Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

De onvolledigheid van theorieën en de ondefinieerbaarheid en onberekenbaarheid van waarheid, bewezen met de paradox van Berry

(Engelse titel: The incompleteness of theories and the undefinability and uncomputability of truth, proven with Berry's paradox)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van
BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

ROEL HEMERIK

Delft, Nederland
Juli 2019

Inleiding

Aan het einde van de 19e eeuw stond de wiskunde voor een probleem. Het bleek dat grote delen van de wiskunde niet duidelijk genoeg gedefinieerd waren, wat enkele tegenstrijdigheden tot z'n gevolg had.

Om dit probleem op te lossen hebben enkele wiskundigen zoals Hilbert, Russell en Whitehead zich ingespannen om een nieuwe grondslag voor de wiskunde te ontwerpen. Deze wiskunde zou volledig gebaseerd moeten zijn op de symbolische logica.

Aan het begin van de 20e eeuw bleek echter dat ook deze vorm van wiskunde enkele gebreken had. Zo hebben Gödel, Tarski en Turing laten zien dat er grenzen zijn aan wat je met de symbolische logica kunt bereiken.

In dit verslag zullen we de formele taal en theorieën van de eerste orde rekenkunde bekijken. Vervolgens zullen we enkele grenzen van deze formele taal aangeven door de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel, de ondefinieerbaarheidsstelling van Tarski en enkele delen van het werk van Turing te bewijzen.

Deze bewijzen zullen we op een iets andere manier geven dan normaal gesproken. We gebruiken namelijk argumenten die een gelijkenis hebben met de paradox van Berry, geïnspireerd door een artikel van Boolos over de onvolledigheidsstelling van Gödel [Boolos, 1989].

Eerst bekijken we wat de paradox van Berry inhoudt en hoe we iets vergelijkbaars kunnen gebruiken om een tegenspraak af te leiden in onze bewijzen. Daarna leggen we uit wat formele talen zijn, hoe we deze talen kunnen gebruiken om uitspraken te doen over de rekenkunde en hoe we theorieën kunnen gebruiken om deze uitspraken te bewijzen.

Vervolgens geven we een bewijs voor de onvolledigheidsstelling van Gödel en de ondefinieerbaarheidsstelling van Tarksi. Ten slotte laten we zien dat er geen oplossing bestaat voor het Halting-probleem van Turingmachines en bespreken we kort wat dit voor gevolg heeft voor de formele taal van de rekenkunde.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

De paradox van Berry

Bertrand Russell publiceerde in 1908 een artikel waarin hij een theorie van symbolische logica voorstelde. Volgens hem had deze theorie het vermogen om bepaalde tegenstrijdigheden op te lossen die te maken hebben met de zelfreferentie van uitspraken. Als voorbeeld benoemde hij zeven paradoxen die gebaseerd waren op zelfreferentie. Een van deze paradoxen was de zin

$$\begin{gathered}
\text{“}\,\underbrace{\textit{The}}_{1}\ \underbrace{\textit{least}}_{2}\ \underbrace{\textit{in}}_{3}\underbrace{\textit{te}}_{4}\underbrace{\textit{ger}}_{5}\ \underbrace{\textit{not}}_{6}\ \underbrace{\textit{name}}_{7}\underbrace{\textit{a}}_{8}\underbrace{\textit{ble}}_{9}\ \underbrace{\textit{in}}_{10}\ \underbrace{\textit{fe}}_{11}\underbrace{\textit{wer}}_{12}\ \underbrace{\textit{than}}_{13} \\
\underbrace{\textit{nine}}_{14}\underbrace{\textit{teen}}_{15}\ \underbrace{\textit{syl}}_{16}\underbrace{\textit{la}}_{17}\underbrace{\textit{bles}}_{18}\text{.”}\quad \text{[Russell, 1908]}
\end{gathered} \tag{1.1}$$

De getallen onder de letters tellen het aantal lettergrepen waar de zin uit bestaat. We zien dus dat de zin 1.1 uit 18 lettergrepen bestaat. De tegenstrijdingheid ontstaat wanneer je accepteert dat deze zin ook een ‘name’ is voor een getal.

In een voetnoot van dit artikel schreef Russell dat hij op het idee van deze paradox was gekomen dankzij een bibliothecaris van de Bodleian Library [Universiteit van Oxford] genaamd G. G. Berry. Daarom heeft deze paradox later de naam ‘Berry’s Paradox’ gekregen. (Waarschijnlijk is deze paradox niet vernoemt naar Russell omdat er eerder al een andere paradox naar hem vernoemd werd.)

1.1 Uitleg van de paradox

We zullen bekijken waar de tegenstrijdigheid van de paradox van Berry vandaan komt. Om het uitleggen wat makkelijker te maken, formuleren we eerst een Nederlandse versie van de paradox.

$$\begin{gathered}
\text{“}\,\underbrace{\textit{Het}}_{1}\ \underbrace{\textit{klein}}_{2}\underbrace{\textit{ste}}_{3}\ \underbrace{\textit{po}}_{4}\underbrace{\textit{si}}_{5}\underbrace{\textit{tie}}_{6}\underbrace{\textit{ve}}_{7}\ \underbrace{\textit{ge}}_{8}\underbrace{\textit{he}}_{9}\underbrace{\textit{le}}_{10}\ \underbrace{\textit{ge}}_{11}\underbrace{\textit{tal}}_{12}\ \underbrace{\textit{dat}}_{13}\ \underbrace{\textit{je}}_{14}\ \underbrace{\textit{niet}}_{15}\ \underbrace{\textit{met}}_{16}\ \underbrace{\textit{min}}_{17}\underbrace{\textit{der}}_{18} \\
\underbrace{\textit{dan}}_{19}\ \underbrace{\textit{der}}_{20}\underbrace{\textit{tig}}_{21}\ \underbrace{\textit{let}}_{22}\underbrace{\textit{ter}}_{23}\underbrace{\textit{gre}}_{24}\underbrace{\textit{pen}}_{25}\ \underbrace{\textit{kunt}}_{26}\ \underbrace{\textit{be}}_{27}\underbrace{\textit{schrij}}_{28}\underbrace{\textit{ven}}_{29}\text{.”}
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Met *beschrijven* bedoelen we het volgende. Een zin beschrijft een getal als je na het lezen van de zin alleen maar tot de conclusie kunt komen dat een bepaald getal bedoeld wordt. Zo beschrijft ‘*dertig*’ het getal 30.

Verder kun je deze zin ook op een andere manier formuleren. Zo beschrijft de zin ‘*Het kleinste priemgetal*’ het getal 2.

Ten slotte geven we nog een voorbeeld van een zin die niet een getal beschrijft: ‘*Het grootste priemgetal*’. Deze zin beschrijft niet een getal, omdat er volgens de stelling van Euclides er oneindig veel priemgetallen zijn. (Voor elk natuurlijk getal n bestaat er dus een priemgetal dat groter is dan n.)

Nu is het zo dat zin 1.2 zelf ook een getal beschrijft. We kunnen namelijk altijd een kleinste getal vinden dat niet beschreven wordt door een zin met minder dan dertig lettergrepen.

Neem alle Nederlandse zinnen die minder dan dertig lettergrepen bevatten. Merk op dat dit er eindig veel zijn, omdat het Nederlands eindig veel lettergrepen heeft. Het aantal Nederlandse zinnen met minder dan dertig lettergrepen die een getal beschrijft is dus ook eindig. Er zijn dus eindig veel getallen die beschreven kunnen worden met minder dan dertig lettergrepen.

Omdat er eindig veel getallen zijn die door minder dan dertig lettergrepen beschreven kunnen worden, bestaan er ook getallen die niet beschreven kunnen worden door zinnen met minder dan dertig lettergrepen. Hieruit volgt dat er dus ook een kleinste positief getal is dat niet beschreven kan worden. Noem dit getal m. Met andere woorden, de zin 1.2 beschrijft het getal m.

Zin 1.2 bevat maar 29 lettergrepen, wat minder dan 30 lettergrepen is. Omdat het getal m beschreven wordt door deze zin, spreekt de zin zichzelf tegen.

1.2 Constructie van de paradox

In dit verslag zullen we steeds in een wiskundige context iets construeren dat vergelijkbaar is met de paradox van Berry. Vervolgens leiden we uit deze constructie een tegenspraak af om zo de gewenste stellingen te bewijzen.

1.2.1 Voorbeeld met de Nederlandse taal

Om een beter idee te krijgen welke stappen er nodig zijn om de paradox van Berry te formuleren, bekijken we het volgende voorbeeld. We proberen de paradox van Berry op een iets andere manier te formuleren in de Nederlandse taal.

We beginnen met een zin waarin een plekje is leeg gehouden voor een getal. We noemen deze zin de *basiszin* van deze formulering.

$$\begin{gathered}\text{“}\underbrace{\textit{Het}}_{1}\ \underbrace{\textit{klein}}_{2}\underbrace{\textit{ste}}_{3}\ \underbrace{\textit{po}}_{4}\underbrace{\textit{si}}_{5}\underbrace{\textit{tie}}_{6}\underbrace{\textit{ve}}_{7}\ \underbrace{\textit{ge}}_{8}\underbrace{\textit{he}}_{9}\underbrace{\textit{le}}_{10}\ \underbrace{\textit{ge}}_{11}\underbrace{\textit{tal}}_{12}\ \underbrace{\textit{dat}}_{13}\ \underbrace{\textit{niet}}_{14}\ \underbrace{\textit{wordt}}_{15}\\ \underbrace{\textit{be}}_{16}\underbrace{\textit{schre}}_{17}\underbrace{\textit{ven}}_{18}\ \underbrace{\textit{door}}_{19}\ \underbrace{\textit{een}}_{20}\ \underbrace{\textit{zin}}_{21}\ \underbrace{\textit{met}}_{22}\ \underbrace{\textit{min}}_{23}\underbrace{\textit{der}}_{24}\ \underbrace{\textit{dan}}_{25}\\ \ldots\ \underbrace{\textit{let}}_{26}\underbrace{\textit{ter}}_{27}\underbrace{\textit{gre}}_{28}\underbrace{\textit{pen}}_{29}.\text{”}\end{gathered}\tag{1.3}$$

Vervolgens kiezen we een getal n die we op de lege plek van zin 1.3 kunnen invullen. Deze n moeten we zo kiezen dat de uiteindelijke zin minder dan n lettergrepen bevat. Met andere woorden, laat ℓ het aantal lettergrepen van het uitgeschreven getal n zijn, dan moet gelden dat $29 + \ell < n$.

Een voorbeeld van zo een getal is 100. Uitgeschreven heeft "hon-derd" maar 2 lettergrepen, en $29 + 2 < 100$. De uiteindelijke formulering wordt dan dus:

$$\begin{gathered}\text{``}\underbrace{\textit{Het}}_{1}\ \underbrace{\textit{klein}}_{2}\underbrace{\textit{ste}}_{3}\ \underbrace{\textit{po}}_{4}\underbrace{\textit{si}}_{5}\underbrace{\textit{tie}}_{6}\underbrace{\textit{ve}}_{7}\ \underbrace{\textit{ge}}_{8}\underbrace{\textit{he}}_{9}\underbrace{\textit{le}}_{10}\ \underbrace{\textit{ge}}_{11}\underbrace{\textit{tal}}_{12}\ \underbrace{\textit{dat}}_{13}\ \underbrace{\textit{niet}}_{14}\ \underbrace{\textit{wordt}}_{15}\\ \underbrace{\textit{be}}_{16}\underbrace{\textit{schre}}_{17}\underbrace{\textit{ven}}_{18}\ \underbrace{\textit{door}}_{19}\ \underbrace{\textit{een}}_{20}\ \underbrace{\textit{zin}}_{21}\ \underbrace{\textit{met}}_{22}\ \underbrace{\textit{min}}_{23}\underbrace{\textit{der}}_{24}\ \underbrace{\textit{dan}}_{25}\\ \underbrace{\textit{hon}}_{26}\underbrace{\textit{derd}}_{27}\ \underbrace{\textit{let}}_{28}\underbrace{\textit{ter}}_{29}\underbrace{\textit{gre}}_{30}\underbrace{\textit{pen}}_{31}.\text{''}\end{gathered} \tag{1.4}$$

Zin 1.4 komt op hetzelfde neer als zin 1.2. We maken het in deze formulering alleen iets duidelijker dat we het over *zinnen* hebben die getallen *beschrijven* en dat deze zinnen een bepaald *aantal lettergrepen* hebben.

1.2.2 In een wiskundige context

We zullen nu een globaal idee schetsen van hoe we in een wiskundige context iets kunnen construeren wat vergelijkbaar is met de paradox van Berry. Om te beginnen moeten we iets[1] kiezen die de rol van een *zin* zal vervullen. Vervolgens moeten we bepalen wat het betekent als een zin een getal *beschrijft* en moeten we definiëren wat we bedoelen met 'het aantal lettergrepen' van deze zin.

De definitie voor *beschrijven.*

Om de paradox juist te laten werken, zullen we een definitie moeten geven voor het *beschrijven* van een getal door een zin. Deze definitie moet in ieder geval aan de onderstaande voorwaarden voldoen.

- Een zin mag alleen getallen beschrijven waarbij het altijd mogelijk is om over een *kleinste* getal te spreken[2]. We kunnen hier gemakkelijk aan voldoen door onze definitie zo te kiezen dat zinnen alleen natuurlijke getallen kunnen beschrijven.
- Een zin mag nooit meer dan één getal tegelijk beschrijven. Wel kan het zo zijn dat een zin geen enkel getal beschrijft.

Zodra we een definitie hebben voor beschrijven die aan deze voorwaarden voldoet, kunnen we spreken over *het* getal dat beschreven wordt door een bepaalde zin. Als een zin een getal beschrijft, is dit getal dus uniek voor deze zin.

[1] Voorbeeld: In dit verslag gebruiken we voor dit 'iets' in hoofdstuk 2, 3 en 4 *logische formules* en in hoofdstuk 5 *Turingmachines*.

[2] In de Nederlandse formulering van de paradox voldoet de definitie van beschrijven niet aan deze eigenschap. Om deze reden moeten in de paradox dus expliciet vermelden dat we het over "positieve gehele getallen" hebben.

De definitie voor de *lengte* van een zin.

Ook zullen we een definitie moeten geven voor de *lengte* van een zin. Deze definitie van lengte moet ook aan enkele voorwaarden voldoen.

- We moeten kunnen spreken over alle zinnen van een bepaalde lengte. Bovendien moet het aantal zinnen van een bepaalde lengte eindig zijn.
- De lengte van een zin moet een natuurlijk getal zijn, zodat we kunnen spreken over alle zinnen die korter zijn dan een bepaalde lengte.

Zodra we een begrip hebben van lengte dat aan de bovenstaande eisen voldoet, is het aantal zinnen dat korter is dan een bepaalde lengte m ook eindig. Omdat elk van deze zinnen hoogstens één getal beschrijft, kunnen we dus ook spreken over alle getallen die beschreven worden door zinnen die korter zijn dan m. Bovendien zullen er maar eindig veel van dit soort getallen zijn.

Doordat er een eindig aantal getallen is dat beschreven kan worden door een zin die korter is dan m, bestaan er ook altijd getallen waarvoor dit niet geldt. We kunnen dus altijd een kleinste getal vinden dat niet beschreven wordt door een zin die korter is dan m.

Constructie van de paradoxale zin

Zodra we geschikte definities hebben voor de lengte en het beschrijven van zinnen kunnen we op zoek gaan naar een soort basiszin voor de paradox. Als we in deze basiszin een natuurlijk getal n invullen, krijgen we een zin die "Het kleinste getal dat niet wordt beschreven door een zin korter dan n." beschrijft.

Vervolgens moeten we een manier verzinnen om een getal m in te vullen in de basiszin zodat we een zin krijgen met een lengte die kleiner is dan m. Aan de hand van de op deze manier verkregen zin leiden we de gewenste tegenspraak af.

In de gevallen die voorkomen in dit verslag is er steeds een gemakkelijke methode om de waarde van deze m te vinden. Er bestaat namelijk telkens een manier om twee getallen te vermenigvuldigen in een zin. Hierdoor kunnen we voor m een getal $c \cdot k$ invullen, terwijl de lengte van de uiteindelijke zin maar met $\mathcal{O}(c + k)$ groeit.

Als we vervolgens voor k de lengte van de basiszin nemen, hoeven we voor c alleen nog maar een getal te kiezen dat groot genoeg is om ervoor te zorgen dat $m = ck$ groter is dan de lengte van de uiteindelijke zin. Omdat ck veel sneller groeit dan iets van $\mathcal{O}(c + k)$, geldt dat we altijd zo een c kunnen vinden. (We bekijken in dit verslag alleen gevallen waarbij $c = 10$ voldoende groot is.)

1.3 Gebruik van de paradox

In dit verslag zullen we de paradox van Berry gebruiken om een bewijs te geven voor de onvolledigheidsstelling van Gödel, de ondefinieerbaarheidsstelling van Tarski en het niet bestaan van een oplossing voor het Halting-probleem. In het orginele bewijs voor elk van deze stellingen wordt *diagonalisatie* gebruikt. Wij zullen steeds een bewijs geven dat deze diagonalisatie niet gebruikt, maar een argument dat lijkt op de paradox van Berry [Boolos, 1989].

De bewijzen die we in dit verslag zullen bekijken heb ik gevonden door in het originele bewijs op te zoeken waar de diagonalisatie wordt toegepast en vervolgens dit argument vervangen door een argument dat lijkt op de paradox van Berry.

Hoofdstuk 2

Formele Talen

Om uitspraken te doen over wiskunde hebben we een taal nodig. We kunnen bijvoorbeeld uitspraken doen in het Nederlands, zoals "De som van twee oneven getallen is een even getal." of "Alle getallen zijn groter dan vijf." Vervolgens kunnen we nagaan of zo een uitspraak *waar* of *niet waar* is. De eerste zin die we hebben gegeven is bijvoorbeeld waar voor de natuurlijke getallen, terwijl de tweede zin niet waar is.

Bij een taal als het Nederlands is het niet altijd duidelijk wat er precies bedoeld wordt met de uitspraak. Om deze reden gebruiken we *formele talen*. Een formele taal heeft een aantal symbolen en regels waarmee je uitspraken kunt formuleren. Vervolgens kun je *theorieën* definiëren zodat je bewijzen kunt maken voor deze uitspraken.

2.1 Formele Taal van de Rekenkunde

In dit verslag bestuderen we vooral de *formele taal van de rekenkunde*, afgekort als $\mathscr{L}_A$ (Language of Arithmetic). In deze taal kun je uitspraken doen over de natuurlijke getallen.

De taal $\mathscr{L}_A$ heeft 16 symbolen (zie tabel 2.1). Van deze symbolen kunnen vervolgens eindige rijtjes gemaakt worden. Als zo een rijtje aan bepaalde regels voldoet, noemen we het een wf (afkorting voor well-formed formula) van $\mathscr{L}_A$.

Verder zegt $\mathscr{L}_A$ helemaal niets over de waarde of betekenis van deze wfs. Er wordt dus alleen vastgelegd wat een wf is en wat niet.

Tabel 2.1: Alle 16 symbolen van $\mathscr{L}_A$.

Haakjes:	( )	Constanten:	0
Logische operatoren:	$\neg$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\wedge$ $\vee$	Functies:	s $+$ $\cdot$
Kwantoren:	$\forall$ $\exists$	Predicaten:	$=$
Variabelen:	x $'$		

2.1.1 Termen

Met de symbolen voor variabelen, constanten, functies en haakjes uit tabel 2.1 kunnen we zogenaamde *termen* maken. Je zou in $\mathscr{L}_A$ een term kunnen zien als een omschrijving van een bepaald getal in een wf.

Een term kan variabelen bevatten. Het symbool 'x' representeert zo een variabele. Om verschillende variabelen te omschrijven, zetten we een '$\,'\,$' achter het symbool x. De symbolen x' en x'' representeren dus twee verschillende variabelen, die op zichzelf dus ook anders zijn dan de variabele x.

