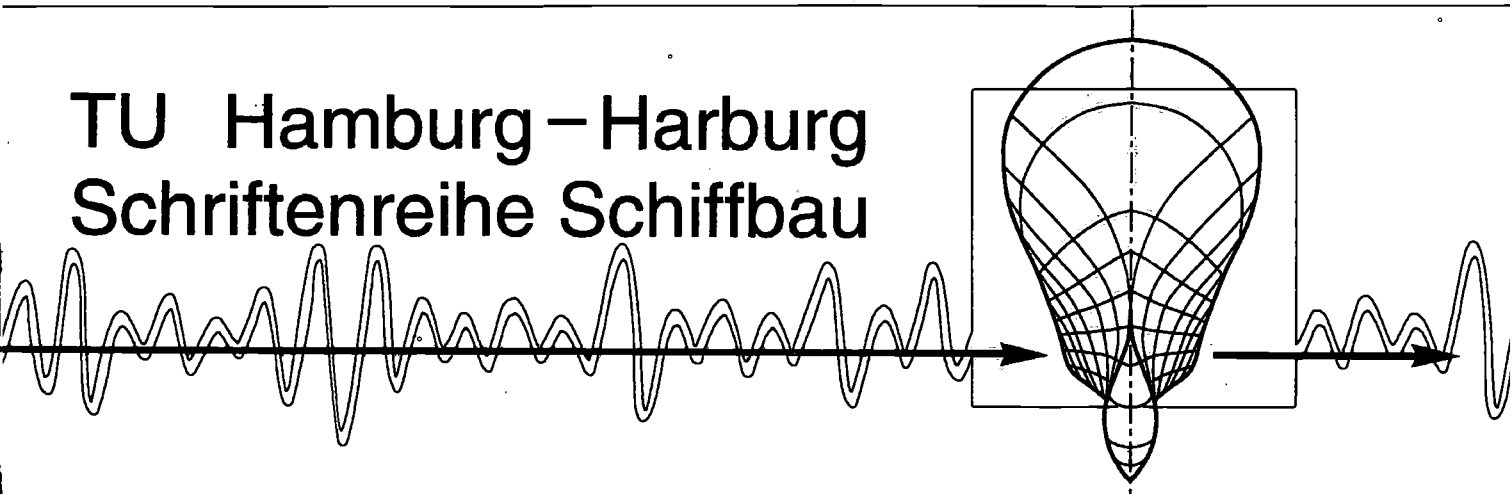


**TU Hamburg – Harburg
Schriftenreihe Schiffbau**



**Grobstruktursimulation turbulenter Strömungen
auf unstrukturierten Gittern mit einer parallelen
Finite - Volumen Methode**

**Delft University of Technology
Ship Hydromechanics Laboratory
Library
Mekelweg 2, 2628 CD Delft
The Netherlands
Phone: +31 15 2786873 - Fax: +31 15 2781836**

Martin Schmid

Mai 2002

Bericht 616

**Grobstruktursimulation turbulenter Strömungen
auf unstrukturierten Gittern mit
einer parallelen Finite-Volumen Methode**

Vom Promotionsausschuss der
Technischen Universität Hamburg-Harburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte Dissertation

von

Martin Schmid

aus Neumarkt in der Oberpfalz

2002

Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. Milovan Perić
Prof. Dr.-Ing. Frank Thiele

Mündliche Prüfung:

15. Februar 2002

ISBN 3-89220-616-3

© Arbeitsbereiche Schiffbau der
Technischen Universität Hamburg-Harburg
Lämmersieth 90
22305 Hamburg

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Einführung | 1 |
| 1.2 | Stand der Forschung | 2 |
| 1.3 | Eigene Beiträge | 3 |
| 2 | Mathematisches Model | 5 |
| 2.1 | Grundgleichungen der Strömungsmechanik | 5 |
| 2.2 | Filterung der Grundgleichungen | 6 |
| 2.3 | Turbulenzmodellierung | 9 |
| 2.3.1 | Statistische Turbulenzmodelle | 9 |
| 2.3.2 | Feinstrukturmodelle | 11 |
| 3 | Numerisches Verfahren | 17 |
| 3.1 | Einleitung | 17 |
| 3.2 | Paralleles Finite-Volumen Verfahren | 17 |
| 3.2.1 | Räumliche Diskretisierung | 18 |
| 3.2.2 | Zeitliche Diskretisierung | 22 |
| 3.3 | Anfangs- und Randbedingungen | 23 |
| 3.4 | Diskretes Gleichungssystem | 25 |
| 3.5 | SIMPLE-Methode | 26 |
| 3.6 | Filtermethode | 28 |
| 3.7 | Lösung des Gleichungssystems | 29 |
| 4 | Direkte numerische Simulation ebener Kanalströmung | 35 |
| 4.1 | Einleitung | 35 |
| 4.2 | Durchführung | 35 |
| 4.2.1 | Geometrie und Randbedingungen | 35 |
| 4.2.2 | Simulationsparameter | 37 |
| 4.2.3 | Ergebnisse und Diskussion | 39 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.2.4 | Vergleiche mit Turbulenzmodellen | 43 |
| 4.3 | Zusammenfassung | 44 |
| 5 | Abnahme homogener Turbulenz | 49 |
| 5.1 | Einfluss der Filterweite | 50 |
| 5.2 | Anpassung der Modellkonstanten | 51 |
| 5.3 | Test der verwendeten Feinstrukturmodelle | 53 |
| 5.4 | Zusammenfassung | 55 |
| 6 | Grobstruktursimulation ebener Kanalströmung | 57 |
| 6.1 | Einleitung | 57 |
| 6.2 | Ergebnisse und Diskussion | 58 |
| 6.2.1 | $Re_\tau = 180$ | 58 |
| 6.2.2 | $Re_\tau = 590$ | 60 |
| 6.3 | Zusammenfassung | 63 |
| 7 | Umströmung des freien Rundzylinders | 66 |
| 7.1 | Laminare Zylinderumströmung | 66 |
| 7.1.1 | Numerische Effizienz | 67 |
| 7.1.2 | Grobstruktursimulation | 68 |
| 7.2 | Turbulente Zylinderumströmung | 69 |
| 7.2.1 | Zweidimensionale Simulationsergebnisse | 69 |
| 7.2.2 | Grobstruktursimulation: $Re=3\,900$ | 70 |
| 7.2.3 | Grobstruktursimulation: $Re=140\,000$ | 84 |
| 7.2.4 | Vergleiche mit Turbulenzmodellen | 85 |
| 7.3 | Zusammenfassung | 88 |
| 8 | Simulation der Umströmung einer Kugel | 89 |
| 8.1 | Einleitung | 89 |
| 8.2 | Laminare Umströmung einer Kugel | 90 |
| 8.2.1 | Achsensymmetrische Berechnung | 90 |
| 8.2.2 | Dreidimensionale Berechnung | 91 |
| 8.3 | Turbulente Umströmung der Kugel | 92 |
| 8.4 | Grobstruktursimulation | 95 |
| 8.4.1 | Geometrie, Gittererzeugung und Simulationsparameter | 95 |
| 8.4.2 | Momentane Simulationsergebnisse | 97 |
| 8.4.3 | Zeitgemittelte Simulationsergebnisse | 107 |

| | |
|--------------------------------|------------|
| 8.5 Zusammenfassung | 112 |
| 9 Zusammenfassung | 114 |
| 9.1 Schlussfolgerung | 114 |
| 9.2 Ausblick | 115 |

Symbolverzeichnis

| | |
|---|---|
| c_p | spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck |
| c_v | spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen |
| d_j | Abstand zwischen Punkt P_0 und P_j |
| d_k | Kugeldurchmesser |
| d_r | Rohrdurchmesser |
| d_z | Zylinderdurchmesser |
| f_μ | Filterfunktion im Speziale-Modell |
| h | Enthalpie |
| k | turbulente kinetische Energie |
| k_f | Grenzwellenzahl |
| k_{\max} | maximale Wellenzahl |
| l_m | Mischungslänge |
| n | Konstante des Speziale-Modells |
| n^+, y^+ | dimensionsloser Wandabstand |
| \dot{m} | Massenfluss |
| o | Ordnung des numerischen Verfahrens |
| p | Druck |
| q_ϕ | Quellterm der Variable ϕ |
| u_τ | Wandschubspannungsgeschwindigkeit |
| t | Zeit |
| t_w | Zeitperiode zwischen zwei Wirbelablösungen |
| A | konstante Steigung des logarithmischen Wandgesetzes |
| B | Konstante des logarithmischen Wandgesetzes |
| C_a | Auftriebsbeiwert |
| C_w | Widerstandsbeiwert |
| $C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$ | Konstanten des k - ε Turbulenzmodells |
| $C_{\omega 1}, C_{\omega 2}$ | Konstanten des k - ω Turbulenzmodells |
| C_s | Konstante des Smagorinsky-Feinstrukturmodells |
| C | variabler Parameter des dynamischen Feinstrukturmodells |
| Co | Courant-Zahl |
| D_v | Diffusion von k durch Geschwindigkeitsfluktuation |
| D_p | Diffusion von k durch Druckfluktuation |
| D_μ | Diffusion von k durch Molekularbewegung |
| D_ε | Transport von ε durch Diffusion |
| D_{ij} | Elemente des Deformationstensors |
| E_k | Abnahmeterm in der Transportgleichung von k |
| E_ε | Abnahmeterm in der Transportgleichung von ε |
| \bar{E} | Energiespektrum der Turbulenz |
| G | Filterfunktion |
| H | Summe aller Terme hoher Ordnung |
| K_k | Änderung von k durch Konvektion |

| | |
|--|--|
| K_ε | Änderung von ε durch Konvektion |
| L | Zylinderlänge |
| L_r | Rezirkulationslänge |
| L_x, L_y, L_z | Länge in x, y, z Koordinatenrichtung |
| L_{ij} | Leonhard Feinstrukturspannung |
| Ma | Mach-Zahl |
| P_k | Produktion von k |
| $P_{\varepsilon 1}, P_{\varepsilon 2}, P_{\varepsilon 3}, P_{\varepsilon 4}$ | Produktionsterme in Transportgleichung von ε |
| Pe | Peclet-Zahl |
| Pr | Prandtl-Zahl |
| R | Gaskonstante |
| Re | Reynoldssche Zahl mit Strömungsgeschwindigkeit |
| Re_r | Reynoldssche Zahl mit Schubspannungsgeschwindigkeit |
| Re_λ | Reynoldssche Zahl mit Geschwindigkeitsfluktuation und Mikrolängenmaß |
| St | Strouhal-Zahl, dimensionslose Wirbelablösungsfrequenz |
| S | Integrationsfläche |
| V | Integrationsvolumen |
| T | dimensionslose Zeit |
| T_w | dimensionslose Zeit zwischen Wirbelablösungen |
| Z_k | Zeitliche Änderung von k |
| Z_ε | Zeitliche Änderung von ε |

Griechische Buchstaben

| | |
|----------------|--|
| α_v | Unterrelaxationsfaktor für Geschwindigkeit |
| α_p | Unterrelaxationsfaktor für Druck |
| β | Konstante im Speziale-Modell |
| γ_j | Mischungsfaktor der Diskretisierung |
| δ | halbe Kanalhöhe |
| δ_{ij} | Kronecker-Delta |
| ε | isotrope Dissipationsrate von k |
| ϵ | Iterationsfehler |
| ω | spezifische Dissipationsrate von k |
| θ | absolute Temperatur |
| λ | Wärmeleitfähigkeit |
| ζ_i | Zellflächeninterpolationsfaktor |
| λ_t | Taylor'sches Mikrolängenmaß |
| κ | Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten |
| ρ | Dichte des Fluids |
| ρ^n | Residuum nach n Iterationen |
| μ | dynamische Viskosität |
| ν | kinematische Viskosität |
| μ_t, ν_t | Wirbelviskosität |

| | |
|---------------|---|
| π | Kreiszahl |
| Δ | Filterweite |
| τ_w | Wandschubspannung |
| ξ | Ablösungswinkel |
| Γ_ϕ | Diffusionskoeffizient der Variable ϕ |
| Φ | Volumenintegral zur Zeitdiskretisierung |

Mathematische Symbole

| | |
|-----------------|---|
| $\hat{\phi}$ | Filterwert der Variable ϕ |
| $\bar{\phi}$ | Zeitlicher Mittelwert der Variable ϕ |
| ϕ' | Fluktuation der Variable ϕ |
| v_i^* | Geschwindigkeit erfüllt Impulserhaltungsgleichung |
| v_i^{**} | Geschwindigkeitskorrektur |
| v_i^{***} | Geschwindigkeit erfüllt Massenerhaltungsgleichung |
| ϕ^+ | dimensionslose Variable ϕ |
| Δ | Gradient |
| $ \phi $ | Betrag von ϕ |
| \underline{b} | Beschleunigungsvektor |
| \underline{n} | normaler Einheitsvektor |
| \underline{e} | beliebiger Einheitsvektor |
| \underline{f} | Flussvektor |
| \underline{q} | Quellenvektor |
| \underline{v} | Geschwindigkeitsvektor |
| \underline{t} | tangentialer Einheitsvektor |
| \underline{A} | Koeffizientenmatrix |
| \underline{C} | Transformationsmatrix |
| \underline{D} | Deformationstensor |
| \underline{I} | Einheitstensor |
| \underline{S} | viskoser Spannungstensor |
| \underline{T} | Spannungstensor |

Allgemeine Abkürzungen

| | |
|-----|--|
| exp | explizit |
| imp | implizit |
| li | letzte Iteration |
| CH | k - ϵ Modell von Chien |
| DNS | direkte numerische Simulation |
| FV | Finite Volumen |
| GER | dynamisches Modell von Germano |
| KW | k - ω Modell von Wilcox |
| LS | k - ϵ Modell von Launder & Sharma |

| | |
|------|--|
| LES | Grobstruktursimulation (eng. <i>large eddy simulation</i>) |
| MF | konstanter Massenfluss |
| PE | Prozessoreinheit |
| RDS | Rückwärtsdifferenzschema |
| STM | statistisches Turbulenzmodell |
| SMG | Smagorinsky-Modell |
| SMG2 | Smagorinsky-Modell doppelte Filterweite |
| SMG3 | Smagorinsky-Modell dreifache Filterweite |
| SND | Smagorinsky-Modell ohne van Driestsche Dämpfung |
| SPZ | Speziale-Modell |
| VDS | Vorwärtsdifferenzschema |
| VLES | Grobstruktursimulation (eng. <i>very large eddy simulation</i>) |
| ZDF | Grobstruktursimulation ohne Feinstrukturmodell |
| ZDS | Zentraldifferenzschema |

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Im Mittelalter hat die Erforschung von Turbulenz mit Beobachtung, Beschreibung und Darstellung durch Naturwissenschaftler, wie Leonardo da Vinci, begonnen. Die Untersuchungen von Reynolds, Prandtl, von Kármán oder Taylor sind eng mit Theorie und Erforschung von Turbulenz verbunden, ebenso wie der Name Laufer mit der Messung von turbulenten Kanalströmungen. Die Berechnung solcher Strömungen ist vergleichsweise jung, und beginnt mit der Konstruktion der ersten automatisierten Rechenmaschinen. In den sechziger Jahren entstand in der Meteorologie die Idee, nur die wichtigsten Strukturen einer turbulenten Strömung vorherzusagen, wodurch die als Grobstruktursimulation (eng. *large-eddy simulation*, LES) bekannte Methode der Strömungssimulation entstanden ist.

Die Vorhersage von Wetter und Klima stellt hohe Anforderungen an die Berechnungsmethoden hinsichtlich der räumlichen Auflösung und der Simulationszeit, die nur durch Vereinfachungen zu erreichen ist. Institute zur Klimaforschung und Wettervorhersage verfügen weltweit über die größten Rechenkapazitäten (Deutschland: Deutscher Wetterdienst), was die Wichtigkeit und den Bedarf nach langfristigen Prognosen widerspiegelt. In der chemischen Industrie, Automobilbau, Kraftwerkstechnik, Turbinenbau, Motorenentwicklung oder in Luft- und Raumfahrttechnik wird die LES-Methode heute angewendet, und befindet sich in anderen Gebieten ebenfalls auf dem Vormarsch. Instationäre Ereignisse in einer Strömung und deren Auflösung sind von Bedeutung bei Auftreten von periodischen Vorgängen, wie Schwingung durch Wirbelablösung oder Lärm, werden jedoch bei der Durchführung einer zeitlich gemittelten Berechnung nicht berücksichtigt. Das eigentliche Problem bei Simulationen in der technischen Anwendungen ist die Größe des turbulenten Längenmaßes, das kleiner ist als der realisierbare Gitterabstand und numerisch nicht erfasst wird. Die großen Wirbel einer turbulenten Strömung sind verantwortlich für den Transport von Masse und Energie. Kleine Wirbel sind isotrop, deshalb leichter zu modellieren und transportieren einen geringen Anteil an Energie und Masse. Die Simulation der Grobstruktur einer Strömung sollte alle wesentlichen Merkmale der Strömung erfassen, inklusive zeitlich veränderlicher Störungen, und nur die Feinstruktur der Turbulenz sollte modelliert werden. Die Aufgabe der Feinstrukturmodelle ist die Umwandlung von Energie durch viskose Dissipation.

Die Entwicklung der Mikroelektronik und die mangelhafte Vorhersage von instationären Strömungsproblemen mit statistischen Turbulenzmodellen führte Anfang der neunziger Jahre zu vermehrter Anwendung der Grobstruktursimulation in der Turbulenzforschung. Diese

Methode wird bevorzugt bei Ablösung großer Wirbel eingesetzt. In den meisten technischen Problemen ist die direkte numerische Simulation aller auftretenden Skalen nicht durchführbar, da die erforderliche Rechenleistung die verfügbare um mehrere Größenordnungen übersteigt. Eine gemittelte stationäre Strömungsvorhersage liefert eine Prognose, die häufig nutzlos ist, wenn die Strömung zeitabhängig ist.

1.2 Stand der Forschung

Einfache Modellierung verbunden mit einer geringeren räumlichen und zeitlichen Auflösung als eine direkte Simulation erfordert, ist ein möglicher Weg zur Lösung technischer Probleme. Die Boussinesqsche Formulierung für die Reynoldsschen Spannungen verwendet zur Modellierung die Wirbelviskosität. Mit dieser Annahme entwickelte Smagorinsky das erste Feinstrukturmodell [109]. Die Ableitung dieses Modells erfolgt entweder durch eine Dimensionsanalyse, wie in Kap. 2 beschrieben, oder durch verschiedene Turbulenztheorien [58],[59],[123] oder durch eine Bilanzierung der Feinstrukturenergie. Durch Analyse des Turbulenzspektrums im Trägheitsunterbereich [62] wird der Modellparameter C_s mit dem Wert 0,17 abgeleitet. Die zur Ableitung getroffenen Annahmen sind bei isotroper Turbulenz und hoher Reynoldsscher Zahl gültig, das Modell wird aber angewandt, als sei es allgemein gültig. Der Wert der Smagorinsky-Konstante C_s wird in der Praxis zwischen 0,2 und 0,065 gewählt, wobei in Strömungen mit hoher Scherrate [69] in der Regel kleinere Werte verwendet werden. In turbulenten Kanalströmungen wird der Wert 0,1 benutzt [23], [89]. In Wandnähe wird das Modell durch die Verwendung einer van Driest'schen Dämpfungsfunktion [27] ausgeblendet. Beide Vorgehensweisen haben sich in dieser Untersuchung als notwendig erwiesen. Die Abhängigkeit der Modellkonstante von der Reynoldsschen Zahl wäre eine Möglichkeit, um die Existenz des Trägheitsunterbereiches, der nur bei hohen Reynoldsschen Zahlen existiert, durch die Modellkonstante zu berücksichtigen. Zu diesem Thema wurden bisher keine Untersuchungen veröffentlicht.

Im Jahre 1970 [23], noch bevor das erste statistische k - ϵ Modell veröffentlicht war [43], wurde die erste dreidimensionale Grobstruktursimulation einer ebenen Kanalströmung mit dem Modell von Smagorinsky durchgeführt. Sehr viel später in den achtziger Jahren entstand das Ähnlichkeitsmodell [4], das eine identische Größe von gerade noch aufgelösten kleinsten Wirbeln und größten nicht aufgelösten Wirbeln annimmt. Als Fortschritt dieser Formulierung kann der Energietransfer von kleinen zu größeren Wirbeln berechnet werden, und die Vorhersage des turbulenten Energiespektrums verbessert werden. Das Modell kann in der Praxis nur in Verbindung mit einem anderen Modell verwendet werden, da es nicht in der Lage ist Energie zu dissipieren. Modelle die Vorteile von Smagorinsky und Ähnlichkeitsmodell vereinen werden als gemischte Modelle bezeichnet, und waren ein erster Schritt auf dem Weg zum dynamischen Modell von Germano [34], [35]. Bei der Anwendung des Germanoschen Modells werden die Navier-Stokesschen Gleichung zweimal gefiltert. Das gleiche Modell wird mit verschiedener Filterweite angewendet, um während der Simulation eine Modellkoeffizienten zu bestimmen, der eine Funktion von Zeit und Ort ist. Dies beseitigt das Problem von Modellkonstantenanpassung an die jeweilige Strömung und macht die Anwendung einer Wanddämpfung überflüssig. Der Koeffizient kann positive und negative Werte annehmen (negative Werte entsprechen einem Transport von Energie in umgekehrter Richtung von kleinen zu großen Wirbeln; eng. *backscatter*), was die Lösung der Gleichungen negativ beeinflussen kann. Deshalb ist meist eine Mittelung des Koeffizienten und/oder eine Ersetzung negativer Werte durch Null notwendig. Im einfachsten Fall existiert eine homogene Richtung

zur Mittelung, in komplexen Geometrien führt die Mittelung entlang von Trajektorien zu einer Lösung des Mittelungsproblems [75]. Die Verwendung von komplizierteren Modellen macht eine Mittelung des Modellkoeffizienten überflüssig. Mehrere Modelle wurden in den letzten Jahren vorgeschlagen [90],[72], [124], [37] ohne weite Verbreitung zu erfahren. Das Smagorinsky-Modell ist das Standardmodell, die Anwendung der Methode zur dynamischen Koeffizientenbestimmung nimmt zu, da diese Methode auf andere Modelle erweiterbar ist.

Die Definition der Filteroperation schließt eine Verwendung von statistischen Turbulenzmodellen (RANS) zur Grobstruktursimulation aus. In der Praxis wird LES mit RANS-Modellen durchgeführt, da in vielen Fällen die Lösung mit statistischen Turbulenzmodellen nicht zu einem stationären Ergebnis konvergiert. Beispielsweise kann die regelmäßige Wirbelablösung hinter einem Zylinder damit vorhergesagt werden. Mit dieser Methode werden integrale Größen teilweise mit geringem Fehler vorhergesagt, die Vorhersage von Geschwindigkeitsprofilen ist meist mangelhaft. Durch Modifizierung der statistischen Modelle entstehen Feinstrukturmodelle, die einen größeren Anteil des turbulenten Energiespektrums abdecken sollen (eng. *very large-eddy simulation*, VLES) . Eine physikalisch sinnvolle Methode ist die Berechnung des Kolmogorovschen Längemaßes [51] unter Verwendung eines Modells, mit dem der Feinstrukturanteil als Funktion des lokalen Gitterabstands berechnet wird [111]. Dieses Verfahren ist auf jedes Modell anwendbar. Die Funktion kann so gewählt werden, dass der Übergangsbereich zwischen direkter Simulation ohne Modellbeitrag und der zeitgemittelten Lösung durch das Modell hergestellt wird.

1.3 Eigene Beiträge

Die Grundlage für diese Arbeit bildet das Finite-Volumen (FV) Verfahren [76], das im Programm *comet* implementiert wurde. Mit diesem Verfahren wurde die DNS der Kugelumströmung bei $Re=5000$ [108] durchgeführt. Die Simulationsergebnisse sind qualitativ in guter Übereinstimmung mit dem Visualisierungsexperiment, eine quantitative Fehlerabschätzung dieser Simulation existiert nicht. LES wurde bisher hauptsächlich auf strukturierten Gittern und in einfachen Geometrien angewendet. Ziel dieser Arbeit war das vorliegende FV-Verfahren so zu erweitern, dass LES von Strömungen in komplexen Geometrien durchführbar ist. Dabei ging es vor allem um die Frage, ob das Verfahren mit nichtversetzter Gitteranordnung von Variablen auch bei unstrukturierten Gittern und lokaler Verfeinerung für LES eingesetzt werden kann. Während in einfachen Geometrien mehrere etablierte Verfahren für LES eingesetzt werden können (kompakte FD hoher Ordnung, Spektralverfahren, explizite Zeitintegrationsmethode hoher Ordnung, versetzte Gitter), bleibt für komplexe Geometrien eine FV-Methode 2.Ordnung im Raum und in der Zeit und unstrukturierte Gitter als einzige Wahl. Bevor Strömungen in komplexen Geometrien betrachtet wurden, wurden zuerst einige grundlegende Untersuchungen mit verschiedenen Feinstrukturmodellen bei einfachen Strömungen durchgeführt. Damit konnte die Implementierung und die Wirkung der Modelle überprüft werden. Das Verfahren wurde so realisiert, dass in Zukunft neue Modelle eingesetzt bzw. vorhandene modifiziert werden können, ohne den Rest des Programms verändern zu müssen (das auch nicht im Quelltext verfügbar sein muss).

Die direkte numerische Simulation (DNS) einer turbulenten Kanalströmung in Kap. 4 diente zur Untersuchung der Anwendbarkeit des vorliegenden Verfahrens 2.Ordnung mit nichtversetzten Gittern zu numerischer Simulation. Zur genauen Untersuchung werden alle Terme der Reynoldsschen Spannungsgleichungen und der Dissipationsgleichung ausgewertet, und die Profile mit denen aus einer Simulation [68] eines etablierten Verfahrens verglichen. Um

mit dem vorliegenden Verfahren eine vergleichbare Genauigkeit, wie die spektrale Simulation der Kanalströmung [49] zu erzielen, muss die Dimension des verwendeten numerischen Gitters ähnlich sein [16]. Auf den Modellfehler von statistischen Turbulenzmodellen wird in diesem Zusammenhang mit einer systematischen Studie der numerischen Fehler eingegangen.

In Kap. 5 wird zum Test der verwendeten Feinstrukturmodelle in Verbindung mit dem vorliegenden numerischen Verfahren die Simulation dreidimensionaler isotroper Turbulenz durchgeführt. Anhand der Abnahme von turbulenter kinetischer Energie, die einem experimentell abgeleiteten Exponentialgesetz folgt, werden mehrere Modelle beurteilt. Das Standardmodell von Smagorinsky ist mit konstantem und dynamischen Koeffizienten im Programm integriert, wobei zur notwendigen Filterung von Variablen ein Rechteckfilter eingesetzt wird. Der Einfluss verschiedener Filterweite wird an diesem Beispiel mit dem Modell vom Smagorinsky studiert. Ein neues Feinstrukturmodell [111] basierend auf einem statistischen Zweigleichungsturbulenzmodell wird zur Grobstruktursimulation kalibriert. Um die Wirkung der numerischen Methode als Filter zu analysieren, werden die Ergebnisse mit und ohne Modell verglichen.

Die Simulation turbulenter Kanalströmungen bei $Re_\tau = 180$ und $Re_\tau = 590$ wird mit den genannten Feinstrukturmodellen in Kap. 6 berechnet, und aus den gemittelten Profilen alle Modelle beurteilt. Alle Details der Strömung werden durch die Methode wiedergegeben, die gleichen Randbedingungen wie in der direkten Simulation werden durch eine konstante Druckdifferenz eingestellt. Die kartesisch strukturierten Gitter besitzen die höchste Genauigkeit und ermöglichen die Unterscheidung von Modellfehler und anderen Fehlern. Die Dämpfung der Turbulenz durch numerische Diffusion und die Initialisierung spielen bei dieser Strömung eine entscheidende Rolle. Beide Probleme werden in den Berechnungen gelöst und diskutiert. Es konnte gezeigt werden, dass das FV-Verfahren 2.Ordnung mit nichtversetzten Gittern für LES durchaus geeignet ist. Lokale Gitterverfeinerung spielt in diesen Simulationen keine Rolle.

In Kap. 7 wird die Identifikation des optimalen Modells zur Berechnung turbulenter Nachlaufströmungen um stumpfe Körper anhand der Umströmung eines Rundzylinders ($Re=3900$ und $Re=140000$) durchgeführt. Im ersten Fall werden Mittelwerte von Geschwindigkeit, Druck und Reynoldsschen Spannungen über den ganzen Integrationszeitraum und in einzelnen Zeitschnitten bestimmt. Diese Ergebnisse erlauben eine Anpassung statistischer Modelle für Simulationen, die keine stationäre Lösung besitzen. Die Ergebnisse werden mit Experiment und anderen Simulation verglichen. Neben den verschiedenen Modellen wird der Einfluss durch die Zylinderlänge, die verwendete Wandfunktion, geringe numerische Auflösung, und die notwendige Genauigkeit des numerischen Verfahrens untersucht. Die Vergleiche zeigen Bedarf nach numerischer Simulation mit anderen Methoden auf, um noch unklare Punkte zu untersuchen.

Die Erfahrungen aus den Testfällen werden zur erstmaligen Simulation der Umströmung einer Kugel ($Re=50000$) in Kap. 8 angewandt. Physikalische Phänomene wie die Scherschichtinstabilität oder die Wirbelpaarung von mehreren kleinen zu einem großen Wirbel werden vorhergesagt und visualisiert. In der Simulation werden für die Praxis wichtige Größen wie Widerstand, Wirbelablösefrequenz und gemittelte Strömungsgrößen berechnet. Diese würden eine verbesserte axialsymmetrische Modellierung erlauben und sollen die Akzeptanz dieser Methoden in der Praxis erhöhen. Numerische und experimentelle Simulation ergänzen sich sinnvoll und tragen zum gegenseitigen Erfolg bei. Qualitative Vergleiche zwischen Experiment und Simulation werden gezeigt, zur quantitativen Bestätigung aller Resultate fehlen experimentelle Ergebnisse.

Kapitel 2

Mathematisches Model

2.1 Grundgleichungen der Strömungsmechanik

Das mathematische Model mit dem alle Fluide beschrieben werden sind die Erhaltungsgleichungen von Masse und Impuls, die als Navier-Stokessche Gleichungen bezeichnet werden. In der allgemeinen Form kann sich die Dichte ρ und die molekulare Viskosität μ ebenso in Ort und Zeit ändern wie die Geschwindigkeit \underline{v} oder der Druck p . Die Massenerhaltungsgleichung in Integralform lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \int_S \rho \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = 0. \quad (2.1)$$

Die Summe aus der zeitlichen Veränderung von Masse im Kontrollvolumen V und aus dem Massenfluss normal zur Oberfläche S des Volumens ist null (der Normalenvektor wird mit \underline{n} bezeichnet). In der Impulserhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{v} \, dV + \int_S \rho \underline{v} \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \int_S \underline{T} \cdot \underline{n} \, dS + \int_V \rho \underline{b} \, dV \quad (2.2)$$

befinden sich auf der linken Seite der Gleichung die zeitliche Änderung des Impulses und der Transport von Impuls durch die Oberfläche S mit der Geschwindigkeit \underline{v} . Der zuletzt genannte Transport wird Konvektion bzw. Advektion genannt. Auf der rechten Seite werden die Kräfte nach Angriffsort in Volumen- und Oberflächenkräfte eingeteilt. Die Beschleunigung \underline{b} verursacht bei Dichteunterschieden eine Volumenkraft, die im Fall des Erdschwerefelds, als Schwerkraft bezeichnet wird. Der Spannungstensor \underline{T} fasst die Oberflächenkräfte zusammen:

$$\underline{T} = 2\mu \underline{D} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \underline{v} \right) \underline{I} = \underline{S} - p \underline{I}. \quad (2.3)$$

Für Newtonische Fluide ist die Viskosität konstant und keine Funktion der Scherung, der Deformationstensor \underline{D} ist wie folgt definiert:

$$\underline{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T \right). \quad (2.4)$$

\underline{S} fasst alle Terme, deren Größe von der Viskosität abhängen, als viskosen Spannungstensor zusammenzufassen, wobei p der statische Druck, ∇ der Divergenzoperator und \underline{I} der Einheitstensor ist. Bei kompressibeln Fluiden hängen Viskosität und Dichte von der absoluten

Temperatur θ ab, die mit Hilfe der Energiegleichung berechnet wird. Mit der Gaskonstante R und dem Verhältnis κ der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p und konstantem Volumen c_v wird bei idealen Gasen die Schallgeschwindigkeit als $c = \sqrt{\kappa R \theta}$ bestimmt. Die Mach-Zahl Ma wird als Verhältnis der Fluidgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit definiert und ist bei idealen Gasen eine reine Temperaturfunktion. Bei $Ma < 0,3$ wird das Fluid als inkompressibel angesehen, für größere Ma wird die Erhaltungsgleichung der Enthalpie h gelöst:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho h \, dV + \int_S \rho h \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \int_S \lambda \nabla \theta \cdot \underline{n} \, dS + \int_V (\underline{v} \cdot \nabla p + \underline{\underline{S}} : \nabla \underline{v}) \, dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V p \, dV \quad (2.5)$$

Die Wärmeleitfähigkeit $\lambda = \mu c_p / Pr$ ist eine Funktion der Prandtl'schen Zahl Pr , die für das Verhältnis von Wärmediffusion zu Wärmeleitung steht. Bei idealen Gasen ist c_p konstant und aus der Beziehung $h = c_p \theta$ wird die Enthalpiegleichung in eine Temperaturgleichung umgewandelt, in der sich die Temperatur durch Konvektion oder Diffusion ändert. Wird die Strömung als inkompressibel angesehen und die Wärmeerzeugung durch viskose Dissipation vernachlässigt, reduziert sich Gl. (2.5) auf:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \theta \, dV + \int_S \rho \theta \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \int_S \frac{\mu}{Pr} \nabla \theta \cdot \underline{n} \, dS. \quad (2.6)$$

In dieser Arbeit werden Strömungen ohne Wärmeeinfluss mit $Ma < 0,3$ untersucht, aus den daraus resultierenden Vereinfachungen ergeben sich die inkompressiblen Navier-Stokesschen Gleichungen:

$$\int_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{v} \, dV + \int_S \rho \underline{v} \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = - \int_S p \underline{n} \, dS + \mu \int_S \nabla \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS \quad (2.8)$$

Die Strömung in einem Fluid kann mit Gleichung (2.7) und (2.8) in Raum und Zeit in Abhängigkeit von der Ausgangslage und den Randbedingungen eindeutig beschrieben werden. In der differentiellen Form, wie in der Turbulenzmodellierung üblich, lauten die Gleichungen:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \right). \quad (2.10)$$

2.2 Filterung der Grundgleichungen

Auf die Navier-Stokesschen Gleichungen werden in der Turbulenzmodellierung zwei mathematische Operatoren angewendet, wodurch neue Unbekannte entstehen, die eine Modellierung erfordern. Die Modellierung der umgeformten Gleichungen wird im weiteren Verlauf beschrieben. Aus einer Funktion $\phi(\underline{x}, t)$ entsteht durch räumliche Filterung mit der Filterfunktion $G(\underline{x})$, deren Form unbestimmt sei, ein räumlicher Mittelwert $\hat{\phi}(\underline{x}, t)$:

$$\hat{\phi}(\underline{x}, t) = \int G(\underline{x} - \underline{x}') \phi(\underline{x}', t) \, d\underline{x}'. \quad (2.11)$$

Drei Filter werden zur Filterung der Gleichungen eingesetzt: das ideale Tiefpaßfilter, das Gaußsche Filter und das Rechteckfilter. Abbildung 2.1 stellt die verschiedenen Filter für die Filterweite $\Delta = \pi/2$ vergleichend dar. Untersuchungen [91] zu den verschiedenen Filtern im realen und im Fourierschen Raum ergeben nur für das ideale Filter das gewünschte Verhalten: kleine Skalen werden herausgefiltert und große werden durch das Filter nicht beeinflusst. Die Wahl der Filters wird hauptsächlich durch das verwendete numerische Verfahren bestimmt: so bietet sich bei der Lösung der Gleichungen im Fourierschen Raum ein Tiefpassfilter an, bei der verwendeten Finite-Volumen Methode ist die Verwendung eines Rechteckfilters naheliegend.

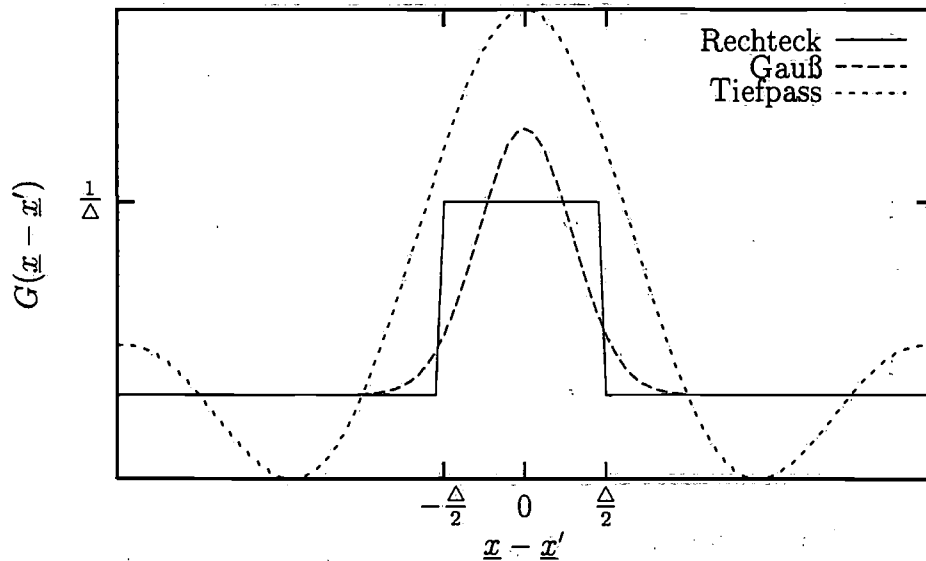


Abbildung 2.1: Darstellung gebräuchlicher Filterfunktionen.

Rechteckfilter:

$$G(\underline{x} - \underline{x}') = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \underline{x} - \underline{x}' < \Delta \\ 0 & \end{cases} \quad (2.12)$$

Gaußfilter:

$$G(\underline{x} - \underline{x}') = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{\Delta} e^{-6\left(\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{\Delta}\right)^2} \quad (2.13)$$

Ideales Tiefpaßfilter:

$$G(\underline{x} - \underline{x}') = \frac{2\sin\left(\pi\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{\Delta}\right)}{\pi(\underline{x} - \underline{x}')} \quad (2.14)$$

Der zeitliche Mittelwert $\bar{\phi}(\underline{x})$ spielt in der Modellierung eine bedeutendere Rolle, da in der Praxis häufiger verwendet:

$$\bar{\phi}(\underline{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(\underline{x}, t) dt \quad (2.15)$$

Bei instationären Strömungsproblemen (Motorinnenströmung, Turbinen, Rührer) ist es notwendig nach periodischen Zeitintervallen t_π die Mittelwertbildung durchzuführen, um für

jede Phase einen Mittelwert zu erhalten (Phasenmittelung):

$$\bar{\phi}(\underline{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i^N \phi(\underline{x}, t + i t_\pi) \quad (2.16)$$

Bei der zeitlichen Mittelung wird von einer zufälligen Schwankung der Funktion ausgegangen, so dass die Fluktuation $\phi'(\underline{x}, t)$, wie auch alle Terme die damit multipliziert werden, durch die Mittelung verschwinden:

$$\bar{\phi}'(\underline{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi'(\underline{x}, t) dt = 0. \quad (2.17)$$

Durch die zeitliche Mittelung der Erhaltungsgleichung über einen genügend großen Zeitraum ist es möglich, ein instationäres Problem mit der stationären Form der Gleichung zu beschreiben. Die Produkte aus der Schwankung der konvektiven Termen sind im zeitlichen Mittel von null verschiedenen und müssen modelliert werden. Diese Form der Gleichungen trägt nach Reynolds den Namen Reynolds-gemittelte Navier-Stokessche Gleichungen (eng. *Reynolds averaged Navier-Stokes*, RANS) und lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \bar{v} dV + \int_S \rho (\bar{v} \bar{v} + \overline{v'v'}) \cdot \underline{n} dS = \int_S \bar{\underline{T}} \cdot \underline{n} dS + \int_V \rho \bar{b} dV \quad (2.18)$$

Bei der zeitlichen Mittelung entstehen neue Terme, die wegen ihrer Dimension und der üblichen Modellierung, Reynoldssche Spannungen genannt werden:

$$\bar{\tau}_{ik} = -\rho \overline{v_i'v_k'} = -\rho \overline{v_i v_k} + \rho \bar{v}_i \bar{v}_k \quad (2.19)$$

Die räumliche Filterung trennt turbulente Längenskalen in zwei Bereiche: auflösbare (Grobstruktur) und zu modellierende (Feinstruktur) Bereiche, wobei die Feinstruktur in der Nomenklatur wie die Fluktuation bezeichnet wird, die gemischten Terme – im Gegensatz zur zeitlichen Filterung – durch die Filterung jedoch nicht verschwinden. Die räumlich gefilterten Navier-Stokesschen Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \hat{v} dV + \int_S \rho (\hat{v} \hat{v} + \widehat{v'v'} + \widehat{v} \underline{v}' + \underline{v}' \widehat{v}) \cdot \underline{n} dS = \int_S \hat{\underline{T}} \cdot \underline{n} dS + \int_V \rho \hat{b} dV \quad (2.20)$$

Bei der Filterung wird die Vertauschbarkeit von Filterung und Ableitung angenommen. Der Fehler durch Vertauschung bei variabler Filterweite ist proportional zum Quadrat der Filterweite und liegt somit im Bereich des Diskretisierungsfehlers bei Verfahren von zweiter Ordnung Genauigkeit [36]. Die Feinstrukturspannungen werden in Leonhardsche Spannungen L_{ij} , Kreuzspannungen C_{ij} und Feinstruktur-Reynolds-Spannungen $\hat{\tau}_{ij}$ unterteilt:

$$L_{ij} = -\rho \widehat{v_i v_j} + \rho \hat{v}_i \hat{v}_j \quad (2.21)$$

$$C_{ij} = -\rho \widehat{v_i'v_j'} - \rho \widehat{v_i v_j'} \quad (2.22)$$

$$\hat{\tau}_{ij} = -\rho \widehat{v_i'v_j'} \quad (2.23)$$

Eine übliche Annahme [23] ist die Vernachlässigung von Kreuzspannungen und Leonhardspannungen:

$$C_{ij} \simeq 0 \quad (2.24)$$

$$\rho \widehat{v_i v_j} \simeq \rho \hat{v}_i \hat{v}_j \quad (2.25)$$

Diese Vereinfachungen sind schlechte Näherungen [18],[60]. Da mit der Verwendung eines Modells [17] der rechnerische Aufwand wesentlich ansteigt, werden in den meisten Simulationen diese Vereinfachungen tatsächlich verwendet, und alle Feinstrukturspannungen mit dem Wirbelviskositätsansatz modelliert. Da diese Vereinfachungen auch hier benutzt werden, reduziert sich die Summe der Feinstrukturspannungen auf $\hat{\tau}_{ij}$, die im weiteren als Feinstrukturspannungen bezeichnet werden.

2.3 Turbulenzmodellierung

Die Spannungen werden in einfachen Modellen durch algebraische Funktionen approximiert, wie bei dem Prändtischen Mischungswegmodell [105]. Bei Modellen höherer Ordnung wird für jede Komponente des Reynoldsschen Spannungstensors eine Transportgleichung gelöst, die eng mit den Navier-Stokesschen Gleichungen gekoppelt sind. Einen Überblick über verschiedene Turbulenzmodelle vermittelt [119], im folgenden Abschnitt werden die verwendeten Modelle beschrieben.

2.3.1 Statistische Turbulenzmodelle

In turbulenten Strömungen können Strukturen und Muster identifiziert werden. Um diese besser vergleichen zu können werden verschiedene turbulente Längen-, Zeit- und Geschwindigkeitsmaße definiert. Diese können durch Geometrie, Materialeigenschaften oder von äußeren Kräften beeinflusst werden. Es ist sinnvoll zwei der Größen in Transportgleichungen zu modellieren, da die dritte ist aus einer Kombination der beiden anderen ermittelbar ist. Von den Impulsgleichungen ausgehend kann eine exakte Gleichung für die turbulente kinetische Energie $k = 0,5 \overline{v_i'v_i'}$ (Summierung in der gesamten Arbeit unter Anwendung der Einsteinschen Summationskonvention), die als Geschwindigkeitsmaß benutzt wird, abgeleitet werden: die Differenz von momentaner Impulsgleichung und gemittelter Impulsgleichung ergibt eine Transportgleichung für die Geschwindigkeitsschwankungen. Die Multiplikation mit der Geschwindigkeitsschwankung ergibt eine Transportgleichung für die Reynoldsschen Spannungen:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho \overline{v_i'v_j'})}{\partial t}}_{Z_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho \overline{v_k} \overline{v_i'v_j'})}{\partial x_k}}_{K_{ij}} = \underbrace{\frac{\partial(\rho \overline{v_i'v_j'v_k'})}{\partial x_k}}_{D_{ij,t}} + \underbrace{\frac{\partial(\overline{p'v_j'}\delta_{ik} + \overline{p'v_i'}\delta_{jk})}{\partial x_k}}_{D_{ij,p}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial \overline{v_i'v_j'}}{\partial x_k} \right)}_{D_{ij,\mu}} - \underbrace{\left(\rho \overline{v_i'v_k'} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} + \rho \overline{v_j'v_k'} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} \right)}_{P_{ij}} + \underbrace{p' \left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j'}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}} - \underbrace{2\mu \frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \frac{\partial v_j'}{\partial x_k}}_{\epsilon_{ij}} \quad (2.26)$$

Die Summation über den Index $i = j$ und die Division mit zwei ergibt die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie in differentieller Form:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}}_{Z_k} + \underbrace{\frac{\partial(\rho \overline{v_k} k)}{\partial x_k}}_{K_k} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\rho}{2} \overline{v_i'v_i'v_k'} + \overline{p'v_k'} \right)}_{D_v + D_p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right)}_{D_\mu} - \underbrace{\rho \overline{v_i'v_k'} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k}}_{P_k} - \underbrace{\mu \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}_{E_k} \quad (2.27)$$

Die Modellierung von k erfolgt in Anlehnung an die abgeleitete Transportgleichung und

schreibt sich im Fall des k - ω Zweigleichungsmodells [118]:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho v_k k})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) + \mu_t \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} - C_\mu \rho k \omega \quad (2.28)$$

Hier ist C_μ konstant und σ_k die turbulente Prandtlsche Zahl. Diese Gleichung basiert auf dem isotropen Wirbelviskositätsansatz

$$-\overline{\rho v_i' v_k'} \simeq \mu_t \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right) \quad (2.29)$$

mit dem die Reynoldsschen Spannungen, die vom mittleren Geschwindigkeitsfeld und den Geschwindigkeitsfluktuationen abhängen, als reine Funktion des mittleren Geschwindigkeitsgradienten formuliert werden. Die Wirbelviskosität

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \quad (2.30)$$

ist eine Funktion von k und der spezifischen Dissipationsrate

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k} \quad (2.31)$$

die in der zweiten Transportgleichung modelliert wird. Die Vernichtung von Reynoldsschen Spannungen durch viskose Vorgänge

$$\varepsilon_{ij} = \nu \frac{\partial v_i' \partial v_k'}{\partial x_j \partial x_i} \quad (2.32)$$

vereinfacht sich durch die Annahme homogener Turbulenz oder bei hoher Reynoldsscher Zahl [45]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon, \quad (2.33)$$

so dass eine Gleichung für die Dissipationsrate $\varepsilon = 0,5 \varepsilon_{ii}$ benutzt wird, die aus den Grundgleichungen abgeleitet werden [22] kann. Dazu wird Gleichung (2.10) nach x_j abgeleitet, mit $2\nu \partial v_k' / \partial x_j$ multipliziert und zeitlich gemittelt:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t}}_{Z_\varepsilon} + \underbrace{\frac{\partial(\overline{\rho v_k \varepsilon})}{\partial x_k}}_{K_\varepsilon} = \underbrace{-2\mu \left(\frac{\partial v_i' \partial v_k'}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial v_j' \partial v_j'}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k}}_{P_{\varepsilon 1} + P_{\varepsilon 2}} - \underbrace{2\mu v_k' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \overline{v_i}}{\partial x_k \partial x_j}}_{P_{\varepsilon 3}} \quad (2.34)$$

$$\underbrace{-2\mu \frac{\partial v_i' \partial v_i' \partial v_k'}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j}}_{P_{\varepsilon 4}} - \underbrace{2 \left(\mu \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2}_{E_\varepsilon} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} - \overline{v_k' \varepsilon} - 2\nu \frac{\partial p'}{\partial x_i} \frac{\partial v_k'}{\partial x_i} \right)}_{D_\varepsilon}$$

Im Gegensatz zur Gleichung für turbulente kinetischen Energie existiert zwischen der ableitbaren Gleichung für die Dissipationsrate und der Modellgleichung wenig Zusammenhang. Die Gleichung enthält nicht messbare Terme, wie Mehrfachkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuation, und ist schwerer zu modellieren. In der jüngeren Vergangenheit gaben DNS Ergebnisse [49],[108] Aufschluß über den Dissipationstensor und die einzelnen Terme der Gleichung [68]. In der Modellierung wird meist nur die Produktion von ε durch Wirbelstreckung $P_{\varepsilon 4}$ und die Umwandlung durch viskose Vorgänge E_ε berücksichtigt, da deren

Differenz entscheidend für die Veränderung von ε ist [45]. In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell mit einer Gleichung für das inverse Zeitmaß ω verwendet:

$$\frac{\partial(\varrho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \overline{v_k} \omega)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) + C_{\omega 1} \frac{\omega}{k} \mu_t \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} - C_{\omega 2} \varrho \omega^2 \quad (2.35)$$

Im Standard k - ε Modell wird die Dissipationsrate durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\frac{\partial(\varrho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \overline{v_k} \varepsilon)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} - C_{\varepsilon 2} \varrho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (2.36)$$

Die Wirbelviskosität wird wiederum aus beiden Variablen bestimmt:

$$\mu_t = \varrho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.37)$$

Als Modellkonstanten werden folgende Standardwerte verwendet: $C_\mu = 0,09$; $C_{\varepsilon 1} = 1,92$; $C_{\varepsilon 2} = 1,44$; $\sigma_k = 1,0$ ($k - \varepsilon$); $\sigma_k = 0,5$ ($k - \omega$); $\sigma_\varepsilon = 1,3$; $\sigma_\omega = 0,5$; $C_{\omega 1} = 5/9$; $C_{\omega 2} = 3/40$.

2.3.2 Feinstrukturmodelle

In einer turbulenten Strömung sind die kleinsten vorkommenden Längenskalen meist kleiner als die Maschenweite des numerischen Gitters. Ein Gitter soll als grob bezeichnet werden, wenn dies der Fall ist. Andernfalls wird von feinen Gittern gesprochen. Ein Großteil des Transportes von Masse und Energie wird von großen Wirbeln erledigt, die erfasst werden: als notwendig wird in der Grobstruktursimulation die Erfassung von 90% des gesamten Transports geschätzt. Das ist nicht allgemein gültig, da sich mit der Reynoldsschen Zahl auch das Verhältnis von größten zu kleinsten Strukturen ändert, und darf nur als Anhaltswert verstanden werden. Feinstrukturmodelle sind einfach konstruiert, da die wichtigen Strukturen einer Strömung mit groben Gitter ausreichend erfasst werden sollen.

In allen hier durchgeführten Grobstruktursimulationen wird das Modell von Smagorinsky verwendet. Es gehört zur Klasse der Wirbelviskositätsmodelle, in denen der Impulstransport durch Turbulenz entsprechend dem molekularen Impulstransport modelliert wird (Annahme von Boussinesq). Die Wirbelviskosität μ_t ist eine Funktion der Grobstrukturgeschwindigkeitsgradienten, mit der die Feinstruktur modelliert wird:

$$\mu_t = \varrho l_m^2 |\hat{D}| \quad (2.38)$$

Die Formulierung mit dem Deformationstensor \underline{D} ist in diesem Zusammenhang umständlich und es wird stattdessen die Indexschreibweise für seine Elemente D_{ij} verwendet:

$$\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.39)$$

Die mittlere Deformationsrate

$$|\hat{D}| = \sqrt{2 \hat{D}_{ij} \hat{D}_{ij}} \quad (2.40)$$

wird aus den gefilterten Größen bestimmt, und wird wie das Mischungslängenmaß l_m

zur Berechnung der lokalen Wirbelviskosität verwendet. Die Filterweite Δ ist von der Maschenweite des verwendeten Gitters abhängig, wobei die Modellkonstante C_s in homogener Turbulenz theoretisch ableitbar und nur bei Gültigkeit der gemachten Annahmen anwendbar ist. Dabei wird von der Existenz eines Trägheitsunterbereiches (eng. *inertial subrange*) ausgegangen, der im Spektrum der turbulenten kinetischen Energie zwischen den Bereichen mit dominierender Produktion bzw. Dissipation liegt. Die Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie $0,5v_k v_k$ ist eine skalare Transportgleichung (siehe Gl. (3.1)), in der hauptsächlich Konvektion für den Energietransport verantwortlich ist. Deshalb soll, mit Q als Geschwindigkeitsmaß und L als integralem Längenmaß der großen Wirbel, die Dissipation abgeschätzt werden:

$$\varepsilon \approx Q^3/L \quad (2.42)$$

Eine Abschätzung für Q wird anhand von gefilterten Geschwindigkeitsgradienten berechnet:

$$Q \approx L\sqrt{2\hat{D}_{ij}\hat{D}_{ij}} = L|\hat{D}|. \quad (2.43)$$

Das gleiche Argument wie für die großen Skalen kann auf die größten Feinstrukturen mit der Geschwindigkeit q und der Wirbelgröße Δ angewendet werden, wenn der Abstand zu den Längenmaßen, bei denen viskose Dissipation auftritt, groß genug ist:

$$\varepsilon \approx q^3/\Delta. \quad (2.44)$$

Den Energieverlust großer Wirbel realisieren Feinstrukturmodelle durch viskose Dissipation der kleinsten Wirbel. Durch Dimensionsanalyse kann Dissipation als Produkt von Wirbelviskosität und Geschwindigkeitsgradient abgeschätzt werden:

$$\varepsilon \approx \nu_t q^2/\Delta^2. \quad (2.45)$$

Dann ergibt sich für die Wirbelviskosität durch Gleichsetzen von Gl. (2.44) und (2.45):

$$\nu_t \propto q\Delta. \quad (2.46)$$

Durch Gleichsetzung von Gl.(2.42) und (2.44) und Einsetzen in Gl.(2.46) ergibt sich als Abschätzung für die Wirbelviskosität:

$$\nu_t \approx Q\Delta^{\frac{4}{3}}L^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.47)$$

Die Einführung einer Modellkonstante führt zu einer Gleichung, in der L aufwendig berechnet werden muss

$$\nu_t = C_s^2 \Delta^{\frac{4}{3}} L^{\frac{2}{3}} |\hat{D}|, \quad (2.48)$$

und daher mit der Annahme $L \approx \Delta$ abgeschätzt wird. Die Berechnung der Wirbelviskosität nach Smagorinsky lautet somit:

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 |\hat{D}| \quad (2.49)$$

Eine Gleichung für die Grobstrukturenergie entsteht durch Multiplikation der gefilterten Navier-Stokesschen Gleichung mit der gefilterten Geschwindigkeit (ähnlich Gl.(2.27)). Für die kleinen aufgelösten Skalen wird ein Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation angenommen und es gilt:

$$\varepsilon \simeq (C_s \Delta)^2 |\hat{D}|^3 \quad (2.50)$$

Der Betrag der mittleren Deformationsrate kann mit dem Kolmogorov-Spektrum $E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ des Trägheitsunterbereichs geschätzt werden. Bis zur Grenzwellenzahl des Filters $k_f = \pi/\Delta$ (Grenzfilterweite ist das doppelte der mittleren Maschenweite und bestimmt die maximale Wellenzahlen) ist die mittlere Deformationsrate definiert

$$|\hat{D}|^2 \simeq |D|^2 = 2 \int_0^{k_f} k^2 E(k) dk \approx 2 \int_0^{k_f} k^2 C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} dk = \frac{3}{2} C_k \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\pi}{\Delta} \right)^{4/3} \quad (2.51)$$

und wird in Gl.(2.50) eingesetzt. Je nach Wahl der Konstante $C_k = 1,44 \pm 0,06$ [101] oder $C_k = 1,6$ [30], errechnet sich die Smagorinsky-Konstante zwischen 0,165 und 0,185.

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3C_k} \right)^{3/4} \quad (2.52)$$

In isotroper Turbulenz hat sich der abgeleitete Wert bestätigt [30], wogegen in Strömung mit starker Scherung eine Konstante zwischen 0,065 und 0,1 besser geeignet [23],[89] ist. Die Filterweite des Modells kann frei gewählt werden, normalerweise ist die Filterweite die doppelte Maschenweite des verwendeten numerischen Gitters. Eine sinnvolle Definition der Filterweite, unter Berücksichtigung der Anwendbarkeit auf unstrukturierte Gitter mit beliebiger Form, liefert:

$$\Delta = V^{1/3}. \quad (2.53)$$

Bei kartesischen Gittern ist dies eine gute Näherung bis zu einem Seitenverhältnis von 1:20. Bei größeren Seitenverhältnissen wird als Näherung häufig

$$\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad (2.54)$$

verwendet. Bei der Berechnung von Strömungen mit festen Wänden ist die Dämpfung der Wirbelviskosität in Wandnähe erforderlich, um eine Überschätzung des turbulenten Impulstransportes in Wandnähe zu unterbinden. Die Mischungslänge wird dazu mit der van Driest-schen Dämpfungsfunktion verringert

$$l_m = \Delta C_s \left(1 - e^{(-n^+/25)^3} \right)^{1/2} \quad (2.55)$$

die eine Funktion des dimensionslosen Wandabstands ist:

$$n^+ = \frac{n u_\tau}{\nu}. \quad (2.56)$$

n ist der minimale Abstand vom Zellzentrum zur Wand, und u_τ die dortige Schubspannungsgeschwindigkeit:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.57)$$

Die Wandschubspannung τ_w wird in der wandnächsten Zelle aus dem Gradienten der tangentialen Geschwindigkeit in wandnormaler Richtung bestimmt, unter der Annahme dass dieser sich bis zur Wand nicht ändert:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial v_t}{\partial x_n} \quad (2.58)$$

Wird die Wandschubspannung null, wie bei Strömungen um stumpfe Körper an mindestens zwei Punkten auf der Oberfläche, dem Staupunkt und dem Saugpunkt, würde das theoretisch eine Dämpfung von l_m bei großem Wandabstand bedeuten. Das ist jedoch nicht erwünscht. In der Praxis reichen die Rundungsfehler bei der Berechnung des Gradienten und die schnelle Abnahme der Dämpfung durch die Exponentialfunktion bei vergleichsweise kleinen Schubspannungen aus, um die Dämpfung ausschließlich in Wandnähe wirken zu lassen. Die Dämpfung kann mit der momentanen oder der zeitlich gemittelten Schubspannungsgeschwindigkeit berechnet werden. Die Simulation einer ebenen Kanalströmung in Kapitel 6.2.1 wird mit beiden Varianten durchgeführt, das Simulationsergebnis ist mit beiden Möglichkeiten identisch. Alle weiteren Ergebnisse werden mit der momentanen Schubspannungsgeschwindigkeit berechnet, da die mittlere zu Beginn der Simulation normalerweise unbekannt ist.

Germano entwickelte eine Methode [35], die es ermöglicht die Konstante des Smagorinsky-Modells zu eliminieren. Das ist notwendig, da unterschiedliche Strömungen mit unterschiedlichen Konstanten berechnet werden müssen, um gute Übereinstimmung mit Experimenten zu erhalten. Die Idee von Germano beruht auf der Skalenähnlichkeit: die größten nicht aufgelösten Skalen sind den kleinsten aufgelösten Skalen ähnlich. Neben der Filterung durch die numerische Auflösung (Gitterfilter) wird ein Testfilter meist mit doppelter Filterweite verwendet. Die Feinstrukturspannungen durch nicht aufgelöste Strukturen mit dem Testfilter, können mit dem Gitterfilter explizit berechnet werden, und ermöglichen lokal die Bestimmung des Koeffizienten C . Wegen der Skalenähnlichkeit kann der gleiche Koeffizient zur Bestimmung der Feinstrukturspannungen auf dem Gitterfilter verwendet werden. Die Feinstrukturspannungen für das Gitterfilter

$$\hat{\tau}_{ij} = -\rho \widehat{v_i v_j} + \rho \hat{v}_i \hat{v}_j \quad (2.59)$$

und das Testfilter lauten allgemein:

$$T_{ij} = -\rho \widehat{\widehat{v_i v_j}} + \rho \hat{v}_i \hat{v}_j \quad (2.60)$$

Die Leonard Spannung L_{ij} kann durch Filterung der aufgelösten Grobstruktur berechnet werden, der Zusammenhang zwischen den Filtern wird als Germano Ähnlichkeit bezeichnet:

$$L_{ij} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij} = -\rho \widehat{\hat{v}_i \hat{v}_j} + \rho \hat{v}_i \hat{v}_j \quad (2.61)$$

Die Feinstrukturspannungen mit dem Smagorinsky-Modell für das Gitterfilter

$$\hat{\tau}_{ij} - \frac{1}{3} \hat{\tau}_{kk} \delta_{ij} = 2C \hat{\Delta}^2 |\hat{D}| \hat{D}_{ij} \quad (2.62)$$

und für das Testfilter ergeben sich damit:

$$T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} = 2C \hat{\Delta}^2 |\hat{D}| \hat{D}_{ij}. \quad (2.63)$$

Die modellierten Feinstrukturspannungen in Gl. (2.62) und (2.63) werden, wie die Leonard Spannung in Gl. (2.21), durch die Filterung berechnet und es ergibt sich das überbestimmte Gleichungssystem:

$$L_{ij} = -C (\hat{\Delta}^2 |\hat{D}| \hat{D}_{ij} - \hat{\Delta}^2 |\hat{D}| \hat{D}_{ij}) = -C M_{ij} \quad (2.64)$$

Die unbekannte Modellvariable C wird durch Quadratsummenminimierung [63] bestimmt.

$$C = \frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{kl}^2} \quad (2.65)$$

Die Berechnung des Koeffizienten ist mit einem Fehler verbunden, der in vielen Fällen groß werden kann und die Simulation numerisch instabil werden läßt. Bei Existenz einer homogenen Richtung, wie in der ebenen Kanalströmung, werden die berechneten Koeffizienten gemittelt und damit auftretende Fehler ausgeglichen. Ist dies nicht durchführbar (unstrukturierte Gitter; inhomogene, komplizierte Geometrie) muss darauf verzichtet werden. Eine praktikable Möglichkeit ist die Koeffizienten nach Gl.(2.65) zu berechnen, den Wert aber auf einen stabilen Bereich zu beschränken: $C > 0$. Die Verwendung von sogenannten Wandfunktionen [104] erlaubt höhere Wandabstände und benutzt einen isotropen Ansatz zur Modellierung des Wandbereichs. Da zur Bildung der Wandfunktionen ebenfalls eine Mittelung erforderlich ist, und ein wichtiger anisotroper Bereich vollständig modelliert wird, muss von deren Verwendung abgesehen werden. Die Auflösung der Grenzschicht erfordert eine weitere Modifikation des Modells: im wandnächsten Gitterpunkt wird der Koeffizient auf null festgelegt, was Modellbeiträge durch Rundungsfehler in der viskosen Unterschicht verhindert. Das dynamische Modell wird in Kapitel 6 ohne Mittelung des Koeffizienten angewendet und getestet: das Verfahren hat sich als stabil erwiesen, wenn die Wirbelviskosität größer oder gleich null ist. Die Beschränkung der Summe von Viskosität und Wirbelviskosität auf Werte größer als null, führte bei geringer Gitterauflösung zu keiner Dissipation, da der Wert des effektiven Diffusionskoeffizienten sehr klein werden kann, und lokal zu einer unendlich großen Reynoldssche Zahl führt.

Tabelle 2.1: Liste verwendeter Modellkonstanten

| Model | Parameter | Standard | Simulation |
|-------------|------------|--------------------|--------------|
| Smagorinsky | C_s | 0,165 - 0,185 | 0,1 |
| Speziale | β, n | modellabhängig | 0,01 ; 3 |
| Germano | C_s | $-\infty ; \infty$ | 0 ; ∞ |

Betrachtet man die Reynoldssche Zahl und die Berechnungsmethoden, die auf den jeweiligen Bereich angewendet werden können, so ist jede Methode auf einen Bereich beschränkt. Direkte Numerische Simulation (DNS) ist durch die vorhandene Ressourcen (Berechnungszeit und Hauptspeicher) auf den Bereich laminare Strömungen und Übergangsbereich beschränkt. Mit Grobstruktursimulation werden Strömungen berechnet die sich an den Reynolds-Zahlbereich der DNS anschließen, wobei die kleinsten Strukturen nicht mehr aufgelöst werden können. Statistische Modelle sind die einzige Möglichkeit, die in der Technik vertretenen Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen, wie sie bei der Umströmung von Wasser-, Land- oder Luftfahrzeugen auftreten, vorherzusagen.

Speziale [111] konstruierte ein Modell, das für den gesamten Bereich anwendbar ist. Das Modell verwendet ein statistisches Turbulenzmodell (STM) zur Vorhersage der unbekanntten Spannungen in den gefilterten Navier-Stokesschen Gleichungen. Als Modell verwendet Speziale ein explizites algebraisches Spannungsmodell basierend auf einem $k-\epsilon$ Modell, wobei das Modell auf andere STM anwendbar ist. Grundlage seiner Überlegung ist das kleinste vorkommende Längenmaß einer turbulenten Strömung - das Kolmogorovsche Längenmaß L_k , das mit Hilfe des Modells vorhergesagt wird. Speziale definiert eine Funktion, in die L_k und die Filterweite Δ als Maß für den Gitterlinienabstand eingeht, und die mit den vorhergesagten Reynoldsschen Spannungen multipliziert wird:

$$f_\mu = \left(1 - e^{-\beta \frac{\Delta}{L_k}}\right)^n \quad (2.66)$$

Will man eine direkte numerische Simulation durchführen muß L_k größer als die Filterweite des verwendeten Gitters sein, weil der Wert der Funktion null ist verschwindet der Modellbeitrag aus den Impulserhaltungsgleichungen. Die Funktion wird eins bei hohen Reynoldsschen Zahlen, der Beitrag des Modells ist eine Reynoldssche Spannung und die Lösung der Gleichungen stationär. Die Lösung wird durch den kleinen Zeitschritt einer instationären Berechnung langsamer erreicht als bei einer stationären Methode. Im Übergangsbereich zwischen DNS und STM, ist die Definition nicht eindeutig, da die Grundlage der Grobstruktursimulation eine räumliche und keine zeitliche Filterung ist. Die räumlich und zeitlich gefilterten Gleichungen unterscheiden sich nicht, es spielt für den mathematische Lösung der Gleichungen keine Rolle, wie der Modellbeitrag berechnet wird, sondern nur wie groß dieser ist. Der Feinstrukturanteil des Modells wird an der Simulation homogener isotroper Turbulenz in Kapitel 5 bestimmt und die Modellkonstanten entsprechend angepasst.

Neben den bereits beschriebenen Modellen werden Grobstruktursimulationen auch mit instationären Varianten von statistischen Modellen durchgeführt. Darauf wird in der Simulation der Rundzylinderumströmung in Kapitel 7 eingegangen. In den durchgeführten Simulationen sind die Modellkonstanten an das numerische Verfahren angepasst worden und nehmen kleinere Werte an, als theoretisch oder empirisch abgeleitet wird. Eine starke Dämpfung der Turbulenz bis zur Laminarisierung der Strömung durch hohe Beträge von Wirbelviskosität ist anderenfalls die Folge. In Tabelle 2.1 werden die Standardkoeffizienten und verwendete Koeffizienten gegenübergestellt.

Kapitel 3

Numerisches Verfahren

3.1 Einleitung

Die Lösung von partiellen Differentialgleichungen ist in wenigen Fällen analytisch möglich, in der Regel muss ein numerisches Verfahren benutzt werden. In dieser Arbeit wird eine Finite-Volumen Methode mit Druckkorrekturgleichung verwendet [92]. Das Berechnungsgebiet wird zu diesem Zweck in eine endliche Anzahl von Kontrollvolumina (KV) unterteilt und die entsprechenden Gleichungen für jedes KV näherungsweise gelöst, wobei alle Variablen im Zentrum des jeweiligen KV gespeichert sind (*nichtversetzte* Variablenanordnung). Die Anzahl und die Verteilung der Kontrollvolumen bestimmt, zusammen mit der Ordnung des Verfahrens, die Größe der auftretenden Fehler. Die Anzahl der möglichen Kontrollvolumina ist durch die verfügbaren Computerressourcen (Hauptspeicher und Rechenoperationen) technologisch beschränkt. Die Lösung eines beliebigen Problems ist nicht alleine eine Frage der technologischen Möglichkeiten, also der zur Verfügung stehenden Computer, sondern ebenso der Anwendbarkeit des Verfahrens auf das spezifische Problem. Wichtige Eigenschaften sind die Beschränktheit der Lösung und die Stabilität des Verfahrens, um eine physikalisch sinnvolle Lösung zu erhalten.

3.2 Paralleles Finite-Volumen Verfahren

Zur Lösung der Gleichungen werden die einzelnen Terme des mathematischen Modells auf einem numerischen Netz in berechenbare Ausdrücke übersetzt. Dieser Vorgang der Diskretisierung bestimmt die Genauigkeit der Methode und ist von der Organisation des Netzes abhängig. Die Vernetzung des Berechnungsgebietes durch systematische Verteilung von Punkten entlang von Polynomen, die sich auf ein kartesisches Gitter abbilden lassen, ist eine strukturierte Vernetzung. Die Kenntnis dieser Struktur wird bei der Lösung des linearen Gleichungssystems ausgenutzt. Netze die aus Prismen oder Tetraedern bestehen sind unstrukturiert und die Lösung daraus resultierender Gleichungssysteme verwendet andere Algorithmen. Bei strukturierten Gittern wird von Zellen mit 6 Zellflächen (Hexaeder) ausgegangen, wobei die Nachbarzellen durch topologische Indizierung des Gitters bestimmt werden (*zellenorientiert*). Bei unstrukturierten Gittern müssen für jede Zellfläche die Indizes der beiden angrenzenden Zellen bekannt sein, mit deren Hilfe die Flüsse berechnet werden (*zellflächenorientiert*).

3.2.1 Räumliche Diskretisierung

Bei vorgegebener Unterteilung in KV ist die Anordnung der Daten in Listen für die Diskretisierung unerheblich, diese hat nur Einfluss auf die Programmierung. Die Speicherung der verschiedenen Variablen (v_i, p, k, ε) kann an beliebigen Stellen in der Zelle erfolgen, aus Gründen der Genauigkeit und Einfachheit wird meist das Zellzentrum gewählt. Ausgehend von der Transportgleichung für eine skalare Größe ϕ

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV}_{\text{Zeitliche Änderung}} + \underbrace{\int_S \rho \phi \underline{v} \cdot \underline{n} dS}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \underline{n} dS}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\int_V q_\phi dV}_{\text{Quellen/Senken}} \quad (3.1)$$

wird die Approximation der auftretenden Terme beschrieben, die nach ihrer physikalischen Bedeutung benannt sind. Als Ergebnis der Diskretisierung erhält man für jedes KV eine algebraische Gleichung der Form

$$a_{P_0} \phi_{P_0} - \sum_{j=1}^{N_j} a_j \phi_{P_j} = q_{P_0}, \quad (3.2)$$

wobei unbekannte und als unbekannt betrachtete Terme zu den Koeffizienten a_{P_0} und a_j beitragen (*implizit*). Alle anderen Größen sind bekannt und werden zur Berechnung des Quellenterms q_{P_0} verwendet (*explizit*). Im vorliegenden iterativen Lösungsverfahren werden alle Korrekturen mit einer Verzögerung von einem Iterationsschritt berücksichtigt (*deferred correction*), wodurch die Einträge in die Koeffizientenmatrix auf Nachbarzellen beschränkt bleiben und die Kondition des linearen Gleichungssystems günstig beeinflusst werden kann.

Integrale

Die Approximation der auftretenden Integrale über Flächen oder Volumen erfolgt mit der Mittelpunktregel. Dabei wird von einem Mittelwert der Funktion über dem Integrationsgebiet ausgegangen, wodurch sich das Volumenintegral als Produkt von Knotenwert und Volumen ergibt:

$$\int_V \phi dV \approx \phi_{P_0} V_{P_0} \quad (3.3)$$

Die Integralapproximation für den Fluß eines Vektorfeldes zwischen zwei KV ist das Produkt der normalen Vektorkomponente der Flussfunktion \underline{f} und der Fläche S_j der Kontrollvolumenseite (siehe Abb. 3.1). Die Flussfunktion \underline{f} ($\rho \phi \underline{v}$ im konvektiven bzw. $\Gamma_\phi \nabla \phi$ im diffusiven Fluss) muss im Zentrum der Zellfläche S_j mittels Interpolation aus den Knotenwerten berechnet werden. Der Abbruchfehler der Integralapproximation ist von zweiter Ordnung, deshalb muss der Abbruchfehler der Interpolation mindestens von gleicher Ordnung sein.

$$\int_{S_j} \underline{f} \cdot \underline{n} dS \approx \underline{f}_j \cdot \underline{n}_j S_j \quad (3.4)$$

Hier ist \underline{n}_j der Einheitsvektor senkrecht zur Fläche, gerichtet vom Knoten P_0 zum Knoten P_j . Oft wird auch der Flächenvektor $\underline{S}_j = S_j \underline{n}_j$ verwendet.

