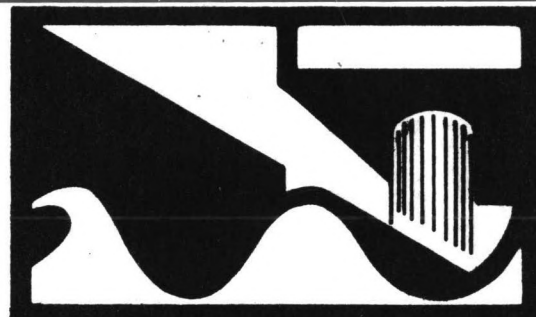


716

Het gebruik van Kalman filtering bij het bestuderen van kustgedrag

Oktober 1987

J.H. de Vroeg



HET GEBRUIK VAN KALMANFILTERING
BIJ HET BESTUDEREN VAN KUSTGEDRAG

Delft, oktober 1987

Studie in het kader van het
afstuderen aan de
Technische Universiteit Delft
Vakgroep: Waterbouwkunde

Afstudeerder : J.H. de Vroeg
Hoogleraar : Prof. Dr. Ir. E.W. Bijker
Begeleider : Ir. W.T. Bakker

Inhoud

1.	Inleidig	1
2.	Het lineaire Kalmanfilter	3
2.1	Inleiding	3
2.2	Het filteralgorithme	4
3.	Toepassing Kalmanfilter op een- en tweelijnmodel	8
3.1	Inleiding	8
3.2	Diskretisering van de differentiaalvergelijkingen	10
3.3	Opzet filtering	11
3.4	De systeem- en meetvergelijkingen	13
3.4.1.	Het eenlijnmodel	13
3.4.2.	Het tweelijnmodel	16
3.5	De systeem- en meetruis	18
3.6	Schatting van de meetruis	26
3.7	Keuze van de evenwichtsafstand	30
4.	Resultaten	31
4.1	Het eenlijnmodel	31
4.2	Het tweelijnmodel	36
5.	Conclusies en suggesties voor verder onderzoek	42
5.1	Conclusies	42
5.2	Suggesties voor verder onderzoek	43
	literatuur	44
	symbolenlijst	45

Appendix I	Illustratie recursiviteitsprincipe
Appendix II	Toelichting bij filteralgorithme
Appendix III	Programmatuur
Appendix IV	Test van het filterprogramma

1. Inleiding

In 1984 is met de start van het project "Kustgenese" een begin gemaakt aan een groots opgezette studie van de Nederlandse kust. Het project heeft als doel het verkrijgen van meer kennis van de grootschalige kustontwikkeling en de daarbij behorende grootschalige sedimenttransportsystemen, teneinde een gefundeerd kustbeheer mogelijk te maken.

In het kader van kustgenese wordt door een drietal taakgroepen een reconstructie gemaakt van de Nederlandse kust voor verschillende perioden:

- taakgroep 5000 voor de periode van 5000 BP tot heden
- taakgroep 1000 voor de periode van 1000 BP tot heden
- taakgroep 100 voor de periode van 100 BP tot heden.

In laatstgenoemde taakgroep wordt een belangrijke plaats ingenomen door modellering en voorspelling. De in dit rapport beschreven studie is als afstudeeropdracht aan de T.U. Delft verricht in het kader van de werkzaamheden van deze taakgroep.

Op 27 januari 1986 hield ir. W.T. Bakker (Rijkswaterstaat) op een bijeenkomst van taakgroep 100 een lezing over het morfologisch gedrag van de Hollandse kust (zie [3]). Daarin besprak hij ondermeer de mogelijkheid om modelkennis optimaal te combineren met het databestand dat de afgelopen decennia is opgebouwd.

Het Kalmanfilter is een goed omschreven bewerking, welke (vooral in de meet- en regeltechniek) vaak wordt gebruikt om de ruis in een gemeten signaal te verkleinen. De procedure kan echter ook voor andere doeleinden worden gebruikt. De in dit rapport beschreven toepassing vloeit direkt voort uit de volgende probleemomschrijving.

Probleemstelling:

Voor een verantwoord kustbeleid is inzicht in de toekomstige ontwikkeling van de Hollandse kust van groot belang. In dit verband is het nuttig om na te gaan in hoeverre bestaande theorieën omtrent het kustgedrag (uitgedrukt in modellen) bevestigd worden door metingen. Hierbij moet worden bedacht dat beide slechts een benadering zijn van de werkelijkheid. Vaak treden kortperiodieke variaties op in de kustligging, die niet in de modellen verwerkt zijn (systeemruis). Deze effecten zijn wél merkbaar in de metingen, welke echter altijd met een meetfout behept zijn (meetruis).

Model, metingen en kennis omtrent meet- en systeemruis kunnen met behulp van het Kalmanfilter verwerkt worden tot een optimale schatting, d.w.z. een meer nauwkeurige benadering van de werkelijkheid dan model en meting alleen. Het is tevens een elegante manier om te bestuderen in hoeverre beschikbare metingen aanleiding geven tot het bijstellen van modelberekeningen of -coëfficiënten.

Daar de interesse van kustbeheerders voornamelijk in de toekomst zal liggen, is het volgende tot doel gesteld:

Doelstelling:

Voor de kust tussen IJmuiden en Scheveningen zal met behulp van Kalmanfiltering worden onderzocht in hoeverre enkele eenvoudige kustmodellen door metingen worden bevestigd, c.q. bijgesteld. De beschouwde modellen zijn de eenlijntheorie en de tweelijntheorie.

Het rapport is als volgt ingedeeld.

In hoofdstuk 2 wordt de theorie van het filter besproken. De belangrijkste eigenschappen en het filteralgorithme komen aan de orde. Daarnaast wordt aandacht besteed aan de aannamen die aan de techniek ten grondslag liggen.

In hoofdstuk 3 zijn het eenlijn- en tweelijnmodel kort beschreven. Vervolgens wordt de voor voorspelling meest bruikbare methode van filteren uitgewerkt.

De resultaten worden besproken in hoofdstuk 4. Het filterverloop zal beschouwd worden voor beide lijnmodellen.

Hoofdstuk 5 bevat de conclusies en suggesties voor verder onderzoek.

2. Het lineaire Kalmanfilter

2.1 Inleiding

Bij het bestuderen van een proces heeft men vrijwel nooit de beschikking over de werkelijke waarden van de grootheden die het proces beschrijven. Het gedrag wordt berekend met een model of afgeleid uit metingen. In beide gevallen zijn de gevonden waarden met een fout behept: er is op elk tijdstip een verschil tussen de model- of meetwaarde enerzijds en de werkelijke waarde anderzijds.

Voor veel processen zijn deterministische modellen ontwikkeld. Deze hebben als voordeel dat zij in het algemeen een fysische basis hebben. Is het fysisch inzicht gebrekkig, dan kan in sommige gevallen een statistische voorspeltechniek de voorkeur genieten. Een voordeel hiervan is dat nieuwe metingen kunnen worden verwerkt op het moment dat zij beschikbaar komen, zodat de informatie waarop de voorspelling is gebaseerd groeit in de tijd en veranderingen in de omstandigheden merkbaar worden.

Met behulp van het Kalmanfilter is het mogelijk om de voordelen van de deterministische en statistische methode te verenigen. Het filter kan worden omschreven als een algoritme waarin metingen en a-priori kennis van het systeem gecombineerd worden, om te komen tot een optimale schatting van de werkelijke toestand van het systeem. De a-priori kennis bestaat uit een model welke het proces beschrijft, de zogenaamde systeemruis (natuurlijke variaties die door het model verwaarloosd worden) en de meetruis (fout in de metingen). Tevens moet de begintoestand met bijbehorende ruis bekend zijn of geschat worden.

De berekende schatting is in die zin optimaal, dat op elk tijdstip de variantie van de schatting geminimaliseerd wordt. (De variantie is een genormaliseerde maat voor de nauwkeurigheid, zie bijvoorbeeld [10]).

Het benutten van de a-priori kennis van het systeem bij het verwerken van metingen heeft in het algemeen een positief effect, maar kan bij minder goed gedefinieerde systemen ook problemen opleveren. Met name de kennis omtrent de systeemruis blijkt in de praktijk bij vele toepassingen gebrekkig, zodat deze geschat moet worden. In [5] wordt gesteld dat de systeemruis in de praktijk vaak door "trial and error" wordt bepaald, hetgeen betekent dat de filterprocedure enkele malen met verschillende systeemruis wordt herhaald, tot een goed filterresultaat verkregen wordt.

In paragraaf 3.5 en 3.6 is beschreven hoe het probleem van de ruis is opgelost.

Een eigenschap van het filter waaraan het een groot deel van zijn populariteit te danken heeft is het recursieve karakter van de schattingsmethode. Dit betekent dat bij elke nieuwe schattingsstap de oude metingen in rekening worden gebracht, echter zonder deze telkens opnieuw te verwerken. Alle informatie betreffende de voorafgaande metingen is bij de recursieve methode verwerkt in de oude schatting (met

bijbehorende ruis) en een verzameling van "weegfactoren". In Appendix I is het principe van recursiviteit geïllustreerd aan de hand van een voorbeeld voor het recursief bepalen van het gemiddelde van een aantal metingen.

Het Kalmanfilter is dus uitermate geschikt voor toepassingen "in real time", bij bestuurbare processen waarvoor metingen kort na elkaar beschikbaar komen. Elke meting kan dan zeer snel sequentieel verwerkt worden tot een optimale schatting, waarna het proces (eventueel) direkt kan worden bijgestuurd. Door het recursieve karakter kunnen de oude metingen na verwerking in principe worden vernietigd.

2.2 Het filteralgorithme

In deze paragraaf wordt de lineaire filtertheorie besproken. Dit is de eenvoudigste vorm van het Kalmanfilter, met als beperking dat toepassing (slechts) mogelijk is bij lineaire modellen. Niet-lineaire filtering zal niet aan de orde komen. Bovendien is het filter beschreven in diskrete vorm (metingen komen niet continue ter beschikking, maar op diskrete tijdstippen).

De beste manier om de vergelijkingen uit te drukken is de matrix/vektor-notatie. Dit omdat er in het algemeen gewerkt wordt met vele verschillende meetpunten. Aangezien deze punten in onderlinge samenhang moeten worden beschouwd, worden zij verzameld in een vektor. Transformaties op een vektor kunnen worden toegepast via vermenigvuldiging van de vektor met een matrix: een verzameling van coëfficiënten. Zo'n vermenigvuldiging levert een nieuwe vektor op. Een voorbeeld van een (twee-dimensionale) vermenigvuldiging:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x + b y \\ c x + d y \end{bmatrix}$$

matrix vektor vektor

Er is niet gestreefd naar mathematische volledigheid.

In het volgende wordt regelmatig geproken over Gaussische processen. Dit betekent dat het proces normaal verdeeld is, en dus volledig wordt gekarakteriseerd door het gemiddelde en de standaardafwijking. Een Gaussisch proces zal als volgt genoteerd worden:
 $N[\text{gemiddelde}, \text{variantie}]$.

Voor de in het volgende gebruikte notatie geldt:

$\underline{x}(t)$: werkelijke toestand op tijdstip t
$\hat{\underline{x}}(t)$: schatting van de toestand op tijdstip t
$\underline{z}(t)$: meting op tijdstip t
$t-$: aanduiding dat het de toestand betreft net vóór het verwerken van de meting $\underline{z}(t)$
$t+$: aanduiding dat het de toestand betreft net na het verwerken van de meting $\underline{z}(t)$

Matrices zullen worden aangeduid met een hoofdletter, vektoren met een kleine letter. De vektoren zullen bovendien worden onderstreept.

Neem aan dat het beschouwde systeem door de volgende lineaire vergelijking beschreven wordt:

$$\underline{x}(t) = F(t) \underline{x}(t-1) + \underline{w}(t) \quad (2.1)$$

met: $\underline{x}(t)$ = toestandvektor op het tijdstip t .

In deze vektor zijn de te schatten grootheden verzameld.

$F(t)$ = transformatiematrix op het tijdstip t , welke de toestand op $(t-1)$ transformeert naar de toestand op t .

$\underline{w}(t)$ = systeemruisvektor op het tijdstip t .

Vergelijking (2.1) wordt de systeemvergelijking genoemd. De systeemruis $\underline{w}(t)$ bevat effecten van variabiliteit in het natuurlijke systeem en structurele modelfouten. Het ruisproces wordt Gaussisch verondersteld, met karakteristiek $\underline{w}(t) \sim N[\underline{0}, Q(t)]$.

Metingen komen vrij op diskrete tijdstippen en worden gemodelleerd met de volgende betrekking:

$$\underline{z}(t) = H(t) \underline{x}(t) + \underline{v}(t) \quad (2.2)$$

met: $\underline{z}(t)$ = meetvektor op het tijdstip t .

In deze vektor zijn de gemeten grootheden verzameld.

$\underline{x}(t)$ = toestandvektor op tijdstip t .

Zie vergelijking (2.1).

$H(t)$ = meetmatrix op tijdstip t , welke een lineaire relatie weergeeft tussen de te schatten grootheden en de gemeten grootheden.

$\underline{v}(t)$ = meetruisvektor op tijdstip t .

Vergelijking (2.2) wordt de meetvergelijking genoemd. De meetruis $\underline{v}(t)$ representeert de onzekerheid in het meetproces. Dit ruisproces wordt ook Gaussisch verondersteld: $\underline{v}(t) \sim N[\underline{0}, R(t)]$.

In (2.2) wordt de meetuitkomst $\underline{z}(t)$ geïnterpreteerd als een vervorming van de te schatten waarde $\underline{x}(t)$. Hierbij moet worden bedacht dat $\underline{x}(t)$ niet noodzakelijkerwijs direkt wordt gemeten. $\underline{z}(t)$ en $\underline{x}(t)$ kunnen betrekking hebben op totaal verschillende grootheden, waartussen echter wel een lineaire relatie moet bestaan, die is uitgedrukt in (2.2). Als $\underline{x}(t)$ direkt wordt gemeten, dan is $H(t)$ de

eenheidsmatrix.

Uit de uitdrukking voor de ruisvectoren in (2.1) en (2.2),

$$\begin{aligned} \underline{w}(t) &\sim N[\underline{0}, Q(t)] \\ \underline{v}(t) &\sim N[\underline{0}, R(t)], \end{aligned}$$

blijkt dat beide normaal verdeeld rond het gemiddelde $\underline{0}$ worden aangenomen. Dit betekent dat de ruis betrekking heeft op toevallige effecten, zonder een systematische fout. Bedacht moet worden dat het hier niet gaat om scalaire grootheden, maar om vectoren. Het gemiddelde van een vektor wordt uitgedrukt in een vektor, de variantie in een covariantie-matrix.

Als voorbeeld van een covariantie-matrix wordt het geval beschouwd van een vektor \underline{x} bestaande uit 3 elementen: x_1 , x_2 en x_3 . De vorm van de bijbehorende covariantie-matrix C is dan:

$$C = \begin{bmatrix} \text{var}(x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \text{cov}(x_1, x_3) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \text{var}(x_2) & \text{cov}(x_2, x_3) \\ \text{cov}(x_3, x_1) & \text{cov}(x_3, x_2) & \text{var}(x_3) \end{bmatrix}$$

De covariantiematrix is een maat voor de onzekerheid in \underline{x} . De varianties in de diagonaal zijn een indicatie voor de spreiding in de x_i -waarden, de covarianties zijn een maat voor lineaire afhankelijkheid tussen de x_i -waarden. Meer informatie over (co-)varianties is bij voorbeeld te vinden in [10].

De ruisvectoren $\underline{w}(t)$ en $\underline{v}(t)$ worden dus gekarakteriseerd door de nulvektor $\underline{0}$ als gemiddelde en de covariantiematrices $Q(t)$ en $R(t)$, waarin de onnauwkeurigheden tot uitdrukking komen.

Uitgaande van (2.1) en (2.2) ziet het filteralgorithme er als volgt uit:

Vóórdat meting op tijdstip t beschikbaar is:

$$\hat{\underline{x}}(t-) = F(t) \hat{\underline{x}}((t-1)+) \quad (2.4)$$

$$P(t-) = F(t) P((t-1)+) F^T(t) + Q(t) \quad (2.5)$$

In (2.4) wordt de één-staps-voorspelling gedaan: de toestand op het tijdstip t wordt met het model geschat. In (2.5) wordt de ruis bepaald, behorend bij de in (2.4) gemaakte schatting. Deze ruis is weergegeven in de covariantiematrix $P(t-)$. Uit (2.5) blijkt dat de nieuwe ruis uit twee componenten bestaat, namelijk:

$F(t) P(t+) F^T(t)$, de voortplanting van de oude ruis, en
 $Q(t)$, de extra toevoeging aan de ruis in elke voorspelstap als gevolg van de systeem ruis (onzekerheid in schatting toestand door model per tijdstap).

In Appendix II is deze structuur verduidelijkt (zie(II.27)).

Opgemerkt wordt dat bij de eerste voorspelstap beginwaarden voor $\hat{\underline{x}}(t+)$ en $P(t+)$ gekozen moeten worden. In de daaropvolgende tijdstappen worden zij gevormd door het filter.

Er wordt nu een meting op het tijdstip t uitgevoerd.
Nadat meting $\underline{z}(t)$ beschikbaar is, geldt:

$$\hat{\underline{x}}(t+) = \hat{\underline{x}}(t-) + K(t) \{ \underline{z}(t) - \hat{\underline{z}}(t) \} \quad (2.6)$$

$$P(t+) = \{ I - K(t) H(t) \} P(t-) \quad (2.7)$$

met:

$$K(t) = P(t-) H^T(t) \{ H(t) P(t-) H^T(t) + R(t) \}^{-1} \quad (2.8)$$

$$\hat{\underline{z}}(t) = H(t) \hat{\underline{x}}(t-) \quad (2.9)$$

I = eenheidsmatrix

Hierin is $\hat{\underline{x}}(t+)$ de optimale schatting van de toestand op het tijdstip t , en $P(t+)$ de bijbehorende covariantiematrix (ruis).

$\hat{\underline{z}}(t)$ is de op basis van $\hat{\underline{x}}(t-)$ verwachte waarde van de observatie. $\underline{z}(t)$ is de gedane observatie (meting).

$K(t)$ is de Kalman-matrix (eng: Gainmatrix), welke de afweging maakt tussen $\hat{\underline{z}}(t)$ en $\underline{z}(t)$, en als zodanig een grote invloed heeft op de correctie van de schatting gemaakt vóórdat de meting beschikbaar was ($\hat{\underline{x}}(t-)$).

De vergelijkingen (2.4) t/m (2.9) vormen het filter-algorithme. In Appendix II zijn enkele stappen nader toegelicht.

Dit hoofdstuk wordt besloten met een samenvatting van de aannamen en beperkingen welke verbonden zijn aan het gebruik van het beschreven filteralgorithme.

* De beschrijving is in diskrete vorm gegeven. Voor informatie over het continue filter wordt verwezen naar [4].

* Het lineaire filter is beschreven. Dit betekent dat toepassing strikt genomen slechts geldig is bij lineaire modellen. Mogelijkheden voor niet-lineaire filtering zijn beschreven in [4].

* De systeem- en meetruis zijn Gaussisch verondersteld, met gemiddelde nul. De Gaussische verdeling van de fout blijkt voor veel verschijnselen in de natuur een goede benadering te zijn. (Centrale limietstelling, zie [10]).

3. Toepassing Kalmanfilter op een- en tweelijnmodel

3.1 Inleiding

Het eenlijnmodel, ontwikkeld door Pelnard-Considerere [9], beschrijft de beweging van de kustlijn als functie van de kromming van de kust. De essentie van het model is dat veranderingen van de hoek van golfinval op een kust gepaard gaat met een verandering in zandtransport. Bij gekromde kusten zal een transportgradient langs de kust ontstaan, waardoor erosie of aanzanding zal optreden. Dit geschiedt op een zodanige wijze dat gebogen kusten de neiging hebben zichzelf te strekken.

Beperkingen van de theorie zijn:

- * Slechts de langstransport-effecten als gevolg van radiationshear-stress-gradienten zijn in het model verwerkt.
- * De kusthelling wordt constant in de tijd verondersteld (geen dwarstransport-effecten).
- * De golfcondities worden constant langs de kust verondersteld.

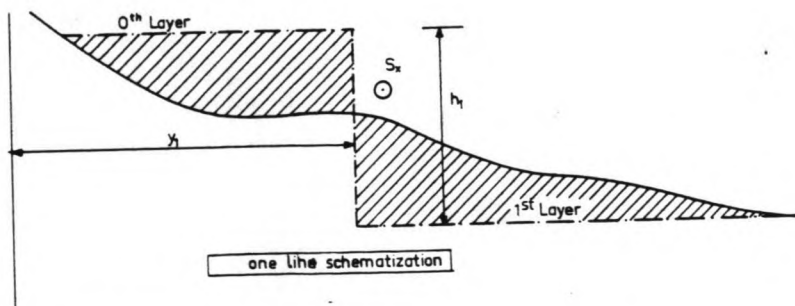
Ondanks deze beperkingen blijkt vaak een redelijke beschrijving van de grootschalige kustbeweging mogelijk met dit model. Een feit is dat op het ogenblik langs de Hollandse kust de tendens is waar te nemen dat holle kusten aanzanden en bolle eroderen, hetgeen duidt op een relatie tussen kustlijnkromming en kustlijnverandering.

Het eenlijnmodel wordt wiskundig uitgedrukt in de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{s}{h} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

- met: s = kustconstante [m³/jaar]
 h = hoogte waarover de
kustverandering plaats vindt [m]
 x = afstand langs de kust [m]
 y = gemiddelde ligging van de kust
over de hoogte h [m]

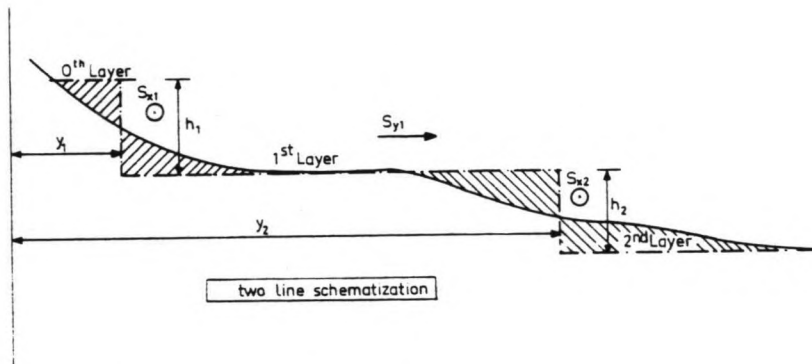
Zie figuur 3.1.



Figuur 3.1
Eenlijnschematisering kustprofiel.
Bron [12].

y is de geschematiseerde kustlijn, waarvan de beweging wordt bestudeerd. De kustconstante s bepaalt in welke mate de kust reageert op krommingen. Voor een goede voorspelling van het gedrag van de kust met behulp van het eenlijnmodel is een juiste waarde van de kustconstante s uiteraard van groot belang.

Een uitbreiding van het eenlijnmodel is het tweelinmodel, zie [1]. Hierbij wordt de kust geschematiseerd door middel van twee lijnen, zie figuur 3.2.



Figuur 3.2
Tweelijnscematisering kustprofiel.
Bron [12].

Voor het langstransport gelden voor beide lijnen dezelfde aannamen als gemaakt bij de eenlijntheorie van Pelnard-Considerere. Bij de tweelintheorie wordt echter wél rekening gehouden met dwarstransport van de ene zone naar de andere. Dit dwarstransport wordt als volgt geschematiseerd:

$$S_y = s_y \{ W - (y_2 - y_1) \} \quad (3.2)$$

met: S_y = dwarstransport [m²/jaar]
 s_y = dwarstransportcoëfficiënt [m/jaar]
 W = evenwichtsafstand, de afstand $(y_2 - y_1)$ die behoort bij de onder de bestaande condities behorende evenwichtshelling [m]
 y_1 = gemiddelde ligging van de kust over de hoogte h_1 [m]
 y_2 = gemiddelde ligging van de kust over de hoogte h_2 [m]

De filosofie achter deze dwarstransportformule is dat er offshore transport optreedt als de afstand $(y_2 - y_1)$ kleiner is dan een zekere evenwichtsafstand W (profiel te steil), en een onshore transport als $(y_2 - y_1)$ groter is dan W (profiel te flauw).

