

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Het verschil in predicties tussen
univariate GARCH modellen en
multivariate GARCH modellen**

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE**

door

Boris Boonstra

**Delft, Nederland
2017**



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

**“Het verschil in predicties tussen univariate GARCH modellen en
multivariate GARCH modellen”**

Boris Boonstra

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. F.H. van der Meulen

Overige commissieleden

Dr.ir. L.J.J. van Iersel

Dr. B. van den Dries

2017

Delft

Kort overzicht en onderzoeksvraag

In dit verslag zullen drie verschillende GARCH modellen worden onderzocht, namelijk het univariate GARCH model, het multivariate CCC model en het multivariate DCC model. GARCH modellen zijn modellen die de volatiliteit van tijdreeksen kunnen voorspellen. De drie modellen zullen uitgebreid besproken worden, er zullen simulaties mee worden gemaakt en er zal met deze modellen voorspeld worden.

Bij univariate GARCH modellen wordt er slechts naar één tijdreeks gekeken, terwijl er bij multivariate GARCH modellen naar meerdere tijdreeksen tegelijk wordt gekeken waarbij de covariantie tussen deze tijdreeksen wordt meegerekend. Als meerdere tijdreeksen, die niet onafhankelijk van elkaar bewegen, voorspeld zouden worden met het multivariate CCC model of het multivariate DCC model dan zou dit kunnen leiden tot betere predicties vergeleken met de predicties van het univariate GARCH model.

De onderzoeksvraag is als volgt: Zijn er verschillen in de predicties van tijdreeksen, die niet onafhankelijk van elkaar bewegen, verkregen met het univariate GARCH model, het multivariate CCC model en het multivariate DCC model?

Contents

1	Inleiding	6
2	Univariate GARCH modellen	8
2.0.1	Simulatie van het univariate GARCH(1,1) model	9
3	Multivariate GARCH modellen	11
3.1	Geschiktheid van het model	13
4	Het CCC model	19
4.1	Het CCC model	21
4.1.1	Het simuleren van het CCC model	22
4.1.2	Simulatie met $\rho_{12} = 0.8$	23
4.1.3	Simulatie met $\rho_{12} = -0.8$	24
4.1.4	Simulatie met $\rho_{12} = 0$	25
4.1.5	Verifiëren van de modelaannames van het CCC model . .	26
5	Het DCC model	32
5.1	Het DCC model	34
5.1.1	Het simuleren van het DCC model	35
5.1.2	Simulatie met $a = 0.8$	36
5.1.3	Simulatie met $a = -0.8$	38
5.1.4	Simulatie met $a = 0$	40
5.1.5	Verifiëren van de modelaannames van het DCC model . .	42
6	Voorspellen met het univariate GARCH model en het multi- variante CCC model	48
6.1	Conclusie van de voorspellingen	52
7	Toepassing: verschillende (multivariate) GARCH modellen met data van ING en Deutsche Bank	53
7.1	Verifiëren van de modelaannames	56
7.2	Voorspellen met de modellen	71
7.2.1	Univariaat GARCH(1,1) model	72
7.2.2	Multivariaat CCC GARCH model	73
7.2.3	Multivariaat DCC GARCH model	74
7.3	Conclusie van de voorspellingen	76
8	Conclusie van de onderzoeksvraag	77

1 Inleiding

Veel beleggers, zoals pensioenfondsen en verzekeringsmaatschappijen, investeren in aandelen om rendementen te behalen. Het is dus belangrijk om het risico om in een aandeel te beleggen zo klein mogelijk te houden. Volatiliteit is een maat van het risico om in een aandeel te investeren. Dus het goed kunnen voorspellen van de volatiliteit is van grote betekenis.

GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) modellen zijn modellen om die volatiliteit van een tijdreeks te voorspellen. In het model is de volatiliteit afhankelijk van de tijd en kan de volatiliteit voorspeld worden door middel van observaties van vorige tijdstappen. Hierdoor zijn GARCH modellen erg relevant bij de analyse van financiële tijdreeksen.

In dit verslag worden verschillende GARCH modellen behandeld en worden deze modellen gesimuleerd om een visualisatie te krijgen. Met de behandelde GARCH modellen zal ook de volatiliteit voorspeld worden. Deze voorspellingen worden met elkaar vergeleken. Het doel hiervan is om in te zien welk van de onderzochte GARCH modellen de meest betrouwbare voorspelling geeft. Eerst wordt het univariate GARCH model besproken in sectie 2, dit model kan de volatiliteit voorspellen van één enkele tijdreeks. In deze sectie wordt er aan de hand van het simpelste model, het ARCH(1) model, uitgelegd hoe het werkt en vervolgens wordt dit model uitgebreid naar het univariate GARCH(p,q) model.

In sectie 3 wordt het univariate GARCH model uitgebreid naar het multivariate GARCH model. Bij het multivariate GARCH model wordt er gekeken naar meerdere tijdreeksen tegelijk en de correlatie tussen deze tijdreeksen. Om dit te bewerkstelligen wordt er een covariantie matrix gemaakt. Daarnaast wordt er in sectie 3 behandeld hoe de geschiktheid van een GARCH model voor de data getest kan worden. In de secties 4 en 5 wordt er naar twee verschillende multivariate GARCH modellen gekeken en hun werking.

In sectie 4 wordt het multivariate CCC model bestudeerd. In dit model wordt er gekeken naar meerdere tijdreeksen tegelijk. Het simuleren van het CCC model kan worden opgedeeld in twee delen: In het eerste deel wordt het univariate GARCH model gesimuleerd voor elk van de tijdreeksen. In het tweede deel wordt de constante conditionele correlatie tussen de tijdreeksen bestudeerd, de correlatie is dan onafhankelijk van de tijd. Met deze twee delen wordt de covariantie matrix van het model opgebouwd, zodat hiermee de volatiliteit voorspeld kan worden.

Omdat het CCC model constante correlatie tussen de tijdreeksen gebruikt is dit model niet altijd geschikt voor de data. Daarom wordt in sectie 5 het DCC model behandeld. Het DCC model is een uitbreiding van het CCC model. Het DCC model is op dezelfde manier opgebouwd als het CCC model, maar in tegenstelling tot het CCC model maakt het DCC model gebruik van dynamis-

che conditionele correlatie. De dynamische conditionele correlatie houdt in dat deze correlatie afhankelijk is van de tijd.

In sectie 6 wordt er data gesimuleerd met het multivariate CCC model. Aan de hand van deze gesimuleerde data worden er parameters geschat voor het univariate GARCH(1,1) model en het multivariate CCC model. Onder de gefitte modellen worden er predicties gedaan om te zien of er verschillen zitten in de voorspellingen van het univariate GARCH(1,1) model en het multivariate CCC model.

In sectie 7 worden de drie besproken modellen toegepast op de aandelenkoersen van de ING bank en de Deutsche Bank. Eerst wordt getest of de modellen adequaat zijn voor de data en vervolgens worden voorspellingen gedaan met de modellen. Deze voorspellingen worden met elkaar vergeleken om te kijken of er grote verschillen zijn tussen de voorspellingen van het univariate GARCH(1,1) model, het CCC model en het DCC model.

In sectie 8 wordt er kort een antwoord gegeven op de onderzoeksvraag op basis van de resultaten uit secties 6 en 7.

2 Univariate GARCH modellen

GARCH modellen zijn modellen die veel gebruikt worden om de koers van een aandeel te modelleren. Het model is geïntroduceerd in 1986 door Robert F. Engle, een econoom en nobelprijswinnaar van economie. In dit model is de volatiliteit afhankelijk van de tijd.

Eerst wordt er gekeken naar het ARCH(1) model waarbij de logreturn verwachting 0 heeft. Dit is het simpelste model binnen de GARCH familie.

Het ARCH(1) model is als volgt gedefinieerd:

$$X_t = \sqrt{h_t} Z_t \quad (1)$$

$$h_t = \omega + \alpha X_{t-1}^2 \quad (2)$$

- X_t : De logreturn van de prijs P_t van een aandeel op tijdstip t . De logreturn is als volgt gedefinieerd: $X_t = \Delta \log[P_t] = \log\left[\frac{P_t}{P_{t-1}}\right]$.
- $\{Z_t\}$: Een rij onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen met verwachting nul en variantie gelijk aan 1, zoals bijvoorbeeld de standaard normale verdeling.
- h_t : De conditionele variantie van X_t op tijdstip t : $\text{Var}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1)$.
- ω, α : Parameters die geschat moeten worden voor het model, waarbij $\omega > 0$ en $0 \leq \alpha < 1$.

Zoals te zien is in formule (2) wordt de conditionele variantie nu alleen beïnvloed door de logreturns van een tijdstap terug. Er werd een beter model ontdekt om de volatiliteit van aandelenkoersen te modelleren, dit model is het GARCH model. Het model speelt namelijk in op het feit dat het algemeen bekend is dat er volatiliteit clustering bestaat binnen aandelenkoersen, wat inhoudt dat grote fluctuaties in de prijs van aandelen worden gevolgd door grote fluctuaties en kleine fluctuaties in de prijs van aandelen door kleine fluctuaties. Bij het GARCH model wordt de conditionele variantie nu niet meer alleen beïnvloed door de vorige logreturns maar ook door de vorige conditionele varianties.

Het univariate GARCH(p,q) model is als volgt gedefinieerd:

$$y_t = \mu + \epsilon_t \quad (3)$$

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} Z_t \quad (4)$$

$$h_t = \omega + \underbrace{\sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2}_{ARCH} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}}_{GARCH} \quad (5)$$

Waarbij geldt:

- y_t : Logreturn van het aandeel op tijdstip t .
- μ : De conditionele verwachting van y_t , $E[y_t|y_{t-1}, \dots, y_1]$.
- ϵ_t : Het residu op tijdstip t : $\epsilon_t = y_t - \mu$.
- Z_t : Een rij onafhankelijke identiek verdeelde stochastische variabelen met $E[Z_t] = 0$ en $\text{Var}[Z_t] = 1$.
- h_t : De conditionele variantie van y_t op tijdstip t : $\text{Var}(y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1)$.
- ω , α_i en β_i : Parameters die moeten voldoen aan:
 $\omega > 0$, $\alpha_i, \beta_i \geq 0 \forall i$ en $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \leq 1$

In de volgende subsectie wordt het GARCH(1,1) model gesimuleerd, zodat er een visualisatie is van het model.

2.0.1 Simulatie van het univariate GARCH(1,1) model

In deze subsectie wordt er gekeken naar een simulatie van 1000 tijdstappen van het univariate GARCH(1,1) model. Het univariate GARCH(1,1) model wordt er als volgt gesimuleerd:

$$Z_t \sim N(0, 1)$$

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} Z_t \tag{6}$$

$$h_t = \omega_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{7}$$

De volgende parameters zijn gekozen voor formule (7):

$$\omega_1 = 0.00005, \quad \alpha_1 = 0.05, \quad \beta_1 = 0.95$$

Met een simulatie van 1000 tijdstappen wordt de volgende realisatie van $\{\epsilon_t\}_{t \in \{1..1000\}}$ verkregen:

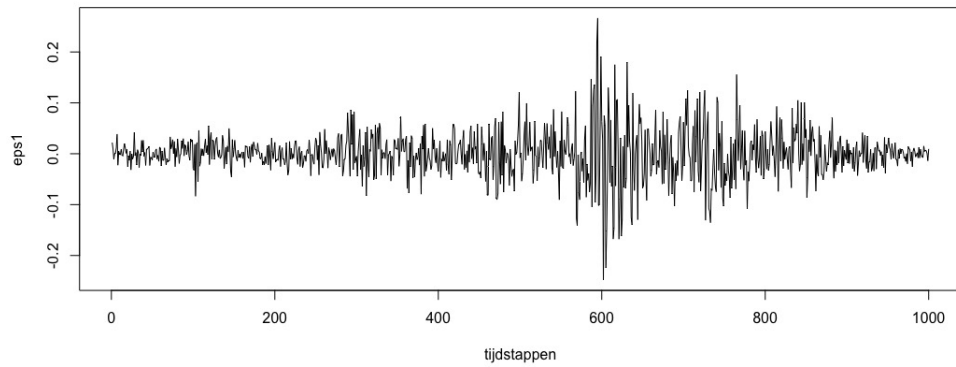


Figure 1: Realisatie $t \rightarrow \epsilon_t$ na het simuleren van het GARCH(1,1) model gedefinieerd in (6).

De volgende conditionele variantie is verkregen zoals gedefinieerd in (7):

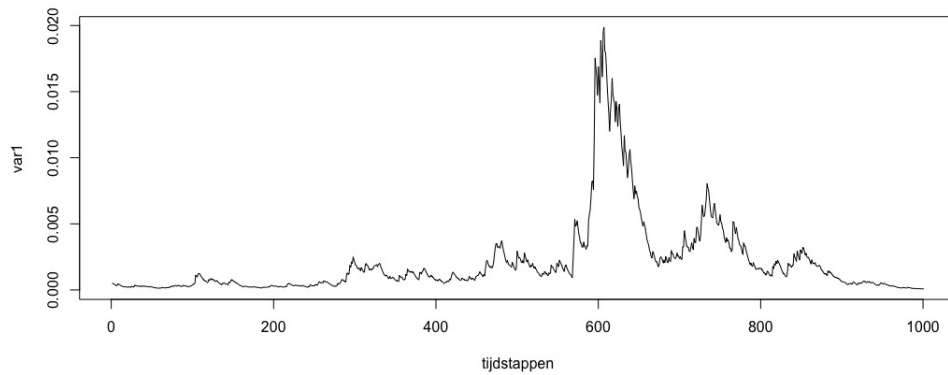


Figure 2: Simulatie van de conditionele variantie h_t gedefinieerd in (7) met $\omega_1 = 0.00005$, $\alpha_1 = 0.05$, $\beta_1 = 0.95$

Zoals te verwachten is in figuur 2 de conditionele variantie groot wanneer in figuur 1 de fluctuatie groot is.

In de volgende sectie wordt het univariate GARCH model uitgebreid naar het multivariate GARCH model. Er wordt gekeken naar meerdere tijdreeksen tegelijk en er wordt rekening gehouden met de covariantie tussen deze tijdreeksen.

3 Multivariate GARCH modellen

Het univariate GARCH model, zoals te zien is in de vorige sectie, is een model die zich focust op één aandeel. Met n -dimensionale multivariate GARCH modellen worden n aandelen tegelijk gemodelleerd terwijl er rekening wordt gehouden met de covariantie tussen deze aandelen.

Multivariate GARCH modellen zijn als volgt gedefinieerd:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (8)$$

$$\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t \quad (9)$$

Waarbij geldt voor een n -dimensionaal multivariaat GARCH model:

- y_t : $n \times 1$ vector van de logreturn van n aandelen op tijd t .
- μ_t^\dagger : $n \times 1$ vector van de conditionele verwachting van de logreturns y_t .
- ϵ_t : $n \times 1$ vector van residuen: $\epsilon_t = y_t - \mu_t$.
- Z_t : $n \times 1$ vector met onafhankelijk en identiek verdeelde stochasten waarbij geldt dat $E[Z_t] = 0$ en $\text{Cov}[Z_t] = I_n$, met I_n een $n \times n$ identiteits matrix.
- H_t : $n \times n$ positief definitie conditionele covariantie matrix van y_t .
 $H_t^{\frac{1}{2}}$ kan worden verkregen door Cholesky factorisatie van H_t .

H_t is de conditionele covariantie matrix van y_t . Stel $\mathcal{I}_{t-1} = \{y_{t-1}, \dots, y_1\}$, dan geldt:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(y_t | \mathcal{I}_{t-1}) &= \text{Cov}(\mu + \epsilon_t | \mathcal{I}_{t-1}) \\
 &= \text{Cov}(\mu | \mathcal{I}_{t-1}) + \text{Cov}(\epsilon_t | \mathcal{I}_{t-1}) \\
 &= \text{Cov}(\epsilon_t | \mathcal{I}_{t-1}) \\
 &= \text{Cov}(H_t^{\frac{1}{2}} Z_t | \mathcal{I}_{t-1}) \\
 &= H_t^{\frac{1}{2}} \text{Cov}(Z_t | \mathcal{I}_{t-1}) (H_t^{\frac{1}{2}})' \\
 &= H_t^{\frac{1}{2}} \text{Cov}(Z_t) (H_t^{\frac{1}{2}})' \\
 &= H_t^{\frac{1}{2}} I_n (H_t^{\frac{1}{2}})' \\
 &= H_t^{\frac{1}{2}} (H_t^{\frac{1}{2}})' \\
 &= H_t
 \end{aligned} \quad (10)$$

[†] μ_t wordt vaak gemodelleerd als een constante vector μ , in de rest van het verslag wordt dit ook aangenomen.

Er zijn veel verschillende multivariate GARCH modellen om de matrix van conditionele covarianties H_t te modelleren. Er worden drie verschillende manieren onderscheiden: (1) Directe generalizatie van het univariate GARCH model (2) Lineaire combinaties van univariate GARCH modellen (3) Niet-lineaire combinaties van univariate GARCH modellen.

In dit verslag ligt de focus op de niet-lineaire combinaties van univariate GARCH modellen. In secties 4 en 5 wordt respectievelijk het CCC model en het DCC model behandeld, deze twee multivariate GARCH modellen behoren beiden tot de niet-lineaire combinaties van univariate GARCH modellen.

3.1 Geschiktheid van het model

Om met een model een goede voorspelling op grond van de data te maken is het belangrijk dat het model adequaat is voor de data. Er kan worden nagegaan hoe "goed" een GARCH model is door te kijken naar de gestandaardiseerde residuen van het model en nagaan hoe goed ze aan de assumpties van het model voldoen.

De gestandaardiseerde residuen van het univariate GARCH model zijn als volgt gedefinieerd:

$$\hat{Z}_t = \hat{h}_t^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t = \hat{h}_t^{-\frac{1}{2}} (y_t - \hat{\mu}_t) \quad (11)$$

En de gestandaardiseerde residuen van het multivariate GARCH model als volgt:

$$\hat{Z}_t = \hat{H}_t^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t = \hat{H}_t^{-\frac{1}{2}} (y_t - \hat{\mu}_t) \quad (12)$$

De gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen op tijdstip t van een n -dimensionaal GARCH model zijn als volgt gedefinieerd:

$$\hat{Z}_t^2 = [\hat{Z}_{1,t}^2, \hat{Z}_{2,t}^2, \dots, \hat{Z}_{n,t}^2]' \quad (13)$$

Waarbij geldt dat \hat{h}_t , $\hat{\mu}_t$ en \hat{H}_t de gefitte waarden zijn voor respectievelijk h_t , μ_t en H_t [†].

De gestandaardiseerde residuen moeten IID(0,1) verdeeld zijn met de veronderstelde verdeling die is aangenomen in het model. Om dit te testen wordt het volgende nagegaan:

1. De gestandaardiseerde residuen $\{\hat{Z}_{i,t}\}_{t \in \{1..T\}} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ moeten white noise zijn.
2. De gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen (13) moeten white noise zijn. Voor het n -dimensionale multivariate geval geldt dat $\{\hat{Z}_{i,t}^2\}_{t \in \{1..T\}} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ white noise moet zijn.
3. De gestandaardiseerde residuen moeten de verdeling hebben die aangenomen is in het model. Voor het univariate GARCH model de verdeling die is genomen voor Z_t uit formule (4) en voor het multivariate GARCH model Z_t uit formule (9).

[†]Op basis van de data worden de parameters geschat voor de modellen. Met deze parameters worden de gefitte waarden bepaald. Als voorbeeld voor het univariate GARCH(1,1) model:

- Geschatte parameters: $\hat{\mu}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$
- Met deze parameters worden de gestandaardiseerde residuen, \hat{Z}_t , op de volgende manier gedefinieerd:
 $\hat{\epsilon}_t = y_t - \hat{\mu}$ ($\hat{\epsilon}_t$ zijn de residuen)
 $\hat{h}_t = \hat{\omega} + \hat{\alpha} \hat{\epsilon}_{t-1}^2 + \hat{\beta} \hat{h}_{t-1}$
 $\hat{Z}_t = \hat{h}_t^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t$

Deze drie punten worden op de volgende manieren nagekeken:

1. Om te kijken of de gestandaardiseerde residuen white noise zijn wordt er gekeken naar de volgende drie punten:

- (a) Een plot maken van de gestandaardiseerde residuen $\{\hat{Z}_{1,t}, \dots, \hat{Z}_{n,t}\}$ tegen de tijd om te zien of ze willekeurig verdeeld lijken, de verwachting nul lijkt en eindige variantie lijkt te hebben. Wanneer dit duidelijk niet het geval is kan worden uitgesloten dat de gestandaardiseerde residuen white noise zijn en hoeft er niet verder getest te worden. Let op dat uit deze plot niet geconcludeerd kan worden dat de gestandaardiseerde residuen white noise zijn.
- (b) De autocorrelatie functie (ACF) plotten om na te gaan of de gestandaardiseerde residuen autocorrelatie laten zien. De autocorrelatie van de data $\{X_t\}_{t \in \{1..T\}}$ voor lag k is als volgt gedefinieerd:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} \quad (14)$$

Waarbij \bar{X} het gemiddelde van de dataverzameling $\{X_t\}_{t \in \{1..T\}}$ is.