Om leesbaarheid van variabelen in het vervolg te verbeteren introduceren we enkele afkortingen voor deze notatie. Eentje met een subscript:

$$x_0 \coloneqq x \quad x_1 \coloneqq x' \quad x_2 \coloneqq x'' \quad x_3 \coloneqq x''' \quad x_4 \coloneqq x'''' \quad x_5 \coloneqq x''''' \quad \ldots \quad ,$$

en eentje met behulp van andere letters voor de variabelen:

$$x \coloneqq x \quad y \coloneqq x' \quad z \coloneqq x'' \quad a \coloneqq x''' \quad b \coloneqq x'''' \quad c \coloneqq x''''' \quad \ldots \quad .$$

Let dus wel op dat we met een letter y dus eigenlijk het symbool 'x' gevolgd door het symbool '$\,'\,$' bedoelen. Het symbool 'y' staat dus eigenlijk voor twee symbolen.

Verder kan een term ook constanten bevatten. Onze taal $\mathscr{L}_A$ kent alleen de constante 0, welke voor het getal *nul* staat. De overige getallen kunnen we maken met behulp van de opvolgfunctie s. Zo staat s0 voor het getal *één* en ss0 voor het getal *twee*.

Om de leesbaarheid van constanten in een wf te verbeteren introduceren we ook hier een nieuwe notatie voor de afkortingen van constanten. We schrijven $\overline{n}$, met n een natuurlijk getal, als het symbool '0' bedoelen met n keer het symbool 's' ervoor geschreven. Als voorbeeld:

$$\overline{0} \coloneqq 0 \quad \overline{1} \coloneqq \mathrm{s}0 \quad \overline{2} \coloneqq \mathrm{ss}0 \quad \overline{3} \coloneqq \mathrm{sss}0 \quad \overline{4} \coloneqq \mathrm{ssss}0 \quad \ldots \quad .$$

Let op dat ook hier $\overline{n}$ slechts een afkorting is voor n keer het symbool 's' en één keer het symbool '0'. $\overline{n}$ staat dus voor $n+1$ symbolen.

Met de functie-symbolen 's', '+' en '$\cdot$' kunnen we termen combineren om nieuwe termen te maken. Laat u en v twee termen zijn, dan geldt dat su, $(u+v)$ en $(u \cdot v)$ ook termen zijn.

2.1.2 Well-formed Formulas

Met de symbolen voor predicaten, kwantoren, logische operatoren en haakjes uit tabel 2.1 kunnen we de wfs maken van $\mathscr{L}_A$. Een wf van $\mathscr{L}_A$ is een rijtje symbolen die een bepaalde uitspraak over de natuurlijke getallen representeert. Zo een wf kan dus '*waar*' of '*niet waar*' zijn, al hangt dit wel af van de context waarin een wf wordt gebruikt.

De predicaten van een taal kunnen van termen wfs maken. In $\mathscr{L}_A$ bestaat alleen het predicaat '='. Laat u en v twee willekeurige termen zijn, dan is $(u = v)$ een wf.

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\neg\mathscr{A}$	$(\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B})$	$(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$	$(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$	$(\mathscr{A}\Leftrightarrow\mathscr{B})$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1

Tabel 2.2: Waarheidstabel van de logische operatoren van $\mathscr{L}_A$. Links van de verticale streep staan de waarden van de originele wfs $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ en rechts de waarden die verkregen worden door het toepassen van de logische operatoren. (1 staat voor '*waar*' en 0 staat voor '*niet waar*')

Met de symbolen van de logische operatoren ($\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$ en $\vee$) kunnen we bestaande wfs combineren om nieuwe wfs te krijgen. Tabel 2.2 laat zien hoe de logische operatoren gebruikt worden en welke waardes de nieuwe wfs krijgen.

Een wf kan natuurlijk ook een term met een variabele bevatten. Neem bijvoorbeeld de wf $(x = 0)$, welke de variabele x bevat. Als we deze wf afkorten, bijvoorbeeld met de letter $\mathscr{A}$, noteren we deze wf als $\mathscr{A}(x)$. Als een wf meer dan een variabele bevat, bijvoorbeeld $(x \cdot y = 0)$, kunnen we dit afkorten als $\mathscr{B}(x, y)$.

Vervolgens kunnen we de wf $\mathscr{A}(t)$ opschrijven met t een willekeurige term. Hiermee bedoelen we dat we alle variabelen x in de wf $\mathscr{A}(x)$ vervangen door de term t. $\mathscr{A}(t)$ staat in dit geval dus voor de wf $(t = 0)$.

Ten slotte bespreken we nog het gebruik van de symbolen die staan voor kwantoren ('$\forall$' en '$\exists$'). Deze symbolen worden gebruikt om bepaalde variabelen 'vast te leggen'. Laat $\mathscr{A}(\chi)$ een wf zijn met een willekeurige variabele χ. Dan zijn $(\forall\chi)(\mathscr{A}(\chi))$ en $(\exists\chi)(\mathscr{A}(\chi))$ ook wfs. Deze kwantoren leggen dan alle variabelen χ vast die in de wf $\mathscr{A}$ staan. Verder geldt dat $(\exists\chi)(\mathscr{A}(\chi))$ voor hetzelfde staat als $\neg(\forall\chi)\neg(\mathscr{A}(\chi))$.

We noemen een variabele in een wf *vrij* als deze variabele nergens in de wf wordt vastgelegd. Bekijk als voorbeeld de wf $(x = 0 \wedge (\forall y)(y = 0))$. In deze wf is de variabele x vrij, maar de variabele y niet! We noteren daarom ook wel de afkorting van deze wf $\mathscr{C}$ als $\mathscr{C}(x)$, dus zonder het vermelden van de variabele y.

2.1.3 Afkortingen

Om de leesbaarheid van wfs te bevorderen introduceren we enkele symbolen die een afkorting zijn voor een andere rij symbolen. We geven voor elk van deze afkortingen ook een intuïtieve betekenis voor het symbool.

- Laat $\mathscr{B}(x)$ een willekeurige wf zijn met vrije variabele x. Dan is $(\exists_1 x)\,\mathscr{B}(x)$ een afkorting voor

  $$(\exists x)\,\mathscr{B}(x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\,\mathscr{B}(x) \wedge \mathscr{B}(y) \Rightarrow x = y).$$

  Je kunt dit lezen als "Er bestaat een *unieke* x zodanig dat $\mathscr{B}(x)$ waar is."

- Laat u en v twee termen zijn, dan is $u < v$ een afkorting voor

  $$(\exists k)(u + \mathrm{s}k = v).$$

  Je kunt dit lezen als "u is kleiner dan v".

2.2 Interpretaties

De taal $\mathscr{L}_A$ bepaalt alleen aan welke regels een wf moet voldoen, maar geeft voor de rest geen betekenis aan deze wfs. Pas als er wordt bepaald hoe je een wf interpreteert, geldt dat een wf '*waar*' of '*niet waar*' kan zijn.

Een *interpretatie* M van $\mathscr{L}_A$ is een wiskundige structuur waar de wfs van $\mathscr{L}_A$ uitspraken over kunnen doen. Hiervoor moet M de volgende ingrediënten hebben:

a. Een niet-lege verzameling D, welke we het *domein* van M zullen noemen.

b. Een relatie $\left[\_ \overset{\mathsf{M}}{=} \_\right] \subseteq D \times D$.

c. De functies $[\mathrm{s}_{\mathsf{M}}\_] : D \to D$, $[\_ +_{\mathsf{M}} \_] : D \times D \to D$ en $[\_ \cdot_{\mathsf{M}} \_] : D \times D \to D$.

d. Een constante $0_{\mathsf{M}} \in D$.

2.2.1 Waarheid in een interpretatie

We kunnen nu M een wf $\mathscr{B}$ van $\mathscr{L}_A$ laten interpreteren. Dit doen we als volgt. Laat $s = (s_1, s_2, \ldots)$ een rijtje zijn met $s_i \in D$. Vervolgens definiëren we de functie $s^*(t)$, met t een term van $\mathscr{L}_A$, als volgt:

1. Als t de variabele $x\overbrace{''' \ldots '''}^{n}$, dan is $s^*(t) = s_{n+1}$.
2. Als t de constante 0 is, dan is $s^*(t) = 0_{\mathsf{M}}$.
3. Als t de functie s is die op de term u werkt, dan geldt dat $s^*(t) = \mathrm{s}_{\mathsf{M}} s^*(u)$.
4. Als t een van de functies $\cdot$ of $+$ is die werken op de termen u en v, dan bepalen we de waarde van $s^*(t)$ als volgt:

$$s^*(u+v) = s^*(u) +_{\mathsf{M}} s^*(v), \qquad s^*(u \cdot v) = s^*(u) \cdot_{\mathsf{M}} s^*(v).$$

We hebben dan elke term van $\mathscr{B}$ vervangen door een element uit D. Vervolgens kijken we naar de predicaten, logische operatoren en kwantoren van $\mathscr{B}$. Hierbij zeggen we dat s *voldoet* aan $\mathscr{B}$ als het volgende geldt:

1. s voldoet aan $u = v$ dan en slechts dan als $s^*(u) \overset{\mathsf{M}}{=} s^*(v)$ waar is.
2. s voldoet aan $\neg\mathscr{C}$ dan en slechts dan als s niet voldoet aan $\mathscr{C}$.
3. s voldoet aan $\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D}$ dan en slechts dan als s niet voldoet aan $\mathscr{C}$ of s voldoet aan $\mathscr{D}$.
4. s voldoet aan $\mathscr{C} \Leftrightarrow \mathscr{D}$ dan en slechts dan als s voldoet aan zowel $\mathscr{C}$ als $\mathscr{D}$, of s niet voldoet aan zowel $\mathscr{C}$ als $\mathscr{D}$.
5. s voldoet aan $\mathscr{C} \wedge \mathscr{D}$ dan en slechts dan als s voldoet aan zowel $\mathscr{C}$ als $\mathscr{D}$.
6. s voldoet aan $\mathscr{C} \vee \mathscr{D}$ dan en slechts dan als s voldoet aan $\mathscr{C}$ of s voldoet aan $\mathscr{D}$.

7. s voldoet aan $(\forall x_j)\ \mathscr{C}$ als elk rijtje dat verschilt van s in het punt j voldoet aan $\mathscr{C}$.

8. s voldoet aan $(\exists x_j)\ \mathscr{C}$ als er een rijtje bestaat dat verschilt van s in het punt j en voldoet aan $\mathscr{C}$.

Als elk aftelbaar rijtje van D voldoet aan $\mathscr{B}$ zeggen we dat $\mathscr{B}$ *waar* is voor de interpretatie M. Dit schrijven we op als $\models_{\mathsf{M}} \mathscr{B}$.

2.2.2 Standaardinterpretatie

Laat N een interpretatie van $\mathscr{L}_A$ zijn met domein $\mathbb{N}$, '$\overset{\mathsf{N}}{=}$' als gelijkheid, '$+_{\mathsf{N}}$' als de standaard manier van optellen, '$\cdot_{\mathsf{N}}$' als de standaard manier van vermenigvuldigen, 's_{N}' als de functie $x \mapsto x + 1$ en 0_{N} als het getal *nul*.

Optellen, vermenigvuldigen en vergelijken van natuurlijke getallen gaan precies zoals je zou verwachten als je N een wf van $\mathscr{L}_A$ laat interpreteren. Om deze reden zullen we N de *standaardinterpretatie* van de formele taal van de rekenkunde noemen.

2.3 Theorieën

Hoewel we nu een idee hebben wat het betekent voor een wf om '*waar*' of '*niet waar*' te zijn voor een bepaalde interpretatie, hebben we nog geen (bruikbare) methode om dit te bepalen voor een willekeurige wf van $\mathscr{L}_A$. Voor dit probleem kunnen we een *theorie* in $\mathscr{L}_A$ gebruiken.

Een theorie K in $\mathscr{L}_A$ bestaat uit een verzameling wfs in $\mathscr{L}_A$, die we de *axioma's* noemen, en een paar afleidregels. Met deze axioma's en afleidregels kunnen we vervolgens andere wfs van $\mathscr{L}_A$ afleiden. Een wf die we kunnen afleiden in K noemen we een *stelling* van K.

Een theorie kan zelf nog niks over de "*waarheid*" van een wfs zeggen. Een theorie kan alleen bepalen of een wf een stelling is van de theorie of niet.

2.3.1 Bewijzen

Om af te leiden dat een wf $\mathscr{C}$ een stelling is van K, moeten we een *formeel bewijs* geven voor $\mathscr{C}$ in K. Een bewijs bestaat uit een rijtje wfs $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_n$ waarbij $\mathscr{B}_n$ gelijk is aan $\mathscr{C}$. Verder moet elke $\mathscr{B}_i$ aan minstens één van de regels 1-3 voldoen:

1. $\mathscr{B}_i$ is een axioma van K.

2. $\mathscr{B}_i$ is een stelling van K.

3. $\mathscr{B}_i$ komt voort uit een van de afleidingsregels van K en een of meerdere van de wfs $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_{i-1}$.

Zodra we een dergelijk bewijs kunnen vinden voor $\mathscr{C}$ in K noteren we dit als $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$. Er geldt dan dat $\mathscr{C}$ een stelling is van K.

Bewijzen met hypotheses

We kunnen ook een bewijs maken in K voor $\mathscr{C}$ waarbij we niet alleen de axioma's en stellingen van K gebruiken, maar ook een aantal willekeurige wfs $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_m$. We noemen deze wfs de *hypotheses* van het bewijs. Er geldt dan dat een $\mathscr{B}_i$ uit het bewijs ook aan een vierde regel mag voldoen:

4. $\mathscr{B}_i$ is een van de hypotheses $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_m)$.

Als we zo een bewijs vinden in K voor $\mathscr{C}$ uit $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_m$, noteren we dit als $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_m \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$. Merk wel op dat hieruit niet volgt dat $\mathscr{C}$ een stelling is van K.

We kunnen wel een bewijs met hypotheses gebruiken om af te leiden dat bepaalde bewijzen moeten bestaan. Als $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_m \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$ en voor alle $\mathscr{A}_i$ geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{A}_i$, dan geldt ook dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}$. Als alle $\mathscr{A}_i$ namelijk stellingen zijn van K, mogen ze ook gebruikt worden in een bewijs zonder hypotheses (zie regel 2).

Bewijzen in dit verslag

In dit verslag zal ik een aantal keer een formeel bewijs geven. Ik heb ervoor gekozen om deze bewijzen niet tussen de tekst door te geven. In plaats daarvan heb ik ze aan het einde van dit verslag toegevoegd. Vervolgens heb ik aan ieder bewijs een nummer toegekend en refereer ik in de tekst naar dit nummer. Je kunt deze bewijzen vanaf pagina 48 vinden.

Omdat deze bewijzen op een andere plek staan, heb ik ervoor gekozen om in geen van de bewijzen stellingen te gebruiken die in de tekst zijn beschreven. In plaats daarvan neem ik deze stellingen aan als hypotheses. Soms zal ik refereren naar een bewijs met hypotheses waarvan ik in de tekst heb laten zien dat het stellingen zijn. In dit geval zal ik bij het overnemen van het resultaat van dit bewijs deze hypotheses weglaten.

2.3.2 Eerste-orde theorie

Laat K een theorie zijn in $\mathscr{L}_A$. We noemen K dan een *eerste-orde theorie* als deze theorie de volgende axioma's en afleidingsregels heeft.

Axioma's

(A1) $\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{B})$

(A2) $(\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D})) \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}))$

(A3) $(\neg \mathscr{C} \Rightarrow \neg \mathscr{B}) \Rightarrow ((\neg \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{C})$

(A4) $(\forall x_i) \mathscr{B}(x_i) \Rightarrow \mathscr{B}(t)$ met t een term vrij in $\mathscr{B}$.

(A5) $(\forall x_i)(\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow (\forall x_i)\mathscr{C})$ zonder vrije variabele x_i in $\mathscr{B}$.

We zullen deze axioma's de *logische axioma's* van K noemen. Alle axioma's die K kan hebben noemen we de *eigen axioma's* van K.

Afleidingsregels

(MP) $\mathscr{C}$ volgt uit $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$. (Modus Ponens)

(GEN) $(\forall x_i)\mathscr{B}$ volgt uit $\mathscr{B}$. (Generalisatie)

Het hebben van deze axioma's en afleidingsregels heeft een aantal zeer handige eigenschappen. Ten eerste geeft het de symbolen van $\mathscr{L}_A$ die staan voor logische operatoren, kwantoren, en variabelen (zie tabel 2.2) hun betekenis en kunnen er veel nieuwe regels[1] worden afgeleid die intuïtief werken voor deze symbolen.

Verder is een stelling $\mathscr{B}$ die afgeleid is uit axioma's (A1)-(A5) en afleidregels (MP) en (GEN) *logisch juist*. Dit betekent dat voor elke interpretatie M van $\mathscr{L}_A$ geldt dat $\models_{\mathsf{M}} \mathscr{B}$.

We zullen er in de rest van dit verslag van uitgaan dat elke theorie die wordt besproken een eerste-orde theorie is, behalve als anders wordt vermeld.

2.3.3 Modellen

Laat M een interpretatie zijn van $\mathscr{L}_A$ en K een eerste-orde theorie van $\mathscr{L}_A$. We noemen dan M een *model* van K als voor alle eigen axioma's $\mathscr{E}_i$ van K geldt dat $\models_{\mathsf{M}} \mathscr{E}_i$.

Nu is het zo dat een stelling $\mathscr{B}$ van K waar is voor elk model van K. Als we dus willen bepalen of een bepaalde wf $\mathscr{B}$ waar is voor een interpretatie M van $\mathscr{L}_A$, moeten we een theorie K zoeken zó dat geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}$ en dat M een model is van K.

Als de standaardinterpretatie van $\mathscr{L}_A$ een model is voor een theorie K, noemen we K een *ware theorie*.

2.3.4 Theorie met gelijkheid

De taal van de rekenkunde vertelt over het symbool '=' alleen hoe je het moet gebruiken om wfs te maken. Voor de rest vertelt het niks over de betekenis van '='. Om het symbool de intuïtieve betekenis van '*is gelijk aan*' te geven, moeten alle onderstaande wfs stellingen zijn in deze theorie.

(A6) $(\forall x)x = x$,

(A7) $x = y \Rightarrow (\mathscr{B}(x, x) \Rightarrow \mathscr{B}(x, y))$.

Als voor een theorie K geldt dat (A6) en (A7) stellingen zijn, heet K een *theorie met gelijkheid*.

In zo een theorie met gelijkheid geldt een handige afleidingsregel die we in dit verslag '='-substitutie zullen noemen. Deze regel stelt dat $x = y, \mathscr{B}(x, x) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(x, y)$ en volgt direct uit (A7).

[1] Een voorbeeld van zo een regel is [Disj.Intr.]. Deze regel zegt dat $\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}$ volgt uit $\mathscr{B}$ en $\mathscr{C}$. In hoofdstuk 2.4 en 2.5 van [Mendelson, 1964] worden nog veel meer van dit soort regels afgeleid. Dit verslag zal ook deze regels in het vervolg gebruiken.

2.3.5 De theorie S

Een van de theorieën die we in dit verslag zullen bekijken is the theorie S in de taal $\mathscr{L}_A$. Deze theorie heeft de volgende wfs[2] als axioma's:

(S1) $x = y \Rightarrow (x = z \Rightarrow y = z)$

(S2) $x = y \Rightarrow \mathrm{s}x = \mathrm{s}y$

(S3) $\neg(0 = \mathrm{s}x)$

(S4) $\mathrm{s}x = \mathrm{s}y \Rightarrow x = y$

(S5) $x + 0 = x$

(S6) $x + \mathrm{s}y = \mathrm{s}(x + y)$

(S7) $x \cdot 0 = 0$

(S8) $x \cdot \mathrm{s}y = (x \cdot y) + x$

(S9) $\mathscr{B}(0) \Rightarrow ((\forall x)(\mathscr{B}(x) \Rightarrow \mathscr{B}(\mathrm{s}x)) \Rightarrow (\forall x)\mathscr{B}(x))$

Deze theorie S wordt ook wel de *Peano-rekenkunde* genoemd. In [Mendelson, 1964, p. 154] wordt aangetoond dat S een theorie met gelijkheid is. Merk verder op dat de standaardinterpretatie van $\mathscr{L}_A$ een model is voor S. S is dus een *echte theorie*.

