Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

De Extrapolatie Stelling van Yano

(Yano's Extrapolation Theorem)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Frans Michielsen

Delft, Nederland
Augustus 2019

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"De Extrapolatie Stelling van Yano"
("Yano's Extrapolation Theorem")

Frans Michielsen

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. M. C. Veraar

Overige commissieleden

Dr. J. Spandaw

Drs. A. Geyer

Juli, 2019

Delft

1 Abstract

In dit verslag behandelen we de Extrapolatie Stelling van Yano: een stelling die voor operators van de vorm $T: \; f(x) \longmapsto T(f)(x)$ in bepaalde omstandigheden een afschatting geeft van de absolute integraal over $T(f)(x)$ in termen van $f(x)$ zelf. We zullen zien dat deze afschatting, en meer afschattingen van soortgelijke vorm, onder de juiste voorwaarden continuïteit impliceert voor de operator. Om deze stelling te kunnen behandelen zullen we wat theorie over vectorruimtes opgebouwd uit functies, en enkele voorbeelden relevant voor de stelling, introduceren. Ook behandelen we wat theorie omtrent operators, en passen we de Extrapolatie Stelling van Yano toe op enkele operators.

Inhoudsopgave

2 Introductie

De eigenschappen die de vector definiëren zijn: vectoren kan je bij elkaar optellen, en je kan ze met een scalair vermenigvuldigen. Uit deze twee simpele aspecten volgt een berg aan theorie: je hebt de onafhankelijkheid tussen vectoren, het bouwen van een basis, dan heb je de matrices, en hun eigenvectoren, en inverteerbaarheid.
Maar dan is er de vraag of je de kennis over vectorruimtes ook kan toepassen op verzamelingen aan functies. En dat kan: zodra je functies ziet als vectoren vormt de fourierreeks opeens een orthogonale basis, en eigenfuncties helpen met het geven van relatief makkelijk te vinden oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen. Maar omdat functie-verzamelingen als vectorruimtes vaak een oneindig grote dimensie hebben in plaats van slechts een eindige, gelden eigenschappen die vanzelfsprekend waren voor de bekende vectorruimtes regelmatig niet voor de vectorruimtes aan functies waar wij naar zullen kijken. Deze vectorruimtes hoeven helemaal niet compleet onder een norm te zijn, en lineaire functies op de vectorruimtes hoeven niet continu te zijn. Het is dat laatste waar wij ons in dit verslag mee bezig zullen houden. We zullen beginnen met het fundament: we zullen ons bezig houden met verschillende soorten normen die te definiëren zijn op functies en hoe die zich tot elkaar verhouden, en de lineaire functies op de ruimtes en wanneer ze continu zijn. Als we hier doorheen zijn gegaan kunnen we ons eindelijk richten op de kern van het verslag: de Extrapolatie Stelling van Yano en dat wat daarbij komt kijken.
Met veel dank aan mijn begeleider Mark Veraar, die mij veel heeft geholpen met het bekend raken met deze tak van de wiskunde, me heeft geholpen toen ik vastliep, en me heeft gewezen op manieren om problemen op te lossen waar ik zelf niet op had kunnen komen.

3 Functie-vectorruimtes

De vectorruimte is gedefinieerd als een verzameling aan elementen, vectoren, die gesloten is onder optelling: twee vectoren uit de verzameling bij elkaar opgeteld is weer een vector dat een element is uit diezelfde verzameling. Zo ook zijn de vectoren vermenigvuldigbaar met een scalair, wat weer in vector in de verzameling resulteert.
De verzameling van functies is dus ook een vectorruimte. Immers: $f(x)+g(x)$ is nog steeds een functie, en voor $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha f(x)$ ook.
Kort gezegd is een vectorruimte dus een verzameling X zodat:

- $\forall f, g \in X$ geldt dat $f + g \in X$.
- $\forall f \in X$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt dat $\alpha \cdot f \in X$.

Behalve de verzameling van alle functies zelf, zijn er ook deelverzamelingen dat vectorruimtes zijn: zoals de verzameling van de continue, en van de differentieerbare functies.
Maar wij zijn geïnteresseerd in andere deelverzamelingen. Omdat we ons bezig gaan houden met functies op deze vectorruimtes en de continuïteit van deze functies, willen we een metriek gaan definiëren tussen functies. Maar zulke metrieken liggen niet altijd voor de hand (wat zou $d(\frac{1}{x}, 0)$ moeten zijn?), en erger nog, de metrieken waar je geïnteresseerd in bent zijn vaak correct gedefinieerd op slechts een deel van de functies. Daarom draaien we het om en laten straks de metriek de vectorruimte definiëren.
We werken met vectorruimtes, dus de metrieken waar wij ons mee bezig gaan houden zullen allemaal normen zijn: een functie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ (X een vectorruimte), ook wel aangeduid als $\|\cdot\|_X$ dat een lengte toewijst aan een element $x \in X$, of zijn afstand van 0. Hun eigenschappen zijn, $\forall x, y \in X$:

1. $\|x\|_X \geq 0$
2. $\|x\|_X = 0 \iff x = 0$
3. $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\|x\|_X \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$

De verzameling functies die werken met een bepaalde norm, ofwel de verzameling functies zodat $\|f\| < \infty$, is automatisch een vectorruimte vanwege de eigenschappen van de norm. En dan is $\|\cdot\|$ een geldige norm op die verzameling.
De functies hebben altijd als domein $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, met de bijbehorende Lebesgue-maat μ, en Ω is zo gekozen zodat $\mu(\Omega) = 1$. De Lebesgue maat voor $\mathbb{R}$ wordt in dit verslag aangeduid met λ

3.1 L^p ruimtes

3.1.1 De constructie van L^p-ruimtes

Eerst introduceren we het essentieel supremum:

Definitie 3.1. *Van een meetbare functie f op $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ met de Lebesgue-maat λ, is het* ***essentiële supremum*** *van f gedefinieerd als:*

$$\sup(f) := \inf(\{M \in \mathbb{R} : f(x) < M \ a.e.\})$$

En het ***essentiële infimum*** *is gedefinieerd als:*

$$\inf(f) := \sup(\{M \in \mathbb{R} : f(x) > M \ a.e.\})$$

De L^p ruimte is de verzameling (meetbare) functies waarvoor de volgende norm eindig is:

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} & \text{als } p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}\{|f|\} & \text{als } p = \infty \end{cases}$$

Laten we eerst valideren dat $\|\cdot\|_{L^p}$ wel echt een geldige norm is. Ten eerste geldt $\|\cdot\|_{L^p} \geq 0$, ten tweede

$$\left(\int_\Omega |\alpha f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|^{\frac{p}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

en Minkowski's Ongelijkheid, dat hier niet wordt bewezen maar wel in Principles of Real Analysis [1] (Stelling 31.4), stelt dat $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$
Dan is er maar één missend puntje, en dat is dat $\|f\|_{L^p} = 0 \iff f = 0$. Het probleem is dat $\|f\|_{L^p} = 0$ al geldt als $f = 0$ alleen bijna overal. Om dat probleem te weg te wuiven moet L^p niet gezien worden als een vectorruimte bestaande uit functies, maar als een vectorruimte bestaande uit funtieklassen; hierbij is een functieklas f de verzameling functies g zodat $g = f$ bijna overal. Dus als $g = 0$ bijna overal behoort g tot de klasse 0. Dit geldt niet alleen voor L^p, maar ook voor alle andere functie vectorruimtes die we zullen behandelen. Omdat er in de praktijk niet veel verschil is zullen we het blijven hebben over functies wanneer we het eigenlijk over functieklassen hebben. De gelijkheden in dit verslag gelden dus bij functies alleen bijna overal.
Met deze aanpassing geldt $\|f\|_{L^p} = 0 \iff f = 0$ wel, is $\|\cdot\|_{L^p}$ een norm, en dat maakt van L^p een vectorruimte.

3.1.2 Relaties tussen L^p ruimtes

Een belangrijke relatie tussen L^p ruimtes is de Ongelijkheid van Hölder. Deze wordt bewezen in Principles of Real Analysis [1] (Stelling 31.3), en stelt: $\forall p \in (1, \infty)$ geldt

$$\|fg\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$$

Hierbij is p' gedefiniëerd als het getal waarvoor geldt: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
Behalve dat het een handige manier is om integralen af te schatten vertelt het ons ook wat over hoe L^p ruimtes zich tot elkaar verhouden: $L^{p'}$ is precies verzameling van functies g waarvoor geldt dat voor alle functies f in L^p $\|fg\|_{L^1}$ bestaat.
Een gevolg hiervan is dat voor elke $g \in L^{p'}$ geldt dat $F_g(f) := \|fg\|_{L^1}$ een goed gedefinieerde functie is. Daarbij is ook voor elke functie $F : L^p \to \mathbb{R}$ een $g \in L^{p'}$ zodat $F = F_g$ (dit wordt bewezen in Principles of Real Analysis [1] in Stelling 37.9), en dit maakt $L^{p'}$ isomorf aan de duale ruimte van L^p.
Daarnaast is Hölder ook erg handig voor het bewijzen, en het zal in dit verslag nog vaak gebruikt worden.
Nu is de vraag hoe verschillende L^p ruimtes zich tot elkaar verhouden, maar daar hebben we eerst het begrip embedding voor nodig.

Definitie 3.2. *Voor genormeerde vectorruimtes* $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *met* $X \subseteq Y$ *is er sprake van een embedding als* $\exists C > 0$; *zodat* $\forall x \in X$ *geldt:* $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$
Als dit geldt wordt het genoteerd als $X \hookrightarrow Y$

Een embedding stelt dus dat er een link tussen twee verschillende soorten metrieken op x is, en met embedding zullen resultaten zoals continuïteit in de ene metriek ook doorgetrokken kunnen worden tot de andere. Dan hebben we uit Principles of Real Analysis [1] (Stelling 31.14):

Stelling 1. *Als* (Ω, μ) *een maatruimte is met* $\mu(\Omega) < \infty$, *en* $1 \leq p < q \leq \infty$, *dan* $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$

Bewijs. Het geval $q = \infty$ volgt direct uit de begrensdheid van de functies in L^∞.
Laat $1 \leq p < q < \infty$, kies $f \in L^q$ en definieer $\lambda := \frac{q}{p}$. Dan $\lambda > 1$ en kan je dus de ongelijkheid van Hölder toepassen met λ:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}^p &= \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \\
&\leq \Big(\int_\Omega \big(|f(x)|^p\big)^\lambda d(x)\Big)^{\frac{1}{\lambda}} \Big(\int_\Omega |1|^{\lambda'} d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{\lambda'}} \\
&= \Big(\int_\Omega |f(x)|^q d(x)\Big)^{\frac{p}{q}} \Big(\int_\Omega |1|^{\lambda'} d\mu(x)\Big)^{1-\frac{p}{q}} \\
&= \mu(\Omega)^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_{L^q}^p \\
\|f\|_{L^p} &\leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q}
\end{aligned}$$

Dus als er geldt dat $f \in L^q$ dan geldt ook dat $f \in L^p$, dus $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$. Dat $L^q \hookrightarrow L^p$ volgt ook meteen uit het bovenstaande. ☐

Merk op dat L^1, de ruimte waarin we uiteindelijk het meest geïnteresseerd in zullen zijn, als $\mu(\Omega) < \infty$ is de grootste vectorruimte wordt: dan $L^p \subseteq L^1$ $\forall p \geq 1$
Dat $L^p \neq L^q$ voor $p \neq q$ is makkelijk te zien: neem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dan $f \in L^1[0, 1]$, maar $f \notin L^2[0, 1]$.

Er is ook een soort van omgekeerd Hölder-lemma, dat goed laat zien hoezeer L^p en $L^{p'}$ met elkaar te maken hebben.

Lemma 2. *Laat $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte zijn en f een meetbare functie op X met $f \geq 0$*
Als geldt dat $\forall g \in L^{p'}(X) : g \geq 0$:

$$\int_X f(x)g(x)d\mu(x) \leq C\|g\|_{L^{p'}(X)}$$

Dan $f \in L^p(X)$ én $\|f\|_{L^p(X)} \leq C$

Bewijs. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ is σ-eindig dus er is een rij verzamelingen $(X_n)_{n\geq 1}$ in X zodat: $X_n \uparrow X$ en $\mu(X_n) < \infty$
Definiëer voor elke $n \in \mathbb{N}$: $g_n(x) = f(x)^{p/p'} \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x)$
Dan geldt $g_n \geq 0$, maar ook:

$$\begin{aligned}
\int_X |g_n(x)|^{p'} d\mu(x) &= \int f(x)^p \, \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x) \, d\mu(x) \\
&\leq \int n^p \, \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x) \, d\mu(x) \\
&\leq n^p \mu(X_n) < \infty
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $g_n \in L^{p'}(X)$ En dan geldt het volgende uit de aanname:

$$\int_X f(x)g_n(x)d\mu(x) \leq C\|g_n\|_{L^{p'}(X)} = C\bigg(\int f(x)^p \, \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x) \, d\mu(x)\bigg)^{1/p'}$$

Maar het linkerdeel van de ongelijkheid kan herschreven worden:

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)g_n(x)d\mu(x) &= \int f(x)^{1+p/p'} \, \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x) \, d\mu(x) \\
&= \int f(x)^{p(1/p+1/p')} \, \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x) \, d\mu(x) \\
&= \int f(x)^p \, \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x) \, d\mu(x) \\
&= \big(\|g_n\|_{L^{p'}}\big)^{p'}
\end{aligned}$$

En als we dat substitueren in de ongelijkheid:

$$\int_X f(x)^p \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x)d\mu(x) \leq C\bigg(\int_X f(x)^p \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x)d\mu(x)\bigg)^{1/p'}$$

Nu kunnen we $\int f(x)^p \mathbb{1}_{X_n}(x)d\mu(x)$ naar de linkerkant halen, mits $\int_\Omega f(x)^p \, \mathbb{1}_{X_n \cap \{x \in X: f(x) < n\}}(x) \, d\mu(x) \neq 0$ [1]

[1] Aangezien

$$X_n \cap \{x \in X : f(x) < n\} \cap \{x \in X : f(x) > 0\} \uparrow^n \{x \in X : f(x) > 0\}$$

geldt

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(X_n \cap \{x \in X : f(x) < n\} \cap \{x \in X : f(x) > 0\}\big) \xrightarrow{n} \mu\big(\{x \in X : f(x) > 0\}\big) > 0$$

Dus kan het naar de linkerkant gehaald worden:

$$\left(\int_X f(x)^p \mathbb{1}_{X_n \cap \{x\in X: f(x)<n\}}(x) d\mu(x)\right)^{1-1/p'} \leq C$$
$$\left(\int_X f(x)^p \mathbb{1}_{\{x\in X: f(x)<n\}}(x) \mathbb{1}_{X_n}(x) d\mu(x)\right)^{1/p} \leq C$$

Maar als $n \to \infty$ convergeren de karakteristieke functies $\mathbb{1}_{X_n}$ en $\mathbb{1}_{\{x\in X: f(x)<n\}}$ naar $\mathbb{1}_X$ en dus: $0 \leq f^p \mathbb{1}_{X_n} \mathbb{1}_{\{x\in X: f(x)<n\}} \uparrow f^p$
Dus volgt uit de Monotone Convergentie Stelling:

$$a_n := \int_X f(x)^p \mathbb{1}_{X_n}(x) \mathbb{1}_{\{x\in X: f(x)<n\}}(x) d\mu(x) \xrightarrow{n} \int_X f(x)^p d\mu(x)$$

Omdat al geldt dat $a_n \leq C^p$, moet ook $\lim_{n\to\infty} a_n \leq C^p$ zitten. Oftewel:

$$\left(\int_X f(x)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq C$$

Dus $f \in L^p(X)$ en $\|f\|_{L^p(X)} \leq C)$

□

Als Ω een eindige maat heeft geldt $\forall p \geq 1$ dat $L^{p+r} \subseteq L^p$ voor $r > 0$ en ook $r = \infty$
In het bewijs hiervoor wordt de ongelijkheid

3.1.3 Convergentie in L^p ruimtes

Omdat de Extrapolatie Stelling van Yano relevant is voor onderzoek naar de continuïteit van functionalen, is het nuttig om te weten hoezeer convergentie in L^p samenhangt met puntsgewijze convergentie en uniforme convergentie.
Ten eerste staat convergentie in L^∞ gelijk aan uniforme convergentie (bijna overal), en uniforme convergentie leidt tot convergentie in L^p voor alle p.
Maar voor puntsgewijze convergentie is de relatie ingewikkelder. We hebben de volgende stelling uit Principles of Real Analysis [1] (stellingen 31.6 en 31.7 respectievelijk):

Stelling 3. *$\forall 1 \leq p < \infty$, als voor een rij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ geldt dat $\|f_n - f\|_{L^p} \xrightarrow{n} 0$, dan bestaat er een deelrij f_{n_k} zodat $f_{n_k} \xrightarrow{k} f$ puntsgewijs.*
Ook $\exists g \in L^p$ zodat $\forall k \in \mathbb{N}$ $|f_{n_k}| \leq g$ bijna overal

Het hoeft dus niet zo te zijn dat de hele rij puntsgewijs convergeert: beschouw
$\{f_n\}_{n\geq 1} := \{\mathbb{1}_{[0,1]}, \mathbb{1}_{[0\frac{1}{2}]}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}, \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}, \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1]}, \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{8}]}, \cdots\}$ Dan geldt $\|f_n - 0\|_{L^1} \xrightarrow{n} 0$, maar $f_n(x)$ convergeert nergens op $[0,1]$ puntsgewijs.