Als $\{X_t\}_{t \in \{1..T\}}$ een white noise proces is geldt er onder zwakke condities dat $r_k \sim N(0, \frac{1}{T}) \forall k$ (voor voldoende grote T). Het 95% betrouwbaarheidsinterval van de autocorrelatie van X_t is dan als volgt:

$$-1.96/\sqrt{T} \leq r_k \leq 1.96/\sqrt{T}$$

In dit verslag wordt er getest of de gestandaardiseerde residuen white noise zijn. Als de autocorrelatie van de gestandaardiseerde residuen bij meer dan 95% van de lags binnen het interval $[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}]$ valt kan er worden aangenomen dat de gestandaardiseerde residuen geen autocorrelatie hebben en white noise zijn.

- (c) Ljung-Box test

Met de Ljung-Box test wordt er getest of de autocorrelatie van een tijdreeks verschillend is van nul. De autocorrelatie r_k bij lag k is gedefinieerd in formule (14).

De test heeft de volgende hypothesen:

H_0 : Er is geen autocorrelatie in de data: $r_1 = r_2 = \dots = r_h = 0$.

H_α : Er is wel autocorrelatie in de data: $\exists k \in \{1, 2, \dots, h\}$ zodanig dat $r_k \neq 0$.

Voor het testen van de nul-hypothese wordt de volgende toetsgrootheid gebruikt:

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^h (T-h)^{-1} r_k^2$$

Met T het aantal observaties van de tijdreeks, h het aantal lags die getest wordt en r_k de autocorrelatie van de tijdreeks bij lag k .

Asymptotisch, als T groot is, heeft Q onder de nul-hypothese de chi-square verdeling met h vrijheidsgraden.

De nul-hypothese voor significantie level α zal worden verworpen als geldt:

$$Q > \chi_{1-\alpha, h}^2$$

Waarbij $\chi_{1-\alpha, h}^2$ de α -kwantiel chi-square verdeling is met h vrijheidsgraden.

In dit verslag wordt er getest of de autocorrelatie van de gestandaardiseerde residuen, $\{\hat{Z}_{i,t}\}_{t \in \{1..T\}} \forall i \in \{1, \dots, n\}$, gelijk is aan nul.

2. De gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen moeten ook white noise zijn. Om dit na te gaan wordt er wederom gekeken naar de ACF plot en naar de Ljung-Box test.
3. De gestandaardiseerde residuen moeten de veronderstelde verdeling hebben die is aangenomen in het model. Om dit te testen wordt er gekeken naar de Quantile-Quantile plot, in zo'n plot worden de kwantielen van twee data verzamelingen tegen elkaar geplotted. Er wordt als volgt een Quantile-Quantile plot gemaakt waarbij de kwantielen van een dataset, waarvan de verdeling nog onbekend is, worden geplotted tegen de kwantielen van een veronderstelde verdeling:

- Laat $f(x)$ de kansfunctie zijn van de veronderstelde verdeling en $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ de dataset, waarvan de verdeling nog onbekend is.
- Het p -kwantiel van $f(x)$, $z(p)$, wordt verkregen door middel van de volgende formule:

$$\int_{-\infty}^{z(p)} f(x) dx = p$$

- De Quantile-Quantile plot wordt dan als volgt gemaakt:
 - Zet de dataset, $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$, in volgorde van klein naar groot: $\hat{X}_1 < \hat{X}_2 < \dots < \hat{X}_T$.
 - Plot \hat{X}_k tegen $z(\frac{k}{T+1})$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, T\}$.

Als de punten van de Quantile-Quantile plot in een rechte $x = y$ lijn liggen, dan mag worden aangenomen dat de dataset $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ de kansverdeling $f(x)$ heeft.

In dit verslag zullen de kwantielen van de gestandaardiseerde residuen, \hat{Z}_t , geplotted worden tegen de kwantielen van de veronderstelde verdeling van Z_t . Om de verdeling van de gestandaardiseerde residuen goed te analyseren wordt er ook een histogram bij geplotted met de bijbehorende verdelingsfunctie van de veronderstelde verdeling.

Om er zeker van te zijn welke verdeling de gestandaardiseerde residuen, \hat{Z}_t , heeft worden er nog twee testen uitgevoerd: de Cramer-Test en parametrische bootstrap.

1. De Cramer-Test[†]:

Deze test gaat na of twee (multivariate) tijdreeksen, $\{X_1, \dots, X_m\}$ en $\{Y_1, \dots, Y_n\}$, hetzelfde verdeeld zijn[‡].

Deze test heeft de volgende hypothesen:

H_0 : X_1, X_2, \dots, X_m is verdeeld als Y_1, Y_2, \dots, Y_n .

H_α : X_1, X_2, \dots, X_m is niet verdeeld als Y_1, Y_2, \dots, Y_n .

Bij het testen van de nul hypothese wordt de volgende toetsgroottheid gebruikt:

$$T_{m,n} = \frac{mn}{m+n} \left(\frac{1}{mn} \sum_{i \in \{1..m\}} \sum_{j \in \{1..n\}} \|X_i - Y_j\| - \frac{1}{2m^2} \sum_{i_1 \in \{1..m\}} \sum_{i_2 \in \{1..m\}} \|X_{i_1} - X_{i_2}\| - \frac{1}{2n^2} \sum_{j_1 \in \{1..n\}} \sum_{j_2 \in \{1..n\}} \|Y_{j_1} - Y_{j_2}\| \right)$$

Waarbij $\|\cdot\|$ de Euclidische norm is.

De kritische waarde waar de toetsgroottheid mee wordt vergeleken wordt verkregen door gebruik te maken van bootstrappen. Er wordt een 95% betrouwbaarheidsinterval gemaakt voor $T_{m,n}$. Als $T_{m,n}$ dan binnen dit 95% betrouwbaarheidsinterval valt, dan kan de nul hypothese niet worden verworpen.

[†]Literatuur: Baringhaus, L. and Franz, C. (2004) On a new multivariate two-sample test, Journal of Multivariate Analysis, 88, p. 190-206

[‡]bij twee n -dimensionale multivariate tijdreeksen zullen X_i en Y_i allebei n -dimensionaal zijn.

In dit verslag wordt er getest of de gestandaardiseerde residuen $\{\hat{Z}_{i,t}\}_{t \in \{1..T\}}$ de veronderstelde verdeling van $Z_{i,t}$ heeft. Er wordt in dit verslag telkens gekeken naar twee tijdreeksen tegelijk, dus X_i en Y_i zijn 2-dimensionaal:

$$X_1, \dots, X_T = \hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_T = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,1} \\ \hat{Z}_{2,1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,T} \\ \hat{Z}_{2,T} \end{bmatrix}$$

$$Y_1, \dots, Y_m = Z_1, \dots, Z_m = \begin{bmatrix} Z_{1,1} \\ Z_{2,1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} Z_{1,m} \\ Z_{2,m} \end{bmatrix}$$

Waarbij geldt dat $\{X_1, \dots, X_T\}$ de gestandaardiseerde residuen $\{\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_T\}$ zijn en $\{Y_1, \dots, Y_m\} = \{Z_1, \dots, Z_m\}$ zijn stochasten getrokken uit de veronderstelde verdeling van Z_t .

2. Parametrische bootstrap:

Om te testen of het model geschikt is voor de data wordt er een parametrische bootstrap uitgevoerd. Om duidelijk te maken hoe dit wordt gedaan wordt er laten zien hoe een parametrische bootstrap wordt uitgevoerd voor het univariate GARCH(1,1) model, zoals gedefinieerd in (3), (4) en (5), waar we de data, $\{y_1, \dots, y_T\}$, van hebben:

- Op basis van de data worden er parameters geschat voor het GARCH(1,1) model in het programma *R*: $\hat{\mu}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$.
- Met deze parameters wordt met het univariate GARCH(1,1) model een realisatie van $\epsilon_t = h_t^{\frac{1}{2}} Z_t$ gesimuleerd waarbij Z_t de veronderstelde verdeling van \hat{Z}_t heeft. Het simuleren van het univariate GARCH(1,1) model wordt 1000 keer herhaald zodat de volgende data wordt verkregen: $\{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_T\}$. Waarbij geldt dat:

$$\bar{\epsilon}_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t^1 \\ \epsilon_t^2 \\ \vdots \\ \epsilon_t^{1000} \end{bmatrix}, \text{ voor } t \in \{1, \dots, T\}.$$

Voor deze vector geldt dat $\bar{\epsilon}_t$ gesorteerd is van klein naar groot: $\epsilon_t^1 < \epsilon_t^2 < \dots < \epsilon_t^{1000}$.

- Er wordt een betrouwbaarheidsinterval voor ϵ_t gemaakt voor elk tijdstip $t \in \{1, \dots, T\}$. Bij een 95% betrouwbaarheidsinterval voor ϵ_t wordt het 0.025-kwantiel en het 0.975-kwantiel gepakt van de geordende vector $\bar{\epsilon}_t$. Dus ϵ_t^{25} en ϵ_t^{975} worden gepakt zodat het 95% betrouwbaarheidsinterval $[\epsilon_t^{25}, \epsilon_t^{975}]$ voor ϵ_t kan worden gemaakt.
- Dit betrouwbaarheidsinterval wordt vergeleken met de residuen van de echte data, $\hat{\epsilon}_t = y_t - \hat{\mu}$. Als het gefitte model goed is voor de data dan zou er ongeveer $\alpha\%$ van de residuen, $\{\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_T\}$, binnen de $\alpha\%$ betrouwbaarheidsintervallen van $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_T\}$ moeten zitten.

Omdat het univariate GARCH model, het CCC GARCH model en het DCC GARCH model veel worden gebruikt om aandelen koersen mee te voorspellen wordt er bij de parametrische bootstrap gekeken naar de 80% , 90% en 95% betrouwbaarheidsintervallen zodat de "staart" van de data goed geanalyseerd kan worden. Dit is belangrijk omdat een kleine afwijking in de staart grote gevolgen kan hebben voor een investering.

4 Het CCC model

Het CCC (Constant Conditional Correlation) model, geïntroduceerd door Bollerslev (1990), is één van de manieren om een multivariaat GARCH model te modelleren. Het is een model met tijdsafhankelijke conditionele varianties maar tijdsafhankelijke conditionele correlaties.

Het idee van het CCC model is dat de conditionele covariantie matrix, H_t , kan worden verdeeld in de conditionele standaard deviaties, D_t , en een constante correlatie matrix R .

Het CCC model is als volgt gedefinieerd:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (15)$$

$$\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t \quad (16)$$

$$H_t = D_t R D_t \quad (17)$$

Waarbij geldt voor een n -dimensionaal CCC model:

- D_t : $n \times n$ diagonaal matrix met conditionele standaarddeviaties van y_t op tijdstip t .
- R : $n \times n$ matrix met constante conditionele correlaties, ρ_{ij} , van y_t . ρ_{ij} is tijdsafhankelijk.

Zoals in formule (10) is te zien is H_t de conditionele covariantie matrix van y_t . De conditionele covariantie matrix kan worden opgedeeld door de conditionele standaarddeviaties en door een conditionele correlatie matrix door middel van de volgende formule, waar we definiëren dat $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$:

$$\text{Cor}(X) = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X_1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X_n)}}\right) \cdot \text{Cov}(X) \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X_1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X_n)}}\right)$$

Door de inverse te nemen van $\text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X_1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X_n)}}\right)$ en te vermenigvuldigen aan beide zijden krijgen we:

$$\text{Cov}(X) = \text{diag}(\sqrt{\text{Var}(X_1)}, \dots, \sqrt{\text{Var}(X_n)}) \cdot \text{Cor}(X) \cdot \text{diag}(\sqrt{\text{Var}(X_1)}, \dots, \sqrt{\text{Var}(X_n)})$$

H_t is de conditionele covariantie matrix van y_t en wordt dus als volgt verdeeld in de conditionele standaarddeviaties, D_t , en de conditionele correlatie matrix, R_t , waarbij $\mathcal{I}_{t-1} = \{y_{t-1}, \dots, y_1\}$:

$$H_t = \text{Cov}(y_t | \mathcal{I}_{t-1}) = \underbrace{\text{diag}\left(\sqrt{\text{Var}(y_{1,t} | \mathcal{I}_{t-1})}, \dots, \sqrt{\text{Var}(y_{n,t} | \mathcal{I}_{t-1})}\right)}_{D_t} \cdot \underbrace{\text{Cor}(y_t | \mathcal{I}_{t-1})}_R \cdot \underbrace{\text{diag}\left(\sqrt{\text{Var}(y_{1,t} | \mathcal{I}_{t-1})}, \dots, \sqrt{\text{Var}(y_{n,t} | \mathcal{I}_{t-1})}\right)}_{D_t}$$

De conditionele varianties, $\text{Var}(y_{i,t} | \mathcal{I}_{t-1})$, worden verkregen via het univariate GARCH(p,q) model, formule (5). Deze conditionele varianties worden gedefinieerd als $h_{ii,t}$.

Voor het n -dimensionaal CCC model is D_t dan als volgt gedefinieerd:

$$D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{nn,t}}) \quad (18)$$

Vaak is het GARCH(1,1) model geschikt om de conditionele varianties te bepalen: $\text{Var}(y_{i,t} | \mathcal{I}_{t-1}) = h_{ii,t} = \omega_i + \alpha_i \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{ii,t-1}$.

De constante conditionele correlatie matrix, R , van het n -dimensionale CCC model is gedefinieerd als volgt:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2n} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 & \dots & \rho_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n} & \rho_{2n} & \rho_{3n} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Dit moet een symmetrische positief definitie matrix zijn met $\rho_{ii} = 1 \forall i$ en $\rho_{ij} \leq 1$, waarbij ρ_{ij} de constante conditionele correlatie is tussen $y_{i,t}$ en $y_{j,t}$.

Op plek $\{i, j\}$ van de matrix $H_t = D_t R D_t$ staat elementsgewijs het volgende:

$$H_{ij,t} = \sqrt{h_{ii,t} h_{jj,t}} \rho_{ij}$$

Het CCC model kan worden uitgebreid naar het DCC model, de conditionele correlatie matrix wordt dan tijdsafhankelijk. Dit is te zien in het DCC model in sectie 5. In de volgende subsectie wordt er gekeken naar simulaties van het bivariate CCC model.

4.1 Het CCC model

In deze sectie wordt de data gesimuleerd voor het bivariate (2-dimensionale) CCC model en er wordt getest of het model adequaat is voor de data. Het simuleren van het CCC model kan in twee delen worden opgedeeld:

1. In het eerste deel wordt het univariate GARCH(1,1) model gesimuleerd:

$$Z_{i,t} \sim IID(0,1) \quad (20)$$

$$\epsilon_{i,t} = h_{ii,t}^{\frac{1}{2}} Z_{i,t} \quad (21)$$

$$h_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

2. In het tweede deel wordt de conditionele covariantie matrix, H_t (17), opgebouwd en hiermee wordt een realisatie van ϵ_t gesimuleerd:

$$D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \sqrt{h_{22,t}}) \quad (23)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$H_t = D_t R D_t \quad (25)$$

$$Z_t \sim IID(0,1) \quad (26)$$

$$\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t \quad (27)$$

Om goed te zien wat er gebeurt in het CCC model worden er in de volgende sectie verschillende simulaties gemaakt met steeds een andere waarde van ρ_{12} .

4.1.1 Het simuleren van het CCC model

Er wordt gekeken naar drie verschillende constante conditionele correlaties, namelijk $\rho_{12} = \{0.8, -0.8, 0\}$. De parameters van het univariate GARCH(1,1) model, zoals gedefinieerd in (20), (21) en (22), zijn als volgt gekozen:

$$Z_{i,t} \sim N(0, 1)$$

$$\epsilon_{i,t} = h_{ii,t}^{\frac{1}{2}} Z_{i,t}$$

$$h_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00008 \\ 0.00005 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.98 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Eerst wordt de conditionele variantie via het univariaat GARCH(1,1) model gesimuleerd:

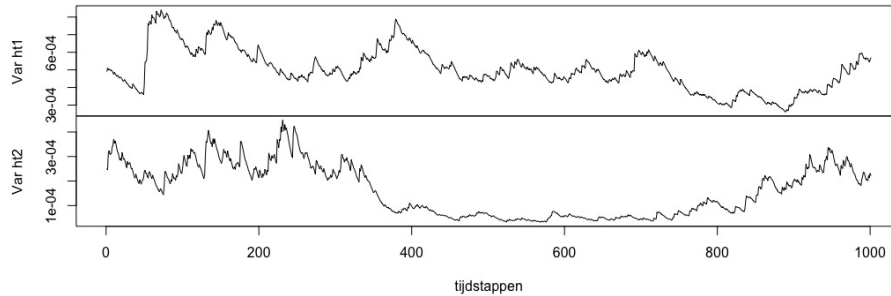


Figure 3: De conditionele varianties, $h_{11,t}$ en $h_{22,t}$, zoals gedefinieerd in formule (22) met $Z_{i,t} \sim N(0, 1)$ en de volgende parameters:

Bovenste plot: $\omega_1 = 0.00008$, $\alpha_1 = 0.02$, $\beta_1 = 0.98$.

Onderste plot: $\omega_2 = 0.00005$, $\alpha_2 = 0.05$, $\beta_2 = 0.95$.

In de volgende subsecties wordt een realisatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$ met het CCC GARCH model gesimuleerd. Daarnaast wordt er gekeken naar de scatterplot van ϵ_t om de correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ goed te kunnen analyseren. Bij elk van de volgende simulaties is Z_t , uit formule (27), standaard normaal verdeeld.

4.1.2 Simulatie met $\rho_{12} = 0.8$

Eerst wordt er gekeken naar een positieve constante conditionele correlatie, stel $\rho_{12} = 0.8$. Door het simuleren van het CCC GARCH model is de volgende realisatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$ verkregen:

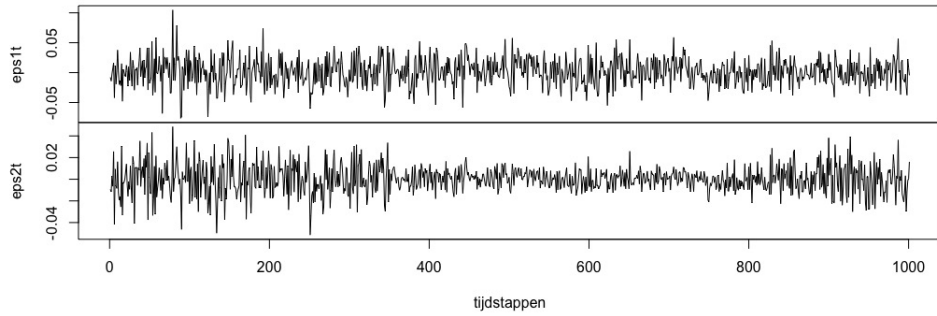


Figure 4: Realisatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$, gedefinieerd in (27), na het simuleren van het CCC model met $\rho_{12} = 0.8$. Boven: $\epsilon_{1,t}$. Onder: $\epsilon_{2,t}$

Om een visualisatie te krijgen van de correlatie wordt er een scatterplot gemaakt waar $\epsilon_{1,t}$ wordt uitgezet tegen $\epsilon_{2,t}$. Zoals te zien is in deze scatterplot is er een duidelijke positieve correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$:

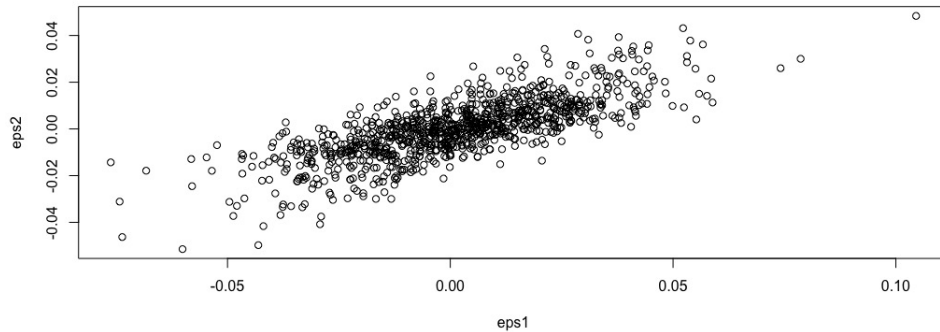


Figure 5: Scatterplot met $(x, y) = (\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t})$ waar $\rho_{12} = 0.8$

De empirische onconditionele correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ is als volgt:

$$\text{Cor}(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}) = 0.77$$

4.1.3 Simulatie met $\rho_{12} = -0.8$

Nu wordt het CCC model gesimuleerd met een constante conditionele correlatie van -0.8 . Dus stel $\rho_{12} = -0.8$.

