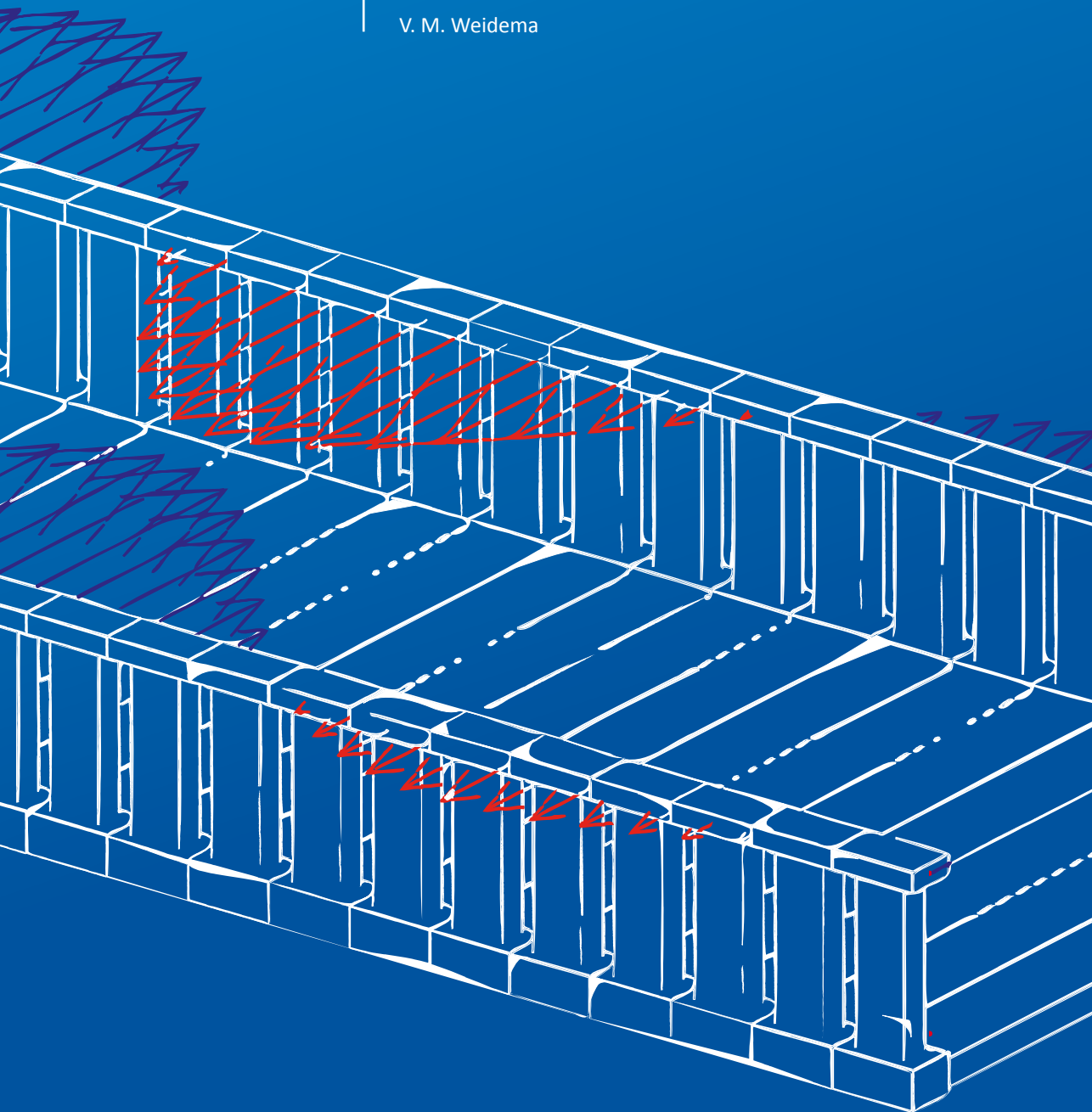


# Stabiliteit van een dragende-leuning brug

uitgevoerd in beton

Stability of a concrete pedestrian bridge  
with load bearing railings

V. M. Weidema



Master of Science Thesis

# Stabiliteit van een dragende-leuning brug

uitgevoerd in beton

**Stability of a concrete pedestrian bridge  
with load bearing railings**

**Door:**

ing. V. M. Weidema



**Afstudeercommissie:**

Prof. dr. ir. J. C. Walraven

dr. ir. C. van der Veen

dr. ir. C. B. M. Blom

dr. ir. P. C. J. Hoogenboom



# Inhoudsopgave

<b>Samenvatting</b>	7
<b>Summery</b>	9
<b>1. Inleiding</b>	11
1.1 De dragende werking van de brug	12
1.2 Dragende leuningbrug in Rotterdam	13
1.3 Stellingen	14
<b>2. De dragende leuningbrug</b>	16
2.1 Het brugdek	16
2.2 De leuningen	17
2.3 Mootafmetingen	18
2.4 Mootverbindingen	18
2.5 Fundatie	20
2.6 Uitvoering	20
2.7 Draadmodel van het referentieontwerp	20
<b>3. Knikkracht in de leuningbovenregel</b>	21
3.1 Knikkracht	21
3.2 Eulerknik	22
3.3 Knikkracht voor een verend ondersteunde ligger	23
3.4 De kniklengte	24
3.5 De formules van Engesser	31
3.6 Effect van een niet-constante normaalkracht	34
<b>4. De brugdoorsnede</b>	37
4.1 Lineaire veerstijfheid van de brugdoorsnede	37
4.2 De buigstijfheid van de gescheurde brugdoorsnede	41



<b>5. Stabiliteit van de brug</b>	44
5.1 Reductiefactor ten gevolge van de imperfectie van de veerconstante	45
5.2 De normaaldrukkracht in de leuningbovenregel	51
5.3 De stabiliteitsfactor	52
5.4 Resultaten van de stabiliteit versterkingsfactor	55
<b>6. Sterkte van de leuningbovenregel</b>	63
6.1 Toetsing op normaaldruksterkte	63
6.2 Het buigend moment	67
6.3 Resultaten van de controle op sterkte	72
6.4 Het verband tussen sterkte en stabiliteit van de brug	79
6.5 Vereenvoudigde methode voor ontwerpers	80
<b>7. Conclusies &amp; Aanbevelingen</b>	85
7.1 Conclusie op de doelstelling	85
7.2 Overige conclusies	88
7.3 Aanbevelingen	89
<b>8. Literatuurlijst</b>	91
<b>9. Index van Symbolen</b>	93
<b>Tenslotte</b>	97
<b>Bijlagen</b>	99
A. Dragende leuningbruggen ‘uit het verleden’	101
B. Programma van eisen voor een fiets- en voetgangersbrug	105
C. Vergelijking van numerieke tweede orde berekeningen met formule volgens Engesser	109
D. De uitwerking van de knikformule volgens de TU München	137
E. Referentieberekening van de knikkracht in de brug	141
F. Samengestelde buigstijfheid van de gehele brug	147
G. Uitwerking van het tweede orde effect	149
H. Berekening; sterkte van de leuningbovenregel	157



# Samenvatting

Deze thesis is tot stand gekomen als een vraag van Gemeentewerken Rotterdam. Gemeentewerken wil de huidige houten bruggen in Rotterdam vervangen voor bruggen die minder onderhoud nodig hebben. Een van de mogelijkheden daarbij is om de brug volledig uit te voeren in beton, waarbij de brugleuningen de overspanning dragen. Het grootste voordeel hiervan is een dunner brugdek, waardoor de toepassingsgebieden groter worden. Naast het toepassen van deze vernieuwende techniek voor de betonindustrie, speelt de veiligheid een belangrijke rol. Om grip te krijgen op deze veiligheid, moet in kaart gebracht worden hoe groot het aandeel van de tweede orde effecten op de stabiliteit van de brug is.

## De doelstellingen van deze thesis zijn daarom:

*“Deze thesis moet leiden tot een kader waarbinnen de architect alle vrijheid heeft om het ontwerp, voor een brug met dragende leuning, te maken naar zijn wens.”*

*“Het in kaart brengen welke importantie de tweede orde effecten hebben”.*

Het antwoord op deze vragen is gevonden door eerst een goed model op te stellen die met de hand berekend kon worden. Vervolgens is de knikkracht in de leuningbovenregel bepaald en het model geverifieerd met een numerieke computer berekening. De knikformule van Engesser kan worden gebruikt om de knikkracht in de leuningbovenregel te kunnen bepalen. De grote van de knikkracht is afhankelijk van de buigstijfheid van de leuningbovenregel en de veerstijfheid die de doorsnede verleent aan de leuningbovenregel:

$$F_k = \alpha \underbrace{\left[ \frac{u_k}{u_k + \frac{l_k}{\text{imperf}}} \right]}_2 \underbrace{2 \sqrt{EI_{\text{regel}} k_{\text{doorsnede}}}}_1$$

De knikkracht is opgebouwd uit drie delen, waaronder twee factoren.

1. de knikformule van Engesser
2. een verhouding voor die de vorm van de normaalkracht in rekening brengt (factor 1)
3. een reductiefactor die de imperfectie in rekening brengt op basis van de maximale horizontale uitwijking van de verenende ondersteuning (factor 2)

Met behulp van de optredende normaaldrukkracht in de leuningbovenregel en de bovenstaande knikkracht is de stabiliteit versterkingsfactor te berekenen. Hiermee is de extra horizontale verplaatsing en het moment als gevolg van normaal drukkracht in de leuningbovenregel te bepalen.



Naast de toetsing op stabiliteit is ook de toetsing op sterkte van de leuningbovenregel belangrijk. Het tweede orde deel van de optredende momenten wordt bepaald door de stabiliteitsberekening. De toetsingen op sterkte zijn voornamelijk gebaseerd op het niet overschrijden van de maximaal elastische drukrekgrens  $\varepsilon_{c3}$  in de betondoorsnede van de leuningbovenregel. Dit is in hoofdstuk 5 en 6 met behulp van diverse grafieken verduidelijkt en uitgewerkt.

Het kader voor een ontwerper of architect is gevonden in de vorm van een vuistregel. De uitwerking van die vuistregel met bijbehorende voorwaarden staan in hoofdstuk 6.5. De ontwerper zal goed moeten beseffen dat deze vuistregel een startpunt is. Er mogen geen eisen gesteld worden aan de afmetingen van de brug op basis van deze vuistregel.

De tweede orde effecten blijken terug te komen in de toetsing op de maximale momenten in de leuningbovenregel. Grote horizontale verplaatsingen als gevolg van een groot tweede orde effect resulteren in een groot optredend moment in de leuningbovenregel. In combinatie met de beperkte beschikbare momenten capaciteit zal de leuningbovenregel dan bezwijken.

Het blijkt dat indien aan de toetsing op momenten in de leuningbovenregel voldaan wordt de stabiliteitsfactor  $n$  veelal boven de in de NEN-EN 1992-1-1 [2] gestelde waarde van 10 uitkomt.

# Summery

This thesis is developed as a respond to a problematical case at Public Works Rotterdam. Public Works wants to replace current wooden bridges for bridges that need less maintenance. An option here is to build the bridge completely out of concrete. In such a case the load bearing capacity mainly comes from the bridge railings. The biggest advantage of this solution is a thinner bridge deck, and therefore the fields of application increase. For the concrete industry, safety is very important at the application of this innovative technology. To make safety hazards visible, the second order effects on the stability of the bridge have to be researched.

## Therefore the objectives of this thesis are:

*"This thesis should lead to a framework which gives the architect total freedom in designing a 'carrying-banister' bridge."*

*"Mapping the importance of the second order effects".*

To answer these questions a good calculation model of the bridge is developed. Subsequently, the buckling strength in the handrail is determined and the calculation model is verified with a numerical computer calculation. The buckling formula by Engesser can be used to determine the buckling strength in the handrail. The buckling strength depends on the bending stiffness of the handrail and the spring stiffness which provides the cross section to the handrail.

$$F_k = \alpha \left[ \frac{u_k}{u_k + \frac{l_k}{imperf}} \right] \underbrace{2\sqrt{EI_{regel} k_{doorsnede}}}_{1}$$

2                      3                      1

The buckling strength can be divided into three parts, including two factors.

1. the buckling formula by Engesser
2. a ratio which takes the shape of the normal strength into account (Factor 1)
3. a reduction factor which takes imperfections into account, based on the maximum horizontal deflection of the elastic bracings. (Factor 2)

Using the acting normal compressive force in the handrail and the buckling strength (see above), the stability gain factor of the structure can be determined. Using this stability gain factor, the additional horizontal displacement and the moment due to normal compressive force in the handrail can be determined.

Besides checking the stability, checking the strength of the handrail is important as well. The second order part of the acting moments is determined by the stability calculation. The strength checkings are primarily based on not exceeding the maximum elastic compressive strain limit  $\varepsilon_{c3}$  in the concrete cross section of the handrail. Using graphs this is clarified and discussed, see Chapter 5 and 6.

The framework for a designer or architect is devined in the form of a rule of thumb. The elaboration of this guideline, with corresponding conditions, are given in Chaptersection 6.5. The designer will have to realize that this guideline is a initial point. No requirements can be made to the dimensions of the bridge, based on this guideline.

By testing the maximum moments in the handrail, the second order effects appears again. Large horizontal displacements, due to a large second order effect, result in a large acting moment in the handrail. Combined with the limited available capacity of moments, the handrail will collapse.

It appears that, by correct checking the moments in the handrail, the stability-factor  $n$  often will reach above the NEN-EN 1992-1-1 [2] set value of 10.

# 1 Inleiding

Dragende leuningbruggen worden al meer dan een eeuw toegepast. (In Bijlage A worden een aantal van deze bruggen beschreven.) Dit type brug [1] is ontstaan met de opkomst van de spoorwegen. Door de steeds zwaarder wordende locomotieven en wagons moesten bestaande vlakke plaatbruggen onder handen genomen worden. Met name de 'smalle' bruggen werden aan beide zijden voorzien van een vakwerkligger. Hierdoor was het mogelijk om de bruggen op een relatief eenvoudige manier stijf en sterk genoeg te maken voor de zwaardere treinen. Halverwege de negentiende eeuw werden de meeste bruggen gebouwd van welijzer, staal of hout.

Ook nu nog zijn veel voorbeelden te vinden van recent gebouwde dragende leuningbruggen uitgevoerd in staal, aluminium en hout. Na de intrede van gewapend beton als constructiemateriaal is de dragende leuning variant in beton nooit populair geworden. Drie belangrijke redenen waarom beton minder wordt toegepast in dragende leuningbruggen zijn:

- Betonnen bruggen zijn zwaarder dan stalen en houten bruggen. Daardoor zal de druklast in de leuningbovenregel groter zijn. Het verkrijgen van grotere doorsneden buigstijfheden gaat gepaard met veel meer massa, in tegenstelling tot de bekende staalprofielen.
- De elasticiteitsmodulus van beton is kleiner dan die van staal. De grotere elasticiteitsmodulus van staal werkt op gunstig de stijfheid van de doorsnede.
- Beton is een materiaal wat grote druksterkte kan weerstaan en slechts een kleine treksterkte. De maximale knikbelasting is gerelateerd aan het buigtraagheidsmoment. Zodra beton scheurt, dat wil zeggen dat in de trekzone het beton bezwijkt en de wapening de trekspanningen moeten opnemen, neemt het buigtraagheidsmoment snel af. Een materiaal waarin de buitenste vezel grotere treksterkte kan opnemen, zoals hout en staal, is daarom gunstiger en zal alleen al om die reden een kleiner knikrisico met zich mee brengen.

Tegenwoordig is men in staat om steeds hogere druksterkten in beton te realiseren. Het is zelfs mogelijk om vezelversterkt ongewapend beton te produceren die zowel druk- als trekkrachten kunnen opnemen. Door deze nieuwe mogelijkheden zou het wellicht ook voordelig zijn om dragende leuningbruggen in beton uit te voeren en daardoor de duurzame eigenschappen van beton te combineren met de slanke en stijve brugvorm van de dragende leuningbrug.

In de Eurocode beton [2] wordt beton voornamelijk geclassificeerd volgens druksterkte. Toepassing van staalvezels en wat de mechanische gevolgen daarvan zijn, zijn nog niet vastgesteld in de nu gebruikte normen.

Deze thesis zal zich daarom voornamelijk richten op de betonsterkten die in de huidige normen beschreven staan. Gekozen is daarbij voor de betonmengsels C50/60 en C90/105. C50/60 is op dit moment door vrijwel elke betoncentrale in Nederland te leveren en wordt als meest gangbaar in de industrie gebruikt. Mengsels met hoge sterkte beton, zijn nog niet door alle betoncentrales te leveren. Ook zijn deze mengsels nog erg duur. De grondstoffen zijn duurder. Bovendien moeten de betoncentrales hun extra investeringen terugverdienen over een beperkt aantal projecten, want de vraag naar deze mengsels is nog niet groot. De verwachting is, dat in de nabije toekomst de vraag langzaam zal toenemen van de mengsels die een hogere druksterkte kunnen opnemen, en dat daardoor de prijs zal dalen.

## 1.1 De dragende werking van de brug

Het brugdek draagt de belasting in de breedterichting af naar de dragende leuningen. De dragende leuningen zullen het brugdek dan in de lengterichting van de brug ondersteunen.

### Voordelen

- Het brugdek kan dunner worden uitgevoerd omdat de overspanning van het brugdek kleiner is dan de overspanning van de brug zelf.
  - Een dunner brugdek resulteert, naar verwachting, in een lichtere brug en een kortere op- en afrit van de brug.
  - Het kan een esthetische wens zijn om een dunner brugdek te hebben.
- De leuningen die toch al op de brug geplaatst zijn, worden nu efficiënter gebruikt. Leuningen die niet deel uitmaken van de hoofddraagconstructie hebben alleen de taak om het verkeer op de brug te beschermen om niet van de brug af te vallen.
- De leuningen vergroten de buigstijfheid van de brug, waardoor de doorbuiging sterk gereduceerd wordt.

### Nadelen

- De leuning wordt op knik en/of kip belast, zoals duidelijk blijkt uit Figuur 1. Het bezwijkmodel is hierbij minder gunstig, omdat het waarschuwend effect bij bezwijken weg is.
- De barrier van de brug is de leuning, welke nu deel uit maakt van de hoofddraagconstructie. Of er moet een barrier voor de leuning worden gebouwd, wat esthetisch onaantrekkelijk is.
- Beperkte brugbreedte: Deze leuningen zullen zonder enige vorm van stabiliteit omvallen. De stabiliteit zal moeten komen uit het brugdek. Het brugdek zal dus een extra moment moeten opnemen om te voorkomen dat de brugleuning omvalt.

De belangrijkste stap om dergelijke bruggen toch te veilig te kunnen maken is zorgen dat de stabiliteit onder controle gehouden wordt. Maar waar liggen de grenzen?

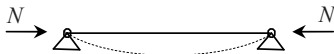
*'De brug is stabiel wanneer de constructie nadat een aangebrachte verstoring, in de vorm van een belasting, wordt weggenomen, de constructie terugkeert in zijn oorspronkelijke vorm (grondtoestand).'*

Waarom is het zo belangrijk om het bezwijken op stabiliteit te voorkomen? Figuur 1 laat een bezwijken brug zien. De leuningbovenregel knikt horizontaal weg, waardoor de inwendige momenten capaciteit verminderd. Maar nog belangrijker; door een kleine horizontale uitwijking van de leuningbovenregel ontstaat er naast een normaal drukkracht in lengterichting ook een kracht in dwarsrichting die de leuningbovenregel versnelt doet wegspringen.



Figuur 1. Ingestorte Mabey brug (Bijlage A)

Dit is het snelst uit te leggen aan de hand van een drukligger. De drukligger is op beide uiteinden scharnierend opgelegd. Door een onvolkomenheid wordt de kolom niet-centrisch belast. Het gevolg is dat er naast de normaalkracht ook momenten en dwarskrachten in de ligger ontstaan. De belasting wordt opgevoerd totdat de drukligger bezwijkt. De drukligger kan op verschillende manieren bezwijken;



Figuur 2. Drukligger

ze kan wegspringen en knakken. In beide gevallen valt de drukligger plots weg waardoor de constructie direct zal instorten, indien er geen herverdeling kan plaats vinden.

Het overbelasten van een brug gebeurt vrijwel altijd wanneer er veel personen op de brug aanwezig zijn. Bij bezwijken op stabiliteit, dus zonder waarschuwing is de kans op slachtoffers zeer groot. Daarom dient bij de maatgevende bezwijkvorm van stabiliteit altijd extra aandacht worden besteed aan het ontwerp.

## 1.2 Dragende leuningbrug in Rotterdam

Deze thesis is mede mogelijk gemaakt door het Ingenieursbureau Gemeentewerken Rotterdam. De wens van Ingenieursbureau Gemeentewerken Rotterdam was om voor 'kleine' bruggen, voor fietsers en voetgangers, een duurzaam alternatief met een kleine constructieve hoogte te bedenken. Hierbij dacht men onder andere in de richting van een betonnen brug uitgevoerd met dragende leuningen, zodat het brugdek dunner kan worden uitgevoerd.

De huidige bruggen zijn voornamelijk uitgevoerd in hout en staal. Houten fiets- en voetgangers bruggen hebben een levensduur van ongeveer 25 jaar [3]. Stalen bruggen hebben in beginsel deze beperking niet, maar ze vereisen wel inspectie. Bovendien zal een stalen brug op regelmatige basis opnieuw geconserveerd moeten worden om roestvorming tegen te gaan. In het algemeen kan worden gesteld dat een brug uitgevoerd in hout of staal meer onderhoud vereist, dan wanneer deze brug van beton zou zijn. Dat wil niet zeggen dat beton geen onderhoud vereist, maar bij normaal gebruik zal de brug weinig tot geen onderhoud nodig hebben. Het benodigde onderhoud varieert per locatie (roet, groene aanslag en/of vandalisme).

Op dit moment is men bezig om houten bruggen te vervangen door bruggen van zowel beton als kunststof. Verder wil men bij vervanging niet afdoen aan het slanke ontwerp. Eén van de mogelijkheden is om een dragende leuningbrug in beton uit te voeren. Deze brug heeft een dunner brugdek dan de gebruikelijke vlakke plaatbrug.

Om kosten te drukken is het wenselijk om de brug in grote oplagen te kunnen prefabriceren. In Rotterdam en omgeving zijn zo'n 200 fiets- en voetgangersbruggen [3], dus serieproductie moet mogelijk zijn. De minimale overspanning van de bruggen in Rotterdam is 5 meter en de maximale overspanning is 20 meter. Om aan deze wensen te voldoen gaat men uit van een modulair systeem [4].

De vraag van de vanuit IGWR (Ingenieursbureau Gemeentewerken Rotterdam) is:

*“Ontwerp een fiets- en voetgangersbrug in beton of hoge sterktebeton met een U-vormige dwarsdoorsnede met een zeer slank brugdek en dragende leuning.”*

### 1.3 Stellingen

Zoals eerder al is aangegeven hebben modulaire fiets- en voetgangersbruggen met dragende leuning een aantal specifieke voor- en nadelen. Het grootste probleem is het uitknikken van de bovenregel van de leuning. De probleemstelling voor deze thesis zal als volgt zijn:

*“Geconstateerd is dat bij de gewenste slankheid van de leuning, fenomenen optreden die we kennen vanuit de staalbouw: knik, kip en knikplooi.”*

De oplossing van dit probleem is enerzijds eenvoudig, maar tegelijk ook complex. Het is een stabiliteitsprobleem, dat wil zeggen dat: Wanneer de brugleuning horizontaal uitbuigt, zullen de horizontale spatkrachten in de brugleuning toenemen. Hierdoor zal de brugleuning na het bereiken van een kritiek punt snel bezwijken. De leuning is de hoofddragconstructie van de brug, dientengevolge is de brug bezwijken wanneer de leuning bezwijken is.

Normaal gesproken geeft een grote doorbuiging een waarschuwing, maar in geval van een stabiliteitsprobleem is er nauwelijks sprake van een waarschuwend effect. Een te zware belasting zal leiden tot instorten zoals ook op Figuur 1 te zien is. Het is voor een dergelijke constructie extra van belang om exact te weten waar dat kritieke punt ligt en hier ver genoeg vandaan blijven, opdat de brug niet instort. Het kritieke punt kan worden uitgedrukt in een stabilisatiefactor  $n$ .

### **Doelstelling van deze thesis:**

*“Deze thesis moet leiden tot een kader waarbinnen de architect alle vrijheid heeft om het ontwerp, voor een brug met dragende leuning, te maken naar zijn wens.”*

### **Subdoelstellingen van deze thesis:**

*“Het in kaart brengen welke importantie de tweede orde effecten hebben”.*

*“De dragende leuningbrug zal seriematig in moten geprefabriceerd kunnen worden. De onderlinge aansluiting van moten moet op een relatief eenvoudige manier plaats kunnen vinden.”*



## 2 De dragende leuningbrug

Een kader maken waarbinnen architecten de ruimte hebben hun eigen ontwerp te maken, vereist eerst een standaard- of referentieontwerp. De functionele eisen aan fiets- en voetgangersbruggen zijn in alle gevallen gelijk aan elkaar. Een brug is een kunstwerk dat gebruikt wordt om verbinding te maken tussen twee infrastructurele netwerken. De functionele eisen aan de brug zijn daarom vrijwel gelijk aan de eisen van fiets- en voetgangerspaden. Als basis voor de niet constructieve functionele eisen wordt meestal de 'Aanbevelingen Stedelijke Verkeersvoorzieningen' [5] gebruikt.

Voor de constructieve eisen gebruikt men vanaf medio 2008 de 'Eurocode', de algemeen aanvaarde richtlijn voor het rekenen aan bruggen in Europa.

De gebruikte constructieve normen in deze thesis zijn:

NEN-EN 1990: Eurocode 0, Grondslag van het constructief ontwerp [6]

NEN-EN 1991: Eurocode 1, Belastingen op constructies [7]

NEN-EN 1992: Eurocode 2, Ontwerp en berekening van betonconstructies [2]

De 'Eurocode' bevat vooral toetsingen op basis van sterkte en vervormingen. In de toetsingen ten behoeve van tweede orde effecten voor liggers prefereert veiligheid. Het gevolg is de aanbeveling; de constructie zo ontwerpen, dat tweede orde effecten niet of nauwelijks voorkomen. Wil men toch verder gaan met tweede orde effecten, dan zal men de veiligheid van de brug moeten garanderen op een manier welke niet expliciet in de 'Eurocode' staat omschreven. Dat houdt in dat in deze thesis vooral gerekend wordt met regels volgens de algemene mechanica, met waar mogelijk terugkoppelingen naar de 'Eurocode'.

De brug moet bestaan uit verschillende geprefabriceerde onderdelen die te vervoeren zijn op een kleine vrachtwagen. Uit eerdere studies [4] is gebleken dat de brug het beste opgeknipt kan worden in moten van enkele meters lengte. Het resultaat zal een aaneenschakeling van "U-profiel doorsneden" zijn. Deze doorsneden kunnen aan elkaar geregen worden door middel van voorspankabels of natte knopen tussen de verschillende elementen.

### 2.1 Het brugdek

De leuning is de hoofddraagconstructie en het brugdek zal in dwarsrichting afsteunen op de leuning. De belangrijkste functies van het brugdek zijn het afdragen van de belastingen naar de leuning en stijfheid verlenen aan de leuning zodat deze niet omvallen. In een ontwerp waarbij de brug uit meerdere

moten bestaat, zal het moeilijk zijn om het brugdek ook in de lengterichting te laten dragen. Voor het referentieontwerp is daarom gekozen om fysiek het brugdek ook op te knippen. Spleten tussen de verschillende geprefabriceerde moten zorgen er ook voor dat de detaillering van het brugdek vereenvoudigd wordt. Daarbij bieden de spleten de mogelijkheid om water af te voeren, zonder dat extra voorzieningen zoals een doorgaande goot nodig zijn.

Bij het streven naar een zo slank mogelijk brugdek zou het tegenstrijdig zijn om weer een verhoogd voetpad op de brug aan te leggen. De verschillende verkeersstromen kunnen ook gescheiden worden door het fietspad rood te kleuren of belijning op de brug aan te brengen. Natuurlijk zal deze keuze gemaakt moeten worden door een architect in goed overleg met een verkeerskundige, maar voor het referentieontwerp is het uitgangspunt dat er geen verhoogd voetpad op de brug komt.

## 2.2 De leuningen

De leuningen bestaan uit een leuningbovenregel, de drukzone, een leuningonderregel, de trekzone en de vlakvulling tussen de boven- en onderregel.

### Vlakkvulling

In het voorlopig referentie-ontwerp wordt uitgegaan dat de vlakvulling van de leuningen (tussen leuningbovenregel en leuningonderregel) een massieve plaat is. In werkelijkheid zal een ontwerper of architect hier leuningstijlen of andere open structuren voor ontwerpen. In beginsel is het mogelijk om elke vorm van vlakvulling toe te passen.

### Leuningbovenregel

De afmetingen van de leuningbovenregel, de drukzone, worden bepaald aan de hand van een knikberekening. De stabiliteitsfactor [8] speelt daarbij een grote rol. De stabiliteitsfactor  $n$  is de knikkracht in de leuningbovenregel gedeeld door de werkelijk optredende normaaldrukkracht.

$$\text{Stabiliteitsfactor: } n = \frac{F_k}{N}$$

### Leuningonderregel

De afmetingen van de leuningonderregel zijn van belang om de dwarskrachten en eventuele torsiekrachten op te kunnen nemen. De leuningonderregel wordt op druk en trek belast. In het referentieontwerp is de uitgangspositie dat de moten van de brug aan elkaar worden geregen door nagerekte voorspankabels toe te passen door de leuningonderregels.

## 2.3 Mootafmetingen

De maximale afmeting van één moot is beperkt tot de maximale afmeting die te vervoeren is op een 3,5 ton vrachtwagen. Voor de massa van één moot geldt dezelfde eis. De meeste parkbruggen zijn geen doorgaande wegen, dus de breedte van 3,5 meter (fietspad) + 2,0 meter (voetpad) is erg veel, zie ook Bijlage B.

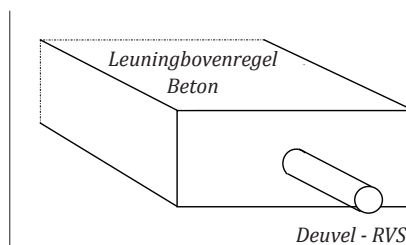
Bovendien is een mootbreedte van 5,5 – 6,0 meter te lang voor de laadbak van een kleine vrachtwagen van 3,5 ton. De brugbreedte voor het referentieontwerp is daarom op 4 meter gesteld. Daarmee is de brug geschikt voor een voetpad in combinatie met een fietspad met een enkele rijbaan of een fietspad met een dubbele rijbaan zonder voetpad. Voor de meeste kleine parkbruggen is deze breedte voldoende.

De mootlengte is afhankelijk van de breedte van de vrachtwagen en is voor het referentieontwerp in eerste instantie vastgesteld op 2 meter. Dat betekent direct dat het ontwerp een modulaire bruglengte heeft met een veelvoud van 2 meter. Uiteraard is de mootlengte ook afhankelijk van het maximaal te vervoeren gewicht, maar dat is op dit moment nog onbekend.

## 2.4 Mootverbindingen

De moten zullen op locatie aan elkaar geregen worden. Alleen de leuningbovenregel en de leuningonderregel van de brug zijn doorgaand. Dat betekent dat de mootaan sluiting zich op vier punten zal concentreren.

Voor de leuningbovenregel kan een koude verbinding worden gebruikt die alleen dwarskracht en normaal drukkracht zal overbrengen. Het gewicht van de brug en de variabele belasting op de brug zorgt dat de leuningbovenregel op normaal drukkracht belast is. Men kan als verbinding denken aan een soort pen en gat of deuvelforming. Hier zal, nadat de stabiliteitseigenschappen van de brug bekend zijn, nog in detail naar gekeken moeten worden voor het definitieve brugontwerp.



Figuur 3. Voorbeeld van een deuvelforming

De verbinding tussen de verschillende moten in de leuningonderregel kan met natte knopen of met voorspankabels plaatsvinden. Beide methoden hebben voordelen. De grootste voordelen van voorspankabels toepassen zijn de snelheid van monteren

en eenvoudige demontage. De moten worden in één keer aan elkaar geregen en met de voorspankabels nagespannen. Direct na het naspanssen kan de brug vol belast worden.

De methode met natte knopen bespaart de duurdere voorspankabels, bovendien is de afmeting van de leuningonderregel niet meer afhankelijk van de benodigde ruimte voor de ankers die benodigd zijn bij het voorspannen. Ook kan de wapening in de leuningonderregel doorlopend zijn. De bewerkingstijd en kosten op locatie zullen toenemen. De knopen moeten eerst uitharden alvorens men de hulpconstructie of stelconstructie kan weghalen. Pas nadat de knopen volledig zijn uitgehard (officieel na 28 dagen) kan men de brug openstellen voor verkeer. Hierbij moet ook rekening gehouden worden met het feit dat men met een kleine truckmixer op de definitieve locatie van de brug moet kunnen komen. Het is daardoor nog de vraag of de optie met natte knopen ook daadwerkelijk goedkoper is.

Enkele andere redenen om toch voor voorspanning te kiezen zijn:

- Het verwijderen van de brug met voorspankabels kan sneller. Dit gebeurt in de omgekeerde methode, als dat de brugmoten geplaatst zijn. De moten kunnen dan, mits onbeschadigd door gebruik, gemakkelijker hergebruikt worden of als tijdelijke brug dienen.
- De betonkwaliteit is gegarandeerd en de kleur van het beton over de gehele lengte gelijk. Bij het aanstorten van beton heeft men ook geen naden of randen die er lelijk uit kunnen zien.
- Het plaatsen van de brug is minder weersafhankelijk doordat men op locatie geen beton hoeft te storten.

Na beschouwing van bovenstaande voor- en nadelen is gekozen om voor het referentieontwerp uit te gaan van voorspanning in de leuningonderregel.

Ter plaatse van de mootovergangen moet extra aandacht worden besteed aan de detaillering om te voorkomen dat de voorspankabels niet beschadigd worden. Om een goede corrosieweerstand te kunnen garanderen is het noodzakelijk dat voorspankabels van nagerekt staal zonder aanhechting gebruikt worden. Deze kabels zijn ingekapseld in een vetkoker en daardoor beter bestand tegen corrosie ter plaatse van de mootovergangen.

## 2.5 Fundatie

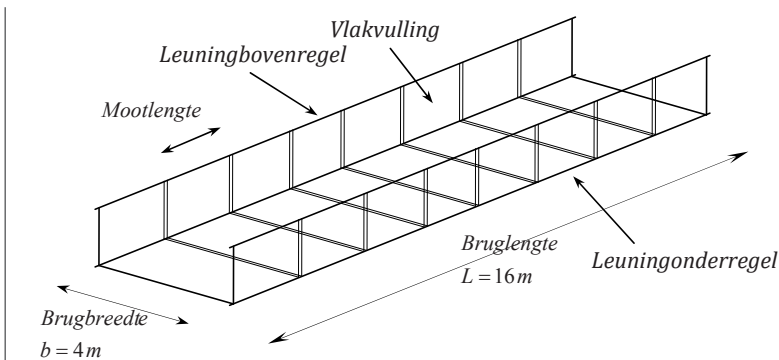
De fundering van de brug wordt niet meegenomen in deze thesis. Bij nieuwe bruggen zal er een nieuwe fundering nodig zijn. Bij het vervangen van een bestaande brug kan misschien de bestaande fundering gebruikt worden met eventueel enkele kleine aanpassingen.

## 2.6 Uitvoering

De brugmoten zullen op of nabij de definitieve locatie van de brug aan elkaar bevestigd worden. Dit kan op twee manieren; men kan een hulpconstructie maken om alle moten op de definitieve locatie van de brug te kunnen stellen en alle moten aan elkaar bevestigen. Het is ook mogelijk de brugmoten te stellen op een open ruimte in de buurt van de definitieve locatie, om dan vervolgens met een kraan de brug, nadat alle moten aan elkaar bevestigd zijn, op zijn definitieve locatie te hijsen. Welke van deze twee methoden beter is, is afhankelijk van de hoeveelheid beschikbare ruimte en beschikbare kraancapaciteit.

## 2.7 Draadmodel van het referentieontwerp

Het voorlopig ontwerp in Figuur 4 is een draadmodel. De globale afmetingen van de brug zijn bekend, maar de afmetingen van de verschillende onderdelen nog niet en worden dus nog niet als zodanig getekend. Aan de hand van dit ontwerp zal in hoofdstuk 6 bekeken worden wat de minimale afmetingen moeten worden volgens berekeningen.



Figuur 4. Voorlopig ontwerp (draadmodel)

### 3 Knikkracht in de leuningbovenregel

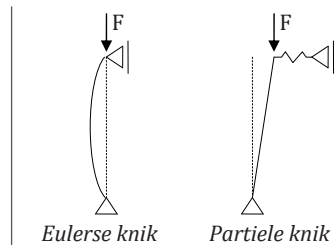
De kritische belasting op de brug geeft een kritische druk normaalkracht in de leuningbovenregel. Deze kritische normaalkracht wordt ook wel knikkracht genoemd. In theorie is het haalbaar om onder ideale omstandigheden de drukligger of kolom te belasten tot de kritische belasting. De praktijk wijst anders uit. Zeer kleine onvolkomenheden in de drukligger of kolom veroorzaken excentrische belastingen. Deze kleine excentrische belasting heeft tot gevolg dat de drukligger bij een veel lagere belasting bezwijkt dan de kritische belasting. In eerste instantie zal gezocht worden naar de bovengrens van de maximale kritische normaalkracht of knikkracht in de leuningbovenregel.

#### 3.1 Knikkracht

Knik [8] is een zuiver theoretisch begrip, omdat men bij knik initieel altijd uitgaat van een lineair elastisch materiaal van een zuiver rechte balk of kolom die zuiver centrisch op normaalkracht wordt belast. Door een bekende of onbekende oorzaak krijgt deze kolom een kleine uitbuiging. Deze kolom is stabiel indien hij na verdwijnen van de oorzaak van de uitbuiging weer in zijn rechte stand terugkeert. Behalve de zuiver rechte toestand van de kolom zijn meer toestanden van evenwicht mogelijk. De theoretisch maximale grenswaarde van de kracht waarbij de kolom nog terugkeert in een rechte toestand wordt de knikkracht  $F_k$  genoemd.

In het verleden is al veel onderzoek gedaan naar dit fenomeen. In de achttiende eeuw stelde de wiskundige Leonhard Euler [9] een formule op voor de knikkracht. Deze formule vormt heden ten dage nog steeds het uitgangspunt voor het bepalen van de knikkracht.

Naast de formule volgens Euler die een knikvorm beschrijft van een sinus, kennen we ook de partiele knikvorm [8]. De partiele knik kan het best worden vergeleken met een scharnierend opgelegde kolom die omvalt omdat de constructie die hem op de uiteinden horizontaal vasthoud bezwijkt. De op druk belaste kolom bezwijkt in dat geval niet.



Figuur 5. Knikvormen

## 3.2 Eulerknik

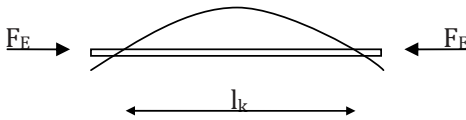
Eulerknik [9] is het verschijnsel waarbij een staaf zonder imperfecties op zuivere druk (enkel normaalkracht, geen momenten aanwezig) wordt belast, totdat de knikgrens wordt overschreden. Zodra deze grens bereikt is zal een staaf in één of meer sinusgolven loodrecht op de staaf-as uitbuigen, zoals afgebeeld in Figuur 6. Omdat deze vorm van instabiliteit leidt tot bezwijken voordat de volledige doorsnedencapaciteit op sterkte bereikt is, zal een gedrukte constructie hierop altijd gecontroleerd moeten worden. Een staaf zal enkel uitbuigen indien een “kritische belasting” aangebracht wordt. De wiskundige Leonhard Euler stelde een formule op die de maximale belasting bepaalt die een lange, slanke staaf kan dragen zonder knikken. In deze formule word de constructienormaal-kracht gekoppeld aan de doorsnedencapaciteit (buigtreksterkte).

De Eulerse knikkraft is te berekenen met de formule:

$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

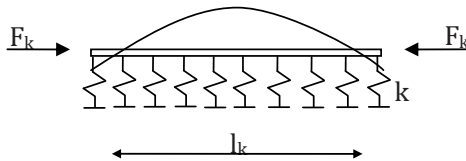
$EI$  Is het traagheidsmoment met daarin de materiaal- en vormeigenschappen.

$l_k$  Is de kniklengte, de afstand van een zuivere halve sinus.



Figuur 6. Kniklengte

Deze situatie zoals geschetst in Figuur 6 is niet hetzelfde als wat voorkomt bij de leuningdragende regel.



Figuur 7. Kniklengte met verende ondersteuning

De leuningregel kan worden gezien als een verend ondersteunde ligger, zoals afgebeeld in Figuur 7. Deze veerstijfheid levert een extra bijdrage aan de stabiliteit.

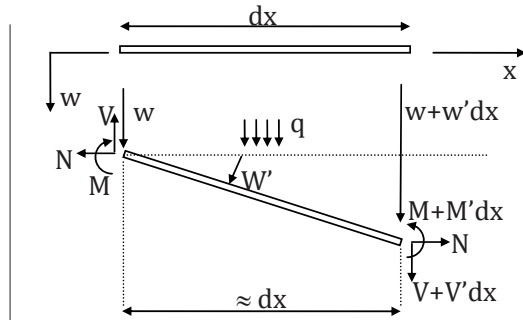
De knikkraft is heeft dus een vorm van:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} + k?$$

### 3.3 Knikkracht voor een verend ondersteunde ligger

Om er achter te komen wat de invloed van de verende ondersteuning is, moeten we terug naar de basis.

Het oplossen van de knikkracht kan met behulp van de evenwichtsmethode [10,11]. Door een stukje van de op druk belaste leuningbovenregel te isoleren en het evenwicht te nemen van alle krachten op het stukje leuningbovenregel, afgebeeld in Figuur 8, is het mogelijk om de knikkracht eruit te halen.



Figuur 8. Definitie staafparameters

$$\begin{aligned} \text{Evenwicht:} \quad \Sigma V &= 0 \\ -V + (V + V'dx) + qdx &= 0 \\ V' + q &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M &= 0 \\ -M + Nw'dx - Vdx + (M + M'dx) &= 0 \\ M' + Nw' - V &= 0 \end{aligned}$$

Het combineren van  $\Sigma V = 0$  en  $\Sigma M = 0$  resulteert in de volgende afleiding:

$$M'' + Nw'' + q = 0$$

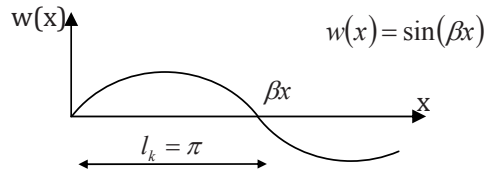
De dwarskracht valt nu uit de differentiaalvergelijking. Door het moment  $M$  en de belasting  $q$  om te schrijven naar een functie van de verplaatsing, is de differentiaalvergelijking op te lossen. De knikkracht in de differentiaal is te verkrijgen door de normaalkracht te vervangen door de knikkracht.

$$M = -EI\kappa = -EIw'' \text{ en } q = -kw(x) \text{ en } N = -F_k$$

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + F_k \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + kw(x) = 0 \rightarrow \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{F_k}{EI} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{k}{EI} w(x) = 0$$



De Eulerknik had de bezwijkvorm van een sinus. Het is daarom aannemelijk dat ook deze bezwijkvorm een sinusvorm is, zie ook Figuur 9. De kniklengte binnen deze sinus is  $l_k$  en deze functie wordt vermenigvuldigd met een willekeurige constante  $h$ , die desgewenst ook weg te laten is.



Figuur 9. Sinusfunctie

$$w(x) = h \sin(\beta x) \text{ met } \beta = \frac{\pi}{l_k}$$

$W(x)$  integreren en invullen in de differentiaal vergelijking geeft:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -h\beta^2 \sin(\beta x) \text{ en } \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = h\beta^4 \sin(\beta x)$$

$$EIh\beta^4 \sin(\beta x) - F_k h\beta^2 \sin(\beta x) + kh \sin(\beta x) = 0 \rightarrow EI\beta^4 - F_k\beta^2 + k = 0$$

De knikkraft wordt dan:

$$F_k = EI\beta^2 + \frac{k}{\beta^2}$$

Na het invullen van  $\beta$  komt de formule tevoorschijn waarvan het eerste deel gelijk is aan de Eulerknik en welke bijdrage de veerconstante  $k$  levert.

$$\boxed{F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} + \frac{k l_k^2}{\pi^2}} \text{ anders geschreven als } \boxed{F_k = \frac{\pi^4 EI + k l_k^4}{l_k^2 \pi^2}}$$

De grote onbekende in deze formule is de kniklengte. Omdat het hier gaat om een verende ondersteuning is het onwaarschijnlijk dat de kniklengte gelijk is aan de werkelijke lengte zoals in het basis geval met Eulerknik. Maar hoe groot is de kniklengte dan?

### 3.4 De kniklengte

De kniklengte is de afstand tussen een top en een dal van de momentenfunctie en hoeft niet gelijk te zijn aan de effectieve lengte van de staaf [9]. De kniklengte heeft dus de vorm van een halve golflengte van een zuivere sinus, zie Figuur 9.

Door de bovenregel van de drukzone te beschouwen als een verend ondersteunde ligger kan de golflengte uitgerekend worden. Dit systeem komt erg overeen met het uitrekenen van de golflengte in een funderingsblok of spoorrails.

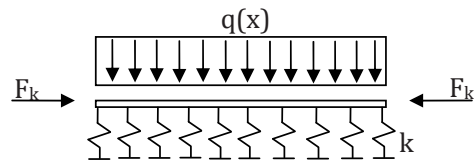
Hier volgen twee manieren om de kniklengte te bepalen. Beide manieren komen op dezelfde kniklengte uit. De eerste manier is een analytische benadering van de differentiaalvergelijking. De tweede manier is een grafische benadering van de knikkracht. In beide gevallen wordt gezocht naar de kleinste kniklengte waarbij de knikkracht het kleinst is.

