat knooppunt reeds vereffende momenten worden betrokken.

Knooppunten	C		B			D	E
Staven	cb	ce	ba	bd	bc	db	ec
Vereff.coëff.	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	-	-
Prim. mom.	-3	0	$-4\frac{1}{2}$	0	+3	0	0
	+2	+1			+1		$+\frac{1}{2}$
	$+\frac{1}{8}$		$+\frac{3}{16}$	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{32}$	
	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$			$-\frac{1}{24}$		$-\frac{1}{48}$
	$+\frac{1}{96}$		$+\frac{1}{64}$	$+\frac{1}{192}$	$+\frac{1}{48}$	$+\frac{1}{384}$	
	$-\frac{1}{144}$	$-\frac{1}{288}$			$-\frac{1}{288}$		$-\frac{1}{576}$
	$+\frac{1}{1152}$		$+\frac{1}{768}$	$+\frac{1}{2304}$	$+\frac{1}{576}$	$+\frac{1}{4608}$	
	$-\frac{1}{1728}$	$-\frac{1}{3456}$			$-\frac{1}{3456}$		$-\frac{1}{6912}$
	$+\frac{1}{13824}$		$+\frac{1}{9216}$	$+\frac{1}{27648}$	$+\frac{1}{6912}$	$+\frac{1}{55296}$	
	$-\frac{1}{20736}$	$-\frac{1}{41472}$			$-\frac{1}{41472}$		$-\frac{1}{82944}$
	$+\frac{1}{165888}$		$+\frac{1}{110592}$	$+\frac{1}{331776}$	$+\frac{1}{82944}$	$+\frac{1}{663552}$	
Eind-momenten	$-\frac{158347}{165888}$	$+\frac{39587}{41472}$	$-4\frac{32675}{110592}$	$+\frac{22621}{331776}$	$+4\frac{18851}{82944}$	$+\frac{22621}{663552}$	$+\frac{39587}{82944}$
In tiendelige breuken	-0,95455	+0,95455	-4,29546	+0,06818	+4,22728	+0,03409	+0,47727
Met meet-kundige reeksen	$-\frac{21}{22}$	$+\frac{21}{22}$	$-4\frac{13}{44}$	$+\frac{3}{44}$	$+4\frac{5}{22}$	$+\frac{3}{88}$	$+\frac{21}{44}$
In tiendelige breuken	-0,95455	+0,95455	-4,29545	+0,06818	+4,22727	+0,03409	+0,47727

De totale door de staafeinden op de knooppunten uitgeoefende momenten vindt men nu krachtens het voorafgaande door optelling.

Reeksen

Bij nadere bestudering van deze tabel is op te merken dat de op te tellen momenten een zekere regelmaat vertonen. Zo vormen in de kolommen voor de staafeinden ce, ba, bd, db en ec de waarden der momenten, vanaf een bepaalde term, een oneindig voortlopende meetkundige reeks met de reden 1/12. Deze meetkundige reeks is ook in de kolommen voor de staafeinden cb en bc terug te vinden, als de termen tussen 2 golflijntjes bij elkaar opgeteld worden. De sommen van deze reeksen, die tevens onderaan deze tabel zijn vermeld, zijn:

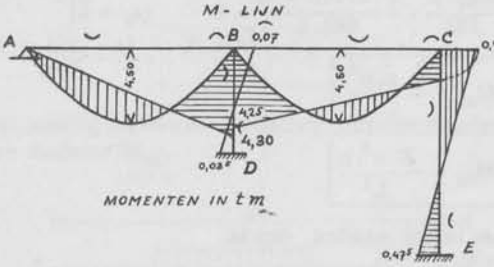
$$M_{cb} = -3 + 2 + \frac{\frac{1}{8} - \frac{2}{24}}{1 - \frac{1}{12}} = -\frac{21}{22}\ \text{tm}, \qquad M_{ce} = +1 - \frac{\frac{1}{24}}{1 - \frac{1}{12}} = +\frac{21}{22}\ \text{tm},$$

$$M_{ba} = -4\tfrac{1}{2} + \frac{\frac{3}{16}}{1 - \frac{1}{12}} = -4\frac{13}{44}\ \text{tm}, \qquad M_{bd} = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{12}} = +\frac{3}{44}\ \text{tm},$$

$$M_{bc} = +3 + 1 + \tfrac{1}{4} - \frac{\frac{1}{24} - \frac{1}{48}}{1 - \frac{1}{12}} = +4\frac{5}{22}\ \text{tm}, \qquad M_{db} = +\tfrac{1}{2} M_{bd} = +\frac{3}{88}\ \text{tm en}$$

$$M_{ec} = +\tfrac{1}{2} - \frac{\frac{1}{48}}{1 - \frac{1}{12}} = +\frac{21}{44}\ \text{tm}.$$

Worden de sommen, verkregen door optelling en die, verkregen met meetkundige reeksen, herleid tot tiendelige breuken, dan is te zien dat ze zeer goed met elkaar overeenstemmen.

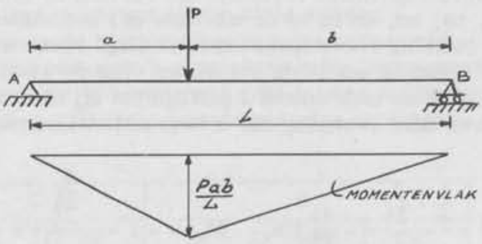


Figuur 2

Basisgevallen

Met behulp van de volgende af te leiden basisgevallen is het mogelijk voor alle belastingsgevallen op eenvoudige wijze de primaire momenten te berekenen, voorzover het prismatische staven betreft.

Hiertoe worden eerst van een ligger op twee steunpunten, waarop zich een last P bevindt, de hoekverdraaiingen aan de uiteinden berekend. Zoals bekend, zijn de hoekverdraaiingen gelijk aan de oplegreacties gedeeld door EI bij het als belastingsvlak beschouwde momentenvlak.



Figuur 3

Uit het moment t.o.v. B wordt de hoekverdraaiing in A gevonden

$$\varphi_A \,.\, L.\,EI = \frac{P.a.b}{L}\left[\tfrac{1}{2}b.\tfrac{2}{3}b + \tfrac{1}{2}a(b + \tfrac{1}{3}a)\right], \quad \text{waaruit } \varphi_A = \frac{P.a.b(L+b)}{6EI.\,L}$$

De hoekverdraaiing in B wordt:

$$\varphi_B \,.\, L.\,EI = \frac{P.a.b}{L}\left[\tfrac{1}{2}b(a + \tfrac{1}{3}b) + \tfrac{1}{2}a.\tfrac{2}{3}a\right], \quad \text{waaruit } \varphi_B = \frac{P.a.b(L+a)}{6EI.\,L}$$

Is de ligger bij A en B ingeklemd, dan worden de primaire momenten gevonden door t.p.v. de uiteinden bij bovengeschetste constructie zodanige momenten aan te brengen, dat de door P veroorzaakte hoekverdraaiingen worden opgeheven.

Dus: $$\frac{M_{AB}.\,L}{3EI} - \frac{M_{BA}.\,L}{6EI} - \frac{P.a.b(L+b)}{6EI.\,L} = 0 \qquad (\varphi_A = 0)$$

$$\frac{M_{AB}.\,L}{6EI} - \frac{M_{BA}.\,L}{3EI} - \frac{P.a.b(L+a)}{6EI.\,L} = 0. \qquad (\varphi_B = 0)$$

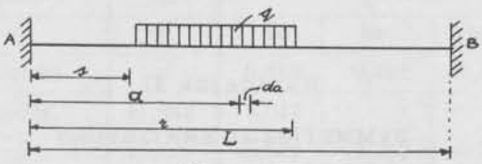
Oplossing: $$\boxed{M_{AB} = \frac{P.a.b^2}{L^2}}$$

$$\boxed{M_{BA} = -\frac{P.a^2.b}{L^2}}$$

Staat de puntlast in het midden, dan is:

$$\boxed{M_{AB} = -M_{BA} = \frac{1}{8}\,PL.}$$

De primaire momenten voor een willekeurige belasting van een aan twee uiteinden ingeklemde ligger kunnen nu met behulp van het voorgaande bepaald worden. Als voorbeeld is hieronder de berekening van de primaire momenten gegeven als de ligger voor een deel een gelijkmatig verdeelde belasting draagt.



Figuur 4

Een belasting qda op een afstand van a vanaf A veroorzaakt primaire momenten

$$M_{AB} = q\ da\ \frac{a.b^2}{L^2} \quad \text{en} \quad M_{BA} = -q\ da\ \frac{a^2b}{L^2}.$$

Tengevolge van bovengeschetste belasting worden deze:

$$M_{AB} = \int_s^r qda.\ \frac{a(L-a)^2}{L^2} = \frac{q}{L^2}\left[\frac{1}{2}(r^2 - s^2)L^2 - \frac{2}{3}(r^3 - s^3)L + \frac{1}{4}(r^4 - s^4)\right],$$

$$M_{BA} = -\int_s^r qda.\ \frac{a^2(L-a)}{L^2} = -\frac{q}{L^2}\left[\frac{1}{3}(r^3 - s^3)L - \frac{1}{4}(r^4 - s^4)\right].$$

Voor r = L en s = 0, (dus de gehele ligger vol belast) worden de primaire momenten

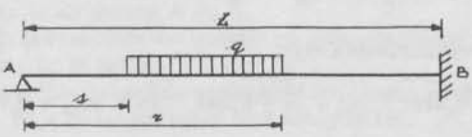
$$\boxed{M_{AB} = -M_{BA} = \frac{1}{12}\,q\,L^2.}$$

Is de ligger in A vrij opgelegd en in B ingeklemd, dan behoeft alleen in B een zodanig moment te worden aangebracht, dat de aldaar door P veroorzaakte hoekverdraaiing (zie figuur 3) wordt opgeheven. Dus:

$$\frac{P.a.b(L+a)}{6EI.\,L} + \frac{M_{BA}.\,L}{3EI} = 0 \qquad (\varphi_B = 0)$$

dus: $$\boxed{M_{BA}} = -\frac{P.a.b(L+a)}{2L^2} = \boxed{-\frac{P.a(L^2 - a^2)}{2L^2}.}$$

Staat er een gelijkmatig verdeelde belasting op deze ligger (zie schets), dan is het primaire moment M_{BA}:



Figuur 5

$$M_{BA} = -\int_s^r \frac{q\ da.\ a(L^2 - a^2)}{2L^2} = -\frac{q}{2L^2}\left[\frac{1}{2}(r^2 - s^2)L^2 - \frac{1}{4}(r^4 - s^4)\right].$$

Voor r = L en s = 0 (dus de gehele ligger vol belast) wordt dit primaire moment:

$$\boxed{M_{BA} = -\frac{1}{8}\,q.\,L^2.}$$

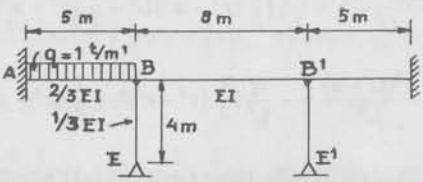
Hoofdstuk II

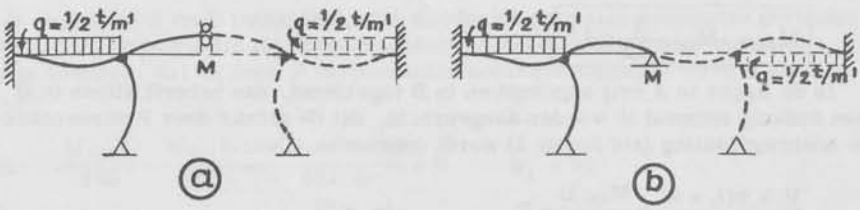
SYMMETRIE-OVERWEGINGEN

Heeft een constructie één of meerdere symmetrie-lijnen, dan kan men hiervan dikwijls met voordeel gebruik maken, door twee symmetrisch gelegen knooppunten gelijktijdig los te laten.

Als de belasting geen of niet dezelfde symmetrie-as heeft als de constructie, dan moet de belasting gesplitst worden in een *spiegel-* en een *keersymmetrisch* deel.

Zo wordt het belastingsgeval uit figuur 6 gesplitst in de in figuur a en b aangegeven gevallen.





Geval a. De middendoorsnede M zal hierbij niet verdraaien, echter wel verticaal verplaatsen, zodat daar een verschuifbare inklemming gedacht kan worden. De stijfheid k_{bm} van ligger BM is EI/4. Immers denkt men zich in B een scharnier en brengt men een moment M_b aan, dan is de hoekverdraaiing φ_b gelijk aan $M_b . 4/EI$. De verhouding van de stijfheden in knooppunt B is nu:

$$k_{ba} : k_{be} : k_{bm} \; \frac{4.\frac{2}{3}EI}{5} : \frac{3.\frac{1}{3}EI}{4} : \frac{EI}{4} = 32 : 15 : 15.$$

De vereffeningscoëfficiënten zijn:

$$\mu_{ba} = \frac{32}{62} = 0{,}516; \quad \mu_{be} = \frac{15}{62} = 0{,}242 \quad \text{en} \quad \mu_{bm} = 0{,}242.$$

De primaire momenten zijn:

$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{1}{12} . 0{,}5 . 5^2 = 1{,}042 \text{ tm}.$$

De vereffening, welke alleen in het knooppunt B behoeft te geschieden, is uitgevoerd in onderstaande tabel.

Knooppunten	A	B		
Staven	ab	ba	be	bm
Vereff. coëff.	-	0,516	0,242	0,242
Prim. mom.	+1,042	-1,042		
	+0,269	+0,538	+0,252	+0,252
Eindmomenten in tm voor geval a	+1,311	-0,504	+0,252	+0,252

Gemakkelijk is in te zien dat de Cross-momenten in de punten B' en A' gelijk, doch tegengesteld zijn aan die in de punten B en A.

Geval b. In dit keersymmetrische belastingsgeval is het punt M een momentennulpunt, terwijl dit punt in verticale richting niet zal verplaatsen, zodat in M een oplegging gedacht kan worden. De verhouding van de stijfheden wordt hiermede:

$$k_{ba} : k_{bc} : k_{bm} = \frac{4.\frac{2}{3}EI}{5} : \frac{3.\frac{1}{3}EI}{4} : \frac{3EI}{4} = 32 : 15 : 45.$$

De vereffeningscoëfficiënten zijn:

$$\mu_{ba} = \frac{32}{92} = 0{,}348, \quad \mu_{be} = \frac{15}{92} = 0{,}163 \quad \text{en} \quad \mu_{bm} = \frac{45}{92} = 0{,}489.$$

De primaire momenten zijn gelijk aan die voor geval a. De vereffening is uitgevoerd in onderstaande tabel.

Knooppunten	A	B		
Staven	ab	ba	be	bm
Vereff. coëff.	-	0,348	0,163	0,489
Prim. mom.	+1,042	-1,042		
	+0,181	+0,362	+0,170	+0,510
Eindmomenten in tm voor geval b	+1,223	-0,680	+0,170	+0,510

Voor dit geval zijn de Cross-momenten in de punten A' en B' gelijk en van hetzelfde teken als die in de punten A en B.

De resulterende Cross-momenten worden nu gevonden door die van de gevallen a en b bij elkaar op te tellen.

Tenslotte is ter contrôle hetzelfde vraagstuk opgelost, zonder gebruikmaking van symmetrie. (Zie onderste tabel op bladzijde 18).

De verhouding der stijfheden wordt nu:

$$k_{ba} : k_{be} : k_{bb'} = k_{b'a'} : k_{b'e'} : k_{b'b} =$$

$$= \frac{4.\frac{2}{3}EI}{5} : \frac{3.\frac{1}{3}EI}{4} : \frac{4.EI}{8} = 32 : 15 : 30.$$

Knooppunten	A	B			B'			A'
Staven	ab	ba	be	bb'	b'a'	b'e'	b'b	a'b'
Eindmomenten geval a	+1,311	-0,504	+0,252	+0,252	+0,504	-0,252	-0,252	-1,311
Eindmomenten geval b	+1,223	-0,680	+0,170	+0,510	-0,680	+0,170	+0,510	+1,223
Resulterende Cross-momenten	+2,534	-1,184	+0,422	+0,762	-0,176	-0,082	+0,258	-0,088

De vereffeningscoëfficiënten zijn:

$$\mu_{ba} = \mu_{b'a'} = \frac{32}{77} = 0{,}415; \quad \mu_{be} = \mu_{b'e'} = \frac{15}{77} = 0{,}195$$

en $\mu_{bb'} = \mu_{b'b} = \frac{30}{77} = 0{,}390.$

De primaire momenten zijn:

$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 5^2 = 2{,}083 \text{ tm.}$$

De vereffening is uitgevoerd in onderstaande tabel.

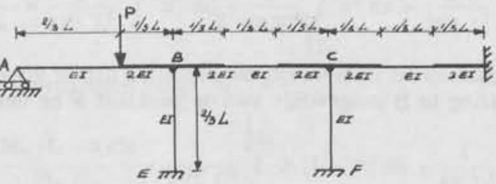
Knooppunten	A	B			B'			A'
Staven	ab	ba	be	bb'	b'a'	b'e'	b'b'	a'b'
Vereff. coëff.	--	0,415	0,195	0,390	0,415	0,195	0,390	--
Prim. mom.	+2,083	-2,083						
	+0,433	+0,865	+0,406	+0,812			+0,406	
				-0,079	-0,169	-0,079	-0,158	-0,085
	+0,016	+0,033	+0,015	+0,031			+0,015	
				-0,003	-0,006	-0,003	-0,006	-0,003
	+0,001	+0,001	+0,001	+0,001			+0,001	
Eindmomenten	+2,533	-1,184	+0,422	+0,762	-0,175	-0,082	+0,258	-0,088

Hoofdstuk III

CONSTRUCTIE MET NIET-PRISMATISCHE STAVEN, DOCH ONVERPLAATSBARE KNOOPPUNTEN. OOK HIERBIJ VORMEN DE TERMEN VAN EEN KOLOM VAN DE VEREFFENINGSTABEL EEN MEETKUNDIGE REEKS. BEWIJS DAT REDEN $\leqslant 1$ EN DAT HET PRODUCT DER OVERDRACHTSCOEFFICIENTEN VAN EEN ENKELE LIGGER < 1

Aan de hand van drie voorbeelden zal de berekening nader worden toegelicht.

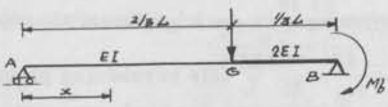
VOORBEELD I



Figuur 7

Berekening van het primaire moment

Hiertoe wordt bij de onderstaande ligger AB de hoekverdraaiing bij B berekend tengevolge van de puntlast P.



Figuur 8

$$M_x = \frac{1}{3} P x \qquad (0 < x < \frac{2}{3} L)$$

$$M_x = \frac{1}{3} P x - P (x - \frac{2}{3} L) = \frac{2}{3} P(L - x) \qquad (\frac{2}{3} L < x < L)$$

De hoekverdraaiing in B volgt uit $\beta = \varphi'_{bg}$ P, waarin φ'_{bg} is:

$$\frac{1}{L} \int_0^L \frac{M_x \, x \, dx}{P \, EI_x} = \frac{1}{EI \, L} \int_0^{\frac{2}{3}L} \frac{1}{3} x^2 \, dx + \frac{1}{2EI \, L} \int_{\frac{2}{3}L}^{L} \frac{2}{3} (L - x) \, x \, dx = \frac{23}{486} \frac{L^2}{EI}. \qquad (1)$$

Vervolgens wordt op het uiteinde B een moment M_b aangebracht en de hoekverdraaiing aldaar berekend.

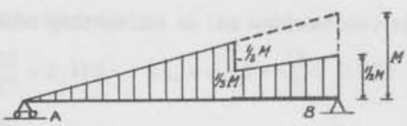
Nu is $M_x = \dfrac{M_b x}{L} \qquad 0 < x < L.$

De hoekverdraaiing in B volgt uit $\beta = M_b\varphi_{bb}$, waarin φ_{bb} is:

$$\frac{1}{L}\int_0^L \frac{M_x\, x\, dx}{M_b\, EI_x} = \frac{1}{EI\, L^2}\int_0^{\frac{2}{3}L} x^2\, dx + \frac{1}{2EI\, L^2}\int_{\frac{2}{3}L}^{L} x^2\, dx = \frac{35\ L}{162\ EI} \qquad (2)$$

Opmerking: Bovengenoemde formules geven aan, dat de hoekverdraaiingen aan de uiteinden gelijk zijn aan de oplegreacties, gedeeld door EI, bij het als belastingsvlak beschouwde momentenvlak, mits dit laatste op EI gereduceerd wordt.
De tweede formule wordt dus zonder integralen:

$$\beta = \frac{1}{L\ EI}\left[\frac{1}{2}\,M.\frac{1}{2}\,L.\frac{2}{3}\,L + \frac{1}{3}\,M.\frac{1}{3}\,L.\frac{4}{9}\,L\right] \quad \text{of} \quad \beta = \frac{35\ ML}{162\ EI}.$$



Figuur 9

Het inklemmingsmoment in B wordt nu gevonden uit de voorwaarde, dat de totale hoekverdraaiing in B tengevolge van de puntlast P en het moment M_b nul is, dus

$$P\varphi'_{bg} = M_b\varphi_{bb}\ .$$

Dus $P\,\dfrac{23}{486}\,\dfrac{L^2}{EI} = M_b\,\dfrac{35}{162}\,\dfrac{L}{EI}$ waaruit $M_b = \dfrac{23}{105}\,P\ L.$

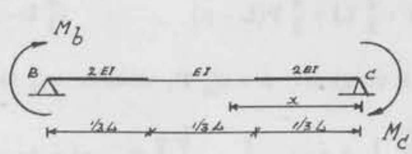
Het primaire moment is nu $-\dfrac{23}{105}\,P\ L = -\ 0{,}2190\ P\ L.$

Berekening van de vereffenings- en overdrachtscoëfficiënten

De stijfheidsfactor $k_{ba} = \dfrac{1}{\varphi_{bb}} = \dfrac{162}{35}\,\dfrac{EI}{L}$ (zie berekening primair moment).

De stijfheidsfactor $k_{be} = \dfrac{4\ EI}{\frac{2}{3}\ L}$ en de overdrachtscoëfficiënt van B naar E = $+\dfrac{1}{2}$.

Teneinde de stijfheidsfactor van staaf BC te berekenen wordt onderstaand belastingsgeval beschouwd.



Figuur 10

De hoekverdraaiing in B is: $\beta = M_b\,\varphi_{bb} - M_c\,\varphi_{bc}.$

Uit de voorwaarde dat de doorsnede ter plaatse van C niet verdraait volgt

$$M_c\varphi_{cc} = M_b\varphi_{cb}\ .$$

Eliminatie van M_c uit bovenstaande vergelijkingen levert met

$\varphi_{bc} = \varphi_{cb}$:

$$\varphi_b = M_b \left(\frac{\varphi_{bb}\,\varphi_{cc} - \varphi^2_{cb}}{\varphi_{cc}}\right).$$

De stijfheidsfactor k_{bc} is dan $\dfrac{\varphi_{cc}}{\varphi_{bb}\,\varphi_{cc} - \varphi^2_{cb}}$.

De overdrachtscoëfficiënt volgt uit de vergelijking

$$M_c\varphi_{cc} = M_b\varphi_{cb} \quad \text{en is} \quad \frac{M_c}{M_b} = \frac{\varphi_{bc}}{\varphi_{cc}} = r_{bc}$$

De benodigde invloedsgrootheden zijn hieronder afgeleid:

$$\varphi_{bb} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M_x\, x\, dx}{M_b\, EI_x} = \frac{1}{2EI\,L^2}\int_0^{\frac{1}{3}L} x^2\,dx + \frac{1}{EI\,L^2}\int_{\frac{1}{3}L}^{\frac{2}{3}L} x^2\,dx + \frac{1}{2EI\,L^2}\int_{\frac{2}{3}L}^{L} x^2\,dx = \frac{17\ L}{81\ EI}.$$

Uit symmetrie-overwegingen volgt: $\varphi_{cc} = \varphi_{bb}$.

$$\varphi_{cb} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M_x\,(L-x)dx}{M_b\,EI_x} = \frac{1}{2EI\cdot L^2}\int_0^{\frac{1}{3}L} x\,(L-x)\,dx + \frac{1}{EI\,L^2}\int_{\frac{1}{3}L}^{\frac{2}{3}L} x\,(L-x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2EI\,L^2}\int_{\frac{2}{3}L}^{L} x\,(L-x)\,dx = \frac{10\ L}{81\ EI}.$$

Met deze invloedsgrootheden wordt $k_{bc} = \dfrac{\frac{17\ L}{81\ EI}}{\left(\frac{17\ L}{81\ EI}\right)^2 - \left(\frac{10\ L}{81\ EI}\right)^2} = \dfrac{51\ EI}{7\ L}$.

De vereffeningscoëfficiënten worden voor knooppunt B:

$$\mu_{ba} = \frac{k_{ba}}{k_{ba} + k_{be} + k_{bc}} = 0{,}2585\ ,$$

$$\mu_{bc} = \frac{k_{bc}}{k_{ba} + k_{be} + k_{bc}} = 0{,}4065 \quad \text{en}$$

$$\mu_{be} = \frac{k_{be}}{k_{ba} + k_{be} + k_{bc}} = 0{,}3350\ ,$$

en voor knooppunt C: $\left(k_{cb} = k_{cd} = \dfrac{51\ EI}{7\ L} \quad \text{en} \quad k_{cf} = \dfrac{6EI}{L}\right)$

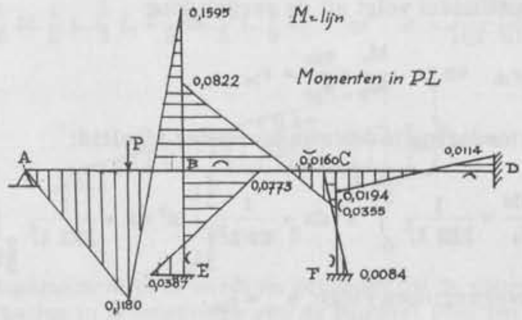
$$\mu_{cd} = \frac{k_{cd}}{k_{cd} + k_{cb} + k_{cf}} = 0{,}3540\ ,$$

$$\mu_{cb} = \frac{k_{cb}}{k_{cd} + k_{cb} + k_{cf}} = 0{,}3540 \quad \text{en}$$

$$\mu_{cf} = \frac{k_{cf}}{k_{cd} + k_{cb} + k_{cf}} = 0,2920 \ .$$

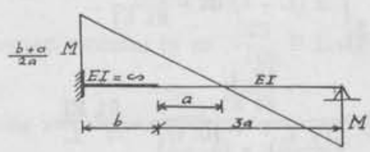
De overdrachtscoëfficiënten worden voor de staven BC en CD: $\frac{\varphi_{bc}}{\varphi_{bb}} = \frac{10}{17} = 0,588.$

Vereffening:
De vereffening is uitgevoerd in de tabel op bladzijde 23.



Figuur 11

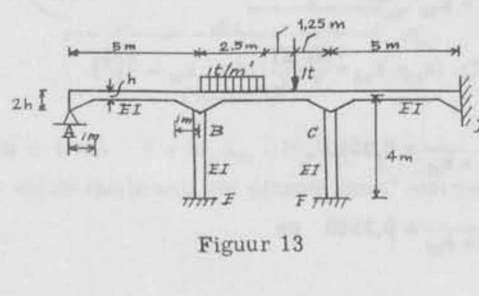
Opmerking: De overdrachtscoëfficiënt kan zelfs > 1 worden, zoals in onderstaand voorbeeld:



Overdrachtscoëfficiënt
$\frac{b+a}{2a} > 1$ *als* $b > a$.

Figuur 12

De in de voorgaande berekening voorkomende integralen waren, dank zij het eenvoudige verloop van EI, gemakkelijk op te lossen. Is dit verloop ingewikkelder, dan verdient het dikwijls de voorkeur deze integralen grafisch te bepalen, waarbij het gereduceerde moment voor enkele punten berekend wordt en daartussen een rechtlijnig verloop van het momentenvlak wordt aangenomen. Analytisch kunnen de hoekverdraaiingen natuurlijk weer berekend worden als 'oplegreacties', gedeeld door EI als het gereduceerde momentenvlak beschouwd wordt als belasting.



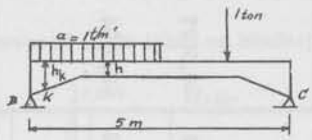
Figuur 13

Knooppunten	B			E	C			F	D
Staven	ba	bc	be	eb	cb	cd	cf	fc	dc
Vereff. coëff.	0,2585	0,4065	0,3350		0,3540	0,3540	0,2920	-	-
Overdr. coëff.		0,588	0,5		0,588	0,588	0,5		
Prim. mom.	$-0{,}2190 = \frac{23}{105}$ PL								
	+0,0566	+0,0890	+0,0734	+0,0367	+0,0523				
		-0,0109			-0,0185	-0,0185	-0,0153	-0,0077	-0,0109
	+0,0028	+0,0044	+0,0037	+0,0019	+0,0026				
		-0,0005			-0,0009	-0,0009	-0,0008	-0,0004	-0,0005
	+0,0001	+0,0002	+0,0002	+0,0001	+0,0001				
					-0,0001				
Eindmom. in PL	-0,1595	+0,0822	+0,0773	+0,0387	+0,0355	-0,0194	-0,0161	-0,0081	-0,0114

Opmerking: De overdrachtscoëfficiënt in een kolom van staafeinde pq is het getal waarmede het vereffeningsmoment in staafeinde p vermenigvuldigd moet worden om het overdrachtsmoment in staafeinde q te krijgen.

Bepaling van de primaire momenten

Bij onderstaande ligger BC worden eerst bij de gegeven belasting de hoekverdraaiingen in B en C bepaald. Het bij de belasting behorende momentenvlak wordt daartoe herleid tot een zodanig momentenvlak voor een prismatische ligger dat deze dezelfde vormveranderingen krijgt als de gegeven ligger. Dit herleide momentenvlak wordt het gereduceerde momentenvlak genoemd.



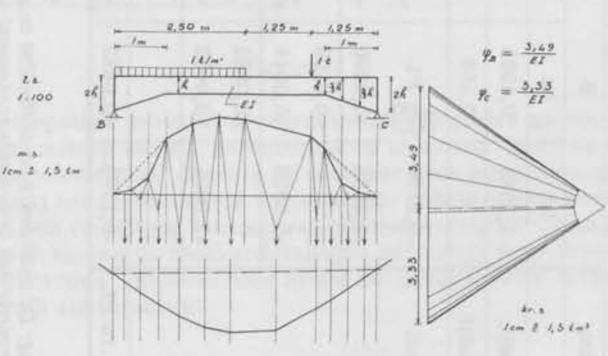
Figuur 14

In het gegeven voorbeeld wordt voor de stijfheid van de vergelijkingsbalk EI gekozen.

De momentenordinaat in een willekeurig punt K van het verzwaarde gedeelte moet vermenigvuldigd worden met

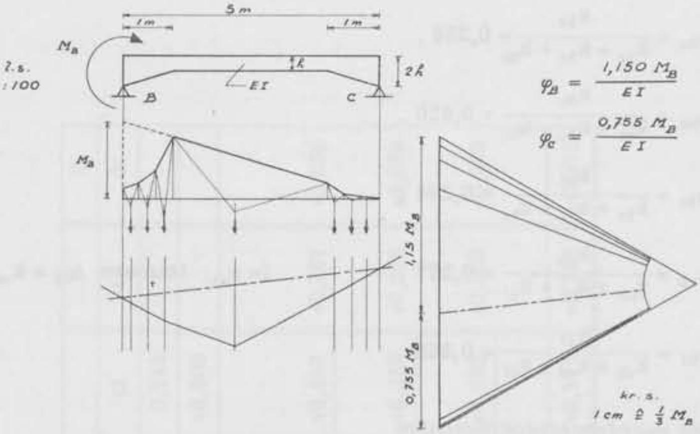
$$\frac{I}{I_k} = \frac{\frac{1}{12}\,bh^3}{\frac{1}{12}\,bh_k{}^3}$$

om de overeenkomstige ordinaat van het gereduceerde momentenvlak te krijgen. Dit momentenvlak, geschetst in fig. 15 wordt opgevat als belastingsvlak. Bij dit 'belastingsvlak' worden nu met behulp van een poolfiguur en stangenveelhoek de 'oplegreacties' bepaald. Deze oplegreacties gedeeld door EI zijn dan de gevraagde hoekverdraaiingen. (Zie fig. 15).



Figuur 15

Vervolgens wordt ligger BC belast met een moment M_B in B.
Op geheel dezelfde wijze als hierboven genoemd, worden nu ook weer de hoekverdraaiingen bepaald. (Zie fig. 16).



Figuur 16

De primaire momenten, welke volgen uit:

$+ 1,15\ M_B - 0,755\ M_C = + 3,49$ (totale hoekverdraaiing in B = 0)

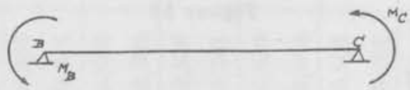
$+ 0,755\ M_B - 1,15\ M_C = + 3,33$ (totale hoekverdraaiing in C = 0)

zijn: $M_B = + 2,000$ tm en $M_C = - 1,575$ tm.

Bepaling vereffeningscoëfficiënten

De stijfheid $k_{ba} = \frac{EI}{1,15} = 0,87EI$.

Teneinde de stijfheid k_{bc} te berekenen wordt onderstaande ligger beschouwd.



Figuur 17

In het punt C wordt nu een zodanig moment M_C aangebracht, dat de door M_B in C veroorzaakte hoekverdraaiing wordt opgeheven.
Hieruit volgt $1,15\ M_C = 0,755\ M_B$ of $M_C = 0,656\ M_B$.

De resulterende hoekverdraaiing in B wordt:

$$\beta = \frac{1}{EI}(1,15\ M_B - 0,755 . 0,656\ M_B) = \frac{0,655}{EI} M_B .$$

De stijfheid $k_{bc} = \frac{EI}{0,655} = 1,53\ EI$ $(= k_{cb} = k_{cd})$.

Verder is $k_{be} = k_{cf} = \frac{4EI}{4} = EI$.

De vereffeningscoëfficiënten worden nu:

$$\mu_{ba} = \frac{k_{ba}}{k_{ba} + k_{bc} + k_{be}} = 0{,}256 \ ,$$

$$\mu_{bc} = \frac{k_{bc}}{k_{ba} + k_{bc} + k_{be}} = 0{,}450 \ ,$$

$$\mu_{be} = \frac{k_{be}}{k_{ba} + k_{bc} + k_{be}} = 0{,}294 \ ,$$

$$\mu_{cb} = \frac{k_{cb}}{k_{cb} + k_{cd} + k_{cf}} = 0{,}377 \ , \qquad (= \mu_{cd};\ \text{immers}\ \ k_{cb} = k_{cd})$$

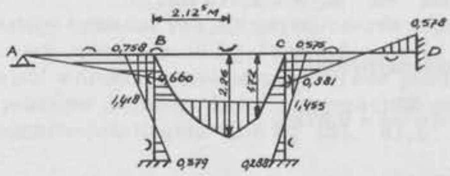
$$\mu_{cf} = \frac{k_{cf}}{k_{cb} + k_{cd} + k_{cf}} = 0{,}246 \ .$$

Bepaling overdrachtscoëfficiënten

De overdrachtscoëfficiënt van B naar C, van C naar B en van C naar D bedragen alle + 0,656 (zie bij bepaling vereffeningscoëfficiënten). Van B naar E en van C naar F bedragen ze 0,500.

Vereffening

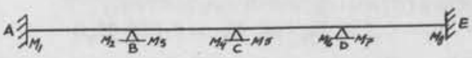
(Zie vereffeningstabel op bladzijde 27).



Figuur 18

VOORBEELD III

Tot slot zal nog een voorbeeld algebraïsch worden uitgewerkt, waarbij dus de primaire momenten, de vereffenings- en de overdrachtscoëfficiënten door letters worden voorgesteld.



Figuur 19

(Zie vereffeningstabel op blz. 30).

Ter vereenvoudiging zijn

$s\beta(M_2 + M_3) - M_4 - M_5 = P$,

$-(M_6 + M_7 + u\delta P) = Q$ en

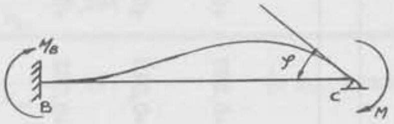
$st\beta\gamma P - v\eta Q = R$ gesteld.

Knooppunten	B			E	C			F	D
Staven	ba	bc	be	eb	cb	cd	cf	fc	dc
Vereff. coëff.	0,256	0,450	0,294	-	0,377	0,377	0,246	-	-
Overdr. coëff.		+0,656	+0,500		+0,656	+0,656	+0,500		
Prim. mom.		2,000	-1,575		-1,575				
	-0,512	-0,900	-0,588	-0,294	-0,590				
		+0,536			+0,816	+0,816	+0,533	+0,267	+0,536
	-0,137	-0,241	-0,158	-0,079	-0,158				
		+0,039			+0,060	+0,060	+0,039	+0,019	+0,039
	-0,010	-0,018	-0,011	-0,006	-0,012				
		+0,003			+0,005	+0,005	+0,003	+0,002	+0,003
	-0,001	-0,001	-0,001	-	-0,001				
Eindmom. in tm	-0,660	+1,418	-0,758	-0,379	-1,455	+0,881	+0,575	+0,288	+0,578

Ook in dit geval blijken de termen van elke kolom een convergerende reeks te vormen met reden $st\beta\gamma + uv\delta\eta$.

Om de convergentie van de reeks te bewijzen zal eerst worden aangetoond, dat de producten st en uv elk kleiner zijn dan 1.

Daartoe wordt de ligger BC beschouwd.



Figuur 20

Het product van de overdrachtscoëfficiënt van B naar C en omgekeerd is gelijk aan $\frac{\varphi_{bc}^2}{\varphi_{bb}\,\varphi_{cc}}$ want $\varphi_{bc} = \varphi_{cb}$ en (zie bovenstaande figuur),

$$M_b \cdot \varphi_{bb} = M\varphi_{bc} \quad \text{of} \quad M_b = \frac{\varphi_{bc}}{\varphi_{bb}} M.$$

De hoekverdraaiing φ t.p.v. B is

$$\varphi = M\varphi_{cc} - M_b\varphi_{cb} = M\varphi_{cc} - \frac{\varphi_{bc}\varphi_{cb}}{\varphi_{bb}} M \left(\varphi_{cc} - \frac{\varphi_{bc}\,\varphi_{cb}}{\varphi_{bb}}\right).$$

Omdat $\varphi_{bc} = \varphi_{cb}$ is $\varphi = M(\varphi_{cc} - \frac{\varphi_{bc}^2}{\varphi_{bb}})$.

Hoek φ is zeker groter dan 0, dus:

$$\varphi_{cc} - \frac{\varphi_{bc}^2}{\varphi_{bb}} > 0 \quad \text{of} \quad \frac{\varphi_{bc}^2}{\varphi_{bb}\varphi_{cc}} < 1, \text{ dus } \; st < 1; \text{ evenzo uv.}$$

Stel nu verder $st > uv$, dan is voor de reden van de meetkundige reeks

$st\beta\gamma + uv\delta\eta$ te schrijven $st\beta\gamma + st\frac{uv}{st}\delta\eta = st(\beta\gamma + \varepsilon\delta\eta)$ waarin $\varepsilon < 1$.

Dus $(st\beta\gamma + uv\delta\eta) < st(\beta\gamma + \delta\eta)$.

Hierin is $(\beta\gamma + \delta\eta) \leq 1$, want indien $\beta > \eta$ is, is

$\beta\gamma + \delta\eta = \beta(\gamma + \frac{\eta}{\beta}\delta) = \beta(\gamma + \varepsilon'\delta)$, waarin $\varepsilon' < 1$, $(\gamma + \delta) < 1$,

dus $(\gamma + \varepsilon'\delta) < 1$ en $\beta \leq 1$, dus $\beta(\gamma + \varepsilon'\delta) < 1$ en daar ook $st < 1$

is de reden $(st\beta\gamma + uv\delta\eta) < 1$.

Hoofdstuk IV

CONVERGENTIEBEWIJS

Dikwijls zal het echter moeilijk, zo niet onmogelijk zijn de meetkundige reeksen te ontdekken. De vraag mag worden gesteld of in de gevallen waarbij geen meetkundige reeksen in de termen zijn te vinden, deze iteratie-methode ook convergeert?

Men moet n.l. met iteratiemethoden wel voorzichtig zijn, omdat er - zoals bijv. *Biezeno* en *Koch* hebben aangetoond voor de verend ondersteunde ligger [1]- gevallen bekend zijn, dat een herhalingsberekening divergeert, alzo niet naar de juiste oplossing voert. En vanzelf zal men zich dus bij toepassing van de vereffeningsmethode moeten afvragen: is men er wel zeker van, dat de methode altijd convergeert en zo ja, convergeert zij dan altijd naar de juiste oplossing?

Zuiver mathematisch bekeken, alzo het iteratieproces beschouwd als een opeenvolging van algebraische bewerkingen, is de beantwoording van de gestelde vragen tamelijk moeilijk te volgen [2].

Daarom zal in aansluiting met het mathematisch convergentiebewijs van *Prof. C. B. Biezeno (De Ingenieur 26 juli 1946 No. 29, blz. 0.29)* aan de hand van een arbeidsbeschouwing worden aangetoond, dat de vereffeningsmethode van *Cross* altijd – dus ook bij willekeurige doorvoering van het iteratieproces – naar de natuurlijke toestand en de juiste oplossing convergeert, mits men maar geen vasthoudmomenten van de vereffening uitsluit. De snelste convergentie wordt echter verkregen, wanneer telkens dat knooppunt wordt losgelaten, waarvoor het kwadraat van het vasthoudmoment gedeeld door de som van de stijfheden van de aansluitende staven, zo groot mogelijk is.

Wanneer een knooppunt wordt losgelaten, zal het vasthoudmoment M, dat daarbij geleidelijk van zijn beginwaarde tot nul afneemt, blijkbaar een negatieve arbeid verrichten [3], welke volgens *Clapeyron* gemakkelijk kan worden berekend, als het halve product van M en de draaiing α, die het knooppunt tengevolge van de loslating verkrijgt. Nu is deze draaiing α blijkbaar gelijk aan de hellingsverandering, die de raaklijn aan de elastische lijn van ieder der in het knooppunt samenkomende staven, op deze plaats verkrijgt.

Men beschouwe eens de aansluitingsdoorsnede van een staaf i, waarvan de stijfheid k_i is. De vereffeningscoëfficient van het moment in deze doorsnede is dan

$$\mu_i = \frac{k_i}{\Sigma k} = \frac{k_i}{S}$$

wanneer S de som is van de stijfheden van alle in het knooppunt samenkomende staven.

1) *Biezeno-Grammel*: Technische Dynamik' 1939, Hoofdstuk IV paragraaf 2 en 3.

2) Vergl. *L. Brand:* The method of momentdistribution for the analysis of continuous structures', Bulletin Amer. Mathem. Soc. 1935, blz. 901 en *C. Temple:* 'The general theory of relaxation methods applied to lineair systems', Proc. Roy. Soc. (A) 1939, blz. 476.

3) Om het losgelaten knooppunt weer in zijn vorige stand terug te brengen, moet immers positieve arbeid worden verricht.

Knooppunten	A	B		C		D		E
Staven	ab	ba	bc	cb	cd	dc	de	ed
Vereff. coëff.	-	α	β	γ	δ	η	θ	-
Overdr. coëff.		r	s	t	u	v	w	-
Prim. mom.	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
	$-r\alpha(M_2+M_3)$	$-\alpha(M_2+M_3)$	$-\beta(M_2+M_3)$	$-s\beta(M_2+M_3)$				
			$t\gamma P$	γP	δP	$u\delta P$		
					$v\eta Q$	ηQ	θQ	$w\theta Q$
	$-r\alpha t\gamma P$	$-\alpha t\gamma P$	$-\beta t\gamma P$	$-s\beta t\gamma P$				
			$t\gamma R$	γR	δR	$u\delta R$		
					$-v\eta u\delta R$	$-\eta u\delta R$	$-\theta u\delta R$	$-w\theta u\delta R$
	$-r\alpha t\gamma R$	$-\alpha t\gamma R$	$-\beta t\gamma R$	$-s\beta t\gamma R$				
			$\beta\gamma^2 st^2R+tuv\gamma\delta\eta R$	$s\beta t\gamma^2R+v\eta u\delta\gamma R$	$\delta s\beta t\gamma R+v\eta u\delta^2R$	$stu\beta\gamma\delta R+vu^2\delta^2\eta R$		
					$-stuv\beta\gamma\delta\eta R-v^2u^2\delta^2\eta^2R$	$-stu\beta\gamma\delta\eta R-vu^2\delta^2\eta^2R$	$-stu\beta\gamma\delta\theta R-vu^2\delta^2\eta\theta R$	$-stuw\beta\gamma\delta\theta R-vwu^2\delta^2\eta\theta R$
	$-rst^2\alpha\beta\gamma^2-rtuv\alpha\gamma\delta\eta R$	$-\alpha\beta\gamma^2 st^2R-tuv\beta\gamma\delta\eta R$	$-\beta^2\gamma^2st^2R-tuv\beta\gamma\delta\eta R$	$-\beta^2\gamma^2s^2t^2R-stuv\beta\gamma\delta\eta R$				
			$\beta^2\gamma^3s^2t^3R+st^2uv\beta\gamma^2\delta\eta R+$ $+st^2uv\beta\gamma^2\delta\eta R+tv^2u^2\gamma\delta^2\eta^2R$	$\beta^2\gamma^3s^2t^2R+stuv\beta\gamma^2\delta\eta R+$ $+stuv\beta\gamma^2\delta\eta R+v^2u^2\gamma\delta^2\eta^2R$	$\beta^2\gamma^2\delta s^2t^2R+stuv\beta\gamma\delta^2\eta R+$ $+stuv\beta\gamma\delta^2\eta R+v^2u^2\delta^3\eta^2R$			
					enz.			

Door een vasthoudmoment M ontstaat dus in de beschouwde aansluitingsdoorsnede een moment μ_i M, waarbij behoort een hoekverdraaiing $\frac{\mu_i M}{k_i} = \frac{M}{S}$, zijnde de hoek α.

Alzo is, na loslating van een knooppunt, de door het vasthoudmoment verrichte negatieve arbeid:

$$\Delta A = \frac{1}{2} M \alpha = \frac{M^2}{2S} \tag{1}$$

De, op een bepaald ogenblik van het vereffeningsproces, door de vasthoudmomenten op de constructie verrichte uitwendige arbeid (welke kortweg dwang zal worden genoemd), zal door iedere loslating van een knooppunt met vasthoudmoment M en stijfheid S, dus verminderen met $\frac{M^2}{2S}$. Dadelijk kan men dus zeggen, dat de constructie het snelst van zijn dwang zal zijn verlost, met andere woorden het snelst de natuurlijke toestand zal naderen, wanneer men steeds dat knooppunt loslaat, waarvoor $\frac{M^2}{2S}$ zo groot mogelijk is.

We zullen nu eerst de convergentie van het proces bewijzen, voor het geval alleen op M_{max} gelet wordt, met andere woorden wanneer steeds dat knooppunt losgelaten wordt, waarvoor het vasthoudmoment zo groot mogelijk is.

Stel dat op een bepaald ogenblik van het vereffeningsproces de vasthoudmomenten zijn: M_1, $M_2 \ldots . M_n$, dan is de door deze momenten verrichte arbeid c.q. de dwang:

$$A = \frac{1}{2} M_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} M_2 \varphi_2 + \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{2} M_n \varphi_n \tag{2}$$

waarin φ_1, φ_2 ..... φ_n de draaiingen van de n knooppunten zijn ten opzichte van de natuurlijke toestand.

Is β_{ij} de invloedsgrootheid voor de draaiing van een knooppunt i in positieve richting, tengevolge van een positief eenheidsmoment in het knooppunt j, dan kan men schrijven:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= M_1 \beta_{11} + M_2 \beta_{12} + \ldots \ldots \ldots \ldots M_n \beta_{1n} \\
\varphi_2 &= M_1 \beta_{21} + M_2 \beta_{22} + \ldots \ldots \ldots \ldots M_n \beta_{2n} \\
\varphi_n &= M_1 \beta_{n1} + M_2 \beta_{n2} + \ldots \ldots \ldots \ldots M_n \beta_{nn}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Substitueert men de waarden (3) in (2) zo krijgt men:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} M_i \sum_{j=1}^{j=n} M_j \beta_{ij} \tag{4}$$

Vervangt men in (4) de momenten M_1 t/m M_n door het grootste vasthoudmoment M_{max} en de invloedsgrootheden door hun volstrekte waarden, dan vindt men met:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} |\beta_{ij}| \tag{5}$$

$$A \leqq \frac{1}{2} M^2_{max} . \Phi \tag{6}$$

Blijkbaar is Φ een lineaire functie van de volstrekte waarden der invloedsgrootheden en dus uitsluitend afhankelijk van de stijfheid der constructie.

Laat men nu het knooppunt los met het grootste vasthoudmoment, dan zal conform (1), de dwang daardoor verminderen met:

$$\Delta A = \frac{M^2_{max}}{2S} \tag{7}$$

In verband met (6) kan men nu schrijven:

$$\Delta A \geq \frac{\frac{M^2_{max}}{2S}}{\frac{1}{2}M^2_{max}.\Phi} . A$$

$$A \geq \frac{A}{\Phi . S} . \tag{8}$$

Neemt men voor S nog de som van de stijfheden rondom het *stijfste* knooppunt dan heeft men zeker ook:

$$\Delta A \geq \frac{A}{\Phi . S_{max}} \tag{9}$$

of wel met:

$$C = \Phi . S_{max} \tag{10}$$

$$\Delta A \geq \frac{A}{C} . \tag{11}$$

Blijkbaar is ook C een constante, welke uitsluitend afhankelijk is van de stijfheid der constructie. We zullen trachten voor deze constante een benedenste grenswaarde te bepalen. Daartoe beschouwe men een knooppunt i met m knooppunten daaromheen, die door m rechte of gebogen staven met het eerste knooppunt verbonden zijn. Brengt men in i een moment M aan terwijl de m knooppunten daaromheen volkomen zijn ingeklemd, dan treedt een hoekverdraaiing op van $\alpha = \frac{M}{S_i}$. Deze hoekverdraaiing kan ook worden uitgedrukt met behulp van de invloedsgrootheden β.

Is n.l. voor de aansluitingsdoorsnede van een staaf j bij het knooppunt i, de vereffeningscoëfficient = μ_j en de overdrachtscoëfficient naar de inklemming aan het andere einde van de staaf = r_j, dan heeft men ook:

$$\alpha = M\,\beta_{ii} + \sum_{j=1}^{j=m} \mu_j . r_j . M . \beta_{ij} .$$

Dus geldt de betrekking:

$$M\,\beta_{ii} + \sum_{j=1}^{j=m} \mu_j . r_j . M . \beta_{ij} = \frac{M}{S_i} . \tag{12}$$

Bedenkt men dat de invloedsgrootheden β_{ij} en de overdrachtscoëfficient r in het hier beschouwde geval altijd van tegengesteld teken zijn, omdat de m knooppunten alle met i zijn verbonden, zo vindt men:

$$M\,\beta_{ii} \geqq \frac{M}{S_i} \tag{13}$$

of wel

$$\beta_{ii}\,.\,S \geqq 1 \tag{14}$$

Opmerking: $M\,\beta_{ii} = \frac{M}{S_i}$ *als* β_{ij} *voor alle omringende knooppunten = 0 is.*

Nu kan (5) ook worden geschreven:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ii} + \sum^{i \neq j} |\beta_{ij}|$$

zodat men in verband met (14) kan schrijven:

$$\Phi\,.\,S_{max} \geqq n \tag{15}$$

Volledigheidshalve moet echter nog worden opgemerkt, dat voor het geval de constructie slechts één knooppunt heeft waar een vasthoudmoment werkt, blijkbaar de betrekking geldt:

$$\beta_{ii}\,.\,S_i = \Phi\,.\,S_{max} = 1 \quad ^{4)}$$

Terugkerende tot de formules (10) en (11) heeft men dus dat:

$$C \geqq n \tag{16}$$

wanneer n het aantal knooppunten is, waarop vasthoudmomenten werken.

Stelt men de dwang bij de aanvang van de vereffening = A_o, dan is deze in verband met (11) na de eerste loslating dus geworden:

$$A_1 \leqq A_o - \frac{A_o}{C}$$

$$A_1 \leqq \frac{C-1}{C}\,.\,A_o\,.$$

Na de tweede loslating heeft men dan:

$$A_2 \leqq \left(\frac{C-1}{C}\right)^2 .\,A_o$$

en in het algemeen is de overgebleven dwang na p loslatingen:

$$A_p \leqq \left(\frac{C-1}{C}\right)^p .\,A_o \tag{17}$$

4) De juistheid van betrekking (13) kan men ook dadelijk inzien, door te bedenken, dat de stijfheid van knooppunt i als deel van de vrije constructie, natuurlijk geringer is dan wanneer de m knooppunten daaromheen volkomen zijn ingeklemd; althans wanneer i niet het enige knooppunt is dat vereffend moet worden, in welk geval beide stijfheden aan elkaar gelijk zijn.

Hoe groot kan nu na p loslatingen de waarde van het maximale vasthoudmoment ten hoogste zijn? Blijkbaar kan men deze grenswaarde vinden door aan te nemen, dat de resterende dwang uitsluitend geconcentreerd is in het stijfste knooppunt. In verband met (1) heeft men dan:

$$A_p = \frac{M^2_{p(max)}}{2S_{max}}$$

of wel in verband met (17)

$$M_{p(max)} = \sqrt{2S_{max}\ A_o} \cdot \left(\frac{C-1}{C}\right)^{\frac{1}{2}p} \tag{18}$$

Wanneer $n = 1$, zal na loslating van het enige knooppunt, de totale dwang onmiddellijk nul worden en de natuurlijke toestand dadelijk worden verkregen. In alle andere gevallen is $n > 1$ en in verband met (16) ook C [5]. De formules (17) en (18) leren dan, dat zowel de dwang als het maximale vasthoudmoment, door de achtereenvolgende loslatingen naar nul zullen convergeren, daar immers $\frac{C-1}{C}$ een positief getal is kleiner dan 1.

Theoretisch zal de natuurlijke toestand eerst na een oneindig groot aantal loslatingen worden bereikt. Practisch zullen de resterende vasthoudmomenten gewoonlijk reeds na twee of drie keer loslaten van alle knooppunten, zo klein zijn geworden, dat zij verder zonder bezwaar kunnen worden verwaarloosd.

Het is duidelijk, dat nu de convergentie naar de natuurlijke toestand en de juiste oplossing bewezen is wanneer men steeds het knooppunt met het grootste vasthoudmoment M_{max} loslaat, dit zeker ook het geval zal zijn, wanneer altijd dat knooppunt wordt ontlast, waarvoor $\frac{M^2}{2S}$ zo groot mogelijk is, omdat dan immers de dwang telkens met een nog groter of tenminste gelijk bedrag afneemt.

