Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Ultrafilters in de Combinatoriek

Ultrafilters in Combinatorics

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

TIM SMID

Delft, Nederland
Augustus 2012

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"Ultrafilters in de Combinatoriek"

"Ultrafilters in Combinatorics"

TIM SMID

Technische Universiteit Delft

Begeleiders

Dr. K.P. Hart

Dr. E. Coplakova

Overige commissieleden

Dr.ir. R.J. Fokkink

Dr. M.H.A. Haase

Dr.ir. M. Keijzer

Augustus 2012

Delft

Samenvatting

In het eerste hoofdstuk van dit verslag zullen we omschrijven wat filters en ultrafilters zijn. We zullen de termen hoofdultrafilter, vrij filter, echt filter en onecht filter introduceren. Daarnaast bespreken we een aantal equivalente definities van ultrafilters en we eindigen het hoofdstuk met een bewijs van de ultrafilterstelling, welke zegt dat op iedere niet-lege verzameling een ultrafilter bestaat. Iedere oneindige verzameling heeft zelfs een vrij ultrafilter.

Vervolgens bewijzen we in het tweede hoofdstuk dat we met een ultrafilter een niet-Lebesgue-meetbare verzameling kunnen maken. Een gevolg hiervan is dat ultrafilters 'complexer' zijn dan analytische verzamelingen.

Het derde hoofdstuk bevat een bewijs van de Stelling van Ramsey: iedere eindige kleuring van een volledige graaf met aftelbaar oneindig veel knopen bevat een volledige monochromatische deelgraaf met aftelbaar oneindig veel knopen. Dit bewijs zal vrij direct volgen uit de eigenschappen van ultrafilters. Dit hoofdstuk sluiten we af met het bewijs van een eindige versie van de Stelling van Ramsey.

In het vierde hoofdstuk bewijzen we de Stelling van Hindman: gegeven een kleuring van de natuurlijke getallen met eindig veel kleuren, dan bestaat er een oneindige monochromatische verzameling A zó dat ook de verzameling van alle eindige sommen van A monochromatisch is. Om deze stelling te bewijzen zullen we gebruik maken van de Čech-Stonecompactificatie en zijn natuurlijke topologie. We kunnen een operatie op deze ruimte leggen en bewijzen dat er idempotente ultrafilters bestaan. Met behulp van een recursief proces bewijzen we tot slot de stelling.

Het laatste hoofdstuk van dit verslag gaat over de Stelling van Van der Waerden: als een kleuring van de natuurlijke getallen met eindig veel kleuren is gegeven, dan bestaat er een monochromatische verzameling met willekeurig lange rekenkundige rijen. Hiervoor zullen we eerst moeten bewijzen dat er minimale idempotente ultrafilters bestaan onder de operatie uit hoofdstuk 4. Dit zullen we aantonen door gebruik te maken van idealen. Met deze combinatie van ultrafilters en idealen kunnen we het bewijs van de Stelling van Van der Waerden geven. Ook dit hoofdstuk sluiten we af met een eindige versie van deze stelling.

Voorwoord

Dit verslag is geschreven als onderdeel ter verkrijging van de graad van 'Bachelor of Science' in de Technische Wiskunde aan het Delft Institute of Applied Mathematics. In februari 2012 ben ik begonnen met het schrijven van dit verslag en na zes maanden hard werken kon dit project worden afgesloten. Gedurende deze maanden is mijn kennis van ultrafilters gestaag toegenomen, en ik kan met een gerust hart zeggen dat ik veel geleerd heb van dit onderzoek.

Graag zou ik een aantal personen in het bijzonder willen bedanken. Allereerst uiteraard mijn begeleiders Dr. Klaas Pieter Hart en Dr. Eva Coplakova voor alle tijd en moeite die zij in dit project hebben gestoken. Tijdens het onderzoek zijn zij gigantisch behulpzaam geweest en ze hebben mij van ontzettend veel informatie en kennis voorzien.

Dr. Eva Coplakova is bovendien degene die mij tijdens de cursus logica in het studiejaar 2010 - 2011 kennis heeft laten maken met ultrafilters. Mijn interesse in dit onderwerp is sindsdien eigenlijk alleen maar gegroeid; hoe meer ik erover te weten kom, hoe leuker ultrafilters worden!

Daarnaast zou ik Aad Vijn willen bedanken voor de regelmatige feedback op mijn werk, en het inzicht in de abstracte wiskunde dat hij mij heeft geschonken met zijn bachelorscriptie over het keuzeaxioma.

Tot slot wil ik mijn ouders bedanken voor het doorlezen van mijn scriptie en alle verbeteringen die daaruit zijn gevolgd. Zoals Albert Einstein al wist te vertellen begrijp je een onderwerp pas werkelijk, wanneer je het aan anderen uit kan leggen. Ondanks dat mijn ouders niet thuis zijn in de (universitaire) wiskunde, heb ik hen een groot gedeelte van mijn scriptie kunnen uitleggen. Dit heeft zeker geholpen in mijn eigen begrip van het onderwerp.

Ik wens u veel plezier met het lezen van mijn bachelorscriptie. Voor vragen of opmerkingen kunt u mij altijd bereiken op het e-mailadres timsmid@gmail.com.

Tim Smid,
Vlaardingen,
04-07-2012

Inhoudsopgave

Inleiding

We zullen ons in dit verslag bezig houden met ultrafilters en een aantal stellingen die bewezen kunnen worden met behulp van ultrafilters. Een ultrafilter op een verzameling is een collectie deelverzamelingen die voldoet aan een viertal eisen. In zekere zin kunnen we zeggen dat elementen van een ultrafilter 'grote' verzamelingen zijn.

Met een ultrafilter is het mogelijk om een niet-Lebesgue-meetbare verzameling te construeren. Dit impliceert dat ultrafilters geen 'eenvoudige' verzamelingen zijn.

Zoals zal blijken uit dit verslag kunnen ultrafilters op een prettige manier worden gebruikt om enkele belangrijke stellingen uit de combinatoriek te bewijzen. Zo zullen we de stelling van Ramsey bewijzen door direct gebruik te maken van de eigenschappen van ultrafilters.

Vervolgens zullen we een operatie en een topologie leggen op de ruimte van alle ultrafilters van de natuurlijke getallen. Met behulp van idempotente ultrafilters onder deze operatie zullen we ook de stellingen van Hindman en van Van der Waerden kunnen bewijzen.

Ondanks dat deze drie stellingen ook bewezen kunnen worden zonder ultrafilters, geven deze bewijzen een mooi beeld van de kracht van ultrafilters. Niet alleen in de combinatoriek zijn ultrafilters een handig bewijsmiddel, ook op andere vlakken kunnen ultrafilters erg nuttig zijn. Zo kunnen we met ultrafilters een algemene definitie van convergentie geven, en ultraproducten of ultramachten maken. Met deze ultramachten kunnen we vervolgens bijvoorbeeld de niet-standaard analyse opbouwen. Deze onderwerpen zullen echter niet aan bod komen in deze scriptie.

Aangezien de bewijzen van de stellingen van Ramsey, Hindman en Van der Waerden de centrale resultaten zijn van deze scriptie, zullen we dit verslag niet afsluiten met een conclusie. Alle 'conclusies' zijn te vinden in de bewijzen zelf.

HOOFDSTUK 1

Ultrafilters

Voordat we werkelijk aan de slag kunnen met ultrafilters, zullen we eerst moeten definiëren wat ultrafilters zijn. Vervolgens zullen we aantonen dat ultrafilters bestaan en dat we zelfs van ieder filter een ultrafilter kunnen maken. Tot slot zullen we in dit hoofdstuk laten zien dat iedere oneindige verzameling een bijzonder soort ultrafilter heeft.

1. Omschrijving

Om te kunnen omschrijven wat een ultrafilter is, zullen we eerst de notie van een filter nodig hebben. Een collectie deelverzamelingen van een verzameling A noemen we een *filter* $\mathcal{F}$, indien aan de volgende vier eisen is voldaan:

(F1) De lege verzameling is géén element van het filter: $\varnothing \notin \mathcal{F}$;
(F2) De hele verzameling A is een element van het filter: $A \in \mathcal{F}$;
(F3) Als B en C in $\mathcal{F}$, dan ook $B \cap C \in \mathcal{F}$;
(F4) Als $B \in \mathcal{F}$ en $B \subseteq C \subseteq A$, dan ook $C \in \mathcal{F}$.

Voor een verzameling $B \subseteq A$ met $B \neq \varnothing$ kunnen we direct een filter $\mathcal{F}_B$ op A maken:

$$\mathcal{F}_B = \{C : B \subseteq C \subseteq A\}$$

Verzamelingen van deze soort voldoen aan de eisen F1-4 en worden *hoofdfilters* genoemd. In het bijzonder geldt bijvoorbeeld dat $\mathcal{F}_A = \{A\}$ een hoofdfilter is. Is een filter niet op deze manier te schrijven, dan noemen we het *vrij*.

Een voorbeeld van een vrij filter is het *Fréchet filter* op een oneindige verzameling A:

$$\mathcal{F} = \{B : B \subseteq A \text{ en } A \setminus B \text{ is eindig}\}$$

Dit filter is vernoemd naar de Franse topoloog Maurice Fréchet (1878 - 1973). Een andere benaming voor het Fréchet filter is het *co-eindig filter*, het bestaat tenslotte precies uit de co-eindige verzamelingen in de machtsverzameling van A. We zullen in het onderstaande lemma bewijzen dat het Fréchet filter ook daadwerkelijk een vrij filter is.

LEMMA 1.1. *Het Fréchet filter op een oneindige verzameling is een vrij filter.*

BEWIJS. Laat A een oneindige verzameling zijn en $\mathcal{F}$ het Fréchet filter op deze verzameling. Aan F1 en F2 is direct voldaan. Als B en C in $\mathcal{F}$, dan is ook $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ een eindige verzameling en daarmee $B \cap C \in \mathcal{F}$.

Als $B \in \mathcal{F}$ en $B \subseteq C \subseteq A$, dan zal ook $A \setminus C \subseteq A \setminus B$ eindig zijn, zodat $C \in \mathcal{F}$. Hiermee is voldaan aan alle eisen F1-4.

Om aan te tonen dat het Fréchet filter vrij is, bekijken we voor alle $a \in A$ de verzameling $A_a = A \setminus \{a\}$. Het moge duidelijk zijn dat $A_a \in \mathcal{F}$ voor alle $a \in A$, en $\bigcap_{a \in A} A_a = \varnothing$. Hieruit volgt eveneens dat $\bigcap_{B \in \mathcal{F}} B = \varnothing$, waardoor $\mathcal{F}$ onmogelijk een hoofdfilter kan zijn. $\square$

In sommige literatuur wordt de eis F1 weggelaten en wordt er een onderscheid gemaakt tussen echte en onechte filters. Een filter $\mathcal{F}$ (zonder F1) op een verzameling A heet *onecht* wanneer hij gelijk is aan $\mathcal{P}(A)$, anders wordt het filter *echt* genoemd. Dat eis F1 en onechtheid equivalent zijn voor filters zonder F1, bewijzen we in de volgende stelling.

STELLING 1.2. *Zij A een verzameling en $\mathcal{F}$ een collectie deelverzamelingen van A die voldoet aan F2-4. $\mathcal{F}$ voldoet aan F1 dan en slechts dan als $\mathcal{F}$ echt is.*

BEWIJS. Zij A een verzameling. Neem om te beginnen aan dat $\mathcal{F}$ een collectie deelverzamelingen is van A, die voldoet aan F2-4 en echt is. Dat wil zeggen: $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(A)$. Stel dat $\varnothing \in \mathcal{F}$, dan geldt met behulp van F4 dat $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$. Hiermee hebben we een tegenspraak gevonden, en zodoende geldt $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Neem vervolgens aan dat $\mathcal{F}$ een collectie deelverzamelingen is van A, die voldoet aan F1: $\varnothing \notin \mathcal{F}$. Hieruit volgt direct dat $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(A)$, en zodoende is $\mathcal{F}$ echt. $\square$

In het vervolg zullen we het enkel hebben over filters met de eisen F1-4; we zullen geen gebruik meer maken van de termen echt en onecht.

Een filter $\mathcal{F}$ op een verzameling A heet een *ultrafilter* op A als ook voldaan is aan de volgende eis:

(F5) Er is geen filter $\mathcal{G}$ op A zó dat $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$.

Dat ultrafilters bestaan kunnen we aantonen met een voorbeeld. Voor een element $a \in A$ kunnen we de volgende hoofdfilter maken:

$$\mathcal{F}_a = \{B : a \in B \text{ en } B \subseteq A\} = \{B : \{a\} \subseteq B \subseteq A\}$$

We claimen dat dit filter een ultrafilter is.

LEMMA 1.3. *Voor ieder element a van een verzameling A is $\mathcal{F}_a$ een ultrafilter op A.*

BEWIJS. Zij A een verzameling en $a \in A$. Dat een verzameling van deze vorm voldoet aan F1-4 hebben we al eerder opgemerkt. Stel dat $\mathcal{F}_a$ geen ultrafilter is op A, dan bestaat er een filter $\mathcal{G}$ op A zodat $\mathcal{F}_a \subsetneq \mathcal{G}$. Zij nu $C \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}_a$, dan geldt $C \subseteq A$ en $a \notin C$. Zodoende ook $a \in A \setminus C$ en $A \setminus C \in \mathcal{F}_a \subsetneq \mathcal{G}$. Aangezien $\mathcal{G}$ een filter is en zowel C als $A \setminus C$ elementen zijn van $\mathcal{G}$, geldt met behulp van F3 nu $\varnothing = C \cap (A \setminus C) \in \mathcal{G}$. Dit is in tegenspraak met F1 en zodoende is $\mathcal{F}_a$ een ultrafilter. $\square$

2. Eigenschappen

Alle ultrafilters hebben een aantal bijzondere eigenschappen. Voordat we de eerste eigenschap introduceren zullen we een lemma moeten bewijzen voor gewone filters.

