

Geometrische Optica

Braat, J.J.M.; Adam, A.J.L.

DOI

[10.59490/mt.240](https://doi.org/10.59490/mt.240)

Publication date

2025

Document Version

Final published version

Citation (APA)

Braat, J. J. M., & Adam, A. J. L. (2025). *Geometrische Optica*. TU Delft OPEN Publishing.
<https://doi.org/10.59490/mt.240>

Important note

To cite this publication, please use the final published version (if applicable).
Please check the document version above.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download, forward or distribute the text or part of it, without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license such as Creative Commons.

Takedown policy

Please contact us and provide details if you believe this document breaches copyrights.
We will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Geometrische Optica

Joseph Braat, Aurèle J.L. Adam



GEOMETRISCHE OPTICA

Joseph Braat / Aurèle Adam
Delft University of Technology

Geometrische Optica

Originele versie: januari 1989

Herziene versie: september 2006

Digitale versie: maart 2025

Colophon

Geometrische optica

Authors:

Joseph Braat¹, Aurèle Adam²

¹ TUDelft, Applied Sciences, Imaging Physics, Optics Cluster, joseph.braat@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0006-8236-9881>

² TUDelft, Applied Sciences, Imaging Physics, Optics Cluster, a.j.l.adam@tudelft.nl, <https://orcid.org/0000-0002-6727-946X>

Keywords:

geometrical optics, imaging aberrations, imaging systems, ray-tracing, gradient-index optics

Published by:

TU Delft OPEN Publishing | Delft University of Technology, The Netherlands

DOI: <https://doi.org/10.59490/mt.240>

ISBN (softback/paperback): 978-94-6384-878-7

ISBN (E-book): 978-94-6518-195-0

Copyright statement:



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) licence

© 2025 published by TU Delft OPEN Publishing on behalf of the authors

Electronic version of this book is available at: <https://books.open.tudelft.nl>

Cover image: "Leeuwenhoek simple microscope (copy), Leyden, 1901-1930" by Wellcome Trust is licensed under CC BY 4.0, via Wikimedia Commons

Disclaimer: Every attempt has been made to ensure the correct source of images and other potentially copyrighted material was ascertained, and that all materials included in this book have been attributed and used according to their license. If you believe that a portion of the material infringes someone else's copyright, please contact a.j.l.adam@tudelft.nl

Inhoudsopgave

Inleiding	iii
I Grondslagen van de geometrische optica	1
I.1 Vergelijkingen van Maxwell	1
I.2 De lichtstraal	3
I.3 Voortplanting van lichtstralen	5
I.4 Breking en reflectie van lichtstralen	7
I.5 Principe van Fermat (1657)	8
II Karakteristieke functies van een stelsel	11
II.1 Algemeen	11
II.2 Berekening van de karakteristieke functies	15
II.3 De eikonale functie van een brekend sferisch oppervlak	15
II.4 De paraxiale vorm van de eikonale functie	18
II.5 Bijzondere geconjugeerde punten van een oppervlak	20
II.6 De eikonale functie van een stelsel	21
III Stralenbundels in een optisch stelsel	27
III.1 Beschrijving van stralenbundels, gereduceerde coördinaten	27
III.2 De aberratiefunctie in gereduceerde coördinaten	30
III.3 Mogelijke definities van golffrontaberratie	32
IV Straaldoorrekening	37
IV.1 Breking/reflectie aan een sferisch oppervlak	38
IV.1.1 Meridionale stralen	38
IV.1.2 Scheve stralen	39
IV.2 Breking/reflectie aan een asferisch oppervlak	41
IV.3 Buiging aan periodieke structuren	43
IV.3.1 Uitdrukking voor een afgebogen straal	43
IV.3.2 Buiging aan een holografisch optisch element (HOE)	45
IV.3.3 Buiging aan een tralie	46
IV.4 Straalberekening in 'gradient-index' media	47
IV.4.1 Voorbeelden van indexprofielen	47
IV.4.2 Paraxiale straalberekening in niet-homogene media	48
IV.4.3 Berekening van het verloop van eindige stralen	51
IV.5 Een invariante eigenschap van eindige stralen	52
IV.5.1 Medium met bolsymmetrie	52
IV.5.2 Medium met cilindersymmetrie	52
V Seidel aberraties	55

V.1	Inleiding	55
V.2	Het aantal aberraties.	56
V.3	Karakter van de Seideltermen	58
V.4	De vorm van de Seidelaberraties	61
V.5	Berekening van de grootte van de Seidelaberraties	68
V.6	Uitdrukkingen voor de Seidelcoëfficiënten	70
VI	Aberraties van een optisch stelsel	73
VI.1	De Seidel-aberraties van een enkel oppervlak	73
VI.2	Beschrijving van de aberratie van een scheve bundel.	77
VI.3	Invloed diafragma-positie op aberraties	79
VI.4	De aberraties van een stelsel	82
VI.5	Algemene voorwaarde voor isoplanatisme	83
VI.6	Interpretatie van de isoplanatisme voorwaarde	85
VI.7	De Seidelaberraties van dunne lenzen	87
VI.8	De Seidelaberraties van een planparallele plaat	89
VI.9	Kleurfouten	90
VI.10	Golffrontuitdrukking voor de kleureffecten	91
VI.11	(D-d) formule van Conrady (eindige stralen)	93
VI.12	Correctie van kleurfouten	94
VII	Kwaliteitscriteria optische systemen	97
VII.1	De impulsrespons	97
VII.2	De frequentierespons	101
Appendices		
A	Paraxiale Optica	107
A.1	Paraxiale eigenschappen van een optisch stelsel	107
A.2	Paraxiale optica en het matrixformalisme	109
A.2.1	Tekenafspraken	109
A.2.2	De systeemmatrix en de afbeeldingsvergelijking	110
A.2.3	De systeemmatrix voor specifieke referentievlakken	113
A.2.4	Gekanteld voorwerps- en beeldvlak	114
A.2.5	Telescopisch systeem	114
A.2.6	De deelsterkte van een element in een optisch systeem	115
A.2.7	De optische projectie-afstand	117
A.3	Formules paraxiale optica	117
A.3.1	Systeemmatrix en afbeeldingsvergelijking	117
A.3.2	Vergrotingsfactoren β' , γ' , δ' en optische projectie-afstand L	118
A.4	De begrenzing van stralenbundels	120
A.4.1	Het diafragma	120
A.4.2	Scheve bundels	120
A.4.3	Speciale posities van het diafragma	122
A.5	Chromatische effecten van optisch glazen	124
B	Opgaven Geometrische Optica	126
Literatuur		131
Nawoord		133

Inleiding

De geometrische optica beschrijft de voortplanting van lichtenergie op nogal schematiserende wijze met behulp van het aloude begrip lichtstraal. De rechte lijnige voortplanting van deze lichtstralen in een homogeen medium werd al in de oudheid verondersteld. In de zeventiende eeuw werd de geometrische optica verder experimenteel onderbouwd door de bevindingen van Snellius over de breking van lichtstralen aan grensvlakken; dit resulteerde in zijn bekende brekingswet. Korte tijd later postuleerde Fermat zijn beginsel volgens hetwelk de richting van de lichtstralen zodanig is dat de optische weglengte tussen twee punten minimaal (een extremum) is. Met behulp van dit grondbeginsel kon Fermat na enige tijd ook de brekingswet afleiden.

Na deze ontwikkelingen waren de fysische fundamenteën voor het vakgebied 'geometrische optica' volledig gelegd. Latere ontwikkelingen in de experimentele natuurkunde hebben er toe geleid dat men inzag dat de geometrische optica slechts op gebrekkige wijze de werkelijkheid beschrijft. Het tegen het einde van de zeventiende eeuw geponeerde beginsel van Huygens suggereerde reeds de buigingsverschijnselen bij lichtvoortplanting. Interferentieverschijnselen werden ontdekt door Young. In het begin van de negentiende eeuw werden deze verschijnselen evenals de buiging van licht door Fresnel verklaard aan de hand van zijn golftheorie. Er volgde ook uit dat de lichtverdeling in het focus van een ideale lens niet oneindig *klein* is, maar een eindige uitgebreidheid bezit (Airy-schijfje). Het bleek dat de geometrische optica slechts in het limietgeval, waarbij de golflengte van de beschouwde straling naar nul nadert, correcte uitkomsten levert. In dit geval is het inderdaad mogelijk het lichtstraal-concept en het principe van Fermat uit de vergelijkingen van Maxwell voor de elektrische en magnetische veldsterkte af te leiden ($\lambda \rightarrow 0$; $k \rightarrow \infty$).

Men kan zich de vraag stellen waarom een zo benaderend model nog gebruikt wordt. De in de praktijk gehanteerde optische systemen (afbeeldingssystemen met lenzen of spiegels, hologrammen, inhomogene media etc.) zijn echter zo complex dat een rigoureuze oplossing van de Maxwell-vergelijkingen met inachtneming van de correcte randvoorwaarden tot de praktische onmogelijkheden lijkt te horen. Het is evenwel toch mogelijk de berekende resultaten volgens de geometrische optica fysisch wat reëler te maken door een tweetraps-operatie uit te voeren; in het laatste stadium van de berekeningen wordt de buiging van het licht aan de begrenzende opening (pupil) van het optische stelsel alsnog in rekening gebracht nadat eerst via de geometrische optica de optische weglengten van de bron naar de pupil berekend zijn. De randvoorwaarden voor de elektromagnetische veldcomponenten worden dan meestal benaderd (Kirchhoff). Op deze manier kan de invloed van afbeeldingsfouten op de 'buigingsfiguur' van het optische instrument in rekening gebracht worden. Ook kan men op deze manier de frequentie-overdrachtsfunctie van een optisch stelsel nauwkeurig berekenen. Voorwaarde voor een succesvolle toepassing van deze gestapte wijze van werken is dat de buigende openingen (begrenzings) in het systeem vele golflengten groot zijn (bijv. minstens 100λ). Voor kleinere structuren zoals microlenzen, fibers, dunne-laag golfgeleiders enz. wordt deze benaderende werkwijze ongeschikt.

Dankzij de besproken vereenvoudigingen is het mogelijk met behulp van de geometrische optica gecompliceerde optische systemen snel te analyseren en dit niet alleen naar basisgrootheden zoals vergroting, brandpuntsafstand, beeldligging enz., maar ook naar afbeeldingsfouten of aberraties. Deze laatste kunnen benaderd worden met reeksontwikkelingen naar straal- en beeldveldcoördinaten. Daarnaast kunnen, via numerieke straaldoorrekening, de snijpunten met

oppervlakken en de afgelegde optische weg rigoureuus berekend worden in een langzamerhand verwaarloosbare tijd. De steeds toenemende snelheid van computers heeft het optimaliseren van optische stelsels mogelijk gemaakt met behulp van algoritmen die bijv. een bepaalde foutenfunctie zo klein mogelijk maken. In de eerste fase van het ontwerp van een optisch systeem spelen de uit de aberratietheorie verkregen inzichten een belangrijke rol. In de eindfase krijgt het (min of meer) automatisch optimaliseren de overhand.

De inhoud van het boek is bedoeld om de lezer een degelijke theoretische achtergrond te geven in het vakgebied van de geometrische optica. Met deze kennis zal het in de praktijk werken met optische ontwerp-software vergemakkelijkt worden. Mogelijke principiële grenzen bij de beeldvorming door een optisch systeem zullen eerder onderkend worden. Ook het interpreteren van de handleiding van een optische ontwerpprogramma zal vergemakkelijkt worden. Conflicterende eisen bij bijv. een optimalisatiestap voor een optisch systeem kunnen vermeden worden met de basiskennis uit dit boek.

Kort samengevat zijn de behandelde onderwerpen per hoofdstuk in dit boek als volgt. In Hoofdstuk I worden de grondslagen van de geometrische optica afgeleid uit de elektromagnetische theorie van Maxwell. Centraal in dit hoofdstuk staat de vector van Poynting die in de geometrische optica aanleiding geeft tot de lichtstraal. De straalvergelijking wordt afgeleid om de voortplanting van een lichtstraal te beschrijven, niet alleen in een homogeen medium maar ook bij abrupte overgangen tussen twee media (wet van Snellius) of in een inhomogeen medium ('gradiënt-index' medium) waarin gekromde lichtbanen ontstaan. Ook Fermat's principe van de 'kortste werking' wordt behandeld.

Hoofdstuk II behandelt de karakteristieke functies van Hamilton die door hem ontworpen zijn om de optische weglengte langs een willekeurige straal in een optisch systeem te verkrijgen als functie van de ingangs- en uitgangs-coördinaten of richtingscosinussen. Deze functies (de punt-karakteristieke en de hoek-karakteristieke functie) zijn zeer krachtige hulpmiddelen om een verband te leggen tussen een intredende en uitredende bundel van stralen na doorgang door het optische systeem. Een praktisch probleem is dat een analytische oplossing voor de 'mapping' van ingangs- en uitgangsstralen niet rechtstreeks beschikbaar is. We beschrijven in dit hoofdstuk de Hamiltoniaanse functie van een enkel brekend oppervlak en leiden daaruit benaderende uitdrukkingen af voor die van een volledig optisch systeem. Daarnaast gebruiken we ook de kwadratische benadering van de zogenaamde *eikonale* functie van Hamilton om de basiseigenschappen van de paraxiale afbeelding te bestuderen.

De Hoofdstukken III en IV behandelen stralenbundels en de berekening van hun golffrontaberratie. Uit de golffrontaberratie volgen door differentiatie rechtstreeks de twee dwarsaberratiecomponenten in de x - en y -richting in het beeldvlak. Voor een precieze kennis van de golffront- of dwarsaberratie van een optisch systeem maken we gebruik van de zogenaamde 'strenge' straal-doorrekening van individuele stralen van een bundel. Hierbij wordt de optische weglengte door het optische systeem via de breking, reflectie of diffractie aan elk oppervlak berekend en komt de vorm van het golffront in de beeldruimte beschikbaar. Enige subtiele verschillen in de definitie van de golffrontaberratie worden besproken. Een eventuele representatie van de aberratie als functie van straalhoek en straalpositie gebeurt met behulp van machtreeks- of polynoomontwikkelingen van de aberraties van een welgekozen verzameling stralen per bundel.

In de Hoofdstukken V en VI berekenen we voor een optisch systeem de afwijkingen van de elementaire paraxiale eigenschappen, bijv. bij grotere invalshoeken op de optische oppervlakken of grotere openingshoeken van stralenbundels. We classificeren de diverse soorten aberraties die voor kunnen komen in algemene optische systemen of, meer specifiek voor de praktijk, in optische systemen met rotatiesymmetrie. De grootte van de zogenaamde Seidelaberraties wordt berekend als functie van de stralengang door een sferisch of asferisch oppervlak en worden dan gesommeerd over het hele optische systeem. Buiten het geldigheidsgebied van de Seidelaberraties berekenen we ook meer algemene condities tussen specifieke stralen in voorwerpsruimte en beeldruimte, zodat aberraties afwezig zullen zijn bij grotere tot zeer grote straalhoeken met

de optische as. Dit zijn de belangrijke *isoplanatische* voorwaarden waaraan hoog-kwalitatieve afbeeldingsinstrumenten in ieder geval moeten voldoen. In hoofdstuk VI behandelen we ook kort de chromatische fouten van een lens of een lenzenstelsel ten gevolge van de dispersie van de gebruikte glasmaterialen.

Hoofdstuk VII geeft een korte beschrijving van de effecten van de buiging van lichtstralen aan de bundelbegrenzende randen en overgangen in een optisch systeem. Voor een cirkelvormige begrenzing leiden we de buigingsfiguur af, ook wel het 'buigingsschijfje van Airy' genoemd van een perfect optisch systeem. Als functie van een kleine golffrontaberratie (klein ten opzichte van de golflengte λ van het licht) in een optisch systeem vinden we de afwijkingen in het beeldvlak ten opzichte van het buigingsschijfje van Airy. We analyseren ook kort de frequentie-respons van een optisch systeem, een onderwerp uit de Fourieroptica. Dit gebeurt zowel voor kleine golffrontaberraties in de uitreepupil van een systeem als voor relatief grote dwarsaberraties van lichtstralen in het beeldvlak.

De optische eigenschappen van stralen in de nabijheid van de optisch as (paraxiale optica) is reeds behandeld in Hoofdstuk II toen de eikonale functie van Hamilton tot en met de tweede orde benaderd werd. In Appendix A vindt een hernieuwde kennismaking plaats met de paraxiale optica van een enkel oppervlak en van een optisch stelsel. In het laatste geval focuseren we ons op de *matrix*-notatie voor de breking/reflectie en propagatie van optische stralen door een optisch systeem. Deze aanpak geeft overzichtelijk de eigenschappen weer van optische stelsels en hun afbeeldingseigenschappen zoals dwarsvergroting, hoekvergroting, langsvergroting en de optische projectie-afstand van een systeem. Daarnaast wordt in Appendix A ook de stralengang van axiale en scheve stralenbundels behandeld aan de hand van de positie van het diafragma in een optisch systeem. Ook worden kort de kleurafhankelijke eigenschappen van optische glazen behandeld. Tenslotte vindt de lezer in Appendix B een aantal opgaven waarbij het behandelde materiaal in dit boek toegepast wordt op meer praktische situaties.

Hoofdstuk I

Grondslagen van de geometrische optica

In dit hoofdstuk leiden we uit de vergelijkingen van Maxwell voor de grootheden, die het elektromagnetisch veld bepalen, de basiseigenschappen van lichtstralen en golffronten af. Ook het principe van Fermat voor lichtstralen kan afgeleid worden uit de benaderde oplossing (volgens de geometrische optica) van de Maxwell-vergelijkingen die hieronder volgt. Hierdoor is de geometrische optica nu als een uitvloeisel van de veel breder toepasbare electromagnetische veldtheorie te beschouwen.

I.1 Vergelijkingen van Maxwell

De vergelijkingen van Maxwell voor de elektrische en magnetische veldsterkten zijn bij afwezigheid van stromen en ruimteladingen,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = 0, \quad (1.4)$$

waarbij we gebruik gemaakt hebben van de materiaalvergelijkingen $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ en $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$. Uitgaande van oplossingen die harmonisch in de tijd zijn volgens

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{H}_h(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (1.6)$$

kunnen we de vergelijkingen opstellen waaraan de tijdsafhankelijke vectoren $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ moeten voldoen,

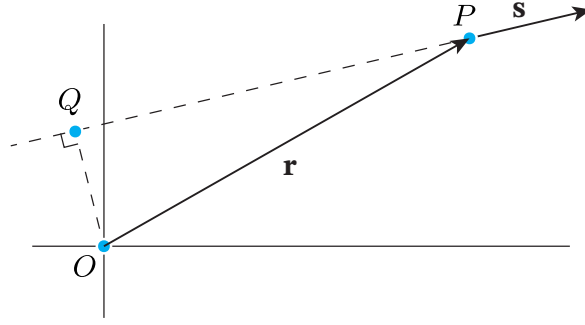
$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = +ick_0 \mu_0 \mu_r \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -ick_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.9)$$

$$\mu_0 \nabla \cdot \mu_r \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.10)$$

Hierbij hebben we de relatie $\omega = ck_0$ voor harmonische golven gebruikt en is $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ de golflengte in vacuüm. Voor optische frequenties mag de relatieve permeabiliteit μ_r gelijk aan 1 gesteld worden.



Figuur 1.1: Definitie van de optische weglengte $[QP]$, afgelegd door een lichtstraal \mathbf{s} , met het punt O als referentiepunt voor de meting.

Een bekende oplossing van het stelsel vergelijkingen (1.7) - (1.10) is de harmonische vlakke golf,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A} \exp \{ ik_0 n (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}) \} , \quad (1.11)$$

waarbij moet gelden dat $n^2 = \varepsilon_r$ terwijl het product $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})$ een scalaire functie voorstelt die gelijk is aan de loodrechte afstand QP van het punt $P(x, y, z)$ tot het vlak door de oorsprong O met als normaalvector $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$. De oppervlakken van "gelijke fase" zijn bij deze oplossing platte vlakken, zie Fig. (1.1).

Een andere mogelijke oplossing van de uit vgl. (1.7) - (1.10) af te leiden golfvergelijking is een sferische golf,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \frac{\exp \{ ik_0 n |\mathbf{r}| \}}{|\mathbf{r}|} , \quad (1.12)$$

waarbij $|\mathbf{r}|$ de afstand tot de oorsprong voorstelt waar de bron zich bevindt. De oppervlakken van gelijke fase zijn hier bolvormig met de bron als middelpunt. Bovenstaande oplossingen volgens (1.11) en (1.12) gelden voor een puntbron op oneindige resp. eindige afstand. Bij experimenten met optische systemen komt men de door deze geïdealiseerde bronnen geleverde fase-oppervlakken zelden tegen; er treden vervormingen op en deze kunnen we proberen te vangen in een meer algemene functie $S(\mathbf{r})$. De veronderstelde oplossing van de Maxwell-vergelijkingen krijgt nu de vorm,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}) \exp \{ ik_0 S(\mathbf{r}) \} , \quad (1.13)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}) \exp \{ ik_0 S(\mathbf{r}) \} . \quad (1.14)$$

Wanneer we oplossing (1.13) - (1.14) substitueren in vgl. (1.7) - (1.10) vinden we de volgende vergelijkingen voor de vectoren $\mathbf{e}(\mathbf{r})$, $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ en voor de scalaire functie $S(\mathbf{r})$,

$$\nabla S(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}(\mathbf{r}) - c\mu_0 \mathbf{h}(\mathbf{r}) = \frac{i}{k_0} \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}) , \quad (1.15)$$

$$\nabla S(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) + c\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{i}{k_0} \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) , \quad (1.16)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \nabla S(\mathbf{r}) = \frac{i}{k_0} \left[\nabla \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \varepsilon_r \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) \right] , \quad (1.17)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \nabla S(\mathbf{r}) = \frac{i}{k_0} \nabla \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r}) . \quad (1.18)$$

Deze nogal onhandelbare vergelijkingen vereenvoudigen sterk wanneer we de geometrisch-optische benadering invoeren; deze houdt in dat de golflengte λ naar nul nadert. De rechterleden van vgl.

(1.15) - (1.18) reduceren nu alle tot 0 . Een voorwaarde is natuurlijk dat termen zoals $\nabla \varepsilon_r \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r})$ in het rechterlid van (1.17) klein blijven en dit impliceert dat we verwijderd moeten blijven van bijv. elektrisch geleidende randen. Vermenigvuldigen we vgl. (1.16) vectorieel met $\nabla S(\mathbf{r})$ dan ontstaat, met behulp van vgl. (1.15), de uitdrukking

$$\{\nabla S(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r})\} \nabla S(\mathbf{r}) - |\nabla S(\mathbf{r})|^2 \mathbf{h}(\mathbf{r}) + c^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.19)$$

en met gebruikmaking van vgl. (1.18) wordt het eindresultaat

$$|\nabla S(\mathbf{r})|^2 = n^2, \quad (1.20)$$

waarbij we naar analogie met de vlakke golfoplossing $\varepsilon_r = n^2$ gesteld hebben.

De scalaire functie $S(\mathbf{r})$ draagt de naam *eikonale* functie en vgl. (1.20) wordt daarom de *eikonale* vergelijking genoemd. Een oppervlak in de ruimte, gegeven door de vergelijking

$$S(\mathbf{r}) = \text{constant}, \quad (1.21)$$

wordt een geometrisch golffront genoemd. De fase van een golf in een algemeen punt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ is gegeven door

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi S(\mathbf{r})}{\lambda_0}.$$

I.2 De lichtstraal

Met behulp van de eikonale vergelijking (1.20) is het in principe mogelijk overal in de ruimte golffronten (equifase-oppervlakken) te construeren wanneer de bron en het medium (optisch stelsel) gegeven zijn. Hoe de lichtenergie zich van het ene naar het andere golffront voortplant is uit de vorm van de golffronten niet direct af te leiden. In de geometrische optica is het begrip lichtstraal ingevoerd en men veronderstelt dat de lichtenergie zich langs een rechte lijn of ruimtekromme voortplant zonder enige dwarsuitbreiding (buiging). Teneinde de eigenschappen van lichtstralen te bepalen, kijken we hoe de elektromagnetische energie zich voortplant bij de harmonische golf gegeven door de vgl. (1.13) en (1.14).

De hoeveelheid elektromagnetische energie, getransporteerd per tijdseenheid door de eenheid van oppervlak wordt gegeven door de grootte en de richting van de vector van Poynting,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \}. \quad (1.22)$$

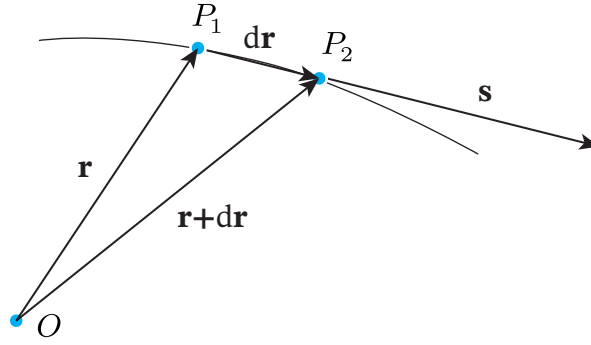
Invulling van de waarden voor $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ volgens (1.13) en (1.14) geeft

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \text{Re} \{ \mathbf{e}(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}^*(\mathbf{r}) \}.$$

Met behulp van vgl. (1.15) en (1.17) krijgen we in de limiet $\lambda \rightarrow 0$ voor de tijdsgemiddelde waarde van de Poynting vector de uitdrukking

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{c\mu_0} \text{Re} \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \times \nabla S(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}^*(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \langle |\mathbf{e}(\mathbf{r})|^2 \rangle \nabla S(\mathbf{r}) \\ &= \frac{2}{c\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left\{ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \langle |\mathbf{e}(\mathbf{r})|^2 \rangle}{2} \right\} \nabla S(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

De uitdrukking $\varepsilon_0 \varepsilon_r \langle |\mathbf{e}(\mathbf{r})|^2 \rangle / 2$ is gelijk aan $\langle w_E \rangle$, de tijdsgemiddelde elektrische energie per volume-eenheid. We maken nu gebruik van het feit dat in een niet absorberend medium de



Figuur 1.2: De raakvector \mathbf{dr} aan de gekromde straalbaan legt de straalrichting vast. Deling door ds , de baanlengte van P_1 naar P_2 , geeft de eenheidsvector \mathbf{s} voor de lichtstraal.

elektrische en magnetische energiedichtheden ten gevolge van de golf gelijk zijn. De totale elektromagnetische energiedichtheid $\langle w_{EM} \rangle$ is dan gelijk aan $2\langle w_E \rangle$. De tijdsgemiddelde Poynting vector volgens vgl. 1.23 kan dan, met gebruikmaking van $\varepsilon_r = n^2$ en $c^2\varepsilon_0\mu_0 = 1$, geschreven worden als

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{2}{c\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} \langle w_E \rangle \nabla S(\mathbf{r}) \\ &= \frac{c}{n} \langle w_{EM} \rangle \frac{\nabla S(\mathbf{r})}{n} \\ &= v \langle w_{EM} \rangle \frac{\nabla S(\mathbf{r})}{n}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Uitdrukking (1.24) geeft aan dat de tijdsgemiddelde energiestroom in grootte gegeven wordt door de voortplantingssnelheid $v = c/n$ in het beschouwde medium maal de tijdsgemiddelde energiedichtheid $\langle w_{EM} \rangle$ van het elektromagnetische veld behorend bij de golf. De richting van de energiestroom volgt uit de vector \mathbf{s} die gegeven wordt door

$$\mathbf{s} = \frac{\nabla S(\mathbf{r})}{n}, \quad (1.25)$$

en deze vector is een eenheidsvector volgens vgl. (1.20). Deze eenheidsvector \mathbf{s} wordt de lichtstraalvector genoemd en wordt gevonden door lokaal de eenheidsnormaal op een oppervlak $S(\mathbf{r}) = \text{constant}$ (een golffront) te construeren.

Voor het verschil in waarde van de eikonale functie op twee naburige golffronten geldt

$$dS = n ds,$$

waarbij ds gemeten is langs de normaalvectoren op de golffronten. Dit verschil kan geschreven worden als

$$\frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = n ds,$$

ofwel,

$$\nabla S \cdot d\mathbf{r} = n ds. \quad (1.26)$$

Uit figuur 1.2 kunnen we afleiden dat de straalvector \mathbf{s} gegeven wordt door $d\mathbf{r}/ds$ en dat dus moet gelden

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla S(\mathbf{r}), \quad (1.27)$$

waarbij $\mathbf{r} = (x, y, z)$ een algemeen punt op de straal is en ds een infinitesimaal kleine afstand langs de lichtstraal is. Voor de kentallen van de vector $n\mathbf{s}$ kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} ns_x &= n \frac{dx}{ds} = nL, \\ ns_y &= n \frac{dy}{ds} = nM, \\ ns_z &= n \frac{dz}{ds} = nN, \end{aligned} \quad (1.28)$$

waarbij L , M en N de richtingscosinussen van \mathbf{s} zijn. De met de brekingsindex vermenigvuldigde richtingscosinussen worden wel de *optische* richtingscosinussen genoemd en de vector $n\mathbf{s}$ de *optische* lichtstraalvector.

De integraal van de grootheid $n ds$ langs een straal is volgens vgl. (1.27) gegeven door

$$\int_{P_1}^{P_2} n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla S(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

ofwel,

$$[P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n ds = S(\mathbf{r}_{P_2}) - S(\mathbf{r}_{P_1}). \quad (1.29)$$

De grootheid $[P_1 P_2]$ in (1.29) wordt de *optische* weglengte genoemd, gemeten langs de rechte of eventueel gekromde lichtstraal, van een punt P_1 naar een punt P_2 op die lichtstraal.

I.3 Voortplanting van lichtstralen

Met behulp van vgl. (1.27) uit de vorige paragraaf kan de straalvector in een willekeurig punt berekend worden wanneer een uitdrukking voor de vorm van de golffronten voorhanden is. Nu is de vorm van de golffronten te verkrijgen met behulp van vgl. (1.29) en in deze uitdrukking treffen we alleen de (eventueel) plaatsafhankelijke brekingsindex aan. Het moet dus mogelijk zijn de straalvergelijking (1.27) te schrijven als een uitdrukking waarin de invloed van het medium alleen via de brekingsindex tot uiting komt. Door differentiëren van vgl. (1.27) naar de straallengte s vinden we

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \{ \nabla S(\mathbf{r}) \} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \{ \nabla S(\mathbf{r}) \}, \quad (1.30)$$

waarbij we voor d/ds de uitdrukking

$$\frac{d}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla$$

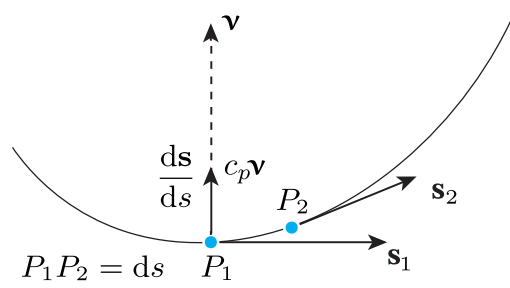
gebruikt hebben. Met behulp van vgl. (1.27) kunnen we voor het rechterlid van de straalvergelijking 1.30 nu schrijven

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \left\{ n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \nabla n + n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right).$$

De tweede term van het rechterlid levert nul op en de straalvergelijking wordt nu

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (1.31)$$

Voor de richtingsverandering van de straalvector in een medium waar n niet constant is kunnen we schrijven (zie figuur 1.3)



Figuur 1.3: Constructie van de baankrommingsvector $\frac{d\mathbf{s}}{ds}$, die loodrecht staat op de eenheidsvector \mathbf{s} van de lichtstraal.

$$\frac{d\mathbf{s}}{ds} = c_p \mathbf{v}. \quad (1.32)$$

De vector \mathbf{v} staat loodrecht op de straalvector \mathbf{s} ; \mathbf{v} is een eenheidsvector en c_p is de absolute waarde van de baankromming van de lichtstraal. Uit de straalvergelijking (1.31) volgt door uitschrijven,

$$\frac{dn}{ds} \frac{d\mathbf{r}}{ds} + n \frac{d\mathbf{s}}{ds} = \nabla n, \quad (1.33)$$

en deze uitdrukking levert voor $\frac{d\mathbf{s}}{ds}$ de waarde

$$\frac{d\mathbf{s}}{ds} = \frac{\nabla n}{n} - \frac{1}{n} \frac{dn}{ds} \mathbf{s}. \quad (1.34)$$

Scalaire vermenigvuldiging van (1.34) met de vector $c_p \mathbf{v}$ levert op dat

$$c_p = \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla n}{n}. \quad (1.35)$$

Uit vergelijking (1.35) kunnen we concluderen (aangezien geldt $c_p \geq 0$) dat de normaalvector \mathbf{v} wijst in de richting van de positieve gradiënt van de ruimtelijke brekingsindexverdeling omdat alleen in dat geval het scalaire product positief is. Dit betekent dus dat lichtstralen afbuigen naar het gebied met toenemende brekingsindex.

De differentiaalvergelijking (1.31) voor de lichtstraalvector maakt het mogelijk het pad van een lichtstraal door een algemeen medium met inhomogene brekingsindexverdeling te construeren. Slechts in een paar speciale gevallen van inhomogeniteit zijn analytische oplossingen van vgl. (1.31) gevonden. Voor een homogeen medium kunnen we echter snel concluderen

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0, \quad (1.36)$$

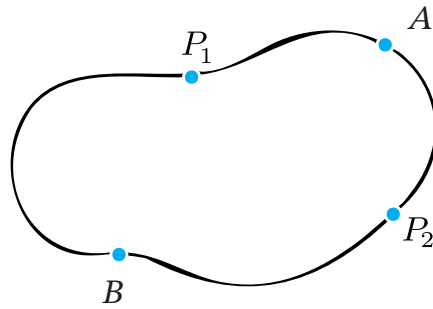
ofwel,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s} = \mathbf{a} = \text{constant}, \quad (1.37)$$

en,

$$\mathbf{r} = \mu \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (1.38)$$

Uitdrukking (1.37) zegt dat de straalvector een constante richting heeft en (1.38) dat de vectorvergelijking van de lichtstraal die van een rechte lijn is, parallel aan de vector \mathbf{a} en gaande door een punt $\mathbf{r} = \mathbf{b}$ dat volgt uit een beginvoorwaarde voor de stralengang.



Figuur 1.4: In een rotatievrij vectorveld zoals in een optisch stralenveld is het optische weglengteverschil tussen twee punten P_1 en P_2 onafhankelijk van de integratieweg via bijv. A of B (integraalinvariant van Lagrange).

I.4 Breking en reflectie van lichtstralen

In de voorgaande paragraaf zijn uitdrukkingen gevonden die de loop van de lichtstralen vastleggen in een al of niet homogeen maar continu medium.

Belangrijk in de praktijk is natuurlijk het verloop van de lichtstralen bij een discontinue overgang met een sprong in brekingsindex (lenzen, spiegels). Net zoals bij de berekening van de elektrische en magnetische veldvectoren in de buurt van een grensvlak via de Maxwell vergelijkingen, kunnen we voor de berekening van de breking van lichtstralen de stelling van Stokes gebruiken. Het stralenvectorveld wordt gegeven door vgl. (1.25) en hieruit volgt onmiddellijk de eigenschap dat

$$\nabla \times n\mathbf{s} = 0. \quad (1.39)$$

Toepassing van de stelling van Stokes op het vectorveld \mathbf{s} geeft de uitdrukking

$$\iint_A (\nabla \times n\mathbf{s}) \cdot \mathbf{v} \, dA = \oint_C n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (1.40)$$

waarbij \mathbf{v} in elk punt de normaalvector op het oppervlak A is en C de randcurve van A is. Uitdrukking (1.40) wordt ook wel de integraalinvariant van Lagrange genoemd.

In figuur 1.4 is een randcurve C getekend en toepassing van (1.40) geeft

$$\int_{P_1(\text{ via } A)}^{P_2} n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1(\text{ via } B)}^{P_2} n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r},$$

hetgeen bewijst dat de waarde van de integraal onafhankelijk is van de integratieweg. Deze integratieweg correspondeert in zijn algemeenheid niet met een lichtstraal.

Teneinde een gebroken straal te berekenen wordt op de bekende manier een rechthoek ($h \times l$) als randcurve genomen van een willekeurig oppervlak (zie fig. 1.5) en de integraalinvariant van Lagrange levert op ($h \rightarrow 0$)

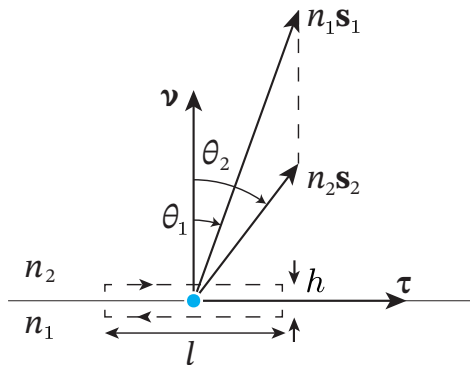
$$\{-n_1 \sin \theta_1 + n_2 \sin \theta_2\} l = 0,$$

ofwel,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (1.41)$$

In vectorvorm kunnen we ook schrijven

$$(n_1 \mathbf{s}_1 - n_2 \mathbf{s}_2) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (1.42)$$



Figuur 1.5: Gebruik van Lagrange's integraalinvariant bij het overgangsvlak tussen twee media met brekingsindices n_1 en n_2 om de brekings- of reflectiewet voor lichtstralen af te leiden.

waarbij $\boldsymbol{\tau}$ een vector in het raakvlak aan het oppervlak is; daarnaast kunnen we ook de onderstaande vectorvergelijking,

$$(n_1 \mathbf{s}_1 - n_2 \mathbf{s}_2) \times \mathbf{v} = 0, \quad (1.43)$$

gebruiken om de gebroken straal \mathbf{s}_2 te vinden.

De laatste vergelijking zegt dat de verschilvector van de optische straalvectoren in de twee media loodrecht op het grensvlak staat. Bovendien volgt uit vgl. (1.43) dat de vectoren $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{v}$ en $\mathbf{s}_2 \times \mathbf{v}$, die loodrecht staan op respectievelijk het invalsvlak en het 'uitvalsvlak', dezelfde richting hebben. Aangezien deze vlakken ook minstens één punt gemeen moeten hebben, moeten zij samenvallen. Deze laatste conclusie en vgl (1.41) vormen samen de brekingswet van Snellius.

Naast de gebroken straal zal er in het algemeen ook een gereflecteerde straal zijn; in dit geval is n_1 gelijk aan n_2 en vinden we

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2,$$

of ook,

$$\theta_2 = \pi - \theta_1.$$

Een andere conventie betreffende het teken van de straalhoek bij reflectie neemt als referentie voor de straalhoek de gespiegelde normaalvector en vgl. (1.43) luidt nu,

$$n_1 \mathbf{s}_1 \times \mathbf{v} = (-n_1) \mathbf{s}_2 \times (-\mathbf{v})$$

waarbij de brekingsindex van het medium voor de gereflecteerde straal nu de waarde $-n_1$ gekregen heeft. Voor de hoeken van de invallende en gereflecteerde straal geldt dan,

$$\sin \theta_1 = -\sin \theta_2,$$

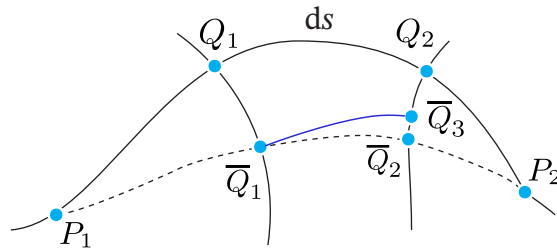
ofwel,

$$\theta_2 = -\theta_1,$$

waarbij θ_2 dus gerekend wordt ten opzichte van de vector $(-\mathbf{v})$.

I.5 Principe van Fermat (1657)

Het principe van Fermat luidt in zijn algemeenheid dat 'de natuur zijn effecten teweeg brengt langs de kortste weg', waarbij het begrip 'kortste weg' in het geval van lichtstralen betekent dat het licht in de kortst mogelijke tijd langs deze weg van een punt A naar een punt B geraakt. Met



Figuur 1.6: Gebruik van Lagrange's integraalvariant om het principe van Fermat af te leiden.

behulp van zijn principe kon Fermat na enige inspanning de brekingswet van Snellius afleiden. In wiskundige vorm kan men het principe van Fermat schrijven als,

$$[P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n ds = \text{minimaal (of een extremum)}, \quad (1.44)$$

wanneer de integratie langs een fysisch bestaansbare lichtstraal uitgevoerd wordt.

Om het principe van Fermat te bewijzen maken we gebruik van de Lagrange integraalvariant (figuur 1.6). Twee punten P_1 en P_2 zijn verbonden door een lichtstraal $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ en door een tweede (gestippelde) curve $P_1 \bar{Q}_1 \bar{Q}_2 P_2$. Deze tweede curve valt niet noodzakelijk overal samen met een lichtstraal. De afstand tussen Q_1 en Q_2 is ds en de golffronten door Q_1 en Q_2 snijden de tweede curve in respectievelijk \bar{Q}_1 en \bar{Q}_2 . Door \bar{Q}_1 kunnen we ook een mogelijke lichtstraal tekenen (blauw in de figuur) en deze snijdt het golffront door \bar{Q}_2 loodrecht in het punt \bar{Q}_3 . Toepassing van de integraalvariant op de gesloten curve $\bar{Q}_1 \bar{Q}_3 \bar{Q}_2 \bar{Q}_1$ geeft,

$$[n ds]_{\bar{Q}_1 \bar{Q}_3} + \int_{\bar{Q}_3}^{\bar{Q}_2} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_2} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.45)$$

De tweede term in het linkerlid geeft géén bijdrage aangezien de weg $\bar{Q}_3 \bar{Q}_2$ op een golffront ligt en de straalvector \mathbf{s} dus loodrecht op $d\mathbf{r}$ staat. Voor de derde term is de integratieweg niet overal samenvallend met een lichtstraal en de hoek tussen \mathbf{s} en $d\mathbf{r}$ zal niet permanent nul zijn, waaruit volgt

$$\int_{\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_3} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} \leq [n ds]_{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2}.$$

Voor uitdrukking (1.45) kunnen we nu schrijven,

$$[n ds]_{\bar{Q}_1 \bar{Q}_3} = [n ds]_{Q_1 Q_2} \leq [n ds]_{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2}. \quad (1.46)$$

Na integratie over de optische weglengten tussen naburige golffronten richting P_1 en richting P_2 kunnen we stellen dat de optische weglengte $[P_1 P_2]$ gemeten langs de fysische lichtstraal altijd kleiner is dan de optische weglengte via een naburige andere weg tussen P_1 en P_2 .

Met behulp van de integraalvariant van Lagrange kan men ook de stelling van Malus en Dupin bewijzen. Deze stelling luidt:

'Wanneer voor een stralenbundel geldt dat in elk punt de lichtstraal volgens de normaal op het golffront in dat punt gericht is, dan blijft deze eigenschap na breking of reflectie door een continu oppervlak behouden.'

Een stralenbundel met een dergelijke eigenschap heet een orthogonale congruentie en de voorwaarde hiervoor is dat het vectorveld geen rotatie (schroef) vertoont ($\nabla \times n\mathbf{s} = 0$). Is aan deze voorwaarde niet voldaan, dan heet de stralenbundel een scheve congruentie; deze situatie kan zich voordoen in electronenoptische systemen.

Hoofdstuk II

Karakteristieke functies van een stelsel

II.1 Algemeen

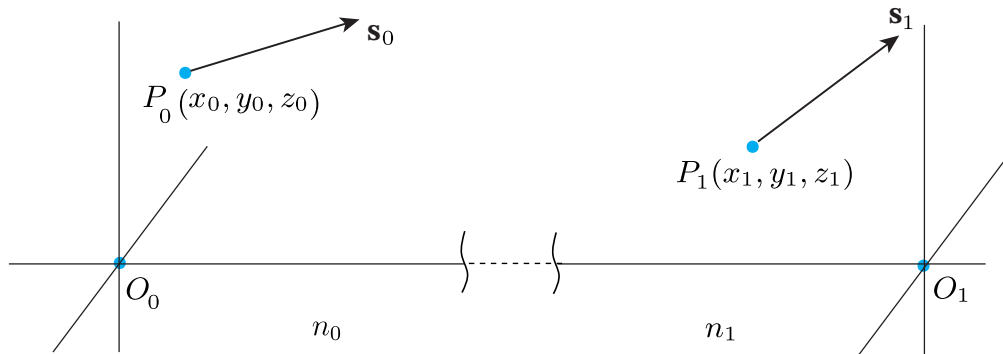
In dit hoofdstuk worden beknopt de karakteristieke functies van Hamilton behandeld voor een optisch afbeeldend stelsel. Het door Fermat gelanceerde principe van de 'kortste werking' was door Hamilton ook toegepast op een mechanisch systeem. Volgens zijn principe van de 'minste werking' is bij een verandering in de tijd van een mechanisch systeem van situatie A naar situatie B de verandering in het verschil tussen kinetische en potentiële energie van het systeem minimaal. Om het principe van Fermat te beschrijven definieert Hamilton een functie van de coördinaten van twee punten P_0 en P_1 die gelijk is aan het optisch weglengteverschil tussen deze twee punten wanneer een fysisch mogelijke straal deze twee punten verbindt (fig. 2.1),

$$[P_0P_1] = V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = \int_{P_0}^{P_1} n ds. \quad (2.1)$$

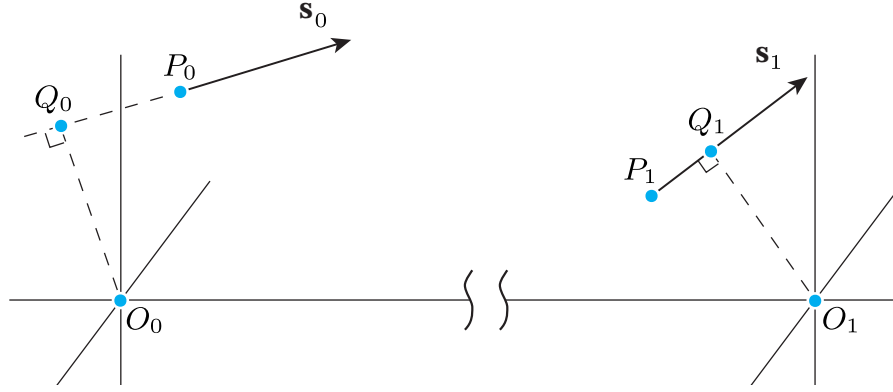
Uit hoofdstuk I is bekend dat het optische weglengteverschil tussen P_0 en P_1 gegeven wordt door het verschil in waarde van de eikonale functie $S(\mathbf{r})$ in de punten P_0 en P_1 :

$$\int_{P_0}^{P_1} n ds = S(\mathbf{r}_1) - S(\mathbf{r}_0). \quad (2.2)$$

De vectoren \mathbf{r}_0 en \mathbf{r}_1 mogen betrokken zijn op hetzelfde coördinatenstelsel maar eventueel ook op een stelsel met O_0 als oorsprong en een stelsel waarvan de oorsprong bijv. van O_0 naar O_1 verschoven is. Voor de straalvectoren \mathbf{s}_0 en \mathbf{s}_1 geldt volgens de eikonale vergelijking (1.27),



Figuur 2.1: Een algemeen optisch stelsel met een punt P_0 met straal \mathbf{s}_0 in de voorwerpsruimte en een punt P_1 met straal \mathbf{s}_1 in de beeldruimte. De puntkarakteristieke functie V levert als functie van de coördinaten (x_0, y_0, z_0) en (x_1, y_1, z_1) van resp. P_0 en P_1 de optische weglengte $[P_0P_1]$.



Figuur 2.2: De hoek-eikonale functie E levert de optische weglengte $[Q_0Q_1]$ langs een straal door het stelsel die in de voorwerpsruimte de componenten (L_0, M_0, N_0) heeft en in de beeldruimte (L_1, M_1, N_1) . De optische weglengte wordt gemeten met als referentiepunten O_0 in de voorwerpsruimte en O_1 in de beeldruimte.

$$\mathbf{s}_0 = \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial S}{\partial x_0}, \frac{\partial S}{\partial y_0}, \frac{\partial S}{\partial z_0} \right), \quad \mathbf{s}_1 = \frac{1}{n_1} \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial z_1} \right). \quad (2.3)$$

Een increment in optische weglengte kunnen we schrijven als

$$n \, ds = n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.4)$$

en volgens vgl. (2.1) moet dit gelijk zijn aan

$$n_0 \mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{r}_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0} dx_0 - \frac{\partial V}{\partial y_0} dy_0 - \frac{\partial V}{\partial z_0} dz_0,$$

en

$$n_1 \mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1} dz_1. \quad (2.5)$$

Volgens (2.2) geldt ook dat

$$\begin{aligned} n_0 \mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{r}_0 &= \frac{\partial S}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial S}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial S}{\partial z_0} dz_0, \\ n_1 \mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 &= \frac{\partial S}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial S}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial S}{\partial z_1} dz_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Vergelijking van de uitdrukkingen (2.5) en (2.6) laat zien dat

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x_0}, \frac{\partial V}{\partial y_0}, \frac{\partial V}{\partial z_0} \right) &= - \left(\frac{\partial S}{\partial x_0}, \frac{\partial S}{\partial y_0}, \frac{\partial S}{\partial z_0} \right) = -n_0 \mathbf{s}_0, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \frac{\partial V}{\partial z_1} \right) &= \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial z_1} \right) = n_1 \mathbf{s}_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De gradiënt van de karakteristieke functie levert dus de vector van optische richtingscosinussen.

Naast de zogenaamde puntkarakteristieke functie V , die alleen van de coördinaten van de beschouwde punten afhangt, heeft Hamilton nog een andere karakteristieke functie ingevoerd via de transformatie volgens figuur 2.2. In plaats van het optisch weglengteverschil $[P_0P_1]$ wordt het weglengteverschil $[Q_0Q_1]$ als karakteristiek voor de stralen genomen,

$$[Q_0Q_1] = [P_0P_1] + [Q_0P_0] - [Q_1P_1]. \quad (2.8)$$

Voor $[P_0Q_0]$ en $[Q_1P_1]$ kunnen we achtereenvolgens schrijven $-n_0\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0$ en $n_1\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_1$ en vgl. (2.8) gaat nu over in

$$[Q_0Q_1] = V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) + n_0(L_0x_0 + M_0y_0 + N_0z_0) - n_1(L_1x_1 + M_1y_1 + N_1z_1),$$

waarbij (L_0, M_0, N_0) en (L_1, M_1, N_1) de straalvectoren \mathbf{s}_0 en \mathbf{s}_1 voorstellen. Om te onderzoeken van welke variabelen $[Q_0Q_1]$ afhangt kan men een kleine verandering uitschrijven,

$$\begin{aligned} \delta [Q_0Q_1] &= \frac{\partial V}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial V}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial V}{\partial z_0} \delta z_0 + \frac{\partial V}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1} \delta z_1 + \\ &+ n_0 L_0 \delta x_0 + n_0 M_0 \delta y_0 + n_0 N_0 \delta z_0 \\ &+ x_0 \delta(n_0 L_0) + y_0 \delta(n_0 M_0) + z_0 \delta(n_0 N_0) \\ &- n_1 L_1 \delta x_1 - n_1 M_1 \delta y_1 - n_1 N_1 \delta z_1 \\ &- x_1 \delta(n_1 L_1) - y_1 \delta(n_1 M_1) - z_1 \delta(n_1 N_1). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Met gebruikmaking van vgl. (2.7) vinden we dat

$$\begin{aligned} \delta [Q_0Q_1] &= x_0 \delta(n_0 L_0) + y_0 \delta(n_0 M_0) + z_0 \delta(n_0 N_0) \\ &- x_1 \delta(n_1 L_1) - y_1 \delta(n_1 M_1) - z_1 \delta(n_1 N_1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Vergelijking (2.10) geeft aan dat het optisch weglengteverschil $E = [Q_0Q_1]$ alleen een functie is van de optische richtingscosinussen van de ingaande straal \mathbf{s}_0 en de uitgaande straal \mathbf{s}_1 . Tevens leiden we af uit vgl. (2.10) dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial(n_0 L_0)} &= x_0, & \frac{\partial E}{\partial(n_1 L_1)} &= -x_1, \\ \frac{\partial E}{\partial(n_0 M_0)} &= y_0, & \frac{\partial E}{\partial(n_1 M_1)} &= -y_1, \\ \frac{\partial E}{\partial(n_0 N_0)} &= z_0, & \frac{\partial E}{\partial(n_1 N_1)} &= -z_1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De functie E heeft de naam *hoek-eikonale* functie gekregen en haar afgeleiden geven de coördinaten van P_0 en P_1 . Aangezien de componenten van de straalvectoren niet onderling onafhankelijk zijn is E te schrijven als een functie van slechts vier variabelen, bijv. $n_0 L_0$, $n_0 M_0$, $n_1 L_1$ en $n_1 M_1$ terwijl de twee overige richtingscosinussen gegeven worden door

$$\begin{aligned} N_0^2 &= 1 - L_0^2 - M_0^2, \\ N_1^2 &= 1 - L_1^2 - M_1^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Voor kleine incrementen van N_0 en N_1 geldt dat

$$\begin{aligned} \delta N_0 &= -\frac{L_0}{N_0} \delta L_0 - \frac{M_0}{N_0} \delta M_0, \\ \delta N_1 &= -\frac{L_1}{N_1} \delta L_1 - \frac{M_1}{N_1} \delta M_1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

en vgl. (2.10) gaat nu over in

$$\begin{aligned} \delta E = & \left(x_0 - \frac{L_0}{N_0} z_0 \right) \delta(N_0 L_0) + \left(y_0 - \frac{M_0}{N_0} z_0 \right) \delta(N_0 M_0) \\ & + \left(-x_1 + \frac{L_1}{N_1} z_1 \right) \delta(N_1 L_1) + \left(-y_1 + \frac{M_1}{N_1} z_1 \right) \delta(N_1 M_1). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Voor de partiële afgeleiden kunnen we nu schrijven

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial(n_0 L_0)} = & \left(x_0 - \frac{L_0}{N_0} z_0 \right), & \frac{\partial E}{\partial(n_0 M_0)} = & \left(y_0 - \frac{M_0}{N_0} z_0 \right), \\ \frac{\partial E}{\partial(n_1 L_1)} = & \left(-x_1 + \frac{L_1}{N_1} z_1 \right), & \frac{\partial E}{\partial(n_1 M_1)} = & \left(-y_1 + \frac{M_1}{N_1} z_1 \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Indien we een ingaande straalrichting $(n_0 L_0, n_0 M_0)$ en een uitgaande straalrichting $(n_1 L_1, n_1 M_1)$ vastleggen, geven de vergelijkingen op de eerste regel van (2.15) de mogelijkheid om het traject van de lichtstraal in de beginruimte vast te leggen als de snijlijn van de twee vlakken

$$x_0 - \frac{L_0}{N_0} z_0 - \frac{\partial E}{\partial(n_0 L_0)} = 0, \quad \text{en} \quad y_0 - \frac{M_0}{N_0} z_0 - \frac{\partial E}{\partial(n_0 M_0)} = 0; \quad (2.16)$$

voor de uittredende straal vinden we op overeenkomstige wijze zijn traject in de uitreerimte als de snijlijn van de twee vlakken die voorgesteld worden door de uitdrukkingen op de tweede regel van (2.15).

Als voorbeeld van een hoek-eikonale functie en de mogelijke manipulaties hiermee kiezen we de uitdrukking

$$\begin{aligned} E(L_0, M_0; L_1, M_1) = & E_0(L_0, M_0) + R \left\{ 1 - \sqrt{1 - L_1^2 - M_1^2} \right\} \\ = & E_0(L_0, M_0) + R \{1 - N_1\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

waarbij E gesepareerd kan worden naar coördinaten in de begin- en eindruimte die beide homogeen zijn met een brekingsindex gelijk aan 1.

Wanneer we een bundel stralen evenwijdig aan de z -as aanbieden ($L_0 = M_0 = 0$) kunnen we schrijven

$$E(0, 0; L_1, M_1) = C + R \left\{ 1 - \sqrt{1 - L_1^2 - M_1^2} \right\}. \quad (2.18)$$

De relaties (2.15) gaan nu over in:

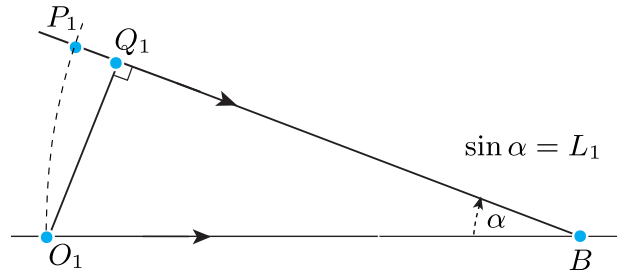
$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial L_1} = & R \frac{L_1}{N_1} = -x_1 + \frac{L_1}{N_1} z_1, \\ \frac{\partial E}{\partial M_1} = & R \frac{M_1}{N_1} = -y_1 + \frac{M_1}{N_1} z_1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Het snijpunt van de stralen met de z -as ($x_1 = y_1 = 0$) blijkt onafhankelijk van L_1 en M_1 te zijn en ligt op een afstand R van de oorsprong. In figuur 2.3 is een straal met richtingscosinussen $(L_1, 0, N_1)$ getekend waarbij $\sin \alpha = L_1$ en $\cos \alpha = N_1$.

De optische weglengte tot het punt Q_1 is gegeven door (2.18) en uit de figuur lezen we af dat langs de asstraal 1 tot O_1 en langs straal 2 tot P_1 de weglengten gelijk zijn indien $[P_1 Q_1]$ gegeven wordt door

$$R \left\{ 1 - \sqrt{1 - L_1^2} \right\}.$$

Voor de optische weglengte $[P_1 B]$ kunnen we schrijven:



Figuur 2.3: Berekening van de hoek-eikonale functie E voor een ideaal stelsel. Een vlakke golf, parallel aan de z -as, valt in op het stelsel met als focus het punt B in de beeldruimte. Als referentiepunt voor de optische weglengte in de beeldruimte is het punt O_1 gekozen.

$$[P_1B] = [P_1Q_1] + [Q_1B] = R,$$

en hieruit volgt dat de bol met middelpunt B en straal R een golffront van de getransformeerde evenwijdige stralenbundel uit de beginruimte is. De hoek-eikonale functie volgens (2.17) zet dus een evenwijdige stralenbundel ($L_0 = M_0 = 0$) om in een homocentrische bundel met een bijbehorend sferisch golffront door O_1 en P_1 met $O_1B = R$ als voerstraal.