2.3.6 Deeltheorieën

Laat K_1 en K_2 twee theorieën in $\mathscr{L}_A$ zijn. Als alle axioma's van K_1 stellingen zijn in K_2 noemen we K_1 een *deeltheorie* van K_2. In dit geval geldt dan dat alle stellingen van K_1 ook stellingen zijn in K_2. We zullen daarom K_2 ook wel een *uitbreiding* van K_1 noemen.

2.3.7 Consistentie en ω-consistentie

Een *consistente* theorie is een theorie die zichzelf niet tegenspreekt. Dit betekent dat er geen wf $\mathscr{C}$ mag bestaan waarvoor geldt dat $\vdash \mathscr{C}$ èn $\vdash \neg\mathscr{C}$. Als een eerste-orde theorie niet consistent is, geldt dat voor elke willekeurige wf een stelling is van deze *inconsistente* theorie.

Een theorie K in $\mathscr{L}_A$ kan ook *ω-consistent* zijn. Dit betekent dat als voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n})$, dan niet-$\vdash_{\mathrm{K}} (\exists x)\mathscr{B}(x)$. ω-consistent is een sterkere vorm van consistentie, wat inhoudt dat elke theorie die ω-consistent is ook consistent moet zijn.

In [Mendelson, 1964, p. 207] wordt aangetoond dat elke echte theorie ω-consistent is. Hieruit volgt dus dat S een ω-consistente theorie is.

[2]Let op! Het symbool 's' in deze wfs staat voor de opvolg-operator zoals we besproken hebben in 2.1.1. Je moet '$\mathrm{s}x$' dus niet lezen als '$\mathrm{s} \cdot x$', maar als '$x + 1$'.

2.4 Gödelnummers

De taal van de rekenkunde beschrijft eigenlijk alleen maar uitspraken over de natuurlijke getallen. We willen graag een manier vinden om in $\mathscr{L}_A$ te kunnen praten over theorieën van $\mathscr{L}_A$. Hiervoor moeten we een manier verzinnen om elk symbool, wf en bewijs van $\mathscr{L}_A$ een uniek getal toe te kennen. Zo een getal noemen we een *Gödelnummer*.

Als we eenmaal een Gödelnummer hebben gevonden, kunnen we in een theorie van $\mathscr{L}_A$ uitspraken afleiden over $\mathscr{L}_A$ zelf.

We hebben nu dus een functie nodig die symbolen, wfs en bewijzen van $\mathscr{L}_A$ op een injectieve manier naar de natuurlijke getallen stuurt. We zullen nu een voorbeeld geven van zo een functie g die deze eigenschap heeft.

Ten eerste kennen we aan elk symbool van $\mathscr{L}_A$ een oneven getal groter dan 1 toe. Omdat $\mathscr{L}_A$ maar 16 symbolen bevat, hoeven we alleen voor elk symbool zo een getal te kiezen. Wij zullen dit als volgt doen:

$$\begin{array}{cccc} g\,[(] = 3 & g\,[)] = 5 & g\,[\neg] = 7 & g\,[\Rightarrow] = 9 \\ g\,[\wedge] = 11 & g\,[\vee] = 13 & g\,[\Leftrightarrow] = 15 & g\,[\forall] = 17 \\ g\,[\exists] = 19 & g\,[x] = 21 & g\,[\,'\,] = 23 & g\,[=] = 25 \\ g\,[0] = 27 & g\,[s] = 29 & g\,[+] = 31 & g\,[\cdot] = 33 \end{array}$$

We zullen nu ook aan elke rijtje van deze symbolen een uniek getal toekennen. Laat p_n de rij priemgetallen zijn (dus $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc.). Laat nu $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ een rijtje symbolen uit $\mathscr{L}_A$ zijn van lengte n. Ken aan dit rijtje symbolen het volgende getal toe:

$$g(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) = p_1^{g[\alpha_1]}p_2^{g[\alpha_2]}\ldots p_n^{g[\alpha_n]}.$$

Omdat we het product van priemgetallen gebruiken, krijgt elk rijtje een uniek getal. Verder is het zo dat alle exponenten van deze priemgetallen oneven getallen zijn. Merk ten slotte ook op dat een rijtje symbolen altijd naar een even getal wordt gestuurd (p_1 is immers gelijk aan 2, en de exponent van p_1 is nooit gelijk aan 0).

We hebben nu dus ook een Gödelnummer gevonden voor alle wfs in $\mathscr{L}_A$. Een wf is namelijk slechts een rijtje symbolen van $\mathscr{L}_A$ die voldoet aan bepaalde regels. Het Gödelnummer van een wf $\mathscr{A}$ zullen we in het vervolg noteren als $\ulcorner\mathscr{A}\urcorner$.

Ten slotte kennen we een uniek getal toe aan elk rijtje van wfs in $\mathscr{L}_A$. Laat $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_m$ een rijtje wfs in $\mathscr{L}_A$ zijn van lengte m. Aan dit rijtje kennen we dan het volgende getal toe:

$$g\,(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_n) = p_1^{\ulcorner\mathscr{B}_1\urcorner}p_2^{\ulcorner\mathscr{B}_2\urcorner}\ldots p_n^{\ulcorner\mathscr{B}_n\urcorner}.$$

Merk op dat de exponenten van deze priemgetallen even zijn. Het Gödelnummer van een rijtje wfs kan dus nooit hetzelfde zijn als het Gödelnummer van een rijtje symbolen.

We hebben nu dus ook een Gödelnummer gevonden voor een bewijs in $\mathscr{L}_A$. Een bewijs is namelijk slechts een rijtje wfs in $\mathscr{L}_A$ dat voldoet aan bepaalde regels.

2.5 Definities voor de paradox van Berry

We willen in de komende hoofdstukken graag een tegenspraak afleiden die vergelijkbaar is met de paradox van Berry. Hiervoor moeten we eerst enkele dingen definiëren, zoals we besproken hebben in 1.2.2. Hierbij willen we graag dat de wfs van $\mathscr{L}_A$ de rol van 'zinnen' gaat vervullen.

2.5.1 *Beschrijven* voor wfs

Definitie. *Laat* K *een theorie met gelijkheid zijn in de taal* $\mathscr{L}_A$. *We zeggen dan dat de wf* $\mathscr{F}(x)$ *met een vrije variabele* x *het getal* n beschrijft *in* K *als geldt dat* $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$.

Het is duidelijk dat een wf alleen natuurlijke getallen beschrijft. In $\mathscr{L}_A$ kan namelijk alleen dingen worden gezegd over natuurlijke getallen. Dat een wf maximaal één getal kan beschrijven in K volgt uit de volgende propositie.

Propositie 2.1. *Laat* K *een theorie met gelijkheid in de taal* $\mathscr{L}_A$. *Dan geldt het volgende:*

i. $(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{F}(\overline{n})$

ii. $(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n}) \vdash_{\mathrm{K}} (\exists_1 x)\mathscr{F}(x)$

Bewijs. Voor (i.) zie bewijs 1 en voor (ii.) zie bewijs 2. □

Als een bepaalde wf een getal n beschrijft in K, is deze n dus uniek voor deze wf. Deze definitie van beschrijven voldoet dus aan alle voorwaarden die we genoemd hebben in 1.2.2.

2.5.2 De *lengte* van wfs

Herinner dat alle wfs van $\mathscr{L}_A$ bestaan uit een eindige rij symbolen uit $\mathscr{L}_A$. De lengte van deze rij kunnen we gebruiken als lengtemaat voor onze wfs.

Definitie. *De* lengte *van een wf* $\mathscr{A}$ *is het aantal symbolen in* $\mathscr{A}$.

Merk ten eerste op dat de lengte van een wf altijd een natuurlijk getal is. Verder is het zo dat er eindig veel verschillende symbolen zijn in $\mathscr{L}_A$, dus is er ook een eindig aantal wfs van een bepaalde lengte.

Propositie 2.2. *Laat* K *een theorie met gelijkheid zijn in* $\mathscr{L}_A$. *Dan bestaat er voor elk natuurlijk getal* m *een kleinste getal* n *dat niet wordt beschreven in* K *door een wf met minder dan* m *symbolen.*

Bewijs. Laat m een willekeurig natuurlijk getal zijn.

Merk op dat in 2.1 werd besproken dat een wf uit een eindige (16) hoeveelheid symbolen kan bestaan. Laat U_m de verzameling van alle mogelijke rijtjes van m van deze symbolen zijn. Er geldt voor het aantal elementen van U_m dat $\#U_m = 16^m$.

Laat nu V_m alle wfs zijn van lengte m. Er geldt dat $V_m \subset U_m$.

Ten slotte definiëren we de verzameling

$$W_m := \{\mathscr{F} \in V_m : \mathscr{F} \text{ beschrijft een getal } k \in \mathbb{N}\}.$$

Dit is dus de verzameling van alle wf die een getal beschrijven.

Merk op dat $W_m \subset V_m \subset U_m$, dus $\#W_m \leq \#U_m = 16^m$. Er zijn dus eindig veel wfs van lengte m die een getal beschrijven.

Laat nu $W_{\leq m} = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_m$. Dan is $W_{\leq m}$ slechts een vereniging van eindige verzamelingen, en dus zelf ook eindig.

We kunnen vervolgens de verzameling $A_{\leq m}$ definiëren als alle natuurlijke getallen die beschreven worden door wf in $W_{\leq m}$. Omdat $W_{\leq m}$ eindig is, geldt dat $A_{\leq m}$ ook eindig is.

We bekijken nu $\mathbb{N} \setminus A_{\leq m}$, wat alle getallen zijn die niet door een wf met minder dan m symbolen wordt beschreven. Deze verzameling is zeker niet leeg, omdat $A_{\leq m}$ eindig is. Door uit deze verzameling het kleinste getal te nemen, vinden we de gezochte n. □

De definitie van lengte voor de wfs voldoet dus ook aan alle voorwaarden die we genoemd hebben in 1.2.2.

2.6 Representeerbare Functies en Uitdrukbare Relaties.

In dit verslag zullen representeerbare functies en uitdrukbare relaties een belangrijke rol spelen. We zullen eerst uitleggen wat we met deze twee termen bedoelen.

Definitie. *Een relatie* $\mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n)$ *is* uitdrukbaar *in theorie* K *als er een wf* $\mathscr{R}(x_1, \ldots, x_n)$ *bestaat zodanig dat voor alle natuurlijke getallen* $k_1, \ldots, k_n$ *geldt dat*

- *Als* $\mathrm{R}(k_1, \ldots, k_n)$ *waar is, dan geldt* $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{R}(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$.
- *Als* $\mathrm{R}(k_1, \ldots, k_n)$ *niet waar is, dan geldt* $\vdash_{\mathrm{K}} \neg \mathscr{R}(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$.

Definitie. *Een functie* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *heet* representeerbaar *in* K *als er een wf* $\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_n, y)$ *bestaat zodanig dat voor alle natuurlijke getallen* $k_1, \ldots, k_n$ *en* m *het volgende geldt:*

- *Als* $g(k_1, \ldots, k_n) = y$, *dan* $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{G}(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{m})$.
- $\vdash_{\mathrm{K}} (\exists_1 y)\ \mathscr{G}(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, y)$.

2.6.1 Recursieve functies

Een recursieve functie is een functie die aan een van de onderstaande waarden voldoet [Mendelson, 1964, p. 174]:

I. De *nul-functie* $Z(x) = 0$.

II. De *opvolg-functie* $N(x) = x + 1$.

III. De *projectie-functie* $U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

IV. Uit *substitutie*. Laat $g, h_1, \ldots, h_m$ recursieve functies zijn, dan is

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$$

ook recursief.

V. Uit *recursie*. Laat $g(x_1, \ldots, x_n)$ en $h(x_1, \ldots, x_n, y)$ twee recursieve functies,

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n) \text{ en}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Dan is $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ een recursieve functie.

IV. Uit *de* μ *operator*:

$$\mu y_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} \text{De kleinste } y < z \text{ waarvoor} \\ R(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ waar is,} \\ \text{anders } z. \end{cases}$$

.

We kunnen nu ook een definitie geven voor een recursieve relatie. Laat $\mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n)$ een relatie zijn. Laat verder $C_\mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n)$ de karakteristieke functie van deze relatie zijn. Deze karakteristieke functie is gedefineerd als

$$C_\mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{als } \mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n) \text{ waar is,} \\ 1 & \text{als } \mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n) \text{ niet waar is.} \end{cases}$$

Als de karakteristieke functie van een relatie recursief is, noemen we de relatie ook recursief.

Recursieve functies en relaties spelen een belangrijke rol in dit verslag. Ze hebben namelijk een aantal zeer handige eigenschappen die we zullen gebruiken.

2.6.2 In de theorie S

Een van de belangrijkste eigenschappen van recursieve functies is dat ze representeerbaar zijn in de theorie S. Verder geldt ook dat alle recursieve relaties uitdrukbaar zijn in S.

Door deze eigenschap van recursieve relaties en functies kunnen we dus gemakkelijk nagaan of bepaalde uitspraken met ingewikkelde relaties bewijsbaar zijn in een theorie. We hoeven namelijk alleen nog maar te bepalen of een relatie of functie recursief is of niet.

2.6.3 Recursieve functies en relaties uit Mendelson

Hieronder omschrijven we enkele functies en relaties de we in de rest van dit verslag gebruiken. In [Mendelson, 1964] wordt bewezen dat deze functies recursief zijn.

- $x + y$ (optellen)
- xy (vermenigvuldiging)

- x^y (machtverheffen)
- p_n de rij priemgetallen in oplopende volgorde. Dus $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_4 = 5$, ... (Merk op dat dit een functie is met 1 argument, namelijk n.)
- $x*y$ geeft de samenstelling van twee Gödelnummers. Als x het Gödelnummer van het rijtje symbolen $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ is en y het Gödelnummer van het rijtje symbolen symbolen $\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$, dan is $x * y$ het Gödelnummer van $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$.
- $\mathrm{Num}(n)$. Deze relatie neemt als argument een getal en geeft vervolgens het Gödelnummer van de representatie van dit getal (dus $\ulcorner\overline{n}\urcorner$.)
- $\mathrm{lh}(x)$ geeft het aantal symbolen van de wf met Gödelnummer x. Je zou dus kunnen zeggen dat deze functie de lengte van een wf bepaalt.

Vervolgens definiëren we de relatie $\mathrm{PrAx}_{\mathrm{K}}(q)$. Deze relatie is waar als q het Gödelnummer is van een axioma van een theorie K. Als deze relatie recursief is, zeggen we dat K een recursieve axioma-verzameling heeft. S is een theorie met een recursieve axioma-verzameling.

Ten slotte bekijken we de relatie $\mathrm{Pf}(y, x)$. Deze relatie is waar als y het Gödelnummer is voor een juist bewijs in K van de wf met Gödelnummer x. Deze relatie is recursief als K een recursieve axioma-verzameling heeft.

2.6.4 Beschrijvingszin

Een van de belangrijkste zinnen in dit verslag is de beschrijvingszin. Deze zin ziet er als volgt uit: Laat $\mathscr{A}(x)$ een formule zijn met een vrije variabele x. De beschrijvingszin van wf $\mathscr{A}(x)$ en natuurlijk getal n is dan:

$$(\forall x)(\mathscr{A}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n}).$$

We willen graag een primitief recursieve functie die het Gödelnummer q van de wf $\mathscr{A}(x)$ en het getal n als parameter heeft, en het Gödelnummer van de bijbehorende benoemingszin teruggeeft.

We definiëren de functie $\mathrm{Bnm}(q, n)$ als volgt:

$$\mathrm{Bnm}(q, n) \coloneqq \ulcorner(\forall x)(\urcorner * q * \ulcorner\Leftrightarrow x =\urcorner * \mathrm{Num}(n) * \ulcorner)\urcorner.$$

Deze functie is recursief, omdat het slechts een samenstelling is van andere recursieve functies. Merk verder op dat deze functie het Gödelnummer geeft van de beschrijvingszin van de wf met Gödelnummer q en het natuurlijke getal n.

2.6.5 Bovengrens Gödelnummers

In dit verslag maken we gebruik van nog een belangrijke recursieve functie. Dit is de functie die een bovengrens geeft voor de Gödelnummers van een bepaalde lengte. Deze is in het vervolg nodig om andere recursieve functies te maken.

Eerst zullen we bekijken of zo een bovengrens wel bestaat. Herinner dat het Gödelnummer van een wf $\mathscr{B}$ met n symbolen gelijk is aan $p_1^{g[\alpha_1]}p_2^{g[\alpha_2]}\ldots p_n^{g[\alpha_n]}$, met $(p_n)_{n\geq 1}$ het rijtje priemgetallen en $g[\alpha_i]$ het Gödelnummer van de individuele symbolen van $\mathscr{B}$.

Merk ten eerste op dat voor alle symbolen ξ in de taal $\mathscr{L}_A$ geldt dat $g\left[\xi\right] \leq 33$. Ook geldt dat $(p_n)_{n\geq 1}$ een strikt oplopend rijtje is, dus voor alle $i < n$ geldt $p_i < p_n$. Er geldt dus voor alle wf $\mathscr{B}$ van lengte n dat.

$$\ulcorner \mathscr{B} \urcorner = p_1^{g[\alpha_1]} p_2^{g[\alpha_2]} \dots p_n^{g[\alpha_n]} \leq p_1^{33} p_2^{33} \dots p_n^{33} < p_n^{33} p_n^{33} \dots p_n^{33} = p_n^{33n}$$

We hebben dus als bovengrens voor wf met lengte n de waarde p_n^{33n} gevonden. Laat nu de functie $\mathrm{Gr}(n) = p_n^{33n}$. Het is gemakkelijk te zien dat deze functie primitief recursief is, omdat vermenigvuldiging, machtsverheffen en het rijtje $(p_n)_{n\geq 1}$ ook primitief recursief zijn.

Hoofdstuk 3

De onvolledigheidsstelling van Gödel

We hebben in 2.3 gezien hoe we een theorie in $\mathscr{L}_A$ kunnen gebruiken om te bepalen welke wfs waar zijn in een interpretatie van $\mathscr{L}_A$. Dit kan echter niet met elke willekeurige wf. Alleen van wfs die stellingen zijn in een theorie, kunnen we vaststellen dat deze waar zijn voor de modellen van de theorie.

Laten we als voorbeeld een theorie K nemen waarvan de standaardinterpretatie een model is. Dan is het dus in het algemeen niet waar dat we met theorie K voor elke willekeurige wf kunnen bepalen of deze wf waar is voor de standaardinterpretatie.

Een vervolgvraag zou dus kunnen zijn of er een theorie bestaat die dit wel doet. Uit de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel blijkt dat dit niet het geval is. De eerste onvolledigheidsstelling zegt namelijk ongeveer het volgende:

‘Voor elke *bruikbare* theorie K die *sterk genoeg* is, bestaat er een wf die geen stelling is èn de negatie van deze wf ook geen stelling is.’

Wat we hier met bruikbaar bedoelen, is dat een theorie een recursieve axioma-verzameling moet hebben (zie 2.6.3). Wat we met sterk genoeg bedoelen is dat een paar basiseigenschappen van de standaardinterpretatie stellingen moeten zijn in K. We gaan hier in 3.2 wat dieper op in.

Het gevolg van deze stelling is dat het onmogelijk is om een theorie te vinden die voor alle wfs kan bepalen of deze waar of niet waar zijn voor de standaardinterpretatie.