LEMMA 1.4. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een verzameling A en neem aan dat $B \subseteq A$ met $A \setminus B \notin \mathcal{F}$. Dan bestaat er een filter $\mathcal{F}'$, zó dat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ en $B \in \mathcal{F}'$.*

BEWIJS. Laat $\mathcal{F}$ een filter zijn op een verzameling A. Neem $B \subseteq A$ willekeurig met $A \setminus B \notin \mathcal{F}$. Bekijk nu de volgende verzameling:

$$\mathcal{F}' = \{D \subseteq A : \text{er is een } C \in \mathcal{F} \text{ met } B \cap C \subseteq D\}$$

Om te beginnen zullen we aantonen dat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Neem hiervoor een $X \in \mathcal{F}$ willekeurig en schrijf in de bovenstaande uitdrukking $C = X$. Nu voldoet $D = X$, waarmee $X \in \mathcal{F}'$. Zodoende volgt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Vervolgens tonen we aan dat $\mathcal{F}'$ een filter is, door de vier eisen na te lopen:

(F1) Voor alle $C \in \mathcal{F}$ geldt dat $B \cap C \neq \varnothing$. Uit onze constructie van $\mathcal{F}'$ volgt nu dat voor alle $D \in \mathcal{F}'$ geldt $D \neq \varnothing$. Hieruit kunnen we concluderen dat $\varnothing \notin \mathcal{F}'$;

(F2) Aangezien $A \in \mathcal{F}$ en $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ geldt ook $A \in \mathcal{F}'$;

(F3) Neem X en Y in $\mathcal{F}'$ willekeurig, dan zijn er C_1 en C_2 in $\mathcal{F}$ met $B \cap C_1 \subseteq X$ en $B \cap C_2 \subseteq Y$. Neem $C_3 = C_1 \cap C_2$, dan:

$$B \cap C_3 = B \cap (C_1 \cap C_2) = (B \cap C_1) \cap (B \cap C_2) \subseteq X \cap Y$$

Omdat $C_3 \in \mathcal{F}$ geldt nu $X \cap Y \in \mathcal{F}'$;

(F4) Neem $X \in \mathcal{F}'$ willekeurig en een Y met $X \subseteq Y \subseteq A$. We weten dat er een $C \in \mathcal{F}$ is met $B \cap C \subseteq X$, zodat ook:

$$B \cap C \subseteq X \subseteq Y$$

Zodoende geldt $Y \in \mathcal{F}'$.

Tot slot bewijzen we dat $B \in \mathcal{F}'$. Dit volgt direct door $C = A$ te nemen $\square$

Dit lemma maakt het bewijs van de onderstaande stelling een stuk eenvoudiger.

STELLING 1.5. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een verzameling A. $\mathcal{F}$ is een ultrafilter dan en slechts dan als voor iedere $B \subseteq A$ ofwel geldt $B \in \mathcal{F}$, ofwel $A \setminus B \in \mathcal{F}$.*

BEWIJS. Laat $\mathcal{F}$ een ultrafilter zijn op de verzameling A en neem $B \subseteq A$ willekeurig. Stel dat $A \setminus B \notin \mathcal{F}$. Met behulp van Lemma 1.4 vinden we een filter $\mathcal{F}'$ met $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ en $B \in \mathcal{F}'$. Aangezien $\mathcal{F}$ een ultrafilter is volgt uit eigenschap F5 bovendien dat $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. Analoog bewijzen we dat $A \setminus B \in \mathcal{F}$ indien $B \notin \mathcal{F}$. Voor iedere $B \subseteq A$ geldt dus ofwel $B \in \mathcal{F}$, ofwel $A \setminus B \in \mathcal{F}$. Het is bovendien niet mogelijk dat B en $A \setminus B$ beide elementen zijn van $\mathcal{F}$, aangezien dit met behulp van F3 in tegenspraak zou zijn met het feit dat $\mathcal{F}$ een filter is.

Vervolgens bewijzen we de tweede implicatie. Laat $\mathcal{F}$ een filter zijn op een niet-lege verzameling A met voor iedere $B \subseteq A$ ofwel $B \in \mathcal{F}$, ofwel $A \setminus B \in \mathcal{F}$. Stel dat er een filter $\mathcal{G}$ is, zodanig dat $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Laat $B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, dan geldt $A \setminus B \in \mathcal{F}$. Hieruit volgt ook $A \setminus B \in \mathcal{G}$, zodat met eis F3 geldt $\varnothing = B \cap (A \setminus B) \in \mathcal{G}$. Zodoende is $\mathcal{G}$ geen filter en we kunnen concluderen dat $\mathcal{F}$ een ultrafilter is op A. $\square$

Dit is niet de enige karakterisering van ultrafilters, we kunnen ook de volgende stelling bewijzen.

Stelling 1.6. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een verzameling A. $\mathcal{F}$ is een ultrafilter dan en slechts dan als voor alle B en C met $B \cup C \in \mathcal{F}$ geldt $B \in \mathcal{F}$, $C \in \mathcal{F}$ of beide.*

Bewijs. Zij A een verzameling en $\mathcal{F}$ een filter op A. Stel om te beginnen dat $\mathcal{F}$ een ultrafilter is. Neem B en C willekeurig zó dat $B \cup C \in \mathcal{F}$. Met behulp van Stelling 1.5 volgt:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \notin \mathcal{F}$$

Zodoende zal $A \setminus B \notin \mathcal{F}$, $A \setminus C \notin \mathcal{F}$ of beiden. Wederom met Stelling 1.5 zal $B \in \mathcal{F}$, $C \in \mathcal{F}$ of beiden.

Neem vervolgens aan dat voor alle $B \cup C \in \mathcal{F}$ geldt $B \in \mathcal{F}$ of $C \in \mathcal{F}$. Neem hiervoor een $D \in \mathcal{P}(A)$ willekeurig. Er geldt $D \cup (A \setminus D) = A \in \mathcal{F}$. Uit het gegeven volgt $D \in \mathcal{F}$, $A \setminus D \in \mathcal{F}$ of beiden.

Stel dat zowel $D \in \mathcal{F}$ als $A \setminus D \in \mathcal{F}$. Met F3 volgt nu $\varnothing = D \cap (A \setminus D) \in \mathcal{F}$, wat in tegenspraak is met de aanname dat $\mathcal{F}$ een filter is.

Voor alle $D \in \mathcal{P}(A)$ volgt dus ofwel $D \in \mathcal{F}$, ofwel $A \setminus D \in \mathcal{F}$. Uit Stelling 1.5 volgt dat $\mathcal{F}$ een ultrafilter is. $\square$

Met behulp van deze stelling kunnen we Lemma 1.3 versterken, we kunnen een precieze karakterisering geven van alle hoofdultrafilters.

Stelling 1.7. *Iedere hoofdultrafilter op een verzameling A is van de vorm $\mathcal{F}_d = \{B : d \in B \text{ en } B \subseteq A\}$ voor een zekere $d \in A$.*

Bewijs. Zij A een verzameling. In het Lemma 1.3 zagen we dat alle filters van de vorm $\mathcal{F}_d$ inderdaad ultrafilters op A zijn. Stel dat $\mathcal{F}_C$ een ultrafilter is met $a \in C$, maar $C \neq \{a\}$. Dan geldt $\{a\} \notin \mathcal{F}_C$ en $C \setminus \{a\} \notin \mathcal{F}_C$. De contrapositie van Stelling 1.6 geeft nu $C = \{a\} \cup (C \setminus \{a\}) \notin \mathcal{F}_C$. Dit is een tegenspraak, zodat iedere hoofdultrafilter op A wel van de vorm $\mathcal{F}_d$ moet zijn. $\square$

Als we het volgende lemma hebben bewezen, zal het ook mogelijk zijn om alle vrije ultrafilters enigszins te omschrijven.

Lemma 1.8. *Géén vrij ultrafilter op de verzameling A bevat een eindige verzameling.*

Bewijs. Laat $\mathcal{F}$ een vrij ultrafilter zijn op een verzameling A en neem aan dat $\mathcal{F}$ een eindige verzameling bevat. Zij B een kleinste eindige verzameling in $\mathcal{F}$, dat wil zeggen dat B een zo klein mogelijke kardinaliteit heeft. Aangezien $\mathcal{F}$ een vrij ultrafilter is, zal deze kardinaliteit in ieder geval groter dan 1 zijn. Neem nu $b \in B$, dan zal $B \backslash \{b\} \neq \varnothing$. Bovendien hebben zowel $\{b\}$ als $B \backslash \{b\}$ een kardinaliteit kleiner dan die van B. Zodoende geldt dat $\{b\} \notin \mathcal{F}$ en $B \backslash \{b\} \notin \mathcal{F}$, en met de contrapositie van Stelling 1.6 volgt nu dat $B = \{b\} \cup (B \setminus \{b\}) \notin \mathcal{F}$. Dit is in tegenspraak met het gegeven, en zodoende zal $\mathcal{F}$ géén eindige verzamelingen bevatten. $\square$

Hiermee kunnen we een omschrijving geven van alle vrije ultrafilters.

Stelling 1.9. *Een ultrafilter $\mathcal{F}$ op een oneindige verzameling A is vrij dan en slechts dan als $\mathcal{F}$ het Fréchet filter bevat.*

Bewijs. Laat $\mathcal{F}$ een ultrafilter zijn op een oneindige verzameling A. Stel dat $\mathcal{F}$ vrij is, dan volgt uit het voorgaande Lemma 1.8 dat $\mathcal{F}$ geen enkele eindige verzameling zal bevatten. Met behulp van Stelling 1.5 kunnen we zelfs concluderen dat $\mathcal{F}$ juist de complementen van deze eindige verzamelingen als elementen heeft. Zodoende is het Fréchet filter bevat in $\mathcal{F}$.

Stel dat $\mathcal{F}$ het Fréchet filter bevat, dan zal $\mathcal{F}$ geen enkele eindige verzameling bevatten. Een hoofdfilter van de vorm $\mathcal{F}_d$ voor een zekere $d \in A$ zal altijd de eindige verzameling $\{d\}$ bevatten, zodat $\mathcal{F}$ wel een vrij ultrafilter moet zijn. $\square$

3. Ultrafilterstelling

Nu we een beeld hebben gekregen van wat ultrafilters zijn en hoe zij zich gedragen, is het tijd om aan te tonen dat ieder filter op een verzameling uitgebreid kan worden tot een ultrafilter. Dit principe staat bekend als de *Ultrafilterstelling*.

Stelling 1.10 (Ultrafilterstelling). *Zij A een verzameling en $\mathcal{F}$ een filter op A. Er bestaat een ultrafilter $\mathcal{U}$ met $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Het bewijs van deze stelling zal nog even op zich laten wachten, aangezien we voor dit bewijs het Lemma van Zorn nodig hebben. Hiervoor zullen we eerst de definities van partiële en lineaire ordeningen bekijken. Een *partiële ordening* $\preceq$ is een relatie op een verzameling A met de volgende drie eigenschappen:

(O1) $a \preceq a$ voor alle $a \in A$;
(O2) Als $a \preceq b$ en $b \preceq a$, dan $a = b$ voor alle $a, b \in A$;
(O3) Als $a \preceq b$ en $b \preceq c$, dan $a \preceq c$ voor alle $a, b, c \in A$.

Een *lineaire ordening* is een partiële ordening met de volgende extra eigenschap:

(O4) $a \preceq b$ of $b \preceq a$ voor alle $a, b \in A$.

Hiermee kunnen we het *Lemma van Zorn* formuleren.

LEMMA 1.11 (Lemma van Zorn). *Als A een partieel geordende verzameling is, waarbinnen iedere lineair geordende deelverzameling een bovengrens heeft, dan heeft A een maximaal element. Dat wil zeggen: er is een $x \in A$ zodat er geen $y \in A$ is met $y \neq x$ en $x \preceq y$.*

Max Zorn (1906 - 1993) heeft dit lemma in 1935 geformuleerd om te gebruiken als axioma in de verzamelingenleer ter vervanging van de welordeningsstelling. Hij gaf aan in een later artikel te zullen bewijzen dat zijn lemma equivalent is met het keuzeaxioma. Alhoewel Zorn dit artikel nooit heeft geschreven, is inmiddels wel bekend dat het Lemma van Zorn inderdaad equivalent is met het keuzeaxioma. In hoofdstuk 3 van [**10**] heeft A. Vijn dit bijvoorbeeld bewezen.

We hebben hiermee genoeg gereedschap in handen gekregen om het bewijs van de Ultrafilterstelling te geven.

BEWIJS. Zij A een verzameling en $\mathcal{F}$ een filter op A. We bekijken de volgende verzameling:

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ is een filter en } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$$

De collectie $\mathfrak{F}$ wordt partieel geordend door $\subseteq$:

(O1) Er geldt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ voor alle $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$;

(O2) Uit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ en $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ volgt $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ voor alle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{F}$;

(O3) Uit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ en $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ volgt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ voor alle $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathfrak{F}$.

Laat $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ een niet-lege verzameling zijn, die lineair geordend wordt door $\subseteq$. Schrijf nu:

$$\mathcal{G} = \bigcup \mathfrak{F}'$$

Als $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$, dan volgt direct uit de constructie van $\mathcal{G}$ dat $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$. Bovenal kunnen we bewijzen dat $\mathcal{G}$ ook een filter is:

(F1) Omdat $\varnothing \notin \mathcal{H}$ voor iedere $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$, zal ook $\varnothing \notin \mathcal{G}$;

(F2) Omdat $A \in \mathcal{H}$ voor iedere $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$, zal zeker ook $A \in \mathcal{G}$;

(F3) Zij G_1 en G_2 in $\mathcal{G}$ willekeurig. Neem $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ in $\mathfrak{F}'$ zó dat $G_1 \in \mathcal{H}_1$ en $G_2 \in \mathcal{H}_2$. Omdat $\mathfrak{F}'$ lineair geordend is zal $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$ of $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$. Neem zonder verlies der algemeenheid aan dat we ons in het eerste geval bevinden, dan zijn G_1 en G_2 elementen van $\mathcal{H}_2$. Er geldt ook $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{H}_2$ en zodoende $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$.

