

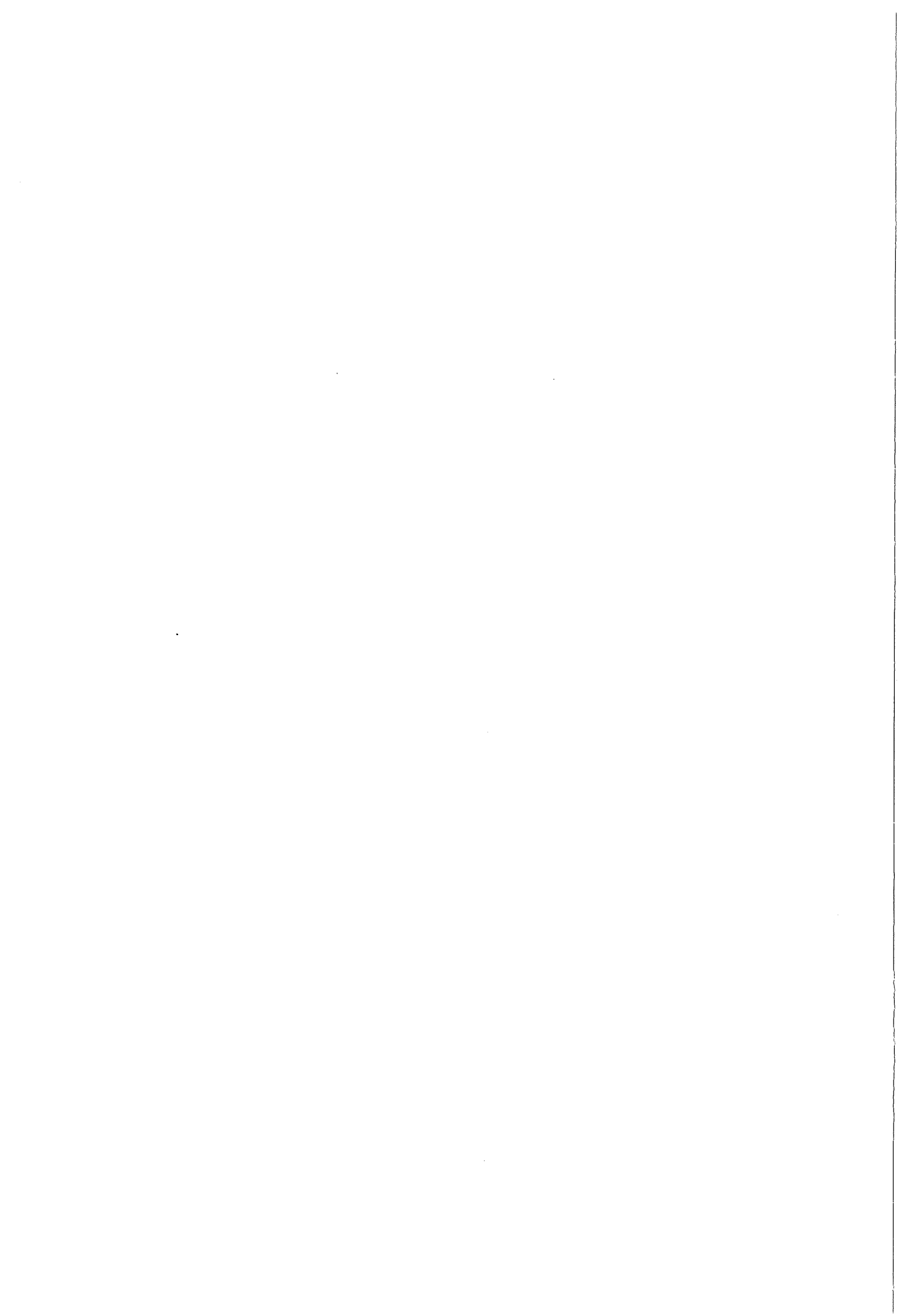
# WINDGOLVEN

HANDLEIDING COLLEGE b78

prof. dr.ir. J.A. Battjes  
Vakgroep Vloeistofmechanica  
Afdeling Civiele Techniek  
Technische Hogeschool Delft

sept. 1982

uitgave oct. '84	herdruk sept. '85	2e herdr aug. '86	b78.I	204029					ƒ 8,50
---------------------	----------------------	----------------------	-------	--------	--	--	--	--	--------



# W I N D G O L V E N

Handleiding College b78

## INHOUD

1. Inleiding
2. Stochastische variabelen
3. Stochastische processen
4. Spectraal analyse
5. Statistische eigenschappen van windgolven
6. Golfverwachtingsmethodieken
7. Golfklimatologie
8. Berekening van responsies



## 1. INLEIDING

### 1.1. Doel

Windgolven op zee, d.w.z. door wind opgewekte golven aan het oppervlak van de zee, vormen één der meest belangrijke omgevingsinvloeden voor het gedrag van zandige kusten en van constructies aan de kust of buitengaats. De waterbouwkundige ingenieur die werkt op het gebied van kustverdediging, kusthavens of offshore constructies behoort dan ook kennis van dit verschijnsel te hebben, zodanig dat hij in staat zal zijn eigenschappen van windgolven te berekenen zowel als effecten die zij teweegbrengen aan kusten en constructies. Het *doel* van het vak "Windgolven" is nu het geven van een inleiding in de methoden die daarbij gebruikt kunnen worden, en van enkele belangrijke resultaten.

### 1.2. Aspecten

In het vak "Korte golven" is een categorie golfbewegingen in water behandeld op deterministische wijze, gebruik makend van de wetten van de *hydrodynamica*. Bij gegeven begin- en randvoorwaarden kan daarmee worden berekend hoe groot snelheid en druk zullen zijn op een willekeurig tijdstip in een willekeurig punt.

Een oppervlakkige beschouwing van windgolven zal al voldoende zijn om in te zien dat die zich niet lenen voor een deterministische beschrijving. Weliswaar blijven de wetten van de hydrodynamica evenzeer van belang, maar het is niet doenlijk om voor windgolven begin- en randvoorwaarden te geven die een deterministische beschrijving mogelijk zouden maken. Dit is terug te voeren op het turbulente karakter van de wind. De momentane windsnelheid is te beschrijven als een stochastische grootheid. Ook al kennen we daarvan enkele kenmerkende grootheden, b.v. de over een zekere tijd gemiddelde waarde in een aantal punten, dan nog is het vóórkomen van een zekere fluctuatie in snelheid (of druk) niet voorspelbaar in deterministische zin. We kunnen hoogstens bereiken daarvoor waarschijnlijkheden aan te geven. Hetzelfde geldt voor de door die wind opgewekte golven. M.a.w., i.p.v. een deterministische beschrijving is een *probabilistische* beschrijving geëigend voor windgolven. We kunnen ook zeggen: we gaan het verschijnsel windgolven opvatten als een *stochastisch proces*. Deze beschrijvingswijze

is gefundeerd op de *kansrekening*.

Met het voorgaande is een invalshoek gegeven die nogal afwijkt van wat gebruikelijk is bij andersoortige watergolven die van belang zijn in de waterbouwkunde, zoals scheepsgolven, hoogwatergolven, en bovenal getijden. Zoals bekend laten vooral de z.g. astronomische getijden zich zeer goed deterministisch beschrijven. Een getijdenregistratie wordt dan ook zodanig geanalyseerd dat hij zo goed mogelijk kan worden gereproduceerd, met als doel de voorspelling mogelijk te maken van b.v. hoogte en tijdstip van toekomstige hoogwaterstanden. Dit is zinvol omdat de oorzakelijke factoren bekend zijn, en een zodanige regelmaat hebben dat voorspelling ervan mogelijk is. Bij windgolven is daarvan geen sprake. Een registratie daarvan kan niet in details, met inbegrip van de fasen, worden gekoppeld aan in details voorspelbare oorzakelijke factoren. De details in een enkele registratie hebben daarom geen betekenis voor onze beschrijving van het verschijnsel. De analyse van een windgolvenregistratie moet er dus bewust op gericht zijn de toevallig in die registratie aanwezige details te negeren. In plaats daarvan gaat het erom dié eigenschappen uit de registratie te destilleren die representatief zijn voor de zeetoestand waarvan de te analyseren registratie slechts een steekproef is.

Naast de hydrodynamica en de kansrekening is ook de *spectraal-analyse* (Fourier-analyse) een belangrijk hulpmiddel in de beschrijving van windgolven. Het blijkt nl. dat een bruikbare benadering van het gedrag van windgolven wordt verkregen door deze te beschouwen als een superpositie van lopende, sinusvormige golven met verschillende amplituden, frekwenties, lengten, richtingen en fasen, z.g. spectrale componenten. Het opsplitsen van een gegeven golfveld in deze componenten gebeurt in de spectraal-analyse. Het resulterende *spectrum* geeft een goed inzicht in de structuur van het verschijnsel. Het geeft in beknopte, overzichtelijke vorm de essentie ervan weer, althans bij benadering. Het ligt dan ook voor de hand dat het spectrum een centrale plaats inneemt in de beschrijving van windgolven.

De bovengenoemde invalshoeken van waaruit windgolven kunnen worden benaderd, nl. die van de hydrodynamica, de kansrekening en de spectraal-analyse, zijn alle drie nodig. Zij zijn onderling gekoppeld. M.a.w., de genoemde aspecten zijn wel onderscheiden maar niet gescheiden. Dit maakt

de bestudering van windgolven aanzienlijk gecompliceerder dan b.v. die van de periodieke golven.

In het voorgaande was steeds sprake van een gegeven golfveld. In praktische toepassingen zal het veelal nodig zijn om de golfeigenschappen af te leiden uit gegevens van wind, diepte, afstand uit de kust, enz. Dit is het terrein van de *golfverwachting*. De overdracht van energie van wind naar golven is ondanks veel onderzoek theoretisch nog niet goed bekend. Golfverwachtingsmethodieken berusten voor wat betreft de *golfgroei* dan ook op empirische gegevens. De *voortplanting* van een eenmaal opgewekt golfveld daarentegen kan met voldoende nauwkeurigheid theoretisch worden bepaald.

Op grotere tijdschaal bezien (b.v. decennia) wordt het vóórkomen van winden en stormen van een zekere intensiteit zelf op stochastische basis behandeld, en van de daarmee samenhangende zeetoestanden eveneens. Hiermee komen we op het terrein van de *golfsklimatologie*.

In technische toepassingen gaat het in laatste instantie niet om een beschrijving van windgolven, waarop het voorgaande betrekking had, maar om de bepaling van invloeden die dezen uitoefenen op iets anders, b.v. een staande of drijvende constructie. Hiermee raken we het aspect van de *responsieberekeningen*. In veel gevallen zal de responsie niet slechts door de golfamplitude worden bepaald, maar tevens door frekwentie en richting. Gedacht kan worden aan de frekwentie-afhankelijke afneming van drukfluctuaties met de afstand onder het oppervlak, en aan systemen met eigen trillingsvormen, zoals een schip in rolbeweging (mogelijkheid van resonantie). In zulke gevallen is het dienstig om het gegeven golfveld spectraal te ontleden, de responsie per component te bepalen, en die dan te sommeren om de responsie op het samengestelde golfveld te berekenen. De betrekkelijke eenvoud van deze spectrale rekenwijze voor het bepalen van responsies is een belangrijke bijkomende reden waarom het spectrum zo'n essentiële rol vervult in de beschrijving van en het rekenen aan windgolven.

De gekozen indeling van de stof in het college (zie inhoudsopgave) volgt in grote lijnen de aspecten die in het voorgaande zijn genoemd. Een behandeling van de hydrodynamica van golven is echter achterwege gelaten, omdat wat dat betreft wordt voortgebouwd op het college "Korte golven"

(b76). Voorafgaand aan het hoofdstuk over stochastische processen is een résumé gegeven omtrent stochastische variabelen, aansluitend aan de bekend veronderstelde behandeling van de kansrekening in het college Toegepaste Statistiek.

### 1.3. Literatuur

Van elk van de min of meer klassieke basisdisciplines die van belang zijn voor de beschrijving van windgolven, met name de hydrodynamica, de kansrekening en de spectraal analyse, zijn veel boeken beschikbaar die geschikt zijn voor een eerste kennismaking. Dit geldt echter niet voor de zaken die specifiek zijn voor windgolven; die zijn nogal verspreid in een groot aantal tijdschriftartikelen en rapporten, die niet zijn bedoeld als inleiding in het vakgebied. Wel zijn er enkele publicaties beschikbaar die een samenvatting geven van de literatuur op een bepaald deelgebied (b.v. statistische eigenschappen, golfverwachtingsmethodieken).

Aan het eind van elk hoofdstuk in dit dictaat is een korte lijst opgenomen van literatuur die dienstig kan zijn naast het dictaat dan wel voor vervolgstudie.



## 2. STOCHASTISCHE VARIABELEN

### 2.1. Inleiding

In dit hoofdstuk zullen enige elementen uit de waarschijnlijkheidsrekening de revue passeren. We zullen ons daarbij meteen richten op stochastische variabelen, met name continu verdeelde stochastische variabelen. Dit hoofdstuk bevat hier en daar herhalingen van de stof van het college Toegepaste Statistiek, maar de accenten liggen anders, en wel meer op de vraag welke informatie nodig is voor de beschrijving van stochastische variabelen. Verder wordt er aandacht gegeven aan samengestelde verdelingen van twee of meer variabelen, en aan de begrippen covariantie en correlatie. Voor een uitvoeriger behandeling van e.e.a. dan hier plaatsvindt wordt verwezen naar voortgezette colleges kansrekening en naar boeken zoals van Van der Grinten en Lenoir, Moroney, Papoulis of Stam (zie literatuurlijst).

### 2.2. Enkelvoudige stochastische variabelen

De waarschijnlijkheidsrekening is als onderdeel van de zuivere wiskunde op axiomatische basis geplaatst door Kolmogorov. Wij zullen hier echter uitgaan van een meer intuïtieve benadering en het kansbegrip interpreteren als een relatieve frequentie.

Stel dat in een experiment (b.v. het gooien van een dobbelsteen, of het opwekken van golven in een windgolfgoot) een grootte wordt gemeten. Als deze grootte bij herhaling van het experiment onvoorspelbare waarden aanneemt, door allerlei onbekende of niet-controleerbare oorzaken, dan noemen we hem een *stochastische variabele*. In de schrijfwijze wordt dit vaak tot uiting gebracht door een onderstreping (b.v.  $\underline{x}$ ). Een waarde die  $\underline{x}$  aanneemt bij één experiment is één *realisatie* van  $\underline{x}$ . Het is gebruikelijk om realisaties met dezelfde letter te schrijven als de stochastische variabelen waarvan zij realisaties zijn, met weglating van de onderstreping.

We nemen nu aan dat het relatieve aantal keren dat we een uitkomst vinden, kleiner dan of gelijk aan  $\underline{x}$ , nadert tot een constante (limiet) waarde als het aantal herhalingen van het experiment onbeperkt toeneemt. Die waarde noemen we de relatieve frequentie van de gebeurtenis  $(\underline{x} \leq x)$ ; we zullen hem noemen: de kans op het optreden van de gebeurtenis  $(\underline{x} \leq x)$ , geschreven

als  $\Pr(\underline{x} \leq x)$ . Deze is voor een gegeven stochastische grootheid ( $\underline{x}$ ) een functie van  $x$ , de z.g. *verdelingsfunctie*:

$$P(x) = \Pr(\underline{x} \leq x) \quad (2.1)$$

Opm.: Een meer volledige notatie zou tot uiting laten komen dat dit de verdelingsfunctie van  $\underline{x}$  betreft, b.v. door te schrijven  $P_{\underline{x}}(x)$  i.p.v.  $P(x)$ . Wij zullen dat echter kortheidshalve in het algemeen niet doen.

Uit de definitie van  $P(x)$  volgt dat  $P(x)$  monotoon niet-dalend is. De kans op een onmogelijke resp. zekere gebeurtenis is per definitie gelijk aan 0 resp. 1. Dus

$$P(-\infty) = 0 \quad (2.2)$$

en

$$P(\infty) = 1 \quad (2.3)$$

Ook geldt

$$P(b) - P(a) = \Pr(a < \underline{x} \leq b) \quad (2.4)$$

Het differentie quotiënt

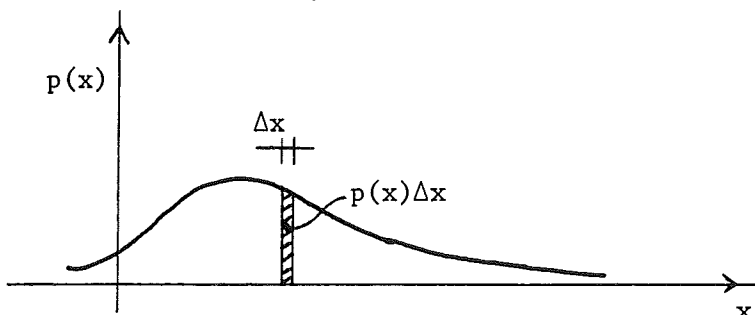
$$\frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x} = \frac{\Pr(x < \underline{x} \leq x+\Delta x)}{\Delta x} \quad (2.5)$$

stelt de kans voor dat  $\underline{x}$  in het interval  $(x, x+\Delta x)$  ligt, gedeeld door de lengte van dat interval. Stel nu dat dit tot een eindige waarde nadert als  $\Delta x \rightarrow 0$ . De stochastisch variabele  $\underline{x}$  heet dan *continu* (i.t.t. discreet). Het linkerlid van (2.5) gaat in dat geval over in de afgeleide van  $P(x)$ , geschreven als  $p(x)$ , die wij gezien het rechterlid de *kansdichtheidsfunctie* van  $\underline{x}$  kunnen noemen:

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Pr(x < \underline{x} \leq x+\Delta x)}{\Delta x} \quad (2.6)$$

Bij benadering kunnen we dan schrijven

$$p(x)\Delta x \approx \Pr(x < \underline{x} \leq x+\Delta x) \quad (2.7)$$



Figuur 2.1

Omdat  $P(x)$  monotoon niet-dalend is geldt dat  $p(x) \geq 0$  voor alle  $x$ .

Uit (2.6) en (2.2) volgt

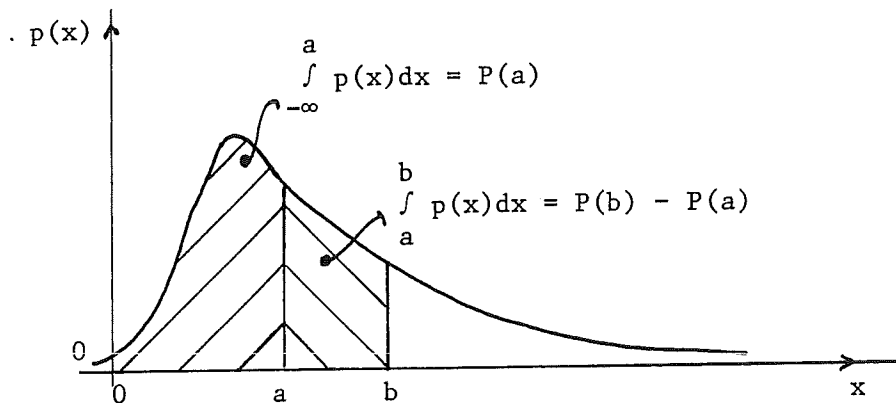
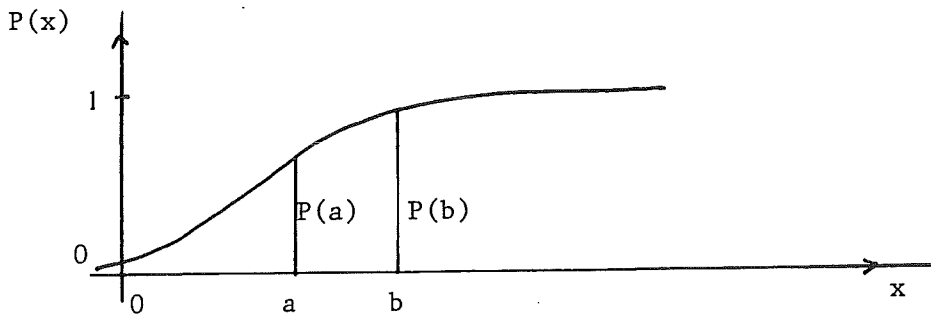
$$\Pr(\underline{x} \leq a) = P(a) = \int_{-\infty}^a p(x) dx \quad (2.8)$$

terwijl (2.3) en (2.4) resulteren in

$$\Pr(\underline{x} \leq \infty) = P(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (2.9)$$

en

$$\Pr(a < \underline{x} \leq b) = P(b) - P(a) = \int_a^b p(x) dx \quad (2.10)$$



Figuur 2.2

Een stochastische variabele wordt in statistische zin geheel gekenmerkt door zijn verdelingsfunctie of (als die bestaat, zoals we hier veronderstellen) de kansdichtheidsfunctie. Die bevatten één of meer *parameters*. De belangrijkste hiervan zijn die welke kenmerkend zijn voor de *ligging* resp. de *spreiding* van  $\underline{x}$ . De meest gebruikte parameters daarvoor zijn resp. het gemiddelde en de standaardafwijking. Daarnaast kent men parameters voor *scheefheid*, *gepiektheid*, enz. Om dergelijke parameters te definiëren voeren we het begrip *verwachtingswaarde* in.

De verwachtingswaarde van een functie van  $\underline{x}$ , b.v.  $h(\underline{x})$ , is gedefinieerd als

$$E\{h(\underline{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)p(x)dx \quad (2.11)$$

We kunnen dit interpreteren als een gemiddelde over alle mogelijke waarden  $h(x)$ , gewogen met de kans dat  $\underline{x}$  een waarde zal aannemen in een infinitesimaal interval  $(x, x+dx)$ .

Het *gemiddelde* van  $\underline{x}$ , geschreven als  $\mu_x$ , is per definitie gelijk aan de verwachtingswaarde van  $\underline{x}$  :

$$\mu_x = E\{\underline{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (2.12)$$

Het rechterlid van (2.12) stelt het "statisch" moment voor van  $p(x)$  t.o.v.  $x = 0$ , ofwel het z.g. *1e-orde moment*, om een term te gebruiken die niet aan het vakgebied van de mechanica is verbonden. Meer in het algemeen definiëren we het *n<sup>e</sup>-orde moment* van  $p(x)$  t.o.v.  $x = 0$  als

$$M_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx \quad (2.13)$$

Blijkbaar geldt

$$M_n = E\{\underline{x}^n\} \quad (2.14)$$

De variantie van  $\underline{x}$  is gedefinieerd als

$$\text{var}(\underline{x}) \equiv E\{(\underline{x}-\mu_x)^2\} \quad (2.15)$$

Door het rechterlid uit te schrijven en (2.12) te substitueren kan worden bewezen dat

$$\text{var}(\underline{x}) = E\{\underline{x}^2\} - \mu_x^2 \quad (2.16)$$

ofwel, in termen van de momenten

$$\text{var}(\underline{x}) = M_2 - M_1^2 \quad (2.17)$$

Als maat voor de spreiding van  $\underline{x}$  kan de standaardafwijking dienen, gedefinieerd als

$$\sigma_x \equiv \{\text{var}(\underline{x})\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

We zien dus dat hiervoor naast het 1<sup>e</sup>-orde moment ook het 2<sup>e</sup>-orde moment nodig is. Evenzo kan een scheefheidsparameter worden gedefinieerd, waarin het 3<sup>e</sup>-orde moment verschijnt, een gepiektheidsparameter waarin tevens het 4<sup>e</sup>-orde moment voorkomt, enz.

In de context van een theorie kunnen we de kansdichtheidsfunctie van een stochastische variabele veelal bekend veronderstellen, in welk geval eveneens alle momenten daarvan bekend zijn. In een praktische situatie daarentegen kunnen we op grond van steekproefgegevens slechts schattingen maken van de kansdichtheidsfunctie, b.v. via schattingen van de momenten. Naarmate we daarbij in staat zijn hogere en hogere orde momenten te schatten, krijgen we meer en meer kennis van de kansdichtheidsfunctie. De laagste-orde momenten zijn daarbij de belangrijkste (ligging en spreiding uit  $M_1$  en  $M_2$ ). De hogere-orde momenten geven relatief minder extra informatie en zijn ook met minder grote betrouwbaarheid te schatten uit een steekproef. Hoger dan  $M_3$  of  $M_4$  wordt zelden gegaan.

Het voorgaande kan nog worden toegespitst op kansdichtheidsfuncties waarvan de vorm wel bekend is (b.v. Gauss of Rayleigh) en waarvan slechts de parameters (een eindig aantal) behoeven te worden geschat. In dat geval behoeven slechts evenveel momenten te worden geschat als dat er onafhankelijke parameters zijn. Een Gaussische kansdichtheidsfunctie b.v., zoals

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma_x} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\}, \quad (2.19)$$

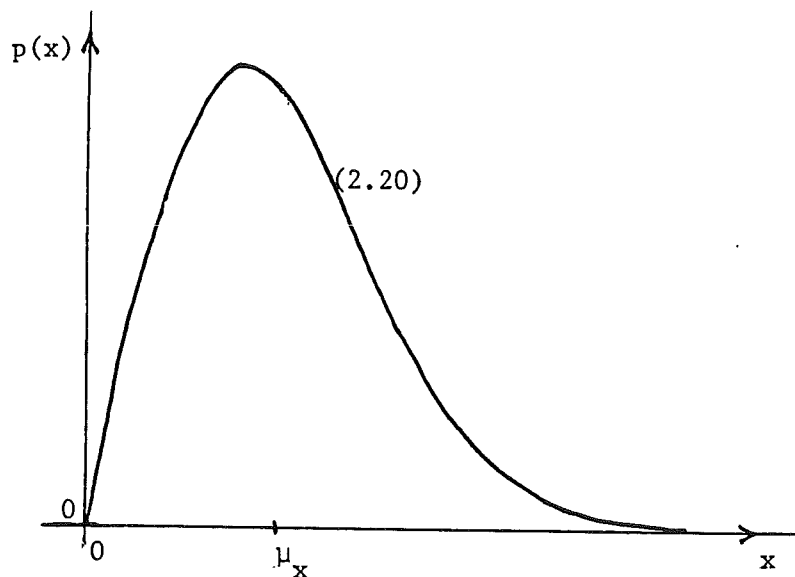
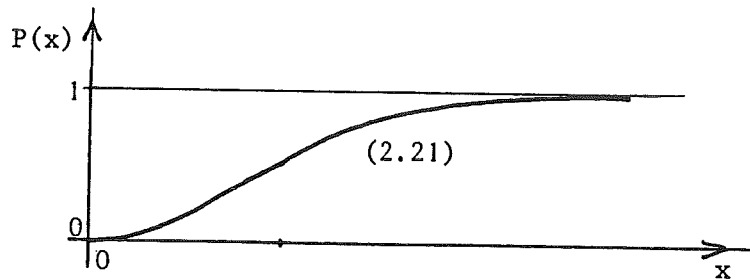
kent slechts twee onafhankelijke parameters (waarvoor  $\mu_x$  en  $\sigma_x$  de meest voor de hand liggende keuze zijn). Die kunnen uit  $M_1$  en  $M_2$  worden bepaald. Momenten van hogere orde kunnen, indien zij nodig zijn, worden uitgedrukt in  $\mu_x$  en  $\sigma_x$ , en dus in  $M_1$  en  $M_2$ . M.a.w., voor de statistische beschrijving van een Gaussisch verdeelde stochastische variabele is kennis van de momenten t/m die van 2<sup>e</sup>-orde voldoende.

De *Rayleigh* kansdichtheidsfunctie kan worden geschreven als

$$p(x) = \frac{\pi}{2} \frac{x}{\mu_x^2} \exp\left\{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2\right\} \text{ voor } x \geq 0 \quad (2.20)$$
$$= 0 \quad \text{voor } x < 0$$

De bijbehorende verdelingsfunctie is

$$\Pr\{\underline{x} \leq x\} = P(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2\right\} \text{ voor } x \geq 0 \quad (2.21)$$
$$= 0 \quad \text{voor } x < 0$$



Figuur 2.3

Blijkbaar heeft de Rayleigh-verdeling slechts één parameter. (Daarvoor is in 2.20 en 2.21 de gemiddelde waarde gebruikt.) Van een stochastische variabele waarvan bekend is dat hij Rayleigh verdeeld is behoeft dus slechts één moment te worden bepaald om de verdelingsfunctie te kennen.

Meestal gebruikt men hiervoor  $M_1$  of  $M_2$  (waarbij uit (2.20) volgt dat  $M_2 = \frac{4}{\pi} \mu_x^2 = \frac{4}{\pi} M_1^2$ ).

### 2.3. Twee stochastische variabelen

In het voorgaande is een stochastische variabele geïntroduceerd als een grootheid die onvoorspelbare waarden aanneemt bij herhaling van een experiment onder gelijk gehouden controleerbare omstandigheden. Evenzo kunnen we per steekproef de waarden bepalen van twee grootheden, en zo twee stochastische variabelen definiëren, b.v.  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$ , met een *gezamenlijke verdelingsfunctie*  $P(x,y)$ , zodanig dat

$$\Pr\{\underline{x} \leq x \text{ en } \underline{y} \leq y\} = P(x,y) \quad (2.22)$$

De bijbehorende *gezamenlijke kansdichtheidsfunctie* is

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x \partial y} \quad (2.23)$$

zodat

$$\Pr\{x < \underline{x} \leq x + \delta x \text{ en } y < \underline{y} \leq y + \delta y\} \sim p(x,y) \delta x \delta y \quad (2.24)$$

De verdelingsfunctie van  $\underline{x}$  alléén, ongeacht de waarde van  $\underline{y}$ , is

$$P(x) = \Pr\{\underline{x} \leq x \text{ en } -\infty < \underline{y} \leq \infty\} = \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} p(x',y) dy \quad (2.25)$$

Deze is tevens gelijk aan

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx' \quad (2.26)$$

zodat

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dy, \quad (2.27)$$

de z.g. *marginale* kansdichtheidsfunctie. Een soortgelijke betrekking geldt voor  $p(y)$ .

Beschouw nu de kansdichtheid van  $\underline{x}$ , gegeven dat  $\underline{y} = y$ . We noemen dit de *voorwaardelijke* kansdichtheid van  $\underline{x}$ , geschreven als  $p(x|y)$ . Hiervoor geldt

$$p(x|y)\delta x = \Pr\{x < \underline{x} \leq x+\delta x | \underline{y} = y\} \quad (2.28)$$

Een soortgelijke betrekking geldt voor  $p(y|x)$ . Gebruik makend van de regel uit de kansrekening (zie van Soest, handleiding Toegepaste Statistiek A)

$$\Pr\{A \text{ en } B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B|A\} \quad (2.29)$$

waarin A en B gebeurtenissen zijn die al dan niet kunnen optreden, volgt

$$p(x,y) = p(x) p(y|x) = p(y) p(x|y) \quad (2.30)$$

Als de kans dat  $\underline{x}$  (resp.  $\underline{y}$ ) bepaalde waarden aanneemt onafhankelijk is van de waarde van  $\underline{y}$  (resp.  $\underline{x}$ ), dan noemt men  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  *stochastisch onafhankelijk*. In dat geval geldt dus  $p(x|y) = p(x)$  en  $p(y|x) = p(y)$ , zodat dan tevens geldt

$$p(x,y) = p(x) p(y) \quad (2.31)$$

Op analoge wijze als in het geval van één stochastische variabele definiëren we de verwachtingswaarde van een functie  $h(x,y)$  van twee variabelen  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  :

$$E\{h(\underline{x},\underline{y})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) p(x,y) dx dy \quad (2.32)$$

Ook kunnen we momenten definiëren van  $p(x,y)$  t.o.v.  $x = 0$  en  $y = 0$ :

$$M_{m,n} = E\{\underline{x}^m \underline{y}^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^m y^n p(x,y) dx dy \quad (2.33)$$

We spreken van  $r^e$ -orde momenten wanneer  $m + n = r$ . Als we ons beperken tot  $m = 0, 1, 2, \dots$  en  $n = 0, 1, 2, \dots$ , dan zijn er twee  $1^e$ -orde momenten:



$$M_{1,0} = E\{\underline{x}\} = \mu_x \tag{2.34}$$

$$M_{0,1} = E\{\underline{y}\} = \mu_y$$

en drie 2<sup>e</sup>-orde momenten:

$$M_{2,0} = E\{\underline{x}^2\}$$

$$M_{1,1} = E\{\underline{x}\underline{y}\} \tag{2.35}$$

$$M_{0,2} = E\{\underline{y}^2\}$$

De varianties van  $\underline{x}$  resp.  $\underline{y}$  zijn

$$\sigma_x^2 = \text{var}(\underline{x}) = M_{2,0} - M_{1,0}^2 \tag{2.36}$$

$$\sigma_y^2 = \text{var}(\underline{y}) = M_{0,2} - M_{0,1}^2$$

Dezen geven slechts iets weer van de spreiding van  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  afzonderlijk, en zouden ook zijn te bepalen uit de marginale verdelingen. Het essentieel nieuwe t.o.v. het geval van een enkelvoudige variabele is dat er bij twee variabelen sprake kan zijn van een meer of minder sterke samenhang. Om dit uit te drukken wordt de *covariantie* van  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  gebruikt, gedefinieerd als

$$\text{cov}(\underline{x}, \underline{y}) \equiv E\{(\underline{x} - \mu_x)(\underline{y} - \mu_y)\} \tag{2.37}$$

ofwel, na uitwerken,

$$\text{cov}(\underline{x}, \underline{y}) = E\{\underline{x}\underline{y}\} - \mu_x \mu_y = M_{1,1} - M_{1,0} M_{0,1} \tag{2.38}$$

De covariantie speelt o.a. een rol als we de variantie moeten bepalen van de som of het verschil van twee stochastische variabelen:

$$\text{var}(\underline{x} \pm \underline{y}) = E\{[(\underline{x} \pm \underline{y}) - (\mu_{\underline{x}} \pm \mu_{\underline{y}})]^2\} \quad (2.39)$$

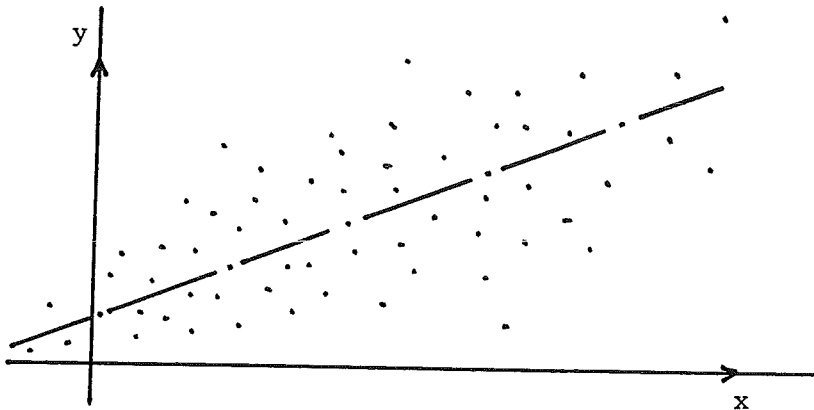
Door het rechterlid uit te werken is (2.39) te herleiden tot

$$\text{var}(\underline{x} \pm \underline{y}) = \text{var}(\underline{x}) + \text{var}(\underline{y}) \pm 2 \text{cov}(\underline{x}, \underline{y}) \quad (2.40)$$

Een dimensieloze en genormeerde maat voor de covariantie van  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  is de z.g. *correlatie-coëfficiënt*, gedefinieerd als

$$\gamma_{xy} = \frac{\text{cov}(\underline{x}, \underline{y})}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.41)$$

De waarde van  $\gamma_{xy}$  is een maat voor de lineaire afhankelijkheid tussen  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$ . Dit kan worden gezien door na te gaan in hoeverre  $\underline{y}$  te benaderen



Figuur 2.4

is door  $(a \underline{x} + b)$ , waarin  $a$  en  $b$  constanten zijn. De waarden van  $a$  en  $b$  worden bepaald uit de voorwaarde van minimalisering van de gemiddelde kwadratische afwijking. Dus als

$$\underline{\epsilon} \equiv \underline{y} - (a \underline{x} + b) \quad (2.42)$$

dan moet  $E\{\underline{\varepsilon}^2\}$  minimaal worden. Dit vereist dat  $E\{\underline{\varepsilon}\}$  nul moet zijn, ofwel

$$\mu_y = a\mu_x + b, \quad (2.43)$$

terwijl  $\text{var}(\underline{\varepsilon})$  minimaal moet zijn. Deze is gelijk aan

$$\text{var}\{\underline{y} - (a\underline{x} + b)\} = \text{var}(\underline{y}) + a^2 \text{var}(\underline{x}) - 2a \text{cov}(\underline{x}, \underline{y}) \quad (2.44)$$

(zie vgl. 2.40). Bij variatie van  $a$  is de waarde van deze variantie minimaal indien

$$a = \frac{\text{cov}(\underline{x}, \underline{y})}{\text{var}(\underline{x})} \quad (2.45)$$

De waarde van dit minimum, en tevens van het minimum van  $E\{\underline{\varepsilon}^2\}$ , is

$$\min E\{\underline{\varepsilon}^2\} = \text{var}(\underline{y}) - \frac{\text{cov}^2(\underline{x}, \underline{y})}{\text{var}(\underline{x})} \quad (2.46)$$

Uitgedrukt in verhouding tot de variantie van  $\underline{y}$  is dit

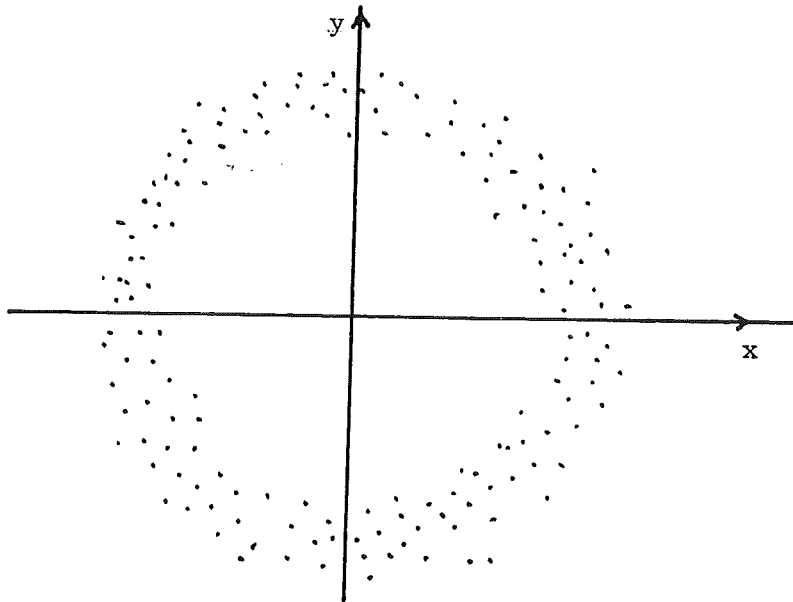
$$\frac{\min E\{\underline{\varepsilon}^2\}}{\text{var}(\underline{y})} = 1 - \frac{\text{cov}^2(\underline{x}, \underline{y})}{\text{var}(\underline{x}) \text{var}(\underline{y})} = 1 - \gamma_{xy}^2 \quad (2.47)$$

Het linkerlid van (2.47) kan niet negatief zijn, zodat geldt

$$|\gamma_{xy}| \leq 1 \quad (2.48)$$

Verder blijkt uit (2.47) dat  $|\gamma_{xy}|$  een maat is voor de *lineaire afhankelijkheid* van  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$ . Het geval  $|\gamma_{xy}| = 1$  komt blijkens (2.47) overeen met volledige lineaire afhankelijkheid. Bij kleiner wordende  $|\gamma_{xy}|$  zullen aselekt getrokken waarden van  $(\underline{x}, \underline{y})$  zich steeds minder om een rechte lijn scharen. Als  $\gamma_{xy} = 0$  zegt men dat  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  ongecorreleerd zijn; zij zijn dan lineair onafhankelijk, wat overigens niet betekent dat zij niet op een andere wijze van elkaar afhankelijk zouden kunnen zijn. Wanneer bijvoorbeeld

als meetgegevens een verzameling puntenparen  $\{x,y\}$  wordt gevonden, die verdeeld zijn om een cirkel zoals in onderstaande figuur, dan is de lineaire correlatiecoëfficiënt  $\gamma_{xy} \cong 0$ , terwijl hier duidelijk een bepaalde afhankelijkheid tussen  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  geconstateerd kan worden.



Figuur 2.5

Omgekeerd geldt echter wel dat stochastisch onafhankelijke variabelen altijd ongecorreleerd zijn. Dit volgt uit substitutie van (2.31) in de uitdrukking voor  $E\{\underline{x} \underline{y}\}$  en uitwerken:

$$E\{\underline{x} \underline{y}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y p(y) dy \quad (2.49)$$

ofwel

$$E\{\underline{x} \underline{y}\} = E\{\underline{x}\} E\{\underline{y}\} = \mu_x \mu_y \quad (2.50)$$

zodat in dit geval  $\text{cov}(\underline{x}, \underline{y}) = 0$  (zie vgl. 2.38). Stochastisch onafhankelijke variabelen zijn dus ongecorreleerd, maar het omgekeerde hoeft niet het geval te zijn.

Gezien het bovenstaande volgt uit (2.40) dat de variantie van de som van twee (of meer) stochastisch onafhankelijke variabelen gelijk is aan de som van de varianties afzonderlijk.

De begrippen covariantie en correlatie spelen bij de beschrijving van stochastische processen (zoals windgolven) een belangrijke rol, omdat een essentieel deel van die beschrijving juist gaat over de structuur van het proces in de tijd, m.a.w. over de samenhang tussen de proceswaarden (b.v. de uitwijking van het zeeoppervlak) op verschillende tijdstippen. In latere hoofdstukken wordt dit verder behandeld.

Tot slot van deze paragraaf wordt ingegaan op de *Gaussische* samengestelde kansdichtheidsfunctie van twee variabelen. Deze is te schrijven als

$$p(x,y) = \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2(1-\gamma_{xy}^2)} \left\{ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\gamma_{xy} \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right\} \right]}{2\pi \sigma_x \sigma_y (1-\gamma_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.51)$$

We merken hierover het volgende op:

- (1) Als  $\gamma_{xy} = 0$  reduceert (2.51) tot  $p(x,y) = p(x)p(y)$ . M.a.w., twee gezamenlijk Gaussisch verdeelde stochastische variabelen die ongecorrleerd zijn, zijn tevens stochastisch onafhankelijk.
- (2) De enige parameters in (2.51) zijn de gemiddelden  $(\mu_x, \mu_y)$ , de standaardafwijkingen  $(\sigma_x, \sigma_y)$ , en de correlatiecoëfficiënt  $\gamma_{xy}$ , ofwel: de gemiddelden en de covarianties, als we de variantie van  $\underline{x}$  zien als  $\text{cov}(\underline{x}, \underline{x})$  en idem voor  $\underline{y}$ . M.a.w. : de twee-dimensionale Gaussische kansdichtheidsfunctie is geheel bepaald door de 1<sup>e</sup>-orde en 2<sup>e</sup>-orde momenten. Dit is een generalisatie van de overeenkomstige uitspraak voor het 1-dimensionale geval.

#### 2.4. Willekeurig aantal stochastische variabelen

Het bovenstaande is uit te breiden tot een willekeurig aantal stochastische variabelen, b.v.  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ , met een n-dimensionale verdelingsfunctie zodanig dat

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Pr\{\underline{x}_1 \leq x_1 \text{ en } \underline{x}_2 \leq x_2 \text{ en } \dots \underline{x}_n \leq x_n\} \quad (2.52)$$

Begrippen als marginale en voorwaardelijke verdelingen, verwachtingswaarde, en momenten worden gedefinieerd volledig analoog aan het 2-dimensionale geval. De 1<sup>e</sup>-orde momenten zijn de gemiddelden van de stochastische variabelen  $\underline{x}_i$  afzonderlijk ( $\mu_i = E\{\underline{x}_i\}$  voor  $i = 1, 2, \dots, n$ ). De 2<sup>e</sup>-orde momenten, die gezamenlijk een  $n \times n$  matrix vormen, geven de verwachtingswaarden van de producten van twee van de  $n$  variabelen ( $E\{\underline{x}_i \underline{x}_j\}$  voor  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ ), de 3<sup>e</sup>-orde momenten die van drie variabelen, enz. Ook hier geldt dat kennis van de hogere en hogere orde momenten een steeds betere kennis van de gezamenlijke verdelingsfunctie inhoudt, en dat de momenten van 1<sup>e</sup>-orde en 2<sup>e</sup>-orde de belangrijkste zijn, ofwel : de gemiddelden  $\mu_i = E\{\underline{x}_i\}$  en de covarianties  $\text{cov}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = E\{\underline{x}_i \underline{x}_j\} - \mu_i \mu_j$ . De covarianties vormen gezamenlijk een  $n \times n$  matrix, de z.g. *covariantie-matrix*  $C_{i,j} \equiv \text{cov}(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$ . De elementen op de hoofddiagonaal zijn de varianties:  $C_{i,i} = \text{cov}(\underline{x}_i, \underline{x}_i) = \text{var}(\underline{x}_i)$ .

Zonder nu de complete formule voor de  $n$ -dimensionale *Gaussische* kansdichtheidsfunctie te reproduceren wordt hier gesteld dat deze geheel is bepaald door de 1<sup>e</sup>-orde en 2<sup>e</sup>-orde momenten (ofwel : door de gemiddelden en de covarianties), evenals in de gevallen  $n = 1$  en  $n = 2$  die al besproken waren.

### 2.5. Centrale limietstelling

De centrale limietstelling in één dimensie houdt in, ruw gezegd, dat de som van een groot aantal stochastisch *onafhankelijke variabelen* onder vrij ruime voorwaarden bij benadering *Gaussisch* verdeeld is.

Dit kan als volgt preciezer worden geformuleerd. Beschouw de som  $\underline{S}_n$  van  $n$  stochastisch onafhankelijke variabelen  $\underline{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^n \underline{x}_i \quad (2.53)$$

Stel dat de verwachtingswaarden en de standaardafwijkingen van  $\underline{x}_i$  gelijk zijn aan  $\mu_i$  en  $\sigma_i$ . De verwachtingswaarde en de variantie van  $\underline{S}_n$  zijn dan

respectievelijk

$$\mu_{S_n} = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (2.54)$$

en

$$\sigma_{S_n}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (2.55)$$

Deze kunnen onbeperkt toenemen als  $n \rightarrow \infty$ , om welke reden we bij voorkeur werken met de gereduceerde variabele

$$Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}} \quad (2.56)$$

waarvan de verwachtingswaarde en de standaardafwijking gelijk zijn aan 0 respectievelijk 1, ongeacht de waarde van  $n$ . Volgens de centrale limietstelling is  $Z_n$  Gaussisch verdeeld in de limiet  $n \rightarrow \infty$ . De "vrij ruime" voorwaarden waaraan de variabelen  $x_i$  moeten voldoen (behalve de hierboven reeds genoemde) houden in dat niet één ervan mag domineren. Een voldoende (niet nodige) voorwaarde hiervoor is dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_i}{\sigma_{S_n}} = 0 \text{ voor elke } i \quad (2.57)$$

Dit betekent dat elk der bijdragen  $x_i$  slechts een oneindig kleine relatieve bijdrage tot de variantie van de som levert.

In het voorafgaande was sprake van de centrale limietstelling in één dimensie (omdat de somvariabele enkelvoudig is). Hij is echter uit te breiden tot meer dimensies (Cramér, 1937, 1970). Daarop wordt hier niet verder ingegaan.

De centrale limietstelling is voor windgolven van belang omdat de daarin optredende momentane uitwijkingen, snelheden, drukken enz. kunnen worden gezien als het resultaat van een sommatie van bij benadering onafhankelijke, sinusvormige componenten, met als gevolg dat de centrale limiet-

stelling bij benadering erop van toepassing is, zodat de genoemde grootheden bij benadering Gaussisch verdeeld zijn. Hetzelfde geldt dan voor responsies van (b.v.) constructies op de golven, voorzover de betrekking tussen responsie en excitatie lineair is.

## 2.6. Résumé

Enkelvoudige en meervoudige stochastische variabelen worden beschreven m.b.v. één-dimensionale resp. méér-dimensionale kansverdelingen, die op hun beurt zijn te bepalen via de rij van momenten, waarvan die van lage orde de belangrijkste zijn. Met name geldt dit voor de gemiddelden en de (co)varianties. Kennis hiervan is voldoende voor Gaussisch verdeelde variabelen. Dergelijke variabelen kunnen ontstaan uit de som van een groot aantal onafhankelijke bijdragen.

## 2.7. Literatuur

- H. Cramér, Random Variables and Probability Distributions, Cambridge University Press, 1937, 1970
- P.M.E.M. van der Grinten en J.M.H. Lenoir, Statistische Procesbeheersing, Prisma - Technica 50, Uitg. Het Spectrum, Utrecht, 1973.
- J.R. McCord en R.M. Moroney, Inleiding tot de waarschijnlijkheidsleer, Prisma-Aula no. 328, Uitg. Het Spectrum, Utrecht, 1967
- A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw - Hill, Inc., 1965
- J. van Soest, Elementaire Statistiek. Handleiding voor het college Toegepaste Statistiek A. Delftsche Uitgeversmaatschappij, Delft, 1974
- A.J. Stam, Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening, Uit. H. Stam N.V., Haarlem, 1964.



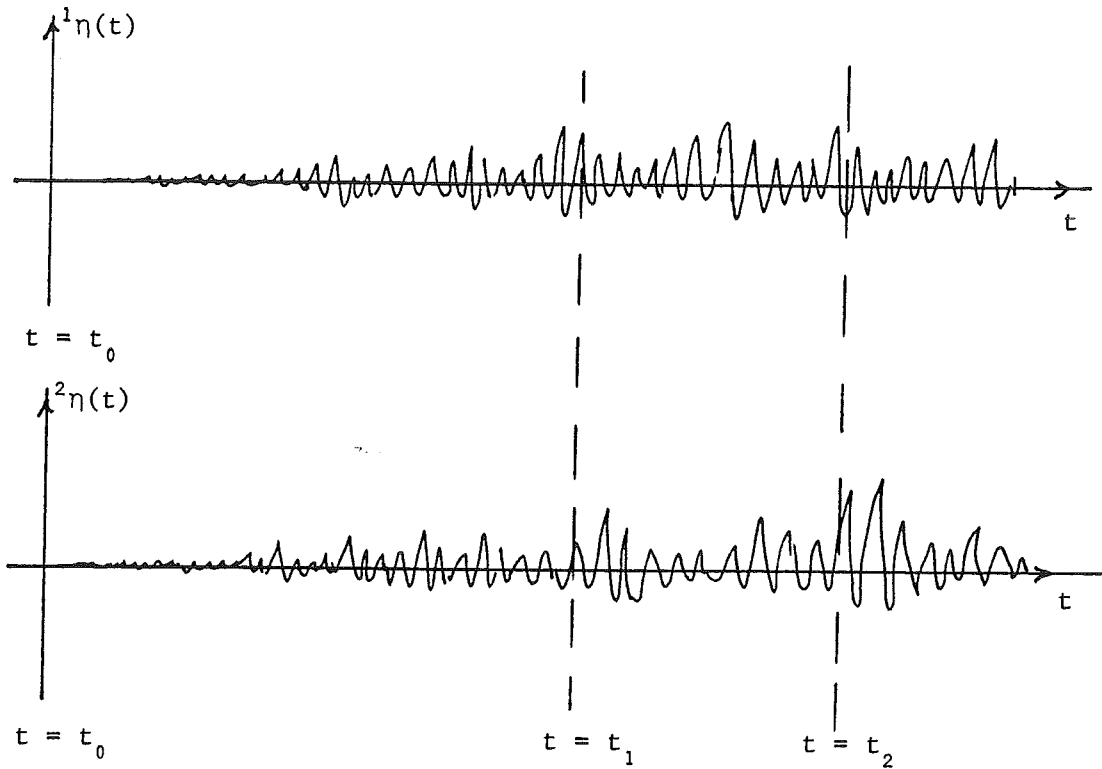
### 3. STOCHASTISCHE PROCESSEN

#### 3.1. Inleiding

Verschijselen zoals windgolven, met een stochastisch karakter en een afhankelijkheid van tijd en/of ruimte, kan men beschrijven als een stochastisch proces. In dit hoofdstuk worden enige begrippen uit de theorie daarvoor geïntroduceerd. Het gaat daarbij om begripsbepalingen, om een klassificatie van verschillende typen stochastische processen, en om de informatie die nodig is voor een statistische beschrijving ervan. Tenslotte wordt een stochastisch proces geïntroduceerd dat kan dienen als een model voor windgolven.

#### 3.2. Definitie van een stochastisch proces

In het voorgaande hoofdstuk werd een stochastische variabele geïntroduceerd als een niet-voorspelbare uitkomst van een experiment, in die zin dat herhalingen van het experiment bij gelijke controleerbare omstandigheden tot verschillende en niet van tevoren bekende resultaten leiden. Nu gaan wij experimenten beschouwen waarbij de uitkomst bovendien nog een functie is van de een of andere onafhankelijke variabele, waarvoor we voorlopig de tijd ( $t$ ) zullen kiezen. We kunnen b.v. denken aan het verloop van de waterstand met de tijd, ergens in een goot waarin door wind golven worden opgewekt. Ook al zouden de controleerbare omstandigheden, zoals gemiddelde waterdiepte, gemiddelde windsnelheid etc., bij herhaling van een experiment constant worden gehouden, dan nog zouden de daarbij op te nemen registraties van de golfbeweging niet (in details) steeds hetzelfde beeld opleveren, en ook niet voorspelbaar zijn. In figuur 3.1. zijn twee van zulke mogelijke registraties geschetst, resp.  ${}^1\eta(t)$  en  ${}^2\eta(t)$ , waarbij het linksboven geplaatste getal het rangnummer van de registratie is.



Figuur 3.1

We beschouwen nu eerst de waarde van de uitwijking ( $\eta$ ) op een tijdstip  $t_1$ , dat vastligt t.o.v. het tijdstip ( $t_0$ ) waarop de ventilator wordt gestart (m.a.w., we houden  $t_1 - t_0 = \text{constant}$ ). Het is een ervaringsfeit dat de waarde van de uitwijking niet voorspelbaar is bij herhalingen van het experiment. M.a.w. de uitwijking  $\eta$  op het tijdstip  $t_1$  is een stochastische variabele, geschreven als  $\eta_{t_1}$ , met een één-dimensionale kansverdeling en bijbehorende momenten, die we kunnen schatten uit verschillende realisaties ( ${}^1\eta(t_1), {}^2\eta(t_1), \dots$ ). Dit kunnen we ook doen voor andere tijdstippen  $t_2, t_3, \dots$ . Wat we dan krijgen is statistische informatie over de uitwijking op een reeks van tijdstippen ( $\eta_{t_1}, \eta_{t_2}, \dots$ ), maar dit verschaft nog geen inzicht in de samenhang die bestaat tussen de waarden van  $\eta_t$  op die tijdstippen, die juist essentieel is voor de beschrijving van het golfkarakter van de uitwijkingen. Daarvoor is het nodig de *gezamenlijke* verdelingsfunctie van  $\eta_{t_1}, \eta_{t_2}, \dots$  te kennen. We komen zo tot de volgende aanduiding van een stochastisch proces in meer algemene zin, en van wat nodig is voor de statistische beschrijving ervan.

Een *stochastisch proces* is een geordende verzameling stochastische variabelen. In fysische processen is de ordeningsparameter veelal de tijd ( $t$ ), en/of één of meer ruimte-coördinaten. We beperken ons voornamelijk tot tijdsafhankelijke processen. Als we de verzameling tijdstippen waarop het proces is gedefinieerd aanduiden met  $\mathcal{T}$ , en de proceswaarde met  $\underline{x}$ , dan kunnen we het betreffende stochastisch proces aanduiden als de verzameling  $\{\underline{x}_t\}$ ,  $t \in \mathcal{T}$ . De verzameling  $\mathcal{T}$  kan eindig of oneindig zijn, en aftelbaar (discrete tijdstippen) of niet-aftelbaar ( $t$  continu).

Een registratie van de waarden van  $\underline{x}$  als functie van  $t$  in één experiment is een *realisatie* van het proces  $\{\underline{x}_t\}$ , geschreven als  $x(t)$ , waaraan we nog een rangnummer kunnen toevoegen om ze van elkaar te onderscheiden. De verzameling van beschikbare of denkbeeldige realisaties heet het *ensemble*.

### 3.3. Beschrijving van een stochastisch proces

Voor de beschrijving van een stochastisch proces moeten we de *gezamenlijke verdelingsfunctie* kennen van de waarden ervan op een willekeurig aantal ( $n$ ) willekeurig uit  $\mathcal{T}$  te kiezen tijdstippen  $t_1, t_2, \dots, t_n$ :

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Pr(\underline{x}_{t_1} \leq x_1 \text{ en } \underline{x}_{t_2} \leq x_2 \text{ en } \dots \text{ en } \underline{x}_{t_n} \leq x_n) \quad (3.1)$$

Deze is op zijn beurt te beschrijven m.b.v. de rij van 1<sup>e</sup>-orde momenten, 2<sup>e</sup>-orde momenten, en hogere-orde momenten, ofwel uit de *gemiddelden*  $\mu_i \equiv E\{\underline{x}_{t_i}\}$ , de *covarianties*  $C_{i,j} \equiv \text{cov}(\underline{x}_{t_i}, \underline{x}_{t_j})$ , en hogere-orde momenten. Opmerking: omdat  $C_{i,j}$  de covariantie voorstelt van twee waarden van hetzelfde proces spreekt men hier van *autocovarianties*.

Een stochastisch proces heet *Gaussisch* als de in (3.1) aangeduide gezamenlijke verdeling van het Gaussische type is in  $n$  dimensies. Dergelijke processen zijn volledig bepaald door de gemiddelden  $\mu_i$  en de covarianties  $C_{i,j}$ .

### 3.4. Stationaire processen

In het geval van opwekking van windgolven uit een rust-toestand (figuur 3.1) kan men twee fasen onderscheiden: een aanvangsfase waarin sprake is van groei van de golven (en een aanpassing van de gemiddelde waterstand), en een eindfase waarin zich een vorm van evenwicht heeft ingesteld. In de aanvangsfase variëren diverse statistische parameters die het proces beschrijven in de tijd, terwijl dat in de eindfase niet het geval is. Men noemt het stochastisch proces in de aanvangsfase *niet-stationair*, en in de eindfase *stationair*. Of een proces al dan niet als stationair is te beschouwen hangt veelal af van de duur waarover men het bekijkt. Windgolven op zee b.v. zijn op een tijdschaal van ca 15 min of minder veelal als stationair te beschouwen, maar op een tijdschaal van enkele uren niet omdat belangrijke omgevingsfactoren (wind, getij) op die tijdschaal aanmerkelijk kunnen variëren.

Het spreekt vanzelf dat de beschrijving van stationaire processen veel minder gecompliceerd is dan die van niet-stationaire processen. Zoals eerder is gesteld is voor zo'n statistische beschrijving kennis nodig van de gemiddelde waarden, de autocovarianties, en van hogere-orde momenten. Voor een niet stationair proces kan  $\mu_i = E\{\underline{x}_{t_i}\}$  variëren met  $t_i$ , en zal de autocovariantie  $\text{cov}(\underline{x}_{t_i}, \underline{x}_{t_j})$  kunnen variëren met de twee tijdstippen  $(t_i, t_j)$  waarvoor hij is bepaald. Hierbij moet worden bedacht dat het niet gaat om de waarden  $t_i$  resp.  $t_j$  zelf, maar om de tijdsduren verstreken na de start van de ventilator ( $t_i - t_0$  resp.  $t_j - t_0$ ). Maar in de stationaire fase van het proces doet het er niet meer toe wanneer die start plaatsvond. Dit houdt in dat hoogstens lokale tijdsverschillen nog van betekenis kunnen zijn. In concreto leidt dit ertoe dat voor een stationair proces de gemiddelden  $E\{\underline{x}_{t_i}\}$  voor alle  $t_i$  dezelfde waarde hebben, dus

$$E\{\underline{x}_{t_i}\} = \text{const} = \mu \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

en dat de autocovarianties  $C_{i,j} = \text{cov}(\underline{x}_{t_i}, \underline{x}_{t_j})$  nog slechts variëren met het tijdsverschil  $(t_j - t_i)$ . Duiden we dit verschil aan met  $\tau$  dan kunnen we de z.g. *autocovariantiefunctie* definiëren als

$$\begin{aligned}
 C_{xx}(\tau) &\equiv \text{cov}(\underline{x}_t, \underline{x}_{t+\tau}) \\
 &= E\{\underline{x}_t \underline{x}_{t+\tau}\} - \mu^2
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

waarbij de notatie  $C(\tau)$  erop duidt dat de waarde van  $\text{cov}(\underline{x}_t, \underline{x}_{t+\tau})$  wel van  $\tau$  afhangt maar niet van  $t$ ; de toevoeging "xx" geeft aan dat het gaat om de *auto*-covarianties van  $\underline{x}_t$ .