In het originele bewijs dat Gödel gaf, werd de eerste onvolledigheidsstelling bewezen door een wf te construeren die lijkt op de leugenaarsparadox (“Wat hier staat is niet waar.”). Vervolgens liet hij zien dat er geen bewijs bestaat voor deze wf.

Wij zullen daarentegen een bewijs bekijken dat gebruik maakt van een zin die lijkt op de paradox van Berry. Boolos beschreef in een artikel hoe je dit zou kunnen doen [Boolos, 1989]. Wij zullen in dit hoofdstuk dezelfde stappen gebruiken die Boolos in zijn artikel beschreef. Wel zullen we iets dieper ingaan op hoe elke wf precies gemaakt kan worden.

3.1 Constructie van de paradox van Berry

We zoeken een wf waarmee we een tegenspraak kunnen afleiden die vergelijkbaar is met de paradox van Berry. We doen dit op de manier die we besproken hebben in 1.2.2. We gebruiken hierbij de definities voor *beschrijven* en *lengte* uit 2.5.

3.1.1 Hulprelaties voor de basiszin

We gebruiken enkele tussenstappen om het vinden van onze 'basiszin' makkelijker te maken. Laat K een theorie met gelijkheid in $\mathscr{L}_A$ zijn. Vervolgens definiëeren we de volgende hulprelaties.

- $\mathrm{D_K}(q,n)$ betekent: "De wf die hoort bij Gödelnummer q beschrijft in K het getal n."
- $\mathrm{C_K}(n,m)$ betekent: "Het getal n wordt beschreven in K door een wf die m symbolen bevat." of anders gezegd "Er bestaat een wf van m symbolen die het getal n beschrijft in K."
- $\mathrm{B_K}(n,m)$ betekent: "Het getal n wordt beschreven in K door een wf die minder dan m symbolen bevat." of anders gezegd "Er bestaat een wf die minder dan m symbolen bevat en het getal n beschrijft in K."
- $\mathrm{A_K}(n,m)$ betekent: "Het getal n is het kleinste getal dat niet kan worden beschreven in K door een wf met m symbolen." of met andere woorden. "Er bestaat geen wf met minder dan m symbolen die het getal n beschrijft in K, maar voor alle getallen kleiner dan n bestaat er wel zo een wf."

Voor elk van deze bovenstaande relaties maken wij een wf in de formele taal $\mathscr{L}_A$. Als deze wfs waar zijn in de standaardinterpretatie, moeten de bijbehorende relaties ook waar zijn. Je zou dit kunnen zien als het "vertalen" van de relaties naar de formele taal $\mathscr{L}_A$.

$\mathrm{D_K}(q,n)$:

Herinner ten eerste de relatie $\mathrm{Pf}(y,x)$ uit 2.6.3. Deze relatie staat voor dat y het Gödelnummer is van een bewijs in K van een wf met Gödelnummer x. Deze relatie is recursief als K een recursieve axioma-verzameling heeft. Omdat deze relatie recursief is, bestaat er een wf $\mathscr{P}\!f(x,y)$ die afleidbaar is dan en slechts dan als $\mathrm{Pf}(x,y)$ waar is.

Verder hebben we nog de functie $\mathrm{Bnm}(q,n)$ uit 2.6.4, welke het Gödelnummer geeft van de beschrijvingszin die hoort bij de wf met Gödelnummer q en het natuurlijke getal m. Omdat deze functie recursief is, bestaat er een wf $\mathscr{B}_{nm}(q,n,r)$, die alleen afleidbaar is als $\mathrm{Bnm}(q,n)=r$.

Met behulp van deze twee wfs kunnen we een wf voor $\mathrm{D_K}(q,n)$ vinden.

$$(\exists r)((\exists y)\mathscr{P}\!f(y,r)\wedge \mathscr{B}_{nm}(q,n,r)) \tag{3.1}$$

We korten deze wf af als $\mathscr{D}(q,n)$.

$\mathrm{C_K}(n, m)$**:**

Herinner de functie $\mathrm{lh}(x)$ uit 2.6.3, welke de lengte van de wf geeft met Gödelnummer x. Ook deze functie was recursief, dus er bestaat een wf $\mathscr{M}(x, m)$ die alleen afleidbaar is als m de lengte is van de wf met Gödelnummer x.

Met behulp van $\mathscr{M}(x, m)$ en $\mathscr{D}(q, n)$ geven we een wf voor $\mathrm{C_K}(n, m)$.

$$(\exists q)(\mathscr{D}(q, n) \wedge \mathscr{M}(q, m)) \tag{3.2}$$

We korten deze wf af als $\mathscr{C}(n, m)$.

$\mathrm{B_K}(n, m)$ **en** $\mathrm{A_K}(n, m)$**:**

(De constructie van de zinnen voor deze relaties zijn precies hetzelfde als in [Boolos, 1989].) We beschrijven de wf voor $\mathrm{B_K}(n, m)$ met behulp van $\mathscr{C}(n, m)$ die we hiervoor gevonden hebben.

$$(\exists z)(z < m \wedge \mathscr{C}(n, z)) \tag{3.3}$$

We korten deze wf af als $\mathscr{B}(n, m)$ en geven ten slotte met behulp van deze wf een wf voor de relatie van $\mathrm{A_K}(n, m)$.

$$\neg \mathscr{B}(x, y) \wedge (\forall a)(a < x \Rightarrow \mathscr{B}(a, y)) \tag{3.4}$$

We korten deze wf af als $\mathscr{A}(x, y)$. (We gebruiken de variabelen x en y in plaats van n en m omdat de uitleg van de volgende stappen dan iets eenvoudiger wordt.)

3.1.2 De paradoxale zin

Met de wf $\mathscr{A}(x, y)$ die staat voor *"x is het kleinste getal dat je niet kunt beschrijven met minder dan y symbolen."* hebben we onze 'basiszin' gevonden. Het enige wat we nog moeten vinden is een geschikte waarde van y.

Laat k het aantal symbolen in $\mathscr{A}(x, y)$ zijn (oftewel $\mathrm{lh}(\ulcorner \mathscr{A}(x, y) \urcorner) = k$). We laten nu de y die we zoeken gelijk aan $10k$, waarbij we $10k$ opschrijven als $\overline{10} \cdot \overline{k}$.

Beschouw nu de volgende wf

$$(\exists y)(y = \overline{10} \cdot \overline{k} \wedge \mathscr{A}(x, y)) \tag{3.5}$$

die we in het vervolg af zullen korten als $\mathscr{F}(x)$. We zullen laten zien dat deze wf overeenkomt met zin 1.4.

Eerst tellen we het aantal symbolen van $\mathscr{F}(x)$. Merk op dat y een afkorting is voor x'. Daar waar 'y' staat, staan dus eigenlijk 2 symbolen. Herinner verder uit 2.1.1 dat $\overline{n}$ een afkorting is voor $\underbrace{\mathrm{ss}\ldots\mathrm{s}}_{n}0$ en dus uit $n+1$ symbolen bestaat.

Deel van wf	*Aantal Symbolen*
“$(\exists y)(y =$”	9
“$\overline{10}$”	11
“.”	1
“$\overline{k}$”	1 + k
“$\wedge$”	1
“$\mathscr{A}(x, y)$”	k
“)”	1
Totaal:	24 + 2k

Merk op dat $\mathscr{A}(x, y)$ veel meer dan 3 symbolen heeft, dus $k \gg 3$. Er geldt dus ook dat $24 + 2k \ll 10k$, oftewel: $\mathscr{F}(x)$ heeft minder dan $10k$ symbolen.

We hebben dus een wf $\mathscr{F}(x)$ gevonden met minder dan $10k$ symbolen die staat voor *“x is een getal dat niet beschreven kan worden met minder dan $10k$ symbolen.”*

3.2 Eigenschappen van K

De onvolledigheidsstelling van Gödel zegt alleen iets over theorieën die “sterk genoeg” zijn. Met sterk genoeg wordt bedoeld dat de theorie enkele eigenschappen heeft die ervoor zorgen dat de paradox van Berry geconstrueerd kan worden in de theorie èn dat we daadwerkelijk een tegenspraak kunnen afleiden.

Voor onze versie van de onvolledigheidsstelling van Gödel hebben we de volgende eigenschappen nodig voor theorie K:

1. K heeft een recursieve axioma-verzameling.
2. Alle recursieve functies zijn representeerbaar in K.
3. In K, $\overline{0} \neq \overline{1}$.
4. In K geldt voor alle n dat $\vdash_{\mathrm{K}} x < \overline{n} \Rightarrow x = \overline{0} \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n-1}$.
5. In K is $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x)$ een stelling.
6. In K geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \overline{n \cdot m} \Rightarrow \overline{n} \cdot \overline{m}$ voor alle natuurlijke getallen n en m.

Eigenschap 1 zorgt ervoor dat $\mathrm{Pf}(y, x)$ een recursieve relatie is. Eigenschap 3 in combinatie met eigenschap 2 zorgt er vervolgens voor dat alle recursieve relaties ook uitdrukbaar zijn in K. Deze eigenschappen hebben we dus nodig om de paradox te construeren.

Eigenschappen 4 t/m 6 hebben we nodig om te laten zien dat de paradox die we geconstrueerd hebben ook daadwerkelijk leidt tot een tegenspraak.

Er geldt dat S voldoet aan al deze eigenschappen [Mendelson, 1964, p. 210].

3.3 De Onvolledigheidsstelling

Met behulp van de wf $\mathscr{F}(x)$ die we in 3.1.2 geconstrueerd hebben, kunnen we de onvolledigheidsstelling van Gödel bewijzen.

Stelling 3.1 (Onvolledigheidsstelling van Gödel)**.** *Laat* K *een theorie met gelijkheid in de taal* $\mathscr{L}_A$ *zijn met eigenschappen 1 t/m 6. Dan bestaat er een wf* $\mathscr{G}$ *waarvoor geldt:*

- *Als* K *consistent is, dan is* $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{G}$ *niet waar.*
- *Als* K *ω-consistent is, dan is* $\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{G}$ *niet waar.*

3.3.1 Intuïtief bewijs

Laten we eerst bespreken op een intuïtieve manier waarom deze stelling moet gelden voordat we het precieze bewijs geven. Herinner uit 3.1.2 dat $\mathscr{A}(x)$ staat voor *"x is een getal dat niet beschreven kan worden met minder dan* $10k$ *symbolen."* Uit propositie 2.2 volgt dat er altijd precies één n bestaat die hieraan voldoet. Het lijkt dus alsof $\mathscr{A}(x)$ het getal n beschrijft.

De wf $(\forall x)(\mathscr{A}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$ (afgekort als $\mathscr{G}$) is dus waar in de standaard interpretatie. Als K dus de standaardinterpretatie als model heeft, kan $\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{G}$ niet waar zijn.

Herinner verder dat we in 3.1.2 hebben vastgesteld dat de wf $\mathscr{A}(x)$ uit $24+2k$ symbolen bestaat, wat veel minder is dan $10k$ symbolen. Dit betekent dus dat niet-$\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{G}$, want als $\mathscr{G}$ wel een stelling van K is, geldt opeens dat we het getal n wel kunnen beschrijven in K met een wf die uit minder dan $10k$ symbolen bestaat.

We zouden dus kunnen zeggen dat we een zin $\mathscr{G}$ hebben gevonden die waar is in de standaardinterpretatie, maar niet bewezen kan worden in K.

3.3.2 Hulpstellingen

Om af te leiden dat de paradox van Berry daadwerkelijk leidt tot een tegenspraak hebben we enkele hulpstellingen nodig. In deze hulpstellingen gebruiken we de eigenschappen uit 3.2 om enkele dingen te bewijzen over de wfs die we in 3.1.1 hebben gedefinieerd.

Propositie 3.1. *Laat* K *een theorie met gelijkheid zijn in de taal* $\mathscr{L}_A$ *met eigenschappen 1 t/m 3. Neem aan dat er een wf bestaat met* ℓ *symbolen die het getal* n *benoemt in* K*. Dan geldt het volgende:*

i. $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}(\overline{n}, \overline{\ell})$,

ii. Als $m > \ell$*, dan* $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m})$.

Bewijs. Laat $\mathscr{A}(x)$ een wf zijn met ℓ symbolen die het getal n benoemt K. Laat verder $c = \ulcorner\mathscr{A}(x)\urcorner$ en $d = \ulcorner(\forall x)(\mathscr{A}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})\urcorner = \mathrm{Bnm}(c, n)$.

Omdat $\mathscr{A}(x)$ het getal n benoemt in K, geldt $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{A}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$. Dit betekent dat er dus een bewijs bestaat voor de wf met Gödelnummer d. Laat p het Gödelnummer zijn van dit bewijs. Er geldt $\mathrm{Pf}(p, d)$.

Omdat K een recursieve axioma-verzameling heeft, geldt dat Pf een recursieve relatie is. Verder hebben we aangenomen dat recursieve functies representeerbaar zijn in K en $\overline{0} \neq \overline{1}$, dus alle recursieve relaties zijn uitdrukbaar in K. We vinden dus dat als $\mathrm{Pf}(p, d)$ dan $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{P}\!f(\overline{p}, \overline{d})$.

Ook vinden we dat de recursieve functie $\mathrm{Bnm}(c, n) = d$, en omdat recursieve functies vertegenwoordigd zijn in K geldt $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}_{nm}(\overline{c}, \overline{n}, \overline{d})$. Omdat $\mathscr{A}(x)$ uit ℓ

symbolen bestaat geldt $\mathrm{lh}(c) = \ell$. Omdat lh recursief is dus geldt ook dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{M}(\overline{c}, \overline{\ell})$. Nu kunnen we een bewijs vinden voor

$$\mathscr{P}(\overline{p}, \overline{d}), \mathscr{B}_{nm}(\overline{c}, \overline{n}, \overline{d}), \mathscr{M}(\overline{c}, \overline{\ell}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}(\overline{n}, \overline{\ell}) \text{ (zie bewijs 3.)}$$

We vinden dus dat geldt $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{C}(\overline{n}, \overline{\ell})$.

Laat nu $m > \ell$ willekeurig. Er geldt dat '$<$' een recursieve relatie is, en dus ook uitdrukbaar in K. We vinden dus dat $\vdash_{\mathrm{K}} \overline{\ell} < \overline{m}$.

We kunnen ook een bewijs vinden voor $\mathscr{C}(\overline{n}, \overline{\ell}), \overline{\ell} < \overline{m} \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m})$ (zie bewijs 4.) We vinden dus ook dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m})$ als $m > \ell$. $\square$

Propositie 3.2. *Laat* K *een theorie met gelijkheid in de taal* $\mathscr{L}_A$ *zijn met eigenschappen 5 en 6. Laat* $\mathscr{F}(x)$ *en* k *als geconstrueerd in 3.1.2. Dan geldt het volgende:*

i. $\vdash_K (\forall x)(\forall y)(\mathscr{A}(x, \overline{m}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{m}) \Rightarrow x = y)$ *voor alle* $m \in \mathbb{N}$.

ii. $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x))$.

iii. $\mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$.

iv. $\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$.

Bewijs. (i.) We kunnen een bewijs vinden voor

$(\forall x)(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x) \vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\forall y)(\mathscr{A}(x, \overline{m}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{m}) \Rightarrow x = y)$ (zie bewijs 5.)

Verder geldt door eigenschap 5 dat $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x)$, dus $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\forall y)(\mathscr{A}(x, \overline{m}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{m}) \Rightarrow x = y)$.

(ii.) We kunnen een bewijs vinden voor

$$\overline{10k} = \overline{10} \cdot \overline{k} \vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x)) \text{ (zie bewijs 6.)}$$

Merk verder op dat uit eigenschap 6 van K volgt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \overline{10k} = \overline{10} \cdot \overline{k}$, dus $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x))$.

(iii.) Met de resultaten van deel (i.) en (ii.) van dit bewijs, kunnen we een bewijs vinden voor $\mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$ (zie bewijs 7.)

(iv.) We kunnen een bewijs vinden voor

$$(\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x)), \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{F}(\overline{n}) \text{ (zie bewijs 8.)}$$

Met het resultaat van deel (ii.) van dit bewijs vinden we dus dat $\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{F}(\overline{n})$.

Nu hadden we in deel (i.) van propositie 2.1 gevonden dat $(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{F}(\overline{n})$. Als we dus $(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$ aannemen, vinden we een tegenspraak. Er geldt daarom dus dat $\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$. [1] $\square$

[1] Een dergelijk bewijs uit het ongerijmde is toegestaan [Mendelson, 1964, p. 75].

Propositie 3.3. *Laat* K *een theorie met gelijkheid in de taal* $\mathscr{L}_A$ *zijn met eigenschappen 1 t/m 4. Laat verder* n *het kleinste getal zijn dat je niet kunt beschrijven in* K *door een wf met minder dan* m *symbolen. Dan geldt het volgende:*

i. $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m}))$.

ii. $\neg \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{A}(\overline{n}, \overline{m})$.

Bewijs. (i.) Neem aan dat n het kleinste getal is dat je niet kunt beschrijven in K met minder dan m symbolen. Dit betekent dus ook dat voor alle $i < n$ geldt dat er wel een wf $\mathscr{F}_i(x)$ met minder dan m symbolen bestaat die het getal i beschrijft in K. Uit deel (ii) van propositie 3.1 vinden we dus dat voor alle $i < n$ geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{i}, \overline{n})$.

We gebruiken nu dat $\vdash_{\mathrm{K}} x < \overline{n} \Rightarrow x = \overline{0} \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n-1}$. Merk verder op dat voor alle $i < n$ geldt met substitutie van '=' dat $(x = \overline{i}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(x, \overline{m})$. Gecombineerd vinden we dus dat $\vdash_{\mathrm{K}} x < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(x, \overline{m})$ en na toepassen van de afleidingsregel GEN vinden we dat $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m}))$.

(ii.) We kunnen een bewijs vinden voor

$$(\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m})), \neg \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{A}(\overline{n}, \overline{m}) \text{ (zie bewijs 9.)}$$

Met deel (i.) van dit bewijs vinden we dus dat $\neg \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{A}(\overline{n}, \overline{m})$. □

Propositie 3.4. *Laat* K *een* ω*-consistente theorie met gelijkheid in de taal* $\mathscr{L}_A$ *zijn met eigenschappen 1 t/m 4. Dan geldt het volgende:*

i. Als $\mathscr{F}(x)$ *het getal* n *<u>niet</u> beschrijft in* K*, geldt niet-*$\vdash \mathscr{D}(\ulcorner \mathscr{F}(x) \urcorner, \overline{n})$.

ii. Als er geen enkele wf is met minder dan m *symbolen die het getal* n *beschrijft, geldt niet-*$\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m})$.

Bewijs. (i.) Laat $\mathscr{F}(x)$ een wf zijn die het getal n niet beschrijft. Laat $q = \ulcorner \mathscr{F}(x) \urcorner$ en $r = \mathrm{Bnm}(q, n) = \ulcorner (\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n}) \urcorner$.

Omdat $\mathscr{F}(x)$ het getal $\overline{n}$ niet beschrijft in K, geldt dus dat er geen bewijs is voor $(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$. Voor alle m geldt dus dat $\mathrm{Pf}(m, r)$ niet waar is en dus ook dat $\vdash_{\mathrm{K}} \neg \mathscr{P}\!f(\overline{m}, \overline{r})$. Uit de ω-consistentie van K volgt dan dat niet-$\vdash_{\mathrm{K}} (\exists y) \mathscr{P}\!f(y, \overline{r})$.

Merk op dat $\mathrm{Bnm}(q, n)$ een recursieve functie is. Omdat alle recursieve functies vertegenwoordigd zijn in K geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}_{nm}(\overline{q}, \overline{n}, \overline{r})$ en $\vdash_{\mathrm{K}} (\exists_1 x) \mathscr{B}_{nm}(\overline{q}, \overline{n}, x)$.

