TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
AFDELING DER SCHEEPSBOUW- EN SCHEEPVAARTKUNDE
CENTRALE WERKGROEP WISKUNDE

Rapport No. **CWW-2**

BEPALING VAN HET OPPERVLAK VAN EEN WILLEKEURIGE FUNKTIE $y = f(x)$ DOOR RECURSIEF GEBRUIK VAN EEN INTEGRATIE PROCEDURE OP VERSCHILLENDE DEELINTERVALLEN.

Ing. A.P.de Zwaan

Delft University of Technology
Ship Hydromechanics Laboratory
Mekelweg 2
Delft 2208
Netherlands

augustus 1977

INHOUD

	blz.:
1. Inleiding.	2
1.2 Formules.	2
2. Beschrijving van het programma.	6
2.1 Algemeen	6
2.1.1. Programma gegevens.	6
2.1.2. Motivering.	6
2.1.3. Opzet.	6
2.2 Organisatie van het programma.	6
2.2.1. Gebruikte methoden.	6
2.2.2. Formules.	6
2.2.3. Benodigde randapparatuur.	6
2.2.4. Verklaring der variabelen.	6
2.3 Bestandsorganisatie.	7
2.3.1. Gebruik van de procedure.	7
2.3.2. Gebruiksmogelijkheden.	7
2.3.3. Invoer.	7
2.3.4. Blokdiagram.	8
2.3.5. Listing van de procedure.	

1. INLEIDING.

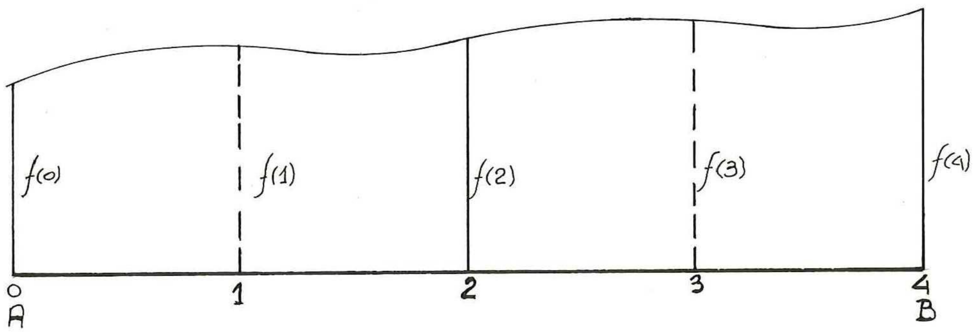
De publikatie geeft aan, hoe van een "willekeurige" funktie $y = f(x)$, tussen bepaalde grenzen en met een opgegeven nauwkeurigheid, het oppervlak berekend wordt. De methode berust op de regel van Simpson met de korrektieterm van Richardson. De opzet is zodanig, dat stukken van de funktie die een te grote fout geven worden verfijnd en de rest van de funktie die geen te grote fout geeft, niet wordt verfijnd.
Tevens wordt de nauwkeurigheid zodanig bijgestuurd, dat als een bepaald gedeelte van de funktie met een grotere nauwkeurigheid wordt berekend dan opgegeven, dit in mindering wordt gebracht voor het volgende te berekenen gedeelte van de funktie.
Dit heeft het voordeel, dat hele stijle gedeelten in de funktie met een kleinere nauwkeurigheid mogen worden berekend, als men er voor zorgdraagt dat die stukken het eerst worden berekend, die het dichtst bij de opgegeven nauwkeurigheid liggen. Zou deze aanpassing niet toegepast worden, dan bestaat de kans, dat de fout in het het oppervlak van de hele stijle gedeelten van de funktie, ondanks de grootste verfijning, groter blijft dan de opgegeven nauwkeurigheid.

1.2. Formules.

De hoofdformule van Simpson is:

$$S_1 = \int_A^B f(x)dx = \frac{B-A}{6}\,(f(0) + 4\,f(2) + f(4)) - \frac{(B-A)^5}{2880}\,f^{(4)}(t_1)$$

met t_1 uit $[A,B]$ zie fig. 1



Figuur 1.