II.2 Berekening van de karakteristieke functies

In zijn algemeenheid is het niet mogelijk voor de karakteristieke functie van een brekend of reflecterend oppervlak een analytische uitdrukking te vinden. Men gaat daarom meestal over op reeksontwikkelingen naar combinaties van de variabelen (L_0, M_0, L_1 en M_1 voor de hoek-eikonale functie). Een veel voorkomende situatie is die waarbij het brekende of spiegelende oppervlak rotatiesymmetrie vertoont. In dit geval moet de eikonale functie onveranderd blijven onder een rotatie van de assenstelsels in begin- en eindruimte. Wanneer we de z -as laten samenvallen met de optische as van het stelsel, blijven de z -richtingscosinussen N_0 en N_1 vanzelfsprekend onveranderd onder een rotatie. Voor de x - en y -richtingscosinussen (L_0, M_0), (L_1, M_1) blijven de combinaties ($L_0^2 + M_0^2$), ($L_1^2 + M_1^2$) en ($L_0L_1 + M_0M_1$) invariant onder een rotatie en natuurlijk alle mogelijke productcombinaties ervan. De drie rotatie-invariante grootheden zijn de scalaire producten van (L_0, M_0) en (L_1, M_1) ieder met zichzelf en hun scalaire kruisproduct. In wat volgt geven we nu eerst een afleiding van de eikonale functie van een bolvormig brekend oppervlak met de bijbehorende laagste orden in de reeksontwikkeling. Daarna geven we schematisch aan hoe de eikonale functie van een optisch stelsel berekend kan worden.

II.3 De eikonale functie van een brekend sferisch oppervlak

In figuur 2.4 is een invallende straal met richtingscosinussen (L_0, M_0, N_0) en een gebroken straal (L_1, M_1, N_1) getekend. Het snijpunt met het oppervlak is $P(x, y, z)$. Het kromtemiddelpunt M van het brekende oppervlak (straal R) ligt op de z -as. De top van het brekende oppervlak ligt in O , de oorsprong van het coördinatenstelsel (x, y, z).

Wanneer we de hoek-eikonale functie relateren aan deze top O , vinden we de uitdrukking

$$E = [Q_0Q_1] = [Q_0P] - [Q_1P]. \quad (2.20)$$

In vectorvorm schrijven we

$$E = n_0 \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{r}_p - n_1 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_p, \quad (2.21)$$

waarbij het positieve of negatieve teken genomen moet worden in afhankelijkheid van de waarden van n_0 en n_1 . Substitutie van de uitdrukkingen voor x_p , y_p en z_p in (2.21) geeft de volgende uitdrukking voor E ,

$$\begin{aligned} E(n_0L_0, n_0M_0; n_1L_1, n_1M_1) &= (n_0L_0 - n_1L_1)x_p + (n_0M_0 - n_1M_1)y_p + (n_0N_0 - n_1N_1)z_p \\ &= R(n_0N_0 - n_1N_1) \left[1 - \sqrt{1 + \frac{(n_0L_0 - n_1L_1)^2 + (n_0M_0 - n_1M_1)^2}{(n_0N_0 - n_1N_1)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Deze uitdrukking voor de hoek-eikonale functie E bevat nog de z -richtingscosinussen N_0 en N_1 en deze zouden formeel geëlimineerd moeten worden. Ontwikkelen we de uitdrukking voor E alleen tot en met de kwadratische termen, dan vinden we, met de benaderingen N_0 en $N_1 \approx 1$ en met de nieuwe variabelen u , v en w volgens

$$\begin{aligned} u^2 &= n_0^2 (L_0^2 + M_0^2), \\ v^2 &= n_1^2 (L_1^2 + M_1^2), \\ w^2 &= n_0n_1 (L_0L_1 + M_0M_1), \\ E_2(u^2, v^2, w^2) &= \frac{R}{2(n_1 - n_0)} (u^2 + v^2 - 2w^2) = Au^2 + Bv^2 + Cw^2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

en deze vorm beschrijft de eikonale functie in haar paraxiale benadering. Een uitwerking tot en met de vierde orde vraagt een ontwikkeling van N_0 en N_1 volgens

$$\begin{aligned} N_0 &= 1 - \frac{L_0^2 + M_0^2}{2} = 1 - \frac{u^2}{2n_0^2}, \\ N_1 &= 1 - \frac{L_1^2 + M_1^2}{2} = 1 - \frac{v^2}{2n_1^2}. \end{aligned}$$

Met de reeksontwikkeling van de wortelvorm in (2.26) volgens

$$\sqrt{1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2} = 1 + \frac{a}{2}\varepsilon + \frac{b}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}a^2\varepsilon^2,$$

vinden we voor de 4de-machts termen van de hoek-eikonale functie,

$$\begin{aligned} E_4(u^2, v^2, w^2) &= \frac{R}{2(n_1 - n_0)} (u^2 + v^2 - 2w^2) \\ &\quad - \frac{R}{4(n_0 - n_1)^2} (u^2 + v^2 - 2w^2) \left\{ \frac{u^2}{n_0} - \frac{v^2}{n_1} \right\} \\ &\quad + \frac{R}{8(n_0 - n_1)^3} (u^2 + v^2 - 2w^2)^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

De coëfficiënten van de diverse 4de orde termen zijn nu als volgt,

afhankelijkheid	coëfficiënt
u^4	$\frac{R}{8(n_1 - n_0)^3} \left\{ 1 - \frac{2n_1}{n_0} \right\},$
v^4	$\frac{R}{8(n_1 - n_0)^3} \left\{ 1 - \frac{2n_0}{n_1} \right\},$
w^4	$\frac{-R}{2(n_1 - n_0)^3},$
u^2v^2	$\frac{R}{4(n_1 - n_0)^3} \left\{ 1 - \frac{n_0}{n_1} - \frac{n_1}{n_0} \right\},$
u^2w^2	$\frac{R}{2(n_1 - n_0)^3} \left\{ \frac{n_1}{n_0} \right\},$
v^2w^2	$\frac{R}{2(n_1 - n_0)^3} \left\{ \frac{n_0}{n_1} \right\}.$

(2.29)

Het is niet eenvoudig aan te geven welke termen van (2.29) corresponderen met de karakteristieke aberraties, zoals die later in hoofdstuk V behandeld zullen worden. Eerst moeten voorwerps- en beeldvlak alsook de pupilligging gedefinieerd worden en pas daarna kunnen de op deze situatie betrokken aberraties uitgerekend worden. Vgl. (2.29) geeft echter de principiële mogelijkheid voor welke beeld- en pupilligging dan ook de 4de-orde aberraties te verkrijgen.

II.4 De paraxiale vorm van de eikonale functie

Wanneer we nu terugkeren naar de paraxiale benadering van E volgens (2.27), dan kunnen we deze vergelijking gebruiken om de vergelijking van lichtstralen op te stellen volgens (2.15). Voor stralen in het vlak $x = 0$ vinden we,

$$\begin{aligned} y_0 - \frac{M_0}{N_0} z_0 - \frac{R}{(n_1 - n_0)} [n_0 M_0 - n_1 M_1] &= 0, \\ y_1 - \frac{M_1}{N_1} z_1 - \frac{R}{(n_1 - n_0)} [n_0 M_0 - n_1 M_1] &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Eliminatie van M_0 uit beide vergelijkingen geeft de uitdrukking

$$y_1 = \left\{ \frac{n_0 R'}{z_0 + n_0 R'} \right\} y_0 + \left\{ z_1 - n_1 R' + \frac{n_0 n_1 R'^2}{z_0 + n_0 R'} \right\} M_1, \quad (2.31)$$

met $R' = R / (n_1 - n_0)$.

Afbeelding treedt op indien een bepaalde ordinaatwaarde y_1 van de gebroken straal onafhankelijk is van de straalrichting M_1 en dit vereist dat

$$(z_1 - n_1 R') (z_0 + n_0 R') = -n_0 n_1 R'^2. \quad (2.32)$$

Vgl. (2.32) is de afbeeldingsvergelijking en met de definities voor voorwerps- en beeldbrandpuntsafstand volgens

$$f = -\frac{n_0 R}{n_1 - n_0}, \quad f' = \frac{n_1 R}{n_1 - n_0},$$

gaat (2.32) over in

$$(z_1 - f')(z_0 - f) = ff', \quad (2.33)$$

de bekende afbeeldingsvergelijking van Newton.

Door de afstanden z_0 en z_1 te relateren aan resp. het voorwerps- en beeldbrandpunt volgens $Z_0 = z_0 - f$ en $Z_1 = z_1 - f'$ gaat (2.33) over in

$$Z_1 Z_0 = ff'. \quad (2.34)$$

Vergelijking (2.32) kan ook geschreven worden als

$$z_1 z_0 - n_1 R' z_0 + n_0 R' z_1 = 0,$$

ofwel,

$$\frac{n_1}{z_1} = \frac{n_0}{z_0} + \frac{n_1 - n_0}{R}. \quad (2.35)$$

De dwarsvergroting β' van de afbeelding volgt uit (2.31),

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{y_1}{y_0} = \frac{n_0 R'}{z_0 + n_0 R'} = \frac{-f}{z_0 - f} = \frac{-f}{Z_0} \\ &= \frac{z_1 - n_1 R'}{-n_1 R'} = \frac{z_1 - f'}{-f'} = -\frac{Z_1}{f'}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

De hoekvergroting γ' vinden we door bijv. voor $y_0 = y_1 = 0$ de verhouding van de richtingscosinussen M_0 en M_1 te bepalen met behulp van (2.30),

$$\begin{aligned} \gamma' &= \frac{M_1}{M_0} = -\frac{n_0 R'}{(z_1 - n_1 R')} = \frac{f}{Z_1} \\ &= \frac{-(z_0 + n_0 R')}{-n_1 R'} = \frac{Z_0}{f'}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Het product van hoek- en dwarsvergroting is

$$\beta' \gamma' = -\frac{f}{Z_0} \cdot \frac{Z_0}{f'} = +\frac{n_0}{n_1}. \quad (2.38)$$

Met behulp van Newton's afbeeldingsvergelijking kunnen we ook een uitdrukking afleiden voor de langsvergroting (ook wel *axiale* vergroting genoemd),

$$\delta' = \frac{dz_1}{dz_0} = \frac{-ff'}{(z_0 - f)^2} = \frac{n_1 f^2}{n_0 z_0^2} = \frac{n_1}{n_0} \beta'^2 = \frac{n_0}{n_1} \frac{1}{\gamma'^2}. \quad (2.39)$$

De langsvergroting δ' blijkt altijd positief te zijn bij een brekend oppervlak en negatief bij een spiegelend oppervlak. We vermelden nog dat de dwars- en hoekvergroting ook geschreven kunnen worden als

$$\beta' = \frac{n_0 R' z_1}{n_1 R' z_0} = \frac{z_1/n_1}{z_0/n_0}, \quad \text{en} \quad \gamma' = \frac{n_0}{n_1} \frac{1}{\beta'} = \frac{z_0}{z_1}. \quad (2.40)$$

Gegeven de positie van twee geconjugeerde vlakken $z = z_0$ en $z = z_1$ kunnen we de waarde van de eikonale functie berekenen met als referentiepunten de snijpunten $O(0, 0, z_0)$ en $O'(0, 0, z_1)$ van deze vlakken met de optische as door het kromtemiddelpunt M ,

$$E_2 = \frac{R'}{2} (u^2 + v^2 - 2w^2) - n_0 z_0 N_0 + n_1 z_1 N_1. \quad (2.41)$$

Met gebruikmaking van de onderstaande relaties ($L_0 = L_1 = 0$)

$$u^2 = n_0^2 M_0^2, \quad v^2 = n_1^2 M_1^2, \quad w^2 = n_0 n_1 M_0 M_1, \\ N_0 = 1 - M_0^2/2, \quad N_1 = 1 - M_1^2/2,$$

vinden we

$$E_2 = \frac{R'}{2} (n_0 M_0 - n_1 M_1)^2 + n_1 z_1 - n_0 z_0 + \frac{n_0 z_0 M_0^2}{2} - \frac{n_1 z_1 M_1^2}{2}. \quad (2.42)$$

Drukken we nu z_0 , z_1 en M_0/M_1 uit in de hoekvergroting γ' volgens

$$z_0 = (n_1 \gamma' - n_0) R', \\ z_1 = \left(n_1 - \frac{n_0}{\gamma'} \right) R', \\ \frac{M_0}{M_1} = \frac{1}{\gamma'},$$

dan kan E_2 geschreven worden als

$$E_2 = \left\{ n_1^2 + n_0^2 - \frac{n_0 n_1}{\gamma'} (1 + \gamma'^2) \right\} \frac{R}{(n_1 - n_0)}. \quad (2.43)$$

Deze uitdrukking voor E_2 is onafhankelijk van de straalrichting, een eigenschap die karakteristiek is voor de (ideale) paraxiale afbeelding. Tegelijkertijd illustreert (2.43) de onbruikbaarheid van de hoek-eikonale functie als een van de referentiepunten in het oneindige gekozen wordt (evenwijdige bundel); de relatie tussen M_0 en M_1 is dan niet meer terug te winnen uit vgl. (2.43).

II.5 Bijzondere geconjugeerde punten van een oppervlak

Met behulp van de exacte uitdrukking voor de eikonale functie volgens vgl. (2.26) kunnen we proberen toegevoegde vlakken te vinden waarvan de punten op de as zodanig afgebeeld worden dat de eikonale functie voor willekeurige straalrichtingen dezelfde waarde behoudt. We kunnen dan spreken van perfecte afbeelding voor deze punten. Als referentiepunten voor de eikonale functie worden weer gekozen de aspunten $(0, 0, z_0)$ en $(0, 0, z_1)$ van twee toegevoegde vlakken en de uitdrukking voor ΔE wordt nu,

$$\Delta E (n_0 L_0, n_0 M_0; n_1 L_1, n_1 M_1) \\ = E (n_0 L_0, n_0 M_0; n_1 L_1, n_1 M_1) - E(0, 0; 0, 0) \\ = (R - z_0) n_0 N_0 - (R - z_1) n_1 N_1 \\ - R \sqrt{(n_0 N_0 - n_1 N_1)^2 + (n_0 L_0 - n_1 L_1)^2 + (n_0 M_0 - n_1 M_1)^2} + n_0 z_0 - n_1 z_1. \quad (2.44)$$

Aangezien we de referentiepunten op een as door het kromtemiddelpunt M van het brekende oppervlak gelegd hebben, kan volstaan worden met bijv. de (M, N) -richtingscosinussen ($L_0 = L_1 = 0$). Voor de positie van de twee toegevoegde vlakken geldt,

$$z_0 = \frac{(n_1 \gamma' - n_0) R}{n_1 - n_0}, \\ z_1 = \frac{(n_1 - n_0/\gamma') R}{n_1 - n_0}, \quad (2.45)$$

waarbij γ' de hoekvergroting van de afbeelding is. Substitutie van (2.45) in (2.44) geeft na eliminatie van M_1 ,

$$\begin{aligned} \Delta E(0, n_0 M_0; 0, n_1 M_1) &= \frac{n_0 n_1}{(n_1 - n_0)} \left[(1 - \gamma') \sqrt{1 - M_0^2} - \left(\frac{1 - \gamma'}{\gamma'} \right) \sqrt{1 - \gamma'^2 M_0^2} + \frac{(n_1 \gamma' - n_0)(n_0 \gamma' - n_1)}{n_0 n_1 \gamma'} \right] \\ &= \sqrt{n_0^2 + n_1^2 - 2n_0 n_1 \left(\gamma' M_0^2 + \sqrt{(1 - M_0^2)(1 - \gamma'^2 M_0^2)} \right)}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

We kwadrateren het rechterlid van vgl. (2.46), stellen de voorwaarde $\Delta E = 0$ en dan blijkt bij inspectie van de diverse termen dat aan $\Delta E = 0$ slechts voldaan kan worden voor specifieke waarden van de hoek- of dwarsvergroting. In de tabel beneden geven we de waarden van die speciale hoek- en dwarsvergrotingen (γ' , β') en de daarbij behorende posities (z_0 , z_1) van de geconjugeerde punten,

γ'	β'	z_0	z_1	
$\frac{n_0}{n_1}$	1	0	0	
1	$\frac{n_0}{n_1}$	R	R	(2.47)
$\frac{n_1}{n_0}$	$\frac{n_0^2}{n_1^2}$	$\left(\frac{n_1 + n_0}{n_0} \right) R$	$\left(\frac{n_1 + n_0}{n_1} \right) R$	

Vergelijkbare situaties doen zich voor bij een spiegelend oppervlak ($n_0 = -n_1$) indien geldt dat

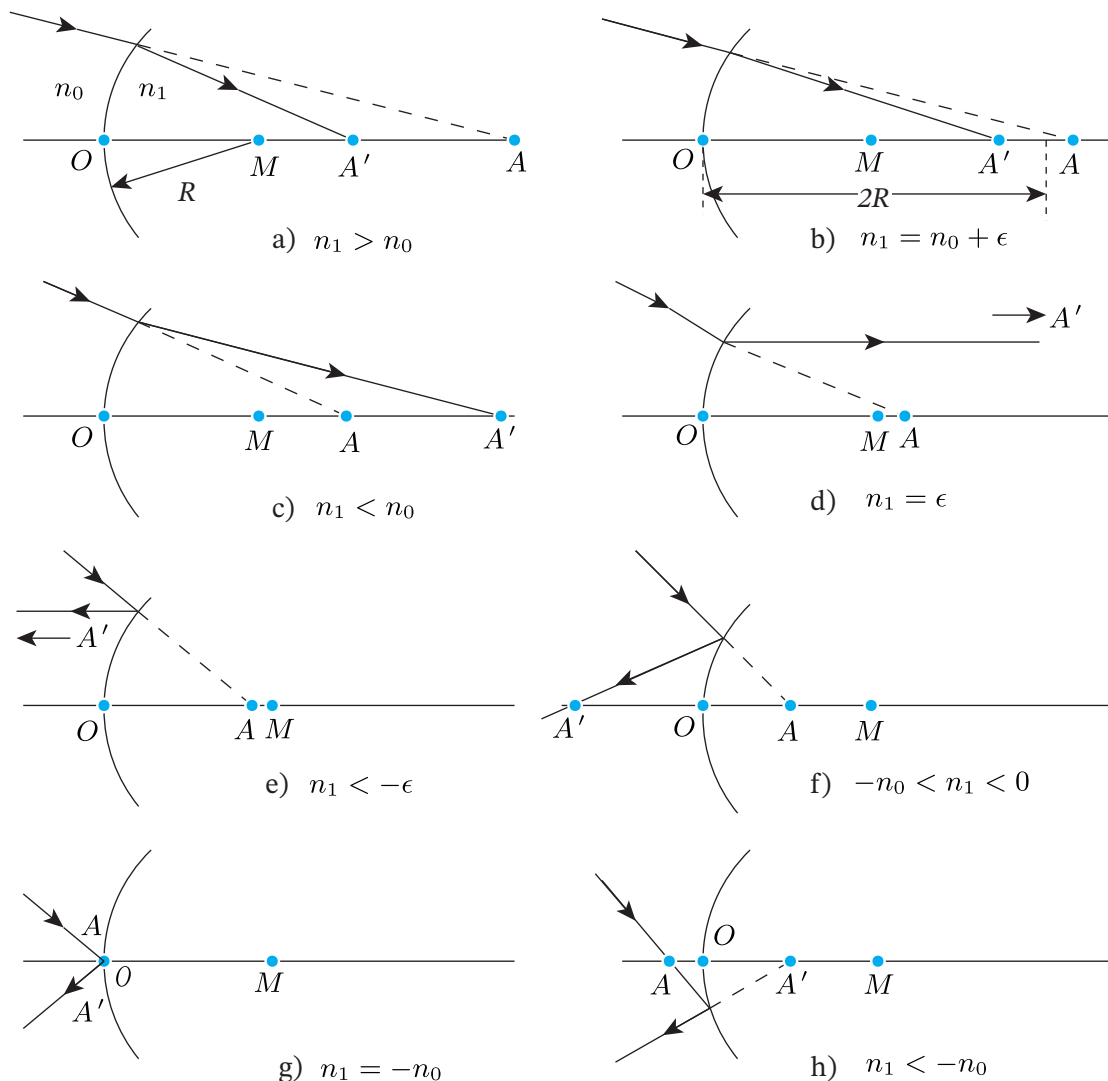
γ'	β'	z_0	z_1	
-1	+1	0	0	
+1	-1	R	R	(2.48)
-1	+1	0	0	

In figuur 2.5 zijn voor diverse waarden van n_0/n_1 de posities van de perfect afgebeelde punten aangegeven. De twee punten O en M en het puntenpaar (A, A') worden wel de *stigmatische* punten genoemd. Het puntenpaar A en A' neemt als functie van n_0/n_1 alle mogelijke posities in. Van de in de figuur geschetste situaties corresponderen er slechts weinige met de dagelijkse fysische werkelijkheid. In het geval van een spiegel blijkt het speciale puntenpaar (A, A') samen te vallen met de top van het oppervlak.

De hierboven beschreven stigmatische afbeeldingspunten van een optisch oppervlak spelen zeker een belangrijke rol bij het ontwerpen van optische systemen. Naast de afwezigheid van beeldfouten voor de afbeelding van het punt op de as, blijkt namelijk ook een omgeving van het aspunt nog foutvrij afgebeeld te kunnen worden. Op deze eigenschap van de besproken stigmatische punten komen we in hoofdstuk VI nog terug.

II.6 De eikonale functie van een stelsel

In deze paragraaf geven we aan hoe in principe uit de eikonale functies van de deeloppervlakken de totale hoek-eikonale functie van een stelsel verkregen kan worden. In figuur 2.6 is in een optisch stelsel een straal getekend gaande van het i^{de} naar het $(i + 1)^{\text{de}}$ oppervlak met



Figuur 2.5: Afbeeldingen volgens de tabellen (2.47) en (2.48) bij een aantal speciale keuzes van het optisch contrast n_1/n_0 , zowel voor breking, zie a)-d), als voor reflectie, zie e)-h).

optische richtingscosinussen $(n_1^i L_1^i, n_1^i M_1^i)$ aangezien hij zich bevindt in de beeldruimte van oppervlak i . Gerelateerd aan het $(i+1)$ -de oppervlak schrijven we de richtingscosinussen als $(n_0^{i+1} L_0^{i+1}, n_0^{i+1} M_0^{i+1})$.

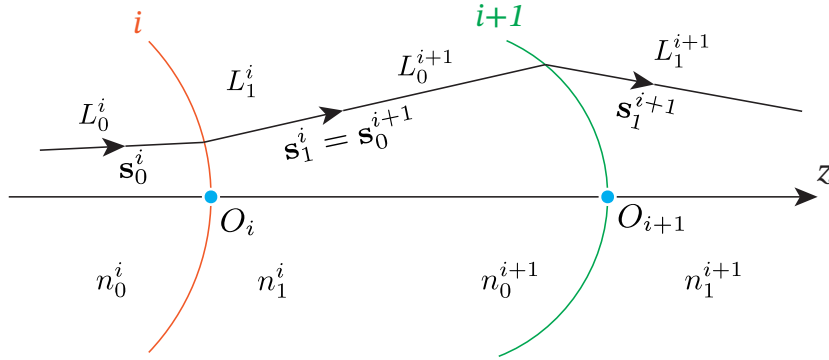
Veronderstellen we de hoek-eikonale functie van het i -de en $(i+1)$ -de oppervlak bekend, dan kan men voor de gesommeerde eikonale functie schrijven,

$$E_{i,i+1} = E_i \left(n_0^i L_0^i, n_0^i M_0^i; n_1^i L_1^i, n_1^i M_1^i \right) + E_{i+1} \left(n_0^{i+1} L_0^{i+1}, n_0^{i+1} M_0^{i+1}; n_1^{i+1} L_1^{i+1}, n_1^{i+1} M_1^{i+1} \right) + E_t^{i+1}, \quad (2.49)$$

waarbij de eikonale 'transportfunctie' E_t^{i+1} gegeven wordt door het scalaire product van de vector $\mathbf{O}_i \mathbf{O}_{i+1}$ en de optische straalvector $n\mathbf{s}$,

$$E_t^{i+1} = n_0^{i+1} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{O}_i \mathbf{O}_{i+1}. \quad (2.50)$$

In het geval van een gecentreerd optisch stelsel met de z -as als optische as vinden we dat



Figuur 2.6: De opbouw van een hoek-eikonale functie voor een compleet stelsel via de brekings- en transportbijdragen van elk deeloppervlak in het stelsel.

$$E_t^{i+1} = n_1^i N_1^i d_{i+1} = n_0^{i+1} N_0^{i+1} d_{i+1}, \quad (2.51)$$

waarbij d_{i+1} de afstand is tussen de toppen van de oppervlakken i en $i+1$. Voor de totale eikonale functie van een stelsel vinden we de uitdrukking

$$E_{1,K} = \sum_{i=1}^K E_i \left(n_0^i L_0^i, n_0^i M_0^i; n_1^i L_1^i, n_1^i M_1^i \right) + \sum_{i=2}^K E_t^i \left(n_0^i L_0^i, n_0^i M_0^i \right). \quad (2.52)$$

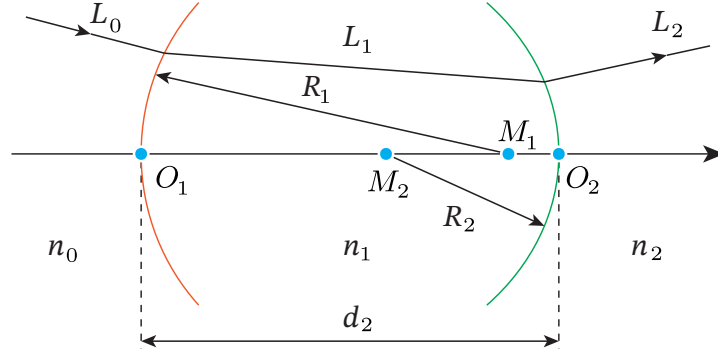
Uiteindelijk zijn we slechts geïnteresseerd in een functie met als variabelen de optische richtingscosinussen $(n_0^1 L_0^1, n_0^1 M_0^1)$ aan de ingang en $(n_1^K L_1^K, n_1^K M_1^K)$ aan de uitgang van het optische systeem. De eliminatie van alle richtingscosinussen in de tussenruimten kan formeel geschieden door het principe van Fermat aan te wenden. Veranderen we in een tussenruimte de richtingscosinus van fysisch mogelijke lichtstralen (zoals die door de eikonale functie gegeven worden), dan zal de waarde van de eikonale functie in eerste orde ongewijzigd blijven. Deze conclusie kan geschreven worden als

$$\begin{aligned} \delta E_{1,K} = & \frac{\partial E_i}{\partial (n_1^i L_1^i)} \delta (n_1^i L_1^i) + \frac{\partial E_{i+1}}{\partial (n_0^{i+1} L_0^{i+1})} \delta (n_0^{i+1} L_0^{i+1}) \\ & + \frac{\partial E_t^{i+1}}{\partial (n_0^{i+1} L_0^{i+1})} \delta (n_0^{i+1} L_0^{i+1}) = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

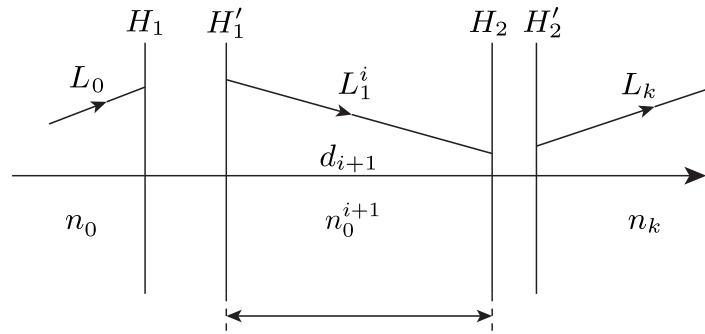
Hieruit volgt de voorwaarde

$$\frac{\partial E_i}{\partial (n_1^i L_1^i)} = - \frac{\partial E_{i+1}}{\partial (n_0^{i+1} L_0^{i+1})} - \frac{\partial E_t^{i+1}}{\partial (n_0^{i+1} L_0^{i+1})}. \quad (2.54)$$

Een overeenkomstige relatie geldt voor de M -richtingscosinussen. Op deze wijze kunnen $2(K-1)$ transcendente vergelijkingen opgesteld worden waarmee in principe alle tussenvariabelen geëlimineerd kunnen worden. In de praktijk is dit een onmogelijke opgave en daarom worden vaak de relaties tussen de variabelen gebruikt zoals die door de *paraxiale* optica worden gegeven. Als voorbeeld geven we de eliminatie van een optische richtingscosinus $n_1 L_1$ in de ruimte tussen de twee oppervlakken 1 en 2 met tussenafstand d_2 (zie figuur 2.7). Met behulp van de kwadratische benadering voor E volgens vgl. (2.27) en met de eveneens kwadratische benadering voor de transport-eikonaal, vinden we voor de totale hoek-eikonale functie van het stelsel,



Figuur 2.7: Illustratie van de eliminatie van een tussenvariabele L_1 met behulp van de paraxiale benadering van de stralenloop tussen twee optische overgangen.



Figuur 2.8: Zelfde onderschrift als in Fig. 2.7, maar nu met vervanging van de twee nabuuroppervlakken door twee deelstelsels die gekarakteriseerd worden door hun paraxiale sterkten en hoofdvlakken.

$$\begin{aligned}
 E_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{n_1 - n_0} \right) \left[n_0^2 L_0^2 + n_1^2 L_1^2 - 2n_0 n_1 L_0 L_1 \right] \\
 &\quad + n_1 d_2 - \frac{d_2}{2n_1} n_1^2 L_1^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{n_2 - n_1} \right) \left[n_1^2 L_1^2 + n_2^2 L_2^2 - 2n_1 n_2 L_1 L_2 \right]. \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Vergelijking (2.54) zegt nu dat $\partial E_{1,2} / \partial (n_1 L_1)$ gelijk aan nul moet zijn en dit levert op,

$$\frac{R_1}{(n_1 - n_0)} (n_1 L_1 - n_0 L_0) - \frac{d_2}{n_1} (n_1 L_1) + \frac{R_2}{(n_2 - n_1)} (n_1 L_1 - n_2 L_2) = 0. \quad (2.56)$$

Met de notaties $A_1 = (n_1 - n_0) / R_1$ en $A_2 = (n_2 - n_1) / R_2$ gaat vgl. (2.56) over in de voorwaarde

$$n_1 L_1 = \frac{A_2 (n_0 L_0) + A_1 (n_2 L_2)}{A_1 + A_2 - \frac{d_2}{n_1} A_1 A_2}. \quad (2.57)$$

De noemer van (2.57) is gelijk aan de optische sterkte van de combinatie.

Wanneer we een tussenvariabele moeten elimineren in een complexer systeem, kunnen de brekende oppervlakken 1 en 2 vervangen worden door de effectieve sterkten van de deelsystemen aan weerszijden van de beschouwde tussenruimte. Zijn ook de hoofdvlakken van deze deelsystemen bekend dan kunnen we eenvoudig de tussenvariabelen $n_0^{i+1} L_0^{i+1}$ of $n_0^{i+1} M_0^{i+1}$ uitdrukken

in de optische richtingscosinussen n_0L_0 en n_KL_K in begin- en eindruimte (zie figuur 2.8). Door dit proces uit te voeren voor elke tussenvariabele kunnen we uiteindelijk de (niet-paraxiale) totale eikonale functie van het systeem schrijven met slechts (n_0L_0, n_0M_0) en (n_KL_K, n_KM_K) als variabelen. De aldus verkregen eikonale functie is niet exact en de hieruit berekende aberraties van een orde hoger dan de 4de worden wel *pseudo*-aberraties genoemd.

Conclusie

De karakteristieke functie van een optisch oppervlak of stelsel is in principe te berekenen. De praktische problemen hierbij zijn echter enorm; om deze reden vindt de karakteristieke functie zelden toepassing bij het ontwerpproces van optische systemen. De berekening van optische weglengten en lichtstraalbanen geschiedt meestal numeriek (zie hoofdstuk IV) voor een aantal specifiek gekozen verzamelingen van stralen die vertrekken uit een aantal punten in de voorwerpsruimte.

Wanneer een aantal stralen door een punt gaan, levert de puntkarakteristiek geen eenduidige waarde voor de straalrichting op; in het geval van een evenwijdige bundel geeft de hoek-eikonale functie geen uitsluitsel over de positie van de stralen. Om deze situaties te vermijden wordt ook wel de zogenaamde *gemengde* karakteristieke functie gebruikt.

Het concept van de karakteristieke functie heeft zijn nut bewezen bij het afleiden van speciale relaties tussen stralenbundels in voorwerps- en beeldruimte. De inzetbaarheid van karakteristieke functies bij het ontwerp en de analyse van optische systemen is zeer beperkt gebleven.

Hoofdstuk III

Stralenbundels in een optisch stelsel

In dit hoofdstuk komt het verloop van stralen en stralenbundels door een optisch systeem aan de orde. Bij de analyse van een optisch systeem zijn we vaak geïnteresseerd in zijn ruimtelijke impulsrespons. Als voorwerp wordt dan een puntbron aangeboden in het voorwerpsvlak; de van daaruit vertrekkende sferische golf kan geometrisch optisch voorgesteld worden als een homocentrische stralenbundel. Slechts een perfect optisch systeem zou in de beeldruimte weer zonder uitzondering elke voorwerpsbundel omzetten in een homocentrische beeldbundel. Praktische systemen genereren beeldbundels die niet meer naar één beeldpunt convergeren en dus aberraties vertonen.

Hoe deze aberraties in detail berekend en gerepresenteerd kunnen worden is het onderwerp van volgende hoofdstukken; eerst gaan we de stralenbundels specificeren en enige van hun algemene eigenschappen afleiden.

III.1 Beschrijving van stralenbundels, gereduceerde coördinaten

In figuur 3.1 zijn O en O' de snijpunten van voorwerps- en beeldvlak met de optische as van het stelsel. Ergens in het stelsel bevindt zich een begrenzing (lensrand of speciaal aangebracht diafragma) voor de stralenbundel die vanuit O vertrekt. Het punt D op de optische as dat we kunnen identificeren met de positie van deze begrenzing kan afgebeeld worden door het gedeelte van het optische systeem dat zich links van het diafragma bevindt en levert het punt E op, de positie van de *intreepupil* van het optische systeem. Op overeenkomstige wijze vinden we ook de positie E' van de *uittreepupil* van het stelsel waarbij E en E' geconjugeerde punten zijn. In het domein van de paraxiale optica waarbij de hoekuitgebreidheid van de bundels klein is, geldt dat de snijhoogte x van een straal met het vlak door E (het vlak van de intreepupil) gegeven is door

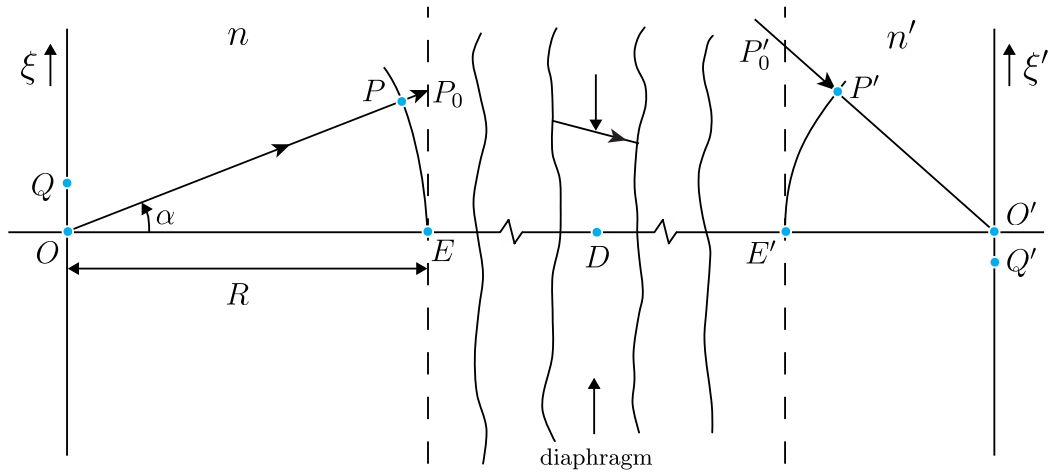
$$x = R\alpha. \quad (3.1)$$

Evenzo geldt voor de snijhoogte van de corresponderende beeldstraal met de uittreepupil,

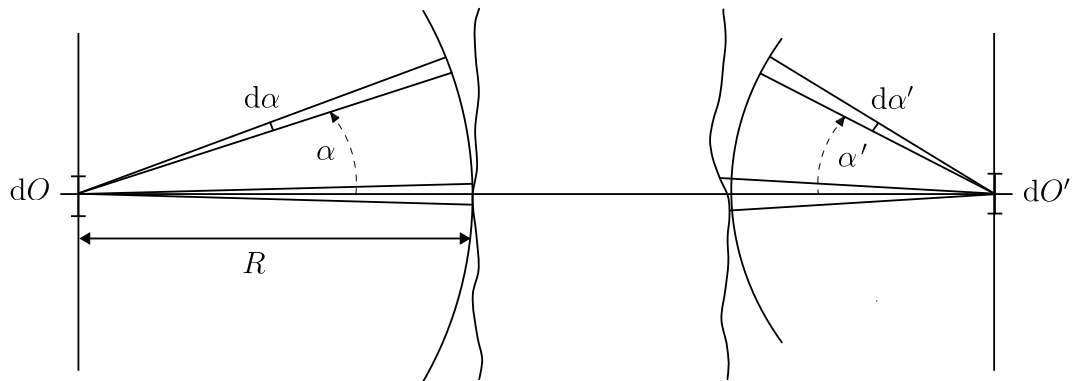
$$x' = R'\alpha'.$$

Voor de afbeelding in een klein gebiedje rond O , begrensd door bijvoorbeeld het punt $Q(\xi, 0)$, geldt dat deze perfect is: alle stralen uitgaande van Q gaan foutvrij door $Q'(\xi', 0)$. Voor de dwarsvergroting geldt,

$$\beta' = \frac{\xi'}{\xi} = \frac{n\alpha}{n'\alpha'}, \quad (3.2)$$



Figuur 3.1: Schets van een optisch stelsel met voorwerps- en beeldvlak door resp. O en O' en het diafragma in het vlak door D . Van het diafragma is ook de afbeelding door tussengelegende optische elementen naar de voorwerpsruimte gegeven (de zogenaamde intrepupil). Een vergelijkbare afbeelding (uittrepupil) van het diafragma in de beeldruimte is aangegeven in het vlak door E' .



Figuur 3.2: De opbouw van een stralenbundel uit het paraxiale deel bij de optische as en uit deelbundels onder een eindige hoek α en met (ringvormige) uitgebreidheid $d\alpha$ in de voorwerpsruimte en overeenkomstige waarden α' en $d\alpha'$ in de beeldruimte.

waarbij α'/α de hoekvergroting van het stelsel is.

Wanneer we stralen onder grotere hoeken beschouwen is het gewenst de straalrichting met richtingscosinussen vast te leggen. In figuur 3.1 is een niet-paraxiale, 'eindige' straal OPP_0 getekend waarvan de ξ -richtingscosinus gelijk is aan $\sin \alpha$. Voor de snijhoogte met het vlak van de intrepupil (punt P_0) geldt dat

$$x_{P_0} = R \tan \alpha, \quad (3.3)$$

terwijl voor de snijhoogte met de intrepupilbol (straal R , middelpunt in O) geldt dat

$$x_P = R \sin \alpha. \quad (3.4)$$

Welke representatie ($\sin \alpha$ of $\tan \alpha$, pupilbol of pupilvlak) de voorkeur verdient kan duidelijk gemaakt worden door af te leiden welke relatie er tussen α en α' moet bestaan om ook bij eindige hoeken een zo goed mogelijke afbeelding te maken.

In figuur 3.2 zijn van een uitgebreide stralenbundel, vertrekkend vanuit het voorwerpselement dO , twee deelbundels getekend; een paraxiale smalle bundel en een smalle bundel met

openingshoek $d\alpha$ en gemiddelde richting α . In de beeldruimte vormen zij ieder een afbeelding. De paraxiale bundel vormt een ideale afbeelding dO' . Voor de schuine bundel kunnen we nog geen uitspraak doen over de wijze waarop het voorwerpselement dO afgebeeld wordt. Deze bundel wordt in de beeldruimte gekarakteriseerd door zijn opspanhoek α' . Op het lichttransport van dO naar dO' kunnen we de wetten van de fotometrie toepassen, zowel voor de paraxiale bundel als voor de schuine bundel.

In de voorwerps- en beeldruimte geldt voor de paraxiale bundel,

$$(n^2 B_0) dO \pi \alpha_p^2 = (n'^2 B_0) dO' \pi \alpha_p'^2, \quad (3.5)$$

waarbij B_0 de helderheid van de bron in vacuüm is en α_p en α_p' de paraxiale straalhoeken zijn. Voor de schuine bundel geldt dat

$$(n^2 B_0) dO \cos \alpha \cdot 2\pi \sin \alpha d\alpha = (n'^2 B_0) dO' \cos \alpha' \cdot 2\pi \sin \alpha' d\alpha',$$

ofwel,

$$(n^2 B_0) dO \cdot \pi d(\sin^2 \alpha) = (n'^2 B_0) dO' \cdot \pi d(\sin^2 \alpha'). \quad (3.6)$$

Als voorwaarde voor een identieke afbeelding door de paraxiale asbundel en door de schuine bundel stellen we dat de dwarsvergroting,

$$\beta'^2 = \frac{dO'}{dO}, \quad (3.7)$$

gelijk is in beide gevallen en met behulp van (3.5) vinden we na integratie van (3.6) de voorwaarde

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha_p} = \frac{\sin \alpha'}{\alpha_p'}. \quad (3.8)$$

Deze voorwaarde kan met behulp van vgl. (3.2) ook geschreven worden als

$$n \sin \alpha = \beta' n' \sin \alpha'. \quad (3.9)$$

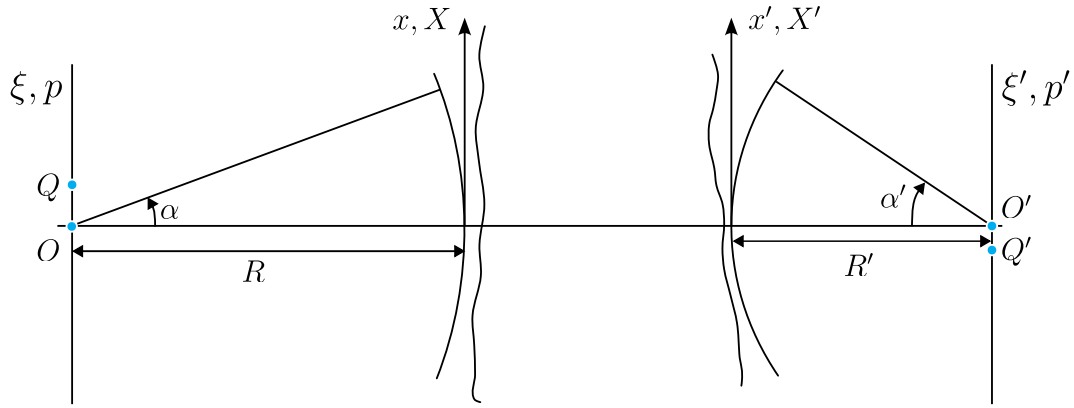
Voorwaarde (3.8) of (3.9) geeft aan dat bij deelbundels onder eindige hoeken de richtingscosinussen in voorwerps- en beeldruimte dezelfde verhouding moeten hebben als de straalhoeken van de marginale stralen van een paraxiale bundel. Deze voorwaarde staat bekend als de sinusvoorwaarde van Abbe en garandeert dat een kleine omgeving van een aspunt O met vergelijkbare aberraties wordt afgebeeld als het aspunt zelf. Op een iets algemenere beschrijving van de sinusvoorwaarde van Abbe komen we later nog terug. Gegeven de sinusvoorwaarde gaat bij de beschrijving van eindige stralen de voorkeur dus uit naar richtingscosinussen en pupilbollen in plaats van naar tangenten en pupilvlakken!

Door Hopkins is uitgaande van de sinusvoorwaarde een genormeerd coördinatensysteem voorgesteld in voorwerps- en beeldvlak en op de pupilbollen (zie figuur 3.3). Gegeven een voorwerpspunt Q met coördinaten $(\xi, 0)$ geldt voor de coördinaten van het beeldpunt Q' $(\xi', 0)$ dat

$$\xi' = \beta' \xi = \frac{n \alpha_p}{n' \alpha_p'} \xi = \frac{n \sin \alpha_m}{n' \sin \alpha_m'} \xi, \quad (3.10)$$

wanneer het systeem aan de sinusvoorwaarde voldoet. Wanneer we getransformeerde coördinaten p en p' definiëren in voorwerps- en beeldvlak volgens

$$\begin{aligned} p' &= \xi' (n' \sin \alpha') / \lambda, \\ p &= \xi (n \sin \alpha) / \lambda, \end{aligned}$$



Figuur 3.3: Reële coördinaten in het voorwerpsvlak en het vlak van de intreepupil, resp. (ξ, η) en (x, y) . Hun genormeerde (of ook wel *canonieke*) versies volgens Hopkins zijn (p, q) en (X, Y) . In de beeldruimte vinden we dezelfde coördinaten, voorzien van een accent.

gaat vgl. (3.10) over in

$$p' = p, \quad (3.11)$$

hetgeen betekent dat de vergroting nu op 1 genormeerd is.

Voor de doorsnijdingspunten van de stralen met de pupilbollen kunnen we schrijven,

$$\frac{X}{R} = \sin \alpha, \quad \frac{X'}{R'} = \sin \alpha'.$$

Na een schaling volgens

$$X = \frac{x}{x_{\max}}, \quad X' = \frac{x'}{x'_{\max}},$$

waarbij x_{\max} en x'_{\max} bepaald worden door de maximale waarden van $\sin \alpha$ en $\sin \alpha'$, geldt vervolgens dat

$$X = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_m}, \quad X' = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha'_m}. \quad (3.12)$$

De coördinaten X en X' zijn dus geschaald op het interval $[-1, +1]$ en de sinusvoorwaarde reduceert tot de uitdrukking

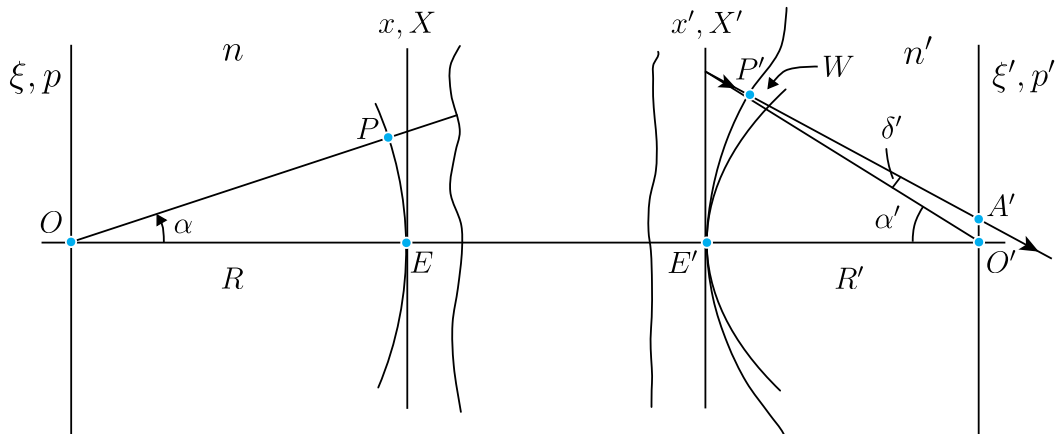
$$X' = X. \quad (3.13)$$

Dit betekent dat de doorsnijdingshoogten van de stralen met de pupilbollen in gereduceerde coördinaten gelijk moeten zijn.

III.2 De aberratiefunctie in gereduceerde coördinaten

Bij het bepalen van het straalverloop door een optisch stelsel kan men via berekening van de optische weglengte langs stralen van een bundel het golffront in de uitreepupil bepalen. In figuur 3.4 is de afwijking $W_m(X')$ van het golffront ten opzichte van de referentiebol met kromtemiddelpunt O' getekend. Bij de in de figuur getekende situatie stellen we dat de golf-frontafwijking $W_m(x')$ positief is. Gegeven W_m kunnen we ook een hoekaberratie δ' van een straal aangeven volgens

$$\delta' = \frac{1}{n'} \frac{\partial W_m}{\partial x'} \cos \alpha', \quad (3.14)$$



Figuur 3.4: Schets van de golffrontaberratie W ten opzichte van een sferische referentiebol met straal R' in de uittreepupil door E' . Een apertuurstraal $OPP'A'$ snijdt het golffront in P' . In de figuur is volgens de tekenafspraken de waarde van W positief.

en een dwarsaberratie $\delta\xi' = O'A'$, gegeven door

$$\delta\xi' = \frac{R}{n'} \frac{\partial W_m}{\partial x'}. \quad (3.15)$$

Wanneer we overgaan op de gereduceerde coördinaten p' en X' kan (3.15) geschreven worden als:

$$\delta p' = \frac{\partial W}{\partial X'}. \quad (3.16)$$

Hierbij zijn we ook overgegaan van W_m naar W door de golffrontaberratie te schalen met de golflengte λ .

In figuur 3.5 zijn een asbundel getekend, vertrekkend uit O , en een scheve bundel die uit een naburig punt $Q(\delta\xi, 0)$ vertrekt. Voor een bepaalde straal vanuit O met richtingscosinus $\sin\alpha$ is de richtingscosinus in de beeldruimte $\sin\alpha'$ (we veronderstellen dat de afbeelding in O' geen fouten heeft en dat het uittreedende golffront dus sferisch is). Voor de bundel vanuit Q is de referentiebol gecentreerd in dit punt Q en deze snijdt de as in E , de positie van de intreepupil. De optische weglengte vanaf deze referentiebol tot de referentiebol aan de beeldzijde (centrum in Q') wordt gegeven door

$$W = [P_1P] + [PP']_{QQ'} - [P_1'P'] , \quad (3.17)$$

waarbij W uitgedrukt is in eenheden van de golflengte λ .

Gegeven de aberratievrije afbeelding voor de aspunten O en O' geldt nu dat

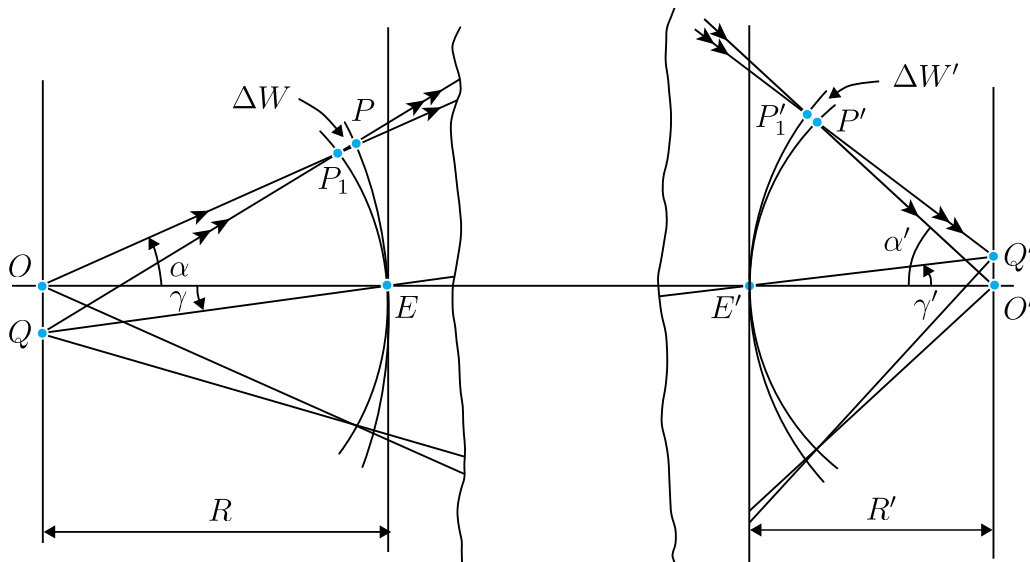
$$[PP']_{OO'} = [EE']_{OO'} ,$$

en voor kleine excursies OQ mogen we stellen met behulp van het principe van Fermat dat

$$[PP']_{QQ'} = [PP']_{OO'} = [EE']_{OO'} = [EE']_{QQ'} .$$

Voor de aberratieverandering δW_m bij de afbeelding van Q naar Q' vinden we nu dat

$$\begin{aligned} \delta W_m &= [P_1P] - [P_1'P'] = nx \frac{\delta\xi}{R} - n'x' \frac{\delta\xi'}{R'} , \\ \delta W &= X \frac{\delta\xi}{(\lambda/NA)} - X' \frac{\delta\xi'}{(\lambda/NA')} = X \delta p - X' \delta p' = (-\delta X') \delta p' , \end{aligned} \quad (3.18)$$



Figuur 3.5: Schets van een asbundel vanuit O en een scheve bundel vanuit Q . Uit de figuur kan de golffrontafwijking $\Delta W'$ van de scheve bundel richting Q' berekend worden ten opzichte van die van de bundel richting O .

ofwel,

$$\delta X' = -\frac{\partial W}{\partial p'}, \quad (3.19)$$

waarbij gebruik is gemaakt van het feit dat de vergroting dp'/dp volgens (3.11) identiek 1 is. De grootte NA is de numerieke apertuur van de beschouwde bundels en gelijk aan $NA = n \sin \alpha$ in de voorwerpsruimte en aan $NA' = n' \sin \alpha'$ in de beeldruimte van het optische stelsel.

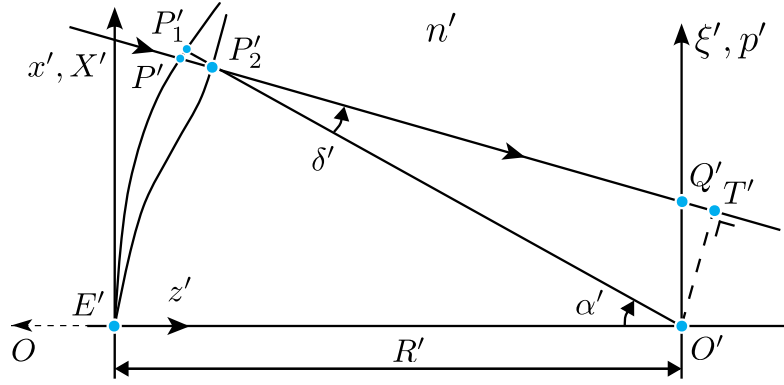
Vergelijking (3.19) zegt dat de afwijking van de sinusvoorwaarde $\delta X'$ gelijk is aan de verandering van de aberratie van een bundel met de veldcoördinaat p' . Het stelsel vergelijkingen (3.16) en (3.19) is verkregen door over te gaan op de gereduceerde coördinaten (p, p') en (X, X') en door de golffrontafwijking in eenheden λ uit te drukken. Deze relaties, die enerzijds de dwarsaberratie aan de golffrontafgeleide in de pupil koppelen en anderzijds de aberratie van een punt buiten de as aan de afwijking van de sinusvoorwaarde relateren, vertonen een formele overeenkomst met de canonieke bewegingsvergelijkingen van Hamilton. Om deze reden wordt ook wel de term canonieke coördinaten gebruikt voor (p, p') en (X, X') . Het spreekt vanzelf dat op volkomen analoge wijze de gereduceerde coördinaten (q, q') en (Y, Y') in de vlakken $x = x' = 0$ gedefinieerd kunnen worden.

Het nut van de canonieke coördinaten is ook onmiddellijk evident wanneer de complexe amplitudeverdeling in het beeldvlak berekend wordt uitgaande van het golffront in de uittreepupil van het stelsel. De buigingsintegraal, geschreven in canonieke coördinaten, neemt dan de vorm van een Fouriertransformatie aan. De lengtemaat waarmee de beeldveldcoördinaten geschaald worden is een maat voor de buigingsonscherpte $\lambda/n' \sin \alpha' = \lambda/NA'$ in het beeldvlak.

III.3 Mogelijke definities van golffrontaberratie

In de voorgaande paragrafen zijn begrippen zoals optische weglengte, verschil in optische weglengte, golffrontafwijking, dwarsaberratie, hoekaberratie gebruikt zonder dat deze begrippen altijd scherp gedefinieerd waren. In deze paragraaf wordt de definitie van golffrontafwijking nog eens nader beschouwd evenals de uit deze golffrontafwijking resulterende dwarsaberratie of hoekaberratie.

In figuur 3.6 is de doorsnede met het $x'z'$ -vlak getekend van een golffront ($E'P_2'$) dat uit een



Figuur 3.6: Schets van de uitreepupilbol door $E'P'P_1'$ en het beeldvlak door $O'Q'$ van een optisch stelsel. Aangegeven zijn het golffront door $E'P_2'$, de dwarsaberratiecomponent $O'Q'$ en de hoekaberratie δ' . Volgens de tekenafspraken die hiervoor in deze notities gehanteerd wordt zijn de drie mogelijke uitdrukkingen voor golffrontaberratie gegeven door $W_A = [P_2'P_1']$, $W_B = [P_2'P']$ en $W_C = [OT'] - [OO'] = [P_2'T'] - [E'O'] = [P_2'T'] - n'R'$.

optisch stelsel treedt. De uitreepupilbol snijdt de optische as in E' en heeft zijn kromtemiddelpunt in O' . Een apertuurstraal $P'P_2'Q'$ (dit is een straal die niet samenvalt met de hoofdstraal) snijdt het beeldvlak in Q' . Wat betreft het teken van de golffrontafwijking hanteren we de conventie dat W gelijk is aan het verschil in optische weglengte tussen $[OP']$ en $[OE']$. Bij de situatie zoals geschetst in figuur 3.6 is de optische weglengte $[OE']$, gerekend vanaf de bron O langs de as naar E' , groter dan de optische weglengte $[OP']$ langs de apertuurstraal tot de referentiebol; W is hier dus negatief. Met de afspraak dat de fase langs een lopende golf toeneemt in de loopzin ($\phi = -\omega t + kz$) geeft dit ook voor het faseverschil $\Delta\phi$ tussen de amplitudes in P' en E' de waarde

$$\Delta\phi = \phi_{P'} - \phi_{E'} < 0.$$

In de literatuur is er helaas geen overeenstemming over de keuze van het teken van W (en de bijbehorende waarde van ϕ). Een gezaghebbend boek, *Principles of Optics* van de auteurs Born/Wolf, hanteert dezelfde tekenafspraken voor golffrontaberratie als hierboven aangegeven, net zoals het boek *Imaging Optics* van Braat/Török. Andere veelgebruikte boeken, zoals bijv. *Aberrations of Optical Systems* van Welford en *Modern Optical Engineering* van Smith hanteren een definitie van W met het tegengestelde teken.

Golffrontaberratie, definitie A

Volgens een eerste definitie (B. Nijboer) wordt de golffrontafwijking W_A gelijkgesteld aan de optische weglengte $[P_2'P_1']$. De secundaire golven die volgens het principe van Huygens uit de buiging veroorzakende uitreepupil treden, planten zich dus volgens Nijboer's definitie langs de weg $P_1'O'$ voort. De complexe amplitude in O' wordt verkregen door de amplitudes van alle secundaire golven met hun juiste fase in O' op te tellen. De faseverschillen $\phi_{P_1'}$ worden gegeven door

$$\phi_{P_1'} = \frac{2\pi}{\lambda_0} W_A = \frac{2\pi}{\lambda_0} n' P_2' P_1' = k_0 [P_2' P_1'], \quad (3.20)$$

waarbij λ_0 de golflengte in vacuüm is.

