

IR. H. W. LOOF

DE THEORIE VAN DE  
GEKOPPELD VERENDE ONDERSTEUNING

U.D.C.624.073.2

*De conceptie van verende ondersteuning als een aantal onafhankelijk van elkaar werkende veren is voor sommige toepassingen niet geheel juist. Om hieraan tegemoet te komen is een eenvoudige vorm van samenwerking tussen de veren ingevoerd. Uit een aantal voorbeelden blijkt, dat het zo verkregen ondersteuningsmodel – gekoppeld verende ondersteuning genoemd – een aantal kenmerken bezit, die ook in werkelijkheid o.a. bij ondersteuning door grond worden aangetroffen.*

**0 Inleiding**

Voor de berekening van constructies, die op vele punten elastisch zijn ondersteund, – zoals spoorwegrails – of die volledig op een draagvlak rusten, – zoals funderingsplaten –, wordt veelal gebruik gemaakt van het begrip „verende ondersteuning”. Dit houdt een aantal idealiseringën in ten opzichte van de werkelijkheid; zo wordt bij grond bijvoorbeeld het tijdeffect en het niet-lineaire last-zakkingsverband buiten beschouwing gelaten. In dit artikel wordt de aandacht gericht op het volgende aspect: bij een plaatselijke belasting van de grondslag kan de omgeving van het belaste gedeelte ook meewerken aan het dragen van de belasting, de „veren” werken dus niet onafhankelijk van elkaar.

In het algemeen moet een mathematisch model niet uitgebreid worden zonder dringende noodzaak. De bedoeling van zo’n model in technische berekeningen is niet om een zo gedetailleerd mogelijke beschrijving van de werkelijkheid te geven, maar een voor het gegeven doel voldoende representatieve beschrijving. Een concrete aanleiding tot de hier behandelde uitbreiding waren problemen die zich voordeden bij het modelonderzoek van startbanen [1]. In het volgende wordt een andere volgorde aangehouden: eerst worden de gevolgen van het meewerkende-breedteëffect voor verschillende belastingsgevallen nagegaan, daaruit volgt dan op welke gebieden nuttige toepassingen mogelijk kunnen zijn.

# 1 Theoretische behandeling van het meewerkende-breedteëffect

## 1.1 Afleiding van de differentiaalvergelijking

De ondersteuning is opgebouwd uit veerelementen, die onderling zijn gekoppeld. Om te beginnen wordt een vlakke vormveranderingstoestand beschouwd. De koppeling tussen twee elementen brengt een schuifkracht  $T$  per eenheid van breedte (dat is: breedte loodrecht op het vlak van tekening) over.

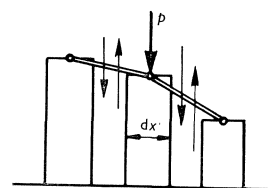


Fig. 1.

Deze hangt samen met het verschil in zakking tussen de elementen. Een eenvoudige aanname is dat de schuifkracht evenredig is met het verschil in zakking tussen twee opvolgende elementen, dus met de eerste afgeleide van de zakking.

$$T = Aw' \quad \dots \quad (1)$$

Het veerelement heeft een eigen veerconstante  $k$ .

Het evenwicht van een element wordt uitgedrukt door de vergelijking:

$$p \cdot dx - kw \cdot dx - T + (T + dT) = 0$$

Hieruit volgt in verband met (1)

$$-Aw'' + kw = p \quad \dots \quad (2)$$

De afschuifconstante  $A$  zou in latere formules onder het wortelteken voor-

## Lijst van gebruikte notaties

|        |                                                                                                                                                                      |                           |                                                                                                |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x, y$ | coördinaten van een punt van het ondersteunende oppervlak.                                                                                                           | $f$                       | verhouding tussen ware en schijnbare beddingsconstante $k : k^* (1)$ .                         |
| $x$    | ook: straal bij poolcoördinaten; differentiatie naar $x$ is aangegeven met een accent.                                                                               | $T$                       | schuifkracht per eenheid van breedte tussen twee ondersteunings-elementen ( $kl^{-1}$ ).       |
| $p$    | oppervlaktebelasting ( $kl^{-2}$ )                                                                                                                                   | $A$                       | afschuifconstante ( $kl^{-1}$ ).                                                               |
| $w$    | indrukking van de ondersteuning ( $l$ ).                                                                                                                             | $b$                       | meewerkende breedte, afgeleid uit $A$ ( $l$ ).                                                 |
| $k$    | ware beddingsconstante, dat is weerstand per eenheid van indrukking per eenheid van oppervlak ( $kl^{-3}$ ), als over het hele terrein dezelfde indrukking optreedt. | $s$                       | reciproke waarde van $b$ ( $l^{-1}$ ).                                                         |
| $k^*$  | schijnbare beddingsconstante, door meewerking van het materiaal naast een plaatselijke indrukking ( $kl^{-3}$ ).                                                     | $F$                       | oppervlakte van een proefplaat ( $l^2$ ).                                                      |
|        |                                                                                                                                                                      | $I_0, I_1, K_0, K_1, K_2$ | Besselse functies                                                                              |
|        |                                                                                                                                                                      | $\Delta$                  | operator van Laplace:<br>$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . |

komen. Om deze formules eenvoudiger te kunnen schrijven worden nieuwe grootheden  $b$  en  $s$  ingevoerd waarvoor geldt:

$$b^2 = \frac{A}{k} \quad \text{resp.} \quad s = \frac{1}{b} \dots \dots \dots (3)$$

De grootheid  $b$  heeft de dimensie van een lengte en wordt „meewerkende breedte” genoemd, om redenen die weldra zullen blijken. Met de reciproke waarde  $s$  kan de differentiaalvergelijking (2) geschreven worden als

$$-w'' + s^2 w = \left(\frac{p}{k}\right) s^2 \dots \dots \dots (4)$$

met de oplossing

$$w = \frac{p}{k} + W_1 e^{-sx} + W_2 e^{+sx} \dots \dots \dots (5)$$

De te onderzoeken belastingsgevallen hebben het karakter van een plaatselijke storing op een overigens ongestoorde omgeving. In de oplossing voor grote positieve  $x$  speelt de term met onbepaalde coëfficiënt  $W_1$  de rol van de dempende invloed van de plaatselijke storing. De term met  $W_2$  doet hetzelfde voor grote negatieve  $x$  (de oplossing zal dus altijd uit twee verschillende takken bestaan). Onder 1.2 zullen diverse basisgevallen voor de vlakke vormveranderingstoestand worden besproken.

