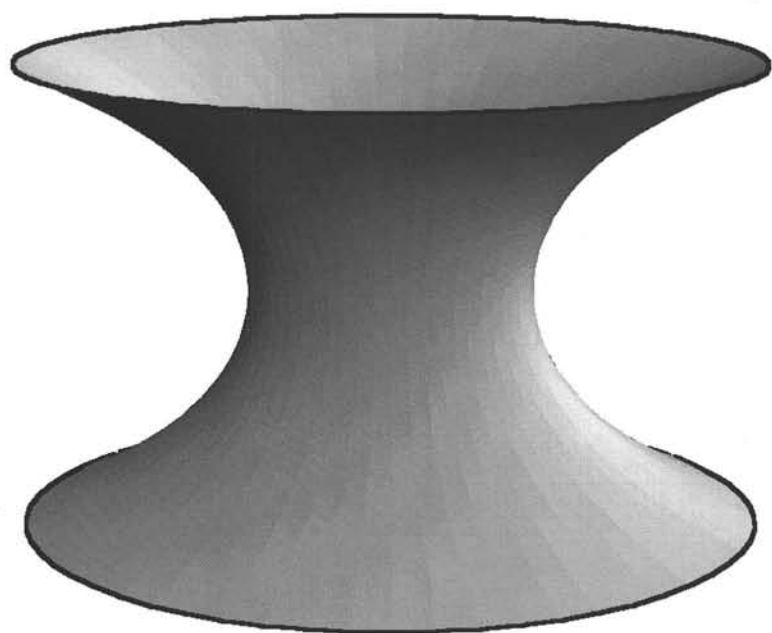


# Complexe functies, gewone en partiële differentiaal- vergelijkingen

G. Sweers



Delft University Press

744221

Complexe Functies,  
Gewone en Partiële  
Differentiaalvergelijkingen

Bibliotheek TU Delft



C 0003814106

2414  
340  
9

Differentiaalvergelijningen  
Gewone en Partiele  
Complexe Functies

*I am convinced that the knowledge of the deepest origins and also the limitations of the principles does not handicap a person in their practical application; as a matter of fact, real knowledge makes the application easier and safer.*

Th. Von Karman, 1945.

# Complexe Functies, Gewone en Partiële Differentiaalvergelijkingen

G. Sweers

**CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag**

Sweers, G.

Complexe functies, gewone en partiële differentiaalvergelijkingen / G. Sweers – Delft : Delft University Press – Ill.

Uitg. in opdracht van: Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft. –

Met lit. opg., reg.

ISBN 90-407-1681-1

NUGI 811

Trefw.: complexe functies, differentiaalvergelijkingen.

© VSSD

Eerste druk 1998

Uitgegeven door:

Delft University Press

Mekelweg 4, 2628 CD Delft

tel. 015 - 2783254, telefax 015 - 2781661

e-mail dup@dup.tudelft.nl

In opdracht van:

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft

tel. 015 - 2782124, telefax 015 - 2787585, e-mail: vssd@tudelft.nl

internet: [www.oli.tudelft.nl/vssd/hlf/handleidingen/html](http://www.oli.tudelft.nl/vssd/hlf/handleidingen/html)

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden vervoelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.*

ISBN 90-407-1681-1

## Voorwoord

---

Differentiaalvergelijkingen vormen bij uitstek de verbinding tussen de wiskundige analyse en de fysische modellen. De verscheidenheid in de optredende modellen wordt weerspiegeld in de diversiteit aan differentiaalvergelijkingen. In deze cursus, die is ontstaan uit de aantekeningen bij het college Differentiaalvergelijkingen voor Technische Natuurkunde, wordt getracht de verschillende soorten gewone en partiële differentiaalvergelijkingen met hun specifieke methoden aan de orde te laten komen.

De keuze van de onderwerpen hangt nauw samen met de gegeven randvoorwaarden. De belangrijkste daarvan is de voorkennis van de student, namelijk het eerstejaars vak Analyse en een begin van Lineaire Algebra. Daarnaast staat de lijst van onderwerpen die men behandeld wil zien. Een derde randvoorwaarde die ik mezelf opleg is dat de gebruiker van dit boek leert inzien waarom de gebruikte methode al of niet werkt en niet slechts hoe deze werkt. Bijvoorbeeld het scheiden van variabelen bij partiële differentiaalvergelijkingen werkt formeel bekeken zowel bij diffusie als bij anti-diffusie. Als de argumenten de lezer bij anti-diffusie al niet van enige moeilijkheden bewust maken dan hoop ik dat tenminste de bijgevoegde illustratie enige onrust veroorzaakt.

De stof valt in vier delen uiteen. Het eerste deel vormt een inleiding tot Complexe Functietheorie eindigend met harmonische functies en enkele toepassingen. Deel II begint met een korte herhaling van enkele expliciete methoden. De kern van dit deel is de fundamentele existentie en eenduidigheidstelling voor gewone differentiaalvergelijkingen. Daarnaast wordt aandacht besteed aan fasevlakanalyse voor lineaire en niet-lineaire gewone differentiaalvergelijkingen. Deel III, randwaardeproblemen voor lineaire gewone differentiaalvergelijkingen met Greense functies en Fourier-reeksen, vormt een opstapje naar deel IV, partiële differentiaalvergelijkingen. Na een classificatie van de verschillende typen en voorbeelden met de passende randvoorwaarden wordt wat nader ingegaan op vier klassen, tweede orde lineaire elliptische, parabolische, hyperbolische en Schrödinger-differentiaalvergelijkingen met de passende begin- en randvoorwaarden.

Enkele mededelingen over Computer-Algebra programma's. De afstand van een differentiaalvergelijking tot het fysische model is vaak omgekeerd evenredig met de berekenbaarheid. Gelukkig bestaan er programma's zoals Maple en Mathematica die veel rekenwerk uit handen kunnen nemen en de gebruiker zonder veel kennis van de numerieke wiskunde een benadering van een oplossing leveren. Als gereedschap worden ze de lezer van harte aanbevolen. Beide programma's zijn overigens gebruikt om de illustraties te genereren.

Tenslotte wil ik enkele collega's, dr. E. Coplakova in het bijzonder, en diverse studenten bedanken voor hun commentaar op delen van het manuscript.

Delft, juni 1998

G. Smeers



# Inhoud

---

<b>I</b>	<b>Complexe functies</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
1.1	Enkele begrippen . . . . .	3
1.1.1	Complexe getallen . . . . .	3
1.1.2	Open en gesloten . . . . .	4
1.1.3	Krommen . . . . .	4
1.1.4	Samenhang . . . . .	6
1.1.5	Limiet en continuïteit in $\mathbb{C}$ . . . . .	7
1.1.6	Reeksen . . . . .	8
1.2	Machtreeksen . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Differentiëren in <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>15</b>
2.1	De definitie . . . . .	15
2.2	Machtreeksen en differentieerbaarheid . . . . .	18
2.3	Cauchy-Riemann . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Integreren in <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>23</b>
3.1	De integraal over een kromme . . . . .	23
3.2	Hoofdstelling van de complexe integratie . . . . .	29
3.3	Het Residu . . . . .	31
3.3.1	Definitie en gebruik . . . . .	31
3.3.2	Het berekenen . . . . .	34
3.4	Gevolgen van de formule van Cauchy . . . . .	39
3.4.1	Eigenschappen analytische functies . . . . .	39
3.4.2	Harmonische functies . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Toepassingen</b>	<b>45</b>
4.1	Stationair temperatuurprofiel in 2 dimensies . . . . .	45
4.1.1	Inleiding met een model . . . . .	45
4.1.2	Een oplossing voor een cirkelvormig gebied . . . . .	48
4.1.3	Een oplossing op andere gebieden . . . . .	52
4.1.4	Eenduidigheid van de oplossing . . . . .	57
4.2	Stromingsproblemen in 2 dimensies . . . . .	58
4.2.1	Puntbron . . . . .	60
4.2.2	Stroming in een strip . . . . .	61



<b>II</b>	<b>Beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>Eerste orde gewone d.v. en eerste orde stelsels</b>	<b>65</b>
5.1	Enkele expliciete methoden voor 1 <sup>e</sup> orde . . . . .	65
5.1.1	Separabele d.v. . . . .	65
5.1.2	Homogene d.v. . . . .	66
5.1.3	Eerste orde lineaire d.v. . . . .	66
5.1.4	Bernoulli en Riccati d.v. . . . .	67
5.1.5	Exacte d.v. . . . .	67
5.1.6	Voorbeelden en opgaven . . . . .	69
5.2	Motivatie voor kwalitatieve aanpak . . . . .	72
5.3	Van hogere orde naar 1 <sup>e</sup> orde stelsel . . . . .	77
5.4	Existentie en eenduidigheid van het beginwaardeprobleem . . . . .	79
5.5	Bewijs locale existentie- en eenduidigheidsstelling . . . . .	85
5.5.1	Picard-iteratie . . . . .	86
5.5.2	Uniforme convergentie voor functie-rijen . . . . .	88
5.5.3	Begrensdheid van Picard-benaderingen . . . . .	89
5.5.4	Convergentie van Picard-benaderingen . . . . .	90
5.5.5	Eenduidigheid van de oplossing . . . . .	91
5.6	Gevolgen voor autonome d.v. . . . .	92
5.7	A priori schattingen . . . . .	94
5.8	Vergelijkingsprincipe voor 1 <sup>e</sup> orde d.v. . . . .	96
<b>6</b>	<b>Tweede orde gewone d.v.</b>	<b>101</b>
6.1	Analyse van het fasevlak . . . . .	101
6.2	De slinger met en zonder wrijving . . . . .	103
6.3	Lineaire d.v. . . . .	106
6.3.1	Existentie en eenduidigheid . . . . .	106
6.3.2	Het gereduceerde probleem . . . . .	107
6.3.3	Het oorspronkelijke probleem. . . . .	109
<b>7</b>	<b>Lineaire d.v. met constante coëfficiënten</b>	<b>111</b>
7.1	Inleiding . . . . .	111
7.2	Het berekenen van de oplossingen . . . . .	112
7.2.1	De definitie van de exponent van een matrix . . . . .	112
7.3	Intermezzo Lineaire Algebra . . . . .	114
7.3.1	Enkele simpele exponenten . . . . .	114
7.3.2	Eigenwaarden en eigenvectoren . . . . .	115
7.3.3	Transformaties voor 2 bij 2 matrices . . . . .	117
7.3.4	Transformaties voor $n$ bij $n$ matrices . . . . .	119
7.3.5	De $n \times n$ transformatie voor symmetrische matrices . . . . .	121
7.3.6	Matrix-norm . . . . .	122
7.4	Classificatie van lineaire stelsels in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	123
7.4.1	Voorbeelden . . . . .	125
7.5	Hoe te berekenen in $\mathbb{R}^3$ en hoger? . . . . .	131
7.6	(In)stabiliteit voor lineaire stelsels . . . . .	132
7.7	Het inhomogene stelsel . . . . .	134

<b>8</b>	<b>Kwalitatieve analyse niet-lineaire stelsels</b>	<b>137</b>
8.1	Niet-lineaire stelsels en linearisaties . . . . .	137
8.1.1	Lineariseren . . . . .	137
8.1.2	Stabiliteit . . . . .	138
8.1.3	Van gelineariseerde terug naar niet-lineaire stelsels . . .	139
8.2	Lyapunov-functies . . . . .	149
8.2.1	De Lorenz-vergelijking . . . . .	152
<b>9</b>	<b>Machtreeksmethoden</b>	<b>155</b>
9.1	Motivatie . . . . .	155
9.2	Classificatie . . . . .	157
9.3	Oplossingen rond normale punten . . . . .	158
9.4	Oplossingen rond regulier-singuliere punten . . . . .	159
<b>III</b>	<b>Randwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen</b>	<b>165</b>

Schema 1:	enkele oplossingen van randwaardeproblemen bij gewone differentiaalvergelijkingen . . . . .	167
-----------	---	-----

<b>10</b>	<b>Greense Functies voor gewone d.v.</b>	<b>169</b>
10.1	Tweede-orde randwaardeproblemen voor gewone d.v. . . . .	169
10.1.1	Een touwtje . . . . .	169
10.1.2	Greense functies voor tweede-orde r.w.p. . . . .	172
10.2	Een vierde-orde probleem; de ingeklemde staaf . . . . .	178
<b>11</b>	<b>Fourier-reeksen</b>	<b>181</b>
11.1	Motivatie 1: randwaardeproblemen voor gewone d.v. . . . .	181
11.2	Motivatie 2: scheiding van variabelen bij beginwaardeproblemen voor partiële d.v. . . . .	184
11.3	Enige achtergrond . . . . .	187
11.3.1	Voorwaarden en definities . . . . .	187
11.3.2	Eigenfuncties . . . . .	190
11.3.3	Convergentie . . . . .	192
11.3.4	Het berekenen . . . . .	193
11.4	Verdere theorie . . . . .	195
11.5	Fourier-reeksen en randwaardeproblemen . . . . .	198
11.5.1	Periodieke randvoorwaarde . . . . .	198
11.5.2	De standaard Fourier-reeks . . . . .	201
11.5.3	De Fourier-sinus-reeks . . . . .	202
11.5.4	De Fourier-cosinus-reeks . . . . .	203
11.5.5	Enkele verbanden . . . . .	204
11.5.6	Voorbeeld en opgaven . . . . .	204

<b>IV</b>	<b>Randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen</b>	<b>209</b>
-----------	--	------------

Schema 2:	enkele oplossingen van randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen . . . . .	211
-----------	--	-----

<b>12</b>	<b>Classificatie tweede orde partiële differentiaalvergelijkingen</b>	<b>213</b>
12.1	Motivatie	213
12.2	Afspraken	213
12.3	Classificatie in $\mathbb{R}^2$	215
12.4	Classificatie in $\mathbb{R}^n$	220
12.5	Typische voorbeelden	222
12.5.1	De harmonische differentiaalvergelijking	222
12.5.2	De warmtevergelijking	223
12.5.3	De golfvergelijking	224
12.5.4	De Schrödingervergelijking	226
12.6	Niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen	226
<b>13</b>	<b>Laplace en Poisson (elliptisch)</b>	<b>229</b>
13.1	Inleiding	229
13.2	Een vergelijkingsprincipe	231
13.3	De fundamentele oplossing	235
13.3.1	De Newton-potentiaal	236
13.3.2	De fundamentele oplossing op een begrensd gebied	242
13.4	Greense functie	243
13.4.1	De Greense functie voor de halfruimte	246
13.4.2	De Greense functie voor de cirkel/bol	248
13.4.3	Existentie op een algemeen gebied	251
13.5	Eigenfuncties	252
<b>14</b>	<b>Het diffusie-probleem (parabolisch)</b>	<b>255</b>
14.1	Diffusie op het interval $[0, \ell]$	255
14.1.1	Het model	255
14.1.2	Formele oplossing	256
14.1.3	Convergentie van de reeks	257
14.1.4	Anti-diffusie	260
14.1.5	Eenduidige oplossing	262
14.2	Diffusie op begrensde gebieden in hogere dimensies	263
14.2.1	Een herschaling met twee aardappels	265
14.3	Diffusieproblemen op onbegrensde gebieden	267
14.4	Diffusie met bronterm	272
<b>15</b>	<b>De golfvergelijking (hyperbolisch)</b>	<b>277</b>
15.1	Inleiding	277
15.2	Eenduidigheid op $[0, \ell]$	278
15.3	Existentie op $(-\infty, \infty)$	279
15.3.1	Enkele plaatjes bij oplossingen van de golfvergelijking	280
15.4	Existentie op $[0, \ell]$	282
15.5	De drummer	285
<b>16</b>	<b>Vergelijkingen uit de quantummechanica</b>	<b>291</b>
16.1	De Schrödinger-vergelijking	291
16.2	De Hamilton-operator	292
16.3	Het eigenwaardeprobleem voor de Schrödinger-vergelijking	298
	Literatuur	307
	Index	309

**Deel I**

**Complexe functies**

Teil I

Complex functions

# 1. INLEIDING

## 1.1 Enkele begrippen

We nemen aan dat de lezer bekend is met complexe getallen en enige vaardigheid bezit in het rekenen ermee. In deze inleiding zullen we enkele aanvullende afspraken maken en kennismaken met complexe machtreeksen. Voor de volledigheid beginnen we met een lijst van zowel nieuwe als oude zaken.

### 1.1.1 Complexe getallen

De verzameling  $\mathbb{C}$  van complexe getallen bestaat uit alle objecten van de vorm  $x + iy$  met  $x, y \in \mathbb{R}$ . De optelling en vermenigvuldiging van  $x + iy, u + iv \in \mathbb{C}$  worden als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}(x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v), \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= (xu - yv) + i(xv + yu).\end{aligned}$$

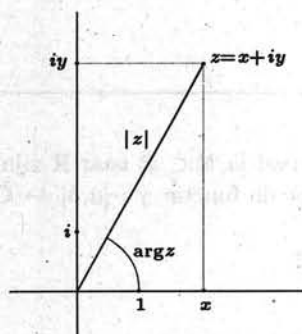
**Opmerking:** Met deze definitie zien we dat

$$(x + i0) + (u + i0) = (x + u) + i0 \quad \text{en} \quad (x + i0) \cdot (u + i0) = xu + i0$$

de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging in  $\mathbb{R}$  leveren wanneer we  $x$  met  $x + i0$  identificeren. Zo kunnen we  $\mathbb{C}$  als uitbreiding van  $\mathbb{R}$  zien. Schrijft men  $iy$  in plaats van  $0 + iy$  en  $i$  in plaats van  $i1$  dan volgt op formele wijze dat

$$i^2 = i \cdot i = (0 + i1) \cdot (0 + i1) = -1 + i0 = -1.$$

Voor complexe getallen worden de volgende begrippen en schrijfwijzen ingevoerd:



	$z$	$=$	$x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$
reële deel	$\operatorname{Re} z$	$=$	$x$
imaginaire deel	$\operatorname{Im} z$	$=$	$y$
complex geconjugeerde	$\bar{z}$	$=$	$x - iy$
modulus	$ z $	$=$	$\sqrt{x^2 + y^2}$
argument	$\arg z$	$=$	$\varphi \in [0, 2\pi)$ zodanig dat $z =  z (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Het argument is eenduidig gedefinieerd voor  $z \neq 0$ .



**Opgave 1** Bewijs de volgende (on)gelijkheden voor  $z, w \in \mathbb{C}$ :

i.  $|z|^2 = \bar{z}z$ .

ii.  $\bar{z}w + z\bar{w} = 2 \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w + 2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w$

▶ driehoeks-  
ongelijkheid

iii. de driehoeksongelijkheid:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

### 1.1.2 Open en gesloten

---

▶ omgeving van  
een punt

- voor
- $a \in \mathbb{C}$
- en
- $r \in \mathbb{R}^+$
- definiëren we de
- $r$
- omgeving van
- $a$
- door

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}.$$

▶ open

- een deelverzameling
- $D \subset \mathbb{C}$
- heet
- open*
- als er bij iedere
- $a \in D$
- een
- $r > 0$
- bestaat zodanig dat
- $B_r(a) \subset D$
- .

▶ complement

- voor
- $D \subset \mathbb{C}$
- definiëren we zijn
- complement*
- door
- $D^c = \{z \in \mathbb{C}; z \notin D\}$
- .

▶ gesloten

- een deelverzameling
- $D \subset \mathbb{C}$
- heet
- gesloten*
- als
- $D^c$
- open is.

- voor
- $D \subset \mathbb{C}$
- definiëren we gesloten verzameling
- $\bar{D}$
- door

$$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C}; B_r(z) \cap D \neq \emptyset \text{ voor alle } r > 0\}.$$

- voor
- $a \in \mathbb{C}$
- en
- $r \in \mathbb{R}^+$
- heet
- $\overline{B_r(a)} = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leq r\}$
- de
- gesloten  $r$ -omgeving*
- van
- $a$
- .

▶ rand

- de
- rand*
- $\partial D$
- van
- $D$
- definiëren we door

$$\partial D = \bar{D} \cap \overline{D^c}.$$

Om verwarring tussen  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{R}^2$  te vermijden zullen we soms de volgende notatie gebruiken bij  $D \subset \mathbb{C}$ :

$$D_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in D\}.$$

### 1.1.3 Krommen

---

▶  $C[a, b]$ 

- als
- $x(\cdot), y(\cdot)$
- continue functies van het interval
- $[a, b] \subset \mathbb{R}$
- naar
- $\mathbb{R}$
- zijn,
- $x, y \in C([a, b]; \mathbb{R})$
- (zie voetnoot
- <sup>1</sup>
- ), dan heet de functie
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$
- gedefinieerd door

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

▶ *kromme*een *kromme*. We zeggen  $\gamma \in C([a, b]; \mathbb{C})$ .

<sup>1</sup> De verzameling van alle continue functies van  $[a, b]$  naar  $\mathbb{R}$  wordt genoteerd met  $C([a, b]; \mathbb{R})$ , soms afgekort tot  $C([a, b])$  of zelfs  $C[a, b]$ .

**Opmerking:** De tekening van de beeldverzameling

$$K = \gamma[a, b] = \{x(t) + iy(t); a \leq t \leq b\}$$

in het complexe vlak lijkt op wat men een kromme zou willen noemen. Aan deze beeldverzameling zien we niet meer in welke richting, hoe vaak of hoe snel  $K$  doorlopen wordt. De 'snelheid' waarmee de beeldverzameling doorlopen wordt zal meestal van weinig belang zijn. Soms noemt men daarom ook wel deze beeldverzameling de kromme. De richting en hoe vaak de 'kromme' door de beeldverzameling loopt zal wel belangrijk worden en dat is een reden om de functie  $\gamma$  kromme te noemen in plaats van de deelverzameling  $K$  van  $\mathbb{C}$ .

►  $C^1[a, b]$   
► gladde kromme

- als  $x(\cdot), y(\cdot) \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ , (zie voetnoot<sup>2</sup>) dan heet  $\gamma(\cdot)$  een *gladde kromme*. Dit hoeft niet te betekenen dat de beeldverzameling  $K$  onze voorstelling van glad beantwoord.

► lengte

- de lengte  $\ell$  van een gladde kromme definiëren we door

$$\ell = \int_{t=a}^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

(dit komt overeen met onze intuïtieve voorstelling van de lengte)

► stuksgewijs gladde kromme

- de kromme  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heet een *stuksgewijs gladde kromme* als deze kromme bestaat uit een aaneenschakeling van een eindig aantal gladde krommen. Preciezer geformuleerd, er zijn gladde krommen

$$\gamma_k : [a_{k-1}, a_k] \rightarrow \mathbb{C} \text{ voor } k \in \{1, \dots, n\}$$

met  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  zodanig dat

$$\gamma(t) = \gamma_k(t) \text{ als } t \in [a_{k-1}, a_k].$$

► enkelvoudige kromme

- de kromme  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heet *enkelvoudig* als deze buiten eventueel samenvallende eindpunten geen zelfdoorsnijding heeft; dwz.

$$\gamma : (a, b] \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{C}$$

zijn beide injectief.



beeld van een enkelvoudige resp. niet-enkelvoudige kromme

► gesloten kromme

- de kromme  $\gamma(\cdot)$  heet *gesloten* als  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

<sup>2</sup>De verzameling van alle continu differentieerbare functies  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wordt genoteerd door  $C^1([a, b]; \mathbb{R})$ . De functie  $f$  is continu differentieerbaar op  $[a, b]$  als er een functie  $g \in C([a, b]; \mathbb{R})$  bestaat zodanig dat

$$g(t) = \begin{cases} \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} & \text{voor } t = a & (\text{de rechterafgeleide van } f \text{ in } a), \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} & \text{voor } t \in (a, b) & (\text{de afgeleide van } f \text{ in } t), \\ \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} & \text{voor } t = b & (\text{de linkerafgeleide van } f \text{ in } b). \end{cases}$$

Vaak wordt  $C^1([a, b]; \mathbb{R})$  afgekort tot  $C^1[a, b]$ .



► *Jordan-kromme*

- de kromme  $\gamma(\cdot)$  heet een *Jordan-kromme* als deze enkelvoudig en gesloten is.
- door een Jordan-kromme  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  wordt  $\mathbb{C} \setminus \gamma[a, b]$  in twee delen verdeeld, het inwendige en het uitwendige van de beeldverzameling  $\gamma[a, b]$ .

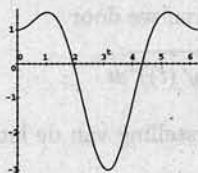


**Opgave 2** Onderzoek tot welke klassen de kromme  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  behoort als  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  met

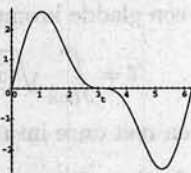
$$x(t) = 2 \cos t - \cos 2t,$$

$$y(t) = 2 \sin t + \sin 2t.$$

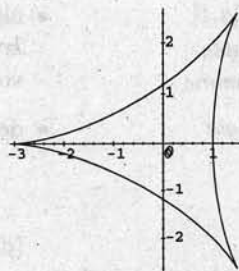
Als hulp volgen enkele schetsen.



de functie  $t \rightarrow x(t)$ ,



de functie  $t \rightarrow y(t)$ ,



$\{(x(t), y(t)); 0 \leq t \leq 2\pi\}$ .

### 1.1.4 Samenhang

► *samenhangend*

- een open deelverzameling  $D \subset \mathbb{C}$  heet *samenhangend* als elk tweetal punten in  $D$  door een kromme met beeldverzameling  $K \subset D$  verbonden kunnen worden.

► *gebied*

- een deelverzameling  $G \subset \mathbb{C}$  heet een *gebied* als
  - $G \neq \emptyset$ ,
  - $G$  is open,
  - $G$  is samenhangend.

► *enkelvoudig samenhangend*

- een gebied  $D \subset \mathbb{C}$  heet *enkelvoudig samenhangend* als het inwendige van elke Jordan-kromme in  $D$  ook weer in  $D$  ligt.

子 亦 有

De bijstaande karakters zijn achtereenvolgens enkelvoudig samenhangend, niet samenhangend en samenhangend (maar niet enkelvoudig).

1.1.5 Limiet en continuïteit in  $\mathbb{C}$ 

Net zoals voor reële functies definiëren we de begrippen limiet en continuïteit, en net zoals voor reële getallen bestaat het begrip limiet zowel voor 'rijtjes' als voor functies. In het onderstaande is  $D$  een deelverzameling van  $\mathbb{C}$ .

► *limiet van een rij* **Definitie 1.1.1** De rij  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  met  $z_n \in \mathbb{C}$  heeft een limiet  $\ell \in \mathbb{C}$  als:

voor iedere  $\varepsilon > 0$  is er een  $N \in \mathbb{N}$  zodanig dat  
als  $n > N$  dan  $|z_n - \ell| < \varepsilon$ .

We noteren  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell$ .

► *limiet van een functie* **Definitie 1.1.2** De functie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heeft in  $w \in D$  een limiet  $\ell \in \mathbb{C}$  als:

voor iedere  $\varepsilon > 0$  is er een  $\delta > 0$  zodanig dat  
voor alle  $z \in D$  als  $0 < |z - w| < \delta$  dan  $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ .

We noteren  $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = \ell$ .

► *continue functie* **Definitie 1.1.3** De functie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heet continu in  $w \in D$  als:

voor iedere  $\varepsilon > 0$  is er een  $\delta > 0$  zodanig dat  
voor alle  $z \in D$  als  $|z - w| < \delta$  dan  $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ .

Met andere woorden:  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heet continu in  $w \in D$  als  $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = f(w)$ .



**Opgave 3** Beschouw de functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(z) = \left(\frac{z}{|z|}\right)^2 - \left(\frac{\bar{z}}{|z|}\right)^2 & \text{voor } z \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Laat zien dat deze functie niet continu is in de oorsprong.

► *uniform*

Tenslotte nog het begrip *uniform*. Vaak beschouwen we limieten of continuïteit van functies of uitdrukkingen die van meerdere variabelen of van een parameter afhangen. Het zal belangrijk blijken te zijn om te weten of en hoe de convergentie van de parameter of de andere variabelen afhangt.

We zeggen dat  $\lim_{z \rightarrow w} f_q(z) = \ell_q$  uniform voor  $q \in I$  als:

voor iedere  $\varepsilon > 0$  is er een  $\delta > 0$  zodanig dat  
voor alle  $q \in I$  als  $0 < |z - w| < \delta$  dan geldt dat  $|f_q(z) - \ell_q| < \varepsilon$ .

In het uniforme geval is  $\delta$  alleen van  $\varepsilon$  afhankelijk terwijl bij  $\lim_{z \rightarrow w} f_q(z) = \ell_q$  de  $\delta$  zowel van  $q$  als van  $\varepsilon$  afhankelijk kan zijn. In wiskundige steno:

$\lim_{z \rightarrow w} f_q(z) = \ell_q$  voor alle  $q \in I$  betekent:  
 $\forall q \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{q,\varepsilon} > 0$  zodanig dat  $\forall z$  geldt  
 $0 < |z - w| < \delta_{q,\varepsilon} \Rightarrow |f_q(z) - \ell_q| < \varepsilon$ .

$\lim_{z \rightarrow w} f_q(z) = \ell_q$  uniform voor  $q \in I$  betekent:  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  zodanig dat  $\forall z, \forall q \in I$  geldt  
 $0 < |z - w| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_q(z) - \ell_q| < \varepsilon$ .

Tenslotte nog de definitie van uniforme continuïteit.

► *uniform  
continu*

**Definitie 1.1.4** De functie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heet uniform continu op  $D$  als:

voor iedere  $\varepsilon > 0$  is er een  $\delta > 0$  zodanig dat geldt  
voor alle  $z, w \in D$  als  $|z - w| < \delta$  dan  $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ .

□

**Opgave 4** Laat zien dat  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  met  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  wel continu is maar niet uniform continu is.

□

**Opgave 5** Bewijs voor de functie  $f$  in (1.1) de volgende uitspraken:

i. voor alle  $x \in (0, 1]$  geldt  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy) = 0$ ;

ii. voor alle  $y \in [0, 1]$  geldt  $\max_{0 < x \leq 1} |f(x + iy)| = 1$ ;

iii. niet geldt:  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy) = 0$  uniform voor  $x \in (0, 1]$ .

### 1.1.6 Reeksen

► *reeks*

Een object van de vorm  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$  met  $\beta_n \in \mathbb{C}$  heet een *reeks*. Convergentie voor reeksen in  $\mathbb{C}$  wordt gedefinieerd op dezelfde wijze als die voor reeksen in  $\mathbb{R}$ .

**Definitie 1.1.5** We nemen  $\beta_n \in \mathbb{C}$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

► *convergente  
reeks*

Een reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$  heet convergent als  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \beta_n$  bestaat.

► *absoluut con-  
vergente reeks*

Een reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$  heet absoluut convergent als  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k |\beta_n|$  bestaat.

► *divergente  
reeks*

Een reeks die niet convergent is heet *divergent*.

□

**Opgave 6** Bewijs de volgende beweringen.

i.  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$  is convergent  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ .

ii.  $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|$  is convergent  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$  is convergent.

iii.  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$  is convergent  $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \beta_n$  en  $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} \beta_n$  zijn convergent.

Laat met tegenvoorbeelden zien dat de eerste twee implicaties niet in omgekeerde richting gelden.

## 1.2 Machtreeksen

► *machtreeks*

Vele functies die een rol spelen in de mathematische fysica zijn gedefinieerd in de vorm van een machtreeks. Een *machtreeks* is een uitdrukking van de vorm  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  met  $a_n \in \mathbb{C}$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ . We zullen enkele elementaire eigenschappen van machtreeksen onderzoeken. Machtreeksen zullen we nogmaals tegenkomen bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

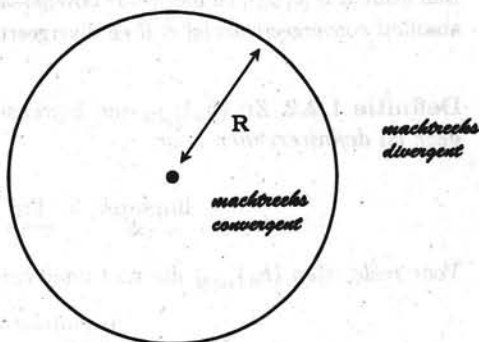
► *machtreeksstelling*

**Stelling 1.2.1** Zij  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  een machtreeks met  $a_n \in \mathbb{C}$ . Dan bestaat er  $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$  waarvoor geldt:

- i. als  $z \in \mathbb{C}$  met  $|z| < R$  dan convergeert de reeks absoluut;
- ii. als  $z \in \mathbb{C}$  met  $|z| > R$  dan divergeert de reeks.

► *convergentiestraal*

$R$  heet de convergentiestraal van de machtreeks.



Deze stelling doet geen uitspraak over de convergentie van de machtreeks als  $|z| = R$ .

► *verschoven machtreeks*

**Opmerking:** De resultaten in deze paragraaf hebben hun analogie voor een *verschoven machtreeks*. Voor  $a_n, z_0$  in  $\mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ziet de naar  $z_0$  verschoven machtreeks er als volgt uit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

**Bewijs:** We laten eerst het volgende zien: als de reeks convergeert voor  $w \neq 0$  dan convergeert de reeks absoluut voor alle  $z$  met  $|z| < |w|$ .  
Stel de reeks convergeert voor  $w$ . Omdat de reeks convergeert voor  $w$  volgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n w^n = 0.$$

Volgens de definitie van limiet is er voor iedere positieve  $\varepsilon$ , en dus voor  $\varepsilon = 1$ , een getal  $N$  zodanig dat  $|a_n w^n| < \varepsilon = 1$  voor  $n > N$ . Definieer het getal

$$M = \max\{|a_0|, |a_1 w|, |a_2 w^2|, \dots, |a_N w^N|, 1\}.$$

Dit is een positief reëel getal en wel zodanig dat  $|a_n w^n| \leq M$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ . Er volgt

$$\sum_{n=0}^k |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^k |a_n w^n| \left| \frac{z}{w} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^k \left| \frac{z}{w} \right|^n.$$

De laatste sommatie hoort bij een meetkundige reeks met reden  $\left| \frac{z}{w} \right|$  en die reeks convergeert omdat  $\left| \frac{z}{w} \right| < 1$ . Ter herinnering:  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$  als  $|r| < 1$ . Dus is  $\left\{ \sum_{n=0}^k |a_n z^n| \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  een stijgende en begrensde rij en daarmee convergent.

We hebben gevonden dat:

reeks convergent voor  $w \Rightarrow$  reeks absoluut convergent voor  $z$  met  $|z| < |w|$ ,

met als gevolgen:

reeks convergent voor  $w \Rightarrow$  reeks convergent voor  $z$  met  $|z| < |w|$ ,

reeks divergent voor  $w \Rightarrow$  reeks divergent voor  $z$  met  $|z| > |w|$ .

Stel eerst dat er geen  $z \in \mathbb{C}$  bestaat waarvoor de reeks divergeert. Dan vinden we  $R = \infty$ .

Stel er is wel een  $z_1 \in \mathbb{C}$  waarvoor de reeks divergeert. Definieer

$$R = \inf \{ r \in \mathbb{R}^+; \text{er is } z \in \mathbb{C} \text{ met } |z| = r \text{ en de machtreeks divergeert voor } z \}$$

Dan geldt  $R \in [0, |z_1|]$  en met beide bovenstaande gevolgen kan men zien dat de reeks absoluut convergeert als  $|z| < R$  en divergeert als  $|z| > R$ .  $\square$

► *limsup*

**Definitie 1.2.2** Zij  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  een begrensde rij reële getallen. De limsup van deze rij definieert men door

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{k \geq n} b_k \right).$$

Voor reële rijen  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  die niet naar boven begrensd zijn definieert men

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

**Opmerking:** Voor iedere naar boven begrensde reële rij  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  is de rij  $\{\sup_{k \geq n} b_k\}_{n \in \mathbb{N}}$  dalend. Als  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  naar onderen begrensd is dan wordt  $\{\sup_{k \geq n} b_k\}_{n \in \mathbb{N}}$  ook door dezelfde grens naar onderen begrensd. Dus als  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  een begrensde rij is dan is  $\{\sup_{k \geq n} b_k\}_{n \in \mathbb{N}}$  een dalende begrensde rij. Elke begrensde monotone rij heeft een limiet en dus zien we dat elke begrensde rij een (eindige) limsup heeft.

$\square$

**Opgave 7** Bewijs de volgende uitspraken.

- i. Als de reële rij  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  een limiet heeft dan geldt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
- ii. Als  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  begrensde reële rijen zijn met  $a_n \geq 0$  en  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  bestaat, dan geldt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- iii. Er zijn begrensde reële rijen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  met  $a_n, b_n \in \mathbb{R}^+$  zodanig dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

We gebruiken de limsup om de convergentiestraal van een machtreeks uit te rekenen.

► *formule van Cauchy-Hadamard* **Stelling 1.2.3** *We beschouwen de machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  met  $a_n \in \mathbb{C}$  voor  $n \in \mathbb{N}$ . Zij  $R$  de convergentiestraal.*

$$\text{Als } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \text{dan } R = \infty.$$

$$\text{Als } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \quad \text{dan } R = \ell^{-1}.$$

$$\text{Als } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \quad \text{dan } R = 0.$$

**Bewijs:** We bewijzen alleen het middelste geval. Het is voldoende om divergentie voor  $z \in \mathbb{C}$  met  $|z| > \ell^{-1}$  en convergentie voor  $z \in \mathbb{C}$  met  $|z| < \ell^{-1}$  te laten zien.

Eerst  $|z| > \ell^{-1}$ . Neem  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\ell - |z|^{-1})$ . De uitdrukking  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$  betekent

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell.$$

Dus er is een  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  zodanig dat voor alle  $n \geq N_\varepsilon$  geldt

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} > \ell - \varepsilon.$$

Daarmee is er voor iedere  $n \geq N_\varepsilon$  een  $k \geq n$  zodanig dat

$$\sqrt[k]{|a_k|} > \ell - 2\varepsilon.$$

Voor al deze  $k$ , waarvan er dus oneindig veel zijn, geldt

$$|a_k z^k| > (\ell - 2\varepsilon)^k |z|^k = 1.$$

Als de reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  convergeert dan volgt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z^n| = 0$ . Dit levert een tegenspraak en daarmee is bewezen dat de reeks divergeert.

Nu  $|z| < \ell^{-1}$ . Neem  $\varepsilon = \frac{1}{2}(|z|^{-1} - \ell)$ . Volgens de definitie is er een  $N_\varepsilon$  zodanig dat voor  $n > N_\varepsilon$  geldt

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} < \ell + \varepsilon$$

en dus geldt  $\sqrt[n]{|a_n|} < \ell + \varepsilon$  voor  $n > N_\varepsilon$ . Dan volgt

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^k |a_n z^n| \leq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^k (\ell + \varepsilon)^n |z|^n \leq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^k \left(\frac{\ell|z|+1}{2}\right)^n.$$

Omdat  $\frac{\ell|z|+1}{2} < 1$  geldt, convergeert het bovenstaande rechterlid voor  $k \rightarrow \infty$ . Via 'stijgende begrensde rij heeft een limiet' vinden we dat  $\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n z^n|$  en dus ook dat  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  convergeert. Het resultaat volgt via 'absolute convergentie impliceert gewone convergentie'.  $\square$

$\square$

### Voorbeeld 1

Bereken de convergentiestraal van  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n!}$ .

We zien dat  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  wanneer we  $a_k$  definiëren door

$$\begin{aligned} a_k &= 1 && \text{als } k = n! \text{ voor een even } n \in \mathbb{N}, \\ a_k &= -1 && \text{als } k = n! \text{ voor een oneven } n \in \mathbb{N}, \\ a_k &= 0 && \text{anders.} \end{aligned}$$

Dan  $\ell = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1$  en dus  $R = \frac{1}{\ell} = 1$ .

□

### Voorbeeld 2

Bereken de convergentiestraal van  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (\cos n) z^n$ .

Voor iedere  $n \in \mathbb{N}$  geldt dat

$$|\cos n| \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{of} \quad |\cos(n+1)| \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{of} \quad |\cos(n+2)| \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Dat ziet men als volgt. Omdat  $1 < \frac{1}{2}\pi < 2$ , geldt voor iedere  $t \in \mathbb{R}$  dat  $t$ , of  $t+1$ , of  $t+2$  binnen de intervallen  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k\pi - \frac{1}{4}\pi, k\pi + \frac{1}{4}\pi]$  ligt. Voor  $x$  binnen deze intervallen geldt  $|\cos x| \geq \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

Dan

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|2^k \cos k|} &\geq \sup_{k \in \{n, n+1, n+2\}} \sqrt[k]{|2^k \cos k|} = \\ &= \max \left( \sqrt[n]{2^n |\cos n|}, \sqrt[n+1]{2^{n+1} |\cos(n+1)|}, \sqrt[n+2]{2^{n+2} |\cos(n+2)|} \right) \geq \\ &\geq 2 \max \left( \sqrt[n]{|\cos n|}, \sqrt[n]{|\cos(n+1)|}, \sqrt[n]{|\cos(n+2)|} \right) \geq \\ &\geq 2 \sqrt[n]{\frac{1}{2}\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Er volgt

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|2^n (\cos n)^2|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$$

en  $R = \frac{1}{2}$ .

**Gevolg 1.2.4** De machtreeksen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  en  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$  hebben dezelfde convergentiestraal.

□

**Opgave 8** Bewijs Gevolg 1.2.4 met behulp van de formule van Cauchy-Hadamard.

□

**Opgave 9** Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeksen. (opklimmende moeilijkheidsgraad)

- |  |   |   |
|--|---|---|
| i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n;$    | v. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n) z^n;$           | iv. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} z^{n!}.$ |
| ii. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^n;$     | vi. $\sum_{n=0}^{\infty} \sinh(n) z^n;$         |   |
| iii. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n;$ | vii. $\sum_{n=0}^{\infty} \sinh(\sqrt{n}) z^n;$ |   |
| iv. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{(n^2)};$         | viii. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!};$         |   |

Na onderdeel iii. uit laatste opgave kunnen we voor alle  $z \in \mathbb{C}$  de exponentiële functie definiëren door

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Voor  $x \in \mathbb{R}$  weten we via de Taylor-reeks dat  $e^x = \exp(x)$ . Men definieert voor complexe getallen  $e^z = \exp(z)$ .

Enkele andere verwante oude bekenden zijn de volgende:

$$\text{sinus:} \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

$$\text{cosinus:} \quad \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

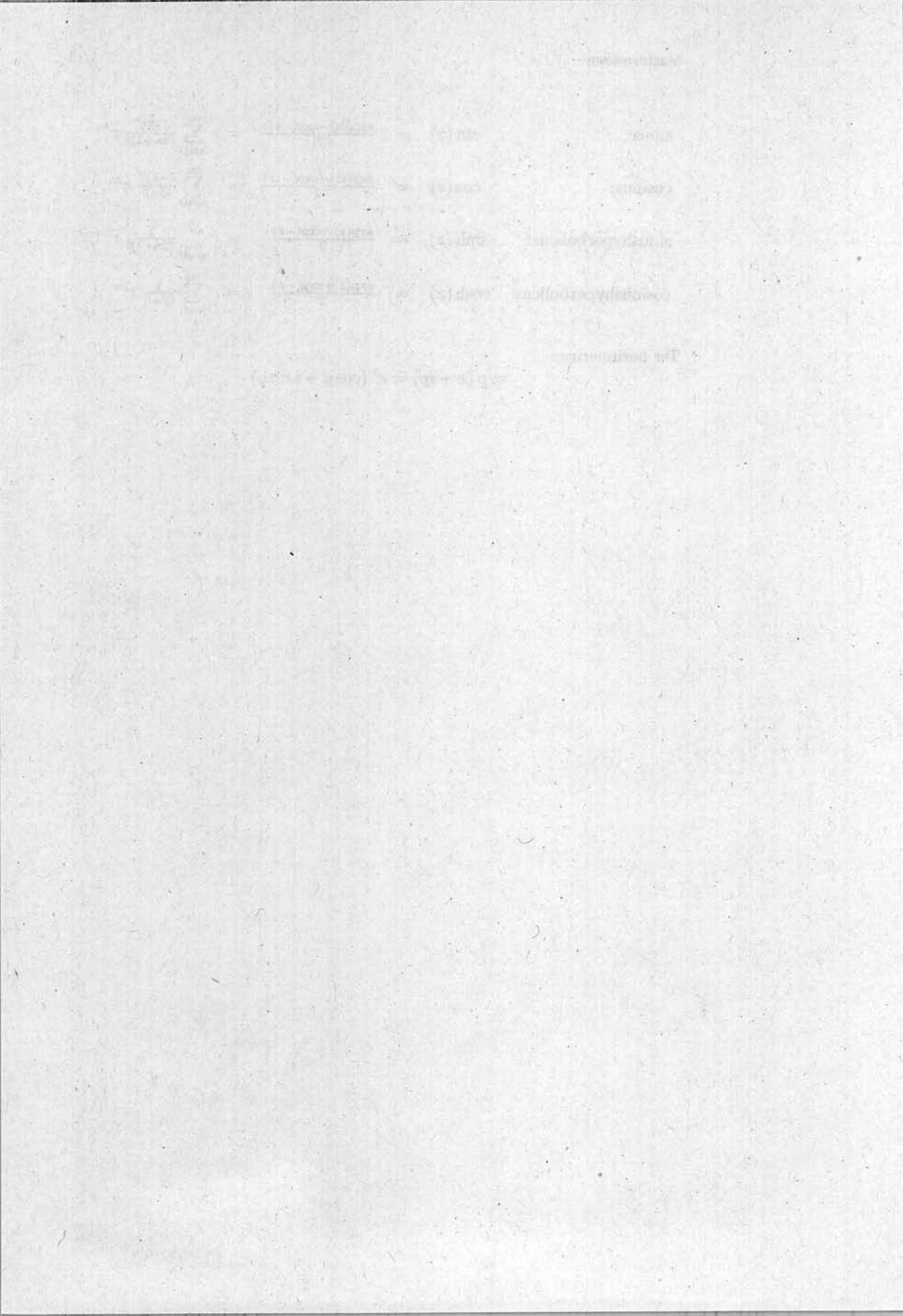
$$\text{sinushyperbolicus:} \quad \sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

$$\text{cosinushyperbolicus:} \quad \cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}.$$

Ter herinnering:

$$\exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y).$$





## 2. DIFFERENTIËREN IN $\mathbb{C}$

Continuïteit voor complexe functies lijkt nauwelijks te verschillen met continuïteit voor reële functies. Met enige naïviteit zou men kunnen verwachten dat ook differentieerbaarheid wel niets nieuws zal brengen. Dit verwachtingspatroon zal niet bevestigd worden.

### 2.1 De definitie

**Definitie 2.1.1** Zij  $D$  een gebied in  $\mathbb{C}$  en  $w \in D$ .

► differentieerbaar

De functie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heet differentieerbaar in  $w$  als

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \text{ bestaat.}$$

Als deze limiet bestaat dan schrijven we  $f'(w) = \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$ .

□

#### Voorbeeld 3

We onderzoeken waar de functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  met  $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$  differentieerbaar is.

Het differentiequotient is

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} &= \frac{(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Re} w)^2}{z - w} = \\ &= (\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w) \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w}. \end{aligned}$$

Omdat  $\lim_{z \rightarrow w} \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w}$  niet bestaat:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\operatorname{Re}(w+h) - \operatorname{Re} w}{w+h-w} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{h}{h} = 1, \\ \lim_{\substack{ih \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\operatorname{Re}(w+ih) - \operatorname{Re} w}{w+ih-w} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{0}{ih} = 0, \end{aligned}$$

bestaat  $\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$  niet als  $\lim_{z \rightarrow w} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w) \neq 0$ . Met andere woorden,  $f$  is niet differentieerbaar in  $w$  als  $\operatorname{Re} w \neq 0$ .

Als  $\operatorname{Re} w = 0$  dan geldt  $\lim_{z \rightarrow w} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w) = 2 \operatorname{Re} w = 0$  en er volgt uit de begrensdsheid van  $\frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w}$  dat  $\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = 0$ . Merk op dat  $\frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w}$  inderdaad begrensd is:

$$\left| \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}{z - w} \right| = \frac{|\operatorname{Re}(z - w)|}{|z - w|} \leq 1 \text{ voor alle } z \neq w.$$

Bovenstaande  $f$  is dus alleen differentieerbaar op de imaginaire as.

□ **Opgave 10** Laat zien dat de functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeven door  $f(z) = \bar{z}$  in geen enkele  $w \in \mathbb{C}$  differentieerbaar is. \_\_\_\_\_

□ **Opgave 11** Laat zien dat de functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gedefinieerd door  $f(x, y) = (x, -y)$  voor alle  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  differentieerbaar is. Gebruik hiervoor de definitie van reëel differentieerbaar<sup>1</sup>. \_\_\_\_\_

De beide laatste opgaven laten zien dat er een groot verschil is tussen differentieerbaarheid voor functies van  $\mathbb{R}^2$  naar  $\mathbb{R}^2$  en differentieerbaarheid voor functies van  $\mathbb{C}$  naar  $\mathbb{C}$ .

□ **Opgave 12** Bepaal alle  $w \in \mathbb{C}$  waar de functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeven door  $f(z) = |z|^2$  differentieerbaar is. \_\_\_\_\_

□ **Opgave 13** In een opgave in het eerstejaarsvak analyse wordt gevraagd om te bewijzen dat de functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{voor } x \neq 0, \\ 0 & \text{voor } x = 0, \end{cases}$$

(reëel) differentieerbaar is in 0. Is de functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gedefinieerd door

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) & \text{voor } z \neq 0, \\ 0 & \text{voor } z = 0, \end{cases}$$

(complex) differentieerbaar in 0? \_\_\_\_\_

► *analytisch*

**Definitie 2.1.2** Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$  en zij  $f$  een functie van  $G$  naar  $\mathbb{C}$ .

- $f$  heet analytisch op  $G$  als  $f$  differentieerbaar is in ieder punt van  $G$ .
- $f$  heet analytisch in  $z \in G$  als er  $r > 0$  bestaat zodanig dat  $f$  analytisch op  $B_r(z)$  is.

► *holomorfe*

In plaats van *analytisch* wordt ook wel de term *holomorfe* gebruikt.

□

**Voorbeeld 4**

De functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  met  $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$  is differentieerbaar in  $z$  voor  $z \in i\mathbb{R}$  maar in geen enkele  $z \in \mathbb{C}$  analytisch. Zie het vorige voorbeeld. \_\_\_\_\_

<sup>1</sup>De functie  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heet differentieerbaar in  $w \in \mathbb{R}^n$  als er een lineaire afbeelding  $Df_w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  bestaat zodanig dat

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^n}} \frac{|f(w+h) - f(w) - Df_w h|}{|h|} = 0.$$

De matrix voor  $Df_w$  heeft  $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(w)$  op plaats  $ij$ .

De samenstellingsregels voor de complexe afgeleide zijn zoals voor de reële afgeleide.

**Stelling 2.1.3** Als  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  differentieerbaar zijn in  $z$ , dan zijn  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  (mits  $g(z) \neq 0$ ) en  $f \circ g$  differentieerbaar en gelden

$$\text{somregel} \quad (f + g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$

$$\text{productregel} \quad (f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$

$$\text{quotiëntregel} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2} \quad \text{mits } g(z) \neq 0,$$

$$\text{kettingregel} \quad (f \circ g)'(z) = (f' \circ g)(z) \cdot g'(z).$$

**Bewijs:** Analooq aan het reële geval. □

Onmiddellijk uit de definitie volgt dat de functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  met  $f(z) = z$  analytisch op  $\mathbb{C}$  is. Als gevolg van som- en productregel vinden we vervolgens dat iedere *polynoom*, dwz. een functie  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  van de vorm

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \quad \text{met } a_i \in \mathbb{C},$$

analytisch op  $\mathbb{C}$  is.

► *polynoom*

Gebuiken we ook de quotiëntregel dan vinden we dat iedere *rationale functie*, dwz. een functie van de vorm

► *rationale functie*

$$r(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)}$$

waarbij  $p_1$  en  $p_2$  polynomen zijn, analytisch is op  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ . Hierbij is  $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  de verzameling complexe getallen waarvoor geldt  $p_2(z) = 0$ .

□

**Opgave 14** Aan welke eisen voldoen de coëfficiënten van de functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  met

$$f(x + iy) = a + b_1x + b_2y + c_{11}x^2 + c_{12}xy + c_{22}y^2$$

als  $f$  een differentieerbare functie in 0 is?

En als  $f$  een analytische functie op  $\mathbb{C}$  is? \_\_\_\_\_

□

**Opgave 15** Het polynoom  $p$  heeft een nulpunt  $z_0$ . Laat zien dat de functie

$$r(z) = \begin{cases} \frac{p(z)}{z - z_0} & \text{voor } z \neq z_0, \\ p'(z_0) & \text{voor } z = z_0, \end{cases}$$

differentieerbaar is op geheel  $\mathbb{C}$ .

Als  $z_0$  een tweevoudig nulpunt is kan men dan  $c$  zodanig kiezen dat

$$q(z) = \begin{cases} \frac{p(z)}{(z - z_0)^2} & \text{voor } z \neq z_0, \\ c & \text{voor } z = z_0, \end{cases}$$

differentieerbaar is op geheel  $\mathbb{C}$ ? Motiveer. \_\_\_\_\_

## 2.2 Machtreksen en differentieerbaarheid

Nadat we de differentieerbaarheid van polynomen en rationale functies gezien hebben is de volgende stap de differentieerbaarheid van functies die in de vorm van een machtreks zijn te schrijven. Gevolg 1.2.4 heeft daarvoor al voorbereidend werk gedaan.

► *analyticiteit van machtreksen*

**Stelling 2.2.1** Zij  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  met  $a_n \in \mathbb{C}$  een machtreks met convergentiestraal  $R$ . Definieer de functie  $f: B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$  door

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dan is  $f$  analytisch op  $B_R(0)$  en voor alle  $z \in B_R(0)$  geldt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

**Opmerking:** Simpel gezegd: voor  $z \in \mathbb{C}$  met  $|z| < R$  geldt  $\frac{d}{dz} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{d}{dz} a_n z^n)$ . Omdat zowel de afgeleide als de oneindige som door limieten gedefinieerd zijn kan men deze volgorde niet zonder meer omdraaien.

**Bewijs:** We zullen laten zien dat  $f$  differentieerbaar is in  $w \in B_R(0)$  met afgeleide als boven. Dat is hetzelfde als te laten zien dat er voor alle  $\varepsilon > 0$  een  $\delta > 0$  bestaat zodanig dat

$$\text{als } |z - w| < \delta \text{ dan } \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} \right| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Volgens Gevolg 1.2.4 weten we dat  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  convergentiestraal  $R$  heeft. Neem  $\delta_1$  tussen 0 en  $R - |w|$ . Voor  $|z - w| < \delta_1$  en dus  $|z| < R$  geldt:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} &= \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} = \end{aligned}$$

(alle limieten hier bestaan dus ook de limiet van de som)

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^N a_n \left( \frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left( \frac{z^n - w^n}{z - w} \right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n w^{n-1}. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Elk van deze drie uitdrukkingen kunnen we kleiner dan  $\frac{1}{3}\varepsilon$  krijgen door  $N$  groot genoeg en  $|z - w|$  klein genoeg te nemen. Dat zien we als volgt. Omdat  $\frac{z^n - w^n}{z - w} = z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1}$  volgt dat

$$\left| \frac{z^n - w^n}{z - w} \right| \leq n(|w| + \delta_1)^{n-1}.$$

Omdat  $(|w| + \delta_1) < R$  geldt, is de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| (|w| + \delta_1)^{n-1}$  convergent en dus bestaat er een  $N$  zodanig dat

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| (|w| + \delta_1)^{n-1} < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Ook geldt dan dat

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n w^{n-1} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| |w|^{n-1} < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Met (2.2) blijft er over dat

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} \right| < \left| \sum_{n=0}^N a_n \left( \frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right) \right| + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Omdat  $rest(z, w) := \sum_{n=0}^N a_n \left( \frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right)$  slechts eindig veel termen bevat en omdat  $\lim_{z \rightarrow w} \frac{z^n - w^n}{z - w} = n w^{n-1}$  bestaat er  $\delta_2 > 0$  zodanig dat voor  $|z - w| < \delta_2$  geldt dat  $|rest(z, w)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Door  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  te nemen hebben we aan het gevraagde in (2.1) voldaan.  $\square$

Als gevolg vinden we dat bijvoorbeeld de exponentiële functie, de cosinus en de sinus analytisch zijn op  $\mathbb{C}$ . Gebruiken we de quotiëntregel dan vinden we dat de tangens analytisch is op  $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .



**Opgave 16** Bewijs deze laatste uitspraak. \_\_\_\_\_

## 2.3 Cauchy-Riemann

Het grote verschil tussen differentieerbaar in  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^2$ ) en  $\mathbb{C}$  zien we met de volgende stelling.

Voor de formulering hebben we enkele afspraken nodig:  $D$  is een gebied in  $\mathbb{C}$  en bij een functie  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  definiëren we twee reële functies  $u, v: D_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  door

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy), \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy). \end{aligned}$$

Dus  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  voor  $(x, y) \in D_{\mathbb{R}}$ .

**Stelling 2.3.1 (Cauchy-Riemann)** Zij  $f, u, v, D$  en  $D_{\mathbb{R}}$  als boven en neem  $(a, b) \in D_{\mathbb{R}}$ . Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.

- i.  $f$  is (complex) differentieerbaar in  $a + ib$ ;
- ii.  $u, v$  zijn (reëel) differentieerbaar in  $(a, b)$  en bovendien geldt

$$\begin{aligned} u_x(a, b) &= v_y(a, b), \\ v_x(a, b) &= -u_y(a, b). \end{aligned} \tag{2.3}$$

► Cauchy-Riemann-vergelijkingen

De twee vergelijkingen in (2.3) heten samen de *Cauchy-Riemann-differentiaal-vergelijkingen*.

**Opmerking:** Als  $z \mapsto f(z)$  complex differentieerbaar is en  $x \mapsto f(x+iy)$  en  $y \mapsto f(x+iy)$  reëel differentieerbaar zijn, dan volgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) &= f'(x+iy) \frac{\partial(x+iy)}{\partial x} = f'(x+iy), \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) &= f'(x+iy) \frac{\partial(x+iy)}{\partial y} = i f'(x+iy).\end{aligned}$$

Dus

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = i \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy)$$

en door het reële, respectievelijk imaginaire deel hiervan te nemen krijgen we de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Misschien helpt dit als ezelsbruggetje. Het eerste deel van het bewijs volgt overigens dit spoor.

Met  $u$  en  $v$  als boven vinden we dan dat

$$f'(x+iy) = u_x(x, y) + i v_x(x, y).$$

**Bewijs:**  $i \Rightarrow ii$ . Stel  $f$  is differentieerbaar in  $a+ib$ . Volgens onze notatie hebben we

$$\frac{u(x, b) - u(a, b)}{x - a} + i \frac{v(x, b) - v(a, b)}{x - a} = \frac{f(x+ib) - f(a+ib)}{x - a}.$$

Omdat  $\lim_{\substack{z \rightarrow a+ib \\ z \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+ib) - f(a+ib)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a+ib} \frac{f(z) - f(a+ib)}{z - a} = f'(a+ib)$  volgt dat

$$u_x(a, b) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{u(x, b) - u(a, b)}{x - a} = \operatorname{Re} f'(a+ib),$$

$$v_x(a, b) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{v(x, b) - v(a, b)}{x - a} = \operatorname{Im} f'(a+ib).$$

Ook hebben we

$$\frac{u(a, y) - u(a, b)}{y - b} + i \frac{v(a, y) - v(a, b)}{y - b} = i \frac{f(a+iy) - f(a+ib)}{iy - ib}$$

en er volgt dat

$$u_y(a, b) = \lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in \mathbb{R}}} \frac{u(a, y) - u(a, b)}{y - b} = \operatorname{Re} i f'(a+ib) = -\operatorname{Im} f'(a+ib),$$

$$v_y(a, b) = \lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in \mathbb{R}}} \frac{v(a, y) - v(a, b)}{y - b} = \operatorname{Im} i f'(a+ib) = \operatorname{Re} f'(a+ib).$$

Combineren levert  $u_x(a, b) = v_y(a, b)$  en  $v_x(a, b) = -u_y(a, b)$ . Tenslotte vinden we met

$$\begin{aligned}& \frac{|u(x, y) - u(a, b) - (x-a)u_x(a, b) - (y-b)u_y(a, b)|}{|(x, y) - (a, b)|} = \\ &= \frac{|\operatorname{Re}(f(x+iy) - f(a+ib) - (x-a)f'(a+ib) - i(y-b)f'(a+ib))|}{|(x, y) - (a, b)|} \leq \\ &\leq \left| \frac{f(x+iy) - f(a+ib) - (x+iy-a-ib)f'(a+ib)}{x+iy-a-ib} \right|\end{aligned}$$

dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|u(x,y) - u(a,b) - (x-a)u_x(a,b) - (y-b)u_y(a,b)|}{|(x,y) - (a,b)|} = 0.$$

Volgens de definitie is  $u$  (reëel totaal) differentieerbaar in  $(a,b)$ . Op analoge wijze vindt men dat  $v$  (reëel totaal) differentieerbaar is in  $(a,b)$ .  $\square$

**Bewijs:**  $ii \Rightarrow i$ . We vergelijken  $\frac{f(z) - f(a+ib)}{z - (a+ib)}$  met  $u_x(a,b) + iv_x(a,b)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{f(z) - f(a+ib)}{z - (a+ib)} - (u_x(a,b) + iv_x(a,b)) = \\ &= \frac{(u(x,y) - u(a,b)) + i(v(x,y) - v(a,b))}{(x-a) + i(y-b)} - u_x(a,b) - iv_x(a,b) = \end{aligned}$$

(na enig rekenwerk)

$$\begin{aligned} &= \frac{(x-a) - i(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \left( u(x,y) - u(a,b) - (x-a)u_x(a,b) + (y-b)v_x(a,b) \right) + \\ &+ i \frac{(x-a) - i(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \left( v(x,y) - v(a,b) - (x-a)v_x(a,b) - (y-b)u_x(a,b) \right) = \end{aligned}$$

(gebruik nu de Cauchy-Riemann-vergelijkingen en herschrijf de noemer)

$$\begin{aligned} &= \frac{(x-a) - i(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \left( \frac{u(x,y) - u(a,b) - (x-a)u_x(a,b) - (y-b)u_y(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right) + \\ &+ i \frac{(x-a) - i(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \left( \frac{v(x,y) - v(a,b) - (x-a)v_x(a,b) - (y-b)v_y(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right). \end{aligned}$$

De definitie van reële (totale) differentieerbaarheid zegt dat  $u$  differentieerbaar in  $(a,b)$  betekent dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{u(x,y) - u(a,b) - (x-a)u_x(a,b) - (y-b)u_y(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

en  $v$  differentieerbaar in  $(a,b)$  dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{v(x,y) - v(a,b) - (x-a)v_x(a,b) - (y-b)v_y(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$

Met de begrensdsheid van  $\frac{(x-a) - i(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$  vinden we

$$\lim_{z \rightarrow a+ib} \frac{f(z) - f(a+ib)}{z - (a+ib)} - (u_x(a,b) + iv_x(a,b)) = 0.$$

Anders gezegd,  $f$  is differentieerbaar is in  $a+ib$  en bovendien geldt

$$f'(a+ib) = u_x(a,b) + iv_x(a,b).$$

$\square$

$\square$

**Opgave 17** We beschouwen de functie  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  met

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & \text{voor } z \neq 0, \\ 0 & \text{voor } z = 0. \end{cases}$$



- i. Gebruik de differentieerbaarheid van machtreeksen en de samenstellingsregels voor de afgeleide om te bewijzen dat  $f$  analytisch is op  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- ii. Laat zien dat  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  en  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  ook in  $0$  aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen.
- iii. Laat zien dat  $f$  niet differentieerbaar is in  $0$ .
- iv. Aan de Cauchy-Riemann-vergelijkingen in  $0$  is voldaan en toch is  $f$  niet differentieerbaar in  $0$ . Wat is hier aan de hand? \_\_\_\_\_

□

**Opgave 18** Laat zien dat de functie  $z \mapsto \ln |z|$  in geen enkel punt van  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  differentieerbaar is. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 19** Waar of niet waar? Motiveer het antwoord.

- i. Als  $f$  differentieerbaar is in  $0$  dan is  $f$  analytisch in  $0$ .
- ii. Als  $f$  analytisch is in  $0$  dan is  $f$  differentieerbaar in  $0$ .
- iii. Als  $f$  in elk punt van het gebied  $G$  differentieerbaar is en  $w \in G$  dan is  $f$  analytisch in  $w$ .
- iv. Als  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  en  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  partieel (reëel) differentieerbaar zijn en aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen in  $(0, 0)$ , dan is  $f$  analytisch in  $0$ .
- v. Als  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  en  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  partieel (reëel) differentieerbaar zijn en aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen in  $(0, 0)$ , dan is  $f$  (complex) differentieerbaar in  $0$ .
- vi. Als  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  en  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  (totaal reëel) differentieerbaar zijn en aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen in  $(0, 0)$ , dan is  $f$  (complex) differentieerbaar in  $0$ .
- vii. Als  $f$  analytisch is in  $0$ , dan zijn er minstens twee punten waar  $f$  differentieerbaar is. \_\_\_\_\_

# 3. INTEGREREN IN $\mathbb{C}$

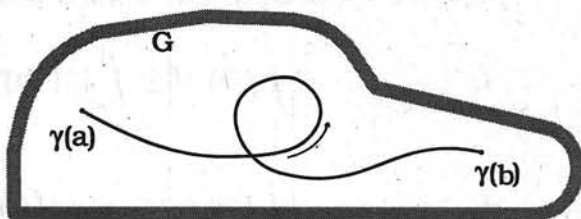
## 3.1 De integraal over een kromme

**Definitie 3.1.1** Zij  $\gamma(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  een gladde kromme zodanig dat  $\gamma[a, b]$  geheel ligt binnen het gebied  $G \subset \mathbb{C}$ . Voor  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  een continue functie noemen we

► *integraal over kromme*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad (3.1)$$

de integraal van  $f$  over de kromme  $\gamma$ .



► *contour-integraal*

De integraal van  $f$  over de kromme  $\gamma$  wordt ook wel de *contour-integraal* van  $f$  over  $\gamma$  genoemd.

Merk op uit de continuïteit van  $f$  en de gladheid van  $\gamma$  volgt dat de functie  $t \mapsto f(\gamma(t)) \gamma'(t)$  continu is.

**Opmerking:** We hebben in (3.1) nog steeds een complexe integraal. Door voor  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  af te spreken dat

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t) dt$$

zijn we terug bij integralen van reële functies.

**Hulpstelling 3.1.2** Zij  $G$  een gebied en  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  een continue functie. Als  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$  gladde enkelvoudige krommen binnen  $G$  zijn, zeg  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  en  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  met

- i. dezelfde beeldverzameling:  $K = \gamma_1[a, b] = \gamma_2[c, d]$ ,
- ii. de beeldverzameling  $K$  wordt door  $\gamma_1$  en door  $\gamma_2$  in gelijke richting doorlopen:

dan geldt dat

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Een voldoende voorwaarde voor de eisen i en ii is het bestaan van een stijgende continue functie  $\beta : [a, b] \rightarrow [c, d]$  met  $\beta(a) = c$  en  $\beta(b) = d$  zodanig dat  $\gamma_1(t) = \gamma_2(\beta(t))$  voor alle  $t \in [a, b]$ .

**Bewijs:** Het bewijs van deze hulpstelling in het algemene geval is behoorlijk technisch en zullen we achterwege laten. Als de hierboven genoemde functie  $\beta$  differentieerbaar is dan volgt deze hulpstelling uit de substitutieregels voor reële integralen:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_a^b f(\gamma_2(\beta(t))) \gamma_2'(\beta(t)) \beta'(t) dt = \\ &= \int_{\beta(a)}^{\beta(b)} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = \int_c^d f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

**Hulpstelling 3.1.3** Zij  $G$  een gebied en  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  een continue functie. Als  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  een gladde kromme binnen  $G$  is dan geldt:

$$\begin{aligned} i. \quad & \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt, \\ ii. \quad & \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma[a, b]} |f(z)| \text{ lengte}(\gamma). \end{aligned}$$

**Bewijs:** Noem  $c = \int_{\gamma} f(z) dz$ . Als  $c = 0$  dan zijn beide uitspraken juist. Voor  $c \neq 0$  vinden we dat

$$|c|^2 = \bar{c}c = \bar{c} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \bar{c} f(z) dz = \int_a^b \bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Omdat  $|c|^2$  reëel is geldt dat

$$|c|^2 = \operatorname{Re} \left( \int_a^b \bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (\bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt$$

Via  $\operatorname{Re} \alpha \leq |\alpha|$  voor  $\alpha \in \mathbb{C}$  en een ongelijkheid voor reële integralen

$$\int_a^b \operatorname{Re} (\bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt \leq \int_a^b |\bar{c} f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt,$$

vinden we

$$|c|^2 \leq |\bar{c}| \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt$$

en na door  $|c| = |\bar{c}|$  gedeeld te hebben volgt de eerste uitspraak. De tweede uitspraak volgt uit de eerste met de schatting

$$|f(\gamma(t))| \leq \max_{z \in \gamma[a, b]} |f(z)| \quad \text{voor } t \in [a, b].$$

Dit maximum hangt niet van  $t$  af en dus

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq \max_{z \in \gamma[a,b]} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \max_{z \in \gamma[a,b]} |f(z)| \text{ lengte}(\gamma). \end{aligned}$$

□

□

**Voorbeeld 5**

We berekenen  $\int_{\gamma} f(z) dz$  voor  $f(z) = \bar{z}$  en  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeven door

$$\gamma(t) = \cos t + i \sin t$$

Dan

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \overline{(\cos t + i \sin t)} (-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t) (-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= i \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

□

**Opgave 20**

i. Bereken  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$  voor  $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma(t) = 4 \sin t - 4i \cos t$ .

ii. Bereken  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$  voor  $\gamma: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma(t) = 4 - t^2 + it\sqrt{8-t^2}$ .

Hint: bereken  $|\gamma(t)|$  en teken de beeldverzameling.

**Hulpstelling 3.1.4** Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$ ,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  een continue functie en  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  een gladde kromme met  $\gamma[a, b] \subset G$ .

Als er een analytische functie  $F: G \rightarrow \mathbb{C}$  bestaat met  $F' = f$  op  $G$  dan geldt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

**Bewijs:** Schrijf  $F(\gamma(t)) = u(t) + iv(t)$  met  $u, v \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$  en gebruik

$$\int_a^b \frac{d}{dt} u(t) dt = u(b) - u(a)$$

en het analogon voor  $v$ . Via  $\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \gamma'(t)$  vinden we

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

**Gevolg 3.1.5** Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  een functie en  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  een gesloten gladde kromme met  $\gamma[a, b] \subset G$ .

Als er een analytische functie  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  bestaat met  $F' = f$  op  $G$  dan geldt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

□

### Voorbeeld 6

De functie  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  is gegeven door  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  op  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  en de kromme

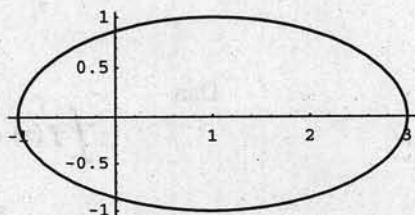
$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

door

$$\gamma(t) = 1 + 2 \cos t + i \sin t.$$

Bereken

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$



$$\{(1 + 2 \cos t, \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

Omdat  $f = F'$  op  $G$  voor  $F(z) = \frac{-1}{z}$  en omdat  $\gamma$  een gesloten kromme is vinden we

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Ook door rechtstreeks uitrekenen zien we

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\gamma(t))^2} \gamma'(t) dt = \left[ \frac{-1}{\gamma(t)} \right]_{t=0}^{2\pi} = \frac{-1}{\gamma(2\pi)} - \frac{-1}{\gamma(0)} = 0.$$

□

### Voorbeeld 7

Bereken  $\int_{\gamma} f(z) dz$  voor de functie  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  gegeven door  $f(z) = \frac{1}{z}$  op  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  en dezelfde kromme  $\gamma$  als hierboven, namelijk  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma(t) = 1 + 2 \cos t + i \sin t$ .

Op  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  kennen we een primitieve voor  $\frac{1}{x}$  namelijk  $\ln|x|$ . Men zou  $\ln|z|$  als primitieve op  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  kunnen proberen maar helaas is de functie  $z \mapsto \ln|z|$  niet (zelfs nergens) complex differentieerbaar. Voorlopig zou men  $\int_{\gamma} f(z) dz$  rechtstreeks kunnen uitrekenen. De berekening is vervelend en een oude Maple-versie loopt zelfs vast bij de berekening. De nieuwste Maple-versie komt wel met het goede antwoord:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{-2 \sin t + i \cos t}{1 + 2 \cos t + i \sin t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-2 \sin t + 3 \sin t \cos t}{2 + 4 \cos t + 3 \cos^2 t} + i \frac{2 + \cos t}{2 + 4 \cos t + 3 \cos^2 t} \right) dt \stackrel{\text{Maple}}{=} 0 + i2\pi. \end{aligned}$$



**Opgave 21** We definiëren de functie  $\text{Ln} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  door

$$\text{Ln}(z) = \ln |z| + i(\arg(-z) - \pi). \quad (3.2)$$

i. Laat zien dat

$$\text{Ln}(x) = \ln x \text{ voor } x \in \mathbb{R}^+.$$

ii. Laat zien dat voor elke  $x \in \mathbb{R}^-$  geldt dat

$$\lim_{y \downarrow 0} \text{Ln}(x + iy) = \lim_{y \uparrow 0} \text{Ln}(x + iy) + 2\pi i.$$

iii. Laat zien dat

$$\exp(\text{Ln}(z)) = z \text{ voor } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

iv. Laat zien dat  $\text{Ln}$  analytisch is op  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  en dat

$$\text{Ln}'(z) = \frac{1}{z} \text{ voor } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

► *analytische uitbreiding*

De functie  $\text{Ln} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  gedefinieerd in (3.2) is een *analytische uitbreiding* van de reële  $\ln$  tot  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Men kan laten zien dat deze voor  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  de enig mogelijke is. Omdat de  $\text{Ln}$  bij de negatieve reële as een sprong vertoont kunnen we die 'snee' niet overbruggen. Wel kan men andere analytische uitbreidingen van de  $\ln$  definiëren. Bijvoorbeeld

$$\text{Ln}^*(z) = \ln |z| + i(\arg(-iz) - \frac{3}{2}\pi)$$

is een analytische uitbreiding van de  $\ln$ -functie tot  $\mathbb{C} \setminus [0, i\infty)$ .

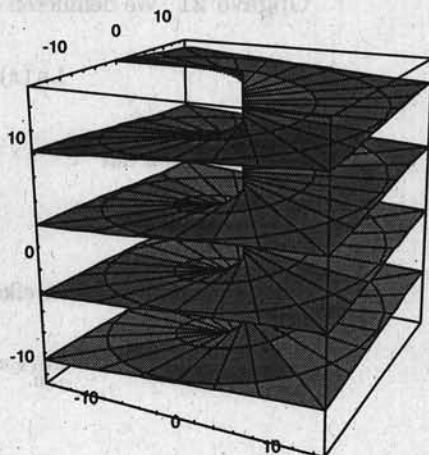
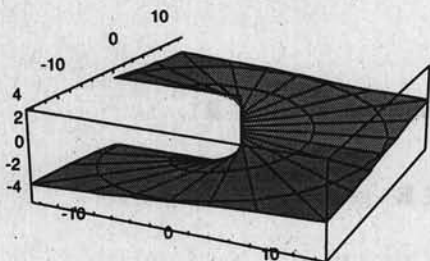
Voor  $z \in \{\mathbb{C} \setminus \{0\}; \arg z < \frac{1}{2}\pi \text{ of } \arg z > \pi\}$  geldt  $\text{Ln}(z) = \text{Ln}^*(z)$ .

Voor  $z \in \{\mathbb{C} \setminus \{0\}; \frac{1}{2}\pi < \arg z < \pi\}$  geldt  $\text{Ln}(z) = \text{Ln}^*(z) + 2\pi i$ .

**Opmerking:** Een andere manier om deze de  $\ln$  uit te breiden is om deze als meerwaardige functie uit te beschouwen. Men bekijkt  $\ln$  als zogenaamd Riemannoppervlak: de grafiek van  $z \rightarrow \ln(z)$  laat men een oppervlak in  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  beschrijven:

$$\{(z, \ln |z| + i \arg(z) + 2k\pi i); z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Om een functie van  $\mathbb{C}$  naar  $\mathbb{C}$  te tekenen hebben we vier dimensies nodig. Dat lukt niet. Wel kunnen we afzonderlijke grafieken van het reële en van het imaginaire deel laten tekenen. Hieronder staan de grafieken van  $z \mapsto \text{Im}(\text{Ln}(z)) = \arg(z)$  en  $z \mapsto \text{Im}(\ln |z| + i \arg(z) + 2k\pi i)$  met  $k \in \mathbb{Z}$ .



De grafiek van  $z \mapsto \text{Im Ln}(z)$  gebruikt één etage van de Riemann-parkeergarage.

γ

### Voorbeeld 8

Het vorige voorbeeld laat zich met minder rekenwerk behandelen. We berekenen opnieuw  $\int_{\gamma} f(z) dz$  met  $f(z) = \frac{1}{z}$  en  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma(t) = 1 + 2\cos t + i\sin t$ . Men laat zoals in de vorige opgave zien dat  $F(z) = \ln|z| + i \arg(z)$  een analytische functie op  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  is met  $F'(z) = \frac{1}{z}$ . Omdat  $f$  continu is op  $\gamma[0, 2\pi]$  volgt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt.$$

Omdat  $\gamma[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \subset \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ , geldt volgens Hulpstelling 3.1.4 dat

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt &= F(\gamma(2\pi - \varepsilon)) - F(\gamma(\varepsilon)) = \\ &= \ln|\gamma(2\pi - \varepsilon)| + i \arg(\gamma(2\pi - \varepsilon)) - \ln|\gamma(\varepsilon)| - i \arg(\gamma(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Tenslotte vinden we

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \ln|\gamma(2\pi - \varepsilon)| + i \arg(\gamma(2\pi - \varepsilon)) - \ln|\gamma(\varepsilon)| - i \arg(\gamma(\varepsilon)) \right) = \\ &= 3 + 2\pi i - 3 - 0 = 2\pi i. \end{aligned}$$

⊙

**Opgave 22** Een primitieve van  $\frac{1}{x^2-1}$  berekent men via breuksplitsing. Inderdaad vindt men via  $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$  de functie  $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1|$  als een primitieve.

Gebruik de (complexe) breuksplitsing van  $\frac{1}{x^2+1}$  en de Ln uit de vorige opgave om bij  $\frac{1}{x^2+1}$  een primitieve te vinden (de afgeleide van  $\arctan x$  even vergeten).

### 3.2 Hoofdstelling van de complexe integratie

! integraal-  
stelling  
van  
Cauchy

**Stelling 3.2.1** Zij  $G$  een enkelvoudig samenhangend gebied in  $\mathbb{C}$  en  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch op  $G$ . Als  $\gamma$  een gesloten gladde kromme binnen  $G$  is, dan geldt

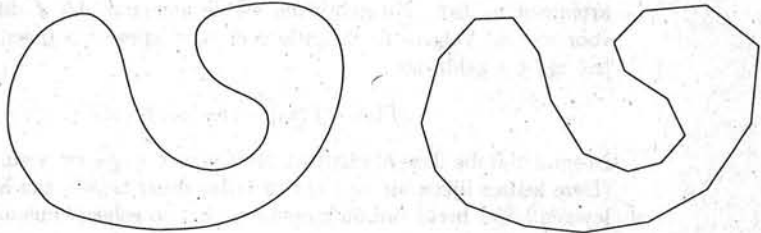
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**Bewijs:** Allereerst worden enkele vereenvoudigingen gemotiveerd. (We geven geen bewijs dat deze vereenvoudigingen geoorloofd zijn.)

- 1) We nemen aan dat  $\gamma$  een Jordan-kromme is die linksom doorlopen wordt.
- 2) De functie  $f$  is analytisch en dus continu op  $G$  en de kromme  $\gamma$  is glad. Dan is het mogelijk om bij iedere  $\epsilon > 0$  de kromme  $\gamma$  te benaderen met een kromme  $\gamma_{\epsilon}$  die bestaat uit een eindig aantal rechte lijnstukken en wel zodanig dat

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_{\epsilon}} f(z) dz \right| < \epsilon.$$

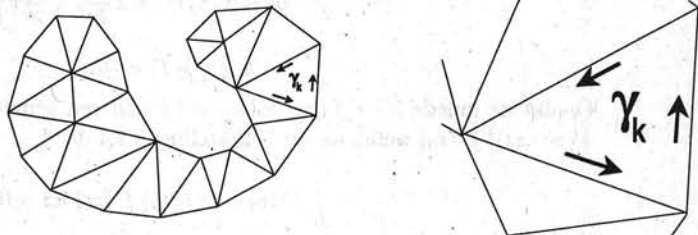
Het is dan voldoende om te laten zien dat  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  voor krommen  $\gamma$  die aan de voorwaarden van de stelling voldoen maar die bovendien bestaan uit een aaneenschakeling van rechte lijnstukken.



- 3) We kunnen het binnengebied van zo'n  $\gamma$  opvullen met een eindig aantal driehoeken. Omdat  $G$  enkelvoudig samenhangend is behoort het binnengebied van de kromme tot  $G$ . Laat  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de randkrommen van deze driehoeken beschrijven alle linksom lopend. Omdat integralen over gemeenschappelijk randen wegvallen ziet men

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Het is daarmee voldoende om te bewijzen dat  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  voor  $\gamma$  die de rand van een driehoek beschrijven.

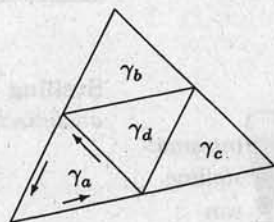




We bewijzen uit het ongerijmde. Stel dat

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = J > 0,$$

waarbij  $\gamma$  de randkromme is van een driehoek met diameter  $r$ . We gaan de driehoek in vier gelijk grote delen splitsen en noemen de linksom lopende randkrommen  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c, \gamma_d$ . Omdat de integralen over de gemeenschappelijke randen opnieuw wegvallen zien we



$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_a} f(z) dz + \int_{\gamma_b} f(z) dz + \int_{\gamma_c} f(z) dz + \int_{\gamma_d} f(z) dz.$$

Omdat  $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = J$  is er minstens één, noem die  $\gamma_1$ , met  $\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} J$ . We nemen deze en splitsen die opnieuw in vier gelijk grote delen. Deze kleinere driehoeken worden opnieuw van vier randkrommen voorzien. Voor een van deze randkrommen, noem die  $\gamma_2$ , geldt  $\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^2} J$ . Enzovoort. We vinden een rij  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots\}$  zodanig dat

$$\text{diameter}(\gamma_k) = \frac{1}{2^k} r \quad \text{en} \quad \left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^k} J. \quad (3.3)$$

Bovendien (uit de volledigheid van  $\mathbb{C}$ ) is er een  $z_0$  die op of binnen elk van deze krommen  $\gamma_k$  ligt. Nu gebruiken we de aanname dat  $f$  differentieerbaar is en wel voor  $z = z_0$ . Volgens de definitie is er voor iedere  $\varepsilon > 0$  een  $\delta > 0$  zodanig dat voor  $|z - z_0| < \delta$  geldt dat

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Neem  $\delta > 0$  die deze afchatting geeft voor  $\varepsilon = \frac{J}{4r^2}$  en neem  $k$  zo groot dat  $\frac{1}{2^k} r < \delta$ . (Deze keuzes lijken uit de lucht te vallen maar blijken aan het einde het resultaat te leveren.) Het beeld van de kromme  $\gamma_k$  ligt zo geheel binnen afstand  $\delta$  van  $z_0$ . Met de schatting

$$\left| \int_{\gamma} g(z) dz \right| \leq \text{lengte}(\gamma) \max_{z \in \text{beeld}_{\gamma}} |g(z)| \quad (3.4)$$

(zie Hulpstelling 3.1.3) volgt dat

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_k} f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0) dz \right| &\leq \text{lengte}(\gamma_k) \varepsilon \max_{z \in \text{beeld}_{\gamma_k}} |z - z_0| \leq \\ &\leq \text{lengte}(\gamma_k) \varepsilon \text{diameter}(\gamma_k) \leq \\ &\leq 3\varepsilon (\text{diameter}(\gamma_k))^2 = 3 \frac{J}{4r^2} \left( \frac{1}{2^k} r \right)^2 = \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{1}{4^k} J \right) < \frac{1}{4^k} J. \end{aligned}$$

Omdat de functie  $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)$  een primitieve heeft, nl.  $z f(z_0) + \frac{1}{2} (z - z_0)^2 f'(z_0)$  weten we uit Hulpstelling 3.1.4 dat

$$\int_{\gamma_k} f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) dz = 0$$

en dus volgt

$$\left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma_k} f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0) dz \right| < \frac{1}{4k} J.$$

Dit laatste is een tegenspraak met de rechterzijde van (3.3). □

Zonder een bewijs geven we een uitbreiding van de integraalstelling van Cauchy voor krommen die de rand van  $G$  snijden.

**Stelling 3.2.2** *Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$ ,  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  continu op  $\overline{G}$  en analytisch op  $G$ . Als  $\gamma$  een gladde Jordan-kromme is, zodanig dat het binnengebied tot  $G$  behoort, dan geldt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

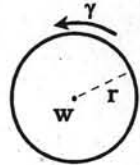
### 3.3 Het Residu

#### 3.3.1 Definitie en gebruik

Allereerst spreken we de volgende verkorte notatie af

$$\oint_{|z-w|=r} f(z) dz := \int_{\gamma} f(z) dz$$

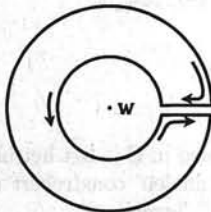
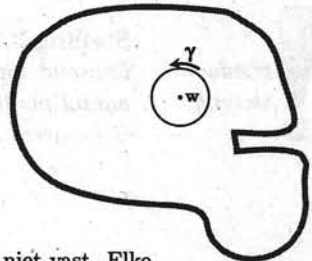
met  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  en  $\gamma(t) = w + re^{it}$ .



► residu

**Definitie 3.3.1** *Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$  met  $w \in G$ . Voor  $f : G \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}$  een analytische functie definieert men het residu van  $f$  in  $w$  als volgt. Neem  $r > 0$  zodanig dat  $\overline{B_r(w)} \subset G$ . Dan*

$$\{\text{Res } f(z)\}_{z=w} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-w|=r} f(z) dz.$$



**Opmerking:** In deze definitie ligt  $r$  niet vast. Elke voldoende kleine positieve  $r$  lijkt men te mogen kiezen. Dan zijn er twee mogelijkheden: 1), een onzinnige definitie; of 2), de integraal  $\int_{\gamma} f(z) dz$  hangt niet van  $r$  af voor kleine  $r$ . De integraalstelling van Cauchy laat zien dat de integraal inderdaad niet van (kleine)  $r$  afhangt. Hiervoor integreert men over een kromme  $\gamma_1$  rond  $w$  waarvan het beeld er als links uitziet. Omdat  $f$  een analytische functie op het inwendige van deze kromme  $\gamma_1$  is, geldt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0.$$

Nemen we de rechte zijden van het kanaal 'op elkaar' dan valt deze bijdrage aan de integraal weg. Er resteert met  $r_1 < r_2$  dat

$$\oint_{|z-w|=r_1} f(z) dz - \oint_{|z-w|=r_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0.$$

□

### Voorbeeld 9

Bereken  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{1}{z} \right\}_{z=0}$ .

Omdat de functie  $z \mapsto \frac{1}{z}$  analytisch is op  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mogen we iedere  $r > 0$  nemen om het residu te berekenen.

$$\left\{ \operatorname{Res} \frac{1}{z} \right\}_{z=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-0|=r} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} dt = 1$$

□

### Voorbeeld 10

Zij  $n \in \mathbb{N}$  met  $n \geq 2$ . Bereken  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{1}{z^n} \right\}_{z=0}$ .

De functie  $z \mapsto \frac{1}{z^n}$  is analytisch op  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{Res} \frac{1}{z^n} \right\}_{z=0} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-0|=1} \frac{1}{z^n} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{(e^{it})^n} i e^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} e^{(1-n)it} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1-n)i} e^{(1-n)it} \right]_{t=0}^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

De 'kanaal-truc' die in de laatste opmerking gebruikt is kunnen we verder uitbreiden. Deze uitbreiding van de Integraalstelling van Cauchy zullen we als afzonderlijke stelling formuleren.



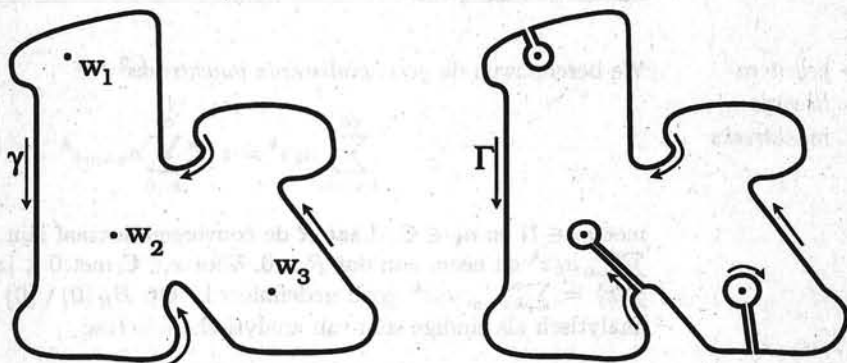
residuen-  
stelling

**Stelling 3.3.2** Zij  $G$  een enkelvoudig samenhangend gebied in  $\mathbb{C}$  en laat  $\gamma$  een linksom<sup>1</sup> lopende gladde Jordan-kromme binnen  $G$  zijn. Stel dat er een eindig aantal punten  $\{w_k\}_{k=1}^n \subset G$  zijn zodanig dat  $f: G \setminus \{w_k\}_{k=1}^n \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch is en neem aan dat geen  $w_k$  op het beeld van de kromme  $\gamma$  ligt. Dan geldt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{w_k \text{ binnen } \gamma} \left\{ \operatorname{Res} f(z) \right\}_{z=w_k}.$$

**Bewijs:** Omdat  $G$  een enkelvoudig samenhangend gebied in  $\mathbb{C}$  is ligt het binnengebied van  $\gamma$  binnen  $G$ . Door 'het graven van de juiste kanalen' construeert men een kromme  $\Gamma$  zodanig dat alle  $w_k$  in het buitengebied van  $\Gamma$  liggen.

<sup>1</sup>Een Jordan-kromme loopt linksom als het binnengebied aan de linkerkant t.o.v. de doorloopting ligt.



De oorspronkelijke kromme en de 'gekanaliseerde'.

De integraalstelling van Cauchy zorgt voor

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

De bijdragen over de 'kanalen' vallen weg en er blijft over dat

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - 2\pi i \sum_{w_k \text{ binnen } \gamma} \{\text{Res } f(z)\}_{z=w_k}.$$

Het minteken voor  $2\pi i$  verschijnt omdat de 'residu-integralen' in omgekeerde richting doorlopen worden. □

□

**Voorbeeld 11**

We gaan nogmaals terug naar het voorbeeld op bladzijde 26 en berekenen  $\int_{\gamma} f(z) dz$  voor  $f(z) = \frac{1}{z}$  en de kromme  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma(t) = 1 + 2 \cos t + i \sin t$ .

De functie  $f$  is analytisch buiten 0 en  $\gamma$  is een linksom lopende Jordan-kromme met 0 in het binnengebied. Volgens Stelling 3.3.2 geldt

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res } \frac{1}{z} \right\}_{z=0} = 2\pi i.$$

□

**Opgave 23** Gegeven de functie  $f : \mathbb{C} \setminus \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{C}$  met  $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$  en de krommen  $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma_r(t) = r \exp(it)$ .

- i. Bereken de breuksplitsing van  $\frac{1}{z^2+z}$ .
- ii. Bereken  $\int_{\gamma_r} f(z) dz$  voor  $0 < r < 1$ .
- iii. Bereken  $\int_{\gamma_r} f(z) dz$  voor  $r > 1$ .

## 3.3.2 Het berekenen

► *gegeneraliseerde  
machtreeks*

We beschouwen de *gegeneraliseerde machtreeks*<sup>2</sup>

$$\sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} z^k$$

met  $m \in \mathbb{N}$  en  $a_k \in \mathbb{C}$ . Laat  $R$  de convergentiestraal zijn van de machtreeks  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  en neem aan dat  $R > 0$ . Voor  $z \in \mathbb{C}$  met  $0 < |z| < R$  is de functie  $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k$  goed gedefinieerd. Op  $B_R(0) \setminus \{0\}$  is de functie zelfs analytisch als eindige som van analytische functies:

$$f(z) = a_{-m} z^{-m} + a_{-m+1} z^{-m+1} + \dots + a_{-1} z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (3.5)$$

en

$z \mapsto a_n z^n$  met  $n \in \mathbb{Z}^-$  is analytisch in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  is analytisch in  $B_R(0)$ .

**Hulpstelling 3.3.3** Voor  $f$  in (3.5) geldt

$$\{\text{Res } f(z)\}_{z=0} = a_{-1}.$$

**Bewijs:** We kunnen  $f$  schrijven als  $f(z) = a_{-1} z^{-1} + g(z)$  met

$$g(z) = a_{-m} z^{-m} + a_{-m+1} z^{-m+1} + \dots + a_{-2} z^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

De functie  $g$  heeft een primitieve op  $B_R(0) \setminus \{0\}$  en dus volgt met Hulpstelling 3.1.4 voor  $0 < r < R$  dat

$$\{\text{Res } g(z)\}_{z=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-w|=r} g(z) dz = 0.$$

Er blijft over dat

$$\{\text{Res } f(z)\}_{z=0} = \{\text{Res } a_{-1} z^{-1}\}_{z=0} = \frac{a_{-1}}{2\pi i} \oint_{|z-w|=1} \frac{1}{z} dz = a_{-1}.$$

□

<sup>2</sup>Voor  $\nu \in \mathbb{R}$  wordt een uitdrukking van de vorm  $z^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  een *gegeneraliseerde machtreeks* genoemd. Als  $\nu \notin \mathbb{Z}$  en  $z \notin \mathbb{R}^+$  dan zullen we nog af moeten spreken wat we met  $z^\nu$  bedoelen. Bijvoorbeeld  $z^\nu = e^{\nu \text{Ln } z}$  is goed gedefinieerd voor  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ .

**Hulpstelling 3.3.4** Als de functie  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch is in  $w$  dan geldt

$$\left\{ \operatorname{Res} \frac{g(z)}{z-w} \right\}_{z=w} = g(w).$$

**Bewijs:** Volgens de definitie van 'analytisch in een punt', is er een  $R > 0$  zodanig dat  $g$  analytisch is op  $B_R(w)$ . Het residu van  $z \mapsto \frac{g(z)}{z-w}$  in  $w$  is dus gedefinieerd.

We schrijven

$$\frac{g(z)}{z-w} = \frac{g(z) - g(w)}{z-w} + \frac{g(w)}{z-w}.$$

Het residu van de laatste term is direct te berekenen ( $g(w)$  hangt niet van  $z$  af):

$$\left\{ \operatorname{Res} \frac{g(w)}{z-w} \right\}_{z=w} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-w|=r} \frac{g(w)}{z-w} dz = \frac{g(w)}{2\pi i} \oint_{|z-w|=r} \frac{1}{z-w} dz = g(w).$$

We bewijzen dat het residu van de functie  $z \mapsto \frac{g(z)-g(w)}{z-w}$  in  $w$  gelijk aan 0 is door te laten zien dat dit residu willekeurig klein (= dicht bij 0) af te schatten is.

Omdat  $g$  differentieerbaar is in  $w$  bestaat  $\lim_{z \rightarrow w} \frac{g(z)-g(w)}{z-w}$ . Dit impliceert dat  $\frac{g(z)-g(w)}{z-w}$  begrensd is voor  $|z-w|$  voldoende klein. Zeg

$$\text{als } |z-w| < \delta \text{ dan } \left| \frac{g(z)-g(w)}{z-w} \right| \leq M.$$

Neem vervolgens  $r \in (0, \min(\delta, R))$ . We vinden met Hulpstelling 3.1.3 dat

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \operatorname{Res} \frac{g(z)-g(w)}{z-w} \right\}_{z=w} \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{g(z)-g(w)}{z-w} dz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \text{ lengte}(\gamma) M = \frac{1}{2\pi} 2\pi r M = Mr. \end{aligned}$$

Door  $r$  naar 0 te laten gaan volgt het resultaat. □

□

**Voorbeeld 12**

Bereken  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{z}{z^2+4} \right\}_{z=-2i}$ . Met Hulpstelling 3.3.4 volgt

$$\left\{ \operatorname{Res} \frac{z}{z^2+4} \right\}_{z=-2i} = \left\{ \operatorname{Res} \frac{z}{z+2i} \right\}_{z=-2i} = \left( \frac{z}{z-2i} \right)_{|z=-2i} = \frac{-2i}{-2i-2i} = \frac{1}{2},$$

omdat  $z \mapsto \frac{z}{z-2i}$  analytisch is in  $-2i$ .

