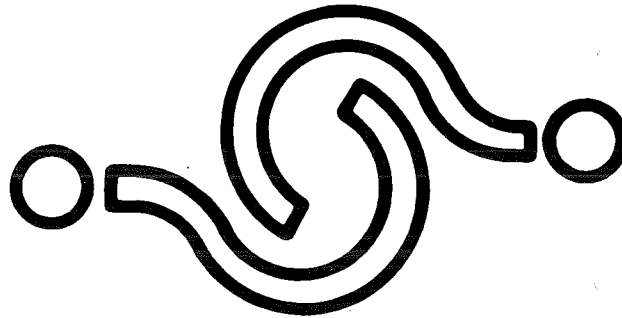


b 71N

Vraagstukken vloeistofmechanica

September 1984

Drs. H.J. Geldof/ir. A. Mazijk



H.J.

Vraagstukken Vloeistofmechanica

vraagstukken bij het
college b71N

drs. H.J. Geldof
ir. A. van Mazijk.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Civiele Techniek

uitgave aug. '84	heruitg. aug. '87			202010					f 5,50
---------------------	----------------------	--	--	--------	--	--	--	--	--------



Inhoud

	blz.
1. Inleiding	1
2. Vraagstukken	
2.1. Potentiaalstroming	3
2.2. Krachten op lichamen	
2.1.1. Lichamen in de stroming	15
2.2.2. Evenwicht bodemmateriaal	23
2.3. Transportprocessen	
2.3.1. Dispersie opgeloste stoffen	25
2.3.2. Transport van bodemmateriaal	34
2.4. Sedimenttransport en alluviale ruwheid	37
2.5. Morfologische voorspellingen	40
3. Uitwerkingen	
3.1. Potentiaalstroming	43
3.2. Krachten op lichamen	
3.2.1. Lichamen in de stroming	69
3.2.2. Evenwicht bodemmateriaal	78
3.3. Transportprocessen	
3.3.1. Dispersie opgeloste stof	81
3.3.2. Transport van bodemmateriaal	107
3.4. Sedimenttransport en alluviale ruwheid	113
3.5. Morfologische voorspellingen	118



1. Inleiding

In het college b71N worden achtereenvolgens de volgende onderwerpen behandeld: (zie ook de college-handleiding b71N)

- Potentiaalstroming
- Krachten op lichamen
 - = Lichamen in de stroming
 - = Evenwicht bodemmateriaal
- Transportprocessen
 - = Dispersie opgeloste stof
 - = Transport van bodemmateriaal (bodentransport en transport in suspensie)
- Sedimenttransport en alluviale ruwheid
- Morfologische voorspellingen.

Parallel hieraan is in hoofdstuk 2 van deze vraagstukkenbundel per onderwerp een aantal vraagstukken met antwoord gegeven.

Per paragraaf zijn van de eerste vraagstukken in hoofdstuk 3 de bijbehorende uitwerkingen gegeven.

Bij het oplossen van vraagstukken in de vloeistofmechanica is een systematische aanpak lonend. De volgende fasering kan daarbij nuttig zijn:

- Onderkennen van het probleem en zoeken naar de geschikte vorm van de vergelijkingen voor het onderhavige geval.
- Analytische benadering van het probleem. Voor het oplossen van een aantal vergelijkingen met een (gelijk!) aantal onbekenden loont het de moeite om een geschikte strategie te zoeken.
- Numerieke uitwerking.

Het is van belang om niet te snel numerieke waarden in te vullen.

Het overzicht kan dan zoek raken; ook is het controleren van de bewerkingen via de dimensies dan vrijwel niet meer mogelijk.

Tot slot zij opgemerkt, dat zonder nadere vermelding de volgende numerieke waarden worden gebruikt:

versnelling zwaartekracht	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
kinematische viscositeit water	$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
dichtheid water	$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
dichtheid zand/grind	$\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$

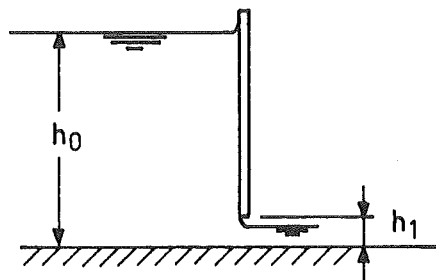
2. Vraagstukken

2.1. Potentiaalstroming

2.1.1. Stroming door een spleet

Algemeen

Door een verticale wand is de waterstand opgestuwd tot een hoogte h_0 boven een horizontale bodem. De onderkant van de wand bevindt zich op een afstand h_1 boven de bodem. Met andere woorden: er bevindt zich een spleet, waardoor het opgestuwde water wordt afgevoerd.



Numerieke gegevens

$$h_0 = 5 \text{ m} , \quad h_1 = 0,25 \text{ m}$$

De eenheid van breedte van de wand wordt beschouwd.

Gevraagd

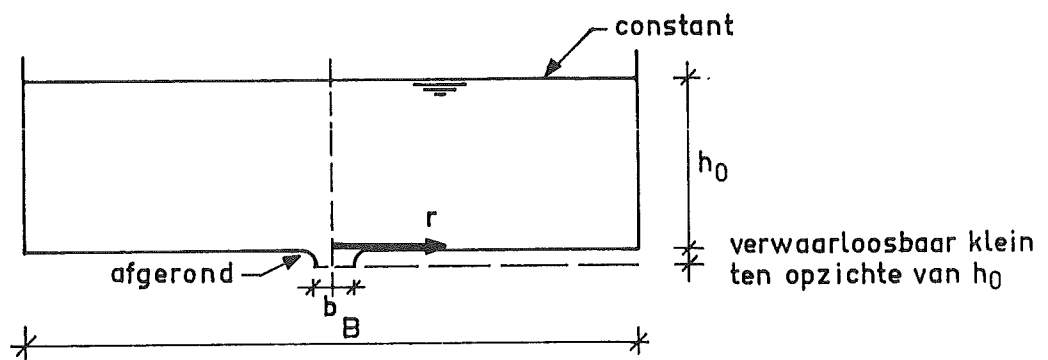
1. Bepaal de resulterende kracht F op de wand, als voor de contractie coëfficiënt $\mu = 0,6$ wordt aangehouden. (Antwoord: 108,7 kN).
2. Bepaal de drukverdeling tegen de wand en bepaal opnieuw de resulterende kracht F op de wand, uitgaande van de gevonden drukverdeling. (Antwoord: 100,1 kN).
3. Als F_s de resulterende kracht is, die het opgestuwde water op de wand zou uitoefenen, indien er door de spleet geen afvoer zou zijn, en F de resulterende kracht is, indien er wel een afvoer zou plaatsvinden, druk dan F/F_s uit in h_0 en h_1 , uitgaande van:

- de volgens vraag 1 gevonden uitdrukking voor F , en
 - de volgens vraag 2 gevonden uitdrukking voor F .
- Vergelijk de gevonden relaties $F/F_s = f(h_1/h_0)$ grafische met elkaar. Wat kan op grond van deze grafiek worden geconcludeerd?
(Zie voor de uitwerking Par. 3.1.1.)

2.1.2. Drukverdeling op de bodem van een vat

Algemeen

Een vat met een breedte B en een lengte L is gevuld met water. De lengte L is een aantal malen de breedte B van het vat. In het midden van de bodem van het vat bevindt zich een afgeronde spleetvormige opening, kortweg spleet genoemd, die over de gehele lengte L van het vat aanwezig is. De breedte van de spleet is b . De spleetbreedte b is klein ten opzichte van de breedte B van het vat. Er wordt voor gezorgd, dat de afvoer door de spleet geen peilverlaging in het vat betekent. De waterstand in het vat, gemeten ten opzichte van de bodem is h_0 . De spleet is afgerond.



Numerieke gegevens

$B = 3 \text{ m}$, $b = 0,05 \text{ m}$, $h_0 = 1 \text{ m}$

Gevraagd

Als de kopse wanden van het vat geen invloed hebben op het stroombeeld in het vat, benader dan het verloop van de druk p op de bodem van het vat langs een denkbeeldige lijn, die loodrecht op de spleet staat en die in het bodemvlak van het vat ligt, als functie van de afstand r tot het hart van de spleet.

(Antwoord: $p(r) = \rho g h_0 (1 - b^2 / (\pi^2 r^2))$; zie voor de uitwerking Par. 3.1.2.).

2.1.3. Stroming langs twee wanden, die een hoek van 90° met elkaar maken

Algemeen

Een twee-dimensionaal stroombeeld in het horizontale vlak kan worden beschreven met de stroomfunctie:

$$\psi = \alpha x y$$

α is een constante, $\alpha > 0$.

Numerieke gegevens

--

Gevraagd

1. Toon aan dat de gegeven stroomfunctie het stroombeeld weergeeft van een stroming langs twee verticale wanden, die een hoek van 90° met elkaar maken, en wel ter plaatse van die hoek en aan de binnenkant van de hoek

(inwendige hoek)



De x - en y -as vallen samen met de wanden; het punt $(x, y) = (0, 0)$ valt samen met de hoek zelf.

2. Toon aan dat de stroming rotatievrij is.
3. Bepaal de functie die de equipotentiaallijnen weergeeft.
(Antwoord: $x^2 - y^2 = \text{constant}$).
4. Leidt de uitdrukking af die het drukveld $p(x, y)$ weergeeft als $p(0, 0) = p_0$. (Antwoord: $p(x, y) = p_0 - \frac{1}{2} \rho \alpha^2 (x^2 + y^2)$).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.1.3.)

2.1.4. Stroming rond een cilinder

Algemeen

Een twee-dimensionale stroming in het horizontale vlak rond een vertikaal opgestelde cilinder met straal R , kan weergegeven worden door de volgende stroomfunctie (in poolcoördinaten):

$$\psi = u_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta$$

waarin u_0 de ongestoorde stroomsnelheid is.

De stroming langs de cilinder verloopt wrijvingsloos.

Numerieke gegevens

Gevraagd

1. Toon aan, dat de stroming rotatievrij is en aan de continuïteitsvergelijking voldoet.
2. Leid een uitdrukking af voor de stroomsnelheid langs het cilinder oppervlak en geef aan waar deze maximaal is, alsmede de grootte ervan. (Antwoord: $u_\theta = 2u_0 \sin \theta$; $\theta = \frac{\pi}{2}$; $u_\theta = 2u_0$).
3. Hoe verloopt de druk langs het cilinder oppervlak, indien de druk ter plaatse van de ongestoorde stroomsnelheid u_0 gelijk gesteld mag worden aan de atmosferische? Hoe groot is de maximale en hoe groot de minimale druk? De atmosferische druk mag gelijk aan nul worden gesteld (referentie-waarde).

(Antwoord: $p(\theta) = \frac{1}{2} \rho u_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$; $p_{\max} = \frac{1}{2} \rho u_0^2$;

$p_{\min} = -\frac{3}{2} \rho u_0^2$).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.1.4.)

N.B. Zoals bekend, geldt voor de omzetting van de partiële afgeleiden in cartesische coördinaten naar de partiële afgeleiden in poolcoördinaten:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \cdot}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial \cdot}{r \partial \theta}$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \cdot}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial \cdot}{r \partial \theta}$$

2.1.5. Stroming rond het afvoerpunt van een badkuip

Algemeen

Het stroombeeld, dat optreedt bij het leeglopen van bijv. een badkuip nabij het afvoerpunt op het moment, dat er nog net geen lucht wordt meegezogen, zou omschreven kunnen worden met de term "wervel-putstroom": de waterdeeltjes stromen via een wervel naar het afvoerpunt. Deze "wervel-putstroom" wordt benaderd als 2-dimensionale potentiaalstroming in het horizontale vlak en kan in het complexe x-y-vlak worden afgebeeld volgens de afbeeldingsfunctie:

$$W = a (1+i) \ln z$$

waarin

$$W = \phi + i \psi$$

en

$$z = x + iy \quad (\text{in cartesische coördinaten})$$

$$z = r e^{i\theta} \quad (\text{in poolcoördinaten})$$

(a is een willekeurige constante en i de imaginaire eenheid).

Numerieke gegevens

--

Gevraagd

1. Bepaal de voor de "wervel-putstroom" geldende potentiaalfunctie ϕ en stroomfunctie ψ in poolcoördinaten.

(Antwoord: $\phi = a \ln r - a\theta$; $\psi = a \ln r + a\theta$).

2. Geef schetsmatig het verloop van de stroomlijn $\psi = 0$.

3. Als de druk in het punt $|z_1| = \sqrt{2}$ gelijk is aan p_1 en in het punt $|z_2| = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ gelijk is aan p_2 , bepaal dan het drukverschil

$$\Delta p = p_1 - p_2. \text{ (Antwoord: } \Delta p = \frac{3}{2} \rho a^2 \text{).}$$

(Zie voor de uitwerking Par. 3.1.5.)

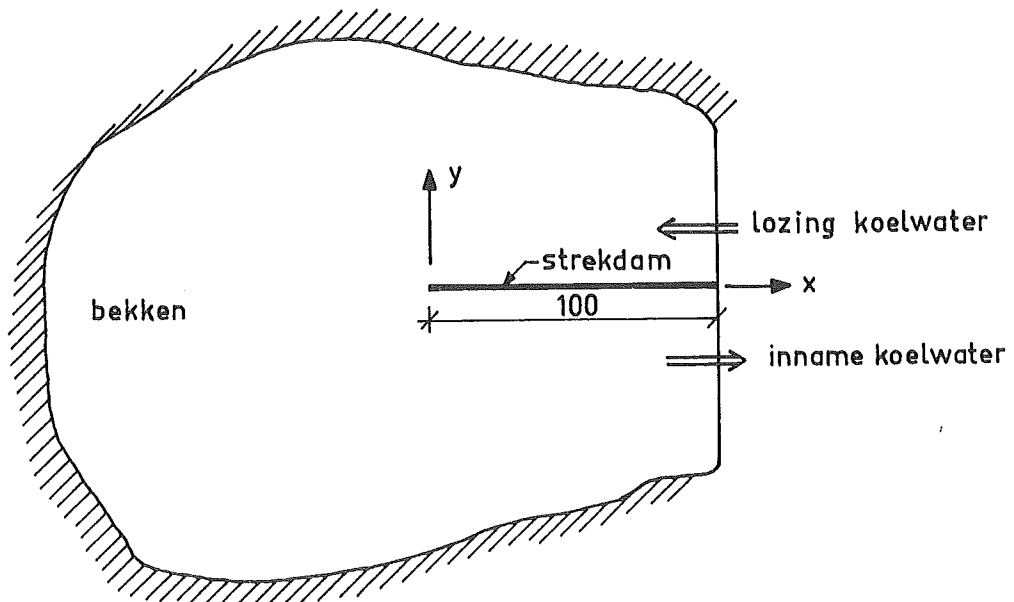
2.1.6. Stroming rond een strekdam

Algemeen

Een elektriciteitscentrale betreft zijn koelwater uit een groot bekken en loost ook weer het na gebruik opgewarmde water in dit bekken. Om te bewerkstelligen, dat het opgewarmde water een voldoende lange verblijftijd in het bekken heeft (om via warmte-afgifte aan de atmosfeer weer dusdanig af te koelen, dat hergebruik voor koeling mogelijk is), wordt tussen in- en uitlaat een strekdam van 100 m lengte gebouwd.

Voor een nadere bestudering van de stroming rond de strekdam, wordt deze in eerste instantie als een 2-dimensionale potentiaalstroming in het horizontale vlak benaderd. In deze benadering heeft de strekdam geen breedte. De stroming rond de strekdam kan in het complexe x-y vlak worden afgebeeld volgens de afbeeldingsfunctie:

$$W = A z^{\frac{1}{2}}$$



waarin

$$W = \phi + i \psi$$

en

$$z = x + iy \quad (\text{in cartesische coördinaten})$$

(A is een willekeurige constante en i de imaginaire eenheid).

Het punt $(x,y) = (0,0)$, de oorsprong van het assenstelsel valt samen met de uiterste punt van de strekdam, terwijl de strekdam zelf met de positieve x-as samenvalt (zie bijgaande figuur).

Numerieke gegevens

--

Gevraagd

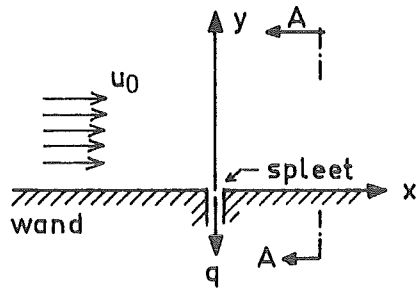
1. Hoe luidt de vergelijking van een willekeurige stroomlijn rond de strekdam. (Antwoord: $\sqrt{x^2 + y^2} - x = \text{constant}$).
2. Schets de stroomlijn, die gaat door het punt $x = 50$ m en $y = 20$ m en bereken daarbij de snijpunten van deze stroomlijn met de x- en de y-as. Geef in de schets de richting van de stroming aan.
(Antwoord: snijpunt met x-as: $x = -1,93$ m ; snijpunt y-as: $y = \pm 3,85$ m).
3. Als de snelheid \vec{u} in het punt $(x,y) = (50, 20)$ gelijk is aan $|\vec{u}| = 0,10$ m/s, hoe groot is dan de snelheid in het snijpunt van de onder vraag 2 genoemde stroomlijn met de x-as?
(Antwoord: $-0,53$ m/s).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.1.6.)

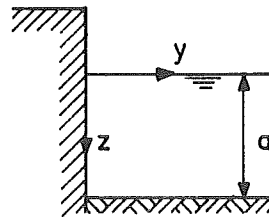
2.1.7. Wateronttrekking uit een kanaal

Langs een verticale wand treedt een parallelstroming op (homogeen stromingsveld). De snelheid is gelijk aan u_0 , de waterdiepte is a. In de wand bevindt zich over de volledige waterdiepte een verticale spleet, waardoor een debiet q per meter spleethoogte wordt onttrokken aan de parallelstroming.

Verondersteld wordt, dat het resulterend stroombeeld niet varieert over de waterdiepte a en dus 2-dimensionaal is in het horizontale x - y -vlak (oorsprong valt samen met de spleet).



bovenaanzicht



doorsnede A-A

Hierbij wordt tevens (impliciet) aangenomen, dat in de omgeving van de spleet de onttrekking van het debiet q geen lokale waterspiegeldaling tot gevolg heeft. De stroming wordt verder wrijvingsloos en rotatievrij verondersteld.

Numerieke gegevens

$$u_0 = 0,50 \text{ m/s} \quad , \quad q = 1 \text{ m}^2/\text{s}$$

Gevraagd

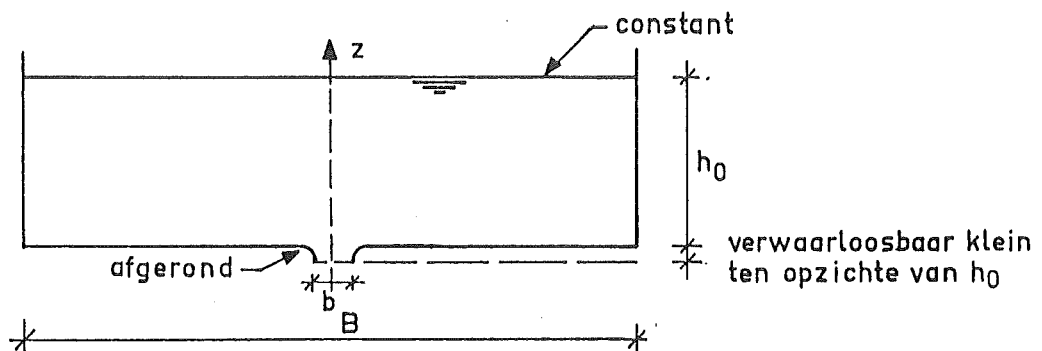
1. Bepaal de stroomfunctie ψ , die het boven omschreven 2-dimensionale stroombeeld weergeeft als functie van x en y .
(Antwoord: $-u_0 y + \frac{q}{\pi} \text{bgtg} \frac{y}{x} = \text{constant}$).
2. Bepaal het punt in het x - y -vlak, waar de stroomsnelheid nul is (dit is het zogenaamde "stuwpunt"). (Antwoord: 0,64 m).
3. Leid de uitdrukking af, die het verloop van de druk p langs de wand ($y = 0$) weergeeft op een willekeurige diepte z onder de waterspiegel ten opzichte van de druk p_0 op grote afstand bovenstrooms van de spleet op dezelfde diepte z ($\Delta p = p - p_0$).
(Antwoord: $\Delta p = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{q}{\pi x} \right) \left(2u_0 - \frac{q}{\pi x} \right)$).
4. Hoe groot is in het stuwpunt van vraag 2 de Δp , zoals gedefinieerd in vraag 3. (Antwoord: 125 N/m²).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.1.7.)

2.1.8. Bak met een spleet in de bodem

Algemeen

Gegeven een bak, gevuld met water. De lengte afmeting L van de bak is een aantal malen de breedte afmeting B . In de lengterichting van de bak bevindt zich in het midden van de bodem over de volle lengte van de bak een afgeronde spleetvormige opening, waardoor het water uit de bak stroomt. De afmetingen van de afronding van de opening zijn verwaarloosbaar ten opzichte van de waterdiepte h_0 in de bak. De breedte van de opening is b . Het niveau in de bak wordt constant gehouden.



Numerieke gegevens

$$b = 0,05 \text{ m} , \quad h_0 = 1 \text{ m} , \quad B = 3 \text{ m}$$

Gevraagd

1. Bereken de afvoer per meter spleetlengte. (Antwoord: $0,22 \text{ m}^2/\text{s}$).
2. Bepaal het drukverloop $p(z)$ langs de vertikaal, die gaat door het hart van de spleet. (Antwoord: $p(z) = \rho g \left\{ h \left(1 - \frac{b^2}{\pi^2 z^2} \right) - z \right\}$).

2.1.9. Analyse stroomfunctie

Algemeen

Een twee-dimensionale stroming in het x - y -vlak wordt gegeven door de stroomfunctie:

$$\psi = - 5x^2$$

Numerieke gegevens

--

Gevraagd

1. Toon aan dat de stroomfunctie een parallelstroming evenwijdig aan de y-as voorstelt, terwijl de grootte van de snelheid lineair verandert met de afstand tot de y-as.
2. Ga na of de stroming rotatievrij is.

2.1.10. Conforme afbeelding

Algemeen

Een stroombeeld in het horizontale vlak kan in het complexe x-y-vlak worden afgebeeld volgens de afbeeldingsfunctie:

$$W = \ln z^2$$

waarin

$$W = \phi + i\psi$$

en

$$z = x + iy \quad (\text{in cartesische coördinaten})$$

of

$$z = r e^{i\theta} \quad (\text{in poolcoördinaten})$$

(i is de imaginaire eenheid).

Numerieke gegevens

--

Gevraagd

1. Bepaal de stroomfunctie ψ en de snelheidspotentiaal ϕ .
(Antwoord: $\phi = 2 \ln r$; $\psi = 2\theta$).
2. Teken het stroombeeld, geef hierbij ook de stroomrichting aan.
(Antwoord: putstroming).

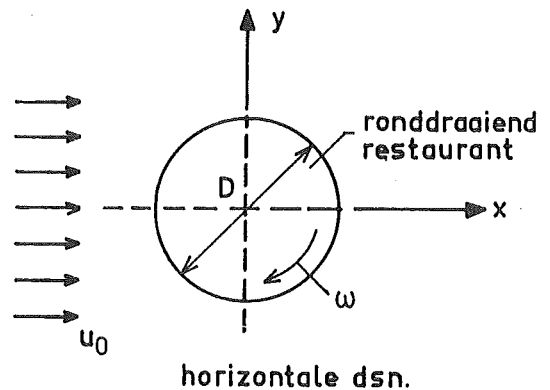
3. Toon aan dat de stroming rotatievrij is.
4. Bereken het drukverschil tussen de punten $z_1 = 2 + 2i$ en $z_2 = 3 + 3i$. Geef daarbij aan in welk punt de druk het grootst is. (Antwoord: $-\frac{5}{36} \rho$; $p(z_2) > p(z_1)$).

N.B. Voor de omzetting van de partiële afgeleiden in cartesische coördinaten naar partiële afgeleiden in poolcoördinaten wordt verwezen naar Par. 2.1.4.

2.1.11. Ronddraaiend restaurant

Algemeen

Het cirkelvormig restaurant (diameter D) van een televisietoren draait rond met een constante hoeksnelheid ω in een homogeen windveld met windsnelheid u_0 (zie bijgaande figuur). Hierdoor ontstaat rond het restaurant een bepaald stroombeeld. Er mag nu worden aangenomen, dat de hoogte van het restaurant zodanig is, dat dit stroombeeld in de verticale richting niet varieert en dus als 2-dimensionaal in het horizontale vlak kan worden beschouwd.



Als verder mag worden verondersteld, dat de stroming rond het restaurant wrijvingsloos en rotatievrij is, dan kan genoemd stroombeeld in het complexe x - y -vlak als volgt worden afgebeeld:

$$W = u_0 \left(z + \frac{D^2}{4z} \right) - i\omega D^2 \ln z$$

waarin

$$W = \phi + i\psi$$

en

$$z = x + iy \quad (\text{in cartesische coördinaten})$$

of

$$z = re^{i\theta} \quad (\text{in poolcoördinaten})$$

waarbij geldt:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (i \text{ is de imaginaire eenheid})$$

Numerieke gegevens

$$D = 30 \text{ m} , \quad \omega = 10^{-3} \text{ rad/s} , \quad u = 3 \text{ m/s} , \quad \rho_{\text{lucht}} = 1,23 \text{ kg/m}^3$$

Gevraagd

1. Bepaal de stroomfunctie ψ en de snelheidspotential ϕ van het stroombeeld rond het restaurant.

(Antwoord: $\psi = -u_0 \left(r + \frac{D^2}{4r}\right) \cos\theta + \omega D^2 \theta$

$$\phi = -u_0 \left(r - \frac{D^2}{4r}\right) \sin\theta - \omega D^2 \ln r).$$

2. Leid de uitdrukking af, die het snelheidsverloop langs de omtrek van het restaurant weergeeft in het assenstelsel (x,y) of (r,θ) . (De oorsprong van het assenstelsel valt samen met het middelpunt van het restaurant, zie de bijgaande figuur.)

(Antwoord: $u_\theta = -2u_0 \sin\theta - 2\omega D$).

3. Bereken de druk in $z_1 = i \cdot \frac{1}{2}D$ en $z_2 = -i \cdot \frac{1}{2}D$ ten opzichte van de druk ter plaatse van de ongestoorde stroming.

(Antwoord: $\Delta p_1 = -17,05 \text{ N/m}^2$; $\Delta p_2 = -16,16 \text{ N/m}^2$).

4. Als de bij vraag 3 gevonden drukken Δp_1 en Δp_2 in de resp. punten z_1 en z_2 zijn, bij welke windsnelheid moet het restaurant dan stil gezet worden opdat het drukverschil $\Delta(\Delta p) = \Delta p_2 - \Delta p_1 \leq 2,5 \text{ N/m}^2$?

(Antwoord: $u_0 \leq 8,47 \text{ m/s}$).

2.2. Krachten op lichamen

2.2.1. Lichamen in de stroming

2.2.1.1. Valsnelheid van een deeltje

Algemeen

Een bolvormig deeltje met een diameter D en een dichtheid ρ_1 zinkt met een constante snelheid in een oliebad. De dynamische viskositetscoëfficiënt van de olie is η en de dichtheid van de olie is ρ_2 .

Numerieke gegevens

$$D = 0,3 \text{ mm} \quad , \quad \rho_1 = 1900 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad \rho_2 = 900 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad \eta = 10^{-2} \text{ Ns/m}^2$$

Gevraagd

Bereken de snelheid van het bolletje, indien aangenomen mag worden, dat de formule van Stokes geldt. Controleer deze aanname.

(Antwoord: 0,005 m/s ; zie voor de uitwerking Par. 3.2.1.1.).

2.2.1.2. Een bolvormig lichaam in de stroming

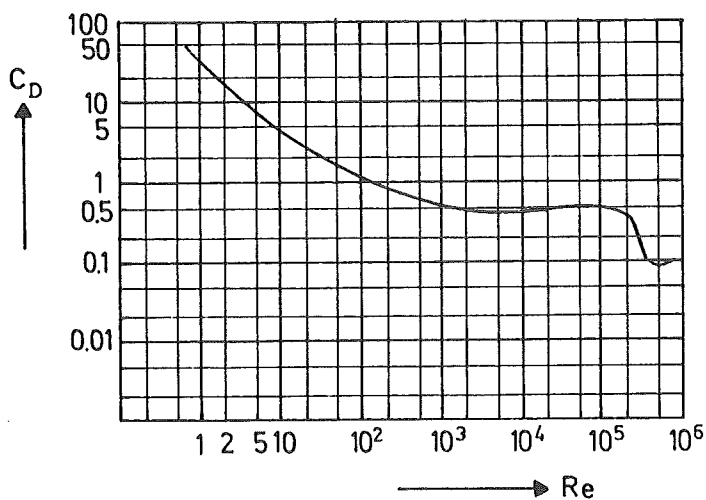
Deel A

Algemeen

Van een bolvormig lichaam met een willekeurige diameter D en een glad oppervlak is de weerstandcoëfficiënt C_D als functie van het Reynolds-getal bekend (zie bijgaande figuur).

