

# Mathematische Methode zur Ermittlung <sup>Drift</sup> horizontaler Bewegungen von schwimmenden Plattformen im regulären Seegang

T. E. Schellin, Ph. D. \*)

## Zusammenfassung

Die beschriebene Methode eignet sich zur Beurteilung der Längsbewegungen von schwimmenden Plattformen im regulären Seegang, dessen Wellen ausreichend klein sind, so daß sie nur geringe Tauch- und Stampfbewegungen der Plattform verursachen. Dabei können z. B. das Verankerungs-/Stationierungssystem, die Meeresströmung und der Wind als systemintegrierte Teile behandelt werden, und somit kann deren Einfluß auf die Abdrift der Plattform von ihrer Ausgangsposition ermittelt werden. Anhand einer Beispielrechnung wird gezeigt, daß Wind und Strömung einen relativ großen Einfluß auf die Abdrift und auf die benötigte Positionierungskraft haben können.

## Abstract

A method of analysis is described which determines the time dependent surge motions of floating platforms in regular waves. The waves must be small enough to keep the platform heave and pitch motions small. The anchor lines or other stationing systems, the current and the wind are treated as integral parts of the system, permitting an analysis of their effect on platform surge behavior. A sample calculation shows that current and wind can have a major influence on the platform drift and on the stationing force required to keep the platform on location.

## Einleitung

Die Zahl der schwimmenden Arbeitsplattformen hat in den letzten zehn Jahren stark zugenommen. Ein Beispiel solcher Plattformen sind die sogenannten Halbtaucher, die für die Exploration und Produktion unterseeischer Kohlenwasserstoffe entwickelt wurden und für Bohrvorhaben in Gebieten wie u. a. die nördliche Nordsee in zunehmendem Maße eingesetzt werden. Ein anderes Beispiel sind ozeanographische schwimmende Meßplattformen und Großbojen, welche in den letzten Jahren gebaut wurden und in der Zukunft von Bedeutung sein werden.

Die folgende Methode eignet sich für schwimmende Plattformen, deren Unterwasserteil aus ein oder mehreren zylindrischen Teilen oder Verstrebungen besteht. Ferner muß der Durchmesser dieser zylindrischen Unterwasserteile im Vergleich zur Wellenlänge des ankommenden Seegangs klein sein (Verhältnis Wellenlänge zu Durchmesser mindestens 10:1). Halbtauchende Bohrseln, größere ozeanographische Meßbojen und gewisse im Halbtaucherprinzip ausgelegte Rohrverlegerbarges erfüllen diese Qualifikationen.

Bei den Untersuchungen handelt es sich um eine mathematische Ermittlung der horizontalen Bewegungen von solchen schwimmenden Plattformen im regulären Seegang, wobei die Einflüsse von Wind und Meeresströmung mitberücksichtigt werden können.

Die Berechnungen erfolgen mittels eines Rechenprogrammes, welches das dynamische Verhalten des Systems Plattform — Seegang — Wind — Strömung — Verankerung/Stationierung als Ganzes behandelt. Mathematisch wird anders vorgegangen als bisher üblich [1, 2], denn nicht nur der oszillierende Teil der Horizontalbewegung um einen Mittelpunkt, sondern auch die durch Seegang, Wind und Strömung verursachte Verlagerung dieses Mittelpunktes, die sogenannte Abdrift, wird erfaßt.

Der mathematische Vorgang beruht auf einer dynamischen Betrachtung des Plattformsystems, indem die auf die Plattformbewegung bezogene Gleichung in hinreichend kleiner zeitlicher Unterteilung gelöst wird. Als Resultat liegen dann zeitabhängige Funktionen der horizontalen Plattformbewegung, der hydrodynamischen und der auf Position haltenden Stationierungskräfte vor. Die Vorteile dieses mathematischen Verfahrens liegen erstens darin, daß Zähigkeitskräfte nicht linearisiert werden müssen und somit als proportional zum Quadrat der Relativgeschwindigkeit in das mathematische Modell einbezogen werden, und zweitens, daß das Plattformsystem mit den wirkenden Kräften als Ganzes erfaßt wird. Somit wird z. B. der Einfluß der Meeresströmung nicht einfach superponiert, sondern der Geschwindigkeitsvektor der Strömung wird in die Relativgeschwindigkeit als Teil des Plattformsystems miteinbezogen. Ebenfalls wird der Einfluß des Windes als eine konstante Kraft und die Wellenfortbewegung durch die Variationen der Wasseroberfläche im Plattformsystem berücksichtigt.