Onder de voorwaarde dat geen dwarstransport plaats vindt

in of uit de zone (h_1+h_2) , kan de beweging van de lijnen door de volgende differentiaalvergelijking beschreven worden.

$$h_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} - s_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + s_y \{ W - (y_2 - y_1) \} = 0 \quad (3.3)$$

$$h_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} - s_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - s_y \{ W - (y_2 - y_1) \} = 0$$

De in (3.3) voorkomende coëfficiënten s_1 en s_2 kunnen worden vergeleken met de in (3.1) voorkomende kustconstante. s_1 en s_2 worden de langstransportcoëfficiënten genoemd.

Voor een goede voorspelling van de beweging van de lijnen in het tweelinmodel zijn juiste waarden van de coëfficiënten s_1 , s_2 , s_y en W uiteraard van groot belang.

3.2. Diskretisering van de differentiaalvergelijkingen

Voor een numerieke behandeling zullen de differentiaalvergelijkingen (3.1) en (3.3) gediskretiseerd worden.

Voor het eenlijnmodel (3.1) is gewerkt met het numerieke schema:

$$y_i(j+1) = \left(1 - 2 \frac{s \Delta t}{h \Delta x^2}\right) y_i(j) + \frac{s \Delta t}{h \Delta x^2} \{ y_{i+1}(j) + y_{i-1}(j) \} \quad (3.4)$$

met: i = punt langs kust
 j = tijdstipaanwijzing: $t = j \cdot \Delta t$
 Δx = stapgrootte langs kust
 Δt = grootte tijdstap

Voor de stabiliteit van dit expliciete schema is het criterium van Von Neumann beschouwd, hetgeen als eis oplevert:

$$\frac{s \Delta t}{2 h \Delta x^2} \leq 1 \quad (3.5)$$

Voor Δt wordt het meetinterval aangehouden, zodat voor Δx zal moeten gelden:

$$\Delta x \geq \sqrt{2 \frac{s}{h \Delta t}} \quad (3.6)$$

De differentiaalvergelijkingen voor het tweelinmodel (3.3) zijn omgezet in het expliciete schema:

$$\begin{aligned}
 y1_i(j+1) &= \left\{ 1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{s1}{h1} - \Delta t \frac{sy}{h1} \right\} y1_i(j) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{s1}{h1} \left\{ y1_{i-1}(j) + y1_{i+1}(j) \right\} + \\
 &+ \Delta t \frac{sy}{h1} y2_i(j) - \Delta t \frac{sy}{h1} W
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 y2_i(j+1) &= \left\{ 1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{s2}{h2} - \Delta t \frac{sy}{h2} \right\} y2_i(j) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{s2}{h2} \left\{ y2_{i-1}(j) + y2_{i+1}(j) \right\} + \\
 &+ \Delta t \frac{sy}{h2} y1_i(j) + \Delta t \frac{sy}{h2} W
 \end{aligned}$$

Voor de stabiliteit van dit schema wordt hetzelfde criterium verondersteld als voor schema (3.4)

3.3 Opzet filtering

In deze paragraaf zal worden uiteengezet hoe de filtering zal plaats vinden. Gegeven het feit dat een meetreeks beschikbaar is voor de y , $y1$ en $y2$ -waarden, en gegeven de modellen (3.4) en (3.7) zijn er drie methoden om de filtering uit te voeren. Deze methoden worden besproken met het tweelijmodel (3.7) als uitgangspunt.

Mogelijkheid 1.

 $y1$ en $y2$ vormen de toestandvector in de systeemvergelijking (2.1) (voor elke raai een $y1$ en $y2$ -waarde), hetgeen betekent dat $y1$ en $y2$ worden geschat ("gefilterd").

Deze toepassing is geschikt voor gevallen waar men de beschikking heeft over metingen maar - in de wetenschap dat deze met een meetfout behept zijn - behoefte heeft aan een meer nauwkeurige schatting van de werkelijke toestand op de gemeten tijdstippen. Dit is vooral nuttig bij de reeds

eerder genoemde toepassingen "in real time", waar het recursieve karakter van het filter het mogelijk maakt om de snel na elkaar binnenkomende metingen effectief te verwerken. Gedacht kan bij voorbeeld worden aan radarsystemen. De via filtering nauwkeuriger gemaakte meetuitkomsten kunnen nu beter worden geïnterpreteerd, hetgeen beslissingen over eventuele bijsturing van het proces kan versnellen (afwijkingen van een uitgestippelde baan kunnen bij voorbeeld met grotere zekerheid worden vastgesteld).

Bij dit soort toepassingen is het doel het bewerken van beschikbaar komende metingen. De interesse gaat dan uit naar het heden, niet naar de toekomst. Uit de in hoofdstuk 1 geformuleerde doelstelling volgt echter dat de nadruk van deze studie op de toekomst ligt, en met name op de rol die bestaande theorieën spelen bij het voorspellen van die toekomst.

Mogelijkheid 2. ,

De toestandvector in de systeemvergelijking wordt gevormd door de modelcoëfficiënten s_1 , s_2 en s_y . Dat betekent dat deze coëfficiënten worden geschat. (Het zou wenselijk zijn om ook W te filteren, maar zoals later zal worden toegelicht is dit niet mogelijk met het lineaire filter).

Dit soort toepassing is nuttig indien men de beschikking heeft over een model waarin de coëfficiënten niet goed bekend zijn, of waarvan wordt verwacht dat de coëfficiënten in de tijd veranderen. Bij het vrijkomen van nieuwe metingen wordt het model nu automatisch bijgesteld.

Deze toepassing is voor de onderhavige studie wel van belang. Door het model te filteren met in het verleden gedane metingen kan worden bestudeerd in hoeverre de modelconstanten inderdaad constant zijn. Als blijkt dat zij veranderen in de tijd, dan kan de voorspelling worden uitgevoerd met de coëfficiëntwaarde die, op het tijdstip van de laatst beschikbare meting, door het filter het meest "up to date" wordt geacht. De recursiviteit van de methode maakt dat het toevoegen van nieuwe metingen op effectieve wijze geschiedt.

Mogelijkheid 3.

De toestandvector in de systeemvergelijking wordt gevormd door zowel y_1 en y_2 als door s_1 , s_2 en s_y . De kustlijnwaarden en de modelcoëfficiënten worden nu simultaan geschat. Hierdoor wordt het model echter niet-lineair, waardoor toepassing van de niet-lineaire filtertheorie noodzakelijk zal zijn. Aangezien de procedure hierdoor aanzienlijk ingewikkelder wordt, is het niet verstandig om hiertoe over te gaan, vóórdat de mogelijkheden van het lineaire filter zijn bestudeerd. Deze methode vervalt dus.

Uit de voorgaande overwegingen blijkt dat methode 2 het meest geschikt is om de voorspelkracht van bestaande modellen te bestuderen.

Van het eenlijnmodel zal de coëfficiënt s worden gefilterd aan de hand van beschikbare metingen van y . Van het tweelynmodel zullen de coëfficiënten s_1 , s_2 en s_y worden gefilterd aan de hand van beschikbare metingen van y_1 en y_2 .

Voor de duidelijkheid wordt gewezen op het verschil tussen filteren en voorspellen.

Van filteren is sprake als een schatting van de toestand plaats vindt op het laatste tijdstip van meten. Voorspellen is het schatten van de toestand op een willekeurig tijdstip na de laatst beschikbare meting. Dit betekent dat de filterprocedure nooit verder kan worden doorgevoerd dan het heden (er zijn immers metingen voor nodig).

De winst van het gebruik van een filter bij het doen van voorspellingen is dus beperkt en bestaat uit een beter inzicht in het gedrag van modelcoëfficiënten. Als de coëfficiënten tijdens het filteren naar constante waarden convergeren, dan zijn dit de waarden die het best bij de metingen aansluiten. Als de coëfficiënten een structureel tijdsafhankelijk gedrag vertonen, dan zal men hiermee rekening moeten houden bij het maken van een verantwoorde voorspelling, of men zal het model moeten verwerpen.

Bij het simultaan filteren (zie mogelijkheid 3) kan daarnaast nog een betere begintoestand voor de voorspelling worden verkregen (in dit geval bestaande uit een set y of y_1 en y_2 -waarden).

3.4. De systeem- en meetvergelijkingen

In deze paragraaf zullen de systeem- en meetvergelijking worden geformuleerd voor het eenlijn- en tweelijnmodel.

3.4.1. Het eenlijnmodel

De systeemvergelijking

De toestandvektor in de systeemvergelijking (2.1) wordt gevormd door de te filteren grootheden, in dit geval slechts de kustconstante s . Aangezien het tijdsafhankelijk gedrag van deze kust"constante" zal worden beschouwd, zal deze in het vervolg als een tijdsafhankelijke grootheid worden geschreven: $s(t)$. Er is echter geen model beschikbaar waarmee $s(t)$ bepaald wordt uit $s(t-1)$. In zo'n geval wordt gewerkt met de volgende systeemvergelijking:

$$s(t) = s(t-1) + w(t) \quad (3.8)$$

met: $w(t)$ = de systeemruis, in dit geval de variantie van $s(t)$.

De transformatiematrix $F(t)$ is hier de eenheidsmatrix. Door het toevoegen van de ruis $w(t)$ wordt aan $s(t)$ een random karakter toegekend, waardoor het filter in staat is om bij elke tijdstap de waarde van de coëfficiënt bij te stellen.

Aanname is dat de ruis Gaussisch is: $w(t) \sim N[0, \text{var}\{s(t)\}]$. De variantie $\text{var}\{s(t)\}$ moet door de filterontwerper worden geschat (het is een deel van de benodigde a-priori kennis). Hierop zal nader worden ingegaan in paragraaf 3.5.

Bij de berekening is de systeemvergelijking als volgt genoteerd:

$$\begin{bmatrix} s \\ l \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} s \\ l \end{bmatrix}_{t-1} + \underline{w}$$

met ruis: $\underline{w} \sim N[0, Q]$

$$\text{waarin } Q = \begin{bmatrix} \text{var}\{s(t)\} & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{bmatrix}$$

Opmerkingen:

* De toevoeging van de component l aan de toestandvektor blijkt noodzakelijk voor het opstellen van de meetvergelijking (welke later in deze paragraaf wordt besproken). De toestandvektor komt voor in zowel de systeem- als de meetvergelijking, en moet in beide van dezelfde vorm zijn.

* De transformatiematrix $F(t)$ (zie (2.1)) is voor alle tijdstippen gelijk aan de eenheidsmatrix (en is dus constant).

* Bij de systeemruisvektor \underline{w} is de tijdsaanduiding t komen te vervallen: \underline{w} wordt constant in de tijd aangenomen.

* In de covariantiematrix Q is voor de variantie van de component l een zeer kleine waarde gekozen. Daardoor zal deze component constant zijn in de tijd (random karakter verwaarloosbaar). De covariantie van $s(t)$ en l is uiteraard 0: zij zijn onafhankelijk.

De meetvergelijking

Bij het opstellen van de meetvergelijking (2.2) moet worden bedacht dat geen metingen beschikbaar zijn van de coëfficiënt $s(t)$.

In paragraaf 3.5 is beschreven hoe jaarlijkse kustmetingen kunnen worden omgezet in lijnwaarden, waardoor men de beschikking krijgt over "gemeten" kustlijnwaarden. De meetvektor $\underline{z}(t)$ in (2.2) zal dus betrekking hebben op de kustlijn. De toestandvektor moet gelijk zijn aan die in (3.9), en heeft dus betrekking op de modelcoëfficiënt.

Vergelijking (3.4) wordt nu enigszins herschreven tot

$$\begin{aligned} y_i(j+1) &= \\ &= y_i(j) + \frac{1}{h} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [y_{i-1}(j) - 2 y_i(j) + y_{i+1}(j)] \{ s \} \end{aligned}$$

(3.10a)

Vergelijking (3.10a) vormt een lineaire relatie tussen de y -waarde op het tijdstip t (de gemeten grootte) en de kustconstante $s(t)$ (de te schatten grootte). Deze lineaire relatie wordt gevormd door de gemeten y -waarden op het tijdstip j , welke bekend zijn.

Wordt gesteld : $H' = \frac{l \Delta t}{h \Delta x^2} [y_{i-1}(j) - 2 y_i(j) + y_{i+1}(j)]$,

dan kan (3.10a) worden herschreven als

$$y_i(j+1) = y_i(j) \cdot l + H' \cdot s \quad (3.10b)$$

Door nu de componenten l en s in een vektor te zetten, kan de meetvergelijking als volgt worden samengesteld (nu weergegeven voor een stelsel van n raaien (l t/m n)) :

Definieer: $A = \Delta t / (\Delta x^2 h)$

dan kan de meetvergelijking als volgt worden geschreven

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} A (y_1 - 2 y_2 + y_3) & y_2 \\ A (y_2 - 2 y_3 + y_4) & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ A (y_{n-2} - 2 y_{n-1} + y_n) & y_{n-1} \end{bmatrix}_{t-1} \begin{bmatrix} s \\ l \end{bmatrix}_t + \underline{v}$$

(3.11)

met ruis: $\underline{v} \sim N[0, R]$

$$\text{waarin } R = \begin{bmatrix} \text{var}(y_2) & & & 0 \\ & \text{var}(y_3) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \text{var}(y_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Opmerkingen:

- * Uit de schrijfwijze (3.10b) volgt de noodzaak voor het toevoegen van de component l aan de toestandvektor.
- * Bij de meetruisvektor \underline{v} is de tijdsaanduiding t weggelaten: \underline{v} wordt constant in de tijd aangenomen.
- * De covariantiematrix R is een diagonaalmatrix, hetgeen betekent dat de metingen onderling onafhankelijk zijn aangenomen. Aan de meetvariantie wordt in paragraaf 3.5 en 3.6 aandacht geschonken.

Er hoeven geen aannamen te worden gedaan omtrent de randvoorwaarden, aangezien voor de randwaarden, evenals de tussenliggende waarden de metingen worden gebruikt (zie de meetmatrix $H(t)$ in (3.11)). De metingen in de twee

buitenste raaien vormen dus de randvoorwaarden. De twee buitenste raaien komen hierdoor niet in de meetvektor voor.

Een ander aspekt is dat in deze vorm van de meetvergelijking twee foutbronnen onscheidbaar met elkaar verweven zijn, namelijk de onnauwkeurigheid van het eenlijnmodel en de meetfout. Beide komen nu tot uitdrukking in de meetruis \underline{y} . Dit heeft als gevolg dat de meetvariantie van de twee buitenste raaien ($\text{var}(y_1)$ en $\text{var}(y_4)$), alhoewel zij niet direkt in de covariantiematrix R verschijnen, tóch hun invloed hebben op deze matrix. Aan dit aspekt wordt in paragraaf 3.6 aandacht besteed.

3.4.2. Het tweelijnmodel

Voor het tweelijnmodel geldt een beschouwing analoog aan die in paragraaf 3.4.1. Dit leidt tot de volgende systeem- en meetvergelijking.

De systeemvergelijking

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_y \\ 1 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_y \\ 1 \end{bmatrix}_{t-1} + \underline{w} \quad (3.12)$$

met ruis: $\underline{w} \sim N[0, Q]$

$$\text{waarin } Q = \begin{bmatrix} \text{var}(s_1) & & & \\ & \text{var}(s_2) & & \\ & & \text{var}(s_y) & \\ & & & 1/\omega \end{bmatrix}$$

(analoog aan (3.9))

De meetvergelijking

Wordt gedefinieerd: $A1 = \Delta t / (\Delta x^2 h1)$
 $A2 = \Delta t / (\Delta x^2 h2)$
 $B1 = \Delta t / h1$
 $B2 = \Delta t / h2$

dan kan de meetvergelijking als volgt uitgeschreven worden:

$$\begin{bmatrix} y1_2 \\ y2_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y1_{n-1} \\ y2_{n-1} \end{bmatrix}_t =$$

$$\begin{bmatrix} A1 (y1_1 - 2y1_2 + y1_3) & 0 & B1 (-y1_2 + y2_2 - W) & y1_2 \\ 0 & A2 (y2_1 - 2y2_2 + y2_3) & B1 (-y2_2 + y1_2 + W) & y2_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A1 (y1_{n-2} - 2y1_{n-1} + y1_n) & 0 & B1 (-y1_{n-1} + y2_{n-1} - W) & y1_{n-1} \\ 0 & A2 (y2_{n-2} - 2y2_{n-1} + y2_n) & B1 (-y2_{n-1} + y1_{n-1} + W) & y2_{n-1} \end{bmatrix}_{t-1} \begin{bmatrix} s1 \\ s2 \\ sy \\ l \end{bmatrix}_t + \underline{v}$$

met ruis: $\underline{v} \sim N(0, R)$

waarin $R =$

$$\begin{bmatrix} \text{var}(y1_2) & & & & & & & & \\ & \text{var}(y2_2) & & & & & & & 0 \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & \\ & 0 & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & \text{var}(y1_{n-1}) & & \\ & & & & & & & \text{var}(y2_{n-1}) & \end{bmatrix}$$

Opgemerkt wordt dat de modelcoëfficiënt W niet wordt gefilterd. Voor het filteren van zowel y als W zou de niet-lineaire filtertheorie moeten worden toegepast (het model is dan niet meer lineair). Aangezien de huidige studie zich beperkt tot het lineaire Kalmanfilter, zal W (de evenwichtsafstand) worden geschat uit de metingen, en y worden gefilterd. Ook zal worden beschouwd wat het effect op y is van een iets kleiner, resp. groter gekozen waarde van W .

3.5. De systeem- en meetruis

De systeemruis w geeft de onzekere modelcoëfficiënten een random karakter. De ruis geldt als input voor het filter, en moet dus bekend zijn of geschat worden. De grootte van de ruis w is afhankelijk van:

1. De onzekerheid in de beginschatting van de modelcoëfficiënt. Deze wordt sterk bepaald door wat reeds bekend is uit ander onderzoek.
2. De verwachting omtrent (structureel) tijdsafhankelijk gedrag van de coëfficiënt. Bij een te klein gekozen variantie zal het filter te veel tijdstappen nodig hebben om de coëfficiënt naar de juiste waarde te laten convergeren.

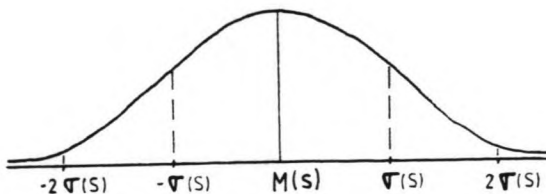
Benadrukt wordt dat de variantie, waarin de Gaussisch veronderstelde ruis wordt uitgedrukt, geen absolute grens stelt aan de variatie van de coëfficiënt. De variantie is een indicatie voor de waarschijnlijkheid dat de coëfficiëntwaarde binnen een bepaalde bandbreedte rond de schatting ligt.

Wordt bij voorbeeld de Gaussische variabele s gekarakteriseerd door het gemiddelde $M(s)$ en de variantie $\text{Var}(s)$, dan betekent dit:

- * Een waarschijnlijkheid van 0.68 (68%) dat s minder dan $\sqrt{\text{Var}(s)}$ van $M(s)$ afwijkt, en
- * Een waarschijnlijkheid van 0.95 (95%) dat s minder dan $2\sqrt{\text{Var}(s)}$ van $M(s)$ afwijkt, etc..... Zie figuur 3.3.

$$\sigma(s) = \sqrt{\text{var}(s)}$$

(standaardafwijking)



Figuur 3.3
Normale verdeling van s .

De meetruis v heeft betrekking op de kustlijnwaarden. In dit geval kan deze ruis opgedeeld worden gedacht in twee componenten:

1. Meetfouten in het meetproces zelf (niet-perfekte metingen).
2. Variaties in de lijnwaarden als gevolg van niet door het lijnmodel beschreven (fysische) verschijnselen.

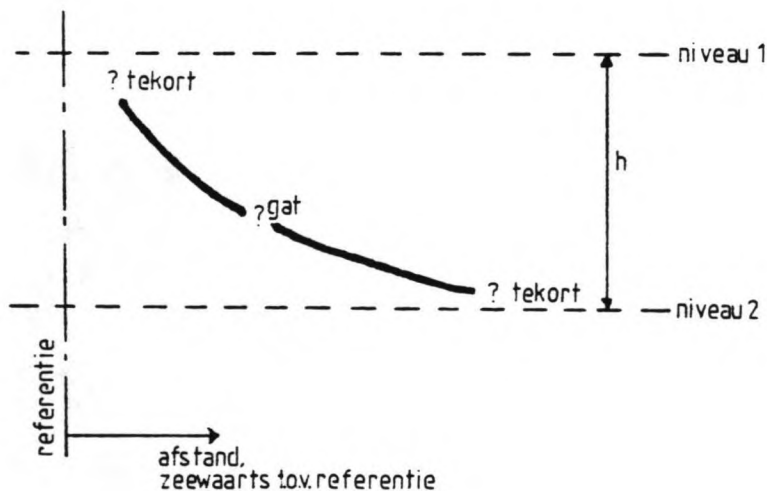
Deze componenten zullen afzonderlijk worden besproken.

1. Meetfouten in het meetproces.

De gebruikte metingen zijn afkomstig uit het Jarkusbestand van de Rijkswaterstaat. Jaarlijks worden in een vast raaienstelsel metingen uitgevoerd van de kust, lopend van ongeveer 800m zeewaarts (ten opzichte van de gemiddelde waterlijn) tot in de duinen. Uiteraard worden deze metingen in den natte (diepte-metingen) op andere wijze uitgevoerd als op het droge (hoogte-metingen). In de meeste gevallen slaagt men er in een zekere overlap te verkrijgen tussen hoogte- en dieptemetingen. Soms echter ontstaan "gaten" tussen de hoogte- en dieptemetingen in een raai. Deze gaten zullen dus in het algemeen in de buurt van de waterlijn liggen.

Ook komt het voor dat niet ver genoeg zeewaarts of landwaarts wordt doorgemeten. De leemten die hierdoor ontstaan worden in het vervolg "tekorten" genoemd.

Het probleem dat door de aanwezigheid van de gaten en tekorten ontstaat bij het schematiseren van een gemeten profiel door middel van een lijn is in figuur 3.4 geïllustreerd.



Figuur 3.4
"Gaten" en "tekorten" in gemeten profielen.