Door breuksplitsing kunnen we dit residu ook zonder deze Hulpstelling uitrekenen:

$$\left\{ \operatorname{Res} \frac{z}{z^2+4} \right\}_{z=-2i} = \left\{ \operatorname{Res} \left( \frac{\frac{1}{2}}{z+2i} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2i} \right) \right\}_{z=-2i} = \left\{ \operatorname{Res} \frac{\frac{1}{2}}{z+2i} \right\}_{z=-2i} = \frac{1}{2}.$$

Hier hebben we gebruikt dat  $z \mapsto \frac{1}{z-2i}$  analytisch is in  $-2i$ . \_\_\_\_\_

□

**Voorbeeld 13**

Bereken  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\sin z}{z^2} \right\}_{z=0}$ . Omdat  $\sin z$  als een machtreeks te schrijven is (met  $R = \infty$ ) vinden we uit

$$\frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6}z + \frac{1}{120}z^3 \dots$$

met Hulpstelling 3.3.3 dat

$$\left\{ \operatorname{Res} \frac{\sin z}{z^2} \right\}_{z=0} = 1. \quad \text{_____}$$

□

**Voorbeeld 14**

Bereken  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\sin z}{z^2 \cos z} \right\}_{z=0}$ . Omdat  $z \mapsto \cos z$  analytisch is en omdat  $\cos 0 \neq 0$  is  $z \mapsto \frac{1}{\cos z}$  analytisch in 0. Omdat  $\frac{\sin z}{z}$  als machtreeks te schrijven is (met  $R = \infty$ ):

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 \dots$$

vinden we met Hulpstelling 3.3.4 dat

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{Res} \frac{\sin z}{z^2 \cos z} \right\}_{z=0} &= \left\{ \operatorname{Res} \frac{\frac{1}{\cos z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}}{z} \right\}_{z=0} = \\ &= \left( \frac{1}{\cos z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \right)_{|z=0} = \frac{1}{\cos 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

□

**Opgave 24** Bereken de volgende residuen.

i.  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{z}{z^2 + 3z - 4} \right\}_{z=1}$       iv.  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\exp z}{(1+z^2)^2} \right\}_{z=i}$

ii.  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\exp z}{z^2} \right\}_{z=0}$       v.  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{1}{\exp z - 1} \right\}_{z=0}$

iii.  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\exp z}{1+z^2} \right\}_{z=i}$       vi.  $\left\{ \operatorname{Res} \frac{\operatorname{Ln}(1+z)}{z^2} \right\}_{z=0}$

In het laatste onderdeel is  $\operatorname{Ln}$  de uitbreiding van de  $\ln$ , die is gedefinieerd op bladzijde 27.

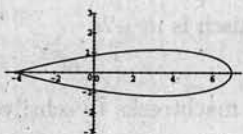
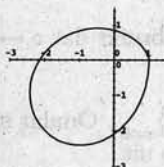
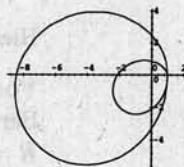
□

**Opgave 25** Bereken  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz$  als

i.  $\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma_1(t) = 7 - 3it - 11t^2 + 3it^3$ ;

ii.  $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma_2(t) = 1 + 2it \sin t \exp it$ ;

iii.  $\gamma_3 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma_3(t) = 1 + 2it \sin t \exp it$ .

beeldverzamelings  $\gamma_1$ beeldverzamelings  $\gamma_2$ beeldverzamelings  $\gamma_3$ 

□

**Opgave 26** Bereken  $\int_{\gamma} \frac{1}{\sin z} dz$  voor de  $\gamma$  als in de vorige opgave. Hint: bereken de nulpunten van  $\sin z$  via  $\sin(x+iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$ .

Contour-integralen worden vaak gebruikt om enkele lastige reële integralen te berekenen.

□

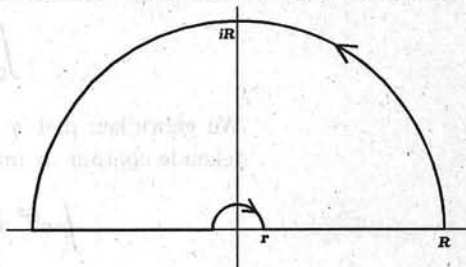
**Voorbeeld 15**

We willen de volgende integraal berekenen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Een primitieve is niet zo eenvoudig te vinden. Wel is deze oneigenlijke integraal via een geschikte contour te berekenen. We beschouwen de hier naast staande contour voor de integraal

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz$$



en merken op dat  $\text{Im } e^{ix} = \sin x$  voor  $x \in \mathbb{R}$ . We nemen het imaginaire deel van de contour-integraal en laten  $\varepsilon \rightarrow 0$  en  $R \rightarrow \infty$  gaan.

De 'grote' boog parametriseren we door  $\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma_1(t) = Re^{it}$  en we vinden

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{iRe^{it}} i dt \right| \leq \int_0^\pi |e^{iRe^{it}}| dt = \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-Rt/2} dt = \left[ \frac{4}{R} e^{-Rt/2} \right]_0^{\pi/2} \leq \frac{4}{R} \end{aligned}$$

zodanig dat  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ .

De 'kleine' boog parametriseren we door  $\gamma_2 : [\pi, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\gamma_2(t) = re^{it}$  en we vinden

$$\lim_{r \downarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\lim_{r \downarrow 0} \int_0^\pi e^{ire^{it}} i dt = -\int_0^\pi 1 dt = -\pi i.$$

De integraal en de limiet mogen hier verwisseld worden omdat  $\lim_{r \downarrow 0} e^{ire^{it}} = 1$  uniform voor  $t \in [0, 2\pi]$ . Binnen de contour is de functie  $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$  analytisch en volgt  $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ . Via

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

en de limieten nemen volgt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad \text{en dus} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

□

**Opgave 27** Bereken via de contour hier rechts

<sup>3</sup> Als  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \ell(y)$  uniform voor  $y \in [c, d]$  dan geldt

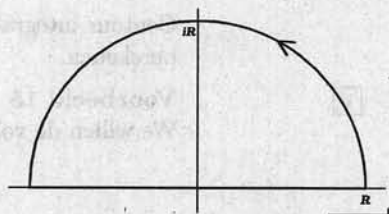
$$\lim_{x \rightarrow a} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \ell(y) dy.$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$



□

**Opgave 28** In deze opgave zullen we  $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$  berekenen. Merk op dat

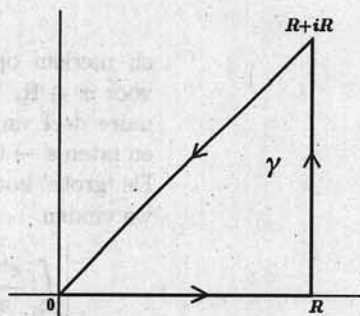
$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \operatorname{Im} \left( \int_0^{\infty} e^{ix^2} dx \right).$$

We gebruiken met  $\gamma$  de hiernaast getekende contour de integraal

$$\int_{\gamma} e^{iz^2} dz.$$

Dus  $\gamma$  is b.v. samengesteld uit

$$\begin{aligned} \gamma_1: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{en} \quad \gamma_1(t) = t; \\ \gamma_2: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{en} \quad \gamma_2(t) = R + it; \\ \gamma_3: [R, 0] &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{en} \quad \gamma_3(t) = (1+i)t. \end{aligned}$$



i. Laat eerst zien dat

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz \right| \leq \int_0^R e^{-2Rt} dt.$$

ii. En ook dat

$$\int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz = -(1+i) \int_0^R e^{-2t^2} dt.$$

iii. Gebruik vervolgens dat  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$  om de gevraagde integraal te berekenen.

Tenslotte nog een gevolg van de Residu-stelling dat er onschuldig uitziet maar vergaande consequenties heeft.

**Stelling 3.3.5** Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$  met  $\overline{B_R(w)} \subset G$  en  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch.

Dan geldt voor  $z \in B_R(w)$  dat

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{g(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = g(z).$$



► formule van Cauchy voor de cirkelschijf

**Bewijs:** Gebruik Stelling 3.3.2. □

Het bijzondere aan deze stelling is dat als men de waarden van een analytische functie  $g$  op de rand van  $B_R(w)$  kent daarmee elke waarde van  $g$  in het binnenste van de cirkelschijf kan terugvinden. De integraal gebruikt namelijk alleen de waarden van  $g$  die op de rand  $\partial B_R(w)$  liggen. Bij eerste kennismaking is het heel verrassend om te zien dat (complexe) differentieerbaarheid en de kennis van de randwaarden deze functie geheel vastlegt. We zullen dit resultaat diverse malen gaan gebruiken; onder andere om voor een type partiële differentiaalvergelijkingen met voorgeschreven randvoorwaarden een éénduidige oplossing te verkrijgen.

### 3.4 Gevolgen van de formule van Cauchy

---

#### 3.4.1 Eigenschappen analytische functies

---

Via de formule van Cauchy kunnen we laten zien dat een analytische functie een analytische afgeleide heeft. Dat is een van de belangrijkste resultaten in de complexe functietheorie. Bovendien vinden we een integraal-formule voor de afgeleide die alleen een term  $f$  zonder afgeleide bevat. Tenslotte kan men aantonen dat iedere analytische functie te schrijven is als een machtreeks.

► analytische afgeleiden

**Gevolg 3.4.1** *Zij  $f$  een functie die analytisch is op een gebied  $G \subset \mathbb{C}$  met  $B_R(w) \subset G$ . Dan zijn alle afgeleiden van  $f$  analytisch op  $G$  en voor de  $n^{\text{de}}$  afgeleide van  $f$  in  $z \in B_R(w)$  geldt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{n! f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.6)$$

*Bovendien geldt dat voor  $z \in B_R(w)$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z-w)^n. \quad (3.7)$$

*Deze machtreeks heeft convergentiestraal groter of gelijk aan  $R$ .*

**Opmerking:** Op het eerste gezicht zal dit een vreemd resultaat lijken. Er bestaat duidelijk geen reëel equivalent: tweemaal (reëel) differentieerbaar volgt niet uit eenmaal (reëel) differentieerbaar. Bijvoorbeeld de functie  $f(x) = x|x|$  is differentieerbaar en  $f'(x) = 2|x|$  is niet differentieerbaar.

**Opmerking:** Als  $f$  analytisch is op het gebied  $G$  en  $w \in G$  dan volgt niet alleen dat we  $f$  als machtreeks rond  $w$  kunnen schrijven maar bovendien dat de bijbehorende convergentiestraal groter of gelijk is aan de straal van de grootste cirkel met  $w$  als middelpunt die nog binnen  $G$  ligt.

**Bewijs:** I. We zullen eerst laten zien dat de formule in (3.6) voor  $n = 1$  correct is. Neem  $w \in G$  en  $R > 0$  zodanig dat  $\overline{B_R(w)} \subset G$ . Volgens de formule van Cauchy geldt voor  $z \in B_R(w)$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Via een naïeve poging zou men kunnen denken dat rechtstreeks differentiëren het volgende resultaat geeft:

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{d}{dz} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta. \quad (3.8)$$

Maar omdat zowel de integraal als de afgeleide via een limiet gedefinieerd is kunnen we die twee limieten niet zomaar verwisselen<sup>4</sup>. We zullen laten zien dat deze verwisseling hier wel mogelijk is, dat wil zeggen we laten zien dat

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \text{r.l.} \right| = 0$$

met r.l. als in het rechterlid van (3.8).

Dus bij gegeven  $\varepsilon > 0$  vind een  $\delta > 0$  zodanig dat als  $|z - z_0| < \delta$  dan  $|\dots| < \varepsilon$ .

Voor  $z, z_0 \in B_R(w)$  geldt met de integraal-formule van Cauchy dat

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2} d\zeta \right| = \\ & = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|\zeta-w|=R} \left( \frac{1}{z-z_0} \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \right) - \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2} \right) d\zeta \right| = \end{aligned} \quad (3.9)$$

Enig boekhouden levert

$$\frac{1}{z-z_0} \left( \frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta-z_0} \right) - \frac{1}{(\zeta-z_0)^2} = \frac{z-z_0}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2}.$$

We noemen  $r$  de afstand van  $z_0$  tot de rand  $\partial B_R(w)$ , d.w.z.  $r = R - |z_0 - w|$ . Omdat  $z_0 \in B_R(w)$  geldt  $r > 0$ . Omdat we de limiet voor  $z$  naar  $z_0$  bekijken mogen we bovendien aannemen dat de  $z$  waarin we geïnteresseerd zijn voldoen aan  $|z - z_0| < \frac{1}{2}r$ . Dus we kiezen alvast  $\delta \leq \frac{1}{2}r$ . Een dergelijke  $z$  heeft dan minstens afstand  $\frac{1}{2}r$  tot de rand  $\partial B_R(w)$ . We hebben daarmee  $|\zeta - z_0| \geq r$  en  $|\zeta - z| > \frac{1}{2}r$ . Na deze voorbereidingen kunnen we (3.9) verder afschatten.

$$\begin{aligned} (3.9) &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{z-z_0}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{|z-z_0|}{\frac{1}{2}r} \frac{1}{r^2} |f(Re^{i\varphi})| R d\varphi = |z-z_0| \frac{2R}{r^3} \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(Re^{i\varphi})|. \end{aligned}$$

Kies  $\delta = \min \left( \frac{1}{2}r, \left( \frac{2R}{r^3} \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(Re^{i\varphi})| \right)^{-1} \varepsilon \right)$  en we hebben laten zien dat (3.9)  $< \varepsilon$ . Hiermee is bewezen dat (3.8) inderdaad correct is.

II. Op gelijke wijze laat men zien dat

$$\frac{d}{dz} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{(n-1)! f(\zeta)}{(\zeta-z)^n} d\zeta = \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{d}{dz} \frac{(n-1)! f(\zeta)}{(\zeta-z)^n} d\zeta$$

<sup>4</sup>Bijvoorbeeld  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} \neq \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ .

zodanig dat via inductie volgt dat

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{n! f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$

III. Omdat  $G$  open is er bij iedere  $z \in G$  een  $R^* > 0$  te vinden zodanig dat  $\overline{B_{R^*}(z)} \subset G$ . Gebruik de voorgaande onderdelen voor  $B_{R^*}(z)$  en men vindt dat  $f^{(n)}$  analytisch is in  $z$ .

IV. Tenslotte wordt de machtreeksvoorstelling bewezen. Definieer  $M = \max_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|$ .

We hebben

$$f^{(n)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-w|=R} \frac{n! f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}} d\zeta$$

zodat

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(w)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{n!}{|\zeta-w|^{n+1}} |f(\zeta)| R d\varphi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{n!}{R^{n+1}} M R d\varphi = M n! R^{-n}. \end{aligned}$$

Daarmee vinden we dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(w)}{n!} \right|} \leq \sqrt[n]{\frac{M n! R^{-n}}{n!}} = R^{-1},$$

en via Cauchy-Hadamard dat de convergentiestraal van de machtreeks in (3.7) groter of gelijk aan  $R$  is. Tenslotte laat de stelling van Taylor, voor reële functies op  $\mathbb{R}^2$ , zien dat (3.7) geldt voor  $|z-w|$  kleiner dan de convergentiestraal.  $\square$



► *stelling van Liouville*

**Opgave 29** Een *stelling van Liouville* zegt dat een functie die analytisch en begrensd is op  $\mathbb{C}$  constant is. Bewijs deze stelling als volgt.

Stel de functie  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  is analytisch en stel er bestaat  $M \in \mathbb{R}^+$  zodanig dat  $|f(z)| \leq M$ . Laat met (3.6) zien dat voor iedere  $R \in \mathbb{R}^+$  deze  $f$  voor alle  $z \in \mathbb{C}$  voldoet aan

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Omdat we  $R$  willekeurig groot mogen nemen volgt  $f'(z) = 0$  en dus de uitspraak van Liouville.  $\square$



► *Euler-nummers*

**Opgave 30** De *Euler-nummers*  $E_n$  zijn gedefinieerd door

$$\frac{1}{\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n.$$

Bereken  $E_1, E_2$  en  $E_3$ . Gebruik Gevolg 3.4.1 om de convergentiestraal van deze machtreeks te berekenen.  $\square$

### 3.4.2 Harmonische functies

► *Laplaciaan*  
► *Laplace-operator*

Een zeer veel voorkomende partiële differentiaaloperator is de *Laplaciaan*  $\Delta$ , ook wel *Laplace-operator* genoemd. Deze  $\Delta$  wordt in twee dimensies gedefi-

nieerd door

$$\Delta := \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2.$$

In dit deel zullen we het verband tussen analytische en harmonische functies bekijken.

**Gevolg 3.4.2** *Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$  en  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Dan voldoet de functie  $u : G_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  met  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  aan*

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right) u(x, y) = 0.$$

*N.B.  $G_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in G\}$ .*



**Opgave 31** We gaan Gevolg 3.4.2 bewijzen.

- i. Laat zien dat de functie  $u$  oneindig vaak differentieerbaar is op  $G_{\mathbb{R}}$ .
- ii. Gebruik de Cauchy-Riemann vergelijkingen om te laten zien dat  $\Delta u = 0$  op  $G_{\mathbb{R}}$ . \_\_\_\_\_

**Opmerking:** We noemen de functie  $f$  oneindig vaak differentieerbaar als voor elke  $n \in \mathbb{N}^+$  alle  $n$ -de orde partiële afgeleiden bestaan.

**Definitie 3.4.3** *Zij  $G_{\mathbb{R}}$  een open gebied in  $\mathbb{R}^2$ . Een oneindig vaak (reëel) differentieerbare functie  $u : G_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  die voldoet aan*

$$\Delta u = 0$$

► *harmonisch* wordt harmonisch op  $G_{\mathbb{R}}$  genoemd.

Het bovenstaande Gevolg 3.4.2 kan men nu grofweg beschrijven als:

*het reële deel van een analytische functie is harmonisch.*



**Opgave 32** Is de uitspraak 'het imaginaire deel van een analytische functie is harmonisch' juist of onjuist? \_\_\_\_\_



**Opgave 33** Zij  $f$  een analytische functie op  $G$ . We spiegelen het gebied  $G$  in de reële as:

$$G^* = \{z \in \mathbb{C}; \text{ met } \bar{z} \in G\}.$$

Dan kan men een anti-analytische functie  $f^*$  op  $G^*$  definiëren door  $f^*(z) = f(\bar{z})$ .

Laat zien dat  $u : G_{\mathbb{R}}^* \rightarrow \mathbb{R}$  met  $u(x, y) = \operatorname{Re} f^*(x + iy)$  een harmonische functie is. \_\_\_\_\_

We hebben net gezien hoe we met een analytische functies een harmonische functie kunnen vinden. Op enkelvoudig samenhangende gebieden is er ook een weg terug. Omdat we nu bij een reële functie een geschikte imaginaire functie zullen definiëren laat het zich raden dat de constructie van harmonisch naar analytisch moeilijker verloopt dan van analytisch naar harmonisch.

**Stelling 3.4.4** *Zij  $G \subset \mathbb{C}$  een enkelvoudig samenhangend gebied. Als  $h$  een harmonische functie is op  $G_{\mathbb{R}}$  dan bestaat er een analytische functie  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  zodanig dat  $h(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ .*

**Bewijs:** De constructie gaat als volgt:

I. Definieer  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  door

$$g(x + iy) = h_x(x, y) - ih_y(x, y).$$

Omdat  $g$  differentieerbaar is en omdat het reële en imaginaire deel van  $g$  aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} g(x + iy) &= h_{xx}(x, y) = -h_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} g(x + iy) \\ \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} g(x + iy) &= -h_{yx}(x, y) = -h_{xy}(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} g(x + iy) \end{aligned}$$

is  $g$  analytisch op  $G$ .

II. Vervolgens kiezen we een vast punt  $(a, b) \in G_{\mathbb{R}}$ . Voor iedere  $w \in G$  nemen we een gladde kromme  $\gamma_w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  zodanig dat  $\gamma_w[0, 1] \subset G$ ,  $\gamma_w(0) = a + ib$  en  $\gamma_w(1) = w$ . Dan wordt de gevraagde analytische functie  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  gedefinieerd door

$$f(w) = h(a, b) + \int_{\gamma_w} g(z) dz.$$

Men laat zien dat  $f' = g$ . Volgens de definitie geldt

$$\operatorname{Re} f(a + ib) = f(a + ib) = h(a, b).$$

Omdat voor alle  $(x, y) \in G_{\mathbb{R}}$  geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} f' = \operatorname{Re} g = \frac{\partial}{\partial x} h$$

is  $h - \operatorname{Re} f$  constant op horizontale lijnen. Evenzo volgt uit

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} i f' = \operatorname{Re} i g = -\operatorname{Im} g = \frac{\partial}{\partial y} h,$$

dat  $h - \operatorname{Re} f$  constant is op verticale lijnen. Daarmee geldt  $h = \operatorname{Re} f$ .

De waarde van  $f$  in  $w$  hangt niet af van de gekozen weg. Als  $\gamma_w$  en  $\tilde{\gamma}_w$  beide gladde krommen binnen  $G$  zijn die  $a + ib$  met  $w$  verbinden dan geldt volgens de Integraalstelling van Cauchy dat

$$\int_{\gamma_w} g(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_w} g(z) dz.$$

III. Vervolgens laten we zien dat  $f$  analytisch is in  $G$ . Neem  $w \in G$  en voor  $\zeta$  dichtbij  $w$  de kromme  $\gamma_{\zeta} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  met

$$\gamma_{\zeta}(t) = \begin{cases} \gamma_w(t+1) & \text{voor } t \in [-1, 0], \\ w + t(\zeta - w) & \text{voor } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

We vinden dat

$$\begin{aligned} f(\zeta) - f(w) &= \int_{\gamma_\zeta} g(z) dz - \int_{\gamma_w} g(z) dz = \\ &= \int_{t=0}^1 g(w + t(\zeta - w))(\zeta - w) dt \end{aligned}$$

en

$$f'(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow w} \frac{f(\zeta) - f(w)}{\zeta - w} = \lim_{\zeta \rightarrow w} \int_{t=0}^1 g(w + t(\zeta - w)) dt = g(w).$$

□

## 4. TOEPASSINGEN

### 4.1 Stationair temperatuurprofiel in 2 dimensies

#### 4.1.1 Inleiding met een model

De temperatuurverdeling in een dunne metalen plaat, geïsoleerd aan boven- en onderkant, die aan de rand een voorgeschreven temperatuur  $T_{rand}$  heeft wordt gegeven door de oplossing van de volgende differentiaalvergelijking met randvoorwaarden. Noemen we  $T(x, y)$  de temperatuur op plaats  $(x, y)$  van de plaat dan vindt men

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{binnen de plaat,} \\ T = T_{rand} & \text{op de rand.} \end{cases} \quad (4.1)$$

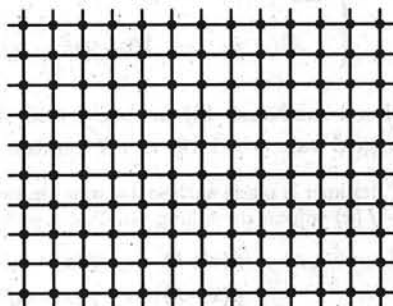
- *Laplace-vergelijking* Dit stelsel wordt een *Laplace-vergelijking* met *Dirichlet-randvoorwaarde* genoemd.  $T_{rand}$  is een functie die op de rand wordt voorgeschreven. Dit probleem is de vertaling van: *bereken de temperatuur binnen de plaat als we deze randvoorwaarde aan de rand vastleggen (meten).*

Als we een gedeelte van de rand isoleren in plaats van de temperatuur daarvoor te schrijven, dan wordt het randwaardeprobleem als volgt:

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{binnen de plaat,} \\ T = T_{rand} & \text{op de rand met voorgeschreven temperatuur,} \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{op de geïsoleerde rand.} \end{cases}$$

- *Neumann-randvoorwaarde* Men noemt  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  een *Neumann-randvoorwaarde*.  $\frac{\partial T}{\partial n}$  is de richtingsafgeleide van  $T$  in de richting van de naar buiten gerichte normaalvector  $n$ .

**Opmerking:** We kunnen deze differentiaalvergelijking op volgende wijze aannemelijk maken. Stel de plaat voor als een twee-dimensionaal rooster en bekijk een punt uit dit rooster, zeg  $(x, y)$ .



Noem  $h$  de roosterafstand. De temperatuur is in evenwicht in  $(x, y)$  als die gelijk is aan het gemiddelde van de temperatuur in de vier omliggende punten. Dat wil zeggen

$$T(x, y) = \frac{1}{4} (T(x+h, y) + T(x-h, y) + T(x, y+h) + T(x, y-h))$$



en herschreven

$$T(x+h, y) - 2T(x, y) + T(x-h, y) + T(x, y+h) - 2T(x, y) + T(x, y-h) = 0. \quad (4.2)$$

Nemen we aan dat  $T$  tweemaal continu (reëel) differentieerbaar is dan volgt met de Stelling van Taylor<sup>1</sup> dat

$$\begin{aligned} \frac{T(x+h, y) - 2T(x, y) + T(x-h, y)}{h^2} + \frac{T(x, y+h) - 2T(x, y) + T(x, y-h)}{h^2} &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 T(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 T(x, y) + o(1). \end{aligned}$$

Met (4.2) en  $|h| \rightarrow 0$  vinden we

$$\Delta T(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 T(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 T(x, y) = 0.$$

De operator  $\Delta_h$  gedefinieerd voor  $h > 0$  door

$$\Delta_h T(x, y) = \frac{T(x+h, y) - 2T(x, y) + T(x-h, y)}{h^2} + \frac{T(x, y+h) - 2T(x, y) + T(x, y-h)}{h^2}$$

► *discrete  
Laplace-  
operator*

heet de *discrete Laplace-operator*. Omdat voor een oplossing  $T$  van  $\Delta_h T = 0$  geldt dat in ieder inwendig punt  $T$  het gemiddelde van zijn vier burens is zien we dat  $T$  geen strikt maximum of strikt minimum in het inwendige kan hebben. Het maximum van  $T$  wordt op de rand aangenomen. Zo'n resultaat wordt een *maximum principe* genoemd.

► *discreet maxi-  
mum principe*

Bij de zogeheten 'eindige differentie methode' (Numerieke Wiskunde) worden oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderd door het gebied te vervangen door een eindig aantal roosterpunten. De benaderende oplossing is een functie op dit eindige aantal roosterpunten die voldoet aan een vergelijking waarin de differentiaaloperator vervangen is door een discrete operator. Bij de Laplace-vergelijking wordt  $\Delta$  vervangen door  $\Delta_h$ .

□

### Voorbeeld 16

Stel dat we de oplossing van het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} \Delta T(x, y) = 0 & \text{voor } (x, y) \in (0, 1)^2, \\ T(x, y) = 10 + 9x^2 - 3y & \text{voor } (x, y) \in \partial((0, 1)^2), \end{cases} \quad (4.3)$$

willen benaderen, bijvoorbeeld door het vierkant  $(0, 1)^2$  te vervangen door een grid van  $n + 1$  bij  $n + 1$  punten. Dan beschouwen we de benaderende

<sup>1</sup>Herinner je uit de analyse dat voor een tweemaal continu (reëel) differentieerbare functie  $x \mapsto f(x)$  volgens de stelling van Taylor geldt dat voor  $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + o(h^2), \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + o(h^2). \end{aligned}$$

Na optellen en delen door  $h^2$  volgt dat voor  $h \rightarrow 0$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + o(1).$$

temperatuur-functie  $T_n$  die gedefinieerd is op het eindige aantal punten  $R_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; 0 \leq i, j \leq n\}$  met de operator

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{1}{n}} T_n(i, j) &= \\ &= T_n(i+1, j) + T_n(i-1, j) + T_n(i, j+1) + T_n(i, j-1) - 4T_n(i, j) \end{aligned} \quad (4.4)$$

We noemen de rand  $\delta R_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; i=0 \text{ of } i=n \text{ of } j=0 \text{ of } j=n\}$ .

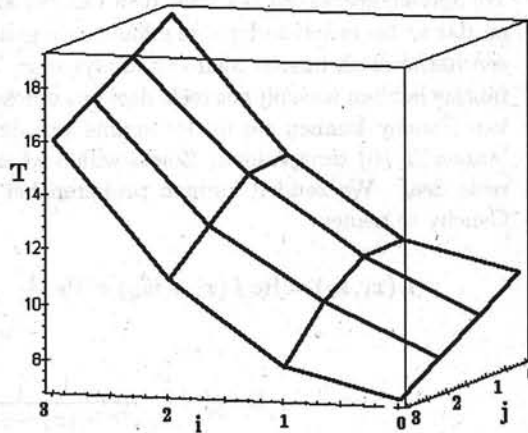
Het te onderzoeken probleem wordt daarmee

$$\begin{cases} \Delta_{\frac{1}{n}} T_n(i, j) = 0 & \text{voor } (i, j) \in R_n \setminus \delta R_n, \\ T_n(i, j) = 10 + 9\left(\frac{i}{n}\right)^2 - 3\frac{j}{n} & \text{voor } (i, j) \in \delta R_n. \end{cases} \quad (4.5)$$

Voor  $n=3$  heeft men een rooster van  $4 \times 4$  punten waarvan in de 12 randpunten de temperatuur vast ligt. De temperatuur  $T_{ij} (= T_3(i, j))$  in de overige vier punten kan men berekenen uit de bijbehorende 4 vergelijkingen van de vorm (4.4). Uitgeschreven in matrix-vorm:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{12} \\ T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - T_{10} - T_{01} \\ 0 - T_{20} - T_{31} \\ 0 - T_{02} - T_{13} \\ 0 - T_{32} - T_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -32 \\ -16 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Maple}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{12} \\ T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{131}{12} \\ \frac{83}{6} \\ \frac{59}{6} \\ \frac{149}{12} \end{pmatrix}$$



Het discrete temperatuurprofiel voor  $n=3$



**Opgave 34** We beschouwen het vorige voorbeeld voor  $n=4$ , dus  $5 \times 5$  punten.

- Schrijf de matrix vergelijking voor de onbekende  $T_{ij}$  als  $n=4$ . (Nu 9 onbekenden)
- Bereken  $\max_{0 \leq i, j \leq n} T_n(i, j)$  en  $\min_{0 \leq i, j \leq n} T_n(i, j)$  voor iedere  $n$  zonder een matrix-vergelijking op te lossen.

- iii. Als er twee oplossingen  $T_n^a$  en  $T_n^b$  van (4.5) zijn dan voldoet  $S = T_n^a - T_n^b$  aan

$$\begin{cases} \Delta_1 S(i, j) = 0 & \text{voor } (i, j) \in R_n \setminus \delta R_n, \\ S(i, j) = 0 & \text{voor } (i, j) \in \delta R_n. \end{cases} \quad (4.6)$$

Wat is  $\max_{0 \leq i, j \leq n} S(i, j)$  en  $\min_{0 \leq i, j \leq n} S(i, j)$ ? Welke oplossingen zijn er voor  $S$ ?

#### 4.1.2 Een oplossing voor een cirkelvormig gebied

Voor een cirkelvormig gebied kunnen we met de behulp van de formule van Cauchy een formule voor de oplossing van de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde vinden. We nemen ter vereenvoudiging als gebied de cirkel met straal 1 rond  $(0, 0)$ . Dat wil zeggen we zoeken een oplossing  $u$ , een functie van  $\{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , die voldoet aan

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| < 1, \\ u(x) = u_{\text{rand}}(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| = 1, \end{cases} \quad (4.7)$$

bij voorgeschreven  $u_{\text{rand}}$ .

We hebben gezien dat het reële deel van een analytische functie harmonisch is en dat er op enkelvoudig samenhangende gebieden ook een weg terug is van een harmonisch functie naar een analytische. Stel nu dat we zo'n analytische functie hebben waarbij het reële deel een oplossing van (4.7) is. Via de formule van Cauchy kunnen we uit de kennis van de functie op de rand de functie binnen  $B_1(0)$  terugvinden. Zoiets willen we eigenlijk hebben voor alleen het reële deel. We zouden kunnen proberen het reële deel van de formule van Cauchy te nemen:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} f(x_1 + ix_2) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - (x_1 + ix_2)} dz = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)} e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{f(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)} e^{i\varphi} \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Het reële deel uitschrijven levert

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{f(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)} e^{i\varphi} \right) &= \operatorname{Re} \left( \frac{f(e^{i\varphi})}{|e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)|^2} e^{i\varphi} (e^{-i\varphi} - (x_1 - ix_2)) \right) = \\ &= \frac{\operatorname{Re}(f(e^{i\varphi})(1 - e^{i\varphi}(x_1 - ix_2)))}{|e^{i\varphi} - (x_1 + ix_2)|^2} = \\ &= \frac{(1 - x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi) \operatorname{Re}(f(e^{i\varphi})) + i(x_2 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi) \operatorname{Im}(f(e^{i\varphi}))}{(\cos \varphi - x_1)^2 + (\sin \varphi - x_2)^2}. \end{aligned}$$

Helaas vinden we na dit rekenwerk dat er onder de integraal ook een term met  $\text{Im } f$  overblijft. Als er slechts termen met  $\text{Re } f$  zouden overblijven dan kunnen we daarvoor  $u$  invullen. Met  $u$  op de rand  $\partial B_1(0)$  voorgeschreven vinden we  $u$  op geheel  $\overline{B_1(0)}$  terug. De zo gevonden formule zouden we kunnen gebruiken om een oplossing  $u$  van (4.7) te vinden in de vorm van een integraal over de rand.

We kunnen via een 'truc' van de term met  $\text{Im } f$  afkomen. Daarvoor doen we het volgende. Merk op dat, omdat  $\bar{w}^{-1} = \frac{1}{x_1 - ix_2}$  in het buitengebied van de kromme ligt, de functie  $z \mapsto \frac{f(z)}{z - \bar{w}^{-1}}$  analytisch is op  $B_1(0)$  en dat dus geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - \bar{w}^{-1}} dz = 0.$$

Tellen we dit op bij de formule van Cauchy dan vinden we

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-w} dz - \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-\bar{w}^{-1}} dz \right).$$

Nemen we nu het reële deel dan verdwijnt de  $\text{Im } f$  binnen de integraal. Dat zien we als volgt.

Gebruiken we dat  $|z|=1$ , en dus geldt  $z\bar{z}=1$ , dan volgt (zie voetnoot<sup>2</sup>) dat

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-w} dz - \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-\bar{w}^{-1}} dz \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2} f(z) \frac{dz}{iz} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - x|^2} f(e^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Door het reële deel te nemen,  $u(x) = \text{Re } f(x_1 + ix_2)$ , volgt

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - x|^2} u(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$$

Hiermee hebben we niet laten zien dat we een formule voor de oplossing van (4.7) voor willekeurige  $u_{\text{rand}}$  hebben. We hebben namelijk aangenomen dat we  $u$  al als reëel deel van een analytische functie konden schrijven. Wel hebben we laten zien dat als de oplossing harmonisch op  $G$  en continu op  $\bar{G}$  is (zie Stelling 3.2.2) de functie deze vorm zal hebben.

Men kan echter laten zien dat men voor continue randvoorwaarden met deze formule inderdaad een oplossing van het Laplace-probleem op de eenheidscirkel krijgt.

<sup>2</sup>Voor  $|w| < |z| = 1$  geldt  $\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-\bar{w}^{-1}} = \frac{1}{z} \left( \frac{z}{z-w} - \frac{\bar{w}}{\bar{w}-z} \right) = \frac{1}{z} \frac{z\bar{w} - z\bar{z} - z\bar{w} + w\bar{w}}{(z-w)(\bar{w}-z)} = \frac{1}{z} \frac{1-|w|^2}{|z-w|^2}$ .

**Stelling 4.1.1** Als  $\varphi \mapsto u_{\text{rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi)$  een continue functie is, dan is de functie  $u : \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door

► *Poisson integraal formule*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{u_{\text{rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi)}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - x|^2} d\varphi & \text{voor } x \text{ met } |x| < 1, \\ u_{\text{rand}}(x) & \text{voor } x \text{ met } |x| = 1, \end{cases} \quad (4.9)$$

- i. een oneindig vaak (reëel) differentieerbare functie op  $\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ ,
- ii. een continue functie op  $\{x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| \leq 1\}$ ,
- iii. die voldoet aan (4.7), de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde op de eenheidskring.

**Opmerking:** Slechts zelden kan men in de Poisson integraal formule de integraal vervangen door een expliciete uitdrukking (de integraal 'uitrekenen'). De betekenis van deze integraal ligt dan ook niet in de mogelijkheid om zo'n expliciete formule te vinden. Met behulp van deze integraal ziet men dat er een oplossing is (de integraal bestaat) en kan men eigenschappen van de oplossing afleiden.

**Bewijs:** We geven geen compleet bewijs maar laten een paar stappen zien. Zij  $f : \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  een continue functie. Dan geldt het volgende:

- i. de functie  $g_1 : w \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-w} dz$  is analytisch op  $B_1(0)$ ;
- ii. de functie  $g_2 : w \mapsto \frac{1}{2\pi i} w \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{zw-1} dz$  is analytisch op  $B_1(0)$ ;
- iii. de functie  $g_3 : w \mapsto g_2(\bar{w})$  is anti-analytisch (zie de opgave op bladzijde 42) op  $B_1(0)$ ;
- iv. de functie  $u : (x_1, x_2) \mapsto \text{Re } g_1(x_1 + ix_2) - \text{Re } g_3(x_1 + ix_2)$  is harmonisch (gebruik Stelling 3.4.2 en de genoemde opgave).

Als we deze laatste formule uitschrijven met  $f = u_{\text{rand}}$  dan verschijnt de Poisson integraal formule. Continuïteit van  $u$  op  $\bar{B}_1(0)_{\mathbb{R}}$  volgt hier niet direct uit. Het extra bewijs dat daarvoor nodig is zullen we overslaan.  $\square$



**Opgave 35** Laat zien dat

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{u_{\text{rand}}(R \cos \varphi, R \sin \varphi)}{|(R \cos \varphi, R \sin \varphi) - x|^2} d\varphi & \text{voor } x \text{ met } |x| < R, \\ u_{\text{rand}}(x) & \text{voor } x \text{ met } |x| = R, \end{cases} \quad (4.10)$$

een oplossing van de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde is op een cirkel rond 0 met straal  $R$ . (Gebruik een schalingsargument: als  $u_1$  de oplossing is op  $B_1(0)_{\mathbb{R}}$  neem dan  $u(x) = u_1(\gamma x)$  voor geschikte  $\gamma \in \mathbb{R}$ .) \_\_\_\_\_

► gemiddelde-  
waarde-  
stelling voor  
harmonische  
functies

**Gevolg 4.1.2** Als  $u : \overline{B_R(0)}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  continu is en als  $u$  harmonisch is in  $B_R(0)_{\mathbb{R}}$ , dan is  $u(0)$  het gemiddelde van  $u$  over de rand  $\partial B_R(0)_{\mathbb{R}}$ :

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} u(R \cos \varphi, R \sin \varphi) d\varphi.$$

□

**Opgave 36** Bewijs Gevolg 4.1.2. Gebruik hiervoor de in de vorige opgave afgeleide formule. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 37** Laat zien dat als  $u_{\text{rand}}(x_1, x_2) = -u_{\text{rand}}(-x_1, x_2)$  voor  $x_1 \geq 0$  de oplossing van (4.7) voldoet aan  $u(0, x_2) = 0$ .

Dit kunnen we gebruiken om een harmonische functie op de halve cirkel met randvoorwaarden



$$u(0, x_2) = 0 \text{ voor } -1 < x_2 < 1,$$

$$u(x_1, x_2) = u_r(x_1, x_2) \text{ voor } x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}$$

te definiëren.

Verklaar en controleer de volgende formule (hint: substitueer  $\varphi := \pi - \varphi$  in de tweede integraal)

$$\begin{aligned} u(x) &= \\ &= \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \left( \int_{\varphi=-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{u_{\text{rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi)}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - x|^2} d\varphi + \int_{\varphi=\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{-u_{\text{rand}}(-\cos \varphi, \sin \varphi)}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - x|^2} d\varphi \right) = \\ &= \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \int_{\varphi=-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left( \frac{1}{(x_1 - \cos \varphi)^2 + (x_2 - \sin \varphi)^2} - \frac{1}{(x_1 + \cos \varphi)^2 + (x_2 - \sin \varphi)^2} \right) u_{\text{rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (4.11)$$

□

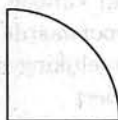
**Opgave 38** Verzin een formule als in (4.11) voor de harmonische functie op de halve cirkel die voldoet aan de randvoorwaarden

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(0, x_2) = 0 \text{ voor } -1 < x_2 < 1,$$

$$u(x_1, x_2) = u_r(x_1, x_2) \text{ voor } x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}.$$

□

**Opgave 39** Verzin een formule als in (4.11) voor de harmonische functie op de kwart cirkel die voldoet aan de randvoorwaarden



$$u(x_1, 0) = 0 \text{ voor } 0 < x_1 < 1$$

$$u(0, x_2) = 0 \text{ voor } 0 < x_2 < 1,$$

$$u(x_1, x_2) = u_r(x_1, x_2) \text{ voor } 0 \leq x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}.$$

### 4.1.3 Een oplossing op andere gebieden

We zullen hier geen algemene theorie afleiden voor het bestaan van oplossingen van de Laplace-vergelijking met Dirichlet (of Neumann) randvoorwaarden op willekeurige gebieden in  $\mathbb{R}^2$ . Aan de hand van een voorbeeld laten we een methode zien waarmee een oplossing geconstrueerd kan worden.

Allereerst spreken we af wat we een oplossing zullen noemen.

**Definitie 4.1.3** Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{R}^2$ . We noemen  $u : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  een oplossing van de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarden  $u_{\text{rand}}$  als

i.  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  is oneindig vaak (reëel) differentieerbaar,

ii.  $u : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  is continu,

iii.  $u$  voldoet aan:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{voor } x \in G, \\ u(x) = u_{\text{rand}}(x) & \text{voor } x \in \partial G. \end{cases} \quad (4.12)$$

► Laplace-  
probleem

Het stelsel in ( ) wordt het Laplace-probleem genoemd.

□

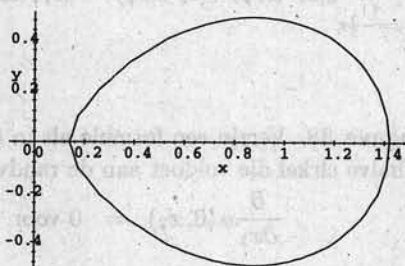
**Opgave 40** Stel dat de functie  $u$  harmonisch is op  $\mathbb{R}^2$ .

Laat zien dat de functie  $(x, y) \mapsto u(x^2 - y^2 - \frac{51}{50}, 2xy)$  ook harmonisch is op  $\mathbb{R}^2$ .

□

**Voorbeeld 17**

De oplossingen van de vergelijking  $(x^2 - y^2 - \frac{51}{50})^2 + (2xy)^2 = 1$  in  $\mathbb{R}^2$  met  $x > 0$  leveren het volgende beeld:



benadering via Maple

De functie  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  met  $g(x, y) = (x^2 - y^2 - \frac{51}{50}, 2xy)$  beeldt de hierboven getekende verzameling af op de eenheidscirkel in  $\mathbb{R}^2$ . Noem het inwendige van deze verzameling  $E_i$ . Als  $g$  een inverse heeft dan kunnen we een oplossing  $v$  van de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde op  $E_i$  construeren met behulp van de formule voor de Laplace-vergelijking met Dirichlet randvoorwaarde op de eenheidscirkel als volgt. Definieer

$$u_{\text{rand}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = v_{\text{rand}}(g^{\text{inverse}}(\tilde{x}, \tilde{y})) \quad \text{voor } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial B_1(0), \quad (4.13)$$

en gebruik de Poisson-formule voor  $u$  op de eenheidsirkel; de gevraagde  $v$  vindt men nu door

$$v(x, y) = u(g(x, y)). \quad (4.14)$$

□

**Opgave 41** We nemen aan dat de hierboven genoemde  $g: \overline{Ei} \rightarrow \overline{B_1(0)}_{\mathbb{R}}$  inderdaad inverteerbaar is<sup>3</sup> en dat de voorgeschreven randwaarden differentieerbaar zijn.

Laat zien dat de  $v$  van hierboven inderdaad een oplossing is van het Laplace-probleem met Dirichlet randvoorwaarde op  $Ei$ .

► *afbeeldingsstelling van Riemann*

We kunnen een transformatie als hierboven voor veel andere gebieden gebruiken. De zogeheten *afbeeldingsstelling van Riemann* zegt dat er bij elk enkelvoudig samenhangend gebied  $G$  een afbeelding  $f: \tilde{G} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  bestaat die analytisch is op  $G$  en die bovendien voldoet aan  $f'(z) \neq 0$  voor  $z \in G$ . Helaas is voor de meeste gebieden het vinden van deze afbeelding niet erg praktisch. De bijbehorende afbeelding van  $f_{\mathbb{R}}: \tilde{G}_{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{B_1(0)}_{\mathbb{R}}$  gedefinieerd door

$$f_{\mathbb{R}}(x, y) = (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy))$$

► *conform*

is *conform*. Vaak noemt men overigens ook  $f$  conform. Conform wil zeggen dat de afbeelding de hoeken met de oriëntatie vasthoudt; anders gezegd: als twee gladde krommen elkaar onder een hoek  $\alpha$  snijden dan snijden de beeldkrommen elkaar ook onder een hoek  $\alpha$ .

Het recept voor deze aanpak is als volgt.

**Recept 4.1.4** voor het vinden van een harmonische functie  $u$  op een enkelvoudig samenhangend gebied  $G_{\mathbb{R}}$  met voorgeschreven randwaarde  $u_r$  op  $\partial G_{\mathbb{R}}$ . Hiervoor is een functie  $f: \tilde{G} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  nodig die analytisch is op  $G$  en waarvoor geldt dat  $f'(z) \neq 0$  voor  $z \in G$ .

i. de randvoorwaarde overbrengen van  $\partial G$  naar  $\partial B_1(0)$  door

$$\tilde{u}_r(f_{\mathbb{R}}(x, y)) = u_r(x, y) \text{ voor } (x, y) \in \partial G_{\mathbb{R}};$$

ii.  $\tilde{u}$  oplossen op  $B_1(0)$  via Poisson integraal formule

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\tilde{u}_r(\cos \varphi, \sin \varphi)}{|(\cos \varphi, \sin \varphi) - (x, y)|^2} d\varphi;$$

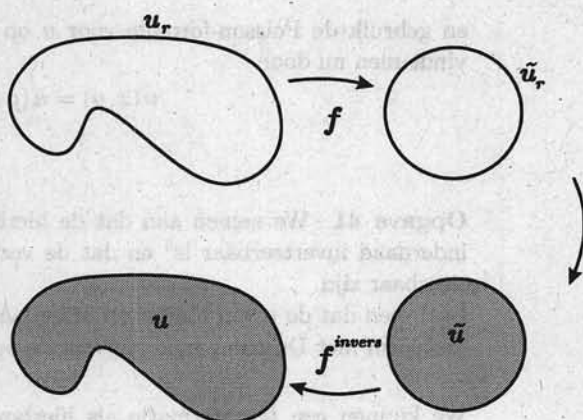
iii. terugbrengen naar  $G$  via

$$u(f_{\mathbb{R}}^{\text{invers}}(x, y)) = \tilde{u}(x, y) \text{ voor } (x, y) \in B_1(0)_{\mathbb{R}}.$$

<sup>3</sup>De reële functie  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  is inverteerbaar als  $\det \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}g_1 & \frac{d}{dy}g_1 \\ \frac{d}{dx}g_2 & \frac{d}{dy}g_2 \end{pmatrix} \neq 0$  is.

De functie  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  is inverteerbaar als  $f' \neq 0$ .





**Opmerking:** Voordat men computers benaderingen voor oplossingen kon laten uitrekenen, was het oplossen van de Laplace vergelijking via een conforme afbeelding en de Poisson integraal formule voor de cirkelschijf een mogelijkheid om een beeld van de oplossing te krijgen. In de oudere literatuur ( $\pm 1850-1950$ ) vindt men vele expliciete voorbeelden van dergelijke conforme afbeeldingen. Een catalogus van conforme afbeeldingen vindt men in het boek van H. Kober, *Dictionary of Conformal Representations*, heruitgegeven door Dover in 1957. (De afbeelding van ellips naar de cirkel is daar overigens niet correct.)

Dat bovenstaand recept inderdaad een harmonische functie levert zien we met het volgende resultaat.

**Hulpstelling 4.1.5** *Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{C}$  en stel dat*

i.  $(s, t) \mapsto u(s, t)$  harmonisch is op  $G_{\mathbb{R}}$ ;

ii.  $z \mapsto f(z)$  analytisch is op  $G$ .

Dan is  $(x, y) \mapsto u(f_{\mathbb{R}}(x, y))$  harmonisch op  $f(G)_{\mathbb{R}}$ .

**Bewijs:** Als we dit door recht-toe-recht-aan berekenen laten zien dan wordt dat een stevige rekenpartij. We kunnen het bewijs ook slimmer aanpakken. Herinner je dat er bij een harmonische functie  $u$  op een enkelvoudig samenhangende gebied een analytische functie  $g$  bestaat zodanig dat  $u(x, y) = \operatorname{Re} g(x + iy)$ . Omdat  $g$  en  $f$  analytisch zijn is de samenstelling  $g \circ f$  analytisch. Dan volgt dat  $v = \operatorname{Re}(g \circ f)$  harmonisch is.  $\square$

$\square$

**Voorbeeld 18**

De functie  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  met  $f(z) = \frac{z^2 + 2iz + 1}{iz^2 + 2z + i}$  beeldt de halve cirkelschijf af op de hele cirkelschijf:

$f : \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\} \rightarrow B_1(0)$  is analytisch;

$f : \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0, |z| \leq 1\} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  is continu en bijtief.

Het controleren van deze bewering is een pittige oefening in het rekenen met complexe getallen.

□

**Opgave 42**

- i. Laat zien dat  $B_1(0) \setminus \{0\}$  het beeld is van  $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$  onder de functie  $f(z) = \frac{1}{z}$ .
- ii. Ofschoon  $f^{-1}$  niet op  $\overline{B_1(0)}$  bestaat (er is geen  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$  met  $f(z) = 0$ ) kunnen we via bovenstaande wijze een oplossing van

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| > 1, \\ v = v_{\text{rand}} & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } |x| = 1, \end{cases}$$

krijgen. Geef een integraalformule.

- iii. Wat kun je zeggen van  $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} v(x,y)$ ? \_\_\_\_\_

□

**Opgave 43** Welk gebied wordt door  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$  afgebeeld op  $B_1(0)$ ? \_\_\_\_\_

□

**Opgave 44** We beschouwen de Laplace-vergelijking op het halfvlak  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Dat is het volgende probleem: Gebruik  $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$  om een integraalformule voor een oplossing van

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{voor } x \in \mathbb{R}^2 \text{ met } x_1 > 0, \\ v(0, x_2) = v_{\text{rand}}(x_2) & \text{voor } x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

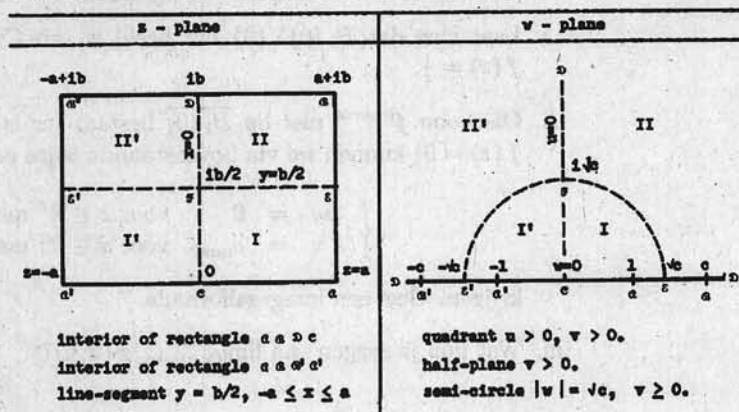
Gebruik  $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$  om een integraalformule voor een oplossing hiervan te berekenen. \_\_\_\_\_

□

**Voorbeeld 19**

In een vorige opgave hebben we een analytische functie  $f$  van het halfvlak naar de eenheidsbol gezien. Gebruiken we de functie  $z \mapsto w(z)$  uit paragraaf 13.2 van Kober's Dictionary of Conformal Representations dan is  $f \circ w$  een analytische afbeelding van de rechthoek naar de eenheidsschijf. Die functie  $f \circ w$  kan men gebruiken om een oplossing van het Laplace-probleem met voorgeschreven randvoorwaarden op de rechthoek te bepalen. Het daarmee expliciet uitrekenen van een oplossing is nog een hele toer als men deze afbeelding bekijkt.

## 13.2 Rectangle on quarter of plane or on half-planes.

(1) Given:  $a, b$ , both positive.

$$\tau = \frac{ib}{a}; \quad k = \left( \frac{\Theta_2(\tau)}{\Theta_3(\tau)} \right)^2 = \sqrt{\lambda(\tau)} \quad (\text{cf. §14.1}), \quad 0 < k < 1; \quad c = \frac{1}{k}$$

$$a = \frac{a}{K}, \quad \text{where } K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (\text{cf. §13.1}).$$

Transformation required:

$$s = a \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad , \quad v = \text{sn}\left(\frac{s}{a}, k\right) = \text{sn} \frac{s}{a} \quad .$$

(2) Given  $c$  ( $c > 1$ ).

$$k = \frac{1}{c}; \quad K \text{ as above, } a = K; \quad b = K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

$$\text{where } k'^2 = 1 - k^2.$$

Transformation required:  $v = \text{sn}(s, k) = \text{sn } s.$ 

$$v = \text{sn}^2(s, k)$$

s - plane	v - plane
interior of rectangle, with vertices at $s = 0, K,$ $K+iK', iK'$	half-plane $v > 0$ .

## 4.1.4 Eenduidigheid van de oplossing

Voor vele enkelvoudig samenhangende gebieden in  $\mathbb{R}^2$  kan men via een conforme afbeelding een oplossing vinden van het Laplace-probleem. De vraag die dan opkomt is of de zo gevonden oplossing de enig mogelijke is. Het belangrijkste gereedschap voor het beantwoorden van deze vraag is het zogenoemde *sterk maximum principe*. Voor harmonische functies luidt het als volgt.

► *sterk maximum principe*

**Stelling 4.1.6** *Zij  $G$  een gebied in  $\mathbb{R}^2$  en stel dat de continue functie  $u: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch is in  $G$ . Als  $u$  zijn maximum binnen  $G$  aanneemt, dan is  $u$  constant.*

Voor begrensde gebieden  $G$  volgt dan dat het maximum op de rand ligt, dus

$$\max_{x \in \bar{G}} u(x) = \max_{x \in \partial G} u(x).$$

**Bewijs:** Stel dat  $u$  zijn maximum heeft in  $y \in G$ . Dan geldt voor iedere  $r > 0$  met  $B_r(y)_{\mathbb{R}} \subset G$  (zulke  $r > 0$  zijn er want  $G$  is open) via Gevolg 4.1.2 dat

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} u(y + r(\cos \varphi, \sin \varphi)) d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} u(y) d\varphi = u(y).$$

Als  $u(x)$  ergens op  $\partial B_r(y)_{\mathbb{R}}$  kleiner dan  $u(y)$  is, is deze ongelijkheid strikt ( $<$ ) en krijgen we een tegenspraak. Zo niet, dan geldt  $u(x) = u(y)$  voor alle  $x$  met  $|x - y| \leq r$ .

We kunnen dit argument herhalen voor elke  $\tilde{y}$  op deze cirkelschijf, enzovoort. Het gebied  $G$  zo opvullend met cirkels levert dat  $u$  is constant.  $\square$

**Gevolg 4.1.7** *De Laplace-vergelijking op een begrensd gebied met op de gehele rand voorgeschreven Dirichlet randvoorwaarde heeft hoogstens één oplossing.*

**Bewijs:** Stel er zijn twee oplossingen  $u_1$  en  $u_2$ . Dan is  $v = u_1 - u_2$  harmonisch binnen het gebied en 0 op de rand. Dus  $\max_{x \in \bar{G}} v(x) = \max_{x \in \partial G} v(x) = 0$ . Hieruit volgt dat  $v \leq 0$  op  $G$ . Omdat hetzelfde geldt voor  $u_2 - u_1$  vinden we dat

$$u_1 = u_2 \text{ in } G.$$

$\square$

Combineren we Stelling 4.1.1 en Gevolg 4.1.7 dan zien we dat de Laplace-vergelijking op een cirkelschijf met op de gehele rand voorgeschreven Dirichlet randvoorwaarde precies één oplossing heeft.

$\square$

**Opgave 45** We bekijken nog even de eerste opgave op bladzijde 55 waar een oplossing op het gebied  $\{x \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$  berekend werd. Dit gebied is onbegrensd en dus kunnen we niet het maximum principe gebruiken om te laten zien dat er precies een oplossing is. Het is zelfs nog erger: er zijn meerdere oplossingen. Laat zien dat  $v(x, y) + 43 \log(x^2 + y^2)$  ook een oplossing is.



**Opgave 46** Bepaal nog enkele andere oplossingen van het Laplace probleem op het halfvlak (zie laatste opgave op bladzijde 55). \_\_\_\_\_

## 4.2 Stromingsproblemen in 2 dimensies

► *snelheids-  
potential*

Bij stromingsmodellen wordt het snelheidsveld van een vloeistof dikwijls gegeven door de gradiënt<sup>4</sup> van een potentiaal, de z.g. *snelheidspotential*  $\Phi$ . Als  $G$  een gebied in  $\mathbb{R}^2$  is met coördinaten  $(x, y)$  dan geldt voor het snelheidsveld  $\vec{q}$  dat

$$\vec{q}(x, y) = -\nabla\Phi(x, y) \text{ voor } (x, y) \in G. \quad (4.15)$$

Hieruit volgt dat het snelheidsveld  $\vec{q}$  loodrecht staat op de lijnen die impliciet worden gedefinieerd door  $\Phi(x, y) = c$ . Is verder de vloeistof niet samendrukbaar, dan geldt  $\text{div } \vec{q} = 0$  (zie voetnoot<sup>5</sup>) en vinden we

$$\text{div } \vec{q} = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = 0 \text{ in } G.$$

Stel dat  $G$  enkelvoudig samenhangend is. Omdat  $\Phi$  harmonisch is kunnen we dan  $\Phi$  beschouwen als het reële deel van een analytische functie  $f$ :

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \text{ waarbij } z = x + iy \text{ met } (x, y) \in G.$$

Zie de opmerking op bladzijde 43. Ook  $\Psi$  is harmonisch in  $G$  en volgens de Cauchy-Riemann vergelijkingen geldt dat

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \text{ in } G. \quad (4.16)$$

**Opmerking:** De analytische functie  $f$  wordt ook de complexe potentiaal genoemd en aangegeven met  $\Omega$ :

$$\Omega(x + iy) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y).$$

Voeren we de complexe snelheid in als  $q(x + iy) = q_1(x, y) - iq_2(x, y)$ , met  $(q_1, q_2) = \vec{q}$ , dan hebben we

$$q = -\Phi_x + i\Phi_y = -\Phi_x - i\Psi_x = -\Omega_x = -\Omega'.$$

Het snelheidsveld vinden we terug door

$$\vec{q}(x, y) = (\text{Re } q(x + iy), -\text{Im } q(x + iy)).$$

<sup>4</sup>Voor functies  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  wordt de gradiënt gedefinieerd door

$$\nabla u(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, y), \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right).$$

<sup>5</sup>Voor functies  $\vec{u}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  wordt de divergentie gedefinieerd door

$$\text{div } \vec{u}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} u_2(x, y).$$

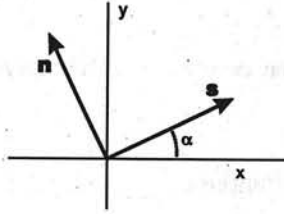
Wat is de fysische interpretatie van deze functie  $\Psi$ ? Wegens (4.16) geldt

$$\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = 0 \text{ ofwel } \nabla\Phi \perp \nabla\Psi \text{ in } G$$

en

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Psi}{\partial n} \text{ en } \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{\partial\Psi}{\partial s}, \quad (4.17)$$

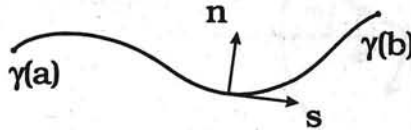
voor ieder orthogonaal stelsel  $\{n, s\}$ .



De eerste gelijkheid in (4.17) volgt uit

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial s} &= \nabla\Phi \cdot s = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \sin\alpha = \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \sin\alpha = \nabla\Psi \cdot n = \frac{\partial\Psi}{\partial n}, \end{aligned}$$

en de tweede volgt op analoge wijze. We nemen nu  $s$  de tangentiële en  $n$  de geschikt georiënteerde normaalrichting van een kromme.



Als  $P$  en  $Q$  twee punten zijn in  $G$  en  $k$  een verbindende reële kromme, dan geldt

$$\Psi(Q) - \Psi(P) = \int_k \frac{\partial\Psi}{\partial s} ds = - \int_k \frac{\partial\Phi}{\partial n} ds = - \int_k \nabla\Phi \cdot n ds = \int_k \vec{q} \cdot n ds,$$

met andere woorden  $\Psi(Q) - \Psi(P)$  is de hoeveelheid vloeistof die stroomt door een oppervlak gekarakteriseerd door de kromme  $k$ . In het bijzonder geldt:

$$\Psi(P) = \Psi(Q) \text{ voor punten } P, Q \text{ op een stroomlijn.}$$

► *stroomfunctie*

Daarom wordt deze functie  $\Psi$  de *stroomfunctie* genoemd. Dikwijls is het handig om een stromingsprobleem rechtstreeks in  $\Psi$  uit te drukken.

**Opmerking:** We kunnen  $\Psi(Q) - \Psi(P)$  ook via de complexe potentiaal berekenen. Voor de met  $k$  corresponderende kromme  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  (met  $\gamma(t) = x_1(t) + ix_2(t)$ ) vinden we via Hulpstelling 3.1.4 dat

$$\Omega(\gamma(b)) - \Omega(\gamma(a)) = - \int_{\gamma} q(z) dz.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma(b)) - \Psi(\gamma(a)) &= \operatorname{Im}(\Omega(\gamma(b)) - \Omega(\gamma(a))) = -\operatorname{Im} \int_{\gamma} q(z) dz = \\ &= -\operatorname{Im} \int_a^b (q_1(x(t)) - iq_2(x(t))) (x'_1(t) + ix'_2(t)) dt = \\ &= \int_a^b (-q_1(x(t)) x'_2(t) + q_2(x(t)) x'_1(t)) dt = \\ &= \int_a^b \vec{q}(x(t)) \cdot (-x'_2(t), x'_1(t)) dt = \int_k \vec{q} \cdot \mathbf{n} ds.\end{aligned}$$

We geven twee voorbeelden van stromingsproblemen.

#### 4.2.1 Puntbron

Voor een puntbron met sterkte  $Q$  hebben we de potentiaal

$$\Phi(x, y) = -\frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{met } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dan geldt

$$\nabla \Phi = -\frac{Q}{2\pi r} \vec{e} \quad \text{en dus } \vec{q} = \frac{Q}{2\pi r} \vec{e},$$

waarin  $\vec{e}$  de radiale eenheidsvector is. Met andere woorden, voor de cirkel met straal  $R$  geldt

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_R(0)_R} \vec{q} \cdot \vec{n} ds &= \\ &= \int_{\partial B_R(0)_R} \frac{Q}{2\pi R} \vec{e} \cdot \vec{e} ds = Q,\end{aligned}$$

onafhankelijk van  $R$ . De corresponderende stroomfunctie is

$$\Psi(r, \varphi) = -\frac{\varphi}{2\pi} Q, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Omdat  $\mathbb{C} \setminus \{(0)\}$  niet enkelvoudig samenhangend is zien we overigens dat we het  $\mathbb{C}$ -vlak ergens tot  $(0, 0)$  moeten 'opensnijden'.

Herschrijven van de *Cauchy-Riemann vergelijkingen met poolcoördinaten* geeft

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (4.18)$$

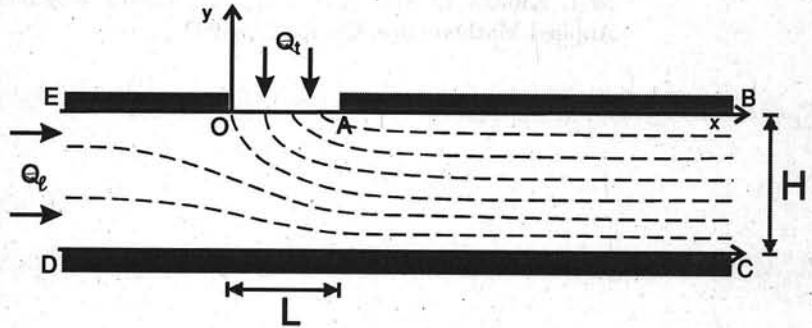
► *Cauchy-Riemann in poolcoördinaten*



**Opgave 47** Laat zien dat (4.18) de Cauchy-Riemann vergelijkingen in poolcoördinaten zijn. Laat ook zien dat bovenstaande  $\Phi$  en  $\Psi$  hieraan voldoen.

## 4.2.2 Stroming in een strip

We beschouwen grondwaterstroming in een lange strip (b.v. tussen kleilagen) waar lokaal van boven extra water in doordringt. Een schematische tekening volgt.



een vloeistofstroming door poreus medium

We nemen aan dat in- en uitstroom homogeen over de openingen verdeeld is. Dan voldoet  $\Psi$  aan de volgende randvoorwaarden.

We normaliseren zodanig dat  $O$  de oorsprong is en  $\Psi(O) = 0$ . De randvoorwaarden worden:

$$\begin{aligned} \text{Langs } EO : \quad 0 = q_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \Rightarrow \Psi = \text{constant} = 0; \\ \text{Langs } OA : \quad -\frac{Q_t}{L} = q_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \Rightarrow \Psi = -\frac{Q_t}{L}x \text{ met } 0 < x < L; \\ \text{Langs } AB : \quad 0 = q_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \Rightarrow \Psi = -Q_t; \\ \text{Langs } BC : \quad \frac{Q_t + Q_l}{H} = q_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \Rightarrow \Psi = -Q_t - \frac{Q_t + Q_l}{H}y \\ &\text{met } y < 0; \\ \text{Langs } CD : \quad 0 = q_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \Rightarrow \Psi = Q_l; \\ \text{Langs } DE : \quad \frac{Q_l}{H} = q_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \Rightarrow \Psi = -\frac{Q_l}{H}y \text{ met } y < 0. \end{aligned}$$

Gezocht wordt een functie  $\Psi$  die voldoet aan  $\Delta\Psi = 0$  en bovenstaande randvoorwaarden.

□

**Opgave 48** Bereken de oplossing voor  $\Psi$  als  $Q_t = 0$ . \_\_\_\_\_

Een analytische afbeelding van de rechthoek naar de cirkelschijf vinden we door de afbeelding van rechthoek naar bovenhalfvlak uit 'Kober' te laten volgen door  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ .

□

**Opgave 49** De (tweedimensionale doorsnede van de) stroming rond een horizontale cilinder met straal  $a$  heeft de volgende complexe potentiaal:  $\Omega(z) =$



$v\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$ . Bereken snelheidspotentiaal, snelheidsveld en stroomfunctie. Geef een schets van de stroomlijnen.

Meer uitgebreide resultaten en verdere toepassingen van complexe functietheorie is te vinden in het volgende boek:

M.J. ABLOWITZ AND A.S. FOKAS, *Complex Variables*, Cambridge texts in Applied Mathematics, Cambridge 1997. —

**Deel II**

**Beginwaardeproblemen voor  
gewone  
differentiaalvergelijkingen**

Deel II

Beginwaardenproblemen voor  
gewone  
differentiaalvergelijkingen

## 5. EERSTE ORDE GEWONE D.V. EN EERSTE ORDE STELSLS

---

We beginnen met een korte herhaling van enkele soorten gewone differentiaalvergelijkingen waarbij vaak een oplossing te vinden is in de vorm van een expliciete formule. Bij een eerste kennismaking met differentiaalvergelijkingen ontmoet men deze typen: separabel, homogeen, lineair, exact en Bernoulli/Riccati type. Voor deze soorten is er een oplossingsalgoritme waarmee men meestal een expliciete formule voor de oplossing kan vinden.

Men zou kunnen verwachten dat bij een tweede of meer uitgebreide kennismaking het aantal typen waarbij zo'n algoritme bestaat minstens verdubbelt. Dat is echter niet het geval. Naast deze soorten bestaat er zelden zo'n oplossingsalgoritme en kan men zelden een oplossing vinden in de vorm van een expliciete formule met de gebruikelijke standaardfuncties. In dergelijke gevallen resteert het onderzoeken of er één oplossing is en van deze oplossing de eigenschappen te onderzoeken en eventueel een benadering te berekenen.

### 5.1 Enkele expliciete methoden voor 1<sup>e</sup> orde

---

In het vervolg zullen we meestal de gegeven functies noteren door  $f$  en  $g$ . De variabele zullen we met  $x$  of  $t$  noteren en de functie die we zoeken is de  $u$ .

#### 5.1.1 Separabele d.v.

---

Differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$u' = f(u)g(x)$$

► *separabel*

heten *separabel*. We zoeken een differentieerbare functie  $x \mapsto u(x)$  zodat  $u'(x) = f(u(x))g(x)$ . Voor 'nette' functies  $f$  en  $g$  kunnen we deze differentiaalvergelijking oplossen door scheiding van variabelen (let op bij  $f(u) = 0$ ; nulpunten van  $f$  leveren constante oplossingen):

$$\frac{u'}{f(u)} = g(x)$$

en vervolgens te integreren

$$\int_{x_0}^x \frac{u'(s)}{f(u(s))} ds = \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

De substitutieregels via  $v = u(s)$  levert

$$\int_{u(x_0)}^{u(x)} \frac{1}{f(v)} dv = \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

Als we primitieven van  $v \mapsto \frac{1}{f(v)}$  en van  $s \mapsto g(s)$  kennen, noem ze respectievelijk  $H$  en  $G$ , dan vinden we dat een oplossing  $u$  voor een of andere  $c \in \mathbb{R}$  voldoet aan  $H(u(x)) = G(x) + c$ . Als we ook nog de inverse functie van  $H$  kennen dan vinden we oplossingen

$$u_c(x) = H^{inv}(G(x) + c).$$

Vergeet de nulpunten van  $f$  niet. Als  $f$  een of meer nulpunten  $p_i$  heeft dan zijn er bovendien nog de oplossingen

$$u_i(x) = p_i.$$

### 5.1.2 Homogene d.v.

---

Differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$u' = f\left(\frac{u}{x}\right) \quad (5.1)$$

► *homogeen*

heten *homogeen* en kunnen we oplossen via substitutie  $u(x) = xv(x)$ . De differentiaalvergelijking wordt

$$xv' + v = f(v)$$

en deze is separabel. De oplossingen vindt men via

$$\frac{1}{f(v) - v} v' = \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad f(v) - v = 0.$$

### 5.1.3 Eerste orde lineaire d.v.

---

► *eerste orde lineaire d.v.*

Een *eerste orde lineaire d.v.* is van de vorm

$$u' + \alpha(x)u = \beta(x),$$

met  $\alpha$  en  $\beta$  gegeven functies. Het oplossen verloopt in twee stappen.

► *gereduceerde d.v.*

1. Eerst berekent men de oplossingen van de *gereduceerde d.v.*,  $u' + \alpha(x)u = 0$ . Deze differentiaalvergelijking is separabel. Dus variabelen scheiden levert  $u = 0$  of  $\frac{u'(x)}{u(x)} = -\alpha(x)$  en via  $\ln|u(x)| = c_0 - \int^x \alpha(s) ds$  vinden we

$$u(x) = ce^{-\int^x \alpha(s) ds}$$

Met  $\int^x \alpha(s) ds$  wordt een primitieve van  $\alpha$  bedoelt.

► *variatie van constante*

2. Vervolgens gebruiken we deze functies om een oplossing van de oorspronkelijke d.v. met  $\beta$  te vinden. Stel  $u(x) = cu_h(x)$  zijn de oplossingen van de gereduceerde d.v. Gebruik nu de substitutie  $u(x) = c(x)u_h(x)$  (*variatie van constante*) voor  $u' + \alpha(x)u = \beta(x)$ . Voor  $c(x)$  vind je de differentiaalvergelijking

$$c'(x)u_h(x) + c(x)u_h'(x) + \alpha(x)c(x)u_h(x) = \beta(x)$$

en omdat  $u'_h(x) + \alpha(x)u_h(x) = 0$  volgt

$$c'(x)u_h(x) = \beta(x)$$

waaruit we  $c(x)$  kunnen oplossen.

**Opmerking:** Men kan de oplossing van zo'n eerste orde lineaire differentiaalvergelijking zelfs in een formule gieten. De oplossing van

$$\begin{cases} u' + \alpha(x)u = \beta(x) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

wordt

$$u(x) = u_0 e^{-\int_0^x \alpha(s) ds} + \int_0^x e^{-\int_t^x \alpha(s) ds} \beta(t) dt.$$

#### 5.1.4 Bernoulli en Riccati d.v.

---

Laat  $\alpha$  en  $\beta$  gegeven functies zijn. Een d.v. van het type

$$u' + \alpha(x)u + \beta(x)u^k = 0 \text{ met } k \neq 1$$

- *Bernoulli* is naar *Bernoulli* genoemd. Na de substitutie  $v(x) = (u(x))^{1-k}$  krijgt men een lineaire d.v.  
De d.v.

$$u' + \alpha(x)u + \beta(x)u^2 = f(x)$$

- *Riccati* is naar *Riccati* genoemd. Als men (met geluk) één oplossing  $u_1$  gevonden heeft, dan volgt via de substitutie  $u(x) = v(x) + u_1(x)$  een d.v. van het Bernoulli type voor  $v$ . Daarmee kan men de algemene oplossing vinden.

#### 5.1.5 Exacte d.v.

---

Een d.v. van de vorm

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) + u' \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) = 0$$

- *exact* heet *exact* en heeft oplossingen die impliciet gedefinieerd zijn door

$$f(x, u) = c.$$

De moeilijke stap bij exacte d.v. is het herkennen dat een differentiaalvergelijking met gegeven functies  $F$  en  $G$  van de vorm

$$F(x, u) + u'G(x, u) = 0 \tag{5.2}$$

- *integrerende factor* exact is of via een *integrerende factor*<sup>1</sup> exact te maken is. De test of deze

differentiaalvergelijking exact is, is als de volgende:

$$\frac{\partial}{\partial u} F(x, u) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, u). \quad (5.3)$$

Dat deze voorwaarde nodig is voor tweemaal continu differentieerbare<sup>2</sup>  $f$  zien we door

$$\frac{\partial}{\partial u} F(x, u) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, u).$$

Men kan ook laten zien dat deze voorwaarde (5.3) voldoende is.

De impliciet gedefinieerde oplossingen van (5.2),  $f(x, u) = c$ , vindt men overigens door

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) = F(x, u) \Rightarrow f(x, u) = \int_{x_0}^x F(s, u) ds + C_1(u)$$

te vergelijken met

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) = G(x, u) \Rightarrow f(x, u) = \int_{u_0}^u G(x, v) dv + C_2(x).$$

Voor het vinden van een integrerende factor zijn geen algemene regels te geven. Dat maakt het oplossen van een differentiaalvergelijking die via een integrerende factor exact te maken is tot een vervelende puzzel. Zo is elk van de voorgaande typen door een geschikte integrerende factor exact te maken. Helaas is het vinden van die factor niet bijzonder constructief. Bijvoorbeeld is  $\mu(x, u) = \left(xf\left(\frac{u}{x}\right) - u\right)^{-1}$  een integrerende factor voor (5.1). Deze factor is overigens gevonden door (5.1) als homogene differentiaalvergelijking op te lossen(!) en in de differentiaalvergelijking voor  $v$  na scheiding weer  $u$  te schrijven.

De moraal is dat je eerst onderzoekt of de differentiaalvergelijking van een van de andere typen is en pas dan probeert deze als exacte differentiaalvergelijking te schrijven en op te lossen.

<sup>1</sup>Overigens is de functie  $x, u \mapsto \mu(x, u)$  een integrerende factor voor (5.2) als

$$\mu(x, u) F(x, u) + u' \mu(x, u) G(x, u) = 0$$

exact is en als bovendien geldt  $\mu(x, u) \neq 0$ .

<sup>2</sup>Een functie heet continu differentieerbaar als de functie differentieerbaar is en bovendien alle eerste afgeleiden continu zijn. Hij heet tweemaal continu differentieerbaar als hij tweemaal differentieerbaar is en continue tweede afgeleiden heeft.

## 5.1.6 Voorbeelden en opgaven

□

**Voorbeeld 20**

We zoeken een functie  $x \mapsto y(x)$  die voldoet aan de d.v.

$$2x + (x^2 + 4y^3 e^{-y}) y' = 0. \quad (5.4)$$

Deze differentiaalvergelijking is noch separabel, noch homogeen, noch lineair, noch van Bernoulli of Riccati's type. Blijft over exact of exact te maken. Als deze exact is, dan zou met  $F(x, y) = 2x$  en  $G(x, y) = x^2 + 4y^3 e^{-y}$  de voorwaarde (5.3) moeten gelden. We vinden echter  $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 0 \neq 2x = \frac{\partial}{\partial x} G(x, y)$ . De laatste hoop lijkt het vinden van een integrerende factor.

Probeer  $\mu = \mu(x)$ . Dan wordt de d.v. exact als

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(x) F(x, y)) = 0 = 2x\mu(x) + (x^2 + 4y^3 e^{-y}) \mu'(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x) G(x, y)).$$

De enige functie  $x \mapsto \mu(x)$  die daaraan voldoet voor alle  $x$  en  $y$  is  $\mu(x) = 0$ . Dit is dus geen succes.

Probeer  $\mu = \mu(y)$ . Dan wordt de d.v. exact als

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(y) F(x, y)) = 2x\mu'(y) = 2x\mu(y) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(y) G(x, y)).$$

Hier is wel een niet-nul oplossing te vinden. De vergelijking  $\mu'(y) = \mu(y)$  heeft als een oplossing  $\mu(y) = e^y$ . Door de d.v. met  $e^y$  te vermenigvuldigen vinden we de exacte d.v.

$$2xe^y + (x^2 e^y + 4y^3) y' = 0.$$

Met primitiveren van  $2xe^y$  naar  $x$  vinden we

$$f(x, y) = \int 2xe^y dx = x^2 e^y + C_1(y)$$

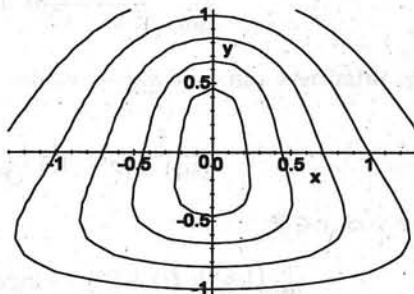
en door vervolgens  $f$  naar  $y$  te differentiëren volgt  $x^2 e^y + C_1'(y) = x^2 e^y + 4y^3$ . Dus  $C_1(y) = y^4 + C_2$  en daarmee krijgen we

$$f(x, y) = x^2 e^y + y^4.$$

De impliciet gedefinieerde oplossingen zijn

$$x^2 e^{y(x)} + y(x)^4 = c.$$

Maple laten we enkele van de impliciete krommen  $x^2 e^y + y^4 = c$  tekenen:



□

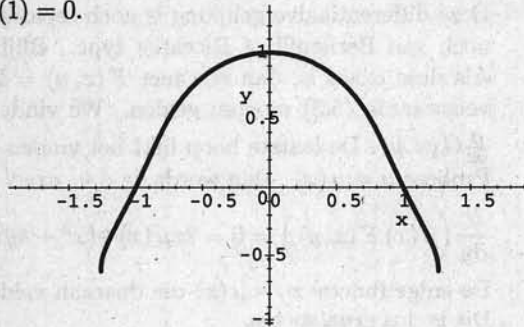
**Opgave 50** Laat zien dat de impliciet gedefinieerde krommen  $x^2 e^y + y^4 = c$  een verticale raaklijn hebben als  $y < 0$  en  $x = \pm 2\sqrt{-y^3 e^{-y}}$ . Bij deze punten kan men oplossingen van de bovenstaande differentiaalvergelijking niet als een functie  $x \mapsto y(x)$  beschouwen.



Herschrijven we de differentiaalvergelijking in (5.4) naar de standaardvorm

$$y' = \frac{-2x}{x^2 + 4y^3 e^{-y}}$$

dan zien we dat we voor  $x = \pm 2\sqrt{-y^3 e^{-y}}$  een noemer gelijk aan 0 krijgen en is  $y'$  niet gedefinieerd. Tenslotte een schets van de oplossing  $x \mapsto y(x)$  die voldoet aan  $y(1) = 0$ .



□

### Voorbeeld 21

Een voorwerp dat zich met snelheid  $v$  ( $v \geq 0$ ) in een gas beweegt ondervindt een wrijvingkracht evenredig met het kwadraat van en tegengesteld aan zijn snelheid:  $F_w = -\gamma v^2$ . De differentiaalvergelijking die hoort bij de vrije val van dit voorwerp is

$$mv' = mg - \gamma v^2.$$

We nemen  $m = 1$ ,  $g = 10$  en  $\gamma = .004$ . De differentiaalvergelijking wordt

$$v' = 10 - \frac{1}{250}v^2.$$

Deze is separabel en scheiding van variabelen levert

$$\frac{1}{2500 - v^2}v' = \frac{1}{250} \quad \text{of} \quad 2500 - v^2 = 0.$$

De tweede mogelijkheid geeft de twee constante oplossingen  $v(t) = 50$  en  $v(t) = -50$ . De eerste mogelijkheid levert

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{1}{2500 - v^2} dv = \int_0^t \frac{1}{250} dt = \frac{1}{250}t.$$

Een primitieve van  $v \mapsto \frac{1}{2500 - v^2}$  vinden we door breuksplitsing:

$$\frac{1}{2500 - v^2} = \frac{1}{100} \left( \frac{1}{v + 50} - \frac{1}{v - 50} \right).$$

Dus voor  $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{100} \left( \log(|v(t) + 50|) - \log(|v(t) - 50|) \right) = \frac{1}{250}t + c.$$

Enig omschrijven levert

$$\log \left( \frac{v(t) + 50}{v(t) - 50} \right) = \frac{2}{5}t + c_1$$

en met  $c_2 = e^{c_1} \in \mathbb{R}^+$  volgt

$$\left| \frac{v(t) + 50}{v(t) - 50} \right| = c_2 e^{\frac{2}{5}t}.$$

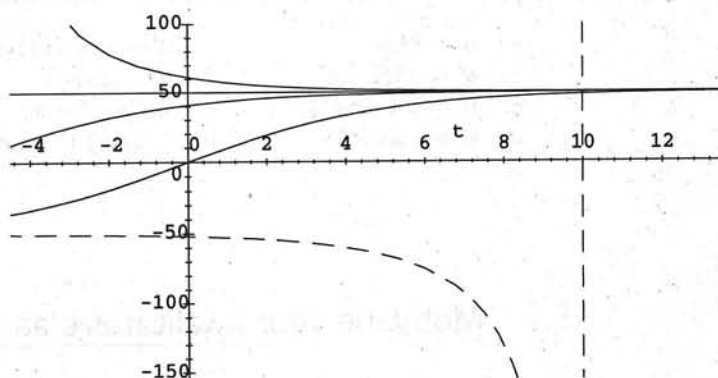
Nemen we  $c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  dan kunnen we de absoluutstrepen weglaten en vinden we

$$v(t) + 50 = c_2 e^{\frac{2}{5}t} (v(t) - 50).$$

De gevonden oplossingen zijn:

$$\text{voor elke } c \text{ in } \mathbb{R} : \quad v(t) = 50 \frac{c e^{\frac{2}{5}t} + 1}{c e^{\frac{2}{5}t} - 1},$$

$$\text{en } v(t) = 50.$$



De grafiek van 5 oplossingen van de d.v.

□

**Opgave 51** De gebroken kromme heeft een asymptoot bij  $t = 10$ . Wat is de fysische betekenis voor het vallende voorwerp? \_\_\_\_\_

□

**Opgave 52** Een kogel wordt loodrecht omhoog geschoten met beginsnelheid  $v(0) = 500$ . De snelheid voldoet aan de d.v.  $v' = -10 - \frac{1}{250}v|v|$ . Met welke snelheid zal de schutter de kogel opvangen? \_\_\_\_\_

Hint: oplossen in stappen.

- i. Totdat de kogel zijn hoogste punt geldt  $v' = -10 - \frac{1}{250}v^2$ ; bereken de oplossing van het bijbehorende beginwaardeprobleem.
- ii. Op het hoogste punt geldt  $v(t_{hp}) = 0$  en  $s(t_{hp}) = \int_0^{t_{hp}} v(t) dt$ . Bereken  $t_{hp}$  en  $s(t_{hp})$ .
- iii. Voor  $t > t_{hp}$  geldt  $v' = -10 + \frac{1}{250}v^2$  met nieuwe beginvoorwaarde  $v(t_{hp}) = 0$ . Bereken  $v(t)$  en  $s(t) = s(t_{hp}) + \int_{t_{hp}}^t v(t) dt$ .
- iv. Het tijdstip  $t_{ov}$  van opvangen vinden we door  $s(t_{ov}) = 0$ . (de vergelijking voor  $t_{ov}$  hoeft u niet op te lossen)
- v. De gevraagde snelheid is  $v(t_{ov})$ . Geef een numerieke benadering. \_\_\_\_\_



**Opgave 53** Een blok hout dat over een glad oppervlak geschoven wordt, ondervindt een constante wrijvingskracht van grootte  $f^+$  tegengesteld aan de bewegingsrichting: dus  $mv' = f(v)$  met

$$f(v) = \begin{cases} -f^+ & \text{als } v > 0, \\ 0 & \text{als } v = 0, \\ f^+ & \text{als } v < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

We nemen  $f^+/m = 1$ . Bereken alle oplossingen  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  van deze d.v. die voldoen aan  $v(0) = 5$ . Bereken ook alle oplossingen  $v : (-\infty, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  die voldoen aan  $v(10) = 0$ . (Oplossingen zijn hier continue, stuksgewijs differentieerbare functies waarvoor de d.v. geldt met uitzondering van hoogstens eindig veel punten.)



**Opgave 54** Bereken de oplossingen  $x \mapsto u(x)$  van

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| a. $u' = \frac{u-1}{x-2}$ ; | e. $u' = x \sin(u)$ ;                         |
| b. $u' = x^2(1+u^2)$ ;      | f. $u' = \sin\left(\frac{u}{x}\right)$ ;      |
| c. $u' = u + \sin(x)$ ;     | g. $\sin(u)u' = x$ ;                          |
| d. $u' = u \sin(x)$ ;       | h. $(xu \sin(u) - x \cos(u))u' = u \cos(u)$ . |

## 5.2 Motivatie voor kwalitatieve aanpak

De meeste differentiaalvergelijkingen zijn niet op te lossen door de oplossing in de vorm van een of andere formule expliciet op te schrijven. Behalve voor de paar bovengenoemde types is dat zelden mogelijk. Al kan men dan geen formule vinden, vaak kan men wel laten zien dat er een oplossing is en men kan zelfs eigenschappen van deze oplossing geven.

Als voorbeeld beschouwen we

$$\begin{cases} u'(t) = (u(t))^2 + t^2, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Dit beginwaardeprobleem heeft geen oplossing die met standaardfuncties geschreven kan worden. Enkele vragen die zonder direct 'uitrekenen' opgelost kunnen worden zijn de volgende.

- Heeft dit beginwaardeprobleem een oplossing?
- Heeft dit beginwaardeprobleem precies één oplossing?
- Voor welke  $t \in \mathbb{R}$  bestaat de oplossing?
- Hoe kunnen we de oplossing (numeriek) benaderen?

Allereerst zullen we afspreken wat we onder een oplossing van een gewone differentiaalvergelijking verstaan. Overigens noemen we een differentiaalvergelijking gewoon als er alleen afgeleiden naar één variabele in voorkomen.

## ► oplossing

**Definitie 5.2.1** Zij  $f$  een continue functie. Een oplossing van de 1<sup>e</sup> orde gewone differentiaalvergelijking

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

is een continu differentieerbare functie  $u$  (een functie is bepaald door functievoorschrift en definitiegebied) met

- i. een open interval  $(T^-, T^+) \subset \mathbb{R}$  als definitiegebied,
- ii. de vergelijking  $u'(t) = f(t, u(t))$  geldt voor alle  $t \in (T^-, T^+)$ .

## ► existentie-interval

Dit open interval  $(T^-, T^+)$  heet het existentie-interval.

We zullen voor  $T^-$  eveneens  $-\infty$  en voor  $T^+$  ook  $+\infty$  toelaten. De eisen voor  $T^\pm$  samengevat:

$$-\infty \leq T^- < T^+ \leq \infty.$$

**Opmerking:** Soms beschouwt men een differentiaalvergelijking met een rechterlid  $f$  dat niet continu is. Denk aan het schuivende blok hout in de vorige paragraaf. Als  $u \mapsto f(t, u)$  niet continu is dan kan men niet verwachten dat de oplossing overal differentieerbaar is. Om dit precies te formuleren zouden we bovenstaande definitie moeten uitbreiden. Voor functies  $f$  die stuksgewijs continu zijn wordt noemt men  $u$  een oplossing als  $t \mapsto u(t)$  continu en stuksgewijs differentieerbaar is en wanneer aan de differentiaalvergelijking is voldaan uitgezonderd de punten waar  $u \mapsto f(t, u)$  een sprong maakt.

□

**Voorbeeld 22**

Voor de vergelijking  $u' = u^2$  vinden we de volgende oplossingen.

- i. Voor elke  $c \in \mathbb{R}$  hebben we de oplossing

$$u : (-\infty, c) \rightarrow \mathbb{R} \text{ met } u(t) = \frac{1}{c-t}.$$

- ii. Voor elke  $c \in \mathbb{R}$  hebben we de oplossing

$$u : (c, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ met } u(t) = \frac{1}{c-t}.$$

- iii. Bovendien nog de oplossing

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ met } u(t) = 0.$$

Als deze differentiaalvergelijking de baan van een deeltje zou beschrijven met bijvoorbeeld  $u(0) = 1$  dan wordt de oplossing die aan deze voorwaarde voldoet:  $u : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  met  $u(t) = \frac{1}{1-t}$ . Voor  $t \uparrow 1$  zou het deeltje in oneindig 'verdwijnen' (waarschijnlijk is de g.d.v. daar geen goed model). Er lijkt geen goede reden te verzinnen waarom dit deeltje vervolgens via  $u : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  met  $u(t) = \frac{1}{1-t}$  uit  $-\infty$  terug zou komen.

Het maximale existentie-interval is bij bovenstaande oplossingen achtereenvolgens  $(-\infty, 1)$ ,  $\mathbb{R}$  en  $(1, \infty)$ .

## ► maximaal existentie-interval

□

### Voorbeeld 23

Neem  $\alpha \in \mathbb{R}$ . De differentiaalvergelijking in

$$\begin{cases} u'(t) = 1 - (u(t))^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

is separabel. Zoals in het vorige voorbeeld vinden we na enig rekenwerk

$$u(t) = \frac{(1 + \alpha)e^{2t} - (1 - \alpha)}{(1 + \alpha)e^{2t} + (1 - \alpha)}$$

► *begin-  
voorwaarde*

Voor elke *beginvoorwaarde* is er precies één oplossing en

voor  $1 < \alpha$ :

$$u : \left(-\ln\left(\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\right), +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}; \quad (5.7)$$

voor  $-1 \leq \alpha \leq 1$ :

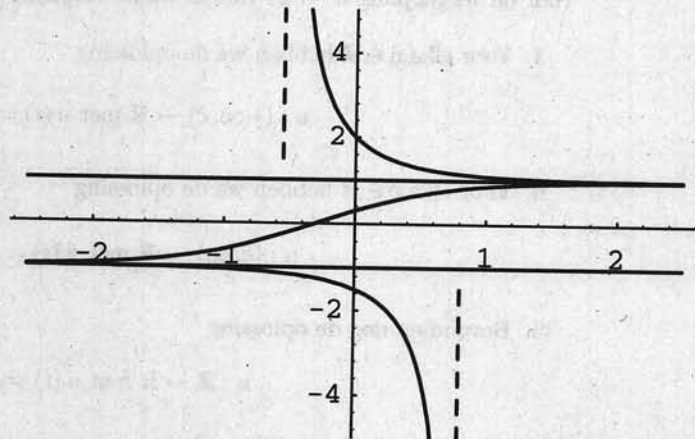
$$u : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R};$$

voor  $\alpha < -1$ :

$$u : \left(-\infty, \ln\left(\sqrt{\frac{-\alpha+1}{-\alpha-1}}\right)\right) \rightarrow \mathbb{R}.$$

► *maximaal  
existentie-  
interval*

Merk op dat ook de oplossingen van deze differentiaalvergelijking niet voor alle  $\alpha$  op de hele  $\mathbb{R}$  bestaan. Voor  $|\alpha| > 1$  hebben de oplossingen een asymptoot. Het betreffende interval, hier is dat bijvoorbeeld  $\left(-\ln\left(\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\right), +\infty\right)$  voor  $1 < \alpha$ , is het maximale existentie-interval van de oplossing. Vijf verschillende oplossingen zijn in het volgende figuur weergegeven.



oplossingen voor  $\alpha = 2, 1, \frac{3}{10}, -1, -\frac{3}{2}$

□

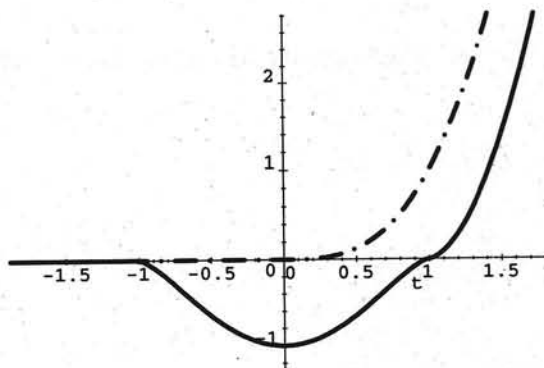
### Voorbeeld 24

Voor de d.v.

$$\begin{cases} v'(t) = 3t^3 \sqrt{|v(t)|} \\ v(-1) = \alpha \end{cases}$$

kunnen we bij  $\alpha = 0$  meer dan één oplossing vinden: bijvoorbeeld

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \leq 0, \\ t^3 & \text{voor } t > 0; \end{cases} \text{ en } v(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \leq -1, \\ -(1-t^2)^{3/4} & \text{voor } -1 < t \leq 1, \\ (t^2-1)^{3/4} & \text{voor } t > 1. \end{cases}$$



In dit voorbeeld is de functie  $f$  (hier  $f(t, v) = 3t\sqrt[3]{|v|}$ ) niet differentieerbaar naar  $v$  in  $(t, 0)$ .

We zullen nog zien dat voor

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

geldt:

$f$  differentieerbaar  
 $\downarrow$   
 voor iedere  $v_0$  precies één oplossing

□

**Opgave 55** Bereken alle oplossingen van

i.  $u' = \sqrt{2u - u^2}$ ;

ii.  $\begin{cases} u' = \sqrt[3]{u^5}, \\ u(0) = 0; \end{cases}$

iii.  $\begin{cases} u' = \sqrt[5]{u^3}, \\ u(0) = 0; \end{cases}$

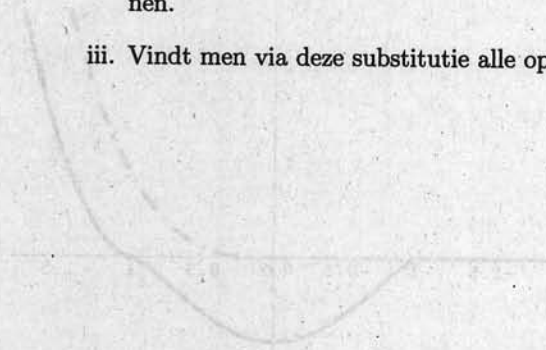
iv.  $\begin{cases} u'(t) = t\sqrt{|u(t)|} + u(t), \\ u(0) = 0; \end{cases}$



Opgave 56 We beschouwen het b.w.p.

$$\begin{cases} u'(t) = 2t\sqrt{|u(t)|} + 2t^3, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

- i. Laat zien dat iedere oplossing voldoet aan  $u(t) \geq 0$ .
- ii. Gebruik de substitutie  $u(t) = t^4 v^2(t)$  om (een) oplossing(en) te berekenen.
- iii. Vindt men via deze substitutie alle oplossingen?