### De analytische benadering:

De differentiaalvergelijking voor een elastisch ondersteunde buigligger is [11]: (zie ook Figuur 10)

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + F \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + kw(x) = -q(x)$$

Deze vergelijking is vrijwel gelijk aan de differentiaalvergelijking die gebruikt is om de knikkracht op te lossen. Het verschil zit in de mogelijkheid om een verdeelde belasting  $q(x)$  op de regel te laten aangrijpen.



Figuur 10. Elastisch ondersteunde buigligger

Het zoeken is naar de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking. Uit de algemene oplossing volgt de golflengte en de benodigde kniklengte. Welke waarde  $q(x)$  heeft, is voornamelijk niet interessant en maakt niet uit voor oplossing, dus om de differentiaalvergelijking te vereenvoudigen wordt de  $q(x)$  vastgezet op nul. De gereduceerde differentiaalvergelijking is dan weer gelijk aan de vergelijking die benodigd was om de knikkracht te bepalen.

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + F_k \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + kw(x) = 0$$

Oplossen van de gereduceerde differentiaalvergelijking:

met  $4\beta^4 = \frac{k}{EI}$  en  $\alpha^2 = \frac{F_k}{EI}$  gaat de vergelijking over in:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + 4\beta^4 w(x) = 0$$

substitutie van  $w(x) = e^{rx}$  in de vergelijking:  $r^4 + \alpha^2 r^2 + 4\beta^4 = 0$

$$r \text{ oplossen: } r = \pm \frac{\sqrt{-2\alpha^2 \pm 2\sqrt{\alpha^4 - 16\beta^4}}}{2}$$

De oplossing wordt dan:  $w(x) = \sum e^{rx}$

Omdat het hier gaat om een opsomming van e-machten mag achtereenvolgens  $\alpha$  &  $\beta$  gesteld worden aan 0. \*

$$\alpha = 0 \rightarrow r = \beta(\pm 1 \pm i) \quad \& \quad \beta = 0 \rightarrow r = \pm i\alpha$$

De algemene oplossing met  $\alpha = 0$  en  $\beta = 0$  is:

$$w(x) = Ae^{\beta(1+i)x} + Be^{\beta(1-i)x} + Ce^{-\beta(1-i)x} + De^{-\beta(1+i)x} + Ee^{i\alpha x} + Fe^{-i\alpha x}$$

$$w(x) = e^{\beta x} (Ae^{\beta i x} + Be^{-\beta i x}) + e^{-\beta x} (Ce^{\beta i x} + De^{-\beta i x}) + Ee^{i\alpha x} + Fe^{-i\alpha x}$$

$$\text{met } e^{\beta i x} = \cos \beta x + i \sin \beta x \quad \& \quad e^{-\beta i x} = \cos \beta x - i \sin \beta x$$

$$w(x) = e^{\beta x} \{(A+B)\cos \beta x + i(A-B)\sin \beta x\} + e^{-\beta x} \{(C+D)\cos \beta x + i(C-D)\sin \beta x\} \\ + (E+F)\cos \alpha x + i(E-F)\sin \alpha x$$

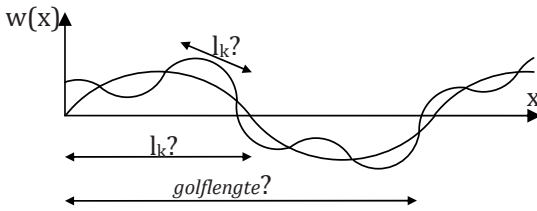
Na omschrijven naar reële constanten wordt de algemene oplossing verkregen:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + e^{\beta x} \{C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x\} + e^{-\beta x} \{C_5 \cos \beta x + C_6 \sin \beta x\}$$

$$\text{met } \alpha = \sqrt{\frac{F_k}{EI}} \quad \& \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

Uit de algemene oplossing is het karakter van de verplaatsing af te lezen. De verplaatsing heeft een versterkte of uitdempende golvende beweging met een golflengte  $\alpha x$  en/of  $\beta x$ .

\* Er is ook nog de mogelijkheid om vanaf hier de oplossing proberen te verkrijgen door  $\beta = \chi\alpha$  toe te passen. Dit lijkt voordelen te geven omdat hierdoor het aantal onbekende 'variabelen' wordt gereduceerd van twee naar één.  $\chi$  is in dit geval een constante. In de praktijk is dit moeilijk op te lossen met als resultaat een antwoord met complexe getallen.



Figuur 11. Wat is de kniklengte?

De verplaatsing  $w(x)$ , welke afhankelijk is van de som van de amplitudes, is in dit geval niet interessant. Het is niet nodig om de zes onbekenden op te zoeken. Waar het hier om gaat is wat de halve golflengte is. Normaal is de golflengte gelijk aan  $\pi$ , zoals ook al Figuur 9 was aangegeven. Beide bekende golflengten moeten gelijk zijn aan  $\pi$ .

$$\alpha l_k = \pi \quad \& \quad \beta l_k = \pi$$

Zoals uit Figuur 11 blijkt is de exacte kniklengte hiermee nog niet bekend. Er zijn meerdere theoretische kniklengten mogelijk. De kniklengte is afhankelijk van zowel  $\alpha$  als  $\beta$ . Om combinaties van  $\alpha$  en  $\beta$  mogelijk te maken voegen we de volgende variaties toe.

$$\alpha^* = \chi_1 \beta \quad \text{met} \quad \chi_1 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{\frac{F_k}{EI}}}{\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}} = \sqrt[4]{\frac{4F_k}{kEI}}$$

$$\beta^* = \chi_2 \alpha \quad \text{met} \quad \chi_2 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}}{\sqrt{\frac{F_k}{EI}}} = \sqrt[4]{\frac{kEI}{4F_k}}$$

Er zijn nu vier mogelijke kniklengten. Alle vier behoren tot de mogelijke maatgevende kniklengte, en moeten dus ook alle vier worden ingevuld in de knikkracht formule. Op voorhand is het niet mogelijk te zien welke van de onderstaande kniklengte maatgevend zal zijn. Alleen de laagste waarde voor de knikformule telt.

De vier mogelijke oplossingen zijn:

- $l_{k;\alpha} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{F_k}}$ ;

$$F_{k;\alpha} = \frac{\pi^2 EI}{\sqrt{\frac{\pi^2 EI}{F_k}}^2} + \frac{k \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{F_k}}^2}{\pi^2} = F_k + \frac{kEI}{F_k}$$

*Dit lijkt een tegenstrijdige uitkomst, dat is niet het geval, aangezien in dit geval  $\beta = 0$  en dus  $k = 0$  is. Hier staat dus in werkelijkheid:  $F_{k;\alpha} = F_k$ . Met deze uitkomst kunnen we niet verder.*

- $l_{k;\beta} = \sqrt[4]{\frac{4\pi^4 EI}{k}}$ ;

$$F_{k;\beta} = \frac{\pi^2 EI}{\sqrt[4]{\frac{4\pi^4 EI}{k}}^2} + \frac{k^4 \sqrt[4]{\frac{4\pi^4 EI}{k}}^2}{\pi^2} = \frac{1}{2} \sqrt{kEI} + 2\sqrt{kEI} = \frac{5}{2} \sqrt{kEI}$$

*Hier geldt  $\alpha = 0$ , dat houdt in dat de normaalkracht (knikkracht) niet wordt meegenomen in de differentiaalvergelijking, waardoor de verwachting is dat de uitkomst van deze waarde een te grote  $F_k$  geeft.*

- $l_{k;\alpha^*} = \sqrt[4]{\frac{4\pi^4 EI}{\chi_1^4 k}}$ ;

$$F_{k;\alpha^*} = \frac{\pi^2 EI}{\sqrt[4]{\frac{4\pi^4 EI}{\chi_1^4 k}}^2} + \frac{k^4 \sqrt[4]{\frac{4\pi^4 EI}{\chi_1^4 k}}^2}{\pi^2} = \frac{\chi_1^2}{2} \sqrt{kEI} + \frac{2}{\chi_1^2} \sqrt{kEI} = \left( \frac{\chi_1^2}{2} + \frac{2}{\chi_1^2} \right) \sqrt{kEI}$$

*De kleinste waarde van  $\left( \frac{\chi_1^2}{2} + \frac{2}{\chi_1^2} \right)$  is hier bepalend voor de kleinste  $F_{k;\alpha^*}$ .*

*De kleinste waarde hiervan is alleen te bereiken wanneer de term boven de breuk gelijk is aan de term onder de breuk;  $\chi_1^2 = 2$ .*

$\chi_1 = \pm\sqrt{2}$  geeft de kleinste waarde, welke resulteert in  $F_{k;\alpha^*} = 2\sqrt{kEI}$

*Zoals verwacht is deze knikkracht kleiner dan  $F_{k;\beta}$ .*

$$\bullet \quad l_{k;\beta^*} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{\chi_2^2 F_k}};$$

$$F_{k;\beta^*} = \frac{4\pi^2 EI}{\sqrt{\frac{4\pi^2 EI}{\chi_2^2 F}}^2} + \frac{k \sqrt{\frac{4\pi^2 EI}{\chi_2^2 F}}^2}{4\pi^2} = \chi_2^2 F_k + \frac{1}{\chi_2^2} \frac{kEI}{F_k} = \sqrt{\frac{1}{(\chi_2^2 - \chi_2^4)}} \sqrt{kEI}$$

De kleinste waarde van  $\sqrt{\frac{1}{(\chi_2^2 - \chi_2^4)}}$  is hier bepalend voor de kleinste  $F_{k;\beta^*}$ .

Voor elke waarde voor  $\chi_2$ , resulteert deze knikkracht in een imaginair getal. Deze knikkracht is niet bruikbaar.

De kniklengten  $l_{k;\alpha}$ ,  $l_{k;\beta}$  en  $l_{k;\beta^*}$  vallen af;  $l_{k;\alpha}$  geeft geen oplossing voor  $F_k$ ,  $l_{k;\beta}$  geeft een te grote oplossing voor  $F_k$  en  $l_{k;\beta^*}$  geeft alleen een te imaginaire oplossing voor  $F_k$ .

Met  $\chi = \sqrt{2}$  geeft de kniklengte  $l_{k;\alpha}$  de kleinste knikkracht.

De kniklengte die verantwoordelijk is voor de kleinste knikkracht is:

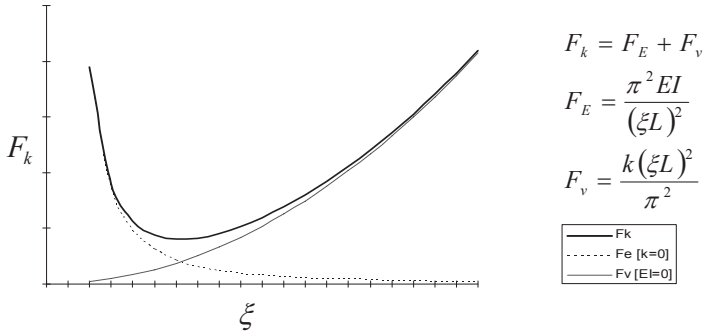
$$l_k = l_{k;\alpha^*} = \sqrt[4]{\frac{4\pi^4 EI}{\chi^4 k}} = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 EI}{k}}$$

### De grafische benadering

De kniklengte  $l_k$  uitzetten tegen  $F_k$  in Figuur 12 [12] en dan zoeken naar de laagste knikkracht. Deze methode is minder wiskundig en gemakkelijker visueel te begrijpen. Verwacht wordt dat met beide methoden de kleinste knikkracht en de daarbij behorende kniklengte verkregen kan worden.

Omdat de kniklengte onbekend is het handiger om  $l_k$  te vervangen voor  $\xi L$  met  $L$  is de volledige lengte van de brug. Zo kan de bruglengte op elke gewenste lengte worden ingevoerd.

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} + \frac{k l_k^2}{\pi^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\xi L)^2} + \frac{k(\xi L)^2}{\pi^2}$$



Figuur 12. Grafische knikbenadering

In de formule moeten de waarden  $EI$ ,  $k$  en  $L$  als constante worden vastgesteld op een willekeurige waarde om de grafiek te kunnen tekenen. De constanten vormen slechts een vergrotingsfactor in de formule en hebben geen invloed op het verloop van de grafiek. Het uitzetten van  $F_k$  tegen  $\xi$  in Figuur 12 geeft duidelijk weer dat er één minimum is en daardoor  $\xi$  uitgedrukt kan worden in één vaste waarde.

In Figuur 12 is verder af te lezen welke werking de Eulerknik  $F_e$  en welke werking de knikkraft ten gevolge van de veerconstante  $F_v$  heeft.

De kleinste waarde van  $F_k$  wordt verkregen als  $\frac{dF_k}{d\xi} = 0$ .

$$\frac{dF_k}{d\xi} = -2 \frac{\pi^2 EI}{\xi^3 L^2} + 2 \frac{k \xi L^2}{\pi^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \xi = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 EI}{kL^4}}$$

Hetzelfde resultaat is bereiken door gelijkstellen van de Eulerknik aan de knikkraft ten gevolge van de veerconstante  $F_e = F_v$ . In Figuur 12 zijn beide componenten van de knikkraft ook los afgebeeld. Het snijpunt van deze twee stippellijnen (knikkraften) geeft ook de waarde voor  $\xi$  waarmee de kleinste en dus maatgevende knikkraft wordt bereikt.

$$\frac{\pi^2 EI_{regel}}{(\xi L)^2} = \frac{k(\xi L)^2}{\pi^2} \quad \rightarrow \quad \xi = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 EI}{kL^4}} \quad \& \quad k = \frac{\pi^4 EI}{(\xi L)^4}$$

De kniklengte welke gelijk is aan de analytische benadering wordt dan:

$$\bullet \quad l_k = l_{k;\zeta} = \zeta L = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 EI}{k}}$$

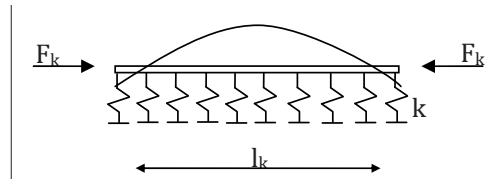
De bijbehorende knikkracht is:

$$F_{k;\zeta} = \frac{\pi^2 EI}{\sqrt[4]{\frac{\pi^4 EI}{k}}^2} + \frac{k^4 \sqrt[4]{\frac{\pi^4 EI}{k}}}{\pi^2} = \sqrt{kEI} + \sqrt{kEI} = 2\sqrt{kEI}$$

*Deze geeft rechtstreeks de kleinste waarde voor  $F_k$ , die ook eerder door de meer analytische benaderingen gevonden is.*

### 3.5 De formule van Engesser

Het invullen van de kniklengte in de formule voor de knikkracht geeft een bijzondere formule. Voor situatie zoals geschetst in Figuur 13, mogen we dus aannemen dat de minimale knikkracht is:



Figuur 13. Kniklengte met verende ondersteuning

$$\boxed{F_k = 2\sqrt{kEI}}$$

De gevonden knikkracht formule blijkt bekend te staan als “Formule van Engesser” [13] en heeft als grote voordeel dat de kniklengte niet meer uitgerekend hoeft te worden om de knikkracht te bepalen. Hierbij lijkt de formule onafhankelijk te zijn van de kniklengte. Doordat de kniklengte variabel is, zoekt de constructie de weg van de minste weerstand. De kniklengte zal voor de formule van Engesser altijd een variabele zijn die afhankelijk is van het eigen buigtraagheidsmoment van de ligger en de veerstijfheid van de ondersteuning.

Hiermee lijkt de knikkracht van de leuningbovenregel bekend te zijn. Het is interessant om te controleren of de numerieke berekening dezelfde waarde voor de knikkracht geeft als de handberekening met de formule van Engesser. Om een numerieke berekening te kunnen maken moeten de afmetingen van de drukligger (leuningbovenregel), de elasticiteitsmodulus van de gebruikte betonklasse, de veerstijfheid van de doorsnede en de lengte van de balk bekend zijn (Zie Bijlage C).



Voor deze vergelijking zijn die gegevens geschat op:

*Een balk verend ondersteund:*

Lengte: 16 m  
 Breedte: 300 mm  
 Hoogte: 100 mm

Betonklasse: C50/B60 ( $E=37 \text{ GPa}$ )  
 Veerkracht in  $y$ -richting: 1600 kN/m<sup>2</sup>

*In  $z$ -richting is de balk over de volledige lengte opgelegd.*

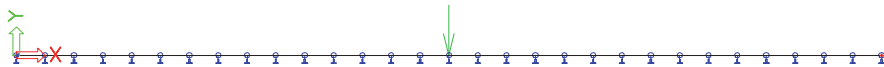
*In  $x$ -richting is geen oplegging aanwezig.*

De normaalkracht in de drukligger wordt opgewekt door op beide uiteinden een puntlast te zetten van 3700kN. Daarnaast is nog een puntlast loodrecht op de balk nodig om een eerste orde verplaatsing te introduceren. De puntlast is 100kN.

*Belasting 1 Puntlasten: 2x 3700kN (normaalkracht 3700kN)*

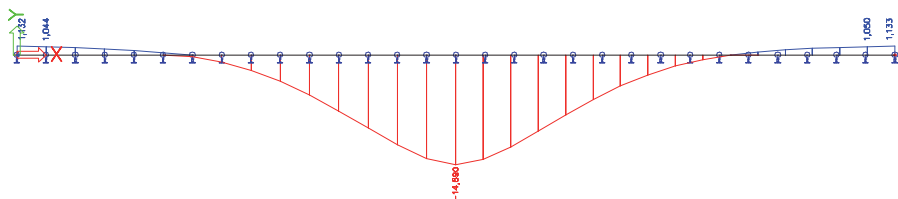


*Belasting 2 Puntlast loodrecht: 100kN*

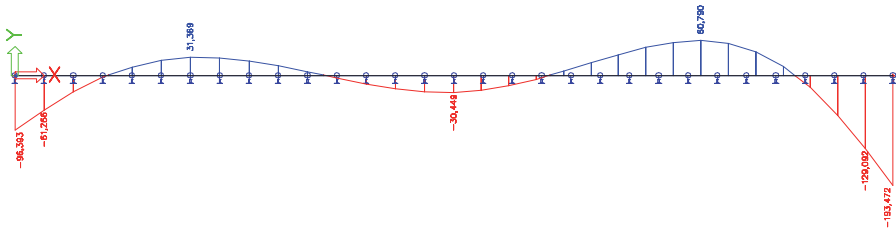


Er zijn in totaal drie berekeningen uitgevoerd met de combinatie van bovenstaande belastingen: Een lineaire eerste orde berekening, een geometrisch niet lineaire tweede orde berekening en een lineaire stabiliteitsberekening. De numerieke stabiliteitsberekening geeft rechtstreeks de stabiliteitsfactor  $n$ . Met de eerste en de tweede orde berekening is op basis van de verplaatsing de stabiliteitsfactor handmatig uit te rekenen. Door de stabiliteitsfactor te vermenigvuldigen met de normaaldrukkracht is de knikkraft te bepalen.

*De lineaire eerste orde verplaatsing is in het midden 14,690mm.*



De geometrisch niet lineaire tweede orde berekening geeft een verplaatsing van 30,449mm in het midden.



Uit de tweede orde verplaatsing is ook te halen dat de maatgevende stabiliteitsfactor en dus knikkracht voor deze constructie niet in het midden zit, maar op de uiteinden. De stabiliteitsfactor die door de stabiliteitsberekening is bepaald zal dus de stabiliteitswaarde geven die van toepassing is op de uiteinden van de drukstaaf. De numerieke stabiliteitsberekening houdt rekening met randeffecten. De formules van Engesser gaat uit van een oneindige ligger waarin randeffecten niet kunnen plaatsvinden. Daarom is de numerieke stabiliteitsberekening onbruikbaar als vergelijkingsmateriaal. Met de hand kan uit de bovenstaande verplaatsingen de volgens stabiliteitsfactor en knikkracht worden bepaald.

Verhouding tussen eerste en tweede orde:

$$u_{2^{de} \text{ orde}} + u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste} \text{ orde}} \quad \rightarrow \quad n = \frac{u_{2^{de} \text{ orde, tot}}}{u_{2^{de} \text{ orde, tot}} - u_{1^{ste} \text{ orde}}}$$

Stabiliteitsfactor:

$$n = \frac{30,449}{30,449 - 14,690} = 1,9322$$

Knikkracht:

$$F_{k, scia, eng} = n \cdot N = 1,9322 \cdot 3700 = 7149,14 \text{ kN}$$

De knikkracht volgens de formule van Engesser is:

$$EI_{leuningbovenregel} = E \frac{hb^3}{12} = 37 \frac{100 \cdot 300^3}{12} = 8325 \text{ kNm}$$

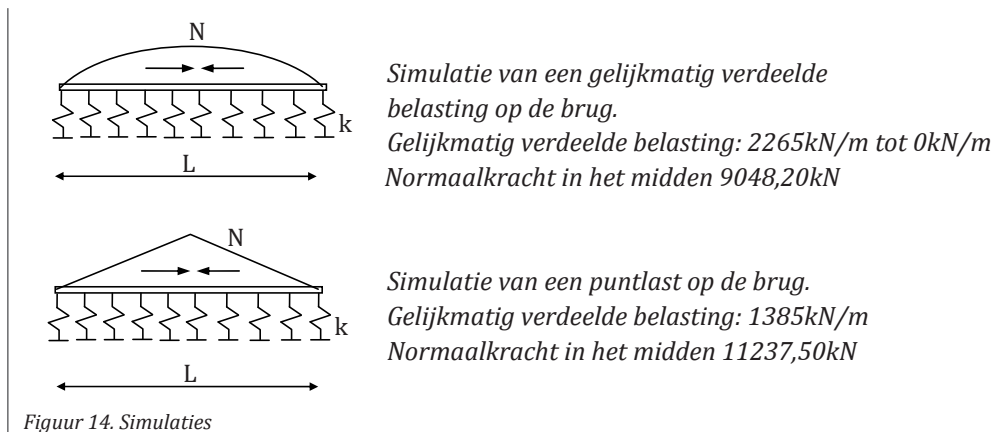
$$F_{k, eng} = 2\sqrt{kEI} = 2\sqrt{1600 \cdot 8325} = 7299,31 \text{ kN}$$

Hiermee is aangetoond dat de formule van Engesser dezelfde knikkracht geeft als een numeriek eindige elementen model. Het kleine verschil tussen de formule van Engesser en de numerieke berekening is te verklaren doordat de uiteinden kleine afwijkingen in de horizontale verplaatsing in het midden veroorzaken.

$$F_{k,eng} \approx 7300 \text{ kN} \cong F_{k,scia,eng} \approx 7150 \text{ kN}$$

### 3.6 Effect van een niet-constante normaalkracht

De normaalkracht in de leuningbovenregel is in werkelijkheid niet-constant over de gehele lengte. De normaalkracht in de leuningbovenregel heeft de vorm van het moment over de gehele lengte van de brug. De hart-op-hart afstand tussen de leuningbovenregel en de leuningonderregel is constant over de gehele lengte van de brug. Deze paragraaf laat, aan de hand van een numeriek eindige elementen model, zien wat een niet-constante normaalkracht doet met de knikkracht.

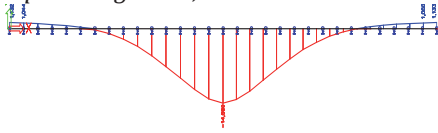


Hiervoor wordt hetzelfde numerieke model gebruikt als in paragraaf 5. De normaalkrachten worden als volgt op de drukligger (*leuningbovenregel*) geplaatst. Bij de vergelijkingsberekening om de formule van Engesser te vergelijken met het numerieke eindige elementenmodel zijn drie verschillende numerieke berekeningen uitgevoerd. Deze zelfde drie berekeningen zijn ook voor deze twee normaalkrachten verlopen uitgevoerd.

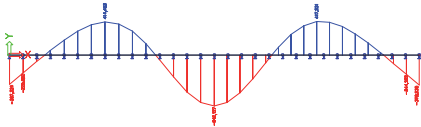
De resultaten daarvan zijn als volgt:

### ***Gelijkmatig verdeelde belasting***

*De lineaire eerste orde verplaatsing is: 14,690mm.*



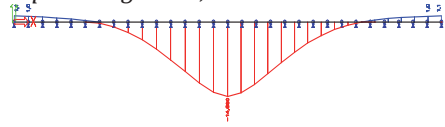
*De geometrisch niet-lineaire tweede orde berekening geeft een verplaatsing van 642,127mm in het midden.*



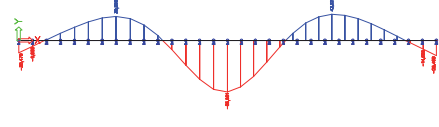
*De stabiliteit berekening geeft een stabiliteitsfactor van n=1,0009.*

### ***Puntlast op de brug***

*De lineaire eerste orde verplaatsing is: 14,690mm.*



*De geometrisch niet-lineaire tweede orde berekening geeft een verplaatsing van 85,551mm in het midden.*



*De stabiliteit berekening geeft een stabiliteitsfactor van n=1,0002.*

De horizontale verplaatsing van de drukligger in de lineaire eerste orde berekening heeft niks te maken met de normaalkracht. De horizontale eerste orde verplaatsing wordt veroorzaakt door een puntlast van 100kN loodrecht op de drukligger te plaatsen. De tweede orde berekening geeft in heeft gevallen de grootste horizontale uitwijking in het midden. De door de numerieke lineaire stabiliteit berekening berekende stabiliteitsfactor zal een reële waarde zijn voor deze berekening. De met de hand berekende stabiliteitsfactor voor deze twee modellen is:

*Verhouding tussen eerste en tweede orde:*

$$u_{2^{de\ orde}} + u_{1^{ste\ orde}} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste\ orde}} \quad \rightarrow \quad n = \frac{u_{2^{de\ orde,tot}}}{u_{2^{de\ orde,tot}} - u_{1^{ste\ orde}}}$$

*Stabiliteitsfactoren:*

*Gelijkmatig verdeelde belasting*

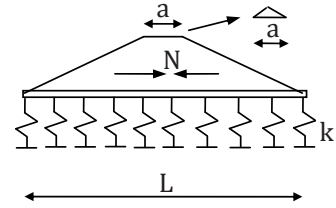
$$n = \frac{642,127}{642,127 - 14,690} = 1,0234$$

*Puntlast op de brug*

$$n = \frac{85,551}{(85,551 - 14,690)} = 1,2073$$

Het opvallendste is dat de stabiliteitsberekening in geval van een puntlast een veel kleinere stabiliteitsfactor geeft dan de met de hand nagerekende stabiliteitsfactor. Het verschil tussen de twee berekeningen is 17% en dat is fors. Door de

normaalkracht te laten lijken op Figuur 15 met afstand  $a$  is 2 meter is de met de hand nagerekende stabiliteitsfactor bijna gelijk aan de stabiliteitsfactor volgens de gelijkmatig verdeelde belasting. Dat houdt in dat het laatste beetje extra normaalkracht, de piek met grondvlak  $a$  vrijwel alleen een grotere normaalkracht op de drukligger introduceert. Dit korte stukje reageert op deze extra normaalkracht als een gedrongen ligger.



Figuur 15. Normaalkracht

Dit komt tot uitdrukking door een grotere stabiliteitsfactor die de handberekening laat zien. De werkelijke stabiliteitsfactor van de belasting door een puntlast is de stabiliteitsfactor die de numerieke stabiliteitsberekening weergeeft. De knikkrachten voor deze twee modellen komen daarmee uit op:

*Bepaling van de knikkracht:*

$$F_{k,scia,eng} = n \cdot N$$

*Knikkrachten:*

*Gelijkmatig verdeelde belasting*

$$F_{k,scia,eng,q} = 1,0234 \cdot 9048,20 = 9259,93 \text{ kN}$$

*Puntlast op de brug*

$$F_{k,scia,eng,P} = 1,0002 \cdot 10733,75 = 10735,90 \text{ kN}$$

Deze knikkrachten komen daarmee een stuk hoger uit dan de knikkracht volgens de formule van Engesser. Daarmee geeft de formule van Engesser een veel te conservatieve knikwaarde. De knikkracht kan vermenigvuldigd worden met een verhouding  $\alpha$  om dit te compenseren. De verhouding  $\alpha$  in deze berekening voor een gelijkmatig verdeelde belasting is:

$$\alpha_q = \frac{F_{k,scia,eng,q}}{F_{k,eng}} = \frac{9259,93 \text{ kN}}{7299,31 \text{ kN}} = 1,2686$$

$$\alpha_P = \frac{F_{k,scia,eng,P}}{F_{k,eng}} = \frac{10735,90 \text{ kN}}{7299,31 \text{ kN}} = 1,4708$$

Op basis van één model is het niet mogelijk om de exacte waarde voor de verhouding  $\alpha$  vast te stellen, bovendien is deze factor ook afhankelijk van de vorm van het normaalkrachten druk verloop. Op basis van de bovenstaande gegevens mogen we ervan uitgaan dat de verhouding op de formule van Engesser tussen de 1 en de 1,5 zit.

De knikformule voor de leuningbovenregel wordt daarmee:

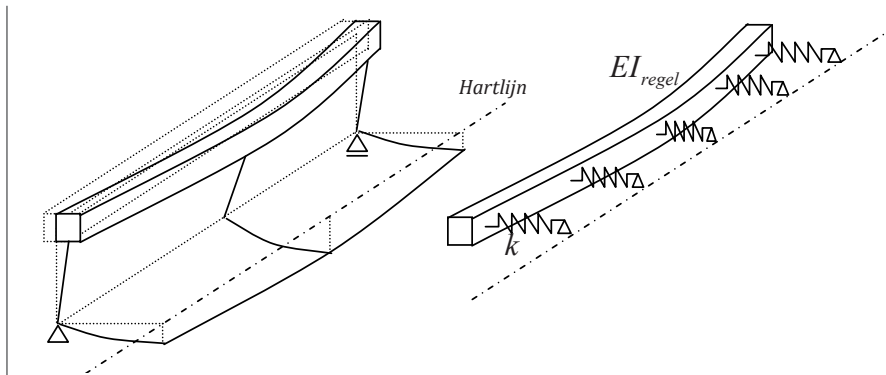
$$F_k = \alpha 2\sqrt{kEI} \quad \text{met} \quad 1 \leq \alpha < 1,5$$

## 4 De brugdoorsnede

De verende ondersteuning van de leuningbovenregel wordt veroorzaakt door de doorsnedestijfheid van de brug. De brugdoorsnede heeft daarmee een belangrijk aandeel in de stabiliteit. In dit hoofdstuk wordt met name gezocht naar de veerstijfheid die de doorsnede kan geven aan de leuningbovenregel. Hierbij wordt de aanname gedaan dat de vlakvulling tussen de leuningboven- en onderregel massief is en alleen over de mootvoegen onderbroken wordt. Voor het brugdek geldt hetzelfde. De enige doorlopende delen over de gehele lengte van de brug zijn de leuningboven- en onderregels.

### 4.1 Lineaire veerstijfheid van de brugdoorsnede

De formule voor de knikkracht is bekend. De benodigde veerstijfheid moet komen uit het brugdek en de vlakvulling van de leuning. De verbinding tussen deze twee 'elementen' wordt vooralsnog gehouden op oneindig stijf. In de praktijk is dit niet het geval, maar aangenomen kan worden dat de stijfheid van de knoop veel groter is dan de stijfheid van het brugdek en de leuning. Daarom zal dit geen bezwaar gaan vormen in de berekening. In Figuur 16 is goed te zien hoe de brugdoorsnede moet worden omgerekend naar een translatieveer.



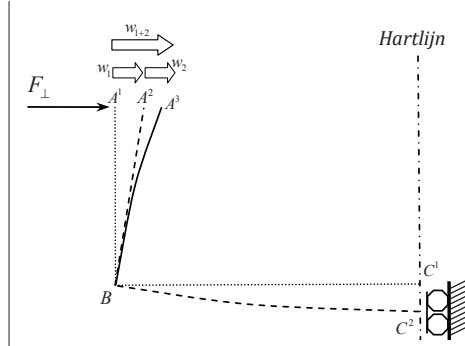
Figuur 16. Bovenrand leuning als verend ondersteunende Eulerse knikstaaf

De veerstijfheid is afhankelijk van de buigstijfheid  $EI$  van de leuningstijlen en het brugdek. Een uitgangspositie voor deze berekening is dat de translatieveer theoretisch oneindig lineair elastisch is. De praktijk zal echter anders zijn, alleen bij een kleine uitwijking, waarbij de betonddoorsnede ongescheurd blijft, zal de veer zich lineair elastisch gedragen. Zodra de betonddoorsnede gaat scheuren zal de veerconstante er anders uit komen te zien.

#### 4.1.1 Lineair elastische veerstijfheid van de brugdoorsnede

Het bepalen van de veerstijfheid van de lineaire translatieveer gebeurt door een puntlast tegen beide leuningbovenregels te zetten zoals afgebeeld in Figuur 17. Het brugdek en de leuningstijlen zullen als gevolg van puntlast  $F$  doorbuigen.

In Figuur 17 is de horizontale verplaatsing als gevolg van de doorbuiging van het dek en van de leuningstijlen apart weergegeven.

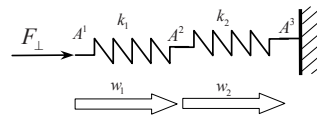


Figuur 17. Veerstijfheid halve brugdoorsnede

De optredende horizontale verplaatsingen zijn:

- $w_1$  verplaatsing door het brugdek
- $w_2$  verplaatsing door de leuningstijlen

De veerstijfheid van de brug zoals geschetst in Figuur 17 kan vereenvoudigd worden weergegeven tot de lineaire veerconstanten  $k_1$  (brugdek) en  $k_2$  (vlakvulling) in Figuur 18.



Figuur 18. Halve dwarsdoorsnede brug

Met behulp van 'vergeet me nietjes' [14] zijn de horizontale uitwijkingen ten gevolge van puntlast  $F$ :

$$w_1 = e \frac{F_{\perp} e b}{2 E I_{dek}}$$

$$w_2 = \frac{F_{\perp} e^3}{3 E I_{leuning}}$$

Waarin:

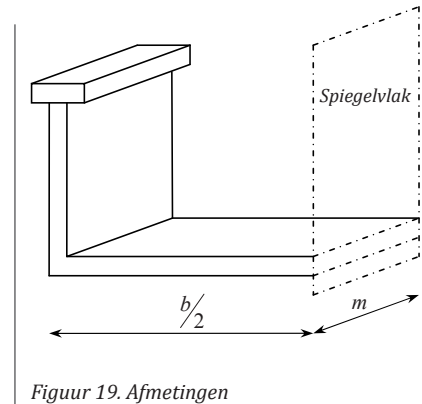
- $e$  de afstand tussen aangrijpingspunt van puntlast  $F$  en het hart van het dek, de afstand  $AB$  in Figuur 17,
- $b$  de breedte van de brug, ofwel hart op hart afstand tussen de leuning.

De lineair elastische veerconstanten zijn:

$$k_1 = \frac{F_{\perp}}{w_1} = \frac{2 EI_{dek}}{e^2 b}$$

$$k_2 = \frac{F_{\perp}}{w_2} = \frac{3 EI_{leuning}}{e^3}$$

$$k_{tot,lin} = \frac{F_{\perp}}{w_1 + w_2} = \frac{1}{\frac{e^2 b}{2 EI_{dek}} + \frac{e^3}{3 EI_{leuning}}} \left[ \frac{kN}{m} \right]$$



Figuur 19. Afmetingen

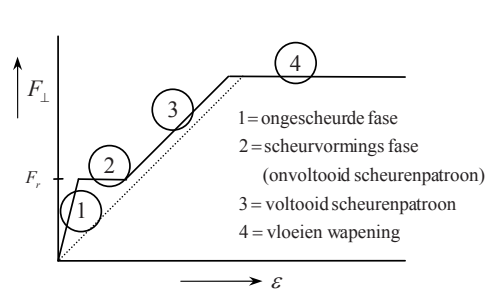
De veerconstante is tot nu toe alleen als 2D, over de doorsnede, van de brug bepaald. Dit is terug te vinden in de eenheden. Om veerkracht te kunnen gebruiken in de knikformule moet ook de lengte van de brug worden inbegrepen, dit wordt gedaan door de 2D veerstijfheid  $k_{tot,lin}$  te delen door een meter lengte 'm' van de brug. Zie ook Figuur 19.

$$k_{doorsnede} = \frac{k_{tot,lin}}{m} = \frac{1}{m \left[ \frac{e^2 b}{2 EI_{dek}} + \frac{e^3}{3 EI_{leuning}} \right]} \left[ \frac{kN}{m^2} \right]$$

#### 4.1.2 Niet lineariteit in de veerstijfheid

De werkelijke verplaatsing is niet oneindig lineair elastisch. De veerconstante van de doorsnede is direct gekoppeld aan het buigtraagheids-moment van het brugdek en de vlakvulling. Een grote horizontale verplaatsing zal tot gevolg hebben dat de betontrekzone scheurt en uiteindelijk zal ook de wapening in de trekzone gaan vloeien. Dat resulteert in grote plastische vervormingen en bezwijken van de veerconstante. Indien de betondrukzone bezwijkt dan is er sprake van brosse breuk. Dit moet ten allen tijde voorkomen worden.

In Figuur 20 [15] is weergegeven hoe de trekzone van de betondorsnede zich zal gedragen onder toenemende belasting. De belasting is hierbij voor het gemak even aangenomen als een puntlast loodrecht op de leuning, dus in één lijn met de veer. De huidige lineair elastische veerconstante is alleen geldig in fase 1 en in fase 3, afhankelijk van de berekende buigtreksterkte over de



Figuur 20. Vervorming gewapend beton op trek



ongescheurde of gescheurde doorsnede. De overgang van fase 1 naar fase 2 is het ontstaan van scheuren van de betonddoorsnede in de trekzone. Na het bereiken van fase 2 zal de veerconstante berekend moeten worden op basis van fase 3. De lagere buigtreksterkte voor de gescheurde doorsnede zal resulteren in lagere veerconstante in fase 3. Indien niet bekend is in welke fase gerekend moet worden dan is een veilige aanname om de veerstijfheid die overeenkomt met fase 3 te hanteren. Een toets zal moeten garanderen dat fase 4 niet bereikt wordt.

De plastische vervormingfasen beginnen wanneer:

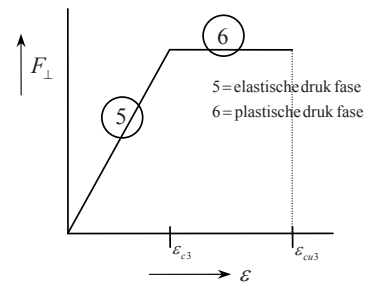
$$N_{cr} = A_c f_{ctm} + A_s f_{ctm} \frac{E_s}{E_c} \quad \text{scheurtrekkkracht van het beton (begin van fase 2)}$$

$$N_{s,vt} = A_s f_{yd} \quad \text{vloeitrekkkracht van het betonstaal (begin van fase 4)}$$

Waarin:

$A_c$	<i>oppervlakte betonddoorsnede</i>
$A_s$	<i>oppervlakte wapeningstaal doorsnede</i>
$f_{ctm}$	<i>gemiddelde betontreksterkte</i>
$f_{yd}$	<i>rekenwaarde van de vloeigrens van betonstaal</i>
$E_c$	<i>elasticiteitsmodules van beton</i>
$E_s$	<i>elasticiteitsmodules van betonstaal</i>

Verder moet er rekening mee gehouden worden dat de betonstuikgrens, Figuur 21 [7], van  $\varepsilon_{cu3}$  niet bereikt wordt. Beton wat meer wordt ingedrukt dan deze rekgrens is bezweken. Fase 5 is de elastische betondrukzone, welke de voorkeur heeft. Lokaal mag de plastische betondrukfase 6 bereikt worden in extreme gevallen, maar dat moet zoveel mogelijk beperkt worden om de risico's op brosse breuk te beperken.



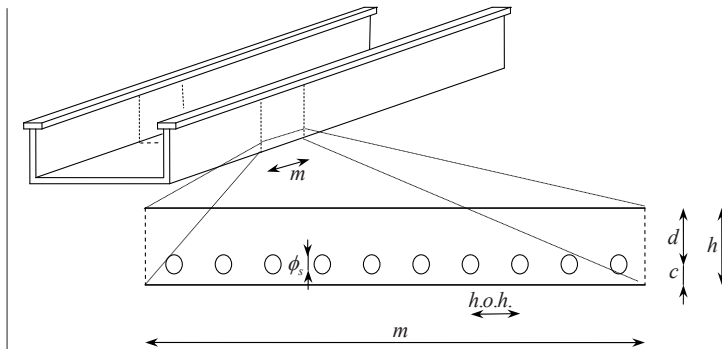
Figuur 21. Vervorming op beton op druk

## 4.2 De buigstijfheid van de gescheurde beton doorsnede

De veerstijfheid van de doorsnede is gekoppeld aan de buigstijfheid van het brugdek en de vlakvulling tussen de leuningboven- en onderregel. Daarnaast moet ook bekend zijn wat het maximaal opneembaar moment is, om de maximale toegestane lineaire veerkracht te kunnen bepalen. In de vorige paragraaf is in Figuur 20 afgebeeld welke vervorming de betontrekzone heeft. De trekkracht van de trekzone van ongescheurd beton, aangeduid als fase 1, is zeer gering. Daardoor is ook het opneembare moment van de ongescheurde doorsnede zeer gering. Het toestaan van scheurvorming in de doorsneden geeft een hogere momentcapaciteit. Verder is het belangrijk dat zowel het betonstaal als de betondrukdoorsnede alleen elastisch wordt belast. Dit heeft twee redenen:

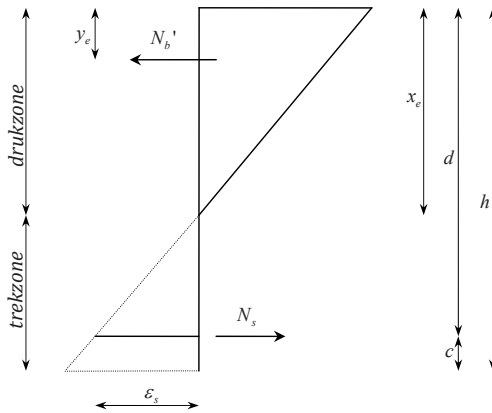
- Uitgangspunt is een lineaire veerstijfheid  $k$  en dat is niet meer het geval wanneer de buigstijfheid van de doorsnede plastisch vervormt.
- De plastische restcapaciteit van de doorsnede brengt grote vervormingen met zich mee en die zijn ongewenst.

De buigstijfheid en de doorsnede momentencapaciteit kan op de volgende manier worden afgeleid. Voor het voorbeeld wordt uitgegaan van het brugdek, zoals ook afgebeeld in Figuur 22, maar de vlakvulling tussen de leuningboven- en onderregel kan op precies dezelfde manier worden afgeleid.



Figuur 22. Dwarsdoorsnede over het brugdek

Wanneer de trekkracht groter is dan wat beton kan opnemen scheurt het beton. De gescheurde doorsnede heeft een kleinere buigstijfheid dan de ongescheurde doorsnede. De trekkracht wordt volledig opgenomen door de wapening en de drukkracht zal door de drukzone van de betonddoorsnede worden opgenomen. Met behulp van het rekdiagram in Figuur 23 is te bepalen wat het grootst opneembare moment in deze elastische fase is en welke buigstijfheid de doorsnede heeft. Uitgangspositie hierbij is dat de beton trekzone geen bijdrage levert aan de buigstijfheid.



Figuur 23. Rekdigram gewapend betondoorsnede

De verschillende waarden in Figuur 23, die nog niet eerder benoemd zijn, zijn:

- $\epsilon_{c3}$  de maximale elastische beton drukrek [2]
- $\epsilon_s$  de elastische rek in betonstaal als gevolg van de uiterste grenstoestand
- $x_e$  de totale drukzone van de betondoorsnede
- $y$  bovenkant drukzone tot het resulterende drukkracht in de betondoorsnede

$N_c' = \frac{1}{2} x_e m \epsilon_{c3} E_c$  de drukkracht (beton) in de doorsnede

$N_s = A_s \epsilon_s E_s$  de trekkracht (betonstaal) in de doorsnede

Met behulp het rekdigram van de betondoorsnede in Figuur 23, zijn de volgende vergelijkingen op te stellen:

$\epsilon_s = \epsilon_{c3} \frac{d - x_e}{x_e}$  trekrek van de staaldoorsnede

$y_e = \frac{x_e}{3}$  afstand; aangrijpingspunt van de drukkracht tot de bovenrand

$d = h - c - \frac{\phi_s}{2}$  effectieve hoogte van de dwarsdoorsnede

$c$  dekking op de hoofdwapening  
 $\phi_s$  diameter van de wapening

$A_s = \frac{m}{h.o.h.} \frac{\pi \phi_s^2}{4}$  oppervlakte van de hoofdwapening (over een meter lengte met een 'h.o.h.' van de wapening, zie Figuur 22);

Door de som van de inwendige krachten op nul te stellen, is de afstand  $x_e$  te bepalen.

$$N_s = N_c' \rightarrow A_s \varepsilon_s E_s = \frac{x_e m}{2} \varepsilon_{c3} E_c \rightarrow 0 = x_e^2 \frac{1}{2} + x_e \frac{A_s E_s}{m E_c} - \frac{A_s E_s}{m E_c} d$$

$$x_e = \sqrt{\left(\frac{A_s E_s}{m E_c}\right)^2 + 2 \frac{A_s E_s}{m E_c} d} - \frac{A_s E_s}{m E_c}$$

De bovenstaande vergelijking mag alleen gemaakt worden zolang de vloiegrens van de staaldoorsnede niet bereikt is. De betonddoorsnede gedraagt zich alleen lineair elastisch zolang de beton drukdoorsnede en de staaldoorsnede zich bevinden in de elastische rekfase.