Stelling 4. *$\forall 1 \leq p < \infty$, als voor een rij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ en een $f \in L^p$ geldt dat $f_n \xrightarrow{n} f$ puntsgewijs bijna overal, én $\|f_n\|_{L^p} \xrightarrow{n} \|f\|_{L^p}$, dan $\|f_n - f\|_{L^p} \xrightarrow{n} 0$*

---

en dat betekent dat $\exists N \in \mathbb{N}$ zodat $\forall n \geq N$:

$$\mu\big(X_n \cap \{x \in X : f(x) < n\} \cap \{x \in X : f(x) > 0\}\big) > 0$$

En dus

$$\int_\Omega f(x)^p \mathbb{1}_{X_n \cap \{x\in X: f(x)<n\}}(x) d\mu(x) = \int_\Omega f(x)^p\, \mathbb{1}_{X_n \cap \{x\in X: f(x)<n\}}(x) \mathbb{1}_{\{x\in X: f(x)>0\}}(x) d\mu(x) > 0$$

Om te illustreren dat de tweede eis nodig is: beschouw $f_n := n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$. Deze convergeert puntsgewijs overal naar 0 op $(0,1]$, maar $\|f_n - 0\|_{L^1} \nrightarrow 0$

3.2 $L^{p,q}$ ruimtes

3.2.1 De dalende herschikking

In de definitie van de $L^{p,q}$-norm wordt een dalende herschikking van de functie gebruikt. Deze wordt als volgt gebouwd:

Definitie 3.3. *Voor een eindige meetruimte* (Ω, μ)*, en daarop een meetbare functie* f*, is de distributie functie* d_f *gedefiniëerd als*

$$d_f(y) := \mu\big(\{x \in \Omega : |f(x)| > y\}\big)$$

voor $y > 0$*. En daarmee wordt de dalende herschikking* f^* *van* f *gedefiniëerd als*

$$f^*(t) := \inf\{y \geq 0 : d_f(y) \leq t\}$$

Je kan het bouwen van f^* zien als het plaatsen van de punten x op Ω op $[0,\infty)$, met de bijbehorende $|f(x)|$ van groot (op 0) naar klein (op $\mu(\Omega)$). $\forall t \geq \mu(\Omega)$ zal $f^*(t) = 0$ gelden.
Hieruit krijgen we een $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty)$, dat onder de Lebesgue-maat (aangeduid met λ) meetbaar is.
Een goed voorbeeld is de dalende herschikking van een positieve simpele functie: We nemen als simpele functie $f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{V_n}(x)$, met $x \in [0,1]$ en $a_n \in [0,\infty)$.
Eerst construeren we d_f: we eisen dat $V_n \cap V_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$ en dat $a_1 > \cdots > a_N$. Dit kunnen we doen zonder verlies aan generaliteit, want elke simpele functie is zo te schrijven.
Dan geldt voor $d_f(y)$ dat, als $y \geq a_1$ dan $d_f(y) = 0$, en als $y \in [a_{n+1}, a_n)$, dan $d_f(y) = V_1 \cup \cdots \cup V_n$
Met deze informatie kunnen we nu d_f bepalen, met de aantekening dat $a_{N+1} := 0$:

$$b_n := \mu(V_1 \cup \cdots \cup V_n) = \mu(V_1) + \cdots + \mu(V_n)$$
$$d_f(y) = 0 \cdot \mathbb{1}_{[a_1,\infty)}(y) + \sum_{n=1}^{N} b_n \mathbb{1}_{[a_{n+1},a_n)}(y)$$

Dan bouwen we nu de dalende herschikking f^* uit deze d_f. De vraag is dan wat bij een gegeven t de kleinste y is zodat $d_f(y) \leq t$. Als $t \in [b_n, b_{n+1})$, dan is uit bovenstaande af te leiden dat $f^*(t) = \inf\{y \geq 0 : \; d_f(y) \leq t\} = a_{n+1}$. Als $t \in [0, b_1)$, dan $f^*(t) = a_1$, en als $t \in [b_N, 1]$, dan $f^*(t) = 0$. Oftewel, met $b_0 := 0$ en $b_{N+1} := 1$:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{N} a_{n+1} \mathbb{1}_{[b_n,b_{n+1})}(t)$$

Nu bekijken we een paar eigenschappen van f^*, die later handig zijn of voor ons een beter beeld te schetsen van wat f^* nou doet. Om dat te kunnen doen bewijzen we eerst dat positieve, dalende functies bijna overal continu moeten zijn, in de volgende stelling dat komt van Brian M. Scott [7]:

Lemma 5. *Als* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *een positieve, dalende functie is, dan is de Lebesque-maat van de verzameling punten waarop* f *discontinu is* 0.

Bewijs. Laat $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ een positieve, dalende functie zijn, en $A := \{t \in [0,1] : f$ is niet continu in $t\}$ Het plan is om een injectie van A naar $\mathbb{Q}$ te bouwen. Er geldt voor alle $t \in A$:

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in (t-\delta, t+\delta) : |f(x) - f(t)| > \epsilon$$

Dit en de dalendheid van f impliceert dat $f(\mathbb{R}) \cap (f(t), f(t)+\epsilon) = \emptyset$ of dat $f(\mathbb{R}) \cap (f(t) - \epsilon, f(t)) = \emptyset$
Want als $\exists a, b \in [0,1] : f(a) \in (f(t)-\epsilon, f(t))$ en $f(b) \in (f(t), f(t)+\epsilon)$ dan geldt $\forall x \in (a,b) : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ omdat f dalend is. Door $\delta = \min(|t-b|, |t-a|)$ te kiezen krijg je een tegenspraak met de discontinuïteit van f in t
Als f in t rechts discontinu is, dan $f(\mathbb{R}) \cap (f(t)-\epsilon, f(t)) = \emptyset$
Anders is f in t links discontinu, en geldt $f(\mathbb{R}) \cap (f(t), f(t)+\epsilon) = \emptyset$
Daarom definiëren we:

$$I_t := \begin{cases} (f(t)-\epsilon, f(t)) & \text{als } f \text{ rechts discontinu is in } t \\ (f(t), f(t)+\epsilon) & \text{anders (dan is } f \text{ links discontinu in } t) \end{cases}$$

Dus als f links én rechts discontinu is in t, dan $I_t = (f(t)-\epsilon, f(t))$ volgens deze definitie. De volgende claim is dat deze verzamelingen onderling disjunct zijn. We nemen twee verzamelingen $I_t, I_\tau : t, \tau \in A$ zodat $t > \tau$ willekeurig. Dan $\exists x \in (\tau, t)$, en $f(t) \leq f(x) \leq f(\tau)$
Ook weten we dat, omdat $f(x) \in f(\mathbb{R})$, $f(x) \notin I_t, I_\tau$
Dus als $I_t = (f(t), f(t)+\epsilon)$ dan $f(x) \neq f(t)$, want anders $f([x,t]) = \{f(x)\} = \{f(t)\}$ vanwege de dalendheid en dan is t links-continu, en dan $I_t \neq (f(t), f(t)+\epsilon)$.
Dus $f(x) \geq f(t) + \epsilon$, dus $f(x) \geq \sup(I_t)$
En als $I_t = (f(t)-\epsilon, f(t))$, $f(x) \geq f(t)$ dus $f(x) \geq \sup(I_t)$. Zo ook $f(x) \leq \inf(I_\tau)$, het bewijs daarvoor is soortgelijk.
Hieruit volgt dat $\sup(I_t) \leq f(x) \leq \inf(I_\tau)$, en omdat $f(x) \notin I_t, I_\tau$ zijn I_t en I_τ disjunct. En dus zijn de verzamelingen onderling disjunct.
Hierdoor geldt dat $\forall t \in A \ \exists! \ q_t \in \mathbb{Q} : q_t \in I_t$, en zo valt een injectie van A naar $\mathbb{Q}$ te bouwen, en dus is A of leeg, of eindig groot, of aftelbaar oneindig groot, en dus een nulverzameling in de Lebesgue-maat. □

De volgende stelling komt (op punt 2 na) uit Classical Fourier Analysis [6] (propositie 1.4.5)

Stelling 6. *Neem een eindige meetruimte* (Ω, μ). *Laat daarop* f *en* g *meetbare functies zijn. Dan geldt het volgende voor* f^**:*

1. f^* *en* d_f *zijn dalende functies, en* $f^*(0) = \operatorname{ess\,sup} |f| = \|f\|_{L^\infty}$

2. d_f *is rechtscontinu*

3. $d_f = d_{f^*}$ *oftwel* $\mu\big(\{x \in \Omega : |f(x)| > y\}\big) = \lambda\big(\{t \in [0,\infty) : f^*(t) > y\}\big) \ \forall y \geq 0$

4. *Als* $|f| \leq |g|$ *(puntsgewijs overal) dan* $d_f \leq d_g$ *en* $f^* \leq g^*$ *(puntsgewijs overal)*

5. *Als* $f : [0,1] \to [0,\infty)$ *dalend is, dan* $f = f^*$ *op* $[0,1]$ *(bijna overal)*

6. $(\alpha f)^* = |\alpha| f^*$ *voor* $\alpha \in \mathbb{R}$

7. $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$

8. $\int\limits_0^\infty d_f(y) d\lambda(y) = \int_\Omega |f(x)| d\mu(x)$

9. $\int\limits_0^{\mu(\Omega)} (f^*(t))^p \, d\lambda(t) = \int\limits_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \; \forall p \geq 1$

Bewijs. 1. We beginnen met te laten zien dat d_f dalend is:
Als voor $0 < y_1 < y_2$ geldt $|f(x)| > y_2$ dan $|f(x)| > y_2 > y_1$, dus

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > y_1\}) \geq \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > y_2\}$$

Dus $d_f(y_1) \geq d_f(y_2)$ en dus daalt d_f.
f^* is dalend:
Voor $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ geldt dat $d_f(y) < t_2$ als $d_f(y) \leq t_1$, dus

$$\{y \geq 0 : d_f(y) \leq t_1\} \subseteq \{y \geq 0 : d_f(y) \leq t_2\}$$

en dat betekent dat

$$\inf(\{y \geq 0 : d_f(y) \leq t_1\}) \geq \inf(\{y \geq 0 : d_f(y) \leq t_2\})$$

Dus $f^*(t_1) \geq f^*(t_2)$ en dus is f^* dalend.
Verder:

$$f^*(0) = \inf(\{y \geq 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > y\}) = 0\}) = \operatorname{ess\,sup}(|f|)$$

2. We nemen een rij $y_n \downarrow y$ in $[0, \mu(\Omega)]$, dan geldt

$$\{x \in \Omega : |f(x)| > y\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x \in \Omega : |f(x)| > y_n\}$$

Omdat $\{x \in \Omega : |f(x)| > y_n\} \subseteq \{x \in \Omega : |f(x)| > y_{n+1}\}$ kunnen we vervolgens de continuïteit-van-beneden eigenschap van de maat toepassen:

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > y\}) = \mu(\bigcup_{n \geq 1} \{x \in \Omega : |f(x)| > y_n\}) = \lim_{n \to \infty} \mu(\{\{x \in \Omega : |f(x)| > y_n\})$$

Dus $\lim\limits_{n \to \infty} d_f(y_n) = d_f(y)$

3. We willen laten zien dat voor $y \geq 0$ geldt

$$\lambda\big(\{t \geq 0 : f^*(t) > y\}\big) =: d_{f^*}(y) = d_f(y)$$

Als we het rechterlid omschrijven naar:

$$d_f(y) = \lambda\Big(\big\{t \geq 0 : t < d_f(y)\big\}\Big)$$

zien we dat we willen bewijzen dat:

$$\big\{t \geq 0 : f^*(t) > y\big\} = \big\{t \geq 0 : t < d_f(y)\big\}$$

We nemen $y \geq 0$ vast, en controleren eerst of $\big\{t \geq 0 : f^*(t) > y\big\} \subseteq \big\{t \geq 0 : t < d_f(y)\big\}$
Voor $t \in \big\{t \geq 0 : f^*(t) > y\big\}$ vinden we door de definitie van f^* uit te werken dat:

$$\begin{aligned} &\inf\big(\{\tilde{y} > 0 : d_f(\tilde{y}) \leq t\}\big) > y \\ &\Longrightarrow y \notin \{\tilde{y} > 0 : d_f(\tilde{y}) \leq t\} \\ &\Longrightarrow d_f(y) > t \\ &\Longrightarrow t \in \big\{t \geq 0 : t < d_f(y)\big\} \end{aligned}$$

dus $\{t \geq 0 : f^*(t) > y\} \subseteq \{t \geq 0 : t < d_f(y)\}$
Nu moeten we nog controleren of $\{t \geq 0 : f^*(t) > y\} \supseteq \{t \geq 0 : t < d_f(y)\}$
We nemen nu $t \in \{t \geq 0 : t < d_f(y)\}$ Om te laten zien dat $\inf\big(\{\tilde{y} > 0 : d_f(\tilde{y}) \leq t\}\big) > y$ moeten we bewijzen dat $\exists \epsilon > 0$ zodat $\forall \tilde{y} : d_f(\tilde{y}) \leq t$ geldt dat $\tilde{y} > y + \epsilon$
Als we kijken naar de rij van verzamelingen $A_n := \{x \in \Omega : |f(x)| > y + \frac{1}{n}\}$ dan weten we dat $A_n \subseteq A_{n+1}$ en dat $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n = \{x \in \Omega : |f(x)| > y\}$ dus volgt uit de "continuïteit van beneden" van de maat:

$$\lim_{n\to\infty} d_f(y + \frac{1}{n}) = d_f(y)$$

Omdat $d_f(y) > t$ weten we dat $\exists k : d_f(y + \frac{1}{k}) > t$ omdat het naar $d_f(y)$ convergeert. En omdat d_f dalend is weten we dat $d_f(h) > t \;\; \forall h < y + \frac{1}{k}$
Dit betekent dat $\forall \tilde{y} : d_f(\tilde{y}) \leq t : \tilde{y} > y + \frac{1}{k}$ oftewel: $\inf\big(\{\tilde{y} > 0 : d_f(\tilde{y}) \leq t\}\big) > y$
Dus $t \in \{t \geq 0 : f^*(t) > y\}$ en dat betekent dat $\{t \geq 0 : f^*(t) > y\} \supseteq \{t \geq 0 : t < d_f(y)\} \implies \{t \geq 0 : f^*(t) > y\} = \{t \geq 0 : t < d_f(y)\}$
En dus:

$$d_{f^*}(y) = \lambda\big(\{t \geq 0 : f^*(t) > y\}\big) = \lambda\big(\{t \geq 0 : t < d_f(y)\}\big) = d_f(y)$$

4. Laat $|f(x)| \leq |g(x)|$. Dan, als voor een $x \in \Omega$ geldt $|f(x)| > y$, dan $|g(x)| \geq |f(x)| > y$ dus

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > y\}) \leq \mu(\{x \in \Omega : |g(x)| > y\})$$

Oftewel $d_f(y) \leq d_g(y)$
Dit passen we toe op de dalende herschikking. Omdat

$$\{y \geq 0 : d_g(y) \leq t\} \subseteq \{y \geq 0 : d_f(y) \leq t\}$$

hebben we

$$\inf(\{y \geq 0 : d_f(y) \leq t\}) \leq \inf(\{y \geq 0 : d_g(y) \leq t\})$$

Dus $f^*(t) \leq g^*(t)$

5. Van punt 2 weten we dat $d_f = d_{f^*}$ Als we bewijzen dat voor elke meetbare, positieve, en dalende functies $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $d_f = d_g$ impliceert dat $f = g$ bijna overal, kunnen we concluderen dat $f^* = f$ bijna overal.
Uit Stelling 5 volgt dat f en g bijna overal continu zijn, en dus ook bijna overal allebei continu. We nemen een willekerurig punt x waarin f en g continu zijn, en definiëren $y := f(x)$ en $\tau := d_f(y) = d_g(y)$. Er zijn twee opties:

   (a) $\tau = x$: omdat $\mu\big(\{t \in [0,1] : |g(t)| > y\}\big) = x$ en g dalend is geldt dat $g(t) > y$ voor $t < x$ en $g(t) \leq y$ voor $t > x$
   Maar daarnaast is g continu in x dus $y \geq \lim_{t\downarrow x} g(t) = g(x) = \lim_{t\uparrow x} \geq y$ en dus $g(x) = y = f(x)$

   (b) $\tau \neq x$: dan $\tau < x$, anders $x \in [0, \tau)$ en dat zou impliceren dat $f(x) > y$.
   Omdat $f(x) = y$ geldt dat $\forall h < y : d_f(h) > x$, zo ook voor d_g. Dus $\forall h < y$: als $g(t) \leq h$, dan $t > x$ dus als $g(t) < y$ dan $t > x$. En als $g(t) > y$ dan $t \leq \tau < x$, dus $g(x) = y = f(x)$

We zien dus dat als f en g in x continu is, $f(x) = g(x)$. En dus $f = g$ bijna overal.

