Lange golven in leidingen

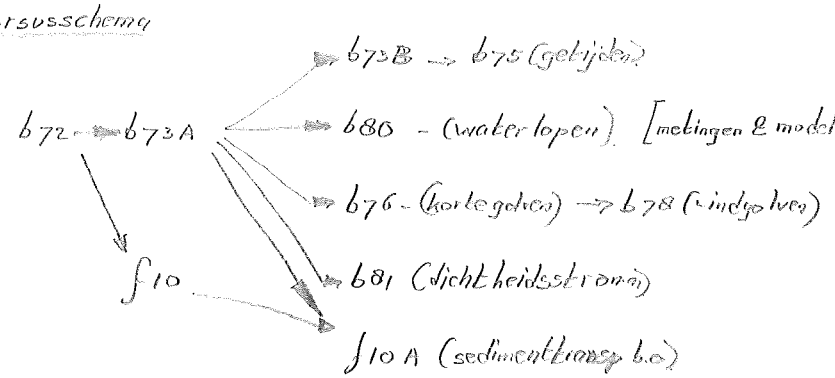
deel 2

- Analyse van lange golven
- Integratie met karakteristieken
- De Harmonische methode
- Numerieke methoden

ir. C. Verspuij

mrt 1973

cursusschema



2 soorten golven: periodieke golven $\lambda = c\,T$ $\eta = \hat{\eta}\sin\omega t$.
aperiodieke golven (bijv. hoogwatergolf)

h = waterdiepte

een golf is lang, als de golflengte vele malen groter is dan de hoogte $\lambda \gg h$.

Getijgolf is een lange golf: $T = 12$ uur 25 min. $= 44.700$ sec.
$c = \sqrt{gh}$

h m	c m/s	λ km	λ/h ×10
10	10	447	45
20	14	627	31
30	17	766	26
40 m.	20	885	22

Zo'n getijgolf is moeilijk als golf te zien, omdat de λ/h zo groot is.

Aanpak van een golfprobleem
- a. Problem beschrijven.
- b. Diff. vgl. formuleren.
- c. Diff. vgl. schematiseren. ← te sterk → fout / te zwak → kostenvrijspanning.
- d. formuleren randvoorwaarden. → wat is maatgevend.
- e. Toetsingsberekening → ijken.
- f. Berekeningen
- g. Interpretatie.

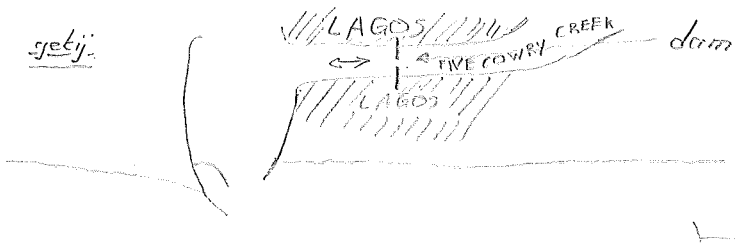
In b73A de punten b, c en f.

c. schematisering
- getij
- hoogw. golven in rivieren
- waterslag
- slingeringen.

oplossingsmethoden
- analytisch → het algemeen geldt inzicht.
- grafisch → geeft inzicht, is niet exact.
- numeriek → oplossing voor speciaal geval

Voorbeeld: waterslag In rioolleidingen onderdrukken tot -10 m mogelijk, meer niet toelaten met het ook op cavitatie. In drinkwater niet onder 1 atm.
Ook de voortplantingssnelheid is anders. Bij zuiver water ca. 1000 m/s, bij water + gas (rioolwater) is deze snelheid vele malen lager.

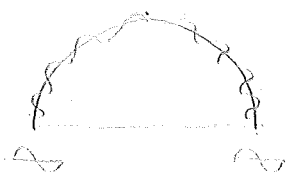
getij.



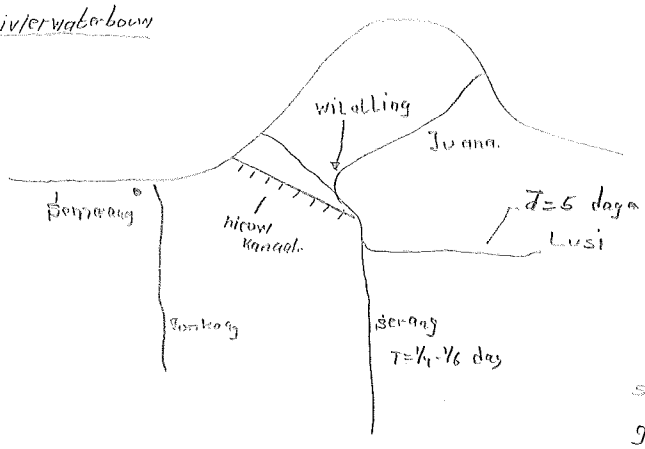
dam + opening. Hoe sterk is de getijstroom door diverse graden van opening.

kanaal. Invoeren: een ruwheid C.

schematiseren.



rivierwaterbouw



willatting is een bandijn-leidwerk, gebouwd op slappe kleigrond

doorsn. kanaal:

snelheid van een hoogwatergolf is ongeveer gelijk aan de stroomsnelheid

---

cont. vgl. in alg vorm: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ ⇒ aanname: ρ = constant

dus: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

Daaruit volgt: $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$ Zie afleiding in dikkaart of op bijgaande fotocopie

cont vgl uitgeschreven: $\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ (1)

Totale diff: $dh = \frac{\partial h}{\partial t}dt + \frac{\partial h}{\partial x}dx = 0$ (2) ⇒ als de vorm van de golf niet veranderd geldt dit.

verder stel: $c = \frac{dx}{dt}$ (c = voortplantingssnelheid?) (3)

Dus: $(v-c)\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ (4) Beschouw $\frac{v}{c} \ll 1$

dan $c = \sqrt{gh}$

(4) gaat dan over in: $-c\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

uit 2 volgt: $\frac{\partial h}{\partial t} + c\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ ~~uit~~ 1 wordt dan: $\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

zie ook blz. 2.5.

Froude getal

$$Fr = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{gh}} = \frac{\text{Traagheidskracht}}{\text{gravitatiekracht}} = \frac{(\rho l^3)\, v/T}{(\rho l^3)\, g} = \frac{v^2}{gl} = Fr^2$$

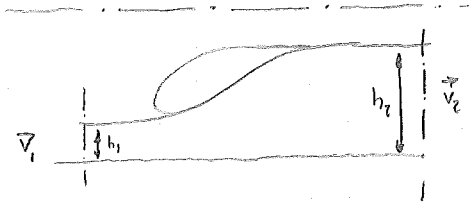
als de formules over de gehele breedte beschouwd worden:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v A)}{\partial x} - \rho f = 0$$

f is de zijdelingse toe- en afvoer

Vb.: $v = 1$ m/s $h = 5$ m. $\frac{v}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{7}$ zeer veel kleiner wil zeggen: ruimschoots een factor tien

---



$$\frac{1}{2}\rho g\left[h_1^2 - h_2^2\right] = -\rho q v_1 + \rho q v_2$$

impulsvgl geldt alleen als snelheid over de hele diepte gelijk is

$$(h_1 - h_2)(h_1 + h_2)h_1 h_2 = \frac{2q^2}{g}(h_1 - h_2)$$

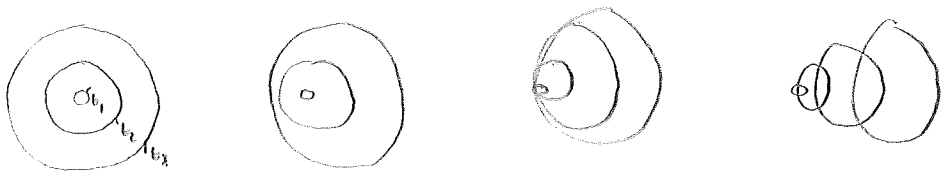
aan deze vgl wordt in 2 gevallen gedaan. 1) $h_1 = h_2$ ⇒ trivial

2) $h_2 = \frac{1}{2}h_1\left[\sqrt{\frac{8q^2}{gh_1^3} + 1} - 1\right]$. $h_2 > h_1$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{8q^2}{gh_1^3} + 1} > 3 \Rightarrow \frac{8q^2}{gh_1^3} > 8 \Rightarrow \frac{q^2}{gh_1^3} > 1$$

dus $\frac{v^2}{gh_1} > 1 \Rightarrow Fr^2 > 1$

: Dus voorwaarde watersprong: $Fr^2 > 1$, dus voorwaarde overgang van superkritisch naar subkritisch.



$Fr=0$ $\quad$ $Fr<1$ $\quad$ $Fr=1$ $\quad$ $Fr>1$, (schiebendwater) (superkritisch water)

werp een steen in al- dan niet stromendwater. Het ringpatroon is afhankelijk van Fr (of de stroomsnelheid) is hieraf gekeerd.)

---

blz. 1.6. $p' \to p''$ $\Rightarrow$ verkapte aanname: wet van Pascal is geldig.
Dit geldt alleen als: $\frac{\tau}{p} << 1$

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g\frac{A}{b_{opp}}}} = \frac{v}{\sqrt{gh\frac{b_s}{b}}}$$

b = totale breedte $\quad$ $A = b_s h$
b_s = stroomvoerende breedte.

$$c = v \pm \sqrt{gh} \Rightarrow \varphi = \frac{c}{v} = 1 \pm Fr^{-1}$$

---

fig 2.1, blz. 2.3.

Pascal geldig??: $\frac{\tau}{p} = \frac{\rho g h \sin I}{\rho g h \cos I} = tg\, I \approx I$ voor erg kleine hoeken

I erg klein $\Rightarrow$ dus $\frac{\tau}{p} << 1 \Rightarrow$ pascal is geldig.

---

form. 2.14 $\quad v\frac{\partial v}{\partial s} + g\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + g\frac{\partial h}{\partial s}$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{2}v^2 + gh\right] = \frac{\partial}{\partial s}\left[gh\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{gh} - 1\right)\right]$$

$$= g\frac{\partial}{\partial s}\left[h\left(\frac{1}{2}Fr^2 - 1\right)\right]$$

als $\frac{1}{2}Fr^2 << 1 \Rightarrow \quad = g\frac{\partial}{\partial s}(h+1)$

$\sqrt{b}$: $v = 1$ m/s $\quad h = 5$ m $\quad \frac{1}{2}Fr^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{10 \times 5} = 10^{-2} \Rightarrow$ dus dit is wel veel kleiner dan 1.

dus $v\frac{\partial v}{\partial s} + g\frac{\partial h}{\partial s} = g\frac{\partial h}{\partial s} \Rightarrow v\frac{\partial v}{\partial s}$ mag voor $\frac{1}{2}Fr^2 << 1$ verwaarloosd worden

---

Niet gebruiken: ~~b~~ l, O, d, I, i.v.m. problemen. $\quad 1 + \frac{Il}{h} \Rightarrow 1 + 1/h$
d^2dd

Geval zonder rijdelingse berging, en zeer klein Froudegetal.

(14) $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial s} = I_0 I_s$ $\quad$ (bew. vgl)

$\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial v}{\partial s} = 0$ $\quad$ (cont vgl)

als de wrijving klein is

(13) $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial s} = 0$

Deze vgl vermenigvuldigen met h en s diff, resp. ~~met~~ nar. t diff.

$$h\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t} + gh\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} = 0$$

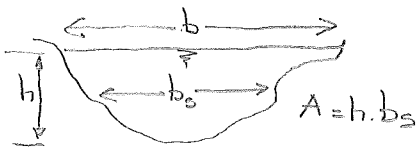
$$h\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} = 0 \qquad \text{golfvgl of snaarvgl}$$

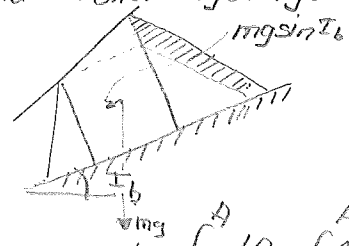
Wiskundigen schrijven dit als $h_{tt} - h_{ss} = 0$. Deze vgl is genormeerd, dimensieloos.
De voortpl. snelheid gh is dan wel raak

---

afleiding bewegingsvgl (in Q) voor willekeurig profiel zonder rijdelingse bergis



volgens Euler.



resulterende drukkracht: $K_{12} = \int_A p\,dA - \int_{A+\frac{\partial A}{\partial s}ds} \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}ds\right) dA$

Dit is $K_{12} = -\int_A \frac{\partial p}{\partial s} ds\,dA + O_{ab}(\partial s^2)$ (drukverschil)

$K_3 = -mg\sin I_b = -A\,ds\,\rho g \sin I_b$. (gewicht) (natte omtrek is P)

$K_4 = -\tau P\,ds$

$= -\rho/C^2\, P\,\rho g\,ds$

$= -\rho g \frac{Q|Q|}{C^2A^2R}\,ds\,A$ (wrijving)

Aanname lange golf $\Rightarrow$ Er is sprake van een hydrostatische drukverdeling.

daardoor $K_{12} = -\frac{\partial p}{\partial s}ds\,A$ $\quad p = \rho g(h-n)\cos I_b$

$= -\rho g\frac{\partial h}{\partial s}\cos I_b\,A\,ds$ (c)

samengevat: $\sum K_s = -\rho g\frac{\partial h}{\partial s}\cos I_b\,A\,ds - \rho g\sin I_b\,A\,ds - \rho g\frac{Q|Q|}{C^2A^2R}A\,ds$ (a)

Impulsvgl toepassen: $K\,dt = d(mv)$

dus $d(mv)$ bepalen: $d(mv) = \frac{\partial(mv)}{\partial s}ds + \frac{\partial(mv)}{\partial t}dt$

$$\frac{\partial(mv)}{\partial s} = \frac{\partial(\rho Q v\,dt)}{\partial s} \quad (d) \qquad \frac{\partial(mv)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho A v\,ds)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\rho Q\,ds)}{\partial t} = \rho\frac{\partial Q}{\partial t}ds$$

$$= \rho\frac{\partial(Q^2/A\,dt)}{\partial s}$$

$$= \rho\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial s}dt - \rho\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial s}dt$$

$$d(mv) = \rho\frac{\partial Q}{\partial t}ds\,dt + \rho\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial s}dt\,ds - \rho\frac{Q^2}{A}\frac{\partial A}{\partial s}dt\,ds \qquad (b)$$

stel (a) $* dt = (b) \Rightarrow$ delen door dt, ds, g, A, ρ

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{gA^2}\frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{Q^2\partial A}{gA^3\partial s} = -\frac{\partial h}{\partial s}\cos I_b - \sin I_b - \frac{Q|Q|}{C^2A^2R}$$

Nu hierop de continuïteitsvgl loslaten $A = h.b_s$, maar $\frac{\partial A}{\partial s} = b\frac{\partial h}{\partial s}$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{\partial A}{\partial t} = -b\frac{\partial h}{\partial t}$$; verder geldt ook:

$$\frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{ds} = \frac{Q^2}{gA^3}\, b\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{v^2}{gh}\cdot\frac{b}{b_s}\cdot\frac{\partial h}{\partial s} \qquad F_r^2 = \frac{v^2}{gh}\cdot\frac{b_s}{b}$$

$$\frac{1}{gA}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{2Qb}{gA^2}\cdot\frac{\partial h}{\partial t} + \underbrace{\left\{\cos I_b - \frac{v^2}{gh}\frac{b}{b_s}\right\}}_{1-F_r^2 = 1/\alpha}\frac{\partial h}{\partial s} + \sin I_b + \frac{Q|Q|}{C^2A^2R} = 0$$

Nu samen nemen: (t en d)

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial(Qv)}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s}\cos I_b$$

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial(Av^2)}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s}\cos I_b = \frac{v^2}{gA}\frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{g}\right) + \frac{\partial h}{\partial s}\cos I_b$$

$$= \frac{v^2}{gA}\, b\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{v^2}{gA/b}\frac{\partial h}{\partial s} = F_r\frac{\partial h}{\partial s}$$

Dus: $F_r^2\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{g}\right) + \frac{\partial h}{\partial s}\cos I_b$ $\qquad \frac{v^2}{g} = \frac{v^2}{gh}\cdot\frac{b_s}{b}\, b$

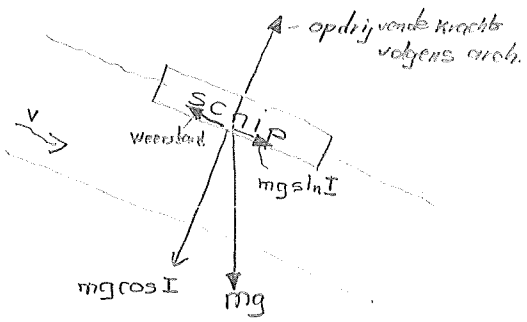
$$= F_r^2\frac{\partial h}{\partial s} + F_r^2\frac{b_s}{b}\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s}\cos I_b$$

$$= \frac{\partial h}{\partial s}\left\{F_r^2 + F_r^2\frac{b_s}{b} + \cos I_b\right\}$$

Dan volgt benaderingsformule 2-17

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial s} + I_b + \frac{Q|Q|}{C^2A^2h} = 0$$

als deze term nul is, dan is de stroming stationair.
als deze term ook nul is dan is de stroming eenparig



⇒ als het schip drijft, dan gaat het schip sneller dan het water

Op een gebijrivier heeft dit helemaal niet, omdat dan water "bergopwarts" kan stromen.

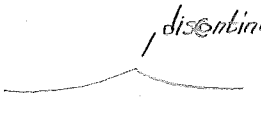
$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ (contin)} \qquad v(x,t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = (-) \text{ (beweg vgl)} \qquad h(x,t)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & v & 0 & g \\ 0 & h & 1 & v \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \partial v/\partial t \\ \partial v/\partial x \\ \partial h/\partial t \\ \partial h/\partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \\ 0 \\ dv \\ dh \end{vmatrix}$$

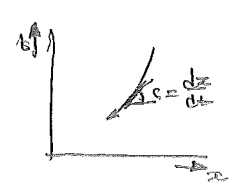
er is echter nog meer bekend: $\frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial x}dx = dv$

$$\frac{\partial h}{\partial t}dt + \frac{\partial h}{\partial x}dx = dh$$



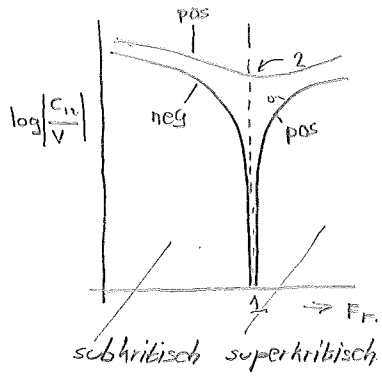
Deze komen alleen voor als er oplossingen nuldeterminanten leveren dus de hoofddeterminant moet nul zijn, waaruit volgt:

$$(dx)^2 - 2v\,dx\,dt + (v^2 - gh)dt^2 = 0 \qquad \text{Er geldt: } c = dx/dt$$



$$\Rightarrow c^2 - 2cv + (v^2 - gh) = 0 \Rightarrow c_{1,2} = v \pm \sqrt{gh}$$. Relat. voortpl. snel: $\varphi_{1,2} = \frac{c_{1,2}}{v}$

$$\varphi_{1,2} = 1 \pm F_r^{-1}$$ voor $F_r = 1$ $\quad \varphi_1 = 2$, $\varphi_2 = 0$ (krit. snelheid)



De voortplantingssnelheden aan de bodem zijn vele malen langzamer dan aan de oppervlakte. Daarom mag voor een getijberekening de bodem vast beschouwd worden.

De Kinematische Golf

bewegingsvgl: $\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial s} + I_b + \frac{Q|Q|}{c^2A^2h} = 0$

(A) (B)

continuiteit: $b\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

(C) als dit nul is, dan is de stroming stationair.

Nu wordt de kinematische golf beschouwd, dwz, de termen A en B zijn nul. C is niet nu
Dit is dus een sterke vereenvoudiging, dus:

$$\begin{cases} Q = C b_s h^{3/2} i_b^{1/2} & \text{(bewegingsvgl, is de vgl. van Chézy)} \\ b\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = C\frac{3}{2} b_s i_b \cdot h^{1/2}$$

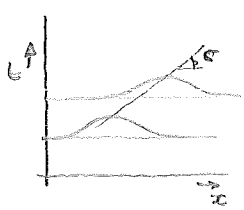
ingevuld: $\frac{\partial h}{\partial t} + \left\{\frac{3}{2}\frac{b_s}{b} C h^{1/2} i_b^{1/2}\right\}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$

of kortweg: $\frac{\partial h}{\partial t} + \beta\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ oplossing: $h = h\{x-\beta t\} \Rightarrow y = (x-\beta t)$, $h(y)$.

terugdiff: $\frac{dh}{dt}\cdot(-\beta) + \beta\frac{dh}{dy}\cdot 1 = 0. \Rightarrow \beta =$ voortplantingssnelheid

dus $c = \frac{3}{2}\frac{b_s}{b} C h^{1/2} i_b^{1/2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}\bar{V}$

Overhet algemeen echter:



$c = v \pm \sqrt{gh}$

$\varphi = 1 \pm Fr^{-1}$

$c = \frac{dx}{dt}$

Dit is niet in overeenstemming met de vorige uitkomst.
Dit komt doordat de berging verwaarloosd wordt

De afgeleide formule is $\frac{\partial h}{\partial t} + c\frac{\partial h}{\partial x} = 0$

Totale diff: $\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial t}dt = dh$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial t}dt = 0$$

Dus voor een waarnemer, die met de golf meebeweegt, vervormt de golf niet.

Essentieel voor de kinematische golfbeschouwing is dus dat de golf zich onvervormd voortbeweegt

Nu wordt beschouwd. $Q = Q\{h\} \Rightarrow \frac{dQ}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dQ}{dh}\cdot\frac{dh}{dx}$

continuiteit: $b\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

invullen: $\frac{\partial h}{\partial t} + \left\{\frac{1}{b}\frac{dQ}{dh}\right\}\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{b}\frac{dQ}{dh} = c$

Deze beschouwing (kin. golf) geldt dus alleen over zeer korte afstanden. c is echter wel vrij nauwkeurig te bepalen.

Echter c is niet konstant, als ik daar rekening mee ga houden, dan krijg ik wel vervorming, maar geen verdakking (de golf wordt dus ook uitgerekt). dh/dx blijft nul) zie blz 334 nieuwe versie.
De kin-golf geeft wel inzicht, maar voorspellen van hoogwatergolven is hiermee vrijwel onmogelijk

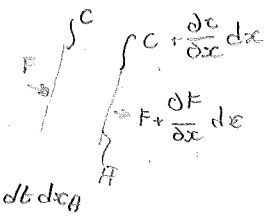
---

Nu iets meer meenemen:
$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial x} + I_b + \frac{Q|Q|}{C^2 A R} = 0 \\ &b\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Dit wordt een 2e orde diff.vgl.
Voor afleiding zie dikkaab. (Hr. 3.4.1)
$$\frac{1}{b}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{2Q}{C^2 b_s^2 h_s}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t} - 3\frac{Q^2}{C^2 b_s^3 h^4 b}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

of: $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - a\frac{\partial Q}{\partial x} - b\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ parabolische vgl, diffusievgl.

afleiding diffvgl



c = concentratie
D = diff. vgl.

$F = vC' - D\frac{\partial c}{\partial x}$

cont vgl. $\frac{\partial F}{\partial x}dx\,dt\,A = -\frac{\partial c}{\partial t}dt\,dx\,A$

$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = v\frac{\partial c}{\partial x} - D\frac{\partial^2 C'}{\partial x^2}$

$\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} - D\frac{\partial^2 C'}{\partial x^2} = 0$

<u>Oplossen met Laplace of met Fourier-transformatie</u>

$a \times b = 0 \Rightarrow \log a + \log b = \log c$

Bij diff. vgl hetzelfde doen.
p.V → gewone DV → oplossen → terugtransformeren

De Laplace transformatie.
$$\bar{h} = \int_0^\infty e^{-pt} h\,dt$$

De Fourier-transf:
$$\bar{h} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} h\,dy$$

Vb Laplace:
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - a\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\overline{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-pt} h\,dt = \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2}$$

$$\overline{\frac{\partial h}{\partial t}} = \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial h}{\partial t}dt = h e^{-pt}\Big]_0^\infty - p\int_0^\infty e^{-pt} dt\, h$$

$$= h_0 - p\bar{h}$$

de diffvgl is nu: $\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + ap\bar{h} + h_0 = 0$

Deze is op te lossen, waarna weer teruggetransformeerd kan worden

Op 3-4-4 is de oplossing met Fourier gegeven:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega}\frac{\partial h}{\partial t}dy = \frac{\partial}{\partial t}\int e^{i\omega y} h\,dy = \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}$$

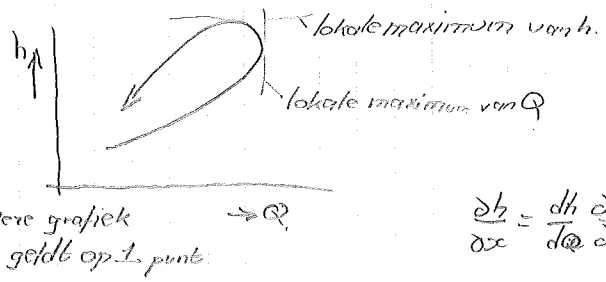
$$\overline{\frac{\partial h}{\partial t}} = \int e^{i\omega y}\frac{\partial h}{\partial t}dy = e^{-i\omega y} h\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega e^{i\omega} h\,dy$$

$$= 0 - i\omega h$$

$$\frac{\partial^2 \bar{h}}{dt^2} = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}\cdot\frac{\omega^2}{a}$$

$$Q_s = AC'\sqrt{Ri_b}$$

$$Q = AC'\sqrt{R\left\{i_b - \frac{\partial h}{\partial x}\right\}} \Rightarrow Q = Q_s\sqrt{1 - \frac{\partial h/\partial x}{i_b}}$$



Deze grafiek geldt op 1 punt

De waterstand is dus bij een hoogwatergolf geen directe functie van het debiet, maar beschrijft een hysteresis-lus.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dQ}\frac{\partial Q}{\partial x} = -b\frac{dh}{dQ}\frac{\partial h}{\partial t}$$

$b = \frac{1}{c}$

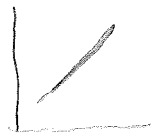
$$\text{Dus } Q = Q_s\sqrt{1 + \frac{1}{ic}\frac{\partial h}{\partial t}}$$

afschatten: $\frac{\partial h/\partial t}{c\, i_b} \Rightarrow$ $c = 2$ m/s $\quad i = 10^{-4}$

$\partial h/\partial t = 1$ m/dag

$$= \frac{1}{3600 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 0{,}06 \quad \Rightarrow \frac{Q}{Q_s} = \sqrt{1{,}06} = 1{,}03$$

Dit verschil van 3% valt binnen de meetbaarheid, de lus is dus platgeslagen voor de Rijn. Bij sommige rivieren is deze wel van belang.



$h_x + m Q_t = 0 \quad * \, dx \quad \Rightarrow \quad h_x dx + m Q_t dx = 0$ bew vgl.

$h_t + \frac{1}{b} Q_x = 0 \quad * \, dt \quad \Rightarrow \quad h_t dt + \frac{1}{b} Q_x dt = 0$ + cont vgl

$$\underbrace{h_x dx + h_t dt} + m Q_t dx + \frac{1}{b} Q_x dt = 0$$

$$dh \quad + m \frac{dx}{dt} \left\{ Q_t dt + \boxed{\frac{1}{mb} \left(\frac{dt}{dx}\right)^2} Q_x dx \right\} = 0$$

als $dt = 1$, dan.

$$dh + m \frac{dx}{dt} \cdot dQ = 0$$

Dus als: $\frac{1}{mb} \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 1$, dan $\frac{dQ}{dh} = -\frac{1}{m \frac{dx}{dt}}$. dus als: $\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{1/mb} = \pm \sqrt{\frac{gA}{b}} = \pm c$

dan: $\frac{dQ}{dh} = \mp \frac{1}{m\sqrt{1/mb}}$

of $\frac{dQ}{dh} = \mp \sqrt{bgA}$

ook wel: $\frac{dQ}{dh} = \mp \sqrt{bgA} = \mp bc$

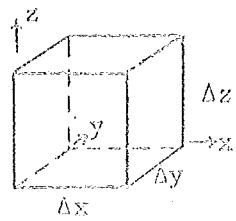
Samengevat: $\boxed{\text{als } \frac{dx}{dt} = \pm c, \text{ dan } \frac{dQ}{dh} = \mp bc}$

kollege "Lange Golven in Leidingen" b73A cursus '73/'74

Afleiding continuïteitsvergelijking

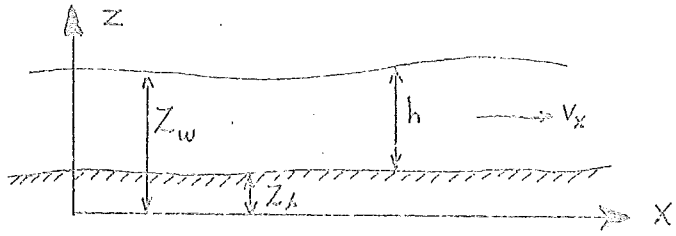
In het kollege "Algemene Mechanica" b 8, wordt afgeleid, dat de continuïteitsvergelijking voor een incompressibele en homogene vloeistof in algemene vorm te schrijven is als $\nabla.\vec{v}=\text{div}\,\vec{v}=0$ of:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \quad (I)$$



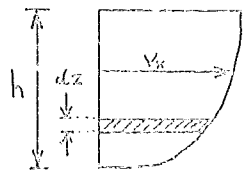
afleiding mogelijk met behulp van infinitesimaal blokje

Vergelijking (I) is een vergelijking, die geldt in ieder punt van de vloeistof; de snelheden zijn locale snelheden.
Bij een lange golf in een open leiding, wordt verondersteld, dat in de y-richting alles constant is, dus $\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$ (a)
Verder wordt gewerkt met de horizontale snelheid, gemiddeld over de diepte.



Deze gemiddelde snelheid wordt berekend, door de v_x over de diepte te integreren en het resultaat te delen door de diepte, dus :

$$v_x\ \text{gem} = \bar{v}_x = \frac{1}{h}\int_{z=Z_b}^{z=Z_w} v_x\,dz. \quad (b)$$



$$\boxed{\bar{v}_x = \frac{1}{h}\int_0^h v_x\,dz.}$$

Voor vergelijking (I) wordt m.b.v. (a) geschreven:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \quad (II)$$

Nu moet, teneinde de gemiddelde horizontale snelheid in te kunnen voeren, geïntegreerd worden in de z-richting:

$$\int_{z=Z_b}^{z=Z_w}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dz = \underbrace{\int_{z=Z_b}^{z=Z_w}\frac{\partial v_x}{\partial x}\,dz}_{1}+\underbrace{\int_{z=Z_b}^{z=Z_w}\frac{\partial v_z}{\partial z}\,dz}_{2}=0 \quad (III)$$

$$(1):\ \int_{z=Z_b}^{z=Z_w} \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dz = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{z=Z_b}^{z=Z_w} v_x\, dz\right) - v_x \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{z=Z_w} + v_x \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{z=Z_b}$$

(1) (3) (4) (5)

Deze relatie is niet zonder meer duidelijk. Wordt echter de definitie van de differentiaalrekening toegepast op term (3), dan blijkt, dat

(3) = (1) + (4) − (5) : vierkantige haak

(3) wordt m.b.v. (b) : $\frac{\partial}{\partial x}(h\,\bar{v}_x)$

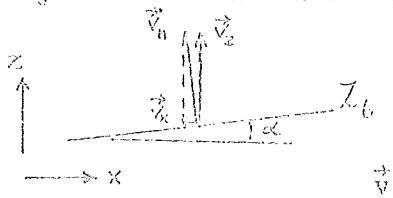
$$(2):\ \int_{z=Z_b}^{z=Z_w} \frac{\partial v_z}{\partial z}\, dz = \int_{z=Z_b}^{z=Z_w} dv_z = v_z\Big|_{z=Z_w} - v_z\Big|_{z=Z_b}$$

Vergelijking (III) wordt dus:

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\bar{v}_x) + \left[v_x \frac{\partial z}{\partial x} - v_z\right]_{\text{op } z=Z_b} - \left[v_x \frac{\partial z}{\partial x} - v_z\right]_{\text{op } z=Z_w} = 0 \quad (IV)$$

(6) (7)

Bij een ondoorlatende bodem is de snelheid loodrecht op deze bodem $\vec{v}_n = \vec{0}$



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dZ_b}{dx}$ Helling v.d. bodem

$$\vec{v}_n = -\vec{v}_x \sin\alpha + \vec{v}_z \cos\alpha = \vec{0} \text{ of:}$$

$\vec{v}_x \operatorname{tg}\alpha = \vec{v}_z$ of: $v_x \frac{\partial z}{\partial x} = v_z$, $\frac{\partial z}{\partial x} = v_z$ $\boxed{\text{voor } z=Z_b}$

zodat (6) = 0

Aan het water oppervlak geldt, dat een deeltje, dat aan het oppervlak Z_w zit, er ook blijft. Dit betekent, dat de "meebewegende afgeleide" van dit deeltje aan het oppervlak de snelheid van dit oppervlak in de z-richting weergeeft.

Z_w is een functie van x en t

Immers $\frac{dZ_w}{dt} = \frac{\partial Z_w}{\partial t} + \frac{\partial Z_w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$

met $\frac{dx}{dt} = v_x$ en $\frac{dZ_w}{dt} = v_z$ wordt dit: $\boxed{\text{voor } z=Z_w}$

$$v_z = \frac{\partial Z_w}{\partial t} + \frac{\partial Z_w}{\partial x} v_x, \text{ zodat } v_x \frac{\partial Z_w}{\partial x} - v_z = -\frac{\partial Z_w}{\partial t} \quad (7)$$

Voor (IV) kan dus worden geschreven:

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\bar{v}_x) + \frac{\partial Z_w}{\partial t} = 0 \quad (V); \quad h\bar{v}_x = q = \text{debiet per meter breedte.}$$

specifieke debiet

Als we beide leden van (V) met de breedte b vermenigvuldigen en we stellen $Q = bq$ → wordt (V):

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} + b\,\frac{\partial Z_w}{\partial t} = 0} \qquad \text{(VI)}$$

Dit is de continuïteitsvergelijking voor Lange Golven in open leidingen.

Deze vergelijking VI is eenvoudig direkt af te leiden.

jan. 1974.

uitgangspunt van deze afleiding:
continuïteitsvgl voor een punt in een homogene incompressibele vloeistof

deze vgl wordt geïntegreerd in de z-richting en in de y-richting als constant beschouwd
resultaat ⇒ functie in x en t

ANALYSE VAN LANGE GOLVEN

eerste concept van hoofdstuk 3
van een nieuw diktaat b 73 A

Ir. C. Verspuy

Nieuwe collegediktaat Lange Golven in Leidingen

Hoofdstuk 3 ANALYSE VAN LANGE GOLVEN

Inhoudsopgave:

3.1 INLEIDING

Zoals bij het afleiden van de differentiaal-vergelijkingen voor de voortplanting van lange golven in leidingen ook reeds is vastgesteld, dienen problemen in de praktijk zich eigenlijk steeds aan als 3-dimensionale problemen.
Het rekenen in drie plaats-dimensies en de tijd is voor bepaalde praktijk-problemen eigenlijk pas sinds kort mogelijk. De omvang van het uit te voeren rekenwerk is zodanig, dat slechts beperkte berekeningen mogelijk zijn.
In veel gevallen is het verantwoord om een probleem te schematiseren tot een probleem in twee dimensies. Voorbeelden hiervan zijn problemen in twee horizontale dimensies en de tijd - b.v. de getijbeweging op de Noordzee - en ook problemen in één horizontale dimensie, één vertikale dimensie en de tijd - b.v. de voortplanting van windgolven op diep water -.
In het laatste decennium hebben vooral de rekentechnieken voor deze problemen in 2 dimensies een grote ontwikkeling doorgemaakt (b.v. Leendertse 1967).

Indien we problemen mogen schematiseren tot 1-dimensionale problemen, dan bestaan er op dit moment bijna onbeperkte mogelijkheden voor het (doen) uitvoeren van berekeningen.

Men kan zich nu de vraag stellen waarom niet alle problemen zo algemeen mogelijk worden geformuleerd en vervolgens steeds via een numeriek rekenproces m.b.v. een computer worden opgelost.
Om inzicht te verkrijgen in de verschijnselen heeft met behoefte aan analytische oplossingen, omdat deze algemene betekenis hebben en op eenvoudige wijze kunnen worden geinterpreteerd.
Dus ook nu, nu er oplossingsmethoden voor gecompliceerde problemen bestaan, bestaat er behoefte aan het leren kennen van oplossingen voor (sterk) vereenvoudigde beschrijvingen van verschillende problemen.
Omdat voor bepaalde verschijnselen vereenvoudigingen zonder meer zijn toegestaan krijgt men een goed inzicht in het karakter van deze verschijnselen. De resultaten van een oplossing voor een vereenvoudigd probleem kunnen op een bescheiden schaal worden gebruikt om de invloed van de verwaarlozingen vast te stellen. Indien uit een dergelijke globale kontrole blijkt dat de invloed niet erg klein is, is men genoodzaakt een nauwkeuriger benadering te geven teneinde meer zekerheid te verkrijgen.
Vanaf de tweede helft van de vorige eeuw hebben vele onderzoekers zich bezig gehouden met het ontwikkelen van golf-theoriën, die in meerdere

of in mindere mate aansluiten bij de fysische werkelijkheid.
Verschillende van deze theoriën geven inzicht in een bepaald aspekt van het beschouwde lange-golfverschijnsel.
In dit hoofdstuk wordt steeds uitgegaan van de algemene vergelijkingen voor de voortplanting van lange golven in leidingen. Bij de afleiding van deze vergelijkingen is een duidelijk onderscheid gemaakt tussen open en gesloten leidingen.

In paragraaf 3.7. wordt een overzicht gegeven van een aantal lange-golftheoriën.
In de paragrafen 3.2. t/m 3.6. wordt uitsluitend aandacht besteed aan lange golven in open leidingen.
Achtereenvolgens worden een aantal theoriën besproken, die voor het verkrijgen van overzicht over het vakgebied ook thans nog van belang zijn. Daarbij is gekozen voor een volgorde, waarbij achtereenvolgens steeds minder wordt verwaarloosd. In paragraaf 3.5. komt daarom een benadering ter sprake, waarbij de traagheidsterm wèl en de weerstandsterm niet in de bewegingsvergelijking wordt meegenomen.
De paragrafen 3.3. , 3.4. en 3.6. hebben namen gekregen, die zijn ontleend aan de Engelstalige literatuur betreffende berekeningen voor z.g. hoogwatergolven : "Flood-routing". Voor een nadere verklaring wordt verwezen naar het begin van paragraaf 3.3.
De "analyse van lange golven" in dit diktaat is zeker niet volledig.
Het doel is een inventarisatie te geven, waardoor enig overzicht mogelijk wordt.
Voor een eventuele voortgezette studie wordt hier en daar naar andere colleges èn naar literatuur verwezen.

3.2. KOMBERGINGSBESCHOUWING

3.2.1. Integreren van de continuïteitsvergelijking

In deze paragraaf wordt de continuïteitsvergelijking beschouwd in de volgende gedaante :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - b \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (3.2 - 1)$$

Bij het afleiden van deze vergelijking wordt een klein gedeelte van een open leiding beschouwd met een lengte dx (zie vorige hoofdstuk).
Wij beschouwen nu een gedeelte van een open leiding tussen twee punten A en B (zie fig. 3.2.1).

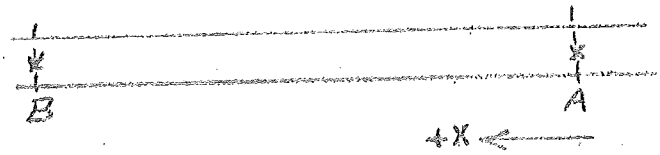


fig. 3.2.1

We kunnen de termen van de vergelijking (3.2. -1) integreren over x van A naar B .

$$\int_A^B \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_A^B - b \frac{\partial h}{\partial t} dx$$

Nu zijn b en $\frac{\partial h}{\partial t}$ niet konstant over het gedeelte A - B.
We nemen even aan dat de bergende breedte b konstant is, zodat deze uit het integraal-teken kan. Voor $\frac{\partial h}{\partial t}$ nemen we <u>een gemiddelde waarde</u> voor het gedeelte A-B .
We vinden dan :

$$\Delta Q = Q_B - Q_A = - b \, \Delta x \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{gem.} \qquad (3.2. - 2)$$

Ga voor Uzelf na dat deze vergelijking ook direkt is op te stellen.

Als de bergende breedte <u>niet</u> konstant is over de afstand waarover geïntegreerd wordt, dan moet de varierende breedte worden meegeïntegreerd. Men vindt dan een uitdrukking, waarin de kombergingsoppervlakte van het gedeelte van de open leiding voorkomt.
Men vindt dan (zie fig. 3.2.2):

$$\Delta Q = Q_D - Q_C = - B \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{gem.} \qquad (3.2. - 3)$$

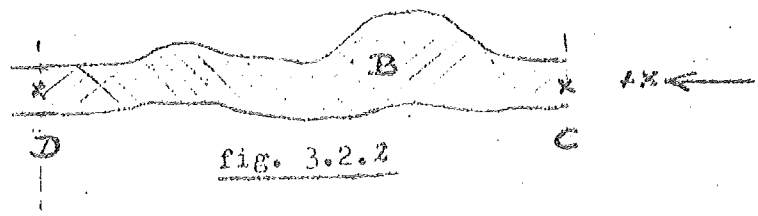


fig. 3.2.2

De uitdrukkingen (3.2. - 2) en (3.2. - 3) gelden op ieder willekeurig tijdstip t.
De kombergingsoppervlakte tussen de integratie-grenzen zal niet konstant zijn met de waterhoogte (dus met de tijd) als de wanden van de leiding niet vertikaal zijn.

Met de bovenstaande vergelijkingen kan een verschil in Q worden bepaald over een vak met beperkte lengte.
Het komt vaak voor dat men het debiet op een bepaalde plaats kent en het debiet op een andere plaats wil leren kennen.
Het meten van een debiet in b.v. een benedenrivier is een kostbare en tijdrovende aangelegenheid. Daar tegenover staat dat het registreren van waterstanden veel eenvoudiger uitvoerbaar is.
Om een indruk te geven van het belang van het kunnen integreren van de continuïteitsvergelijking wordt nu in het kort een toepassing besproken.

In een estuarium is het verloop van de kombergingsoppervlakte geheel bekend. Het estuarium is zo lang dat men meerdere vakken moet onderscheiden.
Stel dat men met 5 vakken kan volstaan (zie fig.3.2.3.)
De vakken zijn genummerd I t/m V .
Er zijn 6 vakgrenzen , die zijn aangegeven met de punten 0,1,.....5 .

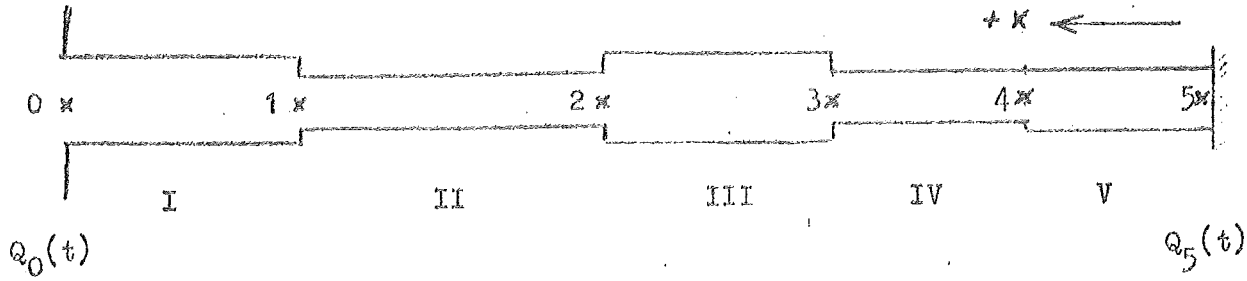


fig. 3.2.3.