Omdat voor stationaire processen slechts het tijdsverschil bepalend is voor de auto-covariantie, geldt blijkbaar

$$C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau) \tag{3.4}$$

Het is dus een even functie. De waarde ervan kan nergens groter zijn dan in de oorsprong, omdat twee *verschillende* stochastische variabelen ( $\underline{x}_t$  en  $\underline{x}_{t+\tau}$  met  $\tau \neq 0$ ) niet sterker gecorreleerd kunnen zijn dan een variabele met zichzelf. Formeel kunnen we dit zien via de z.g. auto-correlatiefunctie:

$$\gamma_{xx}(\tau) \equiv \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)} = \frac{\text{cov}(\underline{x}_t, \underline{x}_{t+\tau})}{\text{var}(\underline{x})} \tag{3.5}$$

Voor elke  $t$  en  $\tau$  is deze gelijk aan de correlatiecoëfficiënt tussen  $\underline{x}_t$  en  $\underline{x}_{t+\tau}$ , zoals gedefinieerd in (2.41), zodat blijkens (2.48) tevens geldt

$$|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0) \tag{3.6}$$

(Opm.: in de literatuur wordt de functie  $R_{xx}(\tau) \equiv E\{\underline{x}_t \underline{x}_{t+\tau}\}$  vaak aangeduid als de autocorrelatiefunctie van het stationaire proces  $\{\underline{x}_t\}$ . Deze benaming is in zoverre onjuist dat een correlatie een genormeerde covariantie is, en  $E\{\underline{x}_t \underline{x}_{t+\tau}\}$  is noch het één noch het ander. De moraal van deze opmerking is dat per geval (per werk) moet worden nagegaan welke definities zijn gehanteerd voor de gebruikte grootheden.)

In stationaire processen is  $E\{\underline{x}_t\}$  constant, d.w.z. onafhankelijk van  $t$ . De waarde van deze constante kan door een geschikte keuze van het referentieniveau gelijk aan nul worden gemaakt als we geïnteresseerd zijn in de fluctuaties, en niet in het gemiddelde niveau zelf. Voor windgolven b.v. is dit zinvol, waarbij we dan de relatief langzaam variërende getijstand uitfilteren.

Zoals reeds is opgemerkt is voor de beschrijving van Gaussische processen kennis van de gemiddelden en van de autocovarianties voldoende. Voor stationaire, Gaussische processen behoeven we dus slechts het gemiddelde  $\mu$  te kennen, en de autocovariantiefunctie  $C_{xx}(\tau)$ . *Stationaire, Gaussische processen met gemiddelde gelijk aan nul zijn volledig bepaald door hun autocovariantiefunctie.*

Een overzicht van de informatie die nodig is voor de volledige beschrijving van een aantal typen processen wordt hieronder gegeven.

Nodige parameters:	Stochastisch proces			
	Niet-stationair		Stationair	
momenten van orde	Willekeurig	Gaussisch	Willekeurig	Gaussisch
1	$\mu_i$	$\mu_i$	$\mu(=0)$	$\mu(=0)$
2	$C_{i,j}$	$C_{i,j}$	$C(\tau)$	$C(\tau)$
3	$D_{i,j,k}$	-	$D(\tau_1, \tau_2)$	-
enz.	enz.	-	enz.	-

Hierin zijn de 3<sup>e</sup>-orde momenten aangegeven met  $D$  (d.w.z.  $D_{i,j,k} = E\{\underline{x}_{t_i} \underline{x}_{t_j} \underline{x}_{t_k}\}$  en  $D(\tau_1, \tau_2) = E\{\underline{x}_{-t} \underline{x}_{-t+\tau_1} \underline{x}_{-t+\tau_2}\}$ ).

### 3.5. Voorbeelden

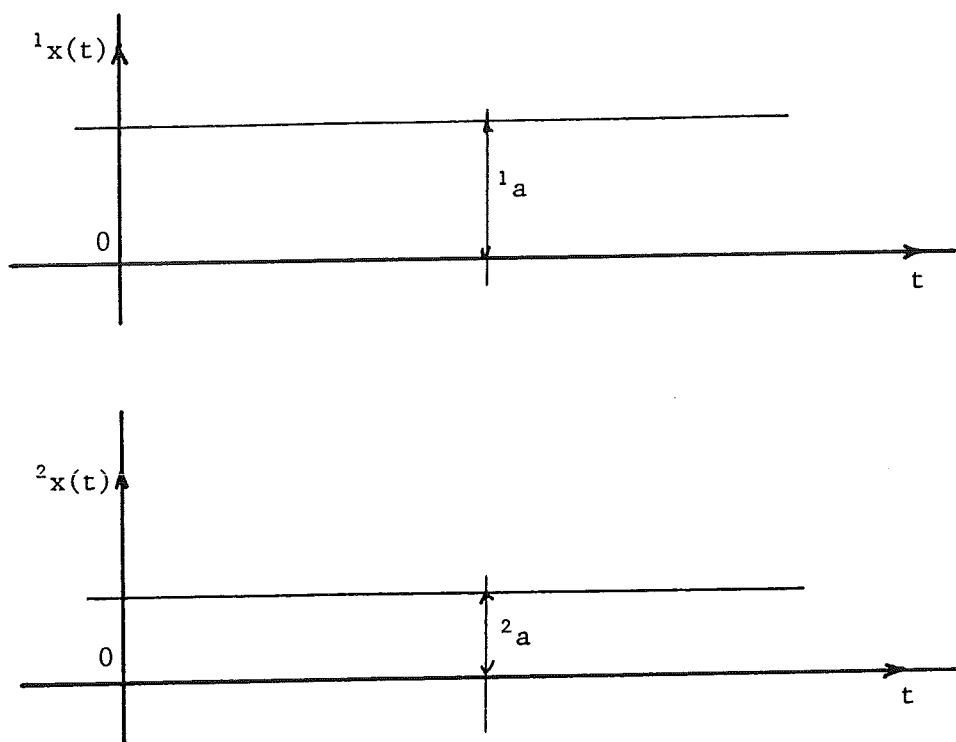
In deze paragraaf worden enkele voorbeelden gegeven van stochastische processen in een mathematische formulering. Zij worden gegeven voor de begripsvorming omtrent stochastische processen in het algemeen. Modellen voor windgolven komen in par. 3.7 ter sprake.

v.b. 1

$$\{\underline{x}_t\} = \underline{a}, \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (3.7)$$

$\underline{a}$  is een stochastische variabele met gegeven kansdichtheidsfunctie  $p(a)$ .

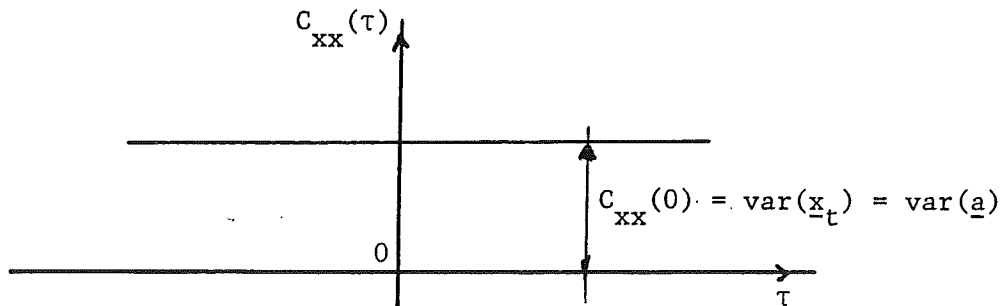
Om een realisatie te genereren van (3.7) nemen we een willekeurige steekproef van  $\underline{a}$ , zeg  ${}^k a$ , en stellen  ${}^k x(t)$  daaraan gelijk voor alle waarden van  $t$  in het definitie gebied (figuur 3.2).



Figuur 3.2

Dit voorbeeld laat zien dat de formele definitie van een stochastisch proces niet inhoudt dat een realisatie een grillig verloop moet hebben in de tijd. Het gaat erom dat de waarden van  $\{\underline{x}_t\}$  niet  $\grave{a}$  priori zijn

te voorspellen. Bij het proces (3.7) zijn de waarden van  $\underline{x}$  voor verschillende waarden van  $\tau$  volledig gecorreleerd ( $\gamma_{\underline{xx}}(\tau) = 1$  voor alle  $\tau$ ) :



Figuur 3.3

Tenslotte wordt opgemerkt dat (3.7) een Gaussisch proces is als  $\underline{a}$  Gaussisch verdeeld is (dus als  $p(\underline{a})$  van de vorm (2.19) is).

v.b. 2

$$\{\underline{x}_t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n, \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (3.8)$$

$\underline{a}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , zijn stochastisch onafhankelijke variabelen met gegeven marginale kansdichtheidsfuncties.

Voor dit proces geldt in grote trekken hetzelfde als voor (3.7), behalve dat (3.8) Gaussisch is, ongeacht of de bijdragen  $\underline{a}_n$  individueel Gaussisch verdeeld zijn, gezien de centrale limietstelling (aannemende dat aan een voorwaarde zoals 2.57 is voldaan).

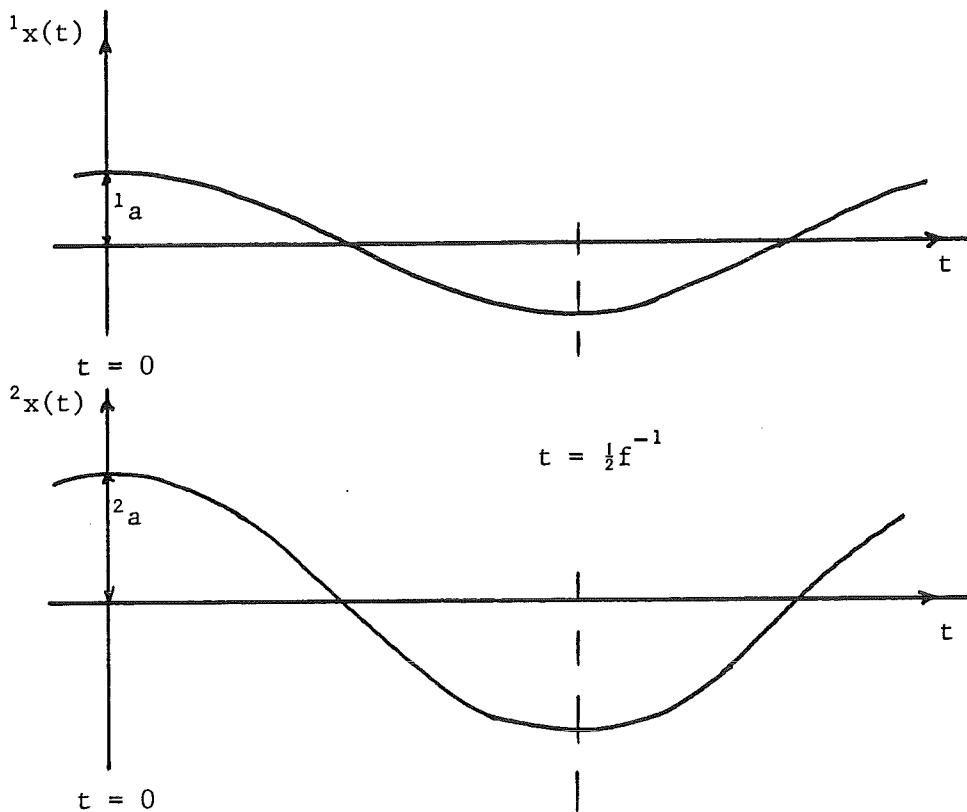
v.b. 3

$$\{\underline{x}_t\} = \underline{a} \cos 2\pi ft, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad f = \text{const} \quad (3.9)$$

De realisaties zijn in dit geval sinusvormig, met stochastische amplitude (figuur 3.4). Ze hebben allen dezelfde fase. Daardoor is (3.9) een niet-stationair proces. Neem  $E\{\underline{x}_t\}$  als voorbeeld:

$$E\{\underline{x}_t\} = E\{\underline{a} \cos 2\pi ft\} = E\{\underline{a}\} \cos 2\pi ft \quad (3.10)$$





Figuur 3.4

De waarde hiervan varieert met  $t$  (tenzij  $E\{\underline{a}\} = 0$ ). Evenzo geldt dat

$$E\{\underline{x}_{t_1} \underline{x}_{t_2}\} = E\{\underline{a}^2\} \cos 2\pi f t_1 \cos 2\pi f t_2 \quad (3.11)$$

zowel met  $t_1$  als met  $t_2$  varieert, en niet is te reduceren tot een functie van  $(t_2 - t_1)$  alléén.

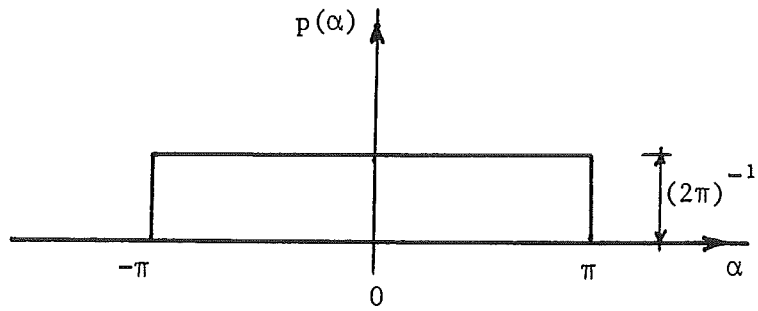
Of 3.9 al dan niet een Gaussisch proces voorstelt wordt bepaald door  $p(a)$ , op dezelfde wijze als in voorbeeld 1.

v.b. 4

$$\{\underline{x}_t\} = a \cos (2\pi f t + \underline{\alpha}), \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (3.12)$$

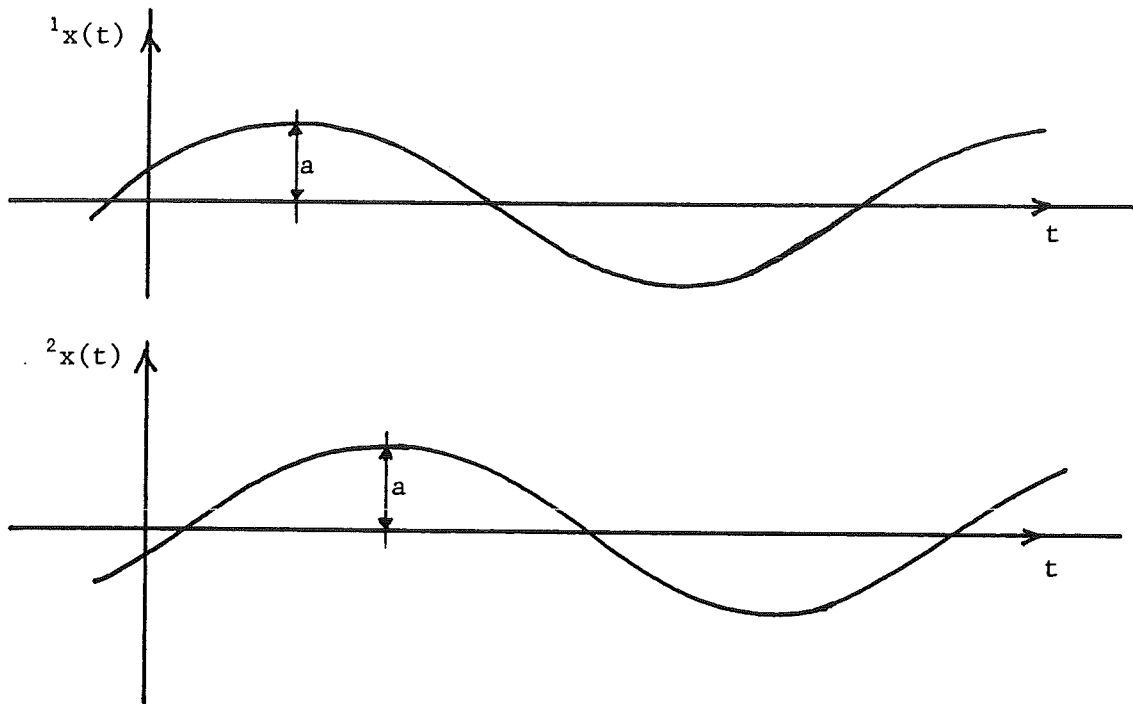
$a$  en  $f$  zijn constanten en  $\underline{\alpha}$  is een stochastische fase, uniform verdeeld op het interval  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ :

$$p(\alpha) = \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha \in (-\pi, \pi) \quad (3.13)$$



Figuur 3.5

De realisaties van (3.12) zijn sinusvormig, allen met dezelfde amplitude (figuur 3.6). Het uniform verdeeld zijn van de fasen houdt in dat er niet een voorkeurs-fase is, zodat (3.12) een stationair proces voorstelt.



Figuur 3.6

Dit is in detail als volgt te zien, waarbij we als voorbeeld  $E\{\underline{x}_t\}$  bepalen:

$$\begin{aligned}
 E\{\underline{x}_t\} &= E\{a \cos(2\pi ft + \underline{\alpha})\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} a \cos(2\pi ft + \alpha) p(\alpha) d\alpha \\
 &= a \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi ft + \alpha) \frac{1}{2\pi} d\alpha = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Merk op dat bij het bepalen van de verwachtingswaarde, d.w.z. bij het middelen over de stochastische fasehoek  $\underline{\alpha}$ , de tijd wegvalt (omdat  $\underline{\alpha}$  uniform verdeeld is). Dit is vanzelfsprekend niet slechts het geval voor  $E\{\underline{x}_t\}$  maar voor de verwachtingswaarde van welke functie van  $\{\underline{x}_t\}$  dan ook, zodat (3.12) een stationair proces is.

De autocovariantiefunctie is te berekenen op dezelfde wijze als  $E\{\underline{x}_t\}$  (doe dit), met het resultaat

$$C_{xx}(\tau) = \text{cov}(\underline{x}_t, \underline{x}_{t+\tau}) = \frac{1}{2} a^2 \cos 2\pi f\tau
 \tag{3.15}$$

Voor  $\tau = 0$  reduceert dit tot

$$C_{xx}(0) = \text{var}(\underline{x}_t) = \frac{1}{2} a^2
 \tag{3.16}$$

### 3.6. Schatten van parameters

In theoretisch werk over stochastische processen kan men een proces volledig beschrijven door aangenomen verdelingen, inclusief de bijbehorende parameters (zie voorgaande voorbeelden). In praktische situaties zal men de eigenschappen van het proces, m.n. de diverse momenten van de gezamenlijke verdeling (3.1), moeten schatten op basis van registraties, die dan als steekproef worden beschouwd. Om de proces-eigenschappen te kennen moeten we afzien van toevallige verschillen tussen registraties, en zoeken naar datgene dat zij gemeenschappelijk hebben. Daartoe gaan we in principe middelen over het ensemble (bij vaste waarden van  $t$ ), wat we met  $\langle \rangle$  zullen aanduiden. Het ensemble-gemiddelde van  $x(t_1)$  b.v., geschreven als

$\langle x(t_1) \rangle$ , wordt uit een steekproef van  $K$  realisaties bepaald als

$$\langle x(t_1) \rangle \equiv \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K k_x(t_1) \quad (3.17)$$

Dit is een schatting van  $E\{\underline{x}_{t_1}\}$ , ofwel van het 1<sup>e</sup>-orde moment van de kansdichtheidsfunctie van  $\underline{x}_{t_1}$ . Op soortgelijke wijze kunnen in principe schattingen worden gemaakt van hogere-orde momenten, zoals  $\langle x(t_1)x(t_2) \rangle$  als schatting van  $E\{\underline{x}_{t_1}\underline{x}_{t_2}\}$ , enz.

Bij schattingen zoals bovenstaande zijn er twee praktische beperkingen: zowel de duur ( $T$ ) als het aantal ( $K$ ) van de realisaties is beperkt. Het eerste houdt in dat de autocovariantiefunctie slechts geschat kan worden voor  $|\tau| \leq T$ , het tweede betekent dat de betrouwbaarheid van de schattingen beperkt blijft. Bij de spectrale analyse van stochastische processen (hoofdstuk 4) komen we op beide aspecten terug.

Hierboven werd gesteld dat middelingen in principe over het ensemble moesten gebeuren, dus bij vaste waarden van  $t$ . Bij stationaire processen echter is het ook zinvol om over de tijd te middelen, binnen één realisatie. Dit zullen we met een overstreping aanduiden. Het tijdsgemiddelde van  $x(t)$  b.v. wordt uit een continue realisatie met duur  $T$  bepaald als

$$\overline{k_x} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T k_x(t) dt \quad (3.18)$$

Voor een realisatie met discrete tijdwaarden (een z.g. *tijdreeks*, "time series" in het Engels) wordt de integratie vervangen door een sommatie.

In principe kunnen de tijdsgemiddelden van diverse grootheden (b.v.  $k_x(t)$ ) verschillen van realisatie tot realisatie, zelfs als  $T \rightarrow \infty$ . Dit is o.a. het geval in de voorbeelden 1, 2 en 3. Processen waarvoor zij convergeren naar dezelfde waarde als  $T \rightarrow \infty$  (zoals in voorbeeld 4) noemt men *ergodisch*. Die gemeenschappelijke limietwaarde is dan tevens gelijk aan het ensemble gemiddelde van de betreffende grootheid, als we daarbij het aantal realisaties waarover we middelen onbegrensd laten toenemen. Beide limiet-

waarden zijn dan bovendien gelijk aan de verwachtingswaarde van de betreffende grootheid.

In praktische situaties, en zeker bij metingen in de natuur, heeft men veelal slechts de beschikking over één realisatie, met een eindige duur, en is men aangewezen op tijdmiddelingen om de proces-eigenschappen te schatten. Daarbij wordt ergodiciteit vóórondersteld. Bij windgolven is dit geen probleem omdat niet is in te zien waarom de gemiddelde eigenschappen van een golfveld zouden verschillen van experiment tot experiment als we de van belang zijnde invloedsfactoren zoals gemiddelde diepte, windsnelheid e.d. op dezelfde waarde houden.

### 3.7. Random phase model

#### 3.7.1. Eén-dimensionaal random phase model

In deze paragraaf zullen wij een mathematisch geformuleerd stochastisch proces introduceren dat kan dienen als een model voor windgolven. Het fysisch denkbeeld dat wij daarbij hanteren is dat van een turbulente wind die lokale verstoringen aanbrengt in het wateroppervlak, die stochastisch verdeeld zijn in ruimte en tijd, en die zich vervolgens voortplanten over het oppervlak. De uitwijking in een vast punt zal dan op elk moment bestaan uit de som van verschillende sinuscomponenten in willekeurige en bij benadering van elkaar onafhankelijke fasen. Als we ons voorlopig beperken tot de variaties in de tijd alléén, van b.v. de uitwijking van het oppervlak in een gegeven vertikaal, of de deeltjessnelheid in een vast punt, dan komen we tot het volgende model:

$$\{x_t\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(2\pi f_i t + \alpha_i), t \in (-\infty, \infty) \quad (3.19)$$

De fasen  $\alpha_i$  worden verondersteld *stochastisch onafhankelijk* te zijn, elk met een *uniforme kansdichtheid* zoals gegeven in (3.13). Het enige dat daarnaast nog nodig is om de proces-eigenschappen vast te leggen is kennis van de amplituden ( $a_i$ ) van de respectievelijke spectrale componenten, ofwel  $a_i$  als functie van de frekwentie  $f_i$ .

Het uniform verdeeld zijn van de fasen impliceert, evenals in voorbeeld 4, dat (3.19) een stationair (en ergodisch) proces voorstelt. De onafhankelijkheid van de fasen, en daarmee die van de spectrale componenten, impliceert dat (3.19) een Gaussisch proces is, zoals blijkt uit toepassing van de centrale limietstelling (veronderstellend dat niet één van de bijdragen overheerst, m.a.w. dat de bijdragen voldoen aan een voorwaarde zoals (2.57)).

Het proces (3.19) is een handzaam model voor stationaire, Gaussische processen en wordt in die context veel gebruikt (niet alleen in toepassingen op windgolven). Het wordt vaak kortweg aangeduid als het "*random phase model*". Zoals geformuleerd in (3.19) is het één-dimensionaal, omdat slechts  $t$  als onafhankelijk variabele erin voorkomt. Ruimte-dimensies worden in het volgende toegevoegd (zie 3.24).

Omdat (3.19) een stationair, Gaussisch proces voorstelt is het geheel bepaald door het gemiddelde en de autocovariantiefunctie. Hiervoor geldt (bewijs dit)

$$\mu = E\{\underline{x}_t\} = 0 \quad (3.20)$$

en

$$C_{xx}(\tau) = \text{cov}(\underline{x}_t, \underline{x}_{t+\tau}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_i^2 \cos 2\pi f_i \tau \quad (3.21)$$

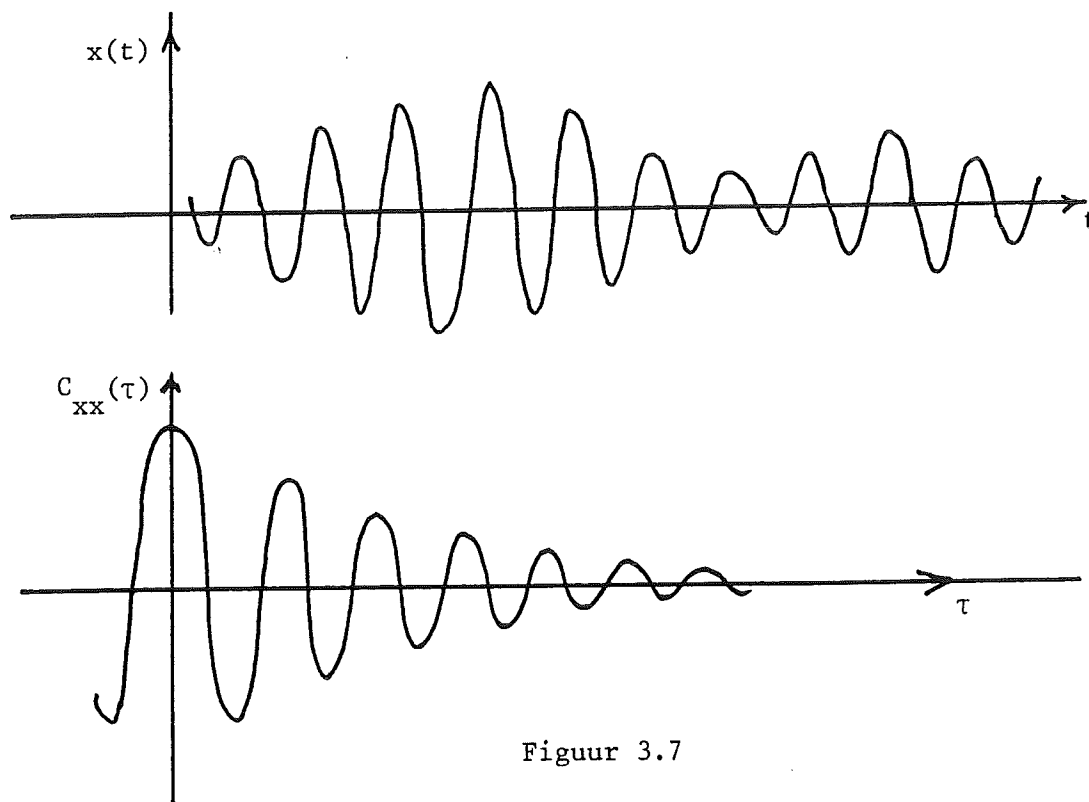
Voor  $\tau = 0$  reduceert (3.21) tot

$$C_{xx}(0) = \text{var}(\underline{x}_t) = \sum_i \frac{1}{2} a_i^2 \quad (3.22)$$

Laatstgenoemde gelijkheid volgt ook direct uit het gegeven dat  $\underline{x}_t$  de som is van stochastisch onafhankelijke bijdragen, met varianties  $\frac{1}{2} a_i^2$ .

Voor  $\tau = 0$  worden alle bijdragen in (3.21) in fase bij elkaar opgeteld; voor toenemende  $\tau$  gaan de bijdragen in (3.21) elkaar in toenemende mate opheffen door interferentie, waardoor  $C_{xx}(\tau)$  kleiner wordt (hoewel dat niet

monotoon hoeft te gebeuren). Een schets van een mogelijke realisatie van (3.19), en een schets van (3.21), zijn hieronder gegeven, voor het geval dat de componenten die aanmerkelijk bijdragen tot de variantie van  $\underline{x}_t$  betrekkelijk weinig in frekwentie ( $f$ ) verschillen. De realisaties lijken dan op een amplitude-gemoduleerde sinusfunctie, terwijl de autocovariantiefunctie lijkt op een langzaam gedempte sinusfunctie (figuur 3.7).



Figuur 3.7

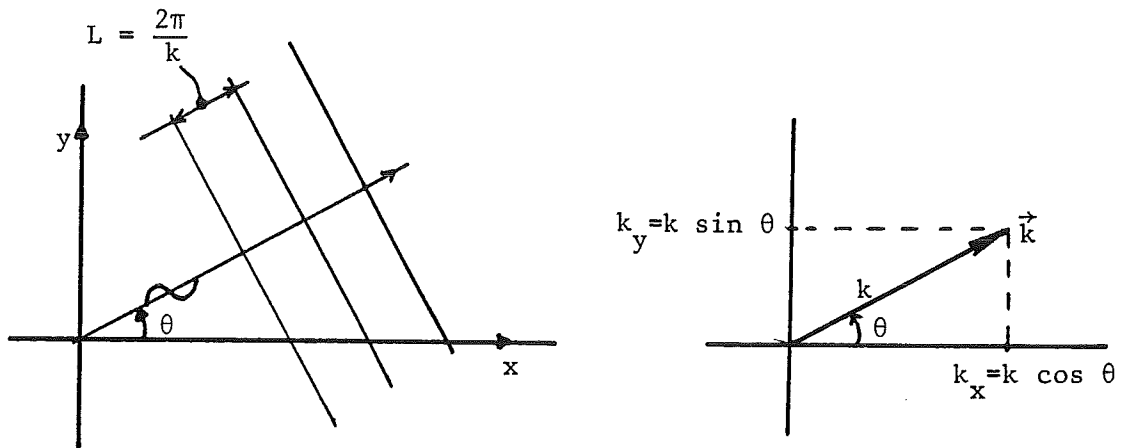
Uit (3.21) blijkt dat  $C_{xx}(\tau)$ , en dus ook het proces (3.19), geheel bepaald is door de verdeling van de varianties van de componenten ( $\frac{1}{2}a_i^2$ ) over de frekwenties ( $f_i$ ). In de spectrale beschrijving van windgolven (hoofdstuk 4) komen wij hierop terug.

### 3.7.2. Méér-dimensionaal random-phase model

Het random phase model (3.19) heeft betrekking op functies van de tijd. Voor toepassingen op windgolven moet de ruimte-dimensie worden toegevoegd.

Vooraf een opmerking over de notatie. In het voorgaande werd de proceswaarde met  $\underline{x}$  aangeduid omdat we niet over specifieke grootheden spraken. In dit voorbeeld gaan we ons expliciet richten op de uitwijking van het oppervlak uit de middenstand als de stochastische variabele, geschreven als  $\underline{\eta}$ , en zullen we die zien als functie van twee coördinaten in het horizontale vlak (x,y), en de tijd (t). (Let op de nieuwe betekenis van x.)

We bekijken eerst de uitwijking ( $\eta$ ) in een enkele sinusgolf, met hoekfrequentie  $\omega = 2\pi f$  en golfgetal  $k$ , lopend in een richting die een hoek  $\theta$  insluit met de positieve x-as (figuur 3.8). (In verband met de beknopte notatie gebruiken we hier  $\omega$  i.p.v.  $f$ .) Daarvoor geldt



Figuur 3.8

$$\eta(x,y,t) = a \cos(\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta + \alpha) \quad (3-23a)$$

ofwel, in vectornotatie, met  $\vec{r} = (x,y)$  en  $\vec{k} = (k_x, k_y) = (k \cos \theta, k \sin \theta)$ :

$$\eta(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha) \quad (3-23b)$$

Door sommatie van verschillende componenten zoals (3.23) ontstaat het meerdimensionale random-phase model:

$$\underline{\eta}(x,y,t) = \sum_i \sum_j a_{i,j} \cos(\omega_i t - k_i x \cos \theta_j - k_i y \sin \theta_j + \alpha_{i,j}) \quad (3.24a)$$



ofwel, in vectornotatie, met  $\vec{k}_{i,j} = (k_i \cos \theta_j, k_i \sin \theta_j)$ :

$$\eta(\vec{r}, t) = \sum_i \sum_j a_{i,j} \cos(\omega_i t - \vec{k}_{i,j} \cdot \vec{r} + \alpha_{i,j}) \quad (3.24b)$$

Voor verschillende waarden van  $(i,j)$  worden de fasen stochastisch onafhankelijk verondersteld, elk met een uniforme verdeling zoals in (3.13).

De absolute groottes van de golfgetallen  $(k)$  in (3.24) worden geacht bepaald te zijn door de frekwenties (via de lineaire dispersie relatie), vandaar dat ze dezelfde sommatie-index hebben als de frekwenties. Per frekwentie c.q. golfgetal kunnen echter nog componenten uit verschillende richtingen vóórkomen; vandaar dat  $\theta$  een eigen index krijgt, en we met een dubbelsom werken. Aan elke combinatie  $(i,j)$  (ofwel frekwentie c.q. golfgetal en richting) wordt een deterministische amplitude toegevoegd  $(a_{i,j})$  en, zoals gezegd, een stochastische fase  $(\alpha_{i,j})$ .

Het uitgebreide random-phase model (3.24) stelt een Gaussisch proces voor dat stationair is in  $t$  en homogeen in  $(x,y)$ . Het laatste houdt in dat de statistische eigenschappen onafhankelijk zijn van de plaats; slechts plaatsverschillen zijn van belang, e.e.a. analoog aan het begrip stationariteit in de tijd. Het model is dus slechts lokaal bruikbaar, voor tijdsduren resp. afstanden van niet meer dan b.v. honderd kenmerkende golfperioden resp. lengten.

Het proces (3.24) is geheel bepaald door zijn autocovariantiefunctie, die in dit geval niet slechts afhangt van een verschuiving in de tijd  $(\tau = t_2 - t_1)$  maar tevens van een verschuiving in de plaats in het horizontale vlak  $(\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ :

$$C_{\eta\eta}(\vec{\rho}, \tau) \equiv \text{cov} \left( \eta_{\vec{r}, t}, \eta_{\vec{r} + \vec{\rho}, t + \tau} \right) \quad (3.25)$$

Substitutie van (3.24) en uitwerken geeft

$$C_{\eta\eta}(\vec{\rho}, \tau) = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} a_{i,j}^2 \cos(\omega_i \tau - \vec{k}_{i,j} \cdot \vec{\rho}) \quad (3.26)$$

Deze wordt op zijn beurt blijkbaar geheel bepaald door de verdeling van de varianties van de componenten ( $\frac{1}{2}a^2$ ) over de frekwenties ( $\omega_i = 2\pi f_i$ ) en de richtingen ( $\theta_j$ ). In de spectrale beschrijving van windgolven (hoofdstuk 4) komen we hierop terug.

Doordat in (3.24) golfcomponenten met verschillende frekwentie en golflengte worden gesommeerd ontstaat door verlopende interferentie een beeld van afwisselende reeksen van hogere of lagere golven; en doordat de componenten uit verschillende richtingen komen ontstaat een beeld van een in beide dimensies onregelmatig oppervlak, met z.g. kortkammige golven. Kwalitatief zijn dit voor windgolven realistische eigenschappen.

Aangaande de toepasbaarheid van het random-phase model op windgolven in meer kwantitatieve zin worden twee opmerkingen gemaakt.

Ten eerste wordt erop gewezen dat (3.24) een sommatie geeft van een aftelbaar aantal (discrete) componenten; in werkelijkheid zal er in windgolven sprake zijn van een continuum van frekwenties en richtingen. Dit houdt o.m. in dat de autocovariantie naar nul gaat voor  $\tau$  of  $\rho \rightarrow \infty$ . De wiskundige formulering verandert in zoverre dat sommaties door integraties moeten worden vervangen, maar in essentie veranderen de statistische eigenschappen daardoor niet. Eenvoudigheidshalve zullen wij het discrete model blijven hanteren, ook al wordt het continue model bedoeld.

De tweede opmerking betreft een meer fundamenteel aspect, nl. het niet-lineaire karakter van windgolven. Daardoor beïnvloeden verschillende component-golven elkaar, en kunnen zij dus niet strikt onafhankelijk van elkaar zijn. Niet-lineaire effecten zijn zwak t.o.v. lineaire wanneer de golfsteilheid en (vooral) de golfhoogte / diepte verhouding voldoende klein zijn. Dan is (3.24) een realistische benadering van windgolven. Met toenemend belang van niet-lineaire invloeden zal het een minder goede benadering worden. Dit uit zich vooral in ondiep water.

### 3.8. Résumé

Een geordende verzameling stochastische variabelen noemt men een stochastisch proces. Voor de beschrijving daarvan is kennis nodig van de gezamen-

lijke verdeling van de proceswaarden op verschillende, willekeurig te kiezen waarden van de ordeningsparameter (b.v. de tijd). Een dergelijke verdeling is op zijn beurt te beschrijven met de rij van momenten van  $1^e$ ,  $2^e$  en hogere orde. Voor Gaussische processen is kennis van de  $1^e$ -orde en  $2^e$ -orde momenten voldoende, ofwel kennis van de gemiddelden en de autocovarianties. Stationaire Gaussische processen met gemiddelde gelijk aan nul zijn geheel bepaald door de autocovariantiefunctie, die dan nog slechts van het verschil tussen twee tijdwaarden afhangt.

Windgolven kunnen in de lineaire benadering worden opgevat als een som van onafhankelijke sinusvormige componenten, in welk geval zij kunnen worden beschreven m.b.v. het z.g. random-phase model, wat een stationair en Gaussisch proces voorstelt. Als zodanig is het bepaald door de autocovariantiefunctie, die op zijn beurt is bepaald door de verdeling van de varianties van de componenten over de frekwenties en de richtingen.

Met laatstgenoemde opmerking raken wij de spectrale analyse van windgolven, of van stochastische processen in meer algemene zin. Daarover gaat het volgende hoofdstuk.

### 3.9. Literatuur

O.m. de volgende boeken geven een elementaire inleiding tot de theorie van de stochastische processen:

- J.S. Bendat en A.G. Piersol, Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, 1971.
- P.M.E.M. van der Grinten en J.M.H. Lenoir, Statistische Procesbeheersing, Prisma-Technica 50. Uitg. Het Spectrum, Utrecht, 1973.
- A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, Inc., 1965.

## 4. SPECTRAAL ANALYSE

### 4.1. Inleiding

Zoals reeds vermeld in hoofdstuk 1 is het van belang om een stochastisch proces te kunnen ontleden in sinusvormige componenten, zowel voor het inzicht in de structuur van het proces als voor berekeningen van de respons van lineaire systemen op het proces. Laatstgenoemd aspect komt in een volgend hoofdstuk ter sprake. In dit hoofdstuk zal de spectrale analyse als zodanig worden behandeld, gericht op toepassingen op stationaire stochastische processen. Daartoe zal eerst een beknopt résumé worden gegeven van enkele resultaten van de klassieke Fourier-analyse, aansluitend op de daaromtrent in het college "Getijden" (b75) behandelde stof.

De hier gegeven behandeling is elementair gehouden, gezien de beperkte omvang van de totale stof van het college "Windgolven". Dit uit zich met name in de volgende punten:

- . bewijzen worden in het algemeen niet gegeven;
- . Fourier-reeksen en Fourier-integralen worden apart behandeld i.p.v. via een geünificeerde benadering, waarbij gebruik gemaakt zou moeten worden van de theorie van (Dirac) distributies;
- . het begrip convolutie wordt niet gebruikt.

Voor informatie over deze punten, en meer in het algemeen over Fourier analyse en de toepassing ervan op stochastische processen, wordt verwezen naar de literatuur die is genoemd in par. 4.7.

### 4.2. De Fourier-reeks

Een functie  $x(t)$ , gedefinieerd op een eindig interval, b.v.  $t \in (-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T)$ , kan worden ontwikkeld in een z.g. Fourier-reeks, d.i. een reeks van sinus- en cosinusfuncties die elk een geheel aantal keren in het definitie-interval passen. Dit houdt in dat de frekwenties veelvouden zijn van de basisfrekwentie  $f_1 = 1/T$ :

$$f_n = nf_1 = n \frac{1}{T} \text{ voor } n = 0, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots \quad (4.1)$$

Een som van sinus- en cosinusfuncties kan beknopt worden weergegeven in complexe schrijfwijze, gebruik makend van de formule van Euler :  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . In deze notatie kan de *Fourier-reeksontwikkeling* van  $x(t)$  (hier continu verondersteld) worden geschreven als

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi f_n t} \quad (4.2)$$

waarin de (complexe) *Fourier-coëfficiënten* zijn te bepalen uit

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt \text{ voor } n = 0, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots \quad (4.3)$$

De rij waarden  $|c_n|, n = 0, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots$  heet het *amplitudenspectrum* van  $x(t)$ ; en de rij waarden  $\arg c_n, n = 0, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots$  het *fasenspectrum*. De coëfficiënten  $c_n$  en  $c_{-n}$  zijn elkaars complex toegevoegden, zoals blijkt uit (4.1) en (4.3) (voor reële  $x(t)$ ). Het amplitudenspectrum is dus een even functie van  $n$  (van de frekwentie), en het fasenspectrum een oneven functie. Qua informatie hadden we dus kunnen volstaan (voor  $x(t)$  reëel) met niet-negatieve frekwenties, zoals in

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t + \alpha_n) \quad (4.4)$$

waarin dan

$$a_0 = c_0, \quad \alpha_0 = 0 \quad (4.5)$$

en

$$a_n = 2|c_n|, \quad \alpha_n = \arg c_n, \text{ voor } n = 1, 2, \dots$$

Weliswaar waren we in het voorgaande uitgegaan van een functie  $x(t)$  die slechts op het interval  $(-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T)$  was gedefinieerd, maar de som van de reeks (4.2) is bepaald voor elke  $t$  op het interval  $t \in (-\infty, \infty)$ . Aangezien de frekwenties  $f_n$  veelvouden zijn van de basisfrekwentie  $f_1 = 1/T$  is de

som van de reeks periodiek met periode T. De reeks (4.2) kan dus worden gezien als de Fourier-reeks van een functie  $x(t)$ , die

- hetzij slechts gedefinieerd is op een *eindig interval* met lengte T
- hetzij *periodiek* is met periode T.

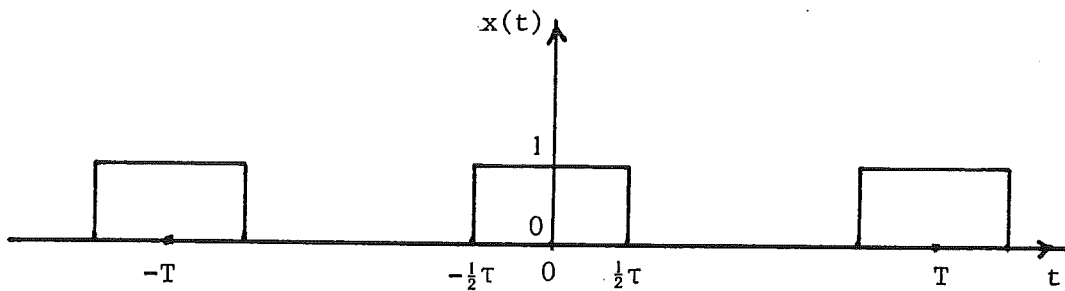
Voorbeeld

$$x(t) = 1 \quad \text{voor} \quad |t| \in (0, \frac{1}{2}\tau) \quad (4.6)$$

$$x(t) = 0 \quad \text{voor} \quad |t| \in (\frac{1}{2}\tau, \frac{1}{2}T)$$

$$x(t+T) = x(t) \quad \text{voor} \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Dit stelt een periodieke blokfunctie voor, met periode T:



Figuur 4.1

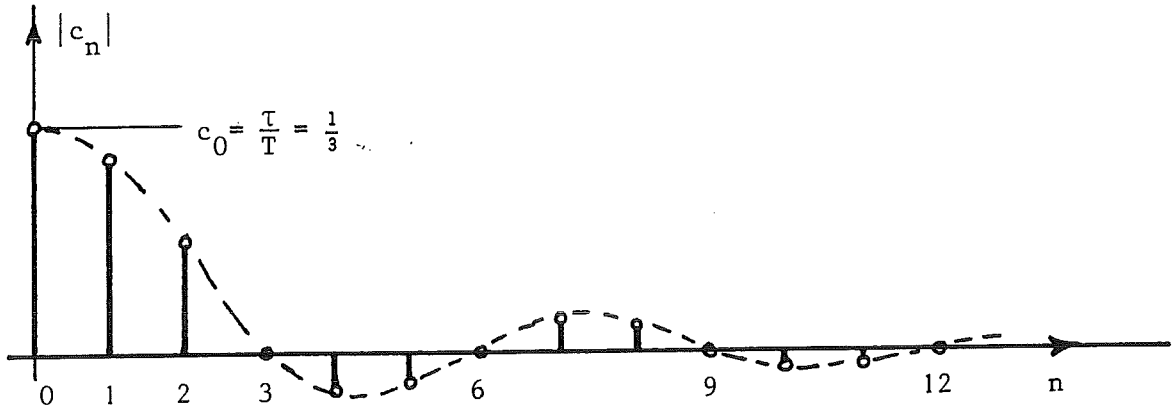
Hiervoor geldt

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}\tau}^{\frac{1}{2}\tau} e^{-i2\pi f_n t} dt$$

waaruit volgt

$$c_n = \frac{\sin \pi f_n \tau}{\pi n} = \frac{\sin(\pi n \tau / T)}{\pi n} \quad (4.7)$$

De gegeven functie  $x(t)$  is even en reëel en heeft dus slechts een reële Fourier-cosinus reeks ( $c_n$  is reëel). Het amplitudenspectrum is in figuur 4.2 geschetst voor  $\tau/T = 1/3$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, 12$ .



Figuur 4.2

Theorema van Parseval

$$\overline{x^2} \equiv \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} x(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (4.8)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} x(t)^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi f_n t} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i2\pi f_m t} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_m \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} e^{\frac{i2\pi(n+m)t}{T}} dt \end{aligned}$$

Laatstgenoemde integraal heeft de waarde nul als  $n + m \neq 0$ , en de waarde  $T$  als  $n + m = 0$ , zodat

$$\overline{x^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \text{ q.e.d.}$$

In termen van de reële coëfficiënten  $a_n$  uit (4.4), slechts gedefinieerd voor niet-negatieve frekwenties, kan (4.8) worden herleid tot

$$\overline{x^2} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 \quad (4.9)$$

Vaak is  $x(t)^2$  op te vatten als een "energie" (op een fysische constante na, die hier korthedshalve wordt weggelaten). Volgens het theorema van Parseval geeft de rij waarden  $|c_n|^2$ ,  $n = 0, \underline{+1}, \underline{+2}, \dots$ , aan hoe de gemiddelde energie van  $x(t)$  is verdeeld over de frekwenties. De naam "energiespectrum" is er dus op van toepassing (vroeger werd het "periodogram" genoemd).

Het energiespectrum bevat dezelfde informatie als het amplitudenspectrum, maar een belangrijk verschil is dat bij het energiespectrum de som van de spectrale waarden over een frekwentie-interval betekenis heeft, en wel die van een bijdrage aan  $\overline{x^2}$ :

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |c_n|^2 = \Delta(\overline{x^2}) \quad (4.10)$$

Bij het amplitudenspectrum is iets dergelijks niet het geval (d.w.z. de



$\sum_{n=n_1}^{n_2} |c_n|$  kan wel worden bepaald, maar er is niet een zinvolle interpretatie aan te geven). In dit opzicht verhouden energie en amplitude zich tot elkaar als de variantie van een stochastische grootte en de standaardafwijking daarvan: bij meer dan één (onafhankelijke) variabele heeft de som van de varianties wel betekenis, maar de som van de standaardafwijkingen niet. In par. 4.4 komen we terug op de interpretatie van het energiespectrum in de context van stochastische processen.

### Tijdreeksen

In het voorgaande werd  $t$  als een continue variabele behandeld. Bij digitale verwerking worden echter *tijdreeksen* gebruikt, d.i. verzamelingen waarnemingen van  $x(t)$  op *discrete tijden*  $t_m = m\Delta t$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ ,  $\Delta t = \text{const.}$  Deze ontstaan door de oorspronkelijke functie te *bemonsteren*, met  $\Delta t$  als bemonsteringsinterval.

Een directe consequentie van de discrete tijdbasis in plaats van de continue is dat alle integraties in het voorgaande deel van dit hoofdstuk door sommaties moeten worden vervangen. Er zijn echter bijkomende gevolgen die minder evident zijn. Die worden hierdoor veroorzaakt dat er slechts een eindige informatie beschikbaar is in de  $(M+1)$  functiewaarden. Per spectrale component, met een zekere frekwentie  $f_n$ , zijn twee waarden, dus twee stukjes informatie, nodig voor de bepaling ervan (d.w.z. voor de bepaling van  $(\text{Re } c_n, \text{Im } c_n)$  of van  $(|c_n|, \arg c_n)$ ). Voor de component met frekwentie nul is één waarde voldoende, omdat  $c_0$  reëel is. De informatie waarover we in de tijdreeks beschikken is dus slechts voldoende voor de bepaling van  $c_n$  voor  $n = 0$  tot  $n = n_{\max}$  waarbij

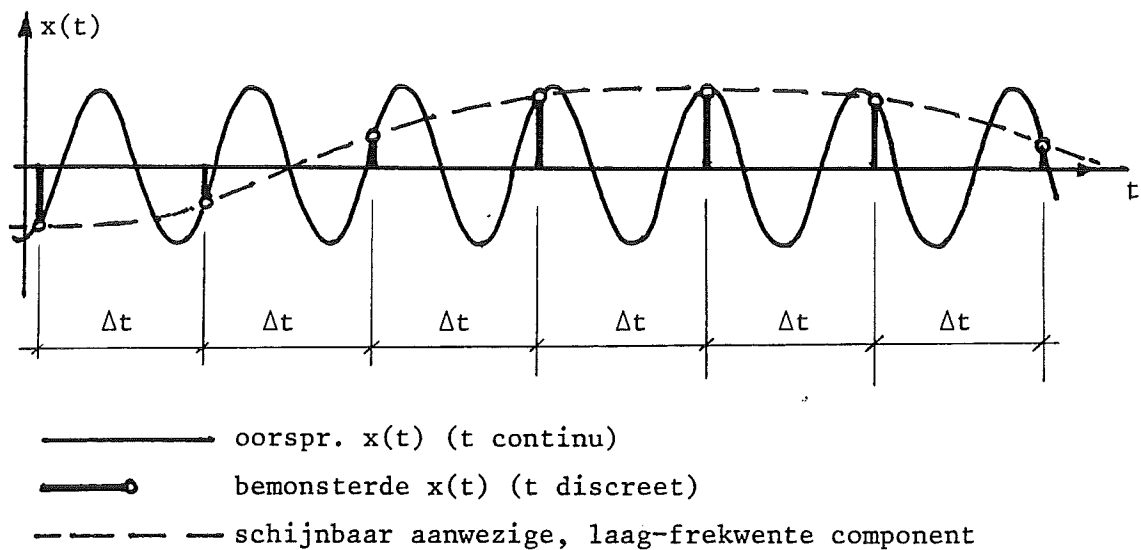
$$n_{\max} = \frac{1}{2}M$$

(we veronderstellen dat  $M$  even is). Dit levert de z.g. Nyquist-frekwentie op:

$$f_{\text{Nyq}} \equiv f_{n_{\max}} = \frac{n_{\max}}{T} = \frac{\frac{1}{2}M}{T} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (4.11)$$

Voor  $n > n_{\max}$  ( $f_n > f_{\text{Nyq}}$ ) kunnen via (4.3) nog wel coëfficiënten worden berekend, maar dat geeft dan geen nieuwe informatie meer. (Het spectrum gaat zich periodiek herhalen.)

Wat gebeurt er nu als in de oorspronkelijke, niet bemonsterde functie (dus op continue tijdbasis) energie aanwezig was voor  $f > f_{\text{Nyq}}$ ? Die komt tot uiting als energie in de lagere frekwenties (stroboscoop-effect, vouw-effect, "aliasing" genoemd in de Engelstalige literatuur), zoals is geïllustreerd in figuur 4.3.



Figuur 4.3.

Willen we voor  $f < f_{\text{Nyq}}$  goede schattingen maken van het spectrum van de oorspronkelijke, niet-bemonsterde functie, dan moeten we er dus voor zorgen dat daarin geen energie aanwezig is voor  $f > f_{\text{Nyq}}$ , b.v. door middel van geschikt te kiezen parameters van de meetsensoren, of door middel van filteringen van het meetsignaal (voorafgaand aan de bemonstering!). Omgekeerd kan het zijn dat we weten, op grond van vóórkennis van het bemeten verschijnsel, gecombineerd met kennis van de frekwentiekarakteristieken van het meetsysteem, dat er in het continue signaal geen of slechts een verwaarloosbare energie is in frekwenties hoger dan een grenswaarde  $f_g$ . Dan moeten we  $\Delta t$  zó kiezen dat  $f_{\text{Nyq}} \geq f_g$ , ofwel zó dat

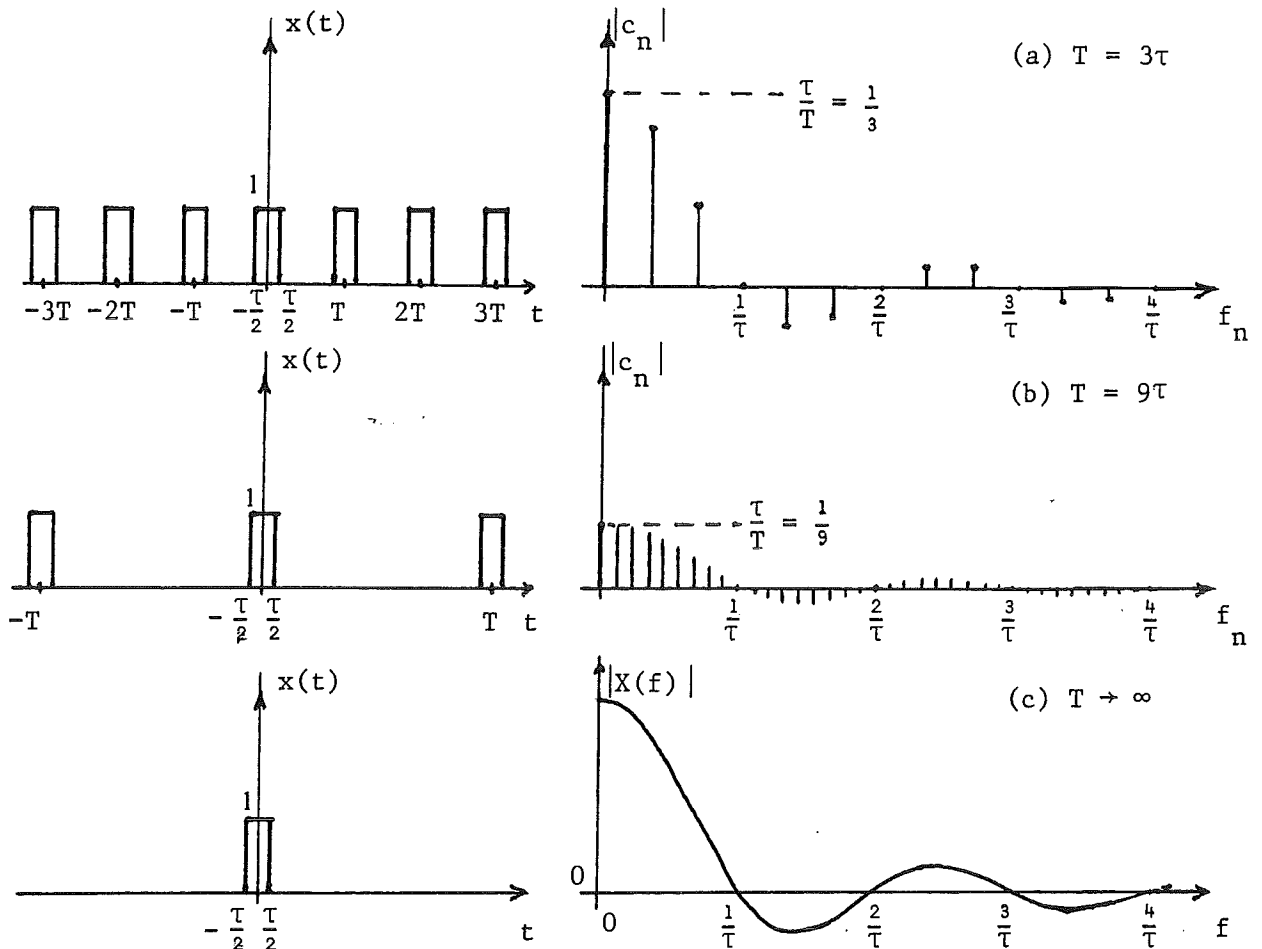
$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_g} \tag{4.12}$$

Door Cooley en Tukey is in 1965 een algoritme gepubliceerd waarmee op efficiënte wijze de Fourier-coëfficiënten ( $c_n$ ) kunnen worden berekend uit een tijdreeks, vooral als het aantal punten daarin een gehele macht van 2 is. T.o.v. de conventionele aanpak (een recht-toe-recht-aan numerieke integratie in 4.3) betekent dit een besparing in rekentijd met een factor van ca  $2M/2 \log M$ . Voor  $M = 2048 = 2^{11}$  (een voor metingen op zee veel gebruikt aantal - zie par. 4.4.5) is dit een factor van ca 400. Het algoritme van Cooley en Tukey heeft de toepasselijke naam gekregen van *Fast Fourier Transform*, afgekort FFT. Het wordt tegenwoordig vrijwel universeel gebruikt in digitale berekening van spectra (en zelfs van correlatiefuncties). Op de structuur en werking van het FFT-algoritme gaan wij hier niet in. Voor details daaromtrent wordt verwezen naar Bendat en Piersol (1971) of Brigham (1974).

#### 4.3. De Fourier-integraal

Een functie  $x(t)$  die gedefinieerd is op een oneindig interval,  $t \in (-\infty, \infty)$ , maar die niet periodiek is, heeft geen Fourierreeks. Toch is het vaak wenselijk om ook dergelijke functies op een bepaalde manier in harmonische componenten te ontleden. Dit kan, onder zekere voorwaarden, d.m.v. de Fourier-integraal. Het kan plausibel worden gemaakt door de limiet te beschouwen voor  $T \rightarrow \infty$  van de Fourierreeks-ontwikkeling van  $x(t)$  op het interval  $t \in (-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T)$

We nemen als voorbeeld de in (4.6) gegeven periodieke blokfunctie. Het spectrum ervan is in figuur 4.4 nog eens geschetst (voor positieve frequenties), voor de gevallen  $T = 3\tau$  (figuur a) en  $T = 9\tau$  (figuur b). De onderlinge afstanden ( $\delta f = 1/T$ ) van de frequenties ( $f_n$ ) en de waarden van de bijbehorende Fourier-amplituden ( $|c_n|$ ) nemen beide omgekeerd evenredig af met  $T$ . In de limiet  $T \rightarrow \infty$  gaan beide naar nul; d.w.z. de frequenties worden continu, en de verhouding van  $c_n$  tot  $\delta f$  nadert tot een eindige waarde.



Figuur 4.4

We kunnen het voorgaande mathematisch weergeven door (4.3) te herschrijven tot

$$\frac{c_n}{\delta f} = \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt, \quad f_n \in (0, +\frac{1}{T}, +\frac{2}{T}, \dots) \quad (4.13)$$

en het gedrag hiervan te beschouwen als  $T \rightarrow \infty$ . In het voorbeeld bleek het linkerlid, en dus ook de integraal, naar een limietwaarde te gaan als  $T \rightarrow \infty$ . Deze limiet is bij gegeven  $x(t)$  een functie van de (in de limiet continu geworden) frekwentie  $f$ . We noemen hem de *Fourier-integraal* ofwel de *Fourier-transform* van  $x(t)$ , hier aangeduid met  $X(f)$  :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt, \quad f \in (-\infty, \infty) \quad (4.14a)$$

Dezelfde limietovergang in (4.2) leidt dan tot de z.g. *inverse Fourier-*

transform:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad (4.14b)$$

Voor de blokfunctie, gedefinieerd op  $t \in (-\infty, \infty)$  volgens

$$\begin{aligned} x(t) &= 1, \quad |t| \leq \frac{1}{2}\tau \\ &= 0 \quad \text{overigens} \end{aligned} \quad (4.15)$$

geldt

$$X(f) = \int_{-\frac{1}{2}\tau}^{\frac{1}{2}\tau} e^{-i2\pi ft} dt = \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f} \quad (4.16)$$

zoals ook onmiddellijk volgt uit (4.7) en bovenstaande redenering. Hij is geschetst in figuur 4.4c.

Een voldoende voorwaarde voor het bestaan van de Fourier-integraal is dat  $x(t)$  absoluut integreerbaar is, d.w.z. dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$$

bestaat. Functies die slechts op een eindig deel-interval van nul verschillen, dan wel voldoende snel tot nul naderen als  $|t| \rightarrow \infty$ , hebben dus een Fourier-transform.

#### 4.4. Fourier-analyse van een stationair stochastisch proces

##### 4.4.1. Inleiding

Bij de toepassing van de klassieke Fourier-analyse op stationaire stochastische processen stuiten we op moeilijkheden.

Stel dat we een willekeurige, oneindig lange realisatie op de een of andere manier aan een spectrale analyse zouden willen onderwerpen, zou dat kunnen? De realisaties zijn in normale gevallen niet periodiek, en kunnen daarom niet in een Fourier-reeks worden ontwikkeld. Zij zijn ook niet absoluut integreerbaar omdat zij, als realisaties van een stationair proces, in normale gevallen blijven doorslingeren, ook voor  $|t| \rightarrow \infty$ ; zij hebben dus niet een Fourier-getransformeerde in klassieke zin.

Afgezien van deze problemen is de vraag gewettigd of we een soort analyse zoals boven omschreven wel moeten *willen*. De analyse moet gericht zijn op elementen die kenmerkend zijn voor het stochastische proces als geheel; de details van een individuele realisatie zijn daarbij niet interessant. Maar een analyse zoals door middel van een Fourier-reeks of een Fourier-transformatie (gesteld dat zou zijn voldaan aan de formele voorwaarden voor het bestaan daarvan) geeft elk detail van de te analyseren functie volledig gewicht, en de oorspronkelijke functie is daarbij ook volledig uit zijn spectrum te berekenen. Een dergelijke analyse is hier dus niet geschikt, in tegenstelling tot de situatie bij de analyse van deterministisch te beschrijven verschijnselen zoals getijden.