(F4) Zij $G \in \mathcal{G}$ en $H \supseteq G$ willekeurig. Neem nu een $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$ met $G \in \mathcal{H}$, dan geldt $H \in \mathcal{H}$ en zodoende ook $H \in \mathcal{G}$.

Hieruit volgt dat $\mathcal{G}$ inderdaad een filter is, en bovendien een bovengrens is voor $\mathfrak{F}'$.

De verzameling $\mathfrak{F}$ voldoet dus aan de eisen van het Lemma van Zorn. De verzameling is partieel geordend en iedere lineair geordende deelverzameling heeft een bovengrens. Zodoende heeft $\mathfrak{F}$ een maximaal element $\mathcal{M}$. Deze $\mathcal{M}$ is een filter en $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$. Als $\mathcal{N}$ een filter is met $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, dan is $\mathcal{N}$ een element van $\mathfrak{F}$ en geldt $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Hieruit kunnen we concluderen dat $\mathcal{M}$ een ultrafilter is met $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$. $\square$

Ieder filter op een verzameling kan dus worden uitgebreid tot een ultrafilter op die verzameling. Deze stelling geeft aanleiding tot een wat specifiekere uitspraak over ultrafilters op oneindige verzamelingen.

STELLING 1.12. *Als A een oneindige verzameling is, dan bestaat er een vrij ultrafilter op A.*

BEWIJS. Laat A een oneindige verzameling zijn en $\mathcal{F}$ het Fréchet filter op A. Met behulp van de Ultrafilterstelling 1.10 kunnen we een ultrafilter $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ vinden. Uit Stelling 1.9 volgt dat $\mathcal{U}$ een vrij ultrafilter is op A. □

Hiermee hebben we de belangrijkste globale eigenschappen van ultrafilters omschreven en bewezen. We zullen ons in het volgende hoofdstukken richten op een aantal toepassingen van ultrafilters.

HOOFDSTUK 2

Niet-constructivisme

Met behulp van een vrij ultrafilter zullen we in staat zijn een niet-Lebesgue-meetbare verzameling te creëren. Dit duidt erop dat niet-triviale of vrije ultrafilters geen 'eenvoudige' verzamelingen zijn. Dit resultaat is te danken aan W. Sierpiński in [**9**].

1. Opzet

Laat $\mathcal{U}$ een vrij ultrafilter zijn op $\mathbb{N}$ (merk op dat $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$). Voor iedere $x \in [0, 1]$ kunnen we zijn oneindige ontwikkeling in tweemachten als volgt opschrijven:

$$x = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_3}} + \cdots$$

Hierin zijn $n_1, n_2, n_3, \ldots \in \mathbb{N}$ met $n_i \neq n_j$ voor $i \neq j$. De machten in deze ontwikkeling noteren we vanaf nu met $N_x = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$.

Voor alle getallen $x \in [0, 1]$ kunnen we zo'n ontwikkeling in tweemachten opschrijven. Voor sommige getallen zijn er zelfs meerdere ontwikkelingen mogelijk, bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

Zoals we later zullen zien is dit gelukkig geen probleem, aangezien zo'n dubbele ontwikkeling alleen mogelijk is voor breuken.

We kunnen een functie $\varphi : [0, 1] \to \{0, 1\}$ construeren door:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } N_x \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{als } N_x \in \mathcal{U} \end{cases}$$

In het vervolg van dit hoofdstuk maken we gebruik van de maat van een verzameling, waarmee we in het bijzonder de Lebesgue-maat van deze verzameling bedoelen. We noteren deze maat op $\mathbb{R}$ over het algemeen met μ. De *Lebesgue-maat* heeft onder andere aan de volgende eigenschappen:

(1) Voor alle meetbare verzamelingen $V \subseteq \mathbb{R}$ geldt $\mu(V) \geq 0$;
(2) Voor alle intervallen $[a, b] \in \mathbb{R}$ geldt $\mu([a, b]) = b - a$;
(3) De maat μ is sigma-additief: voor iedere verzameling $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ paargewijs disjuncte meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ geldt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$$

(4) De maat μ is translatie invariant: voor alle meetbare $M \subseteq \mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\mu(M + x) = \mu(M) \qquad \text{met} \qquad M + x = \{m + x : m \in M\}$$

(5) De maat van een aftelbare verzameling is gelijk aan 0.

Meer informatie over de Lebesgue-maat is te vinden in paragraaf 11 van [**12**].

We claimen nu dat de volgende verzamelingen niet meetbaar zijn:

$$X = \{x \in [0, 1] : \varphi(x) = 1\}$$

$$Y = \{x \in [0, 1] : \varphi(x) = 0\}$$

Om dit te bewijzen gaan we ervan uit dat X en Y juist wel meetbaar zijn. In drie stappen zullen we dan een tegenspraak afleiden. Allereerst kunnen we aantonen dat $\mu(X) = 0$ of $\mu(X) = 1$, en $\mu(Y) = 0$ of $\mu(Y) = 1$. Vervolgens zal uit de symmetrie van X en Y volgen dat beide verzamelingen dezelfde maat moeten hebben. Aangezien de verzamelingen disjunct zijn en $[0, 1]$ op aftelbaar veel punten na opvullen, zal daarnaast de maat van $X \cup Y$ gelijk moeten zijn aan 1. Dit is onmogelijk.

2. Maat Bepalen

We zullen het volgende lemma nodig hebben om te bewijzen dat $\mu(X) = 0$ of $\mu(X) = 1$.

Lemma 2.1. *Zij $\mathcal{F}$ een vrij ultrafilter op een verzameling A. Als $B \in \mathcal{F}$ en $C \subsetneq B$ met $B \setminus C$ eindig, dan ook $C \in \mathcal{F}$.*

Bewijs. Zij A een verzameling en $\mathcal{F}$ een vrij ultrafilter op A. Laat $B \in \mathcal{F}$ willekeurig en $C \subseteq B$ met $B \setminus C$ eindig. Omdat $B \setminus C$ eindig is geeft Lemma 1.8 dat $A \setminus (B \setminus C) = C \cup (A \setminus B) \in \mathcal{F}$. Stelling 1.6 geeft nu dat $C \in \mathcal{F}$ of $A \setminus B \in \mathcal{F}$. Aangezien $A \setminus B$ volgens Stelling 1.5 zeker geen element is van ons ultrafilter, zal $C \in \mathcal{F}$. □

Laat $x \in X \cap [0, \frac{1}{2}]$, zodat we weten dat $N_x \in \mathcal{U}$ een oneindige verzameling is en $1 \notin N_x$. Uit eigenschap F4 volgt dat de verzameling $N_y = N_x \cup \{1\}$ ook bevat zit in ons ultrafilter $\mathcal{U}$. We weten bovendien dat de bijbehorende y bevat ligt in $[\frac{1}{2}, 1]$ en eveneens een oneindige ontwikkeling in tweemachten heeft.

Omgekeerd kunnen we iets soortgelijks doen. Laat $x \in X \cap [\frac{1}{2}, 1]$, zodat we wederom weten dat $N_x \in \mathcal{U}$ een oneindige verzameling is en $1 \in N_x$. Aangezien N_x oneindig is volgt uit Lemma 2.1 dat $N_y = N_x \setminus \{1\}$ ook een element is van ons ultrafilter $\mathcal{U}$. Daarnaast volgt dat de bijbehorende y bevat ligt in $[0, \frac{1}{2}]$ en ook een oneindige ontwikkeling in tweemachten heeft.

We kunnen heel $X \cap [0, \frac{1}{2}]$ dus precies afbeelding op $X \cap [\frac{1}{2}, 1]$. Ieder element in $X \cap [0, \frac{1}{2}]$ schuiven we gewoon met een half op. Aangezien de Lebesgue-maat translatie invariant is, zal de maat van deze verzamelingen bovendien gelijk zijn:

$$\mu\left(X \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \mu\left(X \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

Qua maat ligt de eerste helft van X dus binnen $[0, \frac{1}{2}]$ en de andere helft binnen $[\frac{1}{2}, 1]$. Hieruit kunnen we concluderen:

$$\mu\left(X \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}\mu(X)$$

Dit verschuiven kunnen we ook meer algemeen doen voor alle natuurlijke getallen k en n:

$$\mu\left(X \cap \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = \frac{1}{2^n}\mu(X)$$

De uitbreidingsstelling van Carathéodory (zie hiervoor paragraaf 11 van [**12**]) geeft nu zelfs voor alle meetbare verzamelingen $A \subseteq [0, 1]$:

$$\mu(X \cap A) = \mu(A)\mu(X)$$

Omdat X een meetbare verzameling is, geldt in het bijzonder:

$$\mu(X) = \mu(X \cap X) = \mu(X)\mu(X)$$

Hieruit kunnen we concluderen dat:

$$\mu(X) = 0 \qquad \text{of} \qquad \mu(X) = 1$$

Analoog vinden we voor Y:

$$\mu(Y) = 0 \qquad \text{of} \qquad \mu(Y) = 1$$

3. Symmetrie

Hiermee hebben we echter nog niet genoeg informatie verkregen, we zullen aantonen dat X en Y dezelfde maat hebben. Neem daarom een $x \in [0, 1]$ met een oneindige ontwikkeling in tweemachten willekeurig en laat $y \in [0, 1]$ zó dat $N_y = \mathbb{N} \setminus N_x$. Het moge duidelijk zijn dat:

$$x + y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

Hieruit volgt eveneens dat $y = 1 - x$. Met behulp van Stelling 1.5 weten we dat ofwel $N_x \in \mathcal{U}$, ofwel $N_y \in \mathcal{U}$. Als y een oneindige ontwikkeling in tweemachten heeft, dan geldt zodoende ofwel $\varphi(x) = 1$ en $\varphi(1 - x) = 0$, ofwel $\varphi(x) = 0$ en $\varphi(1 - x) = 1$.

We zien dat X en Y symmetrisch zijn rondom het punt $\frac{1}{2}$, zodat:

$$\mu(X) = \mu(Y) = 0 \qquad \text{of} \qquad \mu(X) = \mu(Y) = 1$$

Hierbij laten we alle elementen met een complement dat in eindig veel tweemachten is te schrijven achterwege. Er bestaan echter maar aftelbaar veel van dergelijke elementen (namelijk de breuken), waardoor deze verzameling geen invloed heeft op onze resultaten.

4. Niet-meetbare Verzameling

Om te kunnen concluderen dat we nu een niet-meetbare verzameling hebben gevonden, zullen we nog één laatste observatie moeten doen. We zien dat X en Y disjuncte verzamelingen zijn, zodat:

$$\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$$

Omdat $X \cup Y$ gelijk is aan het interval $[0,1]$ zal bovendien moeten gelden:

$$\mu(X) + \mu(Y) = \mu(X \cup Y) = \mu([0,1]) = 1$$

Hieruit volgt dat tenminste één van beide verzamelingen een positieve maat moet hebben. We zagen eerder dat de maten van X en Y door hun symmetrie rondom $\frac{1}{2}$ gelijk moeten zijn, waardoor X en Y dezelfde positieve maat moeten hebben. Er volgt:

$$\mu(X) = \mu(Y) = 1$$

Waarmee we een tegenspraak hebben gevonden:

$$2 = \mu(X) + \mu(Y) = \mu([0,1]) = 1$$

Tenminste één van de verzamelingen X en Y is dus niet meetbaar.

Met behulp van een vrij ultrafilter op de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ hebben we een niet-meetbare verzameling geconstrueerd. Het is bekend dat iedere *analytische verzameling* juist wel Lebesgue-meetbaar is. Aangezien ultrafilters niet Lebesgue-meetbaar zijn, kunnen we ze in ieder geval 'complexer' noemen dan analytische verzamelingen.

HOOFDSTUK 3

Stelling van Ramsey

In de drie volgende hoofdstukken zullen we een aantal stellingen uit de combinatoriek behandelen. We beginnen met de Stelling van Ramsey, welke spreekt over eindige kleuringen van grafen. Deze stelling kunnen we bewijzen met behulp van een vrij ultrafilter. In het volgende hoofdstuk zal de Stelling van Hindman centraal staan, welke gaat over eindige kleuringen van de natuurlijke getallen. Het bewijs hiervan is een stap complexer dan het bewijs van de Stelling van Ramsey. Zo zullen we een operatie moeten definiëren op de ultrafilters van de natuurlijke getallen en op zoek moeten gaan naar idempotente ultrafilters onder deze operatie. Vervolgens zullen we de Stelling van Van der Waerden behandelen, waarin we zullen kijken naar rekenkundige rijen binnen eindige kleuringen van de natuurlijke getallen. Ook hiervoor hebben we de idempotente ultrafilters nodig, en in het bijzonder minimale idempotente ultrafilters.

1. De Stelling en het Bewijs

Voordat we de oneindige versie van de Stelling van Ramsey formuleren, zullen we eerst wat notatie uit de grafentheorie introduceren. Als V een willekeurige verzameling is en E een verzameling (ongeordende) paren van elementen uit V, dan noemen we het geordende paar $G = (V, E)$ een *graaf*. Hierin zijn V de *knopen* ('vertices') en E de *takken* ('edges') van de graaf. Daarnaast zullen we voor een graaf G de knopen ook wel noteren met $V(G)$ en de takken met $E(G)$.

