Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Irrationaliteit van $\zeta(3)$
Een toepassing van Padé-benaderingen

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

PAUL VERGOUWE

Delft, Nederland
Januari 2017

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

Irrationaliteit van $\zeta(3)$
Een toepassing van Padé-benaderingen

Paul Vergouwe

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. W.G.M. Groenevelt

Overige commissieleden

Dr. C. Kraaikamp

Dr. ir. M. Keijzer

Januari, 2017

Delft

Inhoud

1 Inleiding.

Irrationale getallen zijn lang bekend. Sinds het bewijs dat de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met rechte zijden van lengte 1 niet rationaal kan zijn, weten we dat ze moeten bestaan. We weten dat ze niet te schrijven zijn als breuk en een oneindig lange decimaalontwikkeling zonder vast patroon kennen. We willen ze wel zo nauwkeurig mogelijk kunnen bepalen. Voor verschillende irrationale getallen, als π en $\sqrt{2}$, kennen we de waarde zeer nauwkeurig. Voor sommigen gaat dat lastiger. Zoals bijvoorbeeld de Riemann-Zéta functie $\zeta(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$ voor oneven $n > 2$. In dit verslag zal ik een manier laten zien om $\zeta(3)$ te benaderen en in ieder geval te bewijzen dat deze irrationaal is, ondanks dat we de waarde ervan niet eenvoudiger kunnen omschrijven dan de definitie. Deze manier maakt gebruik van een relatief nieuw principe, namelijk Padé-benaderingen. Een methode die functies benadert met behulp van een quotiënt van twee polynomen. Ik zal laten zien wat een Padé-benadering is, om vervolgens, met behulp van Legendre polynomen, een bewijs te laten zien dat $\zeta(3)$ irrationaal is. Het bewijs dat $\zeta(3)$ irrationaal is is voor het eerst gegeven door R. Apéry in 1977, en later door Beukers [2] opnieuw gegeven met behulp van Padé-benaderingen. Dit verslag dient tot het eenvoudiger toelichten van dit bewijs, en gebaseerd op Walter van Assche's publicatie [1] over dit onderwerp.

2 Irrationaliteit

Voordat we gaan toelichten hoe Padé-benaderingen werken, wil ik eerst kort laten zien hoe we irrationaliteit bewijzen. We gebruiken hiervoor het volgende Lemma:

Lemma 1. *Laat x een reëel getal zijn. Als (p_n) en (q_n) rijen van gehele getallen zijn, zo dat*

1. $q_n x - p_n \neq 0$ *voor alle* n,
2. $\lim_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0$,

dan is x irrationaal.

Bewijs. We gaan een tegenspraak afleiden door eerst aan te nemen aan dat *1.* en *2.* gelden en x een **rationaal** getal is. $x = p/q$ voor bepaalde gehele getallen p en q, en er geldt, als we x substitueren:

$$q_n x - p_n = \frac{p}{q} q_n - p_n = \frac{1}{q}(pq_n - qp_n).$$

$pq_n - qp_n$ is een geheel getal en volgens de eerste aanname in ons lemma ongelijk 0, dus is $|pq_n - qp_n| \geq 1$. Beide zijden door $|q|$ delen geeft $|q_n x - p_n| \geq \frac{1}{|q|}$. Omdat $1 \leq |q| < \infty$ is $\frac{1}{|q|} > 0$ en dus is aanname 2 onmogelijk. We hebben nu een tegenspraak, dus als x aan beide aannames voldoet kan ze niet rationaal zijn. □

Dit lemma impliceert ook dat we, met gebruik van rationale getallen, irrationale getallen beter kunnen benaderen dan [andere] rationale getallen. Immers zal de limiet in het geval van rationale x niet 0 zijn tenzij aanname 1 niet geldt. We kunnen namelijk het verschil tussen twee verschillende rationale getallen a/b en c/d altijd kwantificeren met $\frac{ad-bc}{bd}$. In dit verslag zullen we laten zien hoe we met resultaten van approximatietheorie, met name Padé-benaderingen, p_n en q_n kunnen vinden voor $\zeta(2)$ en $\zeta(3)$.

3 Padé-benadering naar Markov functies.

3.1 Wat is een Padé-benadering?

We beginnen met het definiëren van de Padé-benadering. Een Padé-benadering benadert een functie zó, dat het resultaat een rationale functie (een quotiënt van polynomen) is met een machtreeksontwikkeling die tot een bepaalde term (afhankelijk van de graad van de polynomen) overeenkomt met die van de benaderde functie. Kijkend naar het bewijs voor irrationale getallen kunnen we meteen opmerken dat dit een nuttige eigenschap is, gezien we het verschil tussen een functie en de Padé-benadering ervan zo klein kunnen maken als we willen als we de polynomen van elke willekeurig grote graad kunnen maken. In dit hoofdstuk zullen we eerst kijken naar hoe we de Padé-benadering van een functie formuleren, en dan kunnen vinden.

3.2 Opzet.

Neem een functie f, waarvoor we de volgende reeksontwikkeling hebben in oneindig:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{z^{k+1}} \tag{1}$$

We zoeken twee polynomen: polynoom Q_n met graad $\leq n$ en P_{n-1} met graad $\leq n-1$, zo dat

$$f(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right). \tag{2}$$

Dit houdt in dat voor voldoende grote z en een positief getal M, het linkerdeel begrensd wordt door $M\left|\frac{1}{z^{2n+1}}\right|$. We spreken ook wel van 'orde $\frac{1}{z^{2n+1}}$'.
Q_n heeft nu $n+1$ coëfficiënten en P_n heeft er n. Met andere woorden is dit een vergelijking met $2n+1$ onbekenden. We willen Q en P kunnen bepalen dus we gaan een lineair stelsel vinden waaruit we de coëfficiënten van Q en P kunnen bepalen. We kunnen hiervoor beter de vergelijking als volgt formuleren:

$$Q_n(z)f(z) - P_{n-1}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right). \tag{3}$$

We hebben hier vermenigvuldigd met $Q_n(z)$ aan beide kanten, we moeten dus de ordegrootte van de rechterkant ook vermenigvuldigen met de grootst mogelijke z-macht in $Q_n(z)$. Omdat $Q_n(z)$ een polynoom van graad maximaal n is, is dat z^n.

Nu kunnen we ook al zien waarom we naar deze polynomen op zoek zijn. Deze vergelijking lijkt verdacht veel op de vergelijking die we zien in Lemma 1.

Als we de Q_n, P_{n-1}, en f (zie (1)) als reeksen representeren, met $Q_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ en $P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i$ (zo kan een polynoom immers altijd geschreven worden), ziet de vergelijking er als volgt uit:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{z^{k+1}} - \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

Om dit te doen kloppen moeten de coëfficiënten behorende bij $z^{-n}, z^{1-n}, \ldots, z^{n-2}, z^{n-1}$ wegvallen. Dat geeft het volgende stelsel:

$$
\begin{aligned}
a_n c_0 - b_{n-1} &= 0 \\
a_n c_1 + a_{n-1} c_0 - b_{n-2} &= 0 \\
&\vdots \\
a_n c_{n-1} + a_{n-1} c_{n-2} + \cdots + a_1 c_0 - b_0 &= 0 \\
a_n c_n + a_{n-1} c_{n-1} + \cdots + a_1 c_1 + a_0 c_0 &= 0 \\
&\vdots \\
a_n c_{2n-2} + a_{n-1} c_{2n-3} + \cdots + a_0 c_{n-2} &= 0 \\
a_n c_{2n-1} + a_{n-1} c_{2n-2} + \cdots + a_0 c_{n-1} &= 0
\end{aligned}
$$

Nu hebben we een stelsel van $2n$ lineaire vergelijkingen en $2n+1$ onbekenden. Gelukkig kunnen we één coëffciënt gewoon kiezen, immers kunnen we in (2) P_{n-1} en Q_n beiden over hetzefde getal delen, we kunnen er dus bijvoorbeeld voor zorgen dat Q_n altijd monisch is. Nu kunnen we dus onze coëfficiënten bepalen. We moeten hier waken voor de mogelijkheid dat z gelijk is aan 0, maar we zullen hier in dit verslag niet mee te maken krijgen omdat we zullen zien dat we moeten gaan kijken naar $z = 1$.