Een uitweg uit de gesignaleerde problemen is mogelijk via de autocovariantiefunctie  $C_{xx}(\tau)$  van het proces. Zoals gezegd gaat de waarde hiervan naar nul voor  $\tau \rightarrow \infty$ , als het proces geen discrete sinuscomponenten bevat. We kunnen  $C_{xx}(\tau)$  dan dus Fourier-transformeren. Bovendien is  $C_{xx}(\tau)$  representatief voor het gehele proces  $\{x_t\}$ , en niet slechts voor een enkele realisatie. Samengevat kunnen we zeggen dat een dergelijke transformatie niet alleen mogelijk is maar ook zinvol.

#### 4.4.2. Definitie variantiedichtheidsspectrum

Gezien het voorgaande beschouwen we nu de Fourier-getransformeerde van de autocovariantiefunctie  $C_{xx}(\tau)$  van een stationair stochastisch proces  $\{x_t\}$ , aangeduid met  $\tilde{E}_{xx}(f)$  :

$$\tilde{E}_{xx}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \quad f \in (-\infty, \infty) \quad (4.17a)$$

Omdat  $C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau)$  geldt ook

$$\tilde{E}_{xx}(f) = 2 \int_0^{\infty} C_{xx}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (4.17b)$$

De inverse relatie van (4.17) is

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{xx}(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (4.18a)$$

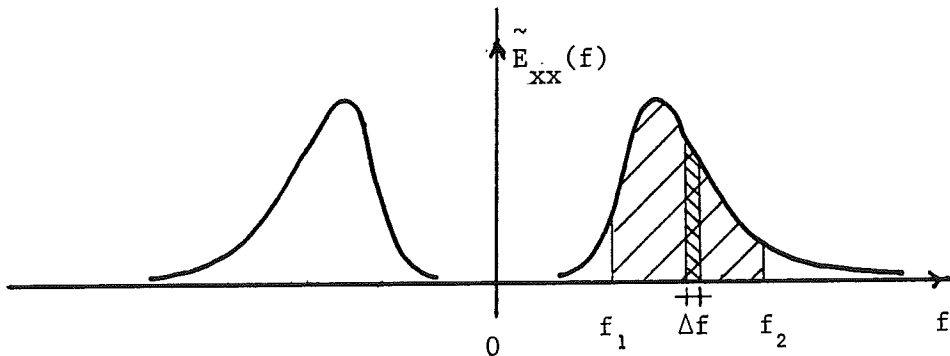
ofwel, omdat  $\tilde{E}_{xx}(f) = \tilde{E}_{xx}(-f)$ , zoals volgt uit (4.17b):

$$C_{xx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \tilde{E}_{xx}(f) \cos(2\pi f\tau) df \quad (4.18b)$$

Stellen we  $\tau = 0$  in (4.18) dan volgt

$$C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{xx}(f) df \quad (4.19)$$

$C_{xx}(0)$  stelt de variantie voor van  $\underline{x}_t$ , zodat (4.19) betekent dat de integraal van  $\tilde{E}_{xx}(f)$  over alle frekwenties gelijk is aan die variantie. Men kan iets verder gaan en bewijzen dat de integraal van  $\tilde{E}_{xx}(f)$  over een willekeurig frekwentie-interval  $(f_1, f_2)$  gelijk is aan de bijdrage, geleverd aan de variantie van  $\{\underline{x}_t\}$ , door die spectrale componenten waarvan de frekwenties in dat interval  $(f_1, f_2)$  liggen. Een frekwentiebandje



Figuur 4.5

met infinitesimale breedte  $\Delta f$  levert een bijdrage aan de variantie van  $\underline{x}_t$  gegeven door

$$\Delta(\text{var } \underline{x}_t) = \int_{\Delta f} \tilde{E}_{xx}(f) df \approx \tilde{E}_{xx}(f) \Delta f \quad (4.20a)$$

zodat  $\tilde{E}_{xx}(f)$  geïnterpreteerd kan worden als de bijdrage aan de variantie van  $\underline{x}_t$  per eenheid van frekwentie. M.a.w.,  $\tilde{E}_{xx}(f)$  is een *variantiedichtheid* in de frekwentie-ruimte (d.i. langs de frekwentie-as). De dimensie van  $\tilde{E}_{xx}(f)$  is dus  $[x^2]/[f]$ ; als  $x$  een uitwijking is, uitgedrukt in m, en  $f$  wordt uitgedrukt in Hz, dan heeft de bijbehorende variantiedichtheid de eenheid  $m^2/\text{Hz}$  (ook wel aangeduid als  $m^2 s$ , maar daarmee wordt de betekenis ervan niet goed weergegeven). De verzameling van waarden van  $\tilde{E}_{xx}(f)$ , voor  $f \in (-\infty, \infty)$ , heet het *variantiedichtheidsspectrum*, kortweg ook wel variantiespectrum genoemd. Per definitie is dit dus de Fourier-getransformeerde van de autocovariantiefunctie.

Als we uitgaan van het 1-dimensionale random-phase model (3.19), en de limiet daarvan beschouwen voor continu verdeelde frekwenties, geldt

$$\sum_{f_i=f}^{f+\Delta f} \frac{1}{2} a_i^2 \rightarrow E_{xx}(f) \Delta f \quad (f \geq 0) \quad (4.20b)$$

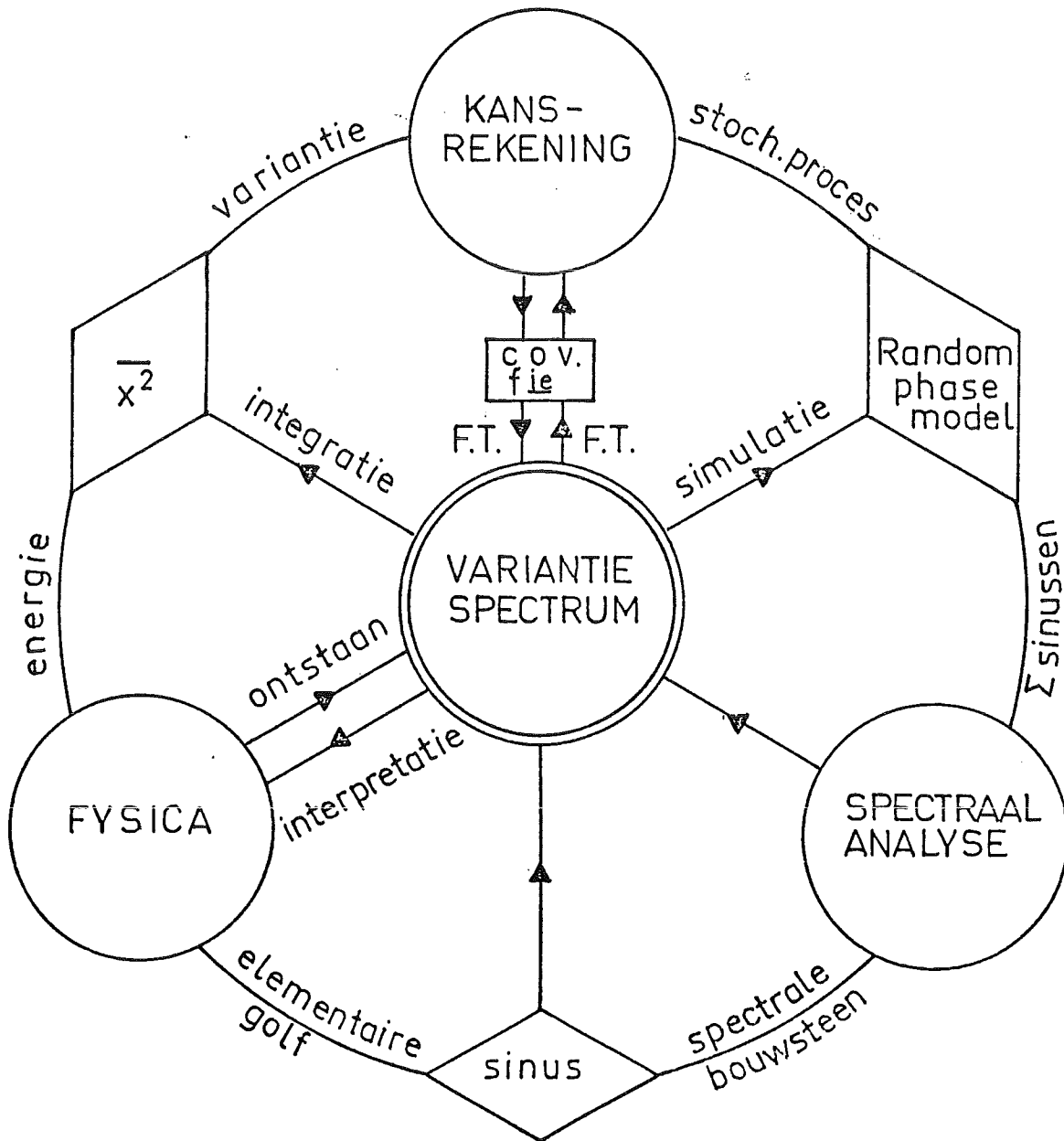
waarbij  $E_{xx}(f) = 2 \tilde{E}_{xx}(f)$  voor  $f > 0$  (zie ook 4.22). Merk echter op dat het variantiespectrum bestaat (is gedefinieerd) onafhankelijk van de vraag of het beschouwde proces door een random-phase model is weer te geven. Verder is te zien dat het variantiespectrum bepaald wordt door de amplituden van de spectrale componenten. Hun onderlinge fase-relaties komen er niet in tot uiting.

#### 4.4.3. Betekenis variantiedichtheidsspectrum

Het variantiedichtheidsspectrum speelt een centrale rol in de behandeling van stochastische processen, zoals in het volgende zal worden uiteengezet



vanuit verschillende invalshoeken. Voor een schematisch overzicht wordt verwezen naar figuur 4.6.

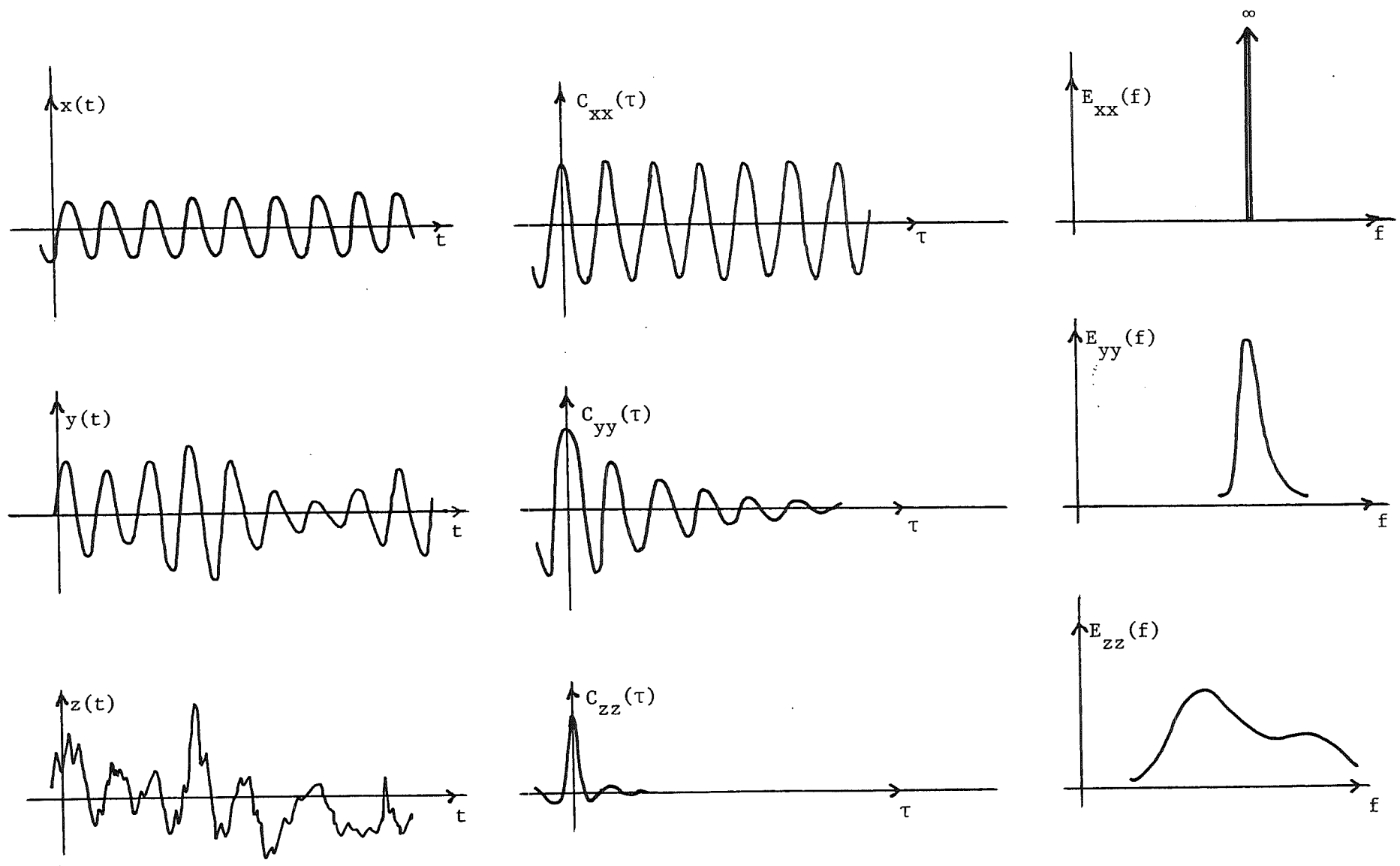


Figuur 4.6

Uit het oogpunt van de statistische beschrijving van een stochastisch proces wordt opgemerkt dat het variantiedichtheidsspectrum en de autocovariantiefunctie dezelfde informatie bevatten, omdat voor beide geldt dat zij uit de ander zijn te berekenen (door Fourier-transformatie). In hoofdstuk 3 is gewezen op het belang van de autocovariantiefunctie voor de statistische beschrijving van een proces. Datzelfde belang heeft het variantiespectrum dus ook. In het bijzonder geldt dat het spectrum van een stationair Gaussisch proces alle informatie bevat die nodig is voor de statistische beschrijving van dat proces (afgezien van de gemiddelde waarde, die meestal willekeurig kan worden gekozen en dan gelijk aan nul wordt gemaakt). Hiervan wordt o.m. gebruik gemaakt in simulaties, hetzij in fysische (schaal)modellen, hetzij numeriek. In beide gevallen kan men een Gaussisch proces met gegeven variantiespectrum simuleren met het z.g. random-phase model, door een groot aantal sinuscomponenten op te tellen, elk met een amplitude bepaald door het spectrum, en met onafhankelijke, stochastische fasen overeenkomstig (3.13).

Voor een drietal processen is in fig. 4.7 op kwalitatieve manier weergegeven hoe de gedaanten van de realisaties, van de autocovariantiefunctie en van het spectrum samenhangen. Naarmate het spectrum smaller is blijft de autocovariantiefunctie langer doorslingeren met toenemende  $\tau$ , en hebben de realisaties meer en meer de gedaante van een langzaam gemoduleerde sinusfunctie.

Hoewel uit het oogpunt van de informatie-inhoud het variantiespectrum en de autocovariantiefunctie formeel gelijkwaardig zijn, is het gebruik van de spectrale presentatie van die informatie te verkieszen, omdat die meer inzicht verschaft in de structuur van het betreffende proces, en omdat daarmee ook gemakkelijker is te rekenen, o.a. voor bepaling van de invloeden van het proces (b.v. windgolven) op iets anders (b.v. een boorplatform). Beide voordelen vloeien voort uit het feit dat in de spectrale presentatie de informatie is uiteengerafeld, d.w.z. is verdeeld in elkaar niet-overlappende bijdragen. In dit verband mag worden verwezen naar het random-phase model (par.3.7). Voor elke waarde van  $\tau$  bestaat de autocovariantie daarvan uit een som van bijdragen (zie vgl. (3.21)). Het spectrum daarentegen geeft directe informatie over bijdragen aan de variantie afzonderlijk, per



Figuur 4.7

frekwentie-interval. M.a.w., het geeft een direct inzicht in de opbouw van het proces, en daardoor vaak ook in het ontstaan ervan.

Bij fysische processen wordt aan bovengenoemde statistische en spectrale benaderingen en interpretaties een dimensie toegevoegd. Daarbij krijgt de variantie n.l. een toegevoegde betekenis van energie, en de spectrale ontleding daarvan in bijdragen van sinus-componenten krijgt extra betekenis omdat een sinus in veel gevallen een elementaire vorm is van trillingen of golven in een fysisch systeem die ook zelfstandig kan bestaan. Bij spectrale analyse van economische tijdreeksen b.v. is iets dergelijks niet zo duidelijk.

Om de relatie tussen variantie en energie voor een specifiek geval te geven beschouwen we de oppervlakte-uitwijking uit de middenstand in windgolven ( $\eta$ ). Als we de gemiddelde potentiële energie per eenheid van oppervlakte aanduiden met  $E_p$  (dus  $[E_p] = \text{J/m}^2$ ) dan geldt

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g \overline{\eta^2} = \frac{1}{2} \rho g \text{var}(\underline{\eta}) \quad (4.21)$$

De nauwe relatie tussen variantie en energie bij fysische systemen heeft ertoe geleid dat de naam "variantie" veelvuldig door "energie" is vervangen. Zo spreekt men in de praktijk b.v. meestal over het "energiespectrum" waar het gaat om de functie die hier "variantie(dichtheids)spectrum" is genoemd.

#### 4.4.4. Alternatieve formuleringen

Het variantiedichtheidsspectrum kan anders worden gedefinieerd dan hier is gedaan; de mogelijke verschillen hebben betrekking op

- (a) de te transformeren functie
- (b) het frekwentie-interval waarop het spectrum is gedefinieerd;
- (c) evenredigheidscoëfficiënten
- (d) de maat die voor frekwentie wordt gebruikt.

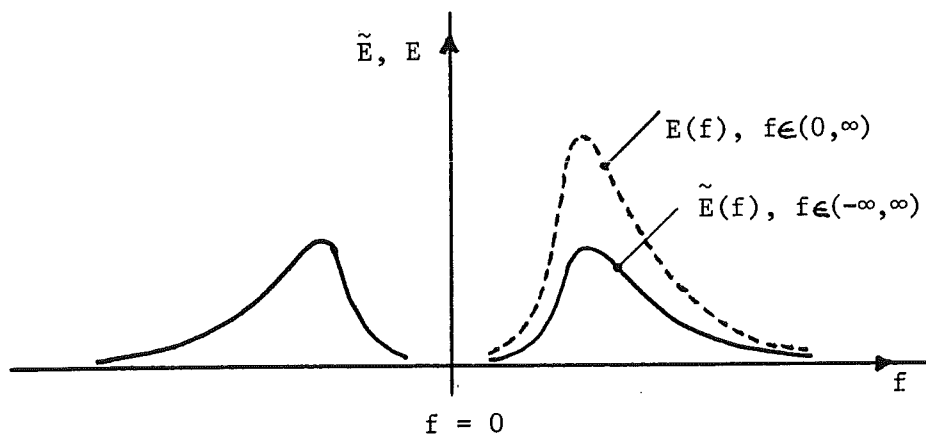
ad(a). Het spectrum wordt ook wel gedefinieerd als de Fourier-getransformeerde van  $E\{\underline{x}_t \underline{x}_{t+\tau}^T\}$ , welke functie van  $C_{xx}(\tau)$  verschilt met een waarde gelijk aan  $\mu^2$ , waarin  $\mu \equiv E\{\underline{x}_t\}$ , de gemiddelde waarde van het proces. Omdat in de praktijk toch vrijwel altijd  $\mu = 0$  wordt gemaakt, door een geschikte keuze van het referentieniveau, is dit verschil in definitie een formaliteit zonder praktische consequenties.

ad(b). De variantiedichtheid is een even functie van de frekwentie. Dit volgt uit vgl. (4.17b). Daarom wordt in de praktijk meestal volstaan met een spectrum dat slechts voor positieve frekwenties is gedefinieerd, maar dan wel zodanig dat de integraal ervan van  $f = 0$  tot  $f = \infty$  gelijk is aan de variantie. Duiden we dit éézijdig gedefinieerde spectrum aan met  $E(f)$  dan geldt

$$E(f) = 2 \tilde{E}(f) , f \in (0, \infty) \quad (4.22)$$

zodat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{xx}(f) df = \int_0^{\infty} E_{xx}(f) df = \text{var}(\underline{x}_t) \quad (4.23)$$



Figuur 4.8

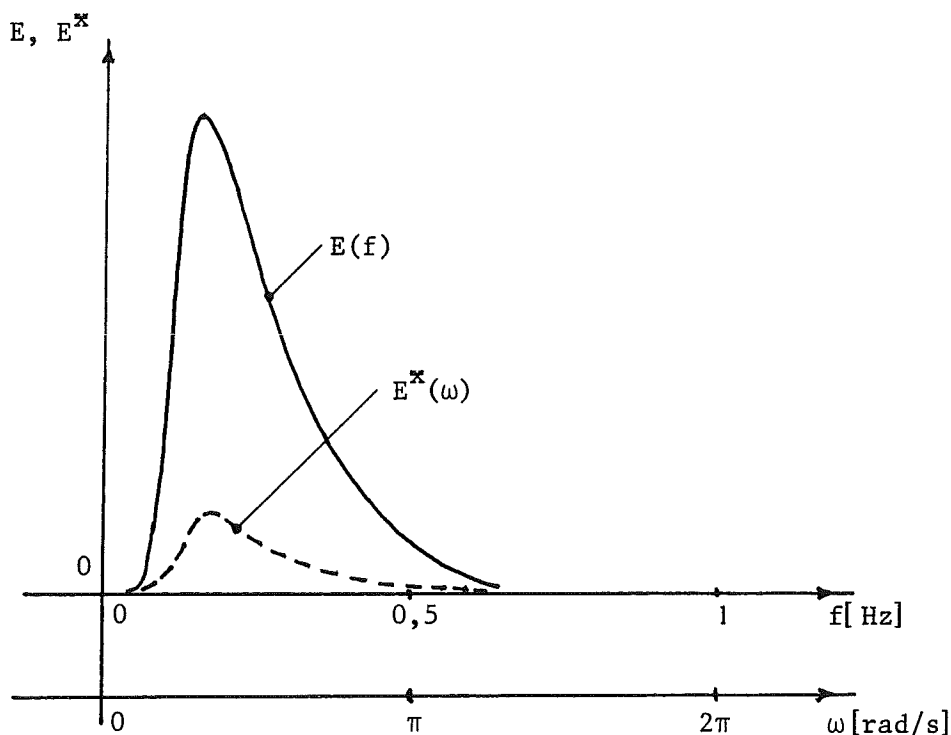
ad(c). Definities met andere coëfficiënten dan de hier genoemde zijn ook mogelijk, zodanig dat de integraal van het spectrum over het hele interval waarop het gedefinieerd is, niet gelijk is aan de variantie, maar b.v. een factor 2 groter.

ad(d). In het bovenstaande is het aantal cycli per tijdseenheid gebruikt als maat voor de frekwentie ( $f$ ). Het is ook mogelijk om te werken met de hoekfrekwentie (b.v.  $\omega = 2\pi f$ ). Bij de transformatie van het ene spectrum in het andere moet de bijdrage aan de variantie in overeenkomstige deelintervallen dezelfde waarde hebben:

$$\int_{f_1}^{f_2} E(f) df = \int_{\omega_1=2\pi f_1}^{\omega_2=2\pi f_2} E^{\times}(\omega) d\omega, \quad (4.24)$$

waaruit volgt

$$E^{\times}(\omega) = \frac{df}{d\omega} E(f) = \frac{1}{2\pi} E(f) \text{ voor } f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (4.25)$$



Figuur 4.9

Moraal: Gezien bovengenoemde mogelijke verschillen is het zaak om per geval na te gaan hoe e.e.a. is gedefinieerd.

#### 4.4.5. Schatting van het spectrum uit metingen

In deze paragraaf wordt ingegaan op de schatting van het variantiedichtheidsspectrum uit metingen, door middel van berekeningen. Andere technieken blijven buiten beschouwing.

Vooraf wordt opgemerkt dat het variantiedichtheidsspectrum een gedetailleerde beschrijving geeft van een stochastisch proces. Dit is gunstig uit het oogpunt van bruikbaarheid, maar de keerzijde van die medaille is dat het schatten van het spectrum uit een steekproef met beperkte informatie al gauw tot onzuivere of onbetrouwbare uitkomsten kan leiden. Dit aspect vraagt daarom veel aandacht bij het opzetten van het systeem van meten en verwerken, en bij de interpretatie van de uitkomsten.

De meetsituatie wijkt op een aantal punten af van de veronderstellingen die tot dusver zijn gehanteerd. Hier worden de volgende genoemd:

- (a) eindige meetduur
- (b) eindig aantal realisaties (bij natuurmetingen vaak slechts één)
- (c) discrete tijden i.p.v. continue registratie (bij digitale systemen)

De gevolgen hiervan kunnen globaal als volgt worden aangeduid:

ad(a) : beperkt scheidend vermogen (d.w.z. er is een ondergrens aan de afstand tussen twee frekwenties die nog van elkaar kunnen worden onderscheiden).

ad(b) : beperkte statistische betrouwbaarheid (steekproef variabiliteit in de uitkomsten).

ad(c) : (1) : beperkt frekwentiebereik ( $f_{\text{Nyq}}$  : bovengrens aan de frekwenties waarvoor de spectrale dichtheden nog kunnen worden geschat);

(2) : mogelijkheid van systematische fouten binnen het bereik genoemd onder (1) (stroboscoop effect).

Voor een bespreking van de gevolgen van (c) wordt verwezen naar par. 4.2. Wij gaan hier slechts in op die van (a) en (b).

De diverse methoden die in gebruik zijn voor berekening van het spectrum uit een registratie zijn in twee hoofdgroepen onder te brengen:

- . berekening via de autocovariantiefunctie
- .. berekening via directe Fouriertransformatie van de registratie.

De eerstgenoemde methode is in de jaren '50 en '60 vrijwel uitsluitend gebruikt, volgens het recept dat daarvoor door Tukey (1949) en later door Blackman en Tukey (1958) is gegeven. Omstreeks 1970 is hierin verandering gekomen door de ontdekking van de Fast Fourier Transform. De grote flexibiliteit en de sterke besparing aan rekentijd die hiermee worden bereikt in vergelijking met de klassieke aanpak heeft ertoe geleid dat nu vrijwel uitsluitend de tweede methode wordt gebruikt. In het volgende zal daarom ook slechts daarop worden ingegaan. Eerst worden enkele resultaten geponeerd aangaande de Fourierreeksontwikkeling van een Gaussisch proces in het algemeen. Daarna zullen bovengenoemde punten (a) en (b) achtereenvolgens worden besproken.

#### Fourierreeksontwikkeling van realisaties van een stationair Gaussisch proces

Stel dat  $\{x_t\}$  een stationair stochastisch proces is, met variantiedichtheidsspectrum  $\tilde{E}_{xx}(f)$ , en dat van  $\{x_t\}$  realisaties (steekproeven)  $x^k(t)$  beschikbaar zijn ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) voor een interval  $t \in (-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T)$ . Elk van die realisaties kan overeenkomstig (4.3) in een Fourierreeks worden ontwikkeld, met coëfficiënten  $c_n^k$ . De waarde van een coëfficiënt bij vaste  $n$  (vaste frekwentie) zal op onvoorspelbare wijze variëren van realisatie tot realisatie (d.w.z. voor verschillende waarden van  $k$ ). Elke coëfficiënt  $c_n$  (bij vaste  $n$ ) wordt daarom als een stochastische variabele beschouwd, geschreven als  $c_n$ . Beschouwen we een aantal frekwenties tegelijk dan is er sprake van een aantal stochastische Fourierreekscoëfficiënten  $c_1, c_2, \dots$ , met een gezamenlijke kansdichtheidsfunctie. Als  $\{x_t\}$  Gaussisch is, dan is te bewijzen:

- (1)  $c_1, c_2, \dots$  (d.w.z.  $Re\ c_1, Im\ c_1, Re\ c_2, Im\ c_2, \dots$ ) zijn samengesteld Gaussisch verdeeld (lineaire combinatie van samengesteld Gaussisch verdeelde variabelen  $x_t$ ).
- (2) de correlatie tussen  $c_n$  en  $c_m$  voor  $m \neq n$  nadert tot nul als  $T \rightarrow \infty$ .



(M.a.w.: voor voldoende grote T zijn de verschillende coëfficiënten als stochastisch onafhankelijk te beschouwen, gezien ook punt (1).)

(3)  $|\underline{c}_n|^2$  heeft een exponentiële kansdichtheidsfunctie, en een verwachtingswaarde waarvoor bij benadering (voor voldoende grote T) geldt

$$(4) \quad E\{|\underline{c}_n|^2\} \approx \int_{f_n - \frac{1}{2} \delta f}^{f_n + \frac{1}{2} \delta f} \tilde{E}_{xx}(f) df \quad (\text{waarin } \delta f = \frac{1}{T}) \quad (4.26)$$

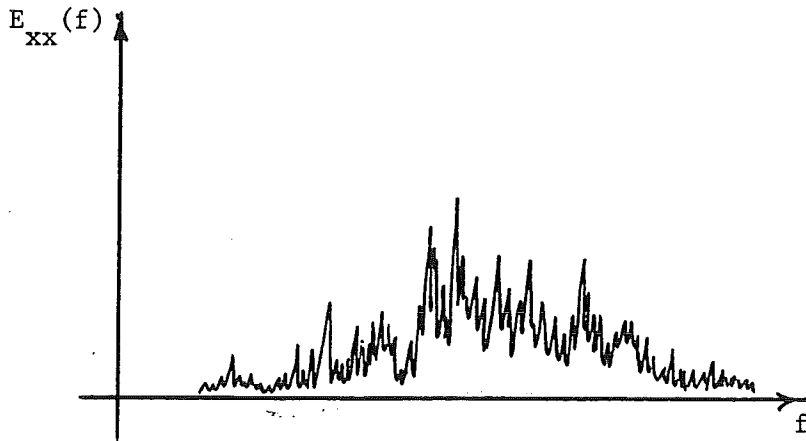
Deze uitkomsten worden gebruikt bij de hiernavolgende bespreking van bovengenoemde beperkingen (a) en (b).

ad(a): eindige meetduur

Uit (4.26) volgt dat niet de spectrale dichtheden zelf kunnen worden geschat, maar slechts een integraal daarvan, en wel bij benadering een integraal over een frekwentiebandje ter breedte  $\delta f = 1/T$ . Details in het spectrum binnen zo'n bandje zijn dus niet te onderkennen. We zeggen dat het scheidend vermogen is beperkt tot  $1/T$ . (In de praktijk wordt het scheidend vermogen vaak nog aanzienlijk minder - zie punt (b) hieronder.) Het kan slechts worden verhoogd door een langere meetduur te kiezen. Daarmee wordt echter het gevaar vergroot dat niet-stationariteit een rol gaat spelen, waardoor het scheidend vermogen weer vermindert. Hierin moet een compromis worden getroffen. Voor metingen van windgolven op zee wordt in het algemeen een meetduur gebruikt van 15 min à 30 min.

ad(b): één realisatie

Uit één realisatie krijgen we per frekwentie  $f_n$ , op onderlinge afstanden  $\delta f = 1/T$ , één steekproef van  $|\underline{c}_n|^2$ . Dit zou eventueel te gebruiken zijn als schatting van  $E\{|\underline{c}_n|^2\}$ , als de spreiding van  $|\underline{c}_n|^2$  klein zou zijn t.o.v.  $E\{|\underline{c}_n|^2\}$ . Maar dit is juist niet het geval, aangezien  $|\underline{c}_n|^2$  exponentieel verdeeld is, wat inhoudt dat zijn standaardafwijking even groot is als zijn verwachtingswaarde. Dus een individuele steekproef van  $|\underline{c}_n|^2$  zou een schatting van  $E\{|\underline{c}_n|^2\}$  opleveren van een onbruikbaar geringe betrouwbaarheid. Wanneer hiermee geen rekening wordt gehouden ziet het geschatte spectrum er uit als "gras" (figuur 4.10).



Figuur 4.10

We moeten die betrouwbaarheid dus verhogen. Dit kan alleen ten koste van het scheidend vermogen. De methoden die hiervoor in de praktijk worden gebruikt kunnen intwee groepen worden ingedeeld, afgezien van verschillen in allerlei details, waarop hier niet wordt ingegaan.

In de ene groep van methoden wordt de gehele realisatie, met duur  $T$ , in een Fourierreeks ontwikkeld. Vervolgens wordt de frekwentie-as verdeeld in intervallen, met breedte  $\Delta f = p \delta f = p/T$ , die elk een aantal ( $p$ ) elementaire frekwenties  $f_n$  bevatten. (In de praktijk is  $p$  meestal 10 à 30.) Voor elk van de nieuwe frekwentie-intervallen worden de steekproefwaarden van  $|c_n|^2$  gesommeerd over de  $p$  waarden van  $n$  op dat interval. Dit levert een schatting op van  $\int_{\Delta f} \tilde{E}_{xx}(f) df$ . De betrouwbaarheid van deze schatting is ca  $p^{\frac{1}{2}}$  groter (relatieve variabiliteit ca  $p^{\frac{1}{2}}$  kleiner) dan de betrouwbaarheid van elk van de  $|c_n|^2$  afzonderlijk als schatting van  $\int_{\delta f} \tilde{E}_{xx}(f) df$ , omdat de variabelen  $|c_n|^2$  voor verschillende  $n$  vrijwel onafhankelijk zijn. Vanzelfsprekend is deze winst aan betrouwbaarheid (met een factor  $p^{\frac{1}{2}}$ ) verkregen ten koste van scheidend vermogen ( $\Delta f$  i.p.v.  $\delta f$ , ofwel een verslechtering met een factor  $p$ ).

De tweede groep van methoden heeft als kenmerk dat de beschikbare realisatie wordt opgedeeld in een aantal kortere realisaties, zeg  $p$  in totaal (b.v.  $p = 10$  à  $30$ ), elk met een duur  $T/p$ . Deze deel-realisaties worden elk in een Fourierreeks ontwikkeld. Per deel-realisatie resulteert dit in steekproefwaarden van  $|c_n|^2$  op onderlinge afstand  $\Delta f = (T/p)^{-1} = p/T = p \delta f$ .

Door bij vaste  $n$  deze  $p$  waarden te middelen wordt een meer betrouwbare schatting verkregen van  $E\{|c_n|^2\}$ , en daarmee van  $\int \tilde{E}_{xx}(f)df$ , naarmate  $p$  groter is. Al te groot zal men het aantal deelrealisaties echter niet kunnen maken, omdat dan het scheidend vermogen teveel reduceert. Hierin zal steeds een compromis moeten worden getroffen.

N.B. In het voorgaande is verondersteld dat de deelreeksen onafhankelijk zijn van elkaar, waarvoor het nodig is dat hun duur ( $T/p$ ) zo groot is dat de waarde van de autocorrelatiefunctie bij die waarde van  $\tau$  al onbetekend is.

Zoals hierboven opgemerkt, is  $|c_n|^2$  exponentieel verdeeld, voor elke  $n$ . De vraag rijst nu wat de verdeling is van de som van  $p$  onafhankelijke grootheden  $|c_n|^2$ , aannemende dat die dezelfde verwachtingswaarde hebben. Die som is een som van de kwadraten van  $2p$  onafhankelijke, Gaussisch verdeelde grootheden ( $Im c_n$  en  $Re c_n$ ) met gemiddelde nul en met dezelfde variantie. Een dergelijke som heeft een verdeling van het type  $\chi^2$  met  $2p$  vrijheidsgraden (zie College Toegepaste Statistiek). De verhouding van de standaardafwijking van de som tot de verwachtingswaarde van de som is gelijk aan  $p^{-\frac{1}{2}}$ . Een meer gedetailleerde uitspraak over de te verwachten steekproefvariabiliteit in de schattingen van het spectrum, b.v. in termen van betrouwbaarheidsintervallen, kan worden verkregen d.m.v. tabellen van de  $\chi^2$ -verdeling (zie Handleiding "Elementaire Statistiek" van ir. J. van Soest, Hoofdstuk "Toetsen voor varianties"); zie hiervoor het volgende voorbeeld.

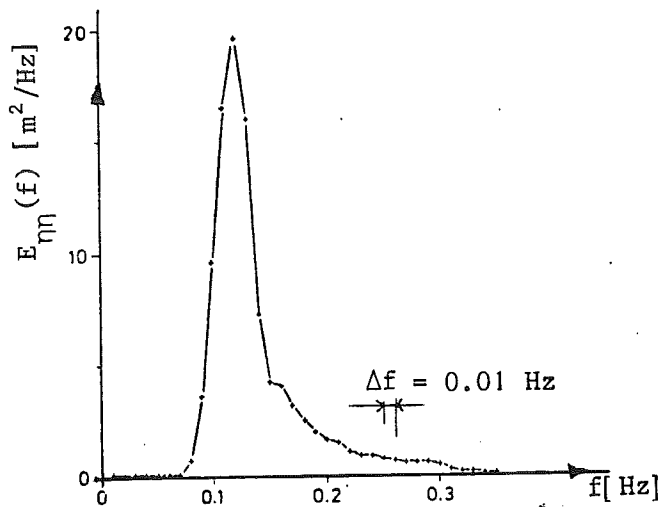
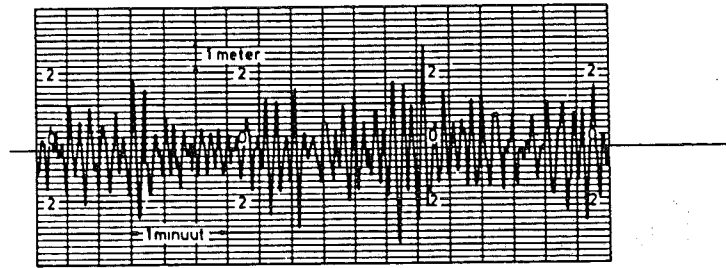
#### Voorbeeld

Het hier gegeven voorbeeld is realistisch voor een meting op zee, b.v. de Noordzee.

We gaan uit van een registratie van de verticale uitwijking van het zeeoppervlak, verkregen d.m.v. een drijvende boei. Gezien de omvang en de massa van de boei geeft deze nog slechts een geringe respons voor  $f > 1$  Hz. Bovendien is het energie-niveau in zeegolven in frekwenties hoger dan ca 1 Hz op zich al relatief laag, als gevolg van de beperkte steilheid

van de golven en het korter worden van de golven naarmate de frekwentie hoger is. We stellen daarom  $f_g = 1$  Hz. We kunnen de Nyquist frekwentie hieraan gelijkmaken door het bemonsteringsinterval vast te stellen op  $\Delta t = 1/(2f_g) = 0.5$  s. Een daarbij veel gebruikte meetduur is  $T \approx 1024$  s, ofwel ruim 17 min, overeenkomend met  $2^{11} = 2048$  meetwaarden. (FFT procedures zijn het meest efficiënt als het aantal punten in de meetreeks een gehele macht van 2 is.) Het bijbehorende scheidend vermogen is  $\delta f = 1/T \approx 10^{-3}$  Hz. Zonder middeling zou dit een groot aantal ( $M/2 \approx 10^3$ ) onafhankelijke spectrale schattingen opleveren, elk met slechts 2 vrijheidsgraden. Stel dat we door middeling het aantal vrijheidsgraden verhogen met een factor  $p = 10$ . Dit geeft  $M/p \approx 100$  onafhankelijke schattingen van het spectrum, elk met  $2p = 20$  vrijheidsgraden, op afstanden  $\Delta f = p \delta f \approx 10^{-2}$  Hz. Deze bandbreedte is ca 10% van de frekwentie  $f \approx 0.1$  Hz, die kenmerkend is voor deining in de Noordzee. (Frekwenties van 0.10 Hz en 0.11 Hz nog juist te scheiden, ofwel perioden van 10 s en 9 s.) Bij 20 vrijheidsgraden is de verwachte relatieve variabiliteit in de schatting  $(1/p)^{1/2} = 0.1^{1/2} \approx 0.3$ , hetgeen nog vrij aanzienlijk is. Een meer kwantitatieve uitspraak kan worden bereikt m.b.v. de tabel "Rechter-kritieke waarden van de chi-kwadrat-verdeling" uit de college handleiding "Elementaire Statistiek", met als resultaat dat voor 20 vrijheidsgraden, het 90%-betrouwbaarheidsinterval een ondergrens resp. bovengrens heeft (met 95% resp. 5% overschrijding) van 10.9 resp. 31.4, ofwel ca 0.55 resp. 1.57 keer de verwachtingswaarde (die gelijk is aan  $2p = 20$ ). De overeenkomstige waarden voor 2 vrijheidsgraden ( $p = 1$ , geen middeling) zijn  $0.103/2 \approx 0.05$  resp.  $5.99/2 \approx 3.00$ , hetgeen de noodzaak van middeling nog eens onderstreept. (Opm.: laatstgenoemde waarden volgen ook direct uit het feit dat  $|\underline{c}_n|^2$  exponentieel verdeeld is, waardoor de ondergrens volgt uit  $e^{-x_1} = 0.95$ , ofwel  $x_1 \approx 0.05$ , en de bovengrens uit  $e^{-x_2} = 0.05$ , ofwel  $x_2 \approx 3.00$ .)

Een voorbeeld van een deelregistratie (6 min) van de oppervlakteuitwijking in zeeegang (waterdiepte 26 m, windsnelheid  $19.5 \text{ ms}^{-1}$ ,  $H_s = 4.0$  m,  $T_s = 6.5$  s) en van een schatting van het bijbehorende spectrum is gegeven in figuur 4.11. In hoofdstuk 6 zal meer systematisch worden ingegaan op de vormen en waarden die  $E_{\eta\eta}(f)$  in windgolven kan aannemen bij verschillende omstandigheden.



Figuur 4.11 (ontleend aan Groen en Dorrestein, 1976)

#### 4.5. Twee-dimensionaal spectrum

De concepten die in het voorgaande zijn geïntroduceerd in de context van functies van de tijd alléén (of een andere enkelvoudige variabele, b.v. één ruimte-coördinaat) zijn uit te breiden tot meer dimensies. Dit is nodig voor de spectrale beschrijving van windgolven, die zowel in de tijd als in de ruimte variëren.

In hoofdstuk 3, par. 3.7.2, werd o.m. een meer-dimensionale autocovariantiefunctie gedefinieerd (3.25). Door deze niet slechts te Fourier-transformeren naar de tijdsverschuiving  $\tau$ , maar tevens naar de plaatsverschuiving  $\vec{\rho}$ , ontstaat een variantiedichtheidsspectrum dat niet slechts van de frekwentie afhangt maar tevens van de golfgetalvector  $\vec{k}$ , ofwel van  $(k, \theta)$ , waarbij  $\vec{k} = (k \cos \theta, k \sin \theta)$ . Dit spectrum is in principe 3-dimensionaal  $(f, k, \theta)$ , maar in de lineaire benadering zijn frekwentie en golfgetal  $(k)$  van elkaar afhankelijk, in welk geval het aantal onafhankelijke spectrale

variabelen reduceert tot 2. Meestal wordt het spectrum  $E_{\eta\eta}(f, \theta)$  gebruikt, met  $f \in (0, \infty)$  en  $\theta \in (-\pi, \pi)$ .

Zonder de mathematische formulering hier te geven, die analoog zou zijn aan (4.17) tot en met (4.19), wordt hier gesteld dat  $E_{\eta\eta}(f, \theta)$  de verdeling weergeeft van de variantie van  $\underline{\eta}(\vec{r}, t)$  over de frekwenties en richtingen van de spectrale componenten waaruit  $\underline{\eta}(\vec{r}, t)$  kan worden opgebouwd. M.a.w.,  $E_{\eta\eta}(f, \theta) \Delta f \Delta \theta$  is de bijdrage aan  $\text{var}(\underline{\eta})$  van componenten met frekwentie in het interval  $(f, f + \Delta f)$  en met voortplantingsrichtingen in het interval  $(\theta, \theta + \Delta \theta)$ . Als we uitgaan van het random-phase model (3.24), en de limiet daarvan beschouwen voor continu verdeelde frekwenties en richtingen, geldt, analoog aan (4.20b),

$$\sum_{\substack{f_i = f \\ \theta_j = \theta}}^{f + \Delta f} \sum_{\theta_j = \theta}^{\theta + \Delta \theta} \frac{1}{2} a_{i,j}^2 \rightarrow E_{\eta\eta}(f, \theta) \Delta f \Delta \theta \quad (4.27)$$

Als we bij vaste frekwentie alle variantie-bijdragen sommeren uit de verschillende voortplantingsrichtingen dan resulteert het één-dimensionale, frekwentie-afhankelijke spectrum:

$$E(f) = \int_{-\pi}^{\pi} E(f, \theta) d\theta \quad (4.28)$$

(Het onderschrift " $\eta\eta$ " wordt korthedshalve weggelaten.) Dit is dus een *marginale* spectrale dichtheidsfunctie van het twee-dimensionale spectrum (vergelijk met kansdichtheidsfuncties). Evenzo kunnen we bij vaste frekwentie kijken naar de verdeling van de energie over de richtingen, ofwel naar de *voorwaardelijke* dichtheid bij vaste  $f$ . Duiden we die aan met  $E(\theta|f)$  dan geldt dus (zie ook 2.30)

$$E(\theta|f) = \frac{E(f, \theta)}{E(f)} \quad (4.29)$$

zodat (per definitie)

$$\int_{-\pi}^{\pi} E(\theta|f) d\theta = 1 \quad (4.30)$$

ongeacht de waarde van  $f$ . M.a.w.,  $E(\theta|f)$  representeert de *relatieve* verdeling over de richtingen van de energie(dichtheid) bij frekwentie  $f$ .

Zoals  $E(f)$  wel het frekwentie-spectrum wordt genoemd, kan men  $E(\theta|f)$  het richting-spectrum noemen. (Vaak wordt laatstgenoemde benaming gehanteerd voor het 2-dimensionale spectrum  $E(f,\theta)$ , maar dat is niet consistent.)

Metingen van  $E(f,\theta)$ , meer in het bijzonder die van  $E(\theta|f)$ , zijn veel gecompliceerder dan die van  $E(f)$ . Technieken die zijn gebruikt zijn o.a. stereo-fotografie, radar, "arrays" van golfhoogtemeters, 3-dimensionale snelheidsmetingen in een punt, en z.g. "pitch-roll buoys", waarmee d.m.v. versnellingsmeters de draaiingen van een drijvende boei om twee onderling loodrechte horizontale assen (horizontaal in de ruststand) worden bepaald (naast de verticale uitwijking - ze zouden dus eigenlijk "heave-pitch-roll buoys" moeten heten). De meettechnieken zelf en ook de verwerking van de resultaten tot schattingen van richtingspectra zijn nogal gecompliceerd. Van het richtingspectrum van windgolven zijn dan ook veel minder systematische gegevens beschikbaar dan van het frekwentiespectrum. In een volgend hoofdstuk komen resultaten van beide aan de orde.

#### 4.6. Résumé

De *Fourier-reeks* ontwikkeling is van toepassing op (nette) functies die *periodiek* zijn (periode  $T$ ), dan wel gedefinieerd op een *eindig interval* (lengte  $T$ ). Het bijbehorende *spectrum* is *discreet* (d.w.z. gedefinieerd voor discrete waarden van de frekwentie), met *equidistante frekwenties* (interval = basisfrekwentie =  $\frac{1}{T}$ ). Het gemiddeld kwadraat ("energie") van een functie is gelijk aan de som van de kwadraten van de moduli van de (complexe) spectrale componenten.

De *Fourier-integraal* (Fourier-transform) is van toepassing op (nette) functies die gedefinieerd zijn op een *oneindig* interval, en die *absoluut integreerbaar* zijn. Het bijbehorende *spectrum* is gedefinieerd voor *continu* variërende frekwenties.

Een realisatie van een *stationair stochastisch proces* is (in het algemeen) noch periodiek, noch absoluut integreerbaar, en de klassieke Fourier-analyse kan er dus niet op worden toegepast. Bovendien moet de analyse van een stochastisch proces zijn gericht op eigenschappen van het proces als geheel, niet slechts op die van een enkele realisatie. Het is echter wel mogelijk en zinvol om de *Fourier-getransformeerde* van de *autocovariantiefunctie* te bepalen; dit levert het z.g. *variantiedichtheidsspectrum* op. De spectrale variantiedichtheid van een proces  $\{\underline{x}_t\}$  is de bijdrage per eenheid van frekwentie aan de variantie van  $\underline{x}_t$ . Hij hangt af van de moduli (amplituden) van de spectrale componenten maar niet van hun argumenten (fasen).

Een stationair Gaussisch proces met gemiddelde nul wordt in statistische zin geheel beschreven door zijn variantiespectrum.

Bij de schatting van het variantiespectrum uit metingen moet een compromis worden getroffen tussen scheidend vermogen en betrouwbaarheid.

Windgolven moeten worden beschreven met twee-dimensionale spectra, waarin behalve frekwentie of golfgetal ook de voortplantingsrichting een spectrale variabele is.

#### 4.7. Literatuur

Fourier-analyse: zie b.v.

- E. Oran Brigham, The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, 1974.
- F.G. van Herwaarden, Analyse III, naar het college a 50 van prof.dr. H.J.A. Duparc, V.S.S.D., Delft.
- M.J. Lighthill, Fourier Analysis and Generalised Functions, Cambridge University Press, 1960.



Toepassingen op stochastische processen: zie b.v.

- J.S. Bendat en A.G. Piersol, Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, 1971.
- R.B. Blackman en J.W. Tukey, The Measurement of Power Spectra, Dover Publications, New York, 1958.
- G.M. Jenkins en D.G. Watts, Spectral analysis and its applications, Holden-Day, London, 1968.
- A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, Mc. Graw-Hill, Inc., 1965.

## 5. STATISTISCHE EIGENSCHAPPEN VAN WINDGOLVEN

### 5.1. Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van enkele statistische eigenschappen van windgolven, beschouwd over een zodanig korte duur dat de zeetoestand vrijwel als stationair kan worden beschouwd. (Lange-duur statistische eigenschappen komen ter sprake in het hoofdstuk over golfklimatologie.)

Korte-duur statistische eigenschappen kunnen in vergaande mate theoretisch worden afgeleid, uitgaande van een stationair Gaussisch proces met gegeven variantie-spectrum. In hoofdstuk 3 zijn reeds argumenten gegeven die leiden tot de verwachting dat een dergelijk proces een realistisch model voor windgolven zou kunnen zijn. Kort gezegd kwamen deze argumenten hierop neer dat windgolven kunnen worden opgevat als de som van een groot aantal bij benadering onafhankelijke spectrale componenten. Gezien de centrale limietstelling (hoofdstuk 2) volgde hieruit het bij benadering Gaussische karakter, een benadering die realistischer zal zijn naarmate niet-lineariteiten in de golfbeweging een minder belangrijke rol spelen (lage golfsteilheid, diep water).

Eenzelfde redenering als hierboven werd gegeven voor de golfbeweging zelf, geldt vanzelfsprekend voor lineaire of quasi-lineaire responsies daarop.

Samengevat houdt het voorgaande in

- . dat windgolven en linearizeerbare responsies daarop in eerste benadering kunnen worden opgevat als een stationair Gaussisch proces;
- . dat voor diverse statistische parameters van dergelijke processen theoretische uitkomsten beschikbaar zijn.

In dit hoofdstuk zal van enkele theoretische uitkomsten een overzicht worden gegeven. Daarnaast zullen ter illustratie, toetsing en waar nodig correctie van de theorie empirische resultaten worden gepresenteerd; die hebben in het merendeel van de gevallen betrekking op de uitwijking van het zeeoppervlak uit het gemiddelde niveau ( $\eta$ ). De theoretische uitkomsten voor Gaussische processen zijn niet aan een specifiek fysisch proces gebonden. Om dit in de notatie tot uitdrukking te laten komen zal in die gevallen de proces-

waarde met  $\underline{x}$  worden aangeduid. In beide gevallen ( $\underline{\eta}$  c.q.  $\underline{x}$ ) beperken we ons tot functies van één variabele ( $t$ ).

Zoals reeds is gesteld in de hoofdstukken 3 en 4 zijn alle statistische eigenschappen van een stationair Gaussisch proces  $\{\underline{x}_t\}$  bepaald door het variantiespectrum  $E_{\underline{xx}}(f)$  van dat proces. Het is mogelijk om een aantal belangrijke eigenschappen in gesloten vorm uit te drukken in termen van dat spectrum, en wel in de momenten daarvan, gedefinieerd als

$$m_n = \int_0^\infty f^n E_{\underline{xx}}(f) df, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

In deze notatie geldt dus

$$\sigma_x^2 = \text{var}(\underline{x}_t) = \int_0^\infty E_{\underline{xx}}(f) df = m_0 \quad (5.2)$$

N.B. De momenten van het variantiedichtheidsspectrum van het proces  $\{\underline{x}_t\}$  mogen niet worden verward met de momenten van de kansdichtheidsfunctie van  $\underline{x}_t$  voor willekeurige  $t$ . Beide soorten zijn echter wel aan elkaar gekoppeld. Immers, uitgedrukt in de momenten  $M_n$  van de kansdichtheidsfunctie van  $\underline{x}_t$  geldt (zie 2.17)

$$\text{var}(\underline{x}_t) = M_2 - M_1^2 \quad (5.3)$$

zodat

$$m_0 = M_2 - M_1^2 \quad (5.4)$$

Tot slot van deze inleiding wordt globaal aangeduid welke statistische eigenschappen in dit hoofdstuk worden beschouwd. De keuze daarvan is bepaald door de toepassingen, waarbij we onderscheid kunnen maken tussen toepassingen waarin het *cumulatieve* effect van de momentane beweging of responsie van belang is (b.v. in studies van zandtransport, of van vermoeiing van constructies) dan wel de *extreme* waarden die daarin worden bereikt (b.v. grensbelasting van een constructie m.b.t. sterkte of stabiliteit). In eerstgenoemde categorie is kennis nodig van de verdeling van de momentane waarden, van de intervallen tussen niveau-doorsnijdingen,

en van de piekwaarden, terwijl het in laatstgenoemde categorie gaat om de te verwachten grootste waarde in een zekere tijdsduur. Deze parameters worden in de volgende paragrafen behandeld.

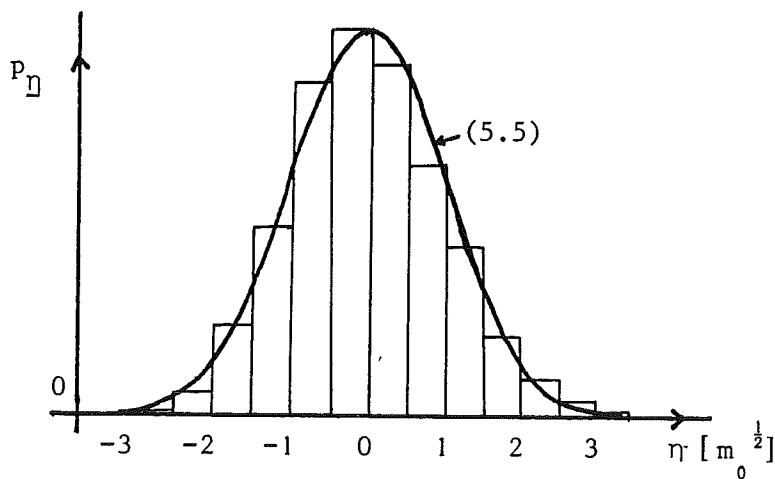
### 5.2. Momentane waarden

Als eerste variabele van het proces  $\{x_t\}$  beschouwen we de momentane functiewaarde  $x_t$  op een willekeurig te kiezen tijdstip. In theorie, waar we het proces  $\{x_t\}$  Gaussisch veronderstellen, is  $x_t$  vanzelfsprekend Gaussisch verdeeld. Nemen we (zoals gebruikelijk) het gemiddelde van  $x_t$  gelijk aan nul dan is de betreffende k.d.f. (kansdichtheidsfunctie) gegeven door

$$p_{x_t}(x) = \frac{1}{(2\pi m_0)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2m_0}\right) \quad (5.5)$$

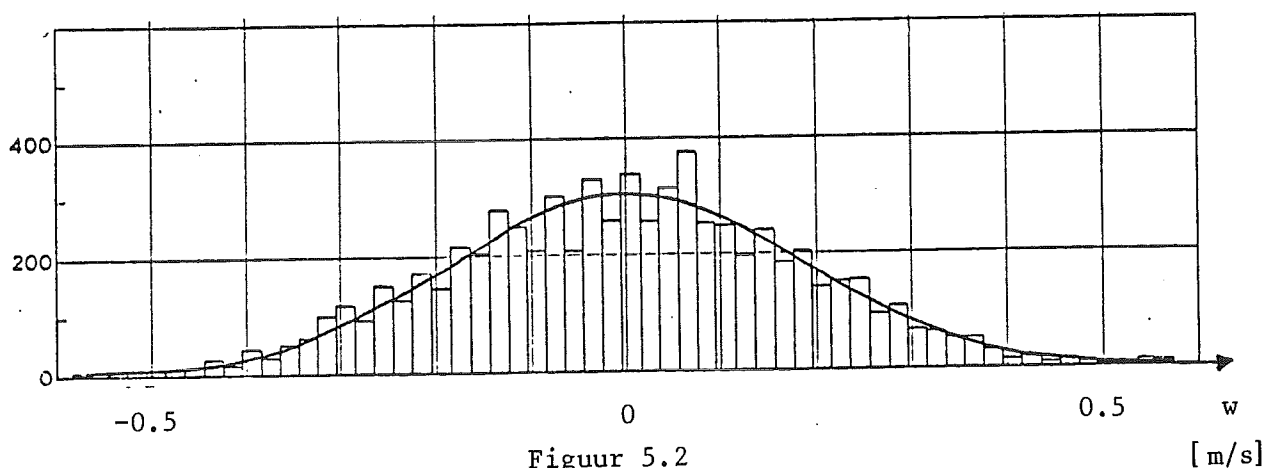
N.B. Omdat in dit hoofdstuk sprake zal zijn van verschillende variabelen, allen eigenschappen van het proces  $\{x_t\}$ , zal het symbool voor de beschouwde variabele als een label aan dat voor zijn k.d.f. worden gehangen (dus  $p_{x_t}(x)$  i.p.v.  $p(x)$ ).

Een vergelijking tussen een histogram van meetwaarden van de oppervlakte-uitwijking  $\eta_t$  in diep water en de best passende Gaussische k.d.f. is gegeven in figuur 5.1. De overeenstemming tussen beide is vrij goed, zij



Figuur 5.1 (Kinsman, 1965)

het dat de meetwaarden een lichte asymmetrie hebben, met een relatief grotere kansdichtheid voor de grote uitwijkingen naar boven ( $\eta > 0$ ) dan naar beneden. Deze trend is algemeen, en is sterker naarmate golven in minder diep water worden beschouwd. Dit is toe te schrijven aan niet-lineaire invloeden, die een zekere koppeling veroorzaken tussen Fourier-componenten, met als gevolg gemiddeld spitsere en dus ook hogere toppen dan dalen (vergelijk met de periodieke Stokes golf).



Figuur 5.2

Figuur 5.2 geeft een vergelijking tussen de gemeten en theoretische (Gauss)verdeling van de verticale snelheid in een punt op ca 5 m beneden het gemiddeld zeeniveau, bij een gemiddelde diepte van 18 m. Daar zijn niet-lineariteiten relatief aanmerkelijk zwakker dan bij het oppervlak.

