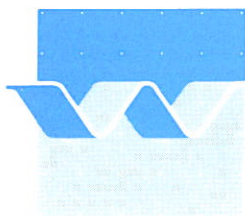


Ministerie van Verkeer en Waterstaat
Rijkswaterstaat Dienst Getijdewateren

uniformering WAQUA-formuleringen

Z266/DGW 975
augustus 1988



waterloopkundig laboratorium | WL

Ministerie van Verkeer en Waterstaat
Rijkswaterstaat Dienst Getijdewateren

uniformering WAQUA-formuleringen

Z266/DGW 975
augustus 1988

J. Mooiman

INHOUD

blz.

<u>1.</u>	<u>Inleiding</u>	2
<u>2.</u>	<u>Kromlijnige orthogonale ondiepwatervergelijkingen</u>	3
<u>3.</u>	<u>Uitvoering</u>	6
<u>4.</u>	<u>Besturing van differentie molekulen in WAQUA</u>	8
<u>5.</u>	<u>Discretisaties in WAQUA</u>	10
5.1	Advectieve term $\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$	10
5.1.1	Subroutine SUV	10
5.1.2	Subroutine UXD	14
5.2	Advectieve kruis term $\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta}$	17
5.2.1	Subroutine SUV	17
5.2.2	Subroutine UXD	18
5.3	Advectieve krommingsterm $\frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial \eta}$	19
5.3.1	Subroutine SUV	19
5.3.2	Subroutine UXD	21
5.4	Advectieve krommingsterm $\frac{vv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \sqrt{G_{\eta\eta}}}{\partial \xi}$	24
5.4.1	Subroutine SUV	24
5.4.2	Subroutine UXD	24
5.5	Bodemwrijvingsterm $g \frac{u\sqrt{(u^2+v^2)}}{c^2(d+\zeta)}$	24
5.5.1	Subroutine SUV	24
5.5.2	Subroutine UXD	25
5.6	Coriolis-term $-fv$	26
5.6.1	Subroutine SUV	26
5.6.2	Subroutine UXD	26

INHOUD (vervolg)

5.7	Viscositeitsterm $\Delta(u,v)$28
5.7.1	Subroutine SUV29
5.7.2	Subroutine UXD31
5.8	Randvoorwaarden33
5.8.1	Gesloten rand33
5.8.2	Waterstandsrand33
5.8.3	Snelheidsrand34
5.8.4	Debietrand35
5.8.5	Riemann-rand (0-de orde)35
5.9	Continuïteitsvergelijking36
6.	<u>Discretisaties in het proefschrift van Wubs</u>	38
6.1	Advectieve term $\frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$39
6.2	Advectieve kruis term $\frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \eta}$	40
6.3	Bodemwrijvingsterm $g \frac{u\sqrt{(u^2+v^2)}}{C^2(d+\zeta)}$41
6.4	Coriolis-term $-fv$	42
6.5	Viscositeitsterm $\Delta(u,v)$42
6.6	Randvoorwaarden44
6.6.1	Gesloten rand44
6.6.2	Waterstandsrand45
6.6.3	Snelheidsrand45
6.7	Continuïteitsvergelijking46
6.8	Toegevoegde diffusie47
7.	<u>Voorstel tot verbeteringen.</u>	49
	Literatuur.50
	Appendix A. Discretisatie kromlijnige viscositeit $\Delta(u,v)$	

1. Inleiding

In POW-WAQUA is besloten om een werkgroep samen te stellen die de verschillen in de diverse WAQUA versies inventariseert. Deze inventarisatie heeft tot doel om tot een eenduidige formulering van de discretisaties van de verschillende termen in de ondiepwatervergelijkingen te leiden. Als neven resultaat is na deze inventarisatie de implementatie, zoals deze nu gerealiseerd is, van de verschillende termen in WAQUA op schrift gesteld.

De werkgroep die voor de inventarisatie is samengesteld, bestaat uit:

- ir. J. Dijkzeul - D.G.W.
- dr. T. van Stijn - D.I.V.
- dr. ir. G. Verboom - W.L.
- ir. J. Mooiman - W.L.

In de werkgroep is afgesproken dat W.L., vertegenwoordigt door Verboom en Mooiman, de inventarisatie in WAQUA-kromlijng, WAQUA-kromlijng golfgedreven en de discretisaties uit het proefschrift van dr. ir. F. Wubs [1] op zich zal nemen. Voor de golfgedreven versie worden implementaties ten behoeve van de aandrijving via golven buiten beschouwing gelaten.

2. Kromlijnige orthogonale ondiepwatervergelijkingen.

De kromlijnige versie van WAQUA lost de ondiepwatervergelijkingen voor een orthogonaal coördinaten stelsel op. De ondiepwatervergelijkingen zijn hiervoor naar een kromlijnig orthogonaal coördinaten stelsel getransformeerd en worden in dit orthogonale stelsel opgelost. Dit heeft tot gevolg dat de ondiepwatervergelijkingen aangepast zijn voor dit nieuwe coördinaten stelsel en worden hieronder beschreven.

Als gekozen wordt voor een vierkant rooster dan zijn de termen ten gevolge van de kromming in het rooster nul (Wubs kiest een vierkant rooster) en vereenvoudigen de vergelijkingen zoals deze in de 'moeder'-versie van WAQUA worden opgelost.

Definities.

ξ = ksi.

η = èta.

ζ = zèta.

ν = nu.

ξ, η : ruimtelijke coördinaten.

t : tijd.

u, v : diepte gemiddelde snelheden in ξ - en η -richting.

ζ : waterstand boven een zeker referentie vlak.

d : waterdiepte onder het referentie vlak.

$H=d+\zeta$: totale waterdiepte.

f : Coriolis parameter.

ν : eddy-viscosity in ξ - and η -richting.

g : zwaartekrachtsversnelling.

C : Chezy-coëfficiënt.

m : index roosterpunt in ξ -richting.

n : index roosterpunt in η -richting.

$\sqrt{G_{\xi\xi}}$: fysische component van een vector langs de ξ -as.

$\sqrt{G_{\eta\eta}}$: fysische component van een vector langs de η -as.

De ondiepwatervergelijkingen.

Impulsvergelijking in u- of ξ -richting:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial \eta} - \frac{vv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \sqrt{G_{\eta\eta}}}{\partial \xi} - fv +$$

$$+ g \frac{u\sqrt{(u^2+v^2)}}{C^2(d+\zeta)} + \frac{g}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \frac{v}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$$

Impulsvergelijking in v- of η -richting:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \sqrt{G_{\eta\eta}}}{\partial \xi} - \frac{uu}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial \eta} + fu +$$

$$+ g \frac{v\sqrt{(u^2+v^2)}}{C^2(d+\zeta)} + \frac{g}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial A}{\partial \eta} - \frac{v}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0$$

Continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial [(d+\zeta)u\sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} + \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial [(d+\zeta)v\sqrt{G_{\xi\xi}}]}{\partial \eta} = 0$$

In de impulsvergelijkingen zijn A en F als volgt gedefinieerd:

$$A = \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\frac{\partial [u\sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} + \frac{\partial [v\sqrt{G_{\xi\xi}}]}{\partial \eta} \right)$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\frac{\partial [v\sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} - \frac{\partial [u\sqrt{G_{\xi\xi}}]}{\partial \eta} \right)$$

Randvoorwaarden voor de ondiepwatervergelijkingen.

Het theoretisch aantal randvoorwaarden voor de ondiepwatervergelijkingen is; 3 bij instroming, 2 bij uitstroming en 2 voor een gesloten rand.

De randvoorwaarden kunnen zijn:

R, Q, u_{\perp} of $\zeta = f(t)$

$$\begin{aligned} u_{\parallel} &= 0 && \text{(loodrechte in- en uitstroming)} \\ \partial u_{\parallel} / \partial n &= 0, \text{ als } v \neq 0 && \text{(schuifspanning is nul)} \end{aligned}$$

u_{\perp} is de normaal snelheid op de rand.

u_{\parallel} is de tangentiële snelheid op de rand.

Waarbij $u_{\parallel} = 0$ altijd wordt voorgeschreven, ook als dit in theorie niet echt noodzakelijk is.

3. Uitvoering

Op basis van de source-listingen van WAQUA-kromlijng en WAQUA-kromlijng golfgedreven is de implementatie van de verschillende termen onderzocht. Bij dit onderzoek is naar de impuls- en de continuïteitsvergelijking in de ξ -richting gekeken.

Beide WAQUA versie bestaan uit de volgende vier rekenroutines, deze vier routines bereken tesamen de waterstanden en snelheden op het volgende tijdsniveau ($k+1$).

VYD : lost de impulsvergelijking in v-richting op, de waterstanden zijn expliciet (v van k naar $k+\frac{1}{2}$ en ζ op k)

SVU : lost de impulsvergelijking en de continuïteitsvergelijking in u-richting op, in beide vergelijkingen is de waterstand impliciet (u en ζ van k naar $k+\frac{1}{2}$).

UXD : lost de impulsvergelijking in u-richting op, de waterstanden zijn expliciet (u van $k+\frac{1}{2}$ naar $k+1$ en ζ op $k+\frac{1}{2}$).

SVU : lost de impulsvergelijking en de continuïteitsvergelijking in v-richting op, in beide vergelijkingen is de waterstand impliciet (v en ζ van $k+\frac{1}{2}$ naar $k+1$).

De inventarisatie heeft alleen betrekking op de subroutines UXD en SUV, we veronderstellen dat de subroutines VYD en SVU perfect symmetrisch zijn.

Of deze subroutines daadwerkelijk symmetrisch zijn zal eventueel later met behulp van testberekeningen aangetoond dienen te worden.

Bij het inventariseren gaat de grootste aandacht uit naar de gebruikte tijdsintegrator met daar overheen een iteratieve methode en naar de plaats discretisatie in de impuls- en continuïteitsvergelijking.