Door verkleining van het interval door de punten 1 en 3 tussen te voegen is:

$$S_2 = \int_A^B f(x)dx = \int_A^{(A+B)/2} f(x)dx + \int_{(A+B)/2}^{B} f(x)dx =$$

$$\frac{B-A}{12}\,(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)) - \frac{((B-A)/2)^5}{1440}\;\frac{f^{(4)}(t_1) + f^{(4)}(t_2)}{2}$$

met t_1 uit $\left[A, \frac{A+B}{2}\right]$ en t_2 uit $\left[\frac{A+B}{2}, B\right]$

$$S_2 = \int_A^B f(x)dx = \frac{B-A}{12}\,(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)) - \frac{((B-A)/2)^5}{1440}\,f^{(4)}(t)$$

met t uit $[A,B]$

Stel $\frac{B-A}{4} = h$:

$$S_1 = \int_A^B f(x)dx = {}^2/3\ h\ (f(0) + 4f(2) + f(4)) - \frac{16}{45}\ h^5\ f^{(4)}(t_1)$$

$$S_2 = \int_A^B f(x)dx = {}^1/_3\ h\ (f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)) - \frac{1}{45}\ h^5\ f^{(4)}(t)$$

We kunnen zeggen $S_1 = S_2$ dus $S_1 - S_2 = 0$ (met korrektieterm).
Hieruit volgt:

$${}^1/_3\ h\ (f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4)) - \frac{16}{45}\ h^5\ f^{(4)}(t_1) + \frac{1}{45}\ h^5\ f^{(4)}(t) = 0$$

Stel $f^{(4)}(t_1) \approx f^{(4)}(t)$:

$${}^1/_3\ h\ (f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4)) = {}^1/_3\ h^5\ f^{(4)}(t) \text{ met } t \text{ uit } [A,B]$$

Hieruit volgt:

a) de korrektie voor S_2 is $\frac{1}{45}\ h\ (f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4))$

b) de korrektie voor S_1 is $\frac{16}{45}\ h\ (f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4))$

De korrektie voor S_1 is dus 16 maal zo groot.

Bepaling van de korrektieterm van Richardson.

Zoek een lineaire kombinatie $\frac{\lambda\ S_1 + \mu\ S_2}{\lambda + \mu}$ zodanig dat voor een n-de graads f(x) exact geldt.

$$\int_A^B f(x)dx = \frac{\lambda\ S_1 + \mu\ S_2}{\lambda + \mu} \quad \text{met} \quad \lambda + \mu = 1$$

De lineaire kombinatie voor de regel van Simpson is:

$$\int_A^B f(x)dx = \frac{4^2 S_2 - S_1}{4^2 - 1}$$

Deze lineaire kombinatie tussen S_1 en S_2 geeft een kleinere fout dan voor elk van deze afzonderlijk.
De fout in S_1 is $16 \times E$ en in S_2 $1 \times E$.

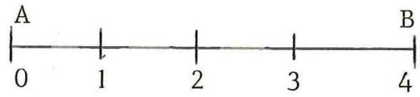
$$\int_A^B f(x)dx = \frac{16 S_2 - S_1}{15} = S_2 - \frac{S_1 - S_2}{15} = S_2 - \frac{1}{45}\ h^5\ f^{(4)}(t)$$

of

$$\int_A^B f(x)dx = S_2 - \frac{1}{45}\ h\ (f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4))$$

Resumerend

$$I = \int_A^B f(x)dx$$



$$h = \frac{B-A}{4}$$

$$S_{i1} = {}^2/_3\ h\ (f(0) + 4f(2) + f(4))$$

$$S_{i2} = {}^1/_3\ h\ (f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)) \qquad [1.2.1]$$

De korrektie voor S_{i2} is

$$|K| = \frac{1}{45}\ h\ (f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4)) \qquad [1.2.2]$$

Dit heet de "Korrektieterm van Richardson".

Als geldt

$$\left| \frac{B-A}{180}\ (f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4)) \right| < \varepsilon$$

of

$$| f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4)) | < \frac{180}{B-A}\ \varepsilon \qquad [1.2.3]$$

dan is: $| I - S_{i2} | < \varepsilon$

dus zeker $|I - (S_{i2} - \frac{1}{15}\ T)| < \varepsilon$

met $T = {}^1/_3\ h\ |f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4)|$.

De gedachte, die hierachter zit is, dat de stukken die een te grote fout geven worden verfijnd en de rest die geen te grote fout geven niet behoeven te worden verkleind.

Toepassing.