Beschouw nu een gladde massieve bol met een diameter D_1 en een dichtheid ρ . In een groot diep waterreservoir blijkt deze bol met een constante snelheid u_1 te zinken.

Numerieke gegevens



$$D_1 = 0,25 \text{ m}$$

$$u_1 = 2 \text{ m/s}$$

Gevraagd

1. Hoe luidt in dit geval de definitie van het Reynolds-getal?
2. Bereken de dichtheid ρ van de massieve bol (de inhoud van een bol met straal a is $\frac{4}{3} \pi a^3$). (Antwoord: $1122,3 \text{ kg/m}^3$).

Deel B

Algemeen

Beschouw nu een gladde bol met een diameter D_2 . Deze bol wordt rechtlijnig en horizontaal voortbewogen door oorspronkelijk stilstaande lucht (dichtheid ρ_L , kin. viscositeit ν_L). Daarvoor blijkt zowel bij een snelheid u_2 als bij een snelheid u_3 ($u_3 > u_2$) dezelfde kracht F nodig te zijn.

Numerieke gegevens

$$D_2 = 0,20 \text{ m} \quad , \quad u_2 = 15 \text{ m/s} \quad , \quad u_3 = 34 \text{ m/s} \quad , \quad F = 2 \text{ N} \quad ,$$

$$\rho_L = 1,25 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad \nu_L = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Gevraagd

1. Bereken het Reynolds-getal Re en de weerstandscoefficiënt C_D behorende bij de respectieve snelheden u_2 en u_3 .

(Antwoord: $Re_2 = 2 \cdot 10^5$, $(C_D)_2 = 0,45$, $Re_3 = 4,5 \cdot 10^5$, $(C_D)_3 = 0,088$).

2. Welk verschijnsel zorgt ervoor, dat ondanks een toename van de snelheid ($u_2 \rightarrow u_3$) de weerstandskracht F hetzelfde blijft?
(Bekijk hierbij zonodig het gegeven verband tussen C_D en Re bij het eerste gedeelte (A) van dit vraagstuk).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.2.1.2.)

2.2.1.3. Pijler in de stroming (I)

Algemeen

Over een brede rivier wordt een eenvoudige loopbrug gebouwd.

De draagconstructie ter plaatse van de rivier bestaat uit een aantal vierkante pijlers met zijde B .

De diepte van de rivier ter plaatse van de brug is gemiddeld a , terwijl de gemiddelde stroomsnelheid in de hoofdstroomrichting \bar{u} bedraagt. De snelheidsverdeling over de vertikaal kan worden benaderd door het machtsprofiel: (zie college-handleiding b70)

$$u(z) = n \frac{u_*}{\kappa} \left(\frac{z}{a}\right)^{1/n}$$

waarin z de plaatscoördinaat is, gemeten ten opzichte van de bodem.

De vierkante pijlers kunnen op twee manieren ten opzichte van de hoofdstroomrichting worden gesitueerd:

- (i) een diagonaal is evenwijdig aan de hoofdstroomrichting ($\rightarrow \blacklozen$),
waarbij de weerstandscoefficiënt $C_D = 1,5$.
- (ii) een zijde is evenwijdig aan de hoofdstroomrichting ($\rightarrow \blacksquare$),
waarbij de weerstandscoefficiënt $C_D = 2$.

(N.B. de weerstandscoefficiënt geldt voor de in de rivier optredende hydraulische omstandigheden).

Numerieke gegevens

$a = 3 \text{ m}$, $\bar{u} = 1 \text{ m/s}$, $n = 6$

Gevraagd

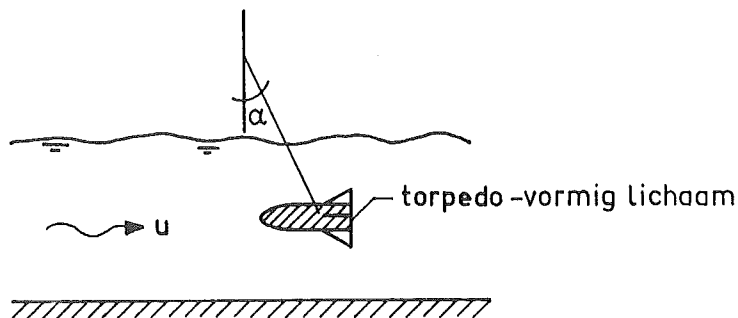
1. Welke situering van de pijlers ten opzichte van de hoofdstroom-richting dient gekozen te worden, opdat de kracht, die de stroming op de pijler uitoefent minimaal is?
Licht uw antwoord kort toe.
2. Bepaal bij het gegeven snelheidsprofiel de plaats van het aangrijpingspunt ten opzichte van de rivierbodem, van de door de stroming op de pijler uitgeoefende resulterende kracht voor de onder vraag 1 gekozen situering. (Antwoord: $\sim 1,70 \text{ m}$).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.2.1.3.)

2.2.1.4. Meting stroomsnelheid

Algemeen

Het meten van de stroomsnelheid u op een rivier wordt uitgevoerd met een lichaam dat in het water wordt gehangen. Door de kracht, die de stroming op het lichaam uitoefent, zal de kabel, waaraan het lichaam is opgehangen een hoek α met de vertikaal maken. Het lichaam heeft een volume V en een dichtheid ρ_0 . Het lichaam is torpedovormig waardoor het lichaam automatisch een zodanige positie inneemt, dat de as van de torpedo evenwijdig aan de stroomrichting wordt. Het aange-stroomde oppervlak is dan A en de weerstandscoefficiënt C_D .



Numerieke gegevens

$$V = 0,01 \text{ m}^3, \quad \rho_0 = 2700 \text{ kg/m}^3, \quad A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2, \quad C_D = 1,2$$

Gevraagd

1. Leid het verband af, dat geldt tussen de hoek α en de stroomsnelheid u , aannemende dat de kabel strak is gespannen en de stroomingskracht op de kabel verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de kracht, die op het lichaam wordt uitgeoefend.
2. Bepaal de grootte van de stroomsnelheid u bij een hoek $\alpha = 30^\circ$, wanneer gemeten wordt in zoet water ($\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$) en wanneer gemeten wordt in zout water ($\rho_2 = 1030 \text{ kg/m}^3$).

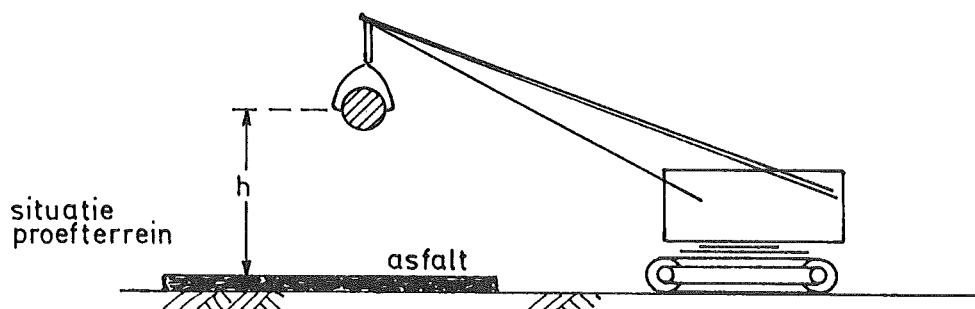
(Antwoord: $u_1 = 2,83 \text{ m/s}$, $u_2 = 2,77 \text{ m/s}$).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.2.1.4.)

2.2.1.5. Valproeven stortsteen

Algemeen

Bij de stormvloedkering in de Oosterschelde wordt de bodem ter weerszijden van de kering over grote lengten met een asfaltlaag verdedigd. De randen van deze bodembeschermingsconstructie worden afgedekt met stortsteen met een gemiddelde diameter D . De weerstandscoefficiënt van de stenen wordt geschat op C_D . De dichtheid van de stenen is ρ_s en van het zeewater ρ_w . Het ligt in de bedoeling de stenen vanaf de waterlijn te storten. Dit betekent bij de aanwezige waterdiepte, dat de stenen de bodembeschermingsconstructie treffen met de evenwichtsnelheid. In hoeverre hierbij schade aan de asfaltlaag kan optreden, moet vooraf worden onderzocht.



Daartoe wordt op een proefterrein een stuk asfalt aangebracht, waarop men de stenen (in lucht) laat vallen. Vanaf een bepaalde hoogte h boven de asfalt worden de stenen losgelaten. De hoogte h wordt gemeten vanaf het zwaartepunt van de steen, die daarbij als "bol" gedacht wordt. De hoogte h moet nu zodanig worden gekozen, dat de snelheid van de steen op het moment, dat deze het asfalt treft gelijk is aan de evenwichtssnelheid onder water. (De luchtweerstand mag worden verwaarloosd.)

Numerieke gegevens

$D = 0,50 \text{ m}$, $C_D = 1$, $\rho_s = 3000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_w = 1020 \text{ kg/m}^3$
(inhoud van een bol met diameter D is $1/6 \pi D^3$)

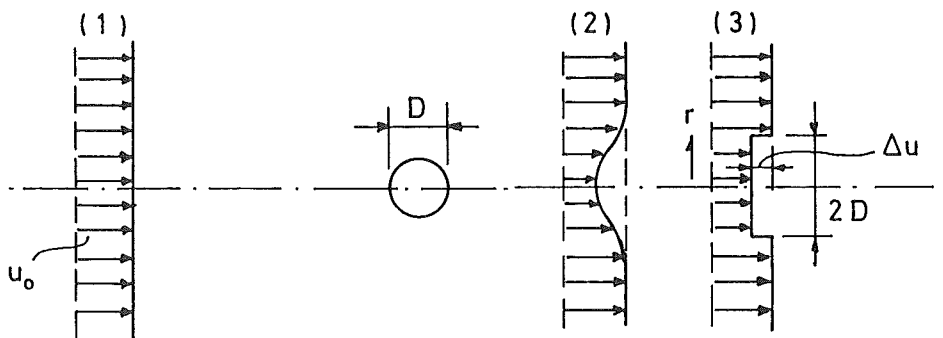
Gevraagd

Bepaal de hoogte h . (Antwoord: $0,90 \text{ m}$, zie voor de uitwerking Par. 3.2.1.5.).

2.2.1.6. Bepaling weerstandscoefficiënt van een lichaam

Algemeen

Een bol (diameter D) wordt in een uniforme luchtstroming met snelheid u_0 (1) geplaatst (zie bijgaande figuur). Op voldoende afstand achter de bol wordt een snelheidsverdeling gemeten van het geschetste verloop (2). Deze wordt benaderd door de aan de rechterkant ernaast getekende snelheidsverdeling (3), waarin voor $r > D$ de ongestoorde snelheid u_0 heerst en voor $r < D$ de snelheid $u_0 - \Delta u$.



Numerieke gegevens

$$u_0 = 40 \text{ m/s} , \quad \Delta u = 2,5 \text{ m/s}$$

Gevraagd

Bereken de weerstandscoefficiënt C_D van de bol. (Aanwijzing: kies een controle-volume dat door stroomlijnen wordt begrensd.)

(Antwoord: 0,47 ; zie voor de uitwerking Par. 3.3.1.6.).

2.2.1.7. Pijler in de stroming (II)

Algemeen

Over een snelstromende rivier wordt een voetgangersbrug gebouwd. Ter plaatse van de rivier wordt de brug ondersteund door cirkelvormige stalen buizen met een diameter D_1 . De stroomsnelheid in de rivier is u_1 . De waterdiepte ter plaatse van de brug is a .

Ter bepaling van de kracht, die het snelstromende rivierwater op de stalen buizen uitoefent, staat een viertal metingen in een windtunnel aan een cirkelvormige cilinder met een diameter D_2 ter beschikking. Gemeten is de kracht F_2 per strekkende meter, die de luchtstroming bij een gegeven luchtsnelheid u_2 op de cilinder uitoefent. De dichtheid van lucht is ρ_2 ; de kinematische viscositeit van lucht is ν_2 .

Numerieke gegevens

$$D_1 = 0,30 \text{ m} , \quad D_2 = 0,25 \text{ m} , \quad u_1 = 3,20 \text{ m/s} , \quad a = 3 \text{ m} ,$$

$$\rho_2 = 1,23 \text{ kg/m}^3 , \quad \nu_2 = 1,48 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

Resultaten windtunnelmetingen

u_2 (m/s)	23	36	46	57
F_2 (N/m)	23,7	78	152	248

Gevraagd

Bepaal de grootte van de totale kracht F_1 , die het snelstromende rivierwater op één stalen buis uitoefent, aannemende, dat de watersnelheid u_1 over de diepte a constant is. (Antwoord: 2,3 kN).

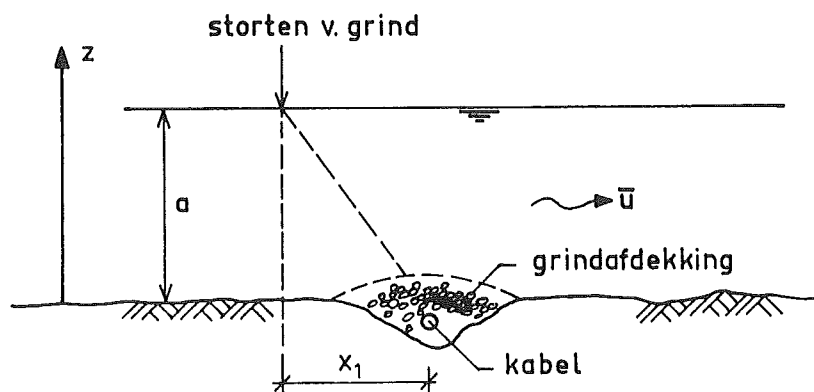
2.2.1.8. Het storten van grind in een snel stromende rivier

Algemeen

Dwars over de bodem van een snel stromende rivier (gemiddelde waterdiepte a , gemiddelde stroomsnelheid \bar{u}) is een sleuf gegraven, waarin een kabel is gelegd. De kabel wordt afgedekt met grind. Het grind wordt vanaf de waterlijn (= waterspiegel) gestort. Vanwege de heersende watersnelheid zal het grind bovenstrooms van de sleuf moeten worden gestort, opdat het grind de bodem bereikt ter plaatse van de sleuf. Voor een eerste afschatting van de horizontale afstand x_1 tussen het punt van storten en de plaats van de sleuf wordt één enkele bolvormige grindkorrel beschouwd met diameter D , dichtheid ρ_s en weerstandscoëfficiënt C_D . Bij de berekening wordt er van uitgegaan dat:

- (1) de valsnelheid van de grindkorrel in het water nagenoeg direct gelijk is aan de evenwichtssnelheid, en
- (2) de horizontale snelheid van de grindkorrel steeds gelijk is aan de locaal heersende watersnelheid. Deze laatste wordt gegeven door het volgende machtsprofiel:

$$u(z) = n \frac{u_*}{\kappa} \left(\frac{z}{a}\right)^{1/n}$$



Numerieke gegevens

$a = 4,5 \text{ m}$, $D = 3 \text{ cm}$, $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$, $C_D = 0,8$
(De inhoud van een bol wordt gegeven door $\frac{1}{6} \pi D^3$).

Gevraagd

Uitgaande van de onder "algemeen" gegeven beschouwing van één korrel, wordt gevraagd:

1. De tijd t_1 te bepalen, die de korrel nodig heeft om de bodem te bereiken, gerekend vanaf het moment, dat deze de waterspiegel passeert. (Antwoord: 5 s).
2. Aan te tonen, dat de horizontale afstand x_1 gelijk is aan het product van de gemiddelde stroomsnelheid \bar{u} en de tijd t_1 ($x_1 = \bar{u} \cdot t_1$), uitgaande van de gegeven snelheidsverdeling.

2.2.2. Evenwicht bodemmateriaal

2.2.2.1. Stabiele bodembedekking

Algemeen

Over een bodem bestaande uit een stortlaag van betonkubi (dichtheid ρ_s) dient een zekere hoeveelheid water te worden afgevoerd. Daarbij moet worden voldaan aan de eis, dat de betonkubi niet in belangrijke mate in beweging worden gebracht. Beschouwd wordt nu de situatie, waarbij de afvoer per meter breedte gelijk is aan q en de daarbij optredende waterdiepte a .

Numerieke gegevens

$q = 10,3 \text{ m}^2/\text{s}$, $a = 2,75 \text{ m}$, $\rho_s = 2450 \text{ kg/m}^3$

Gevraagd

Welke afmeting van de betonkubi beveelt U aan?

Aanwijzing: Denk eraan, dat in het Shields-diagram de korrelafmeting wordt gegeven als nominale diameter D_n .

(Antwoord: 0,26 m; zie voor de uitwerking Par. 3.2.2.1.).

2.2.2.2. Toelaatbare afvoer

Algemeen

Een brede waterloop, waarvan de bodem bedekt is met grind (nominale diameter D), heeft in de lengterichting een bodemverhang i_b .

Numerieke gegevens

$$D = 0,05 \text{ m} , \quad i_b = 5 \cdot 10^{-4}$$

Gevraagd

1. Wat is de grootste afvoer q per eenheid van breedte, die kan worden toegelaten zonder dat de bodembedekking gaat bewegen?
2. De uitkomst voor q bij vraag 1 hangt mede af van de gebruikte ruwheidsformule. Hoe groot is deze variatie?

(Antwoord: ruim 4%).

2.3. Transportprocessen

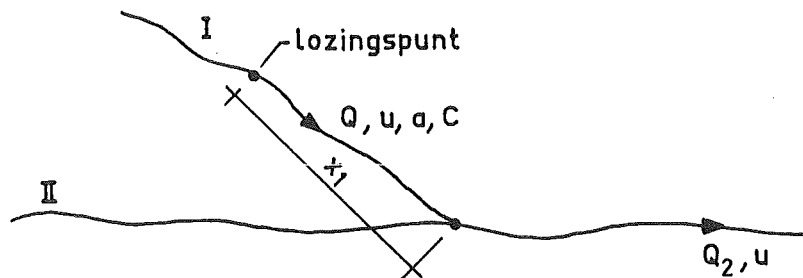
2.3.1. Dispersie opgeloste stoffen

2.3.1.1. Lozing via een zijriviertje

Algemeen

In een snelstromend riviertje (I) met een debiet Q_1 en een gemiddelde snelheid u wordt op $t = 0$ instantaan een hoeveelheid stof M geloosd. Het lozingspunt ligt op een afstand x_1 bovenstrooms van het punt, waar het riviertje I uitmondt in een ander, eveneens snelstromend riviertje (II).

Het debiet benedenstrooms van het samenvloeiingspunt van de riviertjes I en II is Q_2 , terwijl de watersnelheid aldaar even groot is als in riviertje I.



Ter plaatse van het lozingspunt in riviertje I wordt de geloosde stof direct (instantaan) homogeen over de dwarsdoorsnede verdeeld, terwijl tevens mag worden aangenomen, dat de geloosde stof bij aankomst in riviertje II, ter plaatse van het samenvloeiingspunt eveneens instantaan over de gehele dwarsdoorsnede van riviertje II "volledig" wordt gemengd.

De waterdiepte en de Chézy-waarde van riviertje I zijn resp. a en C .

Numerieke gegevens

$a = 0,5 \text{ m}$, $C = 30 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$, $u = 1 \text{ m/s}$, $M = 10 \text{ liter}$

$Q = 2,5 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 6 \text{ m}^3/\text{s}$, $x_1 = 3 \text{ km}$

*antwoorden
voor m3*

Gevraagd

1. Bepaal het moment t_1 , waarop de concentratie in riviertje I nabij de uitmonding in riviertje II maximaal is, alsmede de grootte van de concentratie aldaar op dit moment.

(Antwoord: $t_1 = 50 \text{ min}$, $\phi_{\text{max}} = 8,9 \cdot 10^{-6}$).

2. Als de longitudinale dispersiecoëfficiënt in beide riviertjes I en II gelijk is, bepaal dan het moment t_2 , waarop de maximale concentratie op 3 km stroomafwaarts van het samenvloeiingspunt van de riviertjes I en II wordt bereikt ten opzichte van het moment van lozen. Hoe groot is deze maximale concentratie?

(Antwoord: $t_2 = 100 \text{ min}$, $\phi_{\text{max}} = 2,6 \cdot 10^{-6}$).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.3.1.1.)

2.3.1.2. Lozing in een brede rivier

Via een pijpleiding wordt met ruime tussenpozen in een zeer brede rivier (breedte B_0) kortstondig een bepaalde stof geloosd op een afstand B vanaf de rechter oever van deze rivier. De gemiddelde waterdiepte van de rivier is a .

Er wordt geëist, dat de concentratie langs de rechter oever van de rivier nergens een bepaalde waarde ϕ_{max} mag overschrijden.

Om op grond van deze eis een eerste schatting te kunnen maken van de vereiste afstand B van het lozingspunt tot de rechter oever, wordt uitgegaan van een stationaire stroming in de rivier en één instantane lozing als benadering van de kortstondige lozing, die de grootte M heeft. (Er mag worden aangenomen, dat op het moment van lozing de stof direct homogeen over de diepte wordt verdeeld.)

Bovendien wordt verondersteld, dat de afstand B nog zodanig klein is ten opzichte van de breedte B_0 van de rivier, dat de linker oever géén invloed heeft op de concentratieverdeling.

Vanwege de grote breedte van de rivier is de invloed van de oevers op de snelheidsverdeling in de rivier te verwaarlozen, zodat voor de longitudinale dispersiecoëfficiënt uitgegaan kan worden van

$$K_1 = 6 a u_*.$$

Numerieke gegevens

$$M = 100 \text{ liter} , \quad \phi_{\max} = 4 \cdot 10^{-7} , \quad a = 3 \text{ m} , \quad B_0 = 500 \text{ m}$$

Gevraagd

Bereken bij bovenstaande uitgangspunten de vereiste afstand van het lozingspunt tot de rechter oever.

(Antwoord: 79 m; zie voor de uitwerking Par. 3.3.1.2.).

2.3.1.3. Continue lozing aan een oever van een rivier (I)

Algemeen

Aan de rechter oever van een rivier met een afvoer Q , en de daarbij behorende gemiddelde diepte a , breedte B en Chézy-coëfficiënt C wordt continu een hoeveelheid niet-afbreekbare opgeloste stof M per tijds-eenheid geloosd. Aangenomen mag worden, dat ter plaatse van het lozingspunt de geloosde stof direct (instantaan) homogeen over de diepte wordt verdeeld. Ter controle van deze lozing wordt benedenstrooms van het lozingspunt aan de linker oever een meetpunt ingericht.

Geëist wordt, dat bij de bovengenoemde afvoer Q de monsters, genomen in het meetpunt representatief zijn. Dat wil zeggen dat de gevonden concentratie na analyse van het monster min of meer gelijk is aan de concentratie gemiddeld over de dwarsdoorsnede van de rivier ter plaatse van het meetpunt. Per definitie wordt gesteld, dat het monster representatief is, indien de gevonden concentratie in het meetpunt aan de linker oever circa 95% is van de concentratie gemiddeld over de dwarsdoorsnede.

Numerieke gegevens

$$Q = 200 \text{ m}^3/\text{s} , \quad a = 4 \text{ m} , \quad B = 100 \text{ m} , \quad C = 50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

Gevraagd

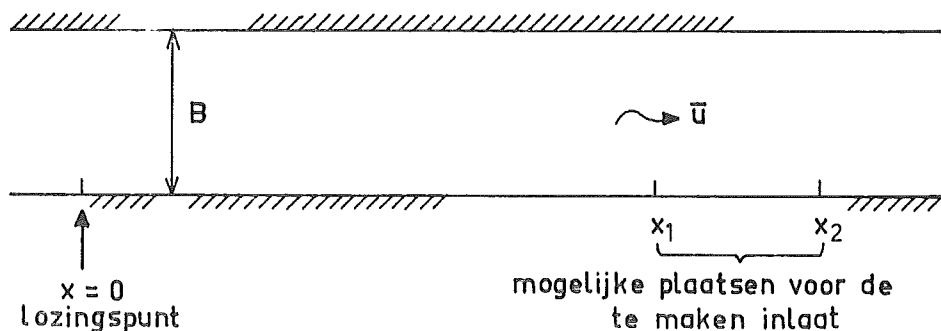
Ga na of een meetpunt gelegen op 20 km benedenstrooms van het lozingspunt reeds aan bovengenoemde eis met betrekking tot de representativiteit voldoet, of dat dit eerst is bij een afstand van 25 km. (Antwoord: het meetpunt op 25 km; zie voor de uitwerking Par. 3.3.1.3.).

2.3.1.4. Bepaling plaats van een inlaatpunt

leest in gegeven waarden K voor K_1

Algemeen

In een willekeurige waterloop met een gemiddelde waterdiepte a , een constante breedte B , een gemiddelde stroomsnelheid \bar{u} en een Chézy-waarde C wordt in $x = 0$ aan de rechter oever zo nu en dan instantaan een hoeveelheid opgeloste stof geloosd, groot M . (Ter plaatse van het lozingspunt wordt de stof direct homogeen over de vertikaal verdeeld.) Benedenstrooms van dit lozingspunt moet, eveneens aan de rechter oever, een inlaat komen ten behoeve van de watervoorziening van een tuinbouwgebied. De inlaat kan op twee plaatsen worden gemaakt: op een afstand x_1 of op een afstand x_2 vanaf bovengenoemd lozingspunt. Geëist wordt dat ter plaatse van de te maken inlaat de optredende concentratie van bovengenoemde instantaan geloosde stof de waarde ϕ_c niet overschrijdt.



Numerieke gegevens

$$a = 3 \text{ m} , \quad B = 50 \text{ m} , \quad \bar{u} = 0,4 \text{ m/s} , \quad C = 32 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s} ,$$

$$M = 1 \text{ m}^3 , \quad \phi_c = 1,1 \cdot 10^{-6} , \quad x_1 = 25 \text{ km} , \quad x_2 = 40 \text{ km}$$

Gevraagd

Indien uitgegaan wordt van één instantane lozing, ga dan na of:

- (i) beide plaatsen (x_1 en x_2) voor de te maken inlaat geschikt zijn, of
- (ii) één van beide en welke dan, of
- (iii) geen van beide.

Licht uw antwoord toe aan de hand van concentratie berekeningen.

(Antwoord: x_1 voldoet niet, x_2 voldoet; zie voor de uitwerking Par. 3.3.1.4.).

2.3.1.5. Gelijktijdige instantane lozing op beide oevers van een waterloop

Algemeen

In een willekeurige waterloop met een gemiddelde waterdiepte a , breedte B en een Chézy-coëfficiënt C , wordt in $x = 0$ gelijktijdig aan de rechter- en de linkeroever instantaan een hoeveelheid opgeloste stof geloosd. De hoeveelheid geloosde stof is in beide lozingspunten even groot en gelijk M . Ter plaatse van de lozingspunten wordt de stof direct homogeen over de vertikaal verdeeld.

De gemiddelde stroomsnelheid in het kanaal bedraagt \bar{u} .

Numerieke gegevens

$$M = 50 \text{ liter} , \quad B = 100 \text{ m} , \quad a = 5 \text{ m} , \quad \bar{u} = 1 \text{ m/s} ,$$

$$C = 45 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$$

*600 combi of 2000
toespraak in 1970 h.*

Gevraagd

Waar en wanneer is ter plaatse van de as (= het midden) van de waterloop de concentratie maximaal? Bereken de waarde van deze maximale concentratie.

(Antwoord: ~ 3 km ; ~ 50 minuten ; $4,8 \cdot 10^{-8}$; zie voor de uitwerking Par. 3.3.1.5.).

2.3.1.6. Lozing vanaf een schip

Algemeen

In een brede waterloop met een gemiddelde waterdiepte a , breedte B , een gemiddelde stroomsnelheid \bar{u} en een Chézy-waarde C , wordt per ongeluk vanaf een schip in het midden van de waterloop instantaan een hoeveelheid opgeloste stof geloosd, groot M . Ter plaatse van het punt van lozing wordt de stof direct homogeen over de vertikaal verdeeld. Op het moment van lozing bevindt een meetboot zich op een afstand x_1 benedenstrooms van het punt van lozing. Deze meetboot vaart in het midden van de waterloop met een bij benadering constante snelheid u_v ten opzichte van de vaste oever in stroomopwaartse richting. Tijdens het varen worden continu de concentraties van een aantal stoffen gemeten, waaronder die van de bovengenoemde per ongeluk geloosde stof.