Ofschoon alleen van academische waarde moge nog worden opgemerkt, dat op soortgelijke wijze als hierboven, de convergentie naar de natuurlijke toestand ook kan worden aangetoond, wanneer men steeds dat knooppunt loslaat, waarbij het vasthoudmoment groter of gelijk is aan γM_{max}, waarbij γ een positief getal is kleiner dan 1 $(1 > \gamma > 0)$. Men komt dan tot de conclusie, dat de vereffeningsmethode van Cross, altijd, dus ook bij willekeurige doorvoering van het iteratieproces, naar de juiste oplossing zal convergeren, mits men maar geen vasthoudmomenten moedwillig van de vereffening uitsluit.

(Prof. Ir. C. G. J. Vreedenburgh, 'Een arbeidsbeschouwing over de snelste convergentie van de vereffeningsmethode van *Cross', De Ingenieur no. 37, 1946).*

5) Dat $C \geqq 1$ kan men ook als volgt inzien. Daar de vermindering van dwang door loslating van een knooppunt nooit groter kan zijn dan A, heeft men in verband met (11).

$$A \geqq \Delta A \geqq \frac{A}{C}$$

waaruit dadelijk volgt $C \geqq 1$.

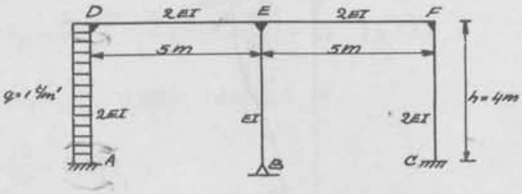
Hoofdstuk V

CONSTRUCTIES MET VERPLAATSBARE KNOOPPUNTEN

VOORBEELD I

Eerste manier

Komen er in een constructie verplaatsbare knooppunten voor, dan vergt de bepaling van de buigende momenten meer rekenwerk, hetgeen aan onderstaand voorbeeld, waarvan de regel DEF kan verschuiven, zal worden toegelicht.



Figuur 21

Stel dat deze regel ten gevolge van de gegeven belasting over een afstand verschuift.

De primaire momenten worden nu berekend voor het geval dat deze verschuiving reeds aanwezig is. Deze primaire momenten bestaan dus voor de belaste stijlen uit twee gedeelten en wel één deel veroorzaakt door de belasting en een ander deel veroorzaakt door de horizontale verplaatsing δ.
Aan de uiteinden der onbelaste stijlen zijn uiteraard alleen de laatstgenoemde momenten aanwezig.

Alvorens deze momenten te vereffenen wordt in D een steunpunt aangebracht, zodat de horizontale verplaatsing tijdens het proces gehandhaafd blijft en de vereffening dus verder verloopt als bij een constructie met onverplaatsbare knooppunten.

Uit de voorwaarde, dat de oplegreactie in D, die berekend kan worden uit de vereffende momenten, nul moet zijn, volgt de waarde van δ en daarmee de uiteindelijke waarden van de vereffende momenten.

Berekening primaire momenten

Ten gevolge van de belasting alleen bedragen de primaire momenten:

$$M_{AD} = -M_{DA} = \frac{1}{12}\, q\, h^2 = 1{,}333 \text{ tm.}$$

Ten gevolge van de verschuiving van de bovenregel, waardoor de knooppunten D, E en F evenveel verplaatsen, omdat de vormverandering, ten gevolge van de normaalkrachten kunnen worden verwaarloosd, ontstaan de volgende primaire momenten:

Stijl DA

Dit is een aan twee zijden ingeklemde ligger, waarvan de inklemmingsdoorsneden over een afstand δ ten opzichte van elkaar zijn verschoven.

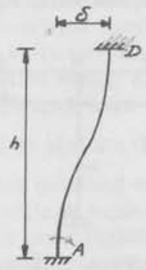
Uit symmetrie-overwegingen volgt, dat in het midden van de overspanning de doorbuiging $\frac{1}{2}\delta$ is, terwijl die doorsnede alleen een dwarskracht D moet overbrengen.

Dan is dus:

$$\tfrac{1}{2}\delta = \frac{D.(\frac{1}{2}\ h)^3}{3.\ EI_{AD}} \quad \text{of} \quad D = \frac{12\ EI_{AD}\ .\ \delta}{h^3}$$

Het inklemmingsmoment bij A is $M_{AD} = \frac{1}{2}.h.D = \dfrac{6EI_{AD}\ .\ \delta}{h^2}$

De primaire momenten zijn dus $M_{AD} = M_{DA} = \dfrac{6.\ 2EI.\delta}{4^2} = 0{,}750\ EI\delta.$



Figuur 22

Stijl BE

Dit is een ligger, waarvan de inklemmingsdoorsnede E over een afstand δ verschoven is ten opzichte van het oplegpunt B. Het systeem komt overeen met een in E ingeklemde ligger, waarop aan het vrije uiteinde B een horizontale kracht D werkt, zodat:

$$\delta = \frac{D.\ h^3}{3EI} \quad \text{of} \quad D = \frac{3EI.\delta}{h^3}\ .$$

Het inklemmingsmoment is $M_{eb} = D.h$ of $M_{eb} = \dfrac{3EI.\delta}{h^2}$

Het primaire moment M_{EB} is dus $\dfrac{3EI.\delta}{4^2} = +\ 0{,}1875\ EI\delta.$

Stijl CF

Deze inklemmingsmomenten zijn (zie formule stijl AD).

$$M_{cf} = M_{fc} = \frac{6.\ 2EI.\delta}{4^2} = +\ 0{,}750\ EI\delta.$$

De resulterende primaire momenten zijn dus:

$$M_{AD} = +\ 1{,}333 + 0{,}750\ EI\delta.$$

$$M_{DA} = -\ 1{,}333 + 0{,}750\ EI\delta,$$

$M_{EB} = + 0,1875\ EI\delta$ en

$M_{CF} = M_{FC} = + 0,750\ EI\delta$.

(dimensies in t en m)

De vereffeningscoëfficienten volgen uit:

$$k_{da} : k_{de} = \frac{4.2EI}{4} : \frac{4.2EI}{5} = 5 : 4 \, ,$$

dus $\mu_{da} = \frac{5}{9} = 0,555$ en

$\mu_{de} = \frac{4}{9} = 0,445.$

$$k_{ed} : k_{eb} : k_{ef} = \frac{4.2EI}{5} : \frac{3.EI}{4} : \frac{4.2EI}{5} = 32 : 15 : 32 \, ,$$

dus $\mu_{ed} = \mu_{ef} = \frac{32}{79} = 0,405$ en

$\mu_{eb} = \frac{15}{79} = 0,190.$

Verder is:

$\mu_{fe} = 0,445$ en

$\mu_{fc} = 0,555.$

De *vereffening* is uitgevoerd in de tabel op blz. 38.

Vasthoudkracht

Nu de momenten welke op de uiteinden der stijlen werken bekend zijn, kan de reactie, die door de roloplegging bij D wordt uitgeoefend (de zg. vasthoudkracht) berekend worden. De component van de reactie in D die door de stijl AD veroorzaakt wordt, volgt uit:

$$-1,721 - 0,533EI\delta + 4.2 + 0,557 - 0,315EI\delta - 4R_d = 0 \, ,$$

of $R_d = + 1,709 - 0,212EI\delta$ (zie fig. 23).

De door de andere stijlen geleverde componenten van de reactie in D (via de regel) volgen uit:

$-4R_e + 0,062 - 0,217EI\delta = 0,$ of $R_e = +0,016 - 0,054EI\delta$

en $-4R_f - 0,036 - 0,315EI\delta - 0,018 - 0,533EI\delta = 0 \, ,$

of $R_f = -0,014 - 0,212EI\delta$.

De totale kracht die de in D aangebrachte roloplegging op de constructie uitoefent is:

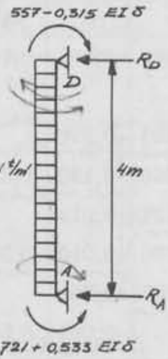
TABEL I

Knooppunten	A	D		E			F		C
Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Vereff. coëff.	-	0,555	0,445	0,405	0,190	0,405	0,445	0,555	-
Prim. momenten	+1,333+0,750EIδ	-1,333+0,750EIδ			+0,187EIδ			+0,750EIδ	+0,750EIδ
	+0,370-0,208EIδ	+0,740-0,416EIδ	+0,593-0,334EIδ	+0,296-0,167EIδ		-0,167EIδ	-0,334EIδ	-0,416EIδ	-0,208EIδ
			-0,060+0,030EIδ	-0,120+0,059EIδ	-0,056+0,028EIδ	-0,120+0,060EIδ	-0,060+0,030EIδ		
	+0,016-0,008EIδ	+0,033-0,017EIδ	+0,027-0,013EIδ	+0,013-0,007EIδ		+0,013-0,007EIδ	+0,027-0,013EIδ	+0,033-0,017EIδ	+0,016-0,008EIδ
			-0,005+0,003EIδ	-0,010+0,006EIδ	-0,006+0,002EIδ	-0,010+0,006EIδ	-0,005+0,003EIδ		
	+0,002-0,001EIδ	+0,003-0,002EIδ	+0,002-0,001EIδ	+0,001-0,001EIδ		+0,001-0,001EIδ	+0,002-0,001EIδ	+0,003-0,002EIδ	+0,002-0,001EIδ
				-0,001+0,001EIδ		-0,001+0,001EIδ			
Resulterende momenten	+1,721+0,533EIδ	-0,557+0,315EIδ	+0,557-0,315EIδ	+0,179-0,109EIδ	-0,062+0,217EIδ	-0,117-0,108EIδ	-0,036-0,315EIδ	+0,036+0,315EIδ	+0,018+0,533EIδ
”	+3,628	+0,573	-0,573	-0,211	+0,715	-0,504	-1,166	+1,166	+1,925

$$+1{,}709 - 0{,}212EI\delta + 0{,}016 - 0{,}054EI\delta - 0{,}014 - 0{,}212EI\delta = +1{,}711 - 0{,}478EI\delta .$$

Uit de voorwaarde, dat deze reactie nul is, volgt: $EI\delta = \frac{1{,}711}{0{,}478} = 3{,}580.$

De uiteindelijke Cross-momenten kunnen nu berekend worden en zijn verzameld onderaan in tabel 1 op pagina 38.



Figuur 23

Tweede manier

Omdat de vorige berekeningswijze bij constructies met meerdere verplaatsbare knooppunten onoverzichtelijk wordt (zie voorbeeld II, eerste manier) splitst men de berekening in twee of meer delen.

In het eerste deel worden de momenten vereffend, terwijl de verplaatsing van de regels door aangebrachte roloplegginggen worden verhinderd.

In het tweede deel worden de momentenverdelingen berekend ten gevolge van de verschuivingen van de regels.

Het hierboven behandelde vraagstuk zal thans ook op de tweede manier worden opgelost.

Berekening momentenverdeling bij onverschuifbare regels

De *vereffeningscoëfficiënten* zijn gelijk aan die van de vorige berekening.

Primaire momenten:

$$M_{AD} = -M_{DA} = \frac{1}{12} q h^2 = \frac{1}{12} . 1 . 16 = +1{,}333 \text{ tm}.$$

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel 2 (zie blz. 40).

Vasthoudkracht

Nu de momenten, welke op de uiteinden der stijlen werken, bekend zijn, kan de reactie die door de roloplegging bij D wordt uitgeoefend, berekend worden. De component van de reactie R_d die geleverd wordt door stijl AD volgt uit: (zie figuur 24.)

$$-1{,}721 + 2.4 + 0{,}557 - 4R_d = 0, \quad \text{of} \quad R_d = +1{,}709 \text{ ton}.$$

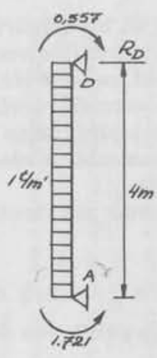
De componenten R_e en R_f volgen op overeenkomstige wijze uit het evenwicht van de stijlen BE en CF nl.

$-4R_e + 0{,}062 = 0 \quad \text{of} \quad R_e = +0{,}016 \text{ ton} \quad \text{en}$

$-4R_f - 0{,}036 - 0{,}018 = 0 \quad \text{of} \quad R_f = -0{,}014 \text{ ton.}$

TABEL 2

Knooppunten	A	D		E			F		C
Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Vereff. coëff.	-	0,555	0,445	0,405	0,190	0,405	0,445	0,555	-
Prim. mom.	+1,333	-1,333							
	+0,370	+0,740	+0,593	+0,296					
			-0,060	-0,120	-0,056	-0,120	-0,060		
	+0,016	+0,033	+0,027	+0,013		+0,013	+0,027	+0,033	+0,016
			-0,005	-0,010	-0,006	-0,010	-0,005		
	+0,002	+0,003	+0,002	+0,001		+0,001	+0,002	+0,003	+0,002
				-0,001	0,000	-0,001			
Resulterende momenten	+1,721	-0,557	+0,557	+0,179	-0,062	-0,117	-0,036	+0,036	+0,018



Figuur 24

De totale kracht die de in D aangebrachte roloplegging op de constructie uitoefent is:

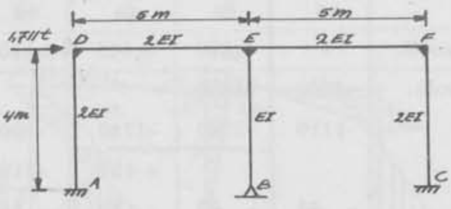
$$+1{,}709 + 0{,}016 - 0{,}014 = 1{,}711 \text{ ton naar links.}$$

De in de tabel gevonden momentenverdeling is dus niet het gevolg van de gegeven belasting alleen, maar van de gegeven belasting en een puntlast van 1,711 ton naar links werkende op knooppunt D.

Momentenverdeling t.g.v. de verschuiving van de regel

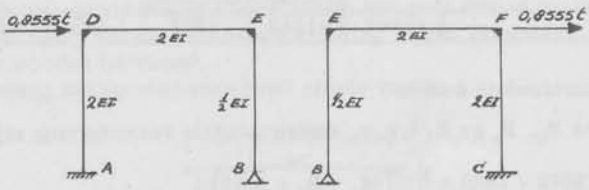
Teneinde de momentenverdeling ten gevolge van de belasting alleen te vinden, is het dus nodig om bovengevonden momentenverdeling te vermeerderen met die, ten gevolge van een puntlast van 1,711 ton in D naar rechts.

Dit vraagstuk kan niet rechtstreeks worden opgelost. Wel kan de verhouding berekend worden tussen een willekeurige horizontale kracht en de daardoor optredende momenten. Hiertoe brengt men, bij onverdraaibare knooppunten, een willekeurige verplaatsing δ van de regel aan en berekent daarbij de primaire momenten, die dus uitgedrukt zijn in δ. Na vereffening kan de voor de verplaatsing benodigde horizontale kracht op de regel bepaald worden. Zowel de vereffende momenten als de horizontale kracht zijn nu uitgedrukt in δ, zodat bovengenoemde verhouding bekend is. Daar in het algemeen de waarde van δ niet van belang is, gaat men in de practijk van willekeurige primaire momenten uit, met dien verstande, dat deze dezelfde onderlinge verhouding moeten hebben als de eerstgenoemde primaire momenten.



Figuur 25

Bij de berekening zal gebruik gemaakt worden van symmetrie-overwegingen. Bovenstaand belastingsgeval kan nl., wat de momentenverdeling betreft, als volgt worden gesplitst:



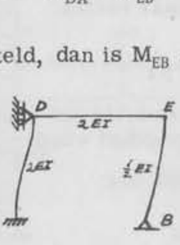
Figuur 26

In beide delen treedt dezelfde momentenverdeling op.

De verhouding der *primaire momenten* volgt uit de voorwaarde:

$$\delta = \frac{M_{DA} \cdot h^2}{6.2EI} = \frac{M_{EB} \cdot h^2}{3.\frac{1}{2}EI} \quad \text{nl.:} \quad M_{DA} : M_{EB} = 8 : 1$$

Wordt $M_{DA} = M_{AD} = +4000$ gesteld, dan is $M_{EB} = +500$.



Figuur 27

De *vereffeningscoëfficiënten* worden nu als volgt:

$$k_{da} : k_{de} = \frac{4.2EI}{4} : \frac{4.2EI}{5} = 5 : 4;\ \mu_{da} = 0{,}555 \text{ en } \mu_{de} = 0{,}445,$$

$$k_{ed} : k_{eb} = \frac{4.2EI}{5} : \frac{3.\frac{1}{2}EI}{4} = 64 : 15;\ \mu_{ed} = 0{,}810 \text{ en } \mu_{eb} = 0{,}190$$

De *vereffening* is uitgevoerd in onderstaande tabel 3.

TABEL 3

Knooppunten	A	D		E	
Staven	ad	da	de	ed	eb
Vereff. coëff.	-	0,555	0,445	0,810	0,190
Prim. mom.	+4000	+4000			+500
	-1110	-2220	-1780	-890	
			+ 158	+316	+ 74
	- 44	- 88	- 70	- 35	
			+ 14	+ 28	+ 7
	- 4	- 8	- 6	- 3	
			+ 1	+ 2	+ 1
		- 1			
	+2842	+1683	-1683	-582	+582

Berekening horizontale kracht

De reacties R_d, R_e en R_f t.g.v. de horizontale verschuiving zijn:

$-4R_d - 2842 - 1683 = 0$ of $R_d = -1131$,

$-4R_e - 1164 = 0$ of $R_e = -291$.

$-4R_f - 2842 - 1683 = 0$ of $R_f = -1131$.

De kracht, welke de roloplegging in D op de constructie uitoefent is dus:

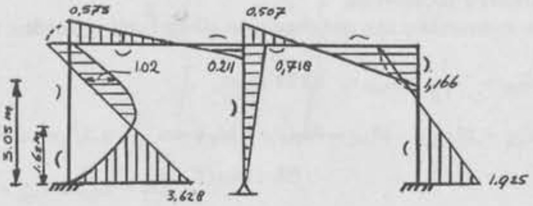
$1131 + 291 + 1131 = 2553$ naar rechts.

Eliminatie vasthoudkracht

Ten gevolge van een kracht van 1,711 ton naar rechts moeten de bovengenoemde momenten dus vermenigvuldigd worden met $\frac{1{,}711}{2553}$.

De resulterende momenten worden dus:

Knooppunten	A	D		E			F		C
Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Mom. tabel 2	+1,721	-0,557	+0,557	+0,179	-0,062	-0,117	-0,036	+0,036	+0,018
$\frac{1,711}{2553}$ x mom. tabel 3	+1,907	+1,130	-1,130	-0,390	+0,780	-0,390	-1,130	+1,130	+1,907
Eindmomenten	+3,628	+0,573	-0,573	-0,211	+0,718	-0,507	-1,166	+1,166	+1,925

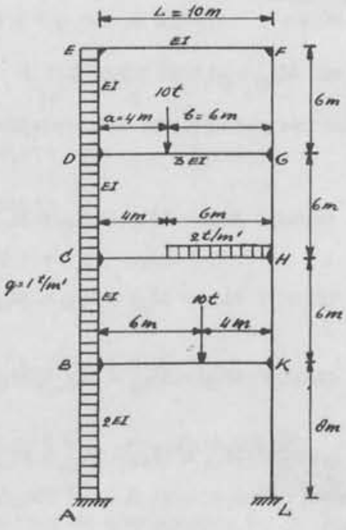


Figuur 28

VOORBEELD II

Als tweede voorbeeld van een constructie waarvan één of meer knooppunten kunnen verplaatsen, zal de momentenverdeling in een raamwerk met vier verdiepingen worden berekend.

De berekening zal op vier manieren plaats vinden.



Figuur 29

EERSTE MANIER

Stel dat de uiteindelijke verplaatsingen van de regels zijn δ_1, δ_2, δ_3 en δ_4. (zie figuur 30).

Deze verplaatsingen worden reeds aangebracht gedacht, terwijl de draaiingen der knooppunten worden verhinderd.

De primaire momenten door de belasting worden nu dus vermeerderd met die door de verschuiving. Om genoemde verschuivingen te handhaven, worden, evenals bij het voorgaande geval, gedurende het vereffeningsproces in de knooppunten E, D, C en B tijdelijke steunpunten aangebracht. De onbekende verplaatsingen δ_1, δ_2, δ_3 en δ_4 moeten nu weer zodanig bepaald worden, dat na de voltooiing van de vereffening de vasthoudkrachten nul zijn.

Berekening primaire momenten

De primaire momenten ten gevolge van de belasting luiden voor dit geval:

$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{1}{12}\,q\,L_{ab}^2 = 5333 \text{ kgm},$$

$$M_{BC} = -M_{CB} = M_{CD} = -M_{DC} = M_{DE} = -M_{ED} = -\frac{1}{12}\,q\,L^2 = -3000 \text{ kgm},$$

$$(L = L_{bc} = L_{cd} = L_{de})$$

$$M_{DG} = +P\,\frac{ab^2}{L^2} = +14400 \text{ kgm} = -M_{KB},$$

$$M_{GD} = -P\,\frac{a^2b}{L^2} = -9600 \text{ kgm} = -M_{BK} \quad \text{en}$$

$$M_{BK} = +9600 \text{ kgm en } M_{KB} = -14400 \text{ kgm}.$$

Voor de formules voor de primaire momenten M_{CH} en M_{HC} wordt verwezen naar hoofdstuk I (Basisgevallen).

Substitutie van $s = 4$ m en $r = L = 10$ m en $q = 2$ t/m^1 geeft:

$$M_{CH} = +7920 \text{ kgm en } M_{HC} = -13680 \text{ kgm}.$$

De primaire momenten ten gevolge van de verplaatsingen van de regels volgen uit figuur 30.

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{M_{ED}.\,6^2}{6EI}, \quad \text{terwijl } M_{ED} = M_{DE} = M_{FG} = M_{GF}.$$

$$\delta_2 - \delta_3 = \frac{M_{DC}\,6^2}{6EI}, \quad \text{terwijl } M_{DC} = M_{CD} = M_{GH} = M_{HG}.$$

$$\delta_3 - \delta_4 = \frac{M_{CB}.\,6^2}{6EI}, \quad \text{terwijl } M_{CB} = M_{BC} = M_{HK} = M_{KH}.$$

$$\delta_4 = \frac{M_{BA}.\,8^2}{6.\,2EI}, \quad \text{terwijl } M_{BA} = M_{AB} = M_{KL} = M_{LK}.$$

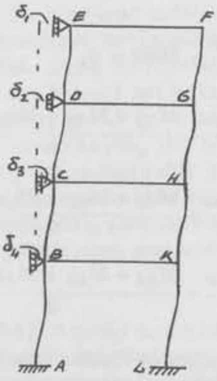
Uit het bovenstaande volgt:

$$M_{ED} = M_{DE} = M_{FG} = M_{GF} = (\delta_1 - \delta_2)\frac{EI}{6}. \text{ Stel deze momenten 10000p.}$$

$$M_{DC} = M_{CD} = M_{GH} = M_{HG} = (\delta_2 - \delta_3)\frac{EI}{6}. \text{ Stel deze momenten 10000q.}$$

$$M_{CB} = M_{BC} = M_{HK} = M_{KH} = (\delta_3 - \delta_4)\frac{EI}{6}$$. Stel deze momenten 10000r.

$$M_{BA} = M_{AB} = M_{KL} = M_{LK} = \delta_4 . \frac{3EI}{16}$$. Stel deze momenten 10000s.



Figuur 30

Berekening van de vereffeningscoëfficiënten

Deze zijn:

Knooppunt E:

$$k_{ef} : k_{ed} = \frac{4EI}{10} : \frac{4EI}{6} = 3 : 5 ,$$

$$\mu_{ef} = 0{,}375 \quad \text{en} \quad \mu_{ed} = 0{,}625 .$$

Knooppunt D:

$$k_{de} : k_{dg} : k_{dc} = \frac{4EI}{6} : \frac{4.3EI}{10} : \frac{4EI}{6} = 5 : 9 : 5 ,$$

$$\mu_{de} = 0{,}263; \quad \mu_{dg} = 0{,}474 \quad \text{en} \quad \mu_{dc} = 0{,}263.$$

Evenzo zijn voor knooppunt C:

$$\mu_{cd} = 0{,}263; \quad \mu_{ch} = 0{,}474 \quad \text{en} \quad \mu_{cb} = 0{,}263$$

en voor knooppunt B:

$$k_{bc} : k_{bk} : k_{ba} = \frac{4EI}{6} : \frac{4.3EI}{10} : \frac{4.2EI}{8} = 10 : 18 : 15 ,$$

$$\text{of} \quad \mu_{bc} = 0{,}232; \quad \mu_{bk} = 0{,}419 \quad \text{en} \quad \mu_{ba} = 0{,}349.$$

Voor de knooppunten F, G, H en K gelden achtereenvolgens dezelfde vereffeningscoëfficienten als voor de knooppunten E, D, C en B.

Vereffening

Deze is uitgevoerd in de tabel no I - 1 tussen de bladzijden 44 en 45.

Vasthoudkrachten

De voorwaarde, dat de vasthoudkrachten, die de rolopleggingen op de constructie uitoefenen, nul moeten zijn, leidt tot vier vergelijkingen met vier onbekenden, nl.:

$$\frac{+M_{DE}+M_{ED}+M_{FG}+M_{GF}}{6} - 3000 = 0,$$

$$\frac{-M_{DE}-M_{ED}-M_{FG}-M_{GF}}{6} + \frac{M_{CD}+M_{DC}+M_{GH}+M_{HG}}{6} - 6000 = 0\ ,$$

$$\frac{-M_{CD}-M_{DC}-M_{GH}-M_{HG}}{6} + \frac{M_{CB}+M_{BC}+M_{HK}+M_{KH}}{6} - 6000 = 0 \quad \text{en}$$

$$\frac{-M_{CB}-M_{BC}-M_{HK}-M_{KH}}{6} + \frac{M_{AB}+M_{BA}+M_{KL}+M_{LK}}{8} - 7000 = 0\ ,$$

of na substitutie van de in de tabel gevonden waarden voor bovengenoemde momenten: (+ is een naar rechts gerichte vasthoudkracht, - een naar links gerichte).

$$\begin{aligned}
+20605p - 4371q + 476r - 51s &= 17134\ ,\\
-24971p + 32636q - 5727r + 608s &= 37046\ ,\\
+4842p - 33514q + 34162r - 5745s &= 31227 \quad \text{en}\\
-532p + 5875q + 34765r + 28629s &= 43952
\end{aligned}$$

Oplossing geeft:

$$\begin{aligned}
p &= +1{,}3529,\\
q &= +2{,}8675,\\
r &= +4{,}6774 \quad \text{en}\\
s &= +6{,}6399
\end{aligned}$$

Substitutie van deze waarden in de gesommeerde momenten in de tabel geven de uiteindelijke in de portaalconstructie optredende momenten (zie onderaan tabel I - 1 tussen de bladzijden 44 en 45).

De behandelde methode is weinig overzichtelijk; daarom verdient het aanbeveling in het algemeen de thans te bespreken methode te gebruiken.

TWEEDE MANIER

Bij deze methode worden eerst de momenten berekend ten gevolge van de belasting, terwijl de vier verschuifbare regels op hun plaats worden gehouden. Uit de aldus gevonden momenten kunnen daartoe de nodige vasthoudkrachten worden berekend. De bovengenoemde momenten zijn dus de momenten die in de constructie ontstaan ten gevolge van de gegeven belasting en de vasthoudkrachten.

Teneinde de momenten te vinden, die het gevolg zijn van de belasting alleen, moet bij bovenbeschreven belastingsgeval gesuperponeerd worden het belastingsgeval N, waarbij ter plaatse van de regels de tegengestelden van de vasthoudkrachten werken.

Dit vraagstuk kan, uitgaande van deze belasting, niet rechtstreeks met de methode Cross worden opgelost, omdat ter bepaling van de primaire momenten de verplaatsingen van de regels bekend moeten zijn. Omdat er bij dit vraagstuk vier onbekende verplaatsingen zijn, worden er nog vier belastingsgevallen (S t/m V) berekend. Bij elk belastingsgeval wordt in het algemeen aan elke regel een willekeurige verplaatsing gegeven.

Meestal verloopt de berekening eenvoudiger als bij elk belastingsgeval aan een regel een willekeurige verplaatsing wordt gegeven, terwijl de overige op hun plaats worden gehouden. De hierdoor ontstane primaire momenten worden weer vereffend, waarna de benodigde horizontale krachten ter plaatse van de regels kunnen worden berekend. Deze vier belastingsgevallen moeten nu zodanig gecombineerd worden, dat hieruit het belastingsgeval N resulteert. Dus a maal belastingsgeval S + b maal geval T + c maal geval U + d maal geval V = het belastingsgeval N. Uit de voorwaarde, dat ter plaatse van elke regel de algebraische som van de vasthoudkrachten der gecombineerde belastingsgevallen gelijk moet zijn aan de tegengestelden van de gegeven vasthoudkrachten, volgt voor elke regel een vergelijking met vier onbekenden. De vier regels leveren dus vier lineaire vergelijkingen met vier onbekenden, waaruit a, b, c en d zijn op te lossen.

Momentenberekening bij onverplaatsbare knooppunten

In eerste instantie wordt dus de momentenverdeling ten gevolge van de belasting berekend als alle knooppunten op hun plaats blijven. Hiertoe worden in de knooppunten B, C, D en E rolopleggingen gedacht die horizontale krachten kunnen opnemen.

Voor de *primaire momenten* en de *vereffeningscoëfficiënten* wordt verwezen naar de eerste manier op de bladzijden 44 en 45.

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel II - 1 op bladzijde 49.

De door de opleggingen uitgeoefende *vasthoudkrachten* volgen uit het horizontale evenwicht van de stijlen. Ze luiden:

$R_b = +7269$ kg, $R_c = +5347$ kg, $R_d = +6175$ kg en $R_e = +2855$ kg (+ is een naar links, - een naar rechts gerichte kracht).

Momentenberekening bij verschuiving van regel EF

In de tweede etappe van de berekening wordt aan de regel EF een verplaatsing δ (bijv. naar rechts) gegeven, terwijl de andere op hun plaats worden gehouden. In deze stand worden in de knooppunten B, C, D en E weer rolopleggingen gedacht.

Aangezien de staven ED en FG gelijke lengte en gelijke stijfheid tegen buiging hebben, zijn de primaire momenten, welke in de knooppunten D, E, F en G werken, gelijk.

Dus $M_{DE} = M_{ED} = M_{FG} = M_{GF}$, welke in de hierna volgende vereffeningstabel (II - 2, op bladzijde 52) 1000 gesteld zijn.

De door de rolopleggingen uitgeoefende *vasthoudkrachten* zijn:

$R_{be} = +9$, $R_{ce} = -80$, $R_{de} = +416$ en $R_{ee} = -344$. (zie figuur 31)

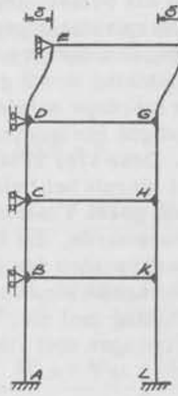
Momentenberekening bij verschuiving van regel DG

In de derde etappe van de berekening wordt aan de regel DG een verplaatsing δ naar rechts gegeven, terwijl de andere op hun plaats worden gehouden. Evenals bij de vorige etappe worden in deze stand in de knooppunten B, C, D en E rolopleggingen aangebracht. Aangezien ook voor dit geval de staven DE, DC, GF en GH gelijke lengte en gelijke stijfheid tegen buiging hebben, zijn alle primaire momenten even groot (stel 1000).

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel II - 3 op bladzijde 52.

De *vasthoudkrachten* zijn:

$R_{bd} = -107$, $R_{cd} = +640$, $R_{dd} = -960$ en $R_{ed} = +416$.



Figuur 31

Momentenberekening bij verschuiving van regel CH

In de vierde etappe wordt aan de regel CH een verplaatsing δ gegeven.
De *primaire momenten* die hierdoor ontstaan zijn weer allemaal gelijk.
De *vereffening* is uitgevoerd in tabel II - 4 op bladzijde 55.
De *vasthoudkrachten* zijn:

$$R_{bc} = +677,\quad R_{cc} = -1128,\quad R_{dc} = +640 \quad \text{en} \quad R_{ec} = -80.$$

Momentenberekening bij verschuiving van regel BK

In de vijfde etappe wordt aan de regel BK een verplaatsing δ gegeven.
De *primaire momenten* zijn:

$$M_{BC} = M_{CB} = M_{HK} = M_{KH} = -\frac{6EI\delta}{6^2} = -\frac{1}{6}EI\delta \quad \text{en}$$

$$M_{AB} = M_{BA} = M_{KL} = M_{LK} = \frac{6.\,2EI\delta}{8^2} = \frac{3}{16}\,EI\delta\ .$$

Stelt men $\frac{1}{6}EI\delta = 1000$, dan is $\frac{3}{16}EI\delta$ gelijk aan 1125.
Deze primaire momenten zijn vereffend in tabel II - 5 op bladzijde 55.
De *vasthoudkrachten* zijn:

$$R_{bb} = -1117,\quad R_{cb} = +677,\quad R_{db} = -107 \quad \text{en} \quad R_{eb} = +9.$$

Eliminatie vasthoudkrachten

De voorwaarde, dat uiteindelijk in elk der knooppunten B, C, D en E de vasthoudkrachten nul zijn, voert tot vier vergelijkingen met vier onbekenden.
Dus moet voor elk dezer knooppunten gelden, dat
b maal de vasthoudkracht, behorende bij een verplaatsing van knooppunt B plus c maal die, behorende bij een verplaatsing van knooppunt C plus d maal die, behorende bij een verplaatsing van knooppunt D plus e maal die, behorende bij een verplaatsing van knooppunt E plus die, ten gevolge van de belasting, gelijk nul is.
De vergelijkingen worden dan:

TABEL II - 1

Knooppunten	A	B			C			D			E		F		G			H			K			L
Staven	ab	ba	bk	bc	cb	ch	cd	dc	dg	de	ed	ef	fe	fg	gf	gd	gh	hg	hc	hk	kh	kb	kl	lk
Vereff. coëff.	-	0,349	0,419	0,232	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,625	0,375	0,375	0,625	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,232	0,419	0,349	-
Prim. mom.	+5333	-5333	+9600	+3000	-3000	+7920	+3000	-3000	+14400	+3000	-3000					-9600			-13680			-14400		
						+3242	-1894	-3787	- 6826	-3787	-1894					-3413	+1799	+3598	+ 6484	+3598	+1799			
			+2640	-1219	-2437	-4393	-2438	-1219	+ 2658					+1475	+2949	+5316	+2949	+1475	- 2197	+1462	+2923	+ 5280	+4398	+2199
	-1516	-3032	-3640	-2016	-1008	- 175				+1529	+3059	+1835	+ 918				- 97	- 195	- 351	- 194	- 97	- 1820		
			+ 402				- 390	- 781	- 1407	- 780	- 390	- 449	- 897	-1496	- 748	- 703	[illegible]			+ 222	+ 445	+ 803	+ 669	+ 335
				+ 207	+ 414	+ 745	+ 414	+ 207	+ 367	+ 262	+ 524	+ 315	+ 157	+ 204	+ 407	+ 734	+ 407	+ 204	+ 373					
	- 106	- 213	- 255	- 141	- 71	- 189	- 110	- 220	- 396	- 220	- 110					- 198	- 105	- 210	- 379	- 210	- 105	- 128		
			+ 49	+ 49	+ 97	+ 176	+ 97	+ 49				- 68	- 135	- 226	- 113				+ 88	+ 27	+ 54	+ 98	+ 81	+ 41
	- 17	- 34	- 41	- 23	- 11				+ 99	+ 56	+ 111	+ 67	+ 33	+ 55	+ 110	+ 197	+ 109	+ 55				- 21		
						- 40	- 27	- 54	- 97	- 53	- 27	- 17	- 33	- 55	- 28	- 48	- 22	- 45	- 80	- 45	- 22			
			+ 9	+ 10	+ 21	+ 37	+ 20	+ 10	+ 23	+ 14	+ 28	+ 16	+ 8	+ 13	+ 26	+ 46	+ 26	+ 13	+ 18	+ 5	+ 10	+ 18	+ 15	+ 8
	- 3	- 7	- 8	- 4	- 2	- 9	- 6	- 13	- 22	- 12	- 6	- 4	- 8	- 13	- 7	- 11	- 5	- 10	- 17	- 9	- 5	- 4		
			+ 2	+ 2	+ 4	+ 8	+ 5	+ 2	+ 5	+ 3	+ 6	+ 4	+ 2	+ 3	+ 6	+ 11	+ 6	+ 3	+ 4	+ 1	+ 2	+ 4	+ 3	+ 2
	- 1	- 1	- 2	- 1		- 2	- 1	- 3	- 5	- 2	- 1	- 1	- 2	- 3	- 2	- 2	- 1	- 2	- 4	- 2	- 1	- 1		
					+ 1	+ 1	+ 1		+ 1	+ 1	+ 1	+ 1		+ 1	+ 2	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1			+ 1	+ 1	
									- 1	- 1				- 1				+ 1	+ 1					
Res. mom.	+3690	-8620	+8756	- 136	-5992	+7321	-1329	-8809	+ 8799	+ 10	-1699	+1699	+ 43	- 43	+2602	+7669	+5067	+4886	- 9741	+4855	+5003	-10170	+5167	+2585

$- 1117b + 677c - 107d + 9e + 7269 = 0$ (vasthoudkracht in B = 0)
$+ 677b - 1128c + 640d - 80e + 5347 = 0$ (vasthoudkracht in C = 0)
$- 107b + 640c - 960d + 416e + 6175 = 0$ (vasthoudkracht in D = 0)
$+ 9b - 80c + 416d - 344e + 2855 = 0$ (vasthoudkracht in E = 0)

Oplossing: $b = + 58{,}831$,
$c = + 105{,}446$,
$d = + 133{,}807$,
$e = + 146{,}977$.

De uiteindelijke momenten zijn verzameld in tabel II - 6 op bladzijde 55.

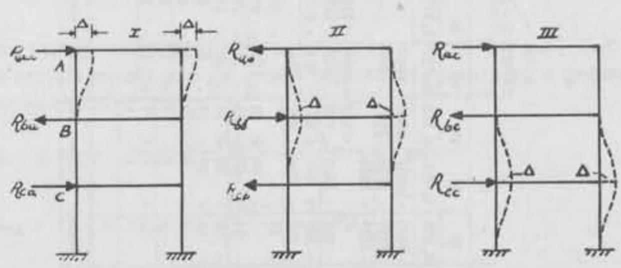
Bewijs wederkerigheidswet

Uit het voorgaande blijkt, dat de vasthoudkracht in het knooppunt i ten gevolge van een verplaatsing van knooppunt k gelijk is aan de vasthoudkracht in knooppunt k ten gevolge van een even grote verplaatsing van i, of korter:

$$R_{ik} = R_{ki}.$$

Vergelijk stelling van *Maxwell:* De horizontale verplaatsing van i ten gevolge van een kracht in k = de horizontale verplaatsing van k ten gevolge van een kracht in i, mits beide krachten gelijk zijn.

Met deze laatste stelling is de eerste te bewijzen.



Figuur 32

Opmerking: R_{ba} *is de vasthoudkracht in B ten gevolge van een verplaatsing* Δ *van A.*
R_{ab} *is de vasthoudkracht in A ten gevolge van een verplaatsing* Δ *van B enz.*

In geval I:

$R_{aa}\delta_{aa} + R_{ba}\delta_{ab} + R_{ca}\delta_{ac} = \Delta$ (verplaatsing van punt A = Δ).
$R_{aa}\delta_{ba} + R_{ba}\delta_{bb} + R_{ca}\delta_{bc} = 0$ (verplaatsing van punt B = 0).
$R_{aa}\delta_{ca} + R_{ba}\delta_{cb} + R_{ca}\delta_{cc} = 0$ (verplaatsing van punt C = 0).

In geval II:

$R_{ab}\delta_{aa} + R_{bb}\delta_{ab} + R_{cb}\delta_{ac} = 0$ (verplaatsing van punt A = 0).
$R_{ab}\delta_{ba} + R_{bb}\delta_{bb} + R_{cb}\delta_{bc} = \Delta$ (verplaatsing van punt B = Δ).
$R_{ab}\delta_{ca} + R_{bb}\delta_{cb} + R_{cb}\delta_{cc} = 0$ (verplaatsing van punt C = 0).

TABEL I - 1

Knooppunt	A	B		
Staven	ab	ba	bk	bc
Vereff. coëff.	-	0,349	0,419	0,232
Prim. momenten	+5333+10000s -1268-1745s-1745r	-5333+10000s -2536-3490s-3490r	+9600 -3045-4190s-4190r	+3000+10000r -1686-2320s-2320r
			+2959 +275q -1381r-1656s	-1108+173p-830q -851r+153s
	-323-30p+97q +389r+262s	-646-60p-194q +779r+525s	- 776-72p+232q +935r+630s	- 429- 41p+129q +518r+348s
			+ 112 - 84q -156r- 84s	+ 116- 58p-109q -110r- 40s
	- 40+10p+34q + 46r+ 22s	- 79+20p+ 67q + 93r+ 43s	- 96+24p+ 81q +111r+ 52s	- 53+ 14p+ 45q + 62r+ 29s
			+ 23-10p- 19q - 21r- 9s	+ 32- 20p- 22q - 18r- 7s
	- 10+ 5p+ 7q + 7r+ 3s	- 19+11p+ 14q + 14r+ 5s	- 23+12p+ 17q + 16r+ 7s	- 13+ 7p+ 10q + 9r+ 4s
			+ 6- 3p- 4q - 3r- s	+ 7- 5p- 5q - 3r- s
	- 2+ p+ q + r	- 5+ 3p+ 3q + 2r+ s	- 5+ 3p+ 4q + 3r+ s	- 3+ 2p+ 2q + r
			+ 1- p- q	+ 2- 2p- q - r
		- 1+ p+ q	- 1+ p+ q + r	- 1+ p
Eind-momenten	+ 3690 - 14p + 139q - 1302r + 8542s	- 8619 - 25p + 279q - 2602r + 7084s	+ 8755 - 46p + 502q - 4686r - 5250s	- 136 + 71p - 781q + 7287r - 1834s
	+ 3690 - 19 + 399 - 6090 +56718	- 8619 - 34 + 800 -12171 +47037	+ 8755 - 62 + 1439 -21918 -34860	- 136 + 96 - 2239 -34084 -12178
$\sum$	+54698	+27013	-46646	+19637

Knooppunt	C			D		
Staven	cb	ch	cd	dc	dg	de
Vereff. coëff.	0,263	0.474	0,263	0,263	0,474	0,263
Prim. momenten	-3000+10000r -843-1160s-1160r	+7920 +3242-2370q-2370r	+3000+10000q -1893-1315q-1315p	-3000+10000q -3787-2630q-2630p	+14400 -6826-4740q-4740p	+3000+10000p -3787-2630p-2630q
	-2216+346p-1661q -1702r+305s	+3994+623p-2993q -3066r+550s	-2216+346p-1661q -1702r+305s	-1108+173p-830q -851r+153s	+2658-1068p -1497q+312r	+1529-2128p+411q
	- 215- 20p+ 64q + 259r+174s	- 264+ 66p+516q + 503r+152s	- 405+398p+ 252q + 71r- 20s	- 810+795p+504q +142r- 40s	-1459+1433p+908q +255r-73s	- 810+ 795p+504q +142r-40s
	+ 232-117p- 219q - 219r- 80s	+ 419-210p-334q - 395r- 146s	+ 233-117p- 219q - 219r- 80s	+ 116- 58p+109q -110r- 40s	+385 - 317p-219q - 84r-11s	+ 267- 234p-113q - 12r+ 6s
	- 26+ 7p+ 22q + 31r+ 14s	- 115+ 67p+ 87q + 78r+ 30s	- 101+ 80p+ 58q + 27r+ 6s	- 202+ 160+116q + 54r+ 12s	-364+ 289p+ 209q + 98r+21s	- 202+ 160p+116q + 54r+12s
	+ 64- 40p- 44q - 36r- 13s	+ 115- 73p+ 79q - 64r- 24s	+ 63- 41p- 44q - 36r- 43s	+ 32- 20p- 22q - 18r- 7s	+ 86 - 66p- 50q - 26r- 6s	+ 53- 43p- 29q - 12r- 2s
	- 6+ 3p+ 5q + 4r+ 2s	- 28+ 18p+ 18q + 14r+ 2s	- 22+ 17p+ 13q + 7r+ 2s	- 45+ 34p+ 27q + 15r+ 4s	- 81+ 61p+ 48q + 26r+ 7s	- 45+ 34p+ 26q + 15r+ 4s
	+ 15- 10p- 10q - 7r- 2s	+ 26- 18p- 16q - 12r- 4s	+ 15- 10p- 10q - 6r- 3s	+ 7- 5p- 5q - 3r- s	+ 19- 14p- 11q - 6r- 2s	+ 12- 9p- 7q - 3r- s
	- 2+ p+ q	- 6+ 5p+ 4q + 3r+ s	- 5+ 4p+ 3q + 2r+ s	- 10+ 7p+ 6q + 3r+ s	- 18+ 13p+ 11q + 6r+ 2s	- 10+ 8p+ 6q + 3r+ s
	+ 3- 3p- 2q - r	+ 6- 5p- 4q - 2r- s	+ 4- 2p- 2q - 2r- s	+ 2- p- q - r	+ 5- 3p- 2q - r	+ 2- 2p- 2q - r
		- 1+ p+ q + 1- p- q	- 1+ p+ q + 1- p- q	- 2+ p+ q + r	- 4+ 3p+ 3q + r	- 3+ 2p+ q + r
					+ 1- p- q - 1+ p+ q	
Eind-momenten	- 5994 + 167p - 1844q + 7169r - 760s	+ 7321 + 473p - 5231q - 5311r + 563s	- 1327 - 640p + 7075q - 1858r + 197s	- 8807 - 1544p + 7057q - 768r + 82s	- 8801 - 4409p - 5340q + 581r + 62s	+ 6 + 5953p - 1717q + 187r + 20s
	- 5994 + 226 - 5288 +33532 - 5046	+ 7321 + 640 +15000 -24842 + 3738	- 1327 + 866 +20287 - 8691 + 1308	- 8807 + 2089 +20236 - 3592 + 544	+ 8801 + 5965 +15312 + 2718 + 412	+ 6 + 8054 - 4923 + 875 + 133
$\sum$	+17430	-28143	+10711	+ 6292	-10170	+ 3879

Knooppunt	E		F		G		
Staven	ed	ef	fe	fg	gf	gd	gh
Vereff. coëff.	0,625	0,375	0,375	0,625	0,263	0,474	0,263
Prim. momenten	-3000+10000p -1893-1315p-1315q	-1875p	-3750p	+10000p -6250p	+10000p +3125p	-9600 -3413-2370q- 2370p	+10000q +1799-1315q-1
	+3058-4256p+822q	+1835-2554p-493q	+917-1277p+247q	+1475- 592p - 831q+173r	+2949-1185p -2993q+623r	+5316-2135p -2993q+623r	+2949-1185p -1661q+346r
	- 405+ 398p+252q + 71r- 20s	-448 + 350p +110q- 32r	-897+ 701p +219q- 65r	-1495+1168p +365q- 108r	- 748+ 584p +182q- 54r	- 730+ 716p+ 454q +128r- 36s	- 147 + 37p+ +279r + 84s
	+ 533- 468p-226q - 24r+ 13s	+320 - 280p-136q - 15r+ 7s	+160- 140p- 68q - 7r+ 4s	+ 214- 176p-121q - 46r- 6s	+ 427- 352p-242q - 93r- 13s	+ 770- 634p- 437q -167r- 23s	+ 428- 351p- - 93r- 12s
	-101 + 80p+ 58q + 27r+ 6s	- 70 + 59p+ 35q + 10r	- 140+118p+ 71q + 20r+ s	- 234+ 198p+118q + 33r+ s	- 117+ 99p+ 59q + 17r	- 182+ 144p+ 105q + 49r+ 115	- 64+ 37p+ + 43r+ 16s
	+ 107- 87p- 58q - 23r- 4s	+ 64- 52p- 35q - 14r- 2s	+ 32- 26p- 17q - 7r- s	+ 48- 37p- 28q - 14r- 4s	+ 95- 74p- 56q - 29r- 7s	+ 172- 133p- 100q - 52r- 13s	+ 96- 73p- - 28r- 7s
	- 22+ 17p+ 13q + 7r+ 2s	- 15+ 12p+ 9q + 4r+ s	- 30+ 24p+ 17q + 8r+ 2s	- 50+ 39p+ 28q + 13r+ 3s	- 25+ 19p+ 14q + 7r+ 2s	- 41+ 30p+ 24q + 13r+ 4s	- 16+ 10p+ + 7r+ 3s
	+ 23- 18p- 14q - 7r- 2s	+ 14- 11p- 8q - 4r- s	+ 7- 5p- 4q - 2r- s	+ 11- 8p- 6q - 4r- s	+ 22- 16p- 13q - 7r- 2s	+ 39- 28p- 23q - 13r- 4s	+ 21- 15p- - 7r- 3s
	- 5+ 4p+ 3q + 2r+ s	- 3+ 2p+ 2q + r	- 7+ 5p+ 4q + 2r+ s	- 11+ 8p+ 6q + 4r+ s	- 6+ 4p+ 3q + 2r+ s	- 9+ 7p+ 5q + 3r+ s	- 4+ 2p+ + r
	+ 5- 4p- 3q - 2r- s	+ 3- 2p- 2q - r	+ 1- p- q	+ 2- 2p- q - r	+ 5- 3p- 3q - 2r- s	+ 9- 6p- 5q - 3r- s	+ 5- 4p- - r
	- 1- p- q + 1+ p+ q		- 1+ p+ q	- 2+ 2p+ q + r	- 1+ p+ q	- 2+ p+ q	- 1+ p+
					+ 1- p- q	+ 2- p- q	+ 1- p-
Eind-momenten	- 1700 + 4351p - 468q + 51r - 5s	+ 1700 - 4351p + 468q - 51r + 5s	+ 42 - 4350p + 469q - 51r + 6s	- 42 - 4350p - 469q + 51r - 6s	+ 2602 + 5951p - 1717q + 187r - 20s	- 7669 - 4409p - 5340q - 581r - 61s	+ 5067 - 1542p + 7057q - 768r + 81s
	- 1700 + 5886 - 1342 + 239 - 33	+ 1700 - 5886 + 1342 - 239 + 33	+ 42 - 5885 + 1345 - 239 + 40	- 42 + 5885 - 1345 + 239 - 40	+ 2602 - 8051 - 4923 + 875 - 133	- 7669 - 5965 -15312 + 2718 - 405	+ 5067 - 2086 +20236 - 3592 + 538
$\sum$	+ 3050	- 3050	- 4697	+ 4697	+ 6472	+26633	+20163

G			H			K			L
gf	gd	gh	hg	hc	hk	kh	kb	kl	lk
0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,232	0,419	0,349	-
+10000p +3125p +2949-1185p -2993q+623r	-9600 -3413-2370q- 237p +5316-2135p -2993q+623r	+10000q +1799-1315q-1315r +2949-1185p -1661q+346r	+10000q +3598-2630q- 263r +1475- 592p - 831q+173r	+13680 +6484-4740q-4740r -1997+ 312p-1497q -1533r+275s	+10000r +3598-2630q-2630r +1638+ 153q - 764r-917s	+10000r +1799-1315q-1315r +3277 +305q -1529r-1834s	-14400 -1522-2095s-2095r +5917 +551q -2761r-3312s	+10000s +4929 +459q -2300r-2759s	+10000s +2464 +229q -1150r-1379s
- 748+ 584p +182q- 54r + 427- 352p-242q - 93r- 13s	- 730+ 716p+ 454q +128r- 36s + 770- 634p- 437q -167r- 23s	- 147 + 37p+ 286q +279r + 84s + 428- 351p- 243q - 93r- 12s	- 294 + 37p+ 286q + 559r+169s + 214- 176p- 121q - 46r- 6s	- 529 +132p+1031q +1006r+304s + 210- 105p- 197q - 197r- 73s	- 293 + 74p+ 572q + 559r+169s + 62 - 479 - 87r- 46s	- 148+ 37p+286q + 279r+ 84s + 124 - 93q - 173r- 93s	- 388- 36p+116q + 468r+ 315s + 224- p-168q - 313r- 167s	+ 187 -141q - 261r- 139s	+ 93 - 70q - 130r- 70s
- 117+ 99p+ 59q + 17r + 95- 74p- 56q - 29r- 7s	- 182+ 144p+ 105q + 49r+ 115 + 172- 133p- 100q - 52r- 13s	- 64+ 37p+ 48q + 43r+ 16s + 96- 73p- 56q - 28r- 7s	- 128+ 74p+ 96q + 87r+ 33s + 48- 37p- 28q - 14r- 4s	- 230 +133p+ 173q + 156r+ 59s + 57- 36p- 40q - 32r- 12s	- 128 + 74p+ 96q + 87r+ 33s + 13 - 6p- 10q - 11r- 5s	- 64+ 37p+ 48q + 43r+ 16s + 26- 11p- 20q - 23r- 10s	- 48+ 12p+ 40q + 56r+ 26s + 47- 21p- 37q - 41r- 17s	+ 39- 17p- 31q - 35r- 15s	+ 20- 9p- 16q - 16r- 7s
- 25+ 19p+ 14q + 7r+ 2s + 22- 16p- 13q - 7r- 2s	- 41+ 30p+ 24q + 13r+ 4s + 39- 28p- 23q - 13r- 4s	- 16+ 10p+ 10q + 7r+ 3s + 21- 15p- 12q - 7r- 3s	- 31+ 21p+ 20q + 15r+ 5s + 11- 8p- 6q - 4r- s	- 56+ 37p+ 37q + 27r+ 5s + 13- 9p- 8q - 6r- 2s	- 31 + 21p+ 21q + 15r+ 6s + 3 - 2p- 2q - 2r	- 16+ 10p+ 11q + 7r+ 3s + 6- 4p- 5q - 4r- s	- 12+ 6p+ 9q + 8r+ 3s + 12- 7p- 8q - 6r- 3s	+ 10- 5p- 7q - 5r- 2s	+ 5- 3p- 3q - 3r- s
- 6+ 4p+ 3q + 2r+ s + 5- 3p- 3q - 2r- s	- 9+ 7p+ 5q + 3r+ s + 9- 6p- 5q - 3r- s	- 4+ 2p+ 2q + r + 5- 4p- 2q - r	- 7+ 5p+ 4q + 3r+ s + 2- 2p- q - r	- 13+ 9p+ 8q + 6r+ s + 3- 2p- 2q - r	- 7+ 5p+ 4q + 3r+ s + 1- p- q	- 4+ 2p+ 2q + r + 2- p- q - r	- 3+ 2p+ 2q + r + 3- 2p- 2q - r	+ 2- p- q	+ 1 - q
- 1+ p+ q + 1- p- q	- 2+ p+ q + 2- p- q	- 1+ p+ q + 1- p- q	- 1+ p+ q + r	- 3+ 3p+ 2q + r	- 2+ p+ q	- 1+ p+ q	+ 1- p- q		
+ 2602 + 5951p - 1717q + 187r - 20s	- 7669 - 4409p - 5340q - 581r - 61s	+ 5067 - 1542p + 7057q - 768r + 81s	+ 4887 - 640p + 7076q - 1857r + 197s	- 9741 + 473p - 5233q - 5313r + 562s	+ 4854 + 167p - 1843q - 7170r - 759s	+ 5003 + 71p - 781q + 7285r - 1835s	-10170 - 48p - 502q - 4684r - 5250s	+ 5167 - 23p + 277q - 2601r + 7085s	+ 2583 - 12p + 140q - 1300r + 8543s
+ 2602 - 8051 - 4923 + 875 - 133	- 7669 - 5965 -15312 + 2718 - 405	+ 5067 - 2086 +20236 - 3592 + 538	+ 4887 - 866 +20290 - 8686 + 1308	+ 9741 + 640 -15006 -24851 + 3732	+ 4854 + 226 - 5285 -33537 + 5040	+ 5003 + 96 - 2239 +34075 -12184	-10170 - 65 + 1439 -21909 -34860	+ 5167 - 31 + 794 -12166 +47044	+ 2583 - 16 + 401 - 6081 +56725
+ 6472	+26633	+20163	+16933	-45226	+28292	+24751	-65565	+40808	+53612

In geval III:

$$R_{ac}\,\delta_{aa} + R_{bc}\,\delta_{ab} + R_{cc}\,\delta_{ac} = 0 \quad \text{(verplaatsing van punt A = 0).}$$
$$R_{ac}\,\delta_{ba} + R_{bc}\,\delta_{bb} + R_{cc}\,\delta_{bc} = 0 \quad \text{(verplaatsing van punt B = 0).}$$
$$R_{ac}\,\delta_{ca} + R_{bc}\,\delta_{cb} + R_{cc}\,\delta_{cc} = \Delta \quad \text{(verplaatsing van punt C} = \Delta\text{).}$$

$$R_{ba} = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{aa} & \Delta & \delta_{ac} \\ \delta_{ba} & 0 & \delta_{bc} \\ \delta_{ca} & 0 & \delta_{cc} \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} & \delta_{bc} \\ \delta_{ca} & \delta_{cb} & \delta_{cc} \end{vmatrix}}_{D}} = -\frac{\Delta}{D} \begin{vmatrix} \delta_{ba} & \delta_{bc} \\ \delta_{ca} & \delta_{cc} \end{vmatrix} = -\frac{\Delta}{D}\left(\delta_{ba}\delta_{cc} - \delta_{bc}\delta_{ca}\right).$$

$$R_{ab} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ \Delta & \delta_{bb} & \delta_{bc} \\ 0 & \delta_{cb} & \delta_{cc} \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\Delta}{D} \begin{vmatrix} \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ \delta_{cb} & \delta_{cc} \end{vmatrix} = -\frac{\Delta}{D}\left(\delta_{ab}\delta_{cc} - \delta_{ac}\delta_{cb}\right),$$

daar volgens Maxwell $\delta_{ba} = \delta_{ab}$, $\delta_{bc} = \delta_{cb}$ en $\delta_{ca} = \delta_{ac}$ is $R_{ab} = R_{ba}$.

$$R_{ca} = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} & \Delta \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} & 0 \\ \delta_{ca} & \delta_{cb} & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\Delta}{D} \begin{vmatrix} \delta_{ba} & \delta_{bb} \\ \delta_{ca} & \delta_{cb} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{D}\left(\delta_{ba}\delta_{cb} - \delta_{bb}\delta_{ca}\right),$$

$$R_{ac} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ 0 & \delta_{bb} & \delta_{bc} \\ \Delta & \delta_{cb} & \delta_{cc} \end{vmatrix}}{D} = \frac{\Delta}{D} \begin{vmatrix} \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ \delta_{bb} & \delta_{bc} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{D}\left(\delta_{ab}\delta_{bc} - \delta_{ac}\delta_{bb}\right),$$

dus $R_{ca} = R_{ac}$. Evenzo is $R_{cb} = R_{bc}$.