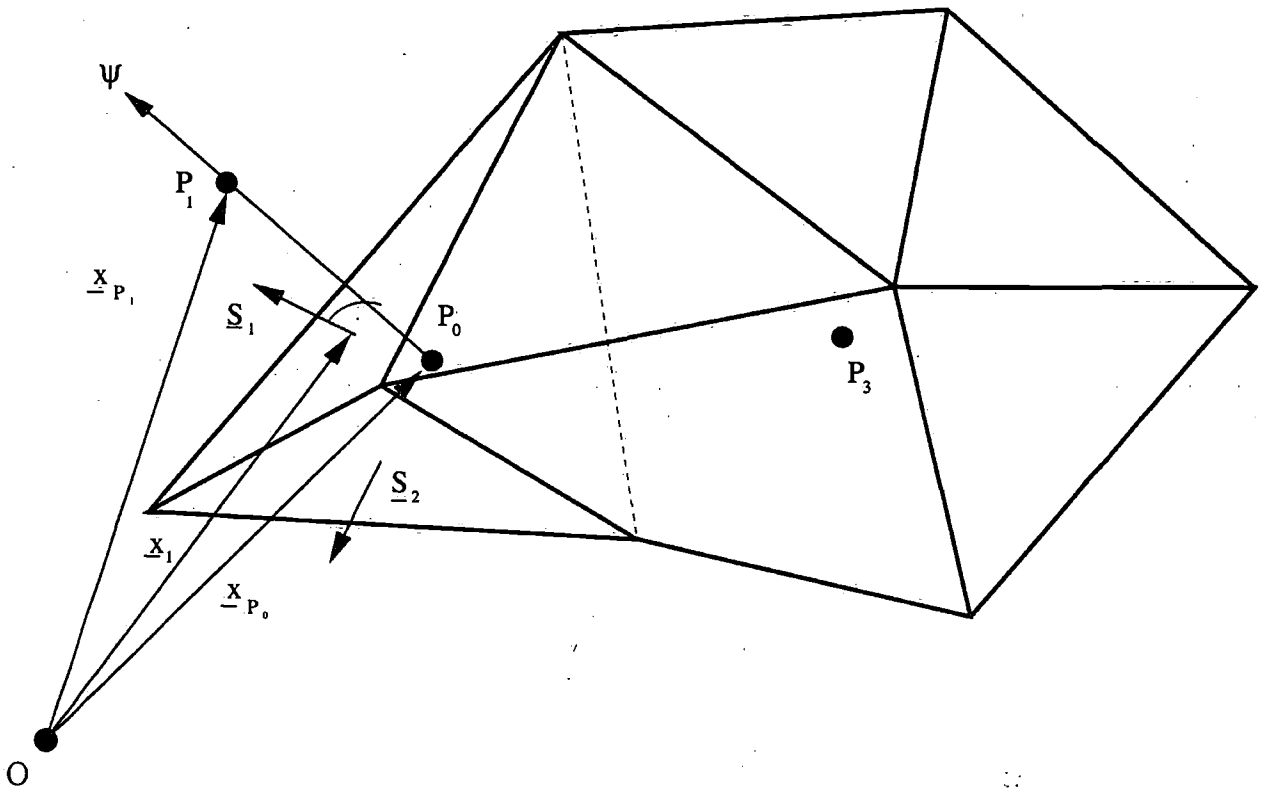


Abbildung 3.1: Dreidimensionale Darstellung zweier Kontrollvolumina: auf der Zellfläche j steht der Oberflächenvektor \underline{S}_j senkrecht; dessen Lage und die der Zellzentren beschreibt \underline{x}_j , \underline{x}_{P_j} und \underline{x}_{P_0} .

Konvektion

Die Interpolation spielt bei der nichtversetzten Variablenanordnung eine entscheidende Rolle, denn die benötigten Variablen und deren Gradienten müssen zur Mitte der Zellflächen interpoliert werden. Entwickelt man eine Funktion $\phi(\psi)$ in eine Taylorreihe, berechnet sich die Funktion an einem beliebigen Ort in der Umgebung des Punktes P_0 als Funktion der Gradienten:

$$\phi(\psi) = \phi(\psi_{P_0}) + (\psi - \psi_{P_0}) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right)_{P_0} + \frac{(\psi - \psi_{P_0})^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} \right)_{P_0} + H \quad (3.5)$$

Die Ordnung der Interpolation ist identisch mit der Potenz der Differenz $(\psi - \psi_{P_0})$ im ersten Term nach dem Abbruch der Reihe, der normalerweise auch den größten Beitrag zum Abbruchfehler leistet. Werden die ersten beiden Terme auf der rechten Seite der Gleichung berücksichtigt, so ist die Interpolation zweiter Ordnung (lineare Interpolation), was die hier angestrebte Ordnung des Verfahrens darstellt. Die Entwicklung in Gl.(3.5) entspricht dem Zentralfdifferenzschema (ZDS) für die erste Ableitung in einem Finite-Differenzen Verfahren. Vorwärtsdifferenzschema (VDS) und Rückwärtsdifferenzschema (RDS) verwenden nur den ersten Term auf der rechten Seite, wobei im ersten Fall die Entwicklung um den stromabliegenden Punkt und im anderen Fall um den stromaufliegenden Punkt durchgeführt wird. Eine Alternative ist Verwendung weiterer Punkte an denen die Funktion oder deren Ableitung bekannt ist, mit deren Hilfe ein Polynom berechnet wird, das an den Zellflächen ausgewertet wird. Das ist mit einem höheren rechnerischen Aufwand verbunden und ist wie jedes Verfahren höherer Ordnung nicht beschränkt, das heißt der interpolierte Wert zwischen

zwei Knoten kann größer werden als die verwendeten Knotenwerte.

In der Finite-Volumen Methode wird zur Interpolation zwischen den Punkten P_0 und P_j ein linearer Verlauf angenommen, damit ergibt sich für den Wert an der Zellfläche:

$$\phi_j = (1 - \zeta_j)\phi_{P_0} + \zeta_j\phi_{P_j} \quad (3.6)$$

Auf gleichförmigen Gittern ist der geometrische Interpolationsfaktor $\zeta_j = 0,5$. In allen anderen Fällen wird dieser mit den Koordinaten von Zellzentren und Zellfläche berechnet. Die beiden Zentren werden durch eine Gerade verbunden und der Wert zum Schnittpunkt mit der Zellfläche interpoliert. Für die Koordinatenachse der Gerade ergibt sich:

$$\zeta_j = \frac{\psi_j - \psi_{P_0}}{\psi_{P_j} - \psi_{P_0}} = \frac{|\underline{x}_j - \underline{x}_{P_0}|}{|\underline{x}_{P_j} - \underline{x}_{P_0}|} \quad (3.7)$$

Die Distanz zwischen den Zellzentren wird mit dem Abstandsvektor $\underline{d}_j = \underline{x}_{P_j} - \underline{x}_{P_0}$ bezeichnet. Verläuft die Gerade ψ , die die Knoten P_0 und P_j verbindet, nicht durch das Zentrum der Fläche S_j , so kann folgender Ausdruck verwendet werden:

$$\phi_j = [\phi_{P_0} + (\nabla\phi)_{P_0} \cdot (\underline{x}_j - \underline{x}_{P_0})](1 - \zeta_j) + [\phi_{P_j} + (\nabla\phi)_{P_j} \cdot (\underline{x}_j - \underline{x}_{P_j})]\zeta_j \quad (3.8)$$

d.h. es wird ein gewichteter Mittelwert von dem durch Extrapolation aus beiden Zellen berechneten Wert angenommen. Auf groben Gittern ist diese Approximation nicht anwendbar, da die Fehler in der Gradientenberechnung zu einem großen Fehler an der Zellfläche führen. Der konvektive Fluss K_j durch die Kontrollvolumenseite S_j

$$K_j = \int_{S_j} \phi \underline{\rho v} \cdot \underline{n} \, dS \approx \phi_j (\underline{\rho v})_j \cdot \underline{S}_j \quad (3.9)$$

hängt entscheidend von der Ordnung der Interpolation ab, bei grobem Gitter können sich oszillatorische Lösungen ergeben. Dies ist unerwünscht und kann durch Pecletsche Zahlen $Pe = \underline{\rho v}_i \Delta x_i / \Gamma < 2$ vermieden werden (z. B. durch eine lokale Gitterverfeinerung). Das ist ein hinreichendes, aber nicht notwendiges Kriterium für die Beschränktheit der Lösung [87]. Zur Stabilisierung der Verfahrens wird darum ein Korrekturverfahren benutzt [50]. Dabei wird eine numerisch stabile Approximation niedriger Ordnung (hier RDS) zur Bildung der Koeffizientenmatrix benutzt (die Knotenwerte der Variablen ϕ werden als Unbekannte betrachtet), während die Differenz der Flussapproximation mit ZDS und RDS aus der letzten Iteration (li) als Korrekturterm mit den vorhandenen Werten explizit berechnet wird:

$$\phi_j = \phi_j^{\text{RDS}} + \gamma_j (\phi_j^{\text{ZDS}} - \phi_j^{\text{RDS}})_{\text{li}} \quad (3.10)$$

Der Korrekturterm kann mit einem Faktor $0 < \gamma_j < 1$ multipliziert werden. Für $\gamma_j = 1$ heben sich die Beiträge der Approximation niedriger Ordnung auf, wenn die Iterationen konvergieren. Eine Approximation erster Ordnung ergibt sich bei $\gamma_j = 0$, durch einen anderen Faktor wird eine Mischung von beiden erreicht.

Bei der Berechnung der Massenflüsse durch die Kontrollvolumenoberfläche muss aus Stabilitätsgründen die Interpolation um einen zusätzlichen Term erweitert werden, da ZDS gegen räumliche Schwankungen der Variablen mit der Wellenlänge $|\underline{d}_j|$ unempfindlich ist:

$$\underline{v}_j = (1 - \zeta_j) \underline{v}_{P_0} + \zeta_j \underline{v}_{P_j} + M_j \left[\frac{1}{2} (\nabla_{P_{P_0}} + \nabla_{P_{P_j}}) \cdot \frac{\underline{d}_j}{|\underline{d}_j|} - \frac{P_{P_j} - P_{P_0}}{|\underline{d}_j|} \right] \underline{n}_j \quad (3.11)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist nach Rhie und Chow [95] benannt und beschreibt eine Differenz verschiedener Diskretisierungen: er ist proportional zum Produkt aus der dritten Ableitung des Drucks und dem Quadrat der Maschenweite, und sichert eine starke Kopplung von Impuls- und Massenerhaltungsgleichung. Der Koeffizient M_j ergibt sich als Mittel von Zentralkoeffizient und Volumen über beide Kontrollvolumina [29]:

$$M_j = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{P_0}}{a_{P_0}^3} + \frac{V_{P_j}}{a_{P_j}^3} \right) \quad (3.12)$$

Der Korrekturterm in eckigen Klammern verschwindet, wenn der Druck linear oder quadratisch verläuft; die Proportionalität zu $(\Delta x)^2$ sichert die Konsistenz und Ordnung der Approximation und unterdrückt unphysikalische Oszillationen in der Lösung.

Diffusion

Aus der Taylorreihenentwicklung von ϕ kann durch Umformung ein Ausdruck zur Berechnung des Gradienten an der Zellfläche, der zur Berechnung der diffusiven Flüsse

$$D_j = - \int_{S_j} \Gamma_\phi \nabla \cdot \underline{n} \, dS \approx -\Gamma_\phi (\nabla \phi)_j \cdot \underline{n}_j S_j \quad (3.13)$$

benötigt wird, abgeleitet werden. Dies ist eine Zentralfdifferenzapproximation bei äquidistantem Gitter:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right)_j = \frac{\phi(\psi_{P_0}) - \phi(\psi_{P_j})}{\psi_{P_0} - \psi_{P_j}} \quad (3.14)$$

Bei ungleichförmigen Gittern verliert die Approximation an Genauigkeit. Der Satz von Gauß erlaubt den gemittelten Gradienten im Zellzentrum als Funktion der Werte an den Zellflächen zu berechnen,

$$\int_S \phi \underline{e}_i \cdot \underline{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \phi \underline{e}_i \, dV = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dV \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.15)$$

durch Anwendung der Integralapproximation nach Mittelpunkregel, folgt für den mittleren Gradienten:

$$(\bar{\nabla} \phi)_{P_0} = \sum_{i=1}^{N_j} \frac{\phi_j S_j}{V_{P_0}}. \quad (3.16)$$

Durch Interpolation von zellgemittelten Gradienten kann, wie bei ϕ_j , der Gradient an die KV-Seite berechnet werden:

$$(\nabla \phi)_j = (1 - \zeta_j) \nabla \phi_{P_0} + \zeta_j \nabla \phi_{P_j} \quad (3.17)$$

Die Oszillationen, die dieses Verfahren hervorrufen kann, werden durch gemischte Approximation von Gradienten erster und zweiter Ordnung [76] unterbunden (*deferred correction*):

$$(\nabla \phi)_j^* = (\nabla \phi)_j + \left(\frac{\phi_{P_j} - \phi_{P_0}}{|\underline{d}_j|} - (\nabla \phi)_j \cdot \frac{\underline{d}_j}{|\underline{d}_j|} \right) \underline{n}. \quad (3.18)$$

Der Ausdruck in der Klammer verschwindet wenn der Normalenvektor zur Zellfläche und der normierte Abstandsvektor \underline{d}_j die gleiche Orientierung haben, wie durch Umformung ersichtlich wird:

$$(\nabla \phi \cdot \underline{n})_j^* = \frac{\phi_{P_j} - \phi_{P_0}}{|\underline{d}_j|} + \left((\nabla \phi)_j \cdot \underline{n} - (\nabla \phi)_j \cdot \frac{\underline{d}_j}{|\underline{d}_j|} \right) = \frac{\phi_{P_j} - \phi_{P_0}}{|\underline{d}_j|} + (\nabla \phi)_j \left(\underline{n} - \frac{\underline{d}_j}{|\underline{d}_j|} \right) \quad (3.19)$$

Quellenterme

Die volumenspezifischen Quellenterme stehen auf der rechten Seite des algebraischen Gleichungssystems (3.2) und lassen sich einfach approximieren:

$$\int_V q_\phi dV = q_{\phi, P_0} V. \quad (3.20)$$

In vielen Fällen ist q_ϕ eine Funktion des Lösungsvektors ϕ und liegt aus der letzten Iteration vor. Wird der Term in einer linearen Funktion entwickelt

$$q_{\phi, P_0} = a_q + b_q \phi_{P_0} \quad (3.21)$$

kann der lineare Anteil, für den Fall $b_q < 0$, zum Zentralkoeffizienten auf der linken Seite der Gleichung addiert werden, was die Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix und damit die Stabilität des Verfahrens erhöht.

3.2.2 Zeitliche Diskretisierung

Die allgemeine Transportgleichung wird zur vereinfachten Darstellung der zeitlichen Integration umformuliert, so dass auf der linken Seite nur noch der zeitabhängige Term erscheint:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV = - \int_S \rho \phi \underline{v} \cdot \underline{n} dS + \int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \underline{n} dS + \int_V q_\phi dV = f(t, \phi) \quad (3.22)$$

Die Ermittlung eines neuen Variablenwerts $\phi(\underline{x}, t_{i+1})$ im Abstand Δt von $\phi(\underline{x}, t_i)$ ist mit Hilfe der zum Zeitpunkt t_i bekannten Variablenwerte möglich. Eine solche Methode wird als explizit bezeichnet, wenn zur Berechnung keine Variablenwerte zu diesem Zeitpunkt verwendet werden, und unterliegt einem Stabilitätskriterium, das als Courantsche Zahl bezeichnet wird, was die maximale Zeitschrittweite Δt beschränkt. Eine Störung darf nach diesem Kriterium – in einem Zeitschritt durch Konvektion – nur den Bruchteil über die Zellenlänge transportiert werden, den das Stabilitätskriterium des Verfahrens erlaubt. Die Courantsche Zahl für eine Maschenweite ist:

$$Co = \frac{\text{Zeitschritt} \cdot \text{Konvektionsgeschwindigkeit}}{\text{Maschenweite}} \quad (3.23)$$

Noch kritischer ist das Stabilitätskriterium, das aus der Diskretisierung der diffusiven Flüsse hervorgeht

$$\Delta t < \frac{\rho(\Delta y)^2}{2\Gamma}, \quad (3.24)$$

wobei Δy die Maschenweite in wandnormaler Richtung ist, die bei der Berechnung turbulenter Strömungen in Wandnähe am kleinsten ist. Die quadratische Abhängigkeit der Zeitschrittweite von der Maschenweite ist bei expliziten Methoden eine bedeutende Einschränkung, da durch lokale Gitterverfeinerung die Maschenweite weiter reduziert wird. Aus diesem Grund wird bei Verfahren, die auf strukturierte Gitter beschränkt sind, die wandnormale Richtung oft implizit und die anderen beiden explizit behandelt, was bei Verwendung unstrukturierter Gitter nicht möglich ist.

Im Gegensatz zu expliziten Verfahren werden zur Berechnung der neuen Lösungen bei impliziten Methoden die Terme auf der rechten Seite von Gl.(3.22) zur neuen Zeitebene benötigt.

Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem (3.26), das nur iterativ gelöst werden kann, wie das bei stationären Problemen der Fall ist. Es existiert jedoch keine numerisches Stabilitätskriterium, wie bei expliziten Verfahren. In der numerischen Simulation von turbulenten Strömungen ist das typische Zeitmaß, das durch den Zeitschritt aufgelöst werden muss, klein und es existiert eine physikalische Barriere, die die Zeitschrittweite nicht überschreiten darf. Ein implizites Verfahren ist bei einer Simulation von Vorteil, wenn der Rechenaufwand durch die iterative Lösung mit einem größeren Zeitschritt kompensiert wird. Ein weiterer Grund für die Verwendung eines impliziten Verfahrens ist die größere Stabilität und die breitere Anwendbarkeit der Methode, nicht nur bei zeitabhängigen Strömungen sondern auch bei stationären Problemen. Die örtliche Verfeinerung kann mit der impliziten Zeitdiskretisierung, wodurch der maximal mögliche Zeitschritt nicht von der minimalen Kontrollvolumengröße beschränkt wird, ohne Einschränkung angewendet werden.

Die angestrebte zweite Ordnung des Verfahrens wird durch eine Dreizeitenenddiskretisierung mit quadratischer Ansatzfunktion in der Zeit erhalten. Dabei wird zentriert um den neuen Zeitpunkt von $t_{k+1} - \Delta t/2$ bis $t_{k+1} + \Delta t/2$ integriert. Die Beiträge von Konvektion, Diffusion und von Quellen werden zu diesem Zeitpunkt als Mittelwerte über Δt angesehen, die Ableitung nach der Zeit zum Zeitpunkt t_{k+1} wird aus der Ableitung der Ansatzfunktion und Einsetzen der Werte bei t_{k-1} , t_k und t_{k+1} erhalten:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{k+1} = \frac{3\Phi^{k+1} - 4\Phi^k + \Phi^{k-1}}{2\Delta t} \quad (3.25)$$

Als Ergebnis der Approximation von $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = f(\phi, t)$ zum Zeitpunkt t_{k+1} ergibt sich:

$$\Phi^{k+1} = \frac{4}{3}\Phi^k - \frac{1}{3}\Phi^{k-1} + \frac{2}{3}f(t_{k+1}, \Phi^{k+1})\Delta t \quad (3.26)$$

Der Term auf der linken Seite trägt zum Zentralkoeffizienten bei, die Terme auf der rechten Seite mit den expliziten Beiträgen der vorherigen Zeitebenen zum Quellterm. Die auf der rechten Seite in f enthaltenen Variablenwerte zur neuen Zeitebene erfordern eine iterative Lösung bei jedem Zeitschritt.

3.3 Anfangs- und Randbedingungen

Alle Zellflächen im Inneren des Lösungsgebietes werden bei der Diskretisierung gleich behandelt. Besondere Aufmerksamkeit bedarf es an Rändern, wo spezielle Bedingungen abhängig von der Problemstellung erforderlich sind. Die zwei bekanntesten Arten von Randbedingungen sind *Neumann* und *Dirichlet* Bedingung. Die Neumannsche Randbedingung bedeutet die Vorgabe des Gradienten am Rand, Dirichletsche Randbedingung die Vorgabe des Variablenwertes. Die verwendeten Randbedingungen lassen sich in diese beiden Gruppen einteilen. An einer festen Wand und am Einstromrand werden die Geschwindigkeiten vorgegeben, am Ausstromrand ist der Geschwindigkeitsgradient in Normalenrichtung zum Rand null. Der Ausstromrand wird senkrecht zur Strömungsrichtung gewählt, so dass die Nullgradientenbedingung in normale Richtung dem vorliegenden Gradienten entlang von Stromlinien entspricht. An einer Symmetrieebene verschwindet der Gradient der randparallelen Geschwindigkeitskomponente sowie die Geschwindigkeit normal zur Randfläche S . Die Randbedingungen von k , ω und ϵ sind identisch mit den Randbedingungen der Geschwindigkeiten an Symmetrie-, Einstrom- und Ausstromrand. An der Wand ist k als Folge von $\underline{u} = 0$ null, ebenso wie der

Gradient in wandnormaler Richtung. Von Null verschieden ist der Wert von ε und ω an der Wand, deren Werte werden in der wandnächsten Zelle abgeschätzt. Wenn die viskose Wandgrenzschicht durch die Maschenweite nicht auflösbar ist, werden sogenannte Wandfunktionen [44] eingesetzt, die Werte von k , ε und ω sind dann in der wandnächsten Zelle eine Funktion des Wandabstands. Die Schubspannungsgeschwindigkeit an der Wand wird als Funktion von k des wandnächsten Punkts P_o abgeschätzt:

$$u_\tau = C_\mu^{\frac{1}{4}} \sqrt{k_{P_o}}. \quad (3.27)$$

Diese Approximation wird zur Berechnung der Dissipationsrate

$$\varepsilon_{P_o} = \frac{u_\tau^3}{\kappa n}, \quad (3.28)$$

und der Produktion an turbulenter kinetische Energie in Gl.(2.28)

$$P_{k,P_o} = \left| \mu \frac{\partial v_t}{\partial n} \right| \frac{u_\tau}{\kappa n}, \quad (3.29)$$

und dem dimensionslosen Wandabstand mit Gl.(2.56) benutzt. Um das gewünschte logarithmische Geschwindigkeitsprofil für turbulente Strömungen vorherzusagen, muss bei der Berechnung der Oberflächenkräfte an der Wand eine modifizierte Wirbelviskosität eingesetzt werden

$$\mu_w = \mu \frac{n^+ \kappa}{\ln(E n^+)}, \quad (3.30)$$

die zur Erhöhung der Diffusion in Wandnähe beiträgt. Die Konstante $\kappa = 0,419$ ist allgemeingültig und E berücksichtigt die Wandrauigkeit. Für hydraulisch glatte Wände wird $E = 9,0$ verwendet.

In Berechnung unter Einbeziehung der gesamten Grenzschicht verschwindet k infolge der Haftbedingung an der Wand. Die spezifische Dissipationsrate ω würde unendlich groß (Gl. 2.31) werden, und wird in der wandnächsten Zelle als eine Funktion des Wandabstands approximiert:

$$\omega_{P_o} = 6\nu / (C_{\omega 2} n^2). \quad (3.31)$$

Die Randbedingungen müssen in jedem Zeitschritt vorgegeben werden, bei einer instationären Berechnungen muss darüber hinaus die Startlösung zur Zeit t_o vorgegeben werden, die alle Gleichungen erfüllt.

Tabelle 3.1: Liste der Randbedingungen

| Variable | Einstrom | Ausstrom | Symmetrie | Wand | Wandfunktionen |
|-----------------|--|---|--|--|----------------|
| \underline{v} | $\underline{v} = v_{\text{ein}}$ | $\frac{\partial v_i}{\partial n} = 0$ | $\frac{\partial v_t}{\partial n} = 0, v_n = 0$ | $\underline{v} = v_w, \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0$ | Gl.(3.30) |
| k | $k = k_{\text{ein}}$ | $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$ | $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$ | $k = 0, \frac{\partial k}{\partial n} = 0$ | Gl.(3.29) |
| ε | $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ein}}$ | $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$ | $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$ | - | Gl.(3.28) |
| ω | $\omega = \omega_{\text{ein}}$ | $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$ | $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$ | $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, \text{ Gl. (3.31)}$ | Gl.(3.28) |

In vielen Fällen beeinflusst die Anfangsbedingung nicht das Ergebnis (z.B. bei periodischen Strömungen oder bei LES/DNS), aber die benötigte Rechenzeit. Je weiter die Variablenwerte bei der Initialisierung im Lösungsgebiet von der wirklichen Lösung entfernt sind, desto länger ist die Rechenzeit. Die Initialisierung spielt daher eine wichtige Rolle. Bei turbulenten Strömungen ist die Existenz turbulenter Strukturen entscheidend für die Simulationszeit, die sich leicht vervielfachen kann, wenn sich diese Strukturen erst ausbilden müssen. Die Berechnung einer ebenen turbulenten Kanalströmungen benötigt bei einer uniformen Initialisierung viele tausend Zeitschritte bis sich turbulente Strukturen ausbilden und die zeitliche Mittelung beginnen kann. Diese Rechenzeit kann gespart werden durch die Initialisierung mit einem turbulenten Feld einer anderen Berechnung. Andere Initialisierungsmöglichkeiten beruhen auf der Störung der Anfangslösung, die bei der Simulation von turbulenten Kanalströmungen schnell abgeklungen können, oder die Berechnung bei einer höheren Reynoldsschen Zahl zu beginnen, bei der sich die Turbulenz schneller ausbildet, und diese schrittweise zu reduzieren.

3.4 Diskretes Gleichungssystem

Durch die Diskretisierung der Gleichungen entsteht für jede Zelle eine algebraische Gleichung, die nur Unbekannte aus ihren unmittelbaren Nachbarzellen beinhaltet:

$$a_{P_0} \phi_{P_0} - \sum_{j=1}^{N_j} a_j \phi_{P_j} = q_{P_0} \quad (3.32)$$

Die Koeffizienten aller N Zellen werden in einer $N \times N$ schwach besetzten Matrix \underline{A} , in einen Lösungsvektor $\underline{\phi}$ und einen Quellenvektor \underline{q} zusammengefasst:

$$\underline{A} \underline{\phi} = \underline{q} \quad (3.33)$$

Zu den Koeffizienten a_j tragen die implizit behandelten diffusiven und konvektiven Flüsse bei:

$$a_j = \Gamma_j \frac{S_j}{|\underline{d}_j|} - \min(F_j, 0) \quad (3.34)$$

Ist der Quellterm von der Lösung der Gleichung abhängig kann er nach [87] linearisiert und wie in Gl.(3.21) aufgeteilt werden, wobei der Koeffizient a_q zum Zentralkoeffizienten beiträgt, was sich günstig auf die Konvergenz des Gleichungssystems auswirkt. Damit ergibt sich der Zentralkoeffizient unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Beiträge:

$$a_{P_0} = \left(a_q + \frac{3}{2\Delta t} \right) V_{P_0} + \sum_{j=1}^{N_j} a_j. \quad (3.35)$$

Auf der rechten Seite des Gleichungssystems befinden sich neben den expliziten Beiträgen vorangegangener Zeitebenen (t_k, t_{k-1}) die Quellenterme, sowie explizite Teile der Flussapproximationen infolge verzögerter Korrektur:

$$q_{P_0} = \left(\frac{2}{\Delta t} \phi^k - \frac{1}{2\Delta t} \phi^{k-1} \right) \rho V_{P_0} + b_q V_{P_0} + \sum_{j=1}^{N_j} \Gamma_j \left(\nabla \phi_j - \left(\nabla \phi_j \cdot \frac{\underline{d}_j}{|\underline{d}_j|} \right) \underline{n}_j \right) \cdot \underline{S}_j - \sum_{j=1}^{N_j} \gamma_j \left((\phi_{P_j} - \phi_{P_0})(1 - \zeta_j) \cdot \max(F_j, 0) - (\phi_{P_0} - \phi_{P_j}) \zeta_j \cdot \min(F_j, 0) \right). \quad (3.36)$$

3.5 SIMPLE-Methode

Zur Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen ist die Berechnung von vier Unbekannten aus den vier zur Verfügung stehenden Gleichungen erforderlich. In jeder Impulserhaltungsgleichung wird nach einer Geschwindigkeitskomponente gelöst. Damit muss der Druck mit Hilfe der vierten Gleichung - der Massenerhaltungsgleichung - bestimmt werden. Da in der Gleichung p nicht vorkommt wird das SIMPLE Verfahren (eng. *semi implicit method for pressure linked equations*) benutzt [86]. Bei diesem Verfahren werden abwechselnd in den *äußeren* Iterationen die Impulserhaltungsgleichungen und eine aus der Kontinuitätsgleichung abgeleitete Druckkorrekturgleichung gelöst. Es wird so lange iteriert, bis der Fehler unterhalb einer definierten Fehlerschranke liegt und als vernachlässigbar klein angesehen werden kann. Wegen der Projektion von Divergenz erzeugenden Anteile auf eine andere Gleichung und der anschließenden Korrektur durch einen Druckgradienten ist diese Methode als Projektionsmethode zu klassifizieren.

Im ersten Schritt werden die Impulserhaltungsgleichungen gelöst. Diese werden durch die Annahme eines bekannten Massenfluss (erste Stufe der Picard Iteration) linearisiert:

$$\int_{S_j} \rho \underline{v}_i \underline{v} \cdot \underline{n} dS \approx (v_i)_j \int_{S_j} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS = (v_i)_j \dot{m}_j \quad (3.37)$$

Der Massenfluss wird mit den Geschwindigkeiten aus der letzten Iteration oder zu Simulationsstart in der Initialisierung bestimmt. Die Druckkäfte werden in den Impulsgleichungen ebenfalls mit Werten des Druckes aus dem vorherigen Rechenschritt bestimmt. Wie schon bei der Diskretisierung erläutert, ist die lineare Interpolation der Geschwindigkeiten zur Berechnung der Massenflüsse bei Verwendung von nicht versetzten Gittern nicht ausreichend. Diese kann keine von Zelle zu Zelle alternierende Oszillation des Druckes erkennen (positive und negative Zellzentrumwerte des gleichen Betrags, würden auf gleichförmigem Gitter zu einem interpolierten Wert gleich null führen). Daher wird die interpolierte Geschwindigkeit, die Druckgradienten aus den Zellzentren verwendet, mit einem Korrekturterm versehen und nach Gl.(3.11) berechnet. Da für die Berechnung der Massenflüsse nur die Komponente in Normalenrichtung notwendig ist, wird die Korrektur ebenfalls mit der Ableitung des Drucks in diese Richtung vorgenommen. Der zusätzliche Term soll verschwinden, wenn die Druckverteilung linear oder quadratisch ist. Um dies zu gewährleisten wird zur Interpolation der Druckgradienten der Mittelwert aus beiden Zellzentren verwendet, auch wenn das Gitter nicht äquidistant ist. Der zusätzliche Interpolationsterm ist proportional der dritten Ableitung des Drucks und dem Quadrat der Maschenweite. Dabei handelt es sich um eine konsistente Approximation und der interpolierte Wert der Geschwindigkeit konvergiert mit Gitterverfeinerung zum exakten Wert mit 2.Ordnung.

Durch die Linearisierung der Impulserhaltungsgleichung ist die sequentielle Lösung der Gleichungen möglich, dabei werden abwechselnd Impulserhaltungsgleichungen und Massenerhaltungsgleichung gelöst. Zuerst wird die Geschwindigkeit \underline{v}^* bestimmt, die noch nicht die Kontinuitätsgleichung erfüllt, da die Summe aller Massenflüsse durch die Zellflächen mit \underline{v}^* zu einem Massendefekt $\Delta \dot{m}_p^*$ führt:

$$\sum_{j=1}^{N_j} \dot{m}_j^* = \Delta \dot{m}_p^* \quad (3.38)$$

Um eine Lösung zu erhalten, die beide Gleichungen erfüllt, werden die Geschwindigkeiten

mit einem Druckgradienten entsprechend der SIMPLE-Methode korrigiert:

$$(v_n^{**})_j = -\frac{\Delta V}{(a_{P_o}^v)_j} \left(\frac{\partial p^{**}}{\partial n} \right)_j \quad (3.39)$$

wobei ΔV das Produkt aus Zellfläche S_j und Abstand d_j der beiden Zellzentren ist und $(a_{P_o}^v)_j$ der interpolierte Zentralkoeffizient. In die Massenerhaltungsgleichung eingesetzt, ergibt sich eine Poisson-Gleichung für den Druck

$$a_{P_o}^p p_{P_o}^{**} + \sum_{j=1}^{N_j} a_j^p p_j^{**} = -\Delta \dot{m}_{P_o}^*, \quad (3.40)$$

aus deren Lösung der Druckgradient für die Geschwindigkeitskorrektur bestimmt wird. Hier werden die Ableitungen der Druckkorrektur mit Zentraldifferenzen approximiert. Die Nichtorthogonalität des Gitters wird vernachlässigt, was bei extremen Winkeln zu Problemen führen kann, und entsprechend korrigiert werden muss [29]. Die Koeffizienten der Druckkorrekturgleichung (3.40) ergeben sich als Funktion von Zentralkoeffizienten der Impulserhaltungsgleichungen, deren Herleitung ausführlich in [29] erläutert wird:

$$a_j^p = -\varrho \overline{\left(\frac{V_{P_o}}{a_{P_o}^v} \right)} \frac{|S_j|}{|d_j|} \quad (3.41)$$

$$a_{P_o}^p = -\sum_{j=1}^{N_j} a_j^p \quad (3.42)$$

Als Lösung von Gl.(3.40) erhält man die Druckkorrektur p^{**} und aus Gl.(3.39) die Geschwindigkeiten, die nur die Massenerhaltung erfüllen und erneute Iterationszyklen erfordern.

Meist ist es notwendig die Korrekturen $\underline{v}^{**}, p^{**}$ der vorläufigen Werte von Druck p^* und Geschwindigkeit \underline{v}^* zu unterrelaxieren, da bei der Herleitung der Druckkorrekturgleichung Näherungen getroffen werden. Die Werte der Unterrelaxationsfaktoren α_v und α_p sind vom Gitter und der Problemstellung abhängig. Bei instationären Rechnungen auf kartesischem Gitter mit kleinem Zeitschritt ist keine Unterrelaxation notwendig, Werte für andere Rechnungen finden sich bei [29]. Der neue Wert für den Druck wird durch Druckkorrektur bestimmt:

$$p^{***} = p^* + \alpha_p p^{**} \quad (3.43)$$

Die Geschwindigkeiten im KV-Zentrum werden proportional dem Gradienten der Druckkorrektur berechnet, analog zum Ausdruck für $(v_n^{**})_j$:

$$\underline{v}_{P_o}^{**} = -\frac{V_{P_o}}{a_{P_o}^v} \nabla p_{P_o}^{**} \quad (3.44)$$

Die korrigierte Geschwindigkeit $\underline{v}^{***} = \underline{v}^* + \underline{v}^{**}$ erfüllt im Rahmen der gewählten Approximation die Massenerhaltungsgleichung, aber nicht die linearisierte Impulserhaltungsgleichung. Wegen der Linearisierung muss diese mehrmals gelöst werden (mit korr. Koeffizienten und Quellterm), die notwendige Korrektur und Unterrelaxation wird im Rahmen der äußeren Iterationen nachgeholt. Die Unterrelaxation der Geschwindigkeit erfolgt hier [87]:

$$\frac{a_{P_o}^v}{\alpha_v} v_{i,P_o}^* - \sum_j a_j^v v_{i,j}^* = q_{P_o} + (1 - \alpha_v) \frac{a_{P_o}^v}{\alpha_v} v_{i,P_o}^{li} \quad (3.45)$$

Konvergieren die Gleichungen verschwinden die Anteile, zu denen die Unterrelaxation α_v beiträgt, und es ergibt sich die ursprüngliche Gleichung. Als letzter Schritt werden die Massenflüsse korrigiert, deren Defekt beseitigt ist.

$$\dot{m}^{***} = \dot{m}^* - \alpha_j^p (p_{P_j}^{**} - p_{P_0}^{**}) \quad (3.46)$$

3.6 Filtermethode

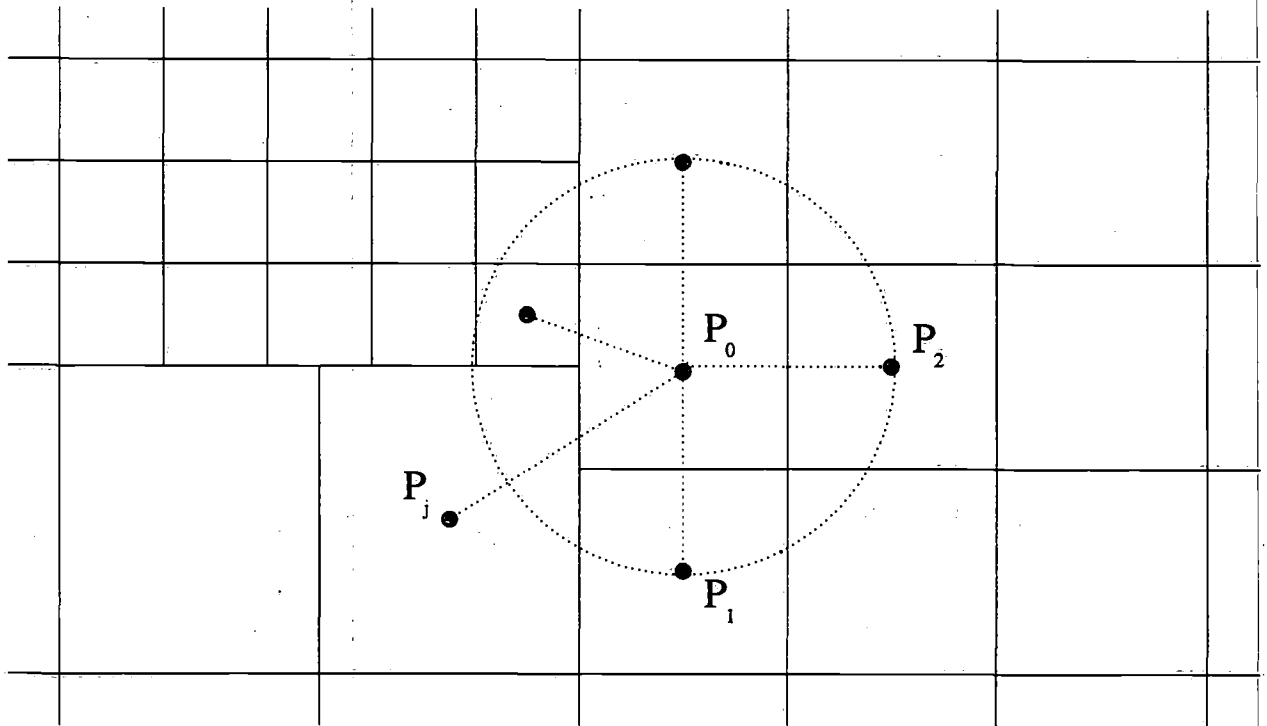


Abbildung 3.2: Grafische Darstellung der Filterweite im zweidimensionalen Raum: nur Zellen mit dem Mittelpunkt auf oder innerhalb des Kreises werden berücksichtigt.

Die Aufteilung des gesamten Problemgebietes in endlich kleine Kontrollvolumina, deren Variablenwerte in der Mitte des Volumens gespeichert sind, ist in der FV-Methode wie eine Filterung und wird im weiteren Verlauf als Gitterfilter bezeichnet; bei der Filterung durch die numerische Methode wird von einer impliziten Filterung gesprochen. Die Durchführung einer Mittelung oder Glättung von Variablenwerten in einer Umgebung $\underline{x}-\underline{x}'$ ist eine explizite Filterung. Die Anwendung des dynamischen Modells macht, neben der impliziten Filterung durch das Gitter, eine explizite Filterung mit einem zweiten Filter (Testfilter) neben dem Gitterfilter erforderlich. Die Filterung ist in Gl. (2.11) durch ein Faltungsintegral formuliert [60] und muss folgende Normierungsbedingung erfüllen, um eine konstante Variable durch die Filterung identisch abzubilden:

$$\int G(\underline{x}) d\underline{x} = 1. \quad (3.47)$$

Der erforderliche Aufwand und das numerische Verfahren bestimmen die Filtermethode. In diesem Fall empfiehlt sich die Anwendung eines Rechteckfilters, was auf den verwendeten Gittern mit unstrukturiertem Löser, die eine Verknüpfung von nicht zueinander passenden

Gitterblöcken erlauben, nicht ohne weiteres möglich ist. Folgende Vereinfachung werden zu diesem Zweck gemacht:

- linearer Funktionsverlauf zwischen benachbarten Zellmittelpunkten wird angenommen;
- nur Zellen mit gemeinsamer Zellfläche werden zur Filterung verwendet;
- das Faltungsintegral wird durch Summation interpolierter Zellflächenwerte approximiert;
- Filterweite wird durch kubische Wurzel des Zellvolumens bestimmt.

Mit diesen Vereinfachungen wird die gefilterte Funktion unter Einhaltung der Normierungsbedingung berechnet: der gemittelte Funktionswert aus Zellen mit gemeinsamer Zellfläche wird mit dem Kehrwert des Abstandes zum Punkt P_0 gewichtet (wenn der Abstand kleiner als die Filterweite ist) und aufsummiert. Zur Normierung wird durch die Summe reziproker Abstände der berücksichtigten Punkte geteilt.

$$\hat{f}(\underline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{f(\underline{x}) + f(\underline{x}_i)}{2|\underline{x} - \underline{x}_i|}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_i|}} \quad (3.48)$$

Hier ist k die Anzahl der Nachbarzellen, deren Mittelpunkt innerhalb der Filterweite liegt, siehe Abb. 3.2. Diese Filterung garantiert mit gleichförmigem Gitter die Abbildung einer linearen Funktion $lin(\underline{x})$ auf sich selbst. Mit Zunahme der Funktionsordnung nimmt der Fehler durch die Filterung der Funktion zu. Zum Test des Filters wird diese auf eine lineare und eine nichtlineare Funktion $nlin(\underline{x})$ angewendet:

$$lin(\underline{x}) = 3x + 2y + z \quad (3.49)$$

$$nlin(\underline{x}) = 3x^2 + 2y^3 + z^4. \quad (3.50)$$

Die Anwendung der Filterfunktion in Abb. 3.3 ergibt auf zwei Gitterblöcke mit nicht passendem Übergang für die lineare Funktion $lin(\underline{x})$ die gleichen Funktionswerte wie vor der Filterung. Bei $nlin(\underline{x})$ weicht die gefilterte Funktion von der ursprünglichen ab.

3.7 Lösung des Gleichungssystems

Das Ergebnis der Diskretisierung für jede Erhaltungsgleichung ist ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\underline{A} \underline{\phi} = \underline{q}, \quad (3.51)$$

das mit einem entsprechenden Algorithmus gelöst werden kann. Die Lösung erfolgt hier iterativ. In der Lösung sind meist Fehler enthalten, die nach Ihrer Ursache klassifiziert werden. **Diskretisierungsfehler** entstehen durch Approximation von Integralen und Ableitungen sowie durch Interpolation und sind von den angewendeten Methoden und der Qualität des verwendeten numerischen Netzes abhängig. Sie sind der Unterschied zwischen der exakten analytischen Lösung der Ausgangsgleichungen und der exakten Lösung der Näherungsgleichung, die durch die Diskretisierung entstanden ist. Durch systematische Gitterverfeinerung wird der Fehler proportional zur Potenz k der Gittermaschenweite verringert, wobei k

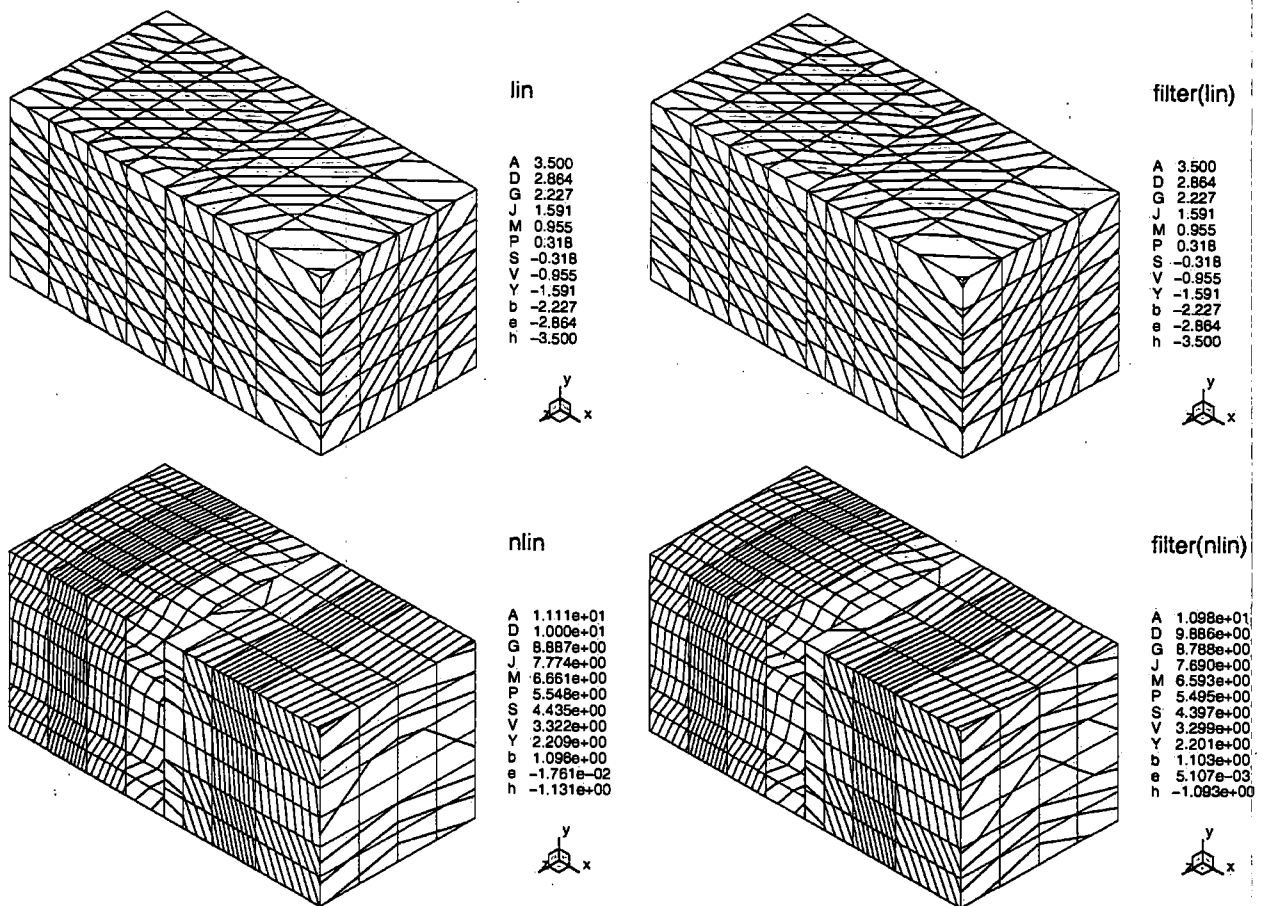


Abbildung 3.3: Vergleich der Funktionswerte einer linearen $lin(\underline{x})$ und einer nichtlinearen Funktion $nlin(\underline{x})$ im dreidimensionalen Raum; links mit und rechts ohne Anwendung der Filterfunktion unter Verwendung von nichtpassenden Gitterblöcken.

die Ordnung des Verfahrens darstellt und durch Taylorreihenentwicklung abgeleitet werden kann. In Kapitel 4 wird die Auswirkung des Diskretisierungsfehlers am Beispiel der Berechnung von turbulenten Kanalströmungen weiter diskutiert.

Iterationsfehler sind die Differenz zwischen exakter Lösung und der iterativen Lösung der diskretisierten Gleichungen bei Abbruch der Iterationen. Die Anzahl der notwendigen Iterationen zur Beseitigung des Fehlers ist nicht im voraus abschätzbar, der verbleibende Fehler kann durch Vergleich der Lösungen nach verschiedener Anzahl von Iterationen bestimmt werden.

Andere Fehler sind Programmierfehler und Modellfehler, die durch Vergleich mit möglichst vielen Experimenten und anderen Berechnungen identifiziert werden sollen. Diese Fehler werden sichtbar wenn obige Fehler beseitigt werden können, teilweise heben sich mehrere Fehler jedoch gegenseitig auf, so dass Berechnungen unter Umständen auf groben Netzen bessere Ergebnisse liefern als auf feinen Netzen.

Zur Unterscheidung von den äußeren Iterationen, die zur Koppelung der Gleichungen notwendig sind (Korrektur von \underline{A} und \underline{q}), werden die Iterationen zur Lösung einer linearen Gleichung *innere* Iterationen genannt. Der iterative Löser muss hoch effizient sein, denn dieser Algorithmus wird zur Lösung jeder Gleichung aufgerufen. Da es sich dabei nur um eine vorläufige Lösung handelt, die sich im Verlauf des iterativen Prozesses noch verändert, muss das Gleichungssystem nicht exakt gelöst werden. Aus diesem Grund werden aufwendige direkte Lösungsmethoden nicht verwendet. Im Verlauf des äußeren Iterationsprozesses wird

die notwendige Korrektur kleiner, so dass die Gleichungen nach m Iterationen, bis zu einem verbleibenden Residuum $\underline{\rho}^m$, das maximal bis auf die Rundungsfehler reduziert werden kann, den Navier-Stokesschen Gleichungen genügen:

$$\underline{A} \underline{\phi}^m = \underline{q} - \underline{\rho}^m \quad (3.52)$$

Die Differenz zwischen der exakten Lösung und der Lösung nach m Iterationen ist der Iterationsfehler ϵ , der ebenfalls nur bis zu einem vom Rechner abhängigen Minimum vermindert werden kann, das meist deutlich niedriger liegt als der Diskretisierungsfehler. Der Fehler nach m Iterationen kann durch den Vergleich der konvergierten und der Zwischenlösung abgeschätzt werden:

$$\underline{\epsilon}^m = \underline{\phi} - \underline{\phi}^m. \quad (3.53)$$

Für lineare Gleichungssysteme ergibt sich aus der Differenz von Gl. (3.51) und Gl. (3.52)

$$\underline{A} \underline{\epsilon}^m = \underline{\rho}^m, \quad (3.54)$$

d.h. der Residuenvektor ist Quellterm für die Fehler und beide sind proportional zueinander. Da der Fehler proportional dem Residuum ist, können Iterationsfehler durch den Betrag der Residuenverringerung abgeschätzt werden. Für innere Iterationen wird die Reduktion der Residuums um eine bis zwei Größenordnungen vorgegeben, wobei davon ausgegangen wird, dass der Iterationsfehler um die gleiche Größenordnungen fällt. Der Iterationsfehler der *äußeren* Iterationen wird durch Beobachtung der Reduktion der Residuen nach der ersten inneren Iteration (berechnet mit der alten Lösung $\underline{\phi}$ und der neuen Matrix \underline{A} und Quellenvektor \underline{q}) abgeschätzt. Bei zeitabhängigen Simulationen werden mit diesem Verfahren 5-10 Iterationen pro Zeitschritt benötigt. Der Iterationsfehler und dessen Abhängigkeit von der Iterationsanzahl wird an der Grobstruktursimulation der ebenen Kanalströmung in Kapitel 6 und der laminaren Zylinderumströmung in Kapitel 7.1 untersucht.

Auf den verwendeten unstrukturierten Gittern werden Gleichungslöser aus der Familie der konjugierten Gradienten (eng. *conjugate gradients*: CG) eingesetzt. Diese erfüllen die Aufgabe der Glättung in den inneren Iterationen, und sind maßgeblich für die benötigte Rechenzeit verantwortlich. Die Lösung der Gleichung entspricht einem Minimierungsproblem der folgenden Gleichung:

$$F = \frac{1}{2} \underline{\phi}^T \underline{A} \underline{\phi} - \underline{\phi}^T \underline{q} \quad (3.55)$$

Das klassische Verfahren [39] erzielt theoretisch nach m Iterationen die exakte Lösung $\underline{\phi}$, wobei m die Anzahl der Unbekannten ist. Für die symmetrische, positiv-definite Matrix der Druckkorrekturgleichung, sind folgende Schritte notwendig:

- Schätzung $\underline{\phi}^0$
- Berechnung von $\underline{\rho}^0 = \underline{q} - \underline{A} \underline{\phi}^0$
- Iteration bis $\underline{\rho}^k < \text{Konvergenzkriterium}$ für $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\beta^0 = 0, \quad \beta^k = \frac{\underline{\rho}^k \cdot \underline{\rho}^k}{\underline{\rho}^{k-1} \cdot \underline{\rho}^{k-1}}$$

$$\underline{p}^0 = \underline{\rho}^0, \quad \underline{p}^k = \underline{\rho}^k + \beta^k \underline{p}^{k-1}$$

$$\alpha^k = \frac{\underline{\rho}^k \cdot \underline{\rho}^k}{\underline{A} \underline{p}^k \cdot \underline{p}^k}$$

$$\underline{\phi}^{k+1} = \underline{\phi}^k + \alpha^k \underline{p}^k$$

$$\underline{\rho}^{k+1} = \underline{\rho}^k - \alpha^k \underline{A} \underline{p}^k$$

Um nach wenigen Iterationen eine gute Näherung zu erhalten, ist es notwendig die Matrix \underline{A} durch die Multiplikation mit einer geeigneten Konditionierungsmatrix \underline{C} vorzubehandeln. Die Konditionierung bewirkt eine engere Verteilung der Eigenwerte des Residuumvektors, was letztlich zur schnelleren Lösung der Gleichung führt. Dies kann bei symmetrischen Matrizen durch eine unvollständige Cholesky-Zerlegung (eng. *incomplete Cholesky decomposition*: IC) von \underline{A} erreicht werden. Die Zerlegung

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{U} \quad (3.56)$$

in eine untere und eine obere Dreiecksmatrix sowie in eine Diagonalmatrix \underline{D} geschieht für N Zellen nach folgendem Schema, bei dem die Berechnung von Wurzeln vermieden werden kann:

- $i = 1, \dots, N$
- $j = i, \dots, N$

$$l_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} d_{kk} u_{ki}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_{kk} u_{kj}$$

$$d_{ii} = (u_{ii})^{-1} = (l_{ii})^{-1}$$

Die zu lösende Gleichung nach der Konditionierung lautet:

$$\underline{C}^{-1} \underline{A} \underline{C}^{-1} \underline{C} \underline{\phi} = \underline{C}^{-1} \underline{q} \quad (3.57)$$

Um ein effizientes Verfahren zu realisieren, sollte die Inverse \underline{C}^{-1} der Konditionierungsmatrix eine gute Näherung von \underline{A}^{-1} sein, wobei der Aufwand für die Invertierung gering zu halten ist. Die Bedingung zur Anwendung der ICCG Methode ist bei der Druckkorrekturgleichung gegeben, da die Koeffizientenmatrix symmetrisch und positiv definit ist. Die Impulserhaltungsgleichungen erfüllen dieses Kriterium nicht, durch Multiplikation mit der transponierten Matrix \underline{A}^T entsteht eine symmetrische Matrix:

$$\underline{A}^T \underline{A} \underline{\phi} = \underline{A}^T \underline{q} \quad (3.58)$$

Der zur Lösung verwendete Algorithmus wird als stabilisierte konjugierte Gradienten Methode (eng. *conjugate gradient stabilized*: CGSTAB) bezeichnet und unterscheidet sich durch einen ungefähr doppelt so hohen Aufwand vom CG Löser. Der verwendete Algorithmus lautet [31]:

- Schätzung $\underline{\phi}^0$
- Berechnung von $\underline{\rho}^0 = \underline{q} - \underline{A} \underline{\phi}^0$ und $\underline{\rho}_t^0 = \underline{q} - \underline{A}^T \underline{\phi}^0$

- Iteration bis $\underline{\rho}^k < \text{Konvergenzkriterium}$ für $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\beta^k = \frac{\underline{\rho}_t^k \cdot \underline{\rho}^k}{\underline{\rho}_t^{k-1} \cdot \underline{\rho}^{k-1}}$$

$$\underline{p}^{-1} = \underline{p}_t^{-1} = 0, \quad \underline{p}^k = \underline{\rho}^k + \beta^k \underline{p}^{k-1}$$

$$\underline{p}_t^k = \underline{\rho}_t^k + \beta^k \underline{p}_t^{k-1}$$

$$\alpha^k = \frac{\underline{\rho}_t^k \cdot \underline{\rho}^k}{\underline{A} \underline{p}^k \cdot \underline{p}_t^k}$$

$$\underline{\phi}^{k+1} = \underline{\phi}^k + \alpha^k \underline{p}^k$$

$$\underline{\rho}^{k+1} = \underline{\rho}^k - \alpha^k \underline{A} \underline{p}^k$$

$$\underline{\rho}_t^{k+1} = \underline{\rho}_t^k - \alpha^k \underline{A}^T \underline{p}_t^k$$

Eine bessere Alternative zur Vorkonditionierung von \underline{A} , allerdings nur auf strukturierten Gittern anwendbar, ist die Verwendung des Lösers von Stone (eng. *semi implicit procedure*: SIP) [113], das auf einer optimierten unvollständigen LU-Zerlegung (eng. *incomplete lower upper decomposition*: ILU) basiert. Dieser Algorithmus wird in der numerischen Strömungsmechanik wegen seiner hohen Effizienz verwendet [29] und nutzt die Aufteilung in obere und untere Dreiecksmatrix zur Lösung des linearen Gleichungssystems aus:

$$\underline{A} \approx \underline{B} = \underline{L} \underline{U}, \quad (3.59)$$

wobei die Matrizen \underline{L} und \underline{U} ebenso dünn besetzt sind wie \underline{A} . Dieser Löser wird in allen zweidimensionalen Berechnungen, die auf strukturierten Gittern durchgeführt wurden, eingesetzt und wird darum kurz beschrieben. Durch die Kenntnis der Nachbarn einer Zelle können die Matrizen direkt aufgestellt werden. Jeweils zwei Flächen einer Zelle tragen zu einer Dreiecksmatrix bei: die mit 'w' und 's' bezeichneten Flächen zu \underline{L} und 'e' und 'n' zu \underline{U} . Die Nomenklatur entspricht der Formulierung von [29]. In der dünn besetzten Matrix sind bei Verwendung von Zentralfdifferenzen nur 5 Diagonalen (im dreidimensionalen 7) mit Beiträgen von den Koeffizienten besetzt. Im zweidimensionalen Fall ergibt sich folgende Matrixgleichung:

$$\underline{A}\phi \approx \underline{B}\phi = [\underline{A} + \underline{N}]\phi \quad (3.60)$$

Bei der gewöhnlichen ILU-Methode werden die Elemente der Matrix \underline{B} gleich den Elementen von \underline{A} gesetzt, bis auf die Diagonalen B_{nw} und B_{se} , die in \underline{A} nicht vorhanden sind. Somit können die Elemente von \underline{L} und \underline{U} anhand der Matrix \underline{A} bestimmt werden. Zu Problemen führt die nicht vernachlässigbare Differenz $\underline{B} - \underline{A}$, denn die Elemente der Diagonalen B_{nw} und B_{se} können groß sein. Die Methode von Stone basiert auf der Verringerung der zusätzlichen Diagonalen durch folgende Approximationen:

$$\begin{aligned} \phi_{nw} &\approx \alpha(\phi_w + \phi_n - \phi_p) \\ \phi_{es} &\approx \alpha(\phi_e + \phi_s - \phi_p). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Durch Einsetzen der Approximationen von Gl. 3.61 in die Annahme $\underline{A}\phi \approx \underline{B}\phi$ können die Elemente von \underline{L} und \underline{U} ausgehend von der linken unteren Ecke des Lösungsgebietes

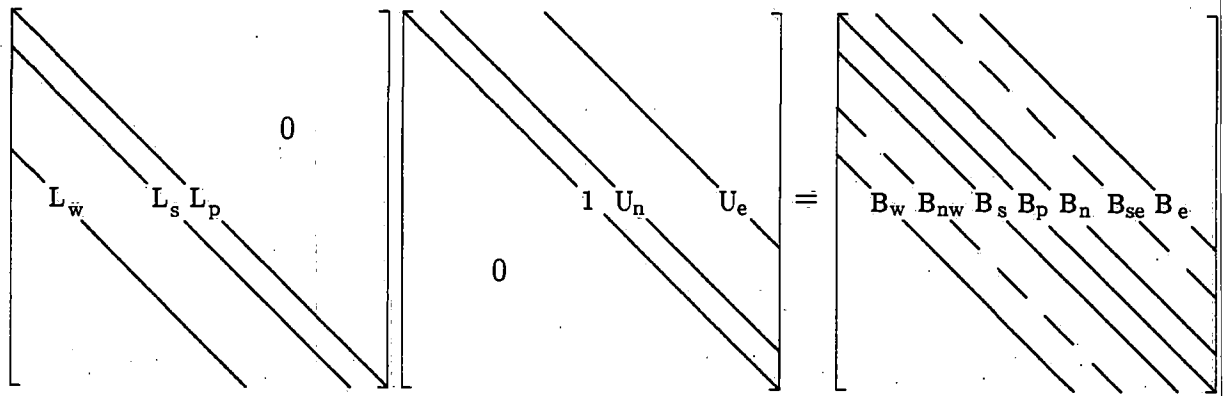


Abbildung 3.4: Aufteilung der Koeffizientenmatrix in obere und untere Dreiecksmatrizen.

nacheinander berechnet werden [29]:

$$\begin{aligned}
 L_w^l &= A_w^l / (1 + \alpha U_n^{l-N_j}) \\
 L_s^l &= A_s^l / (1 + \alpha U_e^{l-1}) \\
 L_p^l &= A_p^l + \alpha (L_w^l U_n^{l-N_j} + L_s^l U_e^{l-1}) - L_w^l U_e^{l-N_j} - L_s^l U_n^{l-1} \\
 U_n^l &= (A_n^l - \alpha L_w^l U_n^{l-N_j}) / L_p^l \\
 U_e^l &= (A_e^l - \alpha L_s^l U_e^{l-1}) / L_p^l
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Der Faktor α dient zur Optimierung des Systems und liegt zwischen null und eins: bei α gleich null reduziert sich die Methode auf die Standard ILU-Zerlegung, $\alpha \approx 0,9$ ist für die effiziente Methode von Stone einzustellen. Eine Variation von α erhöht die Effizienz des Löser, die nötige Neubestimmung der Matrixdiagonalen ist so teuer, so dass von einer Variation von α abgesehen wird. Die Methode von Stone wird neben Gleichungslösung auch zur Glättung von Mehrgitterverfahren und Vorkonditionierung von CG Gleichungslösern verwendet.

Kapitel 4

Direkte numerische Simulation ebener Kanalströmung

4.1 Einleitung

Durch die Entwicklung der Mikroelektronik und den eng verbundenen Fortschritt im Bereich von Rechnersystemen ist die numerische Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen für turbulente Strömungen seit Beginn der siebziger Jahre durchführbar. Die ersten Berechnungen wurden zur Simulation homogener isotroper Turbulenz [88], [84] durchgeführt. In den achtziger Jahren wurde die Simulation homogener Turbulenz an der Stanford Universität [57], [5] und [122] behandelt, wo als erster Fall nichthomogener Turbulenz eine ebene Kanalströmung [49] simuliert wurde. Im Vergleich zu den ersten Simulationen hat es in der numerischen Strömungsmechanik große Fortschritte gegeben, aber bis zum eigentlichen Ziel, der zuverlässigen Vorhersage beliebiger Strömungen, sind weitere Entwicklungen in den Bereichen Modellierung, Numerik und Technologie notwendig. Die direkte numerische Simulation (DNS) einer ebenen turbulenten Kanalströmung wurde auf heutigen Rechnerarchitekturen (massive parallele Systeme mit fast 10 000 Prozessoren in den USA; der zum Zeitpunkt dieser Arbeit schnellste Rechner ist Ascii White - ein paralleler Cluster aus 8192 IBM Power 3 Prozessoren und einer Leistung von 12,3 TFlops) bis zu einer Reynoldsschen Zahl $Re_\tau = 590$ (gebildet mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit) durchgeführt [73]. Das entspricht einer mittleren Reynoldsschen Zahl (Re) von 13 500. Der Bereich technisch interessanter Strömungen liegt bei deutlich höheren Reynoldsschen Zahlen und ist durch DNS auf absehbare Zeit nicht vorhersagbar. Der Sinn von Simulationen ist daher in der Schaffung von Datenbanken zu sehen, die eine tiefere Einsicht in die Physik der Turbulenz ermöglichen. Die daraus gewonnenen Ergebnisse und Erkenntnisse werden zum Test und zur Entwicklung von Turbulenzmodellen benötigt.

4.2 Durchführung

4.2.1 Geometrie und Randbedingungen

Der ebene Kanal wird an zwei gegenüberliegenden Seiten von einer festen Wand begrenzt, in alle übrigen Richtungen ist die Ausdehnung unendlich. Die Wand mit der Haftbedingung wird aus historischen Gründen - die ersten Rechnungen waren zweidimensional auf

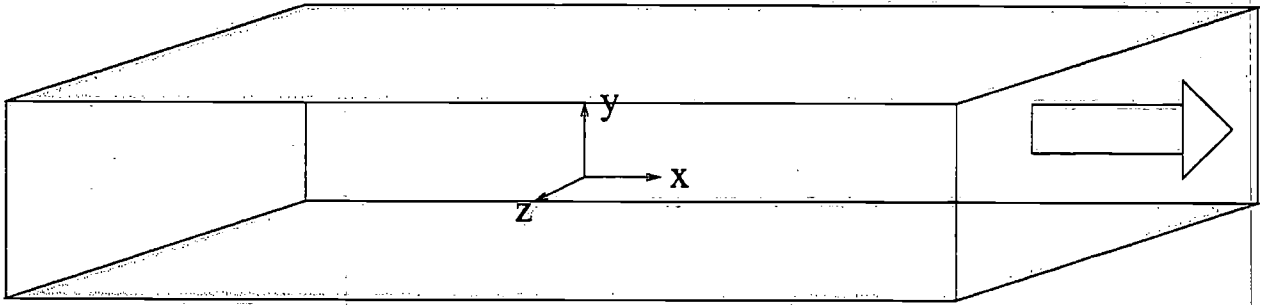


Abbildung 4.1: Darstellung der Geometrie eines ebenen Kanals.

orthogonalen Gittern mit der wandnormalen Richtung y – meist in eine y -Ebene gelegt. Durch die Anwendung periodischer Randbedingungen wird ein unendlicher Kanal in x - und z -Richtung simuliert, wobei die Dimensionen des Kanals auf jeden Fall größer sein müssen als die größtmögliche auftretende Struktur der Strömung, was in diesem Fall die Kanalhöhe $L_y = 2\delta$ ist. Die gewählten Dimensionen des Berechnungsgebietes sind $6\delta \times 2\delta \times 3\delta$, und damit kleiner als in direkten Simulation [49]. Aus den Korrelationen der Geschwindigkeiten zwischen zwei Punkten wird das eindimensionale Energiespektrum, zum Beispiel E_{xx} , berechnet:

$$E_{xx}(x, k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \overline{v_x(x, t)v_x(x+r, t)} e^{-ikr} dr. \quad (4.1)$$

r ist der Abstand zwischen zwei Punkten und k ist die Frequenz des Energiespektrums in eine Richtung. Der Abfall der Energie bei hohen Frequenzen ist der Beweis für eine ausreichende Auflösung und Dimensionierung des Berechnungsgebietes. Dies ist bei steigendem r mit einer deutlichen Abnahme der Zweipunktgeschwindigkeitskorrelationen, die in Gl.(4.1) als zeitlicher Mittelwert in die Berechnung der Energie eingehen, verbunden. In Querrichtung ist die Abnahme nach $z^+ = 100$ vollständig erfolgt, somit sind die homogenen Ränder mit den verwendeten $z^+ = 540$ und vergleichbarem Gitterabstand ausreichend weit voneinander entfernt. In Strömungsrichtung sind die Korrelationen der Geschwindigkeiten stärker, sie nehmen bis ungefähr $x^+ = 200$ ab und bleiben auf konstant positivem Niveau, bevor sie am anderen Ende des Kanals wieder ansteigen. Die minimale Größe des Rechengebietes für vergleichbare turbulente Kanalströmungen hat eine Ausdehnung von 100 dimensionslosen Einheiten in Querrichtung und 250-300 in Strömungsrichtung [46]. Die Größe des Berechnungsgebietes ist somit ausreichend gewählt.

Im Gegensatz zur homogenen Turbulenz, bei der nur Funktionswerte am Rand des Berechnungsgebietes getauscht werden müssen, wird bei vorgegebenem konstantem Massenfluss eine Kraft benötigt, die der Reibungskraft entgegen wirkt und die Strömung antreibt; diese Funktion übernimmt die Druckkraft. Durch eine integrale Kräftebilanz an den Ränder des Berechnungsgebietes bestimmt man den Zusammenhang zwischen der Wandschubspannung τ_w , die an der Wand in der xz -Ebene (A_{xz}) wirkt, und der Druckdifferenz zwischen Ein- und Ausstromrändern in der yz -Ebene (A_{yz}):

$$\Delta p_x A_{yz} = \tau_w 2A_{xz}. \quad (4.2)$$

Durch Umformung ergibt sich der mittlere Druckgradient bei vorgegebener Wandschubspannung und umgekehrt. Die Strömung wird durch $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$ eindeutig charakterisiert. Da in der Formulierung der Impulserhaltungsgleichungen ein Druckgradient auftritt, ist die einfachste Möglichkeit die gewünschte Wandschubspannung über einen Druckgradienten an den

Tabelle 4.1: Liste von verwendeten Parametern in DNS der ebenen Kanalströmung anderer Autoren

| Autor | Re_τ | N_x | N_y | N_z | L_x | L_y | L_z | Δx^+ | $\Delta y_{\min}^+ - \Delta y_{\max}^+$ | Δz^+ |
|-------------------------|-----------|-------|-------|-------|--------------|-----------|------------------------|--------------|---|--------------|
| Kim <i>et al</i> [49] | 180 | 192 | 129 | 160 | $4\pi\delta$ | 2δ | $2\pi\delta$ | 12 | 0,05-4,4 | 7 |
| Moser <i>et al</i> [73] | 180 | 128 | 129 | 128 | $4\pi\delta$ | 2δ | $\frac{4}{3}\pi\delta$ | 4.4 | - | 5.9 |
| Moser <i>et al</i> [73] | 590 | 384 | 257 | 384 | $2\pi\delta$ | 2δ | $\pi\delta$ | 7.2 | - | 4.8 |

Tabelle 4.2: Liste von verwendeten Parametern in den hier durchgeführten Simulationen der Kanalströmung.

| Re_τ | N_x | N_y | N_z | L_x | L_y | L_z | Δx^+ | $\Delta y_{\min}^+ - \Delta y_{\max}^+$ | Δz^+ | PE |
|-----------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|--------------|---|--------------|----|
| 180 | 42 | 68 | 28 | 6δ | 2δ | 3δ | 25,7 | 0,37-20,9 | 19,3 | 4 |
| 180 | 84 | 136 | 56 | 6δ | 2δ | 3δ | 12,9 | 0,18-10,8 | 9,6 | 32 |
| 180 | 120 | 160 | 112 | 6δ | 2δ | 3δ | 9 | 0,9-2,2 | 4,8 | 32 |

periodischen Rändern in der Hauptströmungsrichtung vorzugeben. Das iterative Verfahren sichert die Einhaltung der Randbedingungen, die Wandschubspannung kann anhand der berechneten Geschwindigkeitsverteilung überprüft werden.

Die DNS aus Tab. 4.1 sind heute Standardtestfälle zur Überprüfung von Simulationsprogrammen, da die zur Verfügung stehenden Daten sehr ausführlich und mit vielen Experimenten verglichen wurden. Eine direkte numerische Simulation wurde hier bei $Re_\tau = 180$ durchgeführt, mit dem Ziel, das verwendete Berechnungsverfahren und die Auswertungsunterprogramme zu validieren.

4.2.2 Simulationsparameter

Die dimensionslose Zeitschrittweite bei den Kanalsimulationen wurde variiert, wobei die feinsten Schritte $\Delta t^+ = \Delta t u_\tau^2 / \nu = 0,108$ (im Vergleich zu 0,0676 [49]) waren. Auf Gitterebene 1 ergab sich in Übereinstimmung mit [19] keine Abhängigkeit der Statistiken von der Zeitschrittweite bis $\Delta t^+ \approx 0,4$. Der Zeitdiskretisierungsfehler ist für diese Zeitschrittgrößen kleiner als die anderen Fehler, wie in Abb. 4.2 zu erkennen ist, bei zu großem Zeitschritt werden charakteristische Ereignisse der Strömung gemittelt und gehen verloren. Die Zeitschrittweite bei impliziten Verfahren ist nicht an das CFL-Kriterium gebunden, sondern an die Auflösung von Ereignissen, wie Wirbelablösung oder Scherschichtaufrollung, und damit problemabhängig. Bei Verwendung örtlich verfeinerbarer Gitter ist ein implizites Verfahren eine sinnvolle Optimierungsoption. Eine gleichmäßige räumliche Auflösung im gesamten Berechnungsgebiet in x - und z -Richtung mit Konzentration von Zellen in Wandnähe in y -Richtung ist hier optimal, wie auch in Anhang A diskutiert wird.

Unter Optimierung des Iterationsfehlers soll keine Minimierung verstanden werden, sondern eine Verringerung bis zur Vernachlässigbarkeit. Die Überprüfung darauf wurde auf Gitterebene 1 mit unterschiedlicher Anzahl von Iterationen durchgeführt. Die Ergebnisse werden in Form von Reynoldsschen Spannungen in Abb. 4.3 verglichen. Mit 3 Iterationen pro Zeitschritt wird der Iterationsfehler in der Simulation der Kanalströmung kleiner als andere

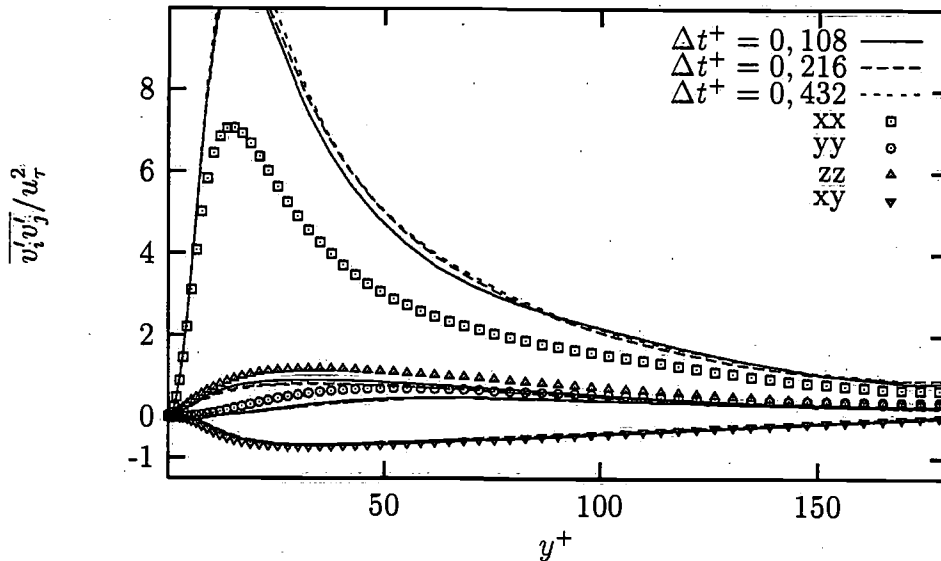


Abbildung 4.2: Reynoldssche Spannungen normiert mit Wandschubspannung für unterschiedliche Zeitschrittweite Δt^+ (Linien) auf Gitterebene 1 im Vergleich zur direkten numerischen Simulation ([49]: Symbole).

Fehler und somit vernachlässigbar. Das entspricht einer Residuenverringern von mindestens zwei Größenordnungen bei jeder Impulserhaltungsgleichung und einer bei der Massenerhaltungsgleichung. Zehn Iterationen bedeuten dreifache Rechenzeit bei fast identischen Reynoldsschen Spannungen.

Die Simulation ist mit einem turbulenten Geschwindigkeitsprofil und zufälligen Fluktuationen auf Gitterebene 1 initialisiert worden, um einem realistischen Zustand so nahe wie möglich zu kommen. In der Simulation dämpft die Viskosität auf dem groben Gitter die vorhandenen Fluktuationen und das Profil strebt gegen ein parabolisches Profil. Nach einigen zehntausend Zeitschritten beginnt sich eine Instabilität in Strömungsrichtung zu bilden, die sich als wellenförmige Struktur in z -Richtung mit der Geschwindigkeitskontur darstellen lässt und breitet sich als nächstes in z -Richtung ausbreitet. Die Transition, die auf groben Gittern ein Folge der Anhäufung von numerischen Fehlern und nicht der physikalischen Instabilität ist, kann auf dem verwendeten Gitter nicht in Einzelheiten studiert werden (Tolmien-Schlichting-Instabilität). Nach dem Umschlag sind typische turbulente Strukturen, wie die langgezogenen Wirbel in Wandnähe mit hoher und niedriger Geschwindigkeit (engl. *streaks*), zu erkennen. Die Lösung wird mit Hilfe von Funktionswert und Gradient so genau wie möglich auf die feinere Gitterebene extrapoliert. Diese Startlösung ist wesentlich besser als eine Initialisierung bestehend aus stationärem turbulentem Profil mit statistischen Schwankungen, so dass Rechenzeit gespart wird und schon nach wenigen Zeitschritten mit der Bildung von Mittelwerten begonnen werden kann.