Numerieke gegevens

$$a = 3 \text{ m} , \quad B = 100 \text{ m} , \quad C = 40 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s} , \quad M = 0,1 \text{ m}^3 ,$$

$$\bar{u} = 1 \text{ m/s} , \quad u_v = 0,25 \text{ m/s} , \quad x_1 = 8 \text{ km}$$

Gevraagd

1. Waar en wanneer is de vanaf de meetboot gemeten concentratie van de geloosde stof maximaal? (Antwoord: 6400 m; 6400 s).
2. Hoe groot is deze maximale waarde? (Antwoord: $5,7 \cdot 10^{-8}$).

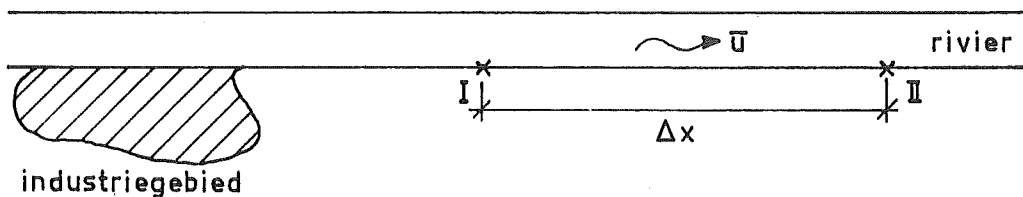
(Zie voor de uitwerking Par. 3.3.1.6.)

2.3.1.7. Localisering van een lozingspunt

Algemeen

Langs een min of meer rechte rivier met een breedte B , een gemiddelde waterdiepte a en een gemiddelde stroomsnelheid \bar{u} bevindt zich op de rechter oever een industriegebied.

Benedenstrooms van dit gebied zijn op de rechter oever twee meetstations I en II geïnstalleerd, waar regelmatig de concentratie van een aantal stoffen in het rivierwater wordt bepaald. Hiertoe worden watermonsters aan de rechter oever ter plaatse van de respectieve meetstations genomen. Meetstation II bevindt zich op een afstand Δx benedenstrooms van meetstation I.



Op zekere dag wordt in beide stations het concentratieverloop van een bepaalde opgeloste stof P in de tijd gemeten. De gemeten maximale concentraties van deze stof P zijn resp. $(\phi_1)_{\max}$ in station I en $(\phi_2)_{\max}$ in station II.

Van de rivier is verder de Chézy-coëfficiënt C gegeven.

Numerieke gegevens

$$\Delta x = 4,5 \text{ km} \quad , \quad B = 100 \text{ m} \quad , \quad a = 3 \text{ m} \quad , \quad \bar{u} = 1 \text{ m/s} \quad ,$$

$$C = 45 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s} \quad , \quad (\phi_1)_{\max} = 4 \cdot 10^{-7} \quad , \quad (\phi_2)_{\max} = 1,6 \cdot 10^{-7}$$

Gevraagd

1. Bepaal de plaats van het lozingspunt van de gemeten opgeloste stof P ten opzichte van het meetstation A indien mag worden aangenomen, dat:

(i) de opgeloste stof P in de rivier is gekomen door een instantane lozing van een zekere hoeveelheid M van deze opgeloste stof ter hoogte van het industriegebied op de rechter oever, en

(ii) de geloosde stof P ter plaatse van het lozingspunt direct homogeen over de vertikaal werd verdeeld. (Antwoord: 3 km).

2. Hoe groot is de geloosde hoeveelheid M van de opgeloste stof P?

(Antwoord: 183,6 liter).

3. Hoe groot zou de maximale concentratie van de stof P op de linker oever ter hoogte van het meetstation II zijn geweest?

(Antwoord: $2,6 \cdot 10^{-8}$).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.3.1.7.)

2.3.1.8. Bepaling periode, dat een inlaatwerk dichtgezet moet worden

Een snelstromend riviertje voert een debiet Q. De bij dit debiet behorende gemiddelde waterdiepte, breedte en Chézy-coëfficiënt zijn resp. a, B en C. Op een gegeven moment wordt in dit riviertje in een punt $x = 0$ instantaan een hoeveelheid opgeloste stof, groot M geloosd. Aangenomen mag worden, dat ter plaatse van het lozingspunt de geloosde stof direct homogeen over de dwarsdoorsnede wordt verdeeld. Op een afstand x_1 benedenstrooms van het lozingspunt bevindt zich een inlaatwerk, waar water uit het riviertje wordt onttrokken voor de drinkwatervoorziening. Dit inlaatwerk moet dichtgezet worden, indien de concentratie van bovengenoemde geloosde stof ter plaatse van het inlaatwerk een kritieke waarde ϕ_c overschrijdt.

Numerieke gegevens

$$Q = 5 \text{ m}^3/\text{s} \quad , \quad a = 0,5 \text{ m} \quad , \quad B = 5 \text{ m} \quad , \quad C = 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s} \quad ,$$

$$M = 1 \text{ m}^3 \quad , \quad x_1 = 5 \text{ km} \quad , \quad \phi_c = 1,5 \cdot 10^{-4}$$

Gevraagd

Bepaal het moment t_1 afgerond op 100 s, waarop het inlaatwerk moet worden dichtgezet en vervolgens het moment t_2 , eveneens afgerond op 100 s, waarop weer water mag worden ingelaten (t_1 en t_2 gemeten ten opzichte van het moment van lozen).

(Antwoord: $t_1 = 2300$ s en $t_2 = 2800$ s).

2.3.1.9. Continue lozing aan een oever van een rivier (II)

Algemeen

Aan de oever van een rivier met een afvoer Q en de daarbij behorende gemiddelde diepte a , breedte B en Chézy-coëfficiënt C wordt continu een hoeveelheid niet afbreekbare opgeloste stof M per tijdseenheid geloosd. Aangenomen mag worden dat ter plaatse van het lozingspunt de geloosde stof direct (instantaan) homogeen over de diepte wordt verdeeld. Ter controle van deze lozing wordt benedenstrooms van het lozingspunt in het midden van de rivier vanaf een brug een monster genomen. Geëist wordt, dat bij de bovengenoemde afvoer de monsters representatief zijn. Dat wil zeggen, dat de gevonden concentratie na analyse van het monster min of meer gelijk is aan de concentratie gemiddeld over de dwarsdoorsnede van de rivier ter plaatse van het bemonsteringspunt. Per definitie wordt gesteld, dat het monster representatief is, indien de gevonden concentratie tenminste 95% is van de concentratie gemiddeld over de dwarsdoorsnede.

Numerieke gegevens

$$Q = 200 \text{ m}^3/\text{s} \quad , \quad a = 4 \text{ m} \quad , \quad B = 100 \text{ m} \quad , \quad C = 50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

Gevraagd

Benedenstrooms van het lozingspunt bevindt zich een brug op 5 km, op 10 km en op 20 km afstand vanaf het lozingspunt. Ga na welke de dichtst bijzijnde brug is, waar in het midden van de rivier een representatief monster wordt gevonden. (Antwoord: brug op 10 km).

11/16

2.3.1.10 Instantane lozing aan een oever van een rivier

Algemeen

In een rivier met een gemiddelde waterdiepte a , een gemiddelde breedte B en een Chézy-waarde C , wordt aan de rechter oever in $x = 0$ instantaan een hoeveelheid opgeloste stof geloosd, groot M . Ter plaatse van het lozingspunt wordt de stof direct homogeen over de vertikaal verdeeld. De gemiddelde stroomsnelheid in de rivier bedraagt \bar{u} .

Numerieke gegevens

$M = 50$ liter , $B = 100$ m , $a = 5$ m , $\bar{u} = 1,5$ m/s ,

$C = 40$ m^{1/2}/s

Gevraagd

Waar en wanneer is ter plaatse van de linker oever van de rivier de concentratie maximaal? Bereken de waarde van deze maximale concentratie. (Antwoord: $x = 10,64$ km , $t = 7095$ s , $\phi_{\max} = 1,35 \cdot 10^{-8}$).

2.3.2. Transport van bodemmateriaal

2.3.2.1. Sedimentbezwaar bij wateronttrekking

Algemeen

Aan een brede, alluviale rivier met stationaire, uniforme stroming wordt water onttrokken op het niveau $z = \frac{1}{4} a$ boven de bodem. Gegeven zijn de waterdiepte a , de watertemperatuur θ , het bodemverhang i_b ; van het sediment in het water is bekend de dichtheid ρ_s , de zeefdiameter D_s , de korrelvormfaktor γ en de volumeconcentratie ϕ_1 op het niveau $z = \frac{1}{2} a$.

Numerieke gegevens

$$a = 3,67 \text{ m} , \quad \theta = 20^\circ\text{C} , \quad i_b = 4 \cdot 10^{-4} ,$$

$$\phi_1 = \phi\left(\frac{1}{2} a\right) = 5,65 \cdot 10^{-5} , \quad D_s = 0,2 \text{ mm} , \quad \gamma = 0,7$$

Gevraagd

1. Maak een schatting van de sedimentconcentratie ϕ in het onttrokken water. (Antwoord: $1,0 \cdot 10^{-4}$).
2. Hoe groot is de sedimentflux F_1 in langsricting op het niveau $z = \frac{1}{4} a$, bij ongestoorde stroom? Voor de wandruwheid kan men aannemen $k = 0,3 \text{ mm}$. (Antwoord: $1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$).

(Zie voor de uitwerking Par. 3.3.2.1.)

2.3.2.2. Gemiddelde concentratie

Algemeen

In een bepaalde vertikaal van een rivier, welke in evenwicht verkeert, is op n punten de sedimentconcentratie C_i gemeten ($i = 1 \dots n$).

Numerieke gegevens

Gevraagd

1. Leid een uitdrukking af voor de over de diepte gemiddelde concentratie $\bar{\phi}$.
2. Geef een uitdrukking voor de relatieve fout in de gemiddelde concentratie ($r_{\bar{\phi}}$); hierbij wordt verondersteld dat de relatieve fout van de afzonderlijke concentratiemetingen (r_{C_i}) gelijk is.

(Zie voor de uitwerking Par. 3.3.2.2.)

Dee vriet van TT

2.3.2.3. Vertikale sedimentflux

Algemeen

In een bepaalde vertikaal van een brede, alluviale rivier met quasi-stationaire stroming is op 3 niveau's z_1 , z_2 en z_3 het sedimentgehalte C_1 , C_2 en C_3 van het water gemeten. Het middelste meetpunt bevindt zich op $z = z_2$ boven de bodem en ligt midden tussen het onderste en het bovenste meetpunt:

$$z_2 = \frac{1}{2} (z_1 + z_3)$$

De lokale waterdiepte a , het bodemverhang i_b en de valsnelheid W van de zandkorrels zijn bekend.

Numerieke gegevens

$$a = 2,35 \text{ m} \quad , \quad i_b = 1,21 \cdot 10^{-4} \quad , \quad W = 9,1 \text{ mm/s} \quad ,$$

$$z_1 = 0,94 \text{ m} \quad , \quad z_2 = 1,18 \text{ m} \quad , \quad z_3 = 1,41 \text{ m} \quad ,$$

$$C_1 = 3,0 \cdot 10^{-5} \quad , \quad C_2 = 2,1 \cdot 10^{-5} \quad , \quad C_3 = 1,0 \cdot 10^{-5}$$

Gevraagd

Geef een schatting van de verticale sedimentflux F_3 op het niveau

$$z = z_2.$$

(Antwoord: $+ 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$).

2.4. Sedimenttransport en alluviale ruwheid

2.4.1. Transport grof bodemmateriaal bij hoogwater in de Waal

Algemeen

Bij een afvoer in de bovenloop van de Waal, die gedurende 1% van het jaar wordt overschreden is de waterdiepte gelijk aan a , de gemiddelde stroomsnelheid gelijk aan u en het waterspiegelverhang gelijk aan i_s . De kinematische viscositeit van het rivierwater is ν . Een zeefanalyse van het bodemmateriaal van de Waal heeft geresulteerd in enkele kentallen voor de korrelgrootte-verdeling, namelijk \bar{D} , D_{35} , D_{50} en D_{90} .

Numerieke gegevens

$$\begin{array}{ll} a = 9,38 \text{ m} , & u = 1,53 \text{ m/s} , \\ i_s = 1,15 \cdot 10^{-4} , & \nu = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \text{ (15}^\circ\text{C)} , \\ \bar{D} = 2,90 \text{ mm} , & D_{35} = 1,30 \text{ mm} , \\ D_{50} = 1,90 \text{ mm} , & D_{90} = 8,45 \text{ mm} \end{array}$$

Gevraagd

Bereken het transport van bodemmateriaal per eenheid van breedte (s) in de bovenloop van de Waal bij de afvoer, die gedurende 1% van het jaar wordt overschreden.

(Antwoord: $1,38 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ en $2,79 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ incl. 40% poriënvolume; zie voor de uitwerking Par. 3.4.1.).

2.4.2. Transport bodemmateriaal (I)

Algemeen

Van een bepaalde stromingstoestand in de benedenloop van een brede rivier is gegeven de waterdiepte a , de afvoer per eenheid van breedte q , het waterspiegelverhang i_s . Tevens is bekend de mediane diameter van het bodemmateriaal D_{50} .

Numerieke gegevens

$$\begin{aligned} a &= 5,0 \text{ m} , & i_s &= 1,0 \cdot 10^{-4} , \\ q &= 5,0 \text{ m/s} , & D_{50} &= 0,4 \text{ mm} \end{aligned}$$

Gevraagd

1. Bereken de hoeveelheid zand per eenheid van breedte, die gedurende een dag door deze rivier wordt getransporteerd.
(Antwoord: $23,6 \text{ m}^2/\text{dag}$).
2. Hoe groot is de Nikuradse-ruwheid van de bodem? (Antwoord: $0,20 \text{ m}$).
(Zie voor de uitwerking Par. 3.4.2.).

2.4.3. Transport bodemmateriaal in de Neder-Rijn

Algemeen

Van de stroming in de Neder-Rijn bij Amerongen, bij de afvoer die gedurende 10% van het jaar overschreven wordt, is gegeven de waterdiepte a , de zandtransporterende breedte B , het waterspiegelverhang i_s en de ruwheidscoëfficiënt van Chézy C .

Tevens is van het bodemmateriaal bekend de gemiddelde korrelafmeting \bar{D} en de 90%-afmeting D_{90} .

Numerieke gegevens

$$\begin{aligned} a &= 4,65 \text{ m} , & B &= 110 \text{ m} , \\ i_s &= 1,27 \cdot 10^{-4} , & C &= 38,2 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s} , \\ \bar{D} &= 1,0 \text{ mm} , & D_{90} &= 2,13 \text{ mm} \end{aligned}$$

Gevraagd

Bereken de hoeveelheid zand, die gedurende een week de beschouwde rivierdoorsnede passeert. (Antwoord: 2130 m^3 per week).

2.4.4. Transport bodemmateriaal (II)

Algemeen

Zie Par. 2.4.2. "Transport bodemmateriaal (I)" met dien verstande, dat nu de afvoer per eenheid van breedte niet bekend is.

Numerieke gegevens

$$a = 5,0 \text{ m} \quad , \quad i_s = 1,0 \cdot 10^{-4} \quad , \quad D_{50} = 0,4 \text{ mm}$$

Gevraagd

Bereken de hoeveelheid zand per eenheid van breedte, die gedurende een dag door de rivier wordt getransporteerd. Indien de uitkomst verschilt van die van Par. 2.4.2., ga dan de oorzaak daarvan na.

2.5. Morfologische voorspellingen

2.5.1. Tempo van aanzanding

Algemeen

Op een bepaald punt in de Neder-Rijn wordt de waterstand door middel van een stuw verhoogd met Δa_o .

Bekend zijn de bodemhelling i_b , de Chézy-coëfficiënt C en de afvoer per eenheid van breedte q. Van het bodemmateriaal is gegeven de gemiddelde zeefdiameter \bar{D} en de 90%-afmeting D_{90} .

Numerieke gegevens

$$\begin{array}{ll} \Delta a_o = 0,50 \text{ m} & i_b = 1,0 \cdot 10^{-4} \\ q = 1,8 \text{ m}^2/\text{s} & C = 45,0 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s} \\ \bar{D} = 1,0 \text{ mm} & D_{90} = 2,13 \text{ mm} \end{array}$$

Gevraagd

Geef een schatting van de aanzanding per dag op het punt, dat 4007 m stroomopwaarts van de stuw is gelegen.

(Antwoord: Meijer-Peter & Müller 21 μm per dag; Engelund & Hansen 50 μm per dag; zie voor de uitwerking Par. 3.5.1.).

2.5.2. Pijpleidingsleuf

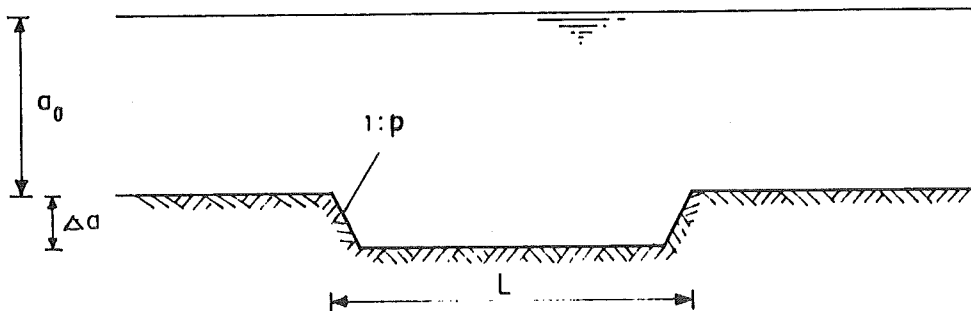
Algemeen

In een brede rivier met grofzandige bodem is een sleuf gebaggerd ten behoeve van een pijpleidingkruising.

Het dwarsprofiel van de sleuf (d.w.z. het bodemprofiel in de lengterichting van de rivier) is trapeziumvormig. Ter plaatse van het horizontale gedeelte van het dwarsprofiel bedraagt de verdieping Δa .

De sleufwanden hebben een helling l (verticaal) op p (horizontaal).

In de langsrichting van de rivier heeft de sleuf een totale afmeting L . De afvoer q is constant en gegeven; bovendien zijn buiten de sleuf de waterdiepte a_0 en het verhang i bekend.



Doorsnede bij begintoeestand

Numerieke gegevens

$$q = 4 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$L = 100 \text{ m}$$

$$\bar{D} = 0,6 \text{ mm}$$

$$a_0 = 5 \text{ m}$$

$$\Delta a = 1,5 \text{ m}$$

$$D_{90} = 1,4 \text{ mm}$$

$$i = 8 \cdot 10^{-5}$$

$$p = 5$$

Gevraagd

1. Bereken het sedimenttransport per eenheid van breedte.
(Antwoord: $1,72 \text{ m}^2/\text{dag}$).
2. Schets de vorm van de sleuf voor $t > 0$.
3. Combineer de (vereenvoudigde) basisvergelijkingen tot één partiële differentiaalvergelijking voor de waterdiepte.
4. Bereken de benedenstroomse helling van de sleuf op het tijdstip één maand na het baggeren.

(Zie voor de uitwerking Par. 3.5.2.).

reel
wel

NIEUW

~~2.5.3.~~ Morfologisch effect van wateronttrekking en -lozing

Algemeen

Ter voorziening in de waterbehoefte van nabijgelegen industrie zal water worden onttrokken aan een alluviale rivier. De onttrekking ΔQ bedraagt 10% van het oorspronkelijk debiet Q .

Benedenstrooms van het onttrekkingspunt wordt het industriewater weer aan de rivier toegevoegd (zonder dat er verliezen zijn opgetreden).

De afstand L tussen het onttrekkingspunt I en het toevoegingspunt II is betrekkelijk kort, namelijk 50 maal de waterdiepte a .

De rivierbreedte B en de coëfficiënt van Chézy C blijven constant in het beschouwde riviertraject. Het bodemverhang i in de situatie zonder wateronttrekking is gegeven.

Het bodemmateriaal is grofkorrelig; van de korrelgrootteverdeling is zowel \bar{D} als D_{90} bekend.

Numerieke gegevens

$$Q = 459 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$B = 85 \text{ m}$$

$$a = 4,0 \text{ m}$$

$$\bar{D} = 1,80 \text{ mm}$$

$$\Delta Q = 45,9 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$L = 200 \text{ m}$$

$$i = 2,25 \cdot 10^{-4}$$

$$D_{90} = 3,75 \text{ mm}$$

Gevraagd

1. Hoe zal op den duur het verloop van de waterdiepte in het beschouwde riviergedeelte zijn?

(Antwoord: tussen I en II een vermindering $\Delta a = 0,40 \text{ m}$).

2. Als vraag 1, maar nu het verloop van de bodemhoogte.

(Antwoord: tussen I en II een toename van de bodemhoogte met circa $0,40 \text{ m}$).

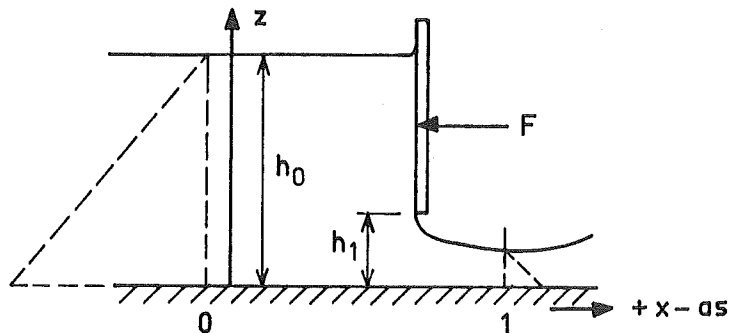
3. Uitwerkingen

3.1. Potentiaalstroming

3.1.1. Stroming door een spleet

Vraag 1

Voor de berekening van de resulterende kracht F op de wand, wordt uitgegaan van de impulsbalans (zie college-handleiding b70): in een vast gebied G instromende impuls per tijdseenheid + Σ krachten = 0 ; Eulerse aanpak.



Het vaste gebied G wordt tussen de doorsneden 0 en 1 gekozen.

De afstand tussen deze doorsneden is zodanig kort, dat de wrijving mag worden verwaarloosd.

De doorsneden 0 en 1 worden verder zodanig gekozen, dat de stroomlijnen recht zijn t.p.v. deze doorsneden en hier dus een hydrostatische drukverdeling geldt. Gegeven de richting van de positieve x -as krijgt de resulterende kracht F , die de wand op het water uitoefent een min teken (pos. x -richting is stroomafwaarts gericht).

Als in dsn. 0 de stroomsnelheid u_0 bedraagt en in dsn. 1 de snelheid u_1 , dan geldt volgens de impulsbalans:

$$\left\{ \frac{1}{2} \rho g h_0^2 - \frac{1}{2} \rho g (\mu h_1)^2 - F \right\} dt = \rho \mu h_1 u_1^2 dt - \rho h_0 u_0^2 dt \quad (1)$$

of wel

$$\frac{1}{2} \rho g h_0^2 - \frac{1}{2} \rho g \mu^2 h_1^2 - F = \rho \mu h_1 u_1^2 - \rho h_0 u_0^2 \quad (2)$$

Hieruit moeten voor het oplossen van F de snelheden van u_0 en u_1 worden geëlimineerd. Omdat reeds gesteld was:

- in dsn. 0 en 1 heerst een hydrostatische druk
- de wrijving mag worden verwaarloosd

kan voor de bewegingsvergelijking ook Bernoulli langs een stroomlijn worden toegepast van dsn. 0 naar dsn. 1:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \quad (3)$$

Indien in de resp. doorsneden een punt aan het oppervlak wordt beschouwd en dat aangenomen mag worden, dat de snelheidshoogte in dsn. 0 verwaarloosbaar is t.o.v. de drukhoogte in deze doorsnede, dan wordt Vgl. (3):

$$h_0 = \mu h_1 + \frac{u_1^2}{2g}$$

of

$$u_1 = \sqrt{2g(h_0 - \mu h_1)} \quad (4)$$

Verder geldt de continuïteitsvergelijking:

$$u_0 h_0 = u_1 \cdot \mu h_1 \quad (5)$$

Door u_0 uit Vgl. (5) te substitueren in Vgl. (2), wordt in Vgl. (2) u_0 geëlimineerd:

$$F = \frac{1}{2} \rho g h_0^2 - \frac{1}{2} \rho g \mu^2 h_1^2 - \rho \mu h_1 u_1^2 + \rho h_0 \frac{\mu^2 h_1^2 u_1^2}{h_0} \quad (6)$$

Door Vgl. (4) in Vgl. (6) te substitueren, wordt na enige herleiding voor de resulterende kracht F gevonden:

$$F = \frac{1}{2} \rho g \left\{ h_0^2 - \mu^2 h_1^2 - 4(\mu h_1 - \mu^2 \frac{h_1^2}{h_0})(h_0 - \mu h_1) \right\} \quad (7)$$

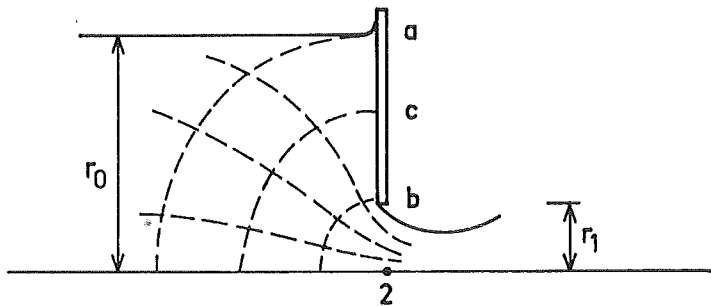
Met de numerieke gegevens geeft dit:

$$F = 108,7 \text{ kN} \quad (\text{antwoord})$$

Vraag 2

Voor de beantwoording van deze vraag, wordt de stroming door de spleet als putstroming benaderd. Omdat de weerstand nabij de spleet verwaarloosbaar gesteld mag worden, wordt de putstroming als tweedimensionale potentiaalstroming beschouwd.

Omdat bij een putstroming veelal gewerkt wordt in poolcoördinaten (r, θ) wordt in het navolgende voor $h_0 \rightarrow r_0$ geschreven en voor $h_1 \rightarrow r_1$.



Vanwege de continuïteit geldt dan, dat de afvoer over de resp. cirkelkwarten constant is.

De cirkel door punt b (onderkant wand) heeft de straal r_1 , die door punt a (oppervlak) een straal r_0 , terwijl die door punt c de straal r . De snelheid op afstand r_0 vanaf punt 2 loodrecht onder de wand wordt u_0 gesteld; op afstand r_1 wordt u_1 gesteld en op afstand r wordt u gesteld. Er geldt dan:

$$u_1 \cdot r_1 = u_0 \cdot r_0 = u \cdot r \quad (8)$$

Bij een potentiaalstroming geldt voor de bewegingsvergelijking Bernoulli en wel in het hele veld.

Beschouw nu de punten a en c òf b en c. Er geldt:

$$r_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_0^2}{2g} = r + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \quad (9)$$

òf

$$r_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = r + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \quad (10)$$

Ter plaatse van a en b geldt de atmosferische druk, dus $p_0 = p_1 = 0$. Door substitutie van Vgl. (8) in Vgl. (10) wordt met $p_1 = 0$ de druk p op een afstand r vanaf de bodem (punt 2) gevonden:

$$p = \rho g(r_1 - r) + \frac{1}{2} \rho u_1^2 \left(1 - \frac{r_1}{r}\right)^2 \quad (11)$$

Voor de bepaling van u_1 zijn er twee vergelijkingen beschikbaar:

- Pas Bernoulli toe van a naar b.
- Pas de continuïteitswet toe van a naar b (zie Vgl. (8)).