Derde manier

De beide vorige vereffeningsmethoden berustten op het feit, dat de knooppunten gedurende het vereffeningsproces onverplaatsbaar waren. Zonodig werden zij van tijdelijke steunpunten voorzien.

Vervolgens werd aan ieder verplaatsbaar knooppunt afzonderlijk (2e methode), of aan alle tegelijk (1e methode) een kleine verplaatsing gegeven en de daardoor opgewekte momenten weer vereffend, waarbij die verplaatsing(en) gehandhaafd bleef (bleven). In de verschoven toestand werden dus de knooppunten weer gesteund gedacht.

TABEL II - 2

Knooppunten	A	B			C			D			E		F		G			H			K			L
Staven	ab	ba	bk	bc	cb	ch	cd	dc	dg	de	ed	ef	fe	fg	gf	gd	gh	hg	hc	hk	kh	kb	kl	lk
Vereff. coëff.	-	0,349	0,419	0,232	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,625	0,375	0,375	0,625	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,232	0,419	0,349	-
Prim. mom.										+1000	+1000			+1000	+1000									
							- 132	- 263	- 474	- 263	- 132	- 188	- 375	- 625	- 313	- 237								
				+ 17	+ 35	+ 62	+ 35	+ 17	- 107	- 213	- 425	- 255	- 128	- 59	- 118	- 213	- 119	- 59	+ 31					
							+ 40	+ 79	+ 144	+ 80	+ 40	+ 35	+ 70	+ 117	+ 58	+ 72								
				- 5	- 10	- 19	- 11	- 5	- 31	- 23	- 47	- 28	- 14	- 17	- 34	- 62	- 34	- 17	- 9					
						+ 13	+ 8	+ 15	+ 28	+ 16	+ 8	+ 6	+ 12	+ 19	+ 10	+ 14	+ 7	+ 14	+ 26	+ 14	+ 7			
				- 3	- 5	- 10	- 6	- 3	- 7	- 4	- 9	- 5	- 3	- 4	- 8	- 15	- 8	- 4	- 5					
	- 2	- 3	- 4	- 2	- 1	+ 2	+ 2	+ 3	+ 7	+ 4	+ 2	+ 1	+ 3	+ 4	+ 2	+ 3	+ 1	+ 2	+ 4	+ 3	+ 1	- 2		
			- 1		- 1	- 1	- 1		- 1	- 1	- 2	- 1	- 1	- 1	- 2	- 3	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 3	- 2	- 1
			+ 1			+ 1			+ 1	+ 1			+ 1	+ 1	+ 1			+ 1	+ 1	+ 1				
						- 1										- 1								
Res. mom.	- 2	- 3	- 4	+ 7	+ 18	+ 47	- 65	- 157	- 440	+ 597	+ 435	- 435	+ 435	- 435	+ 596	- 442	- 154	- 64	+ 47	+ 17	+ 7	- 5	- 2	- 1

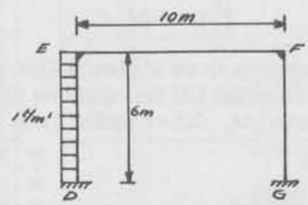
TABEL II - 3

Knooppunten	A	B			C			D			E		F		G			H			K			L
Staven	ab	ba	bk	bc	cb	ch	cd	dc	dg	de	ed	ef	fe	fg	gf	gd	gh	hg	hc	hk	kh	kb	kl	lk
Vereff. coëff.	-	0,349	0,419	0,232	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,625	0,375	0,375	0,625	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,232	0,419	0,349	-
Prim. mom.							+1000	+1000		-1000	-1000			-1000	-1000		+1000	+1000						
				- 132	- 263	- 474	- 263	- 132		+ 313	+ 625	+ 375	+ 188						- 237					
						- 181	- 24	- 47	- 86	- 48	- 24	+ 152	+ 305	+ 508	+ 254	- 43	- 100	- 200	- 362	- 201	- 100			
				+ 27	+ 54	+ 97	+ 54	+ 27	- 26	- 40	- 80	- 48	- 24	- 15	- 29	- 53	- 29	- 15	+ 49					
	+ 18	+ 37	+ 44	+ 24	+ 12	- 8	+ 5	+ 10	+ 19	+ 10	+ 5	+ 7	+ 15	+ 24	+ 12	+ 9	- 4	- 9	- 16	- 9	- 4	+ 22		
			+ 17	- 1	- 3	- 4	- 2	- 1	- 4	- 4	- 8	- 4	- 2	- 2	- 5	- 8	- 4	- 2	- 2	+ 10	+ 19	+ 34	+ 29	+ 14
	- 3	- 5	- 7	- 4	- 2	- 1	+ 1	+ 2	+ 4	+ 3	+ 1	+ 1	+ 2	+ 2	+ 1	+ 2	- 1	- 1	- 3	- 2	- 1	- 3		
			+ 1		+ 1	+ 1				- 1	- 1	- 1				- 1	- 1				+ 1	+ 2	+ 1	+ 1
			- 1						+ 1															
Res. mom.	+ 15	+ 32	+ 54	- 86	- 201	- 570	+ 771	+ 859	- 92	- 767	- 482	+ 482	+ 482	- 482	- 767	- 94	+ 861	+ 773	- 571	- 202	- 85	+ 55	+ 30	+ 15

Het is echter ook mogelijk op eenvoudige wijze de primaire momenten te berekenen, welke optreden, indien genoemde steunpunten ontbreken, doch de inklemmingen gehandhaafd blijven. Uitwendig werken er dan op het raamwerk behalve de belasting, uitsluitend inklemmingsmomenten. Gedurende het vereffeningsproces worden genoemde inklemmingsmomenten geliquideerd, terwijl extra steunpunten achterwege blijven. De verplaatsbare knooppunten zullen dus inderdaad bewegen. De berekening der vereffeningscoëfficienten en der primaire momenten is ingewikkelder, doch daartegenover staat het grote voordeel, dat men met behulp van een enkele tabel de eindmomenten kan vinden. Deze methode zal op hetzelfde voorbeeld worden toegepast.

Berekening der primaire momenten:

Hiertoe wordt eerst het gedeelte DEFG van de constructie beschouwd. De knooppunten kunnen dus niet verdraaien maar wel verplaatsen. De berekening van de primaire momenten verloopt het eenvoudigst door deze te splitsen in momenten door de belasting bij een onverplaatsbare regel EF en momenten door de horizontale verschuiving.



Figuur 33

De eerste momenten komen alleen voor in D en E en zijn:

$$M'_{DE} = -M'_{ED} = \frac{1}{12}.1000.6^2 = +3000 \text{ kgm.}$$

Ten gevolge van de verschuiving van de regel EF ten opzichte van regel DG ontstaan ter plaatse van de uiteinden der stijlen nog vier gelijke primaire momenten, welke M_1 gesteld worden. Uit de voorwaarde dat ter plaatse van regel EF geen vasthoudkracht werkt, volgt:

$$\frac{-4M_1}{6} + \frac{3000}{6} - \frac{3000}{6} + \frac{6000}{2} = 0 \text{ .}$$

Uit deze vergelijking volgt $M_1 = +4500$ kgm.

De resulterende primaire momenten zijn:

$$M_{DE} = M'_{DE} + M_1 = +7500 \text{ kgm,}$$

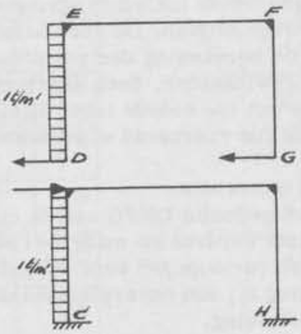
$$M_{ED} = M'_{ED} + M_1 = +1500 \text{ kgm en}$$

$$M_{FG} = M_{GF} = M_1 = +4500 \text{ kgm.}$$

De primaire momenten voor de verdiepingsstijlen van CDGH worden op dezelfde wijze berekend. De primaire momenten door de gelijkmatig verdeelde belasting tegen stijl CD bij onverplaatsbare knooppunten bedragen weer

$$M'_{CD} = -M'_{DC} = +3000 \text{ kgm.}$$

Behalve de gegeven belasting werkt er ook nog een horizontale kracht van 6000 kg ter plaatse van D, veroorzaakt door de horizontale belasting tegen de bovenverdieping.



Figuur 34

Worden de primaire momenten in de stijlen (welke alle gelijk zijn) ten gevolge van de verschuiving van regel DG ten opzichte van CH gelijk aan M_2 gesteld, dan volgt uit de voorwaarde, dat er op DG geen horizontale vasthoudkracht werkt:

$$\frac{-4M_2}{6} + \frac{3000}{6} - \frac{3000}{6} + \frac{6000}{2} = 0 \quad \text{of} \quad M_2 = +13500 \text{ kgm.}$$

De resulterende primaire momenten in de stijlen worden dus:

$$M_{CD} = M'_{CD} + M_2 = +16500 \text{ kgm ,}$$
$$M_{DC} = M'_{DC} + M_2 = +10500 \text{ kgm} \quad \text{en}$$
$$M_{GH} = M_{HG} = M_2 = +13500 \text{ kgm.}$$

Op overeenkomstige wijze volgen de primaire momenten M_3 in de verdiepingsstijlen CB en HK (de horizontaal naar rechts gerichte kracht op regel CH is 12000 kg) ten gevolge van de verschuiving van regel CH ten opzichte van BK uit:

$$\frac{-4M_3}{6} + \frac{3000}{6} - \frac{3000}{6} + \frac{6000}{2} + 12000 = 0 \quad \text{of} \quad M_3 = +22500 \text{ kgm.}$$

De resulterende primaire momenten in de stijlen CB en HK worden:

$$M_{BC} = M'_{BC} + M_3 = +25500 \text{ kgm ,}$$
$$M_{CB} = M'_{CB} + M_3 = +19500 \text{ kgm} \quad \text{en}$$
$$M_{HK} = M_{KH} = M_3 = +22500 \text{ kgm .}$$

De primaire momenten in de stijlen AB en KL ten gevolge van de horizontale verdeelde belasting bij onverplaatsbare knooppunten zijn:

$$M'_{AB} = -M'_{BA} = \frac{1}{12} \cdot 1000 \cdot 8^2 = +5330 \text{ kgm .}$$

TABEL II - 4

Knooppunten	A	B			C			D			E		F		G			H			K			L
Staven	ab	ba	bk	bc	cb	ch	cd	dc	dg	de	ed	ef	fe	fg	gf	gd	gh	hg	hc	hk	kh	kb	kl	lk
Vereff. coëff.	-	0,349	0,419	0,232	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,625	0,375	0,375	0,625	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,232	0,419	0,349	-
Prim. mom.				+1000	+1000		-1000	-1000									-1000	-1000		+1000	+1000			
	- 175	- 349	- 419	- 232	- 116		+ 132	+ 263	+ 474	+ 263	+ 132					+ 237						- 210		
			- 166						+ 181					+ 100	+ 201	+ 362	+ 200	+ 100		- 92	- 183	- 331	- 276	- 138
	+ 29	+ 58	+ 70	+ 38	+ 19		- 24	- 48	- 86	- 47	- 24	- 19	- 37	- 63	- 31	- 43						+ 35		
			- 7	- 1	- 3	- 5	- 3	- 1	+ 18	- 28	- 56	- 33	- 17	+ 10	+ 20	+ 35	+ 19	+ 10	- 3	- 4	- 8	- 15	- 12	- 6
	+ 1	+ 3	+ 3	+ 2	+ 1	- 3	+ 1	+ 3	+ 5	+ 3	+ 1	+ 1	+ 3	+ 4	+ 2	+ 3	- 1	- 3	- 5	- 3	- 1	+ 2		
						+ 1			- 1	- 1	- 1	- 1		- 1	- 1	- 2	- 1	-- 1				- 1		
									+ 1	+ 1				+ 1					+ 1					
Res. mom.	- 145	- 288	- 519	+ 807	+ 901	- 7	- 894	- 783	+ 592	+ 191	+ 52	- 52	- 51	+ 51	+ 191	+ 592	- 783	- 894	- 7	+ 901	+ 808	- 520	- 288	- 144

TABEL II - 5

Knooppunten	A	B			C			D			E		F		G			H			K			L
Staven	ab	ba	bk	bc	cb	ch	cd	dc	dg	de	ed	ef	fe	fg	gf	gd	gh	hg	hc	hk	kh	kb	kl	lk
Vereff. coëff.	-	0,349	0,419	0,232	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,625	0,375	0,375	0,625	0,263	0,474	0,263	0,263	0,474	0,263	0,232	0,419	0,349	-
Prim. mom.	+1125	+1125		-1000	-1000															-1000	-1000		+1125	+1125
				+ 132	+ 263	+ 474	+ 263	+ 132											+ 237					
	- 45	- 90	- 107	- 60	- 30	+ 181	- 17	- 35	- 62	- 35	- 17					- 31	+ 100	+ 200	+ 362	+ 201	+ 100	- 54		
			- 36	- 18	- 35	- 64	- 35	- 18	- 16					- 9	- 18	- 33	- 18	- 9	- 32	- 20	- 40	- 71	- 60	- 30
	+ 9	+ 19	+ 22	+ 13	+ 6	+ 14	+ 4	+ 9	+ 16	+ 9	+ 4					+ 8	+ 8	+ 16	+ 29	+ 16	+ 8	+ 11		
			- 4	- 3	- 6	- 12	- 6	- 3	- 4	+ 4	+ 8	+ 5	+ 2	- 2	- 4	- 8	- 4	- 2	- 6	- 2	- 4	- 8	- 7	- 3
	+ 1	+ 2	+ 3	+ 2	+ 1	+ 2		+ 1	+ 1	+ 1		+ 2	+ 3	+ 6	+ 3	+ 1	+ 1	+ 2	+ 5	+ 3	+ 1	+ 1		
					- 1	- 1	- 1		- 1	- 1	- 1	- 1		- 1	- 1	- 2	- 2	- 1	- 1			- 1	- 1	
									+ 1	+ 1				+ 1				+ 1	+ 1					
Res. mom.	+1090	+1056	- 122	- 934	- 802	+ 594	+ 208	+ 86	- 65	- 21	- 6	+ 6	+ 5	- 5	- 20	- 65	+ 85	+ 207	+ 595	- 802	- 935	- 122	+1057	+1092

TABEL II - 6

Knooppunten	A	B			C			D			E		F		G			H			K			L
Staven	ab	ba	bk	bc	cb	ch	cd	dc	dg	de	ed	ef	fe	fg	gf	gd	gh	hg	hc	hk	kh	kb	kl	lk
Mom. tabel II-1	+ 3690	- 8620	+ 8756	- 136	- 5992	+ 7321	- 1329	- 8809	+ 8799	+ 10	- 1699	+ 1699	- 43	- 43	+ 2602	- 7669	+ 5067	+ 4886	- 9741	+ 4855	+ 5003	-10170	+ 5167	+ 2585
+146,977xMom. tabel II-2	- 294	- 441	- 588	+ 1029	+ 2646	+ 6908	- 9554	- 23075	-64670	+87745	+63935	-63935	-63935	+63935	+87598	-64964	-22634	- 9407	+ 6908	+ 2499	+ 1029	- 735	- 294	- 147
+133,807xMom. tabel II-3	+ 2007	+ 4282	+ 7226	-11507	-26895	-76270	+103165	+114940	-12310	-102360	-64495	+64495	+64495	-64495	-102630	-12578	+115208	+103432	-76404	-27029	-11374	+ 7359	+ 4014	+ 2007
+105,446xMom. tabel II-4	-15290	-30368	-54726	+85095	+95007	+ 738	-94269	- 82564	+62424	+20140	+ 5483	- 5483	- 5378	+ 5378	+20140	+62424	-82564	-94269	- 738	+95007	+85200	-54832	-30368	-15184
+ 58,831xMom. tabel II-5	+64126	+62126	- 7177	-54948	-47182	+34946	+12237	+ 5059	- 3824	- 1235	- 353	+ 353	+ 294	- 294	- 1177	- 3824	+ 5001	+12178	+35004	-47182	-55007	- 7177	+62184	+64185
Res. mom.	+54239	+26979	-46509	+19533	+17584	-27833	+10250	+ 5551	- 9581	+ 4030	+ 2871	- 2871	- 4481	+ 4481	+ 6533	-26611	+20078	+16820	-44971	+28150	+24851	-65555	+40703	+53446

De primaire momenten M_4 in de verdiepingsstijlen AB en KL ten gevolge van de verschuiving van regel BK (de horizontale naar rechts gerichte kracht op regel BK is 18000 kg) volgen uit:

$$\frac{-4M_4}{8} + \frac{5330}{8} - \frac{5330}{8} + \frac{8000}{2} + 18000 = 0 \quad \text{of} \quad M_4 = +44000 \text{ kgm} .$$

De resulterende primaire momenten in de stijlen AB en KL worden:

$$M_{AB} = M'_{AB} + M_4 = +49330 \text{ kgm} ,$$

$$M_{BA} = M'_{BA} + M_4 = +38670 \text{ kgm} \quad \text{en}$$

$$M_{KL} = M_{LK} = M_4 = +44000 \text{ kgm} .$$

Berekening der vereffeningscoëfficiënten

Deze worden bepaald op grond van de wetenschap, dat slechts één knooppunt tegelijk draait, maar dat de vasthoudkrachten in de verplaatsbare knooppunten nul zijn.

Knooppunt E

De vereffeningscoëfficienten voor het knooppunt E zijn de momenten die in de gehele constructie optreden, als op het enige draaibare knooppunt E een moment $M = 1$ werkt, terwijl alle knooppunten vrij kunnen verplaatsen. Hierbij zal alleen regel EF verplaatsen, daar in het gedeelte van de constructie onder regel DG noch momenten noch dwarskrachten optreden. Immers alle overige knooppunten blijven ingeklemd, terwijl door de bovenverdieping geen horizontale kracht wordt uitgeoefend. Uitsluitend door de verplaatsing van regel EF ten opzichte van DG ontstaan gelijke momenten M_1 in de knooppunten D, E, F en G. In deze toestand wordt regel EF vastgehouden, waarna men het knooppunt E laat draaien. In E moet dus een moment gelijk aan $M + M_1$ vereffend worden, waarvoor de vereffeningscoëfficienten voor knooppunt E, welke gebruikt zijn bij methode 1 en 2, geldig zijn. Uit de voorwaarde, dat de vasthoudkrachten nul zijn, volgt de verhouding $M_1 : M$. (zie figuren volgende blz.)
Uit de genoemde voorwaarde volgt: $4M_1 - 0{,}9375(M + M_1) = 0$ of $M_1 = 0{,}306M$.
Voor $M = 1$ vindt men dan:

$$M_{DE} = -0{,}102; \quad M_{ED} = -0{,}510; \quad M_{EF} = -0{,}490; \quad M_{FE} = -0{,}245 \quad \text{en}$$

$$M_{FG} = M_{GF} = +0{,}306.$$

Knooppunt D

De momenten, die *na* het verschuiven van de daarvoor in aanmerking komende regels en voor het verdraaien van knooppunt D in de constructie optreden, zijn aangegeven in figuur 37.
In D moet dus een moment $M + M_1 + M_2$ vereffend worden.

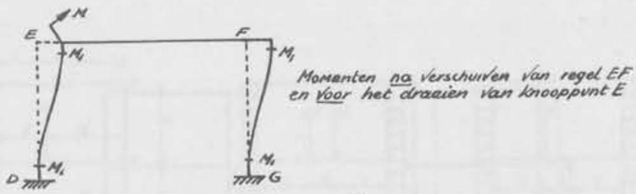
De momenten, welke na de vereffening in de constructie optreden zijn aangegeven in fig. 37.

Uit de voorwaarde, dat er geen vasthoudkrachten op de constructie werken, volgt:

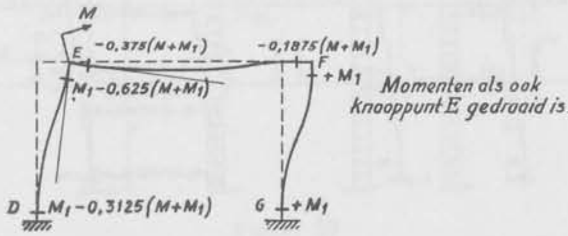
$$+4M_1 - 0{,}3945\,(M + M_1 + M_2) = 0 \quad \text{en}$$

$$+4M_2 - 0{,}3945\,(M + M_1 + M_2) = 0 .$$

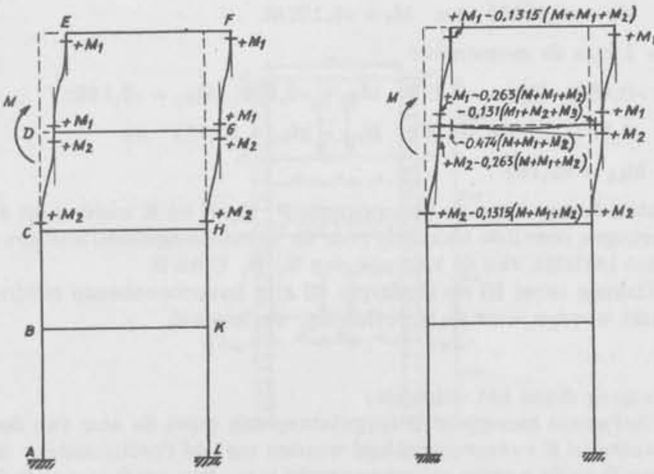
Oplossing: $M_1 = M_2 = 0{,}123M$.



Figuur 35



Figuur 36



Figuur 37

Voor M = 1 worden de in de constructie optredende momenten:

$M_{CD} = -0{,}041$; $M_{DC} = -0{,}205$; $M_{DG} = -0{,}590$; $M_{DE} = -0{,}205$;

$M_{ED} = -0{,}041$; $M_{GD} = -0{,}295$ en $M_{FG} = M_{GF} = M_{GH} = M_{HG} = +0{,}123$.

Knooppunt C

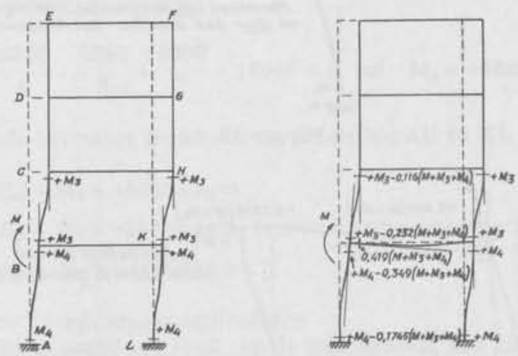
Voor dit knooppunt zijn de vereffeningscoëfficienten gelijk aan die voor knooppunt D.

Knooppunt B

Uit de voorwaarde, dat de vasthoudkrachten nul zijn volgt:

$$+4M_3 - 0{,}348(M + M_3 + M_4) = 0 \quad \text{en}$$

$$+4M_4 - 0{,}5235(M + M_3 + M_4) = 0\ .$$



Figuur 38

Oplossing: $M_3 = +0{,}111M$ en $M_4 = +0{,}167M$.

Voor M = 1 zijn de momenten:

$M_{AB} = -0{,}056$; $M_{BA} = -0{,}279$; $M_{BK} = -0{,}536$; $M_{BC} = -0{,}185$;

$M_{CB} = -0{,}037$; $M_{KB} = -0{,}268$; $M_{HK} = M_{KH} = +0{,}111$ en

$M_{KL} = M_{LK} = +0{,}167$.

Bij het laten draaien van de knooppunten F, G, H en K worden uit symmetrie-overwegingen dezelfde waarden voor de vereffeningscoëfficienten gevonden als bij het loslaten van de knooppunten E, D, C en B.

In de uitslaande tabel III op bladzijde 60 zijn bovenberekende coëfficienten, welke gebruikt worden voor de vereffening, verzameld.

Vereffening

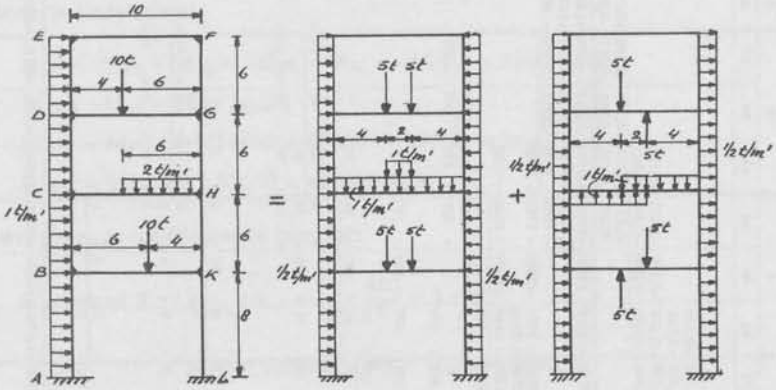
Ter toelichting diene het volgende:
Wordt bijv. het eerst knooppunt B losgelaten, dan moet de som van de primaire momenten in B vermenigvuldigd worden met de coëfficienten, die horizontaal achter B in de eerste kolom vermeld zijn. Elk product wordt in de kolom, waarin de desbetreffende coëfficient staat, genoteerd. Het vereffeningsproces wordt zolang voortgezet, totdat de te vereffenen momenten te verwaarlozen zijn. Door sommatie worden tenslotte de resulterende momenten gevonden.

Vierde manier

In verband met de symmetrie van de constructie wordt de belasting gesplitst in een symmetrisch- en in een keersymmetrisch deel, zoals in figuur 39 is aangegeven.

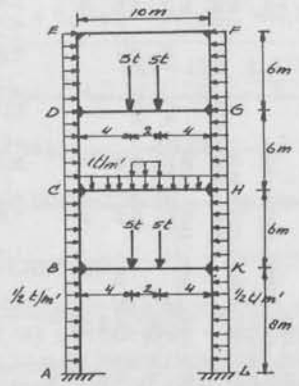
SYMMETRISCHE BELASTING

Aangezien bij deze symmetrische constructie ook de belasting symmetrisch is, kan bij de berekening volstaan worden met beschouwing van de halve constructie. Ter plaatse van de symmetrielijn zal de helling van de regels nul blijven, terwijl deze doorsneden alleen verticaal zullen verplaatsen. Er kun-

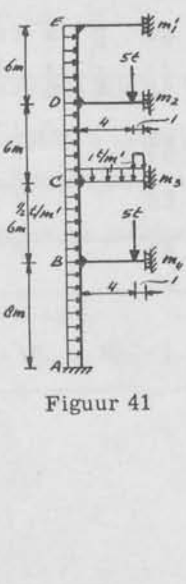


Figuur 39

nen hier dus verticaal verplaatsbare inklemmingen gedacht worden (zie figuur 41).



Figuur 40



Figuur 41

TABEL III

Knooppunten	A	B			C			D			E		F		G			H			K			L
Staven	ab	ba	bk	bc	cb	ch	cd	dc	dg	de	ed	ef	fe	fg	gf	gd	gh	hg	hc	hk	kh	kb	kl	lk
vereffeningscoëff. E										-0,102	-0,510	-0,490	-0,245	+0,306	+0,306									
F										+0,306	+0,306	-0,245	-0,490	-0,510	-0,102									
D							-0,041	-0,205	-0,590	-0,205	-0,041			+0,123	+0,123	-0,295	+0,123	+0,123						
G							+0,123	+0,123	-0,295	+0,123	+0,123			-0,041	-0,205	-0,590	-0,205	-0,041						
C				-0,041	-0,205	-0,590	-0,205	-0,041									+0,123	+0,123	-0,295	+0,123	+0,123			
H				+0,123	+0,123	-0,295	+0,123	+0,123									-0,041	-0,205	-0,590	-0,205	-0,041			
B	-0,056	-0,279	-0,536	-0,185	-0,037															+0,111	+0,111	-0,268	+0,167	+0,167
K	+0,167	+0,167	-0,268	+0,111	+0,111															-0,037	-0,185	-0,536	-0,279	-0,056
Prim. mom.	+49333	+38667	+ 9600	+25500	+19500	+ 7920	+16500	+10500	+14400	+ 7500	+ 1500			+ 4500	+ 4500	- 9600	+13500	+13500	-13680	+22500	+22500	-14400	+44000	+44000
	- 4131	-20581	-39539	-13647	- 2729															+ 8188	+ 8188	-19770	+12320	+12320
	+ 8824	+ 8824	-14161	+ 5865	+ 5865															- 1955	- 9775	-28321	-14742	- 2959
				- 1929	- 9646	-27764	- 9646	- 1929									+ 5788	+ 5788	-13882	+ 5788	+ 5788			
							- 1249	- 6246	-17978	- 6247	- 1249			+ 3748	+ 3748	- 8989	+ 3748	+ 3748						
				+ 3689	+ 3689	- 8849	+ 3689	+ 3689									- 1229	- 6149	-17697	- 6149	- 1229			
							+ 1410	+ 1410	- 3382	+ 1410	+ 1410			- 470	- 2350	- 6765	- 2351	- 470						
	+ 761	+ 761	- 1222	+ 761	+ 761					+ 2380	+ 2380	- 1906	- 3811	- 3967	- 793					- 169	- 843	- 2444	- 1272	- 255
	- 145	- 722	- 1387	- 479	- 96															+ 287	+ 287	- 694	+ 432	+ 432
							- 226	- 1129	- 3249	- 1129	- 226			+ 677	+ 677	- 1625	+ 677	+ 677						
										- 195	- 974	- 935	- 468	+ 584	+ 584									
				+ 36	+ 179	+ 514	+ 178	+ 36									- 107	- 107	+ 257	- 107	- 107			
										+ 243	+ 243	- 194	- 388	- 405	- 81									
							- 82	- 82	+ 197	- 82	- 82			+ 27	+ 137	+ 394	+ 137	+ 27						
				+ 49	+ 49	- 117	+ 49	+ 49									- 16	- 81	- 233	- 81	- 16			
							- 7	- 34	- 98	- 34	- 7			+ 20	+ 20	- 49	+ 20	+ 20						
	- 16	- 16	+ 26	- 11	- 11															+ 4	+ 18	+ 53	+ 27	+ 5
				+ 5	+ 24	+ 71	+ 24	+ 5									- 15	- 15	+ 35	- 15	- 15			
	- 5	- 25	- 48	- 17	- 3															+ 10	+ 10	- 24	+ 15	+ 15
										+ 4	+ 20	+ 20	+ 10	- 12	- 12									
										+ 14	+ 14	- 11	- 22	- 23	- 5									
							- 7	- 7	+ 17	- 7	- 7			+ 2	+ 12	+ 34	+ 12	+ 2						
				+ 5	+ 5	- 12	+ 5	+ 5									- 2	- 8	- 24	- 8	- 2			
							- 1	- 6	- 18	- 6	- 1			+ 4	+ 4	- 9	+ 4	+ 4						
	- 3	- 3	+ 4	- 2	- 2															+ 1	+ 3	+ 9	+ 4	+ 1
				+ 1	+ 3	+ 9	+ 3	+ 1									- 2	- 2	+ 4	- 2	- 2			
		- 1	- 3	- 1																+ 1	+ 1	- 1	+ 1	+ 1
											+ 3	+ 2	+ 1	+ 2	+ 2									
										+ 3	+ 3	- 2	- 4	- 5	- 1									
				+ 1	+ 1	- 2	+ 1	+ 1										- 1	- 4	- 1				
								- 1	- 3	- 1				+ 1	+ 1	- 1	+ 1	+ 1						
									+ 1						+ 1	+ 2	+ 1							
Eind-momenten in kgm	+54618	+26904	-46730	+19826	+17589	-28230	+10641	+ 6262	-10113	+ 3853	+ 3027	- 3026	- 4682	+ 4682	+ 6443	-26608	+20165	+16934	-45225	+28292	+24806	-65592	+40785	+53560

De primaire momenten zijn op eenvoudige wijze uit de op bladzijde 44 gevondene te berekenen.

$$M_{DE} = -M_{ED} = M_{CD} = -M_{DC} = M_{BC} = -M_{CB} = +1500 \text{ kgm},$$

$$M_{AB} = -M_{BA} = 2667 \text{ kgm},$$

$$M_{Dm_2} = M_{Bm_4} = \tfrac{1}{2}(14400 + 9600) = +12000 \text{ kgm},$$

$$M_{Cm_3} = \tfrac{1}{2}(13680 + 7920) = +10800 \text{ kgm}.$$

De vereffeningscoëfficiënten worden:

knooppunt E: $k_{em_1} : k_{ed} = \dfrac{EI}{5} : \dfrac{4EI}{6} = 3 : 10$

$\mu_{em_1} = 0{,}2308$ en $\mu_{ed} = 0{,}7692$,

knooppunt D: $k_{de} : k_{dm_2} : k_{dc} = \dfrac{4EI}{6} : \dfrac{3EI}{5} : \dfrac{4EI}{6} = 10 : 9 : 10$

$\mu_{de} = \mu_{dc} = 0{,}3448$ en $\mu_{dm_2} = 0{,}3104$,

knooppunt C: $\mu_{cd} = \mu_{cb} = 0{,}3448$ en $\mu_{cm_3} = 0{,}3104$,

knooppunt B: $k_{bc} : k_{bm_4} : k_{ba} = \dfrac{4EI}{6} : \dfrac{3EI}{5} : \dfrac{4.2EI}{8} = 10 : 9 : 15$

$\mu_{bc} = 0{,}2941$; $\mu_{bm_4} = 0{,}2647$ en $\mu_{ba} = 0{,}4412$.

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel no IV - 1 op bladzijde 65.

KEERSYMMETRISCHE BELASTING

Tengevolge van deze belasting zullen de middens der regels niet zakken, terwijl de doorsneden daar ter plaatse geen momenten en geen normaalkrachten over brengen. Men kan van dit belastingsgeval dus ook weer de halve constructie beschouwen, mits men in de middens der regels een roloplegging aanbrengt.

De berekening zal uitgevoerd worden volgens het principe, dat is aangegeven bij de derde manier.

Berekening primaire momenten

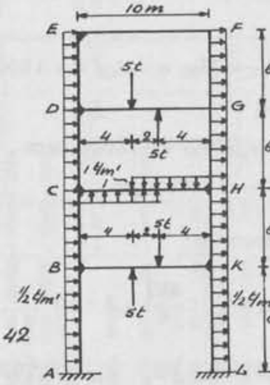
De primaire momenten in de regels zijn:

$$\left.\begin{aligned} M_{DM_2} &= -M_{BM_4} = \tfrac{1}{2}(+14400 - 9600) = +2400 \text{ kgm} \\ M_{CM_3} &= \tfrac{1}{2}(-13680 + 7920) = -2880 \text{ kgm.} \end{aligned}\right\} \text{zie bovenaan op deze bladzijde.}$$

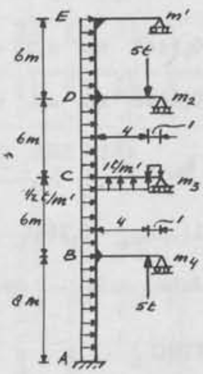
De primaire momenten in de stijlen ten gevolge van de belasting (zonder verschuiving) zijn:

$$M'_{AB} = -M'_{BA} = \tfrac{1}{2} \cdot +5333 = +2667 \text{ kgm},$$

$$M'_{BC} = -M'_{CB} = M'_{CD} = -M'_{DC} = M'_{DE} = -M'_{ED} = \tfrac{1}{2} \cdot +3000 = +1500 \text{ kgm}.$$



Figuur 42



Figuur 43

De primaire momenten in de stijlen ten gevolge van de verplaatsingen der regels, volgen uit:

stijl DE: $\frac{-2M_1}{6} + \frac{6.500}{2} = 0$ of $M_1 = +4500$ kgm,

stijl CD: $\frac{-2M_2}{6} + \frac{6.500}{2} + 3000 = 0$ of $M_2 = +13500$ kgm,

stijl BC: $\frac{-2M_3}{6} + \frac{6.500}{2} + 6000 = 0$ of $M_3 = +22500$ kgm,

stijl AB: $\frac{-2M_4}{8} + \frac{8.500}{2} + 9000 = 0$ of $M_4 = +44000$ kgm.

De resulterende primaire momenten in de stijlen zijn:

$M_{AB} = M'_{AB} + M_4 = + 46667$ kgm,

$M_{BA} = M'_{BA} + M_4 = +\ 41333$ kgm,

$M_{BC} = M'_{BC} + M_3 = +\ 24000$ kgm,

$M_{CB} = M'_{CB} + M_3 = +\ 21000$ kgm,

$M_{CD} = M'_{CD} + M_2 = +\ 15000$ kgm,

$M_{DC} = M'_{DC} + M_2 = +\ 12000$ kgm,

$M_{DE} = M'_{DE} + M_1 = +\ \ 6000$ kgm en

$M_{ED} = M'_{ED} + M_1 = +\ \ 3000$ kgm.

Vereffeningscoëfficiënten

Knooppunt E

Laat men knooppunt E draaien en tevens vrij verplaatsen, dan is $k_{ed} : k_{em_1} = \frac{EI}{6} : \frac{3EI}{5} = 0{,}2147 : 0{,}7826$. k_{ed} is namelijk het moment dat op staafeinde E van staaf ED moet worden aangebracht om daar ter plaatse een hoekverdraaiing 1 te veroorzaken. De vormveranderingen van deze stijl worden slechts veroorzaakt door een moment op het uiteinde E, aangezien regel EM geen horizontale kracht uitoefent. Over de hele lengte van de stijl werkt dus een constant moment. De overdrachtscoëfficient is dus -1.
Op overeenkomstige wijze wordt gevonden:

$$k_{de} : k_{dm_2} : k_{dc} = \frac{EI}{6} : \frac{3.3EI}{5} : \frac{EI}{6} = 5 : 54 : 5,$$

$$\mu_{de} = \mu_{dc} = \frac{5}{64} = 0{,}0781 \quad \text{en} \quad \mu_{dm_2} = \frac{54}{64} = 0{,}8438.$$

Evenzo zijn:

$$\mu_{cd} = \mu_{cb} = 0{,}0781 \quad \text{en} \quad \mu_{cm_3} = 0{,}8438$$

$$k_{bc} : k_{bm_4} : k_{ba} = \frac{EI}{6} : \frac{3.3EI}{5} : \frac{2EI}{8} = 10 : 108 : 15,$$

$$\mu_{bc} = 0{,}0752; \ \mu_{bm_4} = 0{,}8120 \quad \text{en} \quad \mu_{ba} = 0{,}1128.$$

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel no. IV-2 op bladzijde 66.

Zoals uit de tabel blijkt, convergeert dit proces zeer vlug. Dit wordt veroorzaakt door het feit, dat tijdens de vereffening de knooppunten verplaatsen. De stijfheid van de stijlen tegen buiging is n.l. zeer klein, die van de regels daarentegen zeer groot. Deze regels leveren echter geen overdrachtsmomenten.

Sommatie van de momenten uit de tabellen IV - 1 en IV - 2 geeft de uiteindelijke in de constructie optredende momenten. Zie onderaan tabel IV - 2 op bladzijde 66.

Opmerking:

Zoals uit het bovenstaande is gebleken, werd de verkorting van de eigenlijke vereffening verkregen door een uitgebreider berekening van de primaire momenten, vereffenings- en overdrachtscoëfficienten. Bij bovengenoemd voorbeeld werd hierdoor de totale berekening aanzienlijk verkort. Niet bij elke constructie zal deze methode tastbare voordelen opleveren. Het heeft natuurlijk weinig zin een minimum aan vereffeningstabellen te bereiken ten koste van een voorberekening die de verkregen bezuiniging in de vereffeningstabellen overtreft.

TABEL IV - 1

Knooppunten	A	B			C			D			E	
Staven	ab	ba	bm_4	bc	cb	cm_3	cd	dc	dm_2	de	ed	em_1
Vereff. coëff.	-	0,4412	0,2647	0,2941	0,3448	0,3104	0,3448	0,3448	0,3104	0,3448	0,7692	0,2308
Prim. mom.	+ 2667	- 2667	+12000	+ 1500	- 1500	+10800	+ 1500	- 1500	+12000	+ 1500	- 1500	-
	- 2390	- 4780	- 2867	- 3186	- 1593		- 2069	- 4138	- 3725	- 4137	- 2069	
				- 1231	- 2461	- 2216	- 2461	- 1231		+ 1373	+ 2745	+ 824
	+ 272	+ 543	+ 326	+ 362	+ 181		- 24	- 49	- 44	- 49	- 24	
				- 27	- 54	- 49	- 54	- 27		+ 9	+ 18	+ 6
	+ 6	+ 12	+ 7	+ 8	+ 4		+ 3	+ 6	+ 6	+ 6	+ 3	
				- 1	- 2	- 2	- 3	- 1		- 1	- 2	- 1
				+ 1				+ 1		+ 1		
Eindmomenten	+ 555	- 6892	+ 9466	- 2574	- 5425	+ 8533	- 3108	- 6939	+ 8237	- 1297	- 829	+ 829

TABEL IV-2

Knooppunten	A	B			C			D			E	
Staven	ab	ba	bm_4	bc	cb	cm_3	cd	dc	dm_2	de	ed	em_1
Vereff. coëff.	-	0,1128	0,8120	0,0752	0,0781	0,8438	0,0781	0,0781	0,8438	0,0781	0,2174	0,7826
Overdr. coëff.		-1		-1	-1		-1	-1		-1	-1	
Prim. mom.	+46667	+41333	- 2400	+24000	+21000	- 2880	+15000	+12000	+ 2400	+ 6000	+ 3000	
	+ 7099	- 7099	-51102	- 4732	+ 4732							
				+ 2956	- 2956	-31940	- 2956	+ 2956				
	+ 333	- 333	- 2400	- 223	+ 223		+ 1824	- 1824	-19708	- 1824	+ 1824	
				+ 160	- 160	- 1727	- 160	+ 160		+ 1049	- 1049	- 3775
	+ 18	- 18	- 130	- 12	+ 12		+ 94	- 94	- 1020	- 95	+ 95	
				+ 8	- 8	- 90	- 8	+ 8		+ 21	- 21	- 74
	+ 1	- 1	- 6	- 1	+ 1		+ 2	- 2	- 25	+ 2	+ 2	
						- 3						- 2
$\sum$ momenten keersymm. deel	+54118	+33882	-56038	+22156	+22844	-36640	+13796	+13204	-18353	+ 5149	+ 3851	- 3851
$\sum$ momenten symm. deel	+ 555	- 6892	+ 9466	- 2574	- 5425	+ 8533	- 3108	- 6939	+ 8237	- 1297	- 829	+ 829
	+54673	+26990	-46572	+19582	+17419	-28107	+10688	- 6265	-10116	+ 3852	+ 3022	- 3022
Resulterende momenten	lk	kl	kb	kh	hk	hc	hg	gh	gd	gf	fg	fe
	+53563	+40774	-65504	+24730	+28269	-45173	+16904	+20143	-26590	+ 6446	+ 4680	- 4680

Hoofdstuk VI

METHODE KANI

De volgende beschouwingen gelden voor constructies met prismatische, elkaar loodrecht snijdende, staven.

Constructies met onverschuifbare knooppunten

Kani splitst de momenten M_{ik} die in de uiteindelijke toestand door de knooppunten op de staven uitgeoefend worden in 3 groepen, n.l.:

1) Het moment $\overline{M}_{ik}$ dat het knooppunt i op de belaste staaf ik uitoefent, als dit knooppunt nog niet verdraaid is.
2) Het moment $2M'_{ik}$ dat het knooppunt i op de staaf ik uitoefent, als alleen aan het knooppunt i de verdraaiing tot de uiteindelijke toestand wordt gegeven.
3) Het moment M'_{ki} dat het knooppunt i op de staaf ik uitoefent, als alleen aan het knooppunt k de verdraaiing tot de uiteindelijke toestand wordt gegeven.

Deze momenten worden positief genoemd, wanneer ze in de draairichting van de wijzers van een uurwerk werken.
Het uiteindelijke moment is dus:

$$M_{ik} = \overline{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} \tag{1}$$

Uit de voorwaarde, dat het knooppunt i in rust is, volgt $\sum M_{ik} = 0$.
Hieruit volgt:

$$\sum_i \overline{M}_{ik} + 2\sum_i M'_{ik} + \sum_i M'_{ki} = 0.$$

Wordt de vorm $\sum_i M'_{ki}$ gelijk $\overline{M}_i$ (= het vasthoudmoment) gesteld, dan is

$$\sum_i M'_{ik} = -\tfrac{1}{2}\,(\overline{M}_i + \sum_i M'_{ki}).$$

Uit deze vergelijking volgt: $M'_{ik} = -\frac{1}{2}\,\frac{K_{ik}}{\sum_i K_{ik}}\,(\overline{M}_i + \sum_i M'_{ki})$,

daar de momenten, die door dat knooppunt op de aldaar samenkomende staafeinden uitgeoefend worden, zich verhouden als de stijfheden van die staven.
De vorm $\mu = -\frac{1}{2}\,\frac{K_{ik}}{\sum K_{ik}}$ wordt de *verdraaiingsfactor* genoemd en is dus gelijk aan de helft van de vereffeningscoëfficienten volgens Cross, maar met tegengesteld teken.

In bovenstaande vergelijking is $\overline{M}_i$ bekend, terwijl $\sum_i M'_{ki}$ nul wordt gesteld, als geen andere waarde bekend is. Met behulp van deze vergelijking kan dus een benaderde waarde voor M'_{ik} gevonden worden. Het losmaken van de knooppunten, d.w.z. het toepassen van bovengenoemde vergelijking wordt zolang voortgezet, totdat voor elk staafeinde de waarde van M'_{ik} of niet meer verandert of minder verschilt met de voorgaande waarde van M'_{ik} dan de vereiste nauwkeurigheid. De resulterende, in de constructie optredende momenten M_{ik}, worden tenslotte berekend met formule (1).

Constructies met verschuifbare regels en met verticale belasting op die regels.

Bij de berekening van een constructie met verschuifbare regels wordt het uiteindelijk moment gesplitst in vier groepen, n.l. de momenten $\overline{M}_{ik}$, M'_{ik} en M'_{ki}, zoals genoemd bij de constructies met onverschuifbare knooppunten, en een moment M''_{ik}. Dit laatste moment wordt door de knooppunten, waarvan het verdraaien wordt verhinderd en die zich aan de uiteinden van een stijl bevinden, op deze stijl uitgeoefend als de uiteinden van die stijl ten opzichte van elkaar verplaatst worden.

Vergelijking (1) wordt dus voor dit geval:

$$M_{ik} = \overline{M}_{ik} + 2\,M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik} \qquad (2)$$

Uit de voorwaarde, dat het knooppunt i in rust is, volgt:

$$\sum_i M_{ik} = 0 \quad \text{of}$$

$$M'_{ik} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{K_{ik}}{\sum\limits_i K_{ik}}\,(\overline{M}_i + \sum_i M'_{ki} + \sum_i M''_{ik}) \qquad (3)$$

Een tweede vergelijking, waaraan de momenten moeten voldoen, kan worden afgeleid uit de voorwaarde, dat de totale door een verdieping over te brengen dwarskracht nul is.

De door een stijl, welke de knooppunten i en k verbindt, over te brengen dwarskracht Q_{ik} is gelijk aan $-\dfrac{M_{ik} + M_{ki}}{h_{ik}}$ (4)

(h_{ik} = lengte van de stijl).

De totale dwarskracht, welke door de stijlen op een verdieping r overgebracht moet worden, is dus

$$\sum_r Q_{ik} = -\sum_r \frac{M_{ik} + M_{ki}}{h_{ik}}.$$

Is de verdiepinghoogte h_{ik} constant, dan volgt uit de voorwaarde, dat $\sum\limits_r Q_{ik}$ nul is na substitutie van vergelijking (4) in vergelijking (2):

$$+\sum_r \overline{M}_{ik} + 2\sum_r M'_{ik} + \sum_r M'_{ki} + \sum_r M''_{ik} + \sum_r \overline{M}_{ki} + 2\sum_r M'_{ki} + \sum_r M'_{ik} + \sum_r M''_{ki} = 0 \qquad (5)$$

Uit de voorwaarde, dat alleen een verticale belasting aanwezig is, volgt, dat $\sum\limits_r \overline{M}_{ik}$ en $\sum\limits_r \overline{M}_{ki}$ nul zijn omdat op de uiteinden van de stijlen geen primaire momenten uitgeoefend worden. Verder is $M''_{ik} = M''_{ki}$, omdat bij verschuiving van de uiteinden van een stijl ten opzichte van elkaar, zonder dat de einddoorsneden verdraaien, de aldaar optredende momenten gelijk zijn.

Vergelijking (5) gaat dan over in:

$$3\sum_r M'_{ik} + 3\sum_r M'_{ki} + 2\sum_r M''_{ik} = 0,$$

zodat $\sum\limits_r M''_{ik} = -\dfrac{3}{2}\,(\sum\limits_r M'_{ik} + \sum\limits_r M'_{ki})$.

Uit deze vergelijking volgt weer:

$$M''_{ik} = -\frac{3}{2}\,\frac{K_{ik}}{\sum\limits_r K_{ik}}\,(\sum_r M'_{ik} + \sum_r M'_{ki}) \qquad (6)$$

Immers de momenten, die door de verschuiving in de stijlen optreden, verhouden zich als de stijfheden van de stijlen.

$\nu = -\frac{3}{2}\frac{K_{ik}}{\sum_r K_{ik}}$ wordt de *verschuivingsfactor* genoemd.

De berekening van de momenten verloopt als volgt:
Eerst wordt vergelijking (3) voor elk knooppunt, dat kan verdraaien, toegepast. Zijn geen waarden voor M'_{ki} en M''_{ik} bekend, dan worden deze nul gesteld. Deze vergelijking geeft aan, dat *alleen* het beschouwde knooppunt wordt losgelaten en dan nog uitsluitend voor draaiing. Het verplaatsen van de knooppunten wordt tijdens deze bewerkingen verhinderd. Vervolgens wordt voor elke verdieping vergelijking (6) toegepast. Hierbij worden dus de regels losgelaten, terwijl draaiing der knooppunten wordt verhinderd. Voorgaande bewerkingen worden om beurten zolang toegepast, totdat de vereiste nauwkeurigheid is bereikt.

Constructies met verschuifbare regels en horizontale belasting

De bewerking wordt, evenals bij het voorgaande geval, in twee delen gesplitst met name de berekening der momenten, indien de knooppunten alleen kunnen verdraaien en de berekening der momenten, indien alleen verschuiving der knooppunten is toegestaan.

Voor de verdraaiing wordt naar het vorige geval verwezen.

Voor de verschuiving worden natuurlijk de knooppunten van één regel of van alle regels gelijktijdig losgelaten.