Verondersteld wordt nu dat zich bij punt 5 een afsluiting bevindt , $Q_5(t) = 0$ voor alle waarden van t.
Men zou het debiet in de monding bij punt 0 willen leren kennen.
De waterstanden op de vakgrenzen van de 5 vakken kunnen vrij eenvoudig worden geregistreerd. Verondersteld wordt dat men beschikt over de funkties $h_0(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$, $h_4(t)$ en $h_5(t)$.

Nu is voor ieder tijdstip de volgende procedure mogelijk:

Integreren van de cont. verg. over het vak V geeft :

$$Q_4(t) - Q_5(t) = - B_V \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{gem.}$$

We noemen $\frac{\partial h}{\partial t}$ van vak V $\boxed{\dot{h}_V}$

Omdat $Q_5(t) = 0$ wordt gevonden :

$$Q_4(t) = - B_V \dot{h}_V \qquad (3.2. - 4)$$

Integreren van de cont. verg. over het vak IV geeft :

$$Q_3(t) - Q_4(t) = - B_{IV} \dot{h}_{IV}$$

Samen met (3.2. - 4) vinden we voor $Q_3(t)$:

$$\boxed{Q_3(t) = - B_V \dot{h}_V - B_{IV} \dot{h}_{IV}} \qquad (3.2. - 5)$$

Vervolgens vinden we voor achtereen volgens de vakken III , II en I :

$$Q_2(t) - Q_3(t) = - B_{III} \dot{h}_{III} \quad \text{of met (3.2. - 5) :}$$

$$\boxed{Q_2(t) = - B_V \dot{h}_V - B_{IV} \dot{h}_{IV} - B_{III} \dot{h}_{III}} \qquad (3.2. -6)$$

$$Q_1(t) - Q_2(t) = - B_{II} \dot{h}_{II} \quad \text{of met (3.2. - 6) :}$$

$$\boxed{Q_1(t) = - B_V \dot{h}_V - B_{IV} \dot{h}_{IV} - B_{III} \dot{h}_{III} - B_{II} \dot{h}_{II}} \qquad (3.2. -7)$$

$$Q_0(t) - Q_1(t) = - B_I \dot{h}_I \quad \text{of met (3.2. - 7) :}$$

$$\boxed{Q_0(t) = - B_V \dot{h}_V - B_{IV} \dot{h}_{IV} - B_{III} \dot{h}_{III} - B_{II} \dot{h}_{II} - B_I \dot{h}_I}$$

(3.2. - 8)

Uit deze laatste uitdrukking vooral blijkt duidelijk wat er gebeurt.
Het debiet in de monding is gevonden als de som van het debiet in punt 5 (in dit geval nul) en de debietverschillen over de respektieve vakken.

Indien op een bepaalde plaats het debiet Q als funktie van de tijd bekend is dan is op eenvoudige wijze het debiet op een andere plaats te bepalen.
Daarbij dient echter wel voldoende zekerheid te bestaan betreffende
- het verloop van de waterstanden over het tussenliggende rivier-gedeelte ;
- de kombergingsoppervlakte als funktie van t (via de waterstanden) van elk van de te onderscheiden vakken.

Deze paragraaf is begonnen met een algemene beschouwing over het integreren van de cont. verg. in een algemeen geval van de voortplanting van een lange golf door een open leiding.
De bewegingsvergelijking bleef daarbij geheel buiten beschouwing.

In het volgende wordt aandacht besteed aan een type lange-golfproblemen, waarbij de bewegingsvergelijking een bizonder ondergeschikte rol speelt.

3.2.2. Het debiet in een relatief kort bekken.

In het volgende wordt een prismatische open leiding beschouwd, die aan één zijde is afgesloten en aan de andere zijde in open verbinding staat met een diepe en brede zeearm.

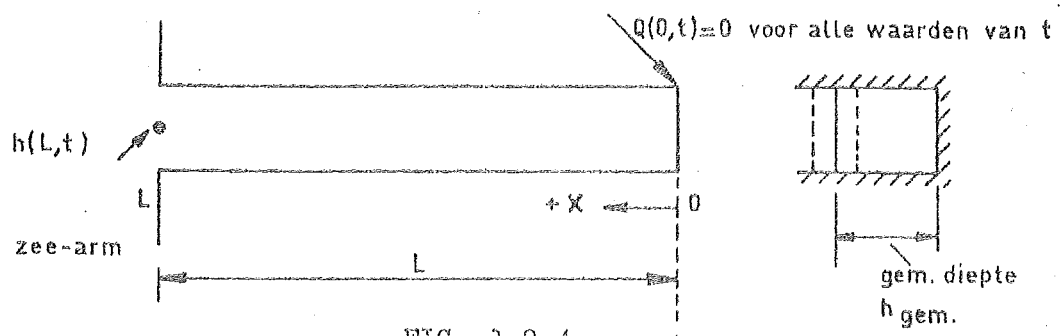


FIG. 3.2.4.

De volgende veronderstellingen worden gemaakt:

1. De wanden zijn vertikaal, zodat $b = b_s$ = konstant;
2. Hoewel dit niet noodzakelijk is wordt (in eerste instantie) de bodem horizontaal gedacht $i_b = 0$. De leiding-as is dan dus horizontaal.
3. Het verloop van de waterstanden is gegeven op de plaats $x = L$ als een vloeiend verlopende funktie $h(L,t)$
4. Het getal van Froude $\frac{v}{\sqrt{gh}}$ is erg klein, zodat de faktor $\alpha = 1$.

De voortplanting van een lange golf in het bekken kan worden beschreven met de alg. vergelijkingen die zijn afgeleid.
Als rekening gehouden wordt met veronderstelling 2 en 4, dan gelden voor ieder punt tussen $x = 0$ en $x = L$ de volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q|Q|}{C^2A^2R} - \frac{2b}{gA^2}\,Q\,\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (3.2.-9)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b\,\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (3.2.-10)$$

Op de plaats $x = 0$ is gegeven (randvoorwaarde) $Q(0,t) = 0$ voor alle waarden van t. Hieruit volgt ook dat alle termen in het rechter lid van verg. (3.2.-9) voor alle waarden van t op deze plaats $x = 0$ gelijk aan nul zijn.

Indien het bekken zeer kort is t.o.v. de golflengte van de golf, zullen Q en $\frac{\partial Q}{\partial t}$ over de gehele lengte van het bekken waarden hebben, die relatief klein zijn. Het gevolg is dat de absolute waarden van de termen in het rechter lid van verg. (3.2. -9) slechts weinig van de waarde NUL zullen verschillen.
In dat geval van een relatief kort bekken kan worden gesteld dat overal in het bekken geldt :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = 0} \qquad (3.2. -11)$$

Hieruit volgt direkt h = konstant langs de x-as. De waterspiegel is dan in het gehele bekken op ieder moment horizontaal.

Hiermede is de bewegingsvergelijking geïntegreerd met het resultaat dat de waterstanden overal in het bekken bekend zijn.

$$h(x,t) = h(L,t) \qquad (3.2. -12)$$

Voor de nog resterende continuïteits-vergelijking (3.2.-10) heeft het resultaat tot gevolg dat de funktie h in het rechter lid alleen nog van t afhangt:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - b \frac{dh(L,t)}{dt} \qquad (3.2. -13)$$

Door deze vergelijking naar s te integreren kan, zoals dadelijk zal blijken, op eenvoudige wijze een oplossing voor Q(x,t) worden verkregen.

Het is van belang om eerst na te gaan wanneer de veronderstelling (3.2.-11) verantwoord is.
Onder welke voorwaarde(n) mag men volstaan met een z.g. (kom-)bergingsbeschouwing?
Om hierin een inzicht te krijgen wordt eerst even verondersteld dat de randvoorwaarde h(L,t) een sinusvormige funktie is.
In een relatief diepe waterloop (weerstand nul) kan de voortplantingssnelheid van een lange golf worden benaderd met (zie ook onder 3.5.):

$$c = \sqrt{g\, h_{gem}} \qquad (b = b_s)$$

De golflengte van een dergelijke golf wordt dan $\lambda = c\,T = T\sqrt{g\, h_{gem}}$.
Hierin is T de periode van de golf.
Zoals bekend is zal zich in een afgesloten leiding een staande golf willen instellen. Een dergelijke staande golf is de som van twee lopende golven: een inlopende golf en een gereflekteerde golf.

De situatie, die zich in een dergelijk geval voordoet, laat zich in fig. 3.2.5 illustreren.

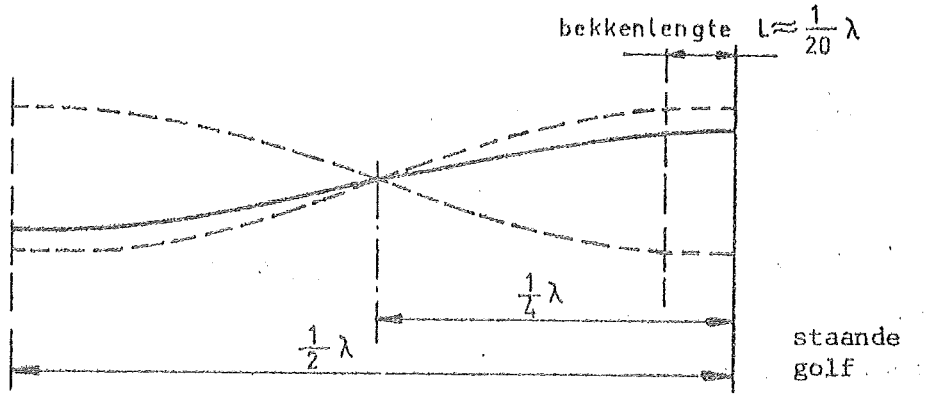


fig. 3.2.5.

Dit beeld maakt het duidelijk dat de veronderstelling (3.2-11) voor alle waarden van t verantwoord is als de lengte van het bekken niet groter is dan b.v. $\frac{1}{50}$ van de golflengte.

De voorwaarde is dus:

$$\boxed{L \ll \lambda} \qquad (3.2.-16)$$

Omdat $\lambda = cT$ en de looptijd τ gedefinieerd is door $\tau = \frac{L}{c}$ kunnen we de voorwaarde (3.2.-16) ook als volgt uitdrukken:

$$\tau \ll T$$

In de laatste vorm kan de voorwaarde ook als volgt worden geïnterpreteerd. In de tijd dat een verstoring (een kleine verandering van de waterspiegel) heen en weer door het bekken loopt verandert de waterstand bij de rand slechts weinig:

$$\boxed{2\,\tau \ll T} \qquad (3.2.-15)$$

Hiermee is een meer algemeen bruikbare voorwaarde verkregen. Men kan voor T een tijdsduur kiezen, die kenmerkend is voor het verschijnsel.

Opm: De randvoorwaarde h(L,t) behoeft uiteraard niet sinusvormig te zijn, om toch het hierboven besproken beeld mogelijk te maken.

Laten we nu eerst kijken naar de verdere gevolgen van de veronderstelling (3.2. -11) voor het gestelde probleem.
We kunnen de continuïteitsvergelijking (3.2. -13) naar x integreren van x = 0 tot x = x :

$$\int_{x=0}^{x=x} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = \int_{x=0}^{x=x} - b \frac{\partial h}{\partial t}\, dx$$

In het beschouwde geval zijn $\frac{\partial h}{\partial t}$ en b konstant over x. We vinden dan ook:

$$\int_{x=0}^{x=x} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = - b \frac{dh}{dt} \int_{x=0}^{x=x} dx$$

$$Q(x,t) - Q(0,t) = - b \frac{dh}{dt} x$$

Omdat Q(0,t) = 0 vinden we tenslotte

$$\boxed{Q(x,t) = - b \frac{dh}{dt} x} \qquad (3.2. -16)$$

Opm. 1. Kontroleer van deze laatste uitdrukking de tekens.
2. Ga na wat we vinden als b een of andere funktie van x is.

Uit het bovenstaande volgt ook voor het debiet ter plaatse van x = L:

$$Q(L,t) = - b\, L \frac{dh}{dt} = - B \frac{dh}{dt} \qquad (3.2. -17)$$

De grootheid B is het kombergingsoppervlak van het bekken 0 - L.
Het debiet en dus de stroomsnelheden in het bekken worden bepaald door het kombergingsoppervlak b x en de waarde van $\frac{dh}{dt}$ op ieder moment.

Met (3.2. -12) en (3.2. -16) is een benaderende oplossing verkregen.
Het is mogelijk om achteraf een inzicht te verkrijgen in de juistheid van de gemaakte veronderstelling $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$.

Met de benadering, die hiervoor voor de funktie Q(x,t) is gevonden, kan men voor verschillende waarden van x en t de grootte van elk van de termen in het rechter lid van de bewegingsvergelijking benaderen. Hierop zal bij de toepassingen nader worden ingegaan.

Eerst worden nu nog enige opmerkingen gemaakt betreffende 4 in het begin gemaakte veronderstellingen (zie blz. 3.2.4)

ad. 1. Als gevolg van de aanwezigheid van hooggelegen platen, schorren e.d. zal in de praktijk de vorm van het dwarsprofiel in het algemeen vrij grillig zijn. De bergende breedte b zal dan een funktie zijn van de waterstand h. Indien het verloop van de funktie b(h) bekend is, kan men dit verloop bij het integreren van de vergelijking (3.2. -13) verdisconteren.
In een dergelijk geval zal men ook onderscheid moeten maken tussen b en b_s (= de stroomvoerende breedte).

ad. 2. In getijgebieden e.d. heeft de bodem over het algemeen slechts een zeer geringe helling. Het is echter toch zinvol om na te gaan wat er in de beschouwing verandert indien $i_b \neq 0$.
Zoals bij het afleiden van de D.V.n. wordt besproken kan men de term met i_b in de bewegingsvergelijking samen nemen men $\frac{\partial h}{\partial s}$ door over te gaan op het piëzometrisch niveau pn t.o.v. een horizontaal vergelijkingsvlak.
In plaats van (3.2. -9) en (3.2. -10) hebben we dan te maken met de volgende vergelijkingen (omdat de richting van de geul-as niet horizontaal is wordt dezé aangegeven met s):

$$\frac{\partial(pn)}{\partial s} = -\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q|Q|}{C^2A^2R} - \frac{2\,b}{gA^2}\,Q\,\frac{1}{\cos i_b}\,\frac{\partial(pn)}{\partial t} \qquad (3.2.'-18)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\,b\,\frac{1}{\cos i_b}\,\frac{\partial(pn)}{\partial t} \qquad (3.2.-19)$$

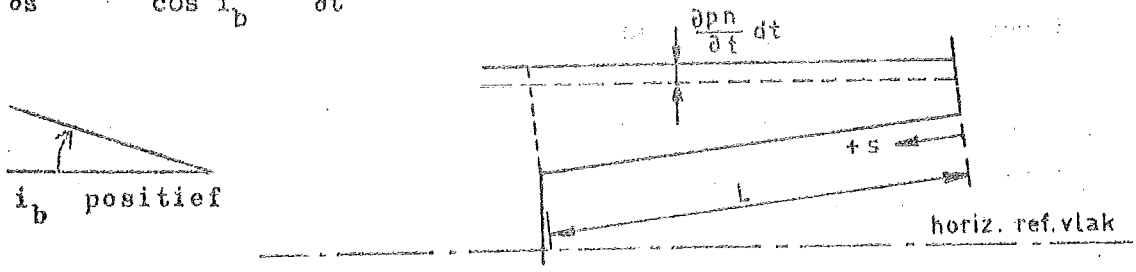


fig. 3.2.6.

Uit het feit dat L << λ volgt nu de veronderstelling

$\frac{\partial(pn)}{\partial s} = 0 \quad \rightarrow pn = \text{konstant over s.}$

De faktor cos i_b b.v. in de noemer van het rechter lid van (3.2. -19) is een gevolg van het feit dat de veranderingen van het piëz. niveau pn natuurlijk vertikaal worden gemeten en niet loodrecht op de s-richting (⊥ bodem).

De kombergingsbeschouwing houdt in dat het verloop van de waterstanden in t voor het gehele bekken gelijkgesteld wordt aan een bepaalde funktie h(t) t.o.v. een horizontaal referentie-vlak.
Uit het bovenstaande blijkt dat daardoor een sterk vereenvoudigd probleem overblijft.
Door het toepassen van een continuïteitsbeschouwing over een gedeelte van een bekken volgt direkt (zie fig. 3.2.7.), voor b is konstant:

$$Q(x,t) = - b \times \frac{d(pn)}{dt}$$

Deze uitdrukking komt overeen met (3.2. -16), waarbij de leiding-as ook horizontaal was verondersteld.

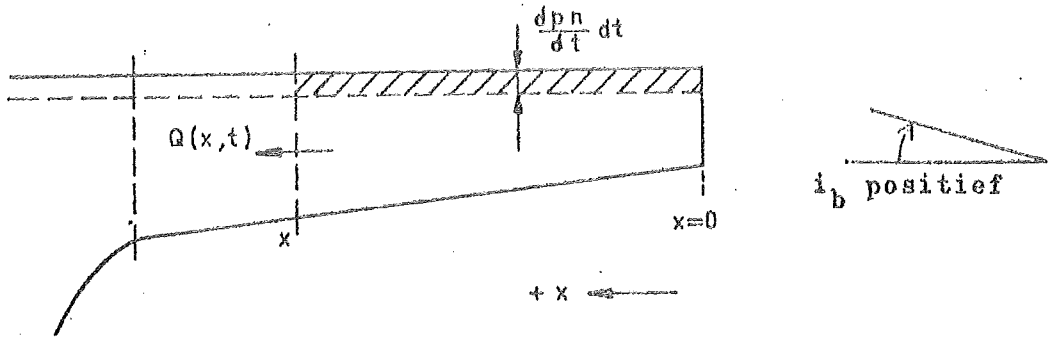


fig. 3.2.7.

Uit het bovenstaande blijkt dat de bodemhelling geen rol zal spelen in de praktijk.

ad. 3. De beperking dat h(L,t) een in de tijd vloeiend verlopende funktie dient te zijn blijft gehandhaafd (geen discontinuïteiten). Deze beperking houdt direkt verband met de voorwaarde (3.2. -15). Als h(L,t) plotseling sterk zou stijgen dient men T in deze voorwaarde erg klein te nemen.

ad. 4. Men kan deze veronderstelling in een bepaald geval gemakkelijk achteraf kontroleren.

3.3. KINEMATISCHE GOLF

3.3.1. Inleiding

Omdat de titel van deze paragraaf niet voor zich zelf spreekt, zal eerst worden aangegeven waarom deze titel en de titels van de paragrafen 3.4. en 3.6. zijn gekozen.
De afvoer van een rivier buiten het getij-gebied zal zich steeds voordoen als een zeer langzaam verlopende golfbeweging.
In bepaalde periodes zijn door tijdelijk verhoogde afvoer (door plotseling invallende dooi of door zware regenval) hierop z.g. hoogwatergolven gesuperponeerd.
De voortplanting van hoogwatergolven is een belangrijk onderwerp.
Als definitie van een "flood wave" zou men kunnen stellen :
- een erg lange golf , die zich voortplant met een snelheid die aanmerkelijk lager is dan $\sqrt{gA/b}$.

In paragraaf 3.6. wordt nog nader ingegaan op het bizondere karakter van hoogwatergolven.
Het uitvoeren van berekeningen en het doen van voorspellingen wordt aangeduid met "flood-routing".
In de Engelstalige literatuur betreffende dit vakgebied worden drie methoden onderscheiden :

1. kinematic wave method ;
2. diffusion analogy ;
3. dynamic wave method .

Men vindt deze drie benaderingsmethoden (soms naast nog enkele andere) in verschillende handboeken en andere publikaties (Henderson 1966 ,

Wat betreft dit vakgebied wordt met de paragrafen 3.3. , 3.4. en 3.6. onder 3.6.2. aangesloten bij de literatuur.

In de paragrafen 3.6. en vooral ook 3.7. worden behalve theorien betreffende hoogwatergolven ook andere golftheorien (voor al of niet periodieke golven in de beschouwingen betrokken.

Het begrip kinematische golf wordt in een inmiddels klassiek geworden publikatie uitvoerig omschreven (Lighthill en Whitham ,1955).

In het volgende wordt volstaan met het aangeven van enkele mathematische en fysische aspekten.

3.3.2. Kinematische golf

Volgens de theorie van de kinematische golf wordt de voortplanting van een hoogwatergolf benaderd door in de bewegingsvergelijking uitsluitend de weerstandsterm en de bodemverhang-term "mee te nemen".

Dat wil dus zeggen dat ook de term, die het verhang van de waterspiegel aangeeft

$$\frac{\partial h}{\partial x}$$

evenals de traagheids term en de z.g. Bernoulli-term verwaarloosd wordt ten opzichte van i_b .

De bewegingsvergelijking gaat dan over in :

$$0 = -i_b - \frac{Q\,|Q|}{C^2\,A_s^{\,2}\,R} \qquad \frac{\partial h}{\partial x} << i_b$$

Omdat het teken van Q bekend is en samenvalt met de positieve x-as en omdat voor een brede rivier geldt $R \approx h$, kunnen we voor deze vergelijking schrijven :

$$0 = -i_b - \frac{Q^2}{C^2\,b_s^{\,2}\,h^3} \qquad (3.3.-1)$$

De cont. verg. wordt beschouwd in de gedaante :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b\,\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \qquad (3.3.-2)$$

De vergelijking (3.3. - 1) komt overeen met de bekende vergelijking van Chézy. We kunnen schrijven :

$$Q = \sqrt{C^2\,b_s^{\,2}\,h^3\,i_b} = C\,b_s\,h^{3/2}\,i_b^{\,1/2} \qquad (3.3.-3)$$

<u>Als</u> C , b_s en i_b konstant worden verondersteld , volgt uit (3.3. -3) dat <u>Q alleen een funktie van h</u> is.

Uit (3.3. - 3) volgt dan :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = C\,b_s\,i_b^{\,1/2}\,\frac{3}{2}\,h^{1/2}\,\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (3.3.-4)$$

Substitueren we deze uitdrukking voor $\frac{\partial Q}{\partial x}$ in (3.3. -2) dan vinden we :

$$C\,b_s\,i_b^{\,1/2}\,\frac{3}{2}\,h^{1/2}\,\frac{\partial h}{\partial x} + b\,\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \underbrace{\frac{3}{2}\,\frac{b_s}{b}\,C\,h^{1/2}\,i_b^{\,1/2}}\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad (3.3.-5)$$

Deze differentiaal-vergelijking heeft de gedaante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad (3.3.-6)$$

waarbij :

$$\boxed{c = \frac{3}{2}\,C\,h^{1/2}\,i_b^{\,1/2}\,\frac{b_s}{b}} \qquad (3.3.-7)$$

We kunnen in het algemeen twee gevallen onderscheiden :

1e. c wordt konstant gesteld ;
2e. c varieert met x en/of met t .

Het eenvoudigste is natuurlijk het eerste geval, omdat daarmee de differentiaal-vergelijking (3.3. -5) lineair is:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{met } c = \text{konstant} .$$

Voor deze D.V. van de eerste orde is de oplossing direkt te doorzien.
Als $\boxed{c = \frac{dx}{dt}}$ dan geeft (3.3. -6) aan dat

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{of wel} \quad \boxed{\frac{dh}{dt} = 0}$$

Een veel gegeven interpretatie van de bij elkaar behorende relaties is alsvolgt :

Als een waarnemer zich met de golf mee beweegt met een snelheid

$$\frac{dx}{dt} = c$$

dan zal voor hem de hoogte h niet veranderen.

De konstante c is de helling van karakteristieke lijnen in een x,t-diagram, waarlangs de waarden van h konstant zijn.

Bij het behandelen van de oplossingsmethode "Integratie m.b.v. Karakteristieken" wordt op de bovenstaande oplossing nader teruggekomen.

Hier is het van belang om vast te stellen dat aan de lineaire D.V. (3.3. -6) wordt voldaan door een golf, die zich onvervormd in één richting voortplant.

Omdat verondersteld is dat Q alleen een funktie van h is, geldt dat

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{\partial Q}{\partial h}$$

en daarom is

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial h}\,\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dQ}{dh}\,\frac{\partial h}{\partial x}$$

In de continuïteitsvergelijking (3.3.- 2) kunnen we $\frac{\partial Q}{\partial x}$ vervangen, we vinden dan :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{b}\,\frac{dQ}{dh}\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

komt de grootheid c voor : $\boxed{c = \frac{1}{b}\,\frac{dQ}{dh}}$ (3.3 -8)

We kunnen dus schrijven : $\frac{dQ}{dh} = b\,c$ of

$$dQ = b\,c\,dh \qquad (3.3.-9)$$

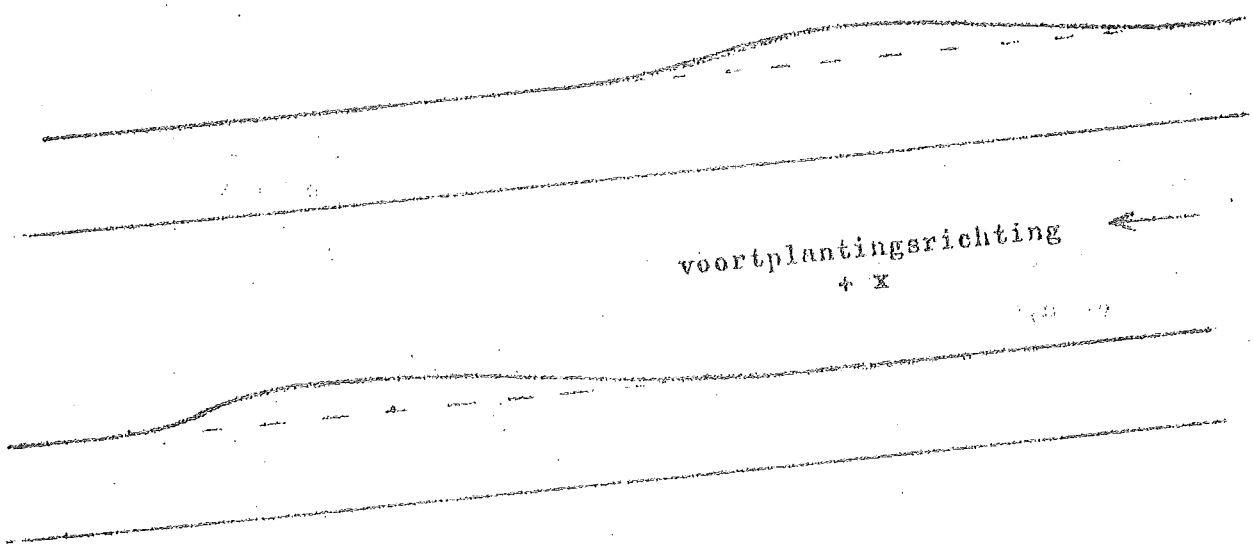
Zoals in paragraaf 3.5. wordt besproken kan een relatie zoals (3.3.-9) eenvoudig direkt worden afgeleid voor de onvervormde voortplanting van een golf (golffront) .
Een dergelijke golf wordt in de literatuur wel aangeduid met de naam " monoclinal rising wave " .

De vraag is nu wat er verandert in het bovenaan blz. 3.3.3. onderscheiden tweede geval, waarin verondersteld wordt dat de grootheid c <u>niet</u> konstant is.
De helling van de karakteristieke richtingen , waarlangs geldt

$$\frac{dh}{dt} = 0$$

is dan niet gelijk voor verschillende punten in het x/t-diagram.
Dit geval wordt besproken in het college-diktaat als eenvoudigste voorbeeld van het integreren m.b.v. karakteristieken.

Op deze plaats wordt volstaan met enkele opmerkingen over de invloed van het niet konstant zijn van c .
Het gevolg van het niet konstant zijn van de karakteristieke hellingen is dat verschillende punten van een golf zich met verschillende snelheden voortplanten. Het gevolg daarvan is dat <u>de vorm van de golf verandert tijdens het voortplanten</u>.
Zoals op de colleges nog nader wordt verklaard , wordt de voorzijde van de golf stijler en de achterzijde van de golf flauwer (zie fig. 3.3./.)



<u>fig. 3.3./.</u>

De hoogte van (de top van) de golf verandert tijdens het voortplanten niet. Dit zal een belangrijk verschil blijken te zijn met de benadering, die in de volgende paragraaf wordt besproken.
Het is duidelijk dat juist eventuele effekten, die een verlaging van de golftop tot gevolg kunnen hebben, praktisch van groot belang zijn.

Als de helling van de waterspiegel aan de voorzijde van de golf groter wordt dan zal er vrij spoedig een moment komen waarop de oorspronkelijk gemaakte veronderstelling

$$\frac{\partial h}{\partial x} \ll i_b$$

niet langer verantwoord is.
Het ligt voor de hand om eerst na te gaan wat de invloed is van het niet verwaarlozen van $\frac{\partial h}{\partial x}$

Bij de benadering in de volgende paragraaf zal blijken dat het niet verwaarlozen van $\frac{\partial h}{\partial x}$ een invloed heeft, die het steeds steiler worden van het voorfront tegenwerkt.
Daarbij komt een belangrijk aspekt van de voortplanting van hoogwatergolven n.l. de z.g. topvervlakking naar voren.
Een benadering volgens de theorie van de "kinematic wave" is niet bruikbaar voor hoogwatergolf-berekeningen over enige afstand.

De in het voorgaande besproken theorie is wel van belang, omdat de gevonden uitdrukking voor c een goede benadering blijkt te zijn voor de "voortplantingssnelheid" van hoogwatergolven.

3.4. DIFFUSIE-ANALOGIE VOOR HOOGWATERGOLVEN

3.4.1. Vergelijkingen

Dat de naam van deze paragraaf zinvol is zal uit de hierna af te leiden vergelijkingen blijken.
Het belangrijkste uitgangspunt is dat in tegenstelling met de vorige paragraaf hier de verhangterm $\frac{\partial h}{\partial x}$ niet wordt verwaarloosd t.o.v. de bodemhelling i_b.

De bewegingsvergelijking waar mee gewerkt wordt luidt :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - i_b - \frac{Q\,|Q|}{C^2\, A_s^2\, R}$$

Bij een hoogwatergolf is het teken van Q steeds hetzelfde; verder is $A_s = b_s\, h$ en (voor brede rivieren) $R = h$, zodat we kunnen schrijven :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = - i_b - \frac{Q^2}{C^2\, b_s^2\, h^3}} \qquad (3.4.-1)$$

Daarnaast geldt de continuïteitsvergelijking :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} + b\,\frac{\partial h}{\partial t} = 0} \qquad (3.4\ -2)$$

Als we de verg. (3.4 -1) naar t differentieren, krijgen we

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = - \frac{2\,Q}{C^2\, b_s^2\, h^3}\,\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{3\,Q^2}{C^2\, b_s^2\, h^4}\,\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (3.4\ -3)$$

De cont. verg. (3.4. -2) naar x differentieren geeft :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = - \frac{1}{b}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \qquad (3.4\ -4)$$

Door nu (3.4 -4) en (3.4 -2) in (3.4 -3) te substitueren kan men h elimineren. Men vindt voor (3.4 -3) dan de volgende differentiaal-vergelijking :

$$\boxed{\frac{1}{b}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{2\,Q}{C^2\, b_s^2\, h^3}\,\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{3\,Q^2}{C^2\, b_s^2\, h^4\, b}\,\frac{\partial Q}{\partial x} = 0.}$$

(3.4 -5)

Door (3.4.-1) naar x te differentieren i.p.v. naar t en daarna $\frac{\partial h}{\partial t}$ te elimineren m.b.v. verg. (3.4. -2) wordt gevonden :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{2\,Q\,b}{C^2\,b_s^2\,h^3}\,\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{3\,Q^2}{C^2\,b_s^2\,h^4}\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad (3.4.\ -6)$$

We zien dus dat indien $\frac{\partial h}{\partial x}$ in de bewegingsvergelijking niet verwaarloosd wordt t.o.v. i_b een verschijnsel wordt beschouwd dat met een differentiaal-vergelijking kan worden beschreven, die de gedaante heeft :

$$Q_{xx} - a\,Q_t - b\,Q_x = 0 \qquad (3.4.\ -7)$$

of

$$h_{xx} - a\,h_t - b\,h_x = 0 \qquad (3.4.\ -8)$$

Een bekende D.V. van het parabolische type, die vooral bij de warmtegeleiding maar ook in andere vakgebieden (b.v. grondwatermechanica) een belangrijke rol speelt is :

$$\boxed{D\,h_{xx} - h_t = 0} \qquad (3.4.\ -9)$$

Dit is de diffusie-vergelijking, waarvoor oplossingen bekend zijn.

Indien we een oplossing voor de D.V. (3.4. -5) of voor (3.4. -6) willen geven dan is het in de eerste plaats noodzakelijk dat de D.V. LINEAIR is. Dat wil zeggen dat de coëfficienten voor $\frac{\partial Q}{\partial t}$ en $\frac{\partial Q}{\partial x}$ in (3.4. -5) resp. de coëfficienten voor $\frac{\partial h}{\partial t}$ en $\frac{\partial h}{\partial x}$ in (3.4. -6) KONSTANT zijn.
In de uitdrukkingen (3.4. -7) resp. (3.4. -8) zijn a en b dus konstanten.

Het blijkt nu mogelijk om b.v. de vergelijking (3.4. -8) om te vormen tot een vergelijking van de gedaante (3.4. -9)

Men voert daartoe i.p.v. x en t andere coördinaten in :

$y = x - c\,t$ en $\tau = t$, terwijl $h\,(y, \tau)$.

Dan is $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \tau}\,\frac{\partial \tau}{\partial x}$

$\frac{\partial y}{\partial x} = 1$ en $\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$ omdat τ en x onafhankelijke variazijn.

Dus $\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}}$

Dan is ook eenvoudig te zien dat $\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}}$

Verder is $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}$; $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$ dus :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -c\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \tau}$$

De D.V. (3.4. - 8) gaat over in :

$$h_{yy} + a\,c\,h_y - a\,h_\tau - b\,h_y = 0 \qquad (\tau = t)$$

Als men nu $a\,c = b$ kiest , dan vallen beide termen met h_y tegen elkaar weg.

De transformatie, die we moeten uitvoeren is dus :

$$\boxed{y = x - c\,t \qquad \text{met} \qquad c = \frac{b}{a}} \qquad (3.4.-10)$$

De vergelijking , waarvoor een oplossing moet worden gegeven is dan :

$$\boxed{h_{yy} - a\,h_t = 0} \qquad (3.4.-11)$$

In plaats van de verg. (3.4. - 8) kunnen we verg. (3.4. -7) op dezelfde wijze aanpakken.

Met dezelfde transformatie (3.4. - 10) krijgen we i.p.v. (3.4. -7) een vergelijking op te lossen van de gedaante :

$$\boxed{Q_{yy} - a\,Q_t = 0} \qquad (3.4.-12)$$

Voor de diffusie-vergelijking zijn analytische oplossingen bekend, die meestal m.b.v. Laplace-transformatie of Fourier-transformatie worden gevonden (zie b.v. Carslaw en Jaeger 1947).

In het volgende wordt een oplossing besproken, waarbij gebruik gemaakt wordt van Fourier-transformatie.

De theorie in dit hoofdstuk is uitsluitend van belang voor een inzicht in de voortplanting van hoogwatergolven. (N.B. dus niet voor getijgolven e.d!).

Er wordt hier nogmaals op gewezen dat de coëfficienten a en b :

$a = \frac{2\,Q\,b}{C^2 b_s^2 h^3}\left[m^{-2}s\right]$ $b = \frac{3\,Q^2}{C^2 b_s^2 h^4}\left[m^{-1}\right]$ voor een analytische opl. KONSTANT moeten zijn.

Voor deze coëfficienten kan men waarden invoeren door voor Q, b, C, b_s en h geschikte (gemiddelde) waarden te kiezen.

3.4.2. Analytische oplossing en interpretatie

In het volgende wordt eerst een oplossing voor D.V. (3.4. -11) kort weergegeven.

$$\boxed{h_{yy} - a\, h_t = 0}$$

Fourier-transformatie naar y geeft :

$$\bar{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega y}\, h\, dy$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -i\omega \bar{h} \quad \text{en} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \qquad (3.4. -13)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\omega^2 \bar{h} \qquad (3.4. -14)$$

Substitueren van (3.4. -13) en (3.4. -14) in de D.V. (3.4. -11) geeft :

$$-\omega^2 \bar{h} - a\, \bar{h}_t = 0$$

Uit deze vergelijking volgt :

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = -\bar{h}\, \frac{\omega^2}{a} \qquad (3.4. -15)$$

Een oplossing voor (3.4. -15) is :

$$\bar{h}(\omega, t) = \bar{h}(\omega, 0)\, e^{-\frac{\omega^2}{a} t}$$

Hierbij is $\bar{h}(\omega, 0)$ een integratie-konstante, die in het algemeen gelijk is aan de getransformeerde van de beginvoorwaarde.
Bij dit probleem wordt verondersteld dat op het tijdstip $t = 0$ op de "plaats" $y = 0$ een hoeveelheid V per m^1 breedte geloosd.
Bij het transformeren gedraagt V zich als een konstante.

Terug-transformeren :

$$\bar{h}(\omega, t) = V\, e^{-\frac{\omega^2}{a} t}$$

$$h(y, t) = \frac{V}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y}\, e^{-\omega^2 \frac{t}{a}}\, d\omega$$

$$h(y, t) = \frac{V}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\omega^2 \frac{t}{a} + i\omega y\right)}\, d\omega$$

In het algemeen is de uitkomst van de volgende integraal bekend :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} \, dp = \sqrt{\pi}$$

In verband daarmee wordt de exponent van de e - macht onder het integraal-teken alsvolgt geschreven :

$$\underbrace{\left(\omega\sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{iy}{2\sqrt{\frac{t}{a}}}\right)^2}_{p^2} + \underbrace{\left(\frac{y}{2\sqrt{\frac{t}{a}}}\right)^2}_{-q^2}$$

Als we de twee termen even p^2 en q^2 noemen dan is

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{a}}} \, dp$$

We vinden dan :

$$h\ (y,t) = V \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{a}}} e^{-q^2} \sqrt{\pi}$$

$a = \frac{gQb}{c^2 b_s^3 h_1^3}$

Dus de gezochte oplossing is :

$$\boxed{h\ (y,t) = V \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{a\,y^2}{4\,t}}} \qquad (3.4.-16)$$

Dat (3.4.-16) inderdaad een oplossing is voor (3.4.-12) kan worden aangetoond door de oplossing in de differentiaal-vergelijking te substitueren.

De interpretatie van de oplossing (3.4.-16) kan meer inzicht verschaffen in het bizondere karakter van de voortplanting van hoogwatergolven.

De transformatie $y = x - c\,t$:

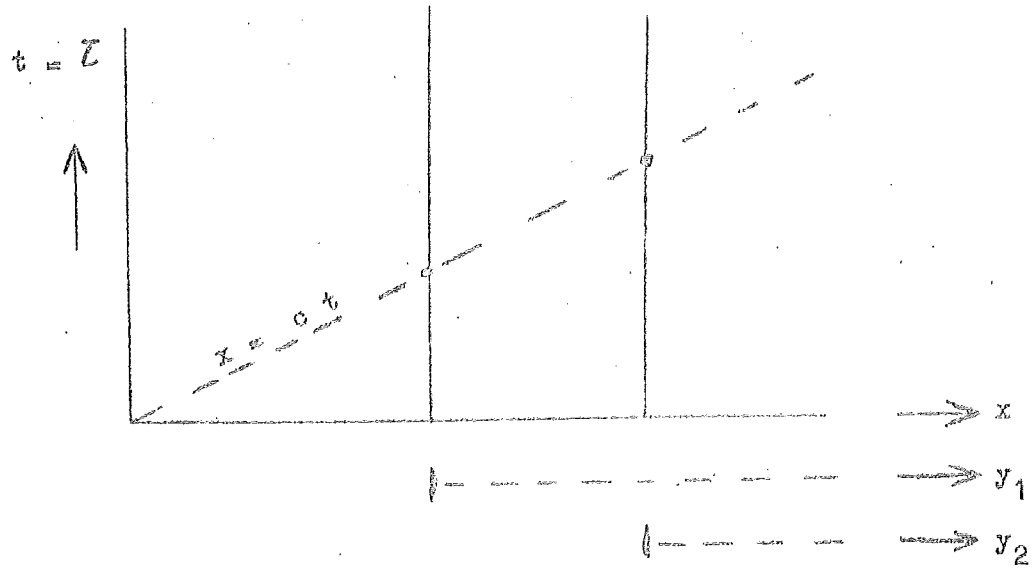


fig. 3.4.1.

Zoals uit fig. 3.4.1. blijkt kan men de oplossing (3.4. -16) interpreteren als een oplossing voor een assenstelsel dat in de x-richting met de golf mee beweegt met een snelheid c.

Nu is $c = \frac{b}{a}$, terwijl als we de oorspronkelijke coëfficiënten voor a en b uit de D.V. (3.4. -5) invullen wordt gevonden :

$$\boxed{c = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{b_s\,h}\,\frac{b_s}{b} = \frac{3}{2}\,\frac{b_s}{b}\,v} \qquad (3.4. - 17)$$

Als voor v' de verg. van Chézy wordt ingevuld, vindt men een uitdrukking, die geheel-overeenkomt met de uitdrukking (3.3. -7) uit de vorige paragraaf. We zien nu dus dat deze relatie een goede benadering is voor de "voortplantingssnelheid" van een hoogwatergolf.

Laten we nu kijken hoe de oplossing (3.4. - 16) , die zich met een snelheid c beweegt , zich tijdens dat voortplanten gedraagt.

In fig. 3.4.2. is het verloop uitgezet van $\sqrt{\frac{a}{2\,t}}$ met de tijd t .

Daarbij is voor a gekozen de waarde $0{,}6\ 10^{-4}\ s\ m^{-2}$.

Uit deze figuur blijkt dus inderdaad dat de hoogte van de golf in de tijd afneemt.

In fig. 3.4.3. is uitgezet :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{a\,y^2}{4\,t}}$$

tegen y voor verschillende tijdstippen.

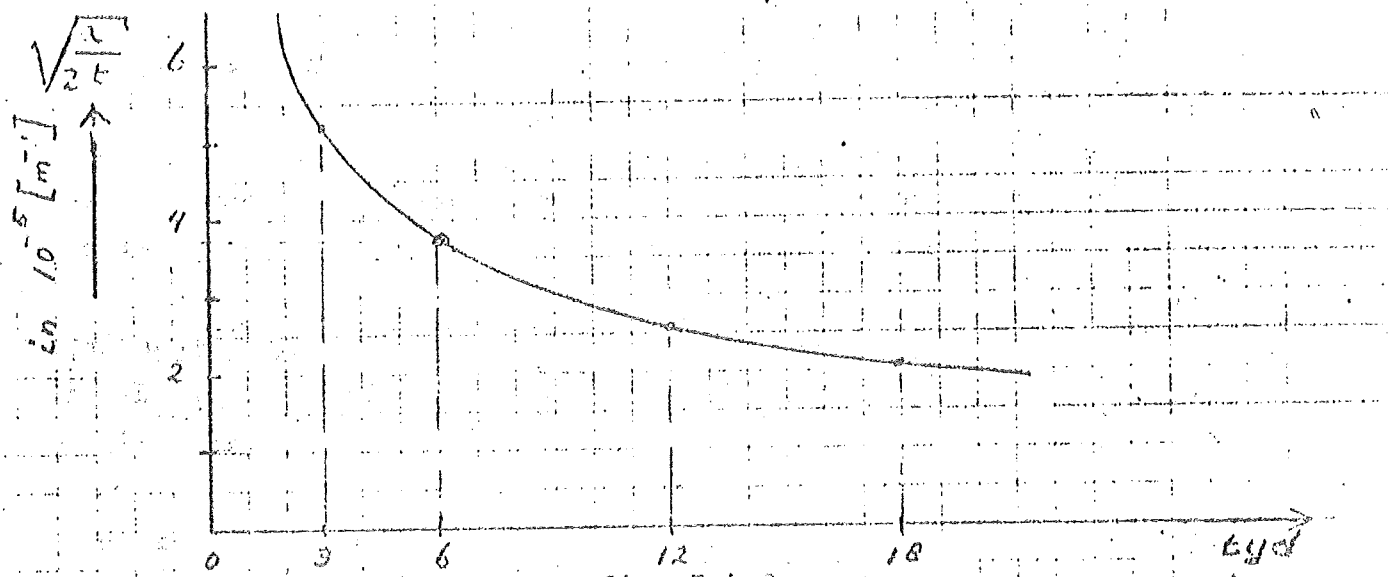


fig. 3.4.2.