Gegeven het coördinatenstelsel (x', y', z') met zijn oorsprong in E' en rakend aan de uitreepupilbol, wordt de vergelijking van het golffront gegeven door

$$G(x', y', z') = x'^2 + y'^2 + (z' - R')^2 - \left(R' + \frac{W_A}{n'}\right)^2 = 0. \quad (3.21)$$

Aangezien de lichtstralen normalen van het golffront zijn kunnen we voor de vergelijking van een lichtstraal schrijven,

$$(x'_s, y'_s, z'_s) = (x'_{P'_2}, y'_{P'_2}, z'_{P'_2}) + \mu \nabla G, \quad (3.22)$$

waarbij de gradiëntvector van het golffront G gegeven wordt door

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x'} &= 2x' - 2 \left(R' + \frac{W_A}{n'} \right) \frac{1}{n'} \frac{\partial W_A}{\partial x'}, \\ \frac{\partial G}{\partial y'} &= 2y' - 2 \left(R' + \frac{W_A}{n'} \right) \frac{1}{n'} \frac{\partial W_A}{\partial y'}, \\ \frac{\partial G}{\partial z'} &= 2(z' - R'). \end{aligned} \quad (3.23)$$

De coördinaten van het snijpunt Q' van een lichtstraal met het beeldvlak zijn gegeven door

$$\begin{aligned} \delta \xi'_{Q'} &= \left(\frac{R' + \frac{W_A}{n'}}{n'} \right) \frac{\partial W_A}{\partial x'}, \\ \delta \eta'_{Q'} &= \left(\frac{R' + \frac{W_A}{n'}}{n'} \right) \frac{\partial W_A}{\partial y'}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

De afstand $O'Q'$ gemeten in het beeldvlak heet de dwarsaberratie van de lichtstraal en $\delta \xi'$ en $\delta \eta'$ zijn de bijbehorende dwarsaberratiecomponenten.

In canonieke coördinaten uitgedrukt vinden we,

$$\begin{aligned} \delta p'_{Q'} &= \left(1 + \frac{W_A}{n'R'} \right) \frac{\partial W_A}{\partial X'}, \\ \delta q'_{Q'} &= \left(1 + \frac{W_A}{n'R'} \right) \frac{\partial W_A}{\partial Y'}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

waarbij W_A nu in eenheden λ is uitgedrukt.

Deze uitdrukking voor de dwarsaberratie is een verfijnde vorm van vgl. (3.16), die alleen voor kleine hoekaberratie δ' geldig was. Let wel dat (X', Y') hier de coördinaten van het punt P'_2 aanduiden.

Golffrontaberratie, definitie B

Een tweede definitie stelt de golffrontafwijking gelijk aan de afstand P'_2P' tussen de referentiebol en het golffront, gemeten langs de lichtstraal waarlangs volgens geometrisch optische begrippen de lichtenergie zich voortplant. Ook met deze definitie kunnen we de dwarsaberratie $O'Q'$ berekenen. De optische weglengte langs de lichtstraal van het punt O tot het golffront in P'_2 en de optische weglengte langs de optische as van O tot E' worden gegeven door

$$[OP'_2P'_2] = [OE'], \quad (3.26)$$

en in termen van de puntkarakteristieke functie V van Hamilton levert dit de uitdrukking

$$V(0, 0, 0; x', y', z') = V(0, 0, 0; 0, 0, 0) + W_B(x', y'). \quad (3.27)$$

Voor de richtingscosinussen van de lichtstraal in P' schrijven we

$$n'L' = \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x'},$$

$$\begin{aligned} n'M' &= \frac{\partial V}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y'}, \\ n'N' &= \frac{\partial V}{\partial z'}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

waarbij P' op de referentiebol door E' ligt die gegeven wordt door de vergelijking

$$x'^2 + y'^2 + (z' - R')^2 = R'^2. \quad (3.29)$$

Voor de vergelijking van de lichtstraal in vectorvorm vinden we

$$(x'_s, y'_s, z'_s) = (x'_{P'}, y'_{P'}, z'_{P'}) + \mu (L', M', N'), \quad (3.30)$$

en voor de coördinaten van het punt Q' volgt dan

$$\begin{aligned} \delta\xi'_{Q'} &= \frac{1}{n'} \left(\frac{R' - z_{P'}}{N'} \right) \frac{\partial W_B}{\partial x'} = \frac{1}{n'} P'Q' \frac{\partial W_B}{\partial x'} \\ \delta\eta'_{Q'} &= \frac{1}{n'} P'Q' \frac{\partial W_B}{\partial y'}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Op de gebruikelijke manier transformeren we de uitdrukkingen naar canonieke coördinaten met als resultaat,

$$\begin{aligned} \delta p'_{Q'} &= \frac{P'Q'}{R'} \frac{\partial W_B}{\partial X'}, \\ \delta q'_{Q'} &= \frac{P'Q'}{R'} \frac{\partial W_B}{\partial Y'}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

waarbij W_B nu in eenheden λ is uitgedrukt.

Golffrontaberratie, definitie C

De derde definitie van golffrontaberratie is gebaseerd op de hoek-eikonale functie van Hamilton (zie figuur 3.6),

$$\begin{aligned} W_C(x', y') &= [OP'P'_2Q'T'] - [OE'O'] \\ &= [P'T'] - [P'P'_2] - [E'O'] \\ &= n' \{-L'x' - M'y' + N'(R' - z')\} + W_B(x', y') - n'R' \\ &= W_B(x', y') + n'R' \{\cos \delta' - 1\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

waarbij δ' de hoek is die de apertuurstraal met richtingscosinussen (L', M', N') maakt met de normaal op de referentiebol in P' .

Onder gebruikmaking van de waarde van de dwarsaberratie

$$\varepsilon' = OQ' = \sqrt{\delta\xi'^2 + \delta\eta'^2},$$

en voor kleine hoeken δ' schrijven we

$$n'R'(\cos \delta' - 1) = -n'R' \frac{\delta'^2}{2} = -n' \left(\frac{\varepsilon'}{R'} \right) \varepsilon' \cos^2 \alpha'. \quad (3.34)$$

Bij een vergelijking van de drie definities van golffrontaberratie valt het op dat het verschil tussen de definities A en B van de orde $W\delta'^2$ is terwijl de derde definitie C afwijkt ten opzichte van A en B met een bedrag ter grootte $R'\delta'^2$,

$$\begin{aligned}\Delta W_{A \rightarrow B} &\propto W \left(\frac{\varepsilon'}{R'} \right)^2, \\ \Delta W_{C \rightarrow (A,B)} &\propto R' \left(\frac{\varepsilon'}{R'} \right)^2.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Uit vgl. (3.35) concluderen we dat bij een voldoende grote straal R' van de referentiebol de drie definities in elkaar overgaan, de derde echter slechts volgens een $1/R'$ -afhankelijkheid.

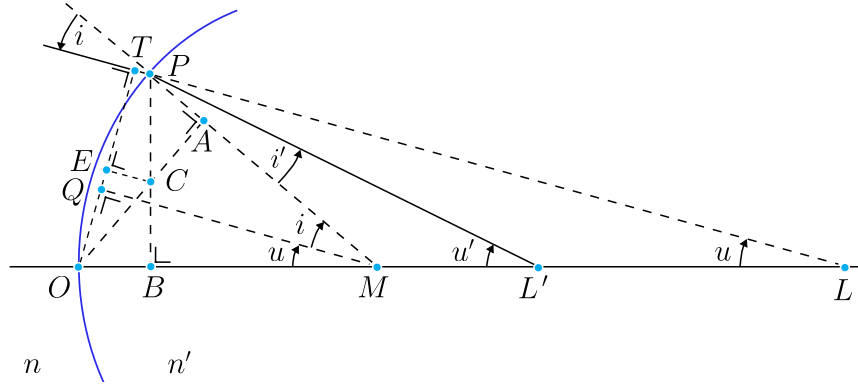
Fysisch beschouwd sluiten de eerste twee definities het best aan bij het Huygens-Fresnel principe voor buiging van licht door een apertuur begrenzing. Definitie A legt de fase van de secundaire golven exact vast; definitie B bepaalt de weglengte vanaf de referentiebol langs de lichtstraal hetgeen formeel onjuist is. In de praktijk zijn deze verschillen echter verwaarloosbaar. Definitie C is fysisch minder correct omdat het transport van de lichtenergie ook voorbij de buigende opening verondersteld wordt te verlopen volgens de wetten van de geometrische optica en wel langs de lichtstraal $P'Q'$. In situaties waarbij de dwarsaberratie ε' niet geheel verwaarloosbaar is ten opzichte van de straal van de referentiebol R' moet definitie C vermeden worden. Daarentegen biedt definitie C praktische voordelen als R' naar oneindig nadert (telecentrische pupilligging) en bovendien is de berekende golffrontfout dan ook exact.

Hoofdstuk IV

Straaldoorrekening

De analyse van een optisch systeem vindt plaats aan de hand van de aberraties van stralen die vanuit het voorwerps(opper)vlak naar de beeldruimte van het systeem vervolgd worden. Men kan bijvoorbeeld vanuit een punt in het voorwerpsvlak een bundel stralen laten vertrekken en de doorsnijdingspunten met het beeldvlak bepalen. Wanneer de stralen de intreepupil van het systeem treffen zodanig dat het aantal stralen per eenheid van oppervlak (ruimtehoek) constant is, kan aan de hand van de snijpunten met het beeldvlak een geometrisch optische intensiteitsverdeling bepaald worden. De dwarsaberratie is dan de maatgevende parameter van een lichtstraal en de intensiteitsverdeling in het beeldvlak wordt verkregen zonder acht te slaan op de faserelatie tussen de lichtstralen. Wanneer de dwarsaberraties voldoende groot zijn (beduidend groter dan de minimale buigingsonscherpte van het stelsel) is deze aanpak gerechtvaardigd. Bij kleinere aberratiewaarden is het nodig de buigingseffecten ten gevolge van de eindige golflengte van het licht correct in rekening te brengen. Een voor veel praktische situaties geschikte methode hanteert de geometrisch optische benadering van lichtvoortplanting in die delen van het optische stelsel waar de lichtstralen voldoende ver (bijv. een afstand van 100 golflengten) van randen verwijderd zijn. De buiging vindt uiteindelijk plaats aan het begrenzend diafragma in het stelsel. Aangezien de uitreepupil een afbeelding is van dit diafragma mag men zich de buigingsverschijnselen ook voorstellen als zijnde afkomstig van de rand van deze uitreepupil. In het ideale geval treedt uit de uitreepupil een begrensd sferische golf en de vorm van het buigingsbeeld wordt gegeven door de welbekende Airy intensiteitsverdeling met als karakteristieke maat de grootte $(\lambda/n')/\sin \alpha' = (\lambda/NA)$. De onvolkomenheden van het optische stelsel uiten zich in aberraties van de uit de uitreepupil tredende golf en leiden tot een verbreding van het buigingsbeeld.

Er zijn diverse wegen om met meer of minder precisie de grootte van de golffrontaberratie te berekenen. We zien hier af van benaderende methoden, die later besproken zullen worden (aberratietheorie van Seidel), en van de aberratieberekeningen via de eikonale functie. We richten ons in dit hoofdstuk op de exacte (numerieke) methode die bestaat uit het berekenen van de optische weglengte van stralen door het optische stelsel vanaf het voorwerpspunt tot de referentiebol in de uitreepupil. De stralengang wordt berekend door een exacte toepassing van de wet van Snellius of de reflectiewet. Eventueel wordt ook een richtingsverandering door buiging aan een lokaal aanwezig periodiek raster in rekening gebracht. Ook de stralengang in materialen met een continue verloopende brekingsindex kan in principe exact bepaald worden. Een grote precisie moet nagestreefd worden omdat de stralen, die geheel verschillende wegen doorlopen, uiteindelijk het golffront in de uitreepupil bepalen. Hun weglengteverschillen moeten nauwkeurig bekend zijn tot op een fractie van de golflengte.



Figuur 4.1: Bepaling van het snijpunt P met een optisch oppervlak (top in O , kromtemiddelpunt M) van een invallende (meridionale) lichtstraal PL en berekening van de gebroken straal PL' .

IV.1 Breking/reflectie aan een sferisch oppervlak

Het algemene geval van breking van een straal aan een sferisch oppervlak treedt op als de straal de optische as van het stelsel kruist. We spreken in dit geval van een scheve straal (engels: skew ray, Duits: windschiefer Strahl) in tegenstelling tot zogenaamde meridiale stralen die de optische as snijden. Voor een geïsoleerd sferisch oppervlak met het kromtemiddelpunt M als symmetriepunt is het altijd mogelijk een hulpvlak te kiezen dat de straal bevat. We beschouwen nu eerst de breking van meridiale stralen en vervolgens die van algemene scheve stralen.

IV.1.1 Meridionale stralen

In figuur 4.1 is een straal TP getekend die de optische as ongebroken in L zou snijden ($OL = l$, $OL' = l'$). De hoek die de straal met de optische as maakt is u (negatief in de figuur). De loodrechte afstand van de straal tot de top van het brekende oppervlak is $OT = OQ + QT = D$. Uit de figuur kan afgelezen worden, aangezien MQ evenwijdig is aan TPL ,

$$D = -l \sin u = -R(\sin u + \sin i), \quad (4.1)$$

ofwel,

$$\sin i = \frac{(R - l)}{R} \sin u.$$

Met gebruikmaking van de brekingswet

$$\sin i' = \frac{n}{n'} \sin i, \quad (4.2)$$

en via de betrekking $u' = i + u - i'$ vinden we voor de loodrechte afstand D' van de gebroken straal tot de top van het oppervlak

$$D' = -l' \sin u' = -R(\sin u' + \sin i'). \quad (4.3)$$

Uitdrukking (4.3) wordt numeriek instabiel en uiteindelijk ongedefinieerd wanneer R zeer groot wordt (in de limiet een vlak brekend of reflecterend oppervlak). Een oplossing voor dit probleem vinden we via de constructie van de hulplijnen OA , PB en CE . Er geldt nu dat $\angle COE = i$, $\angle TOB = 90^\circ + u$, $OC = PC$ en dit levert de uitdrukking

$$OC = \frac{D}{\cos i + \cos u}. \quad (4.4)$$

Het lijnstuk OC kan ook uitgedrukt worden in grootheden van de gebroken straal en dit levert de uitdrukking

$$D' = D \left(\frac{\cos i' + \cos u'}{\cos i + \cos u} \right), \quad (4.5)$$

die numeriek stabiel is en overgaat in $D' = D \cos u' / \cos u$ in het geval van een vlak oppervlak. Voor de coördinaten van het snijpunt P met het oppervlak volgt nu

$$\begin{aligned} x_p &= 0, \\ y_p &= D \left[\frac{1 + \cos(i + u)}{\cos i + \cos u} \right], \\ z_p &= -D \left[\frac{\sin(i + u)}{\cos i + \cos u} \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Gemeten ten opzichte van een volgend oppervlak op een afstand d_2 vinden we voor de grootheid D de uitdrukking

$$D_2 = D'_1 + d_2 \sin u'_1. \quad (4.7)$$

Vgl. (4.7) heet de transportvergelijking. Met behulp van de waarde D_2 kan nu het brekingsproces aan het volgende oppervlak doorgevoerd worden. We merken nog op dat in het geval van reflectie voor de brekingsindex n' de waarde $-n$ genomen moet worden.

IV.1.2 Scheve stralen

In figuur 4.2 is een invallende straal \mathbf{s} getekend die een boloppervlak (middelpunt M) snijdt in een algemeen punt $P_1(x, y, z)$ en na breking overgaat in de lichtstraal \mathbf{s}' . De brekingswet van Snellius in vectorvorm luidt (vgl. 1.40),

$$(n'\mathbf{s}' - n\mathbf{s}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (4.8)$$

waarbij \mathbf{v} de uitwendige normaalvector in het punt P_1 is. Wanneer we vergelijking (4.8) vectorieel vermenigvuldigen met \mathbf{v} vinden we de uitdrukking

$$(n'\mathbf{s}' - n\mathbf{s}) - \{\mathbf{v} \cdot (n'\mathbf{s}' - n\mathbf{s})\} \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

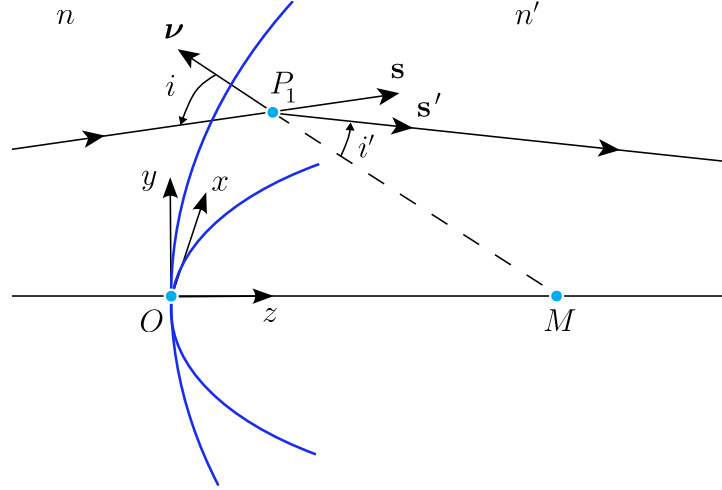
Uit de vectorvergelijking (4.9) ontstaan de volgende drie vergelijkingen voor de kentallen van de gebroken vector \mathbf{s} ,

$$\begin{aligned} n'L' &= nL + A\mathbf{v}_1, \\ n'M' &= nM + A\mathbf{v}_2, \\ n'N' &= nN + A\mathbf{v}_3. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Hierbij zijn $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de kentallen van de normaalvector \mathbf{v} terwijl de grootheid A gelijk is aan $(n' \cos i' - n \cos i)$. Bij loodrechte inval op het oppervlak is A gelijk aan het optische contrast $(n' - n)$. De kentallen van de normaalvector worden gegeven door

$$\mathbf{v}_1 = +\frac{x_{P_1}}{R}, \quad \mathbf{v}_2 = +\frac{y_{P_1}}{R}, \quad \mathbf{v}_3 = -1 + \frac{z_{P_1}}{R}. \quad (4.11)$$

Met behulp van (4.11) kunnen we (4.10) nu schrijven als



Figuur 4.2: Driedimensionale geometrie voor de breking in P_1 van een lichtstraal \mathbf{s} door een sferisch oppervlak (top in O , kromtemiddelpunt in M). De gebroken lichtstraal is \mathbf{s}' .

$$\begin{aligned} n'L' &= nL + A'x_{P_1}, \\ n'M' &= nM + A'y_{P_1}, \\ n'N' &= nN + A'(R - z_{P_1}), \end{aligned} \quad (4.11a)$$

waarbij $A' = (n' \cos i' - n \cos i) / R$ wel de *algemene* sterkte van het oppervlak bij *scheve* inval genoemd wordt. Bij loodrechte inval reduceert A' tot de waarde $(n' - n) / R$, de paraxiale optische sterkte van het oppervlak.

Het snijpunt P_1 met het sferische oppervlak kan bepaald worden met behulp van een kwadratische vergelijking. Gegeven het snijpunt $P_0(x_0, y_0, x_0)$ met het voorafgaande oppervlak (zie figuur 4.3), vinden we voor de coördinaten van het punt T in het raakvlak door de top O_1 van het beschouwde oppervlak,

$$\begin{aligned} x_T &= x_0 + \frac{L}{N} (d - z_0), \\ y_T &= y_0 + \frac{M}{N} (d - z_0), \\ z_T &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

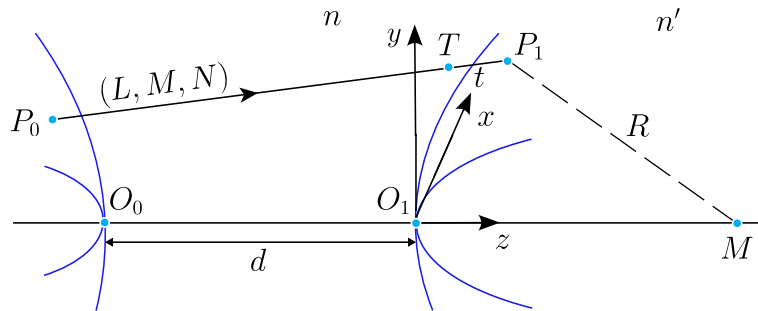
We stellen de afstand TP_1 gelijk aan t en de coördinaten van P_1 worden dan gegeven door

$$\begin{aligned} x_{p_1} &= x_T + Lt, \\ y_{p_1} &= y_T + Mt, \\ z_{p_1} &= Nt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aangezien P_1 op de bol met straal R en middelpunt in M moet liggen ontstaat de volgende vergelijking in t :

$$t^2 + 2t \{Lx_T + My_T - NR\} + x_T^2 + y_T^2 = 0. \quad (4.14)$$

Van de twee mogelijke oplossingen voor t is meestal de oplossing met de kleinste waarde de gewenste.



Figuur 4.3: De numeriek stabiele berekening van de optische weglengte bij het transport langs een lichtstraal tussen twee optische oppervlakken, O_0 en O_1 , op een grote afstand d .

Door herhaalde toepassing van vgl. (4.11a), (4.12) en (4.13) kan men het verloop van een straal door een optisch stelsel bepalen. Is men slechts geïnteresseerd in de dwarsaberratie van de beeldstraal, dan is de bepaling van het snijpunt van een straal met het beeldvlak voldoende. Voor de bepaling van de golffrontaberratie moet ook de optische weglengte langs de straal berekend worden. De optische weglengte Δ volgt uit figuur 4.3 en is gelijk aan

$$\Delta = [P_0P_1] = \frac{n}{N} (d + z_{P_1} - z_{P_0}) . \quad (4.15)$$

De totale optische weglengte langs een straal wordt verkregen door een sommatie over Δ in alle tussenruimten tot de referentiebol in de uittreepupil.

Uiteindelijk is slechts het weglengteverschil met een referentiestraal (bijv. de hoofdstraal van een scheve bundel) van belang. Wanneer er grote afstanden d_i in het stelsel voorkomen, kan de berekening van het weglengteverschil langs twee stralen onnauwkeurig worden. Het is dan aan te raden de verschillen per tussenruimte op te maken. Zijn de snijpunten van de referentiestraal met de twee beschouwde oppervlakken door O_0 en O_1 respectievelijk Q_0 en Q_1 , dan geldt voor het weglengteverschil,

$$\begin{aligned} \Delta_P - \Delta_Q &= [P_0P_1] - [Q_0Q_1] = \frac{n}{N_P} (d + z_{P_1} - z_{P_0}) - \frac{n}{N_Q} (d + z_{Q_1} - z_{Q_0}) \\ &= \frac{nd [L_P^2 + M_P^2 - L_Q^2 - M_Q^2]}{N_P N_Q (N_P + N_Q)} + \frac{n}{N_P} (z_{P_1} - z_{P_0}) - \frac{n}{N_Q} (z_{Q_1} - z_{Q_0}) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

In uitdrukking (4.16) komt de afstand d voor in een product met het verschil van de kwadraten van de x - en y -richtingscosinussen van de lichtstralen en een dergelijk product kan ook geschreven worden als

$$d \{ (L_P - L_Q) (L_P + L_Q) + (M_P - M_Q) (M_P + M_Q) \}$$

De factoren $d(L_P - L_Q)$ en $d(M_P - M_Q)$ zijn hier van de orde van de diameter Φ van het optische stelsel en blijven dus onder alle omstandigheden eindig. De twee laatste termen in (4.16) zijn altijd klein (hoogstens van de orde Φ) en de totale uitdrukking levert daarom een numeriek stabiele waarde voor het optische weglengteverschil in een (tussen)ruimte.

IV.2 Breking/reflectie aan een asferisch oppervlak

Een sferisch oppervlak is te beschouwen als de ontgaarding van een algemeen kwadratisch oppervlak. Een dergelijk oppervlak vertoont in elk punt twee extreme waarden voor de kromming van de curve die ontstaat als het oppervlak door een vlak, loodrecht op het raakvlak, gesneden wordt. Deze zogenaamde hoofdkrommingen worden aangetroffen in vlakken die loodrecht op

elkaar staan. De snijcurve met een sferisch oppervlak vertoont in elk vlak loodrecht op het raakvlak dezelfde kromming. Wat betreft de afwijking van de sfericiteit kan men voor een algemeen oppervlak de volgende indeling maken,

1. het oppervlak is kwadratisch en vertoont rotatiesymmetrie rond de z -as. We hebben te maken met gedeelten van een omwentelingsellipsoïde, paraboloid of hyperboloid. De coördinaten x en y komen in de uitdrukking voor het oppervlak slechts in de combinatie $(x^2 + y^2)$ voor. Voor dit type oppervlakken kan op analytische wijze een uitdrukking voor het snijpunt van een straal met het oppervlak en voor de bijbehorende normaalvector gevonden worden.
2. het oppervlak vertoont omwentelingssymmetrie rond de z -as maar is van hogere orde dan kwadratisch. De z -coördinaat van zo'n oppervlak kan voorgesteld worden door de volgende reeksontwikkeling:

$$z = \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon c^2(x^2 + y^2)}} + \sum_{n=2}^{n_0} a_{2n} (x^2 + y^2)^{2n}, \quad (4.17)$$

waarbij de eerste term door een kwadratisch oppervlak (kegelsnede) geleverd wordt en de additionele machtreeks (laagste term is van de vierde macht in $(x^2 + y^2)^{1/2}$) de afwijking ten opzichte van deze kegelsnede voorstelt. Een enigszins verwarrend aspect van de voorstelling volgens (4.17) is het feit dat de eerste term ook hogere dan kwadratische termen bijdraagt. De kwadratische term heeft als coëfficiënt $c/2$; de waarde van de hogere orde coëfficiënten hangt zowel van c als van ε af. Slechts in het geval van een paraboloid ($\varepsilon = 0$) worden deze coëfficiënten nul. Het snijpunt van een straal met een 'hogere orde' asferisch oppervlak kan in het algemeen slechts numeriek op iteratieve wijze gevonden worden. De normaalvector van het asferische oppervlak wordt verkregen als de gradiëntvector van de functie die het oppervlak beschrijft.

$$g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0. \quad (4.18)$$

3. het oppervlak vertoont géén omwentelingssymmetrie. Een bekend voorbeeld is het oppervlak van een cilinderlens met focuserende werking parallel aan het $x - z$ vlak; de z -coördinaat van een dergelijk oppervlak kan geschreven worden als

$$z = \frac{c_x x^2}{1 + \sqrt{1 - c_x^2 x^2}}. \quad (4.19)$$

Een dergelijk cilinder-oppervlak kan men zich voorstellen als het resultaat van een rotatie van de cirkeldoorsnede in het xz -vlak om een oneindig ver verwijderde rotatie-as parallel aan de x -as. Wanneer de rotatie-as niet oneindig ver weg is, ontstaat een torus-oppervlak (toroïde, 'fietsband', 'biervat') met in het punt ($x = y = 0$) twee verschillende hoofdkrommingen c_x en c_y in respectievelijk het xz - en het yz -vlak. Wanneer de twee hoofdkrommingen een verschillend teken hebben, spreekt men van een zadelvlak.

Het bepalen van het snijpunt van een lichtstraal met een algemeen toroïdaal oppervlak geschiedt iteratief; dit is de enige mogelijkheid wanneer de geroteerde curve, die het toroïdale oppervlak gevormd heeft, van hogere orde dan kwadratisch is.

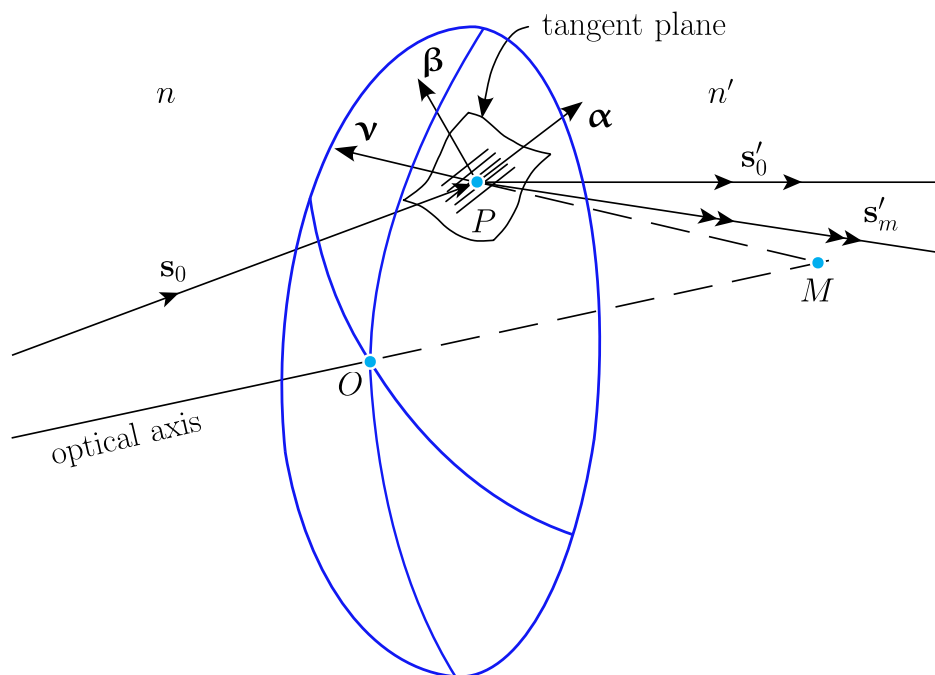
Als het snijpunt met een asferisch oppervlak eenmaal gevonden is verloopt de berekening van de gebroken straalvector volgens vgl. (4.9), waarbij de normaalvector uit (4.18) verkregen wordt.

IV.3 Buiging aan periodieke structuren

Alhoewel binnen het raamwerk van de geometrische optica buiging een onbekend verschijnsel is, kunnen we toch pogen de verschillende richtingen waarin het energietransport plaatsvindt bij buiging aan bijv. een raster in rekening te brengen. Hierbij veronderstellen we dat de afbuiging van een lichtstraal eenduidig bepaald wordt door de periode (ruimtetrequentie) van de rasterstructuur ter plaatse van het snijpunt van een lichtstraal met een oppervlak. De afbuighoek wordt berekend door ervan uit te gaan dat het weglengteverschil tussen een 0-de orde en een m -de orde afgebogen straal moet toenemen met $m\lambda$ wanneer men het referentiepunt over een afstand van één rasterperiode verplaatst in een richting loodrecht op de rasterlijnen. Men kan ook stellen dat de 1-ste orde afgebogen straal een zodanige richting moet hebben dat het bijbehorende golffront via interferentie met het 0-de orde golffront een intensiteitspatroon zou genereren dat dezelfde periode heeft als het rasterpatroon dat in het raakvlak, ter plaatse van het snijpunt, aanwezig is.

IV.3.1 Uitdrukking voor een afgebogen straal

In figuur 4.4 is een invallende straal \mathbf{s}_0 getekend die een grensovergang tussen twee media treft (brekingsindex n en n'). Op de overgang is een rasterstructuur aanwezig met een ruimtetrequentie $f_r = 1/p$. De richting van de rasterlijnen ter plaatse van het snijpunt P van de invallende straal is gegeven door de eenheidsvector $\boldsymbol{\alpha}$. De eenheidsvector $\boldsymbol{\beta}$, loodrecht op de rasterlijnen vormt met de vector $\boldsymbol{\alpha}$ en de normaalvector \mathbf{v} op het oppervlak een orthonormale



Figuur 4.4: Straalbehandeling bij gecombineerde breking/reflectie en diffractie aan een optisch oppervlak. In het snijpunt P met het sferische oppervlak treft de invallende straal \mathbf{s}_0 een lokaal raster, gedefinieerd door de raster-eenheidsvector $\boldsymbol{\beta}$ in het raakvlak aan het oppervlak in P , loodrecht op de rasterlijnen. De eenheidsvector $\boldsymbol{\alpha}$, parallel aan de rasterlijnen, de rastervector $\boldsymbol{\beta}$ en de uitwendige normaalvector \mathbf{v} in het punt P vormen een rechtshandig lokaal assenstelsel. De invallende straal splitst zich in een aantal afgebogen stralen \mathbf{s}'_m . De afgebogen straal van orde $m = 0$ komt qua richting overeen met de standaard gebroken straal \mathbf{s}'_0 die aan de wet van Snellius voldoet.

basis. De gebroken straal \mathbf{s}'_0 kan bepaald worden aan de hand van vergelijking (4.10). In de hieropvolgende afleiding wordt \mathbf{s}'_0 verkregen als het bijzondere geval van de 0-de orde 'afgebogen' straal ($m = 0$).

De afgebogen straalvector \mathbf{s}'_m moet een zodanige richting hebben dat de verschilvector $(\mathbf{s}'_m - \mathbf{s}'_0)$ loodrecht op de rasterlijnen staat. Aangezien de rasterlijnen ook loodrecht op de normaalvector staan, kunnen we de eenheidsvector $\boldsymbol{\alpha}$ schrijven als

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{s}'_m - \mathbf{s}'_0)}{|\mathbf{v} \times (\mathbf{s}'_m - \mathbf{s}'_0)|} = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{s}'_m - \mathbf{s}'_0)}{\alpha_0}. \quad (4.20)$$

De normeringsfactor α_0 is gerelateerd aan de lokale ruimtelfrequentie $1/p$. Voor de afgebogen straal \mathbf{s}'_m moet gelden dat het weglengteverschil met de 0-de orde straal toeneemt met $m\lambda_0/n'$ bij een verplaatsing p in de richting van $\boldsymbol{\beta}$. Deze voorwaarde wordt geschreven als

$$p \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{s}'_m - \mathbf{s}'_0) = m \frac{\lambda_0}{n'}, \quad (4.21)$$

waarbij λ_0/n' de golflengte in het medium met brekingsindex n' is.

Vanwege het feit dat $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ en \mathbf{v} een orthonormale basis vormen geldt dat

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.22)$$

De substitutie van (4.22) in (4.21) onder gebruikmaking van (4.20) geeft de uitdrukking

$$\frac{p}{\alpha_0} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \times (\mathbf{s}'_m - \mathbf{s}'_0) \cdot (\mathbf{s}'_m - \mathbf{s}'_0) = m \frac{\lambda_0}{n'}, \quad (4.23)$$

ofwel,

$$\frac{p}{\alpha_0} \alpha_0^2 = m \frac{\lambda_0}{n'}, \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{m\lambda_0}{n'p} = m \frac{\lambda_0}{n'} f_r. \quad (4.24)$$

Nu de normeringsconstante α_0 bekend is, kan vgl. (4.22) benut worden voor het bepalen van de afgebogen vector \mathbf{s}'_m ,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} \times (\mathbf{s}'_m - \mathbf{s}'_0) = \alpha_0 \boldsymbol{\beta},$$

en deze vergelijking is ook te schrijven als

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \mathbf{s}'_m = \mathbf{v} \times \mathbf{v} \times (\mathbf{s}'_0 - \alpha_0 \boldsymbol{\beta}). \quad (4.25)$$

De vector \mathbf{s}'_0 kan uitgedrukt worden in \mathbf{s}_0 met behulp van (4.8) en er ontstaat dan de uiteindelijke vectorvergelijking voor \mathbf{s}'_m ,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \mathbf{s}'_m = \mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \left(\frac{n}{n'} \mathbf{s}_0 - \alpha_0 \boldsymbol{\beta}' \right). \quad (4.26)$$

Stellen we de vector $(n/n') \mathbf{s}_0 - \alpha_0 \boldsymbol{\beta}'$ gelijk aan \mathbf{a} dan kan (4.26) uitgeschreven worden als

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}'_m) \mathbf{v} - \mathbf{s}'_m = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} - \mathbf{a}. \quad (4.27)$$

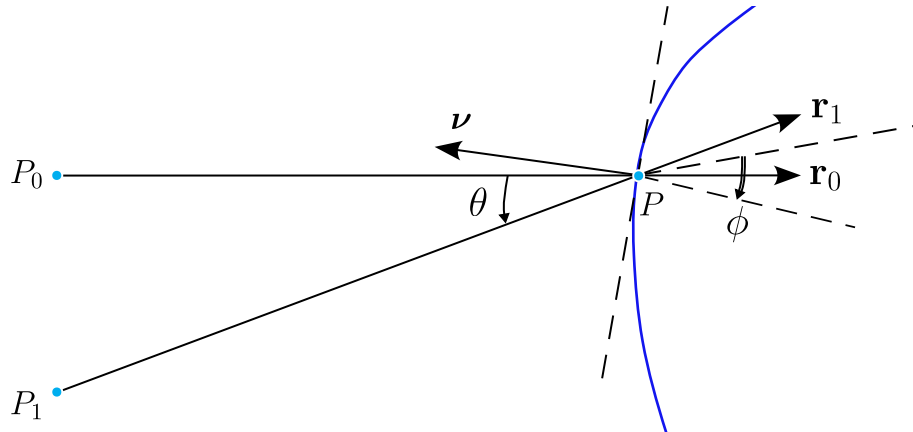
Kwadrateren van deze vergelijking levert op voor het scalaire product $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}'_m)$,

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}'_m) = \sqrt{1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}. \quad (4.28)$$

Met behulp van vgl. (4.27) en de uitdrukking (4.28) vinden we voor de vector \mathbf{s}'_m het onderstaande resultaat,

$$\mathbf{s}'_m = \mathbf{a} + \mathbf{v} \left\{ \sqrt{1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \right\}. \quad (4.29)$$

Vergelijking (4.29) gaat over in de uitdrukking (4.9) als α_0 gelijk aan 0 wordt.



Figuur 4.5: Straalbehandeling bij breking/reflectie en diffractie aan een holografisch optisch element (HOE). In het snijpunt P van een invallende lichtstraal is een interferentiepatroon aanwezig dat bij opname van het hologram gecreëerd is door bijv. twee puntbronnen in P_0 en P_1 . Met behulp van de lokale rasterperiode in P kan de extra diffractie van de lichtstraal in P berekend worden.

IV.3.2 Buiging aan een holografisch optisch element (HOE)

Bij een holografisch raster of holografisch optisch element (HOE) zijn de rasterlijnen niet ontstaan door een mechanisch snijproces (tralie) maar door het ontwikkelen van een interferentiepatroon, geregistreerd op een fotogevoelige laag die aangebracht is op een eventueel gekromd oppervlak. We veronderstellen hier dat het patroon gegenereerd is door twee puntbronnen met straalvectoren \mathbf{r}_0 en \mathbf{r}_1 ter plaatse van P (zie figuur 4.5).

Uit deze geometrie kunnen de vectoren $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\beta}$ in het raakvlak in P berekend worden. De richting van de interferentielijnen wordt gegeven door de vector $\boldsymbol{\alpha}$; deze vector staat loodrecht op de normaalvector \mathbf{v} en op de vector $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$, met als resultaat,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|}. \quad (4.30)$$

De rastervector $\boldsymbol{\beta}$ wordt gegeven door het vectorproduct $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\alpha}$ en de lokale rasterperiode p volgt uit de vergelijking

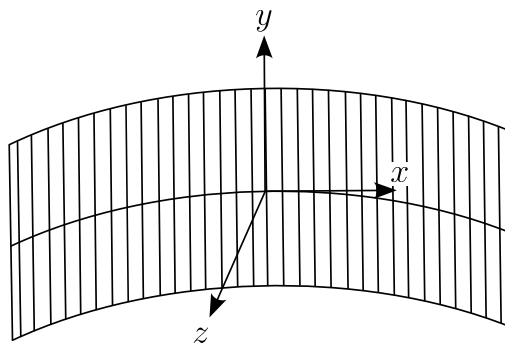
$$p \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = \lambda_1, \quad (4.31)$$

waarbij λ_1 de golflengte van het licht is waarmee het hologram is opgenomen. Na herleiding van vgl. (4.31) met gebruikmaking van vgl. (4.30) volgt voor de periode p van het interferentiepatroon

$$p = \frac{\lambda_1}{|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|} = \frac{\lambda_1}{2 \sin(\theta/2) \cos \phi}, \quad (4.32)$$

waar θ de hoek is tussen de stralen ter plaatse van P bij opname en ϕ de hoek tussen de vectoren $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0$ en \mathbf{v} . De rastervector $\boldsymbol{\beta}$ en de lokale ruimtelfrequentie $f_r = 1/p$ zijn nu bekend en kunnen in vgl. (4.26), \dots , (4.29) gebruikt worden om afgebogen stralen te bepalen.

In een meer algemene situatie is één bron (bijv. P_0) nog puntvormig, maar de tweede bron P_1 is welbewust geaberreerd teneinde met het verkregen hologram aberraties te corrigeren. In dit geval zal het toch altijd via straaldoorrekening mogelijk zijn de eenheidsvector \mathbf{r}_1 ter plaatse P te bepalen. Bij het reconstrueren van het hologram wordt in de meeste gevallen een puntvormige reconstructiebron gebruikt. Deze bron levert de vector \mathbf{s}_0 op, zie vgl. (4.26). Mocht ook de reconstructiebron doelbewust geaberreerd zijn, dan moet \mathbf{s}_0 via straaldoorrekening in elk punt P van het hologram bepaald worden.



Figuur 4.6: Schematische tekening van een optisch tralie, te gebruiken in reflectie, met getrokken sporen in een spiegelende metalen laag op een gekromd cilindrisch oppervlak.

IV.3.3 Buiging aan een tralie

Een tralie wordt mechanisch gesneden door een beitel per snede over een vaste afstand te verplaatsen. Het substraat kan vlak, cilindrisch, sferisch of eventueel asferisch zijn. De 'rasterlijnen' zijn de snijkrommen van het substraat met vlakken op een constante afstand p_0 van elkaar. Deze vlakken kan men zich voorstellen als de verzamelingen punten die een gelijk weglengteverschil (bijv. $m_0\lambda$) vertonen ten opzichte van twee oneindig ver verwijderde bronnen, die vanuit het tralie gezien worden onder een hoek θ , waarbij θ volgt uit de vergelijking $p_0 = \lambda/[2 \sin(\theta/2)]$.

In figuur 4.6 is een tralie getekend met de rasterlijnen in de y -richting. Het substraat wordt sferisch verondersteld met kromtestraal R en kromtemiddelpunt M op de z -as. De vector $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ is constant over het hele tralie-oppervlak en gelijk aan:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = \left(2 \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0 \right) \quad (4.33)$$

De normaalvector \mathbf{v} op het oppervlak is gegeven door

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{x}{R}, -\frac{y}{R}, 1 - \frac{z}{R} \right), \quad (4.34)$$

en de rastervector $\boldsymbol{\beta}$ wordt nu gegeven door

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}} \left\{ \frac{x^2}{R^2} - 1, \frac{xy}{R^2}, -\frac{x}{R} \left(1 - \frac{z}{R} \right) \right\}, \quad (4.35)$$

met een lokale periode (reflectie)

$$p = \frac{\lambda_1}{n' \alpha_0} = \frac{-\lambda_1}{2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - x^2/R^2}}. \quad (4.36)$$

We definiëren nu weer een vector \mathbf{a} , net als in de vgl. (4.26)-(4.27), en \mathbf{a} wordt gegeven door

$$\mathbf{a} = -(L_0, M_0, N_0) - \left[2m \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \sin \frac{\theta}{2} \right] \left\{ \frac{x^2}{R^2} - 1, \frac{xy}{R^2}, -\frac{x}{R} \left(1 - \frac{z}{R} \right) \right\}, \quad (4.37)$$

waaruit ook het scalaire product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ berekend kan worden. Het product $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ blijkt na enige herleiding gelijk te zijn aan

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = -\cos i, \quad (4.38)$$

waarbij i de hoek is tussen de invallende straal en de normaal op het reflecterende oppervlak. Met behulp van vgl. (4.29) vinden we nu voor de kentallen van de m -de orde afgebogen straalvector $\mathbf{s}'_m = (L'_m, M'_m, N'_m)$,

$$\begin{aligned} L'_m &= -L_0 + 2m \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \sin \frac{\theta}{2} + xA'', \\ M'_m &= -M_0 + yA'', \\ N'_m &= -N_0 + (z - R)A'', \end{aligned} \quad (4.40)$$

waarbij de grootheid A'' is gegeven door

$$\begin{aligned} A'' &= -\frac{1}{R} \left\{ \cos i + \left[2m \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \sin \frac{\theta}{2} \right] \cdot \frac{x}{R} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\cos i + \left[2m \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \sin \frac{\theta}{2} \right] \cdot \frac{x}{R} \right)^2 + 2 \left[2m \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \sin \frac{\theta}{2} \right] \cdot L_0 - \left[2m \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \sin \frac{\theta}{2} \right]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

A'' kan vergeleken worden met de grootheid $A' = (n' \cos i' - n \cos i) / R$ uit vgl. (4.10). Voor de 0^{de}-orde afgebogen bundel reduceert A'' inderdaad tot $-2 \cos i / R$, de waarde van A' bij spiegeling aan een oppervlak.

IV.4 Straalberekening in 'gradient-index' media

Een bekende toepassing van een medium met verlopende brekingsindex ('gradient-index') is de kern van een lichtfiber waarbij bijv. een parabolisch indexprofiel in radiële richting is aangebracht met het doel de looptijden van de verschillende modi zoveel mogelijk gelijk te maken. De geometrische optica is echter niet goed toe te passen op deze structuren van maar enige tientallen golf lengten groot. Een ander voorbeeld zijn de zogenaamde 'selfoc'-staaf lenzen zoals die in lenzen arrays werden toegepast (fotocopierapparaten). Daarnaast zijn er ook lenzen met sferische oppervlakken voorgesteld waarbij het interne brekingsindexprofiel benut wordt om aberraties verder te reduceren dan bij homogene lenzen mogelijk zou zijn (te vergelijken met het effect van asferische oppervlakken).

In deze paragraaf behandelen we eerst enige mogelijke vormen van index gradiënten. Vervolgens wordt de invloed van het indexprofiel op de paraxiale eigenschappen van het lenselement besproken. Tenslotte behandelen we een methode om 'eindige', niet-paraxiale stralen in een niet-homogeen medium numeriek te berekenen.

IV.4.1 Voorbeelden van indexprofielen

De meest gebruikte indexprofielen in optische fibers en niet-homogene optische materialen zijn:

1. Axiale gradiënt

De brekingsindex vertoont een z -afhankelijkheid die bijv. middels een machtreeks geschreven kan worden,

$$n(x, y, z) = n_0 \left(1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots \right). \quad (4.42)$$

2. Radiële gradiënt

De brekingsindex is een functie van de loodrecht afstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ tot de z -as van het medium en wordt geschreven als

$$n(x, y, z) = n_0 \left(1 - \frac{g^2}{2} r^2 + h_4 r^4 + \dots \right), \quad (4.43)$$

overeenkomstig de gangbare notatie in de literatuur.

3. Sferische gradiënt

De brekingsindex is een functie van de afstand tot een symmetriecentrum $M(x_0, y_0, z_0)$ in het medium,

$$n(x, y, z) = n_0 \left\{ 1 + a_2 \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] + \dots \right\}. \quad (4.44)$$

Momenteel wordt de radiële gradiënt technologisch het best beheerst. In de optische telecommunicatie met behulp van fibers is de fiber met radiële gradiënt verlaten en is de binaire monomode-fiber de standaard geworden.

IV.4.2 Paraxiale straalberekening in niet-homogene media

Uitgangspunt bij de berekening van stralen in een niet-homogeen medium is de vectorvergelijking voor lichtstralen, zie vgl. (1.30),

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (4.45)$$

waarbij n de plaatsafhankelijke brekingsindex is, \mathbf{r} de positievector van een punt op de lichtstraal en ds een oneindig kleine afstand gemeten langs de lichtstraal.

Voor paraxiale stralen, waarvan de hellingshoeken ten opzichte van de z -as klein zijn, kan het boogelement,

$$ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2}, \quad (4.46)$$

gelijk aan dz gesteld worden. Vergelijking (4.45) gaat nu over in

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right) = \nabla n$$

en uitschrijven van deze vectorvergelijking levert op

$$\begin{aligned} n \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{dn}{dz} \cdot \frac{dx}{dz} - \frac{\partial n}{\partial x} &= 0, \\ n \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{dn}{dz} \cdot \frac{dy}{dz} - \frac{\partial n}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

a)

In het geval van de axiale gradiënt volgens (4.42) kunnen we de x -afhankelijke vergelijking herleiden tot

$$n_0 (1 + \alpha_1 z) \frac{d^2 x}{dz^2} + \alpha_1 n_0 \frac{dx}{dz} = 0. \quad (4.48)$$

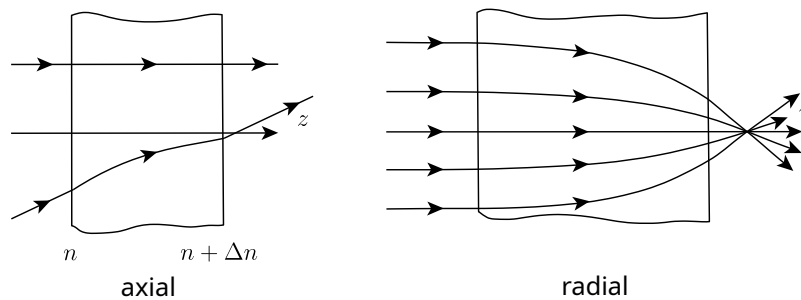
Met de randvoorwaarden

$$x = x_0, \quad z = 0, \quad \frac{dx}{dz} = L_0, \quad (4.49)$$

is een oplossing van (4.48) te schrijven als

$$x = x_0 + \frac{L_0}{\alpha_1} \ln(1 + \alpha_1 z). \quad (4.50)$$

De optische richtingscosinus is gegeven door



Figuur 4.7: Twee voorbeelden van stralendoorgang door een gegradeerd optisch medium. Links: medium met axiale gradiënt, waarbij de uittredende straal parallel is aan de invallende straal. Rechts: medium met radiële gradiënt, met focuserende werking.

$$nL = n \frac{dx}{dz} = n_0 L_0 = \text{constant} . \quad (4.51)$$

Het constant blijven van de optische richtingscosinus is in te zien als men zich het materiaal met axiale gradiënt samengesteld denkt uit een stapeling van oneindig dunne planparallele plaatjes met lineair veranderende brekingsindex. Vgl. (4.51) kan dan opgevat worden als de brekingswet van Snellius toegepast op de gestapelde planplaatjes.

Verwerken we vgl. (4.50) en (4.51) volgens het matrix formalisme van de paraxiale optica dan vinden we aan de uitgang van een staafje materiaal met dikte d ,

$$\begin{pmatrix} n_1 L_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -A \\ -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 L_0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

met de elementen van de paraxiale matrix gegeven door,

$$\begin{pmatrix} B & -A \\ -D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left\{1 - \frac{\alpha_1 d}{2}\right\} \frac{d}{n_0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

De paraxiale matrix heeft geen sterkte. De equivalente dikte in lucht (D) van het staafje is niet meer d/n_0 maar

$$\frac{d'}{n_0'} = \frac{d}{n_0 \left(1 + \frac{\alpha_1 d}{2}\right)},$$

hetgeen betekent dat niet n_0 maar $n_0 (1 + \alpha_1 d/2)$ gehanteerd moet worden als de effectieve brekingsindex van het staafje.

In figuur 4.7 is het straalverloop getekend in een staafje met axiale gradiënt. Zijn de in- en uittreevlakken van het staafje parallel, dan blijft de straalrichting onveranderd. Ook al ontbreekt nu de paraxiale sterkte, toch kan de aberratie van een stralenbundel gewijzigd worden door de extra weglengteveranderingen ten gevolge van het niet homogeen zijn van het medium.

b)

Met de radiële gradient volgens vgl. (4.43) gaat de paraxiale straalvergelijking over in

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + g^2 x = 0. \quad (4.54)$$

Met de randvoorwaarden volgens (4.49) vinden we als oplossing,

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(gz) + \frac{L_0}{g} \sin(gz), \\ L &= -x_0 g \sin(gz) + L_0 \cos(gz), \end{aligned} \quad (4.55)$$

en voor de y - en M -waarden,

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cos(gz) + \frac{M_0}{g} \sin(gz), \\ M &= -y_0 g \sin(gz) + M_0 \cos(gz). \end{aligned} \quad (4.56)$$

De vergelijkingen (4.55) en (4.56) kunnen ook geschreven worden als

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x_0^2 + \frac{L_0^2}{g^2}} \cos(gz - \phi_x), \\ L &= -g \sqrt{x_0^2 + \frac{L_0^2}{g^2}} \sin(gz - \phi_x), \\ y &= \sqrt{y_0^2 + \frac{M_0^2}{g^2}} \cos(gz - \phi_y), \\ M &= -g \sqrt{y_0^2 + \frac{M_0^2}{g^2}} \sin(gz - \phi_y), \end{aligned} \quad (4.57)$$

met

$$\begin{aligned} \phi_x &= \arctan(L_0/gx_0), \\ \phi_y &= \arctan(M_0/gy_0). \end{aligned} \quad (4.58)$$

In matrixvorm geschreven levert vgl. (4.55) de paraxiale constanten volgens

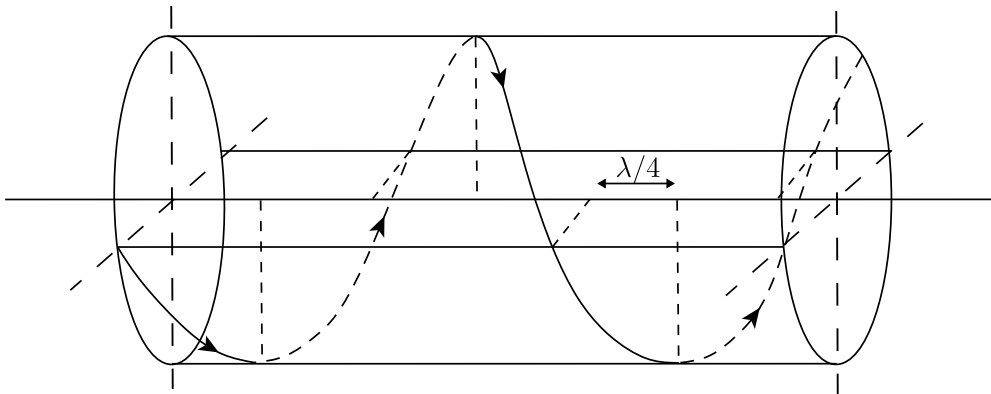
$$\begin{pmatrix} B & -A \\ -D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(gd) & -n_0 g \sin(gd) \\ \frac{d \sin(gd)}{n_0} & \cos(gd) \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Vergelijking (4.57) suggereert een golfvorm van de lichtstraalbaan. Wanneer we een meridi-onale straal aanbieden ($x = x_0$, $L = L_0$, $y = M = 0$) bij het voorvlak ($z = 0$) van het staafje materiaal dan snijdt deze straal de optische as op z -posities die een zogenaamde $\lambda/2$ afstand ($= \pi/g$) uit elkaar liggen. Er ontstaat dus een zich repeterende focuserende werking. Bieden we een bundel stralen aan, evenwijdig aan de optische as ($L_0 = M_0 = 0$), dan zal deze tot een focus komen na een afstand $\pi/2g$, de $\lambda/4$ - of focuslengte.

Wanneer we een sagittale straal aanbieden ($x = x_0$, $L = 0$, $y = 0$, $M = M_0$ ter plaatse $z = 0$), ontstaan volgens vgl. (4.57) de uitdrukkingen

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(gz), \\ y &= \frac{M_0}{g} \sin(gz), \end{aligned} \quad (4.60)$$

en het lichtstraalverloop wordt nu gegeven door een ellipsvormige schroeflijn met een spoed $2\pi/g$ (zie figuur 4.8).



Figuur 4.8: Medium met radieel brekingsindex-profiel. Een scheve straal in het medium, geïnjecteerd in een vlak dat parallel is aan de as van het medium, propageert langs een schroefvormig pad op constante afstand van de symmetrie-as van het medium.

IV.4.3 Berekening van het verloop van eindige stralen

De bepaling van het snijpunt van een straal met het grensvlak van een niet-homogeen medium gebeurt op de gebruikelijke manier. De richting van de gebroken straal wordt gevonden via de wet van Snellius onder gebruikmaking van de waarde van de brekingsindex ter plaatse van het snijpunt. De coördinaten (x_p, y_p, z_p) van dit snijpunt en de optische richtingscosinussen $(n_p L_p, n_p M_p, n_p N_p)$ van de gebroken straal zullen dienen als startwaarden bij het oplossen van de algemene straalvergelijking (4.45). Deze tweede-orde vector differentiaalvergelijking kan met de substitutie

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{n} \cdot \frac{d}{dt} \quad (4.61)$$

herleid worden tot twee stelsels eerste-orde differentiaalvergelijkingen volgens

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= nL, & \frac{d(nL)}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= nM, & \frac{d(nM)}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= nN, & \frac{d(nN)}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Ter berekening van de optische weglengte S langs een straal kan men een zevende vergelijking toevoegen,

$$\frac{dS}{dt} = n^2. \quad (4.63)$$

In de rechterleden van het tweede drietal vergelijkingen in (4.62) komt de gradiënt van n^2 voor. Daarom vindt men bij de representatie van de brekingsindex ook vaak uitdrukkingen als

$$n^2(x, y, z) = n_y^2 \left\{ 1 - g^2 r^2 + h_4' r^4 + h_6' r^6 + \dots \right\}. \quad (4.64)$$

Voor het paraxiale gedrag van een gradiënt-index staaf of lens zijn vgl. (4.43) en (4.64) identiek; voor het hogere-orde gedrag moet echter duidelijk gespecificeerd zijn welk type representatie men gebruikt.

De integratie van het stelsel differentiaalvergelijkingen (4.62) gecombineerd met (4.63) zal in het algemeen slechts numeriek mogelijk zijn via bijv. een Runge-Kutta methode. De integratie wordt gestopt wanneer het uittreevlak van de lens bereikt is, waarna de richting van de gebroken straal weer bepaald wordt met behulp van de lokale brekingsindex.

IV.5 Een invariante eigenschap van eindige stralen

Wanneer het medium, waardoor de lichtstralen propageren, bol- of omwentelingssymmetrie vertoont, blijven bepaalde straaleigenschappen onveranderd. Eerst beschouwen we het geval van bolsymmetrie en vervolgens het in de praktijk veel voorkomende geval van omwentelingssymmetrie.

IV.5.1 Medium met bolsymmetrie

In een bolsymmetrisch medium is de brekingsindex alleen een functie van de afstand tot het symmetriepunt. Een voorbeeld zou kunnen zijn de geïdealiseerde aardse atmosfeer. Voor de gradiënt van de brekingsindex kan men schrijven,

$$\nabla n = \frac{dn}{dr} \nabla |\mathbf{r}| = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \frac{dn}{dr}. \quad (4.65)$$

Met gebruikmaking van deze uitdrukking kan de straalvergelijking geschreven worden als

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \frac{dn}{dr}. \quad (4.66)$$

Vectoriële vermenigvuldiging van deze vectorvergelijking met \mathbf{r} geeft

$$\mathbf{r} \times \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \mathbf{0},$$

en dit kan omgewerkt worden tot

$$\mathbf{r} \times \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\mathbf{r} \times n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) - n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{0}. \quad (4.67)$$

Uit (4.67) volgt dat de vector

$$\mathbf{r} \times n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r} \times n\mathbf{s} \quad (4.68)$$

constant is langs de straal. Voor de diverse componenten vinden we

$$\begin{aligned} n(yN - zM) &= c_1, \\ n(zL - xN) &= c_2, \\ n(xM - yL) &= c_3. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Het resultaat van (4.68) is afgeleid door Bouguer (omstreeks 1730) en vertoont analogie met het behoud van impulsmoment voor de beweging van een deeltje in een centraal krachtenveld.