Das Fehlen einer mathematischen Methode zur Berechnung der Bewegungen einschließlich Abdrift beruht u. a. auf der Tatsache, daß erst seit relativ kurzer Zeit große, optimal ausgelegte Plattformen erforderlich sind. Zuvor war es oft ausreichend, die Amplitude der oszillierenden Tauchbewegungen ermitteln zu können, denn die Tauchamplitude war das zur Beurteilung der Einsatzfähigkeit wichtigste. Doch kann man in der jetzigen und zukünftigen Zeit davon ausgehen, daß die horizontalen Bewegungen ebenso bedeutend sind. Diese Tendenz ist dadurch bewiesen, daß bei fast allen neuen Halbtaucher-Konstruktionen die Beeinflussung und das Kontrollieren gerade der horizontalen Bewegungen durch den Einbau von Schuberzeugern, dynamischer Positionierung, Katamaran-Bauweise und Selbstantrieb angestrebt wird. Bei horizontalen Bewegungen ist die Abdrift sogar der bedeutendere Anteil, denn es ist dieser Teil und nicht die oszillierende Amplitude, welcher für die Auslegung des Verankerungs-Stationierungssystems maßgebend ist.

## Beschreibung des mathematischen Modells

Um einen Überblick der einzelnen Bereiche des Plattformsystems zu zeigen, sind in Abb. 1 die wichtigsten Komponenten des mathematischen Modells veranschaulicht. Die Horizontalbewegung  $y(t)$  wird mit dem Impulssatz folgendermaßen berechnet:

$$(1) \quad m \ddot{y} = H + W - R.$$

Diese Gleichung enthält Trägheitskräfte, hydrodynamische Kräfte, Wind- und Positionierungskräfte, i.e. sämtliche auf die Plattform wirkende Kräfte.

Die Trägheit der Plattform wird mit dem Produkt  $m\ddot{y}$  erfaßt, wobei  $m$  die Masse und  $\ddot{y}$  die horizontale Beschleunigung der Plattform bezeichnen. Die Terme  $H$ ,  $W$  und  $R$  bezeichnen die hydrodynamischen Kräfte, die Windkraft und die Positionierungskräfte der Verankerung und/oder der zusätzlichen Schuberzeuger. Mit Ausnahme der als konstant angenommenen Windkraft sind einige Kräfte nicht nur voneinander abhängig, sondern auch Funktionen der Zeit, der Plattformposition und der Plattformbewegung.

Bei dieser Betrachtung bewegt sich die Plattform so, als bewege sie sich auf Schienen lediglich in der horizontalen Richtung  $y$ . Laut Voraussetzung werden vertikale und rotierende Bewegungen (Tauchen und Stampfen) nicht berücksichtigt. Diese Randbedingung bringt eine Ungenauigkeit

\*) Institut für Anlagentechnik, Gesellschaft für Kernenergieverwertung in Schiffbau und Schifffahrt mbH, Geesthacht-Tesperhude

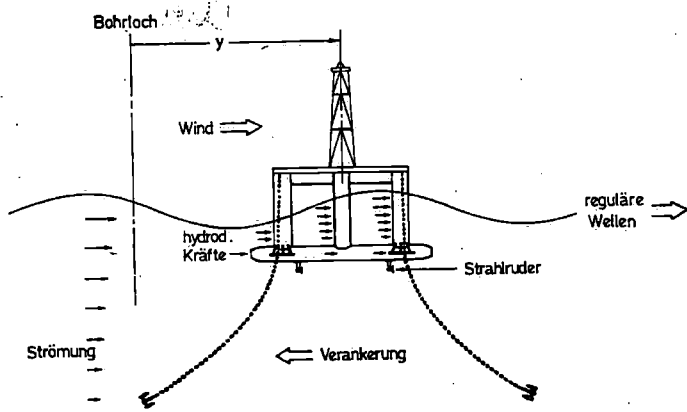


Abb. 1: Schema für das mathematische Modell

berechnet, wobei  $F_w$  die projizierte Fläche auf die Ebene senkrecht der Windgeschwindigkeit  $V_w$  ist.  $C_w$  ist ein experimentell ermittelter Koeffizient, dessen Wert von der aerodynamischen Form des Körpers abhängig ist. Die Windkraft wird in dieser Analyse als konstant betrachtet.