In het algemene geval, waarbij de zakking zowel in X- als in Y-richting kan variëren, moet in de differentiaalvergelijking (2) de term met  $A$  de som van de tweede afgeleiden in X- en Y-richting bevatten.

$$-A\Delta w + kw = p \dots \dots \dots (6)$$

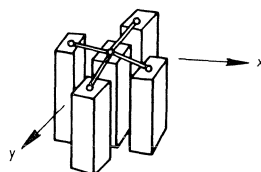


Fig. 2

In het volgende zullen alleen axiaalsymmetrische gevallen besproken worden, zodat toch maar één onafhankelijk variabele overblijft.

Beschouwt men het evenwicht van een grondelement in de vorm van een holle cilinder met wanddikte  $dx$  dan blijkt

$$(p - kw) 2\pi x \, dx - T \cdot 2\pi x + (T + dT) 2\pi (x + dx) = 0$$

In verband met (1) leidt dit tot

$$-A \left( w'' + \frac{1}{x} w' \right) + kw = p \dots \dots \dots (7)$$

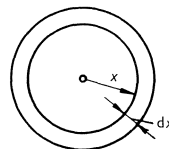


Fig. 3.

hetgeen ook rechtstreeks uit (6) volgt door overgang tot de axiaalsymmetrische vorm. Een verdere vereenvoudiging wordt bereikt door het invoeren van  $s$ :

$$-\left(w'' + \frac{1}{x} w'\right) + s^2 w = \left(\frac{p}{k}\right) s^2 \dots \dots \dots (8)$$

met de oplossing

$$w = \frac{p}{k} + W_1 \cdot K_0(sx) + W_2 \cdot I_0(sx) \dots \dots \dots (9)$$

waarin  $K_0$  en  $I_0$  functies van BESSEL zijn. De uitwerking voor een aantal axiaalsymmetrische basisgevallen wordt gegeven onder 1.3.

### 1.2 Oplossingen voor de vlakke vormveranderingstoestand

Bij onbelaste terreingedeelten is de voor positieve  $x$  dempende oplossing

$$w = W_1 e^{-sx}$$

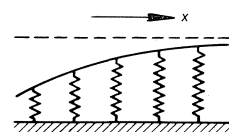


Fig. 4.

De koppelingen brengen een schuifkracht over, te berekenen met (1)

$$T = -AW_1 s e^{-sx} = -kb W_1 e^{-sx} = -kb w$$

Het minteken geeft aan, dat iedere veer door de koppeling aan de linkerzijde omlaag getrokken wordt ( $x$  naar rechts positief). De schuifkracht die door iedere koppeling wordt overgebracht, kan ook bepaald worden uit de overweging, dat deze weerstand indirect geleverd is door de veren rechts van de beschouwde doorsnede:

$$T = \int_x^\infty kw \, dx = -k \frac{1}{s} W_1 e^{-sx} = -kb w$$

De schuifkracht is in dit speciale geval overal evenredig met de zakking (omdat de helling daar ook mee evenredig is). De evenredigheidsconstante is  $kb$ .

### Basisgeval a

#### Belasting door een lijnlast

De last  $q$  is gelijkmatig verdeeld over een lijn loodrecht op het vlak van tekening. In het vlak van tekening is de belastingsbreedte nul. Dit houdt in, dat bij een eindige zakking  $w_0$  de veerweerstand onder de belasting een grootteorde kleiner is dan de belasting. Alle draagkracht moet dus komen van het materiaal opzij van de last. Aan weerszijden verloopt de inzakking volgens de dempende tak van de oplossing, beide zijden leveren een schuifkracht  $kb w_0$ .

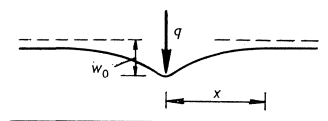


Fig. 5.

Uit  $q = 2kb w_0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{volgt} \quad w_0 = \frac{q}{2kb} \\ \text{en rechts } w = \frac{q}{2kb} e^{-sx} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Bij een ondergrond van niet gekoppelde veren zou de belasting  $q$ , over een breedte  $2b$  gespreid, dezelfde zakking  $w_0$  veroorzaken. Dit verklaart de naam „meewerkende breedte” die aan  $b$  gegeven is.

### Basisgeval $b$

#### *Oppervlaktebelasting over een strook $2l$*

De oplossing voor dit belastingsgeval kan worden verkregen door rechtstreeks oplossen van de differentiaalvergelijking, of door integratie van het vorige geval.

Deze laatste methode wordt hier toegepast.

Voor een punt  $x_0 > l$  is de bijdrage van een belastingelementje  $p \, dx$  in de zakking:

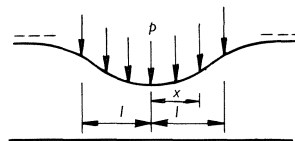


Fig. 6.

$$\frac{p \, dx}{2kb} e^{-s(x_0-x)} = \frac{p}{2k} \cdot e^{-sx_0} \cdot de^{sx}$$

Integratie over de belaste strook geeft:

$$w = \frac{p}{2k} e^{-sx_0} (e^{sl} - e^{-sl}) = \frac{p}{k} (\sinh sl) e^{-sx_0}$$

Speciaal is voor het randpunt  $x_0 = l$

$$w = \frac{p}{2k} (1 - e^{-2sl}) \dots \dots \dots (11)$$

Een punt van de belaste strook, waarvoor dus geldt  $-l < x_0 < l$  kan beschouwd worden als randpunt van twee belaste stroken, links breed  $(l+x_0)$  en rechts breed  $(l-x_0)$ .

Overeenkomstig formule (11), die geldt voor een strook breed  $2l$  wordt de zakking

$$\begin{aligned} w &= \frac{p}{2k} [\{1 - e^{-s(l+x_0)}\} + \{1 - e^{-s(l-x_0)}\}] \\ &= \frac{p}{2k} [2 - e^{-sl}(e^{+sx_0} + e^{-sx_0})] = \frac{p}{k} (1 - e^{-sl} \cosh sx_0) \end{aligned}$$

Bij het rechtstreeks oplossen uit de differentiaalvergelijking moet voldaan worden aan de randvoorwaarde, dat ter plaatse van het randpunt de hellingen on-

der het belaste en onbelaste deel gelijk zijn. De gevonden oplossing voldoet hieraan, want voor beide delen geldt:

$$\text{als } x = l, \text{ is } w' = -\frac{ps}{k} \cdot e^{-sl} \sinh sl.$$

Speciale attentie verdient nog de zakking in het midden. Deze is

$$w = \frac{p}{k} (1 - e^{-sl}) \dots \dots \dots (12)$$

Bij vergelijking van de zakking in het midden en aan de rand blijkt, dat het midden aanzienlijk meer zakt. Bij gelijkmatige belasting van grond treedt dit verschijnsel ook op [2]; door het gebruikelijke model van eenvoudige verende ondersteuning kan dit niet worden verklaard.