6. We nemen $\alpha \neq 0$, het geval $\alpha = 0$ is duidelijk.
$d_{\alpha f}(y) = \mu\big(\{x \in \Omega : |\alpha||f(x)| > y\}\big) = \mu\big(\{x \in \Omega : |f(x)| > y/|\alpha|\}\big) = d_f(y/|\alpha|)$
Dus $(\alpha f)^*(t) = \inf\{y \geq 0 : d_f(y/|\alpha|) \leq t\} = |\alpha| \cdot \inf\{y \geq 0 : d_f(y) \leq t\} = |\alpha|\, f^*(t)$

7. We bekijken de verzamelingen

$$\begin{aligned} A =& \{y \geq 0 : d_f(y) \leq t_1\} \\ B =& \{y \geq 0 : d_g(y) \leq t_2\} \\ S =& \{y \geq 0 : d_{f+g}(y) \leq t_1 + t_2\} \end{aligned}$$

We willen graag dat $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\} \subseteq S$, maar daarvoor is het eerst nodig om te laten zien dat $d_{f+g}(a + b) \leq d_f(a) + d_g(b)$

Voor $a \in A$, $b \in B$ geldt:

$$\begin{aligned} d_{f+g}(a+b) &= \mu\big(\{x \in \Omega :\ |f(x) + g(x)| > a + b\}\big) \\ &\leq \mu\big(\{x \in \Omega :\ |f(x)| + |g(x)| > a + b\}\big) \\ &\leq \mu\big(\{x \in \Omega :\ |f(x)| > a \text{ of } |g(x)| > b\}\big) \\ &\leq \mu\big(\{x \in \Omega :\ |f(x)| > a\}\big) + \mu\big(\{x \in \Omega :\ |g(x)| > b\}\big) \\ &= d_f(a) + d_g(b) \end{aligned}$$

Nu geldt, $\forall a \in A, \forall b \in B$, geldt dat $d_{f+g}(a+b) \leq d_f(a)+d_g(b) \leq t_1+t_2$ oftwel $A+B \subseteq S$
Dus $\inf(S) \leq \inf(A + B) \leq \inf(A) + \inf(B)$
En daaruit vloeit $(f + g)^*(t_1 + t_2) = \inf(S) \leq \inf(A) + \inf(B) = f^*(t_1) + g^*(t_2)$

8. Per definitie van de Lebesgue integraal geldt dat $\mu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A(x)d\mu(x)$ en dus:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d_f(y)d\lambda(y) &= \int_0^\infty \int_\Omega \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:\, |f(x)|>y\}}(x)\ d\mu(x)d\lambda(y) \\ &= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{y\geq 0:\, |f(x)|>y\}}(y)\ d\lambda(y)d\mu(x) \\ &= \int_\Omega \int_0^{|f(x)|} 1\ d\lambda(y)d\mu(x) \\ &= \int_\Omega |f(x)|d\mu(x) \end{aligned}$$

9. Ten eerste geldt dat (vanwege (2))

$$d_{|f|^p}(y) = d_f(y^{1/p}) = d_{f^*}(y^{1/p}) = d_{(f^*)^p}(y)$$

Dat betekent dat $(|f|^p)^* = (f^*)^p$.

Door $g = |f|^p$ te kiezen reduceert dit het probleem tot: $\int_0^{\mu(\Omega)} g^*(t)\ d\lambda(t) = \int_\Omega |g(x)|\ d\mu(x)$

Door (2) nogmaals toe te passen krijgen we dat inderdaad

$$\int_\Omega |g(x)|\ d\mu(x) = \int_0^\infty d_g(y)d\lambda(y) = \int_0^\infty d_{g^*}(y)d\lambda(y) = \int_0^{\mu(\Omega)} g^*(t)\ d\lambda(t)$$

Door $g = |f|^p$ terug te plakken hebben we ons bewijs.

$\square$

3.2.2 De constructie van $L^{p,q}$-ruimtes

$L^{p,q}$ is weer de verzameling zodat $\|f\|_{L^{p,q}} < \infty$, waarbij

$$\|f\|_{L^{p,q}} := \begin{cases} \Big(\int\limits_0^\infty \frac{\left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q}{t} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{q}} & \text{als } q < \infty \\ \sup_{t>0} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right) & \text{als } q = \infty \end{cases}$$

Dit object is anders dan de vorige normen die we hebben gezien, want het is geen echte norm. Zoals beschreven in Classical Fourier Analysis [6] (op pagina 50) geldt voor $\Omega = [0,1]$ dat voor $f(x) = x$ en $g(x) = 1 - x$ geldt dat $\|f+g\|_{L^{p,q}} \leq \|f\|_{L^{p,q}} + \|g\|_{L^{p,q}}$ niet geldt voor alle waardes van p en q.
Er geldt wel dat $\|f\|_{L^{p,q}} \geq 0$, en ook $\left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q / t = 0 \iff f^*(t) = 0$ dus $\|f\|_{L^{p,q}} = 0 \iff f^* = 0 \iff f = 0$ (bijna overal) voor $q < \infty$. Het geval $q = \infty$ is soortgelijk.
Daarbij geldt dat $\|\alpha f\|_{L^{p,q}} = |\alpha| \|f\|_{L^{p,q}}$ voor $\alpha \in \mathbb{R}$ omdat er geldt dat $(\alpha f)^*(t) = |\alpha| f^*(t)$.
Maar helaas hebben we bij optelling niets beters dan het volgende: (als $q < \infty$)

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^{p,q}} &= \Big(\int\limits_0^\infty \frac{\left(t^{\frac{1}{p}} (f+g)^*(t)\right)^q}{t} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{q}} \\
\text{Stelling 6 (7)} &\leq \Big(\int\limits_0^\infty \frac{\left(t^{\frac{1}{p}} \left(f^*(\tfrac{t}{2}) + g^*(\tfrac{t}{2})\right)\right)^q}{t} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\int\limits_0^\infty \frac{\left((2\tau)^{\frac{1}{p}} \left(f^*(\tau) + g^*(\tau)\right)\right)^q}{2\tau} \, 2 \, d\lambda(\tau) \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_0^\infty \left(\tau^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left(f^*(\tau) + g^*(\tau)\right)\right)^q \, d\lambda(\tau) \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} \left\| (\cdot)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (f^* + g^*) \right\|_{L^q} \\
(\text{Minowski's ongelijkheid}) &\leq 2^{\frac{1}{p}} \left\| (\cdot)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} f^* \right\|_{L^q} + 2^{\frac{1}{p}} \left\| (\cdot)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} g^* \right\|_{L^q} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_0^\infty \left(\tau^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} f^*(\tau)\right)^q \, d\lambda(\tau) \Big)^{\frac{1}{q}} + 2^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_0^\infty \left(\tau^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} g^*(\tau)\right)^q \, d\lambda(\tau) \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_0^\infty \frac{\left(\tau^{\frac{1}{p}} f^*(\tau)\right)^q}{\tau} \, d\lambda(\tau) \Big)^{\frac{1}{q}} + 2^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_0^\infty \frac{\left(\tau^{\frac{1}{p}} g^*(\tau)\right)^q}{\tau} \, d\lambda(\tau) \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_{L^{p,q}} + \|g\|_{L^{p,q}} \right)
\end{aligned}$$

En als $q = \infty$:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0}\big(t^{\frac{1}{p}}(f+g)^*(t)\big)\\ &\leq \sup_{t>0}\big(t^{\frac{1}{p}}\big(f^*(\frac{t}{2})+g^*(\frac{t}{2})\big)\big)\\ &= \sup_{t>0}\big((2t)^{\frac{1}{p}}\big(f^*(t)+g^*(t)\big)\big)\\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}\sup_{t>0}\big(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\big)+2^{\frac{1}{p}}\sup_{t>0}\big(t^{\frac{1}{p}}g^*(t)\big)\\ &= 2^{\frac{1}{p}}\big(\|f\|_{L^{p,\infty}}+\|g\|_{L^{p,\infty}}\big)\end{aligned}$$

Dit soort objecten noemen we ook wel een *quasinorm*. Voor een quasinorm geldt een stuk minder dan voor een normale norm, maar omdat het maar met maar een vaste constante verschilt van de driehoeksongelijkheid heeft het geen directe gevolgen voor limieten, en dus blijft een deel van de analyse dat je ermee kan doen intact.
Er geldt gelukkig nog steeds dat de verzameling functies die door een quasinorm gedefiniëerd is nog steeds een vectorruimte is. Immers, als $2^{1/p}\|f+g\|$ eindig is, dan is $\|f+g\|$ dat ook, en dus blijft het gelden dat $f+g \in L^{p,q}$ als $f,g \in L^{p,q}$. Dat betekent dat $L^{p,q}$ gewoon een vectorruimte is.

3.2.3 Relaties met L^p- en $L^{p,q}$-ruimtes

$L^{p,q}$ kan je zien als een soort afstemming van L^p. Aan de definitie valt te zien dat als $p = q$, $L^{p,p} = L^p$, en later zullen we zien dat $L^{p,q} \subseteq L^{p,r}$ voor $q < r$
Door q aan te passen breid je dus L^p uit of snijd je wat weg, dus als je een stelling uit kan breiden naar $L^{p,q}$ geeft dat meer informatie. Dat is ook de reden dat $L^{p,q}$ hier langskomt.
Uit Classical Fourier Analysis [6] (propositie 1.4.10) hebben we de volgende stelling:

Stelling 7. *Laat* (Ω,μ) *een maatruimte zijn,* $1 \leq p < \infty$ *en* $1 \leq q < r \leq \infty$
Dan $L^{p,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,r}(\Omega)$

Bewijs. We nemen $p \in [1,\infty)$. We beginnen met het geval $q = \infty$, want dat zal ons ook helpen bij de overige gevallen. Dus, we kiezen een $f \in L^{p,\infty}$, laten $q \in [1,\infty)$ en dan:

$$\begin{aligned}t^{\frac{1}{p}}f^*(t) &= f^*(t)\Big(\frac{q}{p}\int_0^t \frac{(\tau^{\frac{1}{p}})^q}{\tau}d\lambda(\tau)\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &= \Big(\frac{q}{p}\int_0^t \frac{\big(\tau^{\frac{1}{p}}f^*(t)\big)^q}{\tau}d\lambda(\tau)\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \Big(\frac{q}{p}\int_0^t \frac{\big(\tau^{\frac{1}{p}}f^*(\tau)\big)^q}{\tau}d\lambda(\tau)\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{p,q}}\\ \|f\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0}\big(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\big) \leq \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{p,q}}\end{aligned}$$

Dus volgt dat $L^{p,q} \hookrightarrow L^{p,\infty}$

Nu, als $f \in L^{p,q}$ met $1 \leq q < r < \infty$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,r}} &= \Big(\int_0^\infty \frac{\big(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\big)^{r-q+q}}{t} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= \Big(\int_0^\infty \big(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\big)^{r-q} \frac{\big(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\big)^{q}}{t} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \Big(\int_0^\infty \|f\|_{L^{p,\infty}}^{r-q} \frac{\big(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\big)^{q}}{t} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= \|f\|_{L^{p,\infty}}^{1-\frac{q}{r}} \Big(\int_0^\infty \frac{\big(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\big)^{q}}{t} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{q}\frac{q}{r}} \\
&= |f\|_{L^{p,\infty}}^{1-\frac{q}{r}} \, \|f\|_{L^{p,q}}^{\frac{q}{r}} \\
&\leq \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,q}}^{1-\frac{q}{r}} \, \|f\|_{L^{p,q}}^{\frac{q}{r}} \\
&= \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,q}}
\end{aligned}$$

De constante is strikt positief, dus $L^{p,q} \hookrightarrow L^{p,r}$. □

Een direct gevolg is dat $L^{p,p-\alpha} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L^{p,p+\alpha}$ voor $\alpha \in (0, p-1)$, en een gevolg van het bewijs is dat $\|f\|_{L^{p,p+\alpha}} \leq \|f\|_{L^p}$

We willen later ook graag weten hoe $L^{p,q}$ zich tot L^1 verhoudt. We weten al dat $L^{p,q} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L^1$ als $q < p$, maar weten niks over het geval $q > p$

Maar uit Variations onn Yano's Extrapolation Theorem [4] hebben we een stelling die daar antwoord op geeft. Omdat het een incorrect bewijs geeft is ons bewijs een aangepaste versie daarvan.

Stelling 8. *Laat* (Ω, μ) *een Lebesgue maat-ruimte zijn,* $p, q \in (1, \infty)$*, dan* $L^{p,q} \hookrightarrow L^1$

Bewijs. Laat $f \in L^1$ willekeurig. We nemen aan dat $p \neq q$. Dan:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1} &= \int_\Omega |f(x)| \, d\mu(x) \\
&= \int_{[0,1]} f^*(t) \, t^{\frac{1}{p}} \, t^{-\frac{1}{p}} \, t^{\frac{1}{q}} \, t^{-\frac{1}{q}} \, d\lambda(t)
\end{aligned}$$

Dan passen we de Stelling van Hölder toe:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} f^*(t) \, t^{\frac{1}{p}} \, t^{-\frac{1}{p}} \; t^{\frac{1}{q}} \, t^{-\frac{1}{q}} d\lambda(t) &\leq \Big(\int_{[0,1]} \big(f^*(t) \, t^{\frac{1}{p}} \, t^{-\frac{1}{q}}\big)^q \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \Big(\int_{[0,1]} \big(t^{\frac{1}{q}} \, t^{-\frac{1}{p}}\big)^{q'} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{q'}} \\
&= \Big(\int_{[0,1]} \frac{\big(f^*(t) \, t^{\frac{1}{p}}\big)^q}{t} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \Big(\int_{[0,1]} t^{\frac{q'}{q} - \frac{q'}{p}} \, d\lambda(t) \Big)^{\frac{1}{q'}} \\
&= \left(\left[\frac{1}{\frac{q'}{q} - \frac{q'}{p} + 1} \, t^{\frac{q'}{q} - \frac{q'}{p} + 1} \right]_{t=0}^{t=1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^{p,q}}
\end{aligned}$$

Bij het integreren hebben we aangenomen dat $t^{\frac{q'}{q}-\frac{q'}{p}} \neq t^{-1}$, maar dat moeten we wel eerst controleren:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \neq -\frac{1}{q'} \\
&\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} - \frac{1}{p} \neq 0 \\
&1 - \frac{1}{p} \neq 0
\end{aligned}$$

Oftwel dat $p > 1$, en dat is aangenomen.
We willen ook dat de constante, dus de integraal, eindig is en dat is alleen zo als $\frac{q'}{q} - \frac{q'}{p} + 1 > 0$
Gebruik makend van $q' = \frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \frac{q}{q-1}$ voor $q > 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{q'}{q} - \frac{q'}{p} + 1 &= \frac{q'(p-q) + pq}{pq} = \frac{q\left(\frac{p-q}{q-1} + p\right)}{pq} \\
&= \frac{q'(p-q) + pq}{pq} = \frac{q\left(\frac{p-q}{q-1} + p\right)}{pq} \\
- &= \frac{q\left(\frac{p-q}{q-1} + \frac{pq-p}{q-1}\right)}{pq} = \frac{q(-q+pq)}{pq(q-1)} \\
&= \frac{q(p-1)}{p(q-1)} > 0
\end{aligned}$$

Dus weten we:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1} &\leq \left(\left[\frac{1}{\frac{q'}{q} - \frac{q'}{p} + 1} \, t^{\frac{q'}{q} - \frac{q'}{p} + 1} \right]_{t=0}^{t=1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^{p,q}} \\
&= \left(\frac{1}{\frac{q'}{q} - \frac{q'}{p} + 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^{p,q}} \\
&= \left(\frac{p(q-1)}{q(p-1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^{p,q}}
\end{aligned}$$

waaruit volgt dat $L^{p,q} \hookrightarrow L^1$

□

3.3 $L(\log L)^{\alpha}$-ruimtes

3.3.1 De constructie van $L(\log L)^{\alpha}$-ruimtes

Dit is de functieruimte die nodig is voor de Stelling van Yano. Het idee is dat het "lijkt" op L^1 als verzameling. Hier wordt weer gebruik gemaakt van de dalende herschikking. Vanaf nu wordt aangenomen dat $\mu(\Omega) = 1$. $L(\log L)^{\alpha}$ is de verzameling functies f zodat $\|f\|_{L(\log L)^{\alpha}} < \infty$, gedefiniëerd voor $\alpha > 0$, waarbij:

$$\|f\|_{L(\log L)^{\alpha}} := \int_0^1 f^*(t) \log^{\alpha}\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t)$$

Weer $\|Cf\|_{L(\log L)^\alpha} = |C|\|f\|_{L(\log L)^\alpha}$ omdat $(Cf)^*(t) = |C|f^*(t)$, en $\|f\|_{L(\log L)^\alpha}$ is positief. Omdat $\log^\alpha(1/t) > 0$ bijna overal op $[0,1]$ hebben we dat $0 = \|f\|_{L(\log L)^\alpha} \iff 0 = \|f^*\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \iff f = 0$ bijna overal.
En als laatste eis voor het zijn van een norm is er $\|f+g\|_{L(\log L)^\alpha} \leq \|f\|_{L(\log L)^\alpha} + \|g\|_{L(\log L)^\alpha}$. Dit geld, maar om dit te bewijzen kost iets meer werk.
Het lijkt de logische manier te zijn om $(f+g)^*(t)$ meteen op te splitsen, maar daaruit krijg je niks beters dan $(f+g)^*(t) \leq f^*(\frac{t}{2}) + g^*(\frac{t}{2})$ en daarop loop je vast. Maar gelukkig is de norm om te schrijven naar iets waarvoor makkelijker te zien is dat de driehoeksongelijkheid geldt.
We zullen later zien dat:

$$\int_0^1 f^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t) = \int_0^1 \frac{\alpha}{t} \log^{\alpha-1}(t) \int_0^t f^*(s)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t)$$

En zullen daar het volgende lemma uit Interpolation of Operators [3] (lemma 2.5) op toepassen:

Lemma 9. $\forall f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mu(\Omega) = 1$, *zodat* f *meetbaar is voor Lebesgue-maat* λ *en bijna nergens oneindig is, geldt:*

$$\int_0^t f^*(s)\, d\lambda(s) = \sup\left(\left\{ \int_E |f(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = t\right\}\right)$$

Bewijs. We nemen de vereise f, en $t \in [0,1]$ willekeurig, en beginnen met te laten zien dat er een verzameling bestaat die de waarde van het supremum kan aannemen. oftewel:

$$\exists E \subseteq \Omega : \mu(E) = t \text{ en } \int_E |f(x)|\, d\mu(x) = \int_0^t f^*(s)\, d\lambda(s)$$

Hiebij onderscheiden we twee gevallen: $t \in d_f([0,\infty))$ en $t \notin d_f([0,\infty))$
Als $t \in d_f([0,\infty))$ claimen we dat

$$E = \{x \in \Omega : |f(x)| > f^*(t)\}$$

voldoet. Merk op dat $\mu(E) = d_f(f^*(t))$, we zullen eerst zien dat $d_f(f^*(t)) = t$
Als $\exists y : d_f(y) = t$, dan

$$f^*(t) = \inf(\{y \geq 0 : d_f(y) \leq t\}) = \inf(\{y \geq 0 : d_f(y) = t\})$$

Immers, d_f is een dalende functie dus als $d_f(\tilde{y}) < d_f(y)$ dan $\tilde{y} > y$.
In Stelling 6 (2) hebben we gezien dat d_f rechts-continu is, dus $\mu(E) = t$.
Nu zullen we bewijzen dat:

$$\int_E |f(x)|\, d\mu(x) = \int_0^t f^*(s)\, d\lambda(s)$$

Het plan is om te laten zien dat $d_{f\mathbb{1}_E} = d_{(f^*)\mathbb{1}_{[0,t)}}$ Als dat het geval is, zijn de integralen gelijk (Stelling 6 (8)).
Voor $d_{f\mathbb{1}_E}$ geldt dat

$$d_{f\mathbb{1}_E}(y) = \mu(\{x \in E : |f(x)| > y\}) = \begin{cases} d_f(y) & \text{als } y > f^*(t) \\ \mu(E) & \text{als } 0 \leq y \leq f^*(t) \end{cases}$$

per definitie van d_f in het eerste geval, en omdat $|f(x)| > f^*(t) \geq y$ als $x \in E$ en $y \leq f^*(t)$ in het tweede geval.
Voor $d_{(f^*)\mathbb{1}_{[0,t)}}$ geldt dat

$$d_{(f^*)\mathbb{1}_{[0,t)}}(y) = \lambda(\{s \in [0,t] : f^*(s) > y\}) = \begin{cases} d_{f^*}(y) & \text{als } y > f^*(t) \\ t & \text{als } 0 \leq y \leq f^*(t) \end{cases}$$

per definitie van d_{f^*} in het eerste geval. In het tweede geval weten we al dat

$$\lambda(\{s \in [0,1] : f^*(s) > f^*(t)\}) = d_{f^*}(f^*(t)) = d_f(f^*(t)) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > f^*(t)\}) = t$$

en dus $f^*(s) > f^*(t) \geq y$ als $s \in [0,t)$ en $y \leq f^*(t)$.
Omdat $\mu(E) = t$, en $d_f = d_{f^*}$, volgt hieruit dat $d_{f\mathbb{1}_{\mathrm{E}}} = d_{(f^*)\mathbb{1}_{[0,t)}}$
Dus (Stelling 6 (8)):

$$\int_E |f(x)|\, d\mu(x) = \int_0^t f^*(s)\, d\lambda(s)$$

Het geval voor $t \notin d_f([0,\infty))$ wordt bewezen in Interpolation of Operators [3] (lemma 2.5).

