

Grundgleichungen der Seegangsvoraussage

K. Hasselmann

Institut für Schiffbau, Hamburg

Das Problem der Entwicklung der Windsee, die von einem zeitlich und räumlich veränderlichen Windfeld über einem Meer erzeugt wird, ist bisher vorwiegend von der empirischen Seite untersucht worden [1, 2, 4, 5, u. a.]. Zur Aufstellung einer exakten Theorie waren die Kenntnisse der auf den Seegang einwirkenden Kräfte noch nicht ausreichend. Es erscheint jedoch fraglich, ob im komplizierten allgemeinen Fall räumlich und zeitlich veränderlicher Windfelder eine befriedigende Seegangsvoraussage erreicht werden kann, ohne auf die wichtigsten Grundvorgänge der Seegangsentwicklung einzugehen. Im wesentlichen lassen sich drei Haupteinwirkungen auf den Seegang unterscheiden: die Anfachung durch Windkräfte, die Dissipation durch turbulente Reibung und die nichtlinearen Einflüsse, die durch die endliche Steilheit des Seegangs bestimmt sind. Einen wichtigen Beitrag zum Verständnis der Windkräfte lieferte O. M. Phillips [6] durch seine Erklärung der Seegangsentstehung als Folge der Einwirkung statistischer Druckschwankungen auf die Wasseroberfläche. Der Einfluß der Turbulenz auf den Seegang ist im einzelnen noch ungeklärt, jedoch wird allgemein angenommen, daß die erhöhte Dissipation infolge der Turbulenz in erster Näherung durch einen zusätzlichen konstanten Reibungskoeffizienten berücksichtigt werden kann. Das vielleicht größte Hindernis zu einer exakten Seegangstheorie waren jedoch die bisher ungeklärten nichtlinearen Effekte, welche vor allem bei der Ausbildung der ausgereiften Windsee eine entscheidende Rolle spielen. Es lassen sich zwei unabhängige nichtlineare Effekte unterscheiden:

1. der Vorgang der Wellenbrechung, bei dem die Wellenenergie unmittelbar in Turbulenz verwandelt und gleichzeitig infolge der erhöhten turbulenten Reibung schneller dissipiert wird, und
2. die nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Wellenkomponenten des Seegangs, die zu einer Energieumschichtung innerhalb des Seegangsspektrums führen.

Die Wellenbrechung ist vermutlich auf eine Instabilität zurückzuführen, die in den Wellenkappen auftritt, wenn die lokale, nach unten gerichtete Beschleunigung die Erdbeschleunigung übertrifft [8]. Die Berechnung der Häufigkeitsverteilung der brechenden Wellenkappen sowie zumindest eine Abschätzung der dabei verlorengehenden Wellenenergie dürfte mit üblichen statistischen Methoden durchzuführen sein. Eine Theorie, die den Energieaustausch im Seegangsspektrum infolge der nichtlinearen Wechselwirkungen beschreibt, ist bereits vollständig durchgeführt worden und wird in einer weiteren Veröffentlichung ausführlicher dargestellt werden¹⁾.

Obwohl die Grundphänomene, die die Entwicklung des Seegangs beeinflussen, demnach noch nicht in allen Einzelheiten geklärt sind, ermutigen die jüngsten Fortschritte in diesen Fragen doch zu dem Versuch, an Hand der exakten Grundgleichungen des Seegangs eine zuverlässige, allgemeine Methode der Seegangsvoraussage zu entwickeln. Ausgangspunkt einer exakten Theorie muß zwangsläufig eine Gleichung bilden, die die Energiebilanz des Seegangsspektrums dar-

¹⁾ In einer kürzlich erschienenen Arbeit von O. M. Phillips [7] werden ebenfalls nichtlineare Wechselwirkungen von Schwerewellen betrachtet. Die Untersuchung beschränkt sich jedoch auf die Wechselwirkungen bis zur dritten Ordnung zwischen zwei diskreten Wellenzügen, während im Fall eines statistischen kontinuierlichen Spektrums der Energietransport durch Wechselwirkungen bis zur fünften Ordnung zwischen drei verschiedenen Spektralkomponenten hervorgerufen wird.

stellt. Es überrascht etwas, daß diese Gleichung in den bisherigen empirischen Ansätzen durchweg nicht mit herangezogen worden ist. Auch ohne genaue Kenntnis der einzelnen Terme der Energiegleichung lassen sich aus der Struktur der Gleichung mehrere wichtige Aussagen ableiten. Insbesondere ergibt sich eine sehr einfache Antwort auf die viel diskutierte Frage nach der relativen Bedeutung von „Fetch“ und „Duration“ bei der Ausbildung der Windsee.

Für die Entwicklungsphase, in der die nichtlinearen Effekte noch vernachlässigbar sind, läßt sich die Energiegleichung sofort integrieren. Einige charakteristische Lösungen werden diskutiert. Insbesondere ergibt sich, daß auch relativ kleine Gebiete großer Windstärke einen hohen Seegang erzeugen können, falls die Wanderungsgeschwindigkeit des Gebiets gerade halb so groß ist wie die Windgeschwindigkeit innerhalb des Gebiets. Der stationäre Endzustand des Spektrums für ein ausgedehntes Windfeld wird ebenfalls kurz diskutiert, die Lösung dieses Problems würde jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

Mit Hilfe eines geeigneten Rechenprogramms für eine elektronische Digitalanlage ließe sich die Methode ausbauen, um schnelle und genaue Windsee- und Dünungsvoraussagen für beliebige, durch die Wetterkarte bestimmten Windfelder zu berechnen. Hierzu müßten allerdings noch genauere Beobachtungen (eine theoretische Berechnung dürfte vorerst an dem Turbulenzproblem scheitern) zur näheren Bestimmung der noch unsicheren Terme in der Energiegleichung vorliegen.