De controle op de vloeispanning zal veelal niet een maatgevende situatie opleveren, maar moet wel worden getoetst. De controle is:

$$N_s \leq N_{s,yl} \rightarrow \varepsilon_s E_s \leq f_{yd} \rightarrow \frac{\varepsilon_{c3} E_s d}{(\varepsilon_{c3} E_s + f_{yd})} = x_{e,yl,wap} \leq x_e$$

De eigenschappen van de gescheurde betonddoorsnede op buiging in lineair elastische fase is:

*De buigstijfheid van de lineair elastisch gescheurde fase is:*

$$EI_e = E_c \left[ \frac{m x_e^3}{12} + m x_e (x_e - y_e)^2 \right] + E_s [A_s (d - x_e)^2]$$

*Het grootste lineair elastisch moment van de gescheurde doorsnede is:*

$$M_e = N_s (d - y_e) \leq N_c' (d - y_e)$$

## 5 Stabiliteit van de brug

In de eerdere hoofdstukken is met name ingegaan op de knikkracht in de leuningbovenregel van de brug en de bijdrage die de doorsnede aan het vergroten van de knikkracht geeft. Hoewel in eerdere hoofdstukken de stabiliteitsfactor  $n$  al even genoemd is, zal in dit hoofdstuk deze stabiliteitsfactor uitgelegd worden. Een reductiefactor op de knikkracht zal worden toegevoegd om de geometrische imperfectie van de brugconstructie in rekening te brengen.

Eén van de doelstellingen voor deze thesis is:

*“Het in kaart brengen welke importantie de tweede orde effecten hebben”.*

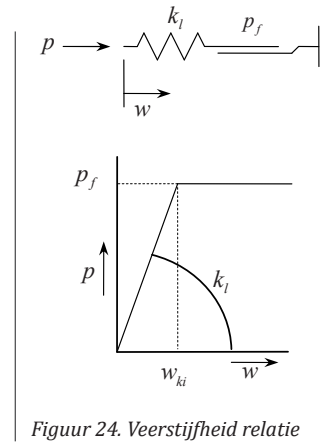
Naarmate ‘de grens van kunnen’ dichter benaderd wordt, dat wil zeggen een zo licht en slank mogelijke constructie, worden tweede orde effecten belangrijker. Grote tweede orde effecten zullen de stabiliteit sterk negatief beïnvloeden. Met behulp van de stabiliteitsfactor willen we grip op de tweede orde effecten behouden. Indien tweede orde effecten geen invloed zouden hebben, zou de leuningbovenregel, drukkligger, in theorie belast kunnen worden totdat de leuningbovenregel op druk bezwijkt. Deze toetsing op druk zal in hoofdstuk 6 aan de orde komen.

In dit hoofdstuk komen de volgende punten aan bod:

- Reductiefactor ten gevolge van de imperfectie van de veerconstante.
- De normaal drukkracht in de leuningbovenregel.
- De stabiliteitsfactor.
- Resultaten van de stabiliteit versterkingsfactor.

## 5.1 Reductiefactor ten gevolge van de imperfectie van de veerconstante

In de uitgave van het tijdschrift Cement van juni 2009 [16] is een artikel gewijd aan de knikstabiliteit van ankerpalen. In het artikel worden drie berekeningsmethodieken met elkaar vergeleken voor zeer slanke palen die op druk worden belast. Slanke palen zoals bijvoorbeeld GEWI-palen, groutinjectionpalen en schroefinjectionpalen. Dit probleem lijkt op het probleem van de slanke leuning die verend ondersteund worden door de brugdoorsnede:



Figuur 24. Veerstijfheid relatie

### Citaat:

#### “Horizontaal elastische bedding

*Zijdelings knikken van palen wordt door de steunende werking van de grond belemmerd. Theoretische beschouwingen van Engesser (eind 19e eeuw) met een horizontale elastische bedding met oneindig toenemende zijdelingse gronddruk, tonen aan dat reeds bij een relatief kleine bedding de draagkracht aanzienlijk toeneemt ten opzichte van een niet door grond gesteunde paal. Echter, in slappe grondlagen leidt deze modellering (van de oneindige zijdelingse grondweerstand op basis van een veelal gebruikelijke constante, horizontale bedding) tot niet-realistische resultaten. Het daadwerkelijke gedrag is meer viskeus en plastisch. Dit kan door plastisch bilineair gedrag worden weergegeven (Figuur 39). Hierbij neemt de weestand vanuit de grond op de paal, met toename van de horizontale paalverplaatsing, beperkt toe en kan niet groter dan de vloedruk van de grond worden. Daarom overschatten de meeste rekenmodellen, die van een elastische horizontale bedding uitgaan, de knikdraagkracht.”*

De berekening van knik met de formule van Engesser lijkt veel te gunstig te zijn wanneer er plastisch bilineair gedrag optreedt. Waarschijnlijk is dit ook het geval bij de gesteunde leuningbovenregel. In plaats van het bilineaire gedrag van grond kan daarvoor in de plaats het bilineaire gedrag van de doorsnede worden bekeken. Om dit exact te bepalen moet een Moment-Kappa-diagram, zoals in hoofdstuk 4 reeds is omschreven, gemaakt worden van de betondoorsnede.

Er worden in het artikel verder drie alternatieven besproken voor de formule van Engesser die nauwkeurig zouden moeten zijn in geval van plastische bilineariteit. De achtergrond van het artikel is in belangrijke mate gebaseerd op het rapport ‘Knicken von Pfählen mit kleinem Durchmesser in breiigen Böden’ [17] waarin de verschillen tussen de drie alternatieven omschreven en deels uitgewerkt zijn.

De drie alternatieven zijn:

- Rekenmethode Meek
- Rekenmethode Shields
- Rekenmethode van de TU München

### 5.1.1 Verschillende rekenmethoden

Alle drie de alternatieven lijken veel op de formule van Engesser. Sommige methoden zijn vereenvoudigingen van de formule andere een uitbreiding. Maar in alle drie de gevallen is het de formule van Engesser met een reductiefactor.

**De rekenmethode van Meek** heeft, volgens het artikel, in tegenstelling tot de twee andere methoden twee zwakke punten. Ten eerste resulteert een hogere staalkwaliteit van de paal niet tot een hogere draagkracht (een hoger buigtraagheidsmoment). Ten tweede is plastische vervorming van palen vereist, terwijl in werkelijkheid het knikken niet een probleem van de materiaalsterkte is.

**De rekenmethode van Shields** voor het bepalen van de knikkracht is een stuk eenvoudiger. De onderstaande formule van voor deze rekenmethode is in het artikel [16] gegeven.

$$F_k = \{8 \text{ à } 14\} \sqrt{c_u EI}$$

Waarin:

$c_u$	de ongedraineerde schuifsterkte van de grond (druk sondeerwaarde)
$EI$	het buigtraagheidsmoment van de paal

Alle reductiefactoren zitten reeds in de factor 8 à 14. Het artikel in het tijdschrift Cement van juni 2009 [16] geeft aan dat de factor 8 à 14 in de originele formule een factor 19 zou moeten zijn.

**Citaat:**

*“In verband met initiële excentriciteiten van de palen door bijvoorbeeld de installatie, inhomogeniteiten in de grond, onregelmatige dikte van de groutschil om de stalen staven en andere initiële spanningen, ligt de factor in werkelijkheid tussen de 8 en de 14. Met andere woorden, de paalafwijkingen en de bandbreedte ten aanzien van ongedraineerde schuifsterkte worden rekenkundig afgedekt met een soort overall veiligheid van 1,5 à 2. Dit is gebaseerd op de vergelijking met proefresultaten.”*

De rekenmethode van Shields is minder geschikt om toe te passen als alternatief voor de te gunstige beschouwing van de knikkracht volgens de formule van Engesser. Allereerst moet de formule worden omgebouwd, bovendien is de ongedraineerde schuifsterkte van grond niet gelijk aan de lineaire veerconstante

uit de beton doorsnede. Verder is onbekend wat de kniklengte zal gaan doen en hoe groot de reductie is ten opzichte van de formule van Engesser.

Een *geschatte voorspelling* van deze methode zou kunnen zijn om de knikkracht, berekend met de formule van Engesser, te delen door een factor van 1,5 à 2 ten behoeve van het bilineaire plastische gedrag. Dit zou gestaafd kunnen worden door proeven. De exacte knikkracht is hiermee nog niet bepaald, alleen de kans dat de brug bezwijkt op basis van knik wordt kleiner ten opzichte van de formule van Engesser, indien met deze formule gerekend is.

In het artikel wordt aangegeven dat de **methode van de TU München** de meest realistische resultaten geeft. De TU München heeft deze methode in een spreadsheet [18] verwerkt en vrij beschikbaar gemaakt voor iedereen via het internet. In Bijlage D is de afleiding van deze formule uitgewerkt.

De formule voor de kniklengte die gebruikt is door TU München is:

$$N_{ki} = \frac{\frac{\pi^2 EI}{L_{Hw}^2} w_{ki} + \frac{k_l L_{Hw}^2}{\pi^2} w_{ki}}{w_{ki} + \frac{L_{Hw}}{imperf}}$$

Waarin:

$N_{ki}$	de knikkracht
$L_{Hw}$	de kniklengte
$EI$	het buigtraagheid moment van de paal
$k_l$	lineaire elastische veerconstante van de gronddruk
$w_{ki}$	mobiliseringweg van de bodemreactie
$imperf$	de imperfectiefactor (volgens DIN-EN 14199)

De mobiliseringfactor is volgens de TU München [17]:

$$w_{ki} = \frac{k_l}{p_r} [m]$$

waarin:

$$k_l [kN / m^2] \quad \text{lineaire elastische veerconstante}$$

$$p_r [kN / m] \quad \text{de maximaal toelaatbare (bodem)reactie}$$

Deze formule lijkt sterk op de bekende kniklengte met de toevoeging van een reductiefactor. Het verband is beter zichtbaar wanneer de formule op een ander manier geschreven wordt:

$$F_k = \left[ \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} + \frac{k_l L_k^2}{\pi^2} \right] \left[ \frac{w_{ki}}{w_{ki} + \frac{L_k}{imperf}} \right]$$



De mobiliseringweg wordt berekend door de maximale bodemreactie (maximale elastische vervormingskracht) te delen door de lineaire elastische veerconstante. Uitgangspunt is dat de vervorming van de reactiekracht nooit in de plastische vervormingsfase komt. Dit is een belangrijk verschil met de eerder beschreven methode van Meek. Het is hierdoor niet heel interessant meer hoe de plastische vervorming er uit ziet. Dit gegeven is belangrijk, omdat de plastische vervorming van horizontale gronddruk een andere vorm heeft dan de plastische vervorming van de betonnen brugdoorsnede.

*N.B. Voor de betondorsnede mag zowel plastisch als elastisch worden gerekend. Belangrijk is daarbij dat de grenswaarden van de desbetreffende fasen worden toegepast en de veerstijfheid altijd positief is. Voor plastische grondveer geldt dat de plastische veerstijfheid gelijk is aan nul, waardoor voor de plastische grondveer de plastische vervorming buiten beschouwing gelaten moet worden.*

De rekenmethoden van Shields en de rekenmethode volgens de TU München liggen dicht bij elkaar. Beide geven een reductie op de al bekende knikkraft. Het verschil is dat de rekenmethode volgens TU München een reductiefactor geeft die uit te rekenen is. Verder is volgens het artikel [16] de rekenmethode van de TU München nauwkeuriger. Dit alles maakt het vanuit het oogpunt van de stabiliteit voor de leuningdragende brug interessant om te bekijken of de rekenmethode van de TU München ook toe te passen is voor onze situatie.

### 5.1.2 De reductiefactor

De rekenmethode volgens de TU München is de formule van Engesser met als toevoeging een reductiefactor. De reductiefactor houdt rekening met de imperfectie van de constructie, op basis van de elastische veerconstante. De reductiefactor is:

$$reductie_{TUM} = \left[ \frac{w_{ki}}{w_{ki} + \frac{L_k}{imperf}} \right] = \frac{w_{ki}}{w_{ki} + w_{imp}}$$

De invloed van de imperfectie is groter naarmate de elastische vervormingscapaciteit  $w_{ki}$  kleiner is.

De *imperfectiefactor* is te halen uit de NEN-EN 1992-1-1 [2]:

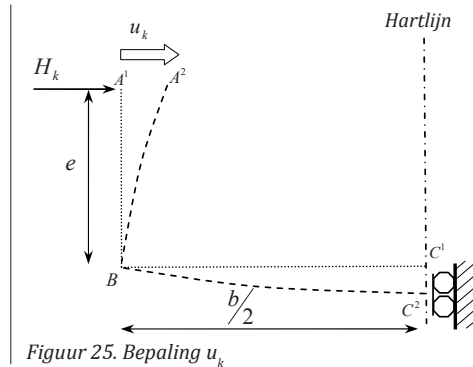
### Kip van slanke liggers (NEN-EN 1992-1-1, H5.9) [2]

II. *Bij de toetsing van niet-geschoorde liggers behoort als geometrische imperfectie een zijdelingse uitbuiging van  $l/300$  te zijn aangenomen, waarbij  $l$  = totale lengte van de ligger. In voltooide constructies mag met schoring door aansluitende elementen rekening zijn gehouden.*

De imperfectiefactor voor niet-geschoorde liggers is 300. De imperfectiefactor is de geometrische imperfectie van de zijdelinkse uitbuiging. Dit mag niet worden verward met de beginuitwijking die een hoekverdraaiing in rekening brengt.

Het verschil in de benadering is: dat, volgens de rekenmethode van de TU München, de kniklengte gedeeld moet worden door de imperfectiefactor, en volgens de NEN-EN 1992-1-1 gaat men er van uit dat de totale lengte van de ligger gedeeld moet worden door de imperfectiefactor.

In de voltooide constructie mag deze waarde waarschijnlijk gereduceerd worden tot de kniklengte gedeeld door de imperfectiefactor, als gevolg van de verende ondersteuning. Daarbij moet men wel realiseren dat deze stelling moeilijk op een rekentechnische manier te controleren is, omdat in de NEN-EN 1992-1-1 nergens terug te vinden is waarop deze toetsing gebaseerd is.

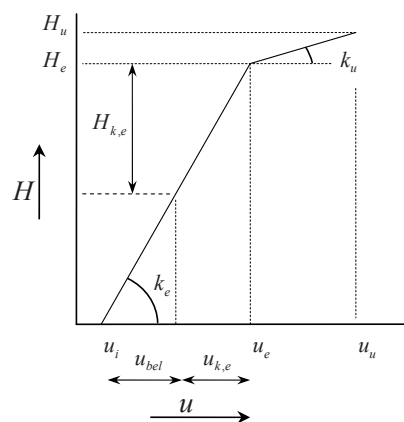


Figuur 25. Bepaling  $u_k$

De maximale bodemreactie in grond is meestal bekend, maar voor de brugdoorsnede moet deze maximale reactie uitgerekend worden. De maximale horizontale uitwijking is uit te rekenen, zie ook Figuur 25 ter verduidelijking:

$$u_k = \frac{H_k}{k_{\text{doorsnede}}} [m]$$

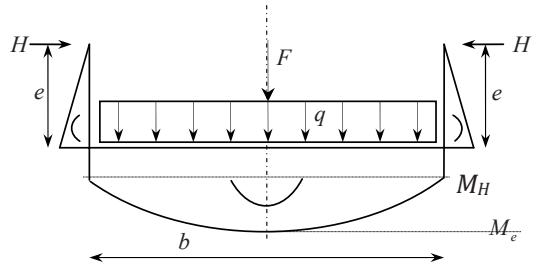
Het brugdek zal ook worden belast door de variabele belasting op het brugdek en het eigen gewicht van het brugdek. Deze belastingen reduceren de horizontale kracht  $H_k$ . In Figuur 26 is uitgezet wel deel van de horizontale uitwijking mag worden meegenomen in de berekening van de reductiefactor. De extra veiligheid van de doorsnede die beschikbaar is voor het opnemen van



Figuur 26. Uitwijking als gevolg van knik

de tweede orde belasting in de doorsnede wordt met behulp van deze berekening meegenomen in de berekening ten behoeve van de maximale knikkracht.

De maximale horizontale kracht kan worden teruggerekend uit de doorsnede. De brug heeft een breedte van 4 meter en een leuninghoogte van 1 meter, dat betekend dat het te verwachten maatgevend moment in het midden van het dek zit. In eerste instantie zal in de berekening alleen gekeken worden naar de maximale kracht  $H_k$  op basis van de momenten in het midden van het brugdek. Naderhand zal de doorsnede nog wel gecontroleerd moeten worden om zeker te zijn dat de zwakste schakel in de doorsnede, het veldmoment van het brugdek, zit als gevolg van de belasting  $H_k$ .



Figuur 27. Momenten in de doorsnede

*Moment door een puntlast op de leuningbovenregel:*

$$M_H = H e$$

*Moment door belasting op het brugdek:*

$$M_{d,dek} = \gamma \frac{q b^2}{8} + \gamma \frac{F b}{4}$$

De maximaal lineair elastische verplaatsing in het brugdek  $M_e$  zal worden berekend zoals in hoofdstuk 4 is omschreven. De horizontale kracht  $H_k$ , welke de lineair elastische tweede orde verplaatsing op kan nemen, zal hiermee uitkomen op:

$$H_{k,e} = \frac{[M_e - M_d]}{e} - H_d$$

*Waarin*

$H_d$  *de variabele puntlast loodrecht op de leuningbovenregel*

De veerstijfheid in de reductiefactor is de doorsnede veerstijfheid uit hoofdstuk 4.1. Het gaat hier over maximale horizontale uitwijking van de doorsnede.

De knikkracht zal inclusief de reductiefactor en inclusief de imperfectiefactor volgens NEN-EN 1992-1-1, H5.9 [2] zijn:

$$F_k = \left[ \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} + \frac{k l_k^2}{\pi^2} \right] \left[ \frac{u_k}{u_k + \frac{l}{300}} \right]$$

De leuningbovenregel is over de gehele lengte verend ondersteund. Zoals eerder is beredeneerd, wordt er van uitgegaan dat de lengte-aanduiding in de reductiefactor mag worden aangeduid als de kniklengte. Met de toevoeging van de normaalkracht vormfactor wordt de knikkracht dan, geschreven als de formule van Engesser:

$$F_k = \left[ \frac{u_k}{u_k + \frac{l_k}{300}} \right] \alpha 2 \sqrt{k_{doorsnede} EI_{regel}}$$

Waarin:

$$l_k = \pi^4 \sqrt{\frac{EI_{regel}}{k_{doorsnede}}} \quad \text{de kniklengte van de leuningbovenregel}$$

$$u_k = \frac{H_k}{k_{doorsnede}} \quad \text{de horizontale knikuitwijking}$$

$$k_{doorsnede} \quad \text{de veerconstante van de doorsnede}$$

$$\alpha \quad \text{de normaalkracht verhouding}$$

## 5.2 De normaal drukkracht in de leuningbovenregel

Voordat de uitleg over de stabiliteitsfactor beschreven wordt, is het nodig om te weten wat de werkelijke normaal drukkracht in de leuningbovenregel is.

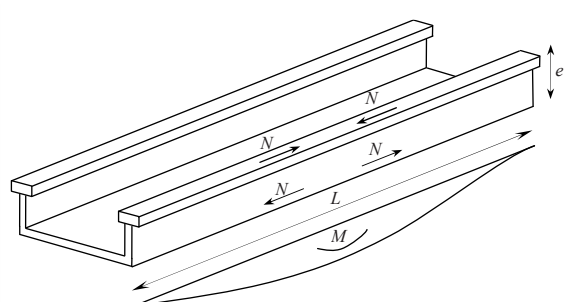
De leuninggen zijn dragend. De leuninggen kunnen gezien worden als een hoge slanke balk, een vakwerkligger, een I-profiel, enzovoort. Het gaat erom dat het moment in de brug, over de overspanning in de lengterichting, wordt omgezet in een drukkracht in de leuningbovenregel en een trekkracht in de leuningonderregel. Alle belasting op het brugdek wordt via de leuningonderregel en de vlakvulling overgedragen als een normaal drukkracht in de leuningbovenregel.

Uit Figuur 28 is de normaalkracht in de leuning te herleiden.

$$N = \frac{M}{e}$$

De normaal drukkracht is hiermee direct gekoppeld aan het werkelijk optredend moment over de overspanning van de hele brug. De meest

bekende momenten die optreden zijn die met een gelijkmatig verdeelde belasting over de gehele lengte en een puntlast in het midden van de brug. Er zijn veel



Figuur 28. Drukkracht in de bovenregel

belastingcombinaties mogelijk die andere moment vormen opleveren, maar dat is te veel om hier weer te geven en bovendien zou het dan niet duidelijk worden.

$$M_{\text{gelijkmatig verdeelde belasting}} = \frac{1}{8} q_{\text{brug}} L^2 \quad M_{\text{puntlast in het midden}} = \frac{1}{4} F L$$

De optredende normaaldrukkracht in de leuningbovenregel wordt daarmee:

$$N = \frac{q_{\text{brug}} L^2 + 2 F L}{8e}$$

### 5.3 De stabiliteitfactor

Instabiliteit treedt op wanneer de knikkracht kleiner is dan de werkelijk optredende drukbelasting op de bovenregel. Knikkracht moet op z'n minst groter zijn dan de normaal drukkracht.

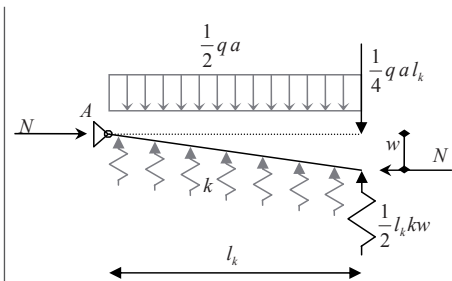
$$N \leq F_k$$

De knikkracht  $F_k$  is de zuivere knikkracht, maar staven zonder imperfecties bestaan niet. En een 100% zuivere drukbelasting is vrijwel onmogelijk te realiseren.

In de praktijk zal daardoor de knikkracht nooit gehaald worden. Wel wordt er rekening gehouden met de maximale verplaatsing van de elastische veerconstante. Bovendien betekent instabiliteit instorten en niet een langzame doorbuiging. Dat betekent dat als de brug instabiel is of kans daarop is, er een gevaarlijke situatie optreedt. De brug waarschuwt niet, zodat er gelegenheid kans is om veilig van de brug af te komen. Het is daarom belangrijk om de krachten  $F_k$  en  $N$  nooit te dicht bij elkaar in de buurt te laten komen. Maar hoe groot moet het verschil zijn?

Eén manier is door te zoeken naar een vergrotingfactor op de verplaatsing. De leuningregel kan worden geschetst zoals voorgesteld in Figuur 29. Hierbij moet worden opgemerkt dat dit slechts een benadering is van de exacte situatie.

De belasting en de verende ondersteuning wordt omgeschreven naar een kracht op een plaats. Met behulp van de momentensom om het fictieve steunpunt A wordt dan de verplaatsing  $w$  berekend.



Figuur 29. Stabiliteit in de bovenregel

In de berekening wordt gezocht naar de versterkingsfactor voor de verplaatsing en de invloed daarvan.

$$\Sigma T_A = 0$$

$$\frac{1}{4} q a l_k^2 + N w - \frac{1}{2} k w l_k^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{1}{4} q a l_k^2}{w} + N - \frac{1}{2} k l_k^2 = 0$$

De totale verplaatsing is:

$$w = \frac{\frac{1}{4} q a l_k^2}{k l_k^2 - 2N}$$

Zonder drukkracht is de verplaatsing:

$$N = 0 \quad \rightarrow \quad w_0 = \frac{q a l_k^2}{2 k l_k^2} = \frac{q a}{2 k}$$

Tussenstap

$$\frac{1}{2} k w_0 = \frac{q a}{4}$$

De verplaatsing wordt:

$$w = \frac{\frac{1}{2} k l_k^2}{\frac{1}{2} k l_k^2 - N} w_0$$

Door de knikkraft in te vullen wordt de tweede orde verplaatsing verkregen.

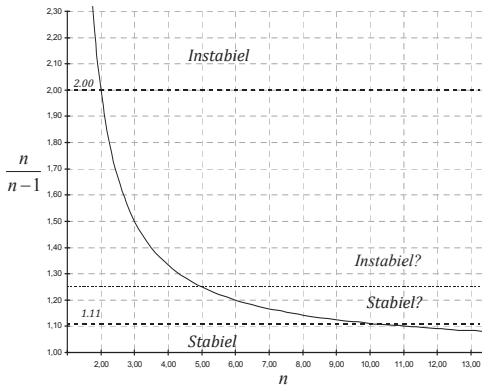
$$F_k = \frac{1}{2} k l_k^2 \quad \rightarrow \quad w = \frac{F_k}{F_k - N} w_0$$

De uiteindelijke tweede orde verplaatsing is dan:

$$w = \frac{n}{n-1} w_0 \quad \text{met} \quad n = \frac{F_k}{N}$$

Deze methode is hier in Nederland geïntroduceerd door Prof. D. Dicke [8]. De exacte verplaatsing hoeft nu nog niet bepaald te worden. Voor de stabiliteit is met name de versterkingsfactor erg interessant. De versterkingsfactor heeft de volgende vorm:

$$\frac{n}{n-1}$$



Figuur 30. Versterkingsfactor tweede orde

Deze versterkingsfactor is in Figuur 30 uitgezet. Uit de grafiek valt af te lezen dat wanneer  $n \rightarrow \infty$ , dat de versterkingsfactor naar 1 gaat. En voor  $n \approx 1^+$  weten we zeker dat de leuningregel bezwijkt op knik.

Uit de praktijk blijkt dat constructies bestaande uit een vrije kolom structuur met een  $n \geq 10$  als stabiel beschouwd [8], [2] kunnen worden. De berekening mag dan verder plaats vinden door de versterkingsfactor te vermenigvuldigen met de belasting. Ook is bekend dat wanneer  $n \leq 2$ , constructies zo goed als zeker bezwijken. De eerste orde verplaatsing zal hierbij als gevolg van de stabiliteitsfactor  $n$  verdubbeld worden. Dit is zeer inefficiënt voor het ontwerp en risicovol bij overschrijding van de berekende belasting.

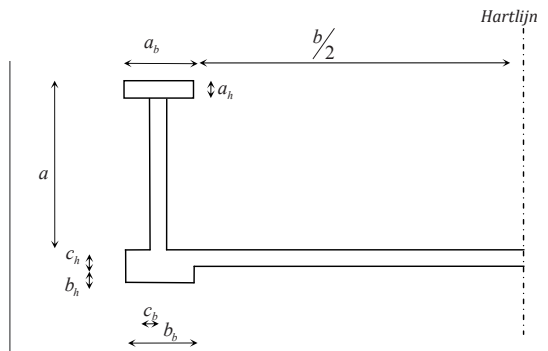
Figuur 30 bevestigt deze redenering, echter tussen  $2 \geq n \geq 10$  zit nog een behoorlijk grijs vlak waarin niet bekend is of de constructies als stabiel of als instabiel beschouwd moeten worden. Een stabiliteitsfactor van 5 geeft een versterkingsfactor op de verplaatsing van 1,25. Dit komt dicht in de buurt van de stabiele stabiliteitsfactor 10 dan van de instabiele stabiliteitsfactor van 2. Om toch een betere benadering van de stabiliteitsfactor te krijgen zal in de volgende paragraaf worden gezocht naar een ondergrens voor de stabiliteitsfactor.

## 5.4 Resultaten van de stabiliteit versterkingsfactor

Deze paragraaf zal op basis van een ontwerpberekening resultaten weergeven van de stabiliteit versterkingsfactor. Door het variëren van verschillende afmetingen van de brug is in de resultaten terug te vinden welke afmeting variabele grote invloed heeft op de tweede orde verplaatsing. In Bijlage E is een complete berekening van de stabiliteit van de brug gemaakt. De formules in die berekening zijn eerder uitgelegd en uitgewerkt in de voorgaande hoofdstukken. Het referentieontwerp in Bijlage E komt uit op de volgende waarden:

### 5.4.1 Afmetingen ontwerp brug:

Lengte brug	$L = 16\ 000\ \text{mm}$
Breedte brug	$b = 4\ 000\ \text{mm}$
Leuning hoogte	$a = 1\ 000\ \text{mm}$
Breedte leuningbovenregel	$a_b = 300\ \text{mm}$
Hoogte leuningbovenregel	$a_h = 110\ \text{mm}$
Breedte leuningonderregel	$b_b = 300\ \text{mm}$
Hoogte t.b.v. verankering	$b_h = 60\ \text{mm}$
Dikte vlakvulling	$c_b = 110\ \text{mm}$
Hoogte dek	$c_h = 140\ \text{mm}$
Een meter breedte	$m = 970\ \text{mm}$



Figuur 31. Afmetingen.

De combinatie van het eigen gewicht van de brug met een variabele belasting op de brug van  $5\ \text{kN/m}^2$  geeft een stabiliteitsfactor  $n$  van 6,19. De combinatie van het eigen gewicht van de brug met een geconcentreerde belasting op de brug van  $50\ \text{kN}$  geeft een stabiliteitsfactor  $n$  van 8,49. Deze waarden zijn om te rekenen naar een stabiliteit vergrotingsfactor, welke in grafisch wordt afgezet tegen:

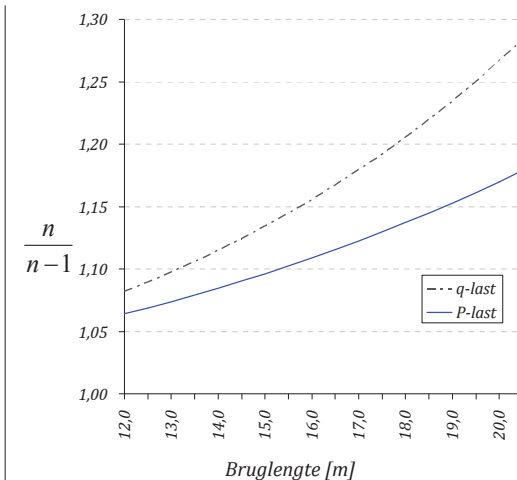
- Lengte van de brug
- Breedte van de brug
- Leuningbovenregel
- Dekdikte
- Breedte van de leuning/vlakvulling
- Leuningonderregel
- Dekking op de wapening
- Invloed van een gelijkmatig verdeelde belasting op de brug
- Invloed een geconcentreerde belasting op de brug

Als basis voor de grafieken is uitgegaan van; betonklasse C50/60, een dekking op de wapening van  $25\ \text{mm}$ , de diameter van de wapening in het brugdek is  $32\ \text{mm}$  en de diameter van de wapening in de brugleuning is  $25\ \text{mm}$ .



### 5.4.2 Lengte van de brug

Een langere brug resulteert in een grotere normaaldrukkraft in de leuningbovenregel. Hoe groot dat effect is, is uitgezet in de onderstaande grafiek. De grafiek is gemaakt op basis van de referentieberekening in Bijlage E, met als enige variabele de lengte van de brug. De resultaten zijn in de grafiek afgezet tegen de stabiliteit versterkingsfactor, wat overeenkomt met de vergoting van de horizontale verplaatsing van de leuningbovenregel als gevolg van de optredende normaalkraft.



Figuur 32. Invloed van de lengte op de stabiliteit verhogingsfactor

Er zijn twee berekeningen gemaakt; één op basis van het eigen gewicht met een gelijkmatig verdeelde belasting op de brug en de leuningbovenregel  $q$  en één op basis van het eigen gewicht van de brug met een puntlast op de brug en de leuningbovenregel.

De belasting op de leuningbovenregel is een horizontale belasting.

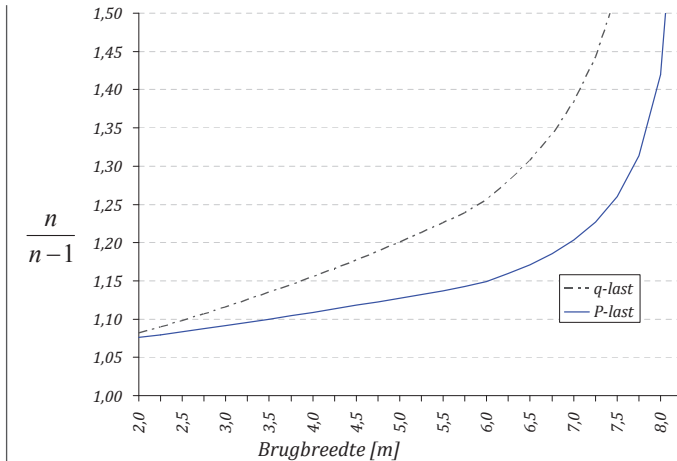
De resultaten zijn niet verrassend. Een langere brug kent een groter eigen gewicht en een groter belastbaar oppervlak, wat resulteert in een grotere normaaldrukkraft in de leuningbovenregel. De stabiliteitsfactor  $n$  wordt kleiner en de stabiliteit verhogingsfactor wordt groter naarmate de brug langer wordt. Doordat de totale verticale geconcentreerde belasting (P-last) niet toeneemt, naarmate het belastbaar oppervlak van de brug groter wordt, stijgt deze stabiliteit verhogingsfactor minder snel als die van de gelijkmatig verdeelde belasting (q-last).

### 5.4.3 Breedte van de brug

Een bredere brug bij gelijke dekdikte resulteert in lagere doorsnede stijfheid van de leuningbovenregel. Als gevolg daarvan zal de knikkraft afnemen en dus de stabiliteitsfactor ook. De invloed van de stabiliteitsfactor neemt toe naarmate de stijfheid van de doorsnede kleiner wordt. Ook het belastbaar oppervlak van de brug wordt groter naarmate het brugdek breder wordt.

De grafiek is gemaakt aan de hand van de referentieberekening uit Bijlage E, met als enige variabele de brugbreedte, op dezelfde manier als bij de bepaling met variabele bruglengte.

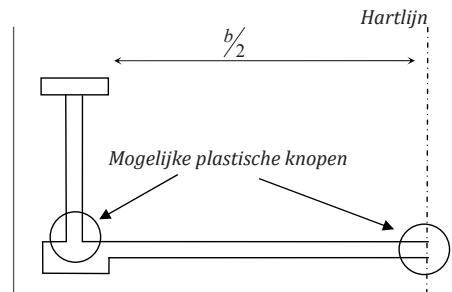
Net als bij de resultaten bij een variabele lengte van de brug is stijgt ook hier de gelijkmatig verdeelde belasting sneller dan de geconcentreerde belasting.



Figuur 33. Invloed van de brugbreedte op de stabiliteit vergrotingsfactor

In de grafiek valt op dat tot een lengte van 6 meter de vergroting lineair lijkt te zijn. In werkelijkheid is deze lijn niet lineair, maar vergrotingsstap wordt heel langzaam groter, tot de brugbreedte van 6 meter is bereikt. Bij een brugbreedte van 6 meter verplaatst het plastisch scharnier van de onderin de leuningvlakvulling naar het midden van het brugdek. Het gevolg is dat de knikkracht in hoog tempo afneemt. De oorzaak hiervan in de theoretische formule is te herleiden naar de reductiefactor.

$$F_{k,TUM} = \left[ \frac{u_k}{u_k + \frac{l_k}{300}} \right] F_{k,eng}$$

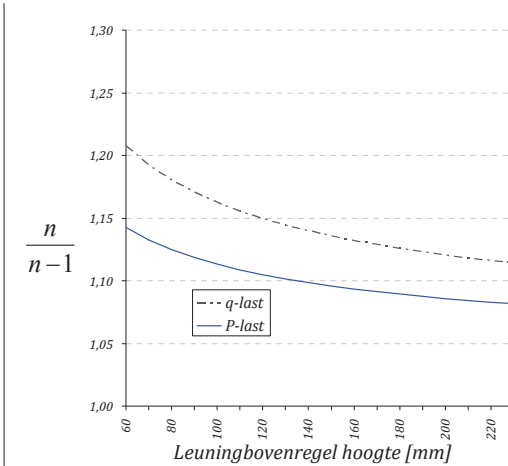


Figuur 34. Plastische knopen

De waarde voor  $u_k$  neemt in hoog tempo af bij grotere brugbreedtes dan 6 meter. Het gevolg is een sterke daling van de knikkracht waardoor de stabiliteit vergrotingsfactor snel stijgt.

### 5.4.4 Leuningbovenregel

De leuningbovenregel is de drukligger van de constructie. De hoogte en de breedte van deze ligger zijn van grote invloed op de knikkraft en daardoor de stabiliteit van de brug. De invloed van deze afmetingen is uitgezet in de onderstaande grafiek. De grafiek is gemaakt aan de hand van de referentieberekening uit Bijlage E,



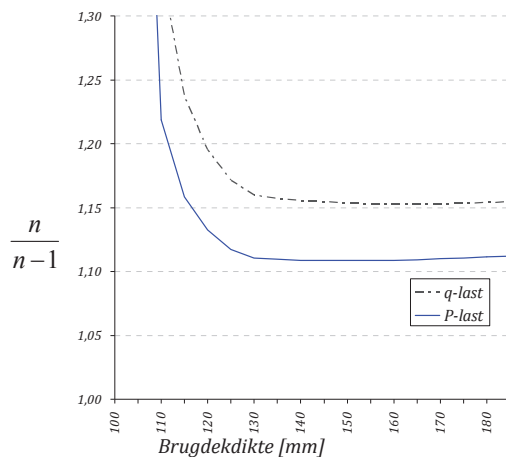
Figuur 35. Invloed van de hoogte van de leuningbovenregel op de stabiliteit vergrotingsfactor

met als enige variabele de hoogte en de breedte van de leuningbovenregel. In de referentieberekening is de afmeting van de leuningbovenregel aangehouden op 110 millimeter hoog bij 300 millimeter breed.

Het verbreden en verhogen van de leuningbovenregel heeft een gunstig effect op de stabiliteit versterkingsfactor. Deze gunstig invloed wordt steeds minder naarmate de afmetingen groter worden.

### 5.4.5 Dekdikte

In de constructie is het brugdek een kritiek onderdeel in de doorsnede stijfheid. Het brugdek bepaald in belangrijke mate hoe groot de veerstijfheid  $k$  uit de doorsnede is. Het brugdek kent twee geometrische variabelen, waarvan één al in subparagraaf 5.4.2 is bekeken. De dekdikte is de variabele waarvan in deze paragraaf de invloed op de stabiliteit en de tweede orde effecten wordt bekeken. De invloed van deze afmeting is uitgezet in de onderstaande grafiek. De grafiek is gemaakt aan de hand van de referentieberekening uit Bijlage E. In de referentieberekening is de brugdedikte aangehouden op 140 millimeter.



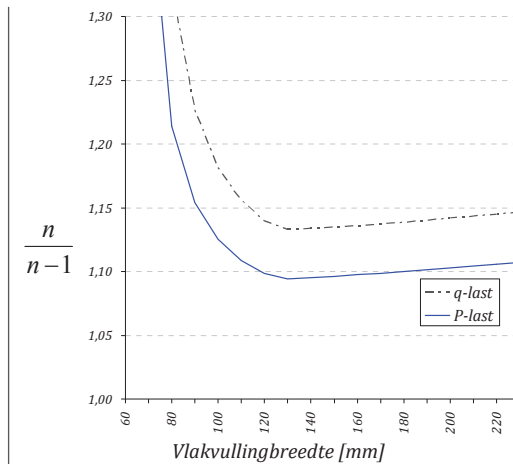
Figuur 36. Invloed van de brugdedikte op de stabiliteit vergrotingsfactor

De plastische knoop zit in het brugdek bij een dikte kleiner dan 130 mm. De reductiefactor van de imperfectie zorgt er voor bij kleinere dekdikten dat de knikkraft snel afneemt, waardoor de stabiliteit vergrotingsfactor in de grafiek snel stijgt. Nadat de maatgevende plastische knoop in de doorsnede niet meer in het brugdek zit, is de invloed van de dekdikte niet meer zo groot.

Het brugdek speelt ook een belangrijke gewichtsfactor in de brug. De extra stijfheid van het brugdek zal daardoor, na een brugdedikte van 150-160 mm in de huidige berekening, geen meerwaarde meer geven voor de stabiliteit.

#### 5.4.6 Breedte van de leuning/vlakovulling

De vlakovulling van de leuning is bijna net zo belangrijk voor de veerstijfheid  $k$  van de doorsnede als het brugdek. De hoogte van de leuningbovenregel boven het dek is constant over de gehele lengte van de brug. De dikte of breedte van de vlakovulling is een vrije variabele waarvan de invloed in een grafiek is uit te zetten. In de referentieberekening in Bijlage E is voor deze waarde 110 millimeter aangehouden. De grafiek met de invloed van de breedte van de vlakovulling voor betonklasse C50 is:



Figuur 37. Invloed van de vlakovullingbreedte op de stabiliteit vergrotingsfactor

Deze grafiek komt in vorm en mechanisme overeen met de grafiek van het brugdek. Tot een vlakovullingbreedte van 130 millimeter zit de plastische knoop uit Figuur 37 in de vlakovulling. De invloed van de breedte van de vlakovulling wordt negatief zodra de plastische knoop in het hart van het brugdek komt.

De ideale situatie zou dus zijn dat de plastische knoop gelijktijdig in het brugdek als onderin de vlakovulling ontstaat. De restcapaciteit van de horizontale veer  $k$  uitgedrukt in  $u_k$  is dan gelijk

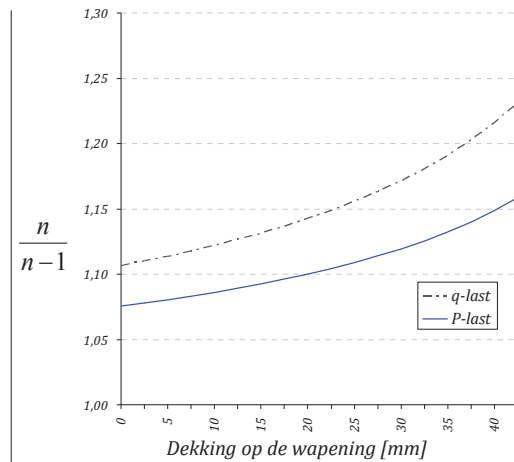
voor de plastische knopen in het brugdek en in de vlakovulling. Dit is ook de meest efficiënte ontwerp van deze onderdelen, omdat elke mm meer materiaal nauwelijks effect heeft op de stabiliteit.

### 5.4.7 Dekking op de wapening

Gewapend beton kent een minimale dekking op de wapening, het betonstaal, om te voorkomen dat corrosie ontstaat. Constructief is deze dekking alleen maar ballast, de dekking in de trekzone wordt constructief niet gebruikt. Deze paragraaf zal even in het kort laten zien hoe groot de invloed van de dekking is op de beperkte constructiehoogte waarmee deze berekening is gemaakt. De dekking in de referentieberekening in Bijlage E is 25 millimeter. Daarbij is van belang dat de hoogte van de constructie niet varieert, maar alleen de hoogte van de dekking op de wapening. Je zou dus kunnen stellen:

*Stel dat we de wapening een te grote of een te kleine dekking geven als is voorgeschreven; welke invloed heeft dat op de stabiliteit.*

Een kleinere dekking bij een gelijkblijvende hoogte heeft met name invloed op de veerstijfheid  $k$  van de doorsnede. Een grotere veerstijfheid leidt direct tot een grotere knikkracht en een hogere stabiliteit vergrotingsfactor. In de praktijk wel eens wil voorkomen dat de wapening een paar millimeter hoger of lager in de doorsnede is geplaatst dan is voorgeschreven. Het is van belang om de invloed daarvan dan juist in te kunnen schatten. Dat kan met deze grafiek.



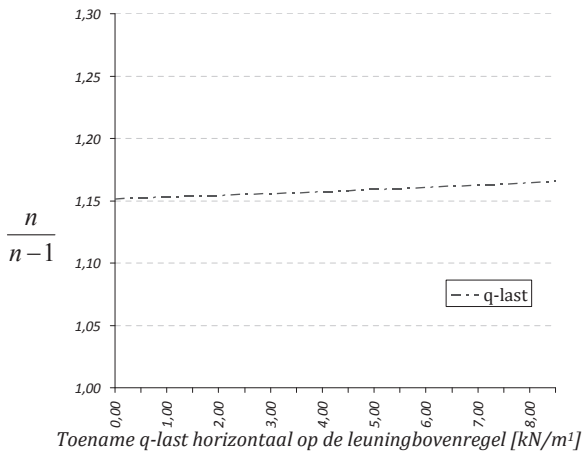
Figuur 38. Invloed van de dekking op de wapening op de stabiliteit vergrotingsfactor

### 5.4.8 Invloed van een gelijkmatig verdeelde belasting op de brug.

In de referentieberekening in Bijlage E zijn twee vormen van een gelijkmatig verdeelde belasting meegenomen:

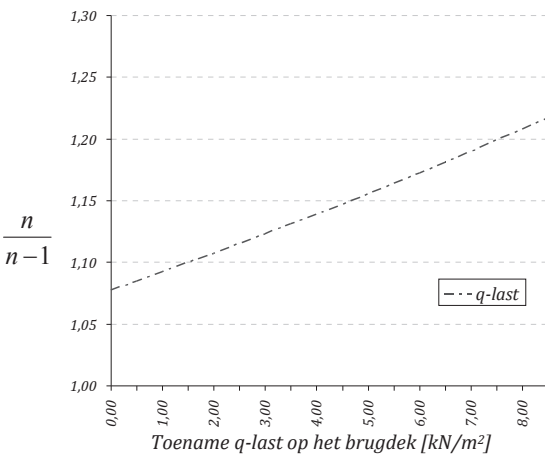
- Een gelijkmatig verdeelde belasting van  $5 \text{ kN/m}^2$  op het brugdek.
- Een lijnlast van  $3 \text{ kN/m}^1$  tegen de leuningbovenregel.

De invloed van de lijnlast tegen de leuningbovenregel is niet bijzonder. Omdat het gaat om een lijnlast over de volledige lengte neemt deze belasting een deel van de capaciteit van de verende ondersteuning weg. De invloed op de stabiliteit is alleen terug te vinden in de reductiefactor op imperfectie.



Figuur 39. Invloed van de gelijkmatig verdeelde belasting op de stabiliteit vergrotingsfactor

De gelijkmatig verdeelde belasting op het brugdek heeft een grote invloed op de normaaldrukkracht in de leuningbovenregel. De grafiek toont een lineair verband tussen de gelijkmatig verdeelde variabele belasting op het brugdek en de stabiliteit versterkingsfactor. De lineaire helling is toevallig en afhankelijk van de stijfheid van de brug.