Die zweite Gitterebene ist durch systematische Verfeinerung in jede Koordinatenrichtung aus dem ersten Gitter entstanden. Da die Statistiken in Wandnähe schon auf dem zweiten Gitter gut mit [49] und [68] übereinstimmten, wird die dritte Gitterebene nicht durch systematische Verfeinerung des zweiten Gitters generiert, sondern das Gitter wird so verteilt wie es den Statistiken nach sinnvoll scheint: Maschen in jenen Bereichen zu konzentrieren, wo die Unterschiede zwischen der Simulation auf grobem Gitter und [49] groß sind. Die Ergebnisse rechtfertigen dieses Vorgehen.

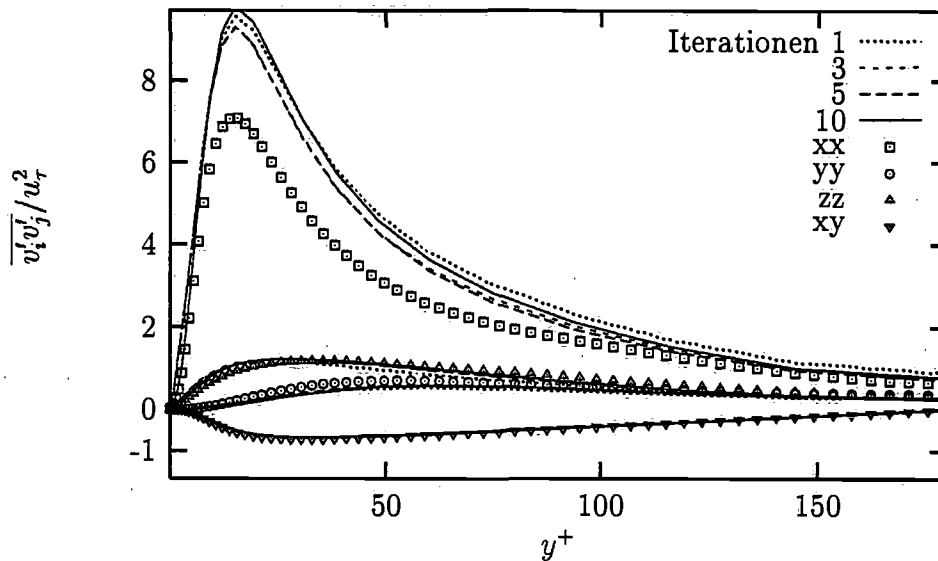


Abbildung 4.3: Reynoldsche Spannungen bei DNS der Kanalströmung auf dem mittleren Gitter mit fest vorgegebener Anzahl der äußeren Iterationen pro Zeitschritt (Linien) im Vergleich zur direkten numerischen Simulation ([49]: Symbole).

Gitterebene 3 wurde in 32 Stücke mit gleicher Kontrollvolumenanzahl geteilt und auf die gleiche Anzahl von Prozessoren verteilt. Die parallele Effizienz, die stark von der Architektur der Maschine und der Anzahl der verwendeten Prozessoreinheiten (PE) abhängig ist, erreicht auf den verwendeten Rechnern (SGI Power Challenge und HP V2250 vom RRZ Hamburg, Cray T3E vom HLRS/Stuttgart und vom ZIB/Berlin, paralleler Linux PC-Cluster) ungefähr 90% [108] (gemessen auf Cray T3D mit 64 PE). Die Rechenzeit für das feinste Gitter betrug 450 Stunden auf 32 PE der Cray T3E, diese Zeit hätte durch Nutzung einer größeren Prozessoranzahl verringert werden können, wegen der institutspezifischen Rechnerwarteschlangen, die Anwendungen mit kleiner Prozessoranzahl bevorzugen, wäre die absolute Zeit nicht zwingend kleiner gewesen.

Bei der Berechnung der turbulenten Statistiken wurden die homogenen Richtungen zur Mittelung der Geschwindigkeit ausgenutzt, jedoch nicht für den Druck, der zeitlich gemittelt ist und dessen Verteilung nur in z -Richtung homogen ist. Der Druck wird in einer Masche auf einen konstanten Wert fixiert und p wird in allen anderen Zellen relativ dazu berechnet. In der Referenzzelle existiert keine Druckfluktuation, so dass lokal in dieser Zelle auftretende Druckschwankungen eine Schwankung im gesamten Berechnungsgebiet bewirken. Die Bildung der Statistik geschieht durch Summation der Funktionswerte, darum scheint die Normierung des Druckes auf einen integralen Wert notwendig. Das gemittelte Druckfeld zeigte im Verlauf der Simulation keinen erkennbaren Einfluss durch diese Schwankungen, so dass auf die Normierung des Druckfeldes mit einem integralen Referenzwert verzichtet werden kann.

4.2.3 Ergebnisse und Diskussion

Außer den mittleren Geschwindigkeiten sind Reynoldsche Spannungen von besonderem Interesse für die Turbulenzmodellierung. Die folgenden Ergebnisse sind teilweise [93] veröffentlicht, da sie aber Grundlage für die weiteren Ausführungen sind, sollen sie dargestellt und

diskutiert werden. Theoretisch kann die Scherspannung in einer laminaren Kanalströmung mit der Wandschubspannung normiert werden, so dass diese einen linearen Verlauf ergibt. Das laminare Profil einer Kanalströmung besitzt eine Parabelform, das heißt die Geschwindigkeit ist eine quadratische Funktion des Wandabstands. Die Ableitung der Geschwindigkeit in wandnormaler Richtung multipliziert mit der Viskosität ergibt die Scherspannung, die linear vom Wandabstand abhängt. Normiert mit dem Betrag der Wandschubspannung beträgt die Scherspannung an einer Wand -1 an der gegenüberliegenden +1. In einer turbulenten Kanalströmung ist der Verlauf der normierten Summe aus viskoser Scherspannung und turbulenter Scherspannung, siehe Abb. 4.4, ebenfalls linear und liegt zwischen 1 und -1. Der viskose Anteil überwiegt in Wandnähe und verschwindet in der Übergangsschicht, die turbulente Schubspannung steigt von 0 bis zum Maximum bei $y^+ = 30$ (siehe Abb. 4.5), danach fällt der Wert bis zum Verschwinden in der Kanalmitte. Vom theoretischen Verlauf weicht die berechnete totale Schubspannung nur in unmittelbarer Wandnähe geringfügig ab. Die Abweichung ist unsymmetrisch, deshalb wird auf unzureichende Mittelung geschlossen, die bei der Berechnung von Gradienten aus gemittelten Größen stärker auffällt.

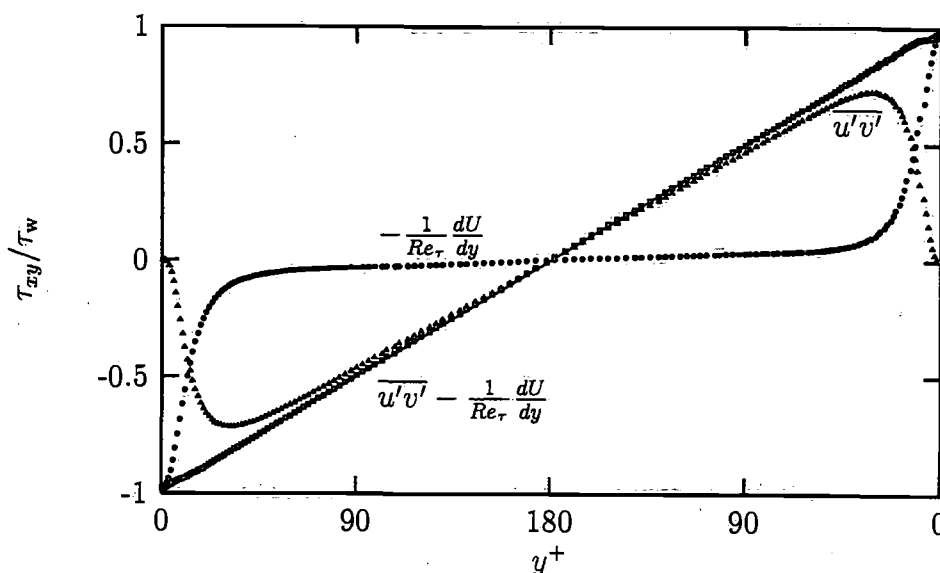


Abbildung 4.4: Turbulente und viskose Scherspannungen im Kanalquerschnitt berechnet auf dem dritten Gitter, die Summe aus beiden ist theoretisch eine Gerade.

Die Geschwindigkeitskomponente und deren Schwankung in Strömungsrichtung wird auf groben Gittern höher vorhergesagt, wie an \bar{v}_x in Abb. 4.7 und $\overline{v_x'v_x'}$ in Abb. 4.6 zu erkennen ist. Diese strebt mit Gitterverfeinerung jedoch gegen die Referenzlösung. Die Reynoldssche Spannungskomponente $\overline{v_y'v_y'}$ in Abb. 4.6 konvergiert von der entgegengesetzten Richtung zur Lösung von [49]. Da die Geschwindigkeit \bar{v}_y im Mittel null ist, wird die Schwankungskomponente auf groben Gittern zu klein vorhergesagt. Das Produkt $\overline{v_x'v_y'}$ aus den Schwankungskomponenten v_x' und v_y' wird besser vorhergesagt (Abb. 4.5) als die anderen Komponenten des Reynoldsschen Spannungstensors, weil zwei Fehler sich aufheben. Das Ergebnis von Gitterebene 3 zeigt bei allen gemittelten Profilen die geringsten Unterschiede zur Referenzlösung. Die Konvergenz ist nicht in allen Fällen monoton, wie bei systematischer Gitterverfeinerung zu erwarten wäre, was teilweise durch die Art der Verfeinerung und teilweise durch die Nichtlinearität des Gleichungssystems zu erklären ist.

In Abb. 4.7 liegen die mittleren Profile oberhalb der Referenzlösung. In Folge der numerischen

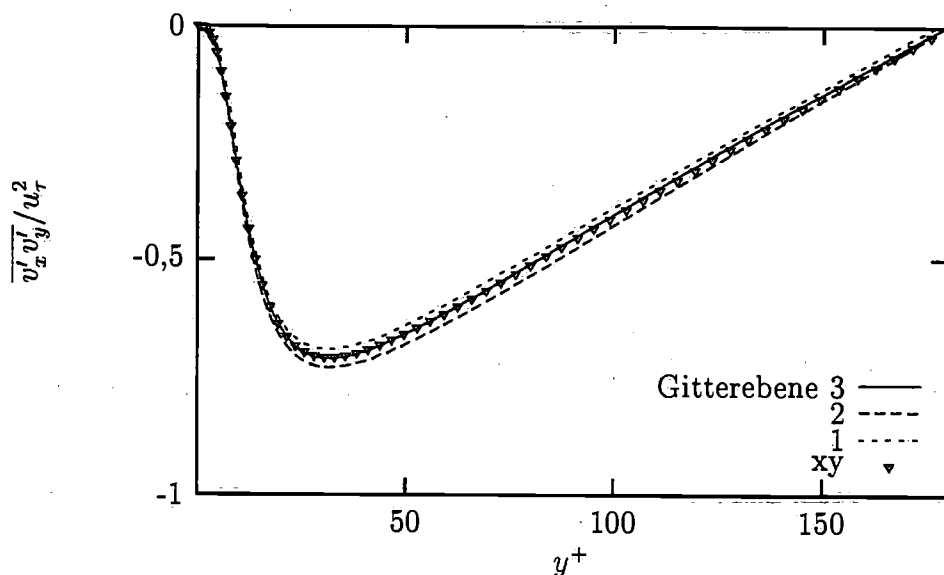


Abbildung 4.5: Turbulente Scherspannung im Kanalquerschnitt berechnet auf drei Gittern, im Vergleich zur direkten numerischen Simulation [49].

Realisierung der Kanalströmung durch Vorgabe eines Druckabfalls über die Kanallänge stellt sich die entsprechende Wandschubspannung exakt ein, der Massenfluss ist von der Auflösung abhängig und variiert leicht. Die mittlere Reynoldssche Zahl liegt in allen drei Simulationen oberhalb des Wertes der Referenzlösung. Der Grund für diesen Sachverhalt und eine mögliche Abhilfe werden in Kap. 6 erläutert.

Zur Auswertung der Reynoldssche Spannungsgleichungen in der Kanalströmung werden 4 Gleichungen bilanziert (in den anderen Gleichungen sind alle Terme gleich null) und mehr als hundert Korrelationen berechnet. Die Wahrscheinlichkeit eines versteckten Fehlers ist durch den Vergleich mit der Referenzlösung [68] gering. Die Abbildungen 4.8, 4.9, 4.10 und 4.11 stellen alle von null verschiedenen Terme der Reynoldsschen Spannungsgleichungen von $\overline{v'_x v'_x}$, $\overline{v'_x v'_y}$, $\overline{v'_y v'_y}$ und $\overline{v'_z v'_z}$ im Kanalquerschnitt dar. Zweierlei ist auffällig: zum einen stimmen die Profile bei absolut höheren Werten (Abb. 4.8) besser überein als bei kleineren (Abb. 4.9). Eine wahrscheinliche Ursache sind die Iterationsfehler: das Konvergenzkriterium ist für alle Gleichungen gleich, sind die absoluten Werte einer Größe jedoch eine Größenordnung verschieden, wie das bei der Kanalströmung der Fall ist, sollte auch das Konvergenzkriterium entsprechend kleiner sein. Da dies nicht berücksichtigt wird, sind die relativen Iterationsfehler in den Gleichungen von v_y und v_z vermutlich größer als in der Gleichung für v_x . Diese Fehler sammeln sich in der Statistik. Zum zweiten ist die Übereinstimmung der Profile qualitativ sehr gut, was systematische Fehler bei der Berechnung der Profile nahezu ausschließen lässt. In [68] wurden die Profile der Kanalsimulation und deren Bedeutung für die Turbulenzmodellierung ausführlich diskutiert. Die Terme sind in Gl. (2.26) definiert und werden mit u_τ^4/ν normalisiert.

Die Bilanzierung der Dissipationsrate ε wurde mit Simulationsdaten durchgeführt [68] und hier überprüft. Da die Dissipationsrate nicht direkt messbar und nicht in den Navier-Stokesschen Gleichungen enthalten ist, fällt es besonders schwer, diese richtig zu modellieren. Für die Vernichtung der Energie, die von den großen Skalen in Richtung der kleinsten Skalen fließt, ist deren Modellierung fundamental wichtig. Die einzelnen Terme waren bei der Modellierung vieler statistischer Turbulenzmodelle unbekannt und wurden mit Annahmen abgeschätzt.

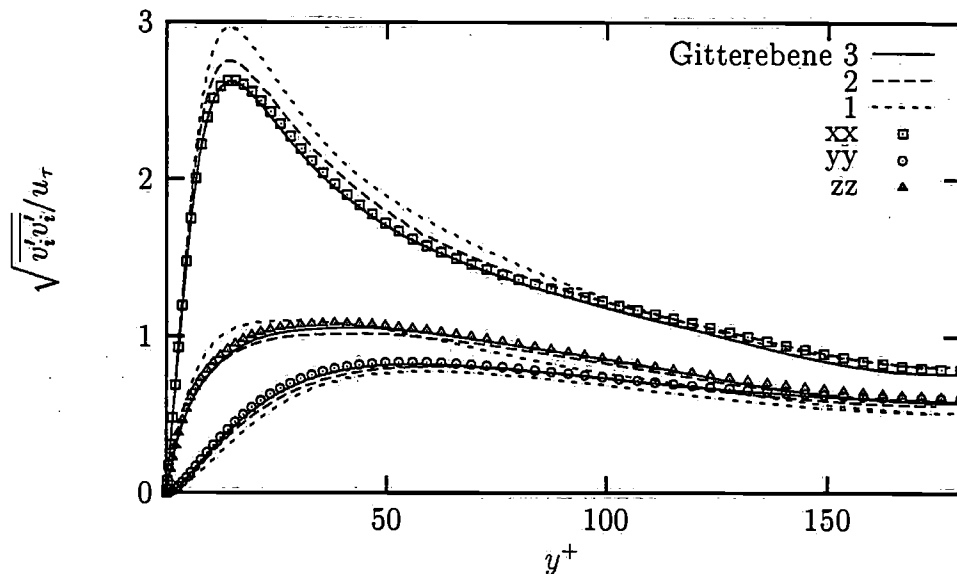


Abbildung 4.6: Turbulente Normalspannungen berechnet auf drei Gittern (Linien) im Vergleich zur direkten numerischen Simulation ([49]: Symbole).

Die Terme werden wie bei den Reynoldsschen Spannungstransportgleichungen in Produktionsterme ($P_{\epsilon_1}, P_{\epsilon_2}, P_{\epsilon_3}, P_{\epsilon_4}$) Diffusionsterme (D_v, D_t, D_p) und Senkenterm (\bar{E}_ϵ) eingeteilt. Meist werden sie nicht einzeln modelliert, sondern alle bis auf E_ϵ und P_{ϵ_4} vernachlässigt. In den Dissipationsgleichungen der Turbulenzmodellierung wird ein vereinfachtes Modell für diese Terme verwendet. Wahrscheinlich ist es notwendig, bei anisotropen Strömungen die Dissipation nicht mehr isotrop zu berechnen (Dissipationsrate), sondern ebenso wie bei den Reynoldsschen Spannungsgleichungen den Dissipationstensor elementweise zu modellieren. Die Entwicklung der Mikroprozessoren wird die Notwendigkeit der Modellierung in Zukunft zurückdrängen, da höhere Reynoldssche Zahlen simuliert werden können. Bei einer Grobstruktursimulation sollen die anisotropen Strukturen aufgelöst werden, so dass für die Dissipation ein isotropes Modell mit höherer Wahrscheinlichkeit ausreicht.

Zur besseren Darstellung im Kanalquerschnitt werden die Produktionsterme in Abb. 4.12, die diffusiven Terme und viskose Dissipation in Abb. 4.13 dargestellt. Die qualitative Übereinstimmung ist im Vergleich zu den Reynoldsschen Spannungsgleichungen schlechter, da die Ausdrücke zum Teil dreifache Korrelationen beinhalten, bei deren Berechnung ein kleiner Fehler, sichtbare Folgen hat. Die Verläufe sind qualitativ richtig und der maximale Fehler liegt ungefähr bei 50%, der mittlere bei 10%. Das mag hoch erscheinen, ist aber akzeptabel unter Berücksichtigung der Ordnung des numerischen Verfahrens, der Rundungsfehler bei teilweise sehr kleinen Beträgen und der geringeren Anzahl von Kontrollvolumen im Vergleich zur Referenzlösung. Bei der Extraktion der DNS Daten [68] aus der schriftlichen Veröffentlichung wird der Ablesefehler auf 10% geschätzt. Die Beiträge der Terme (siehe die Produktionsterme P_{ϵ_1} und P_{ϵ_2} in Abb. 4.12) können, wie bei der vereinfachten Modellierung bisher angenommen, nicht vernachlässigt werden. Als Ursache für akzeptable Ergebnisse mit der vereinfachten Modellierung wird die gegenseitige Aufhebung mehrerer Fehler gedeutet. Eine Garantie für die Eliminierung kann nicht gegeben werden und es muss mit unterschiedlich guter Leistung der Modelle bei verschiedenen Problemen gerechnet werden.

Der Vergleich auftretender Terme in den Spannungsgleichungen und in der Dissipationsgleichung, zwischen der Simulation von [49] und der hier durchgeführten Simulation, zeigt: das

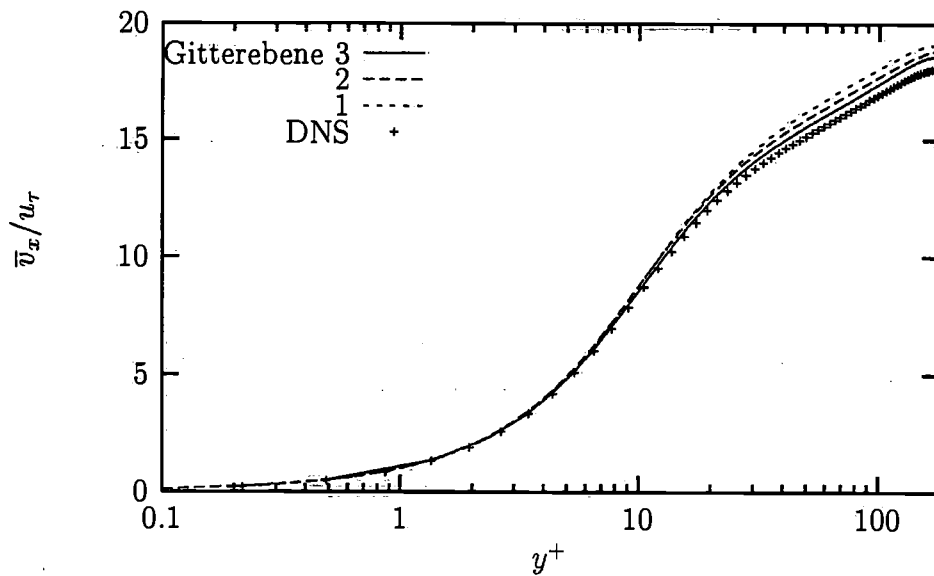


Abbildung 4.7: Mittleres Geschwindigkeitsprofil \bar{v}_x in doppelt logarithmischer Darstellung auf drei Gittern (Linien) im Vergleich zur direkten numerischen Simulation ([49]: Symbole).

verwendete FV-Verfahren zweiter Ordnung mit ZDS ist numerisch nicht dissipativ, d.h. es ist zur direkten numerischen Simulation geeignet. Ein anderer Bericht [16] verwendet ein vergleichbares Verfahren und kommt zu folgendem Ergebnis: zur Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen in der Geschwindigkeits-Druck-Formulierung ist eine vergleichbare Anzahl von Stützstellen nötig, wie bei Verfahren höherer Ordnung (spektrale Verfahren).

4.2.4 Vergleiche mit Turbulenzmodellen

In den Abbildungen 4.14 und 4.15 wird die Vorhersage der vollentwickelten Strömung in einem ebenen Kanal von drei Zweigleichungsturbulenzmodellen mit DNS Ergebnissen [49] verglichen. Bei den Modellen handelt es sich um die grenschichtauflösende Variante der $k-\varepsilon$ Modelle von Chien [15] und Launder-Sharma [54], sowie das $k-\omega$ Modell von Wilcox [118]. Die Randbedingungen wurden in jeder Berechnung so gewählt, dass die Wandschubspannung auf dem feinsten der 4 berechneten Gitter (160 Kontrollvolumen in wandnormaler Richtung) gleich dem Wert aus der Simulation ist. Um dies zu verwirklichen mussten unterschiedlich große Massenströme vorgegeben werden, d.h. die Berechnung bei gleicher Re_τ mit mehreren Modellen führte zu unterschiedlichen Reynoldsschen Zahlen. Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Modellen sind groß und können keinesfalls vernachlässigt werden. Der Einfluss des Modells auf die Impulserhaltungsgleichung durch den zusätzlichen Diffusionskoeffizient Wirbelviskosität wird in Transportgleichungen für das turbulente Geschwindigkeits- und Längenmaß (k und ε bzw. ω) bestimmt. Beide Gleichungen spielen eine wichtige Rolle: der Unterschied zwischen den Profilen von \bar{v}_x^+ in Abb. 4.14 und k^+ in Abb. 4.15 für verschiedene Modelle ist kleiner als bei der Dissipationsgleichung (Abb. 4.15). Die unterschiedlich gute Vorhersage verschiedener Modelle ist hauptsächlich die Folge einer schlecht modellierten Transportgleichung von ε und ω .

Allgemein ist die vereinfachte Modellierung wie in Zweigleichungsmodellen verwendet, nicht ausreichend um den korrekten Verlauf der Dissipationsrate zu garantieren und es ist dringend abzuraten, ohne Vergleich mit Experimenten oder Simulationsergebnissen, Aussagen

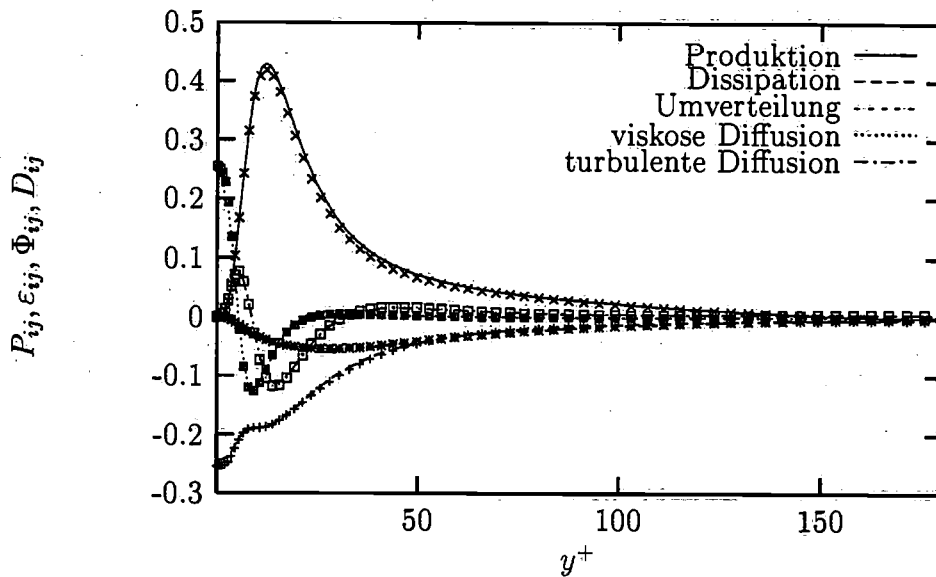


Abbildung 4.8: Bilanzierung von $\overline{v'_x v'_x}$: Darstellung aller berechneten Terme (Linien) als Funktion vom dimensionslosen Wandabstand im Vergleich mit Referenzlösung ([68]: Symbole).

über Genauigkeit der Strömungsprognose zu machen. Außerhalb der viskosen Grenzschicht nimmt die Bedeutung des dissipativen Anteils schnell ab und die Unterschiede zwischen verschiedenen Modellen können vernachlässigt werden. Wandfunktionen bieten eine Möglichkeit den komplexen viskosen Grenzschichtbereich zu überbrücken, allerdings gibt es keine allgemein anwendbar Wandfunktion, so dass diese Möglichkeit nur erwogen werden sollte, wenn auf anderem Weg keine Lösung erreicht werden kann.

4.3 Zusammenfassung

Mit einer parallelisierten FV-Methode von 2. Ordnung Genauigkeit wurde eine ebene Kanalströmung bei einer Reynoldsschen Zahl $Re_\tau = 180$ (basierend auf der Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ) simuliert und mit der spektralen Referenzlösung verglichen. Die erzielten Ergebnisse belegen, dass das hier verwendete Verfahren für DNS geeignet ist. Die Gleichungen aller Reynoldsschen Spannungen und der Dissipationsrate wurden bilanziert, wobei die relativen Unterschiede zur Referenzlösung [68] bei den betragsmäßig kleinen Größen teilweise groß sind, bei den anderen Größen hingegen klein sind: qualitativ sind alle Ergebnisse im Vergleich ähnlich. Die großen Unterschiede und Fehler verschiedener grenzschichtauflösender Turbulenzmodelle bei der Vorhersage einer ebenen Kanalströmung sind in erster Linie eine Folge der Vereinfachungen, die bei der Modellierung der turbulenten Längengleichung gemacht werden.

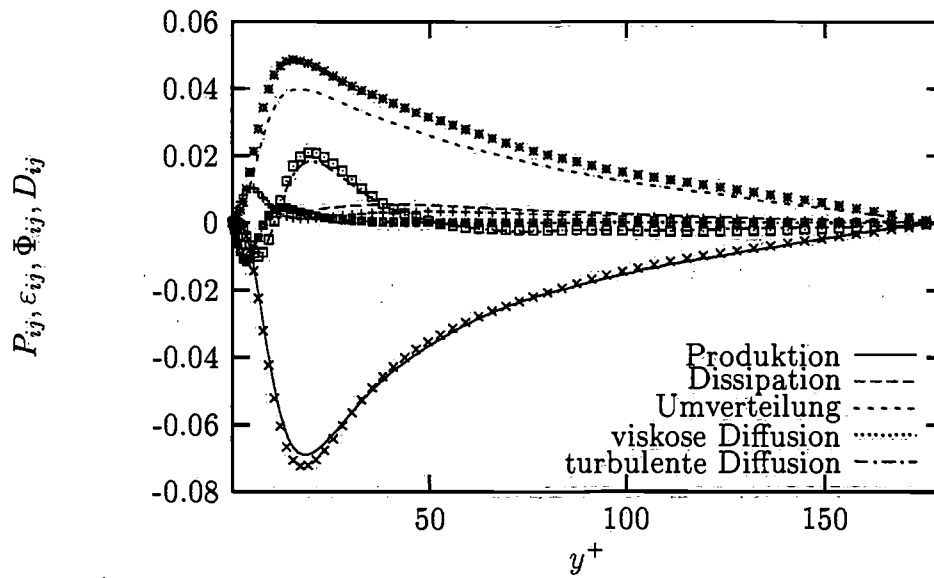


Abbildung 4.9: Bilanzierung von $\overline{v'_x v'_y}$: Darstellung aller berechneten Terme (Linien) als Funktion vom dimensionslosen Wandabstand im Vergleich mit Referenzlösung ([68]: Symbole).

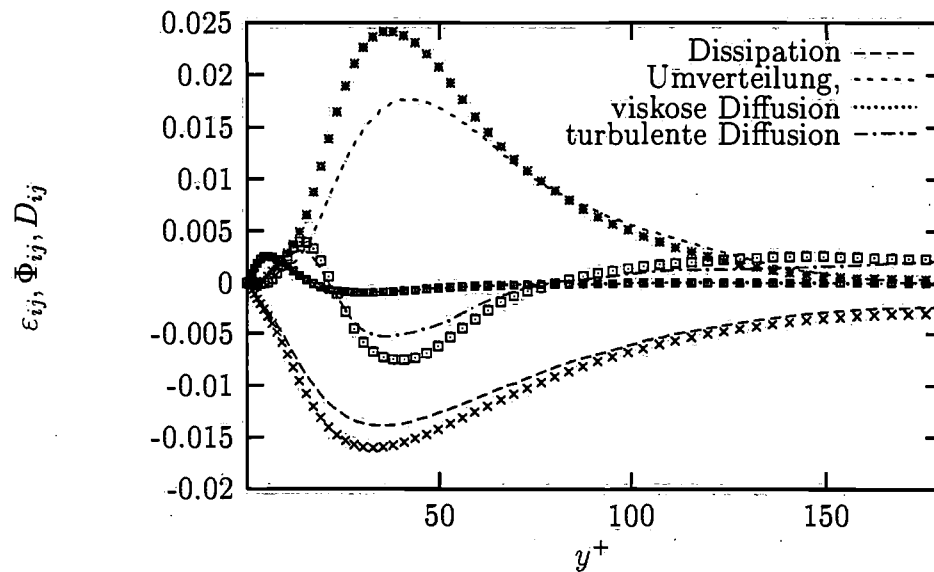


Abbildung 4.10: Bilanzierung von $\overline{v'_y v'_y}$: Darstellung aller berechneten Terme (Linien) als Funktion vom dimensionslosen Wandabstand im Vergleich mit Referenzlösung ([68]: Symbole).

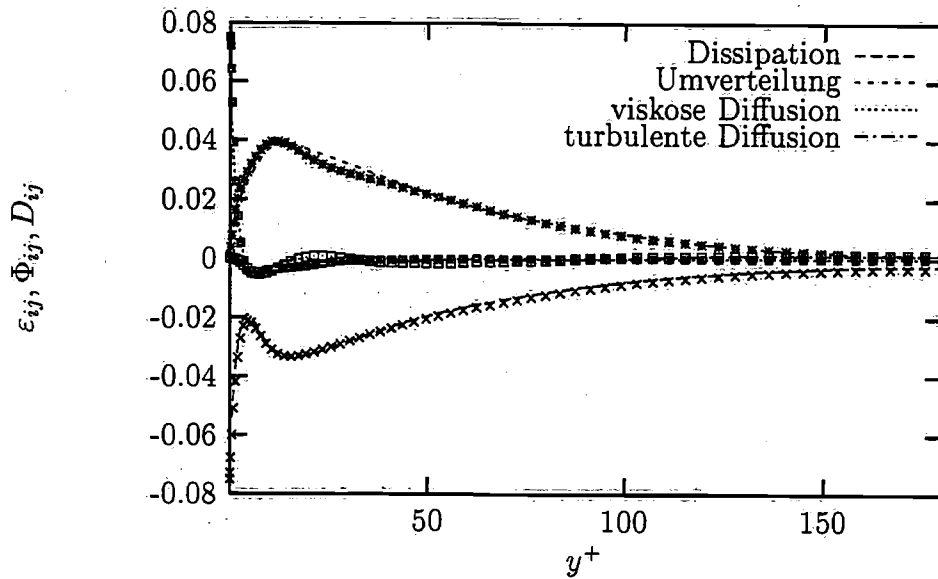


Abbildung 4.11: Bilanzierung von $\overline{v'_z v'_z}$: Darstellung aller berechneten Terme (Linien) als Funktion vom dimensionslosen Wandabstand im Vergleich mit Referenzlösung ([68]: Symbole).

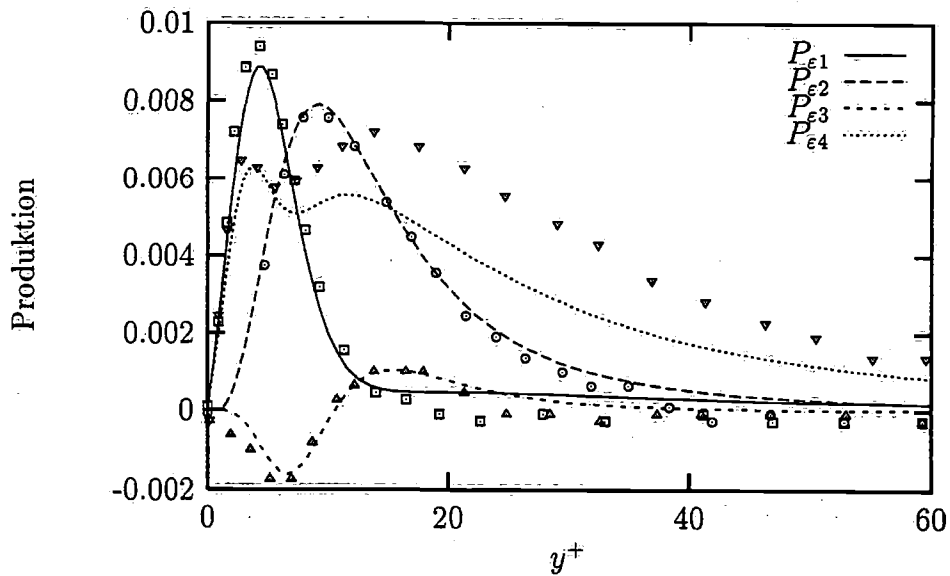


Abbildung 4.12: Bilanzierung der ϵ Transportgleichung: Darstellung der Produktionsterme (Linien) als Funktion vom dimensionslosen Wandabstand im Vergleich mit Referenzlösung ([68]: Symbole).

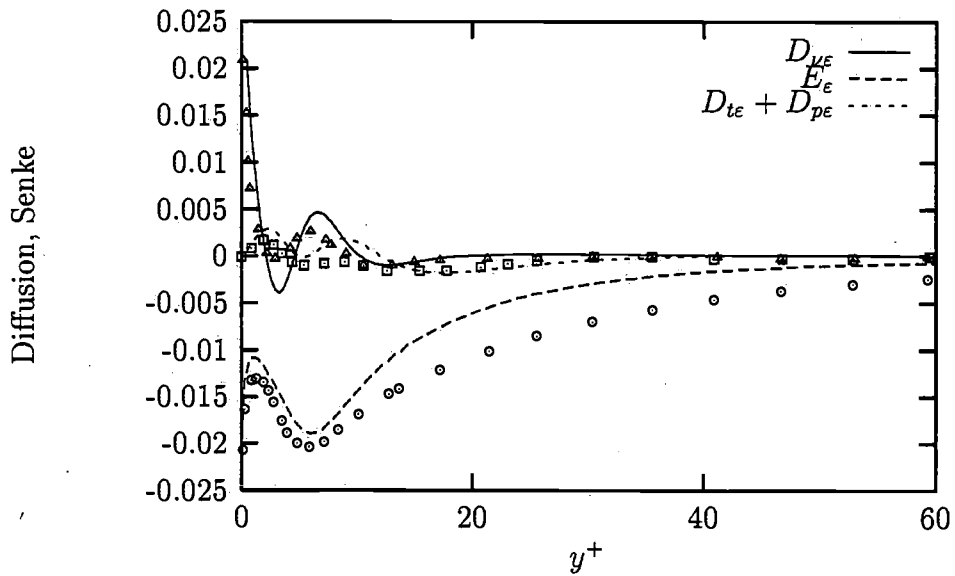


Abbildung 4.13: Bilanzierung der ε Transportgleichung: Darstellung der Diffusionsterme und Senke als Funktion vom dimensionslosen Wandabstand im Vergleich mit Referenzlösung ([68]: Symbole).

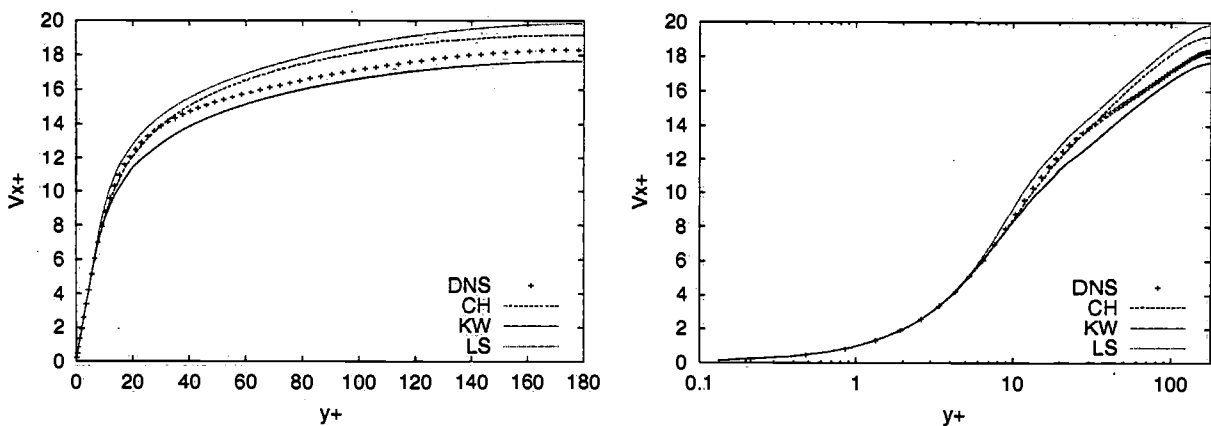


Abbildung 4.14: Profile der mittleren Geschwindigkeit einer vollentwickelten ebenen Kanalströmung berechnet mit grenschichtauflösenden Turbulenzmodellen im Vergleich zur DNS [49].

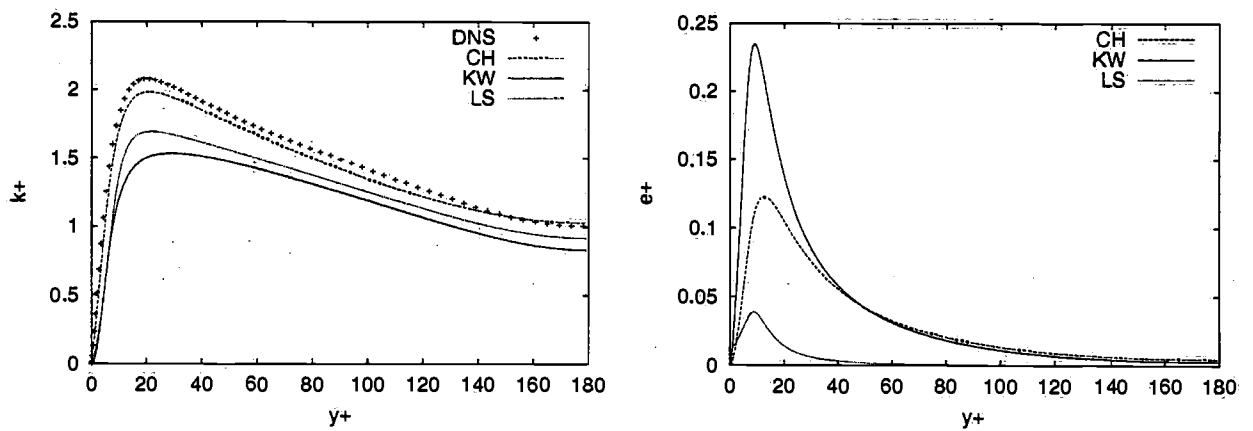


Abbildung 4.15: Profile von turbulentem Geschwindigkeits- und Längenmaß einer vollentwickelten ebenen Kanalströmung berechnet mit grenzschichtauflösenden Turbulenzmodellen im Vergleich zur DNS [49].

Kapitel 5

Abnahme homogener Turbulenz

Zur Untersuchung der Feinstrukturmodelle werden Simulationen von homogener isotroper Turbulenz durchgeführt. Homogenität bedeutet in der Naturwissenschaft, dass alle statistischen Größen vom Ort \underline{x} unabhängig sind, und für diesen Fall $\bar{v} = konst.$ Isotropie bildet alle gemittelten Korrelationen, die mit Geschwindigkeitskomponenten gebildet werden, nach Drehung des Koordinatenbezugsystems oder Spiegelung an einer Ebene, auf sich selbst ab und es gilt:

$$\overline{v_x'v_x'} = \overline{v_y'v_y'} = \overline{v_z'v_z'}. \quad (5.1)$$

Im Experiment ist die Verwirklichung eines homogenen Turbulenzfeldes nahezu unmöglich. Die Turbulenz hinter einem gleichförmig angeströmten Gitter in einem Windkanal ist – auf einem kleinen geometrischen Bereich beschränkt – homogen, allerdings nur in die Richtungen senkrecht zur Hauptströmung. Die Inhomogenität spielt eine geringe Rolle, wenn die Diffusion durch turbulente Fluktuationen vernachlässigbar klein ist; das ist der Fall bei hoher Strömungsgeschwindigkeit und kleinen Geschwindigkeitsschwankungen [101]. Gitterturbulenz ist die beste Näherung für ein homogenes Turbulenzfeld.

Die Bewegungsgleichungen sind in einem ruhenden und einem bewegten Koordinatensystem gültig, d.h. im Gegensatz zum Experiment kann eine Simulation mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v} = 0$ durchgeführt werden. Die Simulation homogener Turbulenz ist durch zwei Aspekte motiviert: die Verwendung eines rechtwinkligen Gitters bei gleichmäßiger Verteilung der Maschen im Lösungsgebiet ist möglich und es resultiert höchstmögliche Genauigkeit bei einem Verfahren von 2. Ordnung. Homogene Turbulenz wurde bereits in der Vergangenheit häufig zur Anpassung und zum Test von Turbulenzmodellen verwendet. Der einfachste Fall homogener Turbulenz – die Abnahme von turbulenter kinetischer Energie k – ist durch die folgende Differentialgleichung beschreibbar:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon \quad (5.2)$$

Die turbulente kinetische Energie k wird von den großen Skalen zu den kleinen Skalen transferiert, wo sie durch viskose Dissipation in Wärme umgewandelt wird. Die Abnahme von k wurde als Funktion der Zeit mit Gitterturbulenz [21] bestimmt:

$$(t - t_0) \sim k^{-1,25}. \quad (5.3)$$

Die Dissipationsrate ε ist von der Viskosität des Fluids abhängig

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk \quad (5.4)$$

und kann ebenso wie die kinetische Energie

$$u'^2 = \frac{2}{3} \int_0^\infty E(k) dk \quad (5.5)$$

durch Integration des Energiespektrums $E(k)$ berechnet werden [101]. Zur Bildung der charakteristischen Reynoldsschen Zahl Re_λ in homogener Turbulenz wird das Taylorsche Mikrolängenmaß λ , die Geschwindigkeitsfluktuation $u' = \sqrt{\frac{2}{3}k}$ und die kinematische Viskosität ν verwendet. Das Taylorsche Längenmaß [7] ist eine Funktion von Turbulenzenergie k und Dissipationsrate ε :

$$\lambda^2 = 15\nu u'^2 / \varepsilon. \quad (5.6)$$

Eine physikalisch sinnvolle Initialisierung für eine Simulation von homogener Turbulenz ist die Vorgabe eines Energiespektrum $E(k)$ mit Trägheitsunterbereich in dem die Steigung $-5/3$ beträgt. In turbulenten Strömungen ist dieser Bereich vorhanden, wenn die Reynoldssche Zahl ausreichend groß ist ($Re_\lambda > 70$). Allerdings ist diese Initialisierung typisch für Verfahren basierend auf Fouriertransformation, wo die Initialisierung im spektralen und nicht im physikalischen Raum stattfindet. Bei einem Finite-Volumen Verfahren kann das Berechnungsgebiet mit zufälligen Geschwindigkeitsvektoren oder mit einem vorhandenen Simulationsfeld initialisiert werden, wobei beide Möglichkeiten eingesetzt wurden.

5.1 Einfluss der Filterweite

In den meisten Grobstruktursimulationen wird die Filterweite durch den Gitterlinienabstand festgelegt. Eine große Filterweite bewirkt den Verlust von Informationen, eine kleine Filterweite (im Bereich der Kontrollvolumengröße) erhöht die Anforderungen an Rechenzeit und Hauptspeicher.

Die Simulation wird einerseits ohne Feinstrukturmodell (ZDF) durchgeführt, um die Wirkung der numerischen Methode als Filter zu untersuchen. Mit dem Modell von Smagorinsky wird der Einfluss der Filterweite durch die zeitliche Integration der gleichen Ausgangslösung bei einfacher, doppelter und dreifacher Filterweite auf einen gleichförmig verteiltem Gitter untersucht. Bei Verwendung der einfachen Filterweite (SMG) wird keine explizite Filterung durchgeführt, das Modell ist gleich dem Standardmodell von Smagorinsky und zelleigene Gradienten werden verwendet um die Feinstrukturspannung zu bestimmen. Bei Verwendung der doppelten Filterweite (SMG2) werden gemittelte Gradienten aus allen benachbarten Zellen bestimmt. Um die Filterweite weiter zu erhöhen ist es notwendig, Informationen angrenzender Zellen zu verwenden, deren Kenntnis zur Diskretisierung nicht notwendig ist. Da die explizite Filterung im Fall des Smagorinsky Modells einer Mittelung der Geschwindigkeitsgradienten benachbarter Zellen entspricht, kann die Filterweite auch durch mehrmalige Mittelung der Geschwindigkeitsgradienten erhöht werden; aus dem Mittelwert der Gradienten wird die Wirbelviskosität berechnet. Bei dreifacher Filterweite (SMG3) sind die verwendeten Geschwindigkeitsgradienten die gefilterten Werte aller Nachbarzellen, die zuvor gefiltert werden.

Auf drei systematisch verfeinerten Gitterebenen wird die Abnahme von k simuliert. Die Ausgangslösung ist eine zufällige Geschwindigkeitsverteilung in einem Würfel mit 16^3 KV. Die beiden anderen Würfel 32^3 , 64^3 mit der Kantenlänge $L = 1m$ werden mit dem gleichen interpolierten Feld initialisiert, was ähnliche Längenmaße zu Beginn der Simulation garantiert und die Abhängigkeit von verschiedenen Startlösungen verringert.

Aus der Abnahme von kinetischer Energie wird in jedem Zeitschritt die Dissipationsrate und daraus resultierend das Taylorsche Längenmaß und die Reynoldssche Zahl berechnet. In der ersten Simulation ist zu Beginn der exponentiellen Abnahmephase bei konstanter Viskosität $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ $\text{Re}_\lambda \approx 7$. Nach einer Integrationszeit von $t = 5 \text{ s}$ beträgt $\text{Re}_\lambda \approx 2$.

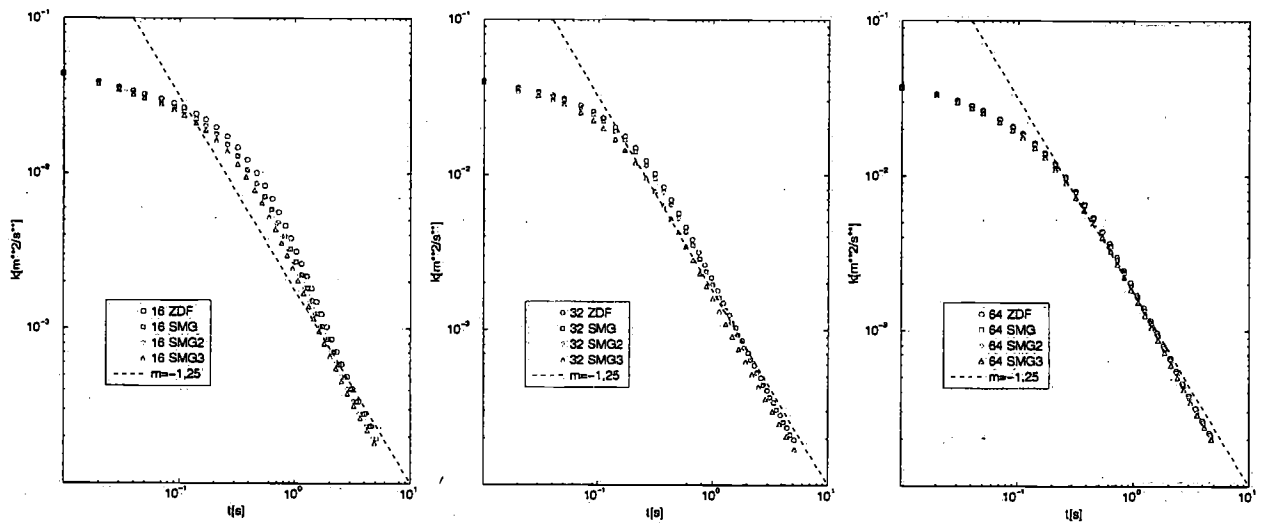


Abbildung 5.1: Zeitliche Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie des gesamten Berechnungsgebietes ab $\text{Re}_\lambda \approx 7$ für verschiedene Modelle auf drei systematisch verfeinerten Gittern.

Abbildung 5.1 zeigt den zeitlichen Verlauf der Abnahme an turbulenter kinetischer Energie für alle Filterweiten auf drei systematisch verfeinerten Gitterebenen. Die Übereinstimmung der Abnahmerate mit einer Gerade der Steigung $m = -1,25$ nimmt vom groben Gitter (16) zu den feineren Gittern (32, 64) zu. Im Idealfall sollte das Modell auf allen drei Ebenen für einen identischen Verlauf sorgen. Auf Gitter 16 sinkt k zu Beginn langsamer, da nicht ausreichend Turbulenzenergie zu den kleinen Skalen transferiert und dort dissipiert werden kann, obwohl das Feinstrukturmodell größere Beiträge liefert als bei Gitter 32 oder 64. Der Einfluss der Filterweite bei den Simulationen SMG, SMG2 und SMG3 ist klein. Die Erhöhung der Filterweite führt zu einer Erhöhung der Wirbelviskosität (die Filterweite geht direkt in die Berechnung der Wirbelviskosität ein), was aber durch die Verringerung von $|\hat{D}|$ teilweise ausgeglichen wird. Um den Einfluss der Filterweite weiter zu testen wurden weitere Simulationen bei höheren Re_λ durchgeführt, da diese Zahl relativ klein verglichen mit der DNS [121] bei $\text{Re}_\lambda = 104,5$ ist. Diese Resultate werden in Kap. 5.3, in dem alle verwendeten Modelle getestet werden, dargestellt und diskutiert.

5.2 Anpassung der Modellkonstanten

Um das gesamte Spektrum turbulenter Strömungen mit einem Modell abzudecken hat Speziale (SPZ) ein Modell vorgeschlagen [111], das in Kap. 2 bereits beschrieben wurde. Eine Abschätzung der kleinsten vorkommenden Skalen in einer turbulenten Strömung gibt das Kolmogorovsche Längenmaß L_k . Eine direkte Simulation liegt bei Auflösung von L_k vor. Ist die Filterweite Δ von gleicher Größenordnung sollte die Dämpfungsfunktion f_μ im Modell (Gl. 2.66) null sein, um das Modell auszuschalten. Ist die Filterweite größer als L_k wird der Modellanteil durch f_μ bestimmt. Bei hoher Reynoldsscher Zahl soll SPZ durch die Parameterwahl in das statistische Modell übergehen (hier wird das Standard $k-\omega$ Modell

verwendet). Die Anpassung der Modellkonstanten β und n der Dämpfungsfunktion ist für jedes Turbulenzmodell notwendig, da verschiedene Modelle unterschiedlich dissipativ sind.

SPZ wird am Standardmodell (SMG) in homogener Turbulenz auf dem größten Gitter kalibriert. Für eine höhere Reynoldsche Zahl wird die Viskosität $\nu = 10^{-5} m^2 s^{-1}$ verwendet. Verschiedene Kombinationen der Modellkonstanten ergeben die Dämpfungsfunktionen in Abb. 5.2. Diese liefern unterschiedliche Modellbeiträge und werden in den Simulationen getestet.

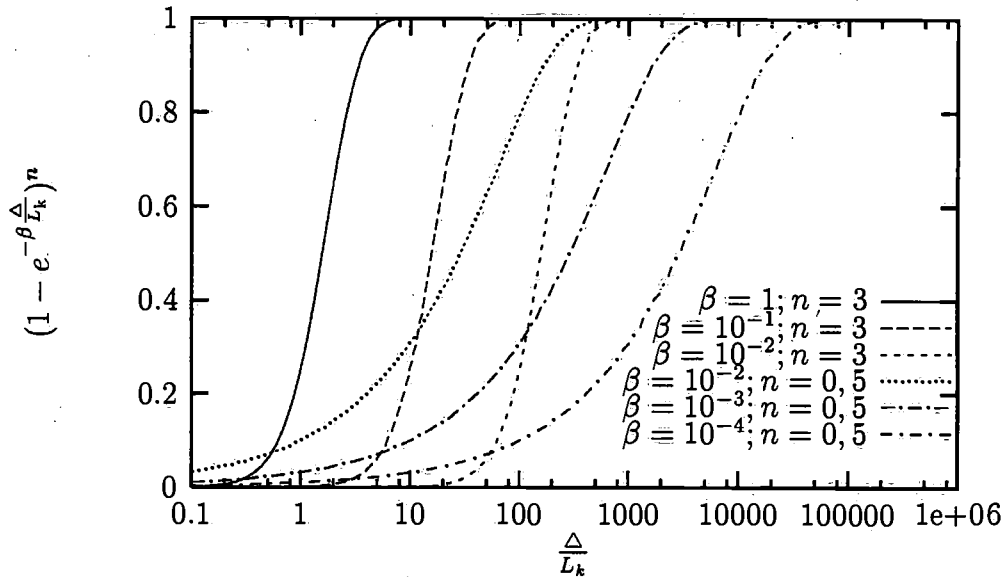


Abbildung 5.2: Darstellung der Dämpfungsfunktion f_ν für verschiedene Kombinationen der SPZ Modellkonstanten β und n .

Abbildung 5.3 zeigt den zeitlichen Verlauf der Abnahme von k für verschiedene Kombinationen von β und n . Die Kombinationsmöglichkeiten mit $\beta = 1$ und $\beta = 0,1$ scheiden aus, da das Ergebnis der Berechnung identisch mit dem $k-\omega$ Turbulenzmodell ist, ebenso wie mit der Kombination $(0,01;0,5)$. Mit $\beta = 0$ und der Kombination $(0,001;3)$ ergibt sich ein Verlauf von k wie bei der Simulation ohne Modell (ZDF), was zu einer linearen Abnahme führt. Zur genauen Beurteilung der Kombinationen $(\beta, n) = (0,01;3), (0,001;0,5)$ und $(0,0001;0,5)$, die in den ersten Simulationen am besten mit dem Feinstrukturmodell SMG übereinstimmen, wird die Simulation über einen längeren Zeitraum durchgeführt und auf der rechten Seite von Abb. 5.3 logarithmisch dargestellt im Vergleich zu einer Geraden mit Steigung $m = -1,25$. Die Kombination $(3;0,01)$ stimmt besser als die anderen Kombinationen mit der experimentell bestimmten Abnahme überein und ist deutlich weniger dissipativ als das statistische Modell. Eine weitergehende Anpassung ist an diesem Testfall nicht möglich, da Feinstrukturmodelle stark vom verwendeten Gitter abhängen. Alle weiteren Simulationen werden daher mit den Konstanten $n = 3$ und $\beta = 0,01$ durchgeführt. In den Simulationen turbulenter Kanalströmungen in Kap. 6 und der Rundzylinderumströmungen in Kap. 7 wird das Modell getestet und bewertet werden.

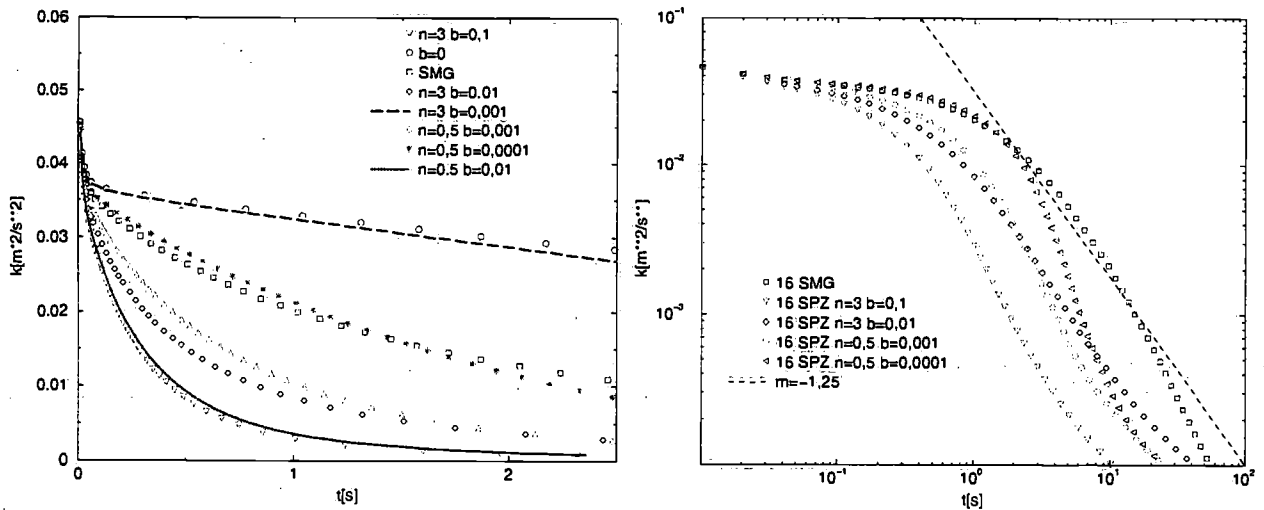


Abbildung 5.3: Zeitliche Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie für verschiedene Kombinationen von β und n im Modell von Speziale.

5.3 Test der verwendeten Feinstrukturmodelle

Durch die Reduzierung der Viskosität auf $\nu = 1 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-1}$ wird eine höhere Reynoldssche Zahl eingestellt, und auf den gleichen Gittern, wie in Kap. 5.1, isotrope homogene Turbulenz mit allen verwendeten Modellen simuliert. Die Integrationszeit wird auf $t = 160s$ erhöht. Re_λ steigt zu Beginn der Simulation auf 105 (Gitter 16), 65 (Gitter 32) und 55 (Gitter 64) und liegt in einer ähnlichen Größenordnung wie ein gefiltertes DNS Geschwindigkeitsfeld [121]. Durch die Initialisierung kommt es zu einem Ansteigen von Re_λ , was physikalisch nicht sinnvoll ist. Der Grund ist das Verhältnis von k zu ε , das in die Berechnung von Re_λ eingeht. Zu Beginn der Simulationen existieren kaum Wirbel, die für viskose Dissipation geeignet sind. Die großen Wirbel geben ihre Energie im Spektrum an den Trägheitsunterbereich ab und die Abnahme von k verläuft wahrscheinlich ungestört. Der anfängliche Anstieg von Re_λ ist vermutlich die Folge kleiner Dissipationsraten. Nach 10-20 Zeitschritten ist das Maximum erreicht und die Abnahme von Re_λ beginnt. Die größte Reynoldssche Zahl wird auf dem groben Gitter erreicht, d.h. nach der Initialisierung werden auf dem feinen Gitter schneller Wirbelgrößen gebildet, die durch die Viskosität dissipiert werden können. Die Ursache für den Anstieg auf Gitter 32 und 64 ist nicht die Initialisierung mit der interpolierten Lösung von Gitter 16, da der Anstieg auch mit einer Zufallslösung auf den feinen Gittern erfolgt. Bei kleiner Reynoldsscher Zahl und gleicher Gitterauflösung ist kein Anstieg von Re_λ bemerkbar: die erhöhte Reibung und die daraus resultierenden Dissipation sorgt für die sofortige Abnahme.

In Abb. 5.4 ist die Abnahme von k auf drei systematisch verfeinerten Gittern mit mehreren Feinstrukturmodellen verglichen. Besonders auf dem groben Gitter wird die dissipative Wirkung der Modelle sichtbar. Der Unterschied zwischen den Simulationen auf dem gleichen Gitter wird von Gitter 16 bis 64 kleiner, da der Anteil aufgelöster Skalen steigt und der Modelleinfluss abnimmt. Die Vorhersage der Modelle ZDF und GER unterscheidet sich auf 16 geringfügig; mit Gitterverfeinerung wird der Unterschied größer. Der Modelleinfluss durch den dynamisch bestimmte Koeffizient nimmt zu feinen Gittern hin zu, da bei Gittern mit geringer Auflösung (16) der Koeffizient negativ ist. Um die Stabilität des numerischen Verfahrens auch in diesen Fällen zu gewährleisten, wird die Wirbelviskosität null gesetzt. Bei besserer Auflösung (32, 64) schwankt C zwischen null und $C_s = 0,1$, ist meist jedoch deutlich

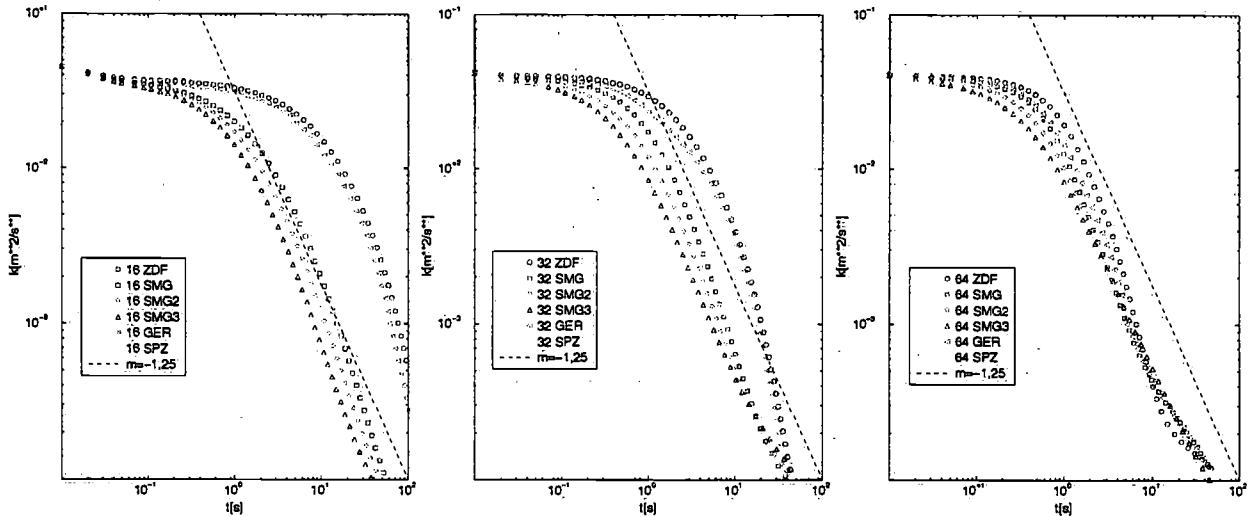


Abbildung 5.4: Zeitliche Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie k des gesamten Berechnungsgebietes für verschiedene Modelle auf drei systematisch verfeinerten Gittern bei gleicher Re_λ .

kleiner als die Konstante. Das Smagorinsky Modell erzeugt vergleichsweise mehr Dissipation und k fällt schneller. Die unterschiedliche Filterweite führt durch höhere Wirbelviskosität zu stärkerer Dissipation, deshalb fällt SMG3 vor SMG2 und dem Standardmodell (SMG) auf allen Gittern. Der Einfluss der Filterweite ist hier größer als beim Test der Filterweite in Kap. 5.1. Modellfehler und Diskretisierungsfehler sind theoretisch voneinander trennbar durch Verdoppelung der Filterweite bei systematischer Verfeinerung. Durch Erhöhung der Filterweite bei gleichzeitiger Gitterverfeinerung (16 – einfache Filterweite: SMG, 32 – doppelte Filterweite: SMG2, 64 – dreifache Filterweite: SMG3) konnte mit der Filtermethode keine Trennung von Modellfehler und Diskretisierungsfehler erreicht werden, da beide mit Gitterverfeinerung verschwinden. Bei SPZ ist eine starke Gitterabhängigkeit erkennbar, wobei die Dissipation auf dem groben Gitter deutlich größer ist als bei den anderen Modellen. Mit Gitterverfeinerung nähern sich die Vorhersagen aller Modell an. Die Übereinstimmung mit der experimentell bestimmten Abnahme von k ist schlechter als bei kleinem Re_λ , was zum Teil eine Folge der schlechten Initialisierung ist (keine echte Turbulenz). Insgesamt verbessern die Feinstrukturmodelle die Vorhersage, da die Steigung besonders auf den groben Gittern besser übereinstimmt.

Als zweite Möglichkeit die Simulation zu initialisieren wird eine auf 128^3 Kontrollvolumen gefilterte 512^3 DNS Lösung [121] verwendet. Die maximale Wellenzahl k_{\max} des gefilterten Geschwindigkeitsfeldes beträgt 241:

$$k_{\max} = \frac{2\pi}{2\Delta x} \quad (5.7)$$

Die auflösbare Wellenlänge ist die doppelte Maschenweite $\Delta x = \pi/241$ eines 128^3 Würfels, in dem die Simulation durchgeführt wird. Nach der Gittergenerierung und Einlesen der Startlösung wurde durch Variation der Viskosität die korrekte Anfangsbedingung $Re_\lambda = 104,5$ mit $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-1}$ eingestellt. Die Abnahme von k wird mit dem gleichen Modellen verfolgt, wie bei den Simulationen mit zufälliger Verteilung. In diesem Fall ist die numerische Auflösung (k_{\max} ist 241 im Vergleich zu 201 bei Gitter 64) und die Viskosität geringfügig höher. Die Abnahme von k beginnt ohne ein Ansteigen von Re_λ , was am korrekten Turbulenzspektrum der Startlösung liegt. Die Übereinstimmung der vorhergesagten Steigung zwischen verschiedenen Modellen in Abb. 5.5 ist zufriedenstellend und deutlich

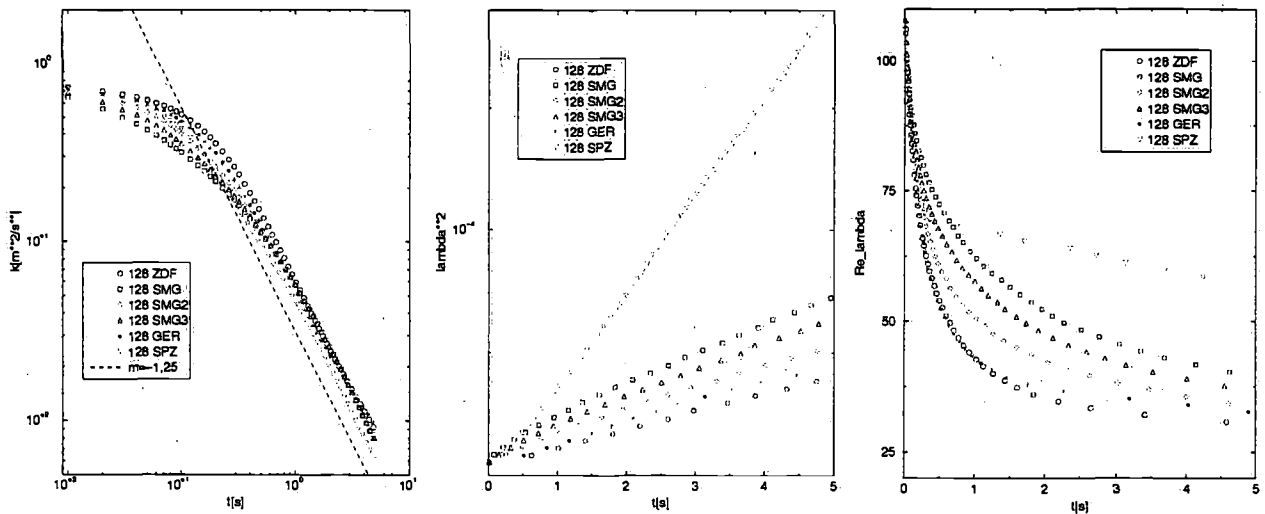


Abbildung 5.5: Zeitliche Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie k , des Taylorschen Mikrolängenmaß λ und Re_λ für verschiedene Modelle mit einer gefilterten DNS Startlösung [121].

besser als mit der zufälligen Startlösung. GER und ZDF sagen wiederum einen ähnlichen Verlauf voraus. Der Koeffizient C bei GER, in alle drei homogenen Richtungen gemittelt, liegt zwischen 0,05 und 0,08 was den kleineren Modelleinfluss von GER im Vergleich zu SMG mit Konstante $C_s = 0,1$ erklärt. Der Einfluss der Filterweite ist erneut gering, im Gegensatz zu den vorherigen Ergebnissen wird die maximale Dissipation bei doppelter Filterweite erreicht, d.h. das Produkt von Filterweite und gefilterter mittlerer Deformationsrate ist bei SMG3 durchschnittlich kleiner als bei SMG2. SPZ ist erneut dissipativer als die anderen Modelle.

Die Reynoldssche Zahl in Abb. 5.5 fällt zu Beginn ab und nähert sich scheinbar asymptotisch einem minimalen Wert an. Dieser wird erreicht, wenn sich das Verhältnis u'^2/ε zeitlich nicht mehr ändert und das resultierende Längenmaß λ konstant ist. Im Bereich der exponentiellen Abnahme von k , der während dieser Simulation nicht verlassen wird, ist λ^2 eine lineare Funktion der Zeit t (Abb. 5.5). Infolge der Abnahme von k werden die Geschwindigkeitsfluktuation sehr klein, so dass numerische Genauigkeit und der Gitterabstand die minimal mögliche Re_λ bei vorgegebener Viskosität bestimmen.

5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Abnahme turbulenter kinetischer Energie in homogener isotroper Turbulenz simuliert. Die Grobstruktursimulationen mit den untersuchten Modellen waren erfolgreich. Alle Feinstrukturmodelle geben eine exponentielle Abnahme von k wieder, wobei die Startlösung und das Modell eine wichtige Rolle spielen bei höherer Reynoldsscher Zahl. Zu Abweichungen vom Exponentialgesetz kommt es bei Simulationen mit ZDF und GER durch geringe Gitterauflösung. Eine verbesserte Vorhersage wird in allen Simulationen durch Erhöhung der numerischen Auflösung erzielt.

Mit dem Modell von Smagorinsky wurde der Einfluss der Filterweite untersucht, der sich in der vorliegenden Implementierung als gering erwies. Eine Trennung von Modell- und Diskretisierungsfehlern durch systematische Gitterverfeinerung bei konstanter Filterweite

wurde nicht erzielt. Im Germano Modell wird der Koeffizient für das Smagorinsky Modell dynamisch berechnet: bei Gittern mit geringer Auflösung (16) ist der Koeffizient negativ. Um die Stabilität des numerischen Verfahrens auch in diesen Fällen zu gewährleisten, wird die Wirbelviskosität null gesetzt. Bei besserer Auflösung (32, 64, 128) ist C kleiner (0,05-0,08) als die verwendete Smagorinsky Konstante $C_s = 0,1$. Für das Modell von Speziale in Verbindung mit dem $k-\omega$ Turbulenzmodell wurden zwei Modellkonstanten zur Grobstruktursimulation ermittelt.

Kapitel 6

Grobstruktursimulation ebener Kanalströmung

6.1 Einleitung

In Kapitel 4 wurde die verwendete Methode in der direkten Simulation der ebenen Kanalströmung bei $Re_\tau = 180$ erfolgreich getestet. Ohne Feinstrukturmodell wurde durch Gitterverfeinerung der numerische Fehler systematisch verringert. Bei den Grobstruktursimulationen in diesem Kapitel wird überprüft, ob die Modelle in der Lage sind den nicht aufgelösten Feinstrukturanteil der Strömung richtig vorherzusagen. Dazu wird die ebene Kanalströmung mit verschiedenen Modellen auf einem Gitter simuliert und die Ergebnisse mit Referenzlösungen verglichen.

Diskretisierungsfehler bei einem Verfahren erster Ordnung werden als numerische Diffusion bezeichnet. Bei mangelnder Gitterauflösung wirken Diskretisierungsfehler manchmal wie ein höherer Diffusionskoeffizient auf die Lösung, ähnlich wie die Wirbelviskosität eines Turbulenzmodells. Neben den vorgestellten Modellen von Smagorinsky, Germano und Speziale wird Grobstruktursimulation deshalb ohne Verwendung eines Feinstrukturmodells (ZDF) durchgeführt. Das verwendete numerische Verfahren wird als Modell betrachtet, denn Zentralfrequenzen bzw. lineare Interpolation entsprechen einer räumlichen Mittelung [98], was einer Filterung bei der Flussberechnung gleichzusetzen ist und die Aufgabe des Feinstrukturmodells übernehmen soll. Der Betrag des Modells ist vom verwendeten Gitter und der Lösungsmethode abhängig.

Referenzlösungen für Kanalströmungen sind in Tabelle 4.1 aufgezählt. Die Einstellung der Randbedingungen erfolgt auf die gleiche Art und Weise wie bei der direkten Simulation: durch die Vorgabe eines Druckgradienten in Strömungsrichtung wird die gewünschte Wandschubspannung eingestellt und die Navier-Stokesschen Gleichungen in der Zeit integriert bis die berechneten Reynoldsschen Spannungen konstant und symmetrisch zur Kanalmitte sind. Der isotrope Teil der Feinstrukturspannungen und der Druck bilden einen Pseudodruck, wobei in der Druckdifferenz die Feinstrukturspannungen, die im gesamten homogenen Bereich im Mittel gleich sind, nicht berücksichtigt sind.

In laminaren Kanalströmungen ist das mittlere Geschwindigkeitsprofil eine Parabel $\bar{v}_x = f(y^2)$. Die Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit und der damit verbundene Impulsanstieg kann bis zum Transitionspunkt im laminaren Bereich erfolgen. Nach der Transition führt Impulstransport quer zur Strömungsrichtung zu einer blockprofilähnlichen mittleren

Geschwindigkeitsverteilung, die in drei Bereiche unterteilt und durch empirische Formeln erfasst ist:

- viskose Schicht $\bar{v}_x^+ = y^+$
- Übergangsbereich
- turbulente Schicht $\bar{v}_x^+ = A \log(y^+) + B$; $A = 2,5$; $B = 5,5$ (logarithmisches Wandgesetz)

Neben der Überprüfung dieser Gesetze werden Reynoldssche Spannungen als wichtigstes Simulationsergebnis betrachtet und im folgenden Abschnitt dargestellt und diskutiert. Diese sind ein wichtiger Anhaltspunkt für die Fehler der Simulation.