We noemen een graaf *volledig*, wanneer elk tweetal knopen verbonden is door een tak. De volledige graaf met n knopen ($n \in \mathbb{N}$) heet K_n. Daarnaast definiëren we K_∞ door de volledige graaf van aftelbaar oneindig veel knopen.

Een *kleuring* van een graaf G met k kleuren ($k \in \mathbb{N}$) wil zeggen dat ieder element uit $E(G)$ één van de k kleuren toegewezen krijgt. Als een verzameling *monochromatisch* is, dan betekent dit dat alle elementen van deze verzameling dezelfde kleur hebben. Hiermee kunnen we de oneindige Stelling van Ramsey formuleren.

STELLING 3.1 (Stelling van Ramsey). *Als een eindige kleuring van K_∞ gegeven is, dan is er een volledige monochromatische deelgraaf met aftelbaar oneindig veel knopen.*

BEWIJS. Laat een eindige kleuring van $E(K_\infty)$ gegeven zijn. Zij $\mathcal{U}$ een vrij ultrafilter op de verzameling $V(K_\infty)$, de knopen van K_∞. Zij $v \in V(K_\infty)$ een willekeurige knoop. Aangezien K_∞ volledig is, kunnen we aan iedere andere knoop in $w \in V(K_\infty) \setminus \{v\}$ de kleur toekennen van de tak $\{v, w\}$. Er is maar een eindig aantal kleuren, zodoende hebben we $V(K_\infty) \setminus \{v\}$ opgedeeld in een eindig aantal disjuncte delen. Uit Stelling 1.6 volgt nu dat één van deze delen een element is van het ultrafilter $\mathcal{U}$. Noem de kleur van dit deel c_v.

Met behulp van c_v voor iedere $v \in V(K_\infty)$ kunnen we een nieuwe partitie maken van alle knopen van K_∞. We delen $V(K_\infty)$ op in een eindig aantal disjuncte delen, zodat we wederom met Stelling 1.6 kunnen concluderen dat één van deze delen een element is van het ultrafilter $\mathcal{U}$. Noem deze kleur c.

Nu kunnen we met behulp van recursie een deelgraaf van een aftelbaar oneindig aantal knopen vinden met de kleur c. Dit doen we door een rij $(v_i)_i$ van knopen te construeren, zodat bij stap n de punten $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ een volledige monochromatische graaf K_n vormen. We zagen net al dat:

$$A = \Big\{ v \in V(K_\infty) : \{ w \in V(K_\infty) : \{v, w\} \text{ heeft kleur } c \} \in \mathcal{U} \Big\} \in \mathcal{U}$$

Lemma 1.8 geeft dat A oneindig veel elementen bevat. Neem $v_1 \in A$ willekeurig.

Als we eenmaal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V(K_\infty)$ hebben gevonden met de gezochte eigenschap, dan geldt met behulp van F3:

$$B = \Big\{ v \in V(K_\infty) : \{v, v_i\} \text{ heeft kleur } c \text{ voor alle } 1 \leq i \leq n \Big\} \in \mathcal{U}$$

We zien nu wederom door eigenschap F3 dat $A \cap B \in \mathcal{U}$. Deze verzameling is door Lemma 1.8 oneindig. Neem nu $v_{n+1} \in A \cap B \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Doordat we v_{n+1} in $A \cap B$ kiezen, volgt:

$$\Big\{ w \in V(K_\infty) : \{w, v_i\} \text{ heeft kleur } c \text{ voor alle } 1 \leq i \leq n+1 \Big\} \in \mathcal{U}$$

Het element v_{n+1} kunnen we dus toevoegen aan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, zodat de verzameling $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ een volledige monochromatische deelgraaf K_{n+1} vormt.

Dit proces kunnen we beginnen met een $v_1 \in A$ en met behulp van recursie voortzetten om de rij $(v_i)_i$ creëren. Alle elementen van deze rij vormen samen een volledige monochromatische deelgraaf van een aftelbaar oneindig aantal knopen. $\square$

2. Eindige Versie

We kunnen de stelling ook iets anders formuleren en een eindige versie geven. Deze eindige stelling kunnen we bewijzen met behulp van de oneindige versie.

Stelling 3.2 (Eindige Stelling van Ramsey). *Laat k en m in $\mathbb{N}$ gegeven zijn. Er is een positieve n zó dat K_n, gekleurd met k kleuren, een monochromatische deelgraaf K_m heeft.*

Bewijs. Zij k en m in $\mathbb{N}$ willekeurig. Stel dat de eindige Stelling van Ramsey niet waar is voor deze getallen, dan is er dus voor iedere positieve n een kleuring van K_n met k kleuren zonder monochromatische deelgraaf K_m. We zullen nu een kleuring met k kleuren van een K_∞ graaf kunnen omschrijven. Volgens de oneindige Stelling van Ramsey bevat deze graaf een monochromatische K_∞ deelgraaf. Hieruit zullen we af kunnen leiden dat één van de K_n wel een monochromatische deelgraaf K_m moet hebben gehad. Dit is een tegenspraak, zodat we kunnen concluderen dat de eindige Stelling van Ramsey waar moet zijn.

Iedere slechte kleuring van K_n kunnen we omschrijven door een afbeelding $C_n : E(K_\infty) \to \{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, waarin $c_1, c_2, \ldots, c_k$ de gegeven k kleuren zijn en c_0 een willekeurige andere vaste kleur is. We kennen iedere tak van K_∞ de kleur c_i toe, die hij heeft gekregen in de slechte kleuring van K_n. Als de tak niet voorkomt in K_n, dan geven we de tak de kleur c_0. Voor iedere C_n gebruiken we dezelfde aftelling van K_∞, dat wil zeggen: als $v_1, v_2, v_3, \ldots$ de knopen van K_∞ zijn, dan gebruiken we voor de slechte kleuring van K_n de eerste n knopen.

Laat $\mathcal{U}$ een vrij ultrafilter zijn op $\mathbb{N}$. We kunnen nu een kleuring op K_∞ omschrijven met de afbeelding $C : E(K_\infty) \to \{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, waarbij voor een tak $\{v, w\}$ geldt:

$$C(\{v,w\}) = c_i \qquad \text{dan en slechts dan als} \qquad \{n \in \mathbb{N} : C_n(\{v,w\}) = c_i\} \in \mathcal{U}$$

Aangezien er altijd hoogstens een eindig aantal C_n zijn die een tak de kleur c_0 toekennen, geeft Lemma 1.8 dat geen van de takken in de kleuring C de kleur c_0 zal krijgen. We kunnen dus $C : E(K_\infty) \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ schrijven, zodat we werkelijk een kleuring van K_∞ hebben met k kleuren.

De oneindige Stelling van Ramsey geeft nu een monochromatische deelgraaf met aftelbaar oneindig veel knopen. Noem deze deelgraaf D. Er is dus een kleur $c \in \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, zo dat voor alle $\{v, w\} \in E(D)$ geldt $C(\{v, w\}) = c$. Binnen deze deelgraaf is zeker een monochromatische K_m te vinden. Noem deze graaf M. De knopen van de graaf M noteren we met $\{v_{M_1}, v_{M_2}, \ldots, v_{M_m}\}$, waarbij $M_1 < M_2 < \cdots < M_m$. Bekijk de volgende verzameling:

$$I = \bigcap_{\{v,w\} \in E(M)} \{n \in \mathbb{N} : C_n(\{v,w\}) = c\}$$

Vanwege eigenschap F3 is ook I een element van het ultrafilter $\mathcal{U}$ en volgens Lemma 1.8 is I een oneindige verzameling. Kies een $N \in I$, dan geldt dat M monochromatisch is voor C_N. Dit is in tegenspraak met onze aanname dat K_n geen monochromatische deelgraaf K_m heeft, zodoende moet de eindige Stelling van Ramsey wel waar zijn. $\square$

In dit hoofdstuk hebben we een belangrijke stelling uit de combinatoriek en zijn eindige versie bewezen. We zullen ons in de volgende twee hoofdstukken richten op nog twee combinatorische stellingen.

HOOFDSTUK 4

Stelling van Hindman

Dit hoofdstuk staat in het teken van de tweede combinatorische stelling: de Stelling van Hindman. Bij het bewijs van deze stelling zullen we wederom gebruik maken van ultrafilters en hun eigenschappen. In het bijzonder zullen we een topologie en een operatie leggen op de verzameling van alle ultrafilters op $\mathbb{N}$. Op deze techniek bouwen we in het volgende hoofdstuk voort om ook de Stelling van Van der Waerden te bewijzen.

1. De Stelling

Laat een eindig aantal verschillende kleuren gegeven zijn. Aan ieder natuurlijk getal kunnen we één van deze kleuren toekennen. Het moge duidelijk zijn dat tenminste één van deze kleuren een oneindige hoeveelheid getallen toegekend heeft gekregen. Kunnen we misschien nog meer zeggen over zo'n kleuring van de natuurlijke getallen? Bestaat er bijvoorbeeld altijd een monochromatische oneindige rekenkundige rij, of is er altijd een oneindige monochromatische verzameling die gesloten is onder optelling? De Stelling van Hindman omschrijft een dergelijke eigenschap van kleurigen van de natuurlijke getallen. Voordat we deze stelling formuleren zullen we wat notatie nodig hebben. Als A een deelverzameling is van $\mathbb{N}$, dan is $\Sigma(A)$ de verzameling van alle sommen van eindige deelverzamelingen van A:

$$\Sigma(A) = \left\{ \sum_{b \in B} b : B \text{ is een eindige verzameling van } A \right\}$$

Zo geldt bijvoorbeeld:

$$\Sigma(\{1, 3, 9, 27, \ldots\}) = \Sigma(\{3^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}) = \{1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, \ldots\}$$

Door alle losse elementen te bekijken volgt direct dat $A \subseteq \Sigma(A)$. Daarnaast zal $\Sigma(A)$ eindig zijn dan en slechts dan als de verzameling A zelf eindig is. De Stelling van Hindman geeft aan dat we in een eindige kleuring altijd een oneindige verzameling van één kleur kunnen vinden, zó dat ook de sommen van de elementen van eindige deelverzamelingen deze kleur hebben.

Stelling 4.1 (Stelling van Hindman). *Als een kleuring van de natuurlijke getallen met eindig veel kleuren gegeven is, bestaat er een oneindige monochromatische verzameling A zo dat ook de verzameling $\Sigma(A)$ monochromatisch is.*

Voor het bewijs van deze stelling zullen we moeten kijken naar de verzameling $\mathcal{A}$ van alle ultrafilters op de natuurlijke getallen. We maken gebruik van de natuurlijke topologie op $\mathcal{A}$. Definiëer eerst voor $A \subseteq \mathbb{N}$:

$$\overline{A} = \{\mathcal{U} \in \mathcal{A} : A \in \mathcal{U}\}$$

Een basis voor de natuurlijke topologie op $\mathcal{A}$ wordt dan gegeven door:

$$\{\overline{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$$

Merk op dat alle elementen van deze basis zowel open als gesloten zijn, aangezien voor een verzameling $A \subseteq \mathbb{N}$ met behulp van Stelling 1.5 geldt:

$$\mathcal{A} \setminus \overline{A} = \overline{\mathbb{N} \setminus A}$$

Aangezien $\overline{\mathbb{N} \setminus A}$ een element is van de basis, zal $\overline{A}$ ook gesloten zijn. Merk daarnaast op dat voor twee basiselementen $\overline{A_1}$ en $\overline{A_2}$ geldt:

$$\overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2}$$

De inclusie $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \subseteq \overline{A_1 \cup A_2}$ volgt direct uit eigenschap F4 van ultrafilters, de andere inclusie volgt uit Stelling 1.6. Deze eigenschap zullen we later nodig hebben.

In de volgende lemma's zullen we twee belangrijke eigenschappen van $\mathcal{A}$ met deze topologie bewijzen. Hiervoor hebben we de definitie van een Hausdorffruimte nodig. Een topologische ruimte $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ is een *Hausdorffruimte* als voor alle x en y in X met $x \neq y$ twee verzamelingen U en V in $\mathcal{T}$ bestaan, zó dat $x \in U$, $y \in V$ en $U \cap V = \varnothing$. We zeggen ook wel dat $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Hausdorff is.