3.3 Het vinden van Q_n en P_n.

We beginnen met en paar stellingen: Herinner Cauchy's stelling voor integralen over gesloten krommen in het complexe vlak:

Stelling 2. *Laat $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch zijn op een stervormig domein $D \subset \mathbb{C}$, dan is de integraal $\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta$ met Γ een gesloten kromme in D gelijk aan 0.*

We gebruiken ook de residuenstelling, met $\mathrm{Res}(f; z_j)$ het residu van f in de pool z_j en $\chi(\Gamma; z_j)$ het windingsgetal van de kromme Γ om het punt z_j:

Stelling 3. *Laat $D \subset \mathbb{C}$ een stervormig domein zijn, en $z_1, ..., z_k \in D$ eindig veel (verschillende) punten. Laat $f : D \setminus \{z_1, ..., z_k\} \to \mathbb{C}$ een analytische functie zijn en $\Gamma : [a, b] \to D \setminus \{z_1, ..., z_k\}$ een gesloten, stuksgewijs gladde kromme. Dan geldt de volgende formule:*

$$\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f; z_j)\chi(\Gamma; z_j).$$

Om de benadering P_{n-1}/Q_n te vinden gaan we wat operaties toevoegen aan de vergelijking (3). Neem een gesloten kromme Γ om de oorsprong. Vermenigvuldig nu beide zijden van (3) met z^k en integreer over de kromme. Merk op dat $\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$ voor grote z begrensd wordt door $M \sum_{j=n}^{\infty} z^{-j-1}$, dus $\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$ is van de vorm $\sum_{j=n}^{\infty} d_j z^{-j-1}$. Deze functie is overal behalve in analytisch dus als we erover integreren mogen we integraal en som verwisselen. We herschrijven (3) als volgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma Q_n(z) z^k f(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma P_{n-1}(z) z^k dz = \sum_{j=n}^{\infty} d_j \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^{k-j-1} dz. \tag{4}$$

Omdat polynomen overal analytisch zijn, volgt uit de stelling van Cauchy dat de middelste integraal over $P_{n-1}(z)z^k$ gelijk is aan nul. Omdat $\text{Res}(z^m; z_j) = 0$ voor alle z_j en gehele $m \neq -1$ geldt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^m dz = 0, \quad m \neq -1,$$

dus is het rechterdeel van (4) gelijk aan 0 voor $k < n$. Maar dan moet dus ook gelden:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_n(z)z^k f(z)dz = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{5}$$

We willen nu de coëfficiënten van Q_n kunnen bepalen. Dat is nog niet zo makkelijk uit deze complexe integraal op te maken. We willen dus eigenlijk een reële vergelijking vinden. Zometeen gaan we zien dat we Q_n-en kunnen vinden zodat ze allemaal orthogonaal zijn aan f t.o.v. de Lebesgue-maat, ofwel:

$$\int_a^b Q_n(x)f(x)dx = 0, \tag{6}$$

op één of ander eindig interval $[a, b]$. Dat is veel beter op te lossen dan (5). Dit blijken we te kunnen vinden als f van een bepaalde vorm is, namelijk:

$$f(z) = \int_a^b \frac{w(x)dx}{z-x}, \tag{7}$$

met $w(x)$ een functie over het begrensde interval $[a, b]$, en $0 \leq w(x) \leq \infty$ $\forall x \in [a, b]$. Deze f wordt een **Markovfunctie** genoemd.

We gaan nu laten zien dat deze f een reeksontwikkeling als in (1) heeft, en dat (6) geldt. De reeksontwikkeling van $1/(z - x)$ (voor $|z| > |x|$) ziet er als volgt uit:

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}}, \tag{8}$$

Dus we kunnen $f(z)$ herschrijven (merk op dat we sommatie en integratie mogen verwisselen binnen het convergentie-interval, dus als $|a|, |b| < |z|$):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_a^b x^k w(x)dx, \tag{9}$$

Nu kunnen we zeggen dat, $\int_a^b x^k w(x)dx = c_k$, en f heeft inderdaad een reeksontwikkeling als in (1).

We nemen voor Γ een gesloten kromme om $[a, b]$ heen, (5) is dan:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_n(z)z^k \int_a^b \frac{w(x)dx}{z-x}\, dz = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

We kunnen het deel buiten de tweede integrand naar binnen brengen omdat dit niet afhankelijk is van x. Daarna kunnen we de integralen verwisselen door de stelling van Fubini. Die zegt dat de volgorde van integratie mogen verwisselen als de integrand overal begrensd is en de uitkomst eindig is (of: de integrand is integreerbaar). We krijgen dan:

$$\int_a^b \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{Q_n(z)z^k}{z-x}\, dz\ w(x)\ dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{10}$$

We gebruiken nu weer de residuenstelling:

$$\int_\Gamma \frac{Q_n(z)z^k}{z-x}\,dz = 2\pi i \cdot Q_n(x)x^k. \tag{11}$$

Uit (10) en (11) volgt dan dat

$$\int_a^b Q_n(x)x^k w(x)dx = 0,$$

dus, in combinatie met (9), krijgen we (6) voor $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Dit is de vergelijking die we wilden hebben om de coëfficiënten van Q_n te bepalen. Laten we nu P_{n-1} als volgt definiëren:

$$P_{n-1}(z) = \int_a^b \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z-x}\,w(x)dx. \tag{12}$$

Dit is een polynoom van graad $n-1$, merk namelijk op dat $Q_n(z) - Q_n(x)$ een polynoom is in z, verder is er een nulpunt in $z = x$, dus heeft dit polynoom een factor $z - x$, en als we één factor delen uit een polynoom, krijgen we een polynoom van 1 graad lager. Uitschrijven laat zien dat (12) inderdaad de teller is van de approximant die we zoeken:

$$Q_n(z)f(z) - P_{n-1}(z) = \int_a^b \frac{Q_n(z)}{z-x}\,w(x)dx - \int_a^b \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z-x}\,w(x)dx,$$

dus

$$\begin{aligned} Q_n(z)f(z) - P_{n-1}(z) &= \int_a^b \frac{Q_n(x)}{z-x}\,w(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_a^b Q_n(x)x^k w(x)dx = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_a^b Q_n(x)x^k w(x)dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Hierbij is gebruikt gemaakt van het feit dat $\int_a^b Q_n(x)x^k w(x) = 0$ voor $k = 0, 1, ..., n-1$, wat volgt uit vergelijkingen (10) en (11). Uit de orthogonaliteitsvoorwaarden (6) kunnen we de n coëfficiënten van Q_n halen. Vervolgens kunnen we (12) gebruiken om P_n te vinden. We hebben dan zelfs een uitdrukking voor de restterm in (13).

4 Simultane Padé-benadering.

4.1 De approximant.

Om uiteindelijk benaderingen te vinden voor $\zeta(2)$ en $\zeta(3)$ willen we verschillende functies tegelijk kunnen benaderen. We gaan nu kijken naar hoe dat in zijn werk gaat. We gaan kijken naar twee typen benadering. Neem de approximant als in (2). In het eerste type kiezen we per functie een andere noemer in de approximant en laten we de teller vast, in de tweede doen we het andersom.