Volgens formule (11) en (12) is echter:

$$\frac{w(\text{rand})}{w(\text{midden})} = 1/2(1 + e^{-sl}).$$

De verhouding van bedoelde zakkingen ligt dus tussen  $1/2$  en 1.

### Basisgeval c

#### *Belasting via een oneindig stijve plaatstrook*

Door deze plaatstrook wordt een gelijkmatige inzakking  $w_0$  veroorzaakt, waardoor onder de plaat een gelijkmatig verdeelde tegendruk groot  $kw_0$  ontstaat. Bovendien wordt aan de randen de weerstand van het omliggende terrein als een geconcentreerde lijnlast overgebracht.

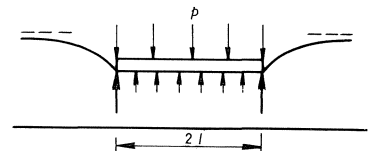


Fig. 7.

Op grond van het voorafgaande is direct in te zien, dat deze last gelijk is aan  $kb w_0$ . Het evenwicht van de plaat leert dan:

$$p \cdot 2l = kw_0 \cdot 2l + 2kb w_0$$

zodat

$$w_0 = \frac{p}{k} \cdot \frac{l}{l+b} \dots \dots \dots (13)$$

Opnieuw blijkt  $b$  als „meewerkende breedte” te fungeren.

Blijkens de ervaring treedt aan de randen van stijve platen op grond vaak een concentratie van tegendruk op, zij het dat deze door een locale verstoring van het grensevenwicht wordt afgevlakt. Dit concentratie-effect wordt door de lijnlast aan de rand benaderend weergegeven.

### *1.3 Oplossingen voor de axiaalsymmetrische toestand*

Zoals reeds onder 1.1 is opgemerkt, is de vergelijking voor het axiaalsymmetrische geval op te lossen met Besselse functies [3]. De gebruikte functie-

en eigenschappen zijn hieronder opgesomd. Behalve de grafische voorstelling wordt gegeven de eerste term (of termen) van een reeksontwikkeling, die gebruikt kan worden voor kleine  $x$  resp. grote  $x$ .

$K_0(x)$  en  $I_0(x)$  zijn oplossingen van de vergelijking

$$w'' + \frac{1}{x} w' - w = 0.$$

De andere functies treden op bij het differentiëren van eerstgenoemde functies, of bij het vereenvoudigen van de randvoorwaarden.

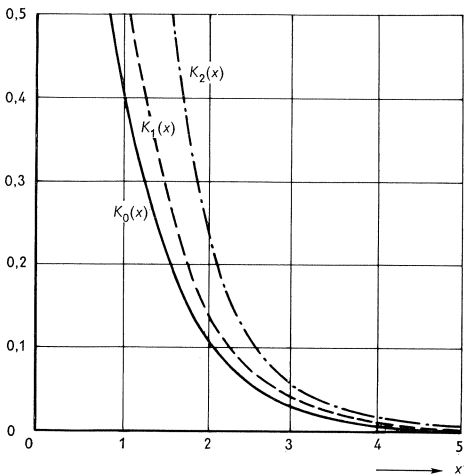


Fig. 8.

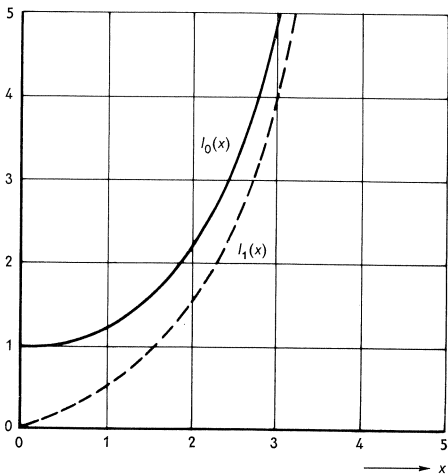


Fig. 9.

| functie  | kleine $x$        | grote $x$                      |
|----------|-------------------|--------------------------------|
| $K_0(x)$ | $\ln \frac{2}{x}$ | $\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ |
| $K_1(x)$ | $\frac{1}{x}$     | $\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ |
| $K_2(x)$ | $\frac{2}{x^2}$   | $\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ |

| functie  | kleine $x$            | grote $x$                     |
|----------|-----------------------|-------------------------------|
| $I_0(x)$ | $1 + \frac{1}{4} x^2$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$ |
| $I_1(x)$ | $\frac{1}{2} x$       | $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$ |

Door differentiëren vindt men:

$$I_0'(x) = I_1(x) \quad (a)$$

$$K_0'(x) = -K_1(x) \quad (b)$$

Voorts zijn ter herleiding van de randvoorwaarden de volgende betrekkingen toegepast:

$$I_0(x) K_1(x) + I_1(x) K_0(x) = \frac{1}{x} \quad (c)$$

$$xK_0(x) + 2K_1(x) = xK_2(x) \quad (d)$$

### Basisgeval d

#### *Belasting door een puntlast*

De oplossing (9) bestaat blijkens de grafieken weer uit een aandeel, dat dempt voor groeiende  $x$  (dat is  $K_0$ ) en een aandeel, dat dempt voor afnemende  $x$  (en wel  $I_0$ ). Bij een geconcentreerde last zal de zakking in het omringende terrein afnemen naarmate  $x$  groter wordt, zodat hier geldt:

$$w = W_1 K_0(sx)$$

De schuifkracht op de wand van een cilinder met straal  $x$  is

$$-2\pi x T = 2\pi A \cdot (-xw') = 2\pi A W_1 \cdot sx K_1(sx)$$

Voor kleine  $x$  is dit ongeveer

$$2\pi A W_1 \cdot sx \cdot \frac{1}{sx} = 2\pi A W_1, \text{ dus constant.}$$

De eigen weerstand van de veer onder de last is verwaarloosbaar klein ten opzichte van de steunkracht door schuifspanningen veroorzaakt, zoals bij basisgeval a. Men kan de steunkracht voor kleine  $x$  dus gelijkstellen aan  $P$ , waaruit volgt:

$$W_1 = \frac{P}{2\pi A} = \frac{P}{2\pi k b^2}$$

De zakking is dus bekend

$$w = \frac{P}{2\pi k b^2} K_0(sx) \quad . . . . . (14)$$

De meewerkende breedte kan hier niet verhinderen, dat de zakking onder een theoretische puntlast oneindig groot wordt.

