

Het dampen en stampen van een schip
in een nauw kanaal.

W.D.A. Broeders.
Roland Holstlaan 382
Delft.

April 1970

Inhoudsopgave.

	blz.
Symbolen.	2
I. Inleiding.	4
II. Basisformules.	5.
III. Harmonische oplossingen.	7.
IV. Algemeen onderzoek naar een numerieke oplossing van het stelsel vergelijkingen.	20.
-1. Probleem vereenvoudigd tot uitsluitend de waterbeweging.	21.
- Stabiliteit van het differentieschema	22.
- Oplossen van het differentieschema	25.
- Oplossen van de tridiagonale matrix	27.
-2. Probleem vereenvoudigd tot een niet bewegend schip	30.
-3. Probleem niet vereenvoudigd	36.
Literatuur	41.
Bijlagen : Grafieken behorend bij III. Harmonische oplossingen	42 t/m 76.

Symbolen :

$a(x)$ = afstand tussen wal en schip.

$2b_c$ = breedte van het kanaal.

$2b_s(x)$ = breedte van het schip.

c_c = \sqrt{gD}

c_s = $\sqrt{gD_s}$

$d(x)$ = afstand tussen de kiel van het schip en de bodem van het kanaal.

$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5(x)$ = constanten.

g = versnelling van de zwaartekracht

$h_s(x)$ = diepgang van het schip.

l, l_1, l_2, l_3, l_4 = lengtematen.

m = massa van het schip.

p = $\frac{\omega l}{c_s}$, waarin l de halve lengte van een symmetrische schip is.

$p_a(x, y, z, t)$ = afwijking van de hydrostatische druk.

t = tijdsafhankelijke.

x, y, z = coördinatenstelsel.

y' = as door het zwaartepunt van het schip, evenwijdig aan de y -as.

$U(t)$ = uitwijking van het schip in Z -richting.

$V(x, t)$ = snelheid van de waterdeeltjes.

$z_s(x, t)$ = $U(t) + x \cdot \theta(t)$; totale uitwijking van het schip.

A_1, A_2 = Integratie constanten.

A_I, A_{III} = golfamplituden.

A_c = natte doorsnede van het kanaal.

$A_s(x)$ = natte doorsnede t.p.v. het schip.

A_w = oppervlakte van de horizontale doorsnede over het schip t.p.v. de waterlijn.

D = stilwaterdiepte.

D_s = $D + \frac{b_s}{a} \cdot d$

$F_a(x, t)$ = hydrodynamische kracht op een natte doorsnede.

I_y = tweede moment van A_w t.o.v. de y' -as.

J_0 = massa traagheidsmoment van het schip t.o.v. de y' -as.

S_y = eerste moment van A_w t.o.v. de y' -as.

α = $\frac{\omega}{c_c \sqrt{g_0}}$

β = $\frac{\omega}{c_c \sqrt{g_1}}$

$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ = coëfficiënten.

δ, ε = dimensie-loze grootheden.

$\eta(x, t)$ = golfuitwijking.

$\theta(t)$ = helling van het schip in x-zichting.

ρ = dichtheid.

ω = hoeksnelheid van de harmonische beweging.

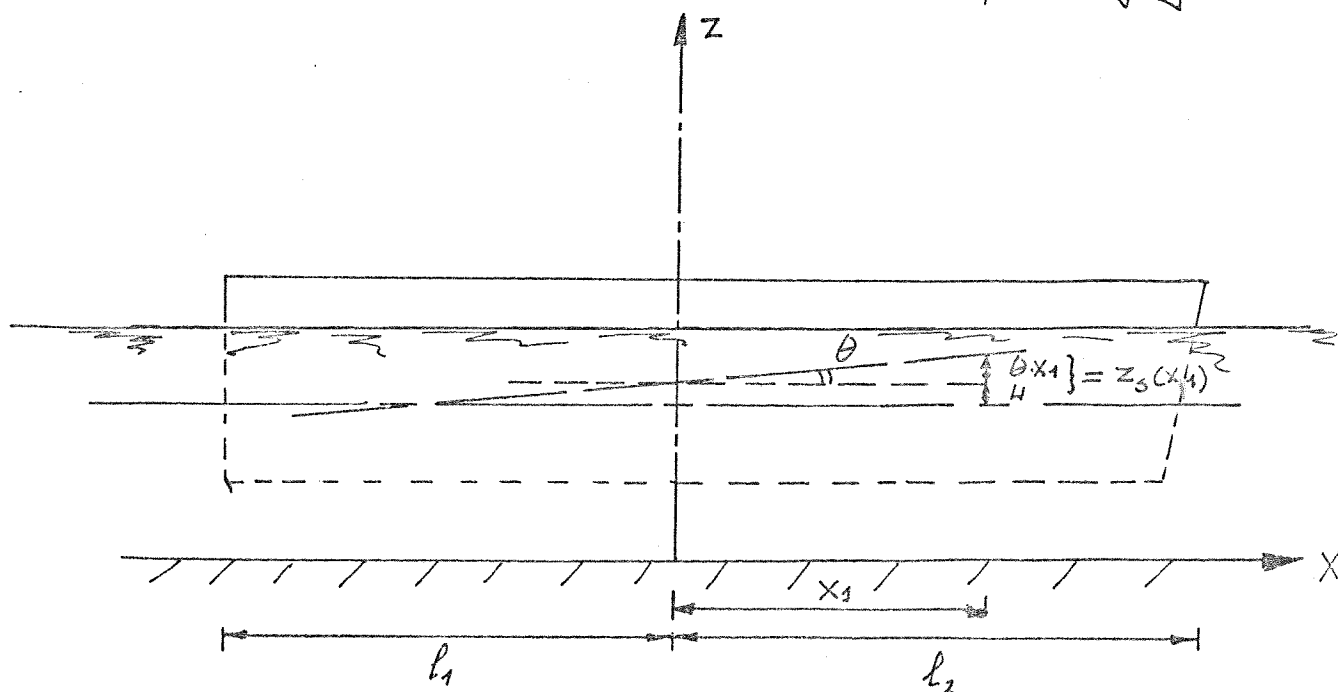
I. Inleiding

In dit afstudeerontwerp zijn onderzoeken verzicht naar de mogelijkheden, reeds eerder afgeleide, vergelijkingen voor de beweging van water en een schip in een nauw kanaal, toe te passen voor een numeriek programma. Om later met behulp van dit programma de waterbeweging en de bewegingen van het schip te kunnen berekenen onder invloed van een willekeurige translatiegolf.

Voor zover vergelijkingen worden gebruikt uit de publicatie: "Heaving and Pitching of a Ship in a narrow channel" [Literatuur 1], wordt het corresponderende nummer van de vergelijking uit de publicatie in de kantlijn geplaatst.

Het afstudeerontwerp valt in twee gedeelten uiteen:

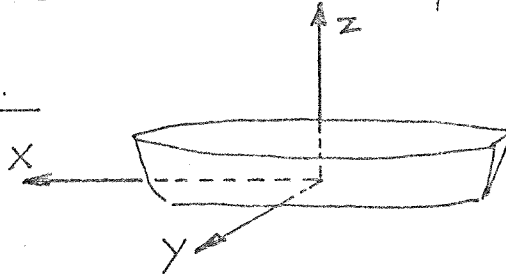
- a) Een onderzoek waarbij naar harmonische oplossingen van het stelsel vergelijkingen is gekeken. Het doel hiervan was om te zien of er combinaties van grootheden waren, waarbij het systeem gaat opslingeren, althans volgens de berekeningen. Controle door middel van modelproeven kon wegens tijdsgebrek niet worden gerealiseerd.
- b) Een meer algemeen onderzoek naar oplossingen van het stelsel vergelijkingen. Met het doel een numeriek programma samen te stellen voor het systeem, met daarin de elkaar beïnvloedende water- en scheepsbeweging.



II Korte samenvatting bezippen en basisformules.

Dampen - Stampen.

Een schip heeft zes vrijheidsgraden.



Bij de berekeningen wordt alleen in rekening gebracht:

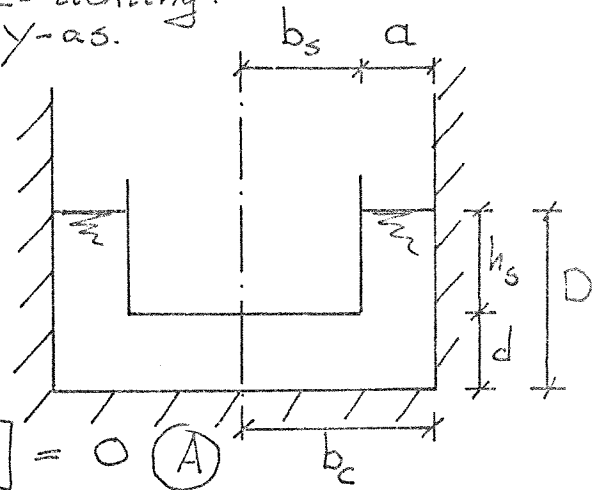
Dampen = translatie in z-richting.
Stampen = rotatie om de y-as.

Basisformules.

Continuïteitsvergelijking [Lit 1; blz 7]

$$\frac{\partial}{\partial t} [(D+\eta)a + (d+z_s)b_s]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \cdot V \cdot [(D+\eta)a + (d+z_s)b_s] = 0 \quad \textcircled{A}$$



Bewegingsvergelijking [Lit 1; blz 8]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial (D+\eta)}{\partial x} + \frac{1}{2\rho [(D+\eta)a + (d+z_s)b_s]} \cdot \frac{\partial F_a}{\partial x} = 0 \quad \textcircled{B}$$

met:

$$F_a = \iint_{A_s} p_a dA_s$$

A_s = natte doorsnede
 p_a = afwijking van de hydrostatische druk.

$$F_a = 2\rho \left[\left(\frac{ah_s^2}{6} - \frac{b_s^3(d+z_s)}{3} + \frac{h_s^2 b_s(d+z_s)}{2} + \frac{h_s^2 a(d+z_s)}{2} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} \right. \\ \left. + \left(\frac{ah_s^2}{2} + h_s b_s(d+z_s) + a(d+z_s)h_s \right) \frac{\partial^2 (D+\eta)}{\partial t^2} - \frac{b_s^3}{3} \frac{\partial^2 (d+z_s)}{\partial t^2} \right]$$

Bij de afleiding van F_a is gelineariseerd. [$\eta \ll D$, $z_s \ll d$]

$$h_s = (D+\eta) - (d+z_s)$$

Dompvergelijking [Lit 1. blz 12]

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho g A_w u + \rho g S_y \theta = 2 \rho g \int_{-l_1}^{l_2} \eta(x,t) \cdot b_s(x) dx$$

$$+ 2 \rho \int_{-l_1}^{l_2} \left[h_s b_s \frac{\partial^2 (D+\eta)}{\partial t^2} + \left(\frac{h_s^2 b_s}{2} - \frac{b_s^3}{3} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{b_s^3}{3(d+z_s)} \frac{\partial^2 (d+z_s)}{\partial t^2} \right] dx \quad (C)$$

met:

$$m = \rho \int_{-l_1}^{l_2} dx \cdot 2 \int_0^{b_s(x)} dy \int_d^D dz$$

$$A_w = \int_{-l_1}^{l_2} dx \cdot 2 \int_0^{b_s(x)} dy \quad [V_{00z}: z=D]$$

$$S_y = \int_{-l_1}^{l_2} x dx \cdot 2 \int_0^{b_s(x)} dy \quad [V_{00z}: z=D]$$

Stampvergelijking [Lit 1. blz 13]

$$J \theta \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^2} + \rho g I_y \theta + \rho g S_y u = 2 \rho g \int_{-l_1}^{l_2} \eta(x,t) \cdot b_s(x) \cdot x \cdot dx$$

$$+ 2 \rho \int_{-l_1}^{l_2} \left[h_s b_s \frac{\partial^2 (D+\eta)}{\partial t^2} + \left(\frac{h_s^2 b_s}{2} - \frac{b_s^3}{3} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{b_s^3}{3(d+z_s)} \frac{\partial^2 (d+z_s)}{\partial t^2} \right] \cdot x \cdot dx \quad (D)$$

met:

$$J \theta = \rho \int_{-l_1}^{l_2} x^2 dx \cdot 2 \int_0^{b_s(x)} dy \cdot \int_d^D dz$$

$$I_y = \int_{-l_1}^{l_2} x^2 dx \cdot 2 \int_0^{b_s(x)} dy \quad [V_{00z}: z=D]$$

Tez plaatse van boeg en hek van het schip:

Behoud van massa [Lit 1. blz 16]

$$(12) \quad A_s \cdot v_s(l,t) = A_c \cdot v_c(l,t)$$

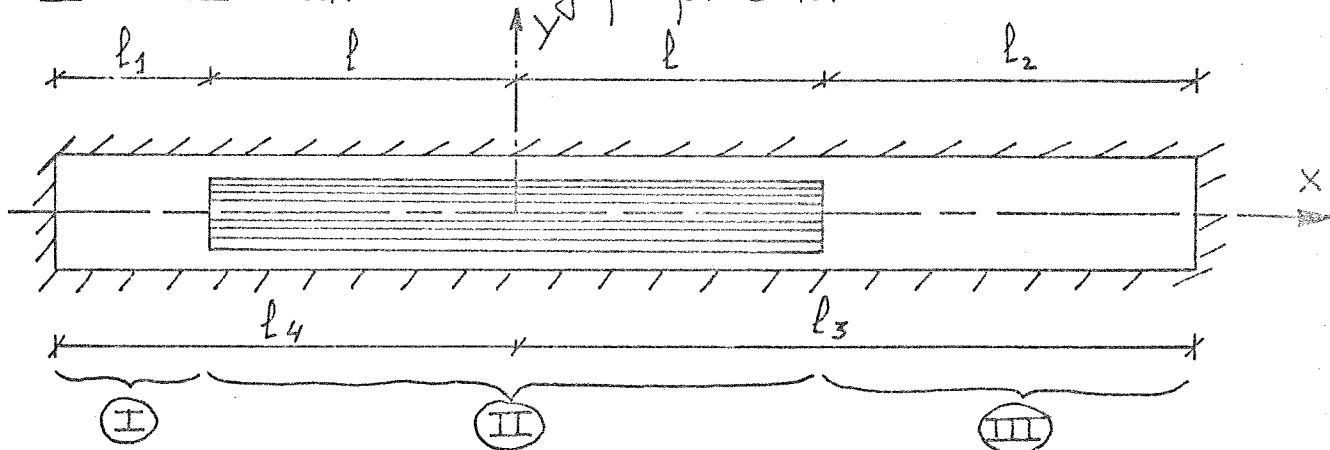
Behoud van energie [Lit 1. blz 17]

$$(13^a) \quad \gamma_1 \cdot \eta_s(l,t) + \frac{\omega^2 e_2}{g} \cdot z_s(l,t) = \gamma_0 \cdot \eta_c(l,t)$$

III. Hazmonische Oplossingen.

We besteden aandacht aan de hazmonische oplossingen van het stelsel vergelijkingen, omdat we met een gelineariseerd systeem werken. Hierbij mag een willekeurige translatiegolf vervangen worden door een aantal sinusvormige golven met elk een eigen amplitude en hoeksnelheid (Superpositie).

We bekijken een toestand, waarbij het kanaal aan beide zijden is afgesloten, en veronderstellen dat in de delen I en III een staande golf optreedt.



Verder zijn de volgende aannamen en vereenvoudigingen ingevoerd:

1. Het schip heeft een rechthoekig bakprofiel.
 $\frac{\partial b_s}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial d}{\partial x} = 0$; $l_{1\text{ schip}} = l_{2\text{ schip}} = l \rightarrow S_y = 0$

2. Linearizeren: $\eta \ll D$
 $d \ll z_s$

We schrijven in de vergelijkingen hiendoor : η ipv. $D + \eta$
 en z_s ipv. $z_s + d$

3. Hazmonische oplossingen, dwz:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\omega^2 \eta \quad ; \quad \frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + x \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^3 z_s}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

4. Staande golf in de delen I en III van het kanaal.

$$\eta_I = 2A_I \cos \alpha (x + l_4)$$

$$\eta_{III} = 2A_{III} \cos \alpha (x - l_3)$$

Doel van het onderzoek:

a Is het systeem in deze vorm oplosbaar?

- b -1. Zijn er combinaties van grootheden, waarbij het systeem gaat opslingeren?
 -2. Zo ja, zijn deze combinaties te voorspellen?

Oplossing van het systeem.

Het systeem bestaat uit 3 delen (I, II en III). Voor deel II hebben we 4 gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor de water- en scheepsbeweging. Deel III wordt aan beide zijden, dmv. de wet van behoud van massa en energie, gekoppeld aan deel I, respectievelijk deel III, waar we veronderstellen dat zich een staande golf heeft ingesteld.

Door de aangebrachte vereenvoudigingen krijgen we voor:

Deel II:

Continuïteitsvergelijking:

$$(1) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{b_s}{a} \frac{\partial z_s}{\partial t} + D_s \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{met } D_s = D + \frac{b_s}{a} d.$$

Bewegingsvergelijking: F_a invullen en hierin de term $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$ mbv. de cont. verg. elimineren.

$$(2') \quad \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(e_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - e_2 \frac{\partial^2 z_s}{\partial t^2} \right) = 0$$

met

$$e_1 = h_s - 2 \cdot \frac{a h_s^2}{A_s} + \frac{4}{3} a \cdot \frac{a h_s^3 + d b_s^3}{A_s^2}$$

$$e_2 = b_s \cdot \frac{\frac{2}{3} b_s^2 + h_s^2}{A_s} - \frac{4}{3} b_s \cdot \frac{a h_s^3 + d b_s^3}{A_s^2}$$

Delen I en III: mbv. $\begin{cases} b_s \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0 \end{cases} (h_s \rightarrow D) \Rightarrow \begin{cases} D_s \rightarrow D \\ e_1 \rightarrow D/3 \\ e_2 \rightarrow 0 \end{cases}$

Continuïteitsvergelijking:

$$(1^a) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Bewegingsvergelijking:

$$(2^a) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{D}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Deel III $[+l < x < +l_3]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{III} = 2A_{III} \cos \alpha (x - l_3) \cdot e^{i\omega t} \quad (3^a) \\ \alpha = \frac{\omega}{c_c} = \frac{\omega}{\sqrt{gD - D\omega^2/3}} = \frac{\omega}{\epsilon_c \sqrt{f_0}} \\ \text{met } c_c = \sqrt{gD} \text{ en } f_0 = 1 - \frac{D/3 \cdot \omega^2}{g} \\ \text{Mbv. verg (1)} \\ V_{III} = -\frac{i\omega}{\alpha D} \cdot 2A_{III} \sin \alpha (x - l_3) \cdot e^{i\omega t} \quad (4^a) \end{array} \right.$$

Deel I $[-l_4 < x < -l]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_I = 2A_I \cos \alpha (x + l_4) \cdot e^{i\omega t} \quad (3^b) \\ V_I = -\frac{i\omega}{\alpha D} \cdot 2A_I \sin \alpha (x + l_4) \cdot e^{i\omega t} \quad (4^b) \end{array} \right.$$

Deel II $[-l < x < +l]$

$$\left. \begin{array}{l} V_{II} = V_{II} \cdot e^{i\omega t} \\ \eta_{II} = \eta_{II} \cdot e^{i\omega t} \\ U = U \cdot e^{i\omega t} \\ \Theta = \Theta \cdot e^{i\omega t} \end{array} \right) z_s = U + \Theta x$$

(1^b) $\left\{ \frac{\partial \eta_{II}}{\partial t} + \frac{b_s}{a} (U + \dot{\Theta} x) + D_s \frac{\partial V_{II}}{\partial x} = 0 \quad (5) \right.$

(2^b) $\left\{ \frac{\partial V_{II}}{\partial t} + g f_1 \frac{\partial \eta_{II}}{\partial x} - e_2 \ddot{\Theta} = 0 \quad (6) \right.$

$$f_1 = 1 - \frac{e_1 \cdot \omega^2}{g}$$

Uit (5) en (6) volgt:

$$\eta_{II} = (A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x} - \frac{b_s}{a} U - \frac{b_s}{a} \Theta x) \cdot e^{i\omega t} \quad (7)$$

$$V_{II} = \left\{ \frac{g f_1 \beta}{\omega} [A_2 e^{-i\beta x} - A_1 e^{i\beta x}] - i \frac{b_s}{a} \frac{g f_2}{\omega} \Theta \right\} e^{i\omega t} \quad (8)$$

$$f_2 = 1 - \frac{(e_1 + \frac{a}{b_s} e_2)^2}{g}$$

Behoud van Massa en Energie.