□

Stelling 10. $\forall f \in L(\log L)^\alpha$ *geldt:*

$$\int_0^1 (f+g)^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t) \leq \int_0^1 f^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t) + \int_0^1 g^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t)$$

Bewijs. We laten $\alpha > 0$, en nemen een $f \in L(\log L)^\alpha$ willekeurig. Dan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t) &= \int_0^1 f^*(t)(-1)(-1)\big(\log^\alpha(1) - \log^\alpha(t)\big)\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 f^*(t) \int_t^1 \frac{d}{ds} \log^\alpha(s)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 f^*(t) \int_t^1 \frac{\alpha}{s} \log^{\alpha-1}(s)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 \int_t^1 f^*(t) \frac{\alpha}{s} \log^{\alpha-1}(s)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t)
\end{aligned}$$

Nu moeten we van de laatste integraal de termen omwisselen, daarvoor willen we de stelling van Tonelli toepassen. We integreren over $\{(t,s) \in [0,1] \times [0,1] : s > t\}$, een meetbare verzameling. De functie die we integreren is meetbaar, positief, en integreerbaar want $f \in L(\log L)^\alpha$ Dus mag de stelling van Tonelli toegepast worden en kunnen we lemma 9 gebruiken.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_t^1 f^*(t) \frac{\alpha}{s} \log^{\alpha-1}(s)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t) &= \int_0^1 \frac{\alpha}{s} \log^{\alpha-1}(s) \int_0^s f^*(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(s) \\
&= \int_0^1 \frac{\alpha}{s} \log^{\alpha-1}(s) \, \sup\left(\left\{ \int_E |f(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = s \right\}\right) d\lambda(s)
\end{aligned}$$

Nu merken we op dat, voor $f, g \in L\log^\alpha L$ geldt:

$$\int |(f+g)(x)|\, d\mu(x) \leq \int |f(x)|\, d\mu(x) + \int |g(x)|\, d\mu(x)$$

Dus voor $\forall s > 0$

$$\sup\Big(\Big\{\int_E |(f+g)(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = s\Big\}\Big) \leq \sup\Big(\Big\{\int_E |f(x)|\, d\mu(x) + \int_E |g(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = s\Big\}\Big)$$

Dus

$$\begin{aligned}\sup\Big(\Big\{\int_E |(f+g)(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = s\Big\}\Big) \leq{}& \sup\Big(\Big\{\int_E |f(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = s\Big\}\Big)\\ &+ \sup\Big(\Big\{\int_E |g(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = s\Big\}\Big)\end{aligned}$$

Alles samengevoegd krijgen we dan:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L\log^\alpha} &= \int_0^1 (f+g)^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t)\\ &= \int_0^1 \int_t^1 (f+g)^*(t) \frac{\alpha}{s} \log^{\alpha-1}(s)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t)\\ &= \int_0^1 \frac{\alpha}{s} \log^{\alpha-1}(s)\ \sup\Big(\Big\{\int_E |(f+g)(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = s\Big\}\Big)\, d\lambda(s)\\ &\leq \int_0^1 \frac{\alpha}{s} \log^{\alpha-1}(s)\ \sup\Big(\Big\{\int_E |f(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = s\Big\}\Big)\, d\lambda(s)\\ &\quad + \int_0^1 \frac{\alpha}{s} \log^{\alpha-1}(s)\ \sup\Big(\Big\{\int_E |g(x)|\, d\mu(x) : \mu(E) = s\Big\}\Big)\, d\lambda(s)\\ &= \|f\|_{L\log^\alpha} + \|g\|_{L\log^\alpha}\end{aligned}$$

En het bewijs is compleet. □

3.3.2 Relaties met andere ruimtes

De $L(\log L)^\alpha$-ruimte dient te lijken op L^1, dus de eerste vraag is hoe het zich verhoudt ten opzichte van die ruimte. We zullen zien dat $L^p \hookrightarrow L(\log L)^\alpha \hookrightarrow L^1$ voor $p > 1$, dus in die zin is $L(\log L)^\alpha$ inderdaad een ruimte die lijkt op L^1

Stelling 11. *$L(\log L)^\alpha \hookrightarrow L^1$ voor elke $\alpha > 0$*

Bewijs. Laat $f \in L(\log L)^\alpha$ willekeurig
Gebruik makend van de eigenschappen van f^*:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1} &= \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) = \int_0^1 f^*(t)\, d\lambda(t)\\ &= \int_0^{1/e} f^*(t)\, d\lambda(t) + \int_{1/e}^1 f^*(t)\, d\lambda(t)\end{aligned}$$

f^* is een dalende functie. Omdat $f^*(\frac{1}{e}) = \infty$ impliceert dat $f^*(t) = \infty\ \forall t < \frac{1}{e}$, kan $\|f\|_{L(\log L)^\alpha}$ dan niet eindig zijn. Dus moet gelden dat $f^*(\frac{1}{e}) = C$.
Dit betekent dat:

$$\int_0^{1/e} f^*(t)\,d\lambda(t) \geq \frac{1}{e}C$$

$$\int_{1/e}^{1} f^*(t)\,d\lambda(t) \leq (1-\frac{1}{e})C$$

Dan krijgen we met substitutie

$$\int_{1/e}^{1} f^*(t)\,d\lambda(t) \leq (e-1)\int_0^{1/e} f^*(t)\,d\lambda(t)$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^*(t)\,d\lambda(t) &\leq \int_0^{1/e} f^*(t)\,d\lambda(t) + (e-1)\int_0^{1/e} f^*(t)\,d\lambda(t)\\ &= e\int_0^{1/e} f^*(t)\,d\lambda(t)\end{aligned}$$

Omdat $\log^\alpha(\frac{1}{t}) \geq 1$ op $[0, \frac{1}{e}]$ kunnen we daar f^* naar boven afschatten door het te vermenigvuldigen met $\log^\alpha(\frac{1}{t})$

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1} &\leq e\int_0^1 f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{e}]}(t)\,d\lambda(t)\\ &\leq e\int_0^1 f^*(t)\log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right)\,d\lambda(t) = e\|f\|_{L(\log L)^\alpha}\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $f \in L^1$, dus $L(\log L)^\alpha \subseteq L^1$, en ook dat er sprake is van een embedding. $\square$

Stelling 12. *Voor elke $\alpha > 0$ en voor elke $p > 1$ geldt $L^p \hookrightarrow L(\log L)^\alpha$*
Daarnaast ligt L^p dicht in $L\log^\alpha L$

Bewijs. Kies $f \in L^p$ willekeurig. Dan volgt uit de ongelijkeid van Hölder:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L(\log L)^\alpha} &= \int_0^1 f^*(t)\log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right)d\lambda(t)\\ &\leq \Big(\int_0^1 f^*(t)^p d\lambda(t)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^1 \log^{\alpha\cdot p'}\left(\frac{1}{t}\right)d\lambda(t)\Big)^{\frac{1}{p'}}\\ &= \Big(\int_0^1 \log^{\alpha\cdot p'}\left(\frac{1}{t}\right)d\lambda(t)\Big)^{\frac{1}{p'}}\|f\|_{L^p}\end{aligned}$$

Nu resteert nog te bewijzen dat de linker integraal eindig is.
Het idee is om $\log(1/t)$ af te schatten door $C(\frac{1}{t})^{\epsilon}$, met $0 < \epsilon < 1$
Omdat voor $t \in (0,1]$ geldt dat $\frac{1}{t} \in [1,\infty)$, op bijectieve wijze, kunnen we $\frac{1}{t}$ in de bovenstaande vergelijking vervangen door x met $x \in [1,\infty)$ We beginnen met laten zien dat

$$f(x) = \frac{1}{\epsilon}x^{\epsilon} - \log(x)$$

positief is voor $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\epsilon}{\epsilon}x^{\epsilon-1} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}(x^{\epsilon} - 1) \\ f(1) &= \frac{1}{\epsilon} - 0 \end{aligned}$$

We zien dat op $x = 1$ geldt dat $f(x) > 0$, en dat $f'(x) > 0$ voor $x > 1$, hieruit kunnen we afleiden dat $f(x) > 0$ op $[1,\infty)$, en dus $\frac{1}{\epsilon}x^{\epsilon} > \log(x)$ op $[1,\infty)$.
Als we nu x terug substitueren door $1/t$, met $0 < t \leq 1$, krijgen we het gewenste resultaat. En dat kunnen we gebruiken in de integraal. Daarvoor zetten we ϵ vast als: $\epsilon = \frac{1}{2\alpha p'}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log^{\alpha\cdot p'}\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t) &\leq \int_0^1 \left(\frac{1}{\epsilon}\cdot\left(\frac{1}{t}\right)^{\epsilon}\right)^{\alpha\cdot p'} d\lambda(t) \\ &= (2\alpha p')^{\alpha\cdot p'} \int_0^1 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(t) < \infty \end{aligned}$$

Nu we de embedding hebben bewezen, kunnen we bewijzen dat L^p dicht in $L\log^{\alpha} L$ ligt. Dit doen we door voor $f \in L\log^{\alpha} L$ willekeurig een rij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ te bouwen zodat $\|f_n - f\|_{L\log^{\alpha} L} \xrightarrow{n} 0$
Laat $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|\leq n\}}$, dan is f_n begrensd dus zit het in L^p
Dan

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L\log^{\alpha} L} &= \|f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}\|_{L\log^{\alpha} L} \\ &= \int_0^1 \left(f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}\right)^*(t) \log^{\alpha}\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t) \end{aligned}$$

Nu moeten we nog bewijzen dat dit naar 0 convergeert. Dit zullen we doen met de Gedomineerde Convergentie Stelling.
Daarvoor is het nodig dat de functie bijna overal puntsgewijs naar 0 convergeert. We zullen zien dat $(f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}})^*(t) \xrightarrow{n} 0$, dan geldt het ook voor de rest. We beginnen met het uitrekenen van de distributiefunctie van $f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}$

$$\begin{aligned} d_{f\cdot\mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}}(y) &= \mu\big(\{x \in \Omega : |f(x) \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}(x)| > y\}\big) \\ &= \begin{cases} d_f(y) & \text{als } y > n \\ d_f(n) & \text{als } y \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

Nu weten we van de dalende herschikking dat, aangezien $d_{f\cdot\mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}}(0) = d_f(n)$, voor $t > d_f(n)$ geldt

$$\left(f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}\right)^*(t) = \inf\left(\{y : d_{f\cdot\mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}}(y) \leq t\}\right) = 0$$

We weten dat $\{x \in \Omega : |f(x)| > n\} \downarrow \emptyset$, dus $d_f(n) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > n\}) \xrightarrow{n} 0$, en dus weten we dat $(f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}})^* \xrightarrow{n} 0$ bijna overal puntsgewijs.
Nu hebben we nog een integreerbare functie als bovengrens nodig, maar deze is makkelijk te vinden: we gebruiken gewoon $|f|$ zelf.
We weten namelijk dankzij Stelling 6 (4) dat, omdat $|f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}| \le |f|$, dan geldt dat $(f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}})^* \le f^*$
Dus:

$$|\left(f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}\right)^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right)| \le f^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right)$$

en $f \in L\log^\alpha L$, dus de rechterzijde is integreerbaar.
Dus volgt uit de Gedomineerde Convergentie Stelling:

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{L\log^\alpha L} &= \int_0^1 \left(f \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}}\right)^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t)\\ &\xrightarrow{n} 0\end{aligned}$$

□

Nu rest nog de vraag hoe de $L(\log L)^\alpha$ zich onderling verhouden. Er zal blijken dat ze in die zin op L^p lijken, net zoals een grotere p een strengere constrictie wordt, vertaalt een grotere α zich ook naar een strengere constrictie. Ook zijn ze embed in hun grotere versies.

Stelling 13. *Voor elke $0 < \beta < \alpha$ geldt: $L(\log L)^\alpha \hookrightarrow L(\log L)^\beta$*

Bewijs. Kies $f \in L(\log L)^\alpha$ willekeurig. Laat $\gamma := \alpha/\beta$. Dan $\gamma > 1$, dus we kunnen de ongelijkheid van Hölder toepassen met γ.

$$\begin{aligned}\|f\|_{L(\log L)^\beta} &= \int_0^1 \left|f^*(t) \log^\beta\left(\frac{1}{t}\right)\right| d\lambda(t)\\ &\le \left(\int_0^1 \left|(f^*(t))^{\frac{1}{\gamma}} \log^\beta\left(\frac{1}{t}\right)\right|^\gamma d\lambda(t)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\int_0^1 \left|(f^*(t))^{\frac{1}{\gamma'}}\right|^{\gamma'} d\lambda(t)\right)^{\frac{1}{\gamma'}}\\ &= \left(\int_0^1 f^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left(\int_0^1 f^*(t)\, d\lambda(t)\right)^{\frac{1}{\gamma'}}\\ &= \|f\|_{L(\log L)^\alpha}^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{\gamma'}}\end{aligned}$$

Omdat $f \in L^1$, is de L^1-norm van f eindig, en dus ook de $L(\log L)^\beta$-norm. Om te bewijzen dat het een embedding is, gebruiken we van Stelling 11 dat L^1 embed is in $L(\log L)^\alpha$:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1} &\le C\|f\|_{L(\log L)^\alpha}\\ \|f\|_{L(\log L)^\beta} &\le \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{\gamma'}} \cdot \|f\|_{L(\log L)^\alpha}^{\frac{1}{\gamma}}\\ &\le C^{\frac{1}{\gamma'}} \|f\|_{L(\log L)^\alpha}^{\frac{1}{\gamma'}} \cdot \|f\|_{L(\log L)^\alpha}^{\frac{1}{\gamma}}\\ &= C^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \|f\|_{L(\log L)^\alpha}\end{aligned}$$

□

4 Operatoren

4.1 Definities en eigenschappen van operatoren

De Extrapolatie Stelling van Yano gaat over de begrensdheid van operators. In het kort impliceert begrensdheid continuïteit, maar het is daarnaast een afschatting dat al handig van zichzelf kan zijn. Begrensdheid kunnen aantonen kan dus nuttig zijn, en dat is het doel van de Stelling van Yano. In dit hoofdstuk zal ik uitleggen wat lineaire operatoren zijn, wat begrensdheid is, en hoe continuïteit daaruit volgt. Om te beginnen met de definitie van een operator:

Definitie 4.1. *Laat X en Y vectorruimtes zijn. Laat $T : X \to Y$*
Als T lineair is, oftwel: $T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g)$ $\forall f, g \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, dan is T een ***(lineaire) operator****.*

Als X en Y eindig dimensionaal zijn is de operator een matrix. Maar we zijn alleen geïnteresseerd in de operatoren die werken op functie-vectorruimtes die we gezien hebben.