In einer Rohrströmung mit glatten Wänden findet der Umschlag von laminar nach turbulent bei einer Reynoldsschen Zahl von 2300 bezogen auf den Rohrdurchmesser d_r statt. Der Umschlag kann durch die Rauigkeit des Rohres und Störung der Strömung beeinflusst werden. Ein exakter Umschlag ist bei der Kanalströmung schwer anzugeben, da die experimentelle Bestimmung leicht durch Inhomogenitäten quer zur Strömungsrichtung gestört wird. Für die untersuchten Kanalströmungen beträgt $Re = 3120$ und $Re = 12000$ bezogen auf die halbe Kanalhöhe δ und die flächengemittelte Geschwindigkeit. Die turbulenten Kanalströmungen besitzen einen schwach ausgebildet logarithmischen Bereich der mittleren Strömungsgeschwindigkeit [73].

6.2 Ergebnisse und Diskussion

6.2.1 $Re_\tau = 180$

Das verwendete numerische Gitter zum Test der Feinstrukturmodelle ist bei den Simulationen identisch: in Strömungsrichtung und in Strömungsquerrichtung ist der Gitterabstand konstant, in wandnormaler Richtung streckt sich das Netz mit einem konstantem Streckungsfaktor von 1,22 bis zur Kanalmitte (Symmetrieebene). Die Ausdehnung des Berechnungsgebiets ist größer als in der direkten numerischen Simulation mit einer Dimension von $L_x = 10\delta$, $L_y = 2\delta$ und $L_z = 4\delta$, was durch $48 \times 40 \times 32$ Kontrollvolumen aufgelöst wird. Der Gitterlinienabstand an der Wand beträgt $y^+ = 1$, was bei äquidistanter Gitterpunktverteilung in wandnormaler Richtung 360 Maschen bedeuten und die Anforderung an eine DNS erfüllen würde. Ein kleinerer Wandabstand der ersten Masche (entspricht einem größeren Streckungsfaktor) führt zu keiner Verbesserung der Ergebnisse in der viskosen Grenzschicht, aber schlechterer Übereinstimmung in der Kanalmitte. Bei Verwendung des kleineren Streckungsfaktors 1,13 ist der Gitterlinienabstand an der Wand $y^+ = 3$ und die Ergebnisse sind deutlich schlechter als hier gezeigt. Dafür sind Diskretisierungsfehler verantwortlich: die Fehler werden durch Verringerung des Gitterlinienabstands verkleinert, und verschieben sich hier durch die unterschiedliche Konzentration von Zellen im Berechnungsgebiet. Ein Fehler in Wandnähe hat im Kanal größer Auswirkungen als ein Fehler in der Kanalmitte. Bei konstanter Maschenzahl wird in der Kanalströmung das Optimum durch minimale Auflösung der viskosen Grenzschicht erreicht (3-4 Zellen bis $y^+ = 5$), um möglichst viele der verbleibenden Maschen im restlichen Berechnungsgebiet verteilen zu können. Die Zeitschrittweite beträgt in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Kapitel 4 $\Delta t^+ = 0,432$, wobei die

Simulationsergebnisse der DNS von Gitterebene 1 mit der Simulation ZDF hier vergleichbar sind.

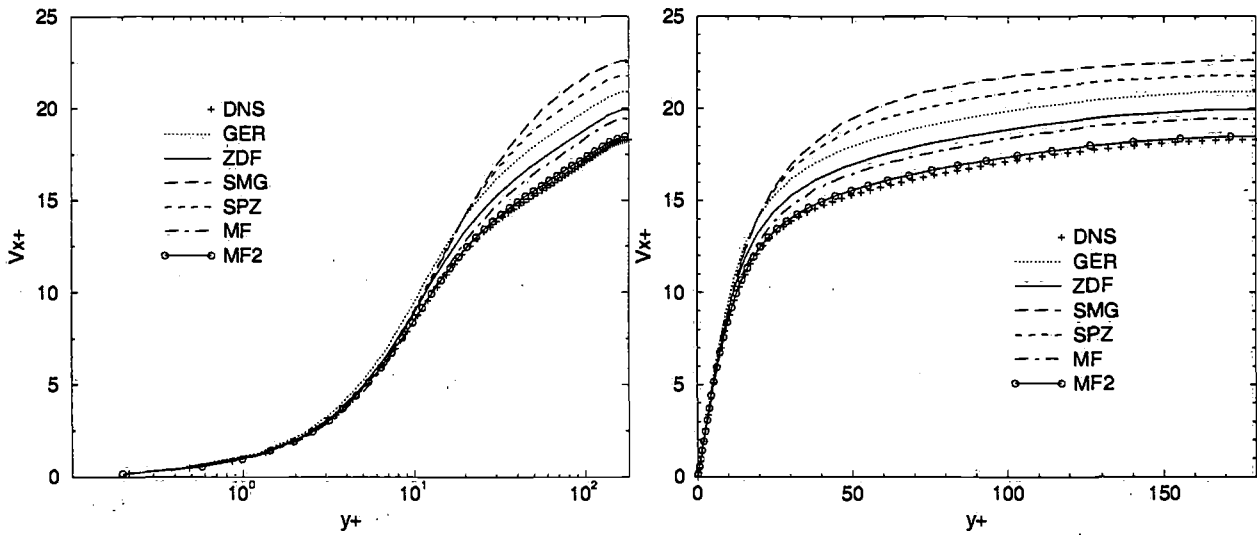


Abbildung 6.1: Darstellung des dimensionslosen Geschwindigkeitsprofils: DNS Daten [49] werden mit Ergebnissen aus Grobstruktursimulationen ZDF, SMG, GER und SPZ, sowie mit Ergebnissen bei skaliertem Massenstrom auf dem gleichen (MF) und einem verfeinerten Gitter (MF2) verglichen.

In Abbildung 6.1 ist die dimensionslose Geschwindigkeit $\bar{v}_x^+ = \bar{v}_x / u_\tau$ als Funktion des dimensionslosen Wandabstands $y^+ = y u_\tau / \nu$ für die verschiedenen LES Modelle dargestellt. Alle Simulationen genügen im Bereich der viskosen Unterschicht $y^+ = \bar{v}_x^+$. Im weiteren Verlauf weichen die meisten Kurven von der Referenzlösung ab. Wie in Kapitel 4 angedeutet liegt das an der numerischen Implementierung. Die vorgegebene Druckdifferenz erzwingt auf dem Simulationsgitter eine flächengemittelte Geschwindigkeit von $\bar{v}_x^b = 1,04$ und eine Geschwindigkeit in der Symmetrieebene $\bar{v}_x^c = 1,20$. Aus \bar{v}_x^c ergibt sich $Re = 3600$ im Vergleich zu $Re = 3300$ bei [49]. Die Druckdifferenz erzeugt einen höheren Massenstrom, der mit dem Faktor $33/36$ skaliert und konstant gehalten werden muss um den gleichen Durchfluss wie bei der DNS zu realisieren. Diese Vorgehensweise führt zu besserer Übereinstimmung des mittleren Geschwindigkeitsprofils mit der Referenzlösung aber auch zu einer anderen Wandschubspannung. Die Lösung auf dem gleichen Gitter mit dem skalierten Massenfluss (MF) ist in Abb. 6.1 dargestellt. Die Simulation mit systematischer Verfeinerung des Gitters bei gleichem Massenstrom (MF2) ergibt für das mittlere Geschwindigkeitsprofil die beste Übereinstimmung mit der Referenzlösung. In den Simulationen MF und MF2 wurde kein Feinstrukturmodell verwendet. Über das mittlere Geschwindigkeitsprofil kann die Wandschubspannung und die daraus resultierende Reynoldssche Zahl Re_τ berechnet werden. Diese betragen $168,07$ (MF), $176,71$ (MF2) und $181,08$ (ZDF). Die Einstellung der Simulationsbedingungen durch Verwendung eines Druckgradienten erzeugt einen numerischen Fehler, der zu einem höheren Massenstrom führt. Ein konstanter Massenstrom löst das Problem, die Simulationsrandbedingungen stimmen dann nicht mehr mit der Vergleichslösung überein. Die Verwendung einer größeren Anzahl von Kontrollvolumen verringert in beiden Fällen den numerischen Fehler und die Simulationsergebnisse konvergieren zur gleichen Lösung. Durch Gitterverfeinerung wird bessere Übereinstimmung mit der DNS erreicht: der Modelleinfluss wird gleichzeitig geringer. Der Test der Modelle auf verschiedenen Gitterebenen ist nicht sinnvoll, da Modelleinfluss und Fehler durch Gitterauflösung mit der vorliegenden Methode nicht trennbar sind

(vgl. Kap. 5).

Abbildung 6.2 zeigt den Verlauf aller Reynoldsschen Spannungen im Kanalquerschnitt. Die Simulationsergebnisse von GER und ZDF sind sehr ähnlich und stimmen am besten mit [49] überein. Von GER werden im wandnahen Bereich geringe Feinstrukturspannungen vorhergesagt, was die geringen Unterschiede zu ZDF erklärt. In der Kanalmitte sind vergleichbare Wirbelviskositäten wie bei anderen Modellen vorhanden. Der geringe Modelleinfluss in Wandnähe ist bei GER nicht die Folge des Abschneidens negativer Koeffizienten wegen geringer Gitterauflösung (vgl. Kap. 5), sondern dort wird die Wirbelviskosität durch das Modell klein vorhergesagt. Die Feinstrukturspannungen sind bei SPZ in Wandnähe größer als bei GER, aber kleiner als bei SMG, was zu einer besseren Übereinstimmung mit den DNS Ergebnissen als mit SMG führt. Eine Erhöhung der Smagorinsky Konstante auf 0,17 dämpft die Turbulenz stärker und die Vorhersage mit SMG verschlechtert sich. In diesen Simulationen ergibt sich allgemein eine abnehmende Übereinstimmung mit DNS bei steigenden Feinstrukturspannungen in Wandnähe. In der Kanalmitte ist der Einfluss der Feinstrukturspannungen auf die Simulationsergebnisse gering. Der Grenzschichtbereich ist offensichtlich sehr empfindlich und kleine Beiträge zu den Gleichungen haben deutliche Wirkung. Die Vorhersage sehr hoher Feinstrukturspannungen, wie bei der Anwendung von SND (Smagorinsky ohne van Driest-Dämpfung) oder des $k-\omega$ Modells, führt zur totalen Vernichtung von Turbulenz und Laminarisierung. Der Turbulenzgrad der Kanalströmung nimmt mit sinkender Reynoldsscher Zahl ab, wie das bei den Simulationen MF und MF2 zu beobachten ist. Deshalb liegen deren Profile unterhalb von ZDF, das bedeutet eine Verbesserung der Ergebnisse bei $\overline{v_x'v_x'}$ und eine Verschlechterung bei $\overline{v_y'v_y'}$ $\overline{v_z'v_z'}$. Die Scherspannung $\overline{v_x'v_y'}$ wird in beiden Simulationen gut vorhergesagt.

In Abb. 6.3 sind die Terme des Dissipationstensors für die Grobstruktursimulation ZDF dargestellt. In der viskosen Unterschicht sind die Ergebnisse in Übereinstimmung mit der DNS [49]. Dort ist die Gitterauflösung ausreichend, da in unmittelbarer Wandnähe das Längengmaß zwar kleiner, die Gitterauflösung jedoch höher ist. Die Abweichungen sind gering bis $y^+ = 7$. In den darüber liegenden Gitterschichten des Übergangsbereiches zwischen viskoser und turbulenter Schicht sollen Strukturen vergleichbare Größe durch ein gröberes Gitter aufgelöst werden, was nicht ausreichend passiert. Deshalb ist der Unterschied zwischen eigenen Ergebnissen und DNS dort größer.

6.2.2 $Re_\tau = 590$

Eine höhere Reynoldssche Zahl erfordert eine bessere numerische Auflösung des Berechnungsgebietes. Das Gebiet kann jedoch verkleinert werden, da die Größe turbulenter Strukturen in der Kanalströmung abnimmt. Strömungstypische Abstände wie der dimensionslose Abstand von Wirbelstreifen mit hohen Geschwindigkeiten in Wandnähe von $\Delta z^+ = 100$ bleiben unverändert. Die Struktur der verwendeten Gitter ist in allen Simulationen gleich: in Strömungsrichtung und in Strömungsquerrichtung sind die Gitterabstände konstant, in wandnormaler Richtung expandiert das Netz mit konstantem Streckungsfaktor 1,13 bis zur Kanalmitte. Zuerst wird auf die Gitterabhängigkeit der Simulation eingegangen und die Grobstruktursimulation mit dem Modell von Smagorinsky auf 3 Gitterebenen miteinander verglichen. Tabelle 6.1 gibt einen Überblick über die verwendeten Netze.

Die Reibungsverluste werden entsprechend der gewählten Reynoldsschen Zahl Re_τ durch einen Druckgradienten ausgeglichen. Wie schon in Kapitel 6.2.1 diskutiert ist der resultierende Massenstrom durch den numerischen Fehler insgesamt größer als in der direkten Simula-

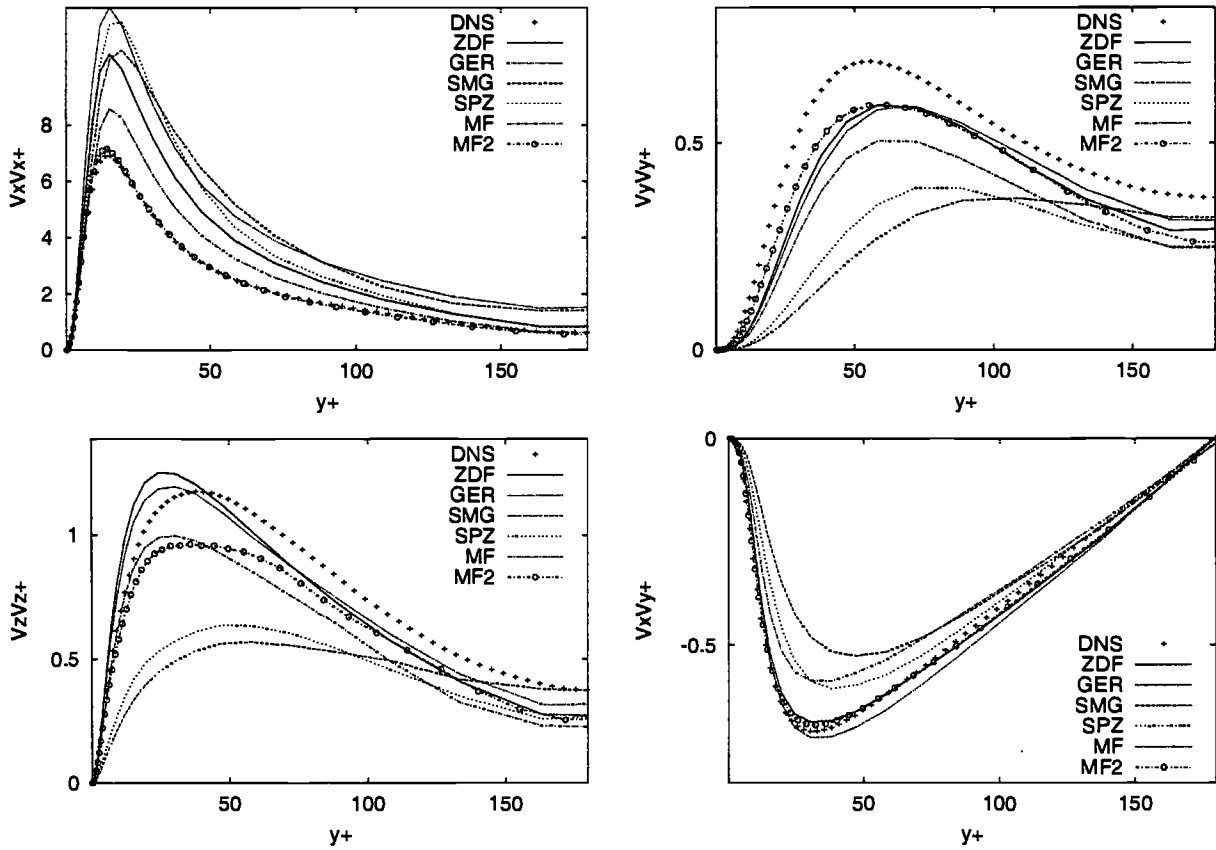


Abbildung 6.2: Reynoldssche Spannungen der Kanalsimulation bei $Re_\tau = 180$ normiert mit u_τ^2 : DNS Daten [49] werden mit Ergebnissen aus Grobstruktursimulationen ZDF, SMG, GER und SPZ verglichen.

tion, so dass die berechneten mittleren Geschwindigkeitsprofile oberhalb der Referenzlösung liegen. Die Übereinstimmungen der Simulationsbedingungen durch die Wahl identischer Re_τ wird hier bevorzugt, da die Randbedingungen dadurch gleich sind.

Die Simulationsergebnisse mit dem Smagorinsky Model auf Gitter CHA1, CHA2 und CHA3 in Abb. 6.4 beinhalten einen Zeitdiskretisierungsfehler, der aus der Zeitschrittweite $\Delta t^+ = 1,3924$ resultiert. Diese Zeitschrittweite ist ungefähr viermal so groß wie die Zeitschrittweite, bei der Fehler durch die zeitliche Diskretisierung vernachlässigbar sind (siehe Kap. 4). Die Größe des Fehlers wird bei allen Simulationen als vergleichbar angenommen und ausschließlich der räumliche Diskretisierungsfehler und die Modellwirkung betrachtet. Bei CHA1 weichen alle Spannungen deutlich von der Referenz ab, durch eine systematische räumliche Verfeinerung werden diese bei CHA2 verbessert, die Scherspannung ist bereits in akzeptabler Übereinstimmung. Auf Netz CHA3 mit den geringsten Gitterabständen in

Tabelle 6.1: Liste der verwendeten Netze

| Bezeichnung | Re_τ | N_x | N_y | N_z | L_x | L_y | L_z | Δx^+ | $\Delta y_{\min}^+ - \Delta y_{\max}^+$ | Δz^+ |
|-------------|-----------|-------|-------|-------|-------------|------------|------------|--------------|---|--------------|
| CHA1 | 590 | 64 | 48 | 48 | 10δ | 2δ | 4δ | 92,2 | 1-108 | 49,2 |
| CHA2 | 590 | 128 | 96 | 96 | 10δ | 2δ | 4δ | 46,1 | 0,5-54 | 24,6 |
| CHA3 | 590 | 96 | 64 | 96 | 6δ | 2δ | 3δ | 36,9 | 1,4-72 | 18,4 |

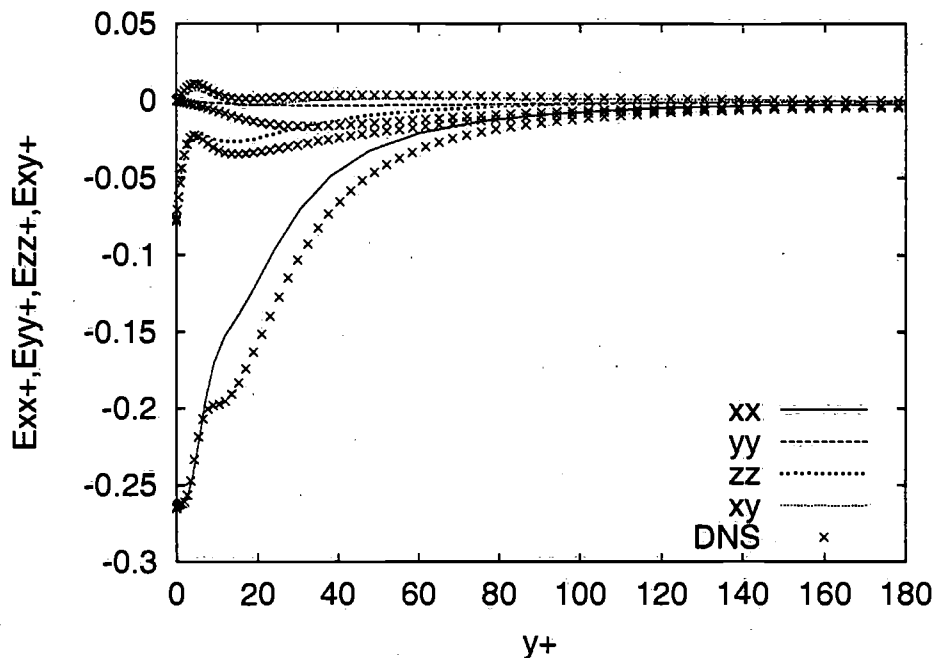


Abbildung 6.3: Elemente des Dissipationentensors der Kanalsimulation bei $Re_\tau = 180$ normiert mit u_τ^4/ν : DNS Daten [49] im Vergleich zur Grobstruktursimulation ZDF.

x - und z -Richtung sind alle Spannungen bis auf $\overline{v_x'v_x'}$ in guter Übereinstimmung mit der DNS. Das verwendete Feinstrukturmodell modelliert nicht auflösbare Strukturen auf allen Gittern unzureichend. Auf dem feinsten Gitter ist die Modellwirkung am geringsten und die Ergebnisse am besten. Die Verringerung des räumlichen Diskretisierungsfehlers ist bei allen Komponenten wichtiger als die Modellwirkung.

Zum Vergleich der Feinstrukturmodelle wird Netz CHA3 mit einer Zeitschrittweite $\Delta t^+ = 0,3481$ verwendet. Der Zeitschritt ist entsprechend Untersuchungen in Kapitel 4 gewählt, was die Residuenverringerng von zwei bzw. einer Größenordnung bei Impuls bzw. Massenerhaltungsgleichung in drei Iterationen zur Folge hat. Die Simulationsergebnisse in Abb. 6.5 und 6.6 sind bei jedem Modell besser als mit CHA3, was auf die Verringerung des Zeitdiskretisierungsfehlers zurückzuführen ist. Bei diesem Fall wird zusätzlich das Smagorinsky Modell mit der Standardkonstante $C_s = 0,17$ (SMG017) verwendet.

Die mittleren Geschwindigkeitsprofile liegen, genau wie bei $Re_\tau = 180$, wegen des höheren Massenstroms oberhalb der Referenzlösung. Der Unterschied zwischen Grobstruktursimulation und Referenz ist in der viskosen Unterschicht klein, wird in der Übergangsschicht größer, und bleibt bis in der Kanalmitte unverändert. Wie in Kapitel 6.2.1 könnte durch eine Fixierung des Massenstroms eine bessere Übereinstimmung erzielt werden, die Übereinstimmung der Randbedingung mit der DNS wird hier vorgezogen. Die Geschwindigkeitsprofile in Abb. 6.5 unterscheiden sich bis auf ZDF, das leicht oberhalb der anderen liegt, und SMG017 mit guter Übereinstimmung bis $y^+ = 20$ geringfügig.

In Abb. 6.6 werden die Reynoldsschen Spannungen mit DNS Ergebnissen verglichen. Die Spannung in Hauptströmungsrichtung $\overline{v_x'v_x'}$ wird von allen Grobstruktursimulationen in Wandnähe überschätzt, ab $y^+ = 200$ ist die Übereinstimmung akzeptabel. Mit SMG017 wird $\overline{v_x'v_x'}$ am besten vorausgesagt, wobei der höhere Modellbeitrag nicht zur Laminarisierung wie bei $Re_\tau = 180$ führt. Die Erhöhung der Smagorinsky Konstante bewirkt eine stärkere Dämpfung der Reynoldsschen Spannungen, was nur positive Auswirkungen auf die Lösung

in Abb. 6.6 hat, wenn numerische Fehler zu höheren Spannungen als in der DNS führen. Entsprechend negativ sind die Auswirkungen wenn die vorhergesagten Spannungen bereits mit $C_s = 0,1$ zu klein sind. Die Scherspannung $\overline{v_x'v_y'}$ wird am besten von SPZ vorhergesagt, $\overline{v_y'v_y'}$ und $\overline{v_z'v_z'}$ von GER.

Die Größe der modellierten Feinstrukturspannungen nimmt in der folgenden Reihenfolge zu: ZDF, GER, SMG, SPZ, SMG017. Genau in dieser Reihenfolge nimmt der Betrag der Reynoldsschen Spannungen infolge stärkerer Dissipation durch das Feinstrukturmodell ab. Die Unterschiede zwischen den Vorhersagen von ZDF, GER, SMG und SPZ und damit letztlich der Modelleinfluss auf die Simulation ist größer als der Unterschied zwischen ZDF und DNS, der für den numerischen Fehler der Simulation steht. Für $\overline{v_x'v_x'}$ ist der Fehler relativ am größten. Der Unterschied zwischen Grobstruktursimulationsergebnis und Referenzlösung ist insgesamt kleiner als bei $Re_\tau = 180$.

Die Profile in Abb. 6.6 sind zum Teil nicht glatt, was an der kleinen Anzahl gemittelter Zeitschritte liegt. Die homogenen Richtungen werden zur Mittelung verwendet, so dass schon nach wenigen Zeitschritten ein nahezu symmetrisches Profil in Regionen mit feinem Gitter, wie in Wandnähe vorliegt. Um glatte Profile in groben Gitterbereichen zu erzielen ist eine größere Zeitschrittzahl nötig, das Profil in Wandnähe ändert sich nur geringfügig durch Fortsetzung der Mittelung. Die Anzahl der berechneten Zeitschritte ist 3000 (SMG, SPZ), 8000 (GER), 11000 (ZDF) und 13000 (SMG017). In dieser Reihenfolge nimmt die Glattheit der Profile zu. Bei $Re_\tau = 180$ sind in den Grobstruktursimulation (SMG, ZDF, GER, SPZ, MF) mindestens 8000 Zeitschritte berechnet worden.

6.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Feinstrukturmodelle in turbulenten Kanalströmungen bei $Re_\tau = 180$ und $Re_\tau = 590$ getestet und mit den Referenzlösungen von [49] und [73] verglichen. Bei geringerem Turbulenzgrad haben die Modelle negativen Einfluss auf die Ergebnisse und die Übereinstimmung verschlechtert sich mit Zunahme der Feinstrukturspannungen. Die numerische Realisierung der Kanalströmung durch einen Druckgradienten, um die gleichen Bedingungen wie bei der DNS zu realisieren, führt auf groben Gittern zu erhöhtem Durchfluss, eine Simulation mit korrigiertem Durchfluss jedoch zu geringerem Turbulenzgrad. Bei Gitterverfeinerung konvergieren beide Methoden zum gleichen Ergebnis. Auf den verwendeten Gittern sind die numerischen Fehler bei $Re_\tau = 180$ größer als der Modellbeitrag und ermöglichen keine Modellbewertung. Durch Gitterverfeinerung wird der Modelleinfluss verringert bzw. vollständig beseitigt. Bei $Re_\tau = 590$ haben die Feinstrukturspannungen teilweise positiven Einfluss: die Wirkung der Wirbelviskosität dämpft die überschätzten Reynoldsschen Spannungen, und die Übereinstimmung mit der Referenzlösung ist mit Modell besser als ohne Modell. Der numerische Fehler, der durch den Unterschied zwischen Referenz und ZDF charakterisiert wird, ist kleiner als der Unterschied zwischen den Modellvorhersagen und erlaubt eine Bewertung der Modelle: GER sorgt vergleichsweise für die beste Dissipation, andere Modelle produzieren zu viel Dissipation. Die Gitterauflösung spielt in beiden Testfällen eine entscheidende Rolle, die Verwendung von groben Netzen kann zur Laminarisierung führen.

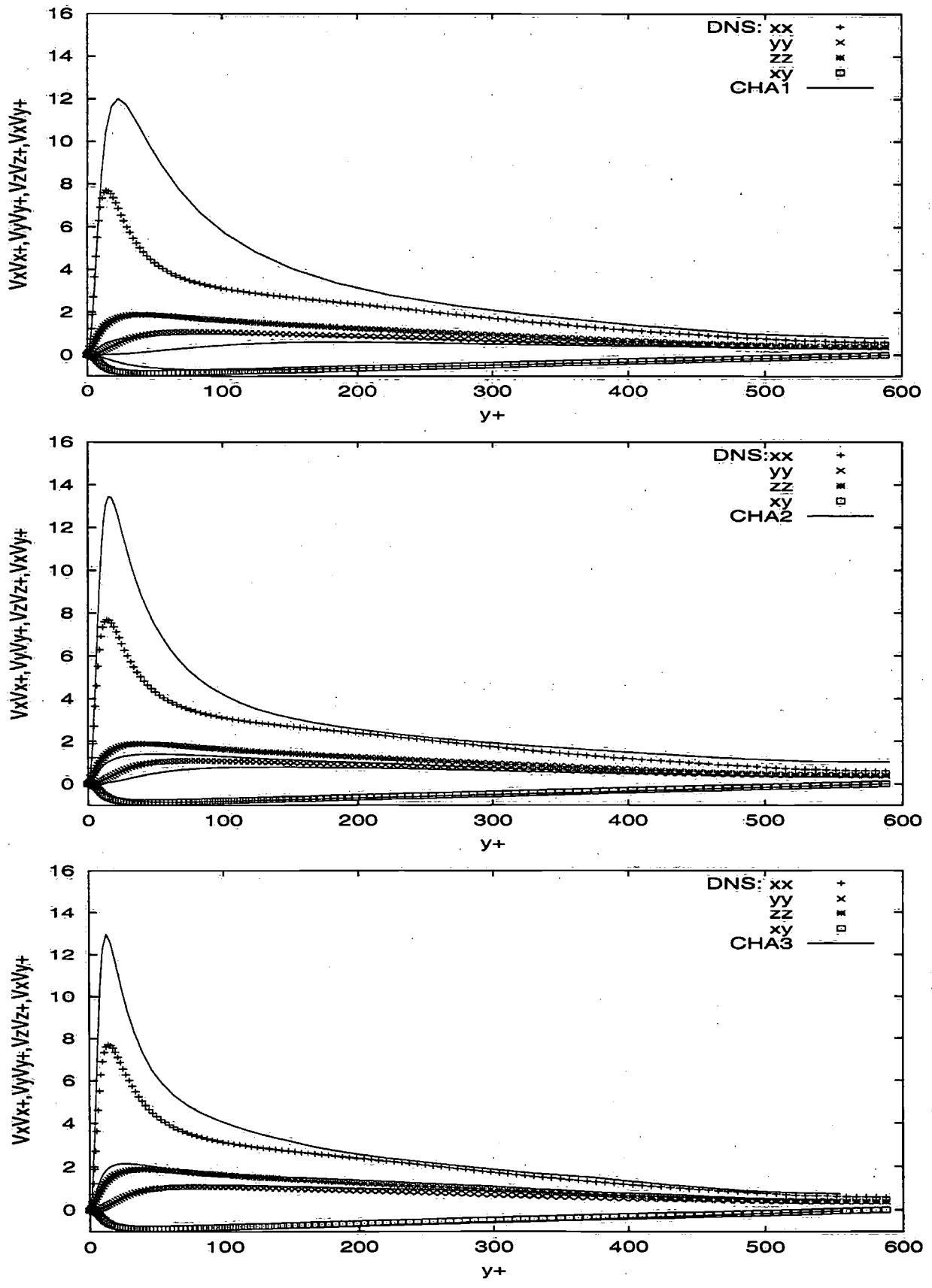


Abbildung 6.4: Reynoldssche Spannungen der Grobstruktursimulationen mit dem Modell von Smagorinsky auf 3 verschiedenen Gittern im Vergleich mit der DNS [73].

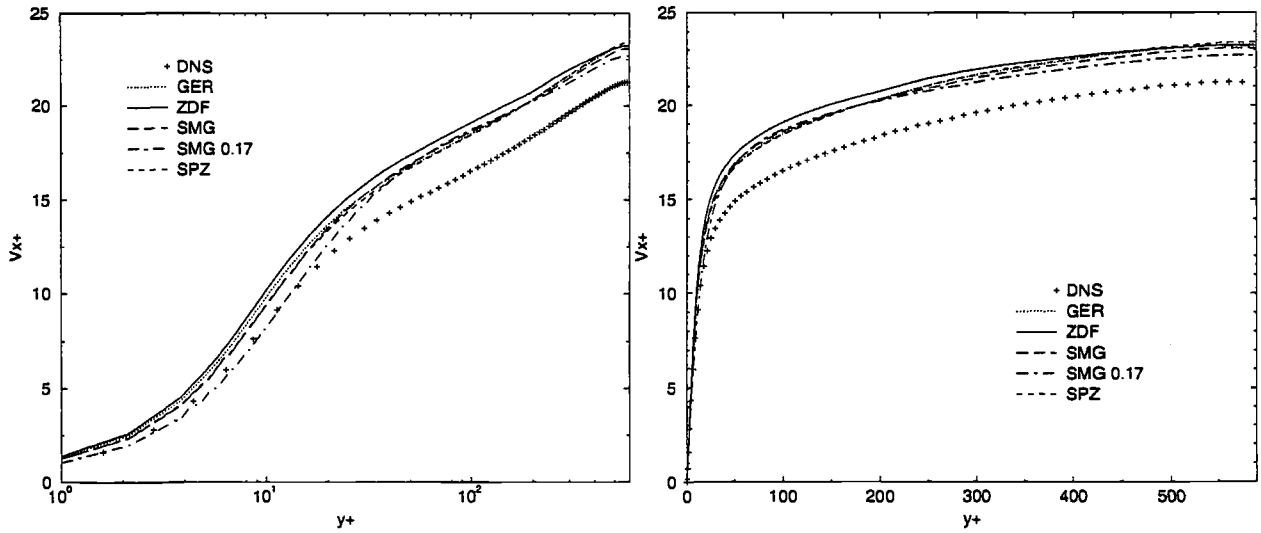


Abbildung 6.5: Darstellung des dimensionslosen Geschwindigkeitsprofils: DNS Daten [73] werden mit Ergebnissen aus Grobstruktursimulationen ZDF, SMG, GER und SPZ verglichen.

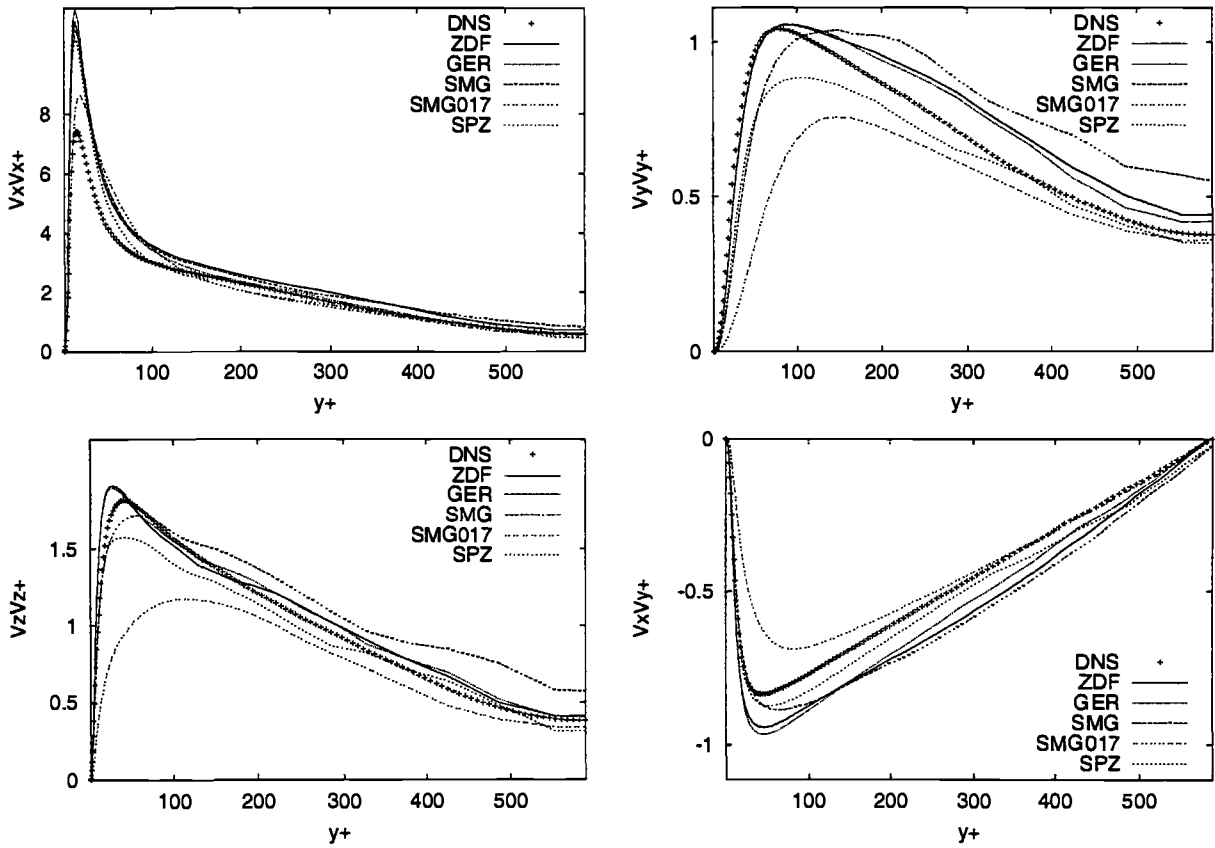


Abbildung 6.6: Reynoldssche Spannungen der Kanalströmung bei $Re_\tau = 590$ normiert mit u_τ^2 : DNS Daten [73] werden mit Ergebnissen aus Grobstruktursimulationen ZDF, SMG, SMG017, GER und SPZ verglichen.

Kapitel 7

Umströmung des freien Rundzylinders

Der Nachlauf eines freien Rundzylinders in gleichförmiger Anströmung ist von der Reynoldsschen Zahl Re abhängig. Diese wird mit der gleichförmigen Anströmungsgeschwindigkeit v_x^∞ , dem Zylinderdurchmesser d_z und der kinematischen Viskosität ν berechnet. Bei sehr kleinen Re „schleicht“ die Strömung entlang der Wand, abnehmende Zähigkeitseffekte erzwingen die Ablösung der Grenzschicht und es bildet sich für $Re < 49$ ein geschlossener Nachlauf in dem das Fluid in zwei symmetrischen Wirbeln zirkuliert. Für $49 < Re < 194$ lösen regelmäßig Wirbel von beiden Seiten des Zylinders ab und bilden die typische Kármán-Wirbelstraße. Im Bereich von $Re \approx 190 - 1000$ erfolgt die Nachlauftransition, die den Übergang zur dreidimensionalen Strömung markiert. Die Scherschichtinstabilität führt zu einem frühen Ansteigen der Reynoldsschen Spannungen im Nachlauf und bestimmt den Verlauf der Strömung bis $Re \approx 200\,000$. Die Transition in der Grenzschicht führt letztlich zur starken Abnahme des Zylinderwiderstands und der Querkräfte, was in einigen technischen Anwendungen erwünscht ist, bei vielen zu großen Nachteilen führt.

7.1 Laminare Zylinderumströmung

Die regelmäßige Ablösung von Wirbeln erzeugt eine periodisch schwingende Widerstands- und Auftriebskraft, deren zeitlicher Verlauf nach einer Einschwingperiode zur Untersuchung von numerischer Methode und Feinstrukturmodellen herangezogen wird. Bei der gewählten Reynoldsschen Zahl $Re = 100$ tritt periodische Wirbelablösung auf. Die folgenden Ergebnisse sind im zweidimensionalen Raum auf strukturierten Gittern mit 6144 Maschen erzielt. Das verwendete O-Gitter garantiert auf der Zylinderoberfläche senkrecht stehende Gitterlinien, wobei alle Ränder 16 Zylinderdurchmesser von dem Zylindermittelpunkt entfernt sind. Am Einstromrand wird ein Blockgeschwindigkeitsprofil vorgegeben, und am Ausstromrand verhindert das Nullsetzen aller Gradienten Einfluss auf die Strömung im stromaufliegenden Gebiet. Die Impuls- und Massenerhaltungsgleichung werden genau gelöst bis sich ein periodischer Zustand eingestellt hat (das Residuum wird um 5 Zehnerpotenzen abgebaut, was bei der linearen Beziehung zwischen Residuum und Fehler auch 5 Größenordnungen für den Fehler bedeutet). Alle Felder werden im gesamten Gebiet mit null initialisiert, nach einer gewissen Einschwingphase lösen sich periodisch Wirbel hinter dem Zylinder ab und bilden die nach von Kármán benannte Wirbelstraße. Auf den Zylinder wirkende Kräfte werden

dimensionslos als Widerstandsbeiwert C_w und Auftriebsbeiwert C_a bezeichnet:

$$C_w = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho v_x^\infty d_z L}, \quad C_a = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho v_x^\infty d_z L} \quad (7.1)$$

Die Strouhal-Zahl ist die dimensionslose Wirbelablösungsfrequenz, die mit der Oszillationsperiode t_w zwischen zwei Wirbelablösungen gebildet wird, und deren Wert bei $Re=100$ in guter Übereinstimmung mit [61] 0,165 beträgt:

$$St = \frac{d_z}{v_x^\infty t_w} \quad (7.2)$$

7.1.1 Numerische Effizienz

Die instationäre Rechnung wird nach der Einschwingphase fortgeführt und als Referenzlösung zur Parameterstudie verwendet. Die folgenden Parameter beeinflussen die Genauigkeit des numerischen Verfahrens:

- Anzahl von äußeren Iterationen pro Zeitschritt
- Konvergenzkriterium des linearen Gleichungslösers
- Zeitschrittgröße

Bei einer Lösung, die als genaue Lösung bezeichnet wird, werden pro Zeitschritt ungefähr 50 äußere Iterationen gemacht. Außerdem wird das Gleichungssystem mit einer geringeren Anzahl von äußeren Iterationen pro Zeitschritt gelöst. Das Konvergenzkriterium für die Einzelgleichungen bleibt identisch (Reduktion der Residuen für die linearisierten Impulsgleichungen um eine Zehnerpotenz, für die Massenerhaltung um zwei Zehnerpotenzen). Zur Ermittlung der minimal benötigten Iterationszahl wird die zeitliche Entwicklung der dimensionslosen Beiwerte verglichen: an dem Verlauf in Abb. 7.1 kann nach drei äußeren Iterationen kein Unterschied mehr zwischen den Lösungen festgestellt werden. Bei zwei Iterationen ist der Fehler klein und macht sich nur im Widerstandsbeiwert bemerkbar. Bei der genauen Lösung wird das Residuum der äußeren Iterationen in den Impulsgleichungen durchschnittlich um 5 Zehnerpotenzen verringert. 3 Iterationen reichen aus um den Fehler um 2 Größenordnungen, bei gleichem Beiwertverlauf, zu verringern. Das Massenresiduum wird gleichzeitig um eine Größenordnung verringert. Die Residuen der Impulsgleichungen fallen zu Beginn sehr schnell, nach wenigen Iterationen tritt eine deutliche Verlangsamung der Residuenverkleinerung ein, d.h. die ersten Iterationen entfernen einen relativ großen Teil des Fehlers bei gleicher Rechenzeit pro Iteration.

Bei einer instationären Berechnung mit sehr kleinen Zeitschritten ist die Änderung der Variablen in einem Zeitschritt klein und äußere Iterationen sind nicht erforderlich, wenn der Zeitdiskretisierungsfehler kleiner als die Summe aller anderen Fehler ist. Die Berechnungen mit gleichem Zeitschritt bei einer äußeren Iteration pro Zeitschritt erreichen jedoch nicht den zeitlichen Verlauf der genauen Lösung. Durch die Erhöhung der Anzahl an inneren Iterationen oder durch Einführung zusätzlicher Druckkorrekturschleifen [29] kann der Fehler der Kontinuitätsgleichung weiter verringert werden, was den Gesamtfehler jedoch nicht ausreichend beseitigt. Für eine Zeitschrittweite $\Delta t v_x^\infty / d_z = 0,001$ wird der Fehler klein genug um eine große Abweichung der Beiwerte vom genauen Verlauf zu verhindern, der periodische Verlauf wird jedoch nicht exakt wiedergegeben. Das liegt teilweise an der Umstellung

der Zeitschrittweite von der ursprünglichen auf die neue, ist aber auch die Folge des Iterationsfehlers, der die Strouhal-Zahl verändert (siehe Abb. 7.1). Ein sehr kleiner Zeitschritt und die damit verbundene größere Anzahl von Zeitschritten führt zu einer verlängerten Rechenzeit und scheidet als Optimierungsoption aus. Die Massenerhaltung wird bei entsprechend kleinem Zeitschritt sehr genau eingehalten, der Fehler in der Impulserhaltung durch die Geschwindigkeitskorrektur ist zu groß, um auf den Zylinder wirkenden Kräfte richtig vorherzusagen.

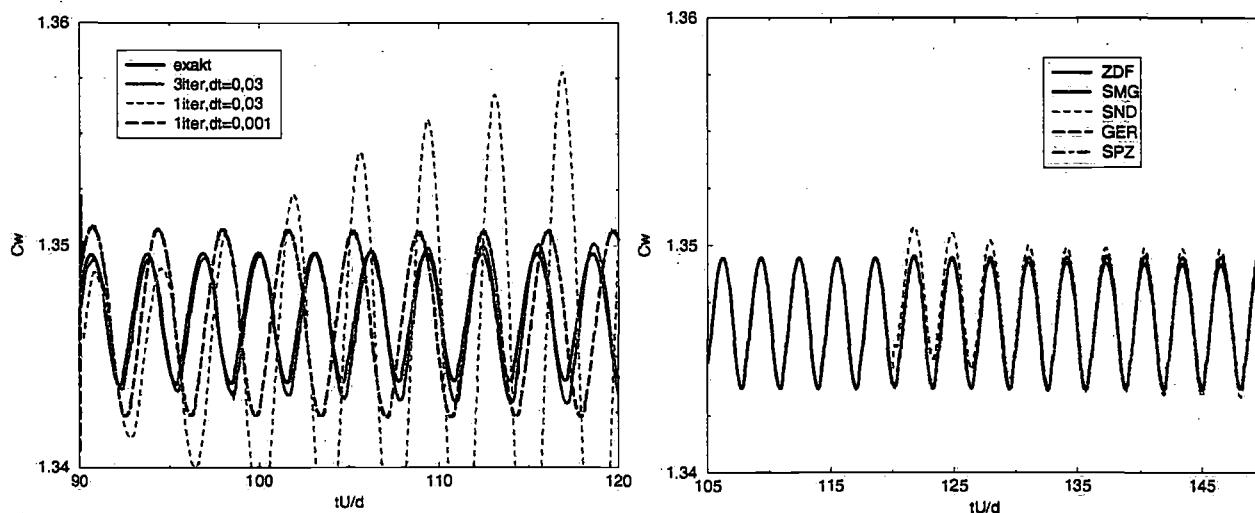


Abbildung 7.1: Darstellung des dimensionslosen Widerstandsbeiwerts für die Berechnung der laminaren Zylinderumströmung in der periodischen Phase zur Ermittlung der optimalen Effizienz (links) und zum Test von Feinstrukturmodellen (rechts).

Die genaue Lösung aller Gleichungen ohne äußere Iterationen reicht mit dem verwendeten impliziten Verfahren nicht aus, um den zeitlichen Verlauf der genauen Lösung vorherzusagen. Im Vergleich zu mehreren äußeren Iterationen und einem weniger strengen Kriterium für den Abbruch innerer Iterationen im Löser, ist der Zeitaufwand durch die sehr genau Lösung der Einzelgleichungen größer und mit dieser Diskretisierung keine Alternative. Eine Verringerung der Rechenzeit wird durch eine minimale Anzahl von äußeren Iterationen, ohne Verlust von Genauigkeit bei integralen Größen, erreicht.

7.1.2 Grobstruktursimulation

Die laminare Strömung um den Rundzylinder wird zur Initialisierung der Grobstruktursimulation benutzt. Dabei wird $Re=100$ beibehalten und die verschiedenen Feinstrukturmodelle ab einem bestimmten Zeitpunkt eingeschaltet. Im laminaren Regime sollten die Modelle eigentlich keinen Beitrag liefern und die Strömung nicht beeinflussen. Abbildung 7.1 zeigt wie gering die Auswirkung aller Modelle auf den Widerstandsbeiwert ist (der Einfluss auf den Auftriebsbeiwert ist kleiner). Der Einfluss ist bei SPZ und GER am kleinsten und bei SND (Smagorinsky Modell ohne van Driest Dämpfung - in der wandnächsten Zelle wird die Wirbelviskosität auf null gesetzt) am höchsten. Der verschwindende Einfluss von SPZ und GER, die die gleiche Ablösefrequenz vorhersagen und sich mit der Lösung ohne Modell decken, ist die Folge der geringen Wirbelviskosität der Modelle. Durch die Abschätzung des Kolmogorov-Längenmaß, das größer als die Maschenweite ist, existiert bei SPZ kein Modelleinfluss im Zylindernachlauf. Das von GER vorhergesagt Niveau der Wirbelviskosität

liegt zwar höher als bei SPZ, das Modell hat trotzdem keine Auswirkungen auf den Widerstandsverlauf, da die Wirbelviskosität weit hinter dem Zylinder ansteigt. Trotz der fehlenden homogenen Richtung zur Mittelung ist der Verlauf des Modellkoeffizienten C glatt. Mit SMG hat die verwendete Dämpfungsfunktion nur zu Beginn der Simulation Einfluss auf die Ergebnisse. Obwohl mit SND die Wirbelviskosität in Zylindernähe vergleichsweise hoch ist, pendeln sich die Beiwerte nach einigen Ablösungen auf dem gleichen Niveau ein, wie bei den anderen Modellen, bei denen die Feinstrukturspannungen in Zylindernähe klein sind. Die Wirbelviskosität steigt im Abstand $3d_z$ hinter dem Zylinder an. Der Unterschied zwischen der Lösung mit und ohne Modell ist im Rahmen der Genauigkeit vernachlässigbar, denn die Modelle haben in der laminaren Strömung kaum Einfluss (der Beitrag der Wirbelviskosität ist um den Faktor zehn kleiner als die anderen viskosen Beiträge). Eine Dämpfung der Feinstrukturspannungen in Wandnähe ist bei dieser Strömung nicht erforderlich.

7.2 Turbulente Zylinderumströmung

7.2.1 Zweidimensionale Simulationsergebnisse

Im Gegensatz zur Berechnung von zweidimensionalen laminaren Fällen sind die Ergebnisse der zweidimensionalen Turbulenzsimulation nur begrenzt physikalisch deutbar, weil Turbulenz ein dreidimensionales Phänomen ist und die Einschränkung der Fluktuationen auf zwei Richtungen falsch ist. Trotzdem ist ein Vergleich zwischen den Modellen möglich und kann Hinweise auf mögliche Modellfehler geben. Die Rechnungen wurden bei $Re=3\,900$ auf zwei Gitterebenen durchgeführt, wobei die erste Gitterebene die gleiche Anzahl von Gitterpunkten wie die laminare Rechnung hat. Der dimensionslose Wandabstand y^+ vom Zentrum des Kontrollvolumens bis zur Oberfläche ist kleiner als eins. Das ist in jedem Kontrollvolumen an der Zylinderwand erfüllt. Die zweite Gitterebene wird durch systematische Verfeinerung aus dem ersten Gitter erzeugt und erfüllt dieses Kriterium ebenfalls. Zum Vergleich des Widerstandsbeiwerts existieren Experimente [80] und 3D-Simulationen [8], [70], [52]. Die Berechnung wird ohne Modell begonnen und nach Einstellung eines Zustands mit periodischer Wirbelablösung mit Modell fortgeführt. Die Verläufe der Beiwerte unterscheiden sich zu Beginn nur wenig zwischen den Modellen, mit der Zeit akkumulieren sich jedoch die Beiträge, die vom Modell bzw. von den numerischen Fehlern eingebracht werden, und führen zu unterschiedlichem Verlauf. Auf der ersten Gitterebene ergibt die Berechnung einen Widerstandsbeiwert von $C_w = 1,60$ (ZDF), $1,63$ (SMG) und $1,57$ (GER). Durch Gitterverfeinerung ändern sich diese Werte nur geringfügig auf $1,50$ (ZDF), $1,55$ (SMG) und $1,49$ (GER), wobei alle Ergebnisse im gleichen Bereich wie die zweidimensionalen Ergebnisse von [11] ($1,625$) und [8] ($1,74$) liegen. Die Werte von Experiment $C_w = 0,98$ [80] und den 3D-Simulationen ($1,0$ [70],[8] und $1,04$ [52]) sind weit davon entfernt.

Die Modelle sagen ähnliche Größendimensionen für die Wirbelviskosität vorher, wobei der Wert in laminaren Bereichen und bei feinem Gitter klein ist und entsprechend groß im Nachlauf und bei grobem Gitter. Der Fehler des Widerstandsbeiwerts ist bei den drei Berechnungen ungefähr 50%. Die notwendige Mittelungsdauer für den Auftriebsbeiwert, der nach einigen Perioden null betragen sollte (nach 225 Perioden beträgt der Wert noch $0,03$), ist deutlich länger als für den Widerstand, was durch Berechnungen von [11] bestätigt wird. Dies deutet auf eine erforderliche Anpassung der verwendeten Modelle für 2D-Simulationen hin, eine Verwendung dieser Modelle führt zu einem beträchtlichen Fehler. Im weiteren Verlauf werden die Modelle in dreidimensionalen Simulation angewendet und die Ergebnisse

diskutiert.

7.2.2 Grobstruktursimulation: $Re=3\ 900$

Die Umströmung des Zylinders mit systematischem Studium von Feinstrukturmodellen, Diskretisierung und Gitterabhängigkeit hat [11] durchgeführt. Wie bei [52] wird dort vor numerischer Dissipation, wie sie die Diskretisierung mit Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzen erzeugt, gewarnt und die Verwendung von nicht dissipativer Diskretisierung (Zentrale Differenzen von zweiter oder vierter Ordnung) empfohlen. Die Gitterauflösung in Zylinderlängsrichtung ist von entscheidender Bedeutung, genau wie bei der Berechnung der ebenen Kanalströmung. Eine bestimmte Mindestgröße des Berechnungsgebietes muss eingehalten werden, um eine Beeinflussung großer Strukturen durch die zyklischen Randbedingungen, mit denen ein unendlich langer Zylinder modelliert wird, zu verhindern. Ein maximaler Gitterabstand sollte nicht überschritten werden, damit alle wichtigen Strukturen mit der Methode erfasst werden.

Die Qualität der experimentellen Ergebnisse ist von vielen verschiedenen Faktoren abhängig, wie zum Beispiel von Zylindervibrationen [33] oder dem Turbulenzgrad des Strömungskanals [20]. Die zum Vergleich verwendeten Experimente [83], [64] stimmen im Überlappungsbereich nicht überein [65], aus der numerischen Analyse folgert [52] eine gestörte Anströmung für das Experiment. Das Verhältnis Länge/Durchmesser des Versuchszylinders kann die Ergebnisse ebenfalls entscheidend beeinflussen, wobei ein Verhältnis von 60-70 [81] für $Re=3\ 900$ empfohlen wird. In der experimentellen Durchführung war das Verhältnis 20,5 [64]. Eine andere Untersuchung [79] betont den Einfluss des absoluten Zylinderdurchmessers als entscheidendes Kriterium für die Grenzschichttransition. Weitere Ergebnisse von Experimenten zum Vergleich sind nicht bekannt, deshalb werden diesen Daten trotz der Zweifel an der Verlässlichkeit als Referenz verwendet.

Bei einem Zustand, der in der weiteren Diskussion HT (hoher Turbulenzgrad) genannt wird, geschieht der Grenzschichtumschlag früher als bei einem Zustand NT (niedriger Turbulenzgrad). Die Form der Geschwindigkeitsprofile im Zylindernachlauf ist von der Grenzschicht abhängig: HT erzwingt eine V-Form. Die Ursache ist die verbesserte turbulente Mischung und die Folge ein höherer Widerstand. Bei NT bleibt die Grenzschicht länger laminar, das mittlere Geschwindigkeitsprofil im Nachlauf ist U-förmig und ein kleinerer Widerstand als Folge des Druckrückgewinns an der Hinterseite des Zylinders durch die stärkere Rezirkulation ergibt sich.

Es wird vermutet, dass die numerische Simulation ebenso empfindlich wie das Experiment ist. Die Simulationen [52], [65] sagen sowohl U-förmige als auch V-förmige Geschwindigkeitsprofile bei $x/d_z = 1,06$ vorher. Durch Simulationen weist [52] einen früheren Grenzschichtumschlag bei Verwendung von groben Gittern als bei feinen Gittern nach, und folgert aus der Übereinstimmung der Profile von groben Gitter und Experiment eine gestörte Anströmung im Experiment. Ebenfalls V-förmige Profile hat [65] auf groben Gittern vorhergesagt. Diesbezüglich stimmen die Simulationsergebnisse überein. Mit feinem Gitter und einer Zylinderdehnung von $z/d_z = \pi$ berechnet [65] eine U-Form, für eine homogene Ausdehnung von $z/d_z = 2\pi$ erneut eine V-Form (bei gleichem Gitterlinienabstand). Bei einer Zylinderlänge $z/d_z = \pi$ demonstriert [52] für die Profile bei $x/d_z = 1,06$ Gitterunabhängigkeit, und weist auf die Übereinstimmung mit früheren Simulationsergebnissen [8], [70] hin.

Beide Autoren [52], [65] gehen von einem Zustand (NT oder HT) im Zylindernachlauf aus. Betrachtet man den Verlauf der Kräfte in zwei anderen Grobstruktursimulationen [11], [32]

gibt es Zeitintervalle mit hohem und kleinem Widerstand, die sich nach vielen Perioden abwechseln. Das kann einerseits die Folge des nicht ausreichenden Abstands der homogenen Ränder sein, andererseits auch ein Merkmal der Strömung. In den aktuellen Simulationen existieren ebenfalls Bereiche mit hohem und geringem Widerstand. Bei der Simulation weniger Perioden wird mit hoher Wahrscheinlichkeit nur einer dieser Zustände erreicht. Das wäre eine Erklärung für verschiedene Schlussfolgerungen. Zwei Dinge scheinen in diesem Zusammenhang wichtig zu sein: die numerische Auflösung des gesamten Gebietes und die Länge des Zylinders in der Simulation. Eigene Ergebnisse werden in den nachfolgenden Kapiteln dargestellt.

Gitter, Geometrie und Simulationsparameter

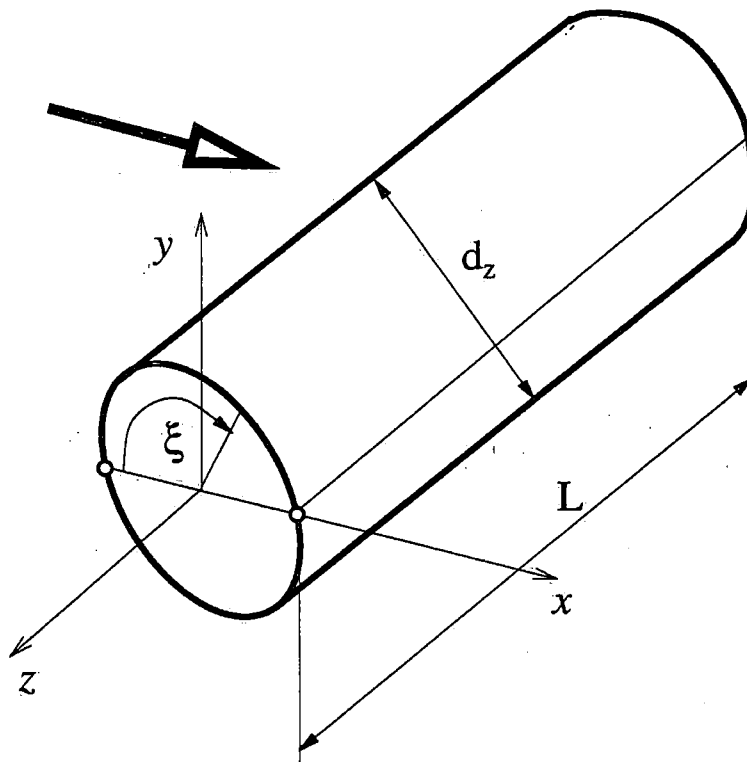


Abbildung 7.2: Geometrie für die Simulation der Umströmung eines Rundzylinders.

Eine Skizze der Geometrie ist in Abb. 7.2 dargestellt. Alle verwendeten Gitter besitzen eine O-Topologie und die Gitterlinien treffen senkrecht auf die Ränder des Berechnungsgebietes, die sich $25 d_z$ von der Zylinderoberfläche entfernt befinden und als Einstrom- und Ausstromrand definiert sind. Am Einstromrand ist die Geschwindigkeit auf $1 m \cdot s^{-1}$ festgelegt, die Geschwindigkeiten am Ausstromrand werden in jeder Iteration in Strömungsrichtung extrapoliert und skaliert, um die Massenerhaltungsgleichung zu erfüllen. Der Durchmesser des Zylinders d_z beträgt $1 m$, die Viskosität ergibt sich aus dem Kehrwert der angestrebten Reynoldsschen Zahl. An der Zylinderoberfläche haftet das Fluid und in der Richtung quer zur Anströmung (homogene Richtung) werden für alle Variablen periodische Randbedingungen angenommen. Ein strukturiertes 2D-Gitter mit 64^2 KV wurde systematisch bis zur Auflösung von 128×128 verfeinert. Die örtliche Gitterverfeinerung in der Scherschicht und im Nachlauf ergibt maximal 25813 KV in einer Gitterebene. In den Simulationen variiert die Zylinderlänge zwischen 3 und $8 d_z$ die mit 32 bis 100 Kontrollvolumen aufgelöst wurde. Eine

Tabelle 7.1: Zusammenfassung der Gitterparameter der turbulenten Zylinderumströmung bei $Re=3900$.

| Bezeichnung | L/d_z | $N_r \times N_\phi \times N_z$ |
|-------------|---------|--------------------------------|
| Y1 | 4 | $64 \times 64 \times 64$ |
| Y2 | 4 | $64 \times 128 \times 64$ |
| Y3 | 4 | $128 \times 128 \times 64$ |
| Y4 | 4 | $25\,813 \times 64$ |
| Y5 | 2 | $25\,813 \times 32$ |
| Y6 | 3 | $25\,813 \times 64$ |
| Y7 | 4 | $25\,813 \times 100$ |
| Y8 | 6 | $25\,813 \times 128$ |
| Y9 | 8 | $25\,813 \times 128$ |

Übersicht der verwendeten Gitter befindet sich in Tab. 7.1. Die verwendete Zeitschrittweite ist für alle Gitter $0,025 \, tv_x^\infty/d_z$, was bei einer Strouhal-Zahl von ungefähr 0,2 ca. 200 Zeitschritte pro Wirbelablösung bedeutet. Das gesamte Gebiet wird zur parallelen Berechnung in 15 Gebiete aufgeteilt und auf einem Parallelrechner (Hersteller Hewlett Packard, Modell V2250) des Regionalen Rechenzentrum der Universität Hamburg durchgeführt.

Ergebnisse

In allen Simulationen wird das Smagorinsky Feinstrukturmodell mit der Konstante $C_s = 0,1$ in Verbindung mit der van Driest'schen Dämpfungsfunktion verwendet. Abbildung 7.3 zeigt den Verlauf der Beiwerte von Simulation Y4, deren Verlauf zuerst diskutiert wird. Die Simulation wird mit einer Lösung von Y1 initialisiert, der Widerstandsabfall zu Beginn der Simulation resultiert aus den großen Längenskalen des gröberen Gitters. Nach der Anpassung der Simulationsfelder an die feinere Gitterauflösung stellt sich zunächst Zustand HT ein, der in Zustand NT mit einem Widerstand nahe eins nach ungefähr 200 dimensionslosen Zeiteinheiten umschlägt. Bei den Simulationen Y1 und Y2 mit geringerer Gitterauflösung ist die Amplitude des Auftriebsbeiwerts und der Widerstandsbeiwert größer als bei Y4, so dass während der gesamten Simulationszeit der Zustand HT ist. Die Gitterverfeinerung ergibt bei den Simulationen Y3, Y4 und Y5 einen Widerstandsbeiwert von ungefähr 1,1 bedingt durch Wechsel zwischen HT und NT. Bei hoher Gitterauflösung in Zylinderlängsrichtung (Y6, Y7) stellt sich Zustand NT ein (Widerstandsbeiwert ungefähr eins), der sich bei Erhöhung der Zylinderlänge als instabil herausstellt, was mit den Simulation Y8 und Y9 (doppelte Zylinderlänge der Gitter Y6 und Y4) gezeigt wird. Y6 und Y8 unterscheiden sich in der Zylinderlänge, der Gitterlinienabstand ist jedoch identisch. Das unterschiedliche Ergebnis beruht folglich auf der Zylinderlänge. Die Simulation Y7 ist eine Bestätigung für das Ergebnis von Y4 ($T > 200$ in Abb. 7.3) und Y6: bei kleinem Gitterlinienabstand und Zylinderlängen bis $4 \, d_z$ stellt sich über verschieden große Zeiträume Zustand NT ein, was vermutlich eine Folge der Beeinflussung kohärenter Strukturen durch die zyklischen Ränder ist. In Abb. 7.4 sind zur Illustration der Zustände NT und HT momentane Geschwindigkeitsfelder dargestellt.

Die Vermutung der Zustand NT sei physikalisch richtig, da der Widerstand besser mit dem Experiment übereinstimmt, konnte durch die Simulationen nicht bestätigt werden. Der prognostizierte Widerstand liegt 10-20% oberhalb des Wertes aus den Experimenten. Der aus

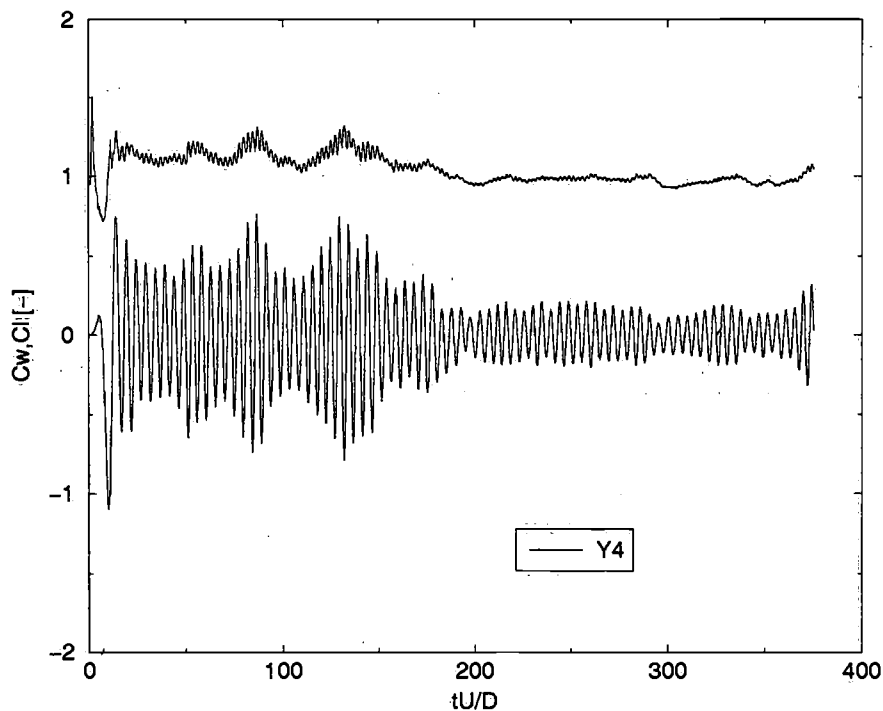


Abbildung 7.3: Verlauf von Widerstandsbeiwert und Auftriebsbeiwert bei der Simulation des Rundzylinders.

dem Wechsel von NT und HT resultierende höhere Widerstand ist in schlechterer Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen, aber stimmt besser mit den Werten anderen Simulationen überein: 1,097 [11] und 1,08 [32]. Der Zustand HT, der einem V-förmigen Geschwindigkeitsprofil entspricht, ergibt sich in der Simulation [65] bei der Zylinderlänge 2π . Diese Ergebnis ist im Widerspruch zu [11], wo kein Unterschied zwischen Simulationen der Zylinderlängen π und 2π festgestellt wurde. Das verwendete strukturierte Gitter [11] mit der Auflösung $165 \times 165 \times 64$ unterscheidet sich von diesem Gitter durch eine geringer Auflösung im Nachlauf ($256 \times 256 \times 64$), d.h. der Gitterlinienabstand hier ist ungefähr 1,5 mal kleiner. Aus dem Widerstandsbeiwert dieser Zylindersimulationen - als Indikator für den Zustand HT oder NT - können folgende Schlussfolgerung gezogen werden: die Zylinderlänge in der Simulation sollte mindestens $6 d_z$ betragen, der Gitterlinienabstand gleichzeitig kleiner als $\pi/64$ sein. Die folgenden Vergleiche der Simulationen Y4 und Y7, die sich nur durch die Gitterauflösung in Zylinderlängsrichtung unterscheiden, stehen stellvertretend für die Zustände HT und NT.

Abbildung 7.5 zeigt den Druckbeiwert auf der Oberfläche des Zylinders. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist gut für die Simulation Y7, da es nur im Bereich des Druckminimums kleine Abweichungen gibt. Das theoretische Druckminimum ohne Reibung $C_p = -3$ liegt bei $\xi = 90^\circ$. In Simulation Y4 ist die absolute Abweichung des Druckbeiwerts vom homogenen Mittelwert größer als bei Y7. Der Umschlag der Scherschicht hat starken Einfluss auf den Druckbeiwert auf der Zylinderrückseite, der bei Y7 ungefähr ab $\xi = 100^\circ$ konstant ist. Die guten Übereinstimmung von Y7 und [80] ist ein Hinweis auf eine ungestörte Anströmung und den Zustand NT im Experiment.

Abbildung 7.6 zeigt in der Zeit und in homogener Richtung gemittelte Simulationsergebnisse in der Symmetrieebene hinter dem Zylinder. Auf der linken Seite ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit mit den Experimenten [83], [64] verglichen, wobei die Messun-

Tabelle 7.2: Zusammenfassung von Ergebnissen der turbulenten Zylinderumströmung bei $Re=3900$ mit dem Modell von Smagorinsky im Vergleich zu Experimenten.

| Bezeichnung | L_τ/d_z | C_w | C_{p_s} | ξ |
|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------------------|
| Y1 | 0,589 | 1,227 | -1,246 | 93,0° |
| Y2 | 0,540 | 1,291 | -1,369 | 92,6° |
| Y3 | - | 1,11 | - | - |
| Y4 | 1,514 | 1,10 | -0,846 | 89,3° |
| Y5 | 0,908 | 1,12 | -1,092 | 89,3° |
| Y6 | - | 1,00 | - | - |
| Y7 | 1,612 | 0,97 | -0,815 | 87,1° |
| Y8 | - | 1,15 | - | - |
| Y9 | - | 1,22 | - | - |
| Experiment | $1,4 \pm 0,1$ [14] | $0,98 \pm 0,05$ [80] | $-0,88 \pm 0,05$ [80] | $86,0^\circ \pm 2^\circ$ [110] |

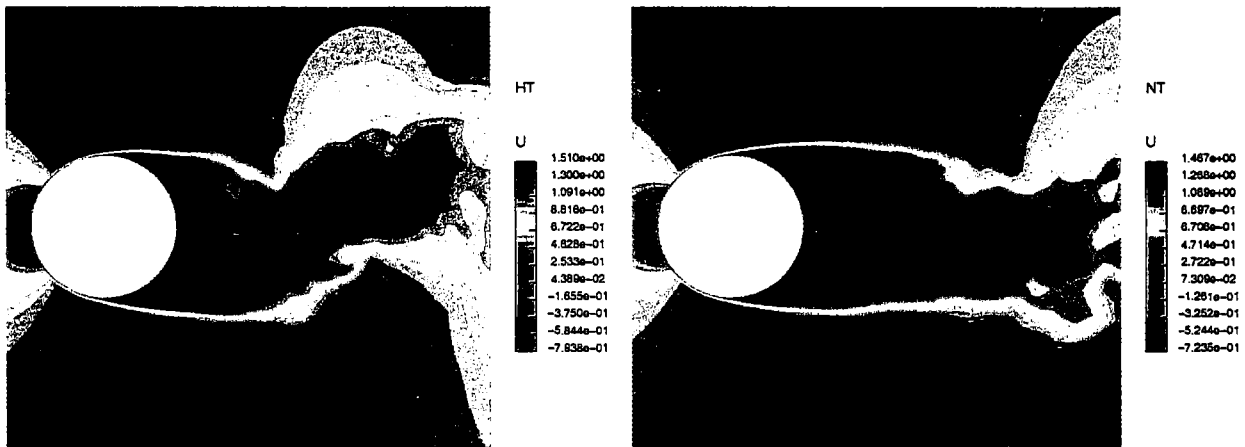


Abbildung 7.4: Konturen der momentanen Geschwindigkeit v_x/v_x^∞ der Zylinderumströmung in der Ebene bei $z = 0$ nach $T = tv_x^\infty/d_z = 125$ (links) und $T=250$ (rechts).

gen bei $x/d_z = 3$ unterschiedliche Geschwindigkeiten ergaben, in größerer Entfernung vom Zylinder jedoch konsistent sind. Der Unterschied von \bar{v}_x/v_x^∞ zwischen Experiment und Simulation ist direkt hinter dem Zylinder bei Y4 kleiner als bei Y7, ab $x/d_z = 3$ ist Y7 in besserer Übereinstimmung. Die Reynoldsschen Spannungen auf der rechten Seite von Abb. 7.6 unterscheiden sich direkt hinter dem Zylinder, ab $x/d_z = 3$ ist die Übereinstimmung für beide Simulationen befriedigend. Die höheren Fluktuationen im Nahbereich des Zylinders für Y4 weisen auf einen baldigen Scherschichtumschlag hin (HT). Die Spannungen werden von Y4 und Y7 in der gleichen Größenreihenfolge vorhergesagt, danach ist $\overline{v_z'v_z'}$ kleiner als $\overline{v_x'v_x'}$ und beide um ein Vielfaches kleiner als $\overline{v_y'v_y'}$. Die Geschwindigkeit v_y ist von ähnlicher Größenordnung wie die Anströmungsgeschwindigkeit v_x^∞ und wechselt im Nachlauf periodisch die Richtung. Im zeitlichen Mittel wird \bar{v}_y null, was die großen Fluktuationen in y -Richtung erklärt. Die Übereinstimmung der Spannungen von Simulationen und Experiment ist gut, unter Berücksichtigung der Differenzen bei der mittleren Geschwindigkeit, sogar sehr gut.