In $x = +l$:

$$\begin{cases} \gamma_1 \cdot \eta_{II} (+l, t) + \frac{\omega^2 e_2}{g} \cdot z_s (+l, t) = \gamma_0 \cdot \eta_{III} (+l, t) & (9^a) \\ A_s \cdot v_{II} (+l, t) = A_c \cdot v_{III} (+l, t) & (10^a) \end{cases}$$

Evenzo in $x = -l$: (9^b) en (10^b)

Dompvergelijking.

(10^a)

$$(m + \rho e_4 A_w) \ddot{u} + \rho g A_w u = \gamma_3 \rho g 2b_s \int_{-l}^{+l} \eta_{II}(x, t) dx.$$

met:

$$\gamma_3 = 1 - \frac{e_3 \cdot \omega^2}{g}$$

$$e_3 = h_s - \frac{\frac{1}{2} h_s^2 - \frac{1}{3} b_s^2}{D_s}$$

$$e_4 = \frac{b_s^3}{3d} + \frac{b_s}{a} \cdot \frac{\frac{1}{2} h_s^2 - \frac{1}{3} b_s^2}{D_s}$$

η_{II} uit (7) invullen en integratie uitvoeren geeft:

$$\begin{aligned} & \left[-(m + \rho e_4 A_w) \omega^2 + \rho g A_w + \frac{4\gamma_3 \rho g b_s^2 l}{a} \right] \cdot u \\ & = \frac{4\gamma_3 \rho g b_s}{\beta} (A_2 + A_1) \sin \beta l. \quad (11) \end{aligned}$$

Stompvergelijking.

$$(\mathcal{J}_\theta + \rho e_4 I_y) \ddot{\theta} + \rho g I_y \theta = \gamma_3 \rho g 2b_s \int_{-l}^{+l} \eta_{II}(x, t) \cdot x \cdot dx$$

η_{II} uit (7) invullen:

$$\begin{aligned} & \left[-(\mathcal{J}_\theta + \rho e_4 I_y) \omega^2 + \rho g I_y + \frac{4\gamma_3 \rho g b_s^2 l^3}{3a} \right] \cdot \theta \\ & = \frac{4\gamma_3 \rho g b_s}{\beta^2} (A_2 - A_1) \cdot l \cdot (\beta l \cos \beta l - \sin \beta l) \quad (12) \end{aligned}$$

We moeten oplossen:

In $x = +l$ de vergelijkingen: (9^a) , (10^a) , (11) en (12)
 en in $x = -l$ " " " " : (9^b) , (10^b) , (11) en (12)

met de desbetreffende η 's en v 's ingevuld.

$$\text{In } x = +l:$$

$$\text{Lit } (9^a)$$

$$\textcircled{\text{I}} \quad \gamma_1 (A_2 + A_1) \cos \beta l - \gamma_1 (A_2 - A_1) i \sin \beta l - \frac{b_s}{a} \gamma_2 (4 + \theta l) = 2 \gamma_0 A_{\text{III}} \cos \alpha l_2$$

$$\text{Lit } (10^a)$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad \frac{A_s}{A_c} \frac{g \gamma_1 \beta}{\omega} (A_2 - A_1) \cos \beta l - \frac{A_s}{A_c} \frac{g \gamma_1 \beta}{\omega} (A_2 + A_1) i \sin \beta l - \frac{A_s}{A_c} \frac{b_s \gamma_2}{a} \frac{g}{\omega} i \theta = \frac{i \omega}{\alpha D} 2 A_{\text{III}} \sin \alpha l_2$$

$$\text{In } x = -l:$$

$$\text{Lit } (9^b)$$

$$\textcircled{\text{III}} \quad \gamma_1 (A_2 + A_1) \cos \beta l + \gamma_1 (A_2 - A_1) i \sin \beta l - \frac{b_s}{a} \gamma_2 (4 - \theta l) = \gamma_0 \cdot 2 A_{\text{I}} \cos \alpha l_1$$

$$\text{Lit } (10^b)$$

$$\textcircled{\text{IV}} \quad \frac{A_s}{A_c} \frac{g \gamma_1 \beta}{\omega} (A_2 - A_1) \cos \beta l + \frac{A_s}{A_c} \frac{g \gamma_1 \beta}{\omega} (A_2 + A_1) i \sin \beta l - \frac{A_s}{A_c} \frac{b_s \gamma_2}{a} \frac{g}{\omega} i \theta = -\frac{i \omega}{\alpha D} 2 A_{\text{I}} \sin \alpha l_1$$

Verder schrijven we:

(11) als:

$$\textcircled{\text{V}} \quad P \cdot l = \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s}{\beta} (A_2 + A_1) \sin \beta l$$

$$\text{met } P = \left[-(m + \rho e_4 A_w) \omega^2 + \rho g A_w + \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s^2 l}{a} \right]$$

(12) als:

$$\textcircled{\text{VI}} \quad Q \cdot \theta = \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s}{\beta^2} (A_2 - A_1) i (\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)$$

$$\text{met } Q = \left[-(\gamma_\theta + \rho e_4 I_y) \omega^2 + \rho g I_y + \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s^2 l^3}{3a} \right]$$

$$\textcircled{I} - \textcircled{III}$$

$$\gamma_1 (A_2 - A_1) i \sin \beta l + \frac{b_s \gamma_2}{\alpha} \theta l = -\gamma_0 (A_{III} \cos \alpha l_2 - A_I \cos \alpha l_1)$$

$$\textcircled{I} + \textcircled{III}$$

$$\gamma_1 (A_2 + A_1) \cos \beta l - \frac{b_s \gamma_2}{\alpha} u = +\gamma_0 (A_{III} \cos \alpha l_2 + A_I \cos \alpha l_1)$$

$$\textcircled{II} - \textcircled{IV}$$

$$\frac{A_s}{A_c} \frac{g \gamma_1 \beta}{\omega} (A_2 + A_1) i \sin \beta l = -\frac{l \omega}{\alpha D} (A_{III} \sin \alpha l_2 + A_I \sin \alpha l_1)$$

$$\textcircled{II} + \textcircled{IV}$$

$$\frac{A_s}{A_c} \frac{g \gamma_1 \beta}{\omega} (A_2 - A_1) \cos \beta l = \frac{A_s}{A_c} \frac{b_s \gamma_2}{\alpha} \frac{g}{\omega} i \theta = +\frac{l \omega}{\alpha D} (A_{III} \sin \alpha l_2 - A_I \sin \alpha l_1)$$

Uit het stelsel vergelijkingen \textcircled{I} t/m \textcircled{VI} moeten we A_1 en A_2 (integratieconstanten) elimineren.

Verder moeten de vergelijkingen zodanig geschreven worden dat ze dimensieloos worden, en de grootheden die we willen weten uitdrukken tov. de amplitude van de staande golf in deel III ($2A_{III}$).

$$\text{Uit } \textcircled{II} - \textcircled{IV}$$

$$(A_2 + A_1) \sin \beta l = -A_{III} \left(\frac{A_c \omega}{A_s g \gamma_1 \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \sin \alpha l_2 \right) - A_I \left(\frac{A_c \omega}{A_s g \gamma_1 \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \sin \alpha l_1 \right) \quad \textcircled{VII}$$

$$\text{Uit } \textcircled{II} + \textcircled{IV} \text{ en } \textcircled{I} - \textcircled{III}$$

$$(A_2 - A_1) i (\beta l \cos \beta l - \sin \beta l) = -A_{III} \left[\frac{A_c \omega}{A_s g \gamma_1 \beta} \frac{\omega}{\alpha D} l \sin \alpha l_2 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \cos \alpha l_2 \right] + A_I \left[\frac{A_c \omega}{A_s g \gamma_1 \beta} \frac{\omega}{\alpha D} l \sin \alpha l_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \cos \alpha l_1 \right] \quad \textcircled{VIII}$$

$$(A_2 + A_1) \text{ uit } \textcircled{VII} \text{ invullen in } \textcircled{I} + \textcircled{III}$$

$$l i = -\frac{a}{b_s \gamma_2} A_{III} \left[\frac{A_c \omega}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \frac{\sin \alpha l_2}{\tan \beta l} + \gamma_0 \cos \alpha l_2 \right] - \frac{a}{b_s \gamma_2} A_I \left[\frac{A_c \omega}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \frac{\sin \alpha l_1}{\tan \beta l} + \gamma_0 \cos \alpha l_1 \right] \quad \textcircled{IX}$$

$(A_2 - A_1)$ uit (VIII) invullen in (I) - (III)

$$\theta = + \frac{a}{b_s \gamma_2} A_{III} \left[\frac{A_c \omega \beta}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \frac{\sin \alpha l_2 \sin \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} - \frac{\gamma_0 \beta \cos \alpha l_2 \cos \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} \right] - \frac{a}{b_s \gamma_2} A_I \left[\frac{A_c \omega \beta}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \frac{\sin \alpha l_1 \sin \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} - \frac{\gamma_0 \beta \cos \alpha l_1 \cos \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} \right] \quad (X)$$

$(A_2 + A_1)$ en u invullen in (V)

$$+ A_{III} \left\{ \frac{A_c \omega}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \sin \alpha l_2 \left[\frac{aP}{b_s \gamma_2 \tan \beta l} - \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s}{\beta \gamma_1} \right] + \frac{aP}{b_s \gamma_2} \gamma_0 \cos \alpha l_2 \right\} = - A_I \left\{ \frac{A_c \omega}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \sin \alpha l_1 \left[\frac{aP}{b_s \gamma_2 \tan \beta l} - \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s}{\beta \gamma_1} \right] + \frac{aP \gamma_0}{b_s \gamma_2} \cos \alpha l_1 \right\} \quad (XI)$$

$(A_2 - A_1)$ en θ invullen in (VI)

$$+ A_{III} \left\{ \frac{A_c \omega}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \sin \alpha l_2 \left[\frac{aQ}{b_s \gamma_2} \frac{\beta \sin \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} + \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s l}{\beta \gamma_1} \right] - \left[\frac{aQ}{b_s \gamma_2} \frac{\gamma_0 \beta \cos \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} + \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s \gamma_0}{\beta^2 \gamma_1} \right] \cos \alpha l_2 \right\} = + A_I \left\{ \frac{A_c \omega}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \sin \alpha l_1 \left[\frac{aQ}{b_s \gamma_2} \frac{\beta \sin \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} + \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s l}{\beta \gamma_1} \right] - \left[\frac{aQ}{b_s \gamma_2} \frac{\gamma_0 \beta \cos \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} + \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s \gamma_0}{\beta^2 \gamma_1} \right] \cos \alpha l_1 \right\} \quad (XII)$$

A_I uit (XI) invullen in (IX) en uitwerken geeft:

$$u = \frac{\frac{a}{b_s} \frac{\gamma_0}{\gamma_2} A_{III} \frac{A_c \omega}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s}{\beta \gamma_1} \sin \alpha (l_1 - l_2)}{\left\{ \frac{A_c \omega}{A_s g \beta} \frac{\omega}{\alpha D} \sin \alpha l_1 \left[\frac{aP}{b_s \gamma_2 \tan \beta l} - \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s}{\beta \gamma_1} \right] + \frac{aP \gamma_0}{b_s \gamma_2} \cos \alpha l_1 \right\}}$$

Hierin is :

$$\frac{A_c w}{A_s g \beta} \frac{w}{\alpha D} = \frac{c_c}{c_s} \frac{b_c}{a} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$$

$$P = -(m + \rho e_4 A_w) \omega^2 + \rho g A_w + \frac{4 b_s l \cdot \gamma_3 \rho g b_s}{a}$$

met : $m = \rho A_w h_s$

$$A_w = 4 b_s l$$

$$\therefore P = \rho A_w \left[-(h_s + e_4) \omega^2 + g + \gamma_3 g \frac{b_s}{a} \right]$$

$$\therefore P = \rho g A_w \left[1 - \frac{e_5 \omega^2}{g} + \frac{b_s}{a} \gamma_3 \right] \quad \text{Stel: } e_4 + h_s = e_5$$

$$\text{Stel: } 1 - \frac{e_5 \omega^2}{g} = \gamma_4$$

$$\therefore P = \rho g A_w \left[\gamma_4 + \frac{b_s}{a} \gamma_3 \right]$$

Invullen en delen door $\frac{4 \gamma_3 \rho g b_s}{\beta \gamma_1}$ geeft :

$$\frac{U}{2 A_{III}} = \frac{+ \frac{1}{2} \frac{b_c c_c}{\alpha c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma_2} \cdot \frac{a}{b_s} \cdot \text{tg } \beta l \cdot \sin \alpha (l_1 - l_2)}{\left\{ \frac{b_c c_c}{\alpha c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \sin \alpha l_1 \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} - \text{tg } \beta l \right] + \frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \gamma_0 \text{tg } \beta l \cdot \cos \alpha l_1 \right\}} \quad \text{XIII}$$

A_I uit (XII) invullen in (X) en uitwerken geeft

$$\theta = \frac{- \frac{b_c c_c}{\alpha c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma_2} \frac{a}{b_s} \sin \alpha (l_1 - l_2) \cdot A_{III}}{\left\{ \frac{b_c c_c}{\alpha c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \sin \alpha l_1 \left[\frac{a Q}{b_s \gamma_2} \frac{\beta \sin \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} \cdot \frac{\beta \gamma_1}{4 \gamma_3 \rho g b_s} + l \right] - \left[\frac{a Q}{b_s \gamma_2} \frac{\gamma_0 \beta \cos \beta l}{(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)} \cdot \frac{\beta \gamma_1}{4 \gamma_3 \rho g b_s} + \frac{\gamma_0}{\beta} \right] \cos \alpha l_1 \right\}}$$

Hierin is:

$$Q = -(\gamma_0 + \rho e_4 I_y) \omega^2 + \rho g I_y + \frac{4 \gamma_3 \rho g b_s^2 l^3}{3a}$$

$$\text{met: } I_y = \frac{4 b_s l^3}{3}$$

$$\gamma_0 = \frac{4 b_s l^3}{3} \cdot \rho h_s$$

$$\therefore Q = \rho g I_y \left[\gamma_4 + \frac{b_s}{a} \gamma_3 \right]$$

Invullen geeft:

$$\frac{\partial L}{2A_{III}} = \frac{-\frac{1}{2} \frac{b_c c_c}{a c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma_2} \cdot \frac{a}{b_s} \cdot 3 (\beta l \cos \beta l - \sin \beta l) \cdot \sin \alpha (l_1 - l_2)}{\left\{ \frac{b_c c_c}{a c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \sin \alpha l_1 \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \beta l \sin \beta l + 3 (\beta l \cos \beta l - \sin \beta l) \right] - \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \cdot \gamma_0 \beta l \cos \beta l + \frac{\gamma_0 \cdot 3 (\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)}{\beta l} \right] \cos \alpha l_1 \right\}}$$

(XIV)

Als we A_{III} en A_I elimineren uit (XI) en (XII) vinden we een relatie tussen: ω , l , l_1 , l_2 en de vormfactoren.

Hitwerken en gebruik makend van:

$$P = \rho g \cdot 4 b_s l \cdot \left(\gamma_4 + \frac{b_s}{a} \gamma_3 \right)$$

$$Q = \rho g \cdot 4 b_s l \cdot \frac{l^2}{3} \cdot \left(\gamma_4 + \frac{b_s}{a} \gamma_3 \right)$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha l_1 \cos \alpha l_2 + \cos \alpha l_1 \sin \alpha l_2 &= \sin \alpha (l_1 + l_2) \\ 2 \cos \alpha l_1 \cos \alpha l_2 &= \cos \alpha (l_1 + l_2) + \cos \alpha (l_1 - l_2) \\ -2 \sin \alpha l_1 \sin \alpha l_2 &= \cos \alpha (l_1 + l_2) - \cos \alpha (l_1 - l_2) \end{aligned}$$

vinden we voor de relatie:

$$PR \cos \alpha (l_1 + l_2) + QR \cos \alpha (l_1 - l_2) + RR \sin \alpha (l_1 + l_2) = 0$$

(XV)

In deze relatie is:

$$PR = + \left\{ \left(\frac{b_c c_c}{a c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \right)^2 \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} - \operatorname{tg} \beta l \right] \cdot \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \beta l \sin \beta l \right. \right. \\ \left. \left. + 3(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l) \right] + \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \gamma_0 \operatorname{tg} \beta l \right] \cdot \right. \\ \left. \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \gamma_0 \beta l \cos \beta l + \frac{\gamma_0 \cdot 3(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)}{\beta l} \right] \right\}$$

(termen gelijk aan die van PR)

$$QR = - \left\{ \left(\frac{b_c c_c}{a c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \right)^2 \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} - \operatorname{tg} \beta l \right] \cdot \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \beta l \sin \beta l \right. \right. \\ \left. \left. + 3(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l) \right] + \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \gamma_0 \operatorname{tg} \beta l \right] \cdot \right. \\ \left. \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \gamma_0 \beta l \cos \beta l + \frac{\gamma_0 \cdot 3(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)}{\beta l} \right] \right\}$$

$$RR = - \left(\frac{b_c c_c}{a c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \right) \cdot \left\{ \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \gamma_0 \operatorname{tg} \beta l \right] \cdot \right. \\ \left. \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \beta l \sin \beta l + 3(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l) \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} - \operatorname{tg} \beta l \right] \cdot \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \gamma_0 \beta l \cos \beta l + \frac{\gamma_0 \cdot 3(\beta l \cos \beta l - \sin \beta l)}{\beta l} \right] \right\}$$

Mit (XI) volgt tenslotte nog:

$$\frac{A_I}{A_{III}} = \frac{- \left\{ \frac{b_c c_c}{a c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \sin \alpha l_2 \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} - \operatorname{tg} \beta l \right] + \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \gamma_0 \operatorname{tg} \beta l \right] \cos \alpha l_2 \right\}}{+ \left\{ \frac{b_c c_c}{a c_s} \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \sin \alpha l_1 \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} - \operatorname{tg} \beta l \right] + \left[\frac{\gamma_1 \left(\frac{a}{b_s} \gamma_4 + \gamma_3 \right) \beta l}{\gamma_2 \gamma_3} \gamma_0 \operatorname{tg} \beta l \right] \cos \alpha l_1 \right\}}$$

(XVI)

Met de vergelijkingen $\textcircled{\text{XIII}}$ $\frac{1}{m}$ $\textcircled{\text{XVI}}$ kunnen we nu gaan rekenen.