Stel nu dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{D}(\overline{q}, \overline{n})$. We kunnen dan een bewijs vinden voor $\vdash_{\mathrm{K}} (\exists y) \mathscr{P}\!f(y, \overline{r})$ (zie bewijs 10), maar dit is in tegenspraak met wat we eerder hadden gevonden, dus niet-$\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{D}(\overline{q}, \overline{n})$.

(ii.) Laat $\mathrm{PfB_K}(p, n, m)$ de relatie: "Het bewijs dat bij Gödelnummer p hoort is een bewijs voor de benoemingszin van een wf met minder dan m symbolen die het getal n beschrijft in K." Of anders gezegd: "Het Gödelnummer p hoort bij een bewijs dat laat zien dat er een wf bestaat met minder van m symbolen die het getal n beschrijft in K." We kunnen deze wf als volgt uitdrukken:

$$(\exists q)_{q < \mathrm{Gr}(m)} (\mathrm{Pf}(p, \mathrm{Bnm}(q, n)) \wedge \mathrm{lh}(q) < m).$$

$\mathrm{PfB_K}(p,n,m)$ Is een recursieve relatie, omdat hij uitgedrukt kan worden in termen van andere recursieve relaties en een begrensde kwantor. ($\mathrm{Gr}(m)$ is hier de bovengrens voor Gödelnummers die horen bij wfs die m of minder symbolen bevatten. Zie 2.6.5.) Omdat deze relatie recursief is en alle recursieve relaties uitdrukbaar zijn in K geldt dat er een wf $\mathscr{P\!f\!B}(p,n,m)$ bestaat zó dat $\vdash_{\mathrm{K}} \neg \mathscr{P\!f\!B}(\overline{p},\overline{n},\overline{m})$ als $\mathrm{PfB_K}(p,n,m)$ niet waar is.

Neem nu aan dat er geen enkele wf is met minder dan m symbolen die het getal n beschrijft in K. Dit betekent dat er ook geen bewijs kan bestaan voor de benoemingszin van een wf met minder dan m symbolen die het getal n beschrijft in K. Voor alle p is $\mathrm{PfB_K}(p,n,m)$ dus niet waar. Hieruit volgt dat voor alle p, $\vdash_{\mathrm{K}} \neg \mathscr{P\!f\!B}(\overline{p},\overline{n},\overline{m})$.

Merk op dat $\mathrm{B_K}(n,m)$ uitgedrukt kan worden als $(\exists p)\mathrm{PfB_K}(p,n,m)$. We kunnen $\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m})$ dus ook opschrijven als $(\exists p)\mathscr{P\!f\!B}(p,\overline{n},\overline{m})$. Nu is het zo dat voor alle p, $\vdash_{\mathrm{K}} \neg \mathscr{P\!f\!B}(\overline{p},\overline{n},\overline{m})$. Uit ω-consistentie volgt dan dat niet-$\vdash_{\mathrm{K}} (\exists p)\mathscr{P\!f\!B}(p,\overline{n},\overline{m})$ en dus ook dat niet-$\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n},\overline{m})$. $\square$

3.3.3 Bewijs

Bewijs. Laat $\mathscr{G}$ de wf $(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$ zijn, met $\mathscr{F}(x)$ als geconstrueerd in 3.1.2. Uit propositie 2.2 volgt dat we altijd een kleinste getal kunnen vinden dat niet wordt beschreven door een zin met minder dan $m = 10k$ symbolen. We noemen dit getal n. Laat ten slotte $\ell = 24 + 2k$ het aantal symbolen in $\mathscr{F}(x)$ zijn.

Laat nu eerst K een consistente theorie zijn met eigenschappen 1 t/m 6. Neem aan dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{G}$. Dan beschrijft de wf $\mathscr{F}(x)$ dus het getal n in K. Ook geldt dat $10k > \ell$. Met deel (ii.) van propositie 3.1 vinden we dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n},\overline{10k})$.

Nu volgt uit deel (iv.) van propositie 3.2 dat $\mathscr{B}(\overline{n},\overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{G}$, en dus $\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{G}$. Omdat K consistent is, kan er geen zin bestaan die zowel waar als niet-waar is, dus dit is een tegenspraak.

Laat nu K een ω-consistente theorie zijn met eigenschappen 1 t/m 6. Uit deel (ii.) van propositie 3.3 volgt dat $\neg\mathscr{B}(\overline{n},\overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{A}(\overline{n},\overline{10k})$. Verder volgt uit deel (iii.) van propositie 3.2 dat $\mathscr{A}(\overline{n},\overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{G}$. We kunnen dus ook vinden dat $\neg\mathscr{B}(\overline{n},\overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{G}$.

Als we vervolgens $\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{G}$ aannemen, moet dus gelden dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n},\overline{10k})$[2]. Maar uit deel (ii.) van propositie 3.4 volgt dat niet-$\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n},\overline{10k})$. Dit is een tegenspraak, dus niet-$\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{G}$. $\square$

[2] Dit is eveneens uit het ongerijmde, als beschreven in [Mendelson, 1964, p. 75].

Hoofdstuk 4

De ondefinieerbaarheidsstelling van Tarski

Zoals we in hoofdstuk 3 hebben gezien is het niet mogelijk om een theorie te vinden die voor alle wfs bepaalt of ze waar zijn voor de standaardinterpretatie. Een vervolgvraag zou kunnen zijn of we niet op een andere manier kunnen bepalen of een wf waar is voor de standaardinterpretatie, bijvoorbeeld door de rekenkunde zelf te gebruiken.

Het is niet zo'n gek idee dat dit zou moeten kunnen. We hebben immers in 2.4 gezien dat we aan elke wf een uniek Gödelnummer kunnen geven. We zouden dus ook met deze Gödelnummers kunnen rekenen om zo te bepalen of ze waar zijn of niet.

Het blijkt echter dat het niet mogelijk is om met behulp van de rekenkunde te bepalen welke wf er waar zijn voor de rekenkunde. Dit volgt uit het speciale geval van de ondefinieerbaarheidsstelling van Tarski, die op het volgende neerkomt:

'Waarheid in de rekenkunde is niet *rekenkundig definieerbaar*.'

We zullen eerst een kort idee geven wat we bedoelen met *rekenkundig definieerbaar*. In 4.2 zullen we hier verder op ingaan. Stel dat we een bepaalde relatie $T(n)$ hebben die waar is dan en slechts dan als n het Gödelnummer is van een wf die waar is voor de standaardinterpretatie. Als we dan willen bepalen of een wf waar is, hoeven we alleen het Gödelnummer van deze wf te bepalen om deze vervolgens in de relatie $T(n)$ in te vullen.

We gebruiken het woord *definieerbaar* omdat we deze $T(n)$ nu zouden kunnen gebruiken als de definitie voor wat het betekent voor een wf om waar te zijn voor de standaardinterpretatie in plaats van de ingewikkelde definitie die we in 2.2.1 hebben gegeven.

De ondefineerbaarheidsstelling van Tarski zegt echter dat deze $T(n)$ niet kan bestaan als we eisen dat deze rekenkundig is.

4.1 Constructie van de paradox van Berry

Laat ten eerste T_{K} de verzameling zijn van alle Gödelnummers die horen bij de stellingen van de theorie K. Merk op dat we het volgende kunnen zeggen over de relatie tussen beschrijfbaarheid zoals we gedefinieerd hadden in 2.5 en de verzameling T_{K}:

Propositie 4.1. *Een wf $\mathscr{A}(x)$ beschrijft het getal n in* K *dan en slechts dan als* $\mathrm{Bnm}(\ulcorner\mathscr{A}(x)\urcorner, n) \in T_{\mathrm{K}}$.

Bewijs. Herinner dat $\mathrm{Bnm}(\ulcorner\mathscr{A}(x)\urcorner, n) = \ulcorner(\forall x)(\mathscr{A}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})\urcorner$.

Neem eerst aan dat de wf $\mathscr{A}(x)$ het getal n beschrijft in K. Uit de definitie van beschrijfbaarheid volgt dat $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{A}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$. Uit de definitie van T_{K} volgt dat $\ulcorner(\forall x)(\mathscr{A}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})\urcorner \in T_{\mathrm{K}}$, en dus ook $\mathrm{Bnm}(\ulcorner\mathscr{A}(x)\urcorner, n) \in T_{\mathrm{K}}$.

Neem nu aan dat $\mathrm{Bnm}(\ulcorner\mathscr{A}(x)\urcorner, n) \in T_{\mathrm{K}}$. Uit de definitie van T_{K} volgt dat $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{A}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$, wat de definitie is van een wf $\mathscr{A}(x)$ die het getal n beschrijft in K. □

We zoeken een wf waarmee we een tegenspraak kunnen afleiden om de stelling van Tarski te bewijzen. Het vinden van deze wf gaat op een vergelijkbare manier als in 3.1. We moeten alleen onze 'basiszin' (zie 1.2.2) iets anders definiëren.

Om de gewenste 'basiszin' te krijgen, moeten we laten zien dat de hulprelaties die we in 3.1.1 hebben gedefinieerd ook uitdrukbaar zijn.

Propositie 4.2. *Laat* K *een theorie in de taal $\mathscr{L}_A$ zijn waarin alle recursieve relaties uitdrukbaar zijn. Als $x \in T_{\mathrm{K}}$ uitdrukbaar is in* K*, dan zijn* $\mathrm{D_K}(q, n)$*,* $\mathrm{C_K}(n, m)$*,* $\mathrm{B_K}(n, m)$*,* $\mathrm{A_K}(n, m)$ *als gedefinieerd in 3.1.1 ook uitdrukbaar in* K.

Bewijs. Laat K als hierboven genoemd en neem aan dat $x \in T_{\mathrm{K}}$ uitdrukbaar is in K. We zullen voor elk van de relaties $\mathrm{D_K}(q, n)$, $\mathrm{C_K}(n, m)$, $\mathrm{B_K}(n, m)$, $\mathrm{A_K}(n, m)$ laten zien dat er een recursieve manier is om deze relaties uit te drukken.

Er geldt dat $x \in T_{\mathrm{K}}$ recursief is omdat $x \in T_{\mathrm{K}}$ uitdrukbaar is [Mendelson, 1964, Corollary 3.31]. Voor de duidelijkheid schrijven we deze relatie even op als $\mathrm{T_K}(x)$.

We beginnen bij $\mathrm{D_K}(q, n)$. Herinner dat deze relatie staat voor "De wf die hoort bij Gödelnummer q beschrijft in K het getal n." Verder hadden we al dat de functie $\mathrm{Bnm}(q, n)$ een recursieve functies was. We kunnen het resultaat van deze functie dus substitueren in $\mathrm{T_K}(x)$ om een recursieve relatie te krijgen.

$$\mathrm{D_K}(q, n) := \mathrm{T_K}(\mathrm{Bnm}(q, n))$$

We laten nu zien dat $\mathrm{C_K}(n, m)$ recursief is. Herinner dat deze relatie staat voor "Het getal n wordt beschreven in K door een wf die m symbolen bevat." of anders gezegd "Er bestaat een wf van m symbolen die het getal n beschrijft in K."

In 2.6.5 hebben we laten zien dat er een bovengrens is voor wf van een lengte m en dat we deze bovengrens op een recursieve manier kunnen bepalen met behulp van de functie $\mathrm{Gr}(m)$. Herinner verder ook dat $\mathrm{lh}(q)$ een recursieve functie was. Nu we deze functies hebben, kunnen we ook een recursieve uitdrukking geven voor $\mathrm{C_K}(n, m)$.

$$\mathrm{C_K}(n,m) := (\exists q)_{q<\mathrm{Gr}(m)}(\mathrm{D_K}(q,n) \wedge \mathrm{lh}(q) = m)$$

Voor de relatie $\mathrm{B_K}(n,m)$ die staat voor "Het getal n wordt beschreven in K door een wf die minder dan m symbolen bevat." is ook gemakkelijk een recursieve uitdrukking te vinden.

$$\mathrm{B_K}(n,m) := (\exists z)_{z<m}(\mathrm{C_K}(n,m))$$

Ten slotte geven we een recursieve uitdrukking voor $\mathrm{A_K}(n,m)$ die staat voor "Er bestaat geen wf met minder dan m symbolen die het getal n beschrijft in K, maar voor alle getallen kleiner dan n bestaat er wel zo'n wf."

$$\mathrm{A_K}(n,m) := \neg\mathrm{B_K}(n,m) \wedge (\forall a)_{a<n}(\mathrm{B_K}(n,m))$$

We vinden dus dat de relaties $\mathrm{D_K}(q,n)$, $\mathrm{C_K}(n,m)$, $\mathrm{B_K}(n,m)$ en $\mathrm{A_K}(n,m)$ recursief zijn, en dus ook uitdrukbaar zijn in K. □

We kunnen met deze recursieve relaties doorredeneren om de gewenste stelling af te leiden. Nu is het zo dat een groot deel van het bewijs op een vergelijkbare manier gaat als het bewijs voor de onvolledigheidsstelling van Gödel die we gezien hebben in hoofdstuk 3. In het bijzonder willen we graag propositie 3.2 gebruiken.

Om deze propositie te kunnen gebruiken, moeten we wel eerst laten zien dat de wf $\mathscr{A}(x,y)$ die we hebben gegeven in 3.1.1 ook daadwerkelijk hoort bij de uitdrukbare relatie $\mathrm{A_K}(n,m)$.

Propositie 4.3. *Laat* K *een theorie met gelijkheid in de taal* $\mathscr{L}_A$ *waarvoor het volgende geldt:*

- *Als* $i < n$ *geldt* $\vdash_\mathrm{K} \overline{i} < \overline{n}$.
- $\vdash_\mathrm{K} a < \overline{n} \Rightarrow a = \overline{1} \vee a = \overline{2} \vee \ldots \vee a = \overline{n-1}$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$.
- *De relatie* $\mathrm{B_K}(n,m)$ *uitdrukbaar in* K *(met wf* $\mathscr{B}(n,m)$*).*

Dan is de relatie $\mathrm{A_K}(x,y)$ *ook uitdrukbaar in* K *met de wf* $\mathscr{A}(x,y)$*, wat een afkorting is voor*

$$\neg\mathscr{B}(x,y) \wedge (\forall x)(a < x \Rightarrow \mathscr{B}(a,y)).$$

Bewijs. Laat $n,m \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\mathrm{A_K}(n,m)$ waar is. Er geldt dus dat je n niet kunt beschrijven in K met een wf met minder dan m symbolen, maar dat je alle $i < n$ wel kunt beschrijven met een wf met minder dan m symbolen. $\mathrm{B_K}(n,m)$ is dus niet waar, maar $\mathrm{B_K}(i,m)$ met $i < m$ wel.

Omdat $\mathrm{B_K}(n,m)$ uitdrukbaar is in K, geldt er dus dat $\vdash_\mathrm{K} \neg\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m})$ en voor alle $i < n$ dat $\vdash_\mathrm{K} \mathscr{B}(\overline{i},\overline{m})$. Verder geldt dat $a = \overline{i} \vdash_\mathrm{K} \mathscr{B}(a,\overline{m})$ (toepassen van '='-substitutie), en in combinatie met $\vdash_\mathrm{K} a < \overline{n} \Rightarrow a = \overline{1} \vee \ldots \vee a = \overline{n-1}$ vinden we dus dat $\vdash_\mathrm{K} a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a,\overline{m})$.

Nu volgt eenvoudig uit $\vdash_\mathrm{K} \neg\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m})$ en $\vdash_\mathrm{K} a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a,\overline{m})$ dat $\vdash_\mathrm{K} \mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$[1].

[1] We hoeven alleen de afleidregels [GEN] en [Disj.Intr.] te gebruiken. Zie [Mendelson, 1964, p. 75].

Laat $n, m \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\mathrm{A_K}(n,m)$ niet waar is. Het kan dus zijn dat n wel beschreven kan worden in K door een wf met minder dan m symbolen, of er bestaat een $i < n$ die niet beschreven kan worden in K door een wf met minder dan m symbolen. We onderscheiden deze twee gevallen.

Bekijk eerst het geval dat n wel wordt beschreven in K met een wf met minder dan m symbolen. In dit geval moet gelden dat $\mathrm{B_K}(n,m)$ waar is. Omdat $\mathrm{B_K}(n,m)$ uitdrukbaar is, geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n},\overline{m})$. We kunnen een bewijs vinden voor $\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$ (zie bewijs 11), dus we vinden dat $\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$.

We bekijken nu het geval dat er een $i < n$ bestaat die niet beschreven kan worden in K door een wf met minder dan m symbolen. In dit geval is $\mathrm{B_K}(i,m)$ niet waar. Omdat $\mathrm{B_K}(n,m)$ uitdrukbaar is, geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{B}(\overline{i},\overline{m})$. Ook geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \overline{i} < \overline{n}$. We kunnen een bewijs vinden voor $\overline{i} < \overline{n}$, $\mathscr{B}(\overline{i},\overline{m}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$ (zie bewijs 12), dus we vinden dat $\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$.

In beide gevallen hebben we dus gevonden dat $\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$.

We hebben nu dus laten zien dat als voor $\mathrm{A_K}(n,m)$ waar is voor $n, m \in \mathbb{N}$ geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$ en als $\mathrm{A_K}(n,m)$ niet waar is geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$. $\mathrm{A_K}(n,m)$. We vinden dus dat $\mathrm{A_K}(n,m)$ uitdrukbaar is in K met wf $\mathscr{A}(x,y)$. □

4.2 Rekenkundige Verzamelingen

Definitie. *Een verzameling $B \subset \mathbb{N}$ noemen we* rekenkundig *als er een wf $\mathscr{B}$ met vrije variabele x in de taal $\mathscr{L}_A$ bestaat zo dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $n \in B$ dan en slechts dan als $\mathscr{B}(\overline{n})$ waar is voor de standaardinterpretatie van de rekenkunde.*

Een rekenkundige verzameling wordt dus helemaal bepaald door een wf in $\mathscr{L}_A$. Je zou dit dus ook kunnen lezen als dat je voor het definiëren van een rekenkundige verzameling alleen maar symbolen van $\mathscr{L}_A$ nodig hebt die aan de regels van $\mathscr{L}_A$ voldoen.

Een voorbeeld is de verzameling van alle even getallen. Deze kun je opschrijven als

$$\{x \in \mathbb{N} : (\exists y)(y + y = x)\}.$$

De verzameling van alle even getallen is dus rekenkundig.

We kunnen ook de verzameling van alle Gödelnummers van wfs van $\mathscr{L}_A$ nemen die waar zijn voor de standaardinterpretatie. Als we dan vervolgens laten zien dat deze verzameling niet rekenkundig is, hebben we de ondefinieerbaarheidsstelling van Tarski bewezen.

4.3 Bewijs van de ondefinieerbaarheidsstelling

Propositie 4.4. *Laat* K *een consistente theorie met gelijkheid in de taal $\mathscr{L}_A$ waarin recursieve relaties uitdrukbaar zijn. Dan is de eigenschap $x \in T_{\mathrm{K}}$ niet uitdrukbaar in* K.

Bewijs. We geven een bewijs uit het ongerijmde. Neem aan dat $x \in T_{\mathrm{K}}$ wel uitdrukbaar is in T_{K}. We leiden tegenspraak af.

Uit de proposities 4.2 en 4.3 volgt dan dat $\mathrm{A_K}(x, y)$ ook uitdrukbaar is in K met de wf $\mathscr{A}(x, y)$.

Laat k het aantal symbolen in $\mathscr{A}(x, y)$ zijn. We definiëeren nu de wf $\mathscr{F}(x)$ op een vergelijkbare manier als in 3.1.2. Deze wf $\mathscr{F}(x)$ bevat dus ook $24 + 2k$ symbolen met $k \gg 3$.

Uit propositie 2.2 volgt dat we een n kunnen vinden, welke het kleinste getal is dat niet kan worden beschreven door een formule met minder dan $m = 10k$ symbolen. Merk op dat $\mathrm{A_K}(n, 10k)$ dan waar is, en dus geldt dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k})$.