Bernoulli:

$$r_0 + \frac{u_0^2}{2g} = r_1 + \frac{u_1^2}{2g} \quad (12)$$

Door eliminatie van u_0 uit Vgl. (12) en Vgl. (8) ($u_0 r_0 = u_1 r_1$) wordt na enige herleiding een uitdrukking voor u_1 gevonden:

$$u_1^2 = 2g \frac{r_0^2}{r_1 + r_0} \quad (13)$$

Substitutie van Vgl. (13) in Vgl. (11) geeft:

$$p = \rho g \left\{ (r_1 - r) + \left(\frac{r_0}{r_1 + r_0} \right) \left(1 - \frac{r_1}{r} \right)^2 \right\} \quad (\text{antwoord}) \quad (14)$$

Voor het schetsen van het verloop van de druk:

$$r = r_1 \rightarrow p_1 = 0$$

$$r = r_0 \rightarrow p_0 = 0$$

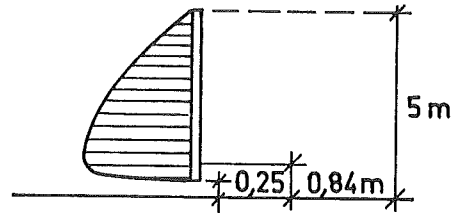
Er moet dus een maximum voor p zijn tussen $r = r_1$ en $r = r_0$.
Daartoe wordt Vgl. (14) naar r gedifferentieerd:

$$\frac{dp}{dr} = \left\{ -1 - \frac{r_0^2}{r_1 + r_0} \cdot r_1^2 (-2r^{-3}) \right\} = - \left\{ 1 - \frac{2r_0^2 r_1^2}{r_1 + r_0} \cdot \frac{1}{r^3} \right\} = 0$$

Dus het maximum bevindt zich op:

$$r = \sqrt[3]{\frac{2r_0 r_1^2}{r_1 + r_0}} = 0,84 \text{ m}$$

vanaf de bodem.



De resulterende kracht F wordt nu als volgt bepaald:

$$F = \int_{r_1}^{r_0} p dr \quad (15)$$

Met invulling van Vgl. (14) geeft de integratie:

$$\begin{aligned} F &= \rho g \left[r_1 r - \frac{1}{2} r^2 + \left(\frac{r_0^2}{r_1 + r_0} \right) r - \left(\frac{r_0^2 r_1^2}{r_1 + r_0} \right) \left(-\frac{1}{r} \right) \right]_{r_1}^{r_0} \\ &= \rho g \left\{ r_1 r_0 - \frac{1}{2} r_0^2 + \frac{r_0^3}{r_1 + r_0} + \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1 + r_0} - r_1^2 + \frac{1}{2} r_1^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_1 r_0^2}{r_1 + r_0} - \frac{r_0^2 r_1}{r_1 + r_0} \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

Vereenvoudiging van Vgl. (16) geeft:

$$F = \rho g (r_0 - r_1)^2 \left\{ \frac{r_0}{r_0 + r_1} - \frac{1}{2} \right\} \quad (17)$$

Met de numerieke gegevens:

$$r_0 = h_0 = 5 \text{ m}$$

$$r_1 = h_1 = 0,25 \text{ m}$$

wordt dan voor de kracht gevonden $F = 100,1 \text{ kN}$. (antwoord)

Vraag 3

De resulterende kracht F_s op de wand in het geval zonder stroming bedraagt (hydrostatische drukverdeling):

$$F_s = \frac{1}{2} \rho g (h_0 - h_1)^2 \quad (18)$$

Met Vgl. (7) wordt dan voor de aanpak volgens vraag 1 gevonden voor F/F_s na enige herleiding:

$$\frac{F}{F_s} = \frac{1 - \mu^2 \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2 - 4\mu \frac{h_1}{h_0} \left(1 - \mu \frac{h_1}{h_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{h_1}{h_0}\right)^2} \quad (19)$$

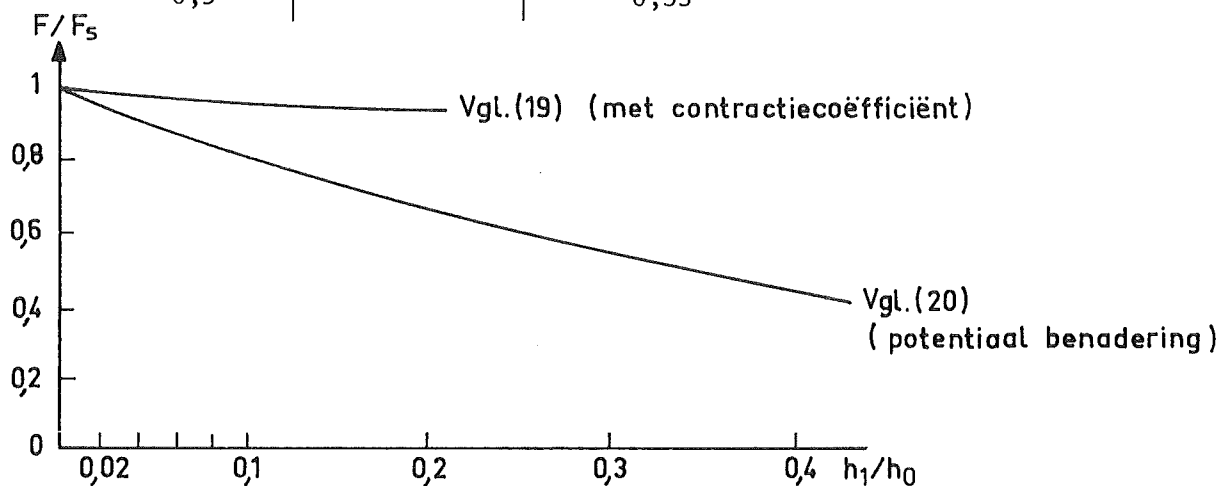
De verhouding F/F_s volgens de aanpak van vraag 2 wordt:

$$\frac{F}{F_s} = \frac{2}{1 + \frac{h_1}{h_0}} - 1 \quad (20)$$

Als $\frac{h_1}{h_0} \ll 1$ ofwel naar 0 nadert, geven de Vgl. (19) en (20) hetzelfde antwoord: $F/F_s \rightarrow 1$.

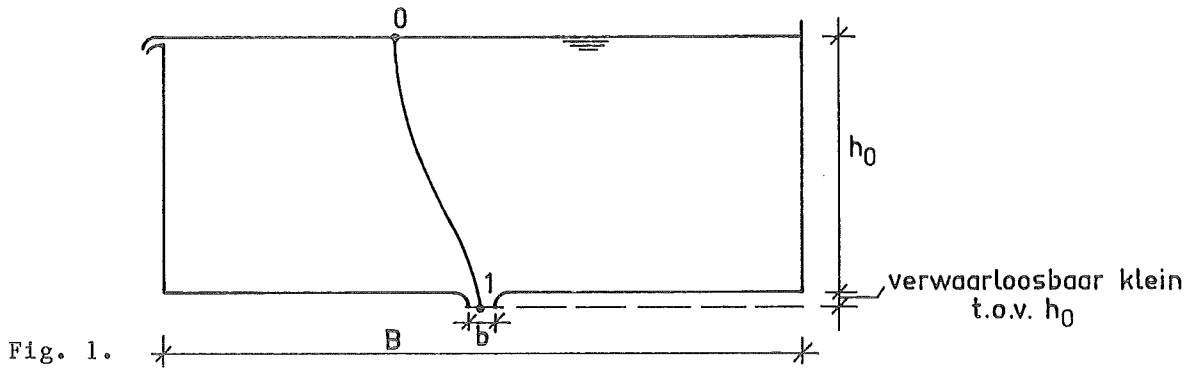
Grafische presentatie

h_1/h_0	Vgl. (19) F/F_s	Vgl. (20) F/F_s
0,02	0,992	0,96
0,04	0,985	0,92
0,06	0,98	0,89
0,08	0,97	0,85
0,1	0,968	0,82
0,2	0,96	0,67
0,3		0,54
0,5		0,33



Uit het bovenstaande blijkt dat slechts voor zeer kleine waarden van h_1/h_0 de kracht F volgens beide benaderingen dezelfde orde van grootte heeft, maar dat al vrij snel de benadering, dat de stroming als een potentiaalstroming wordt aangemerkt een duidelijk lagere kracht geeft (bij $h_1/h_0 = 0,06 \rightarrow 10\%$).

3.1.2. Drukverdeling op de bodem van een vat



Het stroombeeld is als volgt:

Nabij de spleet treedt versnelling op. Op enige afstand van de spleet is de stroomsnelheid t.o.v. die in de spleet klein. De wrijving kan dus verwaarloosd worden. De stroming is stationair. De kopse wanden van het vat hebben geen invloed op de stroming.

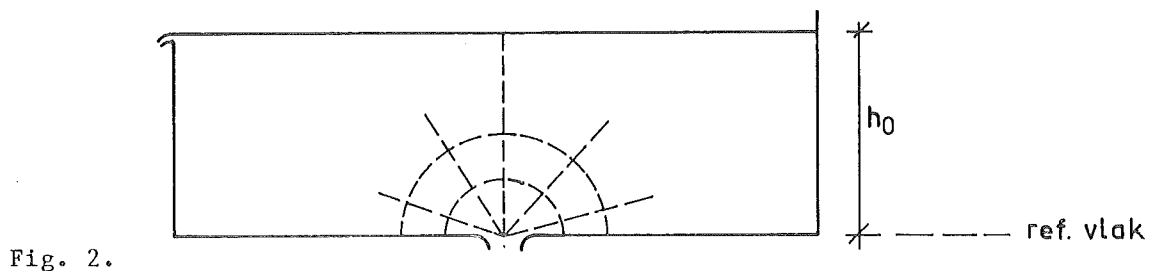
Op grond van het bovenstaande kan de stroming als potentiaalstroming worden aangemerkt (2-dimensionaal). In elk punt geldt dan Bernoulli. De stroming nabij de spleet wordt als put-stroming benaderd. (Mag indien $b \ll B$). De equipotentiaallijnen zijn dan concentrische cirkels met het middelpunt in het hart van de spleet gelegen. De straal van de concentrische cirkels wordt met r aangeduid. Vanwege de continuïteit geldt, dat het debiet over de lengte van de equipotentiaallijn constant is:

$$\pi r \cdot u = q \tag{1}$$

waarin:

u = de stroomsnelheid op een afstand r gericht naar het middelpunt van de cirkel,

q = het debiet per eenheid van lengte (loodrecht vlak van tekening).



Verder geldt in het hele veld Bernoulli dus:

$$h_0 = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \quad (2)$$

Langs de bodem van het vat geldt $z = 0$.

Vergelijking (2) wordt dus:

$$p(r) = \rho g \left(h_0 - \frac{u^2}{2g} \right) \quad (3)$$

Substitutie van Vgl. (1) in Vgl. (3) geeft:

$$p(r) = \rho g \left\{ h_0 - \frac{1}{2g} \frac{q^2}{\pi^2 r^2} \right\} \quad (4)$$

Verder geldt ook Bernoulli langs een stroomlijn van een punt aan het wateroppervlak (punt 0, zie Fig. 1.) naar een punt bij de uitstroming (punt 1, zie Fig. 1.):

$$\frac{p_0}{\rho g} + h_0 + \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \quad (5)$$

(w is de snelheidscomponent in z -richting).

$$p_0 = p_1 = 0$$

$$\frac{w_0^2}{2g} \ll h_0 \quad (\text{nog te controleren})$$

dus

$$w_1^2 = 2gh_0 \rightarrow w_1 = \sqrt{2gh_0} \rightarrow q = b \sqrt{2gh_0} \quad (6)$$

Invullen in Vgl. (4) geeft:

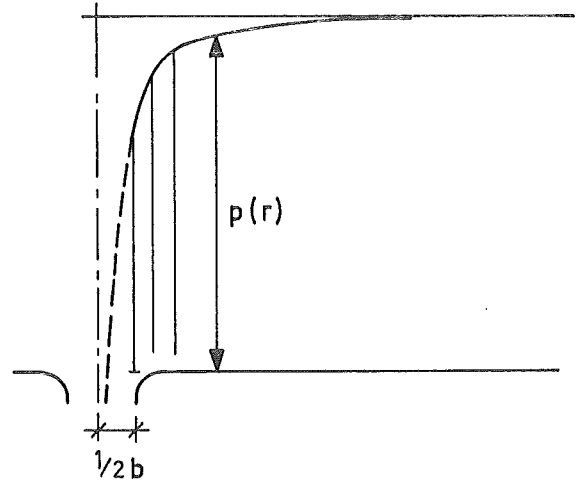
$$p(r) = \rho g \left(h_0 - \frac{b^2}{\pi^2 r^2} h_0 \right) = \rho g h_0 \left(1 - \frac{b^2}{\pi^2 r^2} \right) \quad (\text{antwoord}) \quad (7)$$

Voor grote waarden van r wordt $p(r) = \rho g h_0$ hetgeen overeenkomt met de hydrostatische druk. Gevraagd is de druk op de bodem, dus:

$$r \geq \frac{1}{2} b$$

Eén en ander grafisch weergegeven:

r	$p(r)/\rho g h_0$
$\frac{1}{2} b = 0,025 \text{ m}$	0,59
0,05	0,90
0,10	0,97
0,50	0,999
1,00	1,000



(antwoord)

Voor $r \rightarrow 0$

$$p(r) \rightarrow -\infty$$

Controle:

$$w_0 \cdot B = w_1 \cdot b \quad (\text{continuïteit})$$

$$w_0 = \frac{b}{B} w_1$$

$$\frac{w_0^2}{2g} = \frac{b^2}{B^2} \frac{w_1^2}{2g} = \frac{b^2}{B^2} \frac{2gh_0}{2g} = \frac{b^2}{B^2} h_0$$

$$\frac{b^2}{B^2} = \frac{0,05}{3} = 2,7 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

dus aanname was juist.

3.1.3. Stroming langs twee wanden, die een hoek van 90° met elkaar maken

Vraag 1

De vergelijking $\psi = \text{constant}$ stelt een stroomlijn voor. Er geldt in dit geval dus $xy = \text{constant}$.

Dit stelt voor een stelsel van hyperbolen, waarbij de x-as en de y-as de asymptoten zijn.

Als het eerste en het tweede kwadrant worden beschouwd, dan geven de lijnen $\psi = \text{constant}$ de stroomlijnen voor de aanstroming van een vlakke plaat.

Beschouwen we het eerste of het tweede kwadrant, dan stelt de

figuur de stroming langs een inwendige hoek voor.

Met behulp van de stroomfunctie ψ kan de stroomrichting worden bepaald:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -u = \alpha x \quad (1)$$

In het 1^e kwadrant met $x > 0$ en $\alpha > 0$ is dus de x-component van de snelheid (u) dus negatief, terwijl de y-component (v) positief is:

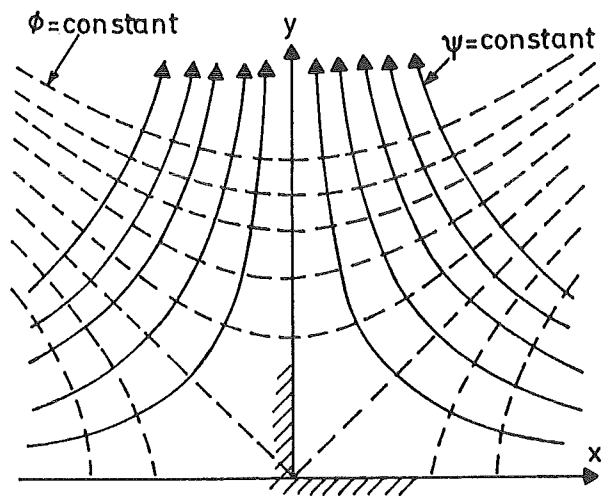
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha y = v \quad (2)$$

Vraag 2

De stroming is rotatievrij, indien geldt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Met de vergelijkingen (1) en (2) blijkt inderdaad dat aan de voorwaarde volgens Vgl. (3) wordt voldaan.



Vraag 3

Omdat de stroming rotatievrij is, is er een snelheidspotentiaal ϕ .
Hiervoor geldt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -u \quad \text{en} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -v \quad (4)$$

Voor dit geval geldt voor de potentiaal:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \alpha x \quad (5)$$

dus

$$\phi = \frac{1}{2} \alpha x^2 + f_1(y) \quad (6)$$

Eveneens geldt hier:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\alpha y \quad (7)$$

of

$$\phi = -\frac{1}{2} \alpha y^2 + f_2(x) \quad (8)$$

Aan de Vgln. (6) en (8) wordt voldaan als:

$$\phi = \frac{1}{2} \alpha \{x^2 - y^2\} + \text{const.} \quad (9)$$

De lijnen $\phi = \text{const.}$ (equipotentiaallijnen) zijn hyperbolen met als asymptoten $y = \pm x$ (zie bijgaande figuur).

De functie, die de equipotentiaallijnen weergeeft, luidt dus:

$$x^2 - y^2 = \text{constant} \quad (\text{antwoord}) \quad (10)$$

Vraag 4

Voor de bestudering van het drukveld (stroming langs een rechte inwendige hoek; 1^e kwadrant) wordt de Wet van Bernoulli beschouwd:

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{|\vec{u}|^2}{2g} = H = \text{constant in het veld} \quad (11)$$

Voor de beschouwde stroming in het x-y-vlak is de plaatshoogte (z) constant. Hier geldt dus:

$$p + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 = \text{constant} \quad (12)$$

Verder geldt hier:

$$|\vec{u}|^2 = u^2 + v^2 = \alpha^2 \{x^2 + y^2\} \quad (13)$$

In de oorsprong geldt $u(0,0) = v(0,0) = 0$. Voor de constante in Vgl. (12) kan dus de druk in de oorsprong $p(0,0) = p_0$ worden gekozen.

Er geldt dus:

$$p(x,y) = p_0 - \frac{1}{2} \rho \alpha^2 \{x^2 + y^2\} \quad (14)$$

De lijnen van gelijke druk zijn dus concentrische cirkels rond de oorsprong met een straal $r = \sqrt{2\Delta p / \rho \alpha^2}$ als $\Delta p = p_0 - p(x,y)$.

Opmerkingen:

- (i) Het stroombeeld kan een kwartslag worden gedraaid door te beschouwen:

$$\psi = \alpha xz \quad (15)$$

Volkomen analoog aan het voorgaande geeft dit als resultaat:

$$u = -\alpha x \quad \text{en} \quad w = \alpha z \quad (16)$$

en

$$\phi = \frac{1}{2} \alpha \{x^2 - z^2\} + \text{const.} \quad (17)$$

Het drukveld wordt nu echter anders omdat nu Vgl. (11) met $z \neq 0$ het verloop van $p(x,z)$ bepaalt.

Als de constante H weer in de oorsprong wordt genomen, waar geldt $u(0,0) = w(0,0) = 0$ dus $|\vec{u}|^2 = 0$ en ook $z = 0$, dan volgt er:

$$\Delta p = p_0 - p(x,z) = \rho g z + \frac{1}{2} \rho \alpha^2 \{x^2 + z^2\} \quad (18)$$

Ook hier zijn de lijnen van gelijke druk cirkels. Het middelpunt is nu $(0, -g/\alpha^2)$ en voor de straal geldt:

$$r = \sqrt{\{2\Delta p/\rho\alpha^2\} + g^2/\alpha^4} \quad (19)$$

(ii) Het stroombeeld met $\psi = \alpha xy$ kan worden verkregen met conforme afbeelding door als afbeeldingsfunctie te gebruiken:

$$W = \frac{1}{2} \alpha z^2 \quad (20)$$

Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten.

3.1.4. Stroming rond een cilinder

Vraag 1

Gegeven is de stroomfunctie:

$$\psi = u_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta \quad (\text{in poolcoörd.}) \quad (1)$$

De hieruit af te leiden snelheidscomponenten zijn dan:

$$\text{stel } \psi = u_0 \left(\sqrt{\frac{R^2}{r}} - \frac{R^2}{\sqrt{r}} \right) \cdot \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

- 57 -

$$\text{welk} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} - u_y &= \frac{d\psi}{dx} \\ u_x &= \frac{d\psi}{dy} \\ \text{dan } \frac{du_y}{dx} &= \frac{d^2\psi}{dx^2} \end{aligned}$$

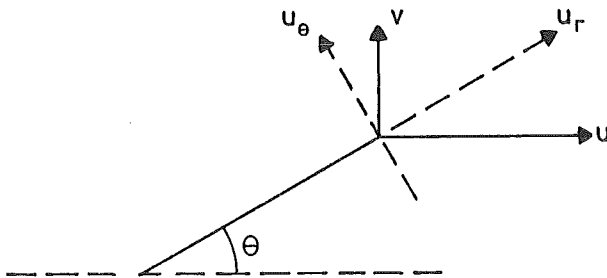
$$u_r = - \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = - \frac{1}{r} u_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \quad (2)$$

$$u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = u_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (3)$$

De stroming is rotatievrij indien:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{in x-y-assenstelsel}) \quad (4)$$

Dit nu eerst herschrijven in poolcoördinaten:



$$v = u_\theta \cos \theta + u_r \sin \theta \quad (5)$$

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad (6)$$

Verder geldt:

$$\frac{\partial \dots}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \dots}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \dots}{\partial \theta} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \dots}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \dots}{\partial r} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \dots}{\partial \theta} \quad (8)$$

Met Vgl. (5) ... (8) wordt Vgl. (4) verder uitgewerkt.

Eerst Vgl. (7) en (8):

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Nu Vgl. (5) en (6) substitueren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta \cos \theta + u_r \sin \theta) + \\ &- \sin \theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \cos \theta + u_r \sin \theta) + \\ &- \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) - \cos \theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \end{aligned}$$

Na enige herleiding wordt gevonden:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u_{\theta}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (9)$$

Nu in Vgl. (9), Vgl. (2) en (3) invullen:

$$\begin{aligned} u_0 \sin \theta \left(\frac{-2R^2}{r^3} \right) + \frac{u_0 \sin \theta}{r} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{1}{r} u_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \right\} \sin \theta = \\ = u_0 \sin \theta \left\{ -2 \frac{R^2}{r^3} + \frac{1}{r} + \frac{R^2}{r^3} - \frac{1}{r} + \frac{R^2}{r^3} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Dus rotatievrij.

De stroming voldoet aan de continuïteitsvergelijking indien geldt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

Dit wordt omgezet in poolcoördinaten:

$$\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial v}{r \partial \theta} = 0 \quad (11)$$

Met de vergelijkingen (5) en (6) kan Vgl. (11) herleid worden tot:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} = 0 \quad (12)$$

Invullen van de uitdrukkingen voor u_r en u_{θ} volgens Vgl. (2) en (3) in Vgl. (12) toont inderdaad aan dat Vgl. (12) en daarmee Vgl. (10) geldig is en dat er dus wordt voldaan aan de continuïteitsvoorwaarde.

Vraag 2

Het cilinder oppervlak wordt gegeven door $r = R$.

$$u_r = -\frac{1}{R} u_0 (a - a) \cos \theta = 0$$

(klopt met het feit, dat \perp cilinder opp. de stroomsnelheid nul moet zijn).

$$u_{\theta} = u_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta = 2 u_0 \sin \theta \quad (\text{antwoord})$$

De snelheid is maximaal voor $\theta = \pi/2$ (antwoord)

$$u_{\theta} = 2 u_0 \quad (\text{antwoord})$$

Vraag 3

Omdat de stroming rotatievrij en wrijvingsloos is geldt overal Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{|\vec{u}|^2}{2g} = \text{constant} \quad (13)$$

De stroming is 2-dimensionaal in het horizontale vlak, dus met de keuze van het referentievlak in het vlak van stroming wordt Vgl. (13):

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{|\vec{u}|^2}{2g} = \text{constant} \quad (14)$$

(p en $|\vec{u}|$ zijn de druk en de stroomsnelheid in een willekeurig punt). Ter plaatse van de ongestoorde stroomsnelheid heerst de atmosferische druk $p_0 = 0$ (referentie-waarde). Zodat voor Vgl. (14) geldt:

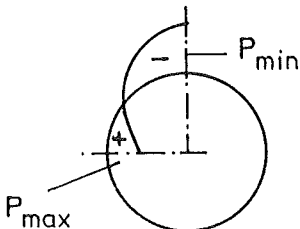
$$\frac{p}{\rho g} + \frac{|\vec{u}|^2}{2g} = \frac{u_0^2}{2g}$$

Ter plaatse van het oppervlak van de cilinder geldt:

$$\begin{aligned} p(\theta) &= \frac{1}{2} \rho \{u_0^2 - |\vec{u}|^2\} = \frac{1}{2} \rho \{u_0^2 - u_{\theta}^2\} \\ &= \frac{1}{2} \rho \{u_0^2 - 4 u_0^2 \sin^2 \theta\} = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \{1 - 4 \sin^2 \theta\} \end{aligned}$$

$$p(\theta)_{\max} = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \cdot \quad (\text{stuwdruk}) \quad (\text{antwoord})$$

$$p(\theta)_{\min} = (\theta = \pi/2) = -\frac{3}{2} \rho u_0^2 \quad (\text{antwoord})$$



3.1.5. Stroming rond het afvoerpunt van een badkuip

Vraag 1

De gegeven afbeeldingsfunctie luidt:

$$W = a (1 + i) \ln z \quad (1)$$

Verder geldt:

$$W = \phi + i\psi \quad (2)$$

Omdat de potentiaal- en stroomfunctie in poolcoördinaten worden gevraagd, ligt het voor de hand z in poolcoördinaten uit te drukken:

$$z = r e^{i\theta} \quad (3)$$

Invulling van Vgl. (3) in Vgl. (1) geeft:

$$\begin{aligned} W &= a(1 + i) \ln r \cdot e^{i\theta} = a(1 + i)(i\theta + \ln r) = \\ &= ai\theta + a \ln r - a\theta + ai \ln r = \\ &= a \ln r - a\theta + i(a \ln r + a\theta) \end{aligned} \quad (4)$$

Uit de Vgln. (2) en (4) volgen dan de gevraagde functies:

$$\phi = a \ln r - a\theta \quad (5)$$

$$\psi = a \ln r + a\theta \quad (6)$$

(antwoord)

Vraag 2

De stroomlijn $\psi = 0$ heeft de volgende gedaante (zie Vgl. (6)):

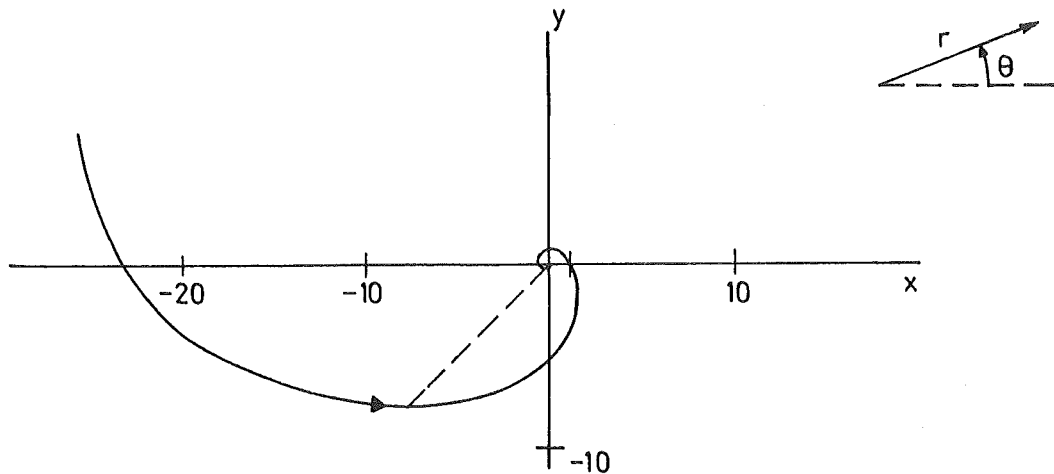
$$\ln r = -\theta$$

ofwel

$$r = e^{-\theta} \quad (7)$$

Voor het schetsen van deze functie worden een aantal waarden berekend:

$\theta = -\pi$	$r = e^{-\theta} = 23,14$
$= -\pi/2$	4,81
$= 0$	1,00
$= +\pi/2$	0,21
$= +\pi$	0,04
$= +2\pi$	$1,9 \cdot 10^{-3}$



$$\theta = -\frac{3\pi}{4} \quad r = 10,55 \quad (y = -7,46)$$

Vraag 3

Voor het bepalen van de drukken kan in het geval van een potentiaalstroming uitgegaan worden van Bernoulli in het gehele veld:

$$H = \frac{|\vec{u}|^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + \text{plaatshoogte} \quad (8)$$

Omdat de gegeven stroming in het horizontale vlak plaatsvindt geldt:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{|\vec{u}_1|^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{|\vec{u}_2|^2}{2g} \quad (9)$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g \left\{ \frac{|\vec{u}_2|^2}{2g} - \frac{|\vec{u}_1|^2}{2g} \right\} \quad (10)$$

$$|\vec{u}|^2 = u_\theta^2 + u_r^2 \quad (11)$$

Algemeen geldt:

$$u_r = - \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (12)$$

en

$$u_\theta = - \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \quad (13)$$

Met Vgl. (5) wordt Vgl. (12) en (13):

$$u_r = - \frac{a}{r} \quad \text{en} \quad u_\theta = - \frac{1}{r} (-a) = \frac{a}{r}$$

Indien $|z_1| = \sqrt{2}$ wordt $r_1 = \sqrt{2}$ en:

$$\begin{aligned} |\vec{u}_1|^2 &= ((u_r)_{r=\sqrt{2}})^2 + ((u_\theta)_{r=\sqrt{2}})^2 \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{u}_2|^2 = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = 4a^2$$

Invullen in Vgl. (10):

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho \left(\frac{4a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{3}{2} \rho a^2 \quad (\text{antwoord})$$

N.B. Met de afname van r neemt de snelheid toe en de druk af.