Vergelijking $\textcircled{\text{XV}}$

$$PR \cos \alpha (l_1 + l_2) + QR \cos \alpha (l_1 - l_2) + RR \sin \alpha (l_1 + l_2) = 0.$$

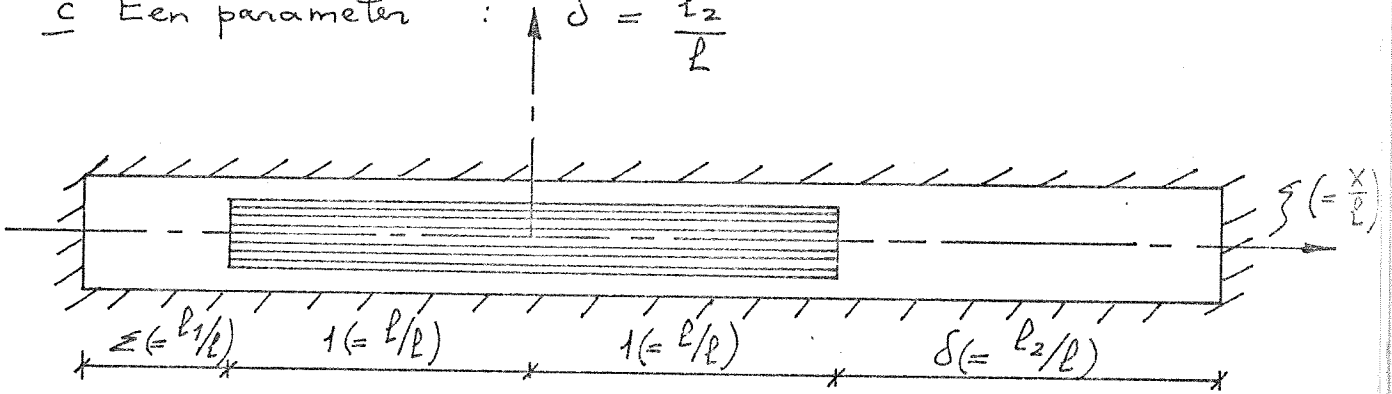
Deze vergelijking kunnen we oplossen, mits gegeven:

a Van de vormfactoren:

$$l/b_s; b_s/a; b_s/h_s; b_s/d;$$

b Een parameter: $p = \frac{\omega l}{c_s}$

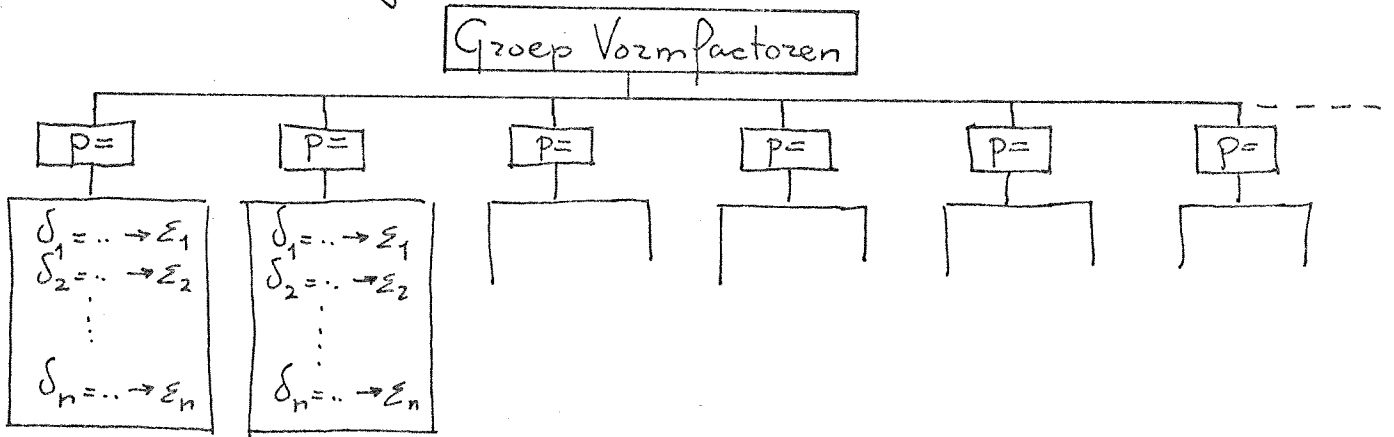
c Een parameter: $\delta = \frac{l_2}{l}$



Bij gegeven vormfactoren en parameter p kunnen we de grootte van PR, QR en RR bepalen.

We kunnen dan bij elke δ een ε bepalen. Bovendien kunnen we elke combinatie van δ en ε uitbreiden door er een $\frac{1}{2}$ golflengte p bij op te tellen. Het systeem verandert hierdoor niet. Het geheel wordt alleen een aantal malen $\frac{1}{2}$ golflengte p langer.

Het berekeningsschema ziet er aldus uit:



Voor een andere groep vormfactoren kunnen we de berekening op dezelfde wijze uitvoeren.

Resultaten Harmonische Berekeningen.

De oplossingen van vergelijking (XV) staan op de grafieken:

$$\textcircled{I} \text{ t/m } \textcircled{V} - 1 - \textcircled{A} \text{ t/m } \textcircled{D}$$

Romeinse cyfer : geeft aan welke groep vormfactoren het betreft.

Cyfer 1 : geeft aan dat het oplossingen van vergelijking (XV) betreft.

Letter : heeft betrekking op de uitbreiding van δ en ε (bij 'n bepaalde p) met $\frac{1}{2}$ golflengte ℓ , zoals hiervoor aangeduid.

Bij : Een bepaalde groep vormfactoren.
Een bepaalde waarde voor p .
Een bepaalde waarde voor δ , waarbij de desbetreffende ε is berekend mbv. vergelijking (XV), kunnen we berekenen uit:

Vergelijking (XIII) : $\frac{L_I}{2A_{III}}$ grafieken (I) t/m (V) - 2

Vergelijking (XIV) : $\frac{\partial \ell}{2A_{III}}$ grafieken (I) t/m (V) - 3

Vergelijking (XVI) : $\frac{A_I}{A_{III}}$ grafieken (I) t/m (V) - 4.

De waarde voor de parameter $p (= \frac{\omega \ell}{c_s})$ is gebonden aan een maximum. [Lit. 1]

Als doel van het onderzoek hebben we ons gesteld te bezien of er combinaties van grootheden zijn waarbij het systeem gaat opslingeren, en zo ja, of deze combinaties te voorspellen zijn.

Uit de grafieken [I-2, II-2, I-3, II-3] blijkt dat er inderdaad grote waarden voorkomen.

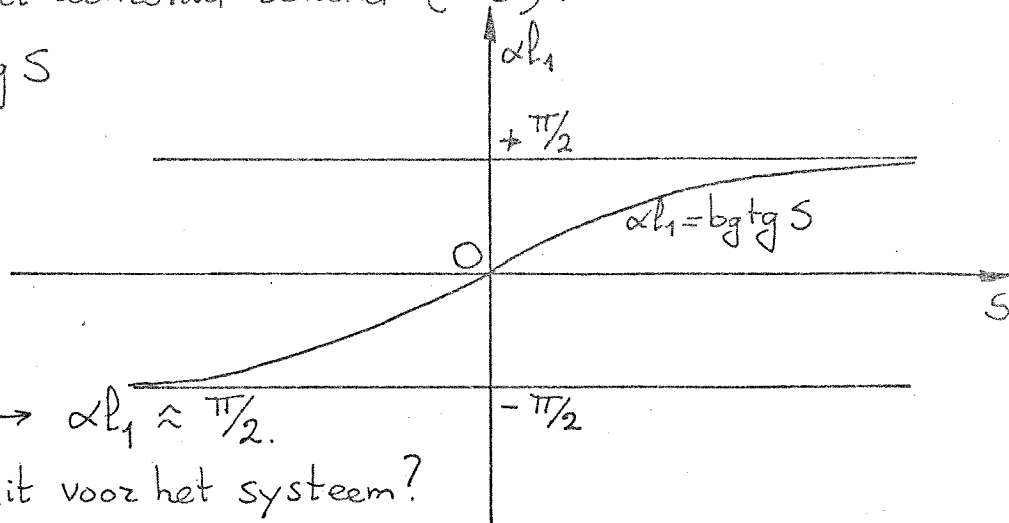
Voor I-2 en I-3 blijken deze grote waarden voor te komen in de buurt van $p = 4$, waarbij we in de relatie tussen δ en ε [I-1 - A t/m D] voor $p = 4$ zien, dat een verandering van δ weinig invloed heeft op de grootte van ε .

We kunnen vergelijking (XV) ook als volgt schrijven:

$$\operatorname{tg} \alpha l_1 = \frac{[(PR - QR) \cos \alpha l_2 - RR \sin \alpha l_2]}{[(PR + QR) \sin \alpha l_2 + RR \cos \alpha l_2]}$$

Bij een bepaalde groep vormfactoren, p en δ , is de grootte van het rechterlid bekend ($=S$).

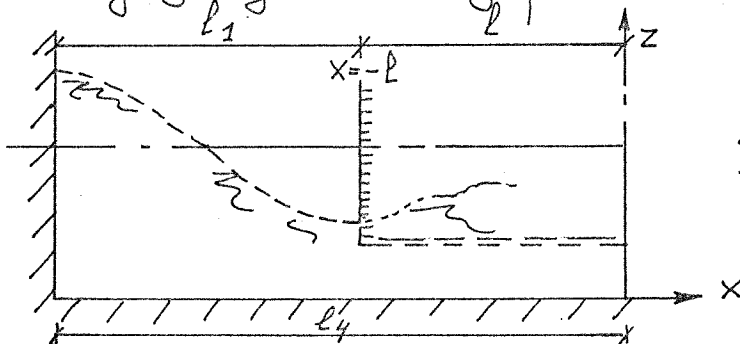
$$\alpha l_1 = \operatorname{bgtg} S$$



Als S groot $\rightarrow \alpha l_1 \approx \pi/2$.

Wat betekent dit voor het systeem?

Vergelijking staande golf in deel I: $\eta_I = 2A_I \cos \alpha(x + l_4)$



$$= 2A_I \cos(\alpha x + \alpha l + \alpha l_1)$$

Er treedt ter plaatse van $x = -l$ een maxima op, als:

$$\cos(\alpha x + \alpha l + \alpha l_1) = \pm 1$$

$$\alpha(-l) + \alpha l + \alpha l_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha l_1 = \frac{\pi}{2}$$

Als $\alpha l_1 = \frac{\pi}{2}$ past er precies een $\frac{1}{2}$ halve golf in deel I, hetgeen mogelijk is van het optreden een oorzaak van de grote waarden.

De moeilijkheid bij een onderzoek naar de mogelijke voorspelling van opslingeringen, bij een bepaalde combinatie van grootheden, is dat de factoren PR , QR en RR uit vergelijking (XV) bijzonder gecompliceerd zijn.

Doordat de tijd voor een uitgebreid systematisch onderzoek ontbreekt is het nog niet mogelijk gebleken een bevredigend antwoord te geven op de vraag of voorspelling van combinaties, waarbij opslingeringen optreden, mogelijk is.

—//—

IV. Algemeen onderzoek naar een numerieke oplossing van het stelsel vergelijkingen.

Hierbij bekijken we eveneens een toestand waarbij het kanaal aan beide zijden is afgesloten, maar waarbij het mogelijk is aan één zijde water in te laten.

We verdelen het kanaal nu niet in drie delen, zoals hiervoor, maar trachten het gehele systeem, van de ene naar de andere zijde, in éénmaal door te rekenen. De wet van behoud van massa en energie t.p.v. boeg en hek gebruiken we hier dus niet.

Uit de basisvergelijking voor de continuïteit volgt:

$$a \frac{\partial H}{\partial t} + b_s \frac{\partial Z}{\partial t} + A_s \frac{\partial V}{\partial x} - h_s \cdot v \cdot \frac{\partial b_s}{\partial x} = 0 \quad (a)$$

met:

$$H = D + \eta$$

$$Z = d + z_s$$

$$A_s = (D + \eta) a + (d + z_s) b_s = H \cdot a + Z \cdot b_s$$

$$h_s = (D + \eta) - (d + z_s) = H - Z$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = - \frac{\partial b_s}{\partial x}$$

De termen met $\frac{\partial H}{\partial x}$ en $\frac{\partial Z}{\partial x}$ zijn verwaarloosd.

De term met $\frac{\partial b_s}{\partial x}$ blijft er in dit geval in aangezien we de overgang t.p.v. hek en boeg geleidelijk willen laten verlopen.

Uit de basisvergelijking voor de beweging volgt:

$$A_s \frac{\partial V}{\partial t} + g A_s \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[e_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + e_2 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + e_3 \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (b)$$

met:

$$e_1 = \frac{a h_s^3}{6} - \frac{b_s^3 Z}{3} + \frac{h_s^2 \cdot Z \cdot b_s}{2}$$

$$e_2 = \frac{a h_s^2}{2} + h_s \cdot Z \cdot b_s$$

$$e_3 = - \frac{b_s^3}{3}$$

Aangezien als zandvoorwaarde aan de einden alleen de snelheid (v) bekend is, moeten we uit de vergelijkingen (a) en (b) de H elimineren.

Hierbij wordt ook naar x gedifferentieerd. De coëfficiënten in de vergelijkingen zijn ook functies van x , zodat er veel termen ontstaan bij volledig uitvoeren van de differentiatie. Bovendien is het aantal variabelen zo groot, dat het probleem eerst sterk wordt vereenvoudigd.

IV-1. Probleem vereenvoudigd tot uitsluitend waterbeweging.

We veronderstellen dat er geen schip in het kanaal ligt, en $\eta \ll D$.

De vergelijkingen (a) en (b) gaan dan over in:

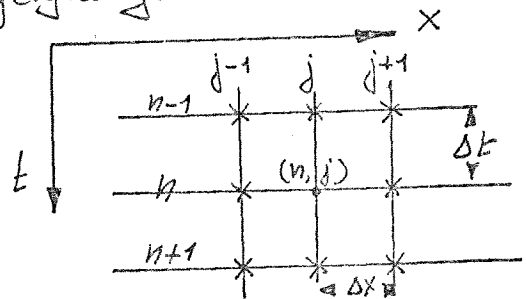
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (a-1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{D^2}{3} \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (b-1)$$

Elimineer η uit (a-1) en (b-1)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - gD \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{D^2}{3} \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (c-1)$$

Deze differentiaalvergelijking kunnen we benaderen met de onderstaande differentievergelijking.



Voor het punt (j)

$$\frac{V_j^{n+1} - 2V_j^n + V_j^{n-1}}{\Delta t^2} - gD \left[\frac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right]$$

$$- \frac{D^2}{3} \left[\frac{(V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}) - 2(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) + (V_{j+1}^{n-1} - 2V_j^{n-1} + V_{j-1}^{n-1})}{\Delta x^2 \cdot \Delta t^2} \right]$$

$$= 0 \quad (d-1)$$

Stabiliteit van het differentieschema.

De stabiliteit van het schema is onderzocht mbv. Fourier-series, waarbij gekeken is of voldaan werd aan de "Von-Neumann Conditie". Deze geeft een nodzakelijke voorwaarde voor stabiliteit [lit. 2 en 3].

Aangezien we hier een "drie-lagen systeem" hebben, wordt dit eerst gereduceerd tot een "twee-lagen systeem", door de volgende relaties in te voeren.

$$V_j^{n-1} = W_j^n \quad \therefore W_j^{n+1} = V_j^n \quad (e)$$

Invullen in (d-1)^a geeft:

$$\frac{V_j^{n+1} - 2V_j^n + W_j^n}{\Delta t^2} - \frac{gD}{2\Delta x^2} \left[(V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}) + (W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n) \right] - \frac{D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \left[(V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}) - 2(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) + (W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n) \right] = 0.$$

We voeren in:

$$V_j^n = \sum_m \int_1^n (m) e^{imj\Delta x}$$

$$W_j^n = \sum_m \int_2^n (m) e^{imj\Delta x}$$

Invullen in (d-1)^a en (e):

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \int_1^{n+1} \frac{e^{imj\Delta x}}{\Delta t^2} - \frac{gD}{2\Delta x^2} \int_1^{n+1} \left(e^{imj^{(n+1)}\Delta x} - 2e^{imj\Delta x} + e^{im(j-1)\Delta x} \right) \\ & - \frac{D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \int_1^{n+1} \cdot Q - \int_1^n \frac{2e^{imj\Delta x}}{\Delta t^2} + \frac{2D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \int_1^n \cdot Q \\ & + \int_2^n \frac{e^{imj\Delta x}}{\Delta t^2} - \frac{gD}{2\Delta x^2} \int_2^n \cdot Q - \frac{D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \int_2^n \cdot Q = 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \int_1^n e^{imj\Delta x} = \int_2^{n+1} e^{imj\Delta x}.$$

Omdat het systeem lineair is mogen we ons beperken tot de mde term.