De exakte oplossing is $\int_A^B f(x)dx = I$

De oplossing met de regel van Simpson inclusief de korrektieterm van Richardson is:

$$S = {}^1/_3\ h\ (f(x_i) + 4f(x_i+h) + 2f(x_i+2h) + 4f(x_i+3h) + f(x_i+4h)) +$$
$$- \frac{1}{45}\ h\ (f(x_i) - 4f(x_i+h) + 6f(x_i+2h) - 4f(x_i+3h) + f(x_i+4h)) = 0 - K \qquad [1.2.4]$$

Geëist wordt: $|I-S| < \varepsilon$

Gesteld wordt dat het interval [A,B] in n stukken moet worden opgedeeld voordat aan deze eis is voldaan.
Voor elk stuk wordt het oppervlak berekend volgens [1.2.4]
Het totale berekende oppervlak moet voldoen aan:

$$\left|I - \sum_{i=1}^{n} S_i\right| \leqslant \varepsilon$$

Stel de fout in S_K is μ_k dan moet gelden $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \leq \varepsilon$.

$|I_k - S_k| \leq \delta_k$, neem $\delta_k = \frac{\varepsilon}{n}$ en $\mu_k \leq \delta_k$ dan wordt aan deze eis voldaan.

De fout in S_k is μ_k, deze fout mocht zijn δ_k.

Het volgende oppervlak S_{k+1} mag nu met een kleinere nauwkeurigheid worden berekend terwijl aan de eis $|I_k + I_{k+1} - (S_k + S_{k+1})| \leq \frac{2}{n}\varepsilon$ toch voldaan wordt.

$|I_{k+1} - S_{k+1}| \leq \delta_{k+1}$ met $\delta_{k+1} = \frac{1}{n}\varepsilon + (\delta_k - \mu_k) = \frac{2}{n}\varepsilon - \mu_k$

Het gehele rekenproces met aangepaste nauwkeurigheid verloopt als volgt:

$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{n}$

$$\delta_k = \frac{k}{n}\varepsilon - \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i \qquad \text{voor } k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n \qquad [1.2.5]$$

Volgens de vergelijking [1.2.4] is: $S_n = O_n - K_n$ in $[x_i, x_s]$

$$K_n = \frac{1}{45} h.(f(x_i) - 4f(x_i+h) + 6f(x_i+2h) - 4f(x_i+3h) + f(x_s)) = \frac{1}{45} h.T_n$$

met $h = \frac{B-A}{4.n}$.

Neem $\delta_n = \frac{180}{B-A}\varepsilon$ en $T_n \leq \delta_n$ zie vergelijking [1.2.3]

dan is $K_n \leq \frac{1}{45} \frac{B-A}{4n} \times \frac{180}{B-A} \varepsilon$

$K_n \leq \frac{\varepsilon}{n}$

Als dus voor oppervlak S_k, voor $k = 1, 2, 3, \ldots . n$, de eis wordt gesteld

$T_k \leq \delta_k = \frac{180}{B-A}\varepsilon$, dan volgt daaruit, dat $|I_k - S_k| \leq \frac{\varepsilon}{n}$

dus ook $\sum_{k=1}^{n} |I_k - S_k| < \varepsilon$.

Belangrijk is, dat de afschatting van $T_k \leq \frac{180}{B-A}\varepsilon$ onafhankelijk is van het aantal deelintervallen.
Het voordeel hiervan is, dat men tijdens het rekenproces kan bepalen of een bepaald stuk van de funktie verfijnd moet worden of niet.
Men zit dus niet aan een bepaalde verdeling vooraf vast.
In het rekenproces wordt δ_i voor oppervlak S_i aangepast zoals aangegeven in vergelijking [1.2.5] .

2. BESCHRIJVING VAN HET PROGRAMMA.

2.1. Algemeen.

2.1.1 Programma gegevens.

a) Taal: Algol-60
b) Geheugen: variabel
c) Rekentijd: < 1 min
d) Naam: Procedure "IREC".

2.1.2 Motivering.

In de lijst van numerieke subprogramma's van het Rekencentrum is de procedure "INSIG" opgenomen.
Deze procedure is goed bruikbaar voor funkties met een "normaal" verloop.
Voor funkties, die een "heel stijl" verloop hebben is deze procedure niet bruikbaar (kan in veel gevallen de opgegeven nauwkeurigheid niet bereiken en gebruikt zodoende te veel geheugen).
Daarom is de procedure "IREC" geschreven.
Deze procedure kan voor elke kontinue éénwaardige funktie het oppervlak bepalen met een opgegeven absolute nauwkeurigheid, ongeacht de stijlheid.