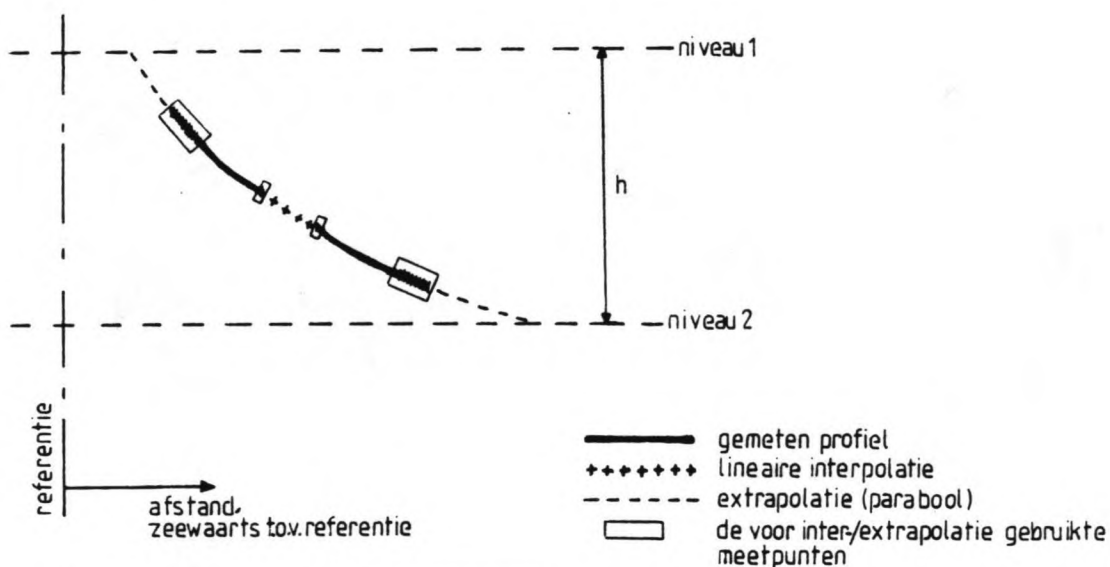
Het dilemma dat optreedt is dat de lijnschematiseringen pas een relevante betekenis hebben als het hoogste en laagste niveau op zodanige hoogte worden gekozen dat het dwarstransport aldaar van verwaarloosbare betekenis mag worden verondersteld. Er moet een compromis worden gevonden

tussen een zo groot mogelijke totale laagdikte h in verband met de fysische betekenis, en een praktische beperking van h als gevolg van de beschikbare metingen. Aangezien fysische relevantie uiteraard voorop staat, zal aan enige interpolatie binnen de gaten en extrapolatie over de tekorten niet worden ontkomen.

Afgezien is van de oplossing om het gehele profiel te schematiseren met bijvoorbeeld een parabool. Het schematiseren van een profiel door middel van een parabool die overal de helling nauwkeurig weergeeft is op zich een gecompliceerde zaak, terwijl deze plaatselijke helling bij extrapolatie juist van groot belang is. Bovendien zouden bij deze oplossing ook de raaien die wél volledig gemeten zijn door middel van een parabool moeten worden geschematiseerd.

De voorkeur is gegeven aan een oplossing waarbij zoveel mogelijk gebruik wordt gemaakt van de aanwezige metingen, en waarbij het profiel slechts plaatselijk, dat wil zeggen in de gaten en de tekorten, wordt geschematiseerd. Over de gaten is rechtlijnig geïnterpoleerd: $z = p_1 \cdot y + p_2$. De extrapolatie over de tekorten is geschied met een parabool: $z = p_1 \sqrt{y} + p_2$, waarbij de 10 dichtst bij het tekort liggende meetcijfers zijn gebruikt voor het bepalen van de coëfficiënten p_1 en p_2 (10 meetcijfers komt overeen met 100m breedte van het profiel). Voor de curve-fitting van genoemde parabool is de kleinste kwadraten methode gebruikt.

Op deze wijze worden de gemeten bodemwaarden zo eerlijk mogelijk benut, en vindt op eenvoudige wijze extrapolatie plaats die lokaal goed aansluit op het gemeten profiel. Het principe van het completeren van het profiel is in figuur 3.5 weergegeven.



Figuur 3.5

Principeschets bij completeren onvolledig gemeten profielen.

Opmerkingen:

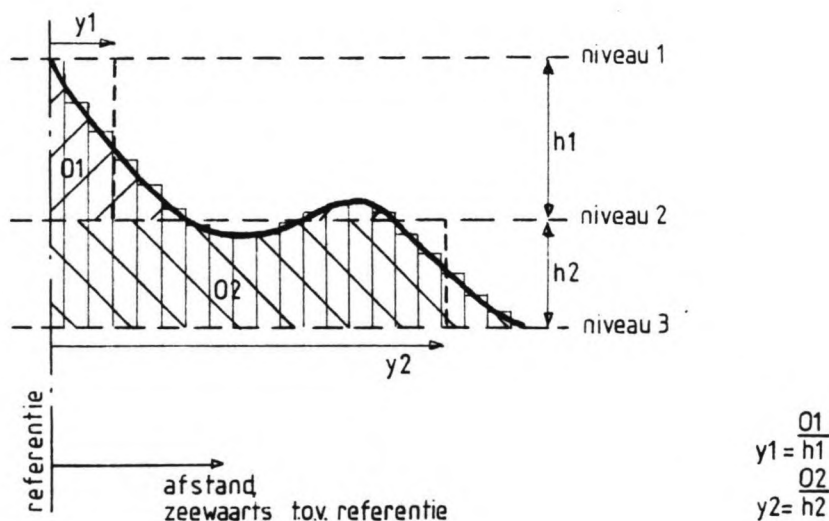
* In veel jaar/raai-combinaties is geen inter- of

extrapolatie noodzakelijk. Het hoogste en laagste niveau zijn zodanig gekozen dat in de meeste gevallen de beschikbare metingen voldoende ver doorlopen.

* Aangezien de leemten in het algemeen over groepen van naast elkaar liggende raaien optreden, is interpolatie tussen de twee naastliggende raaien geen geschikte oplossing.

* Bij de Rijkswaterstaat wordt op het moment de mogelijkheid onderzocht om dit soort gaten op nette wijze te dichten, en de gecompleteerde profielen op te slaan in een apart werkbestand. Dat maakt het werken met een ad-hoc oplossing, zoals hiervóór beschreven overbodig.

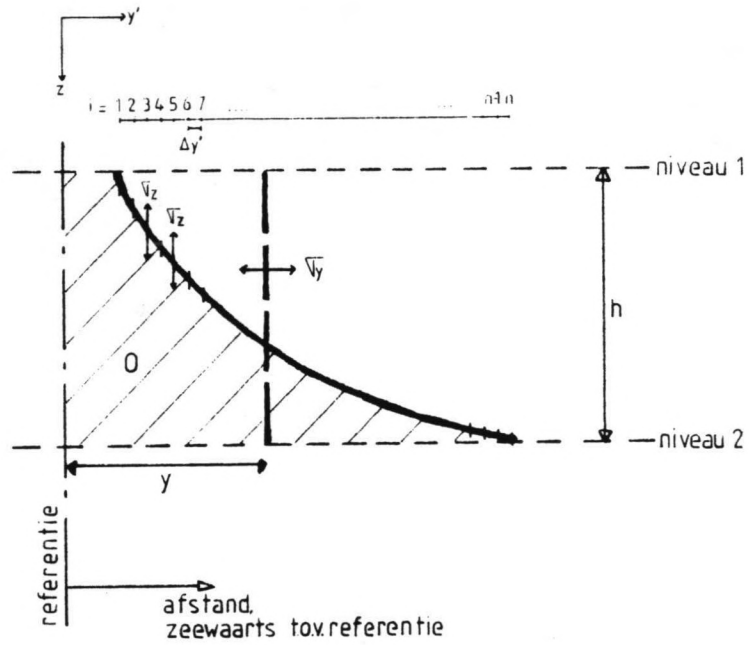
Nadat het profiel op de beschreven wijze volledig is gemaakt, wordt de "gemeten" lijnwaarde bepaald door het volume aan zand aanwezig in de beschouwde laag te delen door de laaghoogte. Het principe is in figuur 3.6 weergegeven voor een tweelijnschematisering.



Figuur 3.6
Principeschets bij bepalen van gemeten lijnwaarden.

De meetfout die ontstaat als gevolg van de inter- en extrapolaties is moeilijk te schatten.

Bovendien moet rekening worden gehouden met de stochastische meetfout. De metingen zijn immers altijd behept met (toevallige) fouten, omdat een perfecte meetmethode niet bestaat. Een complicatie bij het schatten van deze meetfout is dat de verticale bodemligging wordt gemeten, terwijl de interesse uitgaat naar de meetfout in de daaruit afgeleide lijnwaarden. De verticale varianties in de bodemmetingen moeten worden omgezet in een horizontale variantie in de lijnwaarde. Zie figuur 3.7.



- O = oppervlak zand in raai binnen de beschouwde laag (m^2)
 σ_z = standaardafwijking bodemmetingen
 σ_y = standaardafwijking lijnwaarde

Figuur 3.7

Stochastische meetfout in bodemmetingen resulteert in stochastische meetfout in lijnwaarden.

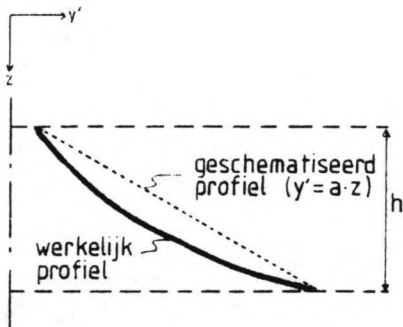
In het volgende wordt deze fout geschat, waarbij de (vertikale) meetfouten in elk punt van de bodem als onderling onafhankelijk zijn aangenomen.

De lijnwaarde y is als volgt bepaald:

$$y = \frac{O}{h} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y'_i z_i}{h}$$

waarin: h = laagdikte.
 O = oppervlakte aan zand in de raai binnen de beschouwde laagdikte h .
 n = aantal bodemmetingen binnen de beschouwde laag.
 $\Delta y'$ = de stapgrootte binnen de raai waarover metingen zijn verricht.
 z_i = de bodemhoogte, ten opzichte van het i onderste niveau van de beschouwde laag.

Het aantal bodemmetingen n wordt bepaald via een globale schatting van de gemiddelde profielhelling in de beschouwde laag, waarbij het profiel rechtlijnig wordt gedacht, zie figuur 3.8.



Figuur 3.8
 Vereenvoudiging profiel bij afschatten meetfout.

$y' = a z$, waarin a = gemiddelde helling

ofwel: $n \Delta y' = a h$, waaruit volgt: $n = (a h) / \Delta y'$

Uit $y = \sum_{i=1}^n (\Delta y'_i / h) z_i$ volgt volgens [10]:

$$\text{var}(y) = \sum_{i=1}^n (\Delta y'_i / h)^2 \text{var}(z_i)$$

Hierbij is er van uitgegaan dat de meetfouten onderling

onafhankelijk zijn. Voor het stochastische deel van de fout is dat een gerechtvaardigde aanname. Er kan echter in werkelijkheid wel enige afhankelijkheid optreden door meetfouten van systematische aard. Deze systematische fouten kunnen niet worden geelimineerd, aangezien uit het meetbestand niet valt op te maken waar, wanneer en in welke richting deze fouten eventueel zijn opgetreden.

In dit geval is $\text{var}(z_i)$ voor alle i gelijk gesteld:

$\text{var}(z_i) = \text{var}(z)$ voor alle i , dus:

$$\left. \begin{array}{l} \text{var}(y) = n (\Delta y'/h)^2 \text{var}(z) \\ \text{met } n = (a h) / \Delta y' \end{array} \right\} \text{var}(y) = \{(a \Delta y')/h\} \text{var}(z)$$

Dit betekent dat de variantie in de gemeten lijnwaarde $\text{var}(y)$ groter is naarmate de helling en/of laagdikte kleiner wordt (kleine helling betekent grote a).

Aangezien $\Delta y' = 10 \text{ m}$
en $\text{var}(z) = 0.01 \text{ m}^2$,

kan de variantie $\text{var}(y)$ eenvoudig worden geschat met:

$$\text{var}(y) = \frac{0.1 a}{h} \quad [\text{m}^2] \quad (3.14)$$

De tweede component van de meetfout wordt gevormd door

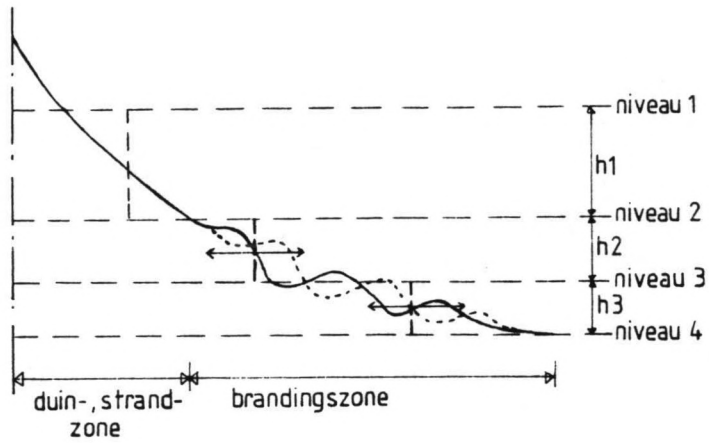
2. Fluctuaties met fysische achtergrond

Gedoeld wordt op die fluctuaties in de kustlijnbeving die niet door de lijnmodellen beschreven worden, maar wél in de gemeten lijnwaarden tot uitdrukking komen. De coëfficiënten moeten niet op deze variaties reageren, en dus moeten deze kortperiodieke effecten als ruis worden geïnterpreteerd.

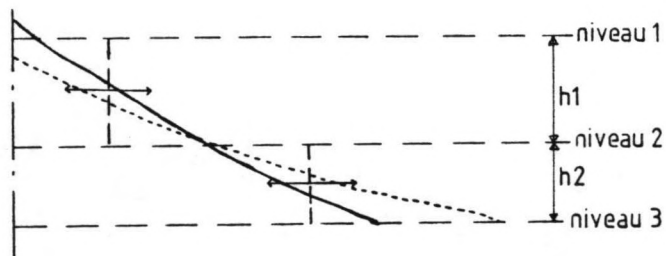
Bij toepassing van een meerderelijnschematisering op een kust, waarbij de brandingszone in twee (of meer) lagen wordt opgedeeld, kunnen bewegende brandingsruggen aanzienlijke schommelingen in de kustlijn veroorzaken. In [11] is getracht de orde van grootte van deze schommelingen te bepalen. Daaruit blijkt onder meer dat de periode van deze fluctuaties klein is (in de orde van 4 a 5 jaar). Bij een bemonsteringsinterval van één jaar betekent dit dat het verschijnsel op het oog op een stochastische ruis lijkt.

Een ander verschijnsel dat in de gemeten lijnen doorwerkt, maar niet direkt betrekking heeft op lijnmodellen, is het effect van stormen. Door stormen kunnen grote hoeveelheden zand tijdelijk van het duin naar de vooroever verdwijnen. Dit zand wordt op den duur weer terug naar de duinen verplaatst.

Het effect van brandingsruggen en stormen treedt uiteraard niet op als het profielgedeelte waarbinnen zich de zandverplaatsingen afspelen in één laag wordt geschematiseerd. Dit wordt verduidelijkt in figuur 3.9.



BEWEGENDE BRANDINGSRUGGEN (3-lijn model)



STORMEN (2-lijnmodel)

Figuur 3.9

Mogelijk effect van min of meer periodieke verschijnselen op gemeten lijnwaarden.

3.6 Schatting van de meetruis

Uit paragraaf 3.5 volgt dat de meetruis een onzekere faktor is, waarvan de statistische gegevens niet exact bekend zijn en zelfs moeilijk zijn te schatten.

Daarnaast treedt het in paragraaf 3.4 zijdelings genoemde probleem op van een moeilijk scheidbare combinatie van model- en meetfout, die nu beide in de meetruis \underline{v} verwerkt zijn. Dit probleem zal worden toegelicht aan de hand van de algemene vorm van de meetvergelijking (2.2), toegepast op een tweedimensionaal geval.

Als de te schatten toestand \underline{x} direkt wordt bemeaten, dan geldt voor de meetbetrekking:

$$\begin{bmatrix} z1 \\ z2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} z1-x1 \\ z2-x2 \end{bmatrix}_t \quad (3.15)$$

wat is te schrijven als

$$\begin{bmatrix} z1 \\ z2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} z1-x1 \\ z2-x2 \end{bmatrix}_t \quad (3.16)$$

Uit (3.16) volgt dat de meetmatrix $H(t)$ in dit geval gelijk is aan de eenheidsmatrix. De eerste term van het rechter lid geeft aan dat de grootheid die gemeten wordt dezelfde is als de grootheid die geschat wordt. Het is een relatie tussen de meetuitkomst $\underline{z}(t)$ en de werkelijke waarde $\underline{x}(t)$. Deze relatie bezit echter een onnauwkeurigheid: in $\underline{z}(t)$ zit een meetfout, waardoor $\underline{z}(t)$ en $\underline{x}(t)$ niet exact gelijk zullen zijn. Dit verschil is uitgedrukt in de tweede term van het rechter lid.

Uiteraard is dit verschil niet exact bekend op elk tijdstip. Was dit wél het geval, dan zou de (onbekende !) werkelijke waarde van $\underline{x}(t)$ direkt uit de metingen kunnen worden afgeleid. Men heeft echter wel vaak kennis van de statistische eigenschappen van de fout. In hoofdstuk 2 werd reeds vermeld dat het Kalman filter slechts toepasbaar is bij processen waar de fout een normale verdeling bezit, met gemiddelde nul (d.w.z. dat met eventuele systematische fouten geen rekening wordt gehouden). De enige te bepalen karakteristiek blijft dan de variantie R van de fout $\underline{\tilde{z}} = \underline{z} - \underline{x}$. De variantie van een vektor is gelijk aan de verwachtingswaarde van het uitwendig produkt van die vektor (zie [4]), waaruit de covariantiematrix ontstaat:

$$R = \begin{bmatrix} \text{var}\{\tilde{z}1\} & \text{cov}\{\tilde{z}1\tilde{z}2\} \\ \text{cov}\{\tilde{z}1\tilde{z}2\} & \text{var}\{\tilde{z}2\} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Aangezien het om toevallige fouten gaat, zullen deze in het algemeen onafhankelijk zijn van elkaar. Aangenomen wordt daarom: $\text{cov}\{\tilde{z}1\tilde{z}2\} = \text{cov}\{\tilde{z}2\tilde{z}1\} = 0$, zodat

$$R = \begin{bmatrix} \text{var}\{\tilde{z}1\} & 0 \\ 0 & \text{var}\{\tilde{z}2\} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Samenvattend kan gesteld worden dat de relatie $\underline{z}(t) = \underline{x}(t)$ in (3.15) slechts verstoord wordt door de meetfout.

Als de te schatten toestand $\underline{x}(t)$ niet direkt wordt bemeaten, maar er wordt een grootheid gemeten die een lineaire relatie vormt met $\underline{x}(t)$, dan geldt voor de meetvergelijking:

$$\begin{bmatrix} z1 \\ z2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{bmatrix}_t \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} z1-u1 \\ z2-u2 \end{bmatrix}_t \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \text{met: } u1 &= A_w x1 + B_w x2 \\ u2 &= C_w x1 + D_w x2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

waarin:

A_m, B_m, C_m, D_m = componenten meetmatrix gebruikt in model.
 A_w, B_w, C_w, D_w = werkelijke waarden componenten meetmatrix.

In (3.19) vormt de eerste term in het rechter lid weer een relatie tussen de meetuitkomsten $\underline{z}(t)$ en de werkelijke waarde van de te schatten grootheid $\underline{x}(t)$. Deze relatie wordt nu echter gevormd door een model (in dit rapport het eenlijn- of tweelinmodel). De meetmatrix $H(t)$ wordt nu dus gevormd door de componenten A_m, B_m, C_m en D_m , welke zijn afgeleid uit een model. Dit model zal echter vaak niet perfect de relatie weergeven tussen de gemeten grootheid en de werkelijke waarde van de te schatten grootheid. In de relatie zit nu dus een modelfout. Daarnaast is er nog steeds sprake van de meetfout: er wordt immers gewerkt met gemeten waarden van $\underline{z}(t)$.

In de tweede term van het rechter lid is de totale afwijking weergegeven, die in dit geval dus bestaat uit een modelfout en een (stochastische) meetfout.

Stel nu: $A_m=A_w$, $B_m=B_w$, $C_m=C_w$, $D_m=D_w$.

Dan ontstaat een soortgelijk geval als hiervóór besproken, waar de meetmatrix $H(t)$ de eenheidsmatrix was: de relatie zelf is goed, maar er zit een fout in als gevolg van het onnauwkeurig meten van $\underline{z}(t)$.

Als echter $A_m \neq A_w$, $B_m \neq B_w$, $C_m \neq C_w$, $D_m \neq D_w$, dan ontstaat er een extra onnauwkeurigheid als gevolg van de modelfout, welke nu ook tot uitdrukking komt in de covariantiematrix R .

Voor het eenlijnmodel bij voorbeeld kan deze modelfout worden bepaald uit vergelijking (3.4), die voor de volledigheid hieronder wordt herhaald:

$$y_i(j+1) = [1-2E] y_i(j) + E y_{i-1}(j) + E y_{i+1}(j) \quad (3.4)$$

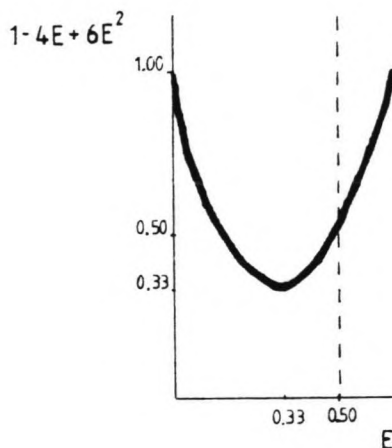
$$\text{met } E = (s \Delta t)/(h \Delta x^2)$$

Hierin zijn $y_i(j)$, $y_{i-1}(j)$ en $y_{i+1}(j)$ de gemeten waarden op het vorig tijdstip (j), welke bekend zijn. Zij bezitten echter ook de meetvariantie $\text{var}\{y_i(j)\}$, welke zijn invloed zal hebben op de er uit bepaalde waarde van $y_i(j+1)$.

Volgens [10] geldt als rekenregel voor de (onafhankelijke) varianties:

$$\begin{aligned} \text{var}\{y(j+1)\} &= \\ &= (1 - 2E)^2 \text{var}\{y(j)\} + E^2 \text{var}\{y(j)\} + E^2 \text{var}\{y(j)\} \\ &= (1 - 4E + 6E^2) \text{var}\{y(j)\} \end{aligned}$$

Omdat aan het stabiliteitscriterium moet worden voldaan geldt steeds: $0 < E < 1/2$ (zie (3.5)). Binnen dit interval bezit de variantie $\text{var}\{y(j+1)\}$ het in figuur 3.10 getekende verloop.



Figuur 3.10
De functie $1-4E+6E^2$

Omdat Δx zo klein mogelijk wordt gekozen (de keuze wordt beperkt door het voldoen aan het stabiliteitscriterium (3.5)), zal in het algemeen voor de waarde van E gelden: $1/4 < E < 1/2$. Hierdoor zal de modelvariantie $\text{var}\{y(j+1)\}$ een waarde tussen $3/8 \text{var}\{y(j)\}$ en $1/2 \text{var}\{y(j)\}$ aannemen. ($\text{var}\{y(j)\}$ was de meetvariantie). De modelvariantie is dus een faktor 2 kleiner dan de meetvariantie, en is dus een niet te verwaarlozen invloed op de nauwkeurigheid van de relatie (3.19).

Het probleem blijft echter dat de meetvariantie zelf niet goed bekend is. In paragraaf 3.5 zijn de componenten beschreven waaruit deze meetvariantie is opgedeeld.

Deze componenten waren:

- * Stochastische meetfouten in de gemeten bodemhoogten.
- * Fouten in inter- en extrapolaties van "gaten" resp. "tekorten" in gemeten profielen.
- * Bewegende brandingsruggen, slechts van belang als op het beschouwde kustgedeelte migrerende brandingsruggen aanwezig zijn, die de beschouwde laag in en/of uit bewegen.
- * Stormen, slechts van belang als de zandverplaatsingen als gevolg van deze stormen zich over de begrenzingen van de beschouwde laag uitstrekken.

In het volgende zal een maximum worden gegeven voor de orde-grootte van deze componenten. Daarbij is uitgegaan van de volgende toegepaste schematisering (zie ook Hoofdstuk 4) van

het kustprofiel:

- * Voor het eenlijnmodel:
Profiel tussen N.A.P. +15.0 m en N.A.P. -5.0 m.
- * Voor het tweelijnmodel:
Duin/strand-zone:
Profiel tussen N.A.P. +15.0 m en N.A.P. -0.7 m (GLW).
Vooroever-zone :
Profiel tussen N.A.P. -0.7 m en N.A.P. -5.0 m.