Laat $f_1, f_2, ..., f_r$ functies zijn met de volgende representatie in de buurt van oneindig:

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,j} \frac{1}{z^{k+1}}.$$

Neem $n_1, ..., n_r$ waar $n_i \in \mathbb{N}$. In onze eerste type benadering, type I, willen we polynomen $A_{n-1,1}, ..., A_{n-1,r}$ en B_n vinden, met de graad van $A_{n-1,j}$ kleiner dan of gelijk aan $n_j - 1$ en de graad van B_n nader te bepalen, zo dat

$$A_{n-1,1}(z)f_1(z) + ... + A_{n-1,r}(z)f_r(z) - B_n(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^n}\right), \; n = n_1 + n_2 + ... + n_r. \tag{14}$$

Voor type II zoeken we polynomen Q_n van graad maximaal $n = n_1 + ... + n_r$ en $P_{n-1,1}, ..., P_{n-1,r}$, met $P_{n-1,j}$ van nader te bepalen graad zo dat

$$Q_n(z)f_j(z) - P_{n-1,j}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \; j = 1, 2, ..., r. \tag{15}$$

We willen weer kijken naar Markovfuncties. We zullen de functies als volgt beschrijven:

$$f_j(z) = \int_a^b \frac{u_j(x)}{z - x} \, dx, \; j = 1, ..., r$$

4.2 Type I.

Eerst kijken we naar type I, we doen hetzelfde als in de vorige paragraaf, vermenigvuldig met z^k en integreer (14) over een gesloten kromme Γ rond 0 om te krijgen:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (A_{n-1,1}(z)f_1(z) + \cdots + A_{n-1,r}(z)f_r(z)) z^k \, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma B_n(z) z^k \, dz = \sum_{j=|n|}^{\infty} a_j \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^{k-j} dz.$$

Wederom is de tweede integraal 0 volgens de stelling van Cauchy en omdat het residu aan de rechterkant voor $k < n - 1$ altijd nul is, vinden we net als in het vorige hoofdstuk

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{r} A_{n-1,j}(x) u_j(x) \right) x^k \, dz = 0, \; k = 0, 1, ..., n-2. \tag{16}$$

Nu definiëren we B_n als volgt:

$$B_n(z) = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{A_{n-1,j}(z) - A_{n-1,j}(x)}{z - x} u_j(x) \right) dx,$$

Merk hierbij op dat som en integraal weer gewoon verwisselbaar zijn voor polynomen. De polynoom boven de deelstreep heeft een nulpunt in $z = x$ dus de factor $z - x$ kan eruit gedeeld kan worden, dus B_n is een som van polynomen van graad $n_j - 1$ gedeeld door een factor en heeft dus geen hogere graad dan $\max_j(n_j - 2)$. De restterm is

$$\sum_{j=1}^{r} A_{n-1,j}(z)f_j(z) - B_n(z) = \int_a^b \sum_{j=1}^{r} \frac{A_{n-1,j}(x)}{z-x} u_j(x)dx = \sum_{j=1}^{r} \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} A_{n-1,j}(x)x^k u_j(x)dx$$

$$= \sum_{k=n-1}^{\infty} \left[\frac{1}{z^{k+1}} \sum_{j=1}^{r} \int_a^b A_{n-1,j}(x)x^k u_j(x)dx \right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^n}\right) \tag{17}$$

4.3 Type II.

Voor type II werkt het net zo. Eerst verkrijgen we na integratie over Γ en toevoeging van de factor z^k de volgende vergelijking:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_n(z)f_j(z)z^k dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma P_{n-1,j}(z)z^k\ dz = \sum_{i=n_j+1}^{\infty} a_{i,j}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^{k-i}dz.$$

We zien weer dat uit de stelling van Cauchy volgt dat de tweede integraal gelijk is aan nul, en aan de rechterkant alle residuen nul zijn voor $k < n_j$. Dus we hebben

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{r} Q_n(x)x^k u_j(x)\ dx = 0,\ \ k = 0, 1, ..., n_j - 1,\ \ j = 1, 2, ..., r, \tag{18}$$

en worden de noemers gegeven door:

$$P_{n-1,j}(z) = \int_a^b \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} u_j(x)\ dx.$$

$P_{n-1,j}$ is heeft hier weer een graad minder dan Q_n, dus maximaal $n - 1$. De restterm die nu overblijft is dus

$$Q_n(z)f_j(z) - P_{n-1,j}(z) = \int_a^b \frac{Q_n(x)}{z-x}\ u_j(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}\int_a^b Q_n(x)x^k u_j(x)dx =$$

$$= \sum_{k=n_j}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}\int_a^b Q_n(x)x^k u_j(x)dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right)\ \ j = 1, 2, ..., r. \tag{19}$$

5 Orthogonaliteit en het Legendre-polynoom.

Voor we verder gaan met bewijzen is het handig iets meer te weten over orthogonale polynomen. Twee polynomen $p(x)$ en $q(x)$ zijn orthogonaal ten opzichte van de Lebesgue-maat op $[a,b]$ als $\int_a^b p(x)q(x)dx = 0$. Nu introduceren we het Legendre-polynoom.
Legendre-polynomen zijn polynomen die voldoen aan de Legendre-vergelijking:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x))\right] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

P_n is hier een polynoom van graad n, verder eisen we dat $P_n(1) = 1$. We gaan nu een handige formule voor P_n genaamd Rodriguez' formule laten zien.

Lemma 4. *De oplossing van de Legendre-vergelijking is te schrijven als:*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

Bewijs. Laat $h(x) = (1-x^2)^n$, dan is $h'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1}$, dus $(1-x^2)h' + 2nxh = 0$. Nu differentiëren we $n+1$ maal naar x. We gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)h' &= (1-x^2)h^{(n+2)} - 2(n+1)xh^{(n+1)} - 2\frac{(n+1)n}{2}h^{(n)},\\ \frac{d^n}{dx^n}2nxh &= 2nxh^{(n+1)} + 2n(n+1)h^{(n)},\\ \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)h' + 2nxh\right] &= (1-x^2)h^{(n+2)} - 2xh^{(n+1)} + n(n+1)h^{(n)} = 0.\end{aligned}$$

Als h aan deze vergelijking voldoet, dan voldoet $P_n(x)$ daar ook aan, gezien $P_n(x) = ch(x)$ met c een constante, deze constante is $\frac{1}{2^n n!}$ gekozen, zodat de formule gelijk is aan 1 voor $n = 0$. Verder is het goed om op te merken dat $P_n(x)$ inderdaad een polynoom is. $\square$

Nu willen we het volgende lemma gebruiken om te demonstreren wat Legendre-polynomen met orthogonaliteit te maken hebben:

Lemma 5. *Legendre-polynomen van verschillende graad zijn orthogonaal aan elkaar t.o.v. de Lebesgue maat, op $[-1,1]$ ofwel:*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

Bewijs. Als P_n en P_m voldoen aan de Legendre-vergelijking, dan geldt:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x))\right] + n(n+1)P_n(x) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_m(x))\right] + m(m+1)P_m(x) = 0. \tag{21}$$

Vermenigvuldig nu (20) met P_m en de (21) met P_n, neem $P_n(21) - P_m(20)$ en integreer:

$$\int_{-1}^{1} P_m\left[(1-x^2)P_n'\right]' - P_n\left[(1-x^2)P_m'\right]'dx + [n(n+1) - m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_mP_ndx = 0.$$

Integreer de eerste integraal met partiële integratie:

$$\begin{aligned}&\left[P_m(x)(1-x^2)P_n'(x)\right]_{-1}^{1} - \left[P_n(x)(1-x^2)P_m'(x)\right]_{-1}^{1} \\ &\qquad - \int_{-1}^{1} P_m'(x)(1-x^2)P_n'(x) - P_n'(x)(1-x^2)P_m'(x)dx.\end{aligned}$$

De term voor de integraal is hier 0, de term in de integraal is dat ook. Daaruit volgt dan dat $\int_{-1}^{1} P_m P_n dx = 0$ ook nul is, want $n(n+1) - m(m+1) \neq 0$, gezien $n \neq m$. □

5.1 Het verschoven Legendre-polynoom.

Voor ons bewijs zijn we straks geïnteresseerd in polynomen die orthogonaal zijn aan alle polynomen van graad $n-1$ of kleiner op interval $[0,1]$. We moeten dus een translatie toepassen op de Legendre polynomen, we definiëren $P_n(2x-1) = E_n(x)$. De afbeelding $x \mapsto 2x-1$ is een lineaire bijectie van $[0,1]$ naar $[-1,1]$ dus de polynomen $E_n(x)$ zijn orthogonaal op $[0,1]$ t.o.v. de Lebesgue-maat.
Rodriguez' formule voor dit 'verschoven' Legendre polynoom is:

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-x)^n\right],$$

Welke ook zo uitgedrukt kan worden:

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}(-x)^k. \tag{22}$$

Dit is als volgt te zien: We kunnen gebruik maken van de binominaal-formule om te vinden dat

$$\frac{1}{n!}(x^2-x)^n = \frac{1}{n!}x^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x^k. \tag{23}$$

Als we $(-x)^k$ n maal primitiveren krijgen we

$$(-x)^{n+k}\cdot 1/k\cdot 1/(k+1)\cdots 1/(k+n) = \frac{k!}{(n+k)!}(-x)^{n+k},$$

dus (22) n maal primitiveren geeft

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\frac{k!}{(n+k)!}(-x)^{n+k} \\ &= (-x)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{k!n!}\frac{k!}{(n+k)!}(-x^k) \\ &= \frac{1}{n!}x^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}x^k.\end{aligned} \tag{24}$$

Gezien $n-k$ dezelfde pariteit heeft als $n+k$ geldt (23) = (24), en hieruit volgt (22).