Verder zijn de discretisaties uit het proefschrift van Wubs [1] geïnterviewd. De inventarisatie is op basis van dit proefschrift gedaan. Wubs gebruikt een 4-de orde Runge-Kutta methode voor de tijdsintegratie. Alle tijdsdiscretisaties zijn expliciet en zullen in dit rapport alleen waarnodig bij de discretisaties vermeld worden.

In het bijzondere geval dat het kromme rooster samenvalt met het (x,y)-assenstelsel liggen ξ en x in dezelfde richting en is $\sqrt{G} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = \partial x$. Dit geldt ook

voor η , y en $\sqrt{G_{\eta\eta}}$. Wubs gebruikt een vierkant rooster met $\sqrt{G_{\xi\xi}} = \sqrt{G_{\eta\eta}} = \Delta x = \Delta y$ zodat alle termen ten gevolge van de kromming van het rooster wegvallen.

Opgemerkt wordt dat Wubs de afstand tussen twee waterstandspunten definiëerd als $2\Delta x$, dit verschil in definitie van Δx kan tot misverstanden over het Courant-getal leiden. Voor deze rapportage is Δx gedefiniëerd als de afstand tussen twee waterstandspunten.

De volgende termen van de impulsvergelijking zijn geïnventariseerd:

- advectione termen in het binnengebied.
- advectione termen nabij drooggevallen punten.
- advectione termen bij openranden.
- krommingstermen in het binnengebied.
- krommingstermen nabij drooggevallen punten.
- krommingstermen bij openranden.
- Coriolis-term.
- bodemwrijving in het binnengebied.
- bodemwrijving bij openranden.
- viscositeitsterm in het binnengebied.
- viscositeitsterm nabij gesloten randen.
- viscositeitsterm bij openranden.

De randvoorwaarden die opgelegd worden:

- geslotenrand.
- waterstandsrand.
- snelheidsrand.
- debietrand, alleen WAQUA.
- Riemann-rand, dit is een zwakreflecterende open rand, alleen WAQUA.

De discretisatie van de continuïteitsvergelijking.

4. Besturing van differentie molekulen in WAQUA

De besturing van de kromlijlige WAQUA versies gaat op eenzelfde manier als de 'moeder'-versie van WAQUA.

Het begin en eind van een rekenrij/kolom worden apart behandeld. Openranden kunnen alleen aan het begin of eind van een rekenrij/kolom voorkomen. Gesloten randen kunnen overal in het rekengebied voorkomen, ook aan begin en eind van een rekenrij/kolom.

Eventueel drooggevallen punten in het binnengebied, interne gesloten randen, vereisen lokaal een aanpassing van het differentie schema. Deze lokale aanpassing wordt gestuurd door de array's CZU en CZV. In deze array's staat $-g*\Delta t/(2*C**2)$ voor drooggevallen punten, $g*\Delta t/(2*C**2)$ voor natte punten en nul voor permanent droge punten. CZU heeft betrekking op u-snelheidspunten en CZV op v-snelheidspunten. Een snelheidspunt staat droog als $CZU \leq 0$ of $CZV \leq 0$.

* = waterstandsrand

▪ = virtueel waterstandspunt

- = u-snelheidspunt

» = u-snelheidspunt onder beschouwing met $u > 0$.

« = u-snelheidspunt onder beschouwing met $u < 0$.

| = v-snelheidspunt.

> = linker rand op snelheidspunt.

< = rechter rand op snelheidspunt.

‡ = droog u-snelheidspunt.

‡ = droog v-snelheidspunt.

Schematisatie van een:

waterstandsrand

snelheidsrand

```

‡ | |
* - + - + -
‡ | |
* - + - + -
‡ | |
* - + - + -
‡ | |

```

```

‡ | |
▪ > + - + -
‡ | |
▪ > + - + -
‡ | |
▪ > + - + -
‡ | |

```

Coderingen m.b.t. onder en boven.

Voor het bepalen van de discretisatie van kruisadvectie termen wordt de volgende codering in de subroutines SUV en UXD gebruikt:

(top T en bottom B; left L en right R)

$KTT=1$, tenzij $CZU_{m+\frac{1}{2},n+2} \leq 0$ of $CZV_{m,n+1\frac{1}{2}} \leq 0$ of $CZV_{m+1,n+1\frac{1}{2}} \leq 0$ dan $KTT=0$
 $KT =1$, tenzij $CZU_{m+\frac{1}{2},n+1} \leq 0$ of $CZV_{m,n+\frac{1}{2}} \leq 0$ of $CZV_{m+1,n+\frac{1}{2}} \leq 0$ dan $KT=0$
 $KB =1$, tenzij $CZU_{m+\frac{1}{2},n-1} \leq 0$ of $CZV_{m,n-\frac{1}{2}} \leq 0$ of $CZV_{m+1,n-\frac{1}{2}} \leq 0$ dan $KB=0$
 $KBB=1$, tenzij $CZU_{m+\frac{1}{2},n-2} \leq 0$ of $CZV_{m,n-1\frac{1}{2}} \leq 0$ of $CZV_{m+1,n-1\frac{1}{2}} \leq 0$ dan $KBB=0$

Hieronder is deze codering schematische weergegeven.

+ # +	+ - +	+ - +	+ - +
# # KTT=0	KTT=1	KTT=1	KTT=1
+ - +	+ # +	+ - +	+ - +
KT =1	# # KT =0	KT =1	KT =1
+ » +	+ » +	+ » +	+ » +
KB =1	KB =1	# # KB =0	KB =1
+ - +	+ - +	+ # +	+ - +
KBB=1	KBB=1	KBB=1	# # KBB=0
+ - +	+ - +	+ - +	+ # +

Coderingen m.b.t. links en rechts.

$ML =1$, tenzij $CZV_{m,n+\frac{1}{2}} \leq 0$ of $CZV_{m,m-\frac{1}{2}} \leq 0$ dan $ML=0$
 $MR =1$, tenzij $CZV_{m+1,n+\frac{1}{2}} \leq 0$ of $CZV_{m+1,n-\frac{1}{2}} \leq 0$ dan $MR=0$

Hieronder is deze codering schematische weergegeven.

+ - +	+ - +
#	#
+ » +	+ » +
#	#
+ - +	+ - +

ML=0 MR=1 ML=1 MR=0

Voor de subroutines VYD en SVU worden op een soortgelijke manier de coderingen KLL, KL, KR, KRR, MB en MT gedefiniëerd.

5. Discretisaties in WAQUA

De discretisaties in WAQUA-kromlijng en WAQUA-kromlijng golfgedreven zijn hetzelfde. De twee versies zullen daarom beide met WAQUA-kromlijng aangeduidt worden.

Notatie afspraken.

$$f_{m,n}^k := f(m\Delta\xi, n\Delta\eta, k\Delta t)$$

$$\overline{f}_{m,n}^k{}^\xi := (f_{m+\frac{1}{2},n}^k + f_{m-\frac{1}{2},n}^k)/2$$

$$\overline{f}_{m,n}^k{}^\eta := (f_{m,n+\frac{1}{2}}^k + f_{m,n-\frac{1}{2}}^k)/2$$

$$\overline{f}_{m,n}^k{}^{\xi\eta} := \overline{\overline{f}_{m,n}^k{}^\xi}{}^\eta = \overline{\overline{f}_{m,n}^k{}^\eta}{}^\xi$$

$$\delta := (1+(-1)^{p+\gamma})/2 \quad \text{met } \gamma=1 \text{ als } \sum_{m,n} v \geq 0 \text{ anders } \gamma=0.$$

$$D_{0\xi} f_{m,n}^k := (f_{m+\frac{1}{2},n}^k - f_{m-\frac{1}{2},n}^k)/\Delta\xi$$

$$D_{0\eta} f_{m,n}^k := (f_{m,n+\frac{1}{2}}^k - f_{m,n-\frac{1}{2}}^k)/\Delta\eta$$

Het punt onderbeschouwing aangeduidt met » of « heeft coördinaat $(m+\frac{1}{2},n)$ en aangeduidt met ± heeft coördinaat (m,n) , m telt van links naar rechts.

5.1 Advectievetermen

- term $\frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$

Deze term wordt in het binnengebied volgens Crank-Nicolson gediscetiseerd.

5.1.1 Subroutine SUV, impliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

schematisatie: - + - + » + - + -
 of - + - + « + - + -

De centrale discretisatie van de afgeleide is expliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u^{[q]}_{m+\frac{1}{2},n}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u^k_{m+1\frac{1}{2},n} - u^k_{m-\frac{1}{2},n}) / 2\Delta\xi$$

Juist voor begin en eind van rekenrij met openrand.

Stroming naar rechts, $u > 0$.

schematisatie: * - + » + - + -
 of ▪ > + » + - + -
 of - + - + » + < ▪
 of - + - + » + - *

De upstream discretisatie van de afgeleide is expliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u^{[q]}_{m+\frac{1}{2},n}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u^k_{m+\frac{1}{2},n} - u^k_{m-\frac{1}{2},n}) / \Delta\xi$$

Stroming naar links, $u < 0$.

schematisatie: * - + « + - + -
 of ▪ > + « + - + -
 of - + - + « + - ▪
 of - + - + « + < *

De upstream discretisatie van de afgeleide is expliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u^{[q]}_{m+\frac{1}{2},n}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u^k_{m+1\frac{1}{2},n} - u^k_{m+\frac{1}{2},n}) / \Delta\xi$$

Juist voor een gesloten rand of drooggevallen punt.