1. Formulierung des Problems; Energiegleichung

Der von Windkräften angefachte unregelmäßige Seegang auf einem Meer läßt sich bekanntlich vollständig durch ein zweidimensionales Energiespektrum $F(\mathfrak{R}; r, t)$ charakterisieren²⁾, in dem der Wellenzahlvektor \mathfrak{R} Fortschrittrichtung und Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ der Wellen angibt und r der zweidimensionale Ortsvektor auf der Oberfläche ist. ($\mathfrak{R} = k$: Komponenten von \mathfrak{R} : k_x, k_y, k_z). Das Problem der Seegangsvoraussage formulieren wir dann folgendermaßen:

In einem Oberflächengebiet \mathcal{G} mit (allgemein zeitlich veränderlichem) Rand \mathfrak{R} ist das Spektrum $F(\mathfrak{R}; r, t)$ zu bestimmen für $t \geq t_0$. In \mathcal{G} ist das Windfeld für $t \geq t_0$ und zur Zeit t_0 das Anfangsspektrum

$$F(\mathfrak{R}; r, t_0) = F_0(\mathfrak{R}; r) \quad (1)$$

vorgegeben. Auf \mathfrak{R} gelten stückweise eine der folgenden beiden Randbedingungen:

1. Randbedingung:

$$F(\mathfrak{R}; r, t) = F_1(\mathfrak{R}; r, t) \text{ für } (\mathbf{v}(\mathfrak{R}) \cdot \mathbf{n}) - U_r \leq 0 \text{ und } t \geq 0 \quad (2)$$

wo $\mathbf{n} =$ äußere Normale des Randes,

$$\mathbf{v}(\mathfrak{R}) = \text{Gruppengeschwindigkeit} = \frac{\mathfrak{R}}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

($g =$ Erdbeschleunigung)

$U_r =$ Normalgeschwindigkeit des Randes

und F_1 eine bekannte Funktion ist.

²⁾ Die statistischen Eigenschaften des Seegangs sind streng genommen nur im Falle statistisch unabhängiger Fourierkomponenten vollständig durch das Spektrum beschrieben. Ein solches „Rauschspektrum“ liegt sicherlich vor, solange die nichtlinearen Effekte vernachlässigbar sind. Es läßt sich jedoch auch im nichtlinearen Fall nachweisen, daß die Abweichungen des Seegangsspektrums von einem Rauschspektrum klein bleiben.

2. Randbedingung

$$F(\mathcal{N}; r, t) = \lambda(\mathcal{N}) F(\mathcal{N}'; r, t) \quad (3)$$

für $(\Delta n) < 0$

$$\text{wo } \mathcal{N}' = \mathcal{N} - 2n(\Delta n)$$

der am Rand reflektierte Wellenzahlvektor ist.

Die erste Randbedingung gilt für Ränder auf dem offenen Meer. Sie gibt die Wellenenergie vor, die für $t \geq t_0$ von außen her in \mathcal{G} einströmt. Die zweite Randbedingung gilt für die Reflexion an Küsten. Um Fallunterscheidungen im folgenden zu vermeiden, betrachten wir nur den wichtigsten Fall, daß der Reflexionsfaktor $\lambda(\mathcal{N})$ identisch verschwindet. Die 2. Randbedingung geht dann über in den Spezialfall

$$F_1 = 0, \quad U_r = 0 \quad \text{der 1. Randbedingung.}$$

Zu diesen Anfangs- und Randbedingungen ergibt sich nun aus der Energiebilanz des Spektrums eine partielle Differentialgleichung, durch die $F(\mathcal{N})$ dann eindeutig bestimmt wird. Sie lautet:

$$\frac{\partial F(\mathcal{N})}{\partial t} + v(\mathcal{N}) \cdot \text{grad } F = \alpha(\mathcal{N}; r, t) + \beta(\mathcal{N}; r, t) F(\mathcal{N}) - 4v_t k^2 F(\mathcal{N}) + N_1 + N_2 \quad (4)$$

Der Konvektionsterm auf der linken Seite der Gleichung ist die Divergenz des dem Spektrum $F(\mathcal{N})$ zugeordneten Energiestroms $v(\mathcal{N}) \cdot F(\mathcal{N})$.

Der erste Term auf der rechten Seite stellt die Anfachung durch die Druckschwankungen über der Wasseroberfläche dar (Phillips [6]). Das bei Phillips durch ein Autokorrelationsintegral ausgedrückte Ergebnis läßt sich durch Einführen des von Wellenzahl und Frequenz abhängigen Spektrums $P(\mathcal{N}, \omega)$ der Druckschwankungen p in anschaulichere Form bringen:

$$\alpha(\mathcal{N}) = \frac{\pi}{4k} P(\mathcal{N}, -\omega_k) \quad \text{mit } \omega_k = \sqrt{gk} \quad (5)$$

$P(\mathcal{N}, \omega) dk_x dk_y d\omega$ ist der Anteil, den die Druck-Fourierkomponenten $A(\mathcal{N}, \omega) e^{i(\mathcal{N} \cdot r) + i\omega t}$, deren Wellenzahlen \mathcal{N}' bzw. Kreisfrequenzen ω' in den Intervallen $k_x \leq k_x' \leq k_x + dk_x$, $k_y \leq k_y' \leq k_y + dk_y$, bzw. $\omega \leq \omega' \leq \omega + d\omega$ liegen, zum mittleren Quadrat des Drucks beitragen.