In Abb. 7.7 sind die mittlere Geschwindigkeit \bar{v}_x und \bar{v}_y bei $x/d_z = 1,54$ aufgetragen. Beide Komponenten werden von Y4 in besserer Übereinstimmung zum Experiment [64]

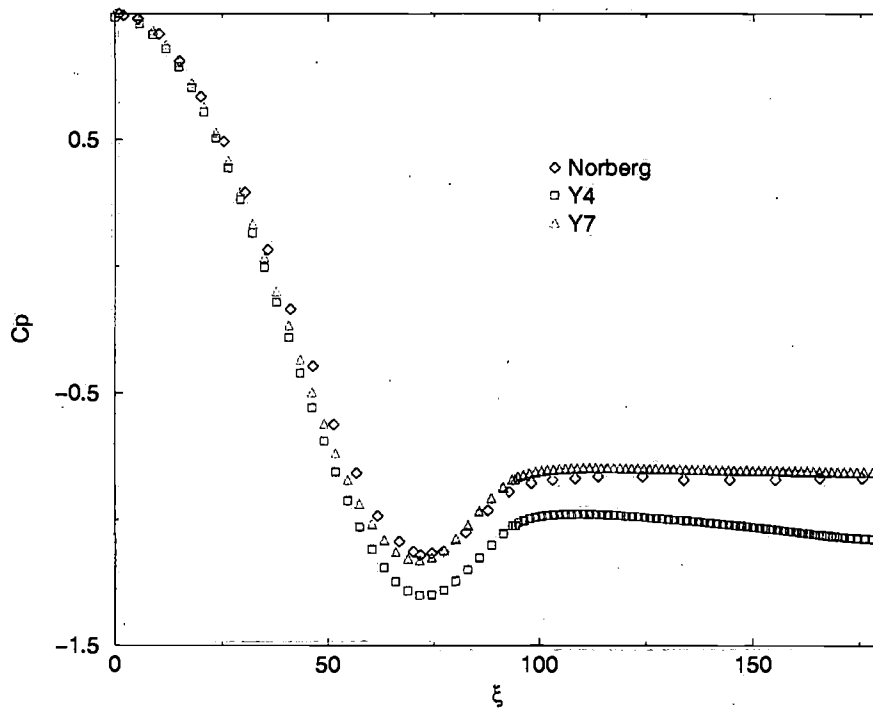


Abbildung 7.5: Mittlerer Druckbeiwert als Funktion des Winkels in der Simulation der Zylinderumströmung: Vergleich der Ergebnisse von unterschiedlicher Zylinderlängsaufösung mit [80].

vorhergesagt. Nach Angaben der Experimentatoren beträgt der Messfehler der Komponente \bar{v}_y 50%, d.h. die Ergebnisse von Y4 und Y7 liegen innerhalb der Fehlerabweichung. Für \bar{v}_x ist der Messfehler ungefähr 5%, die Simulation Y4 und damit der Zustand NT ist in besserer Übereinstimmung mit Experiment [64] als Y7. Von den Reynoldsschen Spannungen existieren wenige Messprofile unmittelbar hinter dem Zylinder. Die Übereinstimmung der mittleren Geschwindigkeiten bei $x/d_z = 1,54$ in der Simulation Y7 mit dem Experiment ist Zufall, da diese davor und danach vergleichsweise schlecht ist. Bei den Reynoldsschen Spannungen in Abb. 7.8 ist das nicht der Fall. Die Übereinstimmung von Y4 mit dem Experiment ist deutlich besser als mit Y7.

Bei den bisher betrachteten Geschwindigkeitsprofilen $x/d_z < 3$ waren die Ergebnisse von Y4 in besserer Übereinstimmung mit [64] als Y7 und Abb. 7.9 unterstützt diesen Befund. Auf der linken Seite wird der Unterschied zwischen NT und HT am U- bzw. V-förmigen Geschwindigkeitsprofil bei $x/d_z = 1,06$ gezeigt. Die gute Übereinstimmung der Komponente \bar{v}_x bei $x/d_z = 1,06$ aus Simulation Y4 setzt sich bei $x/d_z = 2,02$ fort. Bei Y7 wächst der Unterschied zwischen Experiment und Simulation mit der Entfernung vom Zylinder. Ab $x/d_z > 3$ wird der Unterschied zwischen Y4 und Y7 kleiner, was in Abb. 7.10 sichtbar ist. Der Einfluss eines frühen Scherschichtumschlags ist abgeklungen, und die Ergebnisse sind von der Gitterauflösung abhängig, die von der Zylinderlängsrichtung abgesehen, in beiden Simulationen gleich ist. Die Übereinstimmung mit dem Experiment [83] ist bei Y7 nun besser, was auch an Komponente \bar{v}_y/v_x^∞ auf der rechten Seite von Abb. 7.10 sehr deutlich wird. Weit hinter dem Zylinder ist die Übereinstimmung mit den Spannungsprofilen in Abb. 7.11 für beide Simulationen wegen der geringeren Auflösung schlechter. Der Zeitpunkt des Scherschichtumschlags hat hauptsächlich Einfluss auf die Scherspannungen, die von Y4 besser vorhergesagt werden.

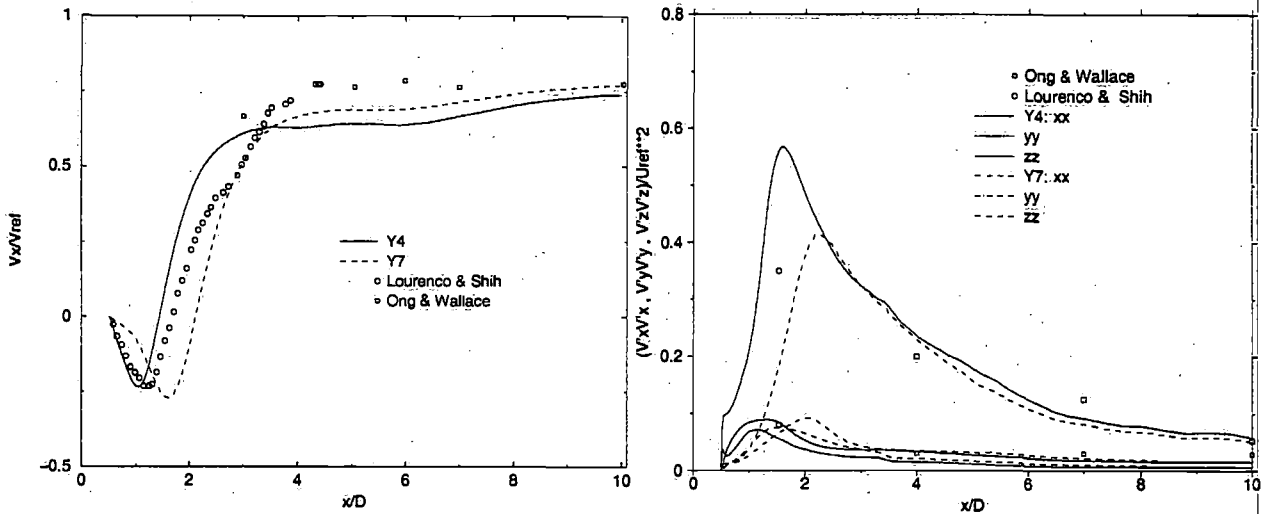


Abbildung 7.6: Zeitgemittelte Geschwindigkeit \bar{v}_x/v_x^∞ auf der Symmetrieebene hinter dem Zylinder (links) und die Reynoldssche Spannungen $\overline{v'_x v'_x}$, $\overline{v'_y v'_y}$, $\overline{v'_z v'_z}$ verglichen mit Experiment [64].

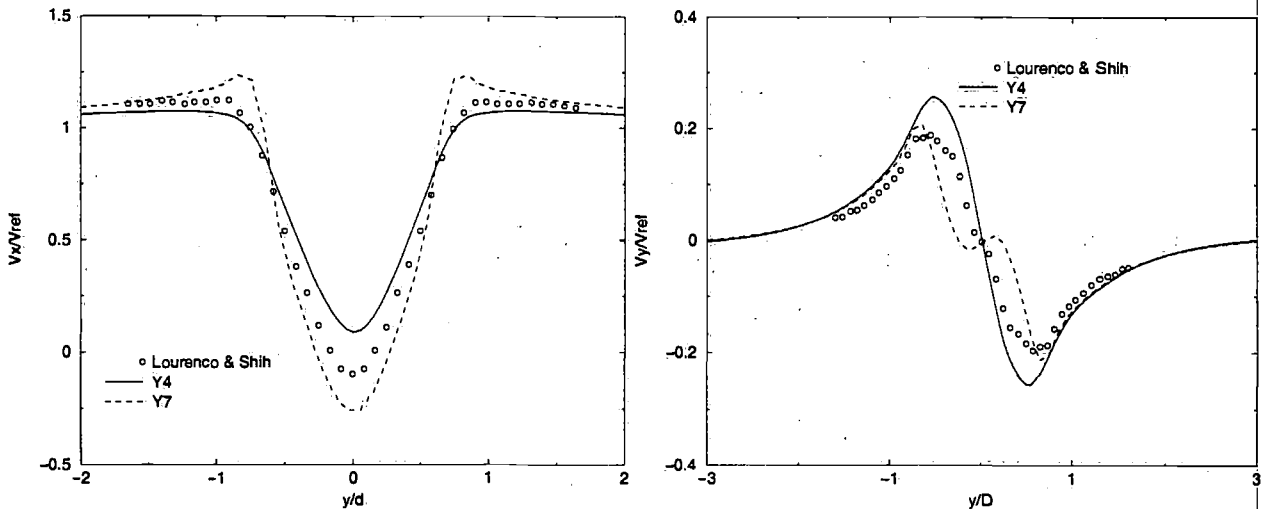


Abbildung 7.7: Zeitgemittelte Geschwindigkeit \bar{v}_x/v_x^∞ und \bar{v}_y/v_x^∞ im Abstand $x/d_z = 1,54$ in der Ebene senkrecht zur Anströmung verglichen mit Experiment [64].

Bessere Übereinstimmung mit dem Experiment [64] bei geringer numerischer Auflösung ergab die Simulation von [52]. Das stimmt mit den Ergebnissen aus den Simulationen Y1 bis Y5 sowie Y8 und Y9, bei denen der Widerstandsbeiwert auf Zustand HT hinweist, überein. Unzureichende Zylinderlänge und/oder geringe Gitterauflösung in der Simulation führen zu einer frühen Grenzschichtinstabilität, die im Zylindernachlauf für $x/d_z < 3$ bessere Übereinstimmung mit [64] ergibt. Die Übereinstimmung von Simulationsergebnissen und Experiment kann die Folge einer gestörten Anströmung im Experiment sein. Wie bereits diskutiert muss die Frage deshalb nicht lauten „wie gut ist die Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment?“, sondern vielmehr „wie weit stimmen die Bedingungen von Simulation und Experiment?“ überein.

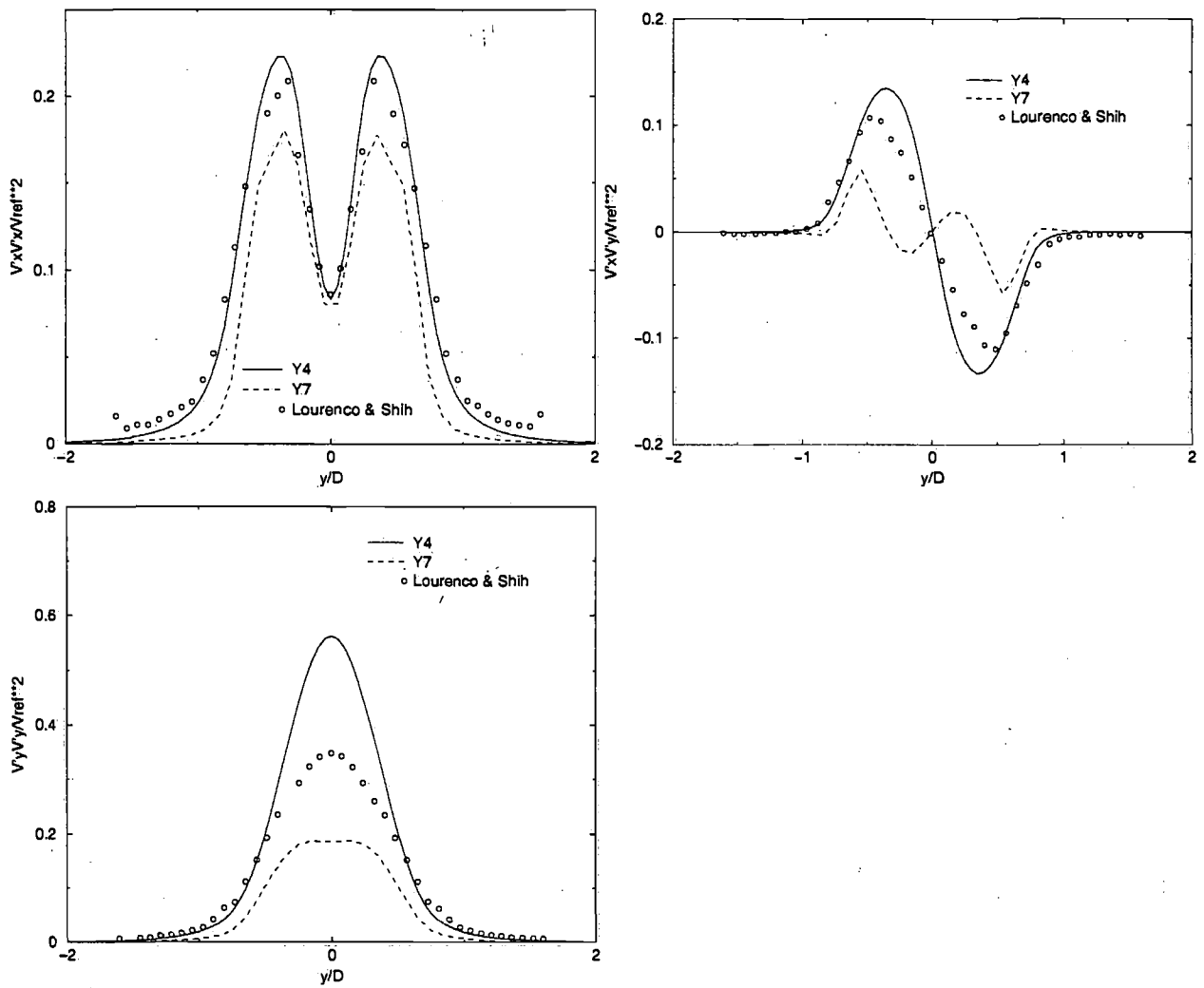


Abbildung 7.8: Reynoldssche Spannungen $\overline{v'_x v'_x}$, $\overline{v'_x v'_y}$, $\overline{v'_y v'_y}$ in der Ebene senkrecht zur Anströmung bei $x/d_z = 1,54$ im Vergleich mit Experiment [64].

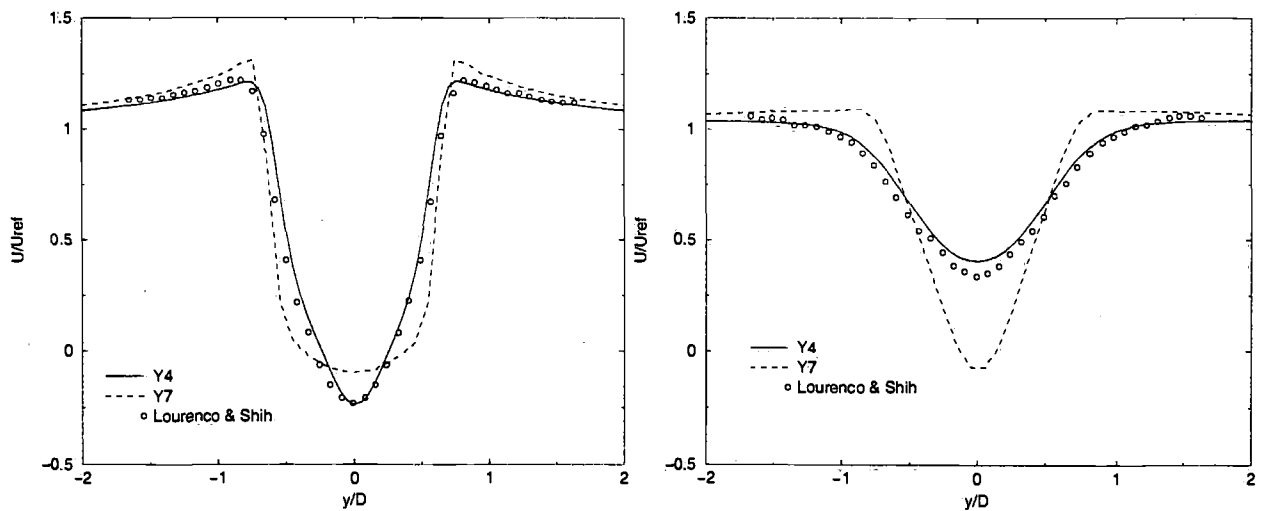


Abbildung 7.9: Zeitgemittelte Geschwindigkeit $\overline{u}_x / v_x^\infty$ im Abstand $x/d_z = 1,06$ (links) und $2,02$ (rechts) in der Ebene senkrecht zur Anströmung verglichen mit Experiment [64].

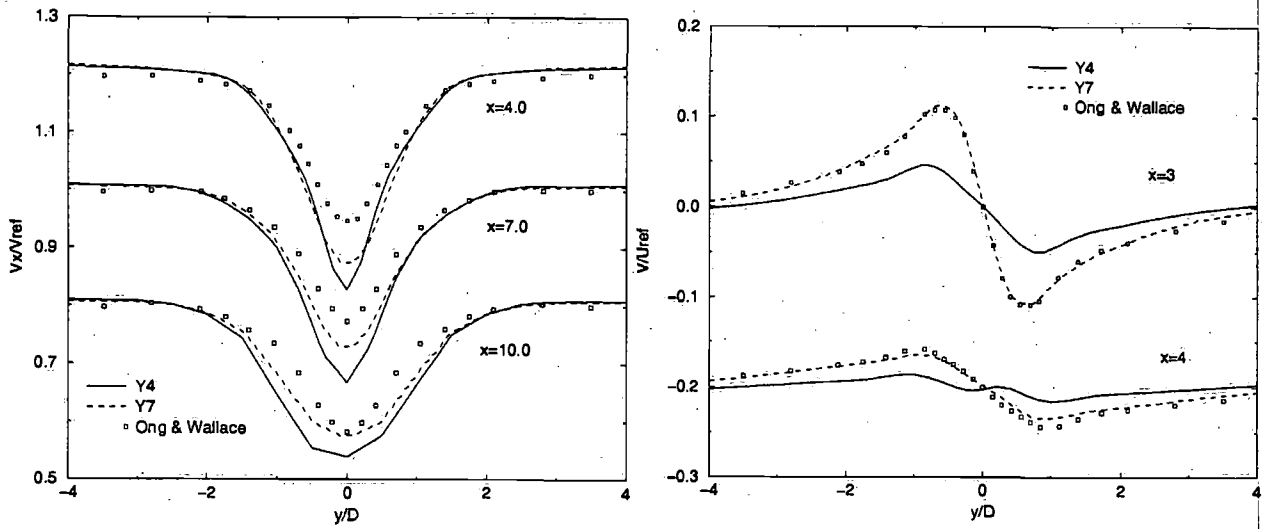


Abbildung 7.10: Zeitgemittelte Geschwindigkeit \bar{v}_x/v_x^∞ (links) und \bar{v}_y/v_x^∞ (rechts) in Querschnitten bei $x=\text{konst.}$ im Vergleich zum Experiment [83].

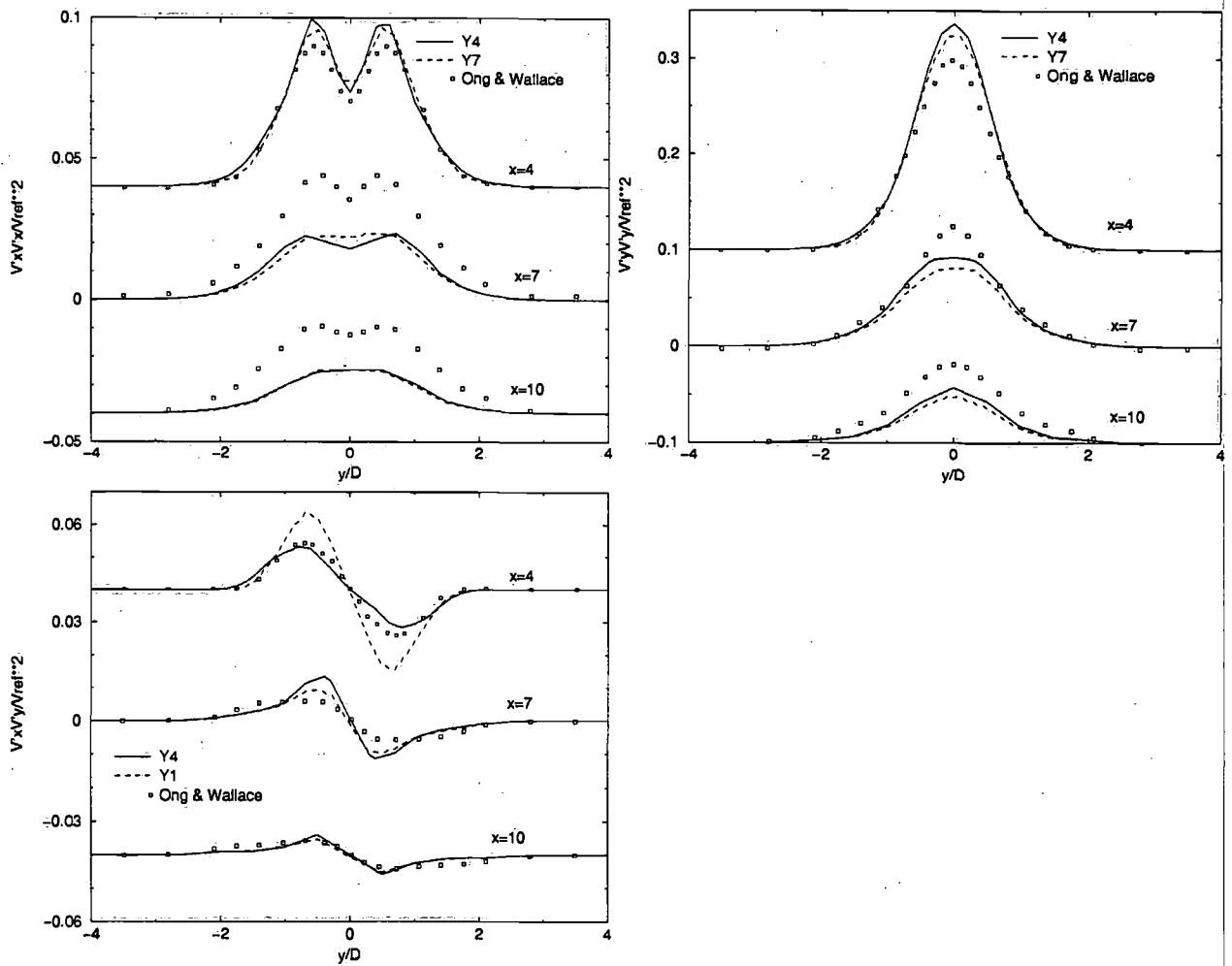


Abbildung 7.11: Reynoldssche Spannungen $\overline{v_x v_x}$, $\overline{v_x v_y}$, $\overline{v_y v_y}$ in Querschnitten bei $x=\text{konst.}$ im Vergleich zum Experiment [83].

Phasengemittelte Ergebnisse

In vielen Anwendungen der Industrie ist die Simulation von zeitabhängigen Prozessen wie die Bestückung von Schmelzen, die Synthese in Reaktoren oder Verbrennungsvorgänge, die eine zeitgemitteltes Lösungsverfahren nicht erfassen kann. In den meisten Fällen ist die Optimierung der Ausbeute (Chemie) oder die maximale Materialbelastung (Festigkeit, Konstruktion) das gewünschte Ergebnis. Dazu wird in der Regel das k - ε Turbulenzmodell mit einer Modellierung der Wandgrenzschicht verwendet, das an stationären Strömungen wie unendlich langen Platten bei hoher Reynoldsscher Zahl optimiert ist. Die Anwendung dieses Modells in zeitabhängigen Simulationen ist zwar möglich, meist sind die Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Modells jedoch nicht gegeben. Gute Ergebnisse werden bei turbulente Grenzschichten, kleinen Ablösungen und isotroper Turbulenz erzielt. Eine verbesserte Turbulenzmodellierung wäre beispielsweise auf der Basis von phasengemittelten Ergebnisse erreichbar. Die Phasenmittelung wurde in Kap. 2 eingeführt: die momentane Größe wird in eine zeitlich gemittelte, eine phasengemittelte und eine fluktuierende Größe aufgeteilt [53]:

$$\phi(\underline{x}, t) = \bar{\phi}(\underline{x}) + \bar{\phi}(\underline{x}, t) + \phi'(\underline{x}, t) \quad (7.3)$$

Im weiteren Verlauf wird der Phasenmittelwert als die Summe von zeitlichem Mittelwert

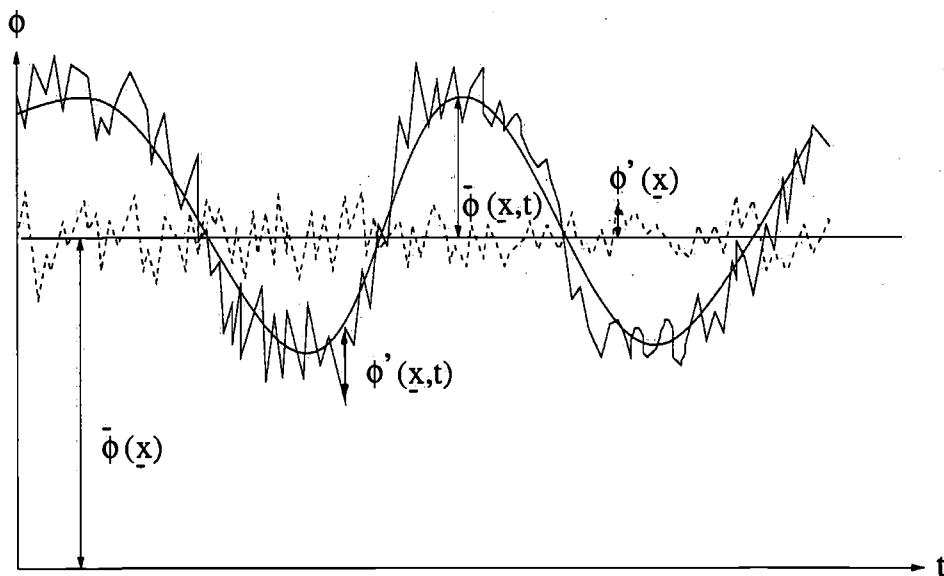


Abbildung 7.12: Darstellung von zeitlichem Mittelwert, Phasenmittel und Fluktuation der Größe ϕ als Funktion der Zeit an einem Ort \underline{x} ; der Mittelwert ist so gewählt, dass dieser für beide Verläufe von ϕ identisch ist.

$\bar{\phi}(\underline{x})$ und dem Mittelwert in der jeweiligen Phase $\bar{\phi}(\underline{x}, t)$ bezeichnet. Die Fluktuation ϕ' ist definiert als die Abweichung vom Phasenmittelwert oder dem zeitlichen Mittelwert, beides ist in Abb. 7.12 dargestellt. Die Modellierung der Fluktuation ist die Aufgabe des Turbulenzmodells. Unter der Annahme die momentanen Abweichungen vom Mittelwert sind von gleicher Größe wie die momentanen Abweichungen vom Phasenmittelwert werden statistische Modelle in instationären Berechnungen angewendet. Diese Annahme kann durch einen Vergleich zwischen Mittelwert und Phasenmittelwerten überprüft werden. Sind diese in vergleichbarer Größenordnung, sollte ein Modell das den Mittelwert richtig vorhersagt auch den jeweiligen Phasenmittelwert bestimmen können und für beide Berechnungsarten geeignet

sein. Im Folgenden wird die Mittelung einzelner Zeitschritte beschrieben und die Ergebnisse dargestellt.

Die Mittelung der Zeitebenen wird auf dem Gitter von Simulation Y4 durchgeführt, das in Zylinderlängsrichtung strukturiert ist. Die Mittelung der Strömungsgrößen in homogener Querrichtung geschieht in Zeitebenen mit konstantem Abstand, der aus den vorangegangenen Simulationen mit einigen hundert Ablösungszyklen bestimmt wird. Die Zeit eines vollständigen Wirbelablösungszyklus ist $T_w \approx 4,6$, der aus 184 Zeitebenen besteht. Die Werte aus 35 Ablösungsperioden werden mit 64 homogenen Werten pro Periode gemittelt. Das Phasenmittel wird in 25813 Zellen aus insgesamt 2240 Einzelwerten gebildet und der zeitliche Mittelwert entsprechend aus 412160.

Die phasengemittelten Werte von 4 Phasen im Abstand $\Delta T = 1,15$ werden in Abb. 7.13, 7.14 und 7.15 mit den zeitlich gemittelten Werten in Abb. 7.17 verglichen. Die Konturen sind in den jeweiligen Darstellungen zum besseren Vergleich identisch gewählt. In jeder der dargestellten Phasen ist eine gute Übereinstimmung mit dem Mittelwert zu erkennen. Ähnliche Extremwerte werden bei Phasenmittelung und Zeitmittelung erreicht, somit werden durch die zeitliche Mittelung keine Extremwerte geglättet, und wichtige integrale Größen wie der Widerstand bleiben wahrscheinlich gleich. Ein Modell das zur stationären Vorhersage gut geeignet ist, sollte somit auch in instationären Simulationen gute Ergebnisse liefern.

Die Phasenmittelung ist die räumliche Mittelung einer instationären Berechnung in definierten Zeitabständen, was einer Vereinfachung von drei auf zwei Dimensionen entspricht. Durch eine zweidimensionale Simulation könnte sehr viel Rechenzeit eingespart werden, vorausgesetzt ein passendes Modell wird gefunden, das in der Lage ist die stationäre (Zeitmittel) und die instationäre (Phasenmittel) Lösung der Zylinderumströmung richtig vorherzusagen. Die Anpassung von Turbulenzmodellen zur zweidimensionalen Simulationen könnte mit phasengemittelten Ergebnissen verbessert werden. In Kapitel 7.2.4 werden Ergebnisse mit statistischen Turbulenzmodellen präsentiert und deren Eignung diskutiert.

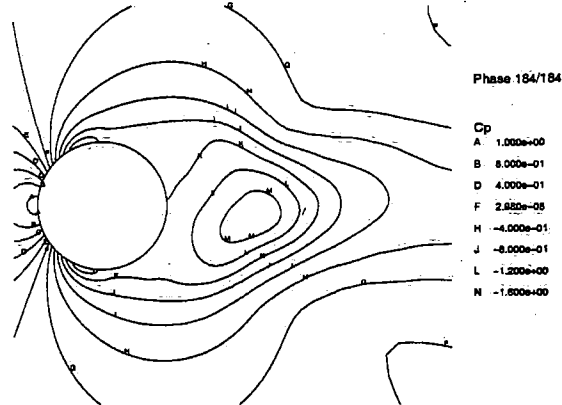
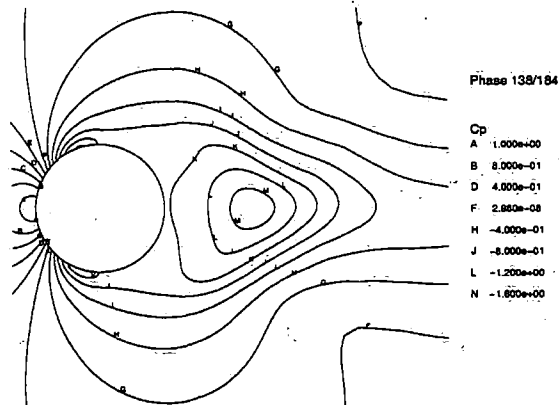
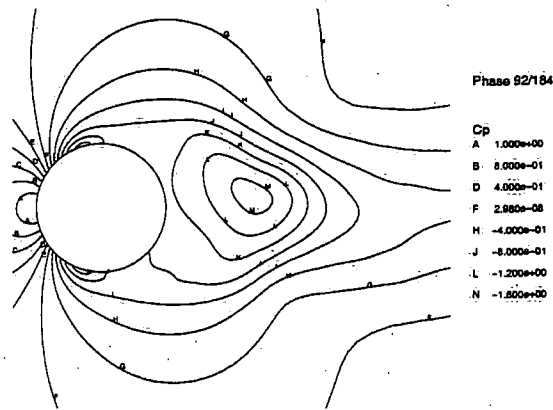
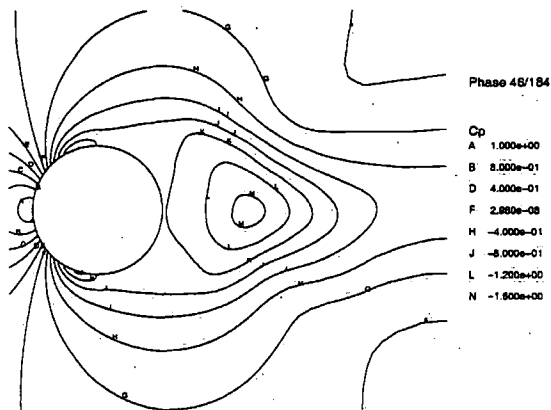


Abbildung 7.13: Konturen des phasengemittelten Druckbeiwerts C_p .

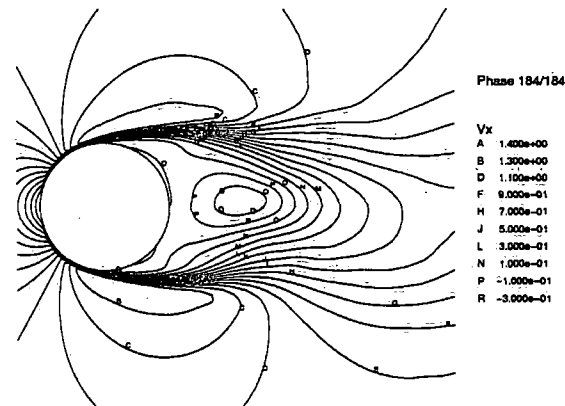
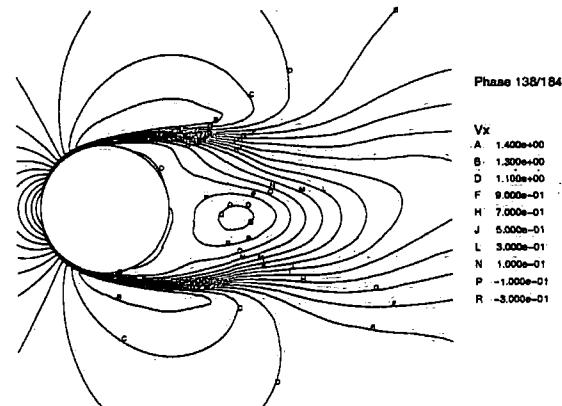
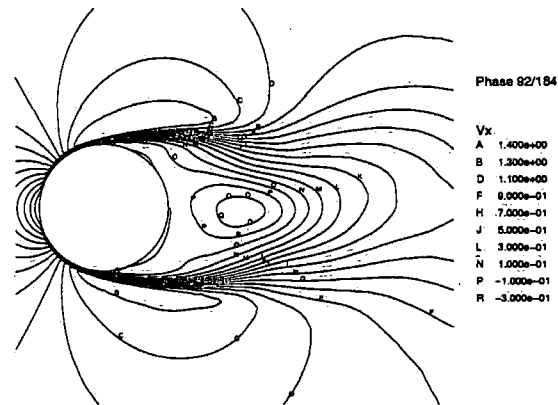
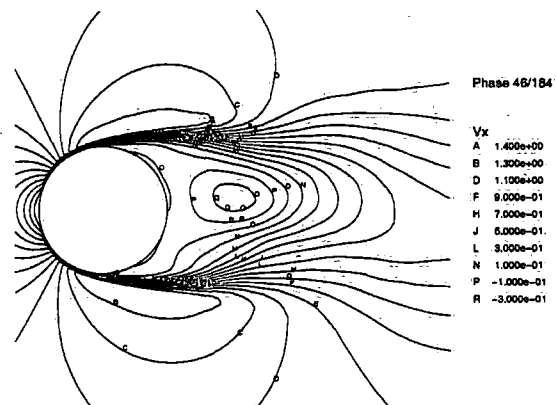


Abbildung 7.14: Konturen der phasengemittelten Hauptströmungsgeschwindigkeit \bar{v}_x .

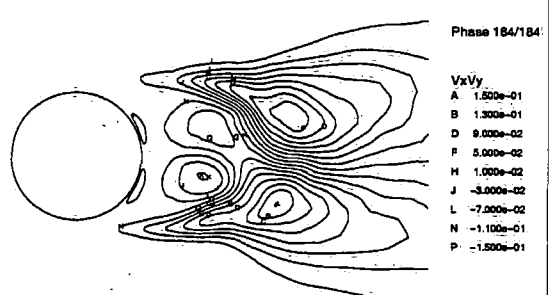
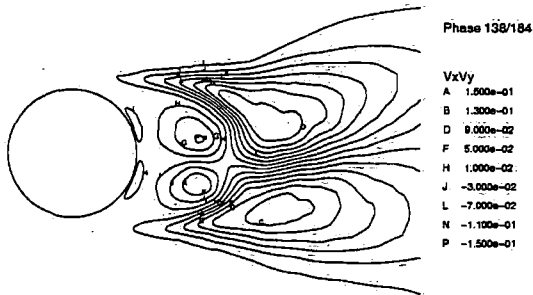
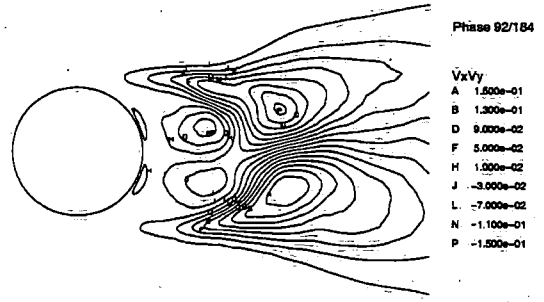
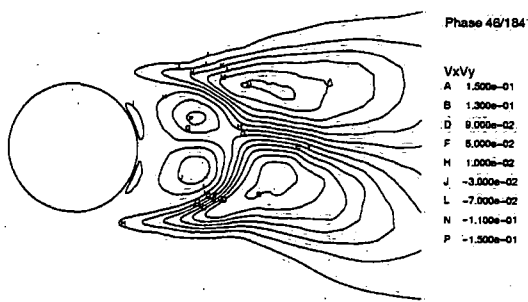


Abbildung 7.15: Konturen der phasengemittelten Reynoldsschen Scherspannung $\overline{v'_x v'_y}$.

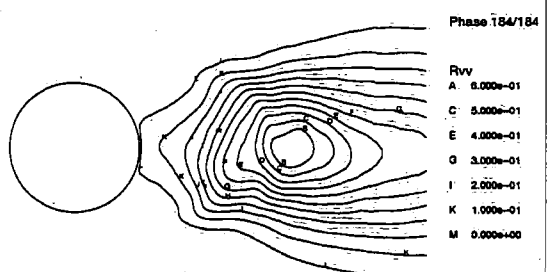
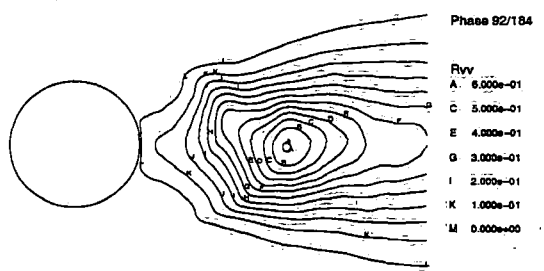
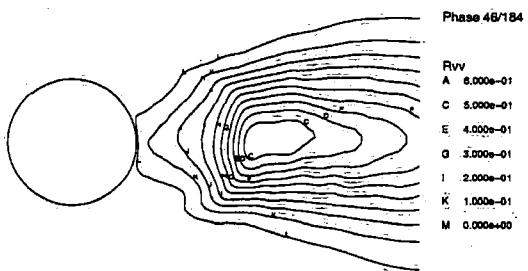
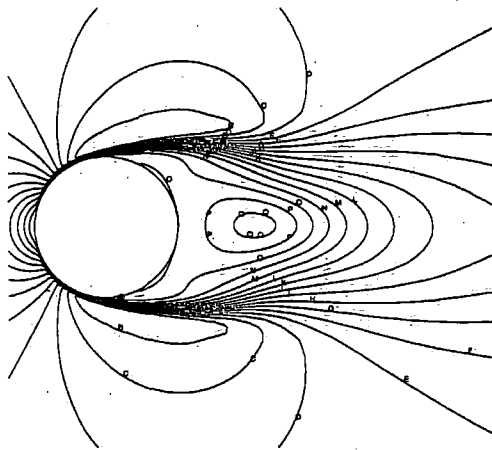
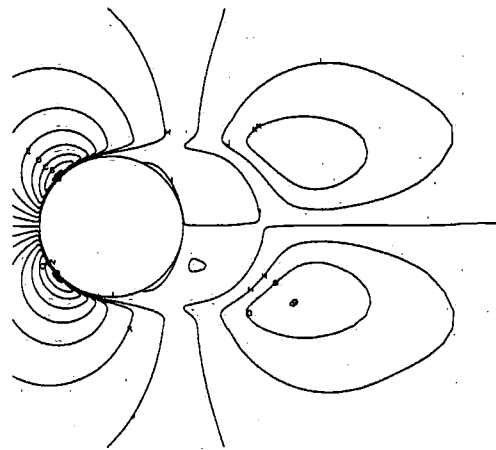


Abbildung 7.16: Konturen der phasengemittelten Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v'_y v'_y}$.



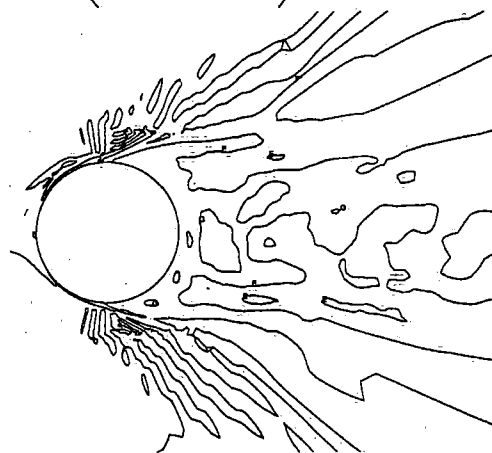
Mittelwert

Vx:
 A 1.400e+00
 B 1.300e+00
 D 1.100e+00
 F 9.000e-01
 H 7.000e-01
 J 5.000e-01
 L 3.000e-01
 N 1.000e-01
 P -1.000e-01
 R -3.000e-01



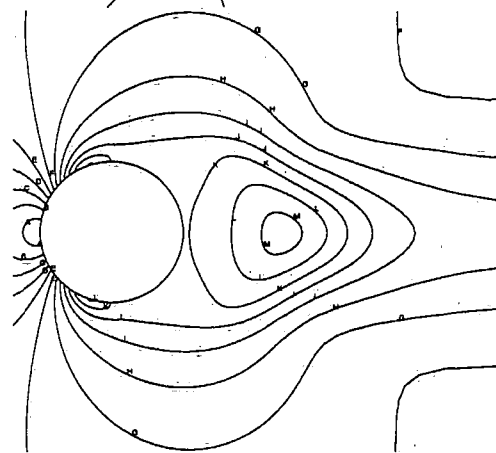
Mittelwert

Vy
 A 8.000e-01
 C 6.000e-01
 E 4.000e-01
 G 2.000e-01
 I 1.490e-08
 K -2.000e-01
 M -4.000e-01
 O -6.000e-01
 Q -8.000e-01



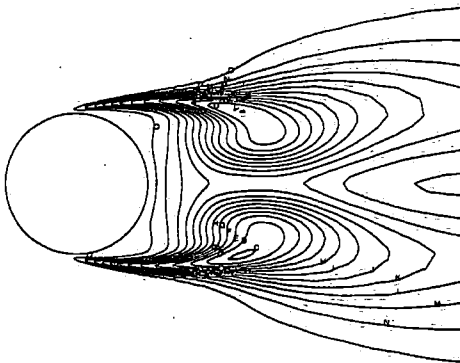
Mittelwert

Vz:
 A 2.000e-02
 B 1.600e-02
 C 1.200e-02
 D 8.000e-03
 E 4.000e-03
 F 0.000e+00
 G -4.000e-03
 H -8.000e-03
 I -1.200e-02
 J -1.600e-02
 K -2.000e-02



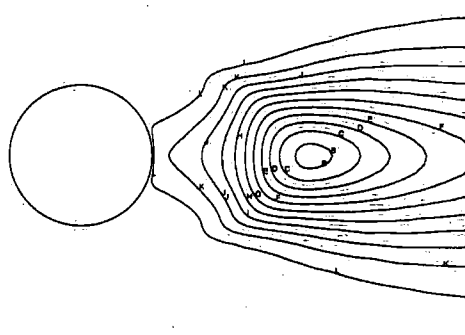
Mittelwert

Cp
 A 1.000e+00
 B 6.000e-01
 D 4.000e-01
 F 2.980e-08
 H -4.000e-01
 J -8.000e-01
 L -1.200e+00
 N -1.600e+00



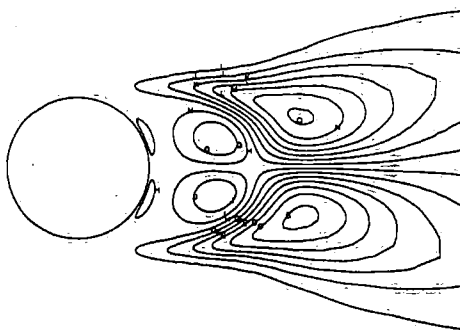
Mittelwert

VxVx
 A 3.000e-01
 B 2.600e-01
 D 2.400e-01
 F 2.000e-01
 H 1.600e-01
 J 1.200e-01
 L 8.000e-02
 N 4.000e-02
 P 0.000e+00



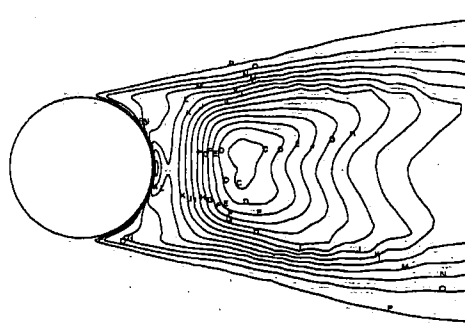
Mittelwert

VyVy
 A 6.000e-01
 C 5.000e-01
 E 4.000e-01
 G 3.000e-01
 I 2.000e-01
 K 1.000e-01
 M 0.000e+00



Mittelwert

VxVy
 A 1.500e-01
 B 1.300e-01
 D 9.000e-02
 F 5.000e-02
 H 1.000e-02
 J -3.000e-02
 L -7.000e-02
 N -1.100e-01
 P -1.500e-01



Mittelwert

VzVz
 A 8.000e-02
 C 7.000e-02
 E 6.000e-02
 G 5.000e-02
 I 4.000e-02
 K 3.000e-02
 M 2.000e-02
 O 1.000e-02
 Q 0.000e+00

Abbildung 7.17: Konturen der zeitgemittelten Geschwindigkeiten, des Druckbeiwerts und der Reynoldsschen Spannungen.

7.2.3 Grobstruktursimulation: $Re=140\,000$

Die Merkmale der Strömung sind bei dieser Reynoldsschen Zahl die gleichen wie bei $Re = 3\,900$: ein laminare Grenzschicht, Druckminimum vor dem Äquator mit nachfolgender Ablösung durch einen positiven Druckgradienten auf der Zylinderoberfläche, Transition in der freien Scherschicht und ein turbulenter Nachlauf. Die Geometrie in Abb. 7.2 und die Randbedingungen sind identisch, lediglich die Viskosität wird entsprechend angepasst. Hilfreiche Information zur Berechnung dieses Testfalls sind bei [12] zu finden: die Größe des Integrationsgebietes in Zylinderlängsrichtung ist $2d_z$ bei einem radialen Abstand der Grenzen von $25d_z$. Die Auflösung der Wandgrenzschicht wird durch eine entsprechende Dehnung der Zellen in wandnormaler Richtung gewährleistet und die Dimension $N_r \times N_\phi \times N_z$ des ersten Gitters Y10 ist $128 \times 128 \times 64$. Das Gitter wird durch Verfeinerung im Bereich der Scherschicht auf eine Kontrollvolumenzahl von 1 204 864 vergrößert (Y11). Die Verwendung eines strukturierten Netzes der Dimension $128 \times 256 \times 64$ mit örtlicher Verfeinerung im Bereich der Grenzschicht und des Nachlaufs ergab das Netz Y12 mit der Gesamtzahl von 3 904 256 Maschen. Die Zeitschrittweite in dimensionslosen Einheiten $t d/v_x^\infty$ beträgt in den Simulationen 0,025.

Ergebnisse

Der Widerstandsbeiwert ist, wie bereits diskutiert, ein sicheres Indiz für die Qualität der Ergebnisse. Der experimentelle Vergleichswert für den Widerstandsbeiwert beträgt 1,237 [13]. Die Simulationen mit den Modellen GER und SPZ ergeben einen Widerstandsbeiwert von ungefähr 0,6 und damit einen sehr großen Fehler auf Netz Y10. Mit SMG beträgt der Widerstandsbeiwert 1,16 und ist deutlich näher am Experiment. Die Verfeinerung der Scherschicht (Y11) bewirkt ein Ansteigen des Widerstandsbeiwerts auf 1,42 mit SMG, für GER liegt der Wert vergleichbar wie bei Y10. Bei Y12 ergibt sich mit SMG ein Widerstandsbeiwert von 1,43 und 0,8 (GER). In allen Simulationen ist der Widerstandsbeiwert bei SMG in besserer Übereinstimmung mit dem Experiment als die anderen Modelle. Durch Gitterverfeinerung steigt der Widerstandsbeiwert bei Gitter Y11 und Y12. Einerseits wird der Modellbeitrag kleiner, auf der anderen Seite kann der numerische Fehler verringert werden.

Der numerische Fehler bei den Simulationen mit SMG, SPZ und GER auf Gitter Y10 ist ungefähr gleich groß, und damit nicht für die bessere Übereinstimmung von SMG mit dem Experiment verantwortlich. Folglich sollten die Feinstrukturspannungen in den gefilterten Navier-Stokesschen Gleichungen die bessere Vorhersage bewirken. In den vorangegangenen Kapiteln wurde deutlich, dass mit der verwendeten Filtermethode die Unterschiede zwischen ZDF und GER klein sind und der dynamische Smagorinsky-Koeffizient von GER (und damit auch der Feinstrukturbeitrag) kleiner ist als bei SMG und SPZ. Die Feinstrukturspannungen spielen in diesem Fall eine entscheidende Rolle, da deren Beitrag deutlich höher als bei $Re=3\,900$ ist und daher nicht mit dem numerischen Fehler verschmilzt. Geringere Gitterauflösung bewirkt bei $Re=3\,900$ einen höheren Widerstandsbeiwert, bei $Re=140\,000$ führt ein grobes Gitter zu kleineren Werten, was ein gutes Beispiel für den unterschiedlichen Einfluss des numerischen Fehlers auf die Ergebnisse ist. Die geringeren Feinstrukturspannungen bei GER wirken wie eine Wandgrenzschichttransition, die zu einem geringeren Widerstandsbeiwert führen.

Die Ergebnisse dieses Testfalls hängen stark vom verwendeten Gitter, von dem Modellbeitrag und damit letztlich von der verwendeten numerischen Methode ab. Jedes Simulationsergebnis scheint ein physikalisch sinnvolles Ergebnis zu sein; der Vergleich mit dem Experiment ist

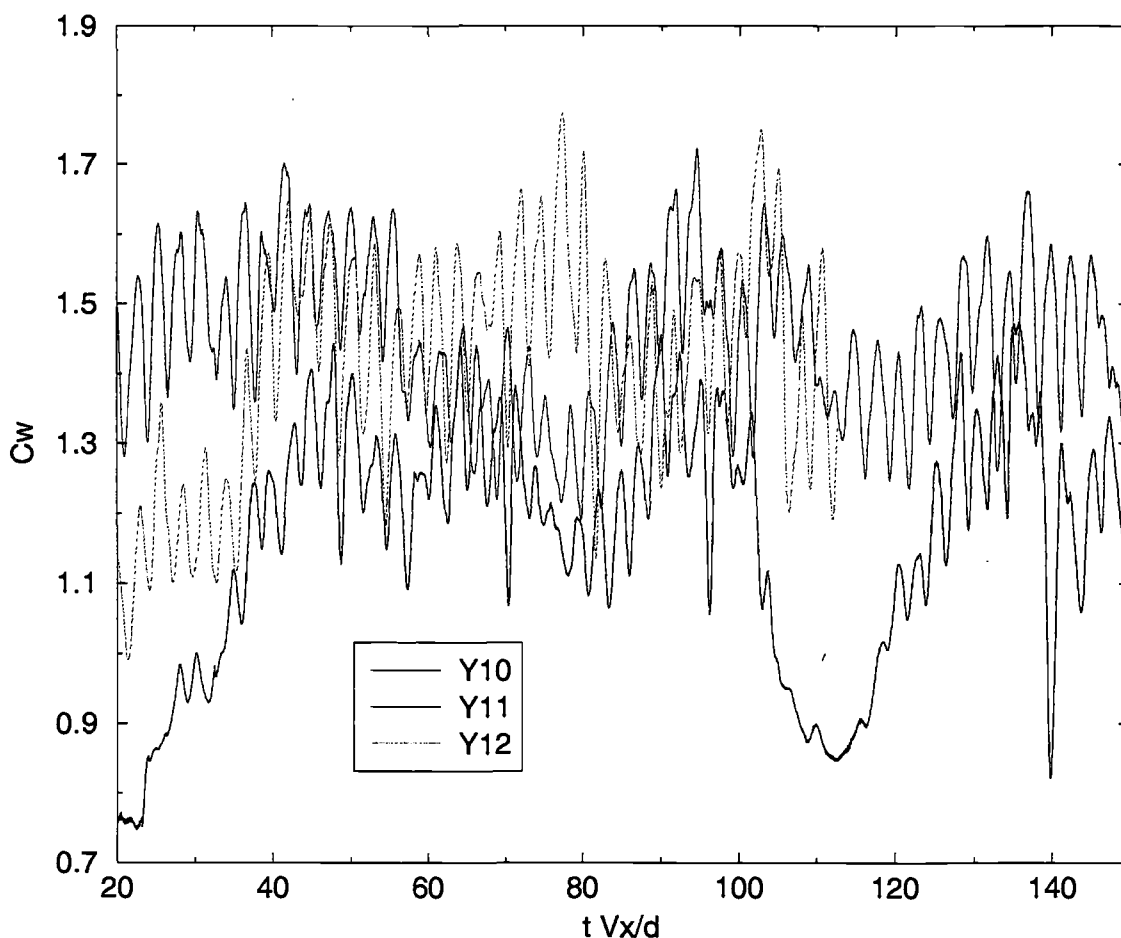


Abbildung 7.18: Widerstandsbeiwerte als Funktion der dimensionslosen Zeit in der Grobstruktursimulation der Umströmung eines Rundzylinders bei $Re=140\,000$ mit dem Modell von Smagorinsky für drei verschiedene Gitter.

hier die einzige Möglichkeit um die Simulation zu beurteilen. Da die Experimente, wie am Beispiele $Re=3\,900$ diskutiert, von eben so vielen Einflussfaktoren abhängen, sollte in diesen Fällen auf beide Methoden zur gegenseitigen Verifizierung zurückgegriffen werden und damit das Vertrauen in die Simulationsmethoden zu stärken.

7.2.4 Vergleiche mit Turbulenzmodellen

In diesem Kapitel wird der Einfluss verschiedener Faktoren auf die Vorhersage der Zylinderumströmung mit statistischen Turbulenzmodellen untersucht. Zu diesem Zweck werden Vorhersagen mit dem bereits verwendeten $k-\omega$ Modell und dem Standard $k-\varepsilon$ Modell mit Wandfunktionen [43] durchgeführt. Die Berechnungen werden zweidimensional auf strukturierten Gittern mit unterschiedlicher Wandaufösung durchgeführt. Die Anzahl der Kontrollvolumen ist in allen Fällen 64×96 , d.h. eine unterschiedliche Verteilung der Kontrollvolumen im Berechnungsgebiet wird durch verschiedene Streckungsfaktoren in wandnormaler Richtung realisiert. Bei geringem Wandabstand wird durch die Konzentration von Zellen in Wandnähe die Grenzschicht aufgelöst, deshalb ist die Auflösung in der Scherschicht entsprechend geringer. Wenn die Grenzschicht durch geringere Anzahl von Kontrollvolumen nicht vollständig aufgelöst werden kann, was beispielsweise bei der Verwendung von Wandfunktion in Kauf

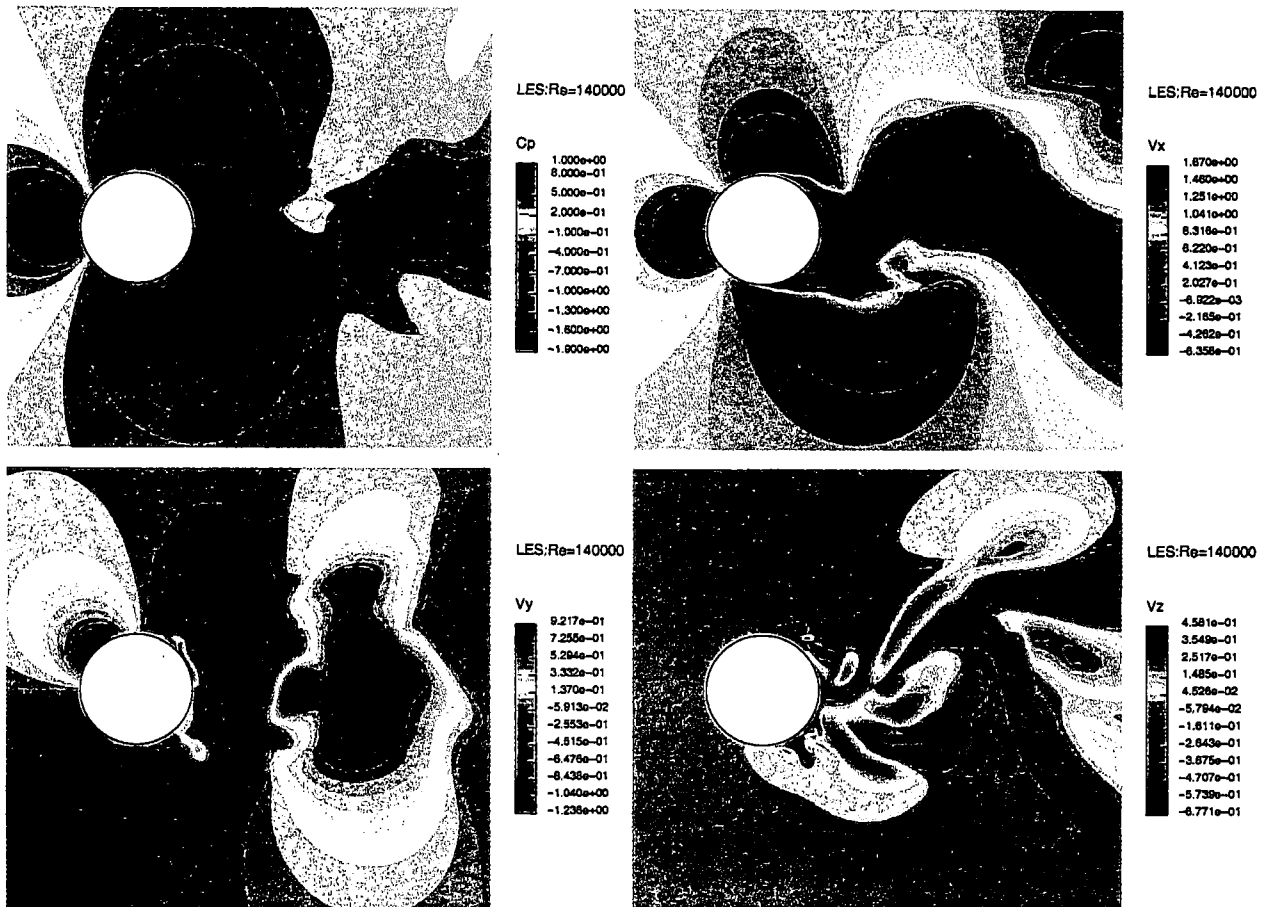


Abbildung 7.19: Konturen von momentanem Druckbeiwert und Geschwindigkeiten in einer Ebene der Grobstruktursimulation Y12 des Rundzylinderumströmung bei $Re=140\,000$.

mittel und fein wird zur Unterscheidung der Wandauflösung verwendet.

Bei $Re=3\,900$ führt die Anwendung der Turbulenzmodelle zu einer kleinen Verbesserung der Ergebnisse im Vergleich zur Simulation ohne Modell (ZDF). Mit Verringerung des Wandabstands konvergieren die Berechnungen zu unterschiedlichen Werten, die alle innerhalb einer 50% Fehlerschranke (siehe Tab. 7.3) liegen. Eine Erhöhung der Auflösung im gesamten Gebiet würde wie in Kap. 7.2.1 geringe Verbesserung der Vorhersage bewirken. Bei $Re=140\,000$ steigt mit Verfeinerung des Gitters an der Wand die Übereinstimmung von Vorhersage und Experiment mit den verwendeten Modellen an. Die Simulation ohne Modell liefert den größten Fehler auf allen Gittern. Durch eine systematische Verfeinerung des Gitters mit mittlerer Wandauflösung verbessert sich die Widerstandsprognose ohne Modell auf 1,18; mit den verwendeten Modellen ergeben sich Widerstandsbeiwerte von 0,775 ($k-\varepsilon$) und 0,697 ($k-\omega$), d.h. durch die Gitterverfeinerung wird nur die Berechnung ohne Modell verbessert.

Zur Erklärung dieser Sachverhalte sind mehrere Gesichtspunkte zu beachten. Die verwendeten statistischen Modelle führen allgemein zu einer Verringerung des Widerstands mit steigender Reynoldsscher Zahl. Dies trifft bei der Durchführung einer stationären Strömungsberechnung, als auch bei Anwendung von statistischen Turbulenzmodellen in einer instationären Analyse zu. Stationäre Lösungen werden vorhergesagt, wenn zur Berechnung nur eine Zylinderhälfte verwendet wird. Stationäre Berechnungen der Zylinderumströmung führen zu geringem Widerstandsbeiwert und kleinem Nachlauf. Der Fehler ist größer als 100% und die Vorhersage durch die verwendeten Modelle ist unbrauchbar. Bei instationären Simulationen

Tabelle 7.3: Widerstandsbeiwert in der turbulenten Zylinderumströmung bei $Re=3\,900$ und $140\,000$, vorhergesagt mit statistischen Modellen bei unterschiedlicher Wandauflösung.

| Wandauflösung | | grob | mittel | fein |
|---------------|-----------------|-------|--------|-------|
| Re=3 900 | ZDF | 1,475 | 1,475 | 1,475 |
| | $k-\varepsilon$ | 0,555 | 1,315 | 1,315 |
| | $k-\omega$ | 1,8 | 1,45 | 1,45 |
| Re=140 000 | ZDF | 0,088 | 0,295 | 0,526 |
| | $k-\varepsilon$ | 0,160 | 0,755 | 0,812 |
| | $k-\omega$ | 0,201 | 0,848 | 0,717 |

Vorhersage durch die verwendeten Modelle ist unbrauchbar. Bei instationären Simulationen mit/ohne Feinstrukturmodell in Kap. 7.2.1 liegt C_w tendenziell höher als im Experiment und vergleichbar zu den Turbulenzmodellen.

In den Berechnungen mit Wandfunktionen können drei Bereiche unterschieden werden. Bei großen Zellen in Wandnähe (grob) ist das Ergebnis eine nahezu symmetrische Potentiallösung mit sehr kleinem Widerstandsbeiwert. Es existiert keine Wandgrenzschicht und die Strömung löst nicht von der Wand ab. Bei mittlerer Auflösung ist die Vorhersage des Widerstands im Vergleich am besten; die mangelhafte Auflösung der Grenzschicht spielt keine große Rolle, da mit dem Staupunkt, einem Druckminimum und der Ablösung der Grenzschicht eine physikalisch korrekte Druckverteilung vorhergesagt wird. Bei feiner Wandauflösung wird die Vorhersage wieder schlechter, da die Scherschicht unzureichend aufgelöst wird, was zu einer falschen Druckverteilung führt.

Bei der Verwendung von grenzschichtauflösenden Modellen muss die viskose Wandgrenzschicht aufgelöst werden und viele Kontrollvolumen befinden sich in Wandnähe. Das grobe Gitter in der Scherschicht ist für eine falsche Druckverteilung und den zu niedrigen Widerstand verantwortlich. In diesen Fällen ist eine örtliche Gitterverfeinerung, wie in der Grobstruktursimulation praktiziert, notwendig, um neben der Reibung auch den korrekten Druckwiderstand vorherzusagen. Der Widerstand wird überwiegend von der Druckkraft bestimmt, deshalb hat die richtige Vorhersage des Druckfeldes großen Einfluss auf das Ergebnis. Der Fehler bei der Widerstandsprognose ist meist die Folge eines falschen Druckfeldes. Ein grobe Wandauflösung führt zu physikalisch unsinnigen Ergebnissen oder Divergenz.

Die Qualität der Widerstandsvorhersage von unterkritischen Strömungen um stumpfe Körper mit statistischen Turbulenzmodelle kann durch die Optimierung des Gitters verbessert werden. Wenn die numerische Auflösung ausreicht um eine Reibungsschicht an der Wand zu erzeugen, dann resultiert ein Druckminimum vor dem Äquator und die Ablösung der Grenzschicht, die durch die Wirbelviskosität stabilisiert wird. Das führt zu einer richtigen Druckverteilung und entsprechend guter Widerstandsprognose. Die statistischen Modelle sind zur zweidimensionalen Simulation nur beschränkt geeignet, da eine Anpassung dieser Modell in der Art und Weise wie [111] sie vorschlägt notwendig ist, um den Modellbeitrag auf Gittern mit hoher Auflösung gering und auf anderen Gittern hoch zu halten.

7.3 Zusammenfassung

Anhand der laminaren Zylinderumströmung bei $Re=100$ wurden verschiedene Möglichkeiten studiert, um mit minimalen Aufwand eine ausreichend genaue periodische Lösung vorherzusagen. Die Ergebnisse unterscheiden sich nicht mehr, wenn der Fehler der instationären Simulation in Form der Residuumnorm um zwei Größenordnung für die Impuls- und eine für die Massenerhaltungsgleichung erniedrigt wird. Somit kann bei einer instationären Simulation mit dem vorliegenden Verfahren die minimale Anzahl von äußeren Iterationen pro Zeitschritt eingestellt werden und kostbare Rechenzeit gespart werden. Die zweidimensionalen Grobstruktursimulationen der Zylinderumströmung bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen hat gezeigt, dass im Falle der laminaren Strömung die Modelle geringen Einfluss haben. Aus der turbulenten Rechnung kann keine Schlußfolgerung gezogen werden, da im zweidimensionalen Raum keine Turbulenz simuliert werden kann bzw. nicht von den verwendeten Modell simuliert wird. Ein direkter Vergleich zwischen den Modellen ist über die Wirbelviskosität möglich, jedoch ist die numerische Einschränkung durch die Symmetrieebenen deutlich größer als der Modelleinfluss und der Vergleich daher nicht aussagekräftig.

Die Grobstruktursimulation der Rundzylinderumströmung bei der Reynoldsschen Zahl 3900 erfolgte mit verschiedenen Modellen. Es stellten sich zwei verschiedene Zustände ein: im ersten Fall kommt es zu einer schnellen Transition der freien Scherschicht und einem höheren Turbulenzgrad im Nachlauf, was zu einer stärkeren Vermischung und einem V-förmigen Profil der mittleren Geschwindigkeit in Strömungsrichtung unmittelbar hinter dem Zylinder führt. Im zweiten Fall ist das Profil unmittelbar hinter dem Zylinder U-förmig und der Turbulenzgrad kleiner. Beide Zustände scheinen physikalisch sinnvoll zu sein und es gibt Indizien, dass in Experimenten ebenfalls unterschiedliche Zustände vorherrschen. Welcher Zustand sich einstellen wird hängt in der Simulation vor allem von der Gitterauflösung, aber auch von der Zylinderlänge in z -Richtung ab. Bei Verwendung feinerer Gitter ist die Zylinderlänge für den Zustand mit niederem Turbulenzgrad verantwortlich. Die verschiedenen Modelle sind nicht in der Lage die Strömung stark zu beeinflussen, da sie erst einige Durchmesser hinter der Zylinder Wirkung zeigen. Die Modellwirkung von SPZ, GER oder SMG verschwindet in der Filterung der numerischen Methode, die für dieses Konvektionsproblem eine ausreichende Längenmaßfilterung ergibt. In der Grobstruktursimulation bei $Re=140\,000$ ist die Verwendung eines Feinstrukturmodells von entscheidender Wichtigkeit. Ohne Feinstrukturspannungen oder mit dem geringeren Anteil von GER – bedingt durch den kleinen dynamischen Koeffizienten – sind die Simulationsergebnisse in schlechter Übereinstimmung mit den experimentellen Vergleichsdaten wegen der frühen Transition. Mit dem höheren Feinstrukturanteil von Modell SMG ist die Übereinstimmung zufriedenstellend. Die Verwendung eines feineren Gitters führt wie erwartet zu einer Verbesserung bei allen Modellen, da das zu modellierende Längenmaß kleiner wird und der Modelleinfluss abnimmt. Die Vorhersage mit statistischen Turbulenzmodellen in zweidimensionaler Simulation ist in beiden Fällen unbefriedigend.

Kapitel 8

Simulation der Umströmung einer Kugel

8.1 Einleitung

Vom Standpunkt des Anwenders ist das wichtigste Ergebnis einer Simulation eine möglichst genaue Vorhersage der integralen Kräfte, auf die sich eine Optimierung (Form, Größe, Betriebspunkt) stützt. Die Vorhersage des Widerstandsbeiwerts für eine Kugel in gleichförmiger Anströmung bei kleinen Reynoldsschen Zahlen wurde erstmals 1851 von Stokes [112] durchgeführt und 1910 von Oseen [85] verbessert. Die analytische Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen für eine schleichende Strömung um eine Kugel mit Radius R in einem kartesischen Koordinatensystem im Zentrum der Kugel und Hauptströmungsrichtung x lauten nach [105]:

$$\begin{aligned}v_x &= v_x^\infty \left[\frac{3 R x^2}{4 r^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1 R}{4 r} \left(3 + \frac{R^2}{r^2} \right) + 1 \right] \\v_y &= v_x^\infty \frac{3 R x y}{4 r^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \\v_z &= v_x^\infty \frac{3 R x z}{4 r^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \\p - p^\infty &= -\frac{3 \mu v_x^\infty R x}{2 r^3}\end{aligned} \quad (8.1)$$

Die Integration des Druckes und der Scherspannung über die Kugeloberfläche ergibt die Druck- und Reibungskräfte. Das Maximum des Druckes liegt im vorderen Staupunkt der Kugel, das Minimum im hinteren Staupunkt. Die Wandschubspannung wird bei $x = 0$ maximal. Die Druckkräfte sind halb so groß wie die Reibungskräfte; die Summe aus beiden ergibt den normierten Gesamtwiderstand C_w für kleine Reynoldssche Zahlen:

$$C_w = \frac{24}{\text{Re}}; \text{Re} < 1. \quad (8.2)$$

Unter Berücksichtigung zusätzlicher Terme ist das Ergebnis von Oseen:

$$C_w = \frac{24}{\text{Re}} \left(1 + \frac{3}{16} \right); \text{Re} < 5. \quad (8.3)$$

In praktischen Bereichen bei hohen Reynoldsschen Zahlen sind beide Lösungen nicht verwendbar, da die viskose Reibungskraft im Verhältnis zur Druckkraft an Bedeutung verliert. Für diese Bereiche werden Näherungen verwendet, wie in der Verfahrenstechnik die Formel von Kaskas [71], die bis zum kritischen Punkt eine gute Approximation darstellt:

$$C_w = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt{Re}} + 0.4 \quad (8.4)$$

In vielen Aspekten ist die Kugelumströmung der Kreiszyylinderumströmung ähnlich, d.h. es werden je 3 Bereiche unterschieden: laminar, turbulent und ein Übergangsbereich dazwischen. Der laminare Bereich mit stationärer und achsensymmetrischer Strömung reicht für die Kugel bis $Re \approx 210$ [28],[116]. Eingebrachte Störungen werden gedämpft und klingen in der Zeit ab. Bis $Re \approx 270$ ist die Strömung dreidimensional, bleibt jedoch stationär; es bildet sich ein planar symmetrischer Nachlauf hinter der Kugel. Der Transitionsmechanismus [47] beruht auf einer Instabilität des Wirbelrings mit Niederdruck, in dem der Einfluss der Viskosität mit steigender Reynoldsscher Zahl geringer wird. Ein resultierender Druckgradient in Umfangsrichtung treibt Fluid durch den Wirbelkern und sprengt den geschlossenen Nachlauf. Fluid wird in Form von zwei Wirbelfäden aus dem Nachlauf transportiert, wie auch in [66] visualisiert. Regelmäßige Ablösungen sind ab $Re \approx 280$ vorhanden [47], die in chaotische Wirbel bei $Re \approx 420$ übergehen [102] und deren Frequenz die der Wirbelablösungsfrequenz eines Kreiszyinders entspricht. Aus diesem Grunde soll diese Frequenz Ablösungsfrequenz genannt werden; sie ist im überkritischen Bereich ungefähr konstant. Die Instabilität der Scherschicht erzeugt eine weitere typische Frequenz mit höherem Betrag, die eine Folge kleiner Strukturen ist und ab $Re \approx 800$ identifiziert werden kann. Die Instabilitätsfrequenz ist eine Exponentialfunktion der Reynoldsschen Zahl deren Exponent sich mit Re ändert: 0.75 bis $Re=10^4$ und 0.66 bis $Re=10^5$ [48]. Im turbulenten Übergangsbereich erfolgt die Transition zur turbulenten Strömung zuerst durch Instabilität des Nachlaufs der Kugel. In den Simulationen von [108] bei $Re = 5000$ und von [116] bei $Re = 20\,000$ entsteht der turbulente Nachlauf durch Grenzschichtinstabilität. Zeitechte Simulationen einer anliegenden turbulenten Grenzschicht sind nicht bekannt und mit der notwendigen Auflösung bei $Re > 380\,000$ in nächster Zeit nicht zu erwarten.

8.2 Laminare Umströmung einer Kugel

8.2.1 Achsensymmetrische Berechnung

Die Berechnung wurde bei $Re=200$ auf mehreren Gitterebenen durchgeführt und typische Kenngrößen verglichen. Die Abschätzung des numerischen Fehlers und die Bestimmung des exakten Werts wurde mit der Richardson-Extrapolation durchgeführt. Auf drei systematisch verfeinerten Gittern wird die Ordnung o des numerischen Verfahrens bestimmt:

$$o = \frac{\log\left(\frac{\phi_{2h} - \phi_{4h}}{\phi_h - \phi_{2h}}\right)}{\log 2} \quad (8.5)$$

Die berechnete Kenngröße ϕ wird um den numerischen Fehler ϵ_h auf Gitterebene h korrigiert und es ergibt sich die Abschätzung der gitterunabhängigen Lösung als:

$$\phi = \phi_h + \epsilon_h = \phi_h + \frac{\phi_h - \phi_{2h}}{2^o - 1} \quad (8.6)$$

Tabelle 8.1: Zusammenfassung von Gitterparameter und Ergebnisse der achsensymmetrischen Kugelberechnung bei $Re=200$.

| h | 1 | 2 | 3 | 4 | Richardson | Vergleich |
|---------------------|----------------|-----------------|------------------|------------------|------------|----------------------|
| $n_\phi \times n_r$ | 30×50 | 60×100 | 120×200 | 240×400 | - | - |
| ϕ_s | 117.840 | 117.044 | 116.567 | 116.382 | 116.264 | 116 [116],[47] |
| C_w | 0.7922 | 0.7774 | 0.7725 | 0.7709 | 0.7701 | 0.77 [116],[28],[47] |
| L_r | 1.032 | 1.292 | 1.398 | 1.431 | 1.446 | 1.43 [116],[28],[47] |
| ΔC_p | 1.1394 | 1.1581 | 1.1622 | 1.1626 | 1.162 | 1.17 [116] |

Die extrapolierten Werte von Gitterebene 2, 3 und 4 sind Tabelle 8.1 zu entnehmen: für jede Gitterebene h sind die Anzahl der verwendeten Kontrollvolumen in Umfangs- und Radialrichtung angegeben. Als Kenngröße wird der Ablösungswinkel ϕ_s der Strömung von der Kugel, der Widerstandsbeiwert C_w , die Länge der Rezirkulationszone L_r und die Differenz der Druckbeiwerte ΔC_p zwischen vorderem und hinterem Staupunkt der Kugel angegeben. Zum Vergleich werden Simulationsergebnisse herangezogen, deren Übereinstimmung mit Experimenten gut ist und im Rahmen der Messgenauigkeit liegt. Die Abweichung ist ungefähr 1% und die Übereinstimmung sehr gut, wenn berücksichtigt wird, dass der Ablesefehler bei der Bestimmung der Referenzdaten sicherlich größer ist als der Unterschied zwischen Gitterebenen 3 und 4 (numerischer Fehler).