De stochastische meetfouten kunnen worden geschat met behulp van uitdrukking (3.14). Een maximum schatting kan worden verkregen met $a=200$ (steil profiel) en $h=5m$, waaruit een variantie van $4m^2$ volgt.

De inter- en extrapolatiefouten zijn moeilijk te schatten. Afhankelijk van de lengte waarover het profiel niet gemeten is, zal deze fout sterk variëren. De te schematiseren lagen zijn echter zó gekozen dat de meeste profielen over de volledige hoogte zijn bemeten, zodat in de meeste gevallen geen extrapolatie is toegepast.

In [11] is getracht meer inzicht te verkrijgen in zandverplaatsingen als gevolg van bewegende brandingsruggen. De te schematiseren lagen zijn echter zó gekozen dat deze invloed verwaarloosbaar is.

Het effect van stormen is moeilijk te schatten. Bij de eenlijnschematisering zal het effect van geen grote betekenis zijn. Het meeste zand zal zich als gevolg van een storm herverdelen binnen de zone tussen N.A.P. +15 m en N.A.P. -5 m, hetgeen geen invloed heeft op de ligging van de schematiseringslijn. Het effect van stormen is hierbij dus als zuiver dwarstransport opgevat: het zand verplaatst zich binnen het profiel. Het effect zal wel merkbaar zijn bij de tweelijnschematisering: Er vindt een uitwisseling van zand plaats tussen duin/strand-zone en vooroever-zone. Een maximum orde-grootte kan worden verkregen door uit te gaan van een flinke storm, waarbij circa $50 m^2$ in het profiel van duin/strand naar de vooroever wordt verplaatst (en zich later weer terug verplaatst). Op de duin/strand-lijn heeft dit een variatie van $ca. 50/15.7 = 3 m$ als gevolg, en op de vooroeverlijn van $ca. 50/4.3 = 11 m$. In het eerste geval zal de variantie maximaal van de orde $10 m^2$ zijn, in het tweede van de orde $100 m^2$.

In de werkelijke metingen blijkt echter een aanzienlijk grotere variantie aanwezig dan op basis van de voorgaande (maximum!) schattingen zou worden verwacht.

Daarom is de volgende strategie gevolgd. Van de gemeten lijnwaarden is (uit de werkelijke metingen) de variantie in elke meetraai bepaald ten opzichte van de tijdgemiddelde ligging in de raai. De gemiddelde variantie over alle raaien is nu als meetruis aangehouden. Vanwege de in het begin van deze paragraaf beschreven invloed van modelfouten (een vergrotende werking op de meetruis), is tevens beschouwd wat het resultaat is als de meetruis twee maal zo groot wordt gekozen. De werkelijke meetruis ligt waarschijnlijk tussen deze twee gevallen in. Voor enkele experimenten met de waarde van de meetruis wordt verwezen naar Appendix IV, waarin een test van het programma is beschreven. Daaruit blijkt dat deze strategie bij de geteste situatie een goed resultaat geeft. Tot slot is telkens gecontroleerd of vanuit twee aanzienlijk verschillende startwaarden voor de

te bepalen coefficient binnen enkele tijdstappen naar dezelfde waarden wordt geconvergeerd.

3.7 Keuze van de evenwichtsafstand

Zoals in paragraaf 3.4.2 reeds werd opgemerkt, wordt de vergelijking voor het tweelijnmodel niet-lineair als zowel de dwarstransportcoefficient s_y als de evenwichtsafstand W variabel worden gekozen. Om toch met het lineaire Kalman filter te kunnen werken, is een waarde voor W gekozen. Deze waarde is bepaald uit de gemeten lijnwaarden voor de tweelijnschematisering, en wel die gemeten in de meetraaien 95.50 en 96.00. Deze raaien zijn gelegen ongeveer ter hoogte van Wassenaar, en 1.5 á 2 km Noordelijk van de Delflandse strandhoofden (zie figuur 4.1). In deze raaien blijken de schematiseringslijnen niet structureel te bewegen, en ook de variaties in de lijnwaarden zijn relatief klein op deze overgang tussen het kustgedeelte dat de neiging heeft tot aanzanden (noordelijk van raai 98.00) en een gebied dat de neiging heeft tot eroderen (zuidelijk van raai 98.00, beschermd door de Delflandse strandhoofden).

Uit het verschil van de tijdsgemiddelde ligging van de twee gemeten schematiseringslijnen in deze raaien, volgt de evenwichtsafstand: $W = 280$ m.

Om het effect van een eventueel foute schatting van deze waarde te beschouwen, is tevens het geval beschouwd dat $W = 280 - 50 = 230$ m en $W = 280 + 50 = 330$ m.

4. Resultaten

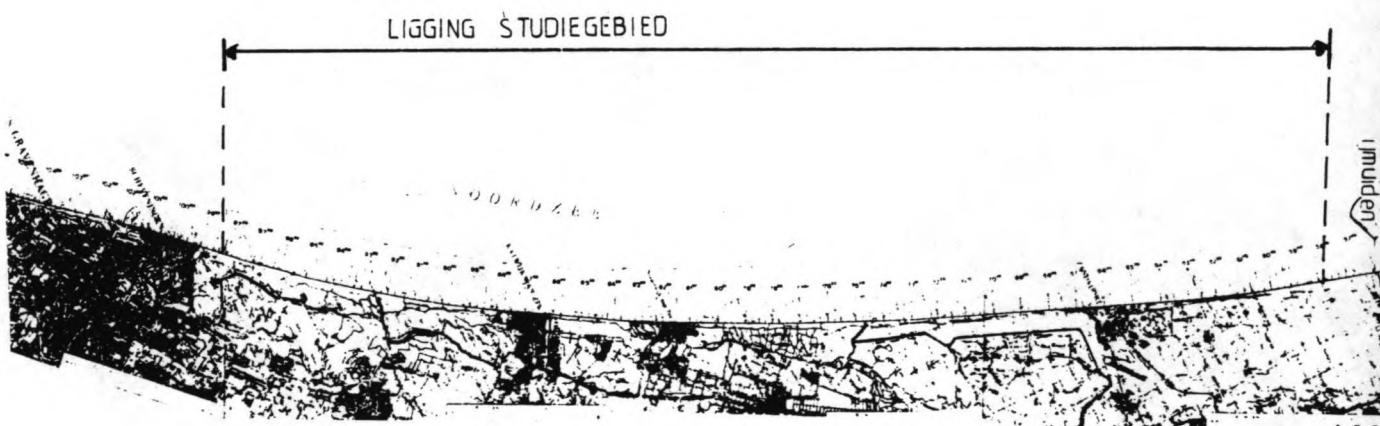
4.1 Het eenlijnmodel

Het eenlijnmodel is beschouwd voor de kust tussen kilometerraai 58.00 en 98.00. Het betreft dus een stuk met een lengte van 40 km, gelegen tussen IJmuiden en Scheveningen, zie figuur 4.1.

De door middel van een lijn geschematiseerde zandlaag ligt tussen N.A.P. +15.00 m en N.A.P. -5.00 m. Het bovenniveau van N.A.P. +15.00 m ligt iets onder de duintop van de beschouwde kuststrook. Dit niveau is gekozen om extrapolatie van de metingen zo veel mogelijk te vermijden (zie paragraaf 3.4.3).

De beschouwing heeft betrekking op de metingen van 1970 t/m 1984. De in het Jarkus-bestand aanwezige metingen van vóór 1970 (lopend van 1965 t/m 1969) bevatten aanzienlijk meer leemten dan die erna, en zij zijn daarom niet gebruikt. In 1985 is een groot deel van het beschouwde kustdeel niet gemeten. Vandaar dat na 1984 de beschouwing is afgebroken.

In de gemeten lijnwaarden blijkt de variantie (ten opzichte van de gemiddelde waarde van de lijn) ongeveer 150 m^2 te bedragen. Deze variantie is gebruikt als meetruis (RUN I.a). Bovendien is het geval beschouwd van een twee maal zo grote meetruis: 300 m^2 (RUN I.b). De reden hiervoor is het in paragraaf 3.6 uiteengezette probleem bij het bepalen van de correcte meetruis.



Figuur 4.1
Het studiegebied.

De filterprocedure voor de kustconstante s is gestart met de volgende beginwaarden.

RUN I.a

```
*****
RUN I.a
*****
raaien : 58.00 t/m 98.00 (stapgrootte 0.50)
jaren : 1970 t/m 1984 (stapgrootte 1)
*****
hoogte laag: h = 20.00 (m)
*****
beginschatting s : s(0) = 0.00+000 (m3/jaar)
variantie in s(0) : var{s(0)} = 1.00+011 (m3/jaar)2
systeemruis : var{s} = 1.00+009 (m3/jaar)2
meetruis : var{z} = 150.00 m2
*****
```

RUN I.b

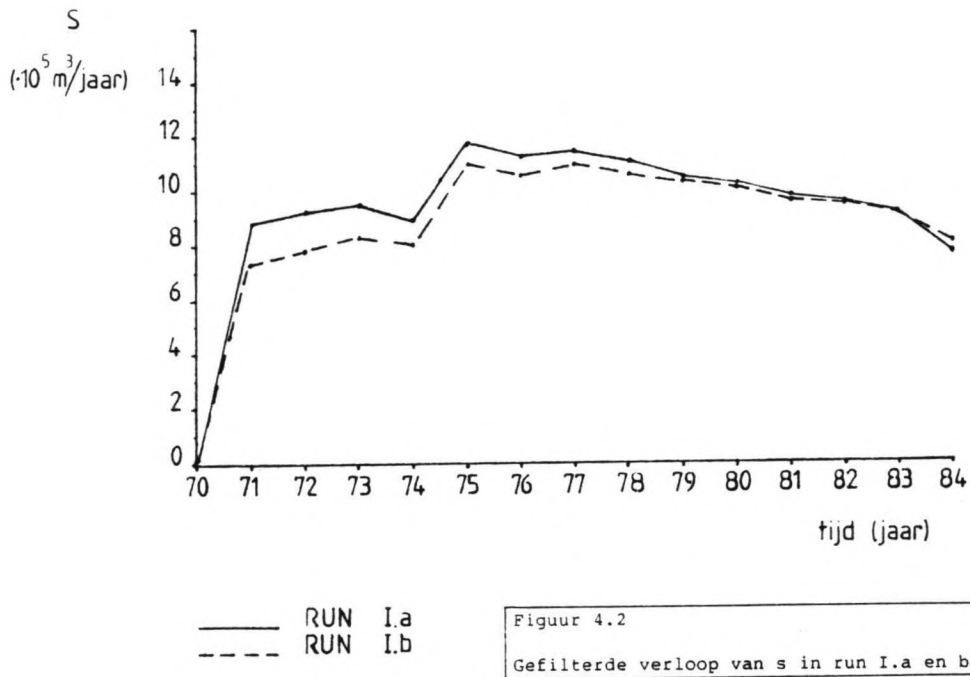
```
*****
RUN I.b
*****
raaien : 58.00 t/m 98.00 (stapgrootte 0.50)
jaren : 1970 t/m 1984 (stapgrootte 1)
*****
hoogte laag: h = 20.00 (m)
*****
beginschatting s : s(0) = 0.00+000 (m3/jaar)
variantie in s(0) : var{s(0)} = 1.00+011 (m3/jaar)2
systeemruis : var{s} = 1.00+009 (m3/jaar)2
meetruis : var{z} = 300.00 m2
*****
```

RUN I.c

Gelijk aan RUN I.a, op de startwaarde van de coëfficiënt s na.

```
*****
RUN I.c
*****
raaien : 58.00 t/m 98.00 (stapgrootte 0.50)
jaren : 1970 t/m 1984 (stapgrootte 1)
*****
hoogte laag: h = 20.00 (m)
*****
beginschatting s : s(0) = 2.00+006 (m3/jaar)
variantie in s(0) : var{s(0)} = 1.00+011 (m3/jaar)2
systeemruis : var{s} = 1.00+009 (m3/jaar)2
meetruis : var{z} = 150.00 m2
*****
```

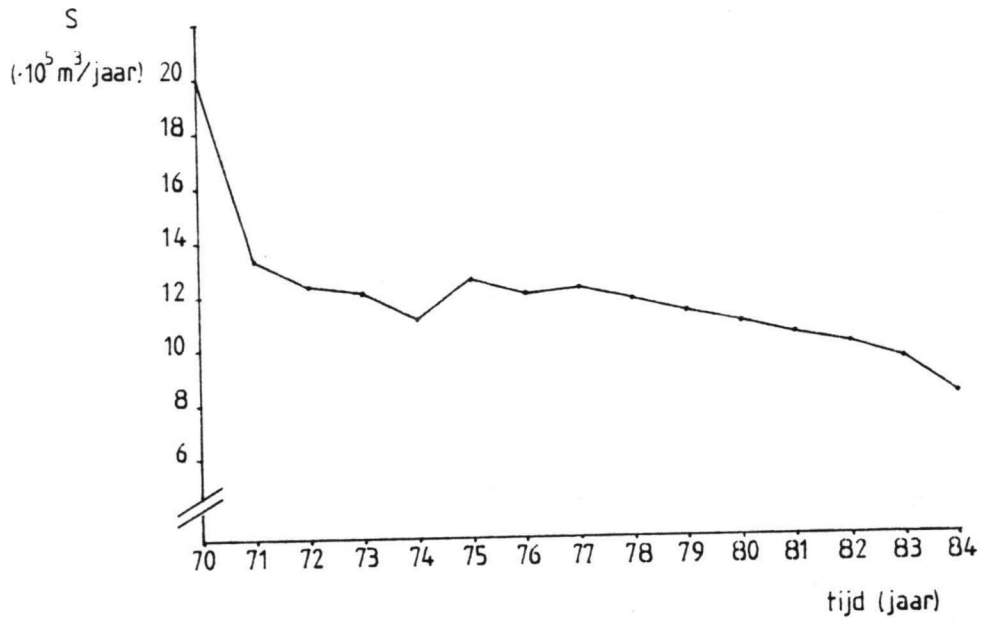
Het resultaat van RUN I.a en I.b is weergegeven in figuur 4.2.



Hieruit blijkt dat de waarde van de veronderstelde meetruis slechts een kleine invloed heeft op het resultaat. Dit wordt ook bevestigd door de uitgevoerde tests van het programma, beschreven in Appendix IV.

Er wordt een redelijk constant beeld van de kustconstante s verkregen in de beschouwde 15 jaar. Opvallend is wel de opwaartse sprong in 1975 en de lichte continue daling in de daarop volgende jaren. In hoeverre deze daling doorzet zullen de metingen in de toekomst moeten uitwijzen.

Het resultaat van RUN I.c is uitgezet in figuur 4.3. Hieruit blijkt dat de startwaarde s tot het jaar 1975 het beeld behoorlijk beïnvloedt, maar dat in de daarop volgende jaren naar dezelfde waarde wordt geconvergeerd als in RUN I.a.



RUN I.c

Figuur 4.3
Gefilterd verloop van s in run I.c.

Tabel 4.1. Vergelijking van gevonden waarden van s/h.

Plaats	Zandbergende laag (m t.o.v. NAP)	tussen	h	s/h (m ² /jaar)	bepaald uit
Sylt	1 - 8	+ 4	12	55,1.10	gedrag suppletie '78
Ameland	1 - 5	+ 8	13	110 .10	berkening
Vliehors	1 - 5	0	5	400 .10	gedrag zandgolven 1960-1960
Texel	1 - 5	+ 10	15	136 .10	kustgedrag 1960-1960 + golfberk
Hollandse kust	1 - 5	+ 20	25	71,3.10	[3]
Scheveningen	1 - 7	+ 10	25	120 .10	kustgedrag 1900-1930+ golfber
Cadzand	1 - 8	+ 4	12	40,5.10	gedrag suppletie 1978

Bron: [3]

Het algemene beeld dat uit de figuren 4.2 en 4.3 wordt verkregen is een redelijk constante waarde van de coefficient s . De waarde is ongeveer $10^6 \text{ m}^3/\text{jaar}$. Gegeven de beschouwde laaghoogte $h=20\text{m}$ betekent dit een waarde voor het quotient $s/h=50 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{jaar}$.

Vergelijking met de waarden uit tabel 4.1, overgenomen uit [3], geeft aan dat de gevonden waarde aan de lage kant is, vergeleken met elders gevonden waarden. Uit de tabel volgt ter plaatse van Scheveningen een waarde van $s/h=120 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{jaar}$. Bedacht moet worden dat daarbij de beschouwde laagdikte ook groter is, 25 m, zodat $s=3 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{jaar}$. Dit betekent een faktor 3 tussen de in tabel 4.1 gegeven en de in dit rapport berekende waarde voor de kustconstante s . In [3] wordt er echter op gewezen dat de s/h -waarde van $120 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{jaar}$ aan de hoge kant blijkt te zijn: de waarde is gebaseerd op een studie in de jaren 1900 t/m 1930, en de aanleg van de havendammen van Scheveningen (in 1900) kan zijn invloed hebben gehad op het resultaat. De veranderingen van de kust blijken dan ook trager te verlopen dan berekend met deze hoge s/h -waarde.

Het verschil in het tijdvak waarin de twee waarden verkregen zijn, en het feit dat de in dit rapport gevonden waarde gebaseerd is op het gehele kustgebied tussen IJmuiden en Scheveningen, maakt het moeilijk deze waarden hard met elkaar te vergelijken.

De berekende standaardafwijking in de schatting van s is, zoals in Appendix II is uiteengezet, afhankelijk van de geschatte meetvariantie.

In RUN I.a convergeert de standaardafwijking in 9 jaar tijd naar een waarde van $0.9 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$.

In RUN I.b vindt convergentie plaats in 10 jaar, naar een waarde van $1.1 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$.

4.2 Het tweelijnmodel

Het tweelijnmodel is toegepast op hetzelfde kustgebied als het eenlijnmodel (raai 58.00 t/m 98.00, figuur 4.1).

De geschematiseerde profielzones zijn:

lijn 1, de duin-/strandzone :

tussen N.A.P. +15.00 m en N.A.P. -0.72 m

lijn 2, de vooroeverzone :

tussen N.A.P. -0.72 m en N.A.P. -5.00 m.

Het niveau N.A.P. -0.72 m karakteriseert het gemiddeld laagwaterniveau (G.L.W.).

De varianties afgeleid uit de gemeten lijnwaarden zijn:

voor lijn 1 : 125 m^2

voor lijn 2 : 700 m^2

Deze waarden zijn als uitgangspunt gebruikt bij het schatten van de meetruis.

De filterprocedure voor de coëfficiënten s_1 , s_2 en s_y is gestart met de volgende beginwaarden.

RUN II.a

```

*****
RUN II.a
*****
raaien : 58.00 t/m 98.00      (stapgrootte 0.50)
jaren  : 1970 t/m 1984      (stapgrootte 1)
*****
hoogte lagen:          h1 = 15.72      (m)
                      h2 =  4.28      (m)
*****
evenwichtsafstand:    W = 280      (m)
*****
beginschatting s1 : s1(0)      = 0.00+000 (m3/jaar)
                   s2 : s2(0)      = 0.00+000 (m3/jaar)
                   sy : sy(0)      = 0.00+000 (m/jaar)
variantie in s1(0): var{s1(0)}  = 1.00+011 (m3/jaar)2
                   s2(0): var{s2(0)}  = 1.00+011 (m3/jaar)2
                   sy(0): var{sy(0)}  = 1.00+000 (m/jaar)2
systeemruis        : var{s1}      = 1.00+009 (m3/jaar)2
                   var{s2}      = 1.00+009 (m3/jaar)2
                   var{sy}      = 1.00+000 (m/jaar)2
meetruis lijn 1: var{z1}        = 125.00      m2
          lijn 2: var{z2}        = 700.00      m2
*****

```

RUN II.b

Gelijk aan RUN II.a, maar met dubbele meetruis (250 m², resp. 1400 m²).

```

*****
RUN II.b
*****
raaien : 58.00 t/m 98.00      (stapgrootte 0.50)
jaren  : 1970 t/m 1984      (stapgrootte 1)
*****
hoogte lagen:          h1 = 15.72      (m)
                      h2 =  4.28      (m)
*****
evenwichtsafstand:    W = 280      (m)
*****
beginschatting s1 : s1(0)      = 0.00+000 (m3/jaar)
                   s2 : s2(0)      = 0.00+000 (m3/jaar)
                   sy : sy(0)      = 0.00+000 (m/jaar)
variantie in s1(0): var{s1(0)}  = 1.00+011 (m3/jaar)2
                   s2(0): var{s2(0)}  = 1.00+011 (m3/jaar)2
                   sy(0): var{sy(0)}  = 1.00+000 (m/jaar)2
systeemruis        : var{s1}      = 1.00+009 (m3/jaar)2
                   var{s2}      = 1.00+009 (m3/jaar)2
                   var{sy}      = 1.00+000 (m/jaar)2
meetruis lijn 1: var{z1}        = 250.00      m2
          lijn 2: var{z2}        = 1400.00     m2
*****

```

RUN II.c

 Gelijk aan RUN II.b, maar nu met evenwichtsafstand W=230m in plaats van W=280m.

```

*****
RUN II.c
*****
raaien : 58.00 t/m 98.00      (stapgrootte 0.50)
jaren  : 1970 t/m 1984      (stapgrootte 1)
*****
hoogte lagen:          h1 = 15.72      (m)
                      h2 =  4.28      (m)
*****
evenwichtsafstand:    W =  230      (m)
*****
beginschatting s1 : s1(0)      = 0.00+000 (m3/jaar)
                  s2 : s2(0)      = 0.00+000 (m3/jaar)
                  sy : sy(0)      = 0.00+000 (m/jaar)
variantie in s1(0): var{s1(0)}  = 1.00+011 (m3/jaar)2
                  s2(0): var{s2(0)}  = 1.00+011 (m3/jaar)2
                  sy(0): var{sy(0)}  = 1.00+000 (m/jaar)2
systeemruis      : var{s1}      = 1.00+009 (m3/jaar)2
                  var{s2}      = 1.00+009 (m3/jaar)2
                  var{sy}      = 1.00+000 (m/jaar)2
meetruis lijn 1: var{z1}      =  250.00      m2
          lijn 2: var{z2}      = 1400.00      m2
*****