Nu is het niet moeilijk te zien dat alle polynomen van graad kleiner dan n ook orthogonaal aan E_n zijn op dit interval. Gezien een willekeurige polynoom met graad $a < n$, is te schrijven als $\sum_{m=0}^{a} c_{m,a} E_m(x)$.

We willen ook nog dat $cE_n(x)$, met c constant, uniek is met deze orthogonaliteitseigenschap. Laat een rij monische $D_n(x)$ bestaan zo dat

$$\int_0^1 D_i D_j dx = 0, \ i \neq j.$$

Kies c zo dat $cE_n(x)$ ook monisch is. We weten dat $cE_n(x) - D_n(x)$ een graad kleiner dan n heeft omdat ze beide monisch zijn. Omdat geldt dat Legendre-polynomen orthogonaal zijn aan alle polynomen van lagere graad geldt dat $cE_n(x) - D_n(x)$ orthogonaal is aan $cE_n(x)$ en aan $D_n(x)$, maar dan ook aan $cE_n(x) - D_n(x)$, dus

$$\int_0^1 (cE_n(x) - D_n(x))^2 dx = 0,$$

waaruit volgt dat $cE_n(x) = D_n(x)$.

6 Irrationaliteit van $\zeta(2)$.

Nu zullen bewijzen dat $\zeta(2)$ irrationaal is om de werkwijze van het gebruik van Padé-benaderingen te demonstreren. $\zeta(2)$ wordt gedefiniëerd door $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Hiervan is bekend dat de waarde gelijk is aan $\pi^2/6$. Als $\zeta(2)$ irrationaal is volgt dus direct dat π dat ook is, immers, als π rationaal is, zijn π^2 en dus $\zeta(2)$ dat ook, want $(a/b)^2 = a^2/b^2$. Er zijn natuurlijk veel eenvoudigere manieren om te laten zien dat deze getallen irrationaal zijn, maar we zullen hiermee de methode demonstreren die we ook kunnen gebruiken om te bepalen dat $\zeta(3)$ irrationaal is, een lastigere taak.

Stelling 6. *Het reële getal $\zeta(2)$ is irrationaal.*

De rest van dit hoofdstuk omvat een uitgebreide uitleg van het bewijs hiervan naar de methode van Assche [1], die op zijn beurt ideeën van o.a. Beukers [2] heeft gebruikt.

6.1 Formulering van de te benaderen functies.

Neem de twee volgende Markov functies:

$$f_1(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x}, \quad f_2(z) = -\int_0^1 \log x \frac{dx}{z-x}.$$

Later zullen we zien dat dit de handige functies zijn om te kiezen voor dit bewijs. We weten dat voor $|x| < |z|$ geldt dat

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}}.$$

Gezien

$$\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}, \quad -\int_0^1 x^k \log x \, dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

volgt direct dat

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{1}{z^{k+1}}, \quad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \frac{1}{z^{k+1}}.$$

We zien nu dat $f_2(1) = \zeta(2)$.
Deze functies kunnen we simultaan benaderen door te zoeken naar polynomen A_n, B_n en C_n van graad ten hoogste n, zo dat

$$A_n(z) - B_n(z) \log z = \mathcal{O}((1-z)^{n+1}), \quad z \to 1, \tag{25}$$

$$A_n(z) f_1(z) + B_n(z) f_2(z) - C_n(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty. \tag{26}$$

Hier is (26) een benadering van type I (van de vorm (14) en zoals beschreven in hoofdstuk 4.2). 25 is een Padé-benadering van de logaritme. Beiden hebben in hun benadering de gemeenschappelijke polynomen A_n, B_n, en samen vormen ze dus een benadering van type II (van de vorm (15) en toegelicht in hfdst. 4.3). We combineren hier dus beide typen.

6.2 Bepalen van de benaderingspolynomen.

Voordat we de polynomen A_n en B_n kunnen bepalen willen we eerst het volgende Lemma, en de daaropvolgende stelling geven, als u stelling 8 aanneemt kunt u deze paragraaf verder overslaan.

6.2.1 Een eigenschap van $A_n(x) - B_n(x) \log x$

Lemma 7. *Laat a, b in $\mathbb{R}$. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu differentiëerbaar. Als de afgeleide f' van f niet meer dan n nulpunten (inclusief multipliciteit) heeft op [a,b], dan heeft f daar maximaal $n + 1$ nulpunten.*

Bewijs. Stel dat f $n + 2$ nulpunten heeft, dan heeft f minstens $n + 1$ extreme waarden, want tussen 2 nulpunten ligt altijd een extreme waarde. f' heeft een nulpunt op elke extreme waarde van f, dus minimaal $n + 1$ nulpunten. Maar f' heeft maar n nulpunten, dus f kan geen $n + 2$ nulpunten hebben, en heeft er dus maximaal $n + 1$. □

Nu gaan we een benadering voor de logaritme zoeken. Neem de volgende functie:

$$F_n(x) = A_n(x) - B_n(x) \log x. \tag{27}$$

Deze functie is te schrijven als $F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [a_i x^i + b_i x^i \log x]$, en we doen daarover de volgende bewering:

Stelling 8. *De som van de multipliciteiten van de nulpunten van $F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [a_i x^i + b_i x^i \log x]$ is niet groter dan $2n + 1$.*

Bewijs. We differentiëren $F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [a_i x^i + b_i x^i \log x]$ herhaaldelijk, we krijgen:

$$\begin{aligned}
F_n'(x) &= \frac{b_0}{x} + \sum_{i=1}^{n} [i a_i x^{i-1} + b_i x^{i-1}(i \log x + 1)], \\
F_n''(x) &= \frac{-b_0}{x^2} + \frac{b_1}{x} + \sum_{i=2}^{n} \left[i(i-1) a_i x^{i-2} + b_i + x^{i-2}(i(i-1)\log x + 2i - 1) \right], \\
F_n^{(3)}(x) &= \frac{2b_0}{x^3} + \frac{-b_1}{x^2} + \frac{b_2}{x} \sum_{i=3}^{n} \left[\frac{i!}{(i-3)!} a_i x^{i-3} + \frac{i!}{(i-3)!} b_i x^{i-3} \lambda \right],
\end{aligned}$$

Waarbij λ van de vorm $c \log x + d$ is.