Lemma 4.2. *De verzameling $\mathcal{A}$ met zijn natuurlijke topologie is Hausdorff.*

Bewijs. Laat $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ in $\mathcal{A}$ willekeurig zijn met $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$. Er is een $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$. Nu geldt $\mathcal{U} \in \overline{A}$ en $\mathcal{V} \in (\mathcal{A} \setminus \overline{A}) = \overline{\mathbb{N} \setminus A}$. De verzamelingen $\overline{A}$ en $\overline{\mathbb{N} \setminus A}$ zijn elementen van de basis voor de natuurlijke topologie van $\mathcal{A}$, en zijn bovendien disjunct. Zodoende is $\mathcal{A}$ met zijn natuurlijke topologie Hausdorff. $\square$

Lemma 4.3. *De verzameling $\mathcal{A}$ met zijn natuurlijke topologie is compact.*

Bewijs. Zij $\mathcal{O}$ een willekeurige open overdekking van $\mathcal{A}$. Zonder verlies der algemeenheid kunnen we aannemen dat $\mathcal{O}$ enkel bestaat uit basiselementen. Dit betekent dat er een verzameling deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is – zeg B – met:

$$\mathcal{O} = \{\overline{C} : C \in B\}$$

We zullen uit het ongerijmde bewijzen dat $\mathcal{O}$ een eindige deeloverdekking moet hebben. Stel dat voor alle eindige deelverzamelingen $\mathcal{O}'$ van $\mathcal{O}$ geldt:

$$\bigcup \mathcal{O}' \neq \mathcal{A}$$

Neem zo'n eindige $\mathcal{O}'$ willekeurig, dan is er een $B' = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ zó dat $\mathcal{O}' = \{\overline{C} : C \in B'\}$. Er geldt:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}' &= \overline{C_1} \cup \overline{C_2} \cup \ldots \cup \overline{C_n} \\ &= \overline{C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n} \\ &\neq \mathcal{A}\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n \neq \mathbb{N}$, ofwel:

$$\bigcap \{\mathbb{N} \setminus C : C \in B'\} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{N} \setminus C_i \neq \varnothing$$

Maak nu de volgende verzameling deelverzamelingen van $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{F} = \left\{ F : F \subseteq \mathbb{N} \text{ en er is een } B' \text{ zodanig dat } F \supseteq \bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'\} \right\}$$

Hierin hoort iedere B' weer bij een eindige deelverzameling $\mathcal{O}'$ van $\mathcal{O}$, zoals we hierboven hebben beschreven. We kunnen bewijzen dat $\mathcal{F}$ een filter is door de eisen na te lopen:

(F1) Voor elke eindige B' geldt $\bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'\} \neq \varnothing$. Hieruit volgt dat $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

(F2) Aangezien $\bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'\} \subseteq \mathbb{N}$ voor alle B', geldt zeker $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$;

(F3) Laat D en E in $\mathcal{F}$ willekeurig. Er zijn dus B'_1 en B'_2 zó dat:

$$\bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'_1\} \subseteq D \qquad \text{en} \qquad \bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'_2\} \subseteq E$$

Bekijk $B' = B'_1 \cup B'_2$. Deze B' hoort ook bij een eindige deelverzameling van $\mathcal{O}$. Bovendien geldt:

$$\begin{aligned}\bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'\} &= \bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'_1 \cup B'_2\} \\ &= \bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'_1\} \cap \bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'_2\} \\ &\subseteq D \cap E\end{aligned}$$

Zodoende geldt $D \cap E \in \mathcal{F}$;

(F4) Laat $D \in \mathcal{F}$ willekeurig en $E \subseteq \mathbb{N}$ met $D \subseteq E$. Er is dus een B' zodanig dat $\bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'\} \subseteq D$. Doordat $D \subseteq E$ geldt nu zeker:

$$\bigcap \{\mathbb{N} \setminus A : A \in B'\} \subseteq E$$

Zodat ook $E \in \mathcal{F}$.

Uit de Ultrafilterstelling volgt nu dat er een ultrafilter $\mathcal{U}$ is met $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Voor alle $\overline{C} \in \mathcal{O}$ geldt bovendien $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$. Aangezien $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, geldt ook $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U}$. Nu volgt $\mathcal{U} \notin \overline{C}$, en dus $\mathcal{U} \notin \bigcup \mathcal{O}$. Hiermee hebben we een tegenspraak gevonden.

We hebben bewezen dat iedere open overdekking van $\mathcal{A}$ een eindige deeloverdekking heeft. Zodoende is $\mathcal{A}$ compact. $\square$

Deze compacte Hausdorffruimte van alle ultrafilters met zijn natuurlijke topologie is isomorf aan de zogenaamde *Čech-Stonecompactificatie* $\beta\mathbb{N}$. Alhoewel we geen eigenschappen van de Čech-Stonecompactificatie zullen gebruiken en niet zullen bewijzen dat $\mathcal{A}$ daadwerkelijk isomorf is aan $\beta\mathbb{N}$, zullen we in het vervolg wel de notatie $\beta\mathbb{N}$ gebruiken voor $\mathcal{A}$ met zijn natuurlijke topologie. Meer informatie over de Čech-Stonecompactificatie en het bewijs dat de ruimte van ultrafilters $\mathcal{A}$ isomorf is met $\beta\mathbb{N}$ zijn te vinden in [**3**].

3. Operatie op Ultrafilters

We kunnen van $\beta\mathbb{N}$ een halfgroep maken door een operatie $\oplus$ te introduceren. Hiervoor spreken we om te beginnen af dat voor $A \subseteq \mathbb{N}$ en $k \in \mathbb{N}$ geldt:

$$A - k = \{a \in \mathbb{N} : a + k \in A\}$$

We definiëren nu voor $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ in $\beta\mathbb{N}$:

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}$$

Eerst bewijzen we dat $\beta\mathbb{N}$ gesloten is onder de operatie $\oplus$. Neem hiervoor $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ in $\beta\mathbb{N}$ willekeurig. We bewijzen dat $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ een filter is door de eisen F1-4 na te gaan:

(F1) We weten dat $\varnothing$ geen element is van $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$. Voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt $\varnothing - k = \varnothing$. Hieruit volgt $\{k \in \mathbb{N} : \varnothing - k \in \mathcal{U}\} = \varnothing$. We kunnen concluderen dat $\varnothing \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

(F2) Daarnaast weten we dat $\mathbb{N}$ een element is van $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$. Voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt $\mathbb{N} - k = \mathbb{N}$, waaruit volgt dat $\{k \in \mathbb{N} : \mathbb{N} - k \in \mathcal{U}\} = \mathbb{N}$. Zodoende zal $\mathbb{N} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

(F3) Neem B en C in $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ willekeurig. We weten dat $\{k \in \mathbb{N} : B - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$ en $\{k \in \mathbb{N} : C - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$. Uit eigenschap F3 voor $\mathcal{V}$ volgt nu:

$$\{k \in \mathbb{N} : B - k \in \mathcal{U}\} \cap \{k \in \mathbb{N} : C - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

Ofwel:

$$\{k \in \mathbb{N} : B - k \in \mathcal{U} \text{ en } C - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

Wat neerkomt op:

$$\{k \in \mathbb{N} : B \cap C - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

Waarmee ook $B \cap C \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

(F4) Laat $B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ willekeurig zijn. Zij ook $C \subseteq A$ willekeurig met $B \subseteq C$. We weten $\{k \in \mathbb{N} : B - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$ en aangezien $B \subseteq C$ geldt eveneens $\{k \in \mathbb{N} : B - k \in \mathcal{U}\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} : C - k \in \mathcal{U}\}$. Uit eigenschap F4 voor $\mathcal{V}$ volgt $\{k \in \mathbb{N} : C - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$. Hieruit concluderen we dat $C \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Om te bewijzen dat $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ ook een ultrafilter is, gebruiken we Stelling 1.5. Neem een $A \subseteq \mathbb{N}$ willekeurig. Stel dat $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, ofwel:

$$\{k \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A - k \in \mathcal{U}\} \notin \mathcal{V}$$

Door Stelling 1.5 toe te passen op het ultrafilter $\mathcal{V}$ volgt dat:

$$\mathbb{N} \setminus \{k \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

Dit komt neer op:

$$\{k \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A - k \notin \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

En met Stelling 1.5 toegepast op $\mathcal{U}$ volgt:

$$\{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

Hiermee hebben we bewezen dat $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Analoog is te bewijzen dat $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ indien $A \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Het is niet mogelijk dat A en $\mathbb{N} \setminus A$ gelijktijdig in $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ zitten, aangezien we met eigenschap F3 dan een tegenspraak af kunnen leiden op het feit dat $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ een filter is. $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ is zodoende een ultrafilter. De ruimte van alle ultrafilters $\beta\mathbb{N}$ is dus gesloten onder de operatie $\oplus$.

Deze operatie levert niets nieuws op voor de natuurlijke getallen zelf. Voordat we dit aantonen roepen we de definitie van een hoofdultrafilter in herinnering. Voor een $n \in \mathbb{N}$ is $\mathcal{F}_n = \{A : \{n\} \subseteq A \subseteq \mathbb{N}\}$ het bijbehorende hoofdultrafilter. We kunnen het volgende lemma formuleren.

Lemma 4.4. *Voor alle a en b in $\mathbb{N}$ geldt:*

$$\mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_b = \mathcal{F}_{a+b}$$

Bewijs. Zij a en b in $\mathbb{N}$ willekeurig. We zullen om te beginnen bewijzen dat $\mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_b \subseteq \mathcal{F}_{a+b}$. Neem hiervoor een $A \in \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_b$ willekeurig, dan geldt per definitie $\{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{F}_a\} \in \mathcal{F}_b$. Zodoende geldt zeker $b \in \{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{F}_a\}$, waaruit volgt $A - b \in \mathcal{F}_a$. Dit betekent dat $a \in A - b$, ofwel $a + b \in A$. Hieruit kunnen we concluderen dat $A \in \mathcal{F}_{a+b}$.

Dit proces kunnen we ook in omgekeerde volgorde uitvoeren om te bewijzen dat $\mathcal{F}_{a+b} \subseteq \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_b$. Neem een $A \in \mathcal{F}_{a+b}$ willekeurig. Nu geldt per definitie $a + b \in A$, ofwel $a \in A - b$. Hieruit volgt eveneens $A - b \in \mathcal{F}_a$. We kunnen nu zeggen $b \in \{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{F}_a\}$, zodat $\{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{F}_a\} \in \mathcal{F}_b$. Hieruit kunnen we concluderen dat $A \in \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_b$. $\square$

Voor een hoofdultrafilter en een willekeurig ander ultrafilter is deze operatie bovendien commutatief.

Lemma 4.5. *Als $\mathcal{F}_a$ een hoofdultrafilter is en $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ willekeurig, dan geldt:*

$$\mathcal{F}_a \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{F}_a$$

Bewijs. Zij $\mathcal{F}_a$ een willekeurig hoofdultrafilter en $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ willekeurig. We zullen allereerst bewijzen dat $\mathcal{U} \oplus \mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{U}$. Neem een $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{F}_a$, dan geldt $\{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{F}_a$. Hieruit volgt $a \in \{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{U}\}$, ofwel $A - a \in \mathcal{U}$. Dit betekent $\{m \in \mathbb{N} : m + a \in A\} \in \mathcal{U}$. Maar deze m zijn precies zo dat $a \in A - m$, ofwel $A - m \in \mathcal{F}_a$. Zodoende geldt $\{m \in \mathbb{N} : A - m \in \mathcal{F}_a\} \in \mathcal{U}$, zodat $A \in \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{U}$.

Ook dit proces kunnen we precies in omgekeerde volgorde uitvoeren om de andere inclusie $\mathcal{F}_a \oplus \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \oplus \mathcal{F}_a$ te bewijzen. Neem een $A \in \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{U}$, dan volgt $\{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{F}_a\} \in \mathcal{U}$. Deze k zijn precies zo dat $a \in A - k$, ofwel $k + a \in A$. Hieruit volgt dat $\{k \in \mathbb{N} : k + a \in A\} \in \mathcal{U}$. Dit betekent $A - a \in \mathcal{U}$, zodat $a \in \{m \in \mathbb{N} : A - m \in \mathcal{U}\}$. Hieruit volgt tot slot $\{m \in \mathbb{N} : A - m \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{F}_a$, zodat we kunnen concluderen dat $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{F}_a$. □

In het algemeen geldt deze commutativiteit echter niet. Om dit te bewijzen zullen we twee ultrafilters $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ moeten construëren, waarvoor:

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

We zullen herhaaldelijk gebruik maken van de hoogste tweemacht die een deler is van een gegeven getal. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ kijken we naar:

$$t(n) = \max\{m \in \mathbb{N} : 2^m \mid n\}$$

Vervolgens nemen we voor ieder natuurlijk getal de elementen bijeen, die dezelfde hoogste tweemacht deler hebben:

$$D_k = \{n \in \mathbb{N} : t(n) = k\}$$

Deze verzameling delen we op in even en oneven tweemachten:

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_{2k} \qquad \text{en} \qquad O = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_{2k+1}$$

Daarnaast kijken we voor alle $n \in \mathbb{N}$ naar:

$$R_n = \bigcup_{k \geq n} D_k$$

Hiermee kunnen we twee verzamelingen deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ maken:

$$\{R_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{E\} \qquad \text{en} \qquad \{R_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{O\}$$

De doorsnedes van deze twee verzamelingen afzonderlijk zijn leeg en alle elementen van deze verzamelingen zijn oneindig. We kunnen de verzamelingen dus uitbereiden tot vrije ultrafilters $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$, respectievelijk. Nu kunnen we bewijzen dat E wel in $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ zit, maar niet in $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Om te beginnen zullen we bewijzen dat $E \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$. Neem hiervoor een $n \in E$ willekeurig, zodat voor een zekere $k \in \mathbb{N}$ geldt $n \in D_{2k}$. Voor alle $m \in R_{2k+1}$ geldt $t(m) > 2k$ en daarnaast weten we $t(n) = 2k$, waardoor $t(n + m) = 2k$. De hoogste tweemacht die $n + m$ deelt is dus een even getal en hierdoor $m + n \in E$. Aangezien dit voor alle $m \in R_{2k+1}$ geldt, volgt $R_{2k+1} \subseteq E - n$. Deze R_{2k+1} is bovendien een element van het ultrafilter $\mathcal{V}$, dus met behulp van eigenschap F4 is ook $E - n \in \mathcal{V}$ voor alle $n \in E$. Hieruit volgt $E \subseteq \{n \in \mathbb{N} : E - n \in \mathcal{V}\}$, en we weten dat $E \in \mathcal{U}$. Uit eigenschap F4 volgt wederom dat $\{n \in \mathbb{N} : E - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. We concluderen dat $E \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Vervolgens bewijzen we dat $E \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Neem $n \in O$ willekeurig, zodat voor een zekere $k \in \mathbb{N}$ geldt $n \in D_{2k+1}$. Voor alle $m \in R_{2k+2}$ geldt $t(m) > 2k + 1$ en we weten dat $t(n) = 2k + 1$, waardoor $t(n + m) = 2k + 1$. In dit geval zal de hoogste tweemacht die $n + m$ deelt dus juist een oneven getal zijn en $m + n \notin E$. Voor alle $n \in O$ geldt zodoende $(E - n) \cap R_{2k+2} = \varnothing$. Er is bekend dat $R_{2k+2} \in \mathcal{U}$ en uit eigenschap F3 volgt nu voor alle $n \in O$ dat $E - n \notin \mathcal{U}$. Hieruit volgt $O \subseteq \{n \in \mathbb{N} : E - n \notin \mathcal{U}\}$, en we weten dat $O \in \mathcal{V}$. Uit eigenschap F4 volgt nu dat $\{n \in \mathbb{N} : E - n \notin \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$. Uit Stelling 1.5 volgt dat $\{n \in \mathbb{N} : E - n \in \mathcal{U}\} \notin \mathcal{V}$. Hiermee kunnen we concluderen dat $E \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ en hebben we aangetoond dat $\oplus$ niet commutatief is op $\beta\mathbb{N}$.