### Verankerungs- und Stationierungskräfte

Jedes beliebige Verankerungssystem kann berücksichtigt werden, indem die Komponente  $R$  der Verankerungskraft für die horizontale Längsbewegung  $y$  als Funktion von  $y$  angegeben wird. Das Erzeugen dieser Verankerungsfunktion gehört nicht zu dieser Analyse; diese Funktion muß vorhanden sein, und zwar für die positive und für die negative Längsbewegung  $y$ . Für Verankerungssysteme, die aus mehreren Ketten und/oder Drahtseilen mit Ankern bestehen, nimmt diese Funktion oftmals die Form eines Polynoms dritter Ordnung an [6].

Zusätzlich zum oder anstatt eines konventionellen Verankerungssystems können verschiedene andere Stationierungssysteme mit dieser Analyse betrachtet werden. Die entsprechende Stationierungskraft solch eines Systems muß allerdings wiederum als Funktion der Plattformlängsbewegung  $y$  angegeben werden. Eine solche Kraftfunktion könnte durch Schubzeuger, Strahlruder oder durch den Selbstantrieb der Plattform erzeugt werden und somit das konventionelle Verankerungssystem unterstützen.

### Berechnung der Plattformbewegung

Die horizontale Längsbewegung der Plattform wird berechnet, indem die Position  $y$  durch Gleichung (1) in hinreichend kleiner zeitlicher Unterteilung gelöst wird. Die Position  $y$  kann nicht direkt gelöst werden. Ein Iterationsprozeß muß angewendet werden, denn die hydrodynamische Gesamtkraft  $H$  und die Verankerungskraft  $R$  sind Funktionen von  $y$ . Der angewandte Iterationsprozeß ist eine Abwandlung der beiden Verfahren Newton-Backward-Interpolation [7] und Iteration von nichtlinearen Gleichungen [8]. Dabei wird die Gleichung (1) in finiten Differenzen folgendermaßen ausgedrückt:

$$\frac{y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}}{\Delta t^2} = \frac{H(y_t) + R(y_t) + W}{m}$$

(2) wobei  $\Delta t$  der Zeitschritt und  $y_{t-1}$  und  $y_{t-2}$  Plattformpositionen von ein bzw. zwei Zeitschritten zuvor bedeuten.  $y_t$  ist die Plattformposition, die für den neuen Zeitschritt zu berechnen ist. Es muß so lange iteriert werden, bis beide Seiten der Gleichung (2) bis auf eine vorgegebene kleine Toleranz übereinstimmen.

### Beispielrechnung

Anhand eines Beispiels werden die Möglichkeiten dieses Rechenverfahrens gezeigt. Es wird eine Halbaucher-Bohrplattform untersucht, die in 200 m Wassertiefe verankert ist und einem regulären Seegang von 4,3 m Wellenhöhe und 8,7 sec Wellen-

in die Ergebnisse, denn in der Realität ist die Längsbewegung mit der Tauch- und der Stampfbewegung der Plattform gekoppelt. Nun sind aber im allgemeinen schwimmende Plattformen so ausgelegt, daß sie verhältnismäßig geringe Tauch- und Stampfbewegungen im Seegang ausführen. Für normale Seegänge, bei denen die Tauch- und Stampfbewegungen der Plattform also gering sind, ist die hier beschriebene Betrachtungsweise geeignet.

### Hydrodynamische Kräfte

Die hydrodynamischen Kräfte, die an den einzelnen Verstrebungen und Teilen der Plattform wirken und durch die relative Bewegung der Plattform und der Wasserteilchen entstehen, werden durch die Wirkung der Wellen und der Strömung verursacht.