Hieraan zien we eenvoudig dat de som na $n+1$ maal differentiëren is verdwenen, de exponenten zijn dan namelijk allemaal 0, en er een nieuwe som is gevormd van de volgende vorm:

$$F_n^{(n+1)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{b_j (n-j)!}{x^{n-j+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_k}{x^k}, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

Vermenigvuldig dit vervolgens met x^{n+1}, dan krijgen dan een polynoom van graad n, namelijk $g_n(x) = c_1 x^n + ... + c_n x + c_{n+1}$. x^{n+1} heeft alleen een nulpunt in 0, en dit is geen nulpunt van

$F^{(n+1)}(x)$. Dus dan is $g_n(x) = 0$ slechts daar waar $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_k}{x^k} = 0$ en eventueel in 0. $g_n(x)$ heeft dus minstens evenveel nulpunten als $F^{(n+1)}(x)$, en we weten van polynomen van graad n dat ze maximaal n nulpunten hebben. Dus $F^{(n+1)}(x)$ heeft maximaal n nulpunten.
Nu passen we Lemma 7 $n+1$ maal op $F^{(n+1)}(x)$ toe, we zien dan dat $F(x)$ maximaal $2n+1$ nulpunten heeft. □

6.2.2 Bepalen van A_n en B_n.

Vergelijking (25) eist dat het linkerdeel nul moet zijn met multipliciteit ten minste $n+1$ in $z = 1$ om aan de conditie te voldoen. Dus $F_n^{(k)}(1) = 0$ voor $k = 0, 1, ..., n$. We willen straks gebruik maken van de volgende eigenschap van $F_n(x)$:

Lemma 9.

$$F_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_x^1 (t-x)^n F_n^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Bewijs. Partieel integreren van $\int_x^1 (t-x)^n F_n^{(n+1)}(t)\ dt$ geeft:

$$\begin{aligned}
\int_x^1 (t-x)^n F_n^{(n+1)}(t)\ dt &= \Big[(t-x)^n F^{(n)}(t)\Big]_x^1 - n \int_x^1 (t-x)^{n-1} F_n^{(n)}(t)\ dt \\
&= (1-x)^n \cdot 0 - (x-x)^n \cdot F^{(n)}(x) - n \int_x^1 (t-x)^{n-1} F_n^{(n)}(t)\ dt \\
&= -n \int_x^1 (t-x)^{n-1} F_n^{(n)}(t)\ dt
\end{aligned}$$

Dit kunnen we n maal itereren, de exponent in de integraal valt dan volledig weg, en we krijgen:

$$(-1)^{(n+1)} \cdot n! \cdot F_n(x)$$

Waaruit het Lemma volgt. □

Bij (27) $n+1$ keer differentiëren verdwijnt het polynoom A_n, en met de regel van Leibnitz hebben we:

$$F_n^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_n^{(k)}(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n+1-k}}.$$

We kiezen een D zo dat $F_n^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x} D_n\left(\frac{1}{x}\right)$ met D_n een polynoom van graad ten hoogste n. De algemene oplossing van (25) kan daarom, als gevolg van Lemma 9, worden geschreven als:

$$F_n(x) = \int_x^1 (t-x)^n D_n(1/t) \frac{dt}{t},$$

en als we $E_n(x)$ definiëren als $x^n D_n(1/x)$, hebben we

$$F_n(x) = \int_x^1 (1-x/t)^n E_n(t) \frac{dt}{t}. \tag{28}$$

Nu zullen we (26) gebruiken om E_n te bepalen. Dit is een type I benaderingsprobleem, uit hoofdstuk 4 volgt dat we de volgende orthogonaliteitsrelatie naar (16) hebben:

$$\int_0^1 [A_n(x) - B_n(x)\log x]x^k \; dx = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Hieruit volgt dat F_n orthogonaal is op alle polynomen van graad ten hoogste $n-1$. We gebruiken nu (28) om

$$\int_0^1 x^k \int_x^1 (1 - x/t)^n E_n(t) \frac{dt}{t} dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

te krijgen.

NB: We willen de volgorde van integratie veranderen, t loopt van x tot 1 dus $x/t \leq 1$ ongeacht hoe dicht t bij 0 komt, verder geldt $\lim_{t\to 0}(1 - x/t)^n < t$, dus $\lim_{t\to 0}(1 - x/t)^n(1/t) < 1$. Als we in plaats van $[0, 1]$ dus $[\epsilon, 1]$ kiezen, met ϵ zo dicht bij 0 als we zelf willen, omzeilen we de 0 waarin de functie geen geldige waarde heeft. Voor het gemak noteren we in dit verslag gewoon $\int_0^1$ voor deze gevallen.

Volgorde van integratie veranderen geeft:

$$\int_0^1 E_n(t) \int_0^t (1 - x/t)^n x^k \; dx \frac{dt}{t} = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Substitueer nu $x = ty$ en we hebben

$$\int_0^1 E_n(t)t^k dt \int_0^1 (1 - y)^n y^k \; dy = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Hieruit volgt dat E_n orthogonaal is aan alle polynomen van graad hoogstens $n-1$ op het interval $[0, 1]$, dit betekent dat E_n het verschoven Legendre polynoom van graad n zoals beschreven in hoofdstuk 5 is:

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-1)^k x^k. \tag{29}$$

Merk op dat E_n ook een veelvoud van dit polynoom zou kunnen zijn, maar op de rest van dit bewijs zal dit van geen invloed zijn.

Substitueer (29) in (28) en we krijgen:

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-1)^k \int_x^1 (1 - x/t)^n t^{k-1} dt.$$

De binomiaalstelling toegepast op $(1 - x/t)^n$ geeft

$$(1 - x/t)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j x^j t^{-j}$$

dus

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \binom{n}{j} (-1)^{k+j} x^j \int_x^1 t^{k-j-1} dt.$$

We weten dat $\int_x^1 t^{k-j-1}dt = -\log x$ als $k=j$, en $\frac{1-x^{k-j}}{k-j}$ als $k \neq j$. Dus dat betekent dat

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k} x^k, \tag{30}$$

en

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\binom{n}{j}(-1)^{k+j}\frac{x^j - x^k}{k-j}. \tag{31}$$

6.3 Het vinden van C_n en de restterm.

We zijn nu geïnteresseerd in

$$f_2(1) = -\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

We willen $z=1$ kiezen in (26), maar deze vergelijking bevat $f_1(z)$, welke opblaast bij $z=1$. We weten uit (31) dat $A_n(1)=0$, waaruit volgt dat $z-1$ een factor is van het polynoom, we kunnen dus zeggen dat een polynoom $\hat{A}_{n-1}(z)$ bestaat met $(z-1)\hat{A}_{n-1}(z) = A_n(z)$, dus

$$\lim_{z\to 1} A_n(z)f_1(z) = \hat{A}_{n-1}(1)\lim_{z\to 1}(1-z)\log(1-\frac{1}{z}) = 0$$

en dus zal deze functie niet voor problemen zorgen in $z=1$. De restterm in (26) hebben we al algemeen bepaald in paragraaf 4.2, en komt neer op

$$A_n(z)f_1(z) + B_n(z)f_2(z) - C_n(z) = \int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{z-x}dx,$$

en de polynoom C_n, ook algemeen bepaald in paragraaf 4.2, wordt

$$C_n(z) = \int_0^1 \left(\frac{A_n(z) - A_n(x)}{z-x} - \frac{B_n(z) - B_n(x)}{z-x}\log x\right)dx.$$

Als we vergelijking (26) dus in $z=1$ bekijken vinden we

$$B_n(1)\frac{\pi^2}{6} - C_n(1) = \int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{1-x}dx.$$

en $B_n(1)$ is makkelijk te bepalen uit (30) en is gelijk aan

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k},$$

welke een geheel getal is. We weten

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{B_n(1) - B_n(x)}{1-x}\log x dx &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}(1-x^k)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(j+1)^2},\end{aligned}$$

en omdat $A_n(z) = 0$ in zowel $z = 1$ als $z = 0$, hebben we voldoende aan

$$\int_0^1 \frac{A_n(x)}{1-x}dx = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0,j\neq k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\binom{n}{j}(-1)^{k+j}\frac{1}{k-j}\int_0^1 \frac{x^j - x^k}{1-x}dx.$$

Dus

$$\begin{aligned} C_n(1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(j+1)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\binom{n}{j}(-1)^{k+j}\frac{1}{k-j}\int_0^1 \frac{x^j - x^k}{1-x}dx. \end{aligned}$$

We gebruiken dat $\frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{m=0}^{n-1} x^m$. We hebben dan

$$\int_0^1 \frac{x^j - x^k}{1-x}dx = \int_0^1 x^j \sum_{m=0}^{k-j-1} x^m dx = \sum_{m=j+1}^{k} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{j} \frac{1}{m}$$

Dus $C_n(1)$ is niet per definitie en geheel getal maar is een som van twee rationale getallen, waarvan er eentje als deler een getal heeft kleiner dan n, en de ander deler een kwadraat van een getal kleiner dan n. Dus als we $C_n(1)$ vermenigvuldigen met d_n^2, waar d_n het kleinste gemene veelvoud van $1, 2, ..., n$, dan is $d_n^2 C_n(1)$ wel een geheel getal. We kiezen dus $q_n = d_n^2 B_n(1)$ en $p_n = d_n^2 C_n$, dan volgt:

$$q_n\zeta(2) - p_n = d_n^2 \int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{1-x}dx. \tag{32}$$

Als we kunnen aantonen dat de rechterkant van deze vergelijking naar 0 gaat voor n naar oneindig, maar niet nul is, kunnen we Lemma 1 gebruiken. Daaraan besteden we de laatste paragraaf van dit bewijs.