Deze optelling is echter wel associatief op $\langle \beta\mathbb{N}, \oplus \rangle$.

Lemma 4.6. *Als $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ elementen zijn van $\beta\mathbb{N}$, dan geldt:*

$$(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})$$

Bewijs. Zij $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ in $\beta\mathbb{N}$ willekeurig. Door uitschrijven volgt de gevraagde eigenschap direct:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) &= \{B \subseteq \mathbb{N} : \{l \in \mathbb{N} : B - l \in \mathcal{U}\} \\
&\qquad\qquad \in \{A \subseteq \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}\}\} \\
&= \{B \subseteq \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : \{l \in \mathbb{N} : B - l \in \mathcal{U}\} - k \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}\} \\
&= \{B \subseteq \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : B - k \\
&\qquad\qquad \in \{A \subseteq \mathbb{N} : \{l \in \mathbb{N} : A - l \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}\} \in \mathcal{W}\} \\
&= (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{W}
\end{aligned}$$

□

4. Idempotente Ultrafilters

Voor het bewijs van de Stelling van Hindman zullen we een bijzonder soort ultrafilter nodig hebben, namelijk een idempotent ultrafilter. We noemen een ultrafilter $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ *idempotent* als $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Uit Lemma 4.4 volgt dat alle hoofdultrafilters niet idempotent zijn. Nu rijst de vraag of dergelijke ultrafilters dan wel bestaan. Om dit te kunnen bewijzen zullen we gebruik moeten maken van de topologie van $\beta\mathbb{N}$ en in het bijzonder van de verzameling van vrije ultrafilters $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. We zullen ook gebruik moeten maken van een afbeelding die betrekking heeft op onze operatie $\oplus$.

Lemma 4.7. *Voor alle $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ is de afbeelding $\psi : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ met $\psi(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ continu.*

Bewijs. Neem $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ willekeurig. We bekijken voor deze $\mathcal{U}$ de afbeelding ψ, zoals hij omschreven is in het lemma. Om aan te tonen dat deze ψ continu is zal het volledig origineel van een open verzameling wederom open moeten zijn. Zonder verlies der algemeenheid kunnen we kijken naar een willekeurig element uit de basis van onze topologie, zeg $\overline{A}$ met $A \subseteq \mathbb{N}$. We kijken naar het volledig origineel van deze verzameling:

$$\begin{aligned}\psi^{-1}[\overline{A}] &= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \overline{A}\} \\ &= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}\} \\ &= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : A \in \{B \subseteq \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : B - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}\}\end{aligned}$$

Alle $\mathcal{V}$ zijn dus precies zó dat $\{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$, waardoor geldt:

$$\begin{aligned}\psi^{-1}[\overline{A}] &= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}\} \\ &= \overline{\{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{U}\}}\end{aligned}$$

Hieruit kunnen we concluderen dat $\psi^{-1}[\overline{A}]$ ook open is. De afbeelding ψ is continu voor iedere $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$. □

Aangezien $\beta\mathbb{N}$ een compacte ruimte is, valt zelfs te bewijzen dat het beeld van een gesloten verzameling wederom gesloten is. Het bewijs van dit lemma zullen we niet helemaal nalopen, maar slechts in hoofdlijnen omschrijven. Meer informatie is te vinden in paragraaf 2.5 van [**8**].

Lemma 4.8. *Voor alle $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ en alle gesloten $C \subseteq \beta\mathbb{N}$ geldt dat $\psi[C]$ ook gesloten is.*

Bewijs. Neem een $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ willekeurig en zij $C \subseteq \beta\mathbb{N}$ een willekeurige gesloten verzameling. Aangezien $\beta\mathbb{N}$ compact is en C een gesloten deelverzameling is van $\beta\mathbb{N}$, zal C compact zijn (zie Propositie 2.5.4 in [**8**]). Het beeld $\psi[C]$ zal zodoende ook compact zijn (Propositie 2.5.5), en is dus zeker gesloten. □

We hebben een halfgroep $\langle\beta\mathbb{N}, \oplus\rangle$ en continue afbeeldingen op basis van deze operatie $\oplus$ gemaakt. Nu zijn we in staat om met behulp van het Lemma van Zorn te bewijzen dat er idempotente ultrafilters bestaan. De volgende twee bewijzen zijn gedeeltelijk gebaseerd op het werk van L. Goldmakher in [**2**].

Stelling 4.9. *Er bestaat een idempotent ultrafilter op $\beta\mathbb{N}$ ten opzichte van de operatie $\oplus$.*

Bewijs. Bekijk de volgende verzameling:

$$\mathbb{A} = \{A \subseteq \beta\mathbb{N} : A \text{ is niet leeg, gesloten, en } A \oplus A \subseteq A\}$$

Deze verzameling $\mathbb{A}$ is niet leeg, aangezien $\beta\mathbb{N}$ zelf ook voldoet aan de gestelde eisen. Daarnaast is $\mathbb{A}$ partieel geordend door $\supseteq$ en iedere keten van kleiner wordende verzamelingen binnen $\mathbb{A}$ heeft een niet-lege doorsnede C (vanwege de compactheid van $\beta\mathbb{N}$), die wederom gesloten is. Bovendien volgt uit het feit dat we naar een keten kijken en de eis dat $A \oplus A \subseteq A$ voor ieder element A van de keten ook dat $C \oplus C \subseteq C$. Iedere lineair geordende verzameling heeft in dit opzicht dus een bovengrens. Het Lemma van Zorn geeft ons nu een maximaal element $B \in \mathbb{A}$, wat wil zeggen dat voor alle $C \in \mathbb{A}$ met $C \subseteq B$ geldt $C = B$. We zullen nu afleiden dat deze verzameling B precies bestaat uit één idempotent ultrafilter.

Omdat $B \in \mathbb{A}$ hebben we voor alle $\mathcal{U} \in B$ dat $\mathcal{U} \oplus B \subseteq B$. De verzameling $\mathcal{U} \oplus B$ is zeker niet leeg. Aangezien de Čech-Stonecompactificatie een compacte Hausdorffruimte is, zal vanwege de compactheid het beeld van een gesloten verzameling na toepassen van een continue afbeelding wederom gesloten zijn. De verzameling B is gesloten, dus volgt met behulp van de continue afbeelding ψ uit Lemma 4.7 dat $\mathcal{U} \oplus B$ ook gesloten is. Daarnaast volgt uit de associativiteit van onze operatie:

$$(\mathcal{U} \oplus B) \oplus (\mathcal{U} \oplus B) \subseteq (\mathcal{U} \oplus B) \oplus B = \mathcal{U} \oplus (B \oplus B) \subseteq \mathcal{U} \oplus B$$

Zodoende is $\mathcal{U} \oplus B$ ook een element van $\mathbb{A}$. Door de maximaliteit van B geldt dat $\mathcal{U} \oplus B = B$ en hieruit volgt dat er voor alle $\mathcal{U} \in B$ een $\mathcal{V} \in B$ bestaat met $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U}$.

Neem een vaste $\mathcal{U}$, dan kunnen we daarvoor de volgende verzameling vormen:

$$\widetilde{B} = \{\mathcal{W} \in B : \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{U}\}$$

Uit het voorgaande volgt $\widetilde{B} \neq \varnothing$ en $\widetilde{B} \subseteq B$. Bovendien geldt $\widetilde{B} = \psi^{-1}[\{\mathcal{U}\}]$, zodat uit de continuïteit van ψ volgt dat $\widetilde{B}$ gesloten is. We bekijken nu $\widetilde{B} \oplus \widetilde{B}$. Op willekeurige $\mathcal{W}_1$ en $\mathcal{W}_2$ in B met $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}_1 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{U}$ kunnen we de associativiteit van onze operatie toepassen. Hieruit volgt dat ook $\mathcal{U} \oplus (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2) = \mathcal{U}$, zodat $\widetilde{B} \oplus \widetilde{B} \subseteq \widetilde{B}$. Ook $\widetilde{B} \in \mathbb{A}$, en aangezien B het maximale element is van $\mathbb{A}$ volgt $\widetilde{B} = B$. In het bijzonder zal dus voor alle $\mathcal{U} \in B$ gelden:

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

Aangezien $\mathcal{U}$ gesloten en niet leeg is, volgt uit de maximaliteit van B dat $B = \{\mathcal{U}\}$. Zodoende bestaat er een idempotent ultrafilter op $\beta\mathbb{N}$ onder de operatie $\oplus$. □

Hiermee hebben we het bewijs van de Stelling van Hindman bijna rond. We zullen de volgende verzameling nodig hebben:

$$X = \{A \subseteq \mathbb{N} : \Sigma(B) \subseteq A \text{ voor een oneindige } B \subseteq A\}$$

LEMMA 4.10. *Als $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ idempotent is, dan geldt $\mathcal{U} \subseteq X$.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ een willekeurig idempotent ultrafilter. Bekijk voor $A \in \mathcal{U}$ de verzameling:

$$A^* = \{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{U}\}$$

Voor alle $A \in \mathcal{U}$ geldt bovendien $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$. Zodoende weten we ook $A^* \in \mathcal{U}$. Uit eigenschap F3 van het ultrafilter volgt dat $A \cap A^* \in \mathcal{U}$ en $A \cap A^* \neq \varnothing$. Vanuit het feit dat hoofdultrafilters niet idempotent zijn, volgt zelfs dat $A \cap A^*$ oneindig is.

Neem nu een $A \in \mathcal{U}$ willekeurig en vast. Schrijf om te beginnen $A_0 = A$ en kies een $k_0 \in A_0 \cap A_0^*$. Neem:

$$A_1 = (A_0 - k_0) \cap A_0$$

Deze verzameling is per constructie een element van $\mathcal{U}$, niet leeg en een deelverzameling van $A_0 = A$. Daarnaast is ook $A_1 \cap A_1^*$ een element van ons ultrafilter en bevat hij oneindig veel elementen. We kunnen zeker een $k_1 \in A_1 \cap A_1^*$ kiezen die groter is dan k_0. Dit proces kunnen we voortzetten voor alle $n \in \mathbb{N}$. Kies een $k_n \in A_n \cap A_n^*$ zodat $k_n > k_{n-1}$ en neem:

$$A_{n+1} = (A_n - k_n) \cap A_n$$

We hebben hiermee een verzameling $B = \{k_n\}$ geconstrueerd, bestaande uit een oneindig aantal elementen. Dit is de gezochte oneindige verzameling waarvoor $\Sigma(B) \subseteq A$, we kunnen met inductie bewijzen dat voor alle eindige $I \subseteq \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{p \in I} k_p \in A_{\min I}$$

Voor een willekeurige $i_0 \in \mathbb{N}$ geldt zeker:

$$k_{i_0} \in A_{i_0}$$

Stel dat de gezochte eigenschap geldt voor alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ met n elementen of minder. We zullen controleren dat de eigenschap nu ook geldt voor alle verzamelingen met een kardinaliteit van $n+1$. Neem hiervoor een $I \subseteq \mathbb{N}$ met $n+1$ elementen en schrijf:

$$i = \min I \qquad \text{en} \qquad j = \min I \setminus \{i\}$$

Volgens onze inductieaanname geldt:

$$\sum_{p \in I \setminus \{i\}} k_p \in A_j$$

Bekijk:

$$\sum_{p \in I \setminus \{i\}} k_p \in A_j \subseteq A_{i+1} \subseteq A_i - k_i$$

Zodat ook geldt:

$$\sum_{p \in I} k_p = k_i + \sum_{p \in I \setminus \{i\}} k_p \subseteq A_i$$

Met behulp van het principe van volledige inductie volgt nu dat de gezochte eigenschap voor alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ geldt.

Zodoende geldt $A \in X$ en aangezien $A \in \mathcal{U}$ willekeurig was, kunnen we concluderen dat $\mathcal{U} \subseteq X$. □

5. Het Bewijs

Hiermee hebben we genoeg in handen gekregen om het bewijs van de Stelling van Hindman te kunnen geven. We weten dat ieder idempotent ultrafilter een deelverzameling is van X. Neem een idempotent ultrafilter $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, dan weten we uit eigenschap F2 van ultrafilters dat $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Volgens de Stelling van Hindman delen we de natuurlijke getallen op in een eindig aantal kleuren, en hebben we dus een paarsgewijs disjuncte verzameling van verzamelingen die $\mathbb{N}$ opvult. Stelling 1.6 leidt tot de conclusie dat één van deze monochromatische verzamelingen een element zal zijn van $\mathcal{U}$. Noem dit element M. Deze verzameling M zal volgens Lemma 1.8 bovendien oneindig zijn. Uit het net bewezen Lemma 4.10 volgt tot slot dat ook $\Sigma(M)$ monochromatisch is. Waarmee we de Stelling van Hindman hebben bewezen.

HOOFDSTUK 5

Stelling van Van der Waerden

In het voorgaande hoofdstuk hebben we een belangrijke stelling over kleuringen van de natuurlijke getallen bewezen. De Stelling van Hindman is echter niet de enige stelling die wat over dergelijke partitioneringen zegt. We zullen in dit hoofdstuk een bewijs van de Stelling van Van der Waerden geven, welke spreekt over willekeurig lange monochromatische rekenkundige rijen.