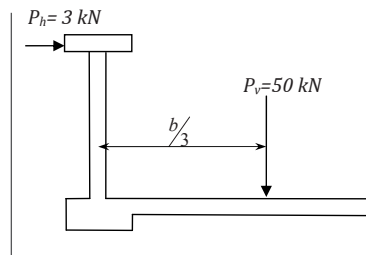


Figuur 40. Invloed van de gelijkmatig verdeelde belasting op de stabiliteit vergrotingsfactor

### 5.4.9 Invloed een geconcentreerde belasting op de brug.

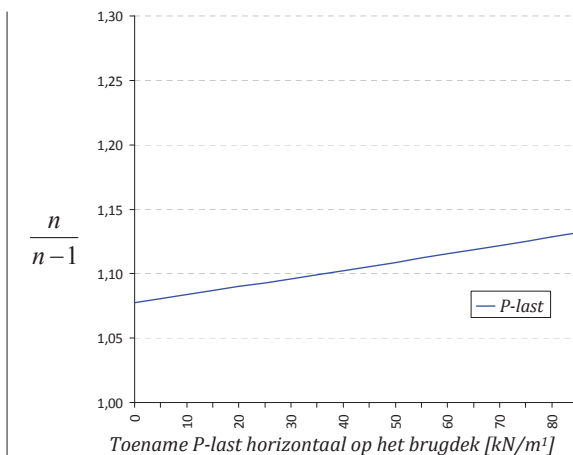
Net als bij de gelijkmatig verdeelde belasting is in de referentieberekening ook rekening gehouden met twee geconcentreerde belastingen op de brug.

- Een geconcentreerde belasting van 50 kN op het brugdek, deze geconcentreerde belasting is gesitueerd op een afstand van een half  $L$  gerekend vanaf de opleggingen van de brug. En op een afstand van een derde  $b$  uit de leuning van de brug. De puntlast is bewust niet in het midden van de breedte van de brug geplaatst, omdat deze kleine verschuiving naar één van beide leuningen een groter invloed op de zwaarst belaste leuning zal hebben. Dit is te vergelijken met een voertuig die niet in het midden van de brugbreedte staat.
- Een geconcentreerde belasting van 3 kN op de leuningbovenregel. Volgens de richtlijnen moet er rekening gehouden worden met een horizontale puntlast op de leuningbovenregel. De invloed van deze belasting is net als de horizontale gelijkmatig verdeelde belasting op de leuningbovenregel zeer klein. Het heeft daarom geen toegevoegde waarde om ook deze waarde in een grafiek weer te geven.



Figuur 41. Puntlasten

De invloed van de puntlast is niet groot heeft met name te maken omdat de brug al een grote massa heeft. De rekenwaarde voor het eigen gewicht van de deze brug is 496 kN.



Figuur 42. Invloed van de geconcentreerde belasting op de stabiliteit vergrotingsfactor

## 6 Sterkte van de leuningbovenregel

Sterkte en stabiliteit zijn twee verschillende toetsingen, maar ze zijn allebei even belangrijk. Het theoretisch model wat in hoofdstuk 3 is opgesteld gaat uit van een verend ondersteunde drukligger (Figuur 13). De drukligger is de leuningbovenregel en de verende ondersteuning komt uit de doorsnede. Indien de veer oneindig stijf is kan de drukligger belast worden totdat deze op druksterkte bezwijkt. De stabiliteit is dan niet maatgevend. Vooraf is het niet bekend of de veerstijfheid  $k$  stijf genoeg is om 'bezwijken op sterkte' maatgevend te maken.

Dit hoofdstuk zal daarom met name ingaan op de toetsingen op normaal druksterkte en het buigend moment in de leuningbovenregel. De dwarskracht is achterwege gelaten, aangezien in het referentieontwerp wordt uitgegaan van een massieve valkvulling tussen de leuningboven- en onderregel, waardoor de dwarskrachtcapaciteit erg groot zal zijn. De dwarskracht op de leuningbovenregel is wel van belang bij de mootovergangen. Hiervoor is een detailberekening nodig welke vooralsnog niet is toegevoegd. In een later stadium moet deze detailberekening wel gemaakt worden.

### 6.1 Toetsing op normaaldruksterkte

De toetsing is:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \leq 1,0$$

De waarde voor de optredende normaaldrukkracht  $N_{Ed}$  is hetzelfde als reeds in hoofdstuk 5.2 beschreven is. De waarde voor de opneembare normaaldrukkracht van de doorsnede  $N_{Rd}$  wordt in de NEN-EN 1992-1-1, H12.6.5.2 [2] gegeven in een *vereenvoudigde rekenmethode* als:

$$N_{Rd} = A_c f_{cd} \Phi$$

Waarin:

$A_c$  is het totale betonoppervlak van de doorsnede  
 $f_{cd}$  is de rekenwaarde van de druksterkte van beton

$$\Phi = 1,14 \left[ 1 - \frac{2e_{tot}}{h_w} \right] - 0,02 \frac{l_k}{h_w} \leq 1 - \frac{2e_{tot}}{h_w}$$



*Waarin:*

- $e_{tot}$  is de totale afstand van het aangrijpingspunt van de normaalkracht tot het hart van de doorsnede
- $h_w$  is breedte of hoogte van de doorsnede waarover de excentriciteit plaats vindt
- $l_k$  is de kniklengte

De afstand  $e_{tot}$  is in dit geval gelijk aan de initiële excentrische aangrijping van de normaalkracht als gevolg van imperfecties. De initiële uitwijking kan berekend worden met behulp van de in NEN-EN 1992-1-1, H5.2 [2]:

$$e_i = \frac{l_k}{2} \frac{1}{200} \alpha_h$$

*Waarin:*

$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l_k}} \quad \text{reductiefactor voor de lengte,} \quad \frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1,0$$

Het invullen van de bovenstaande formules, uitgaande van de kniklengte uit Bijlage E en betonklasse C50, geeft een opneembare normaal drukkracht  $N_{Rd}$  van 823,82 kN. De berekening is terug te vinden in Bijlage H.

De optredende normaal drukkracht  $N_{Ed}$  uit Bijlage E is:

$$N_{Ed,q-last} = 914,61 \text{ kN}$$

$$N_{Ed,p-last} = 666,33 \text{ kN}$$

De toetsing laat zien dat met de bovenstaande opneembare normaal drukkracht de constructie niet voldoet, indien de vereenvoudigde rekenmethode gebruikt is.

*De onderstaande waardes zijn berekend in Bijlage H.*

$$\frac{N_{Ed,q-last}}{N_{Rd}} = \frac{914,61}{824,55} = 1,11 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet NIET}$$

$$\frac{N_{Ed,p-last}}{N_{Rd}} = \frac{666,33}{824,55} = 0,81 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet}$$

Andere methoden om de maximaal opneembare normaalkracht in de doorsnede te bepalen zijn gebaseerd op of de maximale elastische drukrek in de doorsnede of de maximale drukspanning in de doorsnede. De maximale drukspanning volgens NEN-EN 1992 H6.5.2 [2] waarmee in ongescheurde drukstaven mag worden gerekend is:

$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd}$$

*Deze spanning mag maximaal gebruikt worden indien de doorsnede over het gehele oppervlak op druk belast wordt.*

Dat betekent dat wanneer de leuningbovenregel centrisch belast is, de opneembare normaal drukkracht op de leuning is:

$$N_{Rd,max,centr} = A_c \sigma_{Rd,max} = 110 \cdot 300 \cdot 33,33 = 1099,89 \text{ kN}$$

Een excentrische belasting benaderen met de maximale drukspanning geeft veel te conservatieve waarden. Dat zou namelijk betekenen dat bovenstaande waarde gehalveerd wordt. Het is daarom beter om in de rekrelatie te zoeken naar de beste maximale elastische drukrek. Met de wet van Hooke wordt vervolgens de rek weer omgerekend naar spanning.

De grenswaarde van de drukrek die kan optreden voordat er plastische drukrek of trek in de dwarsdoorsnede van de leuningbovenregel ontstaat is weergegeven in Figuur 43. Omdat hier teruggerekend wordt naar de rekken en de maximale drukrek lokaal plaatsvindt is het niet nodig om de maximale sterkte te reduceren met een materiaal veiligheidsfactor van 1,5, zoals bij de berekening op basis van spanningen en krachten wel is gerekend. De maximaal opneembare normaal drukkracht in de dwarsdoorsnede is:

$$N_{Rd,max} = A_c \frac{1}{2} \epsilon_{c3} E_c 110 \cdot 300 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,75 \cdot 22 \cdot \left[ \frac{58}{10} \right]^{0,3} = 1076,39 \text{ kN}$$

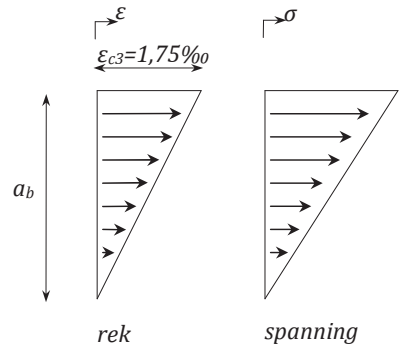
De toetsingen op de drukspanning voldoen nu wel, maar daarbij moet wel worden opgemerkt dat er nog geen rekening is gehouden met dubbele buiging. Met behulp van het optredende moment over de lengte van de brug en de buigstijfheid van de brug is de kromming  $K$  in lengterichting van de brug te bepalen. De kromming kan worden omgerekend naar de drukrek in de leuningbovenregel.

De drukrek bovenin de leuningbovenregel is:

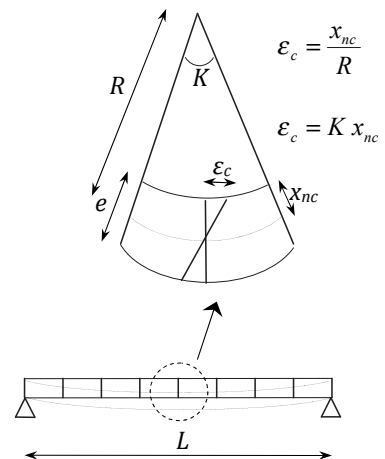
$$\epsilon_{c,top} = K [x_{nc}]$$

De drukrek bovenin de leuningbovenregel is:

$$\epsilon_{c,ond} = K [x_{nc} - a_h]$$



Figuur 43. Rek- en spanningrelatie



Figuur 44. Drukrek in lengterichting

De maximale rek komt voor boven in de leuningbovenregel. Voor het berekenen van de toelaatbare normaal drukkracht wordt daarom alleen gerekend met de drukrek onderin de leuningbovenregel. De formule voor de maximaal toelaatbare betondrukkracht wordt daarmee:

$$N_{Rd,max} = A_c \frac{1}{2} [\varepsilon_{c3} - \Delta\varepsilon_c] E_c$$

Waarin:

$$\Delta\varepsilon_c = \varepsilon_{c,top} - \varepsilon_{c,ond} = K a_h$$

De krommingswaarde kappa  $K$  is te bepalen door het moment, welke in hoofdstuk 5.2 en Bijlage E al bepaald is, te delen door de buigstijfheid welke is uitgewerkt in Bijlage F.

$$EI_{brug,z} = EI_{bovenregel} + EI_{onderregel} + EI_{voorspanstaal}$$

Waarin:

$$EI_{bovenregel} = 2E_c \left[ \frac{a_b a_h^3}{12} + a_b a_h \left( x_{nc} - \frac{a_h}{2} \right)^2 \right]$$

$$EI_{onderregel} = 2E_c \left[ \frac{b_b (c_h + b_h)^3}{12} + b_b (c_h + b_h) \left( a - x_{nc} + \frac{b_h + c_h}{2} \right)^2 \right]$$

$$EI_{voorspanstaal} = E_s A_p \left( a - x_{nc} + \frac{b_h + c_h}{2} \right)^2$$

Waarin:

$$x_{nc} = \frac{2E_c \left[ a_b a_h \frac{a_h}{2} + b_b (c_h + b_h) \left( a + \frac{c_h + b_h}{2} \right) \right] + E_s A_p \left( a + \frac{c_h + b_h}{2} \right)}{2E_c [a_b a_h + b_b (c_h + b_h)] + E_s A_p}$$

De toetsing op drukrek voldoet wanneer de maximale drukrekgrens gesteld is op 1,75‰. De invloed van de imperfectie op de normaal drukkracht is in bovenstaande vergelijkingen niet meegenomen. De scheefstand van 10,758 mm over de halve kniklengte van 4630 mm, als gevolg van imperfectie, heeft vrijwel geen invloed op de onderstaande toetsing.

De onderstaande waarden zijn berekend in Bijlage H.

$$\frac{N_{Ed,q-last}}{N_{Rd,max,q-last}} = \frac{914,61}{1006} = 0,91 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet}$$

$$\frac{N_{Ed,P-last}}{N_{Rd,max,P-last}} = \frac{666,33}{1025} = 0,65 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet}$$

## 6.2 Het buigend moment

In de leuningbovenregel zit tevens een buigend moment. Het buigend moment wordt veroorzaakt door ongelijkmatig verdeelde horizontale krachten op de leuningbovenregel, maar ook door het tweede orde effect van de druk normaalkracht in de leuningbovenregel. In NEN-EN-1992-1-1 H5.8.9 [2] wordt de toetsing voor dubbele buiging beschreven:

$$\left(\frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}}\right)^a + \left(\frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}}\right)^a \leq 1,0$$

Waarin:

$M_{Edz/y}$	is de rekenwaarde van het moment
$M_{Rdz/y}$	is de momentweerstand
$a$	is voor rechthoekige doorsnede een lineaire interpolatie tussen:
	$N_{Ed}/N_{Rd}$ 0,1      0,7      1,0
	$a =$ 1,0      1,5      2,0

Waarbij:

$N_{Ed}$	is de rekenwaarde voor de normaalkracht
$N_{Rd} =$	$A_c f_{cd}$ (voor ongescheurt ongewapend beton)

In Bijlage G wordt uitgewerkt hoe de rekenwaarde voor het moment  $M_{Edy}$  bepaald kan worden. De formule die daar wordt gevonden voor deze waarde is:

$$M_{Edy} = \left[ \frac{\frac{1}{8} q_d l_k^2 + \frac{1}{4} P_d l_k}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI_{regel,y}}} + \frac{\pi^2 EI_{regel,y}}{l_k^2} \frac{1}{n-1} \left\{ \frac{\frac{5}{384} \frac{q_d l_k^4}{EI_{regel,y}} + \frac{1}{48} \frac{P_d l_k^3}{EI_{regel,y}}}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI_{regel,y}}} + u_i \right\} \right]$$

Waarin:

$q_d$	is de rekenwaarde van de totaal gelijkmatig verdeelde belasting horizontaal op de leuningbovenregel
$P_d$	is de rekenwaarde van de geconcentreerde belasting horizontaal op de leuningbovenregel
$l_k$	is de kniklengte van de leuningbovenregel
$EI_{regel,y}$	is de buigstijfheid van de leuningbovenregel
$k$	is de veerstijfheid van de brugdoorsnede
$n$	is de stabiliteitsfactor
$u_i$	is de uitbuiging als gevolg van imperfectie in de leuningbovenregel

Het optredend moment  $M_{Edz}$  kan worden teruggerekend met de gevonden waarde voor de kromming van de brug in langsrichting in de vorige paragraaf.

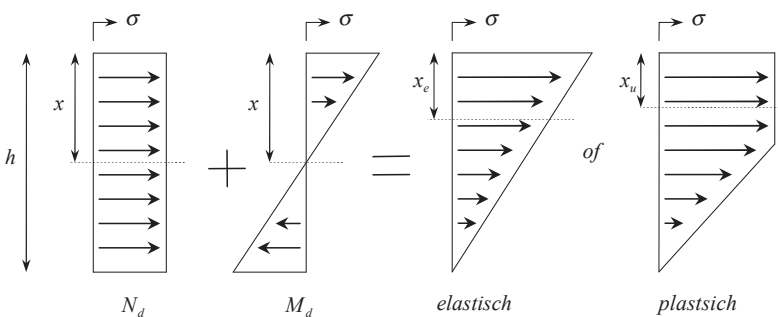
$$M_{Edz} = \frac{N_{Ed} e}{EI_{brug,z}} EI_{regel,z}$$

Waarin:

$N_{Ed}$	is de rekenwaarde voor de normaalkracht
$e$	is de verticale hart op hart afstand tussen de leuningboven- en onderregel
$EI_{brug,z}$	is de buigstijfheid van de brug in lengterichting over de z-as
$EI_{regel,z}$	is de buigstijfheid van de leuningbovenregel in lengterichting over de z-as

Het weerstandsmoment is op basis van de ongescheurde doorsnede berekend. Er komen geen trekspanningen in de leuningbovenregel voor. Het elastisch opneembaar weerstandsmoment is maatgevend, maar er zal nog wel gecontroleerd worden of het plastisch weerstandsmoment hoger is, wat de veiligheid ten goede komt.

De trekkracht van dit beton is zeer klein en kan derhalve worden verwaarloost. Door het doorbuigen van de leuningbovenregel zal ook de neutrale lijn, ofwel het aangrijpingspunt van de normaalkracht verplaatsen. Zowel elastisch evenwicht als het plastisch evenwicht wordt daardoor gevonden door de maximale trekspanning in de doorsnede gelijk aan 0 te stellen. Deze redenatie geeft direct ook weer dat zonder normaalkracht geen moment in de doorsnede op te nemen is, zie Figuur 45.



Figuur 45. Doorsnede spanningen in de leuningbovenregel

De afstand  $h$  is de op buiging belaste hoogte van de doorsnede. Het weerstandsmoment is elastisch indien de maximale druk in de uiterste vezel kleiner is dan de stuikrek grens van het beton.

$$\frac{\sigma_{N,c} + \sigma_{M,c}}{E_c} \leq \varepsilon_{c3} \quad \rightarrow \text{elastische betondruk}$$

$$\varepsilon_{c3} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3u} \quad \rightarrow \text{plastisch betondruk}$$

De elastische betondruk en het maximaal opneembaar (inwendig) moment van de ongescheurde doorsnede is:

*De trekspanning, als gevolg van het moment, kleiner of gelijk te stellen aan de drukspanning die optreedt als gevolg van de normaalkracht.*

$$\sigma_{N,c} \geq \sigma_{M,t}$$

Waarin:

$$\sigma_{N,c} = \frac{N}{A_c} \quad \text{de normaalkracht drukspanning}$$

$$\sigma_{M,t} = \frac{M}{W_t} = \frac{M(h - x_e)}{I_{regel}} \quad \text{de trekspanning t.g.v. een buigend moment}$$

$$\sigma_{M,c} = \frac{M}{W_c} = \frac{M x_e}{I_{regel}} \quad \text{de drukspanning t.g.v. een buigend moment}$$

Met  $x_e = \frac{1}{3}h$  en  $I_{regel} = \frac{1}{12}bh^3$  resulteert dit in een voorwaarde voor de maximale waarde voor het uitknikken in de elastische fase van de leuningbovenregel:

$$M_{Rdy/z} \leq \frac{hN}{8}$$

Indien de elastische fase wordt overschreden dan komt de doorsnede in de plastische drukfase. De volgende vergelijkingen zijn met name bedoeld om te controleren of en hoe groot de plastische restcapaciteit van het weerstandsmoment is.

De maximale drukkracht op de doorsnede mag niet groter zijn dan de opneembare plastisch belasting:

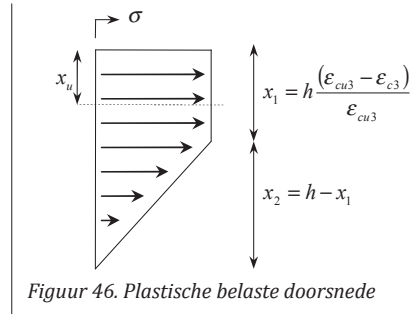
$$N_{\text{plastisch opneembaar}} = E_c \varepsilon_{c3} b x_1 + \frac{E_c \varepsilon_{c3} b x_2}{2} = \frac{E_c \varepsilon_{c3} A_c}{2} \left( 1 + \frac{(\varepsilon_{cu3} - \varepsilon_{c3})}{\varepsilon_{cu3}} \right)$$

$$A_c \left( \sigma_{N,c} + \frac{\sigma_{M,c}}{2} - \frac{\sigma_{M,t}}{2} \right) \leq \varepsilon_{c3} E_c b \left( x_1 + \frac{x_2}{2} \right)$$

De neutrale lijn in de uiterste situatie is:

$$x_u \varepsilon_{c3} = \frac{x_2}{2} \varepsilon_{c3} + (x_1 - x_u) \varepsilon_{c3} \rightarrow x_u = \frac{h}{4} + \frac{x_1}{4}$$

De trekspanning, als gevolg van het moment, kleiner of gelijk te stellen aan de drukspanning die optreedt als gevolg van de normaalkracht.



Figuur 46. Plastische belaste doorsnede

$$\sigma_{N,c} \geq \sigma_{M,t}$$

Waarin:

$$\sigma_{N,c} = \frac{N}{A_c} \quad \text{de normaalkracht drukspanning}$$

$$\sigma_{M,t} = \frac{M}{W_t} = \frac{M(h - x_u)}{I_{regel}} \quad \text{de trekspanning t.g.v. een buigend moment}$$

$$\sigma_{M,c} = \frac{M}{W_c} = \frac{M x_u}{I_{regel}} \quad \text{de drukspanning t.g.v. een buigend moment}$$

$$I_{regel} = \frac{1}{12} b h^3 \quad \text{het buigtraagheidsmoment; ongescheurd}$$

Dit resulteert in een voorwaarde voor de maximale waarde voor het uitknikken in de plastische fase van de leuningbovenregel:

$$\frac{N}{A_c} \geq \frac{M \left( h - \frac{h}{4} - \frac{h(\varepsilon_{cu3} - \varepsilon_{c3})}{4\varepsilon_{cu3}} \right)}{\frac{1}{12} b h^3} \rightarrow M_{Rdy/z,plast} \geq \frac{h N}{8 \left( \frac{9}{8} - \frac{3(\varepsilon_{cu3} - \varepsilon_{c3})}{8 \varepsilon_{cu3}} \right)}$$

De plastische restcapaciteit van het opneembaar moment kan dus uitgedrukt worden in een factor welke vrijwel altijd kleiner dan 1 kan is:

$$\delta_{plast} = \frac{1}{\left( \frac{9}{8} - \frac{3(\varepsilon_{cu3} - \varepsilon_{c3})}{8 \varepsilon_{cu3}} \right)}$$

Voor betonklasse C50 & C90 betekent dit:

$$\delta_{plast,C50} = \frac{1}{\left( \frac{9}{8} - \frac{3(3,50 - 1,75)}{8 \cdot 3,50} \right)} = 0,933 \quad \delta_{plast,C90} = \frac{1}{\left( \frac{9}{8} - \frac{3(2,60 - 2,30)}{8 \cdot 2,60} \right)} = 0,924$$

**Er is geen plastische restcapaciteit in het weerstandsmoment in de leuningbovenregel!**

Het weerstandsmoment is afhankelijk van de normaalkracht in de leuningbovenregel. Voor de normaalkracht moet de meest ongunstigste rekenwaarde worden bepaald. Dit is 0,9 maal de optredende normaalkracht als gevolg  $N_{Erep,g}$ .

In NEN-EN 1992-1-1 [2] staat niet dat het weerstandsmoment gedeeld moet worden door de materiaal veiligheidsfactor. Doordat de normaalkracht het aandeel van de variabele belasting op de brug wordt verwaarloosd is dit ook niet noodzakelijk. De weerstandsmomenten in beide richtingen komen daarmee uit op:

$$M_{Rdy} = \frac{a_b 0,9 N_{Erep,g}}{8}$$

$$M_{Rdz} = \frac{a_h 0,9 N_{Erep,g}}{8}$$

In Bijlage H is de toetsing op het moment uitgewerkt. Het resultaat van deze toetsing is:

$$\left( \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a + \left( \frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}} \right)^a \leq 1,0$$

*Toetsing op gelijkmatig verdeelde belasting:*

$$\left( \frac{1,29}{4,482} \right)^{1,718} + \left( \frac{14,06}{12,225} \right)^{1,718} = 0,12 + 1,22 = 1,34 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet NIET}$$

*Toetsing op een geconcentreerde belasting:*

$$\left( \frac{0,94}{4,483} \right)^{1,422} + \left( \frac{25,15}{12,225} \right)^{1,422} = 0,11 + 2,79 = 2,90 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet NIET}$$

De belangrijkste oorzaken van het niet voldoen aan de bovenstaande toetsingen over de horizontale y-as zijn:

- Het weerstandsmoment mag geen rekening houden met de extra normaaldrukkraft in de leuningbovenregel die afkomstig is uit de variabele belasting op de brug.
- De imperfectie zorgt voor een groot tweede orde moment in de leuningbovenregel.
- De veiligheidsfactoren vergroten  $M_{Ed}$  en verkleinen  $M_{Rd}$ , waardoor het moeilijker wordt om aan deze toetsing te voldoen.
- Een geconcentreerde belasting op de brug geeft een grote lokale horizontale verplaatsing van en horizontale belasting op de leuningbovenregel. Zonder rekening te houden met de extra normaalkracht die optreedt, zoals is voorgeschreven in de norm, ontstaat hier al een theoretisch niet opneembaar eerste orde moment van 18,52 kNm in de leuningbovenregel.



Indien een voertuigbelasting op de brug wel meegerekend mag worden dan veroorzaakt dit een extra weerstandsmoment  $M_{Rdy}$  van:

$$M_{Rdy,voertuig} = \frac{a_b \cdot 0,9 \left[ \frac{1}{4} \frac{P_{q,voert}}{2} \frac{L}{e} \right]}{8} = \frac{0,300 \cdot 0,9 \cdot \left[ \frac{1}{4} \frac{50}{2} \frac{16}{1,015} \right]}{8} = 3,325 \text{ kNm}$$

*Ook met het meerekenen van dit extra weerstandsmoment, is het weerstandsmoment nog altijd kleiner dan het eerste orde moment.*

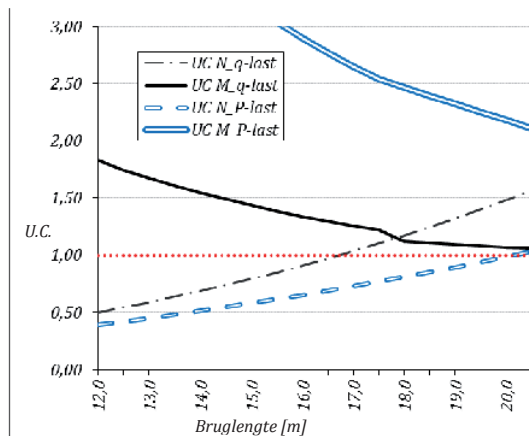
### 6.3 Resultaten van de controle op sterkte

In hoofdstuk 5 is gekeken naar welke invloed bepaalde afmetingen en de belastingen op de stabiliteit van de brug hebben. Dit zelfde kan gedaan worden op basis van de sterkte in de leuningbovenregel. Als basis voor de berekening zal de berekening in Bijlage H gebruikt worden. Net als bij de berekening op stabiliteit zal ook hier de resultaten bekeken worden door de onderstaande waarden te variëren:

- Lengte van de brug
- Breedte van de brug
- Leuninghoogte
- Leuningbovenregel
- Dekdikte
- Breedte van de leuning/vlakvulling
- Dekking op de wapening
- Invloed van een gelijkmatig verdeelde belasting op de brug
- Invloed een geconcentreerde belasting op de brug

#### 6.3.1 Lengte van de brug

Kortere bruggen hebben een lagere normaaldrukkracht in de leuningbovenregel als gevolg van de kleinere overspanning en de lagere totale massa van de brug. Deze lagere normaaldrukkracht bij kortere bruggen is gunstig voor de toetsing (U.C.) op de normaalkracht maar zeer ongunstig bij de toetsing op het moment. Het opneembaar moment is afhankelijk van de normaalkracht die de brug opwekt door alleen het eigen gewicht van de brug.

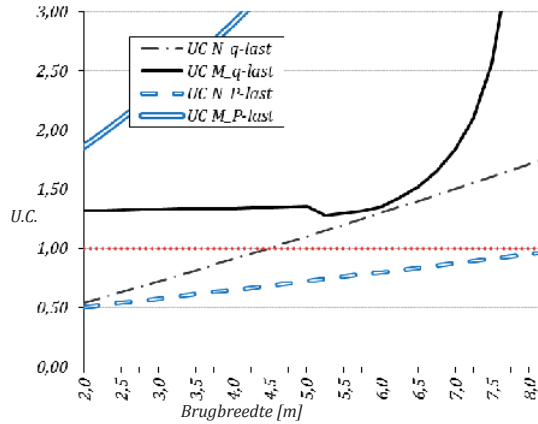


Figuur 47. Invloed bruglengte op de sterkte

### 6.3.2 Breedte van de brug

Een bredere brug zal zwaarder zijn. De normaaldrukkracht in de leuningbovenregel zal daardoor stijgen. Dit effect is duidelijk waarneembaar in de toetsingen op normaalkracht.

Een bredere brug, bij een gelijk brugdekhoogte, is ook slapper. De hoekverdraaiing van het brugdek zal daardoor toenemen. Het gevolg is dat geconcentreerde belasting (P-lasten) op het brugdek een grotere lokale verplaatsing van de leuningbovenregel geeft, waardoor deze niet voldoet aan de toetsing op het moment.

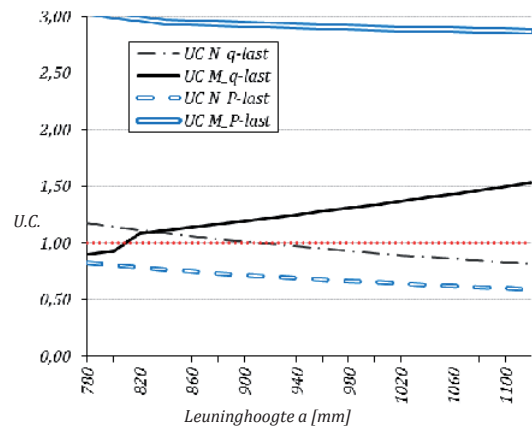


Figuur 48. Invloed brugbreedte op de sterkte

Tot een brugbreedte van ongeveer 5 meter geeft de toetsing op het moment van de gelijkmatig verdeelde belasting een te hoge waarde, de grafiek echter toont dat deze niet oploopt. De brugbreedte is niet gevoelig voor gelijkmatig verdeelde belasting omdat deze gespreid is. Daardoor beweegt de leuningbovenregel over de gehele lengte van de brug gelijk, waardoor er geen extra moment wordt geïntroduceerd. Na 5 meter loopt de gevoeligheid op. De oorzaak daarvan is het oplopen van het tweede orde deel van het moment. In hoofdstuk 5.4.3 staat de grafiek met de invloed van de brugbreedte op de stabiliteit vergrotingsfactor, welke verantwoordelijk is voor het tweede orde deel van het moment.

### 6.3.3 Leuninghoogte

Een hogere leuninghoogte zorgt voor een lagere normaaldrukkracht en dat is terug te zien in de grafiek. Het gevolg van een lagere normaaldrukkracht is tevens een kleiner opneembaar moment. De reden dat de geconcentreerde belasting niet een stijgende lijn laat zien op een kleiner opneembaar moment, is dat de grotere leuninghoogte de vlakvulling tussen de leuningboven- en onderregel



Figuur 49. Invloed leuninghoogte op de sterkte

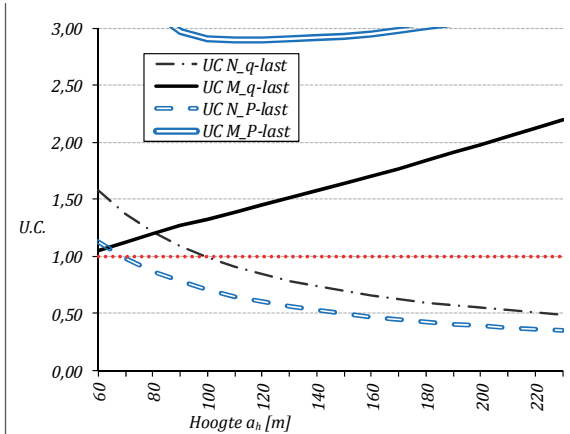
slapper maakt. Hierdoor heeft de geconcentreerde belasting op het brugdek minder invloed op de leuningbovenregel.

### 6.3.4 Leuningbovenregel

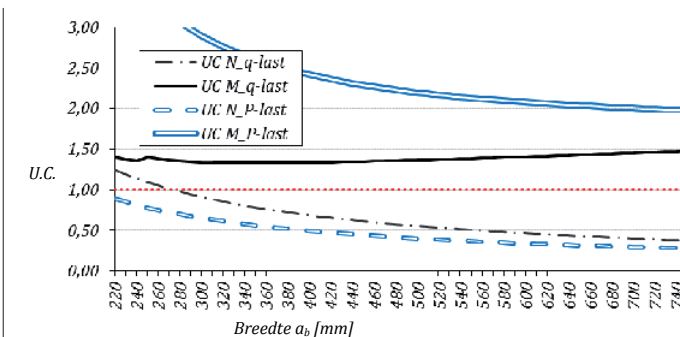
De leuningbovenregel hoger maken heeft als voordeel dat de oppervlakte toeneemt waardoor de opneembare normaalkracht groter wordt. Tegelijkertijd wordt de leuningbovenregel stijver en zal het dus meer moment naar zich toe trekken. De extra stijfheid resulteert in een grotere kniklengte. Met name de grotere kniklengte zorgt voor een extra gevoeligheid op het moment in de leuningbovenregel.

De breedte van de leuningbovenregel heeft een grote invloed op het opneembare moment. Het vergroten van deze breedte heeft eveneens het effect dat de leuningbovenregel meer moment naar zich toetrekt. De kniklengte over de leuningbovenregel wordt aanzienlijk groter. Het optredend moment neemt daardoor ook fors toe en zal het grotere weerstandsmoment vrijwel geheel nodig hebben. Alleen bij een geconcentreerde belasting is een voordeel op te merken. Dat heeft vooral te maken met de gevoeligheid voor de kniklengte in dit geheel.

De horizontale gelijkmatig verdeelde belasting op de leuning werkt het meest negatief wanneer deze is geplaatst over exact de kniklengte. Daardoor zal, in absolute zin voor de berekening, de totale horizontale belasting toenemen naarmate de kniklengte groter wordt. De geconcentreerde belasting neemt niet toe naarmate de kniklengte toeneemt.



Figuur 50. Invloed van leuningbovenregel hoogte op de sterkte



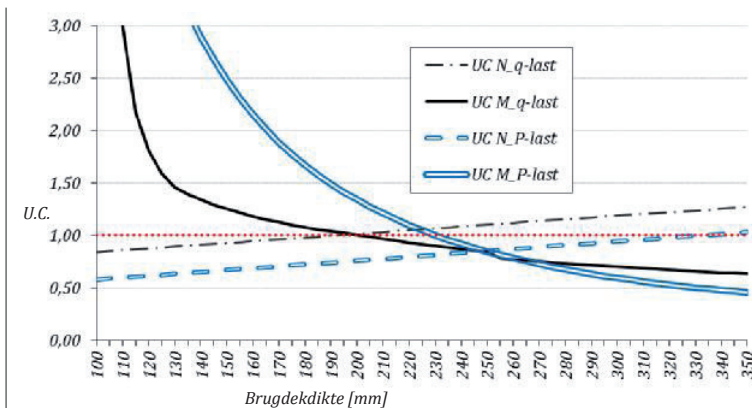
Figuur 51. Invloed van leuningbovenregel breedte op de sterkte

### 6.3.5 Dekdikte

De dikte van het brugdek heeft een grote invloed op de toetsing op het moment in de leuningbovenregel. Een dikker brugdek kent vier voordelen:

- De brug wordt zwaarder waardoor de permanente normaalkracht in de leuningbovenregel toeneemt met als gevolg dat het opneembare moment toeneemt.
- De veerstijfheid wordt groter. Het gevolg is dat de kniklengte korter wordt.
- De stijfheid van het brugdek wordt groter. Het brugdek zal daardoor minder doorbuigen. Met name bij ongelijkmatige belastingen zoals geconcentreerde lasten op de brug is dit een voordeel. De kleinere hoekrotatie zorgt voor een kleinere lokale horizontale verplaatsing in de leuningbovenregel.
- Ook het tweede orde moment neemt tot een dekdikte van 120mm af; daarmee komt de vorm van het moment overeen met de grafiek van de stabiliteit vergrotingsfactor in hoofdstuk 5.4.5.

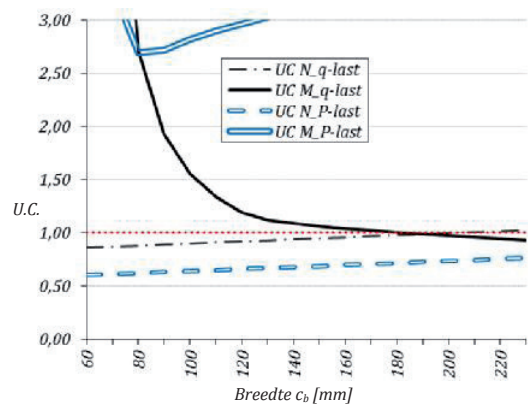
Het vergroten van de dekdikte is de enige mogelijkheid om de geconcentreerde belasting te laten voldoen aan de toetsing op het moment. De toename in het eigen gewicht van de brug zal ook tot gevolg hebben dat de afmetingen van de leuningbovenregel iets vergroot moeten worden om de toetsing op sterkte te kunnen weerstaan.



Figuur 52. Invloed brugdedikte op de sterkte

### 6.3.6 Breedte van de leuning/vlakvulling

Voor de gelijkmatig verdeelde belasting geldt ook, net als bij de brugdekdikte, dat het tweede orde effect gelijk opgaat met de toetsing op het moment. Echter een stijver vlak tussen de leuningboven- en onderregel vergroot de invloed van de geconcentreerde belasting op de leuningbovenregel. Het gevolg is dat de leuningbovenregel extra belast wordt door een moment uit de geconcentreerde belasting op het brugdek.

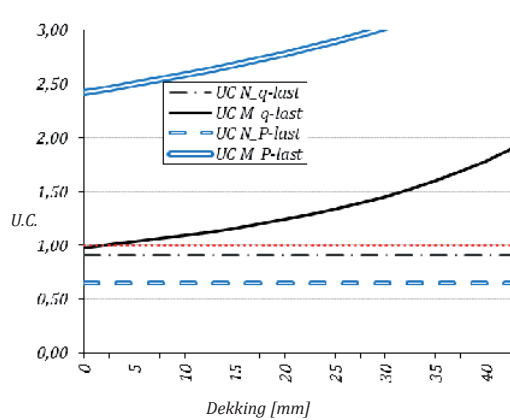


Figuur 53. Invloed van de vlakvullingbreedte op de sterkte

### 6.3.7 Dekking op de wapening

Het verkleinen van de dekking op de wapening is hetzelfde als het vergroten van de nuttige hoogte van de betondoorsnede. De massa van de brug verandert niet, ook verandert de buigstijfheid van de leuningbovenregel en de brugdoorsnede in lengterichting van de brug niet (zie ook Bijlage F). De toetsing op normaal-kracht in de leuningbovenregel is derhalve constant over de gehele lengte.

Naarmate de dekking groter wordt, wordt ook de toetsing op het moment groter. Het optredend moment vergroot doordat het tweede orde deel van het moment vergroot, zoals ook in een grafiek is weergegeven in hoofdstuk 5.4.7.

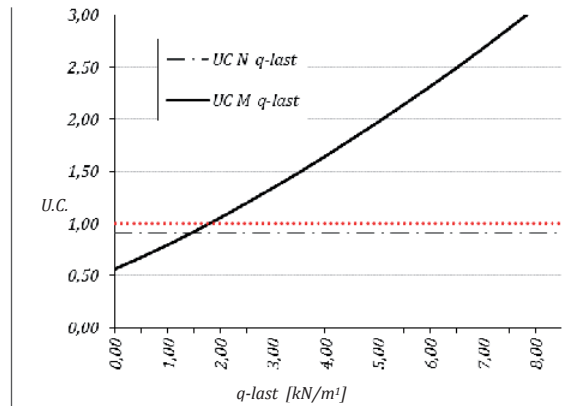


Figuur 54. Invloed van de dekking van op de wapening op de sterkte

### 6.3.8 Invloed van een gelijkmatig verdeelde belasting op de brug

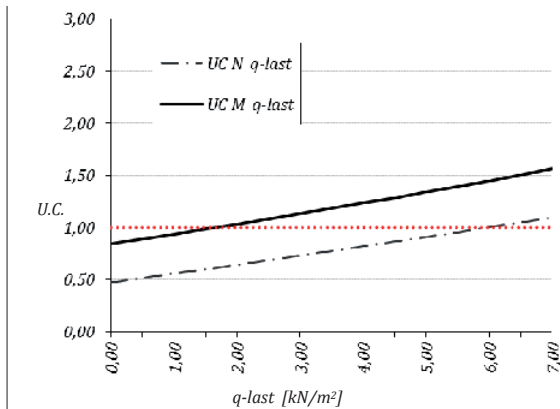
In de referentieberekening is rekening gehouden een horizontale gelijkmatig verdeelde belasting over de kniklengte op de leuningbovenregel en een gelijkmatig verdeelde belasting op het brugdek.

De invloed van de gelijkmatig verdeelde belasting horizontaal op de leuning is alleen terug te vinden in de toetsing op het moment. De horizontale belasting is verantwoordelijk voor het eerste orde moment op de leuningbovenregel.



Figuur 55. Invloed van de gelijkmatig verdeelde belasting horizontaal op de leuningbovenregel

De toename van de veranderlijke belasting op het brugdek verhoogt de normaaldrukkracht in de leuningbovenregel en alpha factor in de toetsing op het moment. De vergroting in de normaalkracht zorgt ook voor een vergroting van de stabiliteit vergrotingsfactor op het tweede orde deel van het moment.



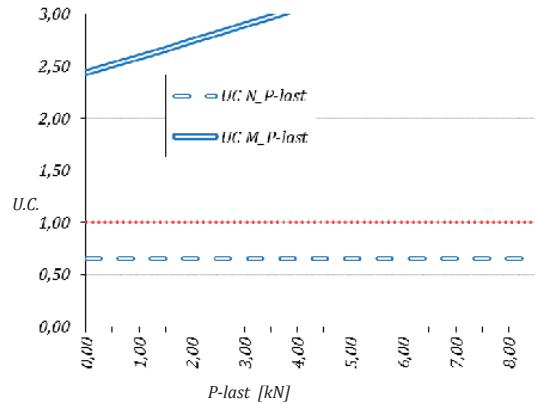
Figuur 56. Invloed van de gelijkmatig verdeelde belasting op het brugdek

### 6.3.9 Invloed van een geconcentreerde belasting op de brug

De invloed van de geconcentreerde belasting loodrecht op de leuningbovenregel is een lineair stijgende lijn in de toetsing op het moment. De lineaire vorm is terug te voeren op de volgende functie die in het moment verwerkt is.

$$M = \frac{P_{hor} l_k}{4}$$

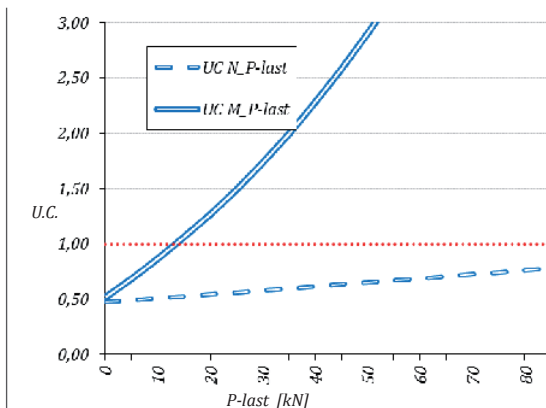
De invloed begint al zo hoog doordat er in deze referentie-berekening al rekening gehouden is met een verticale geconcentreerde belasting op het brugdek.



Figuur 57. Invloed van een geconcentreerde belasting horizontaal op de leuningbovenregel

De geconcentreerde belasting op het brugdek heeft meer invloed op de brug. De toename in verticale belasting zorgt voor een toename van de normaal drukkracht met als gevolg een toename van de toetsing op normaalkracht.

De snelle stijging van de toetsing op het moment heeft met name te maken met de grote invloed die die kracht in deze referentieberekening heeft op de hoekrotatie van het brugdek en daardoor op de horizontale verplaatsing van de leuningbovenregel. Daarnaast zorgt een stijgende stabiliteitsversterkingsfactor (zie ook hoofdstuk 5.4.9) voor een toename van de invloed van het tweede orde deel van het moment.



Figuur 58. Invloed van een geconcentreerde belasting op het brugdek op 1/3 van de breedte

## 6.4 Het verband tussen sterkte en stabiliteit van de brug

De toetsing op sterkte en stabiliteit zijn op zichzelf staande toetsingen. Bij de berekening van het moment in de leuningbovenregel zit een stabiliteitsfactor ingesloten. De toetsing op het moment volgens de NEN\_EN 1992-1-1 [2] is:

$$\left(\frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}}\right)^a + \left(\frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}}\right)^a \leq 1,0$$

Waarin:

$$M_{Edy} = M_{Edy,1^{ste\ orde}} + \frac{\pi^2 EI_{regel,y}}{l_k^2} \frac{1}{n-1} u_{Edy,1^{ste\ orde}}$$

Deze toets is om te schrijven naar:

$$\left( M_{Edy,1^{ste\ orde}} + \frac{\pi^2 EI_{regel,y}}{l_k^2} \frac{1}{n-1} u_{Edy,1^{ste\ orde}} \right)^a \leq M_{Rdy}^a \left[ 1 - \left( \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a \right]$$

Stel, we houden  $a$  aan op de meest ongunstige waarde van 1:

$$\frac{\pi^2 EI_{regel,y}}{l_k^2} \frac{1}{n-1} u_{Edy,1^{ste\ orde}} \leq M_{Rdy} \left[ 1 - \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right] - M_{Edy,1^{ste\ orde}}$$

Daarmee wordt een minimaal benodigde stabiliteitsfactor gevonden voor de berekening:

$$n \geq \frac{\frac{\pi^2 EI_{regel,y}}{l_k^2} u_{Edy,1^{ste\ orde}}}{\left[ M_{Rdy} \left[ 1 - \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right] - M_{Edy,1^{ste\ orde}} \right]} + 1$$

Voorwaarde:

$$\left[ M_{Rdy} \left[ 1 - \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right] - M_{Edy,1^{ste\ orde}} \right] > 0$$

Of anders geschreven:

$$\frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} + \frac{M_{Edy,1^{ste\ orde}}}{M_{Rdy}} \leq 1$$

Dit is een alternatieve manier van toetsen op het maximale moment in de leuningbovenregel. Het voordeel van deze methode ten opzichte van de eerder gebruikte methode is dat de stabiliteitsfactor nog niet uitgerekend hoeft te worden. Wanneer  $M_{Edz}$  geen tweede orde verplaatsing in zich heeft is deze toetsing, in tegenstelling tot de gebruikte toets in hoofdstuk 6.2 en de grafieken in 6.3, volledig te berekenen met eerste orde berekeningen.