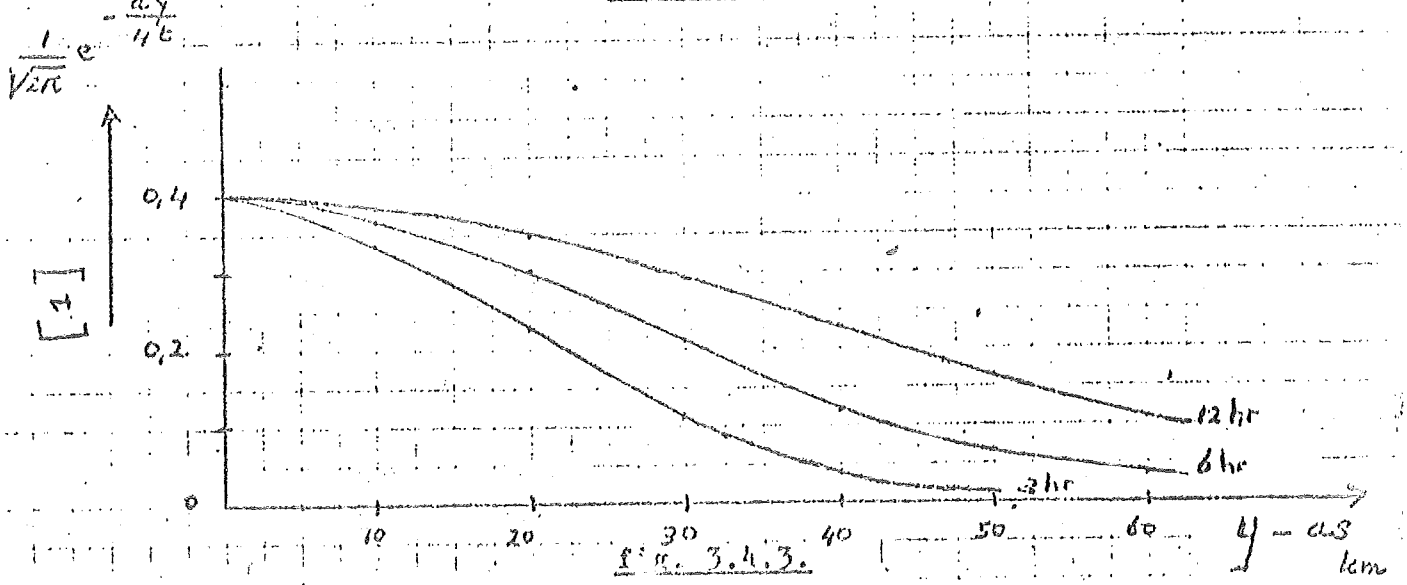


fig. 3.4.3.

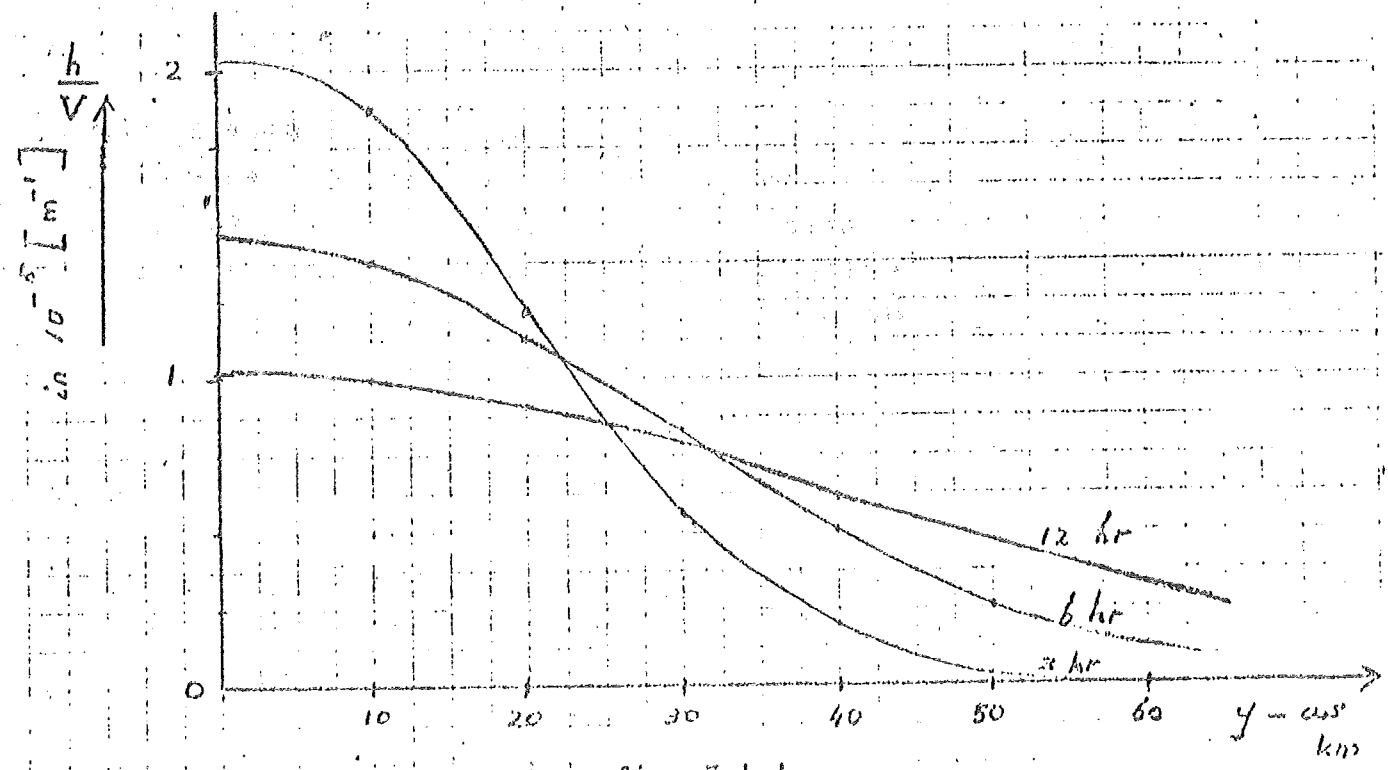
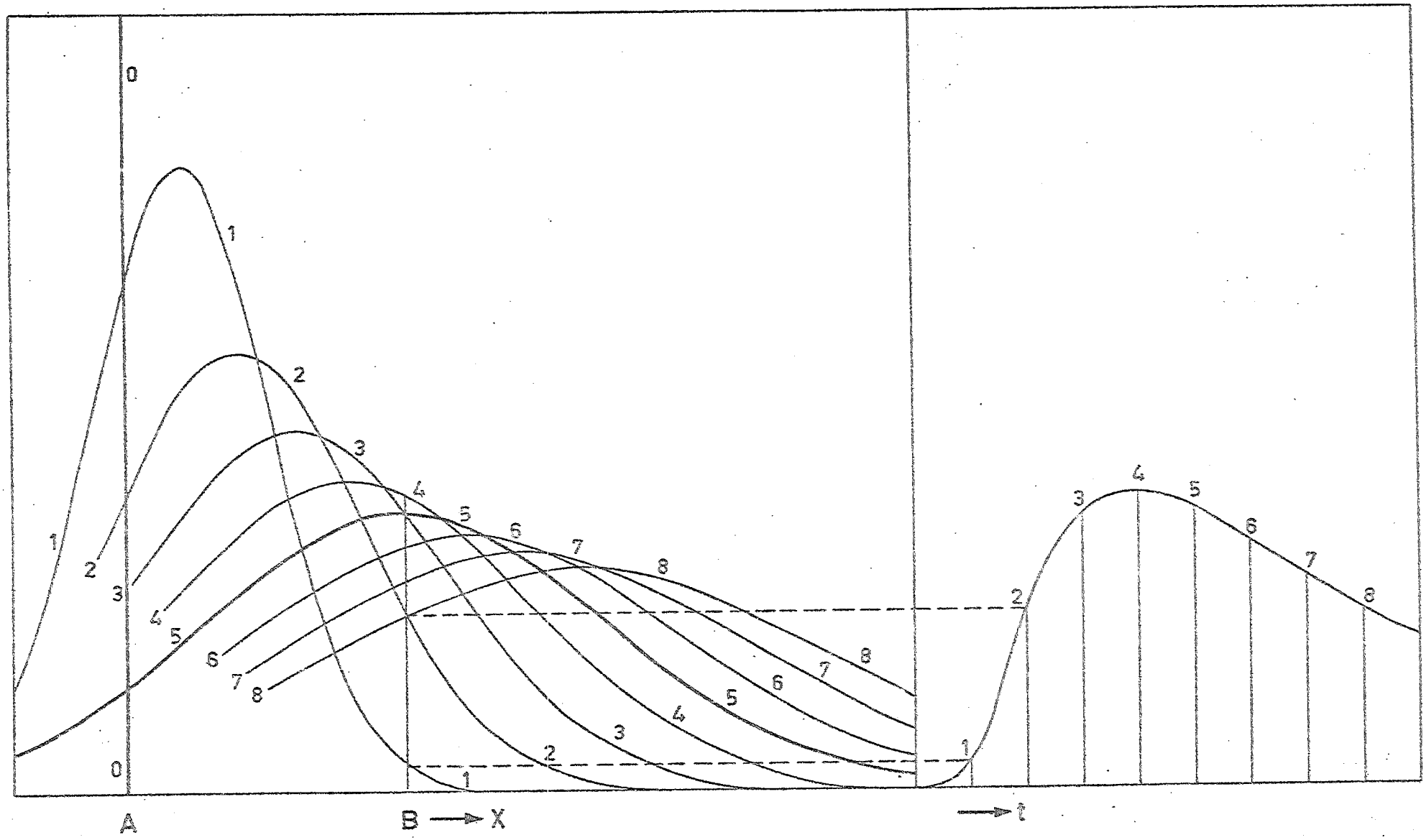


fig. 3.4.4.

In figuur 3.4.4. is het verloop uitgezet van $\frac{h(y,t)}{V}$ tegen de coördinaat y voor verschillende waarde van t.
Uit dit plaatje blijkt dat we de gevonden oplossing kunnen interpreteren als een Gauss-funktie, waarvan de top in de tijd kleiner wordt.
Als we nu ook nog bedenken dat de coördinaat y een oorsprong impliceerd, die in de x-richting beweegt met een snelheid c , dan is de gevonden oplossing ook als funktie van x en t gemakkelijk te interpreteren.
Om een indruk te geven van het gedrag van de oplossing in x en t is een figuur in dit diktaat opgenomen , die is overgenomen uit een artikel in "De Ingenieur" (Schönfeld , 1948). In dit artikel wordt de hier besproken oplossing voor het eerst gepubliceerd.
De figuur op de volgende bladzijde geeft nog een illustratie van het feit dat een op een bepaalde plaats geregistreerde waterstand in de tijd een asymetrisch verloop vertoont door de z.g. topvervlakking.
Uiteraard zijn daarnaast nog vervormingen van belang in de natuur, die in het bovenomschreven model geen rol kunnen spelen omdat o.a.

- de vergelijkingen gelineariseerd zijn ;
- de leiding niet prismatisch is ;
- de beginvoorwaarden zeer verschillend kunnen zijn ;
- allerlei verstoringen kunnen voorkomen , die op de hoogwatergolf gesuperponeerd kunnen worden gedacht ;
- de traagheidsterm een rol kan spelen , waarbij een benadering volgens de theorie van de "dynamic wave" noodzakelijk is (zie paragraaf 3.6.).

In het algemeen kan worden gesteld dat het voor de praktijk uitvoeren van berekeningen steeds grote problemen met zich mee brengt, omdat de natuur een grillig karakter heeft. Het belangrijkste probleem daarbij is dat bijna steeds te weinig gemeten gegevens beschikbaar zijn.



Het ontstaan van een asymmetrische peilschaalkromme door de verzwakking van een symmetrische golf.
Links: de golf op een bepaald riviervak, op opeenvolgende tijdstippen, 0, 1, 2, enz.
Rechts: Het verloop van de waterstand met de tijd (peilschaalkromme), ter plaatse B.

TECHN.HOGESCHOOL DELFT
afd. Weg- en Waterbouwkunde
Vloeistofmechanica

-3.4.9-

72/666

3.5 TRANSLATIEGOLF

3.5.1. Vergelijkingen

In de paragrafen 3.3. en 3.4. speelde de weerstandsterm een belangrijke rol. Nu wordt eerst gekeken naar een type lange-golfproblemen, waarbij de weerstandsterm een ondergeschikte rol speelt, doch waarbij in tegenstelling daarmee de traagheidsterm niet mag worden verwaarloosd.

De in Nederland ingeburgerde naam "translatiegolf" vergt wat nadere toelichting, omdat ook bij andere golven (b.v. bij de voortplanting van een getijgolf in een benedenrivier) sprake is van translatie. In de Engelstalige literatuur komt "translatory wave" voor, hetgeen een breder begrip is. De in deze paragraaf te bespreken golfverschijnselen worden wel aangeduid met "rapidly varied unsteady flow" (zie b.v. Ven te Chow 1959).

Een voorbeeld van de problemen, waaraan we in deze paragraaf denken kan worden weergegeven m.b.v. de in fig. 3.5.1. weergegeven situatie.

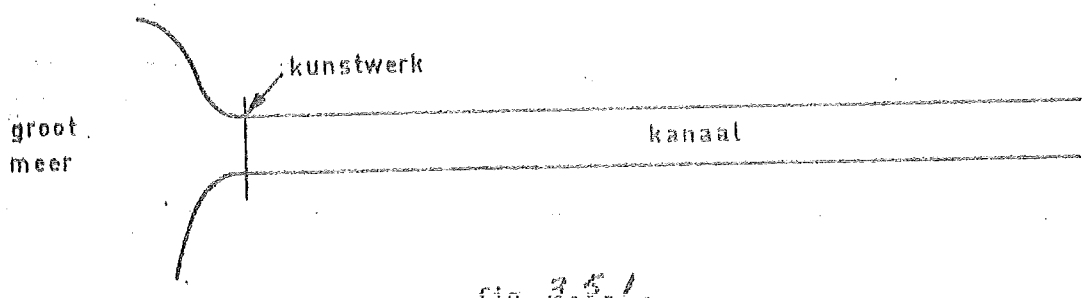


fig. 3.5.1.

Tussen een groot meer en een kanaal bevindt zich een kunstwerk, waarmee water wordt ingelaten. In het kanaal stroomt het water met een gemiddelde snelheid v_o.

Stel dat op een bepaald moment de oppervlakte van het beschikbare doorstromingsprofiel van het kunstwerk vrij plotseling groter wordt.
De tijd waarin dit gebeurt kan verschillend zijn, hetgeen bepalend is voor de vorm van de golf, die door de verandering ontstaat.
Voorlopig wordt ervan uitgegaan dat de verandering tot stand komt in een verwaarloosbaar korte tijd. Het front van de golf zal dan zeer steil zijn. Als nu nog wordt verondersteld dat de opening daarna niet meer verandert en dat het meer zo breed en diep is dat zich daarin geen merkbaar golfverschijnsel zal voordoen, dan krijgen we een eenvoudig voor te stellen verschijnsel (in het Engels : uniformly progressive flow).

Het front vormt een discontinue overgang tussen twee verschillende toestanden: $\boxed{h_0 \quad , \quad v_0}$ en $\boxed{h_0 + \quad , \quad v_0 + \Delta v}$ (zie fig. 3.5.2).

De voortplantingssnelheid van alle punten van het front (onvervormd voortplantend) is gelijk c.

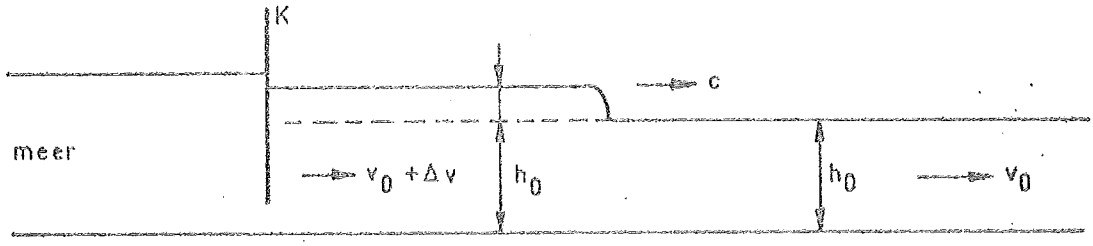


fig. 3.5.2.

Als we vervolgens veronderstellen dat de opening na enige tijd b.v. weer verkleind wordt dan krijgen we een golf zoals in fig. 3.5.3. is weergegeven.

Naarmate de verandering plaats vindt in een langere tijd, zal het front van de golf minder steil verlopen.

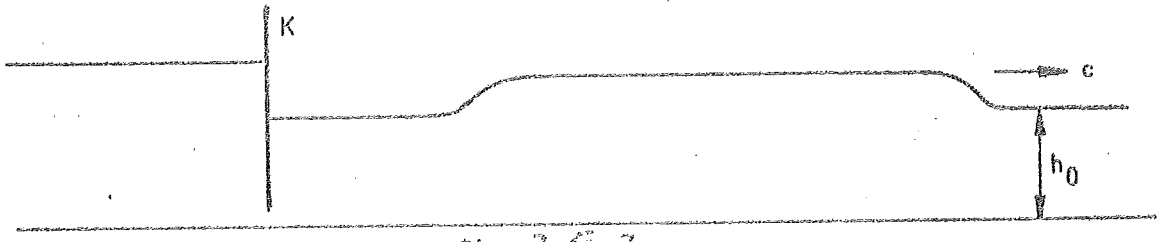


fig. 3.5.3.

Na het voorgaande is het voor de hand liggend om ook nog even te kijken naar de gevolgen van uitsluitend een plotselinge verkleining van het doorstromingsprofiel van het kunstwerk. Uitgaande van een permanente toestand zal zich in dat geval een negatieve translatiegolf het kanaal in voortplanten (zie fig. 3.5.4.).

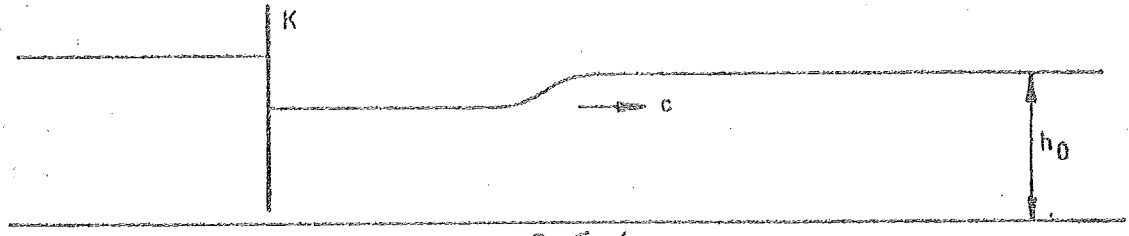


fig. 3.5.4.

In het beschouwde kanaal-pand kunnen zich ook dergelijke golven voordoen door het manipuleren met een kunstwerk, dat zich aan de andere zijde bevindt. Het blijkt dat de golven zich tegen stromend water in kunnen voortplanten. Er blijkt daarbij een grens te bestaan (de kritische snelheid , zie college b 72).
De verhouding tussen deze kritische snelheid en de snelheid van het water v_0 blijkt van belang te zijn voor de vorm van het front van de golf.
Juist omdat het in deze paragraaf gaat om het verkrijgen van inzicht in een spectaculair lange-golfverschijnsel met de eenvoudigste middelen , blijft de vorm van het front (en van de achterzijde) van de translatie-golven verder buiten beschouwing bij de benadering.
In het volgende wordt de voortplanting van translatiegolven beschouwd, waarbij wordt verondersteld dat de golf (en het golf-front) niet vervormt tijdens het voortplanten.
Van een golf , die zich onvervormd voortplant is de voortplantingssnelheid duidelijk gedefinieerd. In de literatuur zijn sinds de helft van de vorige eeuw verschillende uitdrukkingen afgeleid. Alvorens daar nader op in te gaan wordt eerst een continuïteitsbeschouwing voor een onvervormd voortplantende golf opgesteld.

Beschouwd wordt een golf met een vrij steil front, die zich voortplant in een prismatische open leiding met een diepte h_0 en een snelheid v_0 (in ongestoorde toestand).

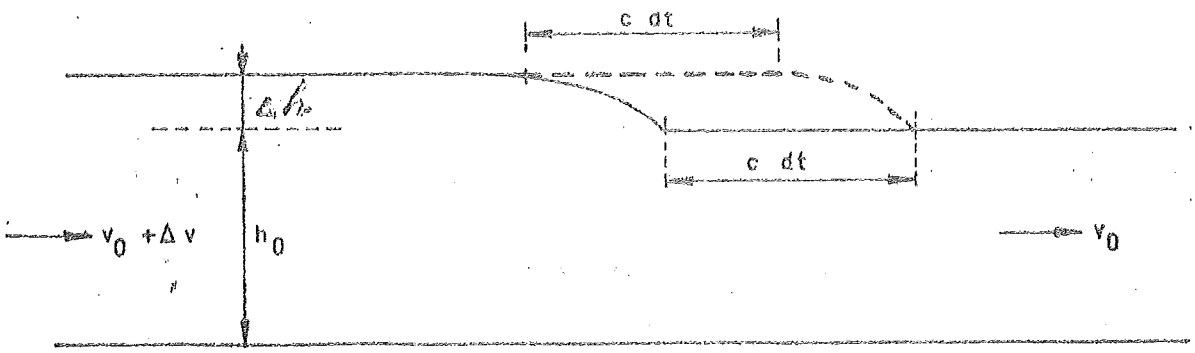


fig. 3.5.5.

Na het passeren van het golffront is de waterstand t.o.v. de bodem gelijk aan $h = h_0 + \Delta h$, terwijl de gemiddelde snelheid dan gelijk is aan $v = v_0 + \Delta v$.

Als we nu een continuïteitsbeschouwing opzetten, dan is m.b.v. bovenstaande figuur gemakkelijk in te zien dat

$$Q_0 + \Delta Q = Q_0 + b\, c\, \Delta h$$

Hieruit volgt :

$$\Delta Q = b\, c\, \Delta h \qquad (3.5.-1)$$

Indien $b = b_s$ volgt uit (3.5.-1) :

$$\Delta v = \frac{b}{b_s} \frac{\Delta h}{h_0 + h} c$$

Opm. 1. De relatie (3.5. - 1) komt geheel overeen met de relatie (3.3.-9), die in paragraaf 3.3. is afgeleid voor de "kinematic wave". Omdat de verg. (3.5. -1) is gebaseerd op een continuïteits-beschouwing, geldt deze voor verschillende typen golven, indien verondersteld wordt dat deze zich onvervormd voortplanten (monoclinal rising waves).

2. De relatie (3.5. -1) kan gebruikt worden bij het op eenvoudige wijze berekenen van de voortplanting van translatiegolven in kanalen e.d. In Deel I wordt onder 4.5.3. $\mathcal{J}^x$ behandeld hoe op eenvoudige wijze inzicht kan worden verkregen in het partiëel reflekteren van translatiegolven bij splitsingspunten, verbredingen, versmallingen, verdiepingen e.d.
Men kan deze benaderingen interpreteren als de eenvoudigste toepassingen van de methode "Integratie m.b.v. Karakteristieken", waarbij als randvoorwaarden "splitsingspunt-voorwaarden" worden ingevoerd.

$\mathcal{J}^x$ Van hier af wordt in dit concept diktaat op verschillende plaatsen verwezen naar het bestaande diktaat :
"Lange Golven in Leidingen" Deel I

Voor de voortplantingsnelheid van de golven, die wij in deze paragraaf beschouwen, worden in de literatuur op verschillende wijzen uitdrukkingen afgeleid. Voor een meer volledig overzicht kan naar een van de handboeken worden verwezen (b.v. Stoker, 1957 ; Ven te Chow , 1959).
In het volgende worden enkele relaties besproken.

Eerst wordt beschouwd een golf in een leiding met een rechthoekig dwarsprofiel ($b = b_s$), waarbij geldt dat Δh klein is t.o.v. h_0 en waarbij $v_0 = 0$ (voortplanting in stil water).
Een eenvoudige afleiding van een bekende vergelijking voor de voortplantingssnelheid is mogelijk door een coördinatenstelsel te defineren dat met de golf meebeweegt. Ten opzichte van dit coördinatenstelsel, dat in de x-richting beweegt met een snelheid c, beweegt het water met een snelheid c - v resp. c (zie fig. 3.5.6.).

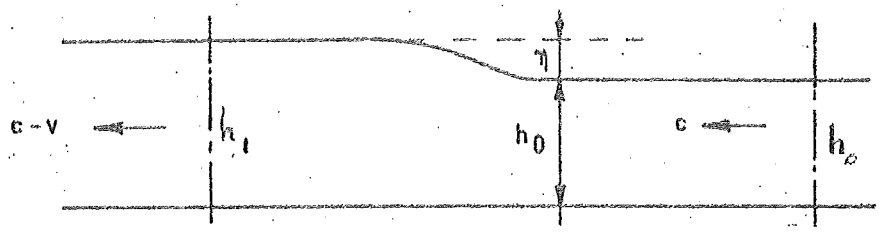


fig. 3.5.6.

Als verliezen worden verwaarloosd, geeft een energiebeschouwing de volgende vergelijking :

$$h_0 + \frac{c^2}{2g} = \underbrace{h_0 + \Delta h}_{h_1} + \frac{(c - v)^2}{2g} \qquad (3.5.-2)$$

Uit de continuïteitsbeschouwing volgt als we $h_0 + h$ even h_1 noemen :

$$v = c \frac{\Delta h}{h_0 + \Delta h} = c \frac{\Delta h}{h_1} . \qquad (3.5.-3)$$

Uit (3.5.-2) volgt dan :

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{h_1^2}{h_0 + h_1} \qquad (3.5.-4)$$

We vinden voor de voortplantingssnelheid van de golf dus de volgende vergelijking :

$$c = \sqrt{g h_1 \frac{2 h_1}{h_0 + h_1}} \qquad (3.5.-5)$$

In Deel I blz. 4.40 is verg. (3.5.-4) ook afgeleid.
Daar is de uitdrukking omgewerkt tot een andere relatie, die in de literatuur voorkomt n.l.

$$c = \sqrt{g\,h_0\left(1 + \frac{3\,\Delta h}{2\,h_0}\right)} = \sqrt{g\,h_0}\left(1 + \frac{3\,\Delta h}{4\,h_0}\right) \qquad (3.5.-6)$$

Deze vergelijking voor c staat bekend als de vergelijking van de Saint Venant. Deze vergelijking wordt in Deel I ook afgeleid m.b.v. een impulsbalans.
Als we veronderstellen dat Δh erg klein is t.o.v. h_0 dan zien we in vergelijking (3.5. -6) dat :

$$\frac{3\,\Delta h}{4\,h_0} \ll 1$$ zodat dan wordt gevonden :

$$\boxed{c = \sqrt{g\,h_0}} \qquad (3.5.-7)$$

Dit is een bizonder belangrijke relatie.
Daarmee wordt <u>de voortplantingssnelheid</u> gegeven <u>van een kleine verstoring</u> in een open leiding ($b = b_s$ = konstant).

Indien de bergende breedte b niet gelijk is aan de stroomvoerende breedte b_s dan wordt in plaats van (3.5. -7) gevonden :

$$c = \sqrt{\frac{g\,A_s}{b}} = \sqrt{g\,h_0\,\frac{b_s}{b}} \qquad (3.5.-8)$$

Indien de hoogte van de golf niet zo erg klein is t.o.v. h_0 dan heeft dat enige invloed op de voortplantingssnelheid. Toch kunnen we in de verschillende uitdrukkingen, die mogelijk zijn, steeds de relatie (3.5. -7) herkennen.

Indien de snelheid van het water, waarin de golf zich voortplant, niet NUL is dan kunnen vergelijkingen worden afgeleid, waarbij blijkt dat de aanwezige snelheid $|v_0|$ bij de gevonden relaties moet worden opgeteld resp. ervan af moet worden getrokken.
We vinden i.p.v. (3.5. -7) dus algemeen :

$$\boxed{c = v_0 + \sqrt{g\,h_0}} \qquad (3.5.-9)$$

Deze relatie speelt in het vak Lange Golven een belangrijke rol.

3.5.2. Oplossing voor de "snaarvergelijking"

In 3.5.1. werd uitsluitend gekeken naar (het front van) een translatiegolf, die zich in één richting voortplant.
De besproken vergelijkingen zijn van belang voor een ruwe benadering van bepaalde praktijk-problemen en voor een eerste inzicht in de voortplanting van translatie-golven.
In beginsel is bij lange-golfproblemen n.l. altijd sprake van twee lopende golven. Bij het behandelen van de karakteristieke methode en de harmonische methode wordt hierop nader ingegaan.
Voor een eerste beschouwing over dit belangrijke aspekt wordt in het volgende uitgegaan van de algemene differentiaal-vergelijkingen, waarbij zoveel mogelijk wordt vereenvoudigd.

In de bewegingsvergelijking in h en Q wordt naast de term $\frac{\partial h}{\partial x}$ alleen de traagheidsterm meegenomen:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{1}{g A_s} \frac{\partial Q}{\partial t} \qquad (3.5.-10)$$

Verder geldt de cont. verg.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - b \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (3.5.-11)$$

De verg. (3.5.-10) naar x differentieren en de verg. (3.5.-11) naar t geeft achtereenvolgens :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{g A_s} \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} + b \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

Uit deze beide vergelijkingen volgt door elimineren van Q de volgende D.V. :

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{g A_s}{b} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0} \qquad (3.5.-12)$$

Deze partiële differentiaal-vergelijking is van het hyperbolische type en staat bekend als de "snaarvergelijking" of de "golfvergelijking".

Door verg. (3.5. -10) naar t te differentieren en de verg. (3.5.-11) naar x en vervolgens h te elimineren is een D.V. in Q af te leiden :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{g\,A_s}{b}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.5.\ -13)$$

Als we $\frac{g\,A_s}{b}$ konstant veronderstellen en deze konstante c^2 noemen dan gaat (3.5. -12) over in :

$$\boxed{h_{tt} - c^2\,h_{xx} = 0} \qquad (3.5.\ -14)$$

Bij het behandelen van de oplossingsmethode "Integratie m.b.v. Karakteristieken" zal blijken dat een belangrijke eigenschap van de D.V.n. (3.5. -12) en (3.5. -13) is dat er <u>twee</u> karakteristieke richtingen bestaan.

Aan de eenvoudige D.V. (3.5. -14) voldoet iedere funktie van de gedaante :

$$h\,(\,x \pm c\,t\,)\,.$$

De alg. oplossing voor (3.5. -14) luidt dan ook :

$$h\,(\,x,t\,) = F_1\,(t - \frac{x}{c}) + F_2\,(t + \frac{x}{c}) \qquad (3.5.\ -15)$$

In (3.5. -15) moeten F_1 en F_2 nog worden bepaald uit twee randvoorwaarden.

<u>Stel</u> dat $F_2 = 0$, dan

$$h\,(\,x,t\,) = F_1\,(\,t - \frac{x}{c})$$

Dit is een golf, die loopt in de <u>positieve</u> x-richting .

De golf kan nog verschillende gedaanten hebben.
Voor het bepalen van de funktie F_1 is dan nog één randvoorwaarde nodig.

In het algemeen zal gelden $F_2 \neq 0$ en dan blijkt dus dat de oplossing voor $h\,(x,t)$ bestaat uit twee gedeelten :

- een golfcomponent, die in de pos. x-richting loopt ;
- een golfcomponent, die in de neg. x-richting loopt .

De funktie $h\,(x,t)$, die in een bepaald punt wordt waargenomen

(of berekend) is dus steeds de <u>som van twee componenten</u>.

Dit aspekt vormt een belangrijk verschil tussen deze oplossing en de in 3.3. besproken oplossing voor de"kinematic wave", omdat daar slechts sprake is van een golf in één richting.

Aan de D.V. (3.5. -14) wordt ook voldaan door funkties, die sinusvormig in de tijd varieren. Deze oplossingen vallen onder een later in de colleges te bespreken oplossingsmethode "de harmonische methode".

3.6. DYNAMISCHE GOLF

In deze paragraaf zullen een aantal lange-golfproblemen ter sprake komen, waarvan de overeenkomst is dat in de algemene differentiaalvergelijkingen géén belangrijke vereenvoudigingen mogen worden aangebracht.
Omdat bij deze golven zowel de weerstandsterm als de traagheidsterm niet mogen worden verwaarloosd, worden ze wel golven met "gemengd" karakter genoemd.
De naam van deze paragraaf zal in het begin van 3.6.2. nader worden verklaard.

3.6.1. Vergelijkingen

In deze paragraaf zal worden uitgegaan van de volgende D.V.n. in Q en h:
bewegingsvergelijking :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -i_h - \frac{Q|Q|}{C^2 h_s^2 h^1} - \frac{1}{gA_s}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2h}{gA_s^2} Q \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (3.6.-1)$$

continuïteitsvergelijking :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (3.6.-2)$$

Bij het afleiden van deze vergelijkingen zijn een aantal veronderstellingen gedaan, die bij het gebruik ervan steeds moeten worden getoetst. De geldigheid van deze D.V.n. is voor een groot aantal van de hierna te bespreken problemen door metingen aangetoond.

3.6.2. Hoogwatergolf als dynamische golf

In aansluiting op de in 3.3. en 3.4. behandelde eenvoudige theoriën betreffende hoogwatergolven, wordt hier nog wat nader ingegaan op het bizondere karakter van deze lange golven.

Op de autografie"Hoogwater Voorjaar 1970" is het verloop van gemeten waterstanden in de tijd uitgezet voor verschillende plaatsen langs de Rijn en de Waal.
We zien dat op de "hoofdbeweging" de hoogwatergolf verschillende "rimpels" gesuperponeerd gedacht kunnen worden. Deze kunnen worden veroorzaakt door verschillende "discontinuïteiten", die zich in het rivierbed kunnen voordoen.
Ook de getijbeweging kan samen met een hoogwatergolf voorkomen.
In andere dan Nederlandse omstandigheden kunnen hoogwatergolven voorkomen, waarbij de traagheidsterm in de bewegingsvergelijking een niet te verwaarlozen rol speelt (bandjirs).

Bij een benadering voor een hoogwatergolf, waarbij de traagheidsterm niet wordt verwaarloosd, spreekt men van "dynamic wave method". Deze naam wordt verklaard uit het feit dat in tegenstelling met de theoriën uit 3.3. en 3.4. hier gewerkt wordt met de versnellingsterm volgens de 2e wet van Newton.

Een benadering voor een hoogwatergolf als dynamische golf impliceert dat gewerkt wordt met de D.V.n. (3.6.-1) en (3.6.-2) of met daarmee overeenkomende vergelijkingen.
Bij normale afvoeren verloopt het rivierbed al vrij grillig (denk b.v. aan de bodemfiguratie bij bochten) . Bij de hoge afvoeren wordt het stroomvoerend profiel groter (hogere waterstanden en grotere breedte) terwijl dan de rivier-bedding bijzonder grillig verloopt. Het gevolg is dat met voldoende gegevens een riviergedeelte in een vrij groot aantal vakken zal moeten worden verdeeld. Het te verrichten rekenwerk wordt omvangrijk.
In deze tijd zal steeds gebruik worden gemaakt van numerieke rekentechnieken.(zie een van de laatste colleges : numerieke integratie).

Als men een hoogwatergolf-probleem m.b.v. een computer-programma voor het oplossen van de D.V.n. (3.6.-1) en (3.6.-2) uitrekent, dan krijgt men zonder extra moeite een zeer volledige oplossing.
Juist het analyseren van dergelijke resultaten geeft inzicht in het bizondere karakter van de verschillende typen golven, die zich kunnen voordoen. Uiteraard geven ook gemeten resultaten zo'n inzicht.

Zo is het interessant om op de autografie de waterstanden in Lobith en de waterstanden in Malburgen (zie omschrijving B en A op de autografie) onderling te vergelijken.
Een translatiegolf, die bij Malburgen wordt opgewekt wordt later in de tijd geregistreerd in Lobith. We zien deze translatiegolf zich tegen de hoogwatergolf in voortplanten, waarbij deze sterk aan demping onderhevig is.
Er plant zich vanuit Malburgen ook een translatiegolf voort mèt de hoogwatergolf meé. Deze is spoedig uitgevlakt.
In 1955 gaven Lighthill en Whitham (zie referenties) het volgende beeld van een voortplantende hoogwatergolf :

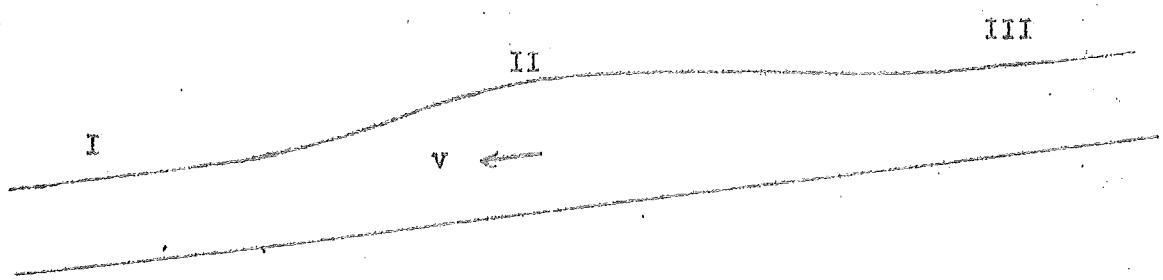


fig. 3.6.1.

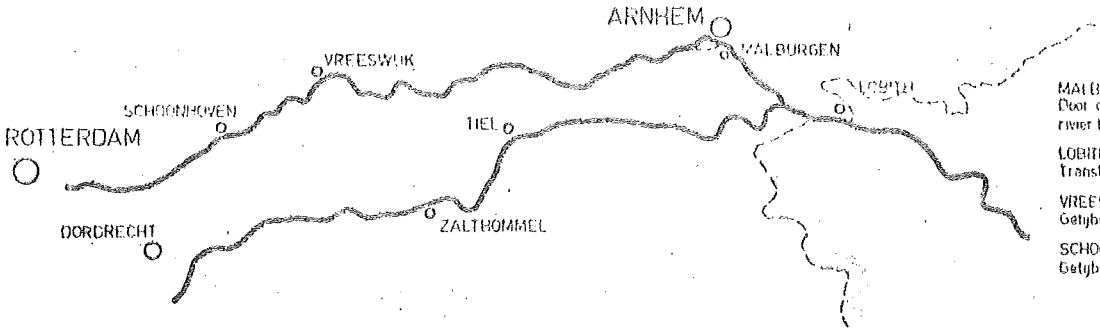
I. In dit gebied planten zich stroomafwaarts verstoringen voort, die bij de hoogwatergolf behoren.

II. Dit is de "hoofdbeweging" van de hoogwatergolf.

III. In dit gebied planten zich stroomopwaarts verstoringen voort.

De verstoringen ad. I en III dempen spoedig uit.

Bij een benadering van een hoogwatergolf als dynamische golf worden alle van belang zijnde verschijnselen in de berekening betrokken.



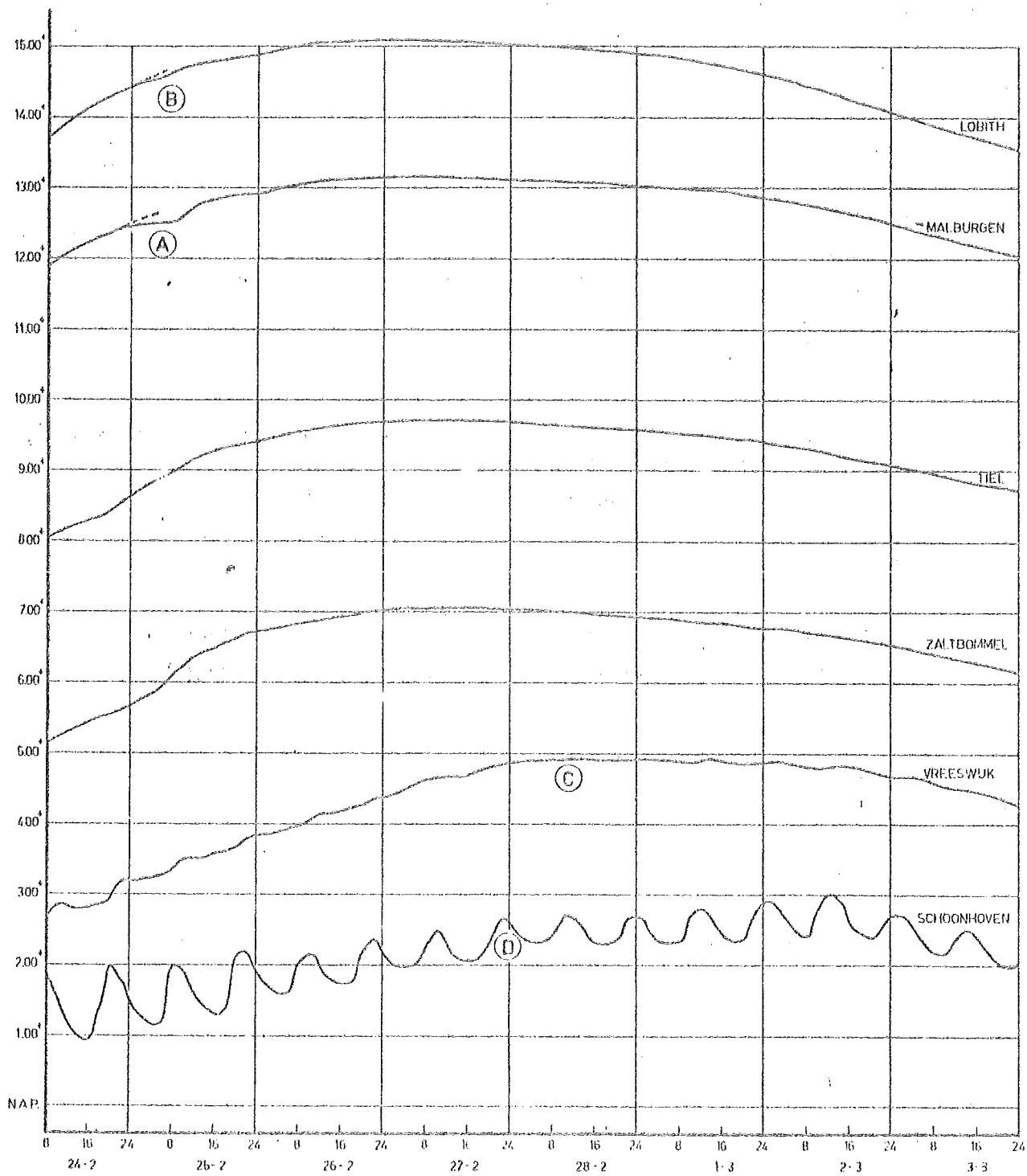
MALBURGEN A
Door de hoge waterstand loopt de z.g. grote rivier bij Arnhem onder.

LOBITH: B
Translatiegolf is later zichtbaar.

VREESWIJK: C
Getijbeweging is uitgedempt

SCHOONHOVEN: D
Getijbeweging is gedempt

HOOGWATER VOORJAAR 1970



Technische Hogeschool Delft afd. Weg- en Waterbouwkunde
kollege b 73A —VOORJSTOI MECHANICA—

3.6.3. Stormvloeden , getijgolven en seiches

Stormvloeden :

Een langdurige harde wind over een wateroppervlak zoals de Noordzee veroorzaakt een verhang in de waterspiegel.
Het gevolg is waterstandsvariaties (verhogingen en verlagingen), die enkele decimeters tot soms enkele meters bedragen.
Bij de monding van een benedenrivier (estuarium)geeft dit als randvoorwaarde b.v. het in de figuur aangegeven waterstandsverloop.