```

RUN II.d

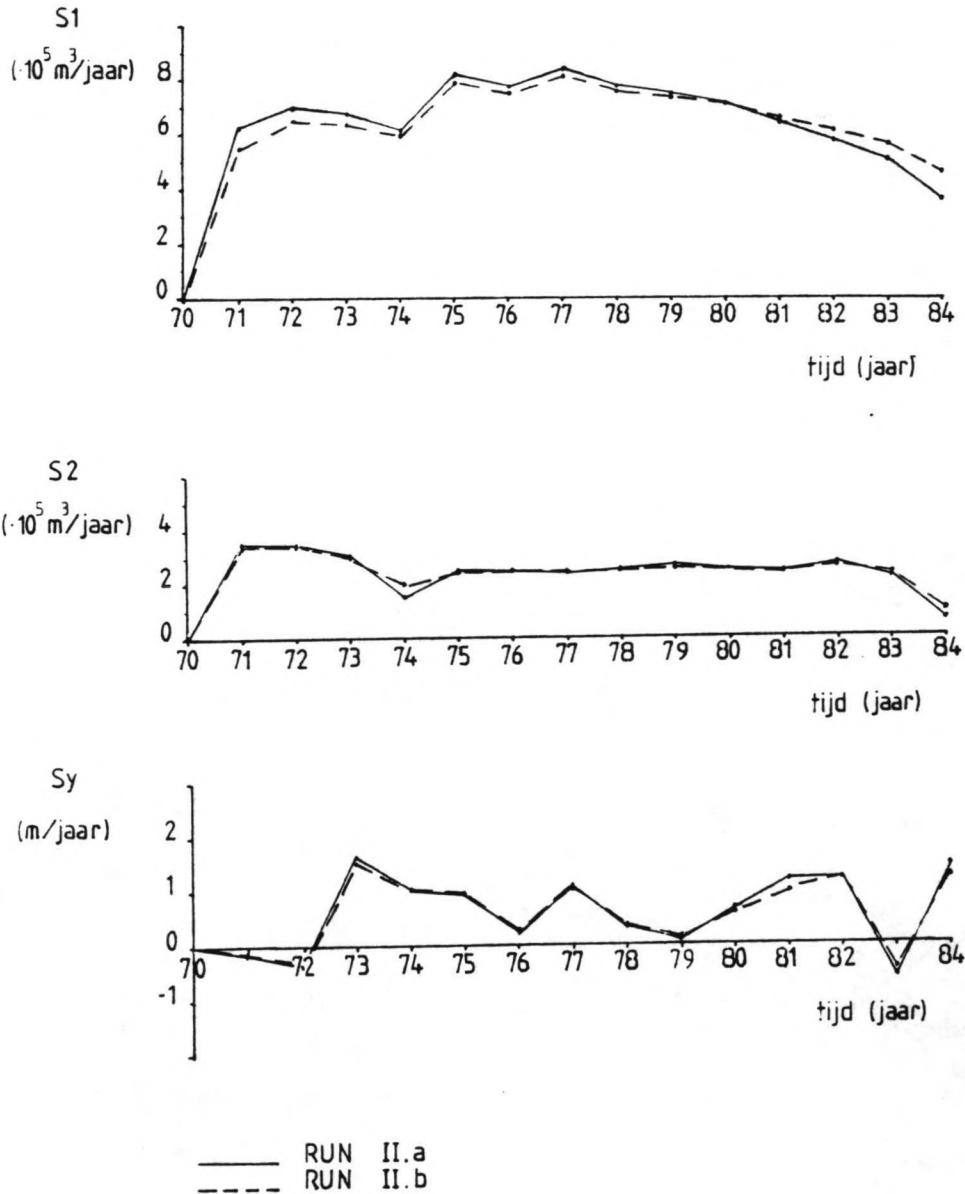
 Gelijk aan RUN II.b, maar nu met evenwichtsafstand W=330m in plaats van W=280m.

```

*****
RUN II.d
*****
raaien : 58.00 t/m 98.00      (stapgrootte 0.50)
jaren  : 1970 t/m 1984      (stapgrootte 1)
*****
hoogte lagen:          h1 = 15.72      (m)
                      h2 =  4.28      (m)
*****
evenwichtsafstand:    W =  330      (m)
*****
beginschatting s1 : s1(0)      = 0.00+000 (m3/jaar)
                  s2 : s2(0)      = 0.00+000 (m3/jaar)
                  sy : sy(0)      = 0.00+000 (m/jaar)
variantie in s1(0): var{s1(0)}  = 1.00+011 (m3/jaar)2
                  s2(0): var{s2(0)}  = 1.00+011 (m3/jaar)2
                  sy(0): var{sy(0)}  = 1.00+000 (m/jaar)2
systeemruis      : var{s1}      = 1.00+009 (m3/jaar)2
                  var{s2}      = 1.00+009 (m3/jaar)2
                  var{sy}      = 1.00+000 (m/jaar)2
meetruis lijn 1: var{z1}      =  250.00      m2
          lijn 2: var{z2}      = 1400.00      m2
*****

```

Het resultaat van RUN II.a en II.b is uitgezet in figuur 4.4. Het beeld blijkt weer ongevoelig te zijn voor verschillen in de schatting van de meetruis.



Figuur 4.4

Gefilterd verloop van s_1 , s_2 en s_y in run II.a en b.

Het gedrag in de tijd van de coefficient s_1 komt sterk overeen met dat van s (in figuur 4.2). De waarde van s_1 bedraagt 6 a $7 \cdot 10^5$ m³/jaar ($s_1/h_1=41 \cdot 10^3$ m²/jaar). De coefficient s_2 is nagenoeg constant: $s_2=2.5 \cdot 10^5$ m³/jaar ($s_2/h_2=58 \cdot 10^3$ m²/jaar). De dwarstransportcoefficient s_y varieert sterk, tussen +1.5 en -0.5 m/jaar. Hier kan dus niet met recht gesproken worden van een constante. Bepaalt men het gemiddelde van s_y -waarden over de beschouwde 15 jaar, dan volgt daaruit een waarde van $s_{y_{gem}}=+0.69$ m/jaar.

In RUN II.a convergeert de standaardafwijking in de schatting in 5 jaar naar de waarden:

voor s_1 : $0.8 \cdot 10^5$ m³/jaar
 voor s_2 : $0.4 \cdot 10^5$ m³/jaar
 voor s_y : 0.2 m/jaar.

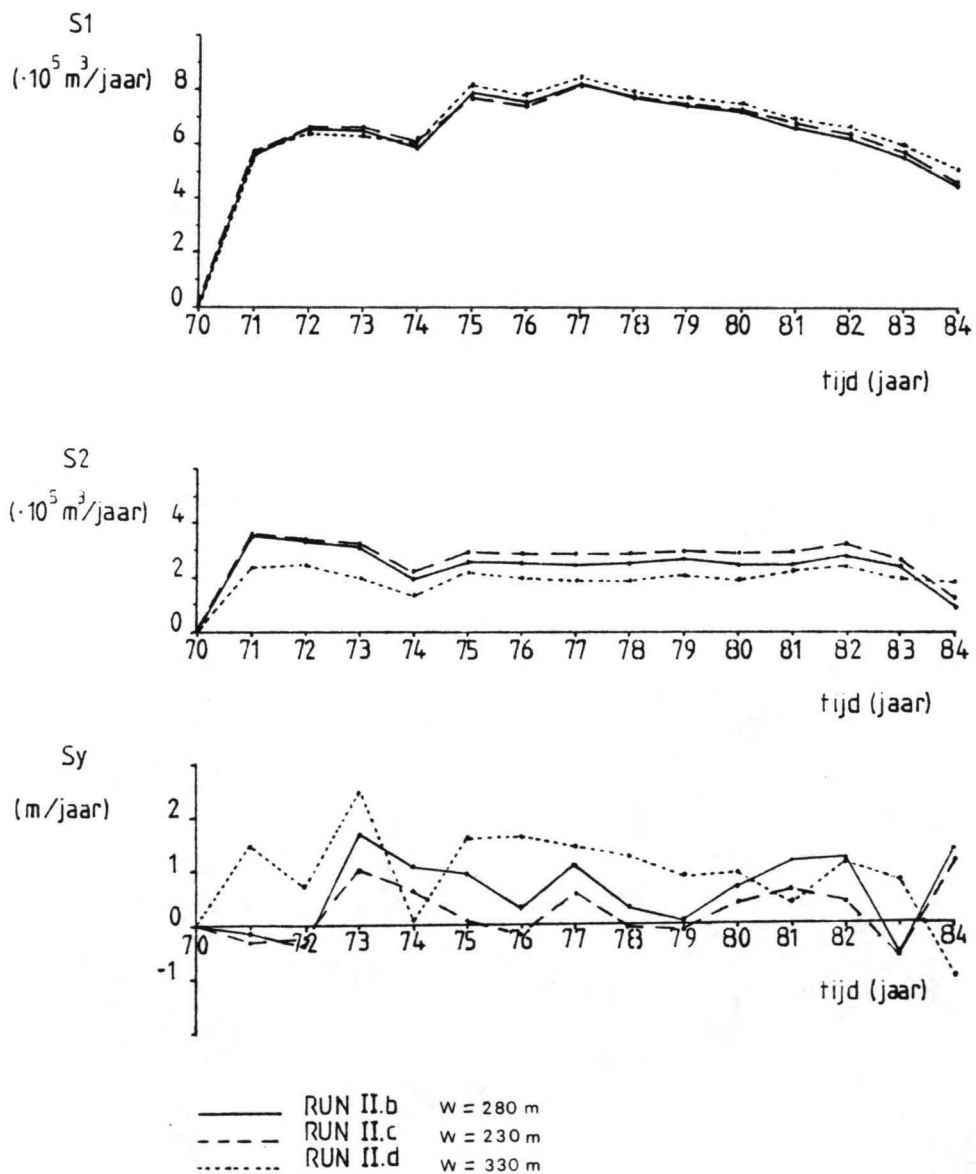
In RUN II.b naar de waarden:

voor s_1 : $0.9 \cdot 10^5$ m³/jaar
 voor s_2 : $0.5 \cdot 10^5$ m³/jaar
 voor s_y : 0.3 m/jaar

Het effect van een eventuele foutieve schatting van de evenwichtsafstand W blijkt uit figuur 4.5, waarin de resultaten van de RUNS II.b,c en d met elkaar zijn vergeleken.

Als $W=230$ m in plaats van $W=280$ m, dan heeft dit een verwaarloosbaar effect op de schatting van s_1 . De coefficient s_2 daarentegen krijgt duidelijk een wat hogere waarde: $s_2=3 \cdot 10^5$ m³/jaar. De dwarstransportcoefficient s_y krijgt gemiddeld een kleinere waarde ($s_{y_{gem}}=+0.28$ m/jaar). Als $W=330$ m, dan daalt s_2 naar een waarde van $2 \cdot 10^5$ m³/jaar. Het gemiddelde $s_{y_{gem}}$ stijgt naar +0.93 m/jaar. De grote meetvariantie in lijn 2 ten opzichte van die in lijn 1 is ervoor verantwoordelijk dat de nieuwe situatie zich sterker laat voelen in de waarde van s_2 dan in die van s_1 .

Geconcludeerd moet worden dat de methode vrij gevoelig is voor de keuze van de evenwichtsafstand W .



Figuur 4.5

Gefilterd verloop van s_1 , s_2 en s_y
 in run II.b, c en d.
 Het effect van foutieve schatting van
 de evenwichtsafstand W .

5. Conclusies en Aanbevelingen voor verder onderzoek

5.1 Conclusies

Op basis van de studie naar de toepassing van het Kalmanfilter op het eenlijn- en tweelinmodel kunnen de volgende conclusies worden getrokken.

Met behulp van het lineaire filter is het mogelijk een indruk te verkrijgen van de orde-grootte en het tijdsafhankelijk gedrag van de modelcoëfficiënten. De waarde van de evenwichtsafstand W moet hierbij echter buiten het filter om worden geschat. Het resultaat is helaas vrij gevoelig voor deze schatting.

De metingen van de afgelopen 15 jaar, van de kust tussen IJmuiden en Scheveningen, bevestigen de eenlijn- en tweelintheorieën (op een tijdschaal van enkele decennia). Anders geformuleerd: als de metingen via filtering van een zekere ruis worden ontdaan, kan uit deze meetwaarden een signaal worden afgeleid dat een redelijk constant beeld te zien geeft voor de modelconstanten in het eenlijn- en tweelinmodel.

Deze conclusie is voor het tweelinmodel wat minder sterk dan voor het eenlijnmodel. De dwarstransportcoëfficiënt fluctueert nog vrij sterk in de tijd, maar wel rond een in de tijd constante waarde.

Het resultaat is niet erg gevoelig voor foutieve schattingen van de meetruis. Dit is gunstig, aangezien het nauwkeurig bepalen van deze ruis problemen oplevert. Gebrekkige kennis van de meetruis is echter wél een bezwaar bij het interpreteren van de nauwkeurigheid van de schattingen. De orde van grootte van de gevonden nauwkeurigheden is in tabel 5.1 weergegeven.

Tabel 5.1 overzicht resultaten	
EENLIJN, zandbergende laag tussen N.A.P. +15 m en -5 m	
s ($m^3/jaar$)	10^6
st.afw. s ($m^3/jaar$)	10^5
s/h ($m^2/jaar$)	$50 \cdot 10^3$
TWEELIJN, zandbergende lagen tussen N.A.P. +15 m en -0.7 m N.A.P. -0.7 m en -5 m	
s_1 ($m^3/jaar$)	$7.0 \cdot 10^5$
st.afw. s_1 ($m^3/jaar$)	$0.9 \cdot 10^5$
s_1/h_1 ($m^2/jaar$)	$41 \cdot 10^3$
s_2 ($m^3/jaar$)	$2.5 \cdot 10^5$
st.afw. s_2 ($m^3/jaar$)	$0.5 \cdot 10^5$
s_2/h_2 ($m^2/jaar$)	$58 \cdot 10^3$
s_y ($m/jaar$)	0.7
st.afw. s_y ($m/jaar$)	0.3

5.2 Suggesties voor verder onderzoek

De informatie aanwezig in het Jarkusbestand groeit elk jaar, en daarmee neemt ook de bruikbaarheid van deze metingen toe bij de studie van kustgedrag.

Het opbouwen van een filter "traditie", waardoor modellen kunnen worden verifieerd of bijgesteld aan de hand van dit meetbestand lijkt dan ook de moeite waard. Bewust wordt gesproken van "traditie", omdat het ontwerpen van een goed filter naast enige creativiteit vooral ervaring van de ontwerper vraagt. Door middel van een uitgebreide set van tests omtrent de prestatie bij verschillende ruiscondities moet het mogelijk zijn het filter nog iets beter af te stellen op het in dit rapport beschreven probleem. Naarmate het filter wordt voorzien van meer genuanceerde invoer (hierbij wordt vooral bedoeld op de a-priori kennis van de ruiscomponenten), zullen hardere conclusies worden verbonden aan de nauwkeurigheid van de schattingen.

Een punt wat daarbij zeker extra aandacht behoeft is de meetruis. In paragraaf 3.5 en 3.6 werd het probleem beschreven van de slecht te schatten variantie in de gemeten lijnwaarden. De variaties in de lijnwaarden bleken in werkelijkheid aanzienlijk groter dan verwacht op basis van de componenten die gedacht werden ervoor verantwoordelijk te zijn. Voor een betere interpretatie van de resultaten is het gewenst meer inzicht te hebben in deze ruis, als functie van plaats en tijd.

Het lijkt zinvol om vervolgens meer ervaring op te doen met het lineaire Kalman filter door het toe te passen op met name snel veranderende kustgedeelten. Daaruit moet blijken of het de moeite loont de mogelijkheden te onderzoeken van het nog meer genuanceerde niet-lineaire Kalman filter, waarmee de coëfficiënten s_y en W (in het tweelijnmodel) simultaan gefilterd zouden kunnen worden.

Literatuur

- [1] Bakker, W.T.
"the dynamics of a coast with a groyne system"
Proceedings of 11th Conference on Coastal
Engineering,
London, 1968, chapter 31, pp 492-517
- [2] Bakker, W.T.
"the coastal dynamics of sand waves and the influence
of breakwaters and groynes"
memo 67-1
R.W.S., directie waterhuishouding en waterbeweging,
afd. kustonderzoek
- [3] Bakker, W.T. , Smit, E.
"Waarheden omtrent kustgedrag"
Rijkswaterstaat, nota
1987
- [4] Gelb, A.
"Applied optimal estimation"
T.A.S.C.
Massachusetts Institute of Technology
1974
- [5] Heemink, A.W.
"Storm surge prediction using Kalman filtering"
Proefschrift, Universiteit Twente
1986
- [6] Kalman, R.E.
"A new approach to linear filtering and prediction
problems"
J. Basic Eng.
March 1960, pp 35-46
- [7] van der Made, J.W.
"Gebruik van Kalmanfilters voor controle van
waterstanden"
Rijkswaterstaat, nota WW-WH-79.02
1979
- [8] Ngan, P, Russell, S.O.
"Example of flow forecasting with Kalman filter"
Journal of Hydraulic Engineering
Sept 1986, pp 818-832
- [9] Pelnard-Considere, R.
"Essai de theorie a l'evolution des formes de
rivages en plages de sable et de galets"
Quatrieme Journees de l'Hydraulique
Paris 13-15 Juin 1954
Les energies de la mer, Question III

- [10] van Soest, J
"Elementaire statistiek"
Collegehandleiding T.U. Delft
Delftse Uitgevers Maatschappij
1981

- [11] de Vroeg, J.H.
"Schematisering brandingsruggen m.b.v. jaarlijkse
kustmetingen"
Afstudeerverslag T.U. Delft (C.T.)
1987

- [12] Coastal Engineering Group
"Harbor and beach problems"
Collegehandleiding Coastal Engineering, Vol II
T.U. Delft
1978

Symbolenlijst

cov(.,.,.)	covariantie tussen . en ..
F(t)	transformatiematrix op tijdstip t
H(t)	meetmatrix op tijdstip t
h	hoogte waarover kustverandering wordt bestudeerd
I	eenheidsmatrix
i	raai-index in numeriek schema
j	tijd-index in numeriek schema
K(t)	Kalmanmatrix (gainmatrix)
N[.,.,.]	normale verdeling met gemiddelde . en variantie(matrix) ..
n	aantal bodemmetingen in laagdikte h
O	oppervlak aan zand in laagdikte h
P(t)	covariantiematrix van ruis in schatting van de toestand
Q(t)	covariantiematrix van systeemruis
R(t)	covariantiematrix van meetruis
s	kustconstante in eenlijnmodel
s1 , s2	langstransportcoëfficiënten in de lagen 1 en 2 in tweelynmodel
Sy	dwarstransport
sy	dwarstransportcoëfficiënt in tweelynmodel
t	tijdstip
t-	tijdstip t net voor meting
t+	tijdstip t net na meting
Δt	tijdstap in numerieke schema
$\underline{v}(t)$	meetruisvektor op tijdstip t
var{.}	variantie van .
$\underline{w}(t)$	systeemruisvektor op tijdstip t
x	afstand langs de kust
x(t)	toestandsvektor op tijdstip t
$\hat{x}(t)$	schatting toestandsvektor op tijdstip t
Δx	stapgrootte numerieke schema
y, , y1, , y2,	gemiddelde ligging van de kust over hoogte h, h1, h2 in raai i.
$\underline{z}(t)$	meetvektor op tijdstip t
$\underline{\bar{z}}(t)$	meetfout op tijdstip t

APPENDIX I

ILLUSTRATIE RECURSIVITEITS-PRINCIPE

Bij een recursieve schattingstechniek behoeven de voorgaande metingen niet opgeslagen te worden, om een volgende schatting te kunnen maken. Dit kan het best worden geïllustreerd met het volgende voorbeeld.

Stel, men wil een constante x bepalen aan de hand van k metingen $z(i)$ ($i=1$ t/m k) van deze constante. In de metingen is echter een spreiding aanwezig (meetfout), en de constante x wordt nu geschat als het gemiddelde van de metingen:

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z(i) \quad (\text{I.1})$$

Vergelijking (I.1) geeft de schatting van x op basis van k metingen. Komt er vervolgens een nieuwe meting $z(k+1)$ vrij, dan kan een nieuwe schatting worden gemaakt met:

$$\hat{x}(k+1) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} z(i) \quad (\text{I.2})$$

Vergelijking (I.2) kan enigszins worden herschreven:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \frac{1}{k+1} \left\{ \sum_{i=1}^k z(i) + z(k+1) \right\} \\ &= \frac{k}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k z(i) + \frac{1}{k+1} z(k+1) \\ &= \frac{k}{k+1} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z(i) \right\} + \frac{1}{k+1} z(k+1) \\ &= \frac{k}{k+1} \hat{x}(k) + \frac{1}{k+1} z(k+1) \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Door nu uitdrukking (I.3) te gebruiken in plaats van (I.2), vervalt de noodzaak voor het opslaan van alle voorgaande metingen $z(1)$ t/m $z(k)$. Alle informatie uit deze metingen is nu samengevat in de vorige schatting $\hat{x}(k)$ plus de meetindex k . Vergelijking (I.3) is de recursieve schatter voor het gemiddelde. Merk op dat (I.3) nog eleganter kan worden geschreven in de vorm:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) \frac{1}{k+1} [z(k+1) - \hat{x}(k)] \quad (I.4)$$

De nieuwe schatting $\hat{x}(k+1)$ ontstaat nu dus uit de vorige schatting $\hat{x}(k)$ plus een "gewogen" verschil tussen de nieuwe meting ($z(k+1)$) en zijn verwachte waarde (het gemiddelde $\hat{x}(k)$). Hierop wordt gewezen omdat deze vorm (I.4) terug te herkennen is in de recursieve filteralgorithme, bij het maken van de optimale schatting (zie hoofdstuk 2, vgl (2.6)).

APPENDIX II

TOELICHTING BIJ FILTER-ALGORITHMES

Om de toelichting eenvoudig te houden zal de methode worden besproken aan de hand van een een-dimensionaal geval, dat wil zeggen dat er één grootheid gemeten en geschat wordt. Voor meer-dimensionale gevallen blijft het principe gelijk, maar zijn de afleiding en de werking van het filter minder eenvoudig te doorzien. Verwezen wordt hiervoor naar [4]. Het hier beschreven een-dimensionale geval is ontleend aan [7].

Opmerkingen omtrent de notatie:

- $x(t)$ = de werkelijke toestand op tijdstip t
- $z(t)$ = meting van de toestand op tijdstip t
- $\hat{x}(t)$ = schatting van de toestand op tijdstip t
- $\bar{x}(t)$ = schattingsfout
- t^- = aanduiding dat het de toestand betreft net vóór het verwerken van de meting $z(t)$
- t^+ = aanduiding dat het de toestand betreft net na het verwerken van de meting $z(t)$
- $N[m, var]$ = aanduiding normale verdeling met gemiddelde m en variantie var

De basis wordt gevormd door de systeemvergelijking en de meetvergelijking.

De systeemvergelijking:

$$x(t) = F(t) x(t-1) + w(t) \quad (\text{II.1})$$

waarin $w(t)$ de karakteristiek van de systeemfout (de voorspelfout) weergeeft: $w(t) \sim N[0, Q(t)]$.

De meetvergelijking:

$$z(t) = H(t) x(t) + v(t) \quad (\text{II.2})$$

waarin $v(t)$ de karakteristiek van de meetfout weergeeft: $v(t) \sim N[0, R(t)]$.

Tevens speelt een grote rol de schattingsfout $\bar{x}(t)$, dit is het verschil tussen de geschatte waarde en de (onbekende!) werkelijke waarde, als volgt weergegeven

$$\bar{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (\text{II.3})$$

De schatting van de toestand $x(t)$ wordt afgeleid uit de schatting voordat een meting beschikbaar was ($\hat{x}(t^-)$) en de meetuitkomst ($z(t)$), als een gewogen gemiddelde:

$$\hat{x}(t^+) = K'(t) \hat{x}(t^-) + K(t) z(t) \quad (\text{II.4})$$

waarin $K'(t)$ en $K(t)$ weegfactoren zijn, die zodanig moeten worden bepaald dat de variantie in de schatting $\hat{x}(t^+)$ minimaal is.