Die Berechnung der hydrodynamischen Kräfte basiert auf der Anwendung des allgemein akzeptierten Konzeptes der relativen Bewegungen, bezogen auf die einzelnen Elemente der Plattform. Das bedeutet unter anderem, daß die durch Wellen und Strömung erzeugten Kräfte berechnet werden können, wenn die hydrodynamische Masse und Dämpfung der einzelnen Teile aus denen die Plattform besteht bekannt sind. Nimmt man zusätzlich an, daß die hydrodynamischen Kräfte an einem einzelnen Element nicht von den benachbarten Elementen beeinflusst werden, dann lassen sich die gesamten hydrodynamischen Kräfte, die an der Plattform wirken, ermitteln, indem die Kräfte an den einzelnen Teilen addiert werden.

Die allgemein akzeptierte Methode von Morison [3] wird angewandt, um die hydrodynamischen Kräfte an den einzelnen Teilen zu ermitteln. Bei dieser Methode wird angenommen, daß die hydrodynamische Kraft aus zwei unabhängigen Komponenten besteht. Die eine Komponente wird durch die relative Geschwindigkeit zwischen Körper und Wasser bestimmt und ist proportional dem Widerstandskoeffizienten  $C_D$ , und die andere Komponente wird durch die relative Beschleunigung bestimmt und ist proportional dem hydrodynamischen Massenkoeffizienten  $C_M$ . Hydrodynamische Kräfte entlang der Längsachse der einzelnen zylindrischen Teile der Plattform werden vernachlässigt, und somit wirkt die hydrodynamische Kraft immer senkrecht

zur Längsachse dieser Teile. Die Kraft pro Längeneinheit, die auf ein zylindrisches Teil der Plattform wirkt, ist somit durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$h = \frac{1}{2} \sigma C_D D |v + v_c - \dot{y}| (v + v_c - \dot{y}) + (C_M - 1) \sigma \frac{\pi D^2}{4} (a - \ddot{y}) + \sigma \frac{\pi D^2}{4} a$$

wobei  $\sigma$  die Dichte des Wassers und  $D$  der Durchmesser des zylindrischen Teiles der Plattform sind.  $v$  und  $a$  sind Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren der einzelnen Wasserpartikel und werden nach der Wellentheorie fünfter Ordnung von Stokes

[4] berechnet.  $\dot{y}$  und  $\ddot{y}$  sind Plattformgeschwindigkeit und -beschleunigung und ergeben sich aus der systemabhängigen Plattformbewegung  $y$ .  $v_c$  ist die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers, die auf diese Weise nichtlinear in die Relativgeschwindigkeit hineingebracht wird. Der Index  $\perp$  bedeutet, daß die Vektorkomponenten der Relativgeschwindigkeiten und -beschleunigungen senkrecht zum zylindrischen Plattformteil genommen werden. Die Betragssymbole im Geschwindigkeitsterm versichern, daß diese Kraftkomponente immer in entgegengesetzter Richtung zur Relativgeschwindigkeit wirkt.

Da vorausgesetzt wird, daß die Plattform sich lediglich entlang der horizontalen Längsachse  $y$  bewegt, werden die horizontalen Kraftkomponenten, die in der Richtung  $y$  an den einzelnen Teilen der Plattform wirken, addiert, um somit die gesamte horizontale hydrodynamische Kraft  $H$  zu ergeben:

$$H = \sum h_y$$

Die zeitlich variierende und entlang der Plattform unterschiedliche Wasseroberfläche, die durch die vorbeilaufenden Wellen verursacht wird, wird in der Berechnung der hydrodynamischen Kraft berücksichtigt. Die hydrodynamische Kraft entlang der ganzen im Wasser eingetauchten Länge jedes Plattformteiles ist in der gesamten hydrodynamischen Kraft  $H$  enthalten.