### Basisgeval e

#### *Oppervlaktebelasting over een cirkel met straal $R$*

De oplossing wordt voor dit geval het snelst gevonden door de constanten  $W_1$  en  $W_2$  zodanig te bepalen, dat voldaan wordt aan de overgangsvoorwaarden, dat zowel  $w$  als  $w'$  continu zijn ter plaatse van  $x = R$ . De oplossing bestaat dus uit twee takken, een voor  $x \leq R$  en een voor  $x \geq R$ , die luiden:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{als } x \leq R & \text{dan } w = \frac{p}{k} \{1 - sR \cdot K_1(sR) \cdot I_0(sx)\} \\ \text{als } x \geq R & \text{dan } w = \frac{p}{k} \cdot sR \cdot I_1(sR) K_0(sx) \end{array} \right\} . . . . . (15)$$

Aan de continuïteit van  $w$  en  $w'$  is voldaan, immers is voor  $x = R$

$$\begin{aligned} w &= \frac{p}{k} \left\{ 1 - sR K_1(sR) I_0(sR) \right\} = \frac{p}{k} \cdot sR \left\{ \frac{1}{sR} - K_1(sR) I_0(sR) \right\} = \\ &= \frac{p}{k} sR I_1(sR) K_0(sR), \quad \text{zie vergelijking (c) op blz. 69} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} w' &= -\frac{p}{k} sR \cdot K_1(sR) I_0'(sR) = -\frac{p}{k} sR K_1(sR) I_1(sR) = \\ &= \frac{p}{k} \cdot sR K_0'(sR) I_1(sR), \quad \text{zie vergelijking (a) en (b) op blz. 69.} \end{aligned}$$

Het verloop van  $w$  hangt af van  $sR$ , dat is van  $R : b$ .

Hieronder is gegeven de zakkingslijn voor  $R = 3b$ . Ook hier is de zakking in het midden van het belaste gebied aanzienlijk groter dan aan de rand.

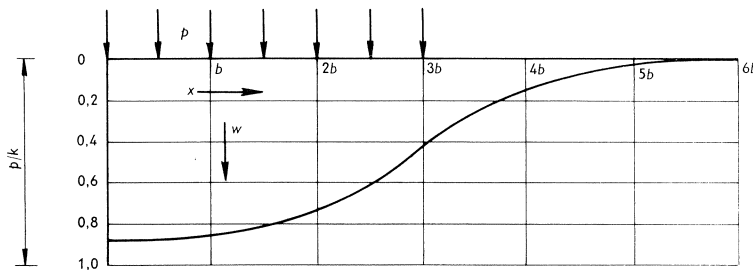


Fig. 10. Verloop van de zakking van het grondoppervlak bij gelijkmatig verdeelde belasting  $p$  over een cirkel met straal  $3b$ . De figuur is symmetrisch ten opzichte van de lijn  $x = 0$ .

### Basisgeval f

#### *Belasting via een oneindig stijve cirkelvormige plaat*

Naast de plaat kan alleen de dempende oplossing gebruikt worden, zodat daar

$$w = W_1 K_0(sx)$$

Als de plaat over een afstand  $w_0$  naar beneden wordt gedrukt is dus

$$W_1 K_0(sR) = w_0$$

Aan de plaatrand wordt een geconcentreerde steundruk overgebracht, die per eenheid van lengte langs de omtrek is

$$-Aw' = AsW_1 K_1(sR) = kb W_1 K_1(sR)$$

Het evenwicht van de plaat levert de volgende betrekking:

$$\pi R^2 p = \pi R^2 \cdot kw_0 + 2\pi R \cdot kb W_1 K_1(sR)$$

of wel

$$p = kW_1 \left\{ K_0(sR) + \frac{b}{R} \cdot 2K_1(sR) \right\}$$

Tabel 1. Plaatdrukproef. ( $x = sR = R : b$ ); waarden van  $f$  uit formule  $w = f \frac{p}{k}$

| $x$ | $K_0$     | $K_2$     | $f$   | $x$ | $K_0$      | $K_2$      | $f$   |
|-----|-----------|-----------|-------|-----|------------|------------|-------|
| 0,1 | 2,427     | 199,5     | 0,012 | 2,6 | 0,1 × . .  | 0,1 × . .  | 0,525 |
| 0,2 | 1,753     | 49,51     | 0,035 | 2,7 | 0,554      | 1,056      | 0,535 |
| 0,3 | 1,372     | 21,74     | 0,063 | 2,8 | 0,492      | 0,920      | 0,545 |
| 0,4 | 1,114     | 12,04     | 0,092 | 2,9 | 0,438      | 0,803      | 0,555 |
| 0,5 | 0,924     | 7,550     | 0,122 | 3,0 | 0,390      | 0,702      | 0,565 |
|     |           |           |       |     | 0,347      | 0,615      |       |
| 0,6 | 0,778     | 5,120     | 0,152 | 3,1 | 0,1 × . .  | 0,1 × . .  | 0,574 |
| 0,7 | 0,660     | 3,661     | 0,180 | 3,2 | 0,310      | 0,539      | 0,582 |
| 0,8 | 0,565     | 2,720     | 0,208 | 3,3 | 0,276      | 0,474      | 0,591 |
| 0,9 | 0,487     | 2,079     | 0,234 | 3,4 | 0,246      | 0,416      | 0,599 |
| 1,0 | 0,421     | 1,625     | 0,259 | 3,5 | 0,220      | 0,367      | 0,607 |
|     |           |           |       |     | 0,196      | 0,323      |       |
| 1,1 | 0,366     | 1,292     | 0,283 | 3,6 | 0,01 × . . | 0,01 × . . | 0,614 |
| 1,2 | 0,318     | 1,043     | 0,305 | 3,7 | 1,750      | 2,850      | 0,621 |
| 1,3 | 0,278     | 0,851     | 0,327 | 3,8 | 1,563      | 2,516      | 0,628 |
| 1,4 | 0,244     | 0,702     | 0,347 | 3,9 | 1,396      | 2,223      | 0,635 |
| 1,5 | 0,214     | 0,584     | 0,366 | 4,0 | 1,248      | 1,966      | 0,641 |
|     | 0,1 × . . |           |       |     | 1,116      | 1,740      |       |
| 1,6 | 1,880     | 0,489     | 0,384 | 4,1 | 0,01 × . . | 0,01 × . . | 0,648 |
| 1,7 | 1,655     | 0,412     | 0,402 | 4,2 | 0,998      | 1,541      | 0,654 |
| 1,8 | 1,459     | 0,349     | 0,418 | 4,3 | 0,893      | 1,366      | 0,660 |
| 1,9 | 1,288     | 0,297     | 0,434 | 4,4 | 0,799      | 1,211      | 0,665 |
| 2,0 | 1,139     | 0,254     | 0,449 | 4,5 | 0,715      | 1,075      | 0,671 |
|     | 0,1 × . . | 0,1 × . . |       |     | 0,640      | 0,954      |       |
| 2,1 | 1,008     | 2,177     | 0,463 | 4,6 | 0,01 × . . | 0,01 × . . | 0,676 |
| 2,2 | 0,893     | 1,874     | 0,476 | 4,7 | 0,573      | 0,848      | 0,681 |
| 2,3 | 0,791     | 1,617     | 0,489 | 4,8 | 0,513      | 0,754      | 0,686 |
| 2,4 | 0,702     | 1,400     | 0,501 | 4,9 | 0,460      | 0,670      | 0,691 |
| 2,5 | 0,623     | 1,215     | 0,513 | 5,0 | 0,412      | 0,596      | 0,695 |
|     |           |           |       |     | 0,369      | 0,531      |       |