Voor zeer kleine r -waarden kan onder bepaalde condities een onderdruk ontstaan: Er wordt lucht aangezogen.

3.1.6. Stroming rond een strekdam

Vraag 1

De gegeven afbeeldingsfunctie luidt:

$$W = A \cdot z^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Verder geldt:

$$W = \phi + i\psi \quad (2)$$

Voor de verdere uitwerking wordt uitgegaan van cartesische coördinaten, zodat:

$$z = x + iy \quad (3)$$

Invulling van Vgl. (3) en Vgl. (2) in Vgl. (1) geeft:

$$\phi + i\psi = A (x + iy)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Uit Vgl. (4) moet nu de stroomfunctie ψ worden afgeleid, die de gevraagde willekeurige stroomlijn rond de strekdam weergeeft.

Hiertoe wordt Vgl. (4) eerst gekwadraterd:

$$\phi^2 + 2i\phi\psi - \psi^2 = A^2 (x + iy) \quad (5)$$

Gelijkstelling van de reële en imaginaire delen geeft dan:

$$\left. \begin{aligned} \phi^2 - \psi^2 &= A^2 x \\ 2\phi\psi &= A^2 y \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Door eliminatie van ϕ wordt vervolgens gevonden:

$$\frac{A^4 y^2}{4 \psi^2} - \psi^2 = A^2 x \quad (7)$$

of

$$\psi^4 + A^2 x \psi^2 - \frac{1}{4} A^4 y^2 = 0 \quad (8)$$

Stel $\psi^2 = P$, dat geldt:

$$P = \frac{-A^2 x \pm \sqrt{A^4 x^2 + A^4 y^2}}{2} \quad (9)$$

Omdat ψ een reële functie moet zijn, moet P positief zijn:

$$\psi^2 = -\frac{1}{2} A^2 x + \frac{1}{2} A^2 \sqrt{x^2 + y^2} \quad (10)$$

$x^2 + y^2 = r^2$ (r is afstand van punt (x, y) tot de oorsprong) zodat:

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{1}{2} A^2 (r - x)} = \pm A \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} - x)} \quad (11)$$

Omdat een willekeurige stroomlijn gegeven wordt door $\psi = \text{constant}$ (constante willekeurig te kiezen) wordt de gevraagde vergelijking:

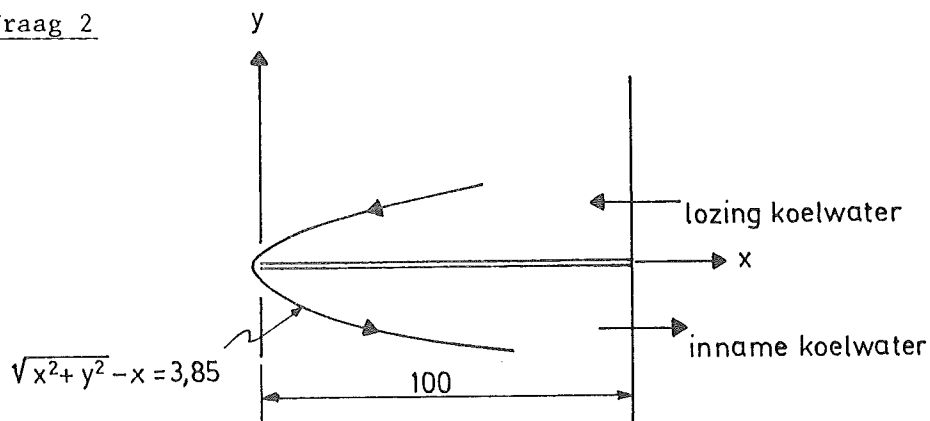
$$\sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} - x)} = C \quad (C \text{ willekeurige constante})$$

ofwel

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = C_0 \quad (C_0 \text{ willekeurige constante}) \quad (12)$$

(antwoord)

Vraag 2



De stroomlijn door het punt $x = 50$ m en $y = 20$ m wordt gevonden door deze coördinaten in te vullen in Vgl. (12), ter bepaling van de bijbehorende waarde van C_0 :

$$c_o = \sqrt{50^2 + 20^2} - 50 = 3,85$$

Gevraagd wordt dus te schetsen de stroomlijn, die gegeven wordt door de vergelijking:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 3,85$$

Snijpunt met de y-as:

$$x = 0 \quad , \quad \sqrt{y^2} = 3,85 \quad , \quad y = \pm 3,85 \text{ m} \quad (\text{antwoord})$$

Snijpunt met de x-as:

$$\sqrt{x^2} - x = 3,85$$

$x > 0$ geen oplossing.

$$\left. \begin{array}{l} x < 0 \quad \sqrt{x^2} = x \\ \quad \quad \quad -x = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sqrt{x^2} - x = 2x = 3,85 \\ x = 1,93 \text{ m} \end{array}$$

Omdat $x < 0$ $x = -1,93 \text{ m}$ (antwoord)

Vraag 3

Voor de bepaling van de snelheid in een willekeurig punt in het stromingsveld geldt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -u \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v \quad (14)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (15)$$

Uitgaande van Vgl. (11) wordt dan gevonden voor Vgl. (13), (14) en (15) (\pm teken wordt eerst buiten beschouwing gelaten):

$$-u = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y \right\}}{\sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} - x)}} = \frac{1}{2} A \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{y / \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}$$

$$v = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x - 1 \right\}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} - x \right)}} = \frac{1}{2} \cdot A \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(x / \sqrt{x^2 + y^2}) - 1}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}$$

Voor het punt $x = 50$ m, $y = 20$ m wordt dan gevonden:

$$\left. \begin{aligned} u &= -0,067 \text{ A} \\ v &= -0,013 \text{ A} \end{aligned} \right\} \text{gegeven het assenstelsel zijn de tekens correct!}$$

$$|\vec{u}| = 0,068 \text{ A}$$

Met de gegeven snelheid $|\vec{u}| = 0,10$ m/s wordt

$$A = 1,47$$

De gevraagde snelheid in $x = -1,93$ m ; $y = 0$ wordt dan:

$$u = 0$$

$$v = |\vec{u}| = 1,47 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\frac{-1,93}{1,93} - 1}{\sqrt{2 \cdot 1,93}} = -0,53 \text{ m/s} \quad (\text{antwoord})$$

3.1.7. Wateronttrekking uit een kanaal

Vraag 1

Voor de parallelstroming geldt:

$$u = u_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\psi_1 = -u_0 y + f(x)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = v = 0$$

Dus:

$$\psi_1 = -u_0 y + \text{constante}$$

Voor de "putstroming" = onttrekking via spleet geldt: radiale toestroming.

continuïteit: $q = \pi r u_r$ (poolcoördinaten)

Er geldt: $\frac{\partial \psi_2}{r \partial \theta} = -u_r = + \frac{q}{\pi r}$ (stroming in neg. r-richting)

$$\psi_2 = \frac{q}{\pi} \theta + f(r)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = u_\theta = 0$$

Dus $\psi_2 = \frac{q}{\pi} \theta + \text{constante}$

Daar voor de stroombeelden het beginsel van superpositie geldt (in de Vgl. van Laplace komt de stroomfunctie ψ lineair voor) wordt de gevraagde stroomfunctie:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -u_0 y + \frac{q}{\pi} \theta = \text{constant}$$

Het stroombeeld wordt dus gegeven door:

$-u_0 y + \frac{q}{\pi} \text{bgtg } \frac{y}{x} = \text{constante}$	(antwoord)
--	------------

Vraag 2

$$u_0 = u_r = \frac{q}{\pi r} \quad (y=0) \quad r = \frac{q}{\pi u_0} = x = +0,64 \text{ m} \quad (\text{antwoord})$$

Vraag 3

Kies ref. niveau t.p.v. het willekeurige niveau z:

$$\frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_0^2}{2g} = \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = u_0 - \frac{q}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = u_0 - \frac{q}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Langs de wand: $y = 0$

$$u = u_0 - \frac{q}{\pi x}$$

(Ook direct af te leiden door superpositie)

$$u = u_0$$

$$u_r = -\frac{q}{\pi r} = -\frac{q}{\pi x} \quad (\text{langs de wand})$$

$$\frac{p - p_0}{\rho g} = \frac{1}{2g} (u_0^2 - (u_0 - \frac{q}{\pi x})^2)$$

Met $\Delta p = p - p_0$ wordt na enig herleiden gevonden:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{q}{\pi x}\right) \left(2u_0 - \frac{q}{\pi x}\right) \quad (\text{antwoord})$$

en met de numerieke waarden:

$$\Delta p = 159,15 \text{ x}^{-1} (1 - 0,32 \text{ x}^{-1})$$

Vraag 4

$$x = 0,64 \text{ m} \rightarrow (x = \frac{q}{\pi u_0})$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho u_0 (2u_0 - u_0) = \frac{1}{2} \rho u_0^2 = 125 \text{ N/m}^2 \quad (\text{antwoord})$$

3.2. Krachten op lichamen

3.2.1. Lichamen in de stroming

3.2.1.1. Valsnelheid van een deeltje

De formule van Stokes luidt:

$$W = \frac{1}{18} \frac{\Delta \cdot g \cdot D^2}{\nu} \quad (1)$$

Deze formule geldt, indien $Re < 0,1$ à $0,5$ met:

$$Re = W \cdot D / \nu \quad (2)$$

$$\Delta = (\rho_1 - \rho_2) / \rho_2 \quad (3)$$

$$\nu = \eta / \rho_2 \quad (4)$$

Met de numerieke gegevens volgt uit de vergelijkingen (1), (3) en (4) voor de gevraagde snelheid $W = 0,005$ m/s.

Het bijbehorende Reynoldsgetal is dan:

$$Re \approx 0,13$$

waaruit blijkt, dat de formule van Stokes mag worden toegepast.

3.2.1.2. Een bolvormig lichaam in de stroming

Deel A

Vraag 1

$$Re = \frac{u \cdot D}{\nu}$$

waarin D de diameter van de bol.

Vraag 2

Gewicht van de bol onder water G:

$$G = (\rho - \rho_w) g \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} D_1\right)^3$$

ρ : dichtheid bol

ρ_w : dichtheid water.

Kracht die het water op de bol uitoefent:

$$F = \frac{1}{2} \rho_w C_D \frac{1}{4} \pi D_1^2 u_1^2$$

Voor de bepaling van de grootte van de weerstandscoefficiënt wordt gebruik gemaakt van de gegeven relatie tussen C_D en Re:

$$Re = \frac{u_1 D_1}{\nu} = 5 \cdot 10^5 \rightarrow C_D = 0,1$$

Uit $F = G$ volgt dan de gevraagde waarde voor de dichtheid

$$\rho = 1122,3 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{antwoord})$$

Deel B

Vraag 1

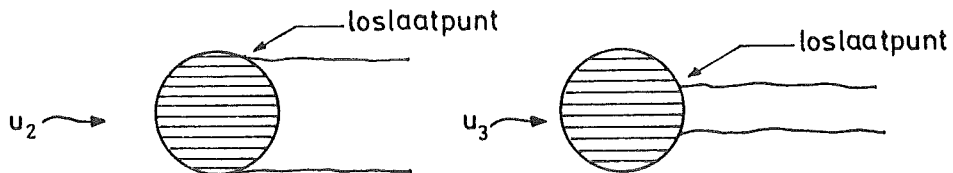
$$Re_2 = \frac{u_2 D_2}{\nu_L} = 2 \cdot 10^5 \quad \text{en} \quad C_D = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho_L u_2^2 \frac{1}{4} \pi D_2^2} = 0,45$$

$$Re_3 = \frac{u_3 D_2}{\nu_L} = 4,5 \cdot 10^5 \quad \text{en} \quad C_D = 0,088$$

Vraag 2

Ondanks de toename van de snelheid u is de weerstandskracht hetzelfde, omdat bij de toename van de snelheid de laminaire grenslaag omslaat in een turbulente, waarbij het loslaatpunt naar achteren verschuift.

Hierbij neemt de tegendruk aan de achterzijde van de bol toe, waardoor de resulterende kracht niet toeneemt (C_D neemt af).



3.2.1.3. Pijler in de stroming (I)

Vraag 1

De kracht, die de stroming op een voorwerp in die stroming uitoefent, wordt bepaald volgens de formule:

$$F = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot u^2 \cdot A \quad (1)$$

waarin:

u : de ongestoorde stroomsnelheid


C_D : de weerstandscoefficiënt


A : het aangestroomde oppervlak.

Voor de bepaling van de te kiezen situering van de pijler ten opzichte van de hoofdstroomrichting dient dus uitgegaan te worden van de grootte van:

$$C_D \cdot A \quad (2)$$

Uitgaande van het aangestroomde oppervlak per meter waterdiepte, geldt dan voor:

geval (i) \rightarrow  : $A = B \sqrt{2}$ en dus $C_D \cdot A = 1,5B \sqrt{2} = 2,12B$

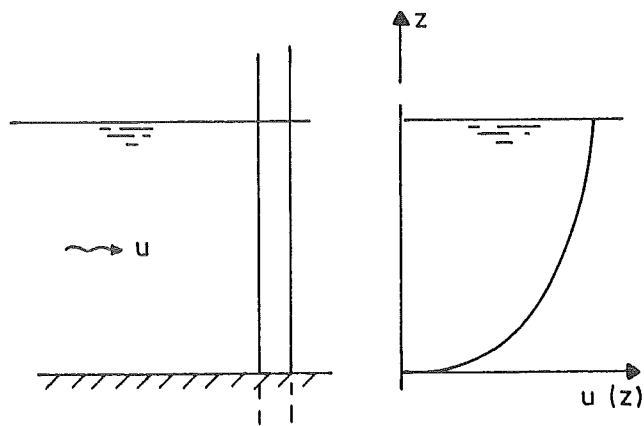
geval (ii) \rightarrow  : $A = B$ en dus $C_D \cdot A = 2B$

Hieruit blijkt, dat de kracht bij geval (ii) kleiner is dan bij (i) hoewel de C_D -coëfficiënt groter is. De gevraagde situering is dus volgens geval (ii):



(antwoord)

Vraag 2



De kracht die de stroming op de pijler over een hoogte dz uitoefent, bedraagt:

$$dF = \frac{1}{2} \rho \cdot 2 \cdot B \cdot u^2(z) \cdot dz$$

($u(z)$ is over de hoogte dz constant).

De totale resulterende kracht is dan:

$$F = \rho B \int_0^a u^2(z) dz = \rho B n^2 \frac{u_*^2}{\kappa^2} \left(\frac{1}{a}\right)^{2/n} \int_0^a z^{2/n} dz$$

$$= \rho B n^2 \frac{u_*^2}{\kappa^2} \left(\frac{1}{a}\right)^{2/n} \left(\frac{-n}{n+2}\right) z^{\frac{2}{n}+1} \Big|_0^a$$

$$F = \rho B \frac{n^3}{n+2} \cdot \frac{u_*^2}{\kappa^2} \cdot a \quad (3)$$

Het moment om $z = 0$ (inklemmingspunt van de pijler bij de bodem) van het krachtje dF luidt:

$$dM = z \cdot dF = \frac{1}{2} \rho \cdot 2B \cdot u^2(z) \cdot z \cdot dz$$

Het totale moment wordt dan:

$$\begin{aligned} M &= \rho B n^2 \frac{u_*^2}{\kappa^2} \left(\frac{1}{a}\right)^{2/n} \int_0^a z^{\frac{2}{n} + 1} dz \\ &= \rho B n^2 \frac{u_*^2}{\kappa^2} \left(\frac{1}{a}\right)^{2/n} \left(\frac{n}{2 + 2n}\right) z^{\frac{2}{n} + 2} \Big|_0^a \end{aligned}$$

zodat:

$$M = \rho B \frac{n^3}{2n + 2} \frac{u_*^2}{\kappa^2} a^2 \quad (4)$$

Uit Vgl. (3) en (4) kan nu de gevraagde afstand z_0 via het moment om $z = 0$ worden gevonden:

$$\begin{aligned} F \cdot z_0 &= M \\ z_0 \rho B \frac{n^3}{n + 2} \frac{u_*^2}{\kappa^2} a &= \rho B \frac{n^3}{2n + 2} \frac{u_*^2}{\kappa^2} a^2 \end{aligned}$$

$$z_0 = \frac{n + 2}{2n + 2} \cdot a = 1,71 \text{ m} \sim \underline{1,70} \quad (\text{antwoord})$$

3.2.1.4. Meting stroomsnelheid

Vraag 1

Het gewicht G van het torpedo-vormige lichaam onder water wordt gedefinieerd door:

$$G = (\rho_0 - \rho) g V \quad (1)$$

met ρ de dichtheid van het water, waarin het lichaam zich bevindt.
Het stromende water oefent een kracht F op het lichaam uit:

$$F = \frac{1}{2} \rho u^2 A C_D \quad (2)$$

Er geldt:

$$\operatorname{tg} \alpha = F/G \quad (3)$$

Uit Vgln. (1), (2) en (3) volgt dan het gevraagde verband tussen α en u :

$$u = \left\{ \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2gV}{C_D A} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot (\operatorname{tg} \alpha)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{antwoord}) \quad (4)$$

Vraag 2

Met behulp van Vgl. (4) wordt voor de gevraagde snelheden gevonden:

- (i) zoet water $\rho = \rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3 \rightarrow u_1 = 2,83 \text{ m/s}$ (antwoord)
(ii) zout water $\rho = \rho_2 = 1030 \text{ kg/m}^3 \rightarrow u_2 = 2,77 \text{ m/s}$ (antwoord)

3.2.1.5. Valproeven stortsteen

Allereerst dient de evenwichtssnelheid van de stortsteen te worden bepaald. (Er wordt van uitgegaan, dat bij het storten van meerdere stenen tegelijk er geen onderlinge beïnvloeding is van de evenwichtssnelheid.)

De kracht ten gevolge van de stroming moet in de evenwichtssituatie gelijk zijn aan het gewicht van de steen onder water:

$$F = \frac{1}{2} C_D \rho_w W^2 \frac{1}{4} \pi D^2$$

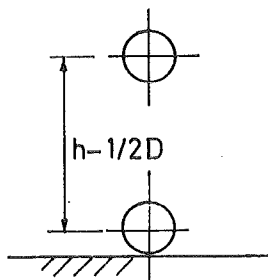
(W : evenwichtssnelheid)

$$G = \frac{1}{6} \pi D^3 (\rho_s - \rho_w)g$$

F = G levert de evenwichtssnelheid W:

$$W = \sqrt{\frac{4D\Delta g}{3C_D}} \quad (1)$$

met $\Delta = (\rho_s - \rho_w) / \rho_w$



De steen versnelt bij de vrije val over een afstand $h - \frac{1}{2}D$.

Voor een vrije val geldt:

$$\frac{dx}{dt} = u = gt \quad (2)$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + \text{constante} \quad (3)$$

Wordt het referentievlak door het zwaartepunt van de steen gekozen op het moment dat de kraan de steen loslaat, dan geldt: $x = 0$ op $t = 0$, zodat de integratie-constante nul is. Wordt de x-as positief in de valrichting gekozen, dan geldt voor het moment t_1 , waarop de steen het asfalt treft:

$$h - \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad (4)$$

De snelheid van de steen is dan met Vgl. (2):

$$u = gt_1 = g \sqrt{\frac{2(h - \frac{1}{2}D)}{g}} \quad (5)$$

Deze snelheid u moet gelijk zijn aan de evenwichtssnelheid W.

Gelijkstelling van Vgl. (1) en Vgl. (5) geeft:

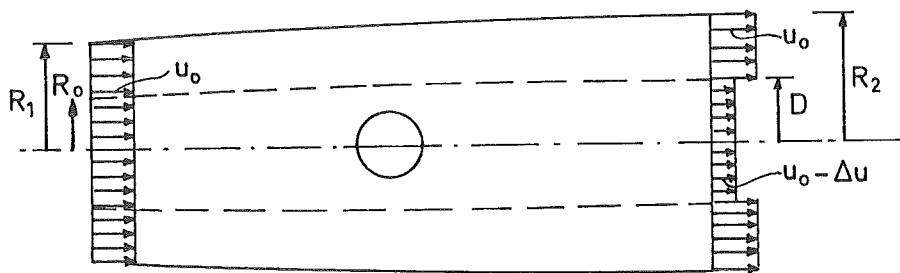
$$\frac{4D\Delta g}{3C_D} = g^2 \left\{ \frac{2(h - \frac{1}{2}D)}{g} \right\}$$

$$h = \frac{2}{3} \frac{D \cdot \Delta}{C_D} + \frac{1}{2} D = 0,90 \text{ m} \quad (\text{antwoord})$$

3.2.1.6. Bepaling weerstandscoefficiënt van een lichaam

Als gevolg van de kracht, die de stroming op de bol uitoefent, is het snelheidsveld achter de bol anders dan ervoor. Met andere woorden de impuls is veranderd. De relatie tussen de kracht die de stroming op de bol uitoefent en de impulsverandering wordt gevonden door de impulsbalans op te stellen (zie college-handleiding b70).

Het vaste controle-volume (Eulerse aanpak) wordt zodanig gekozen, dat dit begrensd wordt door twee verticale vlakken loodrecht op de stroming: één vóór de bol en één erachter, terwijl de begrenzing in de stroomrichting de stroomlijnen volgen.



Langs de stroomlijn is geen uitwisseling van impulsie. De straal van het linker verticale vlak bedraagt R_1 en van het rechter vlak R_2 . Vanwege de continuïteit (de begrenzing langs de stroomlijnen vormt in wezen een stroombuis) moet $R_1 < R_2$. In plaats van R_1 en R_2 willekeurig te kiezen, kan ook als begrenzing die stroomlijnen worden gekozen, waarbij $R_2 = D$: $R_0 < D$. Vanwege de continuïteit geldt dan:

$$\pi R_0^2 u_0 = \pi (D)^2 (u_0 - \Delta u) \quad (1)$$

De impulsbalans luidt voor dit geval in woorden: de kracht F die de bol op de luchtstroming uitoefent is samen met de netto instromende impuls per tijdseenheid in het controle volume gelijk aan nul. (De situatie is stationair, dus er is binnen het controle-volume geen verandering van impuls in de tijd.)

De netto instromende impuls per tijdseenheid is:

$$\rho u_0 \pi R_0^2 u_0 - \rho(u_0 - \Delta u) \pi D^2 (u_0 - \Delta u) \quad (2)$$

Als de positieve richting samenvalt met de stromingsrichting van de lucht, dan geldt:

$$F = \rho u_0^2 \pi R_0^2 - \rho(u_0 - \Delta u)^2 \pi D^2 \quad (3)$$

Voor een kracht op een lichaam, uitgeoefend door een stroming geldt:

$$F = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho u_0^2 \cdot A$$

met

(4)

$$A = \frac{1}{4} \pi D^2$$

Eliminatie van R_0 uit Vgl. (3) met behulp van Vgl. (1) en substitutie van Vgl. (4) in Vgl. (3) geeft:

$$C_D \cdot \frac{1}{2} \rho u_0^2 \cdot \frac{1}{4} \pi D^2 = \rho u_0^2 \pi \frac{u_0 - \Delta u}{u_0} D^2 - \rho(u_0 - \Delta u)^2 \pi D^2$$

Na enige herleiding wordt voor de weerstandscoefficiënt gevonden:

$$C_D = \frac{8}{u_0^2} (u_0 - \Delta u) \Delta u = 0,47 \quad (\text{antwoord})$$

3.2.2. Evenwichtbodemmateriaal

3.2.2.1. Stabiele bodembedekking

Analyse

$$\left. \begin{aligned} \psi_{cr} &= \psi_{cr}(u_*, D_n) \\ u_* &= u_*(q/a, C) \\ C &= C(a/k) \end{aligned} \right\} \rightarrow f(D_n) = 0$$

bij bekende relatie tussen D_n en k .

De lengte van de ribbe van de kubi is:

$$r = \sqrt[3]{\frac{\pi D_n^3}{6}} = 1,24 D_n$$

Uitwerking

$$\psi_{cr} = \frac{u_*^2}{\Delta g D_n} \rightarrow \frac{u_*^2}{D_n} - \Delta g \psi_{cr} = 0 \quad (1)$$

Met de formule van Chézy:

$$u = \frac{C}{\sqrt{g}} u_* \quad (2)$$

ofwel

$$u_* = \frac{q}{a} \frac{\sqrt{g}}{18 \log 12 \frac{a}{k}} \quad (3)$$

Stel $k = D_n$. Dan volgt uit Vgl. (1) met Vgl. (3):

$$\frac{1}{D_n} \frac{q^2}{a^2} \frac{g}{(18 \log 12 \frac{a}{D_n})^2} - \Delta g \psi_{cr} = 0 \quad (4)$$

$$D_n \left(18 \log 12 \frac{a}{D_n} \right)^2 - \frac{q^2}{\Delta \psi_{cr} a^2} = 0 \quad (5)$$

Met de numerieke gegevens blijkt:

$$\frac{q^2}{\Delta \psi_{cr} a^2} = \frac{1}{1,45 \cdot 0,03} \left(\frac{10,3}{2,75} \right)^2 = 322,5$$

Gesubstitueerd in Vgl. (5) geeft:

$$f(D_n) = D_n \left(\log \frac{33}{D_n} \right)^2 - 1 = 0$$

Beginschattingen voor D_n :

$$D_n = 0,15 \text{ m} \rightarrow f(0,15) = -0,18$$

$$D_n = 0,25 \text{ m} \rightarrow \quad \quad \quad +0,12$$

Regula falsi:

$$D_n = \frac{0,15 * 0,12 + 0,25 * 0,18}{0,12 + 0,18} = 0,21 \text{ m}$$

$$f(0,21) = +0,013$$

$$D_n = \frac{0,15 * 0,013 + 0,21 * 0,18}{0,013 + 0,18} = 0,206 \text{ m}$$

De oplossing $D_n = 0,21 \text{ m}$ is gelet op de onzekere definitie van het begrip begin van beweging voldoende nauwkeurig.

$D_n = 0,21 \text{ m}$ correspondeert met een ribbe $r = 0,26 \text{ m}$.

Opmerking

Men kan zich met enig recht afvragen of de veronderstelling $k = D_n$ in dit geval juist is. Het lijkt immers waarschijnlijk dat de Nikuradse-ruwheid van een stortlaag van betonkubi groter zal zijn, dan de Nikuradse-ruwheid van keien, die meer bolvormig zijn (bij dezelfde inhoud). Hoe verandert de uitkomst, wanneer men aanneemt $k = 1,1 D_n$?

$$f(D_n) = D_n \left(\log \frac{33}{1,1 D_n} \right)^2 - 1 = 0$$

$$D_n = 0,20 \rightarrow f(D_n) = -0,05$$

$$D_n = 0,25 \rightarrow \quad \quad \quad +0,08$$

Regula falsi:

$$D_n = \frac{0,20 * 0,08 + 0,25 * 0,05}{0,08 + 0,05} = 0,22 \text{ m}$$

$$f(0,22) = 0,003$$

$$D_n = 0,22 \text{ m} \rightarrow r = 0,27 \text{ m.}$$

3.3. Transportprocessen

3.3.1. Dispersie opgeloste stoffen

3.3.1.1. Lozing via een zijriviertje

Vraag 1

Gezien de opgave gaat het hier om een momentane lozing, waarbij het 1-dimensionale model mag worden toegepast: gegeven is, dat ter plaats van het lozingspunt de geloosde stof instantaan homogeen over de dwarsdoorsnede is verdeeld. In de dwarsrichting zijn er dus geen concentratieverschillen. Voor de grootte van de concentratie op een bepaald tijdstip t na het moment van lozing en op een bepaalde plaats x benedenstrooms van het lozingspunt geldt:

$$\phi(x, t) = \frac{M/A}{2\sqrt{\pi Kt}} \exp \left\{ -\frac{(x - ut)^2}{4Kt} \right\} \quad (1)$$

Voor de longitudinale dispersiecoëfficiënt geldt:

$$K = 0,011 \frac{u^2 B^2}{a u_*} \quad \text{want in } \phi(x, t) \quad (2)$$

Omdat volgens Chézy geldt $u = C \sqrt{Ri}$, terwijl de schuifspannings-snelheid geschreven kan worden als $u_* = \sqrt{gRi}$, kan de uitdrukking voor de longitudinale dispersiecoëfficiënt met $Q = auB$ (B is gemiddelde breedte van het riviertje) geschreven worden:

$$K = 0,011 \frac{u^2 B^2}{a \frac{u}{C} \sqrt{g}} = 0,011 \frac{Q \cdot C \cdot B}{a^2 \sqrt{g}} \quad (3)$$

Omdat de breedte van riviertje I niet gegeven is moet deze uitgedrukt worden in Q , u en a :

$$B = \frac{Q}{au} \quad (4)$$

Met vergelijking (3) wordt dan voor de longitudinale dispersiecoëfficiënt gevonden:

$$K = 0,011 \frac{Q^2 C}{a^3 u \sqrt{g}} = 5,27 \text{ m}^2/\text{s} \sim 5,3 \text{ m}^2/\text{s}$$

Het maximum treedt bij benadering op als:

$$x_1 = ut_1 \quad (5)$$

$$t_1 = 3000 \text{ s} = 50 \text{ min.} \quad (\text{antwoord})$$

De maximale concentratie is dan ($A = aB = Q/u$)

$$\phi_{\max} = \frac{M/A_1}{2\sqrt{\pi Kt}} = \frac{10^{-2}/2,5}{2\sqrt{\pi \cdot 5,3 \cdot 3000}} = 8,9 \cdot 10^{-6} \quad (\text{antwoord})$$

Opmerking:

Bij de hierboven gegeven uitwerking is gesteld dat de maximale concentratie optreedt als $x = ut$ (meebewegend met het assenstelsel). Dit geldt in z'n algemeenheid voor grote waarden van x (enkele km's). In het hierna volgende, wordt dit nader gekwantificeerd voor het onderhavige geval.