Stroming naar gesloten rand of drooggevallen punt toe en $u < 0$.

schematisatie: $\# + \llcorner + - + - \dots$

De upstream discretisatie van de afgeleide is expliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{[q]}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+\frac{1}{2},n}^k - u_{m+\frac{1}{2},n}^k) / \Delta \xi$$

Stroming naar gesloten rand of drooggevallen punt toe en $u > 0$.

schematisatie: $\dots - + - + \gg + \#$

De upstream discretisatie van de afgeleide is expliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{[q]}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+\frac{1}{2},n}^k - u_{m-\frac{1}{2},n}^k) / \Delta \xi$$

Stroming van gesloten rand of drooggevallen punt af.

schematisatie: $\# + \gg + - + - \dots$

of $\dots - + - + \llcorner + \#$

In dit geval wordt de advectie term verwaarloosd.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Waterstandsrand.

De advection term wordt op het punt juist voor de waterstandsrand bepaald. Bij instroming wordt de advection term door nul en bij uitstroming wordt de advection term door een upstream differentie benaderd. Echter bij uitstroming wordt niet meer aan het Crank-Nicolson schema voldaan.

Uitstroming bij een waterstandsrand aan de linkerkant van het rekengebied, $u < 0$.

schematisatie: * « + - + - + -

De discretisatie is een volledige expliciete upstream differentie:

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^k}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+1\frac{1}{2},n}^k - u_{m+\frac{1}{2},n}^k) / \Delta \xi$$

Uitstroming bij een waterstandsrand aan de rechterkant van het rekengebied, $u > 0$.

schematisatie: - + - + - + » *

De discretisatie is een volledige expliciete upstream differentie:

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^k}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+\frac{1}{2},n}^k - u_{m-\frac{1}{2},n}^k) / \Delta \xi$$

Instroming bij een waterstandsrand.

schematisatie: * » + - + - + -

of - + - + - + « *

In dit geval wordt de advection term verwaarloosd,

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

5.1.2 Subroutine UXD, expliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

schematisatie: - + - + » + - + -
 of - + - + « + - + -

De centrale discretisatie van de afgeleide is impliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m-\frac{1}{2},n}^{[p]}) / 2\Delta\xi$$

Juist voor begin en eind van rekenrij met een openrand.

Stroming naar rechts, u>0.

schematisatie: * - + » + - + -
 of ▪ > + » + - + -
 of - + - + » + < ▪
 of - + - + » + - *

De upstream discretisatie van de afgeleide is impliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m-\frac{1}{2},n}^{[p]}) / \Delta\xi$$

Stroming naar links, u<0.

schematisatie: * - + « + - + -
 of ▪ > + « + - + -
 of - + - + « + < *
 of - + - + « + - *

De upstream discretisatie van de afgeleide is impliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+1\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]}) / \Delta \xi$$

Juist voor een gesloten rand of drooggevallen punt.

Stroming naar de gesloten rand of drooggevallen punt toe en $u < 0$.

schematisatie: $\# + \llcorner + - + - \dots$

De upstream discretisatie van de afgeleide is impliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+1\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]}) / \Delta \xi$$

Stroming naar de gesloten rand of drooggevallen punt toe en $u > 0$.

schematisatie: $\dots - + - + \gg + \#$

De upstream discretisatie van de afgeleide is impliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m-\frac{1}{2},n}^{[p]}) / \Delta \xi$$

Stroming van een gesloten rand of drooggevallen punt af.

schematisatie: $\# + \gg + - + - \dots$
 of $\dots - + - + \llcorner + \#$

De advectie term wordt nu verwaarloosd,

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Waterstandsrand.

De advection term wordt op het punt juist voor de waterstandsrand bepaald. Bij instroming wordt de advection term door nul en bij uitstroming wordt de advection term door een upstream differentie benaderd. Bij deze discretisatie wordt niet meer aan het Crank-Nicolson schema voldaan (zie 5.1.1. bij waterstandsrand).

Uitstroming bij een waterstandsrand aan de linkerkant van het rekengebied, $u < 0$.

schematisatie: * « + - + - + -

De upstream discretisatie van de afgeleide is impliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+1\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]}) / \Delta \xi$$

Uitstroming bij een waterstandsrand aan de rechterkant van het rekengebied, $u > 0$.

schematisatie: - + - + - + » *

De upstream discretisatie van de afgeleide is impliciet.

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} (u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m-\frac{1}{2},n}^{[p]}) / \Delta \xi$$

Instroming bij een waterstandsrand.

schematisatie: * » + - + - + -
of - + - + - + « *

De advection term wordt verwaarloosd.

$$\frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

5.2 Advection term

- term $\frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \eta}$

Deze advection term wordt in het binnengebied volgens de gereduceerde fasefout methode gediscrètiseerd. De discretisatie van deze advection term is in subroutine UXD een impliciete upstream differentie en in subroutine SUV een expliciete centrale differentie.

Opgemerkt wordt dat de discretisatie bij de randen niet overeenkomt met de beschreven methode in het proefschrift van Stelling [2].

5.2.1 Subroutine SUV, impliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

schematisatie: - + - + » + - + -
 of - + - + « + - + -

De centrale discretisatie van de afgeleide is expliciet, de v-snelheid is impliciet.

$$\frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\xi \eta}{v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}} (u_{m+\frac{1}{2},n+2}^{k+\frac{1}{2}} + 4u_{m+\frac{1}{2},n+1}^{k+\frac{1}{2}} - 4u_{m+\frac{1}{2},n-1}^{k+\frac{1}{2}} - u_{m+\frac{1}{2},n-2}^{k+\frac{1}{2}}) / 12\Delta\eta$$

als KTT=KT=KB=KBB=1

en

$$\frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\xi \eta}{v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}} (u_{m+\frac{1}{2},n+1}^{k+\frac{1}{2}} - u_{m+\frac{1}{2},n-1}^{k+\frac{1}{2}}) / 2\Delta\eta$$

als KT=KB=1 en KTT=0 of KBB=0

en

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

als $KT=0$ of $KB=0$.

We merken op dat met behulp van KTT, KT, KB en KBB ook alle discretisaties bij randen worden aangepast.

5.2.2 Subroutine UXD, expliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

schematisatie: - + - + » + - + -
of - + - + « + - + -

De upstream discretisatie van de afgeleide is impliciet.

Als de hoofdstroom positief is in η -richting ($\gamma=1$), dan is de discretisatie als volgt:

Bij $KTT=KT=1$

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\overline{v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} \xi \eta}}{v_{m+\frac{1}{2},n}} (3u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p-\delta]} - 4u_{m+\frac{1}{2},n-1}^{[p-\delta]} + u_{m+\frac{1}{2},n-2}^{[p-\delta]}) / 2\Delta\eta$$

en als $KTT=0$ en $KT=1$

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\overline{v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} \xi \eta}}{v_{m+\frac{1}{2},n}} (u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p-\delta]} - u_{m+\frac{1}{2},n-1}^{[p-\delta]}) / \Delta\eta$$

en als $KT=0$ dan is

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Als de hoofdstroom negatief is in η -richting ($\gamma=0$), dan is de discretisatie als volgt:

Bij $KBB=KB=1$

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\sqrt{k+\frac{1}{2}}^{\xi\eta}}{v_{m+\frac{1}{2},n}} (-3u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p-1+\delta]} + 4u_{m+\frac{1}{2},n+1}^{[p-1+\delta]} - u_{m+\frac{1}{2},n+2}^{[p-1+\delta]}) / 2\Delta\eta$$

en als $KBB=0$ en $KB=1$

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\sqrt{k+\frac{1}{2}}^{\xi\eta}}{v_{m+\frac{1}{2},n}} (u_{m+\frac{1}{2},n+1}^{[p-1+\delta]} - u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p-1+\delta]}) / \Delta\eta$$

en als $KB=0$ dan is

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

5.3 Advectieve krommingsterm

- term
$$\frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial \eta}$$

Bij verwaarlozing van de advectieve term $\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$ wordt ook deze krommings-term verwaarloosd.

5.3.1 Subroutine SUV, impliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

schematisatie: - + - + » + - + -

of - + - + « + - + -

$$\frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial \eta} = \left(\frac{u^k v^{\sqrt{k+\frac{1}{2}}^{\xi\eta}}}{\sqrt{G_{\eta\eta}}\sqrt{G_{\xi\xi}}^{\xi\eta}} \right)_{m+\frac{1}{2},n} \frac{\sqrt{G_{\xi\xi}}^{\xi}{}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - \sqrt{G_{\xi\xi}}^{\xi}{}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{\Delta\eta}$$

Waterstandsrand.

Bij een waterstandsrand wordt de volgende randvoorwaarde verondersteld met betrekking tot het kromlijnjige rooster:

$$\frac{\partial \sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial \xi} = 0, \text{ dit heeft invloed op de middelingen.}$$

Randvoorwaarde aan de linkerkant van het rooster.

schematisatie: * » + - + - + -

of * « + - + - + -

$$\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+\frac{1}{2},n}^{\xi\eta} = (\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+1,n+\frac{1}{2}} + \sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+1,n-\frac{1}{2}})/2$$

De volgende gewogen middeling geldt voor de tangentiële snelheid bij een waterstandsrand aan het begin van een rekenrij.

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = (v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})/2, \text{ geen drooggevallen punten.}$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m+1,n-\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m+1,n+\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \text{ als } CZV_{m+1,n+\frac{1}{2}} \leq 0, CZV_{m+1,n-\frac{1}{2}} \leq 0, \text{ er is nu geen}$$

dwarsstroming.

Met deze aannames wordt de krommingsterm op het snelheidspunt juist voor de waterstandsrand als volgt gediscretiseerd:

$$\frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial \sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial \eta} = \left(\frac{u^k v^{k+\frac{1}{2}} \xi\eta}{\sqrt{G_{\eta\eta}} \sqrt{G_{\xi\xi}}} \right)_{m+\frac{1}{2},n} \frac{\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+1,n+\frac{1}{2}} - \sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+1,n-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta}$$

Randvoorwaarde aan de rechterkant van het rooster.

schematisatie: - + - + - + » *
 of - + - + - + « *

$$\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+\frac{1}{2},n}^{\xi\eta} = (\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m,n+\frac{1}{2}} + \sqrt{G_{\xi\xi}}_{m,n-\frac{1}{2}})/2$$

De volgende gewogen middeling geldt voor de tangentiële snelheid bij een waterstandsrand aan het eind van een rekenrij.