$$\text{Grote } x: K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 - \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2} - \frac{75}{1024x^3} \dots \right)$$

$$K_2(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 + \frac{15}{8x} + \frac{105}{128x^2} - \frac{315}{1024x^3} \dots \right)$$

$$f = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{15}{4x^3} \dots$$

waarbij  $\left( \frac{x}{x+1} \right)^2 = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} \dots$  een goede benadering is van  $f$ .

Bijvoorbeeld  $x = 5$  dan is  $f_{tab} = 0,695$  en benaderd door  $(5/6)^2 = 0,694$ .

Nu moet volgens vergelijking (d) op blz. 69 gelden:

$$2K_1(sR) = sR\{K_2(sR) - K_0(sR)\}$$

Dit substituerend vindt men

$$p = k W_1 K_2(sR)$$

en tenslotte

$$w_0 = \frac{p}{k} \cdot \frac{K_0(sR)}{K_2(sR)} \cdot \dots \cdot \dots \quad (16)$$

In verband met de praktische toepassing van dit geval is de grootte

$$f = \frac{K_0(sR)}{K_2(sR)} \quad \left( \text{waarbij dus } w_0 = f \frac{p}{k} \right)$$

voor een aantal waarden van  $sR$  getabuleerd (blz. 72). De tabel hoeft niet verder te gaan dan  $sR = 5$  omdat geldt:

$$\text{voor } R \gg b \text{ is } w_0 = \frac{p}{k} \left( \frac{R}{R+b} \right)^2 \dots \dots \dots (17)$$

Men herkent hier weer de betekenis van  $b$  als meewerkende breedte.

## 2 Interpretatie van de plaatdrukproef

## 2.1 Algemene beschouwingen

Stijve verhardingen van wegen en startbanen worden berekend als platen op verende ondersteuning; de beddingsconstante wordt door proeven op het terrein bepaald. Hiervoor zijn diverse beproevingsmethoden bedacht [4], [5]. Hier wordt de bespreking beperkt tot de plaatdrukproef. Bij deze proef wordt een stijve cirkelvormige plaat op de te onderzoeken grondslag gedrukt, waarbij de kracht en de bijbehorende zakking regelmatig worden afgelezen. Er worden platen van verschillende diameter gebruikt.

Reeds lang is bekend, dat met de kleinere proefplaten een relatief hogere beddingsconstante wordt gevonden. Door Prof. VREEDENBURGH is bij zijn college „verend ondersteunde liggers” voorgesteld om een strook langs de omtrek van de proefplaat bij het plaatoppervlak te rekenen, wat met de hier verkregen resultaten voor de basisgevallen a en c en ook voor e bij grote  $sR$  in overeenstemming is.

Door HABER SCHAIM wordt de grondslag zelf beschouwd als plaat op verende ondersteuning, waarbij gebruik wordt gemaakt van resultaten van HERTZ [6], [7]. HOGG en anderen hebben de ondersteuning door een elastisch isotroop halfoneindig massief beschouwd [8], [9], [10]; door KONING [11] is de invloed van anisotropie in rekening gebracht. BURMISTER [12] behandelt het elastisch meerlagensysteem, met als bijzonder geval dat waarbij de diepste laag oneindig stijf is. Dit is ook besproken door VOROVICH en USTINOV [13].

De theorie van de gekoppeld verende ondersteuning leidt tot de volgende interpretatie van de plaatdrukproef, op grond van basisgeval e.

De proef levert een schijnbare beddingsconstante  $k^*$  op. Deze volgt uit de betrekking:

$$w = \frac{p}{k^*} \quad \text{en daar } w = f \frac{p}{k} \quad \text{geldt} \quad \frac{k}{k^*} = f$$

De grafische voorstelling van  $\frac{k}{k^*}$  is dus te ontlelen aan tabel 1.

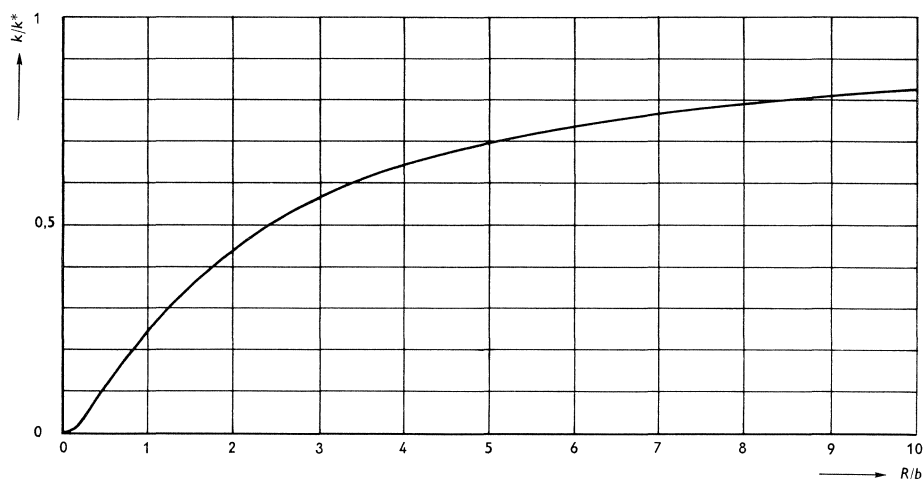


Fig. 11. De verhouding tussen ware beddingsconstante  $k$  en schijnbare beddingsconstante  $k^*$  uitgezet als functie van de straal  $R$  (van de proefplaat waarmee  $k^*$  bepaald is) gedeeld door de meewerkende breedte  $b$ .