Die theoretische Ordnung des numerischen Verfahrens beträgt 2 [29]. Die Bestimmung der Ordnung aus Größen der laminaren Kugelumströmung ergibt Werte zwischen 1,5 und 2. Die monotone Konvergenz als Voraussetzung zur Anwendung der Interpolation ist erfüllt. In erster Linie wird das verwendete Gitter für die Abweichung verantwortlich gemacht: im Bereich der abgelösten Grenzschicht ist das Gitter gröber als in der Wandgrenzschicht soll jedoch vergleichbare Längenskalen auflösen. Ein Einfluss durch die Randbedingungen, deren Entfernung zur Kugeloberfläche $10D$ beträgt, ist ebenfalls nicht auszuschließen. Bei der Berechnung der betrachteten Werte müssen weitere Fehler zur Bestimmung von integralen (z.B. C_w) und interpolierten Größen (z.B. ϕ_s) berücksichtigt werden.

8.2.2 Dreidimensionale Berechnung

Die Achsensymmetrie der Kugelumströmung hat ungefähr bis $Re=210$ Bestand. Da eine achsensymmetrische Berechnung dies nicht wiedergeben kann, wurden dreidimensionale Untersuchungen bei $Re=200$ und $Re=250$ durchgeführt. Dadurch sollen die gemachten Annahmen bei der achsensymmetrischen Gitterstudie bestätigen werden und zeigen, ob die Transition in diesem Bereich korrekt vorhergesagt wird. Zu diesem Zweck wird das Gitter der zweidimensionalen Analyse in Abb. 8.1 als Basis genommen, die Zellscheibe fünfzigmal in Umfangsrichtung rotiert und auf dem gleichen Gitter beide Berechnungen durchgeführt. Die Darstellung des Drucks in Abb. 8.2 zeigt deutlich die Asymmetrie des Nachlaufs, wobei die instationäre Berechnung in beiden Fällen ein stationäres Endergebnis ergibt. Obwohl das Gitter mit 75 000 Kontrollvolumen für die dreidimensionale Berechnung grob ist kann die Achsensymmetrie bei $Re=200$ bestätigt werden und die gemachten Annahmen als richtig angesehen werden. Bei $Re=250$ wird das Ergebnis stationär und asymmetrisch und entspricht somit Ergebnissen früherer Experimente [66] und Simulationen [47].

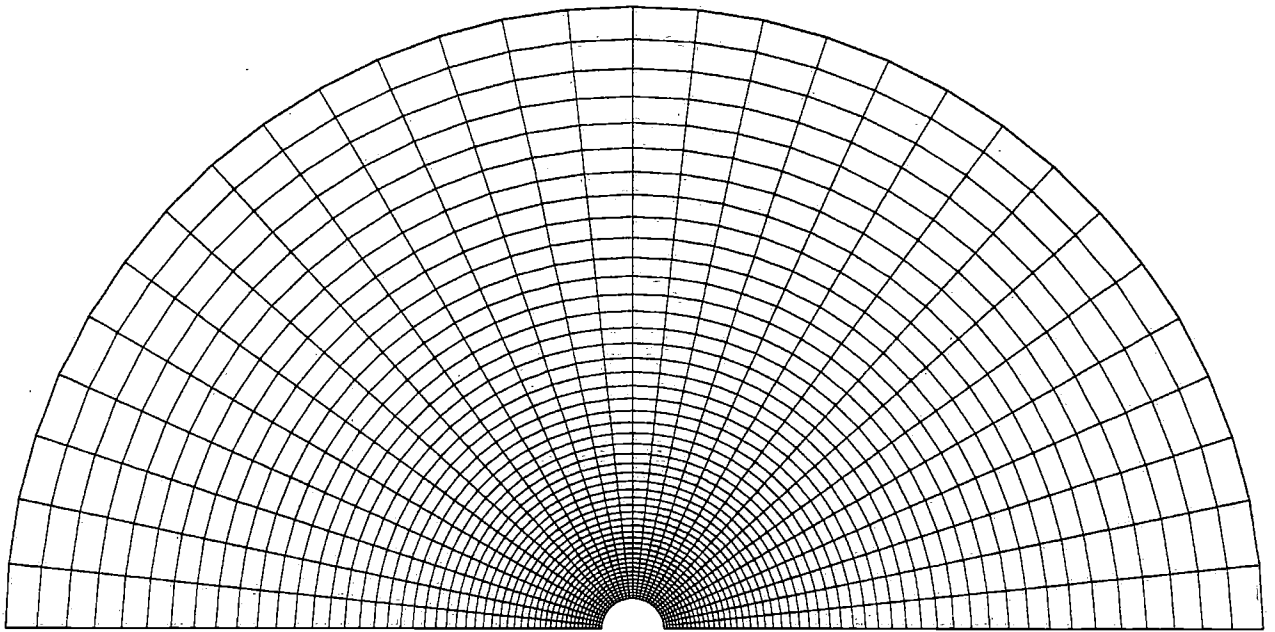


Abbildung 8.1: Darstellung von Gitterebene 1 für die achsensymmetrische Berechnung der Kugelumströmung bei $Re=200$.

8.3 Turbulente Umströmung der Kugel

Die achsensymmetrische Berechnung der turbulenten Kugelumströmung wird mit zwei statistischen Turbulenzmodellen durchgeführt: das $k-\epsilon$ Standardmodell mit Wandfunktionen wird bei $Re=50\,000$, $500\,000$ und $5\,000\,000$ auf systematisch verfeinerten Gitterebenen eingesetzt und der Widerstandsbeiwert als die typische Größe verglichen. Zur Berechnung werden Vorwärtsdifferenzen, Zentralfdifferenzen und eine Mischung aus beiden verwendet. Mit dem $k-\omega$ Modell für niedrige Reynoldssche Zahlen wird eine Widerstandsanalyse bei unter- und überkritischen Zuständen gemacht. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Tab. 8.2 zusammengefasst.

Der experimentelle Widerstandsbeiwert, beispielsweise $C_w \approx 0,45$ bei $Re=50\,000$, liegt immer höher als die numerisch vorhergesagten. Bei Verwendung des $k-\epsilon$ Modells sinkt der

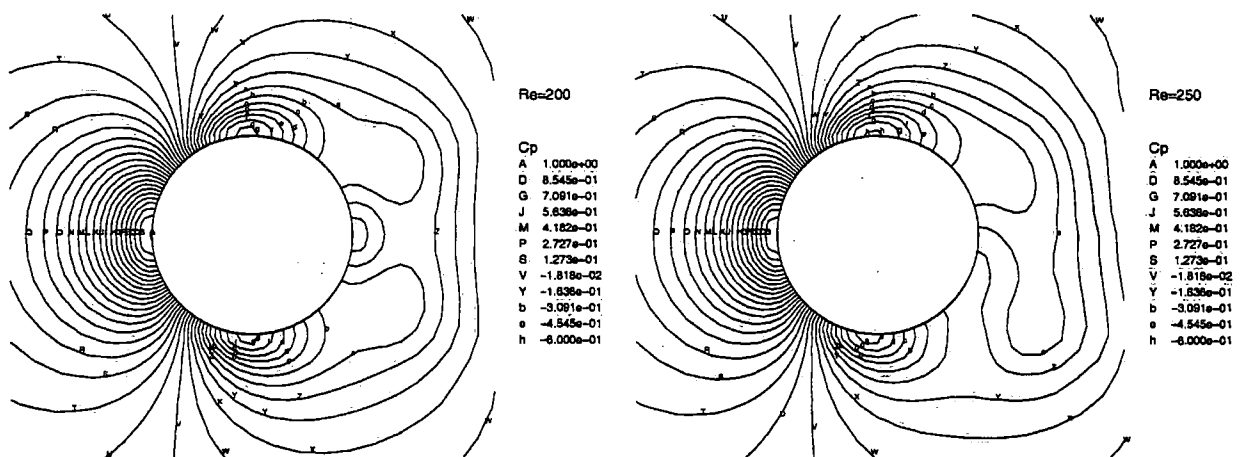


Abbildung 8.2: Darstellung des symmetrischen ($Re=200$, links) und dreidimensionalen ($Re=250$, rechts) Druckfelds in einer Schnittebene durch das Zentrum.

| $k-\varepsilon$ Wandfunktionen | Anteil ZD in % | 32× 24 | 64× 48 | 128× 96 |
|--------------------------------|----------------|--------|--------|---------|
| Re=50 000 | 0 | 0,4305 | 0,2274 | 0,1526 |
| | 50 | 0,2628 | 0,1285 | 0,1057 |
| | 100 | 0,1673 | 0,0669 | 0,0528 |
| Re=500 000 | 0 | 0,4263 | 0,2158 | 0,1247 |
| | 50 | 0,2379 | 0,1163 | 0,0749 |
| | 100 | 0,0937 | 0,0273 | 0,0242 |
| Re=5 000 000 | 0 | 0,4319 | 0,2116 | 0,1140 |
| | 50 | 0,2366 | 0,1119 | 0,0635 |
| | 100 | 0,0849 | 0,0249 | 0,0128 |

| $k-\omega$ | Gitterdimension | Diskretisierung | δ_w/d_k | C_w |
|--------------|-----------------|-----------------|-------------------|--------|
| Re=10 000 | 64× 64 | ZD | $1 \cdot 10^{-3}$ | 0,3462 |
| | 128× 96 | | | 0,3452 |
| Re=100 000 | 96× 72 | ZD | $1 \cdot 10^{-4}$ | 0,1789 |
| | 128× 96 | | | 0,1717 |
| Re=1 000 000 | 128× 96 | ZD | $1 \cdot 10^{-5}$ | 0,0558 |
| | 192× 128 | | | 0,0556 |

Tabelle 8.2: Widerstandsbeiwerte der Kugelumströmung mit zwei statistischen Modellen bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen.

Widerstand mit Gitterverfeinerung und dem Anteil an Zentralknoten, wobei beide Faktoren den numerischen Fehler einer Simulation verringern. Der numerische Fehler auf dem groben Gitter, der mit systematischer Gitterverfeinerung bestimmt wird, ist ein Beitrag der die Berechnung positiv beeinflusst. Die geringeren Rechenkapazitäten zu Zeiten der Modellbildung sind zum Teil verantwortlich für die Berücksichtigung des numerischen Fehlers in der Modellbildung und die besseren Ergebnisse auf groben Rechengittern heute. Nur durch die Beseitigung des numerischen Fehlers ist eine Beurteilung der Modelle möglich geworden. Das $k-\varepsilon$ Modell mit Wandfunktionen hat sich für die Berechnung dieser Strömung als ungeeignet erwiesen. Die laminare Grenzschicht an der Kugel wird durch Anwendung der Wandfunktionen wie eine turbulente behandelt, was zu einem späten Ablösen der Grenzschicht führt (genau wie bei überkritischen Zuständen) und die Berechnung entscheidend beeinflusst. Falsche Widerstandsprognosen durch dieses Modell sind bei vergleichbaren Fällen mit laminarer Grenzschichtablösung (Zylinder, stumpfe Körper) zu erwarten.

Die Untersuchung der Kugelumströmung mit einem Modell für niedrige Reynoldssche Zahlen wurde auf zwei Gittern durchgeführt. Der Unterschied zwischen systematisch verfeinerten Gitterebenen ist gering, da die Gitterauflösung besser ist als bei der Verwendung von Wandfunktionen und die Netze fein sein müssen, um eine konvergente Lösung des Gleichungssystems zu erhalten. Durch verschiedene Gitterauflösung ergeben sich nur außerhalb der viskosen Unterschicht geringe Unterschiede, die kaum Einfluss auf die Widerstandsprognose in Tab. 8.2 haben. Die Widerstandsprognose mit dem $k-\omega$ Modell ist deutlich besser als mit Wandfunktionen, da der Fehler jedoch größer als 10% ist in der technischen Anwendung ebenfalls nicht einsetzbar.

In Abb. 8.3 sind alle Ergebnisse dargestellt, die die mangelhafte Vorhersage der unterkriti-

schen Kugelumströmung mit statistischen Modellen verdeutlichen. Eine vergleichbare Analyse auf drei Gitterebenen mit systematischer Gitterverfeinerung ist im dreidimensionalen Raum schwierig durchzuführen, und das Ergebnis der Berechnung wird meist unsymmetrisch vorhergesagt. Um einen Fehler durch die achsensymmetrischer Vereinfachung auszuschließen wurde das Ergebnis der achsensymmetrischen Berechnung mit dreidimensionalen Berechnungen verglichen: dabei wurde nur ein Viertel des gesamten Gebietes berechnet und an den Rändern in Umfangsrichtung periodische Randbedingungen verwendet. Bei Verwendung des gleichen zweidimensionalen Gitters, das für die dreidimensionale Berechnung in Umfangsrichtung rotiert wurde, ist der Unterschied zwischen den Ergebnissen sehr klein.

Für das Modell mit Wandfunktion sind in Abb. 8.3 die Werte mit dem geringsten numerischen Fehler dargestellt, alle anderen Ergebnisse streuen zwischen numerischem Ergebnis und experimenteller Kurve. Die Ergebnisse reagieren empfindlich auf die Einstromwerte und die Initialisierung von k und ε bzw. ω im Lösungsgebiet. Durch geschickte Wahl der Variablen kann eine Verbesserung der Vorhersage erzielt werden. Da es nicht das Ziel von Berechnung sein darf nur Ergebnisse zu bestätigen, sondern Vorhersagen zu liefern sind die turbulenten Parameter physikalisch sinnvoll gewählt und wurden nicht verändert um die Ergebnisse zu verbessern: für die laminare Anströmung der Kugel ist ein geringer Turbulenzgrad $T = 0,25\%$ und als typisches Längenmaß $\ell = 0,03d_k$ gewählt. Diese Werte sind so gering, dass die Strömung vor der Kugel nicht beeinflusst wird.

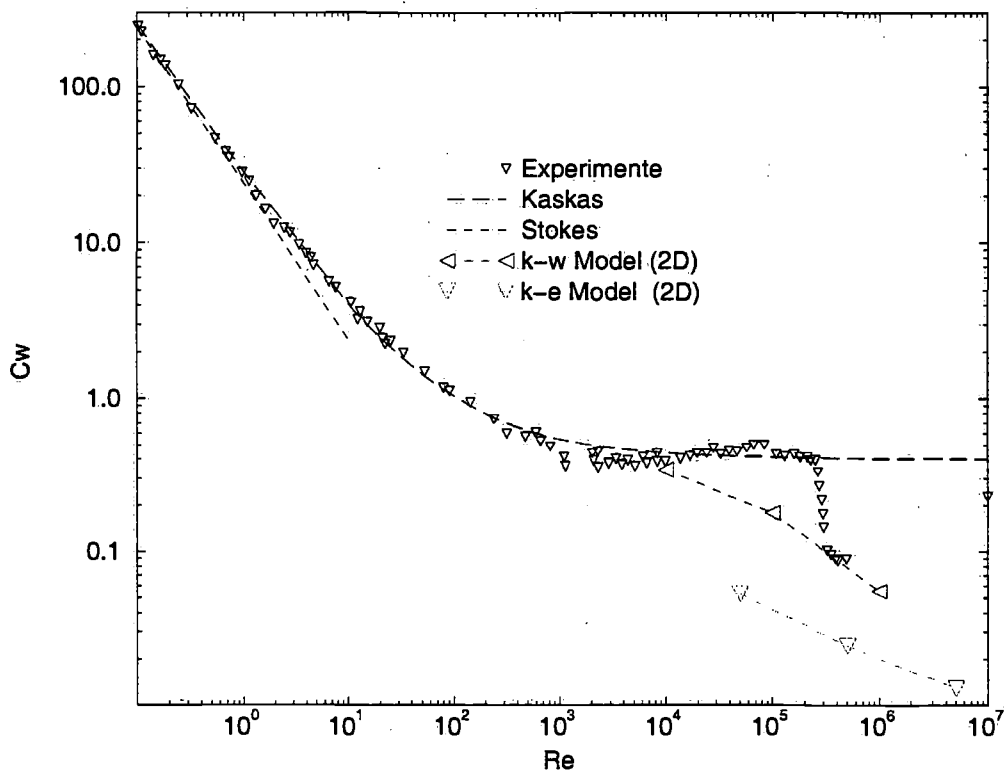


Abbildung 8.3: Darstellung der dimensionslosen Widerstandsbeiwerte für die Berechnung der Kugelumströmung mit statistischen Turbulenzmodellen und 2D-Approximation.

8.4 Grobstruktursimulation

8.4.1 Geometrie, Gittererzeugung und Simulationsparameter

Die unterkritische Strömung um eine glatte Kugel, die zur vereinfachten experimentellen Untersuchung von einem Stab mit Durchmesser d_s an der Rückseite fixiert ist, würde bei $Re=50\,000$ mit und ohne Feinstrukturmodell simuliert. Die Reynoldssche Zahl ist bezogen auf den Kugeldurchmesser d_k , die ungestörte Anströmungsgeschwindigkeit v_x^∞ und die konstante Viskosität ν des umgebenden Fluids.

Geometrie: In Abbildung 8.4 ist die untersuchte Anordnung dargestellt, die ursprünglich parallel zu den Simulationen im Windkanal des Arbeitsbereichs vermessen werden sollte [3]. Bei der experimentellen Durchführung ergaben sich jedoch Probleme mit der Zugabe von Rauchpartikeln, die für die Laserdoppleranemometrie notwendig sind, so dass diese Messungen nicht vollständig zum Vergleich vorliegen. Die Geometrie der Kugel mit Stab wurde vor Beginn der experimentellen Arbeiten mit dem Verhältnis $d_k/d_s = 10$ festgelegt. Die kostengünstigste Möglichkeit das Experiment durchzuführen war die Verwendung einer Bowlingkugel, die an einem Rundmetallrohr fixiert ist. Das Verhältnis (165/20) ist kleiner und sollte die Strömung an der Ablösungsstelle nicht beeinflussen. Das Rezirkulationsgebiet könnte kleiner sein, da der Stab mit der sich bildenden Grenzschicht in der Mitte des Nachlaufs relativ einen größeren Durchmesser besitzt als in der Simulation. Es wird von keiner bedeutenden Beeinflussung durch die unterschiedliche Geometrie ausgegangen.

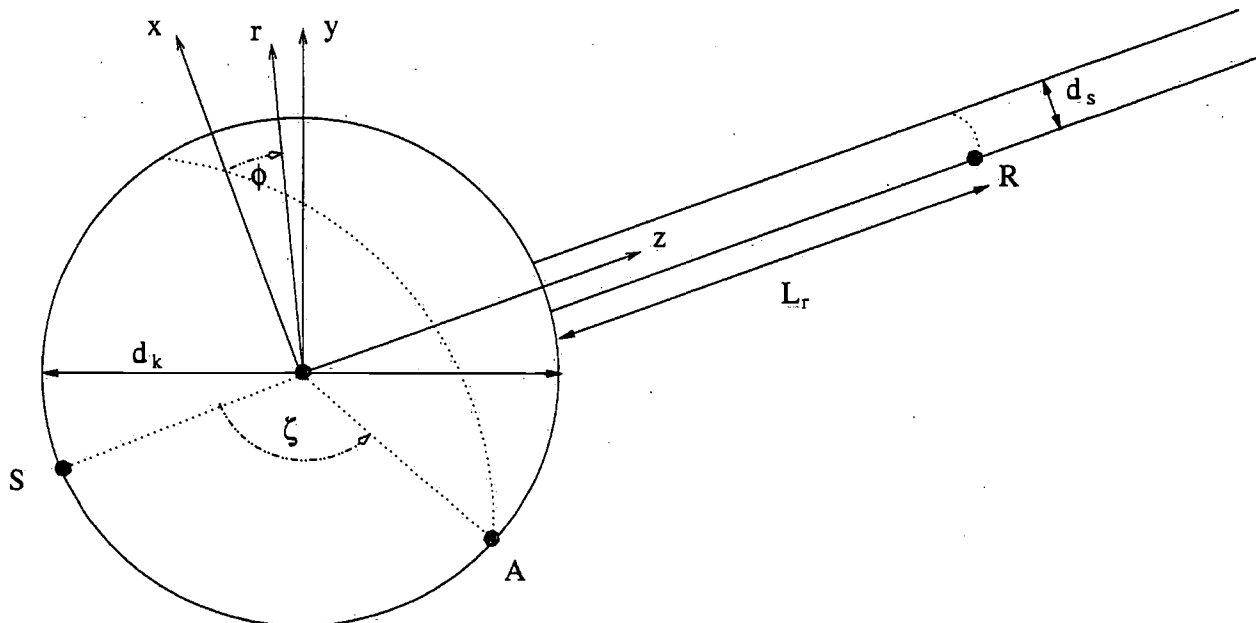


Abbildung 8.4: Simulationsgeometrie

Gittererzeugung: Die Erzeugung von optimalen Gittern für jegliche Geometrie ist bis heute nicht zufriedenstellend gelöst worden. Es gibt mehrere Möglichkeiten Gitter zu erzeugen, zwei davon werden erklärt und deren Vor- und Nachteile diskutiert. Die zwei wesentlichen Einflussfaktoren bei der Gittererzeugung sind die Genauigkeit des numerischen Verfahrens, die entscheidend durch die Gittertopologie beeinflusst wird, und der Schwierigkeitsgrad der Gittererzeugung: hohe Genauigkeit und einfache Gittererzeugung ist zur gleichen Zeit schwer zu erfüllen. Höchste Genauigkeiten werden auf strukturierten kartesischen Gittern mit Methoden hoher Ordnung erzielt (Spektralverfahren, Pade-Verfahren). Gitter in beliebiger Geo-

metrie werden am einfachsten durch Vernetzung des Berechnungsgebiets mit Tetraedern erzeugt.

Ein Modellierungsansatz ist die Vernetzung eines beliebigen Raumes mit einem rechtwinkligen Gitter aus Hexaedern, wobei die Umrisse von Körpern, die nicht parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, durch Stufen approximiert werden. Der Diskretisierungsfehler ist klein, die Vorhersage von Reibungskräften an Wänden erfordert eine hohe Gitterauflösung in Wandnähe und eine gesonderte Behandlung der von der Wand geschnittenen Zellen. Die Vernetzung von komplizierten Geometrien wird meist mit Tetraedern durchgeführt, da dies schnell und einfach mit Schnittstellen zwischen CAD Programmen und automatischen Gittererzeugungsprogrammen geschieht. Die Verwendung von Hexaedern erfordert im Vergleich dazu einen wesentlich höheren Zeitaufwand und ggf. blockstrukturierte Gitter. Bei Verwendung von gleichen Approximationen in der Diskretisierung und gleicher Anzahl von KV sind die Ergebnisse auf Tetraedern deutlich ungenauer als bei Hexaedern. Die Anzahl an erforderlichen Kontrollvolumen um die gleiche Fehlertoleranz zu erreichen, wie bei einem hexaedrischem Gitter, ist ein Vielfaches. Ein Kompromiss zwischen beiden Ansätzen wird meist verwendet, da keine von beiden Varianten zufriedenstellende Ergebnisse liefert und besondere Anpassungen im Programm erforderlich sind.

Es wurden auf unterschiedliche Art und Weise Testgitter mit Hexaedern erzeugt, die hier nicht alle beschrieben werden sollen. In den Simulationen wurden zwei Methoden verwendet: in Abb. 8.5 ist das Gitter aus einzelnen Blöcken zusammengesetzt. Die Gittermaschen sind gleichförmig im Lösungsgebiet verteilt und werden in Wandnähe und im Bereich der Scherschicht verfeinert um die starken Änderungen der Variablen dort aufzulösen. Dabei entstehen zum Teil große Volumenunterschiede zwischen benachbarten Zellen, was bei der Verwendung von Zentraldifferenzen zu Oszillationen der Lösung führte und diesen Ansatz nur beschränkt verwendbar machte. Die Oszillationen werden durch eine Mischung aus Zentraldifferenzen und Vorwärtsdifferenz im Verhältnis 9:1 im gesamten Lösungsgebiet gedämpft. Der in Kauf genommene numerische Fehler kann nicht vernachlässigt werden. Die Anzahl der verwendeten Kontrollvolumen ist 835 539, deren Verteilung sich im zylindrischen Koordinatensystem über folgende Bereiche erstreckt: $0 < r/D < 5$; $0^\circ < \phi < 360^\circ$; $-5 < z/D < 10$.

Das Netz in Abb. 8.6 ist körperangepasst und besteht zum größten Teil aus Hexaedern. An kritischen Stellen wie dem vorderen Staupunkt, wo bei strukturierten Gittern viele Gitterlinien zusammenlaufen würden, werden Dreiecksprismen verwendet. Die Größe der Maschen wächst in wandnormaler Richtung um die Kugel, wobei der maximale Wandabstand n^+ kleiner als eins ist. In Testrechnungen wird durch Prüfung der momentanen Strömungsfeldern auf sichtbare Oszillationen die Auflösung überprüft und an den Wänden und in der Scherschicht mehrmals lokal verfeinert. Das soll eine genaue Widerstandsprognose bei minimaler Gitterauflösung ermöglichen, wobei die wesentlichen Charakteristiken der Strömung von der Simulation wiederzugeben sind. Die Kontrollvolumenanzahl beträgt im angepassten Gitter 1 861 824 und das Gitter erstreckt sich über einen größeren Bereich: $0 < r/D < 20$; $0^\circ < \phi < 360^\circ$; $-20 < z/D < 20$.

Simulationsparameter: Die Anzahl der berechneten Zeitschritte beträgt in beiden Simulationen 30 000. Bei der ersten Simulation werden mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0,01s$ 300 dimensionslose Zeiteinheiten (tU/D) berechnet; Partikel in der ungestörten Strömung durchquerten das gesamte Gebiet zwanzigmal. Die Simulation auf dem feinen Gitter mit $\Delta t = 0,025s$ dauerte 750 Zeiteinheiten, wobei eine ähnliche Anzahl von Gebietsdurchquerungen eines Teilchens erfolgte. In beiden Fällen reicht die Simulationszeit aus um gemittelte symmetrische Strömungsgrößen zu erhalten, die ein gutes Indiz für eine ausreichende Simu-

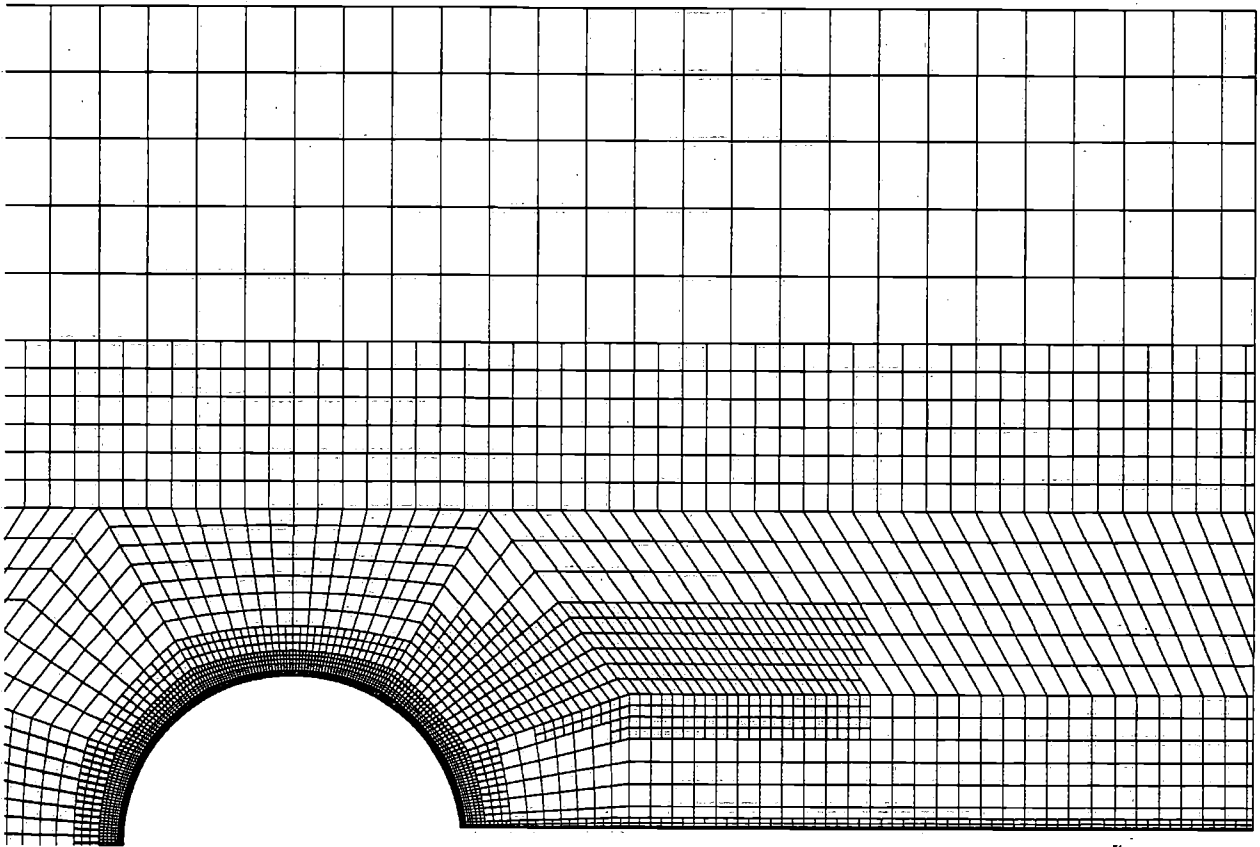


Abbildung 8.5: Gleichförmiges Ausgangsnetz mit lokaler Verfeinerung in Wandnähe und im Bereich der freien Scherschicht.

lationszeit sind. Zur Mittelung wird auf dem groben Gitter jeder fünfte und auf dem feinen Gitter jeder zweite Zeitschritt in jedem Kontrollvolumen örtlich gemittelt. Eine Mittelung in die homogene Umfangsrichtung wurde zur Darstellung der Konturen nicht durchgeführt, alle Profile im Anhang sind jedoch zeitlich und räumlich gemittelt. Zur Berechnung eines Zeitschritts mit jeweils 5 äußeren Iterationen sind auf dem feinen Gitter 11,8s notwendig (Verwendung von 64 Prozessoren der Cray T3E vom Hochleistungsrechenzentrum Stuttgart). Die Gesamtrechenzeit der Simulation auf dem feineren Gitter beträgt ungefähr 100 Stunden.

8.4.2 Momentane Simulationsergebnisse

Aus der Sicht vieler Ingenieure ist die Widerstandsvorhersage sicherlich das wichtigste Simulationsergebnis und wird aus diesem Grund zur ersten Beurteilung herangezogen. In Abb. 8.7 ist für beide Simulationen der Verlauf des dimensionslosen Widerstandsbeiwerts dargestellt. Der momentane Widerstand schwankt bis zu 10% um seinen Mittelwert, der 0,37 (grob) und 0,465 (fein) beträgt. Der gemittelte Widerstand des feinen Gitters ist auf der rechten Seite von Abb. 8.7 in ein Diagramm eingetragen, in dem der Widerstand als Funktion der Reynoldsschen Zahl dargestellt ist. Zusätzlich zu den Experimenten, die von [106] zusammengefasst sind, ist das Ergebnis der DNS [108], der achsensymmetrischen Berechnungen (2D), die Kennlinie von Stokes und die empirische Formel von Kaskas eingezeichnet. Die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes reicht bis $Re=1$, darüber hinaus ist die Approximation von Kaskas bis zum kritischen Bereich für die meisten Anwendungen eine ausreichende Näherung.

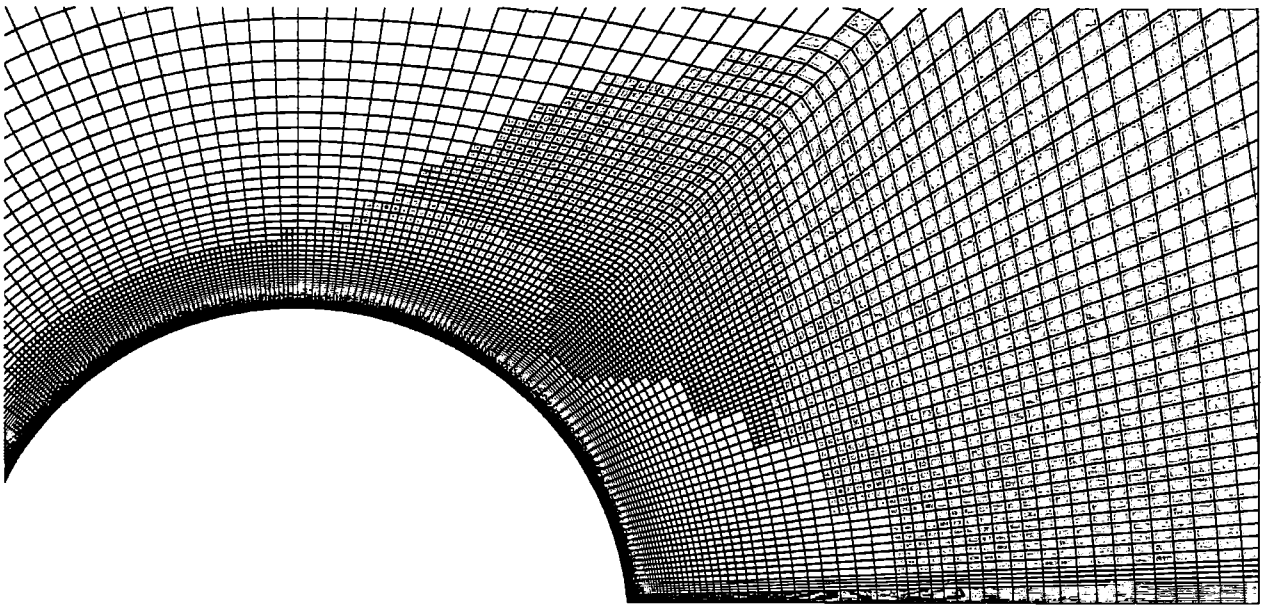


Abbildung 8.6: Gestrecktes Ausgangsnetz mit Verfeinerung im Bereich von Kugel, Stab und Scherschicht, Bereiche mit verschiedenen Graustufen wurden unterschiedlich verfeinert.

Bei der experimentellen Widerstandsbestimmung haben die Experimentatoren mit vielen unterschiedlichen Problemen zu kämpfen (Vibration der Kugel, Turbulenzgrad im Windkanal, gleichförmige Anströmung, Einfluss der Halterung), daher beträgt der Fehler bis zu 10 % [10]. Der Widerstandsbeiwert auf dem groben Gitter ist außerhalb der Fehlertoleranz. Auf dem feinen Gitter stimmt der Widerstand hervorragend mit den Messergebnissen überein. Wie bereits angedeutet ist die numerische Diffusion durch die Mischung von Verfahren erster und zweiter Ordnung nicht vernachlässigbar und führt im Widerstandsbeiwert zu einem Unterschied von über 20% im Vergleich zum Wert von Experiment und Simulation auf dem feinen Gitter. Bei dieser Reynoldsschen Zahl ist der Widerstand hauptsächlich die Folge von Druckkräften auf die Oberfläche der Kugel. Im Stokesschen Bereich ist der Anteil des Druckes am Gesamtwiderstand 33% und bei $Re=5\,000$ [108] bereits 87,5 %. Ein noch höherer Anteil ist bei $Re=50\,000$ zu erwarten: die Simulation auf groben Gitter ergab eine Druckanteil von 80,5%, bei der Simulation auf dem feinen Gitter waren es 94,7%. Daher wird in der weiteren Darstellung auf Ergebnisse der ersten Simulation nicht weiter eingegangen, da sie zu weit von der physikalischen Realität entfernt sind.

Die Auftriebsbeiwerte in kartesischen Kraftkomponenten sind bei einer Kugel im Mittel null. Abbildung 8.8 zeigt diese in einer Ausschnittsvergrößerung mit dem Widerstandsbeiwert. Der Widerstand ändert sich mit einer höheren Frequenz als der Auftrieb. Die Schwankung der Auftriebskräfte ist absolut größer als die der Widerstandskraft. Die Querkräfte sind eine Folge der Ablösung großer Wirbel, die im Nachlauf zu der typischen Ablösefrequenz wie auch bei einem Kreiszyylinder führen. Durch unregelmäßige Wirbelablösung und die damit verbundene Druckverteilung entstehen Querkräfte, die in der Simulation keine technischen Probleme erzeugen, aber im Experiment vom Stab aufgenommen werden müssen. Die hohen Frequenzmoden beim Widerstandsverlauf sind eine Folge kleiner Wirbel durch die Scherschichtinstabilität. Diese entstehen häufiger und erzeugen geringere Schwankungen, was zu

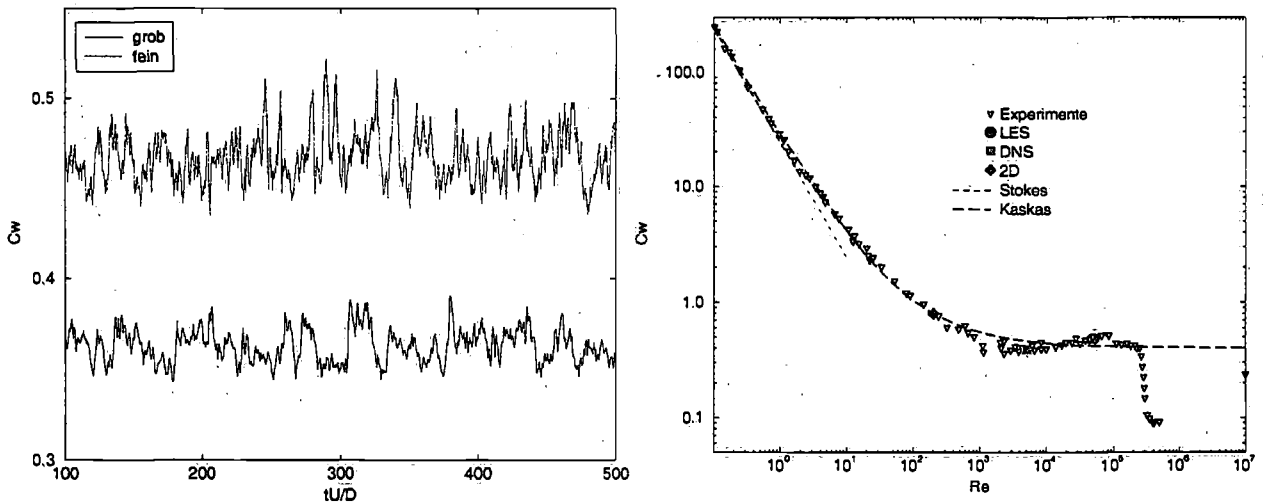


Abbildung 8.7: Darstellung der dimensionslosen Widerstandsbeiwerte für beide Simulationen als Funktion der Zeit (links) und das Ergebnis vom feinen Gitter im Vergleich zu Experimenten (rechts).

einer kleineren Standardabweichung vom Mittelwert führt ($\pm 0,014$ gegenüber $\pm 0,052$).

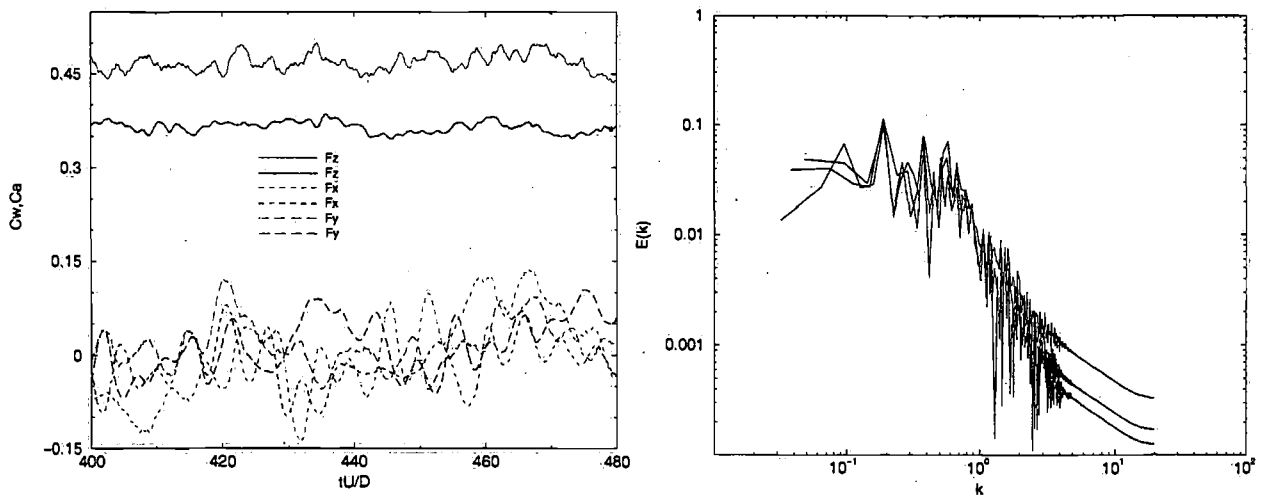


Abbildung 8.8: Darstellung der dimensionslosen Widerstands- und Auftriebsbeiwerte für beide Simulationen als Funktion der Zeit (links). Die Fouriertransformation der integralen Oberflächenkräfte der drei Koordinatenrichtungen auf dem feinen Gitter ergibt die spektrale Verteilung der Energie als Funktion der Frequenz (rechts).

An der Universität Siegen wurde die Kugelumströmung bei $Re=50\,000$ experimentell untersucht [56]. Der Versuchsaufbau unterscheidet sich grundlegend vom Aufbau an der TU Hamburg-Harburg, da die Kugel auf der Seite der ankommenden Strömung im Windkanal befestigt. Um die Beeinflussung gering zu halten wird der Rundstab vor der Kugel an einem quer zu Strömung verlaufendem Tragflügel montiert und gleichzeitig vor dem Staupunkt die Grenzschicht abgesaugt. In der numerischen Simulation ist diese Konfiguration viel schwerer zu modellieren als eine rückseitige Fixierung. Die Bildung und Ablösung von Wirbeln an der Kugel wird durch den Tragflügel wahrscheinlich beeinflusst, ebenso wie der Rundstab von der strömungsabgewandten Seite auf die Kugel treffend den Nachlauf und dessen Wirbelstrukturen verändert. Im Nachlauf der Kugel bildet sich ein quasiperiodischer Spiralwirbel [56], des-

sen Rotationsrichtung von Zeit zu Zeit wechselt. Eine vergleichbare kohärente Struktur war in anderen Experimenten [48], [3] nicht messbar und die Existenz dieser kohärenten Struktur wurde im Rahmen der numerischen Simulation überprüft. Dazu wurde an der gleichen Position ($z = 2, 8 : r = 0, 4$) wie im Experiment die radiale Geschwindigkeit als Funktion der Zeit aufgezeichnet. In dem Signal ist ein sich wiederholender Peak erkennbar. Aus dem Signal werden durch Fouriertransformation alle Frequenzen der Strömung bestimmt, die durch das Gitter auflösbar sind. Die Fouriertransformation in Abb. 8.8 liefert als Frequenz der Wirbelablösung $St=0,19$ im Vergleich zu $St=0,187$ aus dem Experiment [56]. Diese Ablösungsfrequenz kann leicht identifiziert werden, gibt jedoch keinen Aufschluss über die Existenz eines Spiralwirbels. Um dies zu überprüfen wurde der Verlauf der Geschwindigkeiten als Funktionen der Zeit an vier um 90° -versetzten Positionen (Phasen) im Nachlauf aufgezeichnet. Bei 1500 aufeinanderfolgenden Zeitschritten wurde die tangential Geschwindigkeit v_t einer Position mit der phasenversetzten korreliert und die Regressionsgerade bestimmt. Gleiches wird mit 180° -versetzten radialen Geschwindigkeitskomponenten v_r durchgeführt. Bei einem Spiralwirbel sollten die tangentialen Geschwindigkeiten benachbarter Positionen korrelieren und die Verteilung der Werte in der grafischen Darstellung auf bestimmte Bereiche konzentriert sein. Für gegenüberliegende Positionen wird die radiale Geschwindigkeitskomponente verwendet, um Rückschlüsse auf die Existenz regelmäßig auftretender Strukturen durch die Korrelation zu erhalten. Der Korrelationskoeffizient wird mit der Anzahl der Zeitschritte N bestimmt als:

$$\rho_{v_t} = \frac{\sum_{i=1}^N (v_t(i) - \bar{v}_t)_\phi (v_t(i) - \bar{v}_t)_{\phi+\pi/2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (v_t(i) - \bar{v}_t)_\phi^2 \sum_{i=1}^N (v_t(i) - \bar{v}_t)_{\phi+\pi/2}^2}} \quad (8.7)$$

Bei einem Koeffizienten gleich eins oder minus eins sind Zufallsvariablen linear korreliert, bei einem Wert gleich null unkorreliert. Die Mittelwerte der Positionen, der relative quadratische Fehler und die Korrelationskoeffizienten sind Tab. 8.3 eingetragen. Alle Korrela-

| Index | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| Position | 90° | 180° | 270° | 360° |
| \bar{v}_t | -0,0062 | -0,0174 | 0,0125 | 0,0048 |
| $\Delta v_t / \bar{v}_t$ | 0,38 | 0,15 | 0,24 | 0,45 |
| \bar{v}_r | -0,0232 | 0,0422 | 0,0016 | -0,0163 |
| $\Delta v_r / \bar{v}_r$ | 0,15 | 0,08 | 2,66 | 0,20 |
| \bar{v}_z | 0,8015 | 0,8603 | 0,8205 | 0,7963 |
| $\Delta v_z / \bar{v}_z$ | 0,005 | 0,004 | 0,004 | 0,004 |
| Korrelationsindex | 2 | 3 | 4 | 1 |
| ρ_{v_t} | -0,0729 | -0,1098 | 0,1949 | 0,0558 |
| Korrelationsindex | 3 | 4 | - | - |
| ρ_{v_r} | 0,0402 | 0,1909 | | |

Tabelle 8.3: Korrelationskoeffizienten zwischen verschiedenen phasenverschobenen Positionen.

tionskoeffizienten deuten auf eine sehr schwache Korrelation hin, wobei der Wert auch von null verschieden sein kann durch eine nicht ausreichende Anzahl von Stichproben. Das ist hier der Fall, wie die Mittelwerte und die relativen quadratischen Abweichungen aufzeigen.

Das Simulationsergebnis stimmt mit den Visualisierungsexperimenten überein: die Existenz eines Spiralwirbels konnte bei einem Versuchsaufbau, der den Randbedingungen aus der Simulation nahe kommt, nicht bestätigt werden.

Die Momentaufnahmen und die zeitgemittelten Felder der Simulation (Abb. 8.11, 8.14) zeigen typische Merkmale der Strömung:

- den Staupunkt vor der Kugel
- Symmetrie der Strömung vor der Kugel
- Verdrängung des Fluids durch den Festkörper
- die laminare Grenzschichtablösung
- nahezu ungestörte Strömung ab einem radialen Abstand $r > D$
- Rezirkulationszone hinter der Kugel in einem Tiefdruckgebiet
- im Nachlauf radial ein- und ausströmendes Fluid.

Aus den zeitgemittelten Felder werden die integralen Größen zum Vergleich mit Experiment und klassischen Theorien bestimmt. Der Widerstandsbeiwert, wie schon im vorigen Kapitel diskutiert, liegt bei 0,465. Der Ablösungswinkel von der Kugeloberfläche steht im Zusammenhang mit dem Tiefdruckgebiet an der Kugelvorderseite, das durch die Beschleunigung der Strömung entlang der Kugel entsteht. Der ansteigende Druck auf der Kugel nach dem Minimum bewirkt die laminare Ablösung: das Druckminimum auf der Kugel liegt bei $\xi = 71^\circ$, die Grenzschicht reißt von der Kugel bei $\xi = 84^\circ$ ab. In der freien Grenzschicht erfolgt die Transition der Strömung. Die Reynoldsschen Spannungen in Abb. 8.16 lassen erste Instabilität in der z -Komponente der Geschwindigkeit identifizieren, da die Spannungen mit einem Anteil von v_z' zuerst ansteigen. Der Vorgang ist analog wie von [108] beschrieben: das Maximum an Wirbelstärke in der freien Scherschicht ist ein hinreichendes Kriterium für eine primäre Kelvin-Helmholtz Instabilität und das damit verbundene Aufrollen der Scherschicht. Das Längen- und Zeitmaß ist von Re abhängig und konnte im Detail sichtbar gemacht werden. Die Visualisierung der Wirbel in der DNS ([108] Abb. 5.12) und im Experiment (Abb. 8.10) zu einem bestimmten Zeitpunkt ermöglicht eine Abmessung der Wirbel: der Durchmesser ist 0,25 bis 0,27 d_k . Die Sichtbarmachung der Wirbel mit Tinte bei $Re=50\,000$ im Wassertank (ein Beispiel ist in Abb. 8.10 dargestellt) ergibt eine Wirbelgröße von ungefähr 0,03 d_k .

Das charakteristische Längenmaßverhältnis ℓ/η von großen zu kleinen Wirbeln einer turbulenten Strömung ist abhängig von der Reynoldsschen Zahl [114]:

$$\ell/\eta \sim Re^{-\frac{3}{4}}. \quad (8.8)$$

In beiden Simulationen ist der Kugeldurchmesser das integrale Längenmaß ℓ für die maximale Wirbelgröße. Das Kolmogorov Längenmaß η repräsentiert die kleinsten Wirbel der turbulenten Strömung. Diese Abhängigkeit besitzt für die Wirbel in der freien Scherschicht keine Gültigkeit, soll aber trotzdem für eine Abschätzung herangezogen werden. Die Einführung einer Proportionalitätskonstante und die Annahme η ist die kleinste Wirbelgröße in der Scherschicht ergibt die Abschätzung des zu erwartenden Wirbeldurchmessers bei der höheren Reynoldsschen Zahl: 0,046 d_k .

Die Maschendiagonal der Kontrollvolumen in der abgelösten Scherschicht beträgt ungefähr 0,01 d_k und bewegt sich somit am Rand der Auflösungsmöglichkeit der Wirbel, die sich in der

Scherschicht bilden (siehe Abb. 8.13). Die Diagonalen der kleinsten aufgelösten Wirbel sind $0,02 d_k$ und $0,04 d_k$, wie sie sich ab $z \approx 0,15$ bilden. Zu Beginn sind die Wirbel deformiert, nehmen im weiteren Verlauf eine runde Form an, wie das auch im Experiment zu erkennen ist (Abb. 8.10) und stimmen in der Größe gut mit den visualisierten Wirbeln überein.

Im Experiment konnte zuerst eine Wirbelpaarung mit einer Hochgeschwindigkeitskamera beobachtet werden. Der gleiche Vorgang, bei dem aus mehreren Wirbeln eine größere Wirbel entsteht, kann in der Simulation beobachtet werden. Nach der Kelvin-Helmholtz Instabilität kommt es, wie bei einer Mischungsschicht, zur Wirbelpaarung: ein Wirbel (erkennbar am niedrigen Druck) befindet sich nach der Ablösung in einem Gebiet mit geringerer Strömungsgeschwindigkeit und ein nachfolgender holt den ersten ein. Beide Wirbel mit gleicher Rotationsrichtung verbinden sich zu einem größeren, bevor ein weiterer sich anschließen kann (siehe Abbildung 8.12). Das entscheidene Detail der Strömung konnte auf dem feinen Gitter aufgelöst werden, was in der ersten Simulation nicht erreicht wurde und letztlich die deutlichen Abweichungen erklärt.

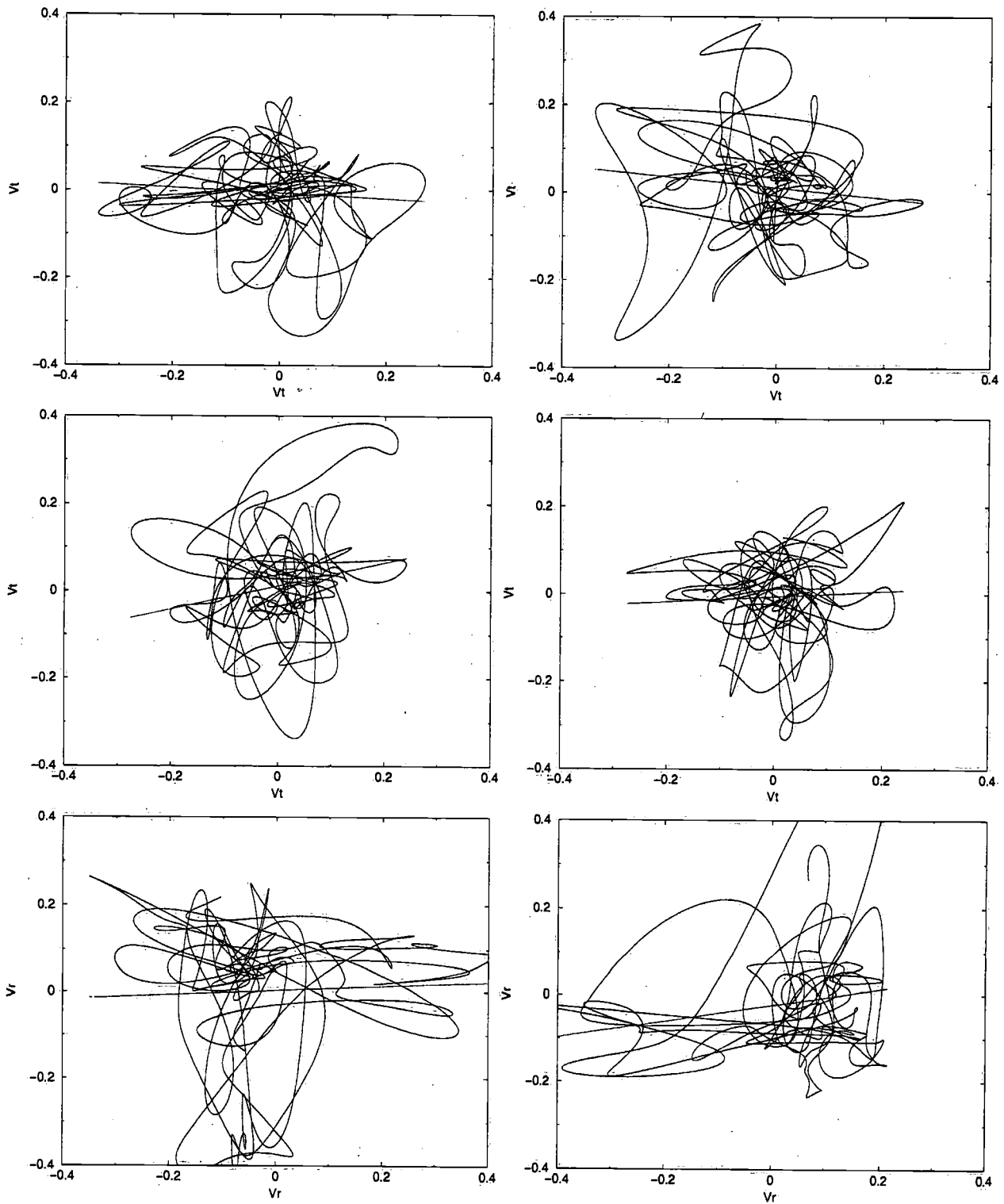


Abbildung 8.9: Regression zur Bestimmung der Korrelation von Geschwindigkeitskomponenten an phasenverschobenen Positionen.

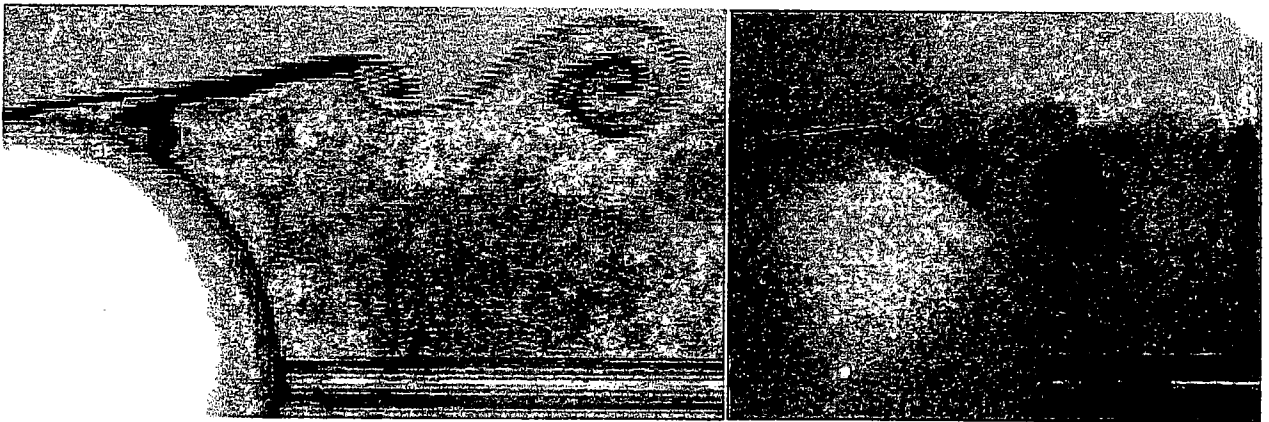


Abbildung 8.10: Visualisierung der Strömung in der freien Scherschicht mit Tinte bei $Re=5000$ (links) und 50000 (rechts).

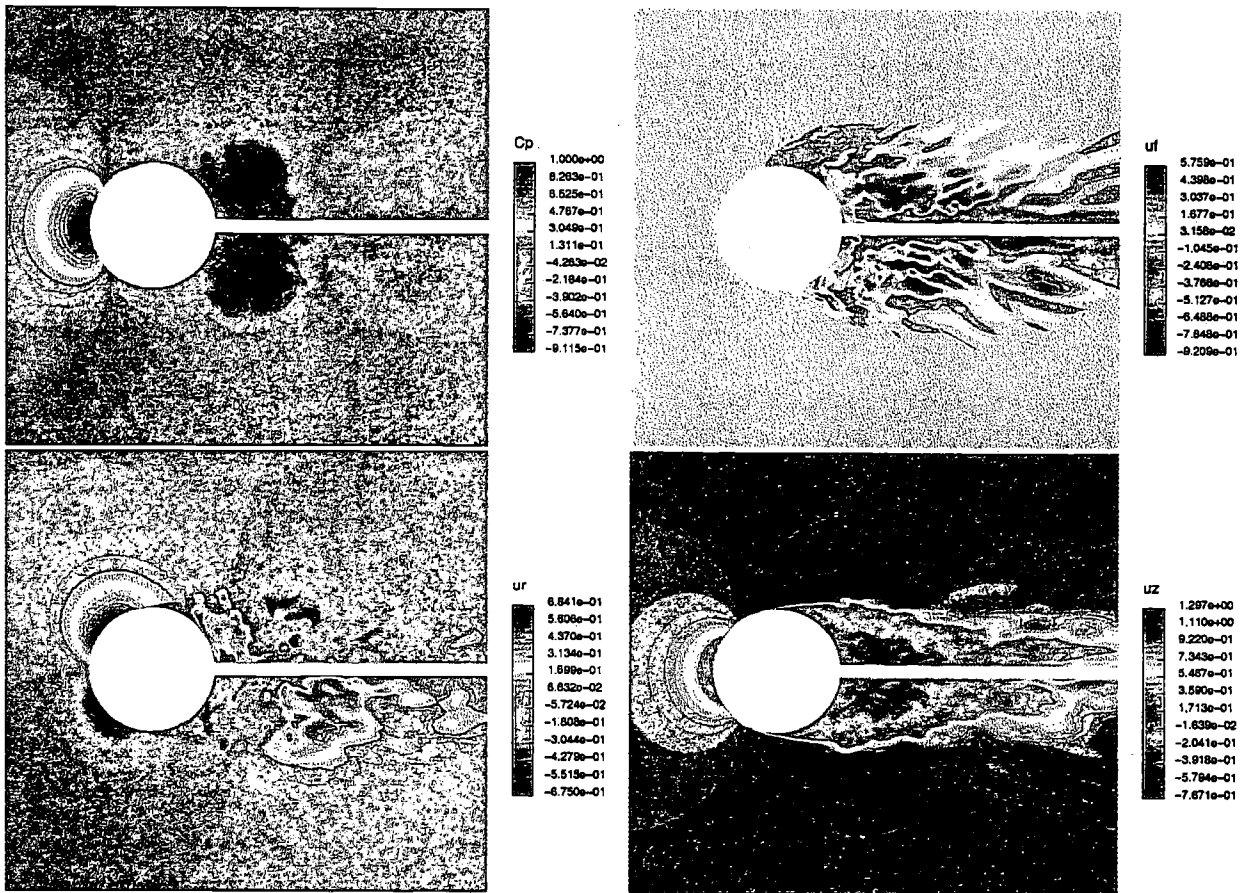


Abbildung 8.11: Momentaufnahmen der Simulation vom Druckbeiwert C_p und den zylindrischen Geschwindigkeitskomponenten v_ϕ, v_r, v_z in einer Ebene (das Fluid strömt von links nach rechts).

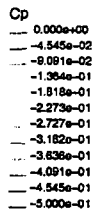
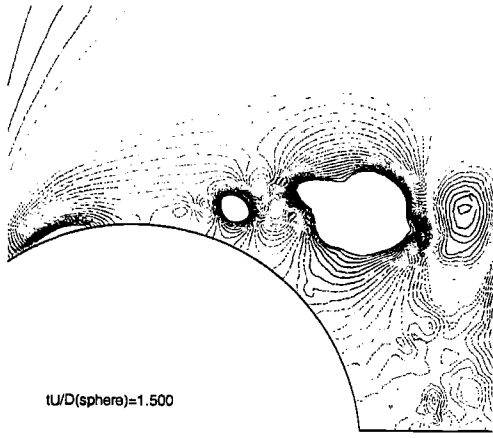
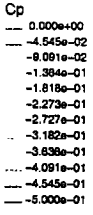
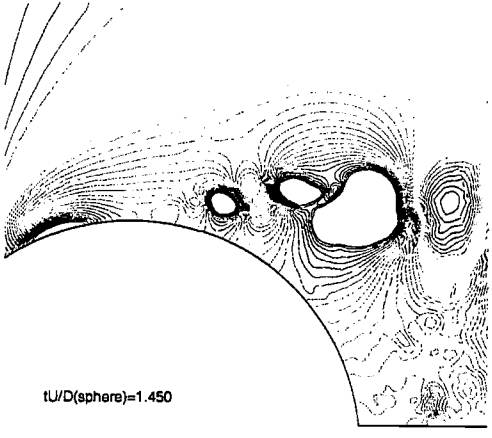
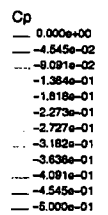
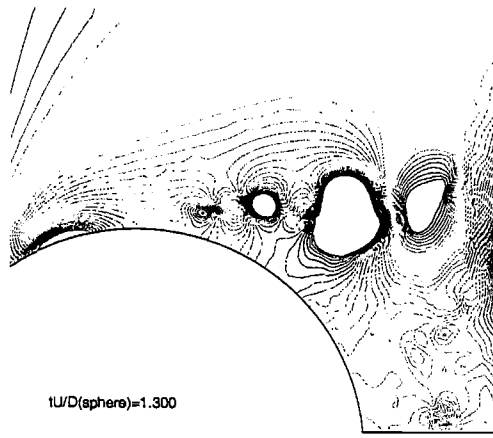
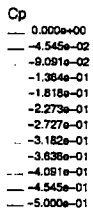
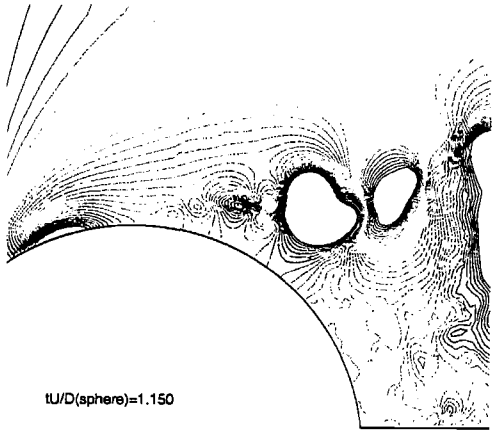
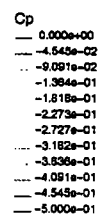
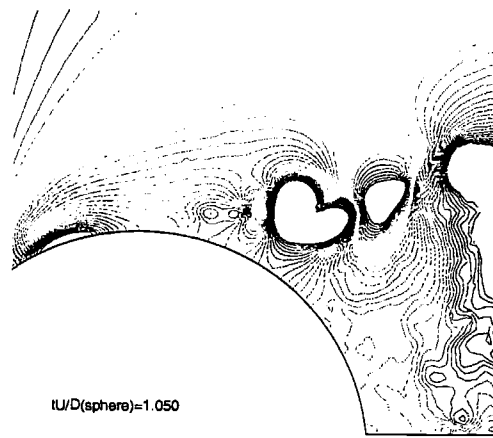
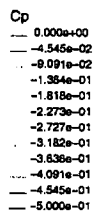
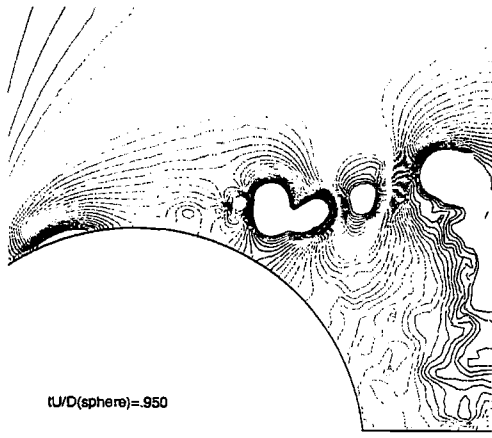
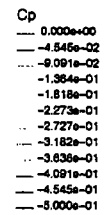
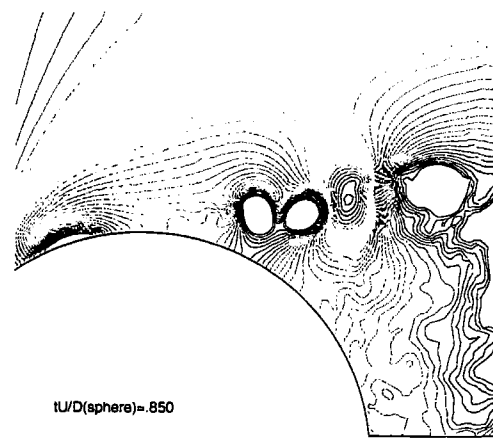
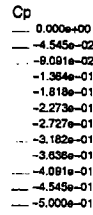
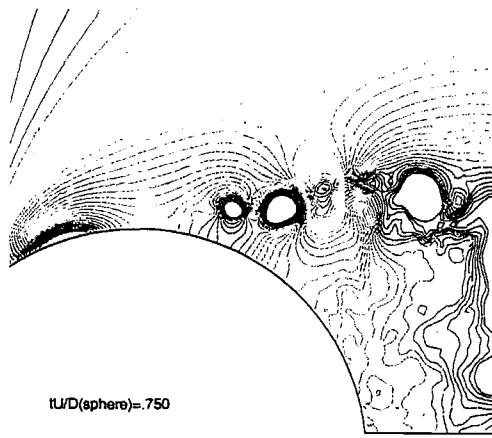


Abbildung 8.12: Momentaufnahmen des Druckbeiwerts C_p zur Veranschaulichung der Wirbelpaarung mit angepasster Druckskalierung.

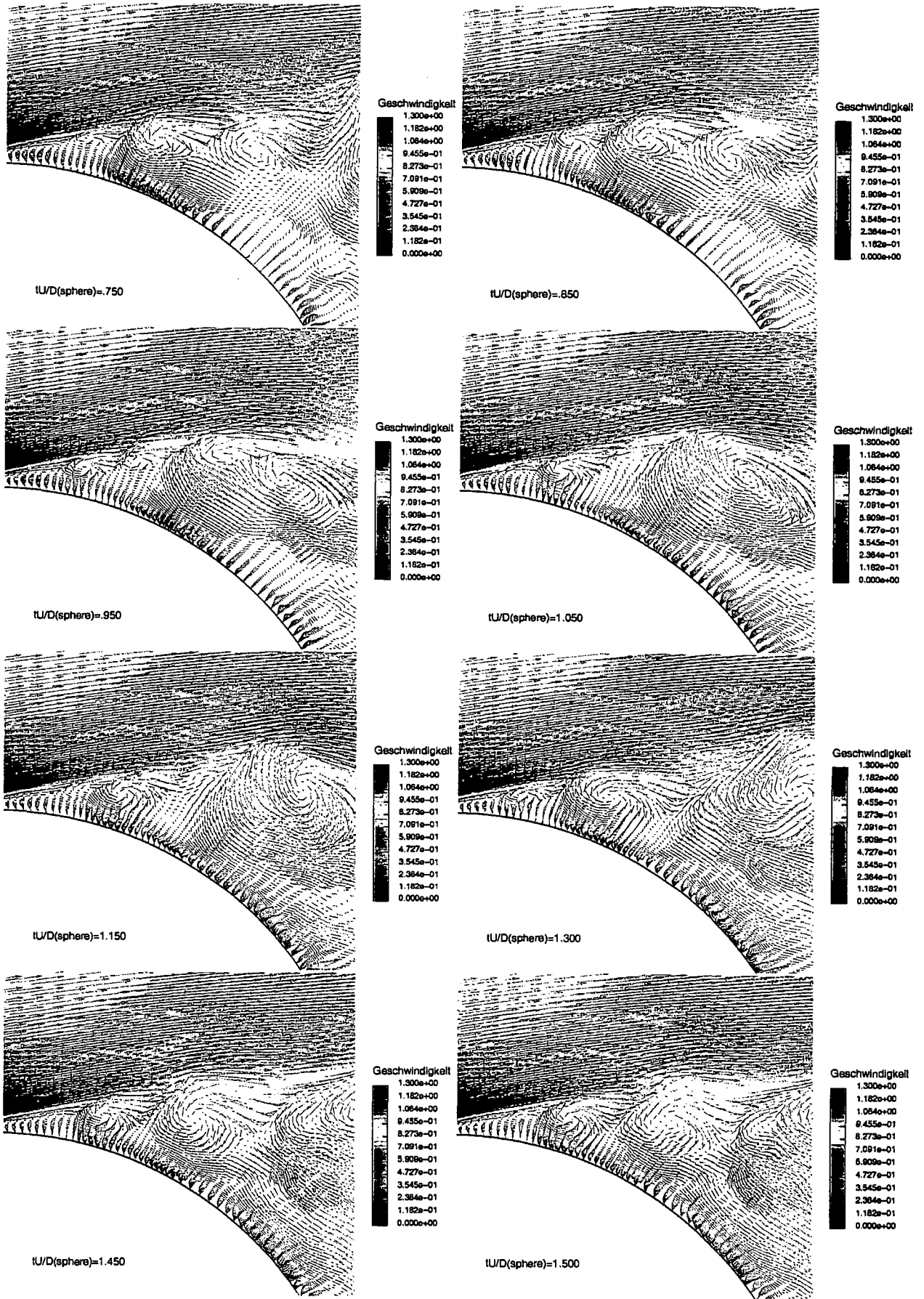


Abbildung 8.13: Momentaufnahmen des Geschwindigkeitsvektors \underline{v} zur Veranschaulichung der Wirbelpaarung.

8.4.3 Zeitgemittelte Simulationsergebnisse

Neben der Widerstandsprognose für technische Anwendungen ist die Vorhersage von gemittelten Strömungsgrößen wie Geschwindigkeiten oder Reynoldssche Spannungen für die Verbesserung und Entwicklung von Turbulenzmodellen von Bedeutung. In der Vergangenheit wurden Turbulenzmodelle an Versuchsergebnisse angepasst und optimiert. Viele Größen, die nicht gemessen werden können, sind in numerischen Simulationen zugänglich. Deswegen sind Simulationsergebnisse notwendig, um Verbesserungen auf dem Gebiet der Turbulenzmodellierung herbeizuführen. Diese Simulation soll einen Beitrag dazu liefern, deren Ergebnisse im folgenden Abschnitt dargestellt und diskutiert werden.



Abbildung 8.14: Zeitgemittelte Felder von Druckbeiwert C_p und den zylindrischen Geschwindigkeitskomponenten $\bar{v}_\phi, \bar{v}_r, \bar{v}_z$ in einer Ebene.

Abbildung 8.14 enthält die achsensymmetrischen Konturen des mittleren Druckfelds und der Geschwindigkeitskomponenten in Zylinderkoordinaten. Zwei zeitlich stabile Extremwerte des mittleren Druckfelds sind das Maximum im Staupunkt und ein lokales Minimum vor der Ablösungsstelle der Grenzschicht. Der minimale Druck im Lösungsgebiet ist hinter der Kugel im Rückstromgebiet, wo dieser mit positiver z -Koordinate bis zu einem lokalen Maximum bei $z/d_z = 1,8$ ansteigt, und bei $z/d_z = 4$ auf einen konstanten Wert abfällt. Da die mittlere Umfangsgeschwindigkeit null ist, sind von null verschiedene Werte auf eine nicht ausreichende Anzahl von Stichproben oder numerische Fehler (Rundung, Genauigkeit) zurückzuführen, die bei sehr kleinen Größen einen relativ viel höheren Fehler induzieren. Die Anhäufung numerischer Fehler ist verantwortlich für die von null verschiedene Umfangsgeschwindigkeit, wobei der Fehler im Mittel vernachlässigbar klein ist ($\delta v_\phi \approx 10^{-6} \cdot v_\infty$). Der Mittelwert aus der Summe aller Zellen ist $9,3 \cdot 10^{-5}$, d.h. die Anzahl der Stichproben ist so groß wie die Anzahl der Zellen multipliziert mit der Anzahl der Mittelungen: $3,3 \cdot 10^{10}$. Die Radialgeschwindigkeit vor der Kugel ist positiv (da nach außen gerichtet) und im Nachlauf durch das einströmende Fluid meist negativ, abgesehen von dem Bereich direkt hinter der Kugel, in dem der Festkörper das rückströmende Fluid verdrängt. In den meisten Bereichen ist die Radialgeschwindigkeit jedoch null. Die gleichförmige Anströmung wird durch

den Druckgradient vor dem Staupunkt gebremst und umgelenkt. Die maximale Geschwindigkeit befindet sich außerhalb der Grenzschicht und ist die Folge der Kugelverdrängung. Es bildet sich hinter der Rezirkulationszone, in der die Rückstromgeschwindigkeit maximal ist, ein Nachlauf der durch die Grenzschicht am Stab beeinflusst ist und weit hinter die Kugel reicht. Dort ist das Gitter grob und stark vom numerischen Fehler beeinflusst. Generell ist die Nachlaufzone kleiner als bei der Zylinderumströmung, da der Einstrom von Fluid in den Nachlauf aus zwei Koordinatenrichtungen erfolgen kann.