### 5.3 Van hogere orde naar 1<sup>e</sup> orde stelsel

In plaats van voor elke orde differentiaalvergelijking opnieuw het beginwaardeprobleem te beschouwen kunnen een  $n^{\text{de}}$ -orde differentiaalvergelijking herschrijven als een stelsel van eerste orde differentiaalvergelijkingen. Voor een eerste orde stelsel laat zich beginwaardeprobleem bijna net zo als een eerste orde vergelijking behandelen.

Als voorbeeld beschouwen we het beginwaardeprobleem met een vijfde orde g.d.v.

$$\begin{cases} v^v(t) = f(t, v, v^i, v^{ii}, v^{iii}, v^{iv}), \\ v(0) = v_0, \\ v^i(0) = v_1, \\ v^{ii}(0) = v_2, \\ v^{iii}(0) = v_3, \\ v^{iv}(0) = v_4. \end{cases}$$

Met Romeinse cijfers hebben we hier het aantal malen differentiëren aangegeven. Dit beginwaardeprobleem is te herschrijven tot

$$\begin{cases} \vec{U}'(t) = \vec{F}(t, \vec{U}), \\ \vec{U}(0) = \vec{U}_0. \end{cases} \quad (5.8)$$

We vinden (5.8) via de substitutie

$$\vec{U}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v^i(t) \\ v^{ii}(t) \\ v^{iii}(t) \\ v^{iv}(t) \end{pmatrix}$$

en

$$\vec{F}\left(t, \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ f(t, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5) \end{pmatrix}.$$

□

#### Voorbeeld 25

De slinger met wrijving wordt beschreven door

$$\theta'' = -\frac{g}{\ell} \sin \theta - \frac{k}{m} \theta'$$

met  $g$  de gravitatieconstante,  $\ell$  de lengte,  $k$  de wrijvingsconstante,  $m$  de massa.

Via  $U_1 = \theta$  en  $U_2 = \theta'$  herschrijven we naar

$$\vec{U}' = \vec{F}(\vec{U})$$

met

$$\vec{F}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin U_1 - \frac{k}{m} U_2 \end{pmatrix}.$$

Als het rechterlid,  $\vec{F}(\vec{U})$ , niet (expliciet) van de tijd afhangt zoals in het bovenstaande voorbeeld, dan heet de differentiaalvergelijking *autonoom*.

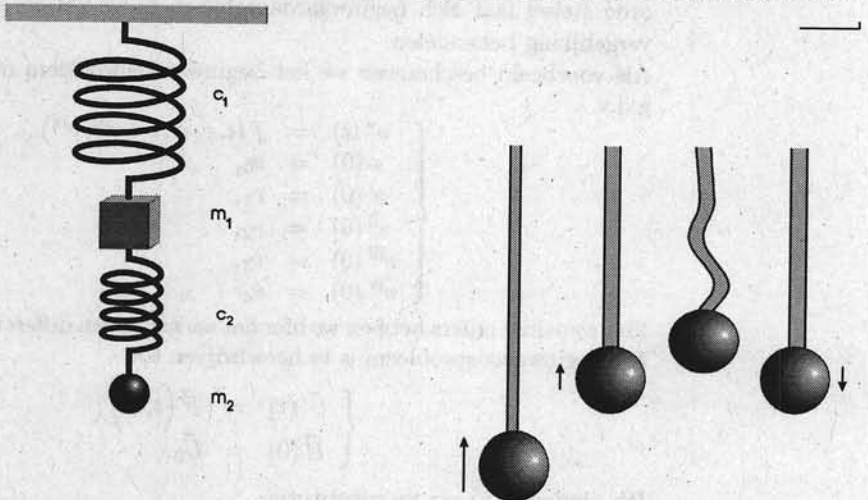




**Opgave 57** De verticale beweging van twee gewichten verbonden door veren zoals in volgende figuur wordt beschreven door

$$\begin{aligned} m_1 u_1'' + c_1 u_1 + c_2 (u_1 - u_2) &= 0, \\ m_2 u_2'' + c_2 (u_2 - u_1) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Hierbij is  $u_1, u_2$  de uitwijking ten opzichte van de evenwichtsstand. Schrijf deze gekoppelde tweede orde differentiaalvergelijkingen als een eerste orde stelsel.



**Opgave 58** Met een elastiekje kun je niet duwen. Dat zorgt ervoor dat de verticale beweging van een gewicht aan een elastiekje beschreven wordt door

$$mu'' = mg - f(u) \quad (5.10)$$

waarbij

$$f(u) = \begin{cases} \gamma u & \text{als } u > 0, \\ 0 & \text{als } u \leq 0. \end{cases}$$

We verwaarlozen de wrijving. Hier is  $u$  de naar beneden gerichte uitwijking van het gewicht ten opzichte van de rusttoestand van de onderkant van het elastiekje zonder gewicht. We nemen  $g = 10$ ,  $m = \frac{1}{10}$  en 'veer'-constante  $\gamma = \frac{2}{5}$ .

i. De algemene oplossing van  $mu'' = mg - \gamma u$  is

$$u(t) = \frac{5}{2} + c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$$

met  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Bereken de algemene oplossing van  $mu'' = mg$ .

- ii. Bereken de oplossing van (5.10) met  $u'(0) = 0$  en  $u(0) = 4$ .
- iii. Bereken de oplossing van (5.10) met  $u'(0) = 0$  en  $u(0) = 6$ . Let op, bij  $u(t) = 0$  verandert het functievoorschrift.
- iv. Laat zien dat deze twee oplossingen periodiek zijn en bereken hun periode.
- v. Behalve de constante oplossing  $u = \frac{5}{2}$  zijn alle oplossingen van (5.10) periodiek. De periode is echter niet voor iedere beginvoorwaarden gelijk. Bereken indien mogelijk de minimale en de maximale periode.

## 5.4 Existentie en eenduidigheid van het beginwaardeprobleem

Ook als we geen expliciete formule voor de oplossing van een differentiaalvergelijking kunnen vinden kan die oplossing wel bestaan. In dat geval kan men proberen de oplossing bijvoorbeeld via numerieke methoden kunnen benaderen. Men moet dan wel weten dat er één oplossing te benaderen is. Als er meerdere of zelfs geen oplossing bestaat kan men niet verwachten dat de benaderingsmethode elke of geen oplossing vindt. Bijna iedere benaderingsmethode voor een beginwaardeprobleem levert één functie zelfs als er meerdere oplossingen zijn. In het beste geval is deze functie één van de oplossingen.

Voordat men de differentiaalvergelijking oplost of benadert is het aan te bevelen, al een uitspraak te doen over het al of niet bestaan van een oplossing en bij voorkeur in te zien dat het bijbehorende beginwaardeprobleem precies één oplossing heeft. In deze paragraaf zullen we een van de belangrijkste resultaten in deze richting bekijken.

Beschouw

$$\begin{cases} \vec{U}'(t) = \vec{F}(t, \vec{U}), \\ \vec{U}(t_0) = \vec{U}_0, \end{cases} \quad (5.11)$$

waarbij  $\vec{F}$  gedefinieerd is op  $I \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Hierbij nemen we aan dat  $I$  een open interval is en  $D$  een open samenhangend gebied in  $\mathbb{R}^n$  is. Zowel  $I$  als  $D$  mogen onbegrensd zijn. Voordat we verder gaan spreken we af dat we voor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  de lengte van  $\vec{v}$  als volgt definiëren:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}. \quad (5.12)$$

Een voorwaarde die existentie en éénduidigheid van het beginwaardeprobleem in (5.11) geeft is de volgende. Merk op dat deze voorwaarde een eis geeft voor  $\vec{F}$  zonder dat we de differentiaalvergelijking proberen op te lossen.

### Definitie 5.4.1

De functie  $\vec{F} : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  voldoet aan de Lipschitz-voorwaarde als

i.  $\vec{F} : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  is continu,

ii. er is een getal  $L \in \mathbb{R}^+$  zodat voor alle  $t \in I$  en  $\vec{U}, \vec{V} \in D$  geldt

$$|\vec{F}(t, \vec{U}) - \vec{F}(t, \vec{V})| \leq L |\vec{U} - \vec{V}|. \quad (5.13)$$

► Lipschitz-voorwaarde

► Lipschitz-constante

Het getal  $L$  heet een Lipschitz-constante van de functie  $\vec{U} \rightarrow \vec{F}(t, \vec{U})$  op  $I \times D$ .

De bijbehorende stelling volgt.

► lokale  
existentie  
en eenduidig-  
heidsstelling

**Stelling 5.4.2 (Lokale existentie en eenduidigheid)** *Stel dat  $\vec{F}$  aan de Lipschitz-voorwaarde voldoet op  $I \times D$ . Dan bestaat er voor iedere  $(t_0, \vec{U}_0)$  in  $I \times D$  precies één oplossing van (5.11).*

*Dat wil zeggen, er is een getal  $a > 0$  en precies één functie  $\vec{U} : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die aan het beginwaardeprobleem (5.11) voldoet.*

**Opmerking:** Noem de oplossing op  $[t_0, t_0 + a]$  even  $\vec{U}_{\text{rechts}}$ . Uit symmetrie overwegingen (schrijf  $s = -t$  en bekijk de d.v. met  $s$ ) zien we dat er ook een getal  $b > 0$  is en precies één functie  $\vec{U}_{\text{links}} : [t_0 - b, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die aan het 'eind'waardeprobleem (5.11) voldoet. Definieer vervolgens

$$\vec{U}(t) = \begin{cases} \vec{U}_{\text{rechts}}(t) & \text{als } t \in [t_0, t_0 + a], \\ \vec{U}_{\text{links}}(t) & \text{als } t \in [t_0 - b, t_0]. \end{cases}$$

De functie  $\vec{U}$  is differentieerbaar op  $(t_0 - b, t_0 + a)$  en voldoet aan de differentiaalvergelijking (controleer dat  $\vec{U}$  differentieerbaar is in  $t_0$  en dat  $\vec{U}'(t_0) = \vec{F}(t_0, \vec{U}(t_0))$ ). We mogen dan zeggen dat:

*Onder de voorwaarden van Stelling 5.4.2 zijn er getallen  $a, b > 0$  en bestaat er precies één functie  $\vec{U} : [t_0 - b, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die aan (5.11) voldoet.*

**Opmerking:** Zij  $\vec{U}$  een oplossing die strikt binnen  $I \times D$  ligt. Dat wil zeggen: voor het existentie-interval  $(T^-, T^+)$  geldt  $[T^-, T^+] \subset I$ , en er is een  $c > 0$  zodat  $\vec{U}(t)$  voor elke  $t \in (T^-, T^+)$  minstens afstand  $c$  tot de rand van  $D$  heeft. Dan geldt dat

$$M = \sup \left\{ \left| \vec{F}(t, \vec{U}(t)) \right| ; T^- < t < T^+ \right\}$$

is eindig. Voor  $s, t \in (T^-, T^+)$  met  $s < t$  volgt dan dat

$$\begin{aligned} \left| \vec{U}(s) - \vec{U}(t) \right| &= \left| \int_s^t \vec{U}'(\tau) d\tau \right| = \left| \int_s^t \vec{F}(\tau, \vec{U}(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_s^t \left| \vec{F}(\tau, \vec{U}(\tau)) \right| d\tau \leq (t - s) M. \end{aligned} \quad (5.14)$$

► uniform  
continu

Daarmee is de functie  $\vec{U}$  uniform continu<sup>3</sup> op  $(T^-, T^+)$  en bestaat  $\lim_{t \uparrow T^+} \vec{U}(t)$  en  $\lim_{t \downarrow T^-} \vec{U}(t)$ .

We hebben in (5.14) gebruikt dat

$$\left| \int_s^t \vec{f}(\tau) d\tau \right| \leq \int_s^t \left| \vec{f}(\tau) \right| d\tau.$$

<sup>3</sup>Een functie  $f$  heet uniform continu op een interval  $I$  als geldt:

voor alle  $\varepsilon > 0$  is er een  $\delta_\varepsilon > 0$  zodat voor alle  $x, y \in I$ ,

als  $|x - y| < \delta_\varepsilon$ , dan  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Het verschil met 'gewone' continuïteit is dat bij uniforme continuïteit  $\delta$  niet van  $x$  mag afhangen. De functie  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  is bijvoorbeeld continu op  $(0, 1)$  maar niet uniform continu op  $(0, 1)$ .

Ter herinnering nog even continuïteit op  $I$  uitgeschreven. Een functie  $f$  heet continu op een interval  $I$  als geldt:

voor alle  $x \in I$  en alle  $\varepsilon > 0$  is er een  $\delta_{\varepsilon, x} > 0$  zodat voor alle  $y \in I$ ,

als  $|x - y| < \delta_{\varepsilon, x}$ , dan  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Deze schatting kan men als volgt bewijzen. Noemen we  $\vec{v} = \int_s^t \vec{f}(\tau) d\tau$  dan geldt

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \int_s^t \vec{f}(\tau) d\tau = \int_s^t \vec{v} \cdot \vec{f}(\tau) d\tau \leq \int_s^t |\vec{v} \cdot \vec{f}(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \int_s^t |\vec{v}| |\vec{f}(\tau)| d\tau = |\vec{v}| \int_s^t |\vec{f}(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Als  $|\vec{v}| = 0$  is er niets te bewijzen. Voor  $|\vec{v}| \neq 0$  mogen we in de laatste schatting door  $|\vec{v}|$  delen en volgt het gevraagde resultaat.

Met behulp van deze lokale stelling kunnen we laten zien dat een oplossing van een differentiaalvergelijking ruw gezegd niet 'zo maar ergens' kan ophouden. Grof gezegd zijn er drie mogelijkheden waar de oplossing  $t \mapsto \vec{U}(t)$  kan ophouden: 1)  $t$  komt buiten  $I$ , 2)  $\vec{U}$  komt buiten  $D$ , of 3)  $|\vec{U}|$  wordt oneindig. In de volgende stelling proberen we dat iets netter te formuleren.

**Stelling 5.4.3** *Stel dat  $\vec{F} : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  aan de Lipschitz-voorwaarde voldoet. Dan bestaat er voor iedere  $\vec{U}_0$  met  $(t_0, \vec{U}_0) \in I \times D$  een oplossing  $t \mapsto \vec{U}(t)$  van*

$$\begin{cases} \vec{U}'(t) = \vec{F}(t, \vec{U}), \\ \vec{U}(t_0) = \vec{U}_0. \end{cases} \quad (5.15)$$

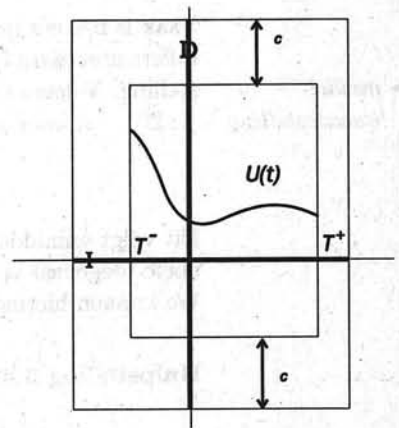
► maximaal  
existentie-  
interval

We noteren door  $(T^-, T^+) \subseteq I$  het maximale existentie-interval van  $\vec{U}$ . Er geldt dat:

- i.  $T^+ \in \partial I$ ,  
of  $\vec{U}(t) \rightarrow \partial D$  als  $t \uparrow T^+$ ,  
of  $|\vec{U}(t)| \rightarrow \infty$  als  $t \uparrow T^+$ ;

en

- ii.  $T^- \in \partial I$ ,  
of  $\vec{U}(t) \rightarrow \partial D$  als  $t \downarrow T^-$ ,  
of  $|\vec{U}(t)| \rightarrow \infty$  als  $t \downarrow T^-$ .



Hier is  $(T^-, T^+)$  dus niet maximaal.

De laatste uitspraken betekenen dat de oplossing niet zo maar ergens binnen  $I \times D$  kan ophouden.

**Bewijs:** Met Stelling 5.4.2 vinden we dat er een  $a > 0$  is en een  $\vec{U} : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die voldoet aan de differentiaalvergelijking. Als  $(t_0 + a, \vec{U}(t_0 + a))$  in  $I \times D$  ligt kunnen we een nieuw beginwaardeprobleem opstellen

$$\begin{cases} \vec{V}'(t) = \vec{F}(t, \vec{V}) \\ \vec{V}(t_0 + a) = \vec{V}_0 \end{cases} \quad (5.16)$$

met  $\vec{V}_0 = \vec{U}(t_0 + a)$ . Volgens Stelling 5.4.2 is er een getal  $\tilde{a}$  en precies één functie  $\vec{V} : [t_0 + a, t_0 + a + \tilde{a}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die aan het beginwaardeprobleem (5.16) voldoet. Net

als in de bovenstaande opmerking kunnen we de oplossing  $\vec{U}$  uitbreiden met  $\vec{V}$  tot een functie  $\vec{U} : [t_0, t_0 + a_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  met  $a_1 = a + \tilde{a} > a$  die aan het beginwaardeprobleem (5.11) voldoet. We kunnen dit herhalen en vinden een groeiende rij existentie-intervallen  $(t_0, t_0 + a)$ ,  $(t_0, t_0 + a_1)$ ,  $(t_0, t_0 + a_2)$  enz. Noteer  $I = (\ell, r)$ . Er kunnen drie dingen gebeuren:

- i. er is een  $n$  zodat  $t_0 + a_n = r$ , of
- ii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$ , of
- iii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a^* < r$ .

In het eerste en tweede geval geldt  $T^+ \in \partial I$ .

Het derde geval blijft over. Opnieuw moeten we onderscheid maken.

- i.  $\vec{U}(t)$  wordt onbegrensd als  $t \uparrow a^*$ , of
- ii.  $\vec{U}(t)$  gaat naar de rand<sup>4</sup> van  $D$  als  $t \uparrow a^*$ , of
- iii.  $\vec{U}(t)$  blijft binnen  $D$ , houdt afstand tot de rand van  $D$  en blijft begrensd als  $t \uparrow a^*$ .

In de eerste  $|\vec{U}(t)| \rightarrow \infty$  en tweede geval  $\vec{U}(t) \rightarrow \partial D$ .

In het derde geval volgt met behulp van (5.14) dat  $\vec{U}^* = \lim_{t \uparrow a^*} \vec{U}(t)$  bestaat. We kunnen de functie  $\vec{U}$  uitbreiden tot in  $a^*$  en opnieuw het beginwaardeprobleem in (5.16) beschouwen waarbij  $a$  vervangen is door  $a^*$ . Volgens Stelling 5.4.2 kunnen we de functie  $\vec{U}$  nog verder uitbreiden.

Met andere woorden  $a^* = r \in \partial I$ , of  $|\vec{U}(t)| \rightarrow \infty$  als  $t \uparrow a^*$  of  $\vec{U}(t) \rightarrow \partial D$  als  $t \uparrow a^*$ .  
□

Vaak is het erg lastig om de Lipschitz-voorwaarde te bewijzen. Voor continu differentieerbare functies  $\vec{F}$  kunnen we gebruik maken van de middelwaardestelling. Volgens de *middelwaardestelling* is er voor een differentieerbare functie  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  voor iedere  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  een  $\vec{\vartheta}$  binnen het lijnstuk  $[\vec{u}, \vec{v}]$  zodat

$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \nabla f(\vec{\vartheta}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}).$$

Dit volgt onmiddellijk uit de middelwaardestelling voor functies van één variabele toegepast op  $g(t) = f(\vec{v} + t(\vec{u} - \vec{v}))$ .

We kunnen hiermee de volgende hulpstelling bewijzen.

**Hulpstelling 5.4.4** Voor een functie  $(t, \vec{U}) \mapsto \vec{F}(t, \vec{U})$  geldt het volgende.

$\vec{F}$  is continu differentieerbaar op  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ;

↓

$\vec{F}$  voldoet op elk begrensd gebied  $I \times D$  van  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aan de Lipschitz-voorwaarde.

**Bewijs:** We schrijven  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$  en nemen

$$\ell = \max \left\{ \left| \nabla F_i(t, \vec{\vartheta}) \right| ; 1 \leq i \leq n, t \in I, \vec{\vartheta} \in D \right\}.$$

Door bovengenoemde middelwaardestelling te gebruiken vinden we voor iedere component  $F_i$  dat

$$|F_i(t, \vec{u}) - F_i(t, \vec{v})| \leq \ell |\vec{u} - \vec{v}|$$

<sup>4</sup>...er is een rij  $\{t_n\}$  met  $t_n \uparrow a^*$  en  $\vec{U}(t_n) \rightarrow \vec{U}^* \in \partial D$ . Met wat moeite kan men laten zien dat dan zelfs  $\lim_{t \uparrow a^*} \vec{U}(t) = \vec{U}^*$ .

en dus ook

$$|\vec{F}(t, \vec{u}) - \vec{F}(t, \vec{v})| \leq \sqrt{n} \ell |\vec{u} - \vec{v}|.$$

Daarmee voldoet  $L = \sqrt{n} \ell$  als Lipschitz-constante. □

**Opmerking:** We zullen nog zien dat indien de Lipschitz-constante  $L$  onafhankelijk van het gebied  $I \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  te kiezen is, het maximale existentie-interval van de oplossing  $(-\infty, \infty)$  is.

□

**Opgave 59** We gaan even terug naar de opgave op bladzijde 78. Is de functie  $u \mapsto mg - f(u)$  gedefinieerd in (5.10) differentieerbaar? Voldoet deze functie aan de Lipschitz-voorwaarde? Als we de d.v. als stelsel schrijven dan vinden we

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \vec{F} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ g - \frac{1}{m} f(u) \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat  $L = 1 + \frac{\gamma}{m}$  een Lipschitz-constante voor  $\vec{F}$  is. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 60** Is de functie  $f$  in (5.5) op bladzijde 72 Lipschitz-continu? \_\_\_\_\_

□

**Voorbeeld 26**

Het voorbeeld op bladzijde 72 waarmee we begonnen is als volgt:

$$\begin{cases} u'(t) = (u(t))^2 + t^2, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

De functie  $F(t, u) = u^2 + t^2$  is continu differentieerbaar en voldoet dus aan de Lipschitz-voorwaarde op ieder begrensde gebied in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Volgens Stelling 5.4.2 is er  $a > 0$  en een unieke oplossing op  $[-a, a]$ .

We bekijken nog even welke  $L$  we als Lipschitz-constante kunnen nemen en beschouwen voor  $R > 0$  de verzameling  $I \times D$  met  $I = [-R, R]$  en  $D = \{u \in \mathbb{R}^n; |u| \leq R\}$ . We laten zien dat op dit gebied  $L = 2R$  voldoet. Dat zien we als volgt:

als  $|u| \leq R, |v| \leq R, |t| \leq R$  dan

$$\begin{aligned} |F(t, u) - F(t, v)| &= |u^2 - v^2| = \\ &= |u + v| |u - v| \leq (|u| + |v|) |u - v| \leq \\ &\leq 2R |u - v|. \end{aligned}$$

Er is geen Lipschitz-constante die voldoet op  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Volgens de Stelling 5.4.3 is er een maximaal existentie-interval  $(T^-, T^+)$  en er geldt  $T^+ = \infty$  of  $\lim_{t \uparrow T^+} |u(t)| = \infty$ . De derde mogelijkheid zou zijn dat  $u(t) \rightarrow \partial D$  gaat. Omdat we  $R$  willekeurig mogen nemen betekent dat opnieuw  $\lim_{t \uparrow T^+} |u(t)| = \infty$ . Omdat  $F(t, u) \geq 0$  geldt weten we dat  $u$  een stijgende functie is. Er blijft over:

$$T^+ = \infty \quad \text{of} \quad \lim_{t \uparrow T^+} u(t) = \infty.$$

Eenzelfde redenering laat zien dat

$$T^- = -\infty \quad \text{of} \quad \lim_{t \downarrow T^-} u(t) = -\infty.$$

Iets dergelijks geldt meer algemeen:

► maximaal  
existentie-  
interval

**Gevolg 5.4.5** Stel dat  $\vec{F}$  continu differentieerbaar is op  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Dan is er een maximaal existentie-interval  $(T^-, T^+)$  met  $T^- \in [-\infty, 0)$  en  $T^+ \in (0, \infty]$  waarop de oplossing  $\vec{U}$  van het b.w.p. (5.11) bestaat. Bovendien, als  $T^+ < \infty$  dan

$$\lim_{t \uparrow T^+} |\vec{U}(t)| = \infty,$$

en als  $T^- > -\infty$  dan

$$\lim_{t \downarrow T^-} |\vec{U}(t)| = \infty.$$

□

**Opgave 61** Welke van de volgende differentiaalvergelijkingen voldoen aan de Lipschitz-voorwaarde? Bereken zo mogelijk een Lipschitz-constante op een geschikt gebied.

a.  $u' = u^2 + u \sin t;$

e.  $u' = |u|;$

b.  $u' = \frac{1+t}{1+u};$

f.  $(t^2 + u^2) u' = 3tu;$

c.  $u' = \sqrt[4]{\frac{t^2}{1+u^2}};$

g.  $(1 + t^2 + u^2) u' = 3tu.$

d.  $u' = \sqrt[4]{\frac{u^2}{1+t^2}};$

h.  $\begin{cases} u' = \sin(u-v) \\ v' = t+u \end{cases}$

□

**Opgave 62** Welke uit bovenstaande differentiaalvergelijkingen hebben precies één oplossing die voldoet aan  $u(0) = 0$  (voor h.  $v(0) = 0$  toevoegen)? \_\_\_\_\_

□

**Opgave 63** Voor welke uit bovenstaande differentiaalvergelijkingen weet je dat bij iedere beginvoorwaarde het maximale existentie-interval  $(-\infty, \infty)$  is? Gebruik de opmerking op bladzijde 83. \_\_\_\_\_

## 5.5 Bewijs locale existentie- en eenduidigheidsstelling

In de eerste stap van het bewijs wordt bij een differentiaalvergelijking een rij functies geconstrueerd waarvan men verwacht, en later ook laat zien, dat deze rij naar de oplossing convergeert. Op dat moment heeft men echter deze oplossing nog niet. Net zoals elke stijgende begrensde rij in  $\mathbb{R}$  een limiet heeft kan men een voor functierijen een criterium geven zodat een rij functies die aan dit criterium voldoet een limiet heeft. Deze limiet is opnieuw een functie. Het criterium wordt slechts geformuleerd in Propositie 5.5.3 en zal hier niet bewezen worden.

In ons geval zal de limiet van de functierij een kandidaat zijn voor de oplossing van de differentiaalvergelijking. En inderdaad kan men laten zien dat dit zo is. Bovendien geeft de bovengenoemde benaderingsmethode vrij snel een idee hoe de oplossing zich vlak bij de beginvoorwaarde gedraagt. Daarnaast gebruikt het bewijs op diverse plaatsen de Lipschitz-voorwaarde. Dit verklaart waarom juist de Lipschitz-conditie geschikt is voor existentie en eenduidigheid.

Existentie wordt bewezen in drie stappen:

- benadering via Picard-iteratie;
- begrensdeheid van de benaderingen;
- convergentie van de benaderingen.

Hierna bewijzen we de eenduidigheid.

In plaats van de beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \vec{U}' &= \vec{F}(t, \vec{U}), \\ \vec{U}(0) &= \vec{U}_0. \end{cases} \quad (5.17)$$

te beschouwen, beschouwen we de integraalvergelijking

$$\vec{U}(t) = \vec{U}_0 + \int_{s=0}^t \vec{F}(s, \vec{U}(s)) ds. \quad (5.18)$$

De integraalvergelijking volgt uit de differentiaalvergelijking door eenmaal te integreren. Als we bovendien weten dat  $\vec{U}$  differentieerbaar is dan zien we dat een functie  $\vec{U}$  die aan (5.18) voldoet ook aan het beginwaardeprobleem voldoet.

**Opmerking:** We hebben hier  $t_0 = 0$  genomen. Dat we dit zonder verlies van algemeenheid kunnen doen ziet men door de substitutie  $\vec{V}(t - t_0) = \vec{U}(t)$ .

**Aanname.** In de rest van het bewijs zullen we veronderstellen dat  $\vec{F}$  aan de Lipschitz-voorwaarde voldoet op  $[0, \tau] \times \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n; |\vec{u} - \vec{U}_0| \leq d\}$  met constante  $L$ .



## 5.5.1 Picard-iteratie

## ► Picard-iteratie

Allereerst een benaderingsmethode voor het oplossen van het beginwaardeprobleem. De *Picard-iteratie* voor (5.17) is als volgt gedefinieerd:

$$\text{voor } n = 0: \vec{U}_0(t) = \vec{U}_0,$$

$$\text{voor } n \geq 1: \vec{U}_n(t) = \vec{U}_0 + \int_{s=0}^t \vec{F}(s, \vec{U}_{n-1}(s)) ds.$$

We laten zien dat de aldus iteratief geconstrueerde rij (vector-)functies  $\{\vec{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$  de oplossing  $\vec{U}$  benadert.

Als deze rij convergeert (wat is convergentie voor functies?) dan hopen we dat die limiet een differentieerbare (vector-)functie  $\vec{U}$  is die aan de differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde voldoet. Schematisch:

$$\begin{array}{ccc} \vec{U}_n(t) & = & \vec{U}_0 + \int_{s=0}^t \vec{F}(s, \vec{U}_{n-1}(s)) ds \\ \downarrow ? & & \downarrow ? \\ \vec{U}(t) & \stackrel{?}{=} & \vec{U}_0 + \int_{s=0}^t \vec{F}(s, \vec{U}(s)) ds. \end{array}$$

De vraagtekens zullen we onderzoeken. Als we kunnen laten zien dat  $\vec{U}$  continu is, dan is  $s \mapsto \vec{F}(s, \vec{U}(s))$  continu en is de primitieve van deze laatste functie differentieerbaar en volgt uit  $\vec{U}(t) = \vec{U}_0 + \int_{s=t_0}^t \vec{F}(s, \vec{U}(s)) ds$  dat

$$\vec{U}'(t) = \vec{F}(t, \vec{U}(t)) \text{ en } \vec{U}(0) = \vec{U}_0.$$

**Voorbeeld 27**

De Picard-iteratie voor ons favoriete voorbeeld

$$\begin{cases} u' & = u^2 + t^2, \\ u(0) & = 1, \end{cases}$$

levert

$$u_0(t) = 1,$$

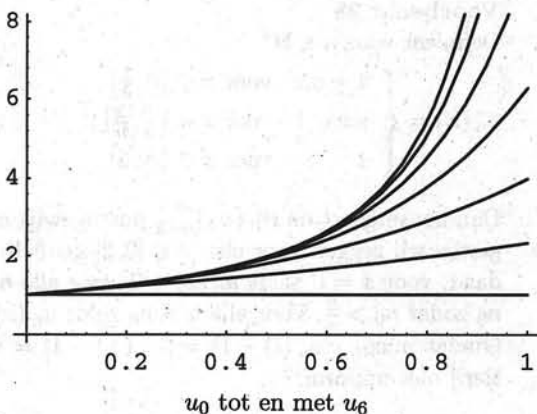
$$u_1(t) = 1 + \int_0^t (1 + s^2) ds = 1 + t + \frac{1}{3}t^3,$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 1 + \int_0^t \left( (1 + s + \frac{1}{3}s^3)^2 + s^2 \right) ds = \\ &= 1 + t + t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3(t) &= 1 + t + t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{5}{6}t^4 + \frac{8}{15}t^5 + \frac{29}{90}t^6 + \\ &+ \frac{47}{315}t^7 + \frac{41}{630}t^8 + \frac{299}{11340}t^9 + \frac{4}{525}t^{10} + \\ &+ \frac{184}{51975}t^{11} + \frac{1}{2268}t^{12} + \frac{4}{12285}t^{13} + \frac{1}{59535}t^{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_4(t) = & 1 + t + t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{7}{6}t^4 + \\
 & + \frac{16}{15}t^5 + \frac{9}{10}t^6 + \frac{232}{315}t^7 + \\
 & + \frac{1333}{2520}t^8 + \frac{4019}{11340}t^9 + \frac{12641}{56700}t^{10} + \\
 & + \frac{20093}{155925}t^{11} + \frac{262259}{3742200}t^{12} + \frac{869983}{24324300}t^{13} + \\
 & + \frac{5800099}{340540200}t^{14} + \frac{4937794}{638512875}t^{15} + \frac{133577671}{40864824000}t^{16} + \\
 & + \frac{842329}{638512875}t^{17} + \frac{23072041}{45972927000}t^{18} + \frac{44916481}{249567318000}t^{19} + \\
 & + \frac{524417}{8513505000}t^{20} + \frac{15983441}{804526222500}t^{21} + \frac{4282079}{722431710000}t^{22} + \\
 & + \frac{2350526}{1304776501875}t^{23} + \frac{45901}{107270163000}t^{24} + \frac{6536983}{48271573350000}t^{25} + \\
 & + \frac{331}{15846728625}t^{26} + \frac{117632}{14119435204875}t^{27} + \frac{1}{1890355320}t^{28} + \\
 & + \frac{8}{21210236775}t^{29} + \frac{1}{109876902975}t^{31},
 \end{aligned}$$

enz.



De Picard-benaderingen voor dit beginwaardeprobleem zijn gedefinieerd voor alle  $t$ . Voor  $t$  voldoende klein kan men laten zien dat de rij  $u_n(t)$  naar  $u(t)$  convergeert met  $u$  de 'echte' oplossing. Voor grote  $t$  convergeert de rij  $u_n(t)$  niet. Als we even vooruitlopen kunnen we het laatste beargumenteren. Op bladzijde 97 zullen we laten zien dat voor het maximale existentie-interval van  $u$  geldt dat  $T^+ < \infty$ .

□

**Opgave 64** Bereken de eerste 5 Picard iteraties voor  $u' = u$  met beginvoorwaarde  $u'(0) = 1$ .

□

**Opgave 65** We beschouwen het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u' = u^2 + 1, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

- i. Bereken de eerste vier Picard-iteraties ( $u_0, u_1, u_2$  en  $u_3$ ).
- ii. Bereken de oplossing en vergelijk de Taylor-reeks van de oplossing met deze Picard-iteraties.
- iii. Tot welke term komt de  $n^{\text{de}}$ -Picard iteratie overeen met de Taylorreeks?

### 5.5.2 Uniforme convergentie voor functie-rijen

De rest van 5.5 laat enkele wiskundige achtergronden zien van het bewijs van de existentie- en eenduidigheidsstelling. Het eerstvolgende deel is de reeds genoemde volledigheid van de verzameling van continue functies op een gesloten en begrens interval. Men kan dit deel eventueel overslaan en direct verder naar 5.5.5 gaan.

**Definitie 5.5.1** Zij  $J$  een gesloten en begrens interval in  $\mathbb{R}$  en laat  $u$  een continue functie van  $J$  naar  $\mathbb{R}$  zijn. Zij  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  een rij continue functies van  $J$  naar  $\mathbb{R}$ .

► *uniforme convergentie*

We zeggen de rij  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  convergeert uniform op  $J$  naar de functie  $u$  als

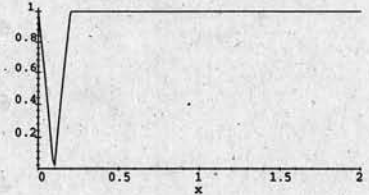
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in J} |u_n(t) - u(t)| = 0.$$

□

**Voorbeeld 28**

Definieer voor  $n \in \mathbb{N}^+$

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{voor } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ nx - 1 & \text{voor } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 1 & \text{voor } x \in (\frac{2}{n}, 2]. \end{cases}$$



Dan convergeert de rij  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  puntsgewijs naar de functie  $u(x) = 1$ . Puntsgewijs wil zeggen voor elke  $x \in [0, 2]$  geldt  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$ . En inderdaad, voor  $x = 0$  geldt  $u_n(x) = 1$  voor alle  $n \in \mathbb{N}^+$  en voor  $x > 0$  nemen we  $n_0$  zodat  $n_0 > \frac{2}{x}$ . Voor alle  $n > n_0$  geldt  $u_n(x) = 1$  en dus  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 1$ . Omdat  $\max_{t \in J} |u_n(t) - 1| = |u_n(\frac{1}{n}) - 1| = |0 - 1| = 1$  convergeert de functierij niet uniform.

□

**Opgave 66** Laat zien dat de rij  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  gedefinieerd door  $u_n(x) = \frac{\sin x^n}{n}$  op  $[0, 1]$  uniform naar de nulfunctie op  $[0, 1]$  convergeert.

Convergeert  $u'_n$  puntsgewijs of uniform op  $[0, 1]$ ? En op  $[0, \frac{1}{2}]$ ? \_\_\_\_\_

We gebruiken verder de volgende notaties:

$$C(J) = \{u : J \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ is continu op } J\}$$

► *maximum-norm*

en de *maximum-norm*

$$\|u\|_{\infty, J} = \max_{t \in J} |u(t)|. \quad (5.19)$$

► *ruimte van continue functies*

$C(J)$  is de *ruimte van continue functies* op  $J$  met norm  $\|\cdot\|_{\infty, J}$ . Een norm is een afspraak om de 'grootte' te bepalen.

► *norm*

**Definitie 5.5.2** Een norm  $\|\cdot\|$  op een vectorruimte  $V$  (bijvoorbeeld  $C(J)$ ) is afbeelding van  $V$  naar  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  die voldoet aan de volgende drie eisen. Voor alle  $u, v \in V$  en  $c \in \mathbb{R}$  geldt:

i.  $\|u\| = 0$  dan en slechts dan als  $u = 0$ ;

ii.  $\|cu\| = |c| \|u\|$

► *driehoeksongelijkheid*

iii.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ , de driehoeksongelijkheid.

Als we willen aangeven dat we continue (vector-)functies met  $k$  componenten bedoelen, dan schrijven we  $C(J; \mathbb{R}^k)$ . We gebruiken eveneens  $\|\vec{u}\|_{\infty, J} = \max_{t \in J} |\vec{u}(t)|$ .

**Propositie 5.5.3** *Zij  $J$  een gesloten en begrensde interval in  $\mathbb{R}$  en laat  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  een rij functies zijn in  $C(J)$ .*

*Als er voor iedere  $\varepsilon > 0$  een getal  $N_\varepsilon$  bestaat zodat voor alle  $m, n > N_\varepsilon$  geldt*

$$\|u_n - u_m\|_{\infty, J} < \varepsilon,$$

*dan is er een  $u \in C(J)$  zodat*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{\infty, J} = 0.$$

**Opmerking:** We kunnen de uitspraak ook als volgt formuleren: er bestaat een continue functie  $u$  zodat de rij  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  uniform naar  $u$  convergeert op  $J$ .

### 5.5.3 Begrensdheid van Picard-benaderingen

Voor functies die differentieerbaar zijn op  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  is er op ieder begrensd deel  $I \times D$  een Lipschitz-constante  $L$ . Zo 'n constante is er niet noodzakelijk op geheel  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Denk aan  $f(u) = u^2$ . Als er  $L$  is die op elk begrensd deel  $I \times D$  voldoet dan heet  $L$  een uniforme Lipschitz-constante.

Voor het bewijs hebben we een vaste  $L$  nodig. Bestaat die dan kunnen we dit deel overslaan. Zoniet, dan zullen we nodig hebben dat de benaderingen althans voor kleine tijd binnen het gebied zullen blijven waar  $\vec{F}$  aan de Lipschitz-voorwaarde met constante  $L$  voldoet. We zullen hier laten zien dat dit mogelijk is. Daarvoor kiezen we onderweg een geschikt tijdsinterval  $[0, a]$  en laten zien dat die keuze inderdaad het beoogde resultaat geeft.

Herinner de aanname op bladzijde 85 en noem

$$M = \max \left\{ \left| \vec{F}(t, \vec{v}) \right| ; 0 \leq t \leq \tau \text{ en } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ met } \left| \vec{v} - \vec{U}_0 \right| \leq d \right\}.$$

Vervolgens kiezen we  $a_0 \in (0, \tau]$  zodanig dat

$$a_0 \leq \frac{d}{M+1}.$$

Met volledige inductie kunnen we nu het volgende bewijzen.

**Hulpstelling 5.5.4** *Zij  $a_0$  zoals boven. Dan geldt voor alle  $n \in \mathbb{N}$  dat*

$$\max_{0 \leq t \leq a_0} \left| \vec{U}_n(t) - \vec{U}_0 \right| \leq d. \quad (5.20)$$

**Bewijs:** 1. Voor  $n = 0$  geldt

$$\max_{0 \leq t \leq a_0} \left| \vec{U}_0(t) - \vec{U}_0 \right| = 0 \leq d.$$

2. Stel dat (5.20) juist voor  $n$  en bewijs (5.20) met  $n+1$  in plaats van  $n$ .

We nemen dus aan dat geldt

$$\max_{0 \leq t \leq a_0} |\vec{U}_n(t) - \vec{U}_0| \leq d.$$

Dan volgt voor  $t \in [0, a_0]$  met  $a_0$  zoals boven dat

$$\begin{aligned} |\vec{U}_{n+1}(t) - \vec{U}_0| &= \left| \int_{s=0}^t \vec{F}(s, \vec{U}_n(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{s=0}^t |\vec{F}(s, \vec{U}_n(s))| ds \leq \int_{s=0}^t M ds \leq a_0 M \leq d. \end{aligned}$$

□

### 5.5.4 Convergentie van Picard-benaderingen

Voor twee opeenvolgende functies uit de Picard-iteratie geldt:

$$\begin{aligned} |\vec{U}_{n+1}(t) - \vec{U}_n(t)| &= \\ &= \left| \int_{s=0}^t \left( \vec{F}(s, \vec{U}_n(s)) - \vec{F}(s, \vec{U}_{n-1}(s)) \right) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{s=0}^t \left| \vec{F}(s, \vec{U}_n(s)) - \vec{F}(s, \vec{U}_{n-1}(s)) \right| ds \leq \end{aligned}$$

(nu gebruiken we de Lipschitz conditie)

$$\begin{aligned} &\leq \int_{s=0}^t L |\vec{U}_n(s) - \vec{U}_{n-1}(s)| ds \leq \\ &\leq \int_{s=0}^t L \max_{0 \leq \tau \leq s} |\vec{U}_n(\tau) - \vec{U}_{n-1}(\tau)| ds = \\ &= L \max_{0 \leq \tau \leq t} |\vec{U}_n(\tau) - \vec{U}_{n-1}(\tau)| \int_{s=0}^t 1 ds = \\ &= Lt \max_{0 \leq \tau \leq t} |\vec{U}_n(\tau) - \vec{U}_{n-1}(\tau)|. \end{aligned}$$

Voor alle  $t \in [0, a_0]$  geldt dus

$$|\vec{U}_{n+1}(t) - \vec{U}_n(t)| \leq Lt \max_{0 \leq \tau \leq t} |\vec{U}_n(\tau) - \vec{U}_{n-1}(\tau)|.$$

Op dit punt kiezen we  $a$  in  $(0, a_0]$  en wel zodanig dat  $La \leq \frac{1}{2}$ . Dan geldt voor alle  $t \in [0, a]$  dat

$$|\vec{U}_{n+1}(t) - \vec{U}_n(t)| \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq \tau \leq t} |\vec{U}_n(\tau) - \vec{U}_{n-1}(\tau)|.$$

en dus ook voor de maximum-norm (zie 5.19) op  $[0, a]$  geldt

$$\|\vec{U}_{n+1} - \vec{U}_n\|_{\infty, [0, a]} \leq \frac{1}{2} \|\vec{U}_n - \vec{U}_{n-1}\|_{\infty, [0, a]}.$$

Omdat dit voor iedere  $n \in \mathbb{N}$  geldt vinden we bovendien dat

$$\begin{aligned} \|\vec{U}_{n+1} - \vec{U}_n\|_{\infty, [0, a]} &\leq \frac{1}{2} \|\vec{U}_n - \vec{U}_{n-1}\|_{\infty, [0, a]} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \|\vec{U}_{n-1} - \vec{U}_{n-2}\|_{\infty, [0, a]} \leq \dots \leq \frac{1}{2^n} \|\vec{U}_1 - \vec{U}_0\|_{\infty, [0, a]} \end{aligned}$$

Daarmee volgt dat voor  $m \geq n$  geldt

$$\begin{aligned} \|\vec{U}_m - \vec{U}_n\|_{\infty, [0, a]} &= \\ &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (\vec{U}_{k+1} - \vec{U}_k) \right\|_{\infty, [0, a]} \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|\vec{U}_{k+1} - \vec{U}_k\|_{\infty, [0, a]} \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \|\vec{U}_1 - \vec{U}_0\|_{\infty, [0, a]} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \|\vec{U}_1 - \vec{U}_0\|_{\infty, [0, a]} \end{aligned}$$

De rij  $\{\vec{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$  voldoet aan Propositie 5.5.3. Er bestaat dus een  $\vec{U} \in C([0, a])$  zodat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{U} - \vec{U}_n\|_{\infty, [0, a]} = 0.$$

Omdat  $\vec{U}_n$  uniform naar  $\vec{U}$  convergeert vinden we dat  $t \mapsto \vec{F}(t, \vec{U}_n(t))$  uniform naar de functie  $t \mapsto \vec{F}(t, \vec{U}(t))$  convergeert op  $[0, a]$ . Als een functie uniform convergeert dan mogen we integraal en limiet verwisselen. We vinden

$$\begin{aligned} \vec{U}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{U}_n(t) = \\ &= \vec{U}_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \vec{F}(s, \vec{U}_n(s)) ds = \\ &= \vec{U}_0 + \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(s, \vec{U}_n(s)) ds = \\ &= \vec{U}_0 + \int_0^t \vec{F}(s, \vec{U}(s)) ds \end{aligned}$$

Bovendien volgt uit de continuïteit van  $\vec{U}$  de differentieerbaarheid van de functie  $t \mapsto \int_0^t \vec{F}(s, \vec{U}(s)) ds$  en daarmee van  $\vec{U}$  zelf. De existentie van een oplossing op  $[0, a]$  is bewezen.

### 5.5.5 Eenduidigheid van de oplossing

Stel dat er twee oplossingen zijn op het interval  $[0, a]$ . Noem ze  $\vec{U}$  en  $\vec{V}$ . Omdat geldt

$$\begin{aligned} \vec{U}(t) &= \vec{U}_0 + \int_{s=0}^t \vec{F}(s, \vec{U}(s)) ds, \\ \vec{V}(t) &= \vec{U}_0 + \int_{s=0}^t \vec{F}(s, \vec{V}(s)) ds, \end{aligned}$$

vinden we dat

$$\begin{aligned} |\vec{U}(t) - \vec{V}(t)| &= \left| \int_{s=0}^t (\vec{F}(s, \vec{U}(s)) - \vec{F}(s, \vec{V}(s))) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{s=0}^t |\vec{F}(s, \vec{U}(s)) - \vec{F}(s, \vec{V}(s))| ds \leq \end{aligned}$$

(en hier komt weer de Lipschitz-voorwaarde)

$$\begin{aligned} &\leq \int_{s=0}^t L |\vec{U}(s) - \vec{V}(s)| ds \leq L \max_{0 \leq \tau \leq t} |\vec{U}(\tau) - \vec{V}(\tau)| \int_{s=0}^t 1 ds = \\ &= Lt \max_{0 \leq \tau \leq t} |\vec{U}(\tau) - \vec{V}(\tau)|. \end{aligned}$$

Voor  $t \in [0, a]$ , en dus  $Lt \leq \frac{1}{2}$ , vinden we

$$|\vec{U}(t) - \vec{V}(t)| \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq \tau \leq t} |\vec{U}(\tau) - \vec{V}(\tau)| \leq \frac{1}{2} \|\vec{U} - \vec{V}\|_{\infty, [0, a]}$$

en daarmee dat

$$\|\vec{U} - \vec{V}\|_{\infty, [0, a]} = \max_{0 \leq t \leq a} |\vec{U}(t) - \vec{V}(t)| \leq \frac{1}{2} \|\vec{U} - \vec{V}\|_{\infty, [0, a]}.$$

Dat impliceert  $\|\vec{U} - \vec{V}\|_{\infty, [0, a]} = 0$  en er volgt dat  $\vec{U} = \vec{V}$  op  $[0, a]$ .

## 5.6 Gevolgen voor autonome d.v.

► *autonoom*

Als het rechterlid van de differentiaalvergelijking niet van  $t$  afhangt dan heet zo'n differentiaalvergelijking *autonoom*. De existentie- en eenduidigheidsstelling heeft enkele directe implicaties voor dit soort differentiaalvergelijkingen. We beschouwen

$$\vec{U}' = \vec{F}(\vec{U}). \quad (5.21)$$

**Gevolg 5.6.1** *Neem aan dat  $\vec{F}$  aan de Lipschitz-voorwaarde voldoet. Als  $\vec{U}$  en  $\vec{V}$  voldoen aan (5.21) en er zijn  $t_1, t_2$  zodanig dat  $\vec{U}(t_1) = \vec{V}(t_2)$ , dan geldt*

$$\vec{U}(t + t_1) = \vec{V}(t + t_2) \text{ voor alle } t \text{ in het existentie-interval.}$$

**Opmerking:** Simpel gezegd: als oplossingen van een autonome differentiaalvergelijking zich 'snijden' dan zijn ze op een tijdsverschuiving na dezelfde functie.

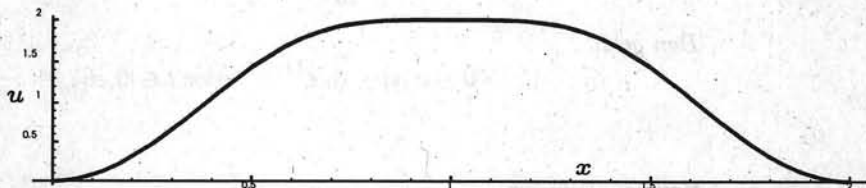
**Bewijs:** Wanneer zowel  $\vec{U}$  als  $\vec{V}$  oplossingen zijn en bovendien geldt dat  $\vec{U}(t_1) = \vec{V}(t_2)$ , dan geldt dat  $\vec{U}(t + t_1)$  en  $\vec{V}(t + t_2)$  beide oplossingen van hetzelfde b.w.p. zijn. Volgens de eenduidigheid bij Stelling 5.4.2 zijn ze dus gelijk.  $\square$

**Gevolg 5.6.2** Stel  $\vec{F}$  voldoet aan de Lipschitz-voorwaarde en  $\vec{U}$  is een oplossing van (5.21). Als er  $t_1 \neq t_2$  zijn met  $\vec{U}(t_1) = \vec{U}(t_2)$ , dan is  $\vec{U}$  constant of periodiek.

**Bewijs:** Zowel  $\vec{U}(t + t_1)$  en  $\vec{U}(t + t_2)$  zijn oplossingen van hetzelfde b.w.p. Volgens de eenduidigheid bij Stelling 5.4.2 geldt  $\vec{U}(t + t_1) = \vec{U}(t + t_2)$ . Dan geldt, of  $\vec{U}$  is constant of  $\vec{U}$  is periodiek en  $t_2 - t_1$  is een veelvoud van de periode.  $\square$

$\square$

**Opgave 67** Een student heeft bij een differentiaalvergelijking de volgende grafiek van de oplossing gevonden:



Hij herinnert zich niet meer bij welke differentiaalvergelijking deze tekening hoort:

i)  $u' = f(u)$ ; ii)  $u'' = f(u)$ ; of iii)  $u'' = u' + f(u)$ .

Welke van deze drie is de juiste? (De functie  $f$  is differentieerbaar.) \_\_\_\_\_



## 5.7 A priori schattingen

Een a priori schatting is een schatting van de oplossing voordat men deze heeft berekend.

### Hulpstelling 5.7.1 (Lemma van Gronwall, 1918)

Stel dat  $u \in C([0, \alpha]; \mathbb{R})$  en dat er  $L, c_0 \in \mathbb{R}^+$  zijn zodanig dat

$$0 \leq u(t) \leq c_0 + \int_0^t L u(s) ds \quad \text{voor } t \in [0, \alpha].$$

Dan geldt

$$0 \leq u(t) \leq c_0 e^{Lt} \quad \text{voor } t \in [0, \alpha].$$

**Bewijs:** Definieer

$$U(t) = c_0 + \int_0^t L u(s) ds.$$

Dan geldt dat  $U$  is differentieerbaar en  $U'(t) = L u(t)$ . Bovendien vinden we dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-Lt} U(t)) &= e^{-Lt} (-LU(t) + U'(t)) = e^{-Lt} (-LU(t) + Lu(t)) = \\ &= L e^{-Lt} (u(t) - U(t)) \leq 0 \quad \text{voor } t \in [0, \alpha] \end{aligned}$$

volgens de aanname. Integreer van 0 tot  $t$  geeft

$$e^{-Lt} U(t) - U(0) = \int_0^t \frac{d}{ds} (e^{-Ls} U(s)) ds \leq 0$$

en dus

$$u(t) \leq U(t) \leq e^{Lt} U(0) = e^{Lt} c_0 \quad \text{voor } t \in [0, \alpha].$$

□

Dit lemma kunnen we gebruiken bij het vergelijken van de oplossingen van

$$\begin{cases} \vec{U}'(t) = \vec{F}(t, \vec{U}(t)) \\ \vec{U}(0) = \vec{U}_0 \end{cases} \quad (5.22)$$

waarbij  $\vec{F}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Stelling 5.7.2** Stel  $\vec{F}$  voldoet aan de Lipschitz-voorwaarde met constante  $L$  en laat  $\vec{U}, \vec{V}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  oplossingen zijn van het bovenstaande beginwaardeprobleem (5.22).

Dan geldt voor alle  $t \in [0, T]$

$$|\vec{U}(t) - \vec{V}(t)| \leq e^{Lt} |\vec{U}_0 - \vec{V}_0|. \quad (5.23)$$

De betekenis van deze stelling kan men samenvatten als:

oplossingen zijn continu afhankelijk van de beginvoorwaarde.

Anders gezegd, een kleine verandering in de beginvoorwaarde zorgt ervoor dat de oplossing ook slechts weinig verandert (op elk tijdstip in  $[0, T]$ ).

**Bewijs:** Definieer

$$u(t) = |\vec{U}(t) - \vec{V}(t)|.$$

Met de differentiaalvergelijking zien we dat

$$\begin{aligned} u(t) &= |\vec{U}(t) - \vec{V}(t)| = \\ &= \left| \vec{U}_0 + \int_0^t \vec{F}(s, \vec{U}(s)) ds - \vec{V}_0 - \int_0^t \vec{F}(s, \vec{V}(s)) ds \right| \leq \\ &\text{(driehoeksongelijkheid)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |\vec{U}_0 - \vec{V}_0| + \left| \int_0^t \vec{F}(s, \vec{U}(s)) ds - \int_0^t \vec{F}(s, \vec{V}(s)) ds \right| \leq \\ &\leq |\vec{U}_0 - \vec{V}_0| + \int_0^t |\vec{F}(s, \vec{U}(s)) - \vec{F}(s, \vec{V}(s))| ds \leq \\ &\text{(Lipschitz-voorwaarde)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |\vec{U}_0 - \vec{V}_0| + \int_0^t L |\vec{U}(s) - \vec{V}(s)| ds = \\ &= c_0 + \int_0^t L u(s) ds. \end{aligned}$$

Het Lemma van Gronwall toepassen leidt tot (5.23). □

**Gevolg 5.7.3** *Stel dat  $\vec{F}$  aan de Lipschitz-voorwaarde op  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  voldoet met een constante  $L$ . Dan is  $\mathbb{R}$  het maximale existentie-interval van iedere oplossing van (5.22).*

**Bewijs:** We bewijzen uit het ongerijmde en stellen  $T^+ < \infty$ . Volgens Stelling 5.4.3 geldt als  $T^+ < \infty$  dat  $\lim_{t \uparrow T^+} |\vec{U}(t)| = \infty$ . We weten dat

$$\vec{U}(t) = \vec{U}_0 + \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau, \vec{U}(\tau)) d\tau$$

en dus

$$\vec{U}(t) - \vec{U}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau, \vec{U}_0) d\tau + \int_{t_0}^t (\vec{F}(\tau, \vec{U}(\tau)) - \vec{F}(\tau, \vec{U}_0)) d\tau$$

Noem  $M = \max \{ |\vec{F}(\tau, \vec{U}_0)|; t_0 \leq \tau \leq T^+ \}$ . Via de driehoeksongelijkheid en de Lipschitz-voorwaarde volgt dat

$$\begin{aligned} |\vec{U}(t) - \vec{U}_0| &\leq \int_{t_0}^t |\vec{F}(\tau, \vec{U}_0)| d\tau + \int_{t_0}^t |\vec{F}(\tau, \vec{U}(\tau)) - \vec{F}(\tau, \vec{U}_0)| d\tau \leq \\ &\leq (T^+ - t_0) M + \int_{t_0}^t L |\vec{U}(\tau) - \vec{U}_0| d\tau. \end{aligned}$$

Met Gronwall volgt voor alle  $t \in (t_0, T^+)$  dat

$$|\vec{U}(t) - \vec{U}_0| \leq (T^+ - t_0) M e^{L(t-t_0)}$$

en dus een tegenspraak met  $\lim_{t \uparrow T^+} |\vec{U}(t)| = \infty$ . Voor  $T^-$  geldt een analogoos verhaal. □

## 5.8 Vergelijkingsprincipe voor 1<sup>e</sup> orde d.v.

De oplossing bij het voorbeeld op bladzijde 72 kan niet expliciet uitgerekend worden. Om toch iets te zeggen van b.v. het maximale existentie-interval kunnen we deze differentiaalvergelijking vergelijken met enkele die we wel expliciet kunnen uitrekenen. Dit is voor veel differentiaalvergelijkingen mogelijk en er bestaat zelfs een versie voor eerste orde stelsels. Omdat de versie voor stelsels nog een extra voorwaarde verlangt zullen we ons beperken tot beginwaardeproblemen voor eerste orde gewone differentiaalvergelijkingen.

► *vergelijkings-  
principe*



**Stelling 5.8.1 (Vergelijkingsprincipe voor g.d.v.)** *Stel dat  $G$  voldoet aan de Lipschitz-voorwaarde op ieder begreind deel van  $[0, a] \times \mathbb{R}$ . Neem aan dat  $u$  en  $v$  bestaan op  $[0, a]$  en respectievelijk voldoen aan*

$$\begin{cases} u' &= F(t, u), \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \quad \begin{cases} v' &= G(t, v), \\ v(0) &= v_0. \end{cases}$$

*Als  $u_0 \geq v_0$  en  $F(t, x) \geq G(t, x)$  voor alle  $t \in [0, a]$  en voor alle  $x$ , dan geldt*

$$u(t) \geq v(t) \text{ op } [0, a].$$

**Opmerking:** We kunnen een soortgelijk resultaat krijgen voor  $t < 0$ . Onder de Lipschitz-voorwaarde voor  $G$  en aangenomen  $u$  en  $v$  bestaan op  $[-b, 0]$  wordt de uitspraak:

*Als  $u_0 \geq v_0$  en  $F(t, x) \leq G(t, x)$  voor alle  $t \in [-b, 0]$  en voor alle  $x$ , dan geldt  $u(t) \geq v(t)$  op  $[-b, 0]$ .*

Let op de richting van de ongelijktekens:  $F \leq G$ !

**Bewijs:** We bewijzen uit het ongerijmde. Stel dat er een  $t_1 > 0$  is zodanig dat  $u(t_1) < v(t_1)$ . Omdat  $u(0) \geq v(0)$  en  $u$  en  $v$  continu zijn is er (tussenwaardestelling) een  $t_0 \in [0, t_1]$  zodat  $u(t_0) = v(t_0)$  en we mogen zelfs aannemen dat

$$u(t) \leq v(t) \text{ voor } t \in [t_0, t_1].$$

Er geldt voor  $t \in [t_0, t_1]$  dat

$$u'(t) - v'(t) = F(t, u(t)) - G(t, v(t)) \geq$$

(volgens de aanname dat  $G(t, x) \leq F(t, x)$ )

$$\geq G(t, u(t)) - G(t, v(t)) \geq$$

(nu gebruiken we de Lipschitz-voorwaarde)

$$\geq -L|u(t) - v(t)| =$$

(merk op dat  $u(t) - v(t) \leq 0$  voor  $t \in [t_0, t_1]$ )

$$= L(u(t) - v(t)).$$

Als gevolg vinden we voor  $t \in [t_0, t_1]$  dat

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-Lt} (u(t) - v(t)) \right) = e^{-Lt} \left( (u'(t) - v'(t)) - L(u(t) - v(t)) \right) \geq 0.$$

Integreren we de laatste uitdrukking van  $t_0$  tot  $t_1$  dan krijgen we

$$e^{-Lt_1} (u(t_1) - v(t_1)) \geq e^{-Lt_0} (u(t_0) - v(t_0)) = 0$$

zodat

$$u(t_1) - v(t_1) \geq 0.$$

Dit is in tegenspraak met de aanname dat  $u(t_1) < v(t_1)$ . □

□

### Voorbeeld 29

We gebruiken dit om voor het voorbeeld op bladzijde 72 een schatting voor  $T_u^+$  te vinden.

- Allereerst vergelijken we

$$\begin{cases} u' = u^2 + t^2, \\ u(0) = 1, \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v' = v^2, \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

We schrijven  $F(t, x) = x^2 + t^2$  en  $G(t, x) = x^2$ . Dan vinden we, omdat  $F(t, x) \geq G(t, x)$ , met Stelling 5.8.1 dat  $u(t) \geq v(t)$  voor  $t \in [0, a)$  met  $a = \min(T_u^+, T_v^+)$ . De oplossing  $v$  is eenvoudig uit te rekenen:

$$v(t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{met } t \in (-\infty, 1).$$

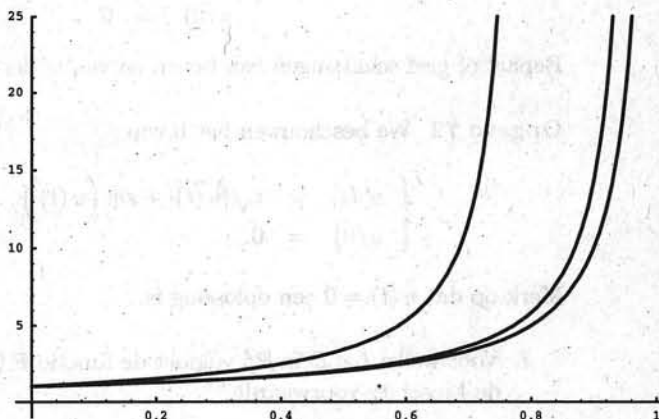
Er volgt dat  $T_u^+ \leq T_v^+ = 1$ .

- We kunnen  $T_u^+$  ook van onderen afschatten. We weten al dat  $T_u^+ \leq 1$  en dus mogen we ons beperken tot  $t \leq 1$ . Door

$$\begin{cases} u' = u^2 + t^2, \\ u(0) = 1, \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} w' = w^2 + 1, \\ w(0) = 1, \end{cases}$$

te vergelijken volgt met Stelling 5.8.1 dat  $w(t) \geq u(t)$  voor  $t \in [0, a^*)$  waarbij  $a^* = \min(T_w^+, T_u^+)$ . Omdat  $w(t) = \tan(t + \frac{1}{4}\pi)$  volgt  $T_w^+ = \frac{1}{4}\pi \leq T_u^+$ .

Door beide schattingen te combineren vinden we dat het maximale existentie-interval van  $u$  ergens tussen  $\frac{1}{4}\pi$  en 1 eindigt. Tekenend  $w$  en  $v$  en een numerieke benadering van  $u$  dan krijgen we het volgende plaatje.



Van links naar rechts  $w$ ,  $u$  en  $v$ .

□

**Opgave 68** Laat zien dat de oplossing van  $u' = u^2 + \sin(t)$  met  $u(0) = 1$  voldoet aan

- i.  $u(t) \leq \tan\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$  voor  $t \in \left[0, \frac{1}{4}\pi\right)$ ;
- ii.  $u(t) \geq \frac{1}{1-t}$  voor  $t \in [0, T_u^+)$ ;
- iii.  $\frac{1}{4}\pi \leq T_u^+ \leq 1$ ;
- iv.  $\lim_{t \uparrow T_u^+} u(t) = \infty$ .

□

**Opgave 69** Laat zien dat de oplossing van  $u' = t - u^2$  met  $u(0) = 1$  voldoet aan

- i.  $u(t) \leq 1 + t^2$  voor  $t \in [0, T_u^+)$ ;
- ii.  $u(t) \geq 0$  voor  $t \in [0, T_u^+)$ ;
- iii.  $T_u^+ = \infty$ ;
- iv.  $u(t) \geq \frac{1}{1+t}$  voor  $t \in (T_u^-, 0]$ ;
- v.  $-1 \leq T_u^- < 0$ .

□

**Opgave 70** Geef een afchatting van boven en van onderen voor de oplossing van

$$\begin{cases} u'(t) = \arctan(u(t)) + t, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Wat is het existentie-interval van de oplossing  $u$ ? Motiveer.

□

**Opgave 71** Geef een afchatting van boven en van onderen voor de oplossing van

$$\begin{cases} u'(t) = e^{u(t)} + t, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Bepaal of geef schattingen van boven en van onder van  $T_u^+$  en  $T_u^-$ .

□

**Opgave 72** We beschouwen het b.w.p.:

$$\begin{cases} u'(t) = t\sqrt{|u(t)|} + \sin(u(t)) & \text{voor } t \geq 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Merk op dat  $u(t) = 0$  een oplossing is.

- i. Voor welke  $I \times D$  in  $\mathbb{R}^2$  voldoet de functie  $F(t, u) = t\sqrt{|u|} + \sin(u)$  aan de Lipschitz-voorwaarde?
- ii. Bereken een oplossing  $v$  van  $v'(t) = t\sqrt{|v(t)|}$  met  $v(0) = 0$  die positief is voor  $t > 0$ .

iii. Neem  $n \in \mathbb{N}^+$  en laat zien dat de oplossing  $u_n$  van

$$\begin{cases} u'(t) = t\sqrt{|u(t)|} + \sin(u(t)), & \text{voor } t \geq \frac{1}{n}, \\ u\left(\frac{1}{n}\right) = v\left(\frac{1}{n}\right), \end{cases} \quad (5.25)$$

voldoet aan

- (a)  $v(t) < u_n(t)$  voor  $\frac{1}{n} < t \leq 1$ ;
- (b)  $u_n(t) < u_{n+1}(t)$  voor  $\frac{1}{n} < t \leq 1$ ;
- (c)  $u_n(t) < e^t - 1 - t$  voor  $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$ . Hint: als  $0 \leq u \leq 1$  dan  $t\sqrt{u} + \sin u \leq t + u$ .

iv. Waarom mogen we bij (5.25) wel van de oplossing spreken en bij (5.24) niet?

Tenslotte de moraal achter deze exercities. We kunnen nu een tweede oplossing vinden. Voor iedere  $t \in (0, 1]$  is de rij  $\{u_n(t)\}_n$  stijgend en begrensd en dus convergent. We kunnen dan  $u_\infty(t)$  definiëren door  $u_\infty(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$ . De functie  $u_\infty$  voldoet aan

$$0 < v(t) < u_\infty(t) < e^t - 1 - t \quad \text{voor } t \in (0, 1]$$

en via de insluitstelling kunnen we  $u_\infty$  continu uitbreiden in 0 door  $u_\infty(0) = 0$ . Tenslotte kan men laten zien dat  $u_\infty$  differentieerbaar is op  $[0, \infty)$  en aan (5.24) voldoet.

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch die Gleichung  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert.

$$(a) \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{für } x \neq 0$$

gilt.

$$(b) \quad f(x) < \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 1$$

$$(c) \quad f(x) < \frac{1}{x} \quad \text{für } 0 < x < 1$$

$$(d) \quad f(x) < \frac{1}{x} \quad \text{für } x < -1 \quad \text{oder} \quad -1 < x < 0 \quad \text{oder} \quad 0 < x < 1$$

iv. Zeigen Sie, dass die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert ist, eine bijektive Abbildung ist.

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch die Gleichung  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert. Zeigen Sie, dass  $f$  eine bijektive Abbildung ist.

$$f(x) < \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 1 \quad \text{oder} \quad 0 < x < 1$$

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch die Gleichung  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert. Zeigen Sie, dass  $f$  eine bijektive Abbildung ist.

## 6. TWEEDE ORDE GEWONE D.V.

### 6.1 Analyse van het fasevlak

We beschouwen de autonome 2<sup>e</sup> orde gewone differentiaalvergelijking

$$u''(t) = F(u'(t), u(t)), \quad (6.1)$$

met  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  een gegeven functie. Volgens de standaardmanier transformeert men met behulp van  $v(t) = u'(t)$  deze tweede orde differentiaalvergelijking naar het 1<sup>e</sup> orde stelsel

$$\begin{cases} v'(t) = F(v(t), u(t)), \\ u'(t) = v(t). \end{cases} \quad (6.2)$$

Zonder de oplossing expliciet uit te rekenen kan men vaak een indruk krijgen welke eigenschappen de oplossingen hebben door van enkele oplossingen de baan te schetsen. Als  $(u, v)$  de oplossing van (6.2) is dan noemt men de baan van dit oplossingspaar  $(u, v)$  de verzameling  $\{(u(t), v(t)); t \in (T^-, T^+)\}$ .

► baan

► fasevlak

**Definitie 6.1.1** Het fasevlak bij (6.1) is de verzameling geparametriseerde krommen (banen)

$$\{(u(t), u'(t)); t \in J \text{ met } u : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ oplossing van (6.1)}\}$$

met de bijbehorende 'doorloop'-richting.

□

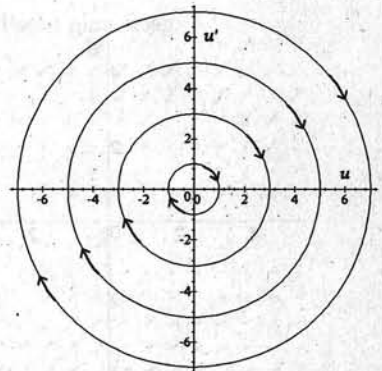
#### Voorbeeld 30

Het fasevlak bij  $u'' = -u$  ziet er uit als in de schets hiernaast. Voor dit eenvoudige geval kunnen we de oplossingen  $u$  berekenen, nl.

$$u(t) = \alpha \cos(t - t_0)$$

met  $\alpha, t_0 \in \mathbb{R}$ . De banen worden geparametriseerd door

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(t - t_0) \\ -\alpha \sin(t - t_0) \end{pmatrix}.$$



Het tekenen van het fasevlak wordt eenvoudiger via de volgende alternatieve reductie naar een eerste orde stelsel. In plaats van het benoemen van  $v = u'$  is ook het volgende mogelijk bij autonome differentiaalvergelijkingen, namelijk:

$$V(u(t)) = u'(t).$$



Als  $V(u(t)) = u'(t)$  goed gedefinieerd<sup>1</sup> is voor  $t \in (a, b)$  dan geldt volgens de kettingregel

$$V'(u(t)) u'(t) = u''(t) \quad \text{voor } t \in (a, b)$$

en dus

$$V'(u(t)) = \frac{u''(t)}{V(u(t))} \quad \text{voor } t \in (a, b).$$

We kunnen dan (6.1) vervangen door

$$\begin{cases} V'(u) = \frac{F(V(u), u)}{V(u)}, \\ u'(t) = V(u(t)). \end{cases} \quad (6.3)$$

Voor  $V(u) \neq 0$  kunnen we (een deel van) een baan ook beschrijven door

$$\{(u, V(u)); u \in \text{'geschikt interval'}\}.$$

**Opmerking:** Vergelijken we beide reducties naar eerste orde stelsels, dan zien we dat geldt  $v(t) = V(u(t))$ . Het voordeel van de tweede reductie is, dat  $u \mapsto V(u)$  de oplossing van een eerste orde d.v. is en niet van een stelsel. Bovendien beschrijft  $V$  direct de banen in het fasevlak en geeft zo al veel informatie prijs over het gedrag van oplossingen  $t \mapsto u(t)$  zonder die te berekenen.

Men kan een grof idee van het fasevlak voor  $u'' = F(u', u)$  krijgen met behulp van het vectorveld  $(v, F(v, u))$ . Op plaats  $(x, y)$  levert  $(y, F(y, x))$  de richting (van de raaklijn) van de geparametriseerde kromme.

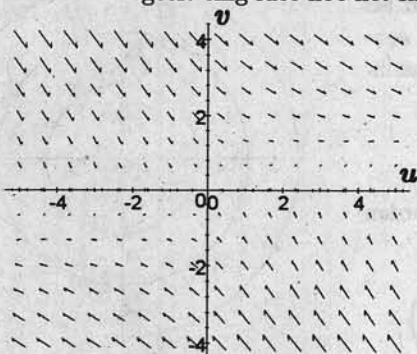
□

### Voorbeeld 31

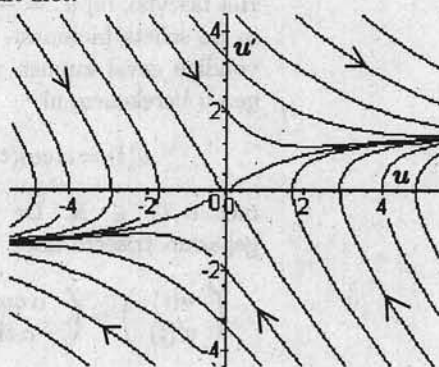
Het vectorveld dat bij  $u''(x) = \arctan(u(x)) - u'(x)$  hoort, namelijk

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ \arctan(u) - v \end{pmatrix},$$

geeft enig idee hoe het fasevlak er uit ziet.



vectorveld



fasevlak

<sup>1</sup>We krijgen zo een functie  $u \mapsto V(u)$ . Deze functie  $V$  is op deze wijze niet rechtstreeks gedefinieerd. Neem aan dat  $t \mapsto u(t)$  differentieerbaar is. Als  $t \mapsto u(t)$  inverteerbaar is geldt  $V(s) = u'(u^{\text{invers}}(s))$  en is  $V$  goed gedefinieerd. Als  $u' \neq 0$  dan is  $u$  strikt stijgend of strikt dalend en is  $u^{\text{invers}}$  inderdaad gedefinieerd. We zien dat er een probleem optreedt als  $u' = 0$ , dus als  $V = 0$ .

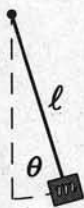
Uit dit laatste plaatje krijgt zou men kunnen vermoeden dat alle banen voor  $x$  groot naar een van twee mogelijke krommen convergeren en dat voor  $x$  groot geldt dat  $|u'(x)| < 2$ . Dan zou volgen dat  $T^+ = \infty$  voor elke beginvoorwaarde. Dat de oplossingen existentie-interval  $(-\infty, \infty)$  hebben, kunnen we ook anders zien. Namelijk de functie  $\vec{F}$ , gedefinieerd door  $\vec{F}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v \\ \arctan(u-v) \end{pmatrix}$ , voldoet aan de Lipschitz-voorwaarde op  $\mathbb{R}^2$  met  $L = 2$ .

## 6.2 De slinger met en zonder wrijving

De slingervergelijking die rekening houdt met de luchtweerstand is

$$\theta'' = -\frac{k}{m}\theta' - \frac{g}{\ell}\sin(\theta) \quad (6.4)$$

waarbij  $k$  de wrijvingsconstante voor de wrijving met de lucht (evenredig met de snelheid),  $g$  de gravitatieconstante en  $\ell$  de lengte (van de vaste verbinding tussen gewicht en as) is. De functie  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  geeft de hoek met de naar beneden wijzende richting.



**Opmerking:** Als we wrijving bij de as er ook nog aan toevoegen kan men het model beschrijven door

$$\theta'' = -\frac{c}{m}\text{sign}(\theta') - \frac{k}{m}\theta' - \frac{g}{\ell}\sin(\theta) \quad (6.5)$$

waarbij

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } t > 0, \\ 0 & \text{als } t = 0, \\ -1 & \text{als } t < 0. \end{cases}$$

Omdat  $t \mapsto \text{sign}(t)$  niet continu is komen bij (6.5) nog extra moeilijkheden (het rechterlid is voldoet niet meer aan de Lipschitz-voorwaarde).

De vergelijking in (6.4), en ook in (6.5), is een autonome differentiaalvergelijking; 'er is geen  $t$ -afhankelijkheid in de d.v.'. We kunnen de substitutie  $V(u) = u'$  gebruiken. Voor (6.4) met  $u = \theta$  volgt daarmee

$$V'(\theta) = -k/m - g/\ell \frac{\sin \theta}{V(\theta)}.$$

Deze differentiaalvergelijking is voor  $k \neq 0$  niet van een type dat we via een recept kunnen oplossen.

► tweede-orde autonome g.d.v.

**Opmerking:** Voor tweede-orde autonome g.d.v. zonder 1<sup>e</sup> orde term,

$$u'' + f(u) = 0,$$

bijvoorbeeld de slinger zonder wrijving, kunnen we in plaats van de substitutie  $u' = V(u)$  ook direct, door met  $u'$  te vermenigvuldigen en te integreren, dedifferentiaalvergelijking terugbrengen naar een eerste orde:

$$u''u' + f(u)u' = 0 \xrightarrow{\text{primitiveren}} \frac{1}{2}(u')^2 + F(u) = c \Rightarrow u' = \pm\sqrt{2c - 2F(u)}$$

met  $F'(s) = f(s)$ . Dit komt op hetzelfde neer als de substitutie  $V(u(t)) = u'(t)$ . Daar vinden we dat

$$u'' + f(u) = V'(u(t)) u'(t) + f(u) = V'(u) V(u) + f(u) = 0$$

en na primitiveren  $\frac{1}{2} (V(u))^2 + F(u) = c$  volgt

$$u' = V(u) = \pm \sqrt{2c - 2F(u)}.$$

□

### Voorbeeld 32

De slinger zonder wrijving:  $\theta'' = -g/\ell \sin(\theta)$  levert met  $V(\theta(t)) = \theta'(t)$

$$V'(\theta) = \frac{-g \sin(\theta)}{\ell V(\theta)}.$$

De laatste g.d.v. kunnen we oplossen:

$$\frac{1}{2} (V(\theta))^2 = \frac{g}{\ell} \cos \theta + c.$$

Voor  $c > -g/\ell$  vinden we de volgende oplossingen:

$$V(\theta) = +\sqrt{2\frac{g}{\ell} \cos \theta + 2c},$$

$$V(\theta) = -\sqrt{2\frac{g}{\ell} \cos \theta + 2c}.$$

Als  $c > g/\ell$  dan draait de slinger in één richting rond (veel bewegingsenergie). Als  $-g/\ell < c < g/\ell$  dan heeft de slinger het heen-en-weer (weinig bewegingsenergie).

Wil men de functie  $\theta$  zelf hebben dan moeten we

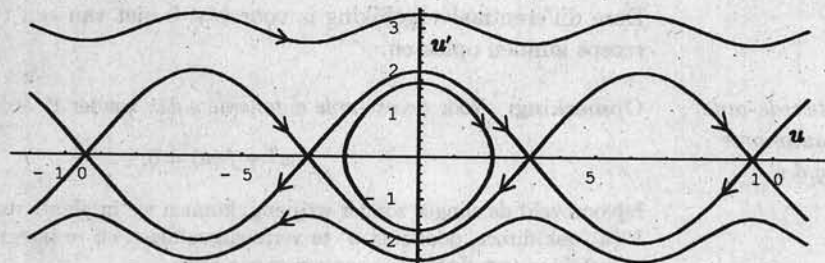
$$\theta' = V(\theta)$$

oplossen. Dit is in het algemeen niet mogelijk met de gebruikelijke standaardfuncties. (Als  $c = \pm g/\ell$  dan overigens wel.)

□

**Opgave 73** Bereken alle oplossingen als  $c = g/\ell$  en als  $c = -g/\ell$ . Beschrijf het gedrag van de slinger in deze gevallen.

Voor de verschillende gevallen die boven genoemd worden hebben we enkele functies  $V$  laten tekenen:

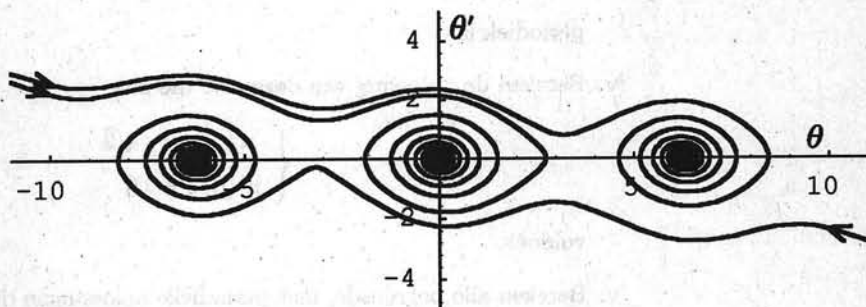


enkele banen bij de slinger zonder wrijving,  $\frac{g}{\ell} = 1$ .

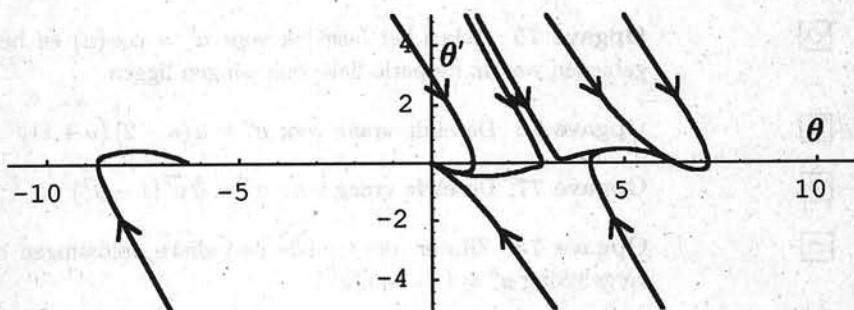
□

**Voorbeeld 33**

De slinger met wrijving:  $\theta'' = -\frac{k}{m}\theta' - \frac{g}{l}\sin(\theta)$  levert na  $V(\theta(t)) = \theta'(t)$  een differentiaalvergelijking die we niet konden oplossen met standaardfuncties. Numerieke benadering levert de volgende banen in het fasevlak.



enkele banen bij kleine wrijving,  $\frac{g}{l} = 1$  en  $\frac{k}{m} = \frac{1}{10}$ .



enkele banen bij grote wrijving,  $\frac{g}{l} = 1$  en  $\frac{k}{m} = 2$ .

Zowel voor slinger met als zonder (lucht)wrijving zijn er stilstaande oplossingen, namelijk  $\theta = n\pi$  met  $n \in \mathbb{Z}$ . De punten  $(0, n\pi)$  in het fasevlak noemt men evenwichtspunten van de differentiaalvergelijking.

□

**Opgave 74** We beschouwen de tweede orde g.d.v.

$$u''(x) = \frac{1}{2}u(x)(1 - u(x)^2).$$

- i. Teken het fasevlak bij deze d.v.
- ii. Voor welke  $\alpha$  is de oplossing van de d.v. met als beginvoorwaarde

$$\begin{cases} u(0) = \alpha \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

periodiek?

- iii. Geef de voorwaarde voor  $\alpha, \beta$  die er voor zorgt dat de oplossing van de d.v. met als beginvoorwaarde

$$\begin{cases} u(0) = \alpha \\ u'(0) = \beta \end{cases}$$

periodiek is.

- iv. Bereken de oplossing van deze d.v. die aan

$$\begin{cases} u(0) = \sqrt{2} \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

voldoet.

- v. Bereken alle begrensde, niet-periodieke oplossingen die  $\mathbb{R}$  als existentie-interval hebben.
- vi. Zijn er onbegrensde oplossingen? Motiveer. \_\_\_\_\_

- Opgave 75** Teken het fasevlak voor  $u'' = \cos(u)$  en bereken en arceer de gebieden waarin de periodieke oplossingen liggen. \_\_\_\_\_
- Opgave 76** Dezelfde vraag voor  $u'' = u(u-2)(u+1)$ . \_\_\_\_\_
- Opgave 77** Dezelfde vraag voor  $u'' = \sqrt[3]{u}(1-u^2)$ . \_\_\_\_\_
- Opgave 78** Zijn er niet-triviale periodieke oplossingen bij de differentiaalvergelijking  $u'' = (u')^2 \sin(u)$ ? \_\_\_\_\_

## 6.3 Lineaire d.v.

---

We beschouwen hier tweede orde lineaire gewone differentiaalvergelijkingen. De genoemde resultaten zijn uit te breiden tot hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen. Een  $n^{\text{de}}$ -orde lineaire differentiaalvergelijking schrijven we om naar een stelsel van  $n$  vergelijkingen. Een beginvoorwaarde die de oplossing vastlegt heeft daarmee  $n$  componenten. De plaats van 2 onafhankelijke oplossingen voor 2<sup>de</sup> orde wordt ingenomen door  $n$  onafhankelijke oplossingen voor  $n^{\text{de}}$  orde; enzovoort.

### 6.3.1 Existentie en eenduidigheid

---

We beschouwen tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x), \quad (6.6)$$

waarbij  $p, q$  en  $r$  gegeven functies zijn. We nemen aan dat de volgende voorwaarde is voldaan:

$$(C) \quad p, q \text{ en } r \text{ zijn continue functies op } \mathbb{R},$$

dit wordt ook wel genoteerd als  $p, q, r \in C(\mathbb{R})$ .

**Stelling 6.3.1** *Als aan conditie (C) voldaan is, dan bestaat er voor elke  $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$  precies één oplossing  $u$  van het b.w.p.:*

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = r, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0. \end{cases}$$

*Het maximale existentie-interval van  $u$  is  $\mathbb{R}$ .*

**Bewijs:** Noem  $u' = v$  en we vinden het stelsel

$$\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \vec{F}(x, u(x), v(x)) \quad \text{met} \quad \vec{F}(x, u, v) = \begin{pmatrix} v \\ r(x) - p(x)v - q(x)u \end{pmatrix}.$$

Als  $p, q$  en  $r$  continu zijn dan voldoet de functie  $\vec{F}$  aan de Lipschitz-voorwaarde op ieder gebied  $I \times \mathbb{R}^2$  met  $I$  een begrensde interval. Men laat met enig rekenwerk zien dat

$$\left| \vec{F}(x, u_1, v_1) - \vec{F}(x, u_2, v_2) \right| \leq L \left| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right|$$

voor  $L = 1 + \max_{x \in I} |p| + \max_{x \in I} |q|$ . Volgens de existentie- en eenduidigheidsstelling bestaat er precies één oplossing. Tenslotte vindt men via Gevolg 5.7.3 dat  $\mathbb{R}$  het maximale existentie-interval is.  $\square$

### 6.3.2 Het gereduceerde probleem

De volgende resultaten gelden voor de gereduceerde d.v. ( $r = 0$ )

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0 \tag{6.7}$$

**Propositie 6.3.2** *Als  $U$  en  $V$  beide oplossingen zijn van (6.7), dan is  $w$ , gedefinieerd door*

$$w = \alpha U + \beta V$$

*met  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ook een oplossing.*

**Bewijs:** Invullen en lineariteit gebruiken.  $\square$

**Definitie 6.3.3** *Zij  $I$  een interval in  $\mathbb{R}$ . De verzameling functies  $\{U_i : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^n$  heet onafhankelijk als  $\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n = 0$  op  $I$  impliceert dat  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .*

► onafhankelijk

Voor twee functies  $\{U, V\}$  betekent het, dat de ene geen veelvoud van de andere is.

► *fundamentele oplossingsverzameling*

**Propositie 6.3.4** *Als  $U$  en  $V$  twee onafhankelijke oplossingen van (6.7) zijn, dan is elke oplossing te schrijven als*

$$w = \alpha U + \beta V.$$

met  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . We noemen  $\{U, V\}$  een *fundamentele oplossingsverzameling*.

► *algemene oplossing*

Men zegt ook wel:  $\alpha U + \beta V$  met  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  is de *algemene oplossing* van (6.7).

**Bewijs:** Volgens de existentie- en eenduidigheidsstelling is er precies één oplossing, noem die  $u_1$ , van

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Dat zien we na het gebruikelijke herschrijven als een stelsel:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -p(x)v - q(x)u \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ook is er precies één oplossing, noem die  $u_2$ , van

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

Als  $U$  een oplossing van (6.7) is, dan is  $U$  volgens de existentie- en eenduidigheidsstelling de enige oplossing van

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ u(0) = U(0), \\ u'(0) = U'(0). \end{cases}$$

Omdat ook  $u(x) = U(0)u_1(x) + U'(0)u_2(x)$  een oplossing van dit laatste beginwaardeprobleem is volgt

$$U(x) = U(0)u_1(x) + U'(0)u_2(x). \quad (6.8)$$

Evenzo vinden we

$$V(x) = V(0)u_1(x) + V'(0)u_2(x). \quad (6.9)$$

We weten nu dat iedere oplossing te schrijven is als  $u(x) = u(0)u_1(x) + u'(0)u_2(x)$ . Tenslotte moeten we nog laten zien dat zo'n oplossing  $u$  te schrijven is als een lineaire combinatie van  $U$  en  $V$ . Met enige lineaire algebra gaat dat als volgt.

Omdat  $\{U, V\}$  onafhankelijk is, is  $V \neq 0$ , is  $U$  geen veelvoud van  $V$  en geldt

$$0 \neq U(0)V'(0) - V(0)U'(0) = \det \begin{pmatrix} U(0) & U'(0) \\ V(0) & V'(0) \end{pmatrix}.$$

De matrix  $\begin{pmatrix} U(0) & U'(0) \\ V(0) & V'(0) \end{pmatrix}$  is dus inverteerbaar en we vinden via (6.8) en (6.9) dat

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(0) & U'(0) \\ V(0) & V'(0) \end{pmatrix}^{\text{inv}} \begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \end{pmatrix}.$$

Daarmee volgt

$$u(x) = (u(0), u'(0)) \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = (u(0), u'(0)) \begin{pmatrix} U(0) & U'(0) \\ V(0) & V'(0) \end{pmatrix}^{\text{inv}} \begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \end{pmatrix}$$

□

## ► Wronskiaan

**Definitie 6.3.5** Laat  $U$  en  $V$  twee oplossingen van (6.7) zijn. De Wronskiaan van  $U, V$  is gedefinieerd door

$$W(U, V) = UV' - U'V.$$

**Stelling 6.3.6** Stel conditie (C) is voldaan. Voor de gereduceerde d.v. (6.7) hebben we de volgende equivalente uitspraken.

- i.  $\{U, V\}$  is een fundamentele oplossingsverzameling;
- ii.  $c_1U + c_2V$  met  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  is de algemene oplossing;
- iii.  $U, V$  zijn twee lineair onafhankelijke oplossingen;
- iv.  $U, V$  zijn oplossingen en  $W(U, V)(x_0) \neq 0$  voor een  $x_0 \in I$ ;
- v.  $U, V$  zijn oplossingen en  $W(U, V)(x) \neq 0$  voor alle  $x \in I$ .

**Bewijs:** Het bewijs verloopt als volgt:  $i \Leftrightarrow ii \Rightarrow v \Rightarrow iv \Rightarrow iii \Rightarrow ii$ .

$ii \Leftrightarrow i$ : Volgens afspraak.

$ii \Rightarrow v$ : Uit het ongerijmde. Stel  $W(U, V)(x_1) = 0$  voor één  $x_1 \in I$ . Dan is de matrix  $\begin{pmatrix} U(x_1) & V(x_1) \\ U'(x_1) & V'(x_1) \end{pmatrix}$  niet inverteerbaar, dus  $\dim(\text{Col}\begin{pmatrix} U(x_1) & V(x_1) \\ U'(x_1) & V'(x_1) \end{pmatrix}) \leq 1$  en er is een vector  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  zodat

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \notin \text{Col}\begin{pmatrix} U(x_1) & V(x_1) \\ U'(x_1) & V'(x_1) \end{pmatrix}.$$

Col is de kolomruimte. Er is geen oplossing  $c_1U + c_2V$  van (6.7) met beginvoorwaarde

$$u(x_1) = a \text{ en } u'(x_1) = b.$$

$v \Rightarrow iv$ : Direct.

$iv \Rightarrow iii$ : Als  $\alpha U(x) + \beta V(x) = 0$  dan geldt ook  $\alpha U'(x) + \beta V'(x) = 0$ . Neem in beide vergelijkingen  $x = x_0$ . In matrix-notatie wordt dit

$$\begin{pmatrix} U(x_0) & V(x_0) \\ U'(x_0) & V'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Omdat  $W(U, V)(x_0) \neq 0$  impliceert dat de matrix  $\begin{pmatrix} U(x_0) & V(x_0) \\ U'(x_0) & V'(x_0) \end{pmatrix}$  inverteerbaar is, volgt  $\alpha = \beta = 0$ .

$iii \Rightarrow ii$ : Propositie 6.3.4. □

### 6.3.3 Het oorspronkelijke probleem.

Als aan voorwaarde (C), zie bladzijde 107, voldaan is, dan heeft Propositie 6.3.4 voor de d.v.

$$u'' + pu' + qu = r \tag{6.10}$$

de volgende consequentie.



**Gevolg 6.3.7** Stel  $u_p$  is een oplossing van (6.10) en  $U$  en  $V$  zijn twee onafhankelijke oplossingen van (6.7). Dan is

$$u = u_p + c_1U + c_2V$$

met  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  de algemene oplossing van (6.10).

► *particuliere oplossing*

Zo 'n functie  $u_p$  wordt wel eens een *particuliere oplossing* genoemd.

**Bewijs:** Als  $u$  een oplossing is van (6.10), dan is  $u - u_p$  een oplossing van (6.7). Volgens Stelling 6.3.6 geldt  $u - u_p = c_1U + c_2V$  voor een paar  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .  $\square$

$\square$

**Opgave 79** Bereken via  $u(x) = e^{\lambda x}$  voor geschikte  $\lambda$  de algemene oplossing van

$$u''(x) + u'(x) - 6u(x) = e^x.$$

$\square$

**Opgave 80** Beschouw de differentiaalvergelijking

$$u''(x) - u'(x) + e^{2x}u(x) = e^{3x}.$$

Laat zien dat  $u_c(x) = e^x + c \sin(e^x)$  voor elke  $c \in \mathbb{R}$  een oplossing is.

Een tweede onafhankelijke oplossing is te vinden via variatie van de constante. Geef de algemene oplossing van bovenstaande differentiaalvergelijking.  $\square$

$\square$

**Opgave 81** Bereken de algemene oplossing van

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) - \frac{4}{x^2}u(x) = x.$$

Hint: kies geschikte  $\alpha$ 's in  $u(x) = x^\alpha$  en combineer.  $\square$

# 7. LINEAIRE D.V. MET CONSTATE COËFFICIËNTEN

## 7.1 Inleiding

Beschouw

$$u'' + pu' + qu = 0 \quad (7.1)$$

met  $p, q \in \mathbb{R}$ . Het gebruikelijke 'trucje' om de algemene oplossing te vinden is  $e^{\lambda t}$  proberen. Na invullen vindt men de algebraïsche vergelijking  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  en als dit polynoom twee verschillende wortels  $\lambda_1, \lambda_2$  heeft dan wordt de algemene oplossing

$$u(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t},$$

waarbij we voor complexe  $\lambda$  nog willen herschrijven naar een reële vorm<sup>1</sup>. Als er slechts één wortel is, dat wil zeggen  $\lambda_1 = \lambda_2$ , dan wordt de algemene oplossing

$$u(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta t e^{\lambda_1 t}.$$

Iets dergelijks kan men uitbreiden naar hogere orde lineaire gewone differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. Bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$u^{(5)} + 3u^{(4)} + 2u^{(3)} - 2u'' - 3u' - u = 0$$

levert slechts twee verschillende wortels. De algemene oplossing wordt

$$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 t^2 e^{-t} + c_4 t^3 e^{-t} + c_5 e^t.$$

Om iets meer structuur in deze pogingen te brengen transformeren we op de gebruikelijke wijze naar een eerste orde stelsel. Met  $u' = v$  kunnen we (7.1) schrijven als

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

We werken meteen wat algemener en beschouwen het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \vec{u}' = A\vec{u}, \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Hierbij is  $A$  een reële  $n \times n$  matrix en  $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ . De gezochte functie  $\vec{u}$  is een vectorfunctie  $\vec{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

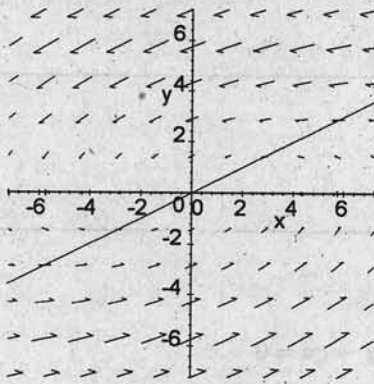
<sup>1</sup> Als  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  een oplossing van  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  met  $p, q \in \mathbb{R}$  is dan is  $\bar{\lambda}$ , de complex geconjugeerde van  $\lambda$ , ook een oplossing. Schrijf  $\lambda = \mu + i\nu$  met  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Er geldt

$$\alpha e^{(\mu+i\nu)t} + \beta e^{(\mu-i\nu)t} = c_1 e^{\mu t} \cos t + c_2 e^{\mu t} \sin t$$

met  $c_1 = \alpha + \beta$  en  $c_2 = i\alpha - i\beta$ .

v

## Voorbeeld 34



Om een indruk van het gedrag van de oplossingen te krijgen kunnen we een schets van het fasevlak maken. Bijvoorbeeld voor

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{u}$$

vinden we het plaatje hiernaast. Voor het schetsen is het handig de hulplijnen te tekenen waar de banen horizontaal en vertikaal lopen. Hier zijn dat respectievelijk  $-5y = 0$ , dus  $y = 0$ , en  $x - 2y = 0$ .