De resultaten zijn als volgt:

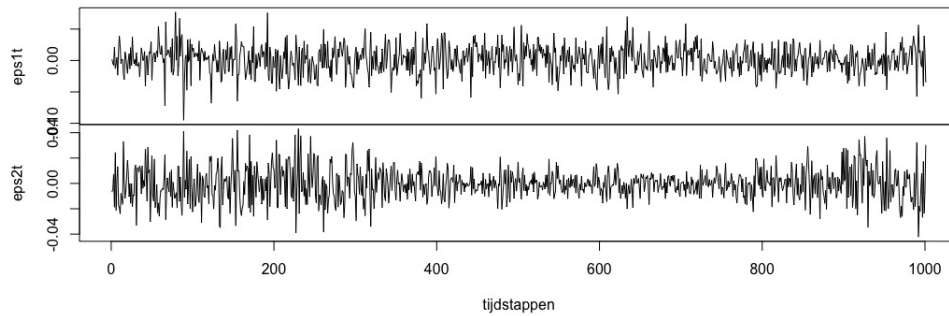


Figure 6: Realisatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$, gedefinieerd in (27), na het simuleren van het CCC model met $\rho_{12} = -0.8$. Boven: $\epsilon_{1,t}$. Onder: $\epsilon_{2,t}$

De volgende scatterplot wordt verkregen als $\epsilon_{1,t}$ wordt uitgezet tegen $\epsilon_{2,t}$:

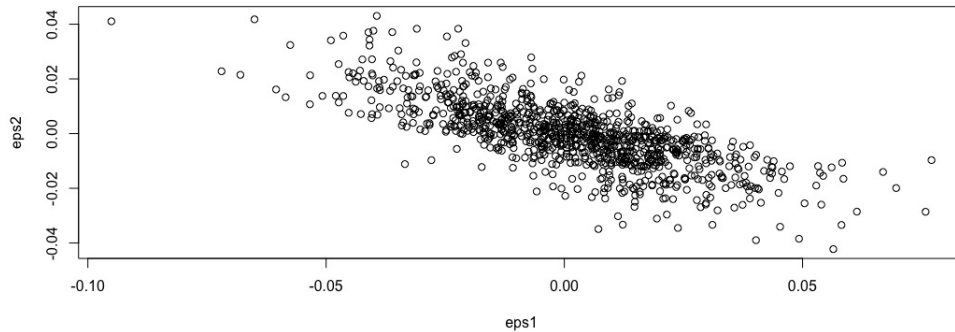


Figure 7: Scatterplot met $(x, y) = (\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t})$ waar $\rho_{12} = -0.8$

In de scatterplot is een duidelijke negatieve correlatie te zien tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$. De empirische correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ is als volgt:

$$\text{Cor}(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}) = -0.74$$

4.1.4 Simulatie met $\rho_{12} = 0$

Als laatste wordt er nog gekeken naar een simulatie van het CCC model als er geen constante conditionele correlatie is. We stellen $\rho_{12} = 0$. Dit houdt in dat het 2-dimensionale multivariate CCC model twee losse univariate GARCH modellen wordt. De simulatie van ϵ_t is als volgt:

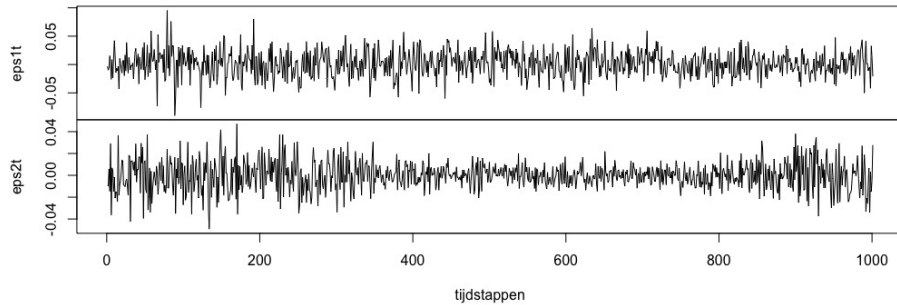


Figure 8: Realisatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$, gedefinieerd in (27), na het simuleren van het CCC model met $\rho_{12} = 0$. Boven: $\epsilon_{1,t}$. Onder: $\epsilon_{2,t}$

De volgende scatterplot wordt verkregen als $\epsilon_{1,t}$ wordt uitgezet tegen $\epsilon_{2,t}$:

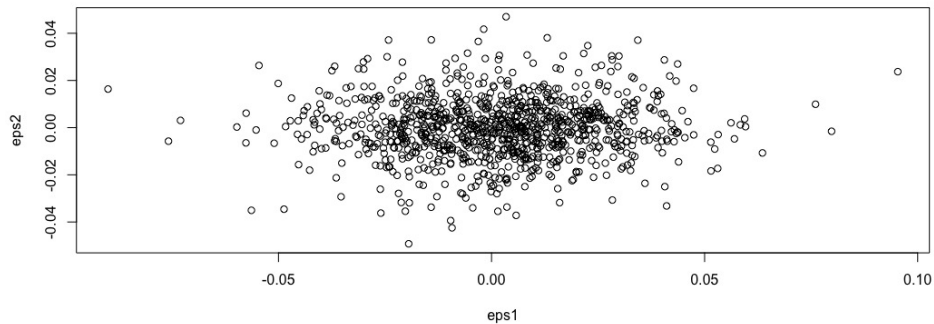


Figure 9: Scatterplot met $(x, y) = (\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t})$ waar $\rho_{12} = 0$

Het is duidelijk terug te zien dat er geen correlatie is tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ omdat er geen lineair verband te zien is in de scatterplot. De empirische correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ is als volgt:

$$\text{Cor}(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}) = 0.03$$

4.1.5 Verifiëren van de modelaannames van het CCC model

In de vorige sectie werd de data gesimuleerd voor het CCC model. Om na te gaan of het model adequaat is bij onze data worden er verschillende testen uitgevoerd op de gestandaardiseerde residuen, $\hat{Z}_t = \hat{H}_t^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t$ (12). Dit wordt op gesimuleerde data getest zodat te zien is wat de gewenste resultaten moeten zijn als er op echte data wordt getest. De met het CCC model gesimuleerde data uit sectie 4.1.2, waarbij de conditionele correlatie $\rho_{12} = 0.8$ werd gebruikt, wordt in deze sectie gecheckt. Dezelfde volgorde van het testen van de gestandaardiseerde residuen zoals in sectie 3.1 wordt aangenomen.

1. De gestandaardiseerde residuen moeten white noise zijn.
Eerst wordt er gekeken naar een plot van de gestandaardiseerde residuen over de tijd.

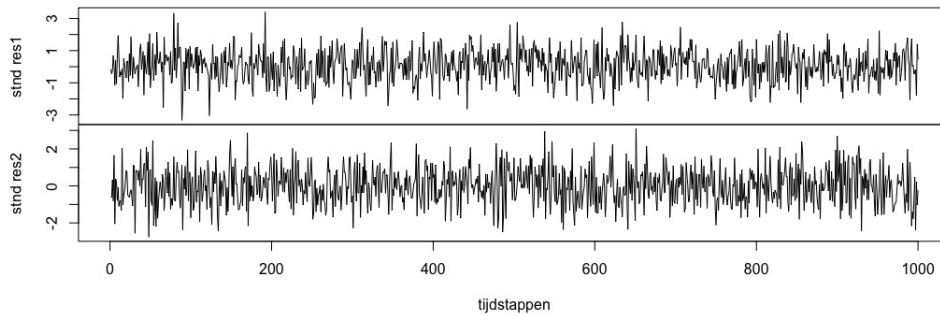


Figure 10: De gestandaardiseerde residuen, $\hat{Z}_t = \hat{H}_t^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t$, zoals gedefinieerd in (12). Boven: $\hat{Z}_{1,t}$. Onder: $\hat{Z}_{2,t}$.

Deze gestandaardiseerde residuen lijken redelijk white noise uit deze plot. Er is geen duidelijke autocorrelatie te zien binnen de tijdreeksen, de verwachting lijkt ook nul te zijn en er zijn geen grote variantie pieken. Let op dat hieruit niet geconcludeerd kan worden dat de gestandaardiseerde residuen white noise zijn, maar er kan ook niet uitgesloten worden dat de gestandaardiseerde residuen niet white noise zijn.

Nu wordt er gekeken naar de ACF plot van de gestandaardiseerde residuen:

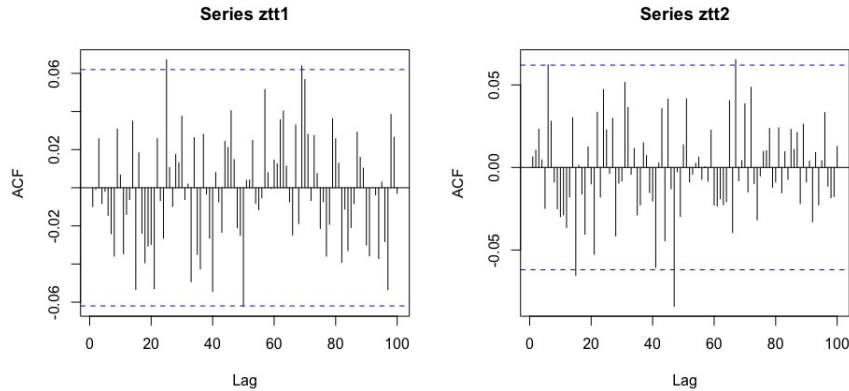


Figure 11: Bij het linker plaatje: ACF plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}$. Bij het rechter plaatje: ACF plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}$.

De blauwe stippellijnen zijn het 95% betrouwbaarheidsinterval $[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}]$ van de autocorrelatie van een white noise proces, met T het aantal tijdstappen in $\hat{Z}_{i,t}$. Als de autocorrelatie bij 95% van de lags hiertussen blijft kan worden verondersteld dat de gestandaardiseerde residuen white noise zijn. Dit is het geval bij de gestandaardiseerde residuen, want in figuur 11 valt de autocorrelatie bij minder dan 5 van de 100 lags buiten deze blauwe stippellijnen.

Ook wordt er met de Ljung-Box test gekeken of de gestandaardiseerde residuen geen autocorrelatie hebben. De test resultaten zijn als volgt:

Data	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}$	1	0.985	0.754
$\hat{Z}_{2,t}$	1	0.0408	0.840

Table 1: De Ljung-Box test. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi^2_{1-\alpha, h}$, met h het aantal vrijheidsgraden.

De p-waarden zijn groter dan 0.05, er is dus geen reden om de nulhypothese af te wijzen. Er kan dus niet worden verworpen dat dat de gestandaardiseerde residuen geen autocorrelatie heeft. Op basis van de ACF plot en de Ljung-Box test wordt aangenomen dat de gestandaardiseerde residuen, $\hat{Z}_{1,t}$ en $\hat{Z}_{2,t}$, white noise zijn.

2. De gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen, $\hat{Z}_{i,t}^2$ gedefinieerd in (13), moeten ook white noise zijn, wederom wordt de ACF plot gemaakt en de Ljung-Box test uitgevoerd.

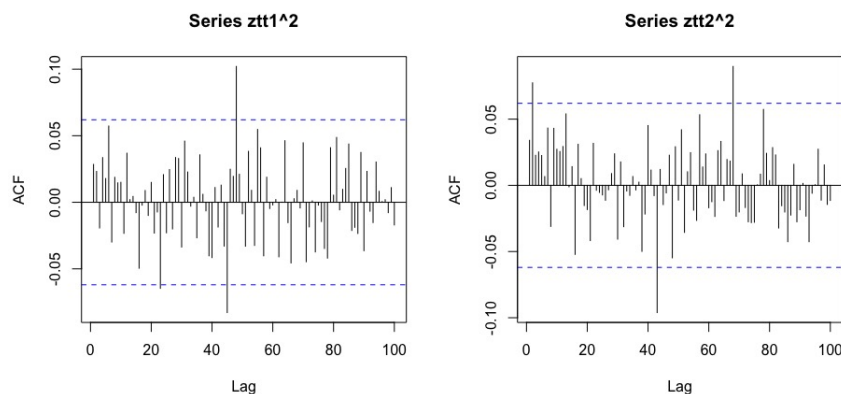


Figure 12: Bij het linker plaatje: ACF plot van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}^2$. Bij het rechter plaatje: ACF plot van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}^2$.

De Ljung-Box test wordt ook gebruikt voor de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen. De resultaten zijn als volgt:

Data	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}^2$	1	0.812	0.368
$\hat{Z}_{2,t}^2$	1	1.16	0.282

Table 2: De Ljung-Box test. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi_{1-\alpha, h}^2$, met h het aantal vrijheidsgraden.

Hieruit kan op dezelfde manier een conclusie getrokken worden als bij de gestandaardiseerde residuen: Er is geen autocorrelatie binnen de tijdreeksen van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen. Er wordt aangenomen dat de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen white noise zijn.

3. Er wordt verondersteld dat de gestandaardiseerde residuen een standaard normale verdeling hebben, om dit te testen wordt er gekeken naar de histogram en de Quantile-Quantile plot van de gestandaardiseerde residuen.

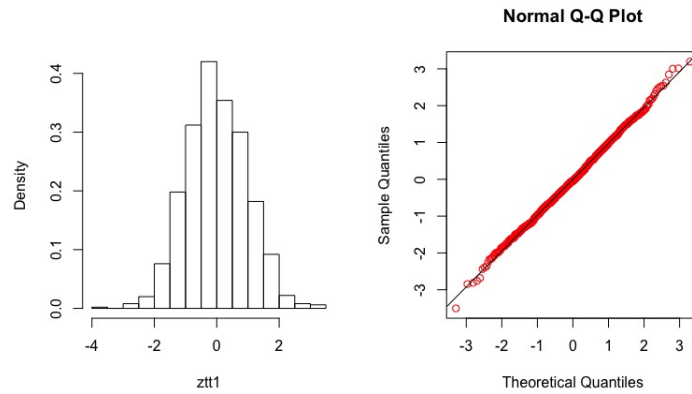


Figure 13: De histogram en de Quantile-Quantile plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}$. Bij het rechter plaatje geldt: Sample Quantiles zijn de kwantielen van $\hat{Z}_{1,t}$ en de Theoretical Quantiles zijn de kwantielen van een standaard normale verdeling

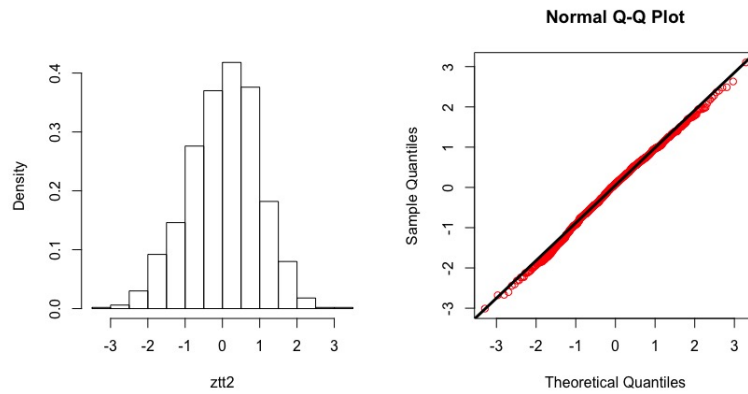


Figure 14: De histogram en de Quantile-Quantile plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}$. Bij het rechter plaatje geldt: Sample Quantiles zijn de kwantielen van $\hat{Z}_{2,t}$ en de Theoretical Quantiles zijn de kwantielen van een standaard normale verdeling.

De histogram heeft de bekende "belvorm" van een normale verdeling en als er naar de Quantile-Quantile plot wordt gekeken is goed te zien dat de gestandaardiseerde residuen standaard normaal verdeeld zijn, want de punten in de Q-Q plot liggen in een $x = y$ lijn.

Nu wordt nog de Cramer-Test en de parametrische bootstrap uitgevoerd.

1. Eerst wordt de Cramer-Test uitgevoerd. Deze test kijkt na of de multivariate tijdreeksen verdeeld zijn zoals verwacht.

Als x-sample zijn de gestandaardiseerde residuen genomen in een 1000×2 matrix en als y-sample een 1000×2 matrix met standaard normaal verdeelde stochasten.

De resultaten zijn als volgt:

Table 3: Cramer-Test

x-sample	$[\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{1000}] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,1} & \dots & \hat{Z}_{1,1000} \\ \hat{Z}_{2,1} & \dots & \hat{Z}_{2,1000} \end{bmatrix}$
y-sample	$[Z_1, \dots, Z_{1000}] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,1000} \\ Z_{2,1} & \dots & Z_{2,1000} \end{bmatrix} \sim N(0,1)$
Test statistiek: $T_{1000,1000}$	1.336
p-waarde	0.139
Hypothese: x-sample is verdeeld zoals y-sample	Geaccepteerd

Zoals de test aangeeft is de x-sample verdeeld zoals de y-sample. Dus er kan worden verondersteld dat de gestandaardiseerde residuen standaard normaal verdeeld zijn.

2. Parametrische bootstrap.

Om te testen of de staarten van de data goed gesimuleerd worden wordt er een parametrische bootstrap uitgevoerd. Eerst worden de parameters van het CCC model geschat. De volgende parameters zijn verkregen:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.000005, & \alpha_1 &= 0.0192, & \beta_1 &= 0.975 \\ \omega_2 &= 0.000005, & \alpha_2 &= 0.048, & \beta_2 &= 0.950 \\ \rho_{12} &= 0.765 \end{aligned}$$

Met deze parameters wordt het CCC model 1000 keer gesimuleerd met als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen een standaard normale verdeling. Met behulp van deze simulaties worden de 80%-, 90%- en 95% betrouwbaarheidsintervallen voor elke tijdstap van $\epsilon_{i,t}$ gemaakt, zoals laten zien is in sectie 3.1. Als het gefitte model geschikt is voor de data wordt verwacht dat bij de $\alpha\%$ betrouwbaarheidsintervallen $\alpha\%$ van de residuen binnen deze intervallen liggen en $(100 - \alpha)\%$ de intervallen overschrijdt.

De resultaten zijn als volgt:

Table 4: Het aantal verwachte overschrijdingen van de residuen van het CCC GARCH model vergeleken met het aantal geobserveerde overschrijdingen.

CCC model	Betrouwbaarheids-interval	# verwachte overschrijdingen	# geobserveerde overschrijdingen
$\epsilon_{1,t}$	95%	50	48
	90%	100	97
	80%	200	197
$\epsilon_{2,t}$	95%	50	46
	90%	100	100
	80%	200	202

Zoals te zien is in tabel 1 zijn de geobserveerde overschrijdingen ongeveer gelijk aan het aantal verwachte overschrijdingen. Hieruit wordt geconcludeerd dat de staarten van de residuen hetzelfde verdeeld zijn als verwacht, namelijk zoals het CCC model met de geschatte parameters en $Z_t \sim N(0, 1)$. Er wordt dus aangenomen dat de veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen een standaard normale verdeling is.

5 Het DCC model

Het DCC (Dynamic Conditional Correlation) model, geïntroduceerd door Engle (2002), is één van de manieren om een multivariaat GARCH model te modelleren. Dit is een model dat de flexibiliteit van univariate GARCH modellen heeft maar niet de complexiteit van de meeste conventionele multivariate GARCH modellen.

Het DCC model is een uitbreiding van het CCC model. Het DCC model heeft in tegenstelling tot het CCC model tijdsafhankelijk conditionele correlaties, het gevolg hiervan is dat er meer onbekende parameters geschat moeten worden.

Het idee van het DCC model is dat de conditionele covariantiematrix, H_t , kan worden verdeeld in de conditionele standaard deviaties, D_t , en een dynamische conditionele correlatie matrix R_t . Zowel D_t als R_t zijn ontworpen zodat ze tijdsafhankelijk zijn.

Het DCC model is als volgt gedefinieerd:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (28)$$

$$\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t \quad (29)$$

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (30)$$

Waarbij geldt voor een n -dimensionaal DCC model:

- D_t : $n \times n$ diagonale matrix met conditionele standaarddeviaties van y_t op de diagonaal.
- R_t : $n \times n$ conditionele correlatie matrix van y_t op tijd t .
- H_t : $n \times n$ conditionele covariantiematrix van y_t . Dit moet een positief definitie matrix zijn.

D_t en R_t zijn als volgt gedefinieerd:

$$D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{nn,t}}) \quad (31)$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12,t} & \rho_{13,t} & \dots & \rho_{1n,t} \\ \rho_{12,t} & 1 & \rho_{23,t} & \dots & \rho_{2n,t} \\ \rho_{13,t} & \rho_{23,t} & 1 & \dots & \rho_{3n,t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n,t} & \rho_{2n,t} & \rho_{3n,t} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$h_{ii,t}$ kan worden gedefinieerd als elk univariaat GARCH model. Vaak is het GARCH(1,1) model geschikt: $h_{ii,t} = \omega_i + \alpha_i \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{ii,t-1}$.

De conditionele covariantie matrix H_t moet positief definitief zijn. Om er voor te zorgen dat deze matrix positief definitief is moet R_t positief definitief zijn voor elke tijdstap t . Daarnaast moet gelden dat $|\rho_{ij,t}| \leq 1 \forall t$, omdat R_t een correlatie matrix is.