Het maximum treedt op in een gegeven punt x indien geldt:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0$$

Dit toegepast op vergelijking (1) geeft:

$$C \left(-\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}}\right) \exp[\dots] + C \left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \exp[\dots] *$$

$$* \left(-\frac{2(x-ut)(-u) \cdot 4Kt - (x-ut)^2 \cdot 4K}{(4Kt)^2}\right) = 0$$

waarin:

$$C = \frac{M/A}{2 \sqrt{\pi K}}$$

Na enige bewerking levert dit de volgende vierkantsvergelijking in t:

$$u^2 t^2 + 2Kt - x^2 = 0$$

De reële oplossing voor t wordt dan:

$$t = \frac{-2K + \sqrt{4K^2 + 4u^2 x^2}}{2u^2}$$

Indien nu $4u^2 x^2 \gg 4K^2$ wordt gevonden:

$$t = \frac{2ux}{2u^2} = \frac{x}{u}, \text{ dus } x = ut$$

Uitwerking van bovenstaande voorwaarde geeft:

$$ux \gg K = 0,011 \frac{u B^2 C}{a \sqrt{g}}$$

$$x \gg 0,01 \frac{B^2 C}{a \sqrt{g}}$$

In het onderhavige geval geldt:

$$B = 5 \text{ m}, \quad C = 30 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s} \quad \text{en} \quad a = 0,5 \text{ m}$$

Dit geeft de eis $x \gg 4,79 \text{ m}$!

Bij $B = 100 \text{ m}$, $C = 50 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$, $a = 3 \text{ m}$, wordt gevonden $x \gg 530 \text{ m}$, waarmee inderdaad gesteld kan worden, dat het maximum gevonden wordt voor $x = ut$ mits x maar groot genoeg is, zeg enkele km's.

Vraag 2

Als $\phi_1(t)$ de concentratie is in riviertje I direct bovenstrooms van de uitmonding in riviertje II en $\phi_2(t)$ de concentratie in riviertje II direct benedenstrooms van deze uitmonding, dan geldt vanwege het behoud van massa:

$$\phi_1(t) \cdot Q_1 = \phi_2(t) \cdot Q_2 \quad (6)$$

Omdat geldt: $Q_1 = uA_1$ en $Q_2 = uA_2$ (immers er is gegeven, dat de snelheden in beide riviertjes even groot zijn), volgt uit Vgl. (6):

$$\phi_1(t) \cdot A_1 = \phi_2(t) \cdot A_2$$

Dus voor de concentratie t.p.v. de uitmonding in riviertje II geldt:

$$\begin{aligned} \phi_2(t) &= \frac{A_1}{A_2} \phi_1(t) = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{M/A_1}{2 \sqrt{\pi K t}} \exp \left\{ - \frac{(x_1 - ut)^2}{4Kt} \right\} \\ &= \frac{M/A_2}{2 \sqrt{\pi K t}} \exp \left\{ - \frac{(x_1 - ut)^2}{4Kt} \right\} \end{aligned}$$

Omdat de dispersiecoëfficiënt in riviertje II dezelfde is als in riviertje I, staat hier de formule voor het concentratieverloop in riviertje II in punt $x = x_1$ t.g.v. een lozing in $x = 0$ in riviertje II op $t = 0$, dus ook 3 km bovenstrooms van de uitmonding van I in II.

De maximale concentratie wordt dus op 3 km benedenstrooms van het uitmondingspunt gemeten op het tijdstip t_2 :

$$t_2 = ut_2 = 6000$$

$$t_2 = 6000 \text{ s} = 100 \text{ min.} \quad (\text{antwoord})$$

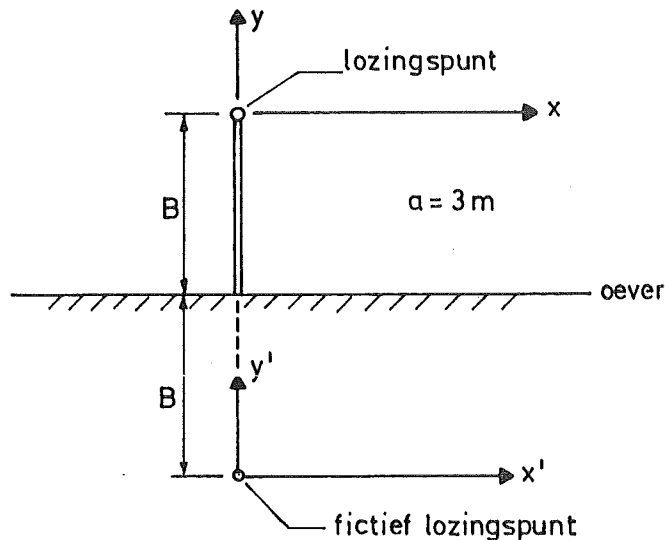
De bijbehorende maximale concentratie is dan:

$$\phi_{\max} = \frac{M/A_2}{2 \sqrt{\pi K t_2}} = 2,6 \cdot 10^{-6} \quad (\text{antwoord})$$

3.3.1.2. Lozing in een brede rivier

Er is hier sprake van een instantane lozing op een nog nader te bepalen afstand B vanaf de rechter oever van de rivier. De lozing heeft een twee-dimensionaal karakter. Kies het assenkruis x,y door het lozingspunt. De oever wordt dan gegeven door $y = -B$, indien de x-as parallel aan de oever loopt.

Omdat er geen stof door de rechter oever kan verdwijnen, terwijl de linker oever buiten beschouwing mag blijven, dient voor de concentratie berekening aan de gegeven lozing in het punt $(x,y) = (0,0)$ een fictieve lozing te worden toegevoegd, welke symmetrisch is gelegen ten opzichte van deze oever in het punt $(x,y) = (0, -2B)$. (Het werkelijke lozingspunt wordt dus ten opzichte van de oever gespiegeld.)



De concentratie in een willekeurig punt wordt nu gevonden door de volgende functies te sommeren:

$$\phi(x,y) = \frac{M}{4\pi a \sqrt{K_1 K_2}} \frac{1}{t} \exp \left\{ - \frac{(x - ut)^2 + (K_1/K_2)y^2}{4K_1 t} \right\} \quad (1)$$

(Concentratie t.g.v. de lozing zelf.)

$$\phi'(x', y') = \frac{M}{4\pi a \sqrt{K_1 K_2} t} \exp \left\{ - \frac{(x' - ut)^2 + (K_1/K_2)(y')^2}{4K_1 t} \right\} \quad (2)$$

$(x', y') = (0, 0)$ is het fictieve lozingspunt. Er geldt:

$$\left. \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y + 2B \end{array} \right\} \quad (3)$$

zodat:

$$\phi'(x, y) = \frac{M}{4\pi a \sqrt{K_1 K_2} t} \exp \left\{ - \frac{(x - ut)^2 + (K_1/K_2)(y + 2B)^2}{4K_1 t} \right\} \quad (4)$$

Gevraagd wordt de afstand B te bepalen, opdat de maximale concentratie aan de oever een bepaalde waarde niet zal overschrijden.

De concentratie t.p.v. de oever wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \Phi(x, -B) &= \phi(x, B) + \phi'(x, -B) = \\ &= \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K_1 K_2} t} \exp \left\{ - \frac{(x - ut)^2 + (K_1/K_2)B^2}{4K_1 t} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Op een willekeurig tijdstip wordt de maximale concentratie langs de oever gevonden voor $x = ut$, immers dan is de exp [...] uit Vgl. (5) maximaal. Om nu het maximum van deze maxima te vinden, wordt dus overgegaan op het meebewegende assenstelsel $x = ut$, waarmee Vgl. (5) wordt:

$$\Phi_{\max}(0, -B) = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K_1 K_2} t} \exp \left\{ - \frac{(K_1/K_2)B^2}{4K_1 t} \right\} \quad (6)$$

Het maximum van Φ_{\max} wordt gevonden uit:

$$\frac{d \Phi_{\max}}{dt} = 0 \quad (7)$$

Uitwerking van Vgl. (7) met Vgl. (6) geeft:

$$(-t^{-2}) \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K_1 K_2}} \exp \left\{ \frac{-B^2}{4K_2 t} \right\} +$$

$$+ \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K_1 K_2}} \frac{(-B^2)}{t} \left(\frac{-B^2}{4K_2} \right) (-t^{-2}) \exp \left\{ -\frac{B^2}{4K_2 t} \right\} = 0$$

ofwel

$$-\frac{1}{t} + \frac{B^2}{4K_2 t^2} = 0 \rightarrow t = \frac{B^2}{4K_2}$$

Het maximum van de maxima wordt dan:

$$\Phi_{\max}(0, -B) = \frac{2M \cdot 4K_2}{4\pi a \sqrt{K_1 K_2} B^2} \exp \left\{ -\frac{B^2 \cdot 4K_2}{4K_2 \cdot B^2} \right\}$$

$$= \frac{2M}{\pi a \sqrt{(K_1/K_2)} B^2} \exp [-1]$$

$$= 0,37 * \frac{2M}{\pi a \sqrt{(K_1/K_2)} B^2}$$

Er geldt: $K_1 = 6 \text{ au}_*$ (brede waterloop, geen wandinvloeden)

$$K_2 = 0,6 \text{ au}_*$$

Dus $K_1/K_2 = 10$

Met de overige numerieke gegevens wordt dan voor de gevraagde afstand B gevonden:

$$B = \sqrt{\frac{0,74 M}{\pi a \sqrt{10} \Phi_{\max}}} = 78,79 \sim 79 \text{ m} \quad (\text{antwoord})$$

3.3.1.3. Continue lozing aan een oever van een rivier (I)

Uit de opgave is af te leiden, dat het hier gaat om de verspreiding in dwarsrichting van een stof, die continu wordt geloosd.

Volgens de college-handleiding b71N wordt in zo'n geval de concentratieverdeling gegeven door de volgende formule:

$$\phi(x, y) = \frac{M}{au \sqrt{4\pi K_2(x/u)}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{4K_2(x/u)} \right\} \quad (1)$$

Dit geldt voor een "oneindig" brede rivier. Als op een zekere afstand y_0 vanuit een oever wordt geloosd, dan moet vanwege de voorwaarde, dat er geen transport van stof ter plaatse van de oever en loodrecht daarop kan plaats vinden, aan de lozing een zogenaamde fictieve lozing van dezelfde grootte worden toegevoegd op een afstand y_0 vanaf dezelfde oever, maar dan aan de andere kant. Deze fictieve lozing ontstaat dus door spiegeling van de oorspronkelijke lozing ten opzichte van de beschouwde oever (zie Fig. 1).

Bij een rivier met een beperkte breedte B speelt echter niet alleen één oever een rol, maar beide oevers. Naast de fictieve lozing 1 ten gevolge van de spiegeling ten opzichte van de rechter oever als gevolg van de eis, dat er geen stof door deze oever verdwijnt (zie Fig. 2), moet er om dezelfde reden met betrekking tot de linker oever nog een fictieve lozing 2 door spiegeling ten opzichte van deze linker oever aan de oorspronkelijke lozing worden toegevoegd.

Echter ook voor de aldus verkregen fictieve lozingen geldt weer de eis, dat $\partial\phi/\partial y = 0$ ter plaatse van de oevers. Dit betekent, dat aan de fictieve lozing 1, gevonden na spiegeling ten opzichte van de rechter oever, weer een fictieve lozing 3 moet worden toegevoegd door spiegeling ten opzichte van de linker oever, en aan de fictieve lozing 2, gevonden na spiegeling ten opzichte van de linker oever, weer een fictieve lozing 4 moet worden toegevoegd door spiegeling ten opzichte van de rechter oever (zie Fig. 3). Vervolgens moeten ook deze fictieve lozingen 3 en 4 weer gespiegeld worden enz.

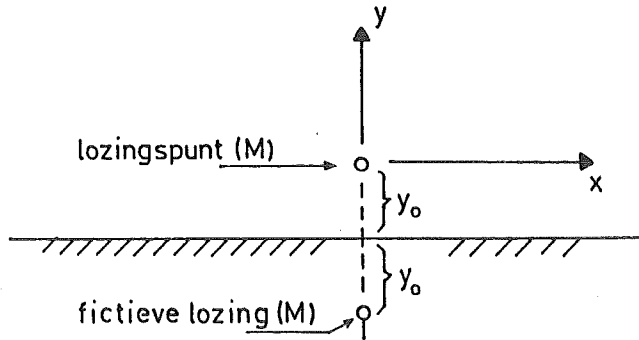


Fig. 1.

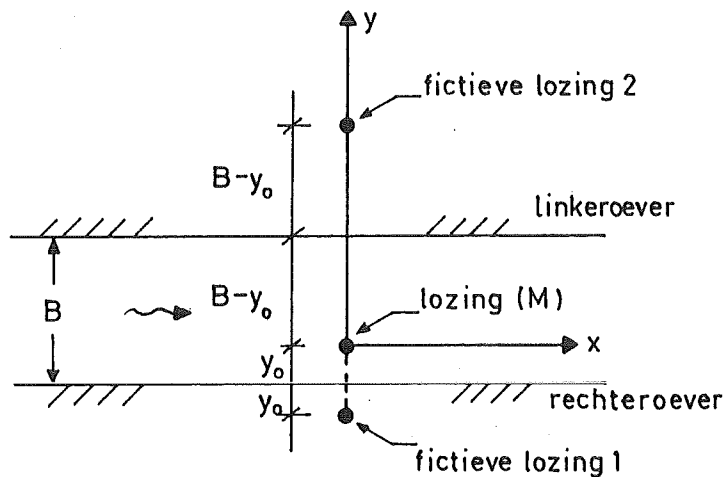


Fig. 2.

Vindt de lozing aan de oever plaats (dus $y_0 \rightarrow 0$), dan gaat de lozing samenvallen met de fictieve lozing 1, maar ook de fictieve lozingen 2 en 3 gaan dan samenvallen, en verdere fictieve lozingen. Dit betekent, dat bij een lozing aan een oever, groot M , vanwege de aanwezigheid van die oever, gerekend wordt met een lozing $2M$. Eén en ander komt er dan uit te zien zoals is weergegeven in Fig. 4.

De uitdrukking voor de concentratieverdeling wordt gevonden door de bijdrage van de lozing zelf en de respectieve fictieve lozingen te sommeren.

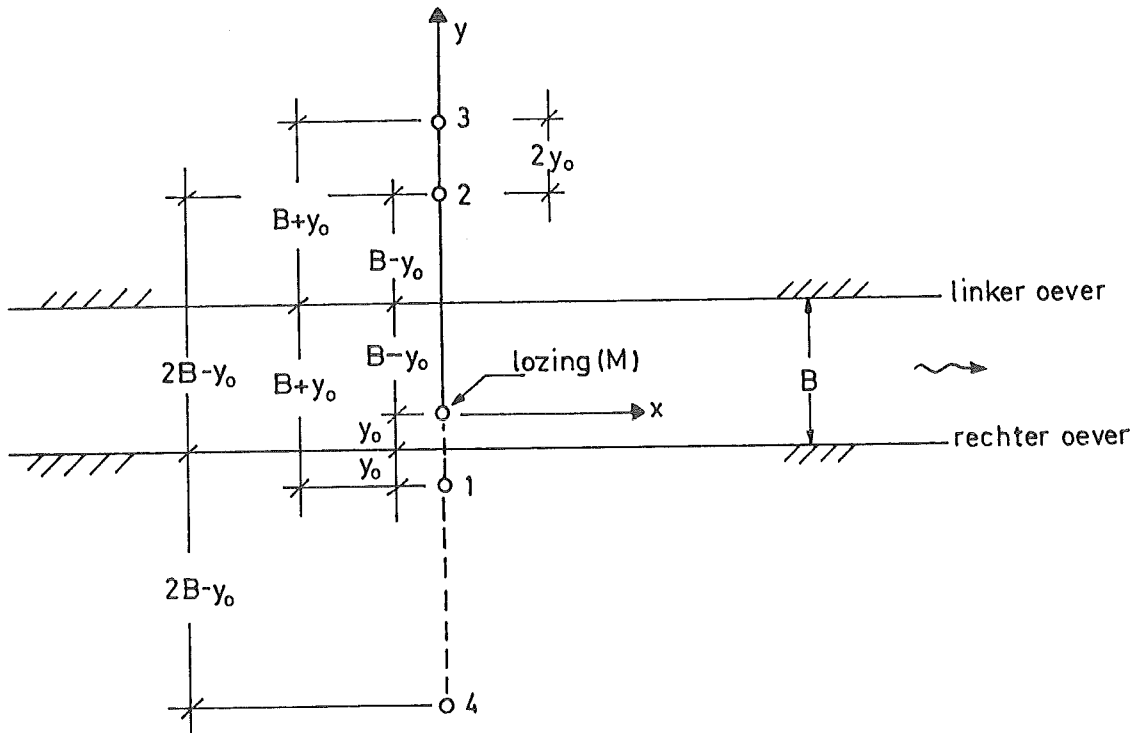


Fig. 3.

N.B. Iedere lozing heeft een andere y -as, immers de oorsprong van het assenkruis valt samen met het (fictieve) lozingspunt. De x -as is voor alle lozingen dezelfde.

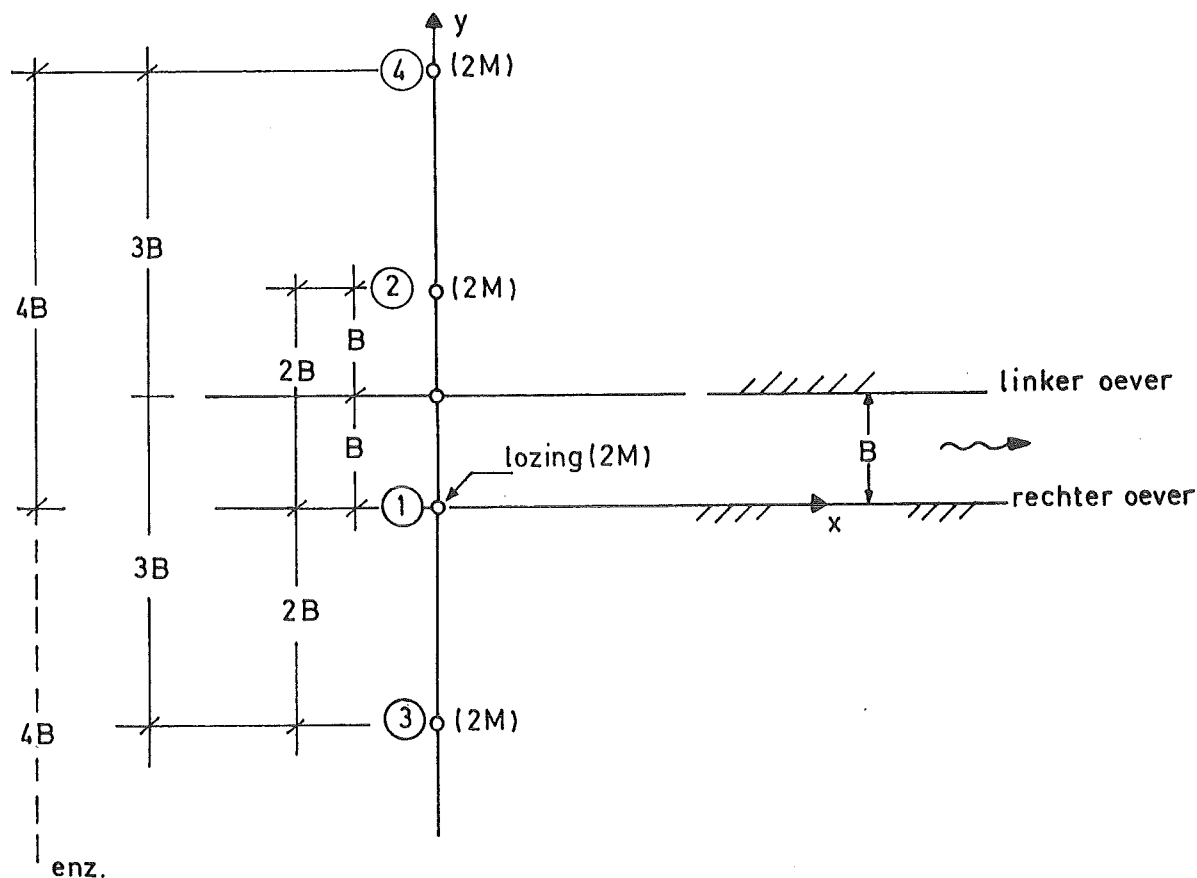


Fig. 4.

Bij de onderhavige opgave gaat het om de concentratie aan de linker oever. Daar in Vgl. (1) de y in het kwadraat staat, kan voor de y -waarde per lozingspunt meteen de afstand in de y -richting tussen het (fictieve) lozingspunt en de linker oever worden ingevuld. Er ontstaat dan ten gevolge van de sommatie de volgende reeks (lozingen groot $2M!$):

$$\Phi(x, B) = \frac{2M}{au \sqrt{4\pi K_2(x/u)}} \left\{ \exp\left(-\frac{B^2}{4K_2(x/u)}\right) + \boxed{\text{lozingspunt 1}} \right.$$

$$+ \exp\left(-\frac{B^2}{4K_2(x/u)}\right) + \exp\left(-\frac{(3B)^2}{4K_2(x/u)}\right) + \boxed{\text{lozingspunt 2}} \quad \boxed{\text{lozingspunt 3}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \exp\left(-\frac{(3B)^2}{4K_2(x/u)}\right) + \exp\left(-\frac{(5B)^2}{4K_2(x/u)}\right) + \dots = \\
 & \quad \boxed{\text{lozingspunt 4}} \\
 & = \frac{4M}{au \sqrt{4\pi K_2(x/u)}} \left\{ \exp\left(-\frac{B^2}{4K_2(x/u)}\right) + \right. \\
 & \quad \left. + \exp\left(-\frac{(3B)^2}{4K_2(x/u)}\right) + \exp\left(-\frac{(5B)^2}{4K_2(x/u)}\right) + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

ofwel

$$\Phi(x, B) = \frac{4M}{au \sqrt{4\pi K_2(x/u)}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{[(2n-1)B]^2}{4K_2(x/u)}\right) \right\} \quad (2)$$

De gemiddeld over de dwarsdoorsnede heersende concentratie is bij niet-afbreekbare stoffen in iedere dwarsdoorsnede bij een gegeven afvoer $Q = a \cdot B \cdot u$:

$$\Phi_{\text{gem.}} = \frac{M}{a \cdot u \cdot B} \quad (3)$$

Nagegaan moet nu worden of voor $x = 20$ km reeds geldt:

$$\frac{\Phi(20.000, B)}{\Phi_{\text{gem.}}} = 0,95 ? \quad (4)$$

dan wel dat dit eerst bij $x = 25$ km optreedt. Uitwerking van Vgl. (4) in formulevorm geeft:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Phi(x, B)}{\Phi_{\text{gem.}}} & = \frac{4B}{\sqrt{4\pi K_2(x/u)}} \left\{ \exp\left(-\frac{B^2}{4K_2(x/u)}\right) + \right. \\
 & \quad + \exp\left(-\frac{9B^2}{4K_2(x/u)}\right) + \exp\left(-\frac{25B^2}{4K_2(x/u)}\right) + \\
 & \quad \left. + \exp\left(-\frac{49B^2}{4K_2(x/u)}\right) + \dots \right\} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Uit de numerieke gegevens volgt $u = \frac{Q}{aB} = 0,5 \text{ m/s}$ en $K_2 = 0,6 \text{ au}_* = 0,6 \text{ a } \frac{u}{C} \sqrt{g} = 0,075 \text{ m}^2/\text{s}$.

Voor $x = 20 \text{ km}$ wordt dan gevonden met Vgl. (5):

$$\frac{\Phi(20.000, B)}{\Phi_{\text{gem.}}} = 2,06 \{0,43 + 5,53 \cdot 10^{-4} + \dots\} = 0,89 < 95\%$$

Voor $x = 25 \text{ km}$:

$$\frac{\Phi(25.000, B)}{\Phi_{\text{gem.}}} = 1,84 \{0,51 + 2,48 \cdot 10^{-3} + 5,78 \cdot 10^{-8} + \dots\} = 0,95 = 95\%$$

Dus voldoet aan de eis.

N.B. Het blijkt, dat de bijdrage van de respectieve termen uit de reeks snel afneemt (e-macht!), maar ook, dat naarmate het beschouwde punt verder weg ligt van het lozingspunt, steeds meer fictieve lozingen moeten worden meegenomen.

3.3.1.4. Bepaling plaats van een inlaatpunt

De concentratieverdeling van een instantaan geloosde hoeveelheid opgeloste stof in een willekeurige waterloop wordt beschreven door de formule: (zie college-handleiding b71N)

$$\phi = \frac{M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \exp \left(- \frac{(x - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)y^2}{4Kt} \right) \quad (1)$$

Om na te kunnen gaan of de mogelijke plaatsen als inlaatpunt geschikt zijn, wordt de maximaal optredende concentratie ter plaatse van x_1 en x_2 beschouwd. Gezien de grote afstand tussen deze punten en het lozingspunt wordt de maximale concentratie gevonden voor $x = \bar{u}t$.

Evenals bij de uitwerking in Par. 3.3.1.3. "Continue lozing aan een oever van een rivier" moet voor een juiste concentratieberekening rekening gehouden worden met de aanwezigheid van de oevers.

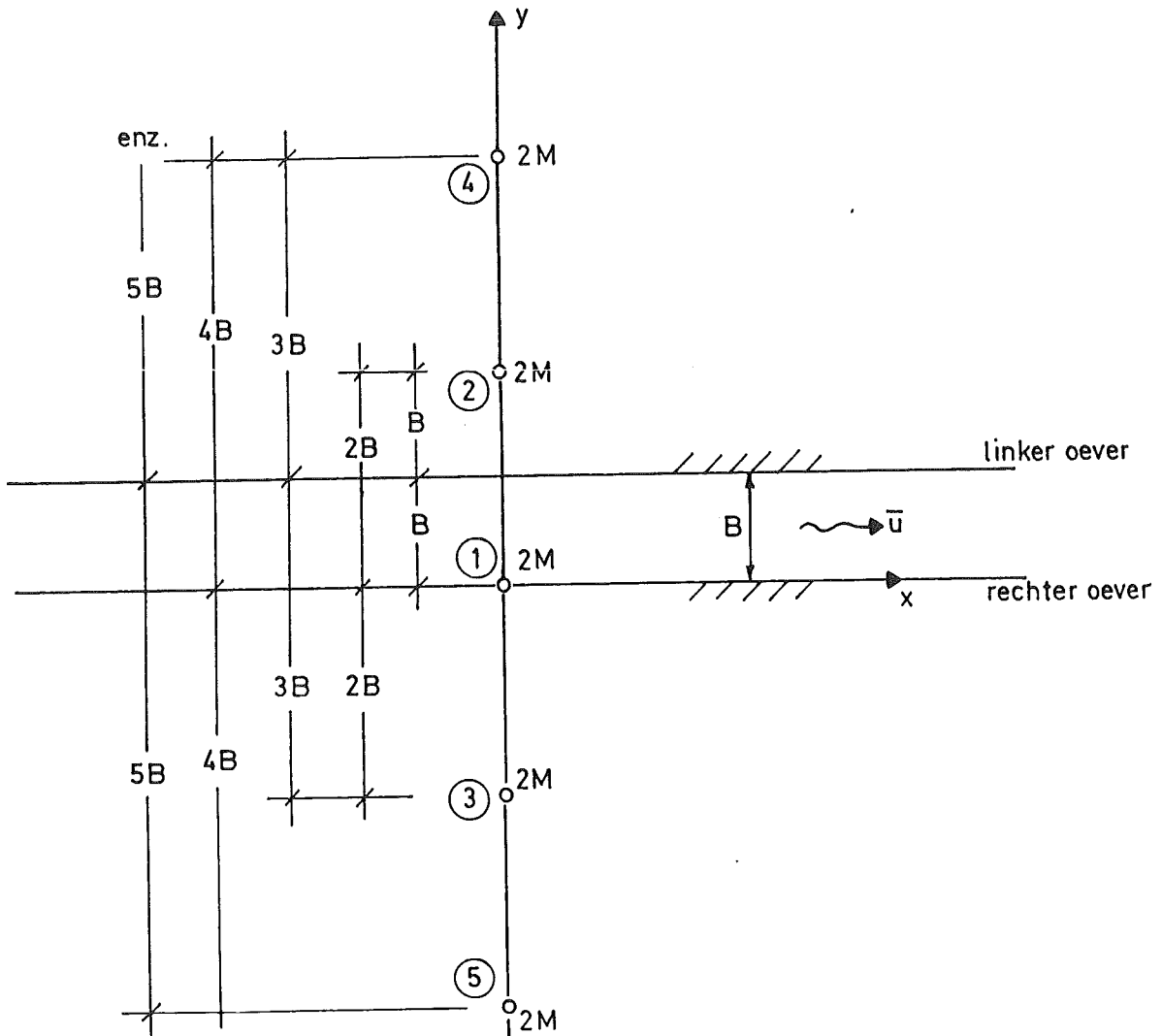
*Waarom
K/K₂*

In bijgaande figuur zijn de resp. fictieve lozings in analogie met de uitwerking in Par. 3.3.1.3. gepresenteerd.