Uit deel (iii.) van propositie 3.2 volgt dat $\mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$. Er geldt dus dat $\vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$. Maar dan is deze zin dus ook een stelling, dus $\ulcorner(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})\urcorner \in T_{\mathrm{K}}$. Hieruit volgt dat $\mathscr{F}(x)$ het getal n beschrijft in K, oftewel $\mathrm{D_K}(\ulcorner\mathscr{F}(x)\urcorner, n)$ is ook waar.

Laat $\ell = \mathrm{lh}(\ulcorner\mathscr{F}(x)\urcorner)$. Omdat $\mathscr{F}(x)$ het getal n beschreef, geldt dus ook dat $\mathrm{B_K}(n, \ell + 1)$ (Het getal n wordt beschreven door een wf van lengte ℓ, en wordt dus ook beschreven door een wf met minder dan $\ell + 1$ symbolen).

Merk op dat $\ell + 1 = 25 + 2k \ll 10k$. $\mathrm{A_K}(n, 10k)$ kan dus niet waar zijn, omdat er nu wel een wf kleiner dan $10k$ symbolen die het getal n beschrijft. We vinden dus een tegenspraak. □

Uit de bovenstaande propositie kunnen we dan gemakkelijk de stelling van Tarksi afleiden. Dit doen we op ongeveer dezelfde manier als [Mendelson, 1964, p.220].

Stelling 4.1 (De ondefinieerbaarheidsstelling van Tarski)**.** *Laat T de verzameling van Gödelnummers van de wf in $\mathscr{L}_A$ zijn die waar zijn voor de standaardinterpretatie. Dan is T niet rekenkundig.*

Bewijs. Laat N een uitbreiding van S zijn die als axioma's alle wfs heeft die waar zijn voor de standaardinterpretatie. Vanzelfsprekend is N een theorie in de taal $\mathscr{L}_A$. Ook is N consistent, omdat de standaardinterpretatie een model van deze theorie is.

Merk verder op dat alle recursieve relaties uitdrukbaar zijn in N. Dit komt omdat N slechts een uitbreiding is van S en we hadden al gezien dat alle recursieve relaties uitdrukbaar zijn in S (zie 2.6.2).

Laat nu $\mathscr{A}$ een willekeurige wf zijn. $\mathscr{A}$ is waar voor de standaardinterpretatie dan en slechts dan als $\vdash_{\mathrm{N}} \mathscr{A}$. Dit komt omdat alle wf $\mathscr{A}$ die waar zijn ook axioma's zijn in N. We vinden dus dat $T_{\mathrm{N}} = T$, want alle stellingen van N zijn precies alle wfs die waar zijn voor de standaard interpretatie.

We vinden dus ook dat een willekeurige set $B \subset \mathbb{N}$ rekenkundig is dan en slechts dan als $x \in B$ uitdrukbaar is in N. In het geval dat $x \in B$ namelijk uitdrukbaar is, bestaat er een $\mathscr{B}$ zodanig dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat als $n \in B$, $\vdash_{\mathrm{N}} \mathscr{B}(\overline{n})$ en dus ook dat $\mathscr{B}(\overline{n})$ waar is voor de standaard intepretatie.

We hadden al gezien dat N een consistente theorie in de taal $\mathscr{L}_A$ is waarin recursieve functies uitdrukbaar zijn. Uit propositie 4.4 volgt dat $x \in T_{\mathrm{N}}$ niet uitdrukbaar is in N. Omdat $T = T_{\mathrm{N}}$ geldt dus ook dat $x \in T$ niet uitdrukbaar is in N. Hieruit volgt dat T dus niet rekenkundig is.

□

Hoofdstuk 5

Turingmachines en het Entscheidungsproblem

In hoofdstuk 3 hadden we gezien dat een (bruikbare) theorie nooit een bewijs kan vinden voor elke wf die waar is voor de standaardinterpretatie. We zouden ons vervolgens kunnen afvragen voor welke wfs we wel een bewijs kunnen vinden.

Laat K een theorie zijn en $\mathscr{B}$ een willekeurige wf. We zouden graag een antwoord willen hebben op de vraag

$$\text{'bestaat er een bewijs voor } \mathscr{B} \text{ in K?'}$$

Dit probleem wordt het *Entscheidungsproblem* genoemd en werd voor het eerst geformuleerd door Hilbert en Ackermann in 1928.

Het blijkt dat er geen algemeen algoritme bestaat om dit te bepalen voor willekeurige wfs. Dit werd onder andere bewezen door Alan Turing [Turing, 1936]. Om dit te bewijzen had Turing wel eerst een definitie nodig voor wat een algemeen algoritme is. Turing deed dit door middel van Turingmachines.

In dit verslag zullen we bekijken wat deze Turingmachines zijn. Ook zullen we een bewijs geven voor het eerste deel van het bewijs van Turing voor het Entscheidungsproblem (het Halting-probleem). In dit bewijs zullen we gebruik maken van iets dat lijkt op de paradox van Berry.

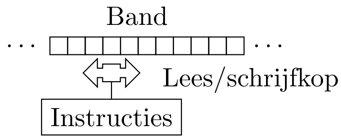
Ten slotte geven we een korte uitleg waarom het niet bestaan van een oplossing voor het Halting-probleem overeenkomt met het niet bestaan van een oplossing voor het Entscheidungsproblem[1].

5.1 Turingmachines

We definiëeren een Turingmachine als volgt. Een Turingmachine $\mathcal{B}$ heeft een alfabet $A_{\mathcal{B}}$, een aantal interne toestanden $Q_{\mathcal{B}}$ en een aantal instructies $I_{\mathcal{B}}$. Verder kun je de machine voorstellen als een lees/schrijfkop en een oneindig lange band die onderverdeeld is in vakjes (zie figuur 5.1). In ieder vakje van de band staat een symbool van het alfabet $A_{\mathcal{B}}$. De kop van de machine staat steeds gericht

[1] We zullen dit niet in detail bespreken, omdat de paradox van Berry in dit bewijs geen rol speelt.

op een van de vakjes op de band. Verder staat de machine steeds in een van de interne toestanden $Q_{\mathcal{B}}$.



Figuur 5.1: Een schematische voorstelling van een Turingmachine. Bron: http://www.texample.net/tikz/examples/turing-machine/ (vertaald naar het Nederlands.)

De kop van de machine kan alleen het vakje lezen waar hij op dat moment op gericht is. Vervolgens kan deze kop een ander symbool in dit vakje zetten (*schrijven*) en een vakje naar links of naar rechts *verschuiven*. Een vakje beschrijven en een vakje opschuiven noemen we een *stap*.

Wat de machine in elke stap doet, is afhankelijk van de interne toestand waarin de machine zich bevindt en het symbool dat door de machine gelezen wordt. Hoe de machine zich vervolgens gedraagt is vastgelegd in de instructies van de machine.

Elke instructie heeft de volgende vorm $q_i a_j a_k H q_r$ [2] met $q_i, q_r \in Q_{\mathcal{B}}$, $a_j, a_k \in A_{\mathcal{B}}$ en $H \in \{\mathsf{L}, \mathsf{R}, \mathsf{N}\}$. Deze instructie bepaald dat als de machine in toestand q_i verkeert en het symbool a_j wordt gelezen in de tape, het symbool a_k wordt geschreven in het vakje dat net gelezen is. Vervolgens wordt de kop naar links (L) of naar rechts (R) verschoven of blijft hij op zijn plaats (N). Ten slotte wordt de machine in interne toestand q_r gezet.

Het kan zijn dat een instructie de machine in een toestand zet die niet bestaat. In dit geval noemen we deze toestand de $\mathfrak{halt}$ toestand. Dit betekent dat de machine stopt en de berekening dus is uitgevoerd.

De symbolen die op de tape staan noemen we de *input* van de machine. De symbolen die na het uitvoeren van de machine op de tape staan noemen we de *output* van de machine.

We gaan ervan uit dat elke machine een alfabet heeft van minstens twee symbolen a_0 en a_1. We zullen a_0 ook wel schrijven als $\_$ en a_1 als 1. a_0 wordt gezien als het *lege* symbool. Met een *lege band* bedoelen we dus dat in alle vakjes het symbool a_0 staat. Verder gaan we ervan uit dat de input van een machine altijd uit eindig veel vakjes bestaat waar geen a_0 in staat. Wat volgt is dat er in de output van een machine ook altijd een eindig aantal vakjes heeft die niet met a_0 zijn beschreven.

Verder zullen we een expliciete interne toestand van een machine steeds aanduiden met bijvoorbeeld $\mathfrak{q}, \mathfrak{cl}, \mathfrak{comp}$. We zullen $\mathfrak{halt}$ gebruiken, om aan te geven dat de machine stopt nadat een bepaalde instructie is uitgevoerd.

[2] We gebruiken deze vorm omdat dit ook de vorm is van de simulator die ik heb gebruikt om de zelf-gemaakte Turingmachines te testen. https://turingmachinesimulator.com/

5.1.1 Woorden, getallen en lijsten

Laat $\mathcal{M}$ een machine zijn met alfabet $A_{\mathcal{M}}$. Een *woord* is een rijtje symbolen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A_{\mathcal{M}} \setminus \{\_\}$ met een $\_$ aan het begin en einde van de band:

$$\_\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\_.$$

Een speciaal woord is het woord dat een bepaald getal representeert. Bijvoorbeeld het getal k krijgen we door k keer een 1 achter elkaar te schrijven. We noteren dit als $\overline{k}$, dus

$$\_\overline{k}\_ = \_\overbrace{111\ldots111}^{k}\_$$

Laat nu $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ woorden zijn van machine $\mathcal{M}$. Als we deze woorden achter elkaar op de tape schrijven met aan het begin en eind twee keer een $\_$ en tussen de woorden één $\_$ spreken we over een lijst:

$$\_\_\beta_1\_\beta_2\_\ldots\_\beta_m\_\_.$$

5.1.2 Omschrijving van machines

We willen graag een methode om alle mogelijke Turingmachines te omschrijven met een eindig aantal symbolen. Turing geeft in zijn artikel zo'n methode noemde deze de "*Standard Description*" van een machine (Afgekort S.D) [Turing, 1936]. Een S.D is een woord dat bestaat uit de symbolen $\{A, C, D, L, R, N, ;\}$. Dit woord is uniek voor elke machine. De S.D van machine $\mathcal{M}$ noteren we als $\overline{\mathcal{M}}$.

Hoe deze S.D. precies werkt is niet belangrijk voor dit verslag. We gebruiken alleen het feit dat deze S.D bestaat en uniek is voor elke Turingmachine.

Ook willen we graag een uniek nummer aan elke Turingmachine geven. Turing noemde dit in zijn artikel de "*Description Number*" van een machine (Afgekort D.N) [Turing, 1936]. We vinden dit getal door elk symbool van de S.D te vervangen door een getal. Turing deed dit als volgt:

$$\text{`}A\text{'} \to 1, \quad \text{`}C\text{'} \to 2, \quad \text{`}D\text{'} \to 3, \quad \text{`}L\text{'} \to 4, \quad \text{`}R\text{'} \to 5, \quad \text{`}N\text{'} \to 6, \quad \text{`};\text{'} \to 7.$$

Vervolgens beschouwen we het verkregen rijtje als een natuurlijk getal. Dit getal is uniek voor elke Turingmachine. Je zou deze D.N dus kunnen zien als een soort Gödelnummer voor Turingmachines. De D.N van een machine $\mathcal{M}$ noteren we dan ook als $\ulcorner\mathcal{M}\urcorner$.

Ten slotte geven we een kort voorbeeld om te verduidelijken hoe de S.D en D.M werken. Laat $\mathcal{N}$ een machine zijn die het symbool a_1 zet in een leeg vakje daarna direct stopt. Dan geldt voor $\mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= q_1 a_0 a_1 \mathsf{N} q_2; \\ \overline{\mathcal{N}} &= DADDCNDAA; \\ \ulcorner\mathcal{N}\urcorner &= 3133263117 \end{aligned}$$

In de S.D staat DA voor q_1, D voor a_0, DC voor a_1 en N voor N en DAA voor q_2.

5.1.3 Hulpnotaties

Elke Turingmachine beschrijven op de standaard manier wordt al snel erg onhandig en onoverzichtelijk. We gebruiken daarom enkele hulpnotaties. Voor al deze hulpnotaties geldt dat er een Turingmachine bestaat die hetzelfde doet als wordt gesuggereerd in de hulpnotatie.

Samenstellen van Turingmachines

Laat $\mathcal{M}$ een Turingmachine zijn met interne toestanden $\{q_1, \ldots, q_k\}$ en halttoestand h. Laat $\mathcal{N}$ een Turingmachine met interne toestanden $\{r_1, \ldots, r_l\}$ zijn. We noemen $\mathcal{M}\mathcal{N}$ dan de samenstelling zijn van deze twee machines.

Deze samenstelling is een nieuwe machine met interne toestanden $\{q_1, \ldots, q_{k+l}\}$. De machine $\mathcal{M}\mathcal{N}$ heeft als instructies alle instructies van $\mathcal{M}$ waarbij de halttoestand h is vervangen door toestand q_{k+1}. Ook heeft $\mathcal{M}\mathcal{N}$ alle toestanden van $\mathcal{N}$ waarbij r_i is vervangen door q_{k+i}.

Het resultaat is een machine die eerst de berekeningen van $\mathcal{M}$ uitvoert, en direct daarna de berekeningen van $\mathcal{N}$.

We kunnen ook machines gebruiken in andere machines. We noteren dit dan als een soort instructie: $q_i \mathcal{M} q_j$. Wat we hiermee bedoelen is dat we alle instructies van $\mathcal{M}$ overnemen (met nieuwe unieke toestanden.) Verder vervangen we de initiële toestand van $\mathcal{M}$ met q_i en de halt-toestand met q_j.

Hulp-banden

We kunnen ons ook voorstellen dat een Turingmachine meer dan 1 band heeft. Elk van deze banden heeft zijn eigen lees/schrijfkop. Een instructie voor een Turingmachine met hulp-banden ziet er iets anders uit. Hieronder geven we een voorbeeld van een instructie voor een Turingmachine met 3 banden.

$$q_1(a_1, a_2, a_3)(a_4, a_5, a_6)(\mathsf{R}, \mathsf{L}, \mathsf{N})q_2;$$

Deze instructie wordt uitgevoerd als je in toestand q_1 bent en de symbolen a_1,a_2 en a_3 op tape 1, 2 en 3 respectievelijk worden afgelezen. Vervolgens worden de symbolen a_4,a_5 en a_6 op de tapes teruggeschreven en wordt de kop van band 1 naar rechts bewogen, de kop van band 2 naar links en de kop van band 3 blijft op dezelfde plek staan.

Verder kunnen we andere machines die maar met 1 band werken ook gebruiken in instructies voor machines met hulp-tapes. We noteren dit dan als

$$q_1(, \mathcal{M},)q_2;$$

In dit geval wordt bij het aanroepen van toestand q_1 de machine $\mathcal{M}$ uitgevoerd op band 2. De andere banden worden met rust gelaten. Als $\mathcal{M}$ stopt, wordt overgegaan naar toestand q_2.

Voor elke Turingmachine met hulp-banden bestaat er ook een Turingmachine met maar 1 band. Deze machine heeft wel veel meer interne toestanden en instructies dan de Turingmachine met hulp-banden. We gaan er ook vanuit dat de machine met 1 band op het einde hetzelfde resultaat heeft als de eerste band van de Turingmachine met hulp-banden.

5.1.4 Voorbeelden van machines.

Opschrijven van symbolen

Laat $\beta = (\alpha_i)_{i \leq k}$ een rijtje symbolen zijn van lengte k (dus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.) Dan is $\mathcal{W}_\beta$ de machine die deze symbolen op een lege band opschrijft. $\mathcal{W}_\beta$ heeft als alphabet $A_{\mathcal{W}_\beta} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \cup \{\text{\textvisiblespace}\}$ en als interne toestanden $Q_{\mathcal{W}_\beta} = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$. De instructies van deze machine zijn:

q_1	$\_$	α_1	R	q_2
q_2	$\_$	α_2	R	q_3
		$\vdots$		
q_i	$\_$	α_i	R	q_{i+1}
		$\vdots$		
q_{k-1}	$\_$	α_{k-1}	R	q_k
q_k	$\_$	α_k	N	$\mathfrak{halt}$

Deze machine werkt dus door in elke i-de stap het symbool α_i op de band te schrijven en vervolgens 1 stap naar rechts te gaan. De machine stopt nadat het laatste symbool op de band is geschreven en laat de kop van de Turingmachine op het laatste symbool staan. Merk op dat deze machine k instructies heeft.

Bekijk in bijzonder de machine $\mathcal{W}_{\overline{t}}$. Deze machine heeft alphabet $\{\_, 1\}$ en schrijft dus t keer een 1 op de tape. De instructies van deze machine zijn:

q_1	$\_$	1	R	q_2
q_2	$\_$	1	R	q_3
		$\vdots$		
q_{t-1}	$\_$	1	R	q_t
q_t	$\_$	1	N	$\mathfrak{halt}$

Merk op dat machine dus t instructies heeft.

Vermenigvuldigen van enen

We definiëren nu de machine $\mathcal{U}$, welke met input $\overline{n}\_\overline{m}$ en als output $\overline{nm}$ geeft.

$\mathfrak{a}_1$	1	$\_$	R	$\mathfrak{b}_1$	Verwijder de meest linker 1 van getal a.
$\mathfrak{a}_1$	$\_$	$\_$	R	$\mathfrak{v}$	Als er geen 1-en meer zijn in a, ga naar v.
$\mathfrak{a}_2$	1	1	R	$\mathfrak{a}_2$	Loop naar het einde van getal a.
$\mathfrak{a}_2$	$\_$	$\_$	R	$\mathfrak{b}_1$	
$\mathfrak{b}_1$	1	X	R	$\mathfrak{b}_1$	Vervang alle 1 in getal b met een X.
$\mathfrak{b}_1$	$\_$	$\_$	L	$\mathfrak{b}_2$	
$\mathfrak{b}_2$	1	1	L	$\mathfrak{b}_2$	Ga naar de laatste X in getal b.
$\mathfrak{b}_2$	X	1	R	$\mathfrak{b}_3$	Vervang deze X door een 1.
$\mathfrak{b}_2$	$\_$	$\_$	L	$\mathfrak{a}_3$	Ga terug naar het getal a.
$\mathfrak{b}_3$	1	1	R	$\mathfrak{b}_3$	Ga naar het einde van het getal b.
$\mathfrak{b}_3$	$\_$	$\_$	R	$\mathfrak{c}_1$	
$\mathfrak{c}_1$	1	1	R	$\mathfrak{c}_1$	Ga naar het einde van getal c.
$\mathfrak{c}_1$	$\_$	1	L	$\mathfrak{c}_2$	Plaats een 1 aan het einde van getal c.
$\mathfrak{c}_2$	1	1	L	$\mathfrak{c}_2$	Ga naar het begin van getal c.
$\mathfrak{c}_2$	$\_$	$\_$	L	$\mathfrak{b}_2$	
$\mathfrak{a}_3$	1	1	L	$\mathfrak{a}_3$	Ga naar het begin van getal a.
$\mathfrak{a}_3$	$\_$	$\_$	R	$\mathfrak{a}_1$	
$\mathfrak{v}$	1	$\_$	R	$\mathfrak{v}$	Haal alle 1-en van getal b weg.
$\mathfrak{v}$	$\_$	$\_$	R	$\mathfrak{halt}$	Zet de kop op het begin van getal c.

Om het lezen van de instructies van deze machine wat makkelijker te maken staat er naast sommige regels een klein stukje uitleg.

Merk op dat deze machine in totaal 19 instructies heeft.

Machine $\mathcal{V}_{t\cdot s}$.

Ten slotte construeren we met behulp van $\mathcal{W}_{\overline{t}}$ en $\mathcal{U}$ de machine $\mathcal{V}_{t\cdot s}$. Deze machine schrijft het woord $\overline{t\cdot s}$ op, maar doet dit op een manier zodat het aantal instructies met $\mathcal{O}(t+s)$ groeit.