## 7.2 Het berekenen van de oplossingen

### 7.2.1 De definitie van de exponent van een matrix

Net zoals we het volgende beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u' = au, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad \text{oplossen door } u(t) = e^{at}u_0$$

zullen we het stelsel in (7.2)

$$\begin{cases} \vec{u}' = A\vec{u}, \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \quad \text{oplossen door } \vec{u}(t) = e^{At}\vec{u}_0.$$

Dit is simpel te schrijven maar nog niet erg netjes. Om aan deze uitdrukking betekenis te kunnen geven zullen we de volgende vragen moeten beantwoorden.

- Hoe is de exponent van een matrix gedefinieerd?
- Is dit inderdaad de oplossing?
- Is die exponent (eenvoudig) te berekenen?

Uit het eerstejaars college analyse weten we dat

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (at)^k.$$

Op dezelfde wijze kunnen we de exponent van een vierkante matrix definiëren.

**Definitie 7.2.1** Voor een  $n \times n$  matrix  $A$ :

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \dots$$

Soms zullen we  $\exp(tA)$  schrijven in plaats van  $e^{tA}$ .

**Opmerking:** Deze machtreeks convergeert voor elke matrix. Dat wil zeggen dat voor elk element  $ij$  de rij  $\left\{ \left( \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} A^k \right)_{ij} \right\}_{m=1}^{\infty}$  convergeert. Gebruik dat voor iedere  $ij$  geldt dat

$$\left| \left( \frac{t^k}{k!} A^k \right)_{ij} \right| \leq \frac{t^k}{k!} \left( n \max_{1 \leq p, q \leq n} |A_{pq}| \right)^k$$

en we zien dat de convergentiestraal  $\infty$  is.

Nu we de eerste vraag beantwoord hebben kunnen we laten zien dat we zo inderdaad de oplossing vinden. We mogen overigens van de oplossing spreken volgens de existentie- en eenduidigheidsstelling.



**Stelling 7.2.2** Zij  $A$  een constante  $n \times n$  matrix. Het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \vec{u}' &= A\vec{u}, \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}_0, \end{cases} \quad (7.3)$$

heeft als unieke oplossing  $\vec{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gedefinieerd door

$$\vec{u}(t) = e^{tA} \vec{u}_0.$$

**Bewijs:** Formeel zien we dat als volgt:

$$\vec{u}(0) = e^{0A} \vec{u}_0 = (I + 0A + \frac{1}{2}0^2A^2 + \frac{1}{6}0^3A^3 + \dots) \vec{u}_0 = \vec{u}_0$$

en

$$\vec{u}'(t) = \frac{d}{dt} (e^{tA} \vec{u}_0) = \frac{d}{dt} (I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{6}t^3A^3 + \dots) \vec{u}_0 \stackrel{?}{=}$$

(dit mag onmiddellijk voor eindig veel termen; voor  $\infty$ -veel is dat niet direct duidelijk)

$$\begin{aligned} &\stackrel{?}{=} \left( \frac{d}{dt} I + \frac{d}{dt} (tA) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}t^2A^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{6}t^3A^3 \right) + \dots \right) \vec{u}_0 = \\ &= (0 + A + tA^2 + \frac{1}{2}t^2A^3 + \dots) \vec{u}_0 = \\ &= A (I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \dots) \vec{u}_0 = Ae^{tA} \vec{u}_0 = A\vec{u}(t). \end{aligned}$$

De stap bij  $\stackrel{?}{=}$  is echter nog dubieus. Hier worden 'stiekem' twee limieten verwisseld<sup>2</sup>

$$\frac{d}{dt} (I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{6}t^3A^3 + \dots) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^N \left( \frac{(t+h)^k}{k!} A^k - \frac{t^k}{k!} A^k \right)}{h}$$

en

$$\left( \frac{d}{dt} I + \frac{d}{dt} (tA) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}t^2A^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{6}t^3A^3 \right) + \dots \right) =$$

<sup>2</sup>In het algemeen mag men deze volgorde niet verwisselen. Vergelijk met

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1.$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^N \left( \frac{(t+h)^k}{k!} A^k - \frac{t^k}{k!} A^k \right)}{h}$$

Dankzij een van de stellingen voor machtreeksen weten we dat we een machtreeks binnen de convergentiestraal kunnen differentiëren en zelfs dat we de oneindige som  $\Sigma$  en  $\frac{d}{dt}$  mogen verwisselen. Elke component van  $e^{tA} \vec{u}_0$  is een machtreeks met convergentiestraal  $\infty$  en de stap bij  $\frac{d}{dt}$  is bij nader inzien dus toch toegestaan.  $\square$

□

**Opgave 82** Laat zien dat

$$AB = BA \quad \Leftrightarrow \quad e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R}.$$

Hint voor  $\Leftarrow$ : tweemaal differentiëren en  $t = 0$  stellen.  $\text{---}$

□

**Opgave 83** Bereken met behulp van de definitie  $\exp \left( t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ .  $\text{---}$

## 7.3 Intermezzo Lineaire Algebra

De exponent van een matrix is hierboven goed gedefinieerd voor elke matrix en levert een oplossing van het beginwaardeprobleem (7.2). Tenslotte laten we zien hoe zo'n exponent is te berekenen. Daarvoor is enige kennis van de matrixrekening nodig of de hulp van Maple of Mathematica.

### 7.3.1 Enkele simpele exponenten

□

**Voorbeeld 35**

Als  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , dan  $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$  en we vinden

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Voorbeeld 36**

Als  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , dan  $A^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$  en er volgt

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha^k & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} k\alpha^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha^k & t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & t e^{t\alpha} \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Voorbeeld 37**

Als  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  dan  $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} \cos(t\beta) & e^{t\alpha} \sin(t\beta) \\ -e^{t\alpha} \sin(t\beta) & e^{t\alpha} \cos(t\beta) \end{pmatrix}$ .

Het berekenen hiervan is lastiger. Wel kunnen we vrij eenvoudig controleren dat  $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e^{t\alpha} \cos(t\beta) & e^{t\alpha} \sin(t\beta) \\ -e^{t\alpha} \sin(t\beta) & e^{t\alpha} \cos(t\beta) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} (\alpha \cos(t\beta) - \beta \sin(t\beta)) & e^{t\alpha} (\alpha \sin(t\beta) + \beta \cos(t\beta)) \\ -e^{t\alpha} (\alpha \sin(t\beta) + \beta \cos(t\beta)) & e^{t\alpha} (\alpha \cos(t\beta) - \beta \sin(t\beta)) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\alpha} \cos(t\beta) & e^{t\alpha} \sin(t\beta) \\ -e^{t\alpha} \sin(t\beta) & e^{t\alpha} \cos(t\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**7.3.2 Eigenwaarden en eigenvectoren**

In de transformaties spelen de zogenaamde eigenwaarden en eigenvectoren een belangrijke rol. Zij  $A$  een  $n \times n$  matrix.

- eigenwaarde
- eigenvector

**Definitie 7.3.1** Als  $A\vec{\phi} = \lambda\vec{\phi}$  met  $\vec{\phi} \neq \vec{0}$ , dan heet  $\lambda$  een eigenwaarde van  $A$  met eigenvector  $\vec{\phi}$ .

Als de beginwaarde  $\vec{u}_0$  een eigenvector van  $A$  is dan wordt het berekenen van de oplossing van

$$\begin{cases} \vec{u}' = A\vec{u}, \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \quad (7.4)$$

een peuleschil. Zie de volgende stelling.

**Stelling 7.3.2** Als  $A\vec{u}_0 = \lambda\vec{u}_0$ , dan is de oplossing van (7.4) te schrijven als:

$$\vec{u}(t) = e^{\lambda t} \vec{u}_0.$$

**Bewijs:**  $A\vec{u}_0 = \lambda\vec{u}_0$  en dus ook  $A^2\vec{u}_0 = A\lambda\vec{u}_0 = \lambda A\vec{u}_0 = \lambda^2\vec{u}_0$ . Evenzo volgt  $A^k\vec{u}_0 = \lambda^k\vec{u}_0$  en we vinden dat

$$e^{tA}\vec{u}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \vec{u}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda^k \vec{u}_0 = e^{\lambda t} \vec{u}_0.$$

Bovendien geldt  $\vec{u}(0) = e^{\lambda 0} \vec{u}_0 = \vec{u}_0$ . □

□

**Opgave 84** Bereken de oplossing van

$$\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}(t) \quad \text{met } \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

en voor dezelfde differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde

$$\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ respectievelijk } \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Een belangrijke hulp is de volgende stelling. Voor het bewijs verwijzen we naar lineaire algebra.

**Stelling 7.3.3** *Als de  $n \times n$  matrix  $A$   $k$  verschillende eigenwaarden  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  heeft, dan is het stelsel bijbehorende eigenvectoren  $\{\vec{\phi}_1, \dots, \vec{\phi}_k\}$  onafhankelijk.*

Als we bij de  $n \times n$  matrix  $A$   $n$  onafhankelijke eigenvectoren  $\{\vec{\phi}_1, \dots, \vec{\phi}_n\}$  zouden hebben dan kunnen we elke beginvoorwaarde  $\vec{u}_0$  schrijven als

$$\vec{u}_0 = c_1 \vec{\phi}_1 + c_2 \vec{\phi}_2 + \dots + c_n \vec{\phi}_n$$

en volgt uit de lineariteit dat de oplossing van (7.4) te schrijven is als

$$\vec{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{\phi}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{\phi}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \vec{\phi}_n.$$

Daarmee komen we bij de hamvraag:

*Hoe vinden we deze eigenwaarden en eigenvectoren?*

- De eigenwaarden kunnen we vinden met behulp van een determinant. Als  $A\vec{\phi} = \lambda\vec{\phi}$  dan geldt  $(A - \lambda I)\vec{\phi} = 0$ . Omdat  $\vec{\phi} \neq 0$  is  $A - \lambda I$  een singuliere matrix. Voor een singuliere matrix geldt  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Met andere woorden: de eigenwaarden zijn de nulpunten van de polynoom  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ . Deze  $p$  heet het *karakteristiek polynoom* van  $A$ .

► *karakteristiek polynoom*

**Opmerking:** Voor de twee bij twee matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  zijn de eigenwaarden de oplossingen van

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0.$$

Er zijn drie mogelijkheden voor de eigenwaarden van deze matrix:

- i. er zijn twee verschillende reële oplossingen  $\lambda = \lambda_1$  en  $\lambda = \lambda_2$ ;
- ii. er is één reële oplossing  $\lambda = \lambda_1$ ;
- iii. er zijn twee complexe oplossingen  $\lambda = \alpha + i\beta$  en  $\lambda = \alpha - i\beta$  met  $\beta \neq 0$  en  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- De eigenvectoren vinden we door met de nu bekende  $\lambda$  vervolgens het stelsel  $(A - \lambda I)\vec{\phi} = 0$  op te lossen.

**Opmerking:** Voor de twee bij twee matrix geldt het volgende. Bij twee verschillende eigenwaarden zijn de bijbehorende eigenvectoren onafhankelijk. In het geval dat er slechts één eigenwaarde is kan het voorkomen dat er slechts één onafhankelijke eigenvector is. Als er toch twee onafhankelijke eigenvectoren zijn kunnen we dat geval verder zo als bij twee verschillende reële eigenwaarden behandelen. We onderscheiden de volgende mogelijkheden.

- i. twee (misschien gelijke) reële eigenwaarden en twee onafhankelijke eigenvectoren;
- ii. één eigenwaarde en slechts één onafhankelijke eigenvector;
- iii. twee niet-reële eigenwaarden.



**Opgave 85** Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van

$$\begin{array}{lll}
 \text{a. } \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}; & \text{c. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; & \text{e. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 \text{b. } \begin{pmatrix} -26 & 10 \\ -20 & 19 \end{pmatrix}; & \text{d. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{f. } \begin{pmatrix} -9 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

We zullen de eigenwaarden en eigenfuncties nodig hebben voor het berekenen van de exponent van een matrix. Het bij een willekeurige matrix  $A$  direct berekenen van  $e^{tA}$  is een lastige zaak. Men probeert zo'n matrix  $A$  te transformeren naar een meer eenvoudige matrix  $S$ , dat wil zeggen een inverteerbare matrix<sup>3</sup>  $T$  te bepalen zodat  $A = TST^{inv}$ . Met behulp van  $e^{tS}$  kunnen we de exponent van  $A$  berekenen.

**Hulpstelling 7.3.4** Zij  $A$  een  $n \times n$  matrix. Als  $A = TST^{inv}$ , dan

$$e^{tA} = Te^{tS}T^{inv}.$$

**Bewijs:**

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (TST^{inv})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{TST^{inv}TST^{inv} \dots TST^{inv}}_{k \text{ termen}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} T \underbrace{SS \dots S}_{k \text{ termen}} T^{inv} = T \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S^k \right) T^{inv} = Te^{tS}T^{inv}.
 \end{aligned}$$

□

### 7.3.3 Transformaties voor 2 bij 2 matrices

Transformaties voor matrices naar enkele standaardvormen kunnen we op twee manieren aanpakken: via coëfficiënten in  $\mathbb{R}$  en soms ook via coëfficiënten in  $\mathbb{C}$ . Beide manieren hebben hun voor- en nadelen. Voor  $2 \times 2$  matrices volgen de te onderscheiden gevallen.

**Hulpstelling 7.3.5** Zij  $A$  een reële  $2 \times 2$  matrix met eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2$ .

- i. Als  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  en er zijn twee onafhankelijke eigenvectoren<sup>4</sup>, dan is er een reële  $2 \times 2$  transformatie-matrix  $T$  zo dat

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{inv}.$$

<sup>3</sup>Zo'n  $T$  wordt een transformatiematrix genoemd. De inverse matrix  $T^{inv}$  voldoet aan  $TT^{inv} = I = T^{inv}T$ . Vaak wordt deze genoteerd door  $T^{-1}$ .

<sup>4</sup>Volgens Stelling 7.3.3 zijn er twee onafhankelijke eigenvectoren als  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .



- ii. Als  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$  en er is slechts één onafhankelijke eigenvector, dan is er een reële  $2 \times 2$  transformatie-matrix  $T$  zo dat

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} T^{inv}.$$

- iii. Als  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  (en dus  $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2$  en  $\operatorname{Im} \lambda_1 = -\operatorname{Im} \lambda_2$ ), dan

- is er een complexe  $2 \times 2$  transformatie-matrix  $T_c$  zo dat

$$A = T_c \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T_c^{inv};$$

- en is er ook een reële  $2 \times 2$  transformatie-matrix  $T_r$  zo dat

$$A = T_r \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_1 & \operatorname{Im} \lambda_1 \\ -\operatorname{Im} \lambda_1 & \operatorname{Re} \lambda_1 \end{pmatrix} T_r^{inv}.$$

Verderop laten we zien hoe we  $T$  kunnen uitrekenen. Dit levert meteen het bewijs van deze hulpstelling.

Hiermee vinden we voor elke  $2 \times 2$  matrix de exp via de drie standaardvormen.

**Gevolg 7.3.6** Zij  $T$  een inverteerbare  $2 \times 2$  matrix waarvan de coëfficiënten complex mogen zijn en laat  $\alpha, \beta, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, t \in \mathbb{C}$ . Dan

- i.  $\exp \left( tT \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{inv} \right) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} T^{inv};$
- ii.  $\exp \left( tT \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{inv} \right) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} T^{inv};$
- iii.  $\exp \left( tT \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} T^{inv} \right) = T \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ -e^{\alpha t} \sin(\beta t) & e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{pmatrix} T^{inv}.$

Tenslotte laten we zien hoe de transformatie voor  $2 \times 2$  matrices kan worden berekend.

**Recept 7.3.7** Zij  $A$  een reële  $2 \times 2$  matrix met eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2$ .

- i. Als  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  en  $A$  heeft twee onafhankelijke eigenvectoren. Bereken twee onafhankelijke eigenvectoren  $\begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix}$ . Dan

$$A = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{pmatrix}^{inv}$$

- ii. Als  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$  en  $A$  heeft slechts één onafhankelijke eigenvector. Bereken een eigenvector  $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$  en bereken vervolgens een oplossing  $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  van het stelsel  $(A - \lambda I) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ . Dan

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_2 & \psi_2 \end{pmatrix}^{inv}$$

iii. Als  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Bereken de eigenvector  $\begin{pmatrix} \phi_1 + i\psi_1 \\ \phi_2 + i\psi_2 \end{pmatrix}$  bij  $\lambda_1$  met  $(\phi_1), (\psi_1) \in \mathbb{R}^2$ . Een eigenvector bij  $\lambda_2$  is dan  $\begin{pmatrix} \phi_1 - i\psi_1 \\ \phi_2 - i\psi_2 \end{pmatrix}$ .

Dan

- de complexe manier:

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\psi_1 & \phi_1 - i\psi_1 \\ \phi_2 + i\psi_2 & \phi_2 - i\psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\psi_1 & \phi_1 - i\psi_1 \\ \phi_2 + i\psi_2 & \phi_2 - i\psi_2 \end{pmatrix}^{inv};$$

- de reële manier:

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_1 & \operatorname{Im} \lambda_1 \\ -\operatorname{Im} \lambda_1 & \operatorname{Re} \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_2 & \psi_2 \end{pmatrix}^{inv}$$

Bij complexe eigenwaarden kan men zowel de reële als de complexe manier gebruiken.

**Opmerking:** Tenslotte nog een formule voor de inverse van een 2 bij 2 matrix. Als  $ad \neq bc$  dan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{inv} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$



**Opgave 86** Bereken  $e^{tA}$  voor  $A$  achtereenvolgens:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix};$ | d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$  | g. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$                     |
| b. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix};$ | e. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix};$  | h. $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$                     |
| c. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$  | f. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix};$ | i. $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix}.$ |

### 7.3.4 Transformaties voor $n$ bij $n$ matrices

Men kan laten zien dat iedere  $n \times n$  matrix  $M$  te schrijven is als product van drie complexe matrices  $TUT^{inv}$  :

$$M = T \begin{pmatrix} \square & & & & \\ & \square & & & \\ & & \square & & \\ & & & \square & \\ & & & & \square \end{pmatrix} T^{inv} \tag{7.5}$$

waarbij buiten de vierkanten de coëfficiënten alle 0 zijn en elk vierkant de volgende vorm heeft.

$$\square = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

met  $\alpha \in \mathbb{C}$ . In elk vierkant staat op de hoofddiagonaal hetzelfde getal. Verschillende vierkanten kunnen hetzelfde getal op de hoofddiagonaal hebben. Het simpelste vierkant is overigens  $\square_\alpha$ .

- *Jordan-matrix*
- *Jordan-kastje*

Een bovendriehoeksmatrix als in (7.5) heet een *Jordan-matrix*; een ondermatrix als in (7.6) een *Jordan-kastje*.

Men kan zien dat  $\exp(tM)$  samengesteld wordt uit de  $\exp(t\square)$ :

$$\exp(tM) = T \begin{pmatrix} \exp(t\square) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp\left(t \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix} T^{-1}$$

met nullen buiten de vierkanten. Voor ieder  $k \times k$  Jordankastje geldt

$$\exp \left( t \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \right) = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^k}{k!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^3}{3!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

**Opgave 87** Stel  $J$  is een  $n \times n$  Jordan-matrix.

- i. Laat zien dat  $\tilde{J}$  gedefinieerd door  $J = S\tilde{J}S^{-1}$  met

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varepsilon^n \end{pmatrix}$$

en  $\varepsilon \neq 0$  voldoet aan  $(\tilde{J})_{ii} = (J)_{ii}$  en  $(\tilde{J})_{ij} = \varepsilon (J)_{ij}$  voor  $i \neq j$ . Dus elke 1 van  $J$  buiten de diagonaal is vervangen door  $\varepsilon$ .

- ii. Stel  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  is een eigenwaarde van de reële matrix  $M$ . Laat zien dat  $\bar{\lambda}$ , de complex geconjugeerde, ook een eigenwaarde is.

De laatste vraag is voor degenen die bij een cursus lineaire algebra de begrippen geometrische en algebraïsche multipliciteit zijn tegengekomen. Laat zien dat de algebraïsche multipliciteit van  $\lambda$  en  $\bar{\lambda}$  gelijk zijn. Laat ook zien dat de geometrische multipliciteit van  $\lambda$  en  $\bar{\lambda}$  gelijk zijn.

In deel 2 van deze opgave zijn de eerste stappen gelegd voor een reële versie van Jordan-achtige matrix. Men kan laten zien dat iedere  $n \times n$  matrix  $M$  te schrijven is als product van drie reële matrices  $TUT^{inv}$  als in (7.5) waarbij in  $U$  buiten de vierkanten alleen 0 staat en elk vierkant een van de volgende vormen heeft:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ of } \begin{bmatrix} A & E & O & \cdots & O \\ O & A & E & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & & & \ddots & E \\ O & \cdots & \cdots & O & A \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

waarbij  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  en

$$(A) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad (O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Opmerking:** Ook hier is er een transformatie  $S$  waarmee men in plaats van  $E, E, E, \dots$  buiten de diagonaal  $E, \varepsilon E, \varepsilon^2 E, \dots$  kan krijgen.

### 7.3.5 De $n \times n$ transformatie voor symmetrische matrices

De transformatie van een  $n \times n$  matrix op Jordan-vorm is meestal erg vervelend. Voor *symmetrische matrices* is het minder lastig.

► *symmetrische matrices*

**Definitie 7.3.8** De  $n \times n$  matrix  $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$  heet *symmetrisch* als  $m_{ij} = m_{ji}$  voor alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

► *inproduct*

Voor de formulering hebben we het *inproduct*  $\vec{\psi} \cdot \vec{\varphi}$  van twee vectoren nodig. Herinner je dat

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

**Stelling 7.3.9** Als  $M$  een *symmetrische*  $n \times n$  matrix is, dan zijn er  $n$  *eigen*-vectoren  $\vec{\psi}_1, \dots, \vec{\psi}_n$ . Bovendien zijn deze zo te kiezen dat geldt

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_i \cdot \vec{\psi}_j &= 0 \text{ voor alle } i \neq j, \\ \vec{\psi}_i \cdot \vec{\psi}_i &= 1 \text{ voor alle } i. \end{aligned}$$

► *orthonormale basis*

Anders gezegd: er is een *orthonormale basis*  $\{\vec{\psi}_i; 1 \leq i \leq n\}$  in  $\mathbb{R}^n$  van *eigen*-vectoren van  $M$ .

**Gevolg 7.3.10** Zij  $M$  en  $\{\vec{\psi}_i; 1 \leq i \leq n\}$  als in de vorige stelling. Noem  $\lambda_i$  de eigenwaarde bij  $\vec{\psi}_i$ . Definiëren we

$$T = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{\psi}_1 & \vec{\psi}_2 & \vec{\psi}_3 & \cdots & \vec{\psi}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

dan vinden we dat

$$M = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} T^T$$

met  $T^T$  de in de hoofddiagonaal gespiegelde  $T$  (de ge $\top$ ransponeerde matrix). Bovendien geldt voor iedere  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$M\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\vec{\psi}_i \cdot \vec{u}) \vec{\psi}_i$$

en dus ook

$$\exp(tM)\vec{u} = \sum_{i=1}^n e^{t\lambda_i} (\vec{\psi}_i \cdot \vec{u}) \vec{\psi}_i. \quad (7.8)$$

□

**Opgave 88** Bereken de oplossing van

$$\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}(t) \quad \text{met } \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 7.3.6 Matrix-norm

Voor een vector  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  hebben we de lengte in (5.12) gedefinieerd door

$$\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (7.9)$$

► *matrix-norm* Voor reële  $n \times n$  matrices (noem de verzameling hiervan  $M_{n \times n}$ ) definiëren we een *norm* met behulp van deze lengte voor vectoren door

$$\|A\| = \max \left\{ |A\vec{\psi}|; \vec{\psi} \in \mathbb{R}^n \text{ met } |\vec{\psi}| = 1 \right\}. \quad (7.10)$$

□

**Opgave 89**

- a. Laat zien dat deze matrixnorm voldoet aan de eigenschappen van een norm. Deze eigenschappen staan beschreven op bladzijde 5.5.2.
- b. Zij  $\vec{\psi} \in \mathbb{R}^n$  en  $A \in M_{n \times n}$ . Laat zien dat

$$|A\vec{\psi}| \leq \|A\| |\vec{\psi}|.$$

- c. Deze matrix-norm voldoet nog aan een vierde eigenschap. Voor alle  $A, B \in M_{n \times n}$  geldt:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Laat ook dit zien.



**Opgave 90** Zij  $\lambda$  een eigenwaarde van de matrix  $A \in M_{n \times n}$ . Laat zien dat geldt  $|\lambda| \leq \|A\|$ .

## 7.4 Classificatie van lineaire stelsels in $\mathbb{R}^2$

We beschouwen het beginvoorwaardeprobleem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

We hebben gezien dat de oplossing van dit stelsel te schrijven is als

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \exp\left(t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{pmatrix}.$$

Het gedrag van deze oplossingen wordt bepaald door de eigenwaarden van de matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Het berekenen van deze exponent verloopt via de eigenwaarden en eigenvectoren. Een eigenwaarde  $\lambda$  vinden we door

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

op te lossen. Dus een eigenwaarde  $\lambda$  voldoet aan  $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ . Een stap verder rekenen levert

$$\left(\lambda - \frac{a+d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a-d)^2 + bc.$$

Vervolgens maken we onderscheid naar het teken van  $\frac{1}{4}(a-d)^2 + bc$ . Een positief teken levert twee reële oplossingen en een negatief teken twee complexe oplossingen met gelijk reëel deel en tegengesteld imaginair deel ongelijk 0. Bij  $\frac{1}{4}(a-d)^2 + bc = 0$  krijgen we één oplossing.

We kunnen op twee manieren naar de eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2$  van  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sorteren. Allereerst door reëel/niet-reëel:

- ▶ *knooppunt*
  - ▶ *knoop*
  - ▶ *ontaard knooppunt*
  - ▶ *spiraalpunt*
  - ▶ *focus*
- $\lambda_1, \lambda_2$  reëel; als  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  dan zijn er twee onafhankelijke eigenvectoren  $\vec{\varphi}_1$  en  $\vec{\varphi}_2$ , of,  $\lambda_1 = \lambda_2$  met de eis dat er twee onafhankelijke eigenvectoren  $\vec{\varphi}_1$  en  $\vec{\varphi}_2$  zijn. Dan noemen we de oorsprong een *knooppunt* of ook wel kortweg een *knoop*.
  - $\lambda_1 = \lambda_2$  reëel en er is slechts één onafhankelijke eigenvector  $\vec{\varphi}_1$ . Dan noemen we de oorsprong een *ontaard knooppunt*.
  - $\lambda_1, \lambda_2$  complex (met imaginair deel  $\neq 0$ ); dan  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  en  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ . Dan noemen we de oorsprong een *spiraalpunt* of ook wel een *focus*.

Vervolgens kunnen we ook sorteren naar convergentiegedrag voor  $t \rightarrow \infty$ .

#### Definitie 7.4.1 Een lineair stelsel heet

- ▶ *stabiël*
  - ▶ *asymptotisch stabiël*
  - ▶ *instabiël*
- i. *stabiël, als elke oplossing begrensd blijft:*  
voor elke  $\vec{u}(0)$  is er een getal  $M$  waarvoor geldt  $|\vec{u}(t)| \leq M$  voor alle  $t \geq 0$ ;
  - ii. *asymptotisch stabiël, als elke oplossing naar 0 convergeert:*  
voor elke  $\vec{u}(0)$  geldt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{u}(t) = 0$ ;
  - iii. *instabiël, als er een oplossing naar '∞' gaat:*  
er is een  $\vec{u}(0)$  zodanig dat  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{u}(t)| = \infty$ .

**Opmerking:** Als een lineair stelsel asymptotisch stabiël is, dan is het ook 'gewoon' stabiël.

Men kan zien dat voor het tweedimensionale stelsel geldt:

- als  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$  of  $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$  dan instabiël;
- als  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$  en  $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$  dan asymptotisch stabiël.

Bij een eigenwaarde met reëel deel gelijk aan 0 wordt het lastiger:

- als  $\lambda_1 = 0$  en  $\lambda_2 < 0$  dan stabiël, maar niet asymptotisch stabiël;
- als  $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$  en twee onafhankelijke eigenvectoren, dan stabiël, maar niet asymptotisch stabiël;
- als  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  en slechts één onafhankelijke eigenvector, dan instabiël.

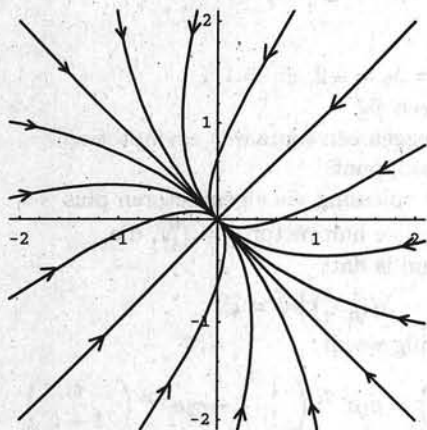
Er zijn nog enkele speciale namen in zwang.

- ▶ *zadelpunt*
  - ▶ *centrum*
- Als  $\lambda_1 > 0$  en  $\lambda_2 < 0$ , dus een speciaal instabiël geval, dan noemen we de oorsprong een *zadelpunt*.
  - Als  $\lambda_1 = 0 + i\beta$  en  $\lambda_2 = 0 - i\beta$  met  $\beta \neq 0$ , dus  $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$  en  $\operatorname{Im} \lambda_1 = -\operatorname{Im} \lambda_2 \neq 0$ , dan heet de oorsprong een *centrum*.

## 7.4.1 Voorbeelden

□

## Voorbeeld 38



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2,$$

met

$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

 $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  dus een asymp. stabiel knooppunt.

Algemene oplossing via eigenvectoren:

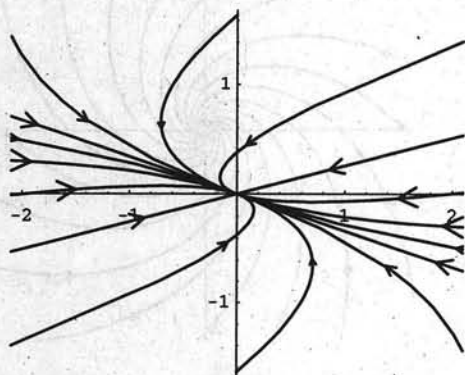
$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Oplossing met beginwaarde:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

□

## Voorbeeld 39



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -11 & -12 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = -14, \lambda_2 = -7,$$

met

$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

 $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  dus een asymp. stabiel knooppunt.

Algemene oplossing via eigenvectoren:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-14t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-7t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

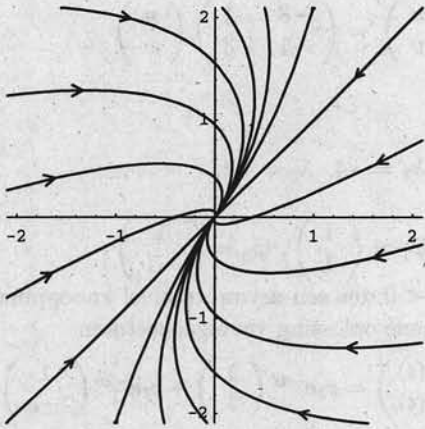
Oplossing met beginwaarde:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7}e^{-14t} + \frac{3}{7}e^{-7t} & \frac{12}{7}e^{-14t} - \frac{12}{7}e^{-7t} \\ \frac{1}{7}e^{-14t} - \frac{1}{7}e^{-7t} & \frac{3}{7}e^{-14t} + \frac{4}{7}e^{-7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$



v

## Voorbeeld 40



Oplossing met beginwaarde

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \quad \vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

en er is geen  $\vec{\varphi}_2$ .

Dat wil zeggen een (ontaard) asymptotisch stabiel knooppunt.

Algemene oplossing via eigenvectoren plus onafhankelijke hulpvector  $\vec{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , die zo berekend is dat:

$$\left( \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{\psi} = \vec{\varphi}_1.$$

De oplossing wordt

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{-2t} & t e^{-2t} \\ -t e^{-2t} & (1+t)e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

v

## Voorbeeld 41

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = -1 - i, \quad \lambda_2 = -1 + i$$

met

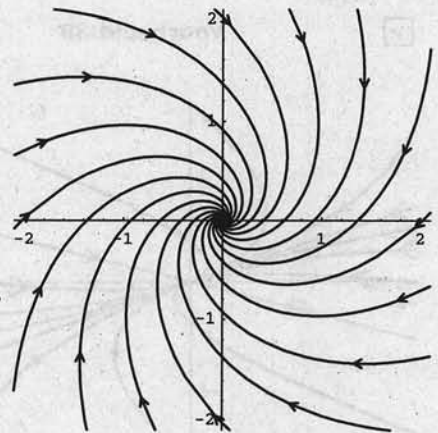
$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Re  $\lambda_1, \text{Re } \lambda_2 < 0$  dus een asymptotisch stabiel focus.

Oplossing met beginwaarde:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$



□

**Voorbeeld 42**

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = -1 - i, \quad \lambda_2 = -1 + i$$

met

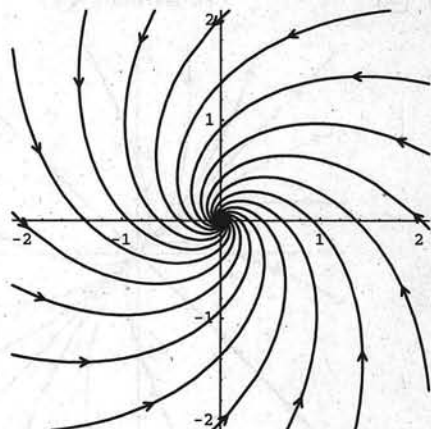
$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Re  $\lambda_1, \text{Re } \lambda_2 < 0$  dus een asymptotisch stabiele focus.

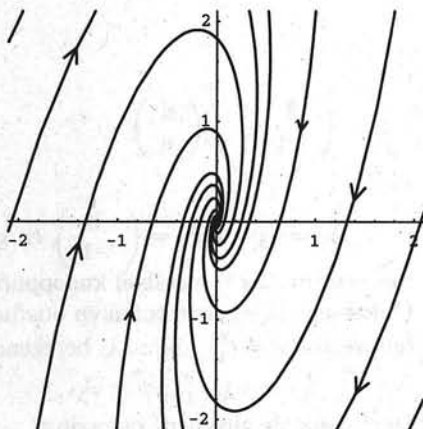
Oplossing met beginwaarde

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$



□

**Voorbeeld 43**



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = -2 - 3i, \quad \vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -2 + 3i, \quad \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Re  $\lambda_1, \text{Re } \lambda_2 < 0$  dus een asymptotisch stabiel focus.

Oplossing met beginwaarde wordt via een transformatie

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \left( \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t \right) & \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t \\ -\frac{10}{3} e^{-2t} \sin 3t & e^{-2t} \left( \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

De reële transformatie kan men als volgt gebruiken. Met

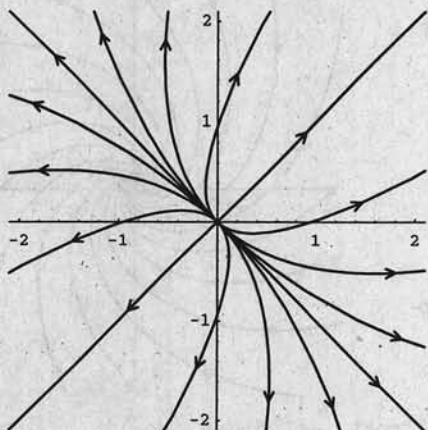
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

volgt

$$\begin{aligned} \exp \left( t \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \exp \left( t \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \cos 3t & -e^{-2t} \sin 3t \\ e^{-2t} \sin 3t & e^{-2t} \cos 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} \left( \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t \right) & \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t \\ -\frac{10}{3} e^{-2t} \sin 3t & e^{-2t} \left( \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

v

## Voorbeeld 44



Oplossing met beginwaarde:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2,$$

met

$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

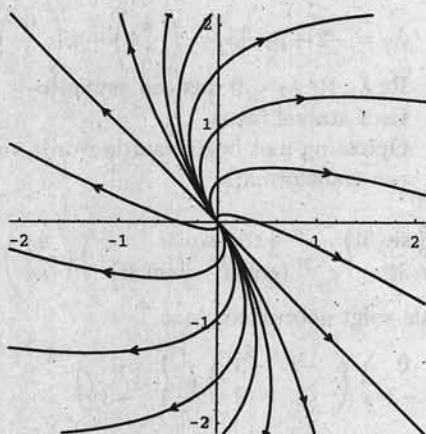
 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , dus een instabiel knooppunt.

Algemene oplossing via eigenvectoren:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

v

## Voorbeeld 45

We gebruiken hier dat als  $A\vec{\varphi}_1 = \lambda_1\vec{\varphi}_1$  en  $A\vec{\psi} = \lambda_1\vec{\psi} + \vec{\varphi}_1$  met  $\lambda_1 = 2$ , wat overeenkomt met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Dan geldt  $e^{tA}\vec{\varphi}_1 = e^{t\lambda_1}\vec{\varphi}_1$  en  $e^{tA}\vec{\psi} = e^{t\lambda_1}\vec{\psi} + te^{t\lambda_1}\vec{\varphi}_1$ . Dit laatste komt overeen met

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \exp\left(t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en geen } \vec{\varphi}_2,$$

dus een (ontaard) instabiel knooppunt.

Oplossing via eigenvectoren en onafhankelijke

hulpvector  $\vec{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , die zo is berekend dat:

$$\left( \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{\psi} = \vec{\varphi}_1.$$

Dan wordt de algemene oplossing

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

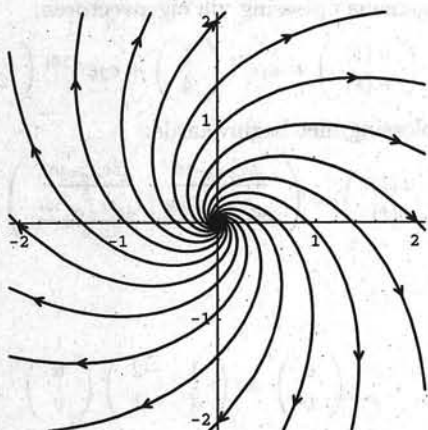
Oplossing met beginwaarde

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & -te^{2t} + e^{2t} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

v

Voorbeeld 46



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = 1 - i, \quad \vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1 + i, \quad \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

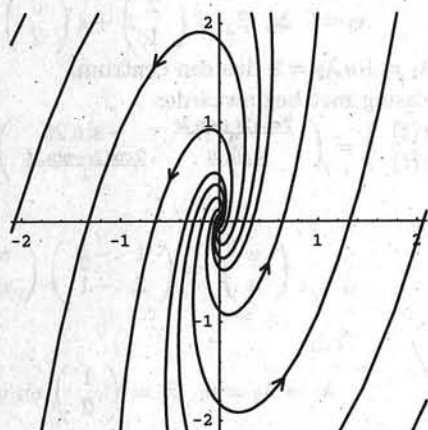
 $\text{Re } \lambda_1, \text{Re } \lambda_2 > 0$  dus een instabiel focus.

Oplossing met beginwaarde:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

v

Voorbeeld 47



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = 2 - 3i, \quad \vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2 + 3i, \quad \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

 $\text{Re } \lambda_1, \text{Re } \lambda_2 > 0$  dus een instabiel focus.

Oplossing met beginwaarde:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} (\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t) & -\frac{1}{3} e^{2t} \sin 3t \\ \frac{10}{3} e^{2t} \sin 3t & e^{2t} (\cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

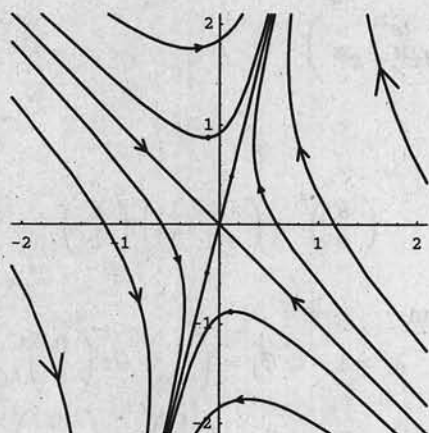
$$\text{Met} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

volgt

$$\exp \left( t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{2t} (\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t) & -\frac{1}{3} e^{2t} \sin 3t \\ \frac{10}{3} e^{2t} \sin 3t & e^{2t} (\cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t) \end{pmatrix}$$

v

## Voorbeeld 48



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -10, \vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$  dus een zadelpunt.

Algemene oplossing via eigenvectoren:

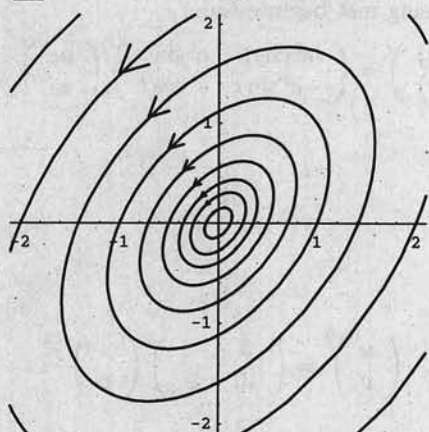
$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-10t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Oplossing met beginwaarde:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{5t} + 4e^{-10t}}{5} & \frac{e^{5t} - e^{-10t}}{5} \\ \frac{4e^{5t} - 4e^{-10t}}{5} & \frac{4e^{5t} - e^{-10t}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

v

## Voorbeeld 49



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = 2i, \vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -2i, \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

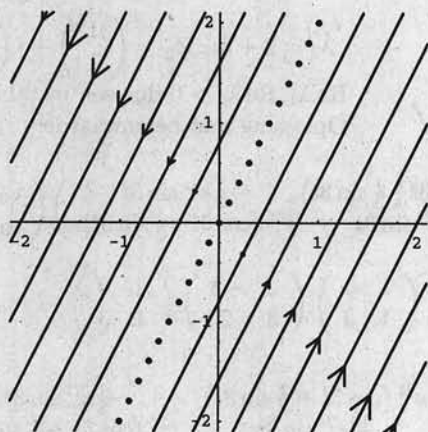
Re  $\lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$  dus een centrum.

Oplossing met beginwaarde:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cos 2t + \sin 2t}{2} & -\sin 2t \\ \frac{5 \sin 2t}{4} & \frac{2 \cos 2t - \sin 2t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

v

## Voorbeeld 50



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dan

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en geen } \vec{\varphi}_2.$$

$$\text{Neem } \vec{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Algemene oplossing:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1+t \\ 0+2t \end{pmatrix}.$$

Oplossing met beginwaarde

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & -\frac{1}{2}t \\ 2t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Strikt gesproken is dit een instabiele ontaarde knoop.

## 7.5 Hoe te berekenen in $\mathbb{R}^3$ en hoger?

We zullen alleen een voorbeeld geven. In de meeste gevallen krijgt het rekenwerk een dramatische omvang of moet men zelfs op numerieke benaderingen terugvallen.

□

### Voorbeeld 51

We beschouwen

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 10 & -4 \\ -10 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Voor de eigenwaarden  $\lambda$  geldt

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 10 & -4 \\ -10 & -1-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

We vinden  $\lambda_1 = -1 - 10i$ ,  $\lambda_2 = -1 + 10i$  en  $\lambda_3 = 1$ . De laatste eigenwaarde heeft als vector  $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Na enig rekenwerk vinden we

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 10 & -4 \\ -10 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{inv} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

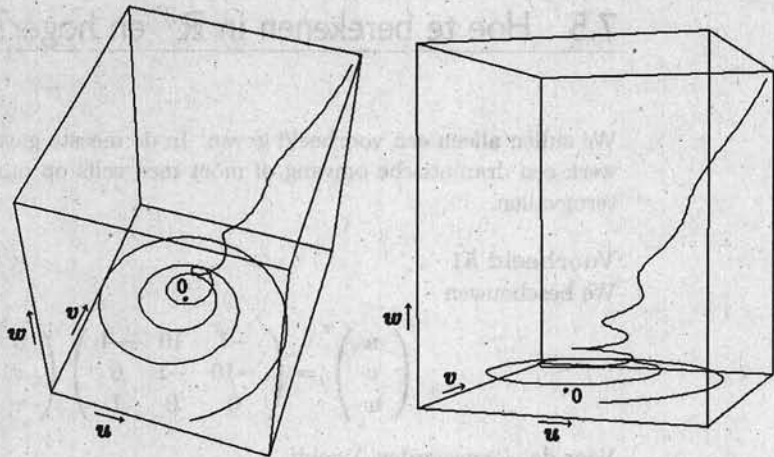
en vervolgens

$$\begin{aligned} \exp \left( t \begin{pmatrix} -1 & 10 & -4 \\ -10 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \exp \left( t \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{inv} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(10t) & e^{-t} \sin(10t) & 0 \\ -e^{-t} \sin(10t) & e^{-t} \cos(10t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tenslotte

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(10t) & e^{-t} \sin(10t) & \frac{e^{-t}(-\cos(10t) - e^{-t} \sin(10t)) + e^t}{2} \\ -e^{-t} \sin(10t) & e^{-t} \cos(10t) & \frac{e^{-t}(\sin(10t) - \cos(10t)) + e^t}{2} \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Voor het uitrekenen hebben we MAPLE gebruikt. Met MATHEMATICA hebben we vervolgens een mogelijke baan getekend:



## 7.6 (In)stabiliteit voor lineaire stelsels

Zij  $A$  een reële  $n \times n$  matrix met constante coëfficiënten en beschouw

$$\begin{cases} \vec{U}' = A\vec{U}, \\ \vec{U}(0) = \vec{U}_0. \end{cases} \quad (7.11)$$

Laat  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  de eigenwaarden van de matrix  $A$  zijn.

**Propositie 7.6.1** *Als  $\text{Re } \lambda_i < 0$  voor alle  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , dan geldt voor alle  $\vec{U}_0$  dat de oplossing  $\vec{U}(t)$  van (7.11) voldoet aan*

$$|\vec{U}(t)| \rightarrow 0 \text{ als } t \rightarrow \infty.$$

*Het stelsel (7.11) heet asymptotisch stabiel.*

**Bewijs:** We zullen alleen het geval bewijzen waarbij  $A$  reële eigenwaarden en  $n$  onafhankelijke eigenvectoren heeft. Definieer  $\alpha > 0$  door

$$\alpha = - \left( \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \right).$$

In dat geval is er een transformatie-matrix  $T$  die  $A$  diagonaliseert:

$$A = T\Lambda T^{-1} \quad \text{met } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

We gebruiken de (Lyapunov-)functie  $v(t) = |T^{-1}\vec{U}(t)|^2$ . Omdat

$$|T^{-1}\vec{U}(t)|^2 = T^{-1}\vec{U}(t) \cdot T^{-1}\vec{U}(t)$$

vinden we

$$\begin{aligned} v'(t) &= 2T^{\text{inv}}\vec{U}'(t) \cdot T^{\text{inv}}\vec{U}(t) = \\ &= 2T^{\text{inv}}A\vec{U}(t) \cdot T^{\text{inv}}\vec{U}(t) = \\ &= 2\Lambda T^{\text{inv}}\vec{U}(t) \cdot T^{\text{inv}}\vec{U}(t) \leq \\ &\leq -2\alpha \left( T^{\text{inv}}\vec{U}(t) \cdot T^{\text{inv}}\vec{U}(t) \right) = -2\alpha v(t). \end{aligned}$$

Er volgt dat

$$\frac{d}{dt} (e^{2\alpha t} v(t)) = e^{-2\alpha t} (v'(t) + 2\alpha v(t)) \leq 0$$

en dus dat

$$e^{2\alpha t} v(t) \leq v(0).$$

Met andere woorden

$$\left| T^{\text{inv}}\vec{U}(t) \right| \leq e^{-\alpha t} \left| T^{\text{inv}}\vec{U}_0 \right|$$

en we zien dat  $\left| \vec{U}(t) \right| \rightarrow 0$  als  $t \rightarrow \infty$ .

Complexe eigenwaarden of minder dan  $n$  onafhankelijke eigenvectoren maken het bewijs veel technischer. Het achterliggende idee blijft hetzelfde.  $\square$

**Propositie 7.6.2** *Als  $\text{Re } \lambda_i > 0$  voor één of meer  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , dan is er een  $\vec{U}_0$  (willekeurig dichtbij  $\vec{0}$ ) zodanig, dat de oplossing  $\vec{U}(t)$  van (7.11) voldoet aan*

$$\left| \vec{U}(t) \right| \rightarrow \infty \text{ als } t \rightarrow \infty.$$

*Het stelsel (7.11) heet instabiel.*

**Bewijs:** We geven alleen het achterliggende idee. Zij  $\lambda_i$  een eigenfunctie met  $\text{Re } \lambda_i > 0$  en zij  $\vec{\varphi}$  de bijbehorende eigenvector. Voor  $\vec{U}_0 = \varepsilon \text{Re}(\vec{\varphi}_i)$  krijgt men dat  $\left| \vec{U}(t) \right| \rightarrow \infty$  als  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

Als alle eigenwaarden voldoen aan  $\text{Re } \lambda_i \leq 0$  en er zijn er enkele met  $\text{Re } \lambda_i = 0$  dan is het stelsel zeker niet asymptotisch stabiel. Veel meer is er zonder nader onderzoek niet te concluderen. Het stelsel kan, maar hoeft niet instabiel te zijn.

$\square$

**Opgave 91** Onderzoek de (in)stabiliteit van:

i.  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$

ii.  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$

iii.  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$

iv.  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$

v.  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$



$$\text{vi. } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

$$\text{vii. } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$



**Opgave 92** Bereken de oplossingen in de vorige opgave.



**Opgave 93** Laat zien dat voor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ geldt } e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & t \cos t & t \sin t \\ -\sin t & \cos t & -t \sin t & t \cos t \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

## 7.7 Het inhomogene stelsel

Tenslotte beschouwen we lineaire stelsels met een bronterm:

$$\begin{cases} \vec{U}'(t) = A\vec{U}(t) + \vec{F}(t), \\ \vec{U}(0) = \vec{U}_0 \end{cases} \quad (7.12)$$

► *variatie van constante*

met  $\vec{U}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  een reële  $n \times n$ -matrix en  $\vec{F} \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ . Net als voor het scalaire probleem bestaat er een *variatie-van-constanten*-methode om met behulp van de oplossing van (7.2) een oplossing van (7.12) te schrijven. We geven de recepten.

De homogene beginwaardeproblemen:

$$\begin{cases} u'(t) = au(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \Leftrightarrow u(t) = e^{at}u_0,$$

$$\begin{cases} \vec{U}'(t) = A\vec{U}(t), \\ \vec{U}(0) = \vec{U}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{U}(t) = e^{At}\vec{U}_0.$$

De inhomogene beginwaardeproblemen:

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) + f(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \Leftrightarrow u(t) = e^{at}u_0 + \int_{s=0}^t e^{a(t-s)}f(s)ds,$$

$$\begin{cases} \vec{U}'(t) = A\vec{U}(t) + \vec{F}(t), \\ \vec{U}(0) = \vec{U}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{U}(t) = e^{At}\vec{U}_0 + \int_{s=0}^t e^{A(t-s)}\vec{F}(s)ds.$$



**Opgave 94** Laat zien dat beide formules voor  $\vec{U}$  aan de rechterzijden inderdaad oplossingen zijn van de differentiaalvergelijkingen. Je mag gebruiken dat  $e^{A(t-s)} = e^{At}e^{-As}$ . Waarom zijn deze  $\vec{U}$  de enige oplossingen?

□

**Opgave 95** We beschouwen (7.12) met  $\vec{U}_0 = 0$  en  $\vec{F}(t) = e^{at}\vec{\phi}$  waarbij  $\vec{\phi} \in \mathbb{R}^n$  een eigenvector is van  $A$  met eigenwaarde  $\lambda$ , dus  $A\vec{\phi} = \lambda\vec{\phi}$ .

- i. Geef een formule zonder integraal voor de oplossing als  $\lambda \neq a$ .
- ii. Geef een formule zonder integraal voor de oplossing als  $\lambda = a$ .

□

**Opgave 96** Bereken de oplossing van

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

**Opgave 97** Zij  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . We vergelijken de  $n^{\text{de}}$ -orde g.d.v.

$$u^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{(k)}(t) \tag{7.13}$$

met het eerste orde stelsel

$$\begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n-2}(t) \\ u_{n-1}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n-2}(t) \\ u_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

- i. Laat zien dat  $e^{\lambda t}$  een oplossing is van (7.13) dan en slechts dan als  $\lambda$  een eigenwaarde is van de matrix in (7.14).
- ii. Laat zien dat bij iedere eigenwaarde van de matrix in (7.14) hoogstens één onafhankelijke eigenvector bestaat.
- iii. Laat zien dat  $te^{\lambda t}$  een oplossing is van (7.13) dan en slechts dan als  $\lambda$  een eigenwaarde is van de matrix in (7.14) met (algebraïsche) multiplicitéit minimaal 2.

Exercise 87. (a) Find the matrix  $A$  such that  $A^2 = A$  and  $\text{rank}(A) = 2$ .  
 (b) Find the matrix  $A$  such that  $A^2 = -A$  and  $\text{rank}(A) = 2$ .

Exercise 88. Let  $A$  be a matrix with  $\text{rank}(A) = 2$ .  
 (a) Find the matrix  $B$  such that  $AB = BA = A$ .  
 (b) Find the matrix  $C$  such that  $CA = AC = A$ .

Exercise 89. Find the matrix  $A$  such that

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercise 90. Let  $A$  be a matrix with  $\text{rank}(A) = 2$ .  
 (a) Find the matrix  $B$  such that  $AB = BA = A$ .  
 (b) Find the matrix  $C$  such that  $CA = AC = A$ .

17.10

$$A^{-1}(b) = \sum_{i=1}^n a_i^{-1} b_i$$

that the matrix  $A$  is

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17.11

Exercise 91. Let  $A$  be a matrix with  $\text{rank}(A) = 2$ .  
 (a) Find the matrix  $B$  such that  $AB = BA = A$ .  
 (b) Find the matrix  $C$  such that  $CA = AC = A$ .

Exercise 92. Let  $A$  be a matrix with  $\text{rank}(A) = 2$ .  
 (a) Find the matrix  $B$  such that  $AB = BA = A$ .  
 (b) Find the matrix  $C$  such that  $CA = AC = A$ .

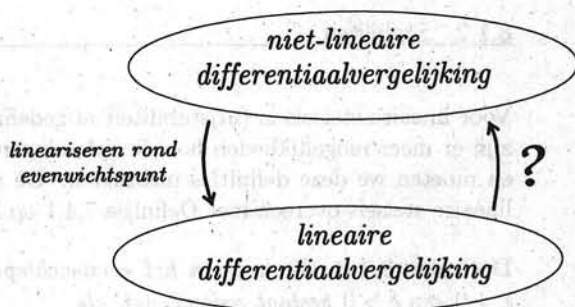
Exercise 93. Let  $A$  be a matrix with  $\text{rank}(A) = 2$ .  
 (a) Find the matrix  $B$  such that  $AB = BA = A$ .  
 (b) Find the matrix  $C$  such that  $CA = AC = A$ .

Exercise 94

# 8. KWALITATIEVE ANALYSE NIET-LINEAIRE STELSLS

## 8.1 Niet-lineaire stelsels en linearisaties

Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen zijn meestal niet op te lossen met hulp van een expliciete formule. Wat overblijft is direct eigenschappen van de oplossing af te leiden. Al heeft men geen formule de existentie en eenduidigheidsstelling levert, mits aan de betreffende voorwaarden is voldaan, bij passende beginvoorwaarde een eenduidige oplossing. Een manier om toch enkele eigenschappen af te leiden is om de niet-lineaire differentiaalvergelijking te gaan vergelijken met een geschikte lineaire differentiaalvergelijking.



### 8.1.1 Lineariseren

We bekijken het autonome stelsel

$$\begin{cases} \vec{u}' &= \vec{F}(\vec{u}), \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}_0, \end{cases} \quad (8.1)$$

met  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  differentieerbaar.

► *evenwichtspunt*

**Definitie 8.1.1** We noemen  $\vec{u}_e \in \mathbb{R}^n$  een evenwichtspunt van de differentiaalvergelijking  $\vec{u}' = \vec{F}(\vec{u})$  als  $\vec{F}(\vec{u}_e) = 0$ .

Als  $\vec{u}_0 = \vec{u}_e$  dan is  $\vec{u}(t) \equiv \vec{u}_e$  een constante oplossing van deze differentiaalvergelijking. Voor beginwaarden in de buurt van  $\vec{u}_e$  zullen we de oplossing van (8.1) vergelijken met de oplossing van

$$\begin{cases} \vec{v}' &= \vec{F}'(\vec{u}_e)(\vec{v} - \vec{u}_e), \\ \vec{v}(0) &= \vec{u}_0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Merk op dat  $\vec{F}$  differentieerbaar in  $\vec{u}_e$  betekent dat

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{u}) &= \vec{F}(\vec{u}_e) + \vec{F}'(\vec{u}_e)(\vec{u} - \vec{u}_e) + \mathcal{O}(\vec{u} - \vec{u}_e) = \\ &= \vec{F}'(\vec{u}_e)(\vec{u} - \vec{u}_e) + \mathcal{O}(\vec{u} - \vec{u}_e).\end{aligned}$$

waarbij de restterm  $\mathcal{O}(\vec{u} - \vec{u}_e)$  voldoet aan

$$\lim_{\vec{u} \rightarrow \vec{u}_e} \frac{|\mathcal{O}(\vec{u} - \vec{u}_e)|}{|\vec{u} - \vec{u}_e|} = 0.$$

De afgeleide  $\vec{F}'(\vec{u}_e)$  is een  $n \times n$ -matrix.

► *gelineari-  
seerde d.v.* **Definitie 8.1.2** Als  $\vec{u}_e$  een evenwichtspunt is van differentiaalvergelijking  $\vec{u}' = \vec{F}(\vec{u})$  dan heet  $\vec{u}' = \vec{F}'(\vec{u}_e)(\vec{u} - \vec{u}_e)$  de bijbehorende rond  $\vec{u}_e$  gelineariseerde differentiaalvergelijking.

## 8.1.2 Stabiliteit

Voor lineaire stelsels is (in)stabiliteit al gedefinieerd. Bij niet-lineaire stelsels zijn er meer mogelijkheden hoe de oplossingen van zo'n stelsel zich gedragen en moeten we deze definities uitbreiden. De volgende definities komen voor lineaire stelsels overeen met Definitie 7.4.1 op bladzijde 124.

► *stabil*

**Definitie 8.1.3** We noemen het evenwichtspunt  $\vec{u}_e$  *stabil* als er bij iedere  $\varepsilon > 0$  een  $\delta > 0$  bestaat zodanig dat, als

$$|\vec{u}_0 - \vec{u}_e| < \delta$$

dan geldt voor alle  $t > 0$

$$|\vec{u}(t) - \vec{u}_e| < \varepsilon.$$

Met andere woorden,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :

als  $\vec{u}_0$  in een  $\delta$ -omgeving van  $\vec{u}_e$  start,  
dan blijft  $\vec{u}(t)$  in een  $\varepsilon$ -omgeving van  $\vec{u}_e$ .

► *asymptotisch  
stabil*

**Definitie 8.1.4** We noemen het evenwichtspunt  $\vec{u}_e$  *asymptotisch stabil* als er bij iedere  $\varepsilon > 0$  een  $\delta > 0$  bestaat zodanig dat, als

$$|\vec{u}_0 - \vec{u}_e| < \delta$$

dan geldt voor alle  $t > 0$

$$|\vec{u}(t) - \vec{u}_e| < \varepsilon$$

en bovendien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{u}(t) = \vec{u}_e.$$

Met andere woorden,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :

als  $\vec{u}_0$  in een  $\delta$ -omgeving van  $\vec{u}_e$  start,  
dan blijft  $\vec{u}(t)$  in een  $\varepsilon$ -omgeving van  $\vec{u}_e$  en convergeert naar  $\vec{u}_e$  voor  $t \rightarrow \infty$ .

► instabiel

**Definitie 8.1.5** We noemen het evenwichtspunt  $\vec{u}_e$  instabiel als er een  $\varepsilon > 0$  is zodat er bij iedere  $\delta > 0$  minstens een  $\vec{u}_0$  bestaat met

$$|\vec{u}_0 - \vec{u}_e| < \delta$$

en voor een  $t > 0$

$$|\vec{u}(t) - \vec{u}_e| > \varepsilon.$$

Met andere woorden:  $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0$  zodat

er een  $\vec{u}_0$  in de  $\delta$ -omgeving van  $\vec{u}_e$  te vinden is  
waarbij  $\vec{u}(t)$  voor een  $t > 0$  de  $\varepsilon$ -omgeving verlaat.

Voor de lineaire stelsels komt dat overeen met de lineaire stabiliteit die daar gedefinieerd is.

### 8.1.3 Van gelineariseerde terug naar niet-lineaire stelsels

De stelling doet een uitspraak over het niet-lineaire probleem aan de hand van het gelineariseerde probleem.

**Stelling 8.1.6** Stel dat voor elke eigenwaarde  $\lambda_i$  van de matrix  $\vec{F}'(\vec{u}_e)$  geldt dat  $\operatorname{Re} \lambda_i < -\gamma < 0$ . Dan is er  $\delta > 0$  en  $M > 0$  zodanig dat voor alle  $\vec{u}_0$  met

$$|\vec{u}_0 - \vec{u}_e| < \delta$$

en alle  $t \geq 0$  geldt dat de oplossing van (8.1) voldoet aan

$$|\vec{u}_0 - \vec{u}_e| \leq M e^{-\gamma t} |\vec{u}_0 - \vec{u}_e|. \quad (8.3)$$

In andere woorden: als het gelineariseerde probleem asymptotisch stabiel is, dan is het niet-lineaire stelsel asymptotisch stabiel rond het betreffende evenwichtspunt. Het omgekeerde zal overigens niet waar hoeven te zijn.

**Bewijs:** Noem  $A = \vec{F}'(\vec{u}_e)$ . We splitsen het bewijs in meerdere stappen.

- Kies  $b > \gamma$  zodat

$$\operatorname{Re} \lambda_i < -b < -\gamma < 0.$$

Met enige kennis van lineaire algebra kan men laten zien dat er een transformatie  $T$  is zodanig dat  $A = TDT^{inv}$  met  $D$  een reële matrix en

$$\vec{x} \cdot D\vec{x} \leq -b|\vec{x}|^2 \text{ voor alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Omdat we vaak  $T^{\text{inv}}$  nodig hebben schrijven we  $T^{\text{inv}} = S$ . Als  $A$ , een  $n \times n$  matrix,  $n$  reële eigenwaarden heeft met  $n$  onafhankelijke eigenvectoren heeft dan is  $D$  een diagonaalmatrix met deze eigenwaarden. Het algemene geval met complexe eigenwaarden of met een eigenwaarde waarbij de geometrische multipliciteit kleiner is dan de algebraïsche is lastiger. Men construeert een transformatie naar een reële Jordan-achtige matrix (zie bladzijde 119) met in plaats van 1 buiten de diagonaal een getal  $\alpha$  dat voldoende klein is (gebruik de opmerking op bladzijde 121).

- We zullen eerst het lineaire geval laten zien. Als  $\vec{y}(t)$  een oplossing is van  $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$  dan volgt met  $SA = DS$  dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |S\vec{y}(t)|^2 &= \frac{d}{dt} (S\vec{y}(t) \cdot S\vec{y}(t)) = 2S\vec{y}(t) \cdot S\vec{y}'(t) = 2S\vec{y}(t) \cdot SA\vec{y}(t) = \\ &= 2S\vec{y}(t) \cdot DS\vec{y}(t) \leq -2b |S\vec{y}(t)|^2. \end{aligned}$$

Hiermee zien we dat

$$\frac{d}{dt} \left( e^{2bt} |S\vec{y}(t)|^2 \right) \leq 0$$

en na integratie dat

$$e^{2bt} |S\vec{y}(t)|^2 \leq |S\vec{y}(0)|^2$$

zodat  $|S\vec{y}(t)| \leq e^{-bt} |S\vec{y}(0)| \rightarrow 0$  voor  $t \rightarrow \infty$ .

- We bekijken de oplossing in de buurt van het evenwichtspunt en gebruiken daarbij de volgende transformatie. Noem  $\vec{v}(t) = S(\vec{u}(t) - \vec{u}_e)$  en  $\vec{G}(\vec{v}) = S\vec{F}(\vec{u}_e + S^{\text{inv}}\vec{v})$ . Dan voldoet  $\vec{v}(t)$  aan

$$\vec{v}'(t) = S\vec{u}'(t) = S\vec{F}(\vec{u}(t)) = S\vec{F}(\vec{u}_e + S^{\text{inv}}\vec{v}(t)) = \vec{G}(\vec{v}(t)).$$

Bovendien geldt  $\vec{G}(\vec{0}) = \vec{0}$  en

$$\vec{G}'(\vec{0}) = S\vec{F}'(\vec{u}_e)S^{\text{inv}} = SAS^{\text{inv}} = D.$$

- We laten vervolgens zien dat we oplossingen van het oorspronkelijke niet-lineaire probleem althans in een kleine omgeving van het evenwichtspunt kunnen vergelijken met de oplossingen van het gelineariseerde. De differentieerbaarheid van  $\vec{G}$  zegt dat

$$\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \frac{|\vec{G}(\vec{v}) - \vec{G}(\vec{0}) - D\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 0.$$

Gebruik dat  $\vec{G}(\vec{0}) = \vec{0}$  en neem  $\delta_1$  zodanig klein dat voor  $0 < |\vec{v}| < \delta_1$  geldt dat

$$|\vec{G}(\vec{v}) - D\vec{v}| = |\vec{G}(\vec{v}) - \vec{G}(\vec{0}) - D\vec{v}| < (b - \gamma) |\vec{v}|.$$

Via Cauchy-Schwarz<sup>1</sup> vinden we dat voor  $0 < |\vec{v}| < \delta_1$  geldt

$$|\vec{v} \cdot (\vec{G}(\vec{v}) - D\vec{v})| \leq |\vec{v}| |\vec{G}(\vec{v}) - D\vec{v}| < (b - \gamma) |\vec{v}|^2$$

en dus ook

$$\vec{v} \cdot \vec{G}(\vec{v}) \leq \vec{v} \cdot D\vec{v} + (b - \gamma) |\vec{v}|^2. \quad (8.4)$$

- Met de schatting in (8.4) kunnen we net als voor de linearisering een differentiaalongelijkheid afleiden. Voor  $|\vec{v}(t)| < \delta_1$  volgt dat

$$\frac{d}{dt} |\vec{v}(t)|^2 = 2\vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t) = 2\vec{v}(t) \cdot \vec{G}(\vec{v}(t)) \leq 2\left(\vec{v} \cdot D\vec{v} + (b - \gamma) |\vec{v}(t)|^2\right) \leq$$

<sup>1</sup>Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:  $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$ .

$$\leq 2 \left( -b |\bar{v}(t)|^2 + (b - \gamma) |\bar{v}(t)|^2 \right) = -2\gamma |\bar{v}(t)|^2 \quad (8.5)$$

en daarmee geldt zolang  $|\bar{v}(t)| < \delta_1$  dat  $|\bar{v}(t)| \leq e^{-\gamma t} |\bar{v}(0)|$ .

We moeten nog laten zien dat bij voldoende kleine beginvoorwaarde  $|\bar{v}(0)|$  aan  $|\bar{v}(t)| < \delta_1$  voldaan wordt. Dat bewijzen we uit het ongerijmde. Neem  $|\bar{v}(0)| < \delta_1$  en stel dat  $|\bar{v}(t)|$  groter dan  $\delta_1$  wordt. Uit de continuïteit van  $t \rightarrow \bar{v}(t)$  mogen we concluderen dat er een eerste  $t_1 > 0$  is zodat  $|\bar{v}(t_1)| = \delta_1$ . Voor  $t \in [0, t_1]$  kunnen we de schatting in (8.5) gebruiken en daarmee laten zien dat  $|\bar{v}(t_1)| \leq e^{-\gamma t_1} |\bar{v}(0)| < \delta_1$ , een tegenspraak.

Dus als  $|\bar{v}(0)| < \delta_1$  dan geldt voor alle  $t > 0$  dat

$$|\bar{v}(t)| \leq e^{-\gamma t} |\bar{v}(0)|.$$

- Tenslotte zullen we de schatting naar  $\bar{u}$  transformeren. Nemen we  $|\bar{u}_0 - \bar{u}_e| \leq \|S\|^{-1} \delta_1$  dan volgt dat  $|\bar{v}(0)| \leq \|S\| |\bar{u}_0 - \bar{u}_e| \leq \delta_1$  en vervolgens voor alle  $t \geq 0$  dat

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{u}_e| &= |T(\bar{v}(t))| \leq \|T\| |\bar{v}(t)| \leq \|T\| e^{-\gamma t} |\bar{v}(0)| \leq \\ &\leq \|T\| \|S\| e^{-\gamma t} |\bar{u}_0 - \bar{u}_e| = m e^{-\gamma t} |\bar{u}_0 - \bar{u}_e| \end{aligned}$$

als we  $\delta = \|S\|^{-1} \delta_1$  en  $m = \|T\| \|S\| = \|T\| \|T^{\text{inv}}\|$  kiezen. We hebben daarmee (8.3) gevonden. Het getal  $m$  heet overigens het conditiegetal van de matrix  $T$ . De norm van een matrix is gedefinieerd op bladzijde 122.  $\square$

**Stelling 8.1.7** Als de matrix  $\bar{F}'(\bar{u}_e)$  minstens één eigenwaarde met positief reëel deel heeft, dan is het evenwichtspunt  $\bar{u}_e$  van (8.1) instabiel.

**Bewijs:** We geven slechts een schets. Wanneer er slechts één reële eigenwaarde  $\lambda_i$  is die het grootste reële deel bezit dan kunnen we zoals in het bewijs voor het lineaire gevalde beginvoorwaarde  $\bar{u}_e + \varepsilon \bar{\varphi}_i$  gebruiken. Hierbij is  $\bar{\varphi}_i$  een eigenvector bij de eigenwaarde  $\lambda_i$  met het grootste reële deel. De oplossing  $\bar{u}(t)$  van

$$\begin{cases} \bar{u}' = \bar{F}'(\bar{u}) \\ \bar{u}(0) = \bar{u}_0 \end{cases}$$

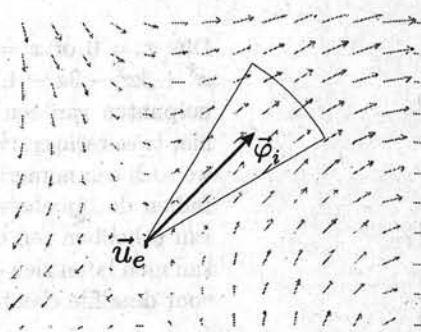
voor  $\bar{u}_0 = \bar{u}_e + \varepsilon \bar{\varphi}_i$  met  $\varepsilon$  voldoende dicht bij 0, zal niet exact de richting  $\bar{\varphi}_i$  blijven volgen, maar wel zodanig dat  $\bar{u}(t)$  alleen 'bij de boog' de kegel zal verlaten. We kunnen laten zien dat zolang de oplossing binnen de kegel ligt deze zich laat vergelijken met het gelineariseerde probleem; grof gezegd

$$\bar{u}(t) \approx \bar{u}_e + \varepsilon e^{t \bar{F}'(\bar{u}_e)} \bar{\varphi}_i = \bar{u}_e + \varepsilon e^{t \lambda_i} \bar{\varphi}_i.$$

De functie  $\bar{u}_e + \varepsilon e^{t \bar{F}'(\bar{u}_e)} \bar{\varphi}_i$  is de oplossing van het rond  $\bar{u}_e$  gelineariseerde probleem. Omdat voor iedere kleine  $\varepsilon > 0$  de beginvoorwaarde  $\bar{u}_0 = \bar{u}_e + \varepsilon \bar{\varphi}_i$  een oplossing levert die 'bij de boog' de kegel verlaat is  $\bar{u}_e$  een instabiel evenwichtspunt.

Indien er meerdere (complexe)  $\lambda_i$  zijn met maximaal reëel deel dan wordt ook hier het bewijs veel 'technischer'. Men neemt beginvoorwaarden  $\bar{u}_e + \varepsilon \text{Re } \bar{\varphi}_i$  dichtbij  $\bar{u}_e$ . Men kan nu niet langer laten zien dat de oplossing een kegel zoals boven 'bij de boog' verlaat. In plaats van deze kegel neemt men het volgende. Noem  $A = \bar{F}'(\bar{u}_e)$ , stel  $\alpha$  is het grootste reële deel van een eigenwaarde van  $A$  en definieer de deelruimte  $W \subset \mathbb{R}^n$  door

$$W = \{ \text{Re } \bar{\varphi}; \bar{\varphi} \in \mathbb{C}^n \text{ met } A^n \bar{\varphi} = \lambda A^{n-1} \bar{\varphi} \text{ voor een } \lambda \in \mathbb{C} \text{ zodat } \text{Re } \lambda = \alpha \}.$$





De kegel wordt vervangen door

$$K = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n; |\vec{v} - P_{\vec{u}_e + W} \vec{v}| \leq c_1 |\vec{v} - \vec{u}_e| \text{ en } |\vec{v} - \vec{u}_e| < c_2 \},$$

waarbij  $P_{\vec{u}_e + W}$  de projectie op  $\vec{u}_e + W$  is en  $c_1, c_2$  voldoende klein. Men laat zien dat  $\vec{u}(t)$  het gebied  $K$  alleen kan verlaten door de rand waar geldt  $|\vec{u}(t) - \vec{u}_e| = c_2$ . Zolang  $\vec{u}(t)$  zich binnen  $K$  bevindt kan men  $\vec{u}(t)$  met de 'gelineariseerde oplossing'  $\vec{u}_e + e^{tA}(\vec{u}_0 - \vec{u}_e)$  vergelijken. Omdat  $|e^{tA}(\vec{u}_0 - \vec{u}_e)| \sim e^{t\alpha} |\vec{u}_0 - \vec{u}_e|$  zien we dat er een  $t_1 > 0$  is zodat  $|\vec{u}(t_1) - \vec{u}_e| \geq c_2$ . Daarmee hebben we gevonden dat  $\vec{u}_e$  een instabiel evenwichtspunt is.  $\square$

$\square$

### Voorbeeld 52

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x + 2x^2 - y^2 \\ x - 2y + x^3 \end{pmatrix}.$$

Voor de evenwichtspunten geldt  $x + 2x^2 - y^2 = 0$  en  $x - 2y + x^3 = 0$ . Door naar  $y$  op te lossen en deze uitdrukkingen gelijk te stellen vinden we dat  $x + 2x^2 = y^2 = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3)^2$  en na vereenvoudiging

$$\frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - x = 0.$$

Dus  $x = 0$  of  $x = -1$  of  $x$  is een nulpunt van de polynoom  $p(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x - 4$ . Met Ferrari's methode<sup>2</sup> (via MATHEMATICA) kunnen de nulpunten van een vierdegraads polynoom exact berekend worden. Er zijn hier twee reële en twee niet-reële wortels. De formule is echter zo vervelend dat we toch een numerieke benadering van de evenwichtspunten zullen gebruiken. Indien de bijbehorende benaderende eigenwaarden reëel deel voldoende weg van 0 hebben (en ook beide eigenwaarden voldoende van elkaar weg liggen) kan men laten zien dat de exacte eigenwaarden bij de exacte evenwichtspunten voor dezelfde classificatie zorgen.

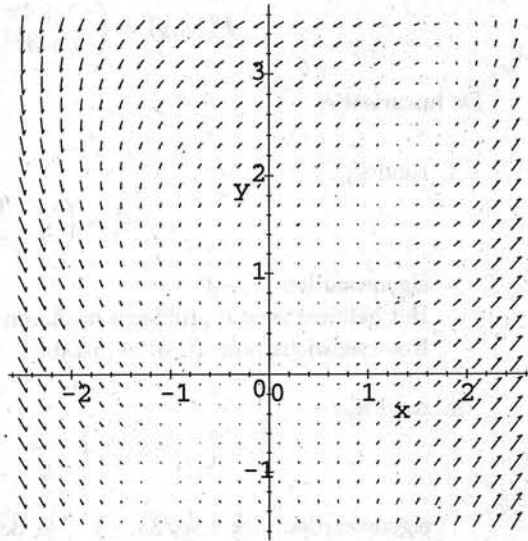
De functie  $F(x, y) = \begin{pmatrix} x + 2x^2 - y^2 \\ x - 2y + x^3 \end{pmatrix}$  heeft als evenwichtspunten

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 \approx \begin{pmatrix} -0.68456 \\ -0.50268 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 \approx \begin{pmatrix} 1.5049 \\ 2.4565 \end{pmatrix}.$$

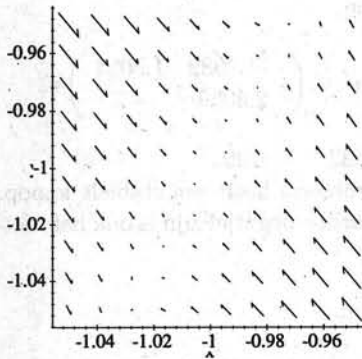
De laatste twee zijn benaderingen van de twee reële wortels van  $p$  met de bijbehorende  $y$ .

Het vectorveld op  $[-2.5, 2.5] \times [-1.5, 3.5]$  ziet er als volgt uit:

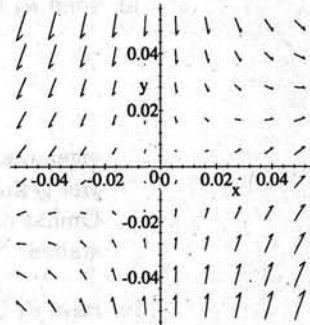
<sup>2</sup>Lodovico Ferrari leefde van 1522 tot 1565.



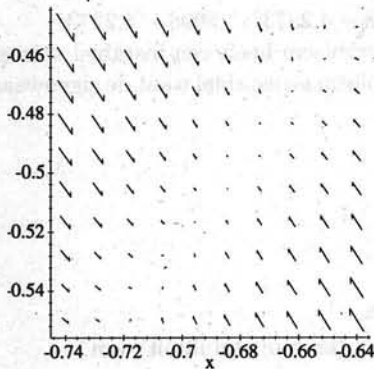
En het uitvergroete vectorveld rond de vier evenwichtspunten is als volgt.



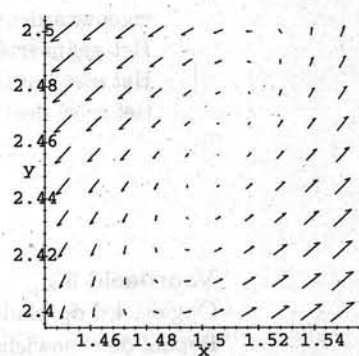
rond  $\vec{u}_2$



rond  $\vec{u}_1$



rond  $\vec{u}_3$



rond  $\vec{u}_4$

De afgeleide van  $F$  is:

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 4x & -2y \\ 1 + 3x^2 & -2 \end{pmatrix}.$$

De linearisaties:

i. rond  $\vec{u}_1$  :

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}$$

eigenwaarden: 1, -2.

Het gelineariseerde probleem heeft een zadelpunt.

Het evenwichtspunt (0, 0) is instabiel.

ii. rond  $\vec{u}_2$  :

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{v},$$

eigenwaarden:  $-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}$ ,  $-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}$ .

Het gelineariseerde probleem heeft een zadelpunt.

Omdat  $-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33} > 0$  geldt is  $\vec{u}_2$  dus instabiel.

iii. rond  $\vec{u}_3$  bij benadering:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} -1.7382 & 1.0054 \\ 2.4059 & -2 \end{pmatrix} \vec{v},$$

eigenwaarden: -0.30832, -3.4299.

Het gelineariseerde probleem heeft een stabiele knoop.

Omdat beide eigenwaarden negatief zijn is ook het niet-lineaire probleem stabiel.

iv. rond  $\vec{u}_4$  bij benadering:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 7.0196 & -4.913 \\ 7.7942 & -2 \end{pmatrix} \vec{v},$$

eigenwaarden:  $2.5098 + 4.2373i$ ,  $2.5098 - 4.2373i$ .

Het gelineariseerde probleem heeft een instabiel spiraalpunt.

Het niet-lineaire probleem is instabiel want de eigenwaarden hebben positief reëel deel.

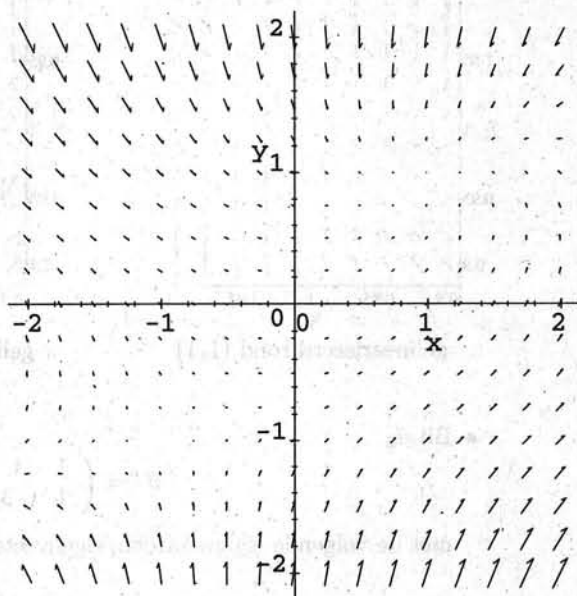
□

### Voorbeeld 53

Opgave 4.d op bladzijde 95.

Bepaal de evenwichtspunten (en hun stabiliteit) van.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 - xy \\ x - y^3 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$



Het vectorveld bij (8.6)

**Evenwichtspunten:**  $1 - xy = 0$  en  $x - y^3 = 0$  levert  $y^4 = 1$  en dus  $y = 1$  of  $y = -1$ . Met de bijbehorende  $x$  krijgen we de volgende evenwichtspunten:

$$\vec{u}_1 = (1, 1) \text{ en } \vec{u}_2 = (-1, -1).$$

**Lineariseren:**  $F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - xy \\ x - y^3 \end{pmatrix}$ , dus  $F'(x, y) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$ .

$$F'(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ en } F'(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

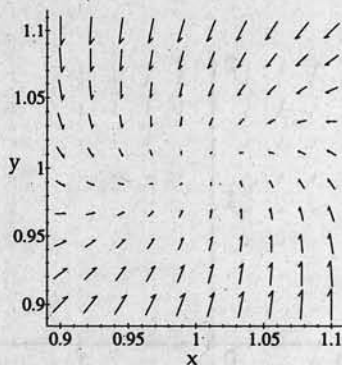
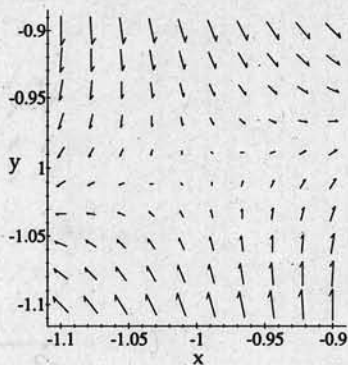
De gelineariseerde stelsels zijn als volgt.

- Bij  $\vec{u}_1$

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \vec{v}$$

met eigenwaarde:  $\lambda = -2$  ( $2 \times$ ) met slechts één onafhankelijke eigenvector:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Een stabiele knoop.

gelineariseerd rond  $(1, 1)$ gelineariseerd rond  $(-1, -1)$ 

- Bij  $\bar{u}_2$

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{v}$$

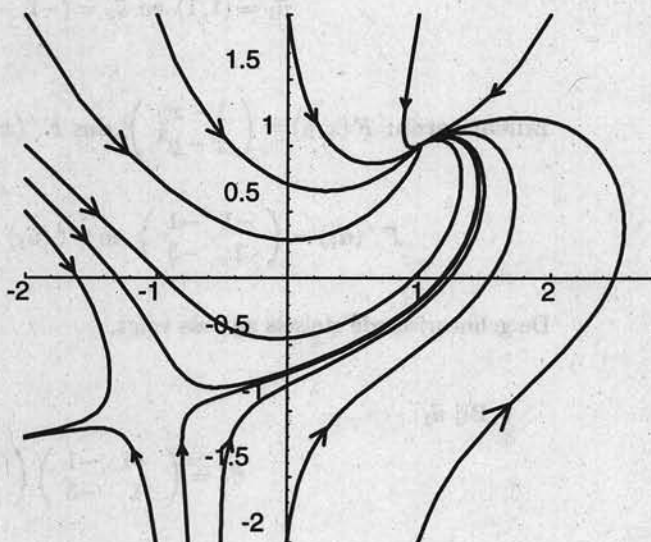
met de volgende eigenwaarden/eigenvectoren:

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{5}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 - \sqrt{5}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Omdat  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  dus een zadelpunt.

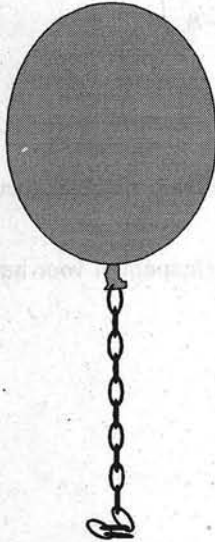
Via linearisatiestelling:  $\bar{u}_1$  is een stabiel evenwichtspunt en  $\bar{u}_2$  is een instabiel evenwichtspunt voor (8.6).



enkele banen bij het laatste voorbeeld via Mathematica



**Opgave 98** Een ballon die met helium gevuld is en waaraan een lange dunne ketting hangt wordt losgelaten. Als we de wrijving vergeten en de ketting lang genoeg is om niet vrij van de grond te komen ziet de energiebalans er als volgt uit:



$$\text{bewegingsenergie: } E_{mov} = \frac{1}{2} (m_b + \gamma u) v^2$$

$$\text{potentiële energie ballon: } E_{pot,b} = -F_b u$$

$$\text{potentiële energie ketting: } E_{pot,k} = g \int_0^u \gamma s ds = \frac{1}{2} g \gamma u^2$$

waarbij  $m = m_b + \gamma u$  de massa van de ballon plus het omhoog getrokken deel van de ketting;  $\gamma$  is het gewicht van de ketting per lengte-eenheid;  $v$  is de snelheid van de ballon en  $u$  de hoogte van de bovenkant van de ketting.  $F_b$  is de opwaartse kracht van de ballon. We vinden

$$\frac{1}{2} (m_b + \gamma u) v^2 - F_b u + \frac{1}{2} g \gamma u^2 = \text{constant.}$$

Met  $v = u'$  en na differentiëren volgt

$$\frac{1}{2} \gamma (u')^3 + (m_b + \gamma u) u' u'' - F_b u' + g \gamma u u' = 0.$$

Na deling door  $u'$  wordt dit

$$\frac{1}{2} \gamma (u')^2 + (m_b + \gamma u) u'' - F_b + g \gamma u = 0. \quad (8.7)$$

- i. Schrijf deze tweede-orde differentiaalvergelijking als een eerste orde stelsel.
- ii. Bereken de stationaire oplossing en lineariseer rond deze oplossing. Is de stationaire oplossing stabiel of instabiel? Asymptotisch stabiel?
- iii. Geef een schets van het fasevlak rond het evenwichtspunt.
- iv. Als de ketting vrij van de bodem komt dan moeten we de uitdrukkingen voor de energie veranderen:

$$\text{bewegingsenergie: } E_{mov} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (m_b + \gamma \min(u, \ell)) v^2$$

$$\text{potentiële energie ballon: } E_{pot,b} = -F_b u$$

$$\begin{aligned} \text{potentiële energie ketting: } E_{pot,k} &= g \int_{u - \min(u, \ell)}^u \gamma s ds = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} g \gamma u^2 & \text{voor } u \leq \ell, \\ g \gamma \ell (u - \frac{1}{2} \ell) & \text{voor } u \geq \ell. \end{cases} \end{aligned}$$

Wat gebeurt er met het evenwichtspunt als  $F_b < g \gamma \ell$ ? En als  $F_b > g \gamma \ell$ ? Geef in beide gevallen een schets van het fasevlak.

- v. Neem opnieuw aan dat de ketting lang genoeg is. We voegen een wrijvingskracht  $-\alpha u'$  aan het model toe:

$$\frac{1}{2} \gamma (u')^2 + (m_b + \gamma u) u'' - F_b + g \gamma u - \alpha u' = 0.$$

Bereken opnieuw de stationaire oplossing en lineariseer rond deze oplossing. Is de stationaire oplossing stabiel of instabiel? Asymptotisch stabiel? Schets het fasevlak.

□ **Opgave 99** Beschouw het stelsel

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ u^2 v - 8 \end{pmatrix}.$$

- i. Bereken de evenwichtspunten.
- ii. Lineariseer rond de evenwichtspunten.
- iii. Classificeer de gelineariseerde stelsels (stabiel/instabiel, focus, zadelpunt, knoop, etc.).
- iv. Onderzoek de stabiliteit van de evenwichtspunten voor het oorspronkelijke stelsel.

□ **Opgave 100** Zelfde opdrachten voor

- i.  $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 - u^2 \\ u^2 v - 8 \end{pmatrix};$

- ii.  $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 - u^2 \\ (u^2 - 1)v \end{pmatrix};$

Hint bij  $(0, 0)$ : bereken de oplossing met  $(u(0), v(0)) = (-\delta, 0)$ .

- iii.  $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 - u^3 \\ (u^2 - 1)v \end{pmatrix}$  voor zover mogelijk.

□ **Opgave 101** Gegeven is het stelsel

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \vec{F}(u(t), v(t)) \quad \text{met} \quad \vec{F}(u, v) = \begin{pmatrix} -u^3 + v \\ -v(u^2 + v^2) \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

- i. Geef het rond het evenwichtspunt gelineariseerde stelsel.
- ii. Is het gelineariseerde stelsels (asymptotisch) stabiel of instabiel? Motiveer!
- iii. Wat kan men daaruit concluderen voor het oorspronkelijk stelsel?

## 8.2 Lyapunov-functies

oftewel **ЛЯПУНОВ**-functies<sup>3</sup>.

**Definitie 8.2.1** Zij het vectorveld  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en de differentieerbare functie  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven. De afgeleide van  $V$  langs het vectorveld  $\vec{F}$  wordt gedefinieerd door

$$\dot{V}(\vec{u}) = \nabla V(\vec{u}) \cdot \vec{F}(\vec{u}).$$

□

**Voorbeeld 54**

Zij  $\vec{F} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^3 - v \\ u - v^3 \end{pmatrix}$  en  $V(u, v) = u^2 + v^2$ . Dan geldt

$$\begin{aligned} \dot{V}(\vec{u}) &= \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -u^3 - v \\ u - v^3 \end{pmatrix} = \\ &= -2u^4 - 2uv + 2uv - 2v^4 = -2u^4 - 2v^4. \end{aligned}$$

Deze functie  $V$  kunnen we als volgt gebruiken om een uitspraak voor oplossingen van

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \vec{F} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

te doen. Stel  $(u(\cdot), v(\cdot))$  is zo'n oplossing. Dan zegt  $V(u(t), v(t))$  iets over de afstand van  $(u(t), v(t))$  tot  $(0, 0)$ ; in dit geval is  $V(u(t), v(t))$  het kwadraat van deze afstand. Door dit naar  $t$  te gaan differentiëren,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(u(t), v(t)) &= \nabla V(u(t), v(t)) \cdot \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \\ &= \nabla V(u(t), v(t)) \cdot \vec{F} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \\ &= \dot{V}(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

en door te gebruiken dat  $\dot{V}(u, v) < 0$  is buiten  $(0, 0)$  zien we dat  $V$  kleiner wordt. Daarmee vinden we dat de afstand van  $(u(t), v(t))$  tot  $(0, 0)$  kleiner wordt. Met een extra argument kan men zelfs concluderen dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t), v(t)) = (0, 0).$$

Met andere woorden: bij elke beginvoorwaarde zal de oplossing naar  $(0, 0)$  convergeren.

<sup>3</sup>De fonetische transcriptie loopt uiteen van Lyapunov, via Liapunov tot Liapunoff.



Een dergelijke functie  $V$  kan men gebruiken om stabiliteit van een evenwichtspunt aan te tonen.

**Stelling 8.2.2 (Lyapunov, 1892)** Zij  $\vec{u}_e$  een evenwichtspunt en  $B$  een omgeving van  $\vec{u}_e$ . Stel dat  $V$  een differentieerbare functie van  $B$  naar  $\mathbb{R}$  is zodat

$$\begin{aligned} V(\vec{u}_e) &= 0, \\ V(\vec{u}) &> 0 \quad \text{voor } \vec{u} \in B \setminus \{\vec{u}_e\}. \end{aligned}$$

Dan geldt

- i. als  $\dot{V} \leq 0$  in  $B$ , dan is  $\vec{u}_e$  een stabiel evenwichtspunt;
- ii. als  $\dot{V} < 0$  in  $B \setminus \{\vec{u}_e\}$ , dan is  $\vec{u}_e$  een asymptotisch stabiel evenwichtspunt;
- iii. als  $\dot{V} > 0$  in  $B \setminus \{\vec{u}_e\}$ , dan is  $\vec{u}_e$  een instabiel evenwichtspunt.

Een differentieerbare functie  $V$  waarvoor geldt

$$\begin{aligned} V(\vec{u}_e) &= 0, \\ V(\vec{u}) &> 0 \quad \text{voor } \vec{u} \in B \setminus \{\vec{u}_e\}, \\ \dot{V}(\vec{u}) &\leq 0 \quad \text{voor } \vec{u} \in B \setminus \{\vec{u}_e\}, \end{aligned}$$

► Lyapunov-functie

heet een *Lyapunov-functie* bij  $\vec{u}_e$  voor het vectorveld  $\vec{F}$ . Als aan de zwaardere eis dat

$$\dot{V}(\vec{u}) < 0 \quad \text{voor } \vec{u} \in B \setminus \{\vec{u}_e\}$$

► strikte Lyapunov-functie

voldaan is, dan heet  $V$  een *strikte Lyapunov-functie*.

**Opmerking:** De functie  $V(\vec{u})$  is een soort 'vervormde' afstand tussen  $\vec{u}$  en  $\vec{u}_e$ . Als  $V$  een strikte Lyapunov-functie is op  $B \setminus \{\vec{u}_e\}$  en als  $c > 0$  een getal is zodat

$$\{(x, y); V(x, y) < c\} \subset B,$$

dan geldt voor iedere oplossing  $(u, v)$  met  $V(u(0), v(0)) < c$  dat  $\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t), v(t)) = \vec{u}_e$ . De Stelling van Lyapunov (ii) garandeert dat  $V(u(t), v(t))$  kleiner wordt zolang  $(u(t), v(t))$  binnen  $B$  zit. De stelling garandeert niet zonder meer dat  $(u(t), v(t))$  binnen  $B$  blijft. Dit is wel het geval wanneer we met  $V(u(0), v(0)) < c$  zoals bovenstaand starten.

We vergelijken met de stabiliteitsresultaten die we uit de linearisatie verkregen.

- Nadeel. Het is vaak niet eenvoudig een dergelijke Lyapunov-functie te vinden en bovendien vraagt de controle van de noodzakelijke eigenschappen meestal lastig rekenwerk. Bij mechanische modellen is overigens de functie die de energie beschrijft vaak geschikt als Lyapunov-functie.
- Voordeel 1. Soms is het mogelijk met behulp van een geschikte  $V$  toch een uitspraak te doen als het gelineariseerde stelsel een eigenwaarde met 0 als reëel deel heeft.



## Opgave 102

- i. Laat zien dat je via lineariseren geen uitspraak kunt doen over de stabiliteit van het evenwichtspunt bij

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^3 + uv^2 \\ -v^3 - u^2v \end{pmatrix}.$$

- ii. Bepaal een geschikte omgeving van  $(0, 0)$  waar  $V(u, v) = u^2 + v^2$  een strikte Lyapunov-functie is (dus  $(0, 0)$  is wel stabiel en zelfs asymptotisch stabiel).

- iii. Noem  $\ell_0 = (u^2(0) + v^2(0))$ . Laat zien dat elke oplossing voldoet aan

$$u^2(t) + v^2(t) \leq \frac{2\ell_0}{2 + t\ell_0}.$$

$$(\text{Hint: } \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 \leq x^4 + y^4)$$

- iv. Bereken  $\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t), v(t))$  als  $u(0) = 825$  en  $v(0) = \pi$ .



**Opgave 103** Laat zien dat  $V(u, v) = u^4 + v^2$  rond  $(0, 0)$  een strikte Lyapunov-functie is voor

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 - u^3 \\ (u^2 - 1)v \end{pmatrix}.$$



## Opgave 104

- i. Bepaal een Lyapunov functie bij de differentiaalvergelijking voor de heliumballon met voldoende lange ketting en zonder wrijving van bladzijde 147.
- ii. Geef een strikte Lyapunov functie bij de differentiaalvergelijking voor de heliumballon met lange ketting en met wrijving.



**Opgave 105** We keren terug naar het stelsel in (8.8).

- i. Laat zien dat  $V(u, v) = u^6 + 2v^2$  een strikte Lyapunov-functie is voor dit stelsel. Hint:  $u^5v = u^4(uv) \leq \frac{1}{2}(u^4)^2 + \frac{1}{2}(uv)^2$ .
- ii. Is het evenwichtspunt voor het stelsel (asymptotisch) stabiel of instabiel? Motiveer!
- iii. Hoe verklaart u het verschil tussen de stabiliteit van het gelineariseerde en de stabiliteit van het oorspronkelijke niet-lineaire stelsel?

### 8.2.1 De Lorenz-vergelijking

Deze vergelijking<sup>4</sup> is afkomstig uit de meteorologie. Het is een zeer vereenvoudigd model voor convectie-stromen in hogere lagen van de atmosfeer:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a(y-x) \\ cx-y-xz \\ xy-bz \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

met  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ . Als  $c < 1$  dan is  $\vec{0}$  een asymptotisch stabiel evenwichtspunt. We beschouwen alleen  $c \in (0, 1)$ .

**Evenwichtspunten.** Het punt  $(x_e, y_e, z_e)$  is een evenwichtspunt als

$$\begin{aligned} a(y_e - x_e) &= 0, \\ cx_e - y_e - x_e z_e &= 0, \\ x_e y_e - bz_e &= 0. \end{aligned}$$

Dus  $x_e = y_e$  en de tweede vergelijking geeft  $x_e(c - 1 - z_e) = 0$ . Als  $x_e = 0$  dan  $y_e = 0$  en uit de derde vergelijking volgt  $z_e = 0$ . Als  $x_e \neq 0$  dan  $z_e = c - 1 < 0$  en uit de derde vergelijking volgt  $z_e = x_e^2/b > 0$ , een tegenspraak. Dus  $(0, 0, 0)$  is het enige evenwichtspunt als  $c \in (0, 1)$ .

**Stabiliteit via linearisatie.** Lineariseren rond  $(0, 0, 0)$  levert

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden  $\lambda$  voldoen aan

$$\det \begin{pmatrix} -a - \lambda & a & 0 \\ c & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

en dus  $((-a - \lambda)(-1 - \lambda) - ac)(-b - \lambda) = 0$ . We vinden

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -b, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(a+1) + \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 - 4a(1-c)}, \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2}(a+1) - \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 - 4a(1-c)}, \end{aligned}$$

en deze drie eigenwaarden zijn negatief indien  $a, b > 0$  en  $c < 1$ . Volgens Stelling 8.1.6 is  $(0, 0, 0)$  een asymptotisch stabiel evenwichtspunt. Dat wil zeggen dat er een  $\delta > 0$  is zodat voor  $\|\vec{u}_0\| < \delta$  geldt dat de oplossing van (8.9) met beginwaarde

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \vec{u}_0$$

<sup>4</sup>Edward Lorenz, 1963

voldoet aan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

De stelling doet geen uitspraak over de grootte van  $\delta$ .

**Stabiliteit met Lyapunov.** We kunnen de volgende Lyapunov-functie gebruiken:

$$V(x, y, z) = x^2 + ay^2 + az^2.$$

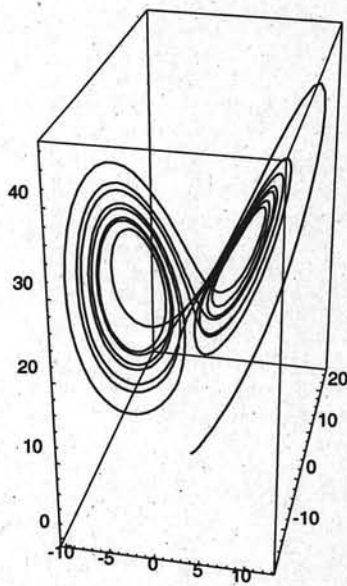
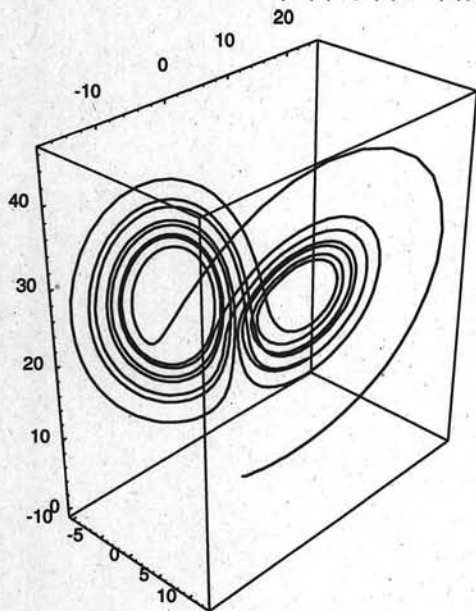
Dan vinden we dat

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2ay \\ 2az \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(y-x) \\ cx-y-xz \\ xy-bz \end{pmatrix} = \\ &= 2a(-x^2 + (c+1)xy - y^2 - bz^2) \leq \\ &\leq 2a\left(-\left(\frac{1-c}{2}\right)x^2 - \left(\frac{1-c}{2}\right)y^2 - bz^2\right) < 0 \end{aligned}$$

voor alle  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ . We weten nu dat voor elke beginwaarde  $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^3$  volgt dat de oplossing voldoet aan (8.10). Met andere woorden: via de Lyapunov-functie weten we dat  $(0, 0, 0)$  een *globaal asymptotisch stabiel* evenwichtspunt is.

► *globaal asymptotisch stabiel*

Het interessante geval voor de Lorenz-vergelijking is overigens  $c > 1$ . Het evenwichtspunt  $(0, 0, 0)$  is dan niet stabiel en bovendien vertonen de oplossingen een chaotisch gedrag. Voor  $a = 3$ ,  $b = 1$  en  $c = 26.5$  vinden we bij beginvoorwaarde  $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, 0)$  het volgende plaatje.



**Opgave 106** We beschouwen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3(y-x) \\ \frac{53}{2}x - y - xz \\ xy - z \end{pmatrix}.$$

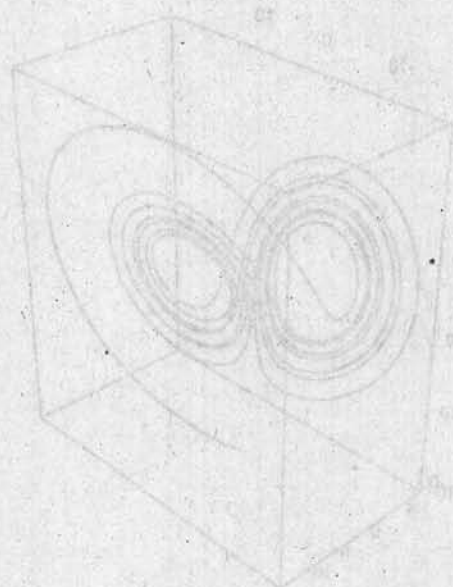
- i. Bereken de evenwichtspunten.
- ii. Lineariseer rond deze evenwichtpunten.
- iii. Bereken de eigenwaarden bij de linearisatie rond  $(0, 0, 0)$ .
- iv. Een numerieke benadering van de eigenwaarden voor de gelineariseerde stelsels bij beide andere evenwichtspunten levert

$$\lambda_1 = -4.9044,$$

$$\lambda_2 = -0.047782 + 5.7471i,$$

$$\lambda_3 = -0.047782 - 5.7471i.$$

Hoe zou je deze evenwichtspunten classificeren?



# 9. MACHTREEKSMETHODEN

## 9.1 Motivatie

□

### Voorbeeld 55

Voor de d.v.

$$u'' + xu = 0. \quad (9.1)$$

is geen oplossing te vinden die te schrijven is met behulp van standaardfuncties zoals polynomen, sin, cos,  $e$ -machten. Om toch een min of meer expliciete formule voor de oplossing te vinden gebruikt men machtreeksen.

We proberen voor de oplossing een functie in de vorm van een machtreeks met positieve convergentiestraal te vinden:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Als deze machtreeks convergeert voor  $|x| < R$ , met  $R$  de convergentiestraal, dan geldt (zie Stelling 2.2.1) dat  $\frac{d}{dx} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{d}{dx} a_n x^n)$  voor  $|x| < R$  en bovendien dat de afgeleide dezelfde convergentiestraal heeft. Dit resultaat tweemaal gebruiken levert

$$u''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Na invullen in de d.v.:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = \\ &= 2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+2)(k+1) a_{k+2} + a_{k-1}) x^k. \end{aligned}$$

Omdat  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = 0$  voor  $x \in (-R, R)$  dan en slechts dan als  $b_k = 0$  voor alle  $k$  vinden we

$$0 = 2a_2 \text{ (bij } x^0),$$

$$0 = (k+2)(k+1) a_{k+2} + a_{k-1} \text{ (bij } x^k) \text{ voor alle } k \geq 1.$$

Uit de tweede vergelijking halen we dat

$$a_{k+2} = \frac{-1}{(k+2)(k+1)} a_{k-1}. \quad (9.2)$$

Dan ook:

$$a_{k+5} = \frac{-1}{(k+5)(k+4)} a_{k+2} = \frac{-1}{(k+5)(k+4)} \frac{-1}{(k+2)(k+1)} a_{k-1}.$$

Herhaald gebruik van (9.2) levert voor  $n \geq 0$ :

$$\begin{cases} a_{3n} &= \frac{(-1)^n}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4)\dots 3} a_0 = \frac{(-3)^n \Gamma(n+\frac{1}{3})}{(3n)! \Gamma(\frac{1}{3})} a_0; \\ a_{3n+1} &= \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\dots 4} a_1 = \frac{(-3)^n \Gamma(n+\frac{2}{3})}{(3n+1)! \Gamma(\frac{2}{3})} a_1; \\ a_{3n+2} &= \frac{(-1)^n}{(3n+2)(3n+1)(3n-1)(3n-2)\dots 5} a_2 = 0. \end{cases}$$

► *gamma-functie*

Hier hebben we de *gamma-functie*<sup>1</sup> gebruikt.

We vinden als algemene oplossing van (9.1):

$$u(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \Gamma(n+\frac{1}{3})}{(3n)! \Gamma(\frac{1}{3})} x^{3n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \Gamma(n+\frac{2}{3})}{(3n+1)! \Gamma(\frac{2}{3})} x^{3n+1}.$$

De convergentiestraal van deze beide machtreeksen is overigens  $\infty$ .

Met deze aanpak kan men laten zien dat voor lineaire differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$u^{(n)}(x) + \alpha_1(x) u^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_{n-1}(x) u'(x) + \alpha_n(x) u(x) = 0 \quad (9.3)$$

waarbij  $\alpha_i$  analytische functies zijn, er oplossingen zijn in de vorm van een machtreeks met een positieve convergentiestraal. Merk op dat analytisch een veel zwaardere eis is dan continu. Existentie en eenduidigheid voor lineaire differentiaalvergelijkingen hebben we al gezien voor  $\alpha_i$  continu.

**Opmerking:** Als we een oplossing  $u$  in de vorm van een machtreeks gevonden hebben en deze machtreeks heeft convergentiestraal  $R$  dan wil dat niet zeggen dat het maximale existentie-interval van  $u$  gelijk aan  $(-R, R)$  is. Als  $(T_u^-, T_u^+)$  het maximale existentie-interval is dan geldt wel  $T_u^- \leq -R$  en  $R \leq T_u^+$ .

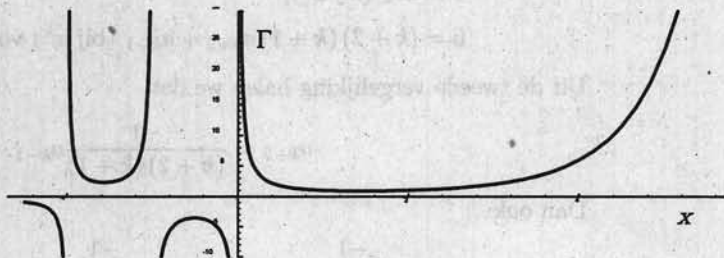
**Opmerking:** Bij beginvoorwaarden in 0 zoekt men een machtreeksoplossing van de vorm  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Als er in beginvoorwaarde in  $x_0 \neq 0$  is voorgeschreven dan is het handig om een oplossing in de vorm van een verschoven machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$  te vinden.



**Opgave 107** Bereken de oplossingen in de vorm van een machtreeks rond 0 van

i.  $u''(x) + u(x) = 0$ ;

<sup>1</sup>De gamma-functie is gedefinieerd voor  $x > 0$  door  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ . Voor  $x \in \mathbb{N}^+$  is deze integraal eenvoudig te berekenen. We vinden dat  $\Gamma(n+1) = n! = n\Gamma(n)$  voor  $n \in \mathbb{N}^+$ . Bovendien zien we met een partiële integratie dat  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  voor alle  $x > 0$ . Deze laatste relatie wordt gebruikt om te functie uit te breiden op  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ .



ii.  $u''(x) + xu'(x) + x^2u(x) = 0$ ;

iii.  $(1+x)u''(x) + (1-x)u(x) = 0$ .



**Opgave 108** Bereken bij  $(1+x)u''(x) + (1-x)u(x) = 0$  de oplossingen in de vorm van een machtreeks rond 1.



**Opgave 109** Bereken de convergentiestraal van de twee onafhankelijke machtreeksoplossingen (rond 0) voor  $(1+x)u''(x) + (1-x)u(x) = 0$ .

## 9.2 Classificatie

In de differentiaalvergelijking (9.3) is de coëfficiënt voor de hoogste afgeleide gelijk aan 1 en zijn de  $\alpha_i$  'nette' functies. Vaak komt men echter differentiaalvergelijkingen tegen die een coëfficiënt voor de hoogste afgeleide hebben die in een punt gelijk aan 0 wordt terwijl enkele van de overige coëfficiënten niet gelijk aan 0 wordt. In dat punt is de orde van de differentiaalvergelijking dus eigenlijk één lager dan erbuiten. Dergelijke singulariteiten zullen we ook verder onderzoeken.

We beperken ons tot tweede orde differentiaalvergelijkingen. Met voor de hand liggende aanpassingen zullen de resultaten ook voor hogere orde differentiaalvergelijkingen gelden.

We beschouwen

$$P(x)u'' + Q(x)u' + S(x)u = 0. \quad (9.4)$$

waarbij  $P, Q$  en  $R$  zijn analytische functies in  $x_0$  (dus complex differentieerbaar in een  $\mathbb{C}$ -omgeving van  $x_0$ ). Functies zoals polynomen,  $\sin$ ,  $\cos$  en  $e$ -machten zijn analytisch op  $\mathbb{C}$ . Voor de definitie zie bladzijde 16.

**Definitie 9.2.1** Stel  $P, Q$  en  $S$  zijn analytische functies rond  $x_0$  en neem aan dat bovendien geldt dat  $Q(x_0) \neq 0$  of  $S(x_0) \neq 0$ .

- ▶ normaal punt      i. Als  $P(x_0) \neq 0$  dan heet  $x_0$  een normaal punt voor de d.v. (9.4).
- ▶ singulier punt      ii. Als  $P(x_0) = 0$  dan heet  $x_0$  een singulier punt voor de d.v. (9.4).
  - (a) Als  $P(x_0) = 0$  en de volgende limieten bestaan (een eindige limiet hebben)
 
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{S(x)}{P(x)},$$
 dan heet  $x_0$  een regulier-singulier punt voor de d.v. (9.4).
  - (b) Als  $P(x_0) = 0$  en één van die limieten bestaat niet, dan heet  $x_0$  een irregulier-singulier punt voor (9.4). Men zegt ook: (9.4) heeft een essentiële singulariteit in  $x_0$ .
- ▶ regulier-singulier punt
- ▶ essentiële singulariteit



□

**Voorbeeld 56**

Voor

$$(x^4 - 1)u'' + (x^2 - 2x + 1)u' + u = 0$$

is  $x_0 = 1$  een regulier-singulier punt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{4}.$$

De differentiaalvergelijking heeft een essentiële singulariteit in  $x_0 = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - 1} \text{ bestaat niet.}$$

Alle andere  $x_0$  zijn normale punten voor deze d.v. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 110** Bepaal de normale en de regulier-singuliere punten van

i.  $(1 + x)u''(x) + (1 - x)u(x) = 0$ ;

ii.  $x \sin(x) \sin(2x)u''(x) + \cos(x)u(x) = 0$ . \_\_\_\_\_

### 9.3 Oplossingen rond normale punten

---

Zonder bewijs geven we de existentiële stelling voor oplossingen in de vorm van een machtreeks.

In het deel over complexe functies hebben we overigens opgemerkt dat elke functie die analytisch is in  $B_r(x_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - x_0| < r\}$  te schrijven is als een machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  met convergentiestraal  $R \geq r$ . Omgekeerd, elke machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  met convergentiestraal  $R$  is analytisch in  $B_R(x_0)$ .

**Stelling 9.3.1** *Stel  $P, Q$  en  $S$  zijn analytische functies in  $x_0$  en  $x_0$  is een normaal punt. Dan heeft (9.4) twee onafhankelijke machtreeksoplossingen van de vorm*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (9.5)$$

**Opmerking:** Als  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  en  $\frac{S(x)}{P(x)}$  analytisch zijn op  $B_R(x_0) \subset \mathbb{C}$ , dan kan men laten zien dat ook de oplossing  $u$  die men in (9.5) vindt analytisch is op  $B_R(x_0)$ . Dus de convergentiestraal van  $u$  is groter of gelijk aan  $R$ .

□

**Opgave 111** Bereken een oplossing van

i.  $u'' + (1 - x)u = 0$  als een machtreeks rond 0;

ii.  $u'' + (1 - x)u = 0$  als een machtreeks rond 1;

iii.  $(1 - x)u'' + u = 0$  als een machtreeks rond 0. \_\_\_\_\_

## 9.4 Oplossingen rond regulier-singuliere punten

We beschouwen opnieuw (9.5), nu herschreven als

$$u'' + \frac{Q(x)}{P(x)}u' + \frac{R(x)}{P(x)}u = 0. \quad (9.6)$$

met  $P, Q$  en  $R$  analytische functies bij  $x_0$  en wel zodanig dat  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  en/of  $\frac{R(x)}{P(x)}$  een pool heeft in  $x_0$  van orde 1, respectievelijk van orde 1 of 2.

Zonder verlies van algemeenheid nemen we  $x_0 = 0$  als regulier-singulier punt en we laten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  zodanig zijn dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} = \alpha \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \beta.$$

**Opmerking:** Dus met het orde-symbool van Landau voor  $x \rightarrow 0$ :

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{\alpha}{x} + \mathcal{O}(1) \quad \text{en} \quad \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{\beta}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

In het algemeen heeft (9.6) geen oplossing rond  $x_0 = 0$  die als machtreeks is te schrijven maar wel een oplossing voor  $x > 0$  die voor een of andere  $\nu \in \mathbb{C}$  als volgt te schrijven is:

$$u(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (9.7)$$

**Definitie 9.4.1** Een functie van de vorm

$$u(x) = (x - x_0)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (9.8)$$

► *gegeneraliseerde machtreeks*

heet een gegeneraliseerde machtreeks.

Om de juiste  $\nu$  te vinden in (9.7) beschouwen we de differentiaalvergelijking die ontstaat door in (9.6)  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  door  $\frac{\alpha}{x}$  en  $\frac{R(x)}{P(x)}$  door  $\frac{\beta}{x^2}$  te vervangen:

$$u'' + \frac{\alpha}{x}u' + \frac{\beta}{x^2}u = 0. \quad (9.9)$$

► *Euler-vergelijking*

De differentiaalvergelijking in (9.9) heet de *Euler-vergelijking* bij (9.6).

De passende  $\nu$  in (9.7) is zodanig dat  $u(x) = x^\nu$  voor  $x > 0$  een oplossing is van (9.9). Door in te vullen krijgen we

$$\nu(\nu - 1)x^{\nu-2} + \alpha\nu x^{\nu-2} + \beta x^{\nu-2} = 0.$$

We hebben een oplossing als  $\nu$  voldoet aan de algebraïsche vergelijking

$$\boxed{\nu(\nu - 1) + \alpha\nu + \beta = 0.} \quad (9.10)$$

► *indiciaal-vergelijking*

Vergelijking (9.10) heet de *indiciaalvergelijking* voor (9.6).

Zonder bewijs geven we de volgende stelling.

**Stelling 9.4.2** Als  $x_0$  een regulier-singulier punt is van (9.6) en de bijbehorende indiciaalvergelijking heeft een reële wortel  $\nu$ , dan heeft de d.v. een gegeneraliseerde machtreeks-oplossing van de vorm

$$u(x) = (x - x_0)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

De reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  heeft een positieve convergentiestraal.

**Opmerking:** Herschrijven van deze indiciaalvergelijking (9.10) levert

$$\left(\nu + \frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 - \beta$$

en bij het oplossen vinden we drie te onderscheiden mogelijkheden:

- geval 1:  $\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 - \beta > 0$ ;  
de algemene oplossing van (9.9) is

$$u(x) = c_1 x^{\nu_1} + c_2 x^{\nu_2}$$

$$\text{met } \nu_1 = -\frac{\alpha - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 - \beta} \text{ en } \nu_2 = -\frac{\alpha - 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 - \beta}$$

- geval 2:  $\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 - \beta = 0$ ;  
we vinden alleen  $u(x) = x^\nu$  met  $\nu = -\frac{\alpha - 1}{2}$  als oplossing. Men laat zien dat de algemene oplossing van (9.9) is

$$u(x) = c_1 x^\nu + c_2 x^\nu \ln(x).$$

- geval 3:  $\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 - \beta < 0$ ;

er is geen reële coëfficiënt en  $x^{\lambda \pm i\mu}$ , met  $\lambda = -\frac{\alpha - 1}{2}$  en  $\mu = \sqrt{\beta - \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2}$  ziet er niet zo aardig uit. Voor  $x > 0$  is de algemene oplossing van (9.9) te schrijven als

$$u(x) = c_1 x^\lambda \sin(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \cos(\mu \ln x).$$

Voor een 'nette' tweede orde lineaire gewone differentiaalvergelijking zonder begin- of andere voorwaarden verwachten we twee onafhankelijke oplossingen. Omdat (9.6) inderdaad van dit type is zoeken we nog een tweede onafhankelijke oplossing. Als de indiciaalvergelijking twee verschillende wortels  $\nu_1$  en  $\nu_2$  heeft, dan zou je kunnen hopen dat er twee onafhankelijke oplossingen  $u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\nu_1}$  en  $u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+\nu_2}$  zijn. Helaas ligt het niet zo simpel. Als namelijk  $\nu_1 - \nu_2 \in \mathbb{N}$  ligt dan is een gegeneraliseerde machtreeks zoals  $u_1$  te schrijven als  $u_2$  met de eerste  $\nu_1 - \nu_2$  coëfficiënten gelijk aan 0. Dit geeft geen reden dat er nu inderdaad problemen optreden maar een verdere analyse, die we hier niet zullen uitvoeren, laat zien dat deze problemen er inderdaad zijn. Ook zonder bewijs geven we stelling voor de algemene oplossing.

**Stelling 9.4.3** Stel  $x_0$  is een regulier-singulier punt van (9.6) en de bijbehorende indiciaalvergelijking heeft twee wortels  $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$ .

- Als  $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{Z}$ , dan heeft de d.v. twee onafhankelijke gegeneraliseerde machtreeks-oplossingen van de vorm

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\nu_1}$$

$$u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+\nu_2}$$

ii. Als  $\nu_1 - \nu_2 = n \in \mathbb{N}$ , dan heeft de d.v. twee onafhankelijke oplossingen die als volgt te schrijven zijn

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+\nu_1}$$

$$u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+\nu_2} + C \ln(x) u_1(x)$$

voor een  $C \in \mathbb{R}$ .

De algemene oplossing is in beide gevallen als volgt te schrijven

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

De reeksen hebben een positieve convergentiestraal.

**Opmerking:** De resultaten voor normale en voor regulier-singuliere punten kan men ook tot hogere orde d.v. uitbreiden. Voor het 5<sup>de</sup> orde probleem

$$P(x)u^v + Q(x)u^{iv} + R(x)u^{iii} + S(x)u^{ii} + T(x)u^i + V(x)u = 0$$

met  $P, Q, R, S, T$  en  $V$  polynomen (of andere 'mooie' functies) heet  $x_0$  een normaal punt als  $P(x_0) \neq 0$ . Als  $P(x_0) = 0$  dan heet  $x_0$  een regulier-singulier punt als de limieten  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^3 \frac{S(x)}{P(x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^4 \frac{T(x)}{P(x)}$  en  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^5 \frac{V(x)}{P(x)}$  bestaan (eindig zijn).

**Opmerking:** Als  $x_0$  een singulier punt is dat niet regulier-singulier is dan kunnen er functies als b.v.  $e^{-\frac{1}{x}}$  als oplossing voorkomen (probeer maar  $x^3 u'' - x u' + 2u = 0$ ). Daar zullen we ons niet mee bezig houden.

□

**Opgave 112** Een oplossing van  $x^3 u'' - x u' + 2u = 0$  is hierboven gegeven. Gebruik de substitutie  $u(x) = v(x) e^{-\frac{1}{x}}$  om de algemene oplossing te berekenen (de integraal die u daarbij tegenkomt mag u laten staan).

γ

**Voorbeeld 57**

Bepaal de algemene oplossing van

$$x u'' - \frac{1}{2} u' + u = 0 \quad (9.11)$$

met behulp van (gegeneraliseerde) machtreeksen rond  $x_0 = 0$ .

Het punt 0 is een regulier-singulier punt. Men berekent  $\alpha$  en  $\beta$  van de bijbehorende Euler-vergelijking door

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{2}}{x} = -\frac{1}{2} \quad \text{en} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{1}{x} = 0.$$

De Euler-vergelijking wordt

$$u'' - \frac{1}{2} x^{-1} u' = 0$$

en de indiciaalvergelijking

$$r(r-1) - \frac{1}{2}r = 0.$$

De wortels van de indiciaalvergelijking zijn  $r_1 = 0$  en  $r_2 = \frac{3}{2}$ . Oplossingen van (9.11) zijn van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_i}.$$

Invullen in de d.v. levert

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_i)(n+r_i-1) x^{n+r_i-1} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_i) x^{n+r_i-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_i} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_i)(n+r_i-1) x^{n+r_i-1} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_i) x^{n+r_i-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r_i-1} = \\ &= a_0 (r_i(r_i-1) - \frac{1}{2}r_i) x^{r_i-1} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (n+r_i)(n+r_i-1) - \frac{1}{2}a_n (n+r_i) + a_{n-1}) x^{n+r_i} = \end{aligned}$$

(merk op dat de term bij  $a_0$  de indiciaalvergelijking is)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (n+r_i)(n+r_i - \frac{3}{2}) + a_{n-1}) x^{n+r_i}.$$

We vinden de recursieve formule

$$0 = a_n (n+r_i)(n+r_i - \frac{3}{2}) + a_{n-1} \text{ voor } n \geq 1.$$

Je ziet nu welke rol de indiciaalvergelijking speelt. De indiciaalvergelijking is de coëfficiënt bij  $a_0$ . Als deze coëfficiënt niet gelijk aan 0 zou zijn, dan zou  $a_0$  gelijk 0 moeten zijn. Volgens de recursieve formule zouden dan alle coëfficiënten  $a_n$  gelijk aan 0 moeten zijn. Dat wil zeggen dat we alleen de triviale oplossing zouden vinden.

Voor  $r_1 = 0$  krijgen we

$$a_n = \frac{(-1)^n \Gamma(-\frac{1}{2})}{n! \Gamma(n - \frac{1}{2})} a_0$$

en voor  $r_2 = \frac{3}{2}$ :

$$a_n = \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{5}{2})}{n! \Gamma(n + \frac{5}{2})} a_0.$$

De algemene oplossing is

$$u(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(-\frac{1}{2})}{n! \Gamma(n - \frac{1}{2})} x^n + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{5}{2})}{n! \Gamma(n + \frac{5}{2})} x^{n+3/2}$$

met  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

□

### Voorbeeld 58

Beschouw

$$xu'' + u' + u = 0$$

rond  $x_0 = 0$ . Het punt  $x_0 = 0$  is een regulier-singulier punt want na herschrijven tot

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \frac{1}{x}u = 0$$

zien we dat  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} = 1$  en  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{1}{x} = 0$ . De bijbehorende Euler-vergelijking wordt

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \frac{0}{x^2}u = 0$$

en de indiciaalvergelijking  $r(r-1) + r = 0$  heeft  $r = 0$  als een dubbele wortel. Dat betekent dat we een machtreeks  $u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  als oplossing kunnen vinden. Invullen levert

$$\begin{aligned} 0 = xu_1'' + u_1' + u_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n + a_{n-1}) x^{n-1} \end{aligned}$$

en dus

$$n^2 a_n + a_{n-1} = 0 \text{ voor alle } n \geq 1.$$

Er volgt dat

$$a_n = \frac{-1}{n^2} a_{n-1} = \frac{1}{n^2(n-1)^2} a_{n-2} = \dots = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0$$

en daarmee is

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$$

een oplossing.

De tweede onafhankelijke oplossing is te vinden door reductie van orde. Dat wil zeggen door substitutie van  $u_2(x) = v(x)u_1(x)$  vinden we een eerste orde d.v. voor  $v'$ :

$$0 = x(u_1 v)'' + (u_1 v)' + u_1 v = xu_1(x)v'' + (2xu_1' + u_1)v'$$

die in principe via scheiding van variabelen is aan te pakken. We zullen dit niet verder uitwerken. Als alternatief kun je ook  $u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + C \ln(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$  invullen en de coëfficiënten berekenen.

Twee in de fysica belangrijke klassen van functies die oplossingen zijn van differentiaalvergelijkingen en die we in de vorm van een gegeneraliseerde machtreeks kunnen schrijven zijn de Bessel-functies en de Legendre-polynomen.

□

► *Bessel-differentiaalvergelijking*

**Opgave 113** We beschouwen de *Bessel-differentiaalvergelijking*. Voor  $n \in \mathbb{N}$  (of soms in  $\mathbb{R}$ )

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - n^2) u(x) = 0. \quad (9.12)$$

► *Bessel-functie van de eerste soort*

- i. Bepaal de bijbehorende indiciaalvergelijking.
- ii. Voor welke  $n \in \mathbb{R}$  weten we zeker dat er twee onafhankelijke gegeneraliseerde machtreksen als oplossing bestaan?
- iii. Bereken voor  $n \in \mathbb{N}$  een (niet nul-)oplossing in de vorm van een gegeneraliseerde machtreks. Als we deze functie met de juiste factor vermenigvuldigen vinden we  $J_n(x)$ , de zogenoemde  $n^{\text{de}}$  *Bessel-functie van de eerste soort*<sup>2</sup>.
- iv. Geef een uitdrukking voor de oplossing als  $n = \frac{1}{2}$  met behulp van standaard functies.
- v. Geef de vorm van een tweede onafhankelijke oplossing als  $n = \frac{1}{2}$ . Als u daarvoor een machtreks nodig heeft geef dan ook de recursieformule voor de coëfficiënten.

□

**Opgave 114** De zogenoemde geassocieerde Legendre-polynomen  $P_n^m(x)$  met  $m, n \in \mathbb{N}$  zijn oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1-x^2)u''(x) - 2xu'(x) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)u(x) = 0. \quad (9.13)$$

► *Legendre-polynoom*

$P_n^0(x)$  heet het *Legendre-polynoom* van orde  $n$ . Vaak wordt ook de volgende notatie gebruikt

$$P_n(x) = P_n^0(x).$$

De Legendre-polynomen worden genormaliseerd door  $P_n(1) = 1$ .

- i. Bepaal de regulier-singuliere punten van (9.13) voor elke  $m$  en  $n$ .
- ii. Bepaal bij elk regulier-singulier punt de indiciaalvergelijking.
- iii. Bereken  $P_n(x)$  voor  $n = 0, 1, 2, 3$ .
- iv. Bereken de orde van  $P_n(x)$  voor iedere  $n$ .
- v. Ondanks de naam zijn de zogenoemde geassocieerde Legendre-polynomen niet altijd polynomen. Voor welke  $m \in \mathbb{N}$  zijn ze zeker geen 'echt' polynoom? Hint: onderzoek  $P_n^m(x)$  als oplossing rond  $x = \pm 1$ .
- vi. Bereken  $cP_3^1(x)$  via de substitutie  $u(x) = \sqrt{1-x^2}v(x)$ .

<sup>2</sup>De Bessel-functie van de eerste soort van orde  $\nu \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{(1+\nu+1) \prod_{j=1}^{0-\nu} j}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+n} = (x)^{\nu} \Gamma$$

**Deel III**

**Randwaardeproblemen voor  
gewone  
differentiaalvergelijkingen**



Deel III

Handvaardepunten voor  
gewone  
differentiaalvergelijkingen

## Schema 1: enkele oplossingen van randwaardeproblemen bij gewone differentiaalvergelijkingen

- Deel III.10 (Greense functie) en
- Deel III.11 (Fourier-reeksen):

$$\begin{cases} \text{r.w.p. voor gewone d.v.,} \\ Lu = f \text{ in } (a, b) \\ B_1 u = B_2 u = 0 \\ \text{mits } f = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

mits zelf-geadjungeerd  
t.o.v. inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Greense functie:

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$$

Fourier-reeksen:

$$\begin{aligned} &\exists \text{ eigenfuncties } \{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\} \\ &\text{met eigenwaarden } \lambda_k \\ &f = \sum c_k \varphi_k \Rightarrow u = \sum \frac{c_k}{\lambda_k} \varphi_k \\ &\text{waarbij } c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \end{aligned}$$

met  $L$  een (tweede orde) gewone differentiaaloperator en  $B_1, B_2$  geschikte randvoorwaarden.

Voorbeeld:

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ in } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Greense functie  $G$ :

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy$$

met

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{als } x \leq y \\ y(1-x) & \text{als } x > y \end{cases}$$

eigenfuncties/eigenwaarden:

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(\pi k x), \quad \lambda_k = \pi^2 k^2$$

Fouriercoëfficiënten:

$$f_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx$$

dan

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x) \\ u(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \end{aligned}$$

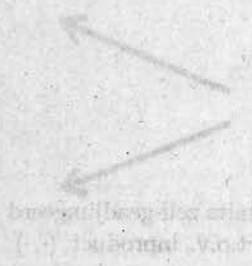
Schema I: enkele oplossingen van randwaardeproblemen bij gewone differentiaalvergelijkingen

• Deel III.10 (omgekeerde) en  
 • Deel III.11 (omgekeerde)

Gewone lineaire  

$$u(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Lineaire randwaardeproblemen  
 Randwaardeproblemen met  
 $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$   
 $u(x) = \int_0^x f(t) dt + \alpha$   
 $u(1) = \beta \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \beta - \alpha$



Lineaire randwaardeproblemen  
 $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$   
 $u(x) = \int_0^x f(t) dt + \alpha$   
 $u(1) = \beta \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \beta - \alpha$

Deel III.10 (omgekeerde) en Deel III.11 (omgekeerde)

Gewone lineaire  

$$u(x) = \int_0^x f(t) dt$$
  
 met  

$$u(x) = \begin{cases} u(0) = \alpha & \text{voor } x \leq 0 \\ u(1) = \beta & \text{voor } x > 1 \end{cases}$$

Lineaire randwaardeproblemen  
 $u(x) = \int_0^x f(t) dt + \alpha$   
 $u(1) = \beta \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \beta - \alpha$   
 $u(x) = \int_0^x f(t) dt + \alpha$   
 $u(1) = \beta \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \beta - \alpha$



Lineaire randwaardeproblemen  
 $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$   
 $u(x) = \int_0^x f(t) dt + \alpha$   
 $u(1) = \beta \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \beta - \alpha$

# 10. GREENSE FUNCTIES VOOR GEWONE D.V.

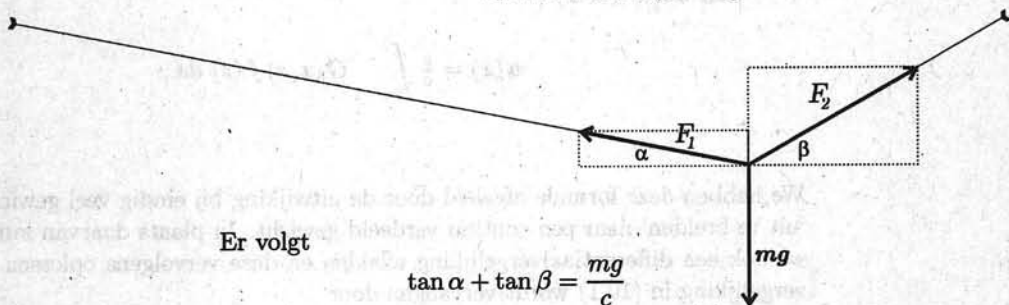
## 10.1 Tweede-orde randwaardeproblemen voor gewone d.v.

### 10.1.1 Een touwtje

We spannen een touw tussen twee gelijk hoge punten en we gaan bekijken wat de uitwijking van het touw is als we er gewicht aan hangen, bijvoorbeeld de waslijn met was. We nemen aan dat het gewicht van het touw te verwaarlozen is en dat de eindpunten zich twee meter van elkaar bevinden. De oorsprong leggen we in het midden van beide eindpunten. De uitwijking naar beneden gericht noemen we  $u$ .

- Allereerst één gewicht van  $m$  kg op plaats  $s \in (-1, 1)$ . Het krachtenplaatje levert, aangenomen de horizontale kracht is constant:

$$\begin{aligned}c &= F_1 \cos \alpha = F_2 \cos \beta, \\ F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta &= mg.\end{aligned}$$



Er volgt

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{mg}{c}$$

en met enig rekenwerk:

$$u_{s,m}(x) = \begin{cases} \frac{mg}{c} \frac{1}{2} (1-s)(1+x) & \text{als } -1 \leq x \leq s, \\ \frac{mg}{c} \frac{1}{2} (1+s)(1-x) & \text{als } s < x \leq 1. \end{cases}$$

Afhankelijk van de plaats waar we het gewicht hangen hangt het touw meer of minder ver door. Enkele voorbeelden zijn:



de grafieken van  $u_{0,m}(x)$ ,  $u_{0.5,m}(x)$  en  $u_{0.75,m}(x)$

- Meerdere gewichten. In plaats van één gewicht op plaats  $s$  hangen we gewichten met massa  $m_i$  op de plaatsen  $s_i$ , zeg  $-1 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < 1$ . Dan vinden we op plaats  $s_i$

$$\tan \alpha_i + \tan \beta_i = \frac{g}{c} m_i, \quad (10.1)$$

en men laat zien dat voor  $x \in (s_k, s_{k+1})$  geldt

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^n u_{s_i, m_i}(x) = \\ &= \frac{g}{c} \left( \sum_{\substack{i \text{ met} \\ -1 < s_i < x}} m_i (1 + s_i) (1 - x) + \sum_{\substack{i \text{ met} \\ x < s_i < 1}} m_i (1 - s_i) (1 + x) \right). \end{aligned}$$

- Tenslotte een 'continu' verdeelde massa met dichtheid  $f(s)$  op plaats  $s$ . We vinden

$$u(x) = \frac{g}{c} \left( \int_{-1}^x f(s) (1 + s) (1 - x) ds + \int_x^1 f(s) (1 - s) (1 + x) ds \right). \quad (10.2)$$

Schrijven we

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + s) (1 - x) & \text{als } -1 \leq s \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2} (1 - s) (1 + x) & \text{als } -1 \leq x < s \leq 1, \end{cases} \quad (10.3)$$

dan wordt (10.2)

$$u(x) = \frac{g}{c} \int_{s=-1}^1 G(x, s) f(s) ds.$$

We hebben deze formule afgeleid door de uitwijking bij eindig veel gewichten 'uit te breiden' naar een continu verdeeld gewicht. In plaats daarvan kunnen we ook een differentiaalvergelijking afleiden en deze vervolgens oplossen. De vergelijking in (10.1) wordt vervangen door

$$\frac{u(x - \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{g}{c} f(x) \Delta x.$$

Delen door  $\Delta x$  en vervolgens de limiet voor  $\Delta x \rightarrow 0$  nemen levert

$$-u''(x) = \frac{g}{c} f(x).$$

Dit is de differentiaalvergelijking voor een horizontaal gespannen touw waarop een continu verdeelde kracht werkt met 'kracht-dichtheid'  $f(x)$  op plaats  $x$ . Na schaling  $\frac{g}{c} = 1$  wordt het randwaardeprobleem:

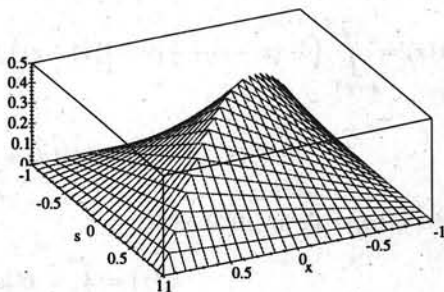
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{voor } -1 < x < 1, \\ u(-1) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (10.4)$$

**Propositie 10.1.1** Met  $G$  als in (10.3) wordt de oplossing van (10.4) gegeven door

$$u(x) = \int_{s=-1}^1 G(x,s) f(s) ds.$$

► *Greense functie*

De functie  $G(\cdot, \cdot) : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  in (10.3) heet de *Greense functie* voor het randwaardeprobleem (10.4).



$G(x, s)$

Bij een vaste  $s$  hoort de grafiek van  $x \mapsto -G(x, s)$  bij het doorhangende touwtje met een eenheids-puntmassa op plaats  $s$ .

□

**Opgave 115** Gebruik dat

$$\int_{s=-1}^1 G(x,s) f(s) ds = \frac{1}{2}(1-x) \int_{s=-1}^x (1+s) f(s) ds + \frac{1}{2}(1+x) \int_{s=x}^1 (1-s) f(s) ds$$

en controleer de randvoorwaarden en de differentiaalvergelijking door rechtstreeks berekenen. (Iets dergelijks wordt gedaan in het bewijs van Stelling 10.1.5.)

**Opmerking:** De Greense functie vonden we door de krachten te ontbinden en een limiet-geval te bekijken. Als de differentiaalvergelijking gegeven is dan kan men ook daaruit de Greense functie bepalen. Uit  $-u'' = f$  volgt

$$u'(x) = - \int_{s=-1}^x f(s) ds + c_1$$

en met  $u(-1) = 0$

$$u(x) = u(x) - u(-1) = - \int_{t=-1}^x \int_{s=-1}^t f(s) ds dt + c_1(x+1). \quad (10.5)$$

Door de integratievolgorde te veranderen,

$$\int_{t=-1}^x \int_{s=-1}^t \alpha(s,t) ds dt = \iint_{-1 \leq s \leq t \leq x} \alpha(s,t) ds dt = \int_{s=-1}^x \int_{t=s}^x \alpha(s,t) dt ds,$$

vinden we

$$\int_{t=-1}^x \int_{s=-1}^t f(s) ds dt = \int_{s=-1}^x \int_{t=s}^x f(s) dt ds = \int_{s=-1}^x (x-s) f(s) ds.$$

Vervolgens de andere randvoorwaarde gebruiken. Met  $u(1) = 0$  krijgen we

$$-\int_{s=-1}^1 (1-s) f(s) ds + 2c_1 = 0, \quad \text{en dus } c_1 = \frac{1}{2} \int_{s=-1}^1 (1-s) f(s) ds.$$

De oplossing wordt

$$u(x) = -\int_{s=-1}^x (x-s) f(s) ds + \frac{1}{2}(x+1) \int_{s=-1}^1 (1-s) f(s) ds. \quad (10.6)$$

Door de tweede integraal te splitsen krijgen we

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{s=-1}^x \left( -(x-s) + \frac{1}{2}(x+1)(1-s) \right) f(s) ds + \int_{s=x}^1 \frac{1}{2}(x+1)(1-s) f(s) ds = \\ &= \int_{s=-1}^x \frac{1}{2}(1-x)(1+s) f(s) ds + \int_{s=x}^1 \frac{1}{2}(1+x)(1-s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Met  $G(x, s)$  als in (10.3) volgt

$$u(x) = \int_{s=-1}^1 G(x, s) f(s) ds. \quad (10.7)$$



**Opgave 116** Bereken met behulp van de Greense functie de oplossing van (10.4) voor  $f = 1$  (dit geeft de vorm van een kabel van een hangbrug). —

### 10.1.2 Greense functies voor tweede-orde r.w.p.

We zullen laten zien dat we zo'n Greense functie kunnen vinden voor een vrij algemeen tweede-orde randwaardeprobleem. We beschouwen een randwaardeprobleem met

- de differentiaalvergelijking in  $[a, b]$

$$Lu = f$$

waarbij

$$L = -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \quad (10.8)$$

► differentiaaloperator

de differentiaaloperator is, met  $p \in C^1[a, b]$ ,  $p > 0$  en  $q \in C[a, b]$  (zie de voetnoot<sup>1</sup>):

- twee randvoorwaarden<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} B_\ell u &= \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0 \\ B_r u &= \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0 \end{aligned} \quad (10.9)$$

met  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$  en  $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ .

<sup>1</sup>Op bladzijde 5 is  $C^1[a, b]$ , de verzameling van continu differentieerbare functies, gedefinieerd. We zullen ook nog de verzameling van  $k$ -maal differentieerbare functies  $C^k[a, b]$  gebruiken:  $f \in C^k[a, b]$  als  $g \in C^{k-1}[a, b]$  waarbij  $g = f'$  op  $(a, b)$  en in  $a$  en  $b$  is  $g$  als op bladzijde 5 onderaan.

<sup>2</sup>Ook niet 'ontmengde' randvoorwaarden, b.v. de periodieke randvoorwaarden  $u(a) = u(b)$  en  $u'(a) = u'(b)$ , kunnen met deze methode worden aangepakt. Het volgende recept past niet meer.

Dit wordt samengepakt in

$$\boxed{\begin{cases} Lu = f & \text{voor } a < x < b, \\ B_\ell u = 0, \\ B_r u = 0. \end{cases}} \quad (10.10)$$

Voor het bestaan van een Greense functie hebben we de volgende voorwaarde nodig.

**Voorwaarde 10.1.2** *De enige oplossing van (10.10) met  $f = 0$  is de functie  $u = 0$ .*

Als aan deze voorwaarde voldaan is kan de Greense functie voor (10.10) met het volgende recept berekend worden.

**Recept 10.1.3** *(bij 'ontmengde' randvoorwaarden)*

*stap 1. Bereken een functie  $u_\ell \neq 0$  die voldoet aan*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{voor } a < x < b, \\ B_\ell u = 0, \end{cases}$$

*en een functie  $u_r \neq 0$  die voldoet aan*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{voor } a < x < b, \\ B_r u = 0. \end{cases}$$

*stap 2. Bereken de Wronskiaan  $W(u_\ell, u_r)$ .*

*stap 3. De Greense functie is*

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{-u_\ell(x)u_r(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} & \text{voor } a \leq x \leq s \leq b, \\ \frac{-u_\ell(s)u_r(x)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} & \text{voor } a \leq s < x \leq b. \end{cases} \quad (10.11)$$

Dat we zo inderdaad een Greense functie krijgen zien we in de volgende stelling. In het recept hebben we de Wronskiaan van  $u_\ell, u_r$  in de noemer gebruikt. Dat mag alleen als die ongelijk aan 0 is. We laten zien dat dit inderdaad het geval is als aan Voorwaarde 10.1.2 is voldaan. Daarvoor dient de volgende hulpstelling.

**Hulpstelling 10.1.4** *Zij  $u_\ell$  en  $u_r$  zoals in het bovenstaande recept. Dan geldt*

$$\text{Voorwaarde 10.1.2 is voldaan} \Leftrightarrow W(u_\ell, u_r) \neq 0.$$



**Bewijs:**

• (Voorwaarde  $\Rightarrow W(u_\ell, u_r) \neq 0$ ) Uit het ongerijmde. Als  $W(u_\ell, u_r) = 0$  dan geldt (zie Stelling 6.3.6) dat  $u_\ell$  en  $u_r$  afhankelijk zijn. Omdat  $u_r \neq 0$  is volgt  $u_\ell = cu_r$  voor een  $c \in \mathbb{R}$  en voldoet  $u_\ell$  aan beide randvoorwaarden. We hebben dan een functie ongelijk aan 0, namelijk  $u_\ell$ , die aan

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{voor } a < x < b, \\ B_\ell u = 0, \\ B_r u = 0. \end{cases} \quad (10.12)$$

voldoet. De voorwaarde is dus niet voldaan.

• (Voorwaarde  $\Leftarrow W(u_\ell, u_r) \neq 0$ ) Volgens Stelling 6.3.6 volgt uit  $W(u_\ell, u_r) \neq 0$  dat de algemene oplossing van  $Lu = 0$  te schrijven is als

$$u = c_1 u_\ell + c_2 u_r.$$

Als zo'n oplossing aan de randvoorwaarden voldoet dan volgt via de lineariteit dat

$$\begin{aligned} 0 &= B_\ell(u) = B_\ell(c_1 u_\ell + c_2 u_r) = c_2 B_\ell(u_r), \\ 0 &= B_r(u) = B_r(c_1 u_\ell + c_2 u_r) = c_1 B_r(u_\ell). \end{aligned} \quad (10.13)$$

Uit  $W(u_\ell, u_r)(a) \neq 0$  volgt dat de matrix

$$\begin{pmatrix} u_\ell(a) & u'_\ell(a) \\ u_r(a) & u'_r(a) \end{pmatrix}$$

inverteerbaar is. Omdat  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  is, volgt met

$$\begin{pmatrix} u_\ell(a) & u'_\ell(a) \\ u_r(a) & u'_r(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_\ell(u_r) \end{pmatrix}$$

dat  $B_\ell(u_r) \neq 0$ . Uit  $W(u_\ell, u_r)(b) \neq 0$  volgt op analoge wijze dat  $B_r(u_\ell) \neq 0$ . Daarmee impliceert (10.13) dat  $c_1 = 0$  en  $c_2 = 0$  en is  $u = 0$  de enige oplossing van (10.12).  $\square$

Voor het randwaardeprobleem (10.10) hebben we de volgende stelling.

**Stelling 10.1.5** *Als aan Voorwaarde 10.1.2 is voldaan dan heeft (10.10) voor iedere  $f \in C[a, b]$  precies één oplossing.*

*Bovendien is er een Greense functie  $G(\cdot, \cdot)$  zodanig dat*

$$u(x) = \int_{s=a}^b G(x, s) f(s) ds. \quad (10.14)$$

**Bewijs:** Allereerst laten we zien dat er hoogstens één oplossing is. Als er twee oplossingen van (10.10) zouden zijn, noem deze  $u_1$  en  $u_2$ , dan is  $u_1 - u_2$  een oplossing van (10.12). Volgens de voorwaarde geldt dan  $u_1 - u_2 = 0$ .

We laten nu zien dat er minstens één oplossing is. De formule in (10.14) met  $G$  als in (10.11) levert een oplossing.

We berekenen eerst de afgeleide van  $u$ . Omdat

$$u(x) = \int_{s=a}^x \frac{-u_r(x) u_\ell(s)}{p(s) W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds + \int_{s=x}^b \frac{-u_\ell(x) u_r(s)}{p(s) W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds \quad (10.15)$$

volgt

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= u'_r(x) \int_{s=a}^x \frac{-u_\ell(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds \\
 &+ u_r(x) \frac{-u_\ell(x)}{p(x)W(u_\ell, u_r)(x)} f(x) \\
 &+ u'_\ell(x) \int_{s=x}^b \frac{-u_r(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds \\
 &- u_\ell(x) \frac{-u_r(x)}{p(x)W(u_\ell, u_r)(x)} f(x) ds = \\
 &= \int_{s=a}^x \frac{-u'_r(x) u_\ell(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds + \int_{s=x}^b \frac{-u'_\ell(x) u_r(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds. \quad (10.16)
 \end{aligned}$$

- Controle van de randvoorwaarden. Met (10.15-10.16) vinden we

$$\begin{aligned}
 B_\ell(u) &= \alpha u(a) + \beta u'(a) = \\
 &= \alpha \left( 0 + \int_{s=a}^b \frac{-u_\ell(a) u_r(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds \right) + \beta \left( 0 + \int_{s=a}^b \frac{-u'_\ell(a) u_r(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds \right) = \\
 &= B_\ell(u_\ell) \int_{s=a}^b \frac{-u_r(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds = 0
 \end{aligned}$$

en op gelijke wijze  $B_r(u) = 0$ .

- Controle van de differentiaalvergelijking. Als in (10.16) vinden we (maar valt er geen term weg) dat

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (p(x) u'(x)) &= \int_{s=a}^x \frac{-\frac{d}{dx} (p(x) u'_r(x)) u_\ell(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds + \\
 &+ \int_{s=x}^b \frac{-\frac{d}{dx} (p(x) u'_\ell(x)) u_r(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds + \frac{u_r(x) u'_\ell(x) - u'_r(x) u_\ell(x)}{W(u_\ell, u_r)(x)} f(x). \quad (10.17)
 \end{aligned}$$

De laatste uitdrukking geeft

$$\frac{u_r(x) u'_\ell(x) - u'_r(x) u_\ell(x)}{W(u_\ell, u_r)(x)} f(x) = -f(x)$$

en tenslotte volgt met (10.15) en (10.17) dat

$$\begin{aligned}
 &-\frac{d}{dx} (p(x) u'(x)) + q(x) u(x) = \\
 &= \int_{s=a}^x \frac{(Lu_r(x)) u_\ell(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds + \int_{s=x}^b \frac{(Lu_\ell(x)) u_r(s)}{p(s)W(u_\ell, u_r)(s)} f(s) ds + f(x) = \\
 &= 0 + 0 + f(x).
 \end{aligned}$$

□

Voor meer algemene randvoorwaarden, bijvoorbeeld ook periodieke, is vaak ook een Greense functie te construeren. Voor

$$\begin{cases} Lu = f & \text{voor } a < x < b, \\ B_1 u = 0, \\ B_2 u = 0. \end{cases} \quad (10.18)$$

met  $L$  als in (10.8) en

$$B_i u = \alpha_i u(a) + \beta_i u'(a) + \gamma_i u(b) + \delta_i u'(b) \quad (10.19)$$

voor  $i = 1, 2$ , geldt de volgende propositie. We zullen deze niet bewijzen.

**Propositie 10.1.6** *Als aan Voorwaarde 10.1.2 is voldaan dan heeft het randwaardeprobleem (10.18) een Greense functie  $G(\cdot, \cdot) : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die voldoet aan*

i. een 'gladheids'-eis:

$G(\cdot, \cdot)$  is continu op  $[a, b]^2$ ;

$G(\cdot, \cdot)$  is tweemaal continu differentieerbaar op  $\{(x, s) \in [a, b]^2; x \neq s\}$ ;

ii. de differentiaalvergelijking buiten het punt  $s$ :

$LG(\cdot, s) = 0$  op  $(a, s) \cup (s, b)$  voor alle  $s \in (a, b)$ ;

iii. de randvoorwaarden:

$B_1 G(\cdot, s) = 0 = B_2 G(\cdot, s)$  voor alle  $s \in [a, b]$ ;

iv. de sprongconditie in  $s$ :

$\left(\frac{d}{dx} G(x, s)\right)_{x=s+0} - \left(\frac{d}{dx} G(x, s)\right)_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}$  voor alle  $s \in [a, b]$ .

**Opmerking:** We krijgen 'iets meer gevoel' voor de betekenis van de Greense functie als we 'puntmassa's' beschouwen. De dichtheidsfunctie van een puntmassa met massa  $m$  op plaats  $s$  kan men beschrijven als een gegeneraliseerde functie  $m\delta_s(\cdot)$  met  $\delta_s(\cdot)$  de Dirac-delta-functie in  $s$ . De Greense functie  $x \mapsto G(s, x)$  is de oplossing van het randwaardeprobleem (10.18) met voor  $f$  een puntmassa van massa 1 op plaats  $s$ . De Dirac-delta-functie  $\delta_s(\cdot)$  is geen 'echte' functie maar een zogenoemde *distributie*. Deze kunnen we niet puntsgewijs definiëren; een poging zou zijn

$$\delta_s(x) = 0 \text{ voor } x \neq s, \text{ en } \delta_s(s) = \infty,$$

maar daarmee wordt de totale massa  $\int_a^b \delta_s(x) dx$  niet gelijk 1. Wel kan men  $\delta_s(\cdot)$  als een soort limiet van de rij

$$f_{s,n}(x) = \begin{cases} n & \text{als } |x-s| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{als } |x-s| > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

zien. Puntsgewijs lukt dit wederom niet maar wel als een formele integraal met continue functies. De afspraak is dat  $\delta_s(\cdot)$  het 'ding' is zodanig dat voor iedere  $\varphi \in C[a, b]$  en  $s \in (a, b)$  schrijven

$$\int_a^b \delta_s \varphi dx = \varphi(s).$$

Men ziet met enig rekenwerk dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{s,n}(x) \varphi(x) dx = \varphi(s):$$

geldt voor continue functies  $\varphi$ . Inderdaad geldt voor  $s \in (a, b)$  dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{s,n} \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{s,n}(x) \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s-\frac{1}{2n}}^{s+\frac{1}{2n}} n\varphi(x) dx =$$

- Dirac-delta-functie
- distributie

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi \left( s + \frac{t}{n} \right) dt = \varphi(s).$$

**Opmerking:** We nemen steeds  $L = -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$ . Waarom niet de meer algemene operator  $L = -\tilde{p}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \tilde{q}(x)\frac{d}{dx} + \tilde{r}(x)$ ? Het antwoord is dat de tweede vorm voor  $\tilde{p} \in C^1[a, b]$  met  $\tilde{p}' > 0$  niet werkelijk algemener is maar wel extra problemen zal veroorzaken. Over die extra problemen later. Om te zien dat deze vorm niet echt algemener is bekijken we

$$\left( -\tilde{p}(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + \tilde{q}(x) \frac{d}{dx} + \tilde{r}(x) \right) \tilde{u}(x) = \tilde{f}(x). \quad (10.20)$$

Bereken een primitieve van  $\frac{\tilde{q} + \tilde{p}'}{\tilde{p}}$  en noem die functie  $x \mapsto \mu(x)$ . Met  $p = e^{-\mu} \tilde{p}$  en  $q = e^{-\mu} \tilde{r}$  vinden we dat

$$\begin{aligned} \left( -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x) \right) u &= \left( -\frac{d}{dx}e^{-\mu} \tilde{p} \frac{d}{dx} + e^{-\mu} \tilde{r} \right) u = \\ &= \left( -\tilde{p}e^{-\mu} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} - e^{-\mu} (\tilde{p}' - \mu' \tilde{p}) \frac{d}{dx} + e^{-\mu} \tilde{r} \right) u = \\ &= e^{-\mu} \left( -\tilde{p} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} + \tilde{q} \frac{d}{dx} + \tilde{r} \right) u = e^{-\mu} \tilde{f}. \end{aligned}$$

Dus  $\left( -\tilde{p} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} + \tilde{q} \frac{d}{dx} + \tilde{r} \right) u = \tilde{f}$  oplossen is hetzelfde als  $\left( -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x) \right) u = e^{-\mu} \tilde{f}$  oplossen.

□

**Opgave 117** Bereken de Greense functie  $G$  voor

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{met } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

Controleer het antwoord door te laten zien dat

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy$$

inderdaad aan dit randwaardeprobleem voldoet. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 118** Zelfde opdracht voor

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{met } -1 < x < 1, \\ u(-1) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

□

**Opgave 119** Bereken zowel direct als met behulp van de Greense functie de oplossing van

$$\begin{cases} -u'' = 1 & \text{met } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$



### Opgave 120

i. Bereken de Greense functie voor

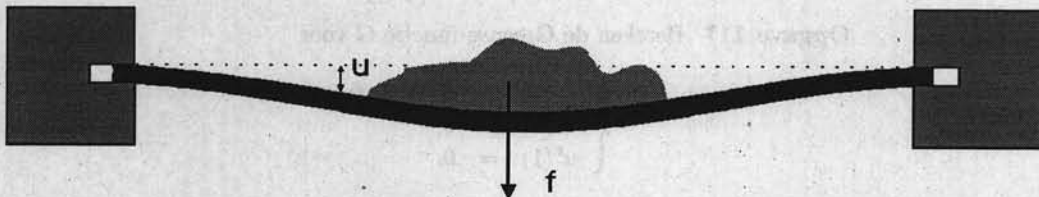
$$\begin{cases} -(e^{-x}u')' = f & \text{met } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

ii. Gebruik deze Greense functie en dat  $-(e^{-x}u')' = e^{-x}(-u'' + u')$  om een Greense functie van

$$\begin{cases} -u'' + u' = g & \text{met } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

te berekenen.

## 10.2 Een vierde-orde probleem; de ingeklemde staaf



De differentiaalvergelijking plus randvoorwaarden die de uitwijking  $u$  van een aan de rand vertikaal ingeklemde staaf van lengte 2 onder een verticale (kleine) kracht  $f$  beschrijft is als volgt:

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & \text{voor } -1 < x < 1, \\ u(-1) = u'(-1) = 0, \\ u(1) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (10.21)$$

Ook voor dit vierde-orde probleem is er een Greense functie. Deze kunnen we als volgt berekenen. Bij een eenheidspuntmassa op plaats  $s$  vinden we dat de bijbehorende oplossing  $u_s = G(\cdot, s)$  links van  $s$  voldoet aan

$$\begin{cases} u_s''''(x) = 0 & \text{voor } -1 < x < s, \\ u_s(-1) = u_s'(-1) = 0, \end{cases}$$

dus  $u_s(x) = (1+x)^2(\alpha_s + \beta_s x)$  voor  $-1 < x < s$ . Rechts van  $s$  voldoet  $u_s$  aan

$$\begin{cases} u_s''''(x) = 0 & \text{voor } s < x < 1, \\ u_s(1) = u_s'(1) = 0, \end{cases}$$

dus  $u_s(x) = (1-x)^2(\gamma_s + \delta_s x)$  voor  $s < x < 1$ . In  $s$  moet gelden

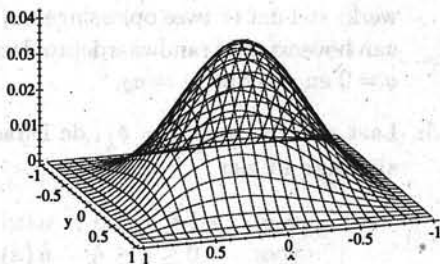
$$\begin{aligned}\lim_{x \downarrow 0} u_s(x) &= \lim_{x \uparrow 0} u_s(x), \\ \lim_{x \downarrow 0} u'_s(x) &= \lim_{x \uparrow 0} u'_s(x), \\ \lim_{x \downarrow 0} u''_s(x) &= \lim_{x \uparrow 0} u''_s(x), \\ \lim_{x \downarrow 0} u'''_s(x) &= \lim_{x \uparrow 0} u'''_s(x) + 1.\end{aligned}$$

Dit zijn de eisen voor de Greense functie bij dit vierde-orde probleem die het analogie vormen van de eisen bij het tweede-orde probleem die in Propositie 10.1.6 genoemd worden. We kunnen hiermee  $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$  en  $\delta_s$  berekenen en er volgt

$$u_s(x) = G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{12}(1-s)^2(1+x)^2(1-xs+2s-2x) & \text{als } x \leq s, \\ \frac{1}{12}(1-x)^2(1+s)^2(1-xs+2x-2s) & \text{als } x > s, \end{cases}$$

of, anders geschreven,

$$G(x, s) = \frac{1}{12}|x-s|^3 + \frac{1}{24}(1-xs)(1+4xs+x^2s^2-3x^2-3s^2).$$



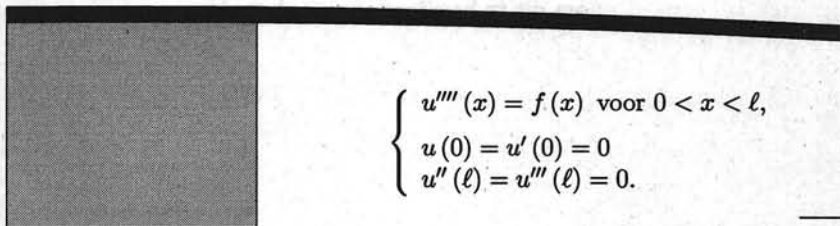
$G(x, y)$  voor de ingeklemde staaf

Andere mogelijke randvoorwaarden bij deze vierde-orde differentiaalvergelijking zijn bijvoorbeeld:

□

#### Voorbeeld 59

De springplank:



$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & \text{voor } 0 < x < l, \\ u(0) = u'(0) = 0 \\ u''(l) = u'''(l) = 0. \end{cases}$$

□

#### Voorbeeld 60

De ondersteunde brug:



$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & \text{voor } -1 < x < 1, \\ u(-1) = u''(-1) = 0 \\ u(1) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

□

**Opgave 121** Bereken de oplossing van (10.21) als  $f = 1$ . Dit geeft bij kleine uitwijking ongeveer de vorm van een doorbuigende plank die aan beide einden ingeklemd is. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 122** Geef de negen eisen die de Greense functie voor de springplank vast leggen. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 123** Bij een brug met drie pijlers vinden we het volgende 'randwaarde'-probleem

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & \text{voor } -1 < x < 0 \text{ en } 0 < x < 1, \\ u(-1) = u''(-1) = 0, \\ u(1) = u''(1) = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'_r(0) = u'_l(0), & \text{dwz. linker en rechterafgeleide gelijk,} \\ u''_r(0) = u''_l(0), & \text{dwz. linker en rechter-tweede-afgeleide gelijk.} \end{cases}$$

Als  $f$  een continue functie is dan geldt  $u \in C^4([-1, 0) \cup (0, 1]) \cap C^2([-1, 1])$ .

- i. Laat zien dat er voor iedere  $f$  hoogstens één oplossing is. Ga als volgt te werk: stel dat er twee oplossingen  $u_1$  en  $u_2$  zijn. Dan voldoet  $v = u_1 - u_2$  aan bovenstaand randwaardeprobleem met  $f = 0$ . Laat tenslotte zien dat  $v = 0$  en dus dat  $u_1 = u_2$ .
- ii. Laat zien dat voor  $f = \delta_{\frac{1}{2}}$ , de Dirac-delta-functie in  $\frac{1}{2}$ , de oplossing er als volgt uit ziet

$$\begin{aligned} \text{voor } -1 \leq x \leq 0 : & u(x) = c_1(x^3 + 3x^2 + 2x); \\ \text{voor } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} : & u(x) = c_2x + c_3x^2 + c_4x^3; \\ \text{voor } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 : & u(x) = c_5(1-x)^3 + c_6(1-x), \end{aligned}$$

en geef de vergelijkingen waaraan  $c_1$  t/m  $c_6$  voldoen.

- iii. Kan men laten zien dat als er zich alleen massa rechts van de middelste pijler bevindt, dus  $f \geq 0$  op  $[0, 1]$  en  $f = 0$  op  $[-1, 0]$ , de linker kant in zijn geheel omhoog gaat, dwz.  $u \geq 0$  op  $[-1, 0]$ ? Zo ja, doe een voorstel om dit te bewijzen en voer het uit. \_\_\_\_\_

# 11. FOURIER-REEKSEN

## 11.1 Motivatie 1: randwaardeproblemen voor gewone d.v.

Beschouwen we het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

Voor enkele speciale rechterzijden  $f$  kunnen we eenvoudig de oplossing vinden. Probeer maar eens  $f(x) = \sin(\pi x)$ . De oplossing wordt  $u(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x)$ . Dit is niet de enige rechterkant die zich zo eenvoudig laat behandelen. Men ziet direct dat voor

$$f(x) = \sum_{k=1}^{527} c_k \sin(k\pi x)$$

de oplossing gegeven wordt door

$$u(x) = \sum_{k=1}^{527} \frac{c_k}{(k\pi)^2} \sin(k\pi x).$$

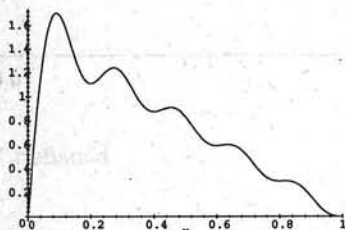
Tweemaal differentiëren van  $\sin(k\pi x)$  levert  $-(k\pi)^2 \sin(k\pi x)$  en bovendien voldoen deze functies ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) aan de randvoorwaarden.

□

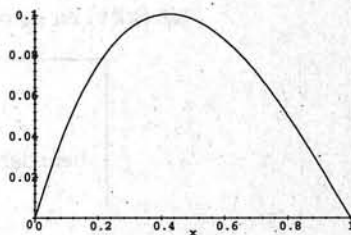
### Voorbeeld 61

Als voorbeeld bekijken we

$$f_{10}(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \sin(k\pi x) \quad \text{met oplossing} \quad u_{10}(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^3 \pi^2} \sin(k\pi x)$$



$f_{10}$

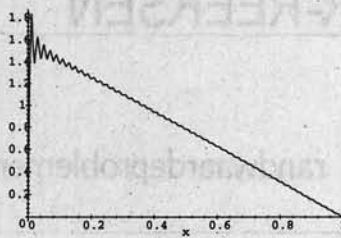
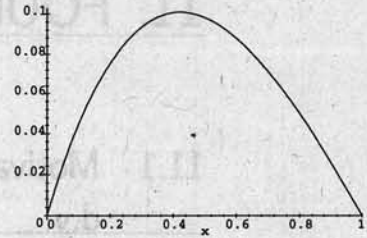


$u_{10}$

en

$$f_{100}(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} \sin(k\pi x) \quad \text{met oplossing} \quad u_{100}(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^3 \pi^2} \sin(k\pi x).$$



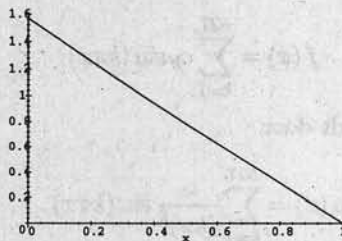
 $f_{100}$  $u_{100}$ 

Het is mogelijk om te laten zien dat

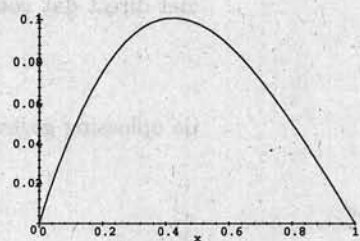
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin(k\pi x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(1-x) & \text{als } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

en dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 \pi^2} \sin(k\pi x) = \frac{\pi}{12} x(x-1)(x-2).$$



$$f(x) = \frac{\pi}{2}(1-x)$$

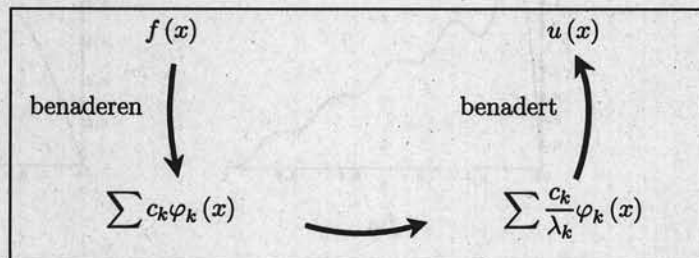


$$u(x) = \frac{\pi}{12} x(x-1)(x-2)$$

Toevallig vindt men bij  $f(x) = \frac{\pi}{2}(1-x)$  ook  $u(x) = \frac{\pi}{12} x(x-1)(x-2)$  als oplossing van (11.1). In 0 wordt  $f$  overigens niet goed benadert:

$$f(0) = \frac{1}{2}\pi \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0).$$

Het net genoemde toeval is geen echt toeval. We zullen laten zien dat we (11.1) volgens onderstaand schema voor vele  $f$  kunnen oplossen. Schrijf  $\varphi_k(x) = \sin(\pi kx)$  en  $\lambda_k = (\pi k)^2$ :



Enkele vragen die hierbij opduiken zijn:

- Welke functies  $f$  kan men benaderen? (Wat bedoelen we met benaderen?)

- Hoe berekent men dan de coëfficiënten  $c_k$ ?
- Converteert de tweede reeks naar een oplossing?
- Kunnen we zo iets ook voor andere randwaardeproblemen uitvoeren?

De Fourier-theorie houdt zich bezig met het beantwoorden van deze vragen.

Nog een paar opmerkingen kunnen we maken naar aanleiding van bovenstaand voorbeeld.

- i. Ofschoon we als basisfuncties de functies  $x \mapsto \sin(k\pi x)$  gebruiken die aan de randvoorwaarden voldoen kunnen we toch een functie  $f$  'benaderen' die niet aan beide randvoorwaarden voldoet. Misschien vind je dat  $f$  niet goed (in 0) benaderd wordt, maar de zo verkregen oplossing is wel de juiste.
- ii. De basisfuncties  $\varphi_k : x \mapsto \sin(k\pi x)$  voldoen aan

$$\begin{cases} -\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) & \text{voor } 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi(1) = 0, \end{cases} \quad (11.2)$$

met  $\lambda = (\pi k)^2$ .

- iii. Als we een eenvoudige methode kunnen vinden om de coëfficiënten te berekenen dan wordt het oplossen van het randwaardeprobleem een 'simpele rekenopgave': vervang  $c_k$  door  $\frac{1}{(k\pi)^2} c_k$ .



**Opgave 124** Bereken de oplossing van (11.1) als

$$f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) + \sin(3\pi x) + \sin(4\pi x).$$



**Opgave 125** Bereken de oplossing van

$$\begin{cases} -u''(x) = 0 & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 1, \end{cases}$$

en gebruik deze bij het oplossen van (11.1) met

$$f(x) = \sin(x) + \sin(\pi x).$$

## 11.2 Motivatie 2: scheiding van variabelen bij beginwaardeproblemen voor partiële d.v.

Beschouw het beginwaardeprobleem voor de partiële differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0 & \text{voor } 0 < x < 1 \text{ en } t > 0, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases} \quad (11.3)$$

Dit begin-rand-waardeprobleem beschrijft na herschaling het temperatuurverloop in een geïsoleerde staaf die aan de rand op 0 graden wordt gehouden en die een begintemperatuur  $u_0(x)$  heeft.

Als  $u_0(x) = \varphi_k(x)$ , met  $\varphi_k$  een eigenfunctie van

$$\begin{cases} \lambda \varphi(x) - \varphi_{xx}(x) = 0 & \text{voor } 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \end{cases} \quad (11.4)$$

met eigenwaarde  $\lambda_k$ , dan vinden we een oplossing van (11.3) door

$$u(x, t) = e^{\lambda_k t} \varphi_k(x).$$

**Opmerking:** We zien dat als volgt:

i) de differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) &= \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right) e^{\lambda_k t} \varphi_k(x) = \lambda_k e^{\lambda_k t} \varphi_k(x) - e^{\lambda_k t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi_k(x) = \\ &= e^{\lambda_k t} (\lambda_k \varphi_k(x) - (\varphi_k)_{xx}(x)) = 0; \end{aligned}$$

ii) de randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= e^{\lambda_k t} \varphi_k(0) = 0, \\ u(t, 1) &= e^{\lambda_k t} \varphi_k(1) = 0; \end{aligned}$$

iii) de beginvoorwaarde:

$$u(0, x) = e^{\lambda_k \cdot 0} \varphi_k(x) = \varphi_k(x).$$

Op dezelfde wijze vinden we voor

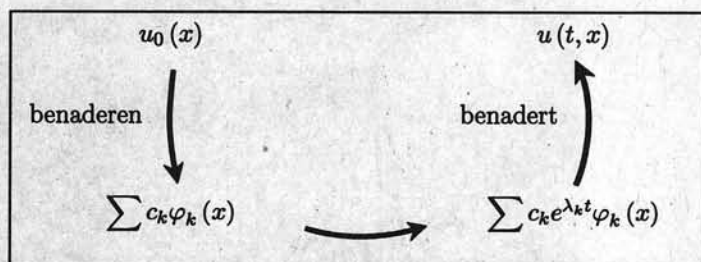
$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{675} c_k \varphi_k(x)$$

een oplossing van (11.3) een oplossing door

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{675} c_k e^{\lambda_k t} \varphi_k(x).$$

met  $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$ .

We zullen laten zien dat we (11.3) voor vele functies  $u_0(x)$  volgens onderstaand schema kunnen oplossen:



De functies  $e^{\lambda_k t} \varphi_k(x)$  in de rechtersom vormen een speciaal soort oplossingen van de differentiaalvergelijking in (11.3), namelijk oplossingen van de vorm

$$u(t, x) = \psi(t) \varphi(x).$$

Voor het vinden van een oplossing van (11.3) bewandelt men vaak de omgekeerde weg. Men probeert oplossingen te vinden als product van een functie van  $t$  en een functie van  $x$  of als lineaire combinaties van dergelijke functies:

$$u(t, x) = \sum \psi_k(t) \varphi_k(x).$$

► *scheiding van variabelen* Dat noemt men *scheiding van variabelen*.



**Opgave 126** Bereken de oplossing van (11.3) met

$$u_0(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) + 5 \cos(\pi x) + 8 \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

Ook voor differentiaalvergelijkingen die een tweede-orde tijdsafgeleide bevatten kunnen Fourierreeksen gebruikt worden. In dat geval vindt men oplossingen van de vorm  $u(t, x) = \sum c_k \sin(\sqrt{\lambda_k t}) \varphi_k(x) + \sum d_k \cos(\sqrt{\lambda_k t}) \varphi_k(x)$ .

Van de (oude) Tacoma Bridge bestaat er een filmopname waarbij een van de termen van een dergelijke reeks een onaangename oplossing van zo'n differentiaalvergelijking laat zien. Het bijbehorende randwaardeprobleem heeft overigens een extra bronterm  $f$  afhankelijk van positie van het brugdek en aangedreven door de dwars op de brug staande wind. Over het preciese model (lees randwaardeprobleem) dat het gedrag van deze brug beschrijft zijn de specialisten het niet eens geworden. In ieder geval heeft men sindsdien hangbruggen ontworpen met een veel grotere torsie-stijfheid en een minder windgevoelig profiel.





## 11.3 Enige achtergrond

### 11.3.1 Voorwaarden en definities

Een van de belangrijkste voorwaarden om het randwaardeprobleem via een benadering met eigenfuncties aan te kunnen pakken is een symmetrie-eis. Om deze te kunnen formuleren is enige inleiding noodzakelijk.

We beschouwen

$$\begin{cases} Lu = f & \text{voor } a < x < b, \\ B_1u = 0, \\ B_2u = 0. \end{cases} \quad (11.5)$$

► differentiaaloperator met de differentiaaloperator

$$L = -p \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + q \frac{d}{dx} + r \quad (11.6)$$

en  $p, q, r \in C[a, b]$  waarbij  $p > 0$ . De randvoorwaarden  $B_i$  zijn als in (10.19). We hebben ook nog het begrip inproduct voor functies nodig.

► inproduct

**Definitie 11.3.1** Een reëel inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  voor  $C[a, b]$  is een afbeelding van  $C[a, b] \times C[a, b]$  naar  $\mathbb{R}$  die voldoet aan:

- i.  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ ;
- ii.  $\langle f, c_1g + c_2h \rangle = c_1 \langle f, g \rangle + c_2 \langle f, h \rangle$ ;
- iii.  $\langle f, f \rangle \geq 0$  en  $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ,

voor alle functies  $f, g, h \in C[a, b]$  en getallen  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Onze symmetrie-eis wordt als volgt gedefinieerd:



zelf-geadjungeerd

**Definitie 11.3.2** Het tweede-orde randwaardeprobleem (11.5) heet zelf-geadjungeerd ten opzichte van het inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  als voor alle  $u, v \in C^2[a, b]$  die aan de randvoorwaarden voldoen, dus  $B_1u = B_2u = B_1v = B_2v = 0$ , geldt

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle.$$

► standaard inproduct

**Opmerking:** Het standaard reële inproduct wordt gedefinieerd door

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (11.7)$$

Het zal blijken dat we ons voor differentiaaloperatoren  $L$  van de vorm  $-\frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q$  kunnen beperken tot dit standaard inproduct. Volgens de opmerking op bladzijde 177 kan men iedere randwaardeprobleem met een differentiaaloperator van de vorm in (11.6) herschrijven naar een met  $\tilde{L} = -\frac{d}{dx} \left( \tilde{p} \frac{d}{dx} \right) + \tilde{q}$ . Dat betekent, of  $L$  in (11.6)

herschrijven en het standaard inproduct beschouwen, of  $L$  laten staan en meer algemene inproducten toelaten.

□

### Voorbeeld 62

Het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u'(0) - u'(1) = 0, \\ u(0) - u(1) = 0. \end{cases} \quad (11.8)$$

is zelf-geadjungeerd ten opzichte van het standaard inproduct:

$$\langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle = \int_0^1 (-vu'' + uv'') dx =$$

via partiële integratie

$$= \int_0^1 \frac{d}{dx} (-vu' + uv') dx = [-vu' + uv'] \Big|_{x=0}^1 =$$

$$= (-v(1)u'(1) + u(1)v'(1)) - (-v(0)u'(0) + u(0)v'(0)) = 0$$

In de laatste stap hebben we  $u'(0) = u'(1)$ ,  $u(0) = u(1)$ ,  $v'(0) = v'(1)$  en  $v(0) = v(1)$  gebruikt.

□

### Voorbeeld 63

Het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases} \quad (11.9)$$

is niet zelf-geadjungeerd ten opzichte van het standaard inproduct:

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle &= \int_0^1 (-vu'' + uv'') dx = \\ &= (-v(1)u'(1) + u(1)v'(1)) - (-v(0)u'(0) + u(0)v'(0)) = \\ &= (-v(1)u'(1) + u(1)v'(1)). \end{aligned}$$

Deze laatste uitdrukking is niet voor alle  $u$  en  $v$  die aan de randvoorwaarden voldoen gelijk aan 0. Neem bijvoorbeeld  $u = x^2$  en  $v = x^3$ .

### Hulpstelling 11.3.3 Het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{voor } a < x < b, \\ B_\ell u = 0, \\ B_r u = 0, \end{cases}$$

zie (10.10), met

$$\begin{aligned} Lu(x) &= -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) + q(x) u(x), \\ B_\ell u &= \alpha u(a) + \beta u'(a), \\ B_r u &= \gamma u(b) + \delta u'(b), \end{aligned}$$

die voldoen aan de voorwaarden in (10.8-10.19), is zelf-geadjungeerd t.o.v. het inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  in (11.7).

**Opmerking:** De differentiaaloperator heeft in deze hulpstelling de 'meer eenvoudige' vorm en de randvoorwaarden 'scheiden' links en rechts.

**Bewijs:** Neem  $u, v \in C^2[a, b]$  die aan de randvoorwaarden  $B_\ell$  en  $B_r$  voldoen. Dan geldt

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle &= \\ &= \int_a^b \left( \left( -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right) u(x) \right) v(x) dx + \\ &\quad - \int_a^b u(x) \left( \left( -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right) v(x) \right) dx = \\ &= \int_a^b \left( -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) v(x) + u(x) \left( \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} v(x) \right) dx = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} \left( -p(x) \left( u'(x) v(x) - u(x) v'(x) \right) \right) dx = \\ &= -p(b) \left( u'(b) v(b) - u(b) v'(b) \right) + p(a) \left( u'(a) v(a) - u(a) v'(a) \right). \end{aligned}$$

Uit  $B_\ell u = 0 = B_\ell v$  volgt  $u'(b) v(b) - u(b) v'(b) = 0$  en uit  $B_r u = 0 = B_r v$  volgt  $u'(a) v(a) - u(a) v'(a) = 0$ .  $\square$

$\square$

**Opgave 127** Is het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0) = 2u(1), \\ u'(0) = 2u'(1), \end{cases}$$

zelf-geadjungeerd t.o.v. het standaard inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ? \_\_\_\_\_

$\square$

**Opgave 128**

i. Is het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u'' + u' = f & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

zelf-geadjungeerd t.o.v. het standaard inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ? \_\_\_\_\_

ii. Laat zien dat  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  dat is gedefinieerd door

$$\langle f, g \rangle_* = \int_0^1 e^{-x} f(x) g(x) dx$$

voldoet aan de drie eisen van een inproduct (zie bladzijde 187) op het interval  $(0, 1)$ . \_\_\_\_\_

iii. Is het randwaardeprobleem zelf-geadjungeerd t.o.v. het inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ ? \_\_\_\_\_



### 11.3.2 Eigenfuncties

Om alle continu functies  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  met lineaire combinaties van geschikte functies  $\sum c_k \varphi_k$  te kunnen benaderen zullen er voldoende van dergelijke functies moeten zijn. Het wordt tijd voor de definitie.

**Definitie 11.3.4** De functie  $\varphi$  ( $\neq$  de nul-functie) die voor een  $\lambda \in \mathbb{C}$  voldoet aan

$$\begin{cases} L\varphi = \lambda\varphi & \text{voor } a < x < b, \\ B_1\varphi = 0, \\ B_2\varphi = 0. \end{cases} \quad (11.10)$$

▶ *eigenfunctie* heet een eigenfunctie met eigenwaarde  $\lambda$  voor (11.10).  
 ▶ *eigenwaarde*

**Hulpstelling 11.3.5** Als  $\varphi_a$  en  $\varphi_b$  eigenfuncties zijn bij een t.o.v.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zelfgeadjungeerd randwaardeprobleem met eigenwaarden  $\lambda_a \neq \lambda_b$ , dan geldt

$$\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = 0. \quad (11.11)$$

**Bewijs:** Merk op dat  $\varphi_a$  en  $\varphi_b$  aan de randvoorwaarden voldoen. Dan

$$\lambda_a \langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = \langle \lambda_a \varphi_a, \varphi_b \rangle = \langle L\varphi_a, \varphi_b \rangle =$$

(nu gebruiken we zelfgeadjungeerdheid)

$$= \langle \varphi_a, L\varphi_b \rangle = \langle \varphi_a, \lambda_b \varphi_b \rangle = \lambda_b \langle \varphi_a, \varphi_b \rangle$$

en uit  $(\lambda_a - \lambda_b) \langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = 0$  volgt  $\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = 0$ .  $\square$

▶ *genormaliseerd*

We zullen dergelijke eigenfuncties alleen *genormaliseerd*<sup>1</sup> gebruiken. Dat wil zeggen dat  $\varphi$  vervangen wordt door  $\tilde{\varphi} := c\varphi$  met  $c \in \mathbb{R}$  zodanig gekozen dat  $\langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \rangle = 1$ .

**Opmerking:** Indien er meerdere onafhankelijke eigenfuncties zijn, bijvoorbeeld  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$  en  $\varphi_c$ , die dezelfde eigenwaarde hebben, dan kunnen we hiermee als volgt genormaliseerde eigenfuncties construeren die aan

$$\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = \langle \varphi_b, \varphi_c \rangle = \langle \varphi_c, \varphi_a \rangle = 0$$

▶ *Gram-Schmidt*

voldoen. Deze *Gram-Schmidt* constructie gaat als volgt:

$$\text{i. } \tilde{\varphi}_a = \langle \varphi_a, \varphi_a \rangle^{-1/2} \varphi_a,$$

$$\text{ii. } \varphi_b^{hulp} = \varphi_b - \langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_b \rangle \tilde{\varphi}_a \text{ en neem } \tilde{\varphi}_b = \langle \varphi_b^{hulp}, \varphi_b^{hulp} \rangle^{-1/2} \varphi_b^{hulp},$$

$$\text{iii. } \varphi_c^{hulp} = \varphi_c - \langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_c \rangle \tilde{\varphi}_a - \langle \tilde{\varphi}_b, \varphi_c \rangle \tilde{\varphi}_b \text{ en neem } \tilde{\varphi}_c = \langle \varphi_c^{hulp}, \varphi_c^{hulp} \rangle^{-1/2} \varphi_c^{hulp}.$$

<sup>1</sup>Als  $\varphi$  een eigenfunctie is, dan is ook  $c\varphi$  voor iedere  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ook een eigenfunctie. Uit de verzameling van al deze veelvouden van  $\varphi$  gebruiken we  $\tilde{\varphi} := c\varphi$  waarvoor geldt dat  $\langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \rangle = 1$ . Zo'n  $c$  vinden we door

$$1 = \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle c\varphi, c\varphi \rangle = c^2 \langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Neem  $c = \langle \varphi, \varphi \rangle^{-1/2}$ . Deze  $\tilde{\varphi}$  heet genormaliseerd. Overigens is ook  $-\tilde{\varphi}$  genormaliseerd en gebruiken we slechts één van beide. Je mag zelf kiezen.

Met  $\varphi_b^{hulp}$  wordt  $\varphi_b$  vervangen door een functie orthogonaal met  $\tilde{\varphi}_a$  die aansluitend genormaliseerd wordt. Orthogonaliteit zien we als volgt:

$$\langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_b^{hulp} \rangle = \langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_b - \langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_b \rangle \tilde{\varphi}_a \rangle = \langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_b \rangle - \langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_b \rangle \langle \tilde{\varphi}_a, \tilde{\varphi}_a \rangle = 0.$$

Bovendien volgt uit de onafhankelijkheid dat  $\varphi_b^{hulp}$  niet de nul-functie is. Op soortgelijke wijze volgt  $\varphi_c^{hulp}$  is niet de nul-functie en  $\langle \tilde{\varphi}_a, \varphi_c^{hulp} \rangle = 0$  en  $\langle \tilde{\varphi}_b, \varphi_c^{hulp} \rangle = 0$ . Je kunt zelf verzinnen hoe men dit proces voor vier of meer functies uitbreidt.

Bij meerdere onafhankelijke eigenfuncties met dezelfde eigenwaarden zullen we bij 'genormaliseerd' aannemen dat deze onderling aan (11.11) voldoen.

► orthonormaal stelsel

**Definitie 11.3.6** Een verzameling eigenfuncties  $\{\varphi_k; k \in I\}$ , met  $I \subset \mathbb{N}$ , die voor elke  $k, m \in I$  aan

$$\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \delta_{km}, \quad (11.12)$$

voldoet heet een orthonormaal stelsel ten opzichte van het inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . De uitdrukking  $\delta_{km}$  is de Kronecker delta<sup>2</sup>.

► Kronecker delta

De orthonormaliteit zal ons zeer van nut zijn bij het berekenen van de coëfficiënten voor de benadering van  $f$  met eigenfuncties.



**Opgave 129** Bereken alle eigenfuncties met bijbehorende eigenwaarden van

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

Normaliseer deze eigenfuncties t.o.v. het standaard inproduct (zodat aan (11.12) wordt voldaan).



**Opgave 130**

i. Bereken alle eigenfuncties  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  van

$$\begin{cases} -u'' + u' = \lambda u & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

ii. Welke bewering is juist

(a) voor alle  $k \neq m \in \mathbb{N}$  geldt

$$\int_0^1 \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx = 0;$$

(b) voor alle  $k \neq m \in \mathbb{N}$  geldt

$$\int_0^1 e^{-x} \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx = 0;$$

<sup>2</sup>De Kronecker delta is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \delta_{km} &= 1 & \text{als } k &= m, \\ \delta_{km} &= 0 & \text{als } k &\neq m. \end{aligned}$$

(c) voor alle  $k \neq m \in \mathbb{N}$  geldt

$$\int_0^1 e^x \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx = 0;$$

en verklaar je antwoord.

### 11.3.3 Convergentie

In het voorbeeld op bladzijde 11.1 hebben we gezien dat we geen puntsgewijze convergentie kunnen verwachten. De convergentie die we zullen krijgen is *convergentie in  $L_2$* .

► *convergentie in  $L_2$*

**Definitie 11.3.7** Een rij functies  $\{f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{k=1}^{\infty}$  convergeert naar de functie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $L_2$ -zin als

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) - f_k(x))^2 dx = 0.$$

► *kwadratisch integreerbaar*

We noemen een functie  $f$  *kwadratisch integreerbaar* op  $[a, b]$  en schrijven  $f \in L_2(a, b)$  als

$$\|f\|_{L_2(a,b)} := \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} < \infty.$$

►  $L_2(a, b)$   
► *norm*

Men noemt  $L_2(a, b)$  de ruimte van kwadratisch integreerbare functies op  $(a, b)$ . De uitdrukking  $\|\cdot\|_{L_2(a,b)}$  is een *norm* voor  $L_2(a, b)$ . Voor de voorwaarden van een norm zie Definitie 5.5.2. In de vectorruimte  $L_2(a, b)$  wordt geen verschil gemaakt tussen functies die slechts op eindig veel punten verschillen. Voor het inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dat is gedefinieerd in (11.7) vinden we dat

$$\|f\|_{L_2(a,b)} = \langle f, f \rangle^{1/2}$$

voor alle  $f \in L_2(a, b)$ .

► *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz*

Met de *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz*, namelijk:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L_2(a,b)} \|g\|_{L_2(a,b)} \quad (11.13)$$

volgt dat  $|\langle f, g \rangle| < \infty$  voor alle  $f, g \in L_2(a, b)$ .

► *volledig ortho-normaal stelsel*

**Definitie 11.3.8** De verzameling functies  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$  heet een volledig ortho-normaal stelsel voor  $L_2(a, b)$  met inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  als aan de volgende eisen is voldaan:

$$i. \langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \delta_{km} \text{ voor alle } k, m \in \mathbb{N},$$

ii. bij iedere functie  $f \in L_2(a, b)$  bestaat een rij getallen  $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$  zodanig dat

$$\sum_{m=0}^k c_m \varphi_m \text{ convergeert in } L_2\text{-zin naar } f \text{ als } k \rightarrow \infty. \quad (11.14)$$

Tenslotte een stelling die zegt dat we voor bovenstaande tweede-orde randwaardeprobleem voldoende eigenfuncties hebben om de oplossing te kunnen vinden via een benadering met eigenfuncties. Het bewijs laten we achterwegen.

**Stelling 11.3.9** Als het randwaardeprobleem (11.5) zelf-gedijungeerd is t.o.v.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dan is de verzameling van alle genormaliseerde onafhankelijke eigenfuncties aftelbaar, zeg  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$ , en vormen ze<sup>3</sup> een volledig orthonormaal stelsel voor  $L_2(a, b)$ . De bijbehorende eigenwaarden zijn reëel en we kunnen de eigenfuncties zo ordenen dat

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Bovendien geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

### 11.3.4 Het berekenen

Nog een zaak ontbreekt. Hoe berekenen we de coëfficiënten in (11.14)? De coëfficiënten van functies die al geschreven zijn als lineaire combinatie van eigenfuncties zullen precies de coëfficiënten in die combinatie zijn. Bijvoorbeeld als  $f(x) = \sum_{m=0}^{354} c_m \varphi_m(x)$  dan vinden we  $c_k$  als volgt terug. We berekenen

$$\langle \varphi_k, f \rangle = \left\langle \varphi_k, \sum_{m=0}^{354} c_m \varphi_m \right\rangle = \sum_{m=0}^{354} c_m \langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = (*)$$

en nu gebruiken we dat  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$  een orthonormaal stelsel is: dus  $\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \delta_{km}$ :

$$(*) = \sum_{m=0}^{354} c_m \langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \sum_{m=0}^{354} c_m \delta_{km} = c_k.$$

Voor een orthonormaal stelsel eigenvectoren kan men op deze wijze de coëfficiënten van elke  $f \in L_2(a, b)$  vinden. Ook hiervan alleen een stelling en geen bewijs.

<sup>3</sup>Na de eigenfuncties bij eventuele gelijke eigenwaarden via Gram-Schmidt (bladzijde 190) orthonormaal 'gemaakt' te hebben.

**Stelling 11.3.10** Zij  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$  een volledig orthonormaal stelsel op  $[a, b]$  t.o.v.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Zij  $f \in L_2(a, b)$ . Definieer de rij  $\{c_k\}_{k=0}^\infty$  door  $c_k = \langle \varphi_k, f \rangle$ . Dan convergeert de rij functies  $\{f_k\}_{k=0}^\infty$  met

$$f_k(x) = \sum_{m=0}^k c_m \varphi_m(x)$$

in  $L_2$ -zin naar  $f$  voor  $k \rightarrow \infty$ .

Slordig gezegd vinden we dat  $f(x) = \sum_{m=0}^\infty c_m \varphi_m(x)$ . Slordig omdat de gelijkheid niet in elk punt  $x$  geldt maar slechts in  $L_2$ -zin. Een betere schrijfwijze zou zijn  $f \stackrel{L_2}{=} \sum_{m=0}^\infty c_m \varphi_m$  waarbij we met  $f \stackrel{L_2}{=} g$  bedoelen  $\|f - g\|_{L_2} = 0$ . Bijvoorbeeld voor twee functies  $f, g$  die slechts in een eindig aantal punten verschillen geldt  $f \stackrel{L_2}{=} g$ .

De uitdrukking

$$\sum_{m=0}^\infty \langle \varphi_m, f \rangle \varphi_m$$

► *Fourier-reeks* heet de *Fourier-reeks* van  $f$  bij het volledige orthonormale stelsel  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$ .

**Opmerking:** Zelf-geadjungeerdheid levert orthogonaliteit van de eigenfuncties voor het betreffende inproduct. Naast het bestaan van voldoende eigenfuncties zorgt de zelf-geadjungeerdheid daarmee dat de  $k^{\text{de}}$  Fouriercoëfficiënt  $c_k$  te berekenen is door  $c_k = \langle \varphi_k, f \rangle$ .

□

**Opgave 131** De verzameling  $\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}^+}$  met  $\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$  is een volledig orthonormaal stelsel op  $(0, \pi)$  t.o.v. het standaard inproduct.

- i. Bereken de coëfficiënten  $c_k$  van de bijbehorende Fourier-reeks voor de functie  $f(x) = 1$ .
- ii. Bereken de coëfficiënten  $d_k$  van de bijbehorende Fourier-reeks voor de functie  $g(x) = x(\pi - x)$ .
- iii. Wat is de relatie tussen  $c_k$  en  $d_k$ ? Kun je deze relatie verklaren?

Met de stellingen die we tot nu toe beschreven hebben kunnen we een functie  $f \in L_2(a, b)$  benaderen. Dat wil zeggen, we hebben een manier om de coëfficiënten  $c_k$  te berekenen en kunnen  $f$  in  $L_2$ -zin benaderen met de Fourier-reeks. Volgt hieruit ook de convergentie van de reeks waarbij  $c_k$  is vervangen door  $c_k/\lambda_k$ ? Dit zouden de coëfficiënten van de oplossing  $u$  moeten worden. Men kan dat inderdaad afleiden. De reeks die we voor de oplossing verwachten convergeert in  $L_2$ -zin naar de oplossing. Men kan zelfs laten zien dat de Fourier-reeks van de oplossing ook puntsgewijs en zelfs uniform naar  $u$  convergeert. We zullen hier nauwelijks verder op ingaan. Slechts een paar beroemde resultaten noemen we in de volgende paragraaf.

Het voor ons belangrijkste resultaat vatten we als volgt samen:



**Stelling 11.3.11** Zij (11.5) zelf-geadjungeerd ten opzichte van het inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Laat  $\{(\lambda_k, \varphi_k)\}_{k=0}^{\infty}$  de eigenwaarden/eigenfuncties (genormaliseerd inclusief Gram-Schmidt, zie bladz. 190) van het bijbehorende eigenwaardeprobleem zijn. Als  $\lambda_k \neq 0$  voor alle  $k \in \mathbb{N}$  dan wordt voor  $f \in L_2(a, b)$  de oplossing van (11.5) gegeven door

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x).$$

Bovendien convergeert de reeks uniform<sup>4</sup>.

**Opmerking:** De eis dat  $\lambda_k \neq 0$  betekent precies dat Voorwaarde 10.1.2 is voldaan. Die voorwaarde was al nodig bij het bestaan van een Greense functie.

## 11.4 Verdere theorie

Tenslotte nog enkele beroemde resultaten uit de Fourier-theorie.

► Bessel-  
ongelijkheid

**Stelling 11.4.1 (Bessel-ongelijkheid)** Als  $\{\varphi_k; k \in I\}$ , met  $I$  een deelverzameling van  $\mathbb{N}$ , een orthonormaal stelsel is in  $L_2(a, b)$  en  $f \in L_2(a, b)$ , dan

$$\sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \leq \int_{x=a}^b (f(x))^2 dx.$$

► gelijkheid van  
Parseval

**Stelling 11.4.2 (Gelijkheid van Parseval)** Als  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$  een volledig orthonormaal stelsel is in  $L_2(a, b)$  en  $f, g \in L_2(a, b)$ , dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle = \langle f, g \rangle,$$

in het bijzonder vinden we voor  $f = g$  dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle^2 = \int_{x=a}^b (f(x))^2 dx.$$

<sup>4</sup>Een rij continue functies  $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$  convergeert uniform op het interval  $[a, b]$  naar de functie  $u$  als

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |u_k(x) - u(x)| = 0.$$

**Hulpstelling 11.4.3** Zij  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$  een volledig orthonormaal stelsel in  $L_2(a, b)$  en  $f \in L_2(a, b)$ . Neem  $I$  een eindige deelverzameling van  $\mathbb{N}$ . Dan

$$\left\| f - \sum_{i \in I} c_i \varphi_i \right\|_{L_2(a, b)} \geq \left\| f - \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\|_{L_2(a, b)}$$

Met andere woorden: de beste  $L_2(a, b)$ -benadering van  $f$  met  $\sum_{i \in I} c_i \varphi_i$  vindt men voor  $c_i = \langle f, \varphi_i \rangle$ .

**Bewijs van 11.4.1:** We gaan allereerst de Bessel-ongelijkheid bewijzen voor een eindige verzameling  $I$ . Dan bestaat de volgende uitdrukking uit eindig veel termen, en is dus goed gedefinieerd. We vinden gebruik makend van de (bi)lineariteit van het inproduct dat

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f(x) - \sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) \right\|_{L_2(a, b)}^2 = \\ &= \left\langle f(x) - \sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x), f(x) - \sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) \right\rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \left\langle f, \sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_{m \in I} \langle f, \varphi_m \rangle \varphi_m \right\rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k \in I} \sum_{m \in I} \langle f, \varphi_m \rangle \langle f, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \end{aligned}$$

(nu de orthonormaliteit van de eigenfuncties gebruikend:  $\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \delta_{km}$ )

$$\begin{aligned} &= \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle^2 + \sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle^2 = \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \end{aligned}$$

en voor iedere eindige verzameling  $I$  volgt de ongelijkheid van Bessel

$$\sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \leq \int_{x=a}^b (f(x))^2 dx.$$

Omdat iedere eindige som begrensd is door  $\int_{x=a}^b (f(x))^2 dx$  volgt dat  $\sum_{k \in I} \langle f, \varphi_k \rangle^2$  voor aftelbare  $I$  convergeert en ook door  $\int_{x=a}^b (f(x))^2 dx$  begrensd is.  $\square$

**Bewijs van 11.4.3:** Vervolgens het laatste resultaat. Net als boven vinden we dat:

$$\begin{aligned} &\left\| f - \sum_{i \in I} c_i \varphi_i \right\|_{L_2(a, b)}^2 - \left\| f - \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\|_{L_2(a, b)}^2 = \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \langle f, \sum_{i \in I} c_i \varphi_i \rangle + \left\langle \sum_{i \in I} c_i \varphi_i, \sum_{j \in I} c_j \varphi_j \right\rangle + \\ &\quad - \langle f, f \rangle + 2 \langle f, \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \rangle - \left\langle \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i, \sum_{j \in I} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\rangle = \\ &\text{(nu enkele malen gebruiken dat } \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \text{)} \\ &= -2 \sum_{i \in I} c_i \langle f, \varphi_i \rangle + \sum_{i \in I} c_i^2 + 2 \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle^2 - \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle^2 = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i \in I} (c_i - \langle f, \varphi_i \rangle)^2 \geq 0.$$

Deze laatste uitdrukking is dan en slechts dan gelijk aan 0 als  $c_i = \langle f, \varphi_i \rangle$ .  $\square$

**Bewijs van 11.4.2:** Tenslotte Parseval's resultaat. Dit volgt bijna direct uit de definitie van volledig orthonormaal stelsel. De volledigheid van het stelsel zegt dat er een rij  $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$  is zodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x=0}^{\ell} \left( f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = 0. \quad (11.15)$$

Met Hulpstelling 11.4.3 zien we dat  $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ . Omdat

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^b \left( f(x) - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) \right)^2 dx &= \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle^2 \end{aligned}$$

volgt

$$\int_{x=a}^b f(x)^2 dx = \langle f, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle^2. \quad (11.16)$$

Via  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \langle f+g, f+g \rangle - \frac{1}{4} \langle f-g, f-g \rangle$  en (11.16) vinden we

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \langle f+g, \varphi_k \rangle^2 - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \langle f-g, \varphi_k \rangle^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} (\langle f, \varphi_k \rangle + \langle g, \varphi_k \rangle)^2 - \frac{1}{4} (\langle f, \varphi_k \rangle - \langle g, \varphi_k \rangle)^2 \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

$\square$

**Opgave 132** We hebben hierboven gebruikt dat voor een inproduct voor reële functies geldt dat

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \langle f+g, f+g \rangle - \frac{1}{4} \langle f-g, f-g \rangle. \quad (11.17)$$

Laat dit zien. \_\_\_\_\_

$\square$

► *inproduct voor complexe functies*

**Opgave 133** Een *inproduct*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  voor  $C([a, b]; \mathbb{C})$ , de complexwaardige continue functies op  $[a, b]$ , is een afbeelding van  $C([a, b]; \mathbb{C}) \times C([a, b]; \mathbb{C})$  naar  $\mathbb{C}$  die voldoet aan eisen *i*<sub>C</sub>, *ii*. en *iii*. waarbij *ii*. en *iii*. als in Definitie 11.3.1 zijn. Voorwaarde *i*. is vervangen door

*i*<sub>C</sub>.  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$  voor alle functies  $f, g \in C([a, b]; \mathbb{C})$ .

i. Voor complexe functies geldt de gelijkheid in (11.17) niet. In plaats daarvan vinden we

$$\operatorname{Re} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \langle f+g, f+g \rangle - \frac{1}{4} \langle f-g, f-g \rangle.$$

Laat dit zien.



- ii. Tenslotte een puzzel. Vind een lineaire combinatie van inproducten  $\langle f+g, f+g \rangle$ ,  $\langle f-g, f-g \rangle$ ,  $\langle f+ig, f+ig \rangle$  en  $\langle f-ig, f-ig \rangle$  die in het complexe geval  $\langle f, g \rangle$  levert.

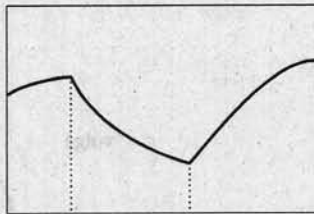
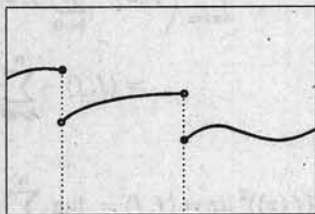
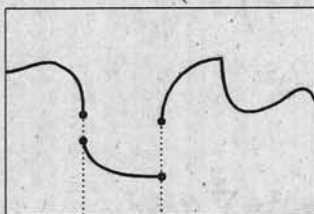
► *stuksgewijs continu differentieerbaar*

We eindigen met een stelling voor *stuksgewijs continu differentieerbare functies*<sup>5</sup>.

►  $C_{pw}^1[a, b]$

**Stelling 11.4.4** Voor alle  $f \in C_{pw}^1[a, b]$  en  $a < x < b$  geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) = \frac{1}{2} \left( \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x-\varepsilon) \right).$$



Schetsen van functies in resp.  $C_{pw}[a, b]$ ,  $C_{pw}^1[a, b]$  en  $C[a, b] \cap C_{pw}^1[a, b]$ .

**Gevolg 11.4.5** Als  $f \in C[a, b] \cap C_{pw}^1[a, b]$  dan geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i(x) = f(x) \quad \text{voor elke } x \in (a, b).$$

M.a.w. de Fourier-reeks convergeert puntsgewijs binnen  $(a, b)$  voor deze  $f$ .

## 11.5 Fourier-reeksen en randwaardeproblemen

### 11.5.1 Periodieke randvoorwaarde

Beschouw het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{voor } -\ell \leq x \leq \ell, \\ u(-\ell) = u(\ell), \\ u'(-\ell) = u'(\ell). \end{cases} \quad (11.18)$$

<sup>5</sup>Een functie  $f$  heet stuksgewijs continu op  $[a, b]$  als het volgende geldt. Er zijn  $n$  getallen  $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$  met  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$  en functies  $\{f_i\}_{i=1}^n \subset C[a_{i-1}, a_i]$  zodat

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{voor } x \in (a_{i-1}, a_i).$$

We zeggen  $f \in C_{pw}[a, b]$  (pw=piecewise).

Een functie  $f$  heet stuksgewijs differentieerbaar op  $[a, b]$  als het volgende geldt. Er zijn  $n$  getallen  $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$  met  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$  en functies  $\{f_i\}_{i=1}^n \subset C^1[a_{i-1}, a_i]$  zodat

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{voor } x \in (a_{i-1}, a_i).$$

We zeggen  $f \in C_{pw}^1[a, b]$ .

Als  $f$  een continue  $2\ell$ -periodieke functie op  $\mathbb{R}$  is dan kunnen we de oplossing  $u$  van (11.18)  $2\ell$ -periodiek voortzetten op  $\mathbb{R}$  en vindt men dat  $-u'' + u = f$  op  $\mathbb{R}$ . Vandaar dat (11.18) een periodiek randwaardeprobleem genoemd wordt.

- Dit probleem is zelf-geadjungeerd t.o.v. het standaard inproduct. Inderdaad, als  $u$  en  $v$  aan de randvoorwaarden voldoen, geldt

$$\begin{aligned} & \langle -u'' + u, v \rangle - \langle u, -v'' + v \rangle = \\ & = \langle -u'', v \rangle - \langle u, -v'' \rangle = \\ & = \int_{\ell}^{\ell} (-u''(x)v(x) + u(x)v''(x)) dx = \\ & = \left[ -u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \right]_{x=a}^b = \\ & = -u'(\ell)v(\ell) + u(\ell)v'(\ell) + u'(-\ell)v(-\ell) - u(-\ell)v'(-\ell) = 0. \end{aligned}$$

- Voor  $f = 0$  hebben we alleen de 0-oplossing. Want  $-u'' + u = 0$  impliceert  $u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$  en invullen van de randvoorwaarden leidt tot  $c_1 = c_2 = 0$ . Dus 0 is geen eigenwaarde.
- Volgens Stelling 11.3.9 vormen de eigenfuncties een volledig orthonormaal stelsel in  $L_2(a, b)$ .
- We moeten nog de eigenfuncties en eigenwaarden uitrekenen. Dat wil zeggen dat we alle oplossingen  $(u, \lambda)$  van

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda u & \text{voor } -\ell \leq x \leq \ell, \\ u(-\ell) = u(\ell), \\ u'(-\ell) = u'(\ell). \end{cases}$$

zoeken.

De differentiaalvergelijking lossen we achtereenvolgens op voor  $\lambda > 1$ ,  $\lambda = 1$  en  $\lambda < 1$ .

- Als  $\lambda > 1$  dan  $u(x) = c_1 \sin(\mu x) + c_2 \cos(\mu x)$  waarbij we  $\mu = \sqrt{\lambda - 1}$  schrijven. De randvoorwaarden invullen levert

$$\begin{aligned} c_1 \sin(\mu\ell) + c_2 \cos(\mu\ell) &= c_1 \sin(-\mu\ell) + c_2 \cos(-\mu\ell), \\ c_1 \mu \left( \cos(\mu\ell) - c_2 \sin(\mu\ell) \right) &= \\ &= c_1 \mu \left( \cos(-\mu\ell) - c_2 \sin(-\mu\ell) \right), \end{aligned}$$

- en na vereenvoudiging

$$\begin{aligned} 2c_1 \sin(\mu\ell) &= 0, \\ 2c_2 \sin(\mu\ell) &= 0. \end{aligned}$$

Met andere woorden  $c_1 = c_2 = 0$  of  $\sqrt{\lambda - 1} \ell = k\pi$  voor een  $k \in \mathbb{N}^+$ . De eerste mogelijk leidt tot de 0-oplossing. Blijft over  $\lambda = 1 + \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$  en

$$u(x) = c_1 \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + c_2 \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

- Als  $\lambda = 1$  dan  $u(x) = c_1 + c_2x$ . De randvoorwaarden invullen levert

$$\begin{aligned}c_1 + c_2\ell &= c_1 - c_2\ell, \\c_2 &= c_2.\end{aligned}$$

De eerste vergelijking geeft  $c_2 = 0$  en we krijgen

$$u(x) = c_1.$$

- Als  $\lambda < 1$  dan  $u(x) = c_1e^{\sqrt{1-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{1-\lambda}x}$ . De randvoorwaarden invullen levert

$$\begin{aligned}c_1e^{\sqrt{1-\lambda}\ell} + c_2e^{-\sqrt{1-\lambda}\ell} &= c_1e^{-\sqrt{1-\lambda}\ell} + c_2e^{\sqrt{1-\lambda}\ell}, \\c_1\sqrt{1-\lambda}e^{\sqrt{1-\lambda}\ell} - c_2\sqrt{1-\lambda}e^{-\sqrt{1-\lambda}\ell} &= \\&= c_1\sqrt{1-\lambda}e^{-\sqrt{1-\lambda}\ell} - c_2\sqrt{1-\lambda}e^{\sqrt{1-\lambda}\ell},\end{aligned}$$

en na wat rekenwerk  $c_1 = c_2 = 0$ . Met andere woorden: alleen de 0-oplossing.

• Het volledige orthonormale stelsel eigenvectoren wordt

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin\left(\frac{3\pi}{\ell}x\right), \dots \right\}.$$

► *standaard  
Fourier-reeks*

Deze functies worden gebruikt bij de *standaard Fourier-reeks* op  $(-\ell, \ell)$ .

## 11.5.2 De standaard Fourier-reeks

Op het interval  $[-1, 1]$  gebruiken we functies

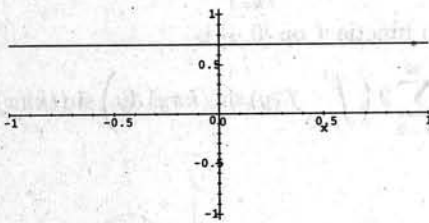
$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi_{2k-1}(x) = \sin(k\pi x) \text{ voor } k \in \mathbb{N}^+,$$

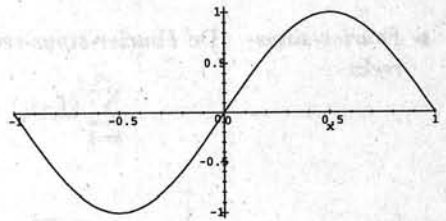
$$\varphi_{2k}(x) = \cos(k\pi x) \text{ voor } k \in \mathbb{N}^+.$$

De Fourier-reeks bij een functie  $f$  is gedefinieerd door

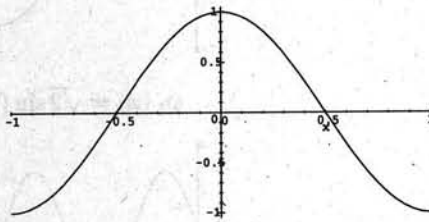
$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} (f, \varphi_m) \varphi_m(x) = \\ & = \frac{1}{2} \left( \int_{y=-1}^1 f(y) dy \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{y=-1}^1 f(y) \sin(k\pi y) dy \right) \sin(k\pi x) + \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{y=-1}^1 f(y) \cos(k\pi y) dy \right) \cos(k\pi x). \end{aligned}$$



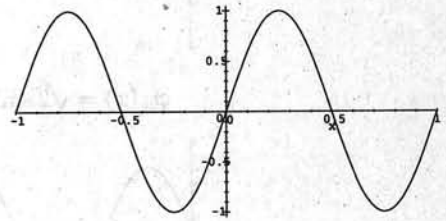
$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



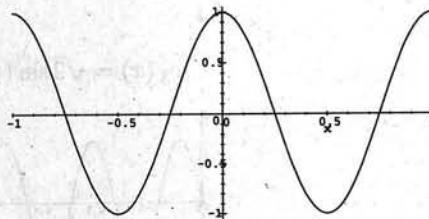
$$\varphi_1(x) = \sin(\pi x)$$



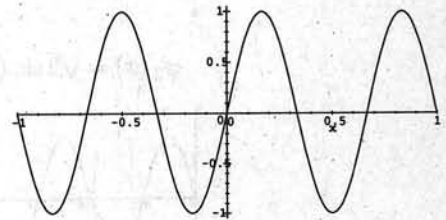
$$\varphi_2(x) = \cos(\pi x)$$



$$\varphi_3(x) = \sin(2\pi x)$$



$$\varphi_4(x) = \cos(2\pi x)$$



$$\varphi_5(x) = \sin(3\pi x)$$

enzovoort.

## 11.5.3 De Fourier-sinus-reeks

Beschouwen we het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

dan krijgen we via het bijbehorende eigenwaardeprobleem

$$\begin{cases} -\varphi'' = \lambda\varphi & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, \\ \dot{\varphi}(0) = 0, \\ \varphi(1) = 0, \end{cases}$$

de eigenfuncties/eigenwaarden  $\sin(k\pi x)$ ,  $(k\pi)^2$  met  $k = 1, 2, \dots$ . Na normalisatie

$$1 = \int_0^1 (c \sin(k\pi x))^2 dx = \frac{1}{2}c^2$$

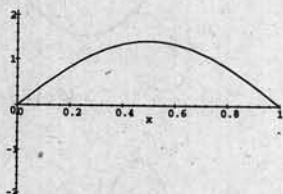
(dus  $c = \sqrt{2}$ ) vinden we het volgende volledige orthonormale stelsel eigenfuncties in  $L_2[0, 1]$ :

$$\left\{ \sqrt{2} \sin(k\pi x) \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

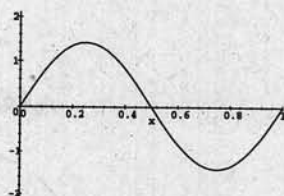
► *Fourier-sinus-reeks*

De *Fourier-sinus-reeks* bij een functie  $f$  op  $[0, 1]$  is

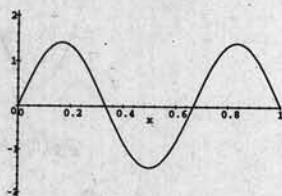
$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left( \int_{y=0}^1 f(y) \sin(k\pi y) dy \right) \sin(k\pi x)$$



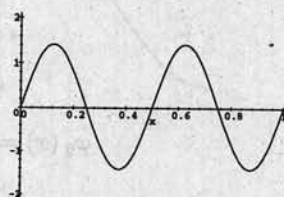
$$\varphi_0(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x)$$



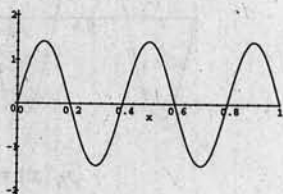
$$\varphi_1(x) = \sqrt{2} \sin(2\pi x)$$



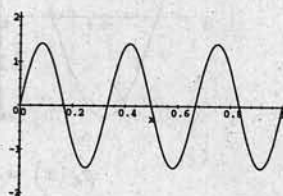
$$\varphi_2(x) = \sqrt{2} \sin(3\pi x)$$



$$\varphi_3(x) = \sqrt{2} \sin(4\pi x)$$



$$\varphi_4(x) = \sqrt{2} \sin(5\pi x)$$



$$\varphi_5(x) = \sqrt{2} \sin(6\pi x)$$

## 11.5.4 De Fourier-cosinus-reeks

Beschouwen we het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, \\ u'(0) = 0, \\ u'(1) = 0, \end{cases}$$

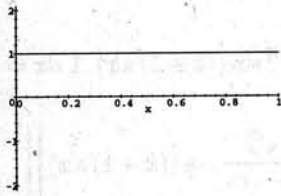
dan krijgen we het volgende volledige orthonormale stelsel eigenfuncties via het bijbehorende eigenwaardeprobleem:

$$\{1\} \cup \{\sqrt{2} \cos(k\pi x)\}_{k=1}^{\infty}.$$

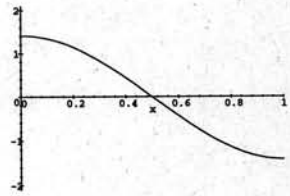
► *Fourier-cosinus-reeks*

De *Fourier-cosinus-reeks* bij een functie  $f$  op  $[0, 1]$  is

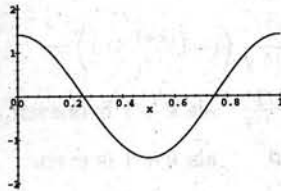
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) &= \\ &= \left( \int_{y=0}^1 f(y) dy \right) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left( \int_{y=0}^1 f(y) \cos(k\pi y) dy \right) \cos(k\pi x). \end{aligned}$$



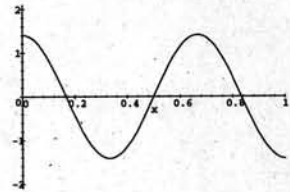
$$\varphi_0(x) = 1$$



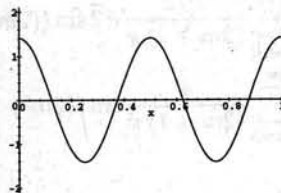
$$\varphi_1(x) = \sqrt{2} \cos(\pi x)$$



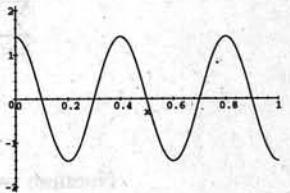
$$\varphi_2(x) = \sqrt{2} \cos(2\pi x)$$



$$\varphi_3(x) = \sqrt{2} \cos(3\pi x)$$



$$\varphi_4(x) = \sqrt{2} \cos(4\pi x)$$



$$\varphi_5(x) = \sqrt{2} \cos(5\pi x)$$

enzovoort.

### 11.5.5 Enkele verbanden

#### Hulpstelling 11.5.1

- Als  $f$  een oneven<sup>6</sup> functie is op  $[-1, 1]$ , dan is de standaard Fourier-reeks van  $f$  gelijk aan de Fourier-sinus-reeks voor  $f$  op  $[0, 1]$ .
- Als  $f$  een even<sup>7</sup> functie is op  $[-1, 1]$ , dan is de standaard Fourier-reeks van  $f$  gelijk aan de Fourier-cosinus-reeks voor  $f$  op  $[0, 1]$ .

Het bewijs hiervan verloopt recht-toe-recht-aan en kan door de lezer zelf gedaan worden.

### 11.5.6 Voorbeeld en opgaven

□

#### Voorbeeld 64

De Fourier-sinus-reeks op  $[0, 1]$  behorende bij de functie  $f(x) = 1$ . De coëfficiënten zijn

$$\begin{aligned}
 \langle f, \varphi_k \rangle &= \int_{x=0}^1 \sqrt{2} \sin((k+1)\pi x) \cdot 1 \, dx = \\
 &= \left[ \frac{-\sqrt{2}}{(k+1)\pi} \cos((k+1)\pi x) \right]_{x=0}^1 = \\
 &= \frac{-\sqrt{2}}{(k+1)\pi} (\cos((k+1)\pi x) - \cos 0) = \\
 &= \frac{-\sqrt{2}}{(k+1)\pi} ((-1)^{k+1} - 1) = \\
 &= \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{(k+1)\pi} & \text{als } k+1 \text{ is oneven,} \\ 0 & \text{als } k+1 \text{ is even.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

De Fourier-sinus-reeks wordt

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{(2m+1)\pi} \sqrt{2} \sin((2m+1)\pi x) = \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin((2m+1)\pi x).
 \end{aligned}$$

Noemen we de partiële reeks

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$$

<sup>6</sup>De functie  $f$  is oneven als  $f(x) = -f(-x)$ .

<sup>7</sup>De functie  $f$  is even als  $f(x) = f(-x)$ .

dan vinden we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x=0}^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Omdat  $f$  en  $f'$  continu zijn weten we bovendien (Stelling 11.4.4) dat de reeks puntsgewijs convergeert voor  $x \in (0, 1)$  en dat dus geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

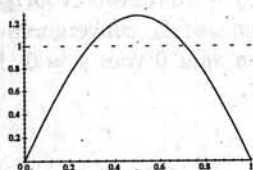
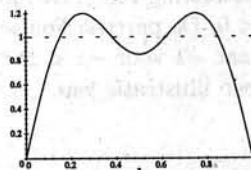
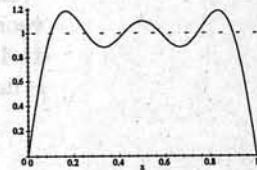
Enkele opeenvolgende benaderingen zijn

$$f_0(x) = f_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin(\pi x),$$

$$f_2(x) = f_3(x) = \frac{4}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\pi x),$$

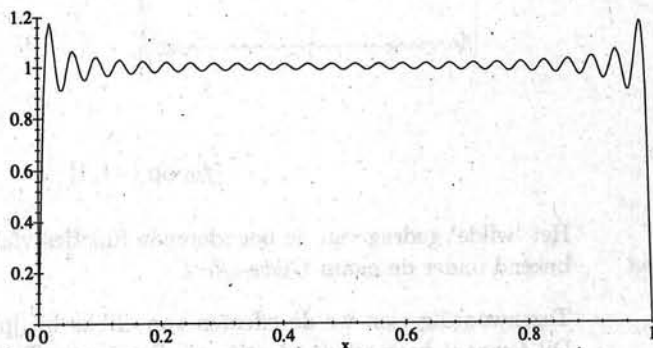
$$f_4(x) = f_5(x) = \frac{4}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\pi x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\pi x),$$

$$f_6(x) = f_7(x) = \frac{4}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\pi x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\pi x) + \frac{4}{7\pi} \sin(7\pi x),$$

 $f_0$  $f_2$  $f_4$ 

en enkele overslaand:

$$f_{50}(x) = \sum_{m=0}^{25} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin((2m+1)\pi x).$$

 $f_{50}$ 

**Gevolg 11.5.2** We kunnen  $\frac{1}{4}\pi$  m.b.v. de volgende reeks schrijven.

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Beter gezegd  $\frac{1}{4}\pi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$ .

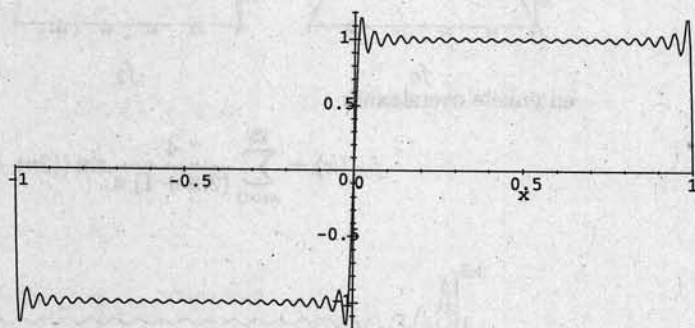


**Bewijs:** We nemen de Fourier-sinus reeks voor  $f(x) = 1$  op  $[0, 1]$  uit het vorige voorbeeld. Het resultaat volgt uit de puntsgewijze convergentie van  $f_n(x)$  naar  $f(x)$  voor  $0 < x < 1$  als  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} 1 = f\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin\left((2m+1)\pi \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin\left(m\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}. \end{aligned}$$

□

Volgens Hulpstelling 11.5.1 zal  $f_n$  op  $[-1, 1]$  convergeren in  $L_2$ -zin naar de oneven voortzetting van  $f$ . De functie  $f$  wordt oneven voortgezet door  $f(x) = -1$  voor  $x < 0$ . De partiële Fourier-sommen  $f_n$  convergeren dan volgens Stelling 11.4.4 naar  $-1$  voor  $-1 < x < 0$  en naar  $0$  voor  $x = 0$ . Het volgende plaatje is daar een illustratie van.



$f_{50}$  op  $[-1, 1]$

► *Gibbs-effect*

Het 'wilde' gedrag van de benaderende functies vlak voor en na de sprong is bekend onder de naam *Gibbs-effect*.

Tegenwoordig zien we de effecten van Gibbs bij jpg-files met lage resolutie. Dit formaat bewaart de plaatjes via Fourier-coëfficiënten.

\*.jpg

□

**Opgave 134** Op de voorgaande bladzijden zijn de eigenfuncties bij de stan-

daard Fourier-reeks zowel voor het interval  $(-\ell, \ell)$  als voor  $(-1, 1)$  beschreven. Voor het interval  $(0, \ell)$  met  $\ell \in \mathbb{R}^+$  is

$$\left\{ 1, \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right), \sin\left(\frac{4\pi}{\ell}x\right), \cos\left(\frac{4\pi}{\ell}x\right), \dots \right\}$$

een bij de standaard Fourier-reeks behorend volledige stelsel eigenfuncties. Bepaal de juiste normalisatie. \_\_\_\_\_

□ **Opgave 135** Bepaal het volledige orthonormale stelsel eigenfuncties behorende bij de Fourier-sinus-reeks op  $(0, \ell)$ . Dezelfde vraag voor  $(-\ell, \ell)$ . \_\_\_\_\_

□ **Opgave 136** Bereken de coëfficiënten bij de standaard Fourier-reeks op  $(0, 1)$  voor  $f(x) = x$ . \_\_\_\_\_

□ **Opgave 137** Zij  $\ell > 0$  en  $f$  een gegeven functie uit  $L_2(0, \ell)$ . We beschouwen het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{voor } 0 < x < \ell, \\ u(0) = 0, \\ u'(\ell) = 0. \end{cases}$$

- Laat zien dat dit r.w.p. zelf-geadjungeerd is t.o.v. het standaard inproduct.
- Beschrijf het bijbehorende eigenwaardeprobleem.
- Bereken de geschikte eigenfuncties met de eigenwaarden voor dit probleem.
- Geef het volledig orthonormale stelsel van eigenfuncties.
- Bereken de coëfficiënten van de bijbehorende Fourier-reeks van  $u$  uitgedrukt in termen van  $f$ . \_\_\_\_\_

□ **Opgave 138** Zij  $f$  een gegeven functie uit  $L_2(0, \ell)$ . We beschouwen het periodieke randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1), \\ u'(0) = u'(1). \end{cases} \quad (11.19)$$

Zelfde vragen als in de vorige opgave. \_\_\_\_\_

□ **Opgave 139** Zij  $u_0$  een gegeven functie uit  $L_2(0, \ell)$ . We beschouwen bij gegeven  $u_0$  het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 & \text{voor } 0 < x < 1 \text{ en } t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t), \\ u'(0, t) = u'(1, t), \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

In de vorige opgave hebben we gezien dat (11.19) zelf-geadjungeerd is en het bijbehorende eigenwaarde probleem daarmee een volledig orthonormaal stelsel van eigenfuncties levert. Gebruik deze eigenfuncties om de oplossing  $u$  in de vorm van een Fourier-reeks te geven. \_\_\_\_\_



**Opgave 140** Zij  $f$  een gegeven functie uit  $L_2(0, \ell)$ . We beschouwen

$$\begin{cases} -u'' + 2u' = f & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (11.20)$$

Bekijk de volgende beweringen. Waar of niet waar? En motiveer je antwoord:

i. De eigenfuncties van het bijbehorende eigenwaardeprobleem zijn  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  met  $\varphi_k(x) = e^x \sin(\pi kx)$  en  $\lambda_k = 1 + \pi^2 k^2$ .

ii.  $\int_0^1 (e^x \sin(\pi kx))^2 dx = \frac{1}{4} (e^2 - 1) \frac{k^2 \pi^2}{1 + k^2 \pi^2}$ .

iii. Voor alle  $x \in [0, 1]$  geldt

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\frac{1}{4} (e^2 - 1) \frac{k^2 \pi^2}{1 + k^2 \pi^2}} \langle \varphi_k, f \rangle.$$

iv. De rij  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  met

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x)}{\frac{1}{4} (e^2 - 1) \frac{k^2 \pi^2}{1 + k^2 \pi^2}} \langle \varphi_k, f \rangle$$

convergeert in  $L_2$ -zin naar  $f$ .

v. De rij  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  met

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \pi^2 k^2} \frac{\varphi_k(x)}{\frac{1}{4} (e^2 - 1) \frac{k^2 \pi^2}{1 + k^2 \pi^2}} \langle \varphi_k, f \rangle$$

convergeert in  $L_2$ -zin naar de oplossing  $u$ .

vi. De rij  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  met

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \pi^2 k^2} 2\varphi_k(x) \langle \varphi_k, f \rangle_*$$

met

$$\langle \varphi_k, f \rangle_* = \int_0^1 e^{-2y} \varphi_k(y) f(y) dy$$

convergeert in  $L_2$ -zin naar de oplossing  $u$ .

Degenen die in de wiskundige analyse rond Greense functies en Fourierreeksen geïnteresseerd zijn kunnen terecht bij:

K. YOSIDA, *Lectures on Differential and Integral Equations*, Dover 1991 (reprint uit 1960).

M.R. SPIEGEL, *Schaum's Outline of theory and problems of Fourier Analysis etc*, MacGraw-Hill, 1974.

Schemis 2. enkele oplossingen van randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen

• IV.1.1. (a) (b) (c)



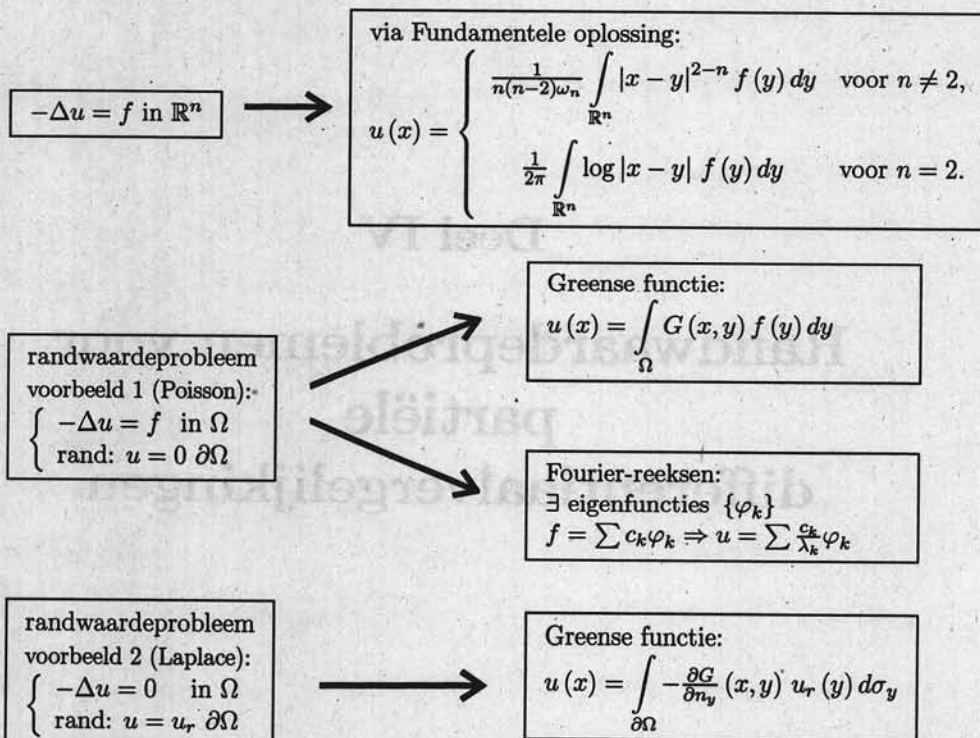
### Deel IV

# Randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen

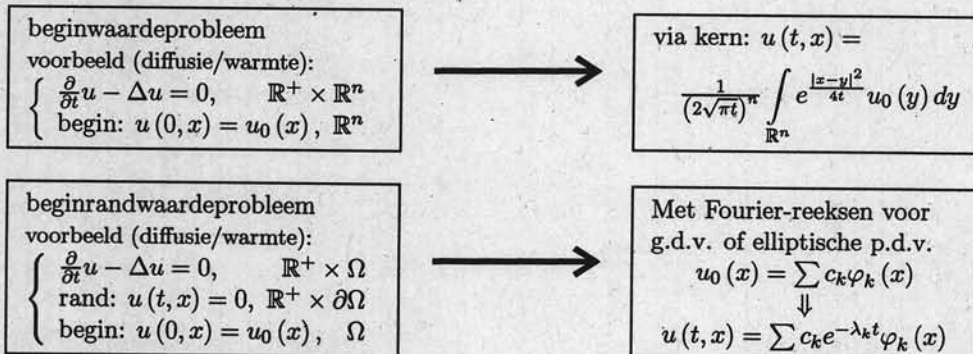


## Schema 2: enkele oplossingen van randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen

### • IV.14: (elliptisch)



### • IV.15: (parabolisch)



• IV.16: (hyperbolisch)

beginwaardeprobleem  
voorbeeld (golfvergelijking):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \text{rand: } u(t, x) = 0, & \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \text{begin: } \begin{cases} u(0, x) = u_0(x), \\ u_t(0, x) = \psi_0(x), \end{cases} & \Omega \end{cases}$$

Integraalformule  
van d' Alembert  
(voor n=1)

Met Fourier-reeksen voor  
g.d.v. of elliptische p.d.v.

$$\begin{cases} u_0(x) = \sum c_k \varphi_k(x), \\ \psi_0(x) = \sum d_k \varphi_k(x) \end{cases}$$

↓

$$u(t, x) = \sum c_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) \varphi_k(x) + \sum \frac{d_k}{\lambda_k} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \varphi_k(x)$$

• IV.17: (Schrödinger)

beginrandwaardeprobleem  
voorbeeld:

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u + Vu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \text{rand: } u(t, x) = 0, & \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \text{begin: } u(0, x) = u_0(x), & \Omega \end{cases}$$

Met Fourier-reeksen  
voor elliptische p.d.v.

$$u_0(x) = \sum c_k \varphi_k(x),$$

↓

$$u(t, x) = \sum c_k e^{i\lambda_k t} \varphi_k(x)$$

• IV.10: (Zerlegung)

$$\begin{cases} \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \end{array} \right.$$

...  
...  
...

...  
...  
...  
...  
...

• IV.11: (Zerlegung)

$$\begin{cases} \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \\ \text{Zerlegung:} \end{array} \right.$$

...  
...  
...

# 12. CLASSIFICATIE TWEEDE ORDE PARTIËLE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

---

## 12.1 Motivatie

---

Voor beginwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen garandeert de Lipschitz-conditie het bestaan van precies één oplossing bij voorgeschreven beginvoorwaarde. Dat wil zeggen, een  $n^{\text{de}}$ -orde gewone differentiaalvergelijking die aan de Lipschitz-voorwaarde voldoet heeft bij voorgeschreven  $u(0)$  tot en met  $u^{(n-1)}(0)$  precies één oplossing.

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat de situatie bij gewone differentiaalvergelijkingen met voorgeschreven randvoorwaarden al lastiger is. Niet meer elke  $2^{\text{de}}$ -orde gewone d.v. heeft een oplossing of zelfs precies één oplossing bij  $u(0)$  en  $u(1)$  voorgeschreven.

Nog gecompliceerder wordt de situatie bij partiële differentiaalvergelijkingen. Om bij enkele veel voorkomende p.d.v. met voorgeschreven randwaarden existentie en eenduidigheid van de oplossing te verkrijgen zullen we enkele soorten partiële differentiaalvergelijkingen moeten onderscheiden.

Existentie en eenduidigheidresultaten zijn overigens niet slechts de liefhebberij van de wiskundige maar vormen een belangrijke test voor de juistheid van het (fysische) model.

## 12.2 Afspraken

---

We zullen bij partiële differentiaalvergelijkingen de volgende afspraken en notaties gebruiken. Gelijkssoortige afspraken hebben we al bij complexe getallen ontmoet.

- $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; |x - y| < r\}$  is een bol met straal  $r$  rond  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- $\Omega$  is een *begrensd gebied* in  $\mathbb{R}^n$ ;

► *begrensd gebied*

i. we noemen een deelverzameling  $\Omega$  van  $\mathbb{R}^n$  *begrensd* als:

er bestaat  $M \in \mathbb{R}^+$  zodat  $\Omega \subset B_M(x)$ ;

► *gebied*

we noemen een deelverzameling  $\Omega$  van  $\mathbb{R}^n$  een *gebied* als voldaan is aan de volgende eisen;

► *open verzameling*

ii.  $\Omega$  is *open*:



voor alle  $x \in \Omega$  is er een  $r > 0$  zodat  $B_r(x) \subset \Omega$ ;

het complement  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; x \notin \Omega\}$  van een open verzameling heet *gesloten*;

- ▶ *gesloten verzameling*
- ▶ *samenhangend*

iii. een open verzameling  $\Omega$  heet *samenhangend* als:

elk tweetal punten in  $\Omega$  kan door een kromme met beeldverzameling  $K \subset \Omega$  verbonden worden.

- ▶ *afsluiting*

- $\bar{\Omega}$  is de *afsluiting* van  $\Omega$  :

$$\bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n; \text{voor alle } r > 0 \text{ geldt } \Omega \cap B_r(x) \neq \emptyset\}.$$

- ▶ *rand*

- $\partial\Omega$  is de *rand* van  $\Omega$  :

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)}.$$

- ▶  $C(\Omega)$

- $C(\Omega)$  de verzameling van alle continue functies van  $\Omega$  naar  $\mathbb{R}$ .

- ▶  $C(\bar{\Omega})$

- $C(\bar{\Omega})$  de verzameling van alle continue functies van  $\bar{\Omega}$  naar  $\mathbb{R}$ .

- ▶  $C^k(\Omega)$

- $C^k(\Omega)$  de verzameling van alle continue functies van  $\Omega$  naar  $\mathbb{R}$  waarvan alle partiële afgeleiden tot en met orde  $k$  bestaan en continu zijn op  $\Omega$ .

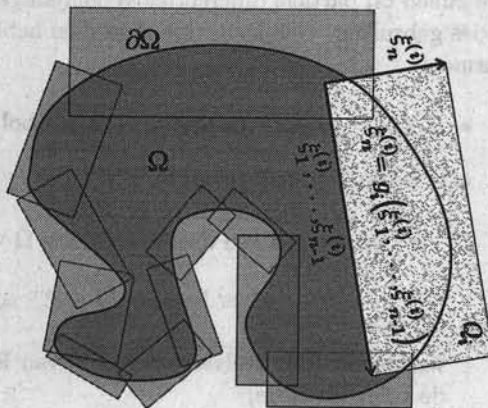
- ▶  $C^k(\bar{\Omega})$

- $C^k(\bar{\Omega})$  de verzameling van alle continue functies  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  zodat er voor elke partiële afgeleide  $\frac{\partial}{\partial x_i} \dots \frac{\partial}{\partial x_j} f$  van orde  $k$  en lager een functie  $g \in C(\bar{\Omega})$  bestaat zodat  $g = \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \frac{\partial}{\partial x_j} f$  in  $\Omega$ .

- Tenslotte een technische conditie over de 'gladheid' van de rand. We zeggen dat  $\partial\Omega \in C^k$  als we  $\partial\Omega$  met een eindig aantal open blokken, zeg  $Q_i$  met  $i = 1, \dots, m$ , kunnen bedekken en wel zodanig dat er op elk blok  $Q_i$  een coördinatenstelsel  $\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}$  en een functie  $g_i$  bestaat zodat

$$g_i \in C^k(\mathbb{R}^{n-1}),$$

$$(\partial\Omega \cap Q_i) \subset \left\{ \xi^{(i)} \in \mathbb{R}^n; \xi_n^{(i)} = g_i(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_{n-1}^{(i)}) \right\}.$$



Een overdekking van de rand  $\partial\Omega$  met blokken  $Q_i$ .

## 12.3 Classificatie in $\mathbb{R}^2$

We beschouwen differentiaalvergelijkingen die een lineaire relatie leggen tussen de nulde, eerste en tweede orde afgeleiden van een functie  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  met eventueel een voorgeschreven functie  $f$  in het rechterlid:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f. \quad (12.1)$$

Voorlopig nemen we voor  $a_{ij}$ ,  $b_i$  en  $c$  reële getallen. We nemen aan dat minstens één  $a_{ij} \neq 0$  is (we willen een 'echte' tweede orde d.v. heben).

**Opmerking:** Voor tweemaal continu differentieerbare functies geldt  $u_{xy} = u_{yx}$  en kunnen we de vorm  $\tilde{a}_{12}u_{xy} + \tilde{a}_{21}u_{yx}$  vervangen door  $(\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21})u_{xy}$ . Door  $a_{12} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21})$  te nemen zien we dat we hier zonder verlies van algemeenheid (12.1) in plaats van

$$a_{11}u_{xx} + \tilde{a}_{12}u_{xy} + \tilde{a}_{21}u_{yx} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f$$

mogen schrijven. Vandaar ook als herinnering de 2 voor  $a_{12}$ -coëfficiënt in (12.1).

Voor de classificatie gebruiken we het volgende recept. We vervangen  $\frac{\partial}{\partial x}$  door  $\eta$  en  $\frac{\partial}{\partial y}$  door  $\xi$  in de differentiaaloperator die in het linkerlid van (12.1) staat, d.w.z.

$$a_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + a_{22} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + c$$

wordt

$$a_{11}\eta^2 + 2a_{12}\eta\xi + a_{22}\xi^2 + b_1\eta + b_2\xi + c.$$

We beschouwen voor  $k \in \mathbb{R}$  de verzameling

$$K_k = \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2; a_{11}\eta^2 + 2a_{12}\eta\xi + a_{22}\xi^2 + b_1\eta + b_2\xi + c = k\}. \quad (12.2)$$

**Definitie 12.3.1** De differentiaalvergelijking in (12.1) heet

- ▶ *elliptisch*                    i. elliptisch als  $K_k$  een ellips is voor een  $k \in \mathbb{R}$ ;
- ▶ *parabolisch*                ii. parabolisch als  $K_k$  een parabool is voor een  $k \in \mathbb{R}$ ;
- ▶ *hyperbolisch*                iii. hyperbolisch als  $K_k$  een hyperbool is voor een  $k \in \mathbb{R}$ .

Dit zijn niet alle gevallen. Als  $K_k$  uit een enkele of uit twee evenwijdige rechte lijnen bestaat dan is de differentiaalvergelijking een verkapte gewone tweede orde differentiaalvergelijking.

Merk op dat de ellips, parabool of hyperbool nog helemaal niets met een oplossing van de differentiaalvergelijking te maken heeft. De drie zo verkregen klassen van partiële differentiaalvergelijkingen vragen hun eigen aanpak.

### Hulpstelling 12.3.2

- i.  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \Leftrightarrow (12.1)$  is elliptisch;
- ii.  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \Leftrightarrow (12.1)$  is parabolisch;
- iii.  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0 \Leftrightarrow (12.1)$  is hyperbolisch.

**Opmerking:** Helaas geldt de omgekeerde richting in ii. niet. Bijvoorbeeld de partiële differentiaalvergelijking  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = f$  is niet parabolisch en voldoet wel aan  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ . Een bijbehorende  $K_k$  kan alleen rechte lijnen bevatten.

□

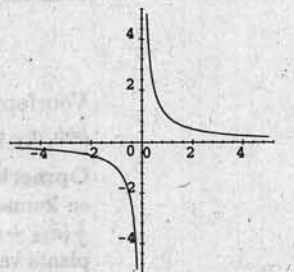
**Voorbeeld 65**

De p.d.v.  $u_{xy} = f$  is hyperbolisch omdat

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 0.$$

We kunnen ook de definitie gebruiken. Voor  $k \neq 0$  bestaat iedere  $K_k$  uit hyperbolen: bijvoorbeeld voor  $k = 1$  vinden we

$$\eta\xi = 1.$$



□

**Voorbeeld 66**

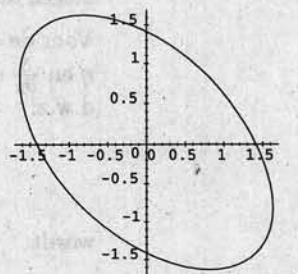
De p.d.v.  $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} - u = f$  is elliptisch.

We zien dat

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0.$$

Ook hier is de definitie te gebruiken. Voor  $k > -1$  bestaat iedere  $K_k$  uit ellipsen: bijvoorbeeld voor  $k = 1$  vinden we  $\eta^2 + \eta\xi + \xi^2 - 1 = 1$ , anders geschreven

$$\eta^2 + \eta\xi + \xi^2 = 2.$$



□

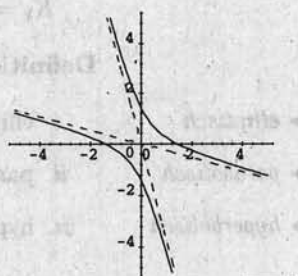
**Voorbeeld 67**

De p.d.v.  $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - u = f$  is hyperbolisch. We zien

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1 - 2^2 < 0.$$

Voor  $k \neq 0$  bestaat iedere  $K_k$  uit hyperbolen: bijvoorbeeld voor  $k = 1$  vinden we

$$\eta^2 + 4\eta\xi + \xi^2 - 1 = 1.$$



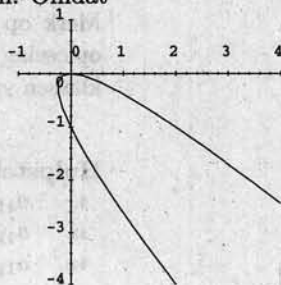
□

**Voorbeeld 68**

De p.d.v.  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x = f$  is parabolisch. Omdat

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1 - 1^2 = 0$$

zien we met de hulpstelling dat hij noch elliptisch noch hyperbolisch is. Om te zien dat de p.d.v. inderdaad parabolisch is zullen we de definitie moeten gebruiken. Iedere  $K_k$  bestaat uit (schuinliggende) parabolen. Bijvoorbeeld vinden we voor  $k = 0$  dat  $\eta^2 + 2\eta\xi + \xi^2 + \eta = 1$ .



Dat het inderdaad parabolen zijn ziet men door 'kwadraat afsplitsen':

$$(\eta + \xi)^2 + \eta = 1.$$

□

**Opgave 141** Geef het type van

i.  $u_{xy} + u_{xx} = f$ ;

ii.  $u_{xy} + u_x = f$ ;

iii.  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_y + 2u_x - 286u = f$ .

□

**Opgave 142** Een differentiaalvergelijking waarbij de coëfficiënten van  $x$  of  $y$  afhangen kan op verschillende gebieden van verschillend type zijn. Bereken op welke open deelgebieden van  $\mathbb{R}^2$  de p.d.v.  $u_{xx} + xu_{yy} = f$  elliptisch, parabolisch, respectievelijk hyperbolisch is.

**Hulpstelling 12.3.3** We kunnen (12.1), een p.d.v. met constante coëfficiënten, als volgt transformeren<sup>1</sup>:

i. indien (12.1) elliptisch is, naar

$$v_{ss} + v_{tt} + \tilde{c}v = \tilde{f};$$

ii. indien (12.1) parabolisch is, naar

$$v_{ss} - v_t + \tilde{c}v = \tilde{f};$$

iii. indien (12.1) hyperbolisch is, naar

$$v_{ss} - v_{tt} + \tilde{c}v = \tilde{f}.$$

**Opmerking:** In de klassieke literatuur over differentiaalvergelijkingen, zie bijvoorbeeld P.R. Garabedian, *Partial Differential Equations*, kan men overigens vinden dat er ook voor variabele coëfficiënten een transformatie naar een van deze drie standaard vergelijkingen bestaat. Helaas kan dit alleen in  $\mathbb{R}^2$ . In hogere dimensies kan men in het algemeen alleen bij constante coëfficiënten een geschikte transformatie vinden.

**Bewijs:** Schrijf

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Omdat deze matrix symmetrisch is, is er een  $T$  met  $T^{inv} = T^T$  en zijn er  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  zodat

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^T.$$

<sup>1</sup>Met transformeren bedoelen we hier dat we een substitutie (van  $u, x, y$  naar  $v, s, t$ ) kunnen uitvoeren zodat we voor  $v$  de meer eenvoudige p.d.v. krijgen.

Herinner je dat

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det(A) = \lambda_1\lambda_2$$

Dus in het elliptische geval hebben  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  hetzelfde teken. In het parabolische geval is 0 een eigenwaarde en in het hyperbolische geval hebben  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  tegengesteld teken. Voor het elliptische en het parabolische geval nemen we nieuwe coördinaten  $s, t$  door

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = TD \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ met } D = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Met  $\nabla_{x,y} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$  en  $\nabla_{s,t} = \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$  vinden we

$$(\nabla_{x,y})^\top = TD(\nabla_{s,t})^\top.$$

Tenslotte met enige lineaire algebra

$$\begin{aligned} a_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 &= \\ &= \nabla_{x,y} A (\nabla_{x,y})^\top = \\ &= \nabla_{x,y} T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^\top (\nabla_{x,y})^\top = \\ &= (TD(\nabla_{s,t})^\top)^\top T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^\top TD(\nabla_{s,t})^\top = \\ &= \nabla_{s,t} D T^\top T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^\top TD(\nabla_{s,t})^\top = \\ &= \nabla_{s,t} D \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} D (\nabla_{s,t})^\top = \\ &= \nabla_{s,t} \begin{pmatrix} \lambda_1 |\lambda_1|^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 |\lambda_2|^{-1} \end{pmatrix} (\nabla_{s,t})^\top. \end{aligned}$$

In het elliptische geval vinden we

$$a_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \pm \left( \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \right),$$

en in het hyperbolische geval vinden we

$$a_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \pm \left( \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \right).$$

Zonder verlies van algemeenheid mogen we  $\pm$  vervangen door  $+$ . Hiermee gaat (12.1) over in

$$u_{ss} \pm u_{tt} + \hat{b}_1 u_s + \hat{b}_2 u_t + cu = \hat{f} \quad (12.3)$$

waarbij

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = DT^\top \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ en } \hat{f}(s, t) = f(x, y).$$

Tenslotte kunnen we de  $\hat{b}_1$  en  $\hat{b}_2$  opruimen door

$$v(s, t) = e^{\frac{1}{2}(\hat{b}_1 s \pm \hat{b}_2 t)} u(s, t).$$

We vinden

$$v_{ss} \pm v_{tt} + \tilde{c}v = \tilde{f} \quad (12.4)$$

met

$$\tilde{c} = c - \left(\frac{1}{2}\hat{b}_1\right)^2 \mp \left(\frac{1}{2}\hat{b}_2\right)^2 \text{ en } \tilde{f}(s, t) = e^{\pm(\hat{b}_1 s \pm \hat{b}_2 t)} \hat{f}(s, t).$$

Voor het parabolische geval weten we dat één eigenwaarde 0 is. Stel dat  $\lambda_2 = 0$ . Dan neem  $T$  als bovenstaand maar nu met

$$D = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hiermee gaat (12.1) over in

$$\pm u_{ss} + \hat{b}_1 u_s + \hat{b}_2 u_t + cu = \tilde{f} \quad (12.5)$$

met

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = DT^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

in plaats van in (12.3). De voorwaarde dat  $K_k$  voor een  $k$  een parabool is zorgt voor  $\hat{b}_2 \neq 0$ . Opnieuw + aannemend voor  $\pm$  vinden we via

$$v(s, \tau) = e^{\pm \frac{1}{\hat{b}_2} \tau} u(s, t)$$

met  $\tau = -t/\hat{b}_2$  dat

$$v_{ss} - v_t + \tilde{c}v = \tilde{f}. \quad (12.6)$$

□

## 12.4 Classificatie in $\mathbb{R}^n$

We beschouwen de volgende tweede orde partiële differentiaalvergelijking voor functies  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  met  $n > 2$ :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} u + cu = f. \quad (12.7)$$

We nemen opnieuw aan dat  $a_{ij} = a_{ji}$  voor alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Definieer de  $n \times n$  matrix  $A$  door

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Omdat  $A$  symmetrisch is weten we dat er een orthogonale basis van eigenvectoren  $\{\vec{\psi}_1, \dots, \vec{\psi}_n\}$  is met eigenwaarden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . We zullen ook

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

gebruiken.

**Definitie 12.4.1** De partiële differentiaalvergelijking in (12.7) heet

- ▶ *elliptisch*      i. elliptisch als alle  $n$  eigenwaarden van  $A$  hetzelfde teken (allemaal + of allemaal -) hebben;
- ▶ *parabolisch*    ii. parabolisch als  $(n-1)$  eigenwaarden van  $A$  hetzelfde teken (allemaal + of allemaal -) hebben en de resterende eigenwaarde 0 is en bovendien voor de bij 0 behorende eigenvector  $\vec{\psi}$  geldt dat  $\vec{b} \cdot \vec{\psi} \neq 0$ ;
- ▶ *hyperbolisch*    iii. hyperbolisch als  $(n-1)$  eigenwaarden van  $A$  hetzelfde teken hebben (allemaal + of allemaal -) en de resterende eigenwaarde tegenovergesteld teken (dus respectievelijk -, +) heeft.

**Opmerking:** Deze definitie geeft voor  $n = 2$  hetzelfde resultaat als de defenitie in de vorige sectie. Omgekeerd, als men precies afspreekt wat ellipsoïden, paraboloiden en hyperboloiden zijn dan kan men de definitie in de vorige sectie ook uitbreiden naar  $n > 2$ .

□

**Voorbeeld 69**

De p.d.v.  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u = f$  is elliptisch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

**Voorbeeld 70**De p.d.v.  $u_{xx} - u_{yy} + u_{zz} + u = f$  is hyperbolisch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

**Voorbeeld 71**De p.d.v.  $u_{xx} + u_{yy} + u_z + u = f$  is parabolisch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dan

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{\psi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{en } \vec{b} \cdot \vec{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

□

**Opgave 143** Bepaal een transformatie (geef nieuwe coördinaten  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ ) zodat men

$$u_{xx} + u_{yy} - 4u_{zz} = f$$

kan vervangen door

$$u_{\tilde{x}\tilde{x}} + u_{\tilde{y}\tilde{y}} - u_{\tilde{z}\tilde{z}} = f.$$

□

**Opgave 144** Zelfde opdracht om

$$u_{xx} + u_{yy} + 10u_z = f$$

te kunnen vervangen door

$$u_{\tilde{x}\tilde{x}} + u_{\tilde{y}\tilde{y}} - u_{\tilde{z}} = f.$$

□

**Opgave 145** We nemen aan dat  $u$  harmonisch is en beschouwen een coördinatentransformatie met behulp van de orthogonale matrix  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ; dwz.  $a^2 + b^2 = 1$ . We definiëren nieuwe coördinaten  $s, t$  door

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat de functie  $\tilde{u}(s, t) = u(x, y)$  ook harmonisch is; dwz.

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{u}(s, t) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(s, t) = 0.$$





**Opgave 146** Stel dat  $u$  voldoet aan  $(\frac{\partial}{\partial t})^2 u(t, x) - c^2 (\frac{\partial}{\partial x})^2 u(t, x) = 0$ . We definiëren nieuwe coördinaten  $p, q$  door  $p = x - ct$  en  $q = x + ct$ . Laat zien dat

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} u = 0.$$

Als  $\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} w(p, q) = 0$  dan geldt  $\frac{\partial}{\partial q} w(p, q) = c(q)$  met  $c(q)$  een constante voor  $p$  die dus wel van  $q$  afhankelijk kan zijn. Laat zien dat iedere oplossing  $u$  te schrijven is als

$$w(p, q) = f(p) + g(q).$$



**Opgave 147** Wat is het type van

i. de telegraafvergelijking:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u + \frac{\partial}{\partial t} u + u = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u;$$

ii. de Klein-Gordon vergelijking:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u - \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right) u = -m^2 u + V(x) u.$$

## 12.5 Typische voorbeelden

In de volgende paragrafen zullen we als voorproefje enkele goed-gestelde randwaardeproblemen voorstellen zonder op enig bewijs in te gaan. In de laatste hoofdstukken zullen we dergelijke problemen nader beschouwen.

### 12.5.1 De harmonische differentiaalvergelijking

De harmonische differentiaalvergelijking is

$$\Delta u = 0$$

waarbij

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

en beschrijft voor  $n = 2$  of  $n = 3$  bijvoorbeeld potentiaalstromingen of stationaire temperatuurverdelingen. De *harmonische* differentiaalvergelijking is elliptisch.

De differentiaal-operator  $\Delta$  wordt *Laplace-operator* of *Laplaciaan* genoemd.

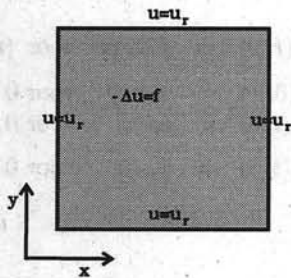
- *harmonische*
- *Laplace-operator*
- *Laplaciaan*

Een typisch randwaardeprobleem hierbij is die met  $u$  voorgeschreven op de 'rondom' liggende rand van het begrensde gebied. Op een gedeelte van de rand kan ook de afgeleide van  $u$  in de normaalrichting voorgeschreven zijn. Dit betekent dat er daar een vaste in- of uitstroom plaatsvindt.

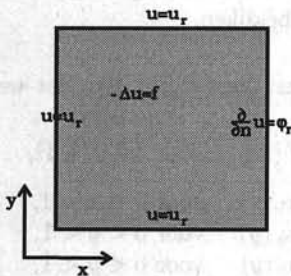
Twee randwaardeproblemen die op het vierkant

$$\Omega = \{(x, y); 0 < x < 1 \text{ en } 0 < y < 1\}$$

voor 'mooie'  $f, u_r$  en  $\varphi_r$  precies één oplossing hebben zijn:



$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ voor } (x, y) \in \Omega, \\ u(x, 0) = u_{r,1}(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ u(1, y) = u_{r,2}(y) \text{ voor } 0 < y < 1, \\ u(x, 1) = u_{r,3}(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ u(0, y) = u_{r,4}(y) \text{ voor } 0 < y < 1. \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ voor } (x, y) \in \Omega, \\ u(x, 0) = u_{r,1}(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \varphi_r(y) \text{ voor } 0 < y < 1, \\ u(x, 1) = u_{r,3}(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ u(0, y) = u_{r,4}(y) \text{ voor } 0 < y < 1 \end{array} \right.$$

### 12.5.2 De warmtevergelijking

► warmte-  
vergelijking

De warmtevergelijking

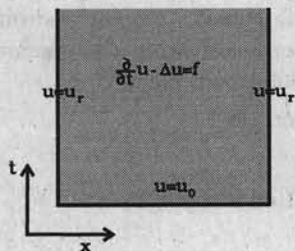
$$\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = 0$$

is parabolisch.

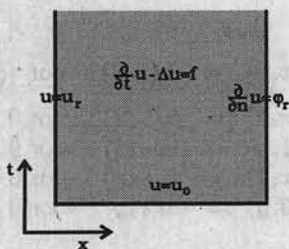
Twee randwaardeproblemen die op het vierkant

$$\Omega = \{(x, y); 0 < x < 1 \text{ en } 0 < y < 1\}$$

voor 'mooie'  $f, u_0, u_r$  en  $\varphi_r$  precies één oplossing hebben zijn:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(t, x) = f(t, x) \quad \text{voor } (t, x) \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = u_{r,1}(t) \quad \text{voor } 0 < t < 1, \\ u(t, 1) = u_{r,2}(t) \quad \text{voor } 0 < t < 1. \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(t, x) = f(t, x) \quad \text{voor } (t, x) \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = u_r(t) \quad \text{voor } 0 < t < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = \varphi_r(t) \quad \text{voor } 0 < t < 1. \end{array} \right.$$

Het eindwaardeprobleem, waarbij  $u(0, x) = u_0(x)$  voor  $0 < x < 1$  vervangen wordt door  $u(1, x) = u_1(x)$  voor  $0 < x < 1$  is geen goed gesteld probleem. We zullen dit anti-diffusie probleem nog bekijken.

□

**Opgave 148** Gebruik nieuwe coördinaten om te laten zien dat we

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} u + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(x, y) = f(x, y) \quad \text{voor } (x, y) \in \Omega, \\ u(x, 1) = u_1(x) \quad \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0, y) = u_a(y) \quad \text{voor } 0 < y < 1, \\ u(1, y) = u_b(y) \quad \text{voor } 0 < y < 1, \end{array} \right.$$

kunnen transformeren tot een van bovenstaande goed gestelde problemen.

### 12.5.3 De golfvergelijking

► *golfvergelijking*

De *golfvergelijking*

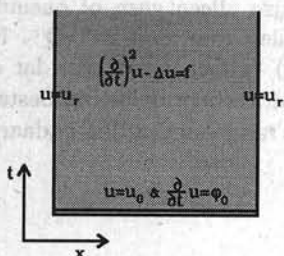
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u - \Delta u = 0$$

is hyperbolisch.

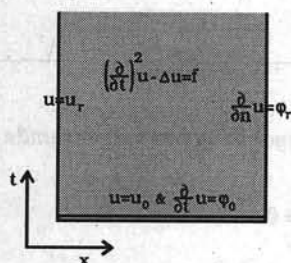
Twee randwaardeproblemen die op het vierkant

$$\Omega = \{(x, y); 0 < x < 1 \text{ en } 0 < y < 1\}$$

voor 'mooie'  $f, u_0, u_r$  en  $\varphi_r$  precies één oplossing hebben zijn:



$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(t, x) = f(t, x) \text{ voor } (t, x) \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \varphi_0(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = u_{r,1}(t) \text{ voor } 0 < t < 1, \\ u(t, 1) = u_{r,2}(t) \text{ voor } 0 < t < 1. \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(t, x) = f(t, x) \text{ voor } (t, x) \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \varphi_0(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = u_r(t) \text{ voor } 0 < t < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t, 1) = \varphi_r(t) \text{ voor } 0 < t < 1. \end{array} \right.$$

Om precies één oplossing te hebben zijn er twee beginvoorwaarden nodig. Zowel begin-‘uitwijking’ als beginsnelheid dient voorgeschreven te zijn.

□

**Opgave 149** Is het volgende probleem goed gesteld?

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u(t, x) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(t, x) = f(t, x) \text{ voor } (t, x) \in \Omega, \\ u(1, x) = u_1(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(1, x) = \varphi_1(x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = u_r(t) \text{ voor } 0 < t < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t, 1) = \varphi_r(t) \text{ voor } 0 < t < 1. \end{array} \right.$$

□

**Opgave 150** We beschouwen een golfvergelijking met rondom gestelde randvoorwaarden.

i. We beginnen met  $T = \frac{1}{2}$ . Bereken een oplossing van

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u(t, x) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(t, x) = 0 \text{ voor } (t, x) \in \Omega, \\ u(0, x) = \sin(\pi x) \text{ voor } 0 < x < 1, \\ u(T, x) = 0 \text{ voor } 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = 0 \text{ voor } 0 < t < T, \\ u(t, 1) = 0 \text{ voor } 0 < t < T. \end{array} \right.$$

Hint: probeer  $u(t, x) = v(t) \sin(\pi x)$ . Voor welke  $T > 0$  is dat nog meer een oplossing?

Laat zien dat voor iedere  $C \in \mathbb{R}$  de functie

$$v(t) \sin(\pi x) + C \sin(8\pi x) \sin(8\pi t)$$

ook een oplossing is. Geef zelf nog enkele oplossingen.

ii. Neem nu  $T = \frac{n}{m}$  met  $n, m$  twee positieve gehele getallen. Stel dat  $u(t, x)$  een oplossing is. Laat zien dat  $u(t, x) + C \sin(m\pi x) \sin(m\pi t)$  ook een oplossing is.

Voor  $T \in \mathbb{Q}^+$  vindt men dus mogelijkwerwijze alleen geen of oneindig veel oplossingen. Vreemd genoeg geldt zoiets niet voor  $T \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$ . Bourgin en Duffin (Bulletin AMS 1939, p. 851-858) hebben laten zien dat er voor dergelijke  $T$  hoogstens één tweemaal differentieerbare oplossing bestaat. De golfvergelijking met rondom voorgeschreven randvoorwaarden is daarmee op zijn minst gezegd zeer eigenaardig. —

### 12.5.4 De Schrödingervergelijking

► *Schrödingervergelijking*

Door de complexe term is de *Schrödingervergelijking* een wat vreemde eend in de bijt:

$$i \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = 0.$$

Meestal is men geïnteresseerd in oplossingen van de vorm

$$u(t, x) = e^{i\lambda t} v(x)$$

zodat de vergelijking vereenvoudigt tot

$$-\lambda u - \Delta u = 0.$$

Deze laatste vergelijking is elliptisch. Vaak is er ook nog een potentiaal aanwezig en krijgen we vergelijking

$$-\Delta u = \lambda u + V(u). \quad (12.8)$$

Als de functie  $u \mapsto V(u)$  niet lineair is, b.v.  $V(u) = u^3$ , dan wordt (12.8) een niet-lineaire elliptische partiële differentiaalvergelijking.

## 12.6 Niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen

Niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen vallen buiten het bereik van dit manuscript. De reden is niet dat deze niet interessant zouden zijn. Integendeel, zeer veel processen worden juist het best gemodelleerd door niet-lineaire differentiaalvergelijkingen. Enkele voorbeelden:

i. De 'poreuze-media' vergelijking.

De dichtheid van het gas  $u(x, t)$  stromend door een poreus gesteente voldoet aan de vergelijking (bij één ruimtevariabele):

$$u_t - (u^m)_{xx} = 0$$

met  $m > 1$ .

## ii. De Von Karman vergelijkingen.

Een dunne elastische plaat waarbij aan de zijden druk wordt uitgeoefend wordt beschreven door het niet-lineaire stelsel partiële differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}\Delta^2 F &= g - [w, w], \\ \Delta^2 w &= [w, F]\end{aligned}$$

waarbij de volgende notatie gebruikt is:

$$\begin{aligned}\Delta^2 w &= w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy}, \\ [u, v] &= u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - u_{xy}v_{xy}.\end{aligned}$$

Gezocht worden de uitwijking  $w$  en de Airy-stress-functie  $F$  waarvan men de tweede afgeleiden gebruikt om de stress te berekenen. Gegeven zijn de interne stress  $g$  en de randvoorwaarden voor  $F$  die de horizontale krachten aan de rand bevatten. Is de plaat aan de rand vertikaal ingeklemd dan zijn de randvoorwaarden voor  $w$  de volgende:  $w = 0$  en  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ . Wordt de plaat aan de rand alleen 'vast' gehouden dan zijn de randvoorwaarden  $w = 0$  en  $\Delta w = 0$ .

## iii. De 'minimale-oppervlakte' vergelijking.

De hoogte  $u(x, y)$  van een zeepbel binnen een draadwerk voldoet aan

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0. \quad (12.9)$$

□

**Opgave 151** Laat zien dat de vergelijking in (12.9) te schrijven is als

$$(1 + (u_y)^2) u_{xx} + (1 + (u_x)^2) u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0.$$

Laat ook zien dat de vergelijking

$$(1 + \alpha^2) u_{xx} + (1 + \beta^2) u_{yy} - 2\alpha\beta u_{xy} = 0$$

voor alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$  elliptisch is.

□

**Opgave 152**

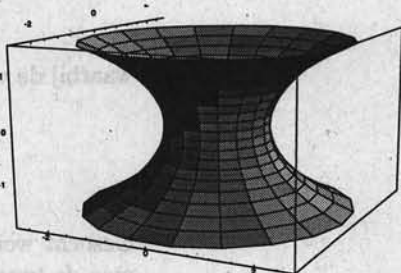
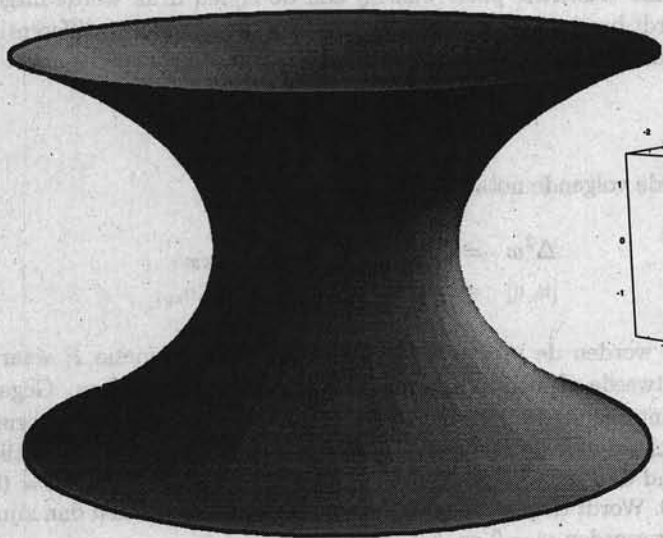
i. Laat zien dat radiaalsymmetrische oplossingen van (12.9) voldoen aan

$$-u_{rr} = \frac{1}{r} (1 + u_r^2) u_r.$$

ii. Bereken de oplossingen van deze gewone differentiaalvergelijking.

iii. Laat zien dat men door twee oplossingen geschikt aan elkaar te plakken een minimaal oppervlak vindt dat er als volgt uitziet.

Het minimale oppervlak dat twee horizontale ringen verbindt:



# 13. LAPLACE EN POISSON (ELLIP-TISCH)

## 13.1 Inleiding

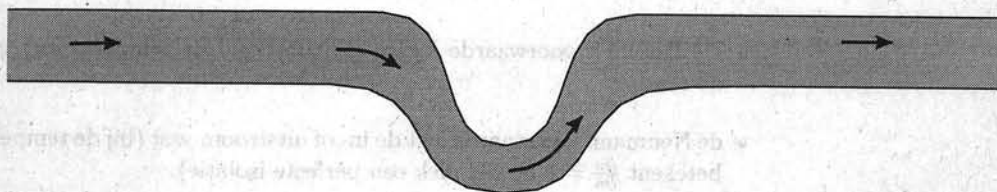
- Als men op twee geleiders  $G_1$  en  $G_2$  spanningen  $V_1$  en  $V_2$  aanbrengt ontstaat er in het gebied tussen deze geleiders een elektrisch veld  $\vec{E}$ . Dit vectorveld  $\vec{E}$  voldoet aan  $-\nabla\varphi = \vec{E}$  waar  $\varphi$  de potentiaal is. Deze potentiaal  $\varphi$  voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking met randvoorwaarden:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus (G_1 \cup G_2), \\ \varphi = V_1 & \text{op } \partial G_1, \\ \varphi = V_2 & \text{op } \partial G_2. \end{cases} \quad (13.1)$$

- Een niet-samendrukbare vloeistof die zonder wrijving door een buis stroomt heeft op elk punt een snelheid  $\vec{v}$  die de gradient van een potentiaal  $\varphi$  is. Deze  $\varphi$  voldoet aan  $-\Delta\varphi = 0$ . Het stelsel wordt:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = 0 & \text{in } B(\text{uis}), \\ \varphi = V_1 & \text{op } R(\text{echteropening}), \\ \varphi = V_2 & \text{op } L(\text{inkeropening}), \\ \frac{\partial}{\partial n}\varphi = 0 & \text{op } \partial B \setminus (R \cup L). \end{cases} \quad (13.2)$$

De vector  $\mathbf{n}$  is de uitwendige normaal.



Voor twee-dimensionale gebieden kan men het verband tussen harmonische en analytische functies gebruiken. Zie bladzijde 42.

- Een overrijpe ananas die aan het gisten is, produceert warmte. Noem  $f$  de bronlichtheids-functie en zet de kamertemperatuur op 20. Een simpel model voor de temperatuur  $u$  van de ananas is

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \textit{Ananas}, \\ u = 20 & \text{op } \partial \textit{Ananas}. \end{cases} \quad (13.3)$$

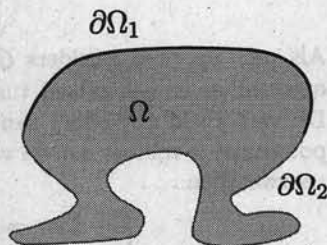


- ▶ *Laplace-probleem*
- ▶ *Poisson-probleem*

Randwaardeproblemen zoals (13.1) en (13.2) zonder bronterm  $f$  worden *Laplace-problemen* genoemd. Het probleem in (13.3) heet een *Poisson-probleem*. Deze randwaardeproblemen beschrijven tijdsonafhankelijke situaties. De algemene vorm is

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_r & \text{op } \partial\Omega_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = q & \text{op } \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (13.4)$$

waarbij  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ . De vector  $\mathbf{n}$  is de uitwendige normaal.



- ▶ *Dirichlet-randvoorwaarde* Op  $\partial\Omega_1$  spreken we van *Dirichlet-randvoorwaarde* en op  $\partial\Omega_2$  van een *Neumann-randvoorwaarde*.
- ▶ *Neumann-randvoorwaarde* Indien op de gehele rand de Neumann-randvoorwaarde is voorgeschreven, dat wil zeggen  $\partial\Omega_2 = \partial\Omega$  en  $\partial\Omega_1 = \emptyset$ , dan ziet men onmiddellijk dat er geen eenduidige oplossing kan zijn. Als namelijk  $u$  een oplossing is, is  $u + c$  ook een oplossing.
- ▶ *oplossing* Een functie  $u$  noemen we een *oplossing* van (13.4) als deze tweemaal differentieerbaar is in  $\Omega$ , differentieerbaar op  $\Omega \cup \partial\Omega_2$  en continu op  $\bar{\Omega}$ . Voor voldoende 'gladde' gebieden ( $\partial\Omega \in C^3$  volgens de notatie van bladzijde 214) kan men laten zien dat zo'n oplossing in  $C^2(\bar{\Omega})$  ligt.

In fysische termen betekenen de randvoorwaarden het volgende.

- De Dirichlet voorwaarde legt  $u$  (bijvoorbeeld de temperatuur) vast op de rand;
- de Neumann voorwaarde legt de in- of uitstroom vast (bij de temperatuur betekent  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  op die plek een perfecte isolatie).

Een andere natuurlijke voorwaarde is bijvoorbeeld  $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0$  met  $\alpha > 0$  (als  $u$  de temperatuur voorstelt betekent dit dat de uitstroom evenredig is met de temperatuur; indien de temperatuurschaal zo gekozen is dat de buitentemperatuur gelijk aan 0 is, is dit de gebruikelijke situatie indien de isolatie niet perfect is).

Tenslotte maken we nog een paar afspraken. We bekijken in dit hoofdstuk randwaardeproblemen op twee-, drie- en hoger-dimensionale gebieden ondanks dat de illustraties zich tot twee dimensies beperken. We zijn ook zuinig met integraaltekenen: een integraal over het gebied in  $\mathbb{R}^n$  zullen we ook voor  $n > 2$  met  $\iint$  noteren; een integraal over de rand van het gebied met  $\int$ .

## 13.2 Een vergelijkingsprincipe

Beschouw de Poissonproblemen

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_r & \text{op } \partial\Omega_1, \\ \frac{\partial}{\partial n} u = q_u & \text{op } \partial\Omega_2, \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} -\Delta v = g & \text{in } \Omega, \\ v = v_r & \text{op } \partial\Omega_1, \\ \frac{\partial}{\partial n} v = q_v & \text{op } \partial\Omega_2. \end{cases} \quad (13.5)$$

Hier is  $\frac{\partial}{\partial n}$  de afgeleide in de richting van de uitwendige normaal.

We hebben enkele voorwaarden nodig betreffende het gebied  $\Omega$  en de rand. Allereerst willen we dat  $\Omega$  uit één stuk bestaat ( $\Omega$  is samenhangend), en verder dat  $\partial\Omega_1$  positieve lengte heeft. Voldoende is dat er  $\tilde{x} \in \partial\Omega$  en  $r > 0$  bestaan zodat  $(B_r(\tilde{x}) \cap \partial\Omega) \subset \partial\Omega_1$ . Bovendien hebben we nodig dat  $\Omega$  begrensd is.

► *vergelijkingsprincipe*

**Stelling 13.2.1** (*vergelijkingsprincipe*) *Neem aan dat  $\Omega$  aan bovenstaande eisen voldoet.*

*Als  $u$  en  $v$  oplossingen zijn van respectievelijk (13.5-links) en (13.5-rechts) met*

$$\begin{aligned} f &\geq g && \text{in } \Omega, \\ u_r &\geq v_r && \text{op } \partial\Omega_1, \\ q_u &\geq q_v && \text{op } \partial\Omega_2, \end{aligned}$$

*dan geldt ook*

$$u \geq v \text{ in } \Omega.$$

**Opmerking:** Als  $u$  voldoet aan  $-\Delta u \leq 0$  in  $\Omega$  en

$$\max_{x \in \partial\Omega} u = m$$

dan vinden we met deze stelling dat  $u \leq m$  in  $\Omega$ . Met andere woorden:  $u$  neemt zijn maximum op de rand aan. Dit resultaat noemt men een *maximum principe*.

► *maximum principe*

Men kan zelfs bewijzen dat er een sterker resultaat geldt:

Als  $u$  voldoet aan  $-\Delta u \leq 0$  in  $\Omega$  en  $\max_{x \in \partial\Omega} u = m$ , dan geldt of

- i.  $u(x) = m$  voor alle  $x \in \Omega$ , of
- ii.  $u(x) < m$  voor alle  $x \in \Omega$ .

► *sterk maximum principe*

Dit noemt men een *sterk maximum principe*.

Als  $-\Delta u \geq 0$  dan kan men het maximum principe gebruiken voor  $-u$  (een 'minimum' principe).



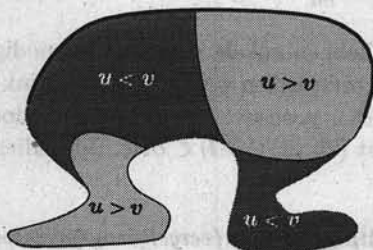
**Gevolg 13.2.2** *Het r.w.p. (13.4) (en dus het Laplace-probleem en het Poisson-probleem) heeft hoogstens één oplossing, uitgezonderd het geval met volledige Neumann-randvoorwaarden.*

**Bewijs:** Als er twee verschillende oplossingen zouden zijn, noem die  $u_1$  en  $u_2$ , dan voldoet het verschil  $u = u_1 - u_2$  aan (13.4) met  $f = 0$ ,  $u_r = 0$  en  $q = 0$ . Volgens de vorige Stelling geldt  $u \geq 0$ . Op dezelfde wijze vindt men ook  $-u \geq 0$  in  $\Omega$ . Met andere woorden  $u_1 - u_2 = u = 0$ .  $\square$

**Bewijs van Stelling 13.2.1:** We bewijzen uit het ongerijmde. Stel dat er een  $x^* \in \Omega$  is zodat  $u(x^*) < v(x^*)$ . Dan is de verzameling

$$\{x \in \Omega; u(x) < v(x)\}$$

niet leeg.



Neem een component van deze verzameling en noem die  $\Omega^*$ . (We zijn nu wat slordig en nemen aan dat  $\Omega^*$  een net gebied is zodat de normaal  $\mathbf{n}$  gedefinieerd is.) Schrijf  $v - u = w$ . Dan vinden we dat

$$\begin{aligned} w &= 0 \quad \text{op } \partial\Omega^* \cap (\partial\Omega_1 \cup \Omega), \\ w &\geq 0 \quad \text{op } \partial\Omega^* \cap \partial\Omega_2, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} w &\geq 0 \quad \text{op } \partial\Omega^* \cap \partial\Omega_2. \end{aligned}$$

We zullen laten zien dat

$$\iint_{\Omega^*} |\nabla w|^2 dx = 0.$$

Omdat  $|\nabla w|^2 \geq 0$  is, is het voldoende om deze integraal kleiner/gelijk 0 te krijgen. Door de *integralstelling van Gauss*<sup>1</sup> te gebruiken vinden we voor  $\vec{F} = w\nabla w$ , noteer

► *integralstellingen van Gauss en Green*

<sup>1</sup>De integralstelling van Gauss wordt vaak slechts in  $\mathbb{R}^3$  beschreven:

- Zij  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  een begrensde gebied met stuksgewijs  $C^1$  rand  $\partial\Omega$  en zij  $\vec{F}$  een differentieerbaar vectorveld. Dan geldt het volgende:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}(x) \cdot \vec{n} d\sigma_x,$$

waarbij  $\vec{n}$  de naar buiten gerichte normaal op  $\partial\Omega$  is.

- Ook in  $n$ -dimensionale gebieden ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) geldt iets dergelijks

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F}(x) \cdot \vec{n} d\sigma_x. \quad (13.6)$$

- Voor  $n = 1$  vinden we

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

- Voor  $n = 2$  volgt de *integralstelling van Green*:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} p(x) + \frac{\partial}{\partial x_2} q(x) \right) dx = \int_{\partial\Omega} (p(x), q(x)) \cdot \vec{n} dx =$$

$\operatorname{div} = \nabla \cdot$ , dat

$$\iint_{\Omega^*} \nabla \cdot (w \nabla w) \, dx = \int_{\partial \Omega^*} w \nabla w \cdot \vec{n} \, d\sigma_x = \int_{\partial \Omega^*} (w \frac{\partial}{\partial n} w) \, d\sigma_x.$$

Met  $\nabla \cdot (w \nabla w) = \nabla w \cdot \nabla w + w \Delta w$  vinden we (een partiële integratie):

$$\iint_{\Omega^*} |\nabla w|^2 \, dx = \int_{\partial \Omega^*} (w \frac{\partial}{\partial n} w) \, d\sigma_x - \iint_{\Omega^*} w \Delta w \, dx. \quad (13.7)$$

(Eigenlijk moeten we hier weten dat  $\partial \Omega^*$  redelijk glad is; wat is anders  $\vec{n}$  en  $d\sigma_x$ ? We laten dit probleem terzijde.) We vinden dat  $-\Delta w = -\Delta v + \Delta u = g - f \leq 0$  en bovendien weten we dat  $w > 0$  geldt op  $\Omega^*$ . Dus

$$-\iint_{\Omega^*} w \Delta w \, dx \leq 0.$$

Op  $\partial \Omega^* \cap (\partial \Omega_1 \cup \Omega)$  geldt dat  $w = 0$  dus

$$\int_{\partial \Omega^* \cap (\partial \Omega_1 \cup \Omega)} (w \frac{\partial}{\partial n} w) \, d\sigma_x = 0.$$

Tenslotte vinden we op  $\partial \Omega^* \cap \partial \Omega_2$  dat  $\frac{\partial}{\partial n} w = q_v - q_u \leq 0$  en  $w \geq 0$  en dus ook

$$\int_{\partial \Omega^* \cap \partial \Omega_2} (w \frac{\partial}{\partial n} w) \, d\sigma_x \leq 0.$$

Met (13.7) volgt dat

$$\iint_{\Omega^*} |\nabla w|^2 \, dx = 0$$

en dus dat  $\nabla w = 0$  op  $\Omega^*$ . Hieruit volgt op zijn beurt dat  $w = \text{constant}$ . Omdat we niet het Neumann-probleem beschouwen geldt  $\partial \Omega^* \cap (\partial \Omega_1 \cup \Omega) \neq \emptyset$  en dus is er een  $\hat{x} \in \partial \Omega^*$  met  $w(\hat{x}) = 0$ . Omdat  $\nabla w = 0$  op  $\Omega^*$  en  $w(\hat{x}) = 0$  voor minstens een punt op  $\partial \Omega^*$  volgt dat  $w = 0$  op  $\Omega^*$ . Dit is in tegenspraak met de aanname dat  $u(x^*) < v(x^*)$  voor een  $x^* \in \Omega$ .  $\square$

$\square$

**Opgave 153** We nemen aan dat de functie  $u$  voldoet aan het volgende r.w.p.

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 1 & \text{voor } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0 & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(x, 1) = 1 - 2x & \text{voor } 0 < x < 1, \\ u(0, y) = y & \text{voor } 0 < y < 1, \\ u(1, y) = -y & \text{voor } 0 < y < 1. \end{cases}$$

i. Kun je, zonder de oplossing te berekenen, bepalen waar  $u$  op het vierkant  $[0, 1] \times [0, 1]$  zijn maximum of zijn minimum aanneemt? Motiveer.

ii. Laat zien dat voor de oplossing  $u$  geldt

$$y(1 - 2x) \leq u(x, y) \leq y(1 - 2x) + \frac{1}{2}x(1 - x).$$

iii. Bereken een  $c > 0$  zodat  $u(x, y) \geq y(1 - 2x) + c \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ .

$$= \int_{\substack{\partial \Omega \\ \text{linksom}}} (-q(x), p(x)) \cdot d\vec{s}.$$

Merk op dat de uitwendige normaal  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  en de linksom lopende tangentiële eenheidsvector  $\vec{s} = (s_1, s_2)$  de volgende relatie hebben:  $n_1 = s_2$  en  $n_2 = -s_1$ .



Een metalen staaf, bijvoorbeeld een spoorrail, die aan torsiekrachten onderhevig is komt onder 'stress' te staan. Als we  $\Omega$  de doorsnede noemen (een twee-dimensionaal gebied) dan wordt een eenvoudig model voor de stress-vector als volgt beschreven. De stress-vector  $\vec{s}(x)$  op plaats  $x \in \Omega$  voldoet aan  $\vec{s}(x) = c\nabla u(x)$  waarbij  $u$  de oplossing is van

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{voor } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{voor } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.8)$$

De plaats waar  $|\vec{s}(x)|$  maximaal wordt, wordt het 'fail-point' genoemd. Bij extreme belasting zal dit de plek zijn waar men de eerste scheur kan verwachten. In de volgende opgave zullen we laten zien dat  $|\vec{s}(x)|$  maximaal wordt voor een of ander punt op de rand. Met andere woorden, scheuren ontstaan aan de buitenkant van de staaf en niet in het inwendige.

□

**Opgave 154** Zij  $\Omega$  een gebied in  $\mathbb{R}^2$  en neem aan dat  $u$  een tweemaal differentieerbare oplossing van (13.8) is.

- i. Laat met behulp van het sterke maximum principe zien dat  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$  geen maximum of minimum binnen  $\Omega$  kan hebben. (Hint: laat zien dat  $\Delta \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ .)
- ii. Zij  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Geldt dit ook voor  $\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_2}$ ?
- iii. Stel er is een 'fail-point'  $x_f$  binnen  $\Omega$ . Dus  $|\nabla u(x_f)| \geq |\nabla u(x)|$  voor alle  $x \in \bar{\Omega}$ . We nemen  $(\alpha, \beta) = \nabla u(x_f)$  en beschouwen  $\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_2}$ . Bewijs de volgende ongelijkheden en trek uw conclusie. Er is een punt  $x_r$  op de rand  $\Omega$  zodat:

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_f)|^2 &= (\alpha, \beta) \cdot \nabla u(x_f) < (\alpha, \beta) \cdot \nabla u(x_r) \leq \\ &\leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} |\nabla u(x_r)| = |\nabla u(x_f)| |\nabla u(x_r)|. \end{aligned}$$

□

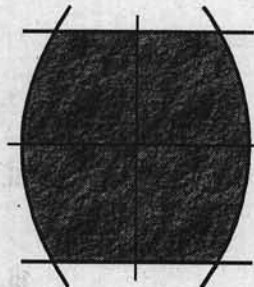
**Opgave 155** Voor convexe gebieden is er de ingenieursregel dat deze 'fail-points' zich bevinden op de intersectie van de rand en de grootste ingeschreven cirkel.

We gaan deze 'fail-points' voor een speciaal geval onderzoeken en beschouwen een gebied  $\Omega$  dat de doorsnede is van twee cirkels en een horizontale strip:

$$\Omega = B_2(0, 1) \cap B_2(0, -1) \cap \{(x_1, x_2); -1 < x_2 < 1\}.$$

De eenheidscirkel is hier de grootste ingeschreven cirkel en deze raakt de rand precies daar waar de assen de rand snijden.

Neem aan dat  $u$  een tweemaal differentieerbare oplossing van (13.8) is<sup>2</sup>.



<sup>2</sup>Bij gebieden met 'concave' hoeken mogen we niet aanemen dat de oplossing tweemaal differentieerbaar is. Men kan zelfs laten zien dat bij concave hoeken de afgeleide naar  $o$  gaat zodat we daar onmiddellijk een fail-point hebben.

- i. Laat zien dat de oplossing symmetrisch is in zowel de horizontale als in de verticale as. (Hint: Beschouw een randwaardeprobleem voor de functies  $v(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - u(-x_1, x_2)$  en  $w(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - u(x_1, -x_2)$ .)
- ii. Twee ingenieurs verschillen van mening over de lokatie van de 'fail-points'. Ir. A. beweert dat  $(\pm 1, 0)$  de failpoints zijn en ir. B. beweert  $(0, \pm 1)$ . Slechts één van beide heeft gelijk. Wie?

Hint in stappen:

(a) Merk op dat  $|s(1, 0)| = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(1, 0)$  en dat  $|s(0, 1)| = -\frac{\partial u}{\partial x_2}(0, 1)$ .

(b) Laat eerst zien dat  $u > 0$  geldt binnen  $\Omega$ .

(c) Bekijk vervolgens het randwaardeprobleem voor

$$z(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - u(x_2, x_1)$$

op het deelgebied

$$A = \{(x_1, x_2) \in \Omega; -x_1 < x_2 < x_1 \text{ en } (x_2, x_1) \in \Omega\}.$$

(d) Maak een schets van  $A$  en bepaal de randvoorwaarden waaraan  $z$  voldoet.

(e) Laat vervolgens zien dat  $z < 0$ .

(f) Doe nu een uitspraak over  $\frac{\partial z}{\partial x_1}(1, 0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(1, 0) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(0, 1)$ .

### 13.3 De fundamentele oplossing

Met het vergelijkingsprincipe volgt dat er hoogstens één oplossing van het Laplace en van het Poisson-probleem is (met uitzondering van het Neumann geval). De andere belangrijke vraag is of er altijd minstens één oplossing is. Deze vraag is minder eenvoudig. Alleen voor sommige gebieden kunnen we een expliciete integraalformule voor de oplossing vinden. Voor gebieden in  $\mathbb{R}^2$  kunnen we een conforme afbeelding gebruiken, zie bladzijde 53. Hierdoor vervangen we het ene probleem door een ander even moeilijk probleem. Slechts voor weinig gebieden bestaat er een bruikbare expliciete conforme transformatie.

Toch heeft het zin om met wat meer abstractie het bestaan van een oplossing voor een algemeen gebied te onderzoeken. Als gereedschap zullen we het Laplace en Poisson probleem eigenschappen van een Greense functie bekijken. Net als in één dimensie zal de Greense functie een oplossing zijn van een randwaardeprobleem met een puntbron als rechterlid. Een Greense functie voor een twee-dimensionaal gebied is daarmee een functie van 4 variabelen: de plaats van de puntbron  $(s_1, s_2)$  en de variabelen  $(x_1, x_2)$ .

## 13.3.1 De Newton-potential

We zullen eerst een oplossing van

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

bepalen voor dimensies  $n \geq 2$ . Hierbij gebruiken we de functie

$$V_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & \text{als } n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{als } n = 2, \end{cases} \quad (13.9)$$

met  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  en  $\omega_n$  het volume<sup>3</sup> van de eenheidsbol in  $\mathbb{R}^n$ . Deze functie  $V_n$  heet de *fundamentele oplossing van  $\Delta$  op  $\mathbb{R}^n$* .

► *fundamentele oplossing van  $\Delta$*

**Hulpstelling 13.3.1** Voor alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  geldt dat

$$\Delta V_n(x) = 0 \quad \text{voor } x \neq 0. \quad (13.10)$$

□

**Opgave 156** We nemen  $x \in \mathbb{R}^n$ . Laat zien dat voor een tweemaal differentieerbare functie  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  geldt:

- i.  $\nabla f(|x|) = f'(r) \frac{x}{|x|}$ ;
- ii.  $\Delta f(|x|) = \operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} f(|x|) = (r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} f(r))_{r=|x|}$ .
- iii. Bewijs vervolgens (13.10) voor  $n = 2$  en voor  $n \geq 3$ .

□

**Opgave 157** We nemen de formule voor  $V_n$  met  $n \geq 3$  en vullen desondanks  $n = 1$  in. We nemen  $\omega_1 = 2$ , de lengte van het interval  $(-1, 1)$ . Laat zien dat

- i.  $(\frac{d}{dx})^2 V_1(x) = 0$  voor  $x \neq 0$ ,
- ii.  $\lim_{x \downarrow 0} \frac{d}{dx} V_1(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{d}{dx} V_1(x) + 1$ ,
- iii.  $(\frac{d}{dx})^2 \int_{-\infty}^{\infty} V_1(x-s) f(s) dx = f(x)$  voor continue functies met begrensde drager (dwz. er is een  $M \in \mathbb{R}$  zodat voor  $x$  met  $|x| > M$  geldt dat  $f(x) = 0$ ).

De tweede afgeleide van  $V_1$  is geen 'echte' functie. Wel zou men kunnen zeggen dat deze tweede afgeleide de Dirac-delta-functie in 0 is.

<sup>3</sup>In  $\mathbb{R}^2$  is dit 'volume' de oppervlakte van de cirkel met straal 1, dus  $\omega_2 = \pi$ .

In  $\mathbb{R}^3$  is dit volume  $\omega_3$  gelijk aan  $\frac{4}{3}\pi$ . Voor  $\mathbb{R}^n$  geldt  $\omega_n = \frac{2 \pi^{n/2}}{n \Gamma(n/2)}$ . Waarbij  $\Gamma$  de gamma-functie is.

De 'oppervlakte' van de eenheidsbol (in  $\mathbb{R}^2$  is deze 'oppervlakte' de omtrek) is  $n\omega_n = \frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ .

► *Greense identiteit*

**Propositie 13.3.2** (*Greense identiteit*) Voor  $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$  en  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  begrensd en met gladde rand geldt

$$\iint_{\Omega} (-\Delta u v + u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left( -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v + u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$

met  $\mathbf{n}$  de uitwendige normaal.

**Bewijs:** We gebruiken opnieuw de integraalstelling van Gauss in twee dimensies: voor een differentieerbaar vectorveld  $\vec{F}$  geldt

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \mathbf{n} ds \quad (13.11)$$

waarbij  $\mathbf{n}$  de uitwendige normaal is. Zie ook bladzijde 232.

We kiezen<sup>4</sup>  $\vec{F} = (\operatorname{grad} v) u$ . Dan volgt dat

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \operatorname{div} \left( (\operatorname{grad} v) u \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} \right) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v, \end{aligned}$$

en (13.11) geeft

$$\iint_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left( (\operatorname{grad} v) u \right) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} u ds. \quad (13.12)$$

Verwisselen van  $u$  en  $v$  levert

$$\iint_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds. \quad (13.13)$$

Het resultaat volgt uit (13.12) - (13.13). □

**Definitie 13.3.3** De functie  $u = N(f)$  voor  $x \in \mathbb{R}^n$  gedefinieerd door

$$u(x) = \iint_{\mathbb{R}^n} V_n(x-y) f(y) dy$$

► *Newton-potentiaal*

heet de Newton-potentiaal van  $f$ .

De integraal is niet convergent voor zo maar een functie. Probeer maar eens  $f(x) = e^{|x|}$ . Om niet met dit soort problemen lastig te worden gevallen zullen we alleen een speciale klasse van functies toelaten, de functies met *begrensd drager*. De drager van een functie is de afsluiting van het gebied waarop de functie ongelijk 0 is. Voor een functie met begrensd drager is er een  $M \in \mathbb{R}$  zodat voor alle  $x$  met  $|x| > M$  geldt dat  $f(x) = 0$ .

<sup>4</sup>De divergentie:  $\nabla \cdot \vec{u} = \operatorname{div}(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_n$ .

De gradient:  $\nabla u = \operatorname{grad} u = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} u, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} u \right)$ .

► *begrensd drager*



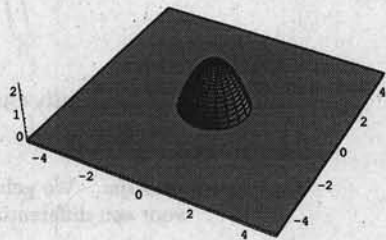
Bijvoorbeeld de functie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die is gedefinieerd door

$$f(x_1, x_2) = \max(0, 2 - x_1^2 - x_2^2)$$

heeft als drager

$$D = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}.$$

De rand, waar  $f$  weliswaar 0 is, doet mee als afsluiting van de cirkelschijf waarbinnen geldt dat  $f \neq 0$ .



□

**Opgave 158** Verzin zelf een functie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die een begrensde drager heeft en die bovendien tweemaal differentieerbaar is. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 159** Laat zien dat de functie  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{voor } |x| < 1, \\ 0 & \text{voor } |x| \geq 1, \end{cases}$$

begrensde drager heeft en willekeurig vaak differentieerbaar is.

Hint: laat zien dat elke afgeleide van deze functie voor  $|x| < 1$  van de volgende vorm is:

$$P\left(x, \frac{1}{1-|x|^2}\right) e^{\frac{-1}{1-|x|^2}}.$$

Hierbij is  $P$  een polynoom (afhankelijk van de afgeleide) in  $x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{1}{1-|x|^2}$ . Merk op dat voor iedere macht  $m$  geldt dat

$$\lim_{|x| \uparrow 1} \frac{1}{(1-|x|^2)^m} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} = 0.$$

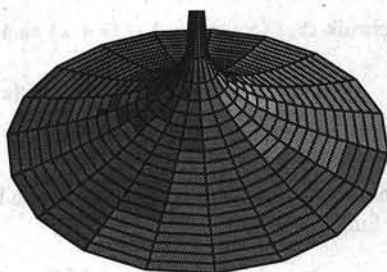
**Hulpstelling 13.3.4** Als  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  een begrensde drager heeft, dan

$$-\Delta \left( \iint_{\mathbb{R}^n} V_n(x-y) f(y) dy \right) = f(x), \quad (13.14)$$

waarbij  $V_n$  de fundamentele oplossing (13.9) is.

De functie  $V_n$  is de eerste stap naar een Greense functie in hogere dimensies. Bij de snaar (één dimensie) was de Greense functie de oplossing bij passende randvoorwaarden van  $-u''(x) = \delta_y(x)$  met  $\delta_y(\cdot)$  een puntmassa op plaats  $y$ , de Dirac-delta functie.

**Opmerking:** Bij de functie  $V_2$  zou men de volgende voorstelling maken. In  $\mathbb{R}^2$  is  $-\Delta u = f$  een model bij dun membraan;  $f$  is een krachtdichtheid en  $u$  de uitwijking. De functie  $V_2(x-y)$  zou de uitwijking zijn op plaats  $x$  bij een puntbron op plaats  $y$ . Helaas heeft een membraan zonder stijfheid weinig sterkte (denk aan een ballon en een speld) en past een puntbron niet goed in dat model. Omdat ook  $V_2(x-y)$  naar  $\infty$  gaat als  $x \rightarrow y$  is dat eigenlijk zo gek nog niet.

 $V_2(x)$ 

**Bewijs:** Om onderscheid te maken tussen differentiëren naar  $x$  en  $y$  zullen we  $\Delta_x$  respectievelijk  $\Delta_y$  schrijven. Omdat  $f$  een begrensde drager heeft is er een  $M$  zodanig dat  $f(z) = 0$  voor  $|z| > M - 1$ . De integraal mogen we daarmee beperken tot het gebied  $|y| < M$ .

We onderscheiden de gevallen:  $|x| \geq M$  en  $|x| < M$ .

Als  $|x| \geq M$  dan geldt  $V_n(x-y)f(y) = 0$  voor  $|x-y| < 1$ . Daarmee geldt dat  $x \rightarrow V_n(x-y)f(y)$  een  $C^2$ -functie is voor alle  $y$ . Men kan laten zien dat we integraal en differentiatie mogen verwisselen. Via (13.10) vinden we

$$-\Delta_x \left( \iint_{|y| < M} V_n(x-y) f(y) dy \right) = - \left( \iint_{|y| < M} \Delta_x V_n(x-y) f(y) dy \right) = 0.$$

Als  $|x| < M$  dan kunnen  $V_n(x-y)f(y)$  en zijn afgeleiden onbegrensd zijn in de buurt van  $y = x$  en mogen we integraal en differentiatie niet zomaar omwisselen. Allereerst merken we op dat we door de substitutie  $y = z + x$  vinden dat

$$\iint_{y \in \mathbb{R}^n} V_n(x-y) f(y) dy = \iint_{z \in \mathbb{R}^n} V_n(-z) f(z+x) dz.$$

De functie  $V_n$  is niet differentieerbaar voor  $x = y$  maar door deze substitutie hebben we de  $x$  overgebracht naar de wel tweemaal differentieerbare  $f$ . Dus

$$\begin{aligned} -\Delta_x \left( \iint_{y \in \mathbb{R}^n} V_n(x-y) f(y) dy \right) &= \\ &= -\Delta_x \left( \iint_{z \in \mathbb{R}^n} V_n(-z) f(z+x) dz \right) = \end{aligned}$$

(we hebben aangenomen dat  $|x| < M$  en omdat de  $f$  drager binnen de cirkel met straal  $M$  heeft weten we dat  $f(z+x) = 0$  voor  $|z| > 2M$ )

$$= -\Delta_x \left( \iint_{|z| \leq 2M} V_n(-z) f(z+x) dz \right) =$$

(men kan laten zien dat differentiatie en integratie verwisseld mogen worden)

$$= - \iint_{|z| \leq 2M} V_n(-z) \Delta_x f(z+x) dz =$$

(gebruik  $\Delta_z f(z+x) = \Delta_x f(z+x)$  en  $V_n(-z) = V_n(z)$ )

$$= - \iint_{|z| \leq 2M} V_n(z) \Delta_x f(z+x) dz =$$

(voor integreerbare functies kan men een bolletje met straal  $\varepsilon$  wegsnijden en vervolgens de  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$  nemen)

$$= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \iint_{\varepsilon \leq |z| \leq 2M} V_n(z) \Delta_x f(z+x) dz =$$

(voor  $\varepsilon \leq |z| \leq 2M$  dus op  $\Omega = B_{2M}(0) \setminus B_\varepsilon(0)$  is  $V_n$  een  $C^2$ -functie en kunnen we de Greense identiteit toepassen; merk op dat de rand van  $B_{2M}(0) \setminus B_\varepsilon(0)$  uit twee delen bestaat, namelijk  $\partial B_{2M}(0)$  en  $\partial B_\varepsilon(0)$  met respectievelijk  $\mathbf{n} = \frac{z}{|z|}$  en  $\mathbf{n} = \frac{-z}{|z|}$ )

$$\begin{aligned} &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \iint_{\varepsilon \leq |z| \leq 2M} (-\Delta_z V_n(z)) f(z+x) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{|z|=2M} \left( V_n(z) \left( \frac{\partial f}{\partial |z|} (z+x) \right) - \left( \frac{\partial V_n}{\partial |z|} (z) \right) f(z+x) \right) ds_z + \right. \\ &\quad \left. + \int_{|z|=\varepsilon} \left( V_n(z) \left( \frac{\partial f}{\partial (-|z|)} (z+x) \right) - \left( \frac{\partial V_n}{\partial (-|z|)} (z) \right) f(z+x) \right) ds_z \right) = (*) \end{aligned}$$

Merk op dat

$$-\Delta_z V_n(z) = 0 \quad \text{voor } z \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial |z|} (z+x) = 0 \quad \text{voor } |z+x| \geq r_0,$$

$$f(z+x) = 0 \quad \text{voor } |z+x| \geq r_0,$$

en

$$\begin{aligned} V_n(z) &= \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \varepsilon^{2-n} & \text{als } n \geq 3 \\ \frac{-1}{2\pi} \log \varepsilon & \text{als } n = 2 \end{cases} \quad \text{voor } |z| = \varepsilon, \\ \frac{\partial V_n}{\partial (-|z|)} (z) &= \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} \quad (n = 2 \text{ en } n \geq 3) \quad \text{voor } |z| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Als gevolg vinden we dat alleen de laatste twee termen in (\*) mogelijk ongelijk 0 zijn:

$$\begin{aligned} (*) &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} V_n(z) \left( \frac{\partial f}{\partial (-|z|)} (z+x) \right) ds_z + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \left( \frac{\partial V_n}{\partial (-|z|)} (z) \right) f(z+x) ds_z = (**) \end{aligned}$$

De eerste van beide laatste termen kunnen we als volgt afschatten. Omdat  $f$  een continue afgeleide heeft en alleen op een begrensd gebied ongelijk 0 is, bestaat  $\|\nabla f\|_\infty = \max \{ |\nabla f(x)|; x \in B_{r_0}(0) \}$ . Hiermee kunnen we de eerste van beide laatste termen afschatten. Voor  $n \geq 3$  wordt dit

$$\left| \int_{|z|=\varepsilon} V_n(z) \left( \frac{\partial f}{\partial (-|z|)} (z+x) \right) ds_z \right| \leq \|\nabla f\|_\infty \left| \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \varepsilon^{2-n} ds_z \right| =$$

(de integraal  $\int_{|z|=\varepsilon} ds_z$  is  $\varepsilon^{n-1}$  maal de 'oppervlakte'  $n\omega_n$  van de eenheidsbol)

$$= \|\nabla f\|_\infty \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \varepsilon^{2-n} (n\omega_n \varepsilon^{n-1}) = \|\nabla f\|_\infty \frac{1}{n-2} \varepsilon.$$

De limiet voor  $\varepsilon \downarrow 0$  van dit deel is dan gelijk aan 0.  
Er blijft over

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \left( \frac{\partial V_n}{\partial(-|z|)}(z) \right) f(z+x) ds_z &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} f(z+x) ds_z = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} f(x) ds_z + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} (f(z+x) - f(x)) ds_z. \end{aligned}$$

Omdat  $\int_{|z|=\varepsilon} ds_z = n\omega_n \varepsilon^{n-1}$  vinden we

$$\int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} f(x) ds_z = f(x)$$

en

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left| \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} (f(z+x) - f(x)) ds_z \right| &= \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left| \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} |z| \frac{|f(z+x) - f(z)|}{|z|} ds_z \right| \leq \\ &\leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} \varepsilon \|\nabla f\|_\infty ds_z = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \|\nabla f\|_\infty = 0. \end{aligned}$$

Daarmee vinden we dat

$$(**) = 0 + f(x) = f(x)$$

en is de hulpstelling bewezen voor  $n \geq 3$ . De laatste stappen kan men op soortgelijke wijze aanpakken voor  $n = 2$ .  $\square$

$\square$

**Opgave 160** De vergelijking  $\Delta^2 u = f$  modelleert een dunne stijve plaat waarbij  $f$  de krachtdichtheid en  $u$  de uitwijking is. We maken het probleem wat eenvoudiger en nemen de plaat oneindig groot. Op  $\mathbb{R}^2$  en  $f$  met begrensde drager vinden we als een oplossing

$$u(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} W(x-y) f(y) dy$$

met  $W(x) = \frac{-1}{8\pi} |x|^2 \ln(|x|)$  voor  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Neem aan dat  $f$  tweemaal continu differentieerbaar is en drager binnen de cirkel met straal  $M - 1$  heeft.

i. Laat zien dat  $\Delta W(x) = V_2(x)$  voor  $x \neq 0$  en daarmee dat voor  $|x| \geq M$  geldt

$$(\Delta_x)^2 \iint_{\mathbb{R}^2} W(x-y) f(y) dy = 0 = f(x).$$

Vervolgens  $|x| < M$ . Omdat voor  $|x| < M$  en  $|z| \geq 2M$  geldt dat  $f(x+z) = 0$  vinden we, net als in bovenstaand bewijs, dat geldt

$$\begin{aligned} \Delta_x \iint_{y \in \mathbb{R}^2} W(x-y) f(y) dy &= \Delta_x \iint_{z \in \mathbb{R}^2} W(-z) f(x+z) dz = \\ &= \Delta_x \iint_{z \in \mathbb{R}^2} W(z) f(x+z) dz = \Delta_x \iint_{|z| \leq 2M} W(z) f(x+z) dz = \\ &= \iint_{|z| \leq 2M} W(z) \Delta_x f(x+z) dz = \iint_{|z| \leq 2M} W(z) \Delta_z f(x+z) dz = \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \iint_{\epsilon \leq |z| \leq 2M} W(z) \Delta_z f(x+z) dz. \end{aligned}$$

ii. Gebruik nu de Greense identiteit om te laten zien dat

$$\begin{aligned} &\iint_{\epsilon \leq |z| \leq 2M} W(z) \Delta_z f(x+z) dz = \\ &= \iint_{\epsilon \leq |z| \leq 2M} V_2(z) f(x+z) dz + \\ &+ \int_{|z|=\epsilon} \left( - \left( \frac{\partial}{\partial |z|} W(z) \right) f(x+z) + W(z) \frac{\partial}{\partial |z|} f(x+z) \right) ds_z \end{aligned}$$

iii. Laat zien dat beide randintegralen naar 0 convergeren als  $\epsilon \downarrow 0$ .

iv. Combineer voorgaande resultaten om te bewijzen dat

$$\Delta_x^2 \iint_{\mathbb{R}^2} W(x-y) f(y) dy = f(x).$$

### 13.3.2 De fundamentele oplossing op een begrensd gebied

Door een functie  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  met  $C^2$ -functies te benaderen vinden we dat voor dergelijke  $f$  geldt dat de functie  $u$  gedefinieerd door

$$u(x) = \iint_{y \in \Omega} V_n(x-y) f(y) dy$$

voldoet aan

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ voor } x \in \Omega.$$

De functie  $u$  is de Newton-potentiaal van  $f1_\Omega$ , notatie  $u = N(f1_\Omega)$ . De functie  $f1_\Omega$  is gedefinieerd op  $\mathbb{R}^n$  door

$$f1_\Omega(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in \bar{\Omega}, \\ 0 & \text{als } x \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Formeel bestaat de functie  $f$  niet buiten  $\bar{\Omega}$  en om de Newton-potentiaal uit te rekenen zal men deze functie moeten voortzetten op de hele  $\mathbb{R}^n$ .

Men kan laten zien dat bij gladde  $\partial\Omega$  de uitbreiding  $\bar{u}$  van  $u = N(f1_\Omega)$  tot op de rand:

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{als } x \in \Omega, \\ \lim_{\substack{y \in \Omega \\ y \rightarrow x}} u(y) & \text{als } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

een  $C^2(\bar{\Omega})$ -functie  $\bar{u}$  levert. We zullen in het vervolg met  $N(f1_\Omega)$  de uitbreiding  $\bar{u}$  bedoelen.

**Gevolg 13.3.5** Als  $u$  een oplossing is van

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_r & \text{op } \partial\Omega, \end{cases}$$

dan is  $v = u - N(f1_\Omega)$  een oplossing van

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{in } \Omega, \\ v = u_r - N(f1_\Omega) & \text{op } \partial\Omega. \end{cases}$$

Met andere woorden: als we "Laplace" kunnen oplossen dan kunnen we "Poisson" oplossen.

## 13.4 Greense functie

We trachten de aanpak voor het tweede orde randwaardeprobleem voor gewone differentiaalvergelijkingen te kopiëren. Men kan laten zien dat er weer een *Greense functie* bestaat en daarmee het Poisson-probleem naar een integraal terugvoeren. Voor de meeste gebieden kan men echter geen expliciete uitdrukking voor deze Greense functie vinden. Voor enkele gebieden zullen we zo'n Greense functie uitrekenen.

► *Greense functie*

Voordat we iets kunnen bewijzen hebben we de *representatie-formule van Green* nodig:

► *representatie-formule van Green*

**Stelling 13.4.1** Als  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  en  $\Omega$  is een begrensde gebied in  $\mathbb{R}^n$  met een gladde rand, dan

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}(x-y) - V_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \right) ds_y +$$

$$+ \iint_{\Omega} V_n(x-y) \Delta u(y) dy. \quad (13.15)$$

**Bewijs:** We gebruiken dat voor  $y \neq x$  geldt dat  $\Delta_y V_n(x-y) = 0$ . We moeten om dit te kunnen gebruiken opnieuw een gaatje  $B_\varepsilon(x)$  rond  $x$  laten:

$$\iint_{\Omega} V_n(x-y) \Delta u(y) dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \iint_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} V_n(x-y) \Delta u(y) dy =$$

(op  $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$  is  $V_n(x-y)$  een  $C^2$ -functie en kunnen we de Greense identiteit gebruiken)

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \iint_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta_y V_n(x-y) \cdot u(y) dy +$$

$$- \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(x))} \left( u(y) \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}(x-y) - V_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \right) ds_y =$$

$$= 0 - \int_{\partial \Omega} \left( u(y) \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}(x-y) - V_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \right) ds_y +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left( u(y) \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}(x-y) - V_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) \right) ds_y$$

En zoals in het bewijs van de fundamentele oplossing

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}(x-y) ds_y = u(x)$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} -V_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) ds_y = 0.$$

□

We zullen deze representatie-formule van Green gebruiken voor de constructie van enkele Greense functies op speciale gebieden in hogere dimensies.

**Definitie 13.4.2** Een functie  $G(\cdot, \cdot) : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  die voldoet aan

- $(x, y) \rightarrow G(x, y) - V_n(x-y)$  is een  $C^2(\Omega \times \Omega)$ -functie;
- $-\Delta_x (G(x, y) - V_n(x-y)) = 0$  voor alle  $x, y \in \Omega$  met  $x \neq y$ ;
- $G(x, y) = 0$  voor alle  $x \in \partial \Omega$  en  $y \in \Omega$ ;

► **Greense functie**

heet een Greense functie voor het Poisson-probleem op  $\Omega$  met Dirichlet randvoorwaarden:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{op } \partial \Omega. \end{cases}$$

**Opmerking:** We kunnen dit vergelijken met de Greense functie die we voor voor het eindimensionale randwaardeprobleem hebben gebruikt. In dimensie  $n = 1$  is  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$  en de fundamentele oplossing  $V_1(x)$  is  $-\frac{1}{2}|x|$ .

Bij de representatie-formule van Green lieten we zien dat voor een  $C^2$ -functie  $w$  geldt dat

$$w(x) = - \iint_{y \in \Omega} V_n(x-y) \Delta w(y) dy + \int_{y \in \partial \Omega} \left( V_n(x-y) \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}_y}(x-y) w(y) \right) ds_y.$$

Noem  $H(x, y) = G(x, y) - V_n(x - y)$ . Omdat  $H(x, y)$  een  $C^2$ -functie is en  $\Delta_x H(x, y) = 0$  in  $\Omega$  volgt uit de Greense identiteit dat

$$0 = - \iint_{y \in \Omega} H(x, y) \Delta w(y) dy + \int_{y \in \partial \Omega} \left( H(x, y) \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}_y}(x, y) w(y) \right) ds_y.$$

Beide laatste formules opgeteld leveren

$$w(x) = - \iint_{y \in \Omega} G(x, y) \Delta w(y) dy + \int_{y \in \partial \Omega} \left( G(x, y) \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x, y) w(y) \right) ds_y.$$

Bovendien volgt uit  $G(x, y) = 0$  voor  $y \in \partial \Omega$  dat

$$w(x) = - \iint_{y \in \Omega} G(x, y) \Delta w(y) dy + \int_{y \in \partial \Omega} -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x, y) w(y) ds_y. \quad (13.16)$$

Deze formule kunnen we gebruiken om het randwaardeprobleem op te lossen.

**Propositie 13.4.3** *Laat  $\Omega$  een gebied in  $\mathbb{R}^n$  zijn en laat  $f, u_r$  en  $\partial \Omega$  voldoende vaak differentieerbaar<sup>5</sup> zijn. Verder nemen we aan dat of*

a.  $\Omega$  is begrensd, of

b.  $f$  en  $u_r$  hebben een begrensd drager.

Als  $G(\cdot, \cdot)$  een Greense functie voor  $\Omega$  is, dan is  $u$  gedefinieerd door

$$u(x) = \iint_{y \in \Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{y \in \partial \Omega} \left( -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} G(x, y) \right) u_r(y) ds_y \quad (13.17)$$

een oplossing van

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_r & \text{op } \partial \Omega. \end{cases}$$

<sup>5</sup>Voldoende vaak differentieerbaar wil hier zeggen  $f \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $u_r \in C^3(\partial \Omega)$  en  $\partial \Omega \subset C^3$ . Zie de afspraken op bladzijde 213. In de propositie kan men ook  $\Omega$  onbegrensd nemen mits men dan  $f$  en  $u_r$  met een begrensd drager neemt.



**Opmerking:** De oplossing van

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{op } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.18)$$

wordt daarmee

$$u(x) = \iint_{y \in \Omega} G(x, y) f(y) dy. \quad (13.19)$$

□

**Opgave 161** We definiëren een inproduct op  $C(\bar{\Omega})$  door

$$\langle f, g \rangle = \iint_{y \in \Omega} f(y) g(y) dy.$$

i. Laat zien dat voor  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$  met  $u = v = 0$  op  $\partial\Omega$  geldt dat

$$\langle -\Delta u, v \rangle = \langle u, -\Delta v \rangle. \quad (13.20)$$

ii. Stel  $u$  is de oplossing van (13.18) en stel  $v$  is de oplossing van (13.18) waarbij we  $f$  door  $g$  vervangen hebben. Laat met (13.20) zien dat

$$\iint_{x \in \Omega} \iint_{y \in \Omega} G(x, y) f(x) g(y) dy dx = \iint_{x \in \Omega} \iint_{y \in \Omega} G(y, x) f(x) g(y) dy dx.$$

Omdat dit voor alle functies  $f, g \in C(\bar{\Omega})$  geldt vindt men dat  $G$  symmetrisch is:

$$G(x, y) = G(y, x).$$

Voor een functie  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  die voldoet aan  $\Delta u = 0$  volgt uit (13.16) dat

$$u(x) = \int_{y \in \partial\Omega} \left( -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} G(x, y) \right) u(y) ds_y. \quad (13.21)$$

► *integraal-  
formule van  
Poisson*

Hieruit volgt bovendien  $u \in C^\infty(\Omega)$ . De formule in (13.21) heet de *integraalformule van Poisson*. Voor  $n = 2$  hebben we deze al ontmoet in (4.9).

We zullen Propositie 13.4.3 niet bewijzen. Wel is onmiddellijk duidelijk uit (13.16) dat indien er een oplossing  $u$  is, deze oplossing voldoet aan (13.17).

### 13.4.1 De Greense functie voor de halfruimte

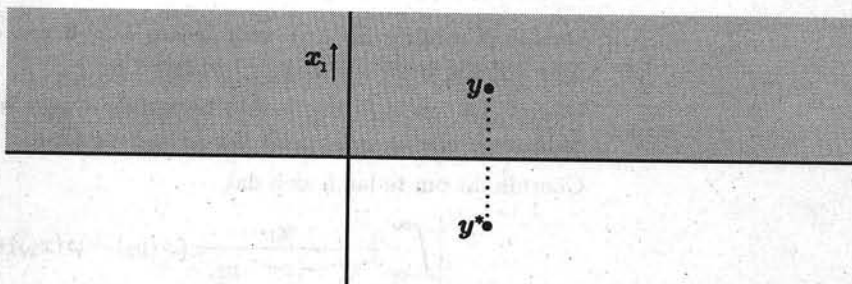
We noteren de halfruimte in  $\mathbb{R}^n$  door  $\mathbb{R}_+^n$ . Dat wil zeggen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^n &= \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0\}, \\ \partial\mathbb{R}_+^n &= \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = 0\}. \end{aligned}$$

Beschouw

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ u = u_r & \text{op } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (13.22)$$

voor  $f$  een functie met begrensde drager. We vinden een Greense functie voor het Dirichlet probleem door een fictieve fundamentele oplossing met singulariteit in het gespiegelde punt  $y^* = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$  van de fundamentele oplossing af te trekken.



De functie  $x \mapsto V_n(x - y^*)$  voldoet aan  $\Delta_x V_n(x - y^*) = 0$  op het bovenhalfvlak omdat het enige singuliere punt zich op het onderhalfvlak bevindt. Voor  $x$  met de eerste coördinaat gelijk aan 0 volgt dat  $V_n(x - y^*) = V_n(x - y)$  zodat op de rand aan de Dirichlet randvoorwaarde is voldaan. We hebben het volgende gevonden.

**Propositie 13.4.4** Voor  $\mathbb{R}_+^n$  is de Greense functie als volgt:

$$G(x, y) = V_n(x - y) - V_n(x - y^*). \quad (13.23)$$

met  $y^* = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Dat wil zeggen dat de functie  $u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door

$$u(x) = \iint_{y \in \mathbb{R}_+^n} G(x, y) f(y) dy + \int_{y \in \partial\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial G}{\partial y_1}(x, y) u_r(y) ds_y$$

voldoet aan (13.22).

**Opmerking:** Als men wil kan men deze Greense functie en zijn afgeleide uitschrijven. Na enig rekenwerk vindt men

voor  $\mathbb{R}_+^3$ :

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{((x_1 + y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{x_1}{(x_1^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{\frac{3}{2}}};$$

voor  $\mathbb{R}_+^2$ :

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \right),$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$



**Opgave 162** Zij  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een continue functie met begrensde drager. We beschouwen

$$v(x_2) = \lim_{x_1 \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - y_2)^2} \varphi(y_2) dy_2. \quad (13.24)$$

- i. Bereken  $v$  als  $\varphi(s) = 1$  voor alle  $s \in \mathbb{R}$  (ondanks de onbegrensde drager bestaat de integraal).
- ii. Omdat  $\varphi$  continu is, is er voor iedere  $\varepsilon > 0$  een  $\delta > 0$  zodat voor  $|y_2 - x_2| < \delta$  geldt dat  $|\varphi(y_2) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ .

Omdat een continue functie met begrensde drager is, is er een getal  $K$  zodat voor alle  $x_2$  en  $y_2$  geldt dat  $|\varphi(y_2) - \varphi(x_2)| < K$ .

Gebruik dit om te laten zien dat

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - y_2)^2} (\varphi(y_2) - \varphi(x_2)) dy_2 \right| \leq \\ & \leq K \int_{-\infty}^{x_2 - \delta} \frac{1}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - y_2)^2} dy_2 + \varepsilon \int_{x_2 - \delta}^{x_2 + \delta} \frac{1}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - y_2)^2} dy_2 + \\ & \quad + K \int_{x_2 + \delta}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - y_2)^2} dy_2 \end{aligned}$$

en bereken deze integralen.

- iii. Laat zien dat voor iedere  $\varepsilon > 0$  geldt dat (aangenomen de limiet bestaat)

$$\lim_{x_1 \downarrow 0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - y_2)^2} (\varphi(y_2) - \varphi(x_2)) dy_2 \right| < \varepsilon.$$

Een nauwkeuriger argument laat zien dat

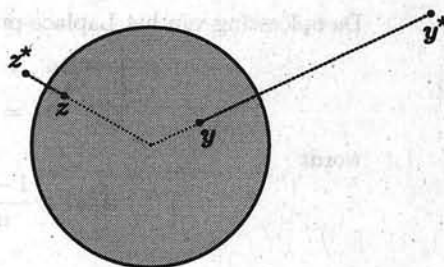
$$\lim_{x_1 \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - y_2)^2} (\varphi(y_2) - \varphi(x_2)) dy_2 = 0.$$

- iv. Bereken nu (13.24).

### 13.4.2 De Greense functie voor de cirkel/bol

De spiegeltruc die we voor het halfvlak gebruikt hebben is wonderlijk genoeg aan te passen voor een bol. In plaats van  $x - y$  door  $x - y^*$  te vervangen zoals voor het halfvlak moet er ook nog een factor worden veranderd. Noemen we  $y^* = |y|^{-2} y$  de Kelvin-gespiegelde van  $y$  dan zal  $V_n(x - y) - V_n(|y|(x - y^*))$  de juiste Greense functie blijken voor

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \\ u = u_r & \text{op } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (13.25)$$



Kelvin-spiegeling

Opnieuw vinden we dat  $\Delta_x V_n(|y|(x - y^*)) = 0$  omdat we voor  $x, y$  binnen de bol (en dus  $y^*$  buiten de bol) de singulariteit in 0 niet ontmoeten:

$$\begin{aligned} ||y|(x - y^*)|^2 &= \left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^2 = |y|^2 |x|^2 - 2x \cdot y - 1 = \\ &= (1 - |x|^2)(1 - |y|^2) + 2(|x||y| - x \cdot y) > 0. \end{aligned}$$

Bovendien zien we dat voor  $|x| = 1$  geldt  $|x - y| = ||y|(x - y^*)|$  en daarmee voldoet  $G(x, y) = V_n(x - y) - V_n(|y|(x - y^*))$  aan de Dirichlet randvoorwaarde

$$G(x, y) = 0 \text{ voor } x \in \mathbb{R}^n \text{ met } |x| = 1.$$

**Propositie 13.4.5** Voor de eenheidsbol  $B_1(0)$  in  $\mathbb{R}^n$  is de Greense functie als volgt:

$$G(x, y) = \begin{cases} V_n(x - y) - V_n\left(x|y| - \frac{y}{|y|}\right) & \text{als } y \neq 0, \\ V_n(x) - V_n(e) & \text{als } y = 0, \end{cases} \quad (13.26)$$

met  $e \in \mathbb{R}^n$  een eenheidsvector.

**Opmerking:** Merk op dat

$$\left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y + 1} = \left| y|x| - \frac{x}{|x|} \right| \quad (13.27)$$

en dat  $V_n(z)$  slechts afhangt van  $|z|$ . Voor  $y = 0$  en  $0 < |x| \leq 1$  kunnen we de functie  $G(x, y)$  via

$$V_n\left(x|y| - \frac{y}{|y|}\right) = V_n\left(y|x| - \frac{x}{|x|}\right) = V_n\left(-\frac{x}{|x|}\right) = V_n(e)$$

continu uitbreiden. De laatste stap volgt uit  $\left| -\frac{x}{|x|} \right| = 1 = |e|$ .

Na enig rekenwerk vindt men voor  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  en alle  $n \geq 2$  dat

$$-\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n}. \quad (13.28)$$

De oplossing van het Laplace-probleem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \\ u = u_r & \text{op } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (13.29)$$

wordt

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\omega_n} \int_{|y|=1} \frac{u_r(y)}{|x-y|^n} ds_y. \quad (13.30)$$

**Definitie 13.4.6** Als  $u$  willekeurig vaak differentieerbaar is en  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , dan heet de functie  $u$  harmonisch in  $\Omega$ .

► harmonisch

**Gevolg 13.4.7** Als  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , dan geldt voor iedere  $B_r(x) \subset \Omega$  dat

► gemiddelde-  
waarde-  
stelling voor  
harmonische  
functies

$$u(x) = \frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y) ds_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 ds_y}. \quad (13.31)$$

Met andere woorden:  $u(x)$  is het gemiddelde van  $u$  over de rand  $\partial B_r(x)$ .

**Opmerking:** Op bladzijde 51 is dit al voor twee dimensies bewezen.

**Bewijs:** We nemen  $x = 0$  en  $r = 1$ . Het algemene geval krijgt men vervolgens via een substitutie  $z = r^{-1}(y - x)$ . Via (13.30) vinden we

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) u(y) ds_y = \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{1 - |0|^2}{|0 - y|^n} u(y) ds_y = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} u(y) ds_y \end{aligned}$$

$$\text{en } \int_{\partial B_r(x)} 1 ds_y = n\omega_n. \quad \square$$

□

**Opgave 163** Stel dat de functie  $u$  de oplossing is van (13.29) in  $\mathbb{R}^2$  met  $u_r(x_1, x_2) = x_1^2$ . Bereken  $u(0, 0)$ . \_\_\_\_\_

► subhar-  
monisch

**Definitie 13.4.8** Als voor alle  $x \in \Omega$  en  $B_r(x) \subset \Omega$  geldt dat

$$u(x) \leq \frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y) ds_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 ds_y} \quad (13.32)$$

dan heet  $u$  subharmonisch.

► superhar-  
monisch

Als het ongelijktteken in (13.32) andersom staat heet  $u$  superharmonisch.

□

**Opgave 164** Laat zien dat  $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$ , dus  $u$  is tweemaal differentieerbare functie met de rand inclusief, die voldoet aan  $-\Delta u \geq 0$  superharmonisch is. Hint: gebruik de Greense formule voor  $B_r(x) \subset B_1(0)$ . \_\_\_\_\_

## 13.4.3 Existentie op een algemeen gebied

Voor het bestaan van een oplossing zijn enkele voorwaarden voor  $\Omega$  nodig. We nemen aan dat  $\Omega$  een samenhangend, open en begrensd gebied in  $\mathbb{R}^n$  is en bovendien dat  $\partial\Omega$  glad<sup>6</sup> is. Een hoek in het gebied heeft meestal tot gevolg dat de oplossing daar niet tweemaal differentieerbaar is. Ook daar waar  $\partial\Omega_1$  en  $\partial\Omega_2$  bij elkaar komen ontstaan soortgelijke problemen. Om deze problemen te vermijden geven we alleen een stelling voor het Poisson probleem met Dirichlet randvoorwaarden.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_r & \text{op } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.33)$$

**Stelling 13.4.9** *Stel dat  $\Omega$  aan bovengenoemde eisen voldoet. Dan is er voor iedere  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  en  $u_r \in C^3(\mathbb{R}^n)$  een oplossing  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  van (13.33).*

Zoals we eerder gezien hebben kunnen we het oplossen van (13.33) terugbrengen tot het oplossen van het Laplace probleem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{op } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.34)$$

Het bestaan van de oplossing hiervoor kan men bewijzen via de methode van Perron. Een tip van de sluier zullen we oplichten. Men definieert

$$H_\varphi = \{u \in C(\bar{\Omega}); u \text{ subharmonisch in } \Omega \text{ en } u \leq \varphi \text{ op } \partial\Omega\}.$$

Deze verzameling is niet leeg, want  $u \equiv \min_{x \in \partial\Omega} \varphi(x)$  zit in de verzameling. Bovendien is de verzameling van boven begrensd: elke  $u \in H_\varphi$  voldoet aan  $u \leq \max_{x \in \partial\Omega} \varphi(x)$ . Dan bestaat voor iedere  $x \in \Omega$  het getal  $U_x = \max_{u \in H_\varphi} u(x)$ . Het is mogelijk om te laten zien dat  $x \rightarrow U_x$  een functie in  $H_\varphi$  is. Bovendien is deze functie harmonisch in  $\Omega$  en onder enkele voorwaarden voor  $\partial\Omega$  voldoet  $U_x$  zelfs aan de randvoorwaarden.

**Opgave 165** We beschouwen een randwaardeprobleem op het 'pacman'-gebied

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 > -|x_2| \text{ en } x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

namelijk

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u(r \cos \phi, r \sin \phi) = \cos\left(\frac{2}{3}\phi\right) & \text{voor } r = 1, |\phi| < \frac{3}{4}\pi, \\ u(r \cos \phi, r \sin \phi) = 0 & \text{voor } r < 1, |\phi| = \frac{3}{4}\pi. \end{cases} \quad (13.35)$$

Laat zien dat  $u(r \cos \phi, r \sin \phi) = r^{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{2}{3}\phi\right)$  de enige oplossing is. Is de functie  $u$  differentieerbaar op  $\bar{\Omega}$ ?

<sup>6</sup>Een voldoende eis voor gladheid om het bestaan van een tweemaal differentieerbare oplossing  $u$  te krijgen is  $\partial\Omega \in C^3$ . Voor oplossingen die alleen binnen  $\Omega$  tweemaal differentieerbaar zijn maar wel continu tot op de rand van  $\Omega$  kunnen we zelfs hoeken bij  $\partial\Omega$  toelaten.

## 13.5 Eigenfuncties

Elliptische partiële differentiaalvergelijkingen op begrensde gebieden met rondom voorgeschreven randvoorwaarden vertonen een grote overeenkomst met tweede orde randwaardeproblemen.

Beschouw

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ (\alpha + \beta \frac{\partial}{\partial n}) u = 0 & \text{op } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.36)$$

met  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$  en het bijbehorende eigenwaardeprobleem

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \lambda \varphi & \text{in } \Omega, \\ (\alpha + \beta \frac{\partial}{\partial n}) \varphi = 0 & \text{op } \partial\Omega. \end{cases}$$

- zelf-geadjungeerd
- inproduct

Dit randwaardeprobleem is *zelf-geadjungeerd* t.o.v. het *inproduct*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dat is gedefinieerd door

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

We vinden inderdaad dat:

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, v \rangle - \langle u, -\Delta v \rangle &= \int_{\Omega} (-v\Delta u + u\Delta v) dx = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(-v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v) dx = \int_{\partial\Omega} \left( -v \frac{\partial}{\partial n} u + u \frac{\partial}{\partial n} v \right) d\sigma_x = 0 \end{aligned}$$

geldt voor  $u, v$  die aan de randvoorwaarden voldoen.



**Stelling 13.5.1** Voor het zelf-geadjungeerde randwaardeprobleem (13.36) bestaat er een volledig orthonormaal stelsel van eigenfuncties  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ . De eigenwaarden zijn reëel en we kunnen de eigenfuncties zo ordenen dat

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Bovendien geldt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ .

De ongelijkheid van Bessel en de gelijkheid van Parseval gelden overigens ook in hogere dimensies.

Voor gebieden zonder veel regelmaat kan men in het algemeen geen expliciete eigenfuncties vinden er is deze stelling vooral van theoretische waarde. Voor enkele 'mooie' gebieden is het wel mogelijk.

**Gevolg 13.5.2** Als  $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$  een volledig orthonormaal stelsel eigenfuncties is met eigenwaarden  $\{\lambda_k\}$ , dan kunnen we de oplossing van (13.36) vinden door

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k(x)$$

met

$$\langle \varphi_k, f \rangle = \int_{\Omega} \varphi_k(x) f(x) dx.$$

□

**Voorbeeld 72**

Beschouw voor  $\Omega = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u(x, \cdot) = 0 & \text{voor } x = 0 \text{ en } x = 1, \\ \frac{\partial}{\partial n} u(\cdot, y) = 0 & \text{voor } y = 0 \text{ en } y = 1. \end{cases} \quad (13.37)$$

De verzameling  $\{\Phi_{k,m}; k \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{N}\}$  met

$$\begin{aligned} \Phi_{k,0}(x) &= \sqrt{2} \sin(k\pi x) && \text{voor } k \in \mathbb{N}^+ \\ \Phi_{k,m}(x) &= 2 \sin(k\pi x) \cos(m\pi y) && \text{voor } k, m \in \mathbb{N}^+ \end{aligned} \quad (13.38)$$

is een volledig orthonormaal stelsel. \_\_\_\_\_

□

**Voorbeeld 73**

Een volledig orthonormaal stelsel van eigenfuncties voor

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0), \\ u = 0 & \text{op } \partial B_1(0), \end{cases}$$

met  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$  kan men vinden met behulp van de Besselfuncties. Zie de eigenfuncties bij de drum op bladzijde 285. In drie dimensies vindt men de bolfuncties, zie bladzijde 304. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 166** Laat  $\Omega$  een begrensde gebied in  $\mathbb{R}^n$  zijn met een gladde rand. Gebruik de Greense identiteit om te laten zien dat

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} u = 0 & \text{op } \partial\Omega, \end{cases}$$

zelf-geadjungeerd is t.o.v. het standaard inproduct

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx.$$
\_\_\_\_\_

□

**Opgave 167** Zij  $\Omega$  als in (13.37). We definiëren

$$\langle f, g \rangle_* = \int_{\Omega} e^x f(x, y) g(x, y) dx dy.$$

i. Is

$$\begin{cases} -\Delta u + 2 \frac{\partial}{\partial x} u = f & \text{in } \Omega, \\ u(x, \cdot) = 0 & \text{voor } x = 0 \text{ en } x = 1, \\ \frac{\partial}{\partial n} u(\cdot, y) = 0 & \text{voor } y = 0 \text{ en } y = 1. \end{cases} \quad (13.39)$$

zelf-geadjungeerd t.o.v. het inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ ?

ii. Alle eigenfuncties zijn te vinden door scheiding van variabelen:

$$\Phi(x, y) = \alpha(x) \beta(y)$$

Bereken het volledige stelsel van eigenfuncties.

iii. Normaliseer deze eigenfuncties t.o.v.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ .

iv. Geef de formule voor de oplossing van (13.39) als Fourier-reeks.

v. Bereken de oplossing voor  $f = 1$ . \_\_\_\_\_





**Opgave 168** Voor  $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ , de twee-dimensionale eenheidscircelschijf kan men laten zien dat men alle eigenfuncties van

$$\begin{cases} -\Delta \Psi = \lambda \Psi & \text{in } \Omega, \\ \Psi = 0 & \text{op } \partial\Omega, \end{cases}$$

kan vinden door de volgende scheiding van variabelen

$$\Psi(x, y) = \Phi(\varphi) R(r)$$

met  $x = r \cos \varphi$  en  $y = r \sin \varphi$ .

- i. Bepaal de eigenwaardeproblemen waar  $\Phi$  en  $R$  aan voldoen.
- ii. Laat zien dat het bij  $R$  behorende randwaardeprobleem niet zelf-geadjungeerd is t.o.v. het standaard inproduct.
- iii. Laat ook zien dat het bij  $R$  behorende randwaardeprobleem wel zelf-geadjungeerd is t.o.v. het inproduct

$$\langle f, g \rangle_* = \int_0^1 f(r) g(r) r dr.$$

# 14. HET DIFFUSIE-PROBLEEM (PARABOLISCH)

---

Net als bij randwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen en voor elliptische partiële differentiaalvergelijkingen zullen we twee verschillende constructieve methoden beschrijven. De ene is verwant met Greense functies en de andere maakt gebruik van Fourier-analyse. Geen van beide geven expliciete oplossingen op willekeurige gebieden. De Fourier-reeksen geven oplossingen in de vorm van een reeks bij begrensde gebieden met voldoende symmetrie. We zullen als voorbeeld het beginwaardeprobleem met Dirichlet randvoorwaarden op  $(x, t) \in (0, \ell) \times \mathbb{R}^+$  onderzoeken. De 'Greense-functie-achtige' aanpak is geschikt voor onbegrensde gebieden. Hiervan wordt als voorbeeld het beginwaardeprobleem op  $(0, \infty) \times \mathbb{R}^+$  bekeken.

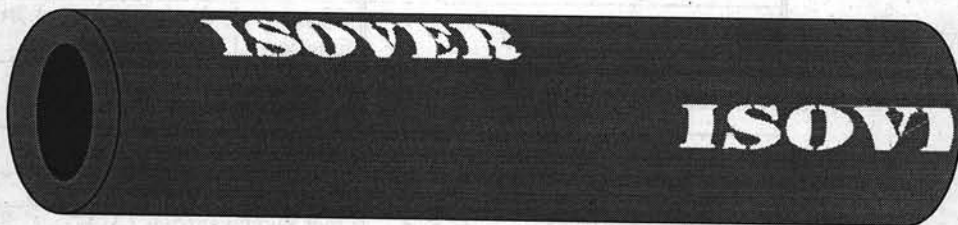
## 14.1 Diffusie op het interval $[0, \ell]$

---

### 14.1.1 Het model

---

Als model zullen we het temperatuurprofiel bij het afkoelen van een geïsoleerde metalen staaf beschouwen. We beginnen met een staaf op kamertemperatuur die we op tijdstip  $t = 0$  in een bak met ijswater gooien. De staaf zal afkoelen door de beide ongeïsoleerde uiteinden. De temperatuur, die we  $U$  zullen noemen, is dus een functie van tijd en plaats.



We hebben:

- Een staaf van lengte  $\ell$ , dus  $x \in [0, \ell]$ ;
- De beginvoorwaarde  $U(x, 0) = 20$  (kamertemperatuur =  $20^\circ\text{C}$ );
- De randvoorwaarde  $U(0, t) = U(\ell, t) = 0$  (temperatuur ijswater =  $0^\circ\text{C}$ ) voor  $t > 0$ ;
- De differentiaalvergelijking  $\frac{\partial}{\partial t} U(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t)$ , waarbij  $D$  de van het materiaal afhankelijke diffusiecoëfficiënt is.

Kortom

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) & \text{voor } t > 0 \text{ en } 0 < x < \ell, \\ U(0, t) = U(\ell, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ U(x, 0) = 20 & \text{voor } 0 < x < \ell. \end{cases} \quad (14.1)$$

## 14.1.2 Formele oplossing

Voordat we een oplossing van (14.1) construeren zullen we een vergelijking maken met lineair stelsel in  $\mathbb{R}^n$ . Door  $L_2(0, \ell)$  op te vatten als lineaire combinaties van de eigenfuncties die we gebruiken in de bijbehorende Fourier-reeks kan men de ruimte  $L_2(0, \ell)$  opvatten als een soort  $\mathbb{R}^\infty$ . Dit is zeer slordig gezegd. Allereerst geven we een overzicht van de parallellen tussen beide problemen.

Beide vergelijkingen zijn te beschouwen als

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(t) = A U(t) & \text{voor } t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (14.2)$$

al zou men voor het diffusieprobleem misschien liever de  $x$  ook willen schrijven.

stelsel g.d.v.	b.w.p. voor parabolische d.v.
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$A = \Delta$
beginvoorwaarde $U_0 = \vec{u}_0$ $U_0 \in \mathbb{R}^n$	beginvoorwaarde $U_0(x)$ $U_0 \in L_2(0, \ell)$
eigenvectoren: $A\vec{\varphi} = \lambda\vec{\varphi}$	eigenfuncties: $\begin{cases} \Delta\varphi(x) = \lambda\varphi(x) \text{ in } (0, \ell), \\ \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0 \end{cases}$
$A$ symmetrisch	$\Delta$ met randvoorwaarde zelf-geadjungeerd

dan:

eigenvectoren $\{\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n\}$	stelsel eigenfuncties $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$
met eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$	met eigenwaarden $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}$
die zijn te orthonormaliseren zodat $\vec{\varphi}_k \cdot \vec{\varphi}_m = \delta_{km}$	die zijn te orthonormaliseren zodat $\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \delta_{km}$

oplossen:

met $U_0 = \sum_{k=1}^n c_k \vec{\varphi}_k$ $c_k = \vec{\varphi}_k \cdot U_0$	met $U_0(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k(x)$ $c_k = \langle \varphi_k, U_0 \rangle$ $U_0 \in L_2(0, \ell) \Rightarrow$ convergente reeks
$U(t) = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} c_k \vec{\varphi}_k$	$U(x, t) = \sum_{k=1}^\infty e^{\lambda_k t} c_k \varphi_k(x)$ reeks convergent? oplossing?

Formeel is er alleen een getal  $n$  vervangen door de uitdrukking  $\infty$ . Daarmee is er echter een limiet binnen het verhaal gekomen. De uitdrukking

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} c_k \varphi_k(x) \quad (14.3)$$

is niet vanzelfsprekend gedefinieerd. En zelfs als deze functie gedefinieerd is, is het daarmee nog niet vanzelfsprekend een oplossing. Er is bijvoorbeeld geen onmiddellijke garantie dat deze limiet aan de randvoorwaarden voldoet. We hebben al gezien dat we  $U_0$  konden benaderen die niet aan de randvoorwaarden voldoet met functies  $U_m$  die wél aan de randvoorwaarden voldoen.

Om betekenis aan (14.3) als oplossing van (14.1) te kunnen geven zullen we moeten laten zien dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} c_k \varphi_k(x)$  bestaat en dat deze limiet bovendien een oplossing van de diffusievergelijking is. We zullen dit in de volgende paragraaf onderzoeken en opmerken dat we een wezenlijk verschil bestaat voor  $t > 0$  en  $t < 0$ . Dit fenomeen geeft een cruciaal verschil met lineaire stelsels van g.d.v. Daar is de oplossing in beide tijdsrichtingen goed gedefinieerd.

Voor het speciale geval dat we in (14.1) beschreven hebben vinden we overigens

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} Dt} \left\langle U_0, \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot\right) \right\rangle \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right).$$

We zullen zien dat deze reeks alleen convergeert voor  $t \geq 0$  uitgezonderd enkele zeer speciale beginvoorwaarden.

**Opmerking:** In de numerieke wiskunde berekent men vaak een benadering van de oplossing door te discretiseren. Discretiseert men in de ruimtevariabele, dat wil zeggen dat men slechts een eindig aantal punten (zeg  $m$ ) in  $[0, \ell]$  beschouwt, dan benadert men het diffusie-probleem met een stelsel van  $m$  gewone differentiaalvergelijkingen voor de  $t$ -variabele.

### 14.1.3 Convergentie van de reeks

Voor  $U_0 \in L_2[0, \ell]$  weten we dat

$$U_0(x) \stackrel{\text{in } L_2\text{-zin}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \left\langle U_0, \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot\right) \right\rangle \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right),$$

waarbij gelijkheid in  $L_2$ -zin betekent dat

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{x=0}^{\ell} \left| U_0(x) - \sum_{k=1}^m \frac{2}{\ell} \left\langle U_0, \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot\right) \right\rangle \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \right|^2 dx = 0, \quad (14.4)$$

en niet noodzakelijk in ieder punt  $x \in [0, \ell]$ .

Met behulp van de ongelijkheden van Bessel en Cauchy-Schwarz volgt uit de convergentie van  $\sum_{k=1}^m \langle U_0, \Phi_k \rangle \Phi_k$  naar  $U_0$  in  $L_2$ -zin als  $m \rightarrow \infty$ , dat de rij  $U_m(\cdot, t)$ , gedefinieerd door

$$U_m(\cdot, t) = \sum_{k=1}^m \langle U_0, \Phi_k \rangle e^{\lambda_k t} \Phi_k(\cdot)$$

convergeert als  $m \rightarrow \infty$  voor  $t \geq 0$  naar een functie  $U(\cdot, t)$ . We vinden zelfs het volgende.

**Propositie 14.1.1** *Zij  $U_0 \in L_2(0, \ell)$  en*

$$U_m(x, t) = \sum_{k=1}^m \frac{2}{\ell} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} Dt} \left\langle U_0, \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} \cdot\right) \right\rangle \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right).$$

*Dan geldt dat:*

i. *de volgende limiet bestaat voor  $x \in (0, \ell)$  en  $t > 0$ :*

$$U(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} U_m(x, t);$$

ii. *de rij  $\{U_m(\cdot, t)\}_{m=1}^{\infty}$  convergeert zelfs uniform naar  $U(\cdot, t)$  op  $(0, \ell)$  voor  $t > 0$ :*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq \ell} |U(x, t) - U_m(x, t)| = 0; \quad (14.5)$$

iii. *bovendien is  $U$  een oplossing van (14.1);*

iv. *op  $[0, \ell] \times (0, \infty)$  ( $t = 0$  doet dus niet mee) is  $U$  willekeurig vaak differentieerbaar.*

**Opmerking:** De laatste uitspraak laat zien dat zelfs als  $U_0$  sprongen vertoont de oplossing  $U$  voor  $t > 0$  onmiddellijk 'glad' is.

**Bewijs:**

i. Voor elke  $t > 0$  en  $M > m \in \mathbb{N}$  geldt

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^M |\langle U_0, \Phi_k \rangle e^{\lambda_k t} \Phi_k(x)| &\leq \sum_{k=m+1}^M |\langle U_0, \Phi_k \rangle| e^{\lambda_k t} \max_{0 \leq x \leq \ell} |\Phi_k(x)| \leq \\ &\leq \sum_{k=m+1}^M \|U_0\|_{L_2} \|\Phi_k\|_{L_2} e^{\lambda_k t} \max_{0 \leq x \leq \ell} |\Phi_k(x)| \leq \\ &\leq \|U_0\|_{L_2} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=m+1}^M \left( e^{-\frac{\rho \pi^2}{\ell^2} t} \right)^k \leq \\ &\leq \|U_0\|_{L_2} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left( e^{-\frac{\rho \pi^2}{\ell^2} t} \right)^k = \\ &= \|U_0\|_{L_2} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\rho \pi^2}{\ell^2} t}} e^{-\frac{\rho \pi^2}{\ell^2} t(m+1)}. \end{aligned}$$

In het bijzonder vinden we voor  $m = 0$  dat de rij

$$\left\{ \sum_{k=1}^M |\langle U_0, \Phi_k \rangle e^{\lambda_k t} \Phi_k(x)| \right\}_{M=1}^{\infty}$$

stijgend en begrensd is en dus een limiet heeft. Dan is  $\sum_{k=1}^{\infty} \langle U_0, \Phi_k \rangle e^{\lambda_k t} \Phi_k(x)$  absoluut convergent en dus ook gewoon convergent.

ii. Bovendien volgt dat voor alle  $x \in [0, \ell]$ :

$$\begin{aligned} |U(x, t) - U_m(x, t)| &= \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle U_0, \Phi_k \rangle e^{\lambda_k t} \Phi_k(x) \right| \leq \\ &\leq \|U_0\|_{L_2} \sqrt{\frac{\ell}{2}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\rho}{\ell^2} t}} e^{-\frac{\rho}{\ell^2} t(m+1)}. \end{aligned}$$

Voor  $t > 0$  convergeert deze laatste uitdrukking naar 0 als  $m \rightarrow \infty$ . Deze schatting is niet afhankelijk van  $x$  en daarmee volgt dat de rij  $U_m(\cdot, t)$  uniform convergeert.

iv. Schrijf  $z = e^{i\frac{\pi}{\ell}x}$  en  $w = e^{-\frac{\rho}{\ell^2}x^2 t}$ . We vinden dat  $U(x, t) = \operatorname{Re} f(w, z)$  met

$$f(w, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U_0, \Phi_k \rangle w^{k^2} z^k. \quad (14.6)$$

Als  $t > 0$  dan geldt  $|w| < 1$  en is de convergentiestraal van deze machtreeks, als machtreeks in  $z$ ,  $\infty$ . Volgens de machtreekstelling geldt

$$\frac{\partial}{\partial z} f(w, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U_0, \Phi_k \rangle w^{k^2} k z^{k-1}$$

voor  $|z| < R = \infty$ . Omdat  $\frac{\partial}{\partial x} U(x, t) = \operatorname{Re} (z i \frac{\pi}{\ell} \frac{\partial}{\partial z} f(w, z))$  is  $U$  differentieerbaar naar  $x$  als  $t > 0$ . Omdat ook de machtreeks

$$z \mapsto z i \frac{\pi}{\ell} \frac{\partial}{\partial z} f(w, z) = \sum_{k=1}^{\infty} i \frac{k\pi}{\ell} \langle U_0, \Phi_k \rangle w^{k^2} z^k$$

voor  $|w| < 1$  convergentiestraal  $\infty$  heeft kunnen we zo'n argument herhalen om te laten zien dat  $U$  willekeurig vaak naar  $x$  differentieerbaar is; m.a.w. voor  $t > 0$  mogen de limiet van de reeks en de limieten van de afgeleide verwisseld worden. We vinden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n U(x, t) &\text{ bestaat voor elke } n \in \mathbb{N}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n U(x, t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n U_m(x, t). \end{aligned}$$

Voor afgeleiden naar  $t$  is een gelijksoortig argument te gebruiken. Als machtreeks in  $w$  heeft (14.6) convergentiestraal 1 voor alle  $z$ . Ook voor  $w$  met  $|w| < 1$  mogen we differentiëren en we vinden

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n U(x, t) &\text{ bestaat voor elke } n \in \mathbb{N}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n U(x, t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n U_m(x, t). \end{aligned}$$

Bovendien volgt

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) &= D \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_m(x, t) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} U_m(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) \end{aligned}$$

en dat ook alle gemengde afgeleiden bestaan voor  $t > 0$ .

iii. We hebben net bewezen dat  $U$  aan de differentiaalvergelijking voldoet. Bovendien volgt uit de uniforme convergentie dat

$$\begin{aligned} U(0, t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} U_m(0, t) = 0, \\ U(\ell, t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} U_m(\ell, t) = 0. \end{aligned}$$

Hiermee is  $U(\cdot, \cdot)$  gedefinieerd door

$$U(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \langle U_0, \Phi_k \rangle e^{\lambda_k t} \Phi_k(x)$$

een oplossing van het diffusieprobleem met Dirichlet randvoorwaarden op het interval  $[0, \ell]$ .  $\square$

## 14.1.4 Anti-diffusie

Voor het diffusieprobleem hebben we een oplossing in de vorm van een Fourierreeks gevonden. Men zou hetzelfde kunnen proberen voor het anti-diffusieprobleem ( $D$  negatief en herschaald naar  $-1$ ;  $\ell$  herschaald naar  $1$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) & \text{voor } t > 0 \text{ en } 0 < x < 1, \\ U(0, t) = U(1, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ U(x, 0) = 20 & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases} \quad (14.7)$$

**Opmerking:** Men vindt dit stelsel overigens ook als men in (14.1) de negatieve tijdsrichting bekijkt en  $t$  door  $-t$  vervangt. In termen van het warmtegeleidingsprobleem met de geïsoleerde staaf zou dat betekenen dat men via het oplossen van (14.7) uit het temperatuurprofiel op tijdstip  $t = 0$  het temperatuurprofiel op voorgaande tijdstippen reconstrueert.

Men kan proberen een oplossing te vinden door 'blindelings' scheiding van variabelen uit te voeren. Dat levert de reeks

$$U(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \langle U_0, \Phi_k \rangle e^{k^2 \pi^2 t} \Phi_k(x). \quad (14.8)$$

Voor beginvoorwaarde  $U_0 = 20$  is deze reeks niet convergent voor  $t > 0$ . Het warmteprobleem in 'omgekeerde tijdsrichting' is dan ook geen goed gesteld probleem.

Stel dat de oplossing toch met Fourier-reeksen te benaderen zou zijn en laat ons ter illustratie twee benaderingen bekijken op enkele opeenvolgende tijdstippen:

$$U^{\#20}(x, t) = \sum_{k=1}^{20} \langle U_0, \Phi_k \rangle e^{k^2 \pi^2 t} \Phi_k(x),$$

$$U^{\#40}(x, t) = \sum_{k=1}^{40} \langle U_0, \Phi_k \rangle e^{k^2 \pi^2 t} \Phi_k(x),$$

Beschouwen we het geval dat  $U_0 = 1$ . De Fourier-reeks voor  $U_0$  hebben we uitgerekend bij het voorbeeld op bladzijde 204:

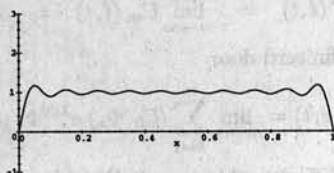
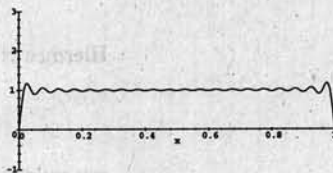
$$U_0(x) \stackrel{\text{in } L_2\text{-zin}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin((2m+1)\pi x).$$

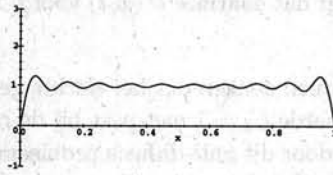
We vinden:

$$U^{\#20}(x, t) = \sum_{m=0}^9 \frac{4}{(2m+1)\pi} e^{(2m+1)^2 \pi^2 t} \sin((2m+1)\pi x),$$

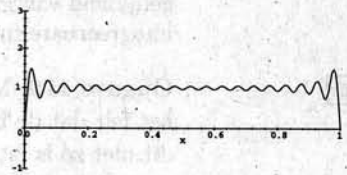
$$U^{\#40}(x, t) = \sum_{m=0}^{19} \frac{4}{(2m+1)\pi} e^{(2m+1)^2 \pi^2 t} \sin((2m+1)\pi x),$$

en laten Maple de grafiek tekenen voor toenemende  $t$ .

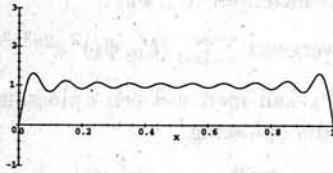

 $U^{\#20}(0, x)$ 

 $U^{\#40}(0, x)$



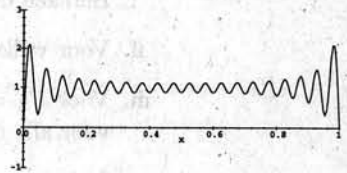
$U\#20(0.0002, x)$



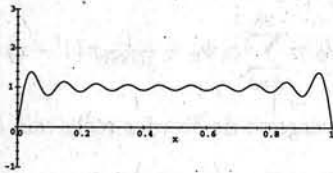
$U\#40(0.0002, x)$



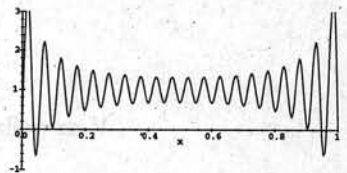
$U\#20(0.0004, x)$



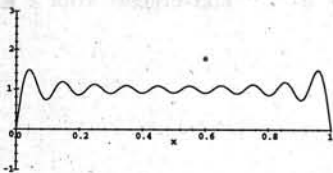
$U\#40(0.0004, x)$



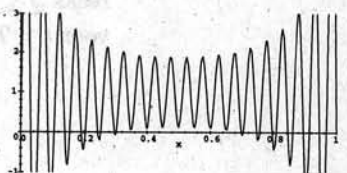
$U\#20(0.0006, x)$



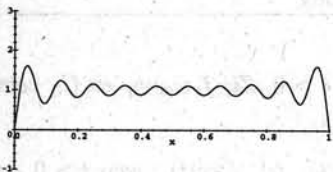
$U\#40(0.0006, x)$



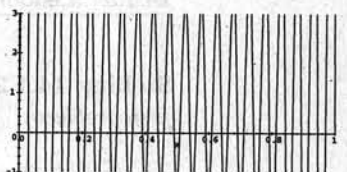
$U\#20(0.0008, x)$



$U\#40(0.0008, x)$



$U\#20(0.001, x)$



$U\#40(0.001, x)$

Men ziet al bijna dat er voor  $t > 0$  geen hoop op convergentie voor de reeks is. Voor slechts enkele  $U_0$ , bijvoorbeeld voor  $U_0$  die een eindige combinatie van eigenfuncties is, kan men zo een oplossing vinden. Bovendien 'verziekt' bijna elke kleine verstoring van zo'n  $U_0$  de benadering van  $U(t, \cdot)$  voor  $t > 0$  totaal. Men ziet dat de Fourier-reeks divergeert tenzij de coëfficiënten  $\langle U_0, \Phi_k \rangle$  zeer snel naar 0 convergeren als  $k \rightarrow \infty$ . Met de gelijkheid van Parseval volgt namelijk

$$\|U(x, t)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U_0, \Phi_k \rangle^2 e^{2\pi^2 k^2 t}. \quad (14.9)$$



**Opgave 169** We hebben niet laten zien dat de reeks in (14.8) voor  $t > 0$  niet bestaat. Laat dat nu zien. Dat wil zeggen bereken de Fourier-coëfficiënten bij  $U_0$  en laat zien dat de reeks in (14.9) niet convergeert voor  $t > 0$ . Met de



gelijkheid van Parseval volgt dat daarmee  $U(x, t)$  voor  $t > 0$  geen kwadratisch integreerbare functie is. —



**Opgave 170** Men zou kunnen denken dat het slechte gedrag te wijten is aan het feit dat de beginvoorwaarde  $U_0 = 1$  niet past bij de randvoorwaarde. Dat dit niet zo is laten we zien door dit anti-diffusie probleem te beschouwen voor de 'mooie' beginvoorwaarde  $U_0(x) = x(1-x)$ .

- i. Bereken de Fourier-coëfficiënten  $\langle U_0, \Phi_k \rangle$ .
- ii. Voor welke  $t > 0$  convergeert  $\sum_{k=1}^{\infty} \langle U_0, \Phi_k \rangle^2 e^{2\pi^2 k^2 t}$ ?
- iii. Voor  $U_0 = \sum_{k=1}^{28} c_k \Phi_k$  kan men wel een oplossing vinden die bestaat voor alle  $t > 0$ . Geef die oplossing.
- iv. De beginvoorwaarde  $U_0 = \sum_{k=1}^{28} c_k \Phi_k$  wordt gestoord met  $\frac{1}{10000}x(1-x)$ , dus de nieuwe beginvoorwaarde wordt

$$U_0 = \sum_{k=1}^{28} c_k \Phi_k + \frac{1}{10000}x(1-x).$$

Voor welke  $t > 0$  convergeert de Fourier-reeks van  $U(x, t)$ ?

- v. Geef de Fourier-coëfficiënten  $\langle \tilde{U}_0, \Phi_k \rangle$  van een voorbeeld waarbij de reeks  $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \tilde{U}_0, \Phi_k \rangle^2 e^{2\pi^2 k^2 t}$  convergeert voor  $t \in [0, T)$  en divergeert voor  $t > T$ . —

### 14.1.5 Eenduidige oplossing

**Stelling 14.1.2** *Neem  $D, \ell > 0$ . Zij  $f, \psi_0, \psi_\ell$  en  $U_0$  voorgeschreven. Het diffusieprobleem*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) = f(x, t) & \text{voor } t > 0 \text{ en } 0 < x < \ell, \\ U(0, t) = \psi_0(t) & \text{voor } t > 0, \\ U(\ell, t) = \psi_\ell(t) & \text{voor } t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x) & \text{voor } 0 < x < \ell. \end{cases} \quad (14.10)$$

heeft hoogstens één oplossing.

**Bewijs:** Stel er zijn twee oplossingen van het diffusieprobleem (14.10). Noem deze  $U_1$  en  $U_2$  en hun verschil  $V$ . Deze functie  $V$  voldoet dan aan het volgende probleem:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, t) & \text{voor } t > 0 \text{ en } 0 < x < \ell, \\ V(0, t) = V(\ell, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ V(x, 0) = 0 & \text{voor } 0 < x < \ell. \end{cases} \quad (14.11)$$

We bekijken de hulpfunctie  $E: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  die gedefinieerd is door

$$E(t) = \int_{x=0}^{\ell} \frac{1}{2} (V(x, t))^2 dx.$$

We vinden dat  $E(t) \geq 0$  en

$$E(0) = \int_{x=0}^{\ell} \frac{1}{2} (V(x,0))^2 dx = 0.$$

Bovendien

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} \int_{x=0}^{\ell} \frac{1}{2} (V(x,t))^2 dx = \int_{x=0}^{\ell} V(x,t) \frac{\partial}{\partial t} V(x,t) dx =$$

(gebruik de differentiaalvergelijking)

$$= D \int_{x=0}^{\ell} V(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,t) dx =$$

(partieel integreren)

$$= D \left[ V(x,t) \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) \right] \Big|_{x=0}^{\ell} - D \int_{x=0}^{\ell} \left( \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) \right)^2 dx =$$

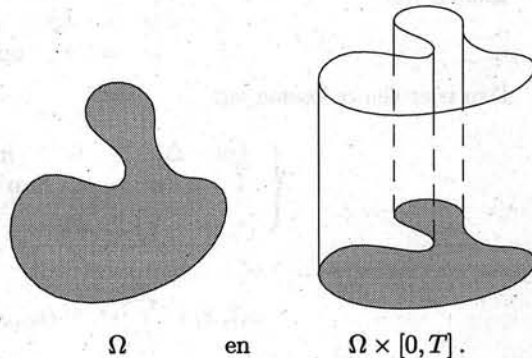
(randvoorwaarde)

$$= -D \int_{x=0}^{\ell} \left( \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) \right)^2 dx \leq 0.$$

Uit  $\frac{d}{dt} E(t) \leq 0$  volgt  $E(t) \leq E(0) = 0$  en dus  $E(t) = 0$  voor alle  $t \geq 0$ . Omdat  $E(t) = 0$  impliceert dat  $V(x,t) = 0$  vinden we dat  $U_1 = U_2$ .  $\square$

## 14.2 Diffusie op begrensde gebieden in hogere dimensies

We gebruiken de variabelen  $(x,t)$ , met de ruimtevariabele  $x \in \Omega$ , een open begrensde gebied in  $\mathbb{R}^n$ , en de tijdsvariabele  $t \in [0, \infty)$ . Dit type domein is een van de meest voorkomende.



Het diffusieprobleem met Dirichlet randvoorwaarden in hogere dimensies wordt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(x,t) = D \Delta U(x,t) & \text{voor } t > 0 \text{ en } x \in \Omega, \\ U(x,t) = u_{rand}(x,t) & \text{voor } t > 0 \text{ en } x \in \partial\Omega, \\ U(x,0) = u_0(x) & \text{voor } x \in \Omega. \end{cases} \quad (14.12)$$

Voor  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heeft de  $x$  hier  $n$  componenten. De constante  $D$  heet de diffusieconstante en is van het materiaal afhankelijk.

We kunnen hierbij denken aan een aardappel die in een pan kokend water wordt gedaan. Dan is  $u_0$  de temperatuur van het keukenkastje waar de aardappels bewaard worden en  $u_{rand}$  de  $100^\circ\text{C}$  van het kokende water.

Voor diffusieproblemen is er ook een vergelijkingsprincipe. Dit geeft een tweede mogelijkheid om eenduidigheid te bewijzen. We geven de stelling zonder bewijs.

► *vergelijkingsprincipe*

**Stelling 14.2.1** (*vergelijkingsprincipe*) Als  $U$  en  $V$  oplossingen zijn van het diffusieprobleem (14.12) op een begrensde gebied  $\Omega$  en

$$\begin{array}{l} u_{rand} \geq v_{rand} \\ u_0 \geq v_0 \end{array}$$

dan

$$U(x, t) \geq V(x, t)$$

voor  $x \in \Omega$  en  $t > 0$ .

**Gevolg 14.2.2** *Bij rondom voorgeschreven randvoorwaarden en gegeven beginvoorwaarde heeft het diffusieprobleem (14.12) op een begrensde gebied  $\Omega$  hoogstens één oplossing.*

Men kan ook laten zien, mits  $u_{rand}$ ,  $u_0$  en  $\Omega$  voldoende 'netjes' zijn, dat (14.12) een oplossing heeft. Met Gevolg 14.2.2 weet men dat dan (14.12) precies één oplossing heeft.

Voor sommige gebieden  $\Omega$  kunnen we de expliciete eigenfuncties van  $-\Delta$  gebruiken om de oplossing in de vorm van een Fourier-reeks te schrijven. Stel dat we een volledig orthonormaal stelsel eigenfuncties/eigenwaarden<sup>1</sup>  $\{(\varphi_k, \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$  kennen van

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{in } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{op } \partial\Omega. \end{cases} \quad (14.13)$$

Dan is er een oplossing van

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{op } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (14.14)$$

via

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$$

met  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  het bijbehorende inproduct. Voor begrensde gebieden  $\Omega$  met een nette rand bestaat er zo'n volledig orthonormaal stelsel voor (14.13). Men kan laten zien dat voor (14.13) de eigenwaarden  $\lambda_k$  positief zijn en zelfs dat er bij elke  $M \in \mathbb{N}$  er slechts eindig veel zijn met  $\lambda_k < M$ . We zullen dat niet bewijzen.



**Opgave 171** Voor het rechthoek  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$  is  $\{\varphi_{k,m}\}_{k,m=1}^{\infty}$  met

$$\varphi_{k,m}(x) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sin\left(k\frac{\pi}{a}x_1\right) \sin\left(m\frac{\pi}{b}x_2\right)$$

een volledig orthonormaal stelsel t.o.v. het standaard inproduct.

- Laat zien dat  $\{\varphi_{k,m}\}_{k,m=1}^{\infty}$  een orthonormaal stelsel is.
- Bereken de eigenwaarden  $\lambda_{k,m}$ .
- Bereken de oplossing  $u(x, t)$  van (14.14) voor het geval dat  $u_0(x) = 1$  in de vorm van een Fourier-reeks.
- Laat zien dat  $v(x) = \int_{t=0}^{\infty} u(x, t) dt$  een oplossing is van

$$\begin{cases} -\Delta v = u_0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{op } \partial\Omega \end{cases} \quad (14.15)$$

#### 14.2.1 Een herschaling met twee aardappels

**Vraag:** Stel dat een aardappel gaar is wanneer hij overal een temperatuur van minstens  $80^\circ \text{C}$  bereikt heeft. Als een aardappel van 100 gram 10 minuten nodig heeft om in een pan kokend water gaar te worden, hoe lang heeft dan een aardappel van 200 gram en met dezelfde vorm nodig?

Als we de vorm van de eerste aardappel  $\Omega$  noemen ( $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ) dan kunnen we de tweede  $\sqrt[3]{2}\Omega$  noemen. Want

$$m_{\text{aardappel 2}} = \text{s.g.} \iint_{\sqrt[3]{2}\Omega} 1 dx = \text{s.g.} \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \iint_{\Omega} 1 dx = 2 m_{\text{aardappel 1}}.$$

De bijbehorende diffusieproblemen zijn, met respectievelijk  $\Omega_1 = \Omega$  en  $\Omega_2 = \sqrt[3]{2}\Omega$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U_i(x, t) = D \Delta U_i(x, t) & t > 0, x \in \Omega_i, \\ U_i(x, t) = 100 & t > 0, x \in \partial\Omega_i, \\ U_i(x, 0) = 20 & x \in \Omega_i. \end{cases}$$

Om te vergelijken gaan hebben we hetzelfde gebied nodig. Hiervoor gaan we bij de grotere aardappel een substitutie uitvoeren:  $U_2(x, t) = \tilde{U}_2(y, t)$  met  $x = \sqrt[3]{2}y$ . Dan krijgen we  $D \Delta_x U_2(x, t) = D \frac{1}{2^{2/3}} \Delta_y \tilde{U}_2(y, t)$  en dus

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}_2(y, t) = \frac{D}{2^{2/3}} \Delta \tilde{U}_2(y, t) & t > 0, y \in \Omega, \\ \tilde{U}_2(y, t) = 100 & t > 0, y \in \partial\Omega, \\ \tilde{U}_2(y, t) = 20 & y \in \Omega. \end{cases}$$

<sup>1</sup>Soms is het handiger twee of meer indices te gebruiken om het stelsel te noteren; dus  $\{\varphi_{k,m}\}_{k,m=1}^{\infty}$  in plaats van  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Als men wil kan men die eerste ook op een rijtje zetten:  $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{2,1}, \varphi_{1,3}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,1}, \varphi_{1,4}, \varphi_{2,3}, \varphi_{3,2}, \varphi_{4,1}, \varphi_{1,5}, \varphi_{2,4}, \dots$

Vervangen we nu  $\tilde{U}_2(y, t) = \hat{U}_2(y, s)$  met  $s = 2^{2/3}t$  dan krijgen we  $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}_2(y, t) = \frac{1}{2^{2/3}} \frac{\partial}{\partial s} \hat{U}_2(y, s)$  en dus

$$\begin{cases} \frac{1}{2^{2/3}} \frac{\partial}{\partial s} \hat{U}_2(y, s) = \frac{D}{2^{2/3}} \Delta \frac{\partial}{\partial s} \hat{U}_2(y, s) & s > 0, y \in \Omega, \\ \hat{U}_2(y, s) = 100 & s > 0, y \in \partial\Omega, \\ \hat{U}_2(y, s) = 20 & y \in \Omega. \end{cases}$$

Omdat dit het diffusieprobleem voor de eerste aardappel is vinden we uit het feit dat er een eenduidige oplossing is dat  $\hat{U}_2(y, s) = U_1(y, s)$  en dus

$$U_2(x, t) = U_1\left(2^{-1/3}x, 2^{-2/3}t\right).$$

De tweede aardappel is gaar als  $2^{-2/3}t = 10$ . Anders gezegd: na  $2^{2/3} \cdot 10$  minuten ( $\approx 15.9$  minuten).



**Opgave 172** Zij  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + 4x_2^2 < 1\}$  en  $\Omega^* = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + 4x_2^2 < 100\}$ . We vergelijken

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) u = 0 & \text{voor } t > 0 \text{ en } x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{voor } t > 0 \text{ en } x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = 1 & \text{voor } x \in \Omega, \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v - 5 \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) v = 0 & \text{voor } t > 0 \text{ en } x \in \Omega^*, \\ v(x, t) = 0 & \text{voor } t > 0 \text{ en } x \in \partial\Omega^*, \\ v(x, 0) = 2 & \text{voor } x \in \Omega^*. \end{cases}$$

Geef de relatie tussen  $v$  en  $u$ .

### 14.3 Diffusieproblemen op onbegrensdde gebieden.

Het eenvoudigste probleem in deze klasse is

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \text{voor } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (14.16)$$

In stappen zullen we een oplossing van (14.16) vinden in de vorm van een integraal.

**Stap 1.** We zullen een expliciete oplossing berekenen voor een  $u_0$  die stuksgewijs constant is. Allereerst

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = 0, \\ 0 & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

Eerst een waarschuwing. Omdat  $u_0$  niet continu is in 0 zullen we geen oplossing  $u(x, t)$  vinden die continu is in  $(0, 0)$ .

We gaan nu wat proberen zonder dat bij voorbaat duidelijk is dat hetgene dat we doen helemaal geoorloofd is. Als we zo iets vinden kunnen we natuurlijk achteraf bekijken of het werkelijk een oplossing is.

- Door invullen ziet men dat wanneer  $u(x, t)$  een oplossing is, ook  $u(2x, 4t)$  een oplossing:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right) u(2x, 4t) = \left( \left( 4 \frac{\partial}{\partial s} - 2^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) u(y, s) \right)_{(y,s)=(2x,4t)} = 0$$

en  $u(2x, 0) = u(x, 0)$ . Voor iedere  $c > 0$  is zelfs  $u(cx, c^2t)$  een oplossing. Als we aannemen dat we met hoogstens één oplossing te doen hebben, dan geldt

$$u(x, t) = u(cx, c^2t)$$

voor alle  $c > 0$  en in het bijzonder ook voor  $c = 1/\sqrt{t}$ , dus

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

- We proberen de oplossing te zoeken als een functie van  $\frac{x}{\sqrt{t}}$ , dus  $u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ . Invullen in de partiële differentiaalvergelijking levert

$$\frac{-x}{2t\sqrt{t}} f' \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) = \frac{1}{t} f'' \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right)$$

wat na vermenigvuldiging met  $t$  een (eerste orde in  $f'$ ) gewone differentiaalvergelijking is:

$$-\frac{1}{2}\eta f'(\eta) = f''(\eta).$$

De eis voor  $u_0$  geeft

$$f(-\infty) = \lim_{t \downarrow 0} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u(x, 0) = 0 \text{ voor } x < 0,$$

$$f(\infty) = \lim_{t \downarrow 0} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u(x, 0) = 1 \text{ voor } x > 0.$$

Tezamen wordt dit

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\eta f'(\eta) = f''(\eta), \\ f(-\infty) = 0 \text{ en } f(\infty) = 1. \end{cases}$$

- Door  $\eta$  en  $f'$  te scheiden (een separabele differentiaalvergelijking),

$$\frac{f''(\eta)}{f'(\eta)} = -\frac{1}{2}\eta \quad \text{of} \quad f'(\eta) = 0,$$

vinden we via  $\log |f'(\eta)| = -\frac{1}{4}\eta^2 + c$  dat

$$f'(\eta) = c_1 e^{-\frac{1}{4}\eta^2}.$$

Primitiveren levert, met gebruik maken van  $f(-\infty) = 0$ , dat

$$f(\eta) = c_1 \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{4}s^2} ds.$$

Omdat  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}s^2} ds = 2\sqrt{\pi}$  volgt uit  $f(\infty) = 1$  dat  $c_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ .

Hiermee hebben we de volgende uitdrukking gevonden:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}s^2} ds. \quad (14.17)$$

In de volgende opgave mag u controleren dat dit inderdaad een oplossing is van (14.16).



**Opgave 173** Laat zien dat de functie  $u$  in (14.17) voldoet aan

- $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$  voor  $t > 0$ ;
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$ ;
- maar dat  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ t \downarrow 0}} u(x, t)$  niet bestaat.

**Stap 2.** We vervangen  $u_0$  door

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x_0 < x < x_1, \\ \frac{1}{2} & \text{als } x \in \{x_0, x_1\} \\ 0 & \text{als } x < x_0 \text{ of } x > x_1. \end{cases}$$

Voor de oplossing kunnen we gebruik maken van het vorige voorbeeld. Merk op dat

$$u_0(x) = h(x - x_0) - h(x - x_1)$$

waarbij  $h$  de functie is die in het vorige voorbeeld als beginvoorwaarde is gebruikt. De oplossing met beginvoorwaarde  $h(x - x_0)$  vinden we door  $x$  in (14.17) te vervangen door  $x - x_0$ . Evenzo vinden we een oplossing met  $h(x - x_1)$  als beginvoorwaarde. Door de lineariteit van het probleem kunnen we deze beiden combineren en we vinden dat

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}s^2} ds - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-x_1}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}s^2} ds.$$

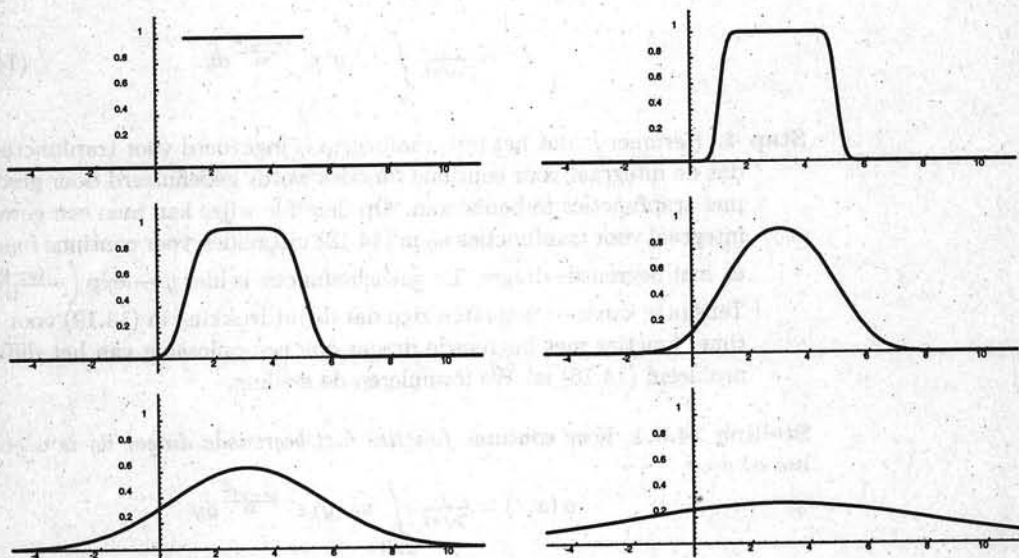
Via de substitutie  $s = \frac{x-y}{\sqrt{t}}$ , dus  $ds = -\frac{1}{\sqrt{t}} dy$ , vinden we

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}s^2} ds = \frac{-1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^{x_0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

en dus

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy. \end{aligned} \quad (14.18)$$

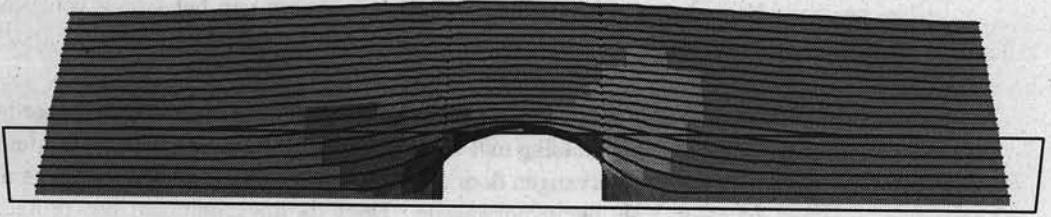
Voor  $x_0 = 1$  en  $x_1 = 5$  hebben we deze oplossing op verschillende tijdstippen laten tekenen.



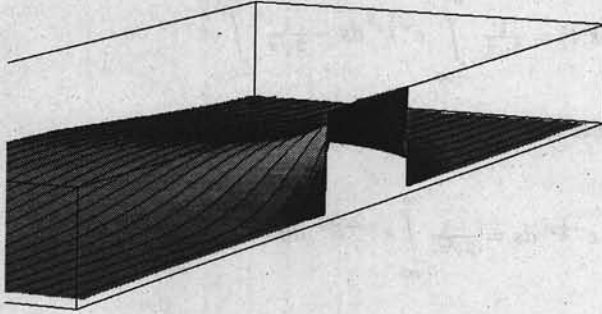
Achtereenvolgens  $x \mapsto u(x, t)$  voor  $t = 0, \frac{1}{50}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 2, 12\frac{1}{2}$ .

Voor  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  zie de volgende bladzijde.





**Stap 3.** We kunnen zelfs een trapfunctie als beginvoorwaarde toelaten, b.v.:



$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < x_0, \\ u_1 & \text{als } x_0 < x < x_1, \\ u_2 & \text{als } x_1 < x < x_2, \\ u_3 & \text{als } x_2 < x < x_3, \\ u_4 & \text{als } x_3 < x < x_4, \\ u_5 & \text{als } x_4 < x < x_5, \\ 0 & \text{als } x_5 < x. \end{cases}$$

De oplossing van (14.16) is

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left( u_1 \int_{x_0}^{x_1} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + u_2 \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + u_3 \int_{x_2}^{x_3} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + \right. \\ &\quad \left. + u_4 \int_{x_3}^{x_4} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + u_5 \int_{x_4}^{x_5} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy. \end{aligned} \quad (14.19)$$

**Stap 4.** Herinner je dat het integraalbegrip is ingevoerd voor trapfuncties en dat de integraal voor continue functies wordt gedefinieerd door geschikt met trapfuncties te benaderen. Op dezelfde wijze kan men een gewogen integraal voor trapfuncties  $u_0$  in (14.19) uitbreiden voor continue functies  $u_0$  met begrensde drager. De gewichtsfunctie is hier  $y \mapsto \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)$ . Tenslotte kan men nog laten zien dat de uitdrukking in (14.19) voor continue functies met begrensde drager ook een oplossing van het diffusie-probleem (14.16) is. We formuleren de stelling.

**Stelling 14.3.1** Voor continue functies met begrensde drager  $u_0$  is  $u$  gedefinieerd door

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{y \in \mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

een oplossing van (14.16).

Een soortgelijke formule geldt voor het diffusieprobleem op de hele  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t) & \text{voor } x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (14.20)$$

**Stelling 14.3.2** Voor continue functies  $u_0$  met begrensde drager is  $u$  gedefinieerd door

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

een klassieke oplossing van (14.20).



► *klassieke oplossing*

Als we  $u$  een *klassieke oplossing* noemen dan betekent dat, dat  $u$  continu is binnen en op de rand van het betreffende gebied, hier  $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$ , en tweemaal differentieerbaar is binnen het gebied, hier  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ .

Zonder bewijs geven we nog een vergelijkingsprincipe.

► *vergelijkingsprincipe*

**Stelling 14.3.3** Als  $u(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot)$  begrensde klassieke oplossingen zijn van (14.20) en  $u(x, 0) \leq v(x, 0)$ , dan geldt  $u(x, t) \leq v(x, t)$  voor alle  $t > 0$ .

De beide laatste stellingen impliceren dat (14.20) voor begrensde continue functies  $u_0$  precies één begrensde klassieke oplossing heeft.



**Opgave 174** We definiëren de functie  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  door

$$u(x, t) = \frac{x}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Laat zien dat deze functie  $u$  voldoet aan:

- i.  $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$ ;
- ii.  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0$  voor alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Omdat  $u(x, t) = 0$  ook een oplossing is, hebben we twee oplossingen met dezelfde beginvoorwaarde. Dit lijkt dit in tegenspraak met de eenduidigheid van de oplossing. Of toch niet? \_\_\_\_\_



**Opgave 175** We zoeken een oplossing van het diffusieprobleem op de halfrchte:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \text{voor } x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } x > 0. \end{cases} \quad (14.21)$$

Neem aan dat  $u_0(0) = 0$ . Laat zien dat de begrensde oplossing van

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \text{voor } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_0(x) & \text{voor } x \geq 0, \\ -u_0(-x) & \text{voor } x < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (14.22)$$

een oplossing is van (14.21).

Wat gebeurt er als  $u_0(0) \neq 0$ ? \_\_\_\_\_

## 14.4 Diffusie met bronterm

We laten opnieuw een analogon zien met (lineaire) stelsels gewone differentiaalvergelijkingen.

- Voor lineaire stelsels van g.d.v. kunnen we het homogene beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \vec{u}'(t) - A\vec{u}(t) = 0 \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases} \quad \text{door } \vec{u}(t) = e^{tA}\vec{u}_0 \quad (14.23)$$

oplossen. Hier is  $A$  een  $n \times n$ -matrix en  $\vec{u}$  een vectorfunctie met  $n$  componenten. Via *variatie van constante* vinden we dat het inhomogene probleem

► *variatie van constante*

$$\begin{cases} \vec{u}'(t) - A\vec{u}(t) = \vec{f}(t) \\ \vec{u}(0) = \vec{0} \end{cases} \quad \text{door } \vec{u}(t) = \int_{s=0}^t e^{(t-s)A} \vec{f}(s) ds \quad (14.24)$$

een oplossing heeft.

- Variatie van constante wil hier zeggen dat we de oplossing van (14.24) zoeken in de vorm

$$\vec{u}(t) = e^{tA}\vec{v}(t).$$

Invullen in (14.24) levert

$$(e^{tA}\vec{v}(t))' - Ae^{tA}\vec{v}(t) = e^{tA}\vec{v}'(t) = \vec{f}(t),$$

$$\vec{u}(0) = e^{0A}\vec{v}(0) = \vec{v}(0) = \vec{0},$$

en via  $\vec{v}'(t) = e^{-tA}\vec{f}(t)$  en  $\vec{v}(t) = \int_{s=0}^t e^{-sA}\vec{f}(s) ds$  vindt men de uitdrukking aan de rechterkant van (14.24).

**Opmerking:** De lineariteit van de differentiaalvergelijking kunnen we gebruiken om te zien dat we een oplossing vinden van

$$\begin{cases} \vec{u}'(t) - A\vec{u}(t) = \vec{f}(t) \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases} \quad \text{door } \vec{u}(t) = e^{tA}\vec{u}_0 + \int_{s=0}^t e^{(t-s)A} \vec{f}(s) ds \quad (14.25)$$

- Voor het geval dat  $A$  symmetrisch is kunnen we de oplossing nog anders beschrijven. Voor symmetrische matrices is er een basis van eigenvectoren  $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n$  met eigenwaarden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  en kunnen we zowel  $\vec{u}(0)$  als voor elk tijdstip  $t$  de functie  $\vec{f}$  schrijven als

$$\begin{aligned} \vec{u}(0) &= \sum_{k=1}^n u_k \vec{\varphi}_k & \text{met } u_k &= \vec{\varphi}_k \cdot \vec{u}_0, \\ \vec{f}(t) &= \sum_{k=1}^n c_k(t) \vec{\varphi}_k & \text{met } c_k(t) &= \vec{f}(t) \cdot \vec{\varphi}_k. \end{aligned}$$

Opnieuw kunnen we een formule voor de oplossing van (14.23), namelijk

$$\vec{u}(t) = \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} (\vec{\varphi}_k \cdot \vec{u}_0) \vec{\varphi}_k,$$

aanpassen om een oplossing voor (14.24) te vinden:

$$\vec{u}(t) = \sum_{k=1}^n \left( \int_{s=0}^t e^{(t-s)\lambda_k} (\vec{\varphi}_k \cdot \vec{f}(s)) ds \right) \vec{\varphi}_k. \quad (14.26)$$

**Opgave 176** Laat dit zien dat de formules in (14.24) en in (14.26) inderdaad een oplossing geven. Is dit dezelfde oplossing? Zijn er nog meer oplossingen?

De formule in (14.24) laat zich vaak generaliseren voor diffusieproblemen. We zullen dit niet precies formuleren maar alleen een recept geven.

**Recept 14.4.1** Voor 'geschikte  $\Omega$ ,  $f$  en  $u_0$ '. Als de oplossing van

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{voor } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } x \in \Omega, \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{voor } x \in \partial\Omega, t \in (0, \infty), \end{cases} \quad (14.27)$$

beschreven wordt door

$$u(x, t) = (S(t)u_0)(x)$$

dan wordt de oplossing van

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{voor } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0 & \text{voor } x \in \Omega, \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{voor } x \in \partial\Omega, t \in (0, \infty). \end{cases} \quad (14.28)$$

beschreven door

$$u(x, t) = \int_0^t (S(t-s)f(\cdot, s))(x) ds.$$

**Opmerking:** De uitdrukking  $S(t)$  is hier een van  $t$  afhankelijke operator. De functie  $x \mapsto u_0(x)$  die de beginvoorwaarde levert wordt door  $S(t)$  tot de oplossing  $x \mapsto u(x, t)$  van (14.23) op tijdstip  $t$  gemaakt. Voor bovengenoemde  $S(\cdot)$  geldt:

- i.  $\lim_{t \downarrow 0} S(t) = I$  de identiteitsoperator;
- ii.  $S(t) \circ S(s) = S(t+s)$  voor alle  $s, t > 0$ .

De familie  $\{S(t); t \geq 0\}$  wordt een halfgroep (semigroep) van operatoren genoemd.

**Voorbeeld 74**

We nemen in (14.28)  $\Omega = (0, \ell)$  en de randvoorwaarde  $U(0, t) = U(\ell, t) = 0$ . We hebben gezien dat er dan een orthonormale basis van eigenfuncties  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  is voor het tijdsonafhankelijke eigenwaardeprobleem zodat we Fourier-reeksen kunnen gebruiken. Met  $c_k = \langle \varphi_k(\cdot), u_0(\cdot) \rangle$  vinden we met geschikte  $u_0$  voor (14.27) de oplossing

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} c_k \varphi_k(x).$$

Voor geschikte  $f$  kan men op ieder tijdstip  $t$  de functie  $x \mapsto f(x, t)$  als Fourier-reeks kunnen schrijven:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \varphi_k(x)$$

met

$$c_k(t) = \langle \varphi_k(\cdot), f(\cdot, t) \rangle.$$

Net als in (14.26) vindt men met geschikte  $f$  voor (14.28) de oplossing

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{s=0}^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right) \varphi_k(x).$$

Om dit te bewijzen zullen we ook hier convergentie van de reeks moeten laten zien en bovendien dat de limiet ook aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden voldoet. We zullen daar niet verder op in gaan. \_\_\_\_\_

□

### Voorbeeld 75

Als we in (14.28)  $\Omega = \mathbb{R}$  nemen en de oplossingen beschouwen die voor  $|x| \rightarrow \infty$  naar 0 convergeren vinden we voor geschikte  $u_0$  de oplossing van (14.27) volgens Stelling 14.3.1 door

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

Voor geschikte  $f$  wordt de oplossing van (14.28):

$$u(x, t) = \int_{s=0}^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \left( \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} f(s, y) dy \right) ds \quad (14.29)$$

Ook hier geven we geen bewijs. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 177** Geef een formule als in het laatste voorbeeld voor  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . \_\_\_\_\_

□

**Opgave 178** Neem  $D > 0$ . We beschouwen

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) - D \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U(x, t) = f(x) & \text{voor } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ U(x, 0) = 0 & \text{voor } x \in (0, \pi), \\ U(0, t) = U(\pi, t) = 0 & \text{voor } t \in (0, \infty), \end{cases}$$

met  $f(x) = 1$ . Merk op dat de bronterm niet van  $t$  afhangt.

- i. Geef een formule voor de oplossing.
- ii. Bereken de coëfficiënten in deze formule.
- iii. Bereken  $\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t)$ . Vergelijk deze limiet met de Fourier-reeks van  $u(x) = x(\pi - x)$ . Verklaar de overeenkomst. \_\_\_\_\_

□

**Opgave 179** Dezelfde eerste twee vragen als in de vorige opgave waarbij de randvoorwaarden vervangen zijn door  $\frac{\partial}{\partial x} U(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} U(\pi, t) = 0$  voor  $t \in (0, \infty)$ . Bestaat  $\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t)$ ? \_\_\_\_\_



**Opgave 180** Geef de Fourier-reeks van de oplossing van

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) - D \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U(x, t) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sin t & \text{voor } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ U(x, 0) = 1 & \text{voor } x \in (0, \pi), \\ U(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} U(\pi, t) = 0 & \text{voor } t \in (0, \infty), \end{cases}$$

Gebruik de lineariteit om de oplossing te schrijven als  $V(x, t) + W(x, t)$  waarbij  $V$  aan een homogeen beginwaardeprobleem voldoet en waarbij  $W$  beginwaarde 0 heeft. \_\_\_\_\_

... ..

...

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

... ..

...

# 15. DE GOLFVERGELIJKING (HYPERBOLISCH)

## 15.1 Inleiding

- Een trillende snaar zonder wrijving wordt beschreven door de volgende differentiaalvergelijking  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ . Voor een eenduidige oplossing hebben we rand- en beginvoorwaarden nodig.

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) & \text{voor } 0 < x < l \text{ en } t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } 0 < x < l, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{voor } 0 < x < l. \end{cases} \quad (15.1)$$

De grondtoon wordt beschreven door de volgende oplossing

$$u(x, t) = \left( c_s \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + c_c \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

- Een trillende snaar met geringe wrijving wordt beschreven door de volgende differentiaalvergelijking  $u_{tt} + \alpha u_t = c^2 u_{xx}$  met  $\alpha$  een kleine positieve constante. De vergelijking voor de op plaats  $s$  'plucked string' wordt

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + \alpha u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) & \text{voor } 0 < x < l \text{ en } t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = x(l-s) & \text{voor } 0 < x \leq s, \\ u(x, 0) = s(l-x) & \text{voor } s < x < l, \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{voor } 0 < x < l. \end{cases} \quad (15.2)$$

- De golfjes op een vijver waarin zojuist een paar druppels zijn gevallen wordt beschreven door een golfvergelijking in twee dimensies.

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) & \text{voor } x \in V(\text{vijver}) \subset \mathbb{R}^2 \text{ en } t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 & \text{voor } x \in \partial V \text{ en } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } x \in V, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{voor } x \in V. \end{cases}$$





- Iedere spreker veroorzaakt trillingen die beschreven worden door een golfvergelijking in drie dimensies.

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) & \text{voor } x \in K(\text{amer}) \subset \mathbb{R}^3 \text{ en } t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 & \text{voor } x \in B(\text{etonnen wanden en plafond}) \text{ en } t > 0, \\ u(x, t) = 0 & \text{voor } x \in V(\text{loerkleed}) \text{ en } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } x \in K, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{voor } x \in K. \end{cases}$$

Dit model beschrijft de trillingen als de spreker vanaf tijdstip  $t = 0$  zijn mond houdt en zijn uitspraken laat inwerken. Als hij doorspreekt zullen we aan de eerste regel een bronterm  $f$  moeten toevoegen.

## 15.2 Eenduidigheid op $[0, \ell]$

We zullen de eenduidigheid voor (15.1) laten zien. Voor de golfvergelijking met Dirichlet randvoorwaarden in hogere dimensies is het bewijs aan te passen.

**Stelling 15.2.1** *Het stelsel in (15.1) heeft hoogstens één oplossing.*

**Bewijs:** We zullen laten zien dat de energiefunctie  $E_u(t)$  gedefinieerd door

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} (u_t(x, t)^2 + c^2 u_x(x, t)^2) dx$$

constant is

$$\frac{d}{dt} E_u(t) = \int_{x=0}^{\ell} (u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + c^2 u_x(x, t) u_{xt}(x, t)) dx =$$

(gebruik de differentiaalvergelijking)

$$\begin{aligned} &= c^2 \int_{x=0}^{\ell} (u_t(x, t) u_{xx}(x, t) + u_x(x, t) u_{xt}(x, t)) dx = \\ &= \int_{x=0}^{\ell} \frac{d}{dx} (u_t(x, t) u_x(x, t)) dx = \\ &= u_t(\ell, t) u_x(\ell, t) - u_t(0, t) u_x(0, t) = 0. \end{aligned}$$

In de laatste stap gebruiken we dat  $u(\ell, t) = 0$  voor alle  $t > 0$  impliceert dat  $u_t(\ell, t) = 0$ . Net zo vinden we  $u_x(0, t) = 0$ . Merk op dat bij Neumann randvoorwaarden ook 0 als antwoord volgt.

Voor de energiefunctie vinden we dat  $E_u(t) = E_u(0)$  voor alle  $t > 0$ .

Stel dat er twee oplossingen  $u$  en  $\tilde{u}$  zijn. Dan voldoet  $w = u - \tilde{u}$  aan de golfvergelijking met rand- en beginvoorwaarden gelijk aan 0 en voor de energiefunctie geldt  $E_w(t) = 0$ . Dan volgt  $w_t(x, t) = 0$  en  $w_x(x, t) = 0$  en we vinden dat  $w$  constant is. Omdat  $w(x, 0) = 0$  vinden we  $w = 0$  en  $u = \tilde{u}$ .  $\square$

### 15.3 Existentie op $(-\infty, \infty)$

We beschouwen het stelsel

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) & \text{voor } x \in \mathbb{R} \text{ en } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (15.3)$$

De volgende substitutie is zal zeer handig blijken te zijn:

$$\begin{cases} \eta & = x - ct, \\ \xi & = x + ct, \\ v(\eta, \xi) & = u(x, t). \end{cases}$$

Hiermee krijgt men

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 v_{\eta\eta} - 2c^2 v_{\eta\xi} + c^2 v_{\xi\xi}, \\ u_{xx} &= v_{\eta\eta} + 2v_{\eta\xi} + v_{\xi\xi}, \end{aligned}$$

en wordt de differentiaalvergelijking

$$c^2 v_{\eta\eta} - 2c^2 v_{\eta\xi} + c^2 v_{\xi\xi} = c^2 (v_{\eta\eta} + 2v_{\eta\xi} + v_{\xi\xi})$$

die vereenvoudigt tot

$$v_{\eta\xi}(\eta, \xi) = 0.$$

Een primitieve naar de  $\xi$ -coördinaat wordt

$$v_\eta(\eta, \xi) = c(\eta)$$

en vervolgens naar  $\eta$  primitieveren levert

$$v(\eta, \xi) = \int c(\eta) d\eta + c_1(\xi).$$

Dus er zijn twee functie  $f$  en  $g$  zodat  $v(\eta, \xi) = f(\eta) + g(\xi)$ . Voor  $u$  levert dat

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (15.4)$$

► *oplossing van d' Alembert* Dit wordt de *oplossing van d' Alembert* genoemd. De uitdrukking geeft de

oplossing in de vorm van twee 'lopende golven'.

We kunnen de functies  $f$  en  $g$  uitrekenen met de beginvoorwaarde. Door de beginvoorwaarden in te vullen krijgen we:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= u_0(x), \\ -cf'(x) + cg'(x) &= v_0(x). \end{aligned}$$

Deze tweede vergelijking primitiveren en  $f$  en  $g$  uitrekenen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds + k, \\ g(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds - k. \end{aligned}$$

Hiermee hebben we bewezen dat:

**Propositie 15.3.1** De oplossing van (15.3) is te schrijven als

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds. \quad (15.5)$$

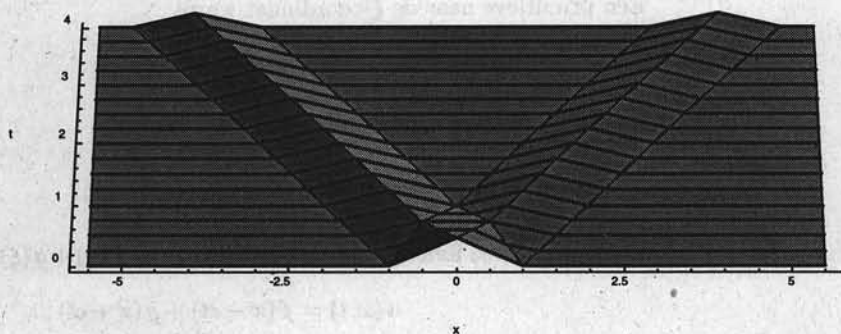
**Opmerking:** Merk op dat  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  alleen tweemaal differentieerbaar is als  $u_0$  tweemaal en  $v_0$  eenmaal differentieerbaar is. Toch is de functie in (15.5) gedefinieerd voor functies  $u_0$  en  $v_0$  die slechts continu zijn. In dat geval kan men de 'oplossing'  $u(x, t)$  niet differentiëren. Men vindt wat men noemt een oplossing in zwakke zin. We zullen er hier niet verder op ingaan.

### 15.3.1 Enkele plaatjes bij oplossingen van de golfvergelijking.

□

#### Voorbeeld 76

De grafieken van de oplossing  $u(t, x)$  van de golfvergelijking op  $\mathbb{R}$  met  $u_0 = \max(0, 1 - |x|)$  en  $v_0 = 0$  is op enkele opeenvolgende tijdstippen als volgt.

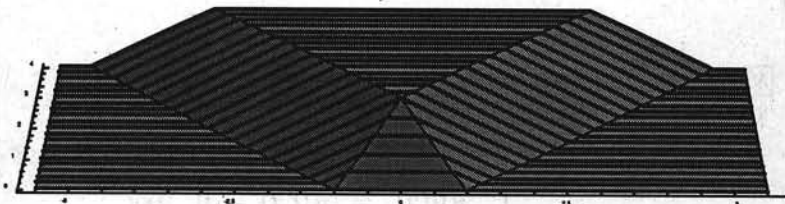


$u(x, t)$  voor  $t = 0, 0.25, 0.5, \dots, 4$

□

**Voorbeeld 77**

De grafiek van de golfvergelijking op  $\mathbb{R}$  met  $u_0 = 0$  en  $v_0 = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ . Op enkele tijdstippen met tussenpozen van 0.2 ziet deze oplossing er als volgt uit.



$u(x, t)$  voor  $t = 0, 0.2, 0.4, \dots, 4$

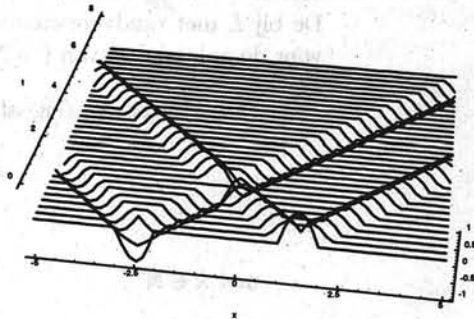
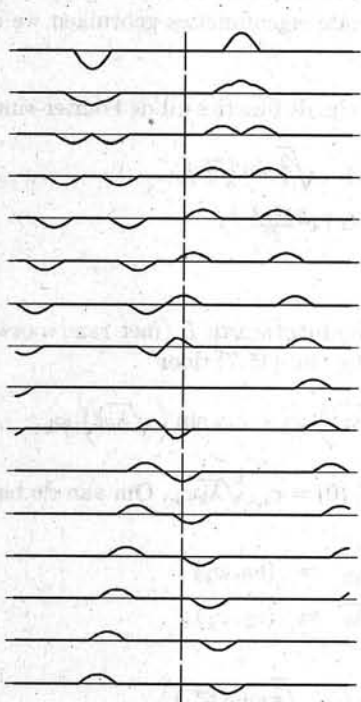
□

**Voorbeeld 78**

De grafiek van de golfvergelijking op  $\mathbb{R}$  met

$$\begin{aligned} u_0(x) &= (\mathbf{1}_{[-3,-2]}(x) - \mathbf{1}_{[1,2]}(x)) \sin(\pi x), \\ v_0(x) &= 0. \end{aligned}$$

Voor  $t = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots, 7$  is  $x \mapsto u(x, t)$  door Mathematica geschetst:



We kunnen bij deze plaatjes opmerken dat als  $u_0$  niet differentieerbaar is ook de oplossing bij toenemende  $t$  niet differentieerbaar is. Dit is geheel anders dan bij het diffusie-probleem waar de oplossing onmiddellijk oneindig vaak differentieerbaar wordt.

Een ander verschil met de diffusievergelijking is dat we de golfvergelijking ook in omgekeerde tijdsrichting kunnen oplossen. Merk op dat als we  $t$  door  $-t$  vervangen we opnieuw de golfvergelijking vinden.

□

**Opgave 181** Schets de oplossing van het laatste voorbeeld voor enkele  $t < 0$ .

□

**Opgave 182** Bereken de oplossing van de golfvergelijking voor  $u_0(x) = \sin(x)$  en  $v_0(x) = 0$ .

## 15.4 Existentie op $[0, \ell]$

We zullen twee voorbeelden bekijken.

□

### Voorbeeld 79

Het eerste stelsel dat we onderzoeken is

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) & \text{voor } 0 < x < \ell \text{ en } t > 0, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } 0 < x < \ell, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{voor } 0 < x < \ell. \end{cases} \quad (15.6)$$

We kunnen dit als een abstract beginwaardeprobleem beschouwen:

$$\begin{cases} U_{tt}(t) = -LU(t) & t > 0, \\ U(0) = u_0, \\ U_t(0) = v_0, \end{cases} \quad (15.7)$$

met  $L = -c^2 \frac{d^2}{dx^2}$  werkend op  $C^2[0, \ell]$ -functies die in 0 en  $\ell$  gelijk aan 0 zijn. De bij  $L$  met randvoorwaarden horende eigenfuncties gebruiken we als basis voor de oplossingen van (15.7).

i. De eigenwaarden/eigenfuncties zijn de functies uit de Fourier-sinus-reeks:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \\ \lambda_k &= c^2 \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2}, \end{aligned}$$

met  $k \in \mathbb{N}^+$ .

ii. Als  $\lambda_k, \varphi_k$  eigenwaarde met eigenfunctie van  $L$  (met randvoorwaarden) zijn dan krijgen we een oplossing van (15.7) door

$$U(t) = c_{c,k} \cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right) \varphi_k + c_{s,k} \sin\left(\sqrt{\lambda_k}t\right) \varphi_k.$$

iii. We vinden  $U(0) = c_{c,k} \varphi_k$  en  $U_t(0) = c_{s,k} \sqrt{\lambda_k} \varphi_k$ . Om aan de beginvoorwaarden te voldoen nemen we

$$\begin{aligned} c_{c,k} &= \langle u_0, \varphi_k \rangle, \\ c_{s,k} \sqrt{\lambda_k} &= \langle v_0, \varphi_k \rangle, \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned} c_{c,k} &= \left\langle u_0(\cdot), \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\cdot\right) \right\rangle, \\ c_{s,k} &= \frac{\ell}{ck\pi} \left\langle v_0(\cdot), \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\cdot\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

iv. We vinden oplossingen van (15.6) als

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{c,k} \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{s,k} \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Opnieuw zien we dat we een formule voor de 'oplossing' kunnen schrijven zonder dat we voor  $t > 0$  een differentieerbare functie hebben.

□

**Voorbeeld 80**

De 'plucked string':

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) + \alpha u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) & \text{voor } 0 < x < \ell \text{ en } t > 0, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = x(\ell - s) & \text{voor } 0 < x \leq s, \\ u(x, 0) = s(\ell - x) & \text{voor } s < x < \ell, \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{voor } 0 < x < \ell. \end{array} \right. \quad (15.8)$$

i. Het eigenwaardeprobleem

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 \varphi_{xx} = \lambda \varphi \quad \text{voor } 0 < x < \ell, \\ \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0, \end{array} \right.$$

heeft als orthonormale eigenfuncties/eigenwaarden de functies uit de Fourier-sinus-reeks

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \\ \lambda_k &= -\frac{c^2 k^2 \pi^2}{\ell^2}. \end{aligned}$$

ii. De Fourier-sinus-reeks van  $u_0$  is

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) = \\ &= \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \left( (\ell - s) \int_{y=0}^s y \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}y\right) dy + s \int_{y=s}^{\ell} (\ell - y) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}y\right) dy \right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ell}{k\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}s\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \end{aligned}$$

iii. De oplossing van

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{tt}(x, t) + \alpha U_t(x, t) = \lambda_k U(x, t) \quad \text{voor } t > 0, \\ U(x, 0) = \varphi_k(x), \\ U_t(x, 0) = 0, \end{array} \right.$$

is te schrijven als  $U(x, t) = w_k(t) \varphi_k(x)$ . Dan

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{k,tt}(t) + \alpha w_{k,t}(t) = \lambda_k w_k(t) \quad \text{voor } t > 0, \\ w_k(0) = 1, \\ w_{k,t}(0) = 0, \end{array} \right.$$

en enig rekenwerk levert voor  $\alpha < \frac{2c\pi}{\ell}$  de functie

$$w_k(t) = e^{-\frac{1}{2}\alpha t} \left( \cos\left(t \sqrt{\frac{c^2 k^2 \pi^2}{\ell^2} - \frac{1}{4}\alpha^2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{\frac{c^2 k^2 \pi^2}{\ell^2} - \frac{1}{4}\alpha^2}} \sin \left( t \sqrt{\frac{c^2 k^2 \pi^2}{\ell^2} - \frac{1}{4}\alpha^2} \right). \quad (15.9)$$

iv. De oplossing van (15.8) is

$$u(x, t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\ell}{k\pi} \right)^2 w_k(t) \sin \left( \frac{k\pi}{\ell} s \right) \sin \left( \frac{k\pi}{\ell} x \right)$$

met  $w_k(t)$  als in (15.9).

□

**Opgave 183** Geef de oplossing in de vorm van een geschikte Fourier-reeks voor

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + 2u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) & \text{voor } 0 < x < 1 \text{ en } t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & \text{voor } 0 < x \leq 1, \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases} \quad (15.10)$$

□

**Opgave 184** Zij  $\gamma > 0$  en  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin(k\pi x)$  de oplossing van

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \gamma^2 u_{xx}(x, t) & \text{voor } 0 < x < 1 \text{ en } t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } 0 < x \leq 1, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases} \quad (15.11)$$

i. Laat zien dat voor alle  $t \geq 0$  en  $k \in \mathbb{N}^+$  geldt

$$\begin{aligned} & (\gamma k \pi c_k(t))^2 + (c'_k(t))^2 = \\ & = \left( 2\gamma k \pi \int_{x=0}^1 u_0(x) \sin(k\pi x) dx \right)^2 + \left( 2 \int_{x=0}^1 v_0(x) \sin(k\pi x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

ii. Laat zien dat voor alle  $t \geq 0$  geldt

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \|u_0(\cdot)\|_{L_2(0,1)}^2 + \frac{1}{\gamma^2 \pi^2} \|v_0(\cdot)\|_{L_2(0,1)}^2.$$

□

**Opgave 185** Zij  $u(x, t)$  de oplossing van

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) = \gamma^2 u_{xx}(x, t) & \text{voor } 0 < x < 1 \text{ en } t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{voor } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{voor } 0 < x \leq 1, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases} \quad (15.12)$$

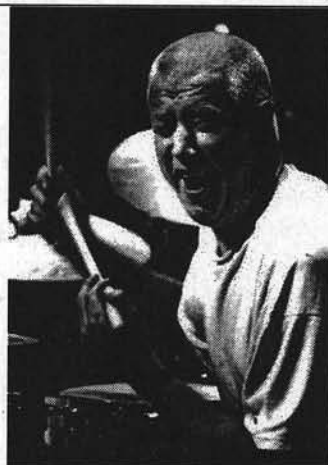
Laat zien dat  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,1)} = 0$ . Hint: eerst de vorige opgave maken.

## 15.5 De drummer

Noemen we het trommelvel

$$\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$$

dan is de differentiaalvergelijking die het trillende trommelvel (zonder damping) beschrijft na de door een slag veroorzaakte beginvoorwaarde, als volgt. Hierbij is  $u(x, y, t)$  de uitwijking van het vel op plaats  $(x, y)$  en tijd  $t$ . De constante  $c$  wordt bepaald door de spanning van het vel.



Han Bennink, foto Elio Guidi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u(x, y, t) = c \left( \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \right) u(x, y, t) \text{ op } \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (15.13)$$

De randvoorwaarden zijn

$$u(x, y, t) = 0 \text{ voor } x^2 + y^2 = 1 \text{ en voor alle } t.$$

We kunnen laten zien dat  $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$  met de randvoorwaarde

$$\psi(x, y) = 0 \text{ als } x^2 + y^2 = 1$$

zelf-geadjungeerd is t.o.v. het standaard inproduct. Het heeft dus zin om het volgende eigenwaardeprobleem<sup>1</sup> te bekijken:

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \lambda\psi & \text{voor } x^2 + y^2 < 1, \\ \psi = 0 & \text{voor } x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (15.14)$$

We vinden voor  $\lambda > 0$  oplossingen van (15.13) in de vorm

$$u(x, y, t) = \sin(\sqrt{c\lambda}t) \psi_\lambda(x, y),$$

$$u(x, y, t) = \cos(\sqrt{c\lambda}t) \psi_\lambda(x, y).$$

Allereerst zullen we de operator  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$  herschrijven via poolcoördinaten; met  $x = r \cos \varphi$  en  $y = r \sin \varphi$  vinden we

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2.$$

We kunnen ons of beperken tot het meer eenvoudige radiaalsymmetrische probleem of, algemener, ook niet radiaalsymmetrische oplossingen meenemen.

<sup>1</sup>De eigenfuncties van  $-\Delta$  zijn vanzelfsprekend ook de eigenfuncties van  $\Delta$ . Omdat de eigenwaarden van  $-\Delta$  met randvoorwaarden meestal positief zijn bekijkt men  $-\Delta$ .



- In het radiaal-symmetrische geval wordt het eigenwaardeprobleem

$$\begin{cases} \left( \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r) = -\lambda \psi(r) & \text{met} \\ \psi(1) = \psi'(0) = 0. \end{cases} \quad (15.15)$$

Door de symmetrie vinden we bovendien dat  $\psi'(0) = 0$ . De operator  $\left( \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$  met deze randvoorwaarde is overigens niet zelf-geadjungeerd t.o.v. het standaard inproduct.

We vinden

$$\psi''(r) + \frac{1}{r} \psi'(r) + \lambda \psi(r) = 0.$$

Hier is  $r_0 = 0$  een regulier-singulier punt. De indiciaalvergelijking (met  $s$ ;  $r$  is al in gebruik) wordt

$$s(s-1) + s = 0.$$

Het getal  $s = 0$  is een dubbele wortel.

- Het eigenwaardeprobleem wordt in het algemene geval

$$\begin{cases} \left( \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \psi(r, \varphi) = -\lambda \psi(r, \varphi) & \text{met} \\ \psi(1, \varphi) = 0. \end{cases}$$

Bovendien moet gelden

$$\begin{aligned} \psi(r, 0) &= \psi(r, 2\pi) \\ \frac{d\psi}{d\varphi}(r, 0) &= \frac{d\psi}{d\varphi}(r, 2\pi) \end{aligned}$$

Dit kunnen we opnieuw herschrijven tot

$$\begin{cases} \left( r^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda r^2 \right) \psi(r, \varphi) = - \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \psi(r, \varphi) & \text{met} \\ \psi(1, \varphi) = 0, \\ \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi) \text{ en } \frac{d\psi}{d\varphi}(r, 0) = \frac{d\psi}{d\varphi}(r, 2\pi). \end{cases} \quad (15.16)$$

De operator  $\left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2$  met randvoorwaarde

$$\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(2\pi) \text{ en } \frac{d\tilde{\psi}}{d\varphi}(0) = \frac{d\tilde{\psi}}{d\varphi}(2\pi)$$

is zelf-geadjungeerd en er komt opnieuw een eigenwaardeprobleem te voorschijn, n.l.:

$$\begin{cases} - \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \tilde{\psi}(\varphi) = \mu \tilde{\psi}(\varphi), \\ \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(2\pi) \text{ en } \frac{d\tilde{\psi}}{d\varphi}(0) = \frac{d\tilde{\psi}}{d\varphi}(2\pi). \end{cases}$$

De eigenfuncties met bijbehorende eigenwaarden zijn

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{c,n}(\varphi) = \cos(n\varphi) \text{ met} \\ \mu_n = n^2 \text{ en } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{s,n}(\varphi) = \sin(n\varphi) \text{ met} \\ \mu_n = n^2 \text{ en } n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Vullen we  $\psi(r, \varphi) = R(r) \tilde{\psi}_{c,n}(\varphi)$  en  $\psi(r, \varphi) = R(r) \tilde{\psi}_{s,n}(\varphi)$  in (15.16) in, dan vinden we

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R(r) = n^2 R(r) \\ R(1) = 0. \end{cases}$$

Voor de g.d.v.

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2) R(r) = 0$$

is  $r_0 = 0$  een regulier-singulier punt. De bijbehorende indiciaalvergelijking (in  $s$ ) is

$$s(s-1) + s - n^2 = 0$$

en heeft als wortels  $s_1 = n$  en  $s_2 = -n$ . Voor  $n = 0$  vinden we het radiaal-symmetrische geval terug.

We zullen

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2) R(r) = 0$$

met randvoorwaarde  $R(1) = 0$  verder onderzoeken.

Na de substitutie  $t = \sqrt{\lambda} r$  en  $J(t) = R(r)$  krijgen we

$$t^2 J''(t) + tJ'(t) + (t^2 - n^2) J(t) = 0. \quad (15.17)$$

► *d.v. van Bessel*

Dit is de *differentiaalvergelijking van Bessel*. Oplossingen hiervan zijn uittreuren onderzocht. Omdat  $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}$  kan men slechts één gegeneraliseerde machtreeks-oplossing verwachten. Omdat de leidende coëfficiënt gelijk  $n$  is, is het zelfs een machtreeks. De tweede onafhankelijke oplossing heeft (voor iedere  $n \in \mathbb{N}$ ) een singulariteit bij  $r = 0$  en is dus niet bruikbaar. De (één-duidig na schaling) machtreeks-oplossing is de zogenoemde *Bessel-functie* van de 1<sup>e</sup> soort:

► *Bessel-functie*

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}$$

Men heeft bewezen dat voor  $|t|$  groot

$$J_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{2n+1}{4}\pi\right) (1 + \mathcal{O}(t^{-2})).$$

We zien dat  $J_n(t)$  oneindig veel positieve nulpunten  $j_{n,0}, j_{n,1}, j_{n,2}, \dots$  heeft. Terug naar  $R$ . We hebben nog de randvoorwaarde  $R(1) = 0$ . Dit komt overeen met  $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$ . Met andere woorden  $\sqrt{\lambda}$  is een positief nulpunt van de Bessel-functie. Hieruit volgt dat de eigenwaarden zijn

$$j_{n,0}^2, j_{n,1}^2, j_{n,2}^2, \dots \text{ met } n \in \mathbb{N}.$$

Terugkomend op het eigenwaardeprobleem waar we mee begonnen zijn. De oplossingen van (15.14) zijn

$$\psi_{c,n,m}(r, \varphi) = \cos(n\varphi) J_n(j_{n,m}r) \text{ met } n, m \in \mathbb{N},$$

$$\psi_{s,n,m}(r, \varphi) = \sin(n\varphi) J_n(j_{n,m}r) \text{ met } n \in \mathbb{N}^+ \text{ en } m \in \mathbb{N},$$

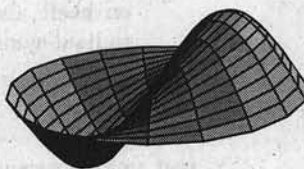
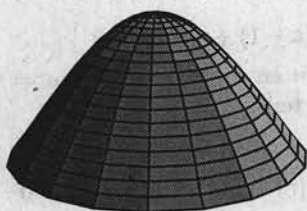
$$\lambda_{n,m} = j_{n,m}^2.$$

P.S. Waarom klinkt een snaar harmonieuzer dan een trommel?

De hogere frequenties ( $\sqrt{c\pi n/\ell}$ ) bij een snaar zijn veelvoudig van de laagste ( $\sqrt{c\pi/\ell}$ ). Bij een drum hebben de hogere frequenties ( $\sqrt{c}j_{n,m}$ ) geen mooie verhouding met de laagste ( $\sqrt{c}j_{0,0}$ ). Zie de volgende tabel met benaderingen:

$j_{0,0} = 2.40483,$	$j_{1,0} = 3.8317,$	$j_{2,0} = 5.13562,$	$j_{3,0} = 6.38016,$
$j_{0,1} = 5.52008,$	$j_{1,1} = 7.0155,$	$j_{2,1} = 8.41724,$	$j_{3,1} = 9.76102,$
$j_{0,2} = 8.65373,$	$j_{1,2} = 10.173,$	$j_{2,2} = 11.6198,$	$j_{3,3} = 13.0152.$

Bij de vier laagste frequenties horen de volgende eigenfuncties.



$$J(0, j_{0,0} r)$$

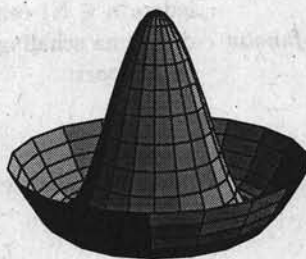
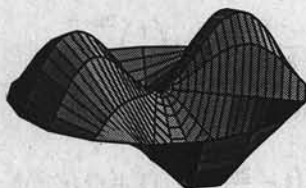
↑

$$\cos \varphi J(1, j_{1,0} r)$$

$$\sin(2\varphi) J(2, j_{1,0} r)$$

↓

$$J(0, j_{0,1} r)$$



Opgave 186 Laat zien dat het randwaardeprobleem bij (15.15)

$$\begin{cases} \left( \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r) = f(r) & \text{voor } 0 < r < 1 \\ \psi(1) = \psi'(0) = 0. \end{cases} \quad (15.18)$$

zelf-geadjungeerd is t.o.v. het inproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$

$$\langle \psi, \varphi \rangle_* = \int_{r=0}^1 \psi(r) \varphi(r) r dr.$$

Zij  $J(n, \cdot)$  de Bessel functie van orde  $n$  en zij  $j_{k,n}$  en  $j_{\ell,n}$  het  $k^{\text{de}}$  en  $\ell^{\text{de}}$  positieve nulpunt van  $J(n, \cdot)$ . Bewijs dat voor  $m \neq k$  geldt dat

$$\int_{r=0}^1 J(n, j_{k,n}r) J(n, j_{\ell,n}r) r dr = 0.$$

□

**Opgave 187** Een vierkante drum is lastig om gelijkmatig met een trommelvel te bespannen. Als dit lukt dan vindt men het volgende randwaardeprobleem

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) & \text{voor } |x| < 1, |y| < 1, \text{ en } t > 0, \\ u = 0 & \text{voor } |x| = 1 \text{ of } |y| = 1, \text{ en } t > 0, \\ u = u_0 & \text{voor } |x| < 1, |y| < 1, \text{ en } t = 0, \\ u_t = v_0 & \text{voor } |x| < 1, |y| < 1, \text{ en } t = 0. \end{cases} \quad (15.19)$$

De constante  $\alpha$  zorgt voor een demping.

- i. Beschrijf het bijbehorende eigenwaardeprobleem.
- ii. Men kan laten zien dat men een orthonormaal stelsel van eigenfuncties vindt door scheiding van variabelen, dwz.  $\Phi(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ . Geef zo'n orthonormaal stelsel van eigenfuncties.
- iii. Bekijk de verhoudingen van de frequenties.
- iv. Geef de oplossing in de vorm van een Fourier-reeks met coëfficiënten van  $u_0$  en  $v_0$ .
- v. Als de sterkte van de grondtoon in 1 tijdseenheid gehalveerd wordt, wat is dan het verband tussen  $\alpha$  en  $c$ ?

□

**Opgave 188** Als het trommelvel in de  $x$  en in de  $y$ -richting niet precies gelijk gespannen is, bijvoorbeeld omdat de huid in de lengterichting een andere structuur heeft dan in de breedterichting, dan wordt de differentiaalvergelijking in (15.19)

$$u_{tt} = c_1^2 u_{xx} + c_2^2 u_{yy}.$$

- i. Bepaal ook nu een bijbehorend orthonormaal stelsel van eigenfuncties door scheiding van variabelen voor deze vierkante trommel.
- ii. Wat gebeurt er met de verhouding van de frequenties van de drie laagste tonen als het verschil van  $c_1$  en  $c_2$  klein maar ongelijk 0 is?

The first part of the proof is to show that the function is continuous at the origin. Let  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Then  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$  and  $\sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \sim \sqrt{x^2 + y^2}$ . Thus  $f(x, y) \sim \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Next, we show that the function is differentiable at the origin. We need to show that the limit  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ .

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) - 0 - 0 \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

Therefore, the function is differentiable at the origin and the differential is  $df(0, 0) = 0$ .

Finally, we show that the function is not differentiable at any other point. Let  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . We need to show that the limit  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \neq 0$ .

Consider the path  $(x, y) = (x_0 + t, y_0)$ . Then  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  and  $\sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \rightarrow \sin(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$ . Thus  $f(x, y) \rightarrow \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$ .

On the other hand, the differential  $df(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} (x - x_0)$ . Thus the limit is  $\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}) - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} (x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}) - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} (x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$ .

Since  $\sin(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}) \neq \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$ , the limit is not zero. Therefore, the function is not differentiable at any other point.

Figure 10. The function  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$  is shown in the figure. The function is continuous and differentiable at the origin, but not differentiable at any other point.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

The figure shows the surface of the function  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ . The surface is smooth at the origin, but has a sharp ridge at any other point.

We observe that the function is not differentiable at any other point because the limit of the difference quotient is not zero.

# 16. VERGELIJKINGEN UIT DE QUANTUMMECHANICA

## 16.1 De Schrödinger-vergelijking

De Schrödinger-vergelijking is de (complexe) differentiaalvergelijking

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi$$

waarbij

- $\Psi = \Psi(x, t)$  een functie is van  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  naar  $\mathbb{C}$  (soms van  $\Omega \times \mathbb{R}$  naar  $\mathbb{C}$  met  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ );
- $\Delta$  is de Laplace operator:  $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2$ ;
- $V = V(x)$  is een functie van  $\mathbb{R}^3$  naar  $\mathbb{R}$  of  $\mathbb{C}$  (soms van  $\Omega$  naar  $\mathbb{R}$ ).

Wat stelt dit voor? In de quantummechanica beschouwt men vrij bewegende deeltjes als een zogenaamd 'golfpakketje' (wave packet) dat wordt beschreven door de functie  $\Psi$ . Van zo'n deeltje weet men niet langer exact waar het zich bevindt maar wel een kansdichtheid via het golfpakketje. Om precies te zijn:  $|\Psi(x)|^2$  geeft deze kansdichtheid.

**Opmerking:** In één dimensie zou  $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+x^2}}$  betekenen dat de kans dat het deeltje zich tussen de plaatsen  $x = 1$  en  $x = 2$  bevindt, gelijk is aan

$$\int_{x=1}^2 |\Psi(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{x=1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\arctan 2 - \arctan 1}{\pi}.$$

Als we met één deeltje te doen hebben moet overigens gelden dat de kansdichtheid in de hele ruimte deze één oplevert:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

Door een aanwezige potentiaal  $V$  wordt het deeltje/golfpakketje aangetrokken of afgestoten. In de quantummechanica laat men zien dat het tijdsafhankelijke gedrag van zo'n golfpakketje bepaald wordt door de bovenstaande differentiaalvergelijking, de Schrödinger-vergelijking.

- $V$  is de potentiaal, bijvoorbeeld voor het elektron rond de waterstofkern veroorzaakt door de positieve lading van deze kern;
- $\hbar$  en  $m$  (massa) zijn constanten ( $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  met  $h$  de constante van Planck<sup>1</sup>);

<sup>1</sup> $\hbar = 6.58218322 \times 10^{-22}$  MeV sec.

- de functie  $x \rightarrow |\Psi(x, t)|^2$  is de kansdichtheidsverdeling op tijdstip  $t$ .  
Voor één deeltje geldt

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

## 16.2 De Hamilton-operator

### ► Hamilton-operator

We definiëren de *Hamilton-operator* door  $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$ . De Schrödinger-vergelijking wordt dan

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}(\Psi)$$

waar  $\mathcal{H} : \Psi \rightarrow \mathcal{H}(\Psi)$  van een functie van  $x$  een andere functie van  $x$  maakt. Zo'n functie op functies heet een operator. Deze  $\mathcal{H}$  'doet niets' met de tijd  $t$ , dwz. de tijd gedraagt zich voor  $\mathcal{H}$  als een parameter. De operator  $\mathcal{H}$  is lineair, dwz. voor  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  en tweemaal differentieerbare functies  $\Psi_1, \Psi_2$  geldt

$$\mathcal{H}(\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2) = \alpha_1 \mathcal{H}(\Psi_1) + \alpha_2 \mathcal{H}(\Psi_2)$$

Als de toestand op tijdstip  $t = 0$  bekend is en men wil weten waar het deeltje zich in de toekomst gaat bevinden, dwz. zijn kansdichtheid, dan krijgen we het volgende beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}(\Psi), \\ \Psi(0) = \Psi_0. \end{cases} \quad (16.1)$$

We kunnen dit op dezelfde wijze aanpakken als de golf- of de diffusievergelijking. Enigszins lastig wordt het omdat we bij realistische problemen met 3 ruimte-variabelen te doen hebben. Maar ook hier bestaan op begrensde gebieden volgens Stelling 13.5.1 genoeg eigenfuncties mits het eigenwaardeprobleem zelf-geadjungeerd is ten opzichte van een geschikt inproduct. Een groter probleem wordt veroorzaakt door de onbegrensde van het gebied. Voor onbegrensde gebieden kan men meestal niet meer de oplossing via een Fourier-reeks vinden. Laten we dit iets gedetailleerder beschrijven.

Voor een zelf-geadjungeerde differentiaalvergelijking met geschikte randvoorwaarden

$$\begin{cases} Lu(x) = \lambda u(x) & \text{in } \Omega, \\ \text{randvoorwaarde op } \partial\Omega, \end{cases} \quad (16.2)$$

op een begrensd gebied  $\Omega$ , is er een volledige orthonormaal stelsel  $\{(\phi_k, \lambda_k)\}_{k=0}^{\infty}$  van eigenfuncties/eigenwaarden. De verzameling  $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$  heet het puntspectrum voor  $L$  met randvoorwaarde. Voor elke  $\lambda$  buiten dit puntspectrum, dus  $\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ , kunnen we

$$\begin{cases} (L - \lambda)u(x) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ \text{randvoorwaarde op } \partial\Omega, \end{cases} \quad (16.3)$$

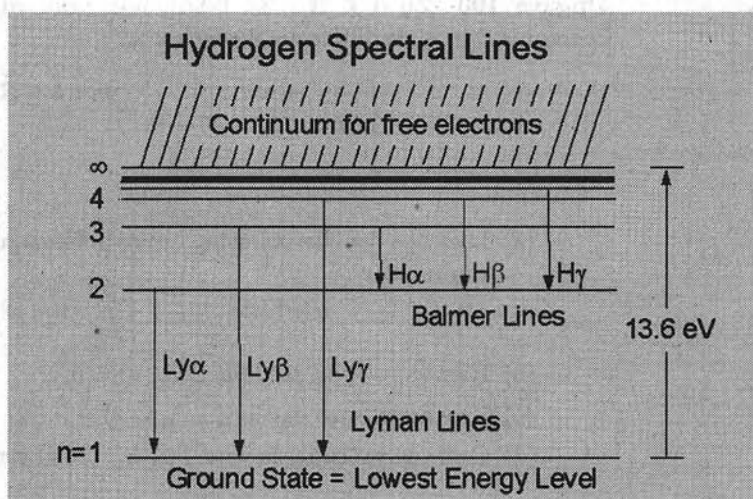
oplossen. We hebben zelfs een formule via de passende Fourier-reeks:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k - \lambda)^{-1} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$$

als  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  het bijbehorende inproduct noteert.

Voor onbegrensde gebieden zullen we allereerst een passende vervanger van de randvoorwaarde nodig hebben. Dit kan bijvoorbeeld zijn dat de oplossing op één of andere wijze naar 0 gaat als  $|x| \rightarrow \infty$ . De juiste voorwaarde is vaak de kwadratische integreerbaarheid van de oplossing. Met een dergelijke voorwaarde kunnen we wel vaak op onbegrensde gebieden nog een aantal eigenwaarden vinden (het puntspectrum) maar bestaat er bovendien meestal nog een continu spectrum. Men zegt dat  $\lambda$  in het continue spectrum zit wanneer (16.3) niet voor alle geschikte  $f$  is op te lossen.

Een mogelijkheid is bijvoorbeeld dat er een paar of zelfs oneindig veel eigenwaarden  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$  bestaan en vervolgens een getal  $\lambda^*$  zodat voor  $\lambda \geq \lambda^*$  de vergelijking (16.3) niet voor alle  $f$  is op te lossen. Dit is het geval bij het model dat men voor het elektron in het waterstofatoom heeft. De kleinste eigenwaarde  $\lambda_1$  hoort bij de 'ground state' van het elektron. Vervolgens zijn er eigenwaarden  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ ; de lijn waar  $\infty$  staat correspondeert met  $\lambda^*$ .



**Opmerking:** De eigenwaarde  $\lambda$  is een maat voor de energie van het betreffende elektron. Elektronen met energie groter dan  $\lambda^*$  zijn de zogenoemde vrije elektronen en niet meer aan het waterstofatoom gebonden. Een elektron dat van het ene energieniveau terugvalt op een lager energieniveau raakt het energieverschil kwijt in de vorm van straling (licht). Omdat deze energie correspondeert met golflengte van het licht ziet men de kenmerkende spectraallijnen.

De eigenfuncties  $\psi_k$  die we in (16.2) vinden leveren voor de Schrödinger-vergelijking (16.1) oplossingen van de vorm

$$\Psi(x, t) = e^{i\frac{\lambda_k}{\hbar}t} \psi_k(x).$$

De bijbehorende kansdichtheidsfunctie is onafhankelijk van de tijd:

$$|\Psi(x, t)|^2 = \left| e^{i\frac{\lambda_k}{\hbar}t} \psi_k(x) \right|^2 = |\psi_k(x)|^2,$$



dwz. dat we een stationaire kansdichtheid hebben.

We zullen ons niet verder met algemene resultaten voor (16.3) met  $L = \mathcal{H}$  bezighouden en alleen nog dit soort speciale oplossingen bekijken.

□

**Opgave 189** We vergelijken de kwadratisch integreerbare functies op  $\mathbb{R}$ , dwz  $u \in L_2(\mathbb{R})$  en functies die voldoen aan  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ . Beantwoord de volgende vragen voor onderstaande families van functies.

- i. Voor welke  $\alpha \geq 0$  geldt  $u \in L_2(\mathbb{R})$ ?
- ii. Voor welke  $\alpha \geq 0$  geldt  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ ?

- $u(x) = (1 + x^2)^{-\alpha}$ ;

- $u(x) = |x|^{-\alpha}$ ;

- $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathbf{1}_{\left[k - \frac{1}{|k|^\alpha}, k + \frac{1}{|k|^\alpha}\right]}(x)$ .

De functie  $\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$  is gedefinieerd door  $\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in [a, b], \\ 0 & \text{als } x \notin [a, b]. \end{cases}$

□

**Opgave 190** Zij  $\alpha \in \mathbb{R}$ . We beschouwen voor continue functies  $f$  met begrensde drager de differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = f & \text{voor } x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (16.4)$$

- i. Allereerst  $\alpha = 0$ .

- (a) Laat zien dat elke oplossing van de differentiaalvergelijking te schrijven is als

$$u(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x (x-s) f(s) ds.$$

- (b) Kies  $c_1$  en  $c_2$  zo dat  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$ .
- (c) Kies  $c_1$  en  $c_2$  zo dat  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$ .
- (d) Geef een voorwaarde voor  $f$  zodat (16.4) een oplossing heeft.

- ii. We nemen  $\alpha > 0$ .

- (a) Definieer de hulpfunctie  $v$  door  $v = u' + \sqrt{\alpha}u$  en laat zien dat  $-v' + \sqrt{\alpha}v = f$ .
- (b) Via variatie van constante vinden we dat

$$v(x) = ce^{\sqrt{\alpha}x} - \int_0^x e^{\sqrt{\alpha}(x-s)} f(s) ds.$$

Bepaal  $c$  zodanig dat  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0$  en  $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 0$ .

- (c) Via een soortgelijke functie kunnen we  $v = u' + \sqrt{\alpha}u$  oplossen. Geef die uitdrukking.
- (d) Geef de oplossing die voldoet aan  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ .

- iii. Tenslotte  $\alpha < 0$ .

- (a) Laat zien dat elke oplossing van de differentiaalvergelijking te schrijven is als

$$u(x) = c_1 \sin(\sqrt{|\alpha|x}) + c_2 \cos(\sqrt{|\alpha|x}) + \frac{-1}{\sqrt{|\alpha|}} \int_0^x \sin(\sqrt{|\alpha|(x-s)}) f(s) ds.$$

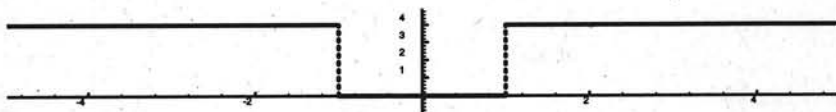
- (b) Voor welke  $c_1$  en  $c_2$  wordt voldaan aan  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ .

- iv. Heeft het bijbehorende eigenwaardeprobleem een oplossing?

$$\begin{cases} -\varphi'' = \lambda\varphi & \text{voor } x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0. \end{cases} \quad (16.5)$$

□

**Opgave 191** Een eindige potentiaalput in één dimensie.



Definieer de functie  $V$  door

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } |x| \leq 1, \\ 4 & \text{als } |x| > 1. \end{cases} \quad (16.6)$$

We gaan bewijzen dat het eigenwaardeprobleem

$$\begin{cases} -\varphi'' + V(x)\varphi = \lambda\varphi & \text{voor } x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0 \end{cases} \quad (16.7)$$

precies twee onafhankelijke eigenfuncties heeft. Omdat  $V$  in  $-1$  en  $1$  een sprong heeft zijn oplossingen van (16.7) overigens in  $C^1(\mathbb{R}) \cap C_{pw}^2(\mathbb{R})$ . Gebruik voor het bewijs de volgende stappen:

- i. Bereken de algemene oplossingen op  $[1, \infty)$ , op  $[-1, 1]$  en op  $(-\infty, -1]$ .
- ii. Laat zien dat de voorwaarde in  $\infty$  en  $-\infty$  zorgt voor  $\lambda < 4$  en

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_1 e^{\sqrt{4-\lambda}x} & \text{voor } x < -1, \\ \varphi(x) &= c_2 e^{-\sqrt{4-\lambda}x} & \text{voor } x > 1. \end{aligned}$$

Laat ook zien dat voor  $|x| \leq 1$  geldt

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_3 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_4 \sin(\sqrt{\lambda}x) & \text{als } \lambda > 0, \\ \varphi(x) &= c_3 + c_4 x & \text{als } \lambda = 0, \\ \varphi(x) &= c_3 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_4 e^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{als } \lambda < 0. \end{aligned}$$

- iii. Een eigenfunctie krijgen we als we deze mogelijkheden differentieerbaar aan elkaar knopen in  $1$  en  $-1$ . Laat zien dat dit alleen mogelijk is als  $\lambda > 0$ .

iv. Laat zien dat alleen het volgende mogelijk is:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{4-\lambda}x} & \text{voor } x < -1, \\ c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) & \text{voor } -1 \leq x \leq 1, \\ c_1 e^{-\sqrt{4-\lambda}x} & \text{voor } x > 1; \end{cases}$$

of

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{4-\lambda}x} & \text{voor } x < -1, \\ c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) & \text{voor } -1 \leq x \leq 1, \\ -c_1 e^{-\sqrt{4-\lambda}x} & \text{voor } x > 1. \end{cases}$$

v. Laat zien dat we een eigenwaarde vinden als

$$\tan \sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{4-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

of als

$$\tan \sqrt{\lambda} = \frac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{4-\lambda}}.$$

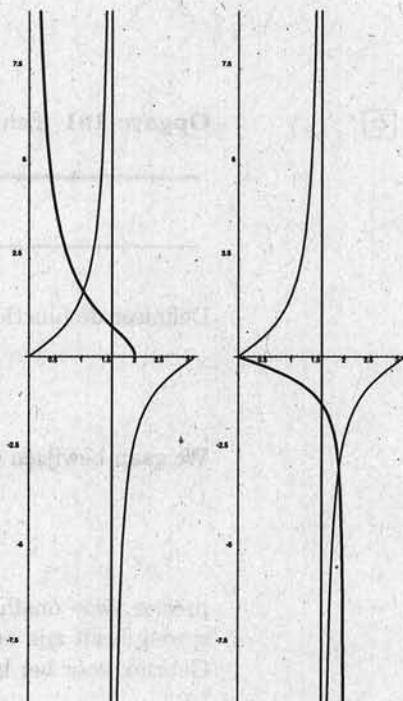
Als hulp staan hiernaast twee schetsen van de functies  $\tan t$  met achtereenvolgens

$$f(t) = \frac{\sqrt{4-t^2}}{t}$$

en

$$g(t) = \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}.$$

Motiveer dat er precies twee eigenfuncties zijn.



$f$  en de tangens       $g$  en de tangens

Merk op dat de eigenfuncties bij de laagste eigenwaarde een vast voorteken heeft.



**Opgave 192** We vervangen in de vorige opgave de functie  $V$  door

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } |x| \leq 1, \\ \gamma & \text{als } |x| > 1. \end{cases}$$

- Geef bij iedere  $\gamma > 0$  het precieze aantal onafhankelijke eigenfuncties. Noem dit  $N_\gamma$ .
- We nemen de eigenfuncties  $\{\varphi_k^\gamma\}_{k=1}^{N_\gamma}$  genormaliseerd en geordend naar oplopende eigenwaarde  $\lambda_1^\gamma < \lambda_2^\gamma < \dots < \lambda_{N_\gamma}^\gamma$ . Laat zien dat

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \lambda_1^\gamma = \left(\frac{k}{2}\pi\right)^2$$

en

$$\begin{aligned} \text{voor } k \text{ oneven: } & \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \varphi_k^\gamma(x) = \pm \cos\left(\frac{k}{2}\pi x\right); \\ \text{voor } k \text{ even: } & \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \varphi_k^\gamma(x) = \pm \sin\left(\frac{k}{2}\pi x\right). \end{aligned}$$



**Opgave 193** We beschouwen het stelsel

$$\begin{cases} -u'' + V(x)u = \lambda u + f & \text{voor } x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (16.8)$$

met de potentiaal als in (16.6). Om het rekenwerk te beperken bekijken we alleen functies  $f$  die hun drager op  $[-1, 1]$  hebben (dus  $f(x) = 0$  voor  $x$  met  $|x| \geq 1$ ).

- i. We onderscheiden  $\lambda < 4$  en  $\lambda \geq 4$ . Laat zien dat  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$  impliceert dat de oplossing  $u$  voor  $x \geq 1$  voldoet aan:

$$\begin{aligned} \text{als } \lambda < 4: & u(x) = ce^{-\sqrt{4-\lambda}x}; \\ \text{als } \lambda \geq 4: & u(x) = 0. \end{aligned}$$

Geef een soortgelijke formule voor  $x \leq -1$ .

- ii. Laat zien dat voor de oplossing  $u$  geldt:

$$\begin{aligned} \text{als } \lambda < 4: & u'(1) = -\sqrt{4-\lambda}u(1) \text{ en } u'(-1) = \sqrt{4-\lambda}u(-1); \\ \text{als } \lambda \geq 4: & u'(1) = u(1) = u'(-1) = u(-1) = 0. \end{aligned}$$

- iii. Laat zien dat voor  $|x| \leq 1$  de oplossing voldoet aan het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{aligned} \text{als } \lambda < 4: & \begin{cases} -u'' - \lambda u = f, \\ u'(1) = -\sqrt{4-\lambda}u(1), \\ u'(-1) = \sqrt{4-\lambda}u(-1); \end{cases} \\ \text{als } \lambda \geq 4: & \begin{cases} -u'' - \lambda u = f; \\ u'(1) = 0, \\ u(1) = 0, \\ u'(-1) = 0, \\ u(-1) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- iv. Wat kunt u zeggen over de oplosbaarheid van bovenstaande twee randwaardeproblemen?

## 16.3 Het eigenwaardeprobleem voor de Schrödinger-vergelijking

We hebben in de vorige paragraaf gezien dat eigenfuncties van de Hamilton-operator corresponderen met oplossingen van de Schrödinger-vergelijking met stationaire kansdichtheid:

$$\mathcal{H}(\psi)(x) = \lambda\psi(x) \iff \Psi(x, t) = e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t}\psi(x).$$

De voorwaarde dat de functie kwadratisch integreerbaar is correspondeert met een eindige kansdichtheid. Als de kansdichtheid eindig is kunnen we normaliseren<sup>2</sup> zodat  $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$ . Dit geeft de kansdichtheid die hoort bij één deeltje. Het eigenwaardeprobleem dat ons interesseert wordt daarmee

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\psi) = \lambda\psi, \\ \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx = 1. \end{cases} \quad (16.9)$$

Voor kwadratisch integreerbare functies op onbegrensde gebieden, bijvoorbeeld  $\mathbb{R}^3$ , is  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gedefinieerd door

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} u(x)v(x) dx \quad (16.10)$$

een inproduct.

**Opmerking:** Om dit een goed gedefinieerd inproduct te laten zijn zal de oneigenlijke integraal in (16.10) moeten bestaan. Het is voldoende om te laten zien dat de integraal absoluut convergeert. Dit kan men wederom laten zien door gebruik te maken van  $|u(x)v(x)| \leq (u(x))^2 + (v(x))^2$ . De integralen  $\int_{\mathbb{R}^3} (u(x))^2 dx$  en  $\int_{\mathbb{R}^3} (v(x))^2 dx$  bestaan omdat  $u$  en  $v$  kwadratisch integreerbaar zijn.

**Opmerking:** Een functie die kwadratisch integreerbaar is convergeert in een bepaalde zin naar 0 voor  $|x| \rightarrow \infty$ . Het kwadratisch integreerbaar zijn vervangt daarmee voor onbegrensde gebieden de Dirichlet randvoorwaarde voor begrensde gebieden.

Stel dat voor twee kwadratisch integreerbare functies  $\varphi, \psi$  geldt dat

$$\langle \mathcal{H}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{H}\psi \rangle,$$

dan geldt voor twee oplossingen van (16.9) met verschillende  $\lambda$ , zeg de golf-functies  $\psi_1$  en  $\psi_2$  (oplossingen bij verschillend energie-niveau  $E_1$  en  $E_2 =$  verschillende eigenwaarde) dat  $\psi_1$  en  $\psi_2$  orthonormaal zijn:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 0.$$

Dit volgt inderdaad uit

$$\lambda_1 \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \mathcal{H}\psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \mathcal{H}\psi_2 \rangle = \lambda_2 \langle \psi_1, \psi_2 \rangle.$$

<sup>2</sup>Als  $\int |\psi(x)|^2 dx = c \in \mathbb{R}^+$  dan vinden we dat de 'genormaliseerde'  $\tilde{\psi}(x) = c^{-\frac{1}{2}}\psi(x)$  voldoet aan  $\int |\tilde{\psi}(x)|^2 dx = 1$ .

**Opmerking:** Bij het waterstofatoom corresponderen de eigenfuncties met de mogelijke energieniveaus van het elektron. Dat wil zeggen de kansdichtheid voor het elektron met de laagst mogelijke energie wordt beschreven door  $e^{-i\frac{\lambda_1}{\hbar}t}\psi_1(x)$  met  $\psi_1$  de eigenfuncties bij de kleinste eigenwaarde  $\lambda_1$ . Het eerstvolgende niveau heeft de kansdichtheidsfunctie  $e^{-i\frac{\lambda_2}{\hbar}t}\psi_2(x)$ . Zonder extra argumenten zou

$$\Psi(t, x) = \alpha_1 e^{-i\frac{\lambda_1}{\hbar}t}\psi_1(x) + \alpha_2 e^{-i\frac{\lambda_2}{\hbar}t}\psi_2(x)$$

met  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$  ook een goede dichtheidsfunctie opleveren. Inderdaad vinden we met de orthonormaliteit dat

$$\langle \Psi(t, \cdot), \Psi(t, \cdot) \rangle = \alpha_1^2 \langle \psi_1, \psi_1 \rangle + \alpha_2^2 \langle \psi_2, \psi_2 \rangle = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1.$$

Een fysisch argument laat zien dat zo'n combinatie niet mogelijk is. Zou men namelijk de energie van het deeltje met kansdichtheid  $\Psi$  meten dan vindt men met kans  $\alpha_1^2$  de grootte  $\lambda_1$  en met kans  $\alpha_2^2$  de grootte  $\lambda_2$ . Zonder invloed van buiten kan de energie niet veranderen en zal men bij herhaalde meting steeds dezelfde waarde vinden. Dus  $\alpha_1^2 = 1 - \alpha_2^2$  is gelijk aan 0 of 1.

□

**Opgave 194** We bekijken opnieuw de potentiaalput in één dimensie. Laat  $V$  als in (16.6) zijn en noteer de daar gevonden eigenwaarden door  $\lambda_1, \lambda_2$  met  $\lambda_1 < \lambda_2$  en de bijbehorende eigenfuncties door  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$ . We beschouwen het volgende probleem:

$$\begin{cases} -u'' + V(x)u - \lambda u = f(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0, \end{cases} \quad (16.11)$$

met  $f$  een kwadratisch integreerbare functie ( $f \in L_2(\mathbb{R})$ ).

i. Gebruik de zelf-geadjungeerdheid om te laten zien dat

$$\langle (\lambda - \lambda_1)u + f, \varphi_1 \rangle = 0$$

ii. Bewijs dat er voor  $\lambda = \lambda_1$  geen oplossing is als  $0 \neq f \geq 0$ .

Men kan overigens door te berekenen laten zien dat er voor  $\lambda = \lambda_1$  oneindig veel oplossingen zijn als  $f$  voldoet aan  $\langle f, \varphi_1 \rangle = 0$ . Voor het onderzoeken bij welke  $\lambda < 4$  en onder welke voorwaarde er een oplossing is, is veel werk en daarom zullen we alleen het resultaat vermelden. Men kan proberen één of meer van deze beweringen te bewijzen. Als vereenvoudiging kan men zich beperken tot continue functies  $f$  met begrensde drager. Voor  $\lambda \geq 4$  verwijzen we naar de vorige opgave.

- als  $\lambda \in (-\infty, \lambda_1) \cup (\lambda_1, \lambda_2) \cup (\lambda_2, 4)$  dan is er voor elke  $f \in L_2(\mathbb{R})$  één oplossing van (16.11).
- als  $\lambda = \lambda_1$  dan is er voor  $f \in L_2(\mathbb{R})$  met  $\langle f, \varphi_1 \rangle \neq 0$  geen oplossing van (16.11);  
voor  $f \in L_2(\mathbb{R})$  met  $\langle f, \varphi_1 \rangle = 0$  zijn er oneindig veel oplossingen;  
voor het verschil van twee oplossingen geldt  $u_1 - u_2 = c\varphi_1$ .
- als  $\lambda = \lambda_2$  dan is er voor  $f \in L_2(\mathbb{R})$  met  $\langle f, \varphi_2 \rangle \neq 0$  geen oplossing van (16.11);  
voor  $f \in L_2(\mathbb{R})$  met  $\langle f, \varphi_2 \rangle = 0$  zijn er oneindig veel oplossingen;  
voor het verschil van twee oplossingen geldt  $u_1 - u_2 = c\varphi_2$ .

□

### Voorbeeld 81

De oneindig diepe potentiaalput in één dimensie:

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \psi, \\ \psi(0) = \psi(\ell) = 0, \end{cases}$$

Dit probleem verschijnt als limietgeval van de eindige potentiaalput.

Al eerder hebben we gezien dat dit randwaardeprobleem zelf-geadjungeerd is ten opzichte van het standaard inproduct.

Het eigenwaardeprobleem is

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\psi) = E\psi, \\ \psi(0) = \psi(\ell) = 0, \end{cases}$$

De oplossingen van het eigenwaardeprobleem zijn de Fourier-sinus functies:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}} x\right) \text{ met} \\ E_n &= \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2}. \end{aligned}$$

De factor  $\sqrt{\frac{2}{\ell}}$  zorgt voor  $\|\psi_n\|_2 = 1$ .

We vinden hiermee voor de Schrödinger-vergelijking oplossingen

$$\Psi(x, t) = e^{-i \frac{n^2 \pi^2 \hbar}{2m\ell^2} t} \psi_n(x)$$

en zonder extra fysisch argument ook lineaire combinaties hiervan.

□

### Voorbeeld 82

De harmonische oscillator. De potentiaal is hier  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mathcal{H}(\Psi), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x, t) = 0, \end{cases}$$

met  $\mathcal{H}(\Psi) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) \Psi$ .

Het bijbehorende eigenwaardeprobleem wordt

$$\begin{cases} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) \psi = E\psi, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0. \end{cases}$$

Via de substitutie  $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$  en  $v(y) = \psi\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} y\right)$  vinden we

$$\begin{cases} \left(-\left(\frac{d}{dy}\right)^2 + y^2\right) v = \frac{2E}{\hbar\omega} v, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0. \end{cases}$$

Noemen we  $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$  en  $u(y) = e^{\frac{1}{2}y^2} v(y)$  dan volgt

$$u'' - 2yu' + (\lambda - 1)u = 0. \quad (16.12)$$

► *d.v. van Hermite*

Dit is de differentiaalvergelijking van Charles Hermite. Via machtreeksen vinden we twee onafhankelijke oplossingen

$$\begin{aligned}
 u_1(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} y^{2n} \quad \text{met} \quad a_{2n} = \frac{(4n-3-\lambda)(4n-7-\lambda)\dots(1-\lambda)}{(2n)!}; \\
 u_2(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} y^{2n+1} \quad \text{met} \quad a_{2n+1} = \frac{(4n-1-\lambda)(4n-5-\lambda)\dots(3-\lambda)}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}
 \tag{16.13}$$

Met puntjes geschreven:

$$\begin{aligned}
 u_1(y) &= 1 + \frac{1-\lambda}{2!} y^2 + \frac{(5-\lambda)(1-\lambda)}{4!} y^4 + \frac{(9-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)}{6!} y^6 + \dots, \\
 u_2(y) &= y + \frac{3-\lambda}{3!} y^3 + \frac{(7-\lambda)(3-\lambda)}{5!} y^5 + \frac{(11-\lambda)(7-\lambda)(3-\lambda)}{7!} y^7 + \dots
 \end{aligned}$$

De algemene oplossing van (16.12) wordt daarmee

$$u(y) = \alpha u_1(y) + \beta u_2(y).$$

Merk op dat indien we  $\lambda = \lambda_k := 2k + 1$  nemen één van deze beide reeksen in (16.13) een polynoom is. Schaalt men deze polynoom zodanig dat de hoogste orde term  $2^k$  is dan vinden we de zogenoemde *Hermite-polynomen*. Daarmee vinden we de volgende eigenfuncties en eigenwaarden  $\varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)$ ,  $E_k = \frac{\hbar\omega\lambda_k}{2}$ :

► *Hermite-polynomen*

eigenwaarde	Hermite-polynoom	eigenfunctie
$\lambda_0 = 1$	$H_0(y) = 1$	$\tilde{\varphi}_0(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ,
$\lambda_1 = 3$	$H_1(y) = 2y$	$\tilde{\varphi}_1(y) = H_1(y) e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ,
$\lambda_2 = 5$	$H_2(y) = 4y^2 - 2$	$\tilde{\varphi}_2(y) = H_2(y) e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ,
$\lambda_3 = 7$	$H_3(y) = 8y^3 - 12y$	$\tilde{\varphi}_3(y) = H_3(y) e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ,
$\lambda_4 = 9$	$H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12$	$\tilde{\varphi}_4(y) = H_4(y) e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ,
$\lambda_5 = 11$	$H_5(y) = 32y^5 - 160y^3 + 120y$	$\tilde{\varphi}_5(y) = H_5(y) e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ,
	enz.	

Deze functies voldoen aan  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_k(y) = 0$ . Het is niet eenvoudig maar men kan laten zien dat voor  $\lambda \notin \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$  niet aan de limietvoorwaarde in  $\infty$  wordt voldaan door het volgende te bewijzen. Als  $c_1$  en  $c_2$  hetzelfde voorteken hebben dan bestaat er een  $c_\lambda > 0$  en  $M > 0$  zodat

$$\text{voor } y > M \text{ geldt: } |c_1 u_1(y) + c_2 u_2(y)| > c_\lambda e^{\frac{1}{2}y^2};$$

bij tegengesteld voorteken analoog

$$\text{voor } y < -M \text{ geldt: } |c_1 u_1(y) + c_2 u_2(y)| > c_\lambda e^{\frac{1}{2}y^2}.$$



**Opgave 195** Voer de berekening uit voor de machtreeksoplossingen van (16.12).



**Opgave 196**

i. Laat zien dat voor alle tweemaal differentieerbare functies  $f$  en  $g$  met  $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f^2(y) dy < \infty$  en  $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 g^2(y) dy < \infty$  geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}f)(y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) (\mathcal{H}g)(y) dy,$$

met de  $\mathcal{H}$  van de harmonische oscillator.



ii. Laat zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_3(y) \tilde{\varphi}_5(y) dy = 0.$$

Als u hierbij veel rekent dan is dat niet de snelste methode.

□

► waterstof-  
atoom

### Voorbeeld 83

Een vereenvoudigd model voor het elektron in het *waterstofatoom*:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mathcal{H}(\Psi), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x, t) = 0, \end{cases}$$

met voor  $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}(\Psi) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |x|} \right) \Psi.$$

In bolcoördinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= r \cos \theta \end{aligned}$$

met  $r > 0$ ,  $0 < \theta < \pi$  en  $0 < \phi < 2\pi$  vindt men

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right).$$

Het eigenwaardeprobleem wordt dan

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = E\psi \quad (16.14)$$

met onder andere de randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \psi(r, 0, \theta) &= \psi(r, 2\pi, \theta), \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \psi(r, 0, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \phi} \psi(r, 2\pi, \theta). \end{aligned} \quad (16.15)$$

Het bijbehorende inproduct is

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \psi(r, \phi, \theta) \varphi(r, \phi, \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr.$$

We geven geen reden waarom men door scheiding van variabelen alle eigenfuncties zou vinden. Maar, enigszins naïef misschien, proberen kan men het altijd.

Scheiding van variabelen zullen we hier in twee stappen uitvoeren.

i. Allereerst proberen we

$$\psi(r, \phi, \theta) = u(r) Y(\phi, \theta).$$

Dit levert de vergelijking

$$\frac{\left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2} r + \frac{2mE}{\hbar^2} r^2 \right) u(r)}{u(r)} + \frac{\left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y(\phi, \theta)}{Y(\phi, \theta)} = 0.$$

Om hierbij een oplossing te vinden is het noodzakelijk dat er een constante  $C$  is zodat

$$\frac{\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2} r + \frac{2mE}{\hbar^2} r^2\right) u(r)}{u(r)} = -C; \quad (16.16)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \frac{\partial}{\partial\phi}\right) Y(\phi, \theta)}{Y(\phi, \theta)} = C. \quad (16.17)$$

ii. We proberen de tweede scheiding

$$Y(\phi, \theta) = \Phi(\phi) \Theta(\theta)$$

en krijgen uit (16.17) dat

$$\frac{(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - C \sin^2\theta) \Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{\frac{\partial}{\partial\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} \Phi(\phi)}{\Phi(\phi)} = 0$$

Om hierbij een oplossing te vinden is het noodzakelijk dat er een constante  $C_2$  is zodat

$$\frac{(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - C \sin^2\theta) \Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} = C_2; \quad (16.18)$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} \Phi(\phi)}{\Phi(\phi)} = -C_2. \quad (16.19)$$

De vergelijking in (16.19) is de eenvoudigste van de drie. We zullen daarmee beginnen en achteruitwendend de vergelijkingen voor  $\Phi$ ,  $\Theta$  en  $u$  kunnen oplossen.

i. De vergelijking (16.19) met de randvoorwaarden in (16.15) is een oude bekende en zorgt voor de oplossingen

$$\begin{aligned} \Phi_{m,o}(\phi) &= \sin(m\phi) & \text{met } C_2 = m^2 \text{ en } m \in \{1, 2, 3, \dots\}, \\ \Phi_{m,e}(\phi) &= \cos(m\phi) & \text{met } C_2 = m^2 \text{ en } m \in \{0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

ii. Terug naar (16.18) vinden we

$$\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + C - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) \Theta(\theta) = 0.$$

De substitutie  $\Theta(\theta) = P(\cos\theta)$  zal ons helpen. Merk op dat deze substitutie is toegestaan omdat voor  $\theta \in [0, \pi]$  er een eenduidige inverse van de cos-functie bestaat. Met

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) P(\cos\theta) &= \frac{-1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left((\sin\theta)^2 P'(\cos\theta)\right) = \\ &= -2 \cos\theta P'(\cos\theta) + (\sin\theta)^2 P''(\cos\theta) = \\ &= -2 \cos\theta P'(\cos\theta) + (1 - \cos^2\theta) P''(\cos\theta) \end{aligned}$$

volgt via  $z = \cos\theta$  dat

$$(1 - z^2) P''(z) - 2z P'(z) + \left(C - \frac{m^2}{1 - z^2}\right) P(z) = 0.$$

► *d.v. van Legendre*

Voor  $m = 0$  is dit de *differentiaalvergelijking van Legendre*. Voor  $m \neq 0$  is dit de geassocieerde differentiaalvergelijking van Legendre. Deze wordt in gestandaardiseerde vorm geschreven als

$$(1 - z^2) P''(z) - 2zP'(z) + \left( \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - z^2} \right) P(z) = 0$$

► *Legendre-functies*

waarbij  $\nu$  de graad en  $\mu$  de orde van deze vergelijking worden genoemd ( $\nu, \mu \in \mathbb{C}$ ). Oplossingen hiervan zijn de (geassocieerde) *Legendre-functies* van de eerste en tweede soort, respectievelijk genoteerd door  $P_\nu^\mu(z)$  en  $Q_\nu^\mu(z)$ . De eerste soort levert oplossingen die begrensd zijn voor  $z \uparrow 1$  en voor  $z \downarrow -1$  en zijn daarmee voor ons interessant. Via machtreeksen en de notatie met het *symbool van Pochhammer*

► *symbool van Pochhammer*

$$\begin{aligned} \text{voor } n = 0 : & \quad (a)_0 = 1 \\ \text{voor } n \in \mathbb{N}^+ : & \quad (a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \end{aligned}$$

vindt men

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{1}{2}\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{k! (1-\mu)_k} \left( \frac{1-z}{2} \right)^k$$

Voor  $\nu \in \mathbb{N}$  bezit de reeks slechts eindig veel coëfficiënten die ongelijk aan 0 zijn en vinden we de Legendre ( $\mu = 0$ ) en de geassocieerde Legendre polynomen ( $\mu \neq 0$ ). De eigenfuncties die we zoeken zijn  $P_n^m(\cos \theta)$  met  $m \leq n$ . Via formule 8.6.18 en 8.6.6 van M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions vinden we

$$\begin{aligned} P_n^0(z) &= \left( \frac{d}{dz} \right)^n \frac{(z^2 - 1)^n}{2^n n!} \\ P_n^m(z) &= (-1)^m (1 - z^2)^{\frac{1}{2}m} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n+m} \frac{(z^2 - 1)^n}{2^n n!} \end{aligned}$$

en daarmee

$P_n^m(z)$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	1	$z$	$\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z$
$m = 1$		$-(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$	$-3z(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$	$-\left(\frac{15}{2}z^2 - \frac{3}{2}\right)(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$
$m = 2$			$3(1 - z^2)$	$15z(1 - z^2)$
$m = 3$				$-15(1 - z^2)^{\frac{3}{2}}$

Combineren met het vorige onderdeel geeft voor  $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{als } 1 \leq m \leq n : & \quad Y_{n,o}^m(\theta, \phi) = \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta), \\ \text{als } 0 \leq m \leq n : & \quad Y_{n,e}^m(\theta, \phi) = \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta). \end{aligned}$$

► *sferische harmonische bolfuncties*

Deze functies worden de *sferische harmonische of bolfuncties* genoemd.

**Opmerking:** De functies  $Y_{n,o}^m(\theta, \phi), Y_{n,e}^m(\theta, \phi)$  vormen een stelsel eigenfuncties voor de operator  $\Delta$  op het gekromde oppervlak van de eenheidsbol, de Laplace-Beltrami operator  $\Delta_{LB} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}$ . Voor  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  geldt  $\sin \theta = 1$  en  $\cos \theta = 0$  zodat  $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}$  overblijft. Ook is deze operator

invariant onder draaiingen. De warmtevergelijking van een pingpongballetje wordt daarmee

$$\frac{\partial}{\partial t} u - c \Delta_{LB} u = 0.$$

iii. Tenslotte de vergelijking voor  $u$ . De vergelijking in (16.16) met  $C = n(n+1)$  geeft

$$r^2 u''(r) + 2ru'(r) + \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2} r u(r) + \frac{2mE}{\hbar^2} r^2 u(r) = -n(n+1)u(r).$$

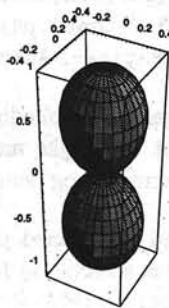
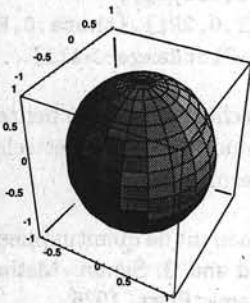
Deze is via een (gegeneraliseerde) machtreeks op te lossen. Via de Eulervergelijking vinden we een in 0 begrensde oplossing van de vorm

$$u(r) = r^n \sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k.$$

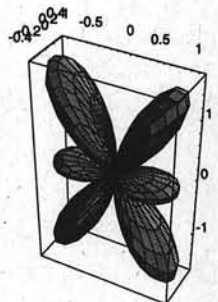
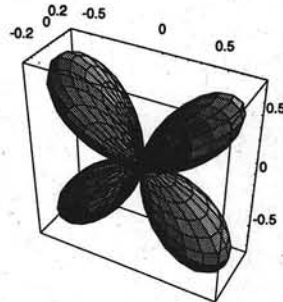
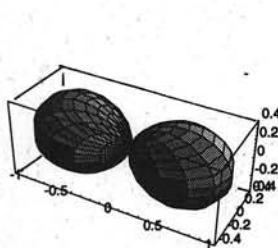
Het uitrekenen laten we achterwege.

Als illustratie sferische grafieken van de kansdichtheid  $|Y_{n,e}^m(\theta, \phi)|^2$  horende bij de hoeken  $\theta, \phi$ . Dit is een 'geschaald gewogen gemiddelde' over de  $r$ -variabele.

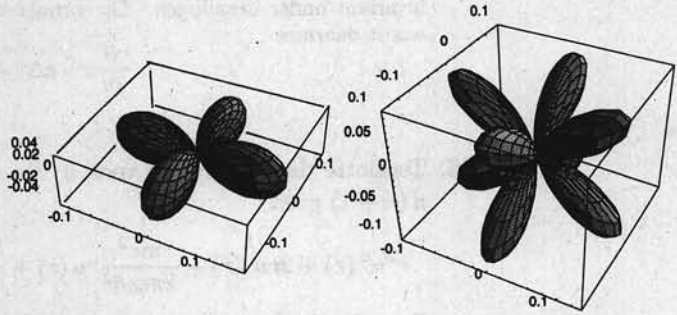
$Y_{n,e}^m(\theta, \phi)$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	1	$\cos \theta$	$\frac{3}{2}(\cos \theta)^2 - \frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}(\cos \theta)^3 - \frac{3}{2}(\cos \theta)$
$m = 1$		$-\cos \phi \sin \theta$	$-\frac{3}{2} \cos \phi \sin 2\theta$	$-\cos \phi \left( \frac{15}{2}(\cos \theta)^2 - \frac{3}{2} \right) \sin \theta$
$m = 2$			$3 \cos(2\phi) \sin^2 \theta$	$15 \cos(2\phi) (\cos \theta) \sin^2 \theta$
$m = 3$				$-15 \cos(3\phi) \sin^3 \theta$



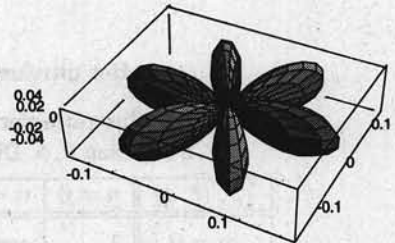
$(Y_{n,e}^0)^2$  voor  $n = 0, 1, 2, 3$



$(Y_{n,e}^1)^2$  voor  $n = 1, 2, 3$



$$(Y_{n,e}^2)^2 \text{ voor } n = 2, 3$$



$$(Y_{3,e}^2)^2$$

Mathematica maakt bijvoorbeeld de voorlaatste schets via:

```
yfunc[n_,m_,theta_,phi_] :=
Re[SphericalHarmonicY[n,m,theta,phi]]^2*
{Cos[phi]Sin[theta],Sin[phi]Sin[theta],Cos[theta]};
ParametricPlot3D[yfunc[3,2,theta,phi],{phi,0,2Pi},{theta,0,Pi},
PlotPoints->{60,30},BoxRatios->Automatic,PlotRange->All].
```

Bovenstaand model is overigens niet volledig en slechts een lineaire benadering van het fysische model. Het werkelijke model houdt rekening met relativistische effecten en bevat bovendien nog een spin term. \_\_\_\_\_

Voor wiskundige aspecten van eigenwaardeproblemen uit de quantummechanica kan de mathematische fysicus terecht bij M. Reed and B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics I-IV*, Uitgever: Academic Press, 1975.

# Literatuur

---

- [1] J.M. AARTS, *Complexe Functies (de eerste stappen)*, Epsilon reeks, Utrecht, 1991.
- [2] M.J. ABLOWITZ & A.S. FOKAS, *Complex Variables (Introduction and Applications)*, Cambridge texts in Applied Mathematics, Cambridge, 1997.
- [3] W.E. BOYCE & R.C. DIPRIMA, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons 1976, (6<sup>th</sup> edition 1997).
- [4] J.J. DUISTERMAAT & W. ECKHAUS, *Analyse van Gewone Differentiaalvergelijkingen*, Epsilon reeks, Utrecht, 1995.
- [5] K. JÄNICH, *Analysis für Physiker und Ingenieure (Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen)*, Springer, Berlin, 1995.
- [6] R. KENT NAGLE & E.B. SAFF, *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*, Addison-Wesley, 1996.
- [7] R.A. KORTRAM, *De Theorie van Complexe Functies*, Epsilon reeks, Utrecht, 1989.
- [8] S.L. SOBOLEV, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Pergamon, 1964 (reprint by Dover, New York, 1989).
- [9] M.R. SPIEGEL, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [10] W. WALTER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, Heidelberg, 1972.
- [11] H.F. WEINBERGER, *A first course in Partial Differential Equations (with complex variables and transform methods)*, heruitgegeven door Dover, New York, 1995.
- [12] K. YOSIDA, *Lectures on Differential and Integral Equations*, Dover, reprinted 1991.

## Historische bronnen:

---

- [13] AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, Paris, 1821.

- [14] AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, *Leçons sur le Calcul Différentiel*, Paris, 1829.
- [15] JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET, *Über die Darstellung ganz Willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen*, 1837, in 'Repertorium der Physik' Lejeune-Dirichlet, Jacobi, Neumann, Riess, Strehlke.
- [16] JOSEPH FOURIER, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Paris, 1822.
- [17] CARL FRIEDRICH GAUSS, *Disquisitiones Arithmetica*, Leipzig, 1801.
- [18] GEORGE GREEN, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, Nottingham, 1828.
- [19] PIERRE-SIMON LAPLACE, *Théorie Analytique des Probabilités*, Paris, 1812
- [20] ALEKSANDR MIKHAILOVICH LYAPUNOV, *The General Problem of the Stability of Motion* (Obščaya zadača ob ustoičivosti dvizeniya), Kharkov, 1892.
- [21] SIMÉON DENIS POISSON, *Memoire sur la Theorie du Son*, J. Ecole Polytech. (1) 7 Cahier 14, 319-392, 1808.
- [22] SIMÉON DENIS POISSON, *Traité de Mécanique*, Paris, 1833

Voor gevorderden:

---

- [23] L.V. AHLFORS, *Complex Analysis (an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable)* 3<sup>e</sup> editie, McGraw-Hill, New York, 1984.
- [24] R. COURANT & D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics. Vol. 1 & 2*, Interscience, New York, 1961.
- [25] E. DIBENEDDETTO, *Partial differential equations*, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [26] P. R. GARABEDIAN, *Partial Differential Equations, second edition*, Chelsea, New York, 1986.
- [27] M. REED & B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I-IV*, Academic Press, New York, 1975.

Handboeken en tabellen:

---

- [28] M. ABRAMOWITZ, & I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Inc., New York, 1965.
- [29] H. KOBER, *Dictionary of Conformal Representations*, heruitgegeven door Dover, New York, 1957.

# Index

- $C(\Omega)$ , 214  
 $C(\Omega)$ , 214  
 $C(a, b)$ , 4  
 $C^1[a, b]$ , 5  
 $C_{pw}^1[a, b]$ , 198  
 $C^k(\Omega)$ , 214  
 $C^k(\Omega)$ , 214  
 $C^k[a, b]$ , 172  
 $L_2(a, b)$ , 192
- absoluut convergente reeks, 8  
afbeeldingsstelling van  
  Riemann, 53  
afsluiting, 214  
algemene oplossing, 108  
analytische uitbreiding, 27  
analyticiteit van  
  machtreksen, 18  
analytisch, 16, 39  
asymptotisch stabiel, 124, 138  
autonoom, 77, 92
- baan, 101  
beginvoorwaarde, 74  
begrensd gebied, 213  
begrensd drager, 237  
Bernoulli, 67  
Bessel-differentiaalvergelijking, 163  
Bessel-functie, 287  
Bessel-functie van de eerste soort, 164  
Bessel-ongelijkheid, 195  
bolfuncties, 304
- Cauchy-Hadamard  
  formule van, 11  
Cauchy-Riemann in  
  poolcoördinaten, 60  
Cauchy-Riemann  
  vergelijkingen, 19  
Cauchy-Schwarz, 192  
centrum, 124  
complement-verzameling, 4  
conform, 53  
continue functie, 7  
contour-integraal, 23  
convergente reeks, 8  
convergentie in  $L_2$ , 192  
convergentiestraal, 9
- d.v. van Hermite, 301  
d.v. van Bessel, 287  
d.v. van Legendre, 304  
differentiaaloperator, 172, 187  
differentieerbaar, 15  
Dirac-delta-functie, 176  
Dirichlet-randvoorwaarde, 45, 230  
discreet maximum principe, 46  
discrete Laplace-operator, 46  
distributie, 176  
divergente reeks, 8  
driehoeksongelijkheid, 4, 88
- eerste orde lineaire d.v., 66  
eigenfunctie, 190  
eigenvector, 115  
eigenwaarde, 115, 190  
elliptisch, 215, 220  
enkelvoudig samenhangend, 6  
enkelvoudige kromme, 5  
essentiële singulariteit, 157  
Euler-nummers, 41  
Euler-vergelijking, 159  
evenwichtspunt, 137  
exact, 67  
existentie-interval, 73
- fasevlak, 101  
focus, 124  
formule van Cauchy voor de cirkelschijf, 38  
formule van Cauchy-Hadamard, 11  
Fourier-cosinus-reeks, 203  
Fourier-reeks, 194  
  standaard, 200, 201  
Fourier-sinus-reeks, 202  
functie  
  analytische, 16  
  continue, 7  
  differentieerbare, 15  
  harmonische, 42  
  holomorfe, 16  
fundamentele oplossing van  $\Delta$ , 236  
fundamentele oplossingsverzameling, 108
- gamma-functie, 156  
gebied, 6, 213  
gegeneraliseerde machtreeks, 34, 159  
gelijkheid van Parseval, 195  
gelineariseerde d.v., 138  
gemiddelde-waarde-stelling voor harmonische functies, 51, 250  
genormaliseerd, 190  
gereduceerde d.v., 66  
gesloten kromme, 5  
gesloten verzameling, 4, 214  
Gibbs-effect, 206  
gladde kromme, 5  
globaal asymptotisch stabiel, 153  
golfvergelijking, 224  
Gram-Schmidt, 190  
Greense functie, 171, 243, 244  
Greense identiteit, 237
- Hamilton-operator, 292  
harmonisch, 42, 250  
harmonische, 222  
Hermite-polynomen, 301  
holomorf, 16  
homogeen, 66  
hyperbolisch, 215, 220
- indiciaalvergelijking, 159  
inproduct, 121, 187, 252  
inproduct voor complexe functies, 197  
instabiel, 124, 139  
integraal over kromme, 23  
integraal-formule van Poisson, 246  
integraalstelling van Gauss, 232  
integraalstelling van Green, 232  
integraalstelling van Cauchy, 29  
integrerende factor, 67
- Jordan-kastje, 120  
Jordan-kromme, 6  
Jordan-matrix, 120



- karakteristiek polynoom, 116
  - Kelvin-spiegeling, 248
  - klassieke oplossing, 271
  - knoop, 124
  - knooppunt, 124
  - kromme, 4
    - enkelvoudige, 5
    - gesloten, 5
    - gladde, 5
    - Jordan-, 6
    - stuksgewijs gladde, 5
- Kronecker delta, 191
- kwadratisch integreerbaar, 192
- Laplace-operator, 41, 222
- Laplace-operator in poolcoördinaten, 285
- Laplace-probleem, 52, 230
- Laplace-vergelijking, 45, 52
- Laplaciaan, 41, 222
- Legendre-functies, 304
- Legendre-polynoom, 164
- lengte, 5
- limiet van een functie, 7
- limiet van een rij, 7
- limsup, 10
- Liouville, 41
- Lipschitz-constante, 79
- Lipschitz-voorwaarde, 79
- lokale existentie en eenduidigheidsstelling, 80
- Lorenz-vergelijking, 152
- Lyapunov-functie, 150
- machtreeks, 9
  - verschoven, 9
- machtreeks-stelling, 9
- matrix-norm, 122
- maximaal existentie-interval, 73, 74, 81, 84
- maximum principe, 57, 231
- maximum-norm, 88
- middelwaardestelling, 82
- Neumann-randvoorwaarde, 45, 230
- Newton-potentiaal, 237
- norm, 88, 122, 192
- normaal punt, 157
- omgeving van een punt, 4
- onafhankelijk, 107
- ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, 192
- ontaard knooppunt, 124
- open verzameling, 4, 213
- oplossing, 73, 230
- oplossing van d' Alembert, 279
- orthonormaal stelsel, 191
- orthonormale basis, 121
- parabolisch, 215, 220
- Parseval, 195
- particuliere oplossing, 110
- Picard-iteratie, 86
- Pochhammer, 304
- Poisson integraal formule, 50
- Poisson-probleem, 230
- polynoom, 17
- rand, 4, 214
- rationale functie, 17
- recept voor Greense functie, 173
- reeks, 8
  - absoluut convergente, 8
  - convergente, 8
  - divergente, 8
- regulier-singulier punt, 157
- representatie-formule van Green, 243
- residu, 31
- residuenstelling, 32
- Riccati, 67
- ruimte van continue functies, 88
- samenhangend, 6, 214
- scheiding van variabelen, 185
- Schrödingervergelijking, 226
- separabel, 65
- sferische harmonische, 304
- singulier punt, 157
- snelheidspotentiaal, 58
- spiraalpunt, 124
- stabiel, 124, 138
- standaard Fourier-reeks, 200, 201
- standaard inproduct, 187
- stelling van Cauchy-Riemann, 19
- stelling van Liouville, 41
- sterk maximum principe, 57, 231
- strikte Lyapunov-functie, 150
- stroomfunctie, 59
- stuksgewijs continu, 198
- stuksgewijs continu differentieerbaar, 198
- stuksgewijs gladde kromme, 5
- subharmonisch, 250
- superharmonisch, 250
- symbool van Pochhammer, 304
- symmetrische matrices, 121
- tweede-orde autonome g.d.v., 103
- uniform, 7
- uniform continu, 8, 80
- uniforme convergentie, 88
- variatie van constante, 134, 272
- variatie van constante, 66
- vergelijkingsprincipe, 96, 231, 264, 271
- verschoven machtreeks, 9
- verzameling
  - complement van, 4
  - gesloten, 4
  - open, 4
  - rand van, 4
- volledig orthonormaal stelsel, 192
- warmtevergelijking, 223
- waterstofatoom, 302
- Wronskiaan, 109
- zadelpunt, 124
- zelf-geadjungeerd, 187, 252

### Complexe functies, gewone en partiële differentiaalvergelijkingen

Differentiaalvergelijkingen vormen bij uitstek de verbinding tussen de wiskundige analyse en de fysische modellen. De verscheidenheid in de optredende modellen wordt weerspiegeld in de diversiteit aan differentiaalvergelijkingen. In dit boek wordt getracht de verschillende soorten gewone en partiële differentiaalvergelijkingen met hun specifieke methoden aan de orde te laten komen.

De stof valt in vier delen uiteen. Het eerste deel vormt een inleiding tot Complexe Functietheorie eindigend met harmonische functies en enkele toepassingen. Deel II begint met een korte herhaling van enkele expliciete methoden. De kern van dit deel is de fundamentele existentie en eenduidigheidstelling voor gewone differentiaalvergelijkingen. Daarnaast wordt aandacht besteed aan fasevlakanalyse voor lineaire en niet-lineaire gewone differentiaalvergelijkingen. Deel III, randwaardeproblemen voor lineaire gewone differentiaalvergelijkingen met Greense functies en Fourier-reeksen, vormt een opstapje naar deel IV, partiële differentiaalvergelijkingen. Na een classificatie van de verschillende typen en voorbeelden met de passende randvoorwaarden wordt wat nader ingegaan op vier klassen, tweede orde lineaire elliptische, parabolische, hyperbolische en Schrödinger-differentiaalvergelijkingen met de passende begin- en randvoorwaarden.

Uitgegeven in opdracht van de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft door Delft University Press

ISBN 90-407-1681-1