Stabiliteit in de zin van "Von Neumann-Richtmeyer" betreft wat gebeurt in de limiet $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$

Delen we (1) en (2) door $e^{imj\Delta x}$ dan wordt:

$$Q = e^{im\Delta x} - 2 + e^{-im\Delta x} = 2(\cos m\Delta x - 1)$$

en:

$$(1) \quad AA \cdot \sum_1^{n+1} = BB \cdot \sum_1^n - AA \cdot \sum_2^n$$

$$(2) \quad \sum_2^{n+1} = \sum_1^n$$

met:

$$AA = \frac{1}{\Delta t^2} - \frac{gD}{\Delta x^2} (\cos m\Delta x - 1) - \frac{2D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} (\cos m\Delta x - 1)$$

$$BB = \frac{2}{\Delta t^2} - \frac{4D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} (\cos m\Delta x - 1)$$

We kunnen (1) en (2) ook schrijven als:

$$\begin{bmatrix} AA & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_1^{n+1} \\ \sum_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BB & -AA \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_1^n \\ \sum_2^n \end{bmatrix}$$

of

$$A (\bar{\xi})^{n+1} = B \cdot (\bar{\xi})^n$$

$$(\bar{\xi})^{n+1} = A^{-1} \cdot B (\bar{\xi})^n$$

$$(\bar{\xi})^{n+1} = G \cdot (\bar{\xi})^n$$

De "Von-Neumann conditie" luidt:

$$|\lambda_i| \leq 1 + O(\Delta t)$$

λ_i zijn de eigenwaarden van de matrix G ("amplification matrix")

Wozdt hieraan voldaan, dan is aan de noodzakelijke voorwaande voor stabiliteit voldaan.

$$G = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{AA} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BB & -AA \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{BB}{AA} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De eigenwaarden van G volgen uit:

$$\begin{bmatrix} \frac{BB}{AA} - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} -\lambda \left(\frac{BB}{AA} - \lambda \right) + 1 &= 0 \\ \lambda^2 - \frac{BB}{AA} \lambda + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{BB}{2AA} \pm \sqrt{\left(\frac{BB}{2AA}\right)^2 - 1}$$

Uit de uitdrukkingen voor AA en BB volgt:

$$BB \leq 2AA \quad \therefore \frac{BB}{2AA} \leq 1$$

De term onder het wortelteken is dus negatief of nul.

$$\therefore \lambda_{1,2} = \frac{BB}{2AA} \pm i \sqrt{\left|\left(\frac{BB}{2AA}\right)^2 - 1\right|}$$

Modulus:

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}| &= \sqrt{\left(\frac{BB}{2AA}\right)^2 + \left[\sqrt{\left|\left(\frac{BB}{2AA}\right)^2 - 1\right|}\right]^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{BB}{2AA}\right)^2 + \left|\left(\frac{BB}{2AA}\right)^2 - 1\right|} = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Er is dus altijd voldaan aan de voorwaarde

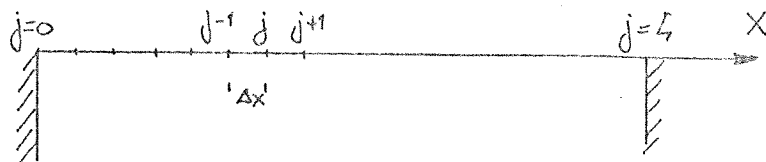
$$|\lambda_i| \leq 1 + o(\Delta t)$$

Het bewijs dat de "Von Neumann - conditie" behalve noodzakelijk ook voldoende is [Lit. 2 en 3] is in dit geval niet zo eenvoudig te leveren en daarom achterwege gelaten.

Er zijn daarom een aantal stapgrootten uitgeprobeerd in het programma, terwijl tevens de verhouding $\Delta x / \Delta t$ gevarieerd is.

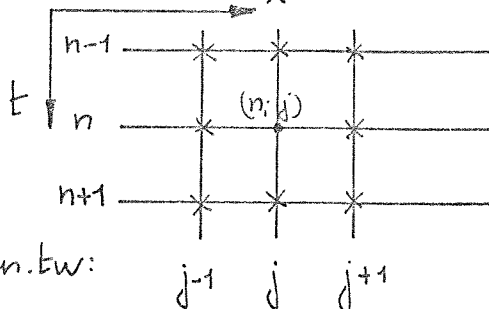
Voorlopig is $\Delta x / \Delta t \approx C (= \sqrt{gD})$ genomen. (Vgl. Karakteristieken)
Het opheffen van instabiliteit is bij het uitproberen van de verschillende stapgrootten nog niet geconstateerd. Zelfs niet bij een waarde voor $\Delta x / \Delta t$ die iets groter was dan C .

Oplossen van het differentieschema.



Als we in x-zichting de zanden leggen op $j=0$ en $j=L$ kunnen we voor $j=1$ t/m $j=L-1$ de differentievergelijking opschrijven.

Op n en $n-1$ veronderstellen we de snelheid v bekend (begintoestand).



De differentievergelijking in een willekeurig punt (n, j) van het net bevat dus drie onbekenden, t.w.:

$$v_{j-1}^{n+1}, v_j^{n+1} \text{ en } v_{j+1}^{n+1}.$$

Evenzo in het volgende punt $(n, j+1)$ de onbekenden:

$$v_j^{n+1}, v_{j+1}^{n+1}, v_{j+2}^{n+1}.$$

Voor elk tijdstip krijgen we een stelsel lineaire vergelijkingen die zich laten schrijven als een tridiagonale matrix.

Schrijven we de differentievergelijking (d-1) uit dan krijgen we:

$$\begin{aligned} & + \left(-\frac{gD}{2\Delta x^2} - \frac{D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \right) v_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{2gD}{2\Delta x^2} + \frac{2D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \right) v_j^{n+1} \\ & + \left(-\frac{gD}{2\Delta x^2} - \frac{D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \right) v_{j+1}^{n+1} = Y_j \end{aligned}$$

met:

$$\begin{aligned} Y_j = & \left(-\frac{2D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \right) v_{j-1}^n + \left(\frac{2}{\Delta t^2} + \frac{4D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \right) v_j^n \\ & + \left(-\frac{2D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \right) v_{j+1}^n + \left(\frac{gD}{2\Delta x^2} + \frac{D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \right) v_{j-1}^{n-1} \\ & + \left(-\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{2gD}{2\Delta x^2} - \frac{2D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \right) v_j^{n-1} + \left(\frac{gD}{2\Delta x^2} + \frac{D^2}{3\Delta x^2 \Delta t^2} \right) v_{j+1}^{n-1} \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen met Δt^2 en stel:

$$\frac{gD \Delta t^2}{\Delta x^2} = A$$

$$\frac{D^2}{3\Delta x^2} = B$$

Oplossen van de tridiagonale matrix.

We hebben als schema $A \cdot \underline{v} = \underline{y}$
 waarbij de matrix A tridiagonaal is.

Om de berekening te kunnen uitvoeren voeren we de
 hulpmatrices P en Q in, zodanig dat $A = P \cdot Q$

$$A \cdot \underline{v} = P \cdot Q \cdot \underline{v} = P \cdot \underline{z} = \underline{y} \quad \text{met} \quad Q \cdot \underline{v} = \underline{z}$$

Als we de uitsplitsing van A in P en Q kennen, kunnen
 we \underline{v} berekenen dmv.

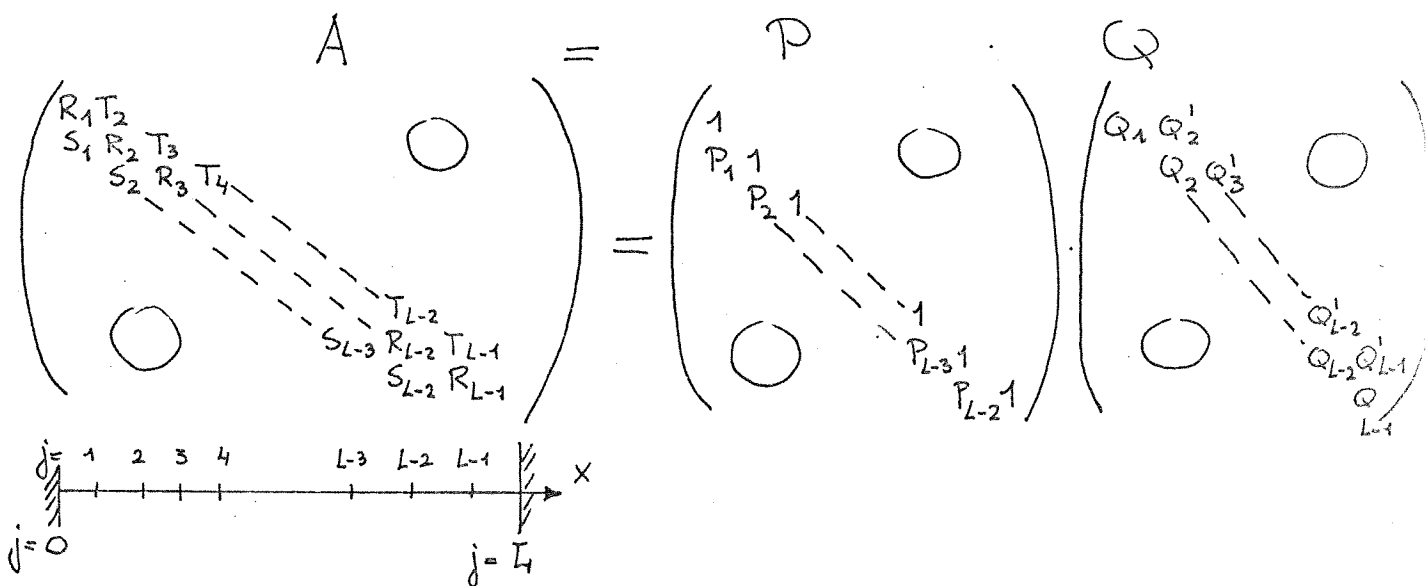
$$\underline{z} = P^{-1} \cdot \underline{y}$$

$$\underline{v} = Q^{-1} \cdot \underline{z}$$

We zullen hier meteen het algemene geval behandelen, dat
 de elementen van de tridiagonale matrix een functie zijn
 van de plaats (j).

$$S_{j-1} \cdot v_{j-1}^{n+1} + R_j \cdot v_j^{n+1} + T_{j+1} \cdot v_{j+1}^{n+1} = y_j$$

De uit-splitsing van A in P en Q kunnen we vinden door
 overeenkomstige elementen uit A en $P \cdot Q$ gelijk te stellen
 volgens onderstaand schema.



$$\left. \begin{array}{l} T_2 = Q_2' \\ T_3 = Q_3' \\ \vdots \\ T_{L-1} = Q_{L-1}' \end{array} \right\} \therefore Q_j' = T_j \quad (\text{voor } j=2 \text{ (1) } L-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = P_1 \cdot Q_1 \\ S_2 = P_2 \cdot Q_2 \\ \vdots \\ S_{L-2} = P_{L-2} \cdot Q_{L-2} \end{array} \right\} \therefore P_j = \frac{S_j}{Q_j} \quad (\text{voor } j = 1(1)L-2)$$

$$R_1 = Q_1$$

$$\left. \begin{array}{l} R_2 = P_1 \cdot Q_2' + Q_2 \\ R_3 = P_2 \cdot Q_3' + Q_3 \\ \vdots \\ R_{L-1} = P_{L-2} \cdot Q_{L-1}' + Q_{L-1} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} Q_j = R_j - P_{j-1} \cdot Q_j' \\ Q_j' = T_j \end{array} \right\} \therefore$$

$$\begin{aligned} Q_j &= R_j - P_{j-1} \cdot T_j \quad (\text{voor } j = 2(1)L-1) \\ Q_{j+1} &= R_{j+1} - P_j \cdot T_{j+1} \quad (\text{voor } j = 1(1)L-2) \end{aligned}$$

P_j en Q_j worden afwisselend berekend, te beginnen met:

$$Q_1 = R_1$$

$$\text{en voor } j = 1(1)L-2 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_j = \frac{S_j}{Q_j} \\ Q_{j+1} = R_{j+1} - P_j \cdot T_{j+1} \end{array} \right.$$

$$P \cdot z = y$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot z_1 = y_1 \\ P_1 \cdot z_1 + z_2 = y_2 \\ P_2 \cdot z_2 + z_3 = y_3 \\ \vdots \\ P_{L-2} \cdot z_{L-2} + z_{L-1} = y_{L-1} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ \text{voor } j &= 2(1)L-1 \\ z_j &= y_j - P_{j-1} \cdot z_{j-1} \end{aligned}$$

$$Q \cdot v = z$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 \cdot v_1 + Q_2' \cdot v_2 = z_1 \\ Q_2 \cdot v_2 + Q_3' \cdot v_3 = z_2 \\ \vdots \\ Q_{L-2} \cdot v_{L-2} + Q_{L-1}' \cdot v_{L-1} = z_{L-2} \\ Q_{L-1} \cdot v_{L-1} = z_{L-1} \end{array} \right\}$$

$$v_{L-1} = \frac{z_{L-1}}{Q_{L-1}}$$

$$v_{L-2} = \frac{z_{L-2} - Q_{L-1}' \cdot v_{L-1}}{Q_{L-2}} \quad (Q_{L-1}' = T_{L-1})$$

$$\text{voor } j = 1(1)L-2$$

$$v_{L-1-j} = \frac{z_{L-1-j} - T_{L-j} \cdot v_{L-j}}{Q_{L-1-j}}$$

Omdat in dit geval de elementen niet afhankelijk zijn van de plaats (j) en bovendien S en T gelijk zijn, kunnen we de formules vereenvoudigen door in te vullen:

$$\left. \begin{aligned} R_j &= R \\ S_j &= T_j = S \end{aligned} \right\} \text{ Voor elke waarde van } j.$$

De snelheden zijn nu in elk punt j op $n+1$ bekend. Met behulp van de continuïteitsvergelijking (a-1)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + D \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \text{ die omgezet wordt in een differentievergelijking is nu de } \eta \text{ in elk punt } j \text{ op } n+1 \text{ te berekenen.}$$

Differentievergelijkingen:

$$\text{Voor } j=0 : \frac{\eta_0^{n+1} - \eta_0^n}{\Delta t} + D \left[\frac{(v_1^{n+1} - v_0^{n+1}) + (v_1^n - v_0^n)}{2 \Delta x} \right] = 0 \quad (\text{Voorwaarts})$$

$$\text{Voor } j=1(1)L-1 : \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + D \left[\frac{(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) + (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)}{4 \Delta x} \right] = 0 \quad (\text{Centraal})$$

$$\text{Voor } j=L : \frac{\eta_L^{n+1} - \eta_L^n}{\Delta t} + D \left[\frac{(v_L^{n+1} - v_{L-1}^{n+1}) + (v_L^n - v_{L-1}^n)}{2 \Delta x} \right] = 0 \quad (\text{Achterwaarts})$$

Samenvatting en opeenvolging van de berekeningen:

- A, B, S en R berekenen
- Y_i berekenen
- Tridiagonale matrix uitwerken \rightarrow snelheden bekend
- Golphoogten bepalen.

In het algemeen zal het aantal tijdstappen zo groot zijn, dat er erg veel geheugenruimte nodig is om alle berekende v 's en η 's op te slaan. Om de vereiste geheugenruimte te beperken voeren we daarom na een aantal stappen in t -richting deze grootheden uit, waardoor er geheugenruimte vrijkomt om de berekening voor een volgend aantal stappen in t -richting voort te zetten.

We moeten er hierbij wel rekening mee houden dat we de berekende snelheden en golphoogten op de twee laatste tijdstippen moeten vasthouden, omdat we die nodig hebben, om, na de uitvoer, de berekening te kunnen voortzetten ("begin"voorwaarden)

Het bij dit geval behorende numerieke programma voldeed goed, en gaf een bevredigend beeld van de golf in het kanaal, bij verschillende waarden van de variabelen. Instabiliteit werd hierbij nergens geconstateerd.

#

IV-2. Probleem vereenvoudigd tot een niet bewegend schip.

De basisvergelijkingen worden nu in zoverre vereenvoudigd dat we veronderstellen dat het schip wel in het kanaal ligt, maar star bevestigd is. Het voert dus geen bewegingen uit. Verder veronderstellen we weer $\eta \ll D$.

Uit de basisvergelijkingen (a) en (b)

$$a \frac{\partial \eta}{\partial t} + A_s \frac{\partial V}{\partial x} - h_s V \frac{\partial b_s}{\partial x} = 0 \quad (a-2)$$

$$\begin{aligned} A_s &= D \cdot a + d \cdot b_s \\ h_s &= D - d \end{aligned}$$

$$A_s \frac{\partial V}{\partial t} + g A_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[e_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + e_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (b-2)$$

$$e_1 = \frac{a h_s^3}{6} - \frac{b_s^3 d}{3} + \frac{h_s^2 d b_c}{2}$$

$$e_2 = \frac{a h_s^2}{2} + h_s d b_c$$

Controle op deze vergelijkingen.

$$\text{Waar geen schip : } \left. \begin{aligned} b_s &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_s &= D \cdot a \\ h_s &= D \end{aligned} \quad \begin{aligned} e_1 &= \frac{a D^3}{6} \\ e_2 &= \frac{a D^2}{2} \end{aligned}$$

Bij invullen:

$$(a-2) \text{ gaat over in (a-1) : } \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$(b-2) \text{ gaat, m.b.v. (a-1), over in (b-1) : } \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{D^2}{3} \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial t} = 0$$

Uit (a-2) en (b-2) moeten we η elimineren.

In A_s , e_1 en e_2 zitten echter grootheden die afhankelijk zijn van de plaats (x). Als we de differentiatie volledig uitvoeren krijgen we hierdoor een zeer groot aantal termen.

Daarom is in eerste instantie gehaacht dit probleem op de volgende manier te onderwerpen.

(b-2) differentieëren naar t:

$$A_s \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + g A_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[e_1 \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} + e_2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \right] = 0$$

(b-1) 2^x naar t:

$$a \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + A_s \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} - h_s \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

(b-1) naar x:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_s \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(h_s v \frac{\partial b_s}{\partial x} \right) = 0.$$

$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t}$ en $\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3}$ elimineren uit de bovenste vergelijking.

$$a A_s \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - g A_s \frac{\partial}{\partial x} \left(A_s \frac{\partial V}{\partial x} \right) + g A_s \frac{\partial}{\partial x} \left(h_s v \frac{\partial b_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[(e_1 a - e_2 A_s) \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[e_2 h_s \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] = 0$$

Schrijven we hiervoor:

$$a A_s \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - g A_s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + g A_s h_s v \frac{\partial^2 b_s}{\partial x^2} + (e_1 a - e_2 A_s) \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} + e_2 h_s \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} = 0$$

en geven we aan de termen voor de differentiaal, in de benadering door de differentievergelijking, de waarde in het punt van de desbetreffende snelheid, dan krijgen we:

$$\text{Stel: } A_j = \frac{g A_s^2(j) \Delta t^2}{\Delta x^2}$$

$$B_j = [e_1(j) \cdot a(j) - e_2(j) \cdot A_s(j)] / \Delta x^2$$

$$C_j = e_2(j) \cdot h_s \cdot \left(\frac{\partial b_s}{\partial x} \right)_j / \Delta x^2$$

$$D_j = g \cdot A_s(j) \cdot h_s \cdot \left(\frac{\partial^2 b_s}{\partial x^2} \right)_j$$

$$S_j = -A_j / 2 + B_j + C_j$$

$$R_j = A_s(j) \cdot a(j) + A_j - 2B_j.$$

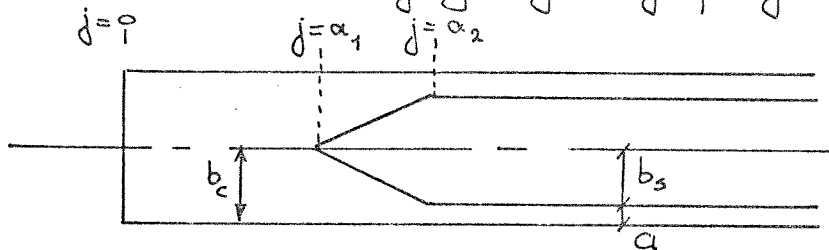
De differentievergelijking wordt:

$$S_{j-1} \cdot v_{j-1}^{n+1} + R_j \cdot v_j^{n+1} + S_{j+1} \cdot v_{j+1}^{n+1} = Y_j$$

$$\text{met: } Y_j = (2B_{j-1} + 2C_{j-1}) \cdot v_{j-1}^n + (2a(j) \cdot A_s(j) - D_j - 4B_j) \cdot v_j^n \\ + (2B_{j+1} + 2C_{j+1}) \cdot v_{j+1}^n - S_{j-1} \cdot v_{j-1}^{n-1} - R_j \cdot v_j^{n-1} - S_{j+1} \cdot v_{j+1}^{n-1}$$

Het schema is dus hetzelfde als bij het hiervoor behandelde geval, zodat de berekening op zich geen moeilijkheden geeft. De elementen van de tridiagonale matrix zijn nu echter een functie van de plaats (j), zodat we de formules van de algemene afleiding moeten gebruiken!