Der zweite Term auf der rechten Seite berücksichtigt die eventuell hinzukommende Anfachung infolge von Sheltering, Instabilität im Sinne von J. W. Miles [3] usw. Im Gegensatz zum ersten Term, der nur von der Turbulenz des Windes abhängt, sind diese Effekte (zumindest in erster Näherung) dem Wellenspektrum proportional.

Der dritte Term stellt die Dissipation infolge der turbulenten Viskosität v_t dar (die zähe Reibung ist vernachlässigbar).

Der Term N_1 repräsentiert den nichtlinearen Einfluß der Brechung. Zur Zeit läßt sich über diesen Term wenig aussagen. Es ist wahrscheinlich, daß er ebenso wie die Reibungsterme vorwiegend im kurzwelligen Bereich des Spektrums von Bedeutung ist, jedoch wesentlich stärker als linear mit dem Spektrum zunimmt. Für unsere jetzige, mehr prinzipielle Untersuchung ist die exakte Form dieses Terms ohne Belang.

Der Term N_2 repräsentiert schließlich den Einfluß der nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Komponenten des Spektrums. Er lautet:

$$N_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathcal{N}') F(\mathcal{N}'') F(\mathcal{N}' + \mathcal{N}'' - \mathcal{N}) T_1(\mathcal{N}', \mathcal{N}'', \mathcal{N}' + \mathcal{N}'' - \mathcal{N}) dk_x' dk_y' dk_x'' dk_y'' - F(\mathcal{N}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathcal{N}') F(\mathcal{N}'') T_2(\mathcal{N}, \mathcal{N}', \mathcal{N}'') dk_x' dk_y' dk_x'' dk_y'' \quad (6)$$

T_1 und T_2 sind komplizierte Austauschfunktionen, die hier nicht näher angegeben werden. Sie enthalten als Faktoren Diracsche δ -Funktionen der Form

$$\delta(\omega(\mathcal{N}' + \mathcal{N}'' - \mathcal{N}) - \omega(\mathcal{N}') - \omega(\mathcal{N}'') + \omega(\mathcal{N}))$$

Die der Einfachheit halber als vierfache Integrale dargestellten Ausdrücke auf der rechten Seite von (6) sind somit in Wirklichkeit nur dreifache Integrale über Hyperflächen der Form

$$\omega(\mathcal{N}' + \mathcal{N}'' - \mathcal{N}) - \omega(\mathcal{N}') - \omega(\mathcal{N}'') + \omega(\mathcal{N}) = 0$$

im $\mathcal{N}' \cdot \mathcal{N}''$ -Raum ($\omega(\mathcal{N}) = \omega_k = \sqrt{gk}$).

2. Formale Integration der Energiegleichung

Bezeichnen wir die Summe der lokalen Einwirkungen auf der rechten Seite von (3) kurz mit $L(\mathcal{N}; r, t)$, so lautet die formale Lösung der Energiegleichung mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen:

$$F(\mathcal{N}; r, t) = \int_{t_0}^t L(\mathcal{N}; r - (t-t')v(\mathcal{N}), t') dt' + F(\mathcal{N}; r - (t-t_1)v(\mathcal{N}), t_1) \quad (7)$$

$$\text{mit } t_1 = \max \begin{cases} t_0 & (\text{Begrenzung durch die Duration}) \\ t_r, & \text{wo } t_r = \max \tau (< t), \\ & \text{für welches } \tau - (t-\tau)v(\mathcal{N}) \text{ auf } \mathcal{N} \text{ liegt.} \\ & (\text{Begrenzung durch den Feich}) \end{cases}$$

Gleichung (7) besagt, daß das Spektrum $F(\mathcal{N}; r, t)$ bestimmt wird durch das Integral der lokalen Einwirkungen $L(\mathcal{N})$ über den Weg, den eine Wellengruppe mit der Wellenzahl \mathcal{N} , die zur Zeit t am Ort r eintrifft, von einem bekannten Anfangspunkt $r - v(\mathcal{N})(t-t_1)$ aus zurücklegt. Falls der zurückverlängerte Weg der Wellengruppe bis zur Anfangszeit t_0 innerhalb des Gebiets \mathcal{G} bleibt, so ergibt sich der Anfangswert in (7) aus der Anfangsbedingung (1). Falls der zurückverlängerte Weg dagegen bereits zu einer Zeit $t_r > t_0$ auf den Rand \mathcal{N} stößt, so ergibt sich der Anfangswert in (7) aus der 1. Randbedingung (2) (Im Falle der 2. Randbedingung (3) müßte der Weg natürlich an \mathcal{N} reflektiert und weiter zurückverfolgt werden). Dieses Ergebnis ist kaum überraschend und hätte auch ohne explizite Aufstellung der Energiegleichung abgeleitet werden können. Dennoch ist (7) bisher nur für die Dünungsvoraussage angewandt worden [5]. Hier handelt es sich um das reine Dispersionsproblem mit $L(\mathcal{N}) \equiv 0$, und (7) reduziert sich auf

$$F(\mathcal{N}; r, t) = F(\mathcal{N}; r - v(\mathcal{N})(t-t_1), t_1) \quad (8)$$

Identifizieren wir im allgemeinen Fall $L(\mathcal{N}) \neq 0$ das Gebiet \mathcal{G} mit einem scharf begrenzten Sturmgebiet, so erkennt man aus (7), daß zwischen dem Einfluß des Feich und der Dauer des Sturms kein prinzipieller Unterschied besteht. Diese Größen machen sich in der gleichen Weise allein durch die Begrenzung der Einwirkungsdauer von $L(\mathcal{N})$ bemerkbar. Wir werden daher auch später aus der Spektrumsvoraussage für ein unendlich ausgedehntes Sturmgebiet, das zur Zeit $t = t_0$ plötzlich entsteht, sofort die allgemeine Lösung für ein beliebiges (im Innern jedoch konstantes) Sturmgebiet mit zeitlich veränderlicher Umrandung ableiten können.