Uit het feit, dat de horizontale reactie op een willekeurige regel nul is, volgt, bij willekeurige horizontale belasting op het raamwerk:

$$\sum_r \frac{K_{ik}}{h_r} + \sum \frac{K_{ik}}{h_r} + Q_b + Q_o = 0\ .$$

h_r is de hoogte van de onder de beschouwde regel gelegen verdieping r, Q_b de horizontale belasting op de boven de regel gelegen verdiepingen, Q_o het deel van de horizontale belasting op de onder de regel gelegen verdieping dat door die regel opgenomen wordt indien deze scharnierend was opgelegd.
Bovenstaande vergelijking gaat met:

$$M_{ik} = \overline{M}_{ik} + 2\,M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik} \quad \text{en} \quad M_{ki} = \overline{M}_{ki} + 2M'_{ki} + M'_{ik} + M''_{ki},$$

terwijl $M''_{ik} = M''_{ki}$, over in:

$$\sum_r M''_{ik} = -\tfrac{1}{2}\sum_r \overline{M}_{ik} - \tfrac{1}{2}\sum_r M_{ik} - \frac{3}{2}\sum_r M'_{ik} - \frac{3}{2}\sum_r M'_{ki} - \tfrac{1}{2}\,h_r\,(Q_o + Q_b)$$

of $$M''_{ik} = -\frac{3}{2}\frac{K_{ik}}{\sum_r K_{ik}}\Big[\sum_r M'_{ik} + \sum_r M'_{ki} + \frac{1}{3}\sum_r \overline{M}_{ik} + \frac{1}{3}\sum_r \overline{M}_{ki} + \frac{1}{3}\,h_r(Q_o + Q_b)\Big].$$

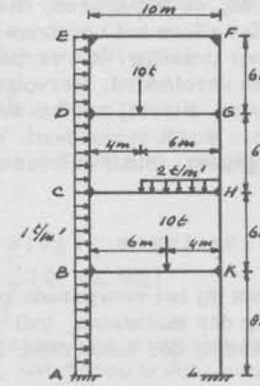
De vorm $\frac{1}{3}\sum_r \overline{M}_{ik} + \frac{1}{3}\sum_r \overline{M}_{ki} + \frac{1}{3}\,h\,(Q_o + Q_b)$, welke voor elke verdieping tijdens het vereffenen een constante waarde behoudt, is van te voren te berekenen, stel Z, zodat de vergelijking wordt:

$$M''_{ik} = -\frac{3}{2}\frac{K_{ik}}{\sum_r K_{ik}}\Big[\sum_r M'_{ik} + \sum_r M'_{ki} + Z\Big] \tag{7}$$

Getallenvoorbeeld

Ter verduidelijking diene het volgende getallenvoorbeeld, dat in hoofdstuk V volgens de methode Cross is uitgewerkt.

De waarden van $\overline{M}_{ik}$, die gelijk doch tegengesteld zijn aan de primaire momenten volgens de vereffeningsmethode van Cross, zijn bij de betreffende staafeinden bijgeschreven.



Figuur 44

Teneinde verwarring te voorkomen met de uit de vereffening volgende waarden van M'_{ik} zijn de waarden voor $\overline{M}_{ik}$ omlijnd. De waarden van $\overline{M}_i = \sum_1 \overline{M}_{ik}$ zijn in het cirkeltje om het betreffende knooppunt geschreven.

De verdraaiingsfactoren, welke - $\frac{1}{2}$ maal de vereffeningscoëfficienten van Cross zijn, worden bij de betreffende staafeinden in de door de twee cirkeltjes gevormde ring geschreven.

Daar de twee stijlen van een verdieping gelijke stijfheid tegen buiging hebben, zijn de verschuivingsfactoren voor alle stijlen gelijk aan -0,750. Deze getallen zijn in het midden en links van de stijlen geplaatst.

Vervolgens wordt voor elke verdieping de waarde van Z berekend (zie formule 7). Aangezien de horizontale belasting tegen de stijlen over de gehele hoogte gelijkmatig verdeeld is, is $\frac{1}{3}\sum_r \overline{M}_{ik} + \frac{1}{3}\sum_r \overline{M}_{ki}$ gelijk nul.

Dus Z is voor dit geval $\frac{1}{3}\, h_r\, (Q_o + Q_b)$.

Voor de 1e verdieping van boven af geldt:

$Q_b = 0$ $\quad Q_o = 3000$ kg $\quad h_r = 6$ m $\quad Z = + 6000$ kgm.

Voor de 2e verdieping geldt:

$Q_b = 6000$ kg $\quad Q_o = 3000$ kg $\quad h_r = 6$ m $\quad Z = + 18000$ kgm.

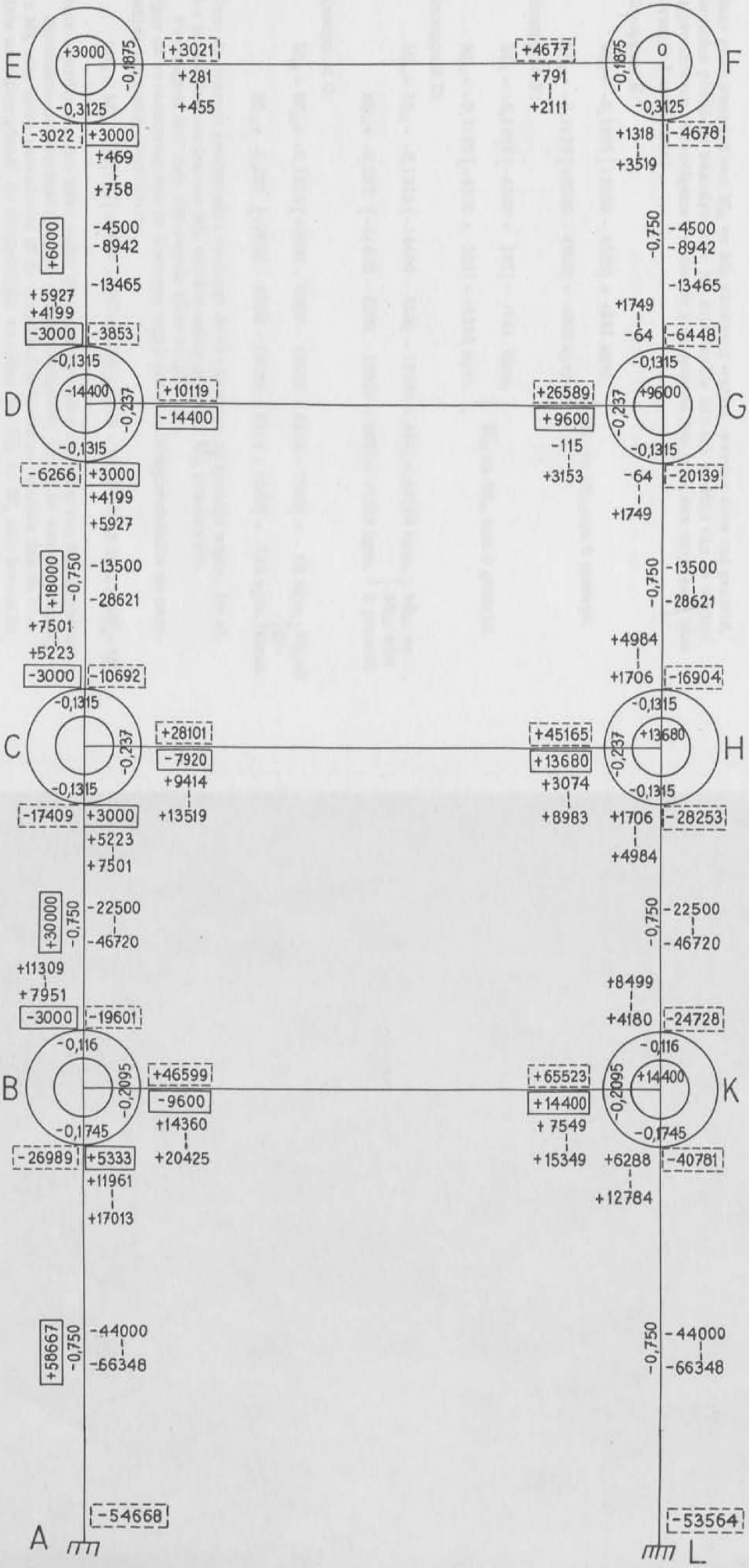
Voor de 3e verdieping geldt:

$Q_b = 12000$ kg $\quad Q_o = 3000$ kg $\quad h_r = 6$ m $\quad Z = + 30000$ kgm.

Voor de 4e verdieping geldt:

$Q_b = 18000$ kg $\quad Q_o = 4000$ kg $\quad h_r = 8$ m $\quad Z = + 58667$ kgm.

Deze getallen zijn omlijnd links van de middens van de betreffende stijlen bijgeschreven.



E
+3000
-0,1875
-0,3125
+3021
+281
+455
+4677
+791
+2111
F
0
-0,1875
-0,3125
-3022
+3000
+469
+758
+1318
+3519
-4678
+6000
-4500
-8942
-13465
-0,750
-4500
-8942
-13465
+5927
+4199
+1749
-64
-3000
-3853
-6448
D
-14400
-0,1315
-0,237
+10119
-14400
+26589
+9600
-115
+3153
G
+9600
-0,1315
-0,237
-6266
+3000
+4199
+5927
-64
+1749
-20139
+18000
-0,750
-13500
-28621
-0,750
-13500
-28621
+7501
+5223
+4984
+1706
-3000
-10692
-16904
C
-0,1315
-0,237
+28101
-7920
+9414
+13519
+45165
+13680
+3074
+8983
H
+13680
-0,1315
-0,237
-17409
+3000
+5223
+7501
+1706
+4984
-28253
+30000
-0,750
-22500
-46720
-0,750
-22500
-46720
+11309
+7951
+8499
+4180
-3000
-19601
-24728
B
-0,116
-0,2095
-0,1745
+46599
-9600
+14360
+20425
+65523
+14400
+7549
+15349
K
+14400
-0,116
-0,2095
-0,1745
-26989
+5333
+11961
+17013
+6288
+12784
-40781
+58667
-0,750
-44000
-66348
-0,750
-44000
-66348
-54668
-53564
A
L

De vereffening verloopt als volgt:
Begonnen wordt met het verschuiven van de regels (dus formule 6).

$$M''_{ED} = M''_{FG} = -0{,}750 \times 6000 = -4500 \text{ kgm,}$$

$$M''_{DC} = M''_{GH} = -0{,}750 \times 18000 = -13500 \text{ kgm,}$$

$$M''_{CB} = M''_{HK} = -0{,}750 \times 30000 = -22500 \text{ kgm,}$$

$$M''_{BA} = M''_{KL} = -0{,}750 \times 58667 = -44000 \text{ kgm.}$$

Daar geen waarden van M'_{ik} en M'_{ki} aanwezig waren, werden deze nul gesteld. De aldus gevonden waarden voor M''_{ik} zijn rechts van het midden van de stijlen bijgeschreven. Vervolgens worden de knooppunten één voor één verdraaid (dus formule 3 toepassen).

Knooppunt E:

$$\left.\begin{aligned} M'_{EF} &= -0{,}1875\,[+3000 - 4500] = +281 \text{ kgm,} \\ M'_{ED} &= -0{,}3125\,[+3000 - 4500] = +469 \text{ kgm.} \end{aligned}\right\} \; M'_{FE} \text{ en } M'_{DE} \text{ zijn 0 gesteld.}$$

Knooppunt F:

$$\left.\begin{aligned} M'_{FE} &= -0{,}1875\,[-4500 + 281] = +791 \text{ kgm,} \\ M'_{FG} &= -0{,}3125\,[-4500 + 281] = +1318 \text{ kgm.} \end{aligned}\right\} \; \overline{M}_{FE} \text{ en } M'_{GF} \text{ zijn 0 gesteld.}$$

Knooppunt D:

$$\left.\begin{aligned} M'_{DC} = M'_{DE} &= -0{,}1315\,[-14400 - 4500 - 13500 + 469] = +4199 \text{ kgm,} \\ M'_{DG} &= -0{,}237\;\;\,[-14400 - 4500 - 13500 + 469] = +7568 \text{ kgm.} \end{aligned}\right\} \; \begin{aligned} &M'_{GD} \text{ en} \\ &M'_{CD} \text{ zijn} \\ &\text{0 gesteld.} \end{aligned}$$

Knooppunt G:

$$\left.\begin{aligned} M'_{GF} = M'_{GH} &= -0{,}1315\,[+9600 - 4500 - 13500 + 1318 + 7568] = -64 \text{ kgm,} \\ M'_{GD} &= -0{,}237\;\;\,[+9600 - 4500 - 13500 + 1318 + 7568] = -115 \text{ kgm.} \end{aligned}\right\} \; \begin{aligned} &M'_{HG}=0 \\ &\text{ge-} \\ &\text{steld.} \end{aligned}$$

Voor de overige knooppunten verloopt de verdraaiing op analoge wijze. De aldus bepaalde waarden van M'_{ik} worden onder of boven $\overline{M}_{ik}$ geschreven.

Vervolgens laat men alle regels weer verplaatsen.
Voor de verschuiving van de bovenste regel wordt volledigheidshalve de berekening nogmaals uitgevoerd.

$$M''_{FD} = M''_{FG} = -0{,}750\,[+6000 + 469 + 1318 + 4199 - 64] = -8942 \text{ kgm} = M''_{DE} = M''_{GF}.$$

Deze waarden worden weer onder de eerst gevonden waarden van M''_{ED} geplaatst.

Bovenstaande berekeningswijze wordt voortgezet, totdat de waarden van M'_{ik} en M''_{ik} niet meer veranderen of de veranderingen kleiner worden dan de vereiste nauwkeurigheid. De uiteindelijke waarden van M'_{ik} en M''_{ik} zijn tevens in de tabel aangegeven. De uiteindelijke momenten (omlijnd met $\boxed{}$) worden berekend met behulp van formule 2. Zo is bijv.:

$$M_{ED} = +3000 + 2.758 + 5927 - 13465 = -3022 \text{ kgm.}$$

(Zie tabel tussen de bladzijden 71 en 72).

Opmerkingen

De methode *Kani* komt dus neer op het iteratief (herhaald) oplossen van één of twee vergelijkingen voor elk staafeindmoment. Iedere herhaling geeft een nauwkeuriger waarde.

Is er tijdens een iteratie een vergissing gemaakt, dan wordt deze bij de volgende herhalingen weer hersteld. Bij de methode *Cross* geven vergissingen in de deelmomenten onjuiste uitkomsten, daar de eindmomenten gevonden worden door optelling van deze deelmomenten.
Ook kan men tijdens de vereffening desgewenst lengte en stijfheid van staven veranderen. De vereffening wordt dan voortgezet met andere verdraaiings- en/of verschuivingsfactoren.

Als in de vergelijkingen van *Kani* slechts de primaire momenten $\frac{K_{ik}}{\Sigma_l K_{ik}}$ en $\frac{K_{ik}}{\Sigma_r K_{ik}}$ juist zijn, bereikt men altijd een goed eindresultaat.

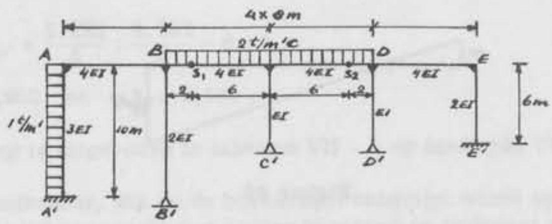
Voor uitvoeriger beschrijving van de methode Kani wordt verwezen naar: *G. Kani: Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen.*

Hoofdstuk VII

CONSTRUCTIES MET SCHARNIEREN

Wanneer in een ligger van een constructie een scharnier voorkomt, worden de overdrachtscoëfficienten voor deze ligger uit het evenwicht afgeleid. Het blijkt, in afwijking van het bewezene in hoofdstuk III, dat het product der overdrachtscoëfficienten van zo'n ligger = 1 is.

VOORBEELD



Figuur 45

Berekening met vasthoudkracht

Primaire momenten:

$$M_{A'A} = - M_{AA'} = + \frac{1}{12}.1000.10^2 = +8333 \text{ kgm.}$$

De berekening van de primaire momenten in B en C ten gevolge van de belasting op BC verloopt als volgt:
In het scharnierpunt S_1 werkt alleen een dwarskracht. Wordt de ligger daar doorgesneden, dan moeten, onder invloed van de belasting en de nog onbekende dwarskracht D, de zakkingen van de doorsnedevlakken aan weerszijden der sneden even groot zijn.
De zakking van S_1, volgend uit de vervorming van BS_1, is:

$$\delta_1 = \frac{2000.2^4}{8.4EI} + \frac{D.2^3}{3.4EI} \qquad (1)$$

De zakking van S_1, berekend uit de vervormingvan CS_1, is:

$$\delta_2 = \frac{2000.6^4}{8.4EI} - \frac{D.6^3}{3.4EI} \qquad (2)$$

Uit gelijkstelling van (1) en (2) volgt: D = 4286 kg.

Het primaire moment $M_{BC} = \frac{1}{2}.2000.2^2 + 4286.2 = +12571$ kgm.

Het primaire moment $M_{CB} = -\frac{1}{2}.2000.6^2 + 4286.2 = -10286$ kgm.

Verder is $M_{CD} = +10286$ kgm en $M_{DC} = -12571$ kgm.

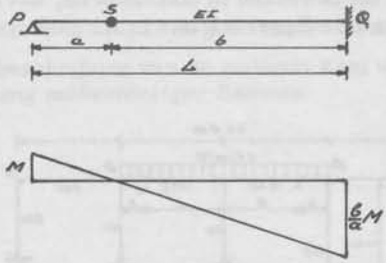
Vereffenings- en overdrachtscoëfficiënten

$$k_{aa'} : k_{ab} = \frac{4.3EI}{10} : \frac{4.4EI}{8} = 6 : 10\ ,$$

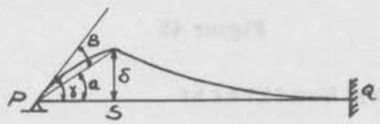
$$\mu_{aa'} = 0{,}375 \quad \text{en} \quad \mu_{ab} = 0{,}625\ .$$

De berekening van de vereffenings- en overdrachtscoëfficienten in de knooppunten B, C en D verloopt als volgt:

Op een bij Q ingeklemde ligger PQ, waarin zich een scharnier bevindt, werkt ter plaatse van de vrije oplegging P een moment M.



Figuur 46



Figuur 47

De verplaatsing van scharnier S wordt berekend uit de vervorming van het rechter gedeelte van de ligger (SQ). Deze bedraagt:

$$\delta = \frac{1}{EI}\left(\frac{b}{a}\, M.\frac{1}{2}b.\frac{2}{3}b\right) = \frac{M\, b^3}{3a\ EI}.$$

Zou de buiging van het linkergedeelte (PS) buiten beschouwing gelaten worden, dan zou de hoekverdraaiing α van de ligger in P $\frac{M\, b^3}{3a^2EI}$ zijn. Door de buiging van PS wordt α nog vergroot met een hoek $\beta = \frac{M\, a}{3EI}$.

De totale hoekverdraaiing $\gamma = \alpha + \beta$ is dus: $\frac{M}{3a^2EI}\,(b^3 + a^3)$.

Voor $\gamma = 1$ is $M = k_{pq} = \frac{3a^2EI}{b^3 + a^3}$.

Door het moment M ter plaatse van P wordt bij Q een moment $\frac{b}{a}$ M veroorzaakt. De overdrachtscoëfficient is dus $\frac{b}{a}$.

Worden in bovenstaande formule de getallenwaarden voor a, b en EI van het voorbeeld gesubstitueerd, dan krijgt men:

$$k_{bc} = k_{dc} = \frac{3.2^2.4EI}{6^3 + 2^3} = \frac{3EI}{14}\ ; \quad k_{cb} = k_{cd} = \frac{3.6^2.4EI}{6^3 + 2^3} = \frac{27EI}{14}.$$

De overdrachtscoëfficienten van B naar C en van D naar C zijn +3 en van C naar B en D gelijk aan $+\frac{1}{3}$. Het product is dus in dit geval +1.

$$k_{ba} : k_{bb'} : k_{bc} = \frac{4.4EI}{8} : \frac{3.2EI}{10} : \frac{3EI}{14} = 140 : 42 : 15$$

$\mu_{ba} = 0{,}7107$, $\mu_{bb'} = 0{,}2132$ en $\mu_{bc} = 0{,}0761$.

$$k_{cb} : k_{cc'} : k_{cd} = \frac{27EI}{14} : \frac{3EI}{6} : \frac{27EI}{14} = 27 : 7 : 27 ,$$

$\mu_{cb} = \mu_{cd} = 0{,}4426$ en $\mu_{cc'} = 0{,}1148$.

$$k_{dc} : k_{dd'} : k_{de} = \frac{3EI}{14} : \frac{3EI}{6} : \frac{4.4EI}{8} = 3 : 7 : 28 ,$$

$\mu_{dc} = 0{,}0789$, $\mu_{dd'} = 0{,}1842$ en $\mu_{de} = 0{,}7369$.

$$k_{ed} : k_{ee'} = \frac{4.4EI}{8} : \frac{4.2EI}{6} = 6 : 4 ,$$

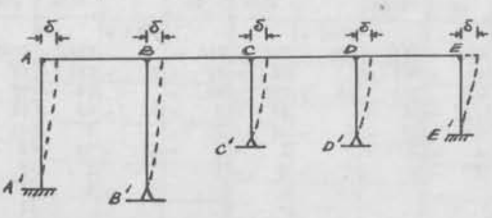
$\mu_{ed} = 0{,}600$ en $\mu_{ee'} = 0{,}400$.

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel no VII - 1 op bladzijde 77.

De *vasthoudkracht*, die op de bovenregel aangrijpt wordt op de gebruikelijke wijze uit het evenwicht der stijlen berekend en bedraagt 4629 kg (naar links).

Eliminatie van de vasthoudkracht

Teneinde deze vasthoudkracht te kunnen elimineren, wordt de bovenregel over een kleine afstand δ (bijv. naar rechts) verschoven.



Figuur 48

Uit bovenstaande figuur volgen de primaire momenten:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{AA'} = M_{A'A} \text{ en} \qquad\qquad M_{EE'} = M_{E'E} \text{ en} \\ \delta = \dfrac{M_{AA'} . 10^2}{6.3EI} ; \; \delta = \dfrac{M_{BB'} . 10^2}{3.2EI} ; \; \delta = \dfrac{M_{CC'} . 6^2}{3EI} ; \; \delta = \dfrac{M_{DD'} . 6^2}{3EI} ; \; \delta = \dfrac{M_{EE'} . 6^2}{6.2EI} . \end{array} \right\}$$

Eliminatie van δ geeft voor de verhoudingen tussen de primaire momenten:

$$M_{AA'} : M_{BB'} : M_{CC'} : M_{DD'} : M_{EE'} = 54 : 18 : 25 : 25 : 100 .$$

Stelt men $M_{AA'} = M_{A'A} = +5400$, dan zijn:

$$M_{BB'} = +1800; \; M_{CC'} = M_{DD'} = +2500 \text{ en } M_{EE'} = M_{E'E} = +10000.$$

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel no VII - 2 op bladzijde 77.

De kracht die nodig is om de bovenregel over een afstand δ te verschuiven, volgt weer uit het evenwicht der stijlen en bedraagt 4033 (naar rechts).

De resulterende in de constructie optredende knooppuntsmomenten worden nu gevonden door de momenten uit tabel no VII - 1 te vermeerderen met $\frac{4629}{4033}$ x de momenten uit tabel no VII - 2 en zijn verzameld in tabel no VII - 3 op bladzijde 77.

TABEL VII-1

Knooppunten	A'	A		B			C			D			E		E'
Staven	a'a	aa'	ab	ba	bb'	bc	cb	cc'	cd	dc	dd'	de	ed	ee'	e'e
Vereff. coëff.	-	0,3750	0,6250	0,7107	0,2132	0,0761	0,4426	0,1148	0,4426	0,0789	0,1842	0,7369	0,6000	0,4000	-
Overdr. coëff.		+1/2	+1/2	+1/2		+3	+1/3		+1/3	+3		+1/2	+1/2	+1/2	
Prim. mom.	+ 8333	- 8333				+12571	-10286		+10286	-12571					
			- 4467	- 8934	- 2680	- 957	- 2870		+ 2976	+ 992	+ 2316	+ 9263	+ 4632		
	+ 2400	+ 4800	+ 8000	+ 4000								- 1390	- 2779	- 1853	- 927
			- 1421	- 2843	- 853	- 304	- 913		+ 329	+ 110	+ 256	+ 1024	+ 512		
	+ 266	+ 533	+ 888	+ 444		+ 71	+ 211	+ 55	+ 212	+ 71		- 154	- 307	- 205	- 102
			- 183	- 366	- 110	- 39	- 118								
	+ 34	+ 69	+ 114	+ 57		+ 17	+ 52	+ 14	+ 52	+ 17					
			- 26	- 53	- 15	- 6	- 17		+ 16	+ 5	+ 12	+ 49	+ 24		
	+ 5	+ 10	+ 16	+ 8								- 7	- 14	- 10	- 5
			- 3	- 6	- 2		- 1		+ 2	+ 1	+ 1	+ 5	+ 2		
	+ 1	+ 1	+ 2	+ 1								- 1	- 1	- 1	
				- 1								+ 1			
Eindmomenten	+11039	- 2920	+ 2920	- 7693	- 3660	+11353	-13942	+ 69	+13873	-11375	+ 2585	+ 8790	+ 2069	- 2069	- 1034

TABEL VII-2

Knooppunten	A'	A		B			C			D			E		E'
Staven	a'a	aa'	ab	ba	bb'	bc	cb	cc'	cd	dc	dd'	de	ed	ee'	e'e
Vereff. coëff.	-	0,3750	0,6250	0,7107	0,2132	0,0761	0,4426	0,1148	0,4426	0,0789	0,1842	0,7369	0,6000	0,4000	-
Overdr. coëff.		+1/2	+1/2	+1/2		+3	+1/3		+1/3	+3		+1/2	+1/2	+1/2	
Prim. mom.	+ 5400	+ 5400			+ 1800			+ 2500			+ 2500			+10000	+10000
	- 1012	- 2025	- 3375	- 1688		- 369	- 1107	- 287	- 1106	- 369		- 3000	- 6000	- 4000	- 2000
			+ 91	+ 183	+ 55	+ 19	+ 59		+ 206	+ 69	+ 160	+ 640	+ 320		
	- 17	- 34	- 57	- 28		- 39	- 117	- 31	- 117	- 39		- 96	- 192	- 128	- 64
			+ 24	+ 48	+ 14	+ 5	+ 15		+ 32	+ 11	+ 25	+ 99	+ 50		
	- 5	- 9	- 15	- 7		- 7	- 21	- 5	- 21	- 7		- 15	- 30	- 20	- 10
			+ 5	+ 10	+ 3	+ 1	+ 3		+ 5	+ 2	+ 4	+ 16	+ 8		
	- 1	- 2	- 3	- 2		- 1	- 3	- 1	- 4	- 1		- 2	- 5	- 3	- 2
			+ 1	+ 2	+ 1						+ 1	+ 2	+ 1		
			- 1										- 1		
Eindmomenten	+ 4365	+ 3030	- 3030	- 1482	+ 1873	- 391	- 1171	+ 2176	- 1005	- 334	+ 2690	- 2356	- 5849	+ 5849	+ 7924

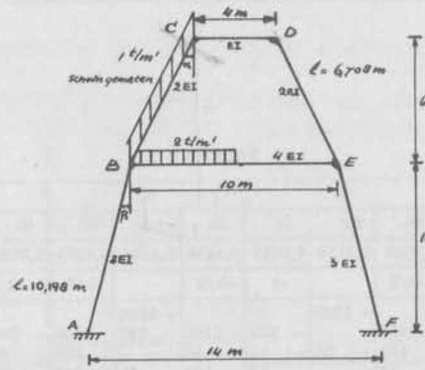
TABEL VII-3

Knooppunten	A'	A		B			C			D			E		E'
Staven	a'a	aa'	ab	ba	bb'	bc	cb	cc'	cd	dc	dd'	de	ed	ee'	e'e
Momenten uit tabel VI - 1	+11039	- 2920	+ 2920	- 7693	- 3660	+11353	-13942	+ 69	+13873	-11375	+ 2585	+ 8790	+ 2069	- 2069	- 1034
$\frac{4629}{4033}$ x de mom. uit tabel VI - 2	+ 5010	+ 3478	- 3478	- 1701	+ 2150	- 449	- 1344	+ 2497	- 1153	- 383	+ 3087	- 2704	- 6713	+ 6713	+ 9094
Res. knoopp. mom. in kgm	+16049	+ 558	- 558	- 9394	- 1510	+10904	-15286	+ 2566	+12720	-11758	+ 5672	+ 6086	- 4644	+ 4644	+ 8060

Hoofdstuk VIII

CONSTRUCTIES MET STAVEN, DIE ELKAAR ONDER EEN WILLEKEURIGE HOEK SNIJDEN

Zoals uit het voorgaande is gebleken, leverde het berekenen van vasthoudkrachten bij constructies waarvan de staven loodrecht op elkaar staan weinig moeilijkheden op. Bij constructies, waarvan de staven elkaar niet rechthoekig snijden, is de berekening van de vasthoudkrachten iets ingewikkelder. Ter toelichting zal het volgende vraagstuk (zie figuur 49) nader worden uitgewerkt. Op een der stijlen en op de horizontale tussenregel is een verticale belasting aangebracht. De stijlen vertonen ter plaatse van de eerste verdieping een knik.



Figuur 49

Berekening momentenverdeling bij onverschuifbare regels

In eerste instantie wordt de momentenverdeling in de constructie berekend, als de regels BE en CD op hun plaats worden gehouden.

Primaire momenten

De primaire momenten M_{BE} en M_{EB} worden bepaald met behulp van de basisgevallen, welke in hoofdstuk I zijn afgeleid.

$$M_{BE} = + \frac{11}{192}\, q\, L^2 = \frac{11}{192} . 2000 . 100 = + 11458 \text{ kgm} ,$$

$$M_{EB} = - \frac{5}{192}\, q\, L^2 = - \frac{5}{192} . 2000 . 100 = - 5208 \text{ kgm},$$

$$M_{BC} = - M_{CB} = \frac{1}{12} . q\, L^2 \sin\alpha = \frac{1}{12} . 1000 . 6,708^2 . 0,4472 = + 1677 \text{ kgm} .$$

Vereffeningscoëfficiënten

$$k_{ba} : k_{be} : k_{bc} = \frac{4 . 3EI}{10,198} : \frac{4 . 4\, EI}{10} : \frac{4 . 2\, EI}{6,708} = 1,1767 : 1,6 : 1,1926,$$

$\mu_{ba} = 0,2965;\quad \mu_{be} = 0,4031$ en $\mu_{bc} = 0,3004.$

$$k_{cb} : k_{cd} = \frac{4.2EI}{6,708} : \frac{4.EI}{4} = 1,1926 : 1\ ,$$

$\mu_{cb} = 0,5439;\quad \mu_{cd} = 0,4561.$

Uit de symmetrie van de constructie volgen de overige vereffeningscoëfficienten.

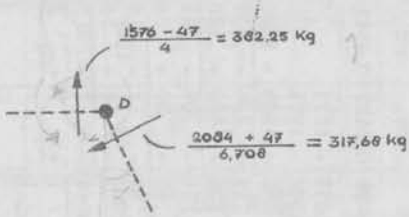
De *vereffening* is uitgevoerd in tabel no. VIII - 1 op bladzijde 80.

Berekening vasthoudkrachten

In het algemeen kan men, teneinde het aantal verplaatsbare knooppunten vast te stellen, alle stijve knooppunten scharnierend denken en dan nagaan hoeveel extra reacties er nodig zijn om het geheel statisch bepaald te maken. Deze extra reacties vertegenwoordigen dan de benodigde vasthoudkrachten.

De beide in dit geval benodigde vasthoudkrachten worden horizontaal aangrijpend gedacht in de knooppunten B en C.

Eerst wordt het evenwicht van knooppunt D beschouwd. Behalve momenten worden door de staven CD en DE ook krachten op het knooppunt uitgeoefend. Deze krachten worden ontbonden in twee richtingen n.l. in de richting van de staven (normaalkrachten) en loodrecht op de staven (dwarskrachten). De laatste, welke berekend worden uit het momentenevenwicht der staven, volgen uit onderstaande figuur.



Figuur 50

De normaalkrachten in de staven worden berekend uit de voorwaarde, dat het knooppunt D in evenwicht is.

$$N_{DE} = \frac{382,25}{\cos\alpha} - 317,68\ \mathrm{tg}\alpha = +\ 268,49 \text{ kg en}$$

$$N_{CD} = 382,25\ \mathrm{tg}\alpha - \frac{317,68}{\cos\alpha} = -\ 164,02 \text{ kg.}$$

Vervolgens wordt het evenwicht van knooppunt C beschouwd. Op dezelfde manier als bij knooppunt D, worden de 'dwarskrachten' berekend, die op C werken. Ten aanzien van de 'dwarskracht', die door de staaf BC op C wordt uitgeoefend dient te worden opgemerkt, dat deze niet alléén veroorzaakt wordt door de Crossmomenten, maar dat ook met de op BC werkende belasting rekening moet worden gehouden.

Deze dwarskrachten en de bekende normaalkracht in CD moeten evenwicht maken met N_{CB} en de vasthoudkracht in C. Daartoe worden deze krachten

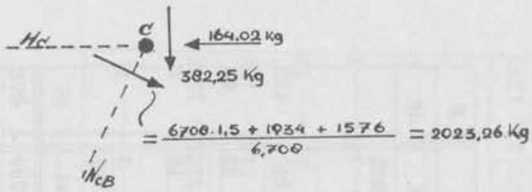
TABEL VIII - 1

Knooppunten	A	B			C		D		E			F
Staven	ab	ba	be	bc	cb	cd	dc	de	ed	eb	ef	fe
Vereff. coëff.	-	0,2965	0,4031	0,3004	0,5439	0,4561	0,4561	0,5439	0,3004	0,4031	0,2965	
Prim. mom.	-	-	+11458	+ 1677	- 1677					- 5208		
	- 1947	- 3894	- 5295	- 3946	- 1973					- 2647		
			+ 1583	+ 993	+ 1985	+ 1665	+ 832	+ 1180	+ 2360	+ 3166	+ 2329	+ 1165
	- 382	- 764	- 1038	- 774	- 387	- 459	- 918	- 1094	- 547	- 519		
			+ 215	+ 230	+ 460	+ 386	+ 193	+ 160	+ 320	+ 430	+ 316	+ 158
	- 66	- 132	- 179	- 134	- 67	- 81	- 161	- 192	- 96	- 90		
			+ 37	+ 40	+ 80	+ 68	+ 34	+ 28	+ 56	+ 75	+ 55	+ 28
	- 11	- 23	- 31	- 23	- 12	- 14	- 28	- 34	- 17	- 16		
			+ 7	+ 7	+ 14	+ 12	+ 6	+ 5	+ 10	+ 13	+ 10	+ 5
	- 2	- 4	- 6	- 4	- 2	- 3	- 5	- 6	- 3	- 3		
			+ 1	+ 1	+ 3	+ 2	+ 1	+ 1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 1
			- 1	- 1			- 1	- 1	- 1			
										+ 1		
Res. mom.	- 2408	- 4817	+ 6751	- 1934	- 1576	+ 1576	- 47	+ 47	+ 2084	- 4796	+ 2712	+ 1357

TABEL VIII - 2

Knooppunten	A	B			C		D		E			F
Staven	ab	ba	be	bc	cb	cd	dc	de	ed	eb	ef	fe
Vereff. coëff.	-	0,2965	0,4031	0,3004	0,5439	0,4561	0,4561	0,5439	0,3004	0,4031	0,2965	
Prim. mom.				+ 3577	+ 3577	- 4500	- 4500	+ 3577	+ 3577			
	- 530	- 1061	- 1442	- 1074	- 537					- 721		
			- 576	+ 397	+ 794	+ 666	+ 333	- 429	- 858	- 1151	- 847	- 423
	+ 27	+ 53	+ 72	+ 54	+ 27	+ 232	+ 465	+ 554	+ 277	+ 36		
			- 63	- 70	- 141	- 118	- 59	- 47	- 94	- 126	- 93	- 46
	+ 20	+ 39	+ 54	+ 40	+ 20	+ 24	+ 48	+ 58	+ 29	+ 27		
			- 11	- 12	- 24	- 20	- 10	- 8	- 17	- 23	- 16	- 8
	+ 3	+ 7	+ 9	+ 7	+ 3	+ 4	+ 8	+ 10	+ 5	+ 5		
			- 2	- 2	- 4	- 3	- 2	- 2	- 3	- 4	- 3	- 1
	+ 1	+ 1	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 2	+ 2	+ 1	+ 1		
					- 1	- 1			- 1	- 1		
Res. mom.	- 479	- 961	- 1957	+ 2918	+ 3715	- 3715	- 3715	+ 3715	+ 2916	- 1957	- 959	- 478

ontbonden in twee richtingen n.l. in de richting van de vasthoudkracht in C en in de richting van CB.



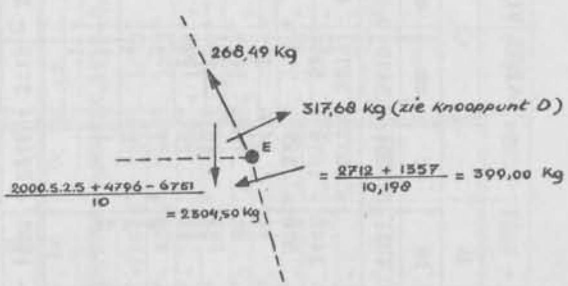
Figuur 51

Uit het evenwicht van knooppunt C volgt nu:

$$H_C = \frac{2023,26}{\cos\alpha} + 382,25 \ \mathrm{tg}\alpha - 164,02 = 2289,00 \text{ kg (naar links).}$$

$$N_{CB} \text{ (ter plaatse van C)} = -\ 2023,26 \ \mathrm{tg}\alpha - \frac{382,25}{\cos\alpha} = -\ 1438,96 \text{ kg.}$$

Vervolgens wordt, teneinde de vasthoudkracht H_B in B te bepalen, eerst het evenwicht van knooppunt E beschouwd. Uit evenwichtsbeschouwingen van de in E samenkomende staven zijn de 'dwarskrachten', die op E worden uitgeoefend, te berekenen. Bij staaf BE dient natuurlijk weer rekening gehouden te worden met de op deze staaf werkende belasting. De normaalkracht in staaf DE is bekend. De nog onbekende normaalkrachten in EF en BE zijn dus te berekenen.



Figuur 52

Uit de ontbinding van alle krachten volgens EB en EF volgt:

$$N_{BE} = -\ 268,49 \ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} + 317,68 \ \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\beta} - 2304,50 \ \mathrm{tg}\beta - \frac{399,00}{\cos\beta} = -\ 627,26 \text{ kg.}$$

De normaalkracht in staaf EF is voor het bepalen van de vasthoudkracht in B niet nodig.

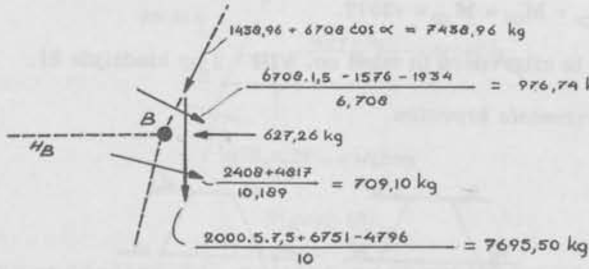
Tenslotte wordt het evenwicht van knooppunt B beschouwd. Uit het evenwicht van de in dit knooppunt samenkomende staven volgen:

a) de door de staven AB, BE en BC op B uitgeoefende 'dwarskracht',

b) de door de staven BE en BC op B uitgeoefende normaalkrachten.

Ten aanzien van de normaalkracht die door BC op B wordt uitgeoefend, dient opgemerkt te worden, dat deze gelijk is aan:

-1438,96 (zie boven) - 6000 (t.g.v. de belasting) = -7438,96 kg.



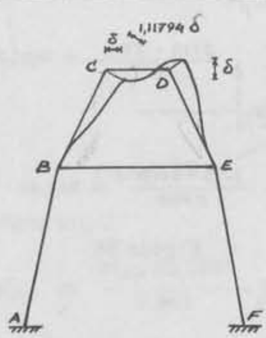
Figuur 53

De gegeven krachten moeten evenwicht maken met N_{AB} en de vasthoudkracht H_B. Ontbinding van alle krachten volgens AB en BE geeft:

$$H_B = -7438,96\,\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} + 976,74\,\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\beta} + 7695,50\,\mathrm{tg}\beta +$$

$$+\,\frac{709,10}{\cos\beta} - 627,26 = +600,11 \text{ kg (naar links).}$$

Momentenverdeling bij verschuiving van regel CD



Figuur 54

De *primaire momenten* volgen uit:

$$M_{BC} = M_{CB} = M_{DE} = M_{ED} \quad \text{en} \quad 1,1179\,\delta = \frac{M_{BC}.\,6,708^2}{6.\,2EI} \quad \text{en}$$

$$M_{CD} = M_{DC} \quad \text{en} \quad \delta = -\,\frac{M_{CD}.\,4^2}{6EI}\,.$$

Uit deze vergelijking volgt:

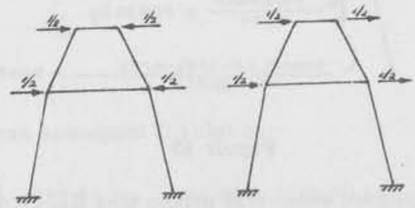
$$M_{BC} : M_{CD} = 35,77 : 45\,.$$

Wordt $M_{CD} = M_{DC} = -4500$ gesteld, dan zijn:

$$M_{BC} = M_{CB} = M_{DE} = M_{ED} = +3577.$$

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel no. VIII - 2 op bladzijde 81.

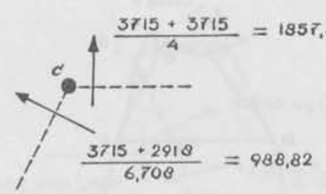
Berekening horizontale krachten



Figuur 55

De berekening van de benodigde horizontale krachten in B en C geschiedt op geheel dezelfde wijze als bij het vorige geval. Daar dit belastingsgeval opgebouwd gedacht kan worden uit twee symmetrische belastingsgevallen (zie figuur hierboven), is het slechts nodig de knooppunten C en B te beschouwen en de berekende horizontale vasthoudkracht met twee te vermenigvuldigen.

Knooppunt C



Figuur 56

De horizontale kracht in C is:

$$- 2\left[1857{,}50 \operatorname{tg}\alpha + \frac{988{,}82}{\cos\alpha}\right] = - 4068{,}38.$$

Deze kracht werkt dus naar rechts.

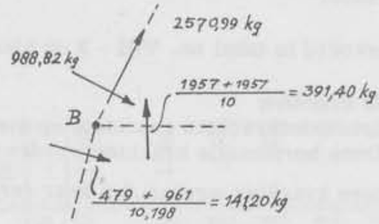
$$N_{BC} = + \frac{1857{,}50}{\cos\alpha} + 988{,}82 \operatorname{tg}\alpha = + 2570{,}99.$$

Knooppunt B

De horizontale kracht in B is:

$$2\left[\ 2570{,}99 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} + 988{,}82 \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\beta} - 391{,}40 \operatorname{tg}\beta + \frac{141{,}20}{\cos\beta}\ \right] =$$

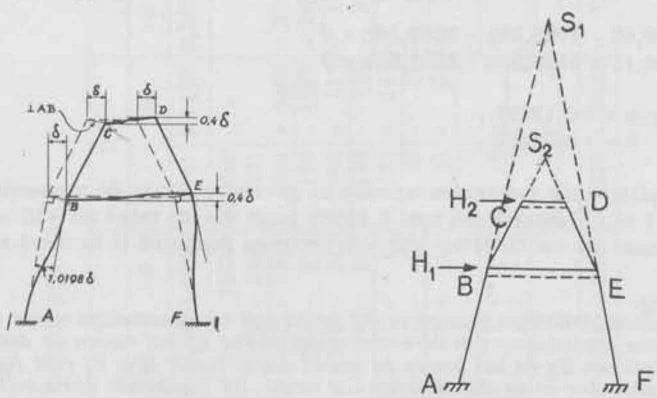
$$= +3456{,}98 \quad \text{(naar links)}.$$



Figuur 57

Momentenverdeling bij gelijke verschuiving van de regels

In dit geval wordt aan beide regels een verplaatsing δ gegeven. De gebruikelijke methode, n.l. regel BE een verplaatsing δ te geven en regel CD op zijn plaats te houden, leidt hier tot een ingewikkelder berekening.



Figuur 58

De *primaire momenten* volgen uit:

$$M_{AB} = M_{BA} = M_{EF} = M_{FE} \quad \text{en} \quad \frac{M_{AB} \cdot 10{,}198^2}{6.3EI} = 1{,}0198\,\delta, \quad M_{AB} = \frac{18EI.\,1{,}0198.\delta}{10{,}198^2}.$$

$$M_{BE} = M_{EB} \quad \text{en} \quad -\frac{M_{BE} \cdot 10^2}{6.4EI} = 0{,}4\,\delta\ , \quad M_{BE} = \frac{24EI.\,0{,}4\,\delta}{10^2}$$

$$M_{CD} = M_{DC} \quad \text{en} \quad -\frac{M_{DC} \cdot 4^2}{6EI} = 0{,}4\,\delta\ , \quad M_{CD} = \frac{2{,}4EI.\delta}{4^2}$$

Uit deze vergelijkingen volgt:

$$M_{AB} : M_{BE} : M_{CD} = 0{,}1765 : 0{,}0960 : 0{,}1500.$$

Wordt $M_{AB} = 17650$ gesteld, dan zijn de primaire momenten:

$$M_{AB} = M_{BA} = M_{EF} = M_{FE} = +\,17650\ ,$$

$$M_{BE} = M_{EB} = -9600\ ,$$

$M_{CD} = M_{DC} = -15000.$

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel no. VIII - 3 op bladzijde 87.

Berekening horizontale krachten

De berekening der vasthoudkrachten geschiedt op overeenkomstige wijze als bij het eerste geval. Deze horizontale krachten worden:

in C: -5098,56
in B: -3501,60
Deze krachten werken dus naar rechts.

Eliminatie vasthoudkrachten

De bij de gegeven belasting (bij onverschuifbare regels) berekende vasthoudkrachten + a maal de horizontale krachten voor het eerste 'verschuivingsgeval' + b maal de horizontale krachten bij het tweede 'verschuivingsgeval' moeten zowel voor knooppunt B als C nul zijn.
Dus:

$$2289{,}00 - 4068{,}38a - 5098{,}56b = 0\ ,$$
$$600{,}11 + 3456{,}98a - 3501{,}60b = 0\ .$$

Oplossing: $a = +0{,}15595$,
$b = +0{,}32451$.

De resulterende momenten worden nu gevonden, door de momenten uit tabel no VIII - 1 te vermeerderen met 0,15595 maal die uit tabel no VIII - 2 en 0,32451 maal die uit tabel no VIII - 3, hetgeen geschied is in tabel no VIII - 4.

Opmerking:

De vasthoudkrachten kunnen in dit geval ook op eenvoudige wijze gevonden worden door toepassing van de momentenstelling op het boven de snede CD gelegen deel om S_2 en het boven de snede BE gelegen deel S_1 (zie figuur 58a). De momenten der in de doorsneden CD resp. BE werkende normaalkrachten om genoemde punten zijn nul, terwijl de in die doorsneden werkende momenten en dwarskrachten bekend zijn resp. gemakkelijk zijn uit te drukken in de bekende momenten. In de twee vergelijkingen zijn dus H_1 en H_2 de enige onbekenden.

TABEL VIII - 3

Knooppunten	A	B			C		D		E			F
Staven	ab	ba	be	bc	cb	cd	dc	de	ed	eb	ef	fe
Vereff. coëff.	-	0,2965	0,4031	0,3004	0,5439	0,4561	0,4561	0,5439	0,3004	0,4031	0,2965	-
Prim. mom.	+17650	+17650	- 9600	-	-	-15000	-15000	-	-	- 9600	+17650	+17650
				+ 4079	+ 8159	+ 6841	+ 3421					
	- 1798	- 3596	- 4889	- 3644	- 1822	+ 2641	+ 5281	+ 6298	+ 3149	- 2445		
			- 1764	- 223	- 445	- 374	- 187	- 1315	- 2630	- 3529	- 2595	- 1298
	+ 295	+ 589	+ 801	+ 597	+ 298	+ 343	+ 685	+ 817	+ 408	+ 400		
			- 163	- 174	- 349	- 292	- 146	- 121	- 243	- 326	- 239	- 120
	+ 50	+ 100	+ 136	+ 101	+ 51	+ 61	+ 122	+ 145	+ 73	+ 68		
			- 28	- 30	- 61	- 51	- 26	- 21	- 42	- 57	- 42	- 21
	+ 9	+ 17	+ 23	+ 18	+ 9	+ 11	+ 21	+ 26	+ 13	+ 12		
			- 5	- 5	- 11	- 9	- 5	- 4	- 8	- 10	- 7	- 4
	+ 1	+ 3	+ 4	+ 3	+ 2	+ 2	+ 4	+ 5	+ 2	+ 2		
			- 1	- 1	- 2	- 2	- 1	- 1	- 1	- 2	- 1	- 1
			+ 1	+ 1			+ 1	+ 1				
Res. mom.	+16207	+14763	-15485	+ 722	+ 5829	- 5829	- 5830	+ 5830	+ 721	-15487	+14766	+16206

TABEL VIII - 4

Knooppunten	A	B			C		D		E			F
Staven	ab	ba	be	bc	cb	cd	dc	de	ed	eb	ef	fe
Momenten tabel VIII-1	- 2408	- 4817	+ 6751	- 1934	- 1576	+ 1576	- 47	+ 47	+ 2084	- 4796	+ 2712	+ 1357
0,155595xmom. tabel VIII-2	- 75	- 150	- 305	+ 455	+ 579	- 579	- 579	+ 579	+ 455	- 305	- 150	- 75
0,32451xmom. tabel VIII-3	+ 5259	+ 4791	- 5025	+ 234	+ 1892	- 1892	- 1892	+ 1892	+ 234	- 5025	+ 4791	+ 5259
Eindmomenten	+ 2776	- 176	+ 1421	- 1245	+ 895	- 895	- 2518	+ 2518	+ 2773	-10126	+ 7353	+ 6541

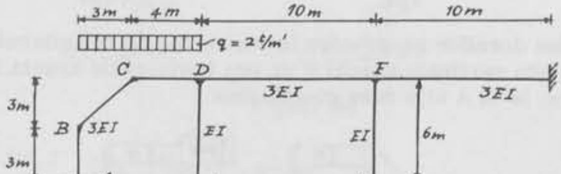
Hoofdstuk IX

CONSTRUCTIES MET GEKNIKTE STAVEN

In de voorgaande hoofdstukken werden bij de berekening van de knooppuntsmomenten alle knooppunten van de constructie (uitgezonderd volledige inklemmingen, scharnier- en rolopleggingen) in het vereffeningsproces opgenomen. Met andere woorden aan deze knooppunten werd beurtelings toegestaan te draaien, terwijl van de overige de draaiing werd belet.

Het is echter niet noodzakelijk alle knooppunten op deze wijze in het vereffeningsproces te betrekken. Bij het volgende voorbeeld (zie figuur 59) zullen de knooppunten B en C uit het vereffeningsproces worden weggelaten. Het gedeelte ABCD van de constructie zal dan als één staaf worden beschouwd. Zo'n staaf wordt dan een geknikte staaf genoemd. Dit voorbeeld moet echter gezien worden als een toelichting op de wijze van berekenen, omdat de hoeveelheid rekenwerk gelijk, zo niet meer, is dan die, welke de tot nu toe steeds gevolgde methode vergt. Hoewel bij de nu te behandelen berekeningswijze geen vasthoudkracht in B of C wordt ingevoerd, vereist de bepaling van vereffenings- en overdrachtscoëfficienten meer rekenwerk. Bovendien moet men, als de vereffeningsmomenten bekend zijn, de momenten in B en C nog berekenen, wat neerkomt op het bepalen van de momentenverdeling in een eenvoudig statisch onbepaalde constructie. Neemt echter het aantal knikken toe, zodat ook het aantal vasthoudkrachten zou toenemen, dan komt de nu te behandelen methode in het voordeel wat de hoeveelheid rekenwerk betreft.

Heeft de staaf een gebogen vorm, dan zou men, volgens de in de vorige hoofdstukken behandelde methode, theoretisch een oneindig aantal vasthoudkrachten moeten invoeren. Voor zo'n vraagstuk is het zelfs noodzakelijk de nu volgende berekeningsmethode toe te passen.

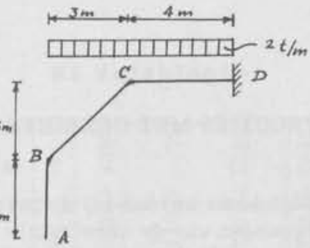


Figuur 59

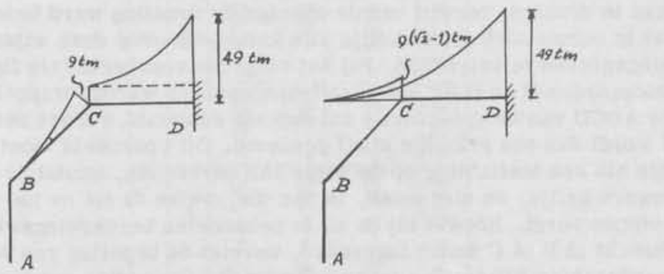
Berekening

Bij de uitwerking van het voorbeeld wordt, ter berekening van de primaire momenten de vereffenings- en overdrachtscoëfficienten, het gedeelte ABCD in D ingeklemd gedacht, terwijl A vrij kan bewegen (zie figuur 60).

Eerst worden de hoekverdraaiing φ (met de wijzers van het uurwerk mee is positief), de verticale verplaatsing v (naar boven is positief) en de horizontale verplaatsing h (naar rechts is positief) berekend van het punt A ten gevolge van de gegeven belasting.