De snelheden (v) zijn dus op $n+1$ weer bekend, waarna mbv. de continuïteitsvergelijking de golphoogten (η) weer te berekenen zijn.



Om de algemene vergelijkingen (a-2) en (b-2) over de gehele lengte van het kanaal (voor $j=0$ t/m L) te kunnen toepassen, moeten deze vergelijkingen ter plaatse van $j = a_1$ automatisch overgaan in de vergelijkingen (a-1) en (b-1), voor het schip (kanaal) zonder

De resultaten van het programma, zoals we die krijgen, als we de differentiatie, bij het elimineren van η , niet volledig uitvoeren, voldoen niet.

Ter plaatse van $j = a_1$ en $j = a_2$ treedt dan namelijk instabiliteit op, die in de tijd steeds sterker wordt. Verkleining van de stapgrootte blijkt geen afdoende verbetering van de resultaten te geven.

Voor het verkrijgen van bevredigende resultaten is het hier gevolgde benaderingsschema dus niet voldoende.

Volledig uitwerken van de continuïteits- en bewegingsvergelijking
by de eliminatie van η .

$$a \frac{\partial \eta}{\partial t} + A_s \frac{\partial v}{\partial x} - h_s v \frac{\partial b_s}{\partial x} = 0 \quad (a-2)$$

$$A_s \frac{\partial v}{\partial t} + g A_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[e_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + e_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (b-2)$$

$$A_s = D \cdot a + d \cdot b_s$$

$$h_s = D - d$$

$$e_1 = \frac{a h_s^3}{6} - \frac{b_s^3 d}{3} + \frac{h_s^2 d b_c}{2}$$

$$e_2 = \frac{a h_s^2}{2} + h_s d b_c$$

(b-2) naar t:

$$A_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g A_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[e_1 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} + e_2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \right] = 0 \quad (1)$$

(a-2) 2^x naar t:

$$a \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + A_s \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - h_s \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

(a-2) naar x:

$$\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} + a \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial A_s}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + A_s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - h_s \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial b_s}{\partial x} - h_s v \frac{\partial^2 b_s}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial A_s}{\partial x} = D \frac{\partial a}{\partial x} + d \frac{\partial b_s}{\partial x} = -D \frac{\partial b_s}{\partial x} + d \frac{\partial b_s}{\partial x} = -h_s \frac{\partial b_s}{\partial x}$$

$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3}$, $\frac{\partial A_s}{\partial x}$ en $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ invullen geeft voor (1):

$$A_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g \frac{A_s^2}{a^2} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - g \frac{A_s h_s}{a^2} v \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + 2g \frac{A_s h_s}{a} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial b_s}{\partial x} - g \frac{A_s^2}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g \frac{A_s h_s}{a} v \frac{\partial^2 b_s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(e_1 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{e_2 A_s}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} + \frac{e_2 h_s}{a} \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (2)$$

Verder uitwerken:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[e_1 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \right] = e_1 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial e_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial x} = \frac{h_s^3}{a} \frac{\partial a}{\partial x} - b_s^2 d \frac{\partial b_s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e_2 A_s}{a} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} \right] = \frac{e_2 A_s}{a} \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial e_2}{\partial x} \frac{A_s}{a} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial A_s}{\partial x} \frac{e_2}{a} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} + \left(-\frac{1}{a^2} \frac{\partial a}{\partial x} e_2 A_s \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} \right)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial x} = \frac{h_s^2}{2} \frac{\partial a}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e_2 h_s}{a} \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] = \frac{e_2 h_s}{a} \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} + \frac{e_2 h_s}{a} \frac{\partial^2 b_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial e_2}{\partial x} \frac{h_s}{a} \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \left(-\frac{1}{a^2} \frac{\partial a}{\partial x} e_2 h_s \frac{\partial b_s}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right)$$

Invullen in (2) en uitwerken geeft:

$$\frac{g A_s h_s}{a} \left(\frac{\partial^2 b_s}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \left[\frac{\partial b_s}{\partial x} \right]^2 \right) \cdot V + \frac{g A_s}{a} \frac{\partial b_s}{\partial x} \left(2 h_s - \frac{A_s}{a} \right) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{g A_s^2}{a} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{5 h_s^3}{6} - b_s^2 d + \frac{2 h_s^2 d b_c}{a} - \frac{A_s h_s d b_c}{a^2} \right) \left(\frac{\partial b_s}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} + \left(e_1 - \frac{e_2 A_s}{a} \right) \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3)$$

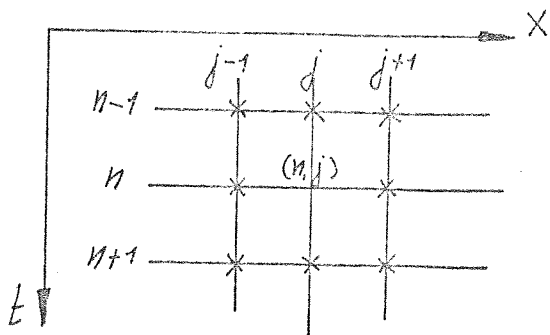
In hoeverre in vergelijking (3) nog bepaalde termen kunnen worden verwaarloosd, mede met het oog op het feit dat we het systeem hebben gelineariseerd, is nog niet onderzocht. De vergelijking is echter ook zonder deze, misschien mogelijke, verwaarloosbare termen oplosbaar.

In ieder geval blijkt hier duidelijk dat we, om de vergelijkingen in een keer over de gehele lengte van het kanaal te kunnen toepassen, ter plaatse van boeghek van het schip, een groot aantal termen moeten meenemen in de berekening. Namelijk alle termen met $\frac{\partial b_s}{\partial x}$, $\left(\frac{\partial b_s}{\partial x} \right)^2$ en $\frac{\partial^2 b_s}{\partial x^2}$.

Schrijven we voor (3):

$$A V + B \frac{\partial V}{\partial x} + C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + E \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} + F \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} = 0$$

Dan kunnen we de volgende differentie vergelijking opstellen in het punt $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$.



$$\begin{aligned}
 & A_j \left[\frac{v_j^{n+1} + v_j^{n-1}}{2 \Delta t} \right] + B_j \left[\frac{(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) + (v_{j+1}^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{4 \Delta x} \right] \\
 & + C_j \left[\frac{(v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) + (v_{j+1}^{n-1} - 2v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1})}{2 \Delta x^2} \right] \\
 & + D_j \left[\frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right] + E_j \left[\frac{(v_{j+1}^{n+1} - 2v_{j+1}^n + v_{j+1}^{n-1}) + (v_{j-1}^{n+1} - 2v_{j-1}^n + v_{j-1}^{n-1})}{2 \Delta x \Delta t^2} \right] \\
 & + F_j \left[\frac{(v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) - 2(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + (v_{j+1}^{n-1} - 2v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t^2} \right] = 0
 \end{aligned}$$

A t/m F moeten in de punten $j=1$ t/m $L-1$ berekend worden.

De differentievergelijking kunnen we weer schrijven in de algemene vorm:

$$S \cdot v_{j+1}^{n+1} + R v_j^{n+1} + T v_{j-1}^{n+1} = Y_j$$

Waarin S, R en T bekend zijn, maar afhankelijk van de plaats (j), en Y het bekende deel van de differentievergelijking omvat.

By volledig uitdifferentiëren van de vergelijkingen (a-2) en (b-2), om de Y_j hieruit te elimineren, is het systeem dus op gelijke wijze oplosbaar, alleen wordt het aantal termen groter.

De vraag, of er in dit geval geen instabiliteit optreedt, kan hier niet beantwoord worden, aangezien er voor dit geval in deze vorm geen programma meer is gemaakt.

—//—

IV-3. Probleem niet vereenvoudigd.

Hierbij worden de basisvergelijkingen (a) en (b) niet vereenvoudigd, zodat we de volledige oplossing van het systeem zachten te vinden.

Door het optreden van instabiliteit bij boeg en hek van het schip in IV-2, waarbij het schip nog vastlag, is het numerieke programma voor dit deel niet klaargekomen. Verwacht moet worden dat, voor het elimineren van H (eventueel) evenals bij IV-2 alle grootheden volledig uitgedifferentieerd moeten worden.

Aangezien het programma voor dit gedeelte niet is klaargekomen, volgt hier verder uitsluitend een mogelijke gedachtengang om het probleem op te lossen, en een aantal opmerkingen over bepaalde problemen die hierbij een rol spelen.

In dit geval moeten we er rekening mee houden dat, zoals bijvoorbeeld bij het vullen van een sluiskolk, de golf een aantal malen heen en weer moet lopen. De waterstand (D) en de positie van het schip (d) nemen dus toe.

Rekenen we met $H (= D + \eta)$ en $Z (= d + z_s)$ dan ondervangen we dit probleem, maar dit betekent dat A_s en h_s in elke tijdstap ook veranderen, zodat we alle factoren die hier van afhankelijk zijn (bv. e_1 , e_2 en e_3) in elke tijdstap opnieuw moeten berekenen.

Een mogelijk compromis hiervoor zou kunnen zijn, dat we de grootte van D en d aanpassen, telkens als de golf een uiteinde van het kanaal bereikt, en dat we blijven rekenen met η en z_s .

De vergelijkingen zijn in dat geval:

$$a \frac{\partial \eta}{\partial t} + b_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + A_s \frac{\partial v}{\partial x} - h_s v \frac{\partial b_s}{\partial x} = 0 \quad (a-3)$$

$$A_s \frac{\partial v}{\partial t} + g A_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[e_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + e_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + e_3 \frac{\partial^2 z_s}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (b-3)$$

$$A_s = D a + d \cdot b_s$$

$$h_s = D - d$$

$$e_1 = \frac{a h_s^3}{6} - \frac{b_s^3 d}{3} + \frac{h_s^2 d b_c}{2}$$

$$e_2 = \frac{a h_s^2}{2} + h_s d b_c$$

$$e_3 = -\frac{b_s^3}{3}$$

Waarbij D en d telkens na een bepaalde tijd moeten worden aangepast.

Elimineren we η uit (a-3) en (b-3) dan krijgen we vergelijking (3) bij IV-2, waarbij nog een aantal extra termen verschijnen met:

$$\frac{\partial z_s}{\partial t}, \frac{\partial^2 z_s}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^3 z_s}{\partial t^3} \text{ en } \frac{\partial^4 z_s}{\partial x \partial t^3}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{g A_s h_s}{a} \left[\frac{\partial^2 b_s}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial b_s}{\partial x} \right)^2 \right] \cdot V + \frac{g A_s}{a} \frac{\partial b_s}{\partial x} \left(2h_s - \frac{A_s}{a} \right) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \\ & - \frac{g A_s^2}{a} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{5h_s^3}{6} - b_s^2 d + \frac{2h_s^2 d b_c}{a} - \frac{A_s h_s d b_c}{a^2} \right) \left(\frac{\partial b_s}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial t^2} \\ & + \left(A_s + \frac{e_2 h_s}{a} \frac{\partial^2 b_s}{\partial x^2} + \frac{h_s^2 d b_c}{a^2} \left[\frac{\partial b_s}{\partial x} \right]^2 \right) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ & + \left(e_1 - \frac{e_2 A_s}{a} \right) \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & - \frac{g A_s}{a} \left(\frac{b_s}{a} - 1 \right) \left(\frac{\partial b_s}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial z_s}{\partial t} - \frac{g A_s \cdot b_s}{a} \cdot \frac{\partial^2 z_s}{\partial x \partial t} \\ & - \left(\frac{h_s^2}{2} + b_s^2 + \frac{h_s d b_c}{a} + \frac{b_s h_s d b_c}{a^2} \right) \left(\frac{\partial b_s}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial^3 z_s}{\partial t^3} \\ & + \left(e_3 - \frac{e_2 b_s}{a} \right) \cdot \frac{\partial^4 z_s}{\partial x \partial t^3} = 0. \end{aligned}$$

Om de snelheden op $n+1$ te kunnen berekenen moeten we voor de grootte van z_s op $n+1$ eerst een schatting maken. De grootte van deze termen is dan bekend en kan worden opgenomen in het bekende deel (V) van de differentievergelijking.

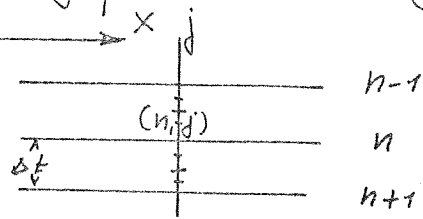
Hebben we op deze manier de snelheden op $n+1$ bepaald, dan kunnen we met behulp van de continuïteitsvergelijking (a-3) de golphoogten op $n+1$ berekenen. Door de berekende V en η op $n+1$ invullen in de clomp- en stampvergelijking, kunnen we de hierbij behorende z_s op $n+1$ bepalen. Deze zal in het algemeen afwijken van de eerste schatting.

Daarom vullen we de berekende ~~bekende~~ waarde voor z_s in als tweede schatting, en berekenen de snelheden, en met behulp hiervan de golphoogten, op $n+1$ opnieuw.

Dit proces herhalen we tot de snelheden, golphoogten en uitwijking van het schip op $n+1$ voldoende op elkaar zijn ingesteld (Iteratie proces).

In de vergelijking komen de termen $\frac{\partial^4 z_s}{\partial x \partial t^3}$ en $\frac{\partial^3 z_s}{\partial t^3}$ voor.

We werken in het differentie schema met een "drie-lagen systeem" zodat we voor $\frac{\partial^3 z_s}{\partial t^3}$ een benaderingsformule moeten gebruiken



$$\left(\frac{\partial^3 z_s}{\partial t^3}\right)_j^n = \frac{\left(\frac{\partial^2 z_s}{\partial t^2}\right)_j^{n+1/4} - \left(\frac{\partial^2 z_s}{\partial t^2}\right)_j^{n-1/4}}{\Delta t/2} =$$

$$\left[\frac{\left(\frac{\partial z_s}{\partial t}\right)_j^{n+1/2} - \left(\frac{\partial z_s}{\partial t}\right)_j^n}{\Delta t/2} - \frac{\left(\frac{\partial z_s}{\partial t}\right)_j^n - \left(\frac{\partial z_s}{\partial t}\right)_j^{n-1/2}}{\Delta t/2} \right] =$$

$$\frac{\left(\frac{z_s^{n+1} - z_s^n}{\Delta t}\right)_j - 2 \cdot \left(\frac{\partial z_s}{\partial t}\right)_j^n + \left(\frac{z_s^n - z_s^{n-1}}{\Delta t}\right)_j}{\Delta t^2/4} =$$

$$\frac{4 \left(z_s^{n+1}_j - 2 \left(\frac{\partial z_s}{\partial t}\right)_j^n \cdot \Delta t - z_s^{n-1}_j \right)}{\Delta t^3}$$

Aangezien op n en $n-1$ alle grootheden bekend zijn, kunnen we met behulp van de continuïteitsvergelijking (a-3)

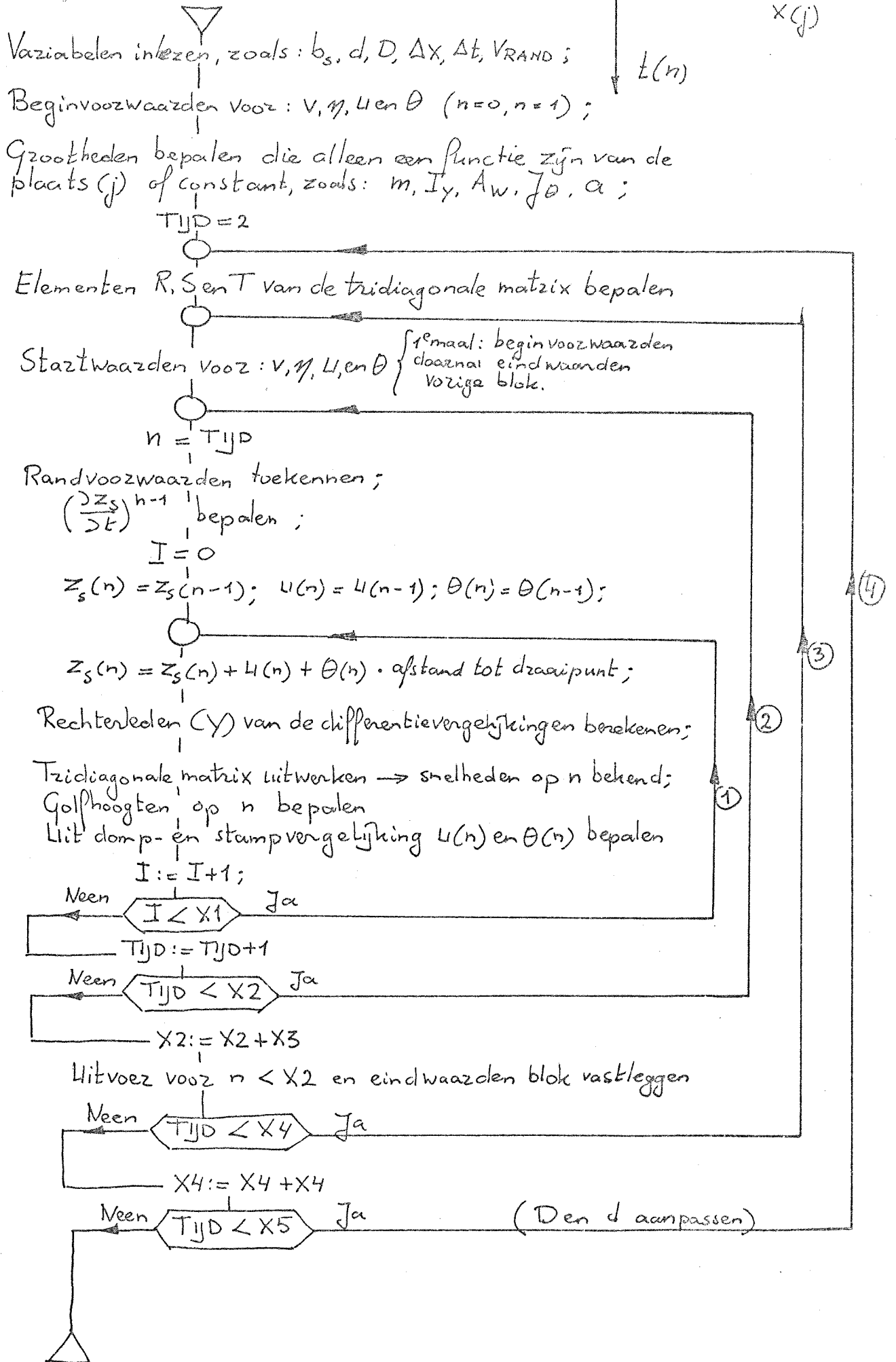
$\frac{\partial z_s}{\partial t}$ op n berekenen.