R_t wordt als volgt opgedeeld, dit zorgt er voor dat R_t positief definitief is voor elke tijdstap en dat $|\rho_{ij,t}| \leq 1 \forall t$:

$$R_t = \text{diag}(q_{11,t}^{-\frac{1}{2}}, \dots, q_{nn,t}^{-\frac{1}{2}}) Q_t \text{diag}(q_{11,t}^{-\frac{1}{2}}, \dots, q_{nn,t}^{-\frac{1}{2}}) \quad (33)$$

Waar de $n \times n$ symmetrische positief definitieve matrix $Q_t = (q_{ij,t})$ gegeven is door:

$$Q_t = (1 - \theta - \gamma) \bar{Q} + \theta u_{t-1} u_{t-1}' + \gamma Q_{t-1} \quad (34)$$

Waarvoor geldt voor een n -dimensionaal DCC model:

- θ en γ : Parameters die moeten voldoen aan: $\theta, \gamma \geq 0$, $\theta + \gamma < 1$.
- u_t : De gestandaardiseerde ϵ_t (29): $u_{i,t} = \frac{\epsilon_{i,t}}{\sqrt{h_{ii,t}}}$ en $u_t = (u_{1,t}, u_{2,t}, \dots, u_{n,t})'$.
- \bar{Q} : De $n \times n$ onconditionele covariantie matrix van u_t : $\bar{Q} = \text{Cov}(u_t u_t') = E[u_t u_t']$.

Om een visualisatie te krijgen waaruit de matrix R_t bestaat wordt van het bivariate DCC model de $\rho_{12,t}$ uitgeschreven:

$$\rho_{12,t} = \frac{(1 - \theta - \gamma) \bar{q}_{12} + \theta u_{1,t-1} u_{2,t-1} + \gamma q_{12,t-1}}{\sqrt{((1 - \theta - \gamma) \bar{q}_{11} + \theta u_{1,t-1}^2 + \gamma q_{11,t-1})(1 - \theta - \gamma) \bar{q}_{22} + \theta u_{2,t-1}^2 + \gamma q_{22,t-1}}}$$

Waarbij \bar{q}_{ij} de elementen van de matrix \bar{Q} zijn.

In de volgende sectie worden verschillende simulaties van het DCC model gemaakt waar de waarden in de matrix \bar{Q} steeds worden veranderd.

5.1 Het DCC model

In deze sectie wordt het bivariate DCC model gesimuleerd zodat er gezien kan worden hoe het DCC model eruit ziet en hoe de testen voor adequaatheid van het model horen te verlopen. Het simuleren van een DCC model gaat in twee stappen:

1. Eerst wordt het univariate GARCH(1,1) model gesimuleerd:

$$Z_{i,t} \sim IID(0, 1) \quad (35)$$

$$h_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\epsilon_{i,t} = h_{ii,t}^{\frac{1}{2}} Z_{i,t} \quad (37)$$

2. In de tweede stap wordt het dynamische conditionele correlatie deel gesimuleerd:

$$D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \sqrt{h_{22,t}}) \quad (38)$$

$$u_t = D_t^{-1} \epsilon_t \quad (39)$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{11} & \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{21} & \bar{q}_{22} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$Q_t = (1 - \theta - \gamma)\bar{Q} + \theta u_{t-1} u'_{t-1} + \gamma Q_{t-1} \quad (41)$$

$$R_t = \text{diag}(q_{11,t}^{-\frac{1}{2}}, q_{22,t}^{-\frac{1}{2}}) Q_t \text{diag}(q_{11,t}^{-\frac{1}{2}}, q_{22,t}^{-\frac{1}{2}}) \quad (42)$$

$$H_t = D_t R_t D_t$$

$$Z_{1,t}, Z_{2,t} \sim IID(0, 1) \quad (43)$$

$$\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t \quad (44)$$

Om te zien wat er gebeurt met de resultaten wordt de dynamische conditionele correlatie matrix R_t aangepast. Hiervoor worden de waarden in de onconditionele covariantie matrix \bar{Q} in $Q_t = (1 - \theta - \gamma)\bar{Q} + \theta u_{t-1} u'_{t-1} + \gamma Q_{t-1}$ steeds veranderd.

5.1.1 Het simuleren van het DCC model

Bij het simuleren van het DCC model wordt de onconditionele covariantie matrix steeds veranderd. Er wordt gekeken naar onconditionele covariantie matrices van de volgende vorm:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Er worden drie verschillende onconditionele covariantie matrices bekeken:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De parameters voor het univariate GARCH model, gedefinieerd in (35), (36) en (37), zijn als volgt gekozen:

$$\begin{aligned} Z_{i,t} &\sim N(0, 1) \\ \omega_1 &= 0.00005 \quad \alpha_1 = 0.02 \quad \beta_1 = 0.95 \\ \omega_2 &= 0.00005 \quad \alpha_2 = 0.05 \quad \beta_2 = 0.93 \end{aligned}$$

De parameters en verdeling uit respectievelijk formule (41) en (43) zijn als volgt gekozen:

$$\begin{aligned} \theta &= 0.01 \quad \gamma = 0.98 \\ Z_{1,t}, Z_{2,t} &\sim N(0, 1) \end{aligned}$$

In de volgende subsecties zal de waarde van a in (45) steeds worden veranderd. Er wordt dus gekeken naar $a \in \{0.8, -0.8, 0\}$.

5.1.2 Simulatie met $a = 0.8$.

Stel $a = 0.8$ in de matrix van (45).

Eerst wordt de conditionele variantie via het univariaat GARCH(1,1) model gesimuleerd:

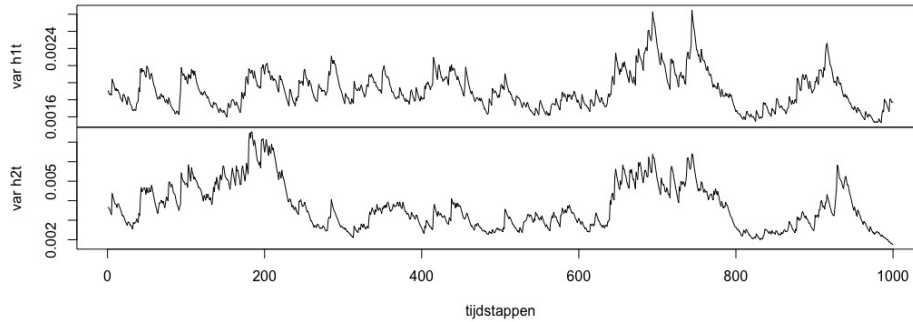


Figure 15: Simulatie van de conditionele variantie $h_{11,t}$ en $h_{22,t}$ verkregen met het univariate GARCH(1,1) model met de volgende parameters voor formule (36):

Bovenste plot: $\omega_1 = 0.00005$ $\alpha_1 = 0.02$, $\beta_1 = 0.95$.

Onderste plot: $\omega_2 = 0.00005$ $\alpha_2 = 0.05$, $\beta_2 = 0.93$.

De simulatie van de dynamische conditionele correlatie $\rho_{12,t}$ is als volgt:

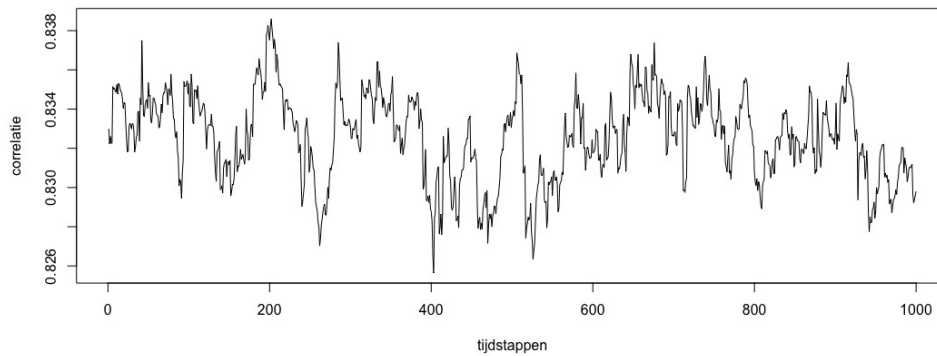


Figure 16: Simulatie van de dynamische conditionele correlatie $\rho_{12,t}$ met parameters van (41) en (45) als volgt: $a = 0.8$, $\theta = 0.01$ en $\gamma = 0.98$.

De simulatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$ is als volgt :

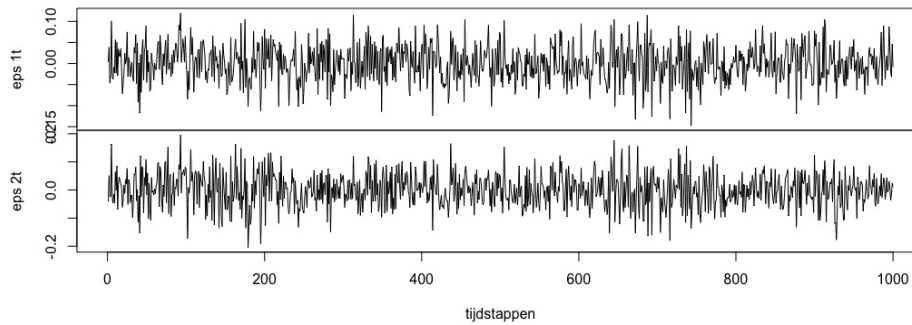


Figure 17: Realisatie van ϵ_t , gedefinieerd in (44), na het simuleren van het DCC model. Boven: $\epsilon_{1,t}$. Onder: $\epsilon_{2,t}$.

Om een visualisatie te krijgen van de correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ wordt er een scatterplot gemaakt waar $\epsilon_{1,t}$ wordt uitgezet tegen $\epsilon_{2,t}$:

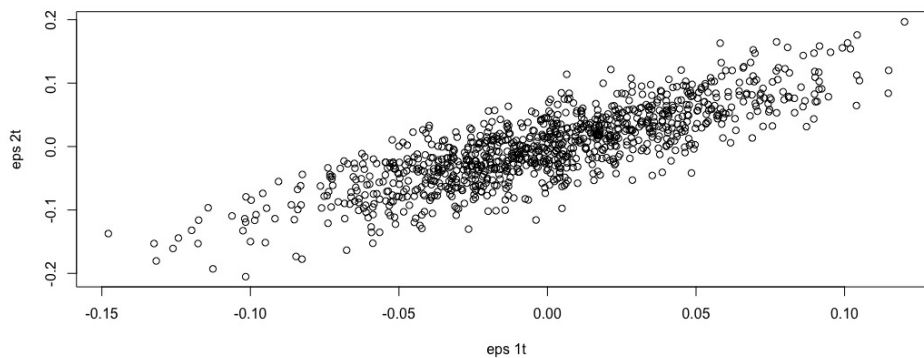


Figure 18: Scatterplot waar $\epsilon_{1,t}$ wordt uitgezet tegen $\epsilon_{2,t}$

Er is een positief lineaire relatie tussen de punten van de scatterplot, wat inhoudt dat er een positieve correlatie is tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$. De empirische correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ is als volgt:

$$\text{Cor}(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}) = 0.78$$

5.1.3 Simulatie met $a = -0.8$.

Nu wordt er gekeken naar een simulatie van het DCC model waarbij $a = -0.8$. Eerst wordt de conditionele variantie verkregen via het univariate GARCH(1,1) model :

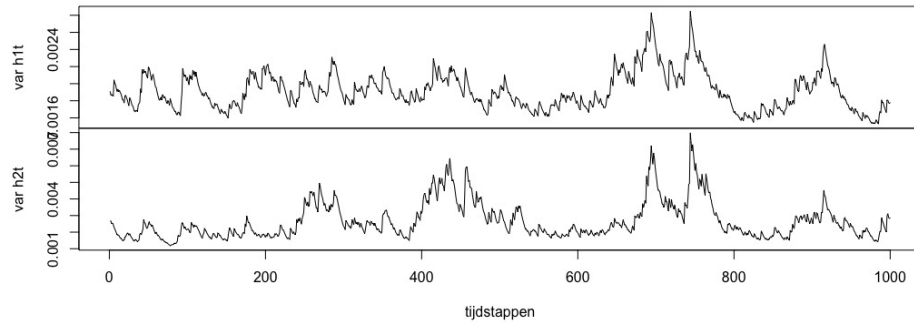


Figure 19: Simulatie van de conditionele variantie $h_{11,t}$ en $h_{22,t}$ verkregen met het univariate GARCH(1,1) model met de volgende parameters voor formule (36):

Bovenste plot: $\omega_1 = 0.00005$ $\alpha_1 = 0.02$, $\beta_1 = 0.95$.

Onderste plot: $\omega_2 = 0.00005$ $\alpha_2 = 0.05$, $\beta_2 = 0.93$.

De dynamische conditionele correlatie $\rho_{12,t}$ is als volgt:

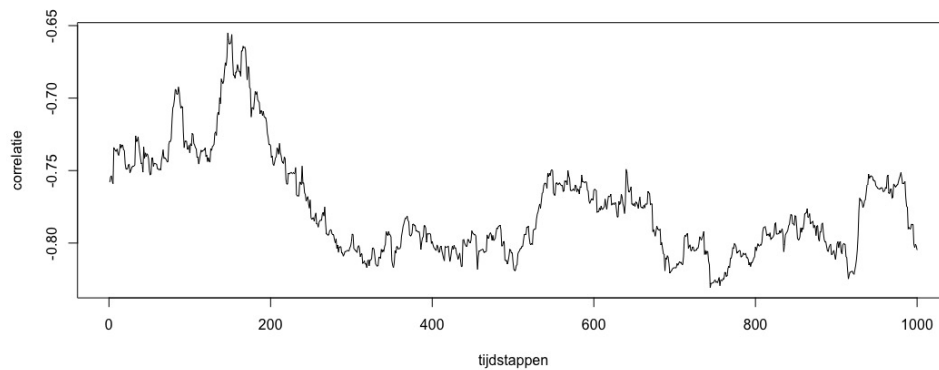


Figure 20: Simulatie van de dynamische conditionele correlatie $\rho_{12,t}$ met parameters van (41) en (45) als volgt: $a = -0.8$, $\theta = 0.01$ en $\gamma = 0.98$.

De volgende simulatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$ is verkregen:

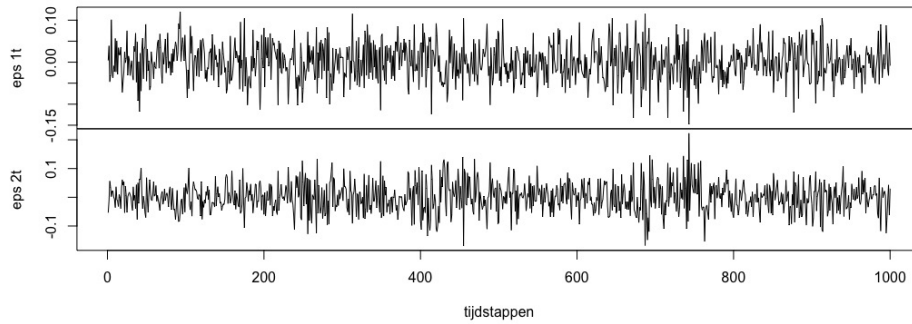


Figure 21: Realisatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$, gedefinieerd in (44), na het simuleren van het DCC model. Boven: $\epsilon_{1,t}$. Onder: $\epsilon_{2,t}$.

De volgende scatterplot wordt verkregen als $\epsilon_{1,t}$ wordt uitgezet tegen $\epsilon_{2,t}$. Het is goed te zien dat er een negatieve correlatie is, omdat de helling van het lineaire verband van de punten in de scatterplot negatief is:

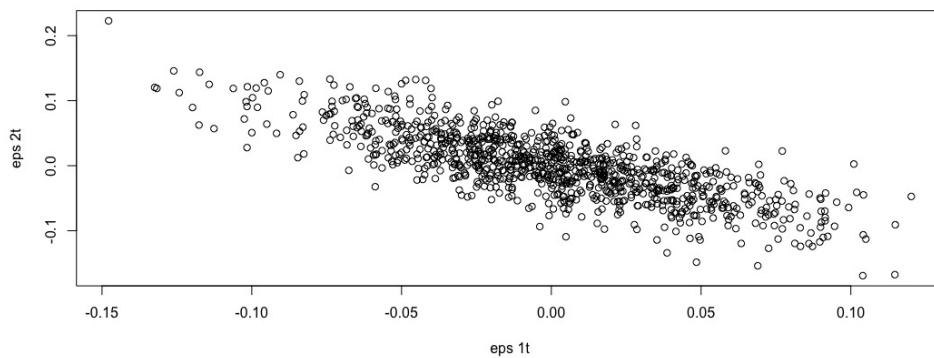


Figure 22: Scatterplot waar $\epsilon_{1,t}$ wordt uitgezet tegen $\epsilon_{2,t}$

De empirische correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ is als volgt:

$$\text{Cor}(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}) = -0.75$$

5.1.4 Simulatie met $a = 0$.

Als laatste wordt het DCC model met $a = 0$ gesimuleerd. De conditionele varianties verkregen met het univariate GARCH(1,1) model zijn als volgt:

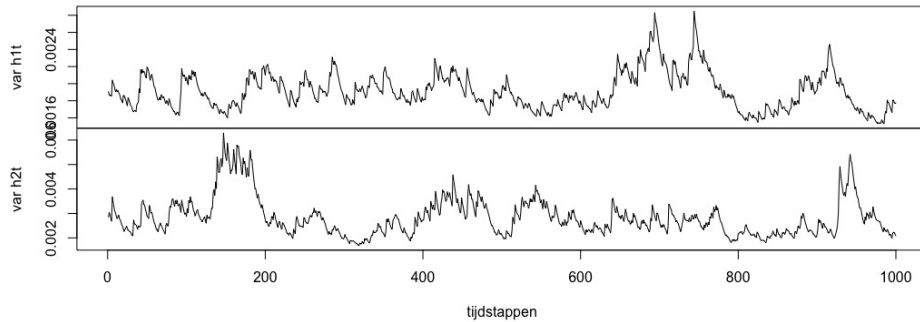


Figure 23: Simulatie van de conditionele variantie $h_{11,t}$ en $h_{22,t}$ verkregen met het univariate GARCH(1,1) model met de volgende parameters voor formule (36):

Bovenste plot: $\omega_1 = 0.00005$ $\alpha_1 = 0.02$, $\beta_1 = 0.95$.

Onderste plot: $\omega_2 = 0.00005$ $\alpha_2 = 0.05$, $\beta_2 = 0.93$.

De volgende dynamische conditionele correlatie $\rho_{12,t}$ wordt verkregen:

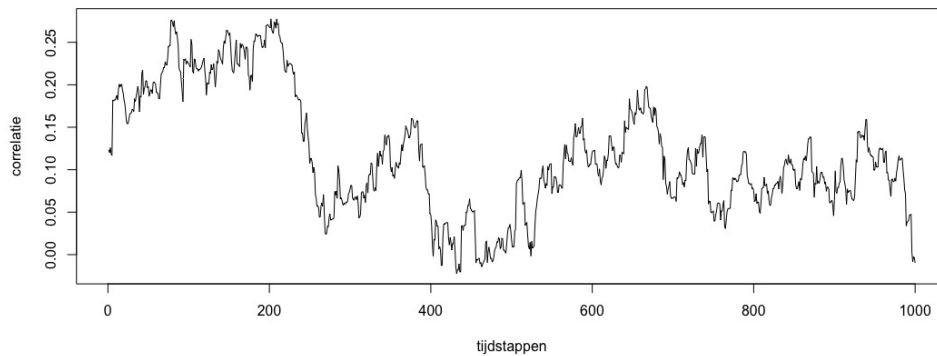


Figure 24: Simulatie van de dynamische conditionele correlatie $\rho_{12,t}$ met parameters van (40) en (41) als volgt: $a = 0$, $\theta = 0.01$ en $\gamma = 0.98$.

De simulatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$ is als volgt:

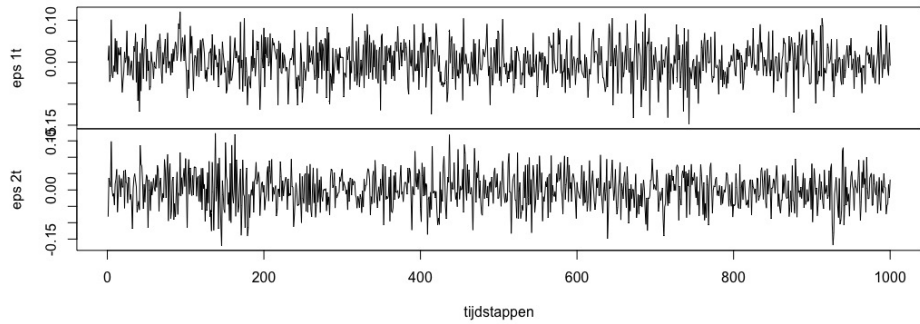


Figure 25: Realisatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$, gedefinieerd in (44), na het simuleren van het DCC model. Boven: $\epsilon_{1,t}$. Onder: $\epsilon_{2,t}$.