IV.5.2 Medium met cilindersymmetrie

Voor een omwentelingssymmetrisch systeem is de brekingsindex onafhankelijk van de z -coördinaat en alleen een functie van de cilindercoördinaat

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Voor de x - en y -componenten van ∇n kan geschreven worden,

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{\partial n}{\partial \rho} \cdot \frac{x}{\rho}, \\ \frac{\partial n}{\partial y} &= \frac{\partial n}{\partial \rho} \cdot \frac{y}{\rho}.\end{aligned}\tag{4.70}$$

De volgende vergelijkingen ontstaan nu voor de x - en y -componenten van de straalvergelijking,

$$\frac{d}{ds}(nL) = \frac{x}{\rho} \frac{\partial n}{\partial \rho},\tag{4.71a}$$

$$\frac{d}{ds}(nM) = \frac{y}{\rho} \frac{\partial n}{\partial \rho}.\tag{4.71b}$$

Vermenigvuldiging van (4.71a) met y en van (4.71b) met x geeft na aftrekking van beide vergelijkingen

$$y \frac{d}{ds}(nL) - x \frac{d}{ds}(nM) = 0.\tag{4.72a}$$

Integratie over s van vgl. (4.72a) tussen de grenzen s_0 en s_1 geeft

$$\begin{aligned}\int_{s_0}^{s_1} y \frac{d}{ds}(nL) ds - \int_{s_0}^{s_1} x \frac{d}{ds}(nM) ds = \\ [ynL]_{s_0}^{s_1} - [xnM]_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} nL \frac{dy}{ds} ds + \int_{s_0}^{s_1} nM \frac{dx}{ds} ds = 0.\end{aligned}\tag{4.72b}$$

Aangezien $L = dx/ds$ en $M = dy/ds$, leveren de twee integralen op de tweede regel van (4.72b) dezelfde waarde op en concluderen we dat

$$n(yL - xM)_{s_1} = n(yL - xM)_{s_0} = \text{constant}.\tag{4.73}$$

De uitdrukking volgens (4.73) heeft de naam 'scheve-straal' invariant gekregen en kan gebruikt worden als controle op de straaldoorrekening in een rotatiesymmetrisch systeem. De invariant kan ook eenvoudig geverifieerd worden aan de hand van vgl. (4.60) voor een sagittale straal in een gradient-index medium met rotatiesymmetrie.

Een aanschouwelijke afleiding van de 'scheve-straal' invariant kan gegeven worden met behulp van figuur 4.9. $|OP|$ is gelijk aan de voerstraal ρ van het aspunt O tot aan het punt P waar een straal \mathbf{s} het vlak V snijdt. Een overeenkomstige configuratie is aangegeven in een vlak V' in de beeldruimte. Als de getekende straal PP' een fysisch bestaande straal is, dan geldt dit ook voor QQ' die uit PP' verkregen is door een rotatie $d\phi$ aangezien het optische systeem verondersteld wordt omwentelingssymmetrie te bezitten. Passen we de Lagrange integraalinvariant toe op het veld van mogelijke stralen dan geldt in termen van optische weglengte dat

$$[PP'] + [P'Q'] + [Q'Q] + [QP] = 0.\tag{4.74}$$

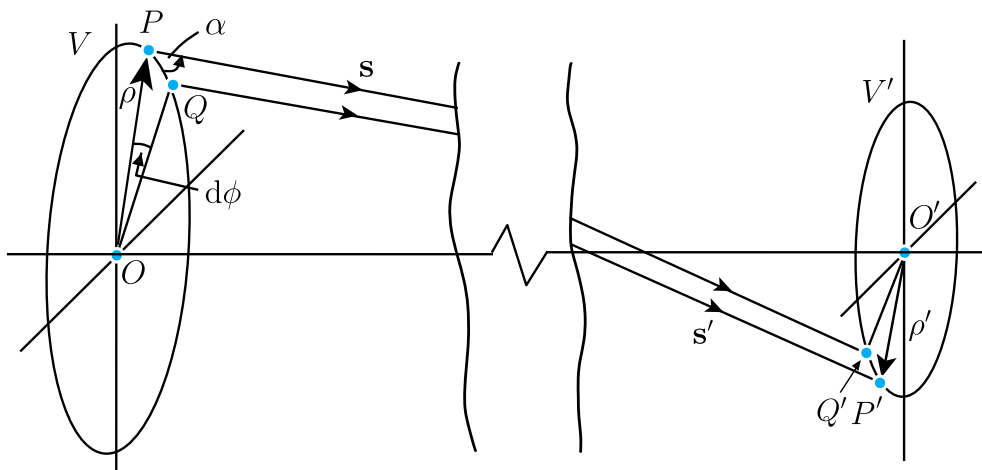
Vanwege de omwentelingssymmetrie geldt dat $[PP'] = [QQ']$ en dus volgt hieruit dat

$$[PQ] = [P'Q'].\tag{4.75}$$

Voor $[PQ]$ kan men schrijven

$$[PQ] = n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r}.\tag{4.76}$$

Met $d\mathbf{r} = (\rho \sin \phi, -\rho \cos \phi) d\phi = (y, -x) d\phi$, vinden we dat



Figuur 4.9: De afleiding van de scheve-straal invariant in een rotatiesymmetrisch medium. De Lagrange integraalinvariant wordt toegepast op een scheve straal PP' in het medium en op zijn copie QQ' die gerooteerd is om de as van het systeem over een hoek $d\phi$.

$$[PQ] = n(Ly - Mx) d\phi, \quad (4.77)$$

en op overeenkomstige wijze

$$[P'Q'] = n'(L'y' - M'x') d\phi, \quad (4.78)$$

waaruit volgt dat de grootheid $n(Ly - Mx)$ invariant is voor een scheve straal.

De uitdrukking (4.76) wordt 0 indien de hoek tussen \mathbf{s} en $d\mathbf{r}$ gelijk is aan 90° . Dit is het geval voor lichtstralen \mathbf{s} die zich bevinden in het vlak dat opgespannen wordt door OP en de optische as. Voor deze *meridionale* lichtstralen doet de scheve straal invariant dus geen uitspraak.

Voor $[PQ] = n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r}$ kunnen we ook schrijven,

$$[PQ] = n\rho \cos \alpha d\phi, \quad (4.79)$$

waarbij α in de figuur aangegeven is. De grootheid $(n\rho \cos \alpha)$ kan dus ook gebruikt worden als 'scheve-straal' invariant. De invariant zal later bij de behandeling van aberraties van eindige bundels nog benut worden.

Hoofdstuk V

Seidel aberraties

V.1 Inleiding

Met behulp van exacte straaldoorrekening, zoals behandeld in het voorafgaande hoofdstuk, is het mogelijk de afwijkingen van het 'paraxiale' ideaal van een optisch systeem te berekenen in de vorm van

a) dwarsaberraties ten opzichte van het gekozen referentiepunt (meestal het beeldpunt volgend uit de paraxiale optica).

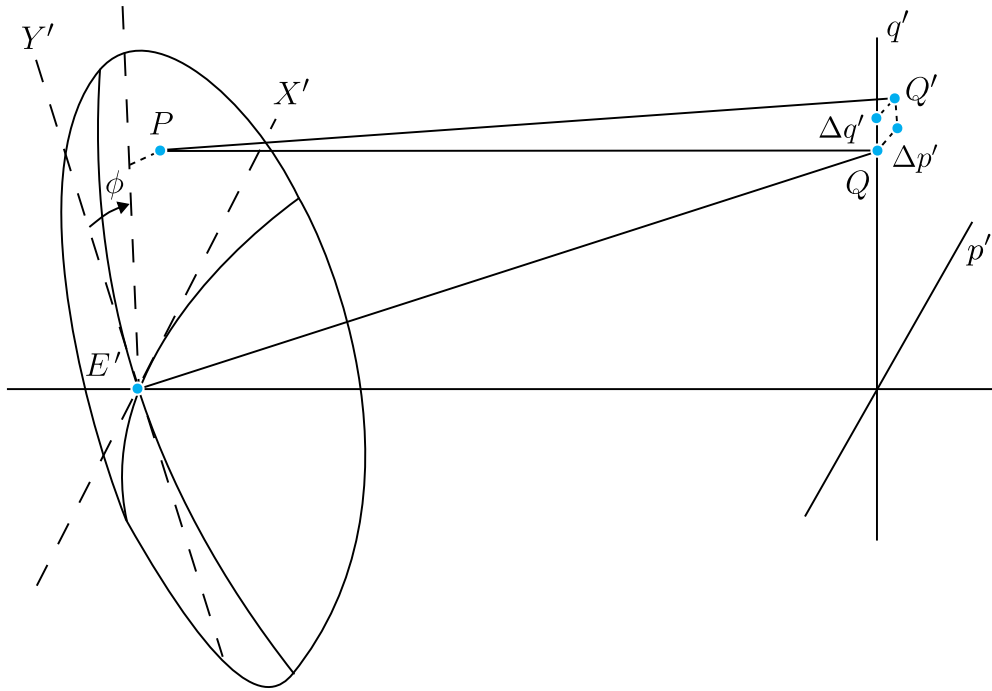
b) afwijking van het werkelijke golffront in de uittrepupil ten opzichte van een ideaal sferisch golffront dat gecentreerd is op het paraxiale beeldpunt.

Met numerieke technieken is het alleszins mogelijk bijv. de golffrontafwijking ten opzichte van de sferische referentiebol uit te drukken in een reeks- of polynoomontwikkeling met als basis bepaalde functies van de coördinaten van de snijpunten van de lichtstralen met de uittrepupilbol. Dit vraagt echter, zelfs tegenwoordig, een niet verwaarloosbare rekentijd. Voor de komst van de computer was deze numerieke aanpak uitgesloten. Bovendien krijgt men op deze manier minder inzicht dan wanneer de coëfficiënten van de reeksontwikkeling analytisch bekend zijn en uitgedrukt kunnen worden in de constructieparameters van een optisch systeem (afstanden/diktes, krommingen, brekingsindices, asferische coëfficiënten) en de ligging van voorwerp en beeld bij elke tussenafbeelding.

Al in het midden van de 19de eeuw is een dergelijke analytische reeksontwikkeling uitgewerkt door Petzval en Seidel voor de zogenaamde 3de-orde termen. De uitdrukking '3de-orde' is ontstaan omdat de brekingswet van Snellius in deze benadering geschreven wordt,

$$n \left(i - \frac{i^3}{6} \right) = n' \left(i' - \frac{i'^3}{6} \right), \quad (5.1)$$

terwijl ook de richting van de normaal in het snijpunt van een straal met een oppervlak tot en met de 3de orde in x/R en y/R berekend wordt. Richtingen van stralen zijn dus tot en met de 3de orde correct. Praat men over golffrontaberraties, dan is de juiste term '4de-orde' aangezien optische weglengtes (gegeven in wortelvorm) tot en met de 4de orde van de snijhoogte van de stralen met de oppervlakken correct berekend worden. Vergelijk dit met de paraxiale optica waar met een kwadratische benadering in snijhoogte of met een lineaire benadering in hoek volstaan kan worden. In dit hoofdstuk beschouwen we eerst het aantal mogelijke aberraties van een zekere orde in een algemeen optisch systeem. Vervolgens analyseren we de Seidelaberraties van een rotatiesymmetrisch systeem. Tenslotte geven we de uitdrukkingen die het mogelijk maken de grootte van de Seidel-aberraties te berekenen.



Figuur 5.1: In de beeldruimte snijdt een lichtstraal de referentiebol in de uittreepupil in het punt P . Het azimuth ϕ van het punt P op de uittreepupilbol is de hoek tussen het vlak gevormd door het punt P en de lijn $E'Q$; ϕ wordt positief gerekend vanaf de Y' -as in de richting van de X' -as. De straal is geaberrerd en snijdt het beeldvlak in het punt Q' in plaats van in het ideale punt Q . De dwarsaberratie-componenten van de straal zijn in genormeerde coördinaten gegeven door $(\Delta p', \Delta q')$.

V.2 Het aantal aberraties.

Wanneer, gegeven de uittreepupil van een optisch systeem, de golffrontafwijking ten opzichte van een referentiebol die gecentreerd is op een willekeurig beeldpunt $Q(p', q')$, gegeven is, kunnen we een aberratiefunctie definiëren volgens

$$W(X', Y'; p', q') = \sum \alpha_{ijkl} X'^i Y'^j p'^k q'^l. \quad (5.2)$$

Hierbij zijn (X', Y') de gereduceerde coördinaten op een referentiebol en (p', q') de gereduceerde coördinaten in het beeldveld (zie fig. 5.1). Bij de aberratie-ontwikkeling volgens (5.2) zijn we geïnteresseerd in het aantal mogelijke termen K van graad m met

$$i + j + k + l = m. \quad (5.3)$$

Dit is een bijzonder geval ($n = 4$) van het algemene partitie-probleem dat luidt: op hoeveel manieren K_n^m kunnen n gehele getallen samen m opleveren? De oplossing hiervan is

$$K_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = \binom{n+m-1}{m}, \quad (5.4)$$

en dit kan met volledige inductie bewezen worden. Onderstaande tabel levert het aantal mogelijke aberratietermen van diverse graden m voor het algemene optische systeem waarvan de aberratiefunctie gegeven wordt door (5.2),

m	0	1	2	3	4	5	6	(5.5)
K_4^m	1	4	10	20	35	56	84	

Bij het analyseren van de golffrontaberratie zijn we vaak niet geïnteresseerd in de termen die alleen van de beeldvlakcoördinaten (p', q') afhangen. Deze termen introduceren een over de gehele referentiebol constante bijdrage en geven géén aanleiding tot 'onscherpte'. Bij interferentie van bundels onderling speelt dit wegverschil natuurlijk wél een rol. Reduceren we het aantal aberratietermen met de termen die niet van de pupilcoördinaten (X', Y') afhangen, dan wordt het aantal aberratietermen van graad m gegeven door

$$K_4'^m = K_4^m - K_2^m = K_4^m - (m + 1), \quad (5.6)$$

en de corresponderende tabel wordt nu

$$\begin{array}{cccccccc} m & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ K_4'^m & 0 & 2 & 7 & 16 & 30 & 50 & 77 . \end{array} \quad (5.7)$$

Wanneer we ons nu wenden tot de zeer belangrijke groep van optische stelsels die omwentelingssymmetrie vertonen, treedt er gelukkig een zeer belangrijke reductie op in het aantal mogelijke aberratietermen. De aberratiefunctie moet nu invariant blijven onder een willekeurige rotatie van het stelsel om de optische as. Wanneer we de aberratiefunctie in poolcoördinaten van pupil en beeldvlak uitdrukken moet dus gelden dat

$$\begin{aligned} W\{r \sin(\phi + \gamma), r \cos(\phi + \gamma); \rho \sin(\psi + \gamma), \rho \cos(\psi + \gamma)\} \\ = W\{r \sin \phi, r \cos \phi; \rho \sin \psi, \rho \cos \psi\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

waarbij de transformaties

$$\begin{aligned} X' &= r \sin \phi, & p' &= \rho \sin \psi, \\ Y' &= r \cos \phi, & q' &= \rho \cos \psi, \end{aligned}$$

ingevoerd zijn en γ een willekeurige rotatiehoek voorstelt.

De substitutie van de reeksontwikkeling volgens (5.2) in (5.8) leidt direct tot de conclusie dat de vier lineaire termen moeten ontbreken. Gelijktelling van de kwadratische termen laat zien dat alleen de gecombineerde termen

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= r^2, \\ p'^2 + q'^2 &= \rho^2, \\ X'p' + Y'q' &= r\rho \cos(\phi - \psi), \end{aligned} \quad (5.9)$$

voor kunnen komen. Schrijven we de positie op de pupilbol en in het beeldvlak in vectorvorm volgens $\mathbf{x}_0 = (X', Y')$ en $\mathbf{p}_0 = (p', q')$, dan komen slechts de scalaire producten $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0$, $\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_0$ en $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{p}_0$ in de aberratie-ontwikkeling voor, die alle drie rotatie-invariant zijn. We kunnen concluderen dat in de resulterende reeksontwikkeling oneven termen zullen ontbreken terwijl de even termen opgebouwd zijn volgens de uitdrukking

$$W\{r^2, \rho^2, r\rho \cos(\phi - \psi)\} = \sum \beta_{ijk} (r^2)^i (\rho^2)^j \{r\rho \cos(\phi - \psi)\}^k. \quad (5.10)$$

Het aantal mogelijke aberratietermen van graad m wordt nu gegeven door de mogelijke combinaties van i, j en k die voldoen aan

$$i + j + k = m/2, \quad (5.11)$$

en dit levert het aantal $K_3'^{m/2}$ op. Corrigeren we dit getal weer voor het aantal pupil-onafhankelijke aberratietermen dan vinden we de uitdrukking

$$K_3'^{m/2} = K_3^{-m/2} - K_1^{-m/2} = K_3^{m/2} - 1, \quad (5.12)$$

en de corresponderende tabel wordt nu gegeven door

$$\begin{array}{cccccc} m & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ K_3'^{m/2} & 0 & 2 & 5 & 9 & 14 . \end{array} \quad (5.13)$$

Uit (5.13) concluderen we dat de golffrontfunctie twee termen bevat die een kwadratische afhankelijkheid van pupil- of beeldcoördinaten vertonen; dit zijn bijdragen die reeds uit de paraxiale optica volgen. Daarna volgen de vijf bekende Seidel aberraties en vervolgens steeds grotere aantallen hogere-orde aberraties. In de volgende paragraaf zullen we aandacht schenken aan de paraxiale en aan de Seideltermen en zullen we hun specifieke vorm nader beschouwen.

V.3 Karakter van de Seideltermen

Alhoewel de berekeningen in de voorgaande paragraaf zich gericht hebben op golffrontaberratietermen, is het toch ook belangrijk dezelfde typen aberraties te analyseren in het dwarsaberratie 'domein'. Bij sterk geaberrerde stelsels is deze voorstelling van de aberratie-effecten zelfs het meest relevant. De relatie tussen golffrontaberratie- en dwarsaberratiecomponenten is gegeven door vergelijking (3.32); benaderen we deze uitdrukking door te stellen $P'Q' = R'$ dan volgt eenvoudig voor de onderling loodrechte aberratie-componenten:

$$\begin{aligned} \Delta p' &= \frac{\partial W}{\partial X'}, \\ \Delta q' &= \frac{\partial W}{\partial Y'}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Aangezien nu rotatiesymmetrische stelsels beschouwd worden is het raadzaam vgl. (5.14) naar poolcoördinaten om te schrijven zoals ook bij vergelijking (5.8) gebeurd is. De uitdrukking voor de dwarsaberratiecomponenten wordt dan, met behulp van polaire coördinaten op de pupilbol,

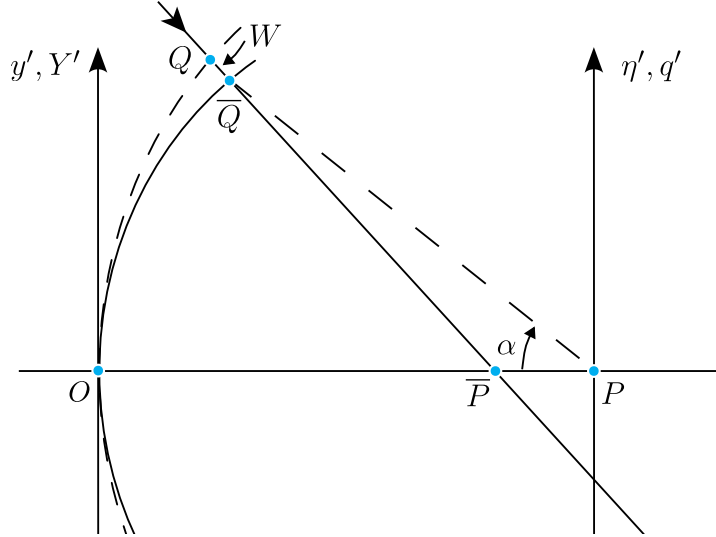
$$\begin{aligned} \Delta p' &= \sin \phi \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial W}{\partial \phi}, \\ \Delta q' &= \cos \phi \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial W}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

waarbij $\Delta p'$ en $\Delta q'$ in figuur 5.1 aangegeven zijn.

In de reeksontwikkeling voor de afwijking van het golffront ten opzichte van de referentiebol, zoals gegeven door tabel (5.13), komen eerst twee termen van de tweede graad voor, die dus eigenlijk behoren tot het domein van de paraxiale optica. Daarna volgen de vijf aberratietermen van Seidel. Deze zeven termen zullen we achtereenvolgens gaan behandelen. De machten van r , ρ en $\cos \phi$ zullen aangegeven worden en de resulterende golffront- en dwarsaberratie beschreven worden. De diverse aberratietermen worden via indices aangegeven. Zij worden steeds in eenheden λ uitgedrukt.

Voorbeeld: De term met coëfficiënt ${}_3\beta_{51}$ heeft een veldafhankelijkheid volgens ρ^3 , een radiële pupilcoördinaat afhankelijkheid volgens r^5 en een lineaire afhankelijkheid van $\cos \phi$. De orde m van deze aberratie is acht.

We behandelen nu eerst de twee paraxiale termen met $m = 2$.



Figuur 5.2: Golffrontafwijking $W(X', Y')$ in het geval van een defocussing van het sferische uittredende golffront van het gewenste punt P naar het focuspunt \bar{P} . De referentiebol door OQ is met een onderbroken curve aangegeven. Het kromtemiddelpunt ervan bevindt zich in P .

a)

$$\begin{matrix} W(r, \phi) & \Delta p'(r, \phi) & \Delta q'(r, \phi) \\ {}_0\beta_{20} & r^2 & 2r \sin \phi & 2r \cos \phi \end{matrix}$$

Deze term is veldonafhankelijk. De totale dwarsaberratie Δ wordt gegeven door:

$$\Delta = \sqrt{(\Delta p')^2 + (\Delta q')^2} = 2 {}_0\beta_{20} r.$$

De maximale dwarsaberratie wordt bereikt bij de waarde 1 van de genormeerde pupilcoördinaat r . In cartesische coördinaten vinden we dan een waarde van de dwarsaberratie

$$\Delta_c = 2 {}_0\beta_{20} \left(\frac{\lambda}{NA} \right), \quad (5.16)$$

waarbij geldt dat $NA = n \sin \alpha_{max}$ en n gelijk is aan de brekingsindex van de beeldruimte.

In figuur 5.2 is een doorsnede door een referentiebol (OQ) getekend met straal $OP = R$ en kromtemiddelpunt in P . Het golffront door de punten \bar{Q} en O is ook bolvormig met straal $O\bar{P} = \bar{R}$. Voor de golffrontafwijking $W = Q\bar{Q}$ kunnen we schrijven volgens de definitie W_B in vgl. (3.27),

$$(\bar{R} - W)^2 = (R - \bar{R})^2 + R^2 - 2R(R - \bar{R}) \cos \alpha, \quad (5.17)$$

en dit levert in goede benadering bij voldoende grote waarden van R en \bar{R} het resultaat

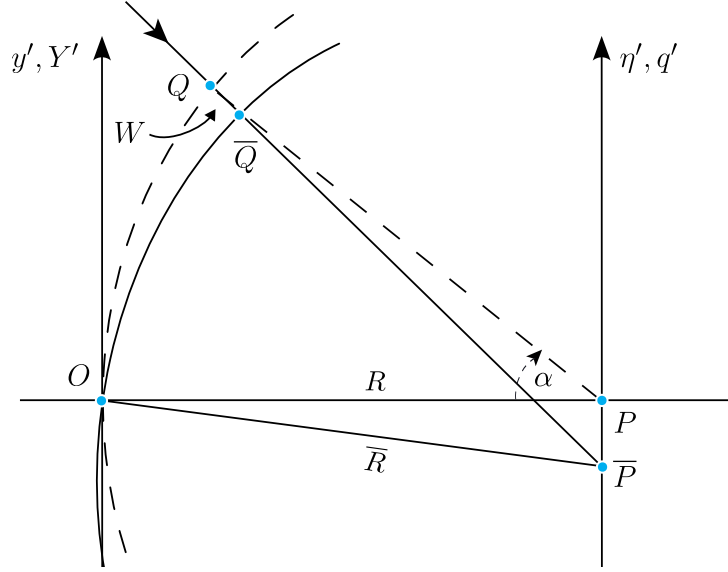
$$W = \Delta z (1 - \cos \alpha), \quad (5.18)$$

waarbij de middelpuntsverschuiving (focusverschuiving) Δz gegeven is door $\Delta z = \bar{R} - R$ (negatief in de figuur).

De uitdrukking voor W kan ontwikkeld worden naar machten van $\sin \alpha$ en dit levert op,

$$W = \Delta z \left\{ \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{\sin^4 \alpha}{8} + \frac{\sin^6 \alpha}{16} + \frac{5 \sin^8 \alpha}{128} + \dots \right\}. \quad (5.19)$$

Wanneer we de genormeerde coördinaat



Figuur 5.3: Golffrontafwijking $W(X', Y')$ in het geval van een dwarsverplaatsing van het focuspunt, van het punt P naar het nieuwe referentiepunt \bar{P} .

$$\sqrt{X'^2 + Y'^2} = r = \frac{\sin \alpha}{NA} \quad (5.20)$$

invoeren in (5.19) en W normeren met behulp van λ vinden we dat

$$W'(r) = \frac{\Delta z (NA)^2}{2 \lambda} \left\{ r^2 + \frac{r^4}{4} (NA)^2 + \frac{r^6}{8} (NA)^4 + \frac{5r^8}{64} (NA)^6 + \dots \right\}, \quad (5.21)$$

met de coëfficiënt ${}_0\beta_{20}$ gegeven door $\Delta z (NA)^2 / 2\lambda$ ofwel Δz_n , waarbij de index n aangeeft dat een normering met de afstand $2\lambda / NA^2$ op de z -coördinaat is toegepast.

Uit vgl. (5.21) leiden we af dat een pure defocussing langs de optische as een kwadratische golffrontafwijking (in r) introduceert wanneer we de referentiebol ongewijzigd laten. Neemt de numerieke apertuur van de beschouwde bundel toe, dan is de kwadratische benadering onvoldoende en moeten hogere orde termen meegenomen worden. Een praktische grens voor de kwadratische benadering is $NA = 0.50$.

Aangezien de hier beschouwde term veldonafhankelijk is, kan hij door een verschuiving van het beeldvlak langs de as gecompenseerd worden.

b)

$$\begin{array}{cccc} W(r, \phi) & \Delta p'(r, \phi) & \Delta q'(r, \phi) & \\ {}_1\beta_{11}\rho & r \cos \phi & 0 & 1 \end{array}$$

In figuur 5.3 is een referentiebol getekend met straal $OP = QP = R$ en een golffront (bolvormig) met kromtemiddelpunt \bar{P} en straal $O\bar{P} = Q\bar{P} = \bar{R}$. Voor de golffrontafwijking $W = \bar{Q}Q$ kunnen we schrijven met behulp van de cosinusregel in $\Delta QP\bar{P}$,

$$(\bar{R} - W)^2 = R^2 + (\Delta\eta')^2 - 2R(\Delta\eta') \sin \alpha, \quad (5.22)$$

en dit geeft weer bij voldoende grote waarden van R en \bar{R} ,

$$W = (\Delta\eta') \sin \alpha. \quad (5.23)$$

In gereduceerde pupilcoördinaten wordt deze uitdrukking, met gebruikmaking van $Y' = \sin \alpha / NA$,

$$W(r, \phi) = (NA) (\Delta\eta') Y'$$

$$= (NA) (\Delta\eta') r \cos \phi. \quad (5.24)$$

Na normering van W met de eenheid λ volgt dan

$$W'(r, \phi) = \frac{NA}{\lambda} (\Delta\eta') r \cos \phi = (\Delta q') r \cos \phi. \quad (5.25)$$

In de hier getekende situatie vindt de verschuiving in de q' -richting plaats. De verschuiving vindt echter ook plaats in de richting van de voerstraal ρ als we een ander azimuth ψ in het beeldvlak kiezen (de term $\cos \phi$ is ontstaan door ψ gelijk aan 0 te stellen in $\cos(\phi - \psi)$). Het effect over het gehele beeldveld is een verschuiving van elk beeldpunt over een afstand evenredig met ρ in de richting van de voerstraal. Dit is equivalent met een vergrotingsverandering van het beeld en behoort dus tot de paraxiale verschijnselfen.

De hierboven beschreven golffrontafwijkingen leiden in werkelijkheid niet tot geaberrerde beelden; de werkelijke golffronten zijn nog steeds perfect sferisch. Slechts de referentiebol wordt gewijzigd in straal of positie van het middelpunt. Deze operatie wordt vaak uitgevoerd om de gemiddelde kwadratische golffrontafwijking of de gemiddelde kwadratische dwarsaberratie te minimaliseren van een bundel. Er is dan geen expliciete afhankelijkheid van de beeldveldcoördinaat ρ meer aanwezig bij deze termen.

V.4 De vorm van de Seidelaberraties

a) Beeldveldkromming

$$\begin{array}{cccc} W(r, \phi) & \Delta p'(r, \phi) & \Delta q'(r, \phi) & \\ {}_2\beta_{20} \rho^2 & r^2 & 2r \sin \phi & 2r \cos \phi \end{array}$$

Deze term is een defocussingsterm zoals in de voorgaande sectie V.3, sub a), maar nu niet meer constant over het beeldveld maar kwadratisch toenemend volgens ${}_2\beta_{20}\rho^2$. Dit betekent dat scherpe afbeelding plaatsvindt op een boloppervlak (in goede benadering) met een kromtestraal

$$R_b = \frac{1}{2} \frac{1}{{}_2\beta_{20}}. \quad (5.27)$$

Als de coëfficiënt ${}_2\beta_{20}$ positief is hebben we te maken met een bol beeldveld.

b) Vertekening

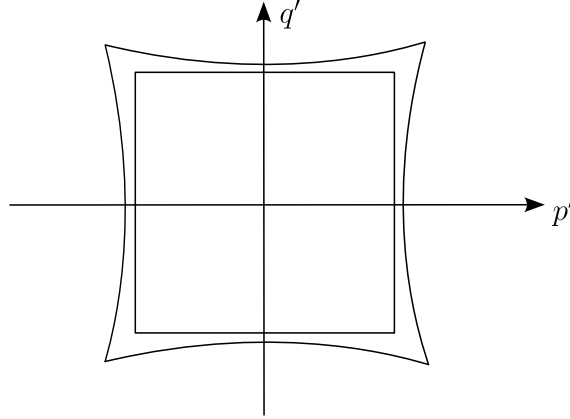
$$\begin{array}{cccc} W(r, \phi) & \Delta p'(r, \phi) & \Delta q'(r, \phi) & \\ {}_3\beta_{11}\rho^3 & r \cos \phi & 0 & 1 \end{array}$$

Deze aberratieterm vertoont overeenkomst met de paragraaf b) in sectie V.3, maar heeft een veldafhankelijkheid volgens ρ^3 . De afbeelding is nog altijd 'scherp' maar de vergroting is niet meer constant in het beeldveld. In de aanwezigheid van distorsie worden de beeldpunten van de lijn $p' = 0$ gevonden op de verschoven posities

$$\begin{aligned} q'' &= q' + {}_3\beta_{11}q'^3 \\ &= q' \left[1 + {}_3\beta_{11}q'^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

De vergroting verloopt kwadratisch met de veldcoördinaat. Het effect van distorsie op de afbeelding van een vierkant is aangegeven in figuur 5.4. Afhankelijk van het teken van ${}_3\beta_{11}$ spreken we van kussen- of tonvormige vertekening.

c) Sferische aberratie (openingsfout)



Figuur 5.4: De scherpe afbeelding in de beeldruimte van een vierkant voorwerp indien het optisch systeem derde-orde kussenvormige vertekening (${}_3\beta_{11} > 0$) vertoont. Ter vergelijking is ook het ideaal afgebeelde vierkant getekend.

$$\begin{array}{cccc}
 W(r, \phi) & \Delta p'(r, \phi) & \Delta q'(r, \phi) & \\
 {}_0\beta_{40} & r^4 & 4r^3 \sin \phi & 4r^3 \cos \phi
 \end{array}$$

We zij nu aangeland bij de werkelijke aberraties, dat wil zeggen de stralen van stralenbundels met een dergelijke golffrontafwijking gaan niet meer allemaal door één punt, het golffront is niet meer sferisch. Deze aberratie kan reeds bij de afbeelding van punten op de optische as aanwezig zijn. In plaats van de algemene term sferische aberratie wordt ook wel de meer correcte term openingsfout gehanteerd aangezien de aberratie alleen van de NA van de bundel afhangt. In figuur 5.5 is een stralenbundel getekend met sferische aberratie. De stralen, die dicht bij de as blijven, snijden de optische as in de buurt van het paraxiale focus F_P . De marginale stralen of randstralen snijden elkaar in het punt F_M . Uit de figuur is te zien dat de nauwste bundelinsnoering tussen F_P en F_M in ligt.

De lichtenergie in de omgeving van het focus is hoofdzakelijk geconcentreerd op het (omwentelings)oppervlak dat gevormd wordt door de verzameling van snijpunten van naburige stralen; dit oppervlak heeft de naam *kaustisch* oppervlak of *kaustiek* gekregen (van het oudgriekse woord $\kappa\alpha\upsilon\sigma\tau\acute{o}\varsigma = \text{verbrand}$). Men kan de kaustiek ook beschouwen als de verzameling van lokale kromtemiddelpunten van het golffront in de uitreepupil. Een dergelijke verzameling heet in de beschrijvende meetkunde een *evolute* van het golffront.

In het geval van sferische aberratie vertoont ook de kaustiek omwentelingsymmetrie en kunnen we volstaan met de kaustische curve in een doorsnede, bijv. in het vlak $\eta' = 0$. In reële coördinaten kan een lichtstraal in dit vlak geschreven worden als

$$\xi' = \left(\frac{y'_R - \Delta\xi'}{z'_R} \right) z' + \Delta\xi', \quad (5.29)$$

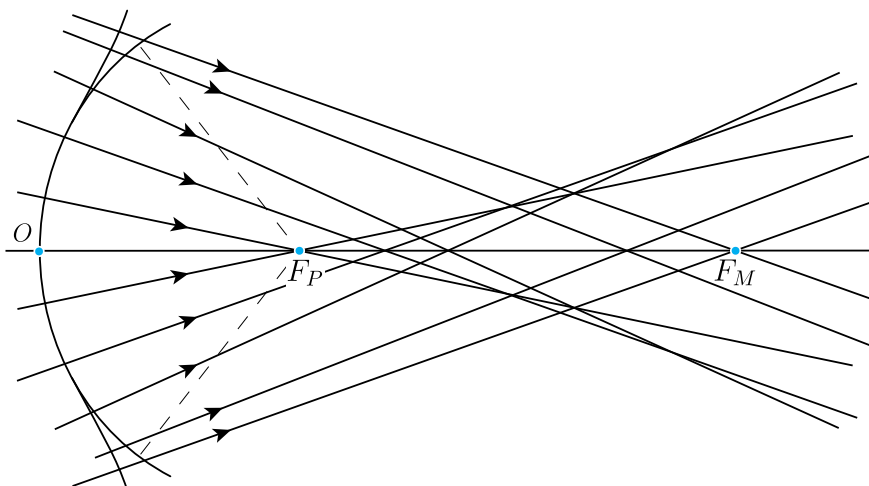
waarbij y'_R en z'_R coördinaten op de referentiebol zijn. De dwarsaberratiecomponent $\Delta\xi'$ is een functie van de snijhoogte y'_R van de lichtstraal met de referentiebol. Overgaand naar gereduceerde coördinaten q' en z'_n kan men een algemene straal schrijven als

$$q' = a(Y') + b(Y'). \quad (5.30)$$

Een naburige straal wordt gegeven door

$$q' = \left(a + \frac{da}{dY'} \delta Y' \right) z'_n + b + \frac{db}{dY'} \delta Y', \quad (5.31)$$

en voor de z'_n -coördinaat van het snijpunt van de twee stralen geldt,



Figuur 5.5: Een stralenbundel met positieve sferische aberratie. Smalle ringen in de uittreepupil van het optisch systeem produceren een eigen focuspunt. In de figuur ligt het paraxiale focus F_P het dichtst bij de uittreepupil. Het marginale focus F_M van de randstralen van de bundel is het verst verwijderd van de uittreepupil. Tussen beide in ligt de nauwst insnoering van de geaberrerde bundel.

$$\frac{da}{dY'} z'_n + \frac{db}{dY'} = 0. \quad (5.32)$$

Uit de vgl. (5.30) en (5.32) kan Y' in principe geëlimineerd worden en de resulterende vergelijking in (q', z'_n) levert de kaustische curve. De positie langs de as van een bundel waar de kaustiek een minimale diameter heeft kan als criterium dienen om de optimale focusinstelling vast te leggen. In plaats van de diameter van de kaustiek hanteert men vaker de effectieve halve diameter van de bundel die men verkrijgt door de r.m.s. (*root mean square*) dwarsaberratie Δ te berekenen volgens

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \{(\Delta p'_i)^2 + (\Delta q'_i)^2\}}{N}}, \quad (5.33)$$

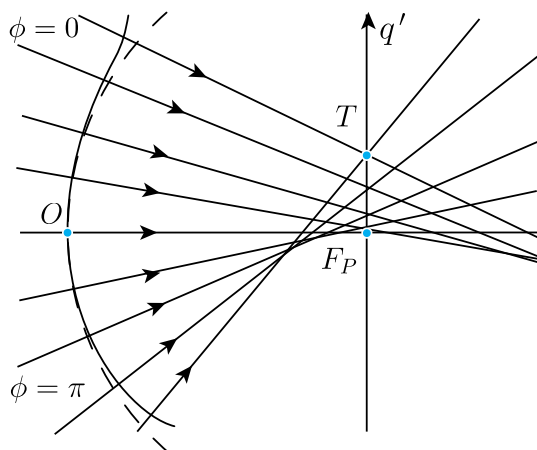
waarbij de N stralen zo gekozen zijn dat zij ieder een gelijk oppervlakte-element van het golffront vertegenwoordigen.

Alhoewel het mogelijk is een aberratietheorie geheel op te bouwen in termen van typische kaustische oppervlakken voor de diverse aberraties, zullen wij ons in het vervolg beperken tot een beschrijving met behulp van golffront- en dwarsaberraties. Deze hebben een meer rechtstreeks verband met grootheden als het buigingsbeeld of de overdrachtsfunctie van een optisch systeem dan de parameters die een kaustisch oppervlak beschrijven.

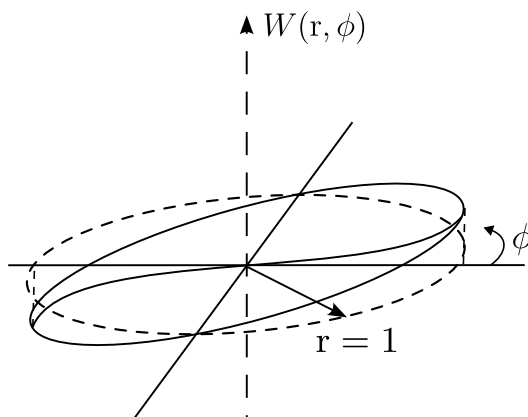
d) Coma

$$\begin{array}{lll} W(r, \phi) & \Delta p'(r, \phi) & \Delta q'(r, \phi) \\ {}_1\beta_{31}\rho & r^3 \cos \phi & r^2 \sin 2\phi \quad 2r^2 + r^2 \cos 2\phi \end{array}$$

Deze aberratie is lineair afhankelijk van de veldcoördinaat ρ en zal dus bij kleine excursies in het beeldveld buiten de optische as kunnen overheersen. In figuur 5.6 is een doorsnede door het golffront getekend voor de azimuth-waarden $\phi = 0$ en $\phi = \pi$. De aberratie is asymmetrisch in deze doorsnede en de twee marginale stralen snijden het beeldvlak in hetzelfde punt T . In figuur 5.7 is de golffrontaberratie $W(r, \phi)$ aangegeven in de doorsneden $\phi = 0$ en $\phi = \pi/2$ en langs de omtrek voor de waarde $r = 1$. De resulterende dwarsaberratie is geschetst in figuur



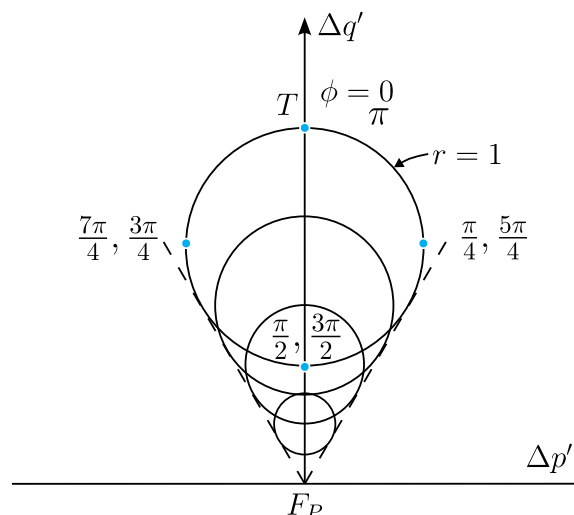
Figuur 5.6: Een doorsnede van een stralenbundel met comatische aberratie, samengesteld uit de twee poolcoördinaatwaarden $\phi = 0$ en $\phi = \pi$. Het paraxiale focuspunt bevindt zich in F_P . De marginale stralen van de bundel snijden elkaar in het punt T . De dwarsaberratie $\Delta q'$ is gelijk aan $F_P T$.



Figuur 5.7: Comatische aberratie. Een schets van het golffront in de uittreepupil, geprojecteerd op een cirkel.

5.8 voor diverse waarden van de voerstraal r . De maximale dwarsaberratie wordt bereikt voor stralen in de meridiaanse doorsnede, de minimale waarde voor stralen in de sagittale doorsnede. Deze uiterste waarden worden ook wel het 'tangentiële' en het 'sagittale' coma genoemd en hun verhouding is precies 3 als we alleen met Seidelaberraties rekening hoeven te houden.

De dwarsaberraties van de stralen hebben alle hetzelfde teken wat de q' -component betreft. Voor een bepaalde ring ($r = \text{constant}$) op het golffront liggen de snijpunten van de stralen met het beeldvlak op een cirkel met als middelpunt het punt $(0, 2r^2)$. Aangezien de azimuthafhankelijkheid 2ϕ is, wordt bij het doorlopen van een cirkel op het golffront de cirkelvormige dwarsaberratiefiguur tweemaal doorlopen. De raaklijnen aan de aberratiecirkels vanuit F_P vallen alle samen tot twee rechten die een onderlinge hoek van 60° vertonen (zie figuur 5.8). De vorm van de aberratiefiguur is komeetachtig. In een cirkel-symmetrisch systeem komt coma alleen bij scheve bundels voor; op de as afgebeelde punten kunnen slechts sferische aberratie vertonen. Vaak zal in nominaal cirkelsymmetrische systemen toch een gering coma-effect op de as voorkomen; dit is te wijten aan licht gedecentreerde of gekantelde elementen van het optische stelsel.



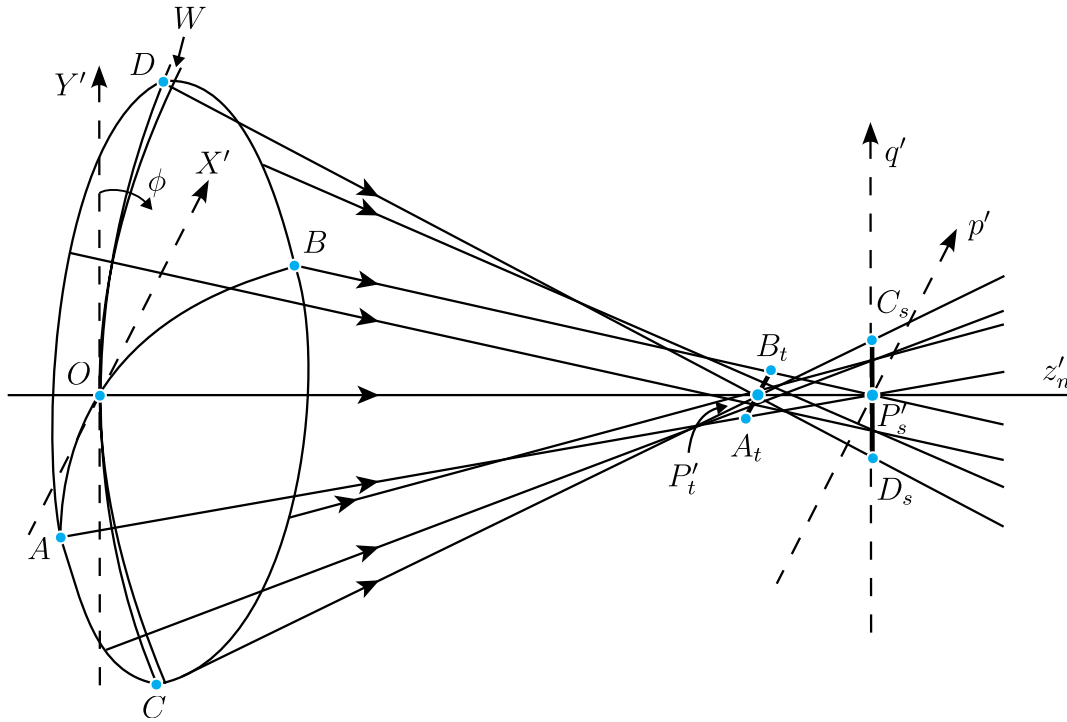
Figuur 5.8: Een typische dwarsaberratiefiguur behorend bij derde-orde coma. Een ringvormig gebied in de uittreepupil produceert een ringvormige dwarsaberratiefiguur. De ringen zijn onderling zodanig verschoven dat zij een komeetvormige staart vormen met de komeet zelf in het paraxiale brandpunt F_P . De openingshoek van de komeetstaart is 60° in het geval van derde-orde coma.

e) Astigmatisme

$$\begin{array}{cccc}
 W(r, \phi) & \Delta p'(r, \phi) & \Delta q'(r, \phi) & \\
 2\beta_{22} \rho^2 & r^2 \cos^2 \phi & 0 & 2r \cos \phi
 \end{array}$$

De hier beschreven golffrontafwijking $W(r, \phi) \propto r^2 \cos^2 \phi$ maakt dat het golffront in de doorsneden met $X' = 0$ en $Y' = 0$ een verschillende kromming heeft; het golffront wordt reeds in zijn kwadratische termen gewijzigd ten opzichte van de referentiebol en dit beïnvloedt de tweede afgeleide (die evenredig is met de kromming) zelfs in het punt $X' = Y' = 0$. De zojuist besproken aberraties zoals sferische aberratie en coma maken dat in het punt $X' = Y' = 0$ het golffront de ongewijzigde paraxiale kromming behoudt. Door voldoende te *diafragmeren* kan het effect van de aberratie teniet gedaan worden en weer een ideale afbeelding ontstaan. Bij een astigmatische stralenbundel blijft de aberratie bestaan zelfs bij een zeer sterk gereduceerde opening. In die zin zou men astigmatisme zelfs een paraxiale fout kunnen noemen; beperken we ons echter tot cirkelsymmetrische systemen, dan laat de veldafhankelijkheid volgens ρ^2 zien dat bij een afbeelding op de optische as geen astigmatisme voor kan komen. Is dit wel het geval dan moet de omwentelingsymmetrie afwezig zijn. Dit kan veroorzaakt worden door het niet perfect sferisch gepolijst zijn van een oppervlak waardoor bijv. een cilindrische afwijking aanwezig is. Ook kan het voorkomen dat in een optisch systeem de elementen onderling excentrisch of gekanteld gemonteerd zijn.

In figuur 5.9 zijn een astigmatisch golffront en enige bijbehorende stralen getekend. De rand van het golffront is $ACBD$ en de meridionale ($X' = 0$) en sagittale ($Y' = 0$) doorsneden zijn met onderbroken lijnen aangegeven. De golffrontafwijking is maximaal in de meridionale doorsnede. Deze doorsnede bevat de optische as en het beeldpunt P_s' , gelegen op een loodrechte afstand ρ^2 van de optische as verwijderd in het paraxiale beeldvlak (terwille van de duidelijkheid is slechts een hulpas z_n' door het beeldpunt P_s' getekend). In het vlak door P_s' loodrecht op de z_n' -as is de dwarsaberratie component $\Delta p' \equiv 0$; alle stralen van de astigmatische bundel snijden hier dus de zogenaamde sagittale brandlijn $C_s D_s$. Het midden van de sagittale brandlijn wordt gegeven door het snijpunt van de stralen in de sagittale doorsnede van de bundel (vlak ABP_s'). Wanneer we een verschuiving van het opvangvlak langs de z_n' -as doorvoeren, gelijk aan $\Delta z_n' = -2\beta_{22}$

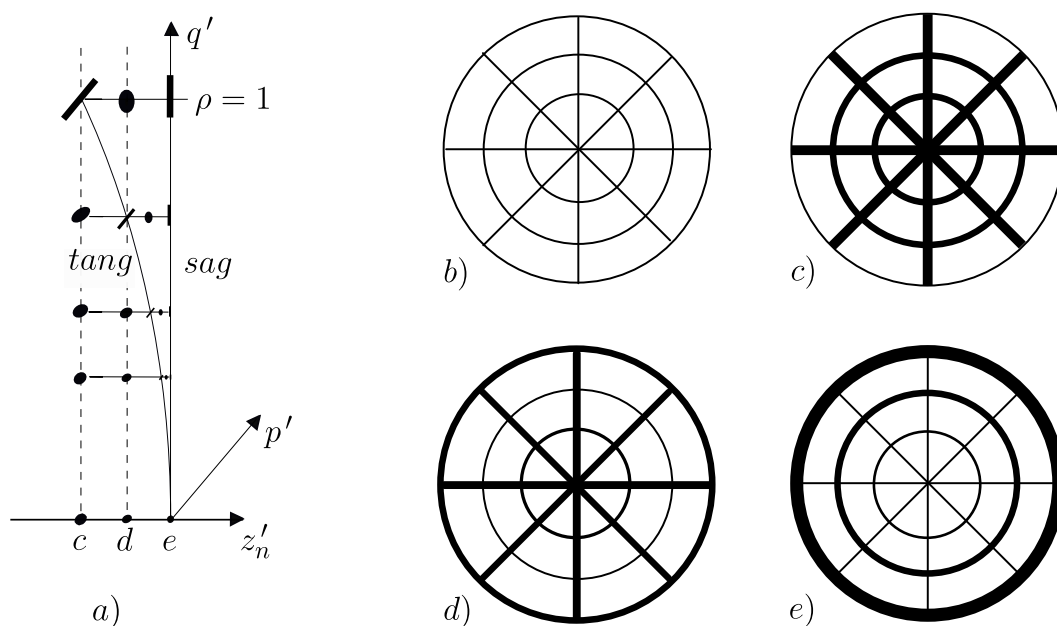


Figuur 5.9: Een astigmatisch golffront en de bijbehorende driedimensionale dwarsaberratiefiguur met de twee orthogonale brandlijnen $C_s D_s$ (sagittaal) en $A_t B_t$ (tangenteel).

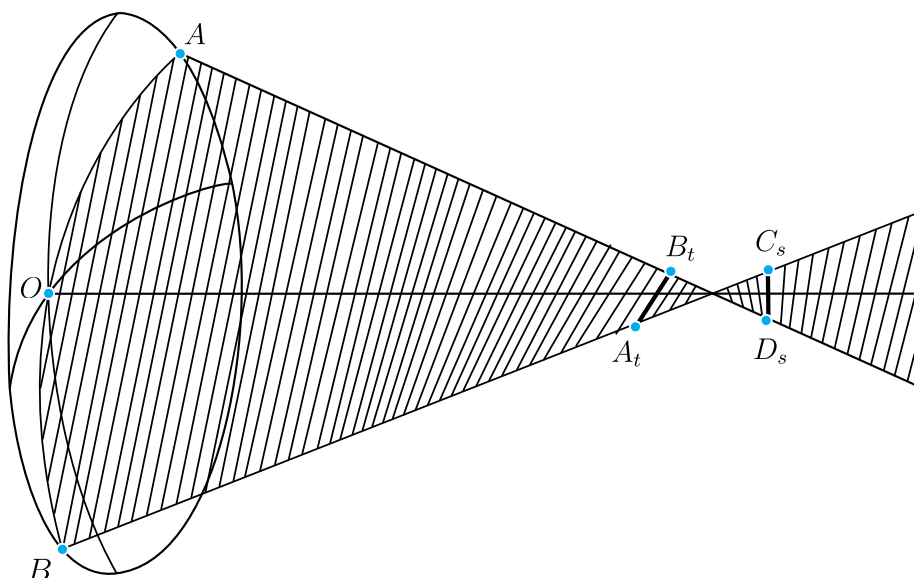
(in de niet gereduceerde coördinaat z' gelijk aan $\Delta z' = -2 {}_2\beta_{22}\lambda/(NA)^2$), dan geldt voor de dwarsaberratie-componenten in dit vlak

$$\begin{aligned}\Delta p' &= -2 {}_2\beta_{22}r \sin \phi \\ \Delta q' &= 0.\end{aligned}\tag{5.34}$$

In figuur 5.9 is de verschuiving $\Delta z'_n$ weergegeven door $P'_t P'_s$. Alle stralen van de bundel snijden de tangentiële brandlijn $A_t B_t$. Het midden van de tangentiële brandlijn wordt verkregen door het snijpunt van de stralen in de meridiaanse doorsnede (vlak CDP'_t). In het vlak halverwege de beide brandlijnen liggen alle doorsnijdingspunten van de stralen binnen een cirkel met straal ${}_2\beta_{22}$ in gereduceerde coördinaten. In figuur 5.10 is schematisch aangegeven wat er gebeurt wanneer in een cirkelsymmetrisch systeem een wiel met spaken (pijl; sagitta) wordt afgebeeld. De afstand tussen de astigmatische lijnen $P'_t P'_s$ zal kwadratisch met de afstand ρ tot de optische as toenemen. We veronderstellen dat het optisch systeem beeldveldkromming vertoont, zodanig dat de sagittale brandlijnen scherp afgebeeld worden in het nominale beeldoppervlak ($z'_n = 0$); de tangentiële brandlijnen liggen op een boloppervlak met kromtestraal $R'_n = -2\beta_{22}/2$ en het raakt aan het platte sagittale beeldvlak in het centrum van het beeld (zie figuur 5.10a). Het astigmatisme neemt kwadratisch toe als functie van de genormeerde afstand $\rho = \sqrt{p'^2 + q'^2}$ tot de optische as en is maximaal voor $\rho = 1$. Figuur 5.10b geeft het voorwerp aan, een wiel met spaken en ringen van zeer geringe breedte. In figuur 5.10c, corresponderend met het opvangvlak c in figuur 5.10a, is de buitenste wielring scherp afgebeeld, aangezien op die positie in het instelvlak c de tangentiële brandlijnen scherp afgebeeld worden. Het overige beeldveld dichterbij de optische as, op de buitenring na, bevindt zich nu buiten het astigmatische focusgebied, tussen de twee brandlijnen in. De spaken én ringen richting het beeldcentrum raken daardoor steeds meer vrijwel cirkelvormig gedefocusseerd. Als resultaat zijn de spaken en ringen in dit gebied vrijwel even onscherp. In figuur 5.10d, corresponderend met beeldvlakpositie d in figuur 5.10a,



Figuur 5.10: Schematische afbeelding van een wiel met ringen en spaken door een optisch systeem dat veldafhankelijk derde-orde astigmatisme vertoont. Het nominale beeldvlak is aangegeven met de letter e in figuur a), samen met de beeldbundels met toenemend astigmatisme naar de rand van het beeldveld ($\rho = 1$). Het 'wiel-object' met spaken en ringen is aangegeven in b). Voor de verklaring van de figuren c), d) en e), zie de hoofdtekst.



Figuur 5.11: De propagatie van een vlakke doorsnede uit een astigmatisch golffront richting het astigmatisme focus. Het gearceerde vlak roteert over een hoek van 90° tussen de twee brandlijnen $A_t B_t$ en $C_s D_s$. Een dergelijke bundel vertoont geometrisch impulsmoment.

worden de tangentiële brandlijnen op een hoogte $\rho = 1/\sqrt{2}$ van de optische as scherp afgebeeld met halve lengte vergeleken met die op laterale positie $\rho = 1$. Elders in dit opvangvlak zijn de bundeldoorsnedes vrijwel cirkelvormig, met afnemende grootte richting optische as. Tenslotte, in figuur 5.10e, worden alleen de spaken scherp afgebeeld. De wielringen worden van binnen naar buiten onscherper door het steeds langer worden van de sagittale brandlijntjes naar de randpositie met $\rho = 1$.

Een astigmatische stralenbundel kan geconstrueerd worden door alle punten van de beide brandlijnen wederzijds met elkaar te verbinden. Interessant is het verloop van een verzameling stralen die de referentiebol in een vlak snijden (zie figuur 5.11). Alle stralen in de doorsnede AOB van de referentiebol zullen de meridionale brandlijn A_tB_t snijden en vervolgens de sagittale brandlijn C_sD_s . Het met lichtstralen gevulde vlak zal vanuit de uittreepupil door O een langzame rotatie uitvoeren naar de stand A_tB_t , vervolgens een snelle rotatie over 90° tussen de beide brandlijnen, om daarna geleidelijk het azimuthvlak in te nemen dat over 180° gedraaid is ten opzichte van het oorspronkelijke vlak door AOB .

V.5 Berekening van de grootte van de Seidelaberraties

De berekening van de Seidelaberraties zal in deze paragraaf gebeuren in het golffrontaberratiedomein (we beperken ons tot cirkelsymmetrische systemen). De corresponderende dwarsaberratiecomponenten van de stralen volgen hieruit op eenvoudige wijze (zie vgl. 5.15). De gebruikte coördinaten zijn reële, niet genormeerde coördinaten. Eerst wordt de aberratieverandering van een stralenbundel bij breking (of reflectie) aan één oppervlak beschouwd. Het zal blijken dat de aberratie-uitdrukking voor een stelsel door sommatie van de aberratie-termen van de afzonderlijke oppervlakken verkregen wordt.

In figuur 5.12 is de enigszins vereenvoudigde situatie getekend waarbij een nog ideale, sferische golf, vertrekkend uit T_0 , invalt op het brekende oppervlak met zijn top in O . Getekend zijn een centrale straal van de bundel (hoofdstraal $T_0P_0P_sT$) en een randstraal ($T_0Q_0Q_sT$). De referentiebol voor de invallende bundel snijdt de optische as in P_0 en is gecentreerd op het voorwerpspunt T_0 . De referentiebol voor de gebroken stralenbundel snijdt de optische as in het punt P_1 en heeft zijn kromtemiddelpunt in T_1 , het paraxiale beeldpunt van T_0 . P_0 en P_1 zijn de snijpunten met de optische as van resp. de paraxiale intree- en uittreepupil van het optisch afbeeldingssysteem.