Figuur 60



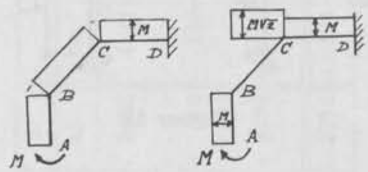
Figuur 61

$$\varphi_q = \frac{-\frac{1}{3}.49.7 - \frac{1}{3}.9\,(\sqrt{2}-1).3}{3EI} = \frac{-114{,}33 - 3{,}73}{3EI} = \frac{-118{,}06}{3EI},$$

$$v_q = \frac{-\frac{1}{3}.49.7.\frac{3}{4}.7 - \frac{1}{3}.9.(\sqrt{2}-1).3.\frac{3}{4}.3}{3EI} = \frac{-600{,}25 - 8{,}39}{3EI} = \frac{-608{,}64}{3EI},$$

$$h_q = \frac{\frac{1}{3}.9.\sqrt{2}.3(3+\frac{3}{4}.3) + (\frac{1}{3}.49.7 - \frac{1}{3}.9.3).6}{3EI} = \frac{66{,}83 + 632}{3EI} = \frac{698{,}83}{3EI}.$$

Daarna worden dezelfde grootheden berekend als op het uiteinde A resp. een moment M, een verticale kracht V en een horizontale kracht H aangrijpt. Voor een moment M in A zijn deze grootheden:



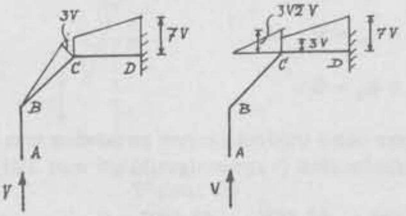
Figuur 62

$$\varphi_M = \frac{M(3 + 3\sqrt{2} + 4)}{3EI} = \frac{11{,}24M}{3EI},$$

$$v_M = \frac{M.3\sqrt{2}.\frac{3}{2} + M.4.5}{3EI} = \frac{26{,}36M}{3EI},$$

$$h_M = \frac{-3M.\frac{3}{2} - 3\sqrt{2}.M.4\frac{1}{2} - M.4.6}{3EI} = \frac{-47{,}58M}{3EI}.$$

Voor een verticale kracht V zijn genoemde grootheden:



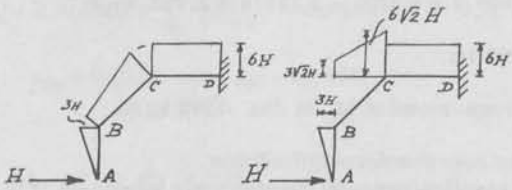
Figuur 63

$$\varphi_V = \frac{\frac{3V.3\sqrt{2}}{2} \quad \frac{3V + 7V}{2}.4}{3EI} = \frac{26{,}36V}{3EI}$$

$$v_V = \frac{\frac{3V.3\sqrt{2}}{2}.2 + \frac{3V.4}{2}\left(3 + \frac{1}{3}.4\right) + \frac{7V.4}{2}\left(3 + \frac{2}{3}.4\right)}{3EI} = \frac{118{,}06V}{3EI}$$

$$h_V = \frac{\frac{-3V.3\sqrt{2}}{2}.5 - \frac{3V + 7V}{2}.4.6}{3EI} = -\frac{151{,}82V}{3EI}.$$

Voor een horizontale kracht H zijn deze grootheden



Figuur 64

$$\varphi_H = \frac{\frac{-3H.3}{2} - \frac{3H + 6H}{2}.3\sqrt{2} - 6H.4}{3EI} = -\frac{47{,}59H}{3EI},$$

$$v_H = \frac{-\frac{3H.3\sqrt{2}}{2}.1 - \frac{6H.3\sqrt{2}}{2}.2 - 6H.4.5}{3EI} = -\frac{151{,}82}{3EI},$$

$$h_H = \frac{\frac{3H.3}{2}.2 + \frac{3H.3\sqrt{2}}{2}.4 + \frac{6H.3\sqrt{2}}{2}.5 + 6H.4.6}{3EI} = +\frac{242{,}08}{3EI}.$$

Primaire momenten

De primaire momenten kunnen nu gevonden worden uit de voorwaarden, dat ten gevolge van de bekende belasting q en de nog onbekende grootheden M, H en V de hoekverdraaiing, de horizontale en verticale verplaatsingen van A nul zijn. Dus:

$$+\varphi_q + \varphi_M + \varphi_V + \varphi_H = 0\ ,$$

$$+v_q + v_M + v_V + v_H = 0 \quad \text{en}$$

$$+h_q + h_M + h_V + h_H = 0\ .$$

Substitutie van de voor deze uitdrukkingen gevonden waarden levert drie vergelijkingen met drie onbekenden (vermenigvuldigd met 3EI).

$$-118{,}06 + 11{,}24M + 26{,}36V - 47{,}59H = 0\ , \tag{1}$$

$$-608{,}64 + 26{,}36M + 118{,}06V - 151{,}82H = 0 \quad \text{en} \tag{2}$$

$$+698{,}83 - 47{,}58M - 151{,}82V + 242{,}08H = 0\ . \tag{3}$$

Oplossing:

$H = +3{,}2307$ ton,
$V = +8{,}2090$ ton en
$M = +4{,}9305$ tm.

Op het staafeinde A werkt dus een positief moment groot +4,9305 tm. Het primaire Cross-moment is daar dus -4,9305 tm = -4931 kgm. Het op het staafeinde bij D werkende moment volgt uit het evenwicht n.l.:

$$+M_D + 8{,}209.7 + 4{,}9305 - 3{,}231.6 - 2.7.3{,}5 = 0$$

$$M_D = +5{,}992 \text{ tm.}$$

Het primaire Cross-moment M_D is dus -5992 kgm.

Vereffenings- en overdrachtscoëfficiënten

Teneinde de vereffeningscoëfficienten voor knooppunt D te kunnen bepalen, is het noodzakelijk de hoekverdraaiing in D van het constructiedeel ABCD te kennen, ten gevolge van een aldaar werkend moment M.

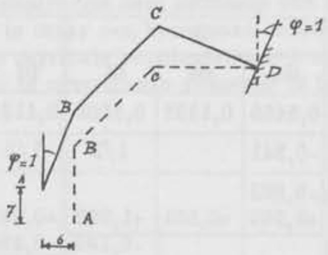
Om gebruik te kunnen maken van de hiervoor afgeleide invloedsgrootheden, wordt het staafeinde bij D onder een hoek $\varphi = +1$ ingeklemd, terwijl het uiteinde A vrij gedacht wordt. Dit uiteinde draait dan eveneens over een hoek $\varphi = +1$, terwijl de horizontale en verticale verplaatsingen van dit punt resp. -6 en +7 zijn. In deze toestand worden in A weer een moment M en twee krachten V en H aangebracht om deze hoekverdraaiing en deze verplaatsingen op te heffen.

De vergelijkingen worden (vermenigvuldigd met 3EI):

$$+3EI + 11{,}24M + 26{,}36V - 47{,}59H = 0\ ,$$
$$+7EI + 26{,}36M + 118{,}06V - 151{,}82H = 0 \quad \text{en}$$
$$-6EI - 47{,}58M - 151{,}82V + 242{,}08H = 0\ .$$

Oplossing:

$H = -0{,}39547EI$,
$V = -0{,}53106EI$ en
$M = -0{,}69588EI$.



Figuur 65

Het Cross-moment dat in A werkt is dus +0,69588EI.

Uit het evenwicht van ABCD volgt voor het in D op het staafeinde werkende moment:

$$+M_D + 0{,}39547EI.6 - 0{,}53106EI.7 - 0{,}69588EI = 0,$$

$$M_D = +2{,}0406EI.$$

Het in D werkende Cross-moment is dus -2,0406EI.

De overdrachtscoëfficient van D naar A is dus: $\dfrac{+0{,}69588EI}{-2{,}0406EI} = -0{,}341.$

Verder volgt uit het bovenstaande: $k_{da} = 2{,}0406EI.$

Voor knooppunt D geldt nu:

$$k_{da} : k_{de} : k_{df} = 2{,}0406EI : \frac{3EI}{6} : \frac{4.3EI}{10} = 2{,}0406 : 0{,}5 : 1{,}2,$$

$$\mu_{da} = 0{,}5455; \quad \mu_{de} = 0{,}1337 \quad \text{en} \quad \mu_{df} = 0{,}3208.$$

Knooppunt F:

$$k_{fd} : k_{fg} : k_{fh} = \frac{4.3EI}{10} : \frac{3.EI}{6} : \frac{4.3EI}{10} = 12 : 5 : 12,$$

$$\mu_{fd} = 0{,}4138; \quad \mu_{fg} = 0{,}1724 \quad \text{en} \quad \mu_{fh} = 0{,}4138.$$

Vereffening

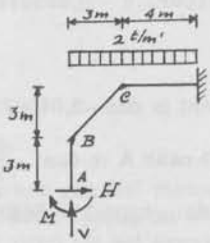
De vereffening is uitgevoerd in de tabel op blz. 94.

Berekening van de momenten M_b en M_c.

Zoals reeds in het begin van dit hoofdstuk vermeld, kunnen de momenten in B en C niet uitsluitend uit het evenwicht worden opgelost, daar de reacties in A en D nog onbekend zijn. Wordt het staafeinde A los gedacht en laat men op dit uiteinde het uit de tabel volgende moment n.l. + 6,084 tm en de nog onbekende krachten V en H werken, dan wordt voor het moment in D gevonden:

$$+ 6{,}084 + 7\,V - 6\,H - 49 \text{ tm}.$$

Knooppunten	A	D			F			H
Staven	ad	da	de	df	fd	fg	fh	hf
Vereff. coëff.	-	0,5455	0,1337	0,3208	0,4138	0,1724	0,4138	-
Overdr. coëff.		-0,341		1/2	1/2		1/2	
Prim. mom.	-4,931	-5,992						
	-1,115	+3,269	+0,801	+1,922	+0,961			
				-0,199	-0,398	-0,166	-0,397	-0,199
	-0,037	+0,109	+0,026	+0,064	+0,032			
				-0,007	-0,013	-0,006	-0,013	-0,007
	-0,001	+0,004	+0,001	+0,002	+0,001			
					-0,001			
Res. mom.	-6,084	-2,610	+0,828	+1,782	+0,582	-0,172	-0,410	-0,206



Figuur 66

Dit moment moet gelijk zijn aan -2,610 (zie tabel).
Uit deze gelijkheid volgt:

$$V = + 5,758 + 0,85714\ H.$$

Teneinde V en H afzonderlijk te kunnen bepalen, moet nog gebruik gemaakt worden van een vormveranderingsvergelijking. Hier wordt de vormveranderingsvergelijking genomen, die aangeeft, dat de hoekverdraaiing in A nul is (zie bladzijde 92). Bij die vergelijking is er van uitgegaan, dat de hoekverdraaiing in D nul was. Dit is nu niet het geval. De hoekverdraaiing in D kan echter berekend worden door ligger DF in beschouwing te nemen.

$$\varphi_D = -\frac{1,782.10}{3.3EI} + \frac{0,582.10}{6.3EI} = -\frac{4,970}{3EI}$$

De bovenbedoelde vormveranderingsvergelijking wordt nu:

$$11,24.6,084 + 26,36\ (5,758 + 0,85714\ H) - 47,59\ H - (118,06 + 4,970) = 0$$

Oplossing:

$H = +3,886$ ton,
$V = +5,758 + 0,85714.3,886 = 9,088$ ton.

Uit het evenwicht zijn op eenvoudige wijze de momenten in B en C te bepalen.

Indien de behandelde constructie deel uitmaakt van een raamwerk, waarin A geen vaste inklemming is maar een knooppunt, zouden de momenten in A en D nog door horizontale en verticale verplaatsingen δ moeten worden bepaald. Dit vraagstuk wordt nader in ogenschouw genomen in het volgende hoofdstuk.

Hoofdstuk X

BOGEN

INLEIDING

Wanneer in een constructie gebogen staven voorkomen, is men aangewezen op de in het vorige hoofdstuk beschreven methode.

Het zal blijken, dat in het algemeen bij flauwe bogen, de vormverandering door normaalkracht in rekening gebracht moet worden, en wel voor die gevallen, waarbij de verhouding van de pijl tot de traagheidsstraal van het profiel een bepaalde grens overschrijdt. Hetzelfde geldt natuurlijk voor portalen. Tot nu toe is hiervan afgezien, daar dit effect bij 'normale' verhoudingen is te verwaarlozen.

In het laatste hoofdstuk van het Ie deel wordt een voorbeeld behandeld van een geval, waarbij juist de spanningen en vormveranderingen door de normaalkracht overwegen en die door de momenten als correctie worden beschouwd.

Allereerst zal aan de hand van een, over de volle lengte gelijkmatig belaste, symmetrische parabolische boog waarvan het traagheidsmoment van de doorsnede zodanig verloopt, dat $EI_s = \frac{EI_o}{\cos\alpha}$, nagegaan worden bij welke verhouding van de pijl tot de traagheidsstraal verwaarlozing van de lengteverandering door normaalkracht nog toelaatbaar is. I_o is het traagheidsmoment van de topdoorsnede. De boog wordt verondersteld deel uit te maken van een grotere constructie. In de primaire toestand is hij aan de uiteinden ingeklemd.

In het tweede deel van dit hoofdstuk zal het een en ander worden vermeld aangaande bogen van een willekeurige vorm en met een willekeurig verlopend traagheidsmoment van de doorsnede.

PARABOLISCHE BOOG

Stijfheden en overdrachtscoëfficiënten

Ter berekening van de stijfheden en de overdrachtscoëfficienten wordt de inklemming in A vervangen door een scharnieroplegging en aldaar een moment -M aangebracht. Als hoofdsysteem wordt dus gekozen de eenzijdig ingeklemde boog en wel in B. De horizontale en verticale reacties moeten nu zo groot zijn, dat de horizontale en verticale verplaatsingen van A = 0 zijn.

Bij verwaarlozing van de lengteveranderingen zijn:

de verticale verplaatsing naar beneden van A door M:

$$v_M = \int_0^L \frac{M\,ds}{EI_s}\,x = \int_0^L \frac{M\,ds}{EI_o \frac{ds}{dx}}\,x = \int_0^L \frac{M\,dx}{EI_o}\,x = \frac{1}{2}\frac{M L^2}{EI_o},$$

de horizontale verplaatsing naar rechts van A door M:

$$h_M = \int_0^L \frac{M\,dx}{EI_o} y = \frac{M}{EI_o} \int_0^L y\,dx = \frac{M}{EI_o}\,\frac{2}{3}\,f\,L$$

de verticale verplaatsing naar boven van A door V:

$$v_V = \int_0^L \frac{V\,x\,dx}{EI_o} x = \frac{1}{3} \frac{V\,L^3}{EI_o}$$

zie fig. 67.

de horizontale verplaatsing naar links van A door V:

$$h_V = \int_0^L \frac{V\,x\,dx}{EI_o} y = \frac{V}{EI_o} \int_0^L x \frac{4\,f\,x\,(L - x)}{L^2}\,dx = \frac{V\,f\,L^2}{3EI_o},$$

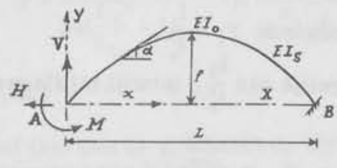
de verticale verplaatsing naar boven van A door H:

$$v_H = \int_0^L \frac{H\,y}{EI_o}\,dx\,x = \frac{H}{EI_o} \int_0^L x\,y\,dx = \frac{H\,f\,L^2}{3EI_o}$$

de horizontale verplaatsing naar links van A door H:

$$h_H = \int_0^L \frac{H\,y\,dx}{EI_o}\,y = \frac{H}{EI_o}.2S = \frac{H}{EI_o}\,2.\frac{2}{3}\,f\,L\,\frac{2}{5}\,f = \frac{8}{15}\,\frac{H\,f^2\,L}{EI_o}.$$

(S is het statisch moment van het door de boog en de koorde AB ingesloten oppervlak ten opzichte van AB).



Figuur 67

Uit de voorwaarde, dat zowel de totale verticale verplaatsing als de horizontale verplaatsing nul moeten zijn, volgen onderstaande vergelijkingen:

$$\frac{1}{2}\,M\,L^2 = \frac{1}{3}\,V\,L^3 + \frac{H\,f\,L^2}{3},$$

$$\frac{2}{3}\,M\,f\,L = \frac{V\,f\,L^2}{3} + \frac{8}{15}\,H\,f^2 L.$$

Voor H wordt gevonden: $+\frac{5\,M}{6\,f}$ (naar links), voor V: $+\frac{2\,M}{3\,L}$ (naar boven).

De draaiing φ van A bedraagt dus: $\frac{M\,L}{EI_o} - \frac{2\,M}{3\,L} \int_0^L \frac{x\,dx}{EI_o} - \frac{5\,M}{6\,f} \int_0^L \frac{y\,dx}{EI_o} =$

$$\frac{M\,L}{EI_o} - \frac{M\,L}{3EI_o} - \frac{5\,M}{6\,f}\,\frac{\frac{2}{3}\,f\,L}{EI_o} = \frac{M\,L}{9EI_o}$$

De stijfheid is dus $\boxed{\frac{9EI_o}{L} = k}$.

Het overdrachtsmoment M_B wordt: $-M + V.L = -M + \frac{2}{3}M = -\frac{1}{3}M.$

Dit is het moment dat de staaf op het knooppunt uitoefent en daar in A de staaf een moment +M op het knooppunt uitoefent, is de overdrachtscoëfficient $r = -\frac{1}{3}$.

Nadert nu de pijl f tot nul, d.w.z. nadert de boog tot een rechte balk, dan zouden k en r niet meer overeenkomen met de vroeger voor dit geval gevonden waarden van genoemde grootheden en zou $H = \infty$ worden. Het blijkt noodzakelijk te zijn, de vormverandering door normaalkracht in rekening te brengen.

De horizontale en verticale verplaatsing door dwarskracht kan buiten beschouwing blijven, daar deze altijd klein blijken te zijn.

Brengt men de lengteverandering in rekening, dan wordt de horizontale verplaatsing van A door H vermeerderd met

$$\int_0^L H.\cos^2\alpha \frac{ds}{EF_s} = \int_0^L H.\cos\alpha \frac{dx}{EF_s} = h_n .$$

De verticale verplaatsing door de normaalkracht ten gevolge van H is bij symmetrische bogen, dus ook in het gegeven geval, nul.

De horizontale verplaatsing door de van V afkomstige normaalkracht is eveneens nul, terwijl de verticale verplaatsing verwaarloosd mag worden, daar V altijd betrekkelijk klein is. Het zal uit de volgende berekening blijken, dat bij de limiet uitsluitend de vermelde vermeerdering van de horizontale verplaatsing door H verantwoordelijk is voor de wijziging in de stijfheid en overdrachtscoëfficienten.

Het oppervlak der doorsnede $F_s = \frac{I_s}{i_s^2}$.

Deze vorm is ongeveer gelijk aan $\frac{I_o}{i_o^2}$, terwijl bij flauwe bogen bovendien $\cos\alpha = 1$ is te stellen.

h_n wordt dan $\int_0^L \frac{H\,dx\,i_o^2}{EI_o} = \frac{H\,L\,i_o^2}{EI_o}$.

De beide vergelijkingen, waaruit H en V zijn op te lossen, worden dan:

$$\frac{1}{2} M L^2 = \frac{1}{3} V L^3 + \frac{1}{3} H f L^2, \qquad (v = 0)$$

$$\frac{2}{3} M f L = \frac{1}{3} V f L^3 + \frac{8}{15} H f^2 L + H i_o^2 L . \qquad (h = 0)$$

Hieruit volgt: $H = \frac{5Mf}{6f^2 + 30i_o^2}$,

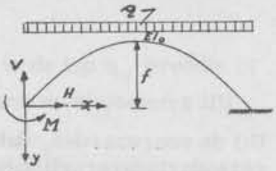
$$V = \frac{4f^2 + 45i_o^2}{6f^2 + 30i_o^2} \frac{M}{L} .$$

De draaiing van A bedraagt dan:

$$= \frac{M L}{EI_o} - \frac{1}{2}\frac{V L^2}{EI_o} - \frac{2}{3}\frac{H f L}{EI_o} = \frac{4f^2 + 45i_o^2}{36f^2 + 180i_o^2} \frac{M L}{EI_o} .$$

De stijfheid $k = \frac{M}{\varphi} = \frac{EI_o}{L} \cdot \frac{36f^2 + 180i_o^2}{4f^2 + 45i_o^2}$.

Het overdrachtsmoment M wordt dan:



$$-M + V.L = M\left(-1 + \frac{4f^2 + 45i_o^2}{6f^2 + 30i_o^2}\right) = \frac{-2f^2 + 15i_o^2}{6f^2 + 30i_o^2}\,M$$

Nadert de pijl tot nul dan wordt $H = 0$, $k = \frac{4EI_o}{L}$ en $r = +\frac{1}{2}$.

Deze grootheden krijgen dan dus wel de waarden die eerder zijn afgeleid voor een rechte prismatische balk.

Bij verwaarlozing van de lengteveranderingen door normaalkracht vallen de termen met i_o weg en worden uiteraard voor $H = \frac{5}{6}\frac{M}{f}$, voor $K = \frac{9EI_o}{L}$ en voor de overdrachtscoëfficient $r = -\frac{1}{3}$ gevonden.

r wordt nul wanneer $-2f^2 + 15i_o^2 = 0$, $\quad f = \sqrt{i_o^2 .\ 7{,}5} = 2{,}74 i_o$

Bij een boog met rechthoekige doorsnede (hoogte in de top h_o en breedte b) is

$$I_o = \frac{1}{12}\, b\, h_o^3, \quad \text{dus} \quad i_o^2 = \frac{\frac{1}{12}\, b\, h_o^3}{b\, h_o} = \frac{1}{12}\, h_o^2.$$

$$k = \frac{144\left(\frac{f}{h_o}\right)^2 + 60}{16\left(\frac{f}{h_o}\right)^2 + 15}\,\frac{EI_o}{L} \qquad r = \frac{-8\left(\frac{f}{h_o}\right)^2 + 5}{24\left(\frac{f}{h_o}\right)^2 + 10} \qquad H = \frac{M}{h_o}\cdot\frac{5}{6\frac{f}{h_o} + \frac{5}{2}\frac{h_o}{f}} = \frac{M}{f}\cdot\frac{5}{6 + \frac{5}{2}\left(\frac{h_o}{f}\right)^2}$$

r wordt nul voor $f = 0{,}8h_o$.

In onderstaande tabel (zie ook de grafieken op blz. 100) is het verloop van k, r en H gegeven als f toeneemt van 0 tot $5h_o$.

f	k	r	H	H
0 h_o	4,00 $\frac{EI_o}{L}$	+ 0,500	0 $\frac{M}{h_o}$	0 $\frac{M}{f}$
0,25 h_o	4,31 „	+ 0,391	0,4344 „	0,1086 „
0,50 h_o	5,05 „	+ 0,188	0,624 „	0,312 „
0,80 h_o	6,04 „	0	0,625 „	0,500 „
1 h_o	6,56 „	- 0,088	0,59 „	0,590 „
2 h_o	8,05 „	- 0,254	0,3775 „	0,755 „
3 h_o	8,53 „	- 0,296	0,265 „	0,795 „
4 h_o	8,74 „	- 0,313	0,203 „	0,812 „
5 h_o	8,83 „	- 0,320	0,164 „	0,820 „
∞ h_o	9,00 „	- 0,333	0,000 „	0,833 „

Primaire momenten

De primaire momenten worden, indien de samendrukking door normaalkracht in rekening wordt gebracht, op overeenkomstige wijze gevonden als k en r in het voorgaande.

Uit symmetrie-overwegingen volgt $V = \frac{1}{2}\, q\, L$.

Uit de voorwaarden, dat h_A en φ_A gelijk aan nul zijn, volgen de beide vormveranderingsvergelijkingen waaruit H en M zijn op te lossen:

$$1)\quad \int_0^L \frac{\frac{1}{2} q x^2 dx}{EI_o} + \int_0^L \frac{M\, dx}{EI_o} + \int_0^L \frac{H\, y\, dx}{EI_o} - \int_0^L \frac{\frac{1}{2} q\, L\, x\, dx}{EI_o} = 0 \quad (\text{draaiing } \varphi_A = 0)$$

$$2)\quad \int_0^L \frac{\frac{1}{2} q x^2 y\, dx}{EI_o} + \int_0^L \frac{M\, y\, dx}{EI_o} + \int_0^L \frac{H\, y^2 dx}{EI_o} + \frac{H\, i_o^2\, L}{EI_o} - \int_0^L \frac{\frac{1}{2} q\, L\, x\, y\, dx}{EI_o} = 0$$

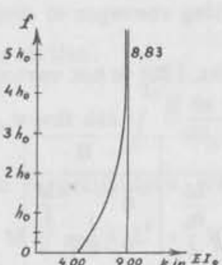
(hor. verpl. $h_A = 0$.)

of

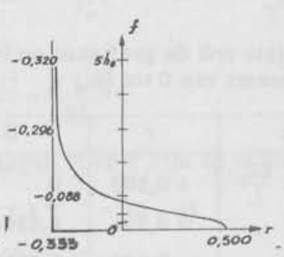
$$\frac{1}{6} q L^3 + M L + \frac{2}{3} H f L - \frac{1}{4} q L^3 = 0 , \tag{1}$$

$$\frac{1}{10} f q L^3 + \frac{2}{3} M f L + \frac{8}{15} H f^2 L + H i_o^2 L - \frac{1}{6} q f L^3 = 0 . \tag{2}$$

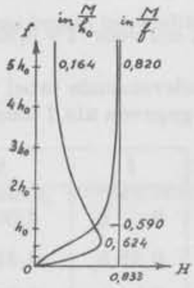
De invloed van de lengteverandering op de verticale verplaatsing is, evenmin als de invloed van de door V en q veroorzaakte lengteverandering op de horizontale verplaatsing, van enige practische betekenis, zodat alleen de horizontale verplaatsing tengevolge van de door H veroorzaakte lengteverandering in rekening is gebracht [5].



Figuur 68



Figuur 69



Figuur 70

Uit deze beide vergelijkingen volgt:

$$H = \frac{q f L^2}{8f^2 + 90 i_o^2},$$

$$M = \frac{q L^2}{12} - \frac{q f^2 L^2}{12 f^2 + 135 i_o^2} = \frac{q L^2}{12} \cdot \frac{45 i_o^2}{4f^2 + 45 i_o^2}$$

Nadert f tot 0, dan worden, overeenkomstig de verwachting, $H = 0$ en $M = \frac{1}{12} q L^2$.

Bij verwaarlozing van de lengteverandering valt i_o weg en wordt $H = \frac{q L^2}{8f}$ en $M = 0$. Voor $f = 0$ zou $H = \infty$ worden.

5) Bij exacte berekening, bijv. met behulp van de stelling van Castigliano, treedt dit nog duidelijker aan het licht. De invloed van de dwarskracht blijkt dan eveneens onbetekenend te zijn.

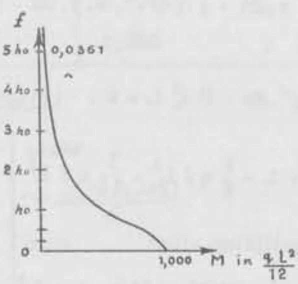
Voor een boog met rechthoekige doorsnede (hoogte in de top h_o, breedte b) wordt $i_o^2 = \frac{1}{12}\, h_o^2$ en

$$H = \frac{2\,q\,f\,L^2}{16\,f^2 + 15\,h_o^2} \quad \text{of} \quad H = \frac{2\,q\,L^2}{f} \cdot \frac{1}{16 + 15(\frac{h_o}{f})^2} = \frac{2\,q\,L^2}{h_o} \cdot \frac{1}{16\,\frac{f}{h_o} + 15\,\frac{h_o}{f}}$$

$$M \text{ wordt: } \frac{q\,L^2}{12} \cdot \frac{15h_o^2}{16f^2 + 15h_o^2} = \frac{q\,L^2}{12} \cdot \frac{15}{16(\frac{f}{h_o})^2 + 15}$$

In onderstaande tabel en grafiek is het verloop van het primaire moment gegeven als f toeneemt van 0 tot ∞.

f	M
0 h_o	1 $\frac{q\,L^2}{12}$
0,25 h_o	0,938 "
0,50 h_o	0,790 "
0,80 h_o	0,595 "
1 h_o	0,484 "
2 h_o	0,190 "
3 h_o	0,0945 "
4 h_o	0,0553 "
5 h_o	0,0361 "
∞ h_o	0,000 "



Figuur 71

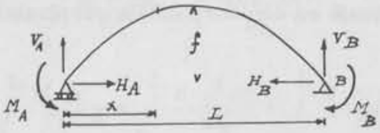
Vasthoudkrachten

Daar de boog deel uitmaakt van een raamwerk, dienen dikwijls de horizontale en verticale vasthoudkrachten bepaald te worden. Dit is, althans voor de horizontale vasthoudkrachten, een eenvoudig statisch onbepaald vraagstuk, evenals bij de geknikte staven.

Stel, dat na de vereffening in A en B de momenten M_a en $-M_b$ werken op het in onderstaande figuur getekende hoofdsysteem. De onbekende vasthoudkrachten zijn dan V_A, H_A, V_B en H_B. V_A en V_B volgen uit het evenwicht en bedragen:

$$V_A = \tfrac{1}{2}\,q\,L + \frac{M_a - M_b}{L},$$

$$V_B = \tfrac{1}{2}\,q\,L + \frac{M_b - M_a}{L}.$$



Figuur 72

Uit het horizontale evenwicht volgt: $H_A = - H_B = H$.
De formule voor het moment in een willekeurige doorsnede wordt:

$$M_x = -M_a + V_A . x - \tfrac{1}{2}\, qx^2 - H . y =$$

$$= -M_a + \tfrac{1}{2}\, q\, L\, x - \tfrac{1}{2}\, qx^2 + \frac{M_a - M_b}{L} . x - H . y \; .$$

Uit de voorwaarde, dat de punten A en B geen horizontale verplaatsing ten opzichte van elkaar ondergaan volgt:

$$\int_0^l \frac{N_x}{EF} \cdot \frac{dN}{dH}\, dx = \frac{L \cdot N}{EF} = \frac{L N i_0^2}{EI_0}$$

$$\int_0^L \frac{M_x . dx}{EI_o} . y - \frac{H . L . i_o^2}{EI_o} = 0 \quad \text{of}$$

$$-M_a \int_0^L y . dx + \tfrac{1}{2}\, q\, L \int_0^L x . y . dx - \tfrac{1}{2}\, q \int_0^L x^2 . y . dx + \frac{M_a - M_b}{L} \int_0^L x . y . dx -$$

$$-H \int_0^L y^2 . dx - H\, i_o^2\, L = 0 \; .$$

$$-\frac{2}{3} M_a\, f\, L + \frac{1}{6}\, q\, f\, L^3 - \frac{1}{10}\, q\, f\, L^3 + \frac{1}{3}\,(M_a - M_b)\, f\, L - \frac{8}{15}\, H\, f^2\, L - H\, i_o^2\, L = 0.$$

Uit deze vergelijking volgt:

$$H = \frac{q\, f\, L^2 - 5f(M_a + M_b)}{8f^2 + 15 i_o^2} = \frac{1}{f}\, \frac{q\, L^2 - 5(M_a + M_b)}{8 + 15(\frac{i_o}{f})^2}$$

voor $f = 0$ wordt $H = 0$.

Bij verwaarlozing der lengteverandering wordt:

$$H = \frac{q\, L^2 - 5(M_a + M_b)}{8f} \quad \text{en zou bij } f = 0 \;\; H = \infty \text{ worden.}$$

Voor een boog met rechthoekige doorsnede (hoogte in de top h_o, breedte b) wordt

$$H = \frac{q\, L^2 - 5(M_a + M_b)}{f} \cdot \frac{4}{32 + 5(\frac{h_o}{f})^2} = \frac{q\, L^2 - 5(M_a + M_b)}{h_o} \cdot \frac{4}{32\frac{f}{h_o} + 5\frac{h_o}{f}}$$

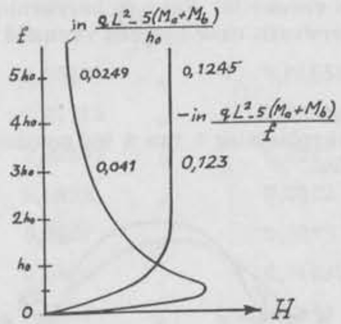
In onderstaande tabel en grafiek is het verloop van H gegeven als f toeneemt van 0 tot $\infty\, h_o$ (zie blz. 103).

Om deze vasthoudkrachten te elimineren moeten allereerst de primaire momenten bij een verticale en een horizontale verplaatsing δ berekend worden.

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} b h^3}{b h}}$$

$$\left[\frac{i_1}{f}\right]^2 = \frac{\frac{h^2}{12}}{f^2} = \frac{1}{12}\left[\frac{h}{f}\right]^2$$

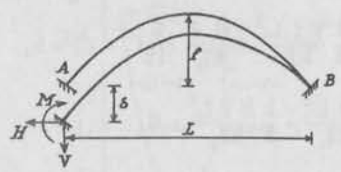
f	H		H	
		$\dfrac{qL^2 - 5(M_a + M_b)}{f}$		$\dfrac{qL^2 - 5(M_a + M_b)}{h_o}$
0 h_o	0		0	
0,25 h_o	0,0358	"	0,143	"
0,50 h_o	0,0770	"	0,154	"
0,80 h_o	0,1005	"	0,1255	"
1 h_o	0,1080	"	0,108	"
2 h_o	0,1205	"	0,0603	"
3 h_o	0,123	"	0,041	"
4 h_o	0,124	"	0,031	"
5 h_o	0,1245	"	0,0249	"
∞ h_o	0,125	"	0,000	"



Figuur 73

Verticale verplaatsing

Geef A een verticale verplaatsing δ, dan worden de vormveranderingsvoorwaarden:



Figuur 74

$$\varphi = 0 : \int_0^L \frac{M\,dx}{EI_o} + \int_0^L \frac{H.y.dx}{EI_o} - \int_0^L \frac{V.x.dx}{EI_o} = 0,$$

$$h = 0 : \frac{H.L}{EF} + \int_0^L \frac{M\,dx}{EI_o}\,y + \int_0^L \frac{H.y^2\,dx}{EI_o} - \int_0^L \frac{V.x.y\,dx}{EI_o} = 0,$$

$$v = \delta : - \int_0^L \frac{M\,dx}{EI_o}\,x - \int_0^L \frac{H.y.x\,dx}{EI_o} + \int_0^L \frac{V.x^2\,dx}{EI_o} = \delta$$

$$\text{of} \quad \frac{M\,L}{EI_o} + \frac{2}{3}\frac{H\,f\,L}{EI_o} - \frac{1}{2}\frac{V\,L^2}{EI_o} = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{H\,i_o^2\,L}{EI_o} + \frac{2}{3}\frac{M\,f\,L}{EI_o} + \frac{8}{15}\frac{H\,f^2\,L}{EI_o} - \frac{1}{3}\frac{V\,f\,L^2}{EI_o} = 0, \tag{2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{M\,L^2}{EI_o} - \frac{1}{3}\frac{H\,f\,L^2}{EI_o} + \frac{1}{3}\frac{V\,L^3}{EI_o} = \delta. \tag{3}$$

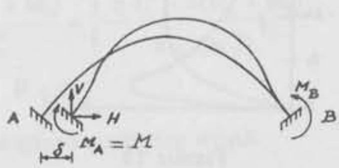
Uit (1) en (3) volgt: $V = \frac{12EI_o\delta}{L^3}$ en $M = \frac{6\,\delta\,EI_o}{L^2} - \frac{2}{3}H\,f.$

Substitueert men deze waarden in (2) dan blijkt $H = 0$ te worden, dus $M = M_A = \frac{6\,\delta\,EI_o}{L^2}$; M_B wordt dus $\frac{6\,\delta\,EI_o}{L^2} - V\,L = -\frac{6\,EI_o\delta}{L^2}$, dus uitwendig $+\frac{6\,EI_o\delta}{L^2}$

De momenten bij een verticale verplaatsing zijn dus dezelfde als die bij een rechte, horizontale prismatische balk. De verticale vasthoudkracht na de vereffening volgt uit het evenwicht. Voor de berekening van de horizontale vasthoudkracht wordt verwezen naar hetgeen vermeld wordt bij de horizontale verplaatsing.

Horizontale verplaatsing

Bij een horizontale verplaatsing δ van A ten opzichte van B worden de vormveranderingsvoorwaarden:



Figuur 75

$$\varphi = 0 : \frac{M\,L}{EI_o} + \frac{1}{2}\frac{V\,L^2}{EI_o} - \frac{2}{3}H.f.L = 0, \tag{1}$$

$$h = \delta : -\frac{2}{3}\frac{M\,f\,L}{EI_o} - \frac{1}{3}\frac{V\,f\,L^2}{EI_o} + \frac{H.L}{EI_o}\left(\frac{8}{15}f^2 + i_o^2\right) = \delta, \tag{2}$$

$$v = 0 : \frac{1}{2}\frac{M\,L^2}{EI_o} + \frac{1}{3}\frac{V\,L^3}{EI_o} - \frac{1}{3}\frac{H\,f\,L^2}{EI_o} = 0. \tag{3}$$

Uit (3) en (1) volgt: $V = 0$.
Uit (1) volgt daarna, $M = \frac{2}{3}H\,f.$

Substitueert men deze waarde in (2) dan vindt men: $H = \frac{\delta\,EI_o}{L(\frac{4}{45}f^2 + i_o^2)}$

en dus wordt $M = M_A = \frac{2\,f\,\delta\,EI_o}{3L(\frac{4}{45}f^2 + i_o^2)} = -M_B.$

Voor f = 0 wordt $M_A = 0$.

Bij verwaarlozing van de samendrukking vindt men:

$$M = \frac{2\,f\,\delta\,EI_o}{3.\frac{4}{45}f^2\,L} = \frac{15\,\delta\,EI_o}{2\,f\,L}$$

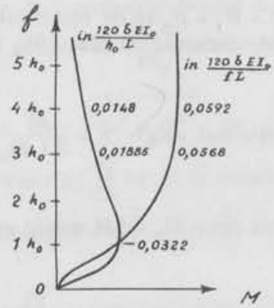
en zou voor f = 0 $M = \infty$ worden.

Bij een rechthoekig profiel (hoogte h_o, breedte b) wordt $i_o^2 = \frac{1}{12}h_o^2$

$$\text{dus}\quad M = \frac{2\,f\,\delta\,EI_o}{3L\left(\frac{4}{45}f^2 + \frac{1}{12}h_o^2\right)} = \frac{120\,\delta\,EI_o}{f\,L}\cdot\frac{1}{16 + 15\left(\frac{h_o}{f}\right)^2} = \frac{120\,\delta\,EI_o}{h_oL}\cdot\frac{1}{16\frac{f}{h_o} + 15\frac{h_o}{f}}\,.$$

In onderstaande tabel en grafiek is het verloop van M gegeven als f toeneemt van 0 tot $\infty\,h_o$.

f	M		M	
0 h_o	0	$\frac{120\,\delta\,EI_o}{f\,L}$	0	$\frac{120\,\delta\,EI_o}{h_oL}$
0,25 h_o	0,00391	"	0,01563	"
0,50 h_o	0,01315	"	0,0263	"
0,80 h_o	0,02532	"	0,0317	"
1 h_o	0,0322	"	0,0322	"
2 h_o	0,0507	"	0,0263	"
3 h_o	0,0568	"	0,01885	"
4 h_o	0,0592	"	0,0148	"
5 h_o	0,0603	"	0,01205	"
∞ h_o	0,0625	"	0	"

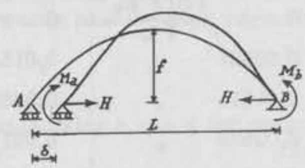


Figuur 76

Er moge bij deze en vorige tabellen aan worden herinnerd, dat zij alleen geldig zijn bij kleine pijl-koordeverhouding, daar anders de gemaakte aanname, dat $\cos\alpha = 1$ is te stellen niet meer juist is. Bij grote pijl-koordeverhouding is $\cos\alpha < 1$; de invloed van de samendrukking zou in de tabellen dan overschat zijn. Niettemin blijkt deze invloed bij vergroting der pijl-koordeverhouding tot 0 te naderen, zodat bij $f = \infty\ h_o$ de tabellen weer geheel juist zijn, daar dit laatste eenvoudig betekent, dat de invloed der samendrukking is verwaarloosd. In de meeste gevallen zal bij $f = 5h_o$ de pijl-koordeverhouding nog wel zodanig zijn, dat α in ieder punt klein is. Bij $f > 5h_o$ blijkt, volgens de tabellen, de invloed der samendrukking onbetekenend te zijn, zodat deze gevoeglijk verwaarloosd kan worden. In werkelijkheid is deze invloed nog kleiner dan de berekende. De conclusie kan dus luiden, dat de tabellen, behoudens in bijzondere gevallen, betrouwbaar zijn.

De horizontale vasthoudkracht na de vereffening kan nu niet uit het evenwicht worden gevonden, doch volgt uit de voorwaarde, dat de horizontale verplaatsing van A de waarde δ moet hebben. Het is dus een eenvoudig statisch onbepaald vraagstuk, evenals bij geknikte staven.

Indien na de vereffening in A en B momenten $+M_a$ en $-M_b$ optreden, zou H_1 bij verplaatsing nul bedragen: $H_1 = \dfrac{5(M_a + M_b)f}{8f^2 + 15i_o^2}$ overeenkomstig de berekening op bladzijde 102.



Figuur 77

Bij verplaatsing δ wordt H_1 vermeerderd met H_2, welke waarde volgt uit:

$$\int_0^L \frac{H_2 y^2 dx}{EI_o} + \frac{H_2 L}{EF_o} = \frac{8}{15}\,\frac{H_2 f^2 L}{EI_o} + \frac{H_2 i_o^2 L}{EI_o} = \delta$$

$$H_2 = \frac{\delta\ EI_o}{L(\frac{8}{15}\,f^2 + i_o^2)}$$

Het is echter gewenst $H = H_1 + H_2$ in de momenten uit te drukken. Dit kan geschieden met behulp van de formule op blz. 104, waarin het primaire moment in δ is uitgedrukt.

$$M = \frac{2\ f\ \delta\ EI_o}{3L(\frac{4}{45}\,f^2 + i_o^2)}\ .\quad \text{Hieruit volgt: } \delta = \frac{M}{2\ f\ EI_o} . 3L(\frac{4}{45}\,f^2 + i_o^2).$$

Wanneer nu voor $M_a = \alpha M$ en voor $M_b = \beta M$ wordt gevonden volgens fig. 75, vindt men voor

$$H = \frac{5M(\alpha + \beta)f}{8f^2 + 15i_o^2} + \frac{M}{2f\ EI_o} . 3L(\frac{4}{45}\,f^2 + i_o^2) . \frac{EI_o}{L(\frac{8}{15}\,f^2 + i_o^2)} =$$

$$= \frac{M}{8f^2 + 15i_o^2}\left\{5(\alpha + \beta)f + \frac{3(\frac{4}{3}\,f^2 + 15\ i_o^2)}{2f}\right\} .$$

Bij een rechthoekige balk, waarvan $h_o^2 = 12\, i_o^2$, wordt

$$H = \frac{M}{8f^2 + \frac{5}{4}h_o^2}\left\{5(\alpha + \beta)f + \frac{3(\frac{4}{3}f^2 + \frac{5}{4}h_o^2)}{2f}\right\}.$$

Na enige herleiding wordt dit:

$$H = \frac{M}{f}\left\{\frac{20(\alpha + \beta)}{32 + 5(\frac{h_o}{f})^2} + \frac{16 + 15(\frac{h_o}{f})^2}{64 + 10(\frac{h_o}{f})^2}\right\}$$

of $$H = \frac{M}{h_o}\left\{\frac{20(\alpha + \beta)}{32\frac{f}{h_o} + 5\frac{h_o}{f}} + \frac{16(\frac{f}{h_o})^2 + 15}{64(\frac{f}{h_o})^3 + 10\frac{f}{h_o}}\right\}.$$

Voor $f = 0$, wordt $H = \frac{M}{h_o}\left\{\frac{20(\alpha + \beta)}{\infty} + \frac{15}{0}\right\} = \infty$. *)

Bij verwaarlozing van de lengteverandering, dus van i_o^2, vindt men:

$$H = \frac{M}{8f^2}\left\{5(\alpha + \beta).f + 2f\right\} = \frac{M}{8f}(5\alpha + 5\beta + 2).$$

Voor $f = 0$ wordt H eveneens oneindig groot. *)
De verticale vasthoudkracht volgt weer uit het evenwicht.

BOGEN MET WILLEKEURIGE STIJFHEID EN VAN WILLEKEURIGE VORM

Bij prismatische bogen of bogen met een willekeurig verlopend traagheidsmoment van de doorsneden en van willekeurige vorm is de bepaling der in het voorgaande berekende grootheden minder eenvoudig. In beginsel verloopt de berekening echter hetzelfde. Men kan wederom uitgaan van de eenzijdig in B ingeklemde boog en ter bepaling van de stijfheid en overdrachtscoëfficient de verticale en horizontale verplaatsing van A gelijk aan nul stellen.

Voor de uitdrukking van de vormverandering $d\varphi$ van een elementje ds, $\frac{M_x\, ds}{EI_s}$, is dan echter niet meer te schrijven $\frac{M_x\, dx}{EI_o}$, maar $M_x . dg_b$ of $M_x . g . d_x$, waarin $g_b = f(x)$.

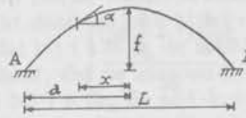
Voor ds kan men schrijven $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$.

Dit wordt bij lage bogen, waarbij $\frac{dy}{dx}$ klein is ongeveer gelijk aan $dx\left\{1 + \frac{1}{2}(\frac{dy}{dx})^2\right\}$.

Is de boog parabolisch, dan is $y = f(1 - \frac{x^2}{a^2})$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2\,f\,x}{a^2}$.

---

*) Deze waarden hebben louter theoretische betekenis. In het eerste geval wordt H oneindig doordat δ oneindig wordt wanneer $M > 0$, wat blijkt uit de formule voor δ op bladzijde 106. In het tweede geval behoort bij een eindige waarde van M weliswaar een oneindig kleine waarde van δ, doch om deze verplaatsing te veroorzaken is toch een oneindig grote horizontale kracht nodig.



Figuur 78

Wordt f klein, dan wordt dus $ds = dx\,(1 + \frac{2\,f^2\,x^2}{a^4})$ en

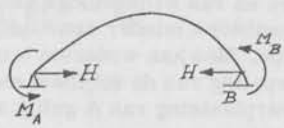
$$dg_b = \frac{dx\,(1 + \frac{2f^2x^2}{a^4})}{EI_x}$$

De momentenvlakken veroorzaakt door M_A, V_A en H_A kan men nu reduceren op een rechte prismatische balk en daarna op overeenkomstige wijze als in hoofdstuk III beschreven is voor niet prismatische liggers, de draaiingen, de horizontale en de verticale verplaatsingen van A, door ieder der genoemde invloeden afzonderlijk bepalen. De invloed door de lengteverandering moet daar eventueel bij worden opgeteld.

De bepaling der primaire momenten, vasthoudkrachten en de stijfheden tegen horizontale en verticale verplaatsingen geschiedt op overeenkomstige wijze. Men kan ter berekening van genoemde grootheden ook met vrucht gebruik maken van het buigingszwaartepunt.

Een andere methode van berekening der genoemde grootheden, volgt uit toepassing van de invloedsgrootheden van Maxwell. Het hoofdsysteem is dan een boog op twee scharnieren, welke eenvoudig statisch onbepaald is.

De invloedsgrootheden φ_{aa}, $\varphi_{ab} = \varphi_{ba}$ en φ_{bb} moeten vooraf bepaald worden, waarbij de invloed van de lengteverandering door H in rekening te brengen is.



Figuur 79

Bij inklemming in B wordt dan:

$$\varphi_B = M_A\,\varphi_{ba} + M_B\,\varphi_{bb} = 0\,, \quad \frac{M_B}{M_A} = -\frac{\varphi_{ab}}{\varphi_{bb}} = r_{ab}$$

$$\varphi_A = M_A\,\varphi_{aa} + M_B\,\varphi_{ab} = \frac{\varphi_{aa}\,\varphi_{bb} - \varphi_{ab}^2}{\varphi_{bb}}\,M_A$$

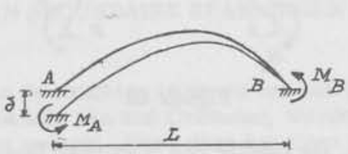
$$k_{ab} = \frac{M_A}{\varphi_A} = \frac{\varphi_{bb}}{\varphi_{aa}\,\varphi_{bb} - \varphi_{ab}^2}\,.$$

Evenzo: $r_{ba} = -\frac{\varphi_{ab}}{\varphi_{aa}}$.

$$k_{ba} = \frac{\varphi_{aa}}{\varphi_{aa}\,\varphi_{bb} - \varphi_{ab}^2}\,.$$

De primaire momenten worden op overeenkomstige wijze bepaald. Voor de bepaling van de verplaatsingscoëfficienten krijgt men de volgende vergelijkingen.

Verticale verplaatsing:



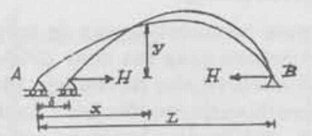
Figuur 80

Bij een verticale verplaatsing δ volgen de momenten M_A en M_B uit onderstaande vergelijkingen:

$$\varphi_A = M_A\ \varphi_{aa} + M_B\ \varphi_{ab} + \frac{\delta}{L} = 0,$$

$$\varphi_B = M_A\ \varphi_{ba} + M_B\ \varphi_{bb} + \frac{\delta}{L} = 0.$$

Horizontale verplaatsing:



Figuur 81

Breng in A een rol aan en in B een scharnier en laat in A een horizontale kracht H werken. Er ontstaan momenten H.y.

$$\delta = \int_0^L H\, y^2 dg_b + \int_0^L \frac{H\, dx}{EF_x} = H\left(\int_0^L y^2 dg_b + \int_0^L \frac{dx}{EF_x}\right)$$

Denkt men bij deze momenten de boog in B ingeklemd onder zijn oorspronkelijke helling, dan is de verticale verplaatsing van

$$A = v = H \int_0^L x\, y\, dg_b.$$

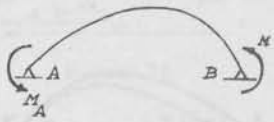
Om de rol weer op zijn horizontale baan te brengen moet, wanneer de inklemming in B weer vervangen wordt door een scharnier, om B teruggedraaid worden over een hoek $\frac{v}{L} = \frac{H}{L}\int_0^L x.y.dg_b$, dus $\varphi_B = \frac{H}{L}\int_0^L x\, y\, dg_b$.

Evenzo is af te leiden: $\varphi_A = \frac{H}{L}\int_0^L (L - x)\, y\, dg_b$.

De momenten M_A en M_B moeten deze draaiingen weer opheffen, onder handhaving van δ.

Dus $M_A\,\varphi_{aa} + M_B\varphi_{ab} + \varphi_A = 0$,

$M_A\,\varphi_{ab} + M_B\varphi_{bb} + \varphi_B = 0$.



Figuur 82

Hieruit volgen M_A en M_B als functie van H en daar $H = \dfrac{\delta}{\int_0^L y^2 dg_b + \int_0^L \frac{dx}{EF_x}}$

ook als functie van δ.
Hierbij moet H dus niet verward worden met de uiteindelijk optredende horizontale reactie, die bovendien afhangt van M_A en M_B en in dit verband niet van belang is.

Opmerking: Bij ongelijke hoogte der steunpunten kiest men de X-as volgens de verbindingslijn der steunpunten en de Y-as loodrecht daarop. Indien dan in het voorgaande voor horizontale kracht en horizontale verplaatsing gelezen wordt kracht en verplaatsing volgens de X-as en voor verticale kracht en verplaatsing kracht en verplaatsing volgens de Y-as, blijft al het behandelde ook voor het laatstgenoemde geval geldig.

Voor een meer uitgebreide behandeling van de toepassing der methode Cross op bogen, moge worden verwezen naar het door *Grabowsky* gepubliceerde artikel in het *Polytechnisch Tijdschrift* van November 1952: '*Eenvoudige methode voor het bepalen van de vereffeningsgrootheden*'. In dit artikel wordt gebruik gemaakt van de eigenschap, dat de druklijn door een vast punt moet gaan, indien in de uiteinden van een tweescharnierboog momenten werken.

Hoofdstuk XI

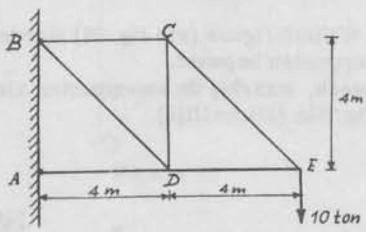
BEREKENING VAN SECUNDAIRE SPANNINGEN IN VAKWERKEN

Bij de berekening van de krachten in de staven van vakwerken, welke meestal bepaald worden met behulp van een *Cremona*, worden ter plaatse van de knooppunten scharnieren gedacht. Door deze krachten zullen de staven van lengte veranderen, zodat het vakwerk vervormt en de knooppunten gaan draaien. Daar deze knooppunten in het algemeen stijve verbindingen vormen, zullen behalve normaalkrachten ook buigende momenten in de staven optreden. De spanningen, die veroorzaakt worden door deze buigende momenten, worden secundaire spanningen genoemd.

Zoals uit de volgende berekening blijkt, kunnen de buigende momenten bepaald worden met behulp van de methode *Cross*.

Onderstaand vakwerk is ter plaatse van het knooppunt E belast met een puntlast van 10 ton.

Ter berekening van de normaalkrachten in de staven, worden ter plaatse van de knooppunten scharnieren gedacht. Deze normaalkrachten, die dan op eenvoudige wijze zijn te bepalen, zijn verzameld in onderstaande tabel.



Figuur 83

Staaf	Kracht	
DE	-10	ton
CE	+14,14	„
CD	-10	„
BC	+10	„
BD	+14,14	„
AD	-20	„

Voor de toelaatbare spanningen wordt in de trekstaven 1200 kg/cm² en in de drukstaven 600 kg/cm² aangenomen.

De benodigde doorsnede van de staven volgt uit: $\sigma = \frac{N}{F}$.

Staven DE en CD: $F = \frac{10000}{600} = 16{,}7\ cm^2$; toegepast 2 L 65.65.7 met

$$F_{tot} = 17{,}4\ cm^2 \quad en \quad I_{tot} = 66{,}8\ cm^4,$$

Staven CE en BD: $F = \frac{14140}{1200} = 11{,}8\ cm^2$; toegepast 2 L 55.55.6 met

$$F_{tot} = 12{,}6\ cm^2 \quad en \quad I_{tot} = 34{,}6\ cm^4,$$

Staaf BC: $F = \frac{10000}{1200} = 8{,}3\ cm^2$; toegepast 2 L 45.45.5 met

$F_{tot} = 8{,}6\ cm^2$ en $I_{tot} = 15{,}7\ cm^4$,

Staaf AD: $F = \frac{20000}{600} = 33{,}3\ cm^2$; toegepast 2 L 80.80.12 met

$F_{tot} = 35{,}8\ cm^2$ en $I_{tot} = 204\ cm^4$.

Opmerking: Bij de keuze van de profielen is niet gelet op het feit of deze constructief gunstig zijn.

De lengteveranderingen van de staven zijn hieronder berekend met de formule $\Delta L = \frac{N.L}{E.F}$.

Staven DE en CD: $\Delta L = \frac{-10000.400}{2.10^6.17{,}4} = -0{,}115$ cm ,

Staven CE en BD: $\Delta L = \frac{+14140.566}{2.10^6.12{,}6} = +0{,}318$ cm ,

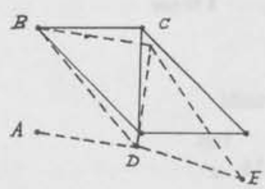
Staaf BC: $\Delta L = \frac{+10000.400}{2.10^6.8{,}6} = +0{,}233$ cm ,

Staaf AD: $\Delta L = \frac{-20000.400}{2.10^6.35{,}8} = -0{,}112$ cm .

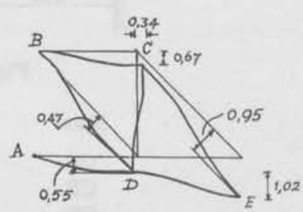
Met behulp van een *Williot*-figuur (zie fig. 85) worden vervolgens de verplaatsingen van de knooppunten bepaald.

Het vervormde vakwerk, waarbij de knooppunten als scharnieren zijn opgevat, is getekend in fig. 84a (stippellijn).

