



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

“Prijzen van swing opties met de COS methode”
(Engelse titel: “Pricing swing options with the COS method”)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute for Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Jan van der Linden

Delft, Nederland
16 juni 2009



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Prijzen van swing opties met de COS methode”
(Engelse titel: “Pricing swing options with the COS method ”)

Jan van der Linden

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Prof.dr.ir. C.W. Oosterlee

Overige commissieleden

Prof.dr.ir. C. Vuik

Dr. J.A.M. van der Weide

Drs. A. Verweij of Dr. J.G. Spandaw
16 Juni, 2009

Delft

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
1.1	Veel gebruikte symbolen	6
1.2	Wat zijn opties?	8
1.3	De kansdichtheid en zijn Fouriergetransformeerde	8
2	Verschillende soorten opties	10
2.1	De Europese call	10
2.2	De Europese put	11
2.3	De Europese butterfly optie.	12
2.4	Amerikaanse versies	13
2.5	De Future	13
2.6	De swing optie	14
2.7	Een swing toepassing	15
3	COS methode bij Europese opties	16
3.1	Resultaten	17
4	Cos methode bij Bermuda opties	20
4.1	Normale Bermuda opties	20
4.2	Bermuda put	21
4.3	Bermuda Butterfly	22
5	Prijzen van de Swing optie	23
5.1	Prijzen van het future deel	23
5.2	Prijzen bij een constante hersteltijd	23
5.3	Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$ voor de swing optie	26
5.4	Oplossing swing optie bij constante hersteltijd	28
5.5	Prijs bij algemenere hersteltijd	31
5.6	Resultaten algemenere hersteltijd	35
6	Conclusie en verbeterpunten	37
7	Appendix	38
7.1	Bepalen van Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$	38
7.2	Nulpunten schatten	40
7.3	Newton Raphson	40
7.4	De midpoint regel	41

1 Inleiding

In dit onderzoek is het hoofddoel om de swing optie (een financieel product) te prijzen met de COS methode. Het verslag beschrijft de gebruikte methode en de resultaten. Voordat de COS methode behandeld wordt zal uitgelegd worden wat een optie precies is. Vervolgens zullen eenvoudigere financiële opties berekend worden met de COS methode waardoor de methode geverifieerd kan worden (hiervan zijn exacte oplossingen bekend). Daarnaast vormen een aantal van deze opties de bouwstenen voor de swing optie. Op deze manier wordt er stap voor stap naar de wat complexere swing optie gewerkt.

Naast de optie wordt er ook kort aandacht besteed aan de future, omdat dit een onderdeel is van de swing optie. In de appendix staan een aantal onderwerpen die door het hele verslag gebruikt worden. De resultaten worden door middel van figuren getoond. Vaak worden deze kort besproken om te kijken of ze kloppen. Tenslotte wordt een conclusie gegeven over het onderzoek en worden enkele verbeterpunten gegeven.

Veel opties (waaronder ook de swing optie) worden geprijsd met verschillende methodes (zoals bijvoorbeeld in artikel [1] met partiële differentiaalvergelijkingen). Het prijzen met de COS methode is nog steeds interessant vanwege zijn snelheid en de nauwkeurigheid. De methode dankt zijn naam aan het gebruik van de Fourier cosinus getransformeerde van een bepaalde kansdichtheid. In de artikelen [2] en [3] wordt de COS methode gepresenteerd en vergeleken met andere methodes.

1.1 Veel gebruikte symbolen

In dit verslag zullen veel verschillende symbolen gebruikt worden. Hieronder een lijst van wat alle symbolen betekenen. Sommige hiervan zullen nu misschien nog niet duidelijk zijn, de bedoeling is dat deze lijst gebruikt wordt als geheugensteun. Alle symbolen worden in de tekst zelf al uitgelegd.

- $t_m, M, t_M, T, \delta t$:
tijdstep m , M is het aantal tijdstappen, $T = t_M$ is de eindtijd, $\delta t = t_m - t_{m-1}$.
- $S(t)$:
de aandelprijs op het huidige tijdstip (t).
- x, y :
 $x(t) = \log(\frac{S(t)}{K})$, y wordt gebruikt voor de aandelprijs op een later tijdstip (bijvoorbeeld binnen een integraal om de verwachting uit te rekenen).
- K :
De strike prijs van een call, put of butterfly optie.
- $S_{\min}, S_{\max}, K_a, K_d$:
De strike prijzen van de swing optie, er geldt: $S_{\min} < K_d < K_a < S_{\max}$.
- $g(x), c(x, t)$:
De intrinsieke waarde of uitbetaling bij één keer uitoefenen (opbrengst als je uitoefent bij x) en continuïteitswaarde (optiewaarde als je niet uitoefent).
- $v(x, t_m)$:
De optiewaarde op tijdstip t_m .
- τ :
De hersteltijd: als de optiehouder van een swing optie uitoefent op tijdstap t_m dan is tijdstip $t_{m+\tau}$ het eerstvolgende tijdstip waarop weer uitgeoefend mag worden.
- $c^*(x, t_m)$:
De waarde die de swing optie heeft als er pas weer op tijdstip $t_{m+\tau}$ uitgeoefend mag worden.
- $\Delta, \Delta_{\max}, d_m$:
Aantal keer dat je uitoefent op één tijdstip. Dit kan maximaal Δ_{\max} keer bij de swing optie. d_m is het maximale aantal swing acties dat vanaf tijdstip t_m nog uitgevoerd kan worden.
- x_1^*, x_2^* :
Snijpunten tussen de waarde bij uitoefenen van een optie en $c(x, t)$. De waarde bij het uitoefenen van een swing optie kan gelijk zijn aan $g(x)$ of aan $\Delta \cdot g + c^*(x, t_m)$.
- $V_k(t_m), C_k(x_1^*, x_2^*, t_m), C_k^*(x_1^*, x_2^*, t_m), G_k(x_1^*, x_2^*)$:
Fouriercoëfficiënten van de optieprij $v(x, t_m)$ op tijdstip t_m , van $c(x, t_m)$ voor het interval $[x_1^*, x_2^*]$, van $c^*(x, t_m)$ voor het interval $[x_1^*, x_2^*]$ en voor $g(x)$ op het interval $[x_1^*, x_2^*]$.

- $f(y|x, \delta t), \phi(\omega; x, \delta t)$:

De kansdichtheid van $y(t + \delta t)$ gegeven $x(t)$. $\phi(\omega; x, \delta t)$ is de Fouriergetransformeerde van deze f .

- $\psi_k(a, b), \chi_k(a, b)$:

De oplossing van $\int_a^b k \cdot \cos(\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$ en van $\int_a^b e^y \cdot \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$.

- $F(x, t)$: Prijs van een future contract als functie van x en de huidige tijd t waarbij de producten op tijdstip T afgeleverd worden.

1.2 Wat zijn opties?

Een optie is een contract dat de koper tot en met een bepaald eindtijdstip het recht geeft maar niet de verplichting om voor een vooraf afgesproken prijs (de strike prijs) een bepaald product of aandeel bijvoorbeeld te kopen. Als de optiehouder het contract gebruikt, dan oefent hij de optie uit. Het verschil tussen de huidige marktprijs en de afgesproken prijs voor het product waarop de optie gebaseerd is, is de opbrengst van de optie (dit wordt ook wel de uitbetaling genoemd). In dit verslag komen drie soorten opties ter sprake:

- Europese opties: de optiehouder mag alleen op het eindtijdstip de optie uitoefenen.
- Bermuda optie: de optiehouder mag alleen op een eindig aantal tijdstippen de optie uitoefenen.
- Amerikaanse optie: de optiehouder mag op elk tijdstip voor het eindtijdstip de optie uitoefenen.

Met opties kun je zowel risico's afdekken als speculeren. Stel een bakker heeft een contract met een groot bedrijf om voor een vaste prijs elke dag, een jaar lang, een hoeveelheid brood te leveren (dit garandeert de bakker van inkomsten). De bakker kan alleen wel verlies gaan draaien als de graanprijs opeens omhoog schiet. Daarom kan de bakker een ander contract vastleggen waar hij het hele jaar voor een vaste prijs graan kan kopen. Echter, als het bedrijf bijvoorbeeld opeens failliet gaat hoeft hij het graan niet meer te kopen. In dit geval zou het handig zijn als de bakker een contract koopt wat hem het recht, maar niet de verplichting geeft het graan voor een vaste prijs te kopen. Dit contract is dan dus een optie. Als men juist wel wil speculeren kan dat ook goed met opties: met een relatief kleine inleg kan er veel gewonnen worden.

De opties kunnen geprijsd worden met verschillende methodes zoals de binomiale boom, partiële differentiaalvergelijkingen, Monte Carlo simulatie en numerieke integratie methoden. De laatste oplosmethode is vaak gebaseerd op de Fouriergetransformeerde van de kansdichtheid die het prijsproces van het aandeel beschrijft (de kansdichtheid is vaak niet bekend terwijl de Fouriergetransformeerde dat wel is). In dit verslag wordt een soortgelijke nieuwe methode gebruikt die gebruik maakt van de Fourier cosinus expansies van de kansdichtheid.

1.3 De kansdichtheid en zijn Fouriergetransformeerde

Een optieprijs is onder andere afhankelijk van de prijs van het onderliggende product en de tijd. De prijs van de onderliggende waarde zal aangeduid worden met de aandeelprijs. Bij de tijd moet gedacht worden aan de tijd tot het eindtijdstip T en de tijd tot het volgende uitoefentijdstip. Verder is de optieprijs afhankelijk van een prijsproces van het onderliggende product: de functie $f(y|x, \delta t)$ is de kansdichtheid van y gegeven x , waarbij y en x gegeven worden door:

$$x(t) = \ln\left(\frac{S(t_i)}{K}\right) \quad y(t_i) = \ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{K}\right)$$

met $S(t)$ de aandeelprijs op tijdstip t en K de strike prijs van de optie. Soms zijn er meerdere strike prijzen (zoals bijvoorbeeld bij de swing optie). Dan zal worden aangegeven welke strike prijs gebruikt wordt bij de coördinaattransformatie. De coördinaattransformatie met het logaritme is nodig omdat de karakteristieke functie alleen bekend is voor de zogenoemde 'affine form' (zie [5]). Voor de normale aandeelprijs S is dit niet het geval, als men het logaritme neemt wel. Verder wordt er eerst gedeeld door K omdat dat mooier uitkomt bij berekeningen. Er geldt $t_{i+1} > t_i$ en δt is het tijdsverschil $t_{i+1} - t_i$. De kansdichtheid f is echter niet voor alle

prijspromessen bekend, de Fouriergetransformeerde is dat voor een aantal belangrijke prijsprocessen wel.

De Fouriergetransformeerde van $f(y|x, \delta t)$ wordt gegeven door:

$$\phi(\omega; x, \delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x, \delta t) e^{i\omega y} dy$$

Deze functie wordt ook wel de karakteristieke functie genoemd. In [3] wordt een lijst gegeven van verschillende karakteristieke functies.

2 Verschillende soorten opties

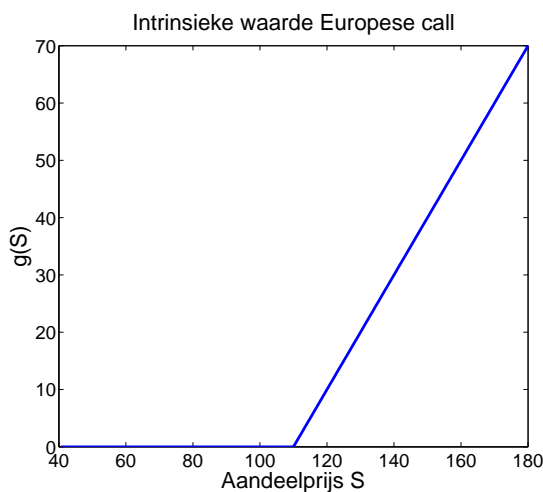
De meest eenvoudige opties zijn de Europese call en put optie. Daarom gebruik ik deze opties om een beter idee te krijgen van wat een optie nu precies is. Daarnaast wordt de put optie later in het verslag gebruikt om de Matlab code te valideren.

2.1 De Europese call

Als je een Europese call optie op een aandeel hebt dan heb je daarmee het recht maar niet de verplichting om op eindtijdstip T voor een vaste prijs K (de strike prijs) het aandeel te kopen. Als men deze optie uitoefent en vervolgens meteen het aandeel tegen de huidige marktprijs $S(T)$ verkoopt, dan is de opbrengst van de optie gelijk aan $S(T) - K$. Dit wordt ook wel de uitbetaling op tijdstip T genoemd. Het is niet verplicht het aandeel te kopen als $S < K$ en dus is de waarde of uitbetaling van de optie dan nul. De uitbetaling als functie van S wordt dus gegeven door de functie g :

$$g(S) = \max(S - K, 0)$$

De functie g noemen we de intrinsieke waarde. Zie Figuur (1) voor een plot van g . De prijs op een tijdstip $t < T$ wordt echter niet gegeven door $g(S)$. Immers, stel de aandeelprijs S is kleiner dan de strike prijs K (hier is de intrinsieke waarde dus nul), dan is er nog altijd een positieve kans dat S op tijdstip T wel groter is dan K . Dus je hebt een positieve kans op een positieve uitbetaling zonder dat je een negatieve uitbetaling kan krijgen. Met andere woorden, de prijs van de optie kan dan groter zijn dan zijn intrinsieke waarde die dan nul is.