### Windkräfte

Windkräfte werden entsprechend der allgemein akzeptierten Standardformel [5]:

$$W = C_w F_w V_w^2$$

periode ausgesetzt ist. Es werden drei Fälle untersucht, wobei im Fall I nur der Seegang auf die Plattform wirkt und im Fall II ein Wind von 57 Knoten und eine Strömung von 1,0 Knoten an der Wasseroberfläche zusätzlich zum Seegang auf die Plattform wirken. Im Fall III wirken die gleichen Umweltbedingungen wie im Fall II, aber es sind vier Strahlruder an der Plattform angebracht, die zusätzlich zum Verankerungssystem die Plattform auf Position halten.

	Fall I	Fall II	Fall III
Umweltbedingungen	Wellen	Wellen Wind Strömung	Wellen Wind Strömung
Positionierung	Verankerungssystem	Verankerungssystem	Verankerungssystem mit Strahlruder
Positionierungskraft R (R in kp) (y in m.)	$R = 4460y + 5y^2 + 16y^3$	$R = 4460y + 5y^2 + 16y^3$	$R = 4460y + 5y^2 + 16y^3 + 38.000$

Tabelle: Randbedingungen der drei untersuchten Fälle

Die Unterwasserstruktur der Plattform besteht aus mehreren miteinander verbundenen kreiszylindrischen Balkenelementen, deren Abmessungen in Abb. 2 zu sehen sind. Die angenommenen Werte der hydrodynamischen Koeffizienten sind  $C_D = 0,5$  und  $C_M = 2,0$ . Das Verankerungssystem liefert eine Horizontalkraft von

$$R = 4460y + 5y^2 + 16y^3,$$

wobei der Verankerungskraft R die Einheit kp und der Plattformlängsbewegung y die Einheit m zugeordnet sind. Diese Verankerungskraft entspricht etwa der einer Achte-Ketten-Verankerung. Die Wellenhöhe von 4,3 m des regulären Seegangs, verursacht im Vergleich zur Wellenamplitude noch relativ kleine Tauch- und Stampfbewegungen von Bohrplattformen [9] und dürfte deshalb zur Analyse mit der hier beschriebenen Betrachtungsweise geeignet sein. Die zusätzlich angebrachten vier Strahlruder haben eine Leistung von je 750 PS und liefern somit, bei einem Wirkungsgrad von 12,7 kp/PS, einen konstanten Gesamtschub von 38 Tonnen. Randbedingungen der drei untersuchten Fälle sind in Tabelle I zusammengefaßt.

Die horizontalen Längsbewegungen der drei Fälle sind in Abb. 3 graphisch dargestellt. In der Form stimmen die hier errechneten Horizontalbewegungen mit den durch Modellversuche ermittelten Horizontalbewegungen von schwimmenden Plattformen im regulären Wellengang von Wahab und van Sluijs (siehe Fig. 6 von [10]) überein. Bei diesen Modellversuchen konnte die getestete Plattform selbstverständlich Tauch- und Stampfbewegungen ausführen.

Alle drei Bewegungskurven zeigen deutlich eine Anfangstransiente, die sich langsam stabilisiert. Erst nach einer gewissen Zeit (etwa 200 sec. für das analysierte Beispiel) oszilliert die Plattform annähernd harmonisch um eine horizontale Verlagerung y, die hier als Abdrift bezeichnet wird. Dieses Bewegungsverhalten läßt sich folgendermaßen erklären. Die Längsbewegung

der Plattform setzt sich aus zwei Frequenzbereichen zusammen, erstens aus der niederfrequenten Schwingung der Anfangsphase und zweitens aus der höherfrequenten Schwingung der Wellenbewegung. Die niederfrequente Schwingung ist durch das Verankerungs-/Stationierungssystem bestimmt und entspricht der Eigenperiode der Längsbewegung des Systems Plattform-Verankerung. Diese niederfrequente Schwingung klingt ab, und die Bewegung der Plattform stabilisiert sich, so daß nur die Horizontal-