Primaire momenten



Figuur 84a



Figuur 84b

Worden de knooppunten als stijve hoekverbindingen beschouwd en wordt aangenomen, dat de knooppunten niet verdraaid zijn ten opzichte van hun toestand bij de onbelaste constructie, dan ziet de vervormde constructie eruit, zoals in figuur 84b met getrokken lijn is aangegeven. De in deze toestand door de staven op de knooppunten uitgeoefende momenten, worden beschouwd als primaire momenten, waarvan de berekening hieronder is uitgevoerd.

$$M_{DA} = \frac{3EI\delta}{L^2} = \frac{3.2.10^6.204.0{,}55}{400^2} = +4208 \text{ kgcm},$$

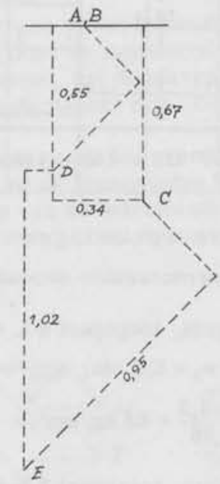
$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{6EI\delta}{L^2} = \frac{6.2.10^6.15{,}7.0{,}67}{400^2} = +789 \text{ kgcm},$$

$$M_{BD} = M_{DB} = \frac{6.2.10^6.34{,}6.0{,}47}{566^2} = +610 \text{ kgcm,}$$

$$M_{CD} = M_{DC} = \frac{6.2.10^6.66{,}8.0{,}34}{400^2} = +1703 \text{ kgcm,}$$

$$M_{DE} = M_{ED} = \frac{6.2.10^6.66{,}8.1{,}02}{400^2} = +5110 \text{ kgcm,}$$

$$M_{CE} = M_{EC} = \frac{6.2.10^6.34{,}6.0{,}95}{566^2} = +1233 \text{ kgcm.}$$



Figuur 85

Vereffeningscoëfficiënten

$$k_{bd} : k_{bc} = \frac{4.E.34{,}6}{566} : \frac{4.E.15{,}7}{400}, \quad \mu_{bd} = 0{,}6090 \quad \mu_{bc} = 0{,}3910$$

$$k_{cb} : k_{cd} : k_{ce} = \frac{4.E.15{,}7}{400} : \frac{4.E.66{,}8}{400} : \frac{4.E.34{,}6}{566},$$

$$\mu_{cb} = 0{,}1468 \quad \mu_{cd} = 0{,}6246 \quad \mu_{ce} = 0{,}2286 .$$

$$k_{da} : k_{db} : k_{dc} : k_{de} = \frac{3.E.204}{400} : \frac{4.E.34{,}6}{566} : \frac{4.E.66{,}8}{400} : \frac{4.E.66{,}8}{400},$$

$$\mu_{da} = 0{,}4919 \quad \mu_{db} = 0{,}0786 \quad \mu_{dc} = 0{,}2147 \quad \mu_{de} = 0{,}2148.$$

$$k_{ed} : k_{ec} = \frac{4.E.66{,}8}{400} : \frac{4.E.34{,}6}{566}, \quad \mu_{ed} = 0{,}7320 \quad \mu_{ec} = 0{,}2680.$$

Vereffening

De vereffening is uitgevoerd in nevenstaande tabel.

Knooppunten	B		C			D				E	
Staven	bd	bc	cb	cd	ce	da	db	dc	de	ed	ec
Vereff. coëff.	0,6090	0,3910	0,1468	0,6246	0,2286	0,4919	0,0786	0,2147	0,2148	0,7320	0,2680
Prim. mom.	+ 610 - 457 - 493 + 105 - 58 + 3 + 1 - 3	+ 789 - 132 - 317 - 9 - 38 + 1 - 2	+ 789 - 263 - 158 - 19 - 19 + 3 - 1	+ 1703 - 1249 - 1120 + 287 - 81 + 7 + 3 + 12 - 1 + 1	+ 1233 - 683 - 410 - 29 - 10 + 4 + 1	+ 4208 - 5721 + 1314 + 34 + 13 - 3 + 1	+ 610 - 914 - 247 + 210 - 29 + 5 + 2 - 1 - 2	+ 1703 - 2498 - 560 + 573 - 40 + 15 + 6 + 6 - 1 + 1	+ 5110 - 2498 - 1864 + 574 + 15 - 27 + 6 - 1 - 1 + 1	+ 5110 - 1249 - 3729 + 287 + 7 - 54 + 3 - 1 - 3	+ 1233 - 1365 - 205 - 15 - 20 + 2 - 1
Res. mom. in kgcm.	- 292	+ 292	+ 332	- 438	+ 106	- 154	- 366	- 795	+ 1315	+ 371	- 371

Berekening secundaire spanningen

De door deze momenten veroorzaakte secundaire spanningen worden:

Staaf BC: $M_{max} = 332$ kgcm, toegepast 2 L 45.45.5; $I_x = 7{,}83\ cm^4$,

$e_1 = 1{,}3$ cm, $e_2 = 3{,}2$ cm; $\sigma_{extr} = \dfrac{332.1{,}3}{15{,}66} = 28\ kg/cm^2$

en $\sigma_{extr} = \dfrac{332.3{,}2}{15{,}66} = 68\ kg/cm^2$.

Staaf BD: $M_{max} = 366$ kgcm, toegepast 2 L 55.55.6; $I_x = 17{,}3\ cm^4$;

$e_1 = 1{,}55$ cm, $e_2 = 3{,}95$ cm; $\sigma_{extr} = \dfrac{366.1{,}55}{34{,}6} = 16\ kg/cm^2$

en $\sigma_{extr} = \dfrac{366.3{,}95}{34{,}6} = 42\ kg/cm^2$.

Staaf AD: $M_{max} = 154$ kgcm, toegepast 2 L 80.80.12; $I_x = 102\ cm^4$;

$e_1 = 2{,}4$ cm, $e_2 = 5{,}6$ cm; $\sigma_{extr} = \dfrac{154.2{,}4}{204} = 2\ kg/cm^2$

en $\sigma_{extr} = \dfrac{154.5{,}6}{204} = 4\ kg/cm^2$.

Staaf CE: $M_{max} = 371$ kgcm, toegepast 2 L 55.55.6; $I_x = 17{,}3\ cm^4$;

$e_1 = 1{,}55$ cm, $e_2 = 3{,}95$ cm; $\sigma_{extr} = \dfrac{371.1{,}55}{34{,}6} = 17\ kg/cm^2$

en $\sigma_{extr} = \dfrac{371.3{,}95}{34{,}6} = 42\ kg/cm^2$.

Staaf CD: $M_{max} = 795$ kgcm, toegepast 2 L 65.65.7; $I_x = 33{,}4\ cm^4$;

$e_1 = 1{,}85$ cm, $e_2 = 4{,}65$ cm; $\sigma_{extr} = \dfrac{795.1{,}85}{66{,}8} = 22\ kg/cm^2$

en $\sigma_{extr} = \dfrac{795.4{,}65}{66{,}8} = 55\ kg/cm^2$.

Staaf DE: $M_{max} = 1315$ kgcm, toegepast 2 L 65.65.7; $I_x = 33{,}4\ cm^4$;

$e_1 = 1{,}85$ cm, $e_2 = 4{,}65$ cm; $\sigma_{extr} = \dfrac{1315.1{,}85}{66{,}8} = 36\ kg/cm^2$

en $\sigma_{extr} = \dfrac{1315.4{,}65}{66{,}8} = 91\ kg/cm^2$.

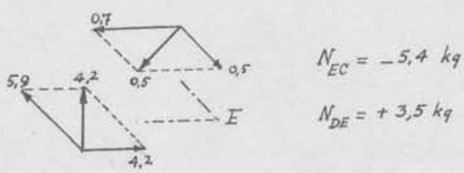
Uit het bovenstaande volgt, dat de secundaire spanningen niet altijd verwaarloosd kunnen worden. Zo bedraagt de maximale secundaire spanning in staaf DE ongeveer 15% van de toelaatbare spanning.

Slotbeschouwing

Tijdens het vereffeningsproces wordt uiteraard aangenomen, dat de knooppunten op hun plaats blijven. Daar de momenten weer normaalkrachten veroorzaken, betekent deze aanname, dat de staven oneindig stijf tegen lengteverandering door deze normaalkrachten zijn. Deze normaalkrachten kunnen als volgt worden bepaald:

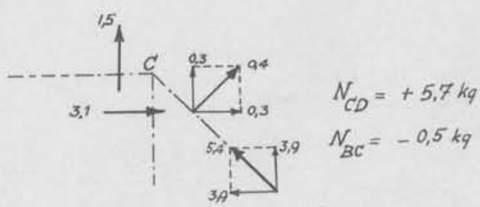
Met behulp van de momenten en uit het evenwicht van de staven kunnen de krachten, die door de staven op de knooppunten worden uitgeoefend en welke loodrecht staan op de richting van de betreffende staven, worden bepaald. De normaalkrachten volgen dan weer uit het evenwicht van de knooppunten.

Knooppunt E



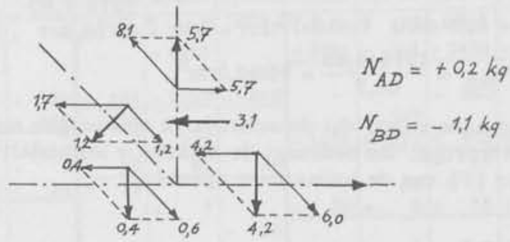
Figuur 86

Knooppunt C



Figuur 87

Knooppunt D



Figuur 88

Uit bovenstaande berekening blijkt, dat deze normaalkrachten te verwaarlozen zijn ten opzichte van die, bepaald met behulp van de Cremona. Hieruit volgt, dat ook de berekende momenten practisch niet meer zullen veranderen.

DEEL II

Invloedslijnen

Hoofdstuk I

INLEIDING

Aangezien met de methode Cross in eerste instantie momenten worden gevonden, zal deze inleiding zich uitsluitend tot de invloedslijnen van genoemde grootheden beperken.

Ter bepaling dezer invloedslijnen staan ons twee methoden ter beschikking.

METHODE I

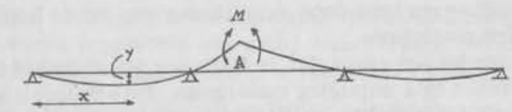
Men bepaalt de momenten bij diverse standen van de last. Aan de hand van een voorbeeld zal dit toegelicht worden.

METHODE II

In de tweede plaats kan een invloedslijn bepaald worden als elastische lijn.

Men brengt dan in de doorsnede, waar men de invloedslijn van het moment wil kennen, een scharnier aan en geeft daarna de beide aldaar samenkomende staafeinden een draaiing ten opzichte van elkaar door middel van een positief inwendig moment M [1]. De aldus ontstane elastische lijn stelt dan, op zekere schaal, de invloedslijn van het gevraagde moment voor. Dit volgt uit de *stelling van Maxwell.*

Bewijs:

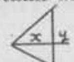


Figuur 89

Stel dat een positief inwendig moment M in A aan een punt X een verplaatsing geeft $M.\delta'_{xa}$ en dat een last P in X aan de beide doorsneden A een draaiing ten opzichte van elkaar geeft van $P.\varphi'_{ax}$. Daar M aan de beide doorsneden A een positieve draaiing van $M.\varphi_{aa}$ ten opzichte van elkaar geeft, moet het onbekende moment, dat de door P veroorzaakte draaiing opheft, een waarde hebben

$$M_A = -\frac{P.\varphi'_{ax}}{M.\varphi_{aa}} M = -P \frac{\varphi'_{ax}}{\varphi_{aa}}.$$

1) Bovengenoemde draaiing moet in werkelijkheid oneindig klein zijn. Voor de berekening en ook grafisch kan echter met eindige draaiingen gewerkt worden, mits men alle vervormingen maar evenredig aan het moment stelt. Onder de draaiing moet men dan verstaan de zogenaamde orthogonale hoekwaarde, dat is de verhouding $\frac{y}{x}$



y is de richting van de last en x staat er loodrecht op.

Volgens Maxwell is nu $\delta'_{xa} = \varphi'_{ax}$, dus $M_A = -\dfrac{P.\delta'_{xa}}{\varphi_{aa}}$

De grootheden δ'_{xa} en φ_{aa} zijn te berekenen of uit de figuur op te meten.

Dezelfde formule vindt men ook door toepassing van het *beginsel van virtuele arbeid.* Dit beginsel maakt gebruik van zogenaamde inwendige invloedsgrootheden.

Toegepast op het behandelde statisch onbepaalde hoofdsysteem luidt het: Wanneer een in X geplaatste last P in een doorsnede A een moment $M_A = \alpha_x . P$ veroorzaakt, dan zal, indien in A een scharnier wordt aangebracht een draaiing φ der doorsneden A ten opzichte van elkaar aan doorsnede X een verplaatsing $y = -\alpha_x . \varphi$ geven. (Zie *Klopper III* bladzijde 48 e.v. waar het beginsel echter alleen op statisch bepaalde hoofdsystemen is toegepast). Hierin is φ positief genoemd als de draaiing veroorzaakt is door een positief inwendig moment.

$$\alpha_x = \frac{M_A}{P}, \text{ dus } y = -\frac{M_A}{P}.\varphi \text{ of } M_A.\varphi = -P.y, \text{ dus } M_A = -\frac{P.y}{\varphi}.$$

Aangaande het teken mag dus het volgende worden vastgesteld:
Wanneer de richting van y tegengesteld is aan die van P, dus negatief, hangt het teken van M_A uitsluitend af van het teken van φ, dus van het aangebrachte moment, met andere woorden waar de last geheven wordt, is het teken van M_A hetzelfde als dat van het aangebrachte moment M.

De genoemde elastische lijn wordt op de bekende manier verkregen als tweede momentenlijn bij het als belastingsvlak beschouwde momentenvlak. Dit momentenvlak wordt verkregen door vereffening der uit de hoekverdraaiing φ berekende primaire momenten.

Als het scharnier tot het einde der vereffening gehandhaafd blijft, dan zal de aanvankelijke draaiing φ wijziging ondergaan. De uiteindelijke draaiing, dus de schaal van de invloedslijn, is dan echter dikwijls moeilijk te bepalen o.a. in verband met opgetreden verplaatsingen der knooppunten.

In de tweede plaats is het dan noodzakelijk voor het geval er meerdere invloedslijnen gevonden moeten worden, voor iedere invloedslijn andere vereffenings- en overdrachtscoëfficienten te bepalen, daar men steeds een andere constructie heeft.

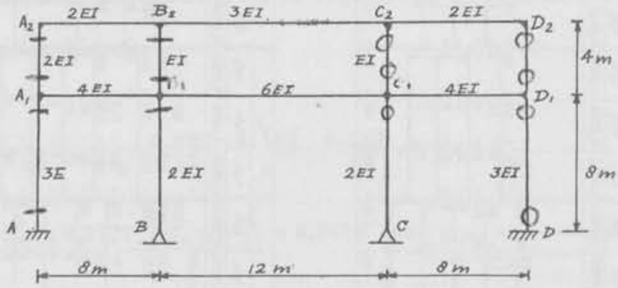
In de derde plaats zijn, indien er vasthoudkrachten te elimineren zijn, voor iedere invloedslijn andere 'verschuivingstabellen' nodig om dezelfde reden als onder ten tweede genoemd.

Het is eenvoudiger om de aanvankelijke draaiing φ te handhaven. Dit kan men bereiken door na de primaire draaiing het scharnier op te heffen. De genoemde bezwaren vervallen dan. In hoofdstuk III wordt dit principe toegepast. Men zou zelfs het scharnier op een willekeurig ogenblik tijdens de vereffening kunnen opheffen, hoewel dit uiteraard niet aan te bevelen is.

De tweede methode zal eveneens aan de hand van een voorbeeld worden toegelicht.

Hoofdstuk II

VOORBEELD VAN DE BEREKENING VAN DE INVLOEDSLIJN VOOR EEN KNOOPPUNTSMOMENT VOLGENS DE EERSTE METHODE



Figuur 90

Gevraagd wordt de invloedslijn voor de momenten $M_{b_1c_1}$ en $M_{b_2c_2}$ te bepalen als een puntlast van 1 ton zich over regel A_1D_1 beweegt.

Overzicht van de gevolgde berekeningswijze

Staat de puntlast tussen twee knooppunten, dan zullen ter plaatse van die knooppunten primaire momenten ontstaan, waaruit door vereffening en na eliminatie van de vasthoudkrachten, $M_{b_1c_1}$ berekend kan worden.

De berekening kan echter overzichtelijker gemaakt worden, door de bijdrage te berekenen, die elk primair moment afzonderlijk levert voor het uiteindelijk moment $M_{b_1c_1}$. De tabel wordt dus gesplitst in twee tabellen. In elke tabel komt dus slechts één primair moment voor.

Daarom worden in het volgende eerst afzonderlijk de bijdragen berekend, die de primaire Momenten $M_{A_1B_1}$, $M_{B_1A_1}$, $M_{B_1C_1}$, $M_{C_1B_1}$, $M_{C_1D_1}$ en $M_{D_1C_1}$ aan het uiteindelijk in de constructie optredende moment $M_{b_1c_1}$ leveren.

In verband met de symmetrie van de constructie is het niet nodig tabellen te maken voor de bijdragen die de primaire momenten $M_{C_1B_1}$, $M_{C_1D_1}$ en $M_{D_1C_1}$ voor het resulterende moment $M_{b_1c_1}$ leveren, omdat deze gelijk zijn aan de bijdragen voor $M_{c_1b_1}$ ten gevolge van $M_{B_1C_1}$, $M_{B_1A_1}$ en $M_{A_1B_1}$, maar met tegengesteld teken. Vervolgens worden de primaire momenten berekend als functie van de plaats van de last.

De berekening van het uiteindelijk in de constructie optredende moment $M_{b_1c_1}$ bij een bepaalde stand van de last geschiedt als volgt:

Staat de last bij voorbeeld tussen A_1 en B_1 dan zijn de primaire momenten $M_{A_1B_1} = \alpha$ en $M_{B_1A_1} = \beta$.

Zijn de bijdragen voor $M_{b_1c_1}$ ten gevolge van de primaire momenten $M_{A_1B_1}$ en $M_{B_1A_1}$ resp. $\gamma M_{A_1B_1}$ en $\delta M_{B_1A_1}$, dan is het resulterend moment $M_{b_1c_1} = \alpha\gamma + \beta\delta$.

TABEL I

Knooppunten	A		A_1		A_2		B_2			B_1				C_1				C_2			D_2		D_1			D
Staven	aa_1	a_1a	a_1b_1	a_1a_2	a_2a_1	a_2b_2	b_2a_2	b_2b_1	b_2c_2	b_1b	b_1a_1	b_1b_2	b_1c_1	c_1c_1	c_1b_1	c_1c_2	c_1d_1	c_2c_1	c_2b_2	c_2d_2	d_2c_2	d_2d_1	d_1d_2	d_1c_1	d_1d	dd_1
Vereff. coëff.	-	0,2727	0,3636	0,3637	0,6667	0,3333	0,3333	0,3334	0,3333	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,3333	0,3334	0,3333	0,3333	0,6667	0,3637	0,3636	0,2727	
Prim. mom.			+10000																							
	-1364	-2727	-3636	-3637	-1818						-1818															
			+316	+606	+1212	+606	+303	+158		+237	+633	+316	+632		+316											
	-126	-252	-335	-335	-168	-77	-154	-154	-153		-168	-77	-55	-41	-110	-55	-110	-27	-77					-55		
			+52	+82	+163	+82	+41	+26	+17	+39	+104	+52	+105		+52	+17		+35	+35	+34	+17					
	-18	-36	-49	-49	-24	-14	-28	-28	-28		-24	-14	-12	-9	-24	-12	-24	-6	-14	-3	-6	-11	-6	-12		
			+9	+13	+25	+13	+6	+4	+4	+7	+17	+9	+17		+9	+4	+13	+8	+8	+7	+4	+13	+27	+26	+20	+10
	-3	-6	-8	-8	-4	-2	-4	-5	-5		-4	-2	-5	-3	-9	-5	-9	-2	-2	-3	-6	-11	-6	-5		
			+2	+2	+4	+2	+1	+1	+1	+1	+4	+2	+4		+2	+1	+2	+3	+2	+2	+1	+2	+4	+4	+3	+1
	-1	-1	-1	-2	-1	-1	-1	-1	-1		-1	-1	-1	-1	-2	-1	-1		-1	-1	-1	-2	-1	-1		
			+1	+1	+1	+1					+1	+1	+1		+1				+1	+1			+1	+1		
			-1	-1											-1											
	-1512	-3022	+6350	-3328	-610	+610	+164	+1	-165	+284	-1256	+286	+686	-54	+234	-51	-129	+11	-48	+37	+9	-9	+19	-42	+23	+11

TABEL II

Knooppunten	A	A_1			A_2		B_2			B_1				C_1				C_2			D_2		D_1			D
Staven	aa_1	a_1a	a_1b_1	a_1a_2	a_2a_1	a_2b_2	b_2a_2	b_2b_1	b_2c_2	b_1b	b_1a_1	b_1b_2	b_1c_1	c_1c	c_1b_1	c_1c_2	c_1d_1	c_2c_1	c_2b_2	c_2d_2	d_2c_2	d_2d_1	d_1d_2	d_1c_1	d_1d	dd_1
Vereff. coëff.		0,2727	0,3636	0,3637	0,6667	0,3333	0,3333	0,3334	0,3333	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,3333	0,3334	0,3333	0,3333	0,6667	0,3637	0,3636	0,2727	
Prim. mom.				+10000	+10000			+5000				+5000				+5000		+5000				+10000	+10000			
	-1364	-2727	-3636	-3637	-1818	-833	-1667	-1667	-1666		-1818	-834					-1818		-833			-1818	-3637	-3636	-2727	-1364
				-2450	-4900	-2449	-1225						-553	-415	-1107	-553	-1107	-277		-1364	-2727	-5455	-2727	-553		
	+334	+668	+891	+891	+445				-421		+445					-421	+596	-842	-842	-842	-421	+596	+1193	+1193	+894	+447
			-390	-148	-297	-148	-74	-195		-292	-779	-390	-779		-390					-29	-58	-117	-58			
	+73	+147	+195	+196	+98	+319	+638	+639	+638		+98	+319	+37	+28	+75	+37	+75	+19	+319					+37		
			-79	-139	-278	-139	-70	-39	-52	-59	-158	-79	-158		-79	-52		-103	-103	-103	-52					
	+30	+60	+79	+79	+30	+27	+53	+54	+54		+30	+27	+23	+17	+45	+23	+46	+11	+27	+9	+17	+35	+17	+23		
			-14	-19	-38	-19	-9	-7	-8	-10	-28	-14	-28		-14	-8		-15	-16	-16	-8					
	+4	+9	+12	+12	+6	+4	+8	+8	+8		+6	+4	+4	+3	+8	+4	+7	+2	+4					+4		
			-2	-3	-7	-3	-2	-1	-1	-2	-5	-2	-5		-2	-1	-4	-2	-2	-2	-1	-4	-9	-8	-6	-3
	+1	+1	+2	+2	+1	+1	+1	+2	+1		+1	+1	+1	+1	+2	+1	+3	+1	+1	+2	+4	+9	+4	+1		
			-1	-1	-1	-1			-1		-1	-1	-1		-1	-1	-1	-1	-2	-1	-1	-1	-2	-2	-1	-1
			+1	+1					+1						+1	+1	+1				+1	+1	+1			
	-922	-1842	-2942	+4784	+3241	-3241	-2347	+3794	-1447	-363	-2209	+4031	-1459	-366	-1462	+4030	-2202	+3793	-1447	-2346	-3246	+3246	+4781	-2941	-1840	-921

Om decimaaltekens te vermijden zijn in de tabellen $M_{A_1B_1}$, $M_{B_1A_1}$ en $M_{B_1C_1}$ gelijk 10000 gesteld.

BEPALING MOMENTENVERDELING IN DE CONSTRUCTIE BIJ EEN PRIMAIR MOMENT $M_{A_1B_1} = +10000$.

Berekening momenten bij onverplaatsbare regels

Dit zijn momenten, die ontstaan als de regels A_1D_1 en A_2D_2 niet verplaatsen.

Vereffeningscoëfficiënten

Knooppunt A_1:

$$k_{a_1a} : k_{a_1b_1} : k_{a_1a_2} = \frac{4.3EI}{8} : \frac{4.4EI}{8} : \frac{4.2EI}{4} = 3 : 4 : 4 ,$$

$$\mu_{a_1a} = \frac{3}{11} = 0{,}2727; \quad \mu_{a_1b_1} = \frac{4}{11} = 0{,}3636 \quad \text{en} \quad \mu_{a_1b_2} = \frac{4}{11} = 0{,}3637.$$

Knooppunt A_2:

$$k_{a_2a_1} : k_{a_2b_2} = \frac{4.2EI}{4} : \frac{4.2EI}{8} = 2 : 1,$$

$$\mu_{a_2a_1} = \frac{2}{3} = 0{,}6667 \quad \text{en} \quad \mu_{a_2b_2} = \frac{1}{3} = 0{,}3333.$$

Knooppunt B_1:

$$k_{b_1b} : k_{b_1a_1} : k_{b_1b_2} : k_{b_1c_1} = \frac{3.2EI}{8} : \frac{4.4EI}{8} : \frac{4EI}{4} : \frac{4.6EI}{12} = 3 : 8 : 4 : 8,$$

$$\mu_{b_1b} = \frac{3}{23} = 0{,}1305, \quad \mu_{b_1a_1} = \frac{8}{23} = 0{,}3478, \quad \mu_{b_1b_2} = \frac{4}{23} = 0{,}1739 \quad \text{en}$$

$$\mu_{b_1c_1} = \frac{8}{23} = 0{,}3478.$$

Knooppunt B_2:

$$k_{b_2b_1} : k_{b_2a_2} : k_{b_2c_2} = \frac{4EI}{4} : \frac{4.2EI}{8} : \frac{4.3EI}{12} = 1 : 1 : 1,$$

$$\mu_{b_2b_1} = \mu_{b_2a_2} = \mu_{b_2c_2} = 0{,}3333.$$

Voor de knooppunten C_1, C_2, D_1 en D_2 gelden achtereenvolgens dezelfde waarden als voor B_1, B_2, A_1 en A_2.

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel I op bladzijde 122.

De op de regels werkende *vasthoudkrachten* zijn:

$H_{A_2} = -920$,

(naar rechts is positief)

$H_{A_1} = +386$.

Momentenberekening bij verschuiving van regel A_2D_2

Teneinde deze vasthoudkrachten te kunnen elimineren, wordt eerst regel A_2D_2 over een kleine afstand verschoven, terwijl A_1D_1 op zijn plaats wordt gehouden.

Worden de primaire momenten $M_{A_1A_2} = M_{A_2A_1} = M_{D_2D_1} = M_{D_1D_2} = +10000$ gesteld, dan zijn $M_{B_1B_2} = M_{B_2B_1} = M_{C_2C_1} = M_{C_1C_2} = +5000$.

De vereffening is uitgevoerd in tabel II op bladzijde 122.

De op de regels werkende horizontale krachten zijn:

$H_{A_2} = +7925,$

$H_{A_1} = -8707.$

Berekening momenten bij verschuiving van regel A_1D_1

Vervolgens wordt regel A_1D_1 over een kleine afstand verschoven, terwijl A_2D_2 op zijn plaats wordt gehouden.
Worden de *primaire momenten* $M_{A_1A_2} = M_{A_2A_1} = M_{D_1D_2} = M_{D_2D_1} = -8000$ gesteld, dan zijn de overige primaire momenten

$M_{B_1B_2} = M_{B_2B_1} = M_{C_1C_2} = M_{C_2C_1} = -4000,$

$M_{A_1A} = M_{AA_1} = M_{D_1D} = M_{DD_1} = +3000$ en

$M_{B_1B} = M_{C_1C} = +1000,$

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel III op bladzijde 125.

De vasthoudkrachten worden:

$H_{A_2} = -6966,$

$H_{A_1} = +9010.$

Eliminatie van de vasthoudkrachten

De uiteindelijke momenten kunnen nu bepaald worden uit de voorwaarden, dat op de regels geen vasthoudkrachten werken.
Deze luiden:

$-6966a + 7925b - 920 = 0$ en
$+9010a - 8707b + 386 = 0.$

Oplossing:

$a = +0{,}4605 \qquad b = +0{,}5209$

De resulterende momenten zijn verzameld in tabel IV op bladzijde 125.

BEPALING MOMENTENVERDELING IN DE CONSTRUCTIE BIJ EEN PRIMAIR MOMENT $M_{B_1A_1} = +10000$.

TABEL III

Knooppunten	A	A_1			A_2		B_2			B_1				C_1				C_2			D_2		D_1			D
Staven	aa_1	a_1a	a_1b_1	a_1a_2	a_2a_1	a_2b_2	b_2a_2	b_2b_1	b_2c_2	b_1b	b_1a_1	b_1b_2	b_1c_1	c_1c_1	c_1b_1	c_1c_2	c_1d_1	c_2c_1	c_2b_2	c_2d_2	d_2c_2	d_2d_1	d_1d_2	d_1c_1	d_1d	dd_1
Vereff. coëff.	-	0,2727	0,3636	0,3637	0,6667	0,3333	0,3333	0,3334	0,3333	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,3333	0,3334	0,3334	0,3333	0,6667	0,3637	0,3636	0,2727	
Prim. mom.	+3000	+ 3000		- 8000	- 8000			- 4000		+ 1000		- 4000		+ 1000		- 4000		- 4000				- 8000	- 8000		+ 3000	+ 3000
				+ 2667	+ 5334	+ 2666	+ 1333													+ 1333	+ 2666	+ 5334	+ 2667			
	+ 318	+ 636	+ 848	+ 849	+ 424						+ 424						+ 424					+ 424	+ 849	+ 848	+ 636	+ 318
						+ 445	+ 889	+ 889	+ 889			+ 445	+ 448	+ 336	+ 896	+ 448	+ 896	+ 224	+ 445					+ 448		
			+ 293					+ 146	+ 333	+ 220	+ 585	+ 293	+ 585		+ 293	+ 333		+ 666	+ 666	+ 666	+ 333					
				- 290	- 579	- 290	- 145						- 109	- 81	- 218	- 109	- 218	- 54		- 126	- 252	- 505	- 252	- 109		
						- 56	- 111	- 112	- 111			- 56					- 16		- 56			- 16	- 32	- 31	- 24	- 12
			+ 29					+ 14	+ 39	+ 22	+ 57	+ 29	+ 57		+ 29	+ 39		+ 78	+ 79	+ 79	+ 39					
				+ 19	+ 37	+ 19	+ 9						- 9	- 7	- 18	- 9	- 18	- 5						- 9		
	- 7	- 14	- 18	- 19	- 9	- 10	- 20	- 21	- 21		- 9	- 10							- 10							
			+ 5					+ 2		+, 3	+ 10	+ 5	+ 10		+ 5					- 4	- 8	- 15	- 8			
				+ 6	+ 13	+ 6	+ 3		+ 3							+ 3		+ 6	+ 7	+ 6	+ 3					
	- 1	- 3	- 4	- 4	- 2						- 2						+ 3					+ 3	+ 6	+ 6	+ 5	+ 2
						- 1	- 2	- 3	- 3			- 1	- 2	- 1	- 4	- 2	- 4	- 1	- 1					- 2		
			+ 1							+ 1	+ 2	+ 1	+ 2		+ 1					- 1	- 2	- 4	- 2			
				+ 1	+ 2	+ 1			+ 1								+ 1	+ 1	+ 1	+ 1		+, 1	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1
			- 1	- 1				- 1														- 1				
															- 1		- 1									
	+3310	+ 3619	+ 1153	- 4772	- 2780	+ 2780	+ 1956	- 3086	+ 1130	+ 1246	+ 1067	- 3295	+ 982	+ 1247	+ 983	- 3297	+ 1067	- 3085	+ 1131	+ 1954	+ 2779	- 2779	- 4770	+ 1152	+ 3618	+ 3309

TABEL IV

Knooppunten	A	A_1			A_2		B_2			B_1				C_1				C_2			D_2		D_1			D
Staven	aa_1	a_1a	a_1b_1	a_1a_2	a_2a_1	a_2b_2	b_2a_2	b_2b_1	b_2c_2	b_1b	b_1a_1	b_1b_2	b_1c_1	c_1c	c_1b_1	c_1c_2	c_1d_1	c_2c_1	c_2b_2	c_2d_2	d_2c_2	d_2d_1	d_1d_2	d_1c_1	d_1d	dd_1
Mom. tabel I	-1512	-3022	+6350	-3328	- 610	+ 610	+ 164	+ 1	- 165	+ 284	-1256	+ 286	+ 686	- 54	- 234	- 51	- 129	+ 11	- 48	+ 37	+ 9	- 9	+ 19	- 42	+ 23	+ 11
+0,5209xmom. tabel II	- 480	- 959	-1532	+2492	+1688	-1688	-1222	+1976	- 754	- 189	-1151	+2100	- 760	- 191	- 762	+2099	-1147	+1976	- 754	-1222	+1691	+1691	+2490	-1532	- 958	- 480
+0,4605xmom. tabel III	+1524	+1667	+ 531	-2198	-1280	+1280	+ 901	-1421	+ 520	+ 574	+ 491	-1517	+ 452	+ 574	+ 453	-1518	+ 491	-1421	+ 521	+ 900	+1280	-1280	-2197	+ 531	+1666	+1524
Res. mom. bij prim. mom. in a_1b_1	- 468	-2314	+5349	-3034	- 202	+ 202	- 157	+ 556	- 399	+ 669	-1916	+ 869	+ 378	+ 329	- 75	+ 530	- 785	+ 566	- 281	- 285	- 402	+ 402	+ 312	-1043	+ 731	+1055

Momentenberekening bij onverschuifbare regels

Worden de regels A_1B_1 en A_2D_2 vastgehouden, dan wordt de momentenverdeling gevonden uit tabel V op bladzijde 127.

De vasthoudkrachten zijn:

$$H_{A_2} = -366{,}5 \quad \text{en}$$

$$H_{A_1} = +306{,}5\ .$$

Eliminatie van de vasthoudkrachten

De vasthoudkrachten worden weer geëlimineerd met behulp van de tabellen II en III.

De vergelijkingen zijn:

$$-6966c + 7925d - 366{,}5 = 0 \quad \text{en}$$
$$+9010c - 8707d + 306{,}5 = 0.$$

Oplossing:

$$c = 0{,}0709 \qquad d = 0{,}1086.$$

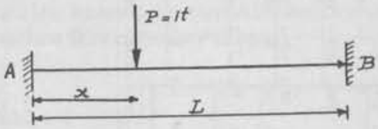
De resulterende momenten zijn verzameld in tabel VI op bladzijde 128.

BEPALING MOMENTENVERDELING IN DE CONSTRUCTIE BIJ EEN PRIMAIR MOMENT $M_{B_1C_1} = +1000$.

Deze momentenverdeling kan direct uit de tabellen V en VI worden afgeleid. Zie tabel VII op bladzijde 128.

Berekening primaire momenten als de last van 1 ton zich over een regel A_1D_1 beweegt.

Men beschouwt een aan twee zijden ingeklemde ligger welke op een willekeurige plaats belast is met een last P = 1 ton.



Figuur 91

De inklemmingsmomenten zijn:

$$M_{AB} = P.\frac{x(L-x)^2}{L^2} \quad \text{en} \quad M_{BA} = -P.\frac{x^2(L-x)}{L^2}\ .$$

Berekend zullen nu worden de primaire momenten als de last 0,1L, 0,2L, 0,3L .... 0,9L van A verwijderd is.

Gemakshalve wordt $\frac{x}{L} = \varepsilon$ gesteld, zodat ε resp. 0,1, 0,2 .... 0,9 is.

TABEL V

Knooppunten	A	A$_1$			A$_2$	
Staven	aa_1	a_1a	a_1b_1	a_1a_2	a_2a_1	a_2b_2
Vereff. coëff.		0,2727	0,3636	0,3637	0,6667	0,3333
Prim. mom.	+237 + 18 + 22 + 6 + 1	+ 474 + 36 + 44 + 12 + 2	- 1739 + 632 - 133 + 48 + 59 - 22 + 16 - 4 + 3 - 1 + 1	+ 633 + 49 - 162 + 59 - 22 + 16 - 4 + 3 - 1 + 1	+ 316 + 24 - 323 + 29 - 41 + 8 - 9 + 1 - 1	+ 145 - 162 + 33 - 21 + 5 - 4 + 1 - 1
Res. mom.	+284	+ 568	- 1140	+ 572	+ 4	- 4
Res. mom. bij prim. mom. van 10.000 in b_1c_1	+284	+ 568	- 1140	+ 572	+ 4	- 4

Knooppunten	B$_2$			B$_1$			
Staven	b_2a_2	b_2b_1	b_2c_2	b_1b	b_1a_1	b_1b_2	b_1c_1
Vereff. coëff.	0,3333	0,3334	0,3333	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478
Prim. mom.	+ 290 - 81 + 65 - 10 + 11 - 2 + 2	- 870 + 290 - 66 + 66 - 11 + 11 - 4 + 3	+ 290 - 49 + 65 - 12 + 11 - 2 + 3	- 1305 - 100 - 17 - 3	+10000 - 3478 + 316 - 265 + 24 + 29 - 44 + 8 - 8 + 1 - 1	- 1739 + 145 - 133 + 33 - 22 + 6 - 7 + 1 - 1	(+10000) - 3478 + 302 - 265 + 41 - 44 + 8 - 4 + 1 - 1
Res. mom.	+ 275	- 581	+ 306	- 1425	+ 6582	- 1717	- 3440
Res. mom. bij prim. mom. van 10.000 in b_1c_1	+ 275	- 581	+ 306	- 1425	- 3418	- 1717	+ 6560

Knooppunten	C$_1$				C$_2$		
Staven	c_1c	c_1b_1	c_1c_2	c_1d_1	c_2c_1	c_2b_2	c_2d_2
Vereff. coëff.	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,3333	0,3334	0,3333
Prim. mom.	+ 227 + 31 + 6 + 1	- 1739 + 605 - 133 + 82 - 22 + 17 - 2 + 3	+ 302 - 49 + 41 - 12 + 8 - 2 + 1	+ 605 - 55 + 83 - 14 + 17 - 3 + 2 + 1	+ 151 - 99 + 21 - 24 + 4 - 4 + 1 - 1	+ 145 - 99 + 33 - 24 + 5 - 5 + 1 - 1	- 98 + 17 - 23 + 4 - 4 + 1 - 1
Res. mom.	+ 265	- 1189	+ 289	+ 636	+ 49	+ 55	- 104
Res. mom. bij prim. mom. van 10.000 in b_1c_1	+ 265	- 1189	+ 289	+ 636	+ 49	+ 55	- 104

Knooppunten	D$_2$		D$_1$			D
Staven	d_2c_2	d_2d_1	d_1d_2	d_1c_1	d_1d	dd_1
Vereff. coëff.	0,3333	0,6667	0,3637	0,3636	0,2727	
Prim. mom.	- 49 + 35 - 12 + 9 - 2 + 2	- 55 + 69 - 14 + 17 - 3 + 3 + 1 - 1	- 110 + 35 - 28 + 9 - 6 + 2 - 1	+ 302 - 110 + 41 - 27 + 8 - 6 + 1 - 1	- 82 - 21 - 5 - 1	- 41 - 11 - 2
Res. mom.	- 17	+ 17	- 99	+ 208	- 109	- 54
Res. mom. bij prim. mom. van 10.000 in b_1c_1	- 17	+ 17	- 99	+ 208	- 109	- 54

TABEL VI

Knooppunten	A	A_1			A_2		B_2			B_1				C_1				C_2			D_2		D_1			D
Staven	aa_1	a_1a	a_1b_1	a_1a_2	a_2a_1	a_2b_2	b_2a_2	b_2b_1	b_2c_2	b_1b	b_1a_1	b_1b_2	b_1c_1	c_1c	c_1b_1	c_1c_2	c_1d_1	c_2c_1	c_2b_2	c_2d_2	d_2c_2	d_2d_1	d_1d_2	d_1c_1	d_1d	dd_1
Mom. tabel V	+ 284	+ 568	-1140	+ 572	+ 4	- 4	+ 275	- 581	+ 306	-1425	+6582	-1717	-3440	+ 265	-1189	+ 289	+ 636	+ 49	+ 55	- 104	- 17	+ 17	- 99	+ 208	- 109	- 54
+0,1086xMom. tabel II	- 100	- 200	- 319	+ 519	+ 352	- 352	- 255	+ 412	- 157	- 39	- 240	+ 438	- 159	- 40	- 159	+ 438	- 239	+ 412	- 157	- 255	- 352	+ 352	+ 519	- 319	- 200	- 100
+0,0709xMom. tabel III	+ 235	+ 257	+ 82	- 338	- 197	+ 197	+ 139	- 219	+ 80	+ 88	+ 76	- 234	+ 70	+ 88	+ 70	- 234	+ 76	- 219	+ 80	+ 139	+ 197	- 197	- 338	+ 82	+ 256	+ 235
Res. mom. bij prim. mom. in b_1a_1	+ 419	+ 625	-1377	+ 753	+ 159	- 159	+ 159	- 388	+ 229	-1376	+6418	-1513	-3529	+ 313	-1278	+ 493	+ 473	+ 242	- 22	- 220	- 172	+ 172	+ 82	- 29	- 53	+ 81

TABEL VII

Mom. tabel V	+ 284	+ 568	-1140	+ 572	+ 4	- 4	+ 275	- 581	+ 306	-1425	-3418	-1717	+6560	+ 265	-1189	+ 289	+ 636	+ 49	+ 55	- 104	- 17	+ 17	- 99	+ 208	- 109	- 54
+0,1086xMom. tabel II	- 100	- 200	- 319	+ 519	+ 352	- 352	- 255	+ 412	- 157	- 39	- 240	+ 438	- 159	- 40	- 159	+ 438	- 239	+ 412	- 157	- 255	- 352	+ 352	+ 519	- 329	- 200	- 100
+0,0709xMom. tabel III	+ 235	+ 257	+ 82	- 338	- 197	+ 197	+ 139	- 219	+ 80	+ 88	+ 76	- 234	+ 70	+ 88	+ 70	- 234	+ 76	- 219	+ 80	+ 139	+ 197	- 197	- 338	+ 82	+ 256	+ 235
Res. mom. bij prim. mom. in b_1c_1	+ 419	+ 625	-1377	+ 753	+ 159	- 159	+ 159	- 388	+ 229	-1376	-3582	-1513	+6471	+ 313	-1278	+ 493	+ 473	+ 242	- 22	- 220	- 172	+ 172	+ 82	- 29	- 53	+ 81

Substitutie van $\frac{x}{L} = \varepsilon$ in de formule voor M_{AB} levert

$$M_{AB} = P.L.\varepsilon(1-\varepsilon)^2. \quad \text{Is } \boxed{\varepsilon(1-\varepsilon)^2 = \alpha,} \text{ dan is } M_{AB} = P.L.\alpha.$$

In onderstaande tabel is voor diverse waarden van ε de factor α aangegeven.

ε	α
0,1	0,081
0,2	0,128
0,3	0,147
0,4	0,144
0,5	0,125
0,6	0,096
0,7	0,063
0,8	0,032
0,9	0,009

De coëfficienten α zijn constanten en dus bruikbaar voor alle prismatische liggers, welke aan beide uiteinden zijn ingeklemd.

Eenvoudig is in te zien, dat dezelfde waarden van α voor M_{BA} gelden, echter met dien verstande, dat x gemeten wordt vanaf B.

Met behulp van het voorgaande zijn de in regel A_1D_1 optredende primaire momenten ten gevolge van een last van 1 ton verzameld in tabel VIII. Voor ligger A_1B_1 en C_1D_1 geldt P. L = 1.8 = 8 tm en voor ligger B_1C_1: P. L = 1. 12 = 12 tm.

TABEL VIII

Liggers A_1B_1 en C_1D_1			Ligger B_1C_1		
ε vanaf A_1 resp. C_1	$M_{A_1B_1} = M_{C_1D_1}$	$M_{B_1A_1} = M_{D_1C_1}$	ε vanaf B_1	$M_{B_1C_1}$	$M_{C_1B_1}$
0,1	+0,648	-0,072	0,1	+0,972	-0,108
0,2	+1,024	-0,256	0,2	+1,536	-0,384
0,3	+1,176	-0,504	0,3	+1,764	-0,756
0,4	+1,152	-0,768	0,4	+1,728	-1,152
0,5	+1,000	-1,000	0,5	+1,500	-1,500
0,6	+0,768	-1,152	0,6	+1,152	-1,728
0,7	+0,504	-1,176	0,7	+0,756	-1,764
0,8	+0,256	-1,024	0,8	+0,384	-1,536
0,9	+0,072	-0,648	0,9	+0,108	-0,972

BEREKENING VAN DE INVLOEDSORDINATEN VOOR $M_{b_1c_1}$.

Uit de tabellen IV, VI, VII en VIII zijn nu de gevraagde invloedslijnen te berekenen.

Men wenst bijv. het moment $M_{b_1c_1}$ te weten, als de last van 1 ton zich op A_1B_1 bevindt:

Uit tabel IV volgt, dat bij een primair moment $M_{A_1B_1}$ = + 10000, het resulterend moment $M_{b_1c_1}$ = + 378 behoort.

Evenzo geeft een primair moment $M_{B_1A_1}$ = + 10000 volgens tabel VI een resulterend moment $M_{b_1c_1}$ = -3529.

De ordinaten van de invloedslijn voor $M_{b_1c_1}$, bij een stand van de last tussen A_1 en B_1, worden nu gevonden als de algebraische som van $\frac{+\ 378}{+10000} \cdot M_{a_1b_1}$ (tabel VIII) en $\frac{-\ 3529}{+10000} \cdot M_{b_1a_1}$ (tabel VIII).

Op overeenkomstige wijze zijn de ordinaten van de invloedslijn voor $M_{b_1c_1}$ te vinden als de last zich op B_1C_1 of op C_1D_1 bevindt.

Deze ordinaten zijn verzameld in tabel IX.

BEREKENING VAN DE INVLOEDSORDINATEN VOOR $M_{b_2c_2}$

De invloedsordinaten voor $M_{b_2c_2}$, als de last zich over A_1D_1 beweegt, worden op analoge wijze bepaald en zijn samengevat in tabel X.

TABEL IX

Invloedsordinaten voor $M_{b_1c_1}$ in tm

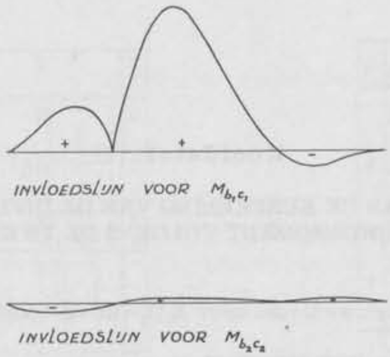
Ligger A_1B_1		Ligger B_1C_1		Ligger C_1D_1	
ε vanaf A_1	invloeds-ordinaat	ε vanaf B_1	invloeds-ordinaat	ε vanaf C_1	invloeds-ordinaat
0,1	+0,050	0,1	+0,643	0,1	-0,082
0,2	+0,129	0,2	+1,043	0,2	-0,129
0,3	+0,222	0,3	+1,238	0,3	-0,147
0,4	+0,315	0,4	+1,265	0,4	-0,141
0,5	+0,391	0,5	+1,162	0,5	-0,120
0,6	+0,436	0,6	+0,966	0,6	-0,090
0,7	+0,434	0,7	+0,715	0,7	-0,056
0,8	+0,371	0,8	+0,445	0,8	-0,025
0,9	+0,231	0,9	+0,194	0,9	-0,004

TABEL X

Invloedsordinaten voor $M_{b_2c_2}$ in tm

Ligger A_1B_1		Ligger B_1C_1		Ligger C_1D_1	
ε vanaf A_1	invloeds-ordinaat	ε vanaf B_1	invloeds-ordinaat	ε vanaf C_1	invloeds-ordinaat
0,1	-0,028	0,1	+0,023	0,1	+0,001
0,2	-0,047	0,2	+0,036	0,2	+0,005
0,3	-0,058	0,3	+0,042	0,3	+0,012
0,4	-0,064	0,4	+0,042	0,4	+0,019
0,5	-0,063	0,5	+0,038	0,5	+0,026
0,6	-0,057	0,6	+0,030	0,6	+0,031
0,7	-0,047	0,7	+0,021	0,7	+0,032
0,8	-0,034	0,8	+0,012	0,8	+0,028
0,9	-0,018	0,9	+0,005	0,9	+0,018

De beide invloedslijnen zijn getekend op de volgende blz.



Figuur 92

Hoofdstuk III

VOORBEELD VAN DE BEREKENING VAN DE INVLOEDSLIJN VOOR EEN KNOOPPUNTSMOMENT VOLGENS DE TWEEDE METHODE

De last beweegt zich wederom over A_1D_1 van de constructie: figuur 90.

INVLOEDSLIJN VOOR HET MOMENT $M_{b_1c_1}$

Berekening van de momentenverdeling in de constructie bij onverplaatsbare knooppunten

Zoals eerder vermeld, wordt bij deze methode in ligger B_1C_1 ter plaatse van het uiteinde B_1 tijdelijk een scharnier aangebracht en de daar samenkomende einden over een bepaalde hoek ten opzichte van elkaar gedraaid. Alvorens tot de vereffening over te gaan wordt het scharnier weer opgeheven, onder handhaving van de hoekverdraaiing.

Men kan zowel alleen de doorsnede links van het scharnier B_1 van B_1C_1 over een hoek φ draaien als alleen de doorsnede rechts van het scharnier. Ook kan men beide doorsneden een draaiing geven, zodat de som der draaiingen gelijk is aan φ. In deze drie gevallen gaat men uit van verschillende primaire momenten, doch vindt men hetzelfde eindresultaat. De berekening der primaire momenten is het eenvoudigst als alleen de doorsnede rechts van het scharnier gedraaid wordt.

Wordt $\varphi = +1$ gekozen dan is $M = -y$ voor $P = 1$ volgens de formule $M = -\dfrac{P.y}{\varphi}$.

De *primaire momenten* volgen dan uit $\varphi = +1 = \dfrac{-M_{B_1C_1} . L_{b_1c_1}}{4.6EI}$ n.l.

$$M_{B_1C_1} = -\frac{4.6EI}{L_{b_1c_1}} = -2EI \text{ tm} \quad \text{en} \quad M_{C_1B_1} = \frac{1}{2} M_{B_1C_1} = -EI \text{ tm.}$$

De *vereffening* van deze momenten is uitgevoerd in tabel XI op bladzijde 33. Hierin is uitgegaan van $M_{B_1C_1} = -2000$ EI en $M_{C_1B_1} = -1000$ EI.

De op de regels werkende *vasthoudkrachten* zijn:

$H_{A_2} = +0{,}110EI$ en

$H_{A_1} = -0{,}092EI$.

Eliminatie van de vasthoudkrachten

Met behulp van de tabellen II en III kunnen vervolgens deze vasthoudkrachten worden geëlimineerd.
De hiervoor benodigde vergelijkingen luiden:

$-6966e + 7925f + 0{,}110EI = 0$ en
$-9010e + 8707f - 0{,}092EI = 0$

Oplossing:

$e = -0{,}0000211EI$ en
$f = -0{,}0000324EI$.

TABEL XI

Knooppunten	A	A_1			A_2		B_2			B_1			
Staven	aa_1	a_1a	a_1b_1	a_1a_2	a_2a_1	a_2b_2	b_2a_2	b_2b_1	b_2c_2	b_1b	b_1a_1	b_1b_2	b_1c_1
Vereff. coëff.	-	0,2727	0,3636	0,3637	0,6667	0,3333	0,3333	0,3334	0,3333	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478
Prim. mom.													-2000EI
			+ 348					+ 174		+ 261	+ 695	+ 348	+ 696
	- 47	- 95	- 126	- 127	- 63	- 29	- 58	- 58	- 58		- 63	- 29	+ 113
			- 4	+ 31	+ 61	+ 31	+ 15	- 2	- 5	- 3	- 7	- 4	- 7
	- 4	- 7	- 10	- 10	- 5	- 1	- 3	- 3	- 2	- 1	- 5	- 1	+ 5
				+ 2	+ 4	+ 2	+ 1		- 1		+ 1		+ 1
			- 1	- 1									+ 1
													- 1
Res. mom.	- 51	- 102	+ 207	- 105	- 3	+ 3	- 45	+ 111	- 66	+ 257	+ 621	+ 314	-1192

Knooppunten	C_1				C_2			D_2		D_1			D
Staven	c_1c	c_1b_1	c_1c_2	c_1d_1	c_2c_1	c_2b_2	c_2d_2	d_2c_2	d_2d_1	d_1d_2	d_1c_1	d_1d	dd_1
Vereff. coëff.	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,3333	0,3334	0,3333	0,3333	0,6667	0,3637	0,3636	0,2727	—
Prim. mom.		-1000EI											
		+ 348											
	+ 85	+ 227	+ 113	+ 227	+ 57	- 29					+ 113		
		- 4	- 5	- 21	- 9	- 10	- 9	- 5	- 21	- 41	- 41	- 31	- 15
	+ 4	+ 11	+ 5	+ 10	+ 3		+ 4	+ 9	+ 17	+ 9	+ 5		
			- 1	- 3	- 2	- 3	- 2	- 1	- 3	- 5	- 5	- 4	- 2
	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1			+ 1	+ 1	+ 3	+ 1	+ 1		
						- 1				- 1	- 1		
Res. mom.	+ 90	- 417	+ 113	+ 214	+ 49	- 43	- 6	+ 4	- 4	- 37	+ 72	- 35	- 17

Bij primaire momenten van -2EI en -EI moeten bovenstaande momenten met $\frac{EI}{1000}$ vermenigvuldigd worden.

TABEL XII

Knooppunten	A	A_1			A_2		B_2			B_1			
Staven	aa_1	a_1a	a_1b_1	a_1a_2	a_2a_1	a_2b_2	b_2a_2	b_2b_1	b_2c_2	b_1b	b_1a_1	b_1b_2	b_1c_1
Mom. uit tabel XI in EI	-0,051	-0,102	+0,207	-0,105	+0,003	+0,003	-0,045	+0,111	-0,066	+0,257	+0,621	+0,314	-1,192
f x Mom. uit tabel II	+0,030	+0,060	+0,095	-0,155	-0,105	+0,105	+0,076	-0,123	+0,047	+0,012	+0,072	-0,131	+0,047
ex Mom. uit tabel III	-0,070	+0,076	-0,024	+0,101	+0,059	-0,059	-0,041	+0,065	-0,024	-0,026	-0,023	+0,070	-0,021
Eindmom.	-0,091	-0,118	+0,278	-0,159	-0,049	+0,049	-0,010	+0,053	-0,043	+0,243	+0,670	+0,253	-1,166

Knooppunten	C_1				C_2			D_2		D_1			D
Staven	c_1c_1	c_1b_1	c_1c_2	c_1d_1	c_2c_1	c_2b_2	c_2d_2	d_2c_2	d_2d_1	d_1d_2	d_1c_1	d_1d	dd_1
Mom. uit tabel XI in EI	+0,090	-0,417	+0,113	+0,214	+0,049	-0,043	-0,006	+0,004	-0,004	-0,037	+0,072	-0,035	-0,017
f x Mom. uit tabel II	+0,012	+0,047	-0,131	+0,071	-0,123	+0,047	+0,076	+0,105	-0,105	-0,155	+0,095	+0,060	+0,030
ex Mom. uit tabel III	-0,026	-0,021	+0,070	-0,023	+0,065	-0,024	-0,041	-0,059	+0,059	+0,101	-0,024	-0,076	-0,070
Eindmom.	+0,076	-0,391	+0,052	+0,262	-0,009	-0,020	+0,029	+0,050	-0,050	-0,091	+0,143	-0,051	-0,057

De resulterende momenten, welke nodig zijn voor de bepaling van de gevraagde invloedslijn, zijn vermeld in tabel XII op bladzijde 133.