In bepaalde toepassingen (b.v. berekening van krachten m.b.v. de Morison-vergelijking) is kennis nodig van de gezamenlijke k.d.f. van de momentane waarde van een functie ( $\underline{x}_t$ ) en zijn afgeleide op hetzelfde tijdstip (kortheidshalve met  $\dot{\underline{x}}_t$  aangeduid). Voor elk stationair proces  $\{\underline{x}_t\}$  geldt dat  $E\{\dot{\underline{x}}_t\} = 0$ . Immers,

$$E\{\dot{\underline{x}}_t\} = E\left\{\frac{d\underline{x}_t}{dt}\right\} = \frac{d}{dt} E\{\underline{x}_t\} \quad (5.6)$$

Statistische parameters van een stationair proces variëren niet met  $t$ , waaruit het gestelde volgt. Evenzo geldt

$$E\{\underline{x}_t \dot{\underline{x}}_t\} = \frac{d}{dt} E\left\{\frac{1}{2} \underline{x}_t^2\right\} = 0 \quad (5.7)$$

Uit het voorgaande volgt dat  $\text{cov}(\underline{x}_t, \dot{\underline{x}}_t) = 0$ . M.a.w., de momentane functiewaarde van een stationair proces is niet gecorreleerd met zijn afgeleide op hetzelfde tijdstip. Voorts geldt dat  $\underline{x}_t$  en  $\dot{\underline{x}}_t$  samengesteld Gaussisch verdeeld zijn als  $\{\underline{x}_t\}$  een Gaussisch proces is, zodat zij ook stochastisch onafhankelijk zijn. Hun gezamenlijke k.d.f. is dus gelijk aan het product van de marginale k.d.f.'s. Veronderstellend dat  $E\{\underline{x}_t\} = 0$ , is het resultaat

$$P_{\underline{x}_t, \dot{\underline{x}}_t}(x, \dot{x}) = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}) \exp(-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2})}{2\pi \sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \quad (5.8)$$

Rest ons nog om  $\sigma_{\dot{x}}$  uit te drukken in  $E_{\underline{xx}}(f)$ . Per spectrale component, zeg  $e^{i2\pi ft}$ , geldt dat een differentiatie naar  $t$  gelijk staat met een vermenigvuldiging met  $i2\pi f$ . De amplitude van de afgeleide van die component is dus te bepalen door die van de oorspronkelijke component te vermenigvuldigen met  $|i2\pi f| = 2\pi f$ . De spectrale dichtheid van  $\{\dot{\underline{x}}_t\}$  is dus voor elke frekwentie een factor  $(2\pi f)^2$  groter dan die van  $\{\underline{x}_t\}$ :

$$E_{\dot{\underline{xx}}}(f) = (2\pi f)^2 E_{\underline{xx}}(f) \quad (5.9)$$

Hieruit volgt dat

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \int_0^{\infty} E_{\dot{\underline{xx}}}(f) df = (2\pi)^2 \int_0^{\infty} f^2 E_{\underline{xx}}(f) df = (2\pi)^2 m_2 \quad (5.10)$$

(Let op:  $m_2$  is het 2-de moment van het spectrum van  $\{\underline{x}_t\}$ , niet van dat van  $\{\dot{\underline{x}}_t\}$ .) Hiermee gaat (5.8) over in

$$P_{\underline{x}_t, \dot{\underline{x}}_t}(x, \dot{x}) = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2m_0}) \exp(-\frac{\dot{x}^2}{2(2\pi)^2 m_2})}{(2\pi)^2 (m_0 m_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.11)$$

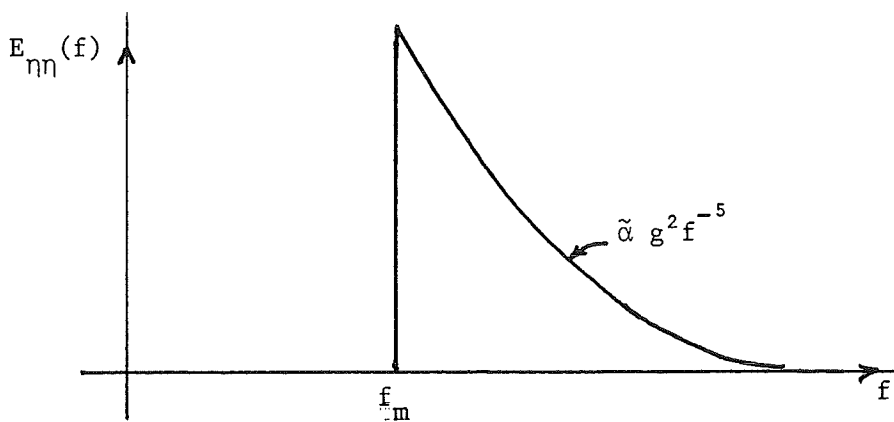
Voorbeeld. In het hier te geven voorbeeld, en ook in het vervolg daarop in de volgende paragrafen, gaan we uit van een gegeven spectrum van de oppervlakte-uitwijking in zeeegang, met  $E\{\eta_t\} = 0$ , waaruit bepaalde statistische grootheden moeten worden berekend. Omdat het om een voorbeeld gaat is een sterk geidealiseerde spectrumvorm gekozen, waarvan de nodige

momenten gemakkelijk analytisch zijn te bepalen. (Meer realistische spectra komen in het volgende hoofdstuk aan de orde.) Het gekozen spectrum is te formuleren als

$$E_{\eta\eta}(f) = 0 \quad \text{voor } f \in (0, f_m) \quad (5.12)$$

$$= \tilde{\alpha} g^2 f^{-5} \quad \text{voor } f \in (f_m, \infty)$$

Het is geschetst in figuur 5.3. Voor de numerieke uitwerking stellen we



Figuur 5.3

$\tilde{\alpha} = 5 \times 10^{-6}$  en  $f_m = 0.1$  Hz.

Gevraagd wordt

- (a) de gemiddelde energie per eenheid van oppervlak
- (b)  $\Pr\{\eta_t > 3 \text{ m}\}$
- (c)  $\Pr\{\dot{\eta}_t > 2 \text{ ms}^{-1} \mid \eta_t > 3 \text{ m}\}$

ad (a) Deze is gelijk aan  $E_p + E_k \approx 2E_p = \rho g \eta^2 = \rho g \text{ var}(\eta_t) = \rho g m_0$ .  
 Berekening van  $m_0$  uit (5.12) geeft  $m_0 = \frac{1}{4} \tilde{\alpha} g^2 f_m^{-4} = 1.20 \text{ m}^2$ ,  
 zodat de gemiddelde energie per eenheid van oppervlak een waarde heeft van ca  $12 \text{ kJ/m}^2$ .

ad (b) Veronderstellend dat  $\eta_t$  Gaussisch verdeeld is, is de gevraagde kans te berekenen uit  $\sigma_\eta = m_0^{\frac{1}{2}} = 1.10 \text{ m}$  m.b.v. tabellen van de Gaussische verdelingsfunctie:

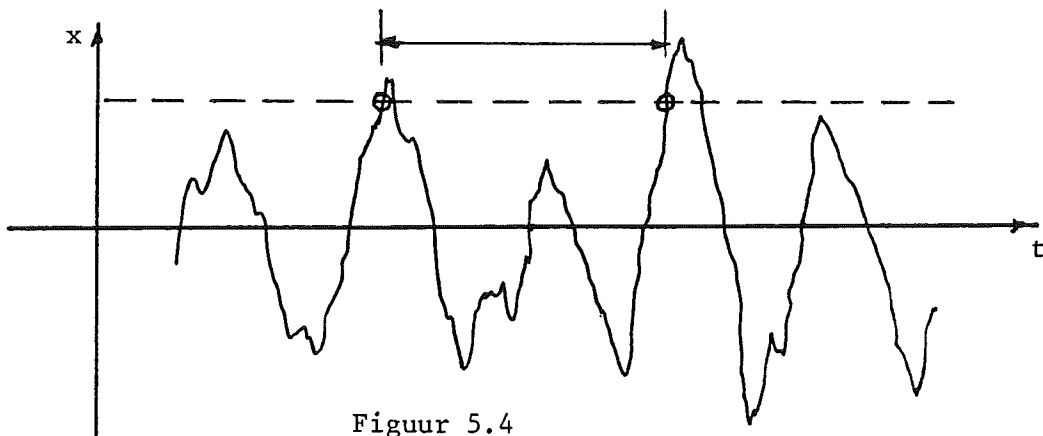
$$\Pr\{\eta_t > 3 \text{ m}\} = 1 - \Pr\left\{\frac{\eta_t - \mu_\eta}{\sigma_\eta} \leq \frac{3 \text{ m} - 0 \text{ m}}{1.10 \text{ m}} = 2.73\right\} = 0.0032$$

ad (c) In de Gaussische benadering zijn  $\eta_t$  en  $\dot{\eta}_t$  stochastisch onafhankelijk, zodat de voorwaardelijke k.d.f. van  $\dot{\eta}_t$ , gegeven  $\eta_t$ , gelijk is aan de marginale k.d.f. van  $\dot{\eta}_t$ . Die heeft als enige parameter  $\sigma_{\dot{\eta}}$ , welke gelijk is aan  $2\pi m_2^{\frac{1}{2}}$ . Substitutie van (5.12) geeft  $m_2 = \frac{1}{2}\tilde{\alpha} g^2 f_m^{-2}$ , ofwel  $\sigma_{\dot{\eta}} = 2\pi(\tilde{\alpha}/2)^{\frac{1}{2}} g f_m^{-1} = 0.97 \text{ ms}^{-1}$ , zodat

$$\Pr\{\dot{\eta}_t > 2 \text{ ms}^{-1} | \eta_t > 3 \text{ m}\} = \Pr\{\dot{\eta}_t > 2 \text{ ms}^{-1}\} = 1 - \Pr\left\{\frac{\dot{\eta}_t - \mu_{\dot{\eta}}}{\sigma_{\dot{\eta}}} < 2.06\right\} = 0.0197$$

### 5.3. Frekwentie van niveaudoorgangen

De verdelingsfunctie van  $x_t$ , d.w.z. de integraal van de k.d.f. (5.5), geeft de kans weer dat  $x_t$  onder c.q. boven een bepaald niveau ligt, ofwel, gezien het ergodische karakter van het proces  $\{x_t\}$ , de fractie van de tijd gedurende welke  $x(t)$  in een willekeurige realisatie onder c.q. boven dat niveau ligt. Daarmee wordt echter geen inzicht verkregen in de tijdsintervallen tussen opeenvolgende doorsnijdingen van het beschouwde niveau (zie figuur 5.4), c.q. in de vraag hoe vaak dergelijke z.g. niveaudoorgangen zich



Figuur 5.4

voordoen. Deze vraag is o.a. van belang in studies van vermoeing (als  $x$  een materiaalspanning voorstelt).



De k.d.f. van de tijdsintervallen tussen opeenvolgende opgaande of neergaande niveaudoorgangen is theoretisch moeilijk te bepalen, maar dat geldt niet voor de verwachtingswaarde van die intervallen, ofwel voor het omgekeerde daarvan, de gemiddelde frekwentie. Rice (1944) heeft aangetoond dat de gemiddelde frekwentie ( $\lambda_x$ ) waarmee de functie-waarde van een stationair Gaussisch proces  $\{x_t\}$ , met een willekeurig spectrum, een niveau  $x$  in opwaartse of neerwaartse richting doorsnijdt, gegeven is door

$$\lambda_x = \left( \frac{m_2}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{x^2}{2m_0} \right) \quad (5.13)$$

Een bewijs van deze belangrijke betrekking is gegeven in een Appendix aan dit hoofdstuk.

Als bijzonder geval van (5.13) geldt dat de gemiddelde frekwentie van opgaande (of neergaande) *nuldoorgangen* (algemener gezegd: doorgangen door het gemiddelde niveau) in een stationair Gaussisch proces gelijk is aan

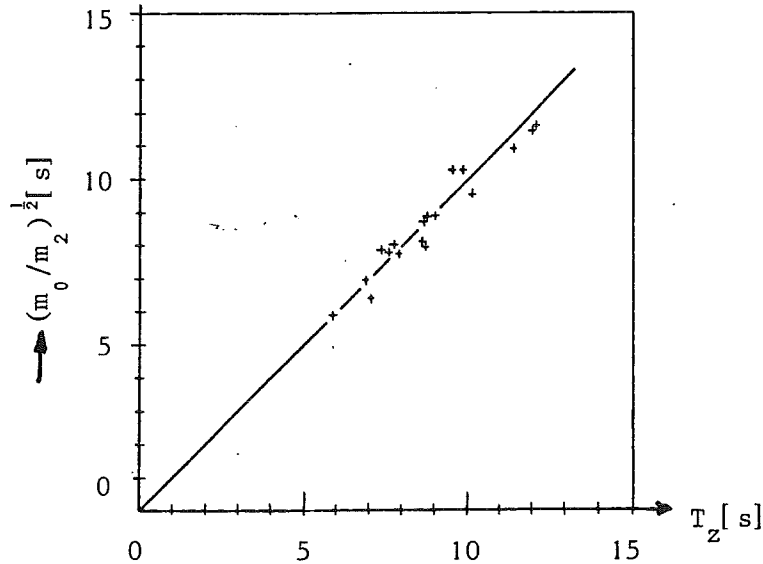
$$\lambda_0 = \left( \frac{m_2}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

Het omgekeerde hiervan is gelijk aan het gemiddelde van de tijdsintervallen tussen opeenvolgende opgaande of neergaande nuldoorgangen. Deze tijdsintervallen, hier met  $\underline{T}$  aangeduid, worden korthedshalve "nuldoorgangsperioden" genoemd, hoewel het verschijnsel niet periodiek is. De verwachtingswaarde ervan is

$$T_z \equiv E\{\underline{T}\} = \lambda_0^{-1} = \left( \frac{m_0}{m_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

( $z$  staat voor "zero".) Aan de k.d.f. van  $\underline{T}$  is zowel theoretisch als empirisch gewerkt, maar daarop wordt hier niet ingegaan, anders dan met te zeggen dat de vorm van de k.d.f. van  $\underline{T}$  sterk varieert met de vorm van het variantiespectrum. (Voor processen met smalle spectra varieert de breedte van de k.d.f. van  $\underline{T}$ , d.w.z.  $\sigma_{\underline{T}}$ , evenredig met de breedte van het spectrum.) Uitspraken over de vorm van de k.d.f. van  $\underline{T}$  zijn daarom alleen zinvol als ze gepaard gaan met informatie over het bijbehorende spectrum.

In figuur 5.5 worden enkele waarden van  $T_z$ , elk bepaald uit een registratie van  $\eta(t)$ , vergeleken met waarden van  $(m_0/m_2)^{1/2}$ , elk bepaald uit het bijbehorende spectrum. Gemiddeld is er een redelijke overeenkomst.



Figuur 5.5 (naar gegevens van Vugts, 1971)

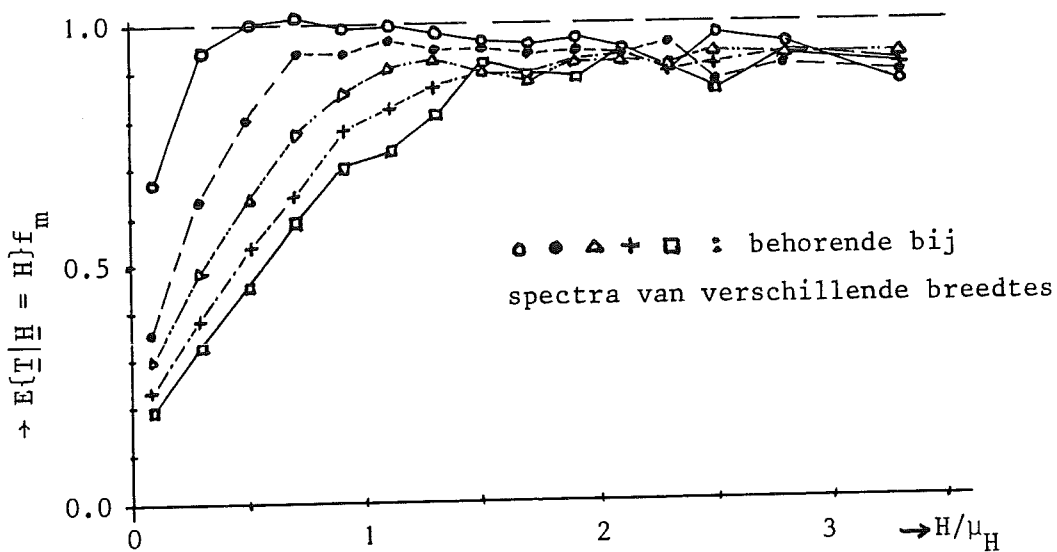
In het algemeen wordt in dit soort betrekking echter een aanzienlijke spreiding geconstateerd. Dit is voor een deel toe te schrijven aan de gevoeligheid van  $T_z$  en  $(m_0/m_2)^{1/2}$  voor kleine variaties in de methode van meten en bewerken (b.v. keuze frekwentie-karakteristiek van het meet-systeem, bemonsteringsinterval, schatting van spectrale dichtheden, enz.). In dit opzicht is het aantrekkelijker om niet de gemiddelde periode te nemen van *alle* golven ( $T_z$ ), maar slechts die van de hogere, b.v. het hoogste  $\frac{1}{3}$ -deel (zie par. 5.5 voor het begrip golfhoogte). Het blijkt n.l. dat de perioden van de hogere golven minder spreiding vertonen dan die van de lagere, en ook minder gevoelig zijn voor kleine storingen in het meetsignaal of verschillen in bewerking. Bovendien zijn visuele schattingen van "de" kenmerkende periode van een golfsysteem ook altijd gebaseerd op de hogere golven (zie par. 5.6). Gezien deze punten is het zinvol om de gemiddelde periode van (b.v.) het hoogste  $\frac{1}{3}$ -deel van de golven ( $T_{1/3}$ ) te gebruiken als kenmerkende periode van een golfsysteem. Men noemt deze ook wel de *significante golfperiode* ( $T_s$ ).

De relatie tussen  $T_{1/3}$  enerzijds en een kenmerkende spectrale frekwentie anderzijds is niet eënduidig, maar hangt af van de spectrumvorm. Daarbij

is gebleken dat de beste correlatie bereikt wordt wanneer  $T_{\frac{1}{3}}$  in verband wordt gebracht met de spectrale piekfrekwentie ( $f_m$ ), d.w.z. de frekwentie waarvoor de spectrale dichtheid van  $\{\eta_t\}$  maximaal is. Voor zeer smalle spectra, zoals bij deining afkomstig van grote afstand, zijn de perioden  $T$  nauwelijks gespreid en zal  $T_{\frac{1}{3}}$  vrijwel gelijk zijn aan  $f_m^{-1}$ . Voor zeegangsspectra, die breder zijn, is empirisch een andere betrekking gevonden. Figuur 5.6 laat zien hoe de gemiddelde periode van golven met eenzelfde golfhoogte ( $\underline{H} = H$ ) varieert met die hoogte. Blijkbaar is die gemiddelde periode onafhankelijk van  $H$  in het bereik van de hogere golven, en ongeveer gelijk aan  $0.9 f_m^{-1}$ . Dan geldt ook

$$T_{\frac{1}{3}} \approx 0.9 f_m^{-1} \quad (5.16)$$

De correlatie tussen  $T_{\frac{1}{3}}$  en  $f_m^{-1}$  blijkt aanmerkelijk sterker te zijn dan die tussen  $T_z$  en  $(m_0/m_2)^{\frac{1}{2}}$ .



Figuur 5.6 (Goda, 1978)

Voorbeeld (vervolg van het voorbeeld uit par. 5.2, dus met dezelfde gegevens). Gevraagd:

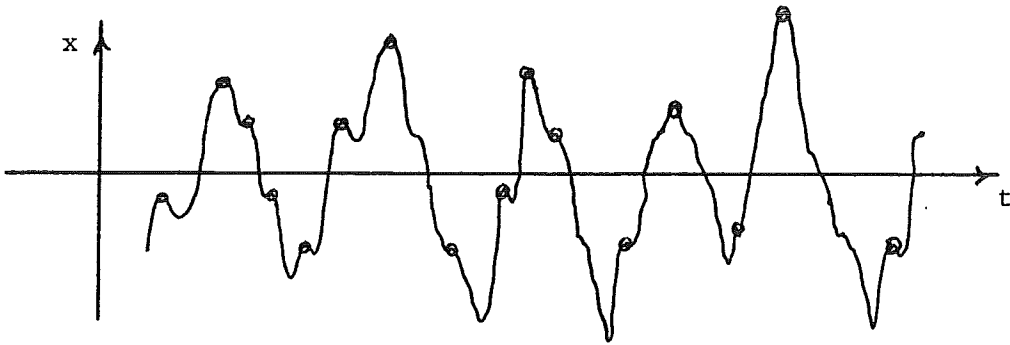
- (d) De gemiddelde nuldoorgangsperiode  $T_z$
- (e) Het verwachte aantal opwaartse doorsnijdingen van het niveau  $\eta = 3$  m, in een interval van 3 uur.

ad (d)  $T_z = \lambda_0^{-1} = (m_0/m_2)^{\frac{1}{2}}$ . Substitutie van de in par. 5.2 reeds gegeven uitdrukkingen en waarden voor  $m_0$  en  $m_2$  geeft  $\lambda_0 = 2^{\frac{1}{2}} f_m^{-1} \approx 0.14 \text{ s}^{-1}$ , waaruit volgt  $T_z \approx 7.1 \text{ s}$ .

ad (e) De gemiddelde frekwentie van de opwaartse doorsnijdingen is  $\lambda_\eta = \lambda_0 \exp \{ - \eta^2 / (2 m_0) \} \approx 0.0033 \text{ s}^{-1}$ . Het verwachte aantal van die doorsnijdingen in een duur  $D = 10800 \text{ s}$  is  $\lambda_\eta D \approx 36$ .

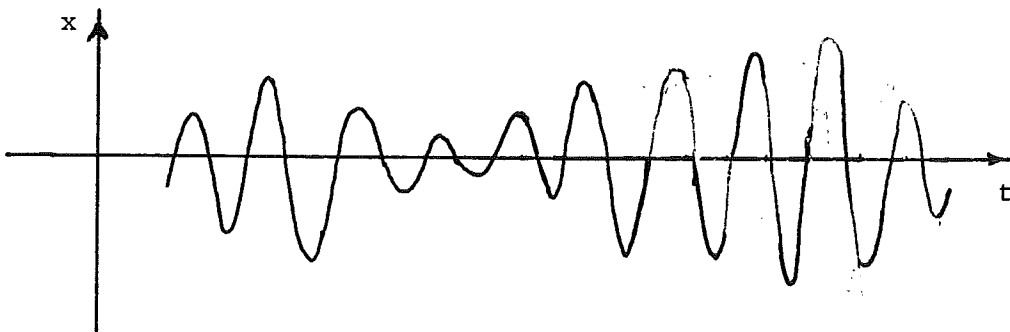
#### 5.4. Maxima

De volgende te beschouwen variabele is de functiewaarde van  $\underline{x}_t$  ter plaatse van een willekeurig maximum uit de verzameling van alle maxima van  $\{\underline{x}_t\}$ . Die waarden, hier aangeduid met  $\underline{x}_m$ , kunnen bij een spectrum van voldoende breedte zowel positief als negatief zijn (zie figuur 5.7).



Figuur 5.7 Realisatie bij matig breed spectrum

Is het spectrum daarentegen smal, dan zien de realisaties er meer regelmatig uit, en wel als een amplitude-gemoduleerde sinus waarin slechts positieve maxima vóorkomen (zie figuur 5.8). We zien hieruit dat de vorm



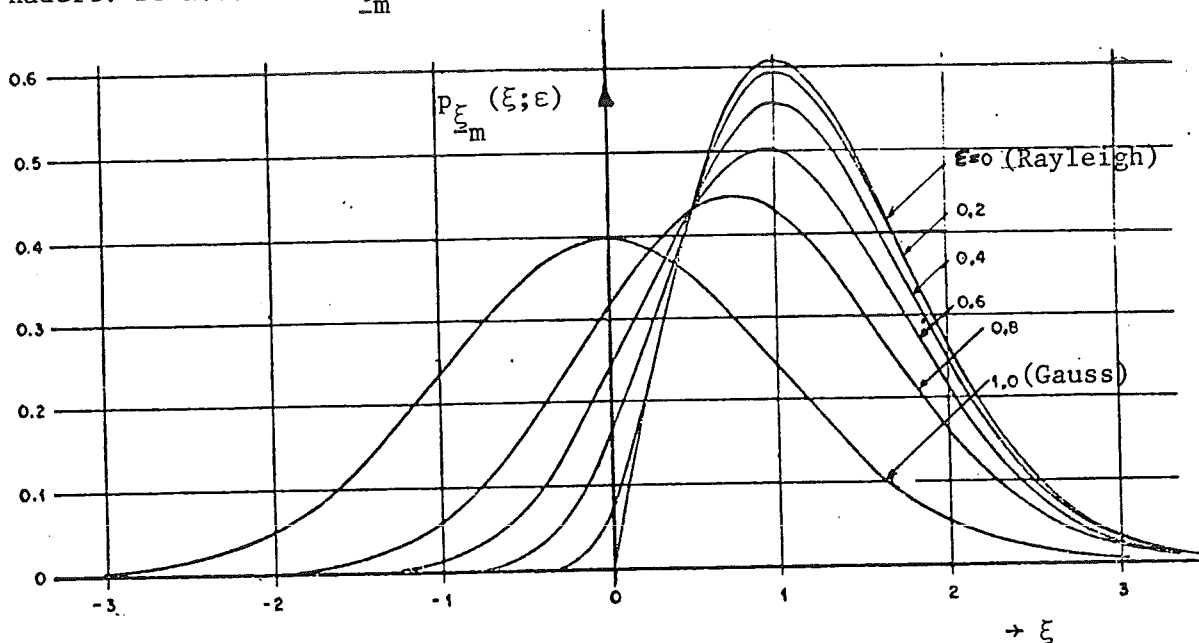
Figuur 5.8 Realisatie bij smal spectrum

van de k.d.f. van  $\underline{x}_m$  afhangt van de vorm van het spectrum van  $\{\underline{x}_t\}$ . (Dit in tegenstelling tot de vorm van de k.d.f. van  $\underline{x}_t$ , die per definitie Gaussisch is voor Gaussische processen, ongeacht de vorm van het spectrum.)

De k.d.f. van  $\underline{x}_m$  behorende bij een stationair Gaussisch proces  $\{\underline{x}_t\}$ , met een variantiespectrum  $E_{xx}(f)$  van willekeurige vorm, is afgeleid door Rice (1944). Zijn resultaat is later bewerkt door Cartwright en Longuet-Higgins (1956). De verdeling van de genormeerde variabele  $\xi_m \equiv \underline{x}_m / (m_0)^{1/2}$  blijkt van slechts één spectrale vormparameter af te hangen, die door Cartwright en Longuet-Higgins is geschreven in de vorm

$$\varepsilon = \left( 1 - \frac{m^2}{m_0^2} \right)^{1/2} \quad (5.17)$$

Hiervoor geldt  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , waarbij  $\varepsilon \rightarrow 0$  als de spectrumbreedte tot nul nadert. De k.d.f. van  $\xi_m$  is voor enkele waarden van  $\varepsilon$  gegeven in figuur

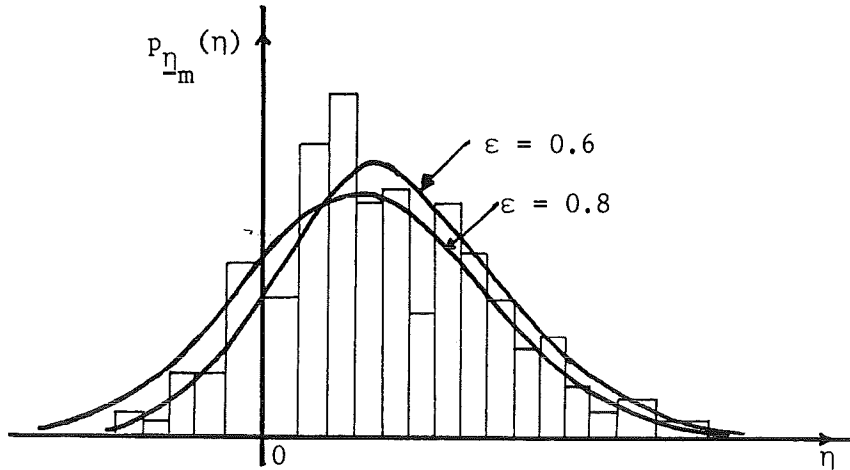


Figuur 5.9 k.d.f. van  $\xi_m$  volgens Rice

5.9. Hieruit is te zien dat er relatief meer negatieve maxima (dus ook positieve minima) zijn, d.w.z. dat de realisaties onregelmatiger zijn (vergelijk de figuren 5.7 en 5.8), naarmate  $\varepsilon$  toeneemt. Dit is te verklaren uit de aanwezigheid van relatief meer energie in de hogere frequenties.

Figuur 5.10. laat een vergelijking zien tussen een histogram van meet-

waarden van  $\eta_m$  (voor  $\varepsilon = 0.725$ ) en de theoretische k.d.f. voor  $\varepsilon = 0.6$  resp.  $\varepsilon = 0.8$ .



Figuur 5.10 (Vugts, 1971)

Een meer onregelmatig beeld van de realisaties betekent meer maxima t.o.v. nuldoorgangen, ofwel een kleinere waarde van de verhouding  $T_m/T_z$ , waarin  $T_z$  resp.  $T_m$  het gemiddelde tijdsinterval is tussen opeenvolgende op- of neergaande nuldoorgangen van  $\{\underline{x}_t\}$  resp. tussen opeenvolgende maxima of minima van  $\{\underline{x}_t\}$ . Voor een stationair Gaussisch proces geldt  $T_z = (m_0/m_2)^{1/2}$  (zie 5.15), en daarom ook  $T_m = (m_2/m_4)^{1/2}$  (want een maximum van  $\underline{x}_t$  komt overeen met een neergaande nuldoorgang van  $\dot{\underline{x}}_t$ ), waaruit volgt dat

$$\varepsilon^2 = 1 - \left( \frac{T_m}{T_z} \right)^2 \quad (5.18)$$

Deze betrekking geeft expliciet een relatie weer tussen de spectrale vormfactor  $\varepsilon$  enerzijds en een graad van onregelmatigheid van de realisaties anderzijds. Hieruit is ook te zien dat voor een smal spectrum, waarbij  $T_m \approx T_z$  (zie figuur 5.8),  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dit grensgeval zal in het volgende nader worden bekeken. Vooraf wordt echter nog een meer algemene opmerking gemaakt.

In par. 5.3 is reeds gewezen op de gevoeligheid van  $T_z$  en  $m_2$  voor kleine variaties in de wijze van schatting ervan uit registraties. Dat geldt in nog aanzienlijk sterkere mate voor  $T_m$  en  $m_4$ , en dus ook voor  $\varepsilon$ . Aan het

gebruik van  $\epsilon$  als spectrale vorm(breedte)parameter is niet te ontkomen in het geval van de verdeling van  $\underline{x}_m$ , en dan zal men aan die gevoeligheid bijzondere aandacht moeten besteden. Als echter slechts een semi-kwantitatieve maat nodig is voor de spectrale breedte (b.v. in modelonderzoek) dan is er geen dringende reden om  $\epsilon$  daarvoor te gebruiken, en kan men beter een meer robuuste parameter kiezen.

We gaan nu naar het bijzondere geval van een smal spectrum. Dit komt overeen met glad verlopende realisaties, waarin geen negatieve maxima of positieve minima voorkomen (fig. 5.8). In dit geval geldt dus dat er in totaal evenveel maxima zijn als opgaande nuldoorgangen (gemiddeld  $\lambda_0$  per eenheid van tijd), en ook dat er evenveel maxima zijn boven een positief niveau  $x$  als opgaande doorgangen door dat niveau (gemiddeld  $\lambda_x$  per eenheid van tijd). Dus geldt, als het spectrum voldoende smal is,

$$\frac{\text{aantal maxima waarvoor } (\underline{x}_m > x)}{\text{totaal aantal maxima}} = \frac{\lambda_x}{\lambda_0} \text{ voor } x \geq 0 \quad (5.19)$$

Interpreteren we het linkerlid hiervan als de kans van overschrijding van het niveau  $x$  door de maxima  $\underline{x}_m$ , en substitueren we (5.13) in het rechterlid, dan ontstaat

$$Q_{\underline{x}_m} \equiv \Pr\{\underline{x}_m > x\} = \exp\left(-\frac{x^2}{2m_0}\right) \text{ voor } x \geq 0 \quad (5.20)$$

Voor de verdelingsfunctie van  $\underline{x}_m$  geldt dan

$$P_{\underline{x}_m}(x) \equiv \Pr\{\underline{x}_m \leq x\} = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2m_0}\right) \text{ voor } x \geq 0 \quad (5.21)$$

De afgeleide hiervan naar  $x$  is de k.d.f. van  $\underline{x}_m$  :

$$p_{\underline{x}_m}(x) = \frac{x}{m_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2m_0}\right) \text{ voor } x \geq 0 \quad (5.22)$$

Dit is de k.d.f. getekend in figuur 5.9 voor  $\epsilon = 0$  (afgezien van de normering  $\xi = \underline{x}_m / m_0^{\frac{1}{2}}$ ).

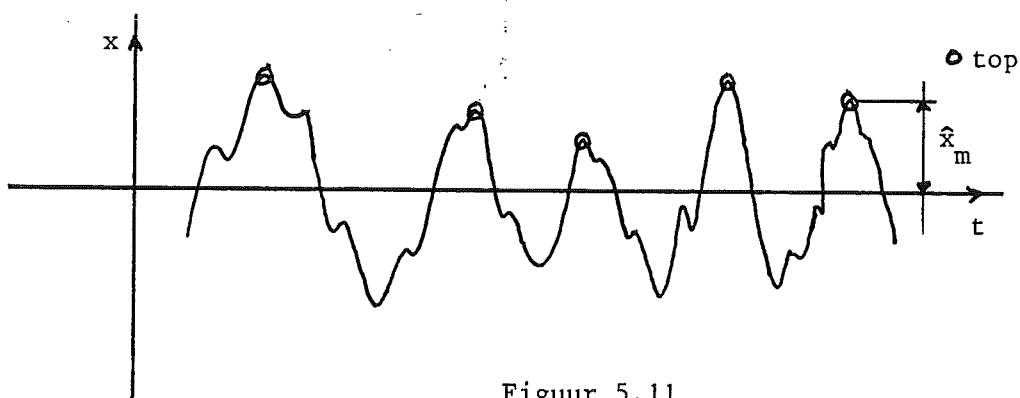
De verdelingsfunctie (5.21) en de bijbehorende k.d.f. (5.22) zijn van het *Rayleigh*-type. M.a.w., bij een Gaussisch proces met een smal spectrum zijn de hoogten van de maxima Rayleigh-verdeeld. De enige spectrale parameter die daarvoor nodig is is  $m_0$ , ofwel het oppervlak van het spectrum. Diverse kenmerkende waarden van  $\underline{x}_m$  kunnen in dit geval dus worden uitgedrukt in  $m_0$  alleen. Door substitutie van (5.22) en integratie is b.v. te bewijzen dat

$$E\{\underline{x}_m\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot m_0^{\frac{1}{2}} \quad (5.23)$$

en

$$E\{\underline{x}_m^2\} = 2m_0 \quad (5.24)$$

In de praktijk van statistische analyses van registraties van oppervlakte-uitwijkingen, van materiaalspanningen in constructies enz., is het gebruikelijk om af te zien van wat men secundaire maxima zou kunnen noemen. In die gevallen bekijkt men niet de populatie van alle maxima ( $\underline{x}_m$ ), maar alleen positieve, en daarvan per opgaande nuldoorgang van  $\{\underline{x}_t\}$  slechts het hoogste maximum tussen die doorgang en de daaropvolgende neergaande nuldoorgang (zie figuur 5.11). We zullen deze deelverzameling van alle

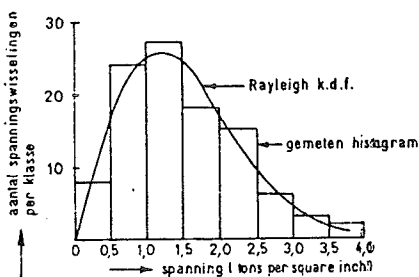


Figuur 5.11

maxima de "toppen" noemen, en de bijbehorende functiewaarde met  $\hat{\underline{x}}_m$  aanduiden. Voor een smal spectrum zijn de verdelingen van  $\underline{x}_m$  en  $\hat{\underline{x}}_m$  theoretisch identiek (Rayleigh). Voor bredere spectra is de verdeling van  $\hat{\underline{x}}_m$  theoretisch



niet bekend, maar empirisch blijkt  $\hat{x}_m$  ook dan vrijwel Rayleigh-verdeeld te zijn (althans voor niet te lage waarden, zeg  $\hat{x}_m \gtrsim m_0^{\frac{1}{2}}$ ). Hetzelfde geldt voor de hoogten van de toppen (tussen nuldoorgangen) boven die van de naastliggende dalen (id). Deze grootte wordt veel gebruikt in studies van vermoeiing, waarbij  $x$  dan een materiaalspanning voorstelt. Deze top-dal verschillen ("stress ranges") blijken goed aan de Rayleigh-verdeling te voldoen. Figuur 5.12 geeft hiervan een voorbeeld. De meetwaarden



Figuur 5.12  
(Bell en Walker, 1971)

daarin zijn verkregen met rekstrookjes, gemonteerd aan een onderdeel van de draagconstructie van een platform in de Noordzee.

Voorbeeld (vervolg). Gevraagd:

- (f) Het gemiddeld aantal toppen van  $\eta_t$  per seconde.
- (g)  $E\{\hat{\eta}_m\}$
- (h)  $\Pr\{\hat{\eta}_m > 3 \text{ m}\}$

ad (f) Per definitie is er per golftop één opgaande of neergaande nuldoorgang, en de gemiddelde frekwentie ervan is dus  $\lambda_0 = 0.14 \text{ s}^{-1}$  (zie antwoord op vraag (d)).

ad (g)  $E\{\hat{\eta}_m\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} m_0^{\frac{1}{2}} \approx 1.25 m_0^{\frac{1}{2}} \approx 1.41 \text{ m}$

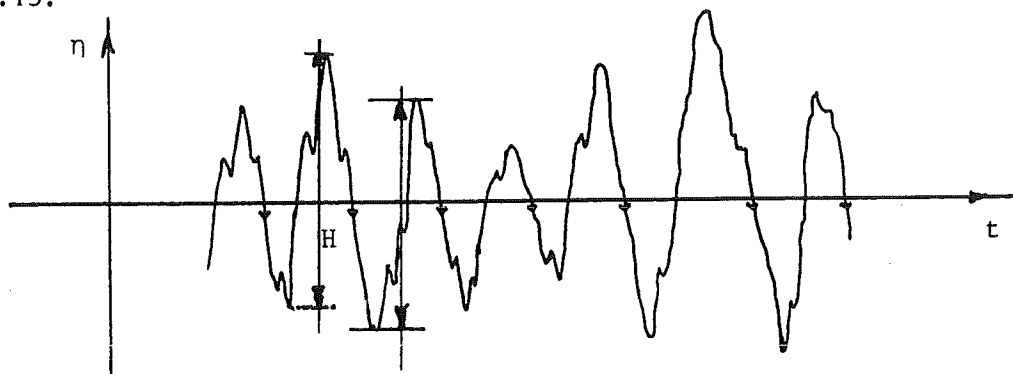
ad (h) Substitutie van  $\eta = 3 \text{ m}$  en  $m_0 = 1.20 \text{ m}^2$  in

$$\Pr\{\hat{\eta}_m > \eta\} = \exp\left(-\frac{\eta^2}{2m_0}\right) \text{ geeft } \Pr\{\hat{\eta}_m > 3 \text{ m}\} \approx 0.0235.$$

### 5.5. Golfhoogten

In statistische analyses van de uitwijkingen van het wateroppervlak wordt veel gewerkt met de z.g. golfhoogten, d.w.z. de hoogten van de golftoppen (tussen nuldoorgangen) boven die van de naastliggende dalen (id). Ten dele is dit historisch te verklaren, maar het is ook nu inhoudelijk nog zinvol, o.m. omdat visuele waarnemingen van windgolven, die nog steeds van belang zijn in de golfklimatologie, gebaseerd zijn op schattingen van top-dal hoogten. Verder is het begrip golfhoogte zinvol in studies van brekende golven, en meer algemeen wanneer niet-lineair gedrag een rol speelt.

Men kan een golfhoogte ( $H$ ) definiëren als de grootste waarde van  $\{\eta_t\}$  op een tijdsinterval tussen twee opeenvolgende neergaande nuldoorgangen van  $\{\eta_t\}$  (t.p.v. een "top") minus de kleinste waarde van  $\{\eta_t\}$  op hetzelfde interval (t.p.v. een "dal"), zoals is geïllustreerd in figuur 5.13.



Figuur 5.13

De golfhoogte wordt ook wel gedefinieerd tussen opgaande nuldoorgangen. Bij een strikt Gaussisch proces maakt het geen verschil welke van beide definities wordt gebruikt. In studies van brekende golven, met een steil front, is de hoogte van de golfkam boven het eraan voorafgaande dal van betekenis; dit komt overeen met de definitie van golfhoogten tussen neergaande nuldoorgangen. Bovendien komt deze definitie overeen met de praktijk van het visueel schatten van golfhoogten, waar (althans formeel) de hoogten van golftoppen boven de eraan voorafgaande dalen moeten worden geschat. Om beide redenen verdient de definitie met de neergaande nuldoorgangen dus de voorkeur.

In geval van een smal spectrum, waarbij de realisaties de gedaante hebben van een amplitude-gemoduleerde sinus (zoals in fig. 5.8), is de golfhoogte vrijwel het dubbele van de hoogte van het bijbehorend maximum boven het gemiddelde niveau, in welk geval geldt

$$\Pr\{\underline{H} > H\} = \Pr\{2\underline{\eta}_m > H\} = \Pr\{\underline{\eta}_m > \frac{1}{2}H\} \quad (5.25)$$

Substitutie van (5.20) geeft

$$Q_{\underline{H}}(H) \equiv \Pr\{\underline{H} > H\} = \exp\left(-\frac{H^2}{8m_0}\right) \quad (5.26)$$

zodat in deze benadering  $\underline{H}$  Rayleigh verdeeld is (Longuet-Higgins, 1952). Uit (5.23) en (5.24) volgt dan dat

$$\mu_H \equiv E\{\underline{H}\} = (2\pi m_0)^{\frac{1}{2}} \approx 2.5 (m_0)^{\frac{1}{2}} \quad (5.27)$$

en

$$H_{\text{rms}} \equiv (E\{\underline{H}^2\})^{\frac{1}{2}} = 2(2m_0)^{\frac{1}{2}} \approx 2.8 (m_0)^{\frac{1}{2}} \quad (5.28)$$

zodat

$$\mu_H = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2} H_{\text{rms}} \approx 0.89 H_{\text{rms}} \quad (5.29)$$

Vaak wordt i.p.v.  $\mu_H$ , d.w.z. het gemiddelde van alle golfhoogten, het gemiddelde beschouwd van het hoogste  $\frac{1}{3}$ -deel van de golfhoogten, de z.g. *significante golfhoogte*  $H_s$ , omdat die beter dan  $\mu_H$  blijkt overeen te komen met visuele schattingen van "de" kenmerkende golfhoogte in een golfveld. Zolang we ons echter beperken tot statistische analyses van registraties heeft  $H_s$  niets significant t.o.v. andere parameters van de golfhoogteverdeling, zoals  $\mu_H$  of  $H_{\text{rms}}$ . Wij zullen dat in de notatie tot uiting laten komen door het gemiddelde van het hoogste  $\frac{1}{3}$ -deel van de golfhoogten-tussen-nuldoorgangen niet aan te duiden het  $H_s$ , maar met  $H_{\frac{1}{3}}$ .

De definitie van  $H_{\frac{1}{3}}$  is geïllustreerd in fig. 5.14. Uitgaande van de Rayleigh-verdeling zoals gegeven in (5.26) is te bewijzen dat

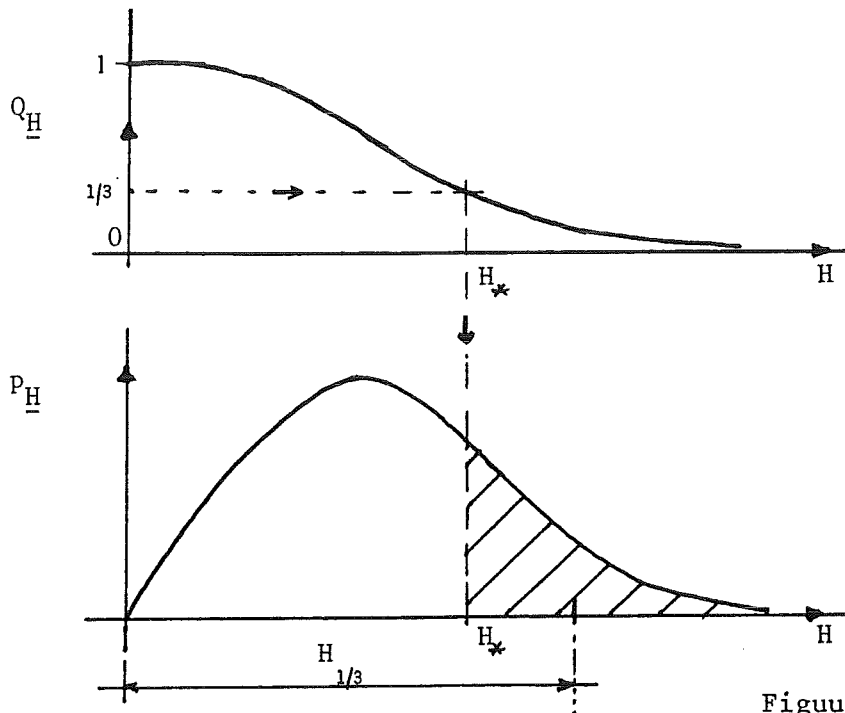
$$H_{\frac{1}{3}} = 4.004 \dots m_0^{\frac{1}{2}} \approx 4m_0^{\frac{1}{2}} \quad (5.30)$$

Gezien (5.27) en (5.28) geldt dan tevens

$$H_{1/3} \approx 2^{1/2} H_{\text{rms}} \approx 1.41 H_{\text{rms}} \quad (5.31)$$

en

$$H_{1/3} \approx \frac{4}{(2\pi)^{1/2}} \mu_H \approx 1.60 \mu_H \quad (5.32)$$



Figuur 5.14

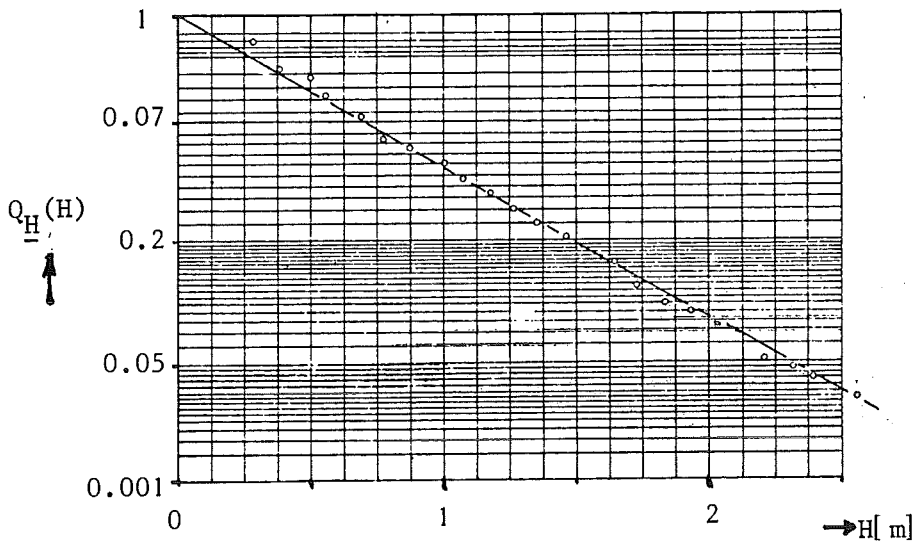
Bij de toetsing van bovenstaande theoretische uitkomsten aan metingen moeten twee aspecten worden onderscheiden:

- (a) de theoretische voorspelling dat de golfhoogten Rayleigh-verdeeld zijn, d.w.z. dat de overschrijdingskans de gedaante heeft van  $Q_H = \exp(-AH^2)$ , waarin A een willekeurige constante is; en
- (b) de theoretische voorspelling dat de waarde van de coëfficiënt A gelijk is aan  $(8m_0)^{-1}$ .

M.a.w., we moeten de vraag naar de *vorm* van de verdeling (aspect a) onderscheiden van die naar de waarde van de *schaal* (aspect b).

De vraag naar de vorm kan o.a. worden nagegaan door gemeten cumulatieve frekwentie-verdelingen van golfhoogten uit te zetten op een Rayleigh-schaal, waarop zij theoretisch een rechte lijn moeten vormen (afgezien

van steekproef-variabiliteit). Figuur 5.15 geeft hiervan een voorbeeld.



Figuur 5.15 - Verdeling van golfhoogten gemeten op IJsselmeer bij windsnelheid van 20 m/s (Rayleigh schaal)

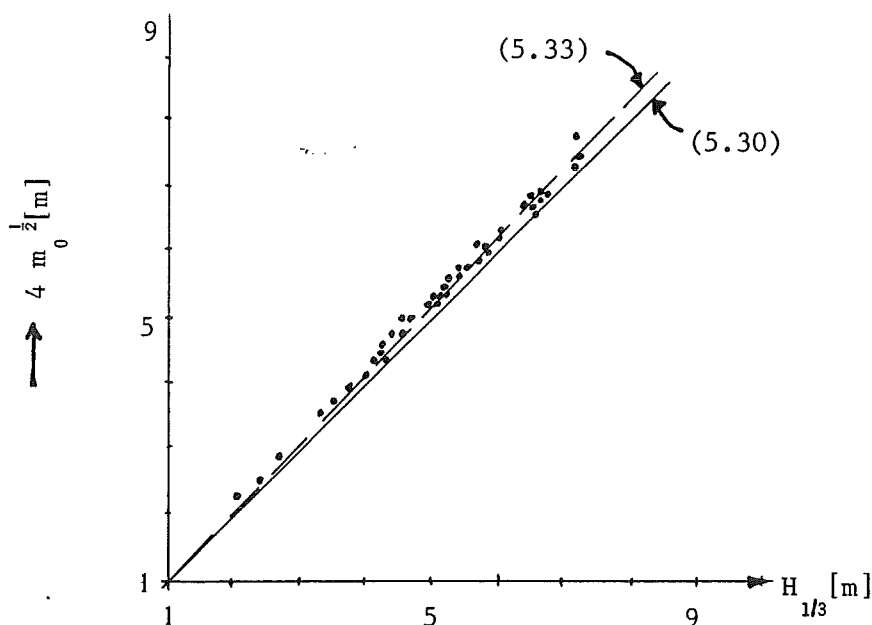
De hypothese dat de meetwaarden steekproeven zijn uit een Rayleigh-verdeelde populatie lijkt in dit voorbeeld wel te zijn bevestigd, althans voldoende voor praktische doeleinden. Het blijkt dat dit algemeen opgaat zolang we ons beperken tot golfbewegingen met min of meer enkeltoppige spectra (zoals bij golven opgewekt door een enkel windveld), ook al zijn die niet "smal" in de zin  $\epsilon \ll 1$ , en ook al is de golfsteilheid relatief groot (b.v. in stormen). Het feit dat golfbreking een fysische begrenzing geeft aan de mogelijke golfhoogten blijkt slechts van betekenis te worden bij diepten minder dan ca  $3H_{\frac{1}{3}}$ .

Het feit dat de Rayleigh-verdeling voor de golfhoogten goed voldoet blijkt ook hieruit dat de gemeten verhoudingen tussen diverse kenmerkende waarden van  $H$  goed overeenstemmen met de theoretisch voorspelde waarden daarvan, b.v. die gegeven in (5.29), (5.31) en (5.32).

Zoals gezegd heeft het voorgaande slechts betrekking op de vorm van de verdeling. De theoretisch voorspelde waarde van de schaalparameter blijkt niet geheel juist te zijn, in die zin dat de gemeten golfhoogten systematisch kleiner zijn dan theoretisch voorspeld voor de gegeven waarde van  $m_0$ .

Uit metingen op diep water is b.v. de volgende empirische relatie gevonden (zie figuur 5.16):

$$H_{1/3 \text{ emp}} \approx 3.8(m_0)^{1/2} \quad (5.33)$$



Figuur 5.16 (Houmb en Overvik, 1977)

De coëfficiënt hierin is 5% kleiner dan de theoretisch voorspelde (vergelijk met 5.30).

Omdat de vorm van de gemeten golfhoogteverdeling wel overeenkomt met de theoretisch bepaalde, maar de schaal niet, is het nuttig om  $m_0$  te elimineren uit (5.26) en (5.30), met als resultaat

$$Q_{\underline{H}}(H) = \Pr\{\underline{H} > H\} \approx \exp\left\{-2\left(\frac{H}{H_{1/3}}\right)^2\right\} \quad (5.34)$$

Naast deze theoretisch afgeleide en empirisch bevestigde verdeling kan dan de empirische betrekking (5.33) worden gebruikt wanneer de golfhoogteverdeling moet worden uitgedrukt in termen van het spectrum van de uitwijkingen van het oppervlak.

Voorbeeld (vervolg).Gevraagd:

- (i)  $H_{1/3}$  en  $\mu_H$
- (j) de waarde die door 1% van de golfhoogten wordt overschreden

ad (i) Substitutie van  $m_0^{\frac{1}{2}} = 1.10 \text{ m}$  in (5.33) geeft  $H_{\frac{1}{3}} \approx 4.2 \text{ m}$ ,  
 waarna uit (5.32) volgt dat  $\mu_H = H_{\frac{1}{3}} / 1.60 \approx 2.6 \text{ m}$ .

ad (j) De oplossing van (5.34) voor  $H$ , bij gegeven  $H_{\frac{1}{3}}$  en  $Q_H$ , luidt

$$H = (\ln Q_H^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}$$

Substitutie hierin van  $Q_H = 10^{-3}$  en  $H_{\frac{1}{3}} = 4.2 \text{ m}$  geeft  $H = 7.8 \text{ m}$ .

### 5.6. Visuele schatting van golfhoogte en periode

In voorgaande paragrafen zijn parameters geïntroduceerd die kenmerkend zijn voor golfhoogten resp. perioden. Deze waren ontleend aan een tijdregistratie  $\eta(t)$  (b.v.  $H_0$  resp.  $T_z$  of  $T$ ) dan wel aan het bijbehorend spectrum  $E_{\eta\eta}(f)$  (b.v.  $m_0^{\frac{1}{2}}$  resp.  $(m_0/m_2)^{\frac{1}{2}}$  of  $f_m^{-1}$ ). In studies van golfklimaat komen daar meestal visueel geschatte waarden bij ( $H_v$  resp.  $T_v$ ). De vraag doet zich dan voor hoe deze zich verhouden tot instrumenteel bepaalde parameters. We beperken ons daarbij tot een enkel z.g. golfsysteem.

Globaal gezegd is een golfsysteem een golfveld afkomstig van een enkel windveld. Vaak zijn verschillende golfsystemen tegelijk aanwezig in een zeegebied, b.v. golven behorend bij de momentane, lokale wind ("zeegang") resp. bij een voorbij en/of verderweg gelegen windveld ("deining"). Elk van die golfsystemen heeft een ééntoppig spectrum in frekwentie ( $f$ ) en richting ( $\theta$ ), en van elk systeem worden kenmerkende parameters visueel geschat. (Hierbij is impliciet verondersteld dat de diverse golfsystemen voldoende gescheiden zijn in de spectrale ruimte om ze in de fysische ruimte (het zeeoppervlak) inderdaad te kunnen onderscheiden.)

Het is gebleken dat waarnemers zich bij het visueel schatten van kenmerkende golfhoogten en perioden van een golfsysteem als vanzelf baseren op de hogere golven van het systeem. De World Meteorological Organization (WMO) heeft dit ook als richtlijn gegeven voor de waarnemingen die onder auspiciën van deze organisatie vanaf schepen worden gedaan, door te stellen dat die visuele schattingen moeten zijn gebaseerd op de gemiddelde hoogte resp. periode van 15 à 20 goed gevormde, hogere golven van een aantal

golfgroepen. De beperking tot de hogere golven is zinvol omdat de lagere minder goed identificeerbaar zijn, en, mee door hun grote aantal, ook niet goed zijn mee te nemen in het visuele en mentale proces van schatting en middeling.

Het is onvermijdelijk dat er subjectieve elementen blijven in het operationeel hanteren van de WMO richtlijn, en verschillen tussen visueel geschatte en instrumenteel bepaalde waarden zijn dan ook te verwachten. Wel kan men nagaan welke instrumenteel te bepalen hoogte- en periode-parameters gemiddeld het beste overeenkomen met  $H_v$  resp.  $T_v$ . Vanzelfsprekend zullen dat niet de gemiddelde hoogte en periode zijn van *alle* golven, maar slechts die van de hogere, en wel ongeveer het hoogste  $\frac{1}{3}$ -deel. Zodoende is men gekomen tot een definitie van  $H_{\frac{1}{3}}$  resp.  $T_{\frac{1}{3}}$  als de gemiddelde hoogte resp. periode van het hoogste  $\frac{1}{3}$ -deel van de golven tussen nuldoorgangen (zie par. 5.3 en 5.5). Men noemt deze kortweg de significante golfhoogte ( $H_s$ ) resp. significante golfperiode ( $T_s$ ).

In golfklimaatstudies (vroeger ook in studies van golfgroei) worden  $H_{\frac{1}{3}}$  en  $H_v$  vaak als equivalent behandeld, en werkt men met  $H_s$ , waarbij dan wordt afgezien van de vraag of numerieke waarden van  $H_s$  afkomstig waren van  $H_{\frac{1}{3}}$  dan wel van  $H_v$ . Voor de perioden geldt mutatis mutandis hetzelfde. Dit is ook de werkwijze in de hierna volgende hoofdstukken over golfgroei resp. golfklimaat.

### 5.7. Extreme waarden

Zoals reeds is gezegd in de inleiding tot dit hoofdstuk zijn er situaties waarin het van belang is inzicht te hebben in de te verwachten extreme waarde van een stochastisch proces gedurende een zekere tijdsduur ( $D$ ). Theoretisch kunnen dergelijke problemen als volgt worden geformuleerd. Gegeven een stationair Gaussisch proces  $\{\underline{x}_t\}$  met  $E\{\underline{x}_t\} = 0$  en met variantiespectrum  $E_{xx}(f)$ . Gevraagd de kans dat in een willekeurige realisatie van  $\{\underline{x}_t\}$ , met duur  $D$ , een bepaald niveau  $x$  niet wordt overschreden.

De berekening van de gevraagde kans is niet goed mogelijk door uit te gaan van de gezamenlijke k.d.f. van  $\underline{x}_t$  op willekeurige tijdstippen, omdat



de verzameling tijdstippen in een eindig tijdsinterval niet aftelbaar is. Daarom wordt gebruik gemaakt van bijzondere waarden van  $\{\underline{x}_t\}$ , die slechts voor discrete tijdstippen bestaan. Zowel de maxima ( $\underline{x}_m$ ) als de doorgangen door het niveau  $x$  zijn hiervoor geschikt. Wij gaan om te beginnen uit van de maxima, en zullen achteraf aanduiden hoe hetzelfde resultaat via de niveaudoorgangen bereikt had kunnen worden. (We kunnen de golftoppen ( $\hat{x}_m$ ) ook gebruiken, maar dat is theoretisch minder gefundeerd bij niet-smalle spectra.)

De kans dat een individueel maximum hoger is dan  $x$ , hier korthedshalve geschreven als

$$Q \equiv Q_{\underline{x}_m}(x) \equiv \Pr\{\underline{x}_m > x\}, \quad (5.35)$$

en het verwachte aantal maxima in de duur  $D$ , geschreven als  $N$ , zijn voor Gaussische processen bekend uit het werk van Rice, genoemd in par. 5.4. Veronderstellend dat de hoogten van de verschillende maxima stochastisch onafhankelijk zijn, geldt

$$\Pr(\text{alle } \underline{x}_t \leq x) = \Pr\{\text{geen } \underline{x}_m > x\} = (1 - Q)^N \quad (5.36)$$

waarmee formeel de vraag beantwoord is. Maar, omdat het in de toepassingen altijd gaat om extreme waarden in een *lange* reeks van maxima, is  $N \gg 1$ , waardoor het rechterlid in (5.36) niet erg handzaam is. Voor extreme waarden is echter alleen het bereik  $Q \ll 1$  van belang. Via de identiteit

$$(1 - Q)^N = \exp\{\ln(1 - Q)^N\} = \exp\{N \ln(1 - Q)\} \quad (5.37)$$

en de benadering

$$\ln(1 - Q) \approx -Q \text{ als } Q \ll 1 \quad (5.38)$$

kan (5.36) dan worden benaderd met de meer handzame vorm

$$\Pr\{\text{geen } \underline{x}_m > x\} \approx \exp(-NQ) \quad (5.39)$$

(Wanneer niet geldt dat  $Q \ll 1$ , maar nog wel dat  $N \gg 1$ , zodat  $NQ \gg 1$ , dan zijn zowel  $(1 - Q)^N$  als  $\exp(-NQ)$  vrijwel nul, zodat ook dan (5.39) als benadering van (5.36) bruikbaar is. Voor extreme waarden is dit echter niet interessant.)

Het is van belang op te merken dat  $NQ$  juist het verwachte aantal maxima is in de duur  $D$  boven het niveau  $x$ . In feite is (5.39) niets anders dan een bijzonder geval van de Poisson-verdeling, die geldt voor het (stochastisch) aantal "successen" ( $\underline{n}$ ) in een reeks van  $N$  onafhankelijke steekproeven, als per steekproef de kans op "succes" ( $Q$  in ons geval) gering is ( $Q \ll 1$ ). De Poisson-verdeling luidt (zie college Statistiek)

$$\Pr\{\underline{n} = n\} = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.40)$$

waarin

$$\mu = E\{\underline{n}\} \quad (5.41)$$

Als bijzonder geval hiervan geldt dat de kans op afwezigheid van succes in de gehele reeks gelijk is aan

$$\Pr\{\underline{n} = 0\} = e^{-\mu} = e^{-E\{\underline{n}\}} \quad (5.42)$$

In het hier beschouwde geval van de maxima is de gebeurtenis ( $\underline{x}_m > x$ ) een "succes" in bovenbedoelde zin, en geldt

$$\mu = E\{\underline{n}\} = NQ \quad (5.43)$$

waarmee we terug zijn bij (5.39).

Om 5.39 verder uit te werken moeten waarden voor  $N$  en  $Q$  gesubstitueerd worden, gebaseerd op het werk van Rice voor spectra van willekeurige vorm. Het is echter doelmatig om eerst het geval van een smal spectrum te nemen, waarvoor geldt dat het aantal maxima gelijk is aan het aantal opgaande of neergaande nuldoorgangen:

$$N = \lambda_0 D = \left( \frac{m}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}} D \quad (5.44)$$

en waarvoor de hoogten van de maxima Rayleigh verdeeld zijn:

$$Q = \exp\left(-\frac{x^2}{2m_0}\right) \quad (5.45)$$

Hiermee gaat (5.39) over in

$$\Pr\{\text{geen } \underline{x}_m > x\} \approx \exp\left\{-\left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}} D \exp\left(-\frac{x^2}{2m_0}\right)\right\} \quad (5.46)$$

Voor spectra van toenemende breedte (toenemende  $\epsilon$ ) geldt enerzijds dat  $Q$  afneemt (zie fig. 5.9) en dus minder wordt dan zou volgen uit (5.45), en anderzijds dat het aantal maxima toeneemt t.o.v. het aantal nuldoorgangen, zodat  $N$  groter wordt dan zou volgen uit (5.44). Deze tegengestelde effecten blijken elkaar vrijwel op te heffen (zolang  $Q \ll 1$ ), zodat het product  $NQ$  onafhankelijk is van  $\epsilon$ . Voor willekeurige spectrumbreedte is (5.46) dus toch geldig. (Via de tophoogten  $\hat{x}_m$  zouden we inééns tot dit resultaat zijn gekomen, maar dat is theoretisch zwakker omdat de verdeling van  $\hat{x}_m$  theoretisch minder goed bekend is dan die van alle maxima.)