Als $\epsilon_{1,t}$ wordt uitgezet tegen $\epsilon_{2,t}$ in een scatterplot is goed te zien dat er nauwelijks correlatie is tussen de $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$, de elementen in de scatterplot lijken namelijk willekeurig verdeeld:

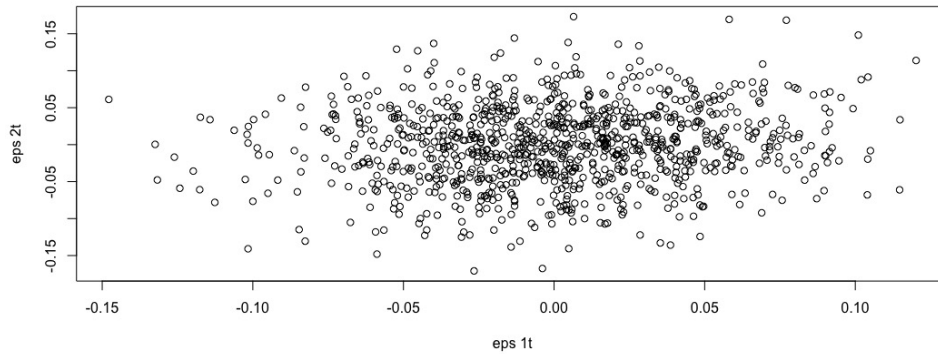


Figure 26: Scatterplot waar $\epsilon_{1,t}$ wordt uitgezet tegen $\epsilon_{2,t}$

De empirische correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ is als volgt:

$$\text{Cor}(\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}) = 0.04$$

5.1.5 Verifiëren van de modelaannames van het DCC model

In de vorige sectie werd data gesimuleerd voor het DCC model. In deze sectie zullen verschillende testen uitgevoerd worden op de gestandaardiseerde residuen, $\hat{Z}_t = \hat{H}_t^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t$ (12), om na te gaan of het DCC model adequaat is bij onze data. Dit wordt getest op gesimuleerde data zodat er gezien kan worden wat de gewenste resultaten moeten zijn als er wordt getest op echte data. De realisatie van ϵ_t na het simuleren van het DCC model uit sectie 5.1.2 zullen gebruikt worden, zie figuur 17.

De volgorde van het testen uit sectie 3.1 wordt aangehouden.

1. De gestandaardiseerde residuen moeten white noise zijn.
Eerst wordt er naar een plot van de gestandaardiseerde residuen over de tijd gekeken.

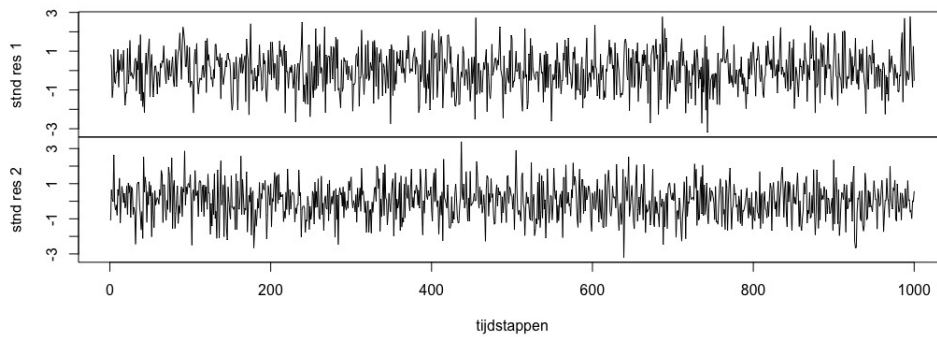


Figure 27: De gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_t = \hat{H}_t^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t$, zoals gedefinieerd in (12). Boven: $\hat{Z}_{1,t}$. Onder: $\hat{Z}_{2,t}$.

Er kan geen duidelijke correlatie gezien worden binnen de gestandaardiseerde residuen in figuur 27, de verwachting lijkt ook nul te zijn en er zijn geen grote variantie pieken. Hieruit kan dus niet geconcludeerd worden dat de gestandaardiseerde residuen niet white noise zijn, dus er zal verder getest worden.

Nu wordt er gekeken naar de ACF plot van de gestandaardiseerde residuen:

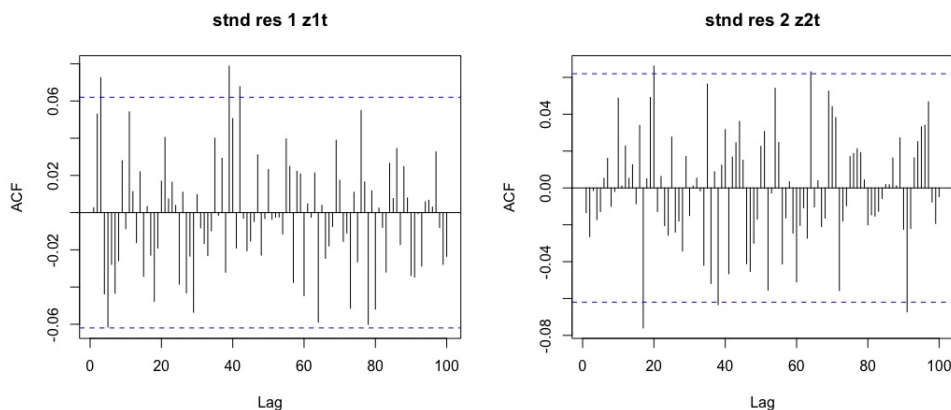


Figure 28: Linker afbeelding: ACF plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}$. Rechter afbeelding: ACF plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}$.

De blauwe stippelijnen is het 95% betrouwbaarheidsinterval $[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}]$ van de autocorrelatie van een white noise proces, met T het aantal tijdstappen in $\hat{Z}_{i,t}$. Als de autocorrelatie 95% van de lags hiertussen blijft kan worden aangenomen dat de data white noise is. Dit is het geval bij deze gestandaardiseerde residuen, want bij minder dan 5 van de 100 lags valt de autocorrelatie buiten de blauwe stippelijnen.

Ook wordt er met de Ljung-Box test nagekeken of de gestandaardiseerde residuen geen autocorrelatie hebben:

Data	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}$	1	0.00674	0.935
$\hat{Z}_{2,t}$	1	0.180	0.671

Table 5: De Ljung-Box test. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi^2_{1-\alpha, h}$, met h het aantal vrijheidsgraden.

De p-waarden zijn groter dan 0.05, er is dus geen reden om de nulhypothese te verwerpen. Er kan dus niet worden aangenomen dat de gestandaardiseerde residuen autocorrelatie hebben. Op basis van de ACF plot en de Ljung-Box test wordt verondersteld dat de gestandaardiseerde residuen white noise zijn.

2. De gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen, gedefinieerd in (13), moeten ook white noise zijn. Er wordt wederom een ACF plot gemaakt en een Ljung-Box test uitgevoerd.

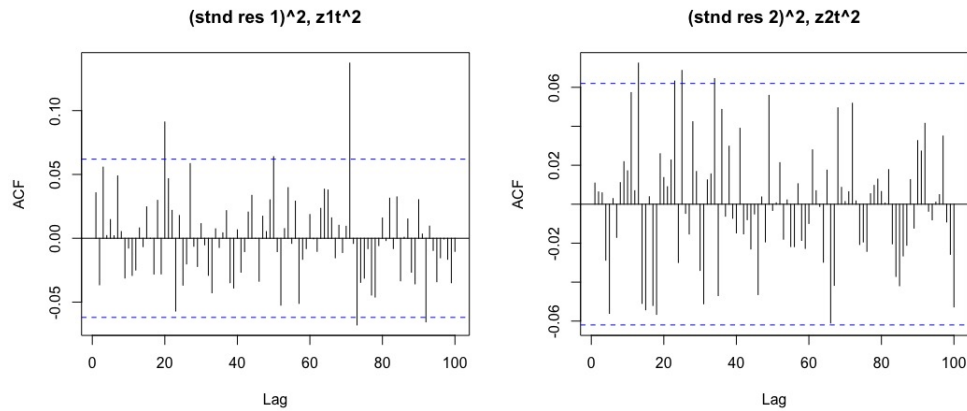


Figure 29: Linker afbeelding: ACF plot van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}^2$. Rechter afbeelding: ACF plot van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}^2$.

Data	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}^2$	1	1.27	0.259
$\hat{Z}_{2,t}^2$	1	0.118	0.731

Table 6: De Ljung-Box test. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi_{1-\alpha, h}^2$, met h het aantal vrijheidsgraden.

Hieruit kan op dezelfde manier een conclusie getrokken worden als bij de gestandaardiseerde residuen: Er is geen autocorrelatie binnen de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen. Er wordt aangenomen dat de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen white noise zijn.

3. Er wordt verondersteld dat deze gestandaardiseerde residuen uit figuur 27 een standaard normale verdeling hebben. Om dit te testen wordt er gekeken naar de histogram en de Quantile-Quantile plot van de gestandaardiseerde residuen.

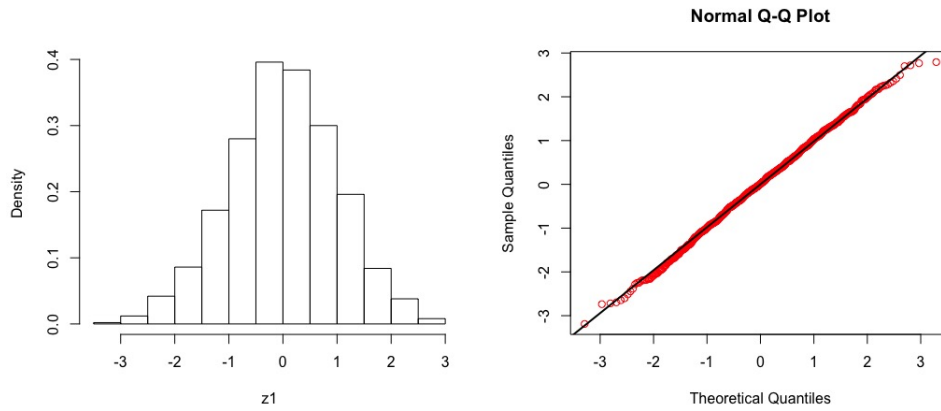


Figure 30: De histogram en de Quantile-Quantile plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}$.

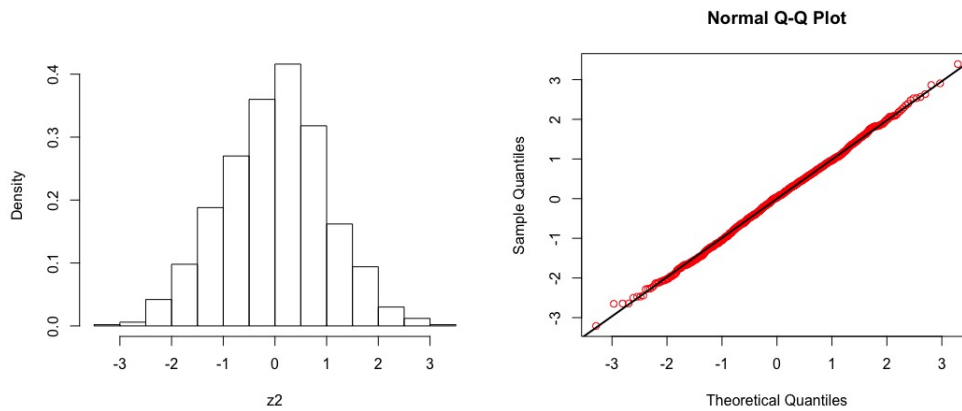


Figure 31: De histogram en de Quantile-Quantile plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}$.

De histogram heeft de bekende "belvorm" van een normale verdeling en bij de Quantile-Quantile plot liggen de punten in een $x = y$ lijn, wat inhoudt dat de gestandaardiseerde residuen standaard normaal verdeeld zijn.

Als volgende worden de Cramer-Test en de parametrische bootstrap uitgevoerd:

1. Cramer-Test.

De Cramer-Test checkt of twee tijdreeksen hetzelfde verdeeld zijn. Als x-sample zijn de gestandaardiseerde residuen genomen in een 1000×2 matrix en als y-sample een 1000×2 matrix met standaard normaal verdeelde stochasten.

De volgende resultaten zijn verkregen uit de Cramer-Test:

Table 7: Cramer-Test

x-sample	$[\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{1000}] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,1} & \dots & \hat{Z}_{1,1000} \\ \hat{Z}_{2,1} & \dots & \hat{Z}_{2,1000} \end{bmatrix}$
y-sample	$[Z_1, \dots, Z_{1000}] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,1000} \\ Z_{2,1} & \dots & Z_{2,1000} \end{bmatrix} \sim N(0,1)$
Test statistiek: $T_{1000,1000}$	0.522
p-waarde	0.795
Hypothese: x-sample is verdeeld zoals y-sample	Geaccepteerd

Zoals de test aangeeft is de x-sample verdeeld zoals de y-sample. Dus er wordt aangenomen dat de gestandaardiseerde residuen standaard normaal verdeeld zijn. Dus $\hat{Z}_{1,t} \sim Z_{1,t} \sim N(0,1)$ en $\hat{Z}_{2,t} \sim Z_{2,t} \sim N(0,1)$.

2. Parametrische bootstrap.

Om te testen of de staarten van de data goed gesimuleerd worden wordt er een parametrische bootstrap uitgevoerd. Eerst worden de parameters van het DCC model geschat in het programma *R*. De volgende parameters zijn verkregen:

$$\omega_1 = 0.00003, \quad \alpha_1 = 0.15, \quad \beta_1 = 0.97$$

$$\omega_2 = 0.00003, \quad \alpha_2 = 0.03, \quad \beta_2 = 0.95$$

$$\theta = 0.017, \quad \gamma = 0.97$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.78 \\ 0.77 & 0.99 \end{bmatrix}$$

Met deze parameters worden de $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$ met het DCC model 1000 keer gesimuleerd met standaard normaal verdeelde Z_t en met behulp van deze simulaties worden de 80%- , 90%- en een 95% betrouwbaarheidsintervallen voor elke tijdstap van ϵ_t gemaakt, op de manier zoals laten zien in sectie 3.1. Bij de $\alpha\%$ betrouwbaarheidsintervallen van ϵ_t wordt verwacht dat $\alpha\%$

van de residuen binnen deze intervallen liggen en $(100 - \alpha)\%$ de intervallen overschrijdt als het model goed past bij de data.

We kregen de volgende resultaten:

Table 8: Het aantal verwachte overschrijdingen van de residuen van het DCC GARCH model vergeleken met het aantal geobserveerde overschrijdingen.

DCC model	Betrouwbaarheids-interval	# verwachte overschrijdingen	# geobserveerde overschrijdingen
$\epsilon_{1,t}$	95%	50	52
	90%	100	93
	80%	200	201
$\epsilon_{2,t}$	95%	50	51
	90%	100	103
	80%	200	203

In deze tabel is te zien dat het aantal verwachte overschrijdingen ongeveer gelijk is aan het aantal geobserveerde overschrijdingen. Dit houdt in dat de ϵ_t op een goede manier wordt gesimuleerd, namelijk als het DCC model met de geschatte parameters en $Z_t \sim N(0,1)$.

Op basis van de ACF plot, de Cramer-test en de parametrische bootstrap wordt er aangenomen dat de gestandaardiseerde residuen standaard normaal zijn verdeeld.

6 Voorspellen met het univariate GARCH model en het multivariate CCC model

In deze sectie wordt het voorspellen met het univariate GARCH(1,1) model vergeleken met het voorspellen met het multivariate CCC model. Eerst wordt er data van het 2-dimensionale CCC model gesimuleerd. De data wordt gesimuleerd zodat het zeker is dat het model adequaat is voor deze data. Voor het simuleren van het CCC model, gedefinieerd in (20) t/m (27), worden de volgende parameters en verdeling gebruikt:

$$\begin{aligned}
 Z_t &\sim N(0,1) \\
 \omega_1 &= 0.00008, \quad \alpha_1 = 0.4, \quad \beta_1 = 0.5 \\
 \omega_2 &= 0.00005, \quad \alpha_2 = 0.1, \quad \beta_2 = 0.8 \\
 \rho_{12} &= 0.9
 \end{aligned}$$

Met het CCC model worden de volgende realisaties van $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ verkregen:

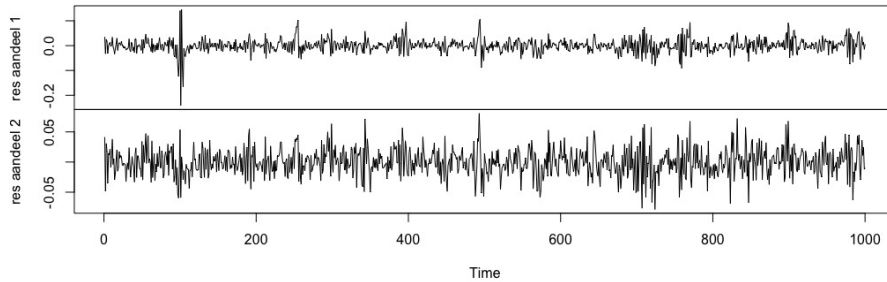


Figure 32: Realisatie van $\epsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} Z_t$ verkregen met het CCC model.
Boven: $\epsilon_{1,t}$. Onder: $\epsilon_{2,t}$.

Aan deze twee tijdreeksen uit figuur 32 wordt het univariate GARCH(1,1) model gefit. De volgende parameters worden geschat:

$$\begin{aligned}
 \hat{\omega}_1 &= 0.00007, \quad \hat{\alpha}_1 = 0.41, \quad \hat{\beta}_1 = 0.51 \\
 \hat{\omega}_2 &= 0.00005, \quad \hat{\alpha}_2 = 0.15, \quad \hat{\beta}_2 = 0.76
 \end{aligned}$$

Bij het fitten van het CCC model worden dezelfde parameters geschat als bij het univariate GARCH(1,1) model omdat bij het eerste deel van het CCC model alleen het univariate GARCH model wordt gebruikt. Het verschil tussen het univariate GARCH model en het CCC model is de constante conditionele correlatie. De constante conditionele correlatie tussen $\epsilon_{1,t}$ en $\epsilon_{2,t}$ is als volgt geschat:

$$\hat{\rho}_{12} = 0.89$$

Aan de hand van deze twee modellen met de verkregen parameters worden de conditionele varianties en de voorspellingsintervallen van ϵ_t voorspeld.

De voorspelling van de conditionele varianties zijn hetzelfde voor de twee modellen. De volgende conditionele varianties zijn verkegen met een voorspelling van 100 tijdstappen vanaf de rode lijn:

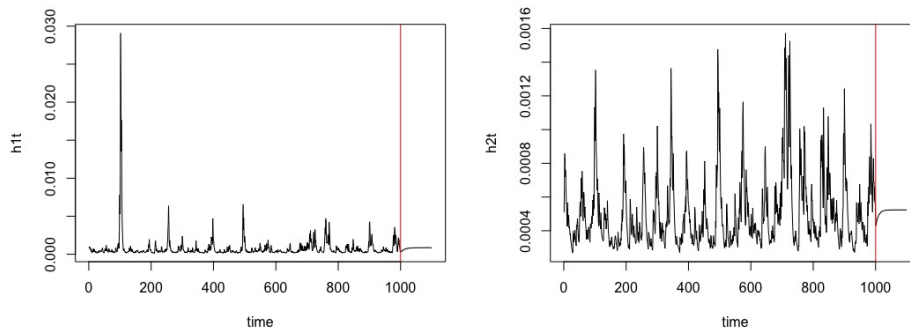


Figure 33: De conditionele variantie verkregen met het univariate GARCH(1,1) model met een voorspelling van 100 tijdstappen. Respectievelijk $\hat{h}_{1,t}$ en $\hat{h}_{2,t}$.

Voorspellen met het univariate GARCH(1,1) model

Met het univariate GARCH(1,1) model worden de volgende voorspellingsintervallen voor de residuen voorspeld:

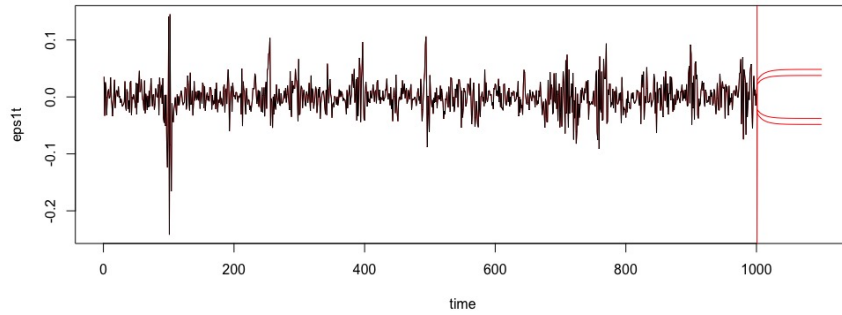


Figure 34: De residuen $\hat{\epsilon}_{1,t}$ samen met het 80%- en het 90% voorspellingsinterval.