Definitie 4.2. *Laat X en Y vectorruimtes zijn met een norm erop gedefiniëerd. Laat $T : X \to Y$ een operator zijn. Als $\exists C \geq 0 :$ $\|T(f)\|_Y \leq C\|f\|_X$ $\forall f \in X$, dan is T* ***begrensd****.*
Daarnaast wordt er een ***operator norm*** *gedefiniëerd op T:*

$$\|T : X \to Y\| = \sup(\{\|T(f)\|_Y : \|f\|_X = 1\})$$

$\|T : X \to Y\|$ wordt ook wel geschreven als $\|T\|$

Als de norm van een operator niet ∞ is, is de operator begrensd. Immers:

$$\|T(f)\|_Y = \frac{\|T(f)\|_Y}{\|f\|_X}\|f\|_X \overset{\text{T lineair}}{=} \left\| T\left(\frac{f}{\|f\|_X}\right)\right\|_Y \cdot \|f\|_X \leq \|T\| \cdot \|f\|_X$$

want $\left\|\frac{1}{\|f\|_X} f\right\|_X = 1$ En natuurlijk heeft een begrensde operator een eindige norm, deze definities zijn dus equivalent.
Uit Principles of Real Analysis [1] (stelling 28.6) hebben we het volgende:

Stelling 14. *Laat X en Y vectorruimtes zijn met een norm erop gedefiniëerd. Laat $T : X \to Y$ een operator zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *T is begrensd*
2. *T is continu op 0*
3. *T is continu*

Bewijs. (1) $\Longrightarrow$ (2): Laat $f_n \xrightarrow{n} 0$ een rij in X zijn, dat convergeert in de $\|\cdot\|_X$ metriek. Dan $\|T(f_n)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|f_n\|_X$
Hieruit volgt: $\lim\limits_{n\to 0}\|T(f_n)\|_Y = 0$, dus $T(f_n) \overset{n}{\to} 0$
$T(0) = 0$ vanwege de lineairiteit van T, dus $T(f_n) \xrightarrow{n} 0$ en dus is T continu in 0
(2) $\Longrightarrow$ (3): Dit volgt meteen door de lineairiteit van T toe te passen.
(3) $\Longrightarrow$ (1): T is continu in 0, dus voor een $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in X : \|x\|_X \leq \delta$ zodat $\|T\|_Y < \epsilon$
Dus $\forall x \in X : \|x\|_X \leq 1$ geldt dat $\|\delta x\|_X < \delta$ dus $\|T(\delta x)\|_Y < \epsilon$ dus $\|T(x)\|_Y < \frac{\epsilon}{\delta}$ dus $\|T\|$ bestaat (en $\|T\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}$).

$\square$

Dus de begrensde operators zijn ook continu volgens de normen die X en Y opgelegd zijn.

4.2 De Hilbert Operator als voorbeeld

De Hilbert Operator is een goed voorbeeld van een operator waar de Extrapolatie Stelling van Yano op toegepast kan worden. We zullen zien dat het begrensd is in $L^p([0,\infty))$ voor $p > 1$ maar niet voor $p = 1$
Nadat we de Stelling van Yano behandled hebben zullen we hem toepassen op deze operator. Tenslotte blijkt dat uit de theorie die we nodig hebben nog een leuke conclusie kan worden getrokken.

4.2.1 Hilbert's absolute ongelijkheid

We zullen bewijzen dat de operator

$$H(f)(x) := \int_{[0,\infty)} \frac{f(y)}{x+y} d\mu(y)$$

begrensd is in $L^p([0,\infty))$ voor $p > 1$
Om dit te bewijzen gebruiken we Schur's Test. Deze stelling bewijst begrensdheid van operatoren van de vorm:

$$T(f)(x) := \int_Y K(x,y) f(y) d\mu(y)$$

Bij dit soort operatoren heet $K(x,y)$ de *kern* van de operator. Duidelijk is de Hilbert operator (4.2.1) van deze vorm, met als kern $\frac{1}{x+y}$
Het bewijs van de Test van Schur gaat via een omweggetje: in plaats van bewijzen dat $\|T(f)\|_{L^p(X)} \leq C\|f\|_{L^p(Y)}$, bewijst het dat $\|h\,T(f)\|_{L^1(X)} \leq C\|f\|_{L^p(Y)}\|h\|_{L^{p'}(X)}$ $\forall h \in L^{p'}(X)$
Hieruit volgt de begrensdheid van de operator. Merk op dat het een equivalente relatie is: andersom volgt het direct uit de begrensdheid van de operator en Hölders ongelijkheid. Het lemma dat we hiervoor gebruiken is Lemma 2, dat hieronder nog een keer vermeld is:

Lemma 15. *Laat $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte zijn en f een meetbare functie op X met $f \geq 0$*
Als geldt dat $\forall g \in L^{p'}(X) : g \geq 0$:

$$\int_X f(x)g(x)d\mu(x) \leq C\|g\|_{L^{p'}(X)}$$

Dan $f \in L^p(X)$ én $\|f\|_{Lp(X)} \leq C$

De stelling van de Test van Schur komt uit Inequalities: a Journey into Linear Analysis [5] (stelling 5.9.1)

Stelling 16 (De Test van Schur)**.** *Laat $K(x,y)$ een niet-negatieve en meetbare functie zijn op de product-ruimte $(X,\mu) \times (Y,\upsilon)$, en $1 < p < \infty$*
Als er ook strikt positieve en meetbare functies s op (X,μ) en t op (Y,υ) bestaan zodat het volgende geldt:

$$\int_Y K(x,y)(t(y))^{p'} d\upsilon(y) \leq A^{p'} s(x)^{p'} \textit{voor bijna alle } x$$

$$\int_X K(x,y)(s(x))^{p} d\mu(x) \leq B^{p} t(y)^{p} \textit{voor bijna alle } y$$

Dan geldt voor de operator $T(f)(x) := \int_Y K(x,y)f(y)d\mu(y)$ voor $f \in L^p(Y)$ dat $T(f) \in L^p(X)$. Dus $T : L^p(Y) \to L^p(X)$ is welgedefinieerd. Daarnaast is T begrensd en $\|T\| \leq AB$

Bewijs. We zullen eerst bewijzen dat voor elke niet-negatieve functie $h \in L^{p'}(X)$ en elke niet-negatieve functie $g \in L^p(Y)$ geldt:

$$\int_X \int_Y h(x)K(x,y)g(y)d\upsilon(y)d\mu(x) \leq AB\|h\|_{L^{p'}(X)}\|g\|_{L^p(Y)} \tag{1}$$

Zoals eerder gezegd kunnen we hiermee de stelling bewijzen
We beginnen het bewijs met het afschatten van $T(g)(x)$ voor x vast:

$$\begin{aligned}
\int_Y K(x,y)g(y)d\upsilon(y) &= \int_Y K(x,y)^{1/p'}t(y)\frac{(K(x,y)^{1/p}g(y)}{t(y)}d\upsilon(y)\\
\text{ongelijkheid v Hölder:} \quad &\leq \Big(\int_Y K(x,y)t(y)^{p'}d\upsilon(y)\Big)^{1/p'}\Big(\int_Y \frac{K(x,y)g(y)^p}{t(y)^{p'}}d\upsilon(y)\Big)^{1/p}\\
&\leq A\,s(x)\Big(\int_Y \frac{K(x,y)g(y)^p}{t(y)^{p'}}d\upsilon(y)\Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

Nu gebruiken we dit resultaat om vervolgens $\int h(x)\,T(g)(x)\,dx$ af te schatten:

$$\begin{aligned}
\int_X h(x)\,T(g)(x)\,d\mu(x) &= \int_X \int_Y h(x)K(x,y)g(y)\,d\upsilon(y)\,d\mu(x)\\
&\leq \int_X h(x)A\,s(x)\Big(\int_Y \frac{K(x,y)g(y)^p}{t(y)^p}d\upsilon(y)\Big)^{1/p}d\mu(x)
\end{aligned}$$

We passen de ongelijkheid van Hölder toe:

$$\begin{aligned}
&\int_X h(x)A\,s(x)\Big(\int_Y \frac{K(x,y)g(y)^p}{t(y)^p}d\upsilon(y)\Big)^{1/p}d\mu(x)\\
&\leq A\Big(\int_X h(x)^{p'}d\mu(x)\Big)^{1/p'}\Big(\int_X s(x)^p\Big(\int_Y \frac{K(x,y)g(y)^p}{t(y)^p}d\upsilon(y)\Big)^{p/p}d\mu(x)\Big)^{1/p}\\
&= A\|h\|_{L^{p'}(X)}\Big(\int_X s(x)^p\Big(\int_Y \frac{K(x,y)g(y)^p}{t(y)^p}d\upsilon(y)\Big)d\mu(x)\Big)^{1/p}\\
\text{fatou:} \quad &= A\|h\|_{L^{p'}(X)}\Big(\int_Y \Big(\int_X s(x)^pK(x,y)d\mu(x)\Big)\frac{g(y)^p}{t(y)^p}d\upsilon(y)\Big)^{1/p}\\
&\leq A\|h\|_{L^{p'}(X)}\Big(\int_Y B\,t(y)^p\frac{g(y)^p}{t(y)^p}d\upsilon(y)\Big)^{1/p}\\
&= AB\|h\|_{L^{p'}(X)}\|g\|_{L^p(Y)}
\end{aligned}$$

En daarmee is bewezen dat $\|h\,T(g)\|_{L^1(X)} \leq AB\|g\|_{L^p(Y)}\|h\|_{L^{p'}(X)}\ \forall h \in L^{p'}(X)$. Met behulp van het lemma kunnen we nu de stelling bewijzen:
We zetten $g = |f|$ vast, dan $\|g\|_{L^{p'}(Y)} = \|f\|_{L^{p'}(X)}$. Dan weten we dat $\forall h \in L^{p'}(X) : h \geq 0$ geldt:

$$\int_X h(x)(T|f|)(x)d\mu(x) \leq (AB\|f\|_{L^p(Y)})\|h\|_{L^{p'}(X)}$$

Nu is om het lemma toe te kunnen passen nodig dat $T|f| \geq 0$. Dat is inderdaad waar, want voor elke x is het een integraal over $K(x,y)|f(y)|$, en dat zijn twee positieve functies. Nu volgt uit het lemma dat $T|f| \in L^p(X)$ én:

$$\|T|f|\|_{L^p(X)} \leq AB\|f\|_{L^p(X)}$$

Nu hoeven we dit alleen nog maar uit te breiden naar f

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^p(X)} &= \left(\int_X \int_Y |K(x,y)f(y)d\upsilon(y)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \\
\text{driehoeksongelijkheid:} \qquad &\leq \left(\int_X \left(\int_Y |K(x,y)f(y)|d\upsilon(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \\
K(x,y) \geq 0: \qquad &= \left(\int_X \left(\int_Y K(x,y)|f(y)|d\upsilon(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&= \|T|f|\|_{L^p(X)} \\
&\leq AB\|f\|_{L^p(X)}
\end{aligned}$$

□

Nu kunnen we de Test van Schur toepassen op de Hilbert operator, zoals ook gedaan is in Inequalities: a Journey Into Linear Analysis [5] (op pagina 65).

$$H(f)(x) := \int_{[0,\infty)} \frac{f(y)}{x+y} d\mu(y)$$

$x, y \in [0,\infty)$ en voor die waardes is de kern niet negatief. Dus $X, Y = [0,\infty)$. Nu zijn er nog functies s en t nodig zodat bijna overal geldt dat

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{x+y} s(x)^p d\mu(x) \leq A^p t(y)^p$$

en

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{x+y} t(y)^{p'} d\mu(y) \leq B^{p'} s(x)^{p'}$$

We proberen $s(x) = t(x) = (\frac{1}{x})^{\frac{1}{p\,p'}}$
Dan

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} \frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{p\,p'}} d\mu(x) &= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{y}\frac{1}{\frac{x}{y}+1}\left(\frac{1}{\frac{x}{y}}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{p'}} d\mu(x) \\
&= \left(\frac{1}{y}\right)^{1+\frac{1}{p'}} \int_{[0,\infty)} \frac{1}{\frac{x}{y}+1}\left(\frac{1}{\frac{x}{y}}\right)^{\frac{1}{p'}} d\mu(x) \\
&= \left(\frac{1}{y}\right)^{1+\frac{1}{p'}} y \int_{[0,\infty)} \frac{1}{u+1}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p'}} d\mu(u)
\end{aligned}$$

Hierbij is er gebruikt dat dit een absolute integraal is, en dan is de Lebesgue-integraal gelijk aan de Riemann-integraal dus werkt substitutie En zo ook

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{p'}{p\,p'}} d\mu(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \int_{[0,\infty)} \frac{1}{u+1}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(u)$$

Nu moet nog de integraal worden uitgerekend, dit wordt gedaan door middel van de residustelling van Complexe Functietheorie. We gebruiken een variant van een berekening van een integraal beschreven in Special Functions [2] (op pagina 10).
We nemen $\epsilon, R > 0$ en integreren de functie $f(z) = \frac{1}{(1+z)z^a}$ van $C_1 := \{x+\epsilon i : 0 \leq x \leq R\}$, naar $C_2 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ zo zodat het aansluit op C_1 en C_3, naar $C_3 := \{x - \epsilon i : 0 \leq x \leq R\}$, en naar $C_4 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = \epsilon, \text{Im}(z) < 0\}$ zo zodat deze ook aansluit op C_1 en C_3
We hebben met de term a de termen $\frac{1}{p}$ en $\frac{1}{p'}$ vervangen, dus $a \in (0,1)$
De functie heeft een singulariteit in -1 maar verder willen we dat het analytisch is over het stervormige gebied dat de kromme insluit. In de complexe functietheorie worden complexe logaritmes gebruikt om machten te definiëren, en de hoofdtak van het complexe logaritme is wel gedefinieerd, maar niet continu op negatieve reële getallen. Die verzameling snijdt door ons gebied, dus we nemen een andere tak:

$$\widetilde{\text{Log}}(z) := \log(|z|) + i\,\widetilde{\text{Arg}}(z)$$

zodanig dat $\widetilde{\text{Arg}}(z) \in [0, 2\pi)$, dan valt het discontinue deel op de verzameling positieve reële getallen, dus buiten het gebied waarover we willen integreren. Daar geldt nu voor alle $b > 0$ dat $\lim_{\delta \downarrow 0} \widetilde{\text{Arg}}(b + i\delta) = 0$ en $\lim_{\delta \downarrow 0} \widetilde{\text{Arg}}(b - i\delta) = 2\pi$
Nu is dus integraal over deze gesloten kromme gelijk aan de restterm dat gelijk is aan

$$2\pi i \lim_{z \to -1} (z+1)\, f(z) = 2\pi i \lim_{z \to -1} \frac{1}{z^a} = 2\pi i e^{-a\,\widetilde{\text{Log}}(-1)} = 2\pi i\, e^{-a(\log(|-1|)+\pi i)} = 2\pi i\, e^{-a\pi i}$$

Als we R naar oneindig, en ϵ naar 0 laten gaan, dan geldt voor de integraal over C_2 dat

$$\begin{aligned}\Big|\int_{C_2} f(z)dz\Big| \leq \ell(C_2)\ \sup(|f|) &= 2\pi R \frac{1}{(R+1)R^a} \\ &= 2\pi \frac{R^{1-a}}{R+1} \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

omdat $1 - a < 1$
En voor de integraal over C_4 geldt:

$$\Big|\int_{C_4} f(z)dz\Big| \leq \ell(C_3)\ \sup(|f|) = 2\pi\epsilon \frac{1}{(\epsilon+1)\epsilon^a} \leq 2\pi \frac{\epsilon^{1-a}}{\epsilon+1} \longrightarrow 0$$

Dan kijken we nu naar C_1 en C_3. Eerst laten we R naar oneindig gaan, zodat we voor C_1 het volgende krijgen:

$$\int_{C_1} f = \int_\epsilon^\infty \frac{1}{(z+i\epsilon+1)(z+i\epsilon)^a}\, dz = \int_0^\infty \mathbb{1}_{(\epsilon,\infty)}(z) \frac{1}{z+i\epsilon+1} e^{-a\widetilde{\text{Log}}(z+i\epsilon)}\, dz$$

Maar de limiet over ϵ willen we in de integraal brengen, en we moeten eerst controleren of dat wel kan. Hiervoor gebruiken we de Gedomineerde Convergentie Stelling. Eerst merken we op dat complexe integralen opgebouwd zijn uit twee reële integralen, waar we de Gedomineerde Convergentie Stelling op kunnen toepassen:

$$\int_{C_2} f := \int_{C_2} \text{Re}(f) + i \int_{C_2} \text{Im}(f)$$

Aangezien $|\text{Re}(f)| \leq |f|$ en $|\text{Im}(f)| \leq |f|$, is het genoeg om een integreerbare functie te vinden dat $\forall \epsilon > 0$ puntsgewijs groter is dan $|f|$ voor $z \in (0, \infty)$

Om te beginnen geldt dat

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{1}_{(\epsilon,\infty)}(z)\frac{1}{z+i\epsilon+1}e^{-a\widetilde{\mathrm{Log}}(z+i\epsilon)}\right| &\leq \left|\frac{1}{z+i\epsilon+1}e^{-a\widetilde{\mathrm{Log}}(z+i\epsilon)}\right| \\
&= \frac{1}{|z+i\epsilon+1|}\left|e^{-a\,\widetilde{\mathrm{Log}}(z+i\epsilon)}\right| \\
&= \frac{1}{|z+i\epsilon+1|}\left|e^{-a\log(|z+i\epsilon|)}\right|\left|e^{-ia\,\widetilde{\mathrm{Arg}}(z+i\epsilon)}\right| \\
&= \frac{1}{|z+i\epsilon+1|}\frac{1}{\left|e^{a\log(|z+i\epsilon|)}\right|}1 \\
&\leq \frac{1}{|z+1|}\frac{1}{\left|e^{a\log(|z|)}\right|} \\
&= \left|\frac{1}{(z+1)z^a}\right| = \frac{1}{(z+1)z^a}
\end{aligned}$$

De voorlaatste stap is mogelijk omdat $|a+ib| \geq |a|$, en omdat e^x (in deze stap reëel) en $\log(x)$ stijgende functies zijn.
De functie die we hebben verkregen is integreerbaar:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(z+1)z^a}\,dz &= \int_0^1 \frac{1}{(z+1)z^a}\,dz + \int_1^\infty \frac{1}{(z+1)z^a}\,dz \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{(1)z^a}\,dz + \int_1^\infty \frac{1}{(z)z^a}\,dz \\
&= \frac{1}{-a+1}\left[z^{-a+1}\right]_0^1 + \frac{1}{-a}\left[z^{-a}\right]_1^\infty \\
&= \frac{1}{-a+1}(1-0) + \frac{1}{-a}(0-1)
\end{aligned}$$

Dus de limieten zijn inwisselbaar en hieruit volgt dat we als we ϵ naar 0 laten gaan het volgende krijgen (merk op dat we ook de integraal en limiet mogen verwisselen bij C_3, om dezelfde beargumentatie als voor C_2):

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f &= \int_0^\infty \lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathbb{1}_{(\epsilon,\infty)}(z)\frac{1}{z+i\epsilon+1}e^{-a\,\widetilde{\mathrm{Log}}(z+i\epsilon)}dz \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{z+1}e^{-a\log(|z|)+0}dz \\
\int_{C_3} f &= -\int_0^\infty \lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathbb{1}_{(\epsilon,\infty)}(z)\frac{1}{z-i\epsilon+1}e^{-a\,\widetilde{\mathrm{Log}}(z-i\epsilon)}dz \\
&= -\int_0^\infty \frac{1}{z+1}e^{-a\log(|z|)-a2\pi i}dz
\end{aligned}$$

Dit is omdat $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\widetilde{\mathrm{Arg}}(z+i\epsilon) = 0$ en $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\widetilde{\mathrm{Arg}}(z-i\epsilon) = 2\pi$, en het minus teken bij de integraal van C_3 is omdat de kromme daar de andere richting uitgaat.