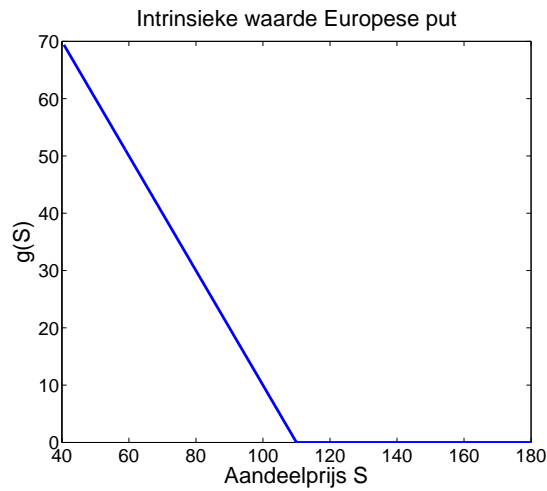
Figuur 1: Uitbetaling van Europese call optie.

2.2 De Europese put

Bij de Europese put is het andersom: je hebt het recht maar niet de verplichting om op eindtijdstip T voor een vaste prijs K (de strike prijs) het aandeel te verkopen. Als men deze optie uitoefent en vervolgens meteen het aandeel tegen de huidige marktprijs $S(T)$ koopt, dan is de opbrengst van de optie gelijk aan $K - S(T)$. Dit wordt ook wel de uitbetaling op tijdstip T genoemd. Ook nu is het niet verplicht om het contract te gebruiken. De uitbetaling intrinsieke waarde van deze optie wordt dus gegeven door:

$$g(S) = \max(K - S, 0)$$

In Figuur (2) een plot van de intrinsieke waarde van de put optie:



Figuur 2: Uitbetaling van Europese put optie.

2.3 De Europese butterfly optie.

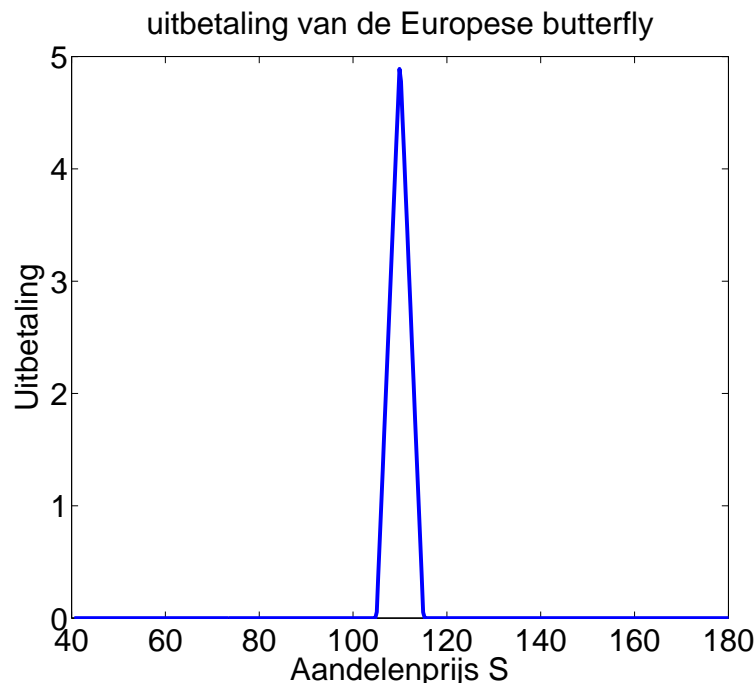
De butterfly optie is een iets ingewikkeldere optie. Het idee hiervan is dat je één call optie met strike prijs $K - a$ koopt, twee opties met strike prijs K uitschrijft (iemand die een optie uitschrijft moet de uitbetaling g aan de optiehouder uitvoeren) en één call optie met strike prijs $K + a$ koopt. Het resultaat is dat de uitbetaling hoog is als de aandelprijs rond K ligt. Bij een aandelprijs groter dan $K + a$ of lager dan $K - a$ is de uitbetaling nul. Hieronder staat de uitbetaling als functie van de aandelprijs S .

$$g(S) = \max(S - (K - a), 0) - 2 \cdot \max(S - K, 0) + \max(S - (K + a), 0)$$

De equivalente functie voor de intrinsieke waarde als functie van x wordt dan:

$$g(x) = \max(Ke^x - (K - a), 0) - 2 \cdot \max(K \cdot (e^x - 1), 0) + \max(Ke^x - (K + a), 0)$$

De intrinsieke waarde als functie van x zal ik nodig hebben bij het prijzen met de COS methode. Voor het gemak geef ik beiden aan met g (als er $g(x)$ staat bedoel ik dus de tweede en met $g(S)$ de eerste). In Figuur 3 een plot van $g(S)$:



Figuur 3: Uitbetaling van de butterfly optie.

De butterfly optie geeft kopers de mogelijkheid om op een kleine verandering in de aandelprijs te speculeren (dat is het geval als K rond de huidige aandelprijs ligt).

2.4 Amerikaanse versies

De Amerikaanse versies van bovenstaande opties zijn bijna hetzelfde. Het verschil is dat de optiehouder de uitbetaling $g(S)$ eerder mag opeisen (namelijk op elk moment voor de eindtijd). Dit betekent dus dat de optiehouder keuzes moet maken. De beste uitoefenstrategie bepaalt de prijs van de optie. Met Amerikaanse opties heeft de optiehouder meer mogelijkheden en dus zal hier over het algemeen meer voor betaald moeten worden. De Amerikaanse opties zijn de opties die het meest worden verhandeld op de beurzen. De Bermuda opties liggen dan weer tussen de Amerikaanse en Europese versie in zoals uitgelegd in hoofdstuk 1.2.

2.5 De Future

De future is wederom een financieel contract dat gebaseerd is op een onderliggende waarde. Deze is iets anders dan het optiecontract. In het contract staat dat de houder van de future verplicht is om op de aflooptijd van de future het onderliggende product voor de vooraf afgesproken prijs (de future prijs) te kopen van degene die de future heeft uitgeschreven. Het verschil met opties is dus dat de houder verplicht is de producten te kopen in plaats van dat hij alleen de mogelijkheid heeft om dat te doen.

Dergelijke contracten werden al veel eerder in de geschiedenis verhandeld. Een mooi voorbeeld is de handel in tulpen die, volgens artikel [6], de eerste beurscrash veroorzaakte. De tulp was een zeer populair product: het was hét statussymbool van de rijke Nederlander. Elk jaar groeide de prijs wat de reden was tot de speculatie. Het product was schaars waardoor handelaren contracten afsloten om de tulp te kopen voordat het daadwerkelijk geleverd kon worden (dit contract is dus een future). Overigens was de prijs hierdoor aardig opgelopen (op het hoogtepunt werden tulpen verhandeld voor een prijs die nu meer dan 3000 euro zou zijn). Na het terugvallen van de prijs konden velen hun schulden veroorzaakt door de contracten niet meer terugbetalen.

Een ander voorbeeld voor handel in futures zou gegeven kunnen worden door de handel in bijvoorbeeld specerijen uit verre landen. Door future contracten is de financiering van de reis verzekerd (zolang de schepen de goederen mee terug nemen), terwijl handelaren ervan verzekerd waren dat zij het product mochten kopen zodra het schip terug is.

Er zijn hedendaags vele soortgelijke situaties te schetsen waarin futures nuttig zouden kunnen zijn. Uit [1] vergelijking (6) blijkt dat de future prijs van een future met eindtijd T op tijdstip t gegeven wordt door een voorwaardelijke verwachting:

$$F_t^T = E_{x,t}[Ke^x(T)] \quad (1)$$

2.6 De swing optie

Een swing optie wordt veel gebruikt in de energie industrie. Zo kan het zijn dat bijvoorbeeld een electriciteitsbedrijf dat electriciteit opwekt met behulp van zonne-energie zijn inkomsten over de komende periode wil vastleggen. De energieproductie is echter lang niet altijd gelijk en varieert vaak binnen bepaalde grenzen (afhankelijk van de hoeveelheid zon). Om verzekerd te zijn van de inkomsten zou het bedrijf gebruik kunnen maken van een swing optie. Ook voor bedrijven die juist energie nodig hebben (maar waarbij deze vraag varieert, doordat ze bijvoorbeeld ook eigen zonnepanelen hebben) kan een swing optie aantrekkelijk zijn.

Er zijn verschillende soorten swing opties. Daarom wordt de swing optie die hier wordt door- gerekend uitvoerig besproken in het volgende stuk. Aan het einde van dit hoofdstuk komt nog een voorbeeld van een bedrijf dat de swing optie nodig zou kunnen hebben.

De swing optie bestaat uit 2 delen: het future deel en het swing deel. Het future deel geeft een overeenkomst voor de levering van een bepaald aantal producten per periode, dankzij het swing gedeelte kan de contracthouder ervoor kiezen om (per direct) een bepaald aantal extra producten te ontvangen voor een bepaalde strike prijs, of om juist wat terug te leveren (dit aantal noemen we Δ). Het gedeelte van het contract waarin vermeld wordt dat de houder extra producten kan ontvangen lijkt erg op een call optie. De mogelijkheid om terug te leveren kan juist geïnterpreteerd worden als put. De optie kan daarom gezien worden als een soort van call en put-optie tegelijk. Natuurlijk is het zo dat een bedrijf zich ook kan indekken tegen prijsfluctuaties met normale Amerikaanse call en put opties. Hierbij wordt dan echter ook betaald voor mogelijkheden die niet nodig zijn.

Om de schrijver van de optie te beschermen tegen grote prijsfluctuaties worden een maximale en minimale prijs (S_{max} en S_{min}) van het onderliggende product gegeven waarvoor de uitbetaling van de swing optie niet meer verder stijgt bij nog extremere prijzen. De contracthouder moet het volgende betalen voor één aandeel van het onderliggende product:

$$\begin{cases} S & \text{als } S < K_a \\ K_a & \text{als } K_a \leq S \leq S_{max} \\ S - (S_{max} - K_a) & \text{als } S > S_{max} \end{cases} \quad (2)$$

Als de aandelprijs lager is dan de strike prijs maakt de optiehouder geen gebruik van de optie en betaalt hij de normale prijs S . Als de prijs boven de strike prijs ligt kan de optiehouder het aandeel voor de strike prijs kopen door de optie uit te oefenen, alleen als de aandelprijs boven een bepaalde prijs S_{max} komt wordt het weer duurder om het aandeel te kopen. $(S_{max} - K_a)$ is het grootst mogelijke profijt.

Voor het put gedeelte is er een soortgelijke prijs voor het verkopen van een aandeel:

$$\begin{cases} S + K_d - S_{min} & \text{als } S < S_{min} \\ K_d & \text{als } S_{min} \leq S \leq K_d \\ S & \text{als } S > K_d \end{cases} \quad (3)$$

De uitbetaling bij $\Delta = 1$ producten op de expiratie tijd (door de optie uit te oefenen en cash te ontvangen) wordt gegeven door:

$$g(S) = \max(S(t) - K_a, 0) - \max(S(t) - S_{max}, 0) + \max(K_d - S(t), 0) - \max(S_{min} - S(t), 0) \quad (4)$$

Merk op dat de uitbetaling bestaat uit de som van een call en een put-term, omdat $K_d < K_a$ kan het nooit voorkomen dat zowel het put als call gedeelte positief zijn (anders zouden er twee

tegenovergestelde swing acties tegelijkertijd plaatsvinden). De andere twee termen begrenzen de uitbetaling en beschermen daarmee de schrijver van de optie. Overigens hebben deze termen geen invloed zolang $S_{min} \leq S \leq S_{max}$.

Een groot verschil tussen de Bermuda swing optie en andere Amerikaanse optievarianten is dat de contracthouder meerdere keren mag uitoefenen. Op elk tijdstip kan de optiehouder $\Delta \in \{1, 2, \dots, \Delta_{max}\}$ keer uitoefenen. Om te voorkomen dat er heel kort achter elkaar oneindig vaak uitgeoefend wordt is er na elke swing actie een hersteltijd, $\tau(\Delta)$, waarin niet nog een keer uitgeoefend mag worden. Doordat de periode waarop het contract geldt eindig is kan er in totaal ook maar een eindig aantal swing acties plaatsvinden. Het maximaal aantal swing opties dat uitgevoerd kan worden vanaf een bepaalde tijdstap m is gelijk aan $\frac{(M-m)}{\min_{\Delta}(\tau(\Delta))} + 1$. Dit aantal wordt in het vervolg aangeduid met d_m .

2.7 Een swing toepassing

Stel een bedrijf heeft elke dag gemiddeld $(Q1 + Q2)$ MW energie nodig. Het bedrijf beschikt over zonnecollectoren die tussen de 0 en $2 \cdot Q2$ MW energie produceren. Het bedrijf wil verzekerd zijn van zijn energie en besluit een contract af te sluiten dat haar de energielevering garandeert voor een vooraf afgesproken prijs. Het bedrijf kan uit verschillende dingen kiezen:

- Elke dag $(Q1 + Q2)$ MW energie leveren waardoor er vrijwel zeker altijd genoeg is (een hoger energieverbruik wordt dan gecompenseerd door de energie van de collectoren). Nu wordt er gemiddeld echter teveel energie geleverd en dat betekent verlies.
- Keuze 2 is om elke dag $Q1$ MW aan energie te laten leveren waardoor de verwachte hoeveelheid energie overeenkomt met het verwachte verbruik. Nu zal er sommige dagen echter niet genoeg energie zijn wat een hoop andere kosten met zich meebrengt.
- Nog een andere optie is om de energie tegen de huidige marktprijs te kopen. Maar dan heeft het bedrijf de risico's van de fluctuerende energieprijs.
- De laatste en misschien beste keuze is om gebruik te maken van een swing optie: als er weinig zon of een te hoog verbruik is kan het bedrijf voor een vaste prijs (K_a euro per MW) energie aankopen. Bij veel zon of een laag verbruik kan het bedrijf juist voor een vaste prijs K_d verkopen.