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = (v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})/2, \text{ geen drooggevallen punten.}$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m,n-\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m,n+\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \text{ als } CZV_{m,n+\frac{1}{2}} \leq 0, CZV_{m,n-\frac{1}{2}} \leq 0, \text{ er is nu geen}$$

dwaarsstroming.

Met deze aannames wordt de krommingsterm op het snelheidspunt juist voor de waterstandsrand als volgt gediscretiseerd:

$$\frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}_{\eta\eta}} \frac{\partial \sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial \eta} = \left(\frac{u^k v^{k+\frac{1}{2}} \xi\eta}{\sqrt{G_{\eta\eta}} \sqrt{G_{\xi\xi}}^{\xi\eta}} \right)_{m+\frac{1}{2},n} \frac{\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m,n+\frac{1}{2}} - \sqrt{G_{\xi\xi}}_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta}$$

5.3.2 Subroutine UXD, expliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

Willekeurige stroming.

schematisatie: - + - + » + - + -
 of - + - + « + - + -

$$\frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial\sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial\eta} = \left(\frac{u[p]v^{k+\frac{1}{2}}\xi\eta}{\sqrt{G_{\eta\eta}}\sqrt{G_{\xi\xi}}\xi\eta} \right)_{m+\frac{1}{2},n} \frac{\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - \sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{\Delta\eta}$$

Waterstandsrand.

Bij een waterstandsrand wordt de volgende randvoorwaarde verondersteld met betrekking tot het kromlijnige rooster:

$$\frac{\partial\sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial\xi} = 0, \text{ dit heeft invloed op de middelingen.}$$

Randvoorwaarde aan de linkerkant van het rooster.

schematisatie: * » + - + -
 of * « + - + -

$$\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+\frac{1}{2},n} = (\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+1,n+\frac{1}{2}} + \sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+1,n-\frac{1}{2}})/2$$

De volgende gewogen middeling geldt voor de tangentiële snelheid bij een waterstandsrand aan het begin van een rekenrij.

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = (v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})/2, \text{ geen drooggevallen punten.}$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m+1,n-\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m+1,n+\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \text{ als } CZV_{m+1,n+\frac{1}{2}} \leq 0, CZV_{m+1,n-\frac{1}{2}} \leq 0, \text{ er is nu geen}$$

dwarsstroming.

Met deze aannames wordt de krommingsterm op het snelheidspunt juist voor de waterstandsrand als volgt gediscrètiseerd:

$$\frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial\sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial\eta} = \left(\frac{u[p] \overline{v^{k+\frac{1}{2}} \xi\eta}}{\sqrt{G_{\eta\eta}} \sqrt{G_{\xi\xi}} \xi\eta} \right)_{m+\frac{1}{2},n} \frac{\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+1,n+\frac{1}{2}} - \sqrt{G_{\xi\xi}}_{m+1,n-\frac{1}{2}}}{\Delta\eta}$$

Randvoorwaarde aan de rechterkant van het rooster.

schematisatie: - + - + - + » *
 of - + - + - + « *

$$\overline{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi\eta}_{m+\frac{1}{2},n} = (\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m,n+\frac{1}{2}} + \sqrt{G_{\xi\xi}}_{m,n-\frac{1}{2}})/2$$

De volgende gewogen middeling geldt voor de tangentiële snelheid bij een waterstandsrand aan het eind van een rekenrij.

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = (v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})/2, \text{ geen drooggevallen punten.}$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als CZV}_{m,n-\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als CZV}_{m,n+\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \text{ als CZV}_{m,n+\frac{1}{2}} \leq 0, \text{ CZV}_{m,n-\frac{1}{2}} \leq 0, \text{ er is nu geen}$$

dwarsstroming.

Met deze aannames wordt de krommingsterm op het snelheidspunt juist voor de waterstandsrand als volgt gediscrètiseerd:

$$\frac{uv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial\sqrt{G_{\xi\xi}}}{\partial\eta} = \left(\frac{u[p] \overline{v^{k+\frac{1}{2}} \xi\eta}}{\sqrt{G_{\eta\eta}} \sqrt{G_{\xi\xi}} \xi\eta} \right)_{m+\frac{1}{2},n} \frac{\sqrt{G_{\xi\xi}}_{m,n+\frac{1}{2}} - \sqrt{G_{\xi\xi}}_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta\eta}$$

5.4 Advectieve krommingsterm

$$\text{- term} \quad \frac{vv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial\sqrt{G_{\eta\eta}}}{\partial\xi}$$

Deze term wordt alleen in het binnengebied gediscrètiseerd, echter als $\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ dan wordt ook deze term verwaarloosd. Bij waterstandsranden komt deze term niet voor.

De discretisatie in SUV en UXD zijn hetzelfde, ook de tijdniveaux. Dit heeft toch tot gevolg dat in SUV de term impliciet is en in UXD expliciet. Opgemerkt wordt dat voor de subroutines VYD en SVU de tijdniveaux resp. k en k+1 zijn voor de snelheid.

5.4.1 Subroutine SUV, impliciet met betrekking tot de waterstanden en

5.4.2 Subroutine UXD, expliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

$$\frac{vv}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial\sqrt{G_{\eta\eta}}}{\partial\xi} = \left(\frac{(\overline{v^{k+\frac{1}{2}}\xi\eta})^2}{\sqrt{G_{\eta\eta}}\sqrt{G_{\xi\xi}}\xi\eta} \right)_{m+\frac{1}{2},n} \frac{\sqrt{G_{\eta\eta}}_{m-\frac{1}{2},n} - \sqrt{G_{\eta\eta}}_{m+\frac{1}{2},n}}{2\Delta\xi}$$

5.5 Bodemwrijvingsterm

$$\text{- term} \quad g \frac{u\sqrt{(u^2+v^2)}}{C^2(d+\zeta)}$$

Deze term wordt in beide stappen impliciet genomen.

5.5.1 Subroutine SUV, impliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

$$g \frac{u\sqrt{(u^2+v^2)}}{C^2(d+\zeta)} = g \frac{u^{[q]}\sqrt{[(u^k)^2 + (\overline{v^{k+\frac{1}{2}}\xi\eta})^2]}}{C^2 H} \quad m+\frac{1}{2},n$$

De totale diepte in het u-snelheidspunt is:

$$H_{m+\frac{1}{2},n} = (\zeta_{m,n}^k + \zeta_{m+1,n}^k + d_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}})/2$$

Waterstandsrand.

schematisatie: * » + - + - + -
 of * « + - + - + -
 of - + - + - + « *
 of - + - + - + » *

De bodemwrijvingsterm wordt ook op het punt juist voor de waterstandsrand bepaald en wordt term benaderd door:

$$g \frac{uv/(u^2+v^2)}{C^2(d+\zeta)} = g \frac{u^{[q]}\sqrt{[(u^k)^2]}}{C^2 H}{}_{m+\frac{1}{2},n}$$

We merken op dat de totale diepte nu anders is gediscretiseerd, de tijdniveaux waarop de waterstanden bekend zijn zijn niet hetzelfde. De totale diepte is nu in het u-snelheidspunt:

$$H_{m+\frac{1}{2},n} = (\zeta_{m,n}^{k-\frac{1}{2}} + \zeta_{m+1,n}^k + d_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}})/2$$

5.5.2 Subroutine UXD, expliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

$$g \frac{uv/(u^2+v^2)}{C^2(d+\zeta)} = g \frac{u^{[p]}\sqrt{[(u^{k+\frac{1}{2}})^2 + (v^{k+\frac{1}{2}})^{\xi\eta}]}}{C^2 H}{}_{m+\frac{1}{2},n}$$

De totale diepte in het u-snelheidspunt is:

$$H_{m+\frac{1}{2},n} = (\zeta_{m,n}^{k+\frac{1}{2}} + \zeta_{m+1,n}^{k+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}})/2$$

Waterstandsrand.

schematisatie: * » + - + - + -
 of * « + - + - + -
 of - + - + - + « *
 of - + - + - + » *

De bodemwrijvingsterm wordt ook op het punt juist voor de waterstandsrand bepaald en daar wordt deze term benaderd door:

$$g \frac{uv\sqrt{(u^2+v^2)}}{C^2(d+\zeta)} = g \frac{u^{[p]}\sqrt{[(u^{k+\frac{1}{2}})^2]}}{C^2 H} m+\frac{1}{2},n$$

We merken op dat de totale diepte nu wel hetzelfde is gediscrètiseerd als in het binnengebied. De totale diepte is nu in het u-snelheidspunt:

$$H_{m+\frac{1}{2},n} = (\zeta_{m,n}^{k+\frac{1}{2}} + \zeta_{m+1,n}^{k+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}})/2$$

5.6 Coriolis-term

- term -fv

Opgemerkt wordt dat voor de subroutines VYD en SVU de tijdniveaux resp. k en k+1 zijn voor de snelheid.

5.6.1 Subroutine SUV, impliciet met betrekking tot de waterstanden. en

5.6.2 Subroutine UXD, expliciet met betrekking tot de waterstanden.

Binnengebied.

Bij de middeling van de v-snelheden is geen rekening gehouden met eventueel drooggevallen punten.

$$-fv = -fv_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}\xi\eta}$$

Waterstandsrand.

De Coriolis-term wordt ook op het punt juist voor de waterstandsrand bepaald echter daar wordt wel rekening gehouden met drooggevallen punten.

schematisatie: * » + - + - + -
 of * « + - + - + -
 of - + - + - + « *
 of - + - + - + » *

De volgende middelingen gelden voor een waterstandsrand aan het begin van een rekenrij.