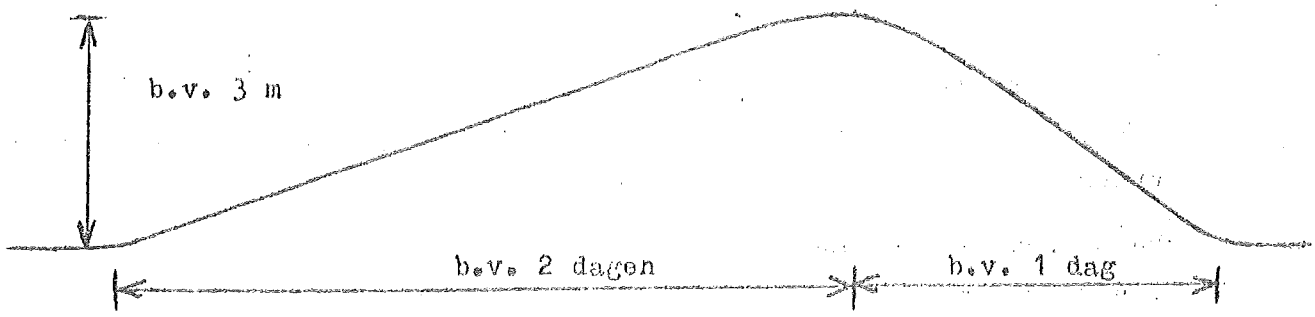
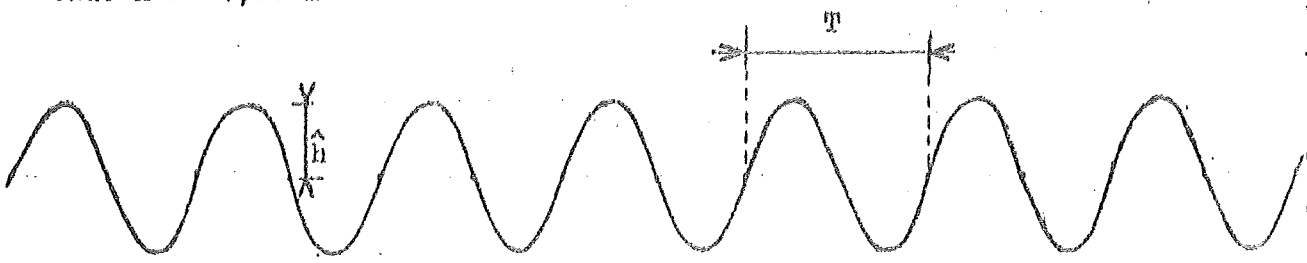


fig. 3.6.2.

De stormvloed zal zich als een lange golf in een benedenrivier voortplanten. De werkelijk optredende situatie is wat gecomplioeerder omdat tegelijkertijd óók het getij voorkomt.
De snelheid waarmee de waterstand verandert $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)$ t.g.v. een stormvloed ligt in de zelfde orde van grootte als die t.g.v. een getijgolf.
Daarom en omdat beide samen voorkomen worden stormvloeden met getijgolven als één lange-golfprobleem beschouwd.

Getijgolven :

In de colleges b 75 wordt het ontstaan en het analyseren van de getijbeweging op een bepaalde plaats langs een kust behandeld.
Voor een overzicht van de verschillende componenten, waaruit een getij op een bepaalde plaats kan zijn samengesteld, wordt naar deze colleges verwezen. Eenvoudigheidshalve wordt een dubbeldaags getij beschouwd met een periode van 12 uur en 25 minuten (44700 seconden) en een amplitude $\hat{h}$ = 1,00 m .



amplitude $\hat{h}$ = 1,00 m periode T = 12 uur 25 min.

fig. 3.6.3.

We kunnen ons een getij zoals door fig. 3.6.3. wordt weergegeven voorstellen als randvoorwaarde aan de monding van een benedenrivier. De getijgolf zal zich landinwaarts voortplanten, waarbij in de meeste gevallen sprake zal zijn van reflektie (afsluitingen, vernauwingen e.d.).
Getijgolven (al of niet samen met stormvloeden) behoren tot de lange golven met "gemengd" karakter, zodat ook daarvoor in de bewegingsvergelijking geen termen mogen worden verwaarloosd in beginsel.

Seiches

Voor enige inleidende beschouwingen over het verschijnsel " seiches " wordt verwezen naar het diktaat "De Harmonische Methode" onder 6.5.

De periode van de met deze naam aangeduide lange golven varieert van enkele minuten tot soms meer dan een uur.
Langs de Nederlandse kust blijken de perioden, die vaak voorkomen, te liggen tussen 25 en 45 minuten.
Omdat de perioden aanmerkelijk kleiner zijn, dan die van getijgolven speelt de traagheidsterm in de bewegingsvergelijking een belangrijke rol. De relatieve invloed van de weerstand kan gering zijn, indien sprake is van een kort en relatief diep bekken (zeehaven).
Dit is de reden dat voor bepaalde beschouwingen de weerstandsterm wel wordt verwaarloosd t.o.v. de traagheidsterm.
Voor nauwkeurige berekeningen, vooral wanneer sprake is van opslingeren (resonantie van het systeem) moet met de algemene vergelijkingen worden gewerkt.
Men kan de seiches al of niet samen met de getijbeweging beschouwen.
Beschouwd men de seiches alleen dan wordt vanwege het periodieke karakter vaak een analytische oplossingsmethode gebruikt.

Voor nadere informatie omtrent de oplossingsmethoden, die kunnen worden toegepast voor de in deze paragraaf genoemde typen lange golven, wordt verwezen naar :

- "Integratie m.b.v. Karakteristieken"
- "De Harmonische Methode"
- "Numerieke oplossingsmethoden".

3.7. SCHEMATISCH OVERZICHT LANGE GOLVEN IN OPEN LEIDINGEN

3.7.1. Schematisch overzicht golven

Van de verschillende typen golven, die zich in de waterbouwkunde voordoen, zijn de korte golven (windgolven) het meest spectaculair. Als men aan golven denkt dan zal men zich direkt golven voorstellen, waarvan het verloop sinusvormig is. Er bestaan echter veel verschillende vormen van golven, waarvan juist ook de niet-periodieke voor de waterbouwkunde van groot belang zijn.

In de laatste honderd jaar zijn voor vele typen golven verschillende golf-theoriën ontwikkeld. Er bestaat een grote verscheidenheid aan publikaties, waarin een of meer van deze theoriën worden beschreven.
Het is de bedoeling om in deze paragraaf enige aanknopingspunten te geven t.b.v. een eventueel later uit te voeren literatuurstudie. Daarbij wordt getracht zonder veel details enig overzicht te geven. Op blz. 3.7. is een schema weergegeven, dat op de colleges nader wordt toegelicht. Daarbij gaat het vooral ook om de relatie van de stof in de colleges b 73A en met de stof in de colleges :

1. "Korte Golven" b 76 ;
2. "Vloeistofmechanica b.o." b 74 .

ad.1. Men kan de overgang tussen b 76 en b 73A denken tussen het onderwerp "translatie-golven" en enkele bizondere golf-theoriën : - de solitaire golf-theorie ;
- de cnoïdale golf-theorie.

Voorts is een direkte relatie de lin.lange golftheorie.

ad.2. In de colleges Vloeistofmechanica b.o. b 74 wordt sinds 1972 de theorie der asymptotische ontwikkelingen behandeld. Daarmee kunnen onder bepaalde voorwaarden de vergelijkingen voor een bepaald verschijnsel worden afgeleid met een toenemende mate van nauwkeurigheid.
Uitgaande van de algemene differentiaal-vergelijkingen kunnen op een systematische wijze meer of minder eenvoudige mathematische beschrijvingen voor een fysisch verschijnsel worden gegeven.
De methode wordt toegepast voor de lange golfvergelijkingen. Daarbij worden achtereenvolgens ook de in dit hoofdstuk 3 onder 3.2. , 3.4. en 3.5. besproken benaderingen verkregen.
In het laatste gedeelte van b 74 worden uitgaande van de

3-dimensionale vergelijkingen voor golfproblemen in het overgangsgebied tussen "lange" en "korte" golven (zie schema) vergelijkingen afgeleid. Dit gedeelte van b 74 sluit dus ook aan op de colleges b 76.

3.7.2. Overzicht vergelijkingen

Dit hoofdstuk wordt afgesloten met een overzicht van vergelijkingen, waarbij de belangrijkste eigenschappen en de naam van de benadering worden vermeld.(zie blz. 3.7.4.).
Op de colleges wordt het overzicht nader toegelicht.

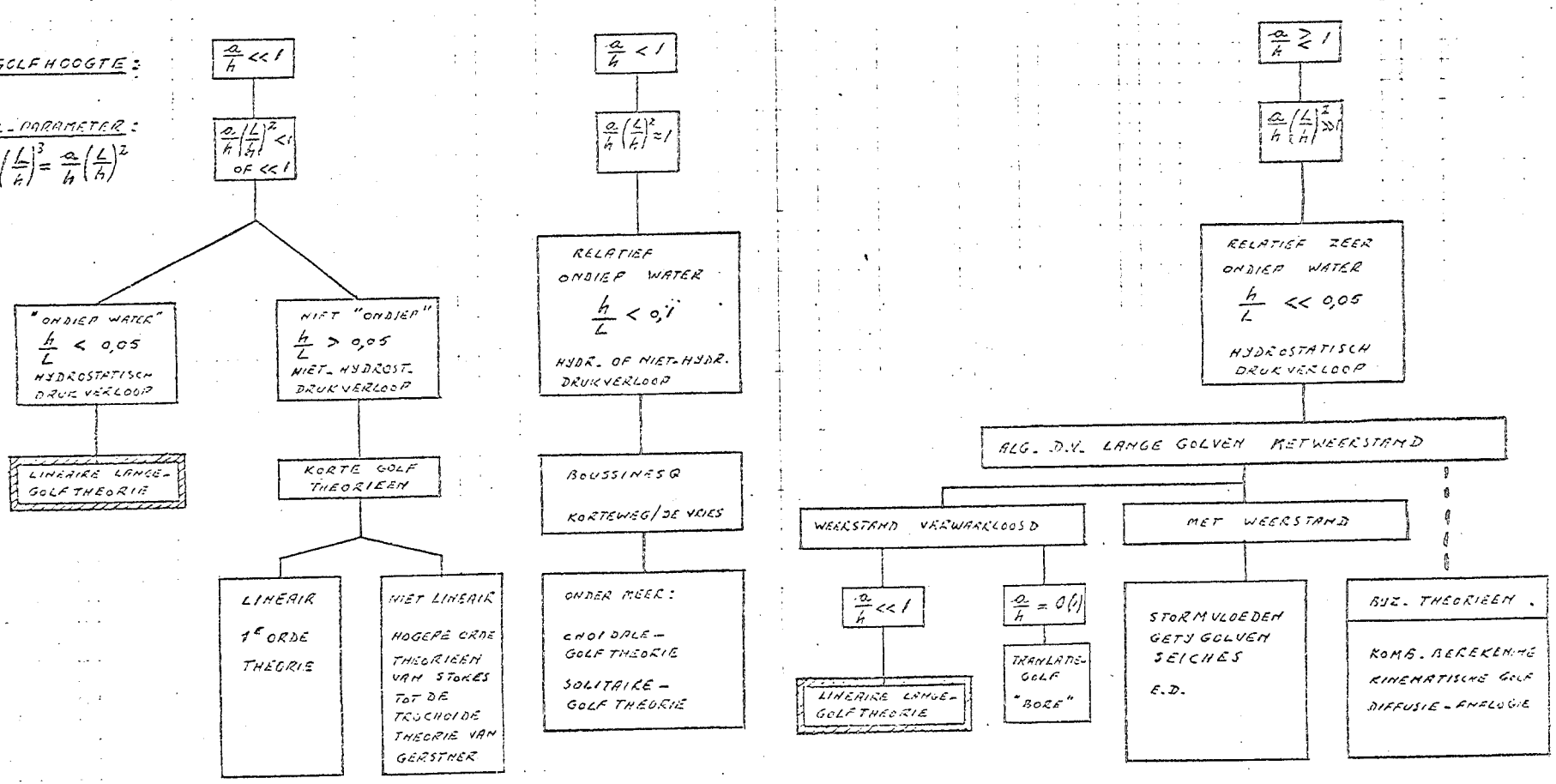
januari 1975.

SCHEMATISCH OVERZICHT GOLVEN

REL. GOLFHOOGTE:

URSELL-PARAMETER:

$$U_r = \frac{a}{L}\left(\frac{L}{h}\right)^3 = \frac{a}{h}\left(\frac{L}{h}\right)^2$$



a = maat voor de golfhoogte

h = ,, ,, de diepte

L = ,, ,, de lengte van de golf

Voor de bij dit overzicht behorende vergelijkingen wordt verwezen naar de colleges :

b 73A " Lange Golven A "

b 76 " Korte Golven "

b 74 "Asymptotische Methoden in de Vloeistofmechanica"

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

VLOEISTOFMECHANICA b 73A

JAN. '75 G.

-3o7o3-

TYPE GOLF (BENADERING)	KENMERKENDE EIGENSCHAPPEN		DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN	VERG. VOOR DE VOORTPL. SNELHEID	
KOMBERGINGS-BESCHOUWING	bekkenlengte zeer klein t.o.v. de golflengte		$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b\frac{\partial h}{\partial t}$; $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ INTEGREREN IN X-RR		OPM
HOOGWATERGOLF ALS KINEMATISCHE GOLF	$\frac{1}{gA_s}\frac{\partial Q}{\partial t} \ll i_b$ $\frac{\partial h}{\partial x} \ll i_b$	ENKELVOUDIGE VERGELIJKINGEN	$\frac{\partial h}{\partial t} + c\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial Q}{\partial t} + c\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$	$c = \frac{3}{2}\frac{Q}{A_s}\frac{b_s}{b}$ $\frac{dh}{dt} = 0 \quad \frac{dQ}{dt} = 0$	$\frac{dQ}{dh} = bc$
DIFFUSIE-ANALOGIE VOOR HOOGWATERGOLF	$\frac{1}{gA_s}\frac{\partial Q}{\partial t} \ll i_b$ met $\frac{\partial h}{\partial x}$ in de bew.verg.		$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - a\frac{\partial h}{\partial t} - b\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - a\frac{\partial Q}{\partial t} - b\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$	$\frac{b}{a} = c$ $c = \frac{3}{2}\frac{Q}{A_s}\frac{b_s}{b}$	top-verplatting
LEIDING ZONDER BERGING (kort)	$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$		$\frac{\partial h}{\partial x} = -i_b - \frac{Q\lvert Q\rvert}{C^2A^2R} - \frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}$		event. in- en uitstroom-verliezen
HOOGWATERGOLF ALS DYNAMISCHE GOLF STORMVLOEDEN GETIJGOLVEN SEICHES	algemene differentiaal-vergelijkingen voor lange golven in open leidingen		Oplossingsmethoden: anal. : de harmonische methode integratie m.b.v. karakteristieken numerieke integratie	$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b\frac{\partial h}{\partial t}$ $\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{gA_s}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q\lvert Q\rvert}{C^2A^2R}$ $\left(-i_b + \frac{2b}{gA_s^2}Q\frac{\partial h}{\partial t}\right)$ * * termen tussen haakjes eventueel	
LINEAIRE LANGE GOLF THEORIE	golfhoogte zeer klein t.o.v. de diepte		$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{gA_s}\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{b}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{gA_s}{b}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$	$c = \pm\sqrt{\frac{gA_s}{b}}$	A_s en b KONSTANT snaarvergelijking
TRANSLATIEGOLF				$c = \sqrt{gh_0\left(1 + \frac{3\Delta h}{2h_0}\right)}$	
SOLITAIRE GOLF THEORIE CNOIDALE GOLF THEORIE	invloed kromming waterspiegel verdiscon-teerd.		Verg. van Boussinesq Verg. van Korteweg / de Vries		
KORTE GOLVEN (windgolven)	2 dimensionaal x- en z-rl rotatie-vrij potentiaal-theorie		zie college b 76	lineaire theorie : $c = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}$ ondiep : $c = \sqrt{gh_0}$ diep : $c = \sqrt{g/k}$	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

REFERENTIES

Handboeken :

Lamb , H. "Hydrodynamics" , 1879 , 1932 , 1945.

Stoker , J.J. "Water Waves" , 1957.

Ven te Chow , "Open Channel Hydraulics" , 1959.

Dronkers , J.J. "Tidal Computations in rivers and coastal waters", 1964.

Henderson , F.M. "Open Channel Flow" , 1966.

Ippen , A.T. ed. "Estuary and Coastline Hydrodynamics" , 1966.

Meyer , R.E.ed."Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport, 1972.

Eagleson , P.S. "Dynamic Hydrology" , 1970 .

Rapporten en publikaties :

Schönfeld , J.C. "Voortplanting en verzwakking van hoogwatergolven op een rivier" , "De Ingenieur" 23-1-1948.

Lighthill M.J. en Whitham G.B. , "On Kinematic Waves" I. Flood movement in long rivers. 1955.

Keulegan G.H. en Patterson G.W. ., "The Quasi-permanent Regime of Rivers and the Prediction of Floods" Vicksburg 1969.

Vreugdenhil C.B. , "Mathematical Methods for Flood Waves", Rapport Waterl.k. Laboratorium aug. 1972.

"Hydraulic Research for Water Management" , Commissie voor Hydrologisch Onderzoek , Verslagen en Mededelingen No. 18 , T.N.O.1973.

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

AFDELING DER CIVIELE TECHNIEK

VAKGROEP VLOEISTOFMECHANICA

LANGE GOLVEN IN LEIDINGEN

HOOFDSTUK 5

INTEGRATIE M.B.V. KARAKTERISTIEKEN

april 1974

Hoofdstuk 5

INTEGRATIE M.B.V. KARAKTERISTIEKEN

5.1. Inleiding

De methode van integratie langs karakteristieken is een methode voor het oplossen van een bepaald type partiële differentiaalvergelijkingen (D.V.n.).
Deze methode is voor "Lange Golven in leidingen" van belang, omdat de vergelijkingen, die de voortplanting van deze lange golven beschrijven, tot dit type behoren. Naast deze D.V.n. voor open, resp. gesloten leidingen (waterslag) behoren tot dit type ook ondermeer D.V.n. die de voortplanting beschrijven van een drukgolf in een heipaal. De partiële D.V.n. waarvoor integratie langs karakteristieken een oplossing biedt, behoren tot de z.g. "hyperbolische quasi-lineaire partiële D.V.- en.

Door een substitutie uit te voeren is uit één 2e orde partiële D.V. een simultaan stelsel van twee 1e orde partiële D.V.- en af te leiden: een z.g. "hyperbolisch stelsel".
Zo'n stelsel is ook het stelsel partiële D.V.n., dat de voortplanting van lange golven beschrijft. De hierna volgende afleiding van de z.g. karakteristieke vergelijkingen is algemeen gehouden en wordt in het kader van het kollege b73A toegepast op de volgende stelsels:

$$\begin{cases} g\dfrac{\delta h}{\delta x} - \dfrac{b-b_s}{A}(v)\dfrac{\delta h}{\delta t} + v\dfrac{\delta v}{\delta x} + \dfrac{\delta v}{\delta t} = -g\,I - g\dfrac{v/v/}{C^2R} & (5\text{-}1) \\[2ex] v\dfrac{\delta h}{\delta x} + \dfrac{b}{b_s}\dfrac{\delta h}{\delta t} + h\dfrac{\delta v}{\delta x} = 0 & (5\text{-}2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g\dfrac{\delta(pn)}{\delta x} + v\dfrac{\delta v}{\delta x} + \dfrac{\delta v}{\delta t} = -g\dfrac{v/v/}{C^2R} & (5\text{-}3) \\[2ex] \dfrac{gv}{c^2}\dfrac{\delta(pn)}{\delta x} + \dfrac{g}{c^2}\dfrac{\delta(pn)}{\delta t} + \dfrac{\delta v}{\delta x} = \dfrac{vg}{c^2}\sin I_b & (5\text{-}4) \end{cases}$$

Bij deze stelsels D.V.n. is sprake van twee onafhankelijk variabelen x en t en 2 afhankelijk variabelen h (resp. pn) en v. In de volgende paragraaf wordt voor de eenvoud eerst aandacht besteed aan een eerste orde partiële D.V. met twee onafhankelijk variabelen en slechts één afhankelijk variabele. Getoond wordt wat z.g. karakteristieken zijn. Tevens worden enkele, daarmee samenhangende begrippen, geïntroduceerd.

5.2. PRINCIPE INTEGRATIE M.B.V. KARAKTERISTIEKEN

5.2.1. PARTIËLE D.V.n. VAN DE EERSTE ORDE

Beschouw een eerste orde partiële D.V.

$$a \frac{\delta h}{\delta x} + b \frac{\delta h}{\delta t} = c$$

of anders geschreven:

$$ah_x + bh_t = c \qquad (5\text{-}5)$$

Gevraagd $h = h(x,t)$.
De funktie $h(x,t)$ is voor te stellen als een oppervlak (integraal-oppervlak) in de (h,x,t)-ruimte.
In (5-5) kunnen a, b, c continu differentieerbare funkties zijn van x, t en h.
De differentiaalvergelijking (5-5) wordt quasi-lineair genoemd als de coëfficiënten a, b en c eventueel wel van x, t en h afhangen, doch niet van de afgeleiden van h.
Hangen overigens a en b alleen af van x en t en is c eventueel ook nog lineair afhankelijk van h, dan noemt men vergelijking (5-5) lineair (in h_x en h_t). Het in feite op te lossen probleem is voor het eerst door Cauchy (1789 - 1857) als volgt geformuleerd: "Is het mogelijk een oplossing van een partiële D.V. te vinden in de vorm van een integraal-oppervlak als van dit oppervlak één ruimtekromme K gegeven is?"

Beschouw nu de één of andere continu differentieerbare kromme f, in de (h,x,t)-ruimte, voorgesteld door de parametervoorstelling $x = x(p)$, $t = t(p)$, $h = h(p)$, met p als parameter.
Verondersteld wordt dat deze kromme f <u>in</u> het gezochte integraaloppervlak ligt.
In alle punten van deze kromme geldt de volgende relatie:

$$\boxed{\frac{dh}{dp} = \frac{\delta h}{\delta x}\frac{dx}{dp} + \frac{\delta h}{\delta t}\frac{dt}{dp}} \qquad (5\text{-}6)$$

Hierin zijn $\frac{\delta h}{\delta x}$ en $\frac{\delta h}{\delta t}$ hellingsrichtingen (part. afgeleiden) van het

gezochte integraal-oppervlak, waarin de kromme f ligt.
Voor het beginwaardeprobleem van Cauchy is dan het volgende stelsel vergelijkingen in h_x en h_t van belang:

$$\begin{cases} a\,h_x + b\,h_t = c \\ \dfrac{dx}{dp}\,h_x + \dfrac{dt}{dp}\,h_t = \dfrac{dh}{dp} \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Of in matrix-vorm:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ \dfrac{dx}{dp} & \dfrac{dt}{dp} \end{bmatrix}}_{D} \cdot \begin{bmatrix} h_x \\ h_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \dfrac{dh}{dp} \end{bmatrix} \qquad \text{(II)}$$

Er zijn nu, zoals de lineaire algebra leert, twee mogelijkheden voor wat betreft de waarde van de determinant D:

1e	$D \neq 0$
2e	$D = 0$

Ieder van deze mogelijkheden zal nu onderzocht worden.

ad 1e $D \neq 0$

Het stelsel is dan éénduidig oplosbaar zodat de partiële afgeleiden h_x en h_t langs de kromme f kunnen worden opgelost, mits f de bekende kromme K is, d.w.z. mits we de funkties x(p), t(p) en h(p) kennen.
Immers kiezen we dan een p dan volgen x, t en h en kunnen we ook a, b en c (funkties van x, t en h) bepalen.
Opm. Als h_x en h_t langs de hele kromme f bepaald zouden zijn, kunnen we in principe een andere kromme f*, in het integraal oppervlak èn in de nabijheid van f, bepalen. Dit komt neer op een differentie-methode.

ad 2e $D = 0$

Het stelsel is afhankelijk (of strijdig, hetgeen buiten beschouwing blijft, omdat de kromme f in dat geval niet in het integraal-oppervlak ligt), zodat het volgende geldt:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{dx}{dp} & \frac{dt}{dp} \end{bmatrix} = a\frac{dt}{dp} - b\frac{dx}{dp} = 0$$

zodat:

$$a\frac{dt}{dp} = b\frac{dx}{dp} \Longrightarrow \frac{\frac{dx}{dp}}{\frac{dt}{dp}} = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{b}$$

Men noemt $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{b}$ de karakteristieke richting.

Tevens geldt $\frac{dx}{dp} : \frac{dt}{dp} : \frac{dh}{dp} = a(x,t,h) : b(x,t,h) : c(x,t,h)$. Wegens afhankelijkheid.

Dit geldt echter niet alleen voor de gekozen kromme f, maar ook voor oneindig veel krommen. Deze krommen zijn alle oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dp} = a(x,t,h) \\ \frac{dt}{dp} = b(x,t,h) \\ \frac{dh}{dp} = c(x,t,h) \end{cases}$$

- Dit stelsel noemen we "het karakteristieke stelsel".
  Zo'n (oplossings-) kromme noemt men "een karakteristiek".

- Indien we een punt in de (x,t,h)-ruimte kiezen (dus één waarde voor p), dan gaat er één karakteristiek (de kromme f) door dat punt.

- Een bekende ruimtekromme van het integraaloppervlak, de kromme K vormt een bepaalde verzameling van punten. Door elk van deze

- punten gaat één karakteristiek (tenzij K ergens de karakteristieke richting zou hebben).
- De karakteristieken door de punten van K spannen samen het gezochte integraal-oppervlak op (zie onderstaande figuur).

Onder het geval $D \neq 0$ vallen alle krommen, die niet de karakteristieke richting hebben. Hiertoe behoort dus ook de bovengenoemde beginkromme K.

Om de totale oplossing te verkrijgen, die aan een bepaalde begin- of randvoorwaarde (de "beginkromme") voldoet, zijn de karakteristieken zeer bruikbaar.

Opm. 1: Men dient goed voor ogen te houden, dat bij de hier besproken oplossingsmethode tegelijkertijd sprake is van:

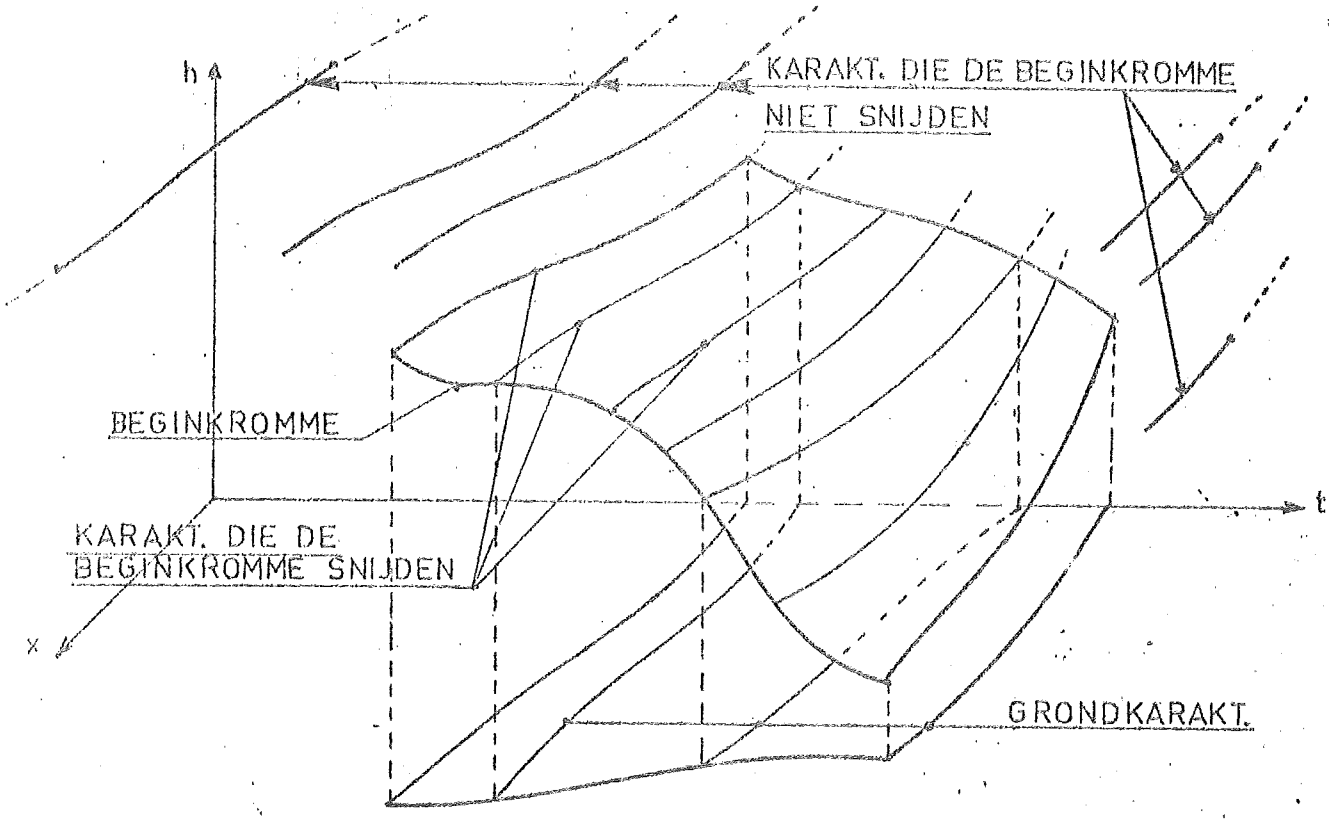
D = 0 langs de karakteristieken op het oppervlak;

$D \neq 0$ langs alle mogelijke niet-karakteristieke krommen op het oppervlak.

Opm. 2: De kromme f, liggend in het integraaloppervlak, kan zowel overeenkomen met een karakteristiek als met een beginkromme.

Opm. 3: De oplossingsmethode m.b.v. karakteristieken is daarom zo bruikbaar, omdat de partiële afgeleiden h_x en h_t (zelf) niet behoeven te worden berekend om punten van het integraal-oppervlak te vinden.

De projecties van de ruimtelijke karakteristieken op het x/t-vlak, worden de sub-karakteristieken genoemd.



Opm.: Dat het aldus gevormde oppervlak oplossing is van de diff. vergelijking (5-5), is ook nog als volgt in te zien.

Een vector $\vec{m} = (a, b, c)$ - met a, b en c funkties van x,t en h -, die in een bepaald punt raakt aan de karakteristiek door dat punt, ligt in het raakvlak aan het oppervlak, omdat de karakteristieken in het oppervlak liggen.
Uit de propaedeuse is bekend, dat een normaalvector in een punt van het oppervlak h(x,t), wordt voorgesteld door $\vec{n} = (h_x, h_t, -1)$.
De normaalvector $\vec{n}$ staat loodrecht op de raakvector $\vec{m}$, dus $\vec{m}.\vec{n} = \vec{0}$ of

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_t \\ -1 \end{pmatrix} = ah_x + bh_t - c = 0,$$ wat weer vergelijking (5-5) is.

Uit het oppervlak is blijkbaar de oorspronkelijke differentiaalvergelijking weer af te leiden. Het hiervoor gedefinieerde oppervlak is dus oplossing van partiële differentiaalvergelijking (5-5).

Voorbeeld uit de wiskunde :

Gegeven : $hh_x + h_t = 1$

Gevraagd: De oplossing, die gaat door de beginkromme

$$\left.\begin{aligned} x_o &= x_o(r) = r \\ t_o &= t_o(r) = r \\ h_o &= h_o(r) = \tfrac{1}{2}r \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

met r als parameter. Een parametervoorstelling is nodig, om expliciete uitdrukkingen te krijgen voor de (variabele) beginwaarden.

Oplossing: Het karakteristieke stelsel luidt: (zie blz. 5.4)

$$\frac{dx}{dp} = h \ , \ \frac{dt}{dp} = 1 \ , \ \frac{dh}{dp} = 1$$

met als algemene oplossingskrommen

$h = h_o + p$, $t = t_o + p$, $x = x_o + h_o p + \frac{1}{2}p^2$, waarin x_o, t_o en h_o de snijpunten zijn met de beginkromme.

Alle karakteristieken, die het integraaloppervlak opbouwen, worden dus voorgesteld door:

$$\left.\begin{aligned} x &= r + \tfrac{1}{2}rp + \tfrac{1}{2}p^2 \\ t &= r + p \\ h &= \tfrac{1}{2}r + p \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

De parameters r en p kunnen hieruit geëlimineerd worden:

$$r = \frac{x - \frac{1}{2}t^2}{1 - \frac{1}{2}t} \text{ en } p = \frac{t - x}{1 - \frac{1}{2}t} \text{ waarna volgt}$$

$$\boxed{h = \frac{-x + 2t - \frac{1}{2}t^2}{2 - t}}$$

hetgeen de oplossing is van de partiële differentiaalvergelijking, die

voldoet aan de gestelde beginvoorwaarden.

Opm. 1. Dat de in het voorbeeld genoemde beginkromme nergens de karakteristieke richting heeft, blijkt al uit de eenduidige oplossing, maar is ook als volgt aan te tonen.
Als de beginkromme ergens de karakteristieke richting zou hebben, zou deze ergens moeten samenvallen met een gedeelte van een karakteristiek. D.w.z. er zouden tenminste één waarde van r èn een waarde van p moeten bestaan waarvoor geldt dat daarbij:

èn x_o (van de beginkromme) = x (van de karakteristiek)

" t_o (" " ") = t (" " ")

" h_o (" " ") = h (" " ")

$$\text{èn } \underbrace{\frac{dx_o}{dr} : \frac{dt_o}{dr} : \frac{dh_o}{dr}}_{\text{van de beginkromme}} = \underbrace{\frac{dx}{dp} : \frac{dt}{dp} : \frac{dh}{dp}}_{\text{van de karakteristiek}}$$

Er zouden dus tenminste een waarde van r en één waarde van p moeten bestaan, waarvoor geldt (zie het stelsel vergelijkingen (A) voor de beginkromme en het stelsel (B) voor de karakteristieken):

èn $r = r + \frac{1}{2}rp + \frac{1}{2}p^2$

èn $r = r + p$

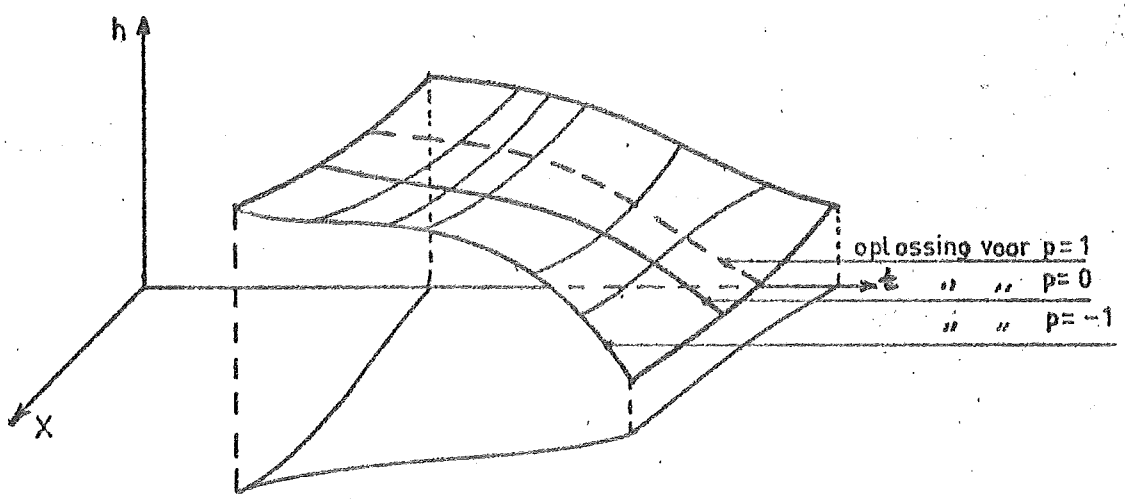
èn $\frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r + p$

èn $1 : 1 : \frac{1}{2} = (\frac{1}{2}r + p) : 1 : 1$

Het is duidelijk dat er voor geen enkele combinatie van waarden voor p en r tegelijk aan deze vier vergelijkingen kan worden voldaan.

Opm. 2. In de inleiding is gesteld, dat de karakteristiekenmethode een methode is, waarbij langs karakteristieken geïntegreerd wordt.

Dit is als
volgt in beeld te brengen. Er is een integraaloppervlak in de (x,t,h)-ruimte, waarin een ruimtekromme ligt, voorgesteld door de parametervoorstelling $x = x(r)$, $t = t(r)$, $h = h(r)$.
De karakteristieken, voorgesteld door de parametervoorstelling $x(p)$, $t(p)$, $h(p)$, snijden deze ruimtekromme. Uit de karakteristiekenoplossing (B) zijn de snijpunten met de beginkromme te bepalen door $p = 0$ te stellen. De oplossing voor $p = 1$ is nu te bepalen door langs de verschillende karakteristieken op te schuiven tot waar $p = 1$. Op deze wijze beschouwd is de methode een differentiemethode (stapjesmethode).



Opm. 3. Uit het feit, dat gewerkt werd met afhankelijke vergelijkingen, dus $D = 0$, volgt nog dat <u>de vector</u>, waarvan de "determinant van de coëfficiëntenmatrix" nul is, <u>onbepaald is</u>, dus ook onbepaalde elementen heeft. Immers, de regel van Cramer zegt, dat in

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & y_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & y_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & y_{ni} & & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nk} & & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

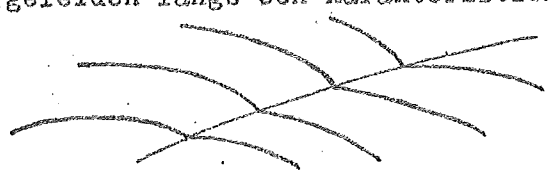
en, als de vergelijkingen <u>afhankelijk</u> zijn $= \frac{0}{0}$.

De elementen x_i zijn bij partiële D.V.-n de partiële afgeleiden. Het wordt dan duidelijk, dat onder de karakteristieke voorwaarden de partiële afgeleiden onbepaald zijn:

(zie blz. 5.3 (II)) $\frac{\delta h}{\delta x} = \frac{0}{0}$; $\frac{\delta h}{\delta t} = \frac{0}{0}$.

Interpretatie :

Als $D = 0$, <u>kunnen</u> de partiële afgeleiden $\frac{\partial h}{\partial x}$ en $\frac{\partial h}{\partial t}$ allerlei waarden aannemen , zodat een discontinuïteit in de afgeleiden langs een karakteristiek kan bestaan.



Deze eigenschap van karakteristieken wordt vaak als uitgangspunt gekozen bij het opzetten van de theorie.

Voorbeeld voortplanting hoogwatergolf.

Onder sterk vereenvoudigende veronderstellingen blijkt de voortplanting van een hoogwatergolf te kunnen worden beschreven met de volgende "quasi lineaire eerste orde D.V.".

$$\frac{Q}{bh}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{2}{3}\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

(zie: diktaat "Lange Golven in Leidingen" Deel I, blz. 4.23)

De totale afgeleide, naar een parameter p is:

$$\frac{dx}{dp}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{dt}{dp}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dp}$$

Gevraagd wordt de oplossing van de bovenstaande D.V., die gaat door de begin-kromme:

$x_o = r$; $t_o = 0$ en $Q_o = F(r)$, waarin $F(r)$ nog nader te geven.

Het karakteristieke stelsel luidt: (zie blz. 5.4)

$$\frac{dx}{dp} = \frac{Q}{bh}\ , \quad \frac{dt}{dp} = \frac{2}{3}\ , \quad \frac{dQ}{dp} = 0\ .$$

De algemene oplossingskrommen hiervan zijn:

$t = \frac{2}{3}p + t_o$; $Q = Q_o$. Voor het oplossen van x is nog een verband nodig tussen h en Q, omdat in het geval van een hoogwatergolf Q een funktie van h is.

Dit verband is: $Q = C\, b_s\, h^{3/2} I^{1/2}$, zodat $h = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{C^2\, b_s^{\,2}\, I}}$

Dan wordt $\frac{dx}{dp} = \frac{1}{b}\sqrt[3]{QC^2 b_s^2 I}$ $\rightarrow$ $x = \frac{1}{b}\sqrt[3]{QC^2 b_s^2 I}\; p + x_o$

Worden de beginvoorwaarden ingevoerd, dan bouwen de volgende karakteristieken het gevraagde integraaloppervlak op:

$$x = \frac{p}{b}\sqrt[3]{QC^2 b_s^2 I} + r \; ; \quad t = \frac{2}{3}p \; ; \quad Q = F(r)$$

Worden de parameters p en r geëlimineerd dan volgt voor Q de uitdrukking:

$$Q = F(x - \frac{3t}{2b} Q^{1/3} C^{2/3} b_s^{2/3} I^{1/3})$$

Dit is een impliciete uitdrukking voor Q.

Uit deze uitdrukking is het zeer moeilijk Q expliciet op te lossen. Hieruit blijkt, dat reeds bij eenvoudige vergelijkingen moeilijkheden kunnen ontstaan bij het zoeken van een oplossing in gesloten vorm. In fysische problemen wordt de beginvoorwaarde vaak gegeven als een kromme die gemeten is en dus bestaat uit een aantal (discrete) punten. Het blijkt vaak moeilijk deze beginvoorwaarden te schrijven in een gesloten analytische uitdrukking, in welke parameter dan ook.

Praktisch wordt de karakteristieke methode dan ook toegepast als een grafische methode (zie voorbeelden in 5.5.) of als een differentiemethode zoals beschreven in opm. 2 op blz. 5.9.
Aangezien de beginvoorwaarde gegeven wordt op het tijdstip $t = t_o$ (waarvoor vaak $t_o = 0$ genomen wordt) en in het algemeen gevraagd wordt naar de oplossing op een <u>bepaald tijdstip</u>, is het voor de hand liggend voor de parameter p de tijd t te nemen, en voor de parameter r de x.

Bij de afleiding van de karakteristieke vergelijkingen voor <u>stelsels</u>, zal hoofdzakelijk gewerkt worden met de <u>speciale parameters</u> x en t en dus niet meer met de algemene parameters p en r.
Een gevolg hiervan is, dat een beginvoorwaarde niet meer gegeven kan worden als functie van x èn t, doch als funktie van x op een begintijdstip $t = t_o$.