Er geldt dat $\hat{x}(t-)$ een zekere afwijking zal hebben van de werkelijke waarde, zodat in analogie met (II.3) kan worden geschreven:

$$\hat{x}(t-) = x(t) + \bar{x}(t-) \quad (\text{II.5})$$

Substitutie van (II.2) en (II.5) in (II.4) geeft:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+) &= K'(t) \{x(t) + \bar{x}(t-)\} + K(t) \{H(t) x(t) + v(t)\} \\ &= [K'(t) + K(t) H(t)] x(t) + K'(t) \bar{x}(t-) + K(t) v(t) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

De schattingsfout hierbij bedraagt:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t+) &= \hat{x}(t+) - x(t) \\ &= [K'(t) + K(t) H(t) - 1] x(t) + K'(t) \bar{x}(t-) + K(t) v(t) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Aangezien geen systematische fouten in de schattingen en metingen mogen voorkomen, moeten de verwachtingswaarden van $\bar{x}(t+)$, $\bar{x}(t-)$ en $v(t) = 0$ zijn. Op grond hiervan volgt uit (II.7) :

$$\begin{aligned} K'(t) + K(t) H(t) - 1 &= 0, \\ \text{ofwel } K'(t) &= 1 - K(t) H(t) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Vergelijking (II.8) gesubstitueerd in (II.4) geeft:

$$\hat{x}(t+) = \hat{x}(t-) + K(t) \{ z(t) - H(t) \hat{x}(t-) \} \quad (\text{II.9})$$

Dit is een belangrijke stap in de filteralgorithme. In (II.9) staat dat de schatting $\hat{x}(t+)$ ontstaat uit de schatting vóóordat een meting beschikbaar was plus een gewogen verschil tussen de meting en de waarde die men voor de meting verwacht, op basis van de meetvergelijking. Dit is dus de eigenlijke recursieve schattingsstap, die erg veel analogie vertoont met (I.4) in Appendix I. (Voorals als x direkt wordt bemeaten: dan $H(t) = 1$ (voor alle t)).

Rest nog het zodanig bepalen van de faktor $K(t)$ dat de variantie in de schatting $\hat{x}(t+)$ minimaal is. Substitutie van (II.8) in (II.7) geeft voor de schattingsfout:

$$\bar{x}(t+) = (1 - K(t) H(t)) \bar{x}(t-) + K(t) v(t) \quad (\text{II.10})$$

De variantie $P(t+)$ is gelijk aan de verwachtingswaarde van de fout in het kwadraat:

$$\begin{aligned} P(t+) &= E [(\bar{x}(t+))^2] \quad (\text{II.11}) \\ &= E [(1 - K(t) H(t))^2 (\bar{x}(t-))^2 + \\ &\quad + 2 (1 - K(t) H(t)) \bar{x}(t-) K(t) v(t) + \\ &\quad + (K(t) v(t))^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - K(t) H(t))^2 E [(\bar{x}(t-))^2] + \\
&\quad + 2 (1 - K(t) H(t)) K(t) E [\bar{x}(t-) v(t)] + \\
&\quad + K^2(t) E [v^2(t)] \qquad \qquad \qquad (II.12)
\end{aligned}$$

$$\text{waarin: } E [\bar{x}(t-) v(t)] = 0, \qquad (II.13)$$

want $\bar{x}(t-)$ en $v(t)$ zijn ongecorreleerd.

$$E [v^2(t)] = R(t) \qquad (II.14)$$

(zie (II.2))

Voeren we naast (II.11) nog de volgende definitie in:

$$P(t-) = E [(\bar{x}(t-))^2] \qquad (II.15)$$

dan volgt uit (II.11) t/m (II.15) :

$$P(t+) = (1 - K(t) H(t))^2 P(t-) + K^2(t) R(t) \qquad (II.16)$$

Het minimum van $P(t+)$ kan nu worden gevonden door

$$\frac{d P(t+)}{d K(t)} = 0 \text{ te stellen.}$$

Via (II.16) volgt dan:

$$\begin{aligned}
\frac{d P(t+)}{d K(t)} &= 2 \{1 - K(t) H(t)\} \{-H(t)\} P(t-) + 2 K(t) R(t) = 0 \\
&\qquad \qquad \qquad (II.17)
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$K(t) = \frac{H(t) P(t-)}{H^2(t) P(t-) + R(t)} \qquad (II.18)$$

Dit is de uitdrukking voor $K(t)$ die moet worden gebruikt om met behulp van (II.9) de optimale schatting te maken. De schatting is optimaal, omdat $K(t)$ zo is bepaald dat de variantie $P(t+)$ van de schatting $\hat{x}(t+)$ minimaal is.

De in (II.16) gegeven uitdrukking voor $P(t+)$ kan met (II.18) nog worden herschreven tot:

$$\begin{aligned}
P(t+) &= \left\{ 1 - \frac{H^2(t) P(t-)}{H^2(t) P(t-) + R(t)} \right\}^2 P(t-) + \\
&\quad + \frac{H(t) P(t-)}{\left\{ H^2(t) P(t-) + R(t) \right\}^2} R(t) \\
&= \left\{ 1 - \frac{H^2(t) P(t-)}{H^2(t) P(t-) + R(t)} \right\} P(t-)
\end{aligned}$$

zodat, met behulp van (II.18) kan worden geschreven:

$$P(t+) = (1 - K(t) H(t)) P(t-) \qquad (II.19)$$

Voor de in het voorgaande gegeven uitdrukkingen voor het eendimensionale geval kunnen enkele facetten van het filter eenvoudig worden doorzien. De werking van het filter kan het best worden beschouwd door enkele extreme gevallen te nemen.

Stel dat men de te schatten grootte $x(t)$ direkt bemeeet. Dan is $H(t) = 1$ voor alle t .

Voor de optimale schatting volgt nu uit (II.9) :

$$\hat{x}(t+) = \hat{x}(t-) + K(t) \{ z(t) - \hat{x}(t-) \} \quad (\text{II.20})$$

met voor $K(t)$ uit (II.18) :

$$K(t) = \frac{P(t-)}{P(t-) + R(t)} = \frac{1}{1 + \{ R(t)/P(t-) \}} \quad (\text{II.21})$$

Als nu de voorspelfout erg groot is, of de voorgaande schattingsfouten planten zich erg sterk voort in het model, dan $P(t-) \rightarrow \infty$. Uit (II.21) blijkt dan dat $K(t) \rightarrow 1$, en dit gesubstitueerd in (II.20) geeft:

$$\text{als } P(t-) \rightarrow \infty \text{ dan } \hat{x}(t+) \approx z(t)$$

Dit betekent dat als de modelleringsfout erg groot wordt (ten opzichte van de meetfout), de invloed van de metingen bij het schatten gaat overheersen. De door het model (II.1) gemaakte schattingen worden genegeerd. Het omgekeerde is het geval als $v \rightarrow \infty$. Dan volgt uit (II.21) dat $K(t) \rightarrow 0$ en uit (II.20) dat $\hat{x}(t+) \approx x(t-)$.

Uit (II.19) blijkt dat voor het geval $H(t) = 1$ voor de variantie in de schatting geldt:

$$P(t+) = (1 - K(t)) P(t-) \quad (\text{II.22})$$

Met behulp van (II.21) kan dit worden herschreven tot

$$\begin{aligned} P(t+) &= \frac{R(t) P(t-)}{P(t-) + R(t)} = \frac{R(t)}{1 + \{ R(t)/P(t-) \}} = \\ &= \frac{P(t-)}{\{ P(t-)/R(t) \} + 1} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Hieruit blijkt:

Als $P(t-) \rightarrow \infty$ dan $P(t+) \rightarrow R(t)$

Als $R(t) \rightarrow \infty$ dan $P(t+) \rightarrow P(t-)$

Dit is in overeenstemming met het hiervóór beschreven verschijnsel dat het filter zich richt naar óf model óf meting als één van de ruiscomponenten verhoudingsgewijs groot is.

Bovendien kan uit (II.23) worden afgeleid dat in de minder extreme gevallen $P(t+)$ altijd kleiner is dan én $R(t)$ én $P(t-)$. Immers, de quotiënten $R(t)/P(t-)$ en $P(t-)/R(t)$ zijn altijd positief (het betreft de quotiënten van varianties). Dit betekent dat de variantie in de door het filter gemaakte schatting kleiner is dan die in én de met het model gemaakte schatting én de meting.

Nu ontbreekt nog een uitdrukking voor de variantie $P(t-)$, behorend bij de schatting $\hat{x}(t-)$, welke wordt bepaald met de systeemvergelijking (de relatie voor de toestand op twee verschillende tijdstippen):

$$\hat{x}(t-) = F(t) \hat{x}(\{t-1\}-) \quad (\text{II.24})$$

Volgens [10] geldt voor het algemene geval van een lineaire functie $Y=aX+b$ voor de variantie van Y :

$$\text{var}(Y) = a^2 \text{var}(X) \quad (\text{II.25})$$

zodat uit (II.11), (II.15), (II.24) en (II.25) voor de variantie van $\hat{x}(t-)$ zou gelden:

$$P(t-) = F^2(t) P(\{t-1\}+) \quad (\text{II.26})$$

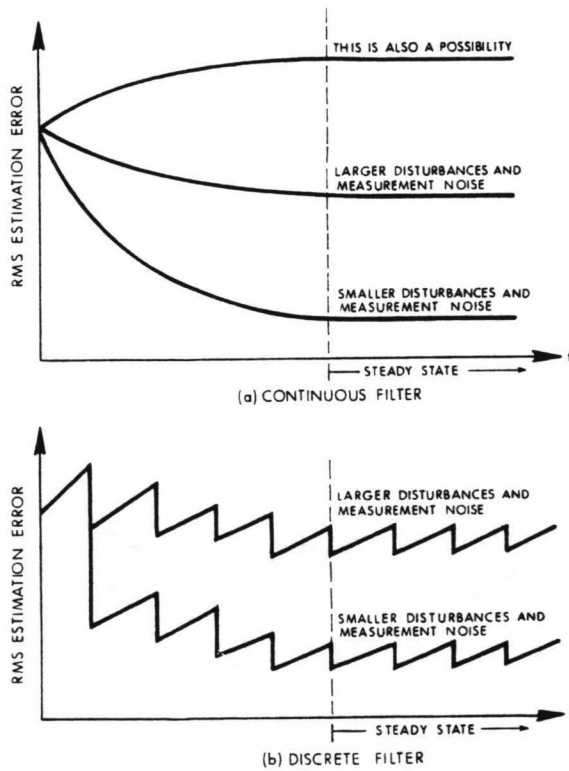
Deze vergelijking geeft echter slechts de voortplanting van de variantie weer als gevolg van de toepassing van het model op onnauwkeurige waarden. Daarnaast gaat elke tijdstap echter nog gepaard met een extra stukje onzekerheid, namelijk de systeemfout met variantie $Q(t)$. Hierdoor verandert (II.26) in

$$P(t-) = F^2(t) P(\{t-1\}+) + Q(t) \quad (\text{II.27})$$

Uit de vergelijking voor de variantie in de gefilterde schatting (II.23) blijkt nog een ander belangrijk facet. $P(t+)$ blijkt afhankelijk te zijn van $R(t)$ enerzijds en van $P(t-)$, en dus via (II.27) van $F(t)$ en $Q(t)$ anderzijds. De variantie die door het filter wordt bepaald is dus afhankelijk van de input die door de filterontwerper gegeven wordt: $F(t)$, $Q(t)$ en $R(t)$. Het Kalman filter creëert als het ware haar eigen nauwkeurigheid. Naarmate de informatie omtrent $F(t)$, $Q(t)$ en $R(t)$ minder gedetailleerd is, moet de berekende variantie $P(t+)$ met meer argwaan worden beschouwd.

In het algemeen geldt dat bij overschatting van $Q(t)$ en/of $R(t)$ de variantie nadert naar een te grote waarde. Bij onderschatting van $Q(t)$ en/of $R(t)$ gebeurt het omgekeerde, zie figuur II.1. Dit is ook te begrijpen uit de structuur van (II.23), zij het dat het beeld enigszins vertroebeld wordt door de onderlinge wisselwerking tussen (II.23) en (II.27).

In het voorgaande zijn enkele aspecten belicht aan de hand van het meest eenvoudige voorbeeld, namelijk het een-dimensionaal geval waarvoor $H(t)=1$ voor alle t . Voor meerdimensionale gevallen gelden dezelfde principes. Ook voor meetfactoren $H(t)=1$ verandert er weinig aan het principe. De effecten zijn dan echter minder duidelijk aantoonbaar. In dit soort gevallen ligt bij voorbeeld de weegfactor $K(t)$ vaak niet tussen 0 en 1.



Behavior of the RMS Error in the Kalman Filter Estimate of a Particular State Variable

Figuur II.1
Mogelijk gedrag schattingsfout.
Bron [4].

APPENDIX III

PROGRAMMATUUR

De programmeertaal is Fortran 77. De programma's zijn gedraaid op het Univac systeem van de Rijkswaterstaat.

- III.1 Programma voor berekenen kustlijnwaarden uit bodemmetingen (inclusief inter- en extrapolaties in de leemten).
- III.2 Programma voor bepalen coëfficiëntwaarde in eenlijnmodel met behulp van het Kalmanfilter.
- III.3 Programma voor bepalen coëfficiëntwaarden in tweelinmodel met behulp van het Kalmanfilter.

III.1 Bepalen kustlijnwaarden uit metingen

```

1: DFTN,0 ,H-KUST.EEN
2: C *****DEKLARATIES*****
3:      INTEGER LRN,HRN,OAR,LJ,R,V,J,NM,HIV,TT,TRT,TJT,AW,
4:      6      TEL1,I,AA,DUM,ENT,REST,INT,T,DZ,FDUT(500),JAFD(500),
5:      6      KVC,RF,YREF,AAFD,NIV(0:3),Z(89,97,15),DELTAN(3),
6:      6      VOETM(400),DIEPTE(400),AR,AV,AJ,EJ,LIV,ZX,ONGR,BOGR,
7:      6      AFWREF(89)
8:      REAL OPP(3,15),P1,P3,L1,L3,XX1,XX2,YY1,YY2,ZZZ,WAA,
9:      6      GEMAF(3)
10: C *****INLEZEN PROGRAMMA-INVUER, INVUERCODE=20*****
11:      READ(20,'(7(I6))') LRN,HRN,OAR,EJ,LJ,LIV,HIV
12:      READ(20,'(5(I6))') NIV(0),NIV(1),NIV(2),NIV(3),RF
13:      AR=(HRN-LRN)/OAR+1
14:      AV=(HIV-LIV)/10+1
15:      AJ=LJ-EJ+1
16:      READ(20,'(15)')AW
17:      R=1
18:      DO 100 I=1,AW
19:          READ(20,'(5(I5))')AFWREF(R),AFWREF(R+1),AFWREF(R+2),
20:          6      AFWREF(R+3),AFWREF(R+4)
21:          R=R+5
22:      100      CONTINUE
23: C *****INLEZEN BODEMCIJFERS, INVUERCODE=11*****
24:      NN=AR*AJ
25:      DO 710 TT=1,NN
26:          READ(11,*) KVC,TJT,TRT,AA
27:          R=(TRT-LRN)/OAR+1
28:          J=TJT-EJ+1
29:          ENT=AA/4
30:          ENT=4*ENT
31:          REST=AA-ENT
32:          DO 711 TEL1=1,ENT,4
33:              READ(11,*) VOETM(TEL1),DIEPTE(TEL1),
34:              6      VOETM(TEL1+1),DIEPTE(TEL1+1),VOETM(TEL1+2),
35:              6      DIEPTE(TEL1+2),VOETM(TEL1+3),DIEPTE(TEL1+3)
36:          711      CONTINUE
37:          IF ( REST .NE. 0 ) THEN
38:              DO 712 TEL1=ENT+1,AA
39:                  READ(11,*) VOETM(TEL1),DIEPTE(TEL1)
40:          712      CONTINUE
41:          END IF
42: C VULLEN VAN DE ARRAY Z
43:      DO 713 TEL1=1,AA
44:          V=(VOETM(TEL1)-LIV)/10+1
45:          IF (V.GE.1 .AND. V.LE.AV) THEN
46:              Z(R,V,J)=DIEPTE(TEL1)+1000
47:              IF (TEL1.EQ.1 .AND. V.GT.1) THEN
48:                  DO 714 I=1,V-1
49:                      Z(R,I,J)=-10
50:          714      CONTINUE
51:          END IF
52:          END IF
53:          713      CONTINUE
54:          IF (V.LT.AV) THEN
55:              DO 715 I=V+1,AV
56:                  Z(R,I,J)=-10
57:          715      CONTINUE
58:          END IF
59:      710      CONTINUE

```

```

60:C *****EXTRAPOLATIE: DUINEN MET PARABOOL, *****
61:C *****BRANDINGSZONE MET RECHTE *****
62:      DO 500 R=1,AR
63:      DO 501 J=1,AJ
64:      IF(Z(R,1,J).LT.0)THEN
65:      V=1
66: 502      IF (Z(R,V,J).GT.0) GO TO 503
67:          V=V+1
68:          GOTO 502
69: 503      CONTINUE
70:          ONGR=V
71:          XX1=0
72:          XX2=0
73:          YY1=0
74:          YY2=0
75:          ZZZ=0
76:          WAA=0
77:          DO 400 V=ONGR,(ONGR+5)
78:              WAA=WAA+1
79:              XX1=XX1+SQRT(V)
80:              XX2=XX2+SQRT(V)*SQRT(V)
81:              YY1=YY1+Z(R,V,J)
82:              YY2=YY2+Z(R,V,J)*Z(R,V,J)
83:              ZZZ=ZZZ+SQRT(V)*Z(R,V,J)
84: 400      CONTINUE
85:          P1=(XX1*YY1/WAA-ZZZ)/(XX1*XX1/WAA-XX2)
86:          P3=YY1/WAA-P1*XX1/WAA
87:          DO 504 V=1,(ONGR-1)
88:              Z(R,V,J)=P1*SQRT(V)+P3
89: 504      CONTINUE
90:      END IF
91:      IF(Z(R,AV,J).LT.0)THEN
92:      V=AV
93: 505      IF (Z(R,V,J).GT.0) GO TO 506
94:          V=V-1
95:          GOTO 505
96: 506      CONTINUE
97:          BOGR=V
98:          XX1=0
99:          XX2=0
100:         YY1=0
101:         YY2=0
102:         ZZZ=0
103:         WAA=0
104:         DO 410 V=(BOGR-10),BOGR
105:             WAA=WAA+1
106:             XX1=XX1+V
107:             XX2=XX2+V*V
108:             YY1=YY1+Z(R,V,J)
109:             YY2=YY2+Z(R,V,J)*Z(R,V,J)
110:             ZZZ=ZZZ+V*Z(R,V,J)
111: 410      CONTINUE
112:             L1=(XX1*YY1/WAA-ZZZ)/(XX1*XX1/WAA-XX2)
113:             L3=YY1/WAA-L1*XX1/WAA
114:             IF(L1.GT.0)THEN
115:                 L1=-1.0
116:             END IF
117:             DO 507 V=(BOGR+1),AV
118:                 Z(R,V,J)=L1*V+L3
119: 507      CONTINUE
120:      END IF
121: 501      CONTINUE
122: 500      CONTINUE
123:      DO 716 J=1,AJ
124:      DO 717 R=1,AR
125:      DO 718 V=2,(AV-1)
126:      IF (Z(R,V,J).LT.0.AND.Z(R,V-1,J).GT.0)THEN
127:      DO 720 T=1,25
128:      IF(Z(R,V+T,J).GT.0)THEN
129:      DZ=(Z(R,V-1,J)-Z(R,V+T,J))/(T+1)
130:      TEL1=0
131:      DO 721 I=V,V+T-1
132:      TEL1=TEL1+1
133:      Z(R,I,J)=Z(R,V-1,J)-DZ*TEL1
134: 721      CONTINUE
135:      GO TO 722
136:      END IF
137: 720      CONTINUE
138:      END IF
139: 722      DUM=DUM
140: 718      CONTINUE
141: 717      CONTINUE
142: 716      CONTINUE
143:C *****REFERENTIELIJN WORDT OMGEZET IN*****
144:C *****GEREDUCEERDE VOETMAAT *****
145:      YREF=(RF-LIV)/10+.5
146:      AANFD=0
147:C *****DE NIVEAUWAARDEN WORDEN MET ZELFDE*****
148:C *****NIVEAU OPGEHOOGD ALS DE Z-WAARDEN *****
149:      DO 799 I=0,3
150:      NIV(I)=NIV(I)+1000
151: 799      CONTINUE
152:C *****DE HOOGTES VAN DE ZONES 1 T/M 3
153:C *****WORDEN BEPAALD : DELTAN *****
154:      DO 800 I=1,3
155:      DELTAN(I)=NIV(I-1)-NIV(I)
156: 800      CONTINUE
157:C *****VERZORGEN VAN UITVOER *****
158:C *****DE RELEVANTE GEGEVENS WORDEN *****
159:C *****AFGEDRUKT. VERVOLGENS WORDT *****
160:C *****DE KOP VAN DE TABEL GEMAAKT *****
161:C *****UITVOERCODE = 30 *****
162:      WRITE(30,*)'*****'
163:      WRITE(30,*)'VOETMAAT REFERENTIE (M) =', RF
164:      WRITE(30,*)'*****'
165:      WRITE(30,*)'NIV0 = ',NIV(0)-1000
166:      WRITE(30,*)'NIV1 = ',NIV(1)-1000
167:      WRITE(30,*)'NIV2 = ',NIV(2)-1000
168:      WRITE(30,*)'NIV3 = ',NIV(3)-1000
169:      WRITE(30,*)'*****'
170:      WRITE(30,*)'RAAI JAAR NIV 0-1 NIV 1-2 NIV 2-3'
171:      WRITE(30,*)

```

```

172: C *****DE LIJNWAARDE-BEPALING BEGINT *****
173:      DO 801 R=1,AR
174:      TRT=(R-1)*DOAR+LRN
175:      DO 803 J=1,AJ
176:      TJT=J+EJ-1
177:      DO 804 I=1,3
178:      OPP(I,J)=0
179: 804      CONTINUE
180:      DO 805 V=YREF,AV
181:      ZX=Z(R,V,J)
182:      IF (ZX.LT.NIV(0)) THEN
183:      IF (ZX.LT.NIV(1)) THEN
184:      IF (ZX.LT.NIV(2)) THEN
185:      IF (ZX.LT.NIV(3)) THEN
186:      GO TO 802
187:      ELSE
188:      OPP(3,J)=OPP(3,J)+(ZX-NIV(3))*10
189:      END IF
190:      ELSE
191:      OPP(2,J)=OPP(2,J)+(ZX-NIV(2))*10
192:      OPP(3,J)=OPP(3,J)+DELTAN(3)*10
193:      END IF
194:      ELSE
195:      IF (V.EQ.YREF) THEN
196:      OPP(1,J)=OPP(1,J)+(ZX-NIV(1))*5
197:      ELSE
198:      OPP(1,J)=OPP(1,J)+(ZX-NIV(1))*10
199:      END IF
200:      DO 806 I=2,3
201:      OPP(I,J)=OPP(I,J)+DELTAN(I)*10
202: 806      CONTINUE
203:      END IF
204:      ELSE
205:      IF (V.EQ.YREF) THEN
206:      DO 807 I=1,3
207:      OPP(I,J)=OPP(I,J)+DELTAN(I)*5
208: 807      CONTINUE
209:      ELSE
210:      DO 808 I=1,3
211:      OPP(I,J)=OPP(I,J)+DELTAN(I)*10
212: 808      CONTINUE
213:      END IF
214:      END IF
215:      GO TO 850
216: 802      IF (V.GT.1.AND.V.LT.(AV-1)) THEN
217:      IF (ZX.LT.0.AND.Z(R,V-1,J).GT.NIV(3)) THEN
218:      AANFO=AANFO+1
219:      FOUT(AANFO)=Z(R,V-1,J)-1000.0
220:      JAFO(AANFO)=J+EJ-1
221:      END IF
222:      IF (ZX.LT.0.AND.Z(R,V+1,J).GT.NIV(3)) THEN
223:      AANFO=AANFO+1
224:      FOUT(AANFO)=Z(R,V+1,J)-1000.0
225:      JAFO(AANFO)=J+EJ-1
226:      END IF
227:      END IF
228:      IF (AANFO.EQ.999) THEN
229:      GO TO 851
230:      END IF
231: 850      DUM=DUM
232: 805      CONTINUE
233:      DO 809 I=1,3
234:      GEMAF(I)=OPP(I,J)/DELTAN(I)
235: 809      CONTINUE
236:      GEMAF(1)=GEMAF(1)+AFWREF(R)
237:      GEMAF(2)=GEMAF(2)+AFWREF(R)
238:      GEMAF(3)=GEMAF(3)+AFWREF(R)
239:      WRITE(30,'(2(I6),3(F9.2))')TRT,TJT,
240: 6      GEMAF(1),GEMAF(2),GEMAF(3)
241: 803      CONTINUE
242: 801      CONTINUE
243: 851      WRITE(30,*)'*****'
244:      WRITE(30,*)'AANTAL WEGGEVALLEN METINGEN = ',AANFO
245:      DO 852 I=1,AANFO
246:      WRITE(30,*)FOUT(I),JAFO(I)
247: 852      CONTINUE
248: C *****DE ARRAYS MET1,MET2,MET3 WORDEN GEFORMATTEERD*****
249: C *****WEGGESCHREVEN OM ALS INVOERFILE TE DIENEN VOOR*****
250: C *****ANDERE PROGRAMMAS , UITVOERCODE=31 *****
251:      STOP
252:      END
253: @EOF
254: @MAP,E ,H-COAST.KLIJN
255: IN H-KUST.EEN
256: LIB SYSS*GINO-F
257: END
258: @EOF