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = (v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) / 2, \text{ geen drooggevallen punten.}$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m+1,n-\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m+1,n+\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \text{ als } CZV_{m+1,n+\frac{1}{2}} \leq 0, CZV_{m+1,n-\frac{1}{2}} \leq 0, \text{ er is nu geen dwarsstroming.}$$

De volgende middelingen gelden voor een waterstandsrand aan het eind van een rekenrij.

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = (v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) / 2, \text{ geen drooggevallen punten.}$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m,n-\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \text{ als } CZV_{m,n+\frac{1}{2}} \leq 0.$$

$$v_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \text{ als } CZV_{m,n+\frac{1}{2}} \leq 0, CZV_{m,n-\frac{1}{2}} \leq 0, \text{ er is nu geen dwarsstroming.}$$

De Coriolis-term is nu:

$$-fv_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}$$

5.7 Viscositeitsterm

$$\text{- term} \quad - \frac{v}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

$$\text{met} \quad A = \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\frac{\partial [u \sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} + \frac{\partial [v \sqrt{G_{\xi\xi}}]}{\partial \eta} \right)$$

$$\text{en} \quad F = \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\frac{\partial [v \sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} - \frac{\partial [u \sqrt{G_{\xi\xi}}]}{\partial \eta} \right)$$

De termen $\sqrt{G_{\xi\xi}}$ en $\sqrt{G_{\eta\eta}}$ die onder het differentiaal teken staan kunnen daar onder vandaan gehaald worden als deze termen konstant zijn. Voor de vereenvoudiging van deze term, en daardoor makkelijker te bespreken, stellen we:

$$\sqrt{G_{\xi\xi}} = \Delta x \text{ en}$$

$$\sqrt{G_{\eta\eta}} = \Delta y.$$

In WAQUA-kromlijnig is deze vereenvoudiging niet gemaakt en worden bovenstaande vergelijkingen opgelost, als een onbekende op een punt niet bekend is wordt er eerst gemiddeld uit de vier omliggende punten. Zie hiervoor appendix A.

De viscositeitsterm ziet er na de vereenvoudiging als volgt uit:

$$-\frac{v}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{v}{\Delta y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{v}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{v}{\Delta y \Delta x} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} := -u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi}$$

5.7.1 Subroutine SUV, impliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

Willekeurige stroming.

schematisatie: - + - + » + - + -
 of - + - + « + - + -
 of †† + » + - + -
 of †† + « + - + -
 of - + - + « + ††
 of - + - + » + ††

$$u_{\xi\xi}^k = \frac{u_{m-\frac{1}{2},n}^k - 2u_{m+\frac{1}{2},n}^k + u_{m+1\frac{1}{2},n}^k}{\Delta x \Delta x}$$

Bij deze discretisatie wordt geen rekening gehouden met eventuele drooggevallen punten.

Bij de volgende discretisaties wordt wel rekening gehouden met drooggevallen punten en wordt de schuifspanning met dat punt nul verondersteld.

KT, KB, ML en MR zijn aan het begin van dit hoofdstuk gedefiniëerd.

$$u_{\eta\eta}^k = \frac{KT(u_{m+\frac{1}{2},n+1}^k - u_{m+\frac{1}{2},n}^k) - KB(u_{m+\frac{1}{2},n}^k - u_{m+\frac{1}{2},n-1}^k)}{\Delta y \Delta y}$$

$$v_{\xi\eta}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{KT(v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) - KB(v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})}{\Delta x \Delta y}$$

$$v_{\eta\xi}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{ML(v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) - MR(v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})}{\Delta y \Delta x}$$

In het binnengebied is deze implementatie voor een vierkant rooster ($\Delta x = \Delta y$) gelijk aan de implementatie in de 'moeder'-versie van WAQUA.

Want dan $-v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} = 0$. Echter in de buurt van randen en/of drooggevallen punten worden delen van deze discretisatie op nul gezet (schuifspanning is nul), zodat de twee termen $v_{\xi\eta}$ en $v_{\eta\xi}$ niet noodzakelijk meer tegen elkaar weg vallen.

Waterstandsrand.

Het deel van de viscositeitsterm ten gevolge van de kromming van het rooster wordt weggelaten. Er is nu alleen diffusie langs roosterlijnen,

$$v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi} = 0.$$

Randvoorwaarde aan de linkerkant van het rooster.

schematisatie: * » + - + -
of * « + - + -

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_{m+1\frac{1}{2},n}^k - u_{m-\frac{1}{2},n}^k}{\Delta x \Delta x}, \text{ verondersteld wordt op de rand } \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Randvoorwaarde aan de rechterkant van het rooster.

schematisatie: - + - + » *
of - + - + « *

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^k - u_{m-\frac{1}{2},n}^k}{\Delta x \Delta x}, \text{ verondersteld wordt op de rand } \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Voor zowel aan de linker- als rechterkant van het rooster geldt:

$$u_{\eta\eta} = \frac{KT(u_{m+\frac{1}{2},n+1}^k - u_{m+\frac{1}{2},n}^k) - KB(u_{m+\frac{1}{2},n}^k - u_{m+\frac{1}{2},n-1}^k)}{\Delta y \Delta y}$$

5.7.2 Subroutine UXD, expliciet met betrekking tot de waterstanden

Binnengebied.

Willekeurige stroming.

schematisatie: - + - + » + - + -
 of - + - + « + - + -
 of †† + » + - + -
 of †† + « + - + -
 of - + - + « + ††
 of - + - + » + ††

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_{m-\frac{1}{2},n}^{[p]} - 2u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]} + u_{m+1\frac{1}{2},n}^{[p]}}{\Delta x \Delta x}$$

Bij deze discretisatie wordt geen rekening gehouden met eventuele drooggevallen punten.

Bij de volgende discretisatie wordt wel rekening gehouden met drooggevallen punten en wordt de schuifspanning nul verondersteld.

KT, KB, ML en MR zijn aan het begin van dit hoofdstuk gedefinieerd.

$$u_{\eta\eta} = \frac{KT(u_{m+\frac{1}{2},n+1}^{[p-1+\delta]} - u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p-1+\delta]}) - KB(u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p-\delta]} - u_{m+\frac{1}{2},n-1}^{[p-\delta]})}{\Delta y \Delta y}$$

$$v_{\xi\eta} = \frac{KT(v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) - KB(v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})}{\Delta x \Delta y}$$

$$v_{\eta\xi} = \frac{ML(v_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{m,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) - MR(v_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - v_{m+1,n-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})}{\Delta y \Delta x}$$

In het binnengebied is deze implementatie voor een vierkant rooster ($\Delta x = \Delta y$) gelijk aan de implementatie in de 'moeder'-versie van WAQUA.

Want dan $-v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} = 0$. Echter in de buurt van randen en/of drooggevallen punten worden delen van deze discretisatie op nul gezet (schuifspanning is nul), zodat de twee termen $v_{\xi\eta}$ en $v_{\eta\xi}$ niet noodzakelijk meer tegen elkaar wegvallen.

Waterstandsrand.

Het deel van de viscositeitsterm ten gevolge van de kromming van het rooster wordt weggelaten. Er is nu alleen diffusie langs roosterlijnen,

$$v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi} = 0.$$

Randvoorwaarde aan de linkerkant van het rooster.

schematisatie: * » + - + -
of * « + - + -

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_{m+1\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]}}{\Delta x \Delta x}, \quad \text{verondersteld wordt op de rand} \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

Randvoorwaarde aan de rechterkant van het rooster.

schematisatie: - + - + » *
of - + - + « *

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m-\frac{1}{2},n}^{[p]}}{\Delta x \Delta x}, \quad \text{verondersteld wordt op de rand} \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Voor zowel aan de linker- als rechterkant van het rooster geldt:

$$u_{\eta\eta} = \frac{KT(u_{m+\frac{1}{2},n+1}^{[p-1+\delta]} - u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]}) - KB(u_{m+\frac{1}{2},n}^{[p]} - u_{m+\frac{1}{2},n-1}^{[p-\delta]})}{\Delta y \Delta y}$$

5.8 Randvoorwaarden

De randvoorwaarden met een aandrijvende functie worden alleen in subroutines SUV en SVU opgedrukt. In subroutines UXD en VYD worden de snelheden of waterstanden van het oude tijdsniveau opgedrukt.

Ingaande Riemann-invariant bij linkerrand : $R_i = u + 2\sqrt{gH}$

Ingaande Riemann-invariant bij rechterrands : $R_i = u - 2\sqrt{gH}$

5.8.1 Gesloten rand

De snelheid op de rand is nul, $u_{m+\frac{1}{2},n}^{[q]} = 0$.

Voor het virtuele waterstandspunt wordt als randvoorwaarde $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0$ gebruikt.

Schematisatie: $\# + - + - + - \dots$
 of $\dots - + - + - + \#$

5.8.2 Waterstandsrand

Schematisatie: $* - + - + - + - \dots$
 of $\dots - + - + - + - *$

De waterstandsrandvoorwaarde wordt enige mate zwakreflecterend gemaakt met een tijdsafgeleide van de ingaande Riemann-invariant.

$$\zeta + \alpha \frac{\partial(u \pm 2\sqrt{gH})}{\partial t} = f(t)$$

met α een reflectie coëfficiënt en met

$$H = (\zeta_{m,n}^{k-\frac{1}{2}} + \zeta_{m+1,n}^k + d_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}})/2.$$

In gediscretiseerde vorm:

$$\begin{aligned} (1 \pm \alpha \frac{\sqrt{(g/H)}}{2}) \zeta_{m,n}^{[q]} + \alpha u_{m+\frac{1}{2},n}^{[q]} \pm \alpha \frac{\sqrt{(g/H)}}{2} \zeta_{m+1,n}^{[q]} = \\ = \alpha u_{m+\frac{1}{2},n}^k \pm \alpha \frac{\sqrt{(g/H)}}{2} (\zeta_{m,n}^{k-\frac{1}{2}} + \zeta_{m+1,n}^k) + f(t) \end{aligned}$$

5.8.3 Snelheidsrand

Schematisatie: ▪ > + - + - + -
of - + - + - + < ▪

De snelheidsrandvoorwaarde wordt enige mate zwakreflecterend gemaakt met een tijdsafgeleide van de ingaande Riemann-invariant.

$$u + \alpha \frac{\partial(u \pm 2\sqrt{(gH)})}{\partial t} = f(t)$$

met α een reflectie coëfficiënt met

$$H = (\zeta_{m,n}^{k-\frac{1}{2}} + \zeta_{m+1,n}^k + d_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}})/2.$$

Voor het virtuele waterstandspunt wordt als randvoorwaarde $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0$ gebruikt.