Nu zou  $k$  bepaald kunnen worden uit  $k^*$  indien de verhouding  $R/b$  bekend is. De constante  $b$  is echter ook afhankelijk van de eigenschappen van de bedding en moet dus eveneens uit metingen worden bepaald.

Wanneer men beschikt over proefresultaten voor platen met uiteenlopende diameters, kan men een kromme van de hier gegeven gedaante zo goed mogelijk aan de meetwaarden laten aansluiten, door verschillende waarden van  $b$  te proberen. Een moeilijkheid is het niet oneindig stijf zijn van de proefplaten. Wanneer voor het midden van de plaat een andere zakking wordt gevonden dan voor de rand, is nog een zekere omwerking nodig, die berust op splitsing van de totale grondweerstand in tegendruk onder de plaat en een steunkracht langs de rand.

$$P = Fp = Fk^*w = Fk \frac{1}{f} w = Fk w + Fk \frac{1-f}{f} w$$

In de eerste term van het rechterlid wordt nu de zo goed mogelijk geschatte

gemiddelde zakking onder de plaat  $w_p$  ingevuld, in de tweede term de zakking  $w_r$  van de rand.

In het algemeen wordt dus voor de tegendruk van een plaat gevonden:

$$P = F k w_p + F k \frac{1-f}{f} w_r$$

Ter vereenvoudiging van de uitwerking wordt nu bepaald de „gelijkwaardige” zakking  $w_g$ , die gevonden zou zijn bij een proef met een oneindig stijve plaat van dezelfde afmetingen onder dezelfde belasting  $P$ . Deze is gelijk aan:

$$w_g = f w_p + (1-f) w_r, \text{ dan is immers } F k \frac{1}{f} w_g = P.$$

Al probeerende voor  $b$  vindt men ook steeds betere waarden voor  $f$ .

Bij de berekening ondervindt men bezwaar van de spreiding in de proefresultaten. Als nauwkeuriger methode om  $b$  te bepalen komt in aanmerking het opmeten van de zakkingslijn naast de plaat.

Volgens de berekeningen onder basisgeval e geldt voor deze zakking

$$w = \frac{p}{k} \frac{K_0(sx)}{K_2(sR)} = w_0 \frac{K_0(sx)}{K_0(sR)}$$

De hieruit volgende zakkingslijnen, die met behulp van tabel 1 zijn bepaald, blijken voor verschillende waarden van  $b$  voldoende te verschillen, zodat een betrouwbare schatting van  $b$  uit de meetresultaten mogelijk is.

Overigens moet men steeds bedacht zijn op het feit, dat aan de rand een spanningsconcentratie optreedt, die tot verstoring van het grensevenwicht kan leiden, waardoor de materiaaleigenschappen veranderen en dus ook  $k$  en  $b$ . Daarom is de zakkingslijn bij een zo klein mogelijke indrukking op te meten.

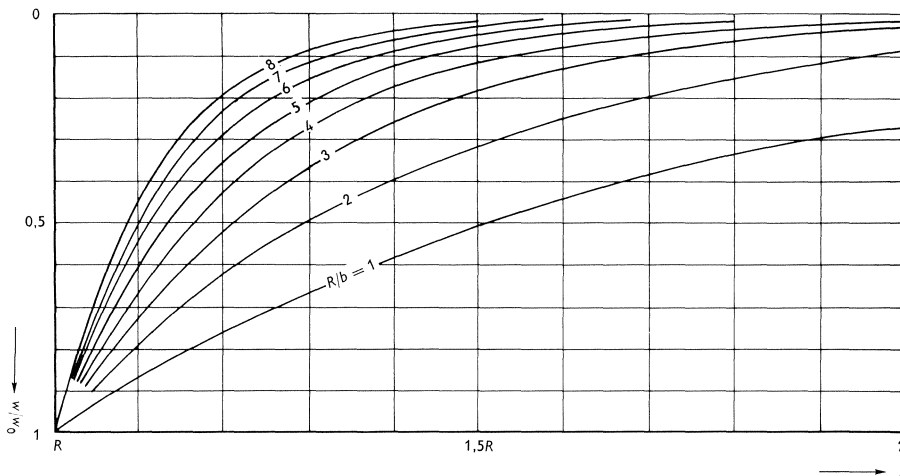


Fig. 12. Verloop van de zakking naast de proefplaat (uitgedrukt in de zakking van de plaat zelf) voor de verschillende verhoudingen van de straal  $R$  tot de meewerkende breedte  $b$ .

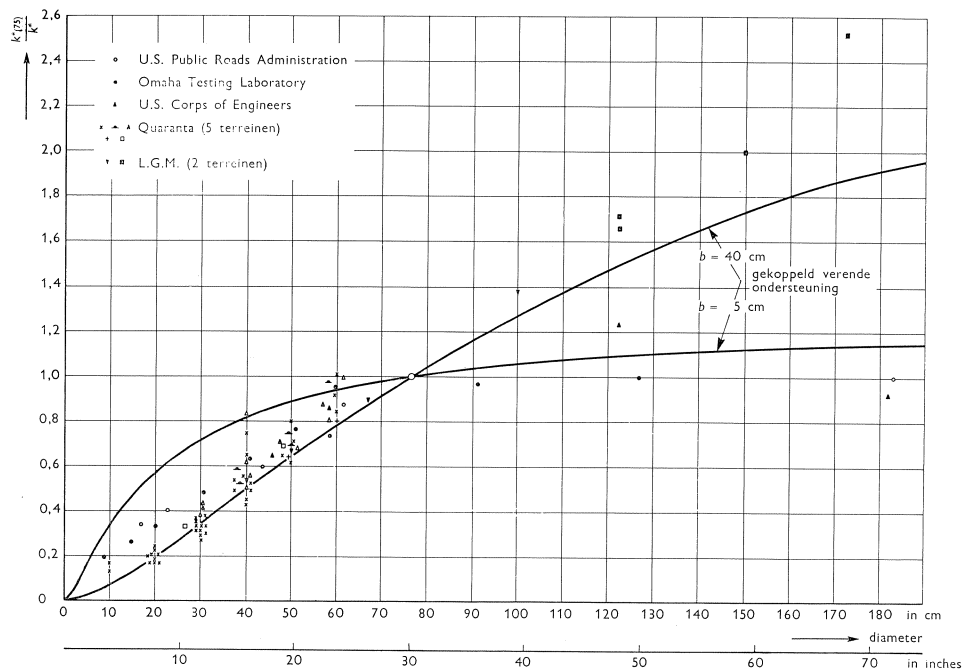


Fig. 13. Experimentele resultaten van plaatdrukproeven op grond.