3 COS methode bij Europese opties

In dit hoofdstuk wordt de COS prijzingsformule gegeven voor een Europese optie. Voor deze optie is de uitbetaling op het eindtijdstip T bekend en wordt gegeven door de functie $g(x) \geq 0$. Voor tijdstip T mag de optiehouder de optie niet uitoefenen. Hierdoor kan de optiewaarde $v(x, t)$ op tijdstip $t < T$ gezien worden als een verdisconteerde verwachtingswaarde van de uitbetaling op tijdstip T :

$$v(x, t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y|x, (T-t)) dy \quad (5)$$

Zoals eerder gezegd is de kansdichtheid niet altijd bekend. De verwachting moet dus omgeschreven worden naar een vergelijking zonder deze kansdichtheid. De Fouriergetransformeerde van deze kansdichtheid is vaak echter wel bekend. Allereerst begrenzen we het integratie-interval zodat de kansdichtheid kan worden vervangen door zijn Fourier cosinus expansie:

$$f(y|x, (T-t)) = \sum_{k=0}^{\infty} 'A_k(x) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) \quad (6)$$

Hierbij staat $'$ voor het vermenigvuldigen met een half van de eerste term in de som. De coëfficiënten zijn:

$$A_k(x) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y|x, T-t) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$$

Het afkappen van de integraal kan doordat de kansdichtheid aan de uiteinden snel naar nul gaat. De oneindige som van de Fourier cosinus expansie kan in Matlab dan weer als eindige (tot M) som afgeschat worden. Dit invullen in de optieprijns geeft:

$$v(x, t) \approx e^{-r(T-t)} \int_a^b v(y, T) \sum_{k=0}^N 'A_k(x) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$$

Door de som en de integraal te verwisselen verschijnt een deel van de Fourier-cosinus coëfficiënten van de optieprijns (er moet alleen vermenigvuldigd worden met $\frac{b-a}{2}$) op het eindtijdstip, oftewel die van de uitbetaling $g(x)$:

$$= e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^N 'A_k(x) \int_a^b v(y, T) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy = e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^N 'A_k(x) \frac{b-a}{2} V_k(T)$$

Hierbij zijn $V_k(T)$ de Fourier-cosinus coëfficiënten van $g(x)$. Deze worden gegeven door $G_k(a, b)$, met G_k zoals in de appendix beschreven. In A_k komt nog steeds de onbekende kansdichtheid voor. Door eerst $\cos(k\pi \frac{y-a}{b-a})$ om te schrijven als een reëel deel van een complexe e-macht en dan een deel buiten de integraal te halen verschijnt de bekende Fourier transformatie $\phi(\frac{k\pi}{b-a}; x, T-t)$ van deze kansdichtheid:

$$\begin{aligned} A_k(x) &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y|x, T-t) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y|x) \operatorname{Re}\{e^{k\pi \frac{y-a}{b-a} i}\} dy \\ &= \frac{2}{b-a} \operatorname{Re}\{e^{k\pi \frac{-a}{b-a} i} \int_a^b f(y|x, T-t) e^{k\pi \frac{y}{b-a} i} dy\} \\ &\approx \frac{2}{b-a} \operatorname{Re}\{e^{k\pi \frac{-a}{b-a} i} \phi(\frac{k\pi}{b-a}; x, T-t)\} \end{aligned} \quad (7)$$

Dit vervolgens invullen in $v(x, t)$ geeft de COS prijsingsformule voor Europese opties:

$$v(x, t) \approx e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^N \text{Re}\{e^{k\pi \frac{-a}{b-a} i} \phi\left(\frac{k\pi}{b-a}; x, T-t\right)\} V_k(T) \quad (8)$$

De verschillende stappen (begrenzen van integratie-interval in vergelijking (5), afkappen van de som in vergelijking (6) en het schatten van A_k in (7)) leveren afbreekfouten op. Na een analyse in [3] volgt dat de COS prijsingsformule exponentieële convergentie haalt als het interval $[a, b]$ groot genoeg gekozen wordt.

3.1 Resultaten

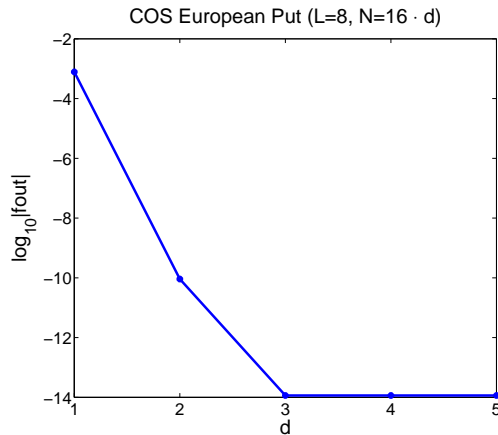
Om de methode te controleren voor verschillende opties worden hier optieprijsen bij enkele mogelijke uitbetalingen uitgerekend. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het Black Scholes prijsproces (hier zijn de exacte oplossingen van bekend). Voor de Europese put is de intrinsieke waarde (de uitbetaling op tijdstip $T=1$) gegeven door:

$$g(x) = \max(K \cdot (1 - e^x), 0)$$

Met $x = \log\left(\frac{S}{K}\right)$ en K de strikeprijs. De Fouriercoëfficiënten $G_k(a, b)$ bij deze uitbetaling worden dus gegeven door:

$$\begin{aligned} G_k(a, b) &= \frac{2}{b-a} \int_a^b \max(K \cdot (1 - e^y), 0) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy = \frac{2}{b-a} \int_a^0 (K \cdot (1 - e^y)) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \\ &= \frac{2}{b-a} K (\psi_k(a, 0) - \chi_k(a, 0)) \end{aligned}$$

Hierbij zijn $\psi_k(a, 0)$ en $\chi_k(a, 0)$ gedefinieerd in hoofdstuk 7.1. De resultaten bij het uitrekenen van de optieprijs op $t = 0$, $K = 110$, $S_0 = 110$, $r = 0.1$ en $\sigma = 0.2$ zijn gegeven in Figuur (4).



Figuur 4: Convergentie van de Europese call optie. L heeft te maken met de keuze van het interval $[a, b]$, zie [3]. De CPU tijd was minder dan 0.5 ms voor $d = 4$.

Voor een butterfly optie is de uitbetaling:

$$g(x) = \max(K e^x - (K - a), 0) - 2 \cdot \max(K \cdot (e^x - 1), 0) + \max(K e^x - (K + a), 0)$$

De Fouriercoëfficiënten $G_k(a, b)$ worden nu:

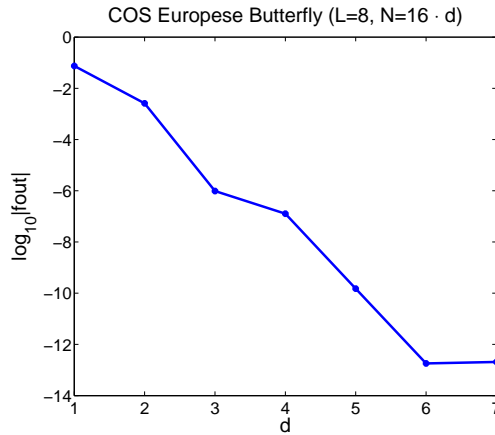
$$\begin{aligned}
G_k(a, b) &= \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy = \frac{2}{b-a} \left(\int_{\ln(\frac{K-a}{K})}^b (Ke^y - (K-a)) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^b K \cdot (e^y - 1) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy + \int_{\ln(\frac{K+a}{K})}^b (Ke^y - (K+a)) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \right) \\
&= \frac{2}{b-a} \left(K \chi_k(\ln(\frac{K-a}{K}), b) - (K-a) \psi_k(\ln(\frac{K-a}{K}), b) - 2K(\chi_k(0, b) - \psi_k(0, b)) \right. \\
&\quad \left. + (K \chi_k(\ln(\frac{K+a}{K}), b) - (K+a) \psi_k(\ln(\frac{K+a}{K}), b)) \right)
\end{aligned}$$

met deze coëfficiënten geeft (8) de benadering voor de optieprijs.

De exacte oplossing van een call optie is bekend en staat in [4]. Neem $Ca_K(x, t)$ als de exacte oplossing van de call met strike K , dan is de exacte oplossing van de Europese butterfly:

$$B(x, t) = Ca_{105}(x, t) - 2 \cdot Ca_{110}(x, t) + Ca_{115}(x, t)$$

Dit omdat je bij de Europese optie maar op één tijdstip kunt uitoefenen en omdat zowel de butterfly als de lineaire combinatie call opties op dit tijdstip dezelfde waarde hebben voor elke x . Dus moet de waarde op $t < T$ ook gelijk zijn (bij de Amerikaanse versie zou dit niet opgaan). De nauwkeurigheid (gebruikmakend van dezelfde parameters als bij de put) is gegeven in Figuur (5):



Figuur 5: Convergentie van de Europese butterfly optie. L heeft te maken met de keuze van het interval $[a, b]$, zie [3]. De CPU tijd was ongeveer 1.5 ms bij $d = 4$.

De CPU tijd is ongeveer drie keer zo hoog doordat het een combinatie is van drie soorten call opties. De nauwkeurigheid van de optiewaarde ligt iets lager wat waarschijnlijk komt door de scherpe discontinuïteiten in de afgeleide van $g(x)$.

Omdat het hoofddoel uiteindelijk de swing optie wordt volgt hier een test voor de Europese optie met (4) als uitbetaling:

$$g(x) = \max(S_{max}e^x - K_a, 0) - \max(S_{max}e^x - S_{max}, 0) + \max(K_d - S_{max}e^x, 0) - \max(S_{min} - S_{max}e^x, 0)$$

met $x = \ln(\frac{S}{S_{max}})$, $S_{max} = 50$, $K_a = 25$, $K_d = 20$, $S_{min} = 10$.

De Fouriercoëfficiënten worden nu op eenzelfde manier verkregen als bij de butterfly optie en zijn:

$$G_k(a, b) = \frac{2}{b-a} \left(\int_a^b g(x, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \right)$$

$$= \frac{2}{b-a} \left(\int_a^{x_{min}} K_d - S_{min} dy + \int_{x_{min}}^{x_d} K_d - S_{max} e^y dy + \int_{x_d}^{x_{max}} S_{max} e^y - K_a dy + \int_{x_{max}}^b S_{max} - K_a dy \right)$$

Waarbij $x_d = \ln(\frac{K_d}{S_{max}})$, $x_{min} = \ln(\frac{S_{min}}{S_{max}})$, $x_a = \ln(\frac{K_a}{S_{max}})$. Merk verder op dat $\ln(\frac{S_{max}}{S_{max}}) = 0$.

Dit kan nog iets anders worden opgeschreven:

$$G_k(a, b) = \frac{2}{b-a} \left((K_d - S_{min})\psi_k(a, x_{min}) - S_{max}\chi_k(x_{min}, x_d) + K_d\psi_k(x_{min}, x_d) \right.$$

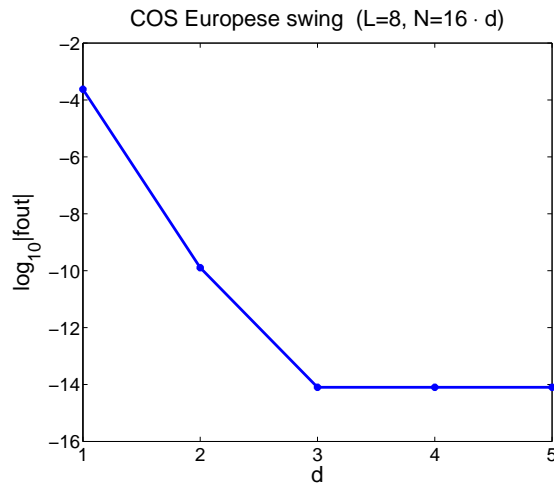
$$\left. + S_{max}\chi_k(x_a, 0) - K_a\psi_k(x_a, 0) + (S_{max} - K_a)\psi_k(0, b) \right) \quad (9)$$

Nu zijn alle termen in de COS prijzingsformule (8) bekend en kan de berekende prijs weer vergeleken worden met de exacte optieprijs onder Black Scholes.

Omdat voor tijdstip T niet mag worden uitgeoefend en de uitbetaling op het eindtijdstip gelijk is aan die van een combinatie put en calls, moet de optieprijs op elk tijdstip gelijk zijn aan deze combinatie put en call opties. De prijzen van een call $Ca_K(x, t)$ of put $P_K(x, t)$ met strike K zijn bekend, en dus is de Europese prijs voor de optie met de swing uitbetaling ook bekend:

$$Sw(x, t) = Ca_{25}(x, t) - Ca_{50}(x, t) + P_{20}(x, t) - P_{10}(x, t)$$

Het resultaat voor de convergentie is gegeven in Figuur (6).



Figuur 6: Een plot van het verschil tussen de exacte optieprijs en de met de COS methode benaderde prijs van de swing optie. Ook deze uitbetaling levert dus geen problemen bij het prijzen met de COS methode.