### Alle toetsingen op sterkte van de leuningbovenregel van de brug zijn daarmee:

Toetsing op normaal drukkracht van de leuningbovenregel:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \leq 1,0$$

Toetsing op momenten in de leuningbovenregel:

$$\left( \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a + \left( \frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}} \right)^a \leq 1,0$$

Controle op de stabiliteitsfactor in de leuningbovenregel. Ook te gebruiken als alternatieve methode om te toetsen op het moment in de leuningbovenregel.

$$\frac{F_{k,TUM}}{N_{Ed}} = n \geq \frac{\frac{\pi^2 EI_{regel,y}}{l_k^2} u_{Edy,1^{ste\ orde}}}{\left[ M_{Rdy} \left[ 1 - \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right] - M_{Edy,1^{ste\ orde}} \right]} + 1$$

Voorwaarde:

$$\frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} + \frac{M_{Edy,1^{ste\ orde}}}{M_{Rdy}} \leq 1$$

## 6.5 Vereenvoudigde methode voor ontwerpers

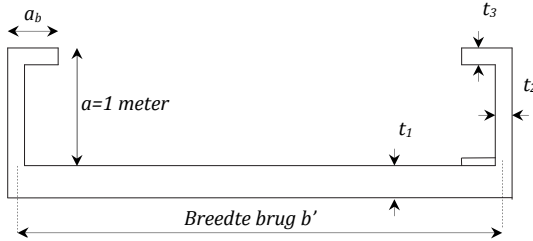
### De doelstelling van deze thesis is:

*“Deze thesis moet leiden tot een kader waarbinnen de architect alle vrijheid heeft om het ontwerp, voor een brug met dragende leuning, te maken naar zijn wens.”*

Deze paragraaf zal een methode beschrijven hoe een architect of een andere ontwerper van de brug snel in kaart kan krijgen wat de belangrijkste afmetingen moeten zijn. De theoretische achtergrond van de berekening is reeds in de voorgaande hoofdstukken behandeld, daarom zal deze paragraaf alleen de “handvaten” aanreiken en geen achtergrondinformatie meer verschaffen.

Met behulp van een eenvoudig stappenplan zijn de grote lijnen snel uit te zetten waarna de ontwerper kan beslissen hoe de brug er uit zou moeten komen te zien. Om de constructie zo eenvoudig mogelijk te houden wordt de doorsnede van de brug afgeschat op een u-profiel zoals in figuur .. is afgebeeld. De breedte, de lengte en de hoogte van de brugleuning mogen als bekend worden beschouwd. De brugdikte, de hoogte van de leuningbovenregel en de dikte van de vlakvulling

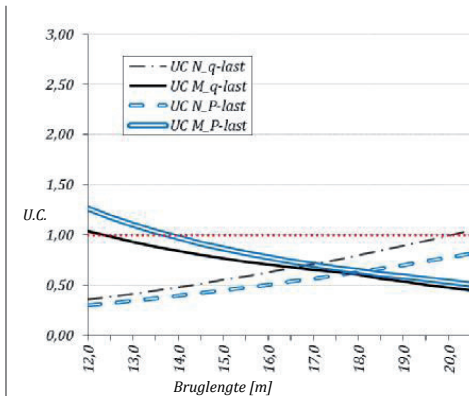
worden allemaal als gelijke dikte beschouwd. Eerder in de grafieken in hoofdstuk 6.3 is al gezien dat de dekdikte dikker moet zijn dan de vlakvullingdikte en de hoogte van de leuningbovenregel. De reden daarvoor was, dat een stijvere leuningbovenregel en vlakvulling meer horizontale belasting uit het dek naar boven trekt, wat negatief werkt op de momentencapaciteit van de leuningbovenregel. Onderstaand een eenvoudig model van de doorsnede van de brug:



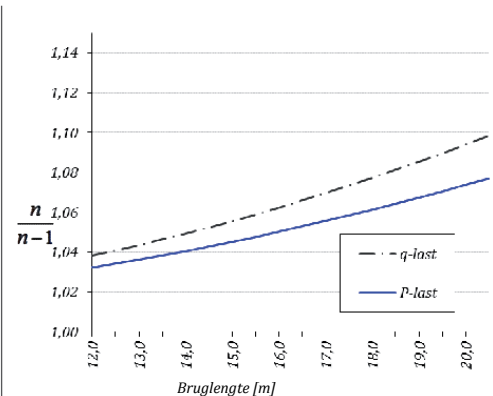
Figuur 59. Vereenvoudigde doorsnede van een troglijger brug

$$a_b = \frac{b'}{10} \quad \& \quad t_2 = t_3 = \frac{t_1}{2} \quad \& \quad t_1 = \frac{L}{150} + \frac{b}{40} + 80 \geq 200 \text{ mm}$$

De gevonden korte formules zijn door middel van 'trial and error' gevonden. Deze waarden kunnen ook vertaald worden in de grafieken. Onderstaand zijn de grafieken voor met de variabele lengte van de brug en de variabele breedte van de brug weer gegeven. Duidelijk is dat op basis van de bovenstaande aannames de toetsing op moment en normaalkracht in de leuningbovenregel maatgevender is dan de stabiliteits vergrotingsfactor. Ook deze grafieken zijn weer gebaseerd op de voorbeeld berekeningen in Bijlagen E en H.



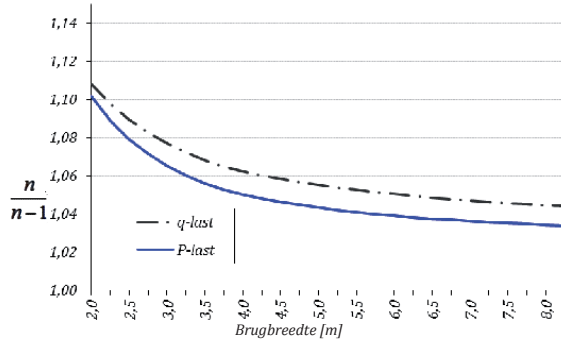
Figuur 60. Invloed bruglengte op de sterkte



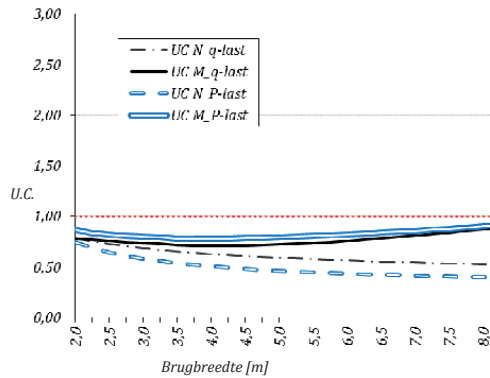
Figuur 61. Invloed bruglengte op de stabiliteit

Uit de bovenstaande grafiek, met daarin de toetsing op moment en normaalkracht, over de lengte van de brug, blijkt duidelijk dat de formule alleen geldig is voor bruglengten van 14,5 tot 19,0 meter. De stabiliteit vergrotingsfactor zit tot een lengte van 20,5 meter nog onder de veelal veilig geachte waarde van 10% vergroting [2]. Stabiliteit is hier dus niet maatgevend.

De toetsing op het moment van de brugbreedte gaat tussen een breedte van 2,0 meter en 8,0 meter goed op. Doordat de breedte van de leuningbovenregel 1/10 van de breedte van de brug is, daalt de stabiliteit van de brug sneller dan de breedte van de brug. Dit is terug te zien in de grafiek in de vorm van een neergaande stabiliteitsversterkingsfactor in de grafiek in Figuur 62.



Figuur 62. Invloed brugbreedte op de stabiliteit



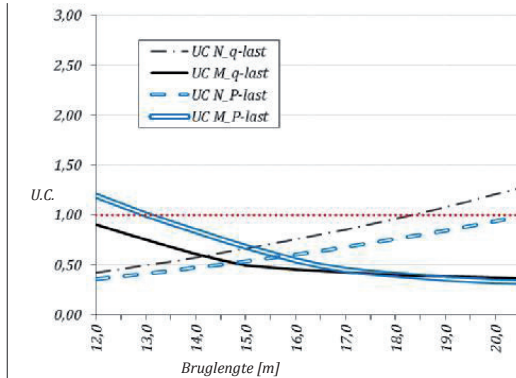
Figuur 63. Invloed van de brugbreedte op de sterkte

Deze vereenvoudigde vorm om de afmetingen af te schatten mag gebruikt worden tussen een bruglengte van 15,0 en 18,5 meter en een brugbreedte tussen de 2,0 en de 8,0 meter. De voorwaarden hierbij zijn:

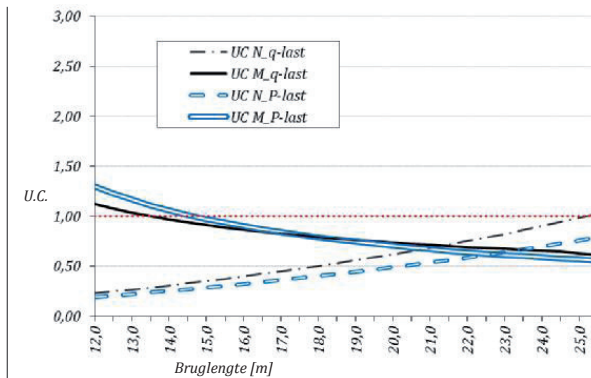
- De leuningboven- en onderregel hebben een gelijke breedte en zijn doorgaand over de hele lengte van de brug.
- De vlakvulling tussen de leuningboven- en onderregel is beschouwd als een massieve plaat, welke niet doorloopt over de gehele lengte, maar wel massief, zonder sparingsen, over de mootlengte.
- De huidige grafieken gaan uit van betonklasse C50/60. Het gebruik van een andere betonklasse zal de minimale en maximale bruglengte beïnvloeden.
- De brug mag niet zwaarder worden belast dan een gelijkmatig verdeelde belasting van 5 kN/m<sup>2</sup> of een geconcentreerde belasting van 50 kN.
- Met de toetsing ter plaatse van de opleggingen is geen rekening gehouden, evenals de toetsingen van de belasting op het brugdek. Totdat deze en andere toetsingen op de brug ook zijn gecontroleerd mogen de aannamen van de afmetingen van de brug niet als harde eis worden opgesteld.

Wat is nu de invloed van de beton sterkteklasse op de lengte van de brug?

Om deze vraag te beantwoorden staan hieronder twee grafieken. Een lagere betonklasse kent een lagere materiaalstijfheid. Een lagere materiaalstijfheid is gunstiger in de vlakvullingen. De invloed van de hoekverdraaiing van het brugdek op de momenten in de leuningbovenregel verkleint daarmee. Tegelijkertijd neemt de doorsnedecapaciteit van de leuningbovenregel op normaal drukkracht af.



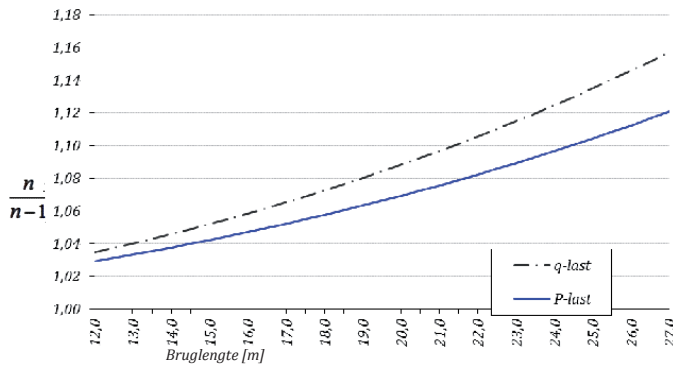
Figuur 64. Invloed van de bruglengte op de sterkte bij C25/30



Figuur 65. Invloed van de brugbreedte op de sterkte

De vereenvoudigde formule voor de afmetingen geeft een veilige waarde voor de volgende bruglengten. (afgelezen uit de grafieken op sterkte)

Betonklasse	minimale lengte	maximale lengte
C25/30	14,0 m	17,5 m
C50/60	14,5 m	19,0 m
C90/105	16,0 m	24,0 m



Figuur 66. Invloed van de bruglengte op de stabiliteit bij C90/105

Een bruglengte groter dan 21,0 meter zal een grotere tweede orde verplaatsing kennen dan 10%. Op 27,0 meter is de stabiliteitsfactor  $n=7,37$  en op 24,0 meter een stabiliteitsfactor van  $n=9,03$ . Een stabiliteitsfactor van 9 zal niet direct tot bezwijken leiden, maar de risico's zullen wel iets toenemen.

De kleinst toegestane waarde van de stabiliteitfactor  $n$  teruggerekend uit het moment volgens de formule in hoofdstuk 6.4 is:

$$\frac{\pi^2 EI_{regel,y}}{l_k^2} u_{Edy,1^{ste} orde} + 1 = \frac{31578 \cdot 0,01039}{83,144 \left[ 1 - \frac{12,48}{32,842} \right] - 4,89} + 1 = \frac{328,1}{46,66} + 1 = 8,03$$

Hierbij wordt uitgegaan dat de bruglengte  $L=24,0$  meter is en de brugbreedte  $b'=4,444$  meter. De Bijlagen E en H kunnen worden gebruikt om de in te vullen momenten en eerste orde verplaatsingen uit te rekenen.

Het verschil tussen de minimaal vereiste stabiliteitsfactor en de werkelijke stabiliteitsfactor is klein. Voor de stabiliteit vergrotingsfactor betekent dit een verschil van maar:

$$\frac{8,03}{8,03-1} - \frac{9,03}{9,03-1} = 0,0177$$

De totale verplaatsing mag dus maar maximaal 1,5% overschreden worden alvorens de brug bezwijkt. De eerste orde verplaatsing was 10,39 mm. Dat betekent dat de leuningbovenregel niet meer dan 0,18 mm uitwijking mag hebben, omdat het anders bezwijkt op de toetsing op moment.

Dit toont aan dat deze vereenvoudigde methode niet maatgevend, maar als indicatief moet worden beschouwd.

## 7 Conclusies & Aanbevelingen

In hoofdstuk 1 zijn de volgende stellingen opgeschreven:

### **De probleemstelling is:**

*“Geconstateerd is dat bij de gewenste slankheid van de leuning, fenomenen optreden die we kennen vanuit de staalbouw: knik, kip en knikplooi.”*

### **Doelstelling van deze thesis:**

*“Deze thesis moet leiden tot een kader waarbinnen de architect alle vrijheid heeft om het ontwerp, voor een brug met dragende leuning, te maken naar zijn wens.”*

### **Subdoelstellingen van deze thesis:**

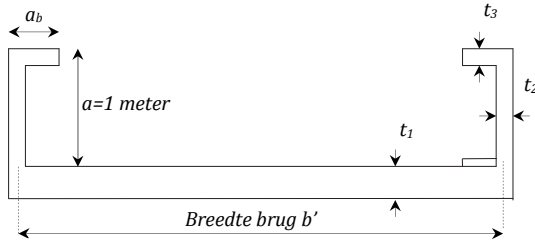
*“Het in kaart brengen welke importantie de tweede orde effecten hebben”.*

*“De dragende leuningbrug zal seriematig in moten geprefabriceerd kunnen worden. De onderlinge aansluiting van moten moet op een relatief eenvoudige manier plaats kunnen vinden.”*

### **7.1 Conclusie op de doelstelling**

De leuning op een betonnen brug constructief benutten in overspanning van de brug heeft als voordeel dat de brug lichter geconstrueerd kan worden. De vergrote afstand tussen de druk- en trekzone in de constructie maakt de brug stijver en minder gevoelig voor doorbuiging. De nadelen van de brugleuning constructief benutten zijn de kwetsbaarheid voor horizontale belastingen en de plotselinge bezwijkvorm. Ondanks deze nadelen is toch geprobeerd om een eenvoudige formule of vuistregel te vinden die als basis kunnen dienen voor een ontwerper of architect.

Deze vuistregel is gevonden in de vorm:



Figuur 1. Vereenvoudigde doorsnede van een troglijger brug

$$a_b = \frac{b'}{10} \quad \& \quad t_2 = t_3 = \frac{t_1}{2} \quad \& \quad t_1 = \frac{L}{150} + \frac{b}{40} + 80 \geq 200 \text{ mm}$$

Deze formule is geldig voor bruggen die een breedte hebben tussen de 2 en de 8 meter. De lengte van de brug is naast de bovenstaande vuistregel ook afhankelijk van de betonkwaliteit. De vuistregel is geldig voor bruglengten tussen de 14 en de 23 meter, afhankelijk van de betonsterkte klasse:

Betonklasse	minimale lengte	maximale lengte
C25/30	14,0 m	17,5 m
C50/60	14,5 m	19,0 m
C90/105	16,0 m	24,0 m

Daarbij worden verder de volgende eisen of uitgangspunten aan het ontwerp gesteld om deze vuistregel te mogen gebruiken:

- De leuningboven- en onderregel hebben een gelijke breedte en zijn doorgaand over de hele lengte van de brug.
- De vlakvulling tussen de leuningboven- en onderregel is een beschouwd als een massieve plaat, welke niet doorloopt over de gehele lengte, maar wel massief, zonder sparingen, over de mootlengte.
- De brug mag niet zwaarder worden belast dan een gelijkmatig verdeelde belasting van 5 kN/m<sup>2</sup> of een geconcentreerde belasting van 50 kN.
- Met de toetsing ter plaatse van de opleggingen is geen rekening gehouden, evenals de toetsingen van de belasting op het brugdek. Totdat deze en andere toetsingen op de brug ook zijn gecontroleerd mogen de aannamen van de afmetingen van de brug niet als harde eis worden opgesteld.

De subdoelstelling voor seriematige productie en in moten fabriceren is meer een voorwaarde dan een doelstelling. Om hieraan te voldoen, is gesteld dat de brug uit meerdere moten moet bestaan. De brugmoten bestaan uit een stukje of een schijf van de brug in lengterichting. De breedte van deze schijf of moot is de breedte van de brug en de lengte is begrenst door hetzij het gewicht wat één moot mag wegen of de breedte van een vrachtwagen. Deze voorwaarden maken het transport van de geprefabriceerde moten van de brug gemakkelijk. De verbinding tussen de moten wordt gedaan middels een voorspankabel in de leuningonderregel en deuvels in de leuningbovenregels. In de leuningbovenregels zorgt de druk normaalkracht ervoor dat de deuvelverbinding goed in elkaar grijpt. Een uitwerking van deze verbindingen is niet gegeven.

Het in kaart brengen van de tweede orde effecten is een grotere uitdaging. Om een goed beeld te krijgen van wat er nu gebeurt, is veel met de hand uitgewerkt. Het bleek dat de knikformule volgens Engesser [Bijlage C] een goed inzicht geeft over het gedrag van de knik in de leuningbovenregel. De knikkraft gedeeld door de werkelijke normaal drukkracht geeft de stabiliteitsfactor  $n$ , waarmee de stabiliteit vergrotingsfactor op de horizontale uitwijking en het tweede orde deel van het moment te bepalen is.

Het is duidelijk geworden dat in veel gevallen de sterkte maatgevend is in de constructie. Doordat de leuningbovenregel over de hele lengte verend is ondersteund, kan de bezwijkgrens op sterkte op normaaldrukkracht benaderd worden. Geconcentreerde belastingen op de brug zorgen voor 'grote' lokale verplaatsingen in de leuningbovenregel. Deze 'grote' lokale verplaatsingen veroorzaken een moment wat in veel gevallen maatgevend is. Een dikker brugdek zal minder snel een grote hoekverdraaiing geven waardoor de horizontale verplaatsingen en het optredend moment in de leuningbovenregel afneemt.

Vanuit de toetsing op sterkte van het moment in de leuningbovenregel is het mogelijk om het tweede orde deel te isoleren en terug te rekenen naar een stabiliteitsfactor  $n$ , welke minimaal vereist is om aan de sterkte eis van de toetsing op moment te voldoen.

$$\frac{F_k}{N_{Ed}} = n \geq \frac{\frac{\pi^2 EI_{regel,y}}{l_k^2} u_{E dy, 1^{ste} orde}}{\left[ M_{Rdy} \left[ 1 - \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right] - M_{E dy, 1^{ste} orde} \right]} + 1$$



## 7.2 Overige conclusies

De overige conclusies zijn conclusies die niet direct een antwoord geven op de doelstelling van deze thesis, maar kunnen wel uit de thesis herleid worden.

### *Berekenen met de hand of via een eindige elementenpakket?*

De berekening met de hand en met een eindige-elementenpakket dat niet-lineair kan rekenen laat zien dat de berekening volgens het eindige-elementenpakket sneller en nauwkeuriger is dan de handberekening. Een geometrische en fysische niet-lineaire tweede orde berekening met behulp van zo'n pakket zou de constructeur in staat stellen om sneller een goed ontwerp neer te zetten. Belangrijke voorwaarde is wel dat de constructeur een goed inzicht moet hebben van hoe dat pakket werkt en moet er een goed model gemaakt worden. Deze pakketten hebben als nadeel dat men makkelijker met het verkeerde model rekent, waardoor de resultaten onbetrouwbaar zijn. Ook is vaak niet bekend hoe het pakket en op welke plaats de constructie als eerst zal bezwijken. Indien de handberekening in een spreadsheet is verwerkt, is een handberekening eenvoudiger en sneller te optimaliseren. Een nadeel hiervan is dat het opmaken van een spreadsheet veel tijd kost.

### *Elastisch of plastisch rekenen?*

In hoofdstuk 6.2 is een elastische en een plastische doorsnedeberekening van de capaciteit van de leuningbovenregel uitgewerkt. Hieruit bleek dat de doorsnedecapaciteit verminderd na het bereiken van de maximaal elastische opneembare drukgrens. Er is dus geen plastische reservecapaciteit en het heeft ook geen enkele zin om plastisch te rekenen.

### *Heeft het nut om de leuningbovenregel voor te spannen?*

Ja, het heeft nut, indien de leuningbovenregel voldoende reserve capaciteit heeft om de extra drukkracht in de drukzone van de constructie op te nemen. De consequentie is wel dat de leuningbovenregel zwaarder uitgevoerd moet worden in verband met de extra vereiste ruimte ten behoeve van de voorspankabel en de extra drukspanningen. Voorspanning in de leuningbovenregel vergroot het maximaal inwendig opneembare moment. Daardoor zal de ondergrens op treksterkte minder snel of in sommige gevallen zelfs helemaal geen problemen meer opleveren. Met name de invloed van geconcentreerde belastingen om de constructie wordt daarmee verkleint.

### *Is het nuttig om het brugdek in dwarsrichting voor te spannen?*

Op deze vraag kan geen eenduidig 'ja' worden gegeven. De veerstijfheid van de doorsnede wordt bepaald door het brugdek en de vlakvulling tussen de leuningboven- en onderregel. Uit de berekening is te herleiden welke van deze twee maatgevend is. Indien de vlakvulling maatgevend is, wordt de knikkracht

als gevolg van de reductiefactor op imperfectie afgevlakt door de grenswaarde in de vlakvulling. Op dat moment zou de extra stijfheid in het brugdek als gevolg van de voorspanning wel een bijdrage geven, maar deze wordt niet volledig benut. Het is daarom in dat geval beter om te controleren of deze bijdrage zin heeft. Bij langere of bredere bruggen is voorspannen in dwarsrichting sneller gunstig dan bij kortere bruggen. Een langere brug en/of een bredere brug vereisen een grotere stijfheid in het brugdek, de toevoeging van voorspanning zou dan materiaal- en gewichtsbesparing te weeg kunnen brengen. Een afname van het eigen gewicht betekend een toename van de opneembare belasting.

*Is het toepassen van hoge sterkte beton C90 beter dan normale sterkte beton C50?*

Ja. Hoge sterkte beton heeft een hogere materiaalstijfheid, wat leidt tot een hoger opneembare belasting. De invloed van hoge sterkte beton is met name terug te vinden indien de maatgevende ondergrens van de stabiliteitsfactor een bezwijking op drukkracht is. De grotere opneembare elastische drukkracht en de hogere materiaalstijfheid komen hier samen en zijn allebei van invloed op het verlagen van de ondergrens. De invloed van tweede orde effecten zijn dan beduidend lager ten opzichte van normale sterkte beton, bij gelijkblijvende afmetingen. Indien de ondergrens gedomineerd wordt door de bezwijkgrens op trekspanningen in de leuningbovenregel, zal hoge sterkte beton slechts een zeer klein voordeel geven. Indien dat het geval is, dan is het beter om eerst te kijken of de trekspanningen op een andere manier onder controle gehouden kunnen worden. Het toepassen van hoge sterkte beton zal in dat geval vooral prijsverhogend werken.

*Is de normregel in NEN-EN 1992-1-1 H5.9 (3) geldig voor deze brug?*

*Hoofdstuk 5.9: Kip van slanke liggers*

*(3) Tweede orde effecten in relatie met kip mogen zijn verwaarloosd indien ....*

Nee. Deze normregel gaat uit van balken, waarbij de breedte gelijk is over de volledige hoogte. Bovendien houdt deze regel geen rekening met de toegevoegde stijfheid uit het brugdek over de volledige lengte van de brug. De gaffeloplegging in het in deze thesis behandelde brugmodel ontbreekt ook.

## 7.3 Aanbevelingen

*De verhouding  $\alpha$  in de knikkracht bepalen.*

De verhouding  $\alpha$  brengt de normaalkracht verdeling in de drukligger, de leuningbovenregel, in rekening. Nu is de verhouding  $\alpha$  een constante, gebaseerd op één berekening. Voor de huidige brug mag deze constante gebruikt worden, maar er is niet aangetoond dat deze waarde goed is voor een brugmodel met andere parameters.

*Hoe ziet de vlakvulling tussen de leuning bovenregel- en de leuningonderregel eruit?*

Het huidige model gaat uit van een vlakke plaat met een onderbreking ter plaatse van de brugmoten. De vlakvulling is dat deel van de brug wat iemand die op een afstand van de brug nog ziet. Een architect of ontwerper wil het liefst een zo groot mogelijke vrijheid in dit deel van de brug hebben. Hoeveel vrijheid kunnen we een architect hierin geven? Welke verschillende mogelijkheden zijn er om deze vlakvulling in te passen en welke invloed hebben de verschillende mogelijkheden op de stabiliteit?

*Uitwerken van de voegovergangen tussen de verschillende moten.*

In deze thesis is niet tot in detail op de voegovergangen ingegaan. Welke vorm van deze overgang is het beste en wat is de invloed daarvan op de constructie.

*Is de uitvoering van de dragende leuningbrug mogelijk?*

Dit is een meer praktische vraag of aanbeveling. De afmetingen zijn aangenomen als uitvoerbaar. Maar dit is niet bewezen nog bevestigd door een leverancier van kleine betonbruggen of een aannemer.

*Ander constructieve berekeningen.*

Deze thesis gaat alleen in op het stabiliteitsdeel van de berekening, zoals in de doelstelling ook gevraagd is. Naast de stabiliteit moet niet vergeten worden dat er nog vele andere berekeningen en toetsingen nodig zijn. Zo zijn bijvoorbeeld tijdsafhankelijke effecten niet meegenomen, welke nog wel invloed hebben op de stabiliteit in de vorm van een constante.

*Hoeveel ruimte is er nodig voor de voorspanankers.*

De afmetingen van de leuningonderregel en eventueel ander voor te spannen onderdelen worden voor een groot deel bepaald door de ruimte die nodig is voor de voorspanankers. Hier kunnen standaardankers voor gebruikt worden, hier is echter ook nog ruimte voor optimalisatie waardoor afmetingen niet onnodig groot worden

## 8 Literatuurlijst

### Inleiding

- [1] Jackson, D.C. (1988). *Great American Bridges and Dams*. Washington, DC: Preservation Press.
- [2] *NEN-EN 1992-1-1. Ontwerp en berekening van betonconstructies*. - Deel 1.1: algemene regels en regels voor gebouwen.
- [3] IGWR, intern (2006). *Studie 200 bruggen*. Kleine bruggen in Rotterdam en omgeving.
- [4] IGWR, intern (2008). *Rapport Innovatiestudie*. Deel 1. Versie 2.

### De dragende leuningbrug

- [5] CROW (2004). *ASVV 2004*. Aanbevelingen voor verkeersvoorzieningen binnen de bebouwde kom. Ede: CROW.
- [6] *NEN-EN 1990. Grondslag van het constructief ontwerp*.
- [7] *NEN-EN-1991-2. Verkeersbelastingen op bruggen*.
- [8] Dicke, D. (1994). *Stabiliteit voor ontwerpers*. Delft: VSSD.

### Knikkracht in de leuningbovenregel

- [9] *Wikipedia: Eulerknik*. Geraadpleegd in september 2009 via <http://nl.wikipedia.org/wiki/Eulerknik>
- [10] Martens, J. (2004). *Kniklast van gedeeltelijk ontgraven heipalen*. BSC eindrapport.
- [11] Bouma, A.L. (2000). *Mechanica van constructies*. Elastostatica van slanke structuren. Delft: Delft University Press.
- [12] Blom, C.B.M. *Document: Sterkte slanke HSB voetgangersbrug*.
- [13] Vandepitte, D. *Berekeningen van constructies* Boekdeel 2. Gent: E Story-Scientia via <http://www.berekeningvanconstructies.be/>

### De brugdoorsnede

- [14] Hartsuijker, C en Welleman, H. *Toegepaste Mechanica*. Deel 3. Statisch onbepaalde constructies en Bezwijkanalyse. Den Haag: Academic Service.
- [15] Walraven, J.C. en Galjaard, J.C. (1997). *Voorgespannen Beton*. 's Hertogenbosch: ENCI Media.

### Stabiliteit van de brug

- [16] *Cement* (juni 2009). Knikstabiliteit ankerpalen.
- [17] Technische Universität München, Zentrum Geotechnik. (2005). *Knicken von Pfählen mit kleinem Durchmesser in breiigen Böden*. Stuttgart: Fraunhofer IRB Verlag.
- [18] Technische Universität München. *Knicken von Pfählen mit kleinem Durchmesser in breiigen Böden*. Geraadpleegd in april 2010 via [http://www.gb.bv.tum.de/index.php?option=com\\_content&task=view&id=68&Itemid=73&lang=de](http://www.gb.bv.tum.de/index.php?option=com_content&task=view&id=68&Itemid=73&lang=de)



## 9 Index van symbolen

### Materiaal eigenschappen

#### *Beton*

$f_{ck}$	Karakteristieke cilinderdruksterkte na 28 dagen.
$f_{cd}$	Rekenwaarde van de druksterkte.
$f_{cm}$	Gemiddelde waarde van de cilinderdruksterkte.
$f_{ctm}$	Gemiddelde waarde van de axiale treksterkte.
$E_c$	Elastischiteitsmodules van beton.
$E_s$	Elastischiteitsmodules van betonstaal.
$\varepsilon_{c3}$	Betonstuik.
$\varepsilon_{cu3}$	Grenswaarde van betonstuik.
$\rho$	volumieke massa van beton kg/m <sup>3</sup> .

#### *Betonstaal*

$f_{yk}$	Karakteristieke van de vloeigrens van betonstaal.
$f_{yd}$	rekenwaarde van de vloeigrens van betonstaal.
$\varepsilon_s$	Rek van betonstaal.
$\varepsilon_{s,vl}$	Rek van betonstaal bij maximale belasting.

### Geometrische eigenschappen

#### *Traagheidsmomenten*

$I_{regel}$	Buigtraagheidsmoment van de leuningbovenregel.
$I_{dek}$	Buigtraagheidsmoment van het brugdek.
$I_{leuning}$	Buigtraagheidsmoment van de vlakvulling.

#### *Stijfheid*

$EI$	Buigstijfheid.
$EI_{cr}$	Buigstijfheid van de ongescheurde doorsnede.
$EI_e$	Buigstijfheid van de gescheurde doorsnede, elastisch vervormt.
$EI_u$	Buigstijfheid van de gescheurde doorsnede, plastisch vervormt.
$EI_{regel}$	Buigstijfheid van de leuningbovenregel.
$EI_{dek}$	Buigstijfheid van het brugdek.
$EI_{leuning}$	Buigstijfheid van de vlakvulling.
$k_{doorsnede}$	De veerstijfheid die het brugdek en de vlakvulling verleend aan de leuningbovenregel.

### *Doorsnede eigenschappen*

$d$	Effectieve hoogte van een dwarsdoorsnede.
$x_e$	Hoogte van de op druk belaste doorsnede; elastisch.
$x_{e,vl}$	Hoogte van de op druk belaste doorsnede; elastisch + betonstaal vloeit.
$x_u$	Hoogte van de op druk belaste doorsnede; plastisch.
$x_{u,vl}$	Hoogte van de op druk belaste doorsnede; plastisch + betonstaal vloeit.
$A_c$	Oppervlakte betonddoorsnede.
$A_s$	Oppervlakte wapeningstaal doorsnede.
$\emptyset_s$	Diameter van de hoofdwapening in de doorsnede.

### *Factoren*

$imperf$	Imperfectiefactor van beton, ten behoeve van kip.
$\alpha$	Verhouding die de normaaldrukkracht verdeling in de leuningbovenregel in rekening brengt.

### *Stabiliteit van de leuningbovenregel*

$n$	Stabiliteitsfactor.
$l_k$	Kniklengte van de leuningbovenregel.

## **Belastingen**

### *Externe belastingen op de brug*

$q_p$	Gelijkmatig verdeelde rustende belasting en de permanente belasting van het brugdek.
$q_{p,pass}$	Gelijkmatig verdeelde rustende belasting en de permanente belasting van het brugdek, loodrecht op de leuningbovenregel, om de horizontale verplaatsing van de belasting op het brugdek te simuleren.
$q_q$	Gelijkmatig verdeelde variabele belasting op het brugdek.
$q_{q,pass}$	Gelijkmatig verdeelde variabele belasting loodrecht op de leuningbovenregel, om de horizontale verplaatsing van de belasting op het brugdek te simuleren.
$q_{q,act}$	Gelijkmatig verdeelde variabele belasting loodrecht op de leuningbovenregel.
$P_q$	Geconcentreerde variabele belasting op het brugdek.
$P_{q,pass}$	Geconcentreerde variabele belasting loodrecht op de leuningbovenregel, om de horizontale verplaatsing van de belasting op het brugdek te simuleren.
$P_{q,act}$	Geconcentreerde variabele belasting loodrecht op de leuningbovenregel.

### *Krachten in de leuningbovenregel*

$F_k$	Kritische belasting of knikkracht.
$F_E$	Eulerknik.
$F_{eng}$	Knikkracht van Engesser.
$F_{TUM}$	Knikkracht gereduceerd met de invloed van de imperfectie en de maximale elastische veeruitwijking.
$N_d$ of $N_{Ed}$	Rekenbelasting van de normaaldrukkraft.
$N_{Rd}$	Rekenwaarde van de opneembare normaalkraft.
$H_k$	Restcapaciteit om een horizontale puntlast, loodrecht op de leuningbovenregel, te kunnen opvangen, voordat de constructie bezwijkt.
$H_d$	Rekenwaarde van de puntlast loodrecht op de leuningbovenregel,
$H_e$	Maximaal opneembare kracht, loodrecht op de leuningbovenregel, bij elastische vervorming de vlakvulling en het brugdek.
$H_u$	Maximaal opneembare kracht, loodrecht op de leuningbovenregel, bij plastische vervorming de vlakvulling en het brugdek.

### *Momenten in de leuningbovenregel*

$M_{Rd}$	Rekenwaarde van de momentenweerstand.
$M_{1ste\ orde}$	Optredend eerste orde moment.
$M_{2de\ orde}$	Optredend tweede orde moment.
$M_{Ed}$ of $M_{totaal}$	Optredend eerste en tweede orde moment.

### *Krachten in het brugdek en de vlakvulling*

$N_c'$	Maximale elastische normaaldrukkraft in combinatie met een buigend moment in de doorsnede.
$N_{cu}'$	Maximale plastische normaaldrukkraft in combinatie met een buigend moment in de doorsnede.
$N_{cr}$	Maximale scheurtrekkraft in de betondoorsnede.
$N_s$	Optredende trekkraft van het betonstaal in de doorsnede; elastische vervorming van beton.
$N_{su}$	Optredende trekkraft van het betonstaal in de doorsnede; plastische vervorming van beton.
$N_{s,vl}$	Maximale trekkraft van het betonstaal.

### *Momenten in het brugdek en de vlakvulling*

$M_{cr}$	Scheurmoment van de betondoorsnede.
$M_e$	Maximaal elastisch opneembaar moment.
$M_u$	Maximaal plastisch opneembaar moment.





## Tenslotte...

Mijn drang om constructeur te worden heeft mij uiteindelijk via een MBO Bouwkundige opleiding en een HBO civiele opleiding gebracht tot deze civiele universitaire opleiding in delft. Door dit pad te bewandelen heb ik veel geleerd. Met name het verschil tussen de hoge school en de universiteit is bijzonder groot op theoretisch vlak. Het was voor mij een worsteling om alle theoretische kennis die ik in de jaren ervoor nooit had opgebouwd bij te spijkeren.

Nooit had ik verwacht dat ik ooit mijn thesis zou maken over een knik en kip probleem. Hoewel ik altijd mechanica als een van de interessantste vakken vond van de opleiding heb ik altijd moeite gehad om het fenomeen knik goed te begrijpen. Het maken van deze thesis heeft mijn kennis en begrip op dit gebied aanzienlijk doen toenemen. Ik heb veel steun gehad aan de opmerkingen van mijn begeleiders en ook wil ik ze bedanken voor de ruime mate van geduld. Het heeft mijn kennis op het gebied van constructiemechanica veel goed gedaan.

Ik heb daarnaast veel steun gehad aan mijn lieve Afina, die mij altijd blijft steunen en helpen, mijn vader en schoonouders en mijn inmiddels overleden oma, Janny Bossemeijer, waarbij ik gedurende enkele jaren van deze opleiding in huis heb gewoond, wat het volgen van deze opleiding voor mij mogelijk maakte.

*En nu?*

*We zijn nog maar aan het begin.*

*Wat het leven gaat brengen, wie zal het weten?*

*We gaan het allemaal meemaken!...*

*Vincent Weidema*



# Bijlagen

A.	Dragende leuningbruggen 'uit het verleden'	101
B.	Programma van eisen voor een fiets- en voetgangersbrug	105
C.	Vergelijking van numerieke tweede orde berekeningen met formule volgens Engesser	109
D.	De uitwerking van de knikformule volgens de TU München	137
E.	Referentieberekening van de knikkracht in de brug	141
F.	Samengestelde buigstijfheid van de gehele brug	147
G.	Uitwerking van het tweede orde effect	149
H.	Berekening; sterkte van de leuningbovenregel	157



# A Dragende leuningbruggen ‘uit het verleden’

Door de geschiedenis heen zijn veel vormen van dragende leuningbruggen ontworpen en uitgevoerd. In de Verenigde Staten kent men deze bruggen als “pony truss bridges”. Deze naam is gebruikelijk geworden in het begin van de 40er jaren van vorige eeuw (1930-1935). De oorsprong [A1] van deze naam is onbekend, maar aangenomen kan worden dat de term pony wat in werkelijkheid klein paard betekend in deze naam staat voor klein vakwerk (= truss).



Figuur A1. Brug over de kleine Tacuarembó rivier (Uruguay)

**De betekenis volgens [www. dictionary.com](http://www.dictionary.com) [A2] is:**

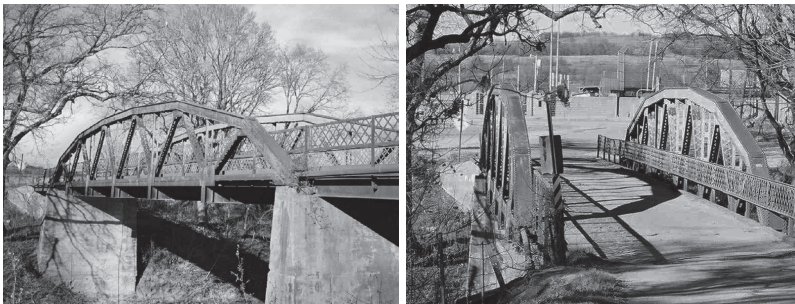
**Pony Truss:**

*“a through bridge truss having its deck between the top and bottom chords and having no top lateral bracing.”*

*“Een doorgaande vakwerk brug met het dek tussen de onderregels en zonder horizontale ondersteuning aan de bovenzijde.”*

De meeste bruggen volgens dit principe zijn van hout en staal (en ijzer). In beton zijn deze bruggen maar heel zelden uitgevoerd. Enkele voorbeelden hiervan zijn:

- Betonnen brug over de kleine Tacuarembó rivier (te Tacuarembó in Uruguay). Figuur A1
- Stalen brug bij Fairfax-Burbank (in Kansas, VS). Figuur A2

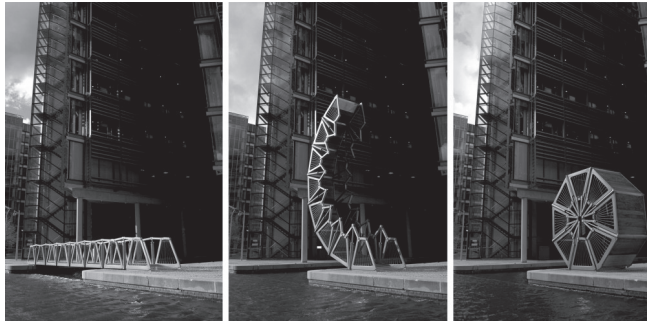


Figuur A2. Stalen brug bij Fairfax-Burbank (Kansas, VS)

Houten bruggen die op een dergelijke manier zijn gemaakt zijn meestal lichtere voetgangersbruggen. Vaak worden tuinbruggen en parkbruggen nog op een dergelijke manier gemaakt.

Tegenwoordig zijn er nog steeds bruggen die gemaakt worden met vakwerkleuningen. Enkele bijzonder ontwerpen hierin zijn:

- Rolling bridge (te Londen in UK). Figuur A3  
*Rolling bridge [A3] is ontworpen als een bijzonder beweegbare voetgangersbrug. De brug heeft in 2005 de British Structural Steel Award gewonnen. De brug is ontworpen door Heatherwick Studio.*



Figuur A3. Rolling Bridge in Londen (UK)

- Borneo-Sporenburg brug (te Amsterdam in Nederland). Figuur A4  
*Deze naam hoort bij drie bruggen, gebouwd tussen 1998 en 2001, waarvan de grootste het meest in het oog springt. De brug met de grootste overspanning is ook gemaakt volgens het principe met dragende vakwerk leuningen [A4]. De brug is niet te missen, de bijzondere vormgeving en de rode kleur geven een sterk contrast met de achtergrond. De brug is ontworpen door het Architectenbureau West8.*



Figuur A4. Borneo-Sporenburg brug in Amsterdam

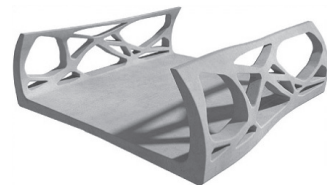
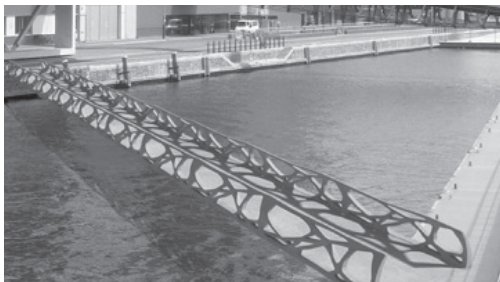
- Mabey bruggen (VS). Figuur A5

*Deze bruggen [A6] worden veelal gebruikt als tijdelijke brug of goedkope permanente oplossing, met beperkte levensduur. Deze modulaire brug kan worden geplaatst zonder veel engineering werk vooraf. Deze brug kan snel worden opgebouwd [A7] en afgebroken [A5]. Het 'US Army Corp' gebruikt deze bruggen veel in verband met de snelheid en het gemak van opbouwen en verwijderen. In veel landen gebruiken ze deze bruggen ook als permanente brug, omdat er geen geld is om een definitieve brug te plaatsen. In 2006 en 2007 is deze brug tijdelijk ingezet omdat de bestaande brug vervangen in winterset (VS) moest worden. In Nederland kennen we deze brug onder de naam Baileybrug. In Europa worden deze bruggen nog veel toegepast als tijdelijke brug.*



*Figuur A5. Demonteren van een Mabey brug*

Nog steeds worden dragende leuningbruggen nauwelijks in beton uitgevoerd. Op dit moment zijn er enkele ingenieursbureaus in Nederland die een dergelijk ontwerpen in beton aanbieden. FDN-engineering heeft inmiddels zijn eerste proefbrug gerealiseerd. Deze brug (figuur A6), uitgevoerd in vezelversterkt ultra hogesterktebeton, wordt volledig geprefabriceerd en kan wanneer de fundering reeds aanwezig is in één dag geplaatst worden.