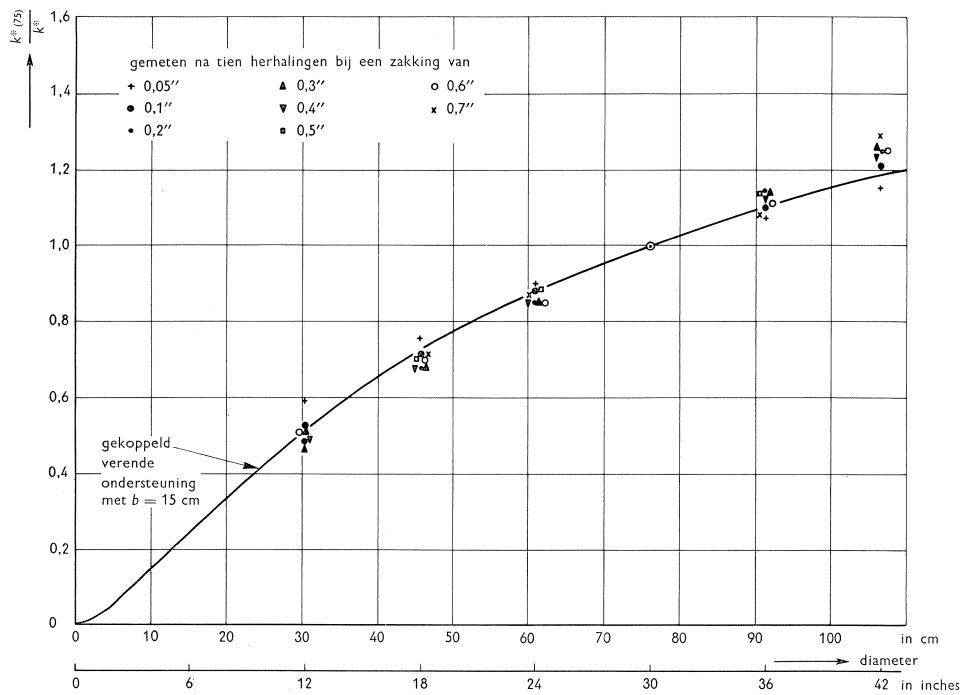


Fig. 14. Vergelijking van experimentele resultaten van de ASCE met de uitkomsten volgens de theorie van de gekoppeld verende ondersteuning.

Zoals reeds in de inleiding werd opgemerkt, is het modelonderzoek van startbanen aanleiding geweest om het meewerkende-breedteëffect nader te beschouwen. Als de meewerkende breedten van de funderingsgrondslag en van het modelmateriaal, dat de grond simuleert, bekend zijn, kan de model-schaal afgeleid worden [14]. De vraag is nu, of het gedrag van grond en model-materiaal als een gekoppeld verende ondersteuning beschreven kan worden.

## 2.2 Resultaten voor grond

Het volgende is gebaseerd op inlichtingen van Ir. H. VAN DER MOST en Ir. A. JONKER, destijds medewerkers van het Laboratorium voor Grondmechanica. Een uitvoerig literatuuronderzoek naar  $k^*$ -waarden gemeten met drukplaten van uiteenlopende grootten heeft de gegevens opgeleverd, die vermeld zijn in fig. 13. Deze figuur komt in principe met fig. 11 overeen, maar omdat  $k$  en  $b$  niet bekend zijn (en voor de verschillende proeven nog uiteen zullen lopen) kunnen als coördinaten niet  $k/k^*$  en  $R/b$  genomen worden.

Bij de verticale as is wel, evenals bij fig. 11 de schijnbare beddingsconstante  $k^*$  in de noemer gezet, maar in de teller komt nu de  $k^*$  van de plaat met 75 cm diameter (30").

Het gevolg is, dat de grafiek door het punt (75,1) moet gaan, maar voor verschillende waarden van  $b$  zijn nog verschillende krommen mogelijk. Ter oriëntatie zijn krommen voor  $b = 5$  cm en  $b = 40$  cm aangegeven. In het gebied van de kleine plaatdiameters vertonen alle proeven wel een stijgende tendentie, de eventuele overgang naar een asymptoot voor grote plaatdiameters is echter allerm minst duidelijk.

De resultaten voor verschillende terreinen lopen hier ook zeer uiteen.

Een betere overeenkomst met de hier behandelde theorie vertonen de resultaten van proeven, die zijn genomen in opdracht van de A.S.C.E. [15]. Deze zijn verwerkt in fig. 14.

Geconcludeerd kan worden, dat voor belaste oppervlakken van de grootte, zoals die bij startbanen voorkomen, de theorie van de gekoppeld verende ondersteuning een goed beeld geeft van de variatie van de weerstand met het belaste oppervlak. Nu is bij een theorie met twee vrije parameters een goede aanpassing toch al vrij gemakkelijk te verkrijgen. De meer kritieke vraag, of ook extrapolatie van de met kleine platen verkregen  $k$  en  $b$  naar zeer grote belaste oppervlakken mogelijk is, zal pas door uitgebreider speurwerk te beantwoorden zijn. Ook zou het gewenst zijn, in een ondersteuningsconceptie voor grond de niet-elastische eigenschappen te verwerken.

## 2.3 Resultaten voor een modelmateriaal

Voor de onderzoeken, vermeld in [14] werden tal van modelmaterialen onderzocht. Hier worden alleen de resultaten vermeld voor een stevig schuimrubber met open poriën (dit is niet het materiaal, dat tenslotte voor het start-

baanmodel gekozen is; voor nauwkeurige proeven inzake het meewerkende-breedteëffect was dit echter het meest geschikt).