Die Gleichung (7) stellt zunächst nur eine formale Integration der Energiegleichung (4) dar; denn der Ausdruck $L(\mathcal{N})$ hängt noch von dem Spektrum $F(\mathcal{N})$ ab. Eine allgemeine Lösung dürfte wegen des sehr komplizierten nichtlinearen Terms N_2 nur auf numerischem Wege mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen möglich sein. Im folgenden untersuchen wir daher lediglich zwei (allerdings wichtige) Grenzfälle: 1. die vollausgereifte Windsee, 2. die Entwicklungsphase, bei der die nichtlinearen Effekte noch vernachlässigbar sind.

3. Die ausgereifte Windsee

Unter der ausgereiften Windsee versteht man den Seegang, der sich für $t \rightarrow \infty$ bei einem unendlich ausgedehnten, konstanten Windfeld einstellt. In (4) verschwindet also die linke Seite. Für den relativ uninteressanten Fall eines schwachen Windfeldes, bei dem das Spektrum so klein bleibt, daß die nichtlinearen Terme vernachlässigt werden können, erhält man sofort

$$F(\mathcal{N}) = \frac{\alpha(\mathcal{N})}{4v_t k^2 - \beta(\mathcal{N})} \quad (\beta(\mathcal{N}) < 4v_t k^2 \text{ vorausgesetzt}). \quad (9)$$

Die allgemeine Lösung für den Fall, daß die nichtlinearen Terme nicht vernachlässigbar sind, können wir in diesem Rahmen nur qualitativ diskutieren. Die Austauschfunktionen T_1 und T_2 des nichtlinearen Terms N_2 sind beide positiv. Das erste Integral in (6) beschreibt die Energiezunahme des Spektrums an der Stelle \mathcal{N} durch die Wechselwirkungen zwischen den Wellenkomponenten an drei anderen Stellen des Spektrums. Die Zunahme ist unabhängig vom Wert des Spektrums an der Stelle \mathcal{N} . Das zweite Integral stellt den Energieverlust des Spektrums $F(\mathcal{N})$ durch unmittelbare Wechselwirkungen der Komponenten der Wellenzahl \mathcal{N} mit den Komponenten an jeweils zwei weiteren Stellen des Spektrums dar. Der Energieverlust ist dem Wert des Spektrums an der Stelle \mathcal{N} proportional. Die nichtlinearen Wechselwirkungen werden also die Tendenz haben, scharfe Spitzen des Spektrums zu glätten und die Energie gleichmäßiger über das Spektrum zu verteilen. Es ist zu erwarten, daß sich analog zum nichtlinearen Kaskadenprozeß der Turbulenz ein mittlerer Energiestrom ausbildet, der von den energiereichen langwelligen zu den energiearmen kurzwelligen Gebieten des Spektrums fließt. Im stationären Endzustand würde sich dann wahrscheinlich ein Gleichgewicht einstellen zwischen der Energiezufuhr $\alpha(\mathcal{N}) + \beta(\mathcal{N}) F(\mathcal{N})$ im langwelligen Gebiet, dem nichtlinearen Energietransport N_2 von längeren zu kürzeren Wellen, und den Energieverlusten $-4v_t k^2 F(\mathcal{N}) + N_1$ durch turbulente Reibung und Wellenbrechung, die vorwiegend im kurzwelligen Bereich erfolgen.

Der nichtlineare Energieaustausch ist der dritten Potenz des Spektrums und somit der sechsten Potenz der mittleren Wellenlänge des Seegangs proportional. Wegen dieser sehr starken Abhängigkeit der nichtlinearen Wechselwirkungen von der mittleren Wellenlänge wird der Übergang von der Entwicklungsphase, in der die nichtlinearen Effekte vernachlässigbar sind, zum stationären Endzustand des Seegangs für ein bestimmtes Spektralgebiet sehr rasch erfolgen. Durch Kombination der hier betrachteten Grenzfälle der linearen Entwicklungsphase und des nichtlinearen Endzustandes dürften sich somit auch im allgemeinen Fall brauchbare Seegangsvoraussagen erzielen lassen.

4. Die lineare Entwicklungsphase des Seeganges

Unter Vernachlässigung der nichtlinearen Terme läßt sich die Lösung der Energiegleichung auf Quadraturen zurückführen:

$$F(\mathcal{N}; r, t) = \frac{1}{\gamma(\mathcal{N}; r, t)} \int_{t_1}^t \gamma(\mathcal{N}; r - (t-t') v(\mathcal{N}), t') \alpha(\mathcal{N}; r - (t-t') v(\mathcal{N}), t') dt' + F(\mathcal{N}; r - (t-t_1) v(\mathcal{N}), t_1)$$

$$\text{mit } \gamma(\mathcal{N}; r, t) = \exp \int_{t_1}^t [4v_t k^2 - \beta(\mathcal{N}; r - v(\mathcal{N})(t-t') t')] dt'$$
(10)

und t_1 wie in (7).