De verandering in golffrontaberratie, ΔW , ten gevolge van de breking aan het oppervlak wordt nu gegeven door

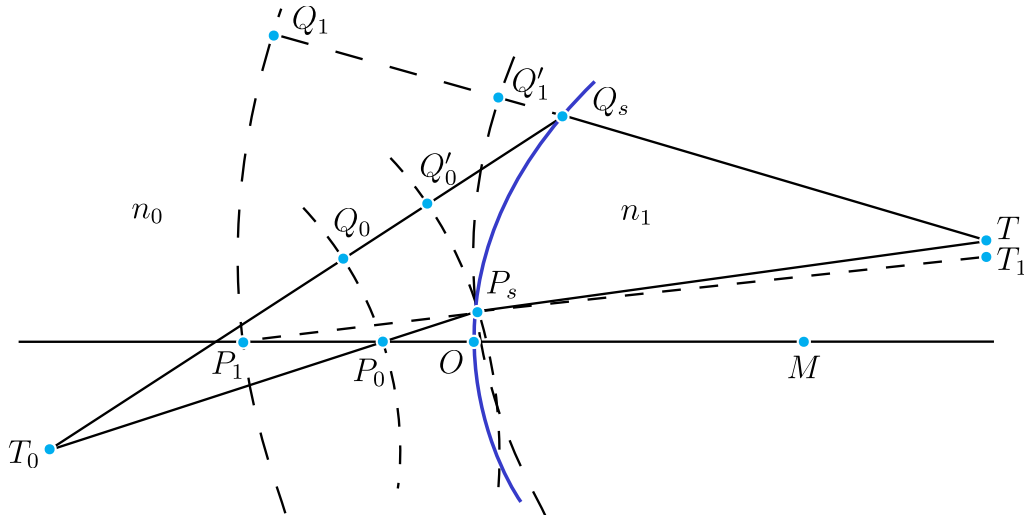
$$\Delta W = [Q_0Q'_0] + [Q'_0Q_s] - [Q'_1Q_s] - [Q_1Q'_1] - \{ [P_0P_s] - [P_1P_s] \}. \quad (5.35)$$

In figuur (5.12) zijn ook de referentiebol door (P_s, Q'_0) met middelpunt T_0 en de bol door (P_s, Q'_1) met middelpunt T_1 getekend. In het geval van de aberratievrije invallende bundel geldt natuurlijk dat $[P_0P_s] = [Q_0Q'_0]$. Voor de uittreedende bundel kunnen we echter niet stellen dat $[Q_1Q'_1] - [P_1P_s] = 0$. Het verschil in weglengte wordt bepaald door de afstand TT_1 , de dwarsaberratie. Uitgedrukt in bijv. de coördinaten (x, y) van de snijpunten van de stralen met het oppervlak en de coördinaten (ξ', η') voor de snijpunten van de stralen met het beeldvlak, geldt voor de totale graad van de dwarsaberratie dat deze minimaal drie is. Hieruit volgt dat $[Q_1Q'_1]$ en $[P_1P_s]$ pas in de zesde graad verschillend zijn en dat deze termen in een 4de-orde benadering tegen elkaar wegvallen. Uitdrukking 5.35) reduceert nu tot

$$\Delta W^{(4)} = [Q'_0Q_s] - [Q'_1Q_s]. \quad (5.36)$$

Met behulp van de figuren 5.12 en 5.13 vinden we voor de optische weglengten in vgl. (5.36) de uitdrukkingen

$$\begin{aligned} [Q'_1Q_s] &\approx [P_sT_1] - [Q_sT_1] = -n_1 \{ Q_sT_1 - P_sT_1 \}, \\ [Q'_0Q_s] &\approx [T_0Q_s] - [T_0P_s] = -n_0 \{ Q_sT_0 - P_sT_0 \}, \end{aligned}$$



Figuur 5.12: Breking van een invallende hoofdstraal T_0P_sT en een marginale straal T_0Q_sT aan een optisch oppervlak met inachtneming van de posities van intree- en uittreepupil (resp. in P_0 en P_1) bij de afbeelding. De paraxiale straalgegevens van hoofdstraal en marginale straal zijn nodig voor de berekening van de derde-orde aberraties volgens Seidel.

waarbij we verondersteld hebben dat in de beeldruimte van de tussenafbeelding de weglengten $[Q_1''Q_s]$ en $[Q_1'Q_s]$ tot op de 4de orde gelijk zijn, evenals voor de overeenkomstige weglengten $[Q_0''Q_s]$ en $[Q_0'Q_s]$ in de voorwerpsruimte (voor het geval de objectbundel reeds geaberreerd is). De uitdrukking voor de 4-de orde golffrontaberratie wordt nu gegeven door

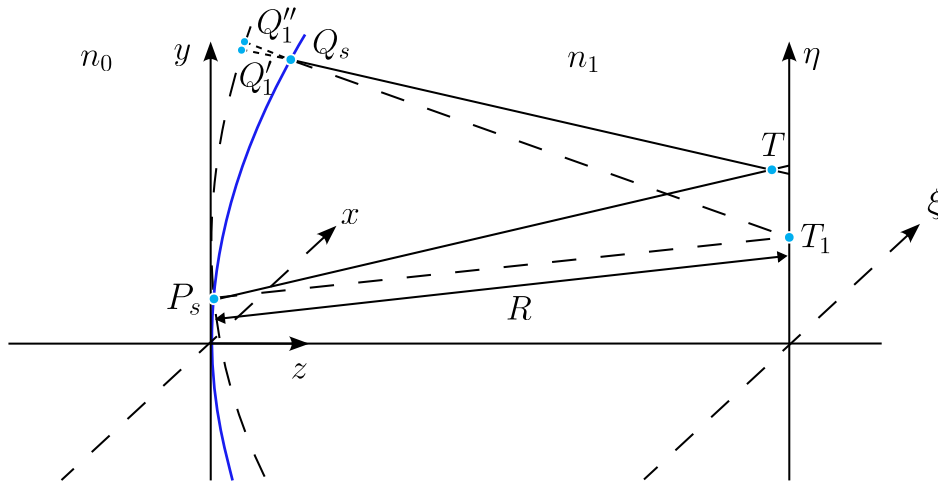
$$\Delta W^{(4)} = n_1 \{Q_s T_1 - P_s T_1\} - n_0 \{Q_s T_0 - P_s T_0\}. \quad (5.37)$$

Voor de evaluatie van $\Delta W^{(4)}$ zijn de coördinaten van Q_s, P_s, T_0 en T_1 vereist. Evenals bij de punten T_0 en T_1 kunnen we ook voor de (x, y) -coördinaten van P_s en Q_s de paraxiale waarden nemen. Verschillen tussen de coördinaten van het snijpunt van de werkelijke straal en de coördinaten, zoals berekend aan de hand van de paraxiale optica, zullen wederom slechts de 6de-orde en hogere-orde termen beïnvloeden. Uit het feit dat de paraxiale optica voldoende nauwkeurige waarden geeft voor de snijhoogten van stralen bij de berekening van de Seidelaberraties, volgt dat in een optisch stelsel de aberratiebijdragen volgens Seidel van een oppervlak onafhankelijk zijn van de aberratiebijdragen die bij breking of reflectie aan voorafgaande oppervlakken ontstaan zijn. De totale aberratie van het stelsel is dus een sommatie over de bijdragen door de individuele oppervlakken zonder enige onderlinge wisselwerking. Men spreekt in dit geval wel van *intrinsieke* aberraties. Bij aberraties van hogere orde dan de Seidelaberraties onderscheidt men vanwege de wisselwerking naast de intrinsieke ook zogenaamde *geïnduceerde* aberraties. Deze aberraties hangen ook af van de afwijkingen van het paraxiale ideaal die in het stelsel reeds ontstaan zijn voordat het beschouwde oppervlak bereikt is.

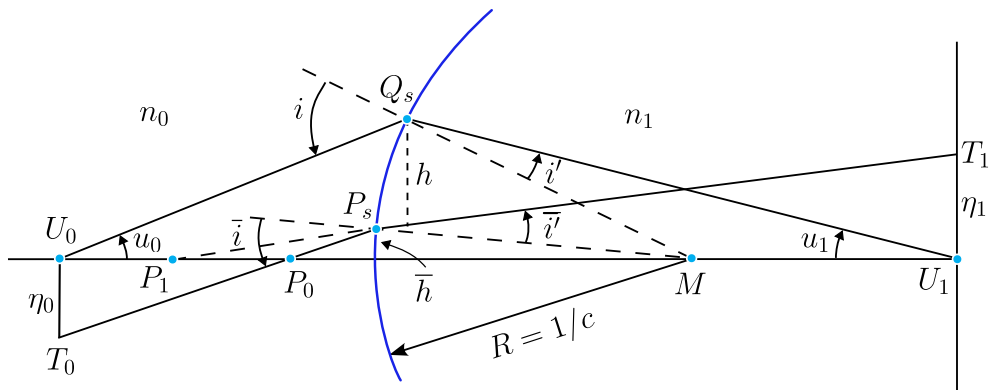
Bij de berekening van de afstanden zoals die in vgl. (5.37) aangetroffen worden, zullen wortelvormen ontstaan, o.a. bij de berekening van de z -coördinaat van de punten P_s en Q_s . Voor sferische oppervlakken geldt dat

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{c} \left\{ 1 - \sqrt{1 - c^2 (x^2 + y^2)} \right\} \\ &= \frac{c}{2} (x^2 + y^2) + \frac{c^3}{8} (x^2 + y^2)^2 + \frac{c^5}{16} (x^2 + y^2)^3 + \frac{5c^7}{128} (x^2 + y^2)^4 + \dots \end{aligned} \quad (5.38)$$

In het kader van de Seidelaberraties moeten de twee eerste termen van de reeksontwikkeling voor z meegenomen worden. Neemt men in plaats van een cirkel een kegelsnede als beschrijvende



Figuur 5.13: Een schets van de diverse optische weglengten die een rol spelen bij de berekening van de Seidelaberraties in het golffrontdomein.



Figuur 5.14: Schets van de diverse paraxiale grootheden die de basis vormen voor de uiteindelijke berekening van de Seidel golffrontaberraties

kromme voor het oppervlak (zie vgl. 4.17), dan vindt men voor z de volgende waarde,

$$z = \frac{c}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\varepsilon}{8} c^3 (x^2 + y^2)^2 + \frac{\varepsilon^2}{16} c^5 (x^2 + y^2)^3 + \dots \quad (5.39)$$

Algemeen kan men voor een asferisch oppervlak schrijven dat

$$z = \frac{c}{2} (x^2 + y^2) + \left(\frac{c^3}{8} + G \right) (x^2 + y^2)^2 + \dots \quad (5.40)$$

waarbij de 'asferische term' $G(x^2 + y^2)^2$ de afwijking ten opzichte van een bolvormig oppervlak voorstelt.

V.6 Uitdrukkingen voor de Seidelcoëfficiënten

De berekening van ΔW volgens vgl. (5.37) met behulp van de paraxiale gegevens van de stralen en de uitsplitsing van ΔW naar bijdragen tot de vijf Seidelaberraties is nogal bewerkelijk. Uiteindelijk ontstaan toch vrij overzichtelijke uitdrukkingen met behulp van de volgende paraxiale grootheden (zie ook figuur 5.14),

$$A = n_0 h \left(c - \frac{1}{z_0} \right) = n_0 i = n_1 i' = n_1 h \left(c - \frac{1}{z_1} \right), \quad (5.41)$$

$$B = n_0 \bar{h} \left(c - \frac{1}{\bar{z}_0} \right) = n_0 \bar{i} = n_1 \bar{i}' = n_1 \bar{h} \left(c - \frac{1}{\bar{z}_1} \right), \quad (5.42)$$

$$\Delta \left(\frac{u}{n} \right) = \frac{u_1}{n_1} - \frac{u_0}{n_0}, \quad (5.43)$$

$$\Delta \left(\frac{c}{n} \right) = c \left[\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0} \right], \quad (5.44)$$

$$H = n_0 u_0 \eta_0 = n_1 u_1 \eta_1. \quad (5.45)$$

Hierbij is $OU_0 = z_0$, $OU_1 = z_1$, $OP_0 = \bar{z}_0$, $OP_1 = \bar{z}_1$ en deze afstanden corresponderen met de paraxiaal berekende posities van voorwerps- en beeldvlak en van de intree- en uittreepupil bij de tussenafbeelding door het brekende oppervlak. De grootheden A en B zijn invariant bij breking aan een oppervlak en corresponderen met het product van invalshoek en brekingsindex van een apertuurstraal U_0Q_s en van de hoofdstraal T_0P_s . De grootte H is identiek in elke tussenruimte van een optisch stelsel en is een bepaalde vorm van de zogenaamde Lagrange-invariant. Uit de relatie (2.38) tussen hoek- en dwarsvergroting bij een afbeelding volgt deze invariant onmiddellijk. Beschouwen we H bijvoorbeeld in de voorwerpsruimte, dan is $H^2 = n^2 u^2 \eta^2$ evenredig met het oppervlak van het voorwerp en de ruimtehoek waarmee het verlicht wordt en bepaalt op deze wijze de 'lichtbuis' waardoor de stralen zich in het optisch stelsel voortplanten.

Na een keuze van de veldgrootte (η'_b) en de numerieke apertuur (h'_m/R') in de beeldruimte kunnen met behulp van de gegevens van één marginale straal vanuit het voorwerpspunt op de as en met de data voor de hoofdstraal de uitdrukkingen (5.41) t/m (5.44) voor elk oppervlak berekend worden. De uitdrukking voor ΔW als functie van de veldpositie η' en de plaats (x' , y') waar een apertuurstraal de uittreepupilbol treft wordt nu gegeven door

$$\begin{aligned} \Delta W(x', y'; \eta') &= \frac{1}{8} S_1 \frac{(x'^2 + y'^2)^2}{h_m'^4} \\ &+ \frac{1}{2} S_2 \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{h_m'^3} \cdot \frac{\eta'}{\eta_b'} \\ &+ \frac{1}{2} S_3 \frac{y'^2}{h_m'^2} \cdot \frac{\eta'^2}{\eta_b'^2} \\ &+ \frac{1}{4} (S_3 + S_4) \frac{(x'^2 + y'^2)}{h_m'^2} \cdot \frac{\eta'^2}{\eta_b'^2} \\ &+ \frac{1}{2} S_5 \frac{y'}{h_m'} \left(\frac{\eta'}{\eta_b'} \right)^3, \end{aligned} \quad (5.46)$$

met de S -coëfficiënten (dimensie is lengte) gegeven door

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum \left\{ A^2 h_m \Delta \left(\frac{u}{n} \right) - 8Gh_m^4 \Delta(n) \right\}, \\ S_2 &= \sum \left\{ ABh_m \Delta \left(\frac{u}{n} \right) - 8Gh_m^3 \bar{h} \Delta(n) \right\}, \\ S_3 &= \sum \left\{ B^2 h_m \Delta \left(\frac{u}{n} \right) - 8Gh_m^2 \bar{h}^2 \Delta(n) \right\}, \\ S_4 &= \sum H^2 c \Delta \left(\frac{1}{n} \right), \\ S_5 &= \sum \left\{ \frac{B^3}{A} h_m \Delta \left(\frac{u}{n} \right) + \frac{B}{A} H^2 c \Delta \left(\frac{1}{n} \right) - 8Gh_m \bar{h}^3 \Delta(n) \right\}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

De termen van (5.46) zijn te herkennen als sferische aberratie, coma, astigmatisme, beeldveldkromming en distorsie. In de uitdrukking voor de coëfficiënten is de invloed van een asferische coëfficiënt G meegenomen. Men ziet dat alle aberratie-coëfficiënten hierdoor beïnvloed worden behalve de coëfficiënt S_4 , die verder ook niet van de ligging der conjugaten of pupillen afhangt. Deze coëfficiënt heeft de naam Petzvalsom gekregen aangezien Petzval reeds inzag dat het nul worden van S_4 een voorwaarde voor het verkrijgen van een vlak beeldveld is.

De termen S_3 en S_4 op de derde en vierde regel van (5.46) kunnen ook iets anders gerangschikt worden volgens

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} S_3 \frac{y'^2}{h_m'^2} + \frac{1}{4} (S_3 + S_4) \frac{(x'^2 + y'^2)}{h_m'^2} \right\} \frac{\eta'^2}{\eta_b'^2} \\ & = \left\{ \frac{1}{4} (3 S_3 + S_4) \frac{y'^2}{h_m'^2} + \frac{1}{4} (S_3 + S_4) \frac{x'^2}{h_m'^2} \right\} \frac{\eta'^2}{\eta_b'^2} \end{aligned} \quad (5.48)$$

In de gewijzigde vorm constateren we een hoofdkromming in het meridionale vlak (evenredig met $(3S_3 + S_4)/4$) die de ligging van de tangentiële brandlijn bepaalt, de andere hoofdkromming geeft de ligging van de sagittale brandlijn; men spreekt ook van tangentiële en sagittale beeldbol. Het is duidelijk dat voor een vlak beeldveld niet alleen S_4 nul moet zijn maar dat ook het astigmatisme moet verdwijnen. Is dit niet mogelijk, dan is het beeldveld gemiddeld vlak indien geldt $S_4 = -2 S_3$.

Wanneer de coëfficiënten volgens (5.47) eenmaal berekend zijn, volgt de grootte van ΔW voor andere waarden van de numerieke apertuur en de veldcoördinaat door schaling van de termen met behulp van de afhankelijkheden volgens vergelijking (5.46). Het is moeilijk een algemene richtlijn te geven voor het geldigheidsgebied van de Seidelbenadering. Hogere-orde termen zullen snel belangrijk worden bij toenemende waarde van invalshoeken van apertuurstraal en hoofdstraal op oppervlakken. In hoekmaat uitgedrukt zou men zowel voor openingshoek als veldhoek een bovengrens van 3° aan kunnen nemen. Daarnaast speelt ook de absolute afmeting van het optisch stelsel een rol aangezien bij gelijkvormige systemen de aberraties in lengtemaat meeschalen.

Natuurlijk zullen bij een optisch stelsel uiteindelijk de Seidelaberraties klein moeten zijn. Zijn er voldoende brekende oppervlakken aanwezig dan kan dit op vele manieren verwezenlijkt worden. De methode, waarbij zo weinig mogelijk hogere-orde aberraties gegenereerd worden, verdient dan de voorkeur. Enige afbeeldingen, die voor willekeurig grote openingshoek perfect zijn, werden al besproken in hoofdstuk II. Deze afbeeldingen leveren ook een bijdrage nul aan diverse Seideltermen. Aan de hand van de Seidelcoëfficiënten komen deze bijzondere afbeeldingen in hoofdstuk VI nogmaals ter sprake.

Hoofdstuk VI

Aberraties van een optisch stelsel

In dit hoofdstuk zullen we, met behulp van de uitdrukkingen voor de Seidelaberraties, enige bijzondere posities van de geconjugeerde vlakken en van de pupillen beschouwen. De Seidelaberraties kunnen in sommige gevallen nul worden; zelfs kan voor de zogenaamde aplanatische punten een perfecte afbeelding bij grote openingshoeken verkregen worden, een feit dat reeds aan Huygens bekend was. Na deze bijzondere eigenschappen bij afbeelding via één oppervlak komen in dit hoofdstuk nogmaals de sinusvoorwaarde en andere algemene voorwaarden ter sprake die een rol spelen bij de afbeelding door een stelsel. Daarna volgen de aberratie uitdrukkingen die gelden als het stelsel voorgesteld wordt door een opeenvolging van zogenaamde 'dunne' lenzen. Tenslotte worden de kleurfouten van een optisch stelsel besproken.

VI.1 De Seidel-aberraties van een enkel oppervlak

Om de Seidelaberraties bij afbeelding door een enkel oppervlak te berekenen kunnen we de uitdrukkingen voor de coëfficiënten volgens vgl. (5.47) gebruiken. Het is mogelijk deze uitdrukkingen in een gewijzigde vorm te schrijven, waardoor de bijzondere aberratievrije afbeeldingssituaties duidelijker naar voren komen. In plaats van de refractie-invarianten A en B van de marginale straal en van de hoofdstraal voeren we als variabelen de vergroting β' tussen beeld- en voorwerpsvlak in en ook β_p' , de vergroting tussen uittree- en intreepupil.

In figuur 5.14 waren de relevante grootheden van een marginale straal en een hoofdstraal aangegeven. De marginale straal snijdt het oppervlak in Q_S en het beeldvlak in U_1 . De paraxiale hoofdstraal snijdt het oppervlak in P_S en het beeldvlak in T_1 . De beeldhoogte U_1T_1 is η_1 . Het kromtemiddelpunt van het sferische oppervlak is M .

Met behulp van de paraxiale afbeeldingsvergelijking en de uitdrukking voor de vergroting

$$\begin{aligned}\frac{n'}{s'} &= \frac{n}{s} + \frac{n' - n}{R}, \\ \beta' &= \frac{ns'}{n's},\end{aligned}\tag{6.1}$$

kunnen we afleiden dat

$$\begin{aligned}s' &= \frac{n'(1 - \beta')}{K}, \\ s &= \frac{n(1 - \beta')}{\beta'K},\end{aligned}\tag{6.2}$$

waarbij $K = (n' - n)/R$ de sterkte van het afbeeldende oppervlak voorstelt. Voor de afbeelding van de intreepupil geldt op overeenkomstige wijze,

$$\begin{aligned}\bar{s}' &= \frac{n'(1 - \beta_p')}{K}, \\ \bar{s} &= \frac{n(1 - \beta_p')}{\beta_p' K}.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Voor de gereduceerde knikhoek $\Delta(u/n)$ geldt

$$\Delta\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{hK}{(1 - \beta')} \left\{ \frac{\beta'}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right\}.\quad (6.4)$$

De grootheid h is te schrijven als

$$h = -u's' = -(n'u')(1 - \beta')/K,\quad (6.5)$$

terwijl de refractie-invariant A overgaat in

$$A = -\frac{(n - n'\beta')}{(n' - n)} (n'u'),\quad (6.6)$$

waar $(n'u')$ de paraxiale benadering van de numerieke apertuur (NA) voorstelt. De refractie-invariant B van de hoofdstraal wordt gegeven door

$$B = \frac{\eta K [n - n'\beta_p']}{(n' - n)(\beta_p' - \beta')}.\quad (6.7)$$

De uitdrukkingen voor resp. sferische aberratie, coma en astigmatisme worden nu,

$$\Delta W_1 = \frac{1}{8} \frac{(1 - \beta')(n - n'\beta')^2 (n'^2 \beta' - n^2)}{(n' - n)^2 n^2 n'^2} \frac{1}{K} (NA)^4,\quad (6.8)$$

$$\Delta W_2 = \frac{1}{2} \frac{(1 - \beta')(n - n'\beta') (n'^2 \beta' - n^2)}{(n' - n)^2 n^2 n'^2} \frac{(n - n'\beta_p')}{(\beta_p' - \beta')} \eta (NA)^3,\quad (6.9)$$

$$\Delta W_3 = \frac{1}{2} \frac{(1 - \beta')(n'^2 \beta' - n^2)}{(n' - n)^2 n^2 n'^2} \frac{(n - n'\beta_p')^2}{(\beta_p' - \beta')^2} K \eta^2 (NA)^2.\quad (6.10)$$

Uit de vgl. (6.8), (6.9) en (6.10) kan men allereerst enige belangrijke conclusies trekken omtrent schaling van optische systemen. Ook al gelden bovenstaande formules slechts voor de afbeelding door één oppervlak, de schalingseffecten zijn natuurlijk ook geldig voor gelijkvormige stelsels. Voor de afbeelding van een punt op de as is de sferische aberratie evenredig met f ($= 1/K$), de brandpuntsafstand van een systeem. De verstrooiingsfiguur wordt lineair groter met de karakteristieke lengte (f) van het systeem.

In het geval van coma blijkt de diameter 2η van het beeldveld, waarbinnen de aberratie een bepaalde waarde niet overschrijdt, onafhankelijk te zijn van de sterkte van het systeem. Daarentegen is het voor de reductie van astigmatisme(en beeldveldkromming) gunstig een lange brandpuntsafstand te kiezen wanneer we een bepaald beeldveld met absolute diameter 2η moeten creëren. Wanneer het oneindige afgebeeld wordt geldt $\eta = \alpha F$, waarbij α de veldhoek van het stelsel is en het astigmatisme is nu evenredig met $\alpha^2 F$. Deze uitdrukking zegt ook dat het gunstig is de veldhoek te reduceren door de keuze van een lange brandpuntsafstand. Vaak zal een dergelijke schaling echter niet mogelijk zijn omdat bijv. de (gezichts)veldhoek vastligt of omdat een systeem met grotere bouwlengte te volumineus en te zwaar wordt.

Naast deze schalingsregels volgen uit bovenstaande uitdrukkingen ook onmiddellijk de bijzondere afbeeldingssituaties:

a) Sferische aberratie = 0

$$\beta' = +1, \quad \beta' = +n/n', \quad \beta' = +n^2/n'^2.$$

Deze bijzondere afbeeldingen zijn reeds ter sprake gekomen in hoofdstuk II en daar was gebleken dat niet alleen de 4de-orde sferische aberratie nul wordt, maar ook alle hogere orden.

b) Coma = 0

$$\beta' = +1, \quad \beta' = +n/n', \quad \beta' = +n^2/n'^2 \quad \beta'_p = n/n'.$$

Naast de situaties die reeds optraden bij sferische aberratie wordt coma ook nul indien de pupil op zichzelf wordt afgebeeld in het kromtemiddelpunt. In dit geval vertoont een scheve bundel dezelfde aberratie als de asbundel.

c) Astigmatisme = 0

$$\beta' = +1, \quad \beta' = n^2/n'^2, \quad \beta'_p = n/n'.$$

De afbeelding van het kromtemiddelpunt op zichzelf blijkt niet astigmatisme-vrij te zijn. Dit is een belangrijke beeldfout wanneer men (met vergroting -1) de omgeving van het kromtemiddelpunt van een spiegel op zichzelf afbeeldt.

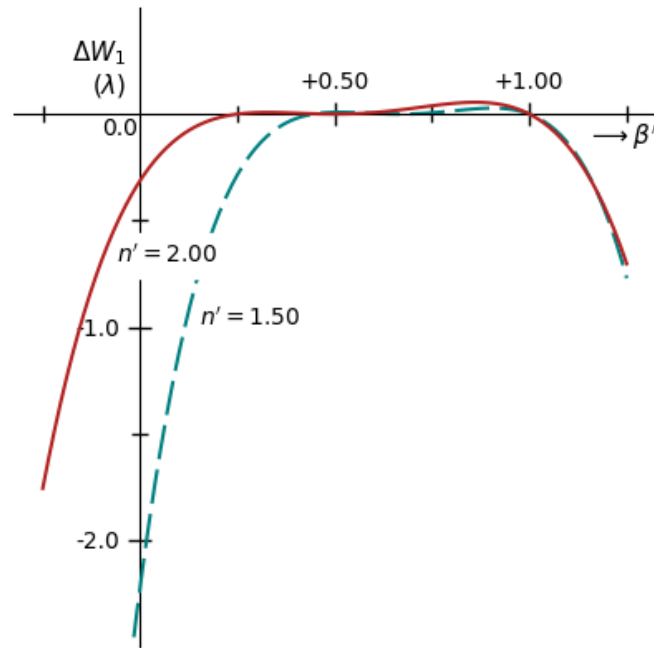
In figuur 6.1 is aangegeven hoe groot de sferische aberratie van een brekend oppervlak is bij een numerieke apertuur $NA = 0.10$ en een sterkte van 10 dioptrieën ($K = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $f = 100 \text{ mm}$). De aberratie is uitgezet in eenheden van de golflengte ($0.5 \mu\text{m}$) voor een overgang van lucht naar een medium met een brekingsindex van resp. 1.5 en 2.0. De curves zijn van de vierde graad in β' met een relatief minimum identiek nul bij afbeelding in het kromtemiddelpunt. De afbeeldingssituaties met geringe sferische aberratie treden op bij positieve waarden van de dwarsvergroting en dit gebied correspondeert met een virtueel voorwerpspunt en een reëel beeldpunt. Deze situatie is niet interessant wanneer een ééntraps afbeelding van een reëel voorwerpsvlak naar een reëel beeldvlak gemaakt moet worden. Als tussenafbeelding in een stelsel is dit gebied van vergrotingen wel interessant, o.a. vanwege het feit dat het teken van de restaberratie omgekeerd is ten opzichte van een meer gebruikelijke situatie zoals $\beta' = 0$. Dit geeft de mogelijkheid tot compensatie van sferische aberratie in een stelsel zonder dat het noodzakelijk is oppervlakken met tegengestelde sterkte K in te voeren.

Opvallend is ook de sterke toename van de sferische aberratie met afnemende brekingsindex bij bijv. de vergroting $\beta' = 0$. Dit is vooral toe te schrijven aan het feit dat bij gelijkblijvende sterkte van het brekende oppervlak de kromming moet toenemen als n' afneemt. Hierdoor worden de invalshoeken op het oppervlak groter evenals de afwijkingen van de brekingswet ten opzichte van de paraxiale benadering.

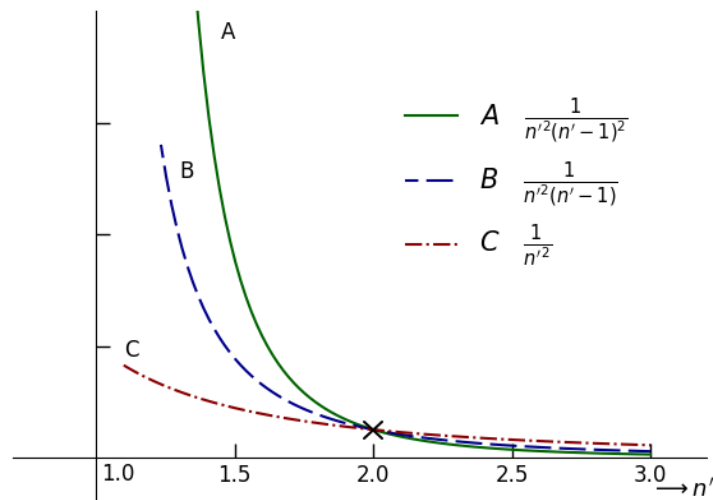
Voor het coma en astigmatisme kunnen ook vergelijkbare figuren getekend worden; door de extra vrijheidsgraad van de pupilvergroting is echter een schaar van grafieken nodig om alle situaties aan te geven. Een singulariteit zou optreden wanneer de pupilvergroting β'_p en de beeldvergroting β' identiek zijn. Een dergelijke situatie is fysisch niet reëel aangezien de hoofdstralen van scheve bundels nu niet meer gedefinieerd zijn. Wel is het mogelijk grote bedragen aan veldaberraties op te roepen door β'_p en β' tot elkaar te laten naderen. Dit is echter een riskante zaak omdat ook hogere-orde aberraties kunnen ontstaan die niet op identieke wijze gecompenseerd zullen worden in een stelsel als de Seidel-aberraties.

In figuur 6.2 geven we bij een vaste vergroting ($\beta' = 0$; $\beta'_p = +1$) de invloed van de brekingsindex n' op de grootte van sferische aberratie, coma en astigmatisme (zie de curves *A*, *B* en *C*). De afname van de sferische aberratie bij toenemende brekingsindex is zeer sterk: een factor van ongeveer 7 bij een verandering van brekingsindex van 1.5 naar 2.0.

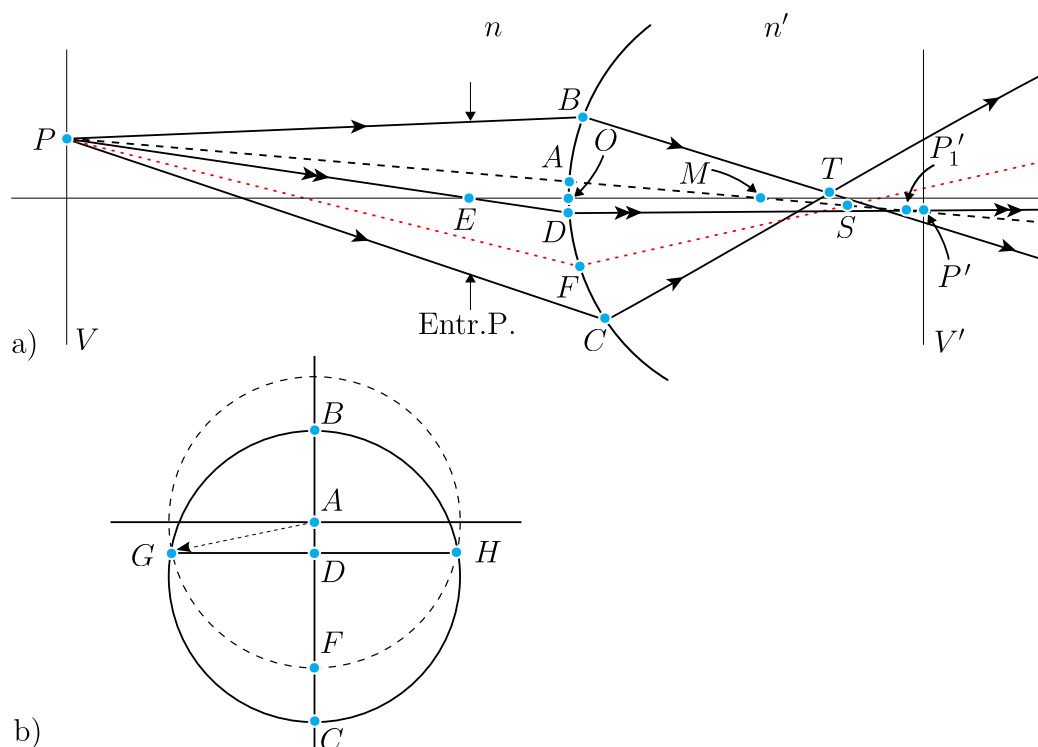
De sferische aberratie van een spiegellend oppervlak is aangegeven met een kruisje en is gelijk aan die van een brekend oppervlak met een brekingsindexsprong gelijk aan 1.0. De afname van coma en astigmatisme is meer geleidelijk bij toenemende brekingsindex maar toch voldoende om



Figuur 6.1: Grafiek van de sferische aberratie van een brekend oppervlak als functie van de dwarsvergroting β' . Het gebied met positieve vergroting (combinatie van een reële en een virtuele geconjugeerde afstand) levert de laagste aberratiewaarden op, waaronder nul bij de speciale waarden $\beta' = +1$, (n/n') en $(n/n')^2$.



Figuur 6.2: Relatieve waarden van de aberraties bij een optische overgang als functie van het optisch contrast (n'/n) waarbij $n = 1$. Afbeelding in het beeldbrandpunt. Curve A: sferische aberratie, B: coma, C: astigmatisme. De pupilvergroting $\beta'_p = 1$ (diafragma samenvallend met de overgang tussen de media).



Figuur 6.3: a) De aberraties van een scheve bundel die een voorwerpspunt P afbeeldt in het beeldvlak V' ter plaatse van het punt P' . De aberratie van de scheve bundel kan beschreven worden met behulp van de sferische aberratie met betrekking tot de speciale referentiestraal $PAMP'$. Deze straal doorsnijdt ongebroken het punt P' in het beeldvlak V' .

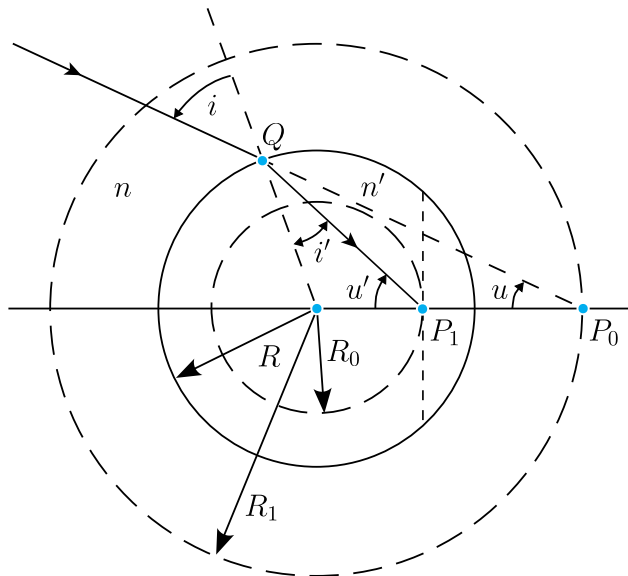
b) De verschoven 'voetafdruk' $BGCH$ van de scheve bundel op het deel van het brekend oppervlak met centrum in A dat alleen cirkelsymmetrische sferische aberratie zou veroorzaken. De asymmetrie van de aberraties over het oppervlakdeel $BGCH$ veroorzaakt de aberraties coma, astigmatisme en vertekening in de afbeeldingsbundel.

de algemene uitspraak te rechtvaardigen dat de grootte van de opgeroepen aberraties beduidend afneemt bij gebruik van media met een hogere brekingsindex. Aan het gebruik van deze materialen met hogere index wordt in de praktijk een halt toegevoerd door hun hogere prijs, grotere dispersie, problematische bewerkbaarheid en vaak ook verminderde chemische stabiliteit.

VI.2 Beschrijving van de aberratie van een scheve bundel.

In figuur 6.3 is aangegeven hoe bij een sferisch oppervlak naast sferische aberratie ook coma en astigmatisme ontstaan bij een scheef invallende bundel. Het voorwerpspunt P bevindt zich in het voorwerpsvlak V , waarvan het geconjugeerde vlak gegeven wordt door V' . Het paraxiale beeldpunt van P is P' en dit punt ligt op de hulpas PAM door het kromtemiddelpunt M van het oppervlak. Stralen vertrekkend uit P , die het brekende oppervlak snijden op een gelijke afstand van de hulpas PAM zullen tengevolge van de sferische aberratie van de afbeelding de hulpas niet meer in P' maar in een punt dicht bij het kromtemiddelpunt snijden. Doordat de intreepupil de optische as niet in de vertex O van het oppervlak snijdt maar in het punt E , zullen de marginale stralen van de bundel uit P , aangegeven door de cirkel $BHCG$ niet meer gecentreerd liggen rond het snijpunt A van de hulpas PM met het oppervlak. De hoofdstraal van de scheve bundel snijdt het oppervlak in D en de hulpas PAM in P_1' .

De randstralen in de meridionale sectie, PB en PC , snijden elkaar in T . Om het snijpunt S te vinden van de marginale sagittale stralen, PG en PH , moeten we formeel stralen construeren



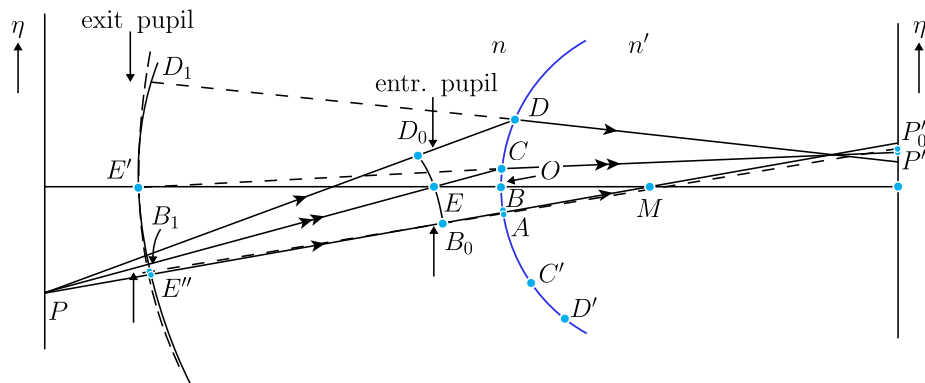
Figuur 6.4: Constructie volgens Huygens van de aplanatische punten met dwarsvergroting $\beta' = (n/n')^2$ van een sferisch oppervlak.

in een vlak loodrecht op het vlak van tekening. Maar het snijpunt S van de sagittale stralen in het vlak van tekening kunnen we toch bepalen met een gestippelde hulpstraal PF . Deze straal heeft dezelfde sferische aberratie als PG en PH ten opzichte van de hulpas PAM . Het snijpunt S van PF met de hulpas PAM is dus ook het snijpunt van de sagittale randstralen in een vlak loodrecht op het vlak van tekening. In het spraakgebruik hebben de dwarsafstanden van T en S tot de hoofdstraal PDP'_1 de naam *tangentieel* en *sagittaal* coma gekregen. Voor een sferisch oppervlak kan afgeleid worden dat het tangentiële coma gelijk is aan driemaal het sagittale coma. De afstand van T naar S , nu gemeten *langs* de optische as, heet het *longitudinale* astigmatisme van de bundel. Het spreekt vanzelf dat alle aberraties in figuur 6.3 sterk overdreven zijn. Bij een opeenvolging van brekende sferische oppervlakken zal de onderlinge richting van de hoofdstraal en de hulpas zich voortdurend wijzigen waardoor de relatieve bijdragen van sferische aberratie, coma en astigmatisme sterk verschillend kunnen zijn bij de diverse brekingen. Dit biedt een optisch ontwerper de mogelijkheid tot compensatie van de aberraties die per oppervlak ontstaan zijn.

Een bijzonder geval van breking aan een sferisch oppervlak is reeds meermalen besproken, namelijk de situatie waarbij de dwarsvergroting β' gelijk is aan n^2/n'^2 . Deze bijzondere ligging van de geconjugeerde vlakken is gevonden door Huygens. In figuur 6.4 is zijn constructie van de zogenaamde aplanatische punten weergegeven. Het sferische brekende oppervlak is de bol met straal R . Tevens zijn getekend de hulpbollen met straal R_0 en R_1 waarbij geldt dat

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{n}{n'} R, \\ R_1 &= \frac{n'}{n} R \end{aligned} \quad (6.11)$$

Een invallende straal is gericht naar het punt P_0 en snijdt het oppervlak in punt Q . Voor de sinussen van de hoek van inval en de hoek van breking geldt bij de gekozen richting van de gebroken straal vanwege de gelijkvormigheid van de driehoeken ΔQMP_0 en ΔP_1MQ dat $u = i'$ en $u' = i$. Hieruit volgt dat $n \sin i = n' \sin i'$ voor willekeurige waarden van i . P_1 is dus een stigmatische afbeelding van P_0 en dit geldt voor alle puntenparen, gelegen op de twee bollen met stralen R_0 en R_1 en op eenzelfde lijn door het middelpunt M . Deze laatste eigenschap houdt in dat een omgeving van P_0 ook foutvrij wordt afgebeeld en dit betekent dat de afbeelding van P_0



Figuur 6.5: Illustratie van de invloed van de positie van het diafragma (intreepupil in E) op de diverse aberratietermen bij de afbeelding van een veldpunt P in de omgeving van het paraxiale beeldpunt P'_0 .

op P_1 aan de sinusvoorwaarde van Abbe voldoet. Uit de relatie $n \sin i = n' \sin i'$ volgt eenvoudig dat

$$n \sin u' = n' \sin u$$

ofwel,

$$n \sin u = \left(\frac{n^2}{n'^2} \right) n' \sin u' = \beta' n' \sin u' \quad (6.12)$$

waarbij β' de dwarsvergroting van de afbeelding van P_0 op P_1 is. Een rechtstreekse toepassing van de aplanatische afbeelding volgens Huygens is te vinden bij de frontlens van diverse microscoopobjectieven. Aan een glazen kogel is volgens de stippellijn door P_1 een plat vlak gepolijst. Het object bevindt zich zeer dicht bij P_1 en de stralen, die van hieruit vertrekken ($NA' = n' \sin u'$) treden uit met een apertuurhoek $NA = \sin u$ ($n = 1$). Er is dus een reductie in openingshoek bereikt van n'^2 in een enkele foutvrije afbeeldingsstap. Microscoopobjectieven met een dergelijke frontlens worden vaak in olie-immersie gebruikt waardoor de numerieke apertuur tot waarden groter dan 1.0 kan stijgen.

VI.3 Invloed diafragma-positie op aberraties

In sectie VI.1 is de invloed besproken van de pupilvergroting op de aberraties (coma en astigmatisme) van afgebeelde punten, die niet op de optische as liggen (veldpunten). Bij de afbeelding door één enkel oppervlak kan men eenvoudig, uitgaande van de sferische aberratie van de afbeelding door het oppervlak, de grootte van de overige aberraties berekenen als functie van de diafragma-positie. Hierbij zullen we eerst de golffrontaberraties beschouwen en vervolgens de dwarsaberraties.

A) Golffrontaberraties

In figuur 6.5 is een sferisch golffront B_0ED_0 getekend met als middelpunt het voorwerpspunt P . Het paraxiale beeldpunt van P is P'_0 , gelegen op de hulpas PAM door het middelpunt M van het brekende oppervlak. De hoofdstraal PEC van de bundel snijdt het beeldvlak in P' , in de figuur een kleine afstand onder P'_0 gelegen. Het midden E van de intreepupil wordt in E' afgebeeld. De referentiebol voor de bepaling van de golffrontaberratie snijdt de optische as in dit punt E' en de hulpas PAM in het punt E'' . De golffrontaberratie in de uitreepupil vertoont radiële symmetrie ten opzichte van dit punt E'' . Wanneer we de coördinaten op de referentiebol relateren aan een assenstelsel waarvan één as gegeven wordt door PAM en waarvan de x - en y -as in een vlak liggen door E'' loodrecht op PAM , kan de sferische aberratie van de afbeelding

geschreven worden als

$$W_{E''}(x, y) = W_{40} (x^2 + y^2)^2. \quad (6.13)$$

Gegeven de coördinaten $(x_{E'}, y_{E'})$ van E' en de transformatie van de y -coördinaat $y \rightarrow y + y_{E'}$ kunnen we de aberratiefunctie van (6.13) schrijven als

$$W_{E'}(x, y) = W_{40} \{x^2 + (y + y_{E'})^2\}^2. \quad (6.14)$$

Via normering op de pupilstraal ρ_0 kan (6.14) geschreven worden als

$$\begin{aligned} W(X, Y) &= W_{40} \rho_0^4 \{X^2 + (Y + Y_{E'})^2\}^2 \\ &= W'_{40} (X^2 + Y^2)^2 && \text{sferische aberratie} \\ &\quad + 4 W'_{40} Y_{E'} (X^2 + Y^2) Y && \text{coma} \\ &\quad + 6 W'_{40} Y_{E'}^2 Y^2 && \text{tang. astigmatisme} \\ &\quad + 2 W'_{40} Y_{E'}^2 X^2 && \text{sagit. astigmatisme} \\ &\quad + 4 W'_{40} Y_{E'}^3 Y. && \text{distorsie} \end{aligned} \quad (6.15)$$

waarbij de grootte van $Y_{E'}$ een maat is voor de afwijking van de cirkelsymmetrie van het golffront. Een benadering voor $Y_{E'}$ in paraxiale grootheden van de afbeelding is

$$Y_{E'} = \frac{\bar{h}}{h_m} \left(\frac{1 - \beta'}{1 - \beta'_p} \right) \left(\frac{n - n' \beta'_p}{n - n' \beta'} \right), \quad (6.16)$$

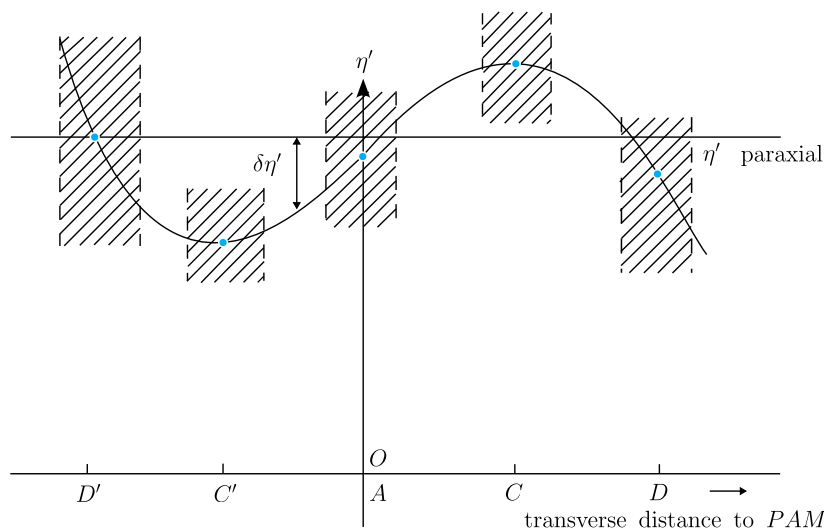
waarbij \bar{h} en h_m de snijhoogten van de hoofdstraal van de scheve bundel en van de marginale straal van de asbundel met het brekende oppervlak zijn (respectievelijk gelijk te stellen aan CO en CD in figuur 6.5). Het is duidelijk dat de mate waarin niet-cirkelsymmetrische aberraties opgeroepen worden bepaald wordt door de grootte van $Y_{E'}$; bij kleine numerieke apertuur van de afbeeldingsbundels en bij grote veldhoeken zal het effect het grootst zijn.

Indien de afbeelding door het oppervlak géén sferische aberratie vertoont, dan kunnen wel veldaberraties aanwezig zijn; voor het coma van de scheve bundels geldt dan echter dat het onafhankelijk is van de pupilpositie. Afdalend in graad (van de pupilcoördinaten) geldt vervolgens dat het astigmatisme onafhankelijk is van de pupilpositie als een scheve bundel geen coma vertoont enz. Let wel dat deze beschouwingen alleen geldig zijn voor de Seidelaberraties. De effectiviteit van pupilverplaatsing bij het compenseren van aberraties is beperkt; de gewenste verplaatsingen kunnen erg groot worden en fysisch niet goed realiseerbaar. Bij sterk excentrisch gebruik van lensoppervlakken kan ook eenzijdige bundelbegrenzing (*vignettering*) ontstaan waardoor de voorgaande beschouwingen niet meer zuiver toepasbaar zijn.

B) Dwarsaberraties

In figuur 6.6 is het snijpunt van stralen met een afbeeldingsvlak getekend als functie van de positie van hun snijpunt met het brekende oppervlak (de grootte van de dwarsaberratie $\delta\eta'$ is sterk overdreven). Tengevolge van de sferische aberratie van de afbeelding vertoont de dwarsaberratie-component in het 'beste' focusvlak een derde-graads verloop, gecompenseerd met een lineaire term. Bij de negatieve sferische aberratie van figuur 6.5 zal het beste focusvlak iets links van het paraxiale beeldpunt P'_0 liggen.

Door middel van de positie E van het diafragma kan een verzameling stralen (in de tekening gelegen in een meridionale sectie van de bundel) geselecteerd worden. Een aantal karakteristieke posities van de hoofdstraal zal nu bekeken worden.



Figuur 6.6: Een schets van de dwarsaberratie-component $\delta\eta'$ tengevolge van sferische aberratie voor stralen in een afbeeldende bundel als functie van hun afstand tot de symmetrie-as $PAMP'_0$ (zie figuur 6.5). Door middel van de diafragma-positie en diafragma-grootte kan een deel van de afbeeldingsbundel geselecteerd worden (gearceerde secties in de figuur) met de mogelijkheid hierdoor de diverse aberraties in onderlinge grootte te laten variëren ('aberration balancing').

- **Hoofdstraal in A**

In overeenstemming met figuur 6.5 zou de dwarsaberratie nul moeten zijn voor de hoofdstraal van een bundel (afmeting overeenkomstig het gearceerde gebied) die het oppervlak in A treft. Door de keuze van het beste focusvlak is er een klein verschil tussen de paraxiaal te verwachten waarde van η' en de η' -coördinaat van de hoofdstraal; dit verschil zal als functie van de veldhoek lineair toenemen en is een schijnbare vergrotingsfout. Het vrijwel lineaire verloop van de dwarsaberratie suggereert een focusfout; zouden we het focusvlak weer in het paraxiale beeldvlak zetten, dan wordt het verschil ($\eta' - \eta'$ paraxiaal) nul en loopt de dwarsaberratie curve hier horizontaal.

- **Hoofdstraal in C**

De hoofdstraal treft het focusvlak voorbij het paraxiale punt en dit leidt tot kussenvormige vertekening. Bovendien is de dwarsaberratie van de marginale meridiale stralen vrijwel gelijk en kleiner dan die van de hoofdstraal: dit duidt op de aanwezigheid van negatief tangentiële coma. Wanneer we de veldhoek vergroten schuift het punt C naar rechts; de lineaire term, vrijwel afwezig in punt C, zal nu weer verschijnen met een zodanig teken dat het beste focusvlak verder naar links schuift. Dit houdt in dat het oppervlak, waarop de tangentiële brandlijn gelegen is, hier naar binnen gekromd is.

- **Hoofdstraal in D**

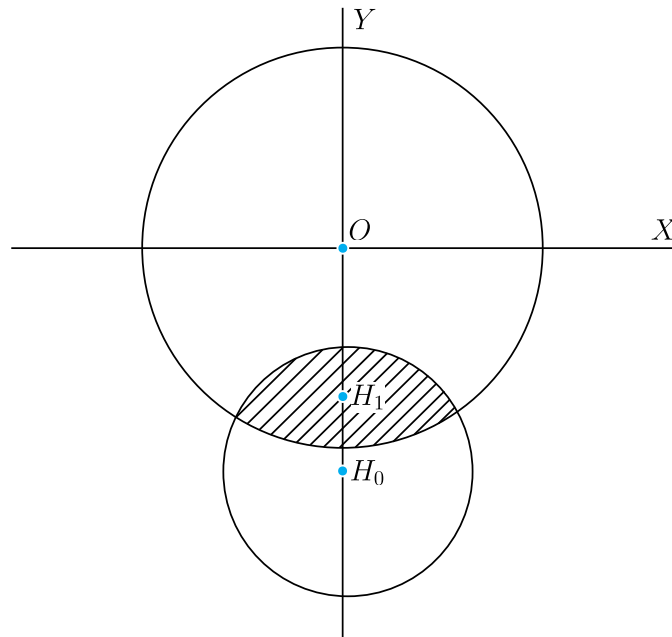
De distorsie in situatie D is vrijwel nul. De hier overheersende aberratie is de kromming van de tangentiële beeldschaal; daarnaast is het coma toegenomen door de grotere kromming van de dwarsaberratiecurve.

- **Hoofdstraal in C'**

De distorsie heeft hier een sterke tonvorm. Het tangentiële coma is positief en de gekromde tangentiële beeldschaal is van het oppervlak af gericht.

- **Hoofdstraal in D'**

Deze situatie is vergelijkbaar met D wat de grootte van de distorsie betreft. Het coma en



Figuur 6.7: Het effectieve pupilloppervlak (gearceerd in de figuur) bij een scheve bundel en een niet-centrale pupilligging. De formele hoofdstraal door het punt H_0 wordt gevignetteerd en een straal door H_1 wordt als nieuwe hoofdstraal voor het gearceerde gebied gekozen.

tangentieel astigmatisme hebben een tegengesteld teken ten opzichte van situatie D .
De sferische aberratie is in alle geschetste situaties gelijk.

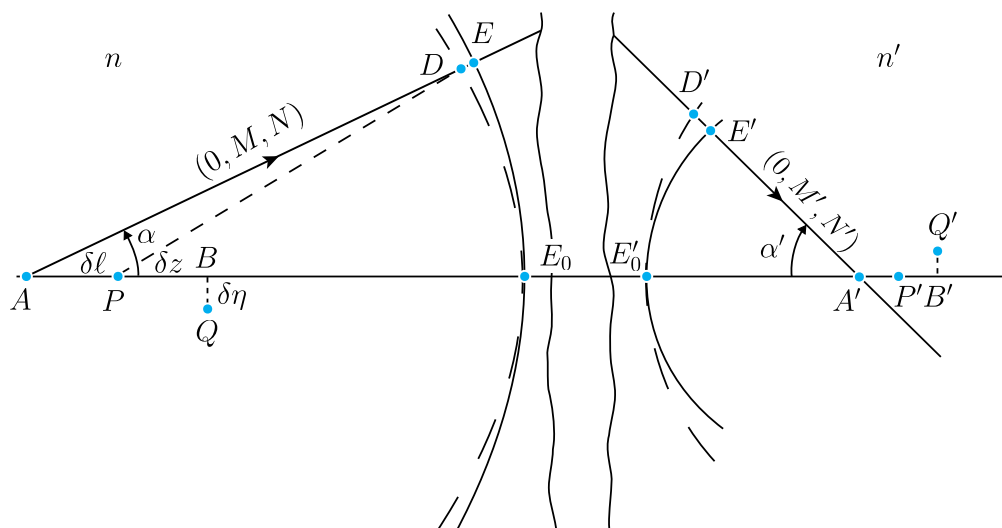
Het is duidelijk dat bij toenemende apertuur (breedte van de gearceerde gebieden) de overgang van sferische aberratie in andere aberraties bij pupilverschuiving minder geprononceerd is. Wanneer de numerieke apertuur groter wordt, zal de door het begrensde oppervlak doorgelaten bundel niet meer cirkelvormig zijn bij een niet-centrale pupilligging: er treedt vignettering op. Alhoewel de definitie van een hoofdstraal natuurlijk ongewijzigd blijft, is de hoofdstraal nu niet meer de centrale straal van de bundel. Het is zelfs mogelijk dat de hoofdstraal geblokkeerd wordt door de rand van het brekende oppervlak. In figuur 6.7 is zo'n situatie getekend waarbij de begrenzing van het oppervlak gegeven is door de cirkel gecentreerd in O . De hoofdstraal van de opvallende bundel zou het oppervlak in H_0 treffen. Als centrale straal kan nu gekozen worden de straal die door H_1 gaat, waarbij de coördinaten van H_1 gegeven worden door

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{S} \iint I(X, Y) X \, dS, \\ Y_1 &= \frac{1}{S} \iint I(X, Y) Y \, dS. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Hierbij is $I(X, Y)$ de intensiteitsverdeling over de bundel en S het oppervlak van het gearceerde gebied.

VI.4 De aberraties van een stelsel

Veronderstellend dat de verandering in sferische aberratie van een asbundel bekend is (gaande van de voorwerps- naar de beeldruimte), kan men eenvoudige relaties afleiden waaraan de straalhoeken in voorwerps- en beeldruimte moeten voldoen om bij kleine verschuivingen van het voorwerp een in eerste benadering ongewijzigde aberratie van de afbeeldende bundel te garanderen.



Figuur 6.8: Een apertuurstraal $ADED'E'A'$ heeft richtingscosinussen $(0, M, N)$ en $(0, M', N')$ in voorwerps- en beeldruimte. Met behulp van de figuur kan de aberratieverandering ΔW berekend worden bij verplaatsing van de referentiepunten P en P' naar resp. Q en Q' . Speciale gevallen hierbij zijn een puur axiale verplaatsing ($\delta z, \delta z'$) of een pure dwarsverplaatsing ($\delta \eta, \delta \eta'$). Indien de resulterende waarde van ΔW nul gesteld wordt ontstaan de voorwaarden waaraan de straalrichtingscosinussen M en M' moeten voldoen volgens Herschel (axiale verplaatsingen) en Abbe (dwarsverplaatsingen).

Deze eigenschap van een optisch stelsel heet *isoplanatisme* (van het griekse $\pi\lambda\nu\nu\omicron\mu\alpha\iota$ =ik wijk af, en $\acute{\iota}\sigma\omicron\varsigma$ =identiek). Is de asbundel daarnaast ook nog vrij van sferische aberratie, dan wordt de afbeelding door het stelsel *aplanatisch* genoemd. De verschuivingen van het voorwerpspunt op de as kunnen zowel in de asrichting als loodrecht op de as gedacht worden. In het laatste geval is isoplanatisme of aplanatisme een vereiste om een groot bruikbaar veld te creëren met het stelsel omdat dan de veldaberratie, die lineair toeneemt met de veldcoördinaat (coma), afwezig moet zijn.