*Figuur A6. Dragende leuningbrug FDN - engineering*



## Referenties

- [A1] Jackson, D.C. (1988). *Great American Bridges and Dams*. Washington, DC: Preservation Press.
- [A2] Dictionary.com. '*dictionary result: pony truss*'. Geraadpleegd via <http://dictionary.reference.com/browse/pony+truss?qsrc=2446>
- [A3] Heatherwick Studio. '*Medium Project: Rolling Bridge*'. Geraadpleegd via <http://www.heatherwick.com/rolling-bridge/>
- [A4] West 8. *Bridges Borneo-Sporenburg*. Geraadpleegd via [http://www.west8.nl/projects/all/bridges\\_borneo\\_sporenburg/](http://www.west8.nl/projects/all/bridges_borneo_sporenburg/)
- [A5] Randolph Bridge Construction. *Randolph BRF0241(29)*. Geraadpleegd via <http://randolphmainstreetbridge.blogspot.com/2007/11/remove-maybe-bridge.html>
- [A6] Mabey Bridge & Shore, inc. *Assembly, Panel bridge assembly and installation*. Geraadpleegd via <http://www.mabey.com/ProductsServices/Bridges/Assembly/tabid/85/Default.aspx>
- [A7] Mabey Bridge. *Computer-Generated Bridge Build Sequence*. Geraadpleegd via <http://www.mabeybridge.co.uk/movAnim.asp>
- [A8] FDN Engineering. *Productontwikkeling, Modulaire bruggen*. Geraadpleegd via <http://www.fdn-engineering.nl/productontwikkeling/modulaire-bruggen>

### Afbeeldingen afkomstig van:

Figuur A1 [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Puente\\_Tacuaremb%C3%B3\\_02.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Puente_Tacuaremb%C3%B3_02.jpg)

Figuur A2 <http://okbridges.wkinsler.com/saltcreekosage4.html>

Overige afbeeldingen komen uit de bovenstaande referentie websites.

## B Programma van eisen voor een fiets- en voetgangersbrug

Het programma van eisen is toegevoegd als bijlage, omdat dit voor een ontwerp van de brug onmisbaar is. De afmetingen van een brug moeten immers ergens vandaan komen. Ook eisen aan de sociale veiligheid en constructieve veiligheid worden meestal beschreven in het programma van eisen.

In deze thesis wordt niet uitgebreid ingegaan op de landhoofden en omgeving van de brug. Daarom worden hier nu geen eisen aan gesteld. Uitgangspositie is dat de landhoofden een starre oplegging zijn waarvan de zetting niet in rekening hoeft te worden gebracht. Verder is het moeilijk iets te eisen over de doorvaarthoogte, omdat dit referentieontwerp op meerdere locaties kan liggen en de doorvaarthoogte van de brug vooral te maken heeft met de omgevingshoogte en de beschikbare ruimte voor de lengte van de op- en afrit van de brug.

### Programma van eisen

Veel van de onderstaande eisen vloeien voort uit onderzoeksrapporten, algemene aanbevelingen en normen. [B1], [B2], [B3], [B4], [B5], [B6]

Voor het referentieontwerp gelden de volgende eisen:

#### Eisen ten aanzien van het verkeer:

- De brug moet geschikt zijn voor langzaam verkeer (fietsers en voetgangers).
- Minimale breedte binnen de brugleuningen is 2 meter.
- De bovenkant leuning moet belastbaar zijn met  $F \geq 2$  kN [B5].
- Minimale overspanning is 5 meter.
- Maximale overspanning is 16 meter.
- De leuninghoogte bedraagt minimaal 1 meter boven het brugdek.
- Tussen fietspaden op de brug en de brugleuning moet een schrikstrook van tenminste 30 cm breed aanwezig zijn.
- Fietspaden voor doorgaand tweerichtingsverkeer moeten tenminste 3,0 meter breed zijn.
- Fietspaden voor doorgaand éénrichtingsverkeer moeten tenminste 1,75 meter breed zijn.
- Voetpaden moeten tenminste 1,50 meter breed zijn, het is toegestaan om deze breedte te versmallen tot een breedte van 1,20 meter over een maximale lengte van 10 meter.
- De wegen voor langzaam verkeer moeten gelijkmatig verlicht worden. Schaduwvorming moet worden voorkomen en de verlichting (lichtsterkte) moet in relatie staan tot de functie.

### **Eisen ten aanzien van het fabricage & transport:**

- Bouw- en onderhoudskosten voor de eerste 20 jaar mogen niet hoger zijn dan €2000/m<sup>2</sup> [F4].
- Seriefabricage in grote oplagen moet mogelijk zijn.
- Aangevoerde onderdelen moeten op een kleine vrachtwagen (< 3,5 ton) vervoerd kunnen worden.

### **Eisen ten aanzien van beheer & onderhoud:**

- De niet vervangbare delen moeten tenminste 50 jaar meegaan.
- Inspectie moet eenvoudig zijn uit te voeren.
- Schoonmaken moet eenvoudig en goedkoop zijn.

### **Eisen ten aanzien van de constructie:**

- De brug(overspanning) moet worden uitgevoerd in geprefabriceerd beton.
- De brug bestaat uit “aaneengeregen” U-profielen, met dragende leuningën waarbij het dek bevestigd is aan de leuningën.
- De brug moet voldoen aan de Nederlandse normen ten aanzien van constructieve veiligheid. [F6]
- De brug moet zo ontworpen worden, dat er geen water op de brug achterblijft. Bijvoorbeeld na een regenbui of na het schoonspuiten van de brug.

## **Programma van wensen**

Naast de eisen die aan de brug gesteld worden, zijn er een aantal wensen. Deze wensen zijn geen harde eisen voor de brug. In principe is de brug dus te ontwerpen zonder de onderstaande wensen mee te nemen. Wensen zijn opgesteld als een uitbreiding op de minimale gestelde eisen. Het weglaten van deze wensen is geen gebrek op de functie, een tegemoetkoming aan deze wensen geeft de brug en waarschijnlijk de omgeving van de brug extra waarde. [B1], [B2], [B3], [B4], [B5]

### **Wensen ten aanzien van het inpassen in de omgeving:**

Er is één ontwerp dat op veel verschillende locaties geplaatst kan worden. Vaak wordt de brug in een park geplaatst, veelal een omgeving met een glooiende oever. De brug kan ook in een industriële omgeving of een stadsgezicht geplaatst worden. Het ontwerp zou bij voorkeur een uitstraling hebben die in elke omgeving past en tijdloos is. Een toegankelijke uitstraling, zowel overdag als 's avonds is daarbij erg prettig.

### **Wensen ten aanzien van het verkeer:**

- In verband met de bereikbaarheid van door kleine bruggen afgesloten gebieden, enkele bruggen geschikt maken voor kleine vrachtwagens [B5].
- Breedte fietspaden doorgaand verkeer;

tweerichtingsfietsverkeer	≥3,5 meter;
éénrichtingsfietsverkeer	≥2,5 meter.

- Voetpadbreedte  $\geq 2,0$  meter.
- Ter verbetering van de verkeersveiligheid;
  - Een verhoogd voetpad, waarmee een fysieke scheiding tussen voetpad en fietspad wordt geplaatst.
  - Onder alle weersomstandigheden voldoende grip op het brugdek.

#### **Wensen ten aanzien van het fabricage & transport:**

- De plaatsingstijd zo kort mogelijk houden om overlast voor de buurt te beperken.

#### **Wensen ten aanzien van beheer & onderhoud:**

- De brug moet zo dusdanig ontworpen worden dat het aantal schoonmaakbeurten tot een minimum beperkt kan worden.
- Indien de brug geplaatst wordt op een plaats waar de kans op vandalisme (graffiti/vernieling) groot is, het ontwerp daar zoveel mogelijk op toespitsen, zodat de schade beperkt blijft.
- Indien onderhoud noodzakelijk is, frequentie en duur van onderhoud tot een minimum beperken.

#### **Wensen ten aanzien van milieubelasting:**

- Er moet voorkomen worden dat strooizout in de sloten terecht komt.
- De materialen van de brug moeten zoveel mogelijk recyclebaar zijn.
- Een ecokosten berekening van de brug, voor optimaal resultaat vanuit het oogpunt van milieu en samenleving.
- Tijdens fabricage moet de milieubelasting minimaal zijn, dit kan onder andere bereikt worden door: afvalwater niet op het open water te lozen, beperkingen te stellen aan de hoeveelheid fijnstof (die o.a. vrij kan vervliegen) en beperkingen stellen aan vervoersafstand tot de plaatslocatie.

## **Referenties**

- [B1] IGWR, intern (2006). *Studie 200 bruggen*. Kleine bruggen in Rotterdam en omgeving.
- [B2] IGWR, intern (2008). *Voorlopig Programma van Bruggen*.
- [B3] IGWR, intern (2008). *Besprekingsverslag: Innovatiestudie Hoge Sterkte Beton*.
- [B4] IGWR, intern (2008). *Rapport Innovatiestudie*. Deel 1. Versie 2.
- [B5] CROW (2004). *ASVV 2004*. Aanbevelingen voor verkeersvoorzieningen binnen de bebouwde kom. Ede: CROW.
- [B6] *NEN-EN 199X serie + normen die nog niet vertaald zijn in een Eurocode*.



## C Vergelijking van numerieke tweede orde berekeningen met formules volgens Engesser

Deze bijlage is een overzicht van verschillende numerieke eindige elementen berekeningen, uitgevoerd in het pakket 'Scia Engineer 2009' van Nemetschek. De berekeningen moeten bewijzen dat de formules van Engesser gebruikt mag worden. De bewijzen zijn in eerste instantie uitgevoerd door een lineaire berekening te maken en deze te vergelijken met een geometrisch niet lineair tweede orde berekening van hetzelfde model. Daarnaast is met het pakket ook mogelijk om rechtstreeks de stabiliteitsfactor te bepalen aan de hand van een lineaire stabiliteitsberekening.

De eerste berekening is een handberekening ter vergelijking. Daarna volgen vier berekeningen, welke gemodelleerd zijn als een verend ondersteunde drukligger. De laatste vier berekeningen zijn gemodelleerd als een dragende leuning brug, bestaande uit 1D elementen, omdat het pakket geen stabiliteitsberekening kan uitvoeren over 2D elementen.

### Overzicht berekeningen:

Hier volgt een overzicht van de gemaakte berekeningen in deze bijlage die kunnen worden vergeleken met de formules volgens Engesser en een benadering van het werkelijke knikprobleem.

1. Handberekening, formules volgens Engesser
2. Scia berekening 1D (1D, beperkt belast)
3. 4. 5. Scia berekening 1D (belast tot bezwijken)
6. 7. Scia berekening 3D (torsiestijfheid beperkt door scharnieren)
8. 9. Scia berekening 3D (torsiestijfheid opneembaar)

De afmetingen van de brug zijn in alle berekeningen op elkaar afstemd. Berekening 2 geeft geen goede uitslag omdat de ingevoerde normaaldrukkracht in de leuningbovenregel te klein is, waardoor de kniklengte nog niet volledig ontwikkelt is.

Berekening	Knikkracht (Fk)	
1. Formules van Engesser	≈ 7300 kN	(constante normaalkracht)
3. Scia berekening 1D	≈ 7150 kN	(constante normaalkracht)
4. Scia berekening 1D	≈ 10750 kN	(puntlast op de brug)
5. Scia berekening 1D	≈ 9050 kN	(gelijkmatig verdeelde belasting)
6. Scia berekening 3D	≈ 10850 kN	(puntlast op de brug)
7. Scia berekening 3D	≈ 10050 kN	(gelijkmatig verdeelde belasting)
8. Scia berekening 3D	≈ 18000 kN	(puntlast op de brug)
9. Scia berekening 3D	≈ 16400 kN	(gelijkmatig verdeelde belasting)

De formule van Engesser geeft ongeveer hetzelfde resultaat als de knikkkracht berekening met een constante druklast in de leuningbovenregel met verende ondersteuning. Hiermee is aangetoond dat deze formule bruikbaar is. Tussen een constante normaalkracht op de brug en een verdeelde belasting zit nog een behoorlijk verschil. De formule van Engesser zou onder perfecte omstandigheden een te conservatieve benadering zijn voor een brugbelasting die geen constante normaalkracht over de gehele lengte van de brug tot stand brengt.

Het 3D model van berekening 6 en 7 geeft ongeveer gelijke resultaten als het 1D model van berekening 3 en 4. Dit 3D model bevat veel scharnieren om zo min mogelijk torsiestijfheden in de constructie mee te nemen. Het 1D model en de handberekening houden geen rekening met de torsiestijfheid van de doorsnede. Indien dit wel zou moeten gebeuren dan zou de veerstijfheid voor een deel een functie worden van de verplaatsing en dat is op dit moment niet in Scia Engineer in te voeren.

De werkelijkheid is stijfer. Berekening 8 en 9 zijn gemodeleerd zonder scharnieren, alle staven in het model kunnen alle vormen van belastingen op elkaar overbrengen. Dat betekent dat er grote torsiespanningen ontstaan in de leuningboven- en onderregel als gevolg van de golvende knikbeweging. Deze torsiemomenten vergroten stijfheid van de doorsnede en de maximale knikkkracht aanzienlijk, ervanuitgaande dat deze torsiemomenten opneembaar zijn.

## Handberekening, formule volgens Engesser *(berekening 1)*

In de handberekening wordt uitgegaan van een ongscheurde drukligger welke verend is ondersteund over de gehele lengte. De normaalkracht in de drukligger is over de hele lengte constant.



*De afmetingen van de drukligger zijn 100mm hoog bij 300mm breedte. De gebruikte betonklasse C50/60 heeft een E-modules van 37GPa. De lengte van de brug is 16 meter, de hoogte van de leuning is 1 meter en de breedte is 4 meter. De overige afmetingen zijn zodanig gekozen dat de gescheurde doorsnede een veerstijfheid heeft van ongeveer 1600 kN/m<sup>2</sup>.*

$$F_{k,eng;1} = 2\sqrt{k EI} = 2\sqrt{1599,18 \cdot 8325} = 7297,44 \text{ kN}$$

$$\text{met: } EI_{leuningbovenregel} = 37 \frac{100 \cdot 300^3}{12} = 8325 \text{ kNm}$$

$$EI_{vlakvulling+dek;gescheurd} = \frac{37 \cdot 2 \cdot 480 \cdot 155,8^3}{3 \cdot 12} = 3731,41 \text{ kNm}$$

$$k = \frac{1}{m \left[ \frac{e^2 b}{2 EI_{dek}} + \frac{e^3}{3 EI_{leuning}} \right]} = \frac{1}{1 \left[ \frac{1^2 \cdot 4}{2 \cdot 3731,41} + \frac{1^3}{3 \cdot 8325} \right]} = 1599,18 \text{ kN/m}^2$$

De kniklengte behorend bij de formule van Engesser:

$$l_{k,eng;1} = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 EI}{k}} = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 \cdot 8325}{1599,18}} = 4,75 \text{ m}$$

## Scia berekening 1D (berekening 2)

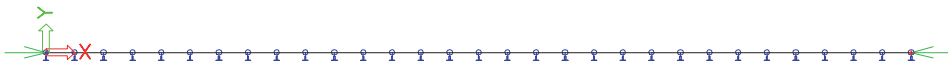
### Een balk verend ondersteund:

Lengte: 16 m  
Breedte: 300 mm  
Hoogte: 100 mm

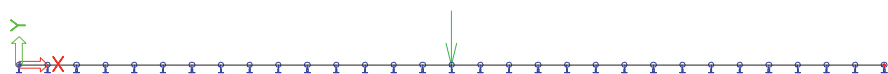
Betonklasse: C50/B60 (E=37 GPa)  
Veerkracht in y-richting: 1600 kN/m<sup>2</sup>  
In z-richting is de balk over de volledige lengte opgelegd.  
In x-richting is geen oplegging aanwezig.

### Belastingen:

Belasting 1 Punlasten: 2x 1000kN (normaalkracht 1000kN)



Belasting 2 Punlast Loodrecht: 10kN

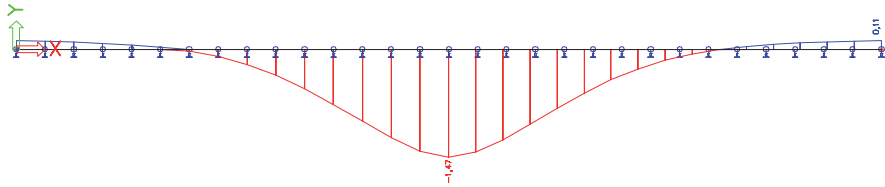




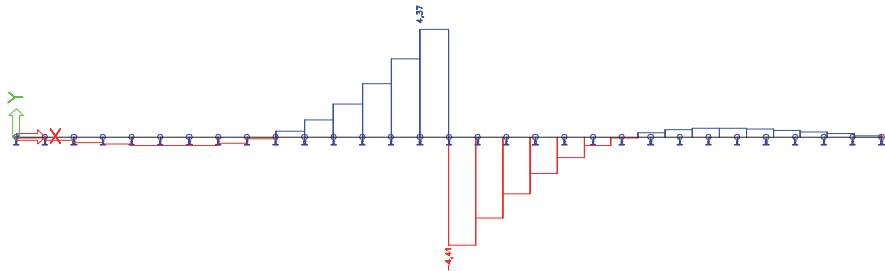
**Resultaten:**

**Lineaire berekening, bij een combinatie van beide belastingen:**

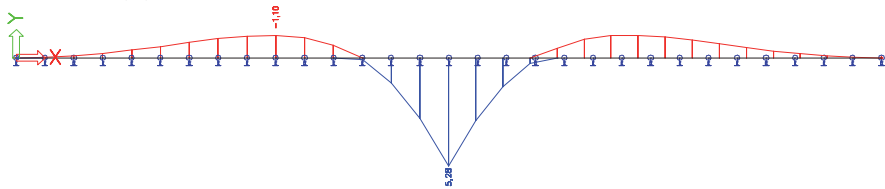
Verplaatsingen  $u_{y,lin,2}$ : maximale verplaatsing 1,47mm



Dwarskracht  $V_{y,lin,2}$ : maximale dwarskracht 4,41kN

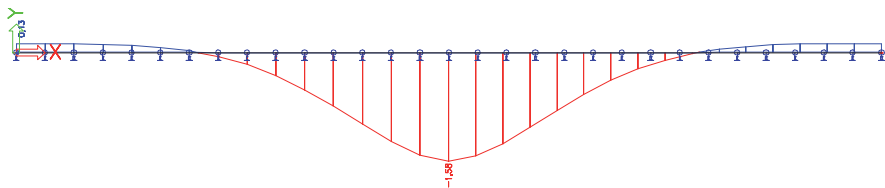


Moment  $M_{z,lin,2}$ : maximaal moment 5,28kNm

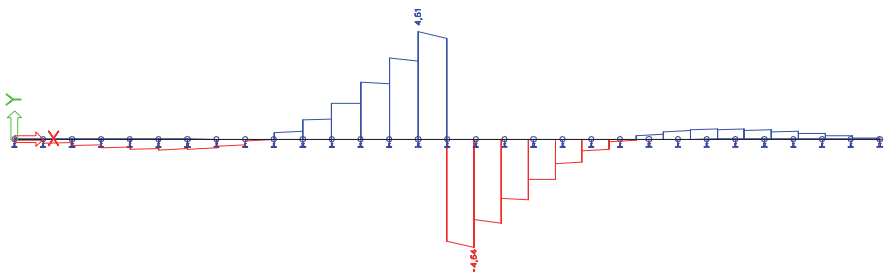


**GNL berekening, bij een combinatie van beide belastingen:**

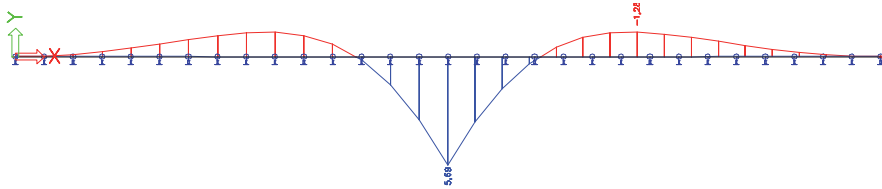
Verplaatsingen  $u_{y,nl,2}$ : maximale verplaatsing 1,58mm



Dwarskracht  $V_{y,nl,2}$ : maximale dwarskracht 4,64kN



Moment  $M_{z,nl,2}$ : maximaal moment 5,69kNm



### Lineaire stabiliteit berekening:

Scia Engineer is in staat om door middel van een stabiliteitsberekening zelf een stabiliteitsfactor te bepalen. De stabiliteitsberekening kan alleen knoopverplaatsingen als resultaat weergeven. Omdat de ingevoerde verend ondersteunde ligger geen echte tussensteunpunten heeft, heeft het geen zin om deze weer te geven. De stabiliteitsfactor is  $n=3,7076$ .

Verhouding tussen eerste en tweede orde:

$$u_{2^{de} \text{ orde}} + u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste} \text{ orde}} \rightarrow n = \frac{u_{2^{de} \text{ orde, tot}}}{u_{2^{de} \text{ orde, tot}} - u_{1^{ste} \text{ orde}}}$$

Stabiliteitsfactor in het midden, ter vergelijking met formule van Engesser:

$$n = \frac{1,58}{(1,58 - 1,47)} = 14,363636$$

$$N = 3700 \text{ kN} \rightarrow F_{k,scia,eng1} = 1000 \cdot 14,363636 = 14363,64 \text{ kN}$$

Stabiliteitsfactor Scia stabiliteitsberekening:

$$n = 3,7076$$

$$N = 1000 \text{ kN} \rightarrow F_{k,scia,stab1} = 1000 \cdot 3,7076 = 3707,6 \text{ kN}$$

De normaaldrukkraft is klein. Daardoor is er nog geen knikkromme ontstaan die een vergelijkbare lengte heeft als de kniklengte volgens de handberekening. Belangrijk is dat we hieruit leren dat het voor een verend ondersteunde ligger altijd gezocht moet worden naar de knikkracht door een zo groot mogelijke normaaldrukkraft in de leuning boven regel te plaatsen.

## Scia berekening 1D *(berekening 3, 4 & 5)*

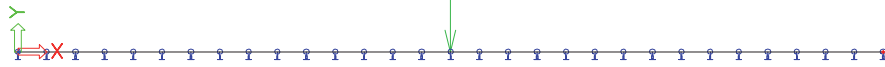
### Een balk verend ondersteund:

Lengte: 16 m  
 Breedte: 300 mm  
 Hoogte: 100 mm

Betonklasse: C50/B60 ( $E=37$  GPa)  
 Veerkracht in y-richting: 1600 kN/m<sup>2</sup>  
 In z-richting is de balk over de volledige lengte opgelegd.  
 In x-richting is geen oplegging aanwezig.

### Belastingen:

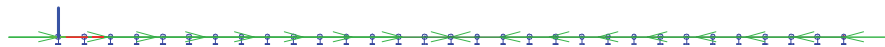
*Belasting 1 Puntlast Loodrecht: 100kN*



*Belasting 2 Puntlasten: 2x 3700kN – Normaalkracht 3700kN*



*Belasting 3 Simulatie van een puntlast op de brug.  
 Gelijmatig verdeelde belasting: 1385kN/m*



*Belasting 4 Simulatie van een gelijkmatigverdeelde belasting op de brug.  
 Gelijmatig verdeelde belasting: 2265kN/m tot 0kN/m  
 Normaalkracht in het midden 9048,20kN*



### De belastingcombinaties zijn:

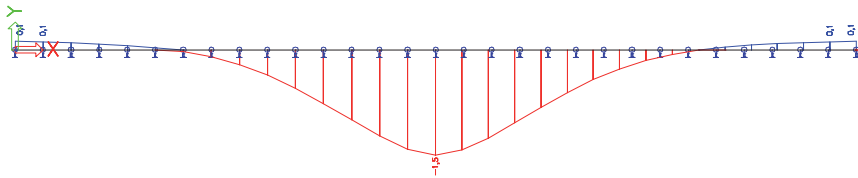
3. Belasting 1 + Belasting 2; ter vergelijking met de formule van Engesser
4. Belasting 2 + Belasting 3; als gevolg van een puntlast op de brug
5. Belasting 1 + Belasting 4; als gevolg van een gelijkmatig verdeelde belasting

## Resultaten:

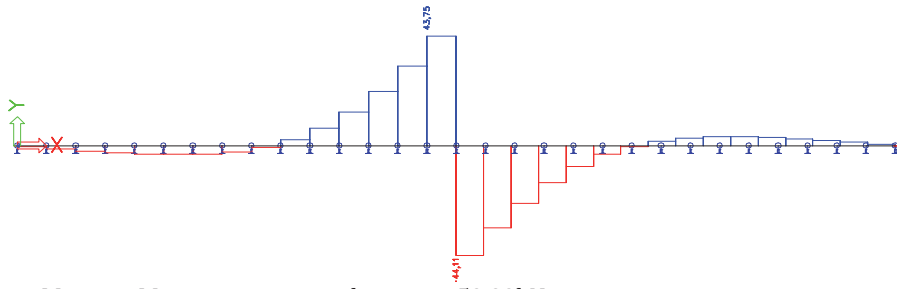
### De lineaire berekening:

De lineaire resultaten bevatten geen tweede orde effecten en zijn daarom voor alle belastingcombinaties gelijk. Het enige verschil in de lineaire berekening is het normaalkrachten verloop.

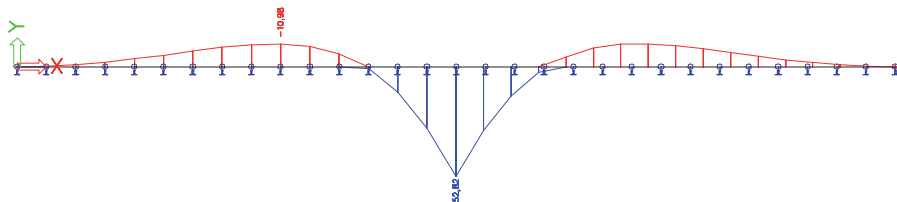
Verplaatsingen  $u_{y,lin,3,4\&5}$ : maximale verplaatsing 14,69mm



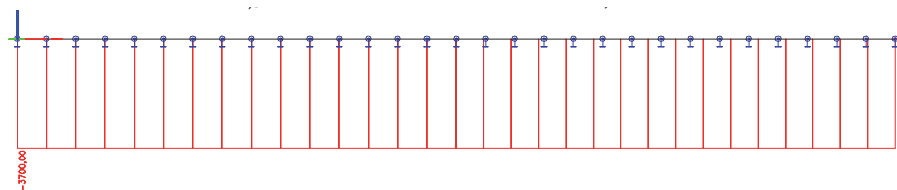
Dwarskracht  $V_{y,lin,3,4\&5}$ : maximale dwarskracht 44,11kN



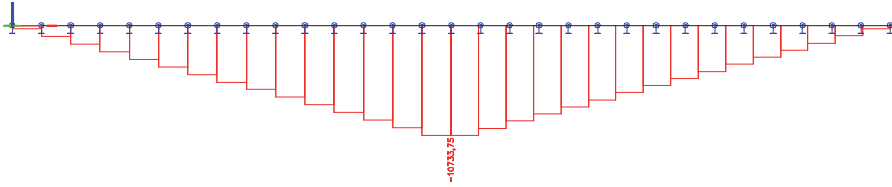
Moment  $M_{z,lin,3,4\&5}$ : maximaal moment 52,82kNm



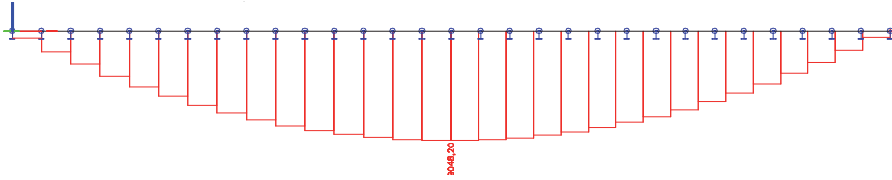
Normaalkracht  $N_{lin,3}$ : maximale normaalkracht 3700,00kN



Normaalkracht  $N_{lin,4}$ : maximale normaalkracht 10733,75kN



Normaalkracht  $N_{lin,5}$ : maximale normaalkracht 9048,20kN

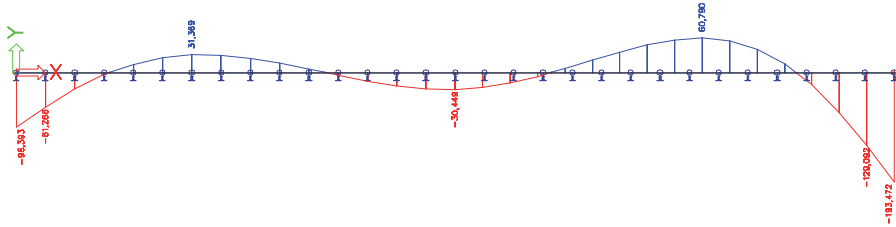


### De GNL berekeningen:

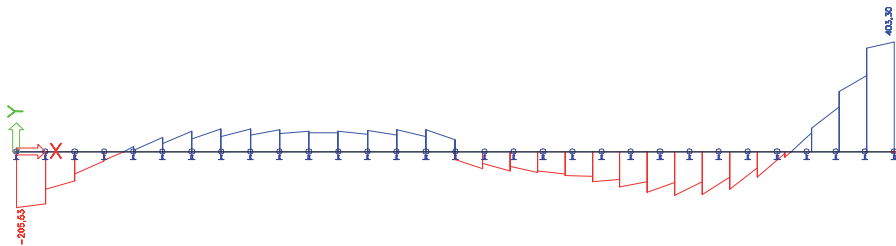
De GNL resultaten bevatten tweede orde effecten en zijn daarom voor alle belastingcombinaties verschillend. Ze zijn daarom hieronder afzonderlijk weergegeven.

GNL combinatie 3:

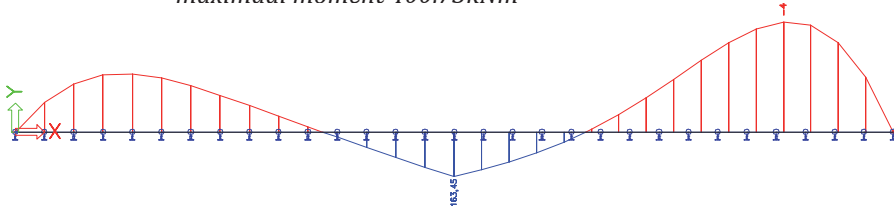
Verplaatsingen  $u_{y,nl,3}$ : verplaatsing 30,449mm in het midden,  
maximale verplaatsing totaal 193,472mm



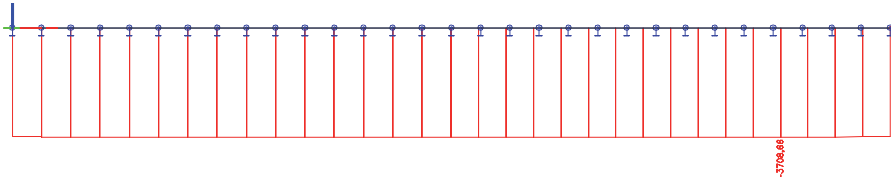
Dwarskracht  $V_{y,nl,3}$ : maximale dwarskracht 403,30kN



Moment  $M_{z,nl,3}$ : moment 163,45kNm in het midden,  
maximaal moment 400.73kNm

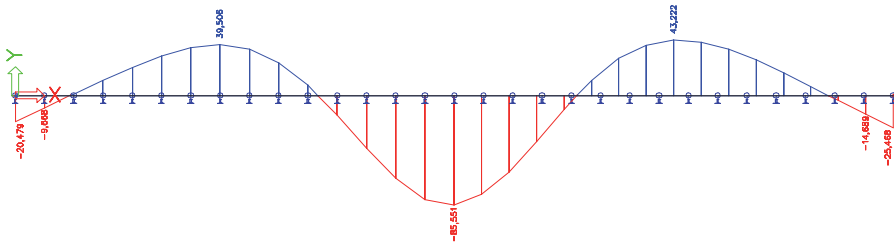


Normaalkracht  $N_{nl,3}$ : maximale normaalkracht 3708,66kN

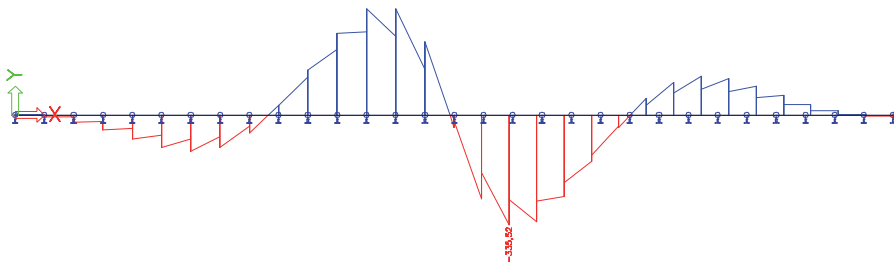


GNL combinatie 4:

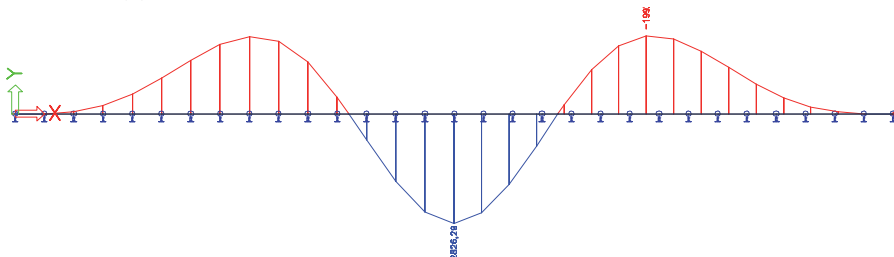
Verplaatsingen  $u_{y,nl,4}$ : maximale verplaatsing 85,551mm in het midden



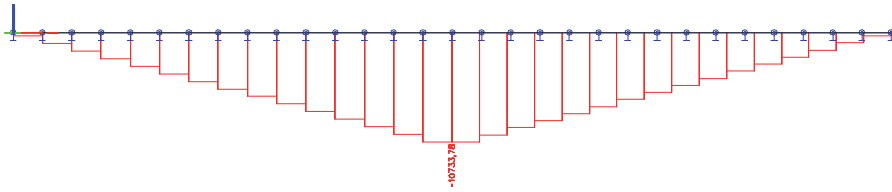
Dwarskracht  $V_{y,nl,4}$ : maximale dwarskracht 335,52kN



Moment  $M_{z,nl,4}$ : maximaal moment 398,81kNm

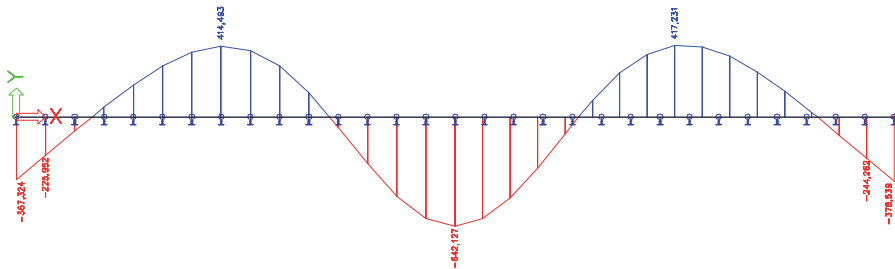


Normaalkracht  $N_{nl,4}$ : maximale normaalkracht 10733,78kN

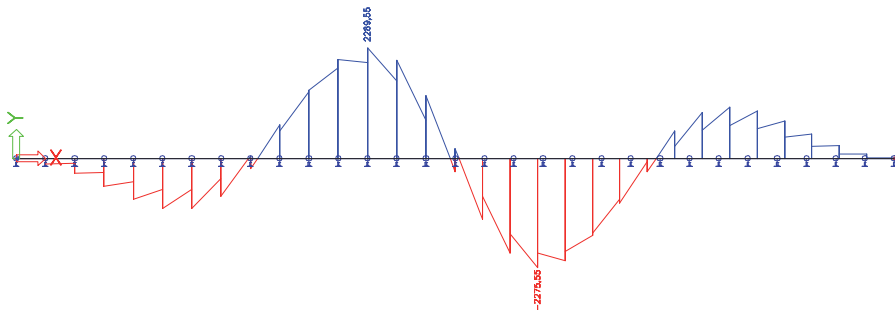


GNL combinatie 5:

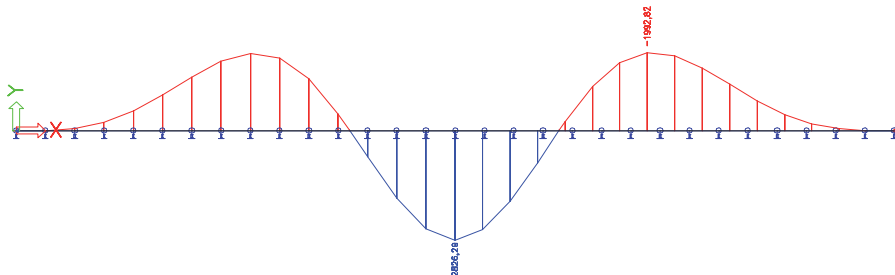
Verplaatsingen  $u_{y,nl,5}$ : maximale verplaatsing 642,127mm in het midden



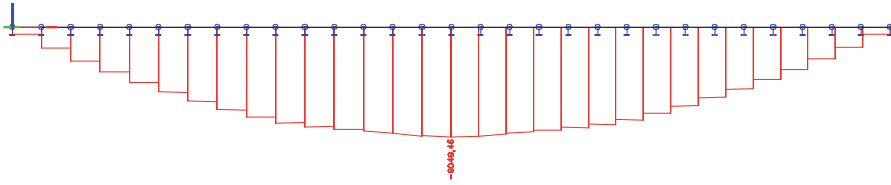
Dwarskracht  $V_{y,nl,5}$ : maximale dwarskracht 2289,55kN



Moment  $M_{z,nl,5}$ : maximaal moment 2826,29kNm



Normaalkracht  $N_{nl,5}$ : maximale normaalkracht 9049,46kN



### De stabiliteits berekeningen:

Scia Engineer is in staat om door middel van een stabiliteitsberekening zelf een stabiliteitsfactor te bepalen. De stabiliteitsberekening kan alleen knoopverplaatsingen als resultaat weergeven. Omdat de ingevoerde verend ondersteunde ligger geen echte tussensteunpunten heeft, heeft het geen zin om deze weer te geven. De stabiliteitsfactoren zijn:

Combinatie 3	n=1,0021	(bezwijkt op het uiteinde)
Combinatie 4	n=1,0002	(bezwijkt in het midden)
Combinatie 5	n=1,0009	(bezwijkt in het midden)

Overzicht van de resultaten:

*Verhouding tussen eerste en tweede orde:*

$$u_{2^{de} orde, tot} = u_{2^{de} orde} + u_{1^{ste} orde} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste} orde} \quad \rightarrow \quad n = \frac{u_{2^{de} orde, tot}}{u_{2^{de} orde, tot} - u_{1^{ste} orde}}$$

*Combinatie 3:*

$$n = \frac{30,449}{30,449 - 14,690} = 1,9322$$

$$N_{lin,3} = 3700,00 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad F_{k,scia,eng,3} = 1,9322 \cdot 3700 = 7149,14 \text{ kN}$$

*Combinatie 4:*

$$n = \frac{85,551}{(85,551 - 14,690)} = 1,2073$$

$$N_{lin,4} = 10733,75 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad F_{k,scia,eng,4} = 1,2073 \cdot 10733,75 = 12958,89 \text{ kN}$$

*Combinatie 5:*

$$n = \frac{642,127}{642,127 - 14,690} = 1,0234$$

$$N_{lin,5} = 9048,20 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad F_{k,scia,eng,5} = 1,0234 \cdot 9048,20 = 9259,93 \text{ kN}$$



*De vergelijking met belastingcombinatie 1 in Scia Engineer komt overeen met de knikkracht volgens de formule van Engesser. Hiermee is aangetoond dat de formule van Engesser is een goede manier is voor het uitrekenen van een verend ondersteunde ligger met een constante normaalkracht.*

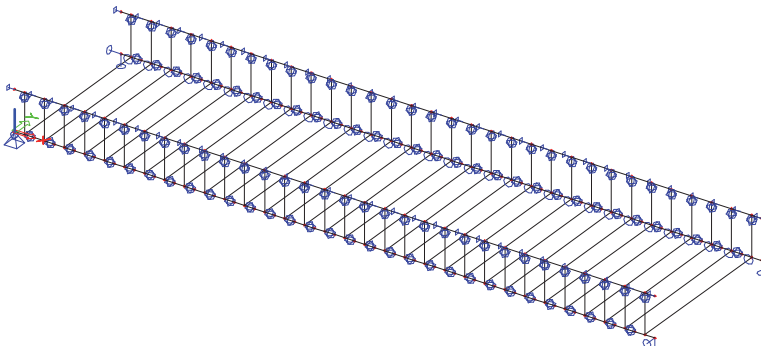
$$F_{k,eng,1} = 7299,31 \text{ kN} \cong F_{k,scia,eng,3} = 7149,14 \text{ kN}$$

*Een niet constante normaalkracht heeft tot gevolg dat de knikkracht vele malen groter mag zijn volgens de berekende bovenstaande waarden. Echter Scia Engineer geeft ook stabiliteitsfactoren. Indien de stabiliteitsfactor van de gemodeleerde stabiliteits-berekening kleiner wordt dan "1", zal de GNL berekening geen stabiliteit meer kunnen vinden. In belastingcombinatie 4 en 5 zijn de door Scia Engineer bepaalde stabiliteitsfactoren nagenoeg gelijk aan 1,0+. Dat betekent dat de knikkracht van de belastingcombinaties 4 en 5 respectievelijk*

$$F_{k,scia,stab,4} \cong N_{lin,4} = 10733,75 \text{ kN} \text{ en } F_{k,scia,stab,5} \cong N_{lin,5} = 9048,20 \text{ kN} \text{ zijn.}$$

## Scia berekening brug 3D (berekening 6 & 7)

### Geometrie:



### Afmetingen:

Lengte: 16 m  
Breedte: 4 m  
Hoogte: 1 m

Leuningbovenregel:  
Breedte: 300 mm  
Hoogte: 100 mm

Dek en vlakvulling 32x:  
Breedte: 480,0 mm  
Dikte: 155,8 mm

Leuningonderregel:  
Breedte: 300 mm  
Hoogte: 200 mm

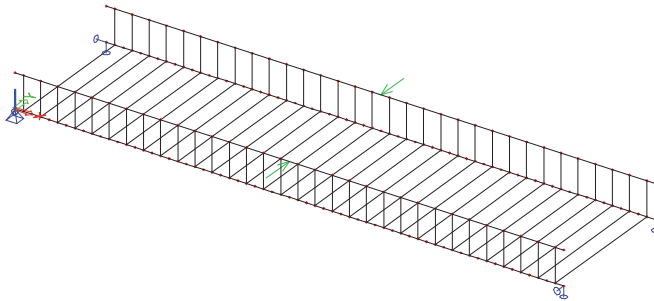
Betonklasse: C50/B60 (E=37 GPa)

De brug is vrij opgelegd op vier hoekpunten

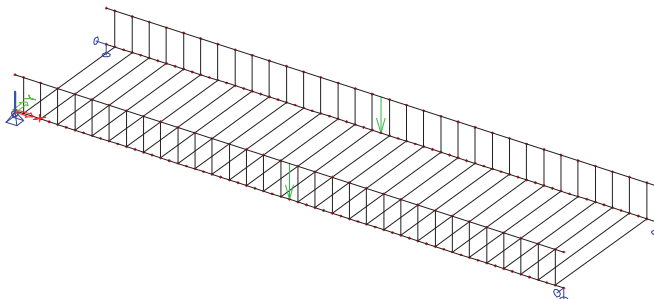
De verplaatsingen in en GNL model zijn groot. Het model benadert de knikkracht nauwkeuriger naarmate de belasting de normaalkracht in de leuningbovenregel groter wordt. Om zo min mogelijk last te hebben van de neveneffecten, als gevolg van deze vervorming is de leuningbovenregel op rotatie gefixeerd en zijn er een aantal scharnieren toegevoegd. Zonder deze scharnieren zou het model nog stijver zijn, omdat wringing uit de doorsnede dan een rol speelt.

### Belastingen:

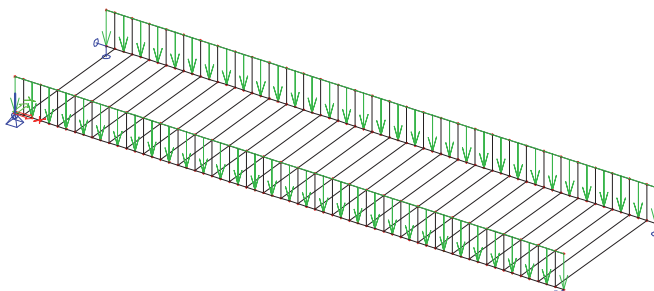
*Belasting 1 Puntlast Loodrecht op beide leuningbovenregels: 100kN*



*Belasting 2 Simulatie van een puntlast op de brug.  
Puntlast: 2550kN/m  
Normaalkracht in het midden 10004,08kN*



*Belasting 3 Simulatie van een gelijkmatigverdeelde belasting op de brug.  
Gelijkmatig verdeelde belasting: 270kN/m  
Normaalkracht in het midden 8609,82kN*



**De belastingcombinaties zijn:**

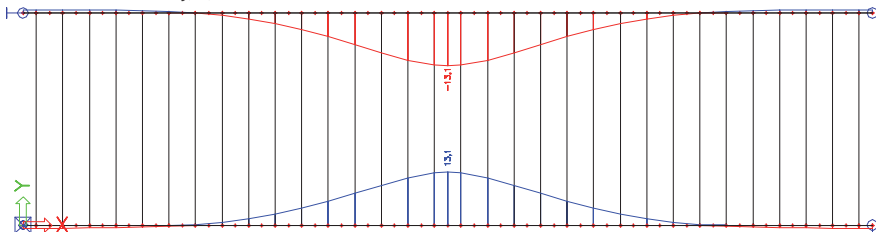
- 6. Belasting 1 + Belasting 2; als gevolg van een puntlast op de brug,
- 7. Belasting 1 + Belasting 3; als gevolg van een gelijkmatig verdeelde belasting.