Mit geeigneten Annahmen über die Abhängigkeit der Koeffizienten $\alpha(\mathcal{N})$ und $\beta(\mathcal{N})$ von der Windstärke läßt sich aus (10) die Entwicklung des Spektrums für ein beliebiges Windfeld berechnen. Um einige prinzipielle Eigenschaften der Lösungen hervorzuheben, beschränken wir uns im folgenden jedoch auf den Fall $\alpha(\mathcal{N}), \beta(\mathcal{N})$ unabhängig von r, t . (10) wird dann:

$$F(\mathcal{N}; r, t) = \frac{\alpha(\mathcal{N})}{4v_t k^2 - \beta(\mathcal{N})} (1 - e^{(\beta(\mathcal{N}) - 4v_t k^2)(t-t_1)}) + F(\mathcal{N}; r - (t-t_1) v(\mathcal{N}), t_1) \quad (11)$$

Wir betrachten nun zwei spezielle Anfangs- und Randwertprobleme:

Fall 1: Das Gebiet \mathcal{G} ist unendlich; es ist $F_0(\mathcal{N}, r) \equiv 0$. Dies entspricht dem Fall eines plötzlich aufkommenden Windes über einem anfangs ruhigen Meer. Hier ist $t_1 = t_0$. Setzen wir $t_0 = 0$, so wird (11):

$$F(\mathcal{N}; r, t) = F_d(\mathcal{N}; t) = \frac{\alpha(\mathcal{N})}{4v_t k^2 - \beta(\mathcal{N})} (1 - e^{(\beta(\mathcal{N}) - 4v_t k^2)t}) \quad (12)$$

Für $\beta(\mathcal{N}) < 4v_t k^2$ geht die Lösung für $t \rightarrow \infty$ in die stationäre Lösung (9) über. Gewöhnlich werden sich jedoch bereits vorher nichtlineare Effekte bemerkbar machen. Für $\beta(\mathcal{N}) > 4v_t k^2$ nimmt das Spektrum exponentiell zu, und für $\beta(\mathcal{N}) = 4v_t k^2$ erhält man die linear anwachsende Lösung

$$F_d(\mathcal{N}, t) = \alpha(\mathcal{N}) t \quad (13)$$

Fall 2: Das Gebiet \mathcal{G} wird durch zwei zur y -Achse parallele Geraden begrenzt, die sich mit der Geschwindigkeit U_r in x -Richtung fortbewegen (Bild 1). Innerhalb \mathcal{G} ist die Windgeschwindigkeit $U = \text{const}$; außerhalb \mathcal{G} ist $U = 0$, d. h. es ist $F_1(\mathcal{N}; r, t) \equiv 0$.

Wird $t_0 = -\infty$ gesetzt, so erhält man dann in einem mit \mathcal{G} mitbewegten Bezugssystem ein stationäres Problem. Führen wir in diesem System Koordinaten x_1 und x_2 gemäß Bild 1 ein, so wird (11):

$$F(\mathcal{N}; r, t) = F_f(\mathcal{N}; x_i) = \begin{cases} F_d \left(\mathcal{N}; \frac{x_1}{v_x} - U_r \right) & \text{für } v_x(\mathcal{N}) > U_r \\ F_d \left(\mathcal{N}; \frac{x_2}{U_r} - v_x \right) & \text{für } v_x(\mathcal{N}) < U_r \end{cases} \quad (14)$$

wo F_d durch (12) gegeben ist.

Das Spektrum F_f für das beschränkte, sich mit der Geschwindigkeit U_r bewegende Windfeld läßt sich somit auf das Spektrum F_d für das unendliche, zur Zeit $t = 0$ plötzlich aufkommende Windfeld zurückzuführen. Dies gilt allgemein für ein konstantes Windfeld mit sich beliebig verändernder

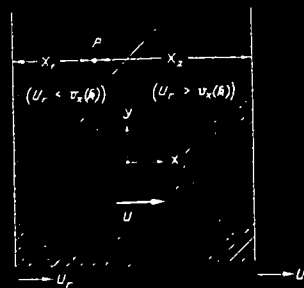


Bild 1 Begrenztes Windfeld mit Wanderungsgeschwindigkeit U_r und Windgeschwindigkeit U

Umrandung \mathcal{N} . Die „Duration“ t in F_{ij} wird lediglich durch die Laufzeit τ (in unserem Spezialfall (14) also

$$v_x(\mathcal{N}) - U_r \quad \text{bzw.} \quad U_r - v_x(\mathcal{N})$$

ersetzt, die von der Wellengruppe der Wellenzahl \mathcal{N} benötigt wird, um vom Rand des Sturmgebiets ihren „Fetch“ x_1 bzw. x_2 bis zum betrachteten Punkt zu durchlaufen. Diese Zeit ist für jede Wellengruppe verschieden. Für $U_r > 0$ ist sie sogar für ein Spektralgebiet ($v_x(\mathcal{N}) > U_r$) von dem luvseitigen Fetch x_1 und für das andere Spektralgebiet ($v_x(\mathcal{N}) < U_r$) von dem leeseitigen Fetch x_2 abhängig. Für Wellenzahlen \mathcal{N} mit $v_x(\mathcal{N}) = U_r$ wird die Laufzeit τ unendlich. Das Spektrum wird dort also (in der linearen Näherung) unendlich bzw., falls (9) zutrifft, ein hohes Maximum haben. Wir bezeichnen diese Erscheinung als Gruppenresonanz, im Gegensatz zur Phasenresonanz, die bei der Anfachung der Wellen durch die turbulenten Druckschwankungen über der Wasseroberfläche eine entscheidende Rolle spielt.