Een nog groter beeldveld komt beschikbaar wanneer het stelsel ook vrij is van astigmatisme: een dergelijk stelsel wordt wel *anastigmatisch* genoemd. Het is helaas onmogelijk via een voorwaarde, opgelegd aan de stralen van de asbundel, de afwezigheid van astigmatisme te garanderen.

Zoals reeds vermeld in de hoofdstukken IV en V, kan men voor de berekening van aberraties strenge of benaderende methodes gebruiken, waarbij de laatste soms meer inzicht in het proces van aberratie compensatie geven (dit is duidelijk het geval bij de Seidelaberraties). Een nog iets verder doorgevoerde benadering is die waarbij brekende elementen (lenzen) als een geheel behandeld worden met de veronderstelling dat hun dikte verwaarloosbaar is. Deze zogenaamde 'dunne lenzen' formules voor de Seidelaberraties kunnen nuttig zijn bij het ontwerpen van een optisch stelsel. Hun geldigheid blijft natuurlijk beperkt tot het gebied van de derde-orde aberraties; dit in tegenstelling tot de voorwaarde voor isoplanatisme die ook nog geldig is bij zeer grote openingshoeken van de asbundel.

VI.5 Algemene voorwaarde voor isoplanatisme

In figuur 6.8 is een apertuurstraal $ADED'E'A'$ getekend, die in de voorwerpsruimte de gestippelde referentiebol (middelpunt in P , straal $E_0P = R$) snijdt in D en het golffront in E . In de beeldruimte snijdt deze straal de referentiebol (middelpunt in P' , straal $E'_0P' = R'$) in

E' . P' is het paraxiale beeldpunt van P en de dwarsvergroting tussen de geconjugeerde vlakken door P en P' is β' . Betrokken op de referentiebolle met middelpunt in P resp. P' wordt de aberratieverandering na het doorlopen van het optische stelsel gegeven door

$$\Delta W = n' (\delta l') (1 - N') - n (\delta l) (1 - N), \quad (6.18)$$

waarbij $N = \cos \alpha$ en $N' = \cos \alpha'$.

Wanneer men nu de aberratie wil bepalen bij de afbeelding van een ander punt Q met als paraxiaal beeldpunt Q' , moet bekeken worden hoe de golffrontaberratie zich wijzigt door de referentiebolle in voorwerpsruimte en beeldruimte te centreren op resp. Q en Q' . Het punt Q wordt verkregen uit P via een translatie δz langs de optische as en een translatie $\delta \eta$ loodrecht op de optische as. Voor de verschuiving van P' naar Q' geldt dat

$$\begin{aligned} \delta z' &= \frac{n}{n'} (\beta')^2 \delta z, \\ \delta \eta' &= \beta' \delta \eta. \end{aligned} \quad (6.19)$$

De verschuiving van het centrum van de referentiebol van P naar B levert een verandering in golffrontaberratie op van

$$W_{PB} = n(\delta z)(1 - N), \quad (6.20)$$

en de dwarsverplaatsing van het middelpunt van de referentiebol van B naar Q geeft de verandering

$$W_{BQ} = n \left(\frac{+\delta \eta}{-R + \delta z} \right) (-R + \delta l) M, \quad (6.21)$$

waarbij $M = \sin \alpha$; R is negatief in de figuur.

Met overeenkomstige waarden in de beeldruimte vinden we voor de aberratieverandering van de straal bij de overgang van de situatie met referentiebolle gecentreerd in P en P' naar die met centra in Q en Q' ,

$$\begin{aligned} \Delta W &= n' \left(\frac{\delta \eta'}{-R' + \delta z'} \right) (-R' + \delta l') M' - n \left(\frac{\delta \eta}{-R + \delta z} \right) (-R + \delta l) M \\ &+ n' (\delta z') (1 - N') - n (\delta z) (1 - N). \end{aligned} \quad (6.22)$$

De bijdrage ΔW volgens (6.18) heeft te maken met weglengteverschillen die reeds aanwezig kunnen zijn in de invallende en uittredende stralenbundel. Voor de extra weglengteverschillen die ontstaan door het wijzigen van de positie van de kromtemiddelpunten van de referentiebolle in voorwerps- en beeldruimte (resp. van P naar Q en van P' naar Q') speelt ΔW volgens vgl. (6.18) geen rol en deze bijdrage is daarom afwezig in vgl. (6.22). Twee bijzondere gevallen kunnen afgeleid worden uit vgl. (6.22).

$$\text{a) } \delta z = \delta z' = \delta l = 0$$

We beschouwen nu een pure dwarsverplaatsing ten opzichte van de optische as van het voorwerps- en beeldpunt en veronderstellen dat de aberratie van de apertuurstralen nul is in de voorwerpsruimte. Dit zal altijd het geval zijn als het voorwerp een puntbron is. Vgl. (6.22) gaat nu over in

$$\Delta W = n' (\delta \eta') M' \left(\frac{R' - \delta l'}{R'} \right) - n \delta \eta M. \quad (6.23)$$

Met gebruikmaking van de paraxiale relatie tussen hoek- en dwarsvergroting,

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{n}{n'} \frac{\alpha}{\alpha'},$$

vinden we dat

$$\Delta W = n' (\delta\eta') M' \left\{ \frac{R' - \delta l'}{R'} - \frac{(M/M')}{(\alpha/\alpha')} \right\}. \quad (6.24)$$

Stellen we ΔW identiek nul, dan drukt (6.24) de zog. Staebble-Lihotzky voorwaarde uit voor isoplanatisme. Geldt de voorwaarde voor willekeurige M en M' , dan zal de aberratie van de gehele bundel ongewijzigd blijven. Zo niet, dan wordt aan de voorwaarde slechts voldaan over een ringvormige zone op het golffront. Wanneer de sferische aberratie van de apertuurstraal in de beeldruimte ook nul is, moet voor $\Delta W = 0$ voldaan worden aan de voorwaarde

$$1 - \frac{(M/M')}{(\alpha/\alpha')} = 0, \quad (6.25)$$

en deze uitdrukking is identiek aan die in (3.8), de sinusvoorwaarde van Abbe. Geldt (6.25) weer voor willekeurige M en M' en is ook $\delta l' = 0$ voor een iedere apertuur straal, dan heet het optische stelsel aplanatisch, hetgeen dus formeel ook stigmatisme van de asafbeelding inhoudt. In de praktijk worden de termen aplanatisch en isoplanatisch vaak door elkaar gebruikt.

$$b) \delta\eta = \delta\eta' = 0$$

We beschouwen nu een verplaatsing van voorwerps- en beeldpunt langs de optische as. Voor de aberratie-verandering geldt dan

$$\Delta W = n' (\delta z') (1 - N') - n(\delta z)(1 - N), \quad (6.26)$$

en met de uitdrukking voor de langsvergroting

$$\frac{\delta z'}{\delta z} = \frac{n'}{n} (\beta')^2 = \frac{n}{n'} \frac{1}{(\gamma')^2},$$

gaat vgl. (6.26) over in

$$\begin{aligned} \Delta W &= 2n' (\delta z') \left\{ \sin^2 \frac{\alpha'}{2} - \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \\ &= 2n' \delta z' \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\sin(\alpha/2)/\sin(\alpha'/2)}{(\alpha/2)/(\alpha'/2)} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

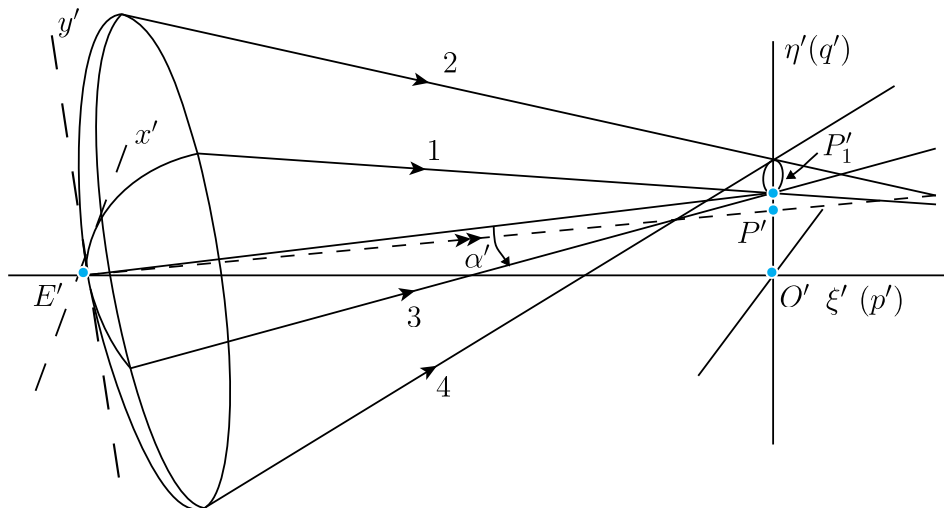
Wanneer ΔW gelijk aan nul is gaat bovenstaande vergelijking over in

$$\frac{\sin(\alpha'/2)}{(\alpha'/2)} = \frac{\sin(\alpha/2)}{(\alpha/2)}, \quad (6.28)$$

en deze voorwaarde heet de Herschel-voorwaarde voor constantheid van (sferische) aberratie bij een verandering $(\delta z, \delta z')$ van de positie van de geconjugeerde vlakken.

VI.6 Interpretatie van de isoplanatisme voorwaarde

Wanneer we de afleiding van de aberratieverandering volgens vgl. (6.22) nader beschouwen, dan is de uitdrukking slechts exact voor infinitesimale translaties van de referentiepunten langs en loodrecht op de optische as. Beschouwt men een dwarsverplaatsing, dan houdt de sinusvoorwaarde in dat aberraties, die lineair met de veldpositie η' veranderen, afwezig zijn. Deze aberratietermen zijn comatermen met een willekeurige afhankelijkheid van de genormeerde



Figuur 6.9: Een gefocuseerde stralenbundel met comatische aberratie. De typische dwarsaberratiefiguur ontstaat in het beeldvlak. $E'P'$ is de geaberreerde hoofdstraal van de stralenbundel, P'_1 is het snijpunt van de twee sagittale randstralen. De waarde van de 'Offence against the Sine Condition' (OSC) wordt gegeven door de verhouding van de lengten van de lijnstukken $P'P'_1$ en $O'P'$.

pupilcoördinaten (r, ϕ) maar lineair afhankelijk van de genormeerde veldpositie ρ (zie hoofdstuk V).

In figuur 6.9 is een dwarsaberratiefiguur getekend in de aanwezigheid van coma (in deze gesimplificeerde situatie betreft het derde-orde coma). Het snijpunt van de hoofdstraal door E' met het beeldvlak is P' . Het snijpunt van de marginale sagittale stralen 1 en 3 is het punt P'_1 . Als maat voor de hoeveelheid coma is door Conrady ingevoerd de verhouding van de lijnstukken $P'P'_1$ en $O'P'$. Deze dimensieloze grootte is door hem 'Offence against the Sine Condition' (OSC) genoemd.

Voor de afstand $O'P'$ vindt men de waarde $\beta'\eta_0$, waarbij η_0 de loodrechte afstand van het voorwerpspunt tot de as in de y -richting voorstelt. Voor het bepalen van het snijpunt P'_1 van de sagittale stralen kunnen we, mits de afstand $O'P'_1$ voldoende klein is, gebruik maken van de scheve-straal invariant langs de sagittale straal in voorwerps- en beeldvlak volgens vgl. (4.73). Voor $x = 0$ levert dit op,

$$n\eta_0 \sin \alpha = n'(O'P'_1) \sin \alpha'. \quad (6.29)$$

Voor de OSC vindt men nu

$$\begin{aligned} OSC &= \frac{\left(\frac{n \sin \alpha}{n' \sin \alpha'}\right) \cdot \eta_0 - \beta'\eta_0}{\beta'\eta_0} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left\{ \frac{\alpha'}{\sin \alpha'} - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Als voorwaarde voor een comavrije afbeelding komt men uit bij de sinusvoorwaarde van Abbe. Vertoont de (niet getekende) asbundel van figuur 6.9 sferische aberratie, dan vindt men als voorwaarde voor isoplanatisme ($OSC = 0$) de Staebble-Lihotzky voorwaarde terug.

In het geval van derde-orde coma (zie sectie V.4d) kan men afleiden dat

$$OSC = {}_1\beta_{31}. \quad (6.31)$$

Het is duidelijk dat aan de Abbe sinusvoorwaarde en aan de Herschel-voorwaarde niet simultaan voldaan kan worden. Is de *OSC* nul, dan zal in de beeldruimte om het aspunt een volume afgebeeld kunnen worden met vrijwel ongewijzigde aberratie waarvoor geldt dat het in de asrichting slechts een gering aantal diffractie-eenheden ($2\lambda/NA^2$) diep is maar een grote diameter heeft (in eenheden λ/NA). Wanneer door de asbundel aan de Herschel conditie voldaan wordt zal het volume een 'sigaarvorm' in de asrichting vertonen.

VI.7 De Seidelaberraties van dunne lenzen

De eerste stap bij het ontwerp van een optisch systeem is de keuze van de positie en sterkte van de brekende (of spiegellende) elementen in de toegestane ruimte tussen voorwerps- en beeldvlak. De paraxiale gegevens van de elementen moeten zodanig zijn dat aan de paraxiale eisen zoals vergroting, brandpuntsafstand, pupilligging voldaan wordt. In veel gevallen zal het systeem bestaan uit een verzameling lenzen. Een afschatting van de Seidelaberraties van het stelsel per element is nuttig in een dergelijk vroeg stadium van het ontwerp. Overzichtelijke formules die de Seidelaberraties per element geven zijn uitgewerkt in het geval van een tot nul genaderde lensdikte waarbij de hoofdvlakken van het element samenvallen. De lens wordt gekarakteriseerd door zijn sterkte K ; de verdeling van deze sterkte over de twee oppervlakken komt tot uitdrukking in de zogenaamde Coddington vormfactor P met

$$P = \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}, \quad (6.32)$$

waarbij c_1 en c_2 de kromming van voor- en achtervlak van de lens zijn.

De vergroting β' van de (tussen)afbeelding door de lens wordt verwerkt in de parameter Q volgens

$$Q = \frac{\beta' + 1}{\beta' - 1}. \quad (6.33)$$

De veldaberraties van de lens zijn afhankelijk van de pupilligging. In het geval van een zogenaamde centrale pupilligging (pupil samenvallend met de lens, $\beta_p' = +1$) worden de coëfficiënten van de Seidelaberraties (zie vgl. 5.47) gegeven door

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{1}{4} \left\{ \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{n+2}{n(n-1)^2} \left[P + \frac{2(n^2-1)}{n+2} Q \right]^2 - \left(\frac{n}{n+2} \right) Q^2 \right\} h^4 K^3, \\ S_2 &= +\frac{1}{2} \left\{ \frac{(n+1)}{n(n-1)} P + \left(\frac{2n+1}{n} \right) Q \right\} h^2 K^2 H, \\ S_3 &= -KH^2, \\ S_4 &= -\frac{KH^2}{n}, \\ S_5 &= 0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

waarbij h de snijhoogte van de marginale straal met de lens is; H is de waarde van de Lagrange-invariant, gemeten in bijvoorbeeld de beeldruimte ($H = n'u'\eta'$).

Wanneer de hoofdstraal de lens niet meer in het midden treft kan men, naar analogie met vgl. 6.15 een verschuiving Y_E in de Y -richting introduceren en deze invoeren in de pupilcoördinaten van de aberratiefuncties. De waarde van Y_E is nu gelijk aan de verhouding van \bar{h} en h_m , de

snijhoogten met de dunne lens van resp. de hoofdstraal van een scheve bundel en de marginale straal van de asbundel,

$$Y_E = \frac{\bar{h}}{h_m}. \quad (6.35)$$

Vgl. (6.35) volgt uit (6.16) indien de brekingsindices van voorwerps- en beeldruimte gelijk zijn. Uitwerking van de aberratiefunctie met excentriciteit Y_E levert nu op voor de dunne lens aberraties,

$$\begin{aligned} W(X, Y) = & \frac{1}{8} S_1 (X^2 + Y^2)^2 \\ & + \left\{ \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{2} Y_E S_1 \right\} (X^2 + Y^2) Y \\ & + \left\{ \frac{1}{2} S_3 + \frac{1}{2} Y_E^2 S_1 - Y_E S_2 \right\} Y^2 \\ & + \left\{ \frac{1}{4} Y_E^2 S_1 - \frac{1}{2} Y_E S_2 + \frac{1}{4} S_3 + \frac{1}{4} S_4 \right\} (X^2 + Y^2) \\ & + \left\{ -\frac{1}{2} Y_E^3 S_1 + \frac{3}{2} Y_E^2 S_2 - \frac{3}{2} Y_E S_3 \right\} Y. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Vgl. (6.36) toont nogmaals aan dat een aberratie van de graad n in de pupilcoördinaten de aberraties van de graad $(n - 1)$ en lager beïnvloedt in het geval van een excentrisch gebruik van de lens. Interessante conclusies die uit bovenstaande uitdrukkingen (speciaal vgl. 6.34) getrokken kunnen worden zijn de volgende.

a) Sferische aberratie

Deze aberratie is een kwadratische functie, zowel van de vormfactor P als van de vergrotingsfactor Q . Uit (6.34) volgt dat bij elke waarde van Q een waarde van P gevonden kan worden zodanig dat de sferische aberratie minimaal is,

$$P = -\frac{2(n^2 - 1)}{n + 2} Q, \quad (6.37)$$

en het bijbehorende minimum vertoont een kwadratische afhankelijkheid van Q volgens,

$$S_{1,\min} = -\frac{1}{4} h^4 K^3 \left[\frac{n^2}{(n - 1)^2} - \left(\frac{n}{n + 2} \right) Q^2 \right]. \quad (6.38)$$

Een veel voorkomende situatie is een afbeelding vanuit het oneindige ($Q = -1$). De vormfactor voor minimale sferische aberratie wordt nu gegeven door

$$P = \frac{2(n^2 - 1)}{n + 2}.$$

De bijbehorende waarden van de krommingen worden dan gegeven door

$$\begin{aligned} n = 1.5, & \quad c_2 = -\frac{1}{6} c_1, \\ n = 2.0, & \quad c_2 = +\frac{1}{5} c_1. \end{aligned}$$

De bol-platte vorm levert minimale sferische aberratie bij een brekingsindex van ongeveer 1.70. Een vergelijking van de sferische aberratie van een spiegel en een lens met gelijke sterkte laat zien dat bij een vergroting $\beta' = 0$ de spiegel ongeveer negen maal minder sferische aberratie vertoont dan de lens met brekingsindex $n = 1.5$. Bij $n = 2.0$ wordt dit een factor vier.

In zijn algemeenheid geldt dat bij toenemende brekingsindex de aberratie bij gelijkblijvende sterkte en numerieke apertuur afneemt.

b) Coma

De coma-coëfficiënt S_2 is identiek nul wanneer de lens biconvex is met gelijke krommingen en de vergroting β' van de afbeelding gelijk is aan -1. Een dergelijke symmetrische situatie levert ook in algemenere gevallen (spiegelsymmetrie van het systeem ten opzichte van een centraal gelegen pupil bij vergroting -1) een comabijdrage gelijk aan nul op. Ook de distorsie is dan identiek nul. De golffrontfout van scheve bundels in het meridionale vlak die ontstaat in het eerste gedeelte van het systeem wordt exact gecompenseerd in het tweede gedeelte. Bij een afbeelding van het oneindige ($Q = -1$) en een bol-platte lensvorm ($P = +1$) wordt het coma gelijk aan nul indien de brekingsindex gelijk is aan 1.618 (ofwel voldoet aan de 'gulden snede' = $(1 + \sqrt{5})/2$).

c) Astigmatisme

Het astigmatisme van een dunne lens is bij een centrale pupilligging onafhankelijk van de lensvorm en de vergroting. Dit betekent dat zelfs een stelsel dunne lenzen in contact met eindige sterkte nooit astigmatisme-vrij kan zijn. Bij niet-centrale pupilligging kan de sferische aberratie en het coma van de lens het astigmatisme beïnvloeden. Echter, bij aplanatische lenzen kan dit niet gebeuren en dit leidt tot de belangrijke conclusie dat een stelsel van aplanatische dunne lenzen op afstand nooit astigmatisme-vrij zal zijn. De bestrijding van astigmatisme zal dus plaats moeten vinden door welbewust niet-aplanatische dunne lenzen te gebruiken of door de lenzen dikker te maken.

Een vergelijking van de uitdrukkingen voor S_3 en S_4 laat ook zien dat bij een stelsel dunne lenzen in vrijwel contact ook de beeldveldkromming niet nul kan worden bij eindige sterkte K . De mogelijke waarden van de brekingsindex n zijn in de praktijk daarvoor te beperkt.

Een bijzonder geval doet zich voor wanneer een lens dicht bij de afbeelding of bij een tussenafbeelding geplaatst wordt. In dit geval draagt de lens vrijwel alleen nog bij aan de Seidelterm die pupil- en conjugaat-onafhankelijk is, te weten beeldveldkromming (zie de uitdrukkingen voor de Seidelcoëfficiënten in vgl. 5.47).

VI.8 De Seidelaberraties van een planparallele plaat

Ter afsluiting vermelden we nog de Seidelaberraties die optreden wanneer een planparallele plaat ('venster') in een convergente bundel geplaatst wordt. Door berekening van de Seidelcoëfficiënten bij breking aan voor- en achtervlak ontstaan de volgende uitdrukkingen voor de aberratietermen (zie vgl. 5.47),

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{n^2 - 1}{8n^3} d(NA)^4, \\
 W_2 &= \frac{n^2 - 1}{2n^3} d\alpha(NA)^3, \\
 W_3 &= \frac{n^2 - 1}{2n^3} d\alpha^2(NA)^2, \\
 W_4 &= 0, \\
 W_5 &= \frac{n^2 - 1}{2n^3} d\alpha^3(NA),
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

waarbij d de dikte van de plaat is en α de kantelhoek ten opzichte van de centrale straal van de bundel. De invalshoogte van de marginale straal speelt geen rol in de uitdrukkingen volgens (6.39) en dit betekent dat de positie van de plaat in de convergente of divergente bundel geen invloed heeft op de grootte van de aberratie. De sferische aberratie van een planparallele plaat heeft een teken dat tegengesteld is aan dat van de sferische aberratie van een positieve lens.

Bij grotere kantelhoeken α blijft de derde-orde sferische aberratie ongewijzigd. Uitdrukkingen

voor het derde-orde coma en astigmatisme van de planparallele plaat worden nu gegeven door

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{n^2 (n^2 - 1) \sin \alpha \cos \alpha}{2 (n^2 - \sin^2 \alpha)^{5/2}} d(NA)^3 \\ W_3 &= \frac{(n^2 - 1) \sin^2 \alpha}{2 (n^2 - \sin^2 \alpha)^{3/2}} d(NA)^2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

Uit (6.39) volgt dat bij kleine kantelhoeken sferische aberratie en coma de overheersende aberraties zijn. Bij kantelhoeken van bijv. 45° speelt ook astigmatisme een belangrijke rol.

VI.9 Kleurfouten

De eigenschappen van optische stelsels, zowel paraxiale grootheden als aberraties, zijn een functie van de brekingsindices van de media waardoor de lichtstralen zich voortplanten. Zijn de media ijl en weinig absorberend, dan zal de brekingsindex nauwelijks afhangen van de golflengte van het licht (kleureffecten). Dit is zeker het geval wanneer de lichtstralen zich in vacuüm voortplanten; ook het medium lucht voldoet nog zeer redelijk aan deze voorwaarde zodat de kleurfouten van een spiegelsysteem in lucht over het algemeen verwaarloosbaar zijn. De situatie ligt geheel anders wanneer voor de richtingsverandering van lichtstralen in een stelsel de breking aan een aantal grensvlakken benut wordt. In een lenzenstelsel, ontworpen voor het visuele deel van het spectrum, zullen de gebruikte materialen transparant zijn in het gebied van 400-800 nm. Alle optische glazen vertonen echter een snel toenemende absorptie wanneer de golflengte naar het ultraviolette gebied verlegd wordt. Dientengevolge vertoont ook het reële deel n van de brekingsindex een stijgende tendens gaande naar kortere golflengten. Een nauwkeurige representatie van de brekingsindex in het zichtbare, nabije infrarode en ultraviolette deel van het spectrum is mogelijk via de Sellmeijer dispersie-formule,

$$(n^2 - 1) = \frac{B_0 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2}, \quad (6.41)$$

of de interpolatie-formule volgens de Schott catalogus van optische glazen,

$$n^2 = A_0 + A_1 \lambda^2 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_3}{\lambda^4} + \frac{A_4}{\lambda^6} + \frac{A_5}{\lambda^8}, \quad (6.42)$$

waarbij in beide formules de golflengte λ uitgedrukt wordt in μm .

In beide gevallen is het mogelijk de brekingsindex met behulp van zes coëfficiënten vast te leggen met een precisie van één eenheid in de vijfde decimaal. De typische eigenschappen van de glazen zijn uit de waarden van deze zes coëfficiënten niet eenvoudig te destilleren.

Voor de karakterisering van de dispersie van optische materialen is door Abbe een grootheid V gedefinieerd,

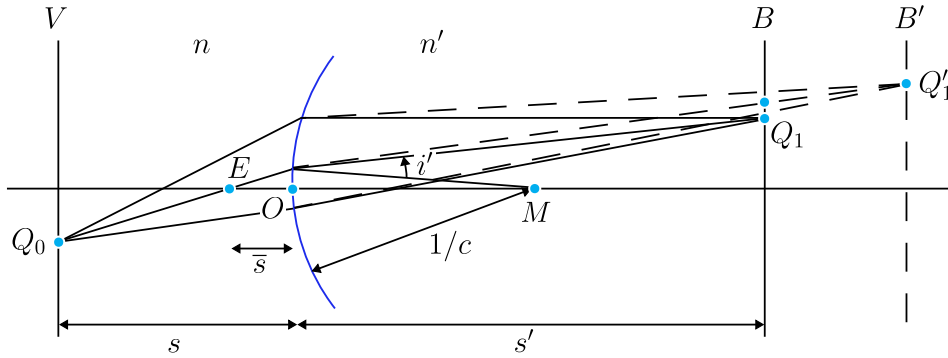
$$V = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}, \quad (6.43)$$

waarbij n_d, n_F en n_C de brekingsindex van het materiaal voorstellen bij de golflengten van de helium d -lijn ($\lambda = 588 \text{ nm}$) en de waterstof lijnen F (486 nm) en C (656 nm). De grootheid V , het dispersie- of Abbe-getal, speelt een rol bij het bepalen van het verloop in optische sterkte K van een lens,

$$K = (n - 1)(c_1 - c_2). \quad (6.44)$$

De verandering als functie van λ wordt in lineaire benadering gegeven door

$$\Delta K = \frac{dn}{d\lambda} (c_1 - c_2) (\Delta \lambda)$$



Figuur 6.10: De punten Q_0 en Q_1 zijn geconjugeerde punten bij afbeelding door het sferische oppervlak (kromming c) door het punt O . De pupilligging in (E) is niet-centraal in de figuur. Bij een 'kleurverandering' van de lichtstraal veranderen de brekingsindices n en n' in voorwerps- en beeldruimte. Het punt Q_0 wordt nu afgebeeld in Q_1' . De axiale verplaatsing van Q_1' ten opzichte van Q_1 wordt de axiale of langskleurfout genoemd, de dwarsverplaatsing van Q_1' de laterale of dwarskleurfout.

$$= \frac{dn}{d\lambda} \frac{1}{(n-1)} K(\Delta\lambda). \quad (6.45)$$

Neemt men voor de gemiddelde brekingsindex de waarde van n_d en voor Δn het verschil ($n_F - n_C$), dan geldt dat

$$\Delta K = -\frac{K}{V} \cdot \frac{(\Delta\lambda)}{170}, \quad (6.46)$$

waarbij de golflengteverandering nu in nm is uitgedrukt.

De lineaire interpolatie volgens vgl. (6.46) is een eerste-orde benadering. De brekingsindices van optische glazen kunnen over het golflengte-interval van de F - naar de C -lijn en ook daarbuiten een duidelijk verschillende hogere-orde afhankelijkheid van de golflengte vertonen. Eventuele hogere-orde verschillen worden in de praktijk aangegeven door naast het globale dispersiegetal V voor het $F - C$ interval ook zogenaamde partiële dispersie-getallen te definiëren die de brekingsindexverandering binnen een meestal nauwer golflengtegebied vastleggen volgens,

$$P_{\lambda_1, \lambda_2} = \frac{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}}{n_F - n_C}. \quad (6.47)$$

VI.10 Golffrontuitdrukking voor de kleureffecten

De verandering van de paraxiale constanten van een optisch systeem als functie van de golflengte beïnvloedt de ligging van het geconjugeerde beeldvlak en ook de bijbehorende vergroting. Deze effecten kunnen tot uitdrukking gebracht worden in een defocussing en kanteling van het sferisch golffront dat op het paraxiale beeldpunt behorende bij golflengte λ_0 gecentreerd is.

In figuur 6.10 is een paraxiale bundel getekend die vertrekt uit het punt Q_0 in het voorwerpsvlak V . Bij de golflengte λ_0 wordt een scherp beeld gevormd in het punt Q_1 dat in het vlak B ligt. Gestippeld is aangegeven hoe de richting van de hoofdstraal en de marginale stralen veranderen bij een golflengteverandering $\Delta\lambda$ waardoor de scherpe afbeelding in Q_1' ontstaat. De defocussing en dwarsverplaatsing in het vlak B kunnen uitgedrukt worden in een golffrontafwijking. Bij de afbeelding van vlak V op B geldt dat het weglengteverschil W langs een randstraal en een asstraal gelijk aan nul moet zijn,

$$W = n' \left(\frac{h^2}{2s'} - \frac{h^2 c}{2} \right) - n \left(\frac{h^2}{2s} - \frac{h^2 c}{2} \right) = 0. \quad (6.48)$$

Voor de verandering in W tengevolge van een verandering in golflengte kan men schrijven,

$$\begin{aligned}\Delta W_{\lambda,z} &= \Delta n' \left(\frac{h^2}{2s'} - \frac{h^2 c}{2} \right) - \Delta n \left(\frac{h^2}{2s} - \frac{h^2 c}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Delta n'}{n'} h \cdot n' h' \left(c - \frac{1}{s'} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta n}{n} h \cdot n h \left(c - \frac{1}{s} \right) \\ &= -\frac{1}{2} h A \left[\frac{\Delta n'}{n'} - \frac{\Delta n}{n} \right],\end{aligned}\tag{6.49}$$

waarbij A de refractie-invariant van de marginale straal is.

De incrementen $\Delta W_{\lambda,z}$ kunnen over de oppervlakken gesommeerd worden en leveren uiteindelijk een gezamenlijke bijdrage tot de defocussing in de beeldruimte. Deze defocussing wordt wel de as- of langskleurfout genoemd.

Voor de berekening van de dwarsverplaatsing beschouwen we de richting van de hoofdstraal. De gebroken hoek \bar{i} van de hoofdstraal wordt gegeven door

$$\bar{i}' = \frac{n}{n'} \bar{i} = \frac{n}{n'} \bar{h} \left(c - \frac{1}{s} \right).\tag{6.50}$$

De verandering van \bar{i} door een golflengtewijziging wordt gegeven door

$$\Delta \bar{i}' = \frac{\bar{h}}{n'} (\Delta n) \left(c - \frac{1}{s} \right) - \frac{n}{n'^2} (\Delta n') \bar{h} \left(c - \frac{1}{s} \right).\tag{6.51}$$

De wijziging in optische weglengte van de geknikte bundel ten opzichte van de ongewijzigde referentiebol vindt men aan de rand van de bundel en is gegeven door

$$\begin{aligned}\Delta W_{\lambda,y} &= n' h \Delta \bar{i}' \\ &= -h B \left[\frac{\Delta n'}{n'} - \frac{\Delta n}{n} \right],\end{aligned}\tag{6.52}$$

waarbij B de refractie-invariant van de hoofdstraal is. De bijdragen volgens (6.52) van de diverse oppervlakken worden weer gesommeerd en leveren in de beeldruimte een gezamenlijke dwarskleurfout op. De afleidingen hierboven waren paraxiaal. Hogere-orde effecten zijn verwaarloosd, zoals veranderingen in h , \bar{h} , A en B . Deze effecten maken dat de Seidelaberraties zich ook wijzigen als functie van de golflengte.

Evenals bij de monochromatische aberraties het geval was, kunnen voor de kleurfouten ook speciale uitdrukkingen opgesteld worden voor 'dunne' lenzen. Voor de langskleurfout vindt men,

$$\Delta W_{\lambda,z} = -\frac{h^2}{2} \left(\frac{\Delta n'}{n' - 1} \right) K,\tag{6.53}$$

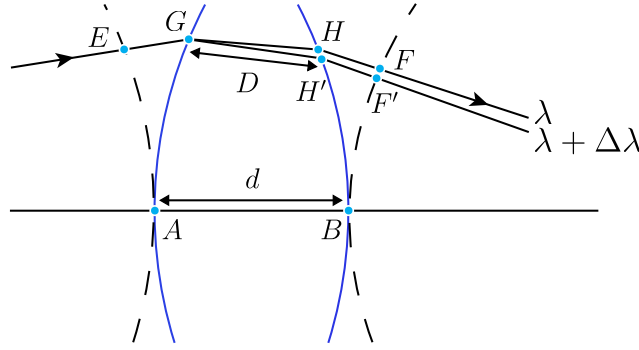
en wanneer we de golflengteverandering volgens het Abbe-getal invoeren volgt

$$\Delta W_{\lambda,z} = -\frac{h^2}{2} \frac{K}{V}.\tag{6.54}$$

Op overeenkomstige wijze vindt men voor de dwarskleurfout van een dunne lens

$$\Delta W_{\lambda,y} = -h \bar{h} \left(\frac{\Delta n'}{n' - 1} \right) K = 2 \frac{\bar{h}}{h} \Delta W_{\lambda,z}.\tag{6.55}$$

Uit (6.53) en (6.55) blijkt dat de langs- en dwarskleurfout van een dunne lens onafhankelijk is van zijn vormfactor of van de vergroting waarbij de lens gebruikt wordt. Uit (6.55) volgt ook dat bij centrale pupilligging de dwarskleurfout altijd nul is (de hoofdstraal gaat ongebroken door naar de beeldruimte). Bovendien blijkt dat de dwarskleurfout altijd nul is wanneer de langskleurfout van de dunne lens nul is. Evenals voor coma en distorsie geldt ook voor de dwarskleurfout dat hij nul wordt in een systeem dat spiegelsymmetrie ten opzichte van een diafragma vertoont (vergroting -1).



Figuur 6.11: Bij de afleiding van de Conrady ($D-d$)-formule. Berekend wordt de aberratieverandering van een dikke lens tengevolge van een kleurverandering van het licht. Vergeleken worden de veranderingen in optische weglengte bij doorgang van een apertuurstraal $EGHF$ door de lens en van een referentiestraal, in de figuur de asstraal AB . Resulteert de door Conrady afgeleide formule waarbij D gelijk is aan de afstand GH en d aan de afstand AB .

VI.11 (D-d) formule van Conrady (eindige stralen)

Door Conrady is een eenvoudige uitdrukking afgeleid die een goede afschatting oplevert van de golffrontverandering bij kleurverandering voor eindige, niet paraxiale bundels. In figuur 6.11 is van een optisch stelsel een deelelement getekend met de asstraal AB en een apertuurstraal EF (golflengte is λ_0). Met betrekking tot de referentiebolle door EA en door $BF'F$ is de aberratieverandering bij doorgang door de lens gegeven door

$$W = EG + nGH + HF - nAB. \quad (6.56)$$

Bij een golflengteverandering van λ_0 naar $(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ zal de asstraal ongewijzigd blijven, terwijl de apertuurstraal een andere weg zal volgen, bijv. $EGH'F'$ zoals geschetst in figuur 6.11. Voor de aberratie geldt nu dat

$$W + \Delta W_\lambda = EG + (n + \Delta n)GH' + H'F' - (n + \Delta n)AB, \quad (6.57)$$

en dit geeft voor de kleurafhankelijke verandering

$$\Delta W_\lambda = (\Delta n)GH' - (\Delta n)AB + n(GH' - GH) + H'F' - HF.$$

We beschouwen nu bij de referentiegolflengte λ_0 de optische weglengten geassocieerd met de straaldelen GHF en $GH'F'$. De straal GHF is bij de referentiegolflengte een fysische straal, de straal $GH'F'$ is bij λ_0 een niet-fysische nabuurstraal. Volgens het principe van Fermat zijn de weglengteverschillen tussen beide stralen pas in tweede orde verschillend en dit betekent dat in eerste orde geldt dat

$$nGH' + H'F' - nGH - HF = 0.$$

Hieruit volgt dan, met $D = GH$ en $d = AB$, dat in goede benadering geldt dat

$$\Delta W_\lambda = \Delta n(D - d). \quad (6.58)$$

Het kleine verschil in lengte tussen GH en GH' is nauwelijks van belang omdat dit verschil slechts in geringe mate de macroscopische waarde van D beïnvloedt die afgezet wordt tegen de eveneens macroscopische axiale lensdikte d . Na sommatie over alle elementen van een optisch systeem vindt men in het hier beschreven geval allereerst een defocussing en vervolgens de verandering in sferische aberratie. Voor scheve bundels kan men op overeenkomstige wijze de dwarskleurfout en het kleurafhankelijke coma bepalen.

VI.12 Correctie van kleurfouten

a) Een kleurgecorrigeerde (*achromatische*) lens.

In het midden van de 18de eeuw werd voorgesteld de variatie van de sterkte van een lens met de golflengte te elimineren door de lens samen te stellen uit twee deelstukken van verschillend glastype. Twee hoofdgroepen waren toen bekend, de zwak dispersieve kroonglazen en de sterker dispersieve en hoger brekende flintglazen (flint = vuursteen). Voor de sterkte K van een dergelijke samengestelde lens geldt (twee dunne lenzen in contact),

$$K = K_1 + K_2, \quad (6.59)$$

en de variatie van de sterkte bij een golflengteverandering wordt gegeven door

$$\Delta K = \frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} K_1 + \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1} K_2. \quad (6.60)$$

Voor de verandering ΔK over het golflengte interval tussen de F - en C -lijn volgt dan

$$\Delta K_{F-C} = \frac{K_1}{V_1} + \frac{K_2}{V_2}, \quad (6.61)$$

en deze verandering wordt nul indien de sterkte van de deelelementen gekozen wordt volgens de verhouding

$$\frac{K_1}{V_1} = -\frac{K_2}{V_2}. \quad (6.62)$$

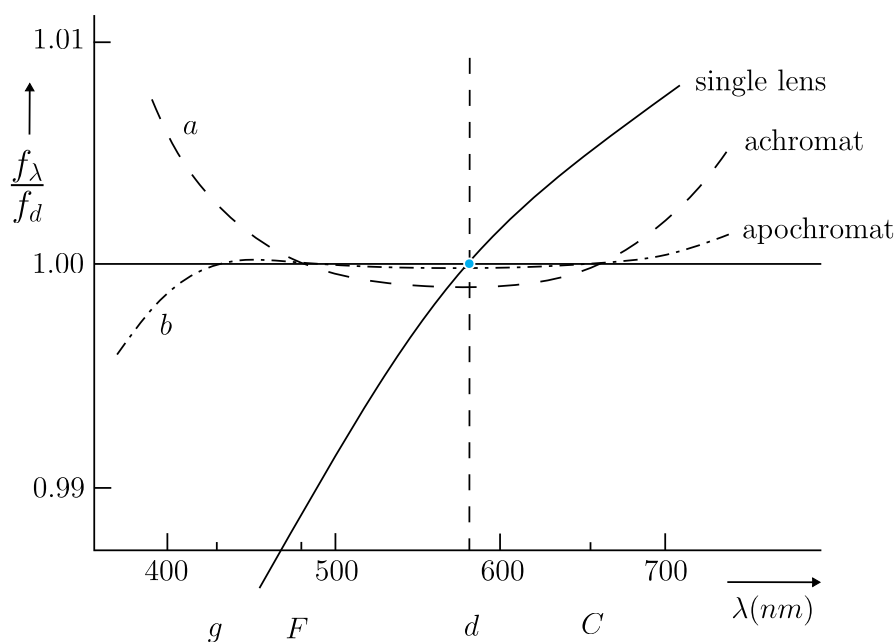
Uitgedrukt in de gewenste totale sterkte K wordt de sterkte van de samenstellende elementen gegeven door

$$K_1 = -\frac{KV_1}{V_2 - V_1}, \quad K_2 = \frac{KV_2}{V_2 - V_1}. \quad (6.63)$$

De resulterende samengestelde lens heet een *achromatisch* doublet en garandeert een identieke sterkte bij de F - en de C -lijn. Gegeven de waarde van het Abbe-getal voor een standaard kroon- en flintglas (bijv. $V_1 = 60$, $V_2 = 30$) vindt men voor de deelsterkten de waarden $+2K$ en $-K$. Al spoedig zag men in dat het voor de stabiliteit gunstig was de relatief sterke deelelementen mechanisch aan elkaar te verbinden; vanaf het begin van de 19de eeuw deed het gekitte doublet zijn intrede (Chevalier). Het is mogelijk de doorbuiging van het doublet en de inwendige kromtestraal zodanig te kiezen dat de sferische aberratie kleiner is dan die van een enkele lens met gelijke sterkte.

Aangezien de compensatie van de sterkteverandering van de lenselementen slechts bij de twee gekozen golflengten volledig is, kan in het gebied ertussen maar vooral buiten dit gebied aan de blauwe zijde de sterkte beduidend verlopen. Deze restafwijkingen veroorzaken een kleurzweem rond het 'focusvlak' van een achromaat en worden wel samengevat onder de naam 'secundair' spectrum. In figuur 6.12 is de positie van het focusvlak als functie van de golflengte uitgezet voor een achromatisch doublet (curve a). Om het verloop van de sterkte verder te reduceren kan men proberen bij een derde golflengte de sterkte-variatie nul te maken. Neemt men bijvoorbeeld als uitgangspunt de F -lijn, dan kan de sterkte bij een andere golflengte λ_α geschreven worden als:

$$\begin{aligned} \Delta K_{\lambda_\alpha} &= \left(\frac{n_{\lambda_\alpha} - n_F}{n_d - 1} \right) K_1 + \left(\frac{n_{\lambda_\alpha} - n_F}{n_d - 1} \right) K_2 \\ &= \left(\frac{n_{\lambda_\alpha} - n_F}{n_F - n_C} \right)_1 \left(\frac{n_F - n_C}{n_d - 1} \right)_1 K_1 + \left(\frac{n_{\lambda_\alpha} - n_F}{n_F - n_C} \right)_2 \left(\frac{n_F - n_C}{n_d - 1} \right)_2 K_2 \end{aligned}$$



Figuur 6.12: Grafiek van de relatieve verandering van de brandpuntsafstand f bij een verandering van de golflengte λ van het licht. Getoond zijn de curven voor een standaard lens, gemaakt van een laag-dispersief glas (getrokken lijn), voor een achromatisch dublet (curve a) en voor een apochromatisch dublet (curve c). Langs de horizontale as zijn naast de lichtgolflengte λ in nm ook de vaak gebruikte spectrale lijnen g , F , d en C aangegeven.

$$= P_1 \frac{K_1}{V_1} + P_2 \frac{K_2}{V_2} \quad (6.64)$$

waarbij P_1 en P_2 de partiële dispersiegetallen van een lensmateriaal genoemd worden. Omdat de lens reeds achromatisch was is de relatie (6.62) hier van toepassing en voor een sterkteverandering nul moet dus gelden dat de partiële dispersiegetallen van de deellenzen gelijk zijn voor het interval van λ_α naar de F -lijn. Een dublet of een stelsel waarvan de sterkte voor drie golflengten gelijk is wordt wel *apochromatisch* genoemd. In figuur 6.12, (curve b), is het secundaire spectrum van een blauwe apochromaat geschetst.

Er zijn vrijwel geen optische glazen met een duidelijk verschillend Abbe-getal en toch een gelijke partiële dispersie. Slechts enige speciaal ontwikkelde en daardoor dure glazen voldoen hieraan evenals het materiaal fluoriet (CaF_2). De gangbare optische glazen vertonen een partiële dispersie die vrijwel lineair afhangt van het Abbe-getal V .

b) Een achromatisch stelsel.

De sterkte van het meest eenvoudige stelsel (twee lenzen op afstand d) wordt gegeven door

$$K = K_1 + K_2 - dK_1 K_2 \quad (6.65)$$

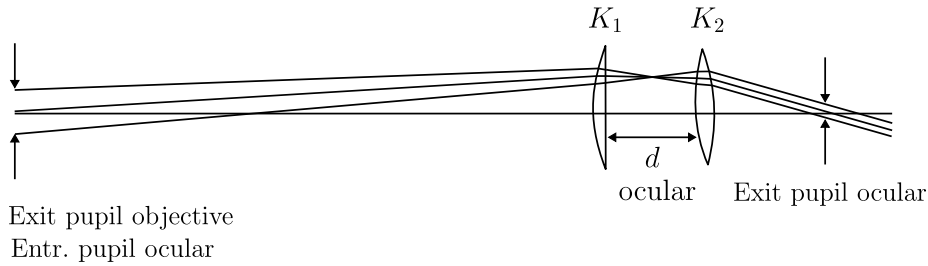
Voor de chromatische sterkteverandering schrijven we

$$\Delta K = \frac{K_1}{V_1} + \frac{K_2}{V_2} - dK_2 \frac{K_1}{V_1} - dK_1 \frac{K_2}{V_2} \quad (6.66)$$

en een verandering nul wordt verkregen door de afstand d zodanig te kiezen dat geldt

$$d = \frac{V_2 K_1 + V_1 K_2}{(V_1 + V_2) K_1 K_2} \quad (6.67)$$

Wanneer beide lenzen uit hetzelfde materiaal vervaardigd zijn vindt men



Figuur 6.13: Oculair volgens Huygens dat bestaat uit een ruimtelijk gescheiden doublet (onderlinge afstand d). De lenzen zijn gemaakt van hetzelfde materiaal en hebben resp. de optische sterkten K_1 en K_2 . Indien de afstand d voldoet aan vgl. (6.68) is de sterkte K van het oculair in eerste orde kleuronafhankelijk.

$$d = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \quad (6.68)$$

In figuur 6.13 is een oculair getekend volgens Huygens dat berust op dit principe van achromatiseren (in de zeventiende eeuw ging men er nog van uit dat alle glazen dezelfde dispersie vertonen). De afstand d tussen beide lenzen wordt volgens vgl. (6.68) gelijk gemaakt aan de gemiddelde waarde van hun brandpuntsafstanden. Het verloop van de hoofdstraal van een scheve bundel, afkomstig uit het midden van het relatief ver verwijderde objectief, is in de figuur aangegeven. Nu de sterkte geachromatiseerd is, zal de richting van een evenwijdige scheve bundel in de beeldruimte onafhankelijk van de golflengte zijn.

Voor meer complexe stelsels zal men de algemene uitdrukkingen (6.49) en (6.52) aanwenden per oppervlak en de golffrontafwijkingen sommeren om het totaaleffect in de beeldruimte te bestuderen. Bij het ontwerpen van een achromatisch stelsel zal dan blijken dat een veelvoud van de nominale optische sterkte (in de vorm van extra elementen) nodig is om de paraxiale kleurfouten te bestrijden. In het eenvoudige geval van het achromatische doublet bleek dit een factor drie te zijn ($|-2K| + |K| = 3K$).

De absolute achromasie van een spiegelsysteem is in dit verband heel aantrekkelijk. Een beperking van spiegelsystemen is echter het geringe aantal oppervlakken dat gebruikt kan worden, speciaal bij stelsels met een grote veldhoek. Vignettering van de stralenbundels wordt hinderlijk. Bovendien vormt de correctie van de monochromatische aberraties bij grote veldhoeken een zodanig probleem, dat men toch vaak op alleen brekende elementen of op een gemengd ontwerp overgaat. In uitzonderlijke gevallen worden spiegelsystemen ver buiten de optische as gebruikt waardoor vignettering weer teruggedrongen kan worden. In dit geval zijn sterk asferische spiegelloppervlakken nodig om de monochromatische aberraties naar nul te brengen.

Hoofdstuk VII

Kwaliteitscriteria optische systemen

Wanneer een volledige beschrijving van de golffrontaberraties in de beeldruimte voorhanden is, kan in principe de intensiteitsverdeling in het beeld van een willekeurig voorwerp berekend worden. De aberratiefunctie zal meestal niet expliciet bekend zijn. Een benaderde vorm kan verkregen worden via reeksontwikkeling naar apertuur en veldcoördinaten van bijv. een karakteristieke functie (aberratietheorieën van derde en hogere orde). Exacte, numeriek berekende optische weglengten voor een aantal waarden van de apertuur en veldcoördinaat worden verkregen via strenge doorrekening van stralen.

Bij tijdsafhankelijke, lineaire systemen wordt ter berekening van het algemene uitgangssignaal de respons op een ingangspuls (Dirac-functie) als uitgangspunt genomen. Om het gedrag in het frequentiedomein te bestuderen kan men uitgaan van de spectrale overdrachtsfunctie. In een optisch systeem is het equivalent van de eenheidspuls in het tijdsdomein een puntbron (ruimtelijke deltafunctie) in het plaatsdomein. Een tijdsfrequentie gaat hier over in een ruimtetrequentie en deze stelt een voorwerp voor dat een scherpe periodiciteit vertoont (raster). De respons van het optische systeem op de aangeboden puntbron is de resulterende intensiteitsverdeling in het beeldvlak. Voor de bepaling van de frequentie-overdrachtsfunctie moet men het contrast beschouwen van de afbeelding van een raster, gerelateerd aan het contrast van het gebruikte raster in het voorwerpsvlak. Om de lineariteit van de afbeelding te waarborgen is het nodig de modulatie (contrast) van het voorwerp klein te nemen.

In dit hoofdstuk zullen we eerst de impulsrespons bespreken van een optisch systeem en vervolgens de optische overdrachtsfunctie. In beide gevallen kan men de situatie onderscheiden waarbij de aberraties klein zijn en de onscherpte hoofdzakelijk door buiging wordt veroorzaakt en de situatie waarbij de aberraties zo groot zijn ten opzichte van de golflengte van het licht dat de buigingsonscherpte verwaarloosbaar klein is.

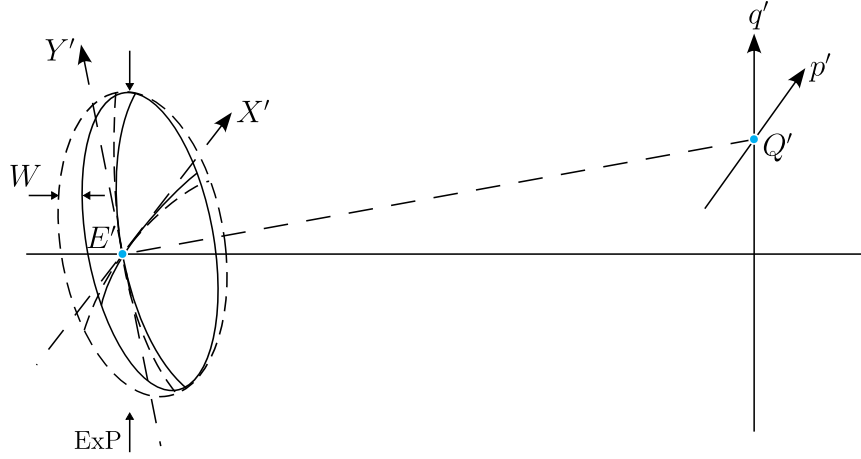
VII.1 De impulsrespons

In figuur 7.1 is de uittreepupil van een optisch systeem getekend met daarin het golffront van een scheve bundel dat gerelateerd is aan een referentiebol met als kromtemiddelpunt het paraxiale beeldpunt Q' . De complexe amplitude in een vlak door Q' loodrecht op $E'Q'$ wordt gegeven door de ruimtelijke Fouriergetransformeerde van de complexe amplitudeverdeling over een door de pupilrand begrensd deel van de referentiebol. Nemen we een constante intensiteitsverdeling ($\equiv 1$) aan over het golffront, dan wordt de complexe amplitude voorgesteld door

$$A(X', Y') = \exp \{2\pi i W(X', Y')\} , \quad (7.1)$$

waarbij de golffrontafwijking is gegeven in eenheden λ en X' en Y' de gebruikelijke genormeerde coördinaten op de referentiebol zijn.

De Fouriergetransformeerde van deze amplitudeverdeling levert de complexe amplitude in het



Figuur 7.1: In de uitreepupil Exp met centrum E' is een golffront W aanwezig, gevormd door een stralenbundel vanuit een punt Q in het voorwerpsvlak van het (niet getekende) optische stelsel. In de omgeving van het beeldpunt Q' wordt volgens de fysische optica een buigingsfiguur gevormd van eindige afmetingen, de ruimtelijke impulsrespons van het optisch stelsel.

vlak door Q' loodrecht op de as $E'Q'$ op. Wanneer men voor kleine veldhoeken het projectie-effect verwaarloost, geldt voor de amplitudeverdeling in het beeldvlak,

$$A'(p', q') \propto \iint_{X'^2 + Y'^2 \leq 1} \exp\{2\pi i W\} \exp\{-2\pi i (X'p' + Y'q')\} dX' dY'. \quad (7.2)$$

De complexe amplitude in het punt Q' wordt nu

$$A'(0, 0) \propto \iint_{X'^2 + Y'^2 \leq 1} \exp\{2\pi i W\} dX' dY'. \quad (7.3)$$

Voor de verhouding van de intensiteit van de geaberrerde impulsrespons en de intensiteit van de impulsrespons van een ongeaberrerde bundel kan men schrijven:

$$\frac{I(0, 0)}{I_0(0, 0)} = \frac{\left| \iint_{X'^2 + Y'^2 \leq 1} \exp\{2\pi i W\} dX' dY' \right|^2}{\left| \iint_{X'^2 + Y'^2 \leq 1} dX' dY' \right|^2}. \quad (7.4)$$

Reeksontwikkeling van de uitdrukking $\exp\{2\pi i W\}$ tot en met kwadratische termen in W geeft na uitwerking het resultaat,

$$\frac{I}{I_0} \approx \frac{\left\{ \iint_{X'^2 + Y'^2 \leq 1} (1 - 2\pi^2 W^2) dX' dY' \right\}^2 + (2\pi)^2 \left\{ \iint_{X'^2 + Y'^2 \leq 1} W dX' dY' \right\}^2}{\left| \iint_{X'^2 + Y'^2 \leq 1} dX' dY' \right|^2},$$

en deze uitdrukking kan geschreven worden als

$$\frac{I}{I_0} \approx 1 - (2\pi)^2 \left\{ \overline{W^2} - (\overline{W})^2 \right\}, \quad (7.5)$$

waarbij de uitdrukking tussen accolades de variantie van de golffrontaberratie over het door de uitreepupil begrensde gedeelte van de referentiebol is. De benadering volgens (7.5) blijkt redelijk te voldoen tot waarden van ongeveer 0.80 voor I/I_0 . Deze verhouding wordt wel de Strehl-intensiteit genoemd volgens de in 1902 door Strehl voorgestelde definitie.

De relatie (7.5) tussen Strehl-intensiteit en golffrontvariantie is afgeleid door Zernike en Nijboer in het proefschrift van de laatste en vervolgens onafhankelijk gepubliceerd in 1948 door Maréchal. Een daaruit door hem afgeleid criterium stelt dat de intensiteitsrespons nog hoofdzakelijk door buigingseffecten bepaald wordt als de verhouding I/I_0 groter dan 0.8 blijft. Hieruit volgt voor de variantie van W de bovengrens,

$$\overline{W^2} - (\overline{W})^2 \leq 0.0055, \quad (7.6)$$

en als men overgaat op de gemiddelde kwadratische (*rms*) golffrontafwijking vindt men het resultaat,

$$W_{rms} \leq 0.074, \quad (7.7)$$

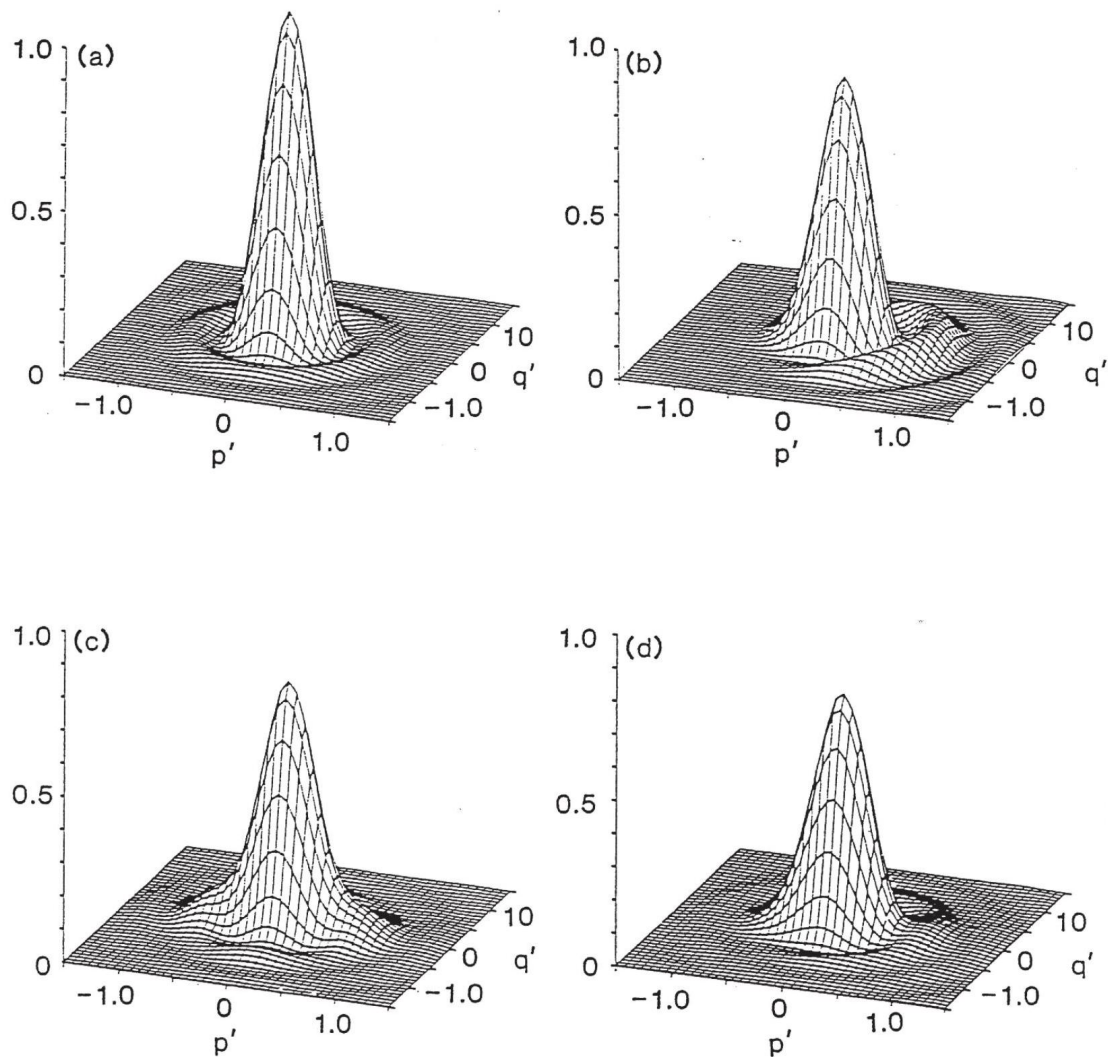
waarbij W nog steeds in eenheden λ is uitgedrukt.