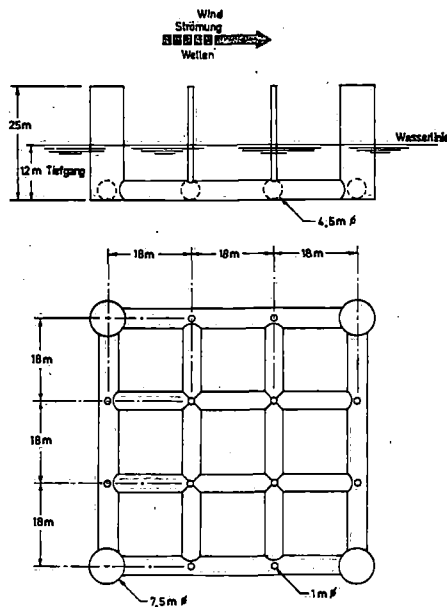


Abb. 2: Unterwasserstruktur der Plattform

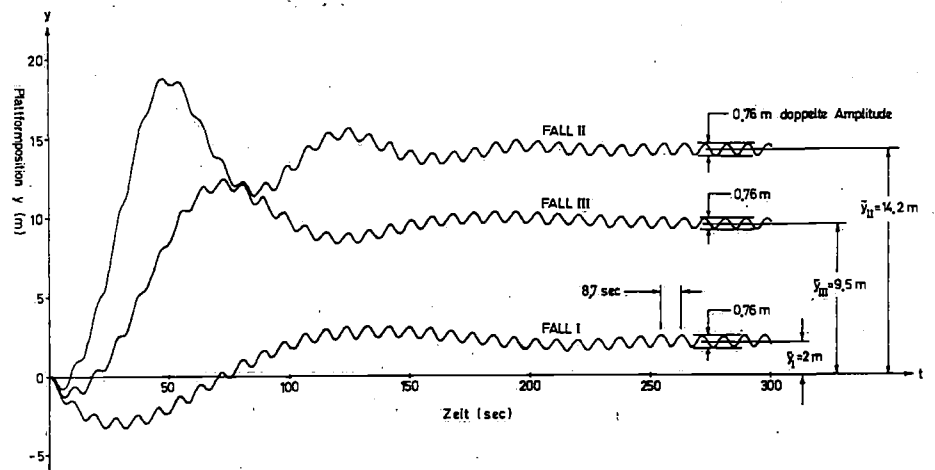


Abb. 3: Horizontalbewegung der Plattform

schwingung, die durch den regulären Seegang hervorgerufen wird, übrigbleibt (im irregulären Seegang wäre dieses Abklingen der niederfrequenten Schwingung nicht möglich, denn die Anfangstransiente würde immer von neuem in Gang gesetzt werden).

Im stabilisierten Bereich des hier berechneten Beispiels sind in allen drei Fällen die horizontalen Plattformschwingungen und auch die Perioden dieser Schwingungen gleich. Die doppelte Amplitude dieser Schwingungen beträgt etwa 18% der Wellenhöhe; die Periode der Schwingungen ist gleich der Wellenperiode.

Unterschiedlich sind die Abdriften der Plattform für die drei Fälle. Für Fall II ist die Abdrift etwa siebenmal so groß wie für Fall I, wobei der Unterschied zwischen den beiden Fällen lediglich die zusätzlichen Belastungen von Wind und Strömung bei Fall II ist. Das bedeutet also, daß Wind und Strömung einen im Vergleich zum Wellengang relativ großen Einfluß auf die Abdrift haben können. Fall III zeigt den Einfluß der Strahlruder. Der Schub der Strahlruder reduziert die Abdrift der Plattform (um etwa 2/3 für dieses Beispiel) und entlastet somit das Verankerungssystem.

Ein wichtiger Teil dieser Betrachtungsmethode ist die Einbeziehung des Verankerungs-/Positionierungssystems durch dessen Horizontalkraft als Funktion der Plattformbewegung y. Für den stabilisierten Bereich des hier berechneten Beispiels sind die horizontalen Stationierungskräfte für die drei untersuchten Fälle in Abb. 4 graphisch dargestellt. Daraus läßt sich ersehen, daß das Verankerungs-/Stationierungssystem lediglich einen starken Effekt auf die Abdrift hat, die horizontale Plattformschwingung aber kaum beeinflusst.