2.1.3 Opzet.

Het programma is in de vorm van een recursieve procedure geschreven.
De procedure bepaalt hoe en waar de funktie verfijnd wordt.
De nauwkeurigheid wordt in het rekenproces steeds bijgestuurd, zodanig dat, de som van de oppervlakken verminderd met de werkelijke som zo dicht mogelijk ligt bij de opgegeven nauwkeurigheid.

2.2. Organisatie van het programma.

2.2.1 Gebruikte methoden.

De methode voor de bepaling van het oppervlak berust op de methode van Simpson met de korrektie van Richardson.

2.2.2 Formules.

Zie hoofdstuk 1.

2.2.3 Benodigde randapparatuur.

Geen.

2.2.4 Verklaring van de variabelen.

Symbool			
Mathematisch	Programma	Eenheid	Omschrijving
x	X	-	De onafhankelijk veranderlijke van de funktie $y = f(x)$
$f(x)$	Y	-	De funktie $f(x)$: De integrand
A	A	-	De ondergrens van het integratie interval
B	B	-	De bovengrens van het integratie interval
ε	EPS	-	De absolute nauwkeurigheid waarmee de integraal berekend moet worden
T_n	T T_1 T_2	-	De korrektie vanRichardson op de konstante $^1/45$ h na.

Symbool		Eenheid	Omschrijving
Mathematisch	Programma		
δ_i	DELTA	-	T < DELTA DELTAMAX = $\delta_1 = \frac{180}{B-A}$ EPS
S_i	I	-	Deeloppervlak van de funktie f(x) op de konstante $\frac{1}{12}$ na
S	IREC	-	Het totale oppervlak: $\sum_i S_i$

2.3. Bestandsorganisatie.

2.3.1 Gebruik van de procedure.

Aan de deklaraties van het programma moet worden toegevoegd:
'REAL' 'PROCEDURE' IREC; 'CODE';
De procedure staat in de standaardbibliotheek SBAL.LIBCWW van de "Centrale Werkgroep Wiskunde" van de afdeling der Scheepsbouw- en Scheepvaartkunde.

2.3.2 Gebruiksmogelijkheden.

Enkele voorbeelden voor het gebruik

- INT: = IREC (x, x^2 + 2x + 1, 0, 10, 10^{-4})
- A: = ; B: = ; EPS: = ;
  INT: = IREC (x, x^2 + 2x + 1, A, B, EPS)
- INT: = IREC (x, y(x), A, B, EPS)
  Hierin is y(x) een real procedure.

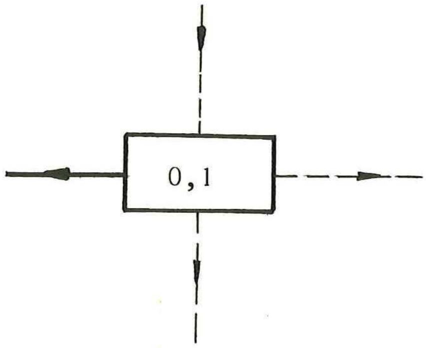
Opmerking: Indien men de foutmelding krijgt:
"Too many calls of procedures", dan is de waarde EPS te klein genomen.