Het voorbeeld van de hoogwatergolf zal nu behandeld worden op de bovenomschreven wijze.
Het probleem wordt beschreven door het volgende stelsel:

$$\frac{Q}{bh}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{2}{3}\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \qquad \text{of} \qquad \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

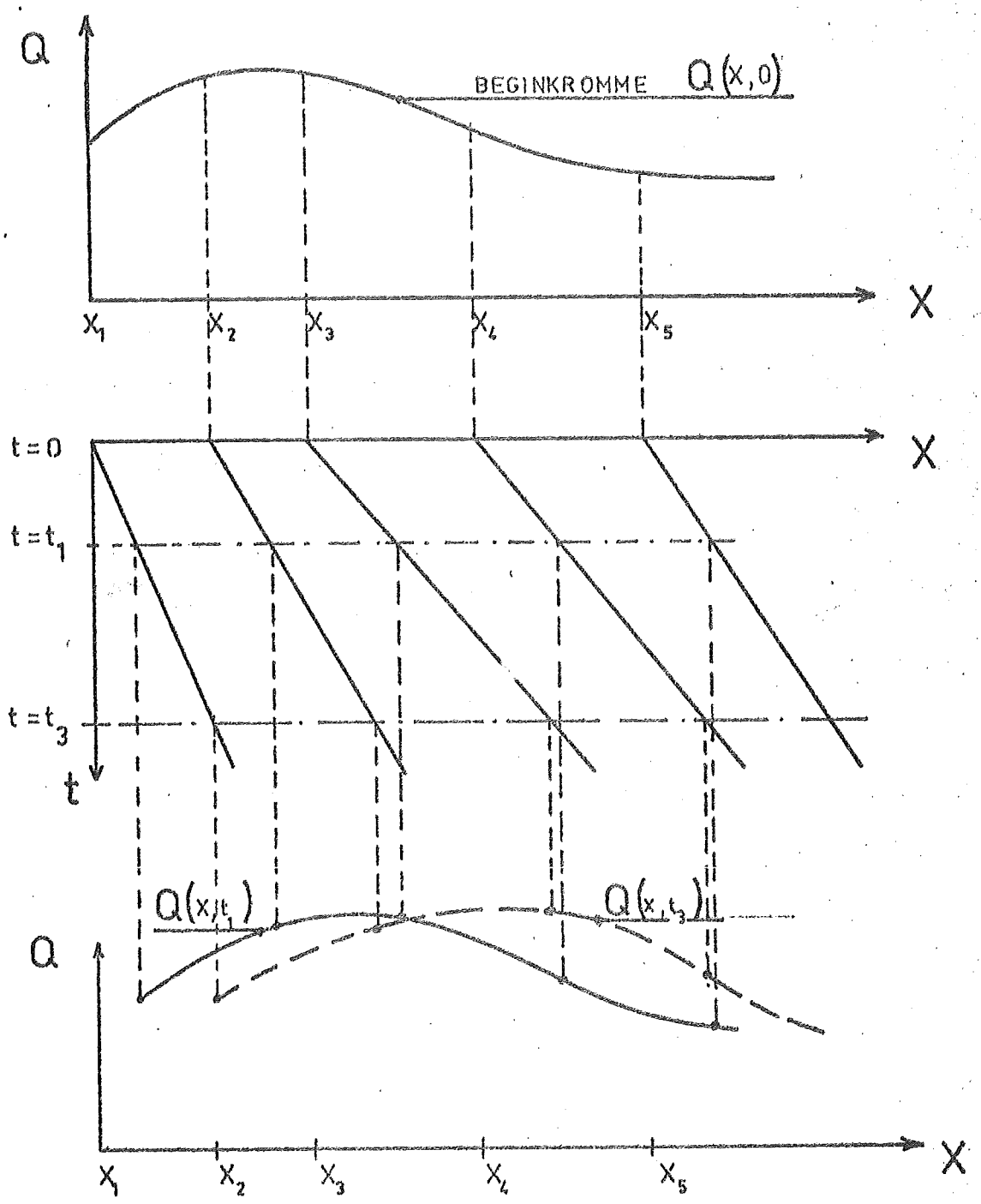
$$\frac{dx}{dt}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dt}$$

De karakteristieke richting is dan: $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}$.

Langs deze karakteristiek geldt dan $\frac{dQ}{dt} = 0$, d.w.z. de totale verandering van Q is nul.
In de volgende figuur is geschetst hoe, uitgaande van een beginkromme, een oplossing Q(x,t) kan worden gevonden.
Het probleem voortplanting van een hoogwatergolf, wordt in het algemeen ook beschreven door de volgende differentiaalvergelijking in de <u>waterhoogte h</u>:

$$\frac{b_s}{b} v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2}{3}\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$ (zie blz. 4.24 van het diktaat Deel I)

Het oplossen m.b.v. karakteristieken van deze vergelijking in h wordt aan de lezer overgelaten.



VOORTPLANTING HOOGWATERGOLF

5.2.2. STELSELS VAN TWEE PARTIELE D.V.n VAN DE EERSTE ORDE.

Aangezien de voortplanting van lange golven wordt beschreven door twee simultane partiële differentiaalvergelijkingen, dient de in 5.2.1. gegeven afleiding voor karakteristieken uitgebreid te worden tot de karakteristieken van stelsels van twee eerste orde partiële D.V.n. Daartoe worden de volgende vergelijkingen beschouwd.

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial h}{\partial x} + b\frac{\partial h}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} + d\frac{\partial v}{\partial t} &= e \qquad (8)\\ A\frac{\partial h}{\partial x} + B\frac{\partial h}{\partial t} + C\frac{\partial v}{\partial x} + D\frac{\partial v}{\partial t} &= E \qquad (9)\end{aligned}\right\} (III)$$

Waarin a, b, c, d, e en A, B, C, D, en E weer funkties van x en t zijn en ook nog van h en v mogen afhangen.
Gevraagd wordt de funkties h(x,t) en v(x,t), integraaloppervlakken in resp. de (h,x,t)-ruimte en (v,x,t,)-ruimte, te bepalen.
De vraag is nu om van het stelsel (III) de karakteristieken te bepalen.
Hiertoe worden nu de eigenschappen bestudeerd van <u>een kromme in het h-vlak</u> en <u>een kromme in het v-vlak</u>, <u>die dezelfde projektie</u> <u>in het (x,t)-vlak hebben</u>.
De krommen worden voorgesteld door:

$$\begin{aligned} h &= h(p) & & & v &= v(p)\\ x &= x(p) & &\text{resp.} & x &= x(p)\\ t &= t(p) & & & t &= t(p)\end{aligned}$$

De projektie wordt voorgesteld door:

$$\begin{aligned} x &= x(p)\\ t &= t(p)\end{aligned}$$

Voor deze krommen geldt:

$$\frac{dx}{dp}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{dt}{dp}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dp}$$

$$\frac{dx}{dp}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dt}{dp}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dp}$$

Dan ontstaat het volgende stelsel:

$$\left.\begin{array}{l}
a\dfrac{\partial h}{\partial x} + b\dfrac{\partial h}{\partial t} + c\dfrac{\partial v}{\partial x} + d\dfrac{\partial v}{\partial t} = e \\[2ex]
A\dfrac{\partial h}{\partial x} + B\dfrac{\partial h}{\partial t} + C\dfrac{\partial v}{\partial x} + D\dfrac{\partial v}{\partial t} = E \\[2ex]
\dfrac{dx}{dp}\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{dt}{dp}\dfrac{\partial h}{\partial t} + 0 + 0 = \dfrac{dh}{dp} \\[2ex]
0 + 0 + \dfrac{dx}{dp}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{dt}{dp}\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{dv}{dp}
\end{array}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Analoog aan 5.2.1. wordt gesteld, dat het stelsel afhankelijk moet zijn en dat dus de hoofddeterminant D = 0 gesteld moet worden.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ A & B & C & D \\ x_p & t_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_p & t_p \end{vmatrix} = 0, \text{ ofwel}$$

$$x_p \begin{vmatrix} b & c & d \\ B & C & D \\ 0 & x_p & t_p \end{vmatrix} - t_p \begin{vmatrix} a & c & d \\ A & C & D \\ 0 & x_p & t_p \end{vmatrix} =$$

$$= x_p \left\{ b(Ct_p - Dx_p) - B(ct_p - dx_p) \right\} - t_p \left\{ a(Ct_p - Dx_p) - A(ct_p - dx_p) \right\} =$$

$$x_p^2 \ (Bd - bD) + x_p t_p \ (aD - Ad + bC - Bc) + t_p^2 \ (Ac - aC) = 0$$

Noem nu:

$$\alpha = Bd - bD$$

$$\beta = aD - Ad + bC - Bc$$

$$\gamma = Ac - aC$$

Dan ontstaat de volgende vergelijking:

$$\alpha x_p^2 + \beta x_p t_p + \gamma t_p^2 = 0 \quad \text{en na eliminatie van p:}$$

$$\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \beta\frac{dx}{dt} + \gamma = 0$$

Dit zijn vierkantsvergelijkingen in x_p, t_p of x_t met twee oplossingen.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{met} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \Theta_1 \quad \text{en} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \Theta_2$$

Dan ontstaan de volgende mogelijkheden:

2 reële karakteristieke richtingen $\frac{dx}{dt}$	:	HYPERBOLISCH STELSEL PART. D.V.n
2 samenvallende " " "	:	PARABOLISCH " " "
2 complexe " " "	:	ELLIPTISCH " " "

De herkomst van deze namen is eenvoudig te verklaren. De Analytische Meetkunde van de Propaedeuse zegt, dat de kromme, waarvan het hogere graadsdeel van de vergelijking voorgesteld wordt door

$PX^2 + QXY + RY^2 + \ldots = 0$, een

a) hyperbool is als discriminant $Q^2-4PR > 0$

b) parabool is " " $Q^2-4PR = 0$

c) ellips is " " $Q^2-4PR < 0$

Analoog noemt men het stelsel partiële D.V.-en (of de 2e orde part. D.V.) hyperbolisch, parabolisch resp. elliptisch als de discriminant van de karakteristieke vergelijkingen $(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$ groter dan, gelijk aan resp. kleiner dan nul is. (Zie ook lit.2 blz. 511).
Aangezien in de praktijk langs karakteristieken geïntegreerd wordt in het reële x/t-vlak, is het duidelijk, dat voor een elliptisch stelsel de karakteristieken geen oplossing bieden. Ook een parabolisch stelsel is niet met behulp van karakteristieken op te lossen, maar dit houdt verband met de vereiste eenduidigheid van de oplossing.

De oplossingsmethode "integratie m.b.v. karakteristieken" biedt alleen een oplossing voor de hyperbolische stelsels.

Voorbeelden:

a) De potentiaalstroom (tweedimensionale rotatievrije stroom), wordt beschreven door de vergelijking van Laplace

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Deze is equivalent met het volgende stelsel via de substitutie

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = v \quad \text{waaruit volgt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}; \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

af te leiden: $\begin{cases} u_y - v_x = 0 & \text{(wegens rotatievrijheid)} \\ u_x + v_y = 0 & \text{(continuïteit)} \end{cases}$

coëfficiënt van $\frac{\partial u}{\partial x}$ resp. $a = 0$ $A = 1$

" " $\frac{\partial u}{\partial y}$ " $b = 1$ $B = 0$

" " $\frac{\partial v}{\partial x}$ " $c = -1$ $C = 0$

" " $\frac{\partial v}{\partial y}$ " $d = 0$ $D = 1$

$e = 0$ $E = 0$

$\beta = 0; \ \alpha = -1; \ \gamma = -1; \ \Theta_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{-4}}{-2}$

De karakteristieke richtingen zijn dus complex, het stelsel is elliptisch en karakteristieken bieden geen oplossing. Fysisch betekent dit, dat een discontinuïteit in de afgeleiden niet mogelijk is, behalve in de randvoorwaarden.

b) De trillende snaar.

De tweede orde partiële D.V. $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$ die de beweging van een trillende snaar beschrijft, kan op eenzelfde manier als onder voorbeeld a) worden omgezet in een stelsel van twee eerste orde partiële D.V.

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0 \\ u_x - v_t = 0 \end{cases}$$

coëff.	van	$\frac{\partial u}{\partial x}$	resp.	$a = 0$	$A = 1$
"	"	$\frac{\partial u}{\partial t}$	"	$b = 1$	$B = 0$
"	"	$\frac{\partial v}{\partial x}$	"	$c = 1$	$C = 0$
"	"	$\frac{\partial v}{\partial t}$	"	$d = 0$	$D = -1$
				$e = 0$	$E = 0$

$\theta_{1,2} = \pm 1$ dus twee reële karakteristieke richtingen. Het stelsel is dus <u>hyperbolisch</u>.

De karakteristieke richtingen leveren (sub-of grond)karakteristieken onder 45° met de x-as in het x/t-vlak op.

Omdat bij de stelsels eerste orde partiële D.V.- en sprake is van twee afhankelijk veranderlijken, kunnen hier niet, zoals bij de enkele eerste orde partiële D.V., de afhankelijk veranderlijken direkt ëënduidig bepaald worden. Langs de karakteristieken in het x/t-vlak worden dan ook niet h en v ëënduidig bepaald, maar wel het verband dat tussen h en v in ieder van de karakteristieke richtingen geldt. Doordat de partiële afgeleiden onbepaald $(\frac{0}{0})$ zijn langs de karakteristieken, is een relatie af te leiden tussen dh en dv.

$$a\frac{\partial h}{\partial x} + b\frac{\partial h}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} + d\frac{\partial v}{\partial t} = e \qquad (5\text{-}6)$$

$$A\frac{\partial h}{\partial x} + B\frac{\partial h}{\partial t} + C\frac{\partial v}{\partial x} + D\frac{\partial v}{\partial t} = E \qquad (5\text{-}7)$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + 0 + 0 = \frac{dh}{dt} \qquad (5\text{-}8)$$

$$0 + 0 + \frac{dx}{dt}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt} \qquad (5\text{-}9)$$

$$\boxed{\text{Noem } \frac{dx}{dt} = k}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ A & B & C & D \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{D^{III}}{D}} \quad ; \quad D^{III} = \begin{vmatrix} a & b & e & d \\ A & B & E & D \\ k & 1 & \frac{dh}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dv}{dt} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Zoals gesteld in opm. 3 van blz. 5.9 en 5.10, zijn de partiële afgeleiden onder de karkateristieke voorwaarde onbepaald.

Dit betekent, dat zowel $D=0$ als $D^{III}=0$.

$D=0$ levert de karakteristieke richtingen $\frac{dx}{dt}$.

D^{III} levert een verband tussen dh en dv.

Dezelfde resultaten worden verkregen als i.p.v. $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial x}$ of $\frac{\partial h}{\partial t}$ of $\frac{\partial v}{\partial t}$ wordt opgelost m.b.v. de regel van Cramer.

$$D^{III} = a \begin{vmatrix} B & E & D \\ 1 & \frac{dh}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{dv}{dt} & 1 \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} b & e & d \\ 1 & \frac{dh}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{dv}{dt} & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b & e & d \\ B & E & D \\ 0 & \frac{dv}{dt} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Uitwerken geeft :

$$a\left\{B\frac{dh}{dt} - E + D\frac{dv}{dt}\right\} - A\left\{b\frac{dh}{dt} - e + d\frac{dv}{dt}\right\} + k\left\{b\left(E - D\frac{dv}{dt}\right) + \right.$$
$$\left. - B\left(e - d\frac{dv}{dt}\right)\right\} = 0$$

$$\frac{dh}{dt}\left\{aB - Ab\right\} + \frac{dv}{dt}\left\{aD - Ad - kbD + kBd\right\} = aE - Ae - kbE + kBe$$
$$= e\left\{-(A-Bk)\right\} + E\,(a-bk)$$

Er resteert nu een gewone differentiaalvergelijking in h, v en t.

$$\boxed{\frac{dh}{dt}\left\{b-B\left(\frac{a-bk}{A-Bk}\right)\right\} + \frac{dv}{dt}\left\{d-D\left(\frac{a-bk}{A-Bk}\right)\right\} = e-E\left\{\frac{(a-bk)}{(A-Bk)}\right\}} \qquad (5\text{-}13)$$

Het is duidelijk dat hieruit $\frac{dh}{dv}$ op te lossen is in ieder van de karakteristieke richtingen $\boxed{k = \frac{dx}{dt} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$ <u>als</u> e en E gelijk 0 zijn.

verschil bodemhelling

De aldus verkregen richtingen $\frac{dh}{dv}$ noemt men de "karakteristieke vergelijkingen in het h/v-vlak".

Zo'n hellingsrichting $\frac{dh}{dv}$ geeft de verhouding tussen de bij elkaar behorende veranderingen van h en v als in het (x,t)-vlak langs de bijbehorende sub-karakteristiek wordt bewogen.

Als <u>voorbeeld</u> wordt nu genomen de (sterk) vereenvoudigde bewegings- en continuïteitsvergelijking voor de beschrijving van lange golven in een open leiding:

$$\begin{cases} g\dfrac{\partial h}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 \\[2ex] v\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial t} + h\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Coëff. van $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ resp. $a = g$ $A = v$ v is een op te lossen grootheid dus het is een quasi-lineaire vergelijking.

" " $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ " $b = 0$ $B = 1$

" " $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ " $c = v$ $C = h$

" " $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ " $d = 1$ $D = 0$

$e = 0$ $E = 0$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= Bd - bD = 1 \\ \beta &= Ad - Ad + bC - Bc = -2v \\ \gamma &= Ac - aC = v^2 - gh \end{aligned}\right\} \boxed{\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{gh}}\ ; \quad \frac{a-bk}{A-Bk} = \frac{g}{v-k} \quad \text{zodat}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt}\left(\frac{-g}{v-k}\right) + \frac{dv}{dt}(+1) = 0}$$ en de karakteristieke verg.n. (in het v/h-vlak) zijn:

vgl vrijen college dikkeek blad 2,3

$$\frac{dh}{dv} = -\sqrt{\frac{h}{g}} \quad \text{indien} \quad \frac{dx}{dt} = v + \sqrt{gh}$$

$$\frac{dh}{dv} = +\sqrt{\frac{h}{g}} \quad \text{indien} \quad \frac{dx}{dt} = v - \sqrt{gh}$$

Voor de praktische uitvoering van de methode betekent dit, dat als men

zich in het x/t-vlak in de karakteristieke richting $\frac{dx}{dt} = v + \sqrt{gh}$ beweegt, men zich in het h/v-vlak in de karakteristieke richting $\frac{dh}{dv} = -\sqrt{\frac{h}{g}}$ moet bewegen.

5.3. KARAKTERISTIEKE VERGELIJKINGEN BETREFFENDE LANGE GOLVEN IN OPEN LEIDINGEN.

Het is nu mogelijk om van de uitgebreide lange golfvergelijkingen de karakteristieke vergelijkingen af te leiden.

$$g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{b-b_s}{A} v \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = -g\, I_b - g \frac{v/v/}{C^2 R}$$

$$v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{b}{b_s} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Coëff. van $\frac{\partial h}{\partial x}$	$a = g$	$A = v$
" " $\frac{\partial h}{\partial t}$	$b = \frac{-b-b_s}{A} v$	$B = \frac{b}{b_s}$
" " $\frac{\partial v}{\partial x}$	$c = v$	$C = h$
" " $\frac{\partial v}{\partial t}$	$d = 1$	$D = 0$
	$e = -gI_b - \frac{g\, v/v/}{C^2 R}$	$E = 0$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= Bd-bD = \frac{b}{b_s} \\ \beta &= aD-Ad+bC-Bc = -v-\frac{h(b-b_s)v}{A}-\frac{b}{b_s}v \\ \gamma &= Ac-aC = v^2-gh \end{aligned}\right\} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Met $A = h \cdot b_s$ levert dit de volgende karakteristieke vergelijkingen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{\frac{b_s}{b}\,gh + v^2\left(1-\frac{b_s}{b}\right)} = k \\ &\frac{dv}{dt} + \frac{v^2\left(1-\frac{b}{b_s}\right) - gh\frac{b}{b_s}}{hv-\frac{b}{b_s}hk}\,\frac{dh}{dt} = -gI_b - g\frac{v/v/}{C^2R} \end{aligned}}$$

<u>Opm.</u> Vaak wordt voor $\frac{dx}{dt}$ de letter c van "celerity" gebruikt.

In de formules dient dan k door c vervangen te worden.

Voor het bepalen van de karakteristieke vergelijkingen in Q, moet in de algemene vergelijkingen voor de v $\frac{Q}{A}$ in de plaats worden gezet.

$$\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{2\alpha bQ}{gA^2}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\alpha}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} = -\alpha I_b - \frac{\alpha Q/Q/}{C^2A^2R}$$

$$b\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\text{met } \alpha = \frac{1}{1-\frac{v^2}{gh}} = \frac{1}{1-\frac{Q^2}{ghA^2}}$$

Coëff. van	$\frac{\partial h}{\partial x}$	$a = 1$	resp. $A = 0$
" "	$\frac{\partial h}{\partial t}$	$b = \frac{-2\alpha bQ}{gA^2}$	" $B = b$
" "	$\frac{\partial Q}{\partial x}$	$c = 0$	" $C = 1$
" "	$\frac{\partial Q}{\partial t}$	$d = \frac{\alpha}{gA}$	" $D = 0$
		$e = -\alpha I_b - \frac{\alpha Q/Q/}{C^2A^2R}$	" $E = 0$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= Bd-bD = \frac{b\alpha}{gA} \\ \beta &= aD-Ad+bC-Bc = -\frac{2\alpha bQ}{gA^2} \\ \gamma &= Ac-aC = -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Zodat de volgende karakteristieke vergelijkingen ontstaan:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{Q}{A} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{A^2}\left(1-\frac{b_s}{b}\right) + \frac{gA}{b}} \\ \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{gA}{\alpha k}\right) \cdot \frac{dh}{dt} &= -gAI_b - g\frac{Q/Q/}{C^2AR} \end{aligned}}$$

Ook hier geldt weer, dat in het algemeen k door c vervangen wordt.

Indien $\frac{v^2}{gh} << 1$, dan is $\frac{Q^2}{A^2} << \frac{gA}{b}$ en gaan de karakteristieke vergelijkingen over in:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm\sqrt{\frac{gA}{b}} = \pm\sqrt{\frac{b}{b}\,gh} = \pm c \\ \frac{dQ}{dt} \pm bc\frac{dh}{dt} &= -gAI_b - g\frac{Q/Q/}{C^2AR} \end{aligned}}$$

geldig voor $\frac{v^2}{gh} << 1$

als dit niet is dan $\frac{dQ}{dh} = \pm bc$

5.4. KARAKTERISTIEKE VERGELIJKINGEN BETREFFENDE DRUKGOLVEN IN GESLOTEN LEIDINGEN.

De karakteristieke vergelijkingen voor ronde, gesloten vloeistofleidingen uitgedrukt in de druk p.

De bewegings-resp. continuïteitsvergelijking zijn voor dit geval:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = -g\sin I_b - g\frac{v/v/}{C^2R}$$

$$\frac{v}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

waarin $\boxed{\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{\frac{w}{D}E}}$

$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{k} + \rho\frac{D}{WE}}}$ is de voortplantingssnelheid van geluid, druk

voor zuiver water: $c = 1400$ m/s

bij onzuiver water en bij niet-starre wanden is er een andere c mogelijk

Vervangt men in het algemene geval de letter h door p, dan is de

coëff. van	$\frac{\partial p}{\partial x}$	$a = \frac{1}{\rho}$	resp.	$A = \frac{v}{c^2}$
" "	$\frac{\partial p}{\partial t}$	$b = 0$	"	$B = \frac{1}{c^2}$
" "	$\frac{\partial v}{\partial x}$	$c = v$	"	$C = \rho$
" "	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$d = 1$	"	$D = 0$

$$e = -g \sin I_b - g \frac{v/v/}{C^2 R} \qquad \text{resp. } E = 0$$

$$\alpha = Bd - bD = \frac{1}{c^2}$$

$$\beta = aD - Ad + bC - Bc = -\frac{2v}{c^2}$$

$$\gamma = Ac - aC = \frac{v^2}{c^2} - 1$$

$$\rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Dan worden de karakteristieke vergelijkingen

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = v \pm c \approx \pm c \\ &\frac{dv}{dt} \pm \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dt} = -g \sin I_b - g \frac{v/v/}{C^2 R} \end{aligned}}$$

<u>geldig voor vloeistoffen</u>

Bij gesloten leidingen wordt meestal met het piëzometrisch niveau gewerkt i.p.v. met de druk.

De karakteristieke vergelijkingen, uitgedrukt in het piëzometrisch niveau pn.

De bewegings- resp. de continuïteitsvergelijking zijn voor dit geval:

$$g\frac{\partial(pn)}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{v/v/}{C^2R}$$

$$\frac{gv}{c^2}\frac{\partial(pn)}{\partial x} + \frac{g}{c^2}\frac{\partial(pn)}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{vg}{c^2}\sin I_b$$

Denkt men in het algemene geval de letter h vervangen door (pn) dan is

de coëff. van	$\frac{\partial(pn)}{\partial x}$	$a = g$	resp. $A = \frac{gv}{c^2}$
" " "	$\frac{\partial(pn)}{\partial t}$	$b = 0$	" $B = \frac{g}{c^2}$
" " "	$\frac{\partial v}{\partial x}$	$c = v$	" $C = 1$
" " "	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$d = 1$	" $D = 0$
		$e = -g\frac{v/v/}{C^2R}$	" $E = \frac{vg}{c^2}\sin I_b$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= Bd-bD = \frac{g}{c^2} \\ \beta &= aD-Ad+bC-Bc = -\frac{2gv}{c^2} \\ \gamma &= Ac-aC = \frac{gv^2}{c^2}-g \end{aligned}\right\} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Dan worden de karakteristieke vergelijkingen:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \pm c \\ \frac{dv}{dt} \pm \frac{g}{c}\frac{d(pn)}{dt} &= -g\frac{v/v/}{C^2R} \pm \frac{vg}{c}\sin I_b \end{aligned}}$$

geldig voor vloeistoffen.

en $\frac{p}{K} << 1$

Stelt men nog dat $v << c$, dan worden de verg.n. eenvoudiger:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \pm c \text{ en } \frac{dv}{dt} \pm \frac{g}{c}\frac{dh}{dt} = -g\frac{v/v/}{C^2R}}$$

geldig voor vloeistoffen

terwijl $\frac{p}{K} << 1$ en $v << c$

Voor gasleidingen gaat de afleiding van de karakteristieke vergelijkingen geheel analoog aan die voor vloeistofleidingen.
Er zal daarom worden volstaan met het geven van de resultaten.

<u>De karakteristieke vergelijkingen voor gasleidingen.</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \pm c \\ \frac{dv}{dt} \pm \frac{1}{\rho c}\frac{dp}{dt} &= -g\sin I_b - g\frac{v/v/}{C^2R} \\ c &= \sqrt{\frac{\alpha p}{\rho}} \end{aligned}}$$

gelding voor gassen terwijl $\alpha p << \frac{\alpha}{D} E$

(α is gasconstante).

Dit zijn dezelfde vergelijkingen als voor vloeistofleidingen, alleen de voortplantingssnelheid is verschillend.

LITERATUUR :

1. Dr. Ir. J.W. Reijn
- Partiële Differentiaalvergelijkingen -
Collegediktaat voor het college a 68 1973.

2. Dr. L. Kuipers en Dr. R. Timman
- Handboek der Wiskunde I -
Amsterdam, Scheltema en Holkema N.V. 1963.

3. M.B. Abbott
- An introduction to the method of characteristics -
London , Thames and Hudson 1966.

4. R. Courant and D. Hilbert
- Methods of mathematical physics vol 2 -
New York , Interscience 1962.

5. Dr. Ir. J.C. Schönfeld
- Propagation of tides and similar waves -
Proefschrift T.H. Delft 1953 (Met uitgebreid literatuuroverzicht)

5.5. HET TOEPASSEN VAN DE OPLOSSINGSMETHODE "INTEGRATIE M.B.V. KARAKTERISTIEKEN"

5.5.1. De voortplanting van een lange golf in een open leiding.

De hiervoor beschreven oplossingsmethode zal nu toegepast worden op een golf, die zich voortplant in een aan één zijde afgesloten bekken. Dit bekken ligt aan zee en heeft een lengte van 4.800 m en een breedte van 167 m. De bergende breedte is gelijk aan de stroomvoerende breedte, dus $b = b_s$. De bodem is horizontaal, dus $I_b = 0$.
Als randvoorwaarde voor $s = 0$ geldt geg. waterstanden op zee. Deze funktie is weergegeven op de eerste bijlage. Deze randvoorwaarde geldt vanaf $t = 0$. De randvoorwaarde aan de andere zijde van het bekken voor $s = 4.800$ m wordt gegeven door het feit, dat het bekken daar afgesloten is, dus $v = 0$.
Als beginvoorwaarden gelden op $t = 0$

$$h_{bekken} = h(x,0) = 3{,}60 \text{ m en } v(x,0) = 0 \text{ m/s.}$$

Voor het vinden van de toestand in een bepaald punt, dient te worden uitgegaan van de bekende toestand in twee andere verschillende punten.
De enige punten waar de toestand in het begin bekend is, zijn die punten, waarvoor de beginvoorwaarden gegeven zijn. In het x/t-diagram zijn dit hier alle punten waarvoor $t = 0$. Van hieruit wordt dus gestart.
In punt 0.00 is de toestand bekend nl. $h = 3{,}60$ m en $v = 0$ m/s op $t = 0$.

In dit punt 0.00 is dan $\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{gh} = 0 \pm \sqrt{10.3{,}60} = \pm 6$ m/s.

Dit zijn richtingen in het x/t-vlak. Doordat deze worden weergegeven door rechte lijntjes met een eindige lengte, fungeren zij als benadering voor een stukje karakteristiek. De "min-karakteristiek" valt hier buiten het x/t-diagram, zodat alleen de "plus-karakteristiek" ervoor kan zorgen, dat de toestand in andere punten berekend kan worden. Bij deze "plus-karakteristiek" in het x/t-vlak, hoort de karakteristiek, benaderd door de karakteristieke richting

$$dv \pm \sqrt{\frac{g}{h}}\, dh = -g \frac{v/v/}{C^2 R}\, dt$$

met het plusteken in het v/h-vlak.

Uit het punt 2.00 gaan evenzo twee karakteristieken met dezelfde richtingen als die in het punt 0.00 (controleer dit zelf).

De plus-karakteristiek uit 0.000 snijdt de min-karakteristiek uit 2.00 in het punt 1.02. De toestand in het punt 1.02, wat betreft de h en de v moet uit het v/h-diagram volgen.
De term in het rechter lid van bovenstaande karakteristieke vergelijking (t.g.v. de weerstand) vormt een komplikatie. De v is nl. nog niet bekend in het punt waarvan de toestand berekend moet worden.
Daarom zal steeds voor het verdisconteren van de weerstand de snelheid worden gebruikt in een bekend punt, waarin tevens de karakteristieke richting bepaald wordt.
Voor het te berekenen punt 1.02 bijv. is dit v = 0 (uit 0.00). De (sub) karakteristieke richtingen in het punt 0.00 zijn

$$dv \pm \sqrt{\frac{g}{h}}\, dh = 0 \text{ of ook } \frac{dh}{dv} = \mp \sqrt{\frac{h}{g}} = \mp\ 0{,}60 \text{ s.}$$

Deze karakteristieken worden getrokken uit het punt v = 0 m/s, h = 3,60 m in het v/h-vlak, waar dus punt 0.00 ligt. In het punt 2.00 heerst dezelfde toestand als in het punt 0.00, zodat dit punt zich op dezelfde plaats bevindt in het v/h-vlak als 0.00.
De karakteristieken van de punten 0.00 en 2.00 snijden elkaar dus in het punt v + 0 m/s, h = 3,60 m.
De toestand in het nieuwe punt 1.02 is blijkbaar dezelfde als die in de punten 0.00 en 2.00.
Bij het verder uitvoeren van de methode blijkt in de driehoek 0.00 - 4.00 - 4.08 niets veranderd te zijn. In de punten van deze driehoek heerst dus steeds de toestand v = 0 h = 3,60 (de rusttoestand). Wordt nu uit punt 1.02 met de min-karakteristiek naar de lijn x = 0 gegaan, dan doet de randvoorwaarde hier ter plaatse haar invloed gelden. Immers, de randvoorwaarde zegt, dat in het punt 0.04 de h = 3,40 m (de snelheid is nog onbekend). In het v/h-vlak wordt uit het punt 1.02 met de karakteristiek

$\frac{dh}{dv} = +\ 0{,}60$ s naar de voorwaarde h = 3,40 m gegaan. De snelheid v blijkt in 0.04 dan -0,33 m/s te zijn.
Nu wijzigt ook de karakteristieke richting $\frac{dx}{dh} = \pm\sqrt{gh}$ in

$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{gh} = -\ 0{,}33 \pm \sqrt{34} = 0{,}33 \pm 5{,}83$, in het punt 0.04. Uit

het punt 2.04 in het x/t-diagram gaat nog de karakteristiek

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{gh} = -6 \text{ m/s}.$$

Deze snijdt de karakteristiek uit het punt 0.04 in "het punt 1.06", een punt dat blijkbaar iets meer naar x = 0 toe ligt dan de raai x = 1.200 m, waar de karakteristieken elkaar gesneden zouden hebben als de v verwaarloosd zou zijn t.o.v. $\sqrt{gh}$. Nu gaat voor de bepaling van de toestand in het punt 1.06 ook de wrijving een rol spelen. Voor het bepalen van deze wrijving wordt de snelheid gebruikt in het punt 0.04 dus v = - 0,33 m/s. Wordt C aangenomen op 50 $m^{\frac{1}{2}}s^{-1}$, R = 3,40 m en g = 10 m s^{-2}, dan volgt voor de wrijvingsterm:

$$W = -g\,\frac{v/v/}{C^2R} = -10.\,\frac{-0{,}33\ .\ 0{,}33}{2.500\ .\ 3{,}40} = +\,1{,}3\ .\ 10^{-4}.$$

Uit punt 0.04 wordt (zie x/t-diagram) dt = 208 seconden verder gegaan in de tijd, dus Wdt = + 1,3 . 10^{-4} . 208 = + 0.027 m/s. De karakteristieke richtingen in het punt 1.15 van het v/h-diagram zijn dan:

$$dv = \mp\sqrt{\frac{g}{h}}\ dh + 0{,}027 = \mp\ 1{,}71\ dh + 0{,}027.$$

Dit kunnen lijnen zijn, als men dv en dh opvat als differentiegrootheden. Deze lijnen zijn van het type y = mx + n. Deze subkarakteristieken hebben een helling

$\frac{dh}{dv} = \mp\ 0{,}584$ maar worden over een afstand evenwijdig aan de v-as

Wdt = 0,027 m/s

naar rechts (of naar links) verschoven. De hier van toepassing zijnde subkarakteristiek snijdt de subkarakteristiek

$\frac{dh}{dv} = +\ 0{,}60$ uit punt 2.04 in het punt 1.06, waar de toestand nu afgelezen kan worden: h ≈ 3,41 m en v ≈ -0,32 m/s.

In het x/t-diagram zijn nu weer met behulp van deze toestand de karakteristieke richtingen in punt 1.06 te bepalen en de subkarakteristieke richtingen met weerstand in het v/h-vlak. Na behandeling van het punt 3.06 en voldoende aan de randvoorwaarde in x = 0, volgen de plaats en de toestanden in de punten 2.06 en 0,08. Op deze wijze voortgaande is voor ieder tijdstip in het

bekken de toestand te bepalen.
De toestand in het bekken wordt, bepaald aan de hand van de berekende toestand in discrete punten.
Wil men zekerheid hebben over de toestand in tussenliggende punten, dan zal men het karakteristiëkennet dienen te verdichten. Hoe fijner de mazen van het karakteristiekennet, hoe beter de benadering zal zijn.
Het is duidelijk, dat het op de bovenomschreven wijze meenemen van de weerstand veel rekenwerk met zich meebrengt. Neemt men de weerstand niet mee, of discretiseert men de weerstand als een speciale voorwaarde bijv. aan de mond, dan is de karakteristiekenmethode zeer eenvoudig uit te voeren, en draagt deze methode in grote mate bij tot het inzicht in het verschijnsel "Lange Golven".
Deze laatste benaderingswijzen komen ter sprake in de oefeningen, die bij het vak "Vloeistofmechanica b73A behoren".

5.5.2. De voortplanting van een drukgolf in een gesloten leiding.

Bij het hierna te behandelen voorbeeld van de voortplanting van een drukgolf in een gesloten leiding, wordt een andere methode om de weerstand te verdisconteren gebruikt, dan in het voorbeeld, dat onder 5.5.1. is behandeld.
In het navolgende zal namelijk de weerstand worden gediscretiseerd aan het begin van de leiding, zodat deze als randvoorwaarde aan het begin gaat gelden. Deze methode is óók toe te passen in het geval van voortplanting van lange golven in open leidingen. Deze methode blijkt aanzienlijk minder rekenwerk te vergen dan het continu meenemen van de weerstand.
We beschouwen een gesloten ronde leiding, waarin in de stationaire toestand water stroomt, met een gemiddelde snelheid $\bar{v} = 0{,}78$ m/s.
Daarvoor moet, volgens de wet van de Chézy, een piëzometrisch niveauverschil aanwezig zijn van

$$\Delta\,(pn) = \Delta\,h = \frac{\bar{v}^{\,2}L}{C^2R}\,,\ \text{immers is } \bar{v} = C\sqrt{RI} \text{ en } I = \frac{\Delta h}{L}\,.$$

In ons geval nemen we een leiding - lengte van $L \doteq 4.000$ m.
De doorsnede $D \doteq 0{,}40$ m, zodat de hydraulische straal $R = \frac{1}{4}D = 0{,}10$ m is.
De weerstandscoëfficiënt van Chézy $C = 40\ m^{\frac{1}{2}}\ s^{-1}$.
In stationaire toestand is er dus een piëzometrisch niveau-verschil tussen begin en eindpunt van de buis van 15 m. We stellen $h_1 = 50$ m en $h_2 = 35$ m.
De wrijving langs de gehele buiswand geven we weer door aan het beginpunt een vernauwing aanwezig te veronderstellen, die juist hetzelfde verlies aan piëzometrisch niveau veroorzaakt als de wrijving langs de gehele buiswand. Doordat we een instationaire toestand zullen veroorzaken door het sluiten van de leiding aan het einde, zal de snelheid van het water veranderen, zodat ook de wrijving steeds zal veranderen. Het concentreren van de wrijving aan het begin van de buis resulteert dan in het veranderlijk zijn van het verlies aan piëzometrisch niveau. Als randvoorwaarde links hebben we dus niet $h_{buis\ 1} = h_1 = 50$ m, maar een verband tussen v en h nl.

$$h_{buis\ 1} = h_1 - \frac{\bar{v}^{\,2}L}{C^2R} = 50-25\ v/v/.$$

Dit zijn 2 parabolen, die voor $v = 0$ aan elkaar aansluiten en waarvan de tak voor $v < 0$ convex is vanwege de modulusstrepen en de tak voor $v > 0$ concaaf. Zie fig. 6.b. van de bijlage. De weerstandsterm in de karakteristieke vergelijkingen is nu dus gelijk aan nul te stellen. De weerstand

is als randvoorwaarde ingevoerd; aan het begin treden ook intreeverliezen op, deze zijn echter klein t.o.v. de wrijvingsverliezen en worden hier dan ook verwaarloosd (kontroleren).
Aan de rechterzijde kan de buis worden afgesloten met een klep, waarbij een "sluitingsprogramma" kan worden gevolgd, zoals dat is weergegeven in fig. 1.0. van de bijlage. Dit zijn randvoorwaarden, die in werkelijkheid continu in de tijd veranderen maar in de benadering gediscretiseerd worden, door de afname van de uitstroomopening b.v. plotseling te veranderen op een aantal tijdstippen. De randvoorwaarden rechts zijn dan als volgt:

$$Q = \bar{v}.F = m.A.\sqrt{2g\Delta h_2} \quad \text{zodat} \quad \Delta h_2 = \left(\frac{F}{mA}\right)^2 \cdot \left(\frac{v^2}{2g}\right) \quad \text{en als de coëff. } m = 1,$$

$$h_{buis\ 2} = h_2 + \Delta h_2 = 35 + \left(\frac{F}{A}\right)^2 \cdot \left(\frac{v^2}{2g}\right) \qquad \text{in m t.o.v. het ref. vlak.}$$

Dit zijn een aantal parabolen in het eerste kwandrant van het v/h-vlak.
Onze twee noodzakelijke randvoorwaarden zijn nu dus bekend evenals de beginvoorwaarde nl. de stationaire toestand.
We nemen tenslotte nog aan, dat de buis horizontaal ligt, zodat $I_b = 0$.
Onze karakteristieke vergelijkingen worden dan:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \pm c \text{ en } \frac{dv}{dt} \pm \frac{g}{c}\frac{dh}{dt} = 0}$$

Omdat de voortplantingssnelheid c afhankelijk is van de eigenschappen van buis, buismateriaal en vloeistof, dienen deze nu bekend te zijn.
We veronderstellen dat de buis een wanddikte heeft van slechts $w = 1{,}7 \ 10^{-3}$ m en van een staalsoort is gemaakt, die een elasticiteitsmodulus $E = 2.\ 10^{11}$ N/m^2 heeft. De diameter $D = 0{,}40$ m. De vloeistof is water met een soortgelijke dichtheid $\rho = 1.000$ kg/m^3 en een kompressiemodulus $K = 2.\ 10^9$ N/m^2. Er volgt dan voor de voortplantingssnelheid van een drukgolf

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho/K + \rho/\left(\frac{we}{D}\right)}} = 750 \text{ m/s.}$$

Bij een buis van 4.000 m, is dan de looptijd v/d golf $\tau = \frac{4.000}{750} = 5{,}33$ s.

De karakteristieke richtingen worden nu

$$\frac{dx}{dt} = \pm 750 \text{ m/s, indien } dv = \mp \frac{1}{75} dh.$$

Voor de eenvoud van uitvoering kiezen we de assen en schalen zoals is aangegeven op de bijlage. Eén van de voordelen van deze keuze is, dat de plus-karakteristiek in het x,t-vlak dezelfde "richting" heeft als de erbijbehorende min-karakteristiek in het v,h vlak.
We beginnen in het punt 0, waar de toestand bekend is nl. de beginvoorwaarde "stationaire toestand" met h_2 = 35 m en v = + 0,78 m/s. Dit moet overeenkomen met de randvoorwaarde op x = 0; t = 0: schuif 100% open. Dit blijkt te kloppen. Voor de duidelijkheid is het gedeelte rondom h_2 = 35 m v = 0,78 m/s vergroot weergegeven in fig. 10. We vertrekken nu met de plus-karakteristiek uit 0 naar de randvoorwaarde op punt 1. Het blijkt dan dat de toestand in punt 1 niet veranderd is, hetgeen logisch is, omdat de stationaire toestand daar nog niet is veranderd. Ga voor u zelf na dat voor alle punten in de driehoek 0 - 4.000 - 1 hetzelfde geldt.
We gaan nu vanuit punt 1 met de plus-karakteristiek naar punt 2.
We merken nu op, dat aldaar de randvoorwaarde gewijzigd is, de schuif is nu nog maar voor 40% geopend. Dit geeft een parabool in het v/h-vlak, v/a gaan langs de min-karakteristiek door het punt 1 tot waar deze de bedoelde kromme "40%" open" snijdt. Dit punt geeft de toestand in punt 2 weer en het blijkt, dat door het gedeeltelijk sluiten van de opening de druk aldaar iets verhoogd wordt.
Vervolgens gaan we in het x/t-vlak langs de min-karakteristiek uit punt 2 naar punt 3, dus naar de randvoorwaarde, die de daar geconcentreerde wrijving weergeeft. In het v/h-vlak gaan we dan langs de erbij behorende plus-karakteristiek naar de R.V.W. links. Hieruit blijkt de toestand onmiddellijk rechts van de daar aangebrachte (denkbeeldige) vernauwing. Zo voortgaande, vinden we de toestand in de punten 6 en 7, die we overbrengen naar het grote diagram van fig. 11. Daar gaan we op dezelfde manier te werk, daarbij er weloverwogen zorg voor dragend, de veranderende randvoorwaarden rechts goed in te voeren.
Na in punt 9 aan de randvoorwaarde links voldaan te hebben, blijkt het geheel afsluiten van de opening, dus R.V.W. rechts is nu v = 0, te resulteren in een grote drukverhoging. Was in punt 8, dus bij de afsluiter op t = 8 maal de looptijd, de druk aldaar 42 m, 2 looptijden τ later (punt 10) is deze daar 86 m geworden. Het verdere proces wordt nu beheerst door twee randvoorwaarden: links de "wrijvingsvernauwing", rechts de voorwaar-

de v = 0.

Voortgaande langs de karakteristieken blijkt de wrijvingsrandvoorwaarde er de oorzaak van te zijn, dat de druk tegen de afsluiter steeds verder afneemt: de drukgolf wordt gedempt.

Het sterk verhogen van de druk door het plotseling geheel sluiten van de opening noemt men "waterslag". Het is duidelijk, dat dit soort situaties uiterst schadelijk kunnen zijn voor de vloeistofleiding. In de praktijk zal dan ook een ander sluitings-programma gevolgd moeten worden, dan het hier gebruikte. De methode der karakteristieken is een zeer bruikbare methode om verschillende programma's te testen.

Opm.

In het behandelde voorbeeld is zonder de toestand in tussengelegen punten te berekenen, van de ene randvoorwaarde naar de andere gegaan.

De toestand in de tussengelegen punten wordt bepaald door het karakteristiekennet te verdichten zoals besproken is in voorbeeld 5.5.1.