Bij een modelmateriaal is het veel eenvoudiger de werkelijke  $k$  te bepalen dan bij grond. Voldoende is immers een klein proefstukje te belasten met een drukplaat van dezelfde grootte. Voor een stukje van  $3,4 \times 10$  cm, dik 1,8 cm, werd gemeten  $k = 2,12$  kgf/cm<sup>3</sup>.

Op een stuk van  $50 \times 50$  cm is een plaatdrukproef gedaan met een plaat van 25 cm<sup>2</sup>. De zakkingslijn naast de plaat is bepaald met een fotografische meet-techniek, ontwikkeld door de heer P. G. JEUNINK. De verhouding  $w/w_0$  is uitgezet in fig. 15. Het verloop blijkt zeer goed overeen te stemmen met de theoretische lijn  $sR = 6$ . Hieruit volgt  $b = 0,47$  cm.

Voor  $sR = 6$  is  $f = (6/7)^2 = 0,735$ . Derhalve zou moeten gelden  $k^* = k : f = 2,88$  kgf/cm<sup>3</sup>. Gemeten is  $k^* = 3,06$  kgf/cm<sup>3</sup>, dus maar 6% meer. Voor dit materiaal gaat de theorie van de gekoppeld verende ondersteuning dus uitstekend op.

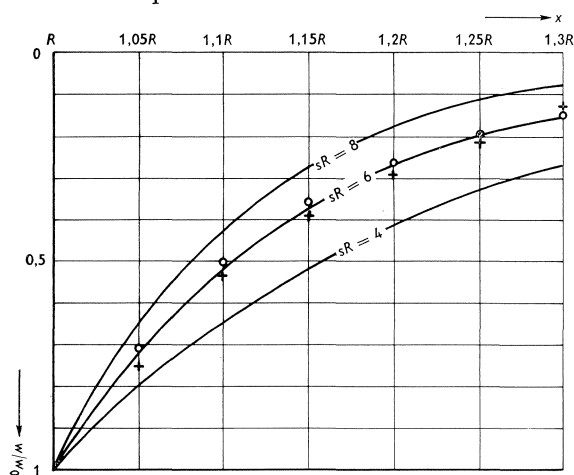


Fig. 15. Vergelijking van de zakkingslijn naast een proefplaat op modelmateriaal (schuimrubber) met de theoretische zakkingslijn bij gekoppeld verende ondersteuning. (Opgemeten van foto: + links, O rechts).

### 3 Conclusies en verdere mogelijkheden

Het mathematisch model „gekoppeld verende ondersteuning” vertoont eigenschappen, die kwalitatief overeenstemmen met de eigenschappen van werkelijke funderingen. Voor sommige constructies is het nuttig met deze effecten rekening te houden. Dit is toegepast bij modelonderzoek van startbanen. Ook voor andere constructies komt toepassing in aanmerking: op te merken is b.v. dat in de basisgevallen b en c bekende eigenschappen van slappe resp. stijve reservoirbodems naar voren komen. Bij berekeningen is nog op het volgende te letten: de differentiaalvergelijking van een brede ligger op gekoppeld verende ondersteuning

$$EI w'''' - Aw'' + kw = p$$

is dezelfde als voor een ligger op eenvoudige verende ondersteuning, waarbij

in de ligger een normaalkracht werkt. Hier zijn dus bekende oplossingen te gebruiken [16]. Ook voor platen zijn reeds enige oplossingen bekend [17].

Bij een smalle ligger op gekoppeld verende ondersteuning dient er op gelet te worden, dat een groot deel van de weerstand nu van het materiaal opzij van de ligger afkomstig is.

In al deze gevallen heeft het meewerkende breedteëffect een belangrijke invloed, zodat het gewenst is hiermee rekening te houden.

## Literatuur

1. SANDE, Ir. G. A. F. VAN DER – De berekening van elastisch ondersteunde platen aan de hand van enkele nieuw ontwikkelde modelmethoden.  
LOOF, Ir. H. W. – De samenwerking van grond bij verende ondersteuning. Rapport 2-58-7-sp-5 van het Stevin-Lab.
2. NANNINGA, Prof. Ir. N. – Foundation Engineering. Part A blz. 9.
3. McLACHLAN, N. W. – Bessel functions for Engineers. Hoofdstuk 6: The modified functions.
4. Apparaten voor onderzoeken ten behoeve van wegen en de rij- en startbanen van vliegvelden. L.G.M. Mededelingen deel I no. 4 (april 1957).
5. Ontwikkeling van berekenings- en beoordelingsmethoden ten behoeve van stijve wegdeconstructies. L.G.M. Mededelingen deel V no. 3 (januari 1961).
6. HABER SCHAIM, I. – The distribution of stresses in an infinite half space: theory and experiments. Technion Haifa 1957.
7. HERTZ, H. – Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten. Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie Vol. 22 (1884) blz. 449.
8. HOGG, A. H. A. – Equilibrium of a thin plate, symmetrically loaded, on an elastic foundation of infinite depth. London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Vol. 25 nr. 168 (maart 1958) blz. 576-582.
9. HOGG, A. H. A. – Equilibrium of a thin slab on an elastic foundation of finite depth. London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Vol. 35-7th Series nr. 243 (april 1944) blz. 265-276.
10. A Comparison of Design methods for Airfield Pavements. Proceedings Am. Soc. Civ. Eng. Vol. 78 (1952). Separate 163.
11. De spanningsverdeling in een homogeen, anisotroop elastisch halfmedium. L.G.M. Mededelingen deel V no. 2 (okt.).
12. BURMISTER, D. M. – Stress and Displacement characteristics of a two-layer rigid base soil system: influence diagrams and practical applications. Highway Research Board Proceedings Vol. 35 (1956).
13. VOROVICH I. I. en Iu. A. USTINOV – Pressure of a die on an elastic layer of finite thickness. PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics Vol. 23 no. 3 (dec. 1959) blz. 637.
14. SANDE, Ir. G. A. F. VAN DER – De berekening van start- en rolbanen, tekst van de voordracht op 12 oktober 1961 gehouden voor de sectie Grondmechanica van het K.I.V.I. Rapport 2-60-16-sp-10 van het Stevin-Lab.
15. STRATTON, J. H. – Construction and Design Problems. Military Airfields Symposium. Proceedings of the Am. Soc. Civ. Eng. 1944 nr. 70 (1) blz. 28-54.
16. HETÉNYI, M. – Beams on elastic foundation. Hoofdstuk 6: Straight bars under simultaneous axial and transverse loading.
17. GALLETTY, G. D. – Circular plates on a generalized elastic foundation. Journal of Applied Mechanics, juni 1959 blz. 297.