**Resultaten:**

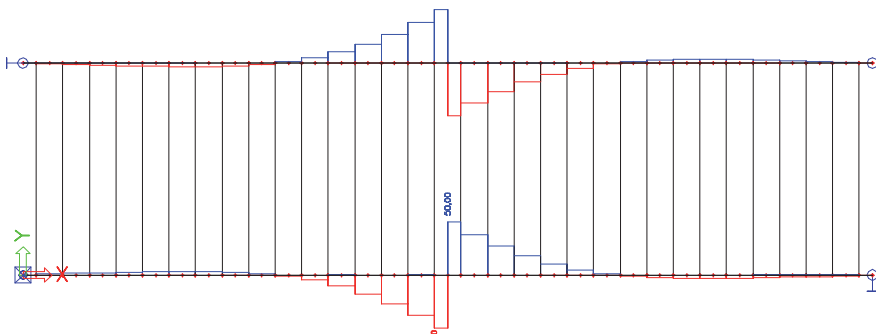
**De lineaire berekening:**

De lineaire resultaten bevatten geen tweede orde effecten en zijn daarom voor alle belastingcombinaties gelijk. Omdat de belastingen 2 en 3 op de brug op de leuningonderregel zijn geplaatst en niet op het brugdek introduceren ze geen horizontaal moment in de leuningbovenregel. Het enige verschil in de lineaire berekening is het normaalkrachten verloop.

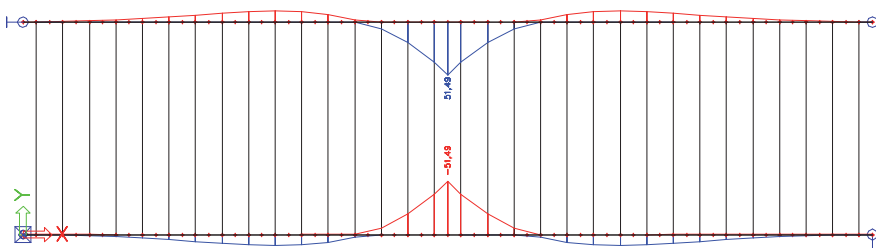
Verplaatsingen  $u_{y,lin,6\&7}$ : maximale verplaatsing 13,066mm



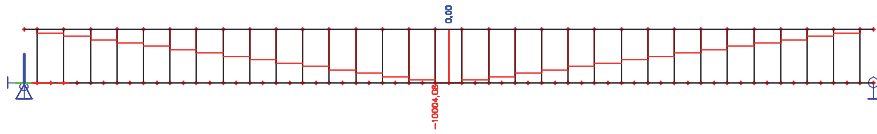
Dwarskracht  $V_{y,lin,6\&7}$ : maximale dwarskracht 50,00kN



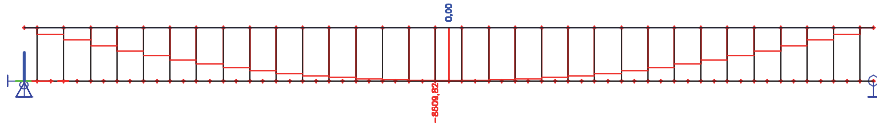
Moment  $M_{z,lin,6\&7}$ : maximaal moment 51,49kNm



Normaalkracht  $N_{lin,6}$ : maximale normaalkracht 10004,08kN



Normaalkracht  $N_{lin,7}$ : maximale normaalkracht 8609,82kN

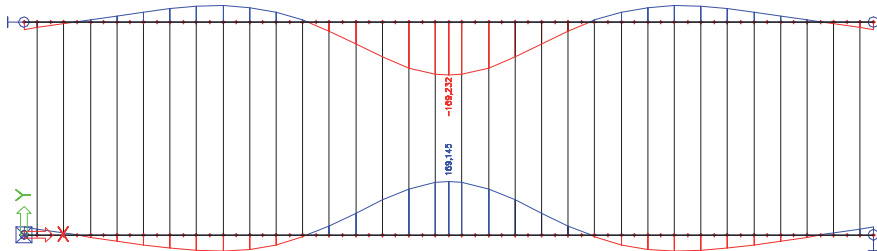


### De GNL berekeningen:

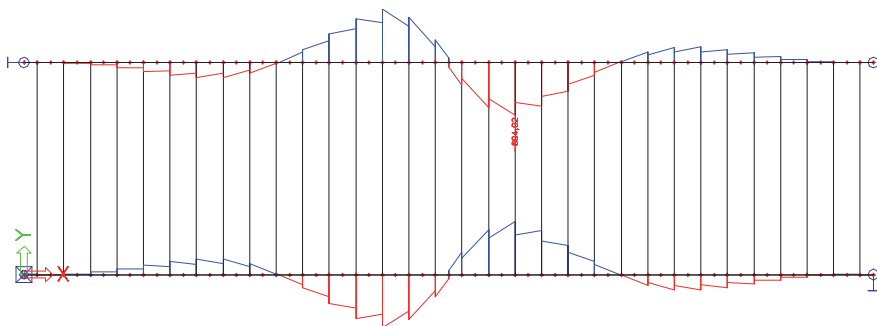
De GNL resultaten bevatten tweede orde effecten en zijn daarom voor alle belastingcombinaties verschillend. Ze zijn daarom hieronder afzonderlijk weergegeven.

GNL combinatie 6:

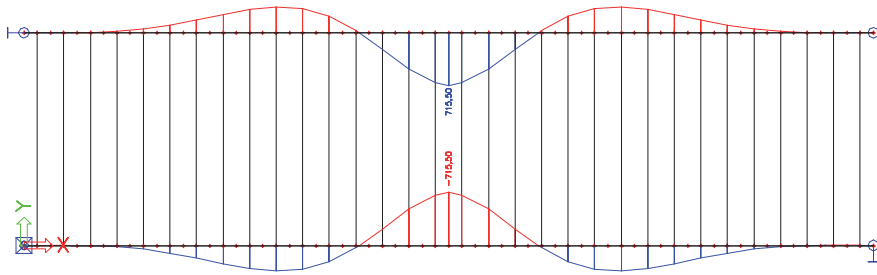
Verplaatsingen  $u_{y,nl,6}$ : maximale verplaatsing 169,232mm in het midden,



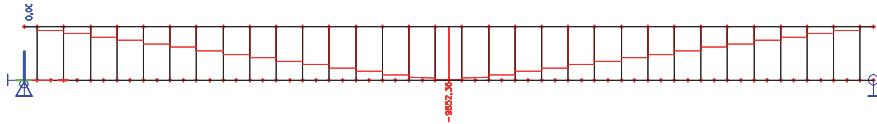
Dwarskracht  $V_{y,nl,6}$ : maximale dwarskracht 604,02kN



Moment  $M_{z,nl,6}$ : maximaal moment 715,50kNm

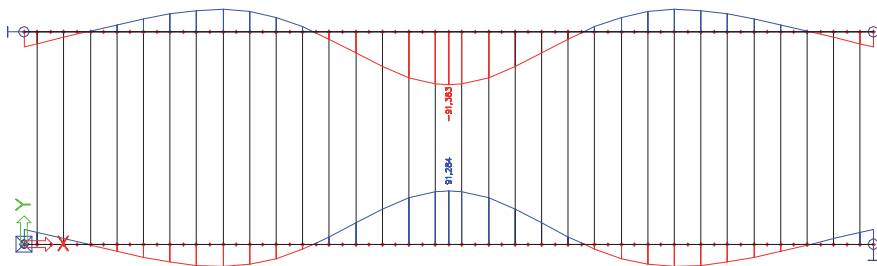


Normaalkracht  $N_{nl,6}$ : maximale normaalkracht 9852,36kN

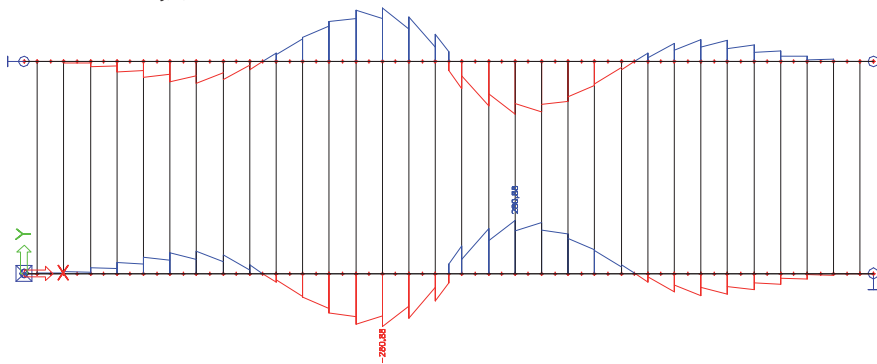


GNL combinatie 7:

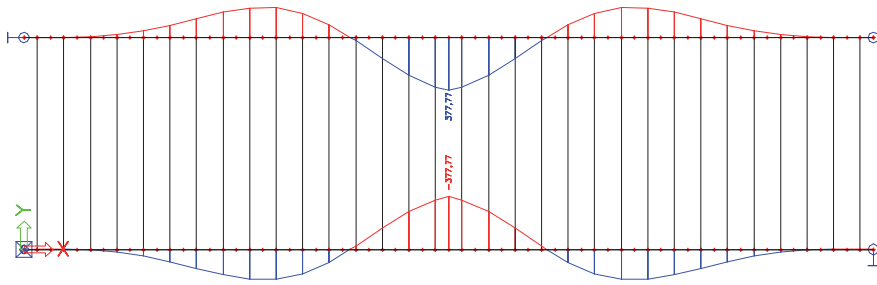
Verplaatsingen  $u_{y,nl,7}$ : maximale verplaatsing 91,383mm in het midden



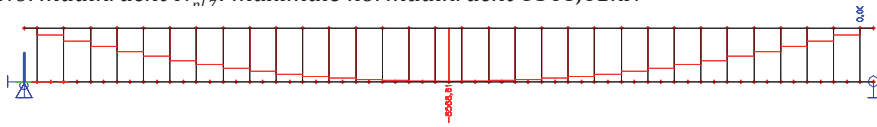
Dwarskracht  $V_{y,nl,7}$ : maximale dwarskracht 280,88kN



Moment  $M_{z,nl,7}$ : maximaal moment 377,77kNm



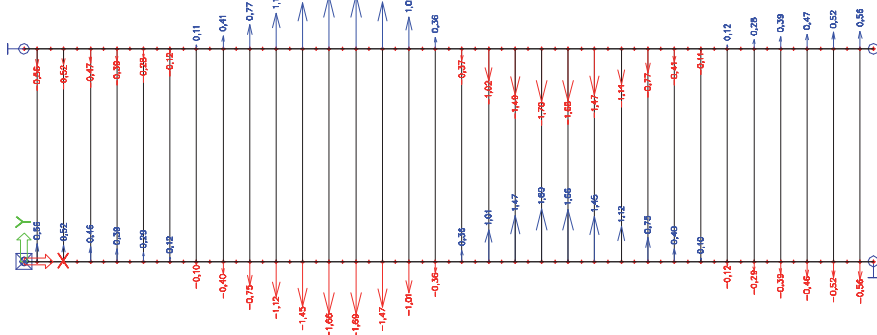
Normaalkracht  $N_{n,7}$ : maximale normaalkracht 8568,61kN



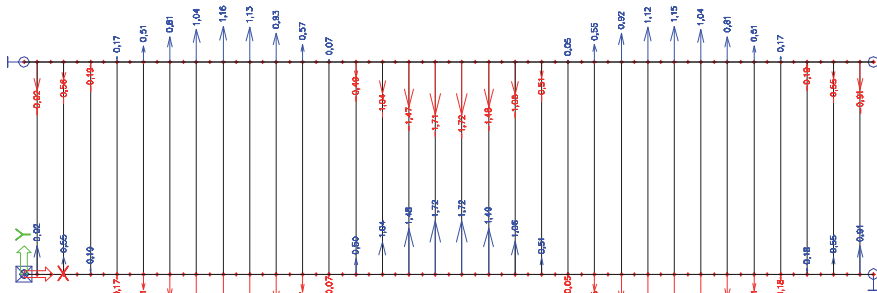
### De Stabiliteits berekeningen:

Scia Engineer is in staat om door middel van een stabiliteitsberekening zelf een stabiliteitsfactor te bepalen. De stabiliteitsberekening kan alleen relatieve knoopverplaatsingen als resultaat weergeven. Omdat de ingevoerde verend ondersteunde ligger geen echte tussensteunpunten heeft, heeft het geen zin om deze weer te geven. De stabiliteitsfactoren zijn:

Combinatie 6  $n=1,16$   $lk \approx 5,0m$  (bezwijkt in het midden)



Combinatie 7  $n=1,12$   $lk \approx 4,0m$  (bezwijkt in het midden)



Overzicht van de resultaten:

*Verhouding tussen eerste en tweede orde:*

$$u_{2^{de} orde,tot} = u_{2^{de} orde} + u_{1^{ste} orde} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste} orde} \quad \rightarrow \quad n = \frac{u_{2^{de} orde,tot}}{u_{2^{de} orde,tot} - u_{1^{ste} orde}}$$

*Combinatie 6:*

$$n = \frac{169,232}{169,232 - 13,066} = 1,0837$$

$$N_{lin,6} = 10004,08 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad F_{k,scia,eng,6} = 1,0837 \cdot 10004,08 = 10841,42 \text{ kN}$$

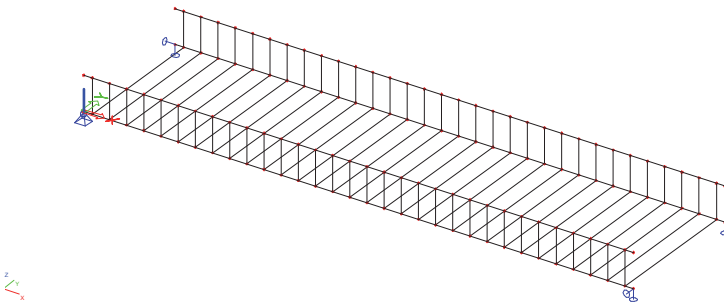
*Combinatie 7:*

$$n = \frac{91,383}{(91,383 - 13,066)} = 1,1668$$

$$N_{lin,7} = 8609,82 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad F_{k,scia,eng,7} = 1,1668 \cdot 8609,82 = 10045,94 \text{ kN}$$

### Scia berekening brug 3D (berekening 8 & 9)

#### Geometrie:



#### Afmetingen:

Lengte: 16 m  
 Breedte: 4 m  
 Hoogte: 1 m

Leuningbovenregel:  
 Breedte: 300 mm  
 Hoogte: 100 mm

Dek en vlakvulling 32x:

Breedte: 480,0 mm  
 Dikte: 155,8 mm

Leuningonderregel:

Breedte: 300 mm  
 Hoogte: 200 mm

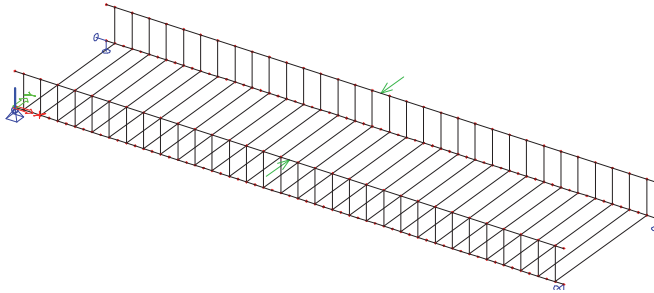
Betonklasse: C50/B60 (E=37 GPa)

De brug is vrij opgelegd op vier hoekpunten

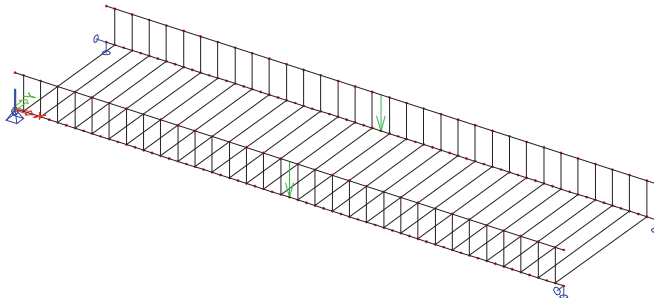
Dit is hetzelfde model als het vorige. Alleen zijn hier alle inwendige scharnieren uit gehaald. De rotatieverstijfheid van de leuningboven- en onderregel worden nu meegenomen in het ontwerp.

### Belastingen:

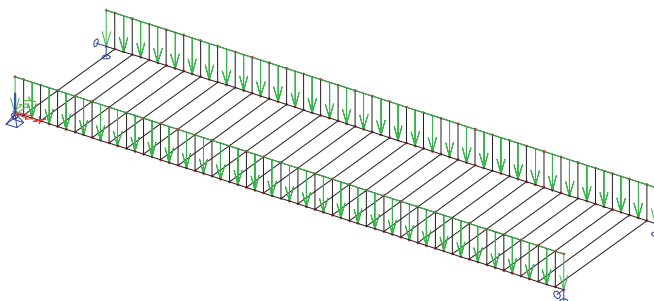
*Belasting 1 Puntlast Loodrecht op beide leuningbovenregels: 100kN*



*Belasting 2 Simulatie van een puntlast op de brug.  
Puntlast: 4500kN/m  
Normaalkracht in het midden 16799,24kN*



*Belasting 3 Simulatie van een gelijkmatigverdeelde belasting op de brug.  
Gelijkmatig verdeelde belasting: 450kN/m  
Normaalkracht in het midden 14150,75kN*



### De belastingcombinaties zijn:

8. Belasting 1 + Belasting 2; als gevolg van een puntlast op de brug,
9. Belasting 1 + Belasting 3; als gevolg van een gelijkmatig verdeelde belasting.

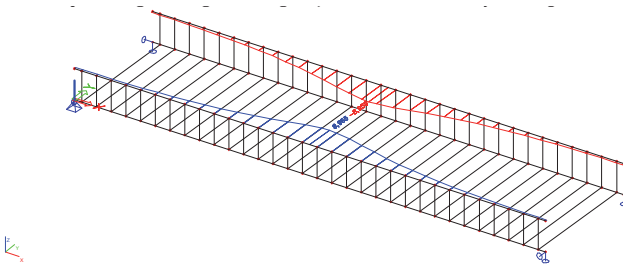


**Resultaten:**

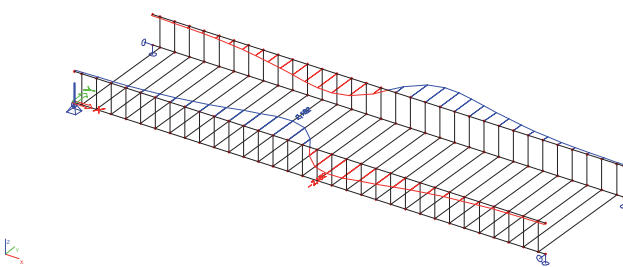
**De lineaire berekening:**

De lineaire resultaten bevatten geen tweede orde effecten en zijn daarom voor alle belastingcombinaties gelijk. Omdat de belastingen 2 en 3 op de brug op de leuningonderregel zijn geplaatst en niet op het brugdek introduceren ze geen horizontaal moment in de leuningbovenregel. Het enige verschil in de lineaire berekening is het normaalkrachten verloop.

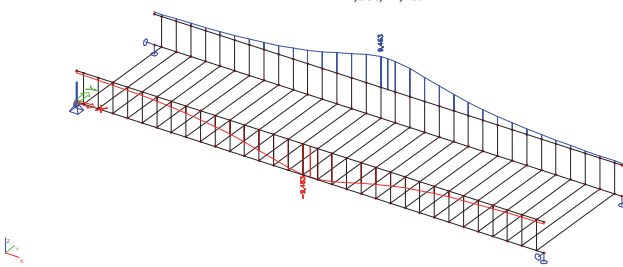
*Verplaatsing leuningbovenregel  $u_{y,lin,8\&9}$ : maximale verplaatsing 8,965mm*



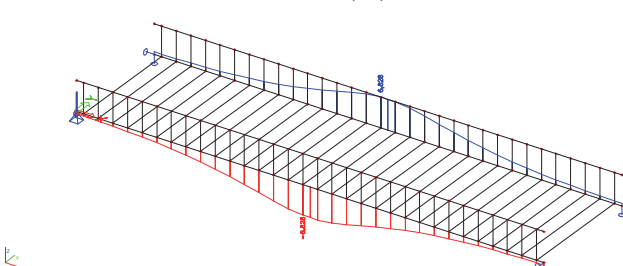
*Rotatie leuningbovenregel  $f_{z,lin,8\&9}$ : maximale rotatie 2,182mrad*



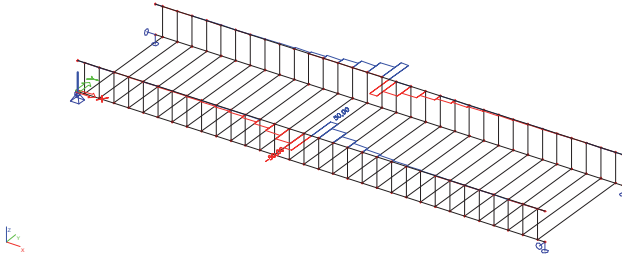
*Rotatie leuningbovenregel  $f_{x,bov,lin,8\&9}$ : maximale rotatie 9,463mrad*



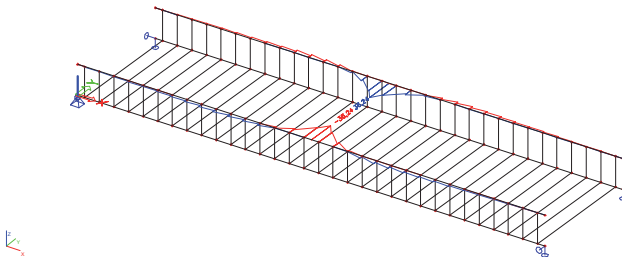
*Rotatie leuningonderregel  $f_{x,ond,8\&9}$ : maximale rotatie 6,828mrad*



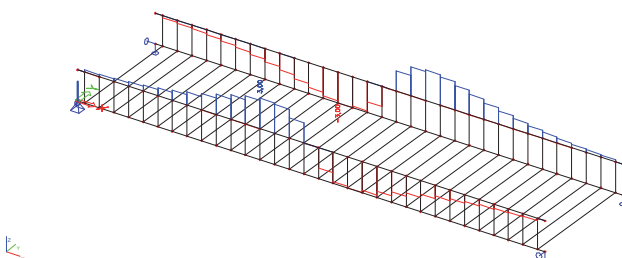
Dwarskracht leuningbovenregel  $V_{y,lin,8\&9}$ : maximale dwarskracht 50,00kN



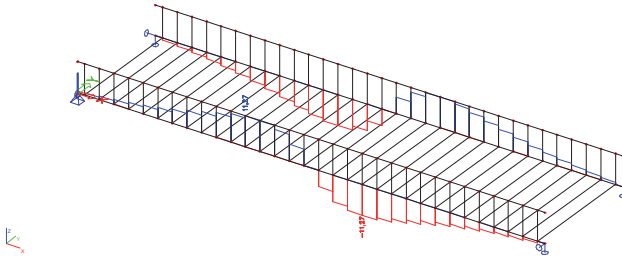
Moment leuningbovenregel  $M_{z,lin,8\&9}$ : maximaal moment 36,24kNm



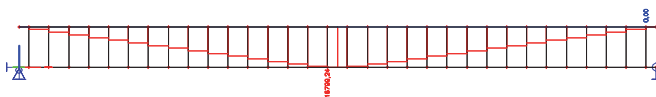
Moment leuningbovenregel  $M_{x,bov,lin,8\&9}$ : maximaal moment 3,00kNm



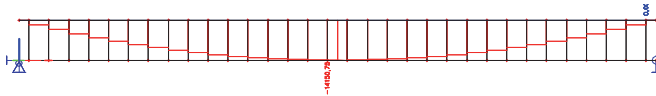
Moment leuningonderregel  $M_{x,ond,lin,8\&9}$ : maximaal moment 11,27kNm



Normaalkracht  $N_{lin,8}$ : maximale normaalkracht 16799,24kN



Normaalkracht  $N_{lin,9}$ : maximale normaalkracht 14150,75kN

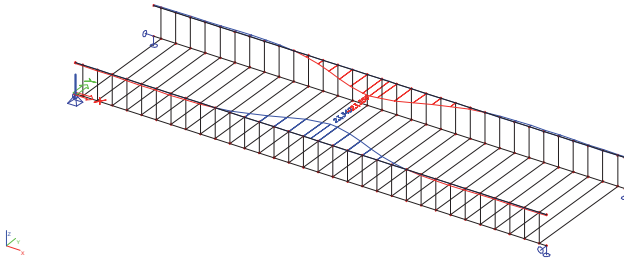


**De GNL berekeningen:**

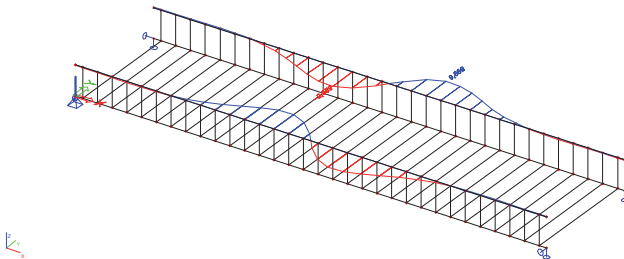
De GNL resultaten bevatten tweede orde effecten en zijn daarom voor alle belastingcombinaties verschillend. Ze zijn daarom hieronder afzonderlijk weergegeven.

GNL combinatie 8:

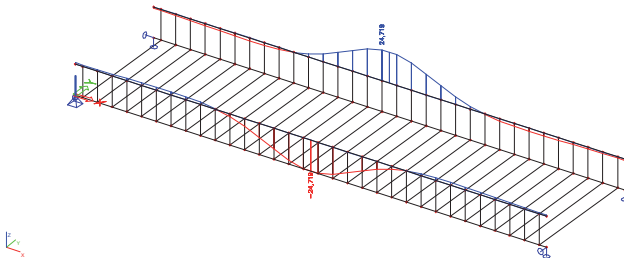
*Verplaatsing leuningbovenregel  $u_{y,nl,8}$ : maximale verplaatsing 23,356mm*



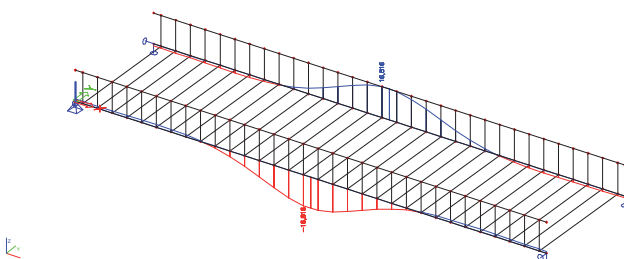
*Rotatie leuningbovenregel  $f_{z,nl,8}$ : maximale rotatie 9,669mrad*



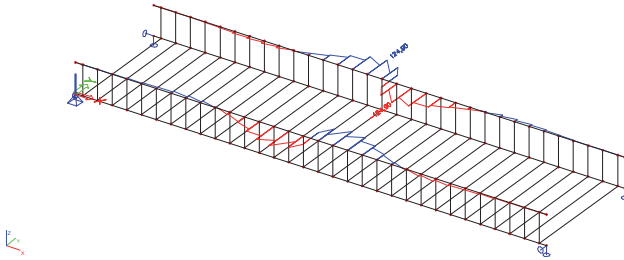
*Rotatie leuningbovenregel  $f_{x,bov,nl,8}$ : maximale rotatie 24,719mrad*



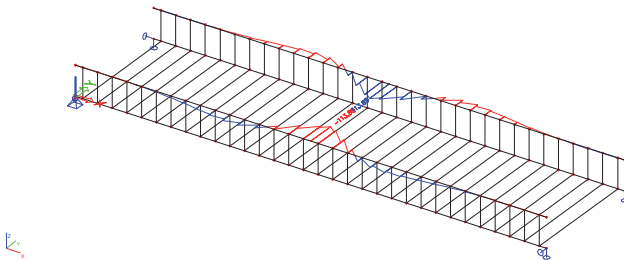
*Rotatie leuningonderregel  $f_{x,ond,nl,8}$ : maximale rotatie 16,816mrad*



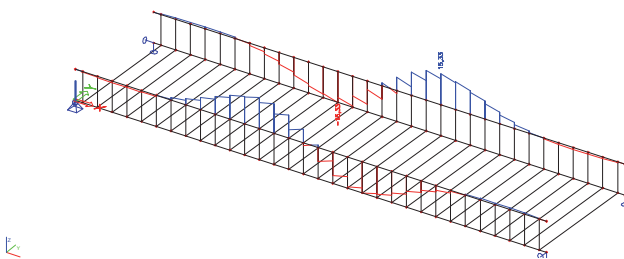
Dwarskracht leuningbovenregel  $V_{y,nl,8}$ : maximale dwarskracht 124,90kN



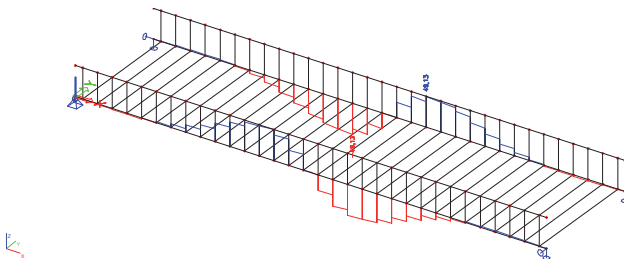
Moment leuningbovenregel  $M_{z,nl,8}$ : maximaal moment 113,85kNm



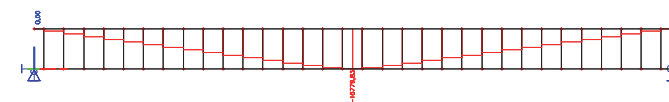
Moment leuningbovenregel  $M_{x,bov,nl,8}$ : maximaal moment 15,33kNm



Moment leuningonderregel  $M_{x,ond,nl,8}$ : maximaal moment 49,13kNm

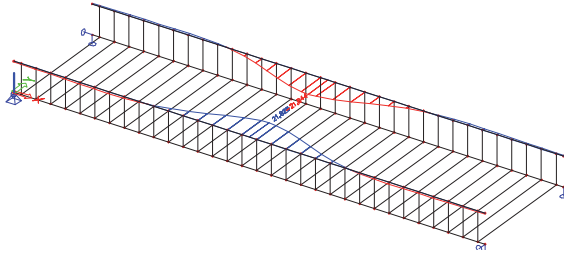


Normaalkracht  $N_{nl,8}$ : maximale normaalkracht 16799,83kN

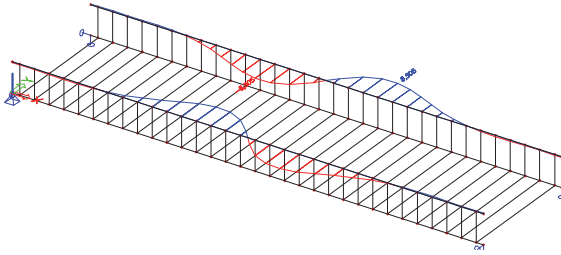


GNL combinatie 9:

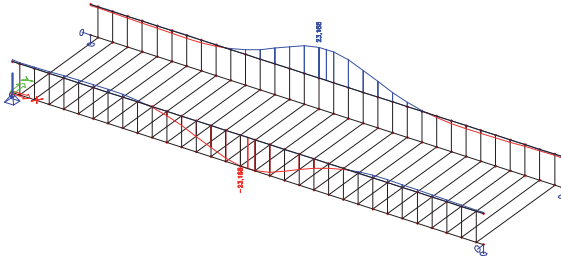
Verplaatsing leuningbovenregel  $u_{y,nl,9}$ : maximale verplaatsing 21,844mm



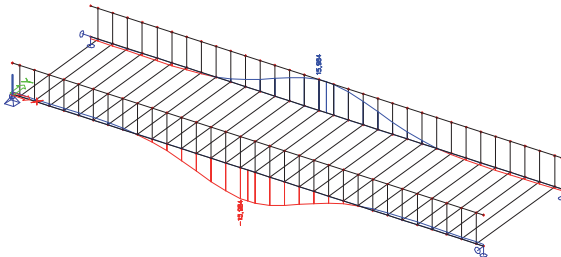
Rotatie leuningbovenregel  $f_{z,nl,9}$ : maximale rotatie 8,505mrad



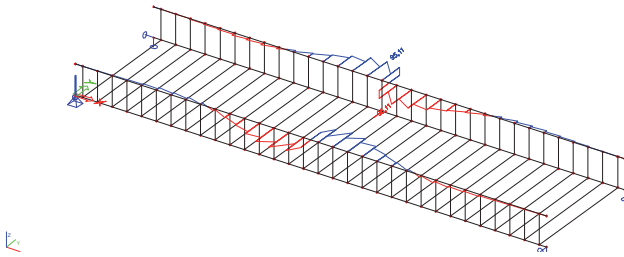
Rotatie leuningbovenregel  $f_{x,bov,nl,9}$ : maximale rotatie 23,168mrad



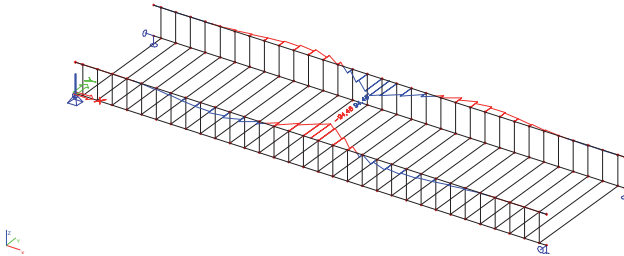
Rotatie leuningonderregel  $f_{x,ond,nl,9}$ : maximale rotatie 15,984mrad



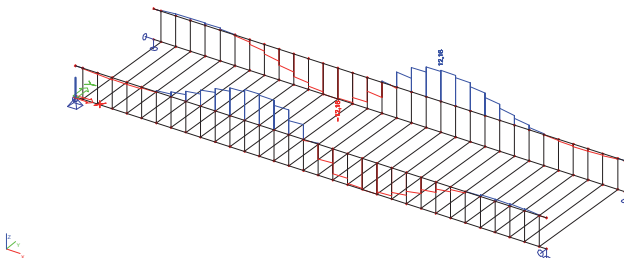
Dwarskracht leuningbovenregel  $V_{y,nl,9}$ : maximale dwarskracht 95,11kN



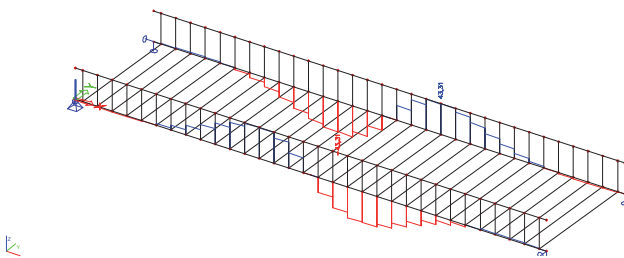
Moment leuningbovenregel  $M_{z,nl,9}$ : maximaal moment 94,46kNm



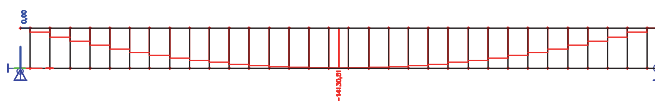
Moment leuningbovenregel  $M_{x,bov,nl,9}$ : maximaal moment 12,16kNm



Moment leuningonderregel  $M_{x,ond,nl,9}$ : maximaal moment 43,31kNm

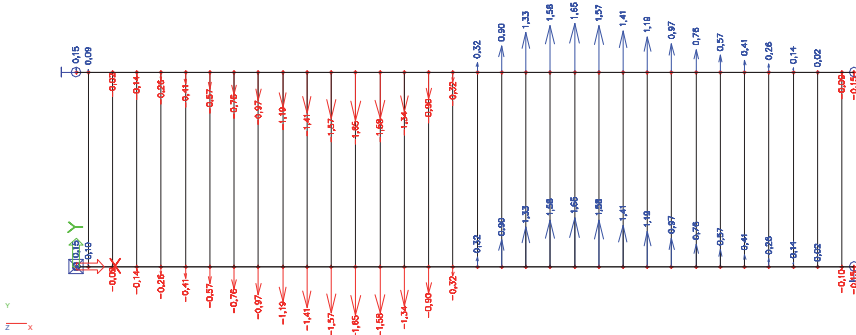


Normaalkracht  $N_{nl,9}$ : maximale normaalkracht 14130,51kN

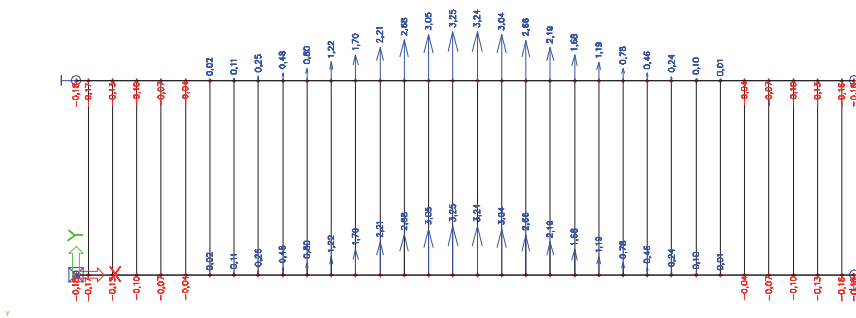


**De stabiliteits berekeningen:**

Combinatie 8                       $n=1,07$     $lk \approx 7,75m$                       (bezwijkt in het midden)



Combinatie 9                       $n=1,16$     $lk \approx 10,75m$                       (bezwijkt in het midden)



Overzicht van de resultaten:

*Verhouding tussen eerste en tweede orde:*

$$u_{2^{de} orde, tot} = u_{2^{de} orde} + u_{1^{ste} orde} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste} orde} \quad \rightarrow \quad n = \frac{u_{2^{de} orde, tot}}{u_{2^{de} orde, tot} - u_{1^{ste} orde}}$$

*Combinatie 8:*

$$n = \frac{23,356}{23,356 - 8,965} = 1,6229$$

$$N_{lin,8} = 16799,24 kN \quad \rightarrow \quad F_{k,scia,eng,8} = 1,6229 \cdot 16799,24 = 27263,49 kN$$

*Combinatie 9:*

$$n = \frac{21,844}{21,844 - 8,965} = 1,6961$$

$$N_{lin,9} = 14150,75 kN \quad \rightarrow \quad F_{k,scia,eng,9} = 1,6961 \cdot 14150,75 = 24001,09 kN$$

Scia Engineer geeft stabiliteitsfactoren die veel lager liggen dan de met de hand nagerekende stabiliteitsfactoren. Dat zou kunnen betekenen dat het maatgevende bezwijkmechanisme niet gelijk is aan de verplaatsing in het midden van de leuningbovenregel. De knikkracht van de belastingcombinaties 1 en 2 zijn volgens de stabiliteitsberekening respectievelijk:

$$F_{k,scia,stab,8} = 1,07 \cdot 16799,24 = 17975,19 \text{ kN}$$

$$F_{k,scia,stab,9} = 1,16 \cdot 14150,75 = 16414,87 \text{ kN}$$



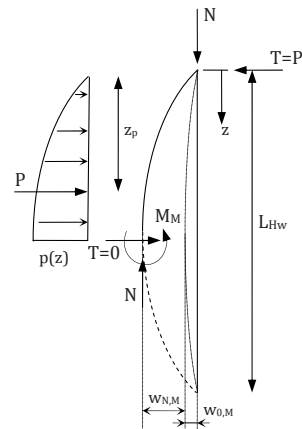


## D De uitwerking van de knikformule volgens de TU München

Deze uitwerking is afkomstig uit het rapport 'Knicken von Pfählen mit kleinem Durchmesser in breiigen Böden' [D1], vanwege de belangrijkheid van deze formule voor dit rapport is de uitwerking in een bijlage verwerkt zodat deze makkelijker terug te vinden. Wie vindt dat deze bijlage nog te weinig informatie verschaft, kan alsnog het volledige rapport raadplegen.

### De theorie

De knikformule inclusief de reductiefactor, waarmee rekening wordt gehouden met de horizontale verplaatsing als gevolg van imperfectie, is geschematiseerd in Figuur D1. Op basis van momenten evenwicht van het inwendige en uitwendige momenten is te bepalen wat de kniklast moet zijn. De knik vorm is een sinus en de weerstand uit de omgeving zal pas plaats vinden nadat de verplaatsing heeft plaats gevonden.



Figuur D1. Knik schematisatie

*De verplaatsing als gevolg van imperfectie van de op druk belaste ligger/kolom of paal is een kleine horizontale uitbuiging van de ligger/kolom. Deze waarde is niet gelijk aan de scheefstand van een ligger/kolom. Deze verplaatsing vindt altijd plaats en wordt niet veroorzaakt door de krachten op de constructie, maar door materiaal onzuiverheden en fabricage onzuiverheden.*

$$w_0(z) = w_{0,M} \sin\left(\frac{\pi}{L_{Hw}} z\right) \text{ met } w_{0,M} = \frac{L_{Hw}}{imp}$$

De verplaatsing als gevolg van de normaalkracht \$N\$ is :

$$w_N(z) = w_{N,M} \sin\left(\frac{\pi}{L_{Hw}} z\right)$$

De reactiekracht als gevolg van de verplaatsing is;

$$p(z) = k_l w_{N,M} \sin\left(\frac{\pi}{L_{Hw}} z\right) \quad \text{voor: } w_{N,M} \leq w_{ki}$$

$$p(z) = k_l w_{ki} \sin\left(\frac{\pi}{L_{Hw}} z\right) \quad \text{voor: } w_{N,M} > w_{ki}$$

Hierbij is onderscheid gemaakt tussen de reactiekracht die vrij kan optreden en de maximale reactiekracht die optreedt, zodra de horizontale verplaatsing de kritische verplaatsing  $w_{ki}$  bereikt. Na het bereiken van  $w_{ki}$  zal de constructie deels door een plastische veer ondersteund worden.

Met behulp van deze gegevens kan het uitwendig moment bepaald worden.

Het uitwendig moment  $\Sigma M = 0$ :

Waarin:

$$P = k_l w_{N,M} \frac{L_{Hw}}{\pi} \quad \text{voor: } w_{N,M} \leq w_{ki}$$

$$P = k_l w_{ki} \frac{L_{Hw}}{\pi} \quad \text{voor: } w_{N,M} > w_{ki}$$

$$z_p = \frac{L_{Hw}}{\pi}$$

Het inwendig moment van de ligger/kolom of paal is:

$$M_M = -EI w_{N,M}'' \quad \rightarrow \quad M_M = \frac{\pi^2 EI}{L_{Hw}^2} w_{N,M}$$

Uitwendig moment en inwendig moment gelijk aan elkaar stellen en oplossen voor  $N$ :

$$\frac{\pi^2 EI}{L_{Hw}^2} w_{N,M} = N(w_{N,M} + w_{0,M}) - P z_p$$

Oplossen  $N$ :

$$N = \frac{\frac{\pi^2 EI}{L_{Hw}^2} w_{N,M} + P z_p}{w_{N,M} + w_{0,M}}$$

Invullen  $P_{z_p, w_{0,M}}$ :

$$N = \frac{\frac{\pi^2 EI}{L_{Hw}^2} w_{N,M} + \frac{k_l L_{Hw}}{\pi^2} w_{N,M}}{w_{N,M} + \frac{L_{Hw}}{imp}}$$

De kritische normaalkracht wordt bereikt indien de kritische horizontale verplaatsing in het midden van de kniklengte is bereikt,  $w_{N,M} = w_{ki}$ :

$$N_{ki} = \frac{\frac{\pi^2 EI}{L_{Hw}^2} w_{ki} + \frac{k_1 L_{Hw}^2}{\pi^2} w_{ki}}{w_{ki} + \frac{L_{Hw}}{imp}}$$

## Referenties

- [D1] Technische Universität München, Zentrum Geotechnik. (2005). *Knicken von Pfählen mit kleinem Durchmesser in breiigen Böden*. Stuttgart: Fraunhofer IRB Verlag.



# E Referentieberekening van de knikkracht in de brug

Deze bijlage bevat een met de hand uitgewerkte berekening van de brug. De berekening dient als basis voor het maken van grafieken die moeten aantonen welke invloed bepaalde afmetingen en belastingen op de tweede orde verplaatsing van de brug hebben. De gebruikte formules komen uit de hoofdstukken 3 tot en met 5 uit het rapport en worden in deze bijlage alleen toegepast, maar niet verder uitgewerkt of uitgelegd. Het toegepaste materiaal is beton C50/60 en de dekking op de wapening is 25mm.

## Afmetingen ontwerp brug:

Lengte brug  $L = 16\ 000\ \text{mm}$

Breedte brug  $b = 4\ 000\ \text{mm}$

Leuning hoogte  $a = 1\ 000\ \text{mm}$

Breedte leuningbovenregel  $a_b = 300\ \text{mm}$

Hoogte leuningbovenregel  $a_h = 110\ \text{mm}$

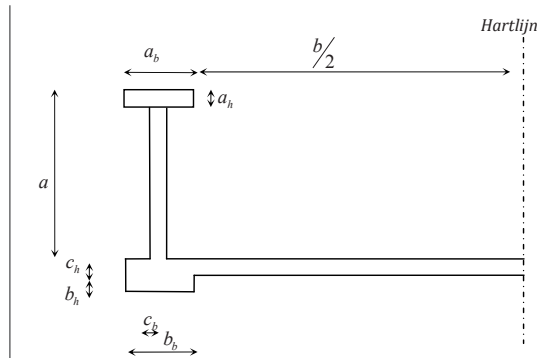
Breedte leuningonderregel  $b_b = 300\ \text{mm}$

Hoogte t.b.v. verankering  $b_h = 60\ \text{mm}$

Dikte vlakvulling  $c_b = 110\ \text{mm}$

Hoogte dek  $c_h = 140\ \text{mm}$

Een meter breedte  $m = 970\ \text{mm}$



Figuur E1. Afmetingen.