Stapgrootte:

X-richting (Δx): Hierbij speelt de vorm van het schip ten plaatse van boeg en hek een overheersende rol. De vorm van het schip moet in voldoende mate benaderd kunnen worden.

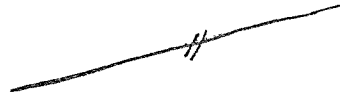
t-richting (Δt): De vultzomme (V_{rand} voor $j=0$) moet goed benaderd kunnen worden. Tevens speelt de grootte van Δt een rol bij het iteratieproces tussen de waterbegeging en de scheepsbewegingen. De grootte van Δt zal van invloed zijn op het aantal benodigde iteraties.

Het stroomdiagram van het programma zal er in grote lijnen als volgt uitzien:



Opmerkingen bij het stroomdiagram:

- Lus ①: bewerkt het interactieproces tussen de waterbeweging en de scheepsbeweging.
- Lus ②: bewerkt de berekening van opeenvolgende tijdstappen.
- Lus ③: zorgt ervoor dat de berekening in de tijd, uiteenvalt in een aantal "tijdsblokken". Aan het einde van een blok wordt uitvoer gegeven, waardoor weer geheugenruimte vrijkomt. De eindwaarden van het blok, op de twee laatste berekende tijdstippen, dienen als startwaarden voor het volgende blok, en moeten dus tijdelijk in het geheugen blijven.
- Lus ④: zorgt ervoor dat de waterdiepte (D) en de positie van het schip ten opzichte van de bodem (d) aangepast worden na een bepaalde tijd. Voor deze tijd kunnen we bijvoorbeeld de tijd nemen die de golf nodig heeft om van het ene einde, naar het andere einde van het kanaal te lopen.



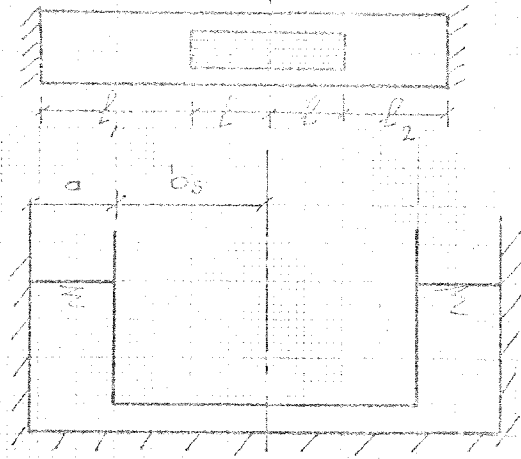
Literatuur:

- [1] J.P.Th. Kalkwijk.
E. Kzanenburg.
Heaving and Pitching of a ship in a narrow channel
(T.H. Delft)
- [2] R.D. Richtmyer.
Difference methods for initial value problems.
(N.Y. Interscience 1957)
- [3] G.S. Rodenhuis.
The undular hydraulic jump.
(International Courses
Hydraulic and Sanitary
Engineering.
Report Series No. 1. 1960)

(I) $\begin{cases} d/b_s = 5.5 \\ b_s/d = 1.8 \\ b_s/h_s = 1.25 \\ b_s/d = 5.38 \end{cases}$

$\varepsilon = \frac{l_1}{l}$

h_s
 d



$\delta = \frac{l_2}{l}$

$P = \frac{\omega l}{c_s}$

$\frac{1}{2}$ GOLFLÄNGE $\frac{l}{l}$

2.0

1.3176

2.5

1.0358

3.0

0.8443

3.5

0.7040

4.0

0.5956

5.0

0.4347

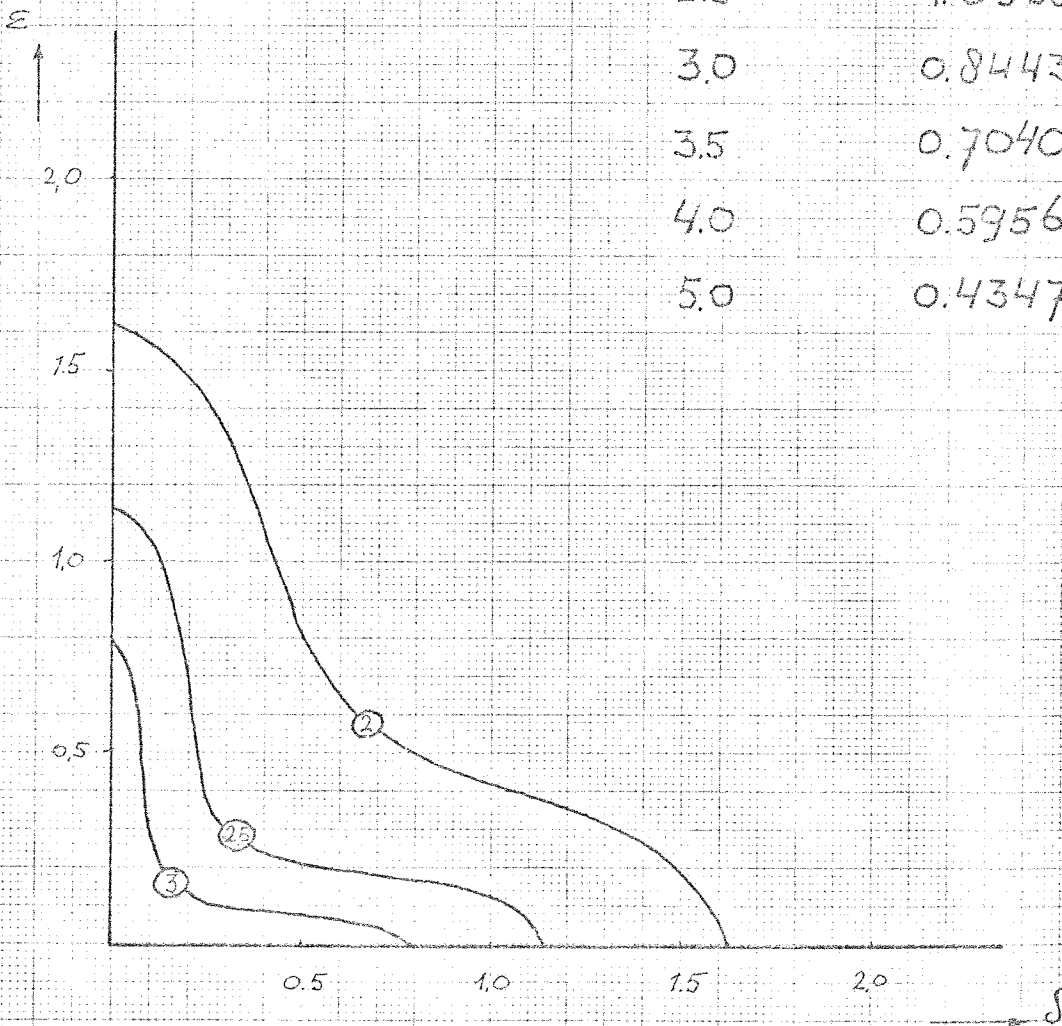


FIG. I-1-A

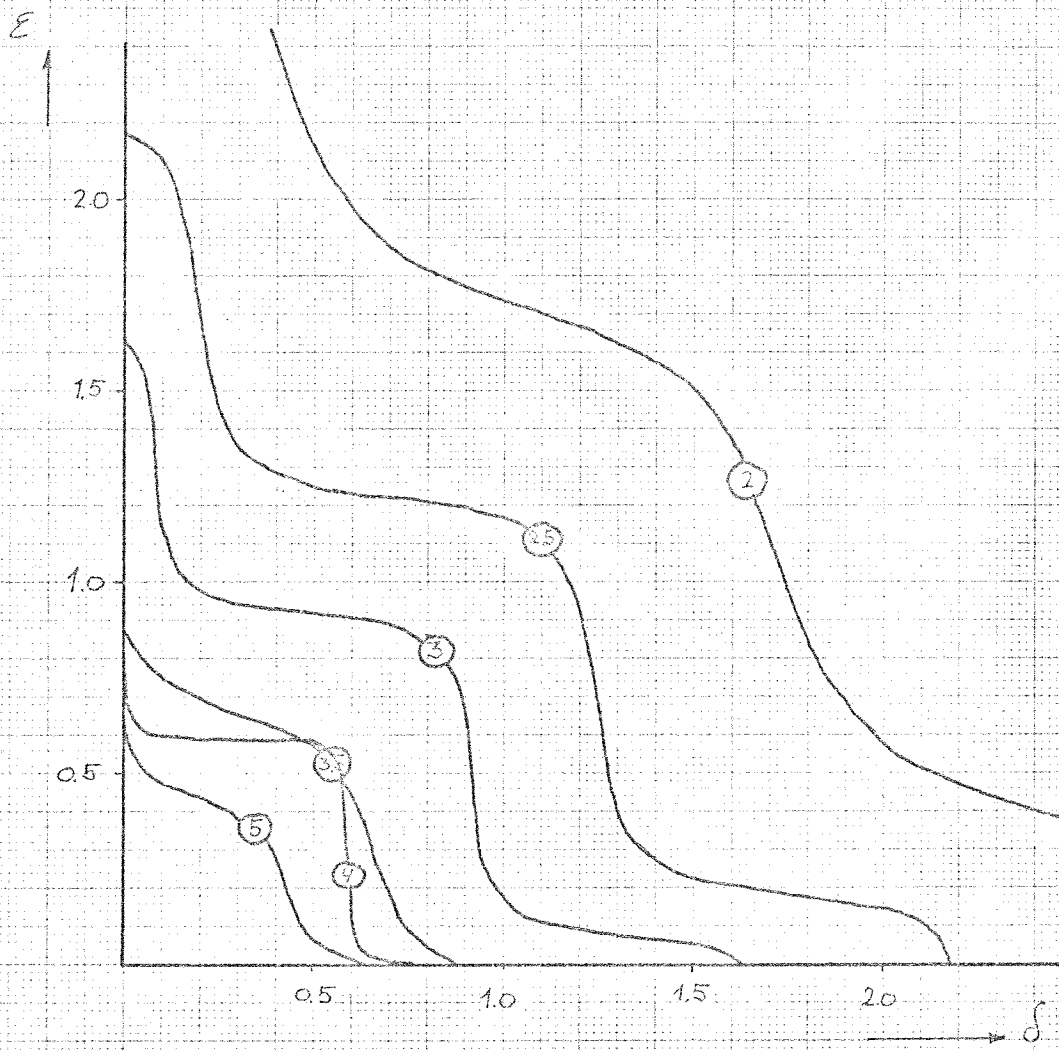


FIG. I-1-B

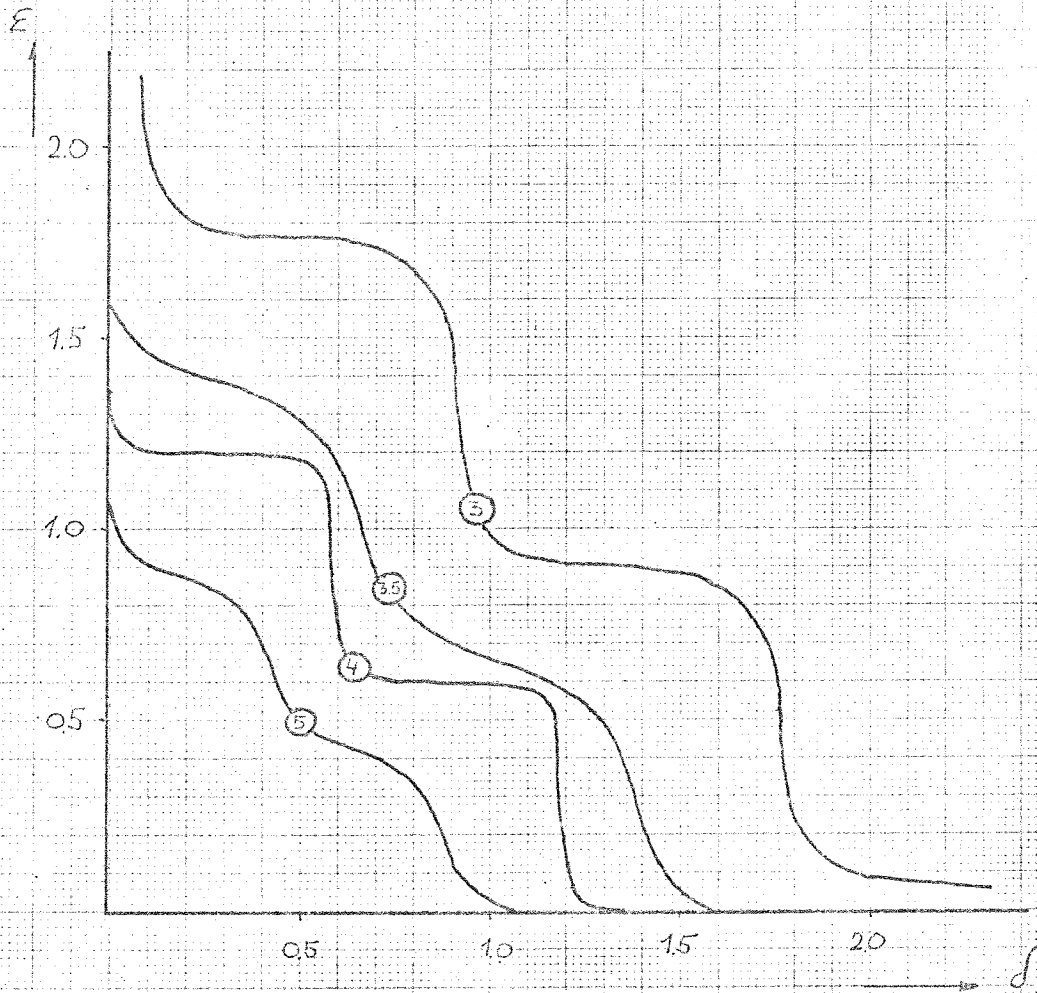


FIG. I-1-C

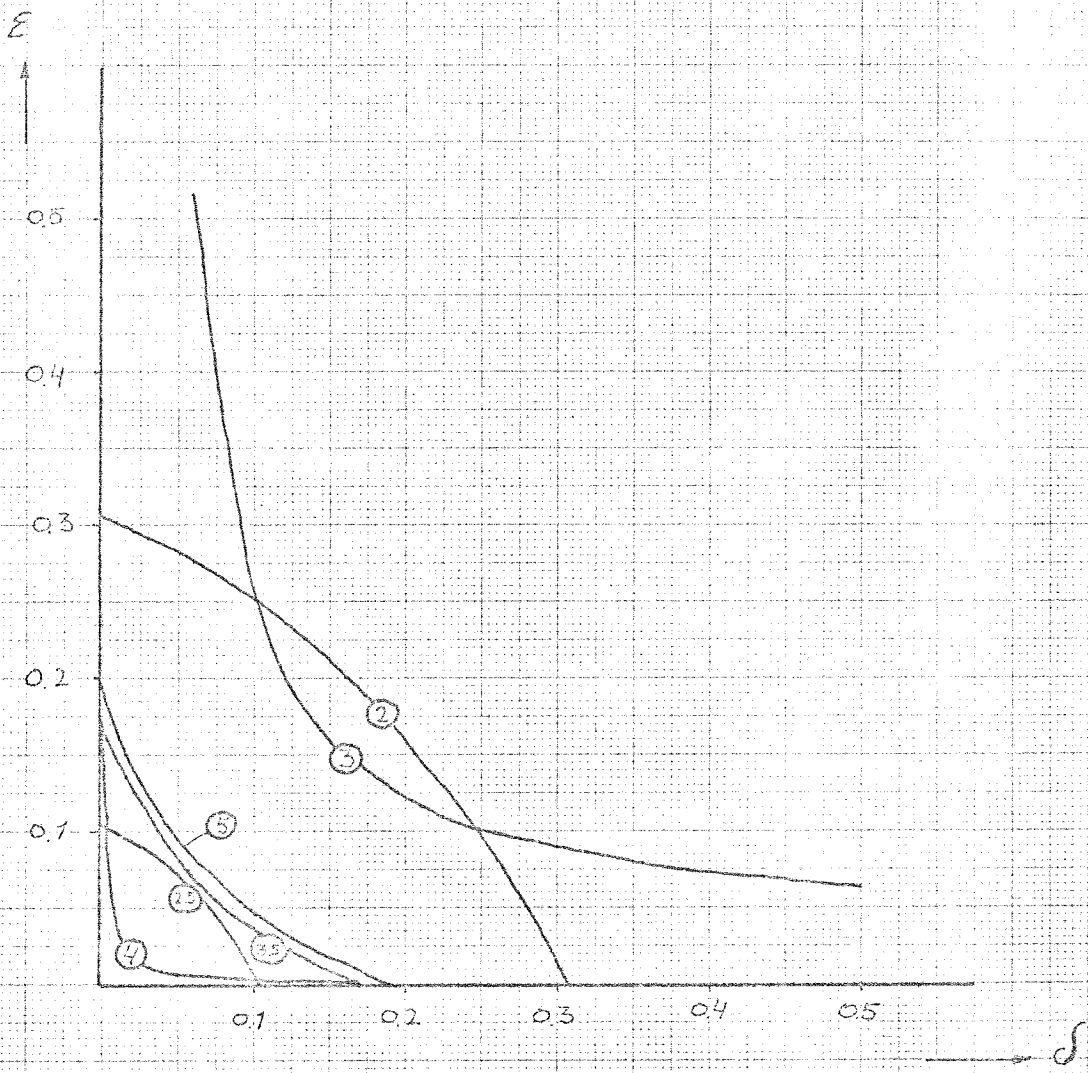
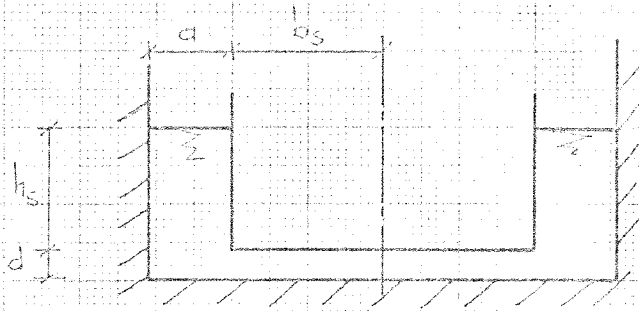