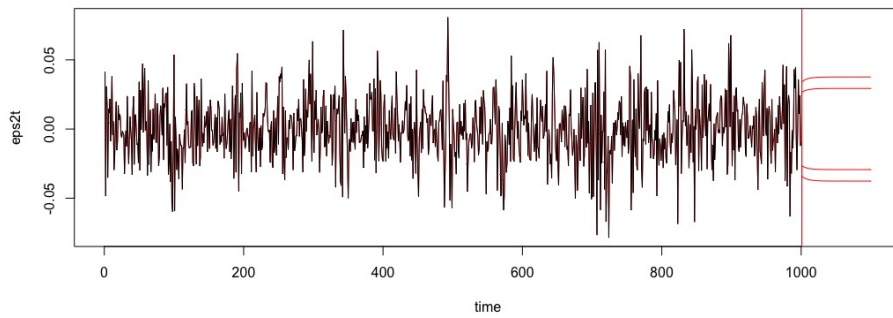


Figure 35: De residuen $\hat{\epsilon}_{2,t}$ samen met het 80%- en het 90% voorspellingsinterval.

Voorspellen met het multivariate CCC model

Met het CCC model worden de volgende voorspellingintervallen voor de residuen voorspeld:

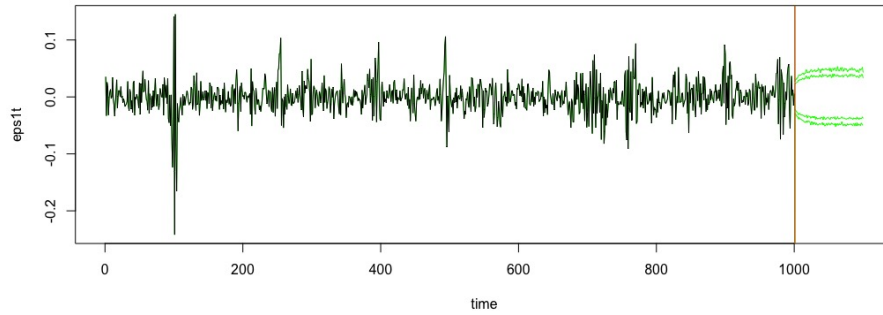


Figure 36: De residuen $\hat{\epsilon}_{1,t}$ samen met het 80%- en het 90% voorspellingsinterval.

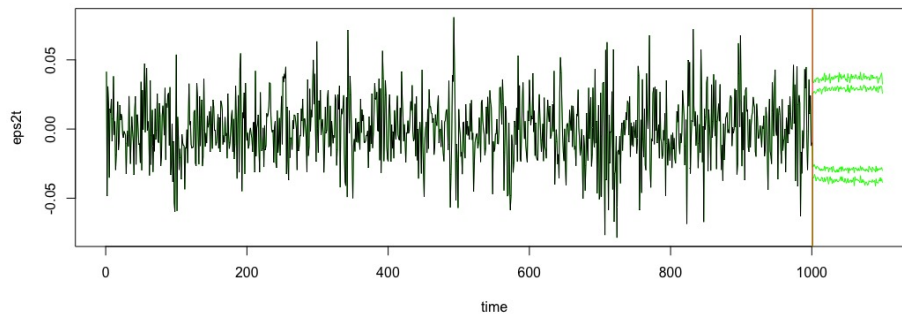


Figure 37: De residuen $\hat{\epsilon}_{2,t}$ samen met het 80%- en het 90% voorspellingsinterval.

6.1 Conclusie van de voorspellingen

Om duidelijk te laten zien wat de verschillen tussen de twee voorspellingen zijn worden de voorspellingsintervallen van beide modellen bij elkaar geplot:

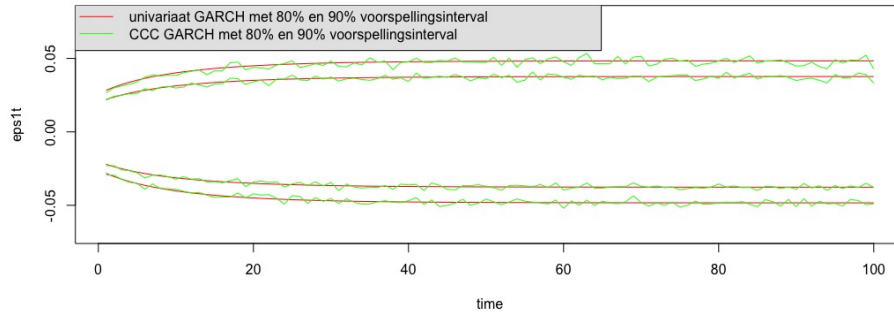


Figure 38: De 80%- en de 90% voorspellingsintervallen van $\hat{\epsilon}_{1,t}$ verkregen met het univariate GARCH(1,1) model en het CCC model.

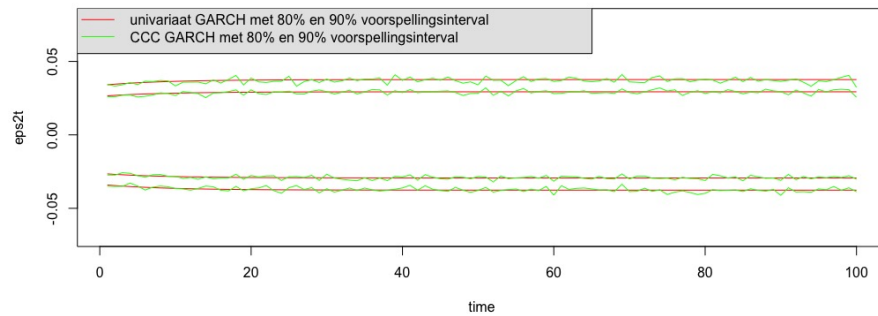


Figure 39: De 80%- en de 90% voorspellingsintervallen van $\hat{\epsilon}_{2,t}$ verkregen met het univariate GARCH(1,1) model en het CCC model.

Zoals te zien is in de figuren 38 en 39 zijn de voorspellingsintervallen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model nauwelijks verschillend van de voorspellingsintervallen verkregen met het CCC model, terwijl bij het CCC model wel rekening wordt gehouden met de correlatie tussen de twee tijdreeksen.

7 Toepassing: verschillende (multivariate) GARCH modellen met data van ING en Deutsche Bank

In deze sectie wordt het univariate GARCH model, het multivariate CCC model en het multivariate DCC model gefit aan de data van twee aandelenkoersen en wordt nagegaan of de modellen geschikt zijn voor de gekozen data. Daarnaast worden er voorspellingen gedaan. Deze voorspellingen worden met elkaar vergeleken.

Er is data gekozen van de koers van de aandelen van ING en de Deutsche Bank vanaf 22-04-2016 tot en met 20-04-2017 (via *nasdaq.com*).

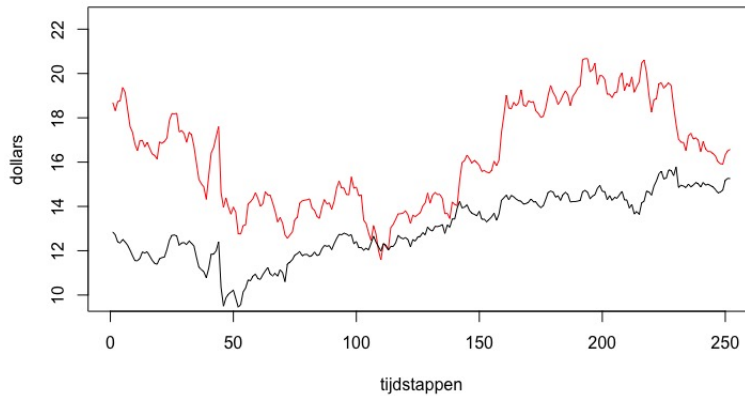


Figure 40: Aandelenkoers van ING (zwart) en Deutsche Bank (rood) in dollars vanaf 22-04-2016 tot en met 20-04-2017, waarbij één tijdstap voor één dag staat.

Op ongeveer dezelfde plaatsen gaan deze koersen omhoog en omlaag, er zit dus een duidelijke correlatie tussen de twee aandelenkoersen.

Om de aandelenkoersen te gebruiken voor de GARCH modellen wordt de log-return genomen van deze koersen: $y_t = \Delta \log[P_t] = \log\left[\frac{P_t}{P_{t-1}}\right]$, met P_t de prijs in dollars van het aandeel op tijdstip t .

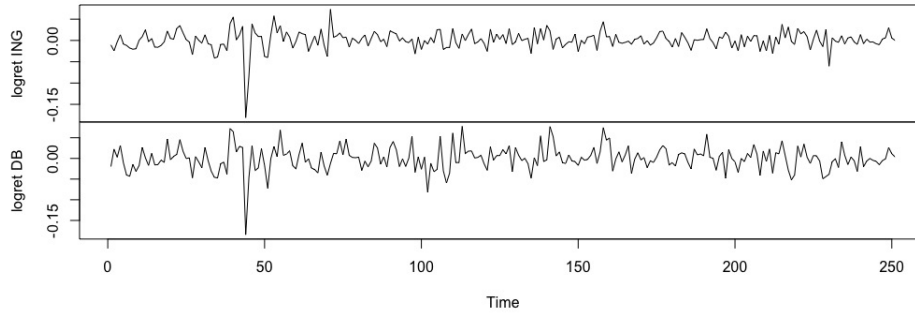


Figure 41: De logreturn $y_{1,t}$ van de aandelenkoers van ING en $y_{2,t}$ van de aandelenkoers van de Deutsche Bank vanaf 22-04-2016 tot en met 20-04-2017 respectievelijk boven en onder.

De conditionele variantie wordt bepaald met het univariate GARCH(1,1) model, zoals gedefinieerd in (3), (4) en (5). Met het programma *R* zijn de volgende parameters geschat voor het univariate GARCH(1,1) model van respectievelijk ING en Deutsche Bank:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= -3.88^{-4}, & \hat{\omega}_1 &= 5.39^{-5}, & \hat{\alpha}_1 &= 3.55^{-1}, & \hat{\beta}_1 &= 5.92^{-1} \\ \hat{\mu}_2 &= -2.90^{-4}, & \hat{\omega}_2 &= 8.96^{-5}, & \hat{\alpha}_2 &= 1.11^{-1}, & \hat{\beta}_2 &= 7.89^{-1} \end{aligned} \quad (46)$$

De volgende conditionele varianties $\hat{h}_{11,t}$ en $\hat{h}_{22,t}$ zijn verkregen met het gefitte univariate GARCH(1,1) model:

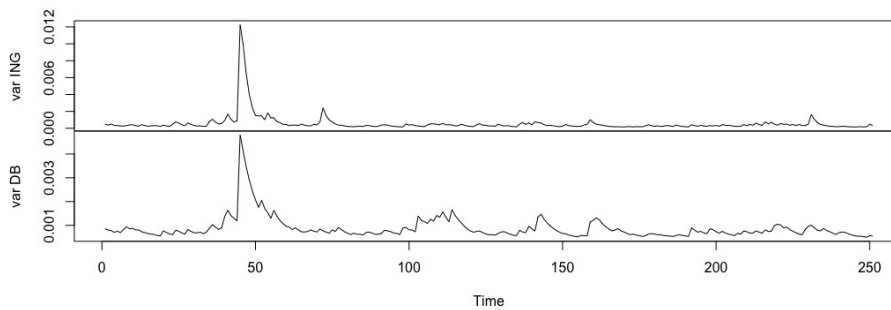


Figure 42: De conditionele variantie $\hat{h}_{11,t}$ en $\hat{h}_{22,t}$ van respectievelijk de aandelenkoersen van ING en de Deutsche Bank vanaf 22-04-2016 tot en met 20-04-2017.

De parameters voor het DCC model, θ en γ uit formule (34), zijn als volgt geschat:

$$\hat{\theta} = 0.044, \quad \hat{\gamma} = 0.705 \quad (47)$$

De volgende Dynamische Conditionele Correlatie $\hat{\rho}_{12,t}$ en Constante Conditionele Correlatie $\hat{\rho}_{12}$ tussen de residuen van ING en Deutsche Bank zijn verkregen:

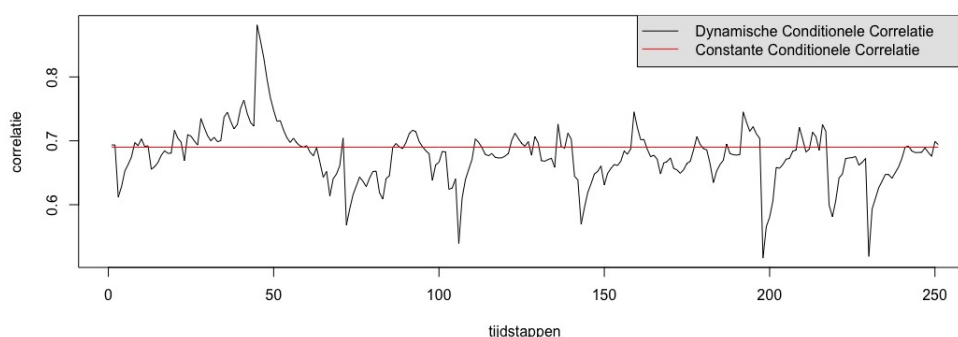


Figure 43: De Constante Conditionele Correlatie $\hat{\rho}_{12}$ van het CCC model en de Dynamische Conditionele Correlatie $\hat{\rho}_{12,t}$ van het DCC model. Waarvoor geldt dat $\hat{\rho}_{12} = 0.68$.

Met de conditionele variantie $\hat{h}_{11,t}$ en $\hat{h}_{22,t}$ uit figuur 34 wordt de conditionele standaard deviatie matrix \hat{D}_t voor het CCC model en het DCC model geconstrueerd. Met $\hat{\rho}_{12}$ en $\hat{\rho}_{12,t}$ wordt de Constante Conditionele Correlatie matrix \hat{R} en de Dynamische Conditionele Correlatie matrix \hat{R}_t voor respectievelijk het CCC model en het DCC model gevormd. Met behulp van deze matrices wordt de conditionele covariantie matrix gemaakt voor het CCC model en het DCC model, zodat in de volgende sectie de gestandaardiseerde residuen kunnen worden geconstrueerd:

Model	Conditionele covariantie matrix
CCC model	$\hat{H}_{CCC,t} = \hat{D}_t \hat{R} \hat{D}_t$
DCC model	$\hat{H}_{DCC,t} = \hat{D}_t \hat{R}_t \hat{D}_t$

7.1 Verifiëren van de modelaannames

In deze sectie wordt er nagegaan of de gebruikte modellen geschikt zijn voor de gekozen data. In sectie 3.1 is laten zien welke testen gebruikt kunnen worden om na te gaan of het model adequaat is voor de data. Dezelfde stappen zullen gebruikt worden om te kijken of het univariate GARCH model, het multivariate CCC model en het multivariate DCC model geschikt zijn.

1. De volgende gestandaardiseerde residuen worden gebruikt:

Model	Gestandaardiseerde residuen
Univariate GARCH model (sectie 2)	$\hat{Z}_{uni,t} = \hat{h}_t^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t$
Multivariate CCC GARCH model (sectie 4)	$\hat{Z}_{ccc,t} = \hat{H}_{CCC,t}^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t$
Multivariate DCC GARCH model (sectie 5)	$\hat{Z}_{dcc,t} = \hat{H}_{DCC,t}^{-\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}_t$

Table 9: De gestandaardiseerde residuen van de verschillende modellen.

Eerst wordt er een plot van deze gestandaardiseerde residuen gemaakt:

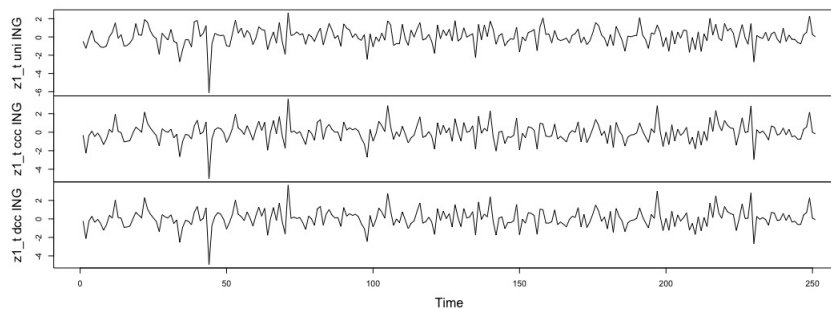


Figure 44: De gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}$ van de aandelenkoers voor de ING bank verkregen met van boven naar onder: Het univariate GARCH(1,1) model, het multivariate CCC GARCH model en het multivariate DCC GARCH model.

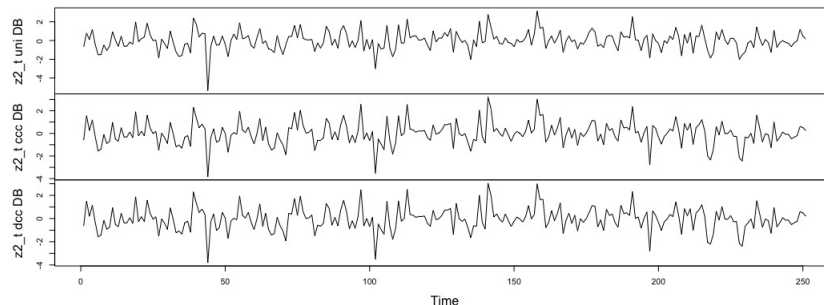


Figure 45: De gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}$ voor de aandelenkoers van de Deutsche Bank verkregen met van boven naar onder: Het univariate GARCH(1,1) model, het multivariate CCC GARCH model en het multivariate DCC GARCH model.

Al deze gestandaardiseerde residuen lijken redelijk white noise. Er kan geen duidelijke correlatie binnen de tijdreeksen gezien worden en de verwachting lijkt ook rond nul te zitten. Er zitten wel een paar grote pieken in de variantie. Uit deze plot van gestandaardiseerde residuen kan niet geconcludeerd worden dat deze white noise zijn, maar er kan ook niet uitgesloten worden dat de gestandaardiseerde residuen niet white noise zijn. Er wordt dus verder getest.

Nu wordt de autocorrelatie functie plot van deze gestandaardiseerde residuen bekeken:

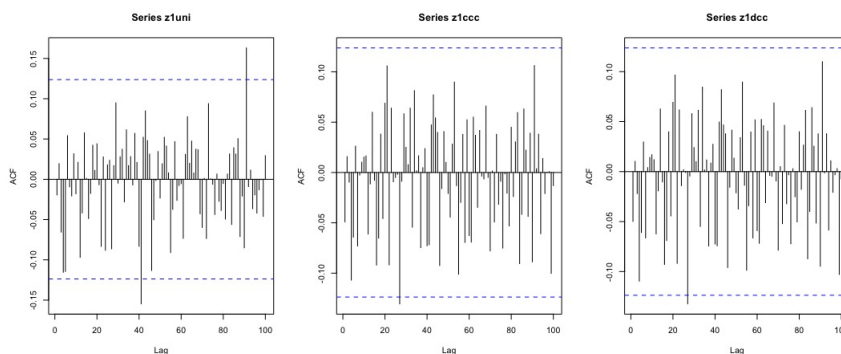


Figure 46: De ACF plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}$ verkregen met respectievelijk het univariate GARCH(1,1) model, het multivariate CCC GARCH model en het multivariate DCC GARCH model.

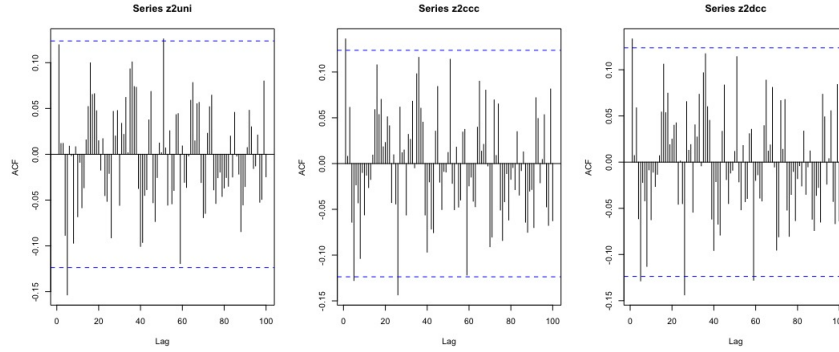


Figure 47: De ACF plot van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}$ verkregen met respectievelijk het univariate GARCH(1,1) model, het multivariate CCC GARCH model en het multivariate DCC GARCH model.

Onder andere door het bekijken van deze plotten wordt er bepaald of de gestandaardiseerde residuen autocorrelatie hebben. De blauwe stippellijn is het 95% betrouwbaarheidsinterval $[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}]$ van de autocorrelatie onder een white noise proces, met T het aantal tijdstappen van $\hat{Z}_{i,t}$. Als de autocorrelatie bij 95% van de lags hierbinnen blijft kan worden verondersteld dat de gestandaardiseerde residuen white noise zijn. Dus als de autocorrelatie bij minder dan 5 van de 100 lags de blauwe stippellijnen overschrijdt kan worden aangenomen dat de gestandaardiseerde residuen een white noise proces is, wat bij ons het geval is bij elk van de modellen.

Om dit extra te testen wordt ook de Ljung-Box test gebruikt. Dit is een test die nagaat of de autocorrelatie van een tijdreeks verschillend is van 0. De Ljung-Box test wordt gebruikt op de gestandaardiseerde residuen van de drie modellen.