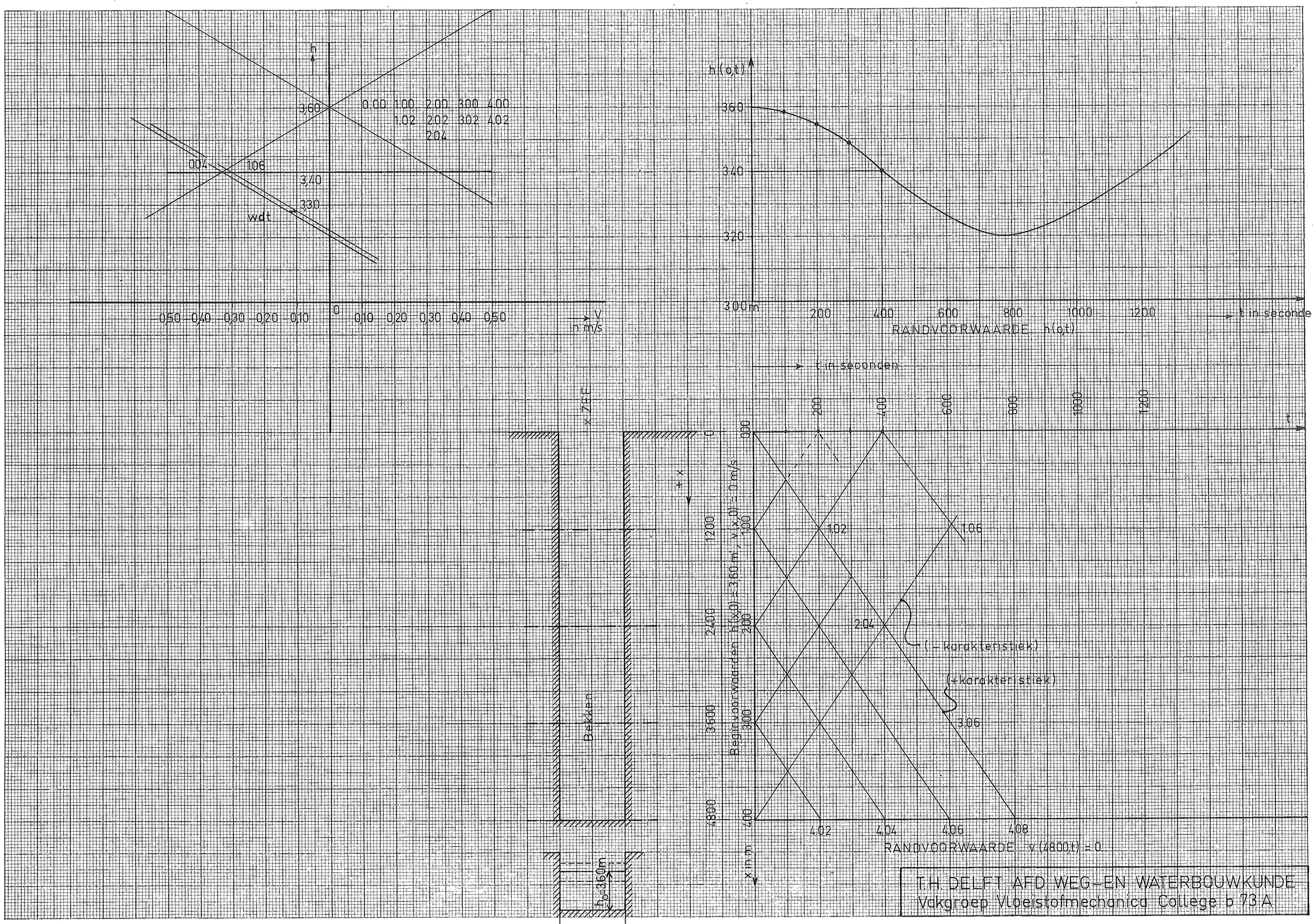
Het criterium van Joukowsky voor het ontwerpen van een sluitingsberekening is dat de sluitingstijd kleiner is dan 2 x de loop-tijd. [$\Delta h = \frac{c}{g} \Delta v$]. Dit is de eenvoudigste karakteristieke vgl.

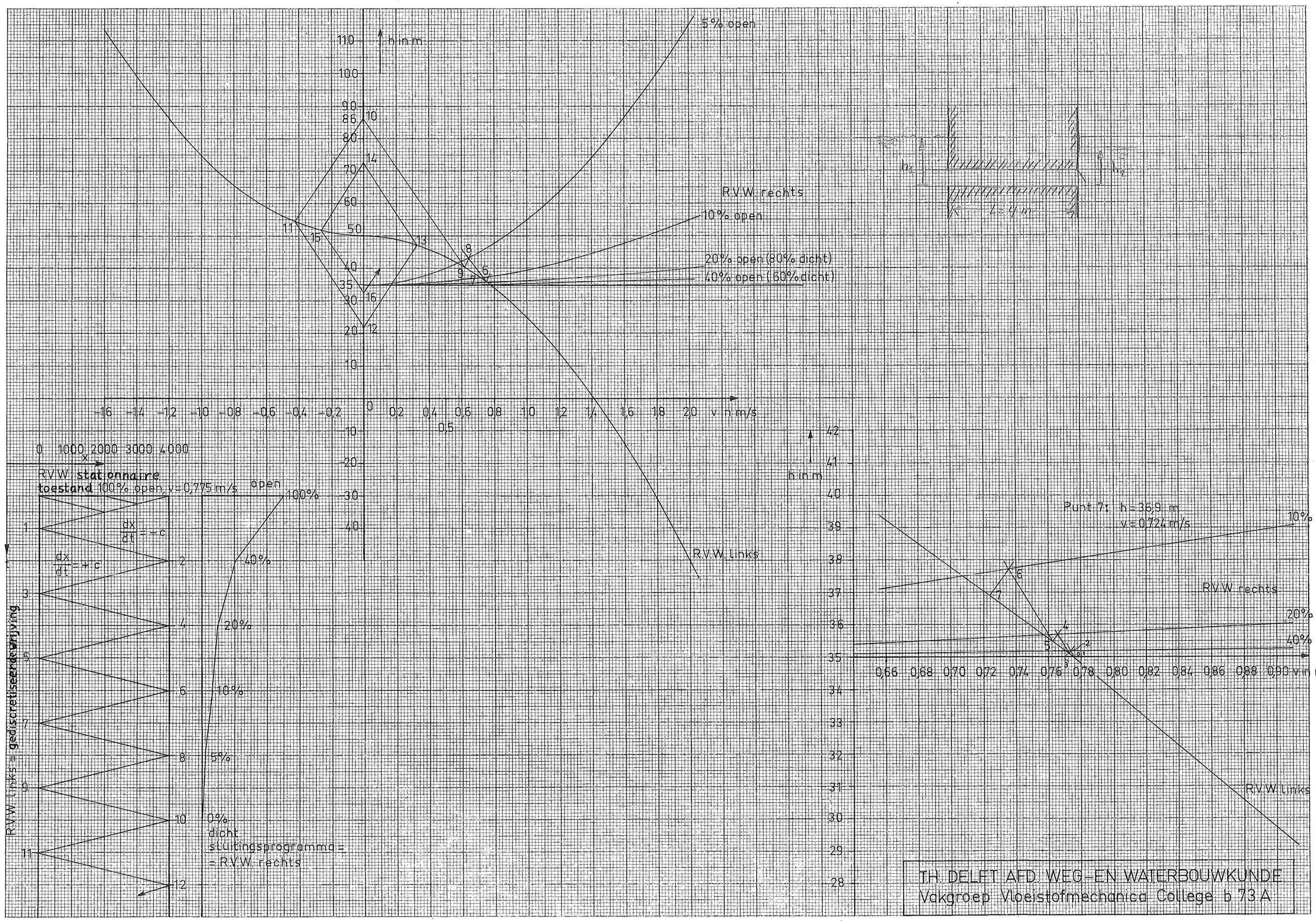
D. Kooman

C. Verspuy

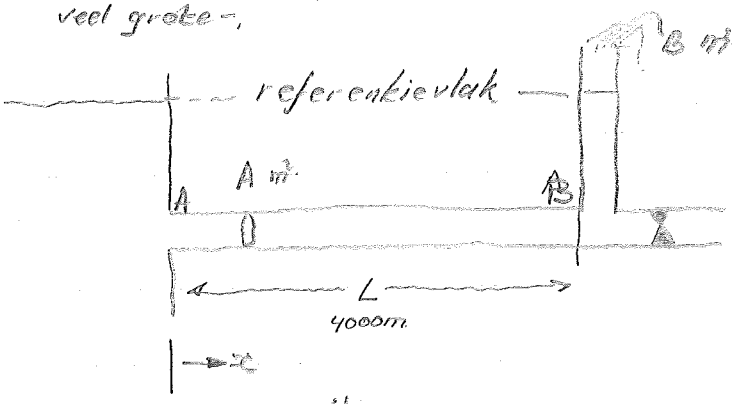
Delft, april 1974.

- In dit voorbeeld is geen sprake van cavitatie, de laagste druk is 20 m waterkolom. Bij 29-7 m waterkolom (onderdruk) ontstaat pas cavitatie.


h
3,60
3,40
3,30
0.00 1.00 2.00 3.00 4.00
1.02 2.02 3.02 4.02
2.04
004
106
wdt
-0,50 -0,40 -0,30 -0,20 -0,10 0 0,10 0,20 0,30 0,40 0,50
V
m/s
h(o,t)
360
340
320
300 m
200 400 600 800 1000 1200
t in seconde
RANDVOORWAARDE h(o,t)
t in seconden
x ZEE
Bekken
+x
Beginvoorwaarden h(x,0) = 3,60 m, v(x,0) = 0 m/s
0 1200 2400 3600 4800
000 100 200 300 400
1.02
1.06
2.04
3.06
(- karakteristiek)
(+ karakteristiek)
402 404 406 408
RANDVOORWAARDE v(4800,t) = 0
x in m
h₀=3,60m
b = bs = 16,7m
T.H. DELFT AFD. WEG- EN WATERBOUWKUNDE
Vakgroep Vloeistofmechanica College p 73 A


h in m
5% open
R.V.W. rechts
10% open
20% open (80% dicht)
40% open (60% dicht)
R.V.W. links
v in m/s
x
RVW stationnaire toestand 100% open, v = 0,775 m/s
open
100%
40%
20%
10%
5%
0% dicht
sluitingsprogramma = = R.V.W. rechts
R.V.W. links = gedilscretiseerde vrijving
Punt 7: h = 36,9 m
v = 0,724 m/s
R.V.W. rechts
R.V.W. links
T.H. DELFT AFD. WEG-EN WATERBOUWKUNDE
Vakgroep Vloeistofmechanica College b 73 A

Het verschil tussen een open en een gesloten leiding is dat bij een openleiding een klein drukverschil (ca. 1 m) en een lage c. Bij een gesloten leiding kan er een drukverschil optreden van wel 100 m waterkolom en ook de snelheid is veel groter.



Neem aan dat de drukgolf oneindig snel heen en weer loopt, zodat de invloed van de reflexie klein is, en Q constant is over de leiding.

Dus voor de leiding geldt

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q|Q|}{c^2A^2R}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad Q(x) = k$$

$$Q_B = B\frac{dh_B}{dt}$$

We de vgl (1) integreren over de leiding: $\int_A^B \frac{\partial h}{\partial x} = h_B - h_A = -\frac{L}{gA}\frac{dQ}{dt} - \frac{L|Q|Q}{c^2A^2R}$

We nemen B voor het gemak konstant. We veronderstellen dat de term $\frac{L|Q|Q}{c^2A^2R} = 0$ door een goede keuze van het ref.vlak is h_A nul. De 2 vgl. zijn dan

$$\left.\begin{aligned} Q_B &= B\frac{dh_B}{dt} \\ h_B &= -\frac{L}{gA}\frac{dQ}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_B = -\frac{BL}{gA}\frac{d^2Q}{dt^2} \quad \Rightarrow \text{oplossing } Q = ce^{\alpha t} \quad \Rightarrow \alpha^2 = -\frac{gA}{BL}$$

Dus α is complex.

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{gA}{BL}} = \pm i\omega_0 \quad \Rightarrow \text{alg. oplossing} \quad Q = c_1e^{i\omega_0 t} + c_2e^{-i\omega_0 t}$$

Dus: $h_B = -\frac{L}{gA}\cdot\{c_1 i\omega_0 e^{i\omega_0 t} - c_2 i\omega_0 e^{-i\omega_0 t}\}$

De integratieconstante wordt gevonden door de randvoorw.

Voor $t=0$: $Q = Q_0$, dus $c_1 + c_2 = Q_0$

$h_B = h_A = 0$, $c_1 - c_2 = 0$ $\qquad c_1 = \frac{1}{2}Q_0$, $c_2 = \frac{1}{2}Q_0$

$$Q = Q_0\left\{\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right\} = Q_0\cos\omega_0 t$$

$$h_B = \frac{L}{gA}\omega_0 Q_0 \sin\omega_0 t = \frac{LA}{gA}\sqrt{\frac{gA}{BL}}\cdot Q_0\sin\omega_0 t = \sqrt{\frac{L}{gBA}}\,Q_0\sin\omega_0 t = \sqrt{\frac{AL}{gB}}\,v_0\sin\omega_0 t$$

stel: $A = 1\,m^2$
$B = 1\,m^2$
$v_0 = 1\,m/s$
$L = 4000\,m$

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{gA}{BL}} = \sqrt{\frac{1}{4000}} = 1/20$ rad. $= \frac{2\pi}{T} = 40\pi$ sec ≈ 125 sec

zx de loptijd vgl met $\frac{L}{c_0} \Rightarrow \frac{125}{8} \Rightarrow$ groot, dus de drukgolf is verwaarloosbaar snel.

$h_{max} = \sqrt{\frac{AL}{gB}}\,v_0 = \sqrt{400} = 2\,m$ waterkolom

DE HARMONISCHE METHODE

Diktaat Vloeistofmechanica Kollege b73A

CONCEPT

januari 1973

Hoofdstuk 6 DE HARMONISCHE METHODE

6.1. Inleiding.

6.2. Het lineariseren van de differentiaal-vergelijkingen.

6.3. Het oplossen van de lineaire D.V. volgens de enkelvoudige Harmonische Methode.

6.4. Toepassing van de enkelvoudige Harmonische Methode.

6.5. Het berekenen van de voortplanting van z.g. seiches in een havenbekken.

6.6. Het principe van de meervoudige Harmonische Methode.

Dit gedeelte zal t.z.t. worden opgenomen in het diktaat

LANGE GOLVEN IN LEIDINGEN

DEEL II

6.1 INLEIDING.

Het beste inzicht in een verschijnsel verkrijgt men gewoonlijk door een analytische oplossing van de differentiaal-vergelijkingen. Voor een handelbare analytische oplossing moeten de differentiaal-vergelijkingen echter aan bepaalde eisen voldoen.
Zo zijn bijvoorbeeld voor lineaire vergelijkingen met konstante coëfficiënten in een aantal gevallen gemakkelijk analytische oplossingen te vinden.

In dit hoofdstuk worden analytische oplossingen besproken, waarbij verondersteld wordt dat het op te lossen probleem een periodiek karakter heeft. Bij verschillende golf-problemen is dit het geval (getij-golven, seiches), doch er doen zich twee problemen voor:

1e de differentiaal-vergelijkingen zijn niet-lineair;

2e de op te lossen funkties hebben niet de vorm van één enkele sinusvormige funktie.

Verondersteld wordt nu eerst dat de differentiaal-vergelijkingen wèl lineair zijn. Dat wil zeggen dat in de vergelijkingen bijvoorbeeld in h en Q, alle termen lineair zijn in:

$h,\ Q,\ \frac{\partial h}{\partial s},\ \frac{\partial h}{\partial t},\ \frac{\partial Q}{\partial s}$ of $\frac{\partial Q}{\partial t}$.

Als dat zo is dan kan men ook voor funkties met een betrekkelijk willekeurig verloop oplossingen geven.
Omdat de vergelijkingen lineair zijn kan men nl. gebruik maken van het beginsel van superpositie. De funkties h en Q (of h en v) worden opgevat als een som van sinusvormige funkties. Men kan voor elk van deze sinusvormige komponenten een oplossing vinden. Achteraf wordt de gezochte oplossing verkregen door de oplossingen voor alle komponenten te superponeren.
Opm.: Om een indruk te krijgen van de mogelijkheden van een dergelijke aanpak kan men b.v. 2 harmonischen bij elkaar optellen. Zet b.v. achtereenvolgens op schaal uit:

$h_1 = \hat{h}_1 \sin \omega t$, met $\hat{h}_1 = 0{,}50$ m en $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

$h_2 = \hat{h}_2 \sin (2\omega t - \kappa_2)$, met $h_2 = 0{,}20$ m en $\kappa_2 = \frac{\pi}{2}$;

$h = h_1 + h_2$

en

en

$h_1 = \hat{h}_1 \sin \omega t$, zie boven
$h_3 = \hat{h}_3 \sin (3\omega t - \kappa_3)$ met $\hat{h}_3 = 0{,}30$ m en $\kappa_3 = \frac{\pi}{2}$;
$h = h_1 + h_3$

In paragraaf 6.6 wordt het principe van een benadering, waarbij de funkties worden opgevat als reeksen van harmonische n nader besproken.
Daarbij zal blijken dat het onder 1e genoemde feit een belangrijke beperking geeft bij het uitvoeren van dat principe, omdat de oplossingen voor de verschillende komponenten elkaar beïnvloeden.
In 6.2 en 6.3 wordt eerst een oplossingsmethode besproken, waarbij veronderstelt wordt dat de funkties h en Q overal slechts één sinusvormige funktie bevatten. Als deze veronderstelling wordt gemaakt spreekt men wel van de enkelvoudige Harmonische Methode.
In 6.2 worden eerst de differentiaal-vergelijkingen lineair gemaakt.
De in 6.3 besproken analytische oplossing wordt in paragraaf 6.4 toegepast. Daarbij wordt voor een konkreet probleem een getallenvoorbeeld gegeven.

Een belangrijke toepassing heeft betrekking op de voortplanting van z.g. seiches in een havenbekken. Zoals in 6.5 zal blijken leent de Harmonische Methode zich bijzonder goed voor het onderzoek naar resonantie-verschijnselen. Daarbij kunnen in de praktijk zelfs vrij ingewikkelde sytemen (met splitsingspunten e.d.) op overzichtelijke wijze worden berekend.

6.2. HET LINEARISEREN VAN DE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

Zoals in hoofdstuk 2 (deel I) is afgeleid kan men de voortplanting van een lange golf in een open leiding beschrijven met een stelsel van twee simultane partiële differentiaal-vergelijkingen.
De continuïteits-vergelijking wordt vaak uitgedrukt in h en Q i.p.v. in h en v.
In dit hoofdstuk wordt voor de bewegingsvergelijking eveneens een vergelijking in h en Q gekozen. Gezocht wordt naar een oplossing voor het volgende stelsel D.V.n:
- de continuïteitsvergelijking (2-11) :

(6-1) $$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} = - b \frac{\partial h}{\partial t}}$$ en

- de bewegingsvergelijking (2-17), indien verondersteld wordt dat de bodemhelling I_b gelijk nul is:

(6-2) $$\boxed{\frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{C^2A^2R} Q|Q|}$$

Indien wordt uitgegaan van de vergelijkingen (2-11) en (2-17) dan impliceert dat een aantal veronderstellingen, die in hoofdstuk 2 worden omschreven.
Ter wille van de eenvoud wordt in het volgende gewerkt met de vergelijkingen (6-1) en (6-2).
Indien we de niet-analytische uitdrukking $Q|Q|$ even buiten beschouwing laten, zijn deze vergelijkingen reeds niet lineair, omdat de faktoren b , $\frac{1}{gA}$ en $\frac{1}{C^2A^2R}$ variëren met de plaats en met de hoogte van de waterstand. Deze faktoren zijn dus funkties van s en t.

In het algemeen zal het dwarsprofiel van b.v. een rivier-arm in de s-richting vrij grillig variëren. Daaruit volgt dat de grootheden A, b, R (en in principe ook C) variëren in de s-richting.
In de praktijk overwint men deze moeilijkheden door een dergelijke rivier in een aantal (niet te grote) vakken te verdelen. Voor elk vak wordt een voor dat vak representatief dwarsprofiel vastgesteld. Nadat een z.g. schematisatie is uitgevoerd mag men de drie hierboven genoemde faktoren (voor een bepaald vak) konstant stellen in de s-richting. Deze aanpak wordt ook bij andere oplossingsmethoden gevolgd.

Omdat de faktoren nog wèl afhankelijk zijn van de waterhoogte zullen deze nog met de tijd variëren.

Bij het afleiden van bovenstaande vergelijkingen is reeds verondersteld dat de hoogte waarover de waterspiegel varieert klein is t.o.v. de gemiddelde waterdiepte. Uitgaande van deze veronderstelling is de volgende benadering mogelijk, waarbij voor elk van de faktoren <u>een gemiddelde waarde</u> wordt bepaald.

Voor het representatief dwarsprofiel van een bepaald vak worden bij de gemiddelde waterstand de grootheden b, A en R bepaald.

De juiste bepaling van de coëfficiënt van de Chézy vormt in de praktijk een apart probleem. Het blijkt in veel gevallen noodzakelijk deze grootheid door "ijken" te bepalen (waarbij het verloop van het debiet Q moet worden gemeten!). Hierop wordt op deze plaats niet verder ingegaan.

We werken verder met de <u>konstante</u> faktoren:

$$b(h) \rightarrow b_{gem.} \rightarrow b$$

$$\frac{1}{gA} \rightarrow \frac{1}{gA_{gem.}} \rightarrow m$$

$$\frac{1}{C^2A^2R} \rightarrow \left(\frac{1}{C^2A^2R}\right)_{gem.} \rightarrow w$$

De vergelijkingen (6-1) en (6-2) gaan dan over in het volgende stelsel:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = - m \frac{\partial Q}{\partial t} - w\, Q|Q| \qquad (6\text{-}3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = - b \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (6\text{-}4)$$

In de volgende paragraaf wordt een oplossing volgens de z.g. Enkelvoudige Harmonische Methode besproken. Dat is een ANALYTISCHE oplossingsmethode die alleen mogelijk is als de D.V.n LINEAIR zijn.

Dit wil zeggen dat elk van de termen lineair moet zijn in h, Q, $\frac{\partial h}{\partial s}$ $\frac{\partial h}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial s}$ of $\frac{\partial Q}{\partial t}$.

Beschouwen we de vergelijkingen (6-3) en (6-4) dan zien we dat <u>nâ het voorgaande</u> alleen de <u>weerstandsterm</u> nog een niet-lineaire term is.

De modulus-strepen geven aan dat de term van teken wisselt indien de funktie Q van teken wisselt. Een analytische oplossing voor de hier beschouwde vergelijkingen wordt pas mogelijk indien men er in slaagt de weerstandsterm te vervangen door een lineaire term:

$$\boxed{- w\, Q|Q|} \longrightarrow \boxed{- k\, Q}$$

De vraag is nu wat men het best voor de konstante k kan invoeren. Dit probleem is het eerst door prof. dr. H.A. Lorentz opgelost.

Voor periodieke problemen, waarbij de funktie Q mag worden opgevat als een enkelvoudige sinusvormige funktie:

$$Q = \hat{Q} \cos (\omega t - \phi)$$

wordt in het "Verslag Staatskommissie Zuiderzee" beschreven op welke wijze k kan worden bepaald (1926). Deze benaderingswijze wordt hierna in het kort beschreven, waarna enige aandacht wordt besteed aan de interpretatie van het resultaat.

De arbeidsvoorwaarde.

Het kriterium dat door Prof. Lorentz werd gesteld kan als volgt worden geformuleerd:

"Bepaal k zodanig dat de arbeid, die gedurende een gehele periode verricht wordt, voor de beide termen gelijk is".

De weerstandsterm uit de bew. verg. (6-3) heeft de dimensie van een verhang, hetgeen kan worden opgevat als een VERVAL per eenheid van lengte s. Als we deze term met ρg vermenigvuldigen krijgen we een druk (d.w.z. een kracht per eenheid van oppervlakte) per eenheid van lengte:

$$\rho g \frac{1}{C^2 A^2 R} Q|Q| \qquad \left[N/m^2/m^1 = N/m^3 \right]$$

De arbeid, die gedurende een gehele periode wordt verricht, kan nu worden uitgedrukt als:

$$\int_0^T (\text{kracht})(\text{weg})$$

Volgens de arbeidsvoorwaarde moet gelden (indien we door ρg delen):

$$\int_0^T w\, Q|Q|\, ds = \int_0^T k\, Q\, ds$$

Indien voor Q gesubstitueerd wordt $Q = \hat{Q} \cos \omega t$ en omdat voor ds kan worden geschreven: $ds = v\, dt = \frac{Q}{A} dt$, vindt men achtereenvolgens:

$$\int_0^T \frac{w\, Q^2 |Q|}{A} dt = \int_0^T k \frac{Q^2}{A} dt$$

Indien we stellen $A = A_{gem.}$ dan valt deze grootheid eruit.

$$w\, \hat{Q}^3 \int_0^T \cos^2 \omega t \left| \cos \omega t \right| dt = k\, \hat{Q}^2 \int_0^T \cos^2 \omega t \; dt$$

We vinden dan voor k:

$$k = w\,\hat{Q}\,\frac{\int_0^T \cos^2\omega t/\cos\omega t/\,dt}{\int_0^T \cos^2\omega t\;dt} =$$

$$k = w\,\hat{Q}\,\frac{\int_0^{2\pi} /\cos\omega t/\,\cos^2\omega t.\,d(\omega t)}{\int_0^{2\pi} .\,\cos^2\omega t.d(\omega t)} = w\,\hat{Q}\,\frac{4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\omega t.\,d(\omega t)}{4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\omega t.d(\omega t)} =$$

$$k = w\,\hat{Q}\,\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 3\omega t + 3\cos\omega t)}{4}\,d(\omega t)}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 2\omega t + 1)}{2}\,d(\omega t)} =$$

$$k = \frac{w\,\hat{Q}}{2}\;\frac{\left(\frac{1}{3}\sin 3\omega t + 3\sin\omega t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left(\frac{\sin 2\omega t}{2} + \omega t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}$$

Voor k wordt na invoering van de integratiegrenzen gevonden:

$$k = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{C^2A^2R}\right)_{gem.}\hat{Q}\,\frac{\left(-\frac{1}{3} + 3\right)}{\frac{\pi}{2}}\,.$$

(6-5) $$\boxed{k = \frac{8}{3\pi}\left(\frac{1}{C^2A^2R}\right)_{gem.}\hat{Q}}$$

De waarde $\frac{8}{3\pi} \approx 0{,}85$ wordt "het getal van Lorentz" genoemd.
We zien dat behalve dit getal in de uitdrukking voor k ook voorkomen:

- een gemiddelde waarde voor de faktor w in de weerstandsterm ên
- de amplitude van de funktie Q!

Voor het bepalen van de faktor k dient men dan ook een goede indruk van de gezochte oplossing te hebben.
Dit feit maakt het noodzakelijk dat een berekening wordt uitgevoerd als een ITERATIE-PROCES.
Voor de eerste berekening zal men (voor elk van de verschillende vakken) de onbekende amplitude $\hat{Q}$ zo goed mogelijk schatten.
Uit de resultaten van de eerste berekening kan men een betere schatting voor de grootheden $\hat{Q}$ verkrijgen. De berekeningen kunnen nu opnieuw worden uitgevoerd. Indien nodig zal men daarna de berekeningen nog één (of twee) keer herhalen.

Het is mogelijk de hierboven beschreven benadering volgens Lorentz nader te interpreteren m.b.v. een figuur, die hieronder is weergegeven.
Voor de funktie $Q|Q|$ wordt geschreven $\hat{Q}^2 \cos \omega t \,|\cos \omega t|$.
In het voorgaande ging het er om het verloop in de tijd van de funktie

(6-6) $$\boxed{\cos \omega t \,|\cos \omega t|}$$

zo goed mogelijk te benaderen met een funktie K cos ωt.
In fig. 6-1 is het verloop van de funktie (6-6) uitgezet tegen de tijd (dikgetrokken lijn), terwijl ook het verloop van de funktie cos ωt is weergegeven.

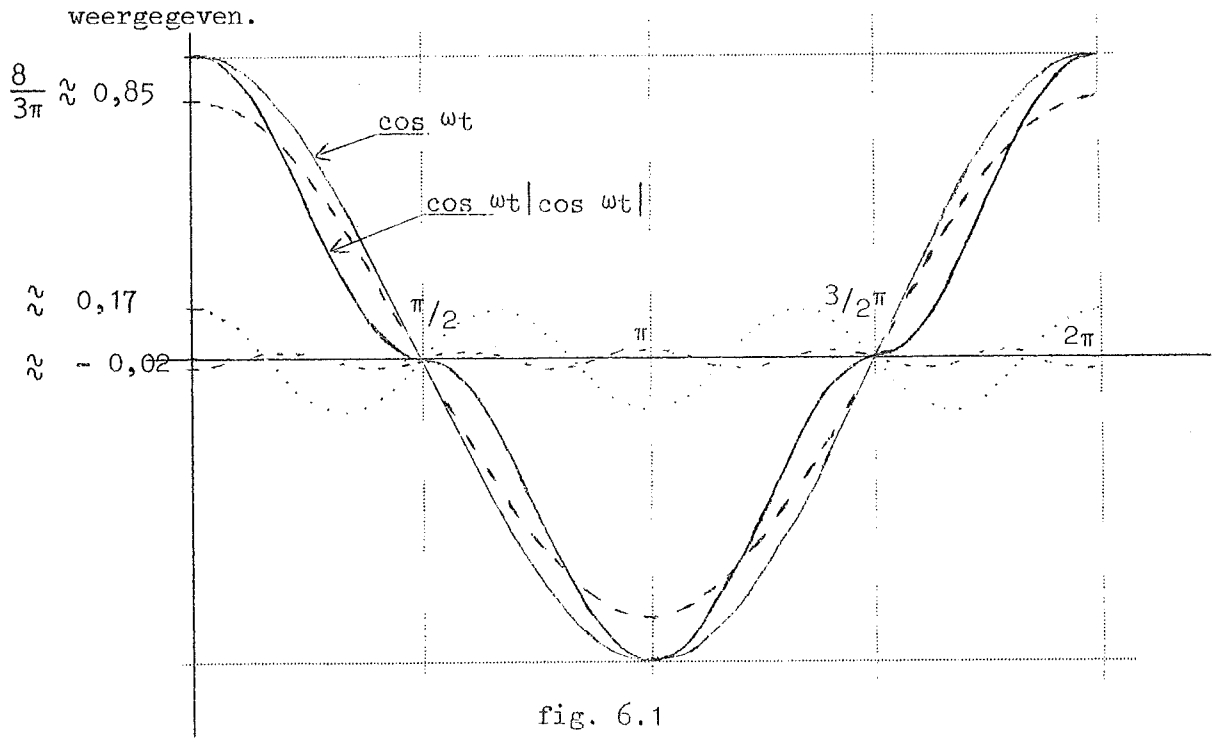


fig. 6.1

Het is mogelijk om de funktie $\cos \omega t \mid \cos \omega t \mid$ te benaderen met een reeks van Fourier:

$$\cos \omega t \mid \cos \omega t \mid = \tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t)$$

Indien men deze reeks afbreekt bij de termen met n = 5, dan kan men de volgende coëfficiënten bepalen:

$a_o = 0$, $a_1 = \frac{8}{3\pi} \approx 0{,}85$, $a_3 = \frac{8}{15\pi} \approx 0{,}17$ en $a_5 = -\frac{8}{105\pi} \approx -0{,}02$

terwijl blijkt dat $a_2 = a_4 = 0$ en $b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$. $= b_2$.

In de figuur 6.1 zijn de componenten van de reeks van Fourier met stippellijnen weergegeven.

De benadering volgens Lorentz geeft een resultaat dat overeenkomt met de eerste cos-term van de bovenstaande reeks van Fourier.

Met behulp van figuur 6.1 krijgen we een goed beeld van de nauwkeurigheid van de linearisering volgens Lorentz.

Opmerkingen:

1. In deze paragraaf werd een open leiding beschouwd. Het is natuurlijk duidelijk dat ook bij een gesloten leiding het lineariseren van de weerstandsterm (noodzakelijk voor een analytische oplossing) op dezelfde wijze kan worden aangepakt.

2. In de kolleges b73B "Getij-berekeningen" wordt aan het lineariseren van de differentiaal-vergelijkingen nadere aandacht besteed. Teneinde enig inzicht mogelijk te maken in de invloed van het niet-lineaire karakter van de D.V.n wordt in dit hoofdstuk onder 6.4 het principe van de z.g. meervoudige Harmonische Methode besproken.

In de volgende paragraaf 6.3 wordt voor de gelineariseerde D.V.n:

(6-7) $$\frac{\partial h}{\partial s} = -m \frac{\partial Q}{\partial t} - k\,Q$$

(6-8) $$\frac{\partial Q}{\partial s} = -b \frac{\partial h}{\partial t}$$

een analytische oplossing besproken.

6.3 HET OPLOSSEN VAN DE LINEAIRE D.V.n VOLGENS DE ENKELVOUDIGE HARMONISCHE METHODE.

In deze paragraaf wordt een analytische oplossing besproken voor het in 6.2 verkregen stelsel van twee lineaire differentiaal-vergelijkingen (6-7) en (6-8).

In zeer verschillende vakgebieden ontmoet men verschijnselen, die met lineaire differentiaal-vergelijkingen kunnen worden beschreven (zie b.v. de kolleges Alg. Mechanica I (b8) en Alg. Mechanica II(b9)).
Bij het oplossen van dergelijke D.V. is het gebruikelijk om met exponentiële funkties te werken.

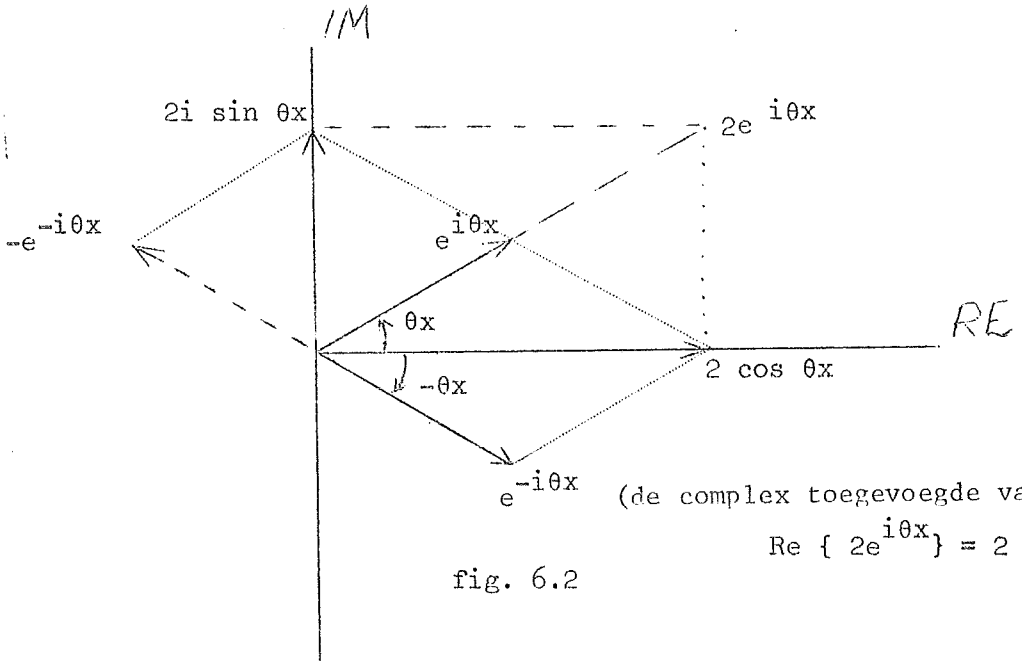
Zoals in het volgende zal blijken krijgt men te maken met uitdrukkingen, waarin complexe grootheden voorkomen. Het lijkt daarom zinvol om eerst nog enige aandacht te besteden aan de zin van het rekenen met complexe funkties. Daarbij kunnen tevens enkele eigenschappen van complexe getallen worden genoemd.
Voor een meer volledige informatie t.a.v. complexe getallen wordt verwezen naar handboeken (Analyse) of het stencil "Complexe getallen" dat wordt verstrekt bij het kolleg b9 (verkrijgbaar bij de concierge).

Beschouwd wordt even een gewone lineaire D.V.: $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + \theta^2 y = 0}$
waarin θ een reëel getal is.
Als we hierin substitueren $y = Ce^{\alpha x}$, vinden we de volgende karakteristieke vergelijking: $\alpha^2 + \theta^2 = 0$
Hieruit volgt $\alpha = \pm i\theta$, waarbij $i = \sqrt{-1}$.
De algemene oplossing van de D.V. wordt dus:

$$y = C_1 e^{i\theta x} + C_2 e^{-i\theta x}$$

In deze algemene oplossing kunnen de konstanten C_1 en C_2 nog elke waarde hebben (ook complex). De gevonden oplossing is blijkbaar de som van twee complexe oplossingen.

Zoals ook uit fig. 6.2 blijkt is de som van twee complexe grootheden die elkaars complex toegevoegde zijn, een reële grootheid.



(de complex toegevoegde van $e^{i\theta x}$)

$\mathrm{Re}\{2e^{i\theta x}\} = 2\cos\theta x$

fig. 6.2

Men kan m.b.v. reeksontwikkeling aantonen dat de volgende vergelijkingen gelden:

$e^{i\,\theta x} = \cos\theta x + i\sin\theta x$

$e^{-i\theta x} = \cos\theta x - i\sin\theta x$

Uit deze betrekkingen volgt dat resp.:

$$\cos\theta x = \frac{e^{i\theta x} + e^{-i\theta x}}{2} \qquad (= \cosh i\theta x)$$

$$\sin\theta x = \frac{e^{i\theta x} - e^{-i\theta x}}{2i} \qquad \left(= \frac{1}{i}\sinh i\theta x\right) = -i\sinh i\theta x$$

De oplossing voor y (zie terug) is dus reëel als $C_2e^{-i\theta x}$ de complex toegevoegde is van $C_1e^{-i\theta x}$.

Men kan eenvoudig aantonen dat $\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}$.

Omdat $\overline{e^{i\theta x}} = e^{-i\theta x}$ (zie fig. 6.2), moet dus gelden $C_2 = \overline{C_1}$.

Indien C_1 reëel is, dan moet C_2 gelijk zijn aan C_1.

We kunnen de reële oplossing als volgt schrijven:

$y = Ce^{i\theta x} + cc$,

Hierin staat cc voor de complex toegevoegde van $Ce^{i\theta x}$. Deze uitdrukking voor y willen we nog tot een meer gebruikelijke vorm herleiden.
<u>Als C reëel</u> is kunnen we schrijven (zie ook fig. 6.2)

$y = C(e^{i\theta x} + cc)$

$$\boxed{y = 2\ C \cos \theta x}$$

<u>Als C complex is,</u> b.v. $C = a + ib = |C|e^{i(\arg.C)}$, dan kunnen we de volgende uitdrukking afleiden:

$$\boxed{y = 2|C|\cos \{\theta x + (\arg.C)\}}$$

In de laatste uitdrukking kunnen we de faktor 2 met $|C|$ (de modulus-waarde van C) combineren.
Dit betekent dat we gebruik maken van de volgende gelijkheid:

$$Ce^{i\theta x} + cc = \mathrm{Re}\ \{2Ce^{i\theta x}\}$$

Passen we dit in een bepaald geval toe, dan geeft dat aanleiding tot iets eenvoudiger uitdrukkingen. In het voorbeeld komt dit als volgt tot uiting.
Nadat we voor een complexe oplossing vinden:
$y = C^{*}\ e^{i\theta x}$, kunnen we ineens voor de reële oplossing schrijven:

$$y = \mathrm{Re}\ \{C^{*}\ e^{i\theta x}\} = |C^{*}|\cos \{\theta x + (\arg.C^{*})\}$$

Vergeleken met het bovenstaande is C^{*} gelijk aan 2C.

Na deze opmerkingen kunnen we het oplossen van het stelsel partiële D.V.n (6-7) en (6-8) nog inleiden met de volgende opmerkingen.
Bekend is dat aan deze D.V. wordt voldaan door periodieke funkties h(s,t) en Q(s,t), die op verschillende manieren kunnen worden uitgedrukt.

Bijvoorbeeld voor de funktie $h(s,t)$ kunnen we drie uitdrukkingen onderscheiden:

(6-9)

1e $h(s,t) = a(s) \cos \omega t + b(s) \sin \omega t$

2e $h(s,t) = \hat{h}(s) \cos \{\omega t - \kappa(s)\}$, waarin $\hat{h} = \sqrt{a^2+b^2}$ en $\kappa = \text{arc tg } \frac{b}{a}$

3e $h(s,t) = \text{Re } \{h_c(s)\, e^{i\omega t}\}$

$h(s,t) = \text{Re } \{\hat{h}(s)\, e^{-i\kappa(s)}\, e^{i\omega t}\}$

In deze uitdrukking wordt met $h_c(s)$ <u>een complexe funktie h van s</u> bedoeld, die een dubbele informatie bevat namelijk betreffende de amplitude $\hat{h}(s)$ èn de fase-hoek $\kappa(s)$ van de funktie $h(s,t)$.

We kunnen de complexe funktie $h_c(s)$ nog alsvolgt uitdrukken:

(6-10) $h_c(s) = \hat{h}(s) \{\cos \{-\kappa(s)\} + i \sin \{-\kappa(s)\}\}$

Het verband, dat door de uitdrukkingen (6-9) onder 2e en 3e en (6-10) gegeven wordt, is een afspraak waar we ons in het volgende aan houden.

We stellen de oplossing in de vorm van e-machten, omdat dit eenvoudige bewerkingen geeft. We vinden dan complexe oplossingen, die zelf geen direkte fysische betekenis hebben. Omdat we te maken hebben met lineaire D.V., geldt het beginsel van superpositie.
Aan dit beginsel ontleent het complex rekenen zijn waarde. We kunnen namelijk reële oplossingen vinden door superpositie van complexe oplossingen.

In het volgende wordt een analytische oplossing behandeld voor het volgende stelsel simultane partiële differentiaal-vergelijkingen:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = - m \frac{\partial Q}{\partial t} - kQ \qquad (6\text{-}7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = - b \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (6\text{-}8)$$

Hierin zijn zoals we in 6.2 gezien hebben m, k en b <u>konstante faktoren</u>. De funkties h en Q zijn funkties van de onafhankelijk variabelen s en t: h(s,t) en Q(s,t).

Differentiëren we (6-7) naar s dan krijgen we:

(6-11) $$\frac{\partial^2 h(s,t)}{\partial s^2} = - m \frac{\partial^2 Q(s,t)}{\partial t\, \partial s} - k \frac{\partial Q(s,t)}{\partial s}$$

Differentiëren we (6-8) naar t dan geeft dit

(6-12) $$\frac{\partial^2 Q(s,t)}{\partial s\, \partial t} = - b \frac{\partial^2 h(s,t)}{\partial t^2}$$

Door uit (6-8) $\frac{\partial Q(s,t)}{\partial s}$ en uit (6-12) $\frac{\partial^2 Q(s,t)}{\partial s\, \partial t}$ te substitueren in vergelijking (6-11) krijgen we de z.g. "telegraaf-vergelijking".

(6-13) $$\boxed{\frac{\partial^2 h(s,t)}{\partial s^2} = mb \frac{\partial^2 h(s,t)}{\partial t^2} + kb \frac{\partial h(s,t)}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} = mb \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + kb \frac{\partial h}{\partial t}$$

<u>Opm.</u>: Door h(s,t) te elimineren in plaats van Q(s,t) is een vergelijking in Q(s,t) te verkrijgen van dezelfde gedaante. Een dergelijke vergelijking komt, zoals uit de naam blijkt, ook in de elektrotechniek voor.