Het criterium volgens (7.7) kan toegepast worden op bijv. een gedefocusseerd golffront en men vindt dan dat de maximale golffrontafwijking de waarde van $\lambda/4$ niet mag overschrijden. Deze golffrontafwijking correspondeert precies met een verschuiving langs de as die gelijk is aan de scherptediepte die we eerder in hoofdstuk V hebben leren kennen. Ook het Rayleigh criterium voor sferische aberratie wordt teruggevonden met het algemene Maréchal criterium. Een ander interessant aspect van het criterium volgens (7.7) is dat men eenvoudig af kan leiden welke optimale combinaties van Seidel- en hogere orde aberraties gewenst zijn. Dit bevestigde het reeds bestaande inzicht dat het nuttig is bepaalde residuen van Seidelaberraties toe te laten om de effecten van hogere orde aberraties optimaal te compenseren. Overigens worden de (gewenste) verhoudingen tussen lagere en hogere orde aberraties automatisch verkregen wanneer men de golffrontaberraties ontwikkelt in orthogonale polynomen, gedefinieerd op het cirkelvormige golffront in de uittreepupil, de zogenaamde Zernike-polynomen. Deze polynomen zijn door Zernike gepubliceerd in 1934, samen met zijn fasecontrastmethode voor de microscopische waarneming van fase-objecten. Voor deze uitvinding is hem in 1953 de Nobelprijs voor natuurkunde toegekend.

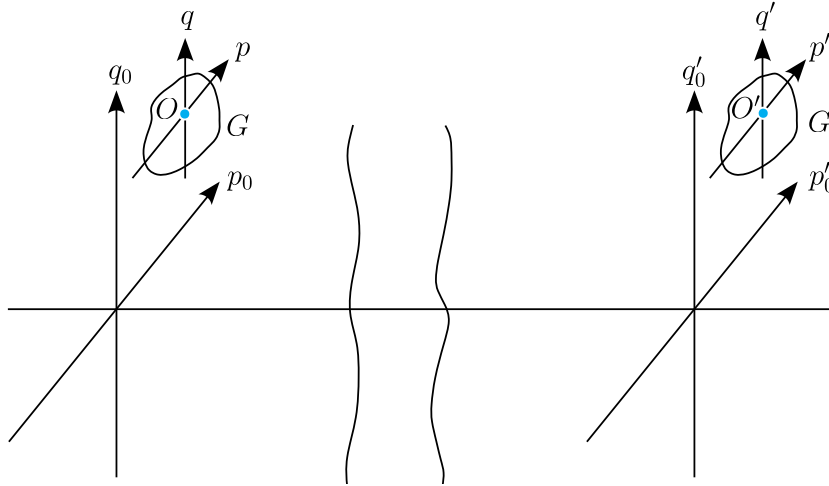
In figuur 7.2 zijn enige berekende impulsresponsies getekend. De eenheid langs de p' - en q' -as is de grootte λ/NA , de laterale diffractie-eenheid in het beeldveld. In figuur 7.2a is de situatie getekend waarbij het golffront perfect sferisch is en de bijbehorende Strehl-intensiteit gelijk aan 1.00. De vorm van dit buigingsbeeld was reeds door Airy (1835) numeriek berekend; de halfwaardebreedte is gelijk aan ongeveer $0.5\lambda/NA$. De intensiteitsrespons volgens de geometrische optica zou in dit geval een delta-functie geweest zijn.

Het golffront, dat geleid heeft tot het buigingsbeeld volgens figuur 7.2b, vertoont een zodanige hoeveelheid coma dat de Strehl-intensiteit juist tot 0.80 gezakt is. De impulsrespons is net buigingsbegrensd. De energie die uit het centrale deel verdwenen is, wordt aan één zijde teruggevonden in de buigingsringen. Evenals het golffront vertoont ook het buigingsbeeld geen cirkelsymmetrie. In figuur 7.2c is het golffront astigmatisch vervormd. De getekende intensiteitsverdeling behoort bij een opvangvlak dat een geometrisch optische brandlijn bevat. In figuur 7.2d is een 'algemener' golffront beschouwd dat afwijkingen van diverse aberratietypen tegelijk vertoont. De Strehl-intensiteit van de impulsrespons is 0.64 en volgens het criterium van vgl. (7.7) is het corresponderende golffront niet meer buigingsbegrensd. Men komt nu in een moeilijk te beschrijven overgangsgebied terecht waar de geometrische aberraties en de buigingsonscherpte een vergelijkbare invloed hebben op de spreiding van de lichtintensiteit. De grootte van de aberratie in dit overgangsgebied strekt zich uit van ruwweg 0.5 tot 3λ ($0.15 < W_{rms} < 1\lambda$).

Voor nog grotere waarden van W wordt de impulsrespons meestal voldoende nauwkeurig beschreven door de geometrische optica. Een maat voor de intensiteit wordt nu de straaldichtheid in het beeldvlak. Men gaat er hierbij vanuit dat de straaldichtheid over de referentiebol in de uittreepupil homogeen is (het optische systeem voldoet dan aan de sinusvoorwaarde van Abbe). Daar waar twee of meer stralen elkaar snijden in het beeldvlak treedt een singulariteit op; dit is o.a. het geval op het kaustisch oppervlak. Voor een algemene indruk van de geometrisch optische intensiteitsverdeling plot men de doorsnijdingspunten met het beeldvlak van een aantal



Figuur 7.2: Impulsresponsies of buigingsfiguren (optische *intensiteit*) gevormd door een ideaal of zwak-geaberreerd optisch stelsel. a) $W = 0$. b) Comatische aberratie. c) Astigmatisme. d) een 'cocktail' van relatief kleine aberraties.



Figuur 7.3: Afbeelding van een objectgebied G in het voorwerpsvlak naar het beeldvlak, in het gebied G' . Ter vereenvoudiging van de notatie bij Fouriertransformaties worden de optisch gereduceerde coördinaten (p, q) en (p', q') volgens Hopkins gebruikt.

uniform over de uittrepupil verdeelde stralen. Een dergelijke verzameling van 'inslagpunten' van de lichtenergie wordt wel een spot-diagram genoemd en geeft de mogelijkheid snel de grootte en het type van de aberratie af te schatten.

Evenals voor de golffrontfout kan men ook voor de dwarsaberratie een *rms* waarde definiëren volgens

$$\Delta_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \{(p'_i - \bar{p}')^2 + (q'_i - \bar{q}')^2\}}, \quad (7.8)$$

waarbij \bar{p}' en \bar{q}' de gemiddelde dwarsaberratiecomponenten van de N_s beschouwde beeldstralen zijn.

VII.2 De frequentierespons

In figuur 7.3 is in het voorwerpsvlak een gebied G aangegeven met als centrum het punt $O(p_0, q_0)$. Dit gebied wordt in het beeldvlak afgebeeld op G' . De impulsrespons in intensiteit van het optische stelsel wordt voor het gehele gebied G' constant verondersteld. Wanneer men een uitgebreid voorwerp aanbiedt in gebied G met een intensiteitstransmissie $I_0(p, q)$, gecentreerd op O , wordt de intensiteit in het beeldvlak, op een constante factor na, gegeven door de convolutie van I_0 met de impulsrespons h indien het stelsel lineair in intensiteit is,

$$I_1(p', q') = \iint_{-\infty}^{+\infty} I_0(p, q) h(p' - p, q' - q) dp dq. \quad (7.9)$$

Hierbij wordt h gegeven door de modulus kwadraat van de amplitude respons volgens (7.2) in het gebied G' . Door het gebruik van gereduceerde coördinaten is de vergroting tussen beeld- en voorwerpsvlak op 1 genormeerd. Tevens zijn ook de ruimtelifquenties in voorwerpsvlak en beeldvlak dan onderling genormeerd, waardoor we, indien gewenst, functies in het frequentiedomein in het voorwerps- of beeldvlak rechtstreeks met elkaar kunnen vermenigvuldigen zonder schaling.

Als we het spectrum van de intensiteitsverdelingen I_0 en I_1 definiëren volgens

$$\begin{aligned}\tilde{I}_0(\nu_p, \nu_q) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} I_0(p, q) \exp\{2\pi i(\nu_p p + \nu_q q)\} dpdq, \\ \tilde{I}_1(\nu'_p, \nu'_q) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} I_1(p', q') \exp\{2\pi i(\nu'_p p' + \nu'_q q')\} dp'dq',\end{aligned}\quad (7.10)$$

en de Fouriergetransformeerde van $h(p, q)$ schrijven als

$$H(\nu'_p, \nu'_q) = \iint_{-\infty}^{+\infty} |A'(p', q')|^2 \exp\{2\pi i(\nu'_p p' + \nu'_q q')\} dp'dq', \quad (7.11)$$

dan volgt met behulp van (7.9),

$$\tilde{I}_1(\nu'_p, \nu'_q) = H(\nu'_p, \nu'_q) \tilde{I}_0(\nu'_p, \nu'_q), \quad (7.12)$$

waarbij $H(\nu'_p, \nu'_q)$ de optische (spectrale) overdrachtsfunctie van het stelsel heet voor het gebied G' in het beeldvlak. Met behulp van uitdrukking (7.2) voor de amplitude impulsrespons van het stelsel volgt voor de genormeerde overdrachtsfunctie,

$$H(\nu'_p, \nu'_q) = \frac{1}{H_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} A(X', Y') A^*(X' + \nu'_p, Y' + \nu'_q) dX'dY', \quad (7.13)$$

onder gebruikmaking van het convolutietheorema voor Fouriergetransformeerden. De normeringsfactor H_0 wordt gegeven door:

$$H_0 = H(0, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} |A(X', Y')|^2 dX'dY'.$$

Alhoewel de integratie in (7.13) zich formeel over een oneindig uitgebreid gebied uitstrekt, is de complexe amplitudefunctie in werkelijkheid begrensd tot de uittreepupil van het stelsel. De overdrachtsfunctie kan ook geschreven worden als

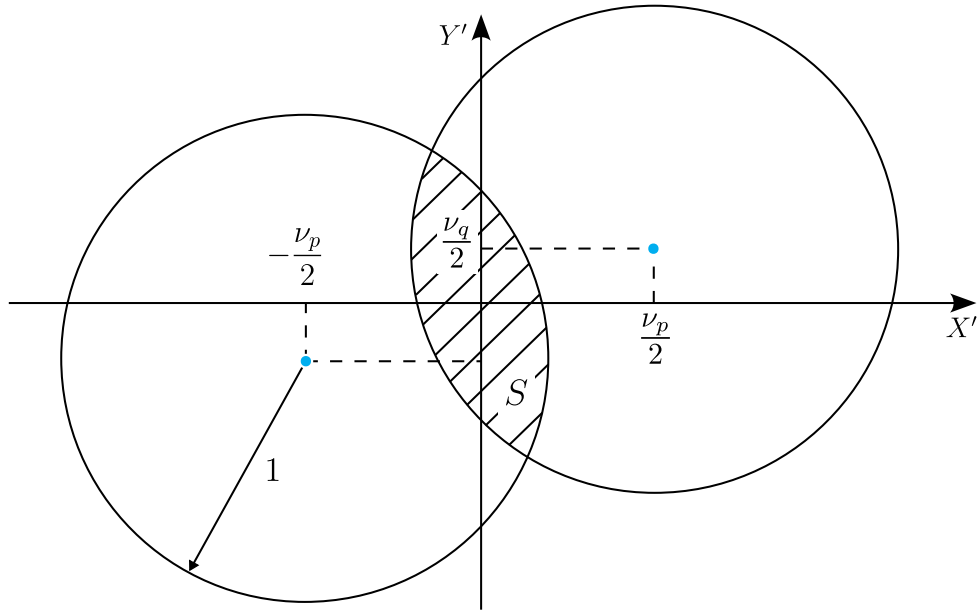
$$H(\nu'_p, \nu'_q) = \frac{1}{H_0} \iint_S \exp\left\{2\pi i \left[W\left(X' - \frac{\nu'_p}{2}, Y' - \frac{\nu'_q}{2}\right) - W\left(X' + \frac{\nu'_p}{2}, Y' + \frac{\nu'_q}{2}\right) \right]\right\} dX'dY', \quad (7.14)$$

waarbij het integratiegebied aangegeven is in figuur 7.4 en bestaat uit het overlapgebied van twee pupilgebieden, die over een afstand ν'_p en ν'_q onderling verschoven zijn in resp. de X' - en Y' -richting. In figuur 7.5 is de vorm van $H(\nu'_p, \nu'_q)$ getekend in het geval $\nu_q = 0$ en de aberratiefunctie W identiek nul. De overdrachtsfunctie is nu reëel en daalt monotoon van de waarde 1 bij $\nu'_p = 0$ naar de waarde 0 bij de zogenaamde afsnijfrequentie $\nu'_p = 2$. Uitgedrukt in de niet-genormeerde, reële ruimtedefrequentie is de afsnijfrequentie gelijk aan $2NA/\lambda$.

In een meer algemeen geval kan de overdrachtsfunctie slechts numeriek bepaald worden. De functie zal over het algemeen dan ook niet meer reëel zijn en kan geschreven worden als

$$H(\nu'_p, \nu'_q) = a(\nu'_p, \nu'_q) \exp\{i\alpha(\nu'_p, \nu'_q)\}. \quad (7.15)$$

In deze vorm wordt a wel de modulatie-overdrachtsfunctie (MTF) en α de fase-overdrachtsfunctie genoemd. Een waarde van α ongelijk aan nul duidt op een verschoven afbeelding van het raster met frequenties (ν'_p, ν'_q) ten opzichte van de paraxiaal verwachte positie. In figuur 7.5



Figuur 7.4: Het integratiegebied S , gearceerd in de figuur, dat gebruikt wordt bij de berekening van de autocorrelatiefunctie van de complexe amplitudeverdeling $\exp(2\pi i W(X', Y'))$ voor een bepaalde ruimtelfrequentie (ν_p, ν_q) in het objectvlak.

is naast de aberratievrije MTF ook een iets verslechterde versie getekend die correspondeert met de impulsrespons volgens figuur 7.2c. De modulatie-overdracht is vooral afgenomen bij de zogenaamde middenfrequenties.

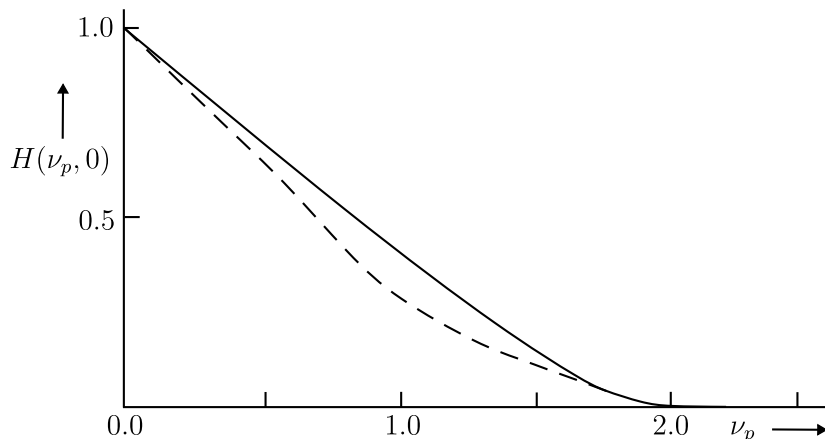
Wanneer een optisch stelsel veel grotere aberraties vertoont (bijv. 5λ of meer) zal de MTF reeds bij relatief lage ruimtelfrequenties naar nul afvallen. Dit betekent dat voor de nog interessante frequenties de verschuiving van de pupillen zeer gering is en het toegestaan is het gehele pupiloppervlak als integratiegebied in (7.14) te gebruiken. Ook kan men de differentie functie in W in de integrand van (7.14) vervangen door de afgeleide van W . $H(\nu'_p, \nu'_q)$ kan dan herschreven worden volgens

$$H(\nu'_{\xi'}, \nu'_{\eta'}) = \frac{1}{H_0} \iint_{\text{pupil}} \exp \left[-2\pi i \left\{ \nu'_{\xi'} \cdot \Delta \xi' (x', y') + \nu'_{\eta'} \cdot \Delta \eta' (x', y') \right\} \right] dx' dy', \quad (7.16)$$

waarbij de gereduceerde coördinaten vervangen zijn door reële coördinaten en $\Delta \xi' (x', y')$ en $\Delta \eta' (x', y')$ de dwarsaberratiecomponenten zijn (t.o.v. het referentiepunt) van een lichtstraal die de uittreepupilbol in het punt (x', y') gesneden heeft. H_0 komt nu overeen met de grootte van het pupiloppervlak.

De benaderde uitdrukking (7.16) wordt wel de *geometrisch optische* overdrachtsfunctie genoemd in tegenstelling tot (7.14) die de *diffraction*-overdrachtsfunctie genoemd wordt. Een belangrijk verschil is het verschijnsel dat $H(\nu'_{\xi'}, \nu'_{\eta'})$ identiek aan 1 wordt voor welke waarden van $\nu'_{\xi'}$ en $\nu'_{\eta'}$ dan ook als de aberratie W gelijk aan nul is.

Het is mogelijk een uitdrukking af te leiden voor de relatieve afval van $H(\nu'_{\xi'}, \nu'_{\eta'})$ mits deze afval niet te groot is. Voor de modulus kwadraat van $H(\nu'_{\xi'}, \nu'_{\eta'})$ kan men schrijven,



Figuur 7.5: De modulus (*MTF*, Modulus Transfer Function) van de complexe optische overdrachtsfunctie $H(\nu_p, 0)$. De getrokken curve correspondeert met een ideaal afgebeeld gebied G , zonder aberratie ($W = 0$). De onderbroken lijn laat de invloed zien op de *MTF* van een kleine restaberratie. De *MTF* is altijd gelijk aan nul als ν groter is dan 2; ofwel, als de niet-gereduceerde ruimtetfrequentie groter is dan $2NA/\lambda$.

$$\left| H(\nu'_{\xi'}, \nu'_{\eta'}) \right|^2 = \frac{1}{H_0^2} \left| \iint_{\text{pupil}} \exp \left[-2\pi i \left\{ \Delta\xi' \cdot \nu'_{\xi'} + \Delta\eta' \cdot \nu'_{\eta'} \right\} \right] dx' dy' \right|^2. \quad (7.17)$$

Een reeksontwikkeling van de exponentiële functie tot en met de kwadratische termen geeft de uitdrukking

$$\left| H(\nu'_{\xi'}, \nu'_{\eta'}) \right|^2 = \frac{1}{H_0^2} \left| \iint_{\text{pupil}} \left\{ 1 - 2\pi i \left(\Delta\xi' \cdot \nu'_{\xi'} + \Delta\eta' \cdot \nu'_{\eta'} \right) - 2\pi^2 \left(\Delta\xi' \cdot \nu'_{\xi'} + \Delta\eta' \cdot \nu'_{\eta'} \right)^2 \right\} dx' dy' \right|^2. \quad (7.18)$$

Beschouwt men een ruimtetfrequentie in bijv. de ξ' -richting alleen, dan kan (7.18) geschreven worden als

$$\left| H(\nu'_{\xi'}, 0) \right|^2 = 1 - 4\pi^2 \nu'_{\xi'}{}^2 \left\{ \frac{\iint (\Delta\xi')^2 dx' dy'}{\iint dx' dy'} \right\} + 4\pi^2 \nu'_{\xi'}{}^2 \left\{ \frac{\iint (\Delta\xi') dx' dy'}{\iint dx' dy'} \right\}^2, \quad (7.19)$$

en voor waarden dicht bij 1 kan men (7.19) benaderen volgens

$$\begin{aligned} \left| H(\nu'_{\xi'}, 0) \right| &= 1 - 2\pi^2 \nu'_{\xi'}{}^2 \left\{ \overline{(\Delta\xi')^2} - (\overline{\Delta\xi'})^2 \right\} \\ &= 1 - 2\pi^2 \nu'_{\xi'}{}^2 (\Delta\xi'_{rms})^2. \end{aligned} \quad (7.20)$$

De geometrisch optische modulatie-overdrachtsfunctie is nu geschreven in termen van de *rms*-waarde van de dwarsaberratiecomponent in de richting loodrecht op de rasterlijnen. Uitdrukking (7.20) is een goede benadering voor waarden van $|H|$ groter dan 80%. Wanneer een overdracht van minimaal 80% gewenst wordt bij een bepaalde ruimtetfrequentie ν' moet de *rms* dwarsaberratiecomponent voldoen aan

$$(\Delta\xi')_{rms} \leq \frac{0.1}{\nu'_{\xi'}}. \quad (7.21)$$

In het algemeen geldt voor de waarde van de rms dwarsaberratie

$$\Delta_{rms}^2 = (\Delta\xi'_{rms})^2 + (\Delta\eta'_{rms})^2, \quad (7.22)$$

en in het geval van een symmetrische aberratie volgt hieruit voor (7.21)

$$\Delta_{rms} \leq \frac{0.14}{v}. \quad (7.23)$$

De uitdrukking volgens (7.21) geeft, eventueel gecombineerd met (7.23), de mogelijkheid het 80%-niveau van de *MTF* af te schatten aan de hand van één enkel getal; voor lagere waarden van de overdrachtsfunctie kunnen identieke waarden van de *rms* dwarsaberratie een geheel verschillende overdracht geven. In dit opzicht vertoont het criterium volgens (7.21) overeenkomst met (7.7) waarbij een bepaalde maximale waarde van de *rms* golffrontfout een Strehl-intensiteit hoger dan 80% garandeert.

Twee kwaliteitscriteria zijn besproken, het ene voor vrijwel buigingsbegrensd systemen, het andere voor systemen met geometrische dwarsaberraties die significant groter zijn dan de buigingsonscherpte λ/NA in het beeldvlak van het optisch systeem. Naast deze vrij algemene criteria kan voor een specifiek instrument een criterium opgesteld worden dat goed aansluit bij het gebruik. Zo heeft bijv. Rayleigh reeds het resolutie-criterium voor twee naburige sterke puntbronnen gedefinieerd in het geval van een microscoopobjectief of een telescoop. Soms kan het van belang zijn bepaalde aberraties extra te onderdrukken waardoor de bovenbehandelde globale aberratiecriteria niet voldoende informatie zouden verschaffen. Een complicerende factor kan ook het brede spectrale gebied zijn waarin een systeem gebruikt wordt. Hierbij moet men weer onderscheid maken tussen momentaan monochromatisch gebruik of een werkelijk polychromatisch gebruik zoals bij visuele instrumenten.

In het algemeen geldt dat, wanneer men de aberratiefunctie van een stelsel kent, in principe andere grootheden zoals overdrachtsfunctie en buigingsbeeld hieruit eenduidig afgeleid kunnen worden. Het gebruik van het systeem en de praktische meetmogelijkheden zullen uiteindelijk beslissen in welke vorm de kwaliteitstest gegoten moet worden.

Appendix A

Paraxiale Optica

Appendix A geeft een overzicht van de afbeeldingseigenschappen van een optisch systeem in het paraxiale domein. Voor praktische optische systemen met cirkelsymmetrie is dit domein beperkt tot een smal gebied rond de optische as. De straalhoeken (of richtingscosinussen) zijn oneindig klein en de optische oppervlakken, die de stralen breken of reflecteren, worden allemaal beschreven als delen van een kwadratisch oppervlak. Het verschil tussen een bolvormig oppervlak en bijv. een parabolöide wordt in het paraxiale domein verwaarloosd, alleen de kromming c is van belang.

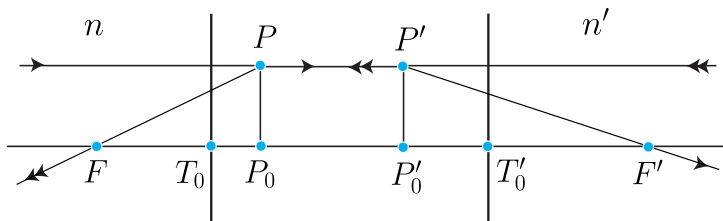
Na een korte beschrijving van de afbeeldingseigenschappen van een optisch systeem met rotatiesymmetrie in het paraxiale domein, geven we de vergelijkingen die de positie van twee geconjugeerde vlakken en de eigenschappen van de paraxiale beelden bepalen. We gebruiken een matrixbeschrijving voor een optisch stelsel teneinde de afbeeldingsvergelijkingen van een keten van optische oppervlakken aan elkaar te koppelen.

Appendix A behandelt vervolgens de rol van het diafragma bij optische afbeelding en de daarvan afgeleide begrippen van intree- en uittreepupil en van intreevenster en uittreevenster. Ook worden speciaal gekozen pupilposities besproken. Dit Appendix wordt afgesloten met een korte behandeling van de kleurafhankelijke eigenschappen van optische glazen en de daaruit volgende paraxiale kleurfouten van dunne lenzen.

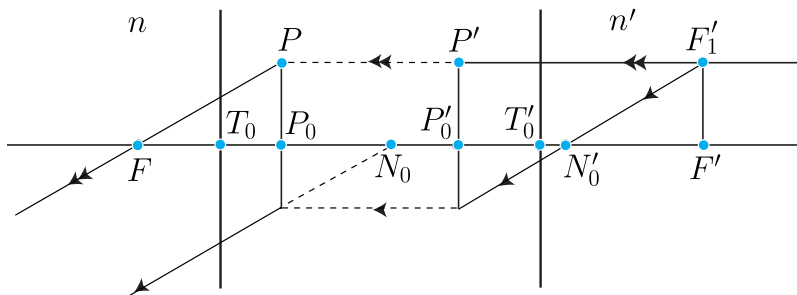
A.1 Paraxiale eigenschappen van een optisch stelsel

Een optische afbeelding wordt perfect genoemd als de volgende eigenschappen gelden:

- Alle stralen die een voorwerpspunt op de as verlaten, snijden elkaar in hetzelfde punt (het beeldpunt) in de beeldruimte. In termen van golffronten kan men zeggen dat sferische golffronten van stralenbundels die een voorwerpspunt verlaten, worden getransformeerd in sferische golffronten, gefocusseerd op het beeldpunt in de beeldruimte.
- Een aantal voorwerpspunten (het voorwerp) in een vlak loodrecht op de optische as wordt afgebeeld in een aantal beeldpunten (het beeld) dat ook in een vlak loodrecht op de optische as ligt. Het beeld is identiek aan het voorwerp, afgezien van een vergrotingsfactor β' . Voorwerp en beeld liggen in zogenaamde *geconjugeerde vlakken*.
- In het paraxiale domein is er een oneindig aantal paren van geconjugeerde vlakken mogelijk, met ieder een verschillende dwarsvergroting β' . In het algemeen geldt dat wanneer twee paren vlakken kunnen worden aangeduid waartussen ideale beeldvorming aanwezig is, er een oneindige aantal paren van geconjugeerde vlakken mogelijk is met perfecte beeldvorming. Voor een praktisch optisch systeem kunnen we alleen perfecte beeldvorming bereiken tussen één paar specifiek gekozen geconjugeerde vlakken en dan ook nog alleen over een beperkt gebied van deze vlakken, meestal geconcentreerd rond de optische as.



Figuur A.1: De brandpunten (F , F') en de hoofdpunten (P_0 , P'_0) van een paraxiaal optisch systeem. Op de posities T_0 en T'_0 bevinden zich het intreevlak en uittreevlak van het optisch systeem.



Figuur A.2: De brandpunten (F , F') en de knooppunten (N_0 , N'_0) van een paraxiaal optisch systeem.

Een paraxiaal optisch systeem kan volledig beschreven worden door een verzameling van vier specifieke punten op de optische as van het systeem. De twee brandpunten F en F' liggen voor de hand aangezien zij de afbeeldingen vanuit een oneindig ver verwijderd voorwerpsvlak beschrijven met behulp van evenwijdige bundels. Daarnaast zijn er twee zogenaamde *kardinale* punten nodig, die elkaars afbeelding zijn. Hiervoor zijn twee keuzes mogelijk en we beginnen met de brandpunten en de zogenaamde *hoofdpunten* P_0 en P'_0 als geselecteerde kardinale punten op de optische as van het systeem (zie figuur A.1). De daarbij behorende *hoofdvlakken* P en P' van een optisch systeem zijn de afbeeldingsvlakken waartussen een dwarsvergroting β' gelijk aan $+1$ heerst. De tweede keuze betreft de brandpunten en de zogenaamde *knooppunten* N_0 en N'_0 . De knoopvlakken N en N' zijn geconjugeerde vlakken met een hoekvergroting γ' die gelijk is aan $+1$.

- F , F' , P_0 en P'_0

De brandpunten F en F' zijn beelden van de oneindig ver weg gelegen punten in de objectruimte of de beeldruimte (zie figuur A.1). Per definitie wordt de afstand P'_0F' de beeldbrandpuntsafstand f' genoemd en P_0F de voorwerpsbrandpuntsafstand f (negatief in figuur A.1). De hoofdpunten P_0 en P'_0 zijn de projecties op de optische as van de snijpunten P en P' van de stralen die vanuit het oneindige komen en de stralen die naar de brandpunten gaan. Uit de figuur blijkt dat P en P' geconjugeerde punten zijn met transversale vergroting $\beta' = +1$.

- F , F' , N_0 en N'_0

De brandpunten F en F' definiëren de brandvlakken van een optisch systeem. Een punt F'_1 in bijvoorbeeld het beeldbrandvlak komt overeen met een voorwerpspunt in het oneindig ver verwijderd voorwerpsvlak dat een bundel parallelle stralen onder een hoek α naar het optische systeem stuurt met $\alpha = -F'F'_1/f$. De specifieke straal die zich onder een hoek α in de beeldruimte voortplant en de overeenkomstige straal in de voorwerpsruimte snijden de optische as in de kardinale punten N_0 en N'_0 , de zogenaamde *knooppunten* met hun bijbehorende

knoopvlakken. Deze kardinale punten hebben een hoekvergroting γ' die gelijk is aan $+1$ (zie figuur A.2).

Twee algemeen geconjugeerde vlakken met een dwars- of hoekvergroting ongelijk $+1$ kunnen gevonden worden door een geometrische constructie of door nog op te stellen afbeeldingsvergelijkingen. We concluderen dat we met behulp van de positie van de brandpunten en de hoofdpunten of met de brandpunten en de knooppunten volledig de paraxiale afbeeldingseigenschappen van een optisch stelsel kunnen vastleggen. Hieruit volgt dat de twee brandpunten samen met een paar geconjugeerde vlakken met een algemene waarde van β' voor de dwarsvergroting ook voldoende zijn om een willekeurig ander paar geconjugeerde vlakken te vinden.

Voor de posities van de kardinale punten en voor de brandpuntsafstanden f en f' gelden de volgende relaties (zie figuur A.2),

$$\begin{aligned} FP_0 &= N'_0 F' = -f, \\ FN_0 &= P'_0 F' = +f', \\ A &= -n/f = n'/f', \end{aligned} \tag{A.1}$$

waarbij A de sterkte van het optische systeem is (in m^{-1} , de eenheid van optische sterkte, ook wel *dioptrie*) genoemd. Ter afsluiting merken we nog op dat met vier posities van punten drie afstanden vastgelegd worden die het optische systeem karakteriseren. De absolute positie van een vierde punt dient slechts om de positie van het systeem langs een gekozen optische as vast te leggen.

A.2 Paraxiale optica en het matrixformalisme

Het volgen van een paraxiale straal, die wordt gekenmerkt door zijn hoek en zijn snijpunt met de optische as, is vrij eenvoudig in het geval van een enkel oppervlak. Wanneer twee opeenvolgende oppervlakken moeten worden behandeld, kunnen nog steeds expliciete formules voor de uittredende straal worden afgeleid, maar voor een groter aantal oppervlakken worden de uitdrukkingen onpraktisch. De grootheden aan de uitgangszijde van de gevolgde straal zijn lineair afhankelijk van zowel de positie als de hoek van de straal aan het ingangsoppervlak van een optisch systeem. Dit suggereert een notatie waarbij de ingangsgegevens voor het optische systeem gevormd worden door een vector met straalhoek en straalpositie als kentallen. Dezelfde gegevens voor de uittredende straal zijn dan gerelateerd aan die van de ingangsstraal door een 2×2 matrix. De totale systeemmatrix wordt verkregen door opeenvolgende vermenigvuldiging van elementaire matrices die het transport tussen optische oppervlakken of de breking (of reflectie) van een straal aan een bepaald oppervlak beschrijven. Uit de matrixelementen van de systeemmatrix kunnen de paraxiale afbeeldingseigenschappen van het hele systeem dan eenvoudig afgeleid worden.

A.2.1 Tekenafspraken

- Een rechtshandig coördinatensysteem wordt gebruikt met de positieve z -as in de figuur naar rechts gericht (de voortplantingsrichting van het licht). De optische as valt samen met de z -as. Afstanden worden positief geteld als een punt rechts van het bijbehorende referentiepunt ligt. Krommingen worden positief geteld wanneer de z -coördinaat van het middelpunt M van een gekromde oppervlak groter is dan de z -coördinaat van de top T van het oppervlak.
- In het paraxiale domein worden hoeken gemeten in het vlak $x = 0$. Straalhoeken met de z -as worden positief gerekend tegen de wijzers van de klok in. Voor de invalshoek van een lichtstraal op een gekromd oppervlak wordt de hoek gemeten ten opzichte van de

uitwendige normaalvector op het oppervlak, weer positief gerekend tegen de wijzers van de klok in.

- Wanneer een reflectie ontstaat in een optisch systeem, neemt volgens de paraxiale optica de brekingsindex van de beeldruimte de negatieve waarde aan van die van de voorwerpsruimte. Het teken van hoeken en afstanden blijft ongewijzigd zodat de optische weglengte $[AB] = n AB$ positief blijft wanneer het licht na een oneven aantal reflecties in de negatieve z -richting propageert. In het geval van een 'fasegeconjugeerde' reflectie neemt de index weliswaar de negatieve waarde aan, maar wordt het licht in dezelfde richting voortgeplant, zodat een bijbehorende optisch weglengte-increment negatief wordt.
- Een golffrontafwijking ten opzichte van een referentieoppervlak wordt positief geteld wanneer de optische weglengte langs een apertuurstraal in de bundel tot het snijpunt met het gekozen referentieoppervlak groter is dan de weglengte langs de referentiestraal (of hoofdstraal) tot het referentieoppervlak. Merk op dat deze tekenconventie wordt gebruikt in de leerboeken *Principles of Optics* (Born/Wolf) en *Imaging Optics* (Braat/Török). De tegengestelde tekenafspraken worden in veel overige leerboeken gebruikt, zoals in *Aberrations of Optical Systems* (Welford) en *Modern Optical Engineering* (Smith).

A.2.2 De systeemmatrix en de afbeeldingsvergelijking

We beginnen met de vergelijking die de voorwerps- en beelddafstand bepaalt (s_0 en s_1) wanneer een afbeelding gevormd wordt door één enkele optische overgang met optische sterkte K ,

$$\frac{n_1}{s_1} = \frac{n_0}{s_0} + K. \quad (\text{A.2})$$

Door beide zijden te vermenigvuldigen met y , de (paraxiale) invalshoogte op het brekende (of reflecterende) oppervlak, krijgen we de vergelijking

$$n_1 u_1 = n_0 u_0 - yK, \quad (\text{A.3})$$

waarbij u de hoek van de straal is met de positieve z -as ($u = -y/s$).

De verandering in invalshoogte op een oppervlak door de voortplanting van een straal (hoek u) van een bepaald oppervlak naar het naburige oppervlak wordt gegeven door,

$$y_1 = y_0 + u_0 d \quad (\text{A.4})$$

waarbij d de afstand tussen twee opeenvolgende oppervlakken is.

De twee vergelijkingen kunnen worden gecombineerd om de verandering van de vectorgrootheid (nu, y) bij voortplanting en bij breking (of reflectie) te beschrijven,

$$\begin{pmatrix} n_1 u_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -K \\ d/n_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Een individuele brekingsmatrix M_r heeft de elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & -K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

en een transportmatrix M_t wordt geschreven als

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d/n & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Zowel de brekings- als de transportmatrix hebben een determinant gelijk aan 1. De matrixuitdrukking voor het volledige systeem van index 1 tot en met index i (zie figuur A.4) wordt verkregen door opeenvolgende matrixvermenigvuldiging van rechts naar links,

$$\begin{pmatrix} n_i u_i \\ y_i \end{pmatrix} = (M_{r_i}) (M_{t_{i-1}}) (M_{r_{i-1}}) \dots (M_{r_2}) (M_{t_2}) (M_{r_1}) \begin{pmatrix} n_0 u_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (M) \begin{pmatrix} n_0 u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

De y -coördinaten worden nu gemeten in referentievlakken door de top T_1 van het eerste oppervlak en de top T_i van het laatste oppervlak van het optische systeem. De zogenaamde systeemmatrix M wordt over het algemeen geschreven als

$$M = \begin{pmatrix} B & -A \\ -D & C \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

waarbij A, B, C en D de systeemconstanten van het paraxiale of Gaussische systeem worden genoemd. M is het product van matrices met een determinant gelijk aan 1 en heeft zelf dus ook een determinant 1. Dientengevolge geldt dat $BD - AD = 1$ en zijn er dus slechts drie onafhankelijke Gaussische constanten. We merken op dat in sommige leerboeken deze matrixvermenigvuldigingen van rechts naar links in het optische systeem als hinderlijk ervaren worden. Om deze reden wordt de matrixketen in vgl. (A.8) vanaf links vermenigvuldigd met inverse matrices zoals $M_{r_i}^{-1}, M_{t_{i-1}}^{-1}, \dots$ en ontstaat de inverse systeemmatrix

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} C & A \\ D & B \end{pmatrix}.$$

De systeemmatrix volgens vgl. (A.9) transformeert de vector $(n_0 u_0, y_0)$ met de paraxiale componenten in de vector $(n_i u_i, y_i)$. De matrix kan dus worden beschouwd als de Jacobian matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial (n_i u_i)}{\partial (n_0 u_0)} & \frac{\partial (n_i u_i)}{\partial (y_0)} \\ \frac{\partial (y_i)}{\partial (n_0 u_0)} & \frac{\partial (y_i)}{\partial (y_0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Wanneer we de systeemmatrix willen refereren aan andere referentievlakken op afstand s_0 en s_i vanaf het ingangs- en uitgangsvlak van het systeem, moeten we (M) links en rechts vermenigvuldigen met de geschikte transportmatrix gerelateerd aan de afstanden s_0 en s_1 en dit levert de aangepaste matrixvergelijking op volgens

$$\begin{pmatrix} n_i u_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B + A \frac{s_0}{n_0} & -A \\ -D + B \frac{s_i}{n_i} - C \frac{s_0}{n_0} + A \frac{s_0}{n_0} \frac{s_i}{n_i} & C - A \frac{s_i}{n_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Een bepaalde keuze van s_0 en s_i maak het element M_{21} gelijk aan nul en dit betekent dat de coördinaat y_i van het snijpunt met het referentievlak in de beeldruimte onafhankelijk is van de hoek van de stralen in een bundel. Dit is de voorwaarde voor beeldvorming van het punt in het voorwerpsvlak met hoogte y_0 in het punt met hoogte y_i in het beeldvlak.

De corresponderende dwarsvergroting β' wordt gegeven door het matricelement M_{22} en vanwege de determinantwaarde van 1 van de matrix is dit element nu gelijk aan $1/M_{11}$ ($M_{21} = 0$). De afbeeldingsvergelijking luidt dus als volgt,

$$-D + B \frac{s_i}{n_i} - C \frac{s_0}{n_0} + A \frac{s_0}{n_0} \frac{s_i}{n_i} = 0, \quad (\text{A.12})$$

en de dwarsvergroting is gelijk aan

$$\beta' = C - A \frac{s_i}{n_i} = \frac{1}{B + A \frac{s_0}{n_0}}. \quad (\text{A.13})$$

Voor de hoekvergroting γ' leidt men eenvoudig af ($y_0 = 0$)

$$\gamma' = \frac{n_0}{n_i \beta'}. \quad (\text{A.14})$$

De axiale vergroting $\delta' = ds_i/ds_0$ wordt verkregen door differentiatie van de afbeeldingsvergelijking A.12 naar s_0 ,

$$\frac{ds_i}{ds_0} = \delta' = \frac{n_i}{n_0} (\beta')^2 = \frac{n_0}{n_i} \left(\frac{1}{\gamma'} \right)^2. \quad (\text{A.15})$$

Een speciaal geval doet zich voor wanneer een van de afstanden s_0 of s_i oneindig groot is. De bijbehorende geconjugeerde afstanden f_0 en f_i zijn dan gegeven door

$$\begin{aligned} s_0 = \infty, & & f_i = n_i \frac{C}{A}, \\ f_0 = -n_0 \frac{B}{A}, & & s_i = \infty, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

en ze definiëren de zogenaamde *topbrandpuntsafstanden* in de voorwerps- en beeldruimte.

Andere speciale gevallen doen zich voor wanneer de dwarsvergroting of de hoekvergroting gelijk is aan +1. We vinden dan als geconjugeerde afstanden,

$$\beta' = +1, \quad s_{P_0} = n_0 \frac{1-B}{A}, \quad s'_{P'_0} = n_i \frac{C-1}{A}, \quad (\text{A.17})$$

$$\gamma' = +1, \quad s_{N_0} = \frac{-n_0 B + n_i}{A}, \quad s'_{N'_0} = \frac{n_i C - n_0}{A}, \quad (\text{A.18})$$

en deze afstanden bepalen de ligging van de hoofdpunten (hoofdvlakken) met index P en de knooppunten (knoopvlakken) met index N van het optische systeem.

Tenslotte, als we twee vlakken beschouwen die geconjugeerde zijn, dan heeft het matrixelement M_{21} van de systeemmatrix met betrekking tot deze geconjugeerde vlakken de waarde 0. Nemen we als voorbeeld de systeemmatrix volgens vgl. A.11 met $M_{21} = 0$, dan volgen voor een eerste ingangstraal $(n_0 u_0, 0)$ en een tweede straal $(0, y_0)$ in het voorwerpsvlak de volgende stralen in het beeldvlak,

$$(n_0 u_0, 0) \rightarrow n_i u_i = \left(B + A \frac{s_0}{n_0} \right) n_0 u_0, \quad (\text{A.18a})$$

$$(0, y_0) \rightarrow y_i = \left(C - A \frac{s_i}{n_i} \right) y_0. \quad (\text{A.18b})$$

Het product van de twee matrix elementen M_{11} en M_{22} die aanwezig zijn in de vgl. (A.18a) en (A.18b) is gelijk aan +1. Als we de linkerleden van de twee vergelijkingen met elkaar vermenigvuldigen, evenals de rechterleden, volgt meteen dat

$$n_i u_i y_i = n_0 u_0 y_0, \quad (\text{A.18c})$$

gaande van een voorwerpsvlak naar een beeldvlak. Deze uitdrukking is een beperkte versie van de meer algemene Lagrange-invariant die van toepassing is op de beeldvorming tussen voorwerp en beeld en tussen intreepupil en uittreepupil (zie ook paragraaf A.4.2 van dit Appendix). Vgl. (A.18c) kan ook rechtstreeks afgeleid worden uit vgl. (A.14) die zegt dat het product van hoek- en dwarsvergroting gelijk is aan (n_0/n_i) .

A.2.3 De systeemmatrix voor specifieke referentievlakken

- Als we de hoofdvlakken door (P_0, P'_0) als referentievlakken in de voorwerps- en beeldruimte nemen, is de systeemmatrix gegeven door

$$M_P = \begin{pmatrix} 1 & -A \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

en de systeemmatrix ten opzichte van de knooppvlakken door (N_0, N'_0) is gelijk aan

$$M_N = \begin{pmatrix} n_i/n_0 & -A \\ 0 & n_0/n_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

- De twee voorgaande matrices zijn speciale gevallen van de algemene matrix die wordt aangeduid met β'_0 , omdat de geconjugeerde referentievlakken met dwarsvergroting β'_0 nu de referentievlakken zijn,

$$M_{\beta'_0} = \begin{pmatrix} 1/\beta'_0 & -A \\ 0 & \beta'_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Met de systeemmatrix gedefinieerd ten opzichte van een paar geconjugeerde vlakken, kunnen we beeldvorming met een andere vergroting onderzoeken door nieuwe referentievlakken te kiezen en de beeldvorming te bestuderen met de matrixvergelijking

$$\begin{pmatrix} n_i u_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\beta'_0 + A \frac{l_0}{n_0} & -A \\ 1/\beta'_0 \frac{l_i}{n_i} - \beta'_0 \frac{l_0}{n_0} + A \frac{l_0}{n_0} \frac{l_i}{n_i} & \beta'_0 - A \frac{l_i}{n_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

waarbij l_0 en l_i nu de afstanden van de referentievlakken in voorwerps- en beeldruimte tot de geconjugeerde vlakken met vergroting β'_0 zijn.

De afbeeldingsvoorwaarde voor het nieuwe paar referentievlakken luidt nu als volgt,

$$1/\beta'_0 \frac{l_i}{n_i} - \beta'_0 \frac{l_0}{n_0} + A \frac{l_0}{n_0} \frac{l_i}{n_i} = 0. \quad (\text{A.23})$$

Wanneer aan deze voorwaarde is voldaan, wordt de matrixvergelijking gereduceerd tot

$$\begin{pmatrix} n_i u_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\beta'_0 + A \frac{s_0}{n_0} & -A \\ 0 & \beta'_0 - A \frac{s_i}{n_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

waar s_0 en s_i nu de (geconjugeerde) afstanden zijn ten opzichte van de geconjugeerde referentievlakken met vergroting β'_0 . Deze afstanden worden geschreven als

$$s_0 = \frac{n_0 (\beta'_0 - \beta')}{A \beta'_0 \beta'}, \quad (\text{A.25})$$

$$s_i = \frac{n_i (\beta'_0 - \beta')}{A}.$$

De vergroting β' kan worden verkregen uit

$$\beta' = \frac{n_0 s_i}{n_i s_0} \frac{1}{\beta'_0}, \quad (\text{A.26})$$

en deze uitdrukking voor β' reduceert zich tot de bekende uitdrukking $\beta' = n_0 s_i / n_i s_0$ als de hoofdvlakken met vergroting +1 als de referentievlakken worden gekozen.

- Een ander paar mogelijke referentievlakken wordt gegeven door de brandvlakken. De systeemmatrix wordt nu gegeven door

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 1/A & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

waarbij het element M_{21} ongelijk is aan nul vanwege het feit dat de brandvlakken niet-geconjugeerde vlakken zijn. De matrixvergelijking die betrekking heeft op een nieuw paar referentievlakken (afstanden s_0 en s_i) wordt nu gegeven door

$$\begin{pmatrix} n_i u_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \frac{s_0}{n_0} & -A \\ A \frac{s_i}{n_i} \frac{s_0}{n_0} + \frac{1}{A} & -A \frac{s_i}{n_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

en afbeelding vindt weer plaats wanneer M_{21} nul wordt, resulterend in de afbeeldingsvergelijking,

$$A \frac{s_i}{n_i} \frac{s_0}{n_0} + \frac{1}{A} = 0, \quad (\text{A.29})$$

$$s_0 s_i = f f'.$$

Dit is de afbeeldingsvergelijking van Newton met de beeldafstanden gemeten vanaf de brandpunten. De dwarsvergroting wordt nu geschreven als

$$\beta' = -\frac{s_i}{f'} = -\frac{f}{s_0}, \quad (\text{A.30})$$

waaruit ook onmiddellijk de hoekvergroting volgt.

A.2.4 Gekanteld voorwerps- en beeldvlak

Soms is een voorwerpsvlak welbewust niet loodrecht op de optische as gepositioneerd. Indien het voorwerp een vierkant is, wordt het resulterende beeld op een gekanteld vlak geprojecteerd en neemt het een trapeziumvorm aan (de vergroting verandert continu in het beeldvlak). Het beeldvlak moet een zodanige kantelhoek gegeven worden dat het het beeldhoofdvlak door P'_0 op dezelfde hoogte snijdt als het gekantelde voorwerpsvlak het voorwerphoofdvlak door P_0 ; zie ook figuur A.3 waarin de kantelhoeken α en α' aangegeven zijn. Indien we uitgaan van de systeemmatrix gerelateerd aan de hoofdvlakken P_0 en P'_0 volgens vgl.(A.19) en de daarbij behorende uitdrukkingen voor de dwarsvergroting en de axiale vergroting gebruiken, is eenvoudig af te leiden dat de tangenten van de kantelhoeken α en α' in resp. de voorwerpsruimte en de beeldruimte de volgende relatie hebben,

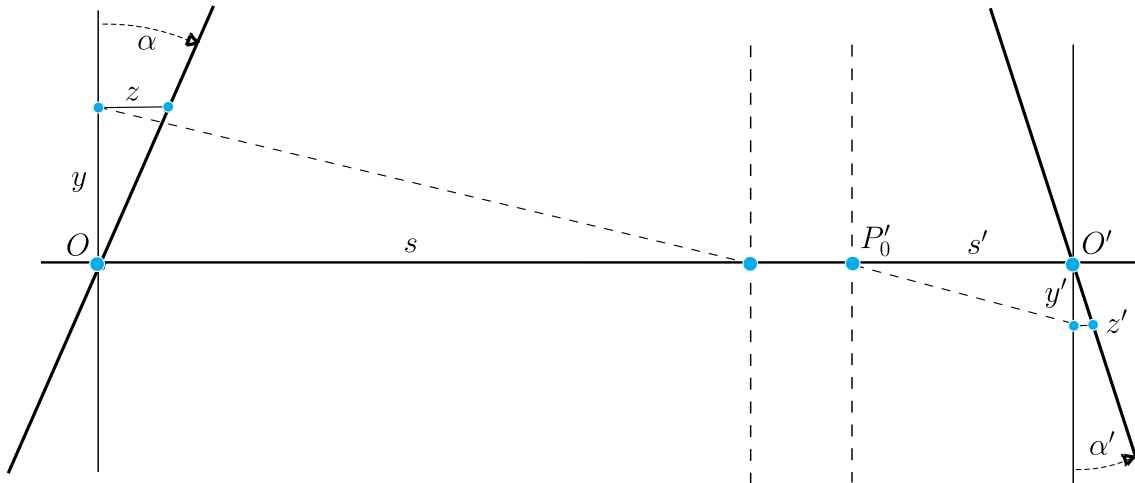
$$\frac{\tan(\alpha')}{\tan(\alpha)} = \beta', \quad (\text{A.31})$$

waarbij β' de dwarsvergroting is in het punt O' waar het gekantelde beeldvlak de optische as snijdt.

A.2.5 Telescopisch systeem

Een speciaal geval dat moet worden behandeld, is het 'sterkteloze' of telescopische optisch systeem. De systeemmatrix ten opzichte van de topvlakken T_0 en T_i van de telescoop in de voorwerps- en de beeldruimte wordt dan gegeven door

$$M_T = \begin{pmatrix} 1/C & 0 \\ -D & C \end{pmatrix}, \quad (\text{A.32})$$



Figuur A.3: De scherpe maar vervormde (paraxiale) beeldvorming tussen gekantelde vlakken. De brekingsindices van voorwerps- en beeldruimte zijn identiek gekozen in de figuur.

en de matrixvergelijking voor een paar referentievlakken op afstanden s_0 en s_i is dan gelijk aan

$$\begin{pmatrix} n_i u_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\beta'_T & 0 \\ -D + (1/\beta'_T) \frac{s_i}{n_i} - \beta'_T \frac{s_0}{n_0} & \beta'_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

waar we C hebben vervangen door de dwarsvergroting β'_T van de telescoop.

De afbeeldingsvergelijking ($M_{21} = 0$) wordt nu gegeven door

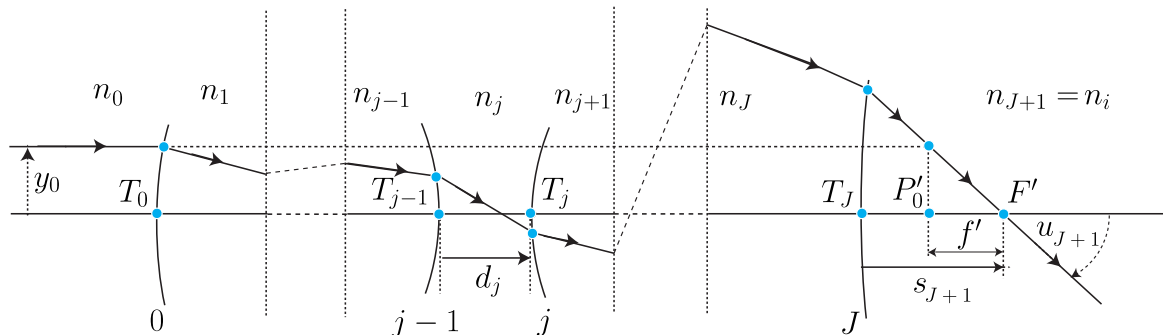
$$s_i = n_i \left[\beta'_T D + (\beta'_T)^2 \frac{s_0}{n_0} \right]. \quad (\text{A.34})$$

Door differentiëren van (A.34) naar s_0 vinden we de waarde van ds_i/ds_0 , de axiale vergroting of langsvergroting, en deze is weer evenredig met het kwadraat van de dwarsvergroting β'_T van de telescoop. De telescoop levert een constante dwarsvergroting en hoekvergroting, onafhankelijk van de positie van de geconjugeerde vlakken. De brandvlakken zijn doorgeschoven naar het oneindige en de begrippen hoofdvlak en knooppvlak kunnen niet worden toegepast op een telescopisch systeem.

De waarde nul van de optische sterkte van een telescoop houdt verband met het feit dat een lichtstraal parallel aan de optische as zonder richtingsafwijking uit de telescoop treedt. De brandpuntsafstand van de telescoop is daarom oneindig groot. Bij de afbeelding van bijvoorbeeld astronomische objecten is het nut van de telescoop het feit dat zijn absolute hoekvergroting groter dan één is. Hierdoor neemt het hoekscheidend vermogen voor een waarnemer toe, vergeleken met dat van waarneming met het blote oog. Maar voor geconjugeerde vlakken op eindige afstand wordt de convergentie (of divergentie) van een stralenbundel wel door de telescoop gewijzigd. De telescoop-eigenschap van zo'n systeem wordt dan benut voor een bijzondere afbeelding van het diafragma van het stelsel (zie voor dit onderwerp sectie A.4.3).

A.2.6 De deelsterkte van een element in een optisch systeem

De totale sterkte van een optisch systeem is niet simpelweg de som van de sterktes van de afzonderlijke brekende of reflecterende oppervlakken. Dit is alleen het geval indien hun onderlinge afstanden ongelijk nul zijn. Verwijzend naar figuur A.4 kan de totale sterkte berekend worden door een straal evenwijdig aan de optische as aan te bieden aan het stelsel en het snijpunt met de optische as in de beeldruimte te vinden. Vergelijking (A.3) kan worden toegepast met



Figuur A.4: De breking (of reflectie) van een lichtstraal door een optisch systeem. Een straal van een evenwijdige bundel die parallel is aan de optische as treft het eerste oppervlak op een hoogte y_0 en snijdt de optische as in de beeldruimte in het punt F' . De afstand $T_J F'$ heet de topbrandpuntsafstand van het systeem, de afstand $P_0' F'$ is de beeldbrandpuntsafstand f' van het systeem.

betrekking tot alle oppervlakken 0 tot en met J en dit levert de verzameling vergelijkingen op

$$\begin{aligned}
 n_1 u_1 &= n_0 u_0 - y_0 K_0, \\
 n_2 u_2 &= n_1 u_1 - y_1 K_1, \\
 \dots &= \dots \dots \dots, \\
 n_J u_J &= n_{J-1} u_{J-1} - y_{J-1} K_{J-1}, \\
 n_{J+1} u_{J+1} &= n_J u_J - y_J K_J.
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

Voor het speciale geval $u_0 = 0$ kan de convergentiehoek $u_{J+1} = -y_0/f'$ van de straal in de beeldruimte vervangen worden door $-y_0 A/n_{J+1} = -y_0 A/n_i$. Na het optellen van alle vergelijkingen vinden we dan dat

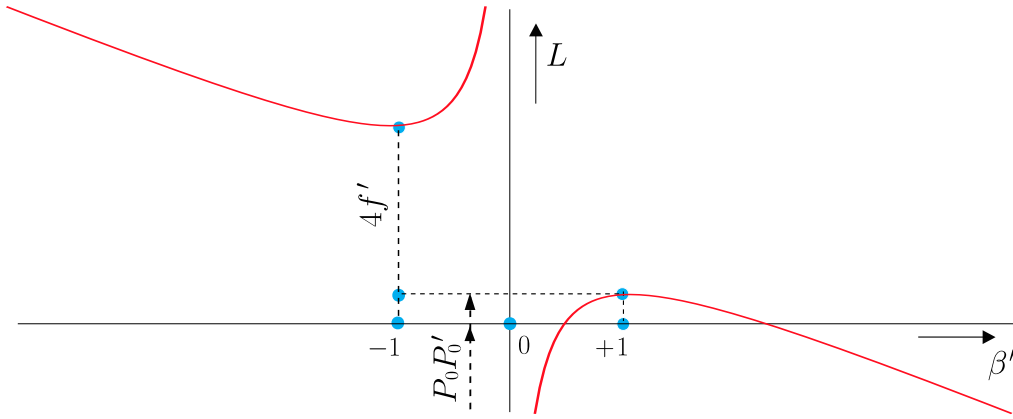
$$A = \sum_{j=0}^J \frac{y_j}{y_0} K_j. \tag{A.36}$$

Uit deze vergelijking leidt men af dat de verhouding y_j/y_0 de relatieve bijdrage van een element aan de optische sterkte bepaalt. Wanneer de waarde van y_j/y_0 gelijk is aan nul voor een bepaald oppervlak j , hebben we daar te maken met een tussenbeeld vanuit het oneindige. Het oppervlak gedraagt zich dan als een 'veldlens'. Een dergelijk oppervlak verandert de convergentie of divergentie van een doorgelaten bundel in de vaste verhouding n_{j-1}/n_j ; de gemiddelde voortplantingsrichting verandert als functie van de positie y_j van het focuspunt op het oppervlak met het bedrag $-y_j K_j$. Als er twee optische overgangen met geringe onderlinge afstand voorkomen bij een tussenafbeelding kunnen we echt van een veldlens spreken. Een veldlens laat de convergentie of divergentie van een bundel ongewijzigd en introduceert alleen een knikhoek in de voortplantingsrichting van de bundel ten bedrage van $-y/f'$.

Indien we een voorwerpsvlak op eindige afstand beschouwen en de marginale straal volgen vanuit een voorwerpspunt op de optische as vinden we natuurlijk een ander pad door het optische systeem dan bij de eerder beschouwde parallelle bundel. We vinden ook andere gewichten y_j/y_1 voor de verschillende oppervlakken. Maar een veldlensgedrag van een optisch oppervlak is ook hier weer van toepassing wanneer $y_j = 0$ en het oppervlak samenvalt met een tussenafbeelding in het inwendige van het optisch systeem.