Tenslotte wordt opgemerkt dat (5.46) ook kan worden afgeleid via het aantal opgaande doorgangen van  $\{\underline{x}_t\}$  door het niveau  $x$  in de duur  $D$ . De gevraagde kans is n.l. gelijk aan de kans dat zo'n doorgang in het geheel *niet* plaats vindt. Het verwachte aantal van die doorgangen is  $\mu = \lambda_x D = \lambda_0 D \exp\{-x^2/2m_0\}$  (zie vgl. 5.13), ongeacht de spectrumvorm. Voor relatief hoge niveaus ( $x$ ) zijn de doorgangen zeldzaam, en als stochastisch onafhankelijk te beschouwen, waardoor (5.42) van toepassing is, en we weer op (5.46) uitkomen.

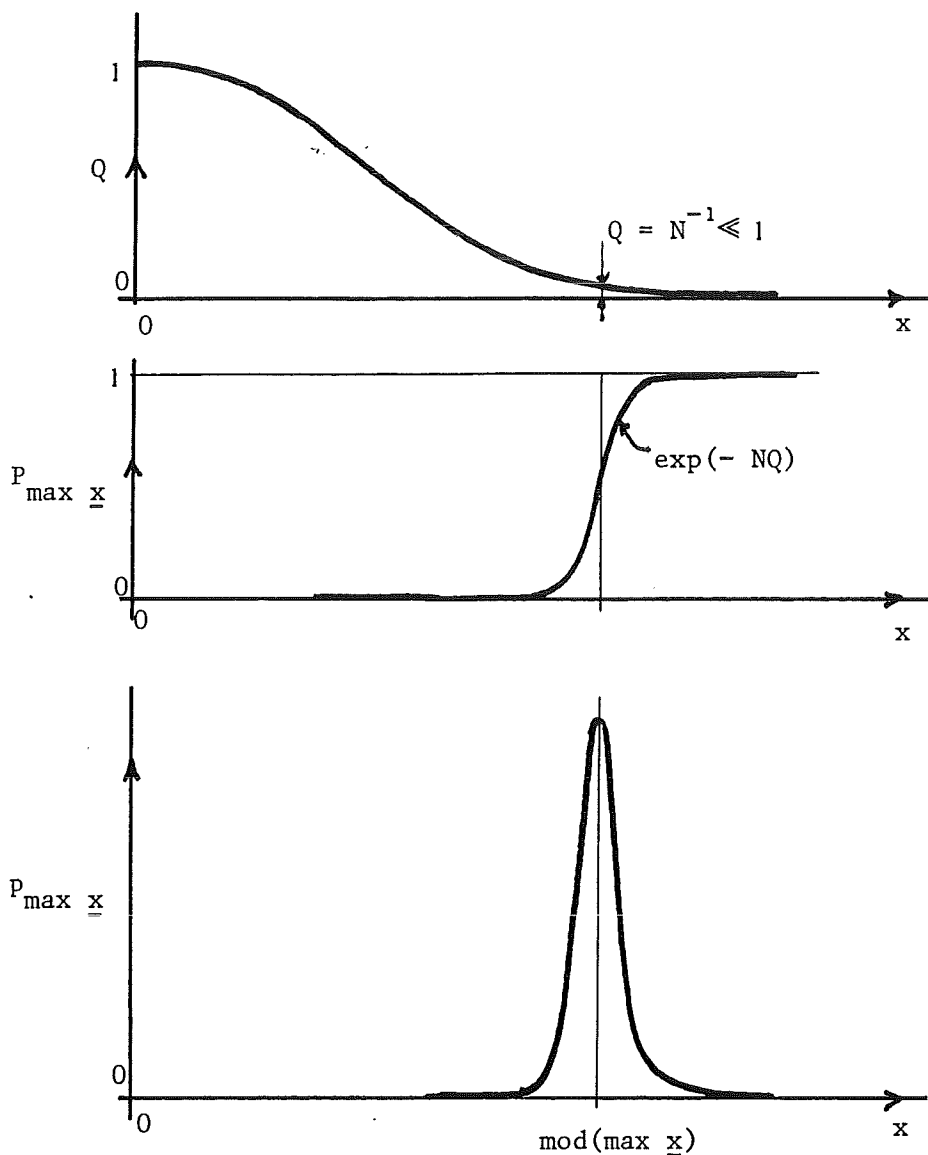
Het probleem van de extreme waarde is in het voorgaande behandeld als de kans dat een gegeven stochastisch proces gedurende een zeker interval een bepaald grensniveau niet zal bereiken. We kunnen ook de extreme waarde zelf, te bereiken in dat interval, als een stochastische variabele beschouwen. We zullen die aanduiden met  $\max \underline{x}$ . Voor de verdelingsfunctie ervan geldt

$$P_{\max \underline{x}}(x) \equiv \Pr\{\max \underline{x} \leq x\} = \Pr\{\text{geen } \underline{x}_m > x\}. \quad (5.47)$$

zodat

$$P_{\max \underline{x}}(x) = \exp(-NQ) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}} D \exp\left(-\frac{x^2}{2m_0}\right)\right\} \quad (5.48)$$

De variatie met  $x$  van  $Q$ , van  $P_{\max \underline{x}}$  en van de afgeleide naar  $x$  van  $P_{\max \underline{x}}$  (d.w.z.  $p_{\max \underline{x}}$ , de k.d.f. van  $\max \underline{x}$ ) is geschetst in figuur 5.17, voor het geval  $N \gg 1$  (zoals gebruikelijk bij extreme waarden). Merk op dat  $\exp(-NQ)$  vrijwel nul is voor zodanig kleine  $x$  dat  $Q \gg N^{-1}$



Figuur 5.17

(dus  $NQ \gg 1$ ), en pas aanmerkelijk in waarde toeneemt wanneer  $Q \approx N^{-1}$  ( $NQ \approx 1$ ). Voor nog grotere  $x$ , waarvoor  $Q \ll N^{-1}$ , en dus  $NQ \ll 1$ , nadert  $\exp(-NQ)$  als  $1 - NQ - \frac{1}{2}(NQ)^2 \dots$  asymptotisch tot 1. Men kan aantonen dat de snelste stijging van  $\exp(-NQ)$ , m.a.w. het buigpunt, bij benadering optreedt voor  $NQ = 1$ , ofwel voor  $x = (2 \ln \cdot N)^{\frac{1}{2}} m_0^{\frac{1}{2}}$ . Bij die waarde van  $x$  ligt het maximum van de k.d.f. van  $\max \underline{x}$ . Daar ligt dus de z.g. *modus* ("most probable value") van  $\max \underline{x}$ , hier geschreven als

$\text{mod}(\max \underline{x}) :$

$$\text{mod}(\max \underline{x}) \approx (2 \ln N)^{\frac{1}{2}} m_0^{\frac{1}{2}} \tag{5.49}$$

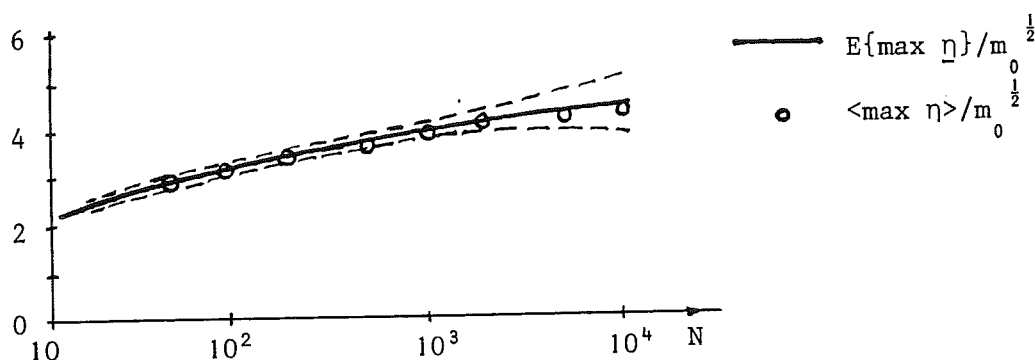
Voorts kan worden aangetoond dat

$$E\{\max \underline{x}\} \approx (2 \ln N)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{0.29}{\ln N}\right) m_0^{\frac{1}{2}} \tag{5.50}$$

Beide nemen toe met  $N$ , maar wel langzaam, vanwege de logaritmie en de vierkantswortel. De spreiding van  $\max \underline{x}$  varieert daarentegen omgekeerd evenredig met  $(\ln N)^{\frac{1}{2}}$ . Voor grote reekslengten ( $N \gg 1$ ) is de spreiding relatief klein, zoals ook is te zien aan de k.d.f. in figuur 5.17.

Het komt wel voor dat  $\text{mod}(\max \underline{x})$  wordt aangeduid als "de" waarde van  $\max \underline{x}$ . Daarmee wordt voorbijgegaan aan het feit dat  $\max \underline{x}$  een stochastische variabele is. Merk ook op dat er een aanzienlijke kans is dat  $\max \underline{x}$  zijn modus-waarde overschrijdt. Die kans is  $1 - e^{-NQ} = 1 - e^{-1} \approx 0.63$ , zodat het bepaald onverstandig zou zijn om de modus van  $\max \underline{x}$  zonder meer als representatieve waarde in een ontwerp te gebruiken.

Een vergelijking tussen uit steekproeven geschatte waarden van  $E\{\max \underline{\eta}\}$  en de theoretisch voorspelde waarden is gegeven in figuur 5.18. De overeenkomst is goed, ondanks het feit dat de waarden hier nogal ver in de



Figuur 5.18 (Cartwright, 1958)

staart zitten van de verdeling van  $\{\underline{\eta}_t\}$  waarvan in eerste instantie was uitgegaan.

Dezelfde redenering volgend als hierboven kan men de verdelingsfunctie afleiden van  $\max \underline{H}$ , de grootste golfhoogte uit een reeks van  $N$ :

$$\Pr\{\max \underline{H} \leq H\} = \exp\{-NQ_{\underline{H}}(H)\} \tag{5.51}$$

Substitueert men hierin (5.34) voor  $Q_{\underline{H}}$  dan ontstaat het volgende resultaat voor  $\text{mod}(\max \underline{H})$ :

$$\text{mod}(\max \underline{H}) = \left(\frac{1}{2} \ln N\right)^{\frac{1}{2}} H_{1/3} \tag{5.52}$$

Deze theoretische resultaten blijken goed te voldoen, althans in diep water.

Voorbeeld (vervolg).Gevraagd:

- (k)  $\text{mod}(\max \underline{H})$  in een duur van 3 uur.
- (l) de waarde van  $H$  met een kans van overschrijding door  $\max \underline{H}$  in een duur van 3 uur gelijk aan 0.01.

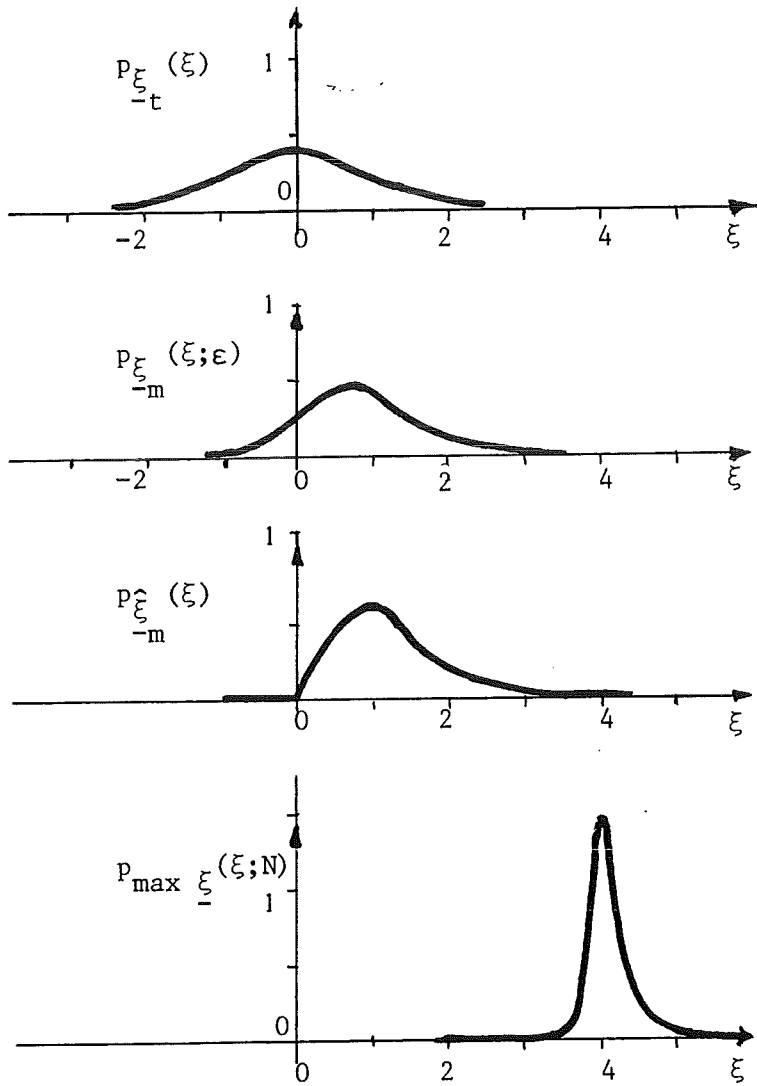
ad (k) Er zijn evenveel golfhoogten als neergaande nuldoorgangen dus  $N = \lambda_0 D = (0.14 \text{ s}^{-1})(3 \times 3600 \text{ s}) = 1512$  (zie antwoord (d), par. 5.3). Verder is  $H_{1/3} = 4.2 \text{ m}$  (zie antwoord (i), par.5.5). Dus  $\text{mod}(\max \underline{H}) = \left\{\frac{1}{2} \ln 1512\right\}^{\frac{1}{2}}(4.2 \text{ m}) = 8.0 \text{ m}$ .

ad (l) We stellen  $\exp(-NQ_{\underline{H}}) = 0.99$ , waaruit met  $N = 1512$  volgt  $Q_{\underline{H}} = 6.6 \times 10^{-6}$ . Werken we dit uit zoals in antwoord (j), par. 5.5, dan is het resultaat:  $H = 10.2 \text{ m}$ .

5.8 Résumé

Windgolven en daardoor opgewekte responsies zijn bij benadering te beschrijven als een Gaussisch proces, dat bovendien voor korte duur als stationair kan worden beschouwd. Alle statistische eigenschappen van dergelijke processen zijn bepaald door het variantiespectrum. Theoretische resultaten zijn gegeven voor de k.d.f. van momentane waarden, maxima, golfhoogten en extreme waarden, evenals voor de gemiddelde frekwentie van niveaudoorgangen. Deze resultaten blijken in het algemeen

voor praktische toepassingen voldoende betrouwbaar te zijn, afgezien van een kleine (ca 5%) correctie in de verhouding tussen golfhoogten en standaardafwijking van de momentane uitwijking. Een overzicht van enkele van bovengenoemde k.d.f.'s is gegeven in figuur 5.19.



Figuur 5.19 - K.d.f. van  $\xi_t$ ,  $\xi_m$ ,  $\hat{\xi}_m$  en  $\max \xi$  voor aangenomen waarden  $\epsilon = 0.6$  en  $N = 3000$

### 5.9. Literatuur

Voor statistische eigenschappen van stationaire stochastische processen zie b.v.

- J.S. Bendat en A.G. Piersol, Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, 1971.
- A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, Inc., 1965.

Voor overzicht statistische eigenschappen Gaussische processen en windgolven zie

- J.A. Battjes, Statistische eigenschappen van stationaire Gaussische processen, De Ingenieur, Nr. 27-29, p. B44-B51, 1972.
- J.A. Battjes, Probabilistic aspects of ocean waves, Proc. Seminar "Safety of Structures under Dynamic Loading", I. Holand, Editor, Tapir Publishers, Trondheim, p. 387-439, 1978. (Ook verkrijgbaar als Report Nr. 77-2, Comm. on Hydraulics, Dept. of Civil Eng., Delft Univ. of Techn.)

Verwijzingen in tekst en figuren:

- A.O. Bell and R.C. Walker, Dynamic Stresses in an Offshore Mobile Drilling Unit, "Dynamic Waves in Civil Engineering", Wiley, 1971.
- D.E. Cartwright, On estimating the mean energy of sea waves from the highest wave in a record, Proc. Roy. Soc., A, 247, p. 22-48, 1958.
- D.E. Cartwright and M.S. Longuet-Higgins, The statistical distribution of the maxima of a random function, Proc. Roy. Soc., A, 237, p.212-232, 1956.
- Y. Goda, The observed joint distribution of periods and heights of sea waves, Proc. 16th. Int. Conf. on Coastal Eng., Hamburg, I, p. 227-246, 1978.
- O.G. Houmb and T. Overvik, On the statistical properties of 115 wave records from the Norwegian continental shelf, Div. of Port and Ocean Eng., Univ. of Trondheim, 1977.
- B. Kinsman, Wind Waves, Prentice-Hall, Inc., 1965.
- M.S. Longuet-Higgins, On the statistical distribution of the heights of sea waves, J. of Mar. Res., 11, p. 245-266, 1952.

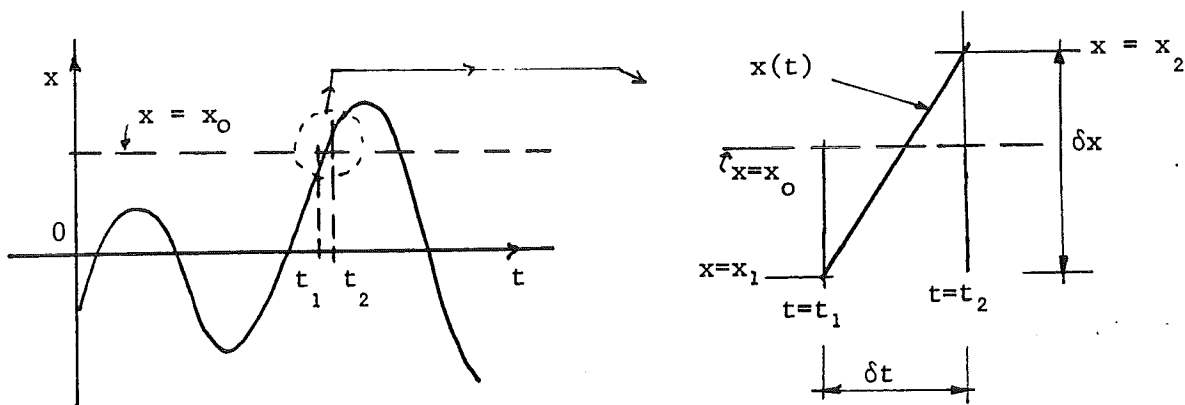


- S.O. Rice, Mathematical Analysis of Random Noise, Bell System Techn. Journal, 23, 1944, 25, 1945.
- J.H. Vugts, Wave spectra: measured samples and their representation for theoretical predictions, Report EP-42516, Shell Internationale Petroleum Maatschappij N.V., 1971.

APPENDIX - Gemiddelde frekwentie van niveaudoorgangen

Gegeven een stationair Gaussisch proces  $\{x_t\}$ , met  $E\{x_t\} = 0$  en variantiespectrum  $E_{xx}(f)$ . Gevraagd de gemiddelde frekwentie ( $\lambda_{x_0}$ ) waarmee een willekeurige realisatie van dit proces een gegeven niveau  $x = x_0$  in opgaande richting doorsnijdt.

Rice (1944) geeft een afleiding ongeveer als volgt. Hij bepaalt de kans op een opgaande doorsnijding van het niveau  $x = x_0$  in een tijdsinterval  $(t_1, t_2)$ . Als  $\delta t \equiv t_2 - t_1$  infinitesimaal is dan is de afgeleide ( $\dot{x}$ ) van  $x(t)$  op het interval  $(t_1, t_2)$  als constant te benaderen ( $\dot{x}(t) \approx \text{const} \approx \dot{x}_2$ ). Een opgaande doorsnijding van het



niveau  $x = x_0$  in het interval  $(t_1, t_2)$  komt dan overeen met de gebeurtenis  $(x_0 < x_2 < x_0 + \dot{x}_2 \delta t$  en  $0 < \dot{x}_2 < \infty$ ). De kans hierop is te schrijven als

$$\int_0^{\infty} d\dot{x} \int_{x_0}^{x_0 + \dot{x} \delta t} dx p_{\underline{x}_t, \dot{\underline{x}}_t}(x, \dot{x}) \quad (I)$$

Hierin is  $t_2$  vervangen door  $t$  omdat  $p_{\underline{x}_t, \dot{\underline{x}}_t}$  toch niet met  $t$  varieert (het gegeven proces is immers stationair). Omdat het interval van integratie over  $x$  infinitesimaal is ( $\delta x \equiv x_2 - x_1 \approx \dot{x} \delta t$ ) kan de integraal over  $x$  worden benaderd als in

$$\int_{x_0}^{x_0 + \delta x} f(x) dx \approx f(x_0) \delta x$$

met als resultaat dat (I) overgaat in

$$\left\{ \int_0^{\infty} \dot{x} p_{\underline{x}_t, \dot{\underline{x}}_t}(x_0, \dot{x}) d\dot{x} \right\} \delta t$$

Omdat dit de kans voorstelt op een opgaande doorsnijding van het niveau  $x = x_0$  in een willekeurig tijdsinterval met duur  $\delta t$ , is de factor in accoladen gelijk aan  $\lambda_{x_0}$ :

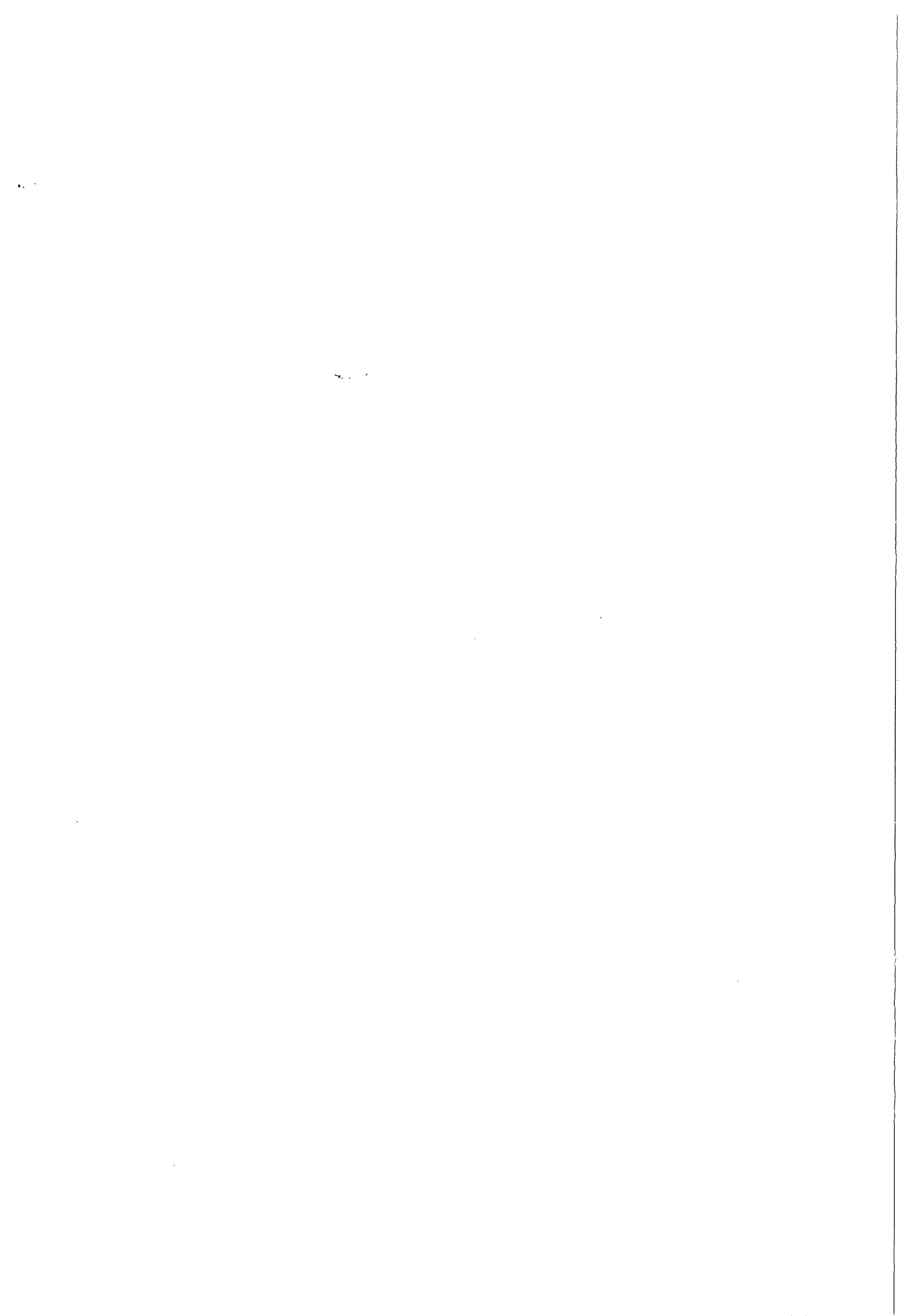
$$\lambda_{x_0} = \int_0^{\infty} \dot{x} p_{\underline{x}_t, \dot{\underline{x}}_t}(x_0, \dot{x}) d\dot{x} \quad (\text{II})$$

Dit geldt voor elk stationair stochastisch proces. Is het proces bovendien Gaussisch dan geldt (5.8), waarmee (II) overgaat in

$$\lambda_{x_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp \left( - \frac{x_0^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

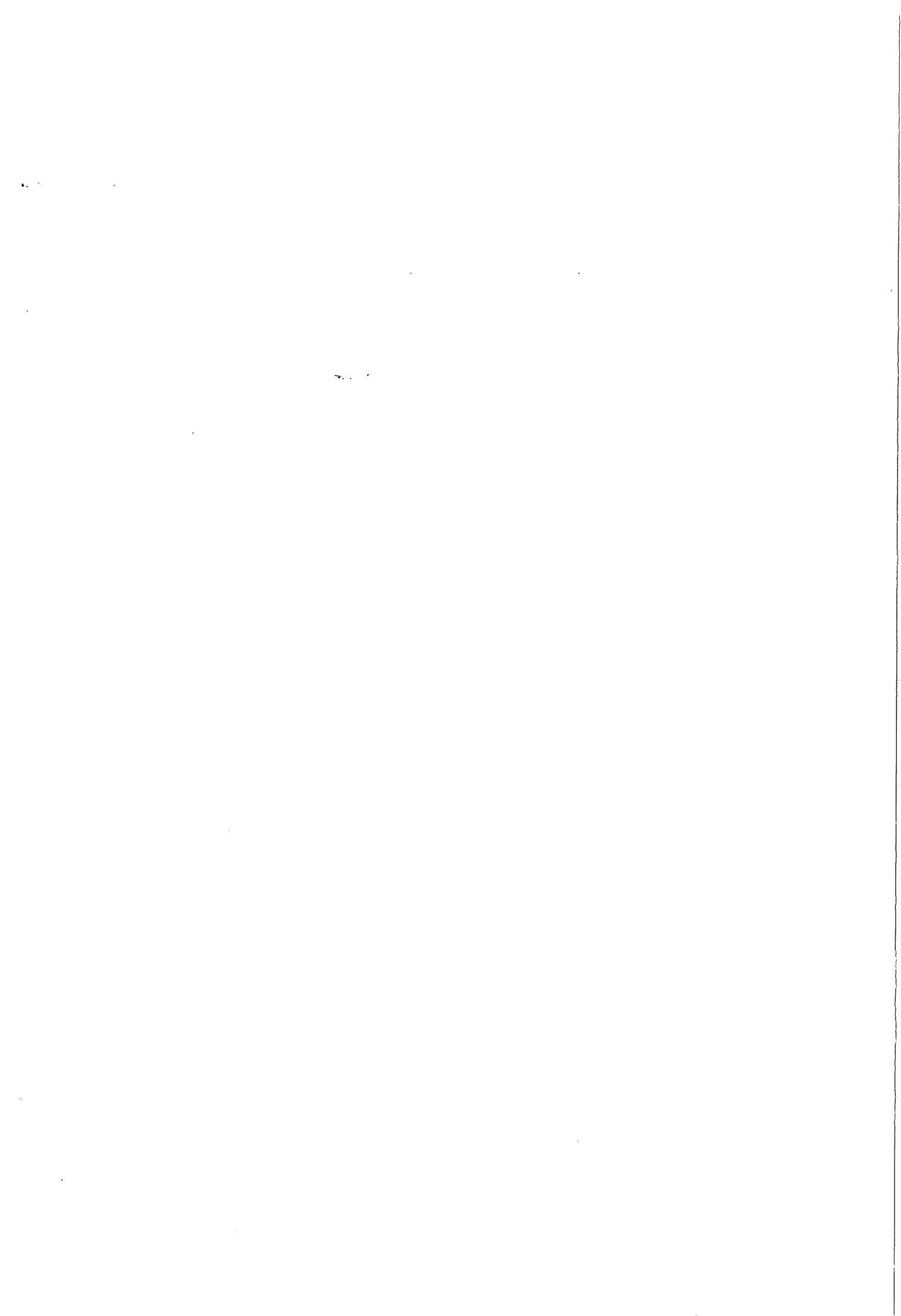
Uitgedrukt in de momenten van  $E_{xx}(f)$  (zie ook 5.11) wordt dit

$$\lambda_{x_0} = \left( \frac{m_2}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( - \frac{x_0^2}{2m_0} \right) \quad (\text{III})$$

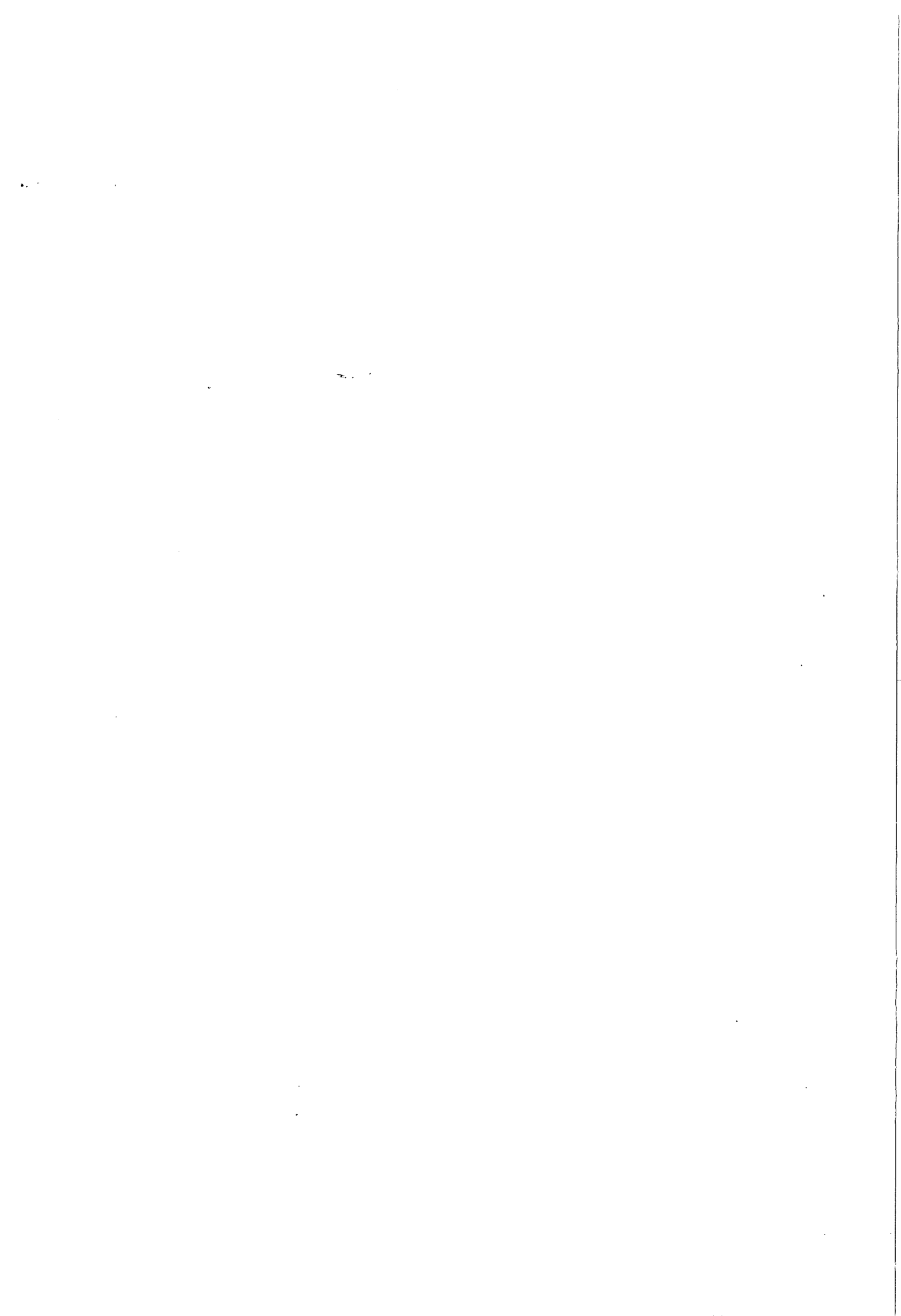


## 6. GOLFVERWACHTINGSMETHODIEKEN

N.B. De definitieve tekst voor hoofdstuk 6 is nog niet gereed. In plaats daarvan is een copie ingelast van een bestaand dictaat "Golfvoorspelling". Qua opzet sluit dit niet voor 100% aan bij de overige hoofdstukken, en qua nummering van pagina's en vergelijkingen in het geheel niet. Evenmin zijn er verwijzingen naar de andere hoofdstukken.



Golfvoorspelling	blz.
1. Inleiding	1
2. Golfvoorspellingsmethoden voor het standaard windveld	2
2.1. Windveld	2
2.2. Methode van de kenmerkende golf	4
2.3. Methode van het standaard spectrum	8
2.3.1. Inleiding	8
2.3.2. Standaard frequentie spectrum	10
2.3.3. Standaard richtingsverdelingsfunctie	16
2.4. Verband tussen de parameters van de kenmerkende golf en het standaard spectrum	17
3. Golfvoorspellingsmethoden van het variërende windveld.	19
3.1. Inleiding	19
3.2. Energiebalans	19
3.2.1. Transport van de golfenergie	22
3.2.2. Bronfunctie	23
3.3. Energiebalans van het geparameteriseerde spectrum	30
4. Historisch perspectief	32
5. Referenties	33
Bijlage 1A	36
Bijlage 1B	37





## 1. Inleiding

Na een reeks van aarzelende pogingen vanaf de tweede helft van de vorige eeuw kreeg de ontwikkeling van methoden om golven te voorspellen pas in de tweede wereldoorlog betekenis toen een onderzoek gestart werd om te komen tot betrouwbare golfverwachtingen voor de gealliëerde landingen. Op grond van voornamelijk empirische gegevens ontstond een model waarmee het mogelijk werd om een kenmerkende golfhoogte en golfperiode te voorspellen als functie van enkele parameters van een homogeen, stationair windveld. Een aantal jaren later, toen de spectrale analyse haar intrede deed in de golfbeschrijvings-technieken, werd het mogelijk ook het energiedichtheidsspectrum te voorspellen als functie van de windveld parameters. Het homogene, stationaire windveld is echter meestal een weinig realistische voorstelling van het windveld op zee en het gebruik ervan is een belangrijke beperking voor het toepassen van deze methoden.

In de jaren '50 ontstond het idee dat de voorspelling kan worden uitgevoerd voor iedere spectrale komponent afzonderlijk. Iedere komponent die over het wateroppervlak beweegt wordt gevolgd en tijdens dat volgen wordt de energiedichtheid van die komponent berekend. Dit gebeurt door de balans bij te houden van de energie die de komponent ontvangt (b.v. van de wind) of afstaat (b.v. door dissipatie). In principe is het mogelijk op deze wijze de energiedichtheid van deze komponent te berekenen in situaties waarin het windveld zowel in ruimte als in de tijd varieert.

Uit dit korte overzicht blijkt dat de golfvoorspellingsmethoden kunnen worden onderscheiden in twee categorieën: een categorie waarbinnen het golfbeeld voorspeld wordt in een homogeen, stationair windveld en een categorie waarbinnen golfverwachtingen worden opgesteld in een variërend windveld.

## 2. Golfvoorspellingsmethoden voor het standaard windveld

De methoden die in deze paragraaf behandeld worden zijn de meest eenvoudige die beschikbaar zijn. De reden daarvoor is dat het windveld zeer sterk geschematiseerd is waardoor het beschreven kan worden met slechts enkele parameters. Hetzelfde geldt voor het golfveld.

Twee methoden worden onderscheiden. De eerste, de methode van de kenmerken- de golf, geeft alleen twee karakteristieke afmetingen van de golven, nl. de significante golfhoogte en de significante golfperiode. De tweede, de methode van het standaard spectrum, geeft meer informatie over het golfbeeld nl. het spectrum.

Alvorens over te gaan naar een beschrijving van de methoden worden enkele aspecten van het windveld aan de orde gesteld.

### 2.1. Windveld

Evenals het golfbeeld is het windveld een bijzonder complexe grootheid en evenals de waterstandvariaties in een golfveld dient de windsnelheidsvector beschouwd te worden als een stochastische variabele. In het volgende overzicht worden echter uitsluitend de gemiddelde windsnelheid en -richting gebruikt, die voor een homogeen, stationair windveld per definitie konstant zijn.

Op de vraag hoe "de" windsnelheid ( $U$ ) gedefiniëerd moet worden is in de literatuur een verscheidenheid aan antwoorden te vinden. In de meeste publicaties wordt een tijdsgemiddelde gebruikt van de windsnelheid op een konstante hoogte ( $z$ ) boven het gemiddelde waterniveau ( $U_z$ ). Uit de literatuur blijkt dat er i.h.a. een voorkeur bestaat om  $z = 10$  m te kiezen.

Verondersteld wordt dat het windveld een bovenwindse begrenzing kent die bestaat uit een rechte lijn die loodrecht staat op de gemiddeld windrichting. De breedte van het windveld wordt zo groot gedacht dat de numerieke waarde daarvan niet meer van belang is voor de golfvoorspelling ("oneindig" breed). Naast deze begrenzingen in de ruimte kent het windveld ook een startpunt in de tijd. De wind wordt verondersteld plotseling te zijn gaan waaien op een tijdstip  $t = 0$ . Hiermee is het windveld voldoende gekarakteriseerd. De kenmerkende parameters die nodig zijn voor een plaats en tijdstip in het windveld zijn de afstand tot de bovenwindse begrenzing (strijklengte) en de tijd die verstreken is sinds de aanvang van de wind (windduur). Deze parameters geven in feite weer de mate waarin de wind gelegenheid heeft gehad om energie over te

dragen aan het golfveld tot aan het beschouwde punt en tijdstip.

Het hier beschreven windveld zal in het vervolg worden aangeduid als het standaard windveld. In een dergelijk windveld zijn de waarden van de golfparameters afhankelijk van de windveldparameters  $U$ ,  $F$  en  $t$ , van de zwaarte-krachtsversnelling ( $g$ ), en in zekere mate ook van andere grootheden zoals b.v. de viscositeit van water en van lucht, de turbulentiegraad van de wind, enz. Verwaarloost men de invloed van deze andere grootheden dan resteren slechts  $U$ ,  $F$ ,  $t$  en  $g$  als onafhankelijke parameters. Dit viertal kan tot twee dimensieloze onafhankelijke parameters worden teruggebracht, b.v.

$$\tilde{F} = g \frac{F}{U^2} \quad (2.1.1)$$

$$\tilde{t} = g \frac{t}{U} \quad (2.1.2)$$

Dit houdt in dat de golfgroei in het éne windveld gelijkvormig is met die in een willekeurig ander (standaard) windveld, mits de schaalregel van Froude in acht wordt genomen.

Met betrekking tot de groei en voortplanting van windgolven kunnen strijklengte en windduur in elkaar uitgedrukt worden m.b.v. een transformatieregel gebaseerd op de veronderstelling dat een spectrum dat opgewekt is na een bepaalde tijdsduur  $t$  bij onbeperkte strijklengte gelijk is aan een spectrum dat opgewekt is na een zekere strijklengte  $F$  bij onbeperkte windduur.

Als de energiedichtheid van iedere golfkomponent zich ontwikkelt en voortplant onafhankelijk van de andere golfcomponenten is voor iedere golfkomponent de equivalentie tussen strijklengte en duur eenvoudig te berekenen m.b.v. de groepsnelheid van die komponent. Voor water met konstante diepte zijn die relaties weergegeven door vergelijkingen (2.1.3) en (2.1.4)

$$F_{eq} = c_g \cdot t \cos \theta \quad (2.1.3)$$

$$t_{eq} = \frac{F}{c_g \cos \theta} \quad (2.1.4)$$

waarin  $\theta$  de hoek tussen de windrichting en de voortplanting van de golfkomponent is.

Voor het spectrum in zijn geheel is er in deze zin geen equivalentie omdat de equivalentie voor iedere golfkomponent verschillend is. Maar men zou de

komponent met de piekfrequentie  $f_m$  kunnen beschouwen als de "drager" van de totale energie van het spectrum. Deze benadering is in zoverre gerechtvaardigd dat voor jonge zeegang de energie sterk geconcentreerd is rond deze piek (scherp gepiekte spectra) waar relatief intensieve niet-lineaire wisselwerking plaatsvindt (zie paragraaf 3.2.2.) waardoor de groepsnelheid van de piekfrequentie inderdaad ongeveer gelijk is aan de snelheid waarmee de totale energie zich voortplant (zie ook paragraaf 3.3.). Omdat de piekfrequentie niet konstant is, zal ook de groepsnelheid variëren met de strijklengte of windduur (ook bij konstante waterdiepte) en de equivalentie moet nu worden weergegeven als in de onderstaande vergelijkingen

$$F_{eq} = \int_0^t c_g dt \quad \text{of} \quad t_{eq} = \int_0^F (c_g)^{-1} dF$$

of in dimensieloze vorm met  $c_g = g/(4\pi f_m)$  (diep water)

$$\tilde{F}_{eq} = \int_0^{\tilde{t}} (4\pi \tilde{f}_m)^{-1} d\tilde{t} \quad \text{of} \quad \tilde{t}_{eq} = \int_0^{\tilde{F}} 4\pi \tilde{f}_m d\tilde{F}$$

waarbij  $\tilde{f}_m = Uf_m/g$ . Deze uitdrukkingen kunnen ook gebruikt worden voor de kenmerkende golf als aangenomen wordt dat er een éénduidig verband bestaat tussen  $T_s$  en  $f_m$  (b.v.  $T_s = \alpha f_m^{-1}$  met  $\alpha$  iets kleiner dan 1).

De hier beschreven gelijkvormigheids- en transformatieregels hebben het aantal onafhankelijke windveld parameters gereduceerd van drie ( $U$ ,  $F$  en  $t$ ) tot één ( $\tilde{F}$ ). In deze notitie zullen deze regels geaccepteerd worden. Voor commentaar op het gebruik van de transformatieregel kan worden verwezen naar Mitsuyasu en Rikiishi (1978).

## 2.2. Methode van de kenmerkende golf

Het beschrijven van windgolven heeft gedurende lange tijd op een niveau gestaan waar slechts enkele grootheden gebruikt werden. In die tijd, (en vaak ook nu nog) trachtte men het golfbeeld te beschrijven met behulp van een denkbeeldige sinusvormige golf met een kenmerkende golfhoogte, -periode en -richting. Deze grootheden kunnen niet goed gedefinieerd worden in termen van statistische of spectrale eigenschappen van de zeegang omdat het "kenmerkende" aspect berust op visuele, en soms andere, indrukken die het golfbeeld op de waarnemer maakt. Toch bleken de waarnemingen redelijk bruikbaar te zijn als basis voor de eerste golfvoorspellingsmethoden. Met deze methoden kan men als functie van plaats en tijd in het standaard windveld, de "golfhoogte" en de "golfperiode" voorspellen. De gemiddelde golfrichting wordt à priori gelijk gesteld aan de gemiddelde windrichting.

De eerste golftheorie werd gepubliceerd in 1925 door Jeffreys (Jeffreys, 1925). Zijn model was gebaseerd op de veronderstelling dat het wateroppervlak mag worden beschreven met een sinusvormige golf, waarvan, onder invloed van de wind, de "golfhoogte" en "periode" langzaam toenemen. De energie die hiervoor nodig is zou geleverd moeten worden door drukverschillen ontstaan aan voor- en achterzijde van de golfkammen door het z.g. "sheltering"-effect (zie Fig. 2.2.A). Deze theorie bevat echter een onbekende evenredigheidsconstante en resulteert dus niet in uitspraken waarmee men golven zou kunnen voorspellen.

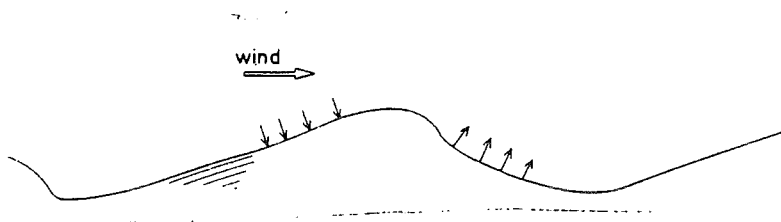


Fig. 2.2.A Het "sheltering" - effect

De gealliëerde landingen in de tweede wereldoorlog gaven aanleiding om de golfvoorspelling te richten op meer direct toepasbare resultaten. Vooral Sverdrup en Munk hebben aanvankelijk veel bijgedragen aan de verwezelijking hiervan. Hoewel de theoretische basis van hun beschouwingen (analoog aan die van Jeffreys) al spoedig niet meer te verdedigen was, zijn de door hen gegeven relaties tussen golf en windparameters tot op heden in gebruik. Dit is mogelijk omdat hun resultaten primair toch empirisch van aard zijn. Bovendien hebben zij in de presentatie van de resultaten gebruik gemaakt van dimensieloze golf- en windveldparameters. De "golfhoogte" ( $H$ ), "golfperiode" ( $T$ ) werden dimensieloos gemaakt m.b.v. de windsnelheid ( $U$ ) en de zwaartekrachtversnelling ( $g$ ). Zo ontstonden relaties tussen de dimensieloze golfhoogte ( $\tilde{H} = gH/U^2$ ) en periode ( $\tilde{T} = gT/U$ ) enerzijds en de dimensieloze strijklengte  $\tilde{F}$  en windduur  $\tilde{t}$  anderzijds. Het idee om dimensieloze golfparameters te behandelen als functies van dimensieloze windparameters blijkt bijzonder nuttig te zijn en nog steeds wordt hiervan gebruik gemaakt. Hierdoor is het nl. mogelijk om waarnemingen te generaliseren en gevonden relaties toe te passen onder omstandigheden van totaal andere schaal dan die van de waarnemingen.

Kort na de publikatie van Sverdrup en Munk (1946), publiceerde Thijssse (in 1948) de resultaten van een onderzoek naar golfgroei in water met beperkte maar konstante diepte ( $d$ ). De onafhankelijke parameters werden daarbij uitgebreid met een dimensieloze waterdiepte  $\tilde{d}(= gd/U^2)$ .

Doordat er steeds meer waarnemingen beschikbaar komen over golfgroei kunnen de relaties tussen de verschillende grootheden regelmatig worden aangepast. Met name Bretschneider (b.v. Bretschneider, 1952, 1957, 1973) speelde, en speelt nog, een rol bij het aanpassen van de grafieken aan steeds weer nieuwe waarnemingen. In de loop van de tijd zijn er ook methoden ontwikkeld (b.v. Wilson, 1955) om de gevonden relaties te kunnen toepassen in zwak variërende windvelden en in gebieden met een langzaam variërende waterdiepte. In deze notitie zal niet ingegaan worden op deze methoden. Voor een beschrijving kan verwezen worden naar Holthuijsen (1979).

#### Afhankelijkheid van strijklengte, duur en bodemdiepte

In beginsel zouden de dimensieloze golfkarakteristieken  $\tilde{H}$  en  $\tilde{T}$  behandeld moeten worden als functie van de drie onafhankelijke variabelen  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{t}$  en  $\tilde{d}$

$$\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{F}, \tilde{t}, \tilde{d})$$

en

$$\tilde{T} = \tilde{T}(\tilde{F}, \tilde{t}, \tilde{d})$$

Echter, waarnemingen van  $\tilde{H}$  en  $\tilde{T}$  in de drie-dimensionale ruimte  $(\tilde{F}, \tilde{t}, \tilde{d})$  zijn zeldzaam en gezien de wijze waarop waarnemingen <sup>te</sup>representeerd worden in de meeste publikaties, moet een splitsing in variabelen gemaakt worden.

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{F}) \\ \tilde{T} = \tilde{T}(\tilde{F}) \end{array} \right\} \text{ met } \tilde{t} \text{ en } \tilde{d} \text{ onbeperkt}$$

en

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{d}) \\ \tilde{T} = \tilde{T}(\tilde{d}) \end{array} \right\} \text{ met } \tilde{F} \text{ en } \tilde{t} \text{ onbeperkt}$$

De waarden van  $\tilde{H}$  en  $\tilde{T}$  bij onbeperkte strijklengte, windduur en diepte zullen aangegeven worden door  $\tilde{H}_\infty$  en  $\tilde{T}_\infty$ . In een dergelijke situatie, waar geen golfgroei meer plaatsvindt, noemt men de zeegang volgroeide zeegang.

Waarnemingen van  $\tilde{H}$  en  $\tilde{T}$  als functie van  $\tilde{t}$  (met  $\tilde{F}$  en  $\tilde{d}$  onbeperkt) zijn dermate zeldzaam en onbetrouwbaar dat er in deze notitie vanuit gegaan wordt dat de afwijkingen die ontstaan door het toepassen van de hiervoor gegeven transformatieregels gering zijn ten opzichte van de spreiding van die waarnemingen.

$\tilde{H}$  en  $\tilde{T}$  als functie van  $\tilde{F}$  ( $\tilde{t}$  en  $\tilde{d}$  onbeperkt)

Een voorbeeld van een verzameling waarnemingen van  $\tilde{H}$  en  $\tilde{T}$  als functie van  $\tilde{F}$  is gegeven in Fig. 2.2.B.

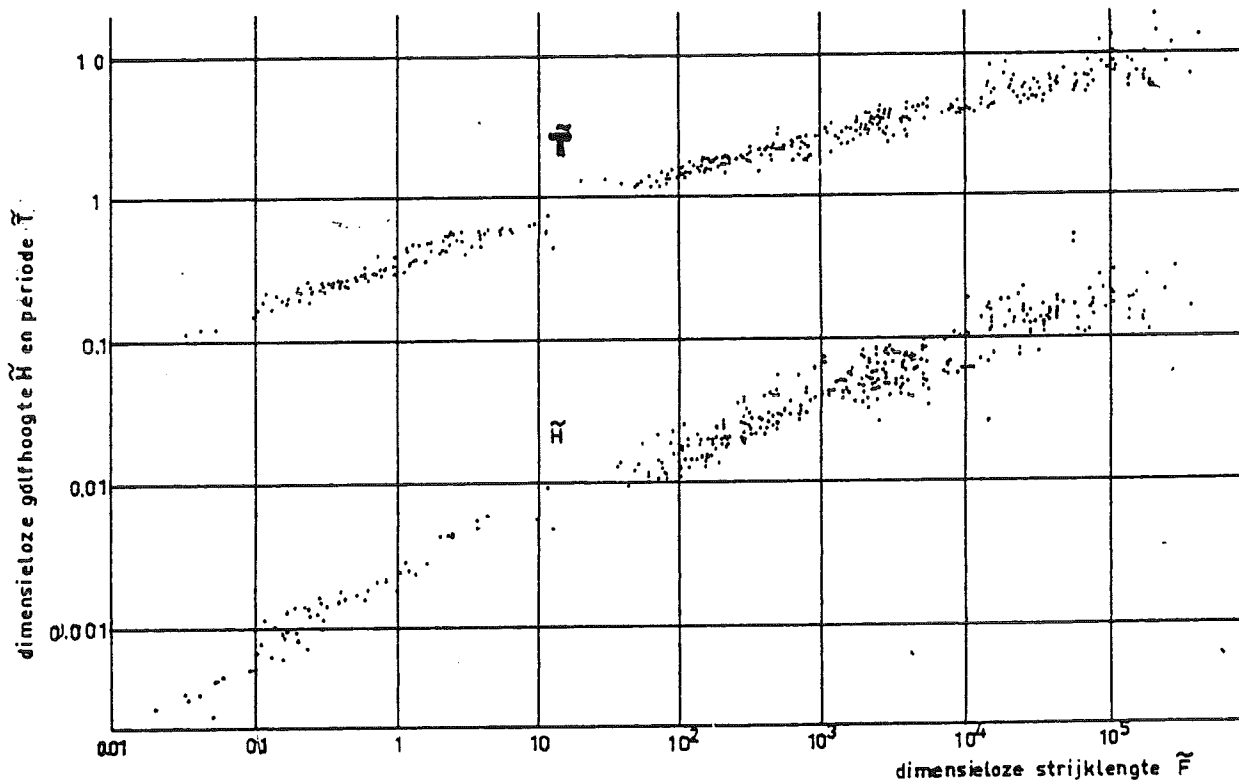


Fig. 2.2.B Waarnemingen van  $\tilde{H}$  en  $\tilde{T}$  als functie van  $\tilde{F}$  (naar Wilson, 1965)

Door dit soort verzamelingen zijn lijnen getrokken, die meestal ontleend zijn aan de volgende analytische uitdrukkingen.

$$\tilde{H} = \tilde{H}_\infty \tanh(k_1 \tilde{F}^{m_1}) \quad (2.2.1)$$

$$\tilde{T} = \tilde{T}_\infty \tanh(k_2 \tilde{F}^{m_2}) \quad (2.2.2)$$

Het passen van deze lijnen in de verzameling waarnemingen is vaak op subjectieve wijze geschied (op 't oog en meestal aan de "veilige" kant d.w.z. nabij de bovengrens van de waarnemingen).

Uitdrukkingen die in de praktijk goed lijken te voldoen (Holthuijsen, 1979) zijn die van Groen en Dorrestein (1976), zie Bouws (1978) en bijlage 1:

$$\tilde{H} = 0.24 \tanh(0,015 \tilde{F}^{0.45}) \quad \text{voor } \tilde{F} > 10 \quad (2.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T} &= 0.502 \tilde{F}^{0.225} \\ \tilde{T} &= 2\pi \tanh(0,0345 \tilde{F}^{0.37}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{voor } 10 < \tilde{F} < 400 \\ \text{voor } \tilde{F} > 400 \end{array} \quad (2.2.4)$$

De uitdrukkingen die gegeven zijn in het Shore Protection Manual (CERC, 1973) voldoen ongeveer even goed als de bovenstaande (Holthuijsen, 1979).

### $\tilde{H}$ en $\tilde{T}$ als functie van $\tilde{d}$ en $\tilde{F}$ ( $\tilde{t}$ onbeperkt)

De mate waarin de waterdiepte een beperkende invloed kan hebben op de golfgroei hangt af van de verhouding significante golflengte/waterdiepte. Naarmate deze verhouding groter wordt zal de bodem de waterbeweging die veroorzaakt wordt door de golven sterker beïnvloeden en zullen bodemdissipatie processen zoals b.v. bodemwrijving belangrijker worden. Daarnaast zal ook het breken van de golven een belangrijker invloed krijgen.

Aanvankelijk, d.w.z. in de beginfase van de golfgroei, is de significante golflengte kort en zal de verhouding significante golflengte/waterdiepte nog klein zijn. Voor kleine waarden van  $\tilde{F}$  zullen de groeikrommen voor ondiep water dus nauwelijks afwijken van die voor diep water. Voor willekeurige waarden van  $\tilde{F}$  en  $\tilde{d}$  zijn de volgende uitdrukkingen voorgesteld voor  $\tilde{H}$  en  $\tilde{T}$ :

$$\tilde{H} = H_{\infty} \tanh(k_3 \tilde{d}^{m_3}) \tanh \left[ \frac{k_1 \tilde{F}^{m_1}}{\tanh \{k_3 \tilde{d}^{m_3}\}} \right] \quad (2.2.5)$$

$$\tilde{T} = T_{\infty} \tanh(k_4 \tilde{d}^{m_4}) \tanh \left[ \frac{k_2 \tilde{F}^{m_2}}{\tanh \{k_4 \tilde{d}^{m_4}\}} \right] \quad (2.2.6)$$

met de parameterwaarden  $k_3 \approx 0.710$ ,  $m_3 \approx 0.763$ ,  $k_4 \approx 0.855$  en  $m_4 \approx 0.365$ . Deze uitdrukkingen zijn gebaseerd op Groen en Dorrestein (1976). De uitdrukkingen die gegeven worden in het Shore Protection Manual (1973), zijn ongeveer even goed als de bovenstaande (Holthuijsen, 1979).

## 2.3. Methode van het standaard spectrum

### 2.3.1. Inleiding

Een belangrijke stap voorwaarts in de studie van windgolven was de introductie van het energiedichtheidsspectrum vanuit de elektro-techniek en de akoestiek. In deze disciplines werd het spectrum gebruikt om ruisachtige signalen te bestuderen en toen in de jaren 1945-50 de windgolven als een ruisachtig



signaal onderkend werden, is van dit concept dankbaar gebruik gemaakt.

Reeds in 1953 gaf Neumann (Neumann, 1953) aan hoe het spectrum van zee-gang zich ontwikkelt als functie van strijklengte of strijkduur: het spectrum wordt opgebouwd vanuit de hoogfrequente zijde. Pas als de energiedichtheid daar een zeker verzadigingsniveau heeft bereikt, krijgen lagere frequenties energie toegevoerd. Gebruik makend van visuele waarnemingen stelde Neumann dat het spectrum van een volledig ontwikkelde zee-gang een standaardvorm heeft.

Hoewel dit spectrum alleen betrekking heeft op volgroeide zee-gang op diep water ontwikkelden Pierson, Neumann en James (1955) een voorspellingsmodel waarin dit spectrum werd gebruikt bij het benaderen van het spectrum van de niet-volgroeide zee-gang, nl. door het spectrum van de volgroeide zee-gang aan de laagfrequente zijde schuin af te kappen bij een frequentie  $f_m$  (zie Fig. 2.3.A). Deze  $f_m$  werd verondersteld een functie te zijn van de gemiddelde windsnelheid, de strijklengte en de strijkduur. Het spectrum kon hierdoor dus voor-  
speld worden in het standaard windveld.

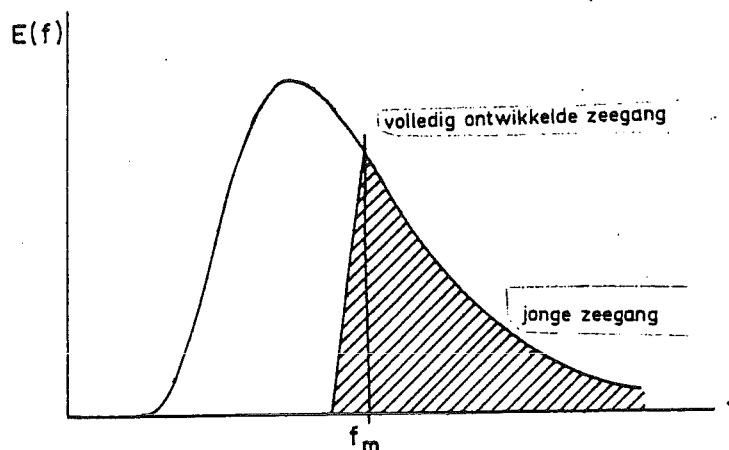


Fig. 2.3.A Standaard frequentie spectrum volgens Pierson, Neumann en James (1955)

Het spreekt vanzelf, dat de door Pierson, Neumann en James ontwikkelde methode ook kan worden gehanteerd bij een andere standaardvorm van het spectrum dan die van Neumann. Zo hebben Pierson en Moskowitz (1964) een iets andere vorm gepresenteerd voor het standaard spectrum van een volgroeide zee-gang op diep water die inmiddels op uitgebreide schaal aanvaard is. De spectra van Neumann en Pierson-Moskowitz hebben uitsluitend betrekking op volgroeide zee-gang en bevatten slechts  $U$  en  $g$  als onafhankelijke parameters.

Het afgekapte spectrum van volgroeide zee-gang geeft vaak een redelijke benadering van het spectrum van groeiende zee-gang maar een meer nauwkeurige benadering hiervoor is het JONSWAP spectrum (Hasselmann e.a., 1973) dat later in

deze paragraaf behandeld wordt. Dit spectrum betreft groeiende zeegang en bevat dus naast  $U$  en  $g$  ook  $F$  als onafhankelijke parameter.

Bij het voorspellen van de zeegang in een standaard windveld wordt het spectrum blijkbaar geacht een bekende standaardvorm te hebben, terwijl de schaalparameters berekend worden als functies van de parameters van het standaard windveld. In wezen verschilt deze methode nauwelijks van de hiervoor behandelde methode van de kenmerkende golf, mits men ook daar een standaardvorm van het spectrum aanneemt, omdat in feite ook de kenmerkende golfhoogte en -periode schaalparameters van het spectrum zijn.