Data van $\hat{Z}_{uni,t}$	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}$	1	0.0961	0.757
$\hat{Z}_{2,t}$	1	3.63	0.0568

Table 10: De Ljung-Box test van de gestandaardiseerde residuen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi_{1-\alpha,h}^2$, met h het aantal vrijheidsgraden.

Data van $\hat{Z}_{ccc,t}$	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}$	1	0.613	0.434
$\hat{Z}_{2,t}$	1	4.707	0.0301

Table 11: De Ljung-Box test van de gestandaardiseerde residuen verkregen met het CCC model. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi_{1-\alpha,h}^2$, met h het aantal vrijheidsgraden.

Data van $\hat{Z}_{dcc,t}$	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}$	1	0.631	0.427
$\hat{Z}_{2,t}$	1	4.52	0.0334

Table 12: De Ljung-Box test van de gestandaardiseerde residuen verkregen met het DCC model. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi_{1-\alpha,h}^2$, met h het aantal vrijheidsgraden.

De p-waarden van de Ljung-Box test van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}$ van elk model zijn groter dan 0.05. Er is dus geen reden om de nulhypothese, dat er geen autocorrelatie is, af te wijzen. De p-waarden van de Ljung-Box test van $\hat{Z}_{2,t}$ van het CCC GARCH model en het DCC GARCH model zitten wel onder de 0.05, maar op basis van de ACF plot wordt aangenomen dat er geen autocorrelatie in deze gestandaardiseerde residuen zit en dat de gestandaardiseerde residuen white noise zijn.

- Ook de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen mogen geen autocorrelatie hebben. Om dit na te gaan wordt wederom de autocorrelatie functie geplotted en wordt de Ljung-Box test gebruikt.

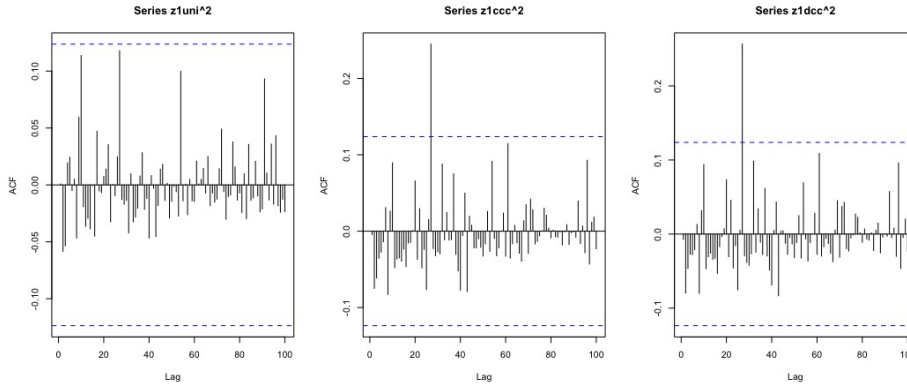


Figure 48: De ACF plot van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}^2$ verkregen met respectievelijk de volgende modellen: univariate GARCH(1,1) model, het multivariate CCC model, het multivariate DCC model.

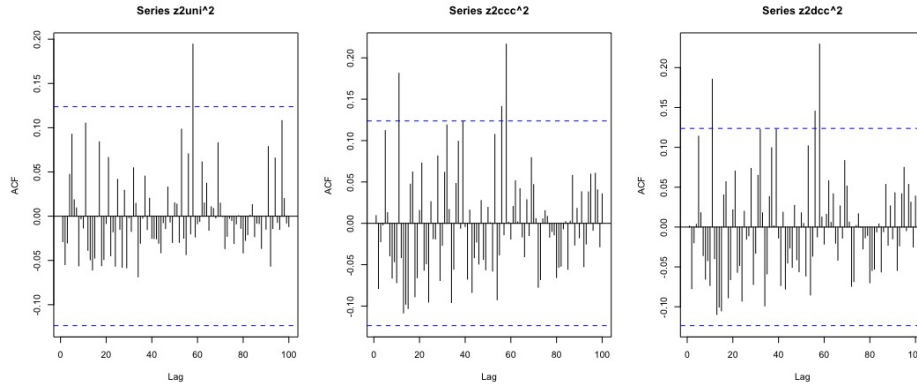


Figure 49: De ACF plot van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}^2$ verkregen met respectievelijk de volgende modellen: univariate GARCH(1,1) model, het multivariate CCC model, het multivariate DCC model.

Data van $\hat{Z}_{uni,t}^2$	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}^2$	1	0.000150	0.990
$\hat{Z}_{2,t}^2$	1	0.210	0.646

Table 13: De Ljung-Box test van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi_{1-\alpha,h}^2$, met h het aantal vrijheidsgraden.

Data van $\hat{Z}_{ccc,t}^2$	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}^2$	1	0.00485	0.945
$\hat{Z}_{2,t}^2$	1	0.0219	0.8823

Table 14: De Ljung-Box test van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen verkregen met het CCC model. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi_{1-\alpha,h}^2$, met h het aantal vrijheidsgraden.

Data van $\hat{Z}_{dcc,t}^2$	Aantal lags h	Test statistiek: Q	p-waarde
$\hat{Z}_{1,t}^2$	1	0.0127	0.910
$\hat{Z}_{2,t}^2$	1	0.000466	0.983

Table 15: De Ljung-Box test van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen verkregen met het DCC model. De p-waarde is de waarde van α waarvoor geldt $Q = \chi_{1-\alpha,h}^2$, met h het aantal vrijheidsgraden.

Bij elk van de ACF plotten van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen overschrijdt minder dan 5 van de 100 lags het 95% betrouwbaarheidsinterval, dus er kan niet verworpen worden dat de gestandaardiseerde residuen niet white noise zijn.

Ook zijn alle p-waarden uit de Ljung-Box test boven de 0.05 en dus kan de nul hypothese van geen autocorrelatie van de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen niet worden verworpen.

Op basis van de resultaten van de ACF plot en van de Ljung-Box test wordt er aangenomen dat de gekwadrateerde gestandaardiseerde residuen van elk van de drie modellen white noise zijn.

- Om te zien welke verdeling de gestandaardiseerde residuen hebben wordt de Quantile-Quantile plot gemaakt. In de Q-Q plot worden de kwantielen van de gestandaardiseerde residuen geplot tegen de kwantielen van de veronderstelde verdeling. Ook wordt er een histogram van de gestandaardiseerde residuen met de veronderstelde verdelingsfunctie gemaakt. De verwachte verdeling van de gestandaardiseerde residuen is of een standaard normale verdeling of een studen-t verdeling, dus beide verdelingen worden getest.

Eerst wordt er voor elke van de modellen gekeken naar de Q-Q plot en de histogram met als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen de standaard normale verdeling:

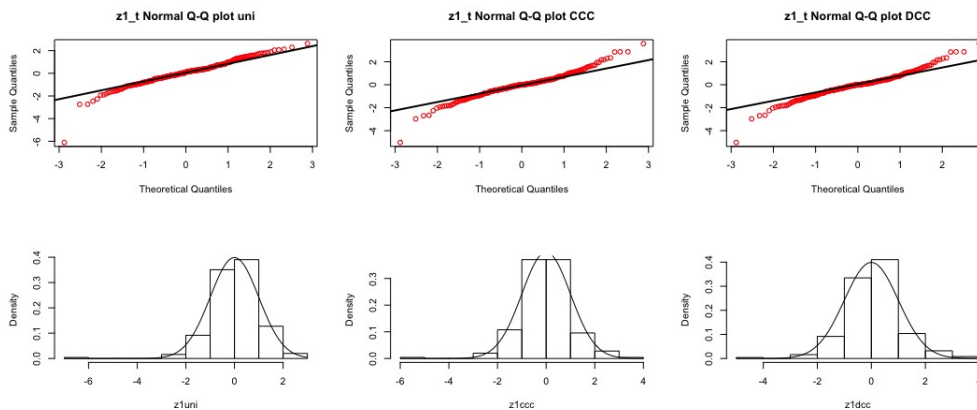


Figure 50: De Quantile-Quantile plot die de kwantielen van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}$ plot tegen de kwantielen van de standaard normale verdeling en de histogram van $\hat{Z}_{1,t}$ samen met de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling. Met de gestandaardiseerde residuen verkregen met respectievelijk van links naar rechts: univariate GARCH(1,1) model, CCC model, DCC model.

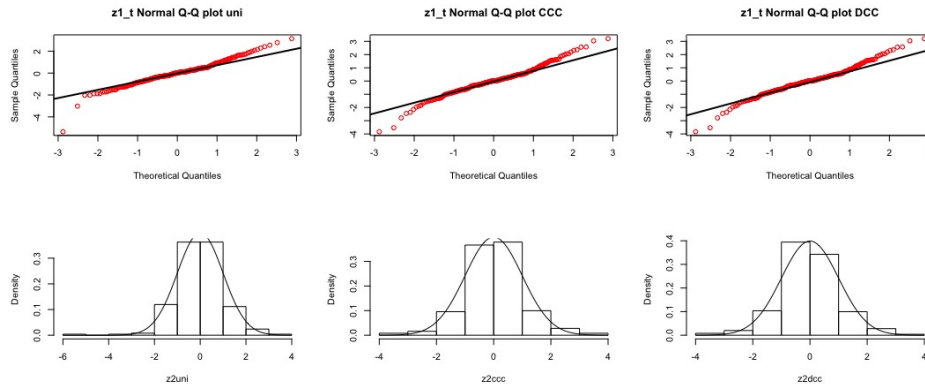


Figure 51: De Quantile-Quantile plot die de kwantielen van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}$ plot tegen de kwantielen van de standaard normale verdeling en de histogram van $\hat{Z}_{2,t}$ samen met de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling. Met de gestandaardiseerde residuen verkregen met respectievelijk van links naar rechts: univariate GARCH(1,1) model, CCC model, DCC model.

Na verschillende vrijheidsgraden van de student-t verdeling te hebben bekeken is er besloten dat de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden het beste was, deze wordt dan ook getest als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen:

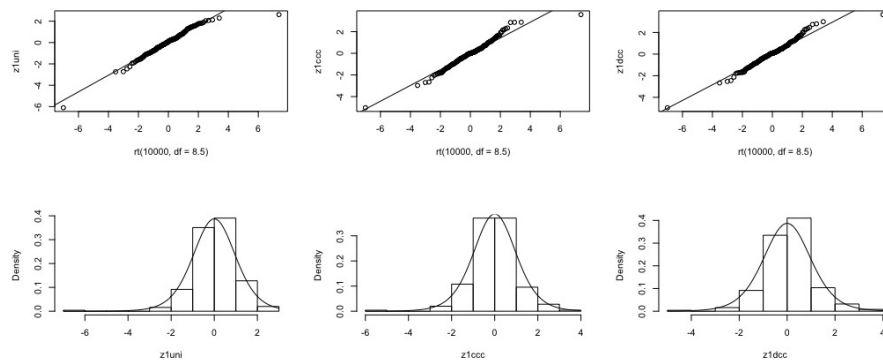


Figure 52: De Quantile-Quantile plot die de kwantielen van de gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{1,t}$ plot tegen de kwantielen van de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden en de histogram van $\hat{Z}_{1,t}$ samen met de verdelingsfunctie van de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden. Met de gestandaardiseerde residuen verkregen met respectievelijk van links naar rechts: univariate GARCH(1,1) model, CCC model, DCC model.

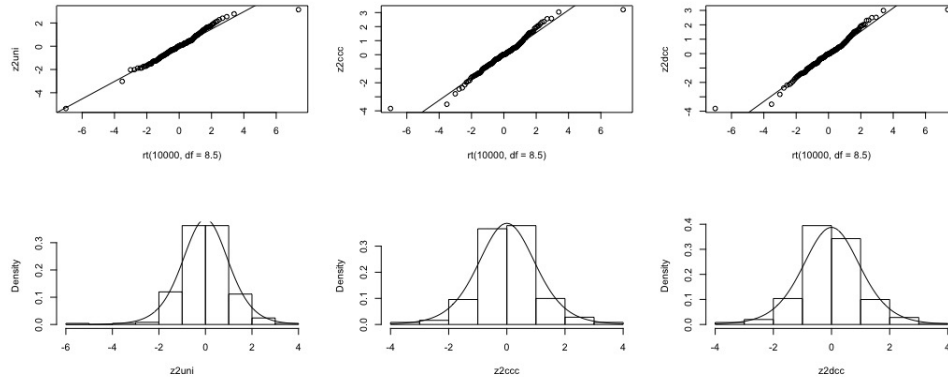


Figure 53: De Quantile-Quantile plot die de kwantilen van gestandaardiseerde residuen $\hat{Z}_{2,t}$ plot tegen de kwantilen van de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden en de histogram van $\hat{Z}_{2,t}$ samen met de verdelingsfunctie van de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden. Met de gestandaardiseerde residuen verkregen met respectievelijk van links naar rechts: univariate GARCH(1,1) model, CCC model, DCC model.

Na het bekijken van deze Quantile-Quantile plotten en histogrammen is het nog niet duidelijk welke verdeling de gestandaardiseerde residuen hebben. Toch lijkt het er nu op dat de veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen eerder een standaard normale verdeling is dan een student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden. Dit is gebaseerd op het feit dat de kwantilen van de gestandaardiseerde residuen geplot tegen de kwantilen van de standaard normale verdeling meer in een $x=y$ lijn staan, waaruit geconcludeerd kan worden dat dezelfde verdeling is gebruikt. Maar het is nog niet zeker, want er komen meer testen aan om de verdeling van de gestandaardiseerde residuen te bepalen, zoals de Cramer-test en de parametrische bootstrap.

4. Cramer-Test.

Met de Cramer-Test wordt getest of twee dataverzamelingen hetzelfde verdeeld zijn. Er wordt hier getest of de gestandaardiseerde residuen, $\hat{Z}_{i,t}$, hetzelfde verdeeld zijn als de standaard normale verdeling of de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden. Als x-sample worden de gestandaardiseerde residuen van de echte data genomen in een 251×2 matrix en als y-sample nemen we stochasten uit de veronderstelde verdeling in een 1000×2 matrix.

De volgende resultaten zijn verkregen als de verdeling van gestandaardiseerde residuen vergeleken wordt met de standaard normale verdeling voor respectievelijk de gestandaardiseerde residuen van het univariate GARCH(1,1) model, het multivariate CCC GARCH model en het multivariate DCC GARCH model:

Table 16: Cramer-Test met als x-sample de gestandaardiseerde residuen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model en met de standaard normale verdeling als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen als y-sample.

x-sample	$\{\hat{Z}_{uni,t}\}_{t \in \{1..251\}} = [\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{251}] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,1} & \dots & \hat{Z}_{1,251} \\ \hat{Z}_{2,1} & \dots & \hat{Z}_{2,251} \end{bmatrix}$
y-sample	$[Z_1, \dots, Z_{1000}] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,1000} \\ Z_{2,1} & \dots & Z_{2,1000} \end{bmatrix} \sim N(0,1)$
Test statistiek: $T_{251,1000}$	2.504
p-waarde	0.0099
Hypothese: x-sample is verdeeld zoals y-sample	Verwerpen

Table 17: Cramer-Test met als x-sample de gestandaardiseerde residuen verkregen met het CCC model met de standaard normale verdeling als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen als y-sample.

x-sample	$\{\hat{Z}_{ccc,t}\}_{t \in \{1..251\}} = [\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{251}] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,1} & \dots & \hat{Z}_{1,251} \\ \hat{Z}_{2,1} & \dots & \hat{Z}_{2,251} \end{bmatrix}$
y-sample	$[Z_1, \dots, Z_{1000}] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,1000} \\ Z_{2,1} & \dots & Z_{2,1000} \end{bmatrix} \sim N(0,1)$
Test statistiek: $T_{251,1000}$	1.070
p-waarde	0.248
Hypothese: x-sample is verdeeld zoals y-sample	Geaccepteerd

Table 18: Cramer-Test met als x-sample de gestandaardiseerde residuen verkregen met het DCC model met de standaard normale verdeling als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen als y-sample.

x-sample	$\{\hat{Z}_{dcc,t}\}_{t \in \{1..251\}} = [\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{251}] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,1} & \dots & \hat{Z}_{1,251} \\ \hat{Z}_{2,1} & \dots & \hat{Z}_{2,251} \end{bmatrix}$
y-sample	$[Z_1, \dots, Z_{1000}] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,1000} \\ Z_{2,1} & \dots & Z_{2,1000} \end{bmatrix} \sim N(0,1)$
Test statistiek: $T_{251,1000}$	1.157
p-waarde	0.176
Hypothese: x-sample is verdeeld zoals y-sample	Geaccepteerd

De volgende resultaten zijn verkregen als de gestandaardiseerde residuen vergeleken worden met stochasten getrokken uit de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden voor respectievelijk het univariate GARCH model, het multivariate CCC GARCH model en het multivariate DCC GARCH model:

Table 19: Cramer-Test met als x-sample gestandaardiseerde residuen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model en met de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen als y-sample.

x-sample	$\{\hat{Z}_{uni,t}\}_{t \in \{1..251\}} = [\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{251}] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,1} & \dots & \hat{Z}_{1,251} \\ \hat{Z}_{2,1} & \dots & \hat{Z}_{2,251} \end{bmatrix}$
y-sample	$[Z_1, \dots, Z_{1000}] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,1000} \\ Z_{2,1} & \dots & Z_{2,1000} \end{bmatrix} \sim t(8.5)$
Test statistiek: $T_{251,1000}$	5.942
p-waarde	0.001
Hypothese: x-sample is verdeeld zoals y-sample	Verwerpen

Table 20: Cramer-Test met als x-sample de gestandaardiseerde residuen verkregen met het CCC model en met de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen als y-sample.

x-sample	$\{\hat{Z}_{ccc,t}\}_{t \in \{1..251\}} = [\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{251}] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,1} & \dots & \hat{Z}_{1,251} \\ \hat{Z}_{2,1} & \dots & \hat{Z}_{2,251} \end{bmatrix}$
y-sample	$[Z_1, \dots, Z_{1000}] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,1000} \\ Z_{2,1} & \dots & Z_{2,1000} \end{bmatrix} \sim t(8.5)$
Test statistiek: $T_{251,1000}$	2.495
p-waarde	0.0230
Hypothese: x-sample is verdeeld zoals y-sample	Geaccepteerd

Table 21: Cramer-Test met als x-sample de gestandaardiseerde residuen verkregen met het DCC model en met de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen als y-sample.

x-sample	$\{\hat{Z}_{dcc,t}\}_{t \in \{1..251\}} = [\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{251}] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,1} & \dots & \hat{Z}_{1,251} \\ \hat{Z}_{2,1} & \dots & \hat{Z}_{2,251} \end{bmatrix}$
y-sample	$[Z_1, \dots, Z_{1000}] = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,1000} \\ Z_{2,1} & \dots & Z_{2,1000} \end{bmatrix} \sim t(8.5)$
Test statistiek: $T_{251,1000}$	2.730
p-waarde	0.0140
Hypothese: x-sample is verdeeld zoals y-sample	Geaccepteerd

De p-waarden van de Cramer-test waarbij er getest wordt of de verdeling van de gestandaardiseerde residuen van het CCC en het DCC model gelijk is aan de standaard normale verdeling zijn boven de 0.05, de nul hypothese wordt dus niet verworpen.

De p-waarden waarbij de verdeling van de gestandaardiseerde residuen van het CCC en het DCC model worden vergeleken met de student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden ligt onder de 0.05. Bij een p-waarde onder de 0.05 wordt de nul hypothese normaliter verworpen, maar omdat er wordt getest met echte data is een p-waarde van 0.01 niet heel slecht. De nul hypothese zal dus niet worden verworpen.

Er kan daarom nog niet met zekerheid worden gezegd welke verdeling de gestandaardiseerde residuen van het CCC en het DCC model hebben, alhoewel de Cramer-Test met standaard normale verdeling als y-sample een stuk hogere p-waarde geeft.

De p-waarde van de Cramer-Test waarbij de verdeling van de gestandaardiseerde residuen verkregen met het univariate GARCH(1,1) wordt vergeleken met de veronderstelde verdelingen is voor beide verdelingen onder de 0.05.

De p-waarde met veronderstelde verdeling een standaard normale verdeling is ongeveer 0.01. De nul hypothese dat de gestandaardiseerde residuen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model standaard normaal verdeeld zijn wordt dan nog niet verworpen.

De nul hypothese dat de gestandaardiseerde residuen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model een student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden heeft wordt wel verworpen, omdat de p-waarde ver onder de 0.01 ligt.

5. Parametrische bootstrap.

Om te testen of de staarten van de data goed gesimuleerd worden wordt er een parametrische bootstrap uitgevoerd voor elk van de modellen. De parameters van het univariate GARCH(1,1) model, het CCC model en het DCC model zijn al geschat, zie (46) en (47). Met deze parameters worden de drie modellen 1000 keer gesimuleerd met de veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen. Met behulp van deze simulaties worden de 80%, 90% en 95% betrouwbaarheidsintervallen van ϵ_t van elk model gemaakt, op de manier zoals laten zien is in sectie 3.1. Bij de $\alpha\%$ betrouwbaarheidsintervallen van ϵ_t wordt verwacht dat $\alpha\%$ van de residuen hierbinnen valt en $(100 - \alpha)\%$ de intervallen overschrijdt.