```

END ONSITE PRINTOUT ON SEPTEMBER 4, 1987 AT 12:57:47
 WWKZL7802G00*H-KUST(1).KLIJNIE(55)

III.2 Bepalen coëfficiëntwaarde eenlijnmodel met Kalmanfilter

1987 JUN 18 THU 1426:38 PAGE 1

```

1:3FTN,0 ,H-KUST.DRIE
2:C #####
3:C ##### PROGRAMMA H-KUST.EENL #####
4:C #####
5:C BEPAALT KUSTCONSTANTE 5
6:C D.M.V. KALMANFILTERING VAN DEZE MODELCOEFFICIENT.
7:C #####
8:C DE INVOER KOMT UIT 10 (PROGRAMMA-INVOER)
9:C EN 11 (GEMETEN KUSTLIJNEN)
10:C DE UITVOER GAAT NAAR 20
11:C #####
12:C #####
13:C #####DEKLARATIES#####
14: INTEGER LR,HR,SR,EJ,LJ,DX,DT,KWDX,I,J,AANSYS,
15: 6 AANMEE,T,AR,IER,TEL,IG,TRT,TJT
16: REAL SBEG,HH,MEVA,
17: 6 HUSYSY(2,2),HUMEME(100,100),HUSYME(2,100),
18: 6 HUMESY(100,2),PNAF(2,2),Q(2,2),F(2,2),FGET(2,2),
19: 6 EEN(2,2),H(100,2),HGET(2,100),MET(100,1965:1987),
20: 6 S(1965:1987),
21: 6 P(2,2),R(100,100),K(2,100),YMET(100,1),
22: 6 YMOD(100,1),HUMEE(100,1),HUSYS(2,1),XNAF(2,1),
23: 6 XNAT(2,1),INMEME(100,100),WKAREA(100),
24: 6 MOD(100,1965:1987),
25: 6 RRAND(0:100,1965:1987)
26:C #####INLEZEN PROGRAMMA-INVOER, INVOERCODE=10#####
27: READ(10,'(7I6)')LR,HR,SR,EJ,LJ,DX,DT
28: READ(10,'(E10.2)')SBEG
29: READ(10,'(E10.1)')PNAF(1,1)
30: READ(10,'(E10.1)')Q(1,1)
31: READ(10,'(2F10.2)')HH,MEVA
32:C #####VERZORGEN UITVOER, UITVOERCODE=20#####
33: WRITE(20,*)'#####'
34: WRITE(20,*)'INGEVOERDE GEGEVENS (PROG: EENL (MET))'
35: WRITE(20,*)'#####'
36: WRITE(20,*)'LAAGSTE RAAINUMMER :',LR
37: WRITE(20,*)'HOOGSTE RAAINUMMER :',HR
38: WRITE(20,*)'STAPGROOTTE RAAIEN :',SR
39: WRITE(20,*)'EERSTE JAAR :',EJ
40: WRITE(20,*)'LAATSTE JAAR :',LJ
41: WRITE(20,*)'#####'
42: WRITE(20,*)'DX= ',DX
43: WRITE(20,*)'DT= ',DT
44: WRITE(20,*)'#####'
45: WRITE(20,*)'H= ',HH
46: WRITE(20,*)'#####'
47: WRITE(20,*)'BEGINSCHATTING PARAMETERS'
48: WRITE(20,*)'S'
49: WRITE(20,*)SBEG
50: WRITE(20,*)'#####'
51: WRITE(20,*)'BEGINSCHATTING RUISPARAMETERS'
52: WRITE(20,*)'PS'
53: WRITE(20,*)PNAF(1,1)
54: WRITE(20,*)'#####'
55: WRITE(20,*)'SYSTEEMRUIS'
56: WRITE(20,*)'QS'
57: WRITE(20,*)Q(1,1)
58: WRITE(20,*)'#####'
59: WRITE(20,*)'MEETVARIANTIE '
60: WRITE(20,*)MEVA
61: WRITE(20,*)'#####'
62:C #####ENKELE VEEL GEBRUIKTE VARIABELEN #####
63: KWDX=DX*DX
64: AR=(HR-LR)/SR+1
65: AANSYS=2
66: AANMEE=AR-2
67: PNAF(2,2)=0
68: Q(2,2)=-.1E-6
69:C #####INLEZEN GEMETEN LIJNWAARDEN. DEZE METINGEN###
70:C #####ZIJN BEPAALD MBV HET PROGRAMMA H-COAST.KLIJN###
71:C #####INVOERCODE=11#####
72: DO 400 I=1,AR
73: DO 401 T=EJ,LJ
74: READ(11,'(2I6),(F9.2)')TRT,TJT,MET(I,T)
75: 401 CONTINUE
76: 400 CONTINUE
77:C #####MOD BESTAAT VOOR HET EERSTE JAAR UIT#####
78:C #####DE METINGEN MET #####
79: DO 410 I=1,AR
80: MOD(I,EJ)=MET(I,EJ)
81: 410 CONTINUE
82:C #####DE VOLGENDE MATRICES WORDEN GECREERD: #####
83:C #####F= SYSTEEMMATRIX
84:C #####FGET= GETRANSPONEERDE F
85:C #####EEN= EENHEIDSMATRIX
86:C #####BOVENDIEN SYSTEEMRUISMATRIX Q EN FILTERRUIS###
87:C #####PNAF VERDER OPGEVULD#####
88: DO 500 I=1,2
89: DO 501 J=1,2
90: IF(I.EQ.J)THEN
91: F(I,J)=1
92: FGET(I,J)=1
93: EEN(I,J)=1
94: ELSE
95: F(I,J)=0
96: FGET(I,J)=0
97: EEN(I,J)=0
98: Q(I,J)=0
99: PNAF(I,J)=0
100: END IF
101: 501 CONTINUE
102: 500 CONTINUE

```

```

103:C *****DE MEETRUISMATRIX R WORDT GEVULD*****
104:      DO 502 I=1,AANMEE
105:      DO 503 J=1,AANMEE
106:      IF(I.EQ.J)THEN
107:      R(I,J)=MEVA
108:      ELSE
109:      R(I,J)=0
110:      END IF
111: 503      CONTINUE
112: 502      CONTINUE
113:C *****TER CONTROLE WORDEN DE GECEERDE MATRICES*****
114:C *****AFGEDRUKT: F,Q,PNAF*****
115:      WRITE(20,*)'*****'
116:      WRITE(20,*)'SYSTEEMMATRIX F'
117:      WRITE(20,*)' '
118:      DO 700 I=1,2
119:      WRITE(20,*)F(I,1),F(I,2)
120: 700      CONTINUE
121:      WRITE(20,*)' '
122:      WRITE(20,*)'SYSTEEMRUISMATRIX Q'
123:      WRITE(20,*)' '
124:      DO 701 I=1,2
125:      WRITE(20,*)Q(I,1),Q(I,2)
126: 701      CONTINUE
127:C *****
128:C *****
129:C TOT ZOVER HET VOORBEREIDENDE WERK
130:C ER KAN NU GEFILTERD WORDEN
131:C HIERONDER VOLGT DE KALMANFILTER-ALGORITME
132:C *****
133:C *****
134:C *****IN DE ARRAYS S WORDT DE GESCHIEDENIS*****
135:C *****VAN DE PARAMETERS OPGESLAGEN, TE BEGINNEN*****
136:C *****MET HET EERSTE JAAR (DE BEGINSCHATTINGEN)*****
137:      S(EJ)=SBEG
138:C *****DE UITGANGSSITUATIE VOOR DE SYSTEEMVEKTOR*****
139:C *****XNAF (X NA FILTERING) WORDT BEPAALD*****
140:      XNAF(1,1)=SBEG
141:      XNAF(2,1)=1
142:C *****DE TIJD-LOOP WORDT GESTART*****
143:      WRITE(20,*)'*****'
144:      WRITE(20,*)'*****'
145:      DO 600 T=(EJ+1),LJ
146:      WRITE(20,*)'-----'
147:      WRITE(20,*)'-----'
148:      WRITE(20,*)'***'
149:      WRITE(20,*)'(I4)'T
150:      WRITE(20,*)'***'
151:      PRINT*,R(1,1),R(2,2),R(3,3),R(4,4)
152:C *****DE TRANSFORMATIESTAP*****
153:      DO 601 I=1,2
154:      XNAT(I,1)=XNAF(I,1)
155: 601      CONTINUE
156:C *****DE MEETMATRIX H WORDT BEPAALD MBV DE*****
157:C *****GEMODELLEERDE LIJNWAARDEN*****
158:      DO 602 I=2,(AR-1)
159:      J=I-1
160:      H(J,1)=(DT/(KWDX*HH))*(-2*MET(I,T-1)+MET(I-1,T-1)
161:      6      +MET(I+1,T-1))
162:      H(J,2)=MET(I,T-1)
163: 602      CONTINUE
164:C *****H WORDT AFGEDRUKT*****
165:      WRITE(20,*)' '
166:      WRITE(20,*)'H'
167:      WRITE(20,*)' '
168:      DO 710 I=1,AANMEE
169:      WRITE(20,*)'(2(E14.2))'H(I,1),H(I,2)
170: 710      CONTINUE
171:C *****DE RUISMATRIX NA TRANSFORMATIE WORDT*****
172:C *****BEPAALED : P *****
173:      CALL VMULFF(PNAF,FGET,2,2,2,2,2,HUSYSY,2,IER)
174:      CALL VMULFF(F,HUSYSY,2,2,2,2,2,P,2,IER)
175:      DO 603 I=1,2
176:      DO 604 J=1,2
177:      P(I,J)=P(I,J)+Q(I,J)
178: 604      CONTINUE
179: 603      CONTINUE
180:C *****AFDRUKKEN VAN P *****
181:      WRITE(20,*)' '
182:      WRITE(20,*)'P'
183:      WRITE(20,*)' '
184:      DO 715 I=1,2
185:      WRITE(20,*)P(I,1),P(I,2)
186: 715      CONTINUE
187:C *****DE GAINMATRIX K WORDT BEPAALD*****
188:C *****DAARTOE WORDT EERST DE GETRANSPONEERDE*****
189:C *****VAN H BEPAALD : HGET *****
190:      DO 605 I=1,2
191:      DO 606 J=1,AANMEE
192:      HGET(I,J)=H(J,I)
193: 606      CONTINUE
194: 605      CONTINUE
195:      CALL VMULFF(P,HGET,2,2,AANMEE,2,2,HUSYME,2,IGR)
196:      CALL VMULFF(H,HUSYME,AANMEE,2,AANMEE,100,2,HUMLME,100,IER)
197:      DO 607 I=1,AANMEE
198:      DO 608 J=1,AANMEE
199:      HUMEME(I,J)=HUMEME(I,J)+R(I,J)
200: 608      CONTINUE
201: 607      CONTINUE
202:      CALL LINV1F(HUMEME,AANMEE,100,INMEME,3,WKAREL,IER)
203:      CALL VMULFF(HGET,INMEME,2,AANMEE,AANMEE,2,100,
204:      6      HUSYME,2,IER)
205:      CALL VMULFF(P,HUSYME,2,2,AANMEE,2,2,K,2,IER)

```



```

206:C ***** AFDRUKKEN K *****
207:C *****OM LAY-OUT REDENEN WORDT DE GETRANSPONEERDE***
208:C *****VAN K AFGEDRUKT !!!!! *****
209:      WRITE(20,*) ' '
210:      WRITE(20,*) 'K (IN GETRANSPONEERDE VORM !)'
211:      WRITE(20,*) ' '
212:      DO 720 I=1,AANMEE
213:        WRITE(20, '(2(E14.2))') K(1,I), K(2,I)
214:      CONTINUE
215:C *****DE GEMETEN LIJNWAARDEN WORDEN UIT DE MATRIX*****
216:C *****      MET IN DE VEKTOR YMET GESTOPT*****
217:      DO 609 I=2, (AR-1)
218:        J=I-1
219:        YMET(J,1)=MET(I,T)
220:      CONTINUE
221:C *****DE MEETSTAP WORDT GEDAAN. DE Y-WAARDEN VOLGENS***
222:C *****HET MODEL WORDEN BEPAALD*****
223:      CALL VMULFF(H,XNAF,AANMEE,2,1,100,2,YMOD,100,IER)
224:C *****DE ARRAY MOD      WORDT GEVULD*****
225:      DO 650 I=2, (AR-1)
226:        J=I-1
227:        MOD(I,T)=YMOD(J,1)
228:      CONTINUE
229:      MOD(1,T)=MET(1,T)
230:      MOD(AR,T)=MET(AR,T)
231:C *****DE BIJSTELLING VAN DE SCHATTING NA TRANSFORMATIE
232:C *****VOLGT UIT K EN HET VERSCHIL TUSSEN YMOD EN YMET**
233:      DO 610 I=1,AANMEE
234:        HUMEE(I,1)=YMET(I,1)-YMOD(I,1)
235:      CONTINUE
236:      CALL VMULFF(K,HUMEE,2,AANMEE,1,2,100,HUSYS,2,IER)
237:      DO 611 I=1,2
238:        XNAF(I,1)=XNAT(I,1)+HUSYS(I,1)
239:      CONTINUE
240:C *****AFDRUKKEN VAN DE TOESTAND NA FILTERING
241:      WRITE(20,*) ' '
242:      WRITE(20,*) '*****'
243:      WRITE(20,*) 'XNAF(1,1),XNAF(2,1)'
244:      WRITE(20,*) '*****'
245:      S(T)=XNAF(1,1)
246:C *****DE RUIS VAN DE SCHATTING NA FILTERING WORDT BEPAALD
247:      CALL VMULFF(K,H,2,AANMEE,2,2,100,HUSYS,2,IER)
248:      DO 612 I=1,2
249:        DO 613 J=1,2
250:          HUSYS(I,J)=EEN(1,J)-HUSYS(I,J)
251:      CONTINUE
252:      CALL VMULFF(HUSYS,P,2,2,2,2,PNAF,2,IER)
253:      *****AFDRUKKEN VAN DE RUIS NA FILTERING*****
254:C *****
255:      WRITE(20,*) ' '
256:      WRITE(20,*) 'PNAF'
257:      WRITE(20,*) ' '
258:      DO 614 I=1,2
259:        WRITE(20,*) PNAF(I,1), PNAF(I,2)
260:      CONTINUE
261:      CONTINUE
262:C *****AFDRUKKEN VAN DE GESCHIEDENIS VAN DE PARAMTERS***
263:      WRITE(20,*) '*****'
264:      WRITE(20,*) 'GESCHIEDENIS PARAMETERS'
265:      WRITE(20,*) '-----'
266:      DO 616 I=EJ,LJ
267:        WRITE(20,*) T,S(T)
268:      CONTINUE
269:C *****AFDRUKKEN VAN DE MET GEFILTERDE COEFFICIENTEN***
270:C *****BEPAALDE KUSTLIJNWAARDEN*****
271:      WRITE(20,*) '*****'
272:      WRITE(20,*) 'BEREKENDE KUSTLIJN-WAARDEN'
273:      WRITE(20,*) '(BEPAALD MBV GEFILTERDE COEFF.)'
274:      WRITE(20,*) '-----'
275:      DO 620 I=1,AR
276:        WRITE(20, '(16(F7.2))') MOD(I,EJ), MOD(I,EJ+1),
277:          MOD(I,EJ+2), MOD(I,EJ+3), MOD(I,EJ+4), MOD(I,EJ+5),
278:          MOD(I,EJ+6), MOD(I,EJ+7), MOD(I,EJ+8), MOD(I,EJ+9),
279:          MOD(I,EJ+10), MOD(I,EJ+11), MOD(I,EJ+12),
280:          MOD(I,EJ+13), MOD(I,EJ+14), MOD(I,EJ+15)
281:      CONTINUE
282:C *****
283:C *****      EINDE PROGRAMMA*****
284:C *****
285:C *****
286:      STOP
287:      END
288: @EOF
289: @MAP,E ,H-COAST.ONELINE
290: IN H-KUST.DRIE
291: LIB DIEX*IMSL-REL.
292: END
293: @EOF

```

III.3 Bepalen coefficientwaarden tweelijnmodel met Kalmanfilter

1987 JUN 18 THU 1427:13 PAGE 1

```

1: AFTN.0 ,H-KUST.DRIE
2: C *****
3: C ***** PROGRAMMA H-KUST.TWEEL *****
4: C *****
5: C BEPAALT KUSTCONSTANTEN S1, S2 EN SY
6: C D.M.V. KALMANFILTERING VAN DEZE MODELCOEFFICIENTEN.
7: C *****
8: C DE INVOER KOMT UIT 10 (PROGRAMMA-INVOER)
9: C EN 11 (GEMETEN KUSTLIJNEN)
10: C DE UITVOER GAAT NAAR 20
11: C *****
12: C *****
13: C *****DEKLARATIES*****
14: INTEGER LR,HR,SR,EJ,LJ,DX,DT,KWDX,I,J,AANSYS,
15: 6 AANMEE,T,AR,IER,TRT,TJT
16: REAL S1BEG,S2BEG,SYBEG,W,H1,H2,MEVA1,MEVA2,
17: HUSYSY(4,4),HUMEME(200,200),HUSYME(4,200),
18: HUMESY(200,4),PNAF(4,4),Q(4,4),F(4,4),FGET(4,4),
19: EEN(4,4),H(200,4),HGET(4,200),MET1(100,1965:1987),
20: MET2(100,1965:1987),S1(1965:1987),S2(1965:1987),
21: SY(1965:1987),P(4,4),R(200,200),K(4,200),YMET(200,1),
22: YMOD(200,1),HUMEE(200,1),HUSYS(4,1),XNAF(4,1),
23: XNAT(4,1),INMEME(200,200),S(200),WKAREA(200)
24: C *****INLEZEN PROGRAMMA-INVOER, INVOERCODE=10*****
25: READ(10, '(7(I6))')LR,HR,SR,EJ,LJ,DX,DT
26: READ(10, '(3(E10.2))')S1BEG,S2BEG,SYBEG
27: READ(10, '(3(E10.1))')PNAF(1,1),PNAF(2,2),PNAF(3,3)
28: READ(10, '(3(E10.1))')Q(1,1),Q(2,2),Q(3,3)
29: READ(10, '(5(F10.2))')W,H1,H2,MEVA1,MEVA2
30: C *****VERZORGEN UITVOER, UITVOERCODE=20*****
31: WRITE(20,*)'*****'
32: WRITE(20,*)'INGEVOERDE GEGEVENS'
33: WRITE(20,*)'*****'
34: WRITE(20,*)'LAAGSTE RAAINUMMER :',LR
35: WRITE(20,*)'HOOGSTE RAAINUMMER :',HR
36: WRITE(20,*)'STAPGROOTTE RAAIEN :',SR
37: WRITE(20,*)'EERSTE JAAR :',EJ
38: WRITE(20,*)'LAATSTE JAAR :',LJ
39: WRITE(20,*)'*****'
40: WRITE(20,*)'DX= ',DX
41: WRITE(20,*)'DT= ',DT
42: WRITE(20,*)'*****'
43: WRITE(20,*)'H1= ',H1
44: WRITE(20,*)'H2= ',H2
45: WRITE(20,*)'*****'
46: WRITE(20,*)'BEGINSCHATTING PARAMETERS'
47: WRITE(20,*)'S1 S2 SY'
48: WRITE(20,*)S1BEG,S2BEG,SYBEG
49: WRITE(20,*)'*****'
50: WRITE(20,*)'BEGINSCHATTING RUISPARAMETERS'
51: WRITE(20,*)'PS1 PS2 PSY'
52: WRITE(20,*)PNAF(1,1),PNAF(2,2),PNAF(3,3)
53: WRITE(20,*)'*****'
54: WRITE(20,*)'SYSTEEMRUIS'
55: WRITE(20,*)'QS1 QS2 QSY'
56: WRITE(20,*)Q(1,1),Q(2,2),Q(3,3)
57: WRITE(20,*)'*****'
58: WRITE(20,*)'MEETVARIANTIE LAAG1 , LAAG2'
59: WRITE(20,*)MEVA1,MEVA2
60: WRITE(20,*)'*****'
61: C *****ENKELE VEEL GEBRUIKTE VARIABELEN *****
62: KWDX=DX*DX
63: AR=(HR-LR)/SR+1
64: AANSYS=4
65: AANMEE=2*AR-4
66: PNAF(4,4)=0
67: Q(4,4)=1E-9
68: C *****INLEZEN GEMETEN LIJNWAARDEN. DEZE METINGEN*****
69: C *****ZIJN BEPAALD MBV HET PROGRAMMA H-COAST.KLIJN*****
70: C *****INVOERCODE=11*****
71: DO 400 I=1,AR
72: DO 401 T=EJ,LJ
73: READ(11, '(2(I6),2(F9.2))')TRT,TJT,
74: 6 MET1(I,T),MET2(I,T)
75: 401 CONTINUE
76: 400 CONTINUE
77: C *****DE VOLGENDE MATRICES WORDEN GECEERD: *****
78: C *****F= SYSTEEMMATRIX
79: C *****FGET= GETRANSPONEERDE F
80: C *****EEN= EENHEIDSMATRIX
81: C *****BOVENDIEN SYSTEEMRUISMATRIX Q EN FILTERRUIS*****
82: C *****PNAF VERDER OPGEVULD*****
83: DO 500 I=1,4
84: DO 501 J=1,4
85: IF(I.EQ.J)THEN
86: F(I,J)=1
87: FGET(I,J)=1
88: EEN(I,J)=1
89: ELSE
90: F(I,J)=0
91: FGET(I,J)=0
92: EEN(I,J)=0
93: Q(I,J)=0
94: PNAF(I,J)=0
95: END IF
96: 501 CONTINUE
97: 500 CONTINUE