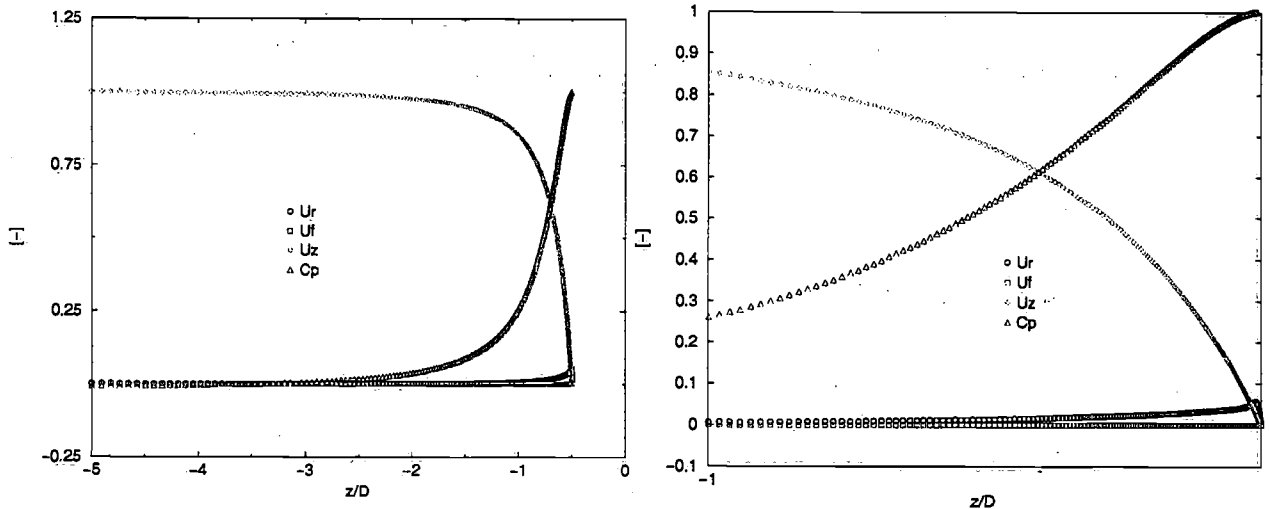


Abbildung 8.15: Darstellung von zeitgemittelten Größen in der Symmetrielinie vor dem Staupunkt: \bar{C}_p , \bar{v}_ϕ/v_∞ , \bar{v}_r/v_∞ , \bar{v}_z/v_∞ . Die rechte Abbildung ist eine Detailvergrößerung in der Umgebung des Staupunktes.

In Abb. 8.16 sind die Reynoldsschen Spannungen in einer Ebene für zwei Simulationen dargestellt. Die obere Hälfte der Darstellung ist das Ergebnis der Simulation mit dem Modell von Smagorinsky ohne Dämpfung, die untere Hälfte eine Simulation ohne Modell (ZDF). Beide Simulationsergebnisse sind nahezu gleich, und werden nur einmal diskutiert. Alle Normalspannungen sind größer als null, $\overline{v'_z v'_z}$ ist absolut am größten und steigt bereits in der Scherschicht in Folge der primären Instabilität stark an. Die Scherschicht ist nach der Ablösung schmal, wird durch den Aufrollvorgang und sich bildende Wirbel breiter. In der Rückstromzone ist der Wert deutlich kleiner, die Fluktuationen werden dort gedämpft. $\overline{v'_r v'_r}$ ist absolut die kleinste Normalspannung. Das ist einleuchtend, denn die Radialgeschwindigkeit ist die kleinste momentane Komponente im Nachlauf (siehe Abb. 8.11). Ihr Wert steigt nur langsam in der Scherschicht, ist in der Rückstromzone annähernd gleich verteilt und hat ihre maximalen Werte auf der Höhe des Wiederanlegepunktes, wo die mittlere Strömung radial nach innen gerichtet ist (siehe Abb. 8.14). $\overline{v'_\phi v'_\phi}$ wächst wie $\overline{v'_r v'_r}$, deren Betrag im Nachlauf vergleichbar ist, langsam in der Scherschicht an und erreicht sein absolutes Maximum in Stabnähe am Wiederanlegepunkt. Die momentane Umfangsgeschwindigkeit (Abb. 8.11) ist dort groß, da der Stab in diesem Bereich einem querangeströmten Rundzylinder entspricht, der das Fluid verdrängt und hohe Umfangsgeschwindigkeiten (genau wie v_x bei der Umströmung des Rundzylinders) erzeugt. Eine hohe Umfangsgeschwindigkeit bei einer mittleren Geschwindigkeit nahe null bedeutet eine große Fluktuation und damit wird eine höhere Spannung als $\overline{v'_r v'_r}$ erreicht. Als einzige von null verschiedene Scherspannung in Zylinderkoordinaten verbleibt $\overline{v'_r v'_z}$. Diese ist in der Scherschicht vor der Transition positiv, was die Folge der sich bewegenden Scherschicht ist. Im Kugelnachlauf ist die Scherspannung meist negativ, was durch den Gradienten $\partial \bar{v}_z / \partial r$ zu erklären ist. Bewegt sich ein Teilchen

mit $v_r' < 0$ so erzeugt es ein positives v_z' (da \bar{v}_z dort kleiner ist und das Teilchen seine Geschwindigkeit beibehält). Gleiches ist umgekehrt in allen Bereichen mit $\partial\bar{v}_z/\partial z > 0$ gültig. Alle Spannungen sind qualitativ mit der DNS [108] vergleichbar.

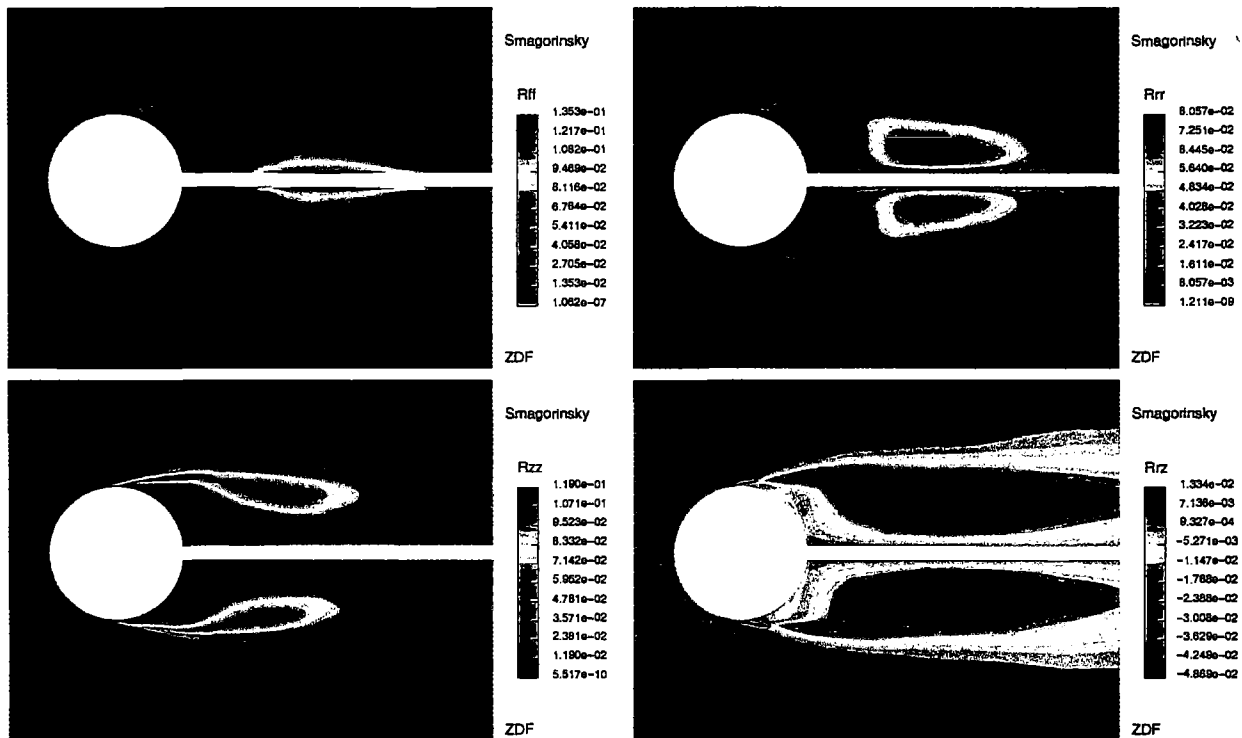


Abbildung 8.16: Reynoldssche Spannungen der Simulationen in einer Ebene: $\overline{v'_\phi v'_\phi}$, $\overline{v'_r v'_r}$, $\overline{v'_z v'_z}$, $\overline{v'_r v'_z}$. Die obere Hälfte des Bildes ist das Ergebnis der Simulation mit dem Modell von Smagorinsky, die untere Hälfte das Simulationsergebnis ohne Modell.

Die Reynoldsschen Spannungen sind in beiden Simulationen (mit und ohne Modell) ungefähr gleich, da sowohl die Verteilung als auch der Betrag in guter Übereinstimmung ist. Die mit ZDF benannte Simulation ist die Grobstruktursimulation ohne Modell, die verwendete Methode von Zentralfdifferenzen bzw. lineare Interpolation entspricht einer Mittelung von Werten benachbarter Zellen, was wie ein Filter wirkt. Das Modell von Smagorinsky wurde ohne Wanddämpfung angewandt. Es wurde ein starker Einfluss der Dämpfungsfunktion auf den Kugelnachlauf vermutet. Dies ist unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Simulation der Umströmung eines Zylinders in Kap. 7 unbegründet, da sich herausstellte, dass die Funktion nur wenige Zellschichten in Wandnähe beeinflusst, auch wenn die Wandschubspannung in der wandnächsten Zelle, die für die Dämpfung ausschlaggebend ist, nahe null ist. In der wandnächsten Zellschicht, die sich vollständig in der viskosen Unterschicht befindet, wird die Wirbelviskosität auf null gesetzt. Dies ist notwendig um Einfluss durch das Modell auf die Unterschicht zu verhindern.

Der geringe Einfluss des Feinstrukturmodells auf die Simulation in diesem Fall ist überraschend: die Wirbelviskosität beträgt zum Teil ein Mehrfaches der laminaren Viskosität (in der Scherschicht und im fernen Nachlauf auf groben Gitter), trotzdem ist dieser Beitrag nicht ausreichend, um eine Änderung der mittleren Strömungsfelder zu bewirken. In Abb. 8.17 sind die absoluten Beträge der diffusiven Terme mit den konvektiven Termen für eine große Anzahl von Zellen als Funktion der Koordinate z verglichen. Im Bereich des Nachlaufs ist der konvektive Beitrag zu den Navier-Stokesschen Gleichungen meist um einen Faktor hun-

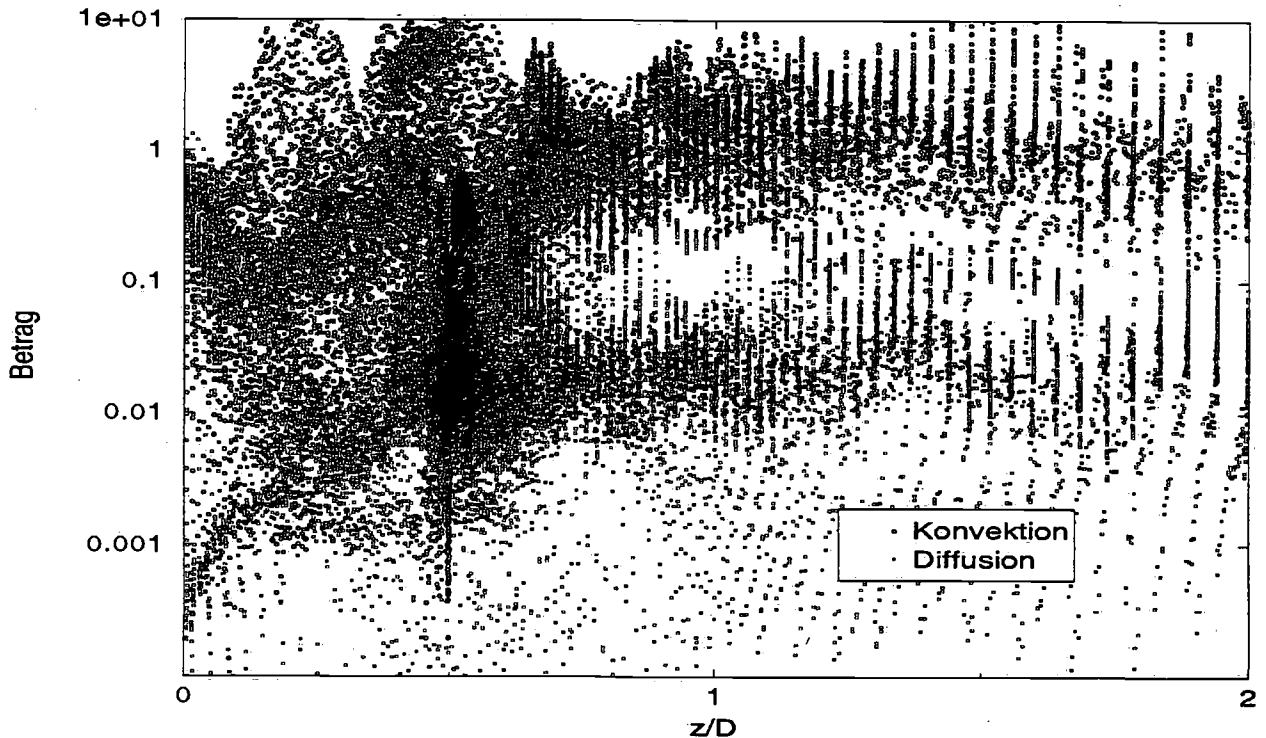


Abbildung 8.17: Vergleich von Beiträgen zur gefilterten Impulsgleichung der Komponente v_z als Funktion der Koordinate z .

dert höher als der diffusive Beitrag (inklusive Feinstrukturanteil). Daraus lässt sich folgender Schluss ziehen: das Feinstrukturmodell beeinflusst die Simulation kaum, da dessen Beiträge im Bereich des numerischen Fehlers der Simulation liegen und alle bedeutenden Strukturen dieser Strömung durch das Netz mit lokaler Verfeinerung aufgelöst werden können.

Abbildung 8.18 zeigt die Reynoldsschen Spannung $\overline{v_z'v_z'}$ aus der Simulation im Vergleich zu einem Experiment [56]. Zum einen ist ein deutlicher Unterschied erkennbar: die Intensität in der Scherschicht des Experiments steigt langsamer an als in der Simulation. Auf der anderen Seite stimmen der Betrag, die Lage des Maximums und die Form der Konturen gut überein. Der Unterschied kann mit der unterschiedlichen Fixierung der Kugel im Experiment, der Messkontrollvolumengröße [10] oder der Datenaquisitionsrate [3] zusammenhängen, nach der laminaren Ablösung ist dies offenbar irrelevant und es ergibt sich eine ähnliche Verteilung der Spannung.

In Abbildung 8.19 sind der Druckbeiwert aus dem Experiment und der Simulation verglichen. Die Simulationsergebnisse aus jeder Zelle der Kugeloberfläche sind als Punkte eingetragen, erscheinen als Striche und sind ein Indiz für die Schwankung bzw. den Fehler des gemittelten Druckkoeffizienten in Umfangsrichtung. Im Experiment [3] ist die Kugel von der Seite befestigt, damit der Druck in Umfangsrichtung durch Stabdrehung gemessen werden kann. Der Einfluss des Stabes, der eine Auftragung bis 180° wie im Experiment verhindert, ist in der Simulation durch einen Druckanstieg an der Kugelrückseite $\xi \approx 160^\circ$ erkennbar. Die Unterschiede sind gering und liegen im Bereich des experimentellen Fehlers.

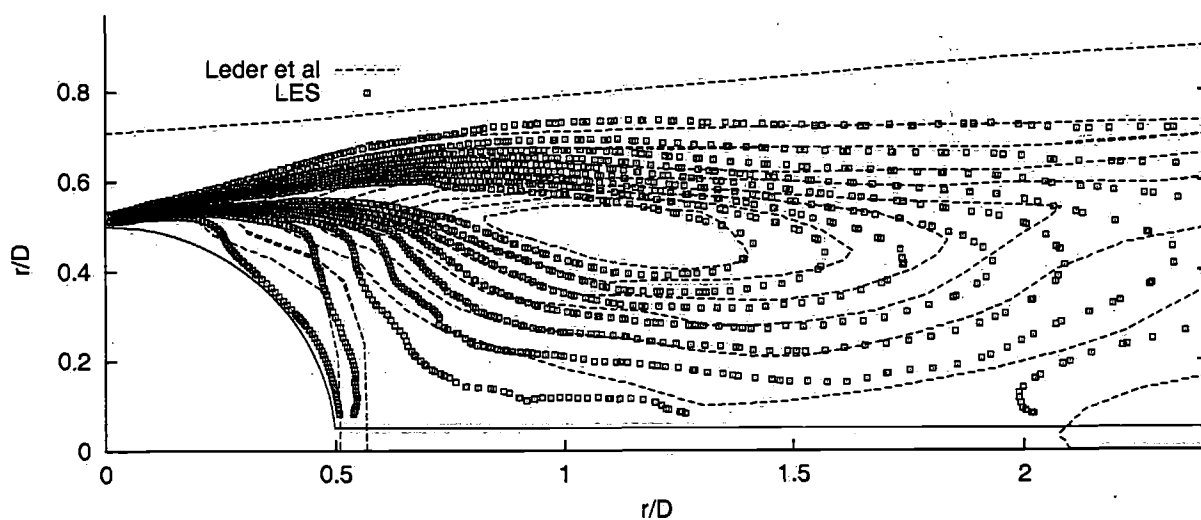


Abbildung 8.18: Vergleich von Reynoldsschen Spannungen $\overline{v'_z v'_z} / v_\infty^2$ aus Simulation mit Stab und Experiment [56]: Konturen zwischen 0,01 und 0,09 mit einem Abstand von 0,01 dargestellt.

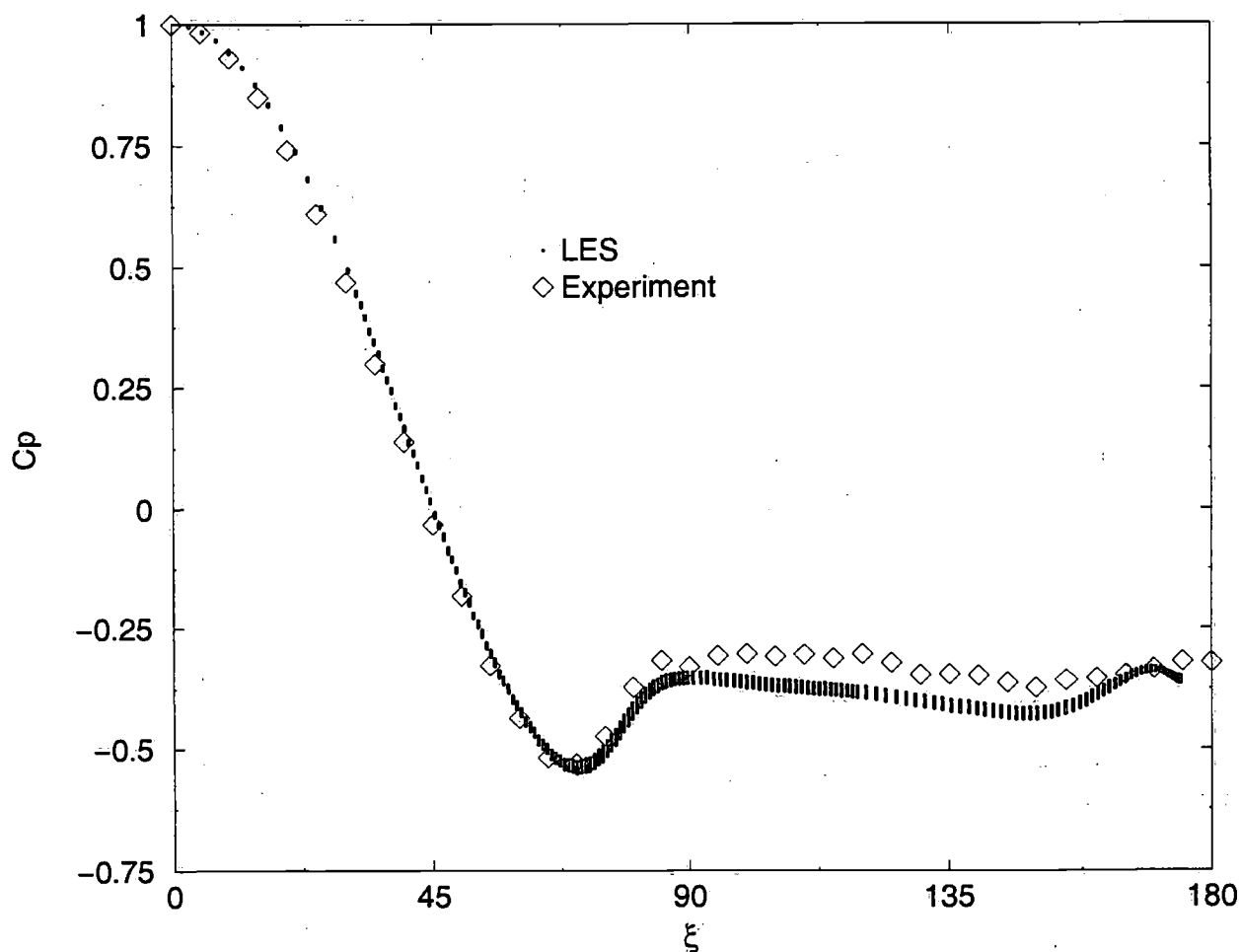


Abbildung 8.19: Vergleich von Druckkoeffizient C_p auf der Kugeloberfläche aus Simulation und Experiment [3].

Im Vergleich zu der guten Übereinstimmung zwischen Grobstruktursimulation und Experiment, ist die Vorhersage der statistischen Modelle mangelhaft. Der Unterschied wird am gemittelten Geschwindigkeitsprofil in Strömungsrichtung in Abb. 8.20 weniger deutlich, als beim Vergleich zwischen Experiment und Berechnung in Abb. 8.21. Der Betrag und die Lage des Maximums der Reynoldsschen Spannung $\overline{v'_z v'_z} \approx 2k/3$ stimmen weniger gut mit dem Experiment überein, wobei das $k-\omega$ Modell deutlich besser abschneidet als das $k-\epsilon$ Modell für hohe Reynoldssche Zahlen.

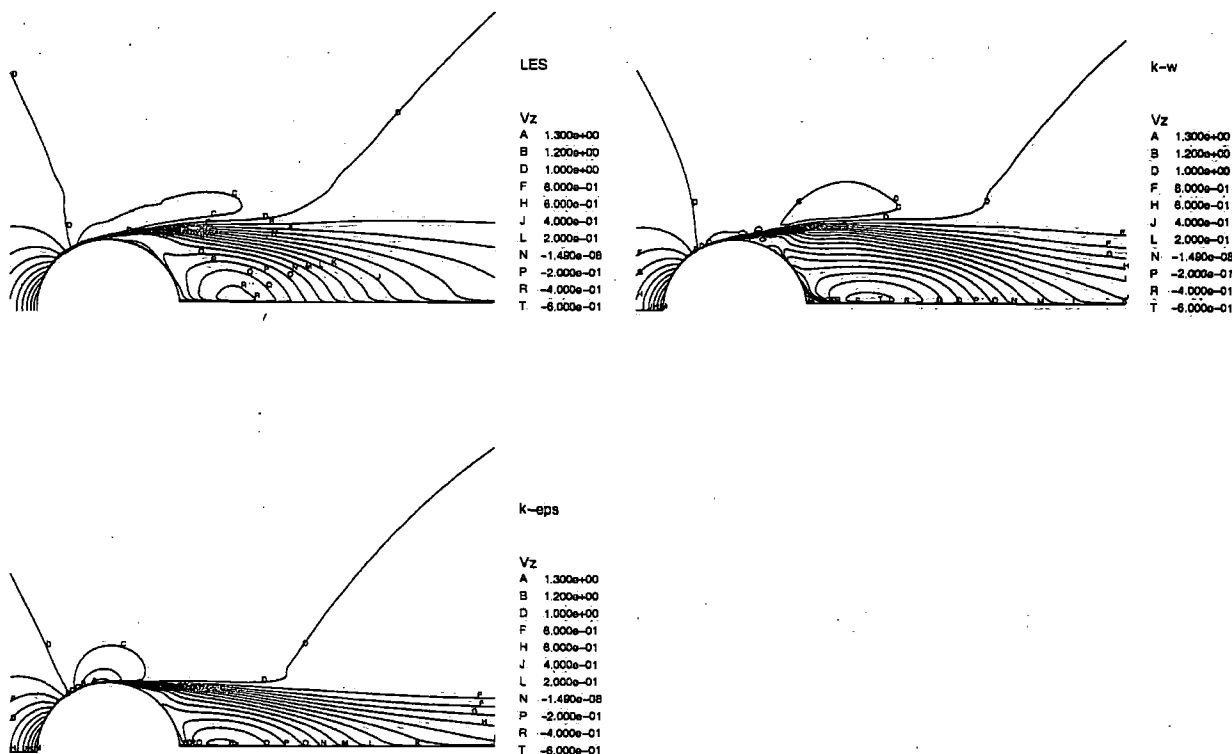


Abbildung 8.20: Konturen der mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{v}_z/v_∞ als Ergebnis der Grobstruktursimulation (oben links) und der zweidimensionalen achsensymmetrischen Berechnung mit dem $k-\omega$ Modell (rechts) und dem $k-\epsilon$ Modell (unten).

8.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden experimentelle und numerische Ergebnisse der Kugelumströmung mit eigenen Berechnungen verglichen. Die typischen Größen aller laminaren Berechnungen sind in Übereinstimmung mit den Referenzlösungen. Die Ergebnisse der Berechnungen mit statistischen Turbulenzmodellen sind mangelhaft. Auf groben Gittern oder mit Diskretisierung erster Ordnung ist die Übereinstimmung besser, da die Fehler sich gegenseitig aufheben. Wenn der numerische Fehler entfernt wird ist die Vorhersage falsch und deshalb sind die Modelle für die zweidimensionale Approximation ungeeignet. Die Grobstruktursimulation bei einer Reynoldsschen Zahl von 50 000 ist in Übereinstimmung mit den Experimenten: es wurde kein Spiralwirbel im Nachlauf der Kugel gefunden und die qualitative und quantitative Über-

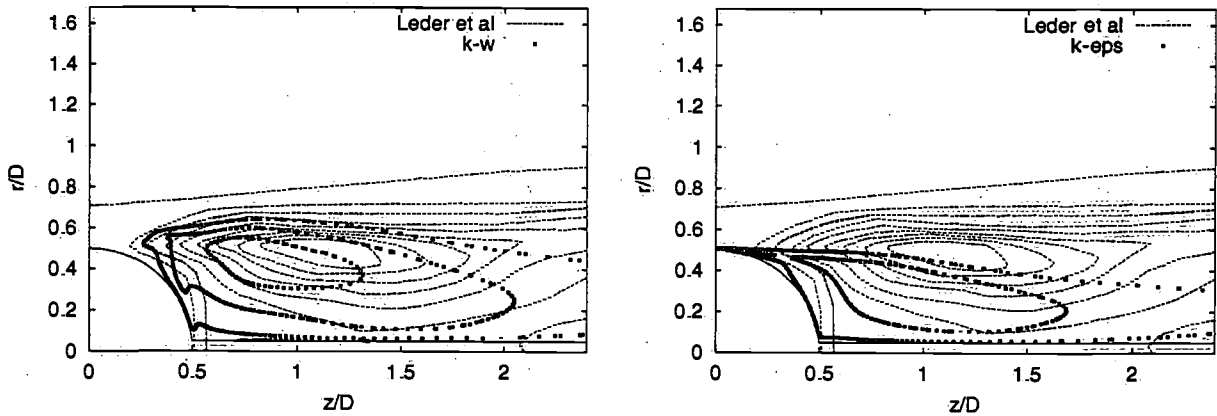


Abbildung 8.21: Vergleich der Reynoldsschen Spannungen $\overline{v'_z v'_z} / v_\infty^2$ aus dem Experiment [56] mit $\frac{2}{3}k/v_\infty^2$ aus der zweidimensionalen achsensymmetrischen Berechnung. Auf der linken Seite sind Konturen von 0,01 bis 0,03 mit dem $k-\omega$ Modell dargestellt, auf der rechten Seite die Konturen 0,01 und 0,02 mit dem $k-\varepsilon$ Modell, die beide auf dem gleichen Gitter berechnet sind.

einstimmung der mittleren Strömungsgrößen konnte gezeigt werden. Die Kelvin-Helmholtz Instabilität, das Aufrollen der abgelösten Scherschicht und die anschließende Wirbelpaarung wurde visualisiert, denn die Auflösung dieses physikalischen Phänomens ist grundlegend wichtig zur Vorhersage dieser Art von Strömung. Die Erzeugung des Gitters erfolgte manuell und in mehrere Schritten, wobei ein strukturiertes Gitter mit Verfeinerung von Regionen mit hohen Gradienten, wie in der Scherschicht und vor dem Druckminimum, sich am besten erwies. Der Widerstand wurde korrekt vorhergesagt, wobei der Einfluss der verwendeten Feinstrukturmodelle keine Rolle spielte. Die Berechnung mit dem Modell von Smagorinsky ergab ein fast identisches Ergebnis wie die Grobstruktursimulation ohne Modell, da alle wichtigen Eigenschaften der Kugelumströmung mit dem numerischen Netz erfasst werden konnten.

Kapitel 9

Zusammenfassung

9.1 Schlussfolgerung

Mit der verwendeten unstrukturierten Finite-Volumen Methode ist Grobstruktursimulation in komplizierten Geometrien durchführbar. Das zellflächenorientierte parallelisierte Verfahren erlaubt die Behandlung beliebiger Gitterblockgrenzen, lokale Konzentration von Kontrollvolumen und alle vernünftigen Kontrollvolumenformen. Es eignet sich auf preisgünstigen Rechnerarchitekturen wie PC-Cluster für Strömungsberechnung in inkompressiblen Fluiden bis zu Reynoldsschen Zahlen von $Re = 10\,000$. Oberhalb dieser Grenze ist derzeit der Einsatz von parallelen Hochleistungsrechnersystemen erforderlich, um in akzeptabler Zeit Vorhersagen zu ermöglichen. Numerische Fehler und Modellfehler können prinzipiell voneinander getrennt werden, in Grobstruktursimulationen ist das schwierig, da Gitterverfeinerung den Modelleinfluss verringert. Mit der vorliegenden Methode kann der Modellfehler wegen der starken Wechselwirkung zwischen Numerik und Modell nicht eliminiert werden. Aus diesem Grund war eine Bewertung der Modelle durch eine Vielzahl von Tests nötig. Die Methode wurde an sechs verschiedenen Problemen getestet, die einzeln zusammengefasst werden.

Die Abnahme turbulenter kinetischer Energie in isotroper homogener Turbulenz folgt einem Exponentialgesetz. An diesem Beispiel werden Grobstruktursimulationen zur Überprüfung der notwendigen Filterweite mit dem Modell von Smagorinsky durchgeführt. Der Einfluss der Filterweite nimmt wie erwartet mit der Feinheit des numerischen Gitters ab. Auf geeigneten Gittern ist die Filterweite von geringer Bedeutung und die implizite Filterung durch die numerische Methode ausreichend. Die Simulation mit dem dynamischen Modell ergibt mit der verwendeten expliziten Rechteckfiltermethode einen homogenen Koeffizienten von 0,05-0,08, der unterhalb des verwendeten Wertes von 0,1 im Smagorinsky Modell liegt. Die Kalibrierung des Modells von Spezial zur Anwendung im gesamten Bereich der Reynoldsschen Zahl wird mit Grobstruktursimulationen durchgeführt, und ergibt die Koeffizienten $\beta = 0,01$ und $n = 3$. Der Einfluss der Feinstrukturmodelle auf dem feinsten Gitter ist in den berechneten homogenen Simulationen gering und der Unterschied zur Simulation ohne Feinstrukturmodell vernachlässigbar.

Die Simulation von ebenen Kanalströmungen bei $Re_\tau = 180$ und 590 sind Testfälle mit kleinem numerischen Fehler und es liegen direkte Simulationen mit Methoden von hoher Ordnung zum Vergleich vor. Meist führt die Anwendung der Feinstrukturmodelle zu schlechterer Übereinstimmung der zeitgemittelten Profile mit DNS Resultaten. Bei $Re_\tau = 180$ führt die Anwendung aller Modelle zu schlechterer Übereinstimmung als die Berechnung ohne Modell.

Modellbeitrag und numerische Fehler liegen nahe zusammen und können durch Simulationen auf Netzen mit höherer Auflösung nicht getrennt werden, da beide abnehmen und die Lösung sich der direkten Simulation annähert.

Bei $Re_\tau = 590$ verringern die Modelle die vorhergesagten Reynoldsschen Spannungen und ein geringer Modellbeitrag führt zu verbesserter Vorhersage im Vergleich zur Simulation ohne Modell. Der Modelleinfluss durch die berechneten Feinstrukturspannungen nimmt vom Germano Modell über das Modell von Speziale zum Smagorinsky Modell zu.

Die Simulation der Umströmung eines Rundzylinders bei $Re = 3900$ ist mit experimentellen und numerischen Simulationen in guter Übereinstimmung. Der Vergleich zu den Experimenten weist geringe Differenzen auf, für die unterschiedliche Simulationsbedingungen verantwortlich gemacht werden. Geringe Gitterauflösung führt bei diesen Strömungen zu numerischer bedingter Transition; die korrekte Bestimmung der Transition in der Scherschicht durch örtliche Verfeinerung ist von entscheidender Bedeutung und kann durch die gängigen RANS-Modelle nicht bestimmt werden. Der Beitrag durch die Feinstrukturmodelle ist im Bereich des numerischen Fehlers, und deren Verwendung bringt keine sichtbare Verbesserung.

Die Umströmung des Rundzylinders bei $Re = 140\,000$ wird am Widerstandsbeiwert beurteilt, der ein zuverlässiger Indikator für das Simulationsergebnis ist. Ein geringer Modellbeitrag wie für das Modell GER sagt einen kleinen Widerstand vorher, der auf numerische bedingte Transition vor der Ablösung hinweist. Mit höherem Modellbeitrag wie bei SMG ist die Vorhersage besser und die Übereinstimmung zufriedenstellend. Das Modell hat in diesem Fall entscheidenden Einfluss auf das Simulationsergebnis.

Begleitend zur Grobstruktursimulation der Strömung um eine Kugel bei $Re = 50\,000$, wurden Visualisierungsexperimente in Wassertank und Windkanal durchgeführt, die in ihrem Aufbau und im Ergebnis übereinstimmen. Sowohl in der Simulation als auch im Experiment wird Wirbelpaarung als Folge der Kelvin-Helmholtz Scherschichtinstabilität beobachtet. Die Existenz eines rotierenden Wirbels im Kugelnachlauf von dem in [56] berichtet wurde, hat sich weder im Experiment noch in der Simulation bestätigt, obwohl die Reynoldsschen Spannungen in guter Übereinstimmung sind. Die Simulationen ohne Modell und mit dem Modell von Smagorinsky ergeben keinen sichtbaren Unterschied. Alle zeitgemittelten Felder mit ausführlichen Profilen im Anhang sollen zu Datenbanken beitragen, mit deren Hilfe RANS-Modelle verbessert werden können.

Die Vorhersage mit statistischen Turbulenzmodellen ist bei Kugel- und Zylinderumströmungen unbefriedigend. Die Grobstruktursimulation ist derzeit die einzige Möglichkeit um diese Strömungen vorherzusagen. Die Feinstrukturmodelle gewinnen bei den untersuchten Fällen mit Zunahme der Reynoldsschen Zahl an Bedeutung: für kleine Re ist der Modellbeitrag im Bereich des numerischen Fehlers. Der Einfluss muss in schwach turbulenten Strömungen durch eine Verringerung der Konstante unterdrückt werden, um eine Dämpfung der Turbulenz zu verhindern. Mit Zunahme des Turbulenzgrades gewinnt das Feinstrukturmodell an Bedeutung, dessen Anwendung durch die Theorie gerechtfertigt ist.

9.2 Ausblick

Diese Arbeit soll zum Verständnis von Turbulenz durch Grobstruktursimulationen beitragen. Die Fortschritte seit dem ersten Modell von Smagorinsky sind klein, wenn man die

Verbreitung dieses Modells berücksichtigt, trotzdem aber erkennbar. Die Entwicklung von numerischen Methoden, Turbulenzmodellen und Computertechnik wird sich fortsetzen und den vorhersagbaren Bereich der Reynoldsschen Zahl ausdehnen. Instationäre Ereignisse sind nicht durch statistische Modelle vorhersagbar, die Auflösung der Grobstruktur würde in den meisten Fällen für die technische Anwendung jedoch ausreichen. Die Anwendung solcher Methoden beschränkt sich meist auf einen akademischen Bereich, da deren Anwendung Bedingungen voraussetzt, die im industriellen Wettbewerb nicht erfüllbar sind. Experiment, direkte Simulation, Grobstruktursimulation und statistische Modelle werden in Zukunft benutzt und entwickelt werden, da die Methoden gegenseitig benötigt werden um Validierungen und Vergleiche durchzuführen, ohne die Turbulenz nicht erfassbar, modellierbar und letztlich vorhersagbar wird.

Literaturverzeichnis

- [1] E. Achenbach, Vortex Shedding from Spheres, *J. Fluid. Mech.*, **62**, 209–221 (1974).
- [2] G. P. Almeida, D. F. G. Durao, and M. V. Heitor, Wake flows behind two-dimensional model hills. *Exp. Thermal and Fluid Science*, **7**, 87 (1993).
- [3] V. Bakić, Flow visualization of the flow around a sphere. Private communication (2000).
- [4] J. Bardina, J. H. Ferziger, W. C. Reynolds, Improved subgrid models for large eddy simulation. AIAA paper 80-1357, (1980).
- [5] J. Bardina, Improved turbulence models on large eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows. Dissertation, Stanford University, USA (1983).
- [6] J. Bardina, J. H. Ferziger, R. S. Rogallo, Effect of rotation on isotropic turbulence: computation and modelling. *J. Fluid Mech.*, **154**, 321– (1985).
- [7] G. K. Batchelor, The theory of homogeneous turbulence, Cambridge University Press (1953).
- [8] P. Beaudan, P. Moin, Numerical experiments on the flow past circular cylinders at sub-critical Reynolds numbers, Report no. TF-62, Thermosciences Div., Stanford University, USA (1994).
- [9] P. Bradshaw, The understanding and prediction of turbulent flow - 1996, *Eng. Foundation Heat Transfer Conference* (1996).
- [10] P. Bradshaw, Private communication (1999).
- [11] M. Breuer, Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: Numerical and modeling aspects. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **28**, 1281 – 1302 (1998).
- [12] M. Breuer, A Challenging Test Case for Large Eddy Simulation: High Reynolds Number Circular Cylinder Flow, *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, **21**, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 648–654, (2000).
- [13] B. Cantwell, D. Coles, An experimental study on entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder, *J. Fluid Mechanics*, **136**, 321–374 (1983).
- [14] G. S. Cardell, Flow past a circular cylinder with a permeable splitter table, Dissertation, California Institut of Technology (1993).
- [15] K. -Y. Chien, Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model, *AIAA J.*, **20**, 33–38 (1982).

- [16] H. Choi, P. Moin, J. Kim, Turbulent drag reduction: studies of feedback control over riblets, *J. Fluid. Mech.*, **255**, 503–539 (1994).
- [17] R. A. Clark, J. H. Ferziger, W. C. Reynolds, Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow, Mech. Eng. Dept., Stanford university report TF-9 (1977).
- [18] R. A. Clark, J. H. Ferziger, W. C. Reynolds, Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow, *J. Fluid. Mech.*, **91**, 1–16 (1979).
- [19] H. Choi, P. Moin, Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow. *Journal of Computational Physics*, **113**, 1–4 (1994).
- [20] C. K. Chyu, D. Rockwell, Near-wake structure of an oscillating cylinder: Effect of controlled shear-layer vorticies. *J. Fluid. Mech.*, **322**, 21– (1996).
- [21] G. Comte-Bellot, S. Corrsin, The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **25**, 657–682 (1966).
- [22] B. I. Davydov, Soviet Physics Doklay, **6**, 10– (1961).
- [23] J. W. Deardoff, A numerical study of the three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, **41**, 453–480 (1970).
- [24] G. B. Deng, J. Piquet, P. Queutey, M. Visonneau, Incompressible Flow Calculations with a Consistent Physical Interpolation using the CPI Method, *Computers & Fluids*, Vol. 23,8, 1020–1047 (1994).
- [25] G. B. Deng, M. Visonneau, Computation of a Wing-Body Junction Flow with a New Reynolds-Stress Transport Model. 22nd Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington DC, August 9-14 (1998).
- [26] G. B. Deng, M. Visonneau, Comparison of explicit algebraic stress models and second-order turbulence closures for steady flows around ships. 7th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Nantes, July 19-22 (1999).
- [27] E. R. van Driest, On turbulent flow near a wall, *J. Aero. Sci.*, **23**, 1007–1011 (1956).
- [28] B. Fornberg, Steady viscous flow past a sphere at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, **190**, 470– (1988).
- [29] J. H. Ferziger and M. Perić, Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer, Berlin (1996).
- [30] J. H. Ferziger, Workshop on physics and simulation of turbulence, Vortrag im Graduiertenkolleg Universität Hamburg und TU Hamburg-Harburg, (1999).
- [31] R. Fletcher, Conjugate Gradient Methods for indefinite systems, *Lecture Notes in Mathematics*, **506**, 773–789 (1976).
- [32] J. Fröhlich, W. Rodi, Ph. Kessler, S. Parpais, J. P. Bertoglio, D. Laurence, Large Eddy Simulation of Flow around Circular Cylinders on Structured and Unstructured Grids. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, **66**, E. H. Hirschel (ed.), Vieweg Verlag (1998).

- [33] J. H. Gerrad, The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, **25**, 401– (1966).
- [34] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin and W. H. Cabot, A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model, *Physics of Fluids A*, **3**, 1760–1765 (1992).
- [35] M. Germano, The Filtering Approach, *Journal of Fluid Mechanics*, **235**, 325–336 (1992).
- [36] S. Ghosal, P. Moin, The basic Equations for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry. *Journal of Comp. Physics*, **118**, 24–37 (1995).
- [37] S. Ghosal, T. S. Lund, P. Moin, K. Akselvoll, A dynamic localization model for large eddy simulation of turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **286**, 229–255 (1995).
- [38] G. H. Golub, C. van Loan, Matrix computations, John Hopkins Univ. Press, Baltimore (1990).
- [39] M. R. Hestens, E. Stiefel, Methods of conjugate gradients for sloving linear systems, *Nat. Bur. Standards J. Res.*, **49**, 409–436 (1952).
- [40] J. O. Hinze, Turbulence, McGraw-Hill (1975).
- [41] C. J. Jiménez-Härtel, Analyse und Modellierung der Feinstruktur im wandnahen Bereich turbulenter Scherströmungen, Dissertation, Technische Universität München (1994).
- [42] C. Härtel, Turbulent Flows: Direct Numerical Simulation and Large-eddy Simulation, Handbook of Computational Fluid Mechanics (ed. Roger Peyret), Academic Press (1996).
- [43] W. P. Jones, B. E. Launder, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. of heat and mass transfer*, **15**, 301–314 (1972).
- [44] B. E. Launder, D. B. Spalding, The numerical computation of turbulent flows, *Comp. Methods in applied mechanics and engineering*, **2**, 269–289 (1974).
- [45] B. E. Launder, Second moment closure: methology and practice. Turbulence models and their applications, Collection de la Direction des études et recherches d'électricité de France, Paris (1984).
- [46] J. Jiménez, P. Moin, The minimal flow unit in near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **225**, 213–240, (1991).
- [47] T. A. Johnson, V. C. Patel, Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300, *Journal of Fluid Mechanics*, **378**, 19–70, (1999).
- [48] H. J. Kim, P. A. Durbin, Observations of the frequencies in a sphere wake and of drag increase by acoustic, *Physics of Fluids*, **31**, 3260– (1988).
- [49] J. Kim, P. Moin, R. Moser, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **177**, 133–166 (1987).
- [50] P. K. Khosla, S. G. Rubin, A diagonally dominant second order accurate implicit scheme. *Computers Fluids*, **2**, 207–209 (1974)

- [51] A. N. Kolmogorov, Local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid at very high Reynolds numbers. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, **30**, 299–303 (1941).
- [52] A. G. Kravchenko, P. Moin, Numerical studies of flow over circular cylinder at $Re = 3900$, *Physics of Fluids*, **12**, 403–417 (2000).
- [53] S. Kenjereš, Numerical modelling of complex buoyancy-driven flows, Dissertation, TU Delft, Niederlande (1999).
- [54] B. E. Launder, B. I. Sharma, Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc, *Letters in Heat and mass transfer*, Vol. 1, **2**, 131–138 (1974).
- [55] A. Leder, Abgelöste Strömungen (Physikalische Grundlagen), Grundlagen und Fortschritte der Ingenieurwissenschaften, Vieweg Verlag, Braunschweig (1992).
- [56] A. Leder, D. Geropp, Coherent Structures in Axisymmetric Shear Layer Flows, Near-Wall Turbulent Flows, R. M. C. So, C. G. Speziale and B. E. Launder (Editors), Elsevier Science Publishers (1993).
- [57] M. J. Lee, Numerical Experiment on the Structure of Homogeneous Turbulence, Dissertation Stanford University, USA (1985).
- [58] D. C. Leslie, Theories of Turbulence, Oxford University Press (1973).
- [59] M. Lesieur, Turbulence in Fluids, Kluwer Press (second edition), Dordrecht (1991).
- [60] A. Leonard, On The Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows, *Advances in Geophysics*, **18 A**, 237–248 (1974).
- [61] Ž. Lilek, S. Muzaferija, M. Perić, V. Seidl, Computation of unsteady flows using non-matching blocks of structured grid, *Numerical Heat Transfer*, part B, **32**, 403–418 (1997).
- [62] D. K. Lilly, The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments, *Proceedings of IBM Scientific Computing Symposium*, IBM Form No.320-1951, 195–210 (1967).
- [63] D. K. Lilly, A Proposed Modification of the Germano Subgrid Scale Closure Method, *Physics of Fluids A*, **4**, 633–635 (1992).
- [64] L. M. Lourenco, C. Shih, The velocity field of the turbulent near wake of a circular cylinder, a particle image velocitmetry study (1993). Unveröffentlichte Daten aus [8].
- [65] X. Ma, G. S. Karamanos, G. E. Karniadakis, Dynamics and low-dimensionality of a turbulent wake, *J. Fluid Mech.*, **410**, 29–65 (2000).
- [66] R. H. Magarvey, R. L. Bishop, Sphere wakes in liquid-liquid systems. *Canadian Journal of Physics*, **40**, 800– (1961).
- [67] T. Maxworthy, Experiments on the Flow Around a Sphere at High Reynolds Numbers, *Journal of Applied Mechanics*, 598–607 (1969).
- [68] N. N. Mansour, J. Kim, P. Moin, Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, **194**, 15–44 (1988).

- [69] O. J. McMillan, J. H. Ferziger, R. S. Rogallo, Tests of new subgrid-scale models in strained turbulence, AIAA paper 80-1339, (1980).
- [70] R. Mittal, P. Moin, Suitability of upwind-biased finite-difference schemes for large-eddy simulations of turbulent flows. *AIAA J.*, **35**, 1415, (1997).
- [71] O. Molerus, Grundlagen der mechanischen Verfahrenstechnik, Vorlesungsskriptum, FAU Erlangen (1993).
- [72] P. Moin, D. Carati, T. Lund, S. Ghosal, K. Aksevoll, Developments and Applications of dynamic models for large eddy simulations. 74th AGARD Fluid Dynamics Panel, Chania, Greece, 1994.
- [73] R. D. Moser, J. Kim, N. N. Mansour, Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel up to $Re_\tau = 590$. *Physics of Fluids*, **11**, 943–945 (1999).
- [74] F. R. Menter, Zonal Two-Equations $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows, *AIAA 24th Fluid Dyn. Conf. Orlando*, AIAA paper 93-2906 (1993).
- [75] C. Meneveau, Statistics of turbulence subgrid scale stresses: necessary conditions and experimental tests. *Physics of Fluids*, **6**, 815 (1994).
- [76] S. Muzaferija, Adaptive finite volume method for flow predictions using unstructured meshes and multigrid approach. Dissertation, University of London, England (1994).
- [77] I. Nakamura, Steady wake behind a sphere. *Physics of Fluids*, **19**, 5–8 (1976).
- [78] R. Natarajan, A. Acrivos, The instability of the steady flow past spheres and disks. *J. Fluid Mech.*, **254**, 323–344 (1993).
- [79] F. Noca, H. Park, M. Gharib, Vortex formation length of a circular cylinder ($300 < Re < 4000$) using DPIV. Proceedings on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibration, Washington D.C., ASME Fluids Engineering Division (1998).
- [80] C. Norberg, Effects of Reynolds number and low-intensity free stream turbulence on the flow around a circular cylinder, Publ. No. 87/2, Department of ThermoScience and Fluid Mech., Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden (1987).
- [81] C. Norberg, An experimental investigation of the flow around a circular cylinder : Influence of aspect ratio. *J. Fluid Mech.*, **258**, 287–316 (1994).
- [82] S. Ölçmen, R. L. Simpson, An experimental study of a three-dimensional pressure-driven turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, **290**, 225–262 (1995).
- [83] L. Ong, J. Wallace, The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder, *Exp. Fluids*, **20**, 441–453 (1996).
- [84] S. A. Orszag, G. S. Patterson, Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 76–79 (1972).
- [85] C. W. Oseen, Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. *Ark. f. Math. Astro. och Fys.*, **6**, No. 29 (1910).

- [86] S. V. Patankar, D. B. Spalding, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **15**, 1787–(1972).
- [87] S. V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow. Series in Computational methods in Mechanics and thermal sciences, Hemisphere Publ. Coop., New York (1980).
- [88] G. S. Patterson, S. A. Orszag, Spectral Calculations of Isotropic turbulence: Efficient removal of Aliasing Interactions, *Physics of Fluids*, **14**, 2538–2541 (1971).
- [89] U. Piomelli, P. Moin, J. H. Ferziger, Model consistency in large eddy simulation of turbulent channel flows, *Physics of Fluids*, **31**, 1884–1891 (1988).
- [90] U. Piomelli, Local Space-Time averaging in the dynamic subgrid scale model. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **15** (1991).
- [91] U. Piomelli, J. R. Chasnov, Large-Eddy simulations: theory and applications, Turbulence and Transition Modelling (Eds. M. Hallböck *et al.*, ERCOFTAC SERIES Vol. 2, Kluwer Academic (1996).
- [92] M. Perić, A Finite Volume Method for the Prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts, PhD Thesis, Imperial College, London (1985).
- [93] J. Piquet, M. Visonneau, M. Perić, Computation of Turbulent Flows with Separation by Coherent Structure Capturing, Progress Report Joint CNRS-DFG Research Programm (1997).
- [94] J. Piquet, M. Visonneau, M. Perić, Computation of Turbulent Flows with Separation by Coherent Structure Capturing, Progress Report Joint CNRS-DFG Research Programm (1999).
- [95] C. M. Rhie, W. L. Chow, A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, **21**, 1525–1532 (1983).
- [96] W. Rodi, N. N. Mansour, Low Reynolds number $k-\epsilon$ modelling with the aid of direct simulation data, *J. Fluid Mech.*, **250**, 509–529 (1993).
- [97] R. S. Rogallo, Numerical Experiments in Homogeneous Turbulence, NASA Technical Memorandum 81315 (1981).
- [98] R. S. Rogallo, P. Moin, Numerical Simulation of Turbulent Flow, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16**, 99–137 (1984).
- [99] F. Roos and W. Willmarth, Some Experimental Results on Sphere and Disk Drag, *AIAA Journal*, **9**, 285–291 (1971).
- [100] A. Roshko, Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **10**, 345– (1961).
- [101] J. C. Rotta, Turbulente Strömungen: eine Einführung in die Theorie und ihre Anwendung. Teubner-Verlag, Stuttgart (1972).
- [102] H. Sakamoto, H. Haniu, A study on vortex shedding from spheres in uniform flow. *Jour. of Fluids Engineering*, **112**, 386–392 (1990).

- [103] M. Schäfer, S. Turek, R. Rannacher, M. Breuer, F. Durst, W. Rodi, Definition of Benchmark Problem: Incompressible turbulent flow (1996).
- [104] U. Schumann, Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli, *Jour. Comp. Physics*, **18**, 376–404 (1975).
- [105] H. Schlichting, *Grenzschichttheorie*, Verlag G. Braun, Karlsruhe (1965).
- [106] H. Schlichting, K. Gersten, *Grenzschichttheorie*, Springer, Berlin (1997).
- [107] M. Schmid, G. Deng, V. Seidl, M. Visonneau, M. Perić, Computation of Complex Turbulent Flows. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, **66**, E. H. Hirschel (ed.), Vieweg Verlag (1998).
- [108] V. Seidl, Entwicklung und Anwendung eines parallelen Finite-Volumen-Verfahrens zur Strömungssimulation auf unstrukturierten Gittern mit lokaler Verfeinerung, Dissertation, Universität Hamburg (1997).
- [109] J. Smagorinsky, General Circulation Experiment With the Primitive Equations: I. The Basic Experiment, *Monthly Weather Review*, **91**, 99–164 (1963).
- [110] J. Son, T. J. Hanratty, Velocity gradients at the wall for flow around a cylinder at Reynolds number from 5×10^3 to 10^5 , *Journal of Fluid Mechanics*, **35**, 353–368 (1969).
- [111] C. G. Speziale, Turbulence Modeling for Time-Dependent RANS and VLES: A Review, *AIAA Journal*, **36**, 173–184 (1998).
- [112] G. G. Stokes, On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **9**, **36**, Part II, 8–106 (1856).
- [113] H. L. Stone, Iterative Solution of Implicit Approximations of Mult-Dimensional partial differential equations. *SIAM J. Num. Anal.*, **1**, 117– (1968).
- [114] H. Tennekes J. L. Lumley, A first course in turbulence. MIT Press Cambridge, Massachusetts (1972).
- [115] A. G. Tomboulides, S. A. Orszag, G. E. Karniadakis, Direct and Large-Eddy Simulation of the Flow Past a Sphere, Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2, W. Rodi and F. Martelli (Editors), Elsevier Science Publishers, (1993).
- [116] A. G. Tomboulides, Direct and Large-Eddy Simulation of wake flows: Flow Past a Sphere, Dissertation, Princeton University, (1993).
- [117] F. Unger, Numerische Simulation turbulenter Rohrströmungen, Dissertation, Technische Universität München (1994).
- [118] D. C. Wilcox, Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models, *AIAA Journal*, **26**, 1299–1310 (1988).
- [119] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries Inc. (1993).
- [120] C. H. K. Williamson, Vortex Dynamics in the Cylinder Wake, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, **28**, 477–539 (1996).

- [121] A. A. Wray, Decaying isotropic turbulence, A selection of test cases for validation of large-eddy simulation, AGARD advisory report 345.
- [122] C. T. Wu, J. H. Ferziger, D. R. Chapman, Simulation and modelling of homogeneous compressed turbulence. Technical report TF-21, Dept. of Mech. Engineering, Stanford University, USA (1985).
- [123] V. Yakhot, S. O. Orszag, Renormalization group theories in turbulence, *Journal Sci. Comp.*, **3**, Vol. 1 (1986).
- [124] Y. Zang, R. L. Street, J. R. Koseff, A dynamic mixed subgrid scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Physics of Fluids*, **3**, 186 (1993).
- [125] M. M. Zdravkovich, Flow around circular cylinders. Oxford University Press (1997).

Appendix

Beschränkung des verwendeten Verfahrens

Das verwendete Finite-Volumen Verfahren mit unstrukturiertem Gitter hat bei einer Vielzahl von Anwendungen Vorteile. Anhand eines Beispiels werden die Einschränkungen des Verfahrens erörtert.

Lokale Gitterverfeinerung

Numerische Verfahren von Ordnung höher als eins führen zu numerischer Oszillation der Lösung bei unzureichender Auflösung durch das Rechnetz. Es gibt mehrere Abhilfen gegen die typischen Folgen (beispielsweise eine Schachbrettmusterlösung). Im einfachsten Fall verschwinden die Oszillationen durch Erhöhung der Gitterauflösung. Das Netz wird – je nach Verfahren – lokal, blockweise oder global verfeinert. Eine globale Verfeinerung auf den halben Gitterlinienabstand in jede Richtung ist in den wenigsten Fällen möglich, denn dies führt zu einer Verachtfachung des Arbeitsspeicherbedarfs (bei hexaederförmigen Kontrollvolumen); die Rechenzeit steigt normalerweise um einen noch größeren Faktor. Bei den blockstrukturierten Verfahren besteht die Möglichkeit, einzelne Blöcke zu verfeinern. Die blockweise und die lokale Verfeinerung setzen weitergehende Kenntnisse über die Strömung voraus, damit in den wichtigen Bereichen durch die Verfeinerung der Diskretisierungsfehler verringert werden kann.

Der Übergang von feinem zu grobem Gitter sollte bei lokaler und blockweiser Verfeinerung in einem Gebiet der Strömung stattfinden, in dem geringe Gradienten der Variablen auftreten (laminares Strömungsgebiet, geringer Turbulenzgrad). In den hier durchgeführten Berechnungen konnte dies bei der Umströmung der Kugel und des Zylinders erreicht werden; dort hat sich die lokale Gitterverfeinerung als unverzichtbar erwiesen. Die Simulation

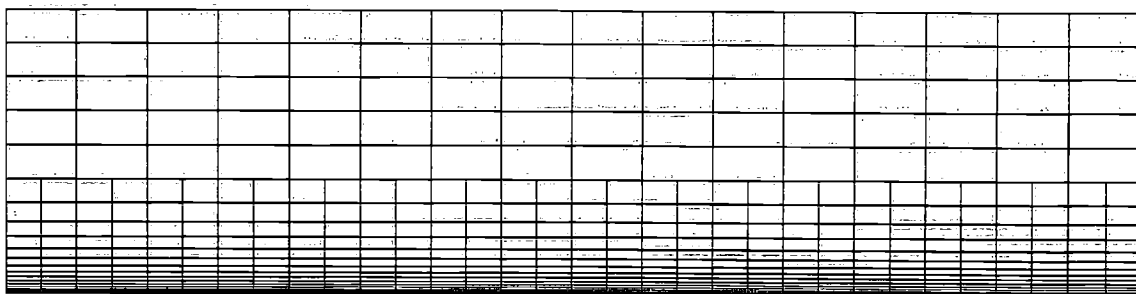


Abbildung 9.1: Schnitt durch die y - z -Ebene einer Kanalhälfte; Rechnetz mit höherer Auflösung in Wandnähe zur Simulation der Strömung.

der Kanalströmung mit einem feinen Netz in der Grenzschicht und einem groben Netz im Strömungskern erfordert jedoch Vorsicht. Im Rahmen dieser Arbeit wurden auch bei der Kanalströmung lokale Verfeinerungen getestet, obwohl das oben genannte Kriterium nicht erfüllt ist (die turbulenten Wirbel sind bei einer Kanalströmung überall).

Das verwendete Gitter mit einer Auflösung von $56 \times 16 \times 32$ an der Wand und $28 \times 5 \times 16$ (Kanalmitte) pro Kanalhälfte hat 61440 Kontrollvolumen, genau wie das strukturierte Gitter. Ein Ausschnitt daraus ist in Abb. 9.1 dargestellt.

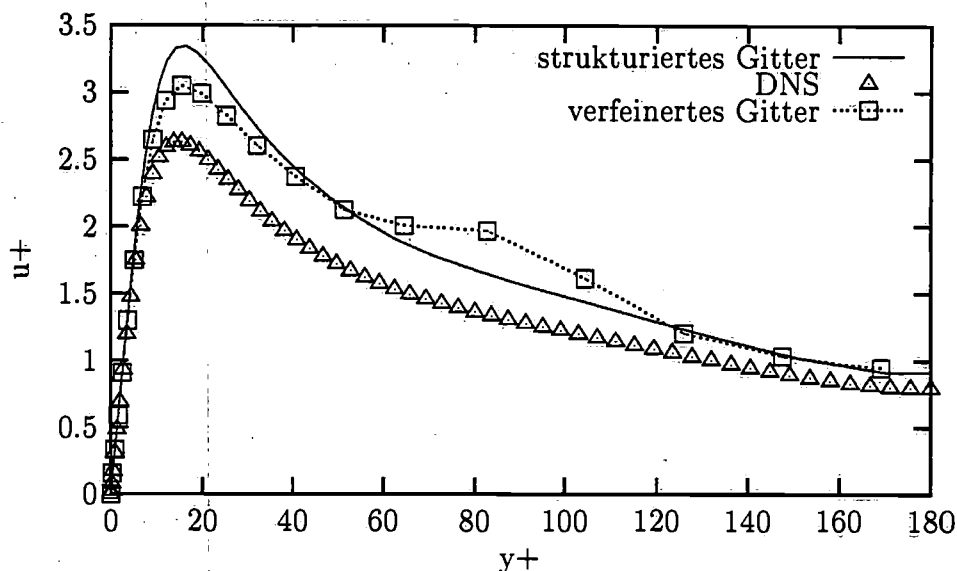


Abbildung 9.2: Turbulente Normalspannungen simuliert auf einem strukturierten Gitter und einem lokal verfeinerten Gitter - bei gleicher Anzahl von Kontrollvolumen - im Vergleich zur direkten numerischen Simulation [49].

Wird der interpolierte Zellflächenmittelwert an der Grenze zwischen hoher und geringer Gitterauflösung nach Gl. (3.8) berechnet, so entsteht auf groben Gittern eine Schachbrettmusterlösung am Übergang und die Lösung ist physikalisch falsch. Bei Verwendung von linearer Interpolation nach Gl. (3.6), womit ein Mittelwert auf der Geraden zwischen den beiden Zellzentren berechnet wird, ist die Lösung stabil. Die Profile von Statistiken höherer Ordnung, wie die Reynoldsschen Spannungen in Abb. 9.2, zeigen aber am Übergang einen Sprung im Verlauf. Die Anzahl der Volumen ist in beiden Fällen identisch; im Fall des lokal verfeinerten Gitters befinden sich in der Grenzschicht eine größere Anzahl von Kontrollvolumen, dementsprechend ist die Übereinstimmung im wandnahen Bereich besser als mit dem strukturierten Gitter. Im Bereich der Kanalmitte, wo das lokal verfeinerte Gitter gröber ist als das strukturierte Gitter, ist die Übereinstimmung zur DNS geringer. Im Gegensatz zu einem strukturiertem Gitter, auf dem die Interpolation genauer ist, wird an der Verfeinerungsgrenze ein zusätzlicher Fehler mit der linearen Interpolation eingeführt, der mit der Interpolation höherer Ordnung größer wird.

Die Ursache für diesen Effekt sind die Linien, die die benachbarten KV-Zentren über die Verfeinerungsgrenze verbinden, die weder durch das Zentrum der gemeinsamen Fläche verlaufen noch orthogonal zu dieser Fläche sind (was im übrigen Teil des Gitters der Fall ist und zur teilweisen Aufhebung der Fehler an gegenüberliegenden Seiten führt). Je flacher die Zellen entlang der Verfeinerungsgrenze sind (z.B. wenn die Grenze näher zur Wand verschoben wird, wo die Zellen viel flacher sind), umso ungenauer wird die Interpolation. Die

zusätzlichen Fehler durch den Übergang zwischen grob und fein sind in diesem Fall insgesamt größer, als der Nutzen durch das feinere Gitter in Wandnähe, so dass in diesem speziellen Fall die lokale Verfeinerung des Gitters keinen Vorteil bringt.

Um diese Nachteile zu beheben, müsste eine spezielle Diskretisierung für Zellen entlang der Verfeinerungsgrenze entwickelt werden. Möglicherweise würde eine Verfeinerung mit einem stetigeren Übergang (z.B. 3:2 statt 2:1 im obigen Beispiel) zu besseren Ergebnissen führen, was hier jedoch nicht getestet wurde.

Dämpfung

Eine weitere Erhöhung der Stabilität auf Kosten der Genauigkeit erreicht man durch die Mischung von Interpolation höherer und niedriger Ordnung nach Gl. (3.10). Ein geringer Anteil eines Verfahrens erster Ordnung (üblicherweise Rückwärtsdifferenzen) kann die ungewünschten Oszillationen in der Lösung mit einem Verfahren hoher Ordnung dämpfen oder erst einmal zur Lösung führen, falls die Oszillationen die Konvergenz des Verfahrens verhindern. Dies ist die übliche Praxis bei der Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokesschen Gleichungen.

Bei einer DNS oder LES sind die Oszillationen Bestandteil der Lösung und es ist schwer die numerisch bedingten von den physikalischen zu unterscheiden. Auch ein ganz kleiner Anteil eines Verfahrens erster Ordnung kann die Lösung sehr stark verfälschen, wie in Abb. 9.2 dargestellt. Die Kanalströmung wurde auf strukturiertem Gitter einmal mit reinem ZDS und einmal mit 98% ZDS und 2% RDS simuliert. Die Lösung mit nur 2% Anteil an RDS sieht so aus, als wäre die Simulation auf einem viel gröberen Gitter durchgeführt worden.

Aus diesem Grund kann festgehalten werden, dass bei DNS und LES eine Beimischung von Verfahren niedriger Ordnung nur in Gebieten zulässig ist, wo eigentlich keine turbulenten Schwankungen zu erwarten sind (z.B. bei der Umströmung der Kugel in der Außenströmung und vor der Kugel).

Unstrukturierte Gitter mit Tetraedern

Ein ähnliches Problem ergibt sich bei Verwendung von Tetraedern als Kontrollvolumen: der Zellflächenmittelpunkt befindet sich meist nicht auf der Linie, die beide Kontrollvolumenzentren verbindet. Daraus resultieren Fehler von vergleichbarer Größe, wie am Übergang zwischen grobem und feinem Gitter. In erster Linie hängt das vom verwendeten Gittererzeugungsalgorithmus ab. Da dieser Fehler an jeder Zellfläche auftreten kann sind Berechnungen mit der hier verwendeten Finite-Volumen Methode mit Tetraedern weniger genau als mit Hexaedern. In komplizierten Geometrien ist eine Gittererzeugung ohne Verwendung von Tetraedern sehr viel zeitaufwendiger oder undurchführbar. Nach Möglichkeit sollten diese nicht an den Begrenzungen des Berechnungsgebietes verwendet werden, da dort mit Tetraedern eher Problemen auftreten als mit Hexaedern. Einer der Gründe ist die geringere Anzahl von Zellflächen zur Berechnung von Gradienten im Kontrollvolumenzentrum.

Um DNS oder LES auf unstrukturierten Gittern bestehend aus Tetraedern effizient durchführen zu können, müssen die Tetraeder von guter Qualität sein, oder die Diskretisierungsmethode muss speziell dafür entwickelt werden.

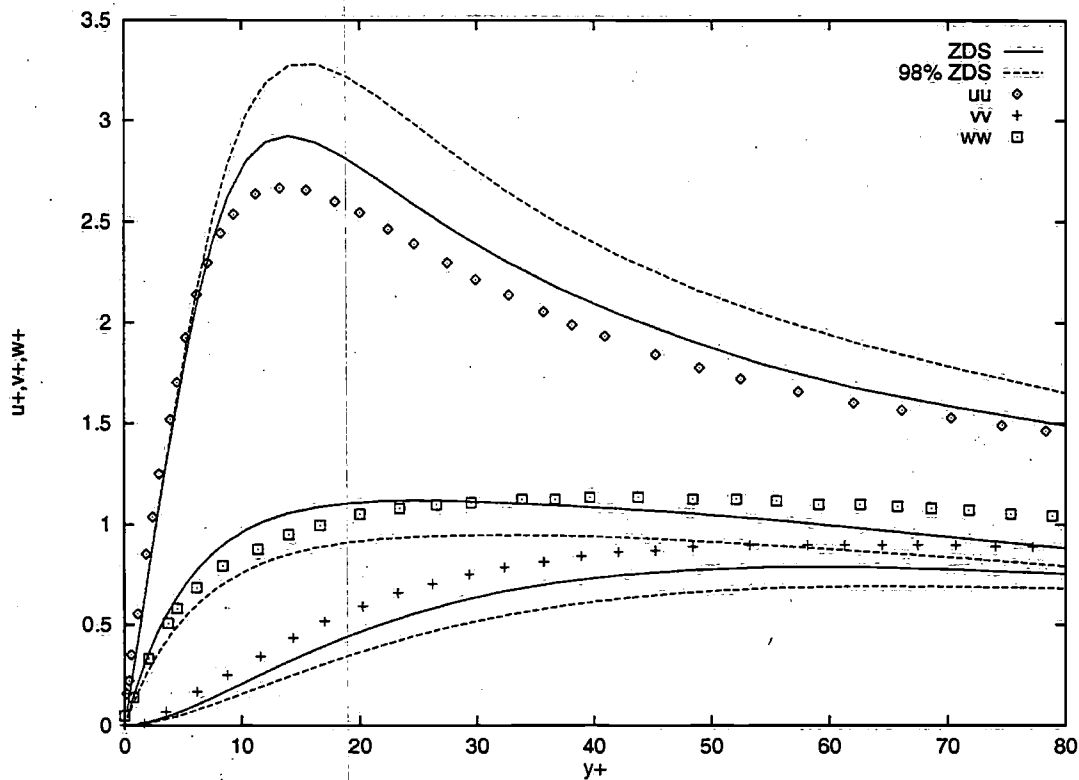


Abbildung 9.3: Turbulente Normalspannungen berechnet mit Diskretisierung hoher Ordnung (ZDS) und mit einer Mischung von hoher und geringer Ordnung (RDS) im Vergleich zur direkten numerischen Simulation [49].

Zeitgemittelte Strömungsfelder und Reynoldssche Spannungen zur Simulation der Strömung um eine Kugel

Die folgende Profile sind aus den zeitgemittelten Ergebnissen der Grobstruktursimulation der Strömung um eine Kugel entnommen. Diese sollen zur Aufdeckung von Modellierungsfehlern und zur Weiterentwicklung von statistischen Turbulenzmodellen beitragen.