Dus alles samengenomen weten we dat

$$
\begin{aligned}
2\pi i e^{-a\pi i} &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{z+1}e^{-a\log(|z|)}dz + 0 - \int_0^\infty \frac{1}{z+1}e^{-a\log(|z|)+2a\pi i}dz + 0 \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{z+1}e^{-a\log(|z|)}\big(1-e^{2a\pi i}\big)dz \\
&= \big(1-e^{2a\pi i}\big)\int_0^\infty \frac{1}{(z+1)z^a}dz
\end{aligned}
$$

Dus:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(z+1)z^a}dz &= 2\pi i\,\frac{e^{-a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}} \\
&= \frac{2\pi i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}} \\
&= \frac{2\pi i}{\cos(a\pi)+i\sin(a\pi)-\cos(a\pi)-i\sin(-a\pi)} \\
&= \frac{2\pi i}{2i\sin(a\pi)} \\
&= \frac{\pi}{\sin(a\pi)}
\end{aligned}
$$

Nu krijgen we door a te vervangen door $\frac{1}{p}$ of $\frac{1}{p'}$ dat $A = \left(\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\right)^{\frac{1}{p'}}$ en dat $B = \left(\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p'})}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi(1-\frac{1}{p}))}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\right)^{\frac{1}{p}}$ (want $\sin(x)$ is symmetrisch rond $\frac{\pi}{2}$)

Dus volgt uit de Test van Schur: $\forall 1 < p < \infty$ geldt $H : L^p([0,\infty)) \longrightarrow L^p([0,\infty))$ en $\|H\| = AB = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$

We zien dat hoewel H begrensd is $\forall 1 < p < \infty$, H dat nog niet hoeft te zijn als $p = 1$. Maar later zullen we hier de Extrapolatie Stelling van Yano op kunnen toepassen.

5 De Extrapolatie Stelling van Yano

5.1 Sublineaire operators

De Extrapolatie Stelling van Yano geldt voor meer dan alleen maar operatoren, die we vanaf nu *lineaire operatoren* zullen noemen: het geldt ook voor sub-lineaire operatoren.

Definitie 5.1. *Voor functie-vectorruimtes X, Y is $T : X \to Y$ een* ***sub-lineaire operator*** *als* $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$, *en* $T(\alpha f) = |\alpha| T(f)$
Weer wordt er een (sublineaire) operator norm gedefiniëerd op T:

$$\|T : X \to Y\| = \sup(\{\|T(f)\|_Y : \|f\|_X = 1\})$$

Weet dat $T(f) \in Y$, wat een verzameling van functies is (van het type $\Omega \to \mathbb{R}$), dus de $|\cdot|$ uit het bewijs is niets anders dan de absolute waarde op $\mathbb{R}$, die puntsgewijs wordt toegepast op $T(f)(x)$
De belangrijkste vraag is hoezeer Stelling 14 voor sub-lineaire operatoren blijft gelden. Aan het bewijs is te zien dat begrensdheid en continuïteit in 0 nog steeds equivalent zijn, maar continuïteit in 0 betekent niet continuïteit elders voor elke norm. Maar voor elke norm dat beschreven is in dit verslag geldt dat $\||f|\| = \|f\|$, omdat in de definitie van de norm al de absolute waarde wordt genomen. Ook is het zo dat als $|f(x)| \leq |g(x)|$ dan $\|f\| \leq \|g\|$: (gebruik makend van Stelling 6 (4))

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \leq \int_\Omega |g(x)|^p \, d\mu(x) = \|g\|_{L^p}^p$$

$$\|f\|_{L\log^\alpha L} = \int_0^{\mu(\Omega)} f^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t) \leq \int_0^{\mu(\Omega)} g^*(t) \log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t) = \|g\|_{L\log^\alpha L}$$

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \Big(\int_0^\infty \frac{\big(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\big)^q}{t} \, d\lambda(t)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\int_0^\infty \frac{\big(t^{\frac{1}{p}} g^*(t)\big)^q}{t} \, d\lambda(t)\Big)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_{L^{p,q}}$$

En dat betekent voor sub-lineaire operators dat voor deze normen en normen met dezelfde eigenschap gelden:

$$\|T(f+g)\| = \||T(f+g)|\| \leq \||T(f)| + |T(g)|\| \leq \|T(f)\| + \|T(g)\|$$

Zoals we zullen zien is dit een handige eigenschap om te hebben.

5.2 Het bewijs van de Stelling van Yano: een intro

Om de begrensdheid van operatoren te bewijzen wordt er een trucje uitgehaald: eerst willen we de bijbehorende ongelijkheid versimpelen. Maar om dat te doen moeten we eerst wat werk verrichten: We zullen het domein van de functie opsplitsen in verschillende delen waarop we de **dalende herschikking** naar iets makkelijkers kunnen afschatten.
Voor het opdelen van het domein starten we bij de **dalende herschikking**, zijn domein is natuurlijk $[0, \mu(\Omega)] = [0, 1]$. Dit wordt eerst opgehakt bij elke e^{-k}: we definiëren de opdeling van $[0, 1]$:

$$I_k := (e^{-k}, e^{-k+1})$$

We willen deze opdeling van $[0, 1]$ relateren aan Ω, dit doen we als volgt:

$$A_k := \{x \in \Omega : f^*(e^{-k+1}) \leq f(x) \leq f^*(e^{-k})\}$$

Het wordt belangrijk dat de maat van I_k behouden blijft, daarvoor gebruiken we de volgende gelijkheid:

$$\mu(\{x \in \Omega : a \leq f(x) \leq b\}) = \lambda(\{t \in [0,1] : a \leq f^*(t) \leq b\}$$

Hieruit volgt dat $\mu\big(A_k\big) = \lambda\big(\{t \in [0,1] : f^*(e^{-k+1}) \leq f^*(t) \leq f^*(e^{-k})\}\big)$. Omdat f^* dalend is zit elke t waarvoor geldt dat $f^*(t) \in (f^*(e^{-k+1}), f^*(e^{-k}))$ in I_k (en andersom). Hieruit kan je afleiden:

$$\begin{aligned}
\mu(A_k) &= \lambda\big(\{t \in [0,1] : f^*(e^{-k+1}) \leq f^*(t) \leq f^*(e^{-k})\}\big) \\
&\geq \lambda\big(\{t \in [0,1] : f^*(e^{-k+1}) < f^*(t) < f^*(e^{-k})\}\big) \\
&= \lambda\big(I_k\big)
\end{aligned}$$

Maar de verzameling $\{t \in [0,1] : f^*(t) = f^*(e^{-k+1})$ of $f^*(t) = f^*(e^{-k})\}$ hoeft niet persé een verzameling met maat nul te zijn, dus is er niet altijd sprake van gelijkheid. Om dit op te lossen moeten we een deel van A_k erafsnijden. Merk op dat de verschillende A_k's elkaar overlappen, het is dus mogelijk dat we een deel van A_k wegsnijden en dat de getrimde verzamelingen nog steeds een opsplitsing van Ω vormen, en dat is wat we willen doen.

Een fout

Variations on Yano's Extrapolation Theorem [4] trimt A_k door ervan de doorsnede met een bol te nemen, met de bolgrootte zó gekozen dat de getrimde verzameling de gewenste maat heeft. Maar er zal blijken dat deze manier van trimmen ertoe leidt dat er stukken worden weggegooid die *niet* door een andere A_k kan worden opgevangen.
De trim van A_1 heeft de vorm $A_1 \cap B(0,r)$. Deze trim heeft de juiste maat vanwege de middelwaardestelling: de functie $x \mapsto \mu\big(A_1 \cap B(0,r)\big)$ continu is, er geldt dat $\mu(A_1 \cap B(0,0))) = 0$, en omdat er een R is zodat $\mu\big(A_1 \cap B(0,R)\big) = \mu\big(A_1\big) \geq \lambda\big(I_1\big)$. Het laatste geldt omdat *Variations on Yano's Theorem* aanneemt dat Ω begrensd is. Uit deze 3 eigenschappen van de functie volgt dat er een r_1 bestaat, zodat $\mu\big(A_1 \cap B(0,r_1)\big) = \lambda\big(I_1\big)$.
Nu wordt A_2 getrimd, maar voordat dit gebeurt wordt overlap met Ω_1 verwijderd:

$$\tilde{A}_2 := A_2 \setminus \Omega_1$$

$\tilde{A}_2$ wordt weer getrimd door het weer te doorsnijden met een bol zó dat het resultaat de gewenste maat heeft, namelijk gelijk aan $\lambda\big(I_2\big)$. Het idee is dat dit weer mogelijk vanwege de middelwaardestelling.
Maar nu kan het zijn dat $\mu(\tilde{A}_2) < \lambda(I_2)$, en dan gaat dit fout: dan is het onmogelijk om $\tilde{A}_2$ te trimmen tot een verzameling met maat gelijk aan $\lambda(I_2)$
Op deze manier wordt een serie disjuncte verzamelingen Ω_k gebouwd die samen Ω bijna overal zouden bedekken. Inderdaad, als alles goed gaat is de maat van elke Ω_k gelijk aan die van I_k, en dus geldt vanwege het disjunct zijn van de twee series verzamelingen en de σ-additiviteit van de Lebesgue maat:

$$\mu(\bigcup_{k\geq 1} \Omega_k) = \sum_{k\geq 1} \mu(\Omega_k) = \sum_{k\geq 1} \lambda(I_k) = \lambda(\bigcup_{k\geq 1} I_k) = 1 = \mu(\Omega)$$

En dus kan het alleen maar bijna nergens Ω niet bedekken.

Maar als voor een of andere $k > 1$ geldt dat $\mu(\tilde{A}_k) < \lambda(I_k)$ gaat dat niet meer op en geldt $\mu(\bigcup_{k\geq 1} \Omega_k) < \mu(\Omega)$.
Om te bewijzen dat het fout kan gaan zullen we nu een functie bouwen waarvoor het fout gaat.

Een tegenvoorbeeld

We laten $\Omega = [0;1]$, en definiëren $f(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[\frac{1}{4};\frac{1}{2}]}(x) + 2 \cdot \mathbb{1}_{[\frac{3}{4};1]}(x)$
Dan $m_f(\lambda) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,1)}(\lambda) + \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[1;2)}(\lambda)$
Dus $f^*(t) = 2 \cdot \mathbb{1}_{[0;\frac{1}{4})}(t) + 1 \cdot \mathbb{1}_{[\frac{1}{4};\frac{1}{2})}(t)$
Nu:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \Omega : f^*(1) \leq |f(x)| \leq f^*(\frac{1}{e})\} \\ &= \{x \in \Omega : 0 \leq |f(x)| \leq 1\} \\ &= [0; \frac{3}{4}] \end{aligned}$$

Nu construëren we Ω_1, daarvoor rekenen we eerst $\lambda(I_k)$ uit. We zullen zien dat voor de straal van de bol $r_1 = 1 - \frac{1}{e}$ de juiste keuze is.

$$\begin{aligned} \lambda(I_1) = \lambda\big((\frac{1}{e}; 1)\big) &= 1 - \frac{1}{e} \\ \Omega_1 = [0; \frac{3}{4}] \cap B(0; 1 - \frac{1}{e}) = [0, 1 - \frac{1}{e}) &\approx [0; 0.63] \end{aligned}$$

Nu bouwen we Ω_2:

$$\begin{aligned} A_2 &= \{x \in \Omega : |f(x)| \in \big[f^*(\frac{1}{e}); f^*(\frac{1}{e^2})\big]\} \\ &= \{x \in \Omega : |f(x)| \in [1; 2]\} \\ &= [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{4}; 1] \\ \tilde{A}_2 &= A_2 \setminus \Omega_1 = [\frac{3}{4}; 1] \\ \lambda(I_2) &= \lambda\big((\frac{1}{e^2}; \frac{1}{e})\big) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \\ r_2 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \approx 0.23 \\ \Omega_2 &= \tilde{A}_2 \cap B(0; r_2) = [\frac{3}{4}; \frac{3}{4} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}) \approx [0.75; 0.9825) \end{aligned}$$

Ω_1 en Ω_2 omvatten alles behalve $(0.63; 0.75)$ en $(0.98; 1]$. En A_3 (en alle A_k erna) omvat de waardes waarvoor geldt $f(x) = 2$, dat zullen we zo zien. Maar op $(0.63; 0.75)$ geldt dat $f(x) = 0$, die verzameling zal niet meer terugkomen in een van de Ω_k hierna. Maar dan kunnen de Ω_k niet meer Ω bijna overal bedekken.
Dit hoeft niet bewezen te worden, want als Ω_3 gaan proberen te bouwen gaat het al op een andere manier fout:

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \{x \in \Omega : |f(x)| \in \big[f^*(\frac{1}{e^2}); f^*(\frac{1}{e^3})\big]\} \\
&= \{x \in \Omega : |f(x)| = 2\} \\
&= [\frac{3}{4}; 1] \\
\tilde{A}_3 &= A_3 \setminus \Omega_2 = [\frac{3}{4} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}; 1] \approx [0.9825; 1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu(\tilde{A}_3) \approx 0.0175 \\
&\lambda(I_3) = \lambda\big((\frac{1}{e^3}; \frac{1}{e^2})\big) \approx 0.0855 \\
&\implies \lambda(I_3) > \mu(\tilde{A}_3)
\end{aligned}
$$

Het is nu onmogelijk om $\tilde{A}_3$ te trimmen tot iets met maat gelijk aan $\lambda(I_3)$: de middelwaarde stelling gaat hier niet op. Hier werkt deze methode niet.

5.2.1 De oplossing

Er is een simpelere aanpak mogelijk door niet aan alle eisen te voldoen. Maar eigenlijk hoeft niet aan alle eisen te worden voldaan. De eis dat $\mu(\Omega) = \lambda(I_k) = e^{-k+1} - e^{-k}$, waarvoor deze ongemakkelijke constructie nodig was, is niet nodig; we zullen zien dat eisen dat $\mu(\Omega) \leq e^{-k+1}$ voldoet, en dat daar veel makkelijker de juiste verzamelingen Ω_k voor is te bouwen. Namelijk:

$$
\Omega_k := \{x \in \Omega : f^*(e^{-k+1}) < |f(x)| \leq f^*(e^{-k})\}
$$

Met deze definitie wordt de maat:

$$
\begin{aligned}
\mu(\Omega_k) &\leq \mu(\{x \in \Omega : f^*(e^{-k+1}) < |f(x)|\}) \\
(\textit{Stelling } 6\ (3)) \quad &= \lambda(\{t \in [0,1] : f^*(e^{-k+1}) < f^*(t)\}) \\
&\leq \lambda(\{t \in [0,1] : t < e^{-k+1}\}) \\
&= e^{-k+1}
\end{aligned}
$$

Dit is genoeg om nu de Extrapolatie Stelling van Yano te bewijzen

5.3 Verder met de Extrapolatie Stelling van Yano

We zullen nu een bewijs leveren voor de Extrapolatie Stelling van Yano. De stellingen en delen van de bewijzen komen uit Variations on Yano's Extrapolation Theorem [4], maar zijn aangepast om fouten die in het artikel zijn gemaakt eruit te halen.
We maken gebruik van de opdeling van Ω, en definiëren $f_k := f \cdot \mathbb{1}_{\Omega_k}$
We beginnen met een lemma dat we nodig zullen hebben

Lemma 17. *Laat $p \in [1, \infty)$, $T : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$ een begrensde sublineaire operator, en $f \in L^p(\Omega)$*
Dan geldt voor de decompositie f_k zoals boven beschreven, $\forall x \in \Omega$:

$$
\int_\Omega |T(\sum_{k=1}^{\infty} f_k)(x)|\, d\mu(x) \leq \int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} |T(f_k)(x)|\, d\mu(x)
$$

Bewijs. Omdat voor $\forall g, h \in L^p : |T(g+h)(x)| \leq |T(g)(x)| + |T(h)(x)|$ kunnen we stellen dat

$$\begin{aligned}
|T\big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\big)(x)| &= |T\big(\sum_{k=1}^{N-1} f_k + \sum_{k=N}^{\infty} f_k\big)(x)| \\
&\leq |T(\sum_{k=1}^{N-1} f_k)(x)| + |T(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(x)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} |T(f_k)(x)| + |T(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(x)|
\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |T\big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\big)(x)|\, d\mu(x) &\leq \int_\Omega |T(\sum_{k=1}^{N} f_k)(x)| + |T(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(x)|\, d\mu(x) \\
&= \int_\Omega |T(\sum_{k=1}^{N} f_k)(x)|\, d\mu(x) + \int_\Omega |T(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(x)|\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

Als we de rest-term klein kunnen praten als we N naar oneindig sturen hebben we wat we willen. Met behulp van Hölder weten we:

$$\int_\Omega |T(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(x)| d\mu(x) \leq \|T(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)\|_{L^p} \cdot \|1\|_{L^{p'}}$$

En omdat T begrensd is:

$$\|T(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)\|_{L^p} \cdot \|1\|_{L^{p'}} \leq \|T\| \, \big\| \sum_{k=N}^{\infty} f_k \big\|_{L^p} \, \|1\|_{L^{p'}}$$