$\mathfrak{i}$		$\mathcal{W}_{\overline{t}}$		$\mathfrak{q}_1$	Voer $\mathcal{W}_{\overline{t}}$ uit om het getal t op te schrijven.
$\mathfrak{q}_1$	1	1	R	$\mathfrak{q}_1$	Ga naar het einde van het getal t.
$\mathfrak{q}_1$	$\_$	$\_$	R	$\mathfrak{s}$	Laat 1 leeg vakje over.
$\mathfrak{s}$		$\mathcal{W}_{\overline{s}}$		$\mathfrak{q}_2$	Voer $\mathcal{W}_{\overline{s}}$ uit om het getal s op te schrijven.
$\mathfrak{q}_2$	1	1	L	$\mathfrak{q}_2$	Ga naar het begin van getal s.
$\mathfrak{q}_2$	$\_$	$\_$	L	$\mathfrak{q}_3$	
$\mathfrak{q}_3$	1	1	L	$\mathfrak{q}_3$	Ga naar het begin van getal t.
$\mathfrak{q}_3$	$\_$	$\_$	L	$\mathfrak{u}$	
$\mathfrak{u}$		$\mathcal{U}$		$\mathfrak{halt}$	Voer $\mathcal{U}$ uit om s en t te vermenigvuldigen.

Het aantal instructies in deze machine is:

$$\overbrace{t}^{\text{Instr. van } \mathcal{W}_{\overline{t}}} + \overbrace{s}^{\text{Instr. van } \mathcal{W}_{\overline{s}}} + \overbrace{19}^{\text{Instr. van } \mathcal{U}} + 6 = t + s + 25.$$

5.2 Paradox van Berry voor Turingmachines

5.2.1 Definities

Ook voor Turingmachines willen we een tegenspraak afleiden die vergelijkbaar is met de paradox van Berry. Hiervoor moeten we wederom enkele dingen definiëren, zoals we besproken hebben in 1.2.2. In dit geval gaat een Turingmachine de rol van 'zinnen' vervullen.

Beschrijven voor Turingmachines

Definitie. *Een Turingmachine $\mathcal{B}$* beschrijft *het getal n als bij de input van een lege band, in de output n keer een '1' op de band staat.*

Merk ten eerste op dat deze definitie een lege band vereist. Toch kunnen we ook kijken naar een machine die start met een niet-lege band.

Laat $\mathcal{D}$ een machine die van een band-configuratie γ na het uitvoeren het getal n beschrijft. We voeren eerst de machine $\mathcal{W}_\gamma$ uit op een lege band. De configuratie γ staat nu op de band. Vervolgens voeren we machine $\mathcal{D}$ uit om een resultaat te krijgen met n keer een 1.

Combineer nu $\mathcal{W}_\gamma$ met $\mathcal{D}$ door nadat $\mathcal{W}_\gamma$ is gestopt $\mathcal{D}$ uit te voeren. We noteren deze machine als $\mathcal{W}_\gamma\mathcal{D}$. Deze machine *beschrijft* nu het getal n.

Merk verder op dat deze definitie overeen komt met de eisen die we hebben gesteld in 1.2.2 voor een definitie van *beschrijven.* Een Turingmachine beschrijft namelijk altijd een natuurlijk getal.

Ook is het zo dat het getal dat een Turingmachine beschrijft uniek is voor deze Turingmachine. Dit komt door de eis dat de Turingmachine op een lege tape wordt uitgevoerd. Als je namelijk dezelfde Turingmachine twee keer op twee verschillende lege banden uitvoert, zul je altijd hetzelfde resultaat op beide banden krijgen.

De *lengte* van Turingmachines

We hebben ook nog een idee nodig hoe we de *lengte* van een machine bepalen. Elke Turingmachine bestaat uit een eindig aantal 'instructies'. Deze instructies bepalen volledig hoe een machine werkt. We kunnen als lengte van een machine het aantal instructies gebruiken.

Definitie. *De* lengte *van een Turingmachine $\mathcal{M}$ is het aantal instructies van $\mathcal{M}$.*

Er geldt dat er maar eindig veel Turingmachines bestaan die m instructies bevatten. Een Turingmachine met m instructies heeft ten eerste maar $m + 1$ mogelijke interne toestanden waarin hij zich kan bevinden. Een machine komt namelijk alleen in de eerste toestand of een toestand waarnaar hij is verstuurd in een van de instructies.

Verder geldt dat het alfabet van een machine ook nooit meer dan $2m$ symbolen kan bevatten. Het alfabet van een machine wordt namelijk vastgesteld door het aantal symbolen dat in de instructies voorkomt. Aangezien elke instructie maximaal 2 symbolen bevat, kunnen er nooit meer dan $2m$ symbolen bestaan in een machine met m instructies.

We kunnen nu een bovengrens vinden voor het aantal machines met m instructies. Herinner uit 5.1 dat elke instructie van de vorm $q_i a_j a_k H q_\ell$ is. q_i en q_ℓ hebben beiden m mogelijkheden, a_j en a_k hebben $2m$ verschillende mogelijkheden en H heeft 3 mogelijkheden. In totaal zijn er dus $12m^4$ verschillende instructies mogelijk. Verder heeft een machine m instructies, dus er zijn maximaal $(12m^4)^m$ verschillende machines mogelijk.

Ook is duidelijk dat de lengte van een Turingmachine altijd een natuurlijk getal is. Deze definitie komt dus overeen met de eisen die we hebben gesteld in 1.2.2 voor de definitie van *lengte*.

5.2.2 Constructie Paradox

We bekijken eerst een intuïtief idee hoe de paradox van Berry werkt voor Turingmachines. We zoeken een machine $\mathcal{A}$ die met als input een getal m als output het kleinste getal geeft dat niet beschreven kan worden door een machine met minder dan m symbolen. Deze machine $\mathcal{A}$ kunnen we dus zien als de 'basiszin' zoals we die hebben bekeken in 1.2.2.

Als deze machine $\mathcal{A}$ bestaat, heeft deze ook een lengte. Noem deze lengte k. Vervolgens zoeken we een machine $\mathcal{V}$ die het getal $10k$ beschrijft. We construeren deze machine zo dat de minder dan $8k$ symbolen bevat.

Als we vervolgens de machine $\mathcal{V}$ en $\mathcal{A}$ combineren tot de machine $\mathcal{VA}$, hebben we opeens een machine die een getal beschrijft, namelijk het kleinste getal dat niet beschreven kan worden door een machine met minder dan m symbolen.

Omdat de machine $\mathcal{VA}$ zelf minder dan $10k$ symbolen bevat, vinden we dus dat het bestaan van de machine $\mathcal{A}$ zichzelf tegenspreekt.

Propositie 5.1 (De paradox van Berry voor Turingmachines)**.** *Er bestaat geen machine $\mathcal{A}$ die, als uitgevoerd op een band met $\overline{m}$, als output "het kleinste getal dat je niet kunt beschrijven met een machine met minder dan m instructies" geeft.*

Bewijs. Neem aan $\mathcal{A}$ als hierboven beschreven wel bestaat. Laat k het aantal instructies van $\mathcal{A}$ zijn. We korten '$10 \cdot (k+4)$' af tot m. Laat $\mathcal{V}_m$ als beschreven in 5.1.4 met $t = 10$ en $s = (k+4)$.

Beschouw nu de machine $\mathcal{B} = \mathcal{V}_m\mathcal{A}$, die ontstaat door de toestand $\mathfrak{halt}$ van $\mathcal{V}_m$ te vervangen door de begintoestand van $\mathcal{A}$. Op een lege band, schrijft deze machine het getal $\overline{m}$ (door $\mathcal{V}_m$) en voert daarna $\mathcal{A}$ uit.

Merk op dat $\mathcal{B}$ nu een getal beschrijft, namelijk "*het kleinste getal dat je niet kunt beschrijven met met een machine met minder dan m instructies.*" We noemen dit getal u.

Merk ook op dat voor het aantal instructies van $\mathcal{B}$ gelijk is aan

$$\overbrace{10 + (k+4) + 25}^{\text{Instr. van } \mathcal{V}_m} + \overbrace{k}^{\text{Instr. van } \mathcal{A}} = 2k + 39.$$

Maar $2k + 39 < 10k + 40 = m$. We hebben dus een machine van minder dan m instructies die het getal u beschrijft, wat in tegenspraak is met de definitie van $\mathcal{B}$. De machine $\mathcal{A}$ kan dus niet bestaan. □

Als we vervolgens de machine $\mathcal{A}$ kunnen construeren met behulp van de machine $\mathcal{M}$, kunnen we aantonen dat de machine $\mathcal{M}$ niet kan bestaan.

5.3 Het Halting-probleem

Een van de belangrijkste vraagstukken bij Turing-machines is of er een machine $\mathcal{E}$ bestaat die aan de hand van een S.D van een machine kan bepalen of deze machine stopt of niet. Als je $\mathcal{E}$ een S.D geeft van een machine die stopt, zet deze machine een 'Y' op het einde van de S.D. Als je een machine geeft die niet stopt, zet deze machine een '!' achter de S.D van de input.

Het blijkt dat deze machine $\mathcal{E}$ niet bestaat. Met andere woorden, er is geen algemene manier om te bepalen of een machine stopt of niet.

5.3.1 Globaal bewijs

Om te laten zien dat $\mathcal{E}$ niet kan bestaan proberen we uit de machine $\mathcal{E}$ de machine $\mathcal{A}$ van propositie 5.1 te construeren. We geven eerst een globaal overzicht hoe we dit kunnen doen.

Hulpmachines

Om $\mathcal{A}$ te construeren uit $\mathcal{E}$ hebben we enkele hulpmachines nodig. We kunnen aannemen dat al deze machines bestaan.

Turing laat in zijn artikel onder andere zien dat er een universele Turingmachine $\mathcal{U}$ bestaat [Turing, 1936, hoofstuk 6]. Laat $\mathcal{M}$ een willekeurige machine zijn die het resultaat m geeft als het wordt uitgevoerd op een lege band. Als je $\mathcal{U}$ als input $\overline{\mathcal{M}}$ geeft, produceert $\mathcal{U}$ ook het resultaat m.

Ook hebben we een machine $\mathcal{S}$ nodig die als input een getal $\overline{m}$ neemt, en als resultaat een lijst met de S.D van alle machines met minder dan $\overline{m}$ instructies. Ook gaan we ervan uit dat als $\mathcal{S}$ stopt, de cursor helemaal aan het begin van de lijst staat.

Ten slotte kunnen we een machine $\mathcal{L}$ maken die als input een lijst getallen heeft, en als output het kleinste getal geeft dat niet in die lijst staat.

Constructie van $\mathcal{A}$.

We geven nu een idee hoe we $\mathcal{A}$ kunnen maken met behulp van $\mathcal{E}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ en $\mathcal{L}$.

Begin met het uitvoeren van $\mathcal{S}$ op een band met daarop $\overline{m}$ geschreven. We hebben nu een band met de S.D van alle machines met minder dan m instructies.

Vervolgens berekenen we voor elk van deze machines welk getal ze beschrijven. We doen dit door eerst de S.D te kopiëren naar een tweede band. Vervolgens controleren we met $\mathcal{E}$ of deze S.D hoort bij een machine die stopt. Als een machine niet stopt, kan deze per definitie geen getal beschrijven.

Als deze machine wel stopt, laten we $\mathcal{U}$ het resultaat van deze machine berekenen. Vervolgens bepalen we hoe vaak er een 1 in het resultaat voorkomt. Dit aantal schrijven we op een derde band. Zo ontstaat er op de derde band een lijst van alle getallen die beschreven worden door machines met minder dan m instructies.

Ten slotte voeren we $\mathcal{L}$ uit op de derde band om zo het kleinste getal te vinden dat niet beschreven wordt door een machine met minder dan m instructies.

5.3.2 Precies Bewijs

Hulp-machines

Eerst definiëren we enkele hulp-machines die het makkelijker maken om de machine $\mathcal{A}$ te beschrijven.

De machine $\mathcal{B}$, brengt de kop naar het begin van het woord waarop de kop is gezet.

$$\mathfrak{b} \begin{cases} \_ & & \mathsf{R} & \mathfrak{halt} \\ \text{Anders} & & \mathsf{L} & \mathfrak{b} \end{cases}$$

De machine $\mathcal{B}_\ell$ brengt de kop naar het begin van een lijst.

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{b}_1 & \begin{cases} \_ & & \mathsf{L} & \mathfrak{b}_2 \\ \text{Anders} & & \mathsf{L} & \mathfrak{b}_1 \end{cases} \\ \mathfrak{b}_2 & \begin{cases} \_ & & \mathsf{RR} & \mathfrak{halt} \\ \text{Anders} & & \mathsf{L} & \mathfrak{b}_1 \end{cases} \end{array}$$

De machine $\mathcal{C}$, verwijdert het woord waarop de kop is gezet.

$$\mathfrak{c} \begin{cases} \_ & & \mathsf{N} & \mathfrak{halt} \\ \text{Anders} & \_ & \mathsf{L} & \mathfrak{c} \end{cases}$$

De machine $\mathcal{C}_\ell$, verwijdert een hele lijst.

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{c}_1 & \begin{cases} \_ & & \mathsf{L} & \mathfrak{c}_2 \\ \text{Anders} & \_ & \mathsf{L} & \mathfrak{c}_1 \end{cases} \\ \mathfrak{c}_2 & \begin{cases} \_ & & \mathsf{N} & \mathfrak{halt} \\ \text{Anders} & \_ & \mathsf{L} & \mathfrak{c}_1 \end{cases} \end{array}$$

De machine $\mathcal{I}_1$ voegt een 1 toe aan het einde van een woord.

$$\mathfrak{i} \begin{cases} \_ & 1 & \mathsf{N} & \mathfrak{halt} \\ \text{Anders} & & \mathsf{R} & \mathfrak{i} \end{cases}$$

De machine $\mathcal{N}$ gaat naar het volgende woord in een lijstje.

$$\mathfrak{n} \begin{cases} \_ & & \mathsf{R} & \mathfrak{halt} \\ \text{Anders} & & \mathsf{R} & \mathfrak{n} \end{cases}$$

De machine $\mathcal{D}$, bepaalt het resultaat van een machine die stopt. Als de machine niet stopt, geeft deze machine een leeg resultaat.

$$\begin{array}{llc} \mathfrak{i} & \qquad \mathcal{BE} & \mathfrak{e} \\ \mathfrak{e} & \begin{cases} Y & \_ & \mathsf{L} \\ ! & \_ & \mathsf{L} \end{cases} & \begin{array}{c} \mathfrak{u} \\ \mathfrak{cl} \end{array} \\ \mathfrak{u} & \qquad \mathcal{UB} & \mathfrak{halt} \\ \mathfrak{cl} & \qquad \mathcal{C} & \mathfrak{halt} \end{array}$$

Constructie van de machine $\mathcal{L}$.

We laten nu zien hoe je de machine $\mathcal{L}$ maakt[3]. Deze machine bepaalt het kleinste getal dat niet in een lijst van getallen staat. We definiëren $\mathcal{L}$ met een hulp-band.

[3]Ik heb deze machine ook geprogrammeerd in een online Turing-machine simulator: http://turingmachinesimulator.com/shared/phxtragnff

$$
\begin{array}{lllc}
\mathfrak{r} & (\mathcal{B}_\ell,) & & \mathfrak{i} \\
\mathfrak{i} & (, \mathcal{I}_1) & & \mathfrak{s} \\
\mathfrak{s} & (, \mathcal{B}) & & \mathfrak{comp} \\
\mathfrak{comp} & \left\{ \begin{array}{l} (1,1) \\ (\_,1) \\ (1,\_) \\ (\_,\_) \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\mathsf{N},\mathsf{N}) \\ (\mathsf{R},\mathsf{L}) \\ (\mathsf{R},\mathsf{L}) \\ (\mathsf{N},\mathsf{N}) \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{comp} \\ \mathfrak{e} \\ \mathfrak{n} \\ \mathfrak{r} \end{array} \\
\mathfrak{n} & (\mathcal{N},) & & \mathfrak{e} \\
\mathfrak{e} & \left\{ \begin{array}{l} (1,) \\ (\_,) \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\mathsf{N},\mathsf{N}) \\ (\mathsf{N},\mathsf{N}) \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{s} \\ \mathfrak{c} \end{array} \\
\mathfrak{c} & (\mathcal{C}_\ell,) & & \mathfrak{b} \\
\mathfrak{b} & (, \mathcal{B}) & & \mathfrak{f} \\
\mathfrak{f} & \left\{ \begin{array}{ll} (,1) & (1,\_) \\ (,\_) & \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\mathsf{R},\mathsf{R}) \\ (\mathsf{N},\mathsf{N}) \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{halt} \end{array}
\end{array}
$$

Deze machine werkt door het woord $\overline{n}$ op de onderste band te schrijven. Vervolgens wordt gecontroleerd of dit woord in de lijst voorkomt. Als het woord ergens in de lijst gevonden wordt, start de machine opnieuw en wordt gecontroleerd of het woord $\overline{n+1}$ in de lijst staat.

Als een woord dat gecontroleerd wordt nergens in de lijst staat, wordt dit woord op de eerste band geschreven als resultaat van de machine en stopt de machine.

Constructie van de machine $\mathcal{A}$.

Met behulp van alle hierboven gedefinieerde hulpmachines kunnen we nu de machine $\mathcal{A}$ bouwen:

$$
\begin{array}{llllc}
\mathfrak{init} & (\mathcal{S}, ,) & & & \mathfrak{mv} \\
\mathfrak{mv} & \left\{ \begin{array}{l} (\alpha, \_,) \text{ met } \alpha \neq \_ \\ (\_, ,) \end{array} \right. & \begin{array}{l} (\_, \alpha,) \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} (\mathsf{R},\mathsf{R},\mathsf{N}) \\ (\mathsf{R},\mathsf{L},\mathsf{N}) \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{mv} \\ \mathfrak{d} \end{array} \\
\mathfrak{d} & (, \mathcal{D},) & & & \mathfrak{c} \\
\mathfrak{c} & \left\{ \begin{array}{l} (, 1, \_) \\ (, \beta, \_) \text{ met } \beta \neq \_, 1 \\ (, \_, \_) \end{array} \right. & \begin{array}{l} (, \_, \_) \\ (, \_, \_) \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} (, \mathsf{R},\mathsf{R}) \\ (, \mathsf{R},\mathsf{N}) \\ (, \mathsf{N},\mathsf{R}) \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{c} \\ \mathfrak{c} \\ \mathfrak{n} \end{array} \\
\mathfrak{n} & \left\{ \begin{array}{l} (\gamma, ,) \text{ met } \gamma \neq \_ \\ (\_, ,) \end{array} \right. & & & \begin{array}{c} \mathfrak{mv} \\ \mathfrak{l} \end{array} \\
\mathfrak{l} & (, , \mathcal{L}) & & & \mathfrak{f} \\
\mathfrak{f} & \left\{ \begin{array}{ll} (, , 1) & (1, , \_) \\ (, , \_) & \end{array} \right. & & \begin{array}{l} (\mathsf{R}, , \mathsf{R}) \\ (\mathsf{N},\mathsf{N}) \end{array} & \begin{array}{c} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{halt} \end{array}
\end{array}
$$

Volgens propositie 5.1 kan deze machine niet bestaan. Omdat de machines $\mathcal{U}$ en $\mathcal{S}$ bestaan [Turing, 1936], en we alle hulpmachines en de machine $\mathcal{L}$ net geconstrueerd hebben, moet er dus gelden dat $\mathcal{E}$ niet bestaat.

5.4 Het Entscheidungsproblem

We zullen nu bekijken hoe het niet bestaan van het Halting-probleem verband houdt met het Entscheidungsproblem. In 5.1.2 hebben we gezien dat we elke machine $\mathcal{M}$ een uniek getal $\ulcorner \mathcal{M} \urcorner$ kunnen geven. Met dit getal kunnen we nu aan de slag in de taal van de rekenkunde.