Naast de frequentie eigenschappen van golven wil men vaak ook de richtinseigenschappen kennen. Deze worden weergegeven in het twee-dimensionale spectrum  $E(f, \theta)$  dat geschreven kan worden als het produkt van een frequentiespectrum en een richtingsverdelingsfunctie, vgl. 2.3.1.

$$E(f, \theta) = E(f)D(\theta; f) \quad (2.3.1)$$

waarin

$$E(f) = \int_{-\pi}^{\pi} E(f, \theta) d\theta \quad (2.3.2)$$

en

$$\int_{-\pi}^{\pi} D(\theta; f) d\theta = 1 \quad (2.3.3)$$

In de hierna volgende behandeling van het standaardspectrum zal afzonderlijk aandacht besteed worden aan de twee functies  $E(f)$  en  $D(\theta; f)$ .

### 2.3.2. Standaard frequentie spectrum

Alvorens specifieke spectrum formuleringen te presenteren wordt hier gewezen op enkele meer algemene kenmerken van spectra van zeegang.

Phillips stelde al in 1958 dat het frequentie spectrum voor groeiende golven een universele vorm zou moeten hebben althans voor de hoge frequenties. Hij gaf de volgende redenering. Als de windduur of de strijklenkte voldoende groot zijn dan bereikt de energiedichtheid in het hoog-frequente gebied een niveau waar de energie toevoer en de energie afvoer in evenwicht zijn. De hoogte van dit niveau wordt beheerst door het breken van de golven, waarvoor alleen de frequentie en de zwaartekrachtversnelling relevante grootheden zouden zijn. Met behulp van dimensie analyse toonde hij aan dat de spectrale dichtheid dan evenredig moet zijn met  $g^2 f^{-5}$  (met een dimensieloze coëfficiënt  $\alpha$ ):

$$E(f) = \alpha g^2 f^{-5} \quad (2.3.4)$$

Deze redenering werd aanvankelijk vrij algemeen geaccepteerd, maar de laatste jaren is er ernstige twijfel gerezen omtrent de juistheid ervan. Met name Hasselman (1974) ontvouwde een andere theorie die gebruik maakt van de energiebalans van de golven (zie paragraaf 3.2). Maar ook deze laatste benadering leidt tot een evenredigheid van  $E(f)$  met  $f^{-m}$  waarbij  $m \approx 5$ .

Soortgelijke redeneringen als die van Phillips en Hasselmann zijn niet beschikbaar voor de lagere frequenties maar men kan de ontwikkeling van een groeiend frequentiespectrum kwalitatief voor stellen door uit te gaan van de  $f^{-5}$  vorm en vervolgens een laag-frekwente flank te veronderstellen, die naar de lagere frequenties schuift naarmate de strijklengte toeneemt, Fig. 2.3.B.

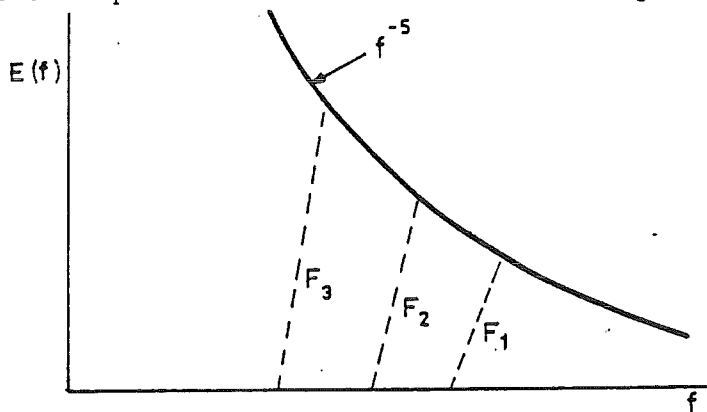


Fig. 2.3.B Ontwikkeling (kwalitatief) van het standaard frequentie spectrum

In 1964 publiceerden Pierson en Moskowitz de resultaten van een studie waarin de vorm van het frequentie spectrum van volgroeide zeevang op diep water werd bestudeerd aan de hand van waarnemingen. Zij accepteerden het resultaat van de redenering van Phillips, mede omdat uit metingen op zee bleek dat inderdaad  $m \approx 5$  en zij kozen op grond van de metingen de volgende vorm voor de voorflank van het spectrum, zie ook Fig. 2.3.C.

$$E(f) \approx \exp \left[ - \frac{5}{4} \left( \frac{f}{f_m} \right)^{-4} \right] \quad (2.3.5)$$

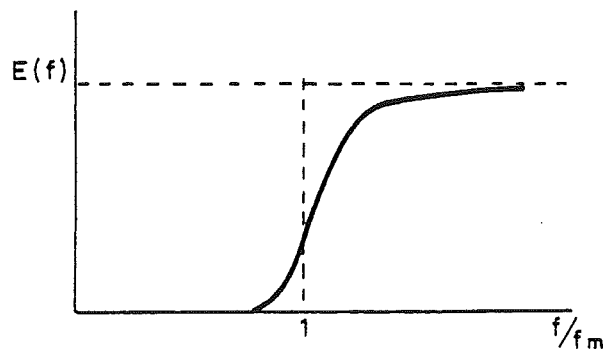


Fig. 2.3.C De laag-frekwente flank van het standaard frequentie spectrum

Het spectrum dat op deze wijze ontstond en bekend is geworden onder de naam Pierson-Moskowitz spectrum is hieronder en in Fig. 2.3.G. gegeven.

$$E(f) = \alpha g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{f}{f_m} \right)^{-4} \right] \quad (2.3.6)$$

Hier zijn  $\alpha$  en  $f_m$  schaalparameters. Uit dimensie beschouwingen volgt dat  $\alpha$  en  $f_m = f_m U_{19,5}^2 / g$  konstanten moeten zijn. De metingen van Pierson en Moskowitz waren hiermee in overeenstemming, en leverden de waarden  $\alpha = 0.0081$  en  $f_m = 0.14$ .

Het oppervlak van het Pierson-Moskowitz spectrum is gegeven door

$$m_0 = \int_0^{\infty} E(f) df = \frac{(2\pi)^{-4}}{5} \alpha g^2 f_m^{-4} \quad (2.3.7)$$

Substitutie van de bovengenoemde waarden van  $\alpha$  en  $f_m$  levert het volgende resultaat op.

$$H_{m_0} = 4 m_0^{1/2} \approx 0.21 U_{19,5}^2 / g \quad (2.3.8)$$

Gedurende lange tijd (tot halverwege de jaren '70) heeft men ook voor de groeiende zeegang gebruik gemaakt van het voorstel van Pierson en Moskowitz hoewel dit oorspronkelijk uitsluitend betrekking had op volgroeide zeegang.

In 1973 werden de resultaten gepubliceerd van het onderzoek project JONSWAP (Hasselmann et al., 1973). In dit project is m.b.v. theorieën en metingen op zee een bijzonder gedegen studie gemaakt van de groei van zeegolven, met name in het standaard windveld. Men vond dat de ontwikkeling van het spectrum ongeveer verliep zoals geschetst is in fig. 2.3.D.

Twee aspecten vielen vrij snel op: de vorm van het spectrum was veel meer gepiekt dan het spectrum van het Pierson-Moskowitz spectrum, en de spectrale dichtheid van een willekeurige frequentie kan een maximale waarde bereiken die hoger is dan de limiet waarde, zie ook fig. 2.3.E.

Dit laatste verschijnsel wordt in de engelstalige literatuur "overshoot" genoemd. Het optreden van "overshoot" volgt overigens niet noodzakelijk uit het meer gepiekt zijn van de vorm van het spectrum; het is ook het gevolg van het niet constant zijn van  $\alpha$  als functie van de strijklengte (zie verder in deze paragraaf).

Om de metingen met een analytische uitdrukking te benaderen werd in JONSWAP de vorm van het Pierson-Moskowitz spectrum vermenigvuldigd met een zgn. "peak-enhancement" (piek-versterking) functie van de volgende gedaante:

$$\gamma(f) = \gamma_0 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{f - f_m}{\sigma f_m} \right\}^2 \right] \quad (2.3.9)$$

waarin  $\sigma = \sigma_a$  voor  $f < f_m$   
 $\sigma = \sigma_b$  voor  $f \geq f_m$

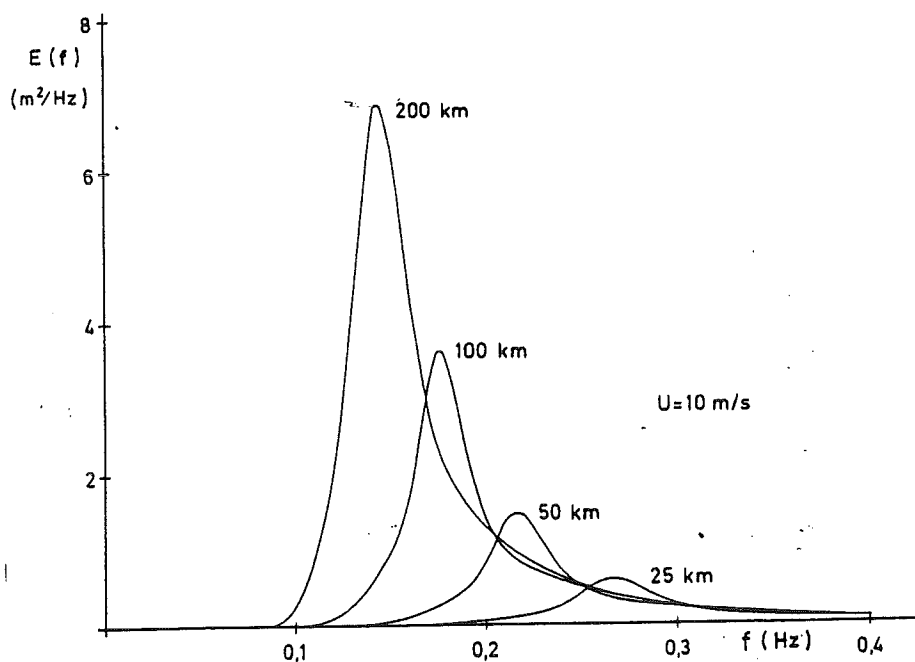


Fig. 2.3.D De groei van het standaard frequentie spectrum

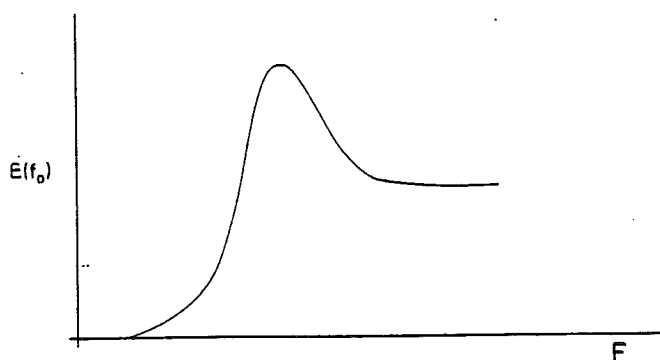


Fig. 2.3.E De ontwikkeling van de energie dichtheid van een golfkomponent ( $f_0$ )

De piek- versterkingsfunctie  $\gamma(f)$  bevat drie vormparameters, t.w.  $\gamma_0$ ,  $\sigma_a$  en  $\sigma_b$ . De waarden hiervan vertoonden geen systematische variatie met  $\tilde{F}$ , maar wel een aanzienlijke spreiding. De gemiddelden zoals gevonden in JONSWAP zijn:

$$\bar{\gamma}_0 \approx 3.3, \bar{\sigma}_a \approx 0.07, \text{ en } \bar{\sigma}_b \approx 0.09$$

De vormen van de piek-versterkings functie en die van het zgn. JONSWAP spectrum (uitdrukking 2.3.6 vermenigvuldigd met  $\gamma(f)$  van uitdrukking 2.3.9 zijn geschetst in Fig. 2.3.F

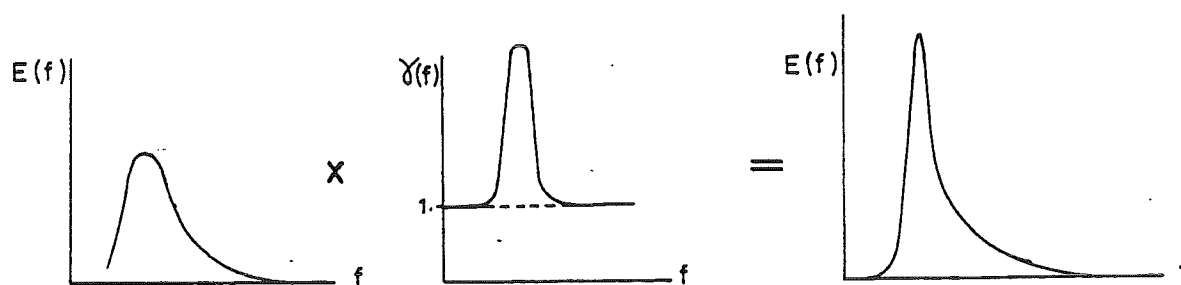


Fig. 2.3.F "Peak-enhancement"

Veel waarnemingen van groeiende zeegang (niet alleen in het standaard windveld maar b.v. ook in stormen op de oceanen) blijken goed benaderd te kunnen worden met het JONSWAP spectrum als de coëfficiënten in de uitdrukking goed gekozen worden.

Een illustratie van de vorm van de spectra van Pierson-Moskowitz en JONSWAP is gegeven in Fig. 2.3.G.

### Invloed van de diepte

Over de vorm- en schaalparameters van een standaard spectrum voor ondiep water is zeer weinig bekend, zowel in fundamenteel als empirisch opzicht. Waarnemingen van het spectrum in ondiep water zijn vrijwel niet gepubliceerd, en theoretische verwachtingen zijn alleen bekend voor het hoog frequente deel van het spectrum. Volgens deze zou het hoog frequente deel van het spectrum in ondiep water evenredig zijn met  $df^{-3}$  (Kitaigordskii, 1975, Thornton, 1977).

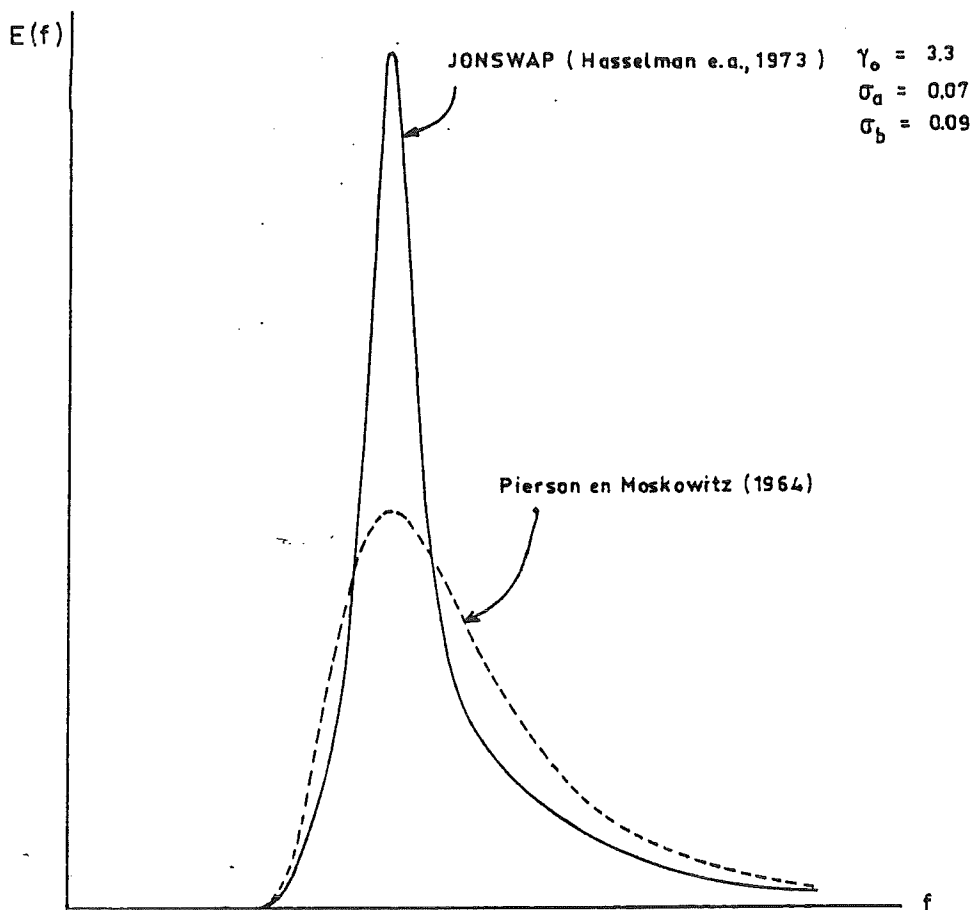


Fig. 2.3.G Genormaliseerde standaard frequentie spectra ( $f_m$  en  $m_0$  gelijk)

#### Schaalparameters

Bij het voorspellen van de schaalparameters van het spectrum wordt evenals bij het voorspellen van de kenmerkende golf, gebruik gemaakt van dimensieloze grootheden. De dimensieloze schaalparameters  $\alpha$  en  $\tilde{f}_m (=f_m U/g)$  worden bepaald uit de dimensieloze windveldparameters  $\tilde{F}$  en  $\tilde{t}$ . De transformatieregels voor  $\tilde{F}$  en  $\tilde{t}$  zijn reeds eerder besproken in paragraaf 2.1. zodat hier volstaan kan worden met het beschouwen van de relatie tussen  $\alpha$  respectievelijk  $\tilde{f}_m$  en  $\tilde{F}$ .

#### Parameter voor de energieschaal

Het blijkt uit de waarnemingen dat de waarde van  $\alpha$  geen konstante is zoals uit de redenering van Phillips (1958) zou moeten volgen, maar dat  $\alpha$  afneemt van ongeveer 0.2 bij  $\tilde{F} \approx 10^{-1}$  tot ongeveer de waarde van  $8.1 \times 10^{-3}$  die Pierson en Moskowitz (1964) voorstelden voor volgroeide zeevang.

De "best-fit" door een puntenwolk van waarnemingen wordt in de JONSWAP publikatie gegeven als

$$\alpha = 0.076 \tilde{F}^{-0.22} \quad (2.3.10)$$

Parameter voor de frequentieschaal,  $f_m$

In de JONSWAP publikatie wordt ook een verzameling gegeven van waargenomen waarden van de dimensieloze piekfrequentie  $f_m$  als functie van de dimensieloze strijklengte  $\tilde{F}$ . Deze verzameling vertoont een relatief geringe spreiding en kan goed benaderd worden met de volgende uitdrukking:

$$\tilde{f}_m = 3.5 \tilde{F}^{-0.33} \tag{2.3.11}$$

Oppervlakte van het spectrum

Het JONSWAP spectrum is voor willekeurige waarden van de vormparameters  $\gamma_0$  en  $\sigma$  niet in gesloten vorm te integreren. Op grond van een aantal numerieke berekeningen (Ewing, ISSC, 1976) kan de volgende relatie tussen  $m_0$  enerzijds en de vorm- en schaalparameters anderzijds gevonden worden, waarbij  $\sigma_a = 0.07$  en  $\sigma_b = 0.09$  is aangehouden.

$$m_0 = \frac{(2\pi)^{-4}}{5} \alpha g^2 f_m^{-4} (0.78 + 0.22 \gamma_0) \tag{2.3.12}$$

Met behulp hiervan kan de afhankelijkheid van de dimensieloze golfenergie ( $\tilde{m}_0 = g^2 m_0 / U^4$ ) van de dimensieloze strijklengte  $\tilde{F}$  bepaald worden uit de verschillende relaties tussen de schaalparameters enerzijds en de dimensieloze strijklengte  $\tilde{F}$  anderzijds (met  $\sigma_a = 0.07$ ,  $\sigma_b = 0.09$  en  $\gamma_0 = 3.3$ ). Het resultaat blijkt echter niet bijzonder goed overeen te komen met waarnemingen. De oorzaak hiervan is waarschijnlijk dat de fouten marge in het bepalen van de coëfficiënten en de exponenten in de  $\alpha$ - $\tilde{F}$  en in de  $\tilde{f}_m$ - $\tilde{F}$  relaties wordt overgedragen naar deze  $\tilde{m}_0$ - $\tilde{F}$  relatie. De volgende uitdrukking (ook van de JONSWAP) is direct uit de waarnemingen afgeleid:

$$\tilde{m}_0 = 1.6 \times 10^{-7} \tilde{F} \tag{2.3.13}$$

2.3.3. Standaard richtingsverdelingsfunctie

Evenals voor het frequentie spectrum zijn voor de richtingsverdelingsfunctie standaard uitdrukkingen voorgesteld in de literatuur. Die uitdrukkingen stellen functies voor die één maximum in de windrichting hebben en symmetrisch zijn rond de windrichting. Twee veel gebruikte uitdrukkingen volgen hier.

$$\left. \begin{aligned} D_1(\theta) &= A_1 (\cos\theta)^m && \text{voor } |\theta| < \pi/2 \\ D_1(\theta) &= 0 && \text{voor } |\theta| \geq \pi/2 \end{aligned} \right\} \tag{2.3.14}$$



$$D_2(\theta) = A_2 (\cos \frac{\theta}{2})^{2s} \quad (2.3.15)$$

waarin de coëfficiënten  $A_1$  en  $A_2$  zodanig gekozen zijn dat aan vgl. (2.3.3) voldaan is. De vormen van deze twee funkties zijn vrijwel niet van elkaar te onderscheiden bij een juiste keuze van de parameters. In hoeverre deze funkties de werkelijk optredende richtingsverdelingsfunctie goed weergeven is niet goed te beoordelen omdat slechts zeer weinig waarnemingen beschikbaar zijn. Zelfs metingen van de boven gegeven parameters (b.v. met richtingsgevoelige boeien) zijn vrij zeldzaam. Uit deze metingen kan wel het in fig. 2.3.H geschetste verloop van  $s$  als functie van de frequentie worden gevonden. De maximale waarden van  $s$  treedt meestal op nabij de piekfrequentie d.w.z. het richtingsspectrum is het smalst bij de piek en wordt breder naar hogere en lagere frequenties.

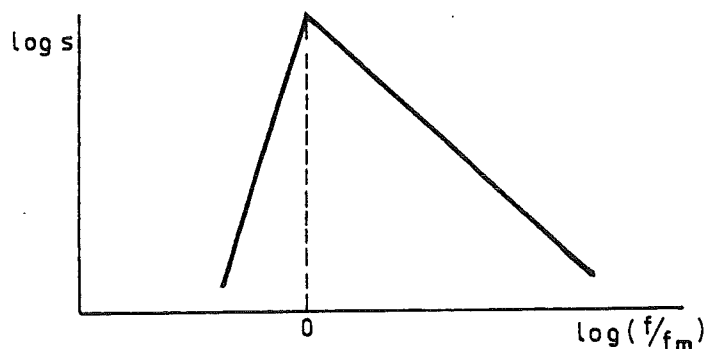


Fig. 2.3.H Richtingsparameter  $s$  als functie van frequentie

Het geven van funktionele verbanden tussen  $s$  enerzijds en de frequentie anderzijds zou op dit moment voorbarig zijn gezien de grote onzekerheden in de beschikbare waarnemingen. De verdeling  $D_1$  is tot nu toe vaak gebruikt in globale berekeningen, met  $m = 2$  en daarbij behorend  $A_1 = 2\pi$  (onafhankelijk van  $f$ ).

#### 2.4. Verband tussen de parameters van de kenmerkende golf en het standaard spectrum

In de vorige paragrafen zijn de parameters van de kenmerkende golf en van het standaard spectrum onafhankelijk van elkaar behandeld. De definities noch de waarden van de parameters zijn met elkaar in verband gebracht. Dit is echter heel wel mogelijk.

Als de zeeegang een Gaussisch proces zou zijn met een smal spectrum dan zou  $H_{1/3}$ , het gemiddelde van het hoogste één-derde deel van de golfhoogten-tussenuitdoorgangen, gelijk moeten zijn aan  $4\sqrt{m_0}$  (deze grootheid wordt per definitie

$H_{m_0}$  genoemd, zie ook vgl. 2.3.8). Uit metingen in windgolven blijkt het volgende verband (Goda, 1974, Forristall, 1978):

$$H_{1/3} \approx 3.8 \sqrt{m_0} \quad (2.3.16)$$

De relatie tussen de significante golfperiode en de piekfrequentie is niet goed bekend, hoewel verschillende auteurs hier wel een onderzoek naar hebben uitgevoerd. Goda (1974, 1978) vindt uit numerieke experimenten en uit metingen de volgende relatie tussen  $T_s$  (de gemiddelde periode van het hoogste één-derde deel van de golfhoogten-tussen-muldoorgangen) en  $f_m$ .

$$T_s \approx 0.9 f_m^{-1} \text{ à } 0.95 f_m^{-1} \quad (2.3.17)$$

### 3. Golfvoorspellingsmethoden voor het variërend windveld

#### 3.1. Inleiding

In de methoden die in de voorafgaande paragrafen behandeld zijn, wordt slechts in beperkte mate gebruik gemaakt van de mogelijkheden die het concept van het twee-dimensionale golfenergie-dichtheids-spectrum biedt. Als uitgegaan wordt van het idee dat het golfoppervlak beschouwd kan worden als de superpositie van een groot aantal onafhankelijke golfcomponenten dan is het in beginsel mogelijk om de voorspelling uit te voeren voor iedere component afzonderlijk. Voor de golfvoorspelling in het standaard windveld ligt het niet voor de hand om deze techniek toe te passen omdat de situatie voldoende eenvoudig is om de voorspelling uit te voeren m.b.v. een gering aantal parameterrelaties. In de situatie echter waar het windveld variëert als functie van plaats en tijd en waar ook de bodem en de kust willekeurige vormen kunnen aannemen, is de benadering waar de energiedichtheid per spectrale component wordt berekend in principe bijzonder geschikt.

De methode berust op het uitwerken van de energiehuishouding van ieder golfcomponent afzonderlijk terwijl de betreffende golfcomponent gevolgd wordt op zijn weg over het wateroppervlak. Aan de hand van wind en bodeminformatie die onderweg ontmoet wordt kan de energie huishouding bepaald worden. Dat wil zeggen, de hoeveelheid energie die ontvangen wordt (b.v. van het windveld) of afgestaan wordt (b.v. aan bodemwrijving) wordt bijgehouden en opgeteld bij de reeds aanwezige golfenergie.

In het volgende zal in eerste instantie worden ingegaan op het concept van de energiebalans. Daarna worden de twee onderdelen van de energiehuishouding apart behandeld: het transport van de energie over het wateroppervlak, en de energieuitwisseling tussen wind, golven en bodem.

#### 3.2. Energiebalans

De meest volledige beschrijving van een golfbeeld dat variëert in ruimte en tijd is die waarin het twee-dimensionale spectrum beschouwd wordt als functie van plaats en tijd. Het twee-dimensionale spectrum kan worden weergegeven als in (3.2.1)

$$E = E(f, \theta; \vec{x}, t) \quad (3.2.1)$$

waar  $\vec{x}$  de plaatsvector en  $t$  de tijd is. De energiedichtheid van ieder component variëert met de plaats en tijd en het is deze variatie per golfcomponent die

beschouwd wordt. In de volgende beschrijving zal gebruik gemaakt worden van het begrip golfpakketje. Hiermee wordt een denkbeeldig element aangeduid dat de energiedichtheid van een golfkomponent draagt en dat zich voortplant over het wateroppervlak met de groepsnelheid van de golfkomponent. Het wordt gekenmerkt door een frequentie en een richting.

Om de energiedichtheid te bepalen van één golfkomponent op één tijdstip en één plaats wordt in beginsel de volgende procedure gebruikt. Met behulp van conventionele berekeningen voor golfvoortplanting (b.v. de conventionele refraktieberekeningen) wordt de weg (golfstraal) berekend die het golfpakketje aflegde vanaf een kustlijn tot aan de plaats van het golfvoorspellingspunt. Langs deze weg is de positie van het golfpakketje op ieder willekeurig tijdstip bekend. Als voorbeeld is in Fig. 3.2.A de situatie getekend voor een golfpakketje dat vanuit een zekere richting in punt P voor de Nederlandse kust aankomt.

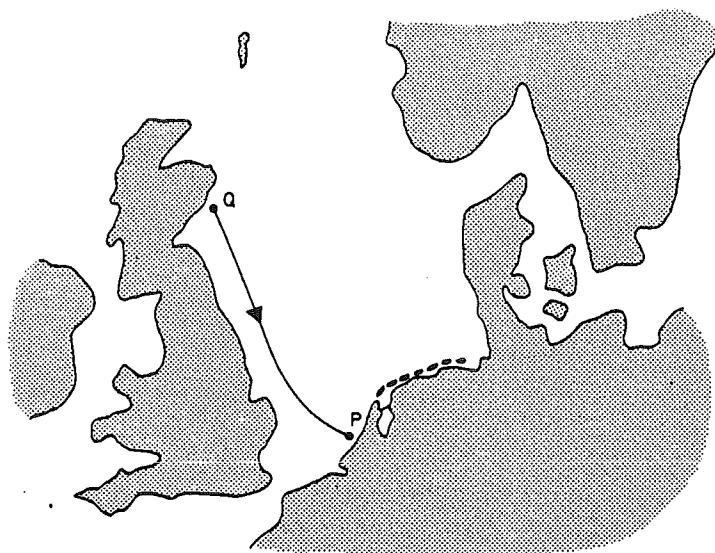


Fig. 3.2.A Voortplanting van een golfkomponent

Na het verlaten van de kust bij Q ondergaat de golfkomponent onderweg naar het voorspellingspunt, de invloed van wind, bodem, golfbreken etc. Door op regelmatige tijdstippen na te gaan hoeveel energie is toegevoerd of afgevoerd onder invloed van de lokale en momentane omstandigheden, kan de ontwikkeling van de energie inhoud van dit pakketje worden berekend. Het is niet noodzakelijk de berekening te starten op een kust. Als op een willekeurige plaats van het golfpakketje de energie inhoud van het pakketje bekend is, dan kan ook deze plaats dienen als startpunt. Dit opent de mogelijkheid om berekeningen te starten op punten waar de energie afwezig is (windstille gebieden) of energie bekend is uit waarnemingen of uit andere golfverwachtingsmodellen.

Door de procedure uit te voeren voor alle golfcomponenten in P kan het volledige twee-dimensionale spectrum in P worden berekend. Door bovendien deze voorspelling uit te voeren voor een groot aantal punten in het voorspellingsgebied en een groot aantal tijdstippen, kan het golfbeeld voorspeld worden als functie van tijd en plaats.

In meer formele termen kan de procedure worden weergegeven als in vgl. (3.2.2)

$$\frac{dE(f, \theta; \vec{x}, t)}{dt} = S(f, \theta; \vec{x}, t) \quad (3.2.2)$$

voor

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{c}_g(f, \theta; \vec{x}, t)$$

De veranderingen in de energiedichtheid per eenheid van tijd in een assenstelsel dat zich verplaatst met de groepsnelheid en in de richting van de golfcomponent ( $dE/dt$ ) is gelijk aan de som van de energietoever en -afvoer per eenheid van tijd. Deze som wordt de bronfunctie genoemd en wordt voorgesteld door het symbool S (van "source function"). De vergelijking (3.2.2) wordt de energiebalansvergelijking genoemd. De procedure die hierboven beschreven werd om de situatie aanschouwelijk voor te stellen komt neer op het integreren van deze vergelijking langs de karakteristiek van de component ( $f, \theta$ ) met inachtneming van de juiste rand- en begin-voorwaarden.

Deze benadering van de golfvoorspelling wordt beschouwd als de meest algemene. Als weergave van de fysische werkelijkheid lijkt deze methode ook de meest zinvolle en geavanceerde fundamentele studies maken gebruik van dit model.

Uit fundamenteel onderzoek is gebleken dat de bronfunctie kan worden verdeeld in een aantal termen die overeenkomen met een bepaald energiewisselingsproces. Deze termen of processen kunnen in drie categorieën worden verdeeld. De eerste categorie is die waar de energie wordt toegevoerd naar de golfcomponent vanuit het windveld. De tweede is die waar energie afgestaan wordt aan turbulente dissipatieprocessen zoals golfbreken en bodem-dissipatie. Tot enige jaren geleden waren dit de enige termen die in beschouwing werden genomen, maar recente modellen houden ook rekening met de invloed die de golfcomponenten op elkaar uitoefenen (niet-lineaire wisselwerking). Dit wordt weergegeven door de termen of processen van de derde categorie die zowel energie-winst als -verlies kunnen betekenen voor de beschouwde golfcomponent. Deze drie soorten termen kunnen worden aangeduid met respectievelijk  $S_{in}$ ,  $S_{ds}$  en  $S_{nl}$ .

Vergelijking (3.2.2) kan nu dus geschreven worden (met weglating van de variabelen  $f, \theta, \vec{x}$  en  $t$  als:

$$\frac{dE}{dt} = S_{in} + S_{ds} + S_{nl} \quad (3.2.3)$$

Het bestaan van niet-lineaire wisselwerkingen in het spectrum lijkt in strijd met de veronderstelling dat het golfoppervlak beschouwd kan worden als een lineaire superpositie van onderling onafhankelijke golfcomponenten. In beginsel is dit ook zo, maar deze niet-lineaire wisselwerkingen blijken zeer zwak te zijn. Dat wil zeggen voor de beschrijving van de lokale, momentane golfsituatie kan de invloed van deze wisselwerking verwaarloosd worden. Voor de energiebalans echter, waar integraties over relatief grote afstanden in voorkomen, is deze invloed wezenlijk en ze kan dus niet verwaarloosd worden in de bronfunctie.

### 3.2.1 Transport van de golfenergie

In de hiervoor geschetste weergave van het principe van de golfvoorspelling werd aangegeven dat het golfpakketje zich voortbeweegt met de groepsnelheid van de beschouwde frequentie, in de richting van de golfkomponent die berekend kon worden m.b.v. de conventionele refraktieberekeningen.

In verschillende modellen wordt die energiebalansvergelijking voor het linker (transport-) deel inderdaad zo uitgewerkt. De transportvergelijking die de voortplanting van de golfenergie weergeeft is gelijk aan de energiebalansvergelijking zonder toe- of afvoer van de energie, zoals in vergelijking (3.2.4) is weergegeven.

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (3.2.4)$$

De meebewegende afgeleide is nul en deze vergelijking kan met de conventionele refraktie benadering ("Snellius") worden opgelost. Daarbij kunnen zich uiteraard de klassieke problemen voordoen zoals b.v. het snijden van de golfstralen. In die situaties mogen diffractie effecten niet meer verwaarloosd worden. De combinatie van refractie en diffractie is theoretisch redelijk goed bekend (b.v. Berkhoff, 1972) maar numerieke toepassingen van deze theoretische modellen stuiten op grote bezwaren die meestal samenhangen met de capaciteit van rekenmachines.

### 3.2.2. Bronfunctie

De theorieën over golfgroei en afzwakking onder invloed van de wind zijn i.h.a. zeer complex en het lijkt niet zinvol om daar in het kader van deze notitie diep op in te gaan. Er zal volstaan worden met het weergeven van de kern en het resultaat van de verschillende theorieën en het verwijzen naar relevante literatuur. Een zeer uitgebreid maar ook zeer complex overzichtsartikel over de bronfunctie is Hasselmann (1968). Uitvoerige en meer leesbare beschrijvingen worden gegeven in Phillips (1977) en LeBlond en Mysak (1978).

### Direkte energie-overdracht tussen golven en wind

De beschouwingen over de energiestromen van wind naar golven berusten op hydrodynamische vergelijkingen die ook ten grondslag liggen aan de klassieke niet-lineaire golftheorie. Het verschil met de klassieke theorie, waar de atmosferische druk aan het oppervlak konstant verondersteld wordt, is dat de atmosferische druk variabel wordt verondersteld. Uit deze theorieën blijkt, en dit is ook uit waarnemingen geconcludeerd, dat de belangrijkste bijdrage aan de overdracht van energie van de atmosfeer naar het golfveld afkomstig is van de fluctuaties van de luchtdruk op het wateroppervlak. Deze fluctuaties hangen uiteraard sterk samen met de structuur van het windveld. De invloed van de schuifspanning die de wind op het wateroppervlak uitoefent lijkt verwaarloosbaar te zijn bij de energieoverdracht.

Reeds in 1957 publiceerden Phillips (1957) en Miles (1957), overigens onafhankelijk van elkaar, theorieën over de energieoverdracht van wind naar golven.

De theorie van Phillips betreft de initiële fase van de golfgroei waar de golven het windveld nog niet verstoren. Het veld van de winddruk op het wateroppervlak wordt in Fouriercomponenten ontleed gedacht, met frequenties  $f$  en golfvector  $\vec{k}$ . Veronderstellend dat de turbulente luchtdrukfluctuaties met de gemiddelde windsnelheid  $\vec{U}$  worden getransporteerd, geldt

$$2\pi f = \vec{k} \cdot \vec{U} \quad (3.2.5)$$

Deze drukfluctuaties zullen golfcomponenten in het wateroppervlak opwekken met het zelfde golfgetal als de drukgolfcomponent. De golfhoogte van deze componenten zal in het algemeen echter gering blijven omdat de snelheid van de winddrukcomponent verschillend zal zijn van die van de golfcomponent. Een deel van de winddrukcomponenten zal echter ook voldoen aan de dispersierelatie van de watergolven (3.2.6).

$$(2\pi f)^2 = gk \tanh kd \quad (3.2.6)$$

Voor deze componenten geldt dat ze in fase blijven met de watergolfcomponenten zodat er energie overgedragen wordt van het door wind geïnduceerde drukveld naar het golfveld. Dit is een resonantieverschijnsel en het model wordt genoemd het resonantiemodel van Phillips.

In het model van Phillips wordt de beïnvloeding van de luchtstroming door de golven verwaarloosd en de energietoevoer naar de golfcomponent is daarbij konstant in de tijd:

$$\text{Sin}(f, \theta) = A(f, \theta; \dots) \quad (3.2.7)$$

waarin A afhangt van de frequentie en de richting van de golfcomponent en van het spectrum van de winddruk (en niet van de tijd of van het spectrum van de golven). De energiedichtheid van de golfcomponent neemt dus lineair toe in de tijd.

De golven tasten de structuur van het windveld aan en op een bepaald moment, als de golven een zekere mate van ontwikkeling hebben doorgemaakt, zal die invloed wezenlijk worden. Er ontstaat dan een situatie die in de theorie van Miles behandeld wordt.

Miles (1957) geeft een lineaire benadering van het probleem, d.w.z. hij beschouwt de situatie voor één watergolfcomponent en veronderstelt dat de andere watergolfcomponenten geen invloed uitoefenen op deze situatie (direct noch indirect). Boven het wateroppervlak dat gevormd wordt door één component beschouwt Miles aanvankelijk, d.w.z. zolang de golfhoogte klein is, alleen het gemiddelde, logaritmische windprofiel (gemiddeld over de tijd). Bij het toenemen van de golfhoogte (b.v. via het resonantiemechanisme van Phillips) zal de sinusvormige vorm van het wateroppervlak verstoringen aanbrengen op deze logaritmische verdeling en een gevolg daarvan is dat een variërend winddrukpatroon ontstaat op het wateroppervlak. Dit drukveld is in fase verschoven t.o.v. het watergolfpatroon dit houdt o.m. in dat het maximum en het minimum van de door de golven geïnduceerde drukverdeling in tijd en plaats verschoven is t.o.v. het maximum en minimum van de sinusvormige golf. Deze faseverschuiving is zodanig dat aan de loefzijde van de golftop een relatieve overdruk ontstaat waardoor energie wordt overgedragen van het windveld naar de watergolfcomponent (zie Fig. 3.2.B).



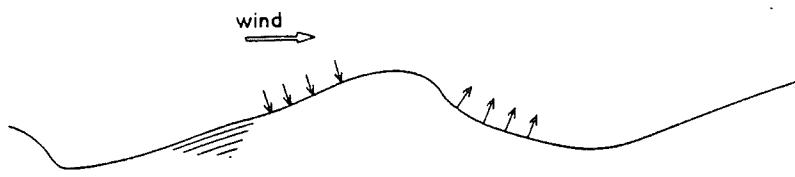


Fig. 3.2.B Geïnduceerde winddruk verdeling

De energieoverdracht per eenheid van tijd is groter naarmate de golfhoogte van de golfkomponent (energiedichtheid) groter is. Er treedt dus een terugkoppeling op, waarbij de energieoverdracht evenredig is met de aanwezige energiedichtheid:

$$S_{in}(f, \theta) = B(f, \theta; \dots) E(f, \theta) \quad (3.2.8)$$

De coëfficiënt B hangt, evenals A, af van de frequentie en de richting van de golfkomponent en van het spectrum van de winddruk (en niet van de tijd of van het spectrum van de golven). In deze benadering neemt de energiedichtheid in het golven spectrum dus exponentieel toe in de tijd.

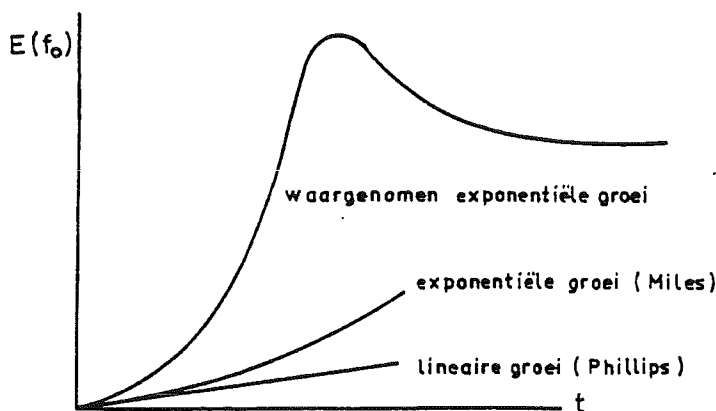


Fig. 3.2.C Ontwikkeling van de energiedichtheid van een golfkomponent ( $f_0$ ) volgens Phillips en Miles

De waargenomen groei van golven lijkt in het beginstadium (Fig. 3.2.C) veel op een combinatie van lineaire en exponentiële groei. De waargenomen lineaire groei komt redelijk goed overeen met de groei voorspeld door de theorie van Phillips maar de waargenomen exponentiële groei is vele malen sneller dan zou volgen uit de theorie van Miles. Het verschil wordt gedeeltelijk veroorzaakt door de invloed van de andere brontermen  $S_{n1}$  en  $S_{ds}$  maar er moet ook geconstateerd worden dat de kennis omtrent de energieoverdracht van wind naar golven onvoldoende is.

Andere theoriën die de theorieën van Miles en Phillips zouden moeten aanvullen zijn niet of nauwelijks ontwikkeld of getoetst maar de 'sheltering' theorie van Jeffreys (1925) lijkt enig perspectief te bieden. In deze theorie wordt de energieoverdracht beschouwd die samenhangt met het veronderstelde bestaan van neren in de luchtstroom achter de golfkammen. Nadat enige waarnemingen die achteraf niet erg relevant bleken te zijn, waren uitgevoerd die de theorie niet konden bevestigen, is deze vrij snel verlaten. Recente waarnemingen echter (Banner en Melville, 1976) tonen dat een dergelijk mechanisme wèl een belangrijke rol kan spelen, met name in golfvelden met veel brekende golven.

### Niet-lineaire wisselwerking

In de theorieën over golfopwekking en in veel procedures die gebruikt worden golven te voorspellen wordt uitvoerig gebruik gemaakt van het idee dat het golfoppervlak beschouwd kan worden als de som van een zeer groot aantal golfkomponenten die onderling onafhankelijk zijn. Dit idee wordt vaak met veel succes toegepast in beschouwingen die betrekking hebben op golfvelden van beperkte afmetingen in tijd en ruimte b.v. die waarbinnen die situatie als homogeen en stationair beschouwd kan worden. In feite zijn de golfkomponenten onderling wel enigszins afhankelijk en vindt er energieuitwisseling plaats tussen de componenten. Deze uitwisseling is echter zeer zwak waardoor lokaal het lineaire superpositiebeginsel aanvaardbaar blijft, maar de uitwisseling is voldoende sterk om over lange afstanden en tijden merkbaar te zijn en in de golfverwachtingsmodellen dient hiermee rekening gehouden te worden.

Naast deze energieuitwisseling tussen de golfkomponenten onderling blijken ook andere niet-lineaire effecten een rol te spelen bij de golfopwekking, maar deze lijken een ondergeschikte rol te spelen.

Op het bestaan van de niet-lineaire interacties binnen het spectrum van de golven werd al in 1960 gewezen door Hasselmann (1960) en Phillips (1960). De argumenten die zij gebruikten zijn vrij uitgebreid bestudeerd door verschillende onderzoekers maar een goed inzicht in het mechanisme schijnt nog niet bereikt te zijn (Longuet-Higgins, 1976, a). De verhandelingen zijn vrij complex maar de kern van de theorie is relatief eenvoudig. Het betreft de situatie waar een groep van golfkomponenten in resonantie komt met één andere golfkomponent. De daaruit resulterende niet-lineaire wisselwerkingen zijn theoretisch goed bekend (b.v. Hasselmann, 1962) maar het resultaat in termen van de bronfunctie is numeriek niet te hanteren, hoewel ook hierin vorderingen gemaakt worden (b.v. Dungey en Hui, 1979, Longuet-Higgins, 1976,a). Merk op dat de niet-lineaire wisselwerkingen alleen

herverdeling van de energie binnen het spectrum veroorzaken en dat ze geen energie toevoeren naar of afvoeren van het spectrum, vgl. 3.2.9.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} S_{n1} df d\theta = 0 \quad (3.2.9)$$

Een opvallende eigenschap van deze niet-lineaire wisselwerkingen is de stabiliserende invloed die ze uitoefenen op de vorm van het spectrum. Uit berekeningen blijkt (Hasselmann e.a., 1973) dat door het optreden van deze niet-lineaire wisselwerkingen, de spectra van "jonge" zeeegang een vorm aannemen die overeenkomt met die van het JONSWAP spectrum (paragraaf 2.3.2). Bij de behandeling van de geparametriseerde energiebalans zal deze eigenschap meer uitgebreid aan de orde komen (paragraaf 3.3).

De bovenstaande beschrijving had voornamelijk betrekking op de niet-lineaire wisselwerking op diep water. Over de invloed van niet-lineaire wisselwerkingen op ondiep water is weinig bekend.

### Energiedissipatie

De energie die van de wind naar het golfveld wordt overgedragen wordt voor een deel door de golven getransporteerd naar de kust waar deze energie wordt omgezet in andere vormen van energie (b.v. turbulentie in de brandingszone of stroming). Een deel van de energie gaat al verloren vóórdat de kust bereikt wordt. Hiervoor zijn voornamelijk twee verschijnselen verantwoordelijk.

Het eerste is het breken van de golven op open zee en het tweede de invloed van de bodem. Andere dissipatieve processen zoals die b.v. samenhangen met de viscositeit blijken meestal een verwaarloosbare invloed te hebben (Snodgrass e.a., 1966). De twee genoemde processen kunnen in  $S_{ds}$  als volgt worden weergegeven:

$$S_{ds} = S_{ds,1} + S_{ds,2} \quad (3.2.10)$$

waar  $S_{ds,1}$  en  $S_{ds,2}$  de energieverliezen per eenheid van tijd zijn t.g.v. van respectievelijk golfbreking en bodeminvloed.

### Dissipatie door breken

Het breken van golven is een bijzonder complex verschijnsel en een fundamenteel gericht beschrijving van dit proces voor het natuurlijk golfbeeld op zee is niet bekend. Het is duidelijk dat een belangrijke omstandigheid bij het

breken van de golven niet zozeer de hoogte als wel de steilheid van de golf is. Als deze een bepaalde waarde overschrijdt dan wordt de stabiliteit van het oppervlak verstoord en de golf breekt. Dit breken treedt op op plaatsen waar een aantal golfcomponenten, door interferentie, een lokale steile "piek" in het wateroppervlak vormen. Het is duidelijk een niet-lineair verschijnsel. Pogingen om het breken van een golf te beschrijven worden wel ondernomen (b.v. Longuet-Higgins, 1976,b) maar deze pogingen betreffen alleen bijzondere gevallen zoals b.v. een periodieke golf. Een hydrodynamische beschouwing van het breken van windgolven lijkt nog ver buiten het bereik van de huidige kennis te liggen. Vooralsnog wordt het breken van golven, veelal slechts in rekening gebracht door de spectrale dichtheid bij volgroeide zeegang (voor gegeven U) als een bovengrens in te voeren.

#### Dissipatie in en bij de bodem

Het andere dissipatieproces waarmee rekening gehouden moet worden hangt samen met de invloed van de bodem. In feite betreft het een aantal processen van verschillende aard. De meest bekende is de bodemwrijving. Daarnaast echter kan er ook energie aan het golfveld onttrokken worden doordat de bodem poreus is of meebeweegt met de golven. Deze laatste twee processen lijken voor de meeste situaties in Nederland echter nauwelijks van belang te zijn. Daarom wordt er hier niet verder op ingegaan. Opgemerkt dient echter te worden dat in recente publikaties (Shemdin e.a., 1977 en Hsiao en Shemdin, 1978) gemeld wordt dat in gebieden met grof zand de effecten t.g.v. de porositeit van de bodem (percolatie) belangrijk kunnen zijn.

Het energieverlies aan de bodem wordt veroorzaakt doordat zich bij de bodem een meestal turbulente grenslaag vormt met grote snelheidsgradiënten. De schuifspanning die daarbij optreedt wordt meestal berekend m.b.v. de uitdrukking (3.2.11)

$$\vec{\tau} = \rho C_b \vec{u} |\vec{u}| \quad (3.2.11)$$

$C_b$  is de wrijvingscoëfficiënt die meestal in de orde van 0.010-0.015 is voor niet-permanente waterbeweging. Hasselmann en Collins (1968) gebruiken voor de watersnelheid in vergelijking (3.2.11) de door de golfbeweging opgewekte orbitaalsnelheid. Deze grootte is echter een stochastische variabele en de uitwerking van deze benadering maakt gebruik van middelingsprocedures waarop hier niet verder ingegaan wordt.

### Overzicht bronfunctie

Opgemerkt moet worden dat een aantal theorieën over verschillende processen niet is vermeld in de voorgaande beschrijving van de bronfunctie. Dit is gedaan omdat deze theorieën niet algemeen aanvaard zijn of controversieel zijn. Op de theorieën die wel beschreven zijn is ook kritiek mogelijk maar de kritiek in de literatuur richt zich meestal op details. Phillips b.v. geeft in een recente publikatie (Phillips, 1977) een vrij uitgebreide en kritische beschouwing van de huidige kennis van de energiehuishouding van golven. Ook LeBlond en Mysak (1978) en het artikel van Barnett en Kenyon (1975) mogen in dit opzicht genoemd worden.

De vorm van de bronfunctie kan grafisch worden weergegeven door de waarde van  $dE/dt$  te geven als functie van de frequentie op één bepaald moment. De onzekerheid over de juiste vorm van de termen in de bronfunctie laat een vrij ruime marge open voor het weergeven van de bronfunctie. In Hasselmann e.a. (1976) worden twee extreme situaties gegeven. In één daarvan wordt de dissipatie voor het grootste deel van het spectrum verwaarloosd en in de ander wordt de dissipatie geschat aan de hand van de theorie van Hasselmann (1974). De essentie van de illustraties in Hasselmann e.a. (1976) wordt weergegeven in Fig. 3.2.D. Als referentie is in de figuur het bijbehorende spectrum getekend. De situatie betreft de ontwikkeling van een spectrum in een standaard windveld op diep water.

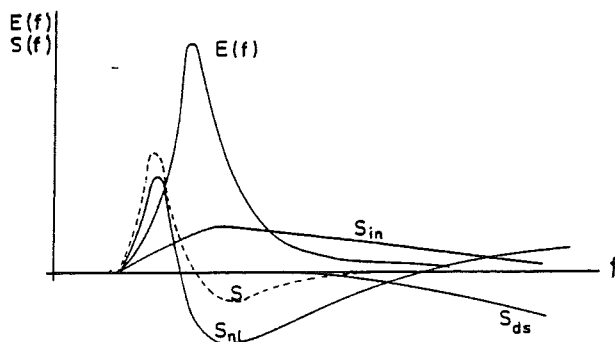


Fig. 3.2.D Overzicht van de bronfunctie met weinig dissipatie

Zoals uit de figuur blijkt vindt de energieoverdracht van wind naar golven ( $S_{in}$ ) voornamelijk plaats in het frequentiegebied aan de hoog-frequentie zijde van de piek van het spectrum. Deze schijnbare energiewinst voor deze frequenties wordt echter meer dan teniet gedaan door de energieafvoer t.g.v. niet-lineaire wisselwerking ( $S_{nl}$ ). Het totale resultaat voor de frequenties in de hoog-frequen-

te flank van de piek is zelfs een energieverlies ( $S < 0$ ). Deze frequenties, evenals de andere frequenties in de piek, bevinden zich in de "overshoot" fase. De niet-lineaire wisselwerking ( $S_{nl}$ ) transporteert energie van deze frequenties naar lagere frequenties en hogere frequenties. Dit komt tot uiting in de vorm van de functie voor  $S_{nl}$  die positief is voor de lagere en hogere frequenties en negatief is voor de middenfrequenties. De energie die getransporteerd wordt naar de lagere frequenties komt bijna geheel ten goede aan de groei van het spectrum (een voorwaartse verschuiving, d.w.z. naar lagere frequenties, van de piek). De energie die naar hogere frequenties getransporteerd wordt, wordt volledig gedissipeerd. Deze hoge frequenties ontvangen ongeveer evenveel als ze afstaan en bevinden zich dus in een staat van evenwicht. Een globaal beeld van de resulterende energiestroom in het spectrum is gegeven in Fig. 3.2.E.

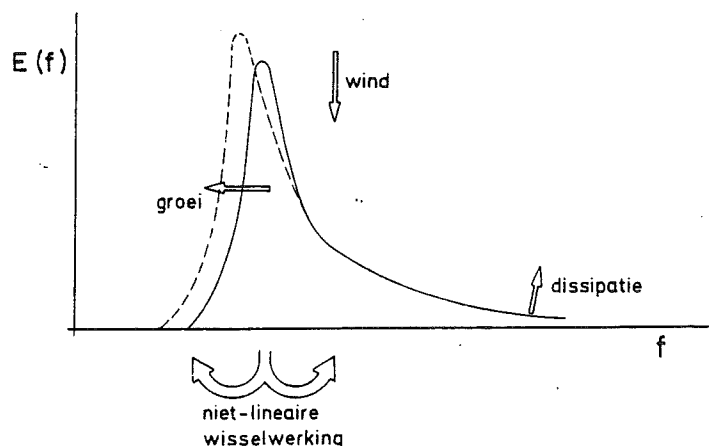


Fig. 3.2.E Overzicht van de energiestromen in het groeiende spectrum

### 3.3. Energiebalans van het geparameteriseerde spectrum

Metingen van golfspectra van groeiende zeevang in diep water en in een standaard windveld tonen aan dat de vorm van het spectrum vrijwel onafhankelijk is van het stadium van het groeiproces (Hasselmann e.a., 1973). Uitgaande van de spectrale energiebalans kan dit verklaard worden door de stabiliserende invloed die de niet-lineaire wisselwerking tussen de golfcomponenten onderling uitoefent op de spectrum-vorm. Deze invariantie van de vorm blijkt echter niet beperkt te zijn tot golfgroei in standaard windvelden. Ook voor spectra in inhomogene en niet stationaire windvelden is deze invariantie geconstateerd (b.v. Sanders, 1976, Hasselmann e.a., 1976). Blijkbaar zijn de niet-lineaire wisselwerkingen voldoende sterk om de stabiliserende invloed te behouden in variërende windvelden.

Het spectrum van de groeiende zeevang in diep water kan dus ook in variërende windvelden redelijk goed beschreven worden met een beperkt aantal schaal- en vormparameters. Deze eigenschap maakt het mogelijk om de groei van het spectrum

parametrisch te benaderen. Uit de spectrale energiebalans wordt dan een stelsel vergelijkingen afgeleid voor de variatie van de onafhankelijke parameters die worden gebruikt om het spectrum te karakteriseren. Dit betekent een aanzienlijke vereenvoudiging omdat het aantal benodigde parameters veel kleiner is dan het aantal benodigde spectrale componenten in de niet-geparameteriseerde beschrijving. De mathematische uitwerking van dit parameteriseren is vrij complex (Hasselmann e.a., 1973, Hasselmann e.a., 1976) en zal hier niet behandeld worden.

De veronderstellingen die worden ingevoerd bij het parameteriseren van de energiebalans zijn redelijk verantwoord in het geval van een groeiende zeevang waar de niet-lineaire wisselwerkingen een belangrijke rol spelen. Er zijn echter situaties waar de benadering niet goed is. Deining\* is een duidelijk voorbeeld. Hier is de niet-lineaire wisselwerking uiterst zwak, en de individuele golfcomponenten zijn hydrodynamisch vrijwel onafhankelijk van elkaar. De vorm van het spectrum van deining is dus niet universeel zoals bij een groeiende zeevang maar hangt af van de details van tijd en plaats van het voorkomen van het windveld dat de golven opwekte. De superpositie van deining, die vrijwel altijd aanwezig is op zee op een groeiende zeevang beïnvloedt de toepassing van het geparameteriseerde model op het zeevangsgedeelte van het spectrum niet omdat de niet-lineaire wisselwerking tussen deining en zeevang zeer zwak is (Hasselmann, 1963). Deining kan dus losgekoppeld gezien worden van de zeevangskomponenten en een volledig golfvoorspellingsmodel zal het geparameteriseerde model voor groeiende zeevang combineren met een model voor de voortplanting van deining.

\* Golfcomponenten waarvan de fasesnelheid groter is dan de lokale windsnelheid of waarvan de voortplantingsrichting aanzienlijk afwijkt van de windrichting.

#### 4. Historisch perspectief

Het historisch beeld van de ontwikkeling van de golfvoorspellingsmethode is nogal opvallend. Aanvankelijk berustte de golfvoorspelling op tamelijk primitieve benaderingen die echter redelijk resultaten opleverden. Na de introductie van het spectrum en de energiebalans is er meer inzicht gekomen in de golfgroei en afzwakkingsprocessen. Naarmate dit inzicht toenam werden de modellen gecompliceerder en ging het oplossen van de vergelijkingen zeer lange rekentijden eisen van redelijk grote elektronische rekenmachines. Deze complexe modellen bleken echter bepaalde eigenschappen te bezitten die parameteriseren van de vergelijkingen mogelijk maakt, waardoor vergaande vereenvoudigingen konden worden ingevoerd. Het is zelfs mogelijk gebleken deze vereenvoudigingen zover door te voeren dat een één-parametermodel overbleef (Hasselmann, e.a., 1976) dat in de uitwerking vrijwel gelijk is aan één van de "oude" aangepaste methoden van de kenmerkende golf (Wilson, 1955). In historisch perspectief gezien is de ontwikkeling van de golfvoorspellingsmethoden dus een gesloten kring: men is, uitgaande van relatief eenvoudige modellen, via zeer gecompliceerde modellen die hun inzicht verdiepten, terecht gekomen bij modellen die in de uitvoering in feite gelijk zijn aan de aanvankelijke "primitieve" modellen.