We noemen voor het gemak $C := \|T\| \cdot \|1\|_{L^{p'}}$
Omdat de verzamelingen Ω_k disjunct zijn, weten we dat

$$\| \sum_{k=N}^{\infty} f_k\|_{L^p}^p := \int_\Omega \Big| \sum_{k=N}^{\infty} f(x) \mathbb{1}_{\Omega_k}(x) \Big|^p \, d\mu(x) = \int_\Omega |f(x)|^p \sum_{k=N}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_k}(x)\, d\mu(x)$$

We willen de reeks uit de integraal halen met behulp van de Monotone Convergentie Stelling. Deze is toe te passen want $|f|^p \sum_{k=N}^{n} \mathbb{1}_{\Omega_k} \uparrow_{(n)} |f|^p \sum_{k=N}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_k}$ puntsgewijs $\forall x \in \Omega$, dus

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^p \sum_{k=N}^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_k}(x)\, d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x)|^p \sum_{k=N}^{n} \mathbb{1}_{\Omega_k}(x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{k=N}^{\infty} \int_\Omega |f(x)|^p \mathbb{1}_{\Omega_k}(x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{k=N}^{\infty} \int_{\Omega_k} |f(x)|^p \, d\mu(x) \\
&\leq \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) = \|f\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

Door $N = 1$ te stellen zien we dat het een convergente reeks is, en dat betekent dat de restterm, namelijk $\| \sum_{k=N}^{\infty} f_k\|_{L^p}^p$, naar 0 convergeert als als $N \to \infty$.
Dus kunnen we concluderen dat

$$\int_\Omega |T(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(x)| \, d\mu(x) \le C \, \| \sum_{k=N}^{\infty} f_k\|_{L^p} \xrightarrow{N} 0$$

□

Dan zullen we ons nu richten op de Extrapolatie Stelling van Yano zelf. Eerst bewijzen we een versie van de stelling dat beperkt is tot functies uit $L^{1+\delta}$, als deelverzameling van $L\log^\alpha L$, om dit later uit te breiden tot functies uit heel $L\log^\alpha L$

Stelling 18. *Laat (Ω, μ) een maatruimte zijn zodat $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, μ de bijbehorende Lebesgue-maat is, en $\mu(\Omega) = 1$. Neem $\delta \in (0, 1)$, laat T een sub-lineaire operator zijn zodat $\forall p \in (1, 1+\delta]$ geldt dat $T : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$ begrensd is zodanig dat $\exists C, \alpha > 0$:*

$$\forall f \in L^p(\Omega) : \|T(f)\|_{L^1} \le C(p-1)^{-\alpha}\|f\|_{L^p}$$

dan $\exists \widetilde{C} > 0$ zodat

$$\forall f \in L^{1+\delta}(\Omega) : \|T(f)\|_{L^1} \le \tilde{C}\|f\|_{L\log^\alpha L}$$

Preciezer: $\widetilde{C} = \frac{C\cdot e}{(1-1/e)\delta^\alpha}$

Bewijs. Omdat bovenstaand lemma alleen werkt voor $f \in L^p$ is het nodig om de Stelling van Yano eerst te bewijzen voor $f \in L^p$. Daarna kunnen we het feit dat L^p dicht ligt in $L\log^\alpha L$ gebruiken om het bewijs door te trekken naar heel $L\log^\alpha L$
We nemen $f \in L^{1+\delta}$ willekeurig, dan $f \in L\log^\alpha L$ en $\forall p \in [1, 1+\delta] : f \in L^p$. Dit zijn alle functieruimtes die we nodig hebben.
Door bovenstaand lemma krijgen we dan:

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |T(f)(x)| d\mu(x) \\
&= \int_\Omega |T(\sum_{k=1}^{\infty} f_k)(x)| d\mu(x) \\
&\le \int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} |T(f_k)(x)| d\mu(x)
\end{aligned}$$

Om de som en integraal om te wisselen, passen we de Monotone Convergentie Stelling toe. Deze stelt dat een begrensde, monotone rij convergeert. Dat is $\{\int_\Omega \sum_{k=1}^{N} |T(f_k)(x)| d\mu(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$ omdat de reeks absoluut is, dus de functiereeks stijgt puntsgewijs monotoon, en betekent dat de integraal over het geheel monotoon stijgt. Het moet wel nog begrensd zijn. Maar voor $N \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{N} |T(f_k)(x)| d\mu(x) = \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega |T(f_k)(x)| d\mu(x)$$

dus als het rechterlid begrensd is, is het linkerlid dat ook. Het rechterlid is een absolute reeks, dus

$$\sum_{k=1}^{N} \int_\Omega |T(f_k)(x)| d\mu(x) \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |T(f_k)(x)| d\mu(x)$$

en dus bewijs je de begrensdheid van de rij door te bewijzen dat de reeks eindig is. Als de rij in de ene vorm convergeert, convergeert het in het andere natuurlijk ook en dan geldt:

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} |T(f_k)(x)| d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |T(f_k)(x)| d\mu(x)$$

We kunnen dus de reeks uit de integraal halen, en we gebruiken het gegeven dat $\|T(g)\|_{L^1} \leq C(p-1)^{-\alpha}\|g\|_{L^p}$ voor $p \leq 1+\delta$, dus ook voor $p = 1 + \delta\frac{1}{k}$; $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |T(f_k)(x)| d\mu(x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |T(f_k)(x)| \, d\mu(x) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} C(1+\delta\frac{1}{k}-1)^{-\alpha}\|f_k\|_{L^{\frac{1}{1+\delta\frac{1}{k}}}} \\
&= C\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{\delta}\right)^{\alpha} \|f_k\|_{L^{1+\delta\frac{1}{k}}} \\
&= \frac{C}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \|f_k\|_{L^{1+\delta\frac{1}{k}}}
\end{aligned}$$

Omdat $f_k = f \cdot \mathbb{1}_{\Omega_k}$ en $\Omega_k = \{x \in \Omega : f^*(e^{-k+1}) < |f(x)| \leq f^*(e^{-k})\}$ kunnen we f_k afschatten naar $f^*(e^{-k}) \cdot \mathbb{1}_{\Omega_k}$, dus

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |T(f_k)(x)| d\mu(x) &\leq \frac{C}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \|f^*(e^{-k})\mathbb{1}_{\Omega_k}\|_{L^{1+\delta\frac{1}{k}}} \\
&= \frac{C}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha f^*(e^{-k})\mu(\Omega_k)^{\frac{1}{1+\delta\frac{1}{k}}}
\end{aligned}$$

Het gegeven $\mu(\Omega_k) \leq e^{-k+1}$ en daarna uitwerken levert:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |T(f_k)(x)| d\mu(x) &\leq \frac{C}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha f^*(e^{-k}) e^{-k\frac{1}{1+\delta\frac{1}{k}}} \\
&= \frac{C}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha f^*(e^{-k}) e^{-k} e^{k-\frac{k}{1+\delta\frac{1}{k}}} \\
&= \frac{C}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha f^*(e^{-k}) e^{-k} e^{\frac{\delta}{1+\delta\frac{1}{k}}} \leq \frac{C}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha f^*(e^{-k}) e^{-k} e^{1} \\
&= \frac{C \cdot e}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha f^*(e^{-k}) e^{-k}
\end{aligned}$$

Nu behandelen we de ongelijkheid vanaf de andere kant:

$$\int_0^1 f^*(t)\log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k} f^*(t)\log^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) d\lambda(t)$$
$$\geq \sum_{\mathbf{k=2}}^{\infty}\int_{I_k} f^*(e^{-k+1})(k-1)^\alpha\, d\lambda(t)$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} f^*(e^{-k+1})\lambda(I_k)(k-1)^\alpha$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} f^*(e^{-k+1})\,(e^{-k+1}-e^{-k})\,(k-1)^\alpha$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} f^*(e^{-k+1})\,e^{-k+1}(1-\frac{1}{e})\,(k-1)^\alpha$$
$$= (1-\frac{1}{e})\sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} f^*(e^{-k})\,e^{-k}\,(k)^\alpha$$

Dus geldt dat

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega |T(f_k)(x)|d\mu(x) \leq \frac{C\cdot e}{\delta^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha f^*(e^{-k})e^{-k} \leq \frac{C\cdot e}{\delta^\alpha(1-\frac{1}{e})}\,\|f\|_{L(\log L)^\alpha} < \infty$$

Dus geldt de Monotone Convergentie-Stelling voor $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{N}|T(f_k)(x)|\,d\mu(x)$, dus

$$\|T(f)\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_\Omega\sum_{k=1}^{\infty}|T(f_k)(x)|d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega |T(f_k)(x)|d\mu(x) \leq \frac{C\cdot e}{\delta^\alpha(1-\frac{1}{e})}\,\|f\|_{L(\log L)^\alpha}$$

voor alle $f \in L^{1+\delta}$ □

Lemma 19. *Als $T : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ en $\alpha \in (0,\infty)$, een sublineaire operator is zodat $\exists C \geq 0$:*

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq C\|f\|_{L\log^\alpha L}$$

én $\forall f, g \in L^p$ het volgende geldt:

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq |T(f-g)(x)|$$

dan is er een unieke sublineaire operator $\widetilde{T} : L\log^\alpha L(\Omega) \to L^1(\Omega)$ zodat $T = \widetilde{T}$ op L^p, $\widetilde{T}$ begrensd is, en $|\widetilde{T}(f)(x) - \widetilde{T}(g)(x)| \leq |\widetilde{T}(f-g)(x)|$
Daarnaast geldt $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$, en is $\widetilde{T}$ continu.

Bewijs. We willen $\widetilde{T}$ bouwen door T continu uit te breiden naar $L\log^\alpha L$. We nemen $f \in L\log^\alpha L$, L^p is dicht in $L\log^\alpha L$ dus er is een rij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ zodat $\|f_n - f\|_{L\log^\alpha L} \xrightarrow{n} 0$
Dat is dan ook een cauchy-rij.

Nu willen we laten zien dat $\{T(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ een cauchy-rij vormt (in L^1).

$$\begin{aligned}\|T(f_n)-T(f_m)\|_{L^1} &= \int\limits_\Omega \big|T(f_n)(x)-T(f_m)(x)\big|\,d\mu(x)\\ &\leq \int\limits_\Omega \big|T(f_n-f_m)(x)\big|\,d\mu(x)\\ &= \|T(f_n-f)\|_{L^1}\\ &\leq \|T\|\cdot\|f_n-f\|_{L\log^\alpha L} \overset{n}{\to} 0\end{aligned}$$

$L^1(\Omega)$ is compleet, dus $\exists h\in L^1 : \|T(f_n)-h\|_{L^1}\overset{n}{\to} 0$
Het doel is om $\widetilde{T}(f) := \lim_{n\to\infty} T(f_n) = h$ te definiëren, maar er zijn meerdere rijen in L^p die naar f convergeren, dus het is nodig dat een andere rij hetzelfde resultaat geeft. We zullen nu zien dat dit inderdaad zo is.
Laat nu $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq L^p$ een andere rij zijn zodat $\|g_n-f\|_{L\log^\alpha L}\overset{n}{\to} 0$
Dan:

$$\begin{aligned}\|T(g_n)-h\|_{L^1} &= \|T(g_n)-T(f_n)+T(f_n)-h\|_{L^1}\\ &\leq \|T(g_n)-T(f_n)\|_{L^1}+\|T(f_n)-h\|_{L^1}\\ &\leq \|T\|\cdot\|g_n-f_n\|_{L\log^\alpha L}+\|T(f_n)-h\|_{L^1}\\ &\overset{n}{\to} 0\end{aligned}$$

Dus kunnen we $\widetilde{T} : L\log^\alpha L \longrightarrow L^1$ definiëren als:

$$\widetilde{T}(f) := \lim_{g\to f} T(g)$$

Nu moeten we laten zien dat het begrensd, continu, en sublineair is. We weten dat voor sublineaire operatoren continuïteit begrensdheid impliceert, dus bewijzen dat $\widetilde{T}$ continu is is voor ons voldoende.
We nemen weer $f\in L\log^\alpha L$ willekeurig, en we nemen een willekeurige rij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq L^p$ zodat $\|f_n-f\|_{L\log^\alpha L}\overset{n}{\to} 0$
Omdat normen continu zijn en omdat $T(f_n)\overset{n}{\to}\widetilde{T}(f)$, hebben we:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}(f)\|_{L^1} &= \lim_{n\to\infty}\|T(f_n)\|_{L^1}\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\|T\|\cdot\|f_n\|_{L\log^\alpha L}\\ &= \|T\|\cdot\|f\|_{L\log^\alpha L}\end{aligned}$$

Dus is $\widetilde{T}$ begrensd en $\|\widetilde{T}\|\leq\|T\|$. Daarbij geldt:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}\| &= \sup(\{\|\widetilde{T}(f)\|_{L^1} : f\in L\log^\alpha L \text{ en } \|f\|_{L\log^\alpha L}=1\}\\ &\geq \sup(\{\|\widetilde{T}(f)\|_{L^1} : f\in L^p\subseteq L\log^\alpha L \text{ en } \|f\|_{L\log^\alpha L}=1\}\\ &= \|T\|\end{aligned}$$

Dus $\|\widetilde{T}\|=\|T\|$
Nu moeten we nog laten zien dat $\widetilde{T}$ sublineair is. We nemen $f,g\in L\log^\alpha L$, dan bestaan er $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq L^p$ zodat $\|f-f_n\|_{L\log^\alpha L}\overset{n}{\to} 0$ en $\|g-g_n\|_{L\log^\alpha L}\overset{n}{\to} 0$

Dan geldt vanwege de definitie van $\widetilde{T}$ dat:

$$\|\widetilde{T}(f) - T(f_n)\|_{L^1} \xrightarrow{n} 0 \text{ en } \|\widetilde{T}(g) - T(g_n)\|_{L^1} \xrightarrow{n} 0$$

Maar voor sublineariteit willen we achterhalen wat $\widetilde{T}(f+g)(x)$ is. Daarvoor gebruiken we Stelling 3, dat stelt dat er deelrijen $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \{g_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ bestaan zodat het volgende geldt:

$$\lim_{k\to\infty} T(f_{n_k})(x) = \widetilde{T}(f)(x) \text{ bijna overal}$$
$$\lim_{k\to\infty} T(g_{m_k})(x) = \widetilde{T}(g)(x) \text{ bijna overal}$$

Omdat $\|f+g-(f_{n_k}+g_{m_k})\|_{L\log^\alpha L} \xrightarrow{k} 0$ geldt ook dat $\|\widetilde{T}(f+g) - T(f_{n_k}+g_{m_k})\|_{L^1} \xrightarrow{n} 0$ en dus is er weer een deelrij $\{f_{n_{k_l}} + g_{m_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ zodat:

$$\lim_{l\to\infty} T(f_{n_{k_l}} + g_{m_{k_l}})(x) = \widetilde{T}(f+g)(x) \text{ bijna overal}$$

Nu weten we genoeg om de sublineairiteit van $\widetilde{T}$ te bewijzen. Voor bijna alle $x \in \Omega$ voldoen alle 3 bovenstaande limieten, omdat de vereniging van meerdere nulverzamelingen weer een nulverzameling is. Het volgende geldt dus bijna overal:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{T}(f+g)(x)| &= \lim_{l\to\infty} |T(f_{n_{k_l}} + g_{m_{k_l}})(x)| \\
&\leq \lim_{l\to\infty} |T(f_{n_{k_l}})(x)| + |T(g_{m_{k_l}})(x)| \\
&= |\widetilde{T}(f)(x)| + |\widetilde{T}(g)(x)|
\end{aligned}$$

Op dezelfde manier kunnen we zien dat $\widetilde{T}$ ook voldoet aan dezelfde eis dat we T opgelegd hebben: $||\widetilde{T}(f)(x)| - |\widetilde{T}(g)(x)|| \leq |\widetilde{T}(f-g)(x)|$
Met dezelfde beargumentatie als ervoor verkrijgen we een deelrij $\{v_l\}_{l\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ zodat:

$$\lim_{l\to\infty} T(f_{n_{v_l}} - g_{m_{v_l}})(x) = \widetilde{T}(f-g)(x) \text{ bijna overal}$$

En dan kunnen we dat uitwerken tot:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{T}(f)(x) - \widetilde{T}(g)(x)| &= \lim_{l\to\infty} |T(f_{n_{v_l}})(x) - T(g_{m_{v_l}})(x)| \\
&\leq \lim_{l\to\infty} |T(f_{n_{v_l}} - g_{m_{v_l}})(x)| \\
&= |\widetilde{T}(f-g)(x)|
\end{aligned}$$

Dat deze eigenschappen slechts bijna overal gelden is geen probleem, omdat L^1 een verzameling van functieklassen is waarin $f = g$ als en slechts dan als $f(x) = g(x)$ bijna overal. Dus de functieklasse van bijvoorbeeld $\widetilde{T}(f+g)$ omvat daardoor al gegarandeerd functies die niet overal voldoen aan de bijbehorende ongelijkheid, maar ook functies die daar weer wel aan voldoen. Zoals: (Waarbij $\widetilde{T}(f+g)(x)$ nu een willekeurige functie in de functieklasse voorstelt.)

$$h(x) := \begin{cases} \widetilde{T}(f+g)(x) & \text{als } |\widetilde{T}(f+g)(x)| \leq |\widetilde{T}(f)(x)| + |\widetilde{T}(g)(x)| \\ |\widetilde{T}(f)(x)| + |\widetilde{T}(g)(x)| & \text{als } |\widetilde{T}(f+g)(x)| > |\widetilde{T}(f)(x)| + |\widetilde{T}(g)(x)| \end{cases}$$

Dan zit h in de functieklasse, oftewel $h = \widetilde{T}(f+g)$, en voldoet overal aan de ongelijkheid.
Nu kunnen we ook bewijzen dat $\widetilde{T}$, en dus ook T, continu is. We kiezen $f \in L\log^\alpha L$, en een rij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L\log^\alpha L$ zodat $\|f_n - f\|_{L\log^\alpha L} \xrightarrow{n} 0$

Dus, dan hebben we:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}(f_n) - \widetilde{T}(f)\|_{L^1} &\leq \|\widetilde{T}(f_n - f)\|_{L^1} \\ &\leq \|T\| \cdot \|f_n - f\|_{L\log^\alpha L} \\ &\xrightarrow{n} 0\end{aligned}$$

En dus is $\widetilde{T}$ (en T) continu.
Ten slotte is $\widetilde{T}$ ook de enige continue uitbreiding. Immers, omdat continue functies de eigenschap hebben dat limieten uit de functie gehaald kunnen worden is de manier waarop $\widetilde{T}$ is geconstrueerd ook de manier waarop vastgesteld wordt dat er maar één manier is om T uit te breiden. Uit de rest van dit bewijs valt af te leiden dat elke sublineaire, begrensde operator dat voldoet aan de ongelijkheid $|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq |T(f+g)(x)|$ ook continu moet zijn, dus de zonet geconstrueerde operator is daarom ook de enige uitbreiding die die eigenschappen heeft. $\square$

Operatoren die sublineair zijn en voldoen aan de vergelijking

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq |T(f-g)(x)|$$

zijn bijvoorbeeld de lineaire operatoren, en de positieve sublineaire operatoren: operatoren zodat $T(f)(x) \geq 0$ voor elke f in het domein van T, en $\forall x \in \Omega$
Dit is omdat we uit de definitie van sublineairiteit krijgen:

$$\begin{aligned}&|T(f)(x)| \leq |T(f-g)(x)| + |T(g)(x)| \\ \implies \quad & \begin{array}{rl} |T(f)(x)| - |T(g)(x)| & \leq |T(f-g)(x)| \\ -(|T(f)(x)| - |T(g)(x)|) & \leq |T(g-f)(x)| \leq |-1| \cdot |T(f-g)(x)| \end{array}\end{aligned}$$

Dus weten we dat

$$\big||T(f)(x)| - |T(g)(x)|\big| \leq |T(f-g)(x)|$$

En omdat de operator positief is hebben we $|T(f)(x)| = T(f)(x)$ en dus voldoen positieve sublineaire operatoren ook aan de vergelijking.
Dan kunnen we nu de Extrapolatie Stelling van Yano afmaken.