6.4 Afronding van het bewijs.

We definiëren eerst nog een lemma:

Lemma 10. *Laat d_n het kleinste gemene veelvoud zijn van $1, 2, 3, ..., n$, dan geldt*

$$\limsup_{n\to\infty} d_n^{1/n} \leq e$$

Bewijs. d_n wordt gegeven door

$$d_n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_{\pi(n)}^{s_{\pi(n)}}$$

p-tjes zijn priemgetallen, $\pi(n)$ is het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan n, en s_k is de maximale exponent van p_k in de factorisering van elk getal $m \leq n$. Hieruit volgt ook dat $p_k^{s_k} \leq n$, zodat $d_n \leq n^{\pi(n)}$, dus

$$d_n^{1/n} \leq n^{\pi(n)/n} = e^{\log n\pi(n)/n}.$$

De priemgetallenstelling [5] zegt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1,$$

dus $\lim_{n\to\infty} d_n^{1/n} \leq e$. $\square$

Voor de restterm van de rechterzijde van (32) gebruiken we (28) waaruit volgt dat

$$\int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{1-x} dx = \int_0^1 \int_x^1 (1-x/t)^n E_n(t) \frac{dt}{t} \frac{dx}{1-x}. \tag{33}$$

Als we de substitutie $x = yt$ toepassen en de volgorde van integreren verwisselen krijgen we

$$\int_0^1 E_n(t) \int_0^t (1-x/t)^n \frac{dx}{1-x} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{E_n(t)(1-y)^n}{1-yt}\, dy\, dt,$$

We introduceren het volgende Lemma:

Lemma 11.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{E_n(t)(1-y)^n}{1-yt}\, dy\, dt = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{(-y)^n(1-y)^n}{(1-ty)^2} t^n(1-t)^n\, dt\, dy.$$

Bewijs. We gebruiken Rodriguez' formule voor E_n en we gaan partiëel integreren.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-ty} \left(\frac{d}{dt}\right)^n t^n(1-t)^n\, dt\, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-ty} \left(\frac{d}{dt}\right) \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} t^n(1-t)^n dt dy \\
&= \int_0^1 \left[\left[\frac{(1-y)^n}{1-ty} \left(\frac{d}{dt}\right)^{(n-1)} t^n(1-t)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} (t^n(1-t)^n) \left(\frac{d}{dt}\right) \frac{1}{1-ty}\, dt \right] dy \\
&= \int_0^1 \left[0 - \int_0^1 \frac{-y(1-y)^n}{(1-ty)^2} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} t^n(1-t)^n\, dt \right] dy.
\end{aligned}$$

Dit kunnen we herhalen tot we het n maal hebben gedaan en we krijgen dan:

$$(-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{(-y)^n(1-y)^n}{(1-ty)^2} t^n(1-t)^n\, dt\, dy.$$

$\square$

We hebben nu als gevolg van Lemma 11 en (33):

$$\int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{1-x} dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^n(1-y)^n t^n(1-t)^n}{(1-ty)^{n+1}}\, dt\, dy \tag{34}$$

We zien gemakkelijk dat de functie in de integraal hier op het hele interval positief is, en niet overal gelijk aan 0 is, dus deze integraal is groter dan 0 voor alle n.

Tot slot willen we een afschatting maken, die we introduceren in het laatste lemma van dit hoofdstuk:

Lemma 12. *Laat*

$$I(t,y) = \left(\frac{y(1-y)t(1-t)}{(1-ty)}\right),$$

in het maximum geldt:

$$\max_{0\le t,y\le 1} I(t,y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$$

Bewijs. We stellen eerst de afgeleide naar t gelijk aan 0.

$$\frac{d}{dt}I(t,y) = \frac{(1-ty)(1-2t)y(1-y) + yt(1-t)y(1-y)}{(1-ty)^2} = 0$$

Het gedeelte boven de deelstreep gelijkstellen aan 0 geeft:

$$\begin{aligned}
(1-ty)(1-2t) &= -ty(1-t),\\
1-ty-2t+2t^2y &= -ty+t^2y,\\
1-2t+t^2y &= 0,\\
(2-ty)t = 1 &\longrightarrow\ y = \frac{2t-1}{t^2}.
\end{aligned}$$

De afgeleide naar y geeft dezelfde uitdrukking met t en y verwisseld, en we vinden:

$$\begin{gathered}
(2-yt)y = 1\\
\left(2-\frac{2t-1}{t}\right)\frac{2t-1}{t^2} = 1\\
\left(\frac{4t^2-2t}{t^3} - \frac{4t^2-4t+1}{t}\right) = 1\\
\frac{2t-1}{t^3} = 1\\
t^3-2t+1 = 0\\
t = 1 \vee t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee t = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}
\end{gathered}$$

$I(t,y)$ is 0 voor $t=y=1$ en $t=y=0$ en groter dan 0 voor $t,y\in(0,1)$, hetzelfde kunnen we uitrekenen voor y dus er is een maximum in $t=y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Voor deze waarde geldt dat $1+t=1/t$ en $1-t=t^2$, dus $\frac{t^2(1-t)^2}{1-t^2} = \frac{t^2(1-t)}{1+t} = \frac{t^2t^2}{1/t} = t^5$. Dus we kunnen concluderen:

$$I(t,y) =\le \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 \quad \text{voor alle } 0\le t,y\le 1.$$

□

Uit Lemma 12 en (34) volgt dat:

$$\int_0^1 \frac{A_n(x)-B_n(x)\log x}{1-x}dx \le \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-ty}\,dy\,dt$$

Nu hebben we

$$(q_n\zeta(2)-p_n)d_n^{-2} \le \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-ty}\ dy\ dt = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2).$$

Neem de n-de machts wortel, omdat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\zeta(2)} = 1,$$

geldt:

$$\lim_{n\to\infty} ((q_n\zeta(2)-p_n)d_n^{-2})^{1/n} \le \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5}.$$

Gebruik Lemma 10

$$\lim_{n\to\infty} (q_n\zeta(2)-p_n)^{1/n} \le e^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5} = 0.66627... < 1.$$

Hieruit volgt dat $q_n\zeta(2)-p_n \to 0$. Na (34) hadden we al geconcludeerd dat $q_n\zeta(2)-p_n > 0$ voor alle n, uit lemma 1 volgt nu dat $\zeta(2)$ irrationaal is, hetgeen we wilden bewijzen.

7 Irrationaliteit van $\zeta(3)$.

Stelling 13. *Het reële getal $\zeta(3)$ is irrationaal.*

Het bewijs zullen we in dit hoofdstuk laten zien en is wederom gebaseerd op het artikel van Assche [1].