4 Cos methode bij Bermuda opties

4.1 Normale Bermuda opties

Een Bermuda optie kan op een eindig aantal vooraf afgesproken tijdstippen (t_1, t_2, \dots, t_M) uitgeoefend worden. De optiewaarde op tijdstip $T = t_M$ is gegeven door de intrinsieke waarde $g(x)$. Per tijdstap moet de optiehouder beslissen of hij wil uitoefenen (met uitbetaling $g(x)$) of dat hij de optie wil houden (dan is de optiewaarde een verwachtingswaarde naar het volgende uitoefentijdstip). Deze verwachtingswaarde naar het volgende tijdstip wordt de continuïteitswaarde $c(x, t)$ genoemd. De optiewaarde kan dus berekend worden met het volgende schema:

$$\begin{cases} c(x, t_{m-1}) & = & e^{-r\delta t_m} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_m) f(y|x, \delta t_m) dy \\ v(x, t_{m-1}) & = & \max(g(x), c(x, t_{m-1})) \end{cases} \quad (10)$$

Hierbij is δt_m gegeven door $t_m - t_{m-1}$. De verdisconteerde verwachtingswaarde $c(x, t)$ kan op dezelfde manier geschat worden als bij de Europese optie (8):

$$c(x, t_{m-1}) \approx e^{-r(\delta t)} \sum_{k=0}^N \text{Re} \left\{ e^{k\pi \frac{-a}{b-a} i} \phi\left(\frac{k\pi}{b-a}; x, \delta t\right) \right\} V_k(t_m)$$

Het enige dat anders is, is het feit dat de optiewaarde van het volgende tijdstip gebruikt wordt in plaats van de uitbetaling op tijdstip T (dit brengt wat moeilijkheden met zich mee voor de berekeningen van de coëfficiënten $V_k(t_m)$). In feite wordt met dit algoritme de verwachtingswaarde van de uitbetaling bij de optimale uitoefenstrategie als optieprijs genomen.

Ondanks dat het doel is om de optieprijs voor één bepaalde aandeelwaarde op tijdstip t_0 te berekenen wordt op elke tijdstap (op t_0 na) de oplossing berekend voor elke x binnen het interval $[a, b]^1$. Dit is nodig vanwege de Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$ die weer nodig zijn voor het uitrekenen van $c(x, t)$. Verder moet dan dus bekend zijn waar de optiewaarde uitgeoefend moet worden (dat is waar geldt dat $v(x, t) = g(x)$) en waar men de optie juist moet houden.

¹Dit interval kan op een speciale manier gekozen worden, zie daarvoor [3].

4.2 Bermuda put

Voor de Bermuda put optie zijn de coëfficiënten $V_k(t_m)$ gegeven door:

$$V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} \int_a^b \max(g(y), v(y, t_m)) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$$

$c(y, t)$ en $g(y)$ zijn bekend en dus kunnen de nulpunten berekend worden. Bij de Bermuda put is bekend dat er maar één nulpunt is van $c(y, t) - g(y)$. Bij een aandeelprijs van 0 heeft de optiehouder de hoogst mogelijke uitbetaling en moet hij dus uitoefenen. Als de aandeelprijs boven de strike prijs ligt heeft hij uitbetaling 0, dan moet hij dus juist niet uitoefenen en is $c(y, t) > g(y)$ (dus $x^* < 0$). Oftewel: voor het punt x^* waar $c(x^*, t) - g(x^*) = 0$ geldt dat men een Bermuda put moet uitoefenen voor $x \leq x^*$ en houden voor $x > x^*$.

Zie eventueel hoofdstuk 7.1, de V_k 's worden gegeven door:

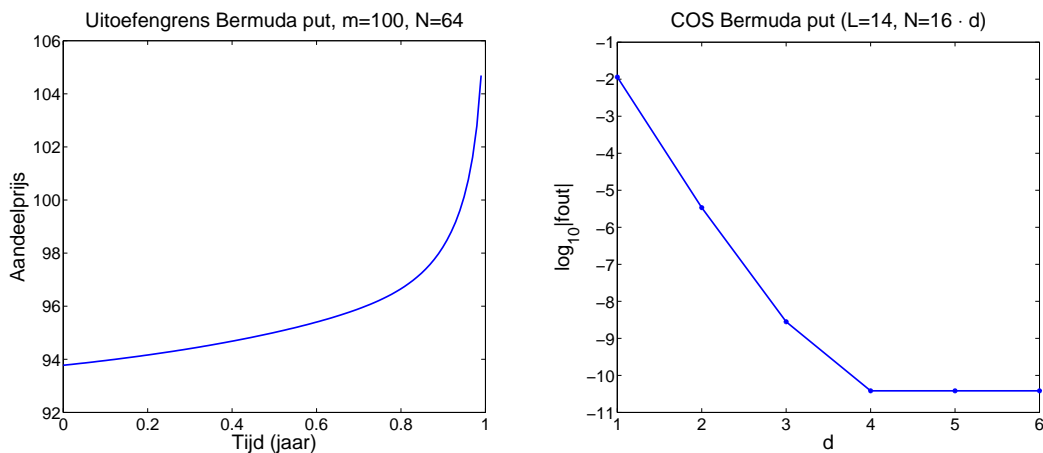
$$V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} (G_k(a, x^*) + C_k(x^*, b))$$

met

$$G_k(a, x^*) = \frac{2}{b-a} K (\psi_k(a, x^*) - \chi_k(a, x^*))$$

Dit is hetzelfde als bij de Europese put behalve dat de integralen tot x^* gaan in plaats van tot 0.

Voor de controle van het bijbehorende Matlab programma doen we eenzelfde test als in [3]. De parameters zijn $K = 110$, $x = \ln(100/110)$ (oftewel $S = 100$), $r = 0.1$ en $\sigma = 0.2$. De uitoefentijdstippen zijn $t_1 = 0.1$, $t_2 = 0.2$, ..., $t_{10} = 1$. De referentiewaarde bij Black Scholes voor $v(x, 0)$ is 10.479520123. De resultaten zijn gegeven in Figuur (7):



Figuur 7: Convergentie van de Bermuda put (rechts) en zijn uitoefengrens (links), daarnaast het verschil van de oplossing met de referentiewaarde. L bepaalt de grootte van het interval $[a, b]$, zie [3].

Om te bepalen waar de optiehouder moet uitoefenen en waar hij de optie moet houden moet voor elk uitoefentijdstip bepaald worden waar $g(x) > c(x, t_m)$. De grens tussen uitoefenen en niet uitoefenen is tijdsafhankelijk. In Figuur (7) is deze grens gegeven voor de Bermuda put. Bij deze optie is de grens bekend uit de literatuur en heeft inderdaad de vorm als in Figuur (7).

4.3 Bermuda Butterfly

Om de Bermuda butterfly optie uit te rekenen moeten we $g(y)$ en dus ook $V_k(t_m)$ aanpassen. De intrinsieke waarde van de butterfly optie was:

$$g(x) = \max(Ke^x - (K - a), 0) - 2 \cdot \max(K \cdot (e^x - 1), 0) + \max(Ke^x - (K + a), 0)$$

Herinner dat de aandelprijs gelijk is aan Ke^x . Voor een aandelprijs kleiner dan $K - a$ of groter dan $K + a$ is de uitbetaling 0 en moet men dus zeker niet uitoefenen. Bij een aandelprijs van K is de uitbetaling maximaal en moet de optiehouder dus juist wel uitoefenen. Dat betekent dus dat er minstens twee nulpunten zijn van het verschil tussen de uitbetaling en de continuïteitswaarde: één tussen een aandelprijs van $K - a$ en K , en de ander tussen K en $K + a$. Deze nulpunten kunnen gevonden worden met de Newton Raphson methode.

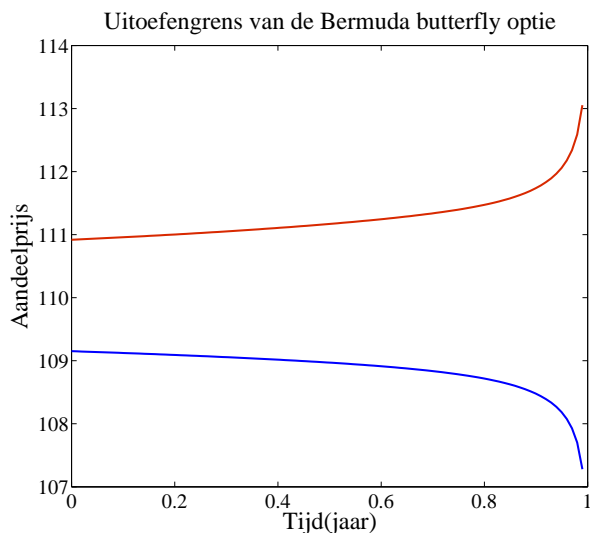
De nulpunten moeten gebruikt worden voor het berekenen van de coëfficiënten V_k :

$$V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} (C_k(a, x_1^*) + G_k(x_1^*, x_2^*) + C_k(x_2^*, b)) \quad (11)$$

Als eerder gezegd is $x_1^* > \ln(\frac{K-a}{K})$ en $x_2^* < \ln(\frac{K+a}{K}) < b$ (door een juiste keuze van b), dus:

$$G_k(x_1^*, x_2^*) = \frac{2}{b-a} (K\chi_k(x_1^*, x_2^*) - (K - a)\psi_k(x_1^*, x_2^*) - 2K(\chi_k(0, x_2^*) - \psi_k(0, x_2^*)))$$

Het algoritme uit vergelijking (10) geeft nu de methode om de prijs uit te rekenen: De $V_k(t_m)$ voor het berekenen van $c(x, t_{m-1})$ zijn geschat door (11) en dus is $c(x, t_{m-1})$ dan bekend. De uitbetaling $g(x)$ is gegeven en de optieprijs is dan gelijk aan het maximum van deze twee. Merk op dat op elk tijdstip een optieprijs geschat wordt voor elke aandelprijs op het tijdstip t_m (in tegenstelling tot methodes met partiële differentiaalvergelijkingen waar men met roosterpunten werkt). Dit komt doordat de methode gebaseerd is op de Fourier cosinus ontwikkeling.



Figuur 8: Uitoefengrenzen van de Bermuda butterfly optie.

In Figuur (8) de uitoefengrenzen van de Bermuda butterfly met $K = 110$ en $a = 5$. Boven de rode lijn en onder de blauwe lijn is het ongunstig om uit te oefenen. Zoals eerder voorspeld ligt de ondergrens inderdaad tussen de $K - a = 105$ en $K = 110$, de bovengrens ligt tussen de $K = 100$ en de $K + a = 115$.

5 Prijzen van de Swing optie

5.1 Prijzen van het future deel

In de vergelijking (1) staat dat de prijs van de future gegeven wordt door de verwachting. Ook is in hoofdstuk (3) behandeld hoe een dergelijke verwachting kon worden geschat met de COS prijzingsmethode. Hier volgt kort een beschrijving van hoe de prijzing van een future tot stand komt.

Het enige wat anders is in vergelijking met het prijzen van opties is dat in de verwachting geen intrinsieke waarde staat. De contracthouder moet het product altijd kopen waardoor op deze plaats Ke^x moet worden ingevuld (welke equivalent is aan de aandelprijs na de coördinaattransformatie):

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ke^y f(y|x, (T-t)) dy$$

Hierbij is Ke^y de aandelprijs, K een strikeprijs die gebruikt wordt voor de coördinaattransformatie (voor de berekening van de future alleen zou dit overbodig zijn, nu is het handig om in dezelfde ruimte te werken). K heeft verder niets met de future te maken.

Vervolgens kunnen precies dezelfde stappen worden toegepast als bij de Europese opties, oftewel:

$$\hat{F}(x, t) = \sum_{k=0}^N \text{Re}\{e^{k\pi \frac{-a}{b-a} i} \phi(\frac{k\pi}{b-a}; x, T-t)\} V_k(T) \quad (12)$$

Nu zijn de V_k 's niet de cosinus Fourier coëfficiënten van de uitbetaling maar die van Ke^x , deze worden gegeven door:

$$V_k = \frac{2K}{b-a} \int_a^b e^x \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy = \frac{2K}{b-a} \chi_k(a, b)$$

Hierbij is χ bekend, zie hiervoor hoofdstuk 7.1. $\hat{F}(x, t)$ geeft nu een schatting voor de future prijs. Bij de swing optie is er sprake van meerdere future contracten over verschillende eindtijdstippen (namelijk de afleverdata). De totale prijs van het future deel wordt dus een som van deze future prijzen.

5.2 Prijzen bij een constante hersteltijd

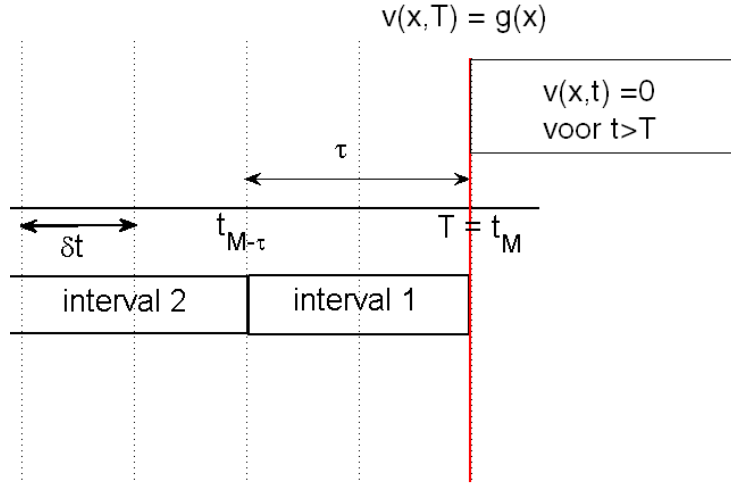
De grote vraag is nu natuurlijk nog wat voor prijs een bank moet vragen voor het uitgeven van het swing deel van de optie. De waarde op tijdstip T is gegeven door vergelijking (4):

$$v(x, T) = \Delta \cdot g(x) = \Delta \cdot (\max(S_{max} \cdot e^{x(T)} - K_a, 0) - \max(S_{max} \cdot e^{x(T)} - S_{max}, 0) + \max(K_d - S_{max} \cdot e^{x(T)}, 0) - \max(S_{min} - S_{max} \cdot e^{x(T)}, 0)) \quad (13)$$

Neem aan dat de minimale hersteltijd tussen 2 keer uitoefenen constant is. Voor de Bermuda optie kunnen we dit omschrijven naar een periode van $\tau - 1$ tijdstappen waarop men niet mag uitoefenen na een swing actie. Stel de hersteltijd is 0.11 jaar en je wilt de Amerikaanse optie benaderen met een Bermuda versie met tijdstappen van 0.1. De uitoefentijdstippen zijn 0.1, 0.2, ..., 1 en je oefent uit op $t = 0.1$. Dan mag je tot en met $t = 0.21$ niet uitoefenen, oftewel dan mag je twee tijdstappen later weer uitoefenen. τ is in dit geval dus 2.