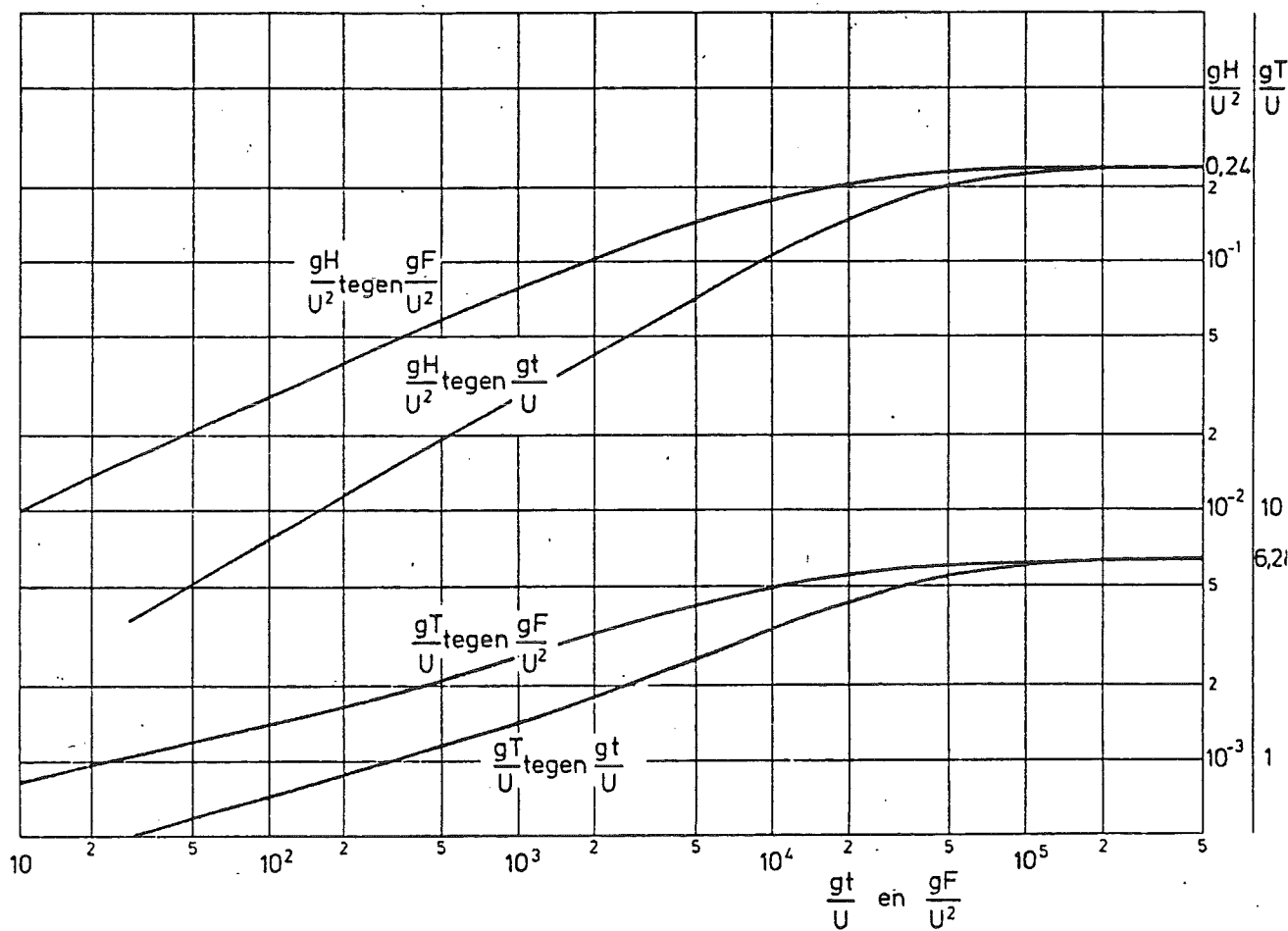
5. Referenties

- Banner, M.L. en W.K. Melville (1976), Journal of Fluid Mechanics. Vol. 77, blz. 825-842.
- \* Barnett, T.P. en K.E. Kenyon (1975), Report on progress in Physics. Vol 38, blz. 667-729.
- Berkhoff, J.C.W. (1972), Proc. 13th Coastal Engng. Conf., Vancouver, Canada, ASCE, blz. 471-490.
- Bouws, E. (1978), Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut, De Bilt, Wetenschappelijk rapport, W.R. 78-9.
- Bretschneider, C.L. (1952), Trans. Am. Geoph. Union. Vol. 33, No. 3.
- Bretschneider, C.L. (1957), 6th Intern. Conf. on Coastal Engng., Florida, ASCE, blz. 30-67.
- Bretschneider, C.L. (1973), zie CERC (1973).
- CERC (1973), Shore Protection Manual, U.S. Army Coastal Engineering Research Center, Corps of Engineers.
- Dungey, J.C. en W.H. Hui (1979), Proc. R. Soc. London, A, No. 368, pp. 239-265.
- Forristall, G.Z. (1978), Journal of Geophysical Research, Vol. 83, No. C5, blz. 2353-2358
- Goda, Y. (1974), Proc. Int. Symp. on Ocean Wave Measurement and Analysis, New Orleans, Louisiana, New York, ASCE, Vol. 1, blz. 320-337.
- Goda, Y. (1978), Proc. 16th Coastal Engineering Conference, pp. 227-246.
- \* Groen, P. en R. Dorrestein (1976), Staatsdrukkerij, Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut, Opstellen op oceanografisch en maritiem meteorologisch gebied, No. 11, derde druk.
- Hasselmann, K. (1960), Schiffstechnik, Vol. 7, Heft 39, blz. 191-195.
- Hasselmann, K. (1962), Journal of Fluid Mechanics, Vol. 12, No. 4, blz. 481-500.
- Hasselmann, K. (1963), Journal of Fluid Mechanics, Vol. 15, No. 3, blz. 385-398.
- Hasselmann, K. en J.I. Collins (1968), Journal of Marine Research, Vol. 26, No. 1, blz. 1-12.
- Hasselmann, K., e.a., (1973), Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift, Reihe A(8), No. 12.
- Hasselmann, K. (1974), Boundary-Layer Meteorology, Vol. 6, No. 1-2, blz. 107-127
- Hasselmann, K., e.a., (1976), Journal of Physical Oceanography, Vol. 6, No. 2, blz. 200-228.
- \* Holthuijsen, L.H. (1979), Technische Advies Commissie voor de Waterkringen, 's-Gravenhage, 1980.
- Hsiao, S.V. en O.H. Shemdin (1978), Proc. 16th Int. Coastal Engng. Conf., ASCE, paper no. 39.

- ISSC.(1976), Proc. 6th Int. Ship Structures Congres, Boston, Report of Committee I. 1. on Environmental Conditions, Vol. I.
- Jeffreys, H. (1925), Proc. Royal Soc. Series A, Vol. 107, blz. 189-206.
- Uit: Sverdrup en Munk (1947).
- Kitaigorodskii, S.A., e.a., (1975), Journal of Physical Oceanography, Vol. 5, blz. 410-420.
- \* LeBlond, P.H. en L.A. Mysak (1978), Elsevier Oceanography Series 20. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- Longuet-Higgins, M.S. (1976,a) Proc. Royal Soc. London, A, 347, 1650; blz. 311-328.
- Longuet-Higgins, M.S. (1976,b), Proc. 15th Coastal Engng. Conf., 1976, Honolulu ASCE, blz. 441-460.
- Miles, J.W. (1957), Journal of Fluid Mechanics, Vol. 3, No. 2, blz. 185-204.
- Mitsuyasu, H. en K. Rikiishi (1978), Journal of Fluid Mechanics, Vol. 85, No. 4, blz. 705-730.
- Neumann, G. (1953), Beach Erosion Board, Corps of Engineers, Department of the Army, Techn. Memo No. 43.
- Phillips, O.M. (1957), Journal of Fluid Mechanics, Vol. 2, No. 5, blz. 417-445.
- Phillips, O.M. (1958), Journal of Fluid Mechanics, Vol. 4, No. 4, blz. 426-434.
- Phillips, O.M. (1960), Journal of Fluid Mechanics, Vol. 9, blz. 193-217.
- \* Phillips, O.M. (1977), Cambridge, University Press, tweede druk.
- Pierson, W.J., e.a., (1955), U.S. Navy Hydrographic Office Publication No. 603.
- Pierson, W.J. en L. Moskowitz (1964), Journal of Geophysical Research, Vol. 69, No. 24, blz. 5181-5190.
- Sanders, J.W. (1976), Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Band 29, Heft 4, blz. 136-161.
- Shemdin. O., e.a., (1977), Proceedings of the NATO Conference on Turbulent Fluxes through the Sea Surface, Wave Dynamics, and Prediction, Marseille, France, Sept. 12-16, 1977, NATO conference series: V, Air-Sea Interactions Vol. 1, blz. 347-372, Plenum Press, New York, 1978.
- Snodgrass, F.E., e.a., (1966), Phil. Trans. Royal Soc. London, A, 259, 1103, blz. 431-497.
- Sverdrup, H.U. en W.H. Munk (1946), Trans. Am. Geoph. Union, Vol. 27, No. 6, blz. 823-827.
- Thornton, E.B. (1977), Journal of Physical Oceanography, Vol. 7, No. 1, blz. 137-140.
- Thijsse, J.Th. (1948), Congress of the UGGI, Oslo.
- Wilson, B.W. (1955), Beach Erosion Board, Corps of Engineers, Department of the Army, Tech. Memo 73.

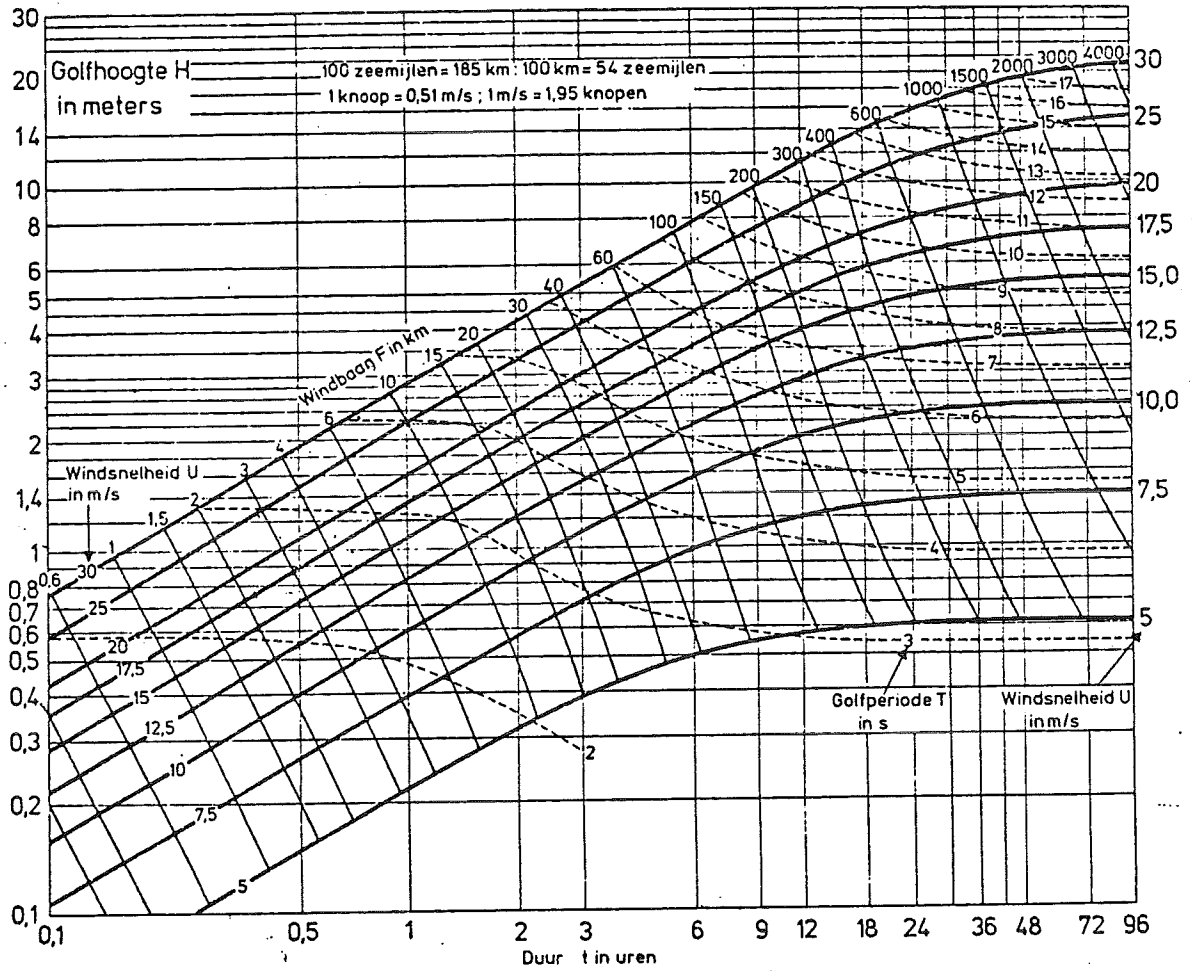
Wilson, B.W. (1965), Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Vol. 18, No. 3,  
blz. 114-130.

Referenties met \* worden aanbevolen als literatuur met een breed overzicht.



Betrekkingen tussen dimensieloze grootheden in zeevang.

Bron: P. Groen en R. Dorrestein, 1976, Zeegolven. KNMI, Opstellen op oceanografisch en maritiem meteorologisch gebied, No. 11, Staatsdrukkerij 's-Gravenhage



Grafiek ter bepaling van de significante golfhoogte H en golfperiode T in zeeegang uit de windsnelheid U en de duur t of de windbaan F.

Bron: P. Groen en R. Dorrestein, 1976, Zeegolven. KNMI, Opstellen op oceanografisch en maritiem meteorologisch gebied, No. 11, Staatsdrukkerij 's-Gravenhage

## 7. GOLFKLIMATOLOGIE

### 7.1. Inleiding

In hoofdstuk 5 zijn korte-duur statistische eigenschappen van windgolven behandeld, o.m. resulterend in een aantal parameters die kenmerkend zijn voor een golfsysteem voor een zo korte tijd dat dat systeem daarbinnen als stationair kan worden beschouwd. Dergelijke parameters waren met name  $H_s$  en  $T_s$ ; hieraan moet nog een kenmerkende golfrichting ( $\theta_s$ ) worden toegevoegd.

In hoofdstuk 6 is aangegeven welke waarden bovengenoemde korte-duur parameters aannemen bij gegeven windsnelheid, strijklengte, enz. Daar werd dus een golfsysteem beschouwd op een tijdschaal van b.v. een etmaal. Dit is o.m. van belang voor routing van schepen en voor de planning van uitvoering van werken buitengaats.

In dit hoofdstuk, "Golfklimatologie", gaan we naar een tijdschaal van jaren, en bekijken we de verzameling golfsystemen die zich daarin kunnen voordoen. Op deze tijdschaal behandelen we de kenmerkende parameters van de korte-duur beschrijving van de windgolven (b.v.  $H_s$ ,  $T_s$ ,  $\theta_s$ ) als stochastische variabelen. Deze lange-duur behandeling is o.a. nodig in studies van kustmorfologie, of in het ontwerpen van een offshore constructie met een geplande levensduur van enkele decennia. Daarbij kunnen de cumulatieve effecten van alle voorkomende situaties van belang zijn (zandtransport, vermoeïng) dan wel de extreme waarden te verwachten gedurende het beschouwde tijdvak. Een derde categorie van problemen is die betreffende het uitvoeren van werken op zee, waarvoor in de ontwerp-fase statistische informatie nodig is omtrent de te verwachten tijdsduren van werkbare omstandigheden.

In het volgende zullen de drie genoemde categorieën worden besproken, nadat eerst is ingegaan op het soort gegevens dat -in het algemeen gesproken- beschikbaar is voor studies van golfklimaat.

### 7.2. Gegevens

#### 7.2.1. Herkomst

Het spreekt vanzelf dat de golfklimatologie *empirisch* van aard is, zoals elk type klimatologie. In de bewerkingen van de gegevens kan men diverse

theoretische concepten hanteren, b.v. uit de statistiek of uit de spectraal analyse, maar de basisgegevens zelf zijn alleen door waarnemingen te verkrijgen, en de resultaten zijn altijd plaatsgebonden.

Naar *herkomst* kan men de volgende soorten golfgegevens onderscheiden:

- o gegevens van visuele golfwaarnemingen;
- o gegevens van instrumentele golfwaarnemingen;
- o gegevens afgeleid uit waarnemingen van de wind.

Per geval zal men zoveel mogelijk alle ter beschikking staande gegevens moeten benutten. Het kan b.v. zijn dat instrumentele golfgegevens weliswaar beschikbaar zijn, maar slechts over een relatief korte tijd (enkele jaren). Men zal er dan goed aan doen deze gegevens te gebruiken als ijking van de overige. Zodoende wordt het voordeel van de grotere nauwkeurigheid van de instrumentele golfgegevens goed gecombineerd met dat van de lange tijdbasis van de andere.

*Visuele* golfwaarnemingen worden voornamelijk verricht vanaf schepen. Zij resulteren in schattingen van  $(H_s, T_s, \theta_s)$ , onderscheiden naar zeegang en deining. Op open zee vormen deze vrijwel het enige golfgegevensbestand.

De methode van waarneming (zie par. 5.6) en de inzameling en bewerking van de resultaten worden gecoördineerd door de World Meteorological Organisation (WMO). In Nederland kan men voor informatie hierover terecht bij het KNMI.

*Instrumentele* waarnemingen zijn tot nu toe vrijwel beperkt geweest tot kustwateren en platzeeën. Het instrument dat internationaal hiervoor het meest wordt gebruikt is de z.g. "Waverider", een in Nederland (Firma Datawell te Haarlem) ontwikkelde en gefabriceerde drijvende bolvormige boei (diameter 0.7 m of 0.9 m) waarvan de verticale versnellingen worden gemeten. Hieruit kan in het frekwentiebereik van de windgolven (zeg tussen 0.05 Hz en 1 Hz) een betrouwbare schatting worden verkregen van de verticale uitwijking van het zeeoppervlak. Waar platforms staan kunnen golfmetingen worden uitgevoerd m.b.v. een verticale draad of buis die in een elektrisch circuit is opgenomen waarvan de weerstand wordt gemeten. Deze varieert met de mate van onderdompeling.

Voorzover er al instrumentele gegevens beschikbaar zijn in een bepaald gebied zijn die tot nu beperkt tot het tijdsdomein c.q. frekwentie-domein. Richtingseigenschappen zijn pas sinds kort op routine-basis te meten, hetzij met een 3-dimensionale snelheidsmeter, met een rooster van golfhoogtewaarnemingspunten, of met een drijvende boei ("pitch-roll-buoy").

Een veelbelovende ontwikkeling vindt plaats in de "Remote sensing" van het zeeoppervlak m.b.v. radar of lasers. Hiermee kunnen frekwentie- en richtingseigenschappen van de oppervlaktegolven worden bepaald, en dat over vrijwel het gehele zeegebied. De mogelijkheid hiertoe is experimenteel aangetoond, m.n. met de "Seasat" satelliet (1978), maar routinematige toepassing ervan vindt nog niet plaats.

In tegenstelling tot de visuele waarnemingen is de inzameling en bewerking van instrumentele gegevens niet centraal gecoördineerd. Per gebied zal men bij diverse instanties inlichtingen moeten inwinnen. Voor de Noordzee zijn dat o.a. het KNMI en collega-instituten in het buitenland (met name Engeland), en oliemaatschappijen (die echter hun gegevens veelal niet aan derden ter beschikking stellen, of dat pas na vele jaren doen); voor de Nederlandse kustwateren kan men ook bij Rijkswaterstaatsdiensten terecht.

*Windgegevens* zijn veelal over langere waarnemingsperiodes beschikbaar dan golfgegevens. In combinatie met golfverwachtingsmethoden (zie hoofdstuk 6) zijn zij daarom een welkome aanvulling daarop. Vooral analyses van stormen uit het verleden zijn hier op hun plaats (meer dan een uur-tot-uur analyse). Voor wind-informatie kan men vanzelfsprekend meteorologische instituten raadplegen.

### 7.2.2. Parameters

De parameters waarmee een golfsysteem is te kenmerken voor klimatologische doeleinden zullen tenminste een maat voor de energie en voor een frekwentie en richting moeten bevatten. We zullen hier  $(H_s, T_s, \theta_s)$  gebruiken, in het midden latend wat de herkomst is van de schattingen van deze parameters.

Op klimatologische tijdschaal gezien zijn  $H_s$ ,  $T_s$  en  $\theta_s$  voor een gegeven



lokatie als een stochastisch proces in de tijd te beschouwen. Evenals bij de behandeling van de statistische eigenschappen in de korte duur is gedaan (hoofdstuk 5) kan men zich richten op verschillende aspecten:

- o momentane waarden op willekeurige tijdstippen;
- o tijdsduren tussen verschillende zeetoestanden;
- o extreme waarden.

Die zijn resp. nodig in studies van

- o cumulatieve effecten;
- o werkbaarheid;
- o grenstoestanden.

In de context van een offshore platform kan men hierbij denken aan aspecten van resp. vermoeiing, plaatsing en grensstabiliteit.

### 7.3. Momentane waarden

#### 7.3.1. Significante golfhoogte, periode en richting

De lange-termijn gezamenlijke k.d.f. van de momentane waarden van  $(\underline{H}_s, \underline{T}_s, \underline{\theta}_s)$  kan worden geschat op grond van simultane waarnemingen van deze grootheden op willekeurige tijdstippen (zoals in geval van waarnemingen vanaf schepen die toevallig door een gebied varen) dan wel op een reeks van tijdstippen met constante intervallen ertussen, b.v. 3 uur of 6 uur (zoals bij instrumentele metingen, of visuele waarnemingen vanaf licht- of weerschepen of platforms).

Terwille van een grafische of tabellarische presentatie van de gegevens, die hoogstens twee-dimensionaal is, wordt de drievoudige gezamenlijke k.d.f. van  $(\underline{H}_s, \underline{T}_s, \underline{\theta}_s)$  in twee factoren gesplitst:

$$p(\underline{H}_s, \underline{T}_s, \underline{\theta}_s) = p(\underline{H}_s, \underline{T}_s | \underline{\theta}_s) p(\underline{\theta}_s) \quad (7.1)$$

In feite werkt men met richtingssectoren, b.v. van  $30^\circ$  of  $45^\circ$ . Dan wordt per gebied opgegeven voor welke fractie van het aantal waarnemingen (vertaald als fractie van de tijd) de hoofdrichting van een golfsysteem in de diverse sectoren ligt, en wordt daarnaast per sector aangegeven voor welke fractie van de waarnemingen, ofwel van de tijd,  $(\underline{H}_s, \underline{T}_s)$  in bepaalde

intervallen liggen, gegeven dat de golfrichting in de beschouwde sector ligt. Dit zijn schattingen van

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta_s) d\theta_s$$

resp. van

$$\int_{H_1}^{H_2} \int_{T_1}^{T_2} p(H_s, T_s | \theta_1 < \theta_s \leq \theta_2)$$

Eventueel kan men dit nog per maand of seizoen doen, maar voor studies van meerjarige cumulatieve effecten is dat niet nodig.

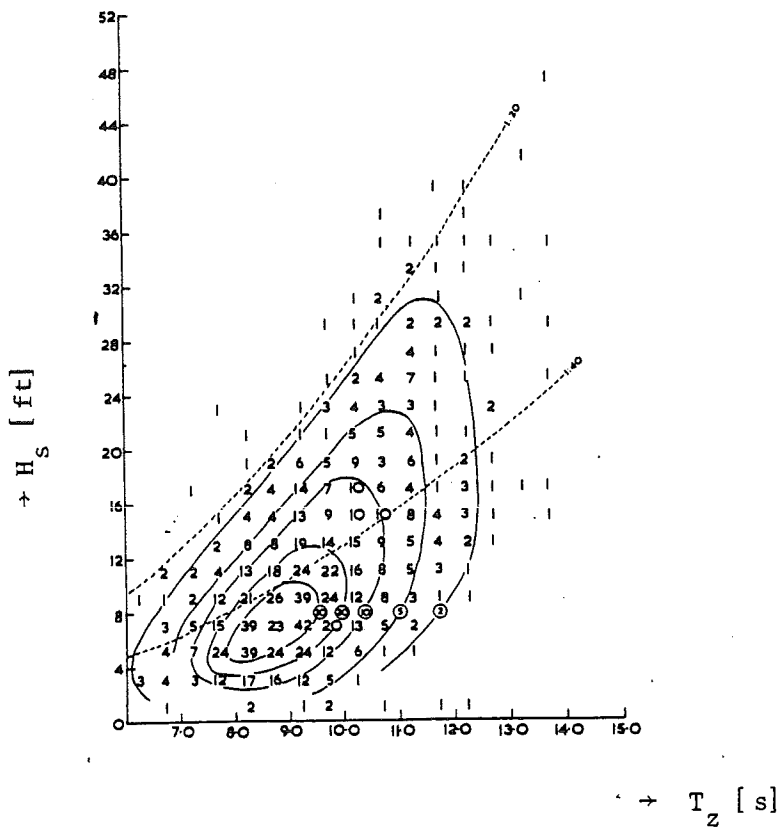
Als illustratie is hier één tabel overgenomen uit een verzameling van golfgegevens afkomstig van Nederlandse lichtschepen (Dorrestein, 1967). De in

Lichtschip Terschellingerbank; hele jaar;  
golfrichting 15°-45°; 1630 waarnemingen uit een  
totaal van 24720 voor alle richtingen

H <sub>s</sub> [m]	Alle T <sub>s</sub>	T <sub>s</sub> [s]				
		≤ 5	5-7	7-9	9-11	> 11
0	88	74	14			
½	447	351	91	6		
1	268	133	129	7		
1½	133	33	85	15		
2	47	4	33	10		
2½	7		3	4		
3	5		1	2	1	
3½	4			3	1	
4						
≥ 4½						
Alle H <sub>s</sub>	1000	594	355	48	2	

de tabel gepresenteerde getallen stellen relatieve frekwenties voor, uitgedrukt in promillen. De tweede kolom geeft de marginale verdeling van  $\underline{H}_s$ , de onderste rij die van  $\underline{T}_z$ .

Een voorbeeld van een grafische presentatie van soortgelijke gegevens wordt in figuur 7.1 gegeven; deze heeft betrekking op het voormalige weerschip "India" (in de Noord-Atlantische Oceaan), voor alle maanden en alle richtingen. Als periode is hier echter  $T_z$  gebruikt, en niet  $T_s$ .



Figuur 7.1

Lange-termijn verdeling van  $(\underline{H}_s, \underline{T}_z)$ ; station "India" (Battjes, 1970, 1972)

De getrokken lijnen zijn lijnen van constante waarden van  $p(H_s, T_z) \Delta H_s \Delta T_z$ . Met de stippellijnen zijn in de figuur constante waarden van de verhouding  $H_s/T_z^2$  aangeduid. De bijgeschreven waarden (1:20 resp. 1:40) gelden voor een kenmerkende golfsteilheid, gedefinieerd als  $H_s/L_z$ , waarin

$$L_z \equiv \frac{gT_z^2}{2\pi} \quad (7.2)$$

(een soort diep-water golflengte behorend bij  $T_z$ ). Deze maat voor de golfsteilheid blijkt op diep water een bovengrens te hebben van 0.05 à 0.06.

### 7.3.2. Significante golfhoogte

Hoewel men meestal informatie moet hebben over golfhoogten en over perioden en richtingen, kan soms worden volstaan met de verdeling van golfhoogten ongeacht de periode en richting. In ieder geval is kennis van deze *marginale* lange-termijn verdeling van (significante) golfhoogten nuttig voor extrapolatie van de waarnemingen. Daartoe worden proberenderwijs diverse verdelingsfuncties aangepast aan de waarnemingen. Per gekozen type verdelingsfunctie (b.v. Weibull) worden de parameterwaarden bepaald, zodanig dat een zo goed mogelijke aansluiting aan de waarnemingen wordt verkregen volgens een eveneens gekozen criterium (b.v. met een kleinste-kwadraten methode of visueel). Vervolgens wordt beslist welk type verdelingsfunctie het beste bij de gegevens past (volgens een subjectief te kiezen criterium), en wordt beslist of de daarvoor gevonden optimale aanpassing voldoende is (alweer volgens een subjectief gekozen criterium) om dié verdelingsfunctie met dié parameterwaarden te kunnen gebruiken als basis voor extrapolatie. Bij het laatste wordt dan verondersteld dat in het bereik van de extrapolatie dezelfde fysische processen een rol spelen als in het bereik van de waarnemingen. In geval van beperkte diepte b.v. hoeft dit niet zo te zijn, en moet hiermee als mogelijk beperkende factor rekening worden gehouden.

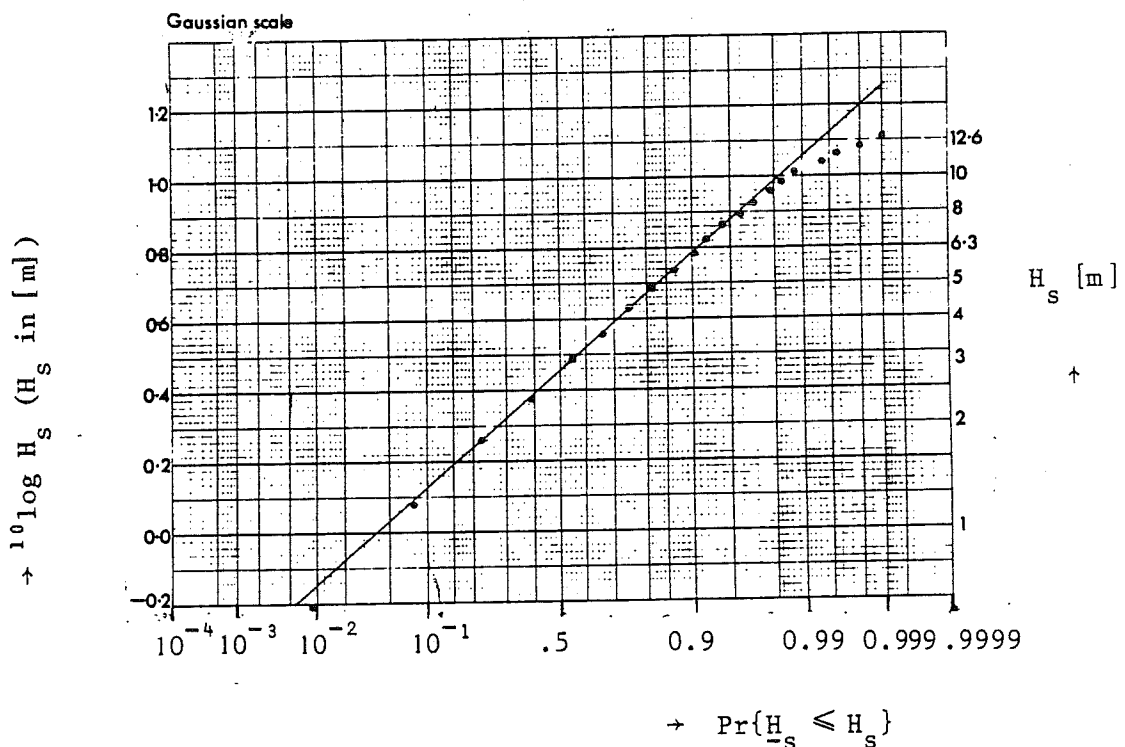
Hierboven werd gesproken over aanpassingen van verdelingsfuncties aan "de" waarnemingen. Eigenlijk moet hier sprake zijn van "een homogene deelverzameling van de waarnemingen". In tropische en subtropische zeeën komt het nogal eens voor dat er twee min of meer homogene deelpopulaties zijn te onderscheiden in het totaal, te weten de groep waarnemingen bij normale omstandigheden met een zwakke tot matige golfbeweging, en de groep waarnemingen van meer extreme toestanden tijdens incidentele gebeurtenissen zoals het langstrekken van een tropische cycloon. In de waargenomen verdeling zal dit zich uiten als een knik. Het hieraan aanpassen van één verdelingsfunctie, met één keuze voor de parameters, is niet zinvol.

Merk op dat de gehele procedure in essentie empirisch is, in tegenstelling tot de situatie bij de korte-termijn statistische analyse van de golfbeweging, waaraan een gesloten theorie ten grondslag ligt (het lineair-Gaussische model) als eerste benadering. De resultaten van een klimatologische analyse zijn om dezelfde reden ook niet te generaliseren; zij zijn plaatsgebonden.

Om een voorbeeld te geven van bovenomschreven procedure is de marginale k.d.f. van  $\underline{H}_s$  genomen die behoort bij de gegevens uit figuur 7.1. Op grafische wijze zijn twee typen verdelingsfuncties aangepast aan de metingen, t.w. een log-normale verdeling ( $\log \underline{H}_s$  Gaussisch verdeeld) en een Weibull verdeling. Laatstgenoemde kan geschreven worden als

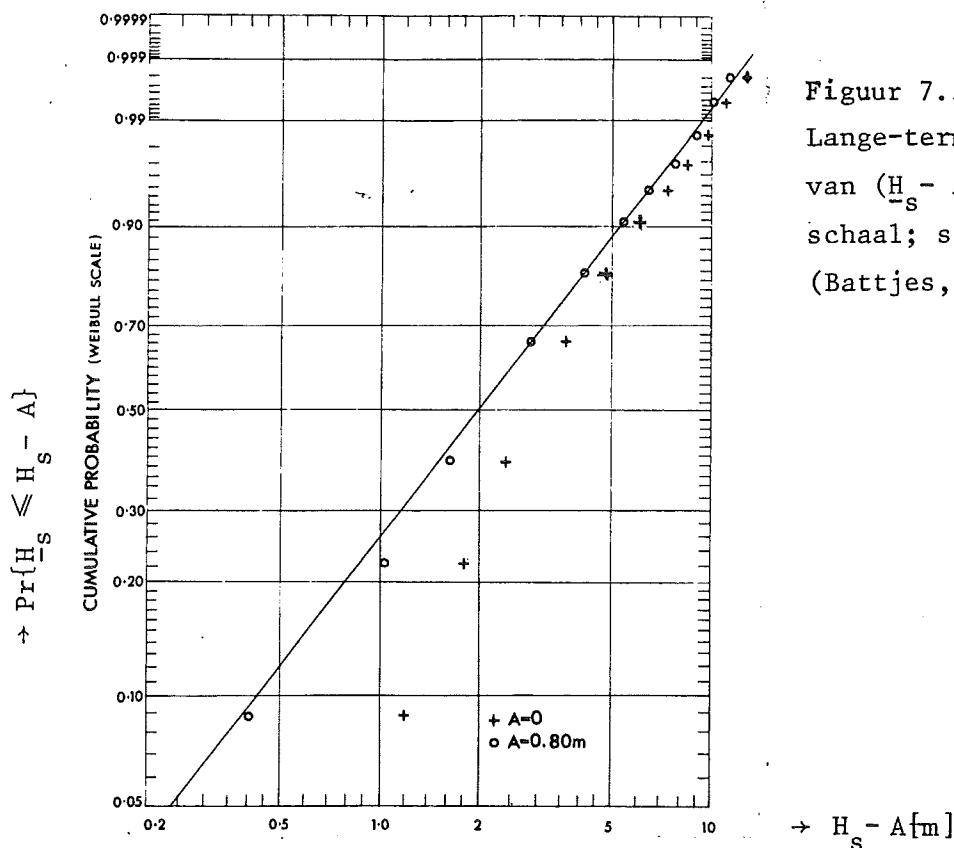
$$P_{\underline{x}}(x) \equiv \Pr\{\underline{x} \leq x\} = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-A}{B}\right)^C\right\} \text{ voor } x > A$$

$$= 0 \text{ voor } x < A \quad (7.3)$$



Figuur 7.2 Lange-termijn verdeling van  $\underline{H}_s$  op log-Gaussische schaal; station "India" (Battjes, 1970)

Hierin is A een drempelwaarde, B een schaalparameter en C een vormparameter (hoe groter C, hoe minder  $\underline{x}$  gespreid is, dus hoe smaller de k.d.f. van  $\underline{x}$ ). De figuren 7.2 en 7.3 laten een vergelijking zien tussen



Figuur 7.3  
 Lange-termijn verdeling van  $(\underline{H}_s - A)$  op Weibull-schaal; station "India" (Battjes, 1972)

de waargenomen verdeling van  $\underline{H}_s$  met een op het oog bepaalde bijpassende log-normale verdeling resp. Weibull verdeling. (De schalen zijn zodanig dat de respectievelijke analytische verdelingfuncties door rechte lijnen worden weergegeven.) Laatstgenoemde blijkt goed bij de waarnemingen aan te sluiten, en zou kunnen dienen als basis voor extrapolatie. Hoewel dit in diverse gebieden is gebleken kan men dit nog niet generaliseren. Wel lijkt het zinvol om in ieder geval de Weibull verdeling als één van de te proberen verdelingen mee te nemen.

### 7.3.3. Individuele golfhoogten en respons-topwaarden

Uit de lange-termijn verdeling van  $(\underline{H}_s, \underline{T}_z)$  kan men die van de individuele golfhoogten ( $\underline{H}$ ) bepalen. Deze kunnen we de marginale verdeling van  $\underline{H}$  noemen, daarbij de korte-termijn verdeling van  $\underline{H}$  (Rayleigh)

als voorwaardelijk beschouwend:

$$\Pr\{\underline{H} > H | \underline{H}_s = H_s\} = \exp\{-2(H/H_s)^2\} \quad (7.4)$$

Als we een willekeurig tijdsinterval nemen met een duur  $\Delta t$ , waarbinnen de golfbeweging als stationair is te beschouwen, dan is er een kans

$$p(H_s, T_z) \delta H_s \delta T_z$$

dat de aan te treffen waarden van  $(\underline{H}_s, \underline{T}_z)$  voldoen aan de voorwaarde

$$(H_s < \underline{H}_s \leq H_s + \delta H_s \text{ en } T_z < \underline{T}_z < T_z + \delta T_z)$$

Als deze gebeurtenis zich inderdaad voordoet is het aantal golven in het beschouwde interval vrijwel gelijk aan

$$T_z^{-1} \Delta t$$

en het aantal daarvan met een hoogte  $(\underline{H})$  groter dan  $H$  gelijk aan

$$T_z^{-1} \exp\{-2(H/H_s)^2\} \Delta t$$

Voor een willekeurig interval met duur  $\Delta t$  is het verwachte aantal golven dan gegeven door

$$\left[ \int_0^{\infty} T_z^{-1} p(T_z) dT_z \right] \Delta t$$

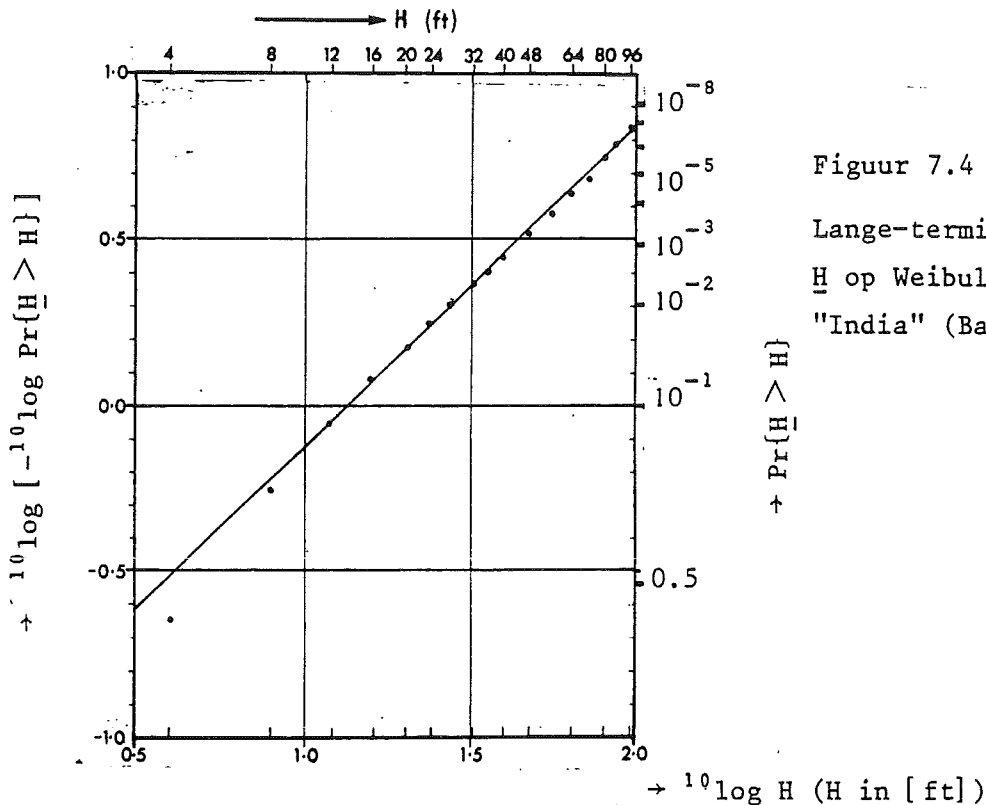
en het verwachte aantal golfhoogten waarvoor  $(\underline{H} > H)$  door

$$\left[ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T_z^{-1} \exp\{-2(H/H_s)^2\} p(H_s, T_z) dH_s dT_z \right] \Delta t$$

De lange-termijn verdeling van de individuele golfhoogten is dan te bepalen als een relatieve frekwentie volgens

$$\Pr\{\underline{H} > H\} = \frac{\iint T_z^{-1} \exp\{-2(H/H_s)^2\} p(H_s, T_z) dH_s dT_z}{\int T_z^{-1} p(T_z) dT_z} \quad (7.5)$$

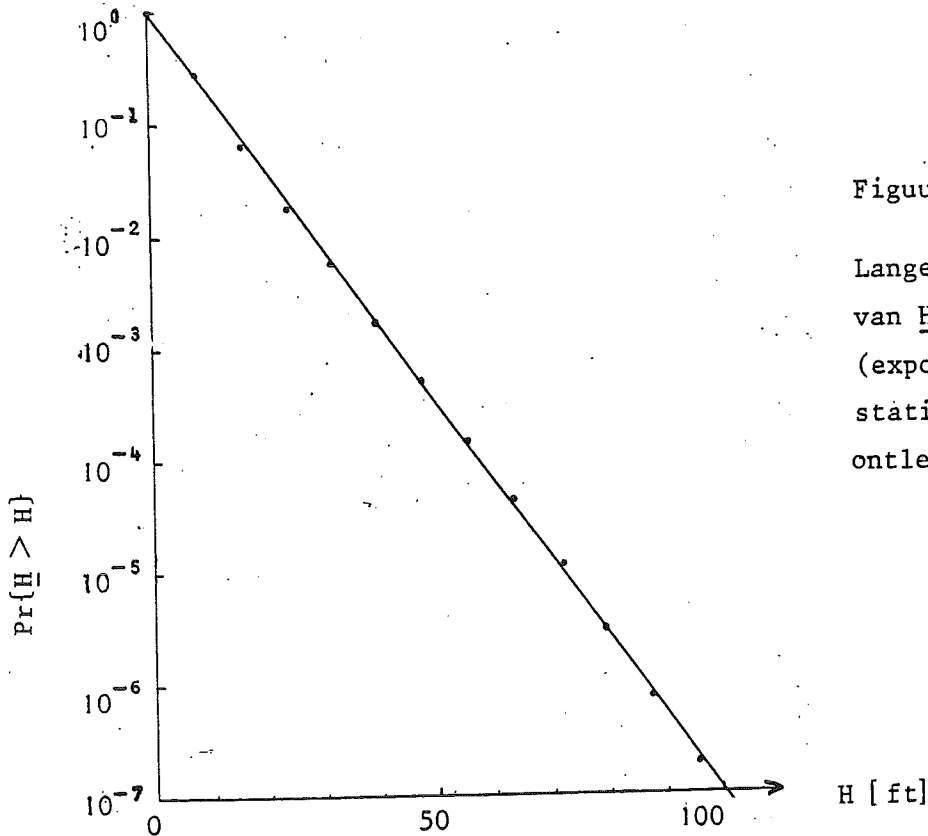
De integralen hierin strekken zich formeel uit van 0 tot  $\infty$ . In feite heeft men altijd met discrete waarden te maken (zie Tabel 7.1 of figuur 7.1), zodat de integraties moeten worden vervangen door sommaties over het (eventueel geëxtrapoleerde) waarnemingsbereik. Het resultaat van zo'n bewerking, toegepast op de gegevens in figuur 7.1, is te zien in figuur 7.4 op Weibull-schaal. De berekende verdeling blijkt goed met een Weibull-verdeling benaderd te kunnen worden. De vormparameter C behorend bij de (op het oog) getrokken rechte lijn is ca. 0.97. Een



Figuur 7.4  
Lange-termijn verdeling van  $\underline{H}$  op Weibull-schaal; station "India" (Battjes, 1972)

waarde  $C \approx 1$  in de lange-termijn verdeling van individuele golfhoogten is in andere gebieden ook wel gevonden. Merk op dat voor  $C = 1$  de Weibull verdeling reduceert tot een exponentiële verdeling. Ter illustratie zijn de punten uit figuur 7.4 eveneens op semi-logarithmische schaal uitgezet, waarop een exponentiële verdeling rechtlijnig wordt weergegeven (zie figuur 7.5). De berekende verdeling blijkt inderdaad goed met een exponentiële te kunnen worden benaderd.





Figuur 7.5

Lange-termijn verdeling van  $\underline{H}$  op semi-log schaal (exponentiële verdeling); station "India" (gegevens ontleend aan Battjes, 1972).

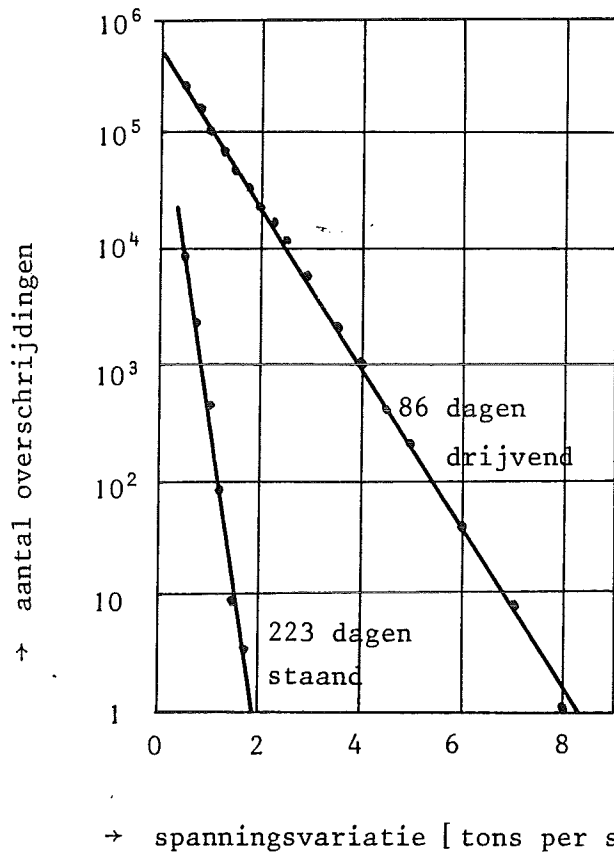
De in het voorgaande omschreven bewerking is niet alleen toe te passen voor de berekening van de lange-termijn verdeling van golfhoogten, maar ook voor die van respons-topwaarden of top-dal waarden, zoals van materiaalspanningen in een constructie-onderdeel waarvan de vermoeiing wordt bestudeerd.

We gaan er hier van uit dat per zeegangstoestand het spectrum  $E_{rr}(f)$  van de beschouwde responsie  $\{r_t\}$  van een constructie kan worden berekend. (Methoden daarvoor worden in hoofdstuk 8 behandeld.) Van het spectrum  $E_{rr}(f)$  zijn  $m_0$  en  $m_2$  te bepalen, en dus ook  $m_0$  en  $\lambda_0 = (m_2/m_0)^{1/2}$ . Een gegeven lange-termijn verdeling van golfparameters kan dus worden omgerekend tot een lange-termijn gezamenlijke verdeling van  $\lambda_0$  en  $m_0$  van de beschouwde respons-grootte. De lange-termijn verdeling van de respons-topwaarden ( $\hat{r}_m$ ) is dan naar analogie met (7.5) te berekenen volgens

$$\Pr\{\hat{r}_m > r\} = \frac{\iint \lambda_0 \exp\{-\frac{r^2}{2m_0}\} p(\lambda_0, m_0) d\lambda_0 dm_0}{\int \lambda_0 p(\lambda_0) d\lambda_0} \quad (7.6)$$

Twee lange-termijn verdelingen van gemeten top-dal waarden van de spanning in een deel van een vakwerk-constructie in de Noordzee, in drijvende resp. staande positie, zijn op semi-logaritmische schaal uit-

gezet in figuur 7.6. De gemeten verdelingen worden goed met een rechte lijn benaderd, zodat ze als exponentieel kunnen worden beschouwd (zoals



Figuur 7.6  
Lange-termijn verdeling van gemeten spanningsfluctuaties (top-dal waarden) op semi-log schaal (exponentiële verdeling). (Bell en Walker, 1971).

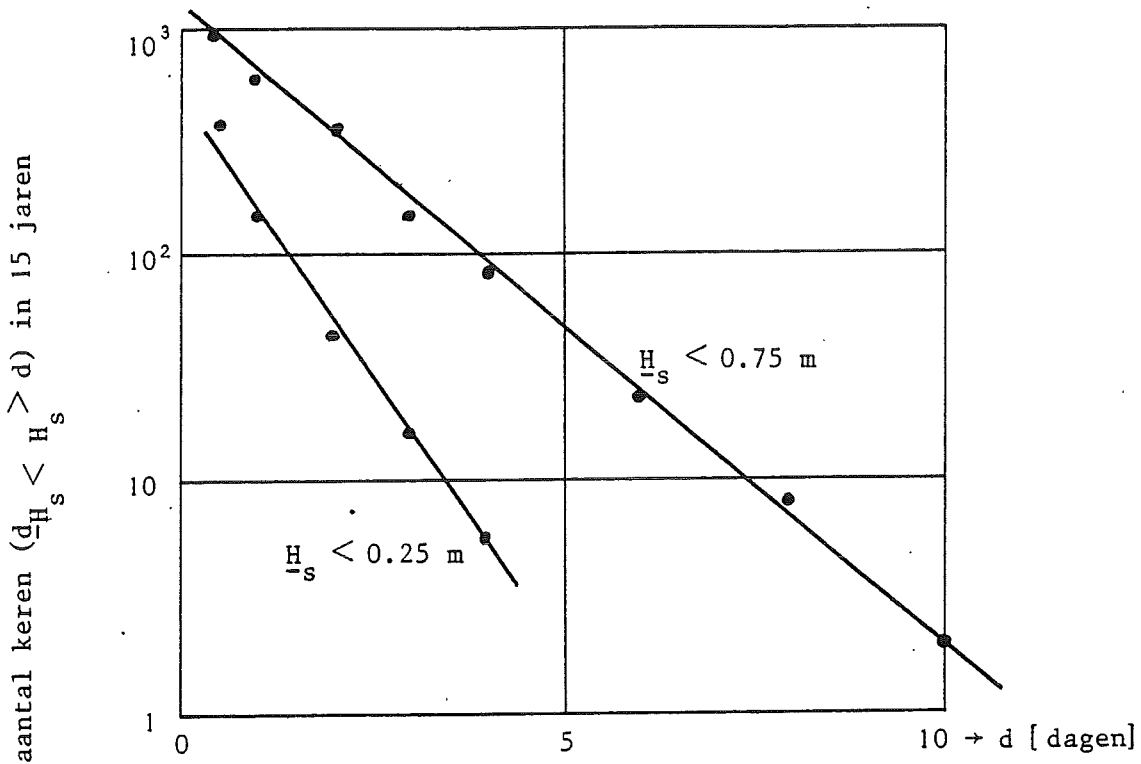
ook het geval was voor de berekende lange-termijn verdeling van individuele golfhoogten in figuur 7.4 en figuur 7.5).

#### 7.4. Duren van zeetoestanden

In studies van werkbaarheid zijn de frekwentie en duren van belang van tijdsintervallen van kalme zeecondities, meestal uitgedrukt in termen van een maximaal toelaatbare waarde van  $\underline{H}_s$ . Dergelijke informatie kan niet uit de lange-termijn verdeling van de golfparameters op willekeurige tijdstippen worden bepaald, omdat informatie over de opeenvolging van de waarnemingen in de tijd daar niet meer in zit.

Het bepalen van de lange-termijn verdeling van kalmte-duren, d.w.z. van tijdsduren  $\underline{d}_{\underline{H}_s} < H_s$  waarin  $\underline{H}_s$  ononderbroken onder een bepaald niveau ( $H_s$ ) blijft, behoort veelal tot de standaardbewerkingen van golfwaarnemingsreeksen. Voor de waarnemingen vanaf lichtschip Goeree zijn resultaten

in tabelvorm gepresenteerd door Dorrestein (1967). Analyse van deze gegevens laat zien dat de kalmteduren vrijwel exponentieel verdeeld zijn (zie figuur 7.7).



Figuur 7.7 - Verdeling van waargenomen kalmteduren bij lichtschip "Goeree" op semi-log schaal (exponentiële verdeling). Gegevens ontleend aan Dorrestein, 1967.

Tussen de gemiddelde frekwentie ( $\lambda_{H_s}$ ) van vóórkomen van kalmtes, de gemiddelde duur ervan, en de lange-termijn verdeling van  $\underline{H}_s$  bestaat een afhankelijkheid:

$$\lambda_{H_s} = \frac{\Pr\{\underline{H}_s < H_s\}}{E\{d_{\underline{H}_s < H_s}\}} \quad (7.7)$$

N.B.  $E\{d_{\underline{H}_s < H_s}\}$  is de gemiddelde *duur* van kalme periodes, en  $\lambda_{H_s}^{-1}$  is het gemiddelde tijdsinterval *tussen* de begintijdstippen van opeenvolgende kalme periodes.

Voor ruwe periodes geldt mutatis mutandis hetzelfde als voor kalme. Ook daarover zijn gegevens te vinden in Dorrestein (1967) (evenals voor aangesloten perioden van zachte of harde wind).

### 7.5. Extreme waarden

De bepaling van de kans van vóórkomen van een extreme zeetoestand of responsie in een zekere tijdsduur  $D$  (b.v. de ontwerplevensduur van een constructie) kan o.a. gebeuren met behulp van de Poisson-verdeling, toegepast op het aantal stormen in de beschouwde duur  $D$  van een intensiteit boven een zekere grenswaarde.

Laten we hier gemakshalve een storm definiëren als een gebeurtenis waarbij  $\underline{H}_s$  onafgebroken boven een (niet al te lage) grenswaarde ( $H_s$ ) ligt. De gemiddelde frekwentie van vóórkomen van dergelijke stormen is gelijk aan  $\lambda_H$ , gedefinieerd in par. 7.4. In (7.7) is  $\lambda_H$  uitgedrukt in de kans dat  $\underline{H}_s$  op een willekeurig moment *onder* een niveau  $H_s$  ligt, en de gemiddelde duur van perioden waarin zich dit voordoet. In de context van stormen is het meer gebruikelijk om te werken met *overschrijdingen*:

$$\lambda_{H_s} = \frac{\Pr\{\underline{H}_s > H_s\}}{E\{d_{\underline{H}_s} > H_s\}} \quad (7.8)$$

Bij toepassingen in de context van werkbaar weer zijn de van belang zijnde waarden van  $H_s$  vanzelfsprekend veel lager dan in de toepassingen op stormen, maar dat doet niets af aan de geldigheid van de bewering dat perioden waarin  $\underline{H}_s$  onafgebroken boven een bepaald niveau ligt even vaak vóórkomen als perioden waarin  $\underline{H}_s$  onafgebroken onder dat niveau blijft, en dus dat de gemiddelde frekwentie van beide gebeurtenissen dezelfde is, n.l.  $\lambda_{H_s}$ .

Het verwachte aantal stormen waarin ( $\underline{H}_s > H_s$ ), in de duur  $D$ , is gelijk aan  $\lambda_{H_s} D$ . Aannemende dat stormen onafhankelijk van elkaar vóórkomen is de Poisson-verdeling hier van toepassing (5.49) en is de kans dat stormen waarin ( $\underline{H}_s > H_s$ ) in het geheel *niet* vóórkomen in de beschouwde duur gelijk aan (zie 5.42)

$$\Pr\{\max \underline{H}_s < H_s\} = \exp(-\lambda_{H_s} D) \quad (7.9)$$

N.B. Als stormen inderdaad onafhankelijk van elkaar vóórkomen is het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende stormen exponentieel verdeeld (Poisson-proces; zie b.v. Papoulis, 1965). Dit is in overeenstemming met de gegevens in figuur 7.7, zij het dat die op nogal lage intensiteiten betrekking hebben.

In de context van bovenstaande vraagstelling wordt vaak gebruik gemaakt van het begrip "return period". De "return period" (RP) behorend bij een zekere  $H_s$  is gedefinieerd als het gemiddelde tijdsinterval tussen stormen waarin ( $\underline{H}_s > H_s$ ). De waarde ervan is dus gelijk aan  $\lambda_{H_s}^{-1}$ , ofwel gelijk aan

$$RP_{H_s} = \lambda_{H_s}^{-1} = \frac{E\{d_{\underline{H}_s} > H_s\}}{\Pr\{\underline{H}_s > H_s\}} \quad (7.10)$$

In dit verband worden twee kanttekeningen geplaatst.

De eerste kanttekening is dat de "return period" vaak verkeerd wordt berekend, n.l. als

$$\frac{\Delta t}{\Pr\{\underline{H}_s > H_s\}}$$

waarin  $\Delta t$  het tijdsinterval is tussen opeenvolgende waarnemingen van  $H_s$ . Het spreekt vanzelf (?) dat zo'n gekozen waarnemingsinterval van geen betekenis is voor de intervallen tussen stormen, of voor welke fysisch relevante grootte dan ook. Men behoort in bovenstaande uitdrukking de gemiddelde stormduur (waarin  $\underline{H}_s > H_s$ ) te gebruiken in plaats van  $\Delta t$ .

De tweede kanttekening is dat het begrip "return period" een te zelfstandige betekenis kan krijgen, en dat misleidend kan werken. Een "return period" van 50 jaar behorend bij  $H_s = 10$  m zou wellicht ten onrechte kunnen suggereren dat een waarde van 10 m geschikt zou zijn als schatting van een maximaal te verwachten  $H_s$  ("ontwerpgolfhoogte") in een periode van 50 jaar. In feite is er een kans van  $1 - e^{-1} \approx 0.63$  dat een waarde  $H_s$  (10 m in dit voorbeeld) door  $\underline{H}_s$  zal worden overschreden in een duur gelijk aan de bijbehorende "return period" (50 jaar in dit voorbeeld). (Zie de hieraan analoge opmerking in par. 5.7.)

Tot slot van deze paragraaf wordt erop gewezen dat men de hier behandelde vraagstelling ook anders kan benaderen. In plaats van alle stormen te beschouwen waarin ( $\underline{H}_s > H_s$ ), kan men b.v. kijken naar de meest intense (grootste  $H_s$ ) storm per jaar, en die verzameling onderwerpen aan een extreme-waarde analyse (Gumbel, 1958). Nog een mogelijkheid is om te werken met de verzameling van maximale  $H_s$ -waarden, één per storm. Het belangrijke punt is dat men zich baseert op *onafhankelijke* gebeurtenissen.

#### 7.6. Résumé

Golfklimatologie is een statistische beschrijving van kenmerkende golfsysteemparameters op een tijdschaal van jaren. De basisgegevens bestaan uit visuele of instrumentele golfwaarnemingen, dan wel uit windwaarnemingen omgerekend tot golfparameters.

In de verwerking moet onderscheid worden gemaakt tussen de verzameling momentane parameter-waarden, ongeacht de volgorde ervan in de tijd, en eigenschappen waarvoor die volgorde juist wel een rol speelt, zoals in studies van kalmeduren en extreme waarden.

Bij het bepalen van de kans op vóórkomen van een gegeven extreme situatie in een zekere duur kan de Poisson-verdeling worden gebruikt, mits toegepast op onafhankelijke gebeurtenissen.

#### 7.7. Literatuur

- J.A. Battjes, Long-term wave height distribution at seven stations around the British Isles. Deutsche Hydrografische Zeitschrift, 25, 4, 1972, p. 179-189. (Met complete gegevens in N.I.O. Internal Report A44, Juli 1970, zelfde auteur en titel.)
- J.A. Battjes, Probabilistic aspects of ocean waves. Proc. Safety of Structures under dynamic loading, I. Holand, Ed., Tapir Publishers, Trondheim, 1978, p. 389-439. (Ook verkrijgbaar als Report 77-2, Communic. on Hydraulics, Dept. of Civil Eng., Delft, 1977.)

- J.A. Battjes, Encounter probability of extreme structural response values based on multi-parameter descriptions of the physical environment. Proc. BOSS'79, London, 1979, Vol. III, 609-616.
- A.O. Bell en R.C. Walker, Dynamic stresses in an offshore mobile drilling unit, Proc. Dynamic Waves in Civil Eng., Wiley, 1971.
- L.E. Borgman, Maximum wave height probabilities for a random number of random intensity storms, Proc. 12th Int. Conf. on Coastal Eng., Washington D.C., 1970, p. 53-64.
- R. Dorrestein, Wind and wave data of Netherlands Lightvessels since 1949, KNMI Mededelingen en verhandelingen No. 90, Staatsdrukkerij, Den Haag, 1967.
- E.J. Gumbel, Statistics of extremes, Columbia Univ. Press, New York, N.Y., 1958.
- C. Petrauskas en P.M. Aagaard, Extrapolation of Historical Storm Data for Estimating Design Wave Heights, OTC, Houston, 1970..

## 8. BEREKENING VAN RESPONSIES

### 8.1. Inleiding

De voorgaande hoofdstukken hadden betrekking op de oppervlakte-uitwijking van windgolven. Andere eigenschappen, zoals druk en snelheid onder het oppervlak, bleven daarbij buiten beschouwing. Voor een meer volledige beschrijving van de windgolven zelf, evenals voor de bepaling van effecten die zij in iets anders veroorzaken (b.v. in een constructie), is het nodig informatie over de oppervlakte-uitwijkingen te kunnen vertalen in de benodigde andere informatie. We kunnen daarvoor een nogal algemeen bruikbare methodiek hanteren uit de theorie van *systemen*, en wel die van de berekening van een *responsie* van een systeem op een *excitatie*. Voor *lineaire* systemen zijn dergelijke berekeningen gemakkelijk *spectraal* uit te voeren, d.w.z. in het frekwentiedomein. Daarin ligt ook juist een belangrijk voordeel van de spectrale beschrijving van processen.

In de volgende paragraaf zullen enkele begrippen uit de systeemtheorie worden genoemd. De behandeling is elementair en summier gehouden. (Voor meer informatie hierover wordt verwezen naar de betreffende colleges zoals b9 en c34.) Vervolgens worden enkele voorbeelden gegeven in de context van windgolven, eerst één-dimensionaal, daarna meer-dimensionaal.

### 8.2. Begrippen uit de systeemtheorie

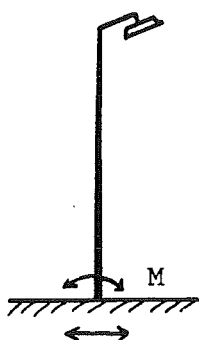
#### 8.2.1. Ingangs- en uitgangsgrootheden

Een *systeem* is een geheel dat ten behoeve van bepaalde doeleinden van de omgeving afgezonderd kan worden gedacht. Men kan hierbij denken aan mechanische of andere fysische systemen (b.v. een massa-veer systeem of een elektrisch circuit), maar ook aan systemen in de economie, de bedrijfsvoering, e.d.

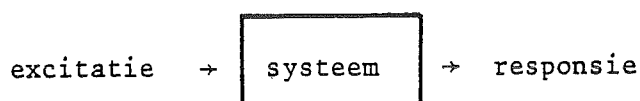
Grootheden uit de omgeving die het systeem beïnvloeden noemt men *ingangsgrootheden*, en reacties daarop van het systeem, die eventueel de omgeving kunnen beïnvloeden, noemt men *uitgangsgrootheden*. Bij mechanische systemen is het ook gebruikelijk om van *excitatie* resp. *responsie* te spreken.