1. De Stelling

Voordat we de Stelling van Van der Waerden formuleren, zullen we in herinnering roepen wat een rekenkundige rij is. Binnen $\mathbb{N}$ geldt: een *rekenkundige rij* van lengte $l \in \mathbb{N}$, beginnend bij $a \in \mathbb{N}$ en met stapgrootte $b \in \mathbb{N}$, is de rij van de vorm $\{a + bi : i \leq l\}$. Hiermee kunnen we de stelling formuleren.

STELLING 5.1 (Stelling van Van der Waerden). *Als een kleuring van de natuurlijke getallen met eindig veel kleuren is gegeven, dan bestaat er een monochromatische verzameling met willekeurig lange rekenkundige rijen.*

Merk op dat de stelling spreekt over *willekeurig* lange rijen, niet over *oneindig* lange rijen. We kunnen zelfs op vrij eenvoudige wijze een kleuring aanwijzen die geen oneindige rekenkundige rijen bevat. Stel dat $k \in \mathbb{N}_{>1}$ gegeven is en $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ de daarbij behorende kleuren zijn. Geef 1 de kleur c_1; geeft 2 en 3 de kleur c_2; geeft 4, 5 en 6 de kleur c_3; enzovoorts. Wanneer we een aantal natuurlijke getallen aan de kleur c_n hebben toegewezen, beginnen we wederom met de kleur c_1. Kortom, voor iedere volgende kleur maken we het aantal elementen met die kleur één langer. Een oneindige monochromatische rekenkundige rij met stapgrootte $b \in \mathbb{N}$ kan niet bestaan: vanaf het moment dat de monochromatische blokken een lengte b of groter hebben, zal de rij niet meer over de blokken heen kunnen stappen en een andere kleur aan moeten nemen.

2. Minimale Idempotente Ultrafilters

Om de Stelling van Van der Waerden te kunnen bewijzen, zullen we een partiële ordening moeten leggen op de idempotente ultrafilters. Om te bewijzen dat er minimale idempotente ultrafilters bestaan onder deze ordening maken we gebruik van idealen. Zodra we een minimaal idempotent ultrafilter hebben gevonden, kunnen we aantonen dat ieder element van dit ultrafilter willekeurig lange monochromatische rekenkundige rijen bevat.

We zullen beginnen met de partiële ordening op de idempotente ultrafilters. Laat $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ twee idempotente ultrafilters zijn en definieer:

$$\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \text{ dan en slechts dan als } \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Om aan te tonen dat $\preceq$ daadwerkelijk een partiële ordening is, lopen we de eisen O1-O3 uit hoofdstuk 1 na:

(O1) Voor alle idempotente ultrafilters $\mathcal{U}$ geldt direct $\mathcal{U} \preceq \mathcal{U}$;

(O2) Als $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ twee idempotente ultrafilters zijn met $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ en $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$, dan volgt:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{V}$$

Er geldt dus $\mathcal{U} = \mathcal{V}$;

(O3) Als $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ idempotente ultrafilters zijn met $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ en $\mathcal{V} \preceq \mathcal{W}$, dan volgt:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$$

En:

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = (\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}) = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$$

Hieruit volgt $\mathcal{U} \preceq \mathcal{W}$.

Vervolgens introduceren we het begrip ideaal. Een niet-lege deelverzameling L van $\beta\mathbb{N}$ is een *linksideaal* als voor iedere $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ geldt $\mathcal{U} \oplus L \subseteq L$. Analoog noemen we R een *rechtsideaal* als voor iedere $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ geldt $R \oplus \mathcal{U} \subseteq R$. Als I zowel een links- als een rechtsideaal is, dan noemen we I een *tweezijdig ideaal*.

We willen nu bewijzen dat ieder tweezijdig ideaal – zo deze bestaan – alle minimale idempotente ultrafilters bevat. Dit doen we met behulp van een aantal lemma's en stellingen. Vervolgens zullen we van dit feit gebruik maken in het bewijs van de Stelling van Van der Waerden.

Lemma 5.2. *Ieder rechtsideaal van $\beta\mathbb{N}$ bevat een minimaal rechtsideaal.*

Bewijs. Zij $R \subseteq \beta\mathbb{N}$ een willekeurig rechtsideaal, $\mathcal{U} \in R$ willekeurig en ψ de afbeelding uit Lemma 4.7 voor het element $\mathcal{U}$. Aangezien de Čech-Stonecompactificatie een compacte Hausdorffruimte is, zal vanwege de compactheid het beeld van een gesloten verzameling na toepassen van een continue afbeelding wederom gesloten zijn. Omdat $\beta\mathbb{N}$ zelf gesloten is, volgt dat $\psi[\beta\mathbb{N}] = \mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$ eveneens gesloten is. Aangezien R bovendien een rechtsideaal is, zal $\mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N} \subseteq R$. Zij $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ willekeurig. Dan volgt met behulp van de associativiteit van de operatie $\oplus$:

$$(\mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}) \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus (\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$$

Zodoende is $\mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$ een rechtsideaal en we zien dat ieder rechtsideaal altijd een gesloten rechtsideaal bevat.

Rest ons nog te bewijzen dat we ook een minimaal element kunnen vinden. Bekijk hiervoor:

$$\mathcal{F} = \{C \subseteq R : C \neq \varnothing \text{ en } C \text{ is een gesloten rechtsideaal}\}$$

Deze verzameling kunnen we partieel ordenen door $\supseteq$, en we zagen hierboven dat er altijd tenminste één zo'n niet leeg, gesloten rechtsideaal te vinden is. Als $\mathcal{C}$ een keten is binnen $\mathcal{F}$, maak dan $C_0 = \bigcap \mathcal{C}$. Aangezien $\beta\mathbb{N}$ een compacte ruimte is, kunnen we met behulp van de eindige doorsnede eigenschap concluderen dat C_0 niet leeg is. Aangezien alle elementen uit $\mathcal{C}$ gesloten zijn, zal ook C_0 gesloten zijn. Voor een willekeurige $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ geldt:

$$C_0 \oplus \mathcal{U} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \oplus \mathcal{U} \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = C_0$$

Hieruit volgt $C_0 \in \mathcal{F}$. Iedere lineair geordende verzameling binnen $\mathcal{F}$ heeft dus een bovengrens ten opzichte van $\supseteq$. Uit het Lemma van Zorn volgt dat $\mathcal{F}$ een maximaal element M heeft. Deze M is een minimaal rechtsideaal bevat in R. Ieder rechtsideaal bevat dus een minimaal rechtsideaal. $\square$

Hiermee kunnen we een prettige eigenschap van rechtsidealen geven.

Stelling 5.3. *Ieder rechtsideaal van $\beta\mathbb{N}$ bevat een idempotent element ten opzichte van de operatie $\oplus$.*

Bewijs. Laat $R \subseteq \beta\mathbb{N}$ een willekeurig rechtsideaal zijn. Uit Lemma 5.2 volgt dat R een minimaal rechtsideaal C bevat, dat bovendien gesloten is. Aangezien C een rechtsideaal is, is hij gesloten onder $\oplus$. Daarnaast is C compact, aangezien hij gesloten is. Omdat $\beta\mathbb{N}$ een Hausdorffruimte is, zal ook C Hausdorff zijn. Ook de linkscontinuïteit van de operatie $\oplus$ op $\beta\mathbb{N}$ – zoals gegeven in Lemma 4.7 – kan worden doorgegeven aan C. We kunnen Stelling 4.9 nu ook toepassen op C en zodoende kunnen we concluderen dat C een idempotent ultrafilter bevat. Aangezien C bevat zit in R, zal ook R een idempotent ultrafilter bevatten. $\square$

Met deze kennis van rechtsidealen en een partiële ordening op de idempotente ultrafilters, zijn we in staat om deze twee ideeën te koppelen.

Lemma 5.4. *Als $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ een idempotent is en $R \subseteq \mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$ een minimaal rechtsideaal, dan is er een idempotent ultrafilter $\mathcal{V} \in R$ met $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$.*

Bewijs. Laat $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ een willekeurig idempotent ultrafilter zijn en laat $R \subseteq \mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$ een willekeurig minimaal rechtsideaal zijn. We weten uit Stelling 5.3 dat R een idempotent $\mathcal{W}$ bevat. Aangezien $\mathcal{W}$ ook een element is van $\mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$, zal er een $\mathcal{Y} \in \beta\mathbb{N}$ zijn met $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Y}$. Neem nu $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{U}$. We laten zien dat deze $\mathcal{V}$ een idempotent is:

$$\mathcal{V} \oplus \mathcal{V} = (\mathcal{W} \oplus \mathcal{U}) \oplus (\mathcal{U} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{U}) = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{V}$$

Vervolgens moeten we nog aantonen dat $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$. We zien:

$$\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{V}$$

En:

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{V}$$

Zodoende is $\mathcal{V} \in R$ en $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$. □

Vervolgens kunnen ook de minimaliteit van idempotenten en idealen aan elkaar verbinden.

LEMMA 5.5. *Een idempotent ultrafilter $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ is minimaal dan en slechts dan als $\mathcal{U}$ bevat is in een minimaal rechtsideaal.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ een willekeurig idempotent ultrafilter. Neem om te beginnen aan dat $\mathcal{U}$ minimaal is. We weten dat $\mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$ een rechtsideaal is, zodat uit Lemma 5.2 volgt dat er een minimaal rechtsideaal $R \subseteq \mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$ is. Het net bewezen Lemma 5.4 geeft ons nu een idempotent $\mathcal{V} \in R$ met $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$. Aangezien $\mathcal{U}$ minimaal is, volgt nu $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Zodoende is $\mathcal{U}$ ook een element van R, en $\mathcal{U}$ zit dus bevat in een minimaal rechtsideaal.

Neem om de andere implicatie te bewijzen aan dat R een minimaal rechtsideaal is met $\mathcal{U} \in R$. We zullen aantonen dat $\mathcal{U}$ minimaal is. Stel dat er een $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ is met $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$. Aangezien $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, geldt ook $\mathcal{V} \in R$. Omdat R bovendien minimaal is, volgt ook $\mathcal{V} \oplus \beta\mathbb{N} = R$. Er bestaat dus een $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$ met $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{U}$. We kunnen nu schrijven:

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{V}$$

Zodoende is $\mathcal{U}$ een minimaal idempotent ultrafilter.

Hiermee hebben we bewezen dat een idempotent ultrafilter $\mathcal{U}$ minimaal is dan en slechts dan als $\mathcal{U}$ bevat zit in een minimaal rechtsideaal. □

Met behulp van deze laatste twee lemma's bewijzen we eenvoudig dat er ook daadwerkelijk minimale idempotente ultrafilters bestaan.

STELLING 5.6. *Als $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ een idempotent is, dan bestaat er een minimaal idempotent ultrafilter $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ met $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ willekeurig. Neem een minimaal rechtsideaal R met $R \subseteq \mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$. Uit Lemma 5.4 volgt dat er een $\mathcal{V} \in R$ is met $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$. Lemma 5.5 geeft ons tot slot dat deze $\mathcal{V}$ minimaal is. □

Nu zijn we in staat om af te leiden dat alle minimale idempotente ultrafilter bevat zitten ieder tweezijdig ideaal.

STELLING 5.7. *Als $R \subseteq \beta\mathbb{N}$ een minimaal rechtsideaal is en $I \subseteq \beta\mathbb{N}$ een tweezijdig ideaal is, dan geldt $R \subseteq I$.*

Bewijs. Zij $R \subseteq \beta\mathbb{N}$ een minimaal rechtsideaal en $I \subseteq \beta\mathbb{N}$ een tweezijdig ideaal. Neem een $\mathcal{U} \in R$ en een $\mathcal{V} \in I$ willekeurig. Uit de eigenschappen van R en I volgt dat $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in R \cap I$, zodat $R \cap I \neq \varnothing$. Hieruit volgt dat $R \cap I$ een rechtsideaal is. Uit de minimaliteit van R en $R \cap I \subseteq R$ volgt nu dat $R = R \cap I$. Dit betekent dat $R \subseteq I$. $\square$

Ieder minimaal idempotent ultrafilter zit bevat in een minimaal rechtsideaal en ieder minimaal rechtsideaal zit bevat in ieder tweezijdig ideaal. Hieruit kunnen we concluderen dat ieder minimaal idempotent ultrafilter bevat zit in ieder tweezijdig ideaal.

3. Het Bewijs

Om het bewijs van de Stelling van Van der Waerden te kunnen voltooien is het genoeg om de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 5.8. *Als $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ een minimaal idempotent ultrafilter is, dan bevat ieder element van $\mathcal{U}$ willekeurig lange monochromatische rekenkundige rijen.*

Hebben we een minimaal idempotent ultrafilter $\mathcal{U}$ gevonden en is er een kleuring van met $k \in \mathbb{N}$ kleuren gegeven, dan zal één van de monochromatische verzamelingen volgens Stelling 1.6 tenslotte een element zijn van het ultrafilter. Ieder element van het ultrafilter bevat willekeurig lange monochromatische rekenkundige rijen, zodat we kunnen concluderen dat er een monochromatische verzameling bestaat met willekeurig lange rekenkundige rijen.