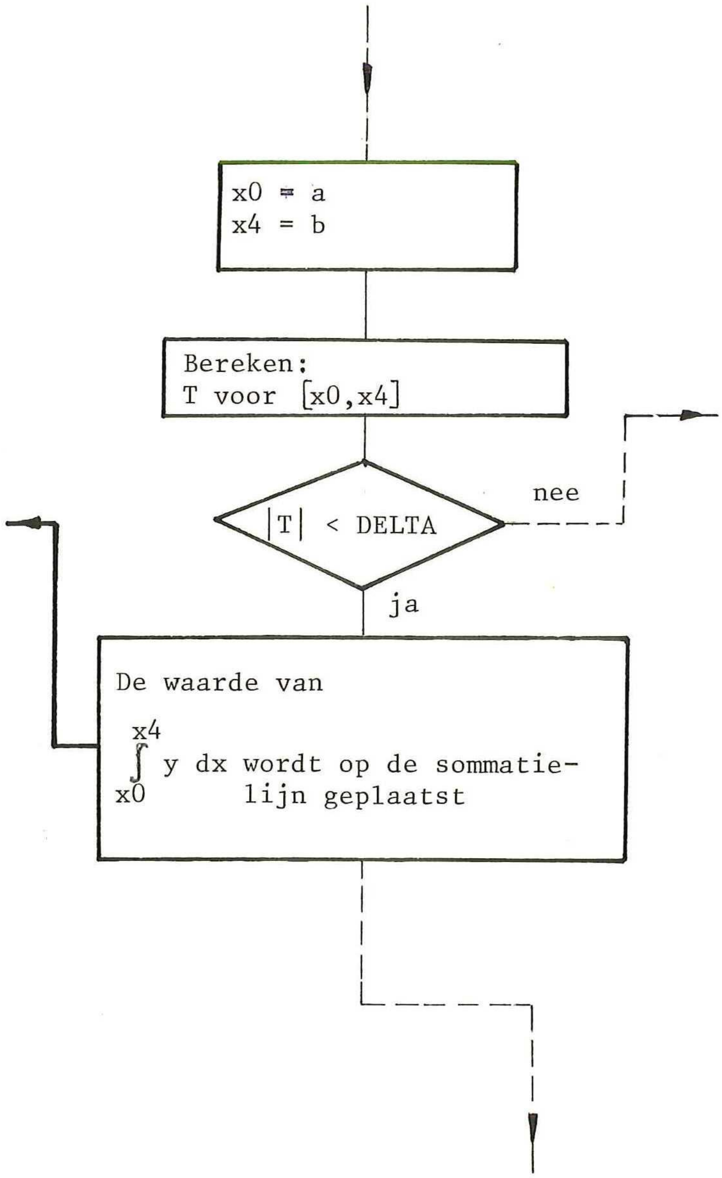
2.3.3 Invoer.

De kop van de procedure ziet er als volgt uit:
Real Procedure IREC (X,Y,A,B,EPS)
Value A,B,EPS; Real X,Y,A,B,EPS;

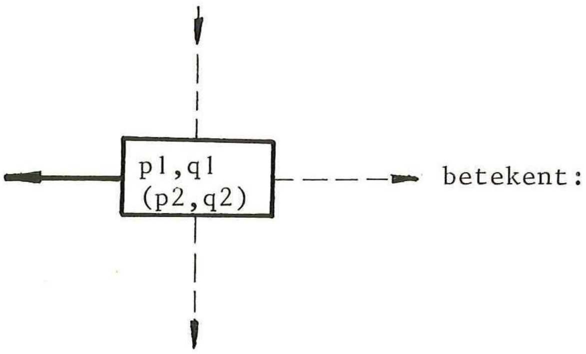
Invoer:	Y = f(x)	De integrand
	A	De ondergrens van het integratie interval
	B	De bovengrens van het integratie interval
	EPS	De absolute nauwkeurigheid waarmee de integraal berekend moet worden
Uitvoer:	IREC	Het gevraagde oppervlak