Berekening van de elastische lijn (invloedslijn)

Ligger A_1B_1.

Het momentenverloop over A_1B_1 is lineair met de Cross-momenten als uiterste ordinaten. Zijn beide Cross-momenten positief dan is het buigende moment in de ligger op een afstand x van A_1:

$$M_x = -\frac{L-x}{L}.M_{a_1b_1} + \frac{x}{L}.M_{b_1a_1}\ .$$

Met behulp van de differentiaalvergelijking $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI}$ zijn nu uit de momenten de doorbuigingen te berekenen:

$$\frac{d^2y}{dy^2}EI_{A_1B_1} = \frac{L-x}{L}M_{a_1b_1} - \frac{x}{L}M_{b_1a_1}$$

$$\frac{dy}{dx}EI_{A_1B_1} = M_{a_1b_1}(x - \frac{x^2}{2L}) - \frac{x^2}{2L}M_{b_1a_1} + C$$

$$yEI_{A_1B_1} = M_{a_1b_1}(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{6L}) - \frac{x^3}{6L}M_{b_1a_1} + Cx + D. \qquad (1)$$

De constanten C en D kunnen worden opgelost uit de voorwaarden, dat voor

$x = 0 \qquad y = 0,$
$x = L \qquad y = 0.$

Hieruit volgt: $D = 0$ en $C = \frac{L}{6}M_{b_1a_1} - \frac{L}{3}M_{a_1b_1}$.

Vergelijking (1) wordt nu:

$$yEI_{A_1B_1} = M_{a_1b_1}(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} - \frac{Lx}{3}) + M_{b_1a_1}(-\frac{x^3}{6L} + \frac{Lx}{6}).$$

Stelt men $\frac{x}{L} = \varepsilon$, dan gaat bovenstaande vorm over in:

$$yEI_{A_1B_1} = \frac{M_{a_1b_1}.L^2}{6}(-\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon)\frac{M_{b_1a_1}.L^2}{6}(-\varepsilon^3 + \varepsilon)\ .$$

Wordt vervolgens $-\varepsilon^3 + 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon = \gamma_1$ en $-\varepsilon^3 + \varepsilon = \gamma_2$ gesteld, dan gaat bovenstaande formule over in:

$$yEI_{A\ B} = \frac{M_{a_1b_1}.L^2}{6}\gamma_1 + \frac{M_{b_1a_1}.L^2}{6}\gamma_2\ .$$

Met $M_{a_1b_1} = +0{,}278EI$, $M_{b_1a_1} = +0{,}670EI$ en $L = 8$ m gaat bovenstaande vergelijking over in:

$$y = (\frac{+0{,}278.\,8^2}{24}\gamma_1 + \frac{+0{,}670.\,8^2}{24}\gamma_2)\ \text{meter.}$$

Aangezien M = -y voor φ = +1, wordt:

$$M = \left(\frac{-0,278.\,8^2}{24}\gamma_1 + \frac{-0,670.\,8^2}{24}\gamma_2\right) \text{ tm.} \quad \text{(voor P = 1 ton)}$$

Voor prismatische liggers, waarop aan beide uiteinden momenten werken en waarvoor de bovengenoemde randvoorwaarden gelden, zijn γ_1 en γ_2 constanten deze zijn voor ε = 0,1, 0,2, ... 0,9 verzameld in onderstaande tabel.

TABEL XIII

ε	γ_1	γ_2
0,1	-0,171	+0,099
0,2	-0,288	+0,192
0,3	-0,357	+0,273
0,4	-0,384	+0,336
0,5	-0,375	+0,375
0,6	-0,336	+0,384
0,7	-0,273	+0,357
0,8	-0,192	+0,288
0,9	-0,099	+0,171

Met behulp van deze coëfficienten is de elastische lijn van A_1B_1 en dus de invloedslijn voor $M_{b_1c_1}$ over A_1B_1 te berekenen.

Liggers B_1C_1 en C_1D_1.

De elastische lijnen van B_1C_1 en C_1D_1 worden op dezelfde wijze bepaald als die van ligger A_1B_1.

Voor de invloedsordinaten voor de gehele ligger $A_1B_1C_1D_1$ wordt verwezen naar tabel IX op bladzijde 130.

Als controle geldt, dat de helling van ligger B_1C_1 in C_1 gelijk is aan die va C_1D_1 in C_1 namelijk:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{X=L} EI_{B_1C_1} = M_{b_1c_1}\left(x - \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{3}\right) + M_{c_1b_1}\left(-\frac{x^2}{2L} + \frac{L}{6}\right).$$

Na substitutie van:

$$EI_{B_1C_1} = 6EI, \quad M_{b_1c_1} = -\,1,166 \text{ EI tm}, \quad M_{c_1b_1} = -\,0,391\text{EI tm en}$$

L = 12 m, wordt bovenstaande vergelijking $\left[\frac{dy}{dx}\right] = -\,0,128$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{X=0} EI_{C_1D_1} = M_{c_1d_1}\left(x - \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{3}\right) + M_{d_1c_1}\left(-\frac{x^2}{2L} + \frac{L}{6}\right).$$

Na substitutie van $EI_{C_1D_1}$ = 4EI, $M_{c_1d_1}$ = +0,262EI tm, $M_{d_1c_1}$ = +0,143EI tm en L = 8 m gaat bovenstaande vergelijking over in $\left[\frac{dy}{dx}\right] = -0,127$.

Deze hoekverdraaiing is practisch gelijk aan de boven gevonden waarde.

INVLOEDSLIJN VOOR $M_{b_2c_2}$

Berekening van de momentenverdeling bij onverplaatsbare knooppunten

In ligger B_2C_2 wordt ter plaatse van B_2 een scharnier aangebracht en daarna aan het uiteinde B_2 van B_2C_2 over een hoek $\varphi = +1$ gedraaid. Alvorens te vereffenen wordt het scharnier weer vastgeklemd. De na de vereffening ontstane elastische lijn van regel A_1D_1 is dan de gevraagde invloedslijn.

De *primaire momenten* volgen uit $+1 = \dfrac{-M_{B_2C_2} \cdot 12}{4 \cdot 3EI}$ en $M_{C_2B_2} = -\frac{1}{2} M_{B_2C_2}$.

Zij worden: $M_{B_2C_2} = -EI$ en $M_{C_2B_2} = -\frac{1}{2} EI$.

De *vereffening* is uitgevoerd in tabel XIV, op bladzijde 137, waarin is uitgegaan van primaire momenten -10000 en -5000.

De op de regels werkende *vasthoudkrachten* zijn:

$H_{A_2} = +0{,}1085EI$ en

$H_{A_1} = -0{,}1059EI.$

Eliminatie van de vasthoudkrachten

Deze worden weer geëlimineerd met behulp van de tabellen II en III. De benodigde vergelijkingen luiden:

$$+9010g - 8707h = +0{,}1059EI$$
$$-6966g + 7925h = -0{,}1085EI.$$

Oplossing:

$g = -0{,}0000098EI$ en
$h = -0{,}0000223EI.$

De resulterende momenten, welke nodig zijn om de gevraagde invloedslijn te bepalen, zijn verzameld in de tabel op bladzijde 138.

Berekening van de elastische lijn (invloedslijn)

De invloedsordinaten voor $M_{b_2c_2}$ zijn weer met behulp van de op bladzijde 135 afgeleide formule voor de elastische lijn van A_1B_1 bepaald (zie tabel X op bladzijde 130).

Als controle geldt, dat ter plaatse van B_1: $\varphi_{b_1a_1} = \varphi_{b_1c_1}$ en dat ter plaatse van C_1: $\varphi_{c_1d_1} = \varphi_{c_1b_1}$.

Grafische bepaling van de elastische lijnen

In de figuren op bladzijde 139 en 140 zijn de invloedslijnen voor $M_{b_1c_1}$ en $M_{b_2c_2}$ grafisch bepaald met behulp van de momenten uit tabel XII en tabel XV.

TABEL XIV

Knooppunten	A_1	A_1			A_2		B_2			B_1				C_1				C_2			D_2		D_1			D
Staven	aa_1	a_1a	a_1b_1	a_1a_2	a_2a_1	a_2b_2	b_2a_2	b_2b_1	b_2c_2	b_1b	b_1a_1	b_1b_2	b_1c_1	c_1c	c_1b_1	c_1c_2	c_1d_1	c_2c_1	c_2b_2	c_2d_2	d_2c_2	d_2d_1	d_1d_2	d_1c_1	d_1d	dd_1
Vereff. coëff.	-	0,2727	0,3636	0,3637	0,6667	0,3333	0,3333	0,3334	0,3333	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,1305	0,3478	0,1739	0,3478	0,3333	0,3334	0,3333	0,3333	0,6667	0,3637	0,3636	0,2727	
Prim. mom.	+ 115 + 9	+ 231 + 18	- 290 + 307 - 13 + 23 - 2	- 556 + 308 - 51 + 23 + 3 - 1	-1111 + 154 - 103 + 12 + 6	+1667 - 556 - 51 - 21 + 3	+3333 - 278 - 26 - 42 + 1	+3334 - 145 - 42 - 7 - 1	-10000 + 3333 + 556 + 19 - 42 - 6 + 1	- 217 - 10 - 2	- 580 + 154 - 27 + 12 - 4	+1667 - 290 - 21 - 13 - 2	- 580 - 46 - 11 - 26 - 4	- 35 - 8	- 290 - 92 - 21 - 13 - 2 + 1	+ 556 - 46 + 19 - 11 + 6	- 93 + 42 - 21 + 6 + 1 + 1	+1111 - 23 + 38 - 5 + 12 + 1	-5000 +1667 +1111 + 39 - 21 + 12 + 1	+1111 - 93 + 39 - 10 + 12 - 3 + 1	+ 556 - 185 + 19 - 20 + 6 - 6	- 371 + 42 - 41 + 6 - 6 + 1 - 1	- 185 + 84 - 20 + 11 - 3 + 1	- 46 + 84 - 11 + 11 + 1	+ 63 + 9 + 1	+ 31 + 4 + 1
Res. mom.	+ 124	+ 249	+ 25	- 274	-1042	+1042	+2988	+3139	- 6127	- 229	- 445	+1341	- 667	- 43	- 417	+ 524	- 64	+1134	-2191	+1057	+ 370	- 370	- 112	+ 39	+ 73	+ 36

Bij primaire momenten $M_{B_2C_2} = -EI$ en $M_{C_2B_2} = -\frac{1}{2}EI$ moeten bovenstaande momenten met $\frac{EI}{10000}$ vermenigvuldigd worden.

TABEL XV

Knooppunten	A_1	B_1		C_1		D_1
Staven	a_1b_1	b_1a_1	b_1c_1	c_1b_1	c_1d_1	d_1c_1
Momenten uit tabel XIV	+ 25	-445	-667	-417	- 64	+ 39
h x momenten tabel II	+656	+493	+326	+326	+491	+656
g x momenten tabel III	-113	-105	- 96	- 96	-105	-113
Result. momenten	+568	- 57	-437	-187	+322	+582

Bovenstaande momenten te vermenigvuldigen met $\frac{EI}{10000}$.

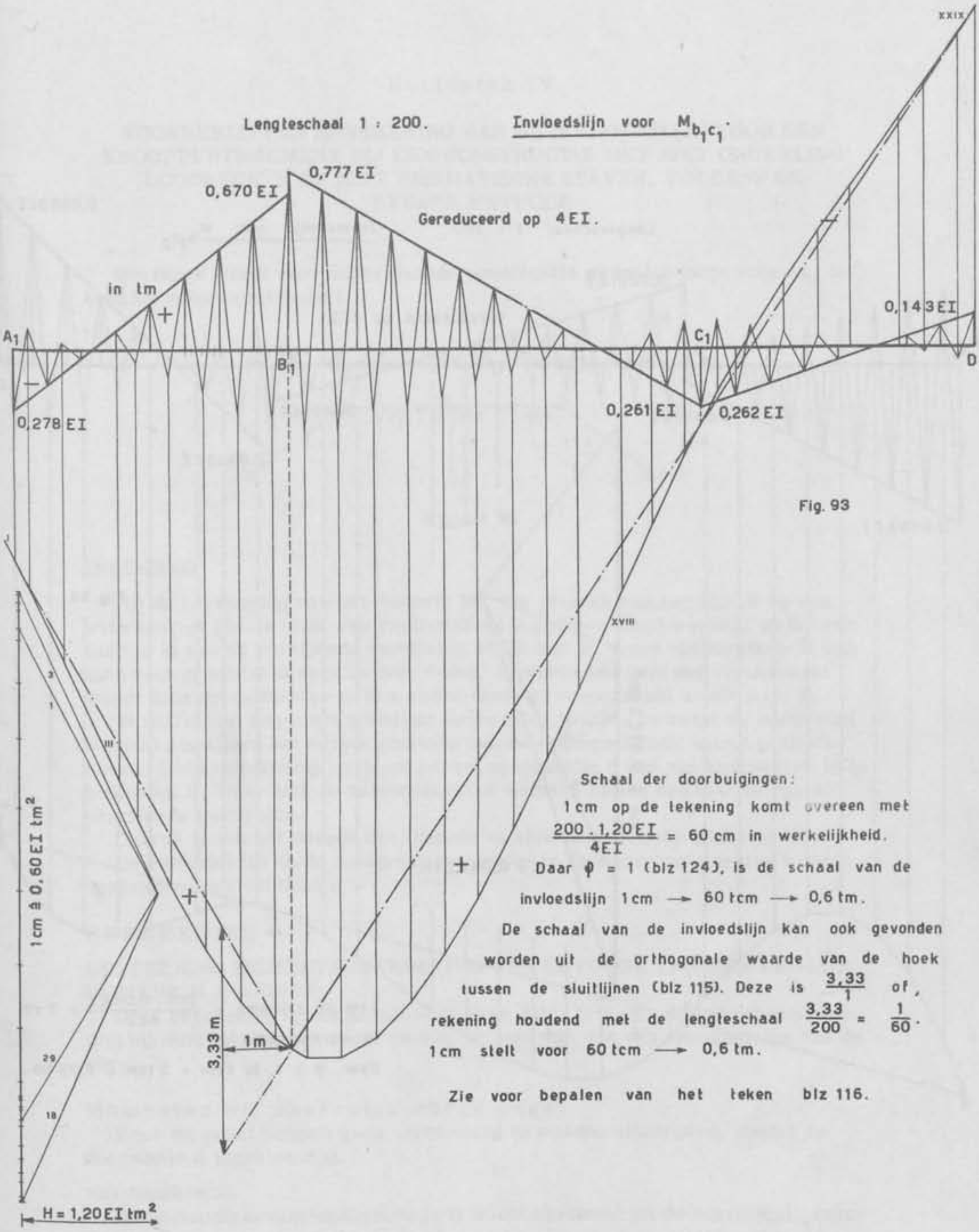


Fig. 93

Schaal der doorbuigingen:

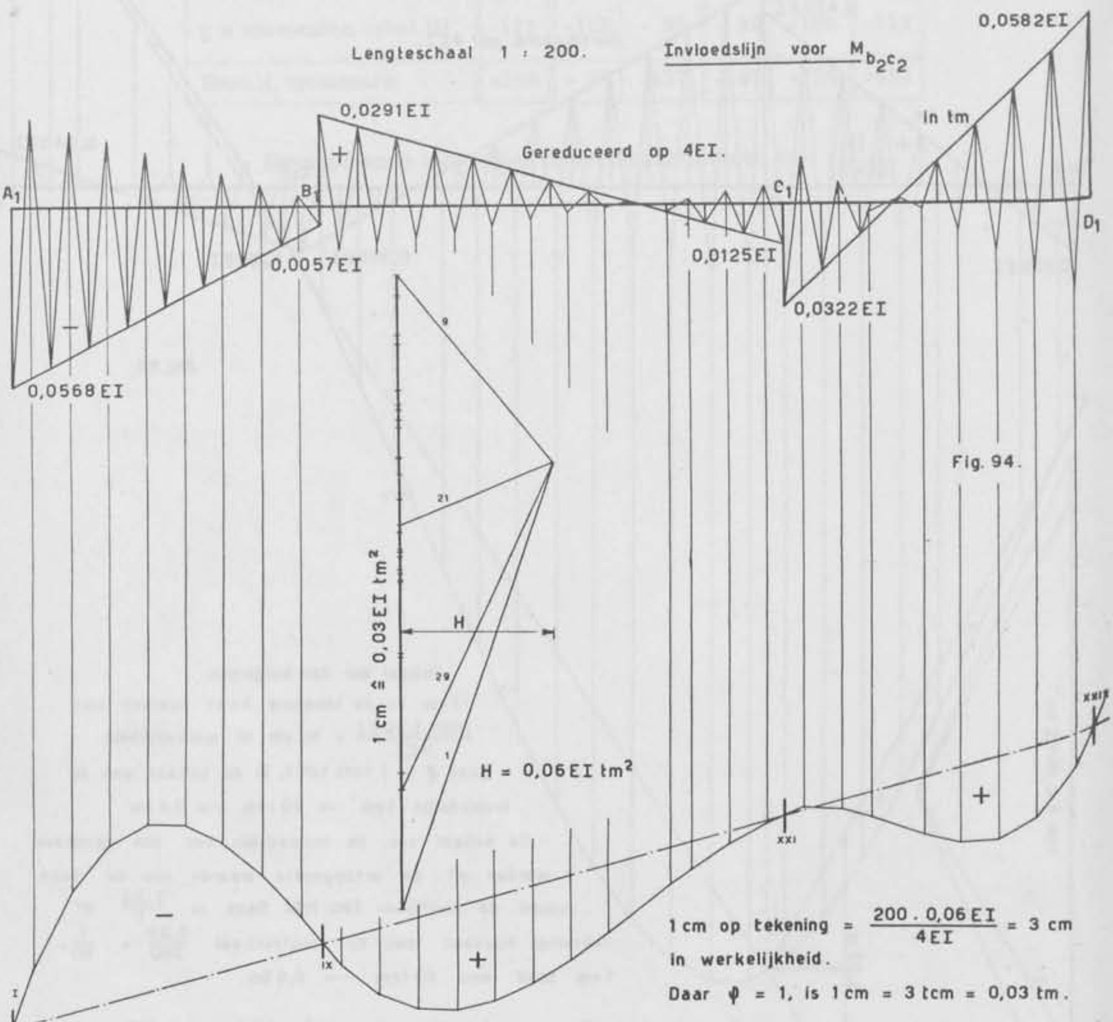
1 cm op de tekening komt overeen met $\frac{200 \cdot 1{,}20\,EI}{4EI} = 60$ cm in werkelijkheid.

Daar $\varphi = 1$ (blz 124), is de schaal van de invloedslijn 1 cm ⟶ 60 tcm ⟶ 0,6 tm.

De schaal van de invloedslijn kan ook gevonden worden uit de orthogonale waarde van de hoek tussen de sluitlijnen (blz 115). Deze is $\frac{3{,}33}{1}$ of, rekening houdend met de lengteschaal $\frac{3{,}33}{200} = \frac{1}{60}$.

1 cm stelt voor 60 tcm ⟶ 0,6 tm.

Zie voor bepalen van het teken blz 116.



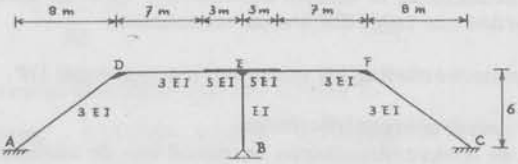
Lengteschaal 1 : 200.
Invloedslijn voor $M_{b_2 c_2}$
in tm
Gereduceerd op 4EI.
0,0582 EI
0,0291 EI
0,0057 EI
0,0125 EI
0,0322 EI
0,0568 EI
A_1
B_1
C_1
D_1
+
−
1 cm ≙ 0,03 EI tm²
H
H = 0,06 EI tm²
9
21
29
1
I
IX
XXI
XXIX
1 cm op tekening = $\frac{200 \cdot 0{,}06\,EI}{4EI}$ = 3 cm in werkelijkheid.
Daar φ = 1, is 1 cm = 3 tcm = 0,03 tm.

Fig. 94.

Hoofdstuk IV

VOORBEELD VAN BEREKENING VAN DE INVLOEDSLIJN VOOR EEN KNOOPPUNTSMOMENT BIJ EEN CONSTRUCTIE MET NIET ONDERLING LOODRECHTE EN NIET PRISMATISCHE STAVEN, VOLGENS DE EERSTE METHODE

Gevraagd wordt voor onderstaande constructie de invloedslijn voor M_{da} te bepalen volgens methode I.



Figuur 95

INLEIDING

Bij de berekening van het moment M_{da} ten gevolge van een last P op een willekeurige plaats moet een vasthoudkracht geëlimineerd worden, welke een functie is van de vereffende momenten en de last P. Deze vasthoudkracht kan men zich gesplitst denken in twee delen, te weten één deel dat veroorzaakt wordt door de momenten en een ander deel dat veroorzaakt wordt door P.

Terwille van een overzichtelijke berekening worden nu eerst de momenten bepaald als alleen het eerste gedeelte van de vasthoudkracht wordt geëlimineerd. Deze berekening verloopt geheel op dezelfde wijze als aangegeven is in hoofdstuk II. Daar was de vasthoudkracht immers alleen een functie van de vereffende momenten.

Daarna wordt het tweede deel van de vasthoudkracht geëlimineerd.

De uiteindelijke in de constructie optredende knooppuntsmomenten worden verkregen door optelling.

BEREKENING

BEREKENING MOMENTENVERDELING TEN GEVOLGE VAN EEN PRIMAIR MOMENT M_{AD} = +10000.

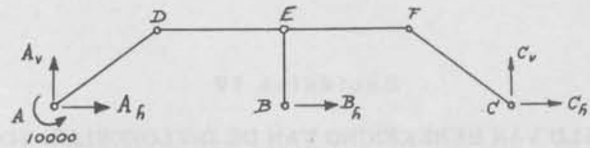
Deze berekening wordt gesplitst in twee delen te weten de momentenverdeling bij onverplaatsbare regel en die, ten gevolge van een verschuiving van de regel.

Momenten bij onverplaatsbare regel

Voor dit geval behoeft geen vereffening te worden uitgevoerd, omdat de doorsnede A ingeklemd is.

Vasthoudkracht

De horizontale vasthoudkracht in D wordt berekend uit de horizontale reacties in de knooppunten A, B en C. De vasthoudkracht is namelijk gelijk maar tegengesteld aan de som van deze reacties.



Figuur 96

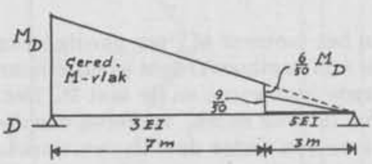
Het moment om D geeft: $8A_V - 6A_H - 10000 = 0.$
Het moment om E geeft: $18A_V - 6A_H - 10000 = 0.$

Oplossing: $A_H = -1667$ (naar links).
De horizontale reacties in B en C zijn nul.
De vasthoudkracht is dus 1667 naar rechts.
Teneinde de vasthoudkracht te kunnen elimineren, moet de momentenverdeling berekend worden als regel DF wordt verschoven.

Berekening momentenverdeling bij verschuiving van regel DF

Vereffenings- en overdrachtscoëfficiënten

Eerst worden de hoekverdraaiingen berekend van de uiteinden van regel DE door een moment respectievelijk in D en in E, als de regel in D en E vrij is opgelegd.



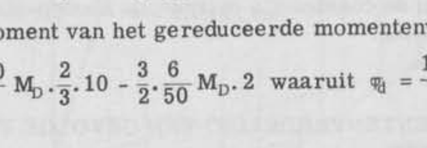
Figuur 97

Uit het statische moment van het gereduceerde momentenvlak om D volgt:

$$10\ \varphi_e . 3EI = \frac{10}{2} M_D . \frac{1}{3} . 10 - \frac{3}{2} . \frac{6}{50} M_D . 8 \text{ waaruit } \varphi_e = \frac{0{,}5076 M_D}{EI}$$

Uit het statische moment van het gereduceerde momentenvlak om E volgt:

$$10\ \varphi_d . 3EI = \frac{10}{2} M_D . \frac{2}{3} . 10 - \frac{3}{2} . \frac{6}{50} M_D . 2 \text{ waaruit } \varphi_d = \frac{1{,}0991 M_D}{EI}.$$



Figuur 98

Uit het statische moment van het gereduceerde momentenvlak om D volgt:

$$10\,\varphi_e.3EI = \frac{10}{2}\,0{,}6M_E.\frac{2}{3}.10 + \frac{7}{2}.\frac{14}{50}M_E.\frac{2}{3}.10 + \frac{7}{2}.\frac{14}{50}M_E.\frac{2}{3}.7, \text{ waaruit}$$

$$\varphi_e = \frac{0{,}8191M_E}{EI}.$$

Uit het statische moment van het gereduceerde momentenvlak om E volgt:

$$10.\varphi_e.3EI = \frac{10}{2}.\,0{,}6M_E.\frac{1}{3}.10 + \frac{7}{2}.\frac{14}{50}M_E(3 + \frac{1}{3}.7), \text{ waaruit } \varphi_d = \frac{0{,}5076M_E}{EI}.$$

Opmerking: Deze laatste waarde volgt ook rechtstreeks uit de bovenstaande berekening (Stelling van Maxwell).

Bevindt zich in D een oplegging en in E een inklemming dan is $\varphi_e = 0$ en dus

$$\frac{0{,}5076M_D}{EI} - \frac{0{,}8191M_E}{EI} = 0 \quad \text{of} \quad M_E = 0{,}6197M_D.$$

0,6197 is de overdrachtscoëfficient van D naar E.

$$\varphi_d = \frac{1{,}0991M_D - 0{,}6197M_D.0{,}5076}{EI} = \frac{0{,}7845M_D}{EI}.$$

Voor $\varphi_d = 1$ is $M_D = k_{de} = \frac{EI}{0{,}7845} = 1{,}2747EI.$

Bevindt zich in E een oplegging en in D een inklemming dan is $\varphi_d = 0$ en dus

$$\frac{0{,}5076M_E}{EI} = \frac{1{,}0991M_D}{EI} \quad \text{of} \quad M_D = 0{,}4618M_E\,.$$

0,4618 is de overdrachtscoëfficient van E naar D.

$$\varphi_e = \frac{0{,}8191M_E - 0{,}4618M_E.0{,}5076}{EI} = \frac{0{,}5847M_E}{EI}\,.$$

Voor $\varphi_e = 1$ is $M_E = k_{ed} = \frac{EI}{0{,}5847} = 1{,}7103EI.$

$$k_{da} : k_{de} = \frac{4.3EI}{10} : 1{,}2747EI = 1{,}2 : 1{,}2747\,,$$

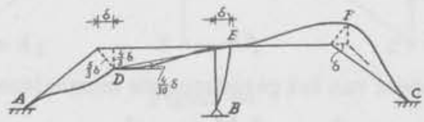
$$\mu_{da} = 0{,}4849 \qquad \mu_{de} = 0{,}5151.$$

$$k_{ed} : k_{eb} : k_{ef} = 1{,}7103EI : \frac{3.EI}{6} : 1{,}7103EI = 1{,}7103 : 0{,}5 : 1{,}7103,$$

$$\mu_{ed} = \mu_{ef} = 0{,}4362 \qquad \mu_{eb} = 0{,}1276;$$

$$\mu_{fc} = 0{,}4849 \qquad \mu_{fe} = 0{,}5151.$$

Berekening primaire momenten



Figuur 99

De primaire momenten M_{EB}, M_{AD} en M_{DA} bij een verschuiving van δ meter volgen direct uit de figuur:

$$M_{EB} = \frac{3.EI\,\delta}{36} = 0{,}0833\ EI\,\delta\ ;\ M_{AD} = M_{DA} = \frac{6.3EI.\frac{5}{3}\,\delta}{100} = 0{,}300\ EI\,\delta\,.$$

M_{ED} en M_{DE} worden gevonden uit de volgende twee vergelijkingen:

$$+\frac{4}{30}\,\delta + \frac{1{,}0991M_{DE}}{EI} - \frac{0{,}5076M_{ED}}{EI} = 0\,.$$

$$+\frac{4}{30}\,\delta - \frac{0{,}5076M_{DE}}{EI} + \frac{0{,}8191M_{ED}}{EI} = 0\,.$$

Oplossing: $M_{ED} = -\,0{,}3333\,\delta\,EI$ en $M_{DE} = -\,0{,}2753\,\delta\,EI$.

Wordt $EI\,\delta = 10000$ gesteld, dan worden:

$$M_{AD} = M_{DA} = +3000,\ \ M_{EB} = +833,\ \ M_{ED} = -3333\ \text{ en }\ M_{DE} = -2753.$$

De overige primaire momenten volgen uit keersymmetrieoverwegingen.
Voor de *vereffening* zie tabel I op bladzijde 145.

Berekening vasthoudkracht

Berekening A_H.

Moment om E: $+\,18A_V - 6\,A_H - 2604 + 855 = 0,$
Moment om D: $+\,8A_V - 6\,A_H - 2604 - 2210 = 0.$

Uit deze vergelijkingen volgt: $A_H = -\,1211$.

Berekening B_H.

Moment om E: $-\,6B_H - 1710 = 0$, waaruit $B_H = -\,285$.

Uit symmetrie volgt, dat $C_H = -\,1211$.

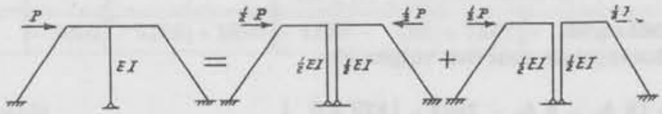
De horizontale kracht tegen de bovenregel bedraagt dus

$$+\,1211 + 285 + 1211 = +\,2707.$$

Opmerking: De bovenstaande momenten hadden ook berekend kunnen worden door van symmetrieoverwegingen gebruik te maken, zoals blijkt uit figuur 100.

TABEL I

Knooppunten	A	D		E			F		C
Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Vereff. coëff.	-	0,4849	0,5151	0,4362	0,1276	0,4362	0,5151	0,4849	-
Overdr. coëff.		0,50	0,6197	0,4618		0,4618	0,6197	0,50	
Prim. mom.	+ 3000	+ 3000	- 2753	- 3333	+ 833	- 3333	- 2753	+ 3000	+ 3000
			+ 1175	+ 2544	+ 745	+ 2544	+ 1175		
	- 345	- 690	- 732	- 454		- 454	- 732	- 690	- 345
			+ 182	+ 396	+ 116	+ 396	+ 182		
	- 44	- 88	- 94	- 58		- 58	- 94	- 88	- 44
			+ 23	+ 51	+ 14	+ 51	+ 23		
	- 6	- 11	- 12	- 7		- 7	- 12	- 11	- 6
			+ 3	+ 6	+ 2	+ 6	+ 3		
	- 1	- 1	- 2	- 1		- 1	- 2	- 1	- 1
				+ 1		+ 1			
Res. mom.	+ 2604	+ 2210	- 2210	- 855	+ 1710	- 855	- 2210	+ 2210	+ 2604



Figuur 100

Eliminatie van de vasthoudkracht

De resulterende momenten worden dus gevonden door die van tabel I te vermenigvuldigen met $-\frac{1667}{2707} = -0{,}616$.

TABEL II

Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
	+10000								
-0,616 x mom. tabel I	- 1604	- 1361	+ 1361	+ 527	- 1054	+ 527	+ 1361	- 1361	- 1604
Res. mom.	+ 8306	- 1361	+ 1361	+ 527	- 1054	+ 527	+ 1361	- 1361	- 1604

BEREKENING MOMENTENVERDELING T.G.V. EEN PRIMAIR MOMENT $M_{DA} = -10000$

Momenten bij onverplaatsbare regel

De vereffening is uitgevoerd in tabel III.

TABEL III

Knooppunten	A	D		E			F		C
Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Vereff. coëff.	-	0,4849	0,5151	0,4362	0,1276	0,4362	0,5151	0,4849	
Overdr.coëff.		0,50	0,6197	0,4618		0,4618	0,6197	0,50	
Prim. mom.		-10000							
	+ 2424	+ 4849	+ 5151	+ 3192					
			- 643	- 1392	- 408	- 1392	- 643		
	+ 156	+ 312	+ 331	+ 205		+ 205	+ 331	+ 312	+ 156
			- 83	- 179	- 52	- 179	- 83		
	+ 20	+ 40	+ 43	+ 26		+ 26	+ 43	+ 40	+ 20
			- 10	- 23	- 6	- 23	- 10		
	+ 2	+ 5	+ 5	+ 3		+ 3	+ 5	+ 5	+ 2
			- 1	- 3		- 3	- 1		
			+ 1				+ 1		
Res. mom.	+ 2602	- 4794	+ 4794	+ 1829	- 466	- 1363	- 357	+ 357	+ 178

Vasthoudkracht

De horizontale reacties volgen uit:

$$\left.\begin{aligned} +18\,A_V - 6\,A_H - 2602 - 1829 &= 0 \\ +\ 8\,A_V - 6\,A_H - 2602 + 4794 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A_H = +1248$$

$$-6\,B_H + 466 = 0 \qquad B_H = +\ 78$$

$$\left.\begin{aligned} -18\,C_V - 6\,C_H - 178 + 1363 &= 0 \\ -\ 8\,C_V - 6\,C_H - 178 - 357 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad C_H = -\ 319$$

De horizontale vasthoudkracht ter plaatse van regel DF is dus

$$-1248 - 78 + 319 = -1007.$$

Eliminatie vasthoudkracht

De resulterende momenten worden nu gevonden door de momenten uit tabel III te vermeerderen met $+\dfrac{1007}{2707} = 0{,}3720$ x de momenten uit tabel I en zijn verzameld in tabel IV op bladzijde 147.

BEREKENING MOMENTENVERDELING TEN GEVOLGE VAN PRIMAIR MOMENT $M_{DE} = +10000$.

Momenten bij onverschuifbare regel

De vereffening volgt rechtstreeks uit tabel III. De vereffende momenten zijn aangegeven in nevenstaande tabel V.

TABEL IV

Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Mom. uit tabel III	+ 2602	- 4794	+ 4794	- 1829	- 466	- 1363	- 357	+ 357	+ 178
0,372 x mom. uit tabel I	+ 969	+ 822	- 822	- 318	+ 636	- 318	- 822	+ 822	+ 969
Res. mom.	+ 3571	- 3972	+ 3972	+ 1511	+ 170	- 1681	- 1179	+ 1179	+ 1147

TABEL V

Knooppunten	A	D		E			F		C
Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Vereff. coëff.		0,4849	0,5151	0,4362	0,1276	0,4362	0,5151	0,4849	
Overdr.coëff.		0,50	0,6197	0,4618		0,4618	0,6197	0,50	
Prim. mom.			+10000	zie		van tabel III			
Res. mom.	- 2602	- 5206	+ 5206	- 1829	+ 466	+ 1363	+ 357	- 357	- 178

Vasthoudkracht

De horizontale reacties volgen uit:

$$\left.\begin{array}{r} +18\,A_V - 6\,A_H + 2602 + 1829 = 0\,, \\ +\ 8\,A_V - 6\,A_H + 2602 + 5206 = 0\,, \end{array}\right\} \quad A_H = +1752$$

$$-6\,B_H - 466 = 0\,, \qquad B_H = -\ 78$$

$$\left.\begin{array}{r} -18\,C_V - 6\,C_H + 178 - 1363 = 0\,, \\ -\ 8\,C_V - 6\,C_H + 178 + 357 = 0\,. \end{array}\right\} \quad C_H = +\ 319$$

De op regel DF werkende vasthoudkracht is dus

$$-1752 + 78 - 319 = -1993.$$

Eliminatie vasthoudkracht

De resulterende momenten worden weer gevonden door de momenten uit tabel V te vermeerderen met $+\frac{1993}{2707} = 0{,}735$ x de momenten uit tabel I en zijn verzameld in tabel VI op bladzijde 148.

BEREKENING MOMENTENVERDELING TEN GEVOLGE VAN EEN PRIMAIR MOMENT M_{ED} = -10000

Momenten bij onverschuifbare knooppunten

Het door een stippellijn omgeven gedeelte van tabel III stelt de vereffening voor van een primair moment $M_{ED} = +3192$. De resulterende momenten zijn aangegeven in tabel VII. De resulterende momenten, die behoren bij een primair moment $M_{ED} = -10000$ worden gevonden door bovengenoemde momenten te vermenigvuldigen met $-\frac{10000}{3192}$.

TABEL VI

Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Mom. uit tabel V	- 2602	- 5206	+ 5206	- 1829	+ 466	+ 1363	+ 357	- 357	- 178
+0,735 x mom. uit tabel I	+ 1917	+ 1627	- 1627	- 629	+ 1258	- 629	- 1627	+ 1627	+ 1917
Res. mom.	- 685	- 3579	+ 3579	- 2458	+ 1724	+ 734	- 1270	+ 1270	+ 1739

TABEL VII

Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Mom. tabel III	+ 178	+ 357	- 357	+ 1829	- 466	- 1363	- 357	+ 357	+ 178
$-\frac{10000}{3192}$ x bovenstaande mom. zijn de resulterende mom.	- 558	- 1118	+ 1118	- 5730	+ 1460	+ 4270	+ 1118	- 1118	- 558

Vasthoudkracht

De horizontale reacties volgen uit:

$$\left.\begin{array}{l} +18\,A_V - 6\,A_H + 558 + 5730 = 0\,, \\ +\ 8\,A_V - 6\,A_H + 558 + 1118 = 0\,, \end{array}\right\} \quad A_H = -\,337\,,$$

$$-6\,B_H - 1460 = 0\,, \qquad B_H = -\,243\,,$$

$$\left.\begin{array}{l} -18\,C_V - 6\,C_H + 558 - 4270 = 0\,, \\ -\ 8\,C_V - 6\,C_H + 558 + 1118 = 0\,. \end{array}\right\} \quad C_H = +\,998\,.$$

De op regel DF werkende vasthoudkracht is dus: + 337 + 243 - 998 = - 418.

Eliminatie vasthoudkracht

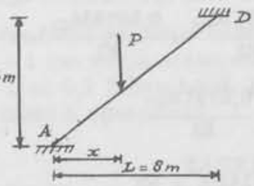
De resulterende momenten worden weer gevonden door de momenten uit tabel VII te vermeerderen met $+\frac{418}{2707} = +\,0{,}1543$ x de momenten uit tabel I en zijn verzameld in tabel VIII op bladzijde 149.

TABEL VIII

Staven	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
Mom. uit tabel VII	- 558	- 1118	+ 1118	- 5730	+ 1460	+ 4270	+ 1118	- 1118	- 558
+0,1543 x mom. uit tabel I	+ 402	+ 341	- 341	- 132	+ 264	- 132	- 341	+ 341	+ 402
Res. mom.	- 156	- 777	+ 777	- 5862	+ 1724	+ 4138	+ 777	- 777	- 156

BEREKENING PRIMAIRE MOMENTEN ALS FUNCTIE VAN DE PLAATS VAN DE LAST

Stijl AD



$$M_{AD} = \frac{P\,x\,(8-x)^2}{64}$$

$$M_{DA} = -\frac{P\,x^2(8-x)}{64}$$

Figuur 101

De belasting van P = 1 ton wordt achtereenvolgens op x = 0,1L; 0,2L..... 0,9L gezet. De numerieke waarden van de primaire momenten zijn in onderstaande tabel IX verzameld.

TABEL IX

Primaire momenten M_{AD} en M_{DA} in tm als functie van de plaats der last P = 1 ton.

	x=0,8m	x=1,6m	x=2,4m	x=3,2m	x=4m	x=4,8m	x=5,6m	x=6,4m	x=7,2m
M_{AD}	+0,648	+1,024	+1,176	+1,152	+1,000	+0,768	+0,504	+0,256	+0,072
M_{DA}	-0,072	-0,256	-0,504	-0,768	-1,000	-1,152	-1,176	-1,024	-0,648

P op regel DE

Hierbij dienen 2 gevallen te worden onderscheiden, n.l.

a) de last P = 1 ton staat op het niet verzwaarde gedeelte,
b) de last P staat op het wel verzwaarde gedeelte.

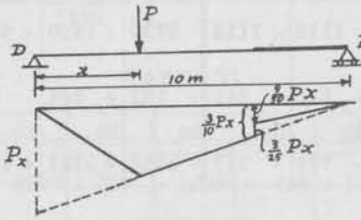
a) P op het niet verzwaarde gedeelte

$$30\varphi_d EI = \frac{10}{2}Px.\frac{2}{3}.10 - Px.\frac{1}{2}x(10 - \frac{1}{3}x) - \frac{3}{25}Px.\frac{3}{2}.2\ ,$$

waaruit $\varphi_D = \dfrac{25Px^3 - 750Px^2 + 4946Px}{4500EI}$.

$$30\varphi_e EI = \frac{10}{2}Px.\frac{1}{3}.10 - Px.\frac{1}{2}x.\frac{1}{3}x - \frac{3}{25}Px.\frac{3}{2}.8\ ,$$

waaruit $\varphi_e = \dfrac{-25Px^3 + 2284Px}{4500EI}$.



Figuur 102

Met behulp van de op bladzijde 143 afgeleide formules kunnen nu uit de volgende twee vergelijkingen de primaire momenten M_{DE} en M_{ED} worden afgeleid:

$$\frac{25Px^3 - 750Px^2 + 4946Px}{4500EI} - \frac{1{,}0991M_{DE}}{EI} + \frac{0{,}5076M_{ED}}{EI} = 0$$

$$\frac{-25Px^3 + 2284Px}{4500EI} - \frac{0{,}5076M_{DE}}{EI} + \frac{0{,}8191M_{ED}}{EI} = 0.$$

Oplossing: $M_{DE} = +0{,}01146Px^3 - 0{,}2124Px^2 + Px$

$M_{ED} = +0{,}01387Px^3 - 0{,}13162Px^2$.

Deze waarden gelden dus voor $0 \leqslant x \leqslant 7$ m.

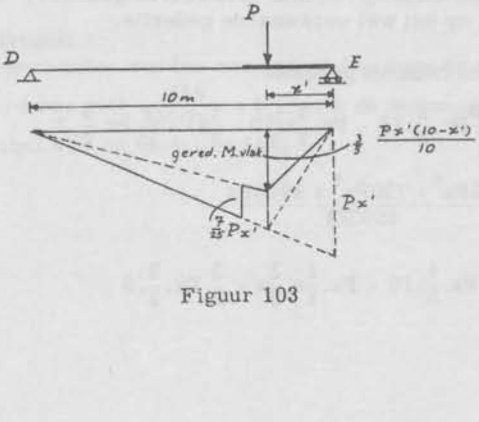
b) P op het verzwaarde gedeelte

$$30\varphi_d EI = \frac{3Px'(10-x')}{50}\left[\frac{1}{2}x'.\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}\left\{10 - x'\right\}\left\{x' + \frac{1}{3}(10 - x')\right\}\right] + \frac{7}{25}Px'.\frac{7}{2}(3+\frac{7}{3})$$

waarruit $\varphi_d = \dfrac{-15Px'^3 + 2284Px'}{4500EI}$.

$$30\varphi_e EI = \frac{3Px'(10-x')}{50}\left[\frac{1}{2}x'\ (10 - x' + \frac{1}{3}x') + \frac{1}{2}(10-x')\ \frac{2}{3}(10-x')\right] + \frac{7}{25}Px'.\frac{7}{2}.\frac{2}{3}.7$$

waarruit $\varphi_e = \dfrac{15Px'^3 - 450Px'^2 + 3686Px'}{4500EI}$.



Figuur 103

Met behulp van de op bladzijde 143 afgeleide formules kunnen nu uit de volgende twee vergelijkingen de primaire momenten M_{DE} en M_{ED} worden afgeleid:

$$\frac{-15Px'^3 + 2284Px'}{4500EI} - \frac{1{,}0991M_{DE}}{EI} + \frac{0{,}5076M_{ED}}{EI} = 0,$$

$$\frac{15Px'^3 - 450Px'^2 + 3686Px'}{4500EI} - \frac{0{,}5076M_{DE}}{EI} + \frac{0{,}8191M_{ED}}{EI} = 0.$$

Oplossing: $M_{DE} = -0{,}00688\ Px'^3 + 0{,}07897Px'^2$

$M_{ED} = -0{,}00833\ Px'^3 + 0{,}17101Px'^2 - Px'$

Deze oplossingen gelden dus voor $0 \leqslant x' \leqslant 3$m.
Controle: Staat de last op de grens van het wel verzwaarde en niet verzwaarde gedeelte, dan moeten de onder a) en b) afgeleide formules dezelfde waarden voor de inklemmingsmomenten geven. Zie hiervoor de onderstaande tabel X.

De in regel DE optredende primaire momenten

De belasting P = 1 ton wordt achtereenvolgens op x = 0,1 L; 0,2 L.....0,7 L en x' = 0,3 L, 0,2 L en 0,1 L berekend. De numerieke waarden van de primaire momenten zijn in tabel X verzameld.

TABEL X

Primaire momenten M_{DE} en M_{ED} als functie van de plaats der last P = 1 ton

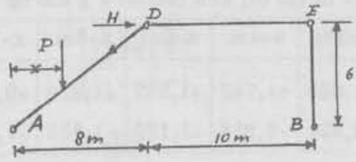
	x=1m	x=2m	x=3m	x=4m	x=5m	x=6m	x=7m	x'=3m	x'=2m	x'=1m
M_{DE}	+0,799	+1,242	+1,398	+1,335	+1,122	+0,828	+0,522	+0,524	+0,261	+0,072
M_{ED}	-0,118	-0,415	-0,810	-1,218	-1,557	-1,742	-1,692	-1,686	-1,383	-0,837

Het is nu met behulp van de tabellen II, IV, VI en VIII mogelijk de resulterende momenten M_{da} ten gevolge van de in de tabellen IX en X vermelde primaire momenten te berekenen, zie tabel XI.

Berekening van de invloed van het tweede gedeelte van de vasthoudkracht

Staat de last op AD, dan volgt uit het evenwicht van AD voor de vasthoudkracht in D

$$+Px + 6H = 0 \qquad \text{of} \qquad H = -\frac{1}{6}\,Px.$$



Figuur 104

Staat de last in A, dan is H = 0; staat hij in D, dan is H = -1,333P terwijl tussen A en D het verloop lineair is. Evenzo is de invloedslijn voor H als P op DE staat een rechte lijn met als ordinaten H = -1,333P voor knooppunt D en H = 0 voor knooppunt E. De tegengestelden van deze vasthoudkrachten veroorzaken weer knooppuntsmomenten. De invloedslijn voor M_{da} ten gevolge van deze krachten verloopt eveneens lineair van A tot D en van D tot E. De maximum ordinaat wordt gevonden door M_{da} = +2210 uit tabel I te vermenigvuldigen met $\frac{+1,333}{2707}$ en bedraagt +1,088 tm.

Berekening resulterende invloedsordinaten

De resulterende invloedsordinaten voor M_{da} als P = 1 ton zich van A tot E beweegt zijn verzameld in tabel XI, op bladzijde 153. x wordt gemeten vanaf A in meters.

Op de eerste regel zijn de primaire momenten M_{AD} uit tabel IX vermenigvuldigd met $\frac{-1361}{10000}$ (zie tabel II) en de primaire momenten M_{DE} uit tabel X vermenigvuldigd met $\frac{-3579}{10000}$ (zie tabel VI).

Op de tweede regel zijn de primaire momenten M_{DA} uit tabel IX vermenigvuldigd met $\frac{-3972}{-10000}$ (zie tabel IV) en de primaire momenten M_{ED} uit tabel X vermenigvuldigd met $\frac{-777}{-10000}$ (zie tabel VIII).

Op de derde regel zijn de invloedsordinaten ten gevolge van de last zelf berekend. Sommatie van bovengenoemde momenten geeft de ordinaten van de gevraagde invloedslijn van A tot E.
Het gedeelte van de invloedslijn voor M_{da} als P zich tussen E en C bevindt kan in verband met de symmetrie van de constructie gemakkelijk uit de voorgaande tabellen worden afgeleid.
Uit de tabellen II, IV, VI en VIII volgt namelijk achtereenvolgens, dat

bij een primair moment M_{CF} = +10000 een resulterend moment M_{da} = -1361 behoort,

bij een primair moment M_{FC} = -10000 een resulterend moment M_{da} = +1179 behoort,

bij een primair moment M_{FE} = +10000 een resulterend moment M_{da} = +1270 behoort,

bij een primair moment M_{EF} = -10000 een resulterend moment M_{da} = -777 behoort.

De primaire momenten als functie van de plaats van de last P = 1 ton op EFC volgen direct uit de tabellen IX en X. Volledigheidshalve zijn ze echter in de onderstaande tabellen XII en XIII opgenomen. x wordt gemeten vanaf E.

TABEL XII

Moment in tm bij een last P = 1 ton op EF

	x=1m	x=2m	x=3m	x=4m	x=5m	x=6m	x=7m	x=8m	x=9m
M_{EF}	+0,837	+1,383	+1,686	+1,742	+1,557	+1,218	+0,810	+0,415	+0,118
M_{FE}	-0,072	-0,261	-0,524	-0,828	-1,122	-1,335	-1,398	-1,242	-0,799

TABEL XI

Invloedslijn M_{da} voor gedeelte AE

	AD										
	x=0	x=0,8	x=1,6	x=2,4	x=3,2	x=4,0	x=4,8	x=5,6	x=6,4	x=7,2	x=8
$\frac{1361}{10000} \cdot M_{AD}$	0	-0,088	-0,139	-0,160	-0,157	-0,136	-0,105	-0,069	-0,035	-0,010	0
$\frac{3972}{10000} \cdot M_{DA}$	0	-0,029	-0,102	-0,200	-0,305	-0,397	-0,458	-0,467	-0,407	-0,257	0
	0	+0,109	+0,218	+0,326	+0,435	+0,544	+0,653	+0,762	+0,870	+0,979	+1,088
	0	-0,008	-0,023	-0,034	-0,027	+0,011	+0,090	+0,226	+0,428	+0,711	+1,088

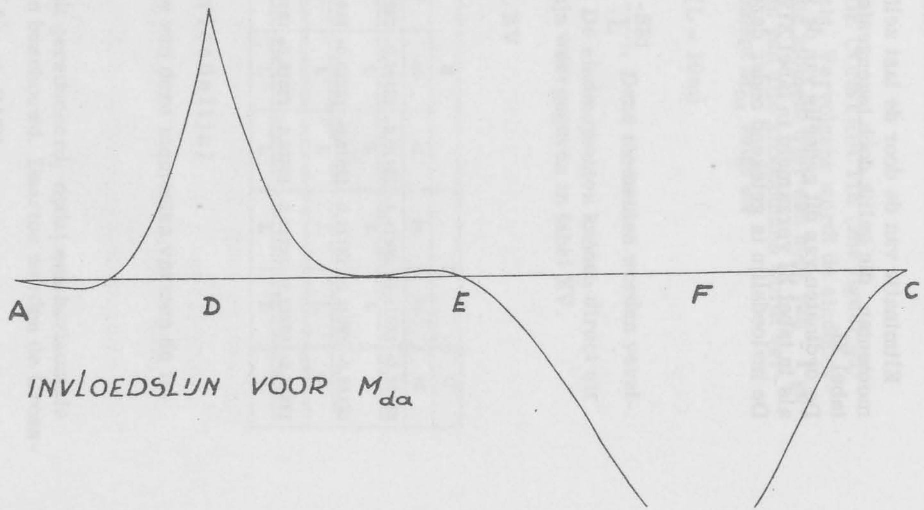
DE										
x=9	x=10	x=11	x=12	x=13	x=14	x=15	x=16	x=17	x=18	
-0,286	-0,445	-0,500	-0,478	-0,402	-0,296	-0,187	-0,093	-0,025	0	$M'_{DE} \cdot -\frac{3579}{10000}$
-0,009	-0,032	-0,063	-0,095	-0,121	-0,135	-0,131	-0,107	-0,065	0	$M_{ED} \cdot \frac{777}{10000}$
+0,979	+0,870	+0,762	+0,653	+0,544	+0,435	+0,326	+0,218	+0,109	0	
+0,684	+0,393	+0,199	+0,080	+0,021	+0,004	+0,008	+0,018	+0,019	0	

TABEL XIV

Invloedslijn M_{da} voor gedeelte EC

	EF										
	x=0	x=1m	x=2m	x=3m	x=4m	x=5m	x=6m	x=7m	x=8m	x=9m	x=10m
$M_{EF} \cdot \frac{777}{10000}$	0	+0,065	+0,107	+0,131	+0,135	+0,121	+0,095	+0,063	+0,032	+0,009	0
$M_{FE} \cdot \frac{1270}{10000}$	0	-0,009	-0,033	-0,067	-0,105	-0,142	-0,170	-0,178	-0,158	-0,101	0
	0	-0,109	-0,218	-0,326	-0,435	-0,544	-0,653	-0,762	-0,870	-0,979	-1,088
	0	-0,053	-0,144	-0,262	-0,405	-0,565	-0,728	-0,877	-0,996	-1,071	-1,088

FC										
x=10,8m	x=11,60m	x=12,40m	x=13,20m	x=14,00m	x=14,80m	x=15,60m	x=16,40m	x=17,20m	x=18m	
-0,076	-0,121	-0,139	-0,135	-0,118	-0,091	-0,059	-0,030	-0,008	0	$M_{FC} \cdot -\frac{1179}{10000}$
+0,010	+0,034	+0,069	+0,105	+0,136	+0,157	+0,160	+0,139	+0,088	0	$M_{CF} \cdot -\frac{1361}{10000}$
-0,979	-0,870	-0,762	-0,653	-0,544	-0,435	-0,326	-0,218	-0,109	0	
-1,045	-0,957	-0,832	-0,683	-0,526	-0,369	-0,225	-0,109	-0,029	0	



TABEL XIII

Moment in tm bij een last P = 1 ton op FC

	x=10,8m	x=11,60m	x=12,40m	x=13,20m	x=14,00m	x=14,80m	x=15,60m	x=16,40m	x=17,20m
M_{FC}	+0,648	+1,024	+1,176	+1,152	+1,000	+0,768	+0,504	+0,256	+0,072
M_{CF}	-0,072	-0,256	-0,504	-0,768	-1,000	-1,152	-1,176	-1,024	-0,648

Eliminatie van de door de last zelf veroorzaakte vasthoudkrachten levert momenten, die gelijk doch tegengesteld zijn aan die vermeld op regel 3 van tabel XI.
De ordinaten van dit gedeelte van de invloedslijn voor M_{da} zijn op gelijke wijze als in tabel XI verzameld in tabel XIV, op bladzijde 153.
De invloedslijn is getekend onder deze tabel.