We gaan nu op zoek naar een wf $\mathscr{U}_n(x)$ waarvoor geldt dat $\vdash_S \mathscr{U}_n(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner)$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}$ een machine is die stopt. Turing laat in zijn artikel zien dat er zo een wf bestaat [Turing, 1936][4].

Nu hadden we in 5.3 gezien dat er geen algemene methode bestaat waarmee we kunnen bepalen of een willekeurige machine stopt. Er is dus ook geen algemene methode om te bepalen of $\mathscr{U}_n(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner)$ een stelling is van S met $\mathcal{M}$ een willekeurige Turingmachine. Er bestaat dus geen algemene methode om de vraag "bestaat er een bewijs voor $\mathscr{U}_n(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner)$ in K?" te beantwoorden.

[4] De wf die Turing in zijn artikel geeft kan niet direct worden gebruikt in ons geval. Dit komt omdat Turing een iets andere definitie gebruikt voor het stoppen van machines.

Formele bewijzen

Hier staan alle formele bewijzen waar in dit verslag naar gerefereerd wordt. Ik heb geprobeerd om zo veel mogelijk de stijl aan te houden die in [Mendelson, 1964] wordt gebruikt.

Wel gebruik ik iets andere afkortingen voor de argumenten van elke stap. Dit heb ik gedaan om de bewijzen zo compact mogelijk te houden. Verder gebruik ik een stippellijn om aan te geven dat de afleidingsstelling (Det.Thrm.) wordt gebruikt om een implicatie te bewijzen [Mendelson, 1964, p. 30].

Boven elk bewijs staat aangegeven welke aannamens er zijn gemaakt (links van het $\vdash$ symbool) en wat er bewezen wordt (rechts van het $\vdash$ symbool).

In het stukje tekst boven ieder bewijs wordt een korte beschrijving gegeven van het doel van het bewijs. Als er een symbool worden gebruikt als afkorting voor een wf, wordt in deze tekst ook aangegeven waar in het verslag deze afkorting is gedefinieerd.

Voor hoofdstuk 2

Propositie 2.1

Bewijs 1. Een bewijs dat laat zien dat als een willekeurige wf $\mathscr{F}(x)$ een getal n beschrijft in K, er ook moet gelden dat $\vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{F}(\overline{n})$.

$(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{F}(\overline{n})$

1.	$(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$	(Hyp.)
2.	$(\forall x)(x = x)$	(axiom A6)
3.	$\overline{n} = \overline{n}$	(2, Rule A4)
4.	$\mathscr{F}(\overline{n}) \Leftrightarrow \overline{n} = \overline{n}$	(1, Rule A4)
5.	$\mathscr{F}(\overline{n})$	(3, 4, Bic.Elim.)

Bewijs 2. Een bewijs voor dat als een willekeurige wf $\mathscr{F}(x)$ een getal n beschrijft in K, er altijd maar precies één x bestaat waarvoor $\mathscr{F}(x)$ waar kan zijn in een interpetatie.

$(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n}) \vdash_{\mathrm{K}} (\exists_1 x)\mathscr{F}(x)$

1.	$(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$	(Hyp.)
2.	$\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n}$	(1, Rule A4)
3.	$\mathscr{F}(y) \Leftrightarrow y = \overline{n}$	(1, Rule A4)
4.	$\mathscr{F}(x) \wedge \mathscr{F}(y)$	(Hyp.)
5.	$\mathscr{F}(x)$	(4, Disj.Elim.)
6.	$\mathscr{F}(y)$	(4, Disj.Elim.)
7.	$x = \overline{n}$	(2,5, Bic.Elim.)
8.	$y = \overline{n}$	(4,6, Bic.Elim.)
9.	$x = y$	(7, 8, '=' subs)
10.	$\mathscr{F}(x) \wedge \mathscr{F}(y) \Rightarrow x = y$	(4-9, Det.Thrm.)
11.	$(\forall y)(\mathscr{F}(x) \wedge \mathscr{F}(y) \Rightarrow x = y)$	(10, Gen)
12.	$(\forall x)(\forall y)(\mathscr{F}(x) \wedge \mathscr{F}(y) \Rightarrow x = y)$	(11, Gen)
13.	$\mathscr{F}(\overline{n})$	(1, zie bewijs 1)
14.	$(\exists x)\mathscr{F}(x)$	(13, Rule E4)
15.	$(\exists x)\mathscr{F}(x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\mathscr{F}(x) \wedge \mathscr{F}(y) \Rightarrow x = y)$	(14, 12, Disj.Intr.)
16.	$(\exists_1 x)\mathscr{F}(x)$	(15, abbr.)

Voor hoofdstuk 3

Propositie 3.1

Bewijs 3. Laat zien dat $\mathscr{C}$ als gedefinieerd in 3.1.1 volgt uit de representeerbare functies en uitdrukbare relaties waaruit hij is opgebouwd.

$\mathscr{Pf}(\overline{p}, \overline{d}), \mathscr{Bnm}(\overline{c}, \overline{n}, \overline{d}), \mathscr{lh}(\overline{c}, \overline{\ell}) \vdash_K \mathscr{C}(\overline{n}, \overline{\ell})$

1.	$\mathscr{Pf}(\overline{p}, \overline{d})$	(Hyp.)
2.	$\mathscr{Bnm}(\overline{c}, \overline{n}, \overline{d})$	(Hyp.)
3.	$\mathscr{lh}(\overline{c}, \overline{\ell})$	(Hyp.)
4.	$(\exists y)\mathscr{Pf}(y, \overline{d})$	(1, Rule E4)
5.	$(\exists y)\mathscr{Pf}(y, \overline{d}) \wedge \mathscr{Bnm}(\overline{c}, \overline{n}, \overline{d})$	(4,2, Disj.Intr.)
6.	$(\exists r)((\exists y)\mathscr{Pf}(y, r) \wedge \mathscr{Bnm}(\overline{c}, \overline{n}, r))$	(5, Rule E4)
7.	$\mathscr{D}(\overline{c}, \overline{n})$	(6, abbr.)
8.	$\mathscr{D}(\overline{c}, \overline{n}) \wedge \mathscr{lh}(\overline{c}, \overline{\ell})$	(7,3, Disj.Intr.)
9.	$(\exists q)(\mathscr{D}(q, \overline{n}) \wedge \mathscr{lh}(q, \overline{\ell}))$	(8, Rule E4)
10.	$\mathscr{C}(\overline{n}, \overline{\ell})$	(9, abbr.)

Bewijs 4. Laat zien hoe $\mathscr{B}$ volgt uit $\mathscr{C}$, met $\mathscr{B}$ en $\mathscr{C}$ als gedefinieerd in 3.1.1.

$\mathscr{C}(\overline{n}, \overline{\ell}), \overline{\ell} < \overline{m} \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m})$

1.	$\mathscr{C}(\overline{n}, \overline{\ell})$	(Hyp.)
2.	$\overline{\ell} < \overline{m}$	(Hyp.)
3.	$\overline{\ell} < \overline{m} \wedge \mathscr{C}(\overline{n}, \overline{\ell})$	(2,1, Disj.Intr.)
4.	$(\exists z)(z < \overline{m} \wedge \mathscr{C}(\overline{n}, z))$	(3, Rule E4)
5.	$\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m})$	(4, abbr)

Propositie 3.2

Bewijs 5. Laat zien dat de waarde voor de eerste variabele $\mathscr{A}$ als gedefinieerd in 3.1.1 uniek is.

$(\forall x)(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x) \vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\forall y)(\mathscr{A}(x, \overline{m}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{m}) \Rightarrow x = y)$

1.	$(\forall x)(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(Hyp.)
2.	$\mathscr{A}(x, \overline{m}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{m})$	(Hyp.)
3.	$\mathscr{A}(x, \overline{m})$	(2, Disj.Elim.)
4.	$\mathscr{A}(y, \overline{m})$	(2, Disj.Elim.)
5.	$\neg \mathscr{B}(x, \overline{m}) \wedge (\forall a)(a < x \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m}))$	(3, Def.)
6.	$\neg \mathscr{B}(y, \overline{m}) \wedge (\forall a)(a < y \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m}))$	(4, Def.)
7.	$(\forall a)(a < x \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m}))$	(5, Disj.Elim.)
8.	$(\forall a)(a < y \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m}))$	(6, Disj.Elim.)
9.	$y < x \Rightarrow \mathscr{B}(y, \overline{m})$	(7, Rule A4)
10.	$x < y \Rightarrow \mathscr{B}(x, \overline{m})$	(8, Rule A4)
11.	$\neg \mathscr{B}(y, \overline{m}) \Rightarrow \neg(y < x)$	(9, Contrapos.)
12.	$\neg \mathscr{B}(x, \overline{m}) \Rightarrow \neg(x < y)$	(10, Contrapos.)
13.	$\neg \mathscr{B}(x, \overline{m})$	(5, Disj.Elim.)
14.	$\neg \mathscr{B}(y, \overline{m})$	(6, Disj.Elim.)
15.	$\neg(y < x)$	(14,11, MP)
16.	$\neg(x < y)$	(13,12, MP)
17.	$(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(1, Rule A4)
18.	$x < y \vee x = y \vee y < x$	(1, Rule A4)
19.	$x = y \vee y < x$	(16,18, Conj.Elim.)
20.	$x = y$	(15,19, Conj.Elim.)
21.	$\mathscr{A}(x, \overline{m}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{m}) \Rightarrow x = y$	(2-20, Det.Thrm.)
22.	$(\forall y)(\mathscr{A}(x, \overline{m}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{m}) \Rightarrow x = y)$	(21, GEN)
23.	$(\forall x)(\forall y)(\mathscr{A}(x, \overline{m}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{m}) \Rightarrow x = y)$	(22, GEN)

Bewijs 6. Laat zien dat uit $\mathscr{A}(x, \overline{10k})$ als gedefinieerd in 3.1.1 equivalent is met $\mathscr{F}(x)$ als gedefinieerd in 3.1.2.

$\overline{10k} = \overline{10} \cdot \overline{k} \vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x))$

1.	$\overline{10k} = \overline{10} \cdot \overline{k}$	(Hyp.)
2.	$\mathscr{A}(x, \overline{10k})$	(Hyp.)
3.	$\overline{10k} = \overline{10} \cdot \overline{k} \wedge \mathscr{A}(x, \overline{10k})$	(1,2, Disj.Intr.)
4.	$(\exists y)(y = \overline{10} \cdot \overline{k} \wedge \mathscr{A}(x, y))$	(3, Rule E4)
5.	$\mathscr{F}(x)$	(4, abbr.)
6.	$\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Rightarrow \mathscr{F}(x)$	(2-5, Det.Thrm.)
7.	$\mathscr{F}(x)$	(Hyp.)
8.	$(\exists y)(y = \overline{10} \cdot \overline{k} \wedge \mathscr{A}(x, y))$	(7, def.)
9.	$t = \overline{10} \cdot \overline{k} \wedge \mathscr{A}(x, t)$ met const t.	(Rule C)
10.	$t = \overline{10} \cdot \overline{k}$	(9, Disj.Elim.)
11.	$t = \overline{10k}$	(1, 10, '='-subs.)
12.	$\mathscr{A}(x, t)$	(9, Disj.Elim.)
13.	$\mathscr{A}(x, \overline{10k})$	(11, 12, '='-subs.)
14.	$\mathscr{F}(x) \Rightarrow \mathscr{A}(x, \overline{10k})$	(7-13, Det.Thrm.)
15.	$\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x)$	(6, 14, Bic.Intr.)
16.	$(\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x))$	(15, GEN)

Bewijs 7. Laat zien dat uit $\mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k})$ als gedefinieerd in 3.1.1 volgt dat $\mathscr{F}(x)$ als gedefinieerd in 3.1.2 het getal $\overline{n}$ beschrijft.

$(\forall x)(\forall y)(\mathscr{A}(x, \overline{10} \cdot \overline{k}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{10} \cdot \overline{k}), (\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x)), \mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} (\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$

1.	$(\forall x)(\forall y)(\mathscr{A}(x, \overline{10} \cdot \overline{k}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{10} \cdot \overline{k}) \Rightarrow x = y)$	(Hyp.)
2.	$(\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x))$	(Hyp.)
3.	$\mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k})$	(Hyp.)
4.	$\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x)$	(2, Rule A4)
5.	$(\forall y)(\mathscr{A}(x, \overline{10} \cdot \overline{k}) \wedge \mathscr{A}(y, \overline{10} \cdot \overline{k}) \Rightarrow x = y)$	(1, Rule A4)
6.	$\mathscr{A}(x, \overline{10} \cdot \overline{k}) \wedge \mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10} \cdot \overline{k}) \Rightarrow x = \overline{n}$	(6, Rule A4)
7.	$\mathscr{F}(x)$	(Hyp.)
8.	$\mathscr{A}(x, \overline{10k})$	(4,7, Bic.Elim.)
9.	$\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \wedge \mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k})$	(8,3, Disj.Intr.)
10.	$x = \overline{n}$	(6,9, MP)
11.	$\mathscr{F}(x) \Rightarrow x = \overline{n}$	(7-10, Det.Thrm.)
12.	$\mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(\overline{n})$	(2, Rule C)
13.	$\mathscr{F}(\overline{n})$	(3, 12, Bic.Elim.)
14.	$x = \overline{n}$	(Hyp.)
15.	$\mathscr{F}(x)$	(14,13, '='-subs.)
16.	$x = \overline{n} \Rightarrow \mathscr{F}(x)$	(14-15, Det.Thrm.)
17.	$\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n}$	(11,16, Bic.Intr.)
18.	$(\forall x)(\mathscr{F}(x) \Leftrightarrow x = \overline{n})$	(17, GEN)

Bewijs 8. Laat zien dat uit $\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k})$ als in 3.1.1 volgt dat $\neg\mathscr{F}(\overline{n})$ met $\mathscr{F}(x)$ als gedefinieerd in 3.1.2.

$(\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x)), \mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{F}(\overline{n})$

1.	$(\forall x)(\mathscr{A}(x, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(x))$	(Hyp.)
2.	$\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k})$	(Hyp.)
3.	$\neg\neg\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k})$	(2, Neg.Intr.)
4.	$\neg\neg\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k}) \vee \neg(\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{10k}))$	(3, Conj.Intr.)
5.	$\neg(\neg\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{10k}) \wedge (\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{10k}))$	(4, De Morgan's law)
6.	$\neg\mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k})$	(5, abbr.)
7.	$\mathscr{A}(\overline{n}, \overline{10k}) \Leftrightarrow \mathscr{F}(\overline{n})$	(1, Rule A4)
8.	$\neg\mathscr{F}(\overline{n})$	(6,7, Bic.Elim.)

Propositie 3.3

Bewijs 9. Laat zien hoe $\mathscr{A}$ volgt uit $\mathscr{B}$ met $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ als gedefinieerd in 3.1.1.

$(\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m})), \neg\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m}) \vdash_{\mathrm{K}} \mathscr{A}(\overline{n}, \overline{m})$

1.	$(\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m})), \neg\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m})$	(Hyp.)
2.	$\neg\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m})$	(Hyp.)
3.	$\neg\mathscr{B}(\overline{n}, \overline{m}) \wedge (\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a, \overline{m}))$	(2,3, Conj.Intr.)
4.	$\mathscr{A}(\overline{n}, \overline{m})$	(3, abbr.)

Propositie 3.4

Bewijs 10. Laat zien dat uit $\mathscr{D}(\overline{q},\overline{n})$ als gedefineerd in 3.1.1 volgt dat er een bewijs bestaat voor de wf die bij Gödelnummer $r = \mathrm{Bnm}(q,n)$ hoort.

$\mathscr{D}(\overline{q},\overline{n}), \mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},\overline{r}), (\exists_1 x)\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},x) \vdash_{\mathrm{K}} (\exists y)\mathscr{P}\!f(y,\overline{r})$

1.	$\mathscr{D}(\overline{q},\overline{n})$	(Hyp.)
2.	$\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},\overline{r})$	(Hyp.)
3.	$(\exists_1 x)\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},x)$	(Hyp.)
4.	$(\exists r)((\exists y)\mathscr{P}\!f(y,r) \wedge \mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},r))$	(1, def.)
5.	$(\exists y)\mathscr{P}\!f(y,t) \wedge \mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},t)$ met const. t	(4, Rule C)
6.	$(\exists y)\mathscr{P}\!f(y,t)$	(5, Disj.Elim.)
7.	$\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},t)$	(5, Disj.Elim.)
8.	$(\exists x)\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},x) \wedge \mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},y) \Rightarrow x = y)$	(3, def.)
9.	$(\forall x)(\forall y)(\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},x) \wedge \mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},y) \Rightarrow x = y)$	(8, Disj.Elim.)
10.	$(\forall y)(\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},t) \wedge \mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},y) \Rightarrow t = y)$	(9, Rule A4)
11.	$\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},t) \wedge \mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},\overline{r}) \Rightarrow t = \overline{r}$	(10, Rule A4)
12.	$\mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},t) \wedge \mathscr{B}_{nm}(\overline{q},\overline{n},\overline{r})$	(7,2, Disj.Intr.)
13.	$t = \overline{r}$	(12,11, MP)
14.	$(\exists y)\mathscr{P}\!f(y,\overline{r})$	(6,13, '='-subs.)

Voor hoofdstuk 4

Propositie 4.3

Bewijs 11. Laat zien hoe $\neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$ volgt uit $\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m})$, met $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ als gedefinieerd in propositie 4.3.

$\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$

1.	$\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m})$	(Hyp.)
2.	$\neg\neg\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m})$	(1, Neg.Intr.)
3.	$\neg\neg\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m}) \vee \neg(\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a,\overline{m}))$	(2, Conj.Intr.)
4.	$\neg(\neg\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m}) \wedge (\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a,\overline{m})))$	(3, De Morgan's law)
5.	$\neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$	(4, abbr.)

Bewijs 12. Laat zien hoe $\neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$ volgt uit $\mathscr{B}(\overline{i},\overline{m})$, met $i < n$. Hier zijn $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ als gedefinieerd in propositie 4.3.

$\overline{i} < \overline{n}, \neg\mathscr{B}(\overline{i},\overline{m}) \vdash_{\mathrm{K}} \neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$

1.	$\overline{i} < \overline{n}$	(Hyp.)
2.	$\neg\mathscr{B}(\overline{i},\overline{m})$	(Hyp.)
3.	$\overline{i} < \overline{n} \wedge \neg\mathscr{B}(\overline{i},\overline{m}) \Rightarrow \neg(\overline{i} < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(\overline{i},\overline{m}))$	(Tautology)
4.	$\overline{i} < \overline{n} \wedge \neg\mathscr{B}(\overline{i},\overline{m})$	(1, 2, Disj.Intr.)
5.	$\neg(\overline{i} < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(\overline{i},\overline{m}))$	(3, 4, MP)
6.	$(\exists a)\neg(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a,\overline{m}))$	(5, Rule E4)
7.	$\neg(\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a,\overline{m}))$	(6, def.)
8.	$\neg\neg\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m}) \vee \neg(\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a,\overline{m}))$	(7, Conj.Intr.)
9.	$\neg(\neg\mathscr{B}(\overline{n},\overline{m}) \wedge (\forall a)(a < \overline{n} \Rightarrow \mathscr{B}(a,\overline{m})))$	(8, De Morgan's law)
10.	$\neg\mathscr{A}(\overline{n},\overline{m})$	(9, abbr.)

Bibliografie

[Boolos, 1989] Boolos, G. (1989). A new proof of the godel incompleteness theorem. *Notices of the AMS*, 36(4):388–390.

[Mendelson, 1964] Mendelson, E. (1964). *Introduction to mathematical logic*. Sixth edition.

[Russell, 1908] Russell, B. (1908). Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics*, 30(3):222–262.

[Turing, 1936] Turing, A. M. (1936). On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42(1):230–65.