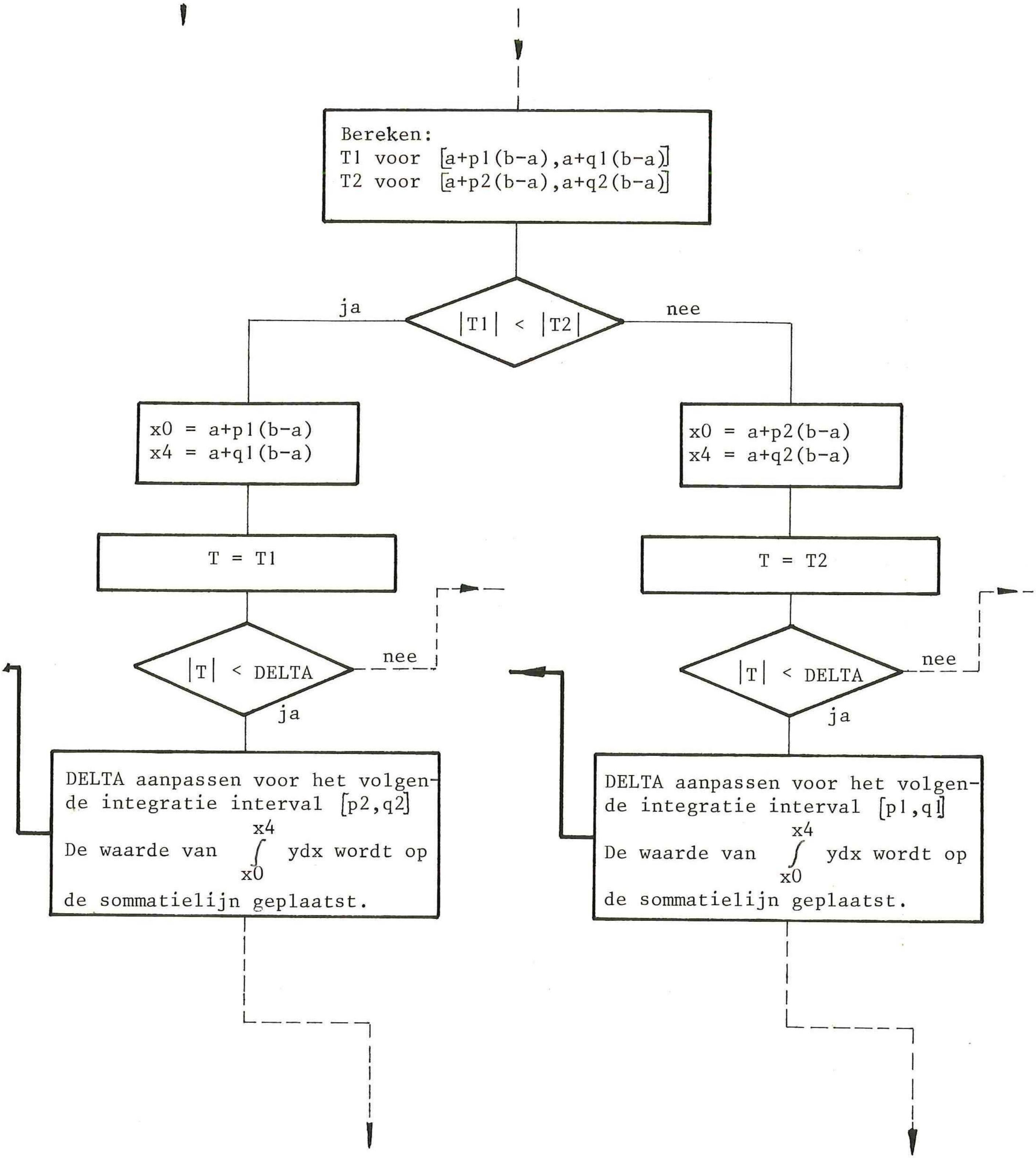
2.3.4. Blokdiagram.