In gediscretiseerde vorm:

$$\begin{aligned} \pm \alpha \frac{\sqrt{(g/H)}}{2} \zeta_{m,n}^{[q]} + (1+\alpha) u_{m+\frac{1}{2},n}^{[q]} \pm \alpha \frac{\sqrt{(g/H)}}{2} \zeta_{m+1,n}^{[q]} = \\ = \alpha u_{m+\frac{1}{2},n}^k \pm \alpha \frac{\sqrt{(g/H)}}{2} (\zeta_{m,n}^{k-\frac{1}{2}} + \zeta_{m+1,n}^k) + f(t) \end{aligned}$$

5.8.4 Debietrand

Schematisatie: ▪ > + - + - + -
 of - + - + - + < ▪

De debiet randvoorwaarde wordt eerst omgerekend tot een snelheidsrandvoorwaarde volgens:

$$u_{m+\frac{1}{2},n,k}^{[q]} = \frac{Q(t)}{H\sqrt{G}} \frac{1}{\eta\eta}$$

met

$$H = (\zeta_{m,n}^{[q-1]} + \zeta_{m+1,n}^{[q-1]} + d_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}) / 2.$$

Opgemerkt wordt dat $\zeta_{m,n}^{[q-1]}$ met $q=1$ gelijk is aan $\zeta_{m,n}^{k-\frac{1}{2}}$, echter omdat geïtereerd wordt over deze randvoorwaarde is het verschil in tijd niveaus na één iteratie teniet gedaan.

Voor het virtuele waterstandspunt wordt als randvoorwaarde $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0$ gebruikt.

5.8.5 Riemann-randen, (0-de orde)

Schematisatie: ▪ > + - + - + -
 of - + - + - + < ▪

Bij ideale open randen moet de rand de uitgaande golven ongestoord doorlaten. Dit betekent dat de randvoorwaarde de ingaande Riemann-invariant moet voorschrijven.

Lineariseren van de Riemann-invarianten geeft:

$$u \pm 2\sqrt{(g(d+\zeta))} = u \pm 2\sqrt{(gd)} \pm \sqrt{(g/d)}\zeta + \text{hogere orde termen}$$

De aandrijvende functie wordt nu gedefiniëerd als:

$$f(t) = u \pm \sqrt{(g/d)}\zeta$$

Deze functie heeft prettige eigenschappen met betrekking tot de lineaire interpolaties die op openranden plaats vindt.

Dit functie voorschrift heeft zijn voordelen als de waterstanden en snelheden uit een grover model gehaald moeten worden.

De randvoorwaarde is nu

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\sqrt{(g/H)}}{2} \zeta_{m,n}^{[q]} + u_{m+\frac{1}{2},n}^{[q]} \pm \frac{\sqrt{(g/H)}}{2} \zeta_{m+1,n}^{[q]} = \\ & = \pm \frac{\sqrt{(g/H)}}{2} (\zeta_{m,n}^{k-\frac{1}{2}} + \zeta_{m+1,n}^k) \mp 2\sqrt{(gH)} \pm 2\sqrt{(gd)} + f(t) \end{aligned}$$

met

$$H = (\zeta_{m,n}^{k-\frac{1}{2}} + \zeta_{m+1,n}^k + d_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + d_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}) / 2$$

Voor het virtuele waterstandspunt wordt als randvoorwaarde $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0$ gebruikt.

5.9 Continuïteitsvergelijking

De continuïteitsvergelijking wordt in de subroutine SUV berekend, niet in UXD.

De term $\frac{\partial [(d+\zeta)u\sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi}$ uit de continuïteitsvergelijking wordt volledig impliciet gediscretiseerd. Dit is echter een niet-lineaire impliciete term en is met de gebruikte technieken in WAQUA niet op te lossen. Deze term wordt nu herschreven tot:

$$\frac{\partial [(d+\zeta)u\sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} = \frac{\partial [d u \sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial [u \sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} + u \sqrt{G_{\eta\eta}} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$$

Dit is als volgt in discrete lineaire vorm te schrijven:

$$D_{0\xi} [\bar{d}^{\xi} \sqrt{G_{\eta\eta}} u^{[q]}] + \zeta^{[q-1]} D_{0\xi} [\sqrt{G_{\eta\eta}} u^{[q]}] + \sqrt{G_{\eta\eta}} u^{[q-1]} D_{0\xi} \zeta^{[q]} \xi$$

Waarbij er voldoende geïtereerd moet worden, volgens Stelling [2] is twee iteraties voldoende, echter voor erg ondiepe wateren met een sterk variërende bodem zijn meer iteraties nodig.

De continuïteitsvergelijking in volledig gediscretiseerde vorm luidt:

$$\frac{\zeta^{[q]} - \zeta^k}{\Delta t/2} + \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} \{D_{0\eta}[(\bar{d}^\xi + \bar{\zeta}^k) \sqrt{G_{\xi\xi}} v^k] +$$

$$D_{0\xi}[\bar{d}^\xi \sqrt{G_{\eta\eta}} u^{[q]}] + \zeta^{[q-1]} D_{0\xi}[\sqrt{G_{\eta\eta}} u^{[q]}] + \sqrt{G_{\eta\eta}} u^{[q-1]} D_{0\xi} \zeta^{[q]} \xi = 0$$

6. Discretisaties in het proefschrift van Wubs

Wubs gebruikt een 4-de orde Runge-Kutta methode. Omdat dit een expliciete methode is worden alleen tijdsniveau indicaties vermeld waar verwarring kan ontstaan.

Door ook een 4-de orde nauwkeurigheid te eisen in de plaats zijn de discretisatie molekulen groter dan bij WAQUA en er zijn daardoor meer uitzonderings situaties in de buurt van randen.

Notatie afspraken.

$$\overline{f}_{m,n}^{\xi} := (-f_{m+1\frac{1}{2},n} + 9f_{m+\frac{1}{2},n} + 9f_{m-\frac{1}{2},n} - f_{m-1\frac{1}{2},n})/16$$

als $f_{m+1\frac{1}{2},n}$ of $f_{m-1\frac{1}{2},n}$ een randvoorwaarde of drooggevallen is of achter een waterstandsrand ligt, dan is de discretisatie hetzelfde als bij WAQUA:

$$\overline{f}_{m,n}^{\xi} := (f_{m+\frac{1}{2},n} + f_{m-\frac{1}{2},n})/2$$

als $f_{m+\frac{1}{2},n}$ een randvoorwaarde of drooggevallen punt is dan:

$$\overline{f}_{m,n}^{\xi} := (3f_{m-\frac{1}{2},n} - f_{m-1\frac{1}{2},n})/2$$

of als $f_{m-\frac{1}{2},n}$ een randvoorwaarde of drooggevallen punt is dan:

$$\overline{f}_{m,n}^{\xi} := (3f_{m+\frac{1}{2},n} - f_{m+1\frac{1}{2},n})/2.$$

$$\overline{f}_{m,n}^{\xi\eta} := \overline{f}_{m,n}^{\eta} = \overline{f}_{m,n}^{\xi}$$

Het punt aangeduid met » of « heeft coördinaat $(m+\frac{1}{2},n)$ en aangeduid met ± heeft coördinaat (m,n) , m telt van links naar rechts.

6.1 Advectievetermen

- term $\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$

Binnengebied.

schematisatie: - + - + » + - + -
of - + - + « + - + -

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = u_{m+\frac{1}{2},n} (-u_{m+2\frac{1}{2},n} + 8u_{m+1\frac{1}{2},n} - 8u_{m-\frac{1}{2},n} + u_{m-1\frac{1}{2},n}) / 12\Delta x$$

In de nabijheid van een rand.

schematisatie: ▪ > + - + » + - + -
of ▪ > + - + « + - + -
of * - + » + - + -
of * - + « + - + -
of - + - + » + - *
of - + - + « + - *
of - + - + » + - + < ▪
of - + - + « + - + < ▪

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = u_{m+\frac{1}{2},n} (u_{m+\frac{1}{2},n} - u_{m-\frac{1}{2},n}) / 2\Delta x$$

Juist voor het begin en eind van een rekenrij.

Stroming het gebied in bij een openrand.

schematisatie: ▪ > + » + - + -
of - + - + « + < ▪

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = u_{m+\frac{1}{2},n} (u_{m+\frac{1}{2},n} - u_{m-\frac{1}{2},n}) / 2\Delta x$$

Stroming het gebied uit of naar gesloten rand toe.

schematisatie: ▪ > + « + - + -
of ‡ + « + - + -
of * « + - + -

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = u_{m+\frac{1}{2},n} (u_{m+\frac{1}{2},n} - u_{m-\frac{1}{2},n}) / \Delta x, \quad u < 0$$

of schematisatie: - + - + » + < ▪
of - + - + » + ‡
of - + - + » *

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = u_{m+\frac{1}{2},n} (u_{m+\frac{1}{2},n} - u_{m-\frac{1}{2},n}) / \Delta x, \quad u > 0$$

Stroming het gebied in bij een waterstandsrand of stroming van een gesloten rand af.