Bij een systeem met slechts twee oppervlakken wordt het gewicht y_2/y_1 gemakkelijk uit de vergelijkingen geëlimineerd en kan de totale sterkte geschreven worden als

$$A = K_1 + K_2 - \frac{d_1}{n_1} K_1 K_2, \tag{A.37}$$



Figuur A.5: Schets van de optische projectie-afstand L (positief systeem) als functie van de dwarsvergroting β' . $P_0P'_0$ is de axiale afstand tussen het voorwerps- en beeldhoofdvlak (positief systeem, $f' > 0$).

waarbij d_1 de afstand is tussen het eerste en het tweede oppervlak. De vergelijking (A.37) wordt gewoonlijk de 'lensmakers'-formule genoemd.

A.2.7 De optische projectie-afstand

De optische projectie-afstand L van een afbeeldingssysteem is de afstand tussen het beeldvlak en het voorwerpsvlak en is dus afhankelijk van bijvoorbeeld de dwarsvergroting β' . Door gebruik te maken van een van de eerder afgeleide afbeeldingsvergelijkingen vinden we de uitdrukking,

$$L = s_i - s_o + P_0P'_0 = \frac{(1 - \beta')}{\beta'} [f + \beta'f'] + P_0P'_0 \quad (\text{A.38})$$

waarbij $P_0P'_0$ de fysieke afstand is van het voorwerpshoofdvlak naar het beeldhoofdvlak van het optisch stelsel.

In het vaak voorkomende geval met $f = -f'$ (gelijke indices in voorwerps- en beeldruimte) wordt de optische projectie-afstand gegeven door,

$$L = s_i - s_o + P_0P'_0 = \left\{ \frac{-f'(1 - \beta')^2}{\beta'} \right\} + P_0P'_0, \quad (n_o = n_i). \quad (\text{A.39})$$

De variatie van L met β' is weergegeven in figuur A.5. Voor een systeem in lucht is het verschil in projectie-afstand tussen de twee extreme waarden ($\beta' = +1$ or -1) gelijk aan $4f'$. Deze laatste waarde is de minimale projectie-afstand tussen beeld- en voorwerpsvlak wanneer een reëel beeld gevormd moet worden van een reëel voorwerp ($\beta' = -1$).

A.3 Formules paraxiale optica

A.3.1 Systeemmatrix en afbeeldingsvergelijking

- De referentievlakken voor het optisch systeem zijn het in- en uitgangsoppervlak (de zogenaamde *topvlakken*) van het systeem.

De systeemmatrix wordt gegeven door

$$M_T = \begin{pmatrix} B & -A \\ -D & C \end{pmatrix}, \quad (\text{A.40})$$

met de eigenschap $BC - AD = 1$.

De afbeeldingsvergelijking is

$$-D + B \frac{s_i}{n_i} - C \frac{s_0}{n_0} + A \frac{s_0 s_i}{n_0 n_i} = 0. \quad (\text{A.41})$$

- De referentievlakken zijn de hoofdvlakken van het optisch systeem.
De systeemmatrix is nu gegeven door

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & -A \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

De afbeeldingsvergelijking wordt gegeven door

$$\frac{n_i}{s_i} = \frac{n_0}{s_0} + A. \quad (\text{A.43})$$

Voor $s_0 = \infty$ volgt voor de beeldbrandpuntsafstand dat $s_i = f' = n_i/A$

Als $s_i \rightarrow \infty$ volgt voor de voorwerpsbrandpuntsafstand dat $s_0 = f = -n_0/A$.

- De referentievlakken zijn de brandvlakken van het systeem
De systeemmatrix is nu gegeven door

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ \frac{1}{A} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

De bijbehorende afbeeldingsvergelijking wordt

$$\frac{s_0 s_i}{n_0 n_i} = -\frac{1}{A^2}, \quad (\text{A.45})$$

ofwel, geschreven als Newton's vergelijking,

$$s_0 s_i = f f'. \quad (\text{A.46})$$

- De referentievlakken zijn de twee geconjugeerde vlakken met dwarsvergroting β'_0 .
De systeemmatrix wordt nu

$$M_{\beta'_0} = \begin{pmatrix} 1/\beta'_0 & -A \\ 0 & \beta'_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.47})$$

met de bijbehorende afbeeldingsvergelijking,

$$\beta'_0 \frac{n_i}{s_i} = \frac{n_0}{\beta'_0 s_0} + A. \quad (\text{A.48})$$

A.3.2 Vergrotingsfactoren β' , γ' , δ' en optische projectie-afstand L

- Referentievlakken zijn het intree-oppervlak T_1 en het uittree-oppervlak T_J van het systeem.

$$\text{Dwarsvergroting : } \beta' = C - A \frac{s_i}{n_i} = \frac{1}{B + A \frac{s_0}{n_0}}. \quad (\text{A.49})$$

$$\text{Hoekvergroting : } \gamma' = \frac{n_0}{n_i \beta'}. \quad (\text{A.50})$$

$$\text{Langsvergroting : } \delta' = \frac{n_i}{n_0} (\beta')^2. \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} \text{Projectie-afstand : } L &= \frac{1}{A} \left\{ -\frac{n_0}{\beta'} - n_i \beta' + n_0 B + n_i C \right\} + T_0 T_J \\ &= -f_0 + f_i - \beta' f' + \frac{f}{\beta'} + T_0 T_J, \quad (n_0 \neq n_i). \end{aligned} \quad (\text{A.52a})$$

$T_0 T_J$ is de afstand tussen de toppen van het eerste en laatste oppervlak van het stelsel, zie figuur A.4. De topbrandpuntsafstanden f_0 en f_i van het systeem in de voorwerps- en de beeldruimte zijn gegeven in vgl. (A.16). Bij gelijke brekingsindices in voorwerps- en beeldruimte, ($n_0 = n_i$), vinden we voor L de uitdrukking,

$$\begin{aligned} \text{Projectie-afstand : } L &= -f_0 + f_i - f' \left(\frac{1 + \beta'^2}{\beta'} \right) + T_0 T_J \\ &= f' \left(B + C - \frac{1 + \beta'^2}{\beta'} \right) + T_0 T_J, \quad (n_0 = n_i). \end{aligned} \quad (\text{A.52b})$$

- Referentievlakken zijn de hoofdvlakken van het systeem.

$$\text{Dwarsvergroting : } \beta' = \frac{n_0 s_i}{n_i s_0}. \quad (\text{A.53})$$

$$\text{Projectie - afstand : } L = (1 - \beta') \left(\frac{f}{\beta'} + f' \right) + P_0 P_0', \quad (n_0 \neq n_i), \quad (\text{A.54a})$$

$$L = -f' \left\{ \frac{(1 - \beta')^2}{\beta'} \right\} + P_0 P_0', \quad (n_0 = n_i). \quad (\text{A.54b})$$

- Referentievlakken zijn de brandvlakken van het systeem.

$$\text{Dwarsvergroting : } \beta' = -\frac{f}{s_0} = -\frac{s_i}{f'}. \quad (\text{A.55})$$

$$\text{Projectie-afstand : } L = -f' \left(\frac{1 + \beta'^2}{\beta'} \right) + F F', \quad (n_0 = n_i). \quad (\text{A.56})$$

- Referentievlakken zijn geconjugeerde vlakken met vergroting β'_0 .

$$\text{Dwarsvergroting : } \beta' = \frac{n_0 s_i}{n_i s_0} \frac{1}{\beta'_0}. \quad (\text{A.57})$$

$$\text{Projectie-afstand : } L = \left(\frac{\beta'_0 - \beta'}{A} \right) \left(n_i - \frac{n_0}{\beta'_0 \beta'} \right) + V_{\beta'_0} V'_{\beta'_0}, \quad (\text{A.58})$$

waarbij $V_{\beta'_0} V'_{\beta'_0}$ de afstand is tussen de twee geconjugeerde vlakken met vergroting β'_0 .

A.4 De begrenzing van stralenbundels

De afbeelding van een voorwerpsvlak op zijn geconjugeerde beeldvlak door middel van een stralenbundel met een eindige omvang is in de praktijk niet ideaal. Om de kwaliteit van het beeld op een bepaald minimaal niveau te houden (of om de aberraties binnen bepaalde grenzen te houden), moeten we de hoek- of dwarsuitgebreidheid van een stralenbundel in de beeldruimte beperken. Voor het axiale voorwerpspunt beperken we de hoekuitgebreidheid van een bundel (de apertuur van de bundel) en tegelijkertijd moeten we specificeren op welke manier scheve bundels door het optisch systeem hun weg moeten vinden.

A.4.1 Het diafragma

De hoekuitgebreidheid van de axiale bundel wordt over het algemeen bepaald door de numerieke apertuur NA aan de beeldzijde. Een fysiek diafragma is nodig om de waarde van NA vast te leggen. Als diafragma kan de reeds bestaande rand van een lens in het systeem gebruikt worden of een speciaal aangebracht (cirkelvormig) diafragma. Deze laatste optie verdient de voorkeur omdat interne reflecties en verstrooiing aan de lensranden moeten worden vermeden in een goed optisch systeem. Nadat de grootte en de positie van het diafragma zijn vastgelegd, wordt dit diafragma beschouwd als een voorwerp dat wordt afgebeeld vanuit het binnenste van het optische systeem, zowel naar de voorwerpsruimte als naar de beeldruimte. De beeldvorming vindt plaats via alle brekende of reflecterende oppervlakken die zich links of rechts van het diafragma bevinden. De twee paraxiale 'beelden' die op deze manier worden gegenereerd, worden de intrepupil EP en de uitrepupil XP genoemd, die dus niet fysiek in het systeem aanwezig zijn (zie bijv. figuur A.6a). De twee pupillen zijn onderling geconjugeerd en er bestaat een zekere vergroting β_P' tussen hen.

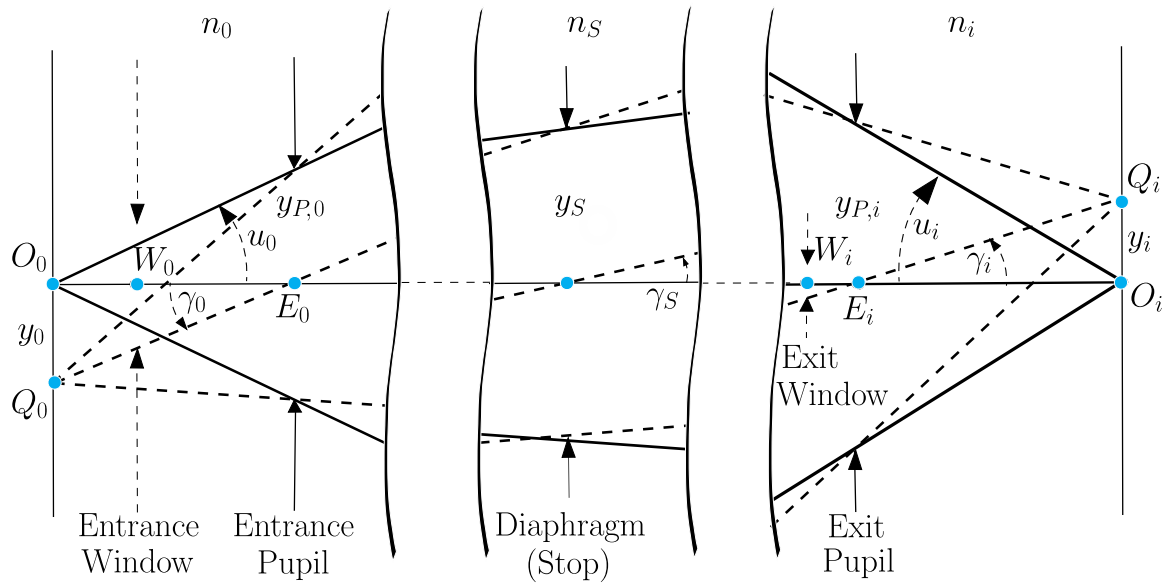
A.4.2 Scheve bundels

Het diafragma en de daarvan afgeleide pupillen bepalen de weg van scheve bundels door een systeem. Wanneer het voorwerps- en het beeldvlak zich op eindige afstanden bevinden, doorsnijdt de centrale straal (of *hoofdstraal*) van de stralenbundel die het voorwerpspunt Q verlaat het midden van de intrepupil E_0 en eveneens het midden van de uitrepupil E_i . De (beperkte) Lagrange-invariant H die kan worden toegepast op resp. het voorwerpsvlak, de intrepupil, het diafragma, de uitrepupil en het beeldvlak, ziet er dan als volgt uit,

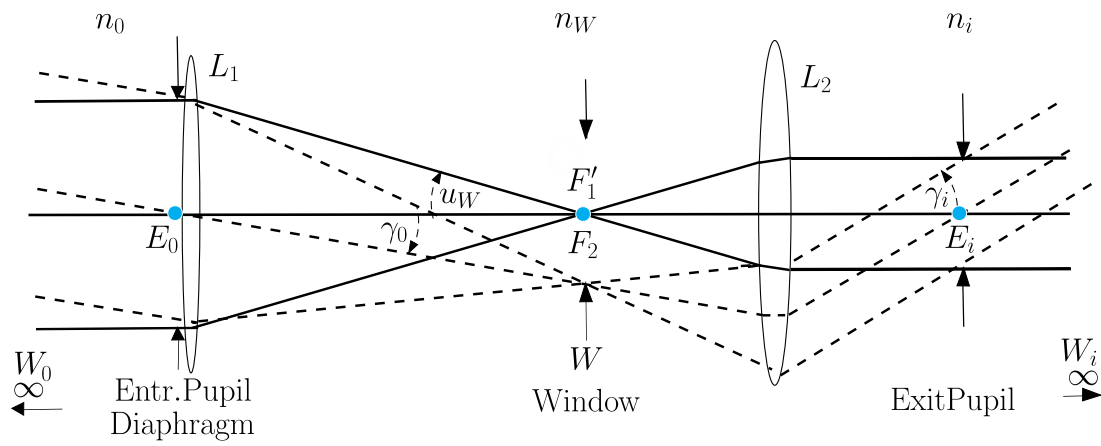
$$H = n_0 u_0 y_0 = n_0 \gamma_0 y_{P,0} = n_S \gamma_S y_S = n_i \gamma_i y_{P,i} = n_i u_i y_i \quad (\text{A.58})$$

waarbij de hoek γ nu de veldhoek aangeeft. De veldhoeken in de voorwerps- en beeldruimte worden gegeven door de hoekvergroting γ_P van de pupillen en ze zijn gerelateerd aan de transversale pupilvergroting β_P' door de uitdrukking $\beta_P' (\gamma_i/\gamma_0) = n_0/n_i$. Wanneer de stralenbundels in de beeldruimte een zeer kleine hoekuitgebreidheid hebben, kunnen ze worden weergegeven door hun hoofdstralen QE_0 (en E_iQ_i). Als de veldhoek toeneemt, wordt de hoofdstraal geblokkeerd door een bepaald diafragma of een rand van een bepaalde lensvatting in het optisch systeem. Dit is het oppervlak met de kleinste diameter gezien vanuit de positie van het diafragma. Dit begrenzend oppervlak wordt het venster W van het systeem genoemd. Het venster kan zowel naar links of naar rechts worden afgebeeld naar resp. de voorwerps- en de beeldruimte waar zich dan de onderling geconjugeerde paraxiale beelden W_0 zich W_i bevinden, de zogenaamde intree- en uitreevensters van het optisch systeem. Merk op dat in het geval van een enkele lens met een centrale stop (diafragma dat samenvalt met de lens), de vensters formeel worden bepaald door de fysieke grootte van het voorwerp of door een eventueel diafragma dat zich in het fysieke voorwerps- of beeldveld bevindt.

In figuur A.6b hebben we een axiale en een scheve stralenbundel getekend in het geval van een



a)



b)

Figuur A.6: a) Diafragma, pupillen en vensters van een optisch systeem. b) Idem voor een optische lenzentelescoop

telescoop die een oneindig ver verwijderd voorwerp in beeld brengt. De Lagrange-invariant in de voorwerps- of beeldruimte is onbepaald. Met behulp van de grootte van de intreepupil en de veldhoek vinden we echter,

$$H = n_0 \gamma_0 y_{P,0} = n_i \gamma_i y_{P,i} = n_w y_w u_w. \quad (\text{A.59})$$

De rol van het venster in het systeem is het blokkeren van hele of gedeeltelijke beeldbundels buiten het relevante gezichtsveld van het systeem. In de microscopie wordt het velddiafragma van de condensor het venster in het voorwerpsvlak. Het is belangrijk om het fysieke venster zo dicht mogelijk bij het voorwerp te plaatsen, omdat anders de lichtverstrooiing door de ongewenste stralenbundels het contrast in het beeld nog steeds verslechtert.

In het geval van stralenbundels met een niet te verwaarlozen omvang is het paraxiale concept van vensters niet geldig. De uiteindelijke begrenzingsvorm van de schuine bundel wordt tegelijkertijd bepaald door verschillende lensranden. Het gezichtsveld is niet scherp begrensd tot een bepaalde waarde, maar er is een geleidelijke afname in intensiteit van de schuine stralenbundels. Dit verschijnsel wordt *vignettering* genoemd en de manier waarop vignettering naar de rand van het veld gaat optreden, moet worden gespecificeerd voor een instrument met een grote veldhoek. Er is zelfs een situatie mogelijk waarbij de hoofdstraal wordt geblokkeerd maar nog steeds zeer excentrische stralen doorgelaten worden. In dit geval wordt de rol van de hoofdstraal overgenomen door een te kiezen *centrale* straal, die de middenpositie van de gevignetteerde stralenbundel weergeeft.

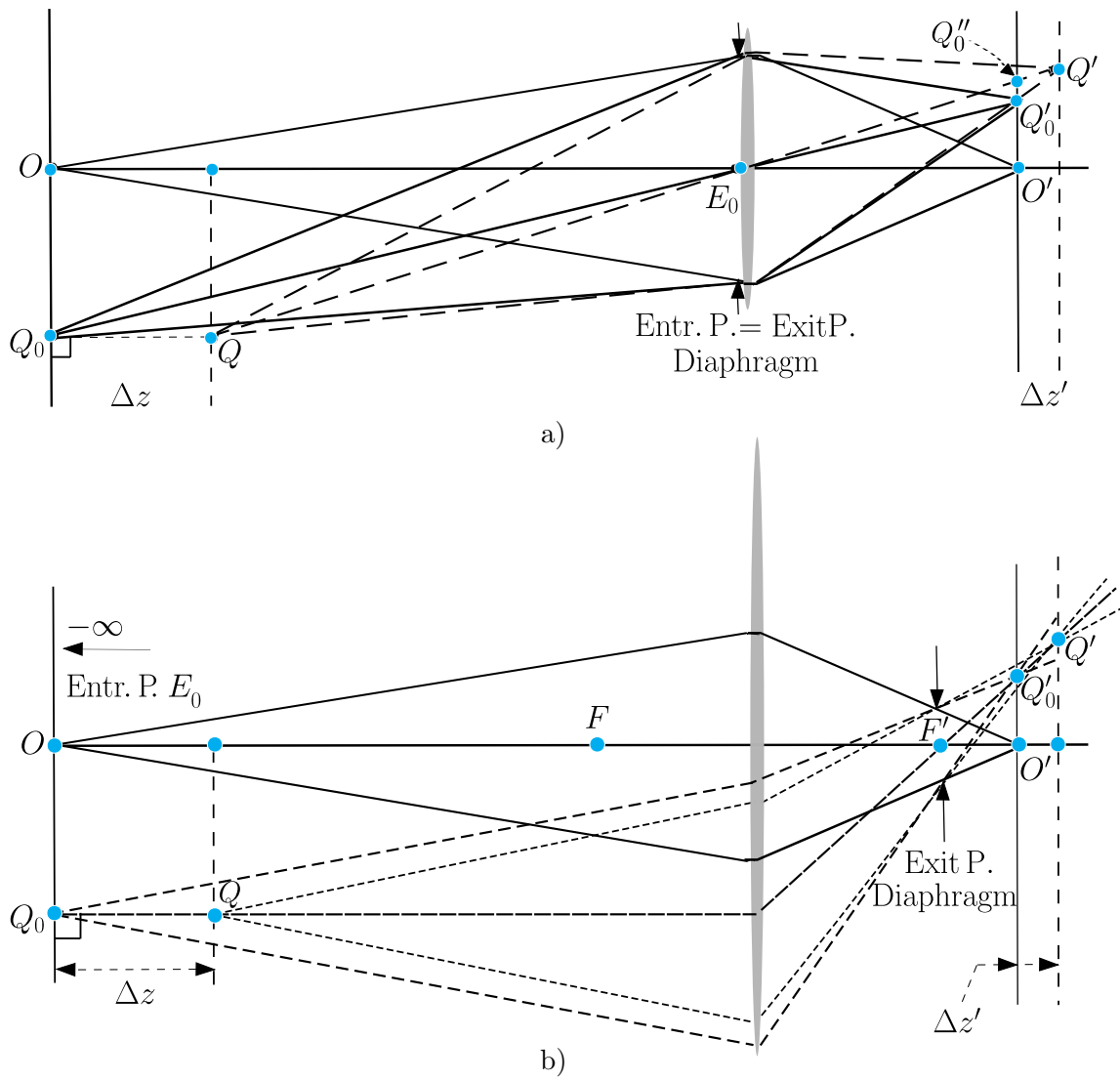
A.4.3 Speciale posities van het diafragma

Een speciale positie van het diafragma wordt gekozen om

- bepaalde effecten in de paraxiale afbeelding te verkrijgen,
- de aberraties van scheve stralenbundels te beïnvloeden.

Wat het eerste punt betreft, de standaardpositie van het diafragma is de centrale positie die heel natuurlijk is voor een dunne enkele lens (zie figuur A.7a). Wanneer een voorwerp met een bepaald hoogtereliëf wordt afgebeeld, kan de scherptediepte zodanig zijn dat de scherpte van het beeld onafhankelijk van de hoogte van het voorwerp correct is. In het geval van een centrale pupilpositie wordt de dwarspositie Q_0'' van de afbeelding van een voorwerpspunt in het nominale beeldvlak afhankelijk van de hoogtepositie. De dwarspositie in het beeld en de hoogte zijn dus gecorreleerd, of, met andere woorden, kleine hoogtevariaties in het object beïnvloeden de schijnbare vergroting. Om dit verschijnsel te voorkomen, dat vooral schadelijk is wanneer een dwarspositie goed moet worden gereproduceerd (meetlineaal, lithografisch projectiesysteem), moet de telecentrische pupilpositie worden gekozen (bijv. aan de voorwerpszijde). Het diafragma wordt dan in het beeldbrandvlak geplaatst en de paraxiale intreepupil bevindt zich nu oneindig ver weg (zie figuur A.7b). Het punt Q_0'' valt nu samen met de gewenste positie Q_0' die correspondeert met de nominale vergroting. Het is zelfs mogelijk om zowel aan de voorwerps- als aan de beeldzijde een systeem telecentrisch te maken, waardoor de vergroting zeer grondig gefixeerd wordt. Natuurlijk moet het systeem dan telescopisch zijn en moeten het voorwerp en het beeld zich op eindige afstanden bevinden.

De positie van het diafragma heeft invloed op het perspectief in een afbeelding. Het natuurlijke perspectief hangt samen met de waarneming met het oog. De iris van het oog bevindt zich in de ooglenzen, tussen het hoornvlies en de accommoderende lens (centraal diafragma). Bij landschapsfotografie wordt zoveel mogelijk het natuurlijke perspectief nagebootst. Voor lenzen met een grote brandpuntsafstand en een beperkte bouwlengte kan de natuurlijke positie van het diafragma echter niet worden gerealiseerd en is een quasi-telecentrische beeldvorming aan de voorwerpszijde het resultaat (tele-objectief).



Figuur A.7: Centrale pupilpositie (a) en telecentrische pupilpositie (b)

A.5 Chromatische effecten van optisch glazen

De knikhoek bij lichtbreking door een optisch oppervlak is afhankelijk van de golflengte van het licht. Alleen reflecterende oppervlakken die in de lucht of vacuüm worden gebruikt, hebben een golflengte-onafhankelijk gedrag. Zelfs een spiegeloppervlak dat bij interne reflectie wordt gebruikt, vertoont een golflengte-afhankelijk gedrag wanneer het uiteindelijke beeld in lucht moet worden geprojecteerd.

De verandering van de brekingsindex van optische materialen met de golflengte veroorzaakt, als eerste-orde-effect, een verandering in de paraxiale eigenschappen van een optisch systeem. Als tweede-orde effect ziet men een verandering van de aberraties met de kleur van het licht. Wanneer chromatische effecten rigoureus onderdrukt moeten worden, is een spiegelsysteem in lucht de meest voor de hand liggende oplossing.

De paraxiale kleureffecten zijn een verandering in de sterkte van het optisch systeem en een verschuiving in de positie van de hoofdvlakken. Dit resulteert in een axiale verschuiving langs de optische as van het geprojecteerde beeld als functie van de golflengte ('axiale kleur' of *langskleurfout*) en een verandering in de vergroting van het beeld ('transversale' of 'laterale' kleur, *dwarsskurfout*). Axiale kleur is in het algemeen schadelijk, terwijl laterale kleur soms kan worden getolereerd, bijvoorbeeld in systemen met een kleine veldhoek. Voor een beschrijving van het effect van de golflengte van het licht op de brekingsindex houdt men zich over het algemeen aan het historisch aanvaarde V -getal (of Abbe-getal) van een materiaal. Dit getal wordt gedefinieerd als

$$V = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}, \quad (\text{A.60})$$

waarbij de indices verwijzen naar een aantal gestandaardiseerde golflengten zoals

s	852,1101 nm
C	656,2725 nm
d	587,5618 nm
e	546,0704 nm
F	486,1327 nm
g	435,3843 nm
h	404,6561 nm

Het Abbe-getal is de verhouding tussen het gemiddelde optische contrast in het zichtbare gebied en de verandering in contrast, gaande van het blauwe naar het rode gebied van het zichtbare spectrum. Om praktische redenen is V gedefinieerd zoals in vgl. (A.60) omdat er dan een relatief groot getal ontstaat. Abbe, een wetenschapper met gevoel voor de praktijk, vreesde dat een definitie volgens $(n_F - n_C)/(n_d - 1)$ met een decimaal getal beginnend met 0,0..., eerder aanleiding zou geven tot vergissingen in een fabricage-omgeving dan de definitie volgens (A.60). Reeds in Abbe's tijd (eind negentiende eeuw) realiseerde men zich dat welke verwisseling dan ook van optische glas in magazijnen of in de productie-omgeving dramatische gevolgen zou hebben voor de kwaliteit van het optisch precisieproduct.

De brekingsindex vertoont een min of meer kwadratisch gedrag tussen de uiterste golflengten C en F . Twee veel gebruikte optische glazen zijn geselecteerd als referentie voor het indexgedrag. Voor de glazen met een lage dispersie is dit het $K7$ -glas uit de Schott-catalogus voor optische glazen ($n_d = 1.51112$, $V = 60.4$). De relatief hoog-dispersieve optische glazen worden vertegenwoordigd door het $F2$ -glas ($n_d = 1.62004$, $V = 36.4$). Het gedetailleerde gedrag van het kwadraat van de brekingsindex wordt beschreven door een reeksontwikkeling volgens

$$n^2 = A_0 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda^{-2} + A_3\lambda^{-4} + A_4\lambda^{-6} + A_5\lambda^{-8}, \quad (\text{A.61})$$

waarbij λ wordt uitgedrukt in μm .

Een meer op de fysica gebaseerde beschrijving van de brekingsindex gaat uit van de waarde van $n^2 - 1$. Onder de invloed van optische absorptie bij een bepaalde golflengte λ_i varieert deze grootte $n^2 - 1$ in de (wijde) omgeving van λ_i op een karakteristieke wijze (Sellmeier, 1872). Voor optische glazen met hun hoge vereiste nauwkeurigheid van de waarde van n is het voldoende gebleken de invloed van drie absorptielijnen in het materiaal te verwerken. De veelgebruikte dispersieformule van Sellmeier heeft de volgende vorm,

$$n^2 - 1 = \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3}, \quad (\text{A.62})$$

waarbij de coëfficiënten B_i en C_i de zogenaamde Sellmeier-coëfficiënten zijn. De Sellmeier representatie geeft over het algemeen met zes coëfficiënten een nauwkeuriger waarde van de brekingsindex dan de inmiddels vrijwel verlaten Schott-formule volgens (A.61). Het gebied van golflengten waarvoor de brekingsindex betrouwbaar berekend kan worden strekt zich uit van het nabije ultraviolet tot en met het nabije infrarood.

Opgemerkt dient te worden dat de brekingsindex van optische glazen van smelt tot smelt in de fabriek kan veranderen tot op bijna één eenheid in de derde decimaal. Omdat voor precisietoepassingen een eenheid in de vijfde decimaal belangrijk is, moet altijd een meetrappot aangevraagd worden bij elke nieuwe levering van optisch glas materiaal. Bovendien moet het optisch ontwerp een aanpassing ondergaan waarin de invloed van de gewijzigde brekingsindices van de glazen verwerkt is.

Voor 'dunne' lenzen kunnen de volgende conclusies worden getrokken:

- De chromatische effecten van twee lenzen zijn onafhankelijk van hun vorm of van de vergroting waarbij ze worden gebruikt.
- Een dunne lens die centraal wordt gebruikt (diafragma samenvallend met de lens), veroorzaakt nooit een dwarskleurfout.
- Lenzen met gelijke sterkte maar aan weerszijden van het diafragma zullen hun dwarskleurfouten wederzijds opheffen.
- In een volledig symmetrisch systeem ($\beta' = -1$ met centraal gepositioneerd diafragma) is er geen dwarskleurfout mogelijk.

Appendix B

Opgaven Geometrische Optica

1. Van een zogenaamd ideaal optisch stelsel zijn de brandpunten F, F' en de hoofdpunten P_0 en P_0' gegeven. De brekingsindex van de voorwerpsruimte is n , die van de beeldruimte n' . Leidt af dat

$$\frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'}.$$

2. Van een ideaal optisch systeem zijn de brandpunten F en F' alsook de knooppunten N_0 en N_0' gegeven (brekingsindex voorwerpsruimte = n , beeldruimte = n'). Construeer de hoofdpunten P_0 en P_0' .
3. Gegeven is de paraxiale afbeeldingswet

$$n_{i+1}u_{i+1} = n_i u_i - y_i K_i$$

(u_i is de hoek van een straal met de optische as, y_i de snijhoogte van de straal met het i -de oppervlak en K_i de sterkte van het i -de oppervlak).

Bewijs voor een opeenvolging van N oppervlakken ($u_1 = 0$) dat de totale sterkte K_{tot} van het stelsel gegeven wordt door

$$K_{tot} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{y_1} K_i.$$

Leidt voor $N = 2$ de uitdrukking voor K_{tot} af onder eliminatie van de snijhoogte y_2 . De afstand tussen de twee lenzen is d , de dikte van de lenzen zelf mag verwaarloosd worden.

4. Bewijs dat voor een enkel brekend of reflecterend oppervlak geldt dat

$$K = \frac{n' - n}{R} = (n' - n) c,$$

waarbij $c = 1/R$ de paraxiale kromming van het oppervlak is.

5. Leidt uit de paraxiale afbeeldingsvergelijking het verband tussen de dwarsvergroting β' en de hoekvergroting γ' af.
6. Teken een optisch stelsel met een oneindig veraf gelegen intreepupil én uitreepupil. Waar ligt het diafragma, wat is de sterkte van het stelsel? Bepaal de hoekvergroting van de pupillen.
7. Leidt de wet van Snellius af uit de algemene straalvergelijking

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n$$

bij een discrete overgang van n_1 naar n_2 ter plaatse van het vlak $z = 0$.

8. Minimaliseer de optische weglengte tussen twee punten $A(x_0, y_0, z_0)$ en $B(x_1, y_1, z_1)$, gelegen aan weerszijden van het scheidingsvlak tussen twee media met brekingsindices n_0 en n_1 . Het scheidingsvlak wordt gegeven door $z = z_s$ ($z_0 < z_s < z_1$). Wat volgt hieruit voor de straalrichtingen in de twee media?
9. Bewijs met behulp van de Lagrange integraalinvariant de stelling van Malus en Dupin: een normale congruentie blijft normaal bij breking.
10. Een voorwerp en het gevormde beeld (vergroting β') kan men zich in het ruimtiefrequentiedomein voorstellen middels hun (ruimtelijke) spectra. Toon aan dat voor een optimale gelijkensis (vergelijkbare spectra) van voorwerp en beeld de sinusvoorwaarde van Abbe een vereiste is.
11. Van een vlak holografisch optisch element (*HOE*) met cirkelsymmetrie bedraagt de brandpuntsafstand f_0 . De symmetrie-as is de z-as. Geef een uitdrukking voor de ruimtiefrequentie ν_s als functie van de radiële coördinaat r in het vlak van het *HOE*. Leidt een uitdrukking af voor de *OSC* (afwijking van de sinusvoorwaarde van Abbe) van het element. Een scheve bundel vanuit het oneindige met straalvector $(0, M_0, N_0)$ treft het element. Bereken het snijpunt y_m in het brandvlak van de twee stralen uit deze bundel die het element treffen in de punten $(0, +y_0, 0)$ en $(0, -y_0, 0)$; er geldt dat $M_0 \ll N_0$. Waar moeten de stralen, die het element in $(x_0, 0, 0)$ en $(-x_0, 0, 0)$ treffen, elkaar nu snijden? Is de ligging van dit snijpunt y_s in overeenstemming met de berekende waarde van de *OSC*? Hoe groot is de golffrontafwijking zoals die gegeven wordt door de afwijking van de voorwaarde voor isoplanatisme voor het *HOE*?
Hoe groot is het 'buigingsbegrensde' veld van het *HOE* wanneer de volgende numerieke waarden gelden: $f_0 = 10$ mm, r_{\max} van de afbeeldende bundels is 5 mm, $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$?
12. Met een kijker wordt scherp gesteld op het topje van een toren die 5 km verwijderd is. Tijdens een bepaalde periode na zonsopgang zakt de toren schijnbaar 3 meter. Wat voor verticale gradiënt heeft zich in de brekingsindex van de aardatmosfeer ingesteld (de gradiënt wordt constant verondersteld en is loodrecht op het aardoppervlak gericht)? Welke gradiëntgrootte zou het in theorie mogelijk maken 'om' de aarde heen te kijken en hoe is deze gradiënt dan gericht?
13. Bereken de brandpuntsafstand van een bol-platte gradient-index lens met een dikte d , een kromtestraal R en een radiële brekingsindexverdeling volgens

$$n^2 = n_0^2 [1 - g^2 r^2]$$

14. Aan de beeldzijde van een optisch stelsel is de numerieke apertuur NA gelijk aan 0.125 ($\lambda = 0.5 \mu\text{m}$). Welke ruimtiefrequentie is net niet meer aanwezig in het intensiteitsspectrum van een afbeelding?
In gereduceerde coördinaten bedraagt de golffrontafwijking van een bundel gefocusseerd op een veldpunt met coördinaat p' ($q' = 0$),

$$W'(X', Y', p') = [a_3 (X'^2 + Y'^2) X' + a_1 X'] p'.$$

De coëfficiënten zijn resp. ($a_3 = 0.1$ en $a_1 = -0.1$) en ($a_3 = 0.1$ en $a_1 = -0.0667$). Teken de golffrontafwijking in een doorsnede $Y' = 0$ als functie van X' voor een veldcoördinaat $\xi' = 20 \mu\text{m}$ ($\eta' = 0$). Bepaal via integratie over de eenheidscirkel $X'^2 + Y'^2 \leq 1$ de uitdrukkingen

$$\overline{W'} = \frac{\int W' dS}{\int dS} \quad \text{en} \quad \overline{W'^2} = \frac{\int (W')^2}{\int dS}.$$

Wat wordt de waarde van de golffrontvariantie voor de volgende twee gevallen:

- a) $a_3 = 0.1$, $a_1 = -0.1$,
 b) $a_3 = 0.1$, $a_1 = -1/15$?

15. Bereken de vorm van het asferisch oppervlak dat een bundel uit het oneindige scherp afbeeldt bij overgang naar een dichter medium en bij overgang naar een minder dicht medium (via weglengte-egaliseratie).
16. Leidt de vergelijking van een spiegelen rotatiesymmetrisch oppervlak af wanneer men foutvrij af wil beelden:
 a) een oneindig ver verwijderd voorwerpspunt op de symmetrie-as
 b) een virtueel voorwerp, gelegen op de symmetrie-as op een afstand d_1 van de top van het oppervlak.
 De paraxiale kromtestraal van de oppervlakken is in beide gevallen gelijk aan R .
17. Geef het verschil aan tussen intrinsieke en geïnduceerde aberraties. Tot welke klasse behoren de Seidelaberraties?
18. Welke aplanatische situaties doen zich voor in het Seideldomein bij de afbeelding via een enkel oppervlak? Bij welke vergrotingen en pupilligging verdwijnt ook het astigmatisme?
19. Beschrijf de drie aplanatische afbeeldingen die met een sferisch oppervlak verkregen kunnen worden. Beschrijf hoe bijv. een dikke platbolle lens gedimensioneerd moet worden om beide deelafbeeldingen aplanatisch te maken (zoals bijv. toegepast bij de frontlens van een microscoopobjectief). Wat is de vergroting van deze lens bij aplanatisch gebruik? Geef ook aan hoe een meniscuslens ontworpen moet worden om aplanatisch te zijn. Wat is van deze lens dan de vergroting?
 Welke van deze twee lenzen geeft een afbeelding die ook vrij van astigmatisme is?
20. Van een glazen bol met een diameter van 10 mm is een bolschijf met een dikte van 2.5 mm afgepolijst. Waar wordt een puntbron (midden op de vlakke zijde gelegen) afgebeeld, gegeven de brekingsindex n van het glas? Wanneer is de afbeelding foutvrij? Voldoet deze afbeelding aan de sinusvoorwaarde van Abbe? Welke kromtestraal zou aan het voorwerpsvlak gegeven moeten worden om alle voorwerpspunten op dit oppervlak scherp af te beelden?
21. Geef de waarde van de sferische aberratie van een dunne bol-platte lens werkend bij vergroting $\beta' = 0$ ($n = 2$, $f = 100$ mm, $h = 5$ mm ofwel $NA = 0.05$). Geef ook de waarde van het coma en astigmatisme/beeldveldkromming bij een veldhoek van 0.01 en 0.10 radialen. Waar ligt het beste focus in het laatste geval (bij een verschuiving in de z -richting)? Tot welke NA mag de lens op de as buigingsbegrensd genoemd worden? Hoe groot is ongeveer het nog buigingsbegrensd 'veld'? ($\lambda = 0.5$ μm)
22. Een dunne silicium-lens wordt gebruikt bij $\lambda = 5$ μm ($n = 3.4$). Welke lensvorm geeft minimale sferische aberratie ($\beta' = 0$)? Welke lensvorm geeft minimaal coma ($\beta' = 0$, $\beta_p' = +1$)? Welke lensvorm geeft minimale *rms* aberratie bij de afbeelding van een ver verwijderd voorwerp dat onder een hoek van 0.01 rad. gezien wordt? ($f = 100$ mm; $NA = 0.01$)
23. Leidt de sinusvoorwaarde van Abbe af voor een optisch stelsel dat een voorwerp in het oneindige foutvrij afbeeldt in het brandpunt aan de beeldzijde.
24. Wat is de optische sterkte van een concentrische lens met krommingen c_1 en c_2 ?
25. De afwijking van de sinusvoorwaarde bedraagt voor een bepaald optisch stelsel $\delta X' = 0.013$ (in genormeerde pupilcoördinaten). Hoe groot is de golffrontaberratie bij afbeelding

- van een beeldpunt $125 \mu\text{m}$ buiten de optische as ($NA = 0.50$, $\lambda = 1 \mu\text{m}$)? Kan men deze afbeelding nog buigingsbegrensd noemen?
26. Een uit een optisch systeem tredend golffront vertoont comatische aberratie van de 5de orde, die lineair van de veldcoördinaat afhangt. Wat wordt in het focusvlak de scherpe tophoek van de dwarsaberratiefiguur, wanneer een voorwerpspunt buiten de as wordt afgebeeld?
 27. Van een optisch systeem is de NA gelijk aan 0.15 en de golflengte is $0.5 \mu\text{m}$. Voor een scheve bundel bedraagt de astigmatische coëfficiënt $\beta_{22} = 3$. Geef de lengte en de axiale afstand van de brandlijnen in reële coördinaten.
 28. Het 'beste' focusvlak volgens het diffractie-criterium vindt men door de coëfficiënt β_{20} van de defocus-term gelijk maar tegengesteld in teken te kiezen aan de sferische aberratie coëfficiënt β_{40} .
Volgens het criterium van Lord Rayleigh mag de maximale top-dal golffrontafwijking niet groter zijn dan 0.25λ . Wat levert dit voor toelaatbare waarde van de coëfficiënt β_{40} ? Hoe groot is de variantie van deze golffrontafwijking en wat wordt de Strehl-intensiteit van de buigingsfiguur in dit 'beste' focusvlak?
 29. Leidt het verband af tussen de voorwerpsbrandpuntsafstand van een optisch systeem en de bijbehorende top-voorwerpsbrandpuntsafstand (de afstand van het voorwerpsbrandpunt tot de top (of vertex) van het eerste oppervlak van een optisch stelsel), gebruikmakend van de Gauss systeemconstanten A , B , C en D .
 30. Leidt met behulp van de vergelijkingen (A.20) en (A.21) de afbeeldingsvergelijking af voor twee geconjugeerde vlakken waarbij de voorwerps- en beeldsafstand gemeten worden vanaf de knoopvlakken van het systeem (door de punten N_0 en N'_0).
 31. Leidt vergelijking (A.31) af.
 32. Maak een schets van de optische projectie-afstand L als functie van de dwarsvergroting β' voor een negatieve lens met een brandpuntsafstand $f' = -100 \text{ mm}$.
 33. Als in voorgaande vraag maar nu voor een (parabolische) holle spiegel met een kromtestraal van -20 meter. Wat is de brandpuntsafstand van deze spiegel? Bij welke vergroting heeft een parabolische spiegel optimale afbeeldingseigenschappen buiten het paraxiale domein?

LITERATUUR

1. M. Born & E. Wolf, Principles of Optics, 7th (expanded) edition, 2001, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
2. H. H. Hopkins, Wave theory of aberrations, 1950, On the Clarendon Press, Oxford, microfilm-uitgave: University Microfilms International Ann Arbor, Michigan, USA.
3. W. J. Smith, Modern Optical Engineering, 1966/2008, McGraw-Hill Inc., New York, USA.
4. R. Kingslake, Lens design fundamentals, 1978, Academic Press, New York, USA.
5. W.T. Welford, Aberrations of optical systems, 1986, Adam Hilger, Bristol, U.K.
6. J. Braat & P. Török, Imaging Optics, 2019, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

NAWOORD

Het boek 'Geometrische Optica' heeft een wat langere ontstaansgeschiedenis. De eerste auteur (J. B.) heeft aanvankelijk theoretische en ook meer praktisch geïntereerde cursussen over optica gegeven op het Philips Natuurkundig laboratorium. En dit in een tijd (jaren 1970-1980) dat er veel onderzoek gaande was op dit laboratorium naar zowel optische data-opslag (zie de later geïntroduceerde systemen Compact Disc, DVD en Blu-ray) als naar optische lithografie (later uitmondend in de imposante producten van het bedrijf ASML). Het interessante aan beide onderzoeksonderwerpen was dat ze producten beoogden die in optische termen 'buigingsbegrensd' moeten zijn. Dat wil zeggen dat de onvolkomenheden van de uiteindelijke systemen, de optische aberraties, klein moeten zijn ten opzichte van de golflengte van het gebruikte licht. Tegelijkertijd houdt dit in dat de vaak gebruikte negentiende-eeuwse en ook nog twintigste-eeuwse *dwarsaberraties* in de optica voor deze systemen vervangen moeten worden door *golffrontaberraties*. En vanwege de zeer hoge optische kwaliteit van zowel de CD, DVD en Blu-ray systemen als de lithografische projectiesystemen moesten de optische golffrontaberraties ver beneden de $0.1 \mu\text{m}$ blijven, bij optische lithografie zelfs van de orde van één nanometer.

Vanaf het begin lag bij dit onderwijs aan recent universitair opgeleide mensen in een industriële omgeving het accent op de hoge eindkwaliteit van de producten en daaraan moesten de optische modellering en de gebruikte meetmethoden bijdragen. In het aberratiedomein is, net als in de optische microscopie, de golffrontaberratie de te bewaken en te minimaliseren grootheid. Dit accent is terug te vinden in het huidige boek. Het zal o.a. opvallen dat er veel nadruk gelegd wordt op de beschrijving van de diverse golffrontaberratietypes van een optisch systeem; de dwarsaberraties worden slechts quasi-terloops vermeld. Ook wordt het verband gelegd tussen de golffrontaberratie van een optisch systeem en het zogenaamde 'buigingsschijfje' van eindige afmetingen in het beeldvlak, dit bij de afbeelding van een fictieve puntbron in het voorwerpsvlak.

Het boek is de licht aangepaste 'afdruk' van een universitair college in de kandidaats/master fase van een natuurkunde opleiding. Het is voor het eerst gepubliceerd bij de Technische Universiteit Delft als collegedictaat in 1989 en heeft een beperkte herziening ondergaan in 2006. De nadruk ligt op de theoretische onderbouwing van het vak optica, dat daarnaast natuurlijk ook zeer veel toepassingen heeft. Het is de bedoeling dat een verdere uitbreiding van de nu beschikbare digitale versie van het boek zich ook zal richten op het praktisch ontwerpen en op het gebruik en het bemeten van optische systemen. Een belangrijke hulp hierbij zijn optische ontwerpprogramma's waarvan er een paar ook (financieel) toegankelijk gemaakt zijn voor onderwijsdoeleinden. Een van de eerste uitbreidingen van het boek zal gericht zijn op het zelfstandig kunnen gebruiken door de student van een dergelijk ontwerpprogramma met als praktische opdracht het ontwerpen van een bescheiden optisch systeem volgens een programma van eisen.

Delft, april 2025,

Joseph Braat

Index

- Abbe
 - Abbe-getal, 90, 92, 94, 95, 124
 - isoplanatisme, 127
 - sinusvoorwaarde, 29, 30, 83, 86, 99, 127, 128
 - sinusvoowaarde, 127
- Aberratie
 - 4de-orde, 18
 - anastigmatisme, 83
 - astigmatisme, 66, 72, 89, 128
 - geometrisch impulsmoment, 67
 - longitudinaal, 78, 129
 - planparallelle plaat, 90
 - sagittaal, 80
 - sagittale brandlijn, 65
 - tangentiele brandlijn, 65
 - tangentieel, 80
 - beeldveldkromming, 61, 72, 128
 - Petzvalsom, 72
 - coma, 63, 72, 128, 129
 - komeetvorm, 64
 - sagittaal, 64
 - tangentieel, 64
 - distorsie, 61, 72, 80, 89, 92
 - kussenvormig, 61
 - tonvormig, 61
 - dunne lens, 87, 128
 - dwarsaberratie, 31, 32, 35, 41, 55, 80
 - coma, 86
 - componenten, 34
 - componneten, 101, 103
 - r.m.s.-waarde, 63, 101, 104, 105
 - functie, 30
 - geïnduceerd, 69, 128
 - golffront, 32, 34, 55
 - hoekaberratie, 30, 32
 - intrinsiek, 69, 128
 - polynoomontwikkeling, 55
 - schalingsregels, 75
 - Seidelaberraties, 55, 61, 64, 68, 69, 72
 - sferische aberratie, 62, 72, 74, 78-80
 - best focus, 63
 - dunne lens, 88
 - marginaal focus, 63
 - paraxiaal focus, 63
 - planparallelle plaat, 89
- Achromasie
 - Conrady-formule (eindige stralen), 93
 - Huygens' oculair, 96
 - secundair spectrum, 94
 - zie ook Doublet, 94
- Afbeeldingseigenschappen
 - aplanatische afbeelding, 128
 - conjugaten, 72
 - paraxiale optica, 107
 - systeemmatrix, 110, 111
- Afbeeldingsvergelijking
 - Newton, 19
- Afsnijfrequentie, 102
- Airy
 - buigingsbeeld, 99
 - halfwaardebreedte, 99
 - intensiteitsverdeling, 37
- Apertuur
 - numerieke (NA), 127
 - numerieke (NA), 32
- Apertuurstraal, 33
- Aplanatisch
 - afbeelding, 85
 - aplanatische lens, 89
 - aplanatische punten, 73, 83, 128
 - aplanatische punten Huygens, 78
- Bouguer, 52
- Brandpunten, 108, 126
- Brandpuntsafstand, 18, 74, 108, 127
 - topbrandpuntsafstand, 112
- Brandvlakken, 114
- Breking, 7
- Breking/reflectie lichtstraal, 7
- Brekingsindex
 - profiel, 47, 127
- Brekingswet
 - Snellius, 126
- Brekingswet Snellius, 16, 37, 49, 51
 - vectorvorm, 39
- Buigingsbeeld, 37, 98
 - Airy, 37

- Buigingsbegrensd, 99, 105, 127
- Buigingsonscherpte, 97, 99
- Buigingsbegrensd, 129
- Chevalier
 - gekit doublet, 94
- Chromatische fouten
 - dwarskleurfout, 124
 - langskleurfout, 124
- Cilinderlens, 42
- Coördinaten
 - canonieke, 30–32, 34
 - gereduceerde, 30, 101
 - reële, 30
- Coddington vormfactor lens, 87
- Congruentie (orthogonaal), 9
- Conrady
 - $(D - d)$ formule, 93
 - OSC*, Offence Sine Condition, 86, 87, 127
- Contrast
 - optisch, bij loodrechte inval, 39
 - optisch, bij scheve inval, 40
- Convolutie, 101
 - convolutietheorema, 102
- Deelsterkte, formule, 126
- Defocussing, 59
- Diafragma, 27, 37, 79, 120, 126
 - velddiafragma, 122
- DiffRACTIE-eenheid
 - axiaal, 87
 - lateraal, 99
- Dispersie
 - Abbe-getal, 90
 - partieel dispersiegetal P_{λ_1, λ_2} , 91
 - Schott formule, 90
 - Sellmeier formule, 90
- Doublet
 - achromatisch, 94, 96
 - apochromatisch, 95
 - gekit (Chevalier), 94
- Dupin, 9
- Dwarskleurfout, 91–93
 - dunne lens, 92
- Eikonale
 - functie, 3, 4, 19, 23
 - functie (hoek-eikonaal), 14–17, 20, 21, 25
 - functie (paraxiale benadering), 18
 - functie van stelsel, 21
 - paraxiale functie, 17
 - vergelijking, 3, 11
- Ellipsoïde, 42
- Excentriciteit
 - hoofdstraal dunne lens, 88
- Fermat
 - afleiding brekingswet, 9
 - principe van, 1, 8, 127
- Fluoriet, 95
- Fotometrie, 29
- Fouriergetransformeerde functie, 97, 98, 102
- Fouriertransformatie, 32
- Fresnel
 - principe Huygens-Fresnel, 36
- Gaussische optica
 - paraxiale optica, 111
 - systeemconstanten van Gauss, 111
- Geconjugeerde punten, 27
- Glas
 - brekingsindex, 124
 - dispersie, 124
 - F2, 124
 - flintglas, 94
 - fluoriet (CaF₂), 95
 - K7, 124
 - optisch glas, 124
 - Schott dispersieformule, 90, 124
 - Sellmeier dispersieformule, 90, 125
- Golf
 - sferische golf, 2
 - vlakke golf, 2
- Golffront, 4, 5, 9, 43
 - afgeleide, 32
 - scheve bundel, 97
 - variantie, 99, 128
- Golffrontaberratie, 37, 41, 79, 99
 - definitie, 35
 - in de uitreepupil, 79
 - r.m.s.-waarde, 99
 - Seidel 4de-orde, 69
 - sferische aberratie
 - evolute, 62
 - tekenafpraak, 110
- Golflengte, 1
- Gradiënt
 - brekingsindex, 6, 51
 - index atmosfeer, 52
- Hamilton, 13, 34
 - zie Karakteristieke functies, 11
- Herschel
 - isoplanatisme-voorwaarde, 83, 85

- HOE (Holografisch Optisch Element), 127
- Hoek-eikonaal
zie Eikonale functie, 23
- Homogeen medium, 6
- Hoofdstraal, 33, 73, 80, 82, 91, 92, 96
refractie-invariant, 74
scheve bundel, 77
- Hoofdvlakken, 108, 112, 126
- Hopkins, 29, 101
- Huygens
constructie aplanatische punten, 78
oculair met achromatische sterkte, 96
principe Huygens-Fresnel, 33, 36
- Hyperboloïde, 42
- Immersie (olie), 79
- Impulsrespons, 27, 97
amplitude, 102
geaberreerd, 98
- Intensiteitsverdeling bundel, 82
- Interferentiepatroon, 43
- Intree-/uittreepupil, 27, 30–32, 73, 98, 107, 112, 120
buigingsverschijnselen, 37
centrale pupilligging, 89, 92
pupilbollen, 29
pupilvergroting, 75, 79
telecentrisch, 36
uittreepupilbol, 56
- Intree-/uittreevenster, 107, 120
- Isoplanatisch
Staeble-Lihotzky voorwaarde, 85
zie ook Aplanatisch, 85
- Karakteristieke functies
Hamilton, 11, 35
Hoek-eikonaal (zie Eikonale functie), 13
Puntkarakteristieke functie, 11, 34
- Kardinale vlakken
zie hoofd- en knoopvlakken, 108
- Kaustiek, 62
kaustisch oppervlak, 99
- Knoopvlakken, 108, 112
- Kromming lichtstraal, 6
- Lagrange integraalinvariant, 7–9, 53, 127
- Lagrange-invariant, 71, 87, 112, 120
- Langskleurfout, 91, 92
- Langsvergroting, 115
- Lens
concentrisch, 128
dunne, 87
- Selfoc, 47
- Lichtstraal, 3
'eindige' straal, 28, 29
kromming, 6
marginale straal, 64, 69, 71–73
meridionaal, 38, 50, 54
sagittaal, 50, 53
straalvector, 4, 5
- Malus, 9
- Maréchal criterium, 99
- Maxwell-vergelijkingen, 1, 2
- Microscopobjectief, 128
Huygens aplanatische punten, 79
- Newton, 19
- Nijboer, 33
- Normaalvector, 2, 6
- Omwentelingsymmetrie, 57, 65
- Onscherpte, 57
- Openingsfout
zie Aberratie, sferische aberratie, 62
- Oppervlak
asferisch, 128
asferisch, snijpunt, 41
asferische coëfficiënten, 55
sferisch, snijpunt, 40
- OSC, zie Conrady, 87, 127
- Overdrachtsfunctie, 97, 102
diffractie, 103
fase (*PTF*), 102
geometrisch-optisch, 103
modulus (*MTF*), 102
- Paraboloïde, 42
- Paraxiaal
gradiënt-index element, 47
gradiënt-index systeemmatrix, 49
matrix-optica, 49, 109
optica, 27
sterkte oppervlak, 40
straal, 27
- Partitie, 56
- Petzval, 55
- Petzvalsom beeldveldkromming, 72
- Planparallele plaat
Seidelaberraties, 89
- Poynting (vector van), 3, 4
- Pupillen
zie intree- en uittreepupil, 107
- Rastervector

- zie straaldoorrekening, 45
- Rayleigh
 - criterium, 99, 129
- Referentiebol, 30, 31, 33–36, 41
- Reflectie, 7, 8
- Refractie-invariant
 - hoofdstraal, 73, 74
 - marginale straal, 73
- Richtingscosinus, 5, 23, 28, 29, 31, 34
 - eliminatie in tussenruimten, 23
- Ruimtetfrequentie, 43, 44, 97, 102, 103, 127
- Schalingsregels aberratie, 75
- Scheve straal
 - invariant, 53, 54, 86
- Schott dispersieformule, 90
- Seidel, 55
- Seidelaberraties, 55, 99
 - dunne lens, 87, 128
 - planparallele plaat, 89
- Seidelcoëfficiënten, 70
- Sellmeier dispersieformule, 90
- Spiegelsymmetrie
 - ten opzichte van diafragma, 89, 92
- Staebler-Lihotzky voorwaarde, 85
- Stigmatische punten, 21
- Straaldoorrekening
 - hologram (*HOE*), 45
 - hologram van een punt, 45
 - kegelsnede, 42
 - raakvlak, 45
 - rasterstructuur, 43, 45
 - toroïde, 42
 - tralie, 46
- Straalvector, 11
- Stralenbundels, 120
- Strehl-intensiteit, 99, 105, 129
- Systeemmatrix, 112
 - brekingsmatrix, 111
 - determinant, 111
 - transportmatrix, 111
- Telecentriciteit, 122
- Telescoop, 114
- Toroïde, 42
- Tralie, 46
- Tussenafbeelding, 116
- Veldsterkte, 1
- Vergroting
 - dwarsvergroting, 19, 109, 112, 126
 - hoekvergroting, 19–21, 112, 126
 - langsvergroting, 19, 112
 - vergrotingsfactoren, 118
- Vergrotingsverandering
 - in golffrontnotatie, 61
- Vertekening
 - zie Aberratie/distorsie, 61, 80
- Vignettering, 80, 82, 96
- Weglengte
 - egalisatie, 128
- Weglengte (optische), 5
 - Seidel 4-de orde, 68
- Weglengteverschil, 37, 41, 43, 46, 91
- Zadelflak, 42
- Zernike cirkelpolynomen, 99

Geometrische Optica

Joseph Braat, Aurèle J.L. Adam

The book provides the scientific basis of geometrical optics, ray tracing, and aberration theory. It applies this knowledge to optical systems and their imaging performance and establishes the link between ray optics and wave optics.



Joseph Braat

Delft University of Technology, Faculty of Applied Sciences, Imaging Physics Department

Joseph Braat studied physics at Delft University of Technology. After his graduation he joined the coherent optics group of Professor Serge Lowenthal at the Institut d'Optique, Orsay/France (thesis on holography using spatially incoherent light). From 1973 to 1998 he worked at Philips Research, Eindhoven. Since 1988 he was professor of geometrical optics and from 1998 to 2008 the full professor of optics at the faculty of Applied Physics of Delft University of Technology. His research interests are diffraction optics, optical imaging, optical design and metrology and optics for astronomy.



Aurèle J.L. Adam

Delft University of Technology, Faculty of Applied Sciences, Imaging Physics Department

Aurèle J.L. Adam is an Assistant Professor at Delft University of Technology. He is an Engineer from CentraleSupélec (promo 2000) and got his PhD from the University of Paris VI. His expertise lies in the Terahertz Field and he enjoys scattering problems and free form optics.



© 2025 TU Delft OPEN Publishing
ISBN 978-94-6518-195-0
DOI: <https://doi.org/10.59490/mt.240>
<https://books.open.tudelft.nl>

Cover image: "Leeuwenhoek simple microscope (copy), Leyden, 1901-1930" by Wellcome Trust is licensed under CC BY 4.0