Volgens het principe van scheiding der variabelen kunnen we in verg. (6-13) substitueren:

(6-14) $$h(s,t) = H(s).\, G(t)$$

We vinden dan: $$G(t) \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} = mb\, H(s) \frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} + kb\, H(s) \frac{\partial G(t)}{\partial t}$$

Als we nu beide leden van deze vergelijking delen door H(s).G(t) dan geeft dit:

(6-15) $$\frac{1}{H(s)} \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} = \frac{mb}{G(t)} \frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} + \frac{kb}{G(t)} \frac{\partial G(t)}{\partial t}$$

Volgens verg. (6-15) moet het linker lid (een funktie van s) voor alle waarden van s èn t gelijk zijn aan het rechter lid (een funktie van t). Dit is alleen het geval als beide leden gelijk zijn aan een konstante. We noemen deze konstante, die eventueel complex mag zijn, r^2.

Opm.: We zullen later zien wat de fysische betekenis is van deze grootheid r.

Uit verg. (6-15) volgen dan twee vergelijkingen, waaraan tegelijkertijd moet worden voldaan:

(6-16) $$\frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} - H(s)r^2 = 0$$

(6-17) $$mb\,\frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} + kb\,\frac{\partial G(t)}{\partial t} - G(t)\,r^2 = 0$$

- Een oplossing voor (6-16) is te vinden, door te substitueren $H(s) = Ce^{\alpha s}$. Dit geeft de volgende vergelijking waaruit α kan worden opgelost (indien $Ce^{\alpha s} \neq 0$):

$$\alpha^2 - r^2 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \alpha = \pm r$$

Dus twee gelijke wortels met tegengesteld teken.
De algemene oplossing voor (6-16) wordt:

(6-18) $$\boxed{H(s) = C_1 e^{rs} + C_2 e^{-rs}}$$

- Voor de algemene oplossing van verg. (6-17) stellen we $\underline{\underline{G(t) = C_3 e^{i\omega t}}}$ en substitueren dit in deze vergelijking:

$$C_3 e^{i\omega t}\,(mb\,\omega^2 - kb\,\omega\,i + r^2) = 0$$

Omdat $C_3\,e^{i\omega t} \neq 0$, volgt hieruit de volgende "karakteristieke vergelijking":

$$\boxed{r^2 - kb\,\omega i + mb\,\omega^2 = 0}$$

Hieruit kan r worden opgelost:

(6-19) $r_{1,2} = \pm \sqrt{-mb\,\omega^2 + kb\,\omega\,i}$

We hebben dus twee gelijke complexe wortels gevonden met verschillend teken:

$r_1 = r$ en $r_2 = -r$, waarbij $r = \sqrt{-mb\omega^2 + kb\omega i}$

Met het bovenstaande is een complexe oplossing voor h(s,t) gevonden:

$$h_c(s,t) = H(s).\ G(t) = (C_1 e^{rs} + C_2 e^{-rs})\ C_3 e^{i\omega t}.$$

Als we stellen

$(C_1 e^{rs} + C_2 e^{-rs})\ C_3 = C_I\ e^{rs} + C_{II}\ e^{-rs}$, dan gaat deze laatste uitdrukking over in:

(6-20) $$\boxed{h_c(s,t) = \{C_I\ e^{rs} + C_{II}\ e^{-rs}\}\ e^{i\omega t}} \qquad (= h_c(s)\ e^{i\omega t})$$

Uit verg. (6-20) volgt ook $\dfrac{\partial h_c(s,t)}{\partial t} = i\,\omega\,(C_I\ e^{rs} + C_{II}\ e^{-rs})\ e^{i\omega t}$

Als we deze uitdrukking in de vergelijking (6-8) substitueren, krijgen we:

$$\frac{\partial Q(s,t)}{\partial s} = -b\ \{i\omega\ (C_I\ e^{rs} + C_{II}\ e^{-rs})\ e^{i\omega t}\}$$

Integreren we deze vergelijking naar s dan geeft dit:

$$Q(s,t) = -\frac{b\,\omega\,i}{r}\ (C_I\ e^{rs} - C_{II}\ e^{-rs})\ e^{i\omega t} + f(t)$$

Omdat verondersteld wordt dat Q(s,t) <u>alleen</u> bestaat uit een <u>periodieke</u> funktie (met de frequentie ω), is hierin f(t) = 0.

Voor Q(s,t) vinden we dus de volgende complexe uitdrukking:

(6-21) $$\boxed{Q_c(s,t) = -\frac{b\,\omega\,i}{r}\ \{C_I\ e^{rs} - C_{II}\ e^{-rs}\}\ e^{i\omega t}} \qquad (= Q_c(s)\ e^{i\omega t})$$

De reële oplossingen, die worden gezocht kunnen we nu als volgt uitdrukken (zie (6-9)):

(6-22) $h(s,t) = \mathrm{Re}\ \{h_c(s)\ e^{i\omega t}\}$

(6-23) $Q(s,t) = \mathrm{Re}\ \{Q_c(s)\ e^{i\omega t}\}$

In deze uitdrukkingen komen complexe funkties van s voor, die zoals blijkt uit de oplossingen (6-20) en (6-21) voldoen aan de volgende vergelijkingen:

(6-24) $h_c(s) = C_I\, e^{rs} + C_{II}\, e^{-rs}$

(6-25) $Q_c(s) = -\dfrac{b\,\omega\, i}{r}\,\{\, C_I\, e^{rs} - C_{II}\, e^{-rs}\}$

De faktor $e^{i\omega t}$, die de periodieke variatie in de tijd aangeeft, is zonder meer bekend. Deze faktor kan dus bij de berekeningen verder buiten beschouwing blijven, om later aan de complexe oplossing te worden toegevoegd.

Als de complexe funktie $h_c(s)$ en $Q_c(s)$ berekend worden m.b.v. de uitdrukkingen (6-24) resp. (6-25), dan zijn de gezochte reële funkties te verkrijgen door volgens (6-22) en (6-23) het reële deel te nemen van $h_c(s,t)$ resp. $Q_c(s,t)$.

Opm. De relatie tussen de reële funkties en de complexe funkties (zie afspraken (6-9) en (6-10) zal vooral duidelijk worden, indien in 6.4 een toepassing wordt beschouwd.

Na het voorgaande gaat het er nu in de eerste plaats om de funkties $h_c(s)$ en $Q_c(s)$ te bepalen. De konstanten C_I en C_{II} in de uitdrukkingen (6-24) en (6-25) zijn in het algemeen complex en kunnen worden bepaald uit twee noodzakelijke randvoorwaarden.

Beschouwd wordt een gedeelte van een leiding:
een vak met een lengte $\Delta s = L$, waarvoor aan één zijde (s=0) zowel $h_c(o)$ als $Q_c(o)$ gegeven zijn (zie fig. 6.3).

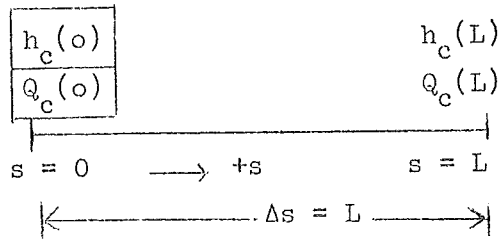


fig. 6.3.

Uit de vergelijkingen (6-24) en (6-25) volgt voor s = 0 resp.:

$$h_c(0) = C_I + C_{II}$$
$$Q_c(0) = -\frac{b\,\omega\,i}{r}\,\{C_I - C_{II}\}$$

Als we uit deze vergelijkingen C_I en C_{II} oplossen vinden we:

$$C_I = \tfrac{1}{2}\,h_c(0) - \tfrac{1}{2}\,\frac{r}{b\,\omega\,i}\,Q_c(0)$$
$$C_{II} = \tfrac{1}{2}\,h_c(0) + \tfrac{1}{2}\,\frac{r}{b\,\omega\,i}\,Q_c(0)$$

Substitueren we deze beide uitdrukkingen in de uitdrukkingen (6-24) en (6-25) dan krijgen we:

(6-26) $$h_c(s) = \{\tfrac{1}{2}\,h_c(0) - \tfrac{1}{2}\frac{r}{b\,\omega\,i}\,Q_c(0)\}\;e^{rs} + \{\tfrac{1}{2}\,h_c(0) + \tfrac{1}{2}\,\frac{r}{b\,\omega\,i}\,Q_c(0)\}\,e^{-rs}$$

(6-27) $$Q_c(s) = -\frac{b\,\omega\,i}{r}\Big[\{\tfrac{1}{2}h_c(0) - \tfrac{1}{2}\,\frac{r}{b\,\omega\,i}\,Q_c(0)\}\,e^{rs} - \{\tfrac{1}{2}\,h_c(0) - \tfrac{1}{2}\,\frac{r}{b\,\omega\,i}\,Q_c(0)\}\,e^{-rs}\Big]$$

We kunnen deze vergelijkingen nog herleiden tot

(6-28) $$h_c(s) = h_c(0)\cos h\,rs - \frac{r}{b\,\omega\,i}\,\sin h\,rs\,Q_c(0)$$

(6-29) $$Q_c(s) = -\,h_c(0)\,\frac{b\,\omega\,i}{r}\,\sin h\,rs + \cos h\,rs\,Q_c(0)$$

De vergelijkingen (6-28) en (6-29) geven voor s = L de volgende uitdrukkingen:

(6-30) $$\boxed{\begin{aligned} h_c(L) &= \cos h\,rL\;\;h_c(0) - \frac{r}{b\omega\,i}\;\sin h\,rL\,Q_c(0) \\ Q_c(L) &= \cos h\,rL\;\;Q_c(0) - \frac{b\,\omega\,i}{r}\;\sin h\,rL\,h_c(0) \end{aligned}}$$

Dit laatste stel vergelijkingen staat bekend als de "vierpool-vergelijkingen". Ze leggen een verband tussen de $h_c(0)$ en $Q_c(0)$ aan de 'ingang' van een vak en de $h_c(L)$ en $Q_c(L)$ aan de 'uitgang' van dat vak.
Men schrijft het stelsel (6-30) en (6-31) wel in de vorm:

(6-32) $$h_c(L) = L_v\;h_c(0) + M_v\;Q_c(0)$$

(6-33) $$Q_c(L) = N_v\;h_c(0) + O_v\;Q_c(0)$$

waarbij dus gesteld is: $L_v = \cos h\ rL$

$$M_v = -\frac{r}{b\ \omega\ i} \sin h\ rL$$

$$N_v = -\frac{b\ \omega\ i}{r} \sin h\ rL$$

$$O_v = \cos h\ rL.$$

De hier gedefinieerde grootheden L_v, M_v, N_v en O_v worden de <u>vakkonstanten</u> genoemd.

De grootheid rL wordt de voortplantingskonstante van een vak genoemd. De voortplantingskonstante per lengte-eenheid langs de s-as is r. Deze grootheid wordt nu wat nader beschouwd.

In het voorgaande was de uitdrukking (6-19) gevonden:

(6-19) $$r_{1,2} = \pm \sqrt{-m\ b\ \omega^2 + k\ b\ \omega\ i}$$

Als we stellen

$r = p + iq$ dan kunnen we na kwadrateren schrijven:

$$p^2 - q^2 + 2pqi = -mb\ \omega^2 + kb\ \ \omega i$$

Hieruit volgt: $p^2 - q^2 = -mb\ \omega^2$

$$pq = \frac{kb\ \omega}{2} \quad \text{of } q = \frac{kb\ \omega}{2p}$$

Substitueren we q dan vinden we:

$$p^2 - \frac{k^2b^2\omega^2}{4p^2} + mb\ \omega^2 = 0$$

Als we dit verder uitwerken dan kunnen we p als volgt uitdrukken:

$$p = \pm \sqrt{\frac{-mb\ \omega^2 + \sqrt{m^2\ b^2\ \omega^4 + k^2b^2\ \omega^2}}{2}}$$

(6-33) $$p = \pm\ \omega\sqrt{mb}\ \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \sqrt{-1 + \sqrt{1 + (\frac{k}{\omega m})^2}}$$

Men vindt voor q vervolgens: $q = \frac{k\ b}{2p}$:

(6-34) $$q = \pm\ \omega\sqrt{mb}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \sqrt{+1 + \sqrt{1 + (\frac{k}{\omega m})^2}}$$

Zowel voor p als voor q vinden we afgezien van het $\pm$ teken, een positieve reële grootheid.

Substitueren we in vergelijking (6-20) resp.:

(6-35) $r = p + iq$ en $-r = -p - iq$

dan gaat deze uitdrukking over in:

(6-36) $h_c(s,t) = \{C_I\, e^{(p+iq)s} + C_{II}\, e^{(-p-iq)s}\}\, e^{i\omega t}$ of

(6-37) $h_c(s,t) = C_I\, e^{ps} e^{iqs} e^{i\omega t} + C_{II}\, e^{-ps}\, e^{-iqs}\, e^{i\omega t}$

De term $C_I\, e^{ps}\, e^{iqs}\, e^{i\omega t} = C_I\, e^{ps}\, e^{i(\omega t+qs)}$ beschrijft een golf, die zich voortplant in de <u>negatieve</u> s-richting. Als men de tijd t wat laat toenemen dan moet men een stukje in de negatieve s-richting verplaatsen om dezelfde waarde van $(qs + \omega t)$ en dus van $e^{i(qs+\omega t)}$ te vinden.

e^{iqs} geeft de fase-verschuiving weer als funktie van s; q is de faktor voor de fase-verschuiving per eenheid van lengte langs s.

e^{ps} geeft de demping weer t.g.v. weerstand en berging; de golf loopt in de negatieve s-richting, dus deze term wordt inderdaad kleiner; p is de faktor voor de demping per eenheid van lengte langs s.

De term $C_{II}\, e^{-ps}\, e^{-iqs}\, e^{i\omega t} = C_{II}\, e^{-ps}\, e^{(\omega t-qs)}$ beschrijft een golf, die zich voortplant in de <u>positieve</u> s-richting.

De oplossing volgens (6-36) bestaat dus in het algemeen steeds uit de <u>som</u> van <u>twee lopende golven</u>. De grootte van de beide golven wordt bepaald door de waarden C_I resp. C_{II}, die volgen uit de randvoorwaarden (zoals we hebben gezien in het voorgaande).

<u>Opm.</u>: Het is mogelijk dat één van beide konstanten nul is, dan is er slechts sprake van één lopende golf. In het algemeen is dit echter niet het geval, omdat (partiële) reflektie plaats vindt door een obstakel (b.v. stuw) of door profielwijziging.

Ook de uitdrukking (6-21) voor $Q_c(s,t)$ is met het in (6-35) gestelde te schrijven als de som van twee golven.

De waterbeweging op een bepaalde plaats (horizontaal $Q(s,t)$ en vertikaal $h(s,t)$), die we berekenen resp. in de natuur meten, is dan ook steeds de resultante van twee interfererende golven.

6.4. TOEPASSING VAN DE ENKELVOUDIGE HARMONISCHE METHODE.

Om de in 6.3 behandelde oplossingsmethode te illustreren wordt in deze paragraaf een eenvoudige berekening besproken. Gezien het bijzondere karakter van de methode betreft het een lange-golfprobleem, waarbij de funkties h resp. Q (of v) in de tijd verlopen als één enkelvoudige sinusvormige funktie.

Beschouwd wordt eerst een gedeelte van een open leiding, waarin zich een periodieke lange golf voortplant. Verondersteld wordt dat men te maken heeft met een prismatische bak, waarvan de lengte niet te groot is, zodat het gedeelte als één vak mag worden behandeld.

In 6.3 zijn voor een dergelijk vak de vierpoolvergelijkingen afgeleid, die onder de volgende figuur worden gegeven.

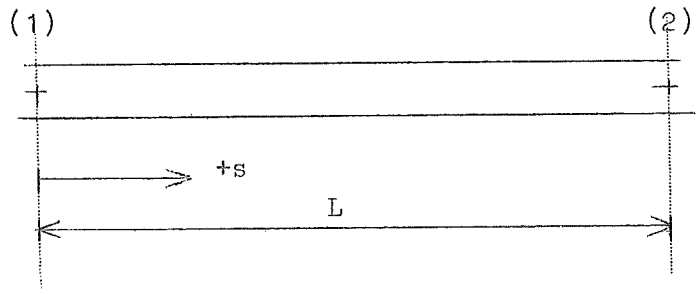


fig. 6.4

De positieve s-as is gekozen van (1) naar (2), de vergelijkingen (6-32) en (6-33) geven dan:

(6-38) $h_c(2) = L_v\, h_c(1) + M_v Q_c(1)$

(6-39) $Q_c(2) = N_v\, h_c(1) + O_v Q_c(1)$

De verschillende mogelijke problemen kunnen gezien de vergelijkingen (6-38) en (6-39) worden onderscheiden in 3 gevallen:

1e h(1) en Q(1) bekend
2e h(1) en Q(2) "
3e h(1) en h(2) "

Hierna zal van het geval ad 3e een getallenvoorbeeld worden gegeven. In de vergelijkingen (6-38) en (6-39) komen hyperbolische funkties van een complex getal voor.

$\cos h\ rL = \cos h\ (pL + iqL)$

$\sin h\ rL = \sin h\ (pL + iqL)$

Deze funkties kunnen worden berekend, door splitsing van reële en imaginaire delen. Daarbij zijn de hierna volgende regels van belang.

(6-40) $\cos h\ (a + i\ h) = \cos h\ a \cos h\ i\ h + \sin h\ a \sin h\ i\ b$

$\cos h\ i\ b = \cos b$ en $\sin h\ i\ b = i \sin b$

Dus voor (6-40) kan men schrijven:

(6-41) $\cos h\ (a + i\ h) = \cos h\ a \cos b + i \sin h\ a \sin b.$

(6-42) $\sin h\ (a + i\ b) = \sin h\ a \cos h\ i\ b + \cos h\ a \sin h\ i\ b$

Voor (6-42) kan men schrijven:

(6-43) $\sin h\ (a + i\ b) = \sin h\ a \cos b + i \cos h\ a \sin b$

Voorbeeld:

Stel dat bij een bepaald probleem van één vak alle noodzakelijke gegevens bekend zijn en dat de funkties h(1,t) en h(2,t) bekende periodieke funkties zijn.

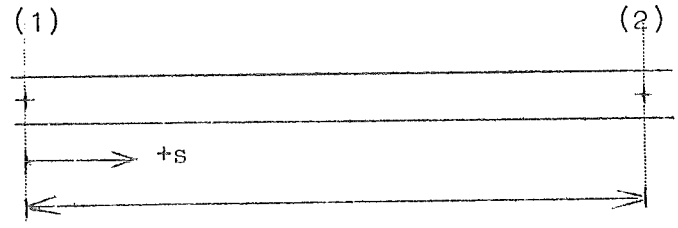


fig. 6.5

Het verloop van de waterstanden op de beide vakgrenzen is gegeven t.o.v. een referentie-vlak dat overeenkomt met de gemiddelde waterstand:

$h(1,t) = 0{,}00 + \hat{h}(1) \cos \{\omega t - k(1)\}$

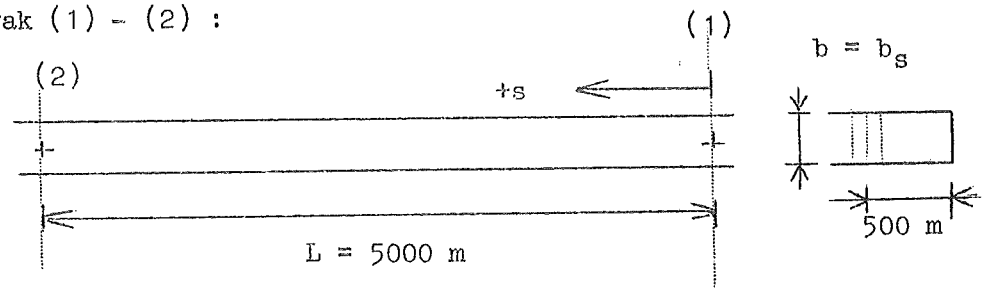
$h(2,t) = 0{,}00 + \hat{h}(2) \cos \{\omega t - k(2)\}$

De hoek frekwentie ω, de amplituden $\hat{h}(1)$ en $\hat{h}(2)$ en de fasehoeken k(1) en k(2) zijn gegeven op bijlage 6.1 blz. 1.

De vakkonstanten van het vak kunnen worden berekend L_v, M_v, N_v en O_v.
De funkties $h_c(1)$ en $h_c(2)$ worden bepaald.
Met (6-38) en (6-39) kunnen achtereenvolgens de grootheden $Q_c(1)$ en $Q_c(2)$ worden berekend.
De berekeningen zijn uitgevoerd op bijlage 6.1, terwijl de resultaten zijn verzameld op bijlage 6.2.

Voorbeeld toepassing Harmonische Methode.

Gegevens vak (1) - (2) :



Gemiddelde diepte t.o.v. de gem. waterstand	5.00	m;
Stroomvoerende breedte b_s = bergende breedte b =	300	m;
Vaklengte L	5000	m;
Coëfficiënt van de Chézy C =	50	$m^{\frac{1}{2}}s^{-1}$

Van de genoemde randvoorwaarden h(1,t) en h(2,t) zijn gegeven:
$\hat{h}(2) = 0{,}60$ m, $\kappa(1) = 100^o$ en $\hat{h}(1) = 0{,}50$ m, $\kappa(1) = 105^o$.
De periode T = 44700 s ,zodat de frekwentie $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}405\ 10^{-4}$ rad/s.
Geschatte waarde voor de amplitude van het debiet in het midden van het vak
$\hat{Q}_{gem} = 800\ m^3\ s^{-1}$

Volgens (6-33) is:

$$p = \omega\sqrt{mb}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + (\tfrac{k}{\omega m})^2}} = 0{,}1862\ 10^{-4}$$

Voor q vindt men dan q = $0{,}2738\ 10^{-4}$ → bereken voortpl snelheid vgl met $\sqrt{\frac{g}{\kappa L}}$

Dus rL = pL + iqL = 0,0931 + 0,1369 i en

cos h pL = 1,0043 cos qL = 0,9907

sin h pL = 0,0932 sin qL = 0,1365

Bij het bepalen van de vakkonstanten wordt rekening gehouden met (6-41) en (6-43).

Men vindt achtereenvolgens:

L_v = cos h rL = cos h pL cos qL + i sin h pL sin qL

= 0,9950 + 0,0127i

$M_v = -\frac{r}{b\omega i}$ sin h rL =

$-(0{,}6495 - 0{,}4418\ i)\ 10^{-3}\ (0{,}0924 + 0{,}1370\ i) = (-0{,}1205 - 0{,}0482\ i)10^{-3}$

$$N_v = -\frac{b\omega i}{r} \sin h\, rL = -(1{,}0526 + 0{,}7160)\, 10^3\, (0{,}0924 + 0{,}1370\, i) =$$

$$\underline{\underline{+\ 0{,}8900 - 0{,}2104\ 10^3\ i}}$$

$$O_v = L_v = \underline{\underline{0{,}9950 + 0{,}0127\ i}}$$

Uit de gegeven randvoorwaarden volgt:

$$h_c(2) = 0{,}60\ \{\cos(-100^\circ) + i \sin(-100^\circ)\} =$$
$$= 0{,}60\ \{-0{,}17365 \quad + i\,(-0{,}98481)\} = \underline{\underline{-0{,}1042 - 0{,}5909\ i}}$$

$$h_c(1) = 0{,}50\ \{\cos(-105^\circ) + i \sin(-105^\circ)\} =$$
$$= 0{,}50\ \{-0{,}25882 \quad + i\,(-0{,}96593\ \} = \underline{\underline{-0{,}1294 - 0{,}4830\ i}}$$

Uit (6-38) volgt nu dat:

$$Q_c(1) = \frac{\{h_c(2) - L_v\, h_c(1)\}}{M_v}$$

$$Q_c(1) = \frac{\{(-0{,}1042 - 0{,}5909\ i) - (+0{,}9950 + 0{,}0127\ i)(-0{,}1294 - 0{,}4830\ i)\}}{(-0{,}1205 - 0{,}0482\ i)\ 10^{-3}}$$

$$= \frac{0{,}0184 - 0{,}1087\ i}{-0{,}1205 - 0{,}0482\ i}\, 10^3 = \underline{\underline{(0{,}1792 + 0{,}8303\ i)10^3}}$$

Uit dit resultaat voor $Q_c(1)$ volgt: $\hat{Q}(1) \approx \underline{\underline{850\ m^3/s}}$ en $\phi(1) = 282^\circ 11^\circ$

Uit (6-39) volgt:

$$Q_c(2) = N_v\, h_c(1) + O_v\, Q_c(1) = (+\ 0{,}8900 - 0{,}2104\ 10^3\ i)(-0{,}1294 - 0{,}4830\ i) +$$
$$(0{,}9950 + 0{,}0127\ i)(+0{,}1792 + 0{,}8303\ i)\, 10^3 =$$
$$\left[(-0{,}1017 + 0{,}0268\ i) + (0{,}1678 + 0{,}8284\ i)\right] 10^3 =$$
$$\left[(+0{,}0660 + 0{,}8552\ i)\right] 10^3 .$$

Uit dit laatste resultaat volgt : $\hat{Q}(2) \approx \underline{\underline{860\ m^3/s}}$

$$\phi(2) = \underline{\underline{274^\circ\ 25'}}$$

Opm. 1. De randvoorwaarden bij dit getallenvoorbeeld zijn willekeurig gekozen.

2. De eerste schatting die voor $\hat{Q}$gem werd gemaakt was $\hat{Q}_{gem} = 500\ m^3/s$.

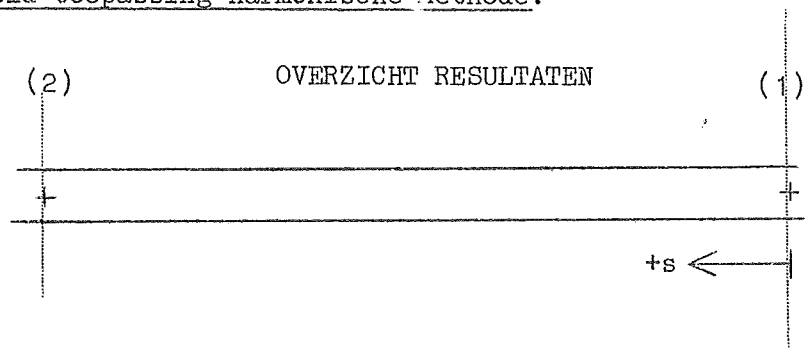
3. Nu vinden we, bij een schatting $\hat{Q}_{gem} = 800\ m^3/s$, :

$$\frac{\hat{Q}(2) + \hat{Q}(1)}{2} = \frac{860 + 850}{2} \approx 855\ m^3/s.$$

4. Men zou de berekeningen nog een keer kunnen herhalen voor een schatting b.v. $\hat{Q}_{gem} = 840\ m^3/s$.

Bijlage 6.2.

Voorbeeld toepassing Harmonische Methode.



$r = p + iq = (0{,}1862 + 0{,}2738\ i)\ 10^{-4}$

$rL = pL + iqL = 0{,}0931 + 0{,}1369\ i$

$L_v = 0{,}9950 + 0{,}0127\ i$	$M_v = (-0{,}1205 - 0{,}0482\ i)\ 10^{-3}$
$N_v = (+0{,}8900 - 0{,}2104\ 10^3\ i)$	$O_v = 0{,}9950 + 0{,}0127\ i$

VAKGRENS (2) :

$h_c(2) = -0{,}1042 - 0{,}5909\ i$
$\hat{h}(2) = 0{,}60$ m, $\kappa(2) = 100^o$
$Q_c(2) = (-0{,}0066 + 0{,}8552\ i)\ 10^3$
$\hat{Q}(2) \approx 860\ m^3/s$, $\phi(2) = 274^o\ 25'$

VAKGRENS (1) :

$h_c(1) = -0{,}1294 - 0{,}4830\ i$
$\hat{h}(1) = 0{,}50$ m, $\kappa(1) = 105^o$
$Q_c(1) = (-0{,}1792 - 0{,}8303\ i)10^3$
$\hat{Q}(1) \approx 850\ m^3/s$, $\phi(1) = 282^o\ 11'$

Opm. 1. Met bovenstaande grootheden is een eenvoudige kontrole mogelijk door uitgaande van gegeven h(1,t) en Q(1,t) de funkties h(2,t) en Q(2,t) te berekenen.

De toepassing van de Harmonische Methode komt blijkbaar daarop neer, dat voor een bepaald vak van twee bekende funkties de amplitude en de fasehoek wordt ingevoerd en van twee onbekende funkties de fase en de amplitude worden berekend.
Het verloop van de funkties in de tijd ligt van het begin af aan vast.

Opm.: 1. De complexe funkties bevatten dubbele informatie, namelijk betreffende de amplitude en betreffende de fasehoek.

2. In paragraaf 6.5 wordt een probleem ad 2e besproken, waarbij naast h(1,t) de tweede randvoorwaarde gegeven is als Q(2,t) = 0 voor alle waarden van t.

3. Vanzelfsprekend zal men bij de meeste praktijkproblemen niet kun nen volstaan met een schematisatie tot slechts één vak. In het kollege b73B wordt besproken hoe een benedenrivier (-engebied, delta) of een havencomplex kan worden geschematiseerd tot een systeem van takken en knooppunten.
Voor ieder vak geldt een stel vierpool-vergelijkingen. Het komt er op neer de vakken aan elkaar te schakelen, waarbij aan "splitsingspunt-voorwaarden" moet worden voldaan.
In het kollege b73A wordt hierop niet verder ingegaan.

4. Het verdelen in niet te grote vakken is ook in het geval van een onvertakte prismatische open leiding nodig.
In de gelineariseerde weerstandsterm komt in de faktor k ondermeer de amplitude van de funktie Q (in het midden van het vak) voor.
Teneinde de weerstand voldoende nauwkeurig te verdiskonteren zal men de vaklengte dienen te beperken.
Voor berekeningen in de praktijk kan men b.v. denken aan een maximum vaklengte van b.v. $^1/_{50}$ maal de golflengte. In het algemeen is het verstandig om de invloed van de vaklengte na te gaan door bij een bepaald probleem de vaklengte te variëren.

Voor nadere gegevens betreffende de toepassing van de Harmonische Methode voor getij-problemen kan worden verwezen naar de bij dit gedeelte van het kollege behorende oefening 4.

In het kollege b73A wordt deze oplossingsmethode toegepast teneinde de voortplanting van z.g. seiches in een havenbekken te berekenen. (zie volgende paragraaf 6.5). Daarbij zal duidelijk worden dat de verhouding tussen de golflengte en de lengte van het bekken van groot belang is voor het golfverschijnsel.

6.5 HET BEREKENEN VAN DE VOORTPLANTING VAN Z.G. SEICHES IN EEN HAVENBEKKEN.

6.5.1. Inleiding.

In een haven, of langs de kust in zee, kunnen doorlopend getijwaarnemingen worden verricht m.b.v. een registrerende peilschaal. Een dergelijke peilschaal wordt meestal zo gekonstrueerd, dat de golven met een hoge frequentie (windgolven) worden uitgedempt.
Indien men de waarnemingen bestudeert, dan blijkt, dat zich veelvuldig storingen in de normale getijbeweging voordoen. Deze storingen zijn van tweeërlei aard:

1. langzaam verlopende storingen, die een gevolg zijn van opstuwing van het water door wind (windeffekt, verloopt meestal over meerdere dagen).
2. snel verlopende storingen, die veelal worden veroorzaakt door snelle veranderingen in de meteorologische omstandigheden.

Het opvallende wat betreft de laatstgenoemde storingen is, dat de waterspiegelvariaties, die in een havenbekken worden geregistreerd, meestal veel groter zijn dan die in de aangrenzende open zee.
De waterstandsvariaties vinden in een relatief korte tijd plaats. Dit feit en de aanzienlijke stroomsnelheden, die hier een gevolg van zijn, maken het verschijnsel zeer hinderlijk voor de scheepvaart:

a. grote troskrachten;
b. stoten tegen aanlegsteigers o.d.;
c. moeilijkheden bij het schutten, vooral bij een sluis met roldeuren;
d. onvoorziene veranderingen in de stroom (snelheid en richting).

De verstoringen, die verantwoordelijk zijn voor deze hinder, kunnen worden veroorzaakt door:

1. zware stormen op een gedeelte van het zee-oppervlak;
2. plotselinge veranderingen van de luchtdruk;
3. veranderingen van windkracht of windrichting;
4.. aardbevingen, grondafschuivingen e.d.

De verstoringen, die zich op zee voordoen, kunnen worden onderscheiden in:

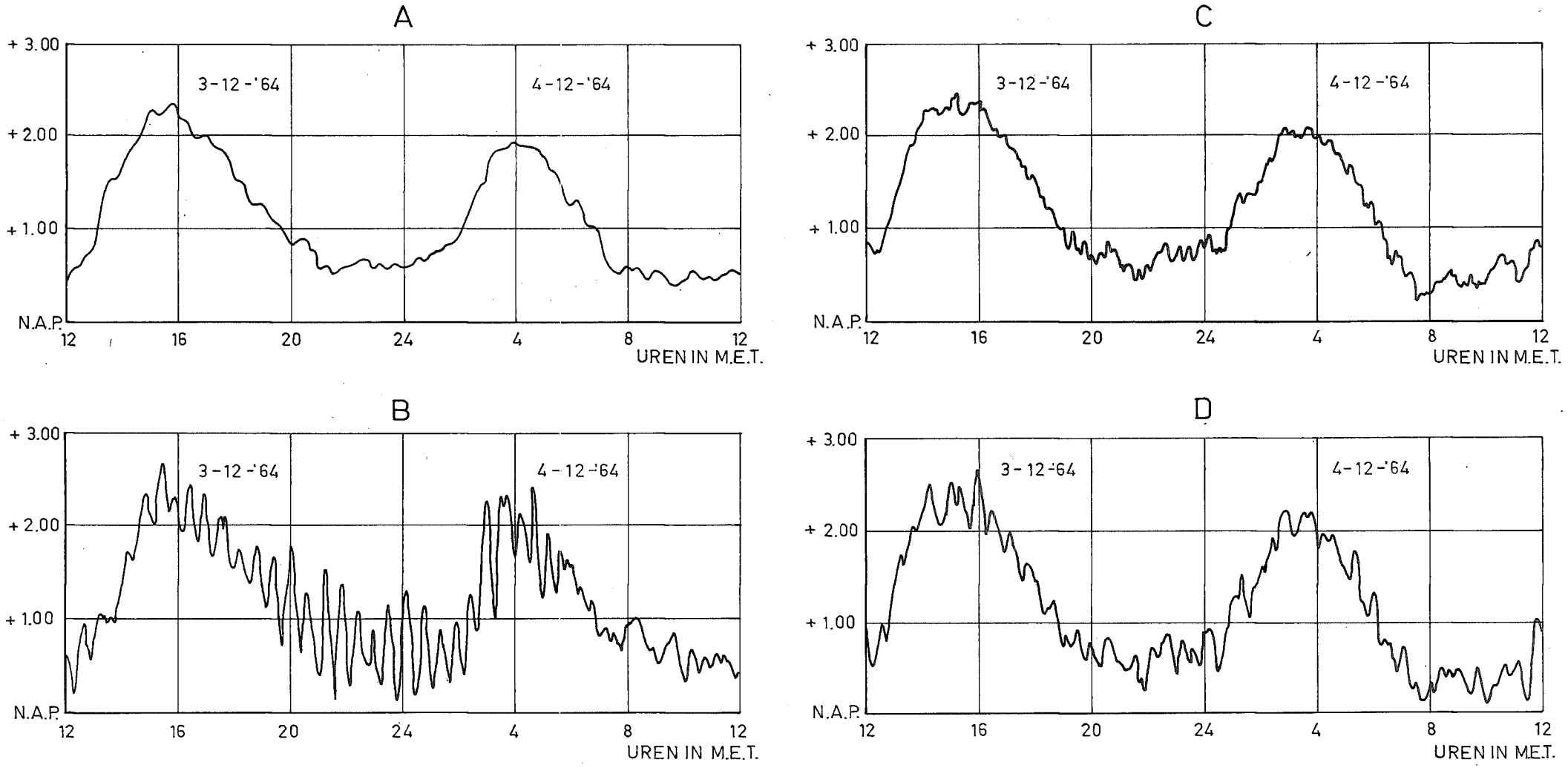
1. "buistoten", als het gaat over min of meer solitaire verstoringen van de waterspiegel;
2. "bui-oscillaties", indien de verstoringen zich in een min of meer regelmatige reeks voordoen (die vrij lang kan zijn).

Indien een havenbekken aan zeezijde wordt aangestoten door een solitaire verstoring dan zal zich in de haven een golf gaan voortplanten. Aan het gesloten einde èn aan de havenmond vindt (partiële) terugkaatsing plaats, zodat het water in de haven gaat schommelen. Na de incidentele storing zal deze beweging na verloop van tijd uitdempen.
Indien de verstoring aan de havenmond min of meer periodiek is dan zal deze worden versterkt.
De mate van versterking wordt bepaald door:

a. de lengte van de reeks oscillaties, die zich voordoen aan de haveningang;
b. de periode van de oscillaties;
c. de afmetingen van het havenbekken.

Het verschijnsel wordt zeer hinderlijk, indien de verhouding tussen de genoemde faktoren ongunstig is. De variaties van de waterspiegel in havens, die door bui-oscillaties worden veroorzaakt, worden SEICHES genoemd.
De naam seiches stamt uit Zwitserland, waar op het meer van Genève reeds lang dergelijke schommelingen geregistreerd zijn.
Later is het een verzamelnaam geworden voor bovengenoemde golven, met een periode van enkele minuten tot soms meer dan een uur.
De amplitude van de bui-oscillaties in zee (b.v. meetpaal Katwijk) is bijna steeds kleiner dan 0,20 m. In de haven van IJmuiden zijn wel waterstandsvariaties geregistreerd van ca. 1,50 m gedurende ongeveer 20 minuten (zie: de bijlage). Dit betekent in dat geval een versterking met een faktor 8. De versterkingsfaktor is ondermeer afhankelijk van de afmetingen van de haven en de haventoegang.
Bij het ontwerpen van een nieuwe haven of voor de uitbreiding ("verbetering") van een bestaande haven, mag een onderzoek van het verschijnsel daarom niet achterwege blijven.
Een dergelijk onderzoek bestaat uit twee delen:

1. Een uitgebreid statistisch onderzoek naar het vóórkomen van seiches in de open zee ter plaatse.
2. Een onderzoek om het hinderlijke effekt van de seiches te verminderen.



Op 3 en 4 december 1964 geregistreerde waterstanden
A Katwijk (meetpaal in zee)
B IJmuiden (Noordersluis)
C Hoek van Holland
D Calandkanaal

Overgenomen uit: Driemaandelijks Bericht Deltawerken № 33 aug. '65

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
Afd. Weg- en Waterbouwkunde

VLOEISTOFMECHANICA
KOLLEGE b 73 A

720078

ad 1. Wat betreft het eerste punt volstaan we met de opmerking, dat vooral gelet moet worden op de betrouwbaarheid van waarnemingen. Enige faktoren die deze betrouwbaarheid ongunstig kunnen beïnvloeden zijn:

a. de nauwkeurigheid van de registrerende peilschaal voor golven met een dergelijke vrij grote frequentie. Deze peilschalen zijn meestal zodanig ontworpen, dat golven met een hoge frequentie (windgolven) worden uitgefilterd. In de loop van de tijd kan de konstruktie zo zijn beïnvloed dat óók de seiches met een hogere frequentie niet worden geregistreerd.

b. de plaats van de registrerende peilschaal. Het zal hierna duidelijk worden dat door resonantie-verschijnselen een fout beeld kan ontstaan w.b. de hoogte van de seiches, die zich op zee voordoen.

ad 2. Om de hinder, die van seiches wordt ondervonden, te beperken, kunnen b.v. de volgende mogelijkheden worden nagegaan:

a. het verbinden van verschillende havenbekkens;

b. het ontwerpen van geschikte overlaat;

c. de haven een bijzondere vorm geven;

d. de haven aansluiten op een lang kanaal of op een rivier.

De grote moeilijkheid, die we bij een dergelijk onderzoek ontmoeten, is dat de spreiding in de perioden van de bui-oscillaties, die worden waargenomen op een bepaalde plaats, meestal vrij groot is. Hierdoor is het onmogelijk om in een ontwerp de hinderlijke invloed van de seiches geheél te voorkomen. Men zal slechts kunnen streven naar een optimum in die zin, dat de verhouding tussen de kosten en de schadeverwachting verantwoord is.

6.5.2. Een eenvoudige berekening.

Na de korte inleiding wordt in deze paragraaf voor een erg eenvoudig geval een berekening opgezet. Daartoe wordt een havenbekken geschematiseerd tot één prismatische bak met een lengte L. (zie figuur 6.6). De randvoorwaarde h(L,t) in zee is bekend. De randvoorwaarde aan de andere zijde volgt uit het feit dat het bekken is afgesloten: Q(o,t) = 0 voor alle waarden van t.

De positieve s-richting (de richting waarin wordt gerekend) is gekozen van 0 naar L. In deze richting wordt het debiet positief genoemd.

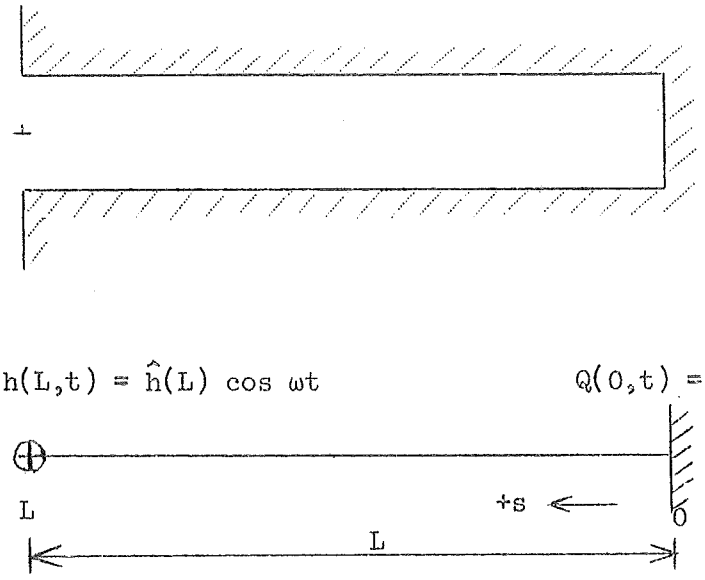


fig. 6.6.

Omdat $Q(0,t) = 0$ geven de vierpool-vergelijkingen $\left(Q_c(0) = 0\right)$:

(6-44) $h_c(L) = L_v\, h_c(0)$

(6-45) $Q_c(L) = N_v h_c(0)$

Met deze vergelijkingen kunnen de beide onbekenden $h_c(0)$ en $Q_c(L)$ worden bepaald indien L_v en N_v bekend zijn (zie verg. (6-30) en (6-31)).
De relatie tussen de complexe grootheden, waarmee we rekenen, en de reële grootheden, waarin we geïnteresseerd zijn, is bekend (zie (6-9) en (6-10)).
We willen nu in de eerste plaats een uitdrukking vinden voor de verhouding tussen $\hat{h}(0)$ en $\hat{h}(L)$. Deze uitdrukking kan worden gevonden door de verhouding tussen de absolute waarden van de complexe funkties te bepalen.
Uit verg. (6-44) volgt dat:

$$|h_c(L)| = |L_v h_c(0)|$$

Men kan aantonen dat in het algemeen geldt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

We kunnen dus schrijven:

$$|h_c(L)| = |L_v| \cdot |h_c(0)|$$

Uit deze laatste betrekking volgt dat:

$$\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \frac{1}{|L_v|}$$

Met de uitdrukking voor L_v (zie blz. 6.18) vinden we:

(6-46) $$\boxed{\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \frac{1}{|\cos h\ rL|}}$$

De 'amplitude' van een complex getal $z = a + ib$ is $\hat{z} = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Als we rekening houden met (6-41) dan kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} |\cos h\ rL| &= \sqrt{\cos h^2\ pL \cos^2 qL + \sin h^2\ pL \sin^2 qL} \\ &= \sqrt{\cos h^2\ pL \cos^2 qL - \sin h^2\ pL \cos^2 qL + \sin h^2\ pL} \\ &= \sqrt{\cos^2 qL + \sin h^2\ pL} \end{aligned}$$

Voor (6-46) vinden we dan:

(6-47) $$\boxed{\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \frac{1}{\{\cos^2 qL + \sin h^2 pL\}^{\frac{1}{2}}}}$$

Deze verhouding wordt de <u>versterkingsfaktor</u> genoemd.