In veel formules wordt de afstand  $e$  gebruikt, dat is de verticale afstand tussen het hart van de leuningbovenregel en het hart van de brugdek.

$$e = a - \frac{a_h}{2} + \frac{c_h}{2} = 1000 - \frac{110}{2} + \frac{140}{2} = 1015\ \text{mm}$$

## Wapening in het brugdek:

Diameter  $32\ \text{mm}$

H.o.h.  $100\ \text{mm}$

## Wapening in de vlakvulling van de brugleuning:

Diameter  $25\ \text{mm}$

H.o.h.  $125\ \text{mm}$

**Belastingen:***Eigen gewicht:*

$$q_{g,rep} = \rho_{gew.beton} 2[a_h a_b + m' b_b (c_h + b_h) + c_b (a - a_h)] + m' c_h b$$

$$q_{g,rep} = 25 \cdot \frac{2[110 \cdot 300 + 0,97 \cdot 300 \cdot (140 + 60) + 110 \cdot (1000 - 110)] + 0,97 \cdot 140 \cdot 4000}{1000} = 22,98 \text{ kN/m}^1$$

*Variabele belasting:**Gelijkmatig verdeelde belasting op de brug*

$$q_{q,rep} = 5 \text{ kN/m}^2$$

*Puntlast op de brug*

$$P_{q,rep} = 50 \text{ kN}$$

De rekenbelasting per leuningdrager in lengterichting van de brug wordt daarmee:

*Permanente belasting*

$$q_{g,d} = \frac{\gamma_g q_{g,rep}}{2} = \frac{1,35 \cdot 22,98}{2} = 15,50 \text{ kN/m}^1$$

*Variabele gelijkmatige verkeersbelasting*

$$q_{q,d} = \frac{\gamma_q q_{q,rep} b}{2} = \frac{1,35 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 13,50 \text{ kN/m}^1$$

*Variabele puntlast op 1/3 b van de leuningrand  
(excentrisch geplaatst in het dwarsprofiel)*

$$P_{q,d} = \frac{3}{2} \frac{\gamma_q P_{q,rep}}{2} = \frac{3}{2} \frac{1,35 \cdot 50}{2} = 45,00 \text{ kN}$$

De horizontale belasting op de leuningbovenregel, loodrecht op de brug, bestaat uit een lijnlast en een puntlast en deze kunnen worden opgesplitst in een actieve belasting en een passieve belasting. De passieve belasting treedt in werkelijkheid niet als belasting op. Het is de belasting op het brugdek omgerekend naar een equivalent op de leuningbovenregel, om de verplaatsing van deze belasting in rekening te kunnen brengen. De actieve belasting op de leuningbovenregel is de direct optredende belasting. Dus een puntlast of een lijnlast direct op de leuningbovenregel geplaatst.

*De passieve horizontale belasting op de leuningbovenregel:*

$$F = k_{doorsnede} u \quad u_{q-last} = e \frac{q(b+b_h)^3}{24 EI_{dek}} \quad u_{P-last \frac{1}{3}b} = e \frac{P(b+b_h)^2}{6 EI_{dek}} \left( \frac{2}{3} - \frac{2^3}{3^3} \right)$$

*Permanente belasting van het brugdek*

$$q_{g,d,dek} = \gamma_g \rho_{gew.beton} c_h m = 1,35 \cdot 25 \cdot 0,14 \cdot 0,97 = 4,58 \text{ kN/m}^2$$

**Passieve permanente belasting**

$$q_{g,d,pass} = k_{doorsnede} e \frac{q_{g,d,dek} (b + b_b)^3}{24 EI_{dek}} = 2496 \cdot 1,015 \frac{4,58(4 + 0,3)^3}{24 \cdot 6127} = 4,92 \text{ kN/m}^1$$

**Passieve variabel gelijkmatige belasting**

$$q_{q,d,pass} = k_{doorsnede} e \frac{\gamma_q q_{q,rep} (b + b_b)^3}{24 EI_{dek}} = 2496 \cdot 1,015 \frac{1,35 \cdot 5 \cdot (4 + 0,3)^3}{24 \cdot 6127} = 8,05 \text{ kN/m}^1$$

**Passieve variabele puntlast**

$$P_{q,d,pass} = k_{doorsnede} e \frac{\gamma_q P_{q,rep} (b + b_b)^2}{6 EI_{dek}} \left( \frac{2}{3} - \frac{2^3}{3^3} \right) = 2496 \cdot 1,015 \frac{1,35 \cdot 50 \cdot (4 + 0,3)^2}{6 \cdot 6127} \left( \frac{2}{3} - \frac{2^3}{3^3} \right) = 27,74 \text{ kN}$$

**De actieve horizontale belasting loodrecht op de leuningbovenregel:****Ongelijkmatige verdeelde belasting**

$$q_{q,d,act} = \gamma_q q_{q,rep,act} = 1,5 \cdot 3 = 4,50 \text{ kN/m}^1$$

**Puntlast**

$$P_{q,d,act} = \gamma_q P_{q,rep,act} = 1,5 \cdot 3 = 4,50 \text{ kN}$$

**Berekenen van de verschillende buigstijfheden:****Leuningbovenregel (ongescheurd):**

$$EI_{regel} = E_c \frac{a_h a_b^3}{12} = 37278 \frac{110 \cdot 300^3}{12} = 9226 \text{ kNm}$$

**Brugdek (gescheurd):**

$$EI_e = E_c \left[ \frac{m x_e^3}{12} + m x_e \left( \frac{2}{3} x_e \right)^2 \right] + E_s A_s (d - x_e)^2$$

$$EI_e = 37278 \left[ \frac{970 \cdot 57,6^3}{12} + \frac{4}{9} 970 \cdot 57,6^3 \right] + 200 \cdot 7238 (99 - 57,6)^2 = 6127 \text{ kNm}$$

**Waarin:**

$$d = h - c - \frac{\phi_s}{2} = 140 - 25 - \frac{32}{2} = 99 \text{ mm}$$

**De ongescheurde zone  $x_e$** 

$$x_e = \sqrt{\left( \frac{A_s E_s}{m E_c} \right)^2 + 2 \frac{A_s E_s}{m E_c} d - \frac{A_s E_s}{m E_c}}$$

$$x_e = \sqrt{\left( \frac{7238 \cdot 200}{970 \cdot 37,278} \right)^2 + 2 \frac{7238 \cdot 200}{970 \cdot 37,278} 99 - \frac{7238 \cdot 200}{970 \cdot 37} = 57,6 \text{ mm}$$

$$x_e \geq \frac{\varepsilon_{c3} E_s d}{(\varepsilon_{c3} E_s + f_{yd})} = \frac{1,75 \cdot 200 \cdot 99}{(1,75 \cdot 200 + 435)} = 44,1 \text{ mm}$$

**Waarin:**

$$A_s = A_{staaf} a_{antal} = \frac{\pi 32^2}{4} 9 = 7238 \text{ mm}^2$$



*Vlakkvulling van de leuning (gescheurd):*

$$EI_e = E_c \left[ \frac{m x_e^3}{12} + m x_e \left( \frac{2}{3} x_e \right)^2 \right] + E_s A_s (d - x_e)^2$$

$$EI_e = 37278 \left[ \frac{970 \cdot 36,8^3}{12} + \frac{4}{9} \cdot 970 \cdot 36,8^3 \right] + 200 \cdot 3436 (72,5 - 36,8)^2 = 1828 \text{ kNm}$$

*Waarin:*

$$d = h - c - \frac{\phi_s}{2} = 110 - 25 - \frac{25}{2} = 72,5 \text{ mm}$$

*De ongescheurde zone  $x_e$*

$$x_e = \sqrt{\left( \frac{A_s E_s}{m E_c} \right)^2 + 2 \frac{A_s E_s}{m E_c} d - \frac{A_s E_s}{m E_c}}$$

$$x_e = \sqrt{\left( \frac{3436}{970} \frac{200}{37,278} \right)^2 + 2 \frac{3436}{970} \frac{200}{37,278} 72,5 - \frac{3436}{970} \frac{200}{37}} = 36,8 \text{ mm}$$

$$x_e \geq \frac{\varepsilon_{c3} E_s d}{(\varepsilon_{c3} E_s + f_{yd})} = \frac{1,75 \cdot 200 \cdot 72,5}{(1,75 \cdot 200 + 435)} = 32,3 \text{ mm}$$

*Waarin:*

$$A_s = A_{staaf} \text{aantal} = \frac{\pi 25^2}{4} 7 = 3436 \text{ mm}^2$$

*Maximaal elastisch moment van de gescheurde doorsnede:*

$$M_e = M_{e,vl} = N_{s,vl} \left( d - \frac{x_e}{3} \right)$$

*Waarin:*

$$N_{s,vl} = f_{yd} A_s$$

$$x_{e,vl} \geq \frac{\varepsilon_{c3} E_s d}{(\varepsilon_{c3} E_s + f_{yd})}$$

*of*

$$M_e = N_c' \left( d - \frac{x_e}{3} \right)$$

*Waarin:*

$$N_c' = \frac{x_e m}{2} \varepsilon_{c3} E_c$$

$$x_e = \sqrt{\left( \frac{A_s E_s}{m E_c} \right)^2 + 2 \frac{A_s E_s}{m E_c} d - \frac{A_s E_s}{m E_c}}$$

**Kleinste plastisch moment in het dek:**

$$M_{e,dek} = 145,40 \text{ kNm}$$

$$M_{e,dek,beton} = \frac{57,6 \cdot 970}{2} 1,75 \cdot 37278 \left( 99 - \frac{57,6}{3} \right) = 145,40 \text{ kNm}$$

$$M_{e,dek,wapening} = 435 \cdot 7238 \cdot \left( 99 - \frac{44,1}{3} \right) = 265,39 \text{ kNm}$$

**Kleinste plastisch moment in de leuning:**

$$M_{e,leuning} = 70,17 \text{ kNm}$$

$$M_{e,leuning,beton} = \frac{36,8 \cdot 970}{2} 1,75 \cdot 37278 \left( 72,5 - \frac{36,8}{3} \right) = 70,17 \text{ kNm}$$

$$M_{e,leuning,wapening} = 435 \cdot 3436 \left( 72,5 - \frac{32,3}{3} \right) = 92,26 \text{ kNm}$$

**Veerstijfheid van de doorsnede:**

$$k_{doorsnede} = \frac{1}{m \left[ \frac{e^2 b}{2 EI_{dek}} + \frac{e^3}{3 EI_{leuning}} \right]} = \frac{1}{0,97 \left[ \frac{1,015^2 \cdot 4}{2 \cdot 6127} + \frac{1,015^3}{3 \cdot 1828} \right]} = 1956 \text{ kN/m}^2$$

**De kniklengte van Engesser:**

$$l_k = \pi^4 \sqrt{\frac{EI_{regel}}{k_{doorsnede}}} = \pi^4 \sqrt{\frac{9926}{1956}} = 4,630 \text{ m}$$

**De knikkracht volgens Engesser:**

$$F_{k,eng} = \alpha 2 \sqrt{EI_{regel} k_{doorsnede}} = 1,2 \cdot 2 \sqrt{9226 \cdot 1956} = 10196 \text{ kN}$$

Waarin:

$$1 \leq \alpha < 1,5 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1,2$$

### De imperfectiefactor op de knikformule:

$$F_{k,TUM} = \left[ \frac{u_k}{u_k + \frac{l_k}{300}} \right] F_{k,eng} = \left[ \frac{30,74}{30,74 + \frac{4630}{300}} \right] 10196 = 6788 \text{ kN}$$

Waarin:

$$u_k = \frac{H_k}{k_{doorsnede}} = \frac{60,13}{1956} = 30,56 \text{ mm}$$

Waarin  $H_k$  de kleinste waarde is van:

$$H_{k,e,dek} = \frac{M_{e,dek}}{e} - m(q_{g,d,pass} + q_{q,d,pass} + q_{q,d,act}) - P_{q,d,pass} - P_{q,d,act}$$

$$H_{k,e,dek} = \frac{145,40}{1,015} - 1(4,45 + 8,20 + 4,50) - 28,25 - 4,50 = 93,35 \text{ kN}$$

$$H_{k,e,leuning} = \frac{M_{e,leuning}}{e} - m q_{q,d,act} - P_{q,d,act}$$

$$H_{k,e,leuning} = \frac{92,26}{1,015} - 1 \cdot 4,50 - 4,50 = 60,13 \text{ kN}$$

### Normaalkrachten in de leuningbovenregel:

Normaalkracht in de leuningbovenregel ten gevolge van een gelijkmatig verdeelde belasting op de brug:

$$N_{d,q-last,max} = \frac{q_{g,d} L^2 + q_{q,d} L^2}{8e} = \frac{15,51 \cdot 16^2 + 13,50 \cdot 16^2}{8 \cdot 1,015} = 914,61 \text{ kN}$$

Normaalkracht in de leuningbovenregel ten gevolge van een puntlast op de brug:

$$N_{d,P-last,max} = \frac{q_{g,d} L^2 + 2 P_{q,d} L}{8e} = \frac{15,51 \cdot 16^2 + 2 \cdot 45 \cdot 16}{8 \cdot 1,015} = 666,33 \text{ kN}$$

### De optredende stabiliteitsfactor:

$$n_{q-last+perm} = \frac{F_{k,TUM}}{N_d} = \frac{6788}{914,61} = 7,42$$

$$n_{P-last+perm} = \frac{F_{k,TUM}}{N_d} = 6788 = 10,19$$

### De optredende stabiliteit vergrotingsfactor:

$$\frac{n_{q-last+perm}}{n_{q-last+perm} - 1} = \frac{7,42}{7,42 - 1} = 1,1557$$

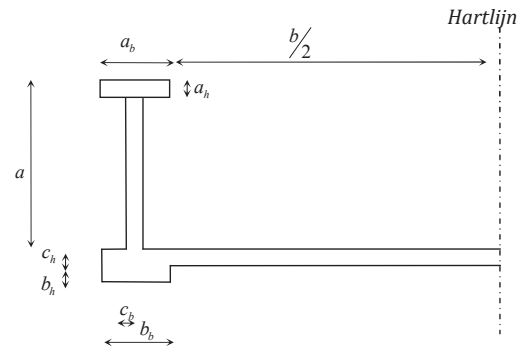
$$\frac{n_{P-last+perm}}{n_{P-last+perm} - 1} = \frac{10,19}{10,19 - 1} = 1,1088$$

## F Samengestelde buigstijfheid van de gehele brug

De buigstijfheid van de gehele brug is te bepalen op basis van de doorgaande onderdelen van de brug. Zowel de leuningbovenregel (drukzone) als de leuningonderregel (trekzone) zijn doorlopend over de gehele lengte. De overige onderdelen zoals het dek en de vlakvulling in de leuning zijn niet doorlopend over de gehele lengte van de brug. Voor de trekzone geldt een gescheurde situatie en dus mag alleen de drukzone, de leuningbovenregel, met daarbij de voorspanwapening in de trekzone worden meegenomen in de algehele buigstijfheid van de brug. Allereerst moet het normaalkrachten centrum worden bepaald. De stijfheid over de lengte van de brug zal voornamelijk komen uit het feit dat de druk en de trekzone ver van elkaar verwijderd zijn.

### Afmetingen dwarsdoorsnede brug:

Breedte brug	$b$
Leuning hoogte	$a$
Breedte leuningbovenregel	$a_b$
Hoogte leuningbovenregel	$a_h$
Breedte leuningonderregel	$b_b$
Hoogte t.b.v. verankering	$b_h$
Breedte vlakvulling	$c_b$
Hoogte dek	$c_h$



Figuur F1. Afmetingen.

### De momentensom over de doorsnede:

$$EM_{\text{bovenregel}} = E_c 2 a_b a_h \frac{a_h}{2}$$

$$EA_{\text{bovenregel}} = E_c 2 a_b a_h$$

$$EM_{\text{onderregel}} = E_c 2 b_b (c_h + b_h) \left( a + \frac{c_h + b_h}{2} \right)$$

$$EA_{\text{onderregel}} = E_c 2 b_b (c_h + b_h)$$

$$EM_{\text{voorspanstaal}} = E_s A_p \left( a + \frac{c_h + b_h}{2} \right)$$

$$EA_{\text{voorspanstaal}} = E_s A_p$$

$$EM_{\text{tot}} = EM_{\text{bovenregel}} + EM_{\text{onderregel}} + EM_{\text{voorspanstaal}}$$

$$EA_{\text{tot}} = EA_{\text{bovenregel}} + EA_{\text{onderregel}} + EA_{\text{voorspanstaal}}$$

De afstand van het normaalkrachtencentrum tot de bovenkant van de leuningbovenregel is:

$$x_{nc} = \frac{EM_{tot}}{EA_{tot}}$$

De stijfheid van de brug is dan:

$$EI_{brug,z} = EI_{bovenregel} + EI_{onderregel} + EI_{voerspanstaal}$$

$$EI_{bovenregel} = 2E_c \left[ \frac{a_b a_h^3}{12} + a_b a_h \left( x_{nc} - \frac{a_h}{2} \right)^2 \right]$$

$$EI_{onderregel} = 2E_c \left[ \frac{b_b (c_h + b_b)^3}{12} + b_b (c_h + b_b) \left( a - x_{nc} + \frac{b_b + c_h}{2} \right)^2 \right]$$

$$EI_{voerspanstaal} = E_s A_p \left( a - x_{nc} + \frac{b_b + c_h}{2} \right)^2$$

## G Uitwerking van het tweede orde effect

De invloed van de tweede orde doorbuiging [G1] en het tweede orde moment wordt veelal aangenomen op de waarde:

$$u_{2^{de\ orde}} + u_{1^{ste\ orde}} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste\ orde}} \quad \& \quad M_{2^{de\ orde}} + M_{1^{ste\ orde}} = \frac{n}{n-1} M_{1^{ste\ orde}}$$

In deze bijlage volgt de uitwerking op basis van de differentiaalvergelijking horend bij de situatie zoals in figuur G1 is afgebeeld:

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - N \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k u(x) = q(x) + N \frac{d^2 u_{\Delta}}{dx^2}$$

De verticale belastingen  $q$  en  $P$  kunnen hierbij worden omgeschreven naar de belasting  $q(x)$  met behulp van een Fourierreeks [G2]:

$$q(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{4q}{n\pi} + \frac{2P}{l} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

De verwachte 'verticale' verplaatsing

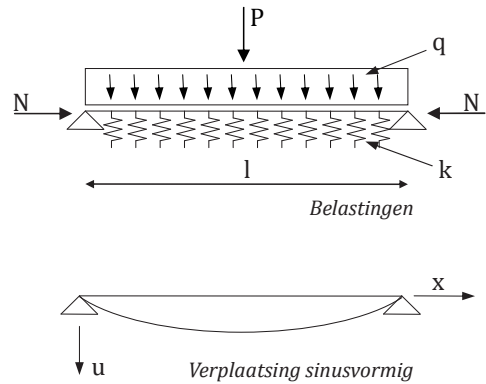
$u$  van de drukligger zal sinusvormig zijn, omdat ook de belastingen; knik,  $q$ -last en  $P$ -last op basis van een sinus zijn bepaald. De verplaatsing heeft dan de verwachte vorm van:

$$u(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} u_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Het uitwerken van de differentiaalvergelijking leidt tot een maximale verplaatsing van:

$$u_n = \frac{q_n + \frac{\pi^2}{l^2} N u_{\Delta}}{\frac{\pi^4}{l^4} EI - \frac{\pi^2}{l^2} N + k} = \frac{\frac{4q}{n\pi}}{\frac{\pi^4}{l^4} EI - \frac{\pi^2}{l^2} N + k} + \frac{\frac{2P}{l}}{\frac{\pi^4}{l^4} EI - \frac{\pi^2}{l^2} N + k} + \frac{\frac{\pi^2}{l^2} N u_{\Delta}}{\frac{\pi^4}{l^4} EI - \frac{\pi^2}{l^2} N + k}$$

Met behulp van deze differentiaalvergelijking is het mogelijk om zowel eerste als tweede orde problemen op te lossen. De eerste orde verplaatsingen zijn de verplaatsingen op basis van de initiële verplaatsingen, hiervoor is in de norm [G3] een waarde opgenomen en de directe verplaatsingen op basis van de belasting loodrecht op de ligger. De tweede orde verplaatsingen zijn de extra verplaatsingen die zullen plaatsvinden als gevolg van de normaalkracht in de ligger die een extra moment geeft wanneer de ligger is doorgebogen. Allereerst moeten de eerste orde verplaatsingen bepaald worden, hierbij wordt verondersteld dat er nog geen normaalkrachten in de ligger aanwezig zijn op basis van externe belasting.



Figuur G1. Situatie

$$N=0 \rightarrow u(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{\frac{4q}{n\pi}}{\frac{n^4\pi^4}{l^4}EI+k} + \frac{\frac{2P}{l}}{\frac{n^4\pi^4}{l^4}EI+k} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

*Uitwerken van eerste orde verplaatsing op basis van de belasting loodrecht op de ligger geeft:*

$$u(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{4}{n^5\pi^5} \frac{ql^4}{EI} + \frac{2}{n^4\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} - \frac{1}{n^4\pi^4} \frac{kl^4}{EI} u(x) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$u(x) \approx \left[ \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} + \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI} - \frac{1}{96} \frac{kl^4}{EI} u(x) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

*Met de toevoeging van de initiële verplaatsing wordt dan de totale eerste orde verplaatsing:*

$$u_{1^{ste} \text{ orde}}(x) = \left[ \frac{\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} + \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI}}{1 + \frac{1}{96} \frac{kl^4}{EI}} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + u_i(x)$$

*Het eerste orde moment in de ligger wordt:*

$$M(x) = -EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = EI \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{l^2} \left[ \frac{\frac{4q}{n\pi}}{\frac{n^4\pi^4}{l^4}EI+k} + \frac{\frac{2P}{l}}{\frac{n^4\pi^4}{l^4}EI+k} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$M(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{EI \frac{n\pi}{l^2} 4q}{\frac{n^4\pi^4}{l^4}EI+k} + \frac{EI \frac{n^2\pi^2}{l^3} 2P}{\frac{n^4\pi^4}{l^4}EI+k} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$M(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{4}{n^3\pi^3} ql^2 + \frac{2}{n^2\pi^2} Pl - \frac{1}{n^4\pi^4} \frac{kl^4}{EI} M(x) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$M(x) \approx \left[ \frac{1}{8} ql^2 + \frac{1}{4} Pl - \frac{1}{96} \frac{kl^4}{EI} M(x) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$M_{1^{ste} \text{ orde}}(x) = \left[ \frac{\frac{1}{8} ql^2 + \frac{1}{4} Pl}{1 + \frac{1}{96} \frac{kl^4}{EI}} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

De tweede orde verplaatsingen worden op eenzelfde manier bepaald. Enkel, hierbij worden alle belastingen die bij de eerste orde berekening al zijn toegepast niet nogmaals in rekening gebracht. De knikvorm wordt verondersteld als een zuivere sinus vorm. Dat wil zeggen dat nu de reeksontwikkeling achterwege gelaten kan worden.

De verwachte verplaatsing is nu:

$$u(x) = u_n \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad \text{met} \quad u_n = \frac{\frac{\pi^2}{l^2} N u_\Delta}{\frac{\pi^4}{l^4} EI - \frac{\pi^2}{l^2} N + k}$$

*Uitwerken van de tweede orde verplaatsing:*

$$u(x) = \left[ \frac{\frac{\pi^2}{l^2} N u_\Delta}{\frac{\pi^4}{l^4} EI - \frac{\pi^2}{l^2} N + k} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$u(x) = \left[ \frac{N l^2 u_\Delta}{\pi^2 EI} + \frac{N l^2}{\pi^2 EI} u(x) - \frac{k l^4}{\pi^4 EI} u(x) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

*De tweede orde verplaatsing is daarmee:*

$$u_{2^{de} \text{ orde}}(x) = \frac{\frac{N l^2}{\pi^2 EI}}{1 - \frac{N l^2}{\pi^2 EI} + \frac{k l^4}{\pi^4 EI}} u_{1^{ste} \text{ orde}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

### Controle:

*Klopt nu de bovenstaande vergelijking op basis van wat we al weten uit de literatuur [E1]?*

$$u_{2^{de} \text{ orde}} + u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste} \text{ orde}} \quad \text{met} \quad n = \frac{F_k}{N}$$

**Stel**, de veerkracht is gelijk aan 0 en de knikkraft is gelijk aan de Eulerse knikkraft. De kniklengte is daarmee ook gelijk aan de lengte van de ligger, doordat dit in de schematisatie zo is vastgesteld. De Eulerse knikkraft is:

$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

*De maximale tweede orde verplaatsing wordt daarmee gelijk aan:*

$$u_{2^{de} \text{ orde}} = \frac{\frac{N}{F_E}}{1 - \frac{N}{F_E} + 0} u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{1}{n-1} u_{1^{ste} \text{ orde}}$$

*En de maximale totale verplaatsing is daarmee gelijk aan:*

$$u_{2^{de} \text{ orde}} + u_{1^{ste} \text{ orde}} = \left[ 1 + \frac{1}{n-1} \right] u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste} \text{ orde}}$$

**Deze vergelijking klopt voor de Eulerknik!**



**Stel**, de knikkraft wordt bepaald met de formule van Engesser. De kniklengte is dan een vast te berekende waarde afhankelijk van de buigstijfheid van de ligger en de veerstijfheid  $k$ . Verder is bekend dat de knikkraft op basis van de berekening van Engesser exact tweemaal zo groot is als de Eulerse knikkraft zonder veerstijfheid.

De Eulerse knikkraft is:

$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

De knikkraft volgens de methode van Engesser met bijbehorende kniklengte is:

$$F_k = 2\sqrt{k EI} = 2F_E \quad \text{met} \quad l_k = \pi^4 \sqrt{\frac{EI}{k}}$$

De maximale tweede orde verplaatsing wordt daarmee gelijk aan:

$$u_{2^{de} \text{ orde}} = \frac{\frac{N}{F_E}}{1 - \frac{N}{F_E} + 1} u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{\frac{2N}{F_k}}{1 - \frac{2N}{F_k} + 1} u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{\frac{2}{n}}{2 - \frac{2}{n}} u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{1}{n-1} u_{1^{ste} \text{ orde}}$$

En de maximale totale verplaatsing is daarmee gelijk aan:

$$u_{2^{de} \text{ orde}} + u_{1^{ste} \text{ orde}} = \left[ 1 + \frac{1}{n-1} \right] u_{1^{ste} \text{ orde}} = \frac{n}{n-1} u_{1^{ste} \text{ orde}}$$

**Deze vergelijking klopt ook!**

**De uitwerking van het tweede orde moment is:**

$$M(x) = -EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left[ \frac{\frac{\pi^2}{l^2} N u_\Delta}{\frac{\pi^4}{l^4} EI - \frac{\pi^2}{l^2} N + k} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$M(x) = \frac{\frac{\pi^4}{l^4} EI N u_\Delta}{\frac{\pi^4}{l^4} EI - \frac{\pi^2}{l^2} N + k} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$M(x) = \left[ N u_\Delta + \frac{N l^2}{\pi^2 EI} M(x) - \frac{k l^4}{\pi^4 EI} M(x) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$M_{2^{de} \text{ orde}}(x) = \frac{N}{1 - \frac{N l^2}{\pi^2 EI} + \frac{k l^4}{\pi^4 EI}} u_{1^{ste} \text{ orde}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Het tweede orde moment is daarmee gelijk aan Eulerse knikkraft vermenigvuldigd met de tweede orde verplaatsing.

$$u_{2^{de\ orde}}(x) = F_E u_{2^{de\ orde}}(x) = F_E \frac{1}{n-1} u_{1^{ste\ orde}}(x) = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left[ \frac{\frac{N l^2}{\pi^2 EI}}{1 - \frac{N l^2}{\pi^2 EI} + \frac{k l^4}{\pi^4 EI}} \right] u_{1^{ste\ orde}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Het tweede orde moment is volgens de bovenstaande vergelijking altijd de Eulerse knikkraft vermenigvuldigd met de tweede orde uitwijking is. Normaal is het moment altijd kracht vermenigvuldigd met de arm, dat zou in dit geval betekenen dan de normaalkracht vermenigvuldigd moet worden met het tweede orde moment. Aangezien de knikkraft altijd groter zal zijn dan de normaalkracht zal het tweede orde moment altijd groter zijn dan de simpele redenering van kracht vermenigvuldigd met de arm.

Het totale moment, eerste en tweede orde, op de ligger wordt daarmee:

$$(x) + M_{1^{ste\ orde}}(x) = \left[ F_E u_{2^{de\ orde}} + \frac{\frac{1}{8} q l^2 + \frac{1}{4} P l}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l^4}{EI}} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

### Controle:

Klopt nu de bovenstaande vergelijking op basis van wat we al weten uit de literatuur [E1]?

Het probleem met de vergelijking uit de literatuur is dat het eerste orde moment niet afhankelijk is van de initiële vervorming, maar het tweede orde moment wel. De bovenstaande vergelijking zou daarom altijd beter zijn.

Dit houdt in dat we het volgende bewijs zoeken:

$$M_{2^{de\ orde}}(x) = F_E \frac{1}{n-1} u_{1^{ste\ orde}}(x) = \frac{1}{n-1} M_{1^{ste\ orde}}(x) \text{ is dit zo?}$$

$$\rightarrow F_E u_{1^{ste\ orde}}(x) = M_{1^{ste\ orde}}(x) \text{ is dit zo?}$$

Om het vergelijk zo eerlijk mogelijk te houden pakken we de laatste eerste orde vergelijking met daarin de fourierreeks voor de verticale belasting.

$$u_{1^{ste\ orde}}(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{\frac{4}{n^5 \pi^5} \frac{q l^4}{EI} + \frac{2}{n^4 \pi^4} \frac{P l^3}{EI}}{1 + \frac{1}{n^4 \pi^4} \frac{k l^4}{EI}} \right] \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right)$$

$$M_{1^{ste\ orde}}(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{\frac{4}{n^3 \pi^3} q l^2 + \frac{2}{n^2 \pi^2} P l}{1 + \frac{1}{n^4 \pi^4} \frac{k l^4}{EI}} \right] \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right)$$

$$F_E u_{1^{ste\ orde}}(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \frac{4}{n^5 \pi^5} \frac{q l^4}{EI} + \frac{2}{n^4 \pi^4} \frac{P l^3}{EI} \right] \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right)$$

$$M_{1^{ste\ orde}}(x) = F_E u_{1^{ste\ orde}}(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{4}{n^3 \pi^3} q l^2 + \frac{2}{n^2 \pi^2} \frac{P l^3}{EI} \right] \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right)$$

**Deze vergelijking klopt ook!**

Dat betekent dat de onderstaande, reeds bekende, formule geldig is zolang de initiële uitwijking buiten beschouwing gelaten wordt.

$$M_{2^{de\ orde}} + M_{1^{ste\ orde}} = \frac{n}{n-1} M_{1^{ste\ orde}}$$

**Samengevat:**

*De totale verplaatsing:*

$$u_{totaal} = u_{2^{de\ orde}} + u_{1^{ste\ orde}}$$

$$u_{1^{ste\ orde}}(x) = \left[ \frac{5}{384} \frac{q l_k^4}{EI} + \frac{1}{48} \frac{P l_k^3}{EI} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l_k}\right) + u_i(x)$$

$$1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI}$$

$$u_{2^{de\ orde}}(x) = \left[ \frac{N l_k^2}{\pi^2 EI} \right] u_{1^{ste\ orde}}(x) = \frac{1}{n-1} u_{1^{ste\ orde}}(x)$$

$$1 - \frac{N l_k^2}{\pi^2 EI} + \frac{k l_k^4}{\pi^4 EI}$$

$$u_{totaal}(x) = \frac{F_k}{F_k - N} \left[ \frac{5}{384} \frac{q l_k^4}{EI} + \frac{1}{48} \frac{P l_k^3}{EI} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l_k}\right) + \frac{F_k}{F_k - N} u_i(x)$$

$$1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI}$$

Het totale moment:

$$M_{\text{totaal}} = M_{1^{\text{ste}} \text{ orde}} + M_{2^{\text{de}} \text{ orde}}$$

$$M_{1^{\text{ste}} \text{ orde}}(x) = \frac{\frac{1}{8} q l_k^2 + \frac{1}{4} P l_k}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI}} \sin\left(\frac{\pi x}{l_k}\right)$$

$$M_{2^{\text{de}} \text{ orde}}(x) = F_E u_{2^{\text{de}} \text{ orde}} \sin\left(\frac{\pi x}{l_k}\right)$$

$$M_{\text{totaal}}(x) = \left[ \frac{\frac{1}{8} q l_k^2 + \frac{1}{4} P l_k}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI}} + F_E u_{2^{\text{de}} \text{ orde}} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l_k}\right)$$

$$M_{\text{totaal}}(x) = \left[ \frac{\frac{1}{8} q l_k^2 + \frac{1}{4} P l_k}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI}} + F_E \frac{N}{F_k - N} \left\{ \frac{5}{384} \frac{q l_k^4}{EI} + \frac{1}{48} \frac{P l_k^3}{EI} + u_i \right\} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{l_k}\right)$$

## Referenties:

- [G1] Dicke, D. (1994). *Stabiliteit voor ontwerpers*. Delft: VSSD.
- [G2] Bouma, A.L. (2000). *Mechanica van constructies*. Elastostatica van slanke structuren. Delft: Delft University Press.
- [G3] *NEN-EN 1992-1-1. Ontwerp en berekening van betonconstructies*. - Deel 1.1: algemene regels en regels voor gebouwen.



# H Berekening; sterkte van de leuningbovenregel

De formules van sterkte van de leuningbovenregel zijn in hoofdstuk 6 uitgewerkt. De uitgewerkte formules zijn gebruikt om de sterkte van de leuningbovenregel te toetsen. De afmetingen van de brugdoorsnede zijn gelijk aan de afmetingen uit de overige bijlagen. De beton sterkteklasse is C50/60.

## Afmetingen dwarsdoorsnede brug:

Lengte brug  $L = 16\,000\text{ mm}$

Breedte brug  $b = 4\,000\text{ mm}$

Leuning hoogte  $a = 1\,000\text{ mm}$

Breedte leuningbovenregel  $a_b = 300\text{ mm}$

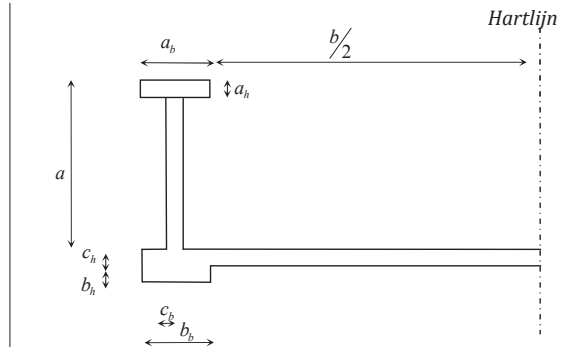
Hoogte leuningbovenregel  $a_h = 110\text{ mm}$

Breedte leuningonderregel  $b_b = 300\text{ mm}$

Hoogte t.b.v. verankering  $b_h = 60\text{ mm}$

Dikte vlakvulling  $c_b = 110\text{ mm}$

Hoogte dek  $c_h = 140\text{ mm}$



Figuur H1. Afmetingen.

## Toetsing Normaal drukkracht:

De toetsing is:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \leq 1,0$$

De optredende normaal drukkracht  $N_{Ed}$  uit Bijlage E is:

$$N_{Ed,q-last} = 914,61\text{ kN}$$

$$N_{Ed,p-last} = 666,33\text{ kN}$$

**Eenvoudige methode NEN-EN 1992-1-1 H12.6.5.2 om  $N_{Rd}$  te bepalen:**

$$N_{Rd} = A_c f_{cd} \Phi$$

$$N_{Rd} = 110 \cdot 300 \cdot 33,33 \cdot 0,7496 = 824,55 \text{ kN}$$

Waarin:

$$A_c = a_b a_h = 110 \cdot 300 = 33000 \text{ mm}^2$$

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 1 \frac{50}{1,5} = 33,33 \text{ N/mm}^2$$

$$\Phi = 1,14 \left[ 1 - \frac{2e_{tot}}{a_h} \right] - 0,02 \frac{l_k}{a_h} \leq 1 - \frac{2e_{tot}}{a_h}$$

$$\Phi = 1,14 \left[ 1 - \frac{2 \cdot 10,758}{300} \right] - 0,02 \frac{4630}{300} = 0,7496 \leq 0,9283 = 1 - \frac{2 \cdot 10,758}{300}$$

Waarin:

$$l_k = 4630 \text{ mm} \quad \text{zie bijlage E}$$

$$e_{tot} = e_i + e_0 = 10,758 + 0 = 10,758 \text{ mm}$$

Waarin:

$$e_i = \frac{l_k}{2} \frac{1}{200} \alpha_h = \frac{4630}{2} \frac{1}{200} 0,930 = 10,758 \text{ mm}$$

Waarin:

$$\frac{2}{3} \leq \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l_k}} \leq 1,0 \quad \rightarrow \quad \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{4,63}} = 0,930$$

**Toetsing:**

$$\frac{N_{Ed,q-last}}{N_{Rd}} = \frac{914,61}{824,55} = 1,11 \leq 1,0$$

**Voldoet NIET**

$$\frac{N_{Ed,p-last}}{N_{Rd}} = \frac{666,33}{824,55} = 0,81 \leq 1,0$$

Voldoet

**$N_{Rd}$  bepalen met behulp van de toelaatbare 'elastische' drukrek  $\epsilon_{c3}$** 

$$N_{Rd,max} = A_c \frac{1}{2} [\epsilon_{c3} - \Delta\epsilon_c] E_c$$

$$N_{Rd,max,q-last} = 33000 \cdot \frac{1}{2} \cdot [1,75 - 0,00104 \cdot 110] \cdot 37,278 = 1006 \text{ kN}$$

$$N_{Rd,max,p-last} = 33000 \cdot \frac{1}{2} \cdot [1,75 - 0,00076 \cdot 110] \cdot 37,278 = 1025 \text{ kN}$$

Waarin:

$$\Delta\epsilon_c = K a_h$$

$$E_c = 22 \cdot \left[ \frac{f_{ck} + 8}{10} \right]^{0,3} = 22 \cdot \left[ \frac{58}{10} \right]^{0,3} = 37,278 \text{ N/mm}^2$$

Waarin:

$$K_{Ed,q-last} = \frac{2N_{Ed,q-last} e}{EI_{brug,z}} = \frac{2 \cdot 914,61 \cdot 1015}{1789225375} = 0,00104 \frac{1}{mm}$$

$$K_{Ed,p-last} = \frac{2N_{Ed,p-last} e}{EI_{brug,z}} = \frac{2 \cdot 666,33 \cdot 1015}{1789225375} = 0,00076 \frac{1}{mm}$$

De buigstijfheid van de brug in lengterichting is:

$$x_{nc} = \frac{2E_c \left[ a_b a_h \frac{a_h}{2} + b_b (c_h + b_h) \left( a + \frac{c_h + b_h}{2} \right) \right] + E_s A_p \left( a + \frac{c_h + b_h}{2} \right)}{2E_c [a_b a_h + b_b (c_h + b_h)] + E_s A_p}$$

$$x_{nc} = \frac{2 \cdot 37,278 \left[ 33000 \frac{110}{2} + 300(200) \left( 1000 + \frac{200}{2} \right) \right] + 200 \cdot 2800 \left( 1000 + \frac{200}{2} \right)}{2 \cdot 37,278 \cdot [33000 + 300(200)] + 200 \cdot 2800}$$

$$x_{nc} = 756,9 \text{ mm}$$

Aanname oppervlakte voorspanstaal is 2800 mm<sup>2</sup>

$$EI_{brug,z} = C_1 + C_2 + C_3 = 1789225375 \text{ kNmm}^2$$

$$C_1 = 2E_c \left[ \frac{a_b a_h^3}{12} + a_b a_h \left( x_{nc} - \frac{a_h}{2} \right)^2 \right]$$

$$C_1 = 2 \cdot 37,278 \cdot \left[ \frac{300 \cdot 110^3}{12} + 33000 \left( 756,9 - \frac{110}{2} \right)^2 \right] = 1214613524$$

$$C_2 = 2E_c \left[ \frac{b_b (c_h + b_h)^3}{12} + b_b (c_h + b_h) \left( a - x_{nc} + \frac{b_h + c_h}{2} \right)^2 \right]$$

$$C_2 = 2 \cdot 37,278 \cdot \left[ \frac{300(200)^3}{12} + 300(200) \left( 1000 - x_{nc} + \frac{200}{2} \right)^2 \right] = 541490983$$

$$C_3 = E_s A_p \left( a - x_{nc} + \frac{b_h + c_h}{2} \right)^2$$

$$C_3 = 200 \cdot 2800 \left( 1000 - x_{nc} + \frac{200}{2} \right)^2 = 33120868$$



**Toetsing**

Op basis van maximale drukrek (imperfectie op normaalkracht verwaarloost)

$$\frac{N_{Ed,q-last}}{N_{Rd,max,q-last}} = \frac{914,61}{1006} = 0,91 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet}$$

$$\frac{N_{Ed,P-last}}{N_{Rd,max,P-last}} = \frac{666,33}{1025} = 0,65 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet}$$

**Toetsing Moment**

De toetsing is:

$$\left( \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a + \left( \frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}} \right)^a \leq 1,0$$

De formule voor rekenwaarde van het moment  $M_{Edy}$  is uitgewerkt in Bijlage G

$$M_{Edy} = M_{Edy,1^{ste} orde} + \frac{\pi^2 EI_{regel,y}}{l_k^2} \frac{1}{n-1} u_{Edy,1^{ste} orde}$$

$$M_{Edy,q-last} = 5,98 + \frac{\pi^2 \cdot 9226}{4,63^2} \frac{1}{7,42-1} 12,21 = 14,06 \text{ kNm}$$

$$M_{Edy,P-last} = 18,52 + \frac{\pi^2 \cdot 9226}{4,63^2} \frac{1}{10,19-1} 14,34 = 25,52 \text{ kNm}$$

Waarin:

$$M_{Edy,1^{ste} orde,q-last(hor)} = \frac{\frac{1}{8} q_{q,act} l_k^2}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI_{regel,y}}} = \frac{\frac{1}{8} 4,5 \cdot 4,63^2}{1 + \frac{1}{96} \frac{1956 \cdot 4,63^4}{9226}} = 5,98 \text{ kNm}$$

$$M_{Edy,1^{ste} orde,P-last} = \frac{\frac{1}{4} (P_{q,act,d} + P_{q,pass,d}) l_k}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI_{regel,y}}} = \frac{\frac{1}{4} (4,5 + 27,74) 4,63}{1 + \frac{1}{96} \frac{1956 \cdot 4,63^4}{9226}} = 18,52 \text{ kNm}$$

$$u_{Edy,1^{ste} orde,q-last} = \frac{\frac{5}{384} q_{q,act} l_k^4}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI_{regel,y}}} + e_i = \frac{\frac{5}{384} 4,5 \cdot 4,63^4}{1 + \frac{1}{96} \frac{1956 \cdot 4,63^4}{9226}} + 10,758 = 12,21 \text{ mm}$$

$$u_{Edy,1^{ste} orde,P-last} = \frac{\frac{1}{48} (P_{q,act,d} + P_{q,pass,d}) l_k^3}{1 + \frac{1}{96} \frac{k l_k^4}{EI_{regel,y}}} + e_i = \frac{\frac{1}{48} (4,5 + 27,74) 4,63^3}{1 + \frac{1}{96} \frac{1956 \cdot 4,63^4}{9226}} + 10,759 = 14,31 \text{ mm}$$

De overige onbekenden zijn eerder uitgewerkt in Bijlage E.

De rekenwaarde van het moment  $M_{Edz}$  is te berekenen met:

$$M_{Edz} = \frac{N_{Ed} e}{EI_{brug,z}} 2E_c \frac{a_b a_h^3}{12}$$

$$M_{Edz,q-last} = \frac{914,61 \cdot 1,015}{1789225375} 2 \cdot 37,278 \frac{300 \cdot 110^3}{12} = 1,29 \text{ kNm}$$

$$M_{Edz,p-last} = \frac{666,33 \cdot 1,015}{1789225375} 2 \cdot 37,278 \frac{300 \cdot 110^3}{12} = 0,94 \text{ kNm}$$

De onbekenden kunnen uit de bovenstaande berekening worden gehaald en waar nodig kan ook in Bijlage E worden gekeken.

$M_{Rdy/z}$  bepalen met behulp van de toelaatbare 'elastische' drukrek  $\epsilon_{c3}$

$$M_{Rdy} = \frac{a_b 0,9 N_{Erep,g}}{8} = \frac{0,300 \cdot 0,9 \cdot 362,22}{8} = 12,225 \text{ kNm}$$

$$M_{Rdz} = \frac{a_h 0,9 N_{Erep,g}}{8} = \frac{0,110 \cdot 0,9 \cdot 362,22}{8} = 4,482 \text{ kNm}$$

Waarin:

$$N_{Erep,g} = \frac{q_{g,rep} L^2}{8e} = \frac{22,98}{8 \cdot 1,015} 16^2 = 362,22 \text{ kNm}$$

$q_{g,rep}$  is de totale representatieve belasting van de lege brug per strekkende meter

**Toetsing:**

$$\frac{N_{Ed,q-last}}{A_c f_{cd}} = \frac{914610}{33000 \cdot 33,33} = 0,831 \quad \rightarrow \quad a_{q-last} = (0,831 - 0,7) \frac{5}{3} + 1,5 = 1,719$$

$$\frac{N_{Ed,p-last}}{A_c f_{cd}} = \frac{666330}{33000 \cdot 33,33} = 0,606 \quad \rightarrow \quad a_{p-last} = (0,606 - 0,1) \frac{5}{6} + 1,0 = 1,421$$

Toetsing van de momenten bij dubbele buiging volgens NEN-EN 1992-1-1 H5.8.9:

$$\left( \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a + \left( \frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}} \right)^a \leq 1,0$$

Op gelijkmatig verdeelde belasting:

$$\left( \frac{1,29}{4,482} \right)^{1,718} + \left( \frac{14,06}{12,225} \right)^{1,718} = 0,12 + 1,22 = 1,34 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet NIET}$$

Op een geconcentreerde belasting

$$\left( \frac{0,94}{4,483} \right)^{1,422} + \left( \frac{25,15}{12,225} \right)^{1,422} = 0,11 + 2,79 = 2,90 \leq 1,0 \quad \text{Voldoet NIET}$$