Nu weer terug naar een algemene τ . De prijs op tijdstip $T = t_M$ is bekend, bekijk het interval $(t_{M-\tau}, t_M]$ (interval 1 in Figuur (9)). Als de optiehouder hier uitoefent kan hij sowieso tot en

met T (en misschien langer) niet meer uitoefenen. Oftewel, in dit interval kan de optie nog maar één keer uitgeoefend worden. Hierdoor kunnen we voor dit stuk interval hetzelfde algoritme gebruiken als voor de normale Bermuda opties:



Figuur 9: De restwaarde (optiewaarde na de hersteltijd) door uit te oefenen in interval één is 0.

$$\begin{cases} c(x, t_{m-1}) & = & e^{-r\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_m) f(y|x) dy \\ v(x, t_{m-1}) & = & \max(\Delta_{max} \cdot g(x, t_{m-1}), c(x, t_{m-1})), \end{cases} \quad (14)$$

voor $t_{(m-1)} \in (t_{M-\tau}, T]$, $\delta t = t_m - t_{m-1}$. De continuïteitswaarde $c(x, t_{m-1})$ is de optiewaarde op tijdstip t_{m-1} gegeven dat men niet uitoefent op het huidige tijdstip. Δ_{max} is het maximaal aantal keer dat er op hetzelfde tijdstip uitgeoefend mag worden. Per actie is de uitbetaling $g(x)$.

Merk op dat het optimaal is om bij de laatste swing actie zoveel mogelijk keer uit te oefenen. Immers, als je uitoefent dan is de uitbetaling ($g(x) > c(x, t_m) > 0$) positief. Uiteraard kun je beter zoveel mogelijk keer deze positieve uitbetaling ontvangen. Net zoals bij de andere Bermuda opties moeten hier per tijdstap de Fouriercoëfficiënten van de optieprijs berekend worden. Hier kom ik later op terug.

Nu bekijken we de optiewaarde voor een tijdstip $t_m < t_{M-\tau}$ (interval 2 in Figuur (9)). Hiervoor moeten opnieuw twee waarden uitgerekend worden: de waarde als men niet uitoefent op tijdstip t_{m-1} en de waarde als men wel uitoefent op tijdstip t_{m-1} . De eerste waarde is niets anders dan de continuïteitswaarde van de optie, de andere waarde is wat lastiger. Na het uitoefenen heeft de optie namelijk nog steeds een waarde, er kan immers minstens nog één keer uitgeoefend worden. De optiehouder krijgt bij Δ keer uitoefenen dus in ieder geval een uitbetaling van $\Delta \cdot g(x, t_{m-1})$. De resterende waarde $c^*(x, t_m)$ van de optie kan gezien worden als een soort continuïteitswaarde. Het enige is dat de optie nu niet over δt jaar maar pas over $(\tau) \cdot \delta t$ jaar weer uitgeoefend mag worden. Deze waarde kunnen we weer uitdrukken in een verwachtingswaarde:

$$c^*(x, t_m) = e^{-r\delta t \cdot \tau} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_{m+\tau}) f(y|x, \delta t \cdot \tau) dy \quad (15)$$

Deze verwachting kunnen we op dezelfde manier uitrekenen als de normale continuïteitswaarde, de Fouriercoëfficiënten van $v(y, t_{m+\tau})$ zijn al eerder in het algoritme uitgerekend en kunnen hergebruikt worden. De optiewaarde bij Δ keer uitoefenen is dus $\Delta g(x) + c^*(x, t_m)$. Hieruit volgt dat als men moet uitoefenen (hier moet $g(x)$ dus positief zijn), je het beste zoveel mogelijk kunt uitoefenen (dus Δ_{max} keer). Δ heeft dankzij de constante hersteltijd geen invloed op de restwaarde. Het is dus duidelijk dat $(\Delta + 1)g(x) + c^*(x, t_m) > \Delta g(x) + c^*(x, t_m)$.

Op elk tijdstip wordt dus gekeken naar de continuïteitswaarde $c(x, t)$ en de uitbetaling bij het uitoefenen op dat tijdstip plus de continuïteitswaarde nadat de hersteltijd τ verstreken is. Vervolgens wordt hierover gemaximaliseerd om de waarde uit te rekenen. Een belangrijk verschil van de swing optie met andere opties is dat het contract niet waardeloos wordt na uitoefening. De contracthouder moet alleen wel even wachten voordat hij het weer kan gebruiken. De prijsingsformule ziet er als volgt uit:

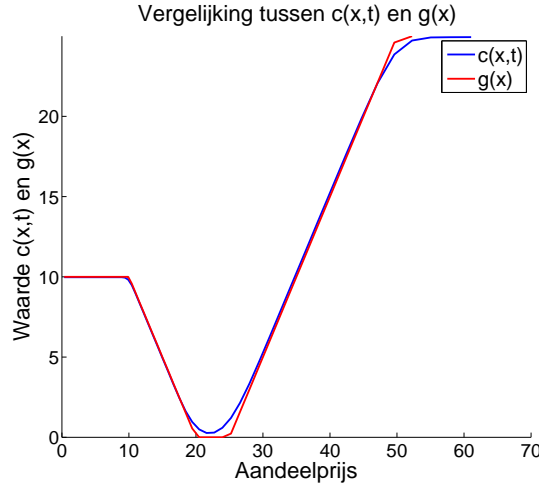
$$\begin{cases} c(x, t_{m-1}) & = & e^{-r\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_m) f(y|x) dy \\ c^*(x, t_{m-1}) & = & e^{-r\delta t \cdot \tau} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_{m+\tau}) f(y|x, \delta t \cdot \tau) dy \\ \hat{g}(x, t_{m-1}) & = & \Delta_{max} \cdot g(x, t_{m-1}) + c^*(x, t_{m-1}) \\ v(x, t_{m-1}) & = & \max(\hat{g}(x, t_{m-1}), c(x, t_{m-1})) \end{cases} \quad (16)$$

5.3 Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$ voor de swing optie

In dit hoofdstuk wordt uitgelegd hoe de V_k 's bepaald worden. Allereerst voor $t_m \in (t_{M-\tau}, T]$, dan $v(x, t_m) = \max(\Delta_{max} \cdot g(x, t_m), c(x, t_m))$ en dus:

$$V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} \left(\int_A \Delta_{max} \cdot g(x, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy + \int_B c(y, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \right)$$

Waarbij A het gebied is waar $\Delta_{max} \cdot g(x, t_m) > c(y, t_m)$. Als de aandelprijs tussen K_a en K_d inligt is de intrinsieke waarde nul, hier moet dus zeker niet uitgeoefend worden. Bij een aandelprijs groter dan S_{max} krijgt de optiehouder een uitbetaling van $S_{max} - K_a$, zolang de optieprijs niet onder de K_d komt krijgt de optiehouder zeker geen hogere uitbetaling. Een vermoeden is dus dat er een nulpunt van $c(x(S), t_m) - g(x(S))$ ligt tussen $S = K_a$ en $S = S_{max}$. Eenzelfde argument geldt voor een vermoeden van een nulpunt tussen een aandelprijs van K_d en S_{min} . Na een aantal tests is gebleken dat hier inderdaad nulpunten liggen, zie Figuur (10)



Figuur 10: $S_{min} = 10$, $K_d = 20$, $K_a = 25$, $S_{max} = 50$. Omdat in dit geval geldt dat $\Delta = \Delta_{max}$ is hiet zonder verlies van algemeenheid $\Delta = 1$ gekozen.

In het gebied waar de rode lijn (de intrinsieke waarde) boven ligt moet uitgeoefend worden, daar waar de continuïteitswaarde (blauw) boven ligt moet men de optie houden. Te zien is dat er voor $S < K_d$ en $S > K_a$ een snijpunt tussen de twee functies is. Voor elke iteratie in de tijd zoekt de methode naar deze twee nulpunten van het verschil van de functies. Als deze er niet zijn worden de nulpunten op de rand van het interval gelegd (a of b) waardoor ze geen invloed hebben op de verdere berekeningen.

Stel dat het linker nulpunt gegeven wordt door x_1^* en het rechter nulpunt door x_2^* . De Fouriercoëfficiënten van de optieprijs zien er dan als volgt uit:

$$\text{voor } t_m \in (t_{M-\tau}, T] : V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} (\Delta_{max} \cdot G_k(a, x_1^*) + C_k(x_1^*, x_2^*, t_m) + \Delta_{max} \cdot G_k(x_2^*, b))$$

De Fouriercoëfficiënten van $g(x)$ voor de swing optie zijn opnieuw lineaire combinaties van χ en ψ (zie hoofdstuk 7.1), bijna hetzelfde als in vergelijking (9). Alleen integreer je niet over het stuk waar men de optie moet houden:

$$G_k(a, x_1^*) + G_k(x_2^*, b) = \frac{2}{b-a} \left(\int_A g(x, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \right)$$

Hierbij bestaat het gebied A uit de twee intervallen waar het optimaal is om uit te oefenen.

$$= \frac{2}{b-a} \left(\int_a^{x_1} K_d - S_{min} \right.$$

$$\left. dy + \int_{x_{min}}^{x_2} K_d - S_{max} e^y dy + \int_{x_3}^{x_{max}} S_{max} e^y - K_a dy + \int_{x_4}^b S_{max} - K_a dy \right.$$

De integratiegrenzen hangen op de volgende manier samen met x_1^* en x_2^* :

$$x_1 = \min(x_{min}, x_1^*), x_2 = \max(x_{min}, \min(x_d, x_1^*)), x_3 = \min(x_{max}, \max(x_a, x_2^*)) \text{ en } x_4 = \max(x_{max}, x_2^*).$$

$$\begin{aligned} G_k(a, x_1^*) + G_k(x_2^*, b) &= \frac{2}{b-a} ((K_d - S_{min})\psi_k(a, x_1) - S_{max}\chi_k(x_{min}, x_2) + K_d\psi_k(x_{min}, x_2) \\ &\quad + S_{max}\chi_k(x_3, x_{max}) - K_a\psi_k(x_3, x_{max}) + (S_{max} - K_a)\psi_k(x_4, b) \end{aligned} \quad (17)$$

Vervolgens moeten ook de Fouriercoëfficiënten op de tijdstippen daarvoor berekend worden. Hier heeft de optie bij uitoefening ook nog de zogenoemde restwaarde $c^*(x, t_m)$, welke gedefinieerd was als:

$$c^*(x, t_m) = e^{-r\delta t \cdot \tau} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_{m+\tau}) f(y|x, \delta t \cdot \tau) dy$$

De Fouriercoëfficiënten komen er dan dus zo uit te zien:

$$V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} \left(\int_A (L \cdot g(x, t_m) c^*(x, t_m)) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy + \int_B c(y, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \right)$$

De vraag is nu hoe de integraal $C_k^*(A, t_m) = \int_A c^*(x, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$ berekend moet worden. Hiervoor is het handig om $c^*(x, t_m)$ op dezelfde manier als bij $c(x, t_m)$ te schatten met de COS prijsingsformule. Het enige verschil is dat de optie wat langer niet uitgeoefend kan worden dan één tijdstap (wat het geval is bij $c(x, t_m)$). De restwaarde wordt:

$$c^*(x, t_m) = e^{-r(\delta t \cdot \tau)} \sum_{k=0}^N \text{Re}\{e^{k\pi \frac{-a}{b-a} i} \phi(\frac{k\pi}{b-a}; x, \delta t \cdot \tau)\} V_k(t_{m+\tau})$$

Dit invullen in de integraal:

$$C_k^*(A, t_m) = \int_A e^{-r(\delta t \cdot \tau)} \sum_{k=0}^N \text{Re}\{e^{k\pi \frac{-a}{b-a} i} \phi(\frac{k\pi}{b-a}; x, \delta t \cdot \tau)\} V_k(t_{m+\tau}) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$$

Wat weer kan worden omgeschreven naar de matrix-vector-product vorm zoals in [3] op blz 6:

$$\mathbf{C}^*(A, t_m) = \frac{e^{-r\delta t \cdot \tau}}{\pi} \text{Im}\{(\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_s)\mathbf{u}\}$$

Waarbij \mathbf{u} een vector is met $u_j = \phi(\frac{k\pi}{b-a}, \delta t \cdot \tau; x)\} V_j(t_{m+\tau})$ en $u_0 = \frac{1}{2}\phi(0, \delta t \cdot \tau; x)\} V_0(t_{m+\tau})$. Verder geldt er dat $c(x, t_m) \geq c^*(x, t_m)$. Immers, stel je zou niets doen met de optie tot $t_{m+\tau}$ dan zou de optiewaarde gelijk zijn aan $c^*(x, t_m)$, $c^*(x, t_m)$ is dus een ondergrens voor $c(x, t_m)$. Je mag op de tijdstappen $t_i \in [t_m, t_{m+\tau}]$ echter wel wat doen waardoor $c(x, t_m)$ groter is. Voor $g(x) = 0$ mag men dus nog steeds niet uitoefenen. De nulpunten liggen opnieuw bij een aandeleprijs kleiner dan K_d en groter als K_a . Het resultaat (voor $t_m < t_M - t_{M-\tau}$):