7.1 De te benaderen functies.

We gaan de volgende drie functies bekijken:

$$f_1(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x}, \quad f_2(z) = -\int_0^1 \log x \frac{dx}{z-x}, \quad f_3(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \log^2 x \frac{dx}{z-x}.$$

Weer gebruiken we dat voor $|z| > |x|$ geldt dat

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}}$$

en gezien

$$\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}, \quad -\int_0^1 x^k \log x \, dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad \frac{1}{2}\int_0^1 x^k \log^2 x \, dx = \frac{1}{(k+1)^3}$$

voor $k = 0, 1, 2, ...$, geldt dus

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\frac{1}{z^{k+1}}, \quad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}\frac{1}{z^{k+1}}, \quad f_3(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\frac{1}{z^{k+1}}.$$

Dus $f_3(1) = \zeta(3)$, het getal waarin we geïnteresseerd zijn. We kunnen nu het benaderingsprobleem omschrijven als

$$A_n(z) = \mathcal{O}(z-1), \qquad z \to 1 \tag{35}$$

$$A_n(z)f_1(z) + B_n(z)f_2(z) - C_n(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \qquad z \to \infty \tag{36}$$

$$A_n(z)f_2(z) + 2B_n(z)f_3(z) - D_n(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \qquad z \to \infty \tag{37}$$

A_n, B_n, C_n en D_n zijn polynomen van graad ten hoogste n. (35) betekent dat $A_n(1) = 0$. Dit is nodig om ervoor te zorgen dat $A_n(z)f_2(z)$ nul is als $z = 1$. We kijken naar de rationale benadering van $\zeta(3)$ door $z = 1$ te nemen in vergelijking (37) wat $2B_n(1)\zeta(3) - D_n(1)$ geeft aan de linkerkant, en we willen weer laten zien dat dit naar 0 gaat, zonder gelijk te zijn aan 0. zowel (36) en (37) zijn een type I benaderingsprobleem, voor f_1 en f_2, en f_2 en f_3 respectievelijk. De combinatie ervan vormt een benaderingsprobleem van type II met gemene delers (A_n) en (B_n). De orthogonaliteitsvoorwaarden van de twee type I problemen zijn

$$\int_0^1 [A_n(x) - B_n(x)\log(x)]x^k \, dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{38}$$

$$\int_0^1 [A_n(x) - B_n(x)\log(x)]x^k \log x \, dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{39}$$

7.2 Vinden waarden polynomen A_n en B_n.

Met in het achterhoofd het bewijs uit het vorige hoofdstuk, willen we weer een waarde voor $F_n(x) = A_n(x) - B_n(x) \log x$ vinden die orthogonaal is aan x^k, deze keer echter moet deze ook orthogonaal zijn aan $x^k \log x$. We zullen straks eerst laten zien dat dit geldt voor

$$F_n(x) = A_n(x) - B_n(x) \log x = \int_x^1 E_n(x/t) E_n(t) \frac{dt}{t}.$$

E_n is hier wederom het verschoven Legendre polynoom. $F_n(x)$ is, net als in het vorige hoofdstuk, een functie van de vorm $\sum_{i=0}^n [a_i x^i + b_i x^i \log x]$ en heeft dus weer niet meer dan $2n+1$ nulpunten. We zien ook weer dat $A_n(1) = 0$. Invullen in (38) en de volgorde van integratie veranderen (dat dit mag hebben we in het vorige hoofdstuk toegelicht) en we krijgen

$$\int_0^x x^k \int_x^1 E_n(x/t) E_n(t) \frac{dt}{t} dx = \int_0^1 E_n(t) \int_0^t E_n(x/t) x^k dx \frac{dt}{t}.$$

We substitueren weer, net als in het vorige hoofdstuk $x = yt$, dit geeft

$$\int_0^x F_n(x) x^k dx = \int_0^1 E_n(t) t^k dt \int_0^1 E_n(y) y^k dy.$$

welke 0 is voor $k = 0, 1, ..., n-1$ vanwege de orthogonaliteit van Legendre polynomen. Hiermee klopt (38) in ieder geval. Op dezelfde manier zien we dat

$$\int_0^x x^k \log x \int_x^1 E_n(x/t) E_n(t) \frac{dt}{t} dx = \int_0^1 E_n(t) \int_0^t E_n(x/t) x^k \log x dx \frac{dt}{t}.$$

Weer substitueren we x voor yt:

$$\int_0^x F_n(x) x^k \log x \ dx = \int_0^1 E_n(t) t^k \int_0^1 E_n(y) y^k (\log y + \log t) dy \ dt.$$

De laatste dubbele integraal is symmetrisch in y en t en dus gelijk aan

$$2 \int_0^1 E_n(t) t^k \log t \ dt \int_0^1 E_n(y) y^k \ dy.$$

Deze integraal is weer gelijk aan 0 voor $k = 0, 1, ..., n-1$ vanwege orthogonaliteit van Legendre-polynomen. Dus we hebben een uitdrukking voor $F_n(x)$. Gebruikmakend van (22), de expliciete uitdrukking voor E_n gegeven in hoofdstuk 5, geeft dit

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n+k}{k} \binom{n+j}{j} (-1)^{k+j} x^k \int_x^1 t^{j-k-1} dt.$$

Wetende dat $\int_x^1 t^{-1} dt = \log x$, concluderen we dat B_n is verkregen wanneer $k = j$:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 x^k. \tag{40}$$

A_n is dan het resterende deel:

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n+k}{k} \binom{n+j}{j} (-1)^{k+j} x^k \frac{x^k - x^j}{j-k}. \tag{41}$$

7.3 Bepalen restterm D_n

Het mag duidelijk zijn dat $B_n(1)$ een geheel getal is. We willen ook $D_n(1)$ bepalen. Nu is

$$D_n(z) = -\int_0^1 \frac{A_n(z) - A_n(x)}{z - x} \log x \, dx + \int_0^1 \frac{B_n(z) - B_n(x)}{z - x} \log^2 x \, dx.$$

Dus we hebben voor $D_n(1)$ eerst nodig:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{B_n(1) - B_n(x)}{1 - x} \log^2 x \, dx &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \int_0^1 \frac{1 - x^k}{1 - x} \log^2 x \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2}{(j+1)^3}.\end{aligned}$$

Verder gebruiken we dat $A_n(1) = 0$ en

$$\int_0^1 \frac{A_n(x)}{1 - x} \log x \, dx = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n+k}{k} \binom{n+j}{j} (-1)^{k+j} \frac{1}{j - k} \int_0^1 \frac{x^k - x^j}{1 - x} \log x \, dx.$$

en, denkende aan de vergelijkbare vergelijking in vorig hoofdstuk, leiden we partiëel af:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^k - x^j}{1 - x} \log x \, dx &= \left[\sum_{m=j+1}^{k} \frac{x^m}{m} \log x \right]_0^1 - \int_0^1 \sum_{m=j+1}^{k} \frac{x^{m-1}}{m} dx \\ &= 0 - \sum_{m=j+1}^{k} \frac{1}{m^2} = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^2} - \sum_{m=1}^{j} \frac{1}{m^2},\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}D_n(1) = &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2}{(j+1)^3}. \\ &+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n+k}{k} \binom{n+j}{j} (-1)^{k+j} \frac{1}{j - k} \frac{\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2} - \sum_{m=1}^{j} \frac{1}{m^2}}{j - k}.\end{aligned}$$

In dit geval hebben we weer een rationaal getal, waar we vorig hoofdstuk met d_n^2 vermenigvuldigden gebruiken we nu d_n^3, met $d_n = \text{kgv}(1, 2, 3, ..., n)$, dan is $d_n^3 D_n(1)$ zeker een geheel getal. Neem nu $q_n = 2d_n^3 B_n(1)$ en $p_n = d_n^3 D_n(1)$, dan geldt

$$q_n \zeta(3) - p_n = d_n^3 \int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s) \log s}{1 - s} \log s \, ds. \tag{42}$$

7.4 Verkrijgen van de juiste afschatting.

(De bewijzen van lemma's 14 en 15 in deze paragraaf zijn wat langer, maar bestaan voornamelijk basisoperaties en kunnen voor het leesgemak eventueel overgeslagen worden.)