Es ist aufschlußreich, das Zusammenwirken der Gruppen- und Phasenresonanz näher zu untersuchen. Wir beschränken uns dabei der Einfachheit halber auf den Fall eines linear zunehmenden Spektrums $F_{ij}(\mathcal{N}, t)$ nach (13). Zunächst fassen wir die Ergebnisse Phillips [6], die wir hier an Hand des Spektrums $P(\mathcal{N}, \omega)$ etwas anschaulicher formulieren können, nochmals kurz zusammen. Die Zunahme des Spektrums $F(\mathcal{N})$ ist der Spektraldichte der Druckschwankungen an der Resonanzstelle ($\mathcal{N}, -\omega_k$) proportional. An dieser Stelle haben die Fourierkomponenten $A(\mathcal{N}, \omega) \exp[i(\mathcal{N}t + i\omega t)]$ des Drucks die gleiche Phasengeschwindigkeit wie die Oberflächenwellen gleicher Wellenzahl. Durch diese Resonanzregung wird von den Druckwellen ständig Energie auf die Oberflächenwellen übertragen. Von den verstimmtten Druckwellen mit Frequenzen $\omega \neq \pm \omega_k$ werden dagegen nur sehr kleine Oberflächenwellen konstanter Amplitude erzeugt. In einem natürlichen Windfeld entfällt nun der größte Teil der turbulenten Druckenergie auf Wellen, deren Phasengeschwindigkeit in Windrichtung nur wenig von der Windgeschwindigkeit U abweicht, d. h., die Wellen sind in einem sich mit der Windgeschwindigkeit bewegenden Bezugssystem praktisch stehend. Im dreidimensionalen \mathcal{N}, ω -Raum wird die Spektraldichte $P(\mathcal{N}, \omega)$ also auf die Umgebung der Ebene $\omega = -Uk_x$ konzentriert sein. (U parallel zur x -Achse).

Beschränken wir uns zur Veranschaulichung der wesentlichen Zusammenhänge auf den Schnitt dieser Ebene mit der Ebene $k_y = 0$ (betrachten wir also nur Wellen, die sich in Windrichtung fortpflanzen), so liegt die maximale Dichte von $P(\mathcal{N}, \omega)$ auf der Geraden $\omega = -Uk_x$, $k_y = 0$ (bzw. das Maximum von $P(k, -\omega)$ auf der Geraden $\omega = Uk_x$, $k_y = 0$, Bild 2³⁾). Zur Erregung der Oberflächenwellen trägt nun ledig-

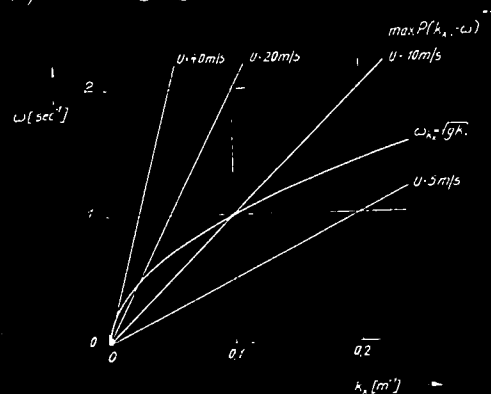


Bild 2 Geraden maximaler Spektraldichte $P(k_x, -\omega)$ der Druckschwankungen bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten U

lich die Spektraldichte $P(k_x, -\omega_{k_x})$ längs der Eigenfrequenzkurve $\omega_{k_x} = \sqrt{gk_x}$ bei. Die Wellenerregung wird also dort am stärksten sein, wo die Eigenfrequenzen die Gerade der größten Spektraldichte schneidet, z. B. für $U = 10$ m/s bei $k = 0.1 \text{ m}^{-1}$, $\omega = 1 \text{ sec}^{-1}$ (Bild 2). Nach (5), (13) wird das Spektrum $F_{ij}(k_x, t)$, also vermutlich in der Nähe dieser Wellenzahl $(k_x)_m$ ein Maximum aufweisen und in Richtung größerer und kleinerer k_x monoton abfallen. Der qualitative Verlauf von $F_{ij}(k_x, t)$ (zu einer beliebig festgelegten Bezugszeit T) für $U = 10$ m/s ist in Bild 3 wiedergegeben. Die Kurve ließe sich für wirkliche Voraussagungszwecke an Beobachtungen anpassen, für die jetzige Betrachtung ist der Verlauf im einzelnen jedoch unwesentlich. Aus dieser angenommenen Kurve F_{ij} sind nun nach (14) die Spektren $F_{ij}(k_x, x_i)$ für den Fall des begrenzten, mit konstanter Geschwindigkeit U_r wandernden Windfelds berechnet worden. Sämtliche Spektren sind auf den Fetch $UT/2$ bezogen. Dies entspricht einer Laufzeit T für die der maximalen Spektraldichte $(F_{ij})_m$ zugeordneten Wellengruppe $(k_x)_m$. Für $U_r = 0$ haben die Spektren F_{ij} und F_f ähnlichen Verlauf; es wird lediglich der kurzwellige Bereich von F_{ij} wegen der relativ längeren Laufzeit der kurzen Wellen stärker betont. Für $U_r = -U/2$ ist F_f im Hauptbereich des Spektrums nur etwa halb so groß wie F_{ij} , da die Laufzeit der Wellen bei $k_x = (k_x)_m$ um diesen Faktor verkürzt wird. In beiden Fällen wird die Laufzeit allein durch den luvseitigen Fetch x_1 begrenzt. Der Fall $U_r = U/2$ zeigt nun zum ersten Mal die Erscheinung der Gruppenresonanz. Für $k_x = (k_x)_m$ wird die Laufzeit und damit das Spektrum F_f unendlich. Die Anhebung des Spektrums macht sich auf beiden Seiten der singulären Stelle noch besonders bemerkbar, da die Stelle der Gruppenresonanz hier gerade mit der Phasenresonanz zusammenfällt. Im letzten Fall $U_r = U$ ist die Gruppenresonanzstelle ins langwellige Gebiet bei $k_x = (k_x)_m/4$ verschoben. Die Singularität beeinflusst dort nur ein relativ schmales Spektralgebiet, während sich das Spektrum im übrigen Gebiet nur unwesentlich von F_{ij} unterscheidet. Für noch größere U_r würde die Singularität noch weiter nach links und F_f im Hauptpektralgebiet unterhalb der Kurve F_{ij} liegen. In den Fällen $U_r > 0$ ist das Spektrum auf der linken Seite der singulären Stelle durch den luvseitigen Fetch x_1 und auf der rechten Seite durch den leeseitigen Fetch x_2 begrenzt. Bei der Anwendung der normierten Kurven in Bild 3 auf einen konkreten Fall werden die beiden Äste der Kurven daher mit — unter Umständen stark — verschiedenen Faktoren multipliziert. Im Fall $U_r > 0$ hat das Spektrum F_f somit im allgemeinen keine Ähnlichkeit mehr mit dem Spektrum F_{ij} .