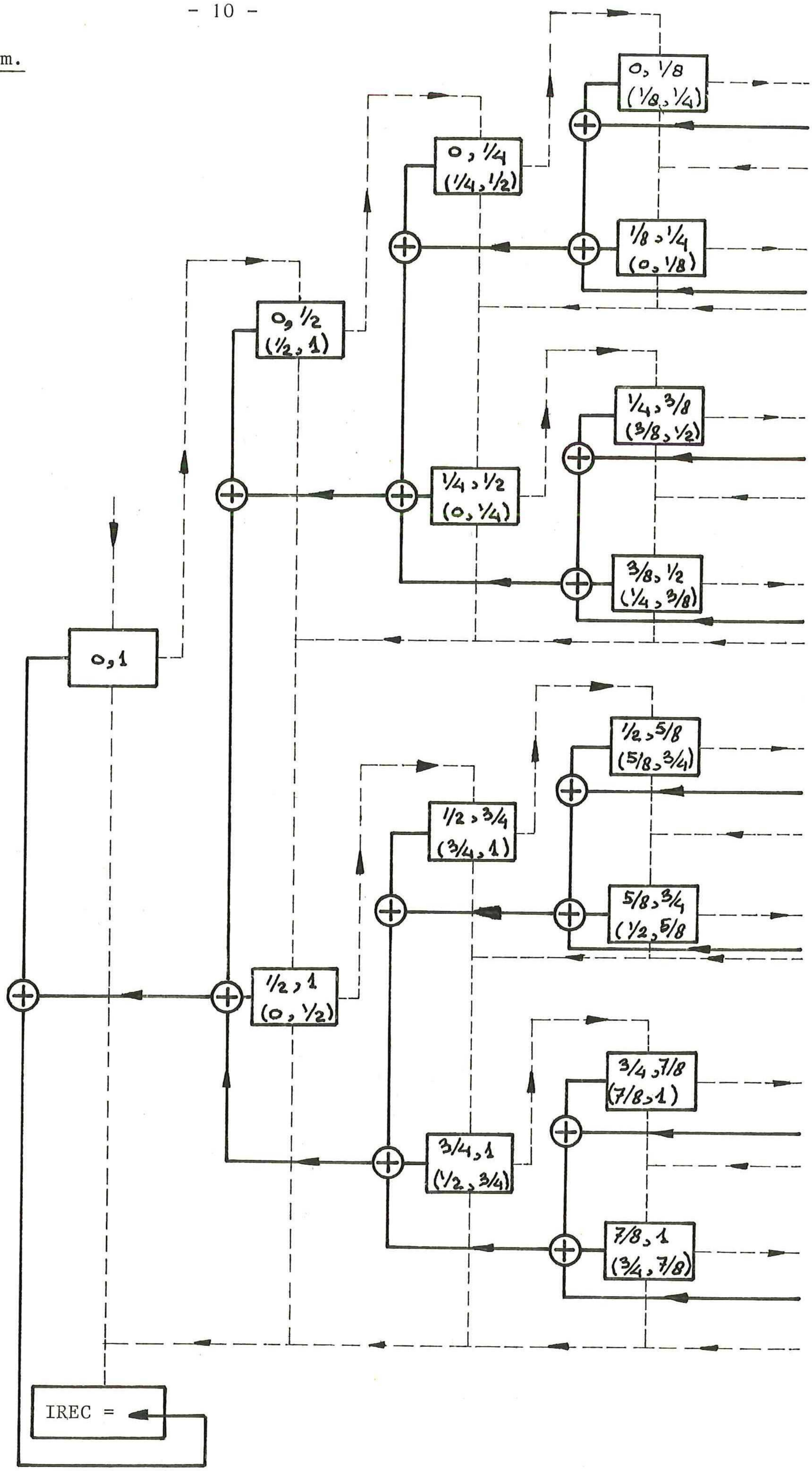


Blad 2: Blokdiagram.





Blad 3: Blokdiagram.



2.3.5 Listing van de procedure

```
'REAL''PROCEDURE'IREC(X,Y,A,B,EPS);'VALUE'A,B,EPS;'REAL'X,Y,A,B,EPS;
'BEGIN''REAL'X0,X2,X4,F0,F2,F4,DELTA,DELTAMAX,T;
   'REAL''PROCEDURE'I(X0,X2,X4,F0,F2,F4,T);'REAL'X0,X2,X4,F0,F2,F4,T;
   'BEGIN''REAL'X1,X3,F1,F3;
      X:=X1:=(X0+X2)/2;F1:=Y;X:=X3:=(X2+X4)/2;F3:=Y;
      'IF'ABS(T)>DELTA'THEN'
      'BEGIN''REAL'T1,T2;
         X:=(X0+X1)/2;T1:=F0+F2+6*F1-4*Y;X:=(X1+X2)/2;T1:=T1-4*Y;
         X:=(X2+X3)/2;T2:=F2+F4+6*F3-4*Y;X:=(X3+X4)/2;T2:=T2-4*Y;
         'IF'ABS(T2)>ABS(T1)'THEN'
         I:=I(X0,X1,X2,F0,F1,F2,T1)+I(X2,X3,X4,F2,F3,F4,T2)'ELSE'
         I:=I(X2,X3,X4,F2,F3,F4,T2)+I(X0,X1,X2,F0,F1,F2,T1);
      'END''ELSE'
      'BEGIN'I:=(X4-X0)*(F0+4*(F1+F3)+2*F2+F4-T/15);
         DELTA:=DELTAMAX+ABS(DELTA)-ABS(T);
      'END';
   'END';X:=X0:=A;F0:=Y;X:=X4:=B;F4:=Y;X:=X2:=(X0+X4)/2;F2:=Y;
   X:=(X0+X2)/2;T:=F0+F4+6*F2-4*Y;X:=(X2+X4)/2;T:=T-4*Y;
   DELTAMAX:=DELTA:=180*EPS/(B-A);IREC:=I(X0,X2,X4,F0,F2,F4,T)/12;
'END'PROCEDURE IREC;
```