Abb. 4 zeigt deutlich, daß das Verankerungs-/Stationierungssystem eine wesentlich größere Positionierungskraft für die Fälle II und III aufbringen muß als für Fall I (etwa das 17fache). Das bedeutet, daß Wind und Strömung im Vergleich zum Wellengang einen relativ großen Einfluß auf die benötigte Positionierungskraft und somit auf das Verankerungs-/Stationierungssystem haben können.

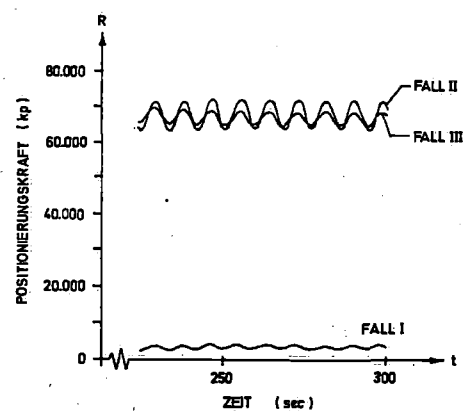


Abb. 4: Positionierungskraft des Verankerungs-/Stationierungssystems

### Schlußbemerkung

Die hier beschriebene Methode eignet sich lediglich zur Analyse der Horizontalbewegung von schwimmenden Plattformen im regulären Wellengang und dann nur für stabile Plattformen, deren Tauch- und Stampfbewegungen verhältnismäßig klein sind. Diese Randbedingungen lassen eine unbegrenzte Anwendung dieser Methode nicht zu. Es ist deswegen nötig und für die Zukunft geplant, das mathematische Modell zu erweitern, um diese beiden Einschränkungen zu beheben.

### Bezeichnungen

$C_D$	hydrodynamischer Widerstandskoeffizient
$C_M$	hydrodynamischer Massenkoeffizient
$C_W$	Windkraftkoeffizient

D	Durchmesser eines zylindrischen Teiles der Plattform
$F_W$	projizierte Windfläche
H	hydrodynamische Kraft
R	horizontale Verankerungs-/Positionierungskraft
W	Windkraft
a	Beschleunigung der Wasserpartikel
h	hydrodynamische Kraft pro Längeneinheit
m	Masse der Plattform
$\Delta t$	Zeitschritt
v	Geschwindigkeit der Wasserpartikel
$v_c$	Geschwindigkeit der Strömung
$v_w$	Windgeschwindigkeit
y	horizontale Bewegung der Plattform
$\dot{y}$	horizontale Geschwindigkeit der Plattform
$\ddot{y}$	horizontale Beschleunigung der Plattform
$\tilde{y}$	Abdrift der Plattform
$\sigma$	Dichte des Wassers

### Schrifttum

- [1] Hooft, J. P.: "A Mathematical Method of Determining Hydrodynamically Induced Forces on a Semisubmersible." SNAME Transactions, Vol. 79, 1971.
- [2] Østergard, C. und Payer, H.: Rationale Beurteilung der Festigkeit von Halbtauern. Schiffbautechnische Gesellschaft, STG 67, 1973.
- [3] Morison, J. R., O'Brien, M. D., Johnson, J. W. and Schaaf, S. A.: "The Forces Exerted by Ocean Waves on Piles." Petr. Trans. of AIMME, Vol. 189, Paper No. 2846, 1950.
- [4] Comstock, J. P.: "Principles of Naval Architecture." SNAME, 1967, pp. 610.
- [5] Graham, J. R.: "Mooring Techniques in the Open Sea." Marine Technology Quarterly, SNAME, April, 1965.
- [6] Collipp, B. G.: "Analyzing Mooring Line Configurations." Petroleum Engineer, 5 - 1968.
- [7] Scarborough, J. B.: Numerical Mathematical Analysis. Johns Hopkins Press, 4th Edition, 1958.
- [8] Nielsen, K. L.: Methods in Numerical Analysis. Mc Millan Co., New York, 1956.
- [9] Stanton, P. N. and Kuang, J. G.: "Evaluation of Semisubmersible Drilling Vessels." Offshore Technology Conference, Paper No. 2031, May, 1974.
- [10] Wahab, R. and van Sluijs, M. F.: "Some Remarks on Model Tests with Floating Platforms in Waves." Marine Technology Quarterly, SNAME, Oct., 1968.