De grootte van de concentratie langs de rechter oever wordt dan gevonden met:

$$\phi(x,0) = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bijdrage} \\ \text{lozingspunt zelf:} \\ y=0 \rightarrow \textcircled{1}}}{1} + 2 \exp\left(-\frac{(2B)^2}{4K_2 t}\right) + \textcircled{2} \text{ en } \textcircled{3} \right. \\ \left. + 2 \exp\left(-\frac{(4B)^2}{4K_2 t}\right) + 2 \exp\left(-\frac{(6B)^2}{4K_2 t}\right) + \dots \right\} \quad (2)$$

\textcircled{4} en \textcircled{5}



Voor de grootte van de dispersiecoëfficiënten wordt gevonden:

longitudinale dispersiecoëfficiënt:

$$K = 0,011 \frac{\bar{u}_B^2}{a u_*} = 0,011 \frac{\bar{u}_B^2 C}{a \sqrt{g}} = 37,5 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$K_2 = 0,6 a u_* = 0,6 a \frac{\bar{u}}{C} \sqrt{g} = 0,07 \text{ m}^2/\text{s}$$

Voor $x_1 = 25 \text{ km}$ geldt dan $t = t_1 = 2500/0,4 = 62.500 \text{ s}$. Dit is het moment, waarop de concentratie in x_1 maximaal is.

Invullen van de numerieke gegevens in de reeks van Vgl. (2) geeft de maximale concentratie in x_1 :

$$(\phi_1)_{\max} = 5,24 \cdot 10^{-7} \{1 + 1,129 + 0,203 + 0,012 + \dots\}$$

$$\sim 1,23 \cdot 10^{-6} > 1,1 \cdot 10^{-6}$$

dus niet geschikt.

Voor $x_2 = 40 \text{ km}$ geldt $t = t_2 = 40.000/0,4 = 10^5 \text{ s}$. De bijbehorende maximale concentratie is:

$$(\phi_2)_{\max} = 3,27 \cdot 10^{-7} \{1 + 1,399 + 0,479 + 0,080 + 0,066 +$$

$$+ 0,0003 + \dots\} = 9,7 \cdot 10^{-7} < 1,1 \cdot 10^{-6}$$

dus voldoet

(antwoord)

Opmerking 1:

Bij de uitwerking voor x_2 zijn meer termen meegenomen dan in Vgl. (2) zijn uitgeschreven, te weten:

$$\{\dots + 2 \exp[-(8B)^2/(4K_2 t_2)] + 2 \exp[-(10B)^2/(4K_2 t_2)]\}$$

Hieruit blijkt weer, dat naarmate het beschouwde punt verder weg ligt van het lozingspunt, meer fictieve lozingen mee in beschouwing moeten worden genomen.

Opmerking 2:

Bij de uitwerking is evenals bij de uitwerking van Par. 3.3.1.1. gesteld, dat in x_1 en x_2 het maximum wordt gevonden voor $x = \bar{u}t$, daar x_1 en x_2 groot zijn. Dat dit in z'n algemeenheid ook voor een 2-dimensionale situatie geldt moge uit het volgende blijken. De grootte van de concentratie wordt gegeven door (zie Vgl. (1)):

$$\phi = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2}} t \exp \left[-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4Kt} \right] \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(2nB)^2}{4K_2 t} \right] \right\}$$

$n = 0$, bijdrage in de concentratie van de lozing zelf.

$$\frac{d\phi}{dt} = C_1 (-t^{-2}) \exp [\dots] + C_1 (t^{-1}) \exp [\dots] *$$

$$* \left\{ -\frac{2(x - \bar{u}t)(-\bar{u})4Kt - (x - \bar{u}t)^2 \cdot 4K}{(4Kt)^2} \right\} = 0$$

$$\text{met } C_1 = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2}}$$

Uitgewerkt geeft dit:

$$\bar{u}^2 t^2 + 4Kt - x^2 = 0$$

Met als reële oplossing voor t :

$$t = \frac{-4K + \sqrt{16K^2 + 4\bar{u}^2 x^2}}{2\bar{u}}$$

Indien $4\bar{u}^2 x^2 \gg 16K^2$ levert dit $t = x/\bar{u}$. Uitwerking van deze voorwaarde geeft:

$$\bar{u}x \gg 2K \sim 0,02 \frac{\bar{u} B^2 C}{a \sqrt{g}}$$

Met de numerieke waarden wordt gevonden $x \gg 170$ m. Om na te gaan hoe de voorwaarde gaat luiden met betrekking tot de fictieve lozingen wordt uitgegaan van de concentratie t.g.v. twee symmetrisch t.o.v. de oever, waarlangs gemeten wordt, gelegen fictieve lozingspunten (bijv. $n = \pm 1$ of $n = \pm 3$):

$$\phi = C_1 \frac{1}{t} \exp \left(- \frac{(x - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)(2nB)^2}{4Kt} \right)$$

Uitwerking van $\frac{d\phi}{dt} = 0$ geeft in dit geval na enige herleiding:

$$\bar{u}^{-2} t^2 + 4Kt - \{x^2 + (K/K_2)(2nB)^2\} = 0$$

De reële oplossing voor t wordt dan:

$$t = \frac{-4K + \sqrt{16K^2 + 4\bar{u}^{-2} \{x^2 + (K/K_2)(2nB)^2\}}}{2\bar{u}^{-2}}$$

Uit het voorgaande bleek, dat al gauw geldt $4\bar{u}^{-2} x^2 \gg 16K^2$. Echter nu moet bovendien gelden:

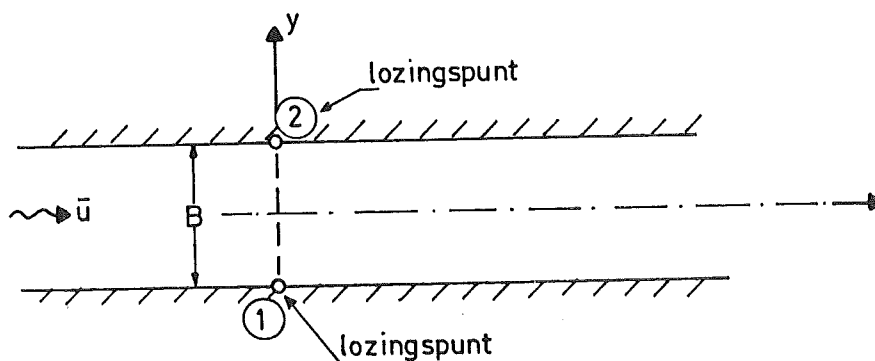
$$x^2 \gg (K/K_2)(2nB)^2$$

In het onderhavige geval geldt $K/K_2 = 535,7$.

$n = \pm 1$	$x \gg 2,3 \text{ km}$
± 2	$x \gg 4,6 \text{ km}$
± 3	$x \gg 6,9 \text{ km}$

Daar $x_1 = 25 \text{ km}$ blijkt dus, dat ook met betrekking tot de fictieve lozingen de beschouwde inlaatpunten ver genoeg weg liggen om te kunnen stellen, dat voor de maximale concentratie geldt $x = \bar{u}t$. Bovendien wordt de bijdrage in de concentratie van de resp. fictieve lozingen steeds kleiner.

3.3.1.5. Gelijktijdige instantane lozing op beide oevers van een waterloop



Uit het gegeven blijkt, dat voor de concentratie-berekening uitgegaan moet worden van een twee-dimensionale situatie (instantane lozing).

De concentratie ϕ wordt dan gegeven door de vergelijking:

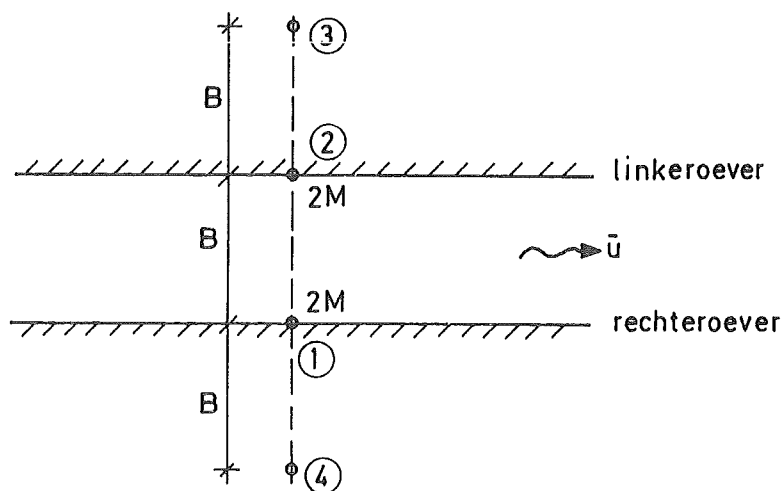
$$\phi(x, y, t) = \frac{M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \exp \left\{ - \frac{(x - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)y^2}{4Kt} \right\} \quad (1)$$

De lozingen vinden plaats in de punten ① en ②. De x-as wordt zodanig gekozen, dat deze samenvalt met de as van het kanaal.

(N.B. De x- en y-coördinaten in Vgl. (1) zijn zodanig gedefinieerd, dat de oorsprong van het bijbehorende assenstelsel samenvalt met het lozingspunt!).

Vanwege de aanwezigheid van de oevers (vaste wanden), dient naast de aanwezige werkelijke lozing, een fictieve lozing in rekening te worden gebracht, waarvan het lozingspunt overeenkomt met het ten opzichte van de beschouwde vaste wand gespiegelde punt van het werkelijke lozingspunt ① en ②. Daar de werkelijke lozingspunten aan de oevers zijn gelegen, betekent het bovenstaande, dat de lozingen met een factor 2 moeten worden verhoogd. (Werkelijk lozingspunt en fictief lozingspunt vallen samen.)

Voor een juiste concentratie-berekening in de as van het kanaal moet ook rekening worden gehouden met de linker oever voor wat betreft de lozing op de rechter oever en omgekeerd:



Bij de lozing in ①, groot 2M (incl. de gespiegelde) behoort een fictieve lozing, groot 2M in ③ vanwege de linkeroever. Evenzo de fictieve lozing in ④ vanwege de lozing in ②.

Rekening houdend met het gekozen assenkruis heeft de lozing in (1) (incl. de fictieve) een concentratie ϕ_1 in de as van de waterloop:

$$\phi_1 = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \exp \left\{ - \frac{(x - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)(\frac{1}{2}B)^2}{4Kt} \right\} \quad (2)$$

De lozing in punt (2) geeft in de as van de waterloop een concentratie:

$$\phi_2 = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \exp \left\{ - \frac{(x - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)(\frac{1}{2}B)^2}{4Kt} \right\} \quad (3)$$

De bijdrage in de concentratie in de as van de waterloop van de fictieve lozingen in de punten (3) en (4) is gelijk:

$$\phi_3 = \phi_4 = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \exp \left\{ - \frac{(x - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)(1\frac{1}{2}B)^2}{4Kt} \right\} \quad (4)$$

Aan de fictieve lozingen (3) en (4) zouden weer fictieve lozingen moeten worden toegevoegd in resp. $(0, -2\frac{1}{2}B)$ en $(0, 2\frac{1}{2}B)$. De bijdragen van deze lozingen ten opzichte van de anderen worden verwaarloosbaar klein verondersteld.

De maximale concentratie op een willekeurig tijdstip in de as van de waterloop wordt nu gegeven door:

$$\Phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \quad (5)$$

met de voorwaarde:

$$x = \bar{u}t \quad (\text{meebewegend assenstelsel}) \quad (6)$$

Invulling van de Vgl. (6), (2), (3) en (4) in (5) geeft:

$$\Phi = \frac{4M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \left(\exp \left\{ - \frac{(\frac{1}{2}B)^2}{4K_2 t} \right\} + \exp \left\{ - \frac{(1\frac{1}{2}B)^2}{4K_2 t} \right\} \right) \quad (7)$$

Veronderstel nu dat de bijdragen van de fictieve lozingen in (3) en (4) voor het maximum in de as van de waterloop te verwaarlozen zijn ten opzichte van de bijdragen van de lozingen in (1) en (2) (later te controleren). Dit betekent, dat Vgl. (7) als volgt kan worden vereenvoudigd:

$$\Phi = \frac{M}{\pi a \sqrt{K K_2}} \exp \left\{ - \frac{(\frac{1}{2}B)^2}{4K_2 t} \right\} \quad (8)$$

Het moment, waarop het werkelijke maximum optreedt, wordt gevonden uit:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (9)$$

Uitwerking van Vgl. (9) met Vgl. (8):

$$\frac{M}{\pi a \sqrt{K K_2}} \left(- \frac{1}{t^2} \exp \{ \dots \} + \frac{1}{t} \frac{B^2}{16K_2 t^2} \exp \{ \dots \} \right) = 0$$

Hieruit volgt, dat het maximum Φ_{\max} optreedt op:

$$t = \frac{B^2}{16K_2} \quad (10)$$

en wel in:

$$x = \bar{u}t = \frac{\bar{u}B^2}{16K_2} \quad (11)$$

De grootte van de dispersiecoëfficiënten volgt uit:

$$K = 0,011 \frac{\bar{u}^2 B^2}{a u_*} = 0,011 \frac{\bar{u} \cdot B^2 C}{a \sqrt{g}} = 316 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$K_2 = 0,6 a u_* = 0,6 a \frac{\bar{u}}{C} \sqrt{g} = 0,21 \text{ m}^2/\text{s}$$

Het maximum treedt dus op, op (Vgl. 10):

$$t = \frac{(100)^2}{16 \cdot 0,21} = 2976 \text{ s} \sim 50 \text{ minuten na het moment van lozen}$$

(antwoord)

$x = \bar{u}t \sim 3 \text{ km}$ benedenstrooms van de lozingspunten
(antwoord)

De maximale concentratie Φ_{\max} bedraagt dan:

$$\Phi_{\max} = \frac{M}{\pi a \sqrt{K K_2}} \frac{16K_2}{B^2} \exp[-1]$$

en met de numerieke gegevens:

$$\Phi_{\max} = 4,8 \cdot 10^{-8} \quad (\text{antwoord})$$

Controle verwaarlozing bijdrage van de fictieve lozingen in (3) en (4)
(zie Vgl. (7) en (10)).

$$\exp\left\{-\frac{(\frac{1}{2}B)^2}{4K_2 t}\right\} = \exp[-1] = 0,37 = 3700 \cdot 10^{-4}$$

$$\exp\left\{-\frac{(1\frac{1}{2}B)^2}{4K_2 t}\right\} = \exp[-9] = 1,2 \cdot 10^{-4}$$

Dus bijdrage bij gevonden t inderdaad verwaarloosbaar klein.

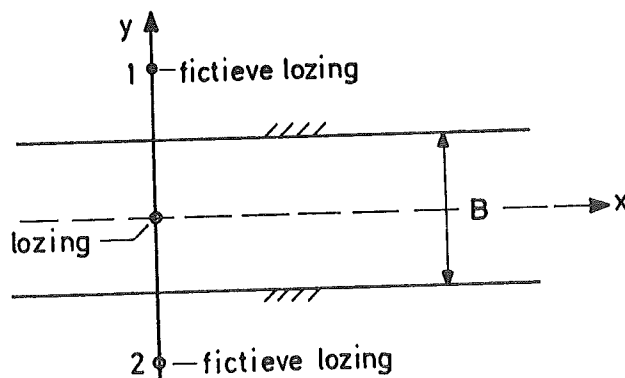
Uitgaande van de gevonden t volgens Vgl. (10) zou ook nog nagegaan moeten worden of de $\frac{d\Phi}{dt} =$ toegepast op Vgl. (7) nul of bij benadering nul is. Gezien het bovenstaande en de uitwerking van Vgl. (9) mag dit gevoeglijk worden aangenomen.

3.3.1.6. Lozing vanaf een schip

Vraag 1

De concentratieverdeling van de geloosde stof in de waterloop wordt beschreven door (2-dimensionaal model: instantane lozing):

$$\phi = \frac{M}{4\pi a \sqrt{K K_2}} t \exp\left\{-\frac{(x - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)y^2}{4Kt}\right\} \quad (1)$$



De concentratie, die vanaf de meetboot wordt waargenomen, wordt gevonden voor $y = 0$. In verband met de oevers dienen de fictieve lozingen in de punten 1 en 2 ($y = \pm B$) ook meegenomen te worden. De fictieve lozingen in de punten $y = \pm 2 B$ worden vooralsnog buiten beschouwing gelaten. (later controleren)

De concentratieverdeling in het midden van de waterloop wordt dus gegeven door:

$$\phi = \frac{M}{4\pi a \sqrt{K K_2}} t \exp\left(-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4Kt}\right) \left\{1 + 2 \exp\left(-\frac{B^2}{4K_2 t}\right)\right\} \quad (2)$$

De plaats van de meetboot in het gegeven assenkruis is:

$$x = x_1 - u_v \cdot t \quad (3)$$

De maximale waarde van de gemeten concentratie wordt dus gevonden (bij voldoende grote afstand vanaf het lozingspunt) voor:

$$\exp\left\{-\frac{(x_1 - u_v t - \bar{u}t)^2}{4Kt}\right\} = 1$$

ofwel

$$x_1 = (u_v + \bar{u})t$$

en

$$t = 6400 \text{ s} \quad (\text{antwoord})$$

De meetboot bevindt zich dan op:

$$x = 8000 - u_v t = 6400 \text{ m} \quad \text{benedenstrooms van het lozingspunt.} \quad (\text{antwoord})$$

Vraag 2

De gemeten maximale concentratie wordt dan gevonden uit:

$$\phi = \frac{M}{4\pi a \sqrt{K K_2}} t \cdot \left(1 + 2 \exp\left(-\frac{B^2}{4K_2 t}\right)\right) \quad (4)$$

De grootte van de dispersiecoëfficiënten wordt:

$$K = 0,011 \frac{\bar{u}^2 B^2}{a u_*} = 0,11 \frac{\bar{u} B^2 C}{a \sqrt{g}} = 468 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$K_2 = 0,6 a u_* = 0,6 a \bar{u} \sqrt{g}/C = 0,14 \text{ m}^2/\text{s}$$

Invulling van de numerieke waarden in Vgl. (4) geeft de gevraagde concentratie $\phi = 5,7 \cdot 10^{-8}$ (antwoord)

Controle verwaarlozing fictieve lozingen in $y = \pm 2B$:

$$\exp\left(-\frac{4B^2}{4K_2 t}\right) \ll 1 ?$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 6400 \text{ s} \\ B = 100 \text{ m} \\ K_2 = 0,14 \text{ m}^2/\text{s} \end{array} \right\} \rightarrow 1,4 \cdot 10^{-5} \ll 1 \quad \text{dus } \underline{\text{correct}}$$

3.3.1.7. Localisering van een lozingspunt

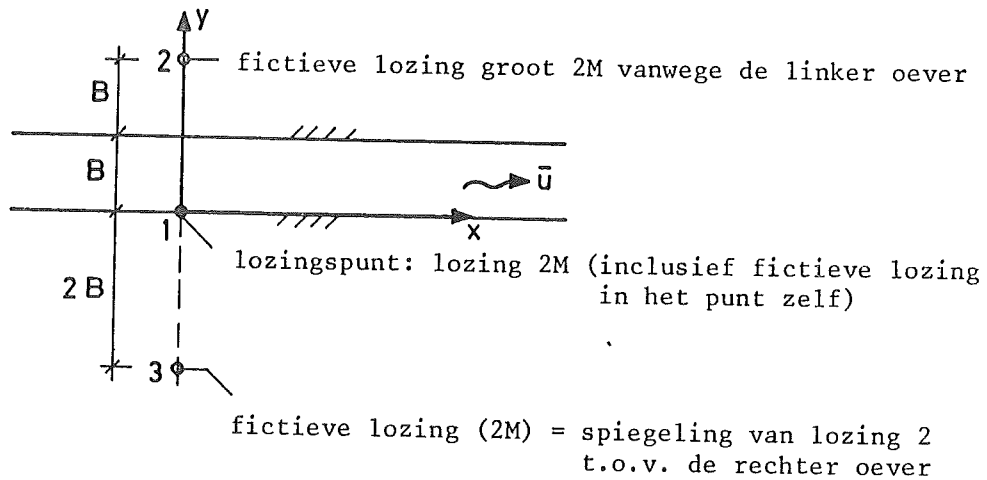
Vraag 1

De concentratieverdeling op de rivier heeft een 2-dimensionaal karakter (instantane lozing):

$$\phi(x, y, t) = \frac{M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \exp\left\{-\frac{(x - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)y^2}{4Kt}\right\} \quad (1)$$

Rekening houdend met de aanwezigheid van de oevers geldt voor de max. optredende concentratie langs de rechter oever (meebewegend assenstelsel: $x = \bar{u}t$):

$$(\phi_r)_{\max} = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \left[1 + 2 \exp\left\{-\frac{(2B)^2}{4K_2 t}\right\} + \dots\right] \quad (2)$$



Hierin heeft de term $[2 \exp \{- (2B)^2 / (4K_2 t)\}]$ betrekking op de fictieve lozingen in de punten 2 en 3. Veronderstel nu dat de bijdrage van deze term in de gemeten maximale concentraties in I en II verwaarloosbaar klein is (later te controleren). Er geldt dan:

$$(\phi_1)_{\max} = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2}} \frac{1}{t_1} \quad (3)$$

met $t_1 = \frac{x_1}{\bar{u}}$, x_1 is de gevraagde afstand van het lozingspunt tot het meetstation I. (Vgl. (3) geldt indien x_1 niet te klein blijkt te zijn). Voor $(\phi_2)_{\max}$ geldt:

$$(\phi_2)_{\max} = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2}} \frac{1}{t_2} \quad (4)$$

$$\text{met } t_2 = \frac{x_1 + \Delta x}{\bar{u}} \quad (5)$$

$$\frac{(\phi_1)_{\max}}{(\phi_2)_{\max}} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{x_1 + \Delta x}{x_1} = 1 + \frac{\Delta x}{x_1} \quad (6)$$

Met de numerieke gegevens wordt dan gevonden:

$$x_1 = 3 \text{ km}$$

(antwoord)

x_1 is dus niet te klein.

Controle verwaarlozing 2e term (voor station II, immers hoe verder van het lozingspunt hoe meer invloed van de fictieve lozingen in 2 en 3):

$$2 \exp \left\{ - \frac{(2B)^2}{4K_2 t_2} \right\} \approx 4,7 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

dus verwaarlozing was correct.

$$K_2 = 0,6 \text{ au}_* = 0,6 \text{ a } \frac{\bar{u}}{C} \sqrt{g} = 0,125 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$t_2 = 7500 \text{ s}$$

Vraag 2

$$K = 0,011 \frac{\bar{u} B^2 C}{a \sqrt{g}} = 526,8 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$(\phi_1)_{\max} = \frac{2M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t_1} = 4 \cdot 10^{-7} \quad (7)$$

$$t_1 = 3000 \text{ s}$$

De gevraagde grootte van M wordt dan:

$$M = 0,18355 \text{ m}^3 = 183,6 \text{ liter} \quad (\text{antwoord})$$

Vraag 3

Voor de concentratie bepaling langs de linker oever dient naast het lozingspunt 1 ook de fictieve lozing 2 te worden meegenomen. Er geldt voor de concentratie langs de linker oever ter hoogte van het meetstation II:

$$\phi_{\lambda} = \frac{4M}{4\pi a \sqrt{K K_2} t} \exp \left\{ - \frac{(x_2 - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)B^2}{4Kt} \right\} \quad (8)$$

Veronderstel $x_2 = x_1 + \Delta t = 7500$ m is voldoende groot om te kunnen aannemen, dat de maximale concentratie optreedt voor $x_2 = \bar{u}t$ (later controleren). Vergelijking (8) wordt dan met $t_2 = x_2/\bar{u}$:

$$(\phi_\lambda)_{\max} = \frac{M}{\pi a \sqrt{K K_2}} t_2 \exp \left\{ -\frac{B^2}{4K_2 t_2} \right\} = 2(\phi_2)_{\max} \exp \left\{ -\frac{B^2}{4K_2 t_2} \right\} \quad (9)$$

De numerieke uitwerking geeft dan ($t_2 = 7500$ s):

$$(\phi_\lambda)_{\max} = 2.1,6 \cdot 10^{-7} \cdot 0,07 = 2,2 \cdot 10^{-8}$$

Controle:

De maximale waarde wordt gevonden uit $\frac{d\phi}{dt} = 0$. Toegepast op Vgl. (8) geeft dit:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= C_1 \left(-\frac{1}{2}\right) \exp[\dots] + C_1 \left(\frac{1}{t}\right) \exp[\dots] * \\ * \left\{ -\frac{2(x - \bar{u}t)(-\bar{u})(4Kt) - [(x - \bar{u}t)^2 + (K/K_2)B^2]4K}{(4Kt)^2} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

waarin $C_1 = \frac{M}{\pi a \sqrt{K K_2}}$

Na enig herleiden wordt gevonden:

$$\begin{aligned} (\bar{u}^{-2})t^2 + (4K)t - (x^2 + (K/K_2)B^2) &= 0 \\ t &= \frac{-4K + \sqrt{16K^2 + 4\bar{u}^{-2}(x^2 + (K/K_2)B^2)}}{2\bar{u}^{-2}} \end{aligned} \quad (10)$$

Indien x zeer groot:

$$t = \frac{2\bar{u}x}{2\bar{u}^{-2}} = \frac{x}{\bar{u}} = t_2 = 7500 \text{ s}$$

Invulling van de numerieke gegevens in Vgl. (10) geeft met
 $x = x_2 = 7500 \text{ m}$:

$$t = 8921,6 \text{ s} > t_2 \quad \text{dus } x_2 \text{ kennelijk niet groot genoeg.}$$

De bijbehorende maximale concentratie wordt dan:

$$(\phi_\lambda)_{\max} = 2,6 \cdot 10^{-8} \quad \text{(antwoord)}$$

3.3.2. Transport van bodemmateriaal

3.3.2.1. Sedimentbezwaar bij wateronttrekking

Vraag 1

Analyse

Gebruik de Rouse-verdeling voor de concentratie van sediment in suspensie:

$$\frac{\phi(\frac{1}{4} a)}{\phi_1} = f(a, Z)$$

waarbij:

$$Z = \frac{W}{k u_*}$$

$$u_* = (g a i_b)^{\frac{1}{2}}$$

$$W = \left(\frac{4}{3 C_D} \Delta g D_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

en tevens een relatie $D_n - D_s$, zodat een betrekking $W - D_s$ wordt verkregen.