<u>Opm.</u>: De grootheden qL en pL (dimensieloos) worden uitgedrukt in radialen, omdat ω is uitgedrukt in radialen per sekonde.

Eenvoudigheidshalve wordt nu eerst verondersteld dat de <u>weerstand</u> mag worden <u>verwaarloosd</u>. In dat geval mag men stellen $k = 0$. Uit (6-33) volgt dan $p = 0$, terwijl (6-34) voor q geeft:

$$q = \omega\sqrt{mb}$$

We vinden dus in een geval zonder weerstand:

$$r = p + iq = 0 + i\ \omega\ \sqrt{mb}$$

Uit (6-46) of (6-47) volgt in dat geval (met weerstand is nul) de volgende uitdrukking:

(6-48) $$\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \frac{1}{|\cos qL|} = \frac{1}{|\cos \omega \sqrt{mb}\ L|}$$

We kunnen ons nu afvragen wanneer in dat geval de opslingerfaktor <u>maximaal</u> wordt. Indien de weerstand wordt verwaarloosd, dan blijkt <u>volledige resonantie</u> op te treden, d.w.z.

$\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \infty$ voor cos ql = 0 dus voor:

$qL = (2n - 1)\ \frac{\pi}{2}$ $\quad (n = 1,2,3,\ldots)$

Deze voorwaarde kan worden geschreven als:

6-49 $\quad \omega \sqrt{mb}\, L = (2n - 1)\ \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ of

6-50) $\quad \omega = (2n - 1)\ \frac{\pi}{2}\ \frac{1}{\sqrt{mb}\, L}$

Met (6-50) kan de frequentie van de randvoorwaarde, waarbij resonantie op zal treden, worden bepaald.

We zien dat voor een bepaald bekken (met bepaalde waarden voor $\sqrt{mb}$ en L) voor een aantal waarden ω resonantie mogelijk is.

Men duidt deze waarden volgens (6-48) wel aan met ω_o, de eigen frekwenties van een bekken.

Op verschillende plaatsen in de voorgaande hoofdstukken is gesproken over de voortplantingssnelheid van een verstoring in een bepaald bekken (wrijving verwaarloosd):

(6-51) $\quad c = \sqrt{\frac{b_s}{b}\ gh} = \frac{1}{\sqrt{mb}}$

Als we nu nog bedenken dat $\frac{2\pi}{\omega} = T$ = de periode en dat de golflengte $\lambda = c\ T$, dan kunnen we i.p.v. (6-50) ook schrijven:

(6-52) $\quad L = (2n - 1)\ \frac{\pi}{2}\ \frac{c}{\omega} = (2n - 1)\ \frac{\lambda}{4}$

Uit (6-52) volgt dat resonantie optreedt, indien de lengte van het bekken gelijk is aan een oneven aantal maal een kwart van de golflengte.

Opm.: De funktie h(s,t) (een staande golf) heeft een knoop, aan de ingang van het bekken. De funktie Q(s,t) heeft een knoop aan het afgesloten einde, waar Q = 0 voor alle waarden van t. In de mond zijn de stromen maximaal.

Omdat in het bovenstaande de weerstand is verwaarloosd (p=0), kan de versterkingsfaktor oneindig worden. In de natuur zullen de waterstandsvariaties beperkt blijven door de weerstand.

Als we terugkeren naar de uitdrukking (6-47) dan is het mogelijk om voor bepaalde waarden van pL en qL de versterkingsfaktor te berekenen.

Zowel p als q zijn afhankelijk van de grootte van $\frac{k}{\omega m}$ (zie verg. (6-33) en (6-34)).

In het boek "Tidal Computations, in rivers and coastal waters" van dr. J.J. Dronkers (1964) wordt de invloed van de weerstand nagegaan (zie blz. 235 e.v.). Om een indruk te geven van de invloed van de (relatieve) weerstand wordt hierna een figuur uit het bovengenoemde boek besproken.

Ingevoerd worden de volgende dimensieloze parameters:

6-53) $$s_1 = \frac{k}{\omega\, m}$$

6-54) $$s_2 = \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{\omega L}{c} = \omega L\sqrt{mb}$$

6-55) $$\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\sqrt{-1 + \sqrt{1 + s_1^2}}$$

6-56) $$\beta = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\sqrt{+1 + \sqrt{1 + s_1^2}}$$

Uit de definities (6-53) t/m (6-56) volgt dat we voor pL resp. qL kunnen schrijven:

$$pL = s_2\ \sigma \quad \text{en} \quad qL = s_2\ \beta$$

Als k = 0 dan is $s_1 = 0$ en dus $\sigma = 0$ en $\beta = 1$, zodat in dàt geval pL = 0 en $qL = s_2$.

Men kan nu, voor een bepaalde waarde van s_1, de versterkingsfaktor als funktie van s_2 berekenen. In fig. 6.7 zijn de resultaten voor een aantal waarden van s_1 verzameld.

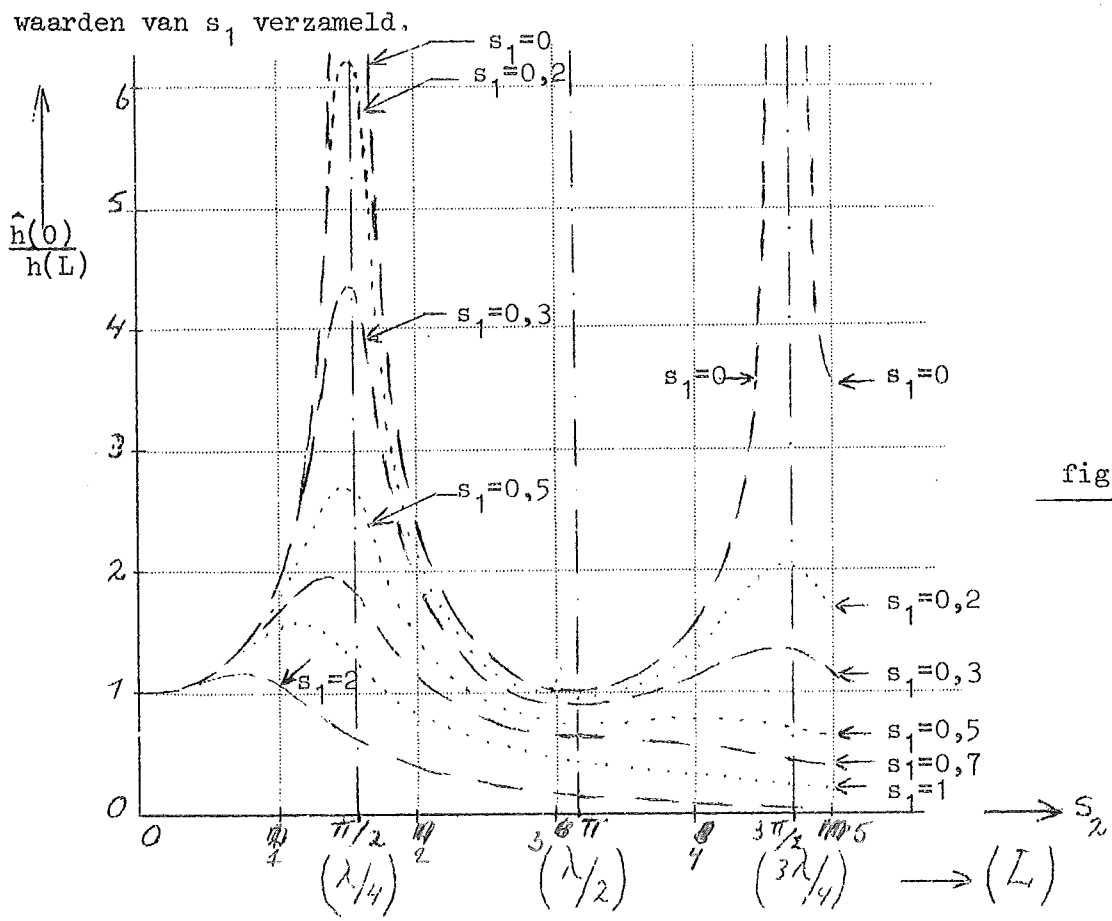


fig. 6.7

Behalve de grootheid s_2 is langs de horizontale as de korresponderende waarde van de bekkenlengte L uitgedrukt in de golflengte $\lambda = cT$, waarbij c is gedefinieerd volgens (6-51).

Voor $s_1 = 0$ zien we dat de kromme voor $s_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ assymptotisch naar oneindig gaat.
Dit komt overeen met de voorwaarde (6-50) als voor $n = 1$ wordt gekozen:
$\omega_o = \frac{\pi}{2} \frac{c}{L}$.

Deze waarde van ω_o wordt de eerste resonantie-frekwentie genoemd.
We zien dat de versterkingsfaktor afneemt, naarmate de waarde van s_1 toeneemt. Voor bijvoorbeeld een waarde $s_1 = 0{,}5$ zien we dat de maximale versterkingsfaktor voorkomt bij een waarde van s_2, die kleiner is dan $\frac{\pi}{2}$.
Verder zien we in fig. 6.7 duidelijk dat de versterkingsfaktor voor de eerste resonantie-frekwentie, het grootst is.
De versterkingsfaktor is voor kleine waarden van s_2, d.w.z. bij een kleine verhouding tussen bekkenlengte en golflengte, slechts weinig groter dan 1.
Opm.: Men kan een waarde voor s_2 bepalen bij een dubbeldaagse sinusvormige getijgolf en een bekken met de lengte L = 3000 m en een gemiddelde diepte van 5 m. Het resultaat kan in verband worden gebracht met de in Deel I onder 4.2 besproken kombergingsbeschouwing.

Men zal trachten een haven-ontwerp te maken dat voor de frekwenties van de seiches, die ter plaatse het meest voorkomen, zo goed mogelijk voldoet. Daarvoor is een onderzoek naar het vóórkomen van seiches in de zee ter plaatse nodig (zie 6.5.1). Een globale berekening met een betrekkelijk grove schematisatie geeft reeds een vrij goede indicatie in hoeverre bij een bepaalde situatie van versterking sprake is.
Vanzelfsprekend zal men in veel-gevallen niet kunnen volstaan met een schematisatie tot één vak. Voor het uitvoeren van een berekening voor een systeem van takken en splitsingspunten wordt verwezen naar de kolleges b73B.

Wat betreft de Harmonische Methode kan men de volgende paragraaf 6.6 als een overgang van b73A naar b73B zien.

6.6 HET PRINCIPE VAN DE MEERVOUDIGE HARMONISCHE METHODE.

Bij problemen in allerlei verschillende vakgebieden ontmoet men funkties, die betrekkelijk willekeurig kunnen verlopen. In dergelijke gevallen wordt gebruik gemaakt van de mogelijkheid om een willekeurige funktie te benaderen door een of andere reeks van handelbare funkties.
Indien men te maken heeft met lineaire vergelijkingen dan kan men gebruik maken van het beginsel van superpositie. Dit wil zeggen dat oplossingen, die voor elk van de in de reeks voorkomende komponenten kunnen worden gevonden, achteraf mogen worden gesuperponeerd tot de gezochte oplossing.

In deze paragraaf wordt verder slechts gesproken over periodieke funkties. Zoals door Fourier is aangegeven kan elke periodieke funktie worden benaderd door een reeks van sinusvormige funkties (komponenten).
Hoewel de benaderingswijze als zodanig voor een groot aantal problemen kan worden toegepast, wordt ook in het onderstaande de voortplanting van periodieke lange golven in een open leiding beschouwd.
Uitgegaan wordt van de in hoofdstuk 2 (deel I) afgeleide vergelijkingen (2-15) en (2-11).
Voor de afleiding van deze vergelijkingen en de daarbij gemaakte veronderstellingen wordt hier naar hoofdstuk 2 terug verwezen.
Verondersteld wordt nog dat:

- de bodemhelling $\operatorname{tg} I_b = I_b = 0$ en
- de verhouding $\frac{v^2}{gh} << 1$

In de vergelijking (2-15) wordt de faktor α gelijk 1 en verdwijnt de term met de bodemhelling. We werken verder met de volgende vergelijkingen:

(6-57) $$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q|Q|}{C^2A^2R} + \frac{2b}{gA^2}\,Q\,\frac{\partial h}{\partial t}$$

(6-58) $$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\,b\,\frac{\partial h}{\partial t}$$

Opm.: In de bewegingsvergelijking is de term $\frac{2b}{gA^2}\,Q\,\frac{\partial h}{\partial t}$ niet verwaarloosd. Ook deze term is duidelijk niet lineair.

De gezochte funkties h en Q zijn afhankelijk van de plaats s en de tijd t: $h(s,t)$ en $Q(s,t)$.

Zoals op blz. 6.3 en 6.4 wordt beschreven wordt een leiding afhankelijk van de figuratie in niet te grote vakken verdeeld. Voor elk vak wordt een representatief dwarsprofiel bepaald.
Daardoor mag men voor een bepaald vak stellen dat de faktoren A, b, R en c konstant zijn in de s-richting.
Deze faktoren zijn dan toch nog geen konstanten, omdat ze nog met de waterstand en dus in de tijd variëren.
Afgezien van het variëren van de faktoren $\frac{1}{C^2A^2R}$ en $\frac{2b}{gA^2}$ zijn de weerstandsterm en de laatste term uit de bewegingsvergelijking (6-57) reeds niet-lineair.

Voor het oplossen van de vergelijkingen (6-57) en (6-58) zal men tegenwoordig onmiddellijk denken aan een numerieke benadering m.b.v. een computer.
Voor de hier bedoelde problemen worden in het kollege b73B numerieke oplossingsmethoden besproken en toegepast.
Om een inzicht te krijgen in het golfverschijnsel en in de mate waarin de verschillende fysische grootheden dit verschijnsel beïnvloeden, blijken echter andere oplossingsmethoden onmisbaar. Daarom wordt ook in het kollege b73B nog aandacht besteed aan Analytische oplossingsmethoden.
In deze paragraaf wordt ten behoeve van een beter inzicht slechts het principe aangegeven van een beschouwing met funkties bestaande uit meerdere harmonische komponenten.

Zoals we gezien hebben in 6.3 en 6.4 is het voor een ANALYTISCHE OPLOSSING noodzakelijk dat alle termen in de vergelijkingen LINEAIR zijn. We moeten dus streven naar termen, waarin faktoren vóór:

h, Q, $\frac{\partial h}{\partial s}$, $\frac{\partial h}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial s}$ of $\frac{\partial Q}{\partial t}$

konstant zijn.

We nemen nu aan dat de funkties $h(s,t)$ en $Q(s,t)$ voor elke plaats s periodieke funkties zijn. Dit wil zeggen dat deze funkties, op een bepaalde plaats, in achtereenvolgende perioden T dezelfde gedaante hebben.

Een periodieke funktie F(t) kan volgens Fourier in een z.g. trigonometrische reeks worden ontwikkeld:

$$F(t) = A_o + \sum_{N=1}^{N=\infty} (A_N \cos N\,\omega t + B_N \sin N\,\omega t)$$

In plaats van deze uitdrukking kan men ook schrijven:

$$F(t) = F_o + \sum_{N=1}^{N=\infty} \hat{F}_N \cos (N\,\omega t - \theta_N), \text{ waarin}$$

$$F_o = A_o\ ,\ \hat{F}_N = \sqrt{A_N^2 + B_N^2}\ \text{ en } \theta_N = \text{arctg } \frac{B_N}{A_N}$$

In het volgende wordt van de funkties h en Q het gedrag in de tijd beschouwd. Voor iedere willekeurige plaats kunnen de funkties h(t) en Q(t) als volgt worden uitgedrukt:

(6-59) $$h(t) = h_o + \hat{h}_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) + \hat{h}_2 \cos (2\omega_1 t - \kappa_2) + \ldots\ldots$$

(6-60) $$Q(t) = Q_o + \hat{Q}_1 \cos (\omega_1 t - \phi_1) + \hat{Q}_2 \cos (2\omega_1 t - \phi_2) + \ldots\ldots$$

In deze uitdrukkingen is $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ terwijl:

$\hat{h}_N$ = de amplitude van de N-de h - komponent (een funktie van s);

$\hat{Q}_N$ = " " " " N-de Q - komponent (" " " s)

κ_N = de fasehoek " " N-de h - komponent (" " " s)

ϕ_N = " " " " N-de Q - komponent (" " " s)

Terwille van de eenvoud kunnen we voor (6-59) en (6-60) schrijven:

(6-61) $$h = h_o + h_1 + h_2 + \ldots$$

(6-62) $$Q = Q_o + Q_1 + Q_2 + \ldots$$

Met deze uitdrukkingen voor h en Q kunnen we voor de lineaire termen uit het linker lid van de vergelijkingen (6-57) en (6-58) achtereenvolgens schrijven:

(6-63) $$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_o}{\partial s} + \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial h_2}{\partial s} + \ldots\ldots$$

(6-64) $$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial Q_o}{\partial s} + \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{\partial s} + \ldots\ldots$$

Voor <u>de traagheidsterm</u> uit de vergelijking (6-57) kunnen we schrijven:

$$- m \frac{\partial Q}{\partial t}$$

We weten dat de faktor $m = \frac{1}{gA}$ van h afhankelijk is.
Omdat h periodiek in de tijd varieert is het mogelijk om de faktor m in het algemeen als volgt uit te drukken:

(6-65) $$m = \bar{m} \left[n_o + n_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) + \ldots\ldots \right]$$

De variatie van de faktor met de hoogte wordt dus zo goed mogelijk benaderd, door de faktor te vervangen door een reeks, die <u>in het algemeen</u> de gedaante heeft van de uitdrukking (6-65).

Voor $\frac{\partial Q}{\partial t}$ kunnen we schrijven:

(6-66) $$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q_o}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \ldots\ldots$$

Met de uitdrukkingen (6-65) en (6-66) kan men voor de traagheidsterm $- m \frac{\partial Q}{\partial t}$ dan schrijven:

(6-67) $$- \bar{m} \left[n_o + n_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) + n_2 \cos 2(\omega_1 t - \kappa_1) + \ldots\ldots \right] \left[\frac{\partial Q_o}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \ldots\ldots \right]$$

Uit de uitdrukking (6-60) volgt achtereenvolgens dat: $\frac{\partial Q_o}{\partial t} = 0$,
$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = - \omega_1 \hat{Q}_1 \sin (\omega_1 t - \phi_1)$, $\frac{\partial Q_2}{\partial t} = - 2 \omega_1 \hat{Q}_2 \sin (2\omega_1 t - \phi_2)$, ... etc.

Als we (6-67) nu verder uitwerken vinden we een groot aantal termen. Terwille van de overzichtelijkheid nemen we in het volgende nog wat minder termen van de reeksen mee. Voor (6-67) schrijven we eerst:

(6-68) $$- \bar{m} \left[n_o + n_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) \right] \left[\frac{\partial Q_1}{\partial t} \right]$$

Uitwerken geeft dan:

$$\bar{m} \omega_1 \hat{Q}_1 \left[n_o \sin (\omega_1 t - \phi_1) + n_1 \sin (\omega_1 t - \phi_1) \cos (\omega_1 - \kappa_1) \right] =$$

(6-69) $$\bar{m} \omega_1 \hat{Q}_1 \left[n_o \sin (\omega_1 t - \phi_1) + \frac{n_1}{2} \sin (2\omega_1 t - \phi_1 - \kappa_1) - \frac{n_1}{2} \overset{\sin}{(\kappa_1 - \phi_1)} \right]$$

Voor de eerste term van (6-69) kunnen we schrijven:

$\bar{m} \omega_1 \hat{Q}_1 n_o \sin (\omega_1 t - \phi_1) = - \bar{m} n_o \frac{\partial Q_1}{\partial t}$ dat is een lineaire term.

Verder zien we dat <u>behalve</u> deze term in (6-69) nog een <u>konstante term</u> voorkomt èn een <u>lineaire term met de frekwentie $2\omega_1$</u> (zie opmerkingen later).

Indien we in plaats van (6-68) uitgaan van de uitdrukking (6-67) dan vinden we uiteraard een veel groter aantal termen:

- termen die konstant zijn in de tijd,
- lineaire termen met een frekwentie ω_1,
- " " " " " $2\omega_1$,
- " " " " " $3\omega_1$,
- " " " " " $4\omega_1$,

..... etc. ..... etc. ..... .

Omdat het hier slechts gaat om het principe, worden de uitdrukkingen verder niet uitgewerkt.

<u>Opm.:</u> In het kollege b73B wordt deze meervoudige harmonische methode aan de hand van een diktaat nog nader uitgewerkt en besproken.

De overige termen uit de vergelijking (6-57) en (6-58) kunnen eveneens op de boven aangegeven wijze worden aangepakt. We vinden dan uitdrukkingen, die als volgt kunnen worden aangegeven:

$$-\frac{Q|Q|}{C^2A^2R} \rightarrow \boxed{\text{konstante termen}} + \boxed{\text{lineaire termen met een frekwentie } \omega_1} + \boxed{\text{lineaire termen met een frekwentie } 2\omega_1} + \cdots$$

$$+\frac{2b}{gA^2}\,Q\,\frac{\partial h}{\partial t} \rightarrow \qquad \text{idem}$$

$$-\,b\,\frac{\partial h}{\partial t} \rightarrow \qquad \text{idem}$$

Als we de vergelijkingen (6-57) en (6-58) nu beschouwen, dan vinden we, na substitutie, hiervoor de volgende algemene gedaante:

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial h_o}{\partial s} + \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial h_2}{\partial s} + \ldots = \boxed{\text{konstante termen}} + \boxed{\text{lineaire termen met een frekwentie } \omega_1} + \boxed{\text{lineaire termen met een frekwentie } 2\omega_1} \ldots$$

$$\text{(II)}\quad \frac{\partial Q_o}{\partial s} + \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{\partial s} + \ldots = \qquad \text{idem}$$

Omdat <u>op ieder tijdstip</u> aan deze vergelijkingen (I) en (II) moet worden voldaan, kunnen deze worden opgesplitst in een aantal vergelijkingen, waarin termen voorkomen met een zelfde frekwentie

In plaats van de vergelijkingen I en II krijgen we de volgende stelsels:

(Ia) $\frac{\partial h_o}{\partial s}$ = som konstante termen in het rechter lid van (I)

(IIa) $\frac{\partial Q_o}{\partial s}$ = " " " " " " " " (II)

(Ib) $\frac{\partial h_1}{\partial s}$ = som termen met frekwentie ω_1 in het rechter lid van (I)

(IIb) $\frac{\partial Q_1}{\partial s}$ = " " " " ω_1 " " " " " (II)

(Ic) $\frac{\partial h_2}{\partial s}$ = " " " " $2\omega_1$ " " " " " (I)

(IIc) $\frac{\partial Q_2}{\partial s}$ = " " " " $2\omega_1$ " " " " " (II)

etc. etc.

We vinden dus een (vrij groot) aantal lineaire D.V. met konstante coëfficiënten, die twee aan twee kunnen worden opgelost:

- één stel voor de onbekenden h_o en Q_o
- " " " " " h_1 en Q_1
- " " " " " h_2 en Q_2

etc. etc.

Nadat elk stel vergelijkingen is opgelost en aan de randvoorwaarde is voldaan kan men de resultaten superponeren tot de oplossing die gezocht wordt:

$h = h_o + h_1 + h_2 + \ldots \rightarrow \underline{h(s,t)}$

$Q = Q_o + Q_1 + Q_2 + \ldots \rightarrow \underline{Q(s,t)}$

De gezochte funkties h(s,t) en Q(s,t) worden, volgens het hierboven aangegeven principe, dus verkregen door de oplossingen, die voor elk der harmonische komponenten worden gevonden, achteraf te superponeren.
Zoals ook reeds op blz. 6 is gesteld, geldt het beginsel van superpositie alleen indien de op te lossen vergelijkingen <u>lineair</u> zijn.
Voor het beschouwde probleem hebben de vergelijkingen een duidelijk niet-lineair karakter.

Uit het bovenstaande kan men konkluderen dat in principe elke gewenste graad van nauwkeurigheid is te bereiken, door het aantal termen van de reeksen uit te breiden. Indien echter de differentiaal-vergelijkingen niet lineair zijn dan zullen daarbij om praktische redenen duidelijke beperkingen moeten worden opgelegd. Voor het beschouwde probleem blijkt dat men de stelsels vergelijkingen Ia en IIa, Ib en IIb, etc. niet geheel onafhankelijk van elkaar kan oplossen. In de z.g. konstante coëfficiënten van de verschillende termen blijken faktoren voor te komen, die afhankelijk zijn van de oplossing. Zo komt b.v. in de laatste termen van de uitdrukking (6-69) de amplitude van de funktie Q_1 voor.
Indien men óók de overige termen uit de vergelijkingen (6-57) en (6-58) nader uitwerkt, dan blijkt dat in de verschillende "konstante" coëfficiënten grootheden voorkomen, die van de oplossing afhankelijk zijn.
Omdat de vergelijkingen niet lineair zijn blijken de verschillende harmonische komponenten elkaar wederzijds te beïnvloeden.
Een goede benadering van de juiste oplossing is daarom slechts mogelijk door het uitvoeren van een ITERATIE-PROCES:

- de benodigde faktoren worden zo goed mogelijk geschat;
- de stelsels vergelijkingen worden voor de éérste maal opgelost;
- met de resultaten kunnen de faktoren beter worden geschat;
- de stelsels vergelijkingen worden opnieuw opgelost;

etc.
Indien de geschatte grootheden voldoende in overeenstemming zijn met de resultaten wordt het iteratie-proces beïndigd.
Omdat men gedwongen is een iteratie-proces uit te voeren, zal men om praktische redenen het aantal komponenten zoveel mogelijk beperken.
Dat wil zeggen dat men in de reeksen (zie b.v. de uitdrukkingen (6-59) en (6-60) slechts een beperkt aantal termen zal meenemen.
De meervoudige harmonische methode is in de praktijk uitgewerkt en toegepast voor het berekenen van de voortplanting van getijgolven op benedenrivieren (Stroband, 1947, De Ingenieur No. 36). Daarbij worden in de reeksen termen meegenomen waarvoor $N \leq 2$ d.w.z.

- konstante termen;
- termen met de frekwentie $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ (T_1 = 44700 sek., dit is de periode van het dubbeldaags Maansgetij);
- termen met de frekwentie $2\omega_1$ (één hoger harmonische).

Bij de uitwerking en de toepassing van deze benaderingswijze waarbij $N \leqq 2$ stuit men voor meer ingewikkelde problemen reeds op vrij grote moeilijkheden.

Omdat door de computer tegenwoordig andere benaderingsmethoden mogelijk zijn, zal men zich wat de harmonische methode betreft zelfs beperken tot het meenemen van termen waarvoor $n \leqq 1$. Dit betekent dat bij de analytische benadering van een probleem wordt verondersteld dat:

- de waterstanden en de debieten in de tijd variëren volgens een zuiver sinusvormige kromme;
- er al of niet een konstant debiet Q_o (bovenafvoer op benedenrivieren) aanwezig is;

en het verloop van de middenstand h_o kan worden berekend.

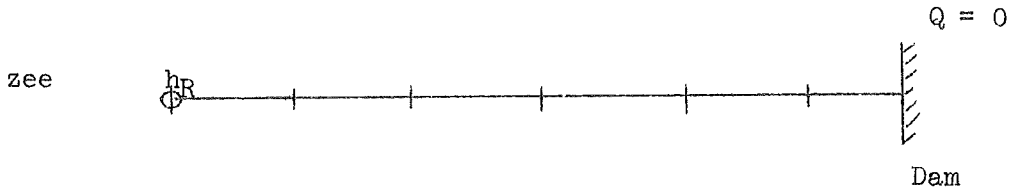
In het kollege b73B wordt een praktisch voorbeeld voor een dergelijke berekening besproken, waarbij voor hetzelfde probleem ook andere (numerieke) berekeningsmethoden worden toegepast.

In het bovenstaande werd, in aansluiting op het in de paragrafen 6.2 t/m 6.4 behandelde, het principe van de meervoudige Harmonische Methode slechts summier aangegeven. Dit maakt toch reeds <u>enkele opmerkingen</u> mogelijk, <u>die tot het inzicht kunnen bijdragen.</u>
Bij het uitwerken van de uitdrukking (6-68) voor de traagheidsterm vonden we de uitdrukking (6-69). Hierin komen drie termen voor en wel:

- een term met de frekwentie ω_1;
- een term die konstant is in de tijd;
- een term met de frekwentie $2\omega_1$.

We zien hieruit dat <u>een niet-lineaire term</u> produkten van cosinus- en sinustermen geeft, die gesplitst kunnen worden in twee termen met resp. een <u>hogere</u> èn een <u>lagere</u> frekwentie.
Het is duidelijk dat óók bij het uitwerken van de overige niet-lineaire termen uit de vergelijkingen (6-57) en (6-58) een zelfde beeld ontstaat.
Indien men slechts uitgaat van enkelvoudige sinusvormige funkties dan krijgt men dus te maken met termen met een hoger (resp. lagere) frekwentie.
<u>Het niet-lineair karakter</u> van de vergelijkingen, <u>heeft</u> dus blijkbaar <u>tot gevolg dat in het systeem hoger harmonischen worden opgewekt</u> (gegenereerd).
Het gevolg hiervan is dat de funkties $h(s,t)$ en $Q(s,t)$ vervormingen ondergaan.

Laten we ter illustratie veronderstellen dat aan de zee-zijde van een afgesloten ri vierarm de randvoorwaarde bestaat uit één enkele harmonische: $h_R = \hat{h}_1 \cos(\omega_1 t - \phi)$.



De funkties h(t) in punten landinwaarts zullen nu naast een komponent met de frekwentie ω_1 ook enige komponenten bevatten met een hogere (resp. lagere) frekwentie.
Met name als gevolg van de wrijvingsterm maar ook tengevolge van de overige niet-lineaire termen worden harmonischen opgewekt, waardoor de funkties h en Q vervormd zijn. Dit verschijnsel kan men in de praktijk duidelijk konstateren door de op verschillende plaatsen gemeten krommen onderling te vergelijken.
Indien men volstaat met het toepassen van de enkelvoudige harmonische methode dan blijven deze vervormingen uiteraard geheel buiten beschouwing!

DELFT, JANUARI 1973

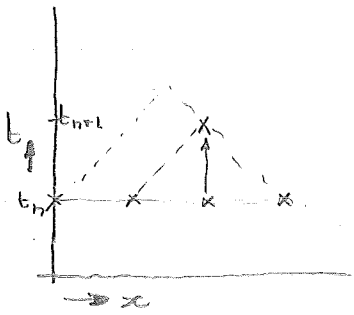
C. Verspuy

Numerieke Methoden

Het doel is het omzetten van een differentiaalvgl in een differentievgl.
van belang zijn:
① Consistentie: limiet van ~~[illegible]~~ differentievgl = differentiaalvgl
$\Delta x \to 0$
$\Delta t \to 0$
② Convergentie lim oploss. differentievgl = oplossing differentiaalvgl
$\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$
③ Stabiliteit. De fouten in de oplossing moeten niet gaan overheersen.
④ Nauwkeurigheid: De afbreekfout moet zo klein mogelijk zijn.

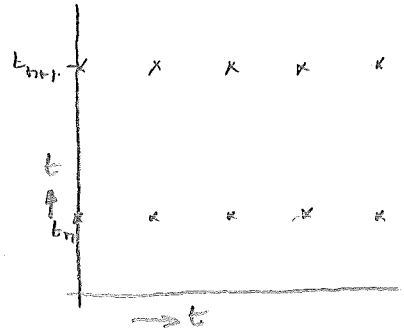
Het begrip convergentie zegt niet zo veel, want als we een num. oploss. toepassen is er geen analytische oplossing, dus kunnen we de convergentie niet aantonen.
Wel geldt: consistentie + Stabiliteit = Convergentie, Dit is het equivalentie theorema van Lax.
Nauwkeurigheid is vaak een financieel kriterium. Nauwkeurig rekenen kost veel computertijd.

explicit



De punten worden de punten n+1 gevonden uit de waarden t_n door berekening per punt. Er wordt dus 1 vgl. opgelost
Er kan dus niet buiten de karakteristieke driehoek gerekend worden.

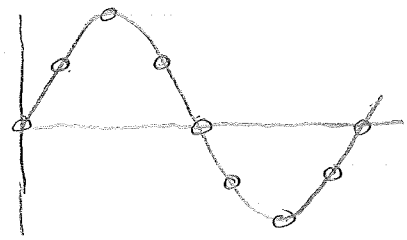
implicit



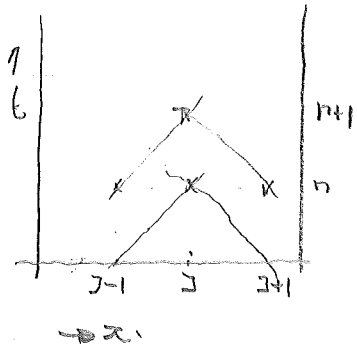
De punten n+1 worden gevonden uit de voorgeschiedenis. Er moet dus een stelsel vgl simultaan opgelost

Hier kan een onvoorwaardelijk stabiel rekenschema opgesteld worden,

Er moet wel rekening gehouden worden met de periode van de randvoorwaarde. Een sinusperiode heeft toch wel een tiental punten nodig.



De methode van karakteristieken is op een computer te rekenen, maar dit is alleen goed mogelijk als de voortplantingssnelheidconstant is.



Nu een explicit schema

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{h_j^{n+1} - \left\{\frac{1}{2}\alpha\left(h_{j+1}^n + h_{j-1}^n\right) - (1-\alpha)h_j^n\right\}}{\Delta t}$$

voor $\alpha = 1$ is dit het schema van Lax

$$h_j^{n+1} = h_j^n - \frac{1}{2}c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[h_{j+1}^n - h_{j-1}^n\right] + \frac{1}{2}\alpha\left[h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n\right]$$

om de afbreekfout te vinden een taylorreeks ontwikkelen

$$h_j^{n+1} = h_j^n + \Delta t\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \cdots$$

Dit invullen geeft

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c\frac{\partial h}{\partial x} = \underbrace{-\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \alpha\frac{c\Delta x^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dots}_{\text{afbreekfout: deze is van de orde } \Delta x \text{ en } \Delta t}$$

Uit de oorspr. vgl.: $\frac{\partial h}{\partial t} = -c\frac{\partial h}{\partial x}$

Dus: $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\frac{\partial h}{\partial x}\right) = -c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) = -c\frac{\partial}{\partial x}\left(-c\frac{\partial h}{\partial x}\right) = +c^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$

de afbreekfout wordt dan: $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\left\{\alpha - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dots$

Nog een onderzoek naar de stabiliteit, volgens de methode van Von Neumann.
een stoorgolf wordt verondersteld als: $h(x,t) = h_0 \exp(ikx)$
$h_j^n = h_0^n \exp(ikj\Delta x)$

$h_0^{n+1} = \rho h_0^n$.
De voorwaarde voor stabiliteit is $|\rho| \leq 1$

ρ is expliciet dit te schrijven $\rho = 1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x} i\sin k\Delta x + \alpha(\cos k\Delta x - 1)$

$\rho = 1 - \mu i \sin p + \alpha(\cos p - 1)$

$|\rho| = \sqrt{\{1+\alpha(\cos p - 1)\}^2 + \mu^2\sin^2 p} \leq 1$

$1 + 2\alpha(\cos p - 1) + \alpha^2(\cos p - 1)^2 - \mu^2(\cos^2 p - 1) \leq 1$ Deden door $(\cos p - 1)$
$\Rightarrow \cos p - 1$ is negatief

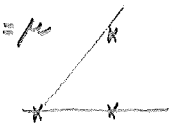
$2\alpha + \alpha^2(\cos p - 1) - \mu^2(\cos p + 1) \geq 0$

Dit moet gelden voor alle p.

$2\alpha + \cos p\,(2\alpha^2 - \mu^2) - \alpha^2 - \mu^2 \geq 0$ voor $\cos p = -1$ $\alpha(1-\alpha) \geq 0$ (dit geval zelf mag niet)
$\alpha \leq 1$

de voorwaarde is dus: $\mu^2 \leq \alpha \leq 1$ $\cos p = +1$ $\alpha - \mu^2 \geq 0$
$\mu^2 \leq \alpha$

Dus $\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \mu$

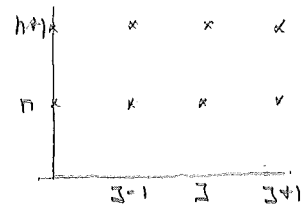


Hieruit volgt ook dat α alleen dan nul is als μ ook nul is, dan wordt er echter geen tijdsstap gemaakt. Dit kan dus niet

Impliciet rekenschema

$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA\frac{\partial h}{\partial x} + rQ = 0$

$B\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$



$\theta = 1$: alles op nieuwe loop
$\theta = 0$: de expliciete vgl

differentiële benadering

$$\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \theta\left[gA\left[\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + 2Q_j^{n+1}\right]\right] + (1-\theta)\left[gA\frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} + 2Q_j^n\right] = 0$$

De cont. vgl. wordt: $B\frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{\Delta t} + \theta\frac{Q_{j+2}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{2\Delta x} + (1-\theta)\frac{Q_{j+2}^n - Q_j^n}{2\Delta x} = 0$

onderzoek naar consistentie
Taylor reeksen invullen

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\Delta t\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + gA\frac{\partial h}{\partial x} + rQ + \dots = 0$$

$$B\left[\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} + \theta\right)\Delta t\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right] + \frac{\partial Q}{\partial x} + \dots = 0$$

voor $\theta = 1/2$ is dit erg nauwkeurig.

Omstabiliteitsredenen blijkt $\theta = 1/2$ niet mogelijk

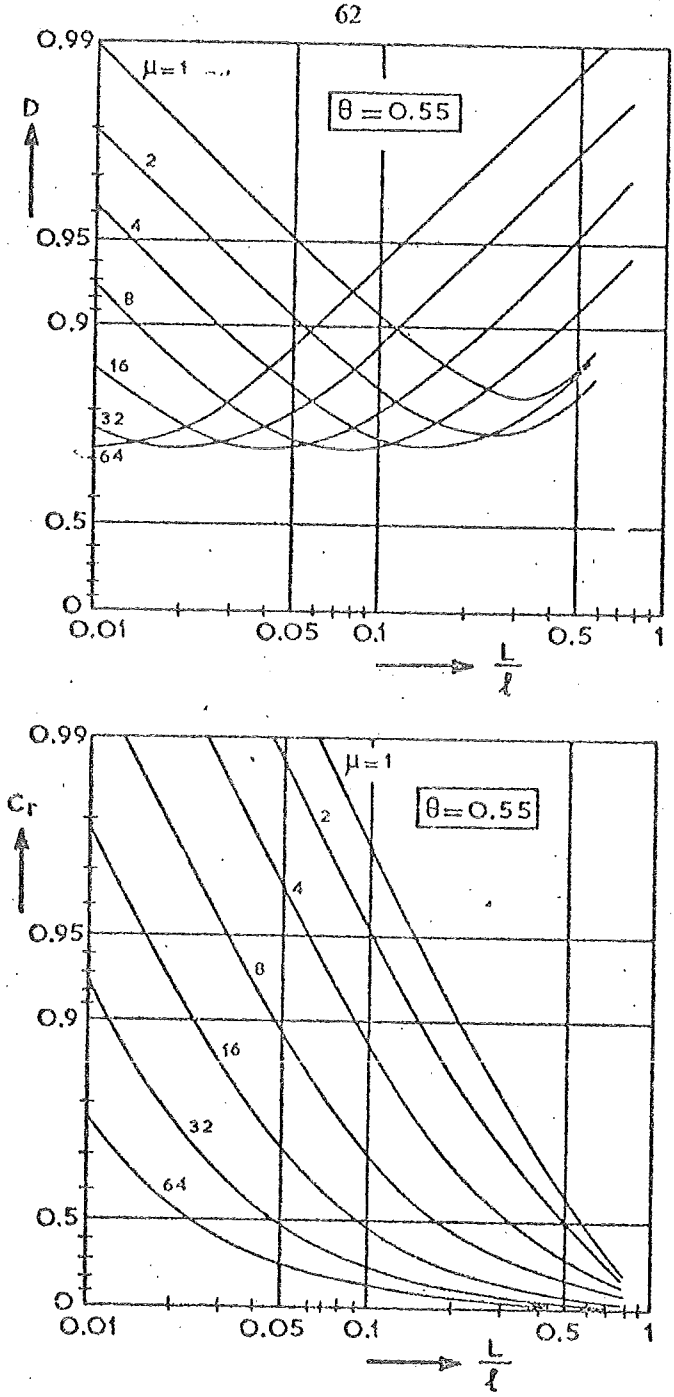


Fig. 12. Numerical effects.
L = branch length, l = wave length, $\mu = 2c\Delta t/L$.

Overgenomen uit : " Hydraulic Research for Water Management "
Commissie voor Hydrologisch Onderzoek ,
Verslagen en Mededelingen No. 18 , T.N.O. 1973.
III. "Computational Methods for Channel Flow",
Vreugdenhil , C.B.

stabiliteit: stoorgolf: $Q_j^n = \bar{Q}^n e^{iky}$
$h_j^n = \bar{h}^n e^{iky}$

de versterkingsfactor onderzoeken geeft de voorwaarde $0 \geq \lambda$

Numerieke demping: de fysische demping wordt verwaarloosd. Alle demping die gevonden wordt is dus demping door het rekenproces.

$Q(x,0) = \bar{Q} e^{ikx}$ $\quad Q(x,t) = \bar{Q} \exp\{i(kx-\omega t)\}$
$h(x,0) = \bar{h} e^{ikx}$ $\quad h(x,t) = \bar{h} \exp\{i(kx-\omega t)\}$

dit invullen in de oorspr. vgl.: $\frac{\partial Q}{\partial t} + gA\frac{\partial h}{\partial x} = 0$

$B\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

geeft: $-i\omega\bar{Q} + gAik\bar{h} = 0$
$-i\omega B\bar{h} + ik\bar{Q} = 0$ } 2 vgl met 2 onbekende $\Rightarrow$ afhankelijk.

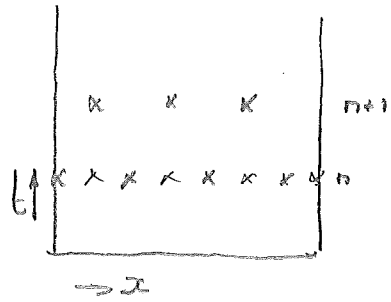
$\omega = \pm ck$, waarbij $c = \sqrt{\frac{gA}{B}}$

periode $\tau = 2\pi/\omega$

Na een periode τ: $Q = \bar{Q}\exp\{ikx - 2\pi i\}$ $\quad *$
$h = \bar{h}\exp\{ikx - 2\pi i\}$

De bewegingsvgl is: $\frac{\partial Q}{\partial t} + gA\frac{\partial h}{\partial x} + rQ = 0$

De continuiteitsvgl is $B\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$



Dit is een impliciet schema, dus een <u>stelsel</u> vgl. Belangrijk is bij het impliciete schema de Θ. Deze moet aan bepaalde grenzen voldoen.

Voor het verdere verloop wordt gekozen $\Theta = 0{,}55$

Door de numerieke demping ontstaat bij numerieke berekening voor form * de vorm
$Q_{num} = \bar{Q}\lambda^{t/\Delta t}\exp\{ikx\}$

De dempingsfactor $\lambda = \frac{1 + (1-\Theta)ic\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin kx}{1 - \Theta ic\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin kx}$ $\quad$ stel $c\frac{\Delta t}{\Delta x} = \mu$.

$Q_{num} = \bar{Q}D\exp\{ikx - G2\pi i\}$

Q an. voor $D=1$: en $G=1$: $\quad D = |\lambda|^{\tau/\Delta t}$
$G = -\frac{\tau}{\Delta t}\arg(\lambda)/2\pi$

In de grafieken is $L = 2\Delta x$

Gebruiksaanwijzing grafiek: 1) Bepaal de kenmerkende golflengte L
2) Hoeveel perioden nemen?
3) Bepaal de basisnauwkeurigheid per periode
4) Zoek combinatie L/L en $\mu = 2c\Delta t/L$, op dat L/L en μ zo groot mogelijk zijn.