Om deze stelling te bewijzen gebruiken we een aantal lemma's. Neem een $l \in \mathbb{N}$ willekeurig. We zullen moeten aantonen dat ieder element van een minimaal idempotent ultrafilter in $\beta\mathbb{N}$ een rekenkundige rij van lengte l bevat. Bekijk hiervoor de halfgroep $\beta\mathbb{N}^l$, waarin we met de operatie $\oplus$ componentsgewijs optellen. We zullen gebruik maken van de volgende deelverzamelingen van $\beta\mathbb{N}^l$:

$$E^- = \{(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_{a+b}, \ldots, \mathcal{F}_{a+(l-1)b}) : a \in \mathbb{N} \text{ en } b \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$$I^- = \{(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_{a+b}, \ldots, \mathcal{F}_{a+(l-1)b}) : a, b \in \mathbb{N}\}$$

Hierin is $\mathcal{F}_n$ voor $n \in \mathbb{N}$ wederom het hoofdultrafilter $\{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$. De verzameling I^- bevat dus precies de l-tallen hoofdultrafilters die horen bij de rekenkundige rijen van $\mathbb{N}$, de verzameling E^- bevat daarnaast ook alle l-tallen hoofdultrafilters die horen bij de constante rijen.

We kunnen nu afsluitingen nemen in $\beta\mathbb{N}^l$ en enkel kijken naar de l-tallen vrije ultrafilters in deze verzamelingen:

$$E = (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})^l \cap \text{cl } E^-$$

$$I = (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})^l \cap \text{cl } I^-$$

Om Stelling 5.8 te bewijzen, zullen we enkel aan moeten tonen dat voor ieder minimaal idempotent ultrafilter $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ de bijbehorende vector $\vec{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \ldots, \mathcal{U})$ een element is van I. In dat geval kunnen we op de onderstaande wijze aantonen dat ieder $A \in \mathcal{U}$ een rekenkundige rij van lengte l bevat.

Zij $A \in \mathcal{U}$ willekeurig. Roep in herinnering dat de verzameling $\overline{A} = \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{V}\}$ een basiselement is van de topologie op $\beta\mathbb{N}$. De verzameling $\overline{A}^l$ is dus open in $\beta\mathbb{N}^l$ en is zeker een omgeving van $\vec{\mathcal{U}}$. Uit $\vec{\mathcal{U}} \in I$ volgt daarnaast dat $\vec{\mathcal{U}} \in \mathrm{cl}\ I^-$. Dan volgt uit de eigenschappen van de afsluiting dat:

$$\overline{A}^l \cap I^- \neq \varnothing$$

Er zijn dus a en b in $\mathbb{N}$, zó dat:

$$(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_{a+b}, \ldots, \mathcal{F}_{a+(l-1)b}) \in \overline{A}^l$$

Voor alle i met $0 \leq i \leq l-1$ volgt dus $\mathcal{F}_{a+ib} \in \overline{A}$. Dit betekent dat $A \in \mathcal{F}_{a+ib}$, waaruit volgt dat $a + ib \in A$. Kortom:

$$\{a, a+b, \ldots, a+(l-1)b\} \subseteq A$$

Om te bewijzen dat $\vec{\mathcal{U}} \in I$ is het genoeg om de volgende drie uitspraken aan te tonen:

(1) E is een semi-topologische halfgroep;
(2) I is een tweezijdig ideaal van E;
(3) $\vec{\mathcal{U}}$ is een minimale idempotent van E.

Alle lemma's en stellingen uit paragraaf 2 van dit hoofdstuk gelden ook voor de semi-topologische halfgroep E, we hebben tenslotte nergens echt gebruik gemaakt van bijzondere eigenschappen van $\beta\mathbb{N}$. In het bijzonder kunnen we dan gebruik maken van de opmerking waarmee we paragraaf 2 afsloten: ieder minimaal idempotent zit bevat in ieder tweezijdig ideaal.

Voor het bewijs van deze eerste uitspraak zullen we niet alleen gebruik maken van de continuïteit van de optelling zoals in Stelling 4.7, we zullen ook rechtscontinuïteit nodig hebben wanneer we optellen met een hoofdultrafilter.

STELLING 5.9. *Voor een $n \in \mathbb{N}$ is de optelling $\chi : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ gegeven door $\chi(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{F}_n$ een continue functie.*

BEWIJS. Zij $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. Neem de functie χ voor deze n, zoals hij omschreven is in het lemma. Om te bewijzen dat deze functie continu is, zal het volledig origineel van een open verzameling ook open moeten zijn. Het is genoeg om een open basis element te nemen, en hiervoor te bewijzen dat het volledig origineel open is. Laat $\overline{A}$ voor $A \subseteq \mathbb{N}$ zo'n basis element zijn. We zien:

$$\begin{aligned}
\chi^{-1}[\overline{A}] &= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : \mathcal{V} \oplus \mathcal{F}_n \in \overline{A}\} \\
&= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{F}_n\} \\
&= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : A \in \{B \subseteq \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : B - k \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{F}_n\}
\end{aligned}$$

Alle $\mathcal{V}$ zijn dus precies zó dat $\{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{F}_n$, waardoor geldt:

$$\begin{aligned}\chi^{-1}[\overline{A}] &= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{F}_n\} \\ &= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : n \in \{k \in \mathbb{N} : A - k \in \mathcal{V}\}\} \\ &= \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} : A - n \in \mathcal{V}\} \\ &= \overline{A - n}\end{aligned}$$

Zodoende is $\chi^{-1}[\overline{A}]$ ook open. De afbeelding χ is dus continu voor iedere $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lemma 5.10. *E is een semi-topologische halfgroep.*

Bewijs. Aangezien E gesloten is in $\beta\mathbb{N}^l$, is E compact. Daarnaast is E Hausdorff, omdat $\beta\mathbb{N}^l$ Hausdorff is en zal de (componentsgewijze) optelling $\oplus$ met de afbeelding ψ uit Stelling 4.7 ook linkscontinu zijn op E. We zullen dus enkel aan moeten tonen dat E gesloten is onder $\oplus$.

Laat hiervoor $\vec{\mathcal{V}}$ en $\vec{\mathcal{W}}$ in E willekeurig zijn. Laat $A \subseteq \beta\mathbb{N}^l$ een open verzameling zijn met $\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}} \in A$. Neem de afbeelding ψ uit Stelling 4.7 voor het element $\vec{\mathcal{V}}$. Bekijk nu $B = \psi^{-1}[A]$. Vanwege de continuïteit van ψ is B een open verzameling. Daarnaast geldt ook $\vec{\mathcal{W}} \in B$. Aangezien $\vec{\mathcal{W}} \in E = (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \cap E^-$ zijn er $a \in \mathbb{N}$ en $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zó dat:

$$(\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_{a+b}, \dots, \mathcal{F}_{a+(l-1)b}) \in B$$

Noem deze rekenkundige of constante rij $\vec{\mathcal{Y}}$.

Nu geldt $\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{Y}} \in A$. Neem de functie χ voor $\vec{\mathcal{Y}}$ zoals in Stelling 5.9, dan is $C = \chi^{-1}[A]$ ook open en geldt $\vec{\mathcal{V}} \in C$. Net als eerder met $\vec{\mathcal{W}}$ geldt $\vec{\mathcal{V}} \in E$, en zijn er $c \in \mathbb{N}$ en $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zó dat:

$$(\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_{c+d}, \dots, \mathcal{F}_{c+(l-1)d}) \in C$$

Noem deze rekenkundige of constante rij $\vec{\mathcal{Z}}$.

Nu geldt:

$$\vec{\mathcal{Z}} \oplus \vec{\mathcal{Y}} = (a + c, a + c + b + d, \dots, a + c + (l-1)(b + d)) \in A \cap E^-$$

Als A dus een open verzameling is met $\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}} \in A$, dan geldt $A \cap E^- \neq \varnothing$. Zodoende kunnen we concluderen:

$$\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}} \in (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \cap \mathrm{cl}\ E^- = E$$

$\square$

Het tweede punt – I is een tweezijdig ideaal – volgt op soortgelijke wijze.

Lemma 5.11. *I is een tweezijdig ideaal van E.*

Bewijs. Het bewijs van dit lemma gaat geheel analoog aan het bewijs van Lemma 5.10. Als $\mathcal{V}$ of $\mathcal{W}$ een element is van I, dan zal b of d groter zijn dan 0. Dit betekent dat ook $b + d > 0$, waaruit volgt dat $(\mathcal{F}_{a+c}, \dots, \mathcal{F}_{a+c+(k-1)(b+d)}) \in A \cap I^-$ en $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in I$. $\square$

LEMMA 5.12. *Als $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ een minimaal idempotent ultrafilter is, dan geldt $\vec{\mathcal{U}} \in E$ en $\vec{\mathcal{U}}$ is een minimaal idempotent ultrafilter van E.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ een willekeurig minimaal idempotent ultrafilter. We weten dat ieder punt van de vorm $(\mathcal{F}_n, \ldots, \mathcal{F}_n)$ met $n \in \mathbb{N}$ een element is van E^-. Zij $A \in \mathcal{U}$ willekeurig, dan geldt:

$$\{(n, \ldots, n) : n \in A\} \subseteq \overline{A}^l \cap E^-$$

We zagen eerder al dat $\overline{A}^l$ een omgeving is van $\mathcal{U}$, waaruit we kunnen concluderen dat $\vec{\mathcal{U}} \in (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \cap E^- = E$.

Rest ons nog te bewijzen dat $\vec{\mathcal{U}}$ een minimaal idempotent is van E. Roep in herinnering dat we binnen $\beta\mathbb{N}^l$ de operatie $\oplus$ componentsgewijs toepassen. Als $(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_l)$ een idempotent is, dan zal iedere $\mathcal{W}_i$ dus een idempotent moeten zijn. Als daarnaast $(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, W_l) \preceq \vec{\mathcal{U}}$, dan zal $\mathcal{W}_i \preceq \mathcal{U}$ voor alle i. Omdat $\mathcal{U}$ minimaal is, volgt echter dat $\mathcal{W}_i = \mathcal{U}$ voor alle i. Zodoende is $\vec{\mathcal{U}}$ een minimaal idempotent van E. □

Hiermee hebben we de drie eerder genoemde uitspraken bewezen, zodat we kunnen concluderen dat de vector $\vec{\mathcal{U}}$ behorende bij een minimaal idempotent ultrafilter $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ een element is van I. Zodoende bevat ieder element van $\mathcal{U}$ een rekenkundige rij van lengte l. Aangezien l willekeurig was, bevat elk element van $\mathcal{U}$ dus willekeurig lange rekenkundige rijen.

4. Eindige Versie

We kunnen de Stelling van Van der Waerden ook op een iets andere wijze formuleren.

STELLING 5.13 (Eindige Stelling van Van der Waerden). *Als een aantal kleuren $k \in \mathbb{N}_{>1}$ en een lengte $l \in \mathbb{N}_{>1}$ gegeven zijn, dan bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zó dat de natuurlijke getallen kleiner of gelijk aan n – gekleurd met de gegeven kleuren – altijd een monochromatische rekenkundige rij van lengte l bevatten.*

BEWIJS. De eindige Stelling van Van der Waerden kunnen we – net als de eindige Stelling van Ramsey – bewijzen met behulp van de oneindige versie. Zij k en l willekeurige positieve natuurlijke getallen. Stel dat de eindige Stelling van Van der Waerden niet waar is voor deze getallen, dan is er dus voor iedere positieve n een kleuring van $\{1, 2, \ldots, n\}$ te vinden zonder een monochromatische rekenkundige rij van lengte l. We zullen vanuit deze kleuringen een kleuring construeren van alle natuurlijke getallen. Volgens de oneindige Stelling van Van der Waerden bevat deze kleuring dan willekeurig lange monochromatische rekenkundige rijen, waaronder rijen van lengte l. Hieruit zullen we af kunnen leiden dat voor een n de gegeven kleuring van $\{1, 2, \ldots, n\}$ ook een monochromatische rekenkundige rij van lengte l bevat moet hebben.

De invulling van dit bewijs gaat verder analoog aan het bewijs van de eindige Stelling van Ramsey. □

Hiermee hebben we de Stelling van Van der Waerden en zijn eindige versie bewezen, waarbij we wederom uitgebreid gebruik hebben gemaakt van ultrafilters. We hebben daarnaast enige theorie over idealen ontwikkeld om daadwerkelijk aan te tonen dat ieder element van een minimaal idempotent ultrafilter willekeurig lange rekenkundige rijen bevat. Met deze kennis konden we eenvoudig afleiden dat ieder eindige kleuring van de natuurlijke getallen een monochromatische verzameling bevat met willekeurig lange rekenkundige rijen. De eindige versie van de Stelling van Van der Waerden volgde tot slot uit de oneindige versie, net als bij de Stelling van Hindman.

Bibliografie

[1] D. Babcock. The Hyperreal Numbers and Applications to Elementary Calculus. Presentatie aan de Purdue Universiteit, 2008.

[2] L. Goldmakher. Hindman's Theorem Via Ultrafilters. Website. `http://www.math.toronto.edu/lgoldmak/Hindman.pdf`.

[3] K.P. Hart. The Čech-Stone Compactification, 2002-2003.

[4] K.P. Hart. De stelling van Van der Waerden. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2:92–97, 2007.

[5] K. R. Johannson. Variations on a theorem by van der Waerden. Master thesis, University of Manitoba, 2007.

[6] H. Furstenberg & Y. Katznelson. Idempotents in compact semigroups and Ramsey theory. *Israel J. Math*, pages 257–270.

[7] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall / CRC, 5th edition, 2009.

[8] V. Runde. *A Taste of Topology*. Springer, 2008.

[9] W. Sierpiński. Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables. *Fundamenta Mathematicae*, 30:96–99, 1938.

[10] A.R.P.J. Vijn. Het keuzeaxioma: Een studie naar de geschiedenis van het keuzeaxioma, de gevolgen, equivalente uitspraken en de onbewijsbaarheid. Bachelorscriptie, Delft University of Technology, 2012.

[11] Q. Yuan. Ultrafilters in Ramsey Theory. Website, 2010. `http://qchu.wordpress.com/2010/12/14/ultrafilters-in-ramsey-theory/`.

[12] A.C. Zaanen. *Continuity, Integration and Fourier Theory*. Springer-Verlag, 1989.

Index