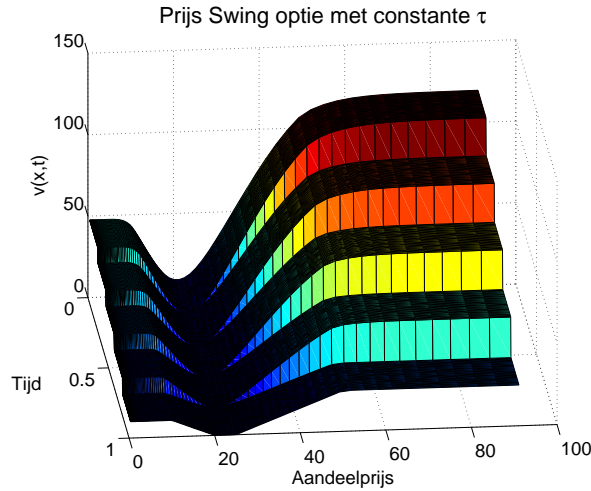
$$\begin{aligned} V_k(t_m) &= \frac{2}{b-a} (\Delta_{max} \cdot G_k(a, x_1^*) + C_k^*(a, x_1^*, t_m) + C_k(x_1^*, x_2^*, t_m) \\ &\quad + \Delta_{max} \cdot G_k(x_2^*, b) + C_k^*(x_2^*, b, t_m)) \end{aligned} \quad (18)$$

5.4 Oplossing swing optie bij constante hersteltijd

Nu zijn $V_k(t_m)$ en $c^*(x, t_{m-1})$ dus bekend. Hoe $c(x, t_{m-1})$ berekend moet worden is al beschreven bij de andere Bermuda optie. $g(x)$ is gewoon een kwestie van x invullen en dus kunnen we met het algoritme (16) de optieprijs $v(x, t_{m-1})$ uitrekenen. Terugwerken vanaf het eindtijdstip geeft dan de oplossing op elk uitoefentijdstip. Het algoritme ziet er grofweg als volgt uit:

- De benadering van één tijdstap eerder is bekend en moet worden opgeslagen in de vorm van Fouriercoëfficiënten $V_k(t_{m+1})$.
- De uitbetaling $g(x)$ is bekend.
- Als je de optieprijs wilt weten op het betreffende tijdstip t_m (met een aandelprijs equivalent aan x), reken je $g(x)$ en $c(x, t_m)$ uit (de laatste met de COS formule welke gebruik maakt van $V_k(t_{m+1})$). Het maximum van deze twee is de optieprijs $v(x, t_m)$.
- Als je de prijs op het tijdstip t_{m-1} wilt berekenen moeten eerst de Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$ gevonden worden.
- Hiervoor moeten eerst x_1^* en x_2^* gevonden worden met een nulpuntmethode.
- Als deze nulpunten bekend zijn kan vergelijking (18) gebruikt worden. De Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$ zijn nu bekend.
- Keer terug naar het eerste punt in het algoritme.

In Figuur (11) een plot van de optieprijs tegenover de aandeleprijs en de tijd.

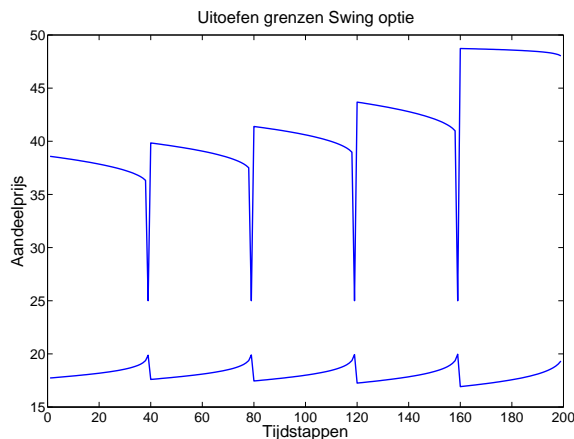


Figuur 11: Swing optie met $\tau = 40$, $dt = 0.01$, $t_M = 1$, $[S_{\min}, K_d, K_a, S_{\max}] = [10, 20, 25, 50]$, $\Delta_{\max} = 1$.

In Figuur (11) is te zien dat de optieprijs op een aantal tijdstippen omlaag schiet. Dit heeft te maken met het aantal keer dat de optiehouder nog een swing actie kan uitvoeren. Stel de aandeleprijs is 100 op tijdstip t_{M-80} dan is de verwachting dat de intrinsieke waarde vrijwel gelijk blijft aan $S_{\max} - K_a = 25$. Merk op dat dit ook de maximale uitbetaling is. Daarom zal de optiewaarde op tijdstip t_m in dit voorbeeld nooit groter worden dan $d_m \cdot 25$. Daarnaast kan de optiehouder nog maximaal $d_m = 3$ swing acties uitvoeren (op t_{M-80} , t_{M-40} en t_M) waardoor de optiewaarde daar iets onder de 75 ligt. Stel je bent één tijdstip verder, dan kun je maximaal twee swing acties doen waardoor de optiewaarde dan opeens iets onder de 50 zal liggen.

Hoe dichterbij de aandeleprijs het gebied komt waar de intrinsieke waarde nul is, hoe kleiner deze sprong wordt. Er moet dan namelijk uitgeoefend worden tegen een lagere uitbetaling en daarnaast is er onzekerheid wat de aandeleprijs na de hersteltijd zal zijn (vanwege dat laatste is de optiewaarde (voor $t < T_{M-\tau}$) bij een aandeleprijs net boven S_{\max} ook nog een flink stuk lager dan $d_m \cdot (S_{\max} - K_a)$).

Een andere belangrijke figuur om te controleren of de oplossing ergens op slaat is een plot van het gebied waar de optiehouder moet uitoefenen (Figuur (12)). Daarnaast is dit natuurlijk ook van belang omdat dit de optimale uitoefenstrategie weergeeft. Binnen de twee blauwe lijnen moet men de optie niet uitoefenen en boven de bovenste lijn en onder de onderste lijn moet de optie juist wel uitgeoefend worden (daar is de uitbetaling $g(S)$ immers groot, zie daarvoor Figuur (10)).



Figuur 12: Uitoefengrenzen van swing optie bij constante hersteltijd met $\tau = 40$, $dt = 0.01$, $t_M = 1$, $[S_{\min}, K_d, K_a, S_{\max}] = [10, 20, 25, 50]$.

In Figuur (12) is te zien dat, bij de huidige parameter keuze, er op de tijdstappen waar voor een laatste keer een extra swing actie kan worden uitgevoerd bijna altijd uitgeoefend moet worden voor een positieve uitbetaling. Dit klopt wel omdat de optiehouder anders één uitbetaling misloopt. Hoe dicht de tijd bij zo'n punt komt, hoe eerder er uitgeoefend moet worden. Verder is het opvallend dat de onderkant heel veel lijkt op de uitoefengrenzen van de Bermuda put met eindtijdstippen $t_M, t_{M-\tau}, \dots$ (zie Figuur (7)). In feite is de intrinsieke waarde rondom K_d ook precies die van een put optie. Ten slotte is te zien dat op de lange termijn de optie eerder uitgeoefend moet worden op een vroeg tijdstip.

5.5 Prijs bij algemenere hersteltijd

De volgende stap is om te kijken wat er gebeurt als de optiehouder Δ kan kiezen uit twee mogelijkheden Δ_1 en Δ_2 , met ieder een eigen hersteltijd (deze is dus niet constant voor alle Δ). We nemen aan dat $\Delta_2 > \Delta_1$ en dat $\tau(\Delta_2) > \tau(\Delta_1)$ (als dit laatste niet het geval zou zijn zou het, in het uitoefengebied, altijd gunstiger zijn om Δ_2 keer uit te oefenen vanwege een grotere opbrengst met een kleinere hersteltijd). Op het eerste gezicht lijkt er niet zo heel veel te veranderen aan het algoritme, er moet alleen een tweede uitoefenwaarde worden uitgerekend.

$$\begin{cases} c(x, t_{m-1}) &= e^{-r\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_m) f(y|x, \delta t) dy \\ c_1^*(x, t_{m-1}) &= e^{-r\delta t \cdot \tau(\Delta_1)} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_{m+\tau(\Delta_1)}) f(y|x, \delta t \cdot \tau(\Delta_1)) dy \\ c_2^*(x, t_{m-1}) &= e^{-r\delta t \cdot \tau(\Delta_2)} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_{m+\tau(\Delta_2)}) f(y|x, \delta t \cdot \tau(\Delta_2)) dy \\ \hat{g}_1(x, t_{m-1}) &= \Delta_1 \cdot g(x, t_{m-1}) + c^*(x, t_{m-1}) \\ \hat{g}_2(x, t_{m-1}) &= \Delta_2 \cdot g(x, t_{m-1}) + c_2^*(x, t_{m-1}) \\ v(x, t_{m-1}) &= \max(\hat{g}_1(x, t_{m-1}), \hat{g}_2(x, t_{m-1}), c(x, t_{m-1})) \end{cases} \quad (19)$$

Nu wordt er dus gemaximaliseerd over drie waarden: de waarde die de optie zou hebben als er geen swing actie op tijdstip t_{m-1} uitgevoerd wordt ($c(x, t_{m-1})$), de waarde die de optie zou hebben als er Δ_2 keer uitgeoefend wordt ($\hat{g}_2(x, t_{m-1})$), en die bij Δ_1 keer uitoefenen ($\hat{g}_1(x, t_{m-1})$). Voor de laatste twee moeten restwaardes uitgerekend worden (afhankelijk van de hersteltijd). De restwaarde wordt op dezelfde manier berekend als in vergelijking (15), maar dan is τ afhankelijk van Δ :

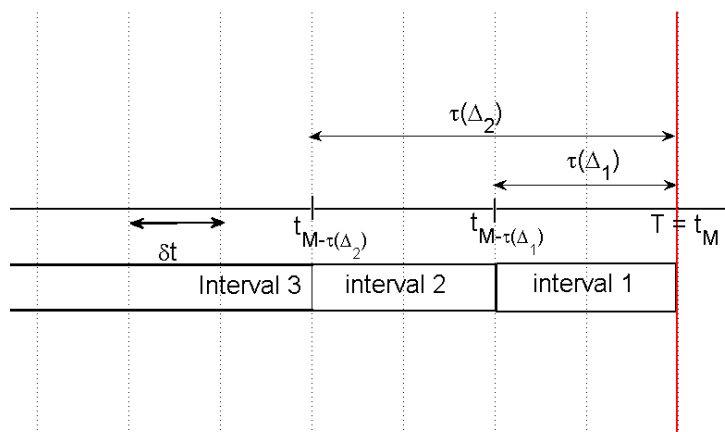
$$c^*(x, t_m) = e^{-r\delta t \cdot \tau(\Delta)} \int_{-\infty}^{\infty} v(y, t_{m+\tau(\Delta)}) f(y|x, \delta t \cdot \tau(\Delta)) dy$$

In het algoritme (19) is $c_1^*(x, t_m)$ de restwaarde behorend bij Δ_1 keer uitoefenen en $c_2^*(x, t_m)$ bij Δ_2 keer.

Het probleem zit hem in het bepalen van de Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$: Hiervoor moet voor elke x bekend zijn welke strategie optimaal is (Δ_1 keer, Δ_2 keer, of niet uitoefenen). Om dit te bepalen worden per tijdstip 3 soorten nulpunten berekend:

- De nulpunten x_1^* van $\hat{g}_1(x, t_m) - c(x, t_m)$, om te bepalen waar $\hat{g}_1(x, t_m) > c(x, t_m)$.
- De nulpunten x_2^* van $\hat{g}_2(x, t_m) - c(x, t_m)$, om te bepalen waar $\hat{g}_2(x, t_m) > c(x, t_m)$.
- De nulpunten x_3^* van $\hat{g}_2(x, t_m) - \hat{g}_1(x, t_m)$, om te bepalen waar $\hat{g}_2(x, t_m) > \hat{g}_1(x, t_m)$.

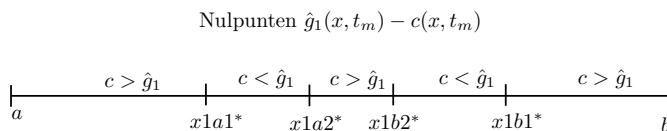
In het interval $(t_{M-\tau(\Delta_1)}, t_M]$ (interval 1 in Figuur (13)) kan nog maar één swing actie uitgevoerd worden, oftewel $c^*(x, t_{m-1})$ en $c_2^*(x, t_{m-1})$ zijn beide 0. Dus als $g(x) > c(x, t_m) > 0$ dan kan de optiehouder het beste zoveel mogelijk uitoefenen. Hier hoeven dan alleen de nulpunten van $\hat{g}_2(x, t_m) - c(x, t_m)$ bepaald te worden. Voor tijdstippen $t_{M-\tau(\Delta_2)} \leq t_m \leq t_{M-\tau(\Delta_1)}$ (interval 2 in Figuur (13)) kan het juist zo zijn dat $\hat{g}_1(x, t_m) > \hat{g}_2(x, t_m)$ voor alle x : als de optiehouder hier één keer uitoefent kan hij na de hersteltijd in één swing actie nog twee keer uitoefenen (dus in totaal drie keer uitoefenen). Als hij op tijdstip $t_m \in (t_{M-\tau(\Delta_2)}, t_{M-\tau(\Delta_1)}]$ twee keer uitoefent kan hij daarna niet meer uitoefenen. Vanwege deze twee gevallen moet eerst gecontroleerd worden of $\hat{g}_2(x, t_m) - \hat{g}_1(x, t_m)$ wel nulpunten heeft.



Figuur 13: Tijdlijn met daarin de hersteltijden.

Buiten deze gevallen blijkt dat als er nulpunten van $\hat{g}_2(x, t_m) - \hat{g}_1(x, t_m)$ zijn, er één nulpunt $x3a^* < K_d$ is en één nulpunt $x3b^* > K_a$. Tussen K_d en K_a geldt $g(x) = 0$, omdat $c_1^*(x, t_{m-1}) > c_2^*(x, t_{m-1})$ geldt hier dat $\hat{g}_1(x, t_m) > \hat{g}_2(x, t_m)$. Aan de andere kant van de snijpunten (dus voor $x < x3a^*$ en $x > x3b^*$) geldt dan dat $\hat{g}_2(x, t_m) > \hat{g}_1(x, t_m)$.