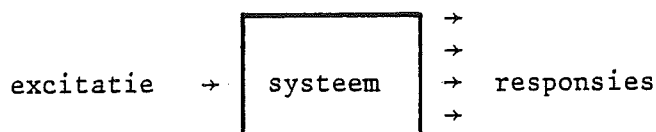
Een voorbeeld van een mechanisch systeem is een lichtmast, inge-



klemd in zijn fundering. Een mogelijke excitatie is een variërende horizontale verplaatsing van de voet als gevolg van een aardbeving. Als responsiegrootheid bekijken we b.v. het buigend moment in de voet van de mast. Schematisch is dit als volgt weer te geven, waarbij de lichtmast (het systeem) door een "black box" is voorgesteld:

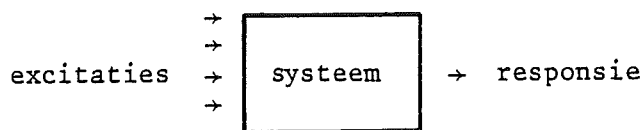


Qua dimensionaliteit is dit het eenvoudigst denkbare geval: een enkelvoudige responsie op een enkelvoudige excitatie. Het enkelvoudig zijn van de responsie was in dit voorbeeld slechts een keuze. In feite zijn er talloze responsgrootheden aan te wijzen, b.v. verplaatsingen, snelheden, versnellingen, vervormingen, momenten, dwarskrachten, spanningen, enz.:



Daarbij hangt het van de vraagstelling af of het toereikend is de responsies afzonderlijk te bekijken. Wil men b.v. nagaan of een grensspanningstoestand wordt bereikt dan zullen de diverse krachten en momenten in een doorsnede gezamenlijk moeten worden beschouwd.

In veel gevallen zal ook sprake zijn van een meervoudige excitatie. In het genoemde voorbeeld is het b.v. mogelijk dat er niet alleen een in de tijd variërende verplaatsing wordt opgelegd aan de voet, maar ook nog een in de tijd variërende kracht in een bepaald punt van de mast. Als we ons nu beperken tot een enkelvoudige responsgrootheid, b.v. het buigend moment in de voet, dan ontstaat het volgende schema:



Als het systeem lineair is (zie volgende paragraaf), dan zijn de bijdragen van de diverse excitaties aan de beschouwde responsie te superponeren, maar dat betekent nog niet dat het voldoende is om ze in afzondering te

bekijken. Dat zou alleen het geval zijn als de verschillende excitaties wederzijds ongecorreleerd zijn. Is dat niet het geval dan moet de mate van correlatie in rekening worden gebracht. Dat doet zich b.v. voor als de responsie van de lichtmast op windbelasting moet worden bepaald. De momentane windsnelheid langs de mast is een stochastisch proces in de tijd en de hoogte. De correlatie ervan in twee punten op verschillende hoogte (zonder verschuiving in  $t$ ) neemt af met toenemend hoogteverschil. Het geheel niet in rekening brengen van enige correlatie zou vanzelfsprekend onderschatting van de optredende totale belasting betekenen, zoals het rekenen met een volledige correlatie ( $= 1$ ) langs de hele hoogte tot een overschatting zou leiden, en dat destemeeer naarmate de mast hoger is. De feitelijk in rekening te brengen ruimtelijke correlatiefunctie is slechts empirisch te bepalen vanwege het ongeorganiseerde, turbulente karakter van de wind.

Bij golfbelastingen op constructies doet zich iets soortgelijks voor, met dit belangrijke verschil dat de golfbeweging intern goed georganiseerd is. De daarin optredende ruimtelijke correlaties zijn te berekenen als voldoende informatie bekend is (twee-dimensionaal variantie-spectrum) van de oppervlakte-uitwijking. Daardoor is de optredende excitatie door golven, die in feite meervoudig is, in de berekening veelal terug te voeren tot een enkelvoudige. In paragraaf 8.4. komen wij hierop terug.

### 8.2.2. Lineaire, tijdsonafhankelijke systemen

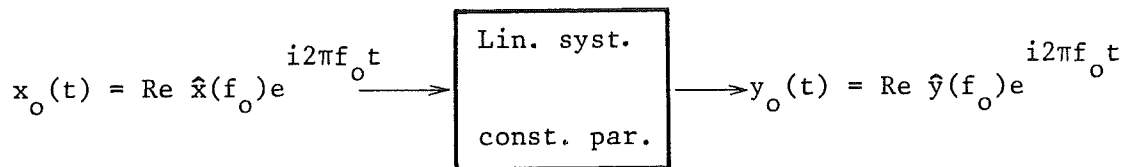
In deze paragraaf beperken wij ons tot een enkelvoudige excitatie en responsie, die beiden slechts in de tijd variëren.

In principe kunnen de systeem-eigenschappen (b.v. massa-verdeling, buigstijfheid, waterdiepte) in de tijd variëren, maar wij zullen slechts systemen beschouwen waarvoor die *constant* zijn.

Een verdere beperking is die tot *lineaire systemen*, d.w.z. systemen waarvoor de betrekkingen tussen excitatie en responsie de eigenschappen van *evenredigheid* en *superpositie* bezitten. M.a.w., als  $x_1(t)$  resp.  $x_2(t)$  twee willekeurige excitaties zijn van een systeem (dat overigens in rust is), en  $y_1(t)$  resp.  $y_2(t)$  de bijbehorende responsies, dan heet het systeem

lineair wanneer voor willekeurige constanten  $a$  en  $b$  geldt dat de excitatie  $\{a x_1(t) + b x_2(t)\}$  de responsie  $\{a y_1(t) + b y_2(t)\}$  veroorzaakt. (Het "willekeurig" zijn van de functies resp. de coëfficiënten kan eventueel worden beperkt door het aangeven van een bereik waarbinnen het systeemgedrag als lineair is te beschouwen.)

Lineaire systemen met constante parameters zijn te beschrijven m.b.v. lineaire vergelijkingen (vaak differentiaalvergelijkingen) met in de tijd constante coëfficiënten. Hieruit volgt dat de responsie ervan op een sinusvormige excitatie eveneens sinusvormig is, en wel met dezelfde frekwentie:



Ten opzichte van de (sinusvormige) excitatie kan de responsie slechts in sterkte en fase verschillen. Dit kan worden uitgedrukt in de verhouding van de complexe amplituden:

$$R_{yx}(f) \equiv \frac{\hat{y}(f)}{\hat{x}(f)} \quad (8.1)$$

De modulus hiervan stelt de verhouding voor van de reële amplituden van responsie en excitatie:

$$|R_{yx}(f)| = \frac{|\hat{y}(f)|}{|\hat{x}(f)|} \quad (8.2)$$

en het argument het faseverschil:

$$\arg R_{yx}(f) = \arg \hat{y}(f) - \arg \hat{x}(f) \quad (8.3)$$

De verzameling waarden van  $R_{yx}(f)$  voor verschillende frekwenties kan men het *steemspectrum* noemen, vaak "frekwentie-responsiefunctie" genoemd of ook "overdrachtsfunctie".

Als van een systeem de interne structuur bekend is dan is het systeem-spectrum te berekenen door oplossing van het vergelijkingenstelsel dat het systeem beschrijft, voor een sinusvormige excitatie. Bij analytische oplossingen kan men volstaan met een excitatie van willekeurige frequentie, waarna voor het gewenste frequentie-bereik getalswaarden kunnen worden bepaald. Bij numerieke oplossing moet de gehele berekening worden uitgevoerd voor elke gewenste frequentie. Iets dergelijks doet zich ook voor wanneer de structuur van het systeem niet bekend is, of te ingewikkeld wordt gevonden voor berekeningen, en men waarden van het systeem-spectrum bepaalt uit metingen van excitatie en responsie (b.v. in schaalmodellen).

Als de excitatie niet sinusvormig is dan is deze m.b.v. Fourier-analyse in dergelijke componenten te splitsen. Per component wordt dan de responsie bepaald d.m.v. de bijbehorende waarde van  $R_{yx}(f)$ , waarna de zo verkregen responsies gesuperponeerd mogen worden (het systeem is immers lineair). Hieruit volgt dat een lineair systeem met constante parameters volledig is beschreven, voorzover het de betrekking tussen een excitatie  $x(t)$  en een responsie  $y(t)$  betreft, door het systeemspectrum  $R_{yx}(f)$ .

### 8.2.3. Responsie van lineair systeem op stochastische excitatie

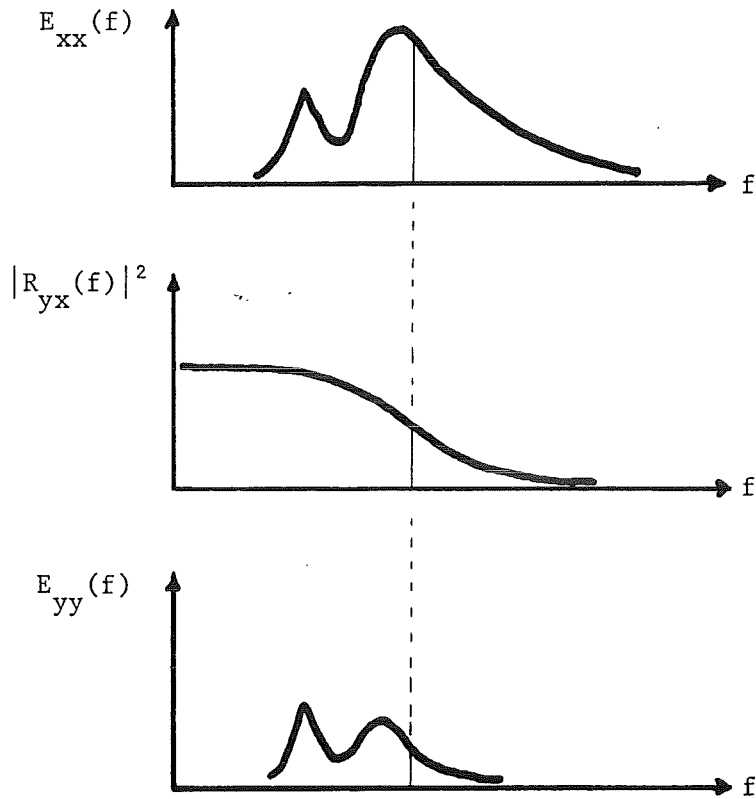
De bovenomschreven, spectrale methode voor berekening van responsies (d.w.z. ontleding, transformatie en superpositie) is bijzonder geschikt in geval van *stochastische excitatie* van een lineair systeem en (dus) een *stochastische responsie*.

Door middel van het systeemspectrum is een relatie te leggen tussen het variantiedichtheidsspectrum van een stochastische responsie  $\{y_t\}$  en dat van de excitatie  $\{x_t\}$ . Aangezien de spectrale dichtheid van de variantie evenredig is met de *kwadraten* van de *moduli* van de spectrale componenten, geldt

$$E_{yy}(f) = |R_{yx}(f)|^2 E_{xx}(f), \quad f \in (0, \infty) \quad (8.4)$$

M.a.w., per waarde van  $f$  behoeft slechts een algebraïsche vermenigvuldiging

te worden uitgevoerd om het responsie-spectrum te berekenen. De reken-

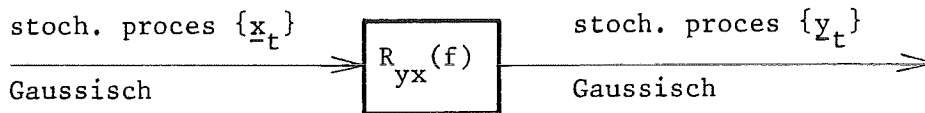
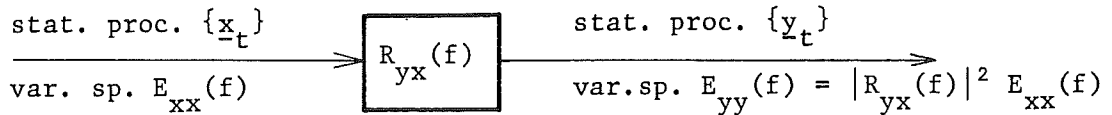
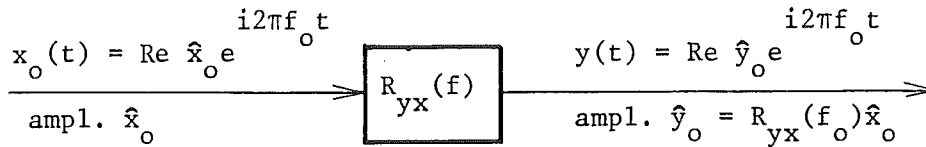


Figuur 8.1

kundige eenvoud van deze bewerking staat in sterke tegenstelling met berekeningen in het tijdsdomein. (Voor zo'n berekening van b.v. de waarde van de autocovariantiefunctie  $C_{yy}(\tau)$  van de responsie is per waarde van  $\tau$  een dubbele integratie nodig over een (in principe) oneindig interval.) Zoals gezegd ligt juist in de betrekkelijke eenvoud van de betrekking (8.4) een groot voordeel van de spectrale methode.

Als de stochastische excitatie een *Gaussisch proces* is, kan dit opgebouwd worden gedacht uit een groot aantal stochastisch onafhankelijke componenten. Hetzelfde geldt dan voor de responsie, als het beschouwde systeem lineair is. Alle statistische eigenschappen van de responsie liggen dan besloten in het variantiedichtheidsspectrum  $E_{yy}(f)$ .

In schematische vorm kunnen we het voorgaande als volgt samenvatten:



### 8.3. Toepassingen in één dimensie

In deze paragraaf worden enkele toepassingen gegeven van het voorgaande, waarbij we ons primair richten op interne relaties in het golfveld, zoals die tussen oppervlakte-uitwijkingen enerzijds en snelheden anderzijds. De daarvoor benodigde systeemspectra (overdrachtsfuncties) zijn in gesloten vorm bekend uit de lineaire theorie voor korte golven (zie college b76).

#### I. Uitwijking en versnelling van het oppervlak

Stel dat we de verticale versnelling ( $\ddot{\eta}(t)$ ) meten van het zeeoppervlak in een gegeven vertikaal (b.v. met een drijvende boei). Hoe is daaruit het variantiespectrum te bepalen van de uitwijking  $\eta(t)$ ?

Voor een enkele sinuscomponent  $\eta(t) = \hat{\eta} e^{i2\pi ft}$  geldt

$$\ddot{\eta}(t) = (i2\pi f)^2 \hat{\eta} e^{i2\pi ft} = \hat{\ddot{\eta}} e^{i2\pi ft}$$

zodat

$$R_{\ddot{\eta}\ddot{\eta}}(f) = \frac{\hat{\ddot{\eta}}}{\hat{\eta}} = (i2\pi f)^2 = - (2\pi f)^2$$

waaruit volgt dat

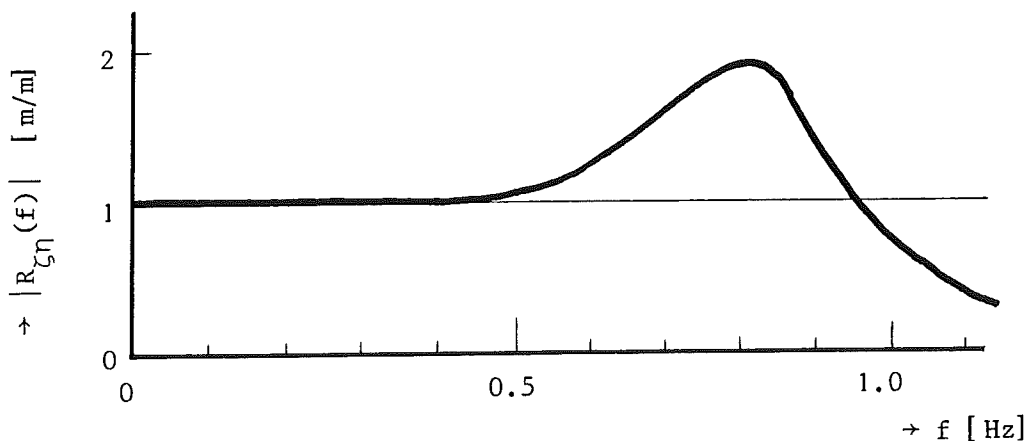
$$E_{\ddot{\eta}\ddot{\eta}}(f) = (2\pi f)^4 E_{\eta\eta}(f) \quad (8.5)$$

Uit metingen van  $\ddot{\eta}(t)$  is  $E_{\ddot{\eta}\ddot{\eta}}(f)$  te bepalen, of althans te schatten; vermenigvuldiging hiervan met  $(2\pi f)^{-4}$  levert een schatting op van  $E_{\eta\eta}(f)$ .

Opgemerkt wordt dat het vanzelfsprekend ook mogelijk is om het meet-signaal van  $\ddot{\eta}(t)$  twee keer naar  $t$  te integreren, en om uit het resulterend signaal van  $\eta(t)$  een schatting te maken van  $E_{\eta\eta}(f)$ . (Zo'n dubbele tijd-integratie vindt o.a. plaats in de z.g. "Waverider"-boeien; het signaal dat deze uitzenden is dat van  $\eta(t)$ .)

In feite is bovenstaande procedure niet geheel correct. Deze berust n.l. op de veronderstelling dat de boei het zeeoppervlak precies volgt, en dat de versnellingen van de boei onvervormd en zonder storingen worden gemeten. Dit is echter niet het geval. Zowel het systeem boei-zeeoppervlak als het mechanisch-electrische systeem van de versnellingsopnemer in de boei hebben hun eigen dynamische karakteristieken, met mogelijke resonantiepieken en beperkte bandbreedte van het systeemspectrum; verder zijn alle metingen altijd aan storingen onderhevig.

Het systeem boei-zeeoppervlak, met de uitwijking ( $\eta$ ) van het zeeoppervlak als excitatie en de verticale verplaatsing van de boei ( $\zeta$ ) als responsie, heeft ongeveer de volgende overdrachtsfunctie in geval van een "Waverider" met een diameter van 0.7 m:



Figuur 8.2

De boei reageert quasi-statisch op de laag-frekwente componenten (lange golven). De hoog-frekwente componenten (korte golfjes) daarentegen worden nauwelijks gevolgd. Er tussenin ligt een resonantiepiek bij de eigenfrequentie van de boei voor verticale verplaatsingen.

In de lineair-theoretische benadering geldt

$$E_{\zeta\zeta}(f) = |R_{\zeta\eta}(f)|^2 E_{\eta\eta}(f) \quad (8.6)$$

Als  $R_{\zeta\eta}(f)$  bekend is kan het verloop ervan theoretisch dus worden verrekend bij gemeten  $\zeta$ :

$$E_{\eta\eta}(f) = |R_{\zeta\eta}(f)|^{-2} E_{\zeta\zeta}(f) \quad (8.7)$$

In feite zijn er echter storingen (ruis) in de feitelijk optredende verplaatsingen van de boei, of althans in onze meting daarvan. Duiden we het spectrum van de ruis aan met  $E_{rr}(f)$ , en veronderstellen we dat de ruis niet gecorreleerd is met  $\eta(t)$ , dan geldt in plaats van (8.6):

$$E_{\zeta\zeta}(f) = |R_{\zeta\eta}(f)|^2 E_{\eta\eta}(f) + E_{rr}(f) \quad (8.8)$$

Passen we hierop (8.7) toe dan ontstaat als schatting  $\hat{E}_{\eta\eta}(f)$  van  $E_{\eta\eta}(f)$ :

$$\hat{E}_{\eta\eta}(f) = E_{\eta\eta}(f) + |R_{\zeta\eta}(f)|^{-2} E_{rr}(f) \quad (8.9)$$

We zien dat de aanwezigheid van storingen een fout introduceert in onze schatting van  $E_{\eta\eta}(f)$ . Zolang  $|R_{\zeta\eta}(f)| = O(1)$ , en het (spectrale) ruisniveau relatief laag is, is de fout relatief gering. Het is echter duidelijk dat dit zich niet voordoet bij de hoge frequenties, waar  $|R_{\zeta\eta}(f)| \rightarrow 0$  (zie figuur 8.2) en dus  $|R_{\zeta\eta}(f)|^{-2} \rightarrow \infty$ . Ook al zouden we  $R_{\zeta\eta}(f)$  exact kennen dan ontkomen we er toch niet aan dat slechts in een beperkt frequentiebereik zinvolle schattingen van  $E_{\eta\eta}(f)$  zijn te maken.



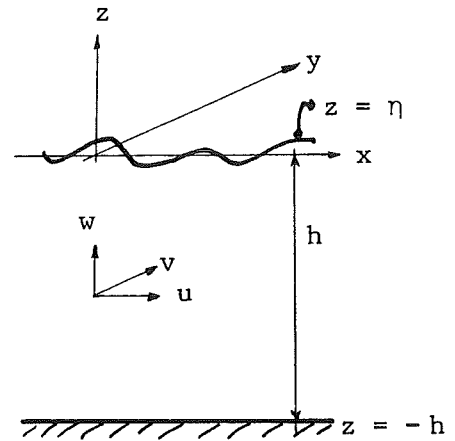
Bij de lage frekventies geldt iets soortgelijks omdat de versnellingsresponsie op gegeven verplaatsingen naar nul gaat als  $f \rightarrow 0$  (zie 8.5).

De moraal van het bovenstaande is drieledig:

- (a) meetsystemen moeten dynamisch worden beschouwd;
- (b) vanwege de eindige afmetingen, traagheden, stijfheden, looptijden enz. van fysische systemen kunnen de systeemspectra daarvan slechts in een beperkt frekwentiebereik significant van nul verschillen;
- (c) er moet rekening worden gehouden met storingen in de meetsignalen.

## II. Vertikale snelheid op zekere diepte

Er bestaan betrekkingen tussen de deeltjes-snelheid ( $u, v, w$ ) in een punt op zekere diepte onder het oppervlak, en de uitwijking ( $\eta$ ) van het oppervlak. Voorzover deze betrekkingen niet slechts variëren met de frekwentie, maar ook met de looprichting van de spectrale componenten, komen ze in de volgende paragraaf aan de orde. Dit is het geval met de horizontale snelheid ( $u, v$ ). Als we ons echter beperken tot de betrekking tussen  $\eta$  en de verticale snelheid  $w$  dan vervalt de invloed van de voortplantingsrichting. Immers, voor een sinuscomponent lopend in een willekeurige richting, met oppervlakte-uitwijking



$$\eta(\vec{r}, t) = \hat{\eta} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (8.10)$$

geldt (zie b76)

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (8.11)$$

en

$$w = \omega \hat{\eta} \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (8.12)$$

(Hier wordt korthedshalve gewerkt met  $\omega = 2\pi f$  i.p.v. met  $f$  zelf.)

De amplitudeverhouding  $\hat{w}/\hat{\eta}$  is dus

$$|R_{w\eta}(\omega)| = \omega \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \quad (8.13)$$

Deze is blijkbaar onafhankelijk van de voortplantingsrichting, zodat

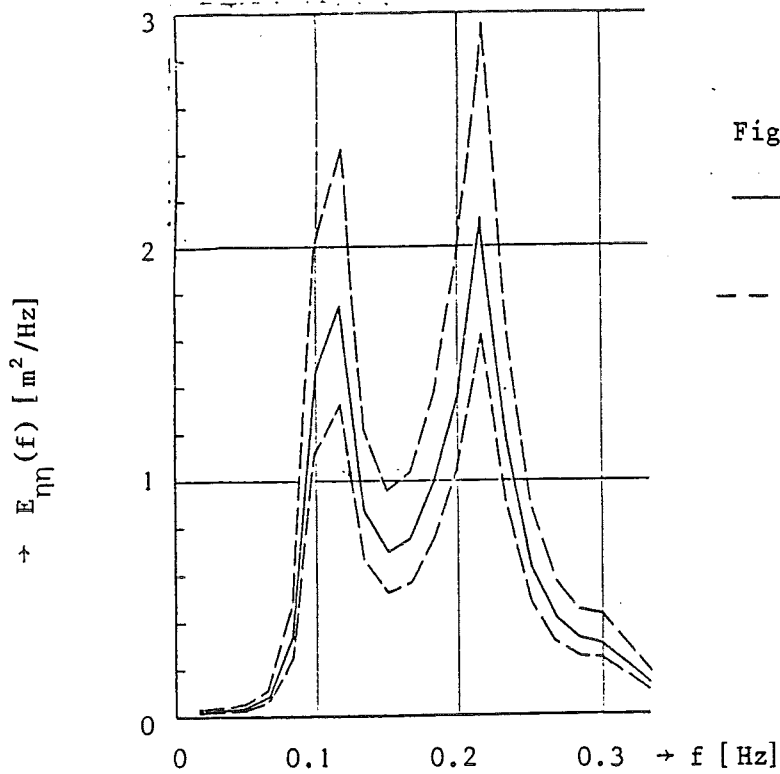
$$E_{ww}^x(\omega) = |R_{w\eta}(\omega)|^2 E_{\eta\eta}^x(\omega), \quad (8.14)$$

onafhankelijk van de verdeling van de golfenergie over de richtingen.

Uit simultane registraties van  $\eta(t)$  en  $w(t)$  op zekere diepte ( $z = -8$  m,  $h = 18$  m), vanaf "Meetpost Noordwijk" (het voormalig REM-eiland), zijn schattingen gemaakt van de variantiespectra van  $\eta$  en  $w$ , evenals van  $|R_{w\eta}|$  (Battjes en van Heteren, 1982). De resultaten staan in figuur 8.3a, b en c. De getrokken lijn in figuur 8.3a is een schatting van  $E_{\eta\eta}(f)$ , en de streeplijnen geven het 90% betrouwbaarheidsinterval weer, berekend m.b.v. de  $\chi^2$ -verdeling (zie par. 4.4.4). (De twee-topigheid duidt op de aanwezigheid van twee golfsystemen, opgewekt door verschillende windvelden.) De getrokken lijn in figuur 8.3c is het uit de metingen van  $w(t)$  geschatte spectrum  $E_{ww}(f)$ , en de streeplijn het spectrum berekend m.b.v. (8.14), waarin (8.13) is gebruikt voor  $|R_{w\eta}|$ , en het uit de metingen van  $\eta(t)$  geschatte spectrum  $E_{\eta\eta}(f)$ . Tenslotte geeft figuur 8.3b een vergelijking van de uit de metingen geschatte waarden van  $|R_{w\eta}(f)|$ , incl. een 90%-betrouwbaarheidsinterval, met (8.13), de waarde volgens de lineaire korte-golf theorie. De overeenstemming is voldoende voor praktisch gebruik.

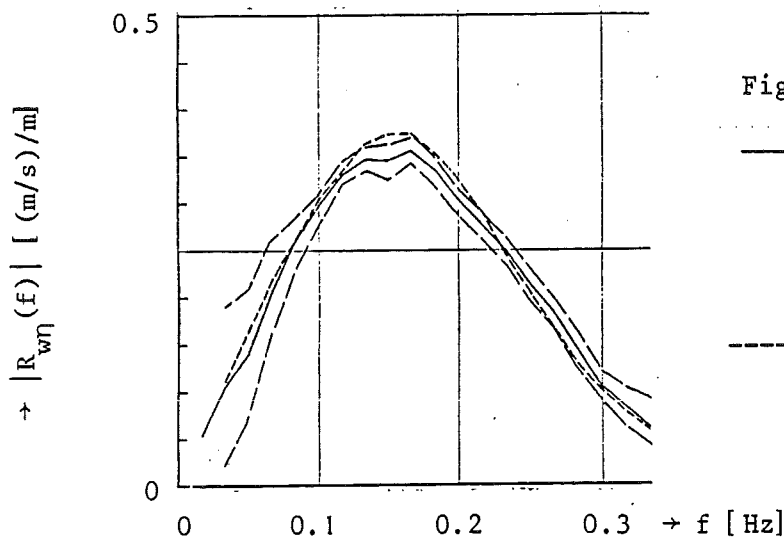
Tenslotte geven we een *numeriek voorbeeld*. We gaan uit van een volgroeiende zeeegang in diep water, met een gemiddelde windsnelheid  $U = 20 \text{ ms}^{-1}$ . Gevraagd wordt de verwachtingswaarde van  $\max \underline{w}$  op een diepte  $z = -10$  m, gedurende een tijdvak van 15 minuten.

Schematisch voorgesteld verloopt de oplossing als volgt (zie pag. 68):



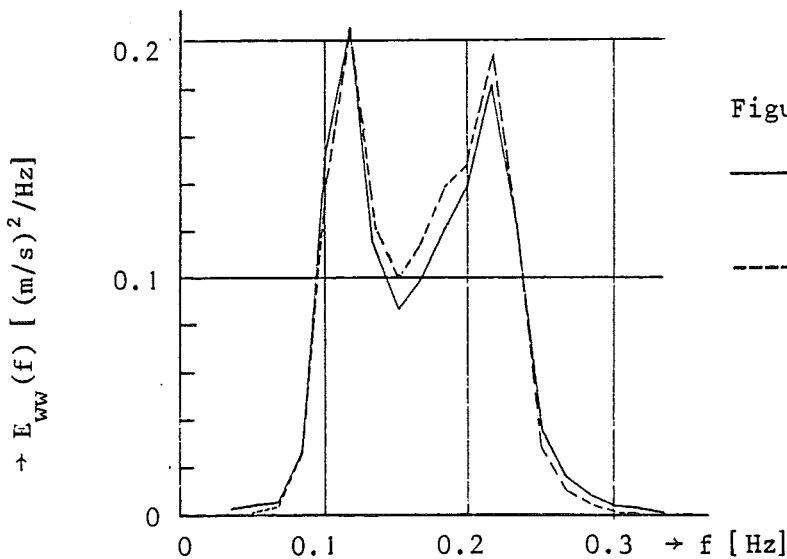
Figuur 8.3a

— schatting van  $E_{\eta\eta}(f)$   
 uit metingen van  $\eta(t)$   
 - - - grenzen van 90% be-  
 trouwbaarheidsinter-  
 val



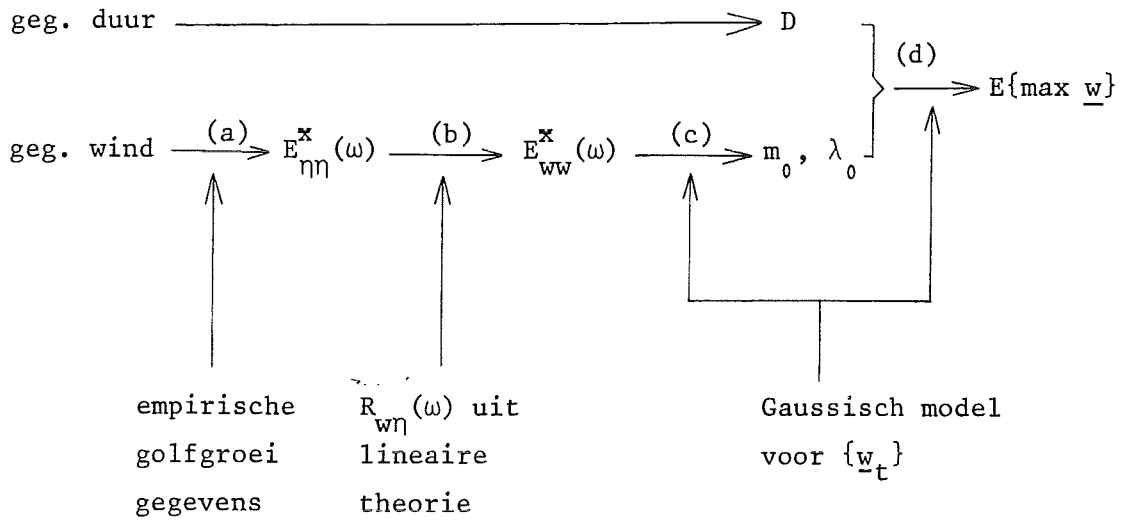
Figuur 8.3b

— schatting van  $|R_{w\eta}(f)|$   
 uit metingen met 90%  
 betrouwbaarheidsinter-  
 val (- - -);  
 - - -  $|R_{w\eta}(f)|$  volgens lineaire  
 theorie



Figuur 8.3c

— schatting van  $E_{ww}(f)$  uit  
 meting van  $w(t)$   
 - - -  $E_{ww}(f)$  berekend uit ge-  
 meten  $E_{\eta\eta}(f)$  m.b.v. li-  
 neaire theorie



(a) Gegeven dat de zeevang volgroeid is, ligt het voor de hand het Pierson-Moskowitz spectrum te gebruiken. Hier wordt gemakshalve een iets andere (en oudere) benadering gebruikt, n.l. die van Neumann, omdat de vorm daarvan gemakkelijker is als we, zoals in dit voorbeeld, de nodige integraties analytisch willen uitvoeren i.p.v. numeriek. (In praktische toepassingen speelt dit aspect geen enkele rol.) Het Neumann-spectrum kan geschreven worden als

$$E_{\eta\eta}^x(\omega) = C g^2 \omega^{-6} \exp \left\{ -2 \left( \frac{\omega U}{g} \right)^{-2} \right\} \text{ voor } \omega \in (0, \infty) \quad (8.15)$$

waarin  $C \approx 0.025 \text{ s}^{-1}$ . De integraal ervan over  $\omega \in (0, \infty)$  stelt de variantie van  $\eta_t$  voor.

(b) In diep water (zoals gegeven) reduceert (8.11) tot

$$\omega^2 = gk \quad (8.16)$$

en (8.13) tot

$$|R_{w\eta}(\omega)| = \omega e^{-kz} = \omega e^{-\omega^2 z/g} \quad (8.17)$$

Substitutie hiervan en van (8.15) in (8.14) geeft

$$E_{ww}^x(\omega) = C g^2 \omega^{-4} \exp \left\{ 2 \frac{\omega^2 z}{g} - 2 \left( \frac{\omega U}{g} \right)^{-2} \right\} \quad (8.18)$$

(c) Het variantiespectrum van  $\{\underline{w}_t\}$  is nu bekend. Veronderstellend dat  $\{\underline{w}_t\}$  een Gaussisch proces is zijn alle statistische eigenschappen ervan uit  $E_{\underline{w}\underline{w}}^{\underline{x}}(\omega)$  te destilleren. Voor de gestelde vraag moeten we  $m_0^{\underline{x}}$  en  $m_2^{\underline{x}}$  van  $E_{\underline{w}\underline{w}}^{\underline{x}}(\omega)$  bepalen. (Weliswaar is  $m_0^{\underline{x}}$  van  $E_{\eta\eta}^{\underline{x}}(\omega)$  gelijk aan  $m_0^{\underline{x}}$  van  $E_{\eta\eta}(f)$ , maar terwille van een consistente notatie schrijven we hier  $m_0^{\underline{x}}$ .) Zonder bewijs wordt hier het resultaat geponeerd, uitgaande van (8.18):

$$m_0^{\underline{x}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{16} C \frac{U^3}{g} e^{-\xi} (1 + \xi) \quad (8.19)$$

en

$$m_2^{\underline{x}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{4} C g U e^{-\xi} \quad (8.20)$$

waarin

$$\xi \equiv 4 \frac{(g|z|)^{\frac{1}{2}}}{U} \quad (8.21)$$

Substitutie van de gegeven getalswaarden levert  $\xi = 2$ ,  $m_0^{\underline{x}} = 1.29 \text{ (m/s)}^2$  en  $m_2^{\underline{x}} = 0.41 \text{ (m/s)}^2 \text{ (rad/s)}^2$ .

Voor de vervolgberekening is  $\lambda_0$  nodig, de gemiddelde frekwentie (keren per tijd) van op- of neer-gaande nuldoorgangen van  $\{\underline{w}_t\}$ . Aannemende dat  $\{\underline{w}_t\}$  een Gaussisch proces is kan  $\lambda_0$  m.b.v. de door Rice afgeleide vergelijking (5.14) worden uitgedrukt in het nulde en tweede moment ( $m_0$  en  $m_2$ ) van  $E_{\underline{w}\underline{w}}(f)$ . Omdat wij hier echter werken met  $E_{\underline{w}\underline{w}}^{\underline{x}}(\omega)$  moet (5.14) worden vervangen door

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{m_2^{\underline{x}}}{m_0^{\underline{x}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Substitutie hierin van (8.19) en (8.20) en van de nodige numerieke waarden geeft

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi(1+\xi)^{\frac{1}{2}}} \frac{g}{U} \approx 0.092 \text{ s}^{-1}$$

(d) Volgens (5.50) geldt (nog steeds aannemend dat  $\{\underline{w}_t\}$  een Gaussisch proces

is)

$$E\{\max \underline{w}\} = (2 \ln N)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{0.29}{\ln N}\right) m_0^{\frac{1}{2}}$$

In dit voorbeeld is  $N = \lambda_0 D = (0.092 \text{ s}^{-1})(15 \times 60 \text{ s}) = 83$ . Substitutie hiervan en van  $m_0 = 1.29 \text{ (m/s)}^2$  geeft als einduitkomst

$$E\{\max \underline{w}\} \approx 3.60 \text{ m/s}$$

### III Golfkrachten volgens Morison

De door golven uitgeoefende kracht op een lichaam dat klein is t.o.v. de golflengte wordt meestal berekend met de z.g. vergelijking van *Morison* (zie college b76). Daarin wordt de kracht voorgesteld als functie van de ongestoorde snelheid ( $\vec{u}$ ) en versnelling ( $\dot{\vec{u}}$ ) ter plaatse van het lichaamscentrum. Een moeilijkheid bij de spectrale berekening van deze krachten is dat de z.g. sleepkracht evenredig met  $\vec{u}|\vec{u}|$  varieert, dus niet-lineair. Strikt gesproken zullen we dus een niet-lineaire spectrale transformatie moeten toepassen. Methoden daarvoor zijn in de afgelopen jaren ontwikkeld, maar het zou te ver voeren die hier te behandelen. In plaats daarvan zullen we  $\vec{u}|\vec{u}|$  *lineariseren*.

Om de linearisering tot uiting te laten komen zullen we voor het overige het probleem zo eenvoudig mogelijk houden. Ten eerste zien we daartoe af van het 3-dimensionale karakter van de snelheidsvector, wat inhoudt dat de component van de uitgeoefende kracht in een bepaalde richting slechts afhankelijk wordt gesteld van de snelheid en versnelling in die richting. Ten tweede kiezen we die richting vertikaal, omdat de horizontale snelheidscomponenten pas in par. 8.4 aan de orde komen. (Voorzover het de vergelijking van Morison betreft, en de linearisering daarvan, doet het er niet toe welke richting we kiezen.)

De verticale kracht ( $Z$ ), uitgeoefend op een star en onbeweeglijk lichaam dat een volume  $V$  van het water verplaatst en dat een uitwendig oppervlak heeft, vertikaal geprojecteerd, gelijk aan  $A$ , is volgens de benadering van Morison te schrijven als

$$Z(t) = c_d \frac{1}{2} \rho A w(t) |w(t)| + c_m \rho V \dot{w}(t) \quad (8.22)$$

Kortheidshalve schrijven we  $K_m = c_m \rho V$  en  $K_d = c_d \frac{1}{2} \rho A$ . Voor een als stochastisch proces beschouwde golfbeweging gaat (8.22) dan over in

$$\underline{Z}_t = K_d \underline{w}_t |\underline{w}_t| + K_m \dot{\underline{w}}_t \quad (8.23)$$

De factor  $\underline{w}_t |\underline{w}_t|$  kan gelineariseerd worden tot een vorm evenredig aan  $\underline{w}_t$ , met een in de tijd constante evenredigheidscoëfficiënt. Die moet vanzelfsprekend de dimensie en ook de grootte-orde van  $\underline{w}_t$  hebben; we nemen daarvoor  $\alpha \sigma_w$ , waarin  $\sigma_w$  de standaardafwijking is van  $\underline{w}_t$ , en  $\alpha$  een dimensieloze constante, zodanig te bepalen dat de fout  $\underline{\varepsilon}_t$ , gedefinieerd door

$$\underline{\varepsilon}_t \equiv \underline{w}_t |\underline{w}_t| - \alpha \sigma_w \underline{w}_t, \quad (8.24)$$

volgens een te kiezen criterium minimaal is. Gebruiken we het kleinste-kwadraten criterium, dan moet  $E\{\underline{\varepsilon}_t^2\}$  minimaal zijn bij variatie van  $\alpha$ . Substitutie van (8.24) en uitwerken geeft als resultaat dat dit het geval is voor

$$\alpha = \tilde{\alpha} \equiv \frac{E\{\underline{w}_t^2 |\underline{w}_t|\}}{\sigma_w E\{\underline{w}_t^2\}} \quad (8.25)$$

Substitutie van de Gaussische k.d.f. voor  $\underline{w}_t$ , met  $E\{\underline{w}_t\} = 0$ , levert

$$\tilde{\alpha} = \frac{4}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \approx 1.60 \quad (8.26)$$

Met bovenstaande lineaire benadering voor  $\underline{w}_t |\underline{w}_t|$  gaat (8.23) over in

$$\underline{Z}_t \approx \tilde{K}_d \underline{w}_t + K_m \dot{\underline{w}}_t \quad (8.27)$$

waarin

$$\tilde{K}_d = \tilde{\alpha} \sigma_w K_d \quad (8.28)$$

Omdat we  $\{w_t\}$  als een stationair proces behandelen zijn  $w_t$  en  $\dot{w}_t$  ongecorreleerd (zie par. 5.2), zodat

$$\text{var}(Z_t) = \tilde{K}_d^2 \text{var}(w_t) + K_m^2 \text{var}(\dot{w}_t) \quad (8.29)$$

Voor de verdeling van  $\text{var}(Z_t)$  over de frekwenties geldt dan

$$E_{ZZ}(f) = \tilde{K}_d^2 E_{ww}(f) + K_m^2 E_{\dot{w}\dot{w}}(f) \quad (8.30)$$

ofwel (zie ook 5.9)

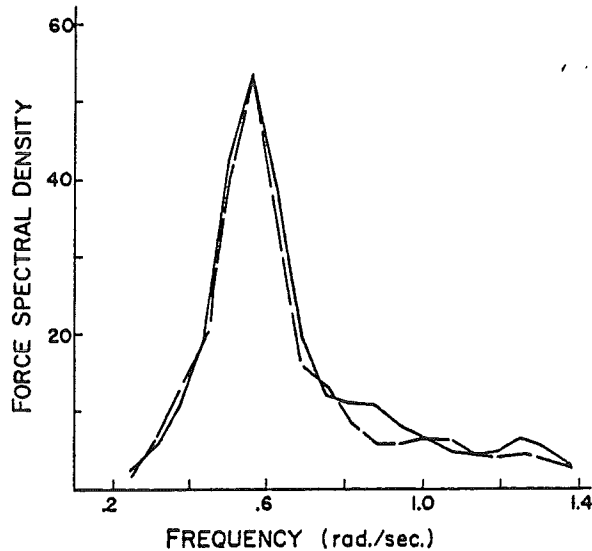
$$E_{ZZ}(f) = \{ \tilde{K}_d^2 + (2\pi f)^2 K_m^2 \} E_{ww}(f) \quad (8.31)$$

Hierin is  $E_{ww}(f)$  d.m.v. (8.14) af te leiden uit het spectrum van de oppervlakte-uitwijkingen. Uit  $E_{\dot{w}\dot{w}}(f)$  kan vervolgens  $\sigma_w$  worden berekend; die is nodig in de bepaling van  $\tilde{K}_d$  uit  $K_d$  (zie 8.28). (Hoewel dat in de notatie niet tot uitdrukking is gebracht variëren  $E_{ww}(f)$  en  $\sigma_w$  met  $z$ .)

Bovenstaande betrekkingen tussen het krachtenspectrum enerzijds en het snelheidsspectrum anderzijds zijn door Borgman (1967) afgeleid, zij het op een andere manier dan hier is gebruikt. Borgman geeft eerst een uitdrukking voor  $E_{ZZ}(f)$  zonder linearisering. (Eigenlijk behandelt Borgman de horizontale kracht op een verticale paal, maar dat doet nu niet ter zake.) Die is te schrijven als de som van een bijdrage van de lineaire traagheidskracht ( $K_m^2 E_{\dot{w}\dot{w}}(f)$ , zoals hierboven) en een bijdrage van de niet-lineaire sleepkracht. Deze is te ontwikkelen in een snel convergerende reeks waarvan  $\tilde{K}_d^2 E_{ww}(f)$  de eerste term is, die een bruikbare schatting van de som van de reeks oplevert. Dit blijkt



o.m. uit een door Borgman gegeven vergelijking tussen een gemeten krachtspectrum en het krachtspectrum berekend uit het bijbehorende gemeten spectrum  $E_{\eta\eta}(f)$  volgens bovenstaande lineaire benadering. De coëfficiënten  $c_d$  en  $c_m$  zijn zo bepaald dat de overeenstemming tussen theorie en meting maximaal zou zijn. (De zo gevonden waarden zijn  $c_d = 1.88$  en  $c_m = 1.73$ .) De bereikte overeenstemming in spectrumvorm is goed (zie figuur 8.4), ondanks het feit dat de sleep-



Figuur 8.4 - Gemeten (—) en berekend (— —) krachtspectrum (Borgman, 1967)

kracht overheerste in dit geval (met een bijdrage aan de variantie van de totale kracht ongeveer 5 x die van de traagheidskracht).

Borgman heeft ook systeemspectra afgeleid voor de totale belasting (kracht of moment) op een groep van palen. Voor de resultaten wordt verwezen naar de betreffende publicatie.

Tenslotte wordt nog opgemerkt dat er diverse studies zijn gemaakt van de statistische eigenschappen van de krachten berekend volgens Morison, met inbegrip van de niet-gelineariseerde sleepkracht. (In de lineaire benadering is  $\{Z_t\}$  een Gaussisch proces). Met name in de staarten van de verdeling (extreme waarden) blijken aanzienlijke afwijkingen van het Gaussische model op te kunnen treden als de

sleepkracht overheerst. Het voert te ver om hier daarop in te gaan. In plaats daarvan wordt verwezen naar de literatuur. (Hoofdstuk 2 van het boek van Zienkiewicz e.a. (1978) geeft hiervan een goed overzicht.)

#### 8.4. Toepassingen in twee of meer dimensies

De theorie in par. 8.2 is beperkt tot een excitatie die slechts in de tijd varieert. Bij toepassingen op windgolven zullen in het algemeen de ruimtelijke dimensies moeten worden toegevoegd. Dit resulteert weliswaar in iets ingewikkelder uitdrukkingen, maar het principe blijft ongewijzigd.

De stochastische excitatie  $\{\eta_{\vec{r},t}\}$  wordt ontleed in spectrale componenten van verschillende frekwentie ( $f$ ) en looprichting ( $\theta$ ), met als resultaat het twee-dimensionale variantiespectrum  $E_{\eta\eta}(f,\theta)$  (zie par. 4.5). Per component ( $f,\theta$ ) wordt bepaald hoe het beschouwde lineaire (d.w.z. gelineariseerde) systeem reageert, b.v. voor wat betreft de axiale kracht ( $\underline{K}_t$ ) in een poot van een vakwerk-constructie. Dit geeft een twee-dimensionaal systeemspectrum  $R_{K\eta}(f,\theta)$ . Vermenigvuldiging met  $E_{\eta\eta}(f,\theta)$  geeft  $E_{KK}(f,\theta)$  :

$$E_{KK}(f,\theta) = |R_{K\eta}(f,\theta)|^2 E_{\eta\eta}(f,\theta) \quad (8.32)$$

Hieruit is het frekwentiespectrum van  $\{\underline{K}_t\}$  te bepalen volgens (zie 4.28)

$$E_{KK}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} E_{KK}(f,\theta) d\theta \quad (8.33)$$

N.B. Omdat  $\underline{K}$  slechts in  $t$  varieert, en niet in het horizontale vlak, gaat het uiteindelijk om  $E_{KK}(f)$ . Slechts in de rekenfase is  $E_{KK}(f,\theta)$  nodig, als tussenstap, omdat golven van eenzelfde frekwentie en amplitude (van  $\eta$ ) nu eenmaal een andere bijdrage leveren aan de variantie van  $\underline{K}_t$  als zij uit verschillende richtingen komen.

In het volgende worden enkele voorbeelden gegeven.

#### IV. Vertikale en horizontale snelheden

Met dit voorbeeld komen we terug op het in par. 8.3 gegeven voorbeeld II. Eerst zullen we het spectrum van de *vertikale snelheid*  $\{w_t\}$  uitdrukken in dat van  $\{\eta_{f,t}\}$ , nu dus met inbegrip van de richtingseigenschappen van de golven.

Zoals reeds is gezegd in par. 8.3 is  $R_{w\eta}$  onafhankelijk van  $\theta$ , zodat toepassing van betrekkingen analoog aan (8.32) en (8.33) resulteert in

$$\begin{aligned} E_{ww}(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} |R_{w\eta}(f)|^2 E_{\eta\eta}(f, \theta) d\theta \\ &= |R_{w\eta}(f)|^2 \int_{-\pi}^{\pi} E_{\eta\eta}(f, \theta) d\theta \end{aligned}$$

ofwel (zie 4.28)

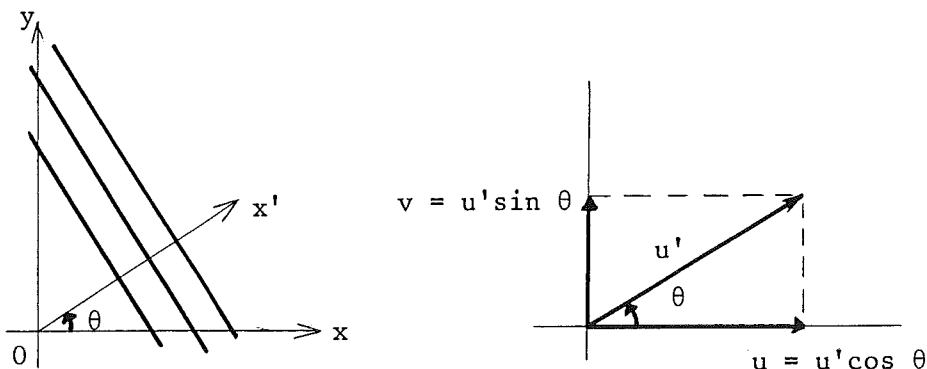
$$E_{ww}(f) = |R_{w\eta}(f)|^2 E_{\eta\eta}(f) \quad (8.34)$$

Dit was in feite al gesteld in par. 8.3 (zie 8.14). Het bovenstaande was slechts bedoeld om te laten zien hoe de reductie in dimensionaliteit (van  $(f, \theta)$  tot  $(f)$  alléén) als vanzelf tot stand komt als men die niet à priori aanbrengt, althans in gevallen waar de beschouwde responsie inderdaad niet varieert met de loopricting van de golven.

We bekijken nu de betrekking tussen de spectra van de *horizontale snelheidscomponenten*  $(u, v)$  enerzijds en het spectrum van de oppervlakte-uitwijking anderzijds. De formulering is korthedshalve in termen van hoekfrequenties  $(\omega)$ , te beginnen met  $E_{uu}(\omega)$  (de toevoeging <sup>x</sup> later we hier achterwege).

Voor een enkele spectrale component  $(\omega, \theta)$ , met oppervlakte-uitwijking gegeven door

$$\eta(x, y, t) = \hat{\eta} \sin(\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta) = \hat{\eta} \sin \psi \quad (8.35)$$



geldt (zie b76)

$$u(x, y, z, t) = u' \cos \theta = \omega \hat{\eta} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos \theta \sin \psi = \hat{u} \sin \psi \quad (8.36)$$

zodat

$$R_{u\eta}(\omega, \theta) = \omega \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos \theta \quad (8.37)$$

Substitutie hiervan in

$$E_{uu}(\omega, \theta) = |R_{u\eta}(\omega, \theta)|^2 E_{\eta\eta}(\omega, \theta) \quad (8.38)$$

en

$$E_{uu}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} E_{uu}(\omega, \theta) d\theta \quad (8.39)$$

geeft

$$E_{uu}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \omega \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \right\}^2 \cos^2 \theta E_{\eta\eta}(\omega, \theta) d\theta \quad (8.40)$$

In de integratie m.b.t.  $\theta$  is de factor tussen accoladen constant. Verder kan  $E_{\eta\eta}(\omega, \theta)$  geschreven worden als het product van de twee factoren  $E_{\eta\eta}(\omega)$  en  $E_{\eta\eta}(\theta|\omega)$  (zie vgl. 4.29), waarvan de eerste eveneens onafhankelijk is van  $\theta$ . Daarmee gaat (8.40) over in

$$E_{uu}(\omega) = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta E_{\eta\eta}(\theta|\omega) d\theta \right\} \left\{ \omega \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \right\}^2 E_{\eta\eta}(\omega) \quad (8.41)$$

Evenzo geldt voor het spectrum van de y-component van de snelheid:

$$E_{vv}(\omega) = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta E_{\eta\eta}(\theta|\omega) d\theta \right\} \left\{ \omega \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \right\}^2 E_{\eta\eta}(\omega) \quad (8.42)$$

In deze uitdrukkingen is de invloed van de golfrichtingen verdisconteerd in de eerste factor tussen accoladen. Het is duidelijk dat door deze factor er niet een éénduidig verband bestaat tussen  $E_{uu}(\omega)$  of  $E_{vv}(\omega)$  enerzijds en  $E_{\eta\eta}(\omega)$  anderzijds. Omdat echter geldt dat  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  en  $\int_{-\pi}^{\pi} E_{\eta\eta}(\theta|\omega) d\theta = 1$ , is de som van de spectrale dichtheden van  $u$  en  $v$  wel éénduidig afhankelijk van  $E_{\eta\eta}(\omega)$  (d.w.z. onafhankelijk van de verdeling van de golfenergie over de richtingen):

$$E_{uu}(\omega) + E_{vv}(\omega) = \left\{ \omega \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \right\}^2 E_{\eta\eta}(\omega) \quad (8.43)$$

Deze betrekking is analoog aan die voor  $E_{ww}(\omega)$  (zie 8.14 c.q. 8.34).

Kiezen we als voorbeeld van het richtingsspectrum  $E_{\eta\eta}(\theta|\omega)$  een  $\cos^2(\theta - \theta_0)$ -verdeling (zie hoofdstuk 6), met  $\theta_0 = 0^\circ$  (d.w.z. de Ox-richting valt samen met de hoofdrichting van het golfveld), dan geldt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta E_{\eta\eta}(\theta|\omega) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \left( \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta \right) d\theta = \frac{3}{4}$$

en

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta E_{\eta\eta}(\theta|\omega) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \left( \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta \right) d\theta = \frac{1}{4}$$

M.a.w., in dit voorbeeld is de totale kinetische energie in het horizontale vlak voor  $\frac{3}{4}$  afkomstig van de snelheidsfluctuaties in de hoofdrichting, en voor  $\frac{1}{4}$  van die in de richting dwars daarop. Andere gangbare

keuzes voor het richtingsspectrum in zeevang geven ongeveer dezelfde verhouding (Battjes, 1972). Metingen van snelheden in zeevang zijn er ook mee in overeenstemming (Forristall e.a., 1978).

#### V. Golfkrachten op lange constructies

De door golven uitgeoefende kracht op een constructie is kleiner wanneer (zoals in feite het geval is) de golfenergie is verdeeld over de richtingen (kortkammige golven) dan wanneer deze in één richting geconcentreerd wordt gedacht (langkammige golven), wanneer in beide gevallen de hoofdrichting van het golfveld het minst gunstig is. Dit is vooral van belang bij constructies waarvan de lengte niet klein is t.o.v. de golflengte, zoals bij de schuiven in de stormvloedkeringen in het Haringvliet of de Oosterschelde.

Om de formulering beknopt te houden geven we hier geen volledige uitdrukkingen voor de belasting op een constructie, maar gaan we slechts na hoe deze met de golfrichting varieert, en wat de invloed is van de relatieve lengte van de constructie.

We gaan uit van een enkele invallende golfcomponent, gegeven door (8.35), waarbij we  $x = 0$  kiezen in het vlak van de schuif. De drukken en de vertikaal geïntegreerde krachten op de schuif, veroorzaakt door deze ene spectrale component, variëren evenredig met  $\eta(0, y, t)$ , ofwel met  $\sin(\omega t - ky \sin \theta)$ . De totale kracht op een schuif met lengte  $2l$  varieert dan evenredig met

$$\int_{-l}^l \sin(\omega t - ky \sin \theta) dy = \frac{\sin(kl \sin \theta)}{kl \sin \theta} 2l \sin \omega t \quad (8.44)$$

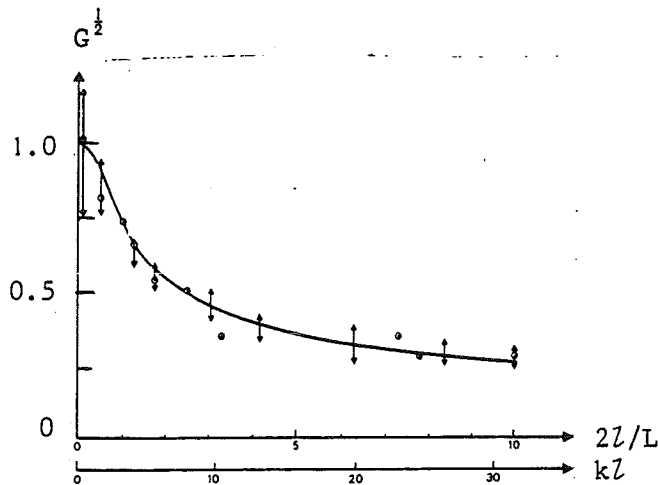
Vergeleken met het geval van loodrechte inval ( $\theta = 0$ ) is de amplitude van de totale kracht gereduceerd met een factor  $r$ , gedefinieerd door

$$r(kl, \theta) \equiv \frac{\sin(kl \sin \theta)}{kl \sin \theta} \quad (8.45)$$

Analoog aan (8.41) geldt dan dat de spectrale dichtheid van de totale kracht, bij de beschouwde frekwentie, als gevolg van de spreiding van de invallende golfenergie over de richtingen gereduceerd wordt met een factor

$$G(kL) \equiv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(kL, \theta) E_{\eta\eta}(\theta|\omega) d\theta \quad (8.46)$$

De waarde hiervan is gelijk aan 1 voor  $kL = 0$ , en neemt af met toenemende  $kL$  (toenemende verhouding van schuiflengte tot golflengte). De snelheid waarmee  $G$  afneemt met  $kL$  wordt bepaald door het richtingspectrum  $E_{\eta\eta}(\theta|\omega)$ . Nemen we hiervoor weer als voorbeeld een  $\cos^2(\theta - \theta_0)$ -verdeling, met  $\theta_0 = 0^\circ$  (hoofdrichting  $\perp$  schuif), dan is het resultaat zoals getoond in figuur 8.5, waar  $G^{\frac{1}{2}}$  is uitgezet tegen  $kL$  ( $G^{\frac{1}{2}}$  i.p.v.  $G$ , om een maat te tonen voor de reductie in



Figuur 8.5 - Reductiefactor voor kortkammigheid; — theorie, met aangenomen  $\cos^2\theta$ -verdeling;  $\updownarrow$ , bereik van lab.-metingen;  $\circ$ , gemiddelde van oceaon-metingen (Battjes, 1982)

amplitude i.p.v. het kwadraat daarvan). In die figuur zijn tevens resultaten gegeven van metingen, zowel in een laboratorium-windgoot als

in oceaangolven. De meetwaarden berusten op middelingen van  $\eta(x,y,t)$  over intervallen van variabele lengte in een richting dwars op de hoofdrichting van het golfveld, en zijn dus vergelijkbaar met bovenstaande berekening. De onderlinge overeenstemming is uitstekend.

.-.-.

In het voorgaande zijn enkele voorbeelden gegeven van transformaties van spectra. De voorbeelden zijn beperkt gebleven tot situaties waarvoor de systeemspectra bekend zijn uit de korte-golf theorie (zie college b76). Bij toepassingen op constructies zal het nodig zijn de systeemspectra daarvan in de berekening te betrekken. De bepaling van dergelijke spectra valt buiten de stof van dit college, maar de methode van de spectrale transformaties is dezelfde als die hier is gebruikt.

#### 8.5. Résumé

Een *sinusvormige excitatie* van een *lineair systeem* met *constante parameters* geeft een *eveneens sinusvormige responsie*, met *dezelfde frequentie* als de excitatie. De betrekking tussen excitatie en responsie van zo'n systeem is geheel bepaald door het *systeem spectrum*, d.i. de verzameling waarden van amplitude-verhouding en fase-verschuiving tussen responsie en excitatie als functie van de frequentie (en de richting, in geval van excitatie door windgolven). Het *variantiespectrum* van de responsie is te bepalen uit dat van de excitatie door dit per frequentie (en richting) te vermenigvuldigen met het kwadraat van de modulus van het systeem spectrum. Een *Gaussische excitatie* van een *lineair systeem* geeft een *Gaussische responsie*. Uit het variantiespectrum van deze responsie, te bepalen zoals hierboven omschreven, zijn dan alle nodige statistische eigenschappen te destilleren volgens de methoden genoemd in hoofdstuk 5.



## 8.6. Literatuur

Algemene inleidingen zijn o.m. te vinden in de volgende boeken:

- J.S. Bendat en A.G. Piersol, Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, 1971.
- R.W. Clough en J. Penzien, Dynamics of structures, McGraw-Hill, 1975.
- W.G. Price en R.E.D. Bishop, Probabilistic Theory of Ship Dynamics, Chapman and Hall, London, 1974.
- J.D. Robson, An introduction to random vibration, Elsevier Publishing Company, 1963.
- O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis en K.G. Stagg (eds.), Numerical Methods in Offshore Engineering, Wiley, New York, 1978.

Verwijzingen in tekst en figuren:

- J.A. Battjes, Radiation stresses in short-crested waves, J. of Marine Res., 30, 1, jan. 1972, p. 56-64.
- J.A. Battjes, Effects of short-crestedness on wave loads on long structures, Applied Ocean Res., 4, 3, 1982, p. 165-172.
- J.A. Battjes en J. van Heteren, Field measurements of wind wave kinematics, manuscript, 1982.
- L.E. Borgman, Spectral analysis of ocean wave forces on piling, Proc. ASCE, 93, WW2, mei 1967, p. 129-156.
- G.Z. Forristall, E.G. Ward, V.J. Cardone en L.E. Borgman, The directional spectra and kinematics of surface gravity waves in tropical storm Delia, J. of Physical Oceanography, Vol.8, no.5, september 1978, p. 888-909.