3) An Stelle der Geraden würde sich bei genauerer Berücksichtigung der Grenzschichtseigenschaften der Luftströmung wahrscheinlich eine leicht nach unten gekrümmte Kurve ergeben.

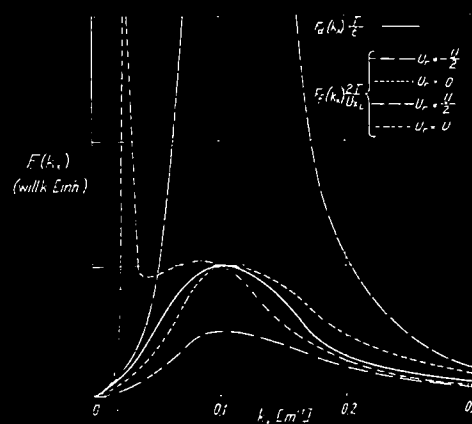


Bild 3 Seegangsspektren $F_{ij}(k_x, x_i)$ in einem begrenzten Windfeld mit Windgeschwindigkeit $U = 10$ m/s bei verschiedenen Wanderungsgeschwindigkeiten U_r (qualitativ).

5. Wellenbildung bei endlicher Wassertiefe

Die Betrachtungen der letzten Abschnitte lassen sich unmittelbar auf den Fall endlicher Wassertiefe übertragen. Die Beziehungen für Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit usw. müssen hierzu lediglich durch die entsprechenden Beziehungen bei endlicher Wassertiefe ersetzt werden. In den meisten der naheliegenden Anwendungsfälle der Wellenbildung in Küstennähe oder auf Binnengewässern ergibt die endliche Tiefe jedoch nur geringe Korrekturen, da die von der Tiefe abhängigen längeren Wellen die betreffenden Gewässer im allgemeinen so schnell durchlaufen, daß sie der veränderten Windeinwirkung, Dämpfung usw. nur kurzzeitig ausgesetzt sind. (Die unmittelbaren Einflüsse der veränderlichen Wassertiefe auf die Welleneigenschaften werden hier natürlich nicht betrachtet.) Eine Ausnahme bildet jedoch der Extremfall des Neusiedler Sees, der bei einer Oberfläche von einigen Hundert Quadratkilometern eine durchschnittliche Wassertiefe von nur ca. 1 m aufweist. Trotz seiner geringen Tiefe ist dieser See für seine außerordentlich starke, bereits bei geringen Windstärken entstehende Wellenbildung bekannt. An Hand unserer vorhergehenden Betrachtungen können wir diese nun sehr einfach erklären. Im wesentlichen läßt sich die Wellenbildung auf zwei Ursachen zurückführen:

1. Bis auf relativ kurze Wellen ist die Phasengeschwindigkeit für sämtliche Wellen allein durch die Wassertiefe h bestimmt: $c = \sqrt{gh}$. Die Eigenfrequenzkurve $\omega_{k_x} = \sqrt{gk_x}$ in Bild 2 ist somit durch die Gerade $\omega_{k_x} = k_x \sqrt{gh}$ zu ersetzen. Bei einer Windgeschwindigkeit $U = c$ fällt nun diese Eigenfrequenzkurve gerade mit der Geraden der maximalen Spektralichte der Druckschwankungen zusammen. Im Gegensatz zu den Meereswellen, bei denen stets nur ein schmaler Spektralbereich der Druckschwankungen zur Wellenanfachung beiträgt, werden in diesem Fall Oberflächenwellen von dem gesamten Wellenlängenbereich des Druckspektrums angeregt. Bei einer mittleren Seetiefe von 1 m tritt diese Resonanz bereits bei der sehr kleinen Windgeschwindigkeit von 3,1 m/s auf.

2. Wegen der kleinen Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist die Laufzeit $\tau(N)$ für sämtliche Wellen sehr groß. Während auf anderen Binnenseen vergleichbarer Größe die Ausbildung der energiereichen, langwelligen Komponenten wegen ihrer relativ großen Gruppengeschwindigkeit und des begrenzten Fetches stark unterdrückt wird, erreichen die Gruppengeschwindigkeiten sämtlicher Wellen in diesem Fall höchstens die kritische Geschwindigkeit $c = \sqrt{gh}$.