Daarna moeten de nulpunten $x1^*$ en $x2^*$ bepaald worden. Dit gaat precies op dezelfde manier als de nulpunten van $\hat{g}(x, t_m) - c(x, t_m)$ bij de constante hersteltijd. Dit resulteert in principe in een gebied $[x2a^*, x2b^*]$ waar $c(x, t_m) > \hat{g}_2(x, t_m)$ en een gebied $[x1a^*, x1b^*]$ waar $c(x, t_m) > \hat{g}_1(x, t_m)$. Na tests bleek echter dat er geen twee maar vier nulpunten kunnen zijn van $\hat{g}_1(x, t_m) - c(x, t_m)$. Eerst een interval van $[a, x1a1^*]$ waar men de optie beter kan houden dan één keer uitoefenen (waarschijnlijk omdat dan op het volgende tijdstip twee keer uitgeoefend kan worden). Dan een interval $[x1a1^*, x1a2^*]$ waar $\hat{g}_1(x, t_m) - c(x, t_m) > 0$. Vervolgens een interval $[x1a2^*, x1b2^*]$ waar de uitbetaling weer heel klein is waardoor $\hat{g}_1(x, t_m) - c(x, t_m) < 0$ en ten slotte nog een nulpunt $x1b1^*$ gespiegeld aan $x1a1^*$. Om het iets duidelijker te maken staat in Figuur (14) een plot van de intervallen met daarin de nulpunten.



Figuur 14: De ligging van de verschillende soorten nulpunten.

Met behulp van deze nulpunten kan gekeken worden in welke gebieden Δ_1 , Δ_2 of 0 keer uitgeoefend moet worden. Afhankelijk van deze gebieden worden de Fouriercoëfficiënten als volgt berekend:

•

$$\begin{aligned}
V_k(t_m) &= \frac{2}{b-a} (\Delta_2 \cdot G_k(a, \min(x3a^*, x2a^*)) + C_k(x2a^*, x1a2^*, t_m) + \Delta_1 \cdot G_k(\max(x3a^*, x1a2^*), x1a1^* \\
&\quad + C_k(x1a1^*, x1b1^*, t_m) + \Delta_1 \cdot G_k(x1b1^*, \min(x1b2^*, x3b^*)) + C_k(x1b2^*, x2b^*, t_m) \\
&\quad + \Delta_2 \cdot G_k(\min(x3b^*, x2b^*), b) + C_k^{2*}(a, \min(x3a^*, x2a^*), t_m) + C_k^{1*}(\max(x3a^*, x1a2^*), x1a1^*, t_m) \\
&\quad + C_k^{1*}(x1b1^*, \min(x1b2^*, x3b^*), t_m) + C_k^{2*}(\min(x3b^*, x2b^*), b, t_m))
\end{aligned}$$

In het geval dat de nulpunten $x1a2^*$ en (of) $x1b2^*$ niet bestaan worden deze vervangen door a en b . We nemen dan wel $G_k(x1, x2) = 0$ en $C_k(x1, x2, t_m) = 0$ voor alle $x1, x2$ met $x1 > x2$.

- Als $\hat{g}_1(x, t_m) < \hat{g}_2(x, t_m)$ voor alle x (Er is geen gebied waar Δ_2 keer uitgeoefend moet worden):

$$\begin{aligned}
V_k(t_m) &= \frac{2}{b-a} (\Delta_2 \cdot G_k(a, x2a^*) + C_k(x2a^*, x2b^*, t_m) + \Delta_2 \cdot G_k(x2b^*, b) \\
&\quad + C_k^{2*}(a, x2a^*, t_m) + C_k^{2*}(x2b^*, b, t_m))
\end{aligned}$$

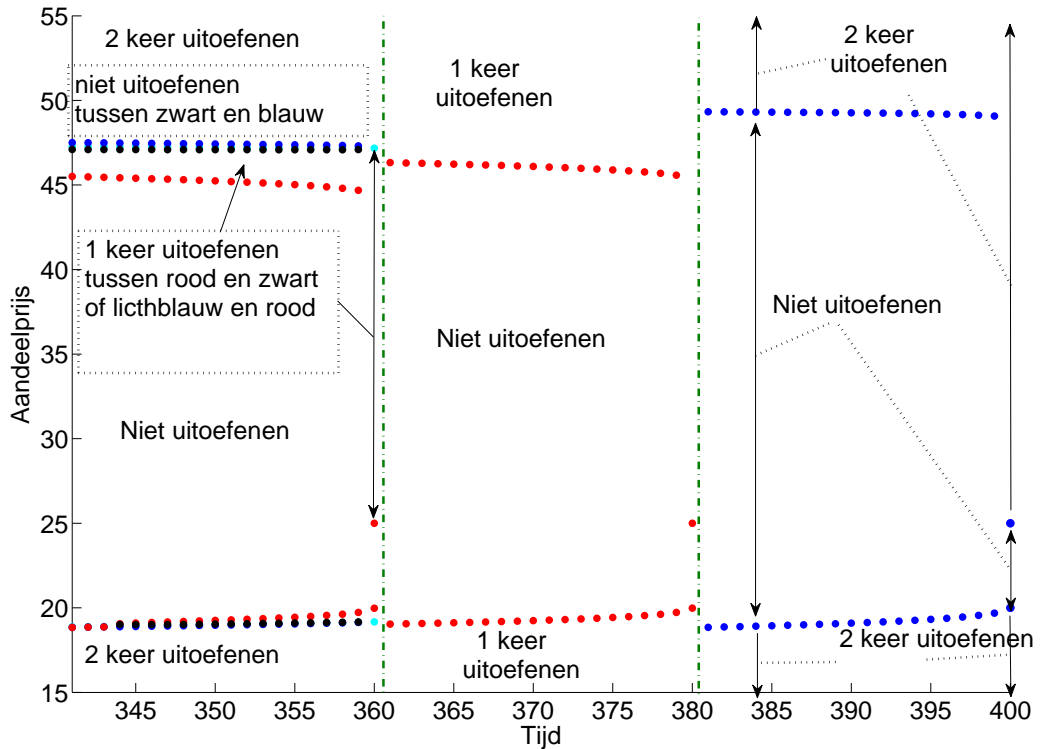
- Als $\hat{g}_1(x, t_m) > \hat{g}_2(x, t_m)$ voor alle x (Er is geen gebied waar Δ_2 keer uitgeoefend moet worden):

$$\begin{aligned}
V_k(t_m) &= \frac{2}{b-a} (\Delta_1 \cdot G_k(a, x1a^*) + C_k(x1a^*, x1b^*, t_m) + \Delta_1 \cdot G_k(x1b^*, b) \\
&\quad + C_k^{2*}(a, x1a^*, t_m) + C_k^{2*}(x1b^*, b, t_m))
\end{aligned}$$

Het algoritme voor het prijzen van de optie wordt nu iets ingewikkelder als bij de constante hersteltijd:

- De benadering van één tijdstap eerder is bekend en moet worden opgeslagen in de vorm van Fouriercoëfficiënten $V_k(t_{m+1})$.
- De uitbetaling $g(x)$ is bekend.
- Als je de optieprijs wilt weten op het betreffende tijdstip t_m (met een aandelprijs equivalent aan x), reken je $\hat{g}_1(x)$, $\hat{g}_2(x)$ en $c(x, t_m)$ uit (alle drie met hulp van de COS formule welke gebruik maakt van $V_k(t_{m+1})$, $V_k(t_{m+\tau_{\Delta_1}})$ of $V_k(t_{m+\Delta_2})$). Het maximum van deze drie is de optieprijs $v(x, t_m)$.
- Als je de prijs op het tijdstip t_{m-1} wilt berekenen moeten eerst de Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$ gevonden worden.
- Dan moeten de nulpunten van $\hat{g}_1(x, t_m) - \hat{g}_2(x, t_m)$, $\hat{g}_1(x) - c(x, t_m)$ en $\hat{g}_2(x, t_m) - c(x, t_m)$ bepaald worden.
- Als deze nulpunten bekend zijn moet aan de hand van de ligging van deze nulpunten bepaald worden welke vergelijking voor de Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$ gebruikt moet worden. De $V_k(t_m)$'s zijn daarna bekend.
- Keer terug naar het eerste punt in het algoritme.

5.6 Resultaten algemenere hersteltijd



Figuur 15: Uitoefengrenzen bij de swing optie.

In Figuur (15) is te zien wanneer de optiehouder moet uitoefenen of niet. De tijd is gegeven in tijdstappen vanaf t_0 , de eindtijd is na 400 tijdstappen, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$, $\tau(\Delta_1) = 20$ en $\tau(\Delta_2) = 40$. Verder zijn de strikeprijzen gegeven door $[S_{\min}, K_d, K_a, S_{\max}] = [10, 20, 25, 50]$. De rode stippen zijn de nulpunten van het type $x_1 a 2^*$ en $x_1 b 2^*$, als er geen ander type nulpunten in het interval $[x_1 a 2^*, x_1 b 2^*]$ ligt dan moet de optiehouder in dit interval niet uitoefenen. Buiten dit interval kunnen er drie gevallen zijn:

- Zowel de continuïteitswaarde als de waarde die de optie zou hebben bij twee keer uitoefenen blijven lager dan die bij één keer uitoefenen. Dan zou er buiten dit interval één keer uitoefgeoeffend moeten worden.
- De continuïteitswaarde wordt groter dan de waarde die de optie zou hebben bij één keer uitoefenen (aangegeven met zwarte punten, nulpunten van het type $x_1 a 1^*$ en $x_1 b 1^*$). Tussen de zwarte en de rode punten zou dan één keer uitgeoefend moeten worden. Uiteindelijk wordt de waarde bij twee keer uitoefenen dan groter (wat aangegeven wordt met rode punten, nulpunten van het type x_2^*). Tussen zwart en rood moet men niet uitoefenen en na rood moet men twee keer uitoefenen.
- De waarde die de optie zou hebben bij twee keer uitoefenen wordt groter dan bij één keer uitoefenen terwijl de continuïteitswaarde nog kleiner is (de lichtblauwe stippen, deze zijn van het type x_3^*). Tussen rood en lichtblauw moet men één keer uitoefenen en aan de andere kant van de lichtblauwe nulpunten moet men twee keer uitoefenen.

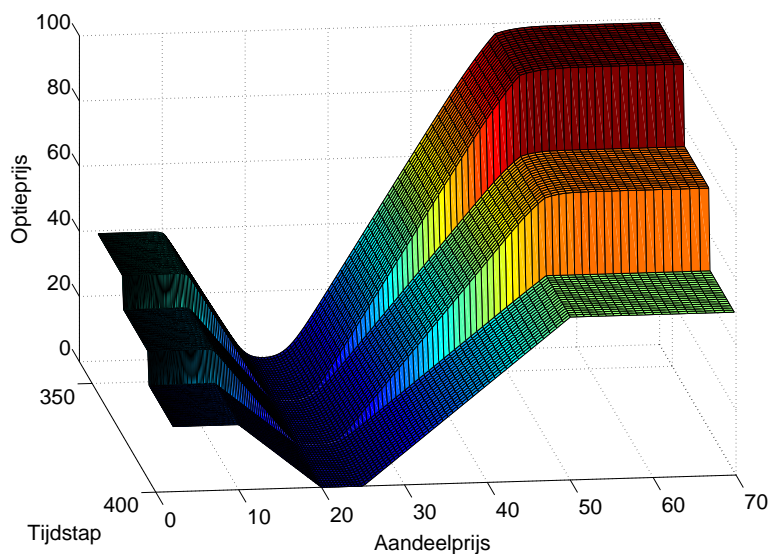
Ook zijn er nog twee andere gevallen zichtbaar:

- Vanaf tijdstap 361 tot en met tijdstap 380 komen alleen rode punten voor, dan zou de optiehouder tussen de twee rode punten niet moeten uitoefenen en daarbuiten één keer.
- Vanaf tijdstap 381 tot en met tijdstap 400 komen alleen blauwe punten voor, dan zou de optiehouder tussen de blauwe punten niet moeten uitoefenen en daarbuiten twee keer.

Vanaf een groene lijn kan één keer minder uitgeoefend worden. Te zien is dat de optiehouder op het laatste tijdstip dat er één keer extra uitgeoefend kan worden de optie bijna altijd moet uitoefenen (zolang $g(x) > 0$, wat het geval is buiten $20 \leq S \leq 25$).

Figuur (15) loopt maar vanaf tijdstap 341. Het stuk daarvoor kon niet doorgerekend worden omdat voor $t_m < t_{M-\tau\Delta_2-\tau\Delta_1}$ er nog meer nulpunten kwamen van het type $x1^*$. Het is nu veel moeilijker om na te gaan of er in een bepaald interval nulpunten zijn. Daarnaast zou het kunnen dat de ligging van deze nulpunten sterk afhangt van het soort prijsingsproces en de parameters van de optie. Het verder uitzoeken van dit probleem is niet meer aan bod gekomen in dit verslag.

Ten slotte in Figuur (16) nog een plot van de uitgerekende prijzen van deze optie tegenover de tijd en de aandeleprijs.



Figuur 16: Prijs van de swing optie.

Deze lijkt erg op de prijs bij een constante hersteltijd en daarmee gebeuren er geen onverwachte dingen.