Uitwerking

$$\frac{\phi(z)}{\phi_1} = \left\{ \frac{z_1}{a - z_1} \frac{a - z}{z} \right\}^Z$$

$z = \frac{1}{4} a$ en $z_1 = \frac{1}{2} a$ zodat:

$$\frac{\phi(\frac{1}{4} a)}{\phi_1} = 3^{Ku_*}$$

$$u_* = \sqrt{g a i_b} = 0,02 \sqrt{36} = 0,12 \text{ m/s}$$

$W = f(D_s)$ is niet direct beschikbaar;

In de collegehandleiding wordt grafisch een relatie gegeven tussen de zeefdiameter D_s en de valsnelheid W voor verschillende temperaturen en vormfactoren γ . Uit deze figuur blijkt, dat bij $\theta = 20^\circ\text{C}$ sedimentdeeltjes met $D_s = 0,2 \text{ mm}$ en vormfactor $\gamma = 0,7$ een valsnelheid W hebben gelijk aan 25 mm/s . Dus:

$$Z = \frac{W}{Ku_*} = 0,52$$

en

$$\frac{\phi(\frac{1}{4} a)}{\phi_1} = 1,77$$

Er volgt dat $\phi(\frac{1}{4} a) = 1,0 \cdot 10^{-4}$

(antwoord)

Opmerking

De uitkomst is slechts een schatting voor de werkelijke sedimentconcentratie in het onttrokken water, omdat de onttrekkingsnelheid in het algemeen niet gelijk is aan de ter plaatse optredende snelheid bij ongestoorde stroming (zowel qua grootte als qua richting).

Vraag 2

Analyse

$$F_1 = u_1 \phi + \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$u_1(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad \text{met} \quad z_0 = \frac{\kappa}{32}$$

Uniforme stroom $\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$

Uitwerking

$$u_1\left(\frac{1}{4} a\right) = \frac{0,12}{0,4} \ln\left(\frac{3,67}{4} \frac{32}{0,3}\right) = 1,4 \text{ m/s}$$

$$F_1\left(\frac{1}{4} a\right) = u_1\left(\frac{1}{4} a\right) \cdot \phi\left(\frac{1}{4} a\right) = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \quad (\text{antwoord})$$

3.3.2.2. Gemiddelde concentratie

Vraag 1

Uitgangspunt is de gedachte dat de theoretische concentratieverdeling van gesuspendeerd sediment volgens Rouse van toepassing is en dat de gemeten concentraties een schatting voor deze verdeling leveren. De theoretische concentratieverdeling luidt: (zie ook de collegehand-leiding b71N)

$$\phi(z) = \phi_0 f \{a, z, Z\} \quad (1)$$

waarin:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \text{referentieconcentratie op } z = z_0, \\ Z &= \frac{W}{\kappa u_*}\end{aligned}\tag{2}$$

Met behulp van de "kleinste kwadraten" methode wordt uit de metingen de referentieconcentratie ϕ_0 bepaald; daarbij wordt Z bekend verondersteld. ϕ_0 volgt uit de eis dat:

$$S = \sum_1^n (C_i - \phi_i)^2 = \sum_1^n \{C_i - \phi_0 f(a, z_i, Z)\}^2\tag{3}$$

zo klein mogelijk is, ofwel dat:

$$\frac{dS}{d\phi_0} = 0\tag{4}$$

Met gebruikmaking van de notatie $f_i = f(a, z_i, Z)$ resulteert dit in de volgende uitdrukking voor de referentieconcentratie:

$$\phi_0 = \frac{\sum_1^n C_i f_i}{\sum_1^n f_i^2}\tag{5}$$

Voor de gemiddelde concentratie $\bar{\phi}$ vindt men vervolgens:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{a - z_0} \int_{z_0}^a \phi_0 f(a, z, Z) dz = \phi_0 F_0(Z)\tag{6}$$

waarin:

$$F_0(Z) = \frac{1}{a - z_0} \int_{z_0}^a f(a, z, Z) dz \quad (\text{antwoord})$$

Hierbij is het niveau z_0 dicht bij de bodem gekozen ($z_0 \ll a$).

N.B. Wanneer $Z \neq 2$, dan is de functie F_0 niet analytisch te bepalen; voor een numerieke benadering wordt verwezen naar H.A. Einstein (1950), zie de literatuurlijst collegehandleiding b71N.

Vraag 2

In de uitdrukking $\bar{\phi} = \phi_0 F_0(Z)$ bevat alleen de referentieconcentratie ϕ_0 fouten, namelijk in de gemeten concentraties C_i . Voor de relatieve fout in $\bar{\phi}$ volgt dus:

$$r_{\bar{\phi}} = \frac{\sigma_{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} = \frac{F_0 \sigma_{\phi_0}}{\bar{\phi}} = \frac{\sigma_{\phi_0}}{\phi_0} \quad (7)$$

Voor de referentieconcentratie ϕ_0 is gevonden:

$$\phi_0 = \frac{\sum_1^n C_i f_i}{\sum_1^n f_i^2} = \frac{C_1 f_1 + C_2 f_2 + \dots + C_n f_n}{\sum_1^n f_i^2} \quad (8)$$

Toepassing van de regel voor de voortplanting van fouten levert:

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi_0}^2 &= \sum_1^n \left\{ \frac{\partial \phi_0}{\partial C_i} \sigma_{C_i} \right\}^2 && \text{(geen covarianties)} \\ &= \left\{ \frac{\partial \phi_0}{\partial C_1} \sigma_{C_1} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \phi_0}{\partial C_2} \sigma_{C_2} \right\}^2 + \dots + \left\{ \frac{\partial \phi_0}{\partial C_n} \sigma_{C_n} \right\}^2 \\ &= \frac{(f_1 \sigma_{C_1})^2 + (f_2 \sigma_{C_2})^2 + \dots + (f_n \sigma_{C_n})^2}{\left(\sum_1^n f_i^2 \right)^2} \end{aligned}$$

Dus

$$\sigma_{\phi_0}^2 = \frac{\sum_1^n (f_i \sigma_{C_i})^2}{\left(\sum_1^n f_i^2 \right)^2} \quad (9)$$

Nu is de relatieve fout in meting i per definitie:

$$r_{C_i} = \frac{\sigma_{C_i}}{C_i} \quad (10)$$

zodat:

$$\sigma_{C_i} = r_{C_i} \phi_0 f_i \quad (11)$$

Substitutie van Vgl. (9) en Vgl. (11) in Vgl. (7) levert:

$$r_{\bar{\phi}} = \frac{1}{\phi_0} \left\{ \frac{\sum_1^n (f_i \sigma_{C_i})^2}{(\sum_1^n f_i^2)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$r_{\bar{\phi}} = \frac{1}{\phi_0} \frac{\left\{ \sum_1^n (f_i^2 r_{C_i} \phi_0)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\sum_1^n f_i^2} \quad (13)$$

Omdat $r_{C_i} = \text{constant} (= r_C)$ volgt:

$$r_{\bar{\phi}} = r_C \frac{\left\{ \sum_1^n f_i^4 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\sum_1^n f_i^2} \quad (\text{antwoord}) \quad (14)$$

3.4. Sedimenttransport en alluviale ruwheid

3.4.1. Transport grof materiaal bij hoogwater in de Waal

Algemene opmerking

De grofheid van het bodemmateriaal doet vermoeden dat er nauwelijks suspensietransport zal optreden (te verifiëren door de parameter

$$Z = \frac{W}{ku_*} \text{ te berekenen).}$$

Dit geeft aanleiding een eerste schatting van het transport te baseren op de formule van Meijer-Peter & Müller. Met behulp van de methode Ackers-White zal een tweede schatting worden gemaakt.

Uitwerking

$$Z = \frac{W_{35}}{ku_*} = \frac{15 \cdot 10^{-2}}{0,4 \cdot 10^{-2} (9,81 \cdot 9,38 \cdot 1,15)^{\frac{1}{2}}} = 3,6$$

Deze uitkomst bevestigt het vermoeden dat het transport in suspensie in dit geval onbelangrijk is; merk op dat in de uitdrukking voor Z de valsnelheid die past bij de kleinste van de 4 gegeven korrelgrootten is ingevuld.

• Meijer-Peter & Müller:

$$C_{90} = 18 \log \frac{12a}{D_{90}} = 18 \log 13321 = 74,2 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$$

$$C = \frac{u}{\sqrt{a} s} = \frac{1,53}{3,28 \cdot 10^{-2}} = 46,6 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$$

? $C = 18 \log_{12} \frac{R}{k}$
 $= 18 \log_{12} \frac{d}{D}$

Voor de ribbelfactor volgt:

$$\mu_{MPM} = \left\{ \frac{C}{C_{90}} \right\}^{3/2} = 0,628^{3/2} = 0,497$$

en voor de stroomparameter:

$$Y = \frac{\Delta \bar{D}}{\mu a i_s} = \frac{1,65 \cdot 2,9 \cdot 10^{-3}}{0,497 \cdot 9,38 \cdot 1,15 \cdot 10^{-4}} = 8,925$$

Dit geeft als resultaat voor de transportparameter:

$$X = 13,3 \left\{ \frac{1}{Y} - 0,047 \right\}^{3/2} = 13,3 \cdot 0,065^{3/2} = 0,220$$

Het transport van bodemmateriaal per eenheid van breedte, geschat met behulp van de formule van Meijer-Peter & Müller, bedraagt dus:

$$s = X \{ \Delta g \bar{D} \}^{1/2} \bar{D} = 1,38 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{inclusief 40\% poriënvolume})$$

$$s' = (1-\epsilon) s = 0,83 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{korrelvolume})$$

• Ackers & White:

$$\begin{aligned} D_{gr} &= D_{35} \{ \Delta g v^{-2} \}^{1/3} \\ &= 1,3 \cdot 10^{-3} \cdot 2,318 \cdot 10^4 = 30,1 \end{aligned}$$

dus

$$1 < D_{gr} < 60.$$

Voor de diverse coëfficiënten volgt nu:

$$n' = 1,0 - 0,56 \log D_{gr} = 1,0 - 0,56 \cdot 1,479 = 0,172$$

$$A' = 0,23 D_{gr}^{-1/2} + 0,14 = 0,23 \cdot 0,182 + 0,14 = 0,182$$

$$\log C' = 2,86 \log D_{gr} - (\log D_{gr})^2 - 3,53$$

$$= 2,86 \cdot 1,479 - 2,188 - 3,53 = -1,488 \rightarrow C' = 3,25 \cdot 10^{-2}$$

$$m' = \frac{9,66}{D_{gn}} + 1,34 = 1,661$$

Voor F_{gr} , een maat voor de mobiliteit der korrels, wordt nu gevonden:

$$F_{gr} = \frac{u_*^{n'}}{\sqrt{\Delta g D_{35}}} \left\{ \frac{u}{\sqrt{32 \log \frac{10 a}{D_{35}}}} \right\}^{1-n'}$$

$$= \frac{(9,81 \cdot 9,38 \cdot 1,15 \cdot 10^{-4})^{0,086}}{(1,65 \cdot 9,81 \cdot 1,3 \cdot 10^{-3})^{0,5}} \left\{ \frac{1,53}{5,657 \log 72154} \right\} = 0,828$$

$$F_{gr} = 0,426$$

$$G_{gr} = C' \left\{ \frac{F_{gr}}{A'} - 1 \right\}^{m'}$$

$$= 3,25 \cdot 10^{-2} \left\{ \frac{0,426}{0,182} - 1 \right\}^{1,66} = 5,29 \cdot 10^{-2}$$

Daaruit volgt voor de gemiddelde massa-verhouding:

$$X_* = \frac{(\Delta + 1) D_{35} G_{gr}}{a} \left(\frac{C}{\sqrt{g}} \right)^{n'}$$

$$= \frac{2,65 \cdot 1,3 \cdot 10^{-3} \cdot 5,29 \cdot 10^{-2}}{9,38} \cdot 14,88^{0,172} = 3,09 \cdot 10^{-5}$$

en voor het volumetransport:

$$s = \frac{\rho a u}{\rho_s (1-\epsilon)} X_*$$

$$= \frac{9,38 \cdot 1,53}{2,65 \cdot 0,6} 3,09 \cdot 10^{-5} = 2,79 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

(inclusief 40% poriënvolume)

$$s' = (1-\epsilon) s = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{korrelvolume})$$

Een transportschatting m.b.v. de methode Ackers & White geeft in dit geval een uitkomst die circa 2 maal zo groot is als die bij toepassing van de formule van Meijer-Peter & Müller.

3.4.2. Transport bodemmateriaal (I)

Algemene opmerking

De betrekkelijk geringe korrelgrootte van het sediment in samenhang met de gegeven stromingskarakteristieken wijst erop dat het begin van beweging ruimschoots is overschreden, zodat het probleem met de formule van Engelund & Hansen kan worden aangepakt. Dan moet geverifieerd worden dat de bodem oneffenheden uit duinen bestaan.

Vraag 1

$$C = u(a \ i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{q}{a} (a \ i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{100}{\sqrt{5}} = 44,7 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$$

$$\frac{C^2}{g} = 203,7$$

$$\left\{ \frac{a \ i}{\Delta D_{50}} \right\}^{5/2} = \left\{ \frac{5 \cdot 10^{-4}}{1,65 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}} \right\}^{5/2} = 0,50$$

$$\left\{ \Delta g \ D_{50}^3 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,4 \cdot 10^{-3} \sqrt{1,65 \cdot 9,81 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}}$$
$$= 3,22 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

Dus

$$s = \frac{0,05}{1-\epsilon} 203,7 \cdot 0,50 \cdot 3,22 \cdot 10^{-5}$$
$$= \frac{1,640}{1-\epsilon} 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{inklusief poriënvolume})$$

$$\epsilon = 0,4 \rightarrow s = 2,73 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} = 23,6 \text{ m}^2/\text{dag}$$

Gaat het niet om een morfologisch probleem, maar bijv. om zandwinning, dan is het transport uitgedrukt in korrelvolume relevant:

$$s' = (1-\epsilon) s = 1,640 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} = 14,2 \text{ m}^2/\text{dag}$$

$$Re_* = \frac{u_* D_{50}}{\nu} = \frac{7,00 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = 28$$

zodat $\psi_{cr} \approx 0,035$

$$\text{Nu is } \psi = \frac{u_*^2}{\Delta g D_{50}} = \frac{4,905 \cdot 10^{-3}}{1,65 \cdot 9,81 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}} = 0,758$$

*Wat als het
vrij was
deze getallen
"aanpak"*

Omdat ψ/ψ_{cr} meer dan 20 bedraagt, is voldaan aan de eis dat het begin van beweging ruim wordt overschreden.

Vraag 2

$$C = 18 \log 12 \frac{a}{k}$$

zodat

$$k = 12a \cdot 10^{-C/18} = 12 \cdot 5 \cdot 3,3 \cdot 10^{-3} = 0,20 \text{ m}$$

Deze uitkomst voor de Nikuradse-ruwheid maakt aannemelijk dat de bodemvormen niet bestaan uit ribbels maar uit duinen, hetgeen een voorwaarde is voor toepassing van de formule van Engelund & Hansen.

3.5. Morfologische voorspellingen

3.5.1. Tempo van aanzanding

Analyse

De ophogingssnelheid van de bodem volgt uit de continuïteitsvergelijking voor het sediment indien de afgeleide van het feitelijk transport in langsrichting bekend is.

Deze afgeleide kan bepaald worden met behulp van een uitdrukking voor de transportcapaciteit als functie van de stromingskarakteristieken. Daarbij wordt verondersteld dat het feitelijk transport gelijk is aan de transportcapaciteit.

De stromingseigenschappen ter plaatse van het beschouwde punt volgen uit een verhanglijnberekening (quasi-stationaire stroming).

In formulevorm:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

Nu geldt $X = f(Y)$ met:

$$X = \frac{s}{(\Delta g D^3)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{en} \quad Y = \frac{\Delta D}{\mu a i_s}$$

Er geldt dus ook (kettingregel)

$$\frac{ds}{dx} = (\Delta g D^3)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dX}{dY} \cdot \frac{dY}{da} \cdot \frac{da}{dx}$$

De grootte van dX/dY volgt uit de gebruikte transportformule. De term dY/da volgt uit:

$$Y = \frac{\Delta D}{\mu a i_s} = \frac{\Delta D}{\mu} \left\{ \frac{C a^2}{q} \right\}$$

dus

$$\frac{dY}{da} = \frac{\Delta D}{\mu} \frac{C^2}{2q} 2a = 2 \frac{Y}{a}$$

Hierbij is verondersteld dat de bodemschuifspanning bij niet-uniforme stroming op dezelfde wijze in verband staat met de snelheid en de bodemruwheid als bij uniforme stroom (zie college-handleiding b71N, Par. 5.2.5.).

Verder kan da/dX worden gevonden met de vergelijking van Bélanger:

$$\frac{da}{dx} = i_b \frac{a^3 - a_e^3}{a^3 - a_g^3}$$

$$\text{met } a_e^3 = \frac{q^2}{C^2 i_b} \quad \text{en} \quad a_g^3 = \frac{q^2}{g}$$

Rest nog de keuze van de transportvergelijking. Er worden twee schattingen gemaakt, één met behulp van de formule van Meijer-Peter & Müller en één m.b.v. de formule van Engelund & Hansen.

(i) Meijer-Peter & Müller:

$$X = 13,3 \left\{ \frac{1}{Y} - 0,047 \right\}^{3/2}$$

$$\text{waarbij } \mu = \left(\frac{C}{C_{90}} \right)^{3/2} \quad \text{en} \quad D = \bar{D}.$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{X}{\frac{1}{Y} - 0,047} \frac{-1}{Y^2} \frac{2Y}{a} \frac{\partial a}{\partial x} = -3 \frac{X}{1 - 0,047Y} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x}$$

(ii) Engelund & Hansen:

$$X = 0,084 Y^{-5/2}$$

$$\text{waarbij } \mu = \left(\frac{C}{g} \right)^{2/5} \quad \text{en} \quad D = D_{50} \approx \bar{D}.$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{5}{2} \frac{X}{Y} \frac{2Y}{a} \frac{\partial a}{\partial x} = -5 \frac{X}{a} \frac{\partial a}{\partial x}$$

Uitwerking

- Berekening van a , $\frac{da}{dx}$ en i_s op 4007 m stroomopwaarts van de stuw m.b.v. de vergelijking van Bélanger, opgelost met de methode van Bresse.

$$a_e^3 = \frac{3,24}{2025} 10^4 = 16,0 \text{ m}^3 \rightarrow a_e = 2,52 \text{ m}$$

$$a_g^3 = \frac{3,24}{9,81} = 0,330 \text{ m}^3 \rightarrow a_g = 0,69 \text{ m}$$

$$\beta = 1 - \frac{0,33}{16} = 0,98$$

$$\eta_0 = \frac{2,52 + 0,50}{2,52} = 1,20 \rightarrow \psi(\eta_0) = 0,479.$$

$$- (4007 - 0) = 2,52 \cdot 10^4 [\eta_1 - 1,20 - 0,98 \{\psi(\eta_1) - 0,479\}]$$

$$- 0,159 = \eta_1 - 1,20 - 0,98 \psi(\eta_1) + 0,469$$

$$\eta_1 - 0,98 \psi(\eta_1) - 0,572 = 0$$

Oplossing: $\eta_1 = 1,14$, waarbij $\psi(\eta_1) = 0,580$.

Op 4007 m stroomopwaarts van de stuw bedraagt de waterdiepte:

$$a = \eta_1 a_e = 2,87 \text{ m}$$

en de lokale waterdiepteverandering:

$$\frac{da}{dx} = 10^{-4} \frac{23,64 - 16,0}{23,64 - 0,33} = 3,278 \cdot 10^{-5}$$

In de stroomparameter Y is het waterspiegelverhang opgenomen; dit volgt uit:

$$\begin{aligned} i_s &\equiv - \frac{\partial z_s}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (z_b + a) = - \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} = i_b - \frac{\partial a}{\partial x} \\ &= 1,0 \cdot 10^{-4} - 3,3 \cdot 10^{-5} = 6,7 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Voor Y wordt gevonden:

$$Y = \frac{1,65 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}}{\mu \cdot 2,87 \cdot 6,7 \cdot 10^{-5}} = \frac{8,581}{\mu}$$

Voorts is:

$$(\Delta g \bar{D}^3)^{\frac{1}{2}} = (1,65.9,81.1,0.10^{-9})^{\frac{1}{2}} = 1,27.10^{-4} \text{ m}$$

. Meijer-Peter & Müller:

$$C_{90} = 18 \log \frac{12a}{D_{90}} = 18 \log 16169 = 75,8 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$$

$$C = 45 \text{ m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$$

$$\mu_{\text{MPM}} = \left(\frac{45}{75,8}\right)^{3/2} = 0,0458$$

$$Y = \frac{8,581}{0,458} = 18,74$$

$$X = 13,3 \{6,362.10^{-3}\}^{3/2} = 6,749.10^{-3}$$

$$\frac{X}{1 - 0,047Y} = \frac{6,749.10^{-3}}{0,1192} = 5,66.10^{-2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -3.5,66.10^{-2} \cdot \frac{1}{2,87} \cdot 3,28.10^{-5} = -1,94.10^{-6}$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial x} = -(\Delta g \bar{D}^3)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$= +1,27.10^{-4} \cdot 1,94.10^{-6} \text{ m/s}$$

$$= 2,464.10^{-10} \text{ m/s}$$

$$= 2,13.10^{-5} \text{ m per dag}$$

$$\approx 21 \mu\text{m per dag.}$$

. Engelund & Hansen:

$$\mu_{\text{EH}} = \left(\frac{2025}{9,81}\right)^{2/5} = 8,431$$

$$Y = \frac{8,581}{8,431} = 1,018$$

$$X = 0,084 (1,018)^{-5/2} = 8,034 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -5 \frac{8,034 \cdot 10^{-2}}{2,87} 3,28 \cdot 10^{-5} = -4,59 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial x} = -(\Delta g D)^{3/2} \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$= + 1,27 \cdot 10^{-4} \cdot 4,59 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$= 5,83 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}$$

$$= 5,04 \cdot 10^{-5} \text{ m per dag}$$

$$\approx 50 \text{ } \mu\text{m per dag.}$$

Deze uitkomsten verschillen een factor 2, hetgeen gelet op de nauwkeurigheid van zandtransportformules acceptabel is.

3.5.2. Pijpleidingsleuf

Vraag 1

Transportschatting m.b.v. de formule van Meijer-Peter & Müller.

$$\text{Chézy-coëfficiënt } C = \frac{q/a_o}{\sqrt{g i}} = \frac{0,8}{0,02} = 40 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

$$\text{Ribbelfactor } \mu = \left[\frac{C}{18 \log 12 \frac{a_o}{D_{90}}} \right]^{3/2} = \left\{ \frac{40}{83} \right\}^{3/2} = 0,33$$

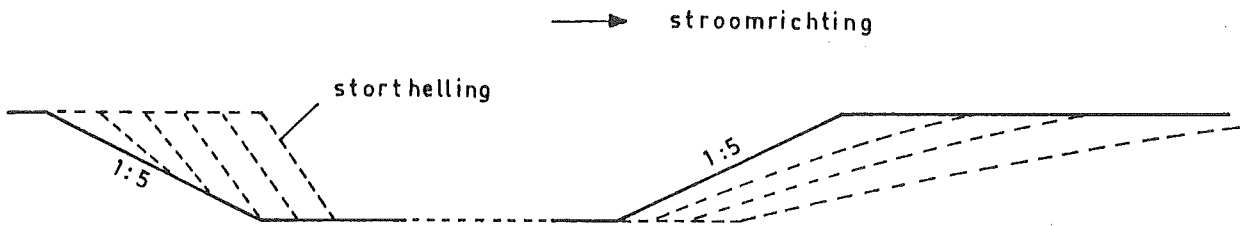
$$\text{Stroomparameter } Y = \frac{\Delta \bar{D}}{\mu a_o i} = \frac{9,9}{1,32} = 7,50$$

$$\text{Transportparameter } X = 13,3 \left(\frac{1}{Y} - 0,047 \right)^{3/2} = 0,337$$

Transport per eenheid van breedte:

$$\begin{aligned} s &= X (\Delta g D^3)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0,337 \cdot 5,913 \cdot 10^{-5} \\ &= 1,99 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \\ &\approx 1,72 \text{ m}^2/\text{dag} \end{aligned}$$

Vraag 2



Ontwikkeling sleufwanden (kwalitatief)

Vraag 3

Bij morfologische berekeningen zijn de volgende vergelijkingen van primair belang:

- de continuïteitsvergelijking voor het sediment:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

- de vergelijking voor het sedimenttransport:

$$s = f(u, \dots\dots\dots) \quad (2)$$

Indien geldt $s = m u^n$, dan volgt

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + n \frac{s}{u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Bij een quasi-stationaire stroom heeft de continuïteitsvergelijking voor het water de vorm $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$ of

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Eliminatie van $\frac{\partial u}{\partial x}$ uit vergelijking 3 met behulp van vergelijking 4 levert:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} - c(a) \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\text{met } c(a) = n \frac{s}{a} = n m q^n a^{-n-1} \quad (6)$$

Indien geldt $F^2 \ll 1$, dan reduceert de bewegingsvergelijking voor het water tot

$$\frac{\partial}{\partial x} (z_b + a) = - \frac{u|u|}{C^2 a} \quad (7)$$

Wanneer bovendien de wrijving kan worden verwaarloosd, dan is

$$\frac{\partial}{\partial x} (z_b + a) = 0 \quad (8)$$

d.w.z. het waterspiegelniveau is constant in de x-richting.

Combinatie van Vgl.(5) en Vgl. (8) levert de "simple wave" vergelijking

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + c(a) \frac{\partial z_b}{\partial x} = 0 \quad (9a)$$

of

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c(a) \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (9b)$$

De oplossing ervan luidt:

langs $\frac{dx}{dt} = c(a)$ geldt $a = \text{constant}$.

Vraag 4

De verplaatsing van een punt van het bodemoppervlak met waterdiepte a volgt uit:

$$\Delta x|_a = c(a)\Delta t \quad (10)$$

waarin

$$\Delta x|_a = x - x_0$$

x_0 = horizontale coördinaat van het punt met diepte a op $t = 0$

x = idem, op $t = \Delta t$

De begintoestand wordt beschreven door de gegeven functie

$x_0 = x_0(a)$. Kiest men de oorsprong van de x -coördinaat aan de voet van de benedenstroomse helling, dan luidt deze functie in dit geval

$$x_0(a) = -pa + p(a_0 + \Delta a) \quad (11)$$

De oplossing voor de benedenstroomse helling luidt dus

$$x(a) = c(a)\Delta t + x_0 = c(a)\Delta t - pa + p(a_0 + \Delta a) \quad (12)$$

Numerieke uitwerking:

Bij het berekenen van de snelheid $c(a)$ vindt men achtereenvolgens

$$n = \frac{3}{1 - 0,047Y} = 4,63$$

$$c(a) = n m q^n a^{-n-1} = n s a_0^n a^{-n-1} = 4,63 \cdot 1,99 \cdot 10^{-5} \cdot 4,63 \cdot a^{-5,63}$$

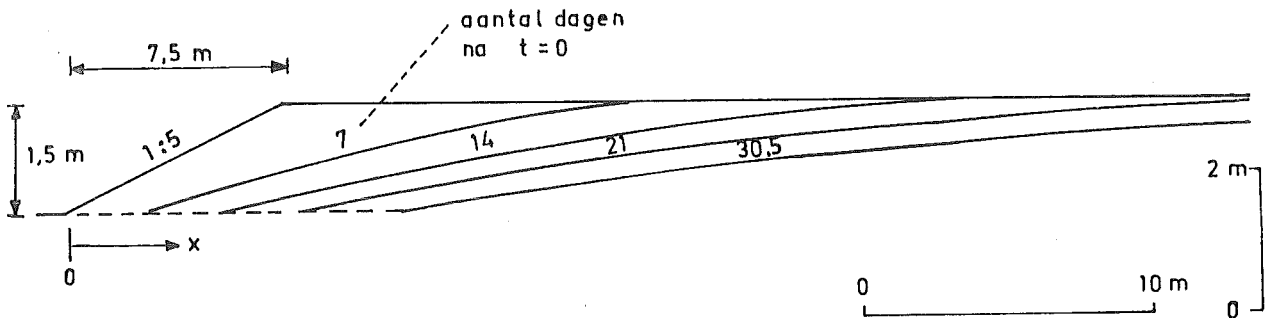
$$= 0,160 a^{-5,63} \text{ m/s}$$

$$x(a) = 0,160 a^{-5,63} \Delta t - 5a + 5 \cdot 6,5$$

$$= 0,160 a^{-5,63} \Delta t - 5a + 32,5$$

$$\Delta t = 30,5 \text{ dag} = 2,635 \cdot 10^6 \text{ s geeft } x(a) = 4,216 \cdot 10^5 a^{-5,63} - 5a + 32,5$$

a(m)	5,0	5,5	6,0	6,5
x(m)	56,5	33,6	20,0	11,2



Benedenstrooms talud van een sleuf