```

```

98:C *****DE MEETRUISMATRIX R WORDT GEVULD*****
99:      DO 502 I=1,(AANMEE-1),2
100:      DO 503 J=1,(AANMEE-1),2
101:      IF(I.EQ.J)THEN
102:        R(I,J)=MEVA1
103:      ELSE
104:        R(I,J)=0
105:      END IF
106: 503    CONTINUE
107: 502    CONTINUE
108:      DO 504 I=2,AANMEE,2
109:      DO 505 J=2,AANMEE,2
110:      IF(I.EQ.J)THEN
111:        R(I,J)=MEVA2
112:      ELSE
113:        R(I,J)=0
114:      END IF
115: 505    CONTINUE
116: 504    CONTINUE
117:C *****TER CONTROLE WORDEN DE GECEERDE MATRICES*****
118:C *****AFGEDRUKT: F,Q,PNAF*****
119:      WRITE(20,*)'*****'
120:      WRITE(20,*)'SYSTEEMMATRIX F'
121:      WRITE(20,*)' '
122:      DO 700 I=1,4
123:        WRITE(20,*)F(I,1),F(I,2),F(I,3),F(I,4)
124: 700    CONTINUE
125:      WRITE(20,*)' '
126:      WRITE(20,*)'SYSTEEMRUISMATRIX Q'
127:      WRITE(20,*)' '
128:      DO 701 I=1,4
129:        WRITE(20,*)Q(I,1),Q(I,2),Q(I,3),Q(I,4)
130: 701    CONTINUE
131:C *****
132:C *****
133:C TOT ZOVER HET VOORBEREIDENDE WERK
134:C ER KAN NU GEFILTERD WORDEN
135:C HIERONDER VOLGT DE KALMANFILTER-ALGORITME
136:C *****
137:C *****
138:C *****IN DE ARRAYS S1 S2 SY WORDT DE GESCHIEDENIS*****
139:C *****VAN DE PARAMETERS OPGESLAGEN, TE BEGINNEN*****
140:C *****MET HET EERSTE JAAR (DE BEGINSCHATTINGEN)*****
141:      S1(EJ)=S1BEG
142:      S2(EJ)=S2BEG
143:      SY(EJ)=SYBEG
144:C *****DE UITGANGSSITUATIE VOOR DE SYSTEEMVEKTOR*****
145:C *****XNAF (X NA FILTERING) WORDT BEPAALD*****
146:      XNAF(1,1)=S1BEG
147:      XNAF(2,1)=S2BEG
148:      XNAF(3,1)=SYBEG
149:      XNAF(4,1)=1
150:C *****DE TIJD-LOOP WORDT GESTART*****
151:      WRITE(20,*)'*****'
152:      WRITE(20,*)'*****'
153:      DO 600 T=(EJ+1),LJ
154:        WRITE(20,*)'-----'
155:        WRITE(20,*)'-----'
156:        WRITE(20,*)'****'
157:        WRITE(20,*)'(I4)'T
158:        WRITE(20,*)'****'
159:C *****DE TRANSFORMATIESTAP*****
160:      DO 601 I=1,4
161:        XNAT(I,1)=XNAF(I,1)
162: 601    CONTINUE
163:C *****DE MEETMATRIX H WORDT BEPAALD MBV DE*****
164:C *****GEMETEN LIJNWAARDEN*****
165:      DO 602 I=2,(AR-1)
166:        J=2*I-3
167:        H(J,1)=(DT/(KWDX*H1))*(-2*MET1(I,T-1)
168:          6      +MET1(I-1,T-1)+MET1(I+1,T-1))
169:        H(J,2)=0
170:        H(J,3)=(DT/H1)*(-MET1(I,T-1)+MET2(I,T-1)-W)
171:        H(J,4)=MET1(I,T-1)
172:        H(J+1,1)=0
173:        H(J+1,2)=(DT/(KWDX*H2))*(-2*MET2(I,T-1)
174:          6      +MET2(I-1,T-1)+MET2(I+1,T-1))
175:        H(J+1,3)=(DT/H2)*(-MET2(I,T-1)+MET1(I,T-1)+W)
176:        H(J+1,4)=MET2(I,T-1)
177: 602    CONTINUE
178:C *****H WORDT AFGEDRUKT*****
179:      WRITE(20,*)' '
180:      WRITE(20,*)'H'
181:      WRITE(20,*)' '
182:      DO 710 I=1,AANMEE
183:        WRITE(20,*(4(E14.4)))H(I,1),H(I,2),H(I,3),H(I,4)
184: 710    CONTINUE
185:C *****DE RUISMATRIX NA TRANSFORMATIE WORDT*****
186:C *****BEPAALD : P *****
187:      CALL VMULFF(PNAF,FGET,4,4,4,4,HUSYSY,4,IER)
188:      IF(IER.EQ.129)THEN
189:        GO TO 999
190:      END IF
191:      CALL VMULFF(F,HUSYSY,4,4,4,4,P,4,IER)
192:      IF(IER.EQ.129)THEN
193:        GO TO 999
194:      END IF
195:      DO 603 I=1,4
196:      DO 604 J=1,4
197:        P(I,J)=P(I,J)+Q(I,J)
198: 604    CONTINUE
199: 603    CONTINUE
200:C *****AFDRUKKEN VAN P *****
201:      WRITE(20,*)' '
202:      WRITE(20,*)'P'
203:      WRITE(20,*)' '
204:      DO 715 I=1,4
205:        WRITE(20,*)P(I,1),P(I,2),P(I,3),P(I,4)
206: 715    CONTINUE

```

```

207:C *****DE GAINMATRIX K WORDT BEPAALD*****
208:C *****DAARTOE WORDT EERST DE GETRANSPONEERDE*****
209:C *****VAN H BEPAALD : HGET *****
210: DO 605 I=1,4
211: DO 606 J=1,AANMEE
212: HGET(I,J)=H(J,I)
213: 606 CONTINUE
214: 605 CONTINUE
215: CALL VMULFF(P,HGET,4,4,AANMEE,4,4,HUSYME,4,IER)
216: IF(IER.EQ.129)THEN
217: GO TO 999
218: END IF
219: CALL VMULFF(H,HUSYME,AANMEE,4,AANMEE,200,4,HUMEME,200,IER)
220: IF(IER.EQ.129)THEN
221: GO TO 999
222: END IF
223: DO 607 I=1,AANMEE
224: DO 608 J=1,AANMEE
225: HUMEME(I,J)=HUMEME(I,J)+R(I,J)
226: 608 CONTINUE
227: 607 CONTINUE
228: CALL LINV1F(HUMEME,AANMEE,200,INMEME,3,WKAREA,IER)
229: CALL VMULFF(HGET,INMEME,4,AANMEE,AANMEE,4,200,
230: HUSYME,4,IER)
231: 6 CALL VMULFF(P,HUSYME,4,4,AANMEE,4,4,K,4,IER)
232:C ***** AFDRUKKEN K *****
233:C *****OM LAY-OUT REDENEN WORDT DE GETRANSPONEERDE*****
234:C *****VAN K AFGEDRUKT !!!!! *****
235: WRITE(20,*)' '
236: WRITE(20,*)'K (IN GETRANSPONEERDE VORM !)'
237: WRITE(20,*)' '
238: DO 720 I=1,AANMEE
239: WRITE(20,*(4(E14.4)))'K(1,I),K(2,I),K(3,I),K(4,I)
240: 720 CONTINUE
241:C *****DE GEMETEN LIJNWAARDEN WORDEN UIT DE MATRIX*****
242:C *****MET1 EN MET2 IN DE VEKTOR YMET GESTOPT*****
243: DO 609 I=2,(AR-1)
244: J=2*I-3
245: YMET(J,1)=MET1(I,T)
246: YMET(J+1,1)=MET2(I,T)
247: 609 CONTINUE
248:C *****DE MEETSTAP WORDT GEDAAN. DE Y-WAARDEN VOLGENS*****
249:C *****HET MODEL WORDEN BEPAALD*****
250: CALL VMULFF(H,XNAF,AANMEE,4,1,200,4,YMOD,200,IER)
251:C *****DE BIJSTELLING VAN DE SCHATTING NA TRANSFORMATIE*****
252:C *****VOLGT UIT K EN HET VERSCHIL TUSSEN YMOD EN YMET*****
253: DO 610 I=1,AANMEE
254: HUMEE(I,1)=YMET(I,1)-YMOD(I,1)
255: 610 CONTINUE
256: CALL VMULFF(K,HUMEE,4,AANMEE,1,4,200,HUSYS,4,IER)
257: DO 611 I=1,4
258: XNAF(I,1)=XNAT(I,1)+HUSYS(I,1)
259: 611 CONTINUE
260:C *****AFDRUKKEN VAN DE TOESTAND NA FILTERING*****
261: WRITE(20,*)' '
262: WRITE(20,*)'*****'
263: WRITE(20,*)XNAF(1,1),XNAF(2,1),XNAF(3,1),XNAF(4,1)
264: WRITE(20,*)'*****'
265: S1(T)=XNAF(1,1)
266: S2(T)=XNAF(2,1)
267: SY(T)=XNAF(3,1)
268:C *****DE RUIS VAN DE SCHATTING NA FILTERING WORDT BEPAALD*****
269: CALL VMULFF(K,H,4,AANMEE,4,4,200,HUSYSY,4,IER)
270: DO 612 I=1,4
271: DO 613 J=1,4
272: HUSYSY(I,J)=EEN(I,J)-HUSYSY(I,J)
273: 613 CONTINUE
274: 612 CONTINUE
275: CALL VMULFF(HUSYSY,P,4,4,4,4,4,PNAF,4,IER)
276:C *****AFDRUKKEN VAN DE RUIS NA FILTERING*****
277: WRITE(20,*)' '
278: WRITE(20,*)'PNAF'
279: WRITE(20,*)' '
280: DO 614 I=1,4
281: WRITE(20,*)PNAF(I,1),PNAF(I,2),PNAF(I,3),PNAF(I,4)
282: 614 CONTINUE
283: 600 CONTINUE
284: GO TO 998
285: 999 WRITE(20,*)'!!!!!!!FOUT IN SUBROUTINE!!!!!!!'
286: 998 WRITE(20,*)' '
287:C *****AFDRUKKEN VAN DE GESCHIEDENIS VAN DE PARAMTEFS*****
288: WRITE(20,*)'*****'
289: WRITE(20,*)'GESCHIEDENIS PARAMETERS'
290: WRITE(20,*)'-----'
291: DO 616 T=EJ,LJ
292: WRITE(20,*)T,S1(T),S2(T),SY(T)
293: 616 CONTINUE
294:C *****
295:C EINDE PROGRAMMA
296:C *****
297:C *****
298: STOP
299: END
300: @EOF
301: @MAP,E ,H-COAST.TWOLINE
302: IN H-KUST.DRIE
303: LIB DIEX*IMSL-REL.
304: END
305: @EOF

```

APPENDIX IV

TEST VAN HET FILTERPROGRAMMA

Het programma voor het bepalen van de kustconstante s in het eenlijnmodel is getest aan de hand van een periodieke oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{s}{h} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{IV.1})$$

De oplossing beschrijft zogenaamde zandgolven, en luidt (zie [2]):

$$y = A e^{-kx} \cos(\omega t - kx + \varphi_1) + B e^{kx} \cos(\omega t + kx + \varphi_2) \quad (\text{IV.2})$$

$$\text{met } k = \sqrt{\frac{\omega h}{2s}} \quad (\text{IV.3})$$

Met behulp van (IV.2) kunnen op eenvoudige wijze waarden worden bepaald van een kustlijnbeving welke voldoet aan het eenlijnmodel (IV.1). Door deze analytisch bepaalde waarden als invoer te gebruiken, kan worden gecontroleerd of het filterprogramma de juiste waarde van de kustconstante s vindt.

De test is uitgevoerd met de volgende parameterwaarden:

$$\begin{aligned} A &= 100 \text{ m} \\ B &= 0 \text{ m} \\ \omega &= 1 \text{ l/jaar} \\ \varphi_1 &= 0 \text{ rad} \\ h &= 9 \text{ m} \end{aligned}$$

$$s = 5 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$$

Substitutie van deze waarden in (IV.3) geeft als waarde voor k : $k = 0.003 \text{ l/m}$.

Vergelijking (IV.2) ziet er nu als volgt uit:

$$y = 100 e^{-0.003x} \cos(t - 0.003x) \quad (\text{IV.4})$$

Uit het stabiliteitscriterium (zie (3.6)) volgt, uitgaande van een tijdstap $\Delta t = 1 \text{ jaar}$,

$$\Delta x \geq \sqrt{2 \Delta t s/h} = 333 \text{ m}$$

Het numerieke schema wordt nu afgewerkt met de stapgrootten:

$$\begin{aligned} \Delta t &= 1 \text{ jaar} \\ \Delta x &= 500 \text{ m} \end{aligned}$$

Uitgaande van bovenstaande waarden zijn de volgende gevallen beschouwd.

RUN IV.a

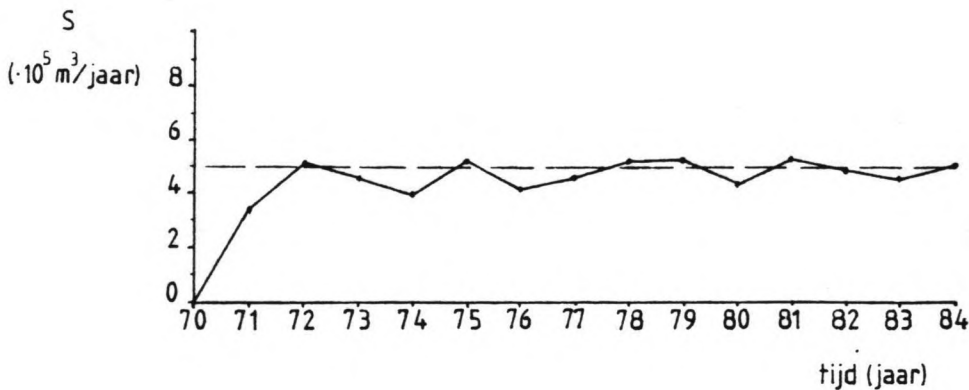
De exacte waarden, berekend met (IV.4), dienen als ingevoerde meetwaarden. Theoretisch is de meetfout nu nul. Er wordt echter een kleine meetfout in rekening gebracht in verband met afrondingsfouten bij de berekening en afwijkingen van het numerieke schema van de werkelijke differentiaalvergelijking (IV.1).

De invoer is als volgt:

```

*****
RUN IV.a
*****
raaien : 0.00 t/m 2.50 (stapgrootte 0.50)
jaren : 1970 t/m 1984 (stapgrootte 1)
*****
hoogte laag: h = 9.00 (m)
*****
beginschatting s : s(0) = 0.00+000 (m3/jaar)
variantie in s(0) : var{s(0)} = 1.00+011 (m3/jaar)2
systeemruis : var{s} = 1.00+009 (m3/jaar)2
meetruis : var{z} = 0.20 m2
*****
    
```

Het resultaat is weergegeven in figuur IV.1.



RUN IV.a

Figuur IV.1
Gefilterd verloop van s in RUN IV.a

Blijkbaar moet de meetvariantie nog iets groter worden gekozen dan de hier gestelde waarde van 0.20 m^2 . Daardoor zullen de variaties van s rond de waarde $5 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$ kleiner worden. Wél is in figuur IV.1 duidelijk zichtbaar dat de schatting dichter rond de juiste waarde komt te liggen naarmate de tijd verstrijkt.

De door het filter berekende standaardafwijking in de schatting van s neemt snel af van $3.2 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$ in 1970 tot $0.2 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$ in 1973. In de daaropvolgende jaren blijft de standaardafwijking rond deze waarde hangen.

RUN IV.b

Aan de met behulp van (IV.4) berekende waarden is een standaardafwijking van 5 m toegevoegd. De variantie in de "metingen" is nu dus 25 m². In verband met het in paragraaf 3.6 uiteengezette probleem bij het vaststellen van de meetruis, is dit geval beschouwd voor een aantal verschillende aannamen omtrent de waarde van deze ruis.

Beschouwd is:

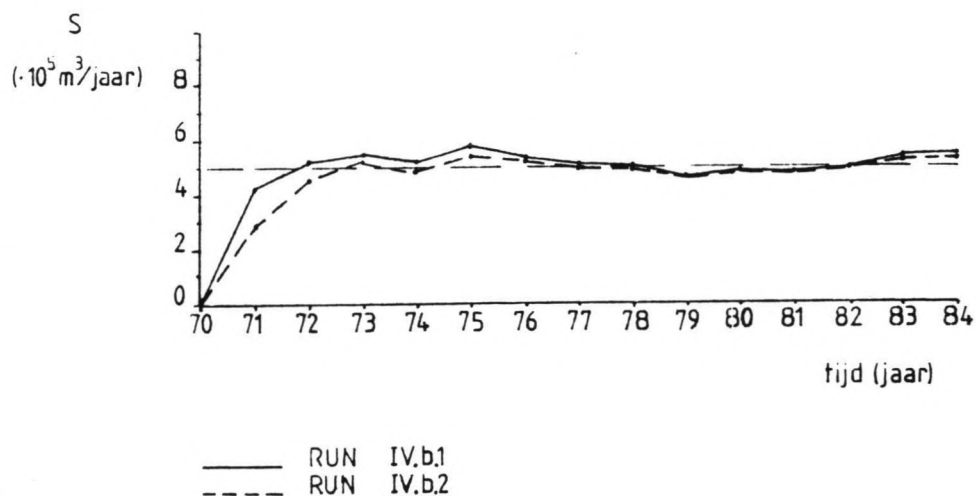
RUN IV.b.1	Veronderstelde meetvariantie	=	25 m ²
RUN IV.b.2	Veronderstelde meetvariantie	=	50 m ²
RUN IV.b.3	Veronderstelde meetvariantie	=	1 m ²
RUN IV.b.4	Veronderstelde meetvariantie	=	200 m ²

Voor RUN IV.b.1 en IV.b.2 geldt de volgende invoer:

```
*****
RUN IV.b.1
*****
raaien : 0.00 t/m 2.50      (stapgrootte 0.50)
jaren  : 1970 t/m 1984    (stapgrootte 1)
*****
hoogte laag:      h = 9.00                                (m)
*****
beginschatting s : s(0)          = 0.00+000 (m3/jaar)
variantie in s(0) : var{s(0)}    = 1.00+011 (m3/jaar)2
systeemruis      : var{s}        = 1.00+009 (m3/jaar)2
meetruis         : var{z}        = 25.00      m2
*****
```

```
*****
RUN IV.b.2
*****
raaien : 0.00 t/m 2.50      (stapgrootte 0.50)
jaren  : 1970 t/m 1984    (stapgrootte 1)
*****
hoogte laag:      h = 9.00                                (m)
*****
beginschatting s : s(0)          = 0.00+000 (m3/jaar)
variantie in s(0) : var{s(0)}    = 1.00+011 (m3/jaar)2
systeemruis      : var{s}        = 1.00+009 (m3/jaar)2
meetruis         : var{z}        = 50.00      m2
*****
```


Het resultaat is weergegeven in figuur IV.2.



Figuur IV.2

Gefilterd verloop van s in RUN IV.b.1 en b.2.

Het blijkt dat het verschil in de schatting van de meetvariantie niet zo'n groot effect heeft. RUN IV.b.1 en RUN IV.b.2 leiden niet tot verschillende conclusies omtrent het gedrag van s: s is nagenoeg constant in de tijd met waarde $5 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$.

De door het filter berekende standaardafwijking in de schatting convergeert bij RUN IV.b.1 in 6 jaar tijd naar een waarde van $0.7 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$, en in RUN IV.b.2 in 9 jaar tijd naar $0.8 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$.

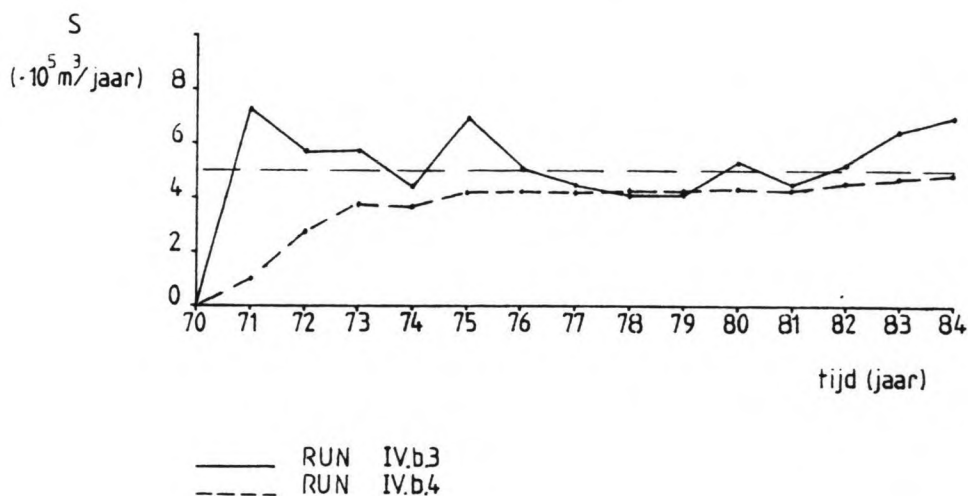
De RUNS IV.b.3 en IV.b.4 illustreren het gevolg van een te klein resp. te groot veronderstelde meetruis.

Voor de invoer geldt:

```
*****
RUN IV.b.3
*****
raaien : 0.00 t/m 2.50      (stapgrootte 0.50)
jaren  : 1970 t/m 1984     (stapgrootte 1)
*****
hoogte laag:      h = 9.00                                (m)
*****
beginschatting s : s(0)          = 0.00+000 (m3/jaar)
variantie in s(0) : var{s(0)}    = 1.00+011 (m3/jaar)2
systeemruis      : var{s}        = 1.00+009 (m3/jaar)2
meetruis         : var{z}        = 1.00      m2
*****
```

```
*****
RUN IV.b.4
*****
raaien : 0.00 t/m 2.50      (stapgrootte 0.50)
jaren  : 1970 t/m 1984     (stapgrootte 1)
*****
hoogte laag:      h = 9.00                                (m)
*****
beginschatting s : s(0)          = 0.00+000 (m3/jaar)
variantie in s(0) : var{s(0)}    = 1.00+011 (m3/jaar)2
systeemruis      : var{s}        = 1.00+009 (m3/jaar)2
meetruis         : var{z}        = 200.00     m2
*****
```

Het resultaat is weergegeven in figuur IV.3



Figuur IV.3
Gefilterd verloop van s in RUN IV.b.3 en b.4.
(te klein resp. te groot geschatte meetruis).

Bij een te klein veronderstelde meetruis werken de variaties in de berekende lijnwaarden nog sterk door in de gevonden waarden van de kustconstante s . Anders geformuleerd: de in de metingen aanwezige ruis wordt niet voldoende uitgefilterd. Hierdoor ontstaat, onterecht, de indruk dat er niet echt sprake is van een kust"constante" s , maar dat s sterk varieert in de tijd.

Bij een te groot veronderstelde meetruis vindt men een zeer glad verloop, welke echter slechts zeer traag naar de werkelijke waarde van s convergeert. Hierdoor ontstaat, onterecht, de indruk dat de kustconstante s groeit in de tijd. Bovendien zou men op basis van dit resultaat de waarde van s schatten op $4 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$ in plaats van de werkelijk aanwezige $5 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$.

De berekende standaardafwijking convergeert in RUN IV.b.3 in 3 jaar tijd naar een waarde van $0.3 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$ en in RUN IV.b.4 wordt in de beschouwde tijdsduur geen stationaire toestand bereikt. De standaardafwijking daalt traag en heeft in 1984 de waarde $1.5 \cdot 10^5 \text{ m}^3/\text{jaar}$.

Opgemerkt kan worden dat het effect van een foutief geschatte meetruis betrekkelijk klein is. Uit alle RUNS IV.b.1 t/m IV.b.4 wordt een behoorlijke indruk verkregen van de orde-grootte van de kustconstante s , terwijl de meetruis hierbij is gevarieerd van 1 m^2 tot 200 m^2 !

Een correcte meetruis is echter wél van belang bij een verdere interpretatie van het resultaat, bijvoorbeeld voor het beantwoorden van de vraag hoe constant de constante is. Bovendien beïnvloedt de waarde van de veronderstelde meetruis de door het filter berekende nauwkeurigheid (uitgedrukt in de standaardafwijking) waarmee de schatting is gedaan. Bij foutieve schatting van de meetruis moet de door het filter beweerde nauwkeurigheid dan ook met de

nodige argwaan worden beschouwd.

Het bovenstaande is kort toegelicht in Appendix II (zie figuur II.1). De resultaten van de RUNS IV.b.3 en IV.b.4 bevestigen het daar gestelde.

Uw kenmerk en datum

Ons kenmerk

Doorkiesnummer

Datum

Onderwerp

Onderdeel

Vakgroep Waterbouwkunde
t.a.v. mw. G. M. van Koppen