6 Conclusie en verbeterpunten

Het is gebleken dat er meer onderzoek nodig is voor het prijzen van de swing optie met algemene hersteltijden. Het probleem was het bepalen van de strategie: waar moet de optiehouder Δ_i keer uitoefenen? Dit probleem bestaat uit het vinden van meerdere nulpunten (waarvan niet bekend is hoeveel nulpunten er zijn en waar deze ongeveer liggen). De methode vindt vaak wel oplossingen die er goed uitzien. Aan figuren van de uitoefenstrategie is te zien dat er iets niet klopt. Een verbeterpunt voor een vervolgonderzoek is dan ook om dit probleem op te lossen en algemeen te implementeren.

De prijs bij twee mogelijkheden om uit te oefenen ging goed tot een bepaalde tijd voor het einde. Wellicht worden de problemen met nulpunten nog groter naarmate de tijd tot de eindtijd groter wordt of wanneer er meer mogelijkheden voor de uitoefenstrategie zijn. Misschien is er daarom een totaal andere visie nodig om te bepalen waar welke strategie nodig is (in plaats van het bepalen van de nulpunten van het verschil in waarde tussen de strategieën).

Het is wel gelukt om de swing optie met een constante hersteltijd te prijzen. Tijdens het onderzoek werd ook de Bermuda butterfly optie geprijsd met de COS methode, wat nog niet gedaan was in de gebruikte artikelen. Verder zou het kunnen dat niet bij elke hersteltijd het probleem van de nulpunten aan de orde komt en dat een heleboel soorten swing opties wel geprijsd kunnen worden. Daarnaast staat de COS methode stap voor stap uitgelegd van de makkelijkste optie tot de wat lastigere opties, waardoor de methode (en de problemen die daarbij komen kijken) hopelijk ook vertrouwd raakt bij lezers die niets met de financiële wiskunde te maken hebben.

Andere verbeterpunten zijn het sneller en algemener maken van de code, het toepassen van andere prijsprocessen (in dit verslag werd alleen Black Scholes getest) en het verifiëren van de nieuwe opties met andere prijsingsmethoden.

7 Appendix

7.1 Bepalen van Fouriercoëfficiënten $V_k(t_m)$

De optieprijs $v(x, t_m)$ wordt bekend verondersteld en als eerder genoemd zijn $V_k(t_m)$ de Fouriercoëfficiënten van de optieprijs:

$$V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} \int_a^b v(y, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$$

De integraal kan opgedeeld worden in twee gebieden: een gebied A waar het optimaal is om de optie uit te oefenen en een gebied B waar het optimaal is om de optie te houden (de optiewaarden is dan dus $g(x)$ voor $x \in A$ en $c(x, t_m)$ voor $x \in B$). Voor het geval van de Europese opties zijn alleen de integralen over het gebied A van belang. De integraal is dan te schrijven als:

$$V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} \left(\int_A g(y, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy + \int_B c(y, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \right)$$

De opties die in dit verslag bekeken worden zijn vaak combinaties van put en call opties. De uitbetaling voor een put optie was:

$$g_P(x) = \max(K \cdot e^x - K, 0)$$

Stel nu dat $x \in A$ (dus $g(x) > c(x, t) \geq 0$) dan kunnen we $V_k(t_m)$ schrijven als de volgende integraal (merk op dat in het geval van een call er alleen met -1 vermenigvuldigd hoeft te worden):

$$V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} \int_A g(y, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy = \frac{2K}{b-a} \left(\int_A \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy + \int_A e^x \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \right)$$

Gebied A bestaat uit één of meer intervallen, het uitrekenen van de integraal over één zo'n interval $[x_1, x_2]$ is eenvoudig. Eerst de eerste integraal:

$$\int_{x_1}^{x_2} \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy = \left[\left(\frac{b-a}{k\pi} \right) \sin(k\pi \frac{y-a}{b-a}) \right]_{x_1}^{x_2} \quad \text{als } k \neq 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy = x_2 - x_1 \quad \text{als } k = 0$$

De tweede gaat met partieel integreren:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} e^x \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy &= \left[e^x \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} e^x \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \sin(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \\ &= \left[e^x \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) \right]_{x_1}^{x_2} + \left[e^x \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \sin(k\pi \frac{y-a}{b-a}) \right]_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{k\pi}{b-a} \right)^2 \int_{x_1}^{x_2} e^x \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \end{aligned}$$

Nu staat er rechts dezelfde integraal als aan de linkerkant. Dit naar links halen en dan de constanten naar rechts halen geeft uiteindelijk:

$$\int_{x_1}^{x_2} e^x \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2} \right) \left(\left[e^x \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) \right]_{x_1}^{x_2} + \left[e^x \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \sin(k\pi \frac{y-a}{b-a}) \right]_{x_1}^{x_2} \right)$$

Om de notatie wat in te korten schrijven we deze integralen als volgt:

$$\chi_k(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} e^x \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy \quad \psi_k(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$$

$$G_k(x_1, x_2) = \frac{2}{b-a} \int_{x_1}^{x_2} g(y, t_m) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$$

Uit het bovenstaande blijkt dat de Fouriercoëfficiënten voor de put en call opties bestaan uit lineaire combinaties van χ en ψ . Omdat de andere opties in dit verslag weer lineaire combinaties zijn van de put en call, zullen de Fouriercoëfficiënten hiervan ook weer lineaire combinaties zijn van deze 2 functies.

Vervolgens moeten we $C_k(B, t_i) = \int_B c(y, t_i) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$ schatten. Dit kan door $c(y, t_i)$ te vervangen door zijn afchatting, of door 0 als $t_i + 1 = T$:

$$C_k(B, t_i) = \int_B (e^{-r\delta t} \sum_{k=0}^N \text{Re}\{e^{k\pi \frac{-a}{b-a} i} \phi(\frac{k\pi}{b-a}, \delta t; x)\} V_k(t_{(i+1)})) \cos(k\pi \frac{y-a}{b-a}) dy$$

Dit kan worden omgeschreven naar de matrix-vector-product vorm zoals in [3]:

$$\mathbf{C}(\mathbf{B}, \mathbf{t}_i) = \frac{e^{-r\delta t}}{\pi} \mathbf{Im}\{(\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_s)\mathbf{u}\}$$

Waarbij \mathbf{u} een vector is met $u_j = \phi(\frac{k\pi}{b-a}, \delta t; x)\} V_j(t_{(i+1)})$ en $u_0 = \frac{1}{2}\phi(0, \delta t; x)\} V_0(t_{(i+1)})$. Dit laatste kan weer snel worden berekend met het FFT-algoritme. Dit heeft, behalve een kortere rekentijd, geen invloed op de uitkomst. Daarom verwijs ik hiervoor naar [3]. Dit principe is met behulp van een standaard functie in Matlab wel geïmplementeerd in de gebruikte code.

7.2 Nulpunten schatten

In principe worden de meeste nulpunten eerst met Newton Raphson gezocht. Als dit te lang duurt, uitkomt op 'NaN' (not a number) of onwaarschijnlijk grote of kleine waarde geeft dan wordt de midpoint regel gebruikt.

7.3 Newton Raphson

Newton Raphson werkt een stuk sneller dan de midpoint regel. De iteratie voor het vinden van het nulpunt x_0 van de functie $f(x)$ ziet er als volgt uit:

$$x_0(i+1) = x_0(i) - \frac{f(x_0(i))}{f'(x_0(i))}$$

De iteratie bij het prijzen van de opties werd gestopt zodra $x_0(i+1) - x_0(i) < 1 \cdot 10^{-10}$. De nulpunten die bij het prijzen van opties geschat moeten worden zijn van de vorm $c(x, t_m) - \hat{g}(x, t_m)$. De schatting voor de continuïteitswaarde $\hat{c}(x, t_m)$ is:

$$\hat{c}(x, t_{m-1}) = e^{-r(\delta t)} \sum_{k=0}^N \text{Re}\{e^{k\pi \frac{x-a}{b-a} i} \phi(\frac{k\pi}{b-a}; x, \delta t)\} V_k(t_m)$$

Bij het Black Scholes prijsproces wordt dat:

$$\hat{c}(x, t_{m-1}) = e^{-r(\delta t)} \sum_{k=0}^N \text{Re}\{e^{k\pi \frac{x-a}{b-a} i} \varphi(\frac{k\pi}{b-a}, \delta t)\} V_k(t_m)$$

Voor elke term is $e^{-r(\delta t)} \varphi(\frac{k\pi}{b-a}, \delta t)\} V_k(t_m)$ constant en is het gedeelte binnen de som differentieerbaar in x (een constante maal een e-macht). Dus er kan term bij term gedifferentieerd worden wat resulteert in:

$$\frac{\partial \hat{c}(x, t_{m-1})}{\partial x} = e^{-r(\delta t)} \sum_{k=1}^N \text{Re}\left\{ \frac{k\pi}{b-a} \frac{-e^{k\pi \frac{x-a}{b-a} i}}{i} \varphi(\frac{k\pi}{b-a}, \delta t)\right\} V_k(t_m)$$

Merk op dat de som nu vanaf één tot N loopt. Dit omdat de eerste term in de som constant is in x waardoor de afgeleide van de eerste term nul is.

De functie $\hat{g}(x, t_m)$ is een lineaire combinatie van $g(x)$ en $c^*(x, t_m)$. De berekening van de afgeleide van $c^*(x, t_m)$ gaat hetzelfde als bij de continuïteitswaarde. $g(x)$ is op zijn beurt weer een lineaire combinatie van de uitbetaling van put en call opties $g_p(x)$ en $g_c(x)$ (afhankelijk van het type optie):

$$g_p(x) = \max(Ke^x - K_2, 0) \quad g_c(x) = \max(K_2 - Ke^x, 0)$$

dan

$$g'_c(x) = Ke^x \quad \text{voor} \quad x > \ln\left(\frac{K_2}{K}\right) \quad \text{en} \quad g'_c(x) = 0 \quad \text{voor} \quad x < \ln\left(\frac{K_2}{K}\right)$$

Om de methode ook te laten werken voor het punt $x = \ln\left(\frac{K_2}{K}\right)$ wordt hier $g'_c(x) = Ke^x$ gekozen (wat eigenlijk niet zo is).

evenzo geldt

$$g'_p(x) = -Ke^x \quad \text{voor } x < \ln\left(\frac{K_2}{K}\right) \quad \text{en} \quad g'_p(x) = 0 \quad \text{voor } x > \ln\left(\frac{K_2}{K}\right)$$

We kiezen $g'_p(x) = -Ke^x$ voor $x = \ln\left(\frac{K_2}{K}\right)$.

Nu zijn alle benodigde functies en afgeleiden dus bekend waardoor deze nulpunt methode toegepast kan worden.

7.4 De midpoint regel

Als er nulpunten geschat moeten worden binnen een bepaald interval $[x_1, x_2]$ of als de Newton Raphson methode divergeert is het binnen deze optieprijs methode voor de swing optie handiger om de nulpunten te schatten met de midpoint regel. Met Newton Raphson kan het gevonden nulpunt namelijk altijd buiten het betreffende interval uitkomen, zeker omdat de functies waarvan de nulpunten gezocht moeten worden vaak pieken en dalen bevatten.

Het principe luidt als volgt: stel de waarde $f(x_1) > 0$ en $f(x_2) < 0$ en f is continu, dan moet f een nulpunt hebben in het interval $[x_1, x_2]$. Vervolgens wordt de waarde van $f(x)$ in het punt $\frac{x_1+x_2}{2}$ uitgerekend. Als $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$ dan moet er een nulpunt zijn in het interval $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$, als $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$ dan is er een nulpunt in het interval $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ (en als $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 0$ dan heb je het nulpunt natuurlijk al te pakken). Door dit steeds te herhalen wordt het interval waarbinnen het nulpunt ligt steeds kleiner. De iteratie wordt herhaald totdat het interval $1 \cdot 10^{-10}$ lang is. Als er meerdere nulpunten zijn binnen het interval kan het zijn dat de methode één van die nulpunten vind of kan het zijn dat de methode niet werkt bij een even aantal nulpunten, want dan $f(x_1) > 0$ en $f(x_2) > 0$, beide gevallen leveren een fout op in de rest van de methode.

Bij het prijzen van de opties moeten de nulpunten van $c(x, t_m) - \hat{g}(x, t_m)$ bepaald worden (waarbij \hat{g} de uitbetaling plus een bepaalde restwaarde is). Soms kan het bestaan van een nulpunt ook afgeleid worden uit de uitbetalingsfunctie, maar zowel $c(x, t_m)$ als $\hat{g}(x, t_m)$ zijn bekend en dus kan er ook gecontroleerd worden of er in een bepaald interval een nulpunt is.

Referenties

- [1] Dahlgren, M., *A continuous-time model to price commodity-based swing options*, Review of Derivatives Research, V8(1): 27-47, 2005. doi: 10.1007/s11147-005-1006-9.
- [2] Fang, F. AND Oosterlee, C.W., *A novel option pricing method based on Fourier-cosine serie expansions*, submitted, 2008, zie:

<http://ta.twi.tudelft.nl/mf/users/oosterle/oosterlee/COS.pdf>
- [3] Fang, F., Oosterlee, C.W., *Pricing Early Exercise and Discrete Barrier options by Fourier-Cosine Series Expansions*, 2008, zie:

<http://ta.twi.tudelft.nl/mf/users/oosterle/oosterlee/bermCOS.pdf>
- [4] Higham, D.J., *An introduction to Financial option valuation*, Cambridge University Press, 2004.
- [5] Lech A. Grzelak, AND Oosterlee, C.W., *On The Heston Model with Stochastic Interest Rates*, 2009, zie:

<http://ta.twi.tudelft.nl/mf/users/oosterle/oosterlee/09-05.pdf>
- [6] Vellekoop, M., *Als de lente komt, dan stuur ik jou*, Pythagoras (KWG) 1 april 1999, zie

<http://www.kennislink.nl/publicaties/als-de-lente-komt-dan-stuur-ik-jou-punt-punt-punt>