FIG. I-1-D

(II) $\left\{ \begin{array}{l} d/b_s = 7.0 \\ b_s/d = 1.8 \\ b_s/h_s = 1.25 \\ b_s/d = 5.38 \end{array} \right.$



$$p = \frac{\omega p}{c_s}$$

$\frac{1}{2}$ GOLFLENGTE / ℓ

2.0	1.3328
2.5	1.0552
3.0	0.8679
3.5	0.7322
4.0	0.5956
5.0	0.4347

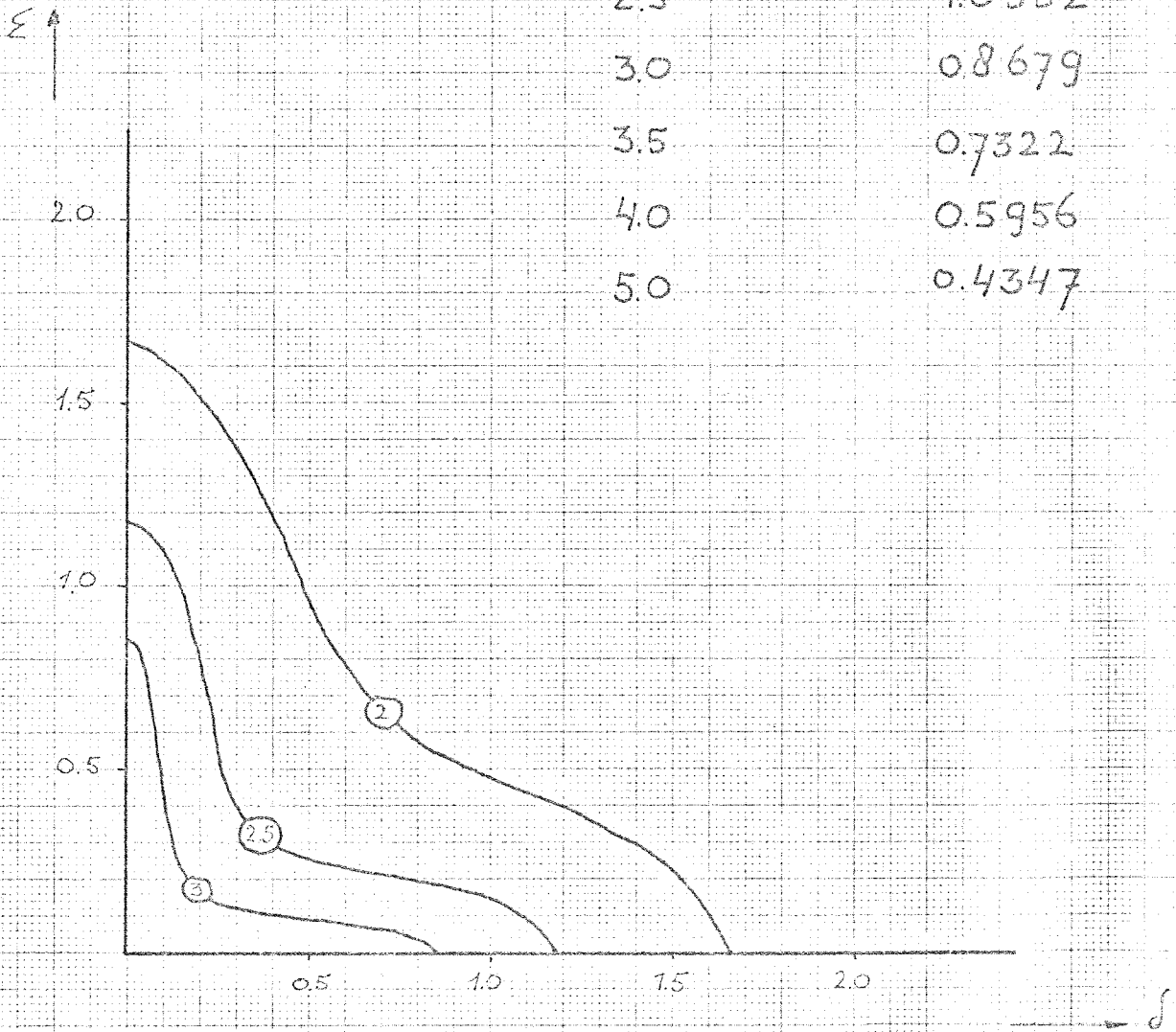


FIG. II-1-A

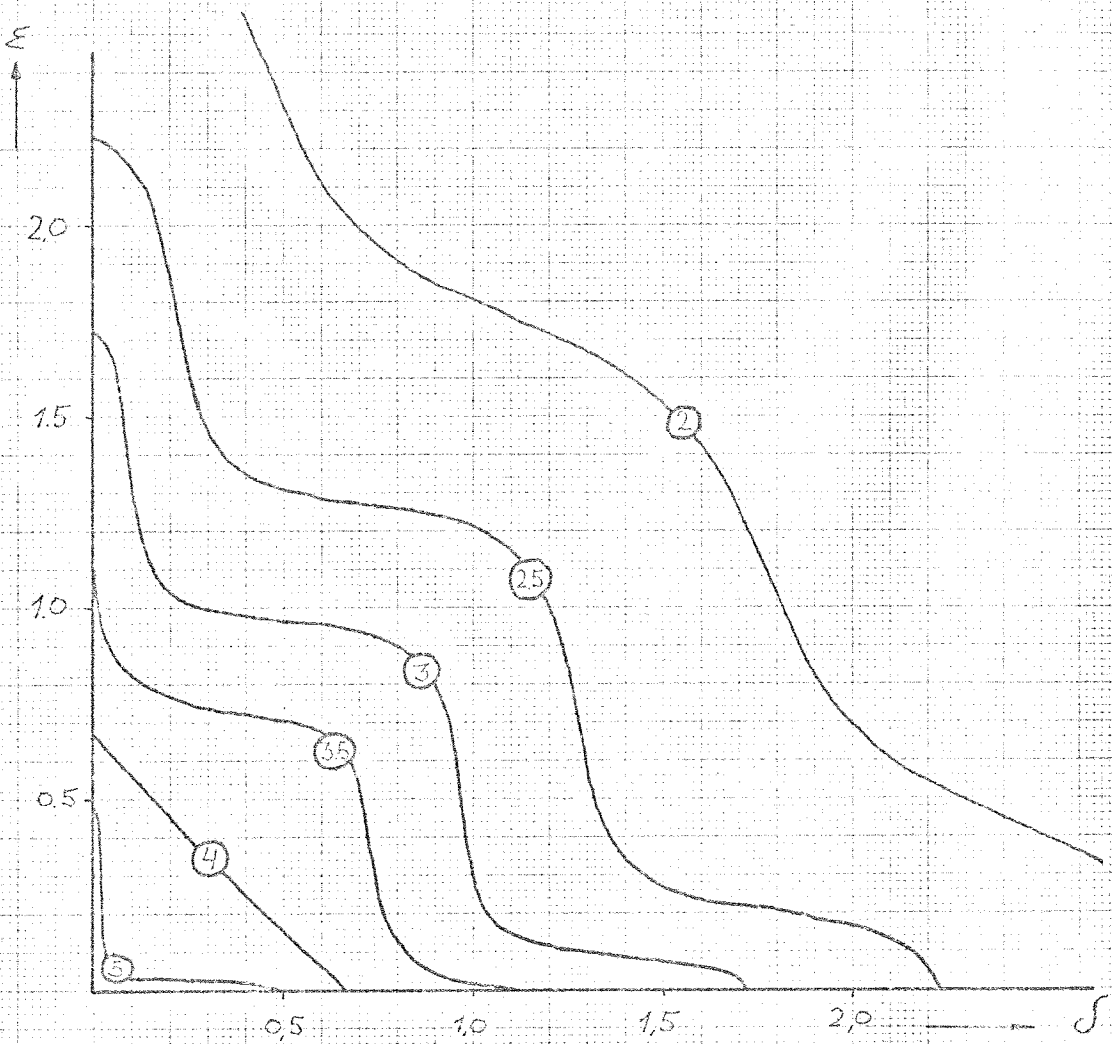


FIG. II-1-B

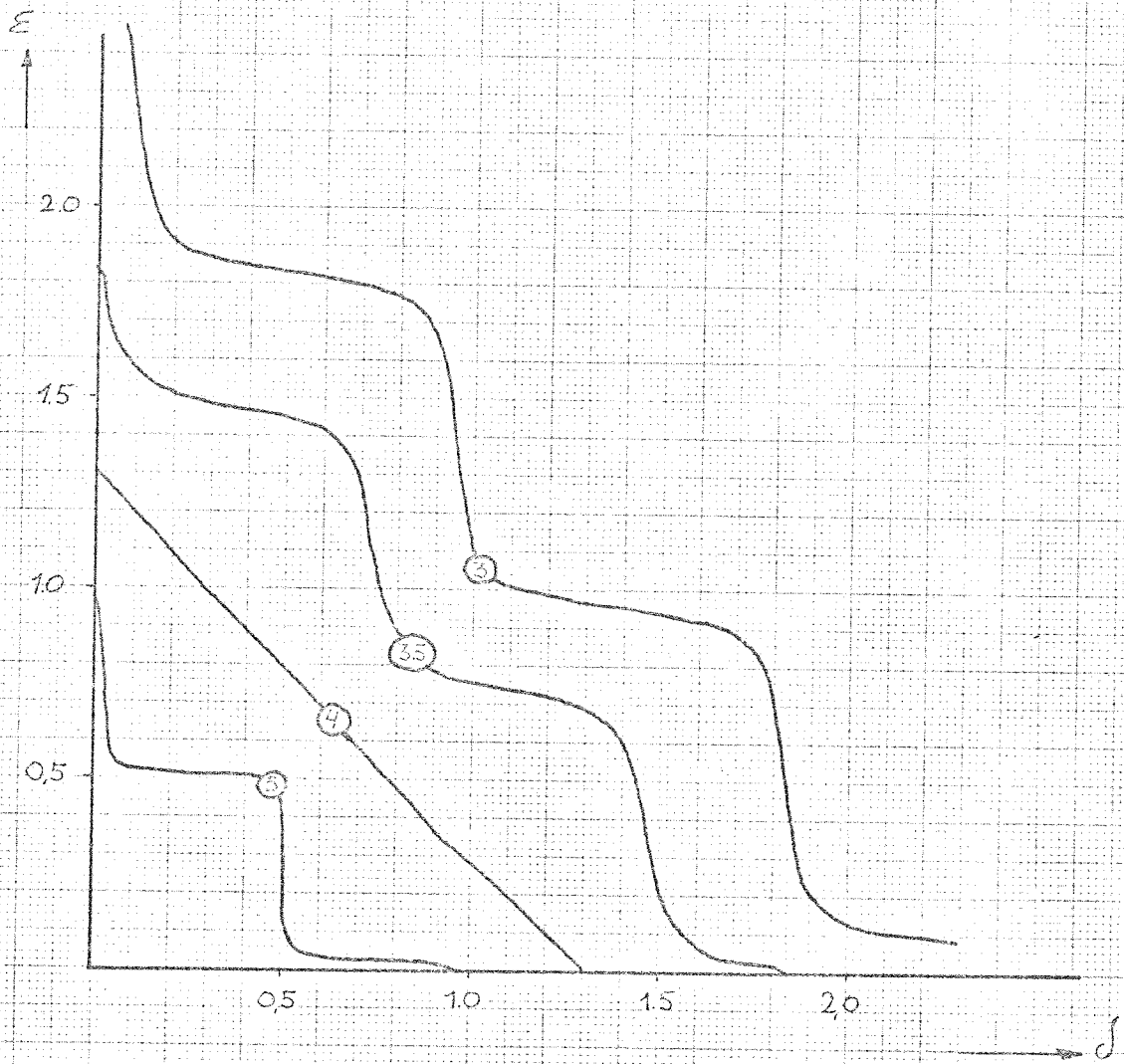


FIG. II-1-C

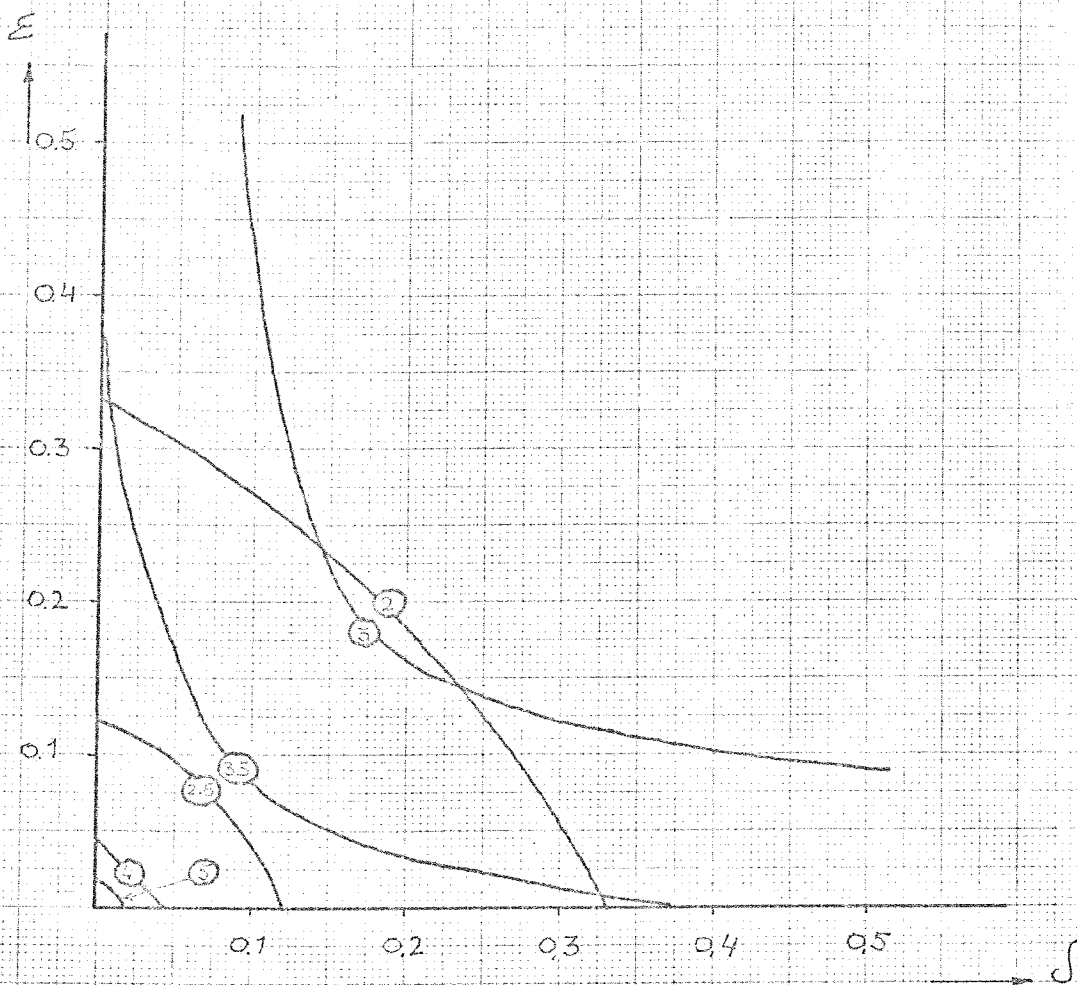
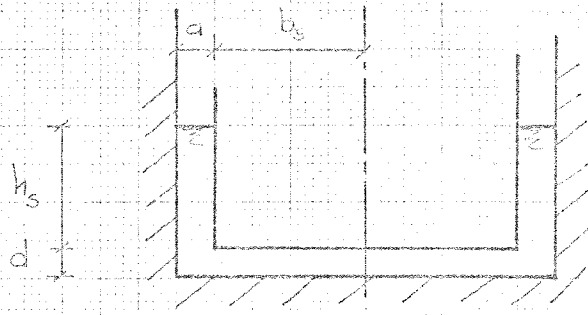


FIG. II-1-D

III

$$\left\{ \begin{array}{l} p/b_s = 5.5 \\ b/a = 40 \\ b_s/h_s = 1.25 \\ b_s/d = 5.38 \end{array} \right.$$