We moeten nu weer laten zien dat de rechterkant van deze vergelijking naar 0 gaat. Dit kunnen we doen door de uitdrukking

$$A_n(s) - B_n(s)\log s = \int_s^1 E_n(s/y)E_n(y)\frac{dy}{y}$$

te gebruiken. E_n is hier weer het verschoven Legendre-polynoom van graad n op $[0,1]$, door de volgorde van integratie te veranderen vinden we

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s\ ds &= \int_0^1\int_0^t \frac{\log s}{1-s}E_n(s/y)E_n(y)\frac{dy}{y}\\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy}E_n(x)E_n(y)\ dx\ dy,\end{aligned}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van substitutie $s = xy$. Gebruik nu

$$\int_0^1 \frac{dv}{1-(1-u)v} = -\frac{\log u}{1-u}$$

En we krijgen

$$\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{E_n(x)E_n(y)}{1-(1-xy)v}\ dx\ dy\ dv.$$

Gebruik $n!E_n(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n t^n(1-t)^n$ (Rodrigues' formule) en Lemma 11 en op dezelfde manier als we (34) verkregen in vorig hoofdstuk krijgen we.

$$\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n v^n E_n(y)}{[1-(1-xy)v]^{n+1}} dx\ dy\ dv.$$

We willen naar

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-z)^n E_n(y)}{1-(1-xy)z} dx\ dy\ dz,$$

we zullen laten zien dat dat hetzelfde is:

Lemma 14.

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n v^n E_n(y)}{[1-(1-xy)v]^{n+1}} dx\ dy\ dv = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-z)^n E_n(y)}{1-(1-xy)z} dx\ dy\ dz$$

Bewijs. We substitueren v:

$$z = \frac{1-v}{1-(1-xy)v},$$

gebruik

$$1 - z = \frac{1-(1-xy)v - 1 - v}{1-(1-xy)v} = \frac{xyv}{1-(1-xy)v}$$

en

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1-z}{1-(1-xy)z}, \\
1-v &= \frac{xyz}{1-(1-xy)z} = (1-(1-xy)v)z, \\
\frac{dz}{dv} &= \frac{-xy}{(1-(1-xy)v)^2}, \\
\frac{dv}{dz} &= \frac{(1-(1-xy)v)^2}{-xy} = -\frac{1-v}{z}\frac{1-(1-xy)v}{xy}, \\
\frac{dv}{dz} &= -\frac{(1-v)(1-(1-xy)v)}{xyz} = \frac{1-(1-xy)v}{1-(1-xy)z}, \\
\frac{dv}{1-(1-xy)v} &= \frac{dz}{1-(1-xy)z},
\end{aligned}$$

en we krijgen

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n v^n E_n(y)}{[1-(1-xy)v]^{n+1}} dx\ dy\ dv = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-z)^n E_n(y)}{1-(1-xy)z} dx\ dy\ dz.$$

□

Gebruik Lemma 14 en nogmaals Lemma 11:

$$\int_0^1 \frac{A_n(s)-B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{[xyz(1-x)(1-z)(1-y)]^n}{[1-(1-xy)z]^{n+1}} dx\ dy\ dz.$$

nu moeten we weer het maximum bepalen van de integraal. We gebruiken weer een Lemma:

Lemma 15. *Laat*

$$I(x,y,z) = \frac{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)z},$$

dan geldt $\max_{0\leq x,y,z\leq 1} I(x,y,z) = (\sqrt{2}-1)^4$.

Bewijs. We stellen eerst $\frac{d}{dx}I(x,y,z)$ gelijk aan 0:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dx}\frac{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)z} = 0 \rightarrow \\
\frac{yz(1-2x)(1-y)(1-z)(1-(1-xy)z) - yz(1-x)(1-y)(1-z)xyz}{(1-(1-xy)z)^2} = 0 \rightarrow \\
(1-2x)(1-(1-xy)z = (1-x)xyz.
\end{gathered}$$

Gezien de afgeleide naar y ook gelijk gesteld aan 0 moet worden krijgen we dan: $1-(1-xy)z = \frac{(1-x)xyz}{1-2x} = \frac{(1-y)xyz}{1-2y}$, en daaruit volgt $x = y$. We stellen dus $y = x$, en leiden af naar z, om die vervolgens aan 0 gelijk te stellen.

$$\frac{d}{dz}I(x,x,z) = \frac{(x^2-x^4)((1-2z)(1-(1-x^2)z) + (1-x^2)(z-z^2))}{(1-(1-x^2)z)^2}.$$

Hieruit volgt:

$$
\begin{gathered}
(1-2z)(1-(1-x^2)z)+(1-x^2)(z-z^2)=0,\\
1-2z+z^2-z^2x^2=z^2(1-x^2)-2z+1=0,\\
((1+x)z-1)((1-x)z-1)=0,\\
z=\frac{1}{1+x}\vee z=\frac{1}{1-x}.
\end{gathered}
$$

We zoeken in $[0,1]$ dus we nemen $z=\frac{1}{1+x}$. De afgeleide van de te maximaliseren functie naar x geeft $x^2yz+2x+z=1+2xz$, gebruikend dat $x=y$ en $z=\frac{1}{1+x}$ vinden we met wat rekenen $x^3+2x^2-x=0$ en daaruit volgt $x=-\sqrt{2}-1, x=1ofx=\sqrt{2}-1$. We zoeken in $(0,1)$ want de vergelijking is 0 als x,y, of z 0 is, dus het is de laatste optie. Dus, in het maximum geldt:

$$
\begin{aligned}
x=y&=\sqrt{2}-1,\\
1-x=1-y&=2-\sqrt{2},\\
z&=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{\sqrt{2}},\\
1-z&=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},\\
(1-x)(1-y)(1-z)xyz&=\frac{(\sqrt{2}-1)^3(2-\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}^2}=(\sqrt{2}-1)^5,\\
1-(1-xy)z&=1-(2\sqrt{2}-2)\frac{1}{\sqrt{2}}=1-(2-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1,\\
\frac{(1-x)(1-y)(1-z)xyz}{1-(1-xy)z}&=(\sqrt{2}-1)^4.
\end{aligned}
$$

Dus $I(x,y,z)\leq(\sqrt{2}-1)^4$ □

7.5 Afronding van het bewijs.

Nu gaan we analoog aan vorig hoofdstuk verder

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1\frac{A_n(s)-B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds\right|&\leq(\sqrt{2}-1)^{4n}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-(1-xy)z}dx\ dy\ dz.\\
&=(\sqrt{2}-1)^{4n}2\zeta(3).
\end{aligned}
$$

Dus uit (42) volgt.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}|q_n\zeta(3)-p_n|^{1/n}&=\lim_{n\to\infty}\left|d_n^{3/n}\int_0^1\frac{A_n(s)-B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds\right|^{1/n}\\
&\leq e^3(\sqrt{2}-1)^4
\end{aligned}
$$

we hebben hierbij weer Lemma 10 gebruikt. Merk op dat $e^3(\sqrt{2}-1)^4<1$, dus n maal machtverheffen geeft $q_n\zeta(3)-p_n\to 0$, uit Lemma 1 volgt dan irrationaliteit van $\zeta(3)$, en we hebben bewezen waar we naar zochten.

8 Afsluitende Opmerkingen.

In dit verslag hebben we een niche gebruikt van de toepassing van Padé-benaderingen, en laten zien dat het een middel is om irrationaliteit van een functiewaarde te bewijzen. Maar naast het bewijzen dat een functie irrationaal is, is er in de Wiskunde veel nut voor het gebruik van dit soort nauwkeurige benaderingen. Numerieke analyses, getaltheorie, differentiaalvergelijkingen, Laplace transformaties, en dergelijke kunnen hier allemaal baat bij hebben. In veel vakgebieden komt voor dat de oplossing van een probleem een reeks is, waarbij weinig coëfficiënten bekend zijn of de sommatie zelf problematisch blijkt (zoals in de Riemann-ζ-functie). Zelf vond ik het dan ook een lastig onderwerp om goed te doorgronden, maar wel een interessante tak van de wiskunde om te verkennen.

References

[1] W. van Assche, *Approximation theory and analytic number theory*, Department of Mathematics, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1998,

[2] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc., 11 (1979), 268-272,

[3] E. Freitag and R. Busam, *Complex Analysis*, second edition, 2008,

[4] N. Liu, *Theory and Applications of Legendre Polynomials and Wavelets*, The University of Toledo, 2008,

[5] G. Jameson *The Prime Number Theorem*, Cambridge University Press, Student Texts 53, 2003