Hoofdstuk V

VOORBEELD VAN BEREKENING VAN DE INVLOEDSLIJN VOOR EEN KNOOPPUNTSMOMENT BIJ EEN CONSTRUCTIE MET NIET ONDERLING LOODRECHTE STAVEN, VOLGENS DE TWEEDE METHODE

BEREKENING VAN DE MOMENTEN IN DE CONSTRUCTIE (Zie figuur 95)

In DA bij D wordt een scharnier gedacht. Vervolgens wordt de einddoorsnede D van DA door een negatief inwendig moment over een hoek van - 1 gedraaid, terwijl het draaien en verplaatsen van alle knooppunten wordt verhinderd. De grootte van het primaire moment M_{DA} volgt uit

$$\varphi = -1 = \frac{+M.L}{4.3EI} \quad \text{of} \quad M_{DA} = \frac{-12EI}{L} \quad (L = 10\text{m})$$

Het primaire moment $M_{AD} = -\frac{1}{2}.\frac{12EI}{L} = \frac{-6EI}{L}$. Deze momenten worden vereffend en de vasthoudkracht geëlimineerd. De eindmomenten kunnen direct uit de tabellen IV en II worden afgeleid en zijn weergegeven in tabel XV.

TABEL XV

	A	D		E			F		C
	ad	da	de	ed	eb	ef	fe	fc	cf
$\frac{-12EI}{-10000L}$ x tabel IV	$\frac{+4,285EI}{L}$	$\frac{-4,766EI}{L}$	$\frac{+4,766EI}{L}$	$\frac{+1,813EI}{L}$	$\frac{+0,204EI}{L}$	$\frac{-2,017EI}{L}$	$\frac{-1,415EI}{L}$	$\frac{+1,415EI}{L}$	$\frac{+1,376EI}{L}$
$\frac{-6EI}{+10000L}$ x tabel II	$\frac{-5,038EI}{L}$	$\frac{+0,817EI}{L}$	$\frac{-0,817EI}{L}$	$\frac{-0,316EI}{L}$	$\frac{+0,632EI}{L}$	$\frac{-0,316EI}{L}$	$\frac{-0,817EI}{L}$	$\frac{+0,817EI}{L}$	$\frac{+0,962EI}{L}$
	$\frac{-0,753EI}{L}$	$\frac{-3,949EI}{L}$	$\frac{+3,949EI}{L}$	$\frac{+1,497EI}{L}$	$\frac{+0,836EI}{L}$	$\frac{-2,333EI}{L}$	$\frac{-2,232EI}{L}$	$\frac{+2,232EI}{L}$	$\frac{+2,338EI}{L}$

Berekening elastische lijn (invloedslijn)

De verticale doorbuigingen ten gevolge van deze momenten vormen de invloedslijn voor M_{da}.

Ligger AD

De momentenlijn van deze ligger wordt gereduceerd, opdat een horizontale ligger met een lengte van 8 m kan worden beschouwd. Daartoe worden de Crossmomenten vermenigvuldigd met $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{4}$ ($\alpha = \angle$ BAD).

Deze worden dan $\frac{5}{4}.\frac{-0,753EI}{L} = \frac{-0,941EI}{L}$ en $\frac{5}{4}.\frac{-3,949EI}{L} = \frac{-4,936EI}{L}$.

Het eerste moment veroorzaakt een positief, het tweede moment een negatief buigend moment in AD. Wordt x vanaf A gemeten, dan geldt voor een doorsnede op een afstand x vanaf A (horizontaal gemeten):

$$M_x = +0,941\frac{EI}{L} - \frac{x}{0,8L}(+0,941 + 4,936)\frac{EI}{L}.$$

Uit $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI_{AD}}$ volgt in verband met het bovenstaande

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-0,314}{L} + \frac{1,955x}{0,8\,L^2} ,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-0,314x}{L} + \frac{1,225x^2}{L} + C , \quad C = 0, \text{ daar } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ is voor } x = 0 ,$$

$$y = \frac{-0,157x^2}{L} + \frac{0,408x^3}{L^2} + D, \quad D = 0, \text{ daar } y = 0 \text{ is voor } x = 0 .$$

De vergelijking voor de elastische lijn is dus na substitutie van L = 10 m:

$$y = +0,0157x^2 - 0,00408x^3 \text{ meter.}$$

Daar $M = \frac{-y}{\varphi}$ en $\varphi = -1$ is $M = -0,0157x^2 + 0,00408x^3$ tm voor P = 1 ton.

Voor dezelfde doorsneden van AD als aangegeven in tabel XI worden in onderstaande tabel XVI de invloedsordinaten gevonden.

TABEL XVI

	AD									
x =	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2	8,0m
M =	-0,008	-0,024	-0,034	-0,027	+0,010	+0,090	+0,224	+0,427	+0,709	+1,085tm

Ligger DE

Het Cross-moment $M_{de} = +3,949 \frac{EI}{L}$ veroorzaakt een negatief, het Cross-moment $M_{ed} = +1,497 \frac{EI}{L}$ een positief buigend moment in de ligger. Wordt x gemeten vanaf D, dan geldt, daar L = 10 m, $M_x = -0,3949\ EI + \frac{x}{10}(+0,3949 + +0,1497)EI$.

Uit de formule $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI_{DE}}$ volgt in verband met het feit, dat EI bij x = 7 m een discontinuiteit vertoont, dat de elastische lijn uit 2 takken bestaat.

Voor de linkertak geldt: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{3EI} \quad 0 < x < 7$ m

en voor de rechtertak: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{5EI} \quad 7\text{ m} < x < 10$ m .

Linkertak: $\frac{d^2y}{dx^2} = +\,0,1316 - 0,01815x$

$$\frac{dy}{dx} = +\,0,1316x - 0,009075x^2 + E$$

$$y = +\,0,0658x^2 - 0,003025x^3 + Ex + F .$$

Rechtertak: $\frac{d^2y}{dx^2} = +\,0,07898 - 0,010892x$

$$\frac{dy}{dx} = +0{,}07898x - 0{,}005446x^2 + G$$

$$y = +0{,}03949x^2 - 0{,}001815x^3 + Gx + H\ .$$

De nog onbekende constanten E, F, G en H worden opgelost uit de volgende voorwaarden:

$$x = 0 \qquad y_{linkertak} = +1{,}085$$

$$x = 7m \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{linkertak} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{rechtertak}$$

$$x = 7m \qquad y_{linkertak} = y_{rechtertak}$$

$$x = 10m \qquad y_{rechtertak} = 0.$$

Oplossing: $E = -0{,}4665$
$F = +1{,}085$
$G = -0{,}2760$
$H = +0{,}626$

De vergelijkingen van de elastische lijnen worden:

$$y_{linkertak} = +0{,}0658x^2 - 0{,}003025x^3 - 0{,}4665x + 1{,}085 = +M \text{ in tm} = \frac{-y}{-\varphi} \quad (0 < x < 7)$$

$$y_{rechtertak} = +0{,}03949x^2 - 0{,}001815x^3 - 0{,}2760x + 0{,}626 = +M \text{ in tm} \quad (7 < x < 10)$$

Voor dezelfde doorsneden van DE als aangegeven in tabel XI zijn in de onderstaande tabel XVII de invloedsordinaten berekend.

TABEL XVII

DE									
x =	1m	2m	3m	4m	5m	6m	7m	8m	9m
M =	+0,680	+0,391	+0,196	+0,078	+0,020	+0,002	+0,006	+0,016	+0,018tm

Voor de liggers CF en EF worden de invloedsordinaten op analoge wijze berekend als bij respectievelijk AD en DE.

Ligger CF (x gemeten vanaf C)

$$y = -0{,}048716x^2 + 0{,}0039674x^3 = M$$

Ligger EF (x gemeten vanaf F)

$$y_{rechtertak} = +0{,}0372x^2 - 0{,}0025362x^3 - 0{,}01820x - 1{,}087 = M \text{ in tm} \quad (0 < x < 7)$$

$$y_{linkertak} = +0{,}02232x^2 - 0{,}0015217x^3 + 0{,}04099x - 1{,}120 = M \text{ in tm} \quad (7 < x < 10).$$

De invloedsordinaten zijn verzameld in de nevenstaande tabellen XVIII en XIX (vergelijk tabel XIV).

TABEL XVIII

CF									
x in m	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	5,6	6,4	7,2	8,0
M in tm	-0,029	-0,109	-0,226	-0,369	-0,525	-0,831	-0,955	-1,044	-1,087

TABEL XIX

FE									
x in m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M in tm	-1,071	-0,994	-0,875	-0,727	-0,565	-0,405	-0,261	-0,143	-0,052

Daar $\varphi = -1$ is gekozen, zijn de doorbuigingen in meters, tevens de momenten in tm bij een bewegende last van 1 ton. Waar de last geheven wordt is het Cross-moment negatief.

Opmerking: Uit de aard van de constructie volgt, dat de doorbuigingen van D en F gelijk doch tegengesteld van teken moeten zijn.

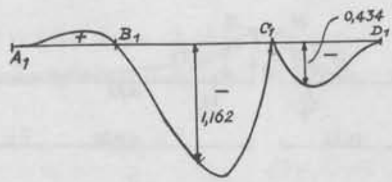
Hoofdstuk VI

BEPALING VAN DE INVLOEDSLIJN VOOR EEN VELDMOMENT

Als voorbeeld wordt de constructie van hoofdstuk II en III genomen.

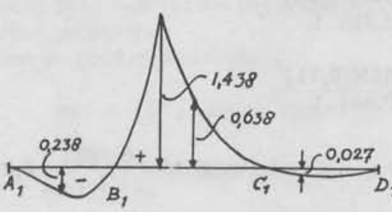
METHODE I

Met behulp van de invloedslijn voor de momenten $M_{b_1c_1}$ en $M_{c_1b_1}$ (welke laatste in verband met de symmetrie van de constructie, direct uit $M_{b_1c_1}$ afgeleid kan worden. Zie figuur 92 op bladzijde 131, hoofdstuk II) is het mogelijk de invloedslijn voor het moment voor een doorsnede van veld B_1C_1 te bepalen.



Figuur 105

Gekozen is de invloedslijn voor de doorsnede op 3,60 m vanaf B_1 ($\varepsilon = 0,3$). Een positief Cross-moment $M_{b_1c_1}$ veroorzaakt in die doorsnede een negatief buigend moment, terwijl een positief Cross-moment $M_{c_1b_1}$ daar een positief buigend moment veroorzaakt.
De grootte van het veldmoment wordt dan:
$M_{[\varepsilon = 0,3]} = -0,7\ M_{b_1c_1} + 0,3\ M_{c_1b_1}$ (+ moment door de last).
De resulterende invloedslijn is getekend in de onderstaande figuur.



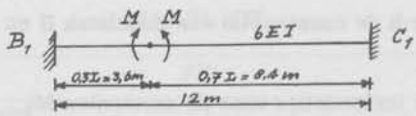
Figuur 106

METHODE II

Berekening momentenverdeling

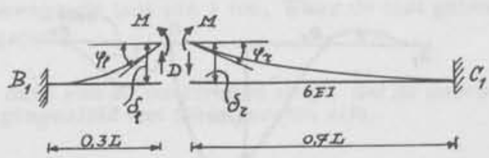
Indien de invloedslijnen voor de knooppuntsmomenten niet bekend zijn, kan de invloedslijn voor een veldmoment op overeenkomstige wijze bepaald worden, als die voor een knooppuntsmoment. Ter plaatse van de doorsnede van het veld, waarvoor men de invloedslijn van het moment wil kennen, wordt een scharnier aangebracht. De daar samenkomende staafeinden worden daarna over een hoek $\varphi = +1$ ten opzichte van elkaar gedraaid door een positief inwendig moment. De elastische lijn die ontstaat, is dan op een bepaalde schaal de gevraagde invloedslijn.

Bepaling primaire momenten



Figuur 107

Als statisch onbepaalde wordt de dwarskracht ter plaatse van het scharnier gekozen.



Figuur 108

$$\delta_l = \frac{M.(0.3L)^2}{2.6EI} + \frac{D.(0,3L)^3}{3.6EI},$$

$$\delta_r = \frac{M.(0.7L)^2}{2.6EI} - \frac{D.(0.7L)^3}{3.6EI}.$$

Uit de voorwaarde dat $\delta_l = \delta_r$ volgt: $D = \frac{1,62M}{L}$.

$$\varphi_l = \frac{M.0,3L}{6EI} + \frac{1,62M(0,3L)^2}{2.6EI.L},$$

$$\varphi_r = \frac{M.0,7L}{6EI} - \frac{1,62M(0,7L)^2}{2.6EI.L}.$$

Uit de voorwaarde, dat $\varphi_l + \varphi_r = 1$, volgt $M = \frac{8,88EI}{L} = 0,74EI$ tm en $D = \frac{14,4EI}{L^2} = 0,1EI$ ton.

De primaire momenten zijn:

$$M_{B_1C_1} = -0,74EI - 3,6.0,1EI = -1,1EI \text{ tm},$$

$$M_{C_1B_1} = +0,74EI - 8,4.0,1EI = -0,1EI \text{ tm}.$$

Vervolgens wordt het scharnier vastgeklemd en kunnen de primaire momenten worden vereffend. De resulterende momenten kunnen echter direct afgeleid worden uit tabel VII op bladzijde 128, waar deze gegeven zijn ten gevolge van een primair moment $M_{B_1C_1} = +10000$. Uit deze tabel zijn in verband met de symmetrie van de constructie ook de resulterende momenten ten gevolge van een primair moment $M_{C_1B_1} = +10000$ bekend.

De voor de bepaling van de invloedslijn benodigde Cross-momenten zijn:

$$M_{a_1b_1} = (-1{,}1EI.-1377 - 0{,}1EI.-29) \quad : 10000 = +0{,}1518EI,$$

$$M_{b_1a_1} = (-1{,}1EI.-3582 - 0{,}1EI.+473) \quad : 10000 = +0{,}3893EI,$$

$$M_{b_1c_1} = (-1{,}1EI.+6471 - 0{,}1EI.-1278) : 10000 = -0{,}6990EI,$$

$$M_{c_1b_1} = (-1{,}1EI.-1278 - 0{,}1EI.+6471) : 10000 = +0{,}0759EI,$$

$$M_{c_1d_1} = (-1{,}1EI.+473 \; - 0{,}1EI.-3582) : 10000 = -0{,}0162EI \quad \text{en}$$

$$M_{d_1c_1} = (-1{,}1EI.-29 \; - 0{,}1EI.-1377) : 10000 = +0{,}0170EI.$$

Berekening elastische lijn (invloedslijn)

De elastische lijn voor het veld A_1B_1 is nu te bepalen met behulp van de formule:

$$y.EI_{A_1B_1} = \frac{M_{a_1b_1}.L^2}{6}\gamma_1 + \frac{M_{b_1a_1}.L^2}{6}\gamma_2 \qquad \text{(Zie bladzijde 134 hoofdstuk III)}$$

$$y = \frac{+0{,}1518}{24}\,8^2.\gamma_1 + \frac{0{,}3893}{24}\,8^2.\gamma_2$$

en daar $M = -\frac{y}{\varphi}$ en $\varphi = +1$, is $M = -y$.

Voor veld C_1D_1:

$$y = \frac{-0{,}0162}{24}\,8^2.\gamma_1 + \frac{0{,}0170}{24}\,8^2.\gamma_2 = -M.$$

De elastische lijn voor B_1C_1 bestaat uit twee takken, omdat ter plaatse van $\varepsilon = 0{,}3$ een discontinuiteit optreedt.
Voor de linkertak gelden de randvoorwaarden:

$x = 0 \qquad y = 0 \qquad$ en $\qquad$ (x gemeten vanaf B_1)

$$\left[\frac{dy}{dx} \text{ voor veld } A_1B_1\right]_{x=8m} = \left[\frac{dy}{dx} \text{ voor veld } B_1C_1\right]_{x=0}$$

De formule voor $\frac{dy}{dx}$ voor veld A_1B_1 luidt (zie formule op bladzijde 134, Hoofdstuk III):

$$\frac{dy}{dx}EI_{A_1B_1} = M_{a_1b_1}\left(x - \frac{x^2}{2L}\right) - \frac{x^2}{2L}M_{b_1a_1} + C, \quad \text{waarin}$$

$$C = \frac{L}{6}M_{b_1a_1} - \frac{L}{3}M_{a_1b_1}.$$

Substitutie van $M_{a_1b_1} = +0,1518EI$, $M_{b_1a_1} = +0,3893EI$ en $x = 8m$ levert:

$$[\frac{dy}{dx} \text{ voor veld } A_1B_1]_{x=8m} = -0,2089.$$

Voor de rechtertak gelden de randvoorwaarden:

$x = 12$ m $\quad y = 0 \quad$ en $\quad$ (x gemeten vanaf B_1)

$$[\frac{dy}{dx} \text{ voor veld } C_1D_1]_{x=0} = [\frac{dy}{dx} \text{ voor veld } B_1C_1]_{x=12m}.$$

Op overeenkomstige wijze als hierboven wordt gevonden:

$$[\frac{dy}{dx} \text{ voor veld } C_1D_1]_{x=0} = +0,01647.$$

De differentiaal vergelijking, die voor beide takken geldt, luidt (zie formule op bladzijde 135, Hoofdstuk III):

$$\frac{d^2y}{dx^2} . EI_{B_1C_1} = \frac{L-x}{L} M_{b_1c_1} - \frac{x}{L} M_{c_1b_1}.$$

Eenmaal integreren levert:

$$\frac{dy}{dx} EI_{B_1C_1} = M_{b_1c_1}(x - \frac{x^2}{2L}) - \frac{x^2}{2L} M_{c_1b_1} + C$$

of $$\frac{dy}{dx} = -0,06990\,(x - \frac{x^2}{24}) - (\frac{x^2}{24} + 0,0759) + C \qquad (1)$$

Voor $x = 0$ en $\frac{dy}{dx} = -0,2089$ volgt hieruit $C = -1,2534EI$ voor de linker tak.
De vergelijking van de elastische lijn voor deze tak wordt:

$$y = -0,6990\,(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3.24}) + (0,0759. -\frac{x^3}{3.24}) - 1,2534x + D = -M.$$

Uit de voorwaarde, dat $y = 0$ voor $x = 0$, volgt $D = 0$.
C voor de rechter tak wordt gevonden door $\frac{dy}{dx} = +0,01647$ en $x = 12$ m in vergelijking (1) te substitueren. Hieruit volgt: $C = +4,7484EI$.
De vergelijking van de elastische lijn voor de rechter tak wordt:

$$y.EI_{B_1C_1} = -0,6990EI(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3.24}) + (0,0759EI. -\frac{x^3}{3.24}) + 4,7484EI.x + D.$$

Uit de voorwaarde, dat $y = 0$ voor $x = 12$ m volgt $D = -21,6072EI$.
De vergelijking wordt dus:

$$y = -0,6990(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{72}) - 0,0759\frac{x^3}{72} + 4,7484x - 21,6072 = -M.$$

$$y = +0,6231\frac{x^3}{72} - 0,6990\frac{x^2}{2} + 4,7484x - 21,6072 \text{ (in meters)} = -M.$$

Als controle zijn nog aanwezig de voorwaarden, dat voor $x = 0{,}3L = 3{,}6$ m, de vergelijkingen der elastische lijnen voor beide takken dezelfde waarde van y moeten geven en dat deze elkaar onder een hoek +1 snijden. Deze voorwaarde had, gecombineerd met twee der andere voorwaarden, natuurlijk ook gebruikt kunnen worden om de integratieconstanten te bepalen. De overige voorwaarden kunnen dan dienen als controle.

Hoofdstuk VII

BEPALING VAN DE INVLOEDSLIJNEN VOOR EEN NORMAALKRACHT

Als voorbeeld voor de berekening van de invloedslijn voor een normaalkracht, wordt de constructie van hoofdstuk II en III genomen.

METHODE I

De invloedslijn voor $N_{b_1c_1}$ kan evenals die voor het moment in een veld berekend worden uit de invloedslijnen voor de knooppuntsmomenten. Voor de hierboven genoemde invloedslijn zijn dan echter de invloedslijnen voor 7 knooppuntsmomenten vereist, namelijk

$$M_{aa_1},\ M_{a_1a},\ M_{a_1a_2},\ M_{a_2a_1},\ M_{b_1b},\ M_{b_1b_2} \text{ en } M_{b_2b_1} \text{ of}$$

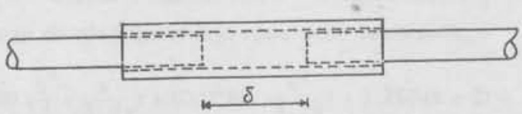
$$M_{dd_1},\ M_{d_1d},\ M_{d_1d_2},\ M_{d_2d_1},\ M_{c_1c},\ M_{c_1c_2} \text{ en } M_{c_2c_1}.$$

Uit deze momenten wordt de normaalkracht op overeenkomstige wijze berekend als de vasthoudkrachten.

Zijn echter voor de berekening niet alle invloedslijnen beschikbaar, dan kan de invloedslijn voor $N_{b_1c_1}$ eenvoudiger op directe wijze bepaald worden volgens methode II.

METHODE II

Bij deze methode wordt B_1C_1 op een willekeurige plaats doorgesneden gedacht en de aldus ontstane einden aan elkaar gekoppeld door middel van een schuifverbinding.



Figuur 109

Deze verbinding kan dus geen normaalkracht, maar wel een moment en een dwarskracht overbrengen. Vervolgens worden op de beide doorsnedevlakken gelijke doch tegengestelde normaalkrachten aangebracht, welke een verplaatsing δ geven.

Op overeenkomstige wijze als bij de bepaling van de invloedslijnen voor momenten, is te bewijzen, dat de door deze normaalkrachten veroorzaakte elastische lijn van $A_1B_1C_1D_1$, op een bepaalde schaal de invloedslijn voor de normaalkracht in het veld B_1C_1 is. Dus $+P.y = N.\delta$ of $N = +\frac{P.y}{\delta}$ (omdat de aangebrachte normaalkracht een drukkracht is, negatief). Wordt voor δ = 1 cm = 0,01 m en P = 1 ton gekozen, dan wordt de schaal van de invloedslijn 1 cm = 1 ton.

De boven bedoelde normaalkrachten worden aangebracht, terwijl verdraaiing der knooppunten wordt verhinderd.

Door de verplaatsing δ zullen de knooppunten A_1 en B_1 ten opzichte van C_1 en D_1 verplaatsen.
Ter berekening van de primaire momenten worden tijdelijke steunpunten aangebracht die de vasthoudkrachten leveren. Worden deze ter plaatse van A_1 en A_2 gedacht, dan zullen de knooppunten A_1 en B_1 op hun plaats blijven, terwijl C_1 en D_1 over een afstand van 1 cm naar rechts verplaatsen. Worden deze steunpunten ter plaatse van D_1 en D_2 aangebracht, dan zullen C_1 en D_1 op hun plaats blijven en de knooppunten A_1 en B_1 1 cm naar links verplaatsen.

Daar het hier echter een symmetrische constructie betreft en de invloedslijn voor het middenveld gevraagd wordt, is het beter de steunpunten ter opname van vasthoudkrachten na uitvoering van de verplaatsing aan te brengen. De knooppunten A_1 en B_1 zullen dan 0,5 cm naar links en C_1 en D_1 0,5 cm naar rechts verplaatsen. De vasthoudkrachten zullen dan nul worden.

De *primaire momenten* worden dan:

$$M_{A_1A_2} = M_{A_2A_1} = -M_{D_1D_2} = -M_{D_2D_1} = \frac{6.2EI.0{,}005}{4^2} = \frac{3}{800}EI\,,$$

$$M_{AA_1} = M_{A_1A} = -M_{DD_1} = -M_{D_1D} = -\frac{6.3EI.0{,}005}{8^2} = -\frac{9}{6400}EI\,,$$

$$M_{B_1B} = -M_{C_1C} = -\frac{3.2EI.0{,}005}{8^2} = -\frac{3}{6400}EI\,,$$

$$M_{B_1B_2} = M_{B_2B_1} = -M_{C_1C_2} = -M_{C_2C_1} = \frac{6.EI.0{,}005}{4^2} = \frac{3}{1600}EI\,.$$

Door vereffening van deze primaire momenten worden nu de in de constructie optredende resulterende momenten gevonden.

De elastische lijn van $A_1B_1C_1D_1$ ten gevolge van deze momenten kan nu berekend worden met behulp van de op bladzijde 134, hoofdstuk III, afgeleide formule voor ligger A_1B_1.

De berekening van de momenten en de elastische lijn zijn hier niet uitgevoerd.

Als controle geldt nog, dat de volgende hoekverdraaiingen, dus $\frac{dy}{dx}$, gelijk zijn namelijk:
$\frac{dy}{dx}$ voor doorsnede B_1 van ligger A_1B_1 is gelijk aan $\frac{dy}{dx}$ voor doorsnede B_1 van ligger B_1C_1. Ook is $\frac{dy}{dx}$ voor doorsnede C_1 van ligger B_1C_1 gelijk aan $\frac{dy}{dx}$ voor doorsnede C_1 van ligger C_1D_1.

Aangaande het teken geldt weer: Waar de last geheven wordt, is het teken hetzelfde, als dat van de aangebrachte normaalkracht.

Hoofdstuk VIII

BEPALING VAN DE INVLOEDSLIJNEN VOOR EEN DWARSKRACHT

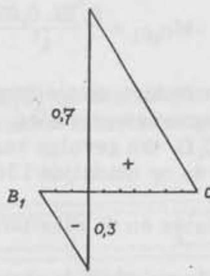
Als voorbeeld voor de berekening van de invloedslijn voor een dwarskracht, wordt eveneens de constructie van hoofdstuk II en III genomen.

METHODE I

De invloedslijn voor de dwarskracht in een doorsnede van veld B_1C_1 kan berekend worden als de invloedslijnen voor de knooppuntsmomenten van $M_{b_1c_1}$ en $M_{c_1b_1}$ bekend zijn.

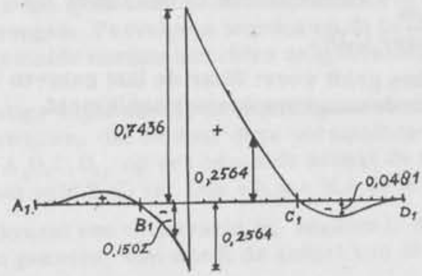
Zolang namelijk de last niet op het veld B_1C_1 staat is deze gelijk aan $\frac{M_{b_1c_1} + M_{c_1b_1}}{L_{B_1C_1}}$. Hierin zijn $M_{b_1c_1}$ en $M_{c_1b_1}$ de waarden van de Cross-momenten.

Staat de last wel op B_1C_1, dan moet de op bovenstaande wijze berekende invloedslijn voor dit veld nog vermeerderd worden met de invloedslijn voor de dwarskracht voor het statisch bepaalde hoofdsysteem (d.i. een ligger op twee steunpunten).
Dit gedeelte van de invloedslijn voor $\varepsilon = 0,3$ ziet er als volgt uit:



Figuur 110

De resulterende invloedslijn is in onderstaande figuur aangegeven.

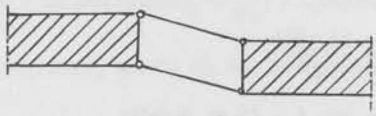


Figuur 111

METHODE II

Berekening van de in de constructie optredende momenten

Bij deze methode wordt de ligger ter plaatse van de doorsnede, waarvoor men de invloedslijn voor de dwarskracht wil weten, doorgesneden. De aldus ontstane einden worden vervolgens verbonden door middel van een verbinding, die geen dwarskracht, maar wel een moment en een normaalkracht kan overbrengen. Bij voorbeeld:



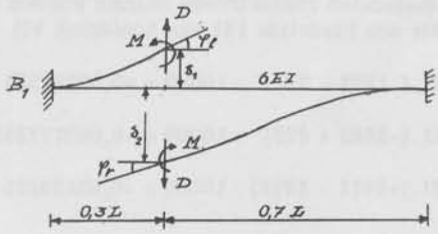
Figuur 112

De doorsnedevlakken blijven dus evenwijdig.

Vervolgens worden de doorsnedevlakken met behulp van dwarskrachten over een afstand δ ten opzichte van elkaar verschoven. De door deze dwarskrachten veroorzaakte elastische lijn van $A_1B_1C_1D_1$ is wederom op een bepaalde schaal de gevraagde invloedslijn.

Voor de schaal geldt, op overeenkomstige wijze als bij de momenten, de formule: $D = -\frac{P.y}{\delta}$. Daar in onderstaande figuur een negatieve dwarskracht is aangebracht, wordt $D = +\frac{P.y}{\delta}$.

Bepaling primaire momenten



Figuur 113

Als statisch onbepaalde wordt het moment ter plaatse van bovengenoemde verbinding gekozen.

Nu is:

$$\varphi_1 = \frac{D.(0,3L)^2}{2.6EI} + \frac{M.(0,3L)}{6EI} \quad \text{en}$$

$$\varphi_r = \frac{D.(0,7L)^2}{2.6EI} - \frac{M.(0,7L)}{6EI}$$

Uit de voorwaarde, dat $\varphi_1 = \varphi_r$ volgt $M = 0,2\ D\ L$. (1)

Verder is:

$$\delta_1 = \frac{D.(0,3L)^3}{3.6EI} + \frac{M.(0,3L)^2}{2.6EI} \quad \text{en}$$

$$\delta_2 = \frac{D.(0,7L)^3}{3.6EI} - \frac{M.(0,7L)^2}{2.6EI}\,.$$

Uit $\delta_1 + \delta_2 = \delta$, volgt: $0,740\,D\,L^3 - 1,2\,M\,L^2 = 36EI\delta$. (2)

Uit (1) en (2) volgt nu:

$$D = \frac{72EI\delta}{L^3} \quad \text{en} \quad M = \frac{14,4EI\delta}{L^2}$$

Voor $\delta = 1$ cm $= 0,01$ m en $L = 12$ m wordt:

$$D = \frac{1}{2400}\,EI \text{ ton} \quad \text{en} \quad M = \frac{1}{1000}\,EI \text{ tm.}$$

De schaal van de invloedslijn wordt 0,01 m = 1 ton.
De primaire momenten worden:

$$M_{B_1C_1} = D.0,3L + M = -\frac{1}{2400}\,EI.3,6 - \frac{1}{1000}\,EI = -0,0025EI \text{ tm,}$$

$$M_{C_1B_1} = D.0,7L - M = -\frac{1}{2400}\,EI.8,4 + \frac{1}{1000}\,EI = -0,0025EI \text{ tm.}$$

Vereffening van de primaire momenten is voor dit geval echter niet nodig, daar de resulterende momenten rechtstreeks kunnen worden afgeleid uit tabel VII op bladzijde 131 (zie ook bladzijde 161 van hoofdstuk VI).

$$M_{a_1b_1} = -0,0025EI.(-1377 - 29) : 10000 = +0,003515EI \text{ tm} \quad (= M_{d_1c_1}),$$

$$M_{b_1a_1} = -0,0025EI.(-3582 + 473) : 10000 = +0,00077725EI \text{ tm} \quad (= M_{c_1d_1}),$$

$$M_{b_1c_1} = -0,0025EI.(+6471 - 1278) : 10000 = -0,00129825 \text{ tm} \quad (= M_{c_1b_1}).$$

Berekening elastische lijn (invloedslijn)

De elastische lijnen voor de velden A_1B_1 en C_1D_1 zijn met behulp van de op bladzijde 134 afgeleide formule te berekenen.
Uitgeschreven wordt deze formule

$$y.4EI = \frac{+0,0003515\ EI\ 8^2}{6}\,\gamma_1 + \frac{0,00077725\ EI\ 8^2}{6}\,\gamma_2 \text{ meter}$$

of $\quad y = +0,0009373\,\gamma_1 + 0,002073\,\gamma_2$ meter.

Daar 0,01 m = 1 ton voorstelt wordt bij een bewegende last van 1 ton de dwarskracht in tonnen

$$D = +0,09373\,\gamma_1 + 0,2073\,\gamma_2\,.$$

Deze formule is echter niet geldig voor veld B_1C_1 omdat de invloedslijn

voor $\varepsilon = 0,3$ een discontinuiteit vertoont. Deze elastische lijn bestaat uit twee takken.
De randvoorwaarden voor deze takken zijn dezelfde als die vermeld op bladzijde 161 van hoofdstuk VI.
De vergelijkingen van de elastische lijn worden dan:

$$\text{linker tak:} \quad 6y = +0{,}00129825\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L}\right) - 0{,}00129825\,\frac{x^3}{6L} + 0{,}002406x$$

$$\text{rechter tak:} \quad 6y = +0{,}00129825\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L}\right) - 0{,}00129825\,\frac{x^3}{6L} + 0{,}002406x - 0{,}06.$$

Daar 0,01 m = 1 ton voorstelt, wordt bij een bewegende last van 1 ton dus de dwarskracht in tonnen:

$$D = -0{,}021637\left(\frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{2}\right) + 0{,}0401x \qquad \text{voor linker tak.}$$

$$D = -0{,}021637\left(\frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{2}\right) + 0{,}0401x - 1 \qquad \text{voor rechter tak.}$$

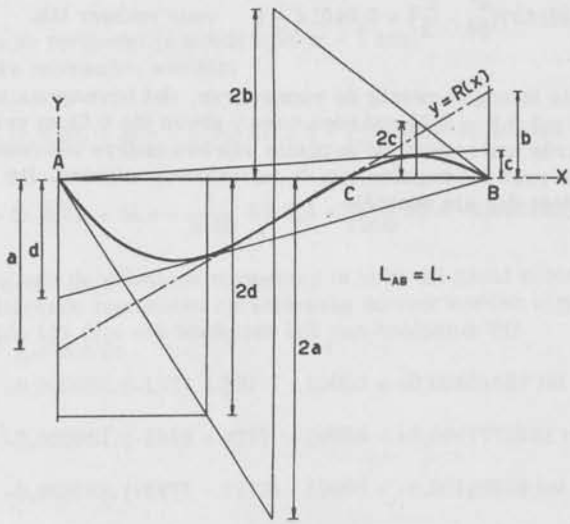
Als controle is nog aanwezig de voorwaarde, dat bovengenoemde vergelijkingen voor $x = 3,6$ ($\varepsilon = 0,3$) waarden voor y geven die 0,01 m verschillen. Deze voorwaarde had natuurlijk in plaats van een andere voorwaarde gebruikt kunnen worden voor het bepalen van de integratieconstanten. De resulterende voorwaarde dient dan als controle.

Hoofdstuk IX

EIGENSCHAPPEN VAN DE DERDEGRAADSPARABOOL

Bij de bepaling van invloedslijnen voor prismatische balken volgens methode II is het gebleken, dat deze een aaneenschakeling vormen van derdegraadsparabolen. Immers deze invloedslijnen zijn elastische lijnen, die veroorzaakt worden door een lineair momentenverloop.

Zoals uit de formule voor de derdegraadsparabool $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ blijkt, zijn er vier gegevens nodig om de kromme vast te leggen. Indien de drie nulpunten alle reëel en twee ervan bekend zijn, hetgeen dikwijls het geval is, dan kan het gemakkelijkst (zie figuur 114, punten A en B) voor de nog



Figuur 114

ontbrekende twee gegevens de ordinaat midden tussen deze nulpunten en de helling van de raaklijn aan de kromme ter plaatse van die ordinaat gebruikt worden, met andere woorden de kromme ligt vast als behalve de twee nulpunten ook de raaklijn aan de kromme midden tussen deze nulpunten is gegeven. Wordt deze raaklijn $y = R(x)$ gesteld, dan luidt de vergelijking van de kromme, als L de afstand tussen de nulpunten is en de y-as door een nulpunt gaat, $y = R(x) \dfrac{4x(L-x)}{L^2}$, zoals uit het onderstaande bewijs volgt:

$$[y]_{x=0} = 0; \quad [y]_{x=L} = 0; \quad [y]_{x=\frac{1}{2}L} = [R(x)]_{x=\frac{1}{2}L}$$

De eerste afgeleide is:

$$y' = R(x)\left[4\,\frac{L-x}{L^2} - 4\,\frac{x}{L^2}\right] + R'(x)\,\frac{4x(L-x)}{L^2}.\quad \text{Voor } x = \tfrac{1}{2}L \text{ wordt } y' = R'(x).$$

Alvorens enkele eigenschappen van de derdegraadsparabool af te leiden, zullen eerst enkele lijnen nader worden gedefinieerd.

Onder een 'nulpuntsraaklijn' wordt verstaan de raaklijn aan de kromme in een snijpunt van de nullijn met de kromme.

Onder een 'middenpuntsverticaal' wordt verstaan een lijn loodrecht op de nullijn midden tussen twee nulpunten.

Onder een 'middenpuntsraaklijn' wordt verstaan de raaklijn aan de kromme in het snijpunt met de middenpuntsverticaal.

Een 'nulpuntsverticaal' is een lijn loodrecht op de nullijn in een snijpunt van de nullijn met de kromme.

Een 'buigpuntsverticaal' is de lijn door het buigpunt loodrecht op de nullijn.

Een 'toppuntsverticaal' is de lijn door een toppunt loodrecht op de nullijn.

De eerste eigenschap, welke zal worden afgeleid, luidt:

Eigenschap 1: Het stuk, dat een nulpuntsraaklijn van één der beide bij dat nulpunt behorende middenpuntsverticalen afsnijdt is twee maal zo groot als het stuk, dat de bij de gekozen middenpuntsverticaal behorende middenpuntsraaklijn van de nulpuntsverticaal in het genoemde nulpunt afsnijdt.

Het bewijs zal worden gegeven voor de raaklijn in het punt A, terwijl punt B op afstand L als tweede nulpunt gekozen wordt. De formule voor de eerste afgeleide luidt:

$$y' = R(x)\left[4\,\frac{L - x}{L^2} - 4\,\frac{x}{L^2}\right] + R'(x)\,\frac{4x(L - x)}{L^2}.$$

Voor $x = 0$ wordt $y' \dfrac{[R(x)]_{x=0}}{\frac{1}{4}L}$ of $y'_A = \dfrac{R_A}{\frac{1}{4}L} = \dfrac{2R_A}{\frac{1}{2}L}$.

Uit het bovenstaande volgt: $y'_A \cdot \frac{1}{2}L = 2R_A$.

Voor de andere twee nulpunten kan deze eigenschap op analoge manier bewezen worden.

Eigenschap 2: Een nulpunt van de kromme ligt op de middenpuntsraaklijn behorende bij de beide andere nulpunten.

Uit $y = R(x)\,\dfrac{4x(L - x)}{L^2}$ volgt direct, dat als $R(x)$ nul is, y ook nul is.

Met behulp van bovenstaande eigenschap zijn de drie middenpuntsraaklijnen geconstrueerd (zie figuur 114).

Eigenschap 3: De oppervlakte van het gebied dat begrensd wordt door de derdegraadsparabool en de nullijn is gelijk aan 2/3 maal het product van de lengte L van de nullijn en het stuk van de middenpuntsverticaal tussen de nullijn en de kromme.

$$\text{Oppervlakte } O = \int_0^L R(x)\,\frac{4x(L - x)}{L^2}\,dx = \int_0^L \frac{R(x)}{L^2}\,d(2x^2L - \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}L^3) =$$

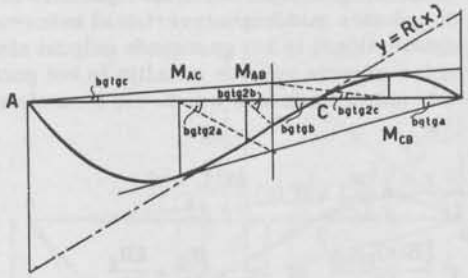
$$= \frac{R(x)}{L^2}\left[2x^2L - \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}L^3\right]_0^L - \int_0^L \frac{R'(x)}{L^2}\,(2x^2L - \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}L^3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}L(R_L + R_o) - \left[\frac{R'(x)}{L^2}\left(\frac{2}{3}x^3L - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}xL^3\right)\right]_o^L =$$

$$= \frac{2}{3}L[R(x)]_{x=\frac{1}{2}L} - \frac{R'(x)}{L^2}(0 - 0) = \frac{2}{3}L[R(x)]_{x=\frac{1}{2}L}.$$

Daar $[R(x)]_{x=\frac{1}{2}L} = [y]_{x=\frac{1}{2}L}$ wordt $O = \frac{2}{3}L.y_{x=\frac{1}{2}L}$.

E i g e n s c h a p 4 : Het buigpunt van een derdegraadsparabool ligt op die loodlijn op de nullijn welke gaat door het snijpunt van een middenpuntsraaklijn met een lijn, door het voetpunt van de bijbehorende middenpuntsverticaal en die een helling 1) heeft, welke twee maal zo groot is als de helling van de middenpuntsraaklijn, maar tegengesteld gericht (zie figuur 115).



Figuur 115

De voorwaarde voor een buigpunt is $y'' = 0$.

$$y'' = R(x)\left(-\frac{8}{L^2}\right) + 2R'(x)\left(4\,\frac{L - x}{2} - 4\,\frac{x}{L^2}\right) = -\frac{8}{L^2}[R(x) - R'(x).(L - 2x)]$$

Als y'' nul is, moet $R(x) = R'(x)(L - 2x)$ zijn.

De uitdrukkingen aan weerszijden van het gelijkteken, stellen lijnen voor met hellingen $R'(x)$ en $-2R'(x)$ immers,

$y = R(x)$ (helling $R'(x)$) en

$y = -2R'(x) + R'(x)L$ (helling $-2R'(x)$)

Uit eigenschap 4 leidt men direct af:

E i g e n s c h a p 4 a : De buigpuntsverticaal verdeelt het stuk van de nullijn, dat gelegen is tussen een middenpuntsverticaal en het nulpunt dat niet bij genoemde middenpuntsverticaal behoort, in stukken, die zich verhouden als 1 : 2.

E i g e n s c h a p 5 : De voetpunten van de toppuntsverticalen liggen op een cirkel, waarvan het voetpunt van de buigpuntsverticaal het middelpunt is. Deze

1) Onder de helling van een lijn wordt verstaan de tangens van de hoek tussen die lijn en de nullijn.

cirkel gaat door de toppunten van de gelijkbenige driehoeken, met twee nulpunten als basispunten en 30^o als basishoeken.

Bewijs: Het bewijs zal worden gegeven voor een gelijkbenige driehoek, waarvan AB de basis is. Hiertoe wordt de oorsprong van het assenkruis verplaatst naar het voetpunt van de middenpuntsverticaal van AB. Wordt de afstand van de middenpuntsverticaal tot de buigpuntsverticaal x_o gesteld, dan wordt op grond van de eigenschappen 2 en 4a de vergelijking voor de middenpuntsraaklijn:

$R(x) = m(x - 3x_o)$. De vorm $\frac{4x(L - x)}{L^2}$ wordt voor het nieuwe assenkruis:

$1 - \frac{4x^2}{L^2}$ (x moet vervangen worden door $x + \frac{1}{2}L$).

De vergelijking van de derdegraadsparabool wordt dus:

$$y = m(x - 3x_o)(1 - \frac{4x^2}{L^2}).$$

Voor een toppunt geldt: $y' = 0$.

Nu is $y' = m(1 - \frac{4x^2}{L^2}) - m(x - 3x_o)\frac{8x}{L^2}(L^2 + 24xx_o + 12x^2)$.

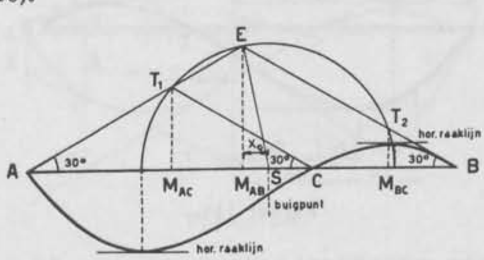
$$y' = 0 \quad \text{als} \quad L^2 + 24xx_o + 12x^2 = 0.$$

Uit deze vergelijking volgt: $x = x_o \pm \sqrt{x_o^2 + \frac{1}{12}L^2}$.

De voetpunten van de toppuntsverticalen zijn dus evenver van het voetpunt van de buigpuntsverticaal verwijderd. De afstand is $\sqrt{x_o^2 + \frac{1}{12}L^2}$. Wordt nu een rechte door A of B getrokken, die een hoek van 30^o met de nullijn maakt, dan snijdt deze lijn van de middenpuntsverticaal een stuk af groot $ME = \frac{1}{3}\sqrt{3}.\frac{1}{2}L$.

De afstand ES is nu gelijk aan $\sqrt{ME^2 + MS^2} = \sqrt{\frac{1}{12}L^2 + x_o^2}$.

Uit het bovenstaande volgt, dat de punten T_1, T_2 en E op een cirkel liggen, die S tot middelpunt heeft.
Op deze cirkel liggen dus ook de toppunten van de andere gelijkbenige driehoeken (basishoeken 30^o), die mogelijk zijn, namelijk die AC of BC tot basis hebben (zie figuur 116).



Figuur 116

Opmerking: ME is de centrale hoofdtraagheidsstraal van de zware lijn AB.

E i g e n s c h a p 6 : Het snijpunt van een willekeurige raaklijn met de buigpuntsraaklijn verdeelt de afstand tussen raakpuntsverticaal en buigpuntsverticaal in stukken die zich verhouden als 1 : 2.

Bewijs: Wordt de oorsprong van het assenkruis in het voetpunt van de buigpuntsverticaal gelegd, dan luidt de vergelijking van de derdegraadsparabool $y = S(x) + ax^3$. Hierin stelt $y = S(x)$ de buigpuntsraaklijn voor.

Immers:

voor $x = 0$ is $y_o = S_o$

$y' = S'(x) + 3ax^2$, voor $x = 0$ is $y'_o = S'(x)$.

$y'' = 6ax$, voor $x = 0$ is $y''_o = 0$.

De vergelijking van de raaklijn in een willekeurig punt $x = n$ luidt:

$$(y - [y]_{x=n}) = [y']_{x=n} \cdot (x - n).$$

Uitgeschreven wordt deze vergelijking:

$$y = S(x) + an^3 + (S'(n) + 3an^2)(x - n).$$

Verder is $S(x) = S(n) + S'(x - n)$.

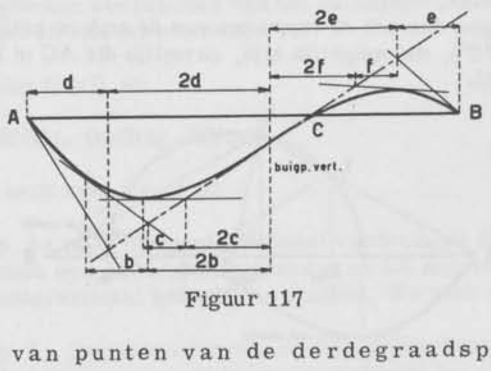
Eliminatie van $S(n)$ uit deze beide vergelijkingen levert voor de vergelijking van de raaklijn:

$$y = S(x) + an^3 + 3an^2(x - n).$$

Het snijpunt van deze raaklijn met de buigpuntsraaklijn volgt uit:

$$S(x) = S(x) + an^3 + 3an^2(x - n) \quad \text{of} \quad x = \frac{2}{3}n.$$

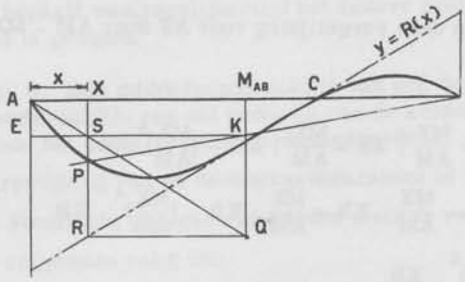
Als toepassing van deze eigenschap is de buigpuntsraaklijn geconstrueerd met behulp van twee nulpuntsraaklijnen (zie figuur 117).



Figuur 117

C o n s t r u c t i e s v a n p u n t e n v a n d e d e r d e g r a a d s p a r a b o o l

Wil men voor een bepaalde waarde van x het punt van de kromme construeren, dan kan men daartoe de constructie toepassen, die is aangegeven in de figuur 118.



Figuur 118

Gegeven zijn de nulpunten A en B, benevens de middenpuntsraaklijn (4 gegevens).

Schrijft men de vergelijking van de kromme in de gedaante:

$y = R(x).\frac{x}{\frac{1}{2}L}.\frac{L-x}{\frac{1}{2}L}$ of $XP = XR.\frac{AX}{AM}\frac{BX}{BM}$, dan is de constructie van XP als volgt:

trek door R de lijn RQ//nullijn; verbind A met Q, welke lijn de lijn XR in S snijdt. Trek door S de lijn SK//nullijn; verbind K met B. Het snijpunt met XR is het gezochte punt.

Bewijs: MQ = RX, dus $XS = MK = RX\frac{AX}{AM}$.

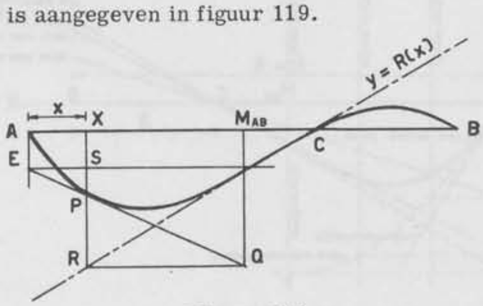
Verder is $XP = \frac{BX}{BM}.MK$ of $XP = \frac{BX}{BM}.RX.\frac{AX}{AM}$.

Een andere constructie verkrijgt men als de formule voor de derdegraadsparabool in de volgende gedaante geschreven wordt:

$$y = R(x)\left[1 - \left(\frac{\frac{1}{2}L - x}{\frac{1}{2}L}\right)^2\right]$$

of $$XP = XR - XR\left(\frac{XM}{AM}\right)^2.$$

Deze constructie is aangegeven in figuur 119.



Figuur 119

Constructie van S als bij de vorige methode. Trek door S een lijn SE//nullijn; verbind E met Q. Het snijpunt P met XR is het gezochte punt.

Bewijs: MQ = XR, $XS = \frac{AX}{AM}.XR$.

Vervangt men AX in deze vergelijking voor XS door AM - MX, dan wordt

$$XS = XR - \frac{MX}{AM} . XR.$$

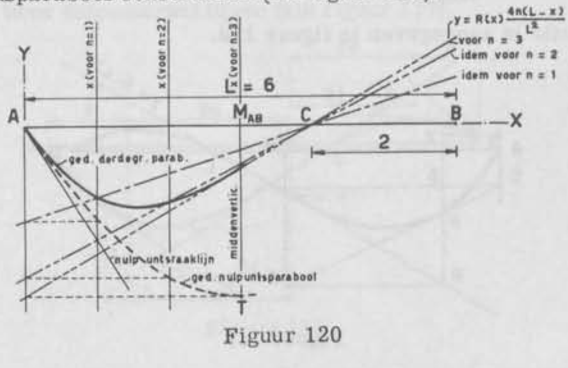
$$AE = XS, \text{ dus } PS = \frac{MX}{AM} . XS = \frac{MX}{AM} . XR - \left(\frac{MX}{AM}\right)^2 XR.$$

$$XP = XS + PS = XR - \frac{MX}{AM} . XR + \frac{MX}{AM} . XR - \left(\frac{MX}{AM}\right)^2 . XR$$

$$\text{of } XP = XR - \left(\frac{MX}{AM}\right)^2 . XR.$$

Wenst men een groot aantal punten van de derdegraadsparabool te construeren, dan is een eenvoudige constructie af te leiden als men de vergelijking vervangt door de volgende parametervoorstelling namelijk

$y = R(x) \dfrac{4n(L - n)}{L^2}$ en $x = n$. Hierin is n de parameter. De eerste vergelijking stelt een stralenbundel voor, die gaat door het snijpunt van R(x) met de nullijn. De stralen voor $n = n_0$ en $n = L - n_0$ vallen samen, terwijl de nullijn de straal is voor n = O en n = L. De tweede vergelijking stelt een bundel evenwijdige lijnen voor die loodrecht op de nullijn staan. De snijpunten van bij elkaar behorende lijnen (dus met dezelfde waarde voor n) liggen op de derdegraadsparabool. De stukken, die de stralenbundel van de andere twee nulpuntsverticalen afsnijden zijn: $y = R_A \dfrac{4n(L - n)}{L^2}$ en $y = R_B \dfrac{4n(L - n)}{L^2}$. Wordt y als lopende coördinaat opgevat, dan stellen bovenstaande vergelijkingen bundels lijnen voor evenwijdig aan de nullijn. De snijpunten van deze horizontale lijnen met de lijnen x = n liggen op de zogenaamde nulpuntsparabolen, waarvan de vergelijkingen $y = R_A \dfrac{4x(L - x)}{L^2}$ en $y = R_B \dfrac{4x(L - x)}{L^2}$ zijn. Deze parabolen hebben de middenverticaal tot as; de ordinaten van de toppunten zijn respectievelijk gelijk aan R_A en R_B, terwijl de nulpuntsparabolen en de derdegraadsparabool dezelfde nulpuntsraaklijnen hebben. Met behulp van deze nulpuntsparabolen, die zeer gemakkelijk te construeren zijn, kan men eenvoudig en snel veel punten van de derdegraadsparabool construeren (zie figuur 120).



Figuur 120

Uit het bovenstaande volgt:

E i g e n s c h a p 7 : Het punt van de kromme gelegen op een willekeurige verticaal, is het snijpunt van deze verticaal met de straal, waarvan de ordinaat ter plaatse van het nulpunt van de bijbehorende nulpuntsparabool gelijk is aan de ordinaat van de nulpuntsparabool ter plaatse van genoemde verticaal.

In de practijk bepaalt men tegelijkertijd het andere punt van de kromme dat op dezelfde straal is gelegen.

Eigenschap 8: Een middenpuntsraaklijn van een derdegraadsparabool blijft de middenpuntsraaklijn van dat gedeelte van de kromme, dat door een straal, gaande door het derde nulpunt wordt afgesneden.

Bewijs: De vergelijking van de derdegraadsparabool is $y = R(x)\dfrac{4x(L - x)}{L^2}$.
Een willekeurige straal kan voorgesteld worden door de vergelijking $y = \alpha R(x)$.

De plaats van de snijpunten volgt uit:

$$R(x)\frac{4x(L - x)}{L^2} = \alpha R(x) \qquad \text{of} \qquad x = \tfrac{1}{2}L \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}L^2 - \alpha L^2}.$$

De verticalen door de snijpunten zijn dus evenver van de nulpunten $x = 0$ en $x = L$ verwijderd.

Indien ter bepaling van de invloedslijn voor een beweeglijke last de derdegraadsparabool langs grafische weg verkregen wordt, staat de nullijn dikwijls niet loodrecht op de richting van de last.
De in het voorgaande afgeleide eigenschappen, behalve eigenschap 5, blijven echter geldig, met dien verstande dat:

a) voor een loodlijn op de nullijn gelezen wordt een lijn in de richting van de last;
b) de afstand tussen twee punten op de nullijn gemeten wordt loodrecht op de lastrichting en
c) voor een helling wordt gelezen, de orthogonale waarde van de hoek tussen de raaklijn en de nullijn (zie hoofdstuk I deel II).

Deze laatste eigenschap is in te zien, indien men de gehele figuur ontstaan denkt uit de figuur met de horizontale nullijn, door deze scheef te projecteren op een vlak dat eveneens evenwijdig loopt aan de last en wel zodanig, dat de projecterende lijnen loodrecht staan op de bissectrice van de hoek tussen de oorspronkelijke nullijn en het nieuwe projectie-vlak.

INHOUDSOPGAVE