$$p = \frac{w l^3}{c_s} \quad \frac{1}{2} \text{ GOLFLÄNGTE } / l$$

2.0	1.1403
2.5	0.8912
3.0	0.7206
3.5	0.5945
4.0	0.4958
5.0	0.3453

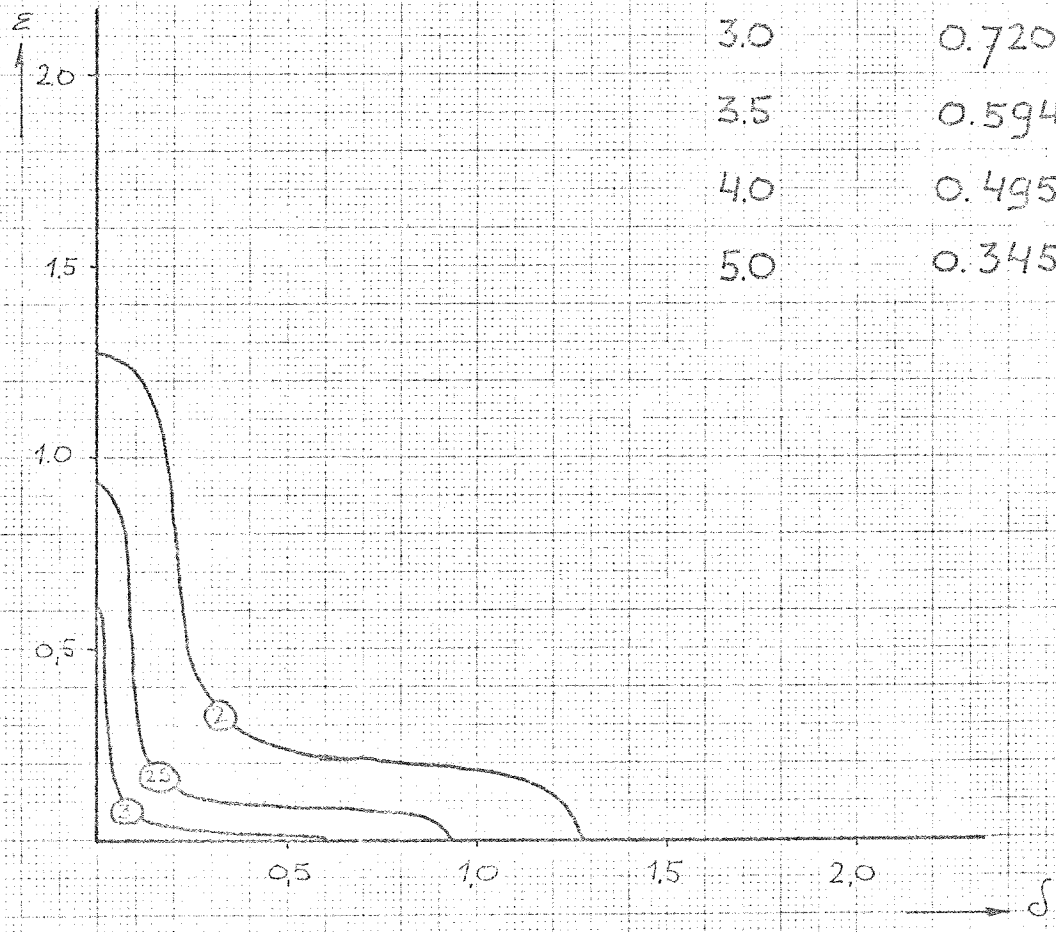


FIG. III-1-A

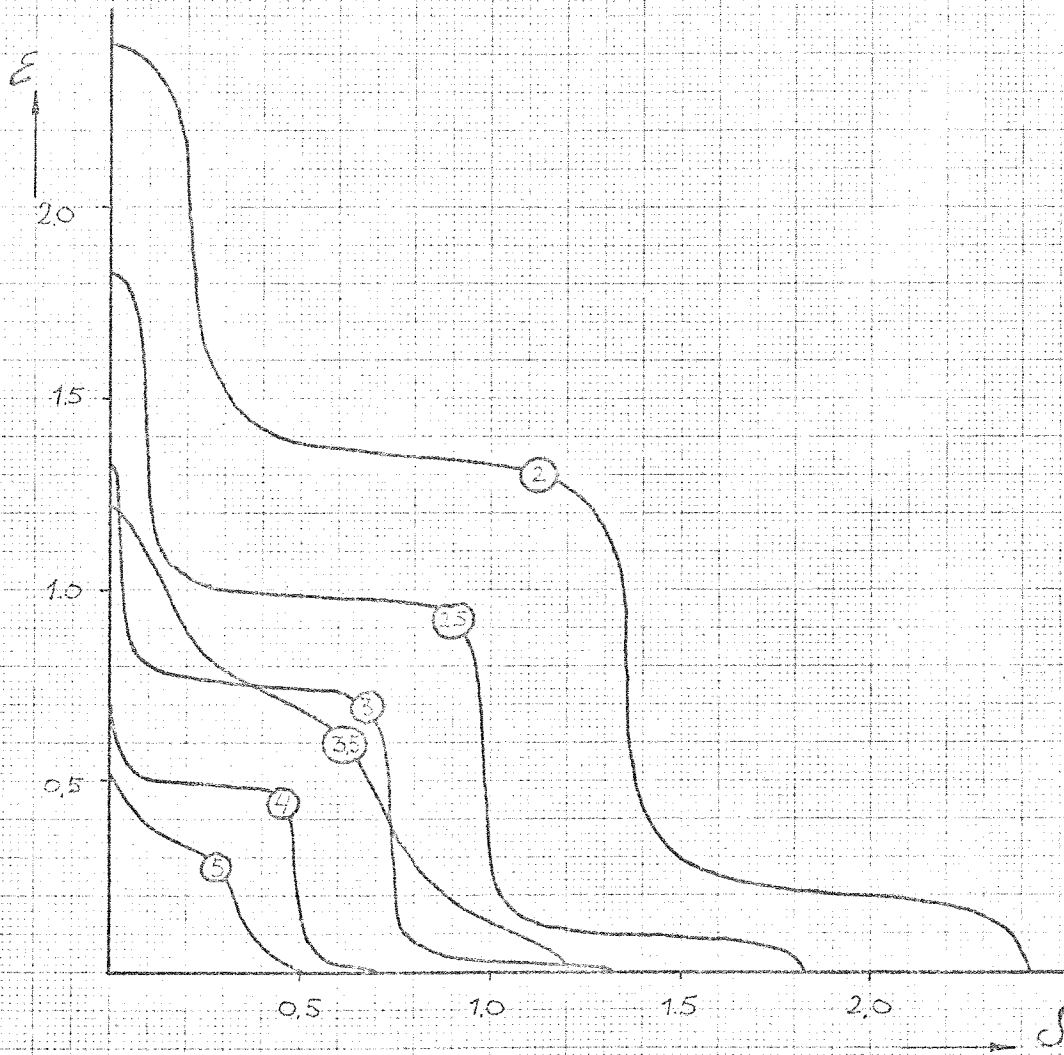


FIG. III-1-B

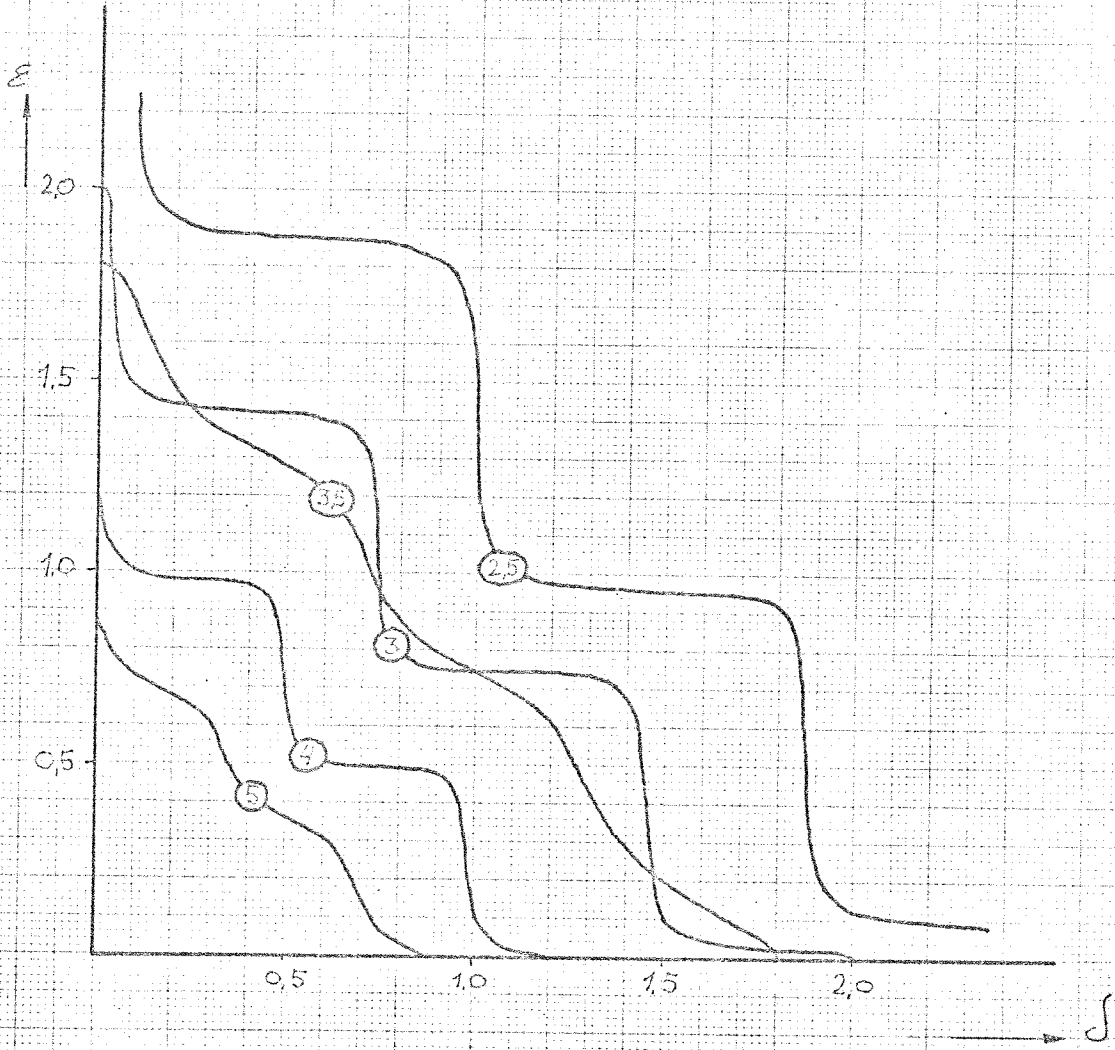


FIG. III-1-C

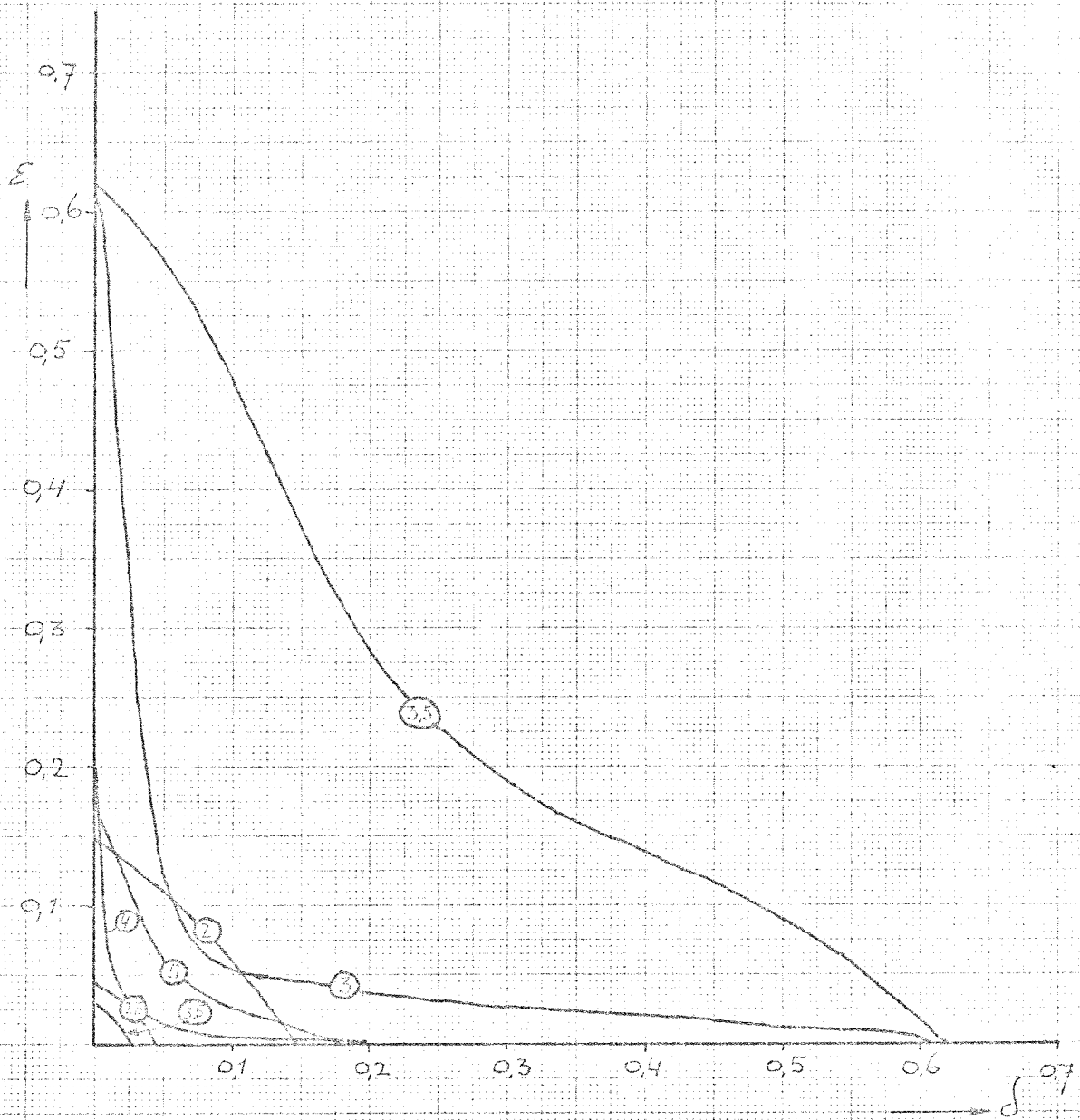
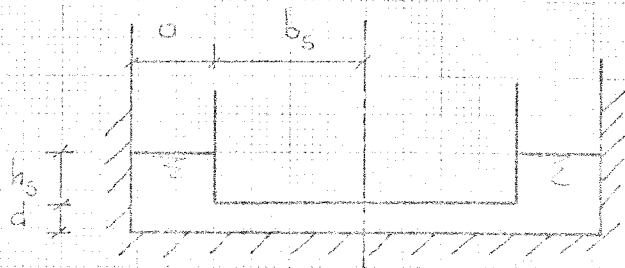


FIG. III-1-D

$$\textcircled{\text{IV}} \begin{cases} b_1/b_s = 5.5 \\ b_2/a = 1.8 \\ b_3/b_s = \textcircled{30} \\ b_3/d = 5.38 \end{cases}$$



$$p = \frac{\omega l}{c_s}$$

$\frac{1}{2}$ GOLFLÄNGTE / l

2.0

1.2126

2.5

0.9646

3.0

0.7983

3.5

0.6785

4.0

0.5879

5.0

0.4589

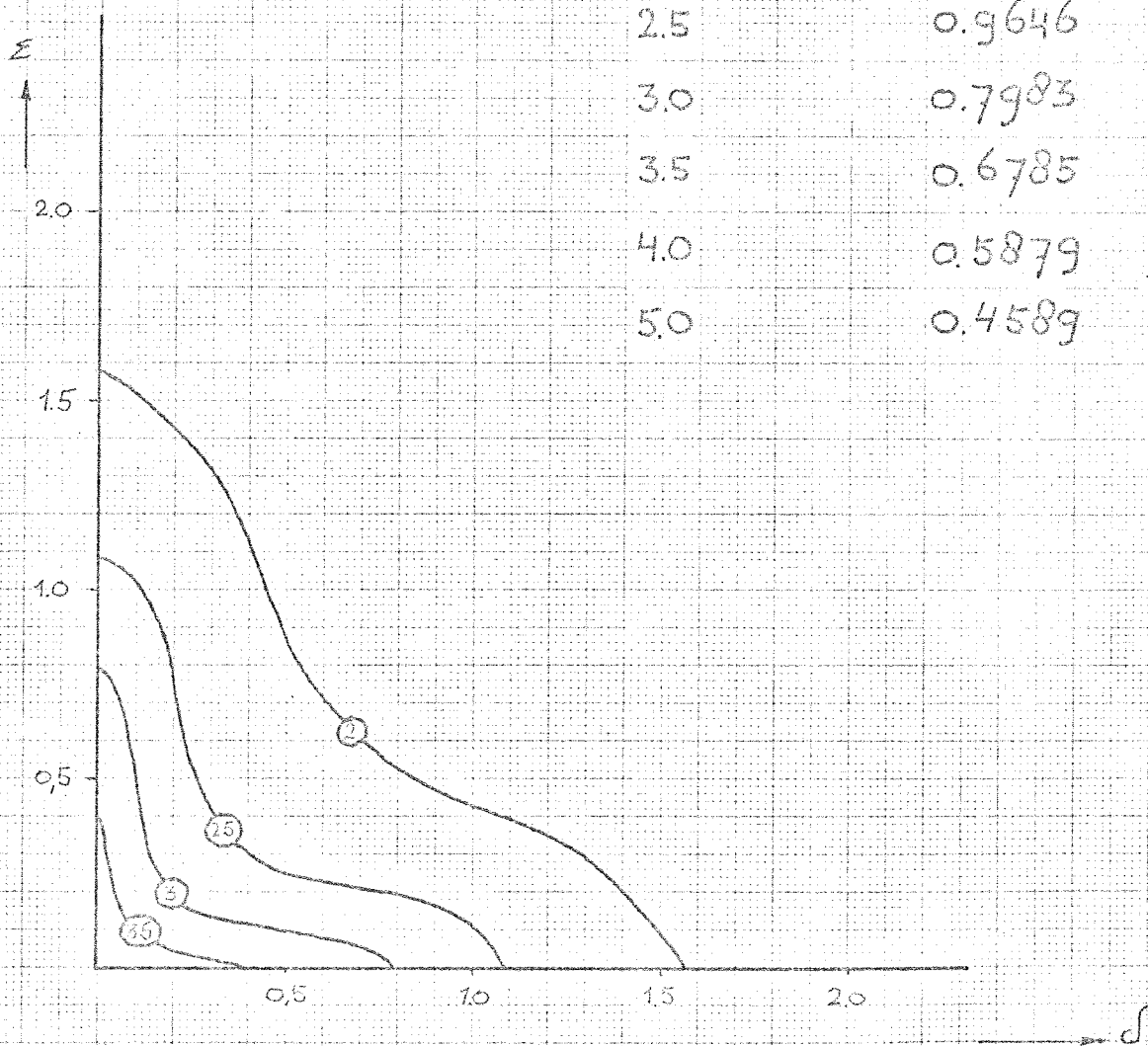


FIG. IV-1-A

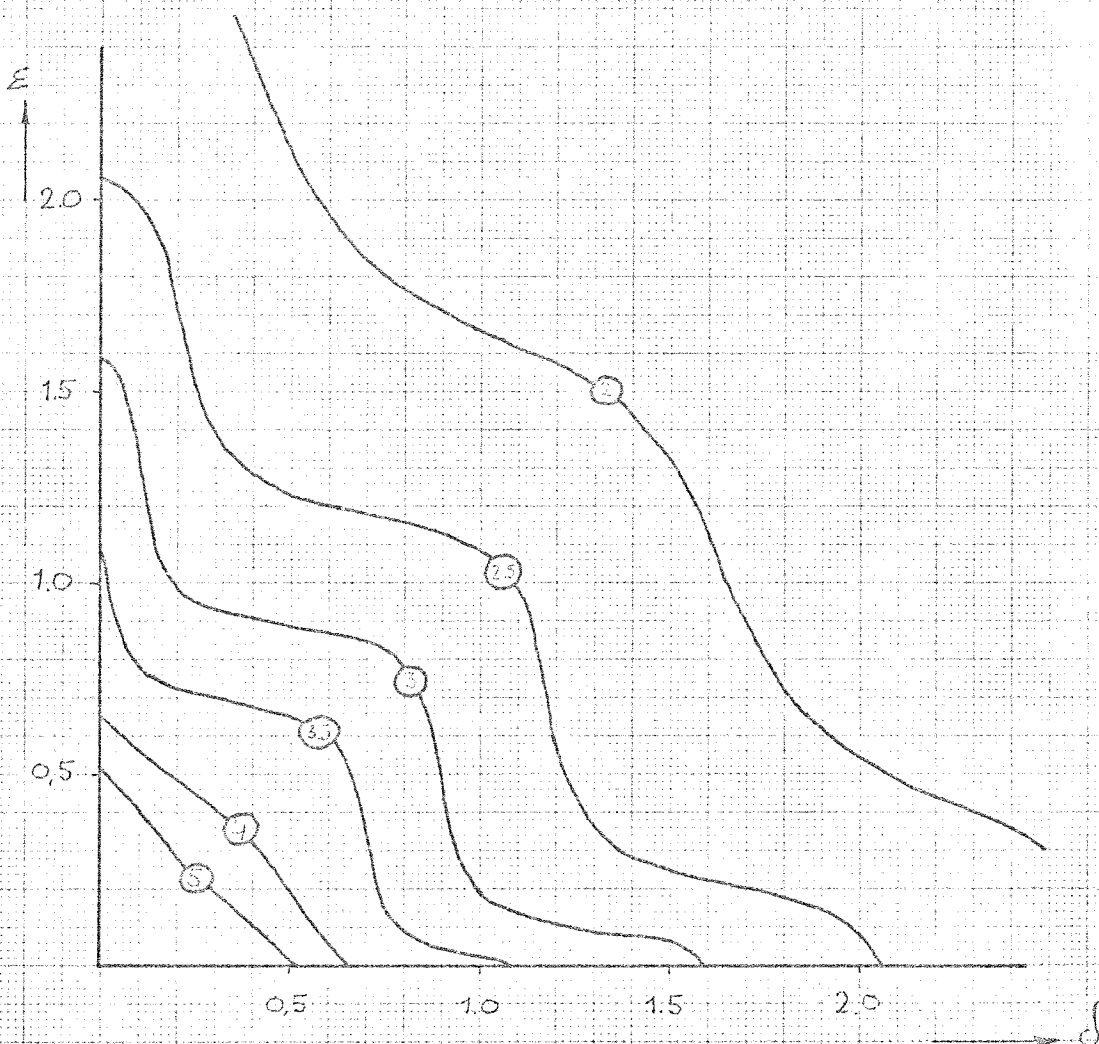


FIG. IV-1-B