Stelling 20 (De Extrapolatie Stelling van Yano)**.** *Laat (Ω, μ) een maatruimte zijn zodat $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en μ de bijbehorende Lebesgue-maat is, en $\mu(\Omega) = 1$. Neem $\delta \in (0,1)$, laat T een sublineaire operator zijn zodat $\forall p \in (1, 1+\delta]$ geldt dat $T : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$ begrensd is zodanig dat $\exists C, \alpha > 0$ zodat $\forall f, g \in L^p$:*

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq C(p-1)^{-\alpha}\|f\|_{L^p}$$

en $\forall x \in \Omega$:

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq |T(f-g)(x)|$$

Dan is er een sublineaire operator $\widetilde{T} : L\log^\alpha L(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ en $\tilde{C} > 0$ zodat $\forall f \in L^p(\Omega)$: $\widetilde{T}(f) = T(f)$ en $\forall f \in L\log^\alpha L$:

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq \tilde{C}\|f\|_{L\log^\alpha L}$$

Preciezer: $\widetilde{C} = \frac{C \cdot e}{(1-1/e)\delta^\alpha}$

Bewijs. Uit Stelling 18 weten we dat $\forall f \in L^{1+\delta}$ geldt:

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq \frac{C \cdot e}{\delta^\alpha(1-\frac{1}{e})} \|f\|_{L(\log L)^\alpha}$$

Met Lemma 19 weten we dat er een unieke sublineaire operator $\widetilde{T} : L\log^\alpha L \longrightarrow L^1$ bestaat zodat $\forall f, g \in L^{1+\delta}$ geldt dat $\widetilde{T}(f) = T(f)$ en dat $\forall x \in \Omega : |\widetilde{T}(f)(x) - \widetilde{T}(g)(x)| \leq |\widetilde{T}(f-g)(x)|$ Ook weten we dat $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ en dus geldt $\forall f \in L\log^\alpha L$ dat

$$\|\widetilde{T}(f)\|_{L^1} \leq \frac{C \cdot e}{\delta^\alpha(1-\frac{1}{e})} \|f\|_{L\log^\alpha L}$$

Nu moeten we nog zien of $\forall p \in (1, \delta]$ geldt dat $\forall f \in L^p(\Omega) : \widetilde{T}(f) = T(f)$
We nemen $p \in (1, 1+\delta]$ vast. Dan geldt $\forall q \in (1, p]$ dat $\forall f \in L^p$

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq C(q-1)^{-\alpha}\|f\|_{L^q}$$

dus door Stelling 18 toe te passen weten we dat $\forall f \in L^p$ geldt:

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq \frac{C \cdot e}{(p-1)^\alpha(1-\frac{1}{e})} \|f\|_{L(\log L)^\alpha}$$

En dus volgt er uit Lemma 19 dat er weer een unieke uitbreiding $\widetilde{T}'$ van $T|_{L^p}$ bestaat. Maar omdat $L^{1+\delta} \subseteq L^p$ is $\widetilde{T}'$ ook een uitbreiding van T op $L^{1+\delta}$. Maar die heeft maar één uitbreiding, dus $\widetilde{T}' = \widetilde{T}$
Dus volgt dat voor $f \in L^p$ dat $T(f) = \widetilde{T}'(f) = \widetilde{T}(f)$ $\square$

Dit was niet de echte Extrapolatie Stelling van Yano, zoals beschreven in Variations on Yano's Extraplotation Theorem [4], die is iets anders. Maar gelukkig volgt de eigenlijke Stelling van Yano er bijna direct uit:

Stelling 21 (De eigenlijke Extrapolatie Stelling van Yano)**.** *Laat (Ω, μ) een maatruimte zijn zodat $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en μ de bijbehorende Lebesgue-maat is, en $\mu(\Omega) = 1$. Neem $\delta \in (0, 1)$, laat T een sublineaire operator zijn zodat $\forall p \in (1, 1+\delta]$ geldt dat $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ begrensd is zodanig dat $\exists C, \alpha > 0$ zodat $\forall f, g \in L^p$:*

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq C(p-1)^{-\alpha}\|f\|_{L^p}$$

en $\forall x \in \Omega$:

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq |T(f-g)(x)|$$

Dan is er een sublineaire operator $\widetilde{T} : L\log^\alpha L(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ en $\tilde{C} > 0$ zodat $\forall f \in L^p(\Omega)$: $\widetilde{T}(f) = T(f)$ en $\forall f \in L\log^\alpha L$:

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq \tilde{C}\|f\|_{L\log^\alpha L}$$

Preciezer: $\widetilde{C} = \frac{C \cdot e}{(1-1/e)\delta^\alpha}$

Bewijs. Uit Stelling 1 volgt dat $L^p \hookrightarrow L^1$, dus dat

$$\forall f \in L^p : \|T(f)\|_{L^1} \leq 1 \cdot \|T(f)\|_{L^p} \leq C(p-1)^{-\alpha}\|f\|_{L^p}$$

en daarmee voldoet de stelling aan de eisen gesteld in Stelling 20 en is die dus hierop toe te passen. Daarmee is ook deze stelling bewezen. $\square$

5.4 De Extrapolatie Stelling van Yano toegepast

Laten we nu weer naar de Hilbert operator kijken:

$$H(f)(y) = \int_{[0,\infty)} \frac{f(x)}{x+y}\, d\mu(x)$$

We hebben gezien dat $\forall p > 1$ geldt dat $H : L^p([0,\infty)) \to L^p([0,\infty))$, en dat $\|H\| \leq \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$
Maar voor de Extrapolatie Stelling van Yano hebben we aangenomen dat $\mu(\Omega) = 1$ dus dat willen we hier ook. Dus we definiëren in plaats daarvan:

$$\widetilde{H}(f)(y) := \int_{[0,1]} \frac{f(x)}{x+y}\, d\mu(x) = H(f \cdot \mathbb{1}_{[0,1]})(y)$$

nu voor $y \in [0,1]$
Omdat $\widetilde{H}(f)(y) = H(f \cdot \mathbb{1}_{[0,1]})(y)$ geldt nu dat $\widetilde{H} : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$ voor alle $p > 1$ en dat $\widetilde{H}$ begrensd is met $\|\widetilde{H}\| \leq \|H\| \leq \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{H}(f)\|_{L^p([0,1])} &= \Big(\int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \left| \frac{f(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)}{x+y} \right|^p d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big(\int_{[0,\infty)} \left| \frac{f(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)}{x+y} \right|^p d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|H(f \cdot \mathbb{1}_{[0,1]})\|_{L^p([0,\infty))} \\
&\leq \|H\|\, \|f \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}\|_{L^p([0,\infty))} = \|H\|\, \|f\|_{L^p([0,1])}
\end{aligned}$$

Het zou leuk zijn als deze operator niet begrensd is voor $\widetilde{H} : L^1([0,1]) \longrightarrow L^1([0,1])$ zodat we niet voor niks de Stelling van Yano toepassen. Hiervoor kijken we naar de verzameling functies $f_n(x) := x^{-1+\frac{1}{n}}$ voor $n \in \mathbb{N}$
f_n is een positieve functie, dus door de simpelweg de integraal uit te rekenen zien we dat $\forall n \in \mathbb{N}$ geldt dat $f_n \in L^1([0,1])$ en dat $\|f_n\|_{L^1([0,1])} = n$
En voor $\|\widetilde{H}(f_n)\|_{L^1}$ geldt dat

$$\|\widetilde{H}(f_n)\|_{L^1} = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \frac{x^{-1+\frac{1}{n}}}{x+y}\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

We wisselen de integreer-volgorde met behulp van de stelling van Fubini om, en passen de substitutie $(x,y) \mapsto (x, x+y)$ toe. De determinant van de bijbehorende jacobiaan is 1

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{H}(f_n)\|_{L^1} &= \int_{[0,1]} x^{-1+\frac{1}{n}} \int_{[x,x+1]} \frac{1}{x+y}\, d\mu(x+y)\, d\mu(x) \\
&= \int_{[0,1]} x^{-1+\frac{1}{n}} \big(\log(x+1) - \log(x) \big)\, d\mu(x) \\
&= n\Big(n + \log(2) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+\frac{1}{n}} \Big)
\end{aligned}$$

Het laatste resultaat is verkregen met wolframalpha.com[2], en daarmee weten we ook dat $\log(2) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n} 0$

En er is geen $C > 0$ zodat

$$\|\widetilde{H}(f_n)\|_{L^1} = n\Big(n + \log(2) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+\frac{1}{n}}\Big) \leq C \cdot n = C \cdot \|f_n\|_{L^1}$$

voor alle f_n, dus is $\widetilde{H} : L^1 \to L^1$ niet begrensd.
Dan passen we nu de Extrapolatie Stelling van Yano toe: we weten dat voor $\widetilde{H} : L^p \to L^p$ geldt dat $\|\widetilde{H}\| \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$
We willen dit afschatten naar een vorm $C(p-1)^{-\alpha}$, en daarvoor zullen we gebruiken dat $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ en $\sin(x) \geq 2\frac{x}{\pi}$ voor $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
Voor ons betekent dat zo dat $\pi(1-\frac{1}{p}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, en dat betekent dat we $p \in (1, 2]$ moeten nemen.

$$\sin\big(\frac{\pi}{p}\big) = \sin\big(\pi(1-\frac{1}{p})\big) \geq \frac{2}{\pi}\pi\big(1-\frac{1}{p}\big) = 2\,\frac{p-1}{p}$$
$$\frac{\pi}{\sin\big(\frac{\pi}{p}\big)} \leq \frac{p}{2(p-1)} \leq \frac{2}{2(p-1)} = \frac{1}{1(p-1)}$$

Dus we kunnen Stelling 21 voor $C = 1$, $\alpha = 1$, en $1 + \delta = 2$ toepassen.
Hieruit verkrijgen we dat $\widetilde{H} : L\log^1 L \to L^1$ welgedefinieerd en begrensd is, en dat dan geldt dat:

$$\|\widetilde{H}\| \leq \frac{1 \cdot e}{(1-\frac{1}{e})1^1} = \frac{e}{1-\frac{1}{e}}$$

5.5 Een variatie op de Extrapolatie Stelling van Yano

We zullen nu een variatie op de Stelling van Yano behandelen dat een gevolg is van de zonet behandelde stelling. De uitbreiding komt uit Variations on Yano's Extrapolation Theorem [4].

Stelling 22. *Laat (Ω, μ) een maatruimte zijn zodat $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en μ de bijbehorende Lebesgue-maat is, en $\mu(\Omega) = 1$. Laat $q \in (1, \infty)$, en neem $\delta \in (0, 1)$, laat T een sublineaire operator zijn zodat $\forall p \in (1, 1+\delta]$ geldt dat $T : L^p(\Omega) \to L^{p,q}(\Omega)$ begrensd is zodanig dat $\exists C, \alpha > 0$ zodat $\forall f, g \in L^p$:*

$$\|T(f)\|_{L^{p,q}} \leq C(p-1)^{-\alpha}\|f\|_{L^p}$$

en $\forall x \in \Omega$:

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq |T(f-g)(x)|$$

Dan is er een sublineaire operator $\widetilde{T} : L\log^{\alpha+\frac{1}{q'}} L(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ en $\tilde{C} > 0$ zodat $\forall f \in L^p(\Omega)$: $\widetilde{T}(f) = T(f)$ en $\forall f \in L\log^{\alpha+\frac{1}{q'}} L$:

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq \tilde{C}\|f\|_{L\log^{\alpha+\frac{1}{q'}} L}$$

Preciezer: $\widetilde{C} = \left(\frac{(1+\delta)(q-1)}{q}\right)^{\frac{1}{q'}} \frac{C \cdot e}{(1-1/e)\delta^{\alpha+\frac{1}{q'}}}$

[2]De gebruikte inputs zijn: integral x$($ $-1+1/n) * log(1+1/x), x = 0..1$
$En : lim(log2 - HurwitzLerchPhi[-1, 1, 1+1/n])$

Bewijs. Uit Stelling 8 weten we dat $L^{p,q} \hookrightarrow L^1$, dus

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq \left(\frac{p(q-1)}{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q'}} \|T(f)\|_{L^{p,q}}$$

Dus geldt dat

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{L^1} &\leq \left(\frac{p(q-1)}{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q'}} C(p-1)^{-\alpha}\|f\|_{L^p} \\ &\leq C\left(\frac{(1+\delta)(q-1)}{q}\right)^{\frac{1}{q'}} (p-1)^{-\alpha-\frac{1}{q'}}\|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

en dus kunnen we, met $C\left(\frac{(1+\delta)(q-1)}{q}\right)^{\frac{1}{q'}}$ als constante, Stelling 20 hierop toepassen waarmee we de stelling bewijzen. $\square$

6 Conclusie

We hebben gezien hoe functies beschreven kunnen worden als vectoren aan de hand van diverse normen voor functies: de L^p normen, de $L^{p,q}$ normen en de $L\log^\alpha L$ normen. Daarnaast hebben we bekeken hoe deze tot elkaar verhouden door de normen ten opzichte van elkaar af te schatten. De voor ons belangrijkste conclusie daaruit is dat ze zich als volgt tot elkaar verhouden:

$$L^\infty \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L\log^\alpha L \hookrightarrow L^1$$

voor $p > 1$, $\alpha > 0$.
Ook hebben we lineaire en sublineaire operatoren en het begrip begrensdheid behandeld. Er is gebleken dat begrensdheid een handig begrip is: het is een relatief makkelijk uitvoerbare manier om continuïteit te bepalen voor lineaire operatoren en veel van de sublineaire operatoren. Deze kennis hebben we toegepast op de Hilbert-operator $H : L^p([0,\infty)) \longrightarrow L^p([0,\infty))$, waarbij gebleken is dat dan $\|H\| = \pi/\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)$
Daarna hebben we ons gericht op de Extrapolatie Stelling van Yano, dat stelt dat voor $T : L^p \to L^1$ (voor $p < 1+\delta$) geldt:

$$\text{als } \|T(f)\|_{L^1} \leq C(p-1)^{-\alpha}\|f\|_{L^p} \;\text{ dan } \|T(f)\|_{L^1} \leq \frac{C\,e}{\delta^\alpha(1-e^{-1})}\|f\|_{L\log^\alpha L}$$

zelf en het bewijs. We hebben gezien dat hoewel voor lineaire operatoren het simpel was om met dit gegeven de operator uit te breiden tot een operator gedefinieerd op $L\log^\alpha L$, het voor ons voor sublineaire operatoren nodig was om er nog een eigenschap voor de operator bij te eisen, dat er ook voor zorgt dat de operator continu is.
Ook is een variant op de Extrapolatie Stelling van Yano voor $T : L^p \to L^{p,q}$ behandeld, en ten slotte is de Stelling van Yano toegepast op de Hilbert Operator, aangepast zodat $H : L^p([0,1]) \longrightarrow L^p([0,1])$, waaruit we hebben verkregen dat $H : L\log^1 L([0,1]) \longrightarrow L^1([0,1])$ welgedefinieerd en begrensd is en dat $\|H\| \leq \frac{e}{1-\frac{1}{e}}$

Referenties

[1] Charalambos D Aliprantis and Owen Burkinshaw. *Principles of real analysis*. Gulf Professional Publishing, 1998.

[2] G.E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special Functions*. Cambridge University Press, 1999.

[3] Colin Bennett and Robert C Sharpley. *Interpolation of operators*, volume 129. Academic press, 1988.

[4] David E Edmunds and Miroslav Krbec. Variations on yano's extrapolation theorem. *Revista Matemática Complutense*, 18(1):111–118, 2005.

[5] David JH Garling. *Inequalities: a journey into linear analysis*. Cambridge University Press, 2007.

[6] Loukas Grafakos. *Classical fourier analysis*, volume 2. Springer, 2008.

[7] Brian M. Scott (https://math.stackexchange.com/users/12042/brian-m scott). Is there an everywhere discontinuous increasing function? Mathematics Stack Exchange. URL:https://math.stackexchange.com/q/56833 (version: 2011-08-11).