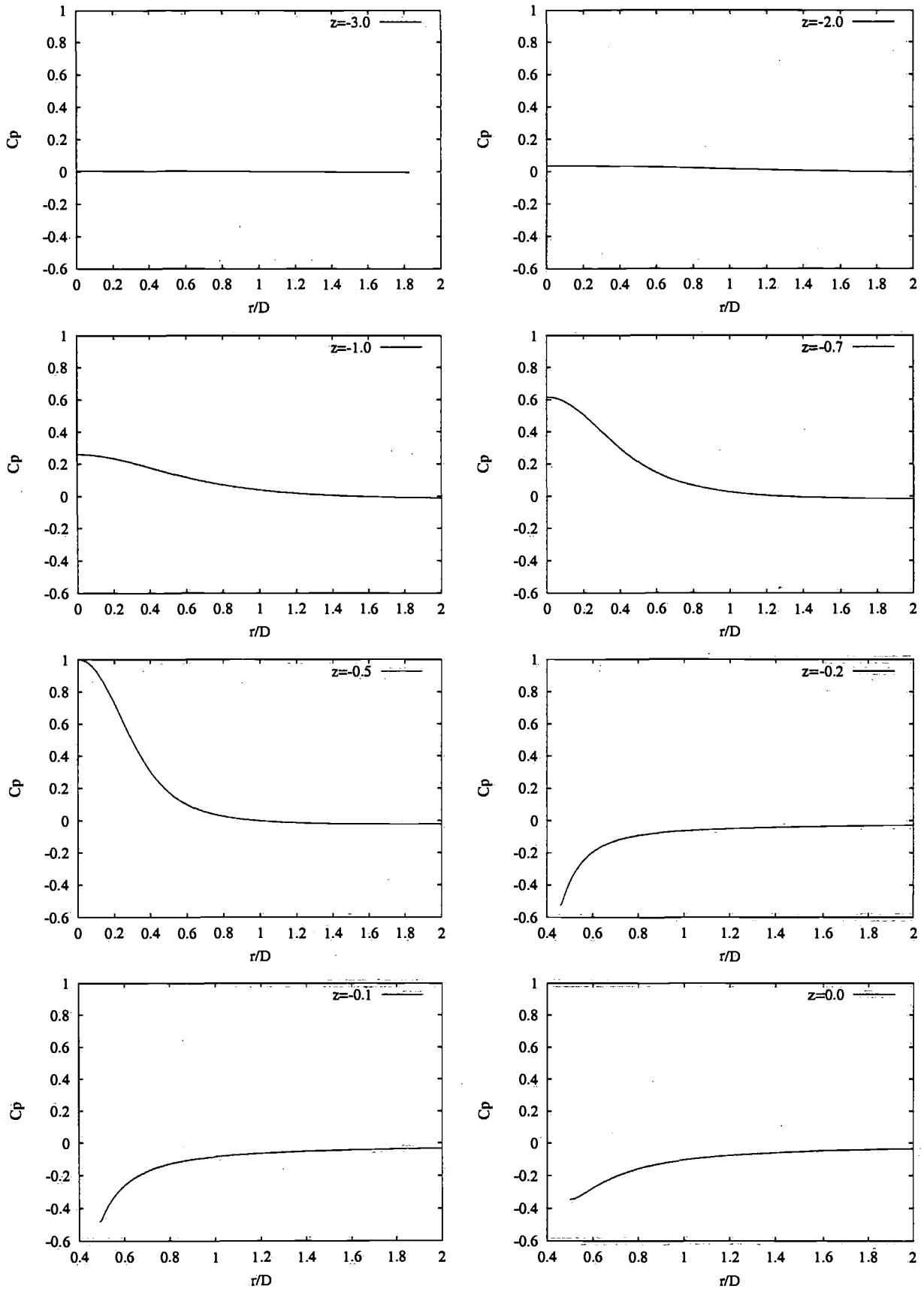


Abbildung 9.4: Profil des mittleren Druckkoeffizienten $\overline{C_p}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

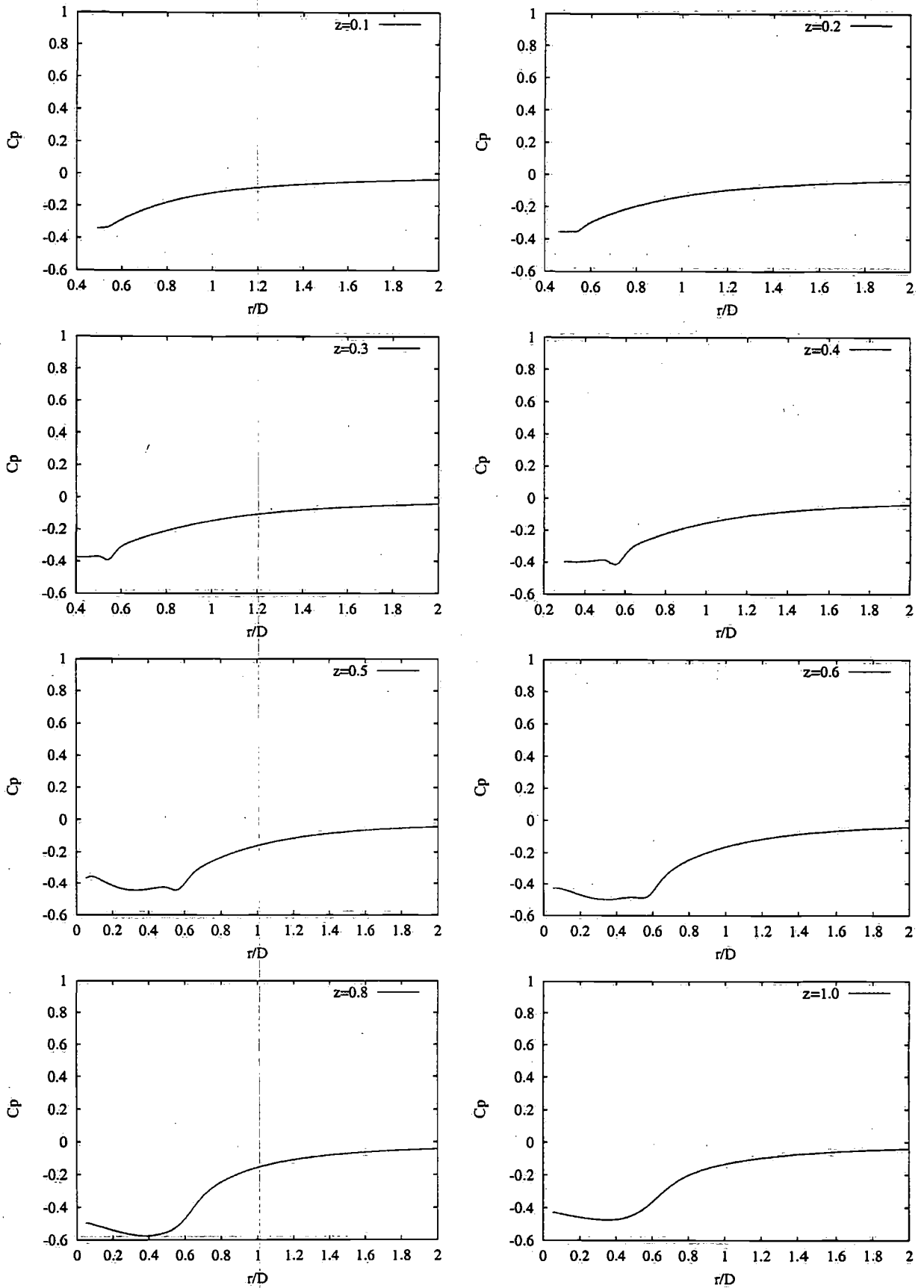


Abbildung 9.5: Profil des mittleren Druckkoeffizienten $\overline{C_p}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

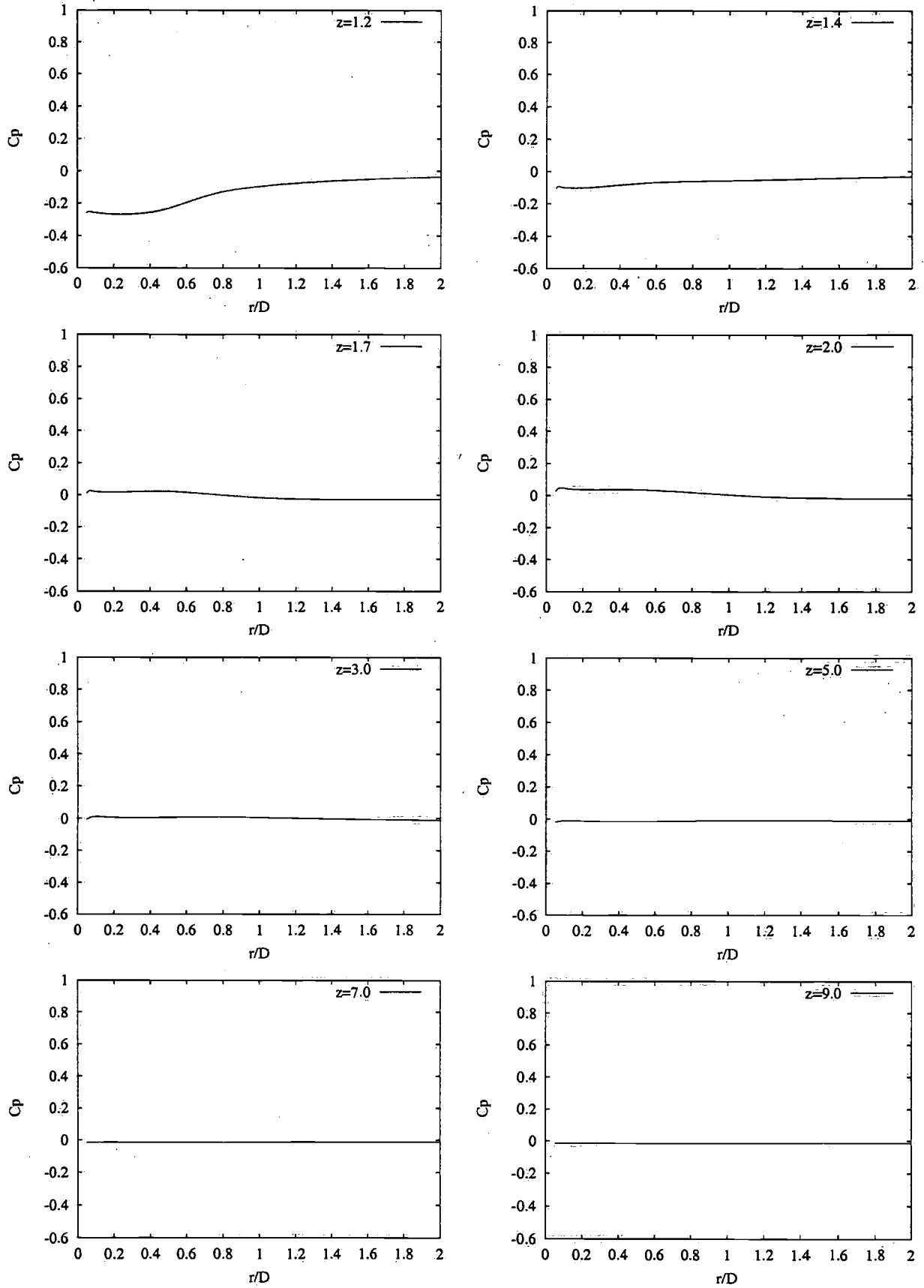


Abbildung 9.6: Profil des mittleren Druckkoeffizienten $\overline{C_p}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

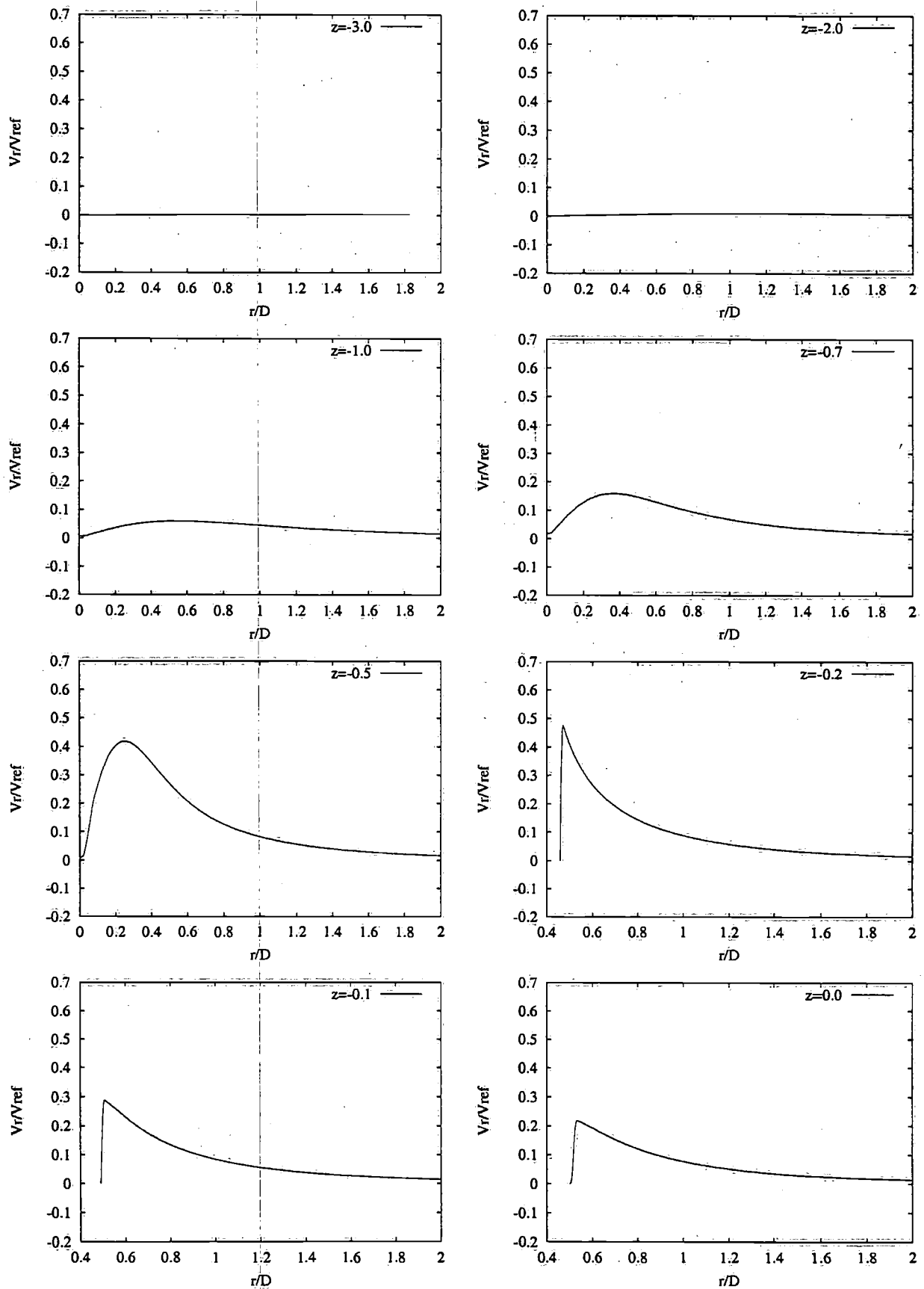


Abbildung 9.7: Profil der mittleren Radialgeschwindigkeit \bar{v}_r in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

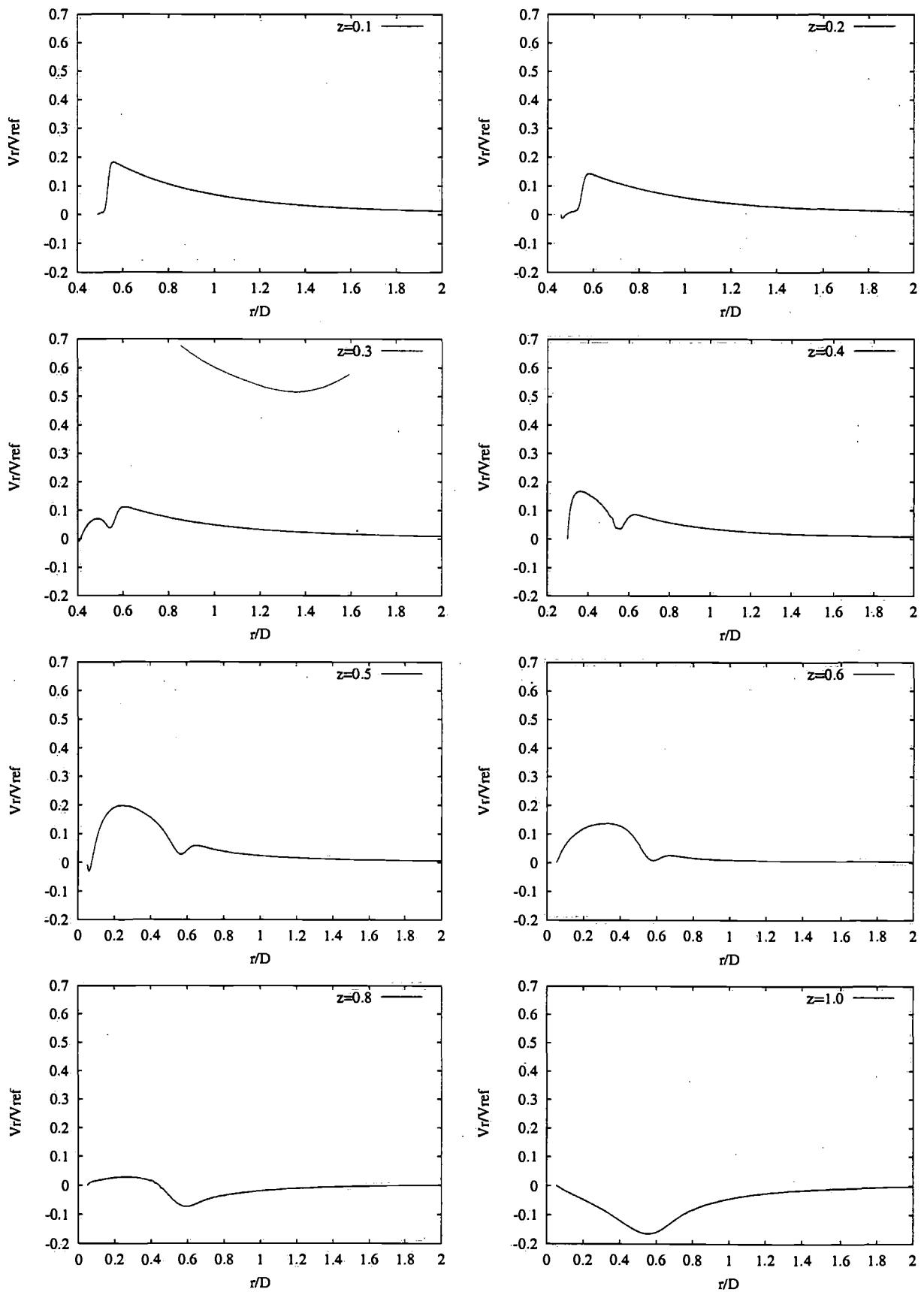


Abbildung 9.8: Profil der mittleren Radialgeschwindigkeit \bar{v}_r in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

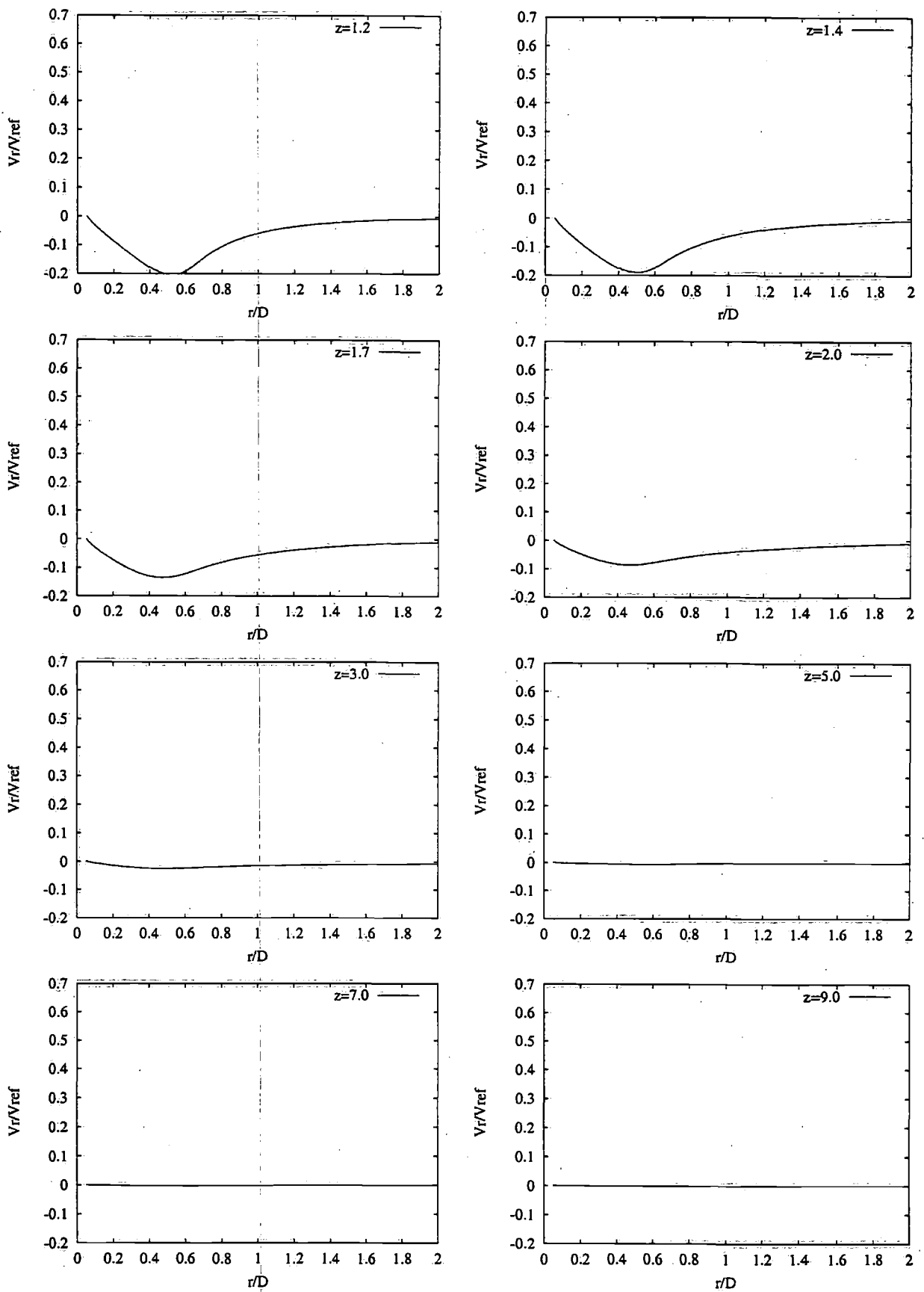


Abbildung 9.9: Profil der mittleren Radialgeschwindigkeit \bar{v}_r in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

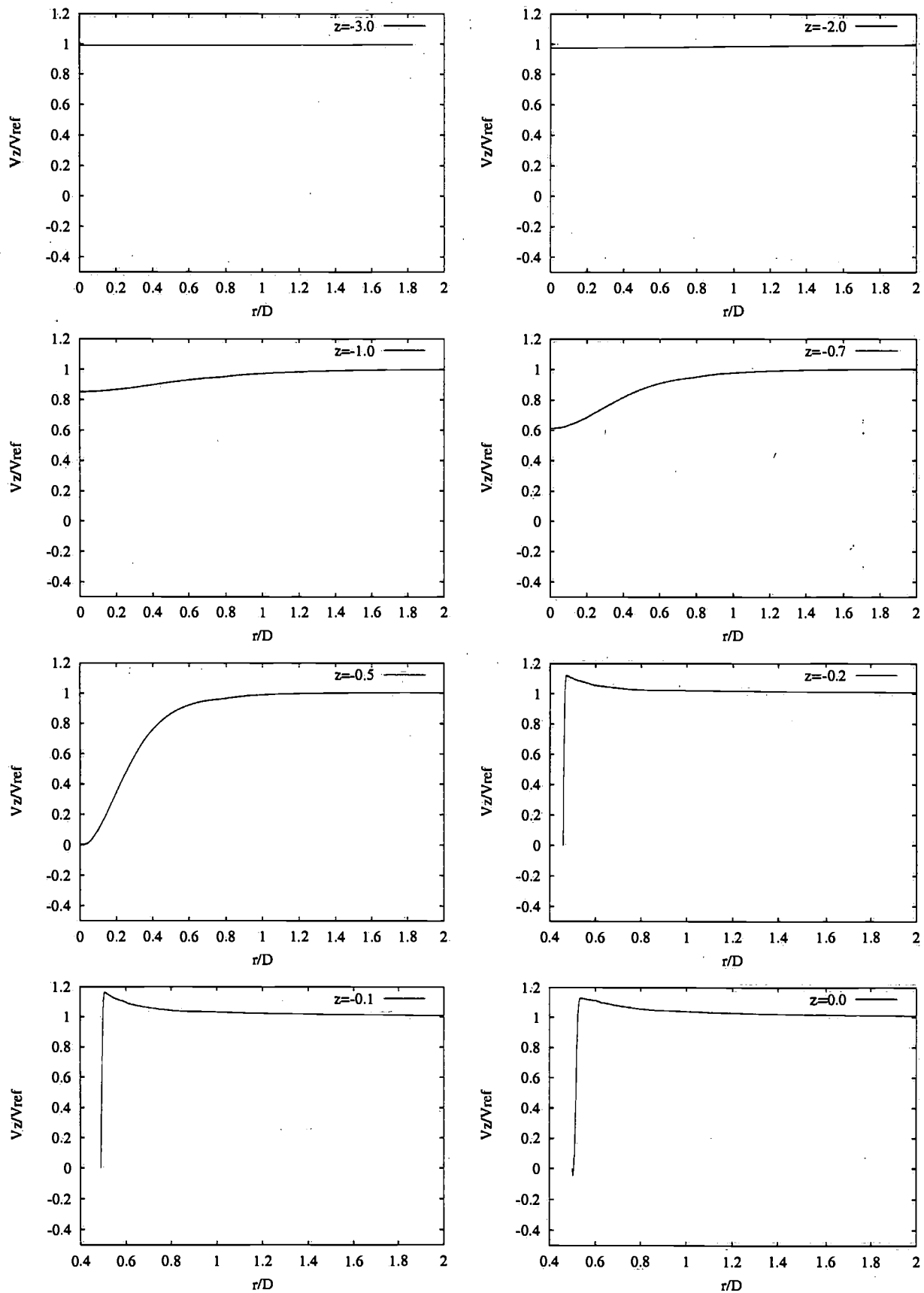


Abbildung 9.10: Profil der mittleren Axialgeschwindigkeit \bar{v}_z in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

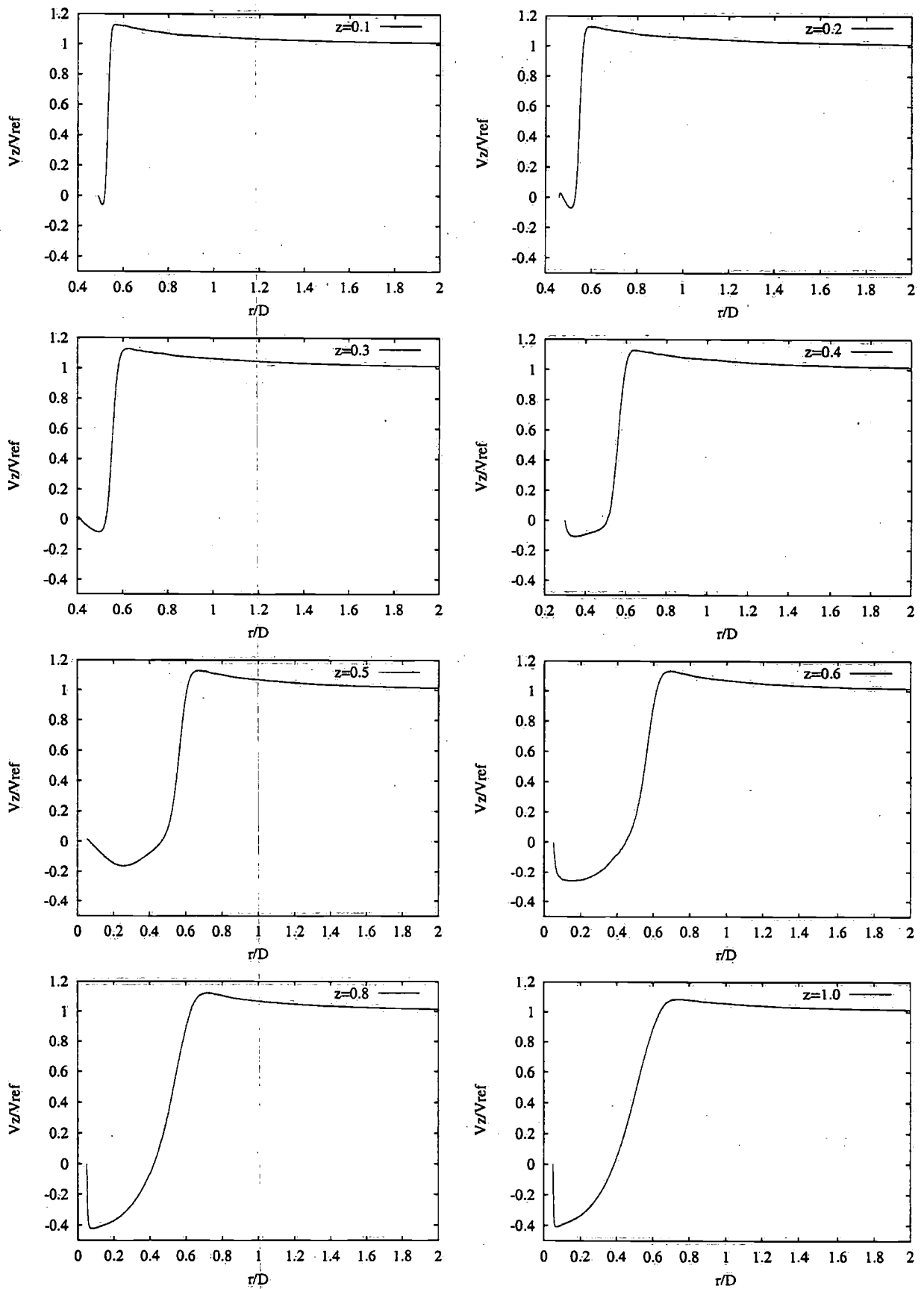


Abbildung 9.11: Profil der mittleren Axialgeschwindigkeit \bar{v}_z in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

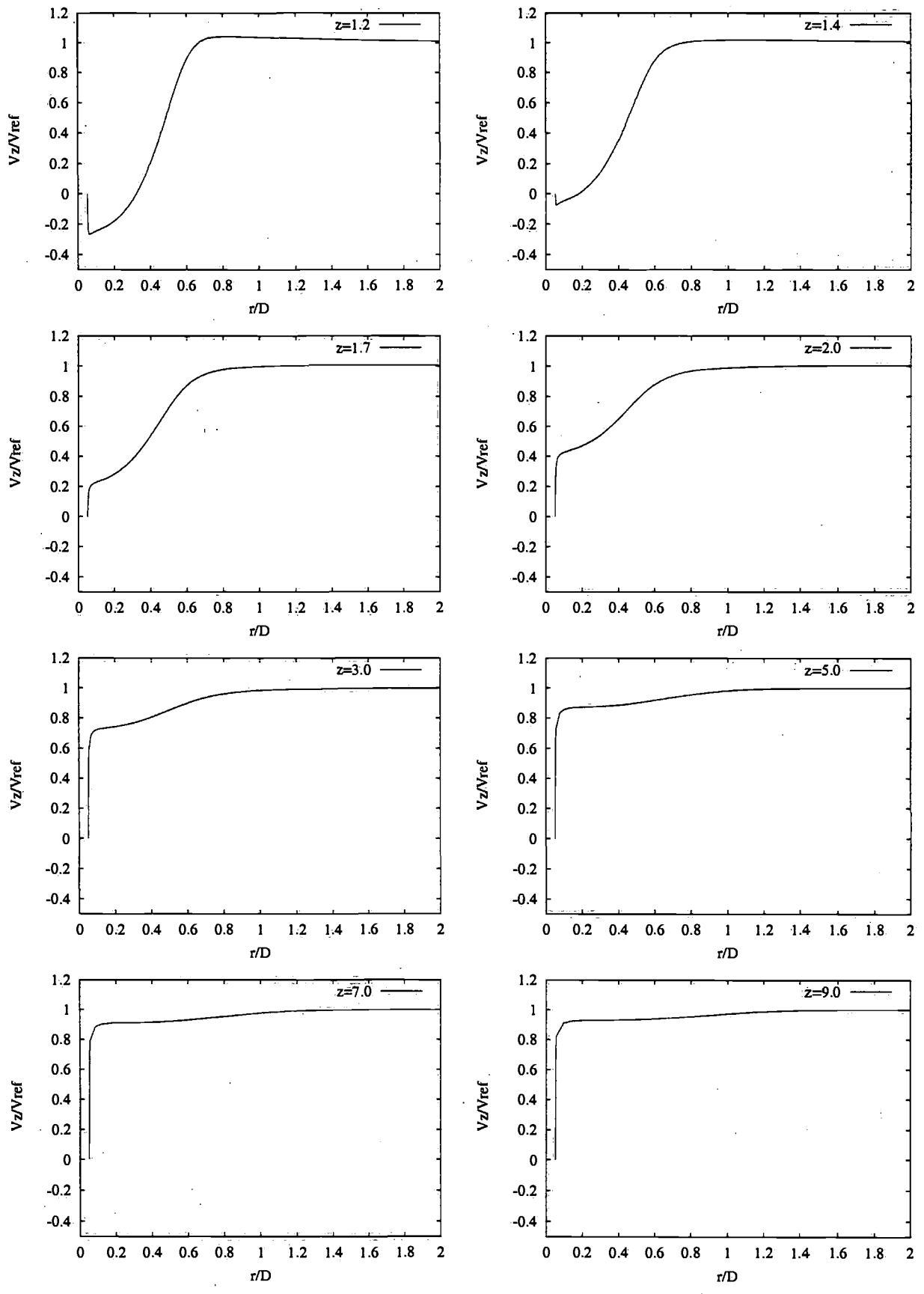


Abbildung 9.12: Profil der mittleren Axialgeschwindigkeit \bar{v}_z in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

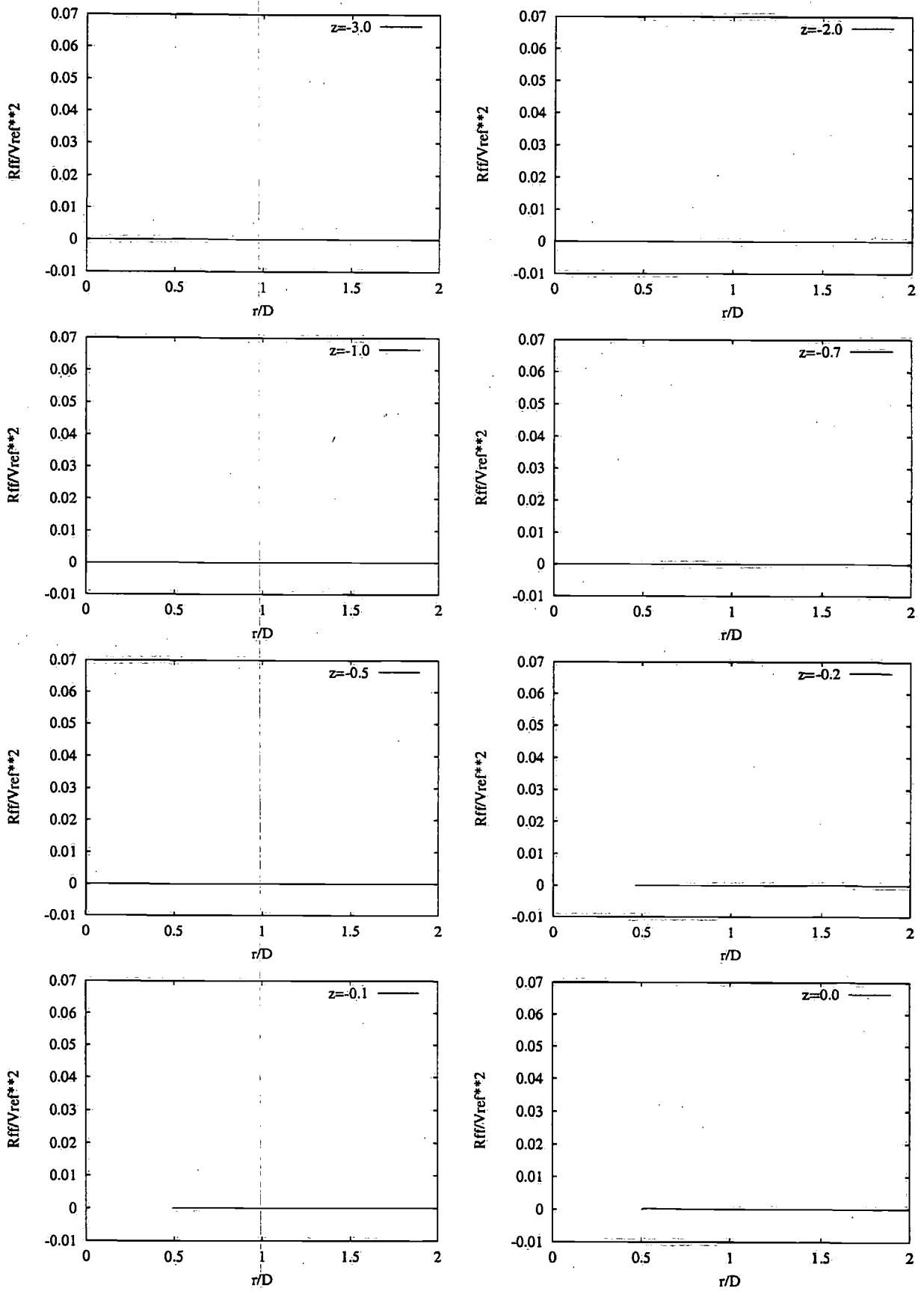


Abbildung 9.13: Profil der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v_\phi^f v_\phi^f}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

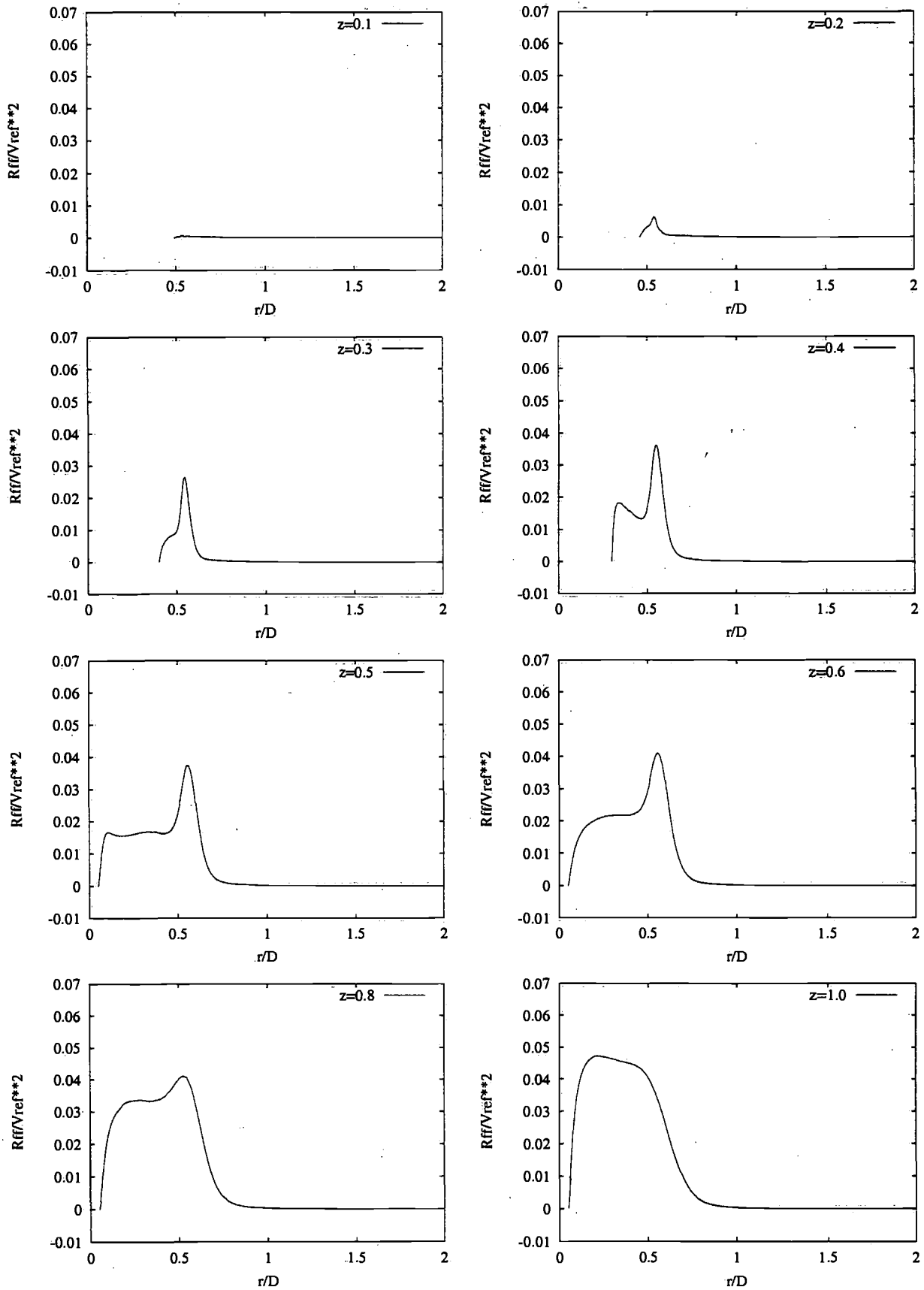


Abbildung 9.14: Profil der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v'_\phi v'_\phi}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

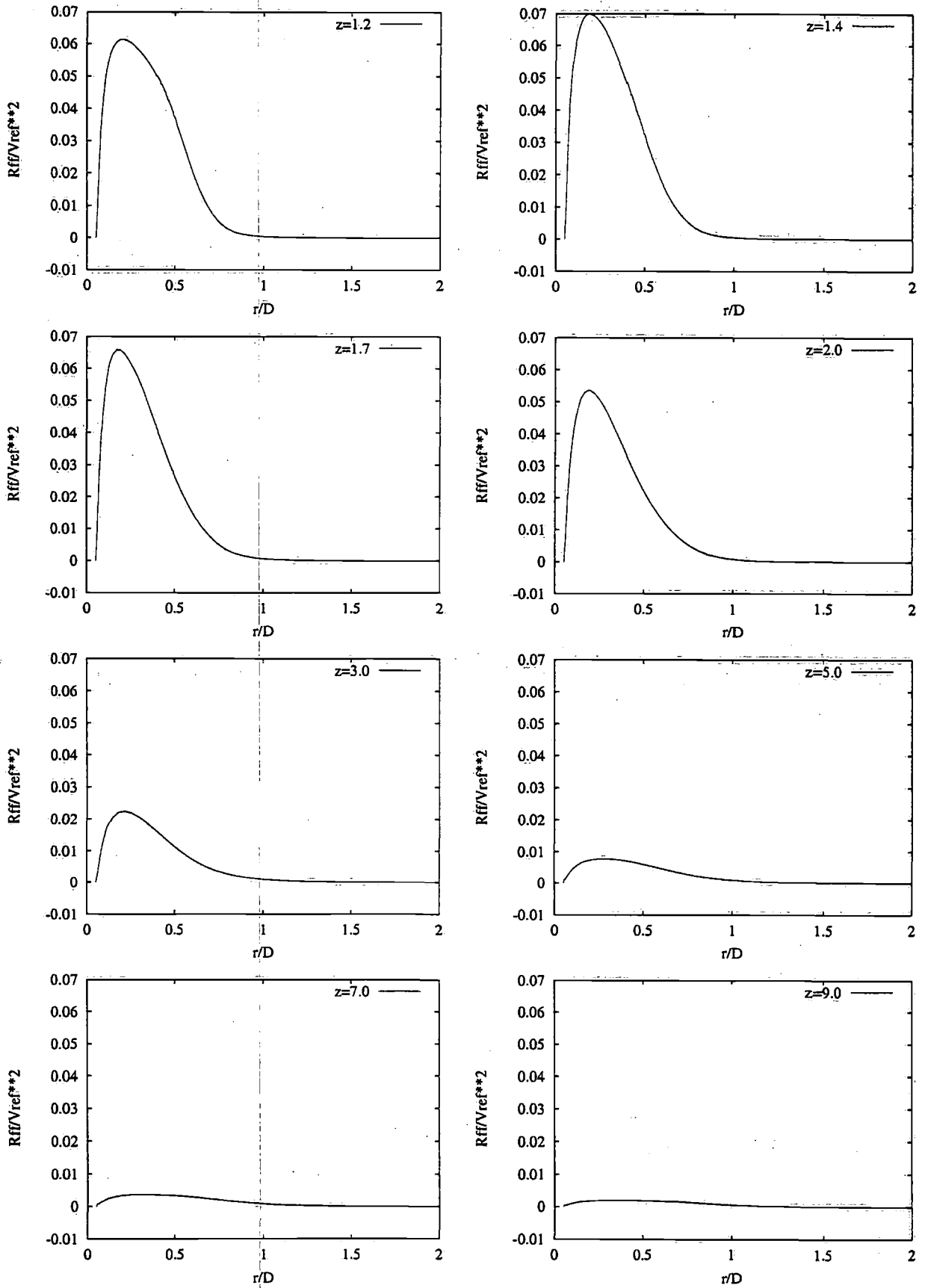


Abbildung 9.15: Profil der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v'_\phi v'_\phi}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

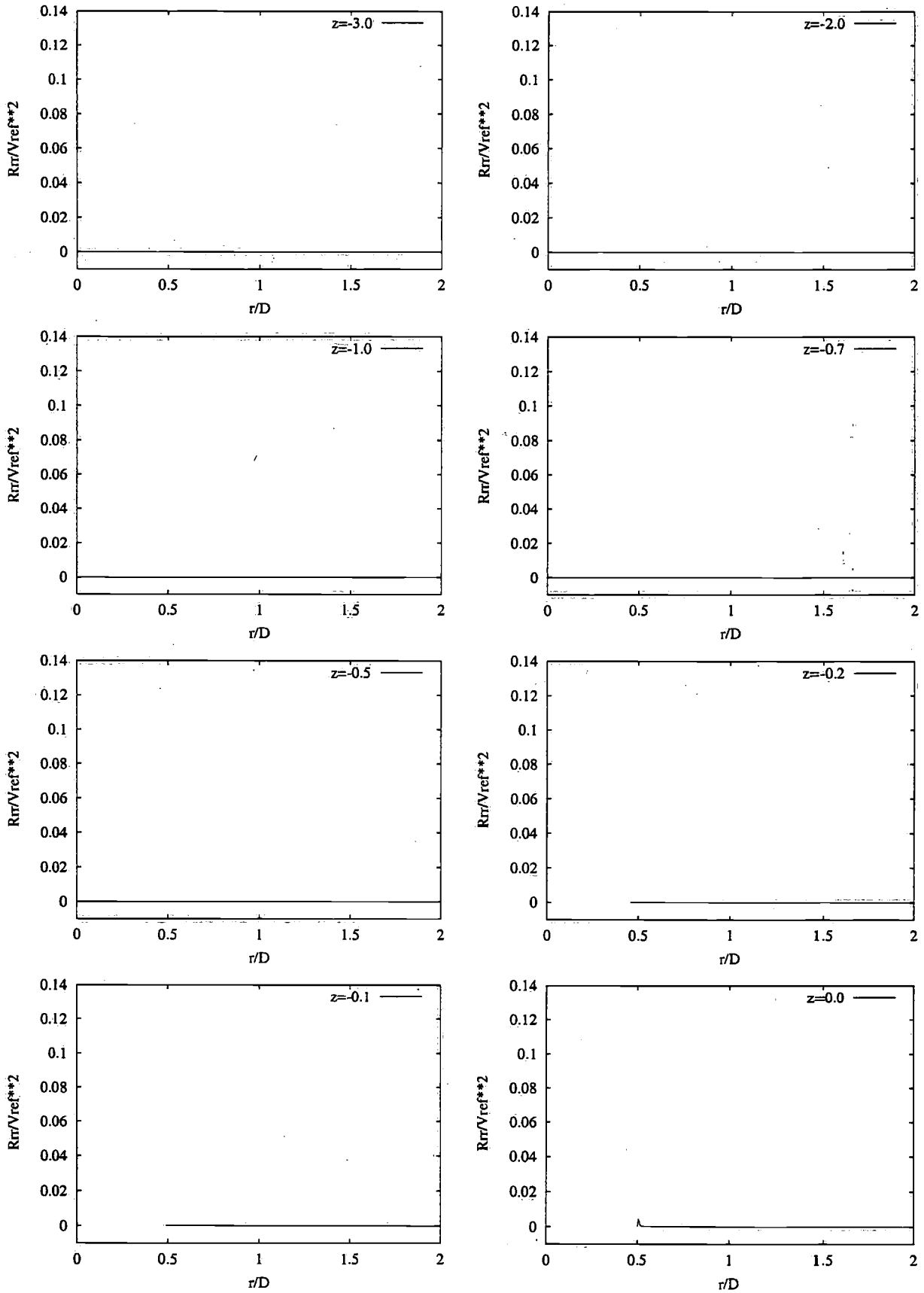


Abbildung 9.16: Profil der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v'_r v'_r}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

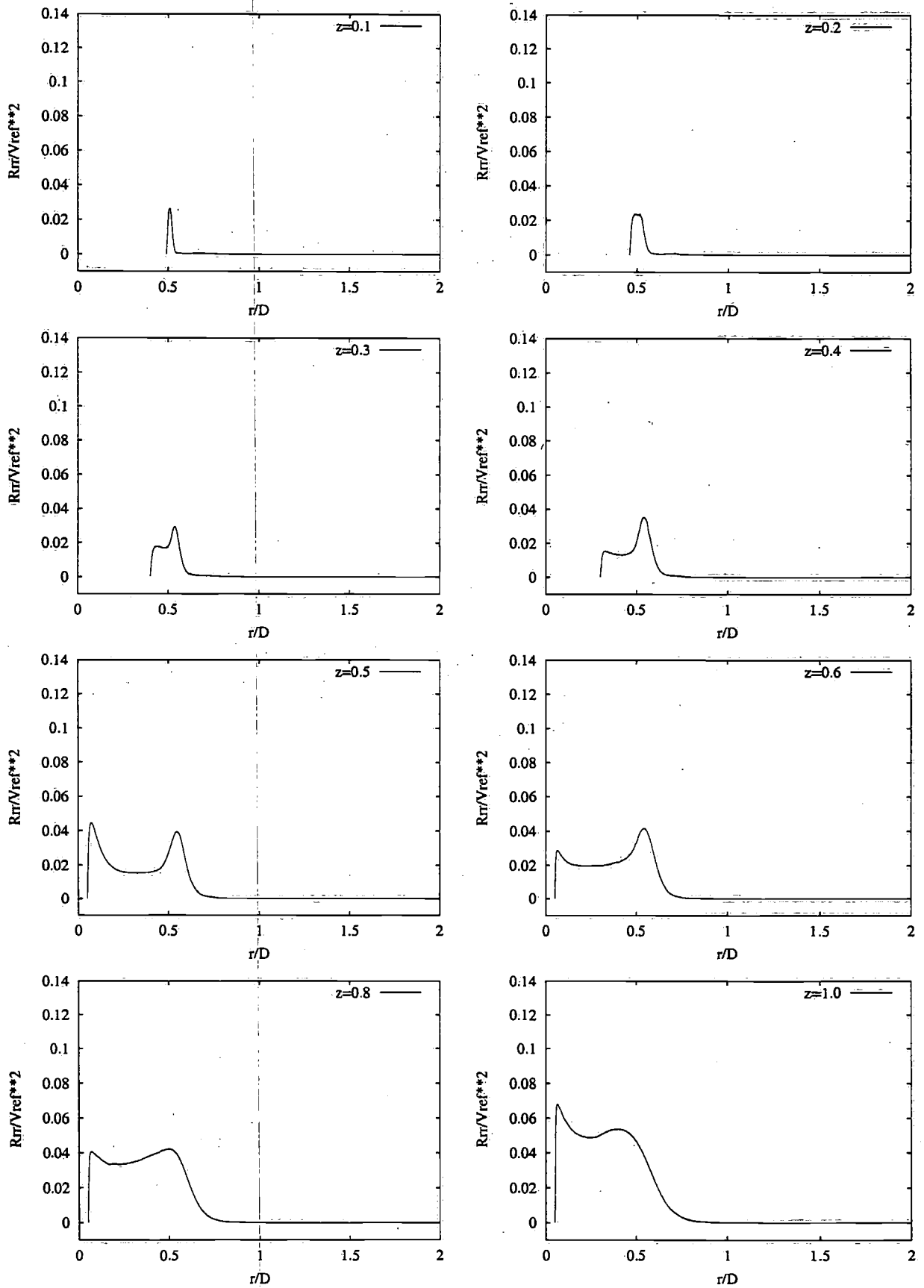


Abbildung 9.17: Profil der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v'_r v'_r}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

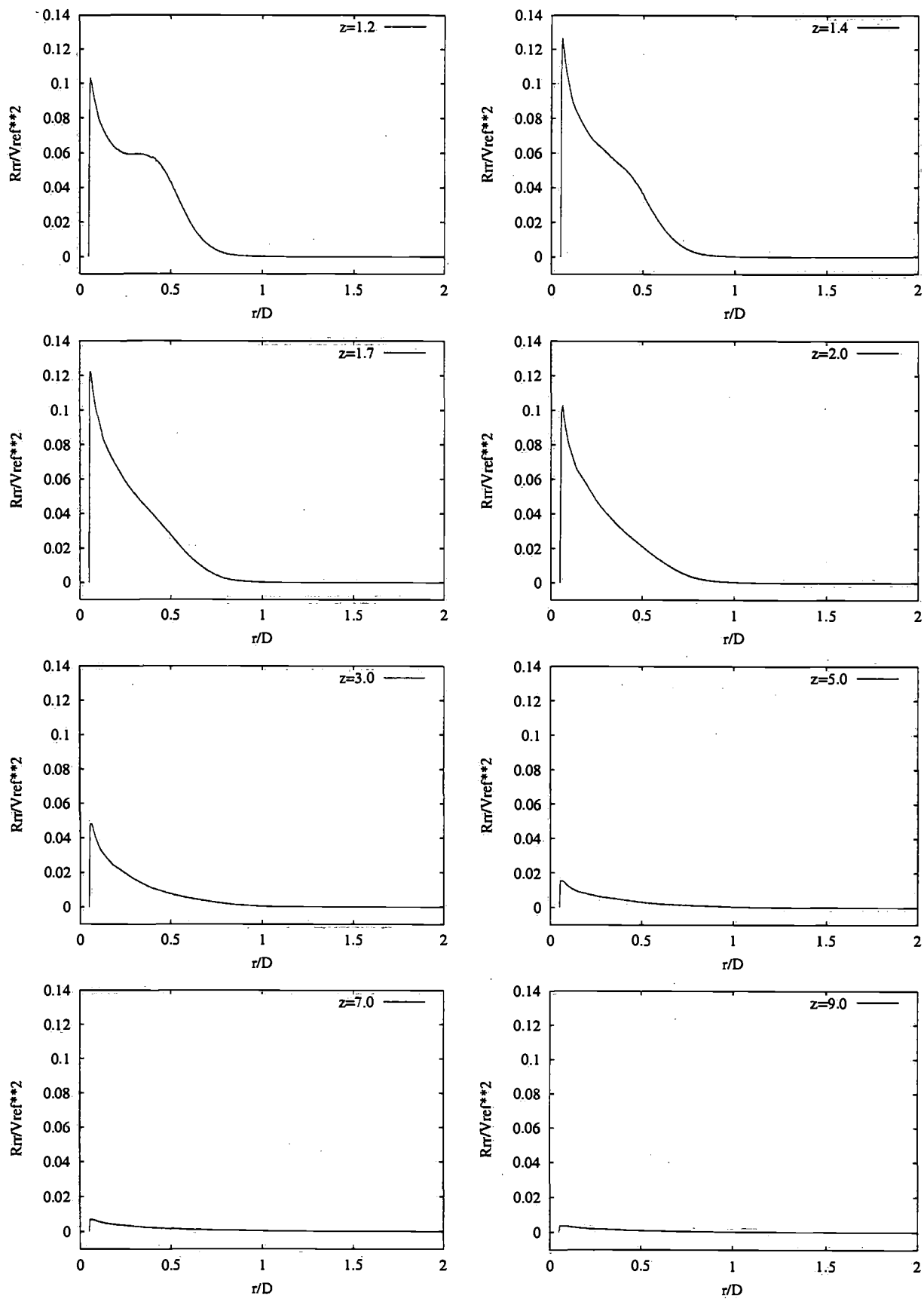


Abbildung 9.18: Profil der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v_r'v_r'}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

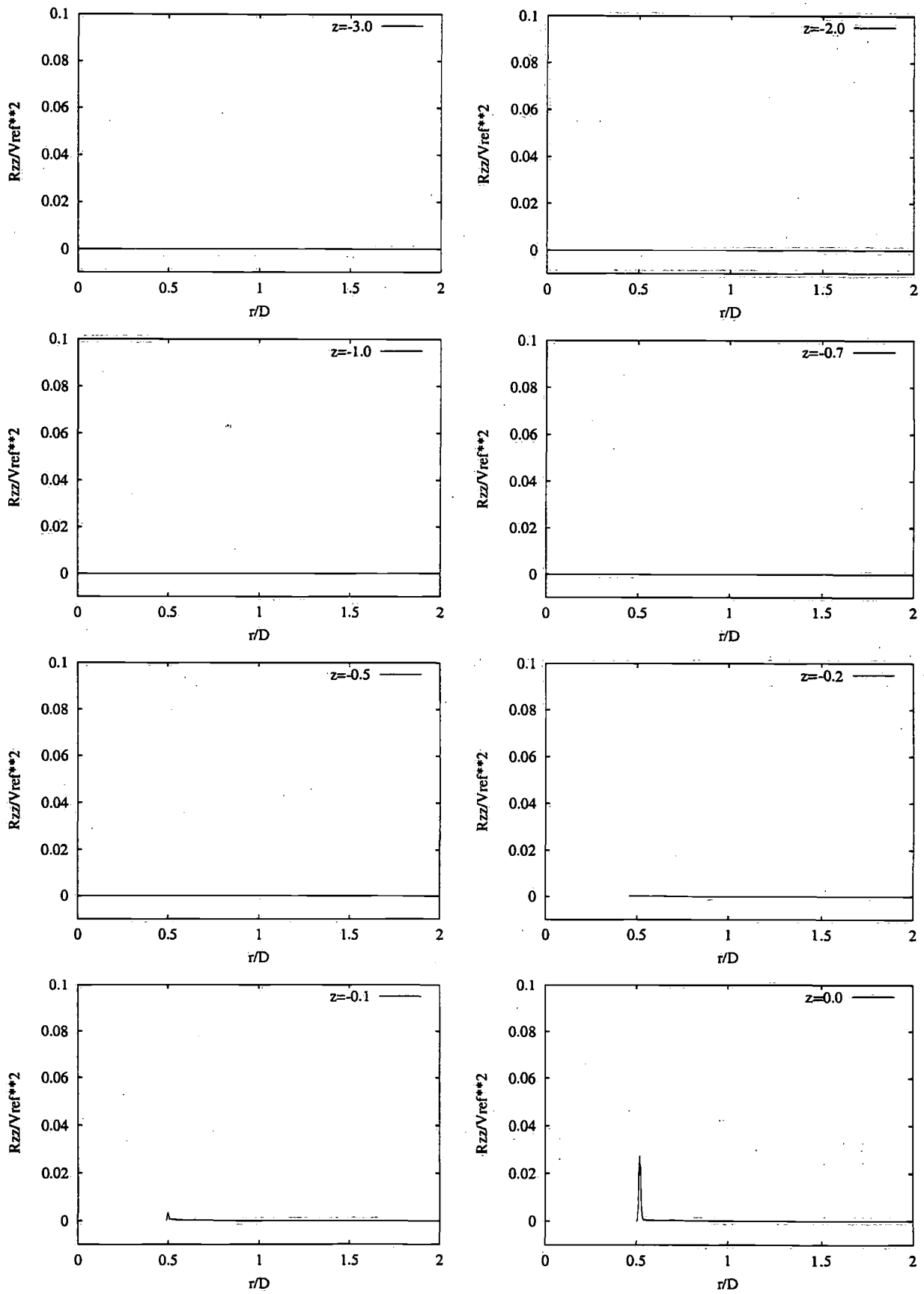


Abbildung 9.19: Profil der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v'_z v'_z}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

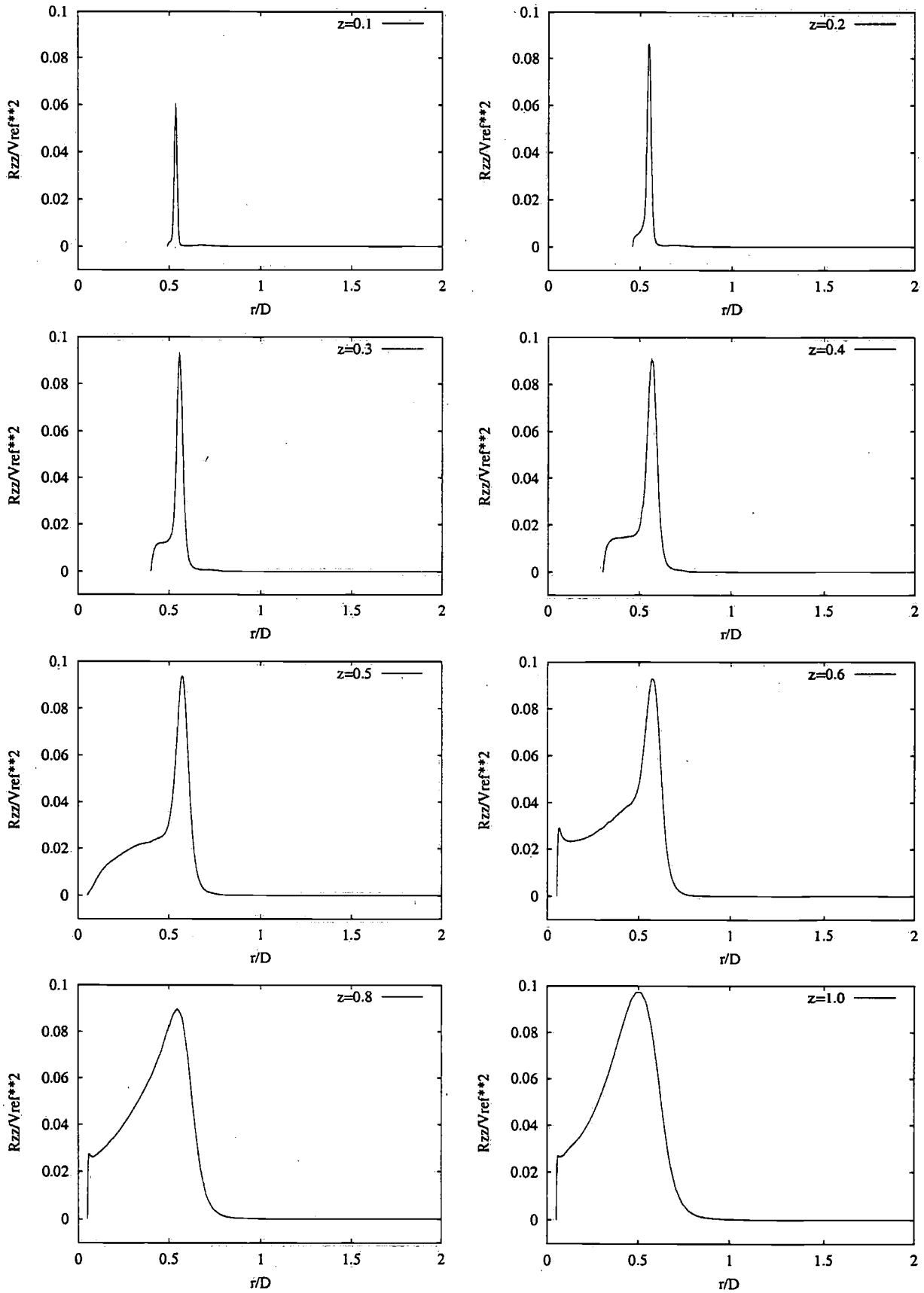


Abbildung 9.20: Profil der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v'_z v'_z}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

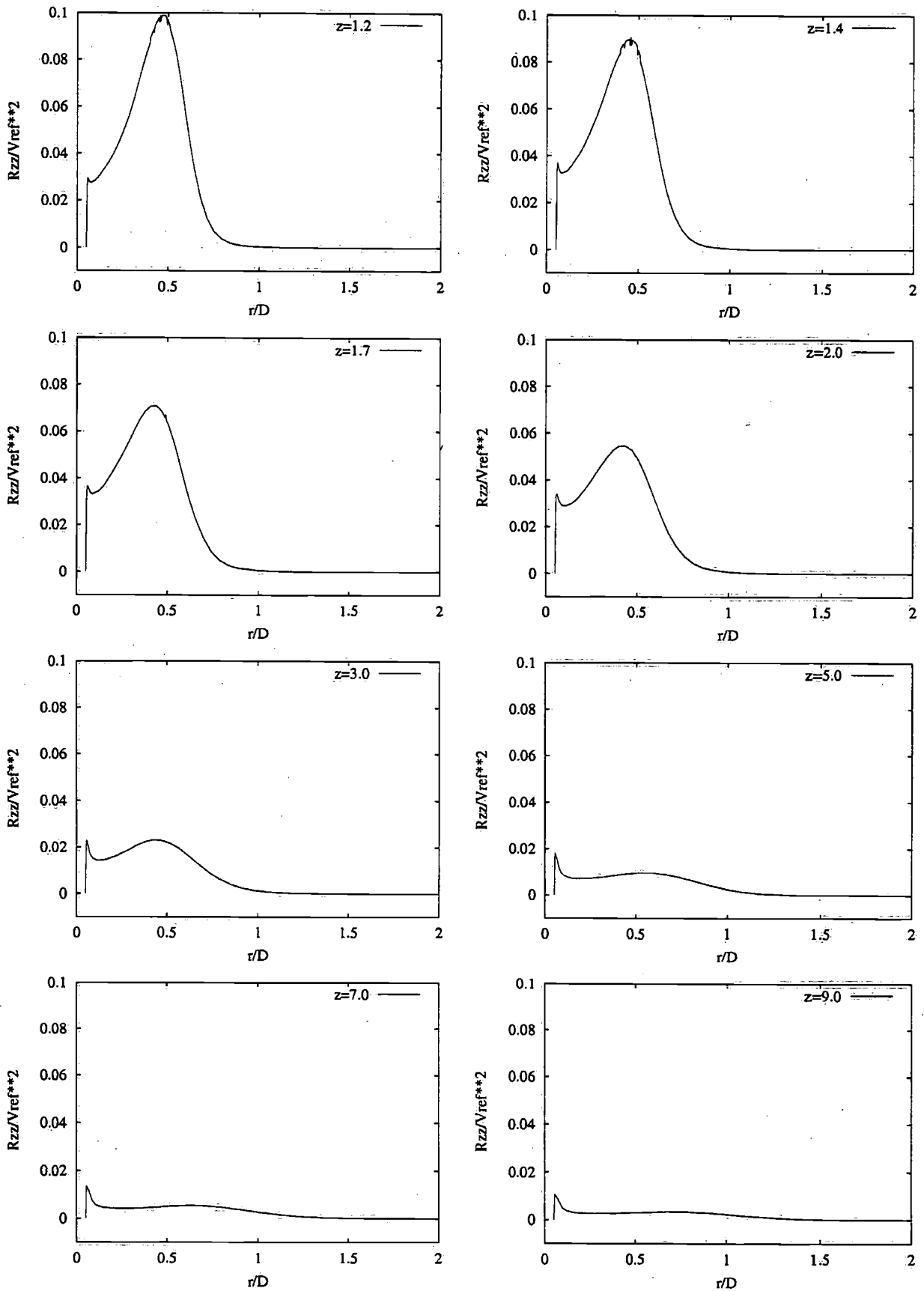


Abbildung 9.21: Profil der Reynoldsschen Normalspannung $\overline{v'_z v'_z}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

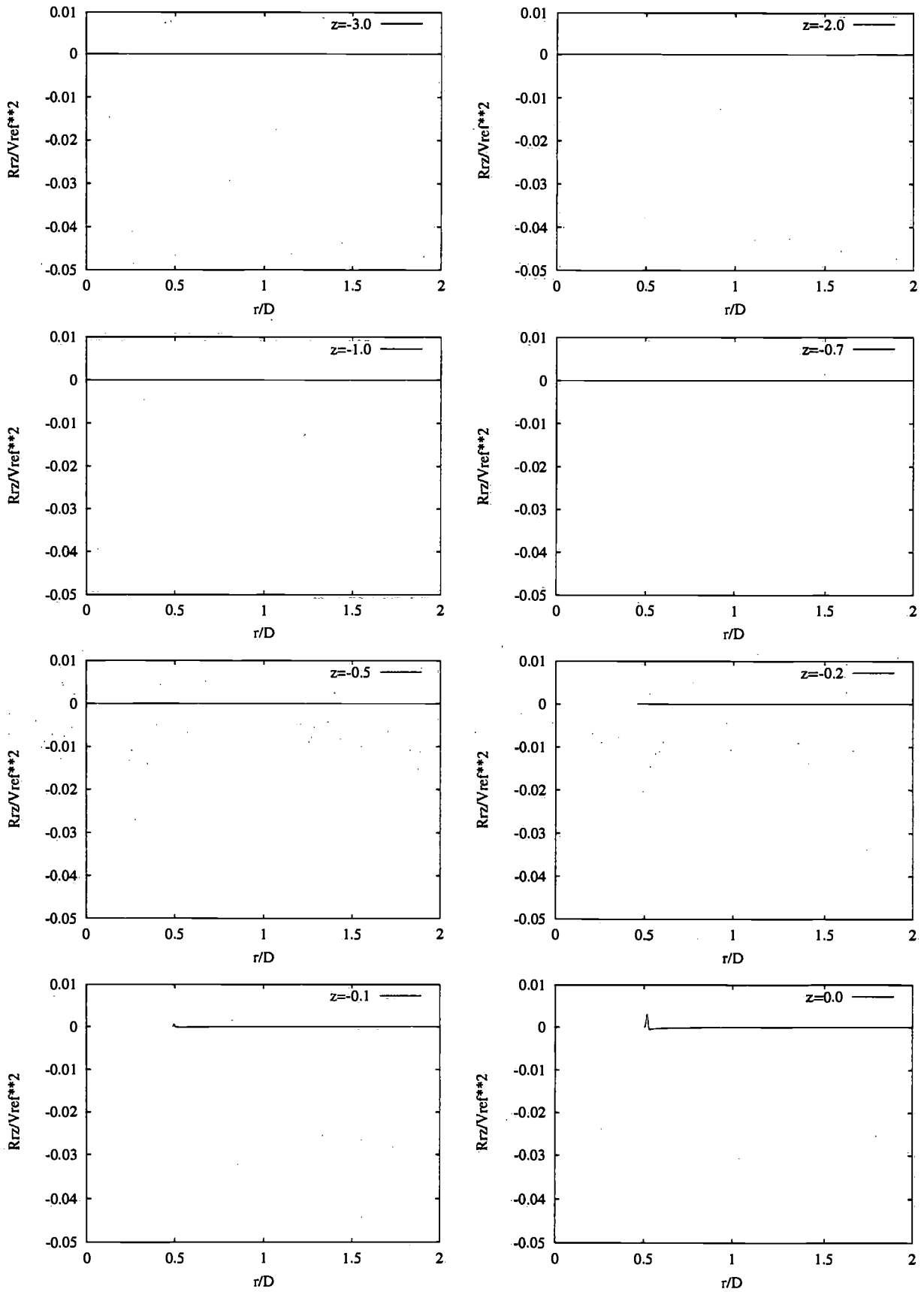


Abbildung 9.22: Profil der Reynoldsschen Scherspannung $\overline{v_r'v_z'}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

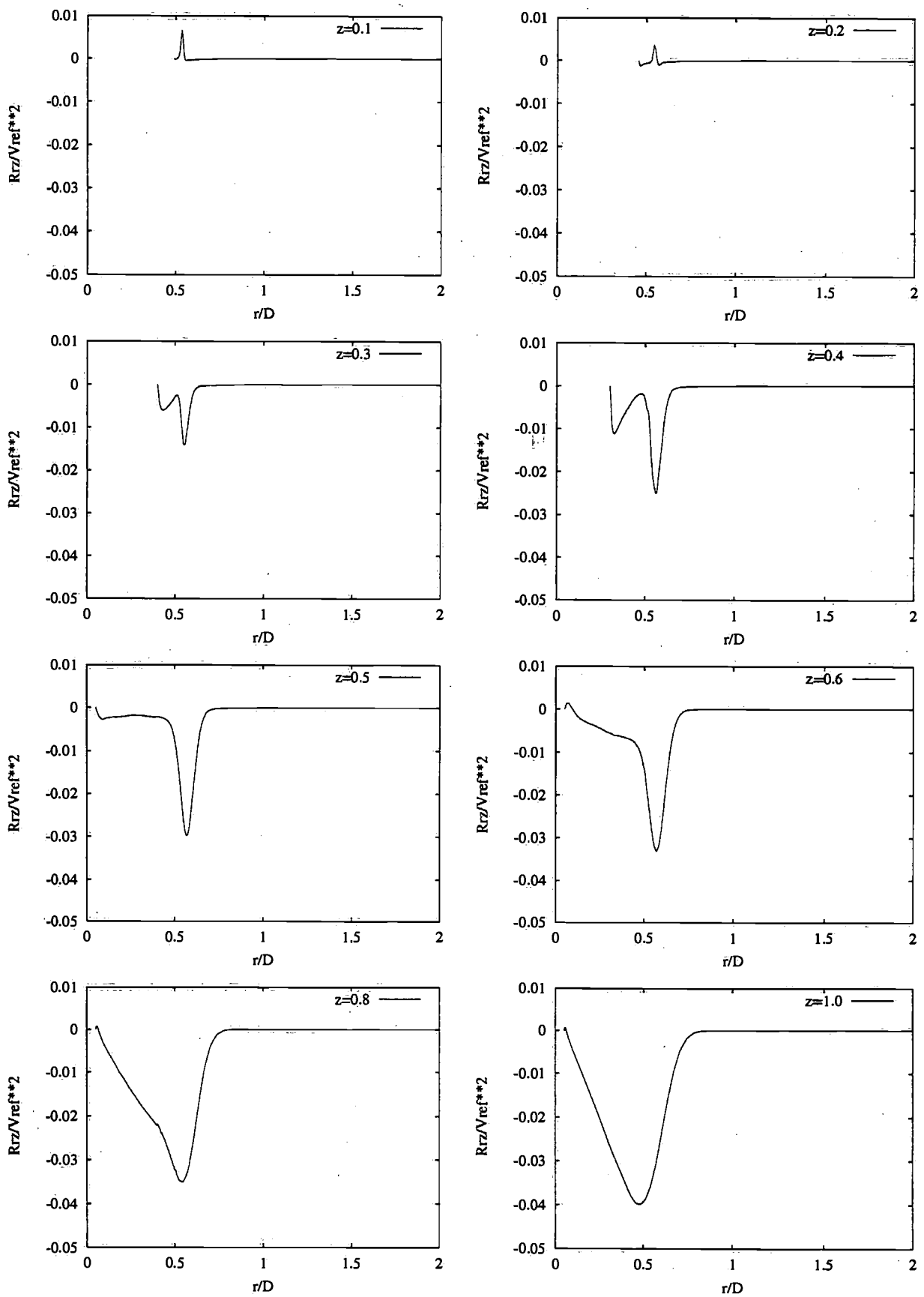


Abbildung 9.23: Profil der Reynoldsschen Scherspannung $\overline{v'_r v'_z}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

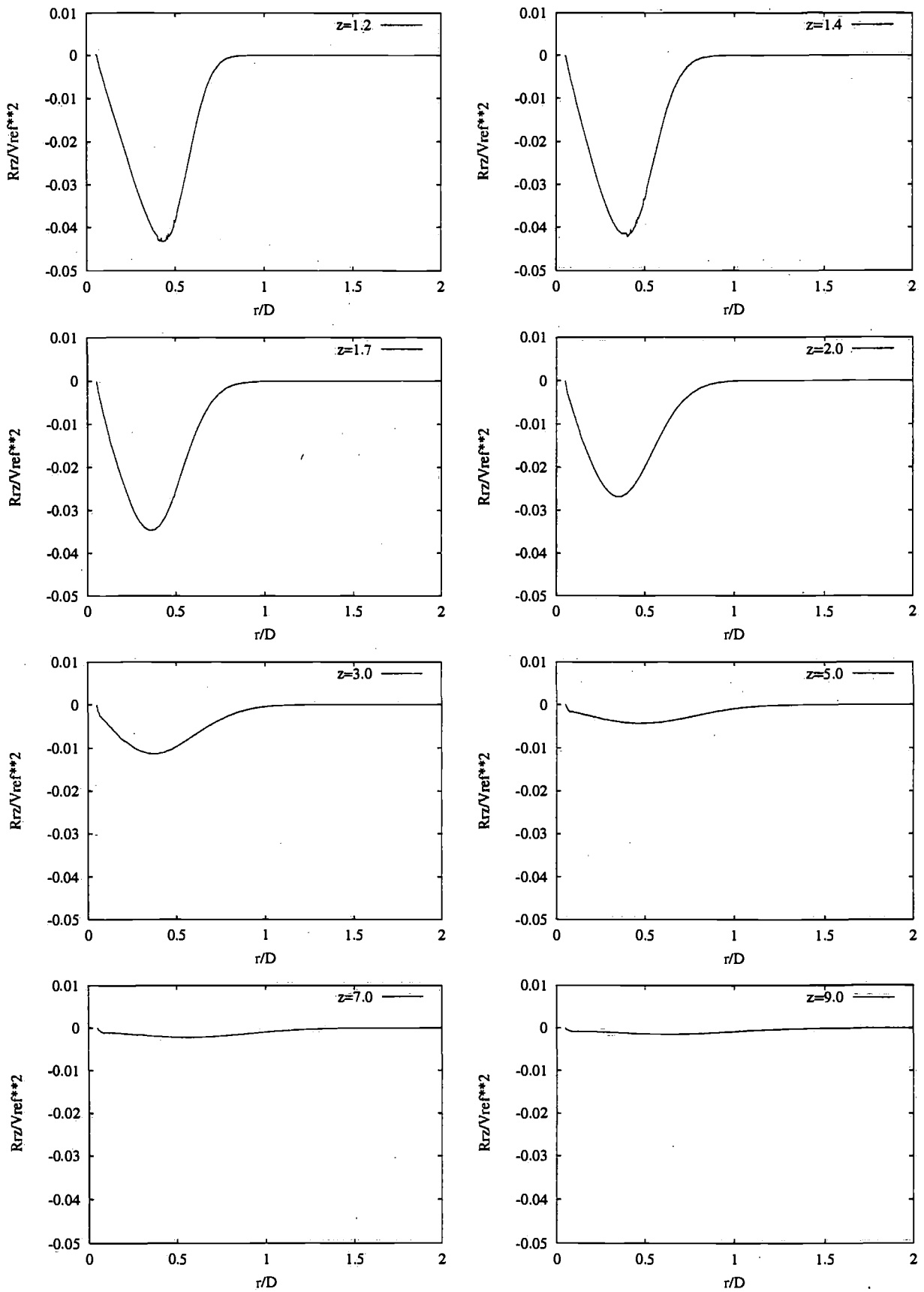


Abbildung 9.24: Profil der Reynoldsschen Scherspannung $\overline{v'_r v'_z}$ in radialer Richtung für verschiedene z -Koordinaten.

Curriculum Vitae

Martin Schmid

- Geburtstag: 11.09.1969
- Geburtsort: Neumarkt in der Oberpfalz
- Eltern: Martin Schmid und Helene geb. Donauer
- 1975 - 1980 Grund- und Hauptschule in Neumarkt
- 1980 - 1989 Willibald-Gluck-Gymnasium in Neumarkt
- 06/1989 - 09/1990 Grundwehrdienst
- 10/1990 Studium des Chemie-Ingenieur-Wesens an der Friedrich-Alexander-Universität in Erlangen
- 10/1992 Vordiplom
- 09/1995 - 12/1995 Diplomarbeit am Instituto Superior Técnico in Lissabon/Portugal
- 02/1996 Hauptdiplom
- 05/1996 - 04/1998 wiss. Mitarbeiter am Institut für Schiffbau in Hamburg
- 05/1998 - 04/2001 wiss. Mitarbeiter am Arbeitsbereich Fluidodynamik und Schiffstheorie der TU Hamburg-Harburg
- 07.04.2000 Eheschließung mit Marana geb. Knebel
- 14.07.2000 Geburt von Marvin Schmid
- 07/2001 Mitarbeiter der Fa. c.a.r.u.s. Information Technology AG in Norderstedt
- 16.05.2002 Geburt von Lavinia Schmid