Schematisatie ‡ + » + - + -
of * » + - + -
of - + - + « + ‡
of - + - + « *

$$\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

6.2 Advectieve termen

- term $\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta}$

Voor de betekenis van KTT, KT, KB en KBB zie paragraaf 4.

Binnengebied.

schematisatie: - + - + » + - + -
of - + - + « + - + -

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{-\xi\eta}{v_{m+\frac{1}{2},n}} (-u_{m+\frac{1}{2},n+2} + 8u_{m+\frac{1}{2},n+1} - 8u_{m+\frac{1}{2},n-1} + u_{m+\frac{1}{2},n-2})/12\Delta x$$

als $K_{TT}=K_T=K_B=K_{BB}=1$.

Nabij randen of drooggevallen punten.

$K_T=K_B=1$ en $K_{TT}=0$ of $K_{BB}=0$

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{-\xi\eta}{v_{m+\frac{1}{2},n}} (u_{m+\frac{1}{2},n+1} - u_{m+\frac{1}{2},n-1})/2\Delta y$$

en als $K_{TT}=0$ of $K_{BB}=0$, $K_T=1$, $K_B=0$

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{-\xi\eta}{v_{m+\frac{1}{2},n}} (u_{m+\frac{1}{2},n+1} - u_{m+\frac{1}{2},n})/\Delta y, \text{ en } \frac{-\xi\eta}{v_{m+\frac{1}{2},n}} < 0$$

en als $K_{TT}=0$ of $K_{BB}=0$, $K_T=0$, $K_B=1$

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{-\xi\eta}{v_{m+\frac{1}{2},n}} (u_{m+\frac{1}{2},n} - u_{m+\frac{1}{2},n-1})/\Delta y, \text{ en } \frac{-\xi\eta}{v_{m+\frac{1}{2},n}} > 0$$

in alle andere gevallen

$$\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

6.3 Bodemwrijvingsterm

$$\text{- term } g \frac{uv(u^2+v^2)}{c^2(d+\zeta)}$$

De totale diepte in het u-snelheidspunt is:

$H_{m+\frac{1}{2},n} = (\bar{\zeta}^{\xi} + \bar{d}^{\eta})_{m+\frac{1}{2},n}$, waarbij de middeling rekening houdt met randafhandelingen.

$$g \frac{uv(u^2+v^2)}{C^2(d+\zeta)} = g \frac{u}{C^2 H} \frac{\sqrt{[u^2+(\bar{v}^{\xi\eta})^2]}}{m+\frac{1}{2},n}$$

6.4 Coriolis-term

- term -fv

-fv = -fv^{-ξη}_{m+½,n}, waarbij de middeling rekening houdt met randafhandelingen.

6.5 Viscositeitsterm

$$\text{- term} \quad - \frac{v}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

$$\text{met} \quad A = \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\frac{\partial [u\sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} + \frac{\partial [v\sqrt{G_{\xi\xi}}]}{\partial \eta} \right)$$

$$\text{en} \quad F = \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}}\sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\frac{\partial [v\sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} - \frac{\partial [u\sqrt{G_{\xi\xi}}]}{\partial \eta} \right)$$

Bij de implementatie van Wubs geldt: $\sqrt{G_{\xi\xi}} = \Delta x$, $\sqrt{G_{\eta\eta}} = \Delta y$ en $\Delta x = \Delta y$.

De viscositeitsterm ziet er na de vereenvoudiging als volgt uit:

$$- \frac{v}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{v}{\Delta y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} := -u_{xx} - u_{yy}$$

Term u_{xx} .

Binnengebied.

schematisatie: - + - + » + - + -

of - + - + « + - + -

$$u_{xx} = (-u_{m+2\frac{1}{2},n} + 16u_{m+1\frac{1}{2},n} - 30u_{m+\frac{1}{2},n} + 16u_{m-\frac{1}{2},n} - u_{m-1\frac{1}{2},n}) / 12 \Delta x^2$$

In de nabijheid van een rand.

schematisatie: ▪ > + - + » + - + -
 of ‡ + - + » + - + -
 of * - + » + - + -
 of - + - + » + - *
 of - + - + » + - ‡
 of - + - + » + - + < ▪

$$u_{xx} = (u_{m+1\frac{1}{2},n} - 2u_{m+\frac{1}{2},n} + u_{m-\frac{1}{2},n}) / \Delta x^2$$

Juist voor een openrand of drooggevallen punt.

De stromingsrichting is niet van belang.

Als randvoorwaarde wordt genomen $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Bijzonder punt ligt links van het snelheidspunt.

schematisatie: ▪ > + » + - + -
 of ‡ + » + - + -
 of * » + - + -

$$u_{xx} = (u_{m+1\frac{1}{2},n} - u_{m+\frac{1}{2},n}) / \Delta x^2$$

Bijzonder punt ligt rechts van het snelheidspunt.

schematisatie: - + - + » *
 of - + - + » ‡
 of - + - + » + < ▪

$$u_{xx} = (u_{m+\frac{1}{2},n} - u_{m-\frac{1}{2},n}) / \Delta x^2$$

Term u_{yy} .

Binnengebied.

$$u_{yy} = (-u_{m+\frac{1}{2},n+2} + 16u_{m+\frac{1}{2},n+1} - 30u_{m+\frac{1}{2},n} + 16u_{m+\frac{1}{2},n-1} - u_{m+\frac{1}{2},n-2}) / 12 \Delta y^2$$

als KTT=KT=KB=KBB=1.

Nabij randen of drooggevallen punten.

KT=KB=1 en KTT=0 of KBB=0

$$u_{yy} = (u_{m+\frac{1}{2},n+1} - 2u_{m+\frac{1}{2},n} + u_{m+\frac{1}{2},n-1})/\Delta y^2$$

Langs een openrand.

Als randvoorwaarde wordt genomen $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, free slip langs openrand.

Als KT=1, KB=0

$$u_{yy} = (u_{m+\frac{1}{2},n+1} - u_{m+\frac{1}{2},n})/\Delta y^2$$

Als KT=0, KB=1

$$u_{yy} = (u_{m+\frac{1}{2},n} - u_{m+\frac{1}{2},n-1})/\Delta y^2$$

Langs een gesloten rand.

Langs een gesloten rand is het mogelijk partiële slip op te geven met behulp van de parameter η :

$$\eta = \frac{\alpha}{\alpha+(1-\alpha)\Delta x}; \alpha=1, \text{ free-slip en } \alpha=0 \text{ no-slip.}$$

Als KT=1, KB=0

$$u_{yy} = (u_{m+\frac{1}{2},n+1} - (3-2\eta)u_{m+\frac{1}{2},n})/\Delta y^2$$

Als KT=0, KB=1

$$u_{yy} = ((3-2\eta)u_{m+\frac{1}{2},n} - u_{m+\frac{1}{2},n-1})/\Delta y^2$$

6.6 Randvoorwaarden

6.6.1 Gesloten rand

De snelheid op de rand is nul, $u_{m+\frac{1}{2},n}=0$.

Schematisatie: ▪ †† + - + - + -
of - + - + - + †† ▪

6.6.2 Waterstandsrand

Schematisatie: * - + - + - + -
 of - + - + - + - *

De waterstandsrandvoorwaarde wordt enige mate zwakreflecterend gemaakt met een tijdsafgeleide van de ingaande Riemann-invariant.

$$\zeta + \alpha \frac{\partial(u \pm 2\sqrt{gH})}{\partial t} = f(t),$$

met α een reflectie coëfficiënt.

Gediscretiseerd voor openrand aan linkerkant van het rooster.

$$\zeta_{m,n}^n + \alpha \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^n - u_{m+\frac{1}{2},n}^o \pm \sqrt{g/H} \cdot (\zeta_{m,n}^n - \zeta_{m,n}^o)}{t^n - t^o} = f^{\zeta}(t^n)$$

De superscripts verwijzen naar de vier stappen van de Runge-Kutta methode. Voor de eerste R-K-stap geldt n is tijdstap k en o is tijdstap k-1. Voor de andere R-K-stappen geldt n is tijdstap k+½, k+½ en k+1 resp., en o is tijdstap k.

6.6.3 Snelheidsrand

Schematisatie: ▪ > + - + - + -
 of - + - + - + < ▪

De snelheidsrandvoorwaarde wordt enige mate zwakreflecterend gemaakt met een tijdsafgeleide van de ingaande Riemann-invariant.

$$u + \alpha \frac{\partial(u \pm 2\sqrt{gH})}{\partial t} = f(t)$$

met α een reflectie coëfficiënt.

Gediscretiseerd voor openrand aan linkerkant van het rooster.

$$u_{m+\frac{1}{2},n}^n + \alpha \frac{u_{m+\frac{1}{2},n}^n - u_{m+\frac{1}{2},n}^o \pm \sqrt{g/H} \cdot (\zeta_{m,n}^n - \zeta_{m,n}^o)}{t^n - t^o} = f^u(t^n)$$

De superscripts verwijzen naar de vier stappen van de Runge-Kutta methode. Voor de eerste R-K-stap geldt n is tijdstap k en o is tijdstap k-1. Voor de andere R-K-stappen geldt n is tijdstap $k+\frac{1}{2}$, $k+\frac{1}{2}$ en k+1 resp., en o is tijdstap k.

6.7 Continuïteitsvergelijking

- term $(Hu)_x$
 $H = \bar{h}^{\xi} + \bar{c}^{\eta}$

Binnengebied.

schematisatie: - + - ± - + -
 of ¶ + - ± - + -
 of - + - ± - + ¶

$$(Hu)_x = (-(Hu)_{m+1\frac{1}{2},n} + 27(Hu)_{m+\frac{1}{2},n} - 27(Hu)_{m-\frac{1}{2},n} + (Hu)_{m-1\frac{1}{2},n}) / 24\Delta x$$

Als de snelheid $u_{m+1\frac{1}{2},n}$ of $u_{m-1\frac{1}{2},n}$ nul is ten gevolge van een gesloten rand of drooggevallen punt volgt er geen aanpassing van de discretisatie.