De verwachte verdeling is of een standaard normale verdeling of een student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden. Beide verdelingen zullen worden getest om na te gaan welke verdeling het beste past als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen.

De volgende resultaten zijn verkregen:

Table 22: Het aantal geobserveerde overschrijdingen van de residuen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model vergeleken het aantal verwachte overschrijdingen. De standaard normale verdeling is gebruikt als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen.

univariate GARCH model met standaard normale verdeling	Betrouwbaarheidsinterval	# verwachte overschrijdingen	# geobserveerde overschrijdingen
ING	95%	13	10
	90%	25	22
	80%	50	46
DB	95%	13	12
	90%	25	24
	80%	50	45

Table 23: Het aantal geobserveerde overschrijdingen van de residuen verkregen met het CCC model vergeleken het aantal verwachte overschrijdingen. De standaard normale verdeling is gebruikt als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen.

CCC model met standaard normale verdeling	Betrouwbaarheidsinterval	# verwachte overschrijdingen	# geobserveerde overschrijdingen
ING	95%	13	11
	90%	25	25
	80%	50	47
DB	95%	13	12
	90%	25	24
	80%	50	44

Table 24: Het aantal geobserveerde overschrijdingen van de residuen verkregen met het DCC model vergeleken het aantal verwachte overschrijdingen. De standaard normale verdeling is gebruikt als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen.

DCC model met standaard normale verdeling	Betrouwbaarheidsinterval	# verwachte overschrijdingen	# geobserveerde overschrijdingen
ING	95%	13	11
	90%	25	24
	80%	50	46
DB	95%	13	13
	90%	25	27
	80%	50	46

Table 25: Het aantal geobserveerde overschrijdingen van de residuen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model vergeleken het aantal verwachte overschrijdingen. De student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden is gebruikt als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen.

univariate GARCH model met student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden	Betrouwbaarheidsinterval	# verwachte overschrijdingen	# geobserveerde overschrijdingen
ING	95%	13	6
	90%	25	13
	80%	50	38
DB	95%	13	6
	90%	25	16
	80%	50	38

Table 26: Het aantal geobserveerde overschrijdingen van de residuen verkregen met het CCC model vergeleken het aantal verwachte overschrijdingen. De student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden is gebruikt als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen.

CCC model met student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden	Betrouwbaarheidsinterval	# verwachte overschrijdingen	# geobserveerde overschrijdingen
ING	95%	13	5
	90%	25	14
	80%	50	36
DB	95%	13	7
	90%	25	14
	80%	50	38

Table 27: Het aantal geobserveerde overschrijdingen van de residuen verkregen met het DCC model vergeleken het aantal verwachte overschrijdingen. De student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden is gebruikt als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen.

DCC model met student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden	Betrouwbaarheids- interval	# verwachte overschrijdingen	# geobserveerde overschrijdingen
ING	95%	13	6
	90%	25	13
	80%	50	38
DB	95%	13	7
	90%	25	16
	80%	50	40

Elk van de modellen presteert beter met een standaard normale verdeling dan met een student-t verdeling met 8.5 vrijheidsgraden als veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen. Niet alleen presteren ze beter, het aantal geobserveerde overschrijdingen zit heel dicht bij het aantal verwachte overschrijdingen. Dit is een indicatie dat de modellen met de geschatte parameters en een standaard normale verdeling goed passen bij de data.

De veronderstelde verdeling

Na de verschillende testen te hebben uitgevoerd wordt er geconcludeerd dat de standaard normale verdeling het best past bij de veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen van het univariate GARCH(1,1) model, het CCC model en het DCC model. Na het bekijken van de Quantile-Quantile plot en de histogram van de gestandaardiseerde residuen was het nog niet helemaal duidelijk welke verdeling het meest geschikt was. Na het bestuderen van de resultaten van de Cramer-Test en de parametrische bootstrap werd duidelijk dat de standaard normale verdeling de beste keuze is als veronderstelde verdeling bij elk van de modellen.

In de volgende subsectie zal dan ook de standaard normale verdeling worden gebruikt als de veronderstelde verdeling van de gestandaardiseerde residuen bij het voorspellen met de verschillende modellen.

7.2 Voorspellen met de modellen

In deze sectie wordt er gekeken naar de voorspellingen van het univariate GARCH(1,1) model, het multivariate CCC GARCH model en het multivariate DCC GARCH model. Om 1 tijdstap te voorspellen van (T) naar (T+1) hebben we alleen de data nodig op tijdstip (T). Let op dat de voorspelling van de conditionele variantie hetzelfde is bij elk model, het verschil in de modellen zit in de conditionele correlatie matrix.

Zoals al vermeld eerder in sectie 7 werd via het programma *R* de volgende parameters geschat voor het univariate GARCH(1,1) model, zoals gedefinieerd in (3), (4) en (5):

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= -3.88^{-4}, & \hat{\omega}_1 &= 5.39^{-5}, & \hat{\alpha}_1 &= 3.55^{-1}, & \hat{\beta}_1 &= 5.92^{-1} \\ \hat{\mu}_2 &= -2.90^{-4}, & \hat{\omega}_2 &= 8.96^{-5}, & \hat{\alpha}_2 &= 1.11^{-1}, & \hat{\beta}_2 &= 7.89^{-1}\end{aligned}$$

Met deze parameters wordt in het programma *R* met het univariate GARCH(1,1) model de volgende conditionele varianties $\hat{h}_{11,t}$ en $\hat{h}_{22,t}$ met een voorspelling van 34 tijdstappen vanaf de rode verticale lijn verkregen:

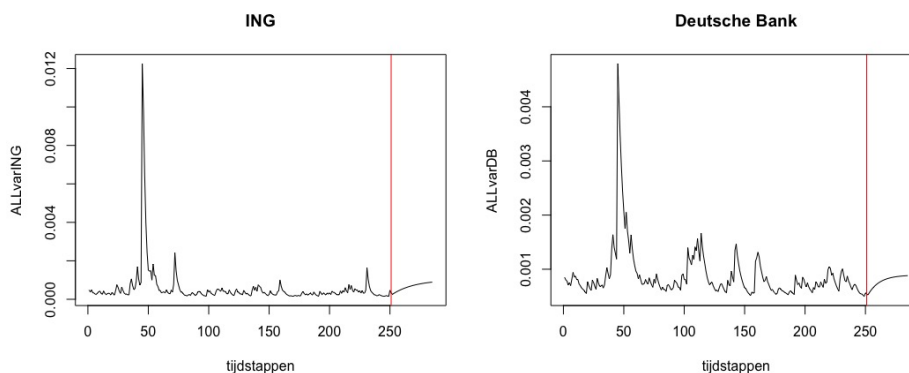


Figure 54: De conditionele variantie via het univariate GARCH(1,1) model met een voorspelling van 34 tijdstappen vanaf de rode verticale lijn voor respectievelijk ING en de Deutsche Bank

Met deze voorspelling van de conditionele variantie wordt het voorspellingsinterval van de residuen voorspeld met het univariate GARCH(1,1) model, het CCC model en het DCC model. Bij het voorspellen hebben $Z_{1,t}$ en $Z_{2,t}$ een standaard normale verdeling. De standaard normale verdeling is gekozen op basis van de test resultaten uit de vorige sectie.

7.2.1 Univariaat GARCH(1,1) model

Bij het univariate GARCH model hoeven alleen de conditionele varianties voorspeld te worden (zie figuur (54)). Er wordt geen rekening gehouden met de correlatie tussen de twee tijdreeksen. Met deze conditionele varianties kan de voorspelling van de residuen gemaakt worden.

De volgende voorspelling vanaf de rode verticale lijn van de residuen is verkregen samen met het 80%- en 90% betrouwbaarheidsinterval:

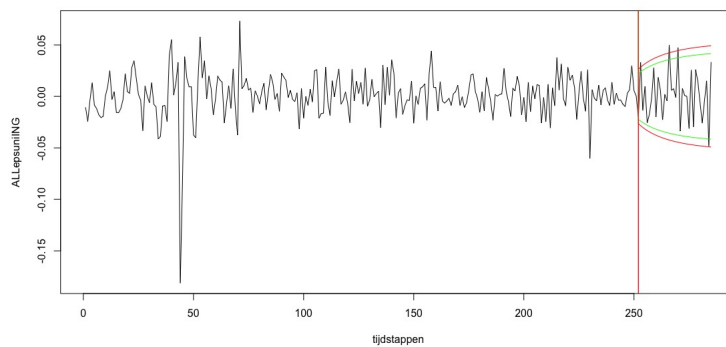


Figure 55: De residuen van ING met een voorspelling met het univariate GARCH(1,1) model van 34 tijdstappen na de rode verticale lijn en met de 80%- en 90% voorspellingsintervallen (respectievelijk groen en rood).

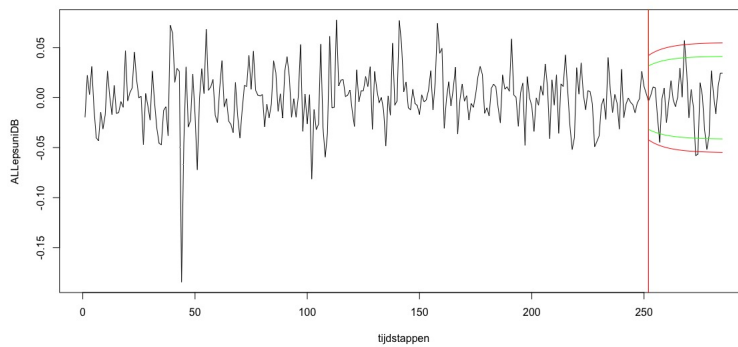


Figure 56: De residuen van Deutsche Bank met een voorspelling met het univariate GARCH(1,1) model van 34 tijdstappen na de rode verticale lijn en met de 80%- en 90% voorspellingsintervallen (respectievelijk groen en rood).

7.2.2 Multivariaat CCC GARCH model

Omdat het CCC model een constante correlatie matrix heeft wordt net zoals bij het univariate GARCH model alleen de conditionele variantie via het univariate GARCH(1,1) model voorspeld (zie figuur 54). Met deze voorspelling en de constante correlatie matrix \hat{R} (waarvoor geldt dat $\hat{\rho}_{12} = 0.68$, te zien in figuur 43) worden de residuen voorspeld met het CCC model samen met de 80%- en 90% voorspellingsintervallen:

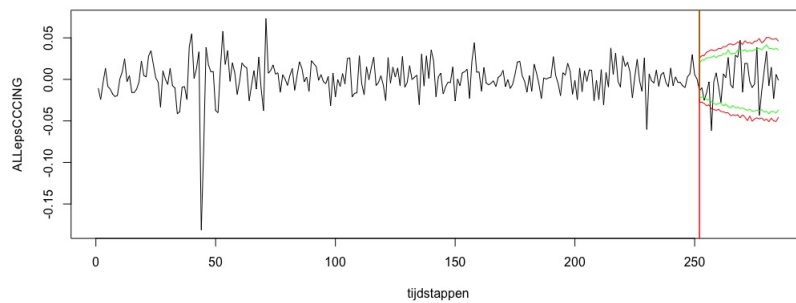


Figure 57: De residuen van ING met een voorspelling met het CCC model van 34 tijdstappen na de rode verticale lijn en het 80%- en 90% voorspellingsinterval (respectievelijk groen en rood).

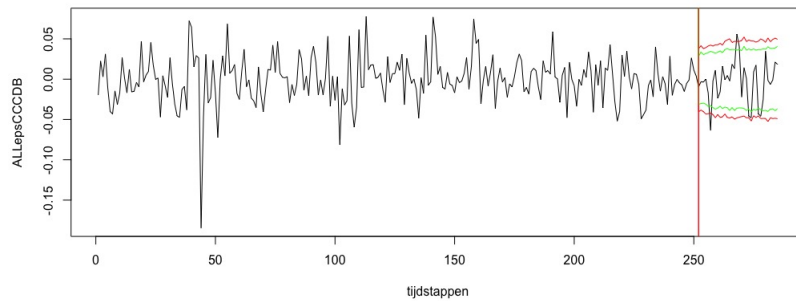


Figure 58: De residuen van Deutsche Bank met een voorspelling met het CCC model van 34 tijdstappen na de rode verticale lijn en de 80% en 90% voorspellingsintervallen (respectievelijk groen en rood).

7.2.3 Multivariaat DCC GARCH model

Om met het DCC model te voorspellen moet de dynamische conditionele correlatie matrix R_t (33) voorspeld worden, wat inhoud dat de symmetrische positief definitie matrix Q_t (34) eerst voorspeld moet worden.

Het DCC model is in het programma *R* gefit aan de logreturns van ING en Deutsche Bank en de volgende DCC parameters voor het voorspellen van Q_t worden verkregen:

$$\hat{\theta} = 0.0440, \quad \hat{\gamma} = 0.705$$

Met deze parameters wordt de volgende voorspelling van de dynamische conditionele correlaties $\hat{\rho}_{12,t}$ verkregen vanaf de rode verticale lijn:

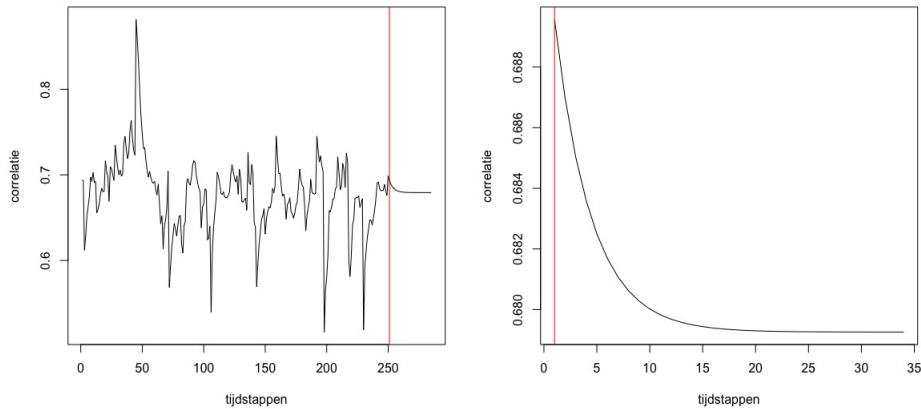


Figure 59: Dynamische conditionele correlatie $\hat{\rho}_{12,t}$ van de residuen met een voorspelling van 34 tijdstappen vanaf de rode verticale lijn. Bij de rechter plot zie je alleen de voorspelling van $\hat{\rho}_{12,t}$.

Met deze dynamische conditionele correlatie wordt de volgende voorspelling van de residuen $\hat{\epsilon}_{1,t}$ en $\hat{\epsilon}_{2,t}$ gemaakt samen met de 80%- en 90% voorspellingsintervallen:

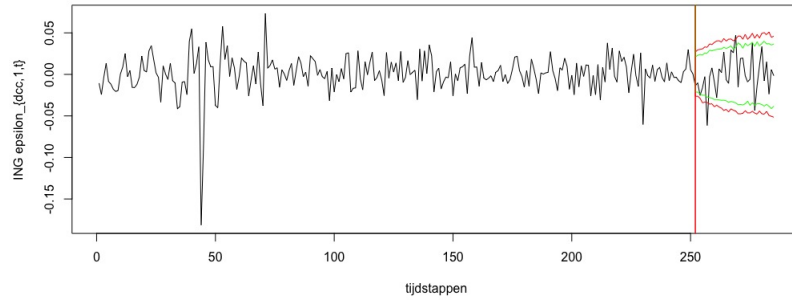


Figure 60: De residuen van ING met een voorspelling met het DCC model van 34 tijdstappen na de rode verticale lijn en met het 80% en 90% voorspellingsinterval (respectievelijk groen en rood).

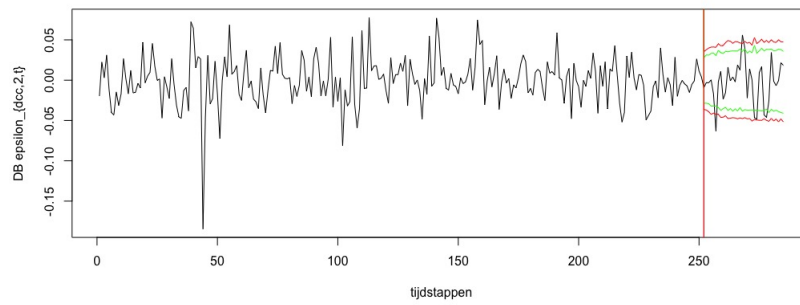


Figure 61: De residuen van Deutsche Bank met een voorspelling met het DCC model van 34 tijdstappen na de rode verticale lijn en met het 80%- en 90% voorspellingsinterval (respectievelijk groen en rood).

7.3 Conclusie van de voorspellingen

Om de modellen goed te vergelijken wordt het 80%- en 90% voorspellingsinterval van de residuen van elke model bij elkaar geplot samen met de echte data van de logreturns van de aandelenkoersen:

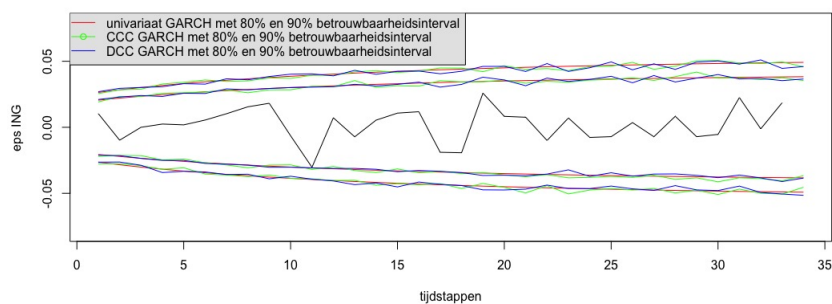


Figure 62: Het 80%- en 90% voorspellingsinterval van de residuen van de ING verkregen met het univariate GARCH(1,1) model, het CCC model en het DCC model samen met de echte data van de 34 tijdstappen

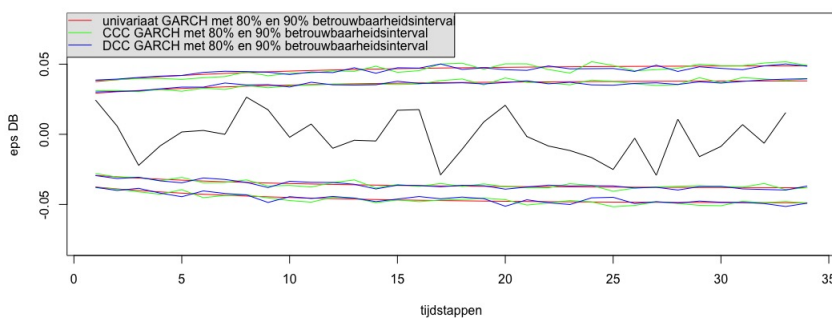


Figure 63: Het 80%- en 90% voorspellingsinterval van de residuen van de Deutsche Bank verkregen met het univariate GARCH(1,1) model, het CCC model en het DCC model samen met de echte data van de 34 tijdstappen

Zoals in figuur 62 en 63 te zien is zijn de voorspellingsintervallen verkregen met het univariate GARCH(1,1) model, het CCC model en het DCC model allemaal redelijk gelijk. Dus alhoewel er rekening wordt gehouden met de conditionele correlatie bij het CCC model en het DCC model zijn de voorspellingen niet veel anders vergeleken met het univariate GARCH(1,1) model.

8 Conclusie van de onderzoeksvraag

In dit verslag zijn drie verschillende GARCH modellen besproken en onderzocht, namelijk het univariate GARCH model, het multivariate CCC model en het multivariate DCC model. De onderzoeksvraag is als volgt: "Zijn er verschillen in de predicties van tijdreeksen, die niet onafhankelijk van elkaar bewegen, verkregen met het multivariate CCC model, het multivariate DCC model en het univariate GARCH model?". In de secties 6 en 7 zijn deze predicties met de modellen gemaakt en zijn deze predicties met elkaar vergeleken.

In sectie 6 zijn voorspellingen gedaan met gesimuleerde data waar een duidelijke correlatie tussen zit. Het univariate GARCH(1,1) model en het multivariate CCC model zijn gefit aan deze gesimuleerde data en hiermee zijn voorspellingen mee gedaan. Hieruit bleek, zoals in sectie 6.1 is beschreven, dat er nauwelijks verschil zit tussen de voorspellingen van het univariate GARCH(1,1) model en het multivariate CCC model.

In sectie 7 hebben we de drie modellen gefit aan echte data van de ING bank en de Deutsche Bank. Na het fitten van de modellen en het verifiëren van de modelaannames zijn predicties gemaakt met het univariate GARCH(1,1) model, het multivariate CCC model en het multivariate DCC model. Ook hieruit is geconcludeerd, zoals beschreven in sectie 7.3, dat er geen grote verschillen zijn in de voorspellingen van de drie modellen.

Dus alhoewel er rekening wordt gehouden met de conditionele covariatie tussen de tijdreeksen bij het multivariate CCC model en het multivariate DCC model zijn de predicties niet verschillend vergeleken met het univariate GARCH model.