Zusammenfassung

Aus der Untersuchung der Energiegleichung für das Seegangsspektrum hat sich folgendes Bild der Seegangsentstehung ergeben:

1. Das Spektrum $F(N)$ am Ort r zur Zeit t wird durch ein Wegintegral über die Summe der lokalen Einwirkungen $L(N; r, t)$ bestimmt. Das Integral wird ausgeführt über den Weg $r' = r - (t - t')v(N)$, den eine Wellengruppe der Wellenzahl N , die am Ort r zur Zeit t eintrifft, von einem Anfangspunkt $r_1 = r - (t - t_1)v(N)$ aus zurücklegt. Der Anfangswert des Spektrums am Ort r_1 zur Zeit t_1 wird als bekannt vorausgesetzt. Als Anfangswert (gewöhnlich $F_1 = 0$) kann entweder ein Wert auf dem Rand N oder ein zur Anfangszeit t_0 bekannter Spektralwert im Innern des betrachteten Seegebiets (S) in Frage kommen. Das Spektrum ist im ersten Fall durch den Fetch, im zweiten Fall durch die Duration bestimmt. Diese Zusammenhänge verstehen sich fast von selbst auf Grund der Fortpflanzungseigenschaften von Wellen-

gruppen. Dennoch seien sie hier nochmals betont, da sämtliche bisher vorgeschlagenen empirischen Voraussagungsformeln, soweit sie den Einfluß des Fetches und der Duration berücksichtigen, hiermit in Widerspruch stehen.

2. Die Ausführung der Integration dürfte im allgemeinen Fall wegen des komplizierten Terms N_2 , der den Einfluß der nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Spektralkomponenten wiedergibt, nur mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen möglich sein. Hierzu fehlt ferner noch eine Abschätzung des den Einfluß der Wellenbrechung darstellenden nichtlinearen Terms N_1 . Für die Entwicklungsphase des Seegangs, in der die nichtlinearen Terme des Spektrums vernachlässigbar sind, läßt sich die Energiegleichung jedoch durch Quadratur lösen. Der Fall eines konstanten Windfeldes mit variabler Berandung kann auf den Fall eines zur Zeit $t = 0$ plötzlich entstehenden, unendlich ausgedehnten, konstanten Windfeldes zurückgeführt werden. Die Spektren für den ersten Fall sind im allgemeinen stark von der Wanderungsgeschwindigkeit des Gebiets abhängig. Bewegt sich das Windfeld in Windrichtung, so werden die Wellen, deren Gruppengeschwindigkeit mit der Wanderungsgeschwindigkeit des Windfeldes zusammenfällt, und die sich somit sehr lange im Windfeld aufhalten, besonders stark ausgeprägt (Gruppenresonanz). Die lokale Anfachung durch Windkräfte ist dagegen vorwiegend auf Wellen beschränkt, deren Phasengeschwindigkeit mit der Windgeschwindigkeit zusammenfällt und die somit einer Phasenresonanzbedingung genügen. Fällt die Gruppenresonanzstelle gerade mit der Phasenresonanzstelle zusammen, d. h., ist die Wanderungsgeschwindigkeit eines Windgebietes gerade halb so groß wie die Windgeschwindigkeit selber, so wird sich selbst bei relativ kleiner Ausdehnung des Windgebietes eine sehr starke Windsee ausbilden.

3. Obwohl die Integration der Energiegleichung nur für einige charakteristische Beispiele durchgeführt wurde, läßt sich die Entwicklungsphase des Seegangs im Prinzip für jedes beliebige, als Funktion des Orts und der Zeit vorliegende Windfeld ermitteln. Hierzu müßte allerdings die Abhängigkeit der Koeffizienten $\alpha(N)$, $\beta(N)$ und v_t — die letzten beiden sind in der Entwicklungsphase jedoch voraussichtlich vernachlässigbar — von den Windverhältnissen durch Messung der turbulenten Druckschwankungen oder durch Vergleich von berechneten und gemessenen Seegangsspektren näher ermittel werden.

(Eingegangen am 28. Oktober 1960)

Schrifttum

- [1] Darbyshire, J., 1955: An investigation of storm waves in the North Atlantic Ocean. Proc. Roy. Soc. A, 230, 560.
- [2] Darbyshire, J., 1956: An investigation into the generation of waves when the fetch of the wind is less than 100 miles. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., Ldn. 82, no. 354, 461—468.
- [3] Miles, J. W., 1957: On the generation of surface waves by shear flows. J. Fluid Mech. 3, 185—204.
- [4] Neumann, G., 1953: On ocean wave spectra and a new method for forecasting wind generated sea. U.S. Beach Erosion Bd., Techn. Mem. No. 43, Dec. 42pp.
- [5] Pierson, W. J., Neumann, G., und James, R. W., 1955: Practical methods for observing and forecasting ocean waves by means of wave spectra and statistics. U.S. Navy Dept., Hydrogr. Off. Pub. no. 603, Wash.
- [6] Phillips, O. M., 1957: On the generation of waves by turbulent wind. J. Fluid Mech. 2, 417—445.
- [7] Phillips, O. M., 1960: On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions. J. Fluid Mech. 9, Part 2, 193—217.
- [8] Taylor, G. I., 1953: An experimental study of standing waves. Proc. Roy. Soc. A, 218, 44.