Nabij randen of drooggevallen punten.

schematisatie: ▣ > + - ± - + -
 of * - ± - + -
 of - + - ± - *
 of - + - ± - + < ▣
 of ¶ ± ¶

$$(Hu)_x = ((Hu)_{m+\frac{1}{2},n} - (Hu)_{m-\frac{1}{2},n}) / \Delta x$$

Juist voor een gesloten rand.

schematisatie: ¶ ± - + -

$$(Hu)_x = (-(Hu)_{m+1\frac{1}{2},n} + 26(Hu)_{m+\frac{1}{2},n} - 25(Hu)_{m-\frac{1}{2},n}) / 24\Delta x$$

met $u_{m-\frac{1}{2},n} = 0$.

of schematisatie - + - ± ††

$$(Hu)_x = (25(Hu)_{m+\frac{1}{2},n} - 26(Hu)_{m-\frac{1}{2},n} + (Hu)_{m-1\frac{1}{2},n})/24\Delta x$$

met $u_{m+\frac{1}{2},n} = 0$.

Bij de discretisatie van de continuïteitsvergelijking wordt zowel in het binnengebied als bij gesloten randen aan de discrete conservatieve vorm voldaan.

6.8 Toegevoegde diffusie

De discretisatie van de advectione termen $\frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$ en $\frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \eta}$ (zie paragrafen 6.1 en 6.2) zijn centrale differenties. Dit heeft tot gevolg dat de afbreekfout van de discretisatie geen diffusie termen bevat en is daarmee gevoelig voor $2\Delta x$ golven.

Door toevoeging van kunstmatige diffusie kunnen deze $2\Delta x$ golven onderdrukt worden.

Toevoeging van de diffusie term $\Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ aan de impulsvergelijking geeft genoeg diffusie om de $2\Delta x$ golven te onderdrukken maar de nauwkeurigheid van de discretisatie wordt dan eerste orde. De componenten van de lage frequenties worden door deze toevoeging ook beïnvloed. Om die reden is de volgende diffusie term toegevoegd:

$-c(\Delta x)^3 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, met c een parameter. Deze parameter is in grote mate onafhankelijk van het probleem. Met de toevoeging van deze diffusie term wordt de nauwkeurigheid van de discretisatie van de derde orde. De invloed op op lage frequenties is nu veel minder dan de toevoeging van de vorige diffusie term, de invloed voor de hoge frequenties is voor beide toevoegingen hetzelfde. Door numerieke experimenten blijkt dat $c \in [0.2, 0.8]$ voor een goede robuustheid van het numerieke schema zorgt.

De discretisatie van de diffusie term is als volgt:

$$(\Delta x)^3 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = (u_{m+2\frac{1}{2},n} - 4u_{m+1\frac{1}{2},n} + 6u_{m+\frac{1}{2},n} - 4u_{m-\frac{1}{2},n} + u_{m-1\frac{1}{2},n})/8\Delta x$$

Deze discretisatie wordt alleen in het binnengebied toegepast.

7. Voorstel tot verbeteringen

Uit de inventarisatie zoals die nu voor u ligt kunnen een aantal voorstellen tot verbeteringen van WAQUA gehaald worden. Deze voorstellen hebben betrekking op afwijkingen met de literatuur en niet consistent gebruik van bepaalde procedures.

De voorstellen tot verbetering zijn:

- * Alle toegepaste middelingen voor tijdsafhankelijke gegevens moeten rekening houden met drooggevallen punten.
- * De implementatie voor $\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$ overnemen van de 2-de orde benadering uit Wubs [2]. Ten opzichte van WAQUA gebruikt Wubs minder upstream differenties.
- * De advection term $\frac{u}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$ bij waterstandsranden overeenkomstig het differentie schema implementeren, geen volledig expliciete discretisatie.
- * De discretisatie van de advectione kruis term $\frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial u}{\partial \eta}$ bij randen gelijk maken aan de theorie in Stelling [2]. De combinatie van de twee halve tijdstappen moet steeds bij elkaar passen.
- * Bij de implementatie van de bodemwrijvingsterm $g \frac{u\sqrt{(u^2+v^2)}}{C^2(d+\zeta)}$ bij een waterstandsrand geen loodrechte in- of uitstroming aannemen.
Dus $\|u\| = \sqrt{(u^2 + v^2)}$ in plaats van $\|u\| = |u|$.
- * Free-slip randvoorwaarden langs openranden.
- * Mogelijk tot kiezen van partiële slip langs gesloten randen, zie [1],[2].
- * Implementeren van de kruis advection term bij waterstandsranden, free-slip aanname. Merk op dat dan ook de bijbehorende krommingsterm geïmplementeerd moet worden.
- * Droogvalprocedures tot op de rand consistent maken.
- * Middeling op de rand van waterstanden op het juiste tijdsniveau kiezen.

Literature

1. F.W. Wubs
Numerical solution of the shallow-water equations. Thesis University of Amsterdam, 1987
2. G.S.Stelling
On the construction of computational methods for shallow water flow problems.
Thesis University of Technology Delft, 1983.
Rijkswaterstaat communications. no. 35/1984
3. J.Lander, J.Dijkzeul
Inventarisatie formuleringen in WAQUA-versies.
Rijkswaterstaat-DGW, notitie GWAO-88.235.
4. L.E.Malvern
Introduction to the mechanics of a continuous medium.
Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969.

Appendix A. Discretisatie kromlijnige viscositeit

In deze appendix wordt de discretisatie van de kromlijnige viscositeitsterm uit de u-impulsvergelijking gegeven. Deze worden berekend in routine SUD en UXD.

De term is in continue vorm: $-\frac{\nu}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\nu}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial F}{\partial \eta}$

met

$$A = \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\frac{\partial [u \sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} + \frac{\partial [v \sqrt{G_{\xi\xi}}]}{\partial \eta} \right)$$

en

$$F = \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\frac{\partial [v \sqrt{G_{\eta\eta}}]}{\partial \xi} - \frac{\partial [u \sqrt{G_{\xi\xi}}]}{\partial \eta} \right).$$

Voor de discretisatie in de buurt van drooggevallen punten en randen gelden dezelfde aannames als in paragraaf 5.7. De coëfficiënten ten gevolge van de kromlijnige coördinaten worden nu niet constant verondersteld.

Subroutine SUV.

$$\begin{aligned} & -\frac{\nu}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\nu}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial F}{\partial \eta} = \\ & = -\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} \left(\left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\xi} (\sqrt{G_{\eta\eta}} u^k) \right]_{m+\frac{1}{2}, n} + \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\xi} (\sqrt{G_{\eta\eta}} u^k) \right]_{m-\frac{1}{2}, n} \right) + \\ & \quad - \frac{1}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\eta} (\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta u^k) \right]_{m, n+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\eta} (\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta u^k) \right]_{m, n-\frac{1}{2}} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} \left(\left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\eta} (\sqrt{G_{\xi\xi}} v^{\ell+\frac{1}{2}}) \right]_{m+\frac{1}{2}, n} + \right. \\
 & \quad \left. - \left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\eta} (\sqrt{G_{\xi\xi}} v^{\ell+\frac{1}{2}}) \right]_{m-\frac{1}{2}, n} \right) + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\xi} (\sqrt{G_{\eta\eta}} \xi \eta v^{\ell+\frac{1}{2}}) \right]_{m, n+\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. - \left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\xi} (\sqrt{G_{\eta\eta}} \xi \eta v^{\ell+\frac{1}{2}}) \right]_{m, n-\frac{1}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

Subroutine UXD.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{v}{\sqrt{G_{\xi\xi}}} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \frac{\partial F}{\partial \eta} = \\
 & = - \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} \left(\left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\xi} (\sqrt{G_{\eta\eta}} u^{[p+\delta]}) \right]_{m+\frac{1}{2}, n} + \right. \\
 & \quad \left. - \left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\xi} (\sqrt{G_{\eta\eta}} u^{[p+1-\delta]}) \right]_{m-\frac{1}{2}, n} \right) + \\
 & - \frac{1}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\eta} (\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta u^{[p]}) \right]_{m, n+\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. - \left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\eta} (\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta u^{[p]}) \right]_{m, n-\frac{1}{2}} \right) + \\
 & - \frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \xi \eta} \left(\left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\eta} (\sqrt{G_{\xi\xi}} v^{\ell+\frac{1}{2}}) \right]_{m+\frac{1}{2}, n} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\eta} (\sqrt{G_{\xi\xi}} v^{\ell+\frac{1}{2}}) \right]_{m-\frac{1}{2}, n} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{G_{\eta\eta}}} \left(\left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\xi} (\sqrt{G_{\eta\eta}} \xi \eta v^{\ell+\frac{1}{2}}) \right]_{m, n+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. - \left[\frac{1}{\sqrt{G_{\xi\xi}} \eta \sqrt{G_{\eta\eta}} \xi} D_{0\xi} (\sqrt{G_{\eta\eta}} \xi \eta v^{\ell+\frac{1}{2}}) \right]_{m, n-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$



amsterdam ■



■ locatie de voorst
voorsterweg 28
marknesse

postbus 152
8300 ad Emmeloord

telefoon (05274) 29 22
telex 42290 hylvo-nl
telefax (05274) 35 73

■ hoofdkantoor
rotterdamseweg 185
delft

postbus 177
2600 mh delft

telefoon (015) 56 93 53
telex 38176 hydel-nl
telefax (015) 61 96 74

**waterloopkundig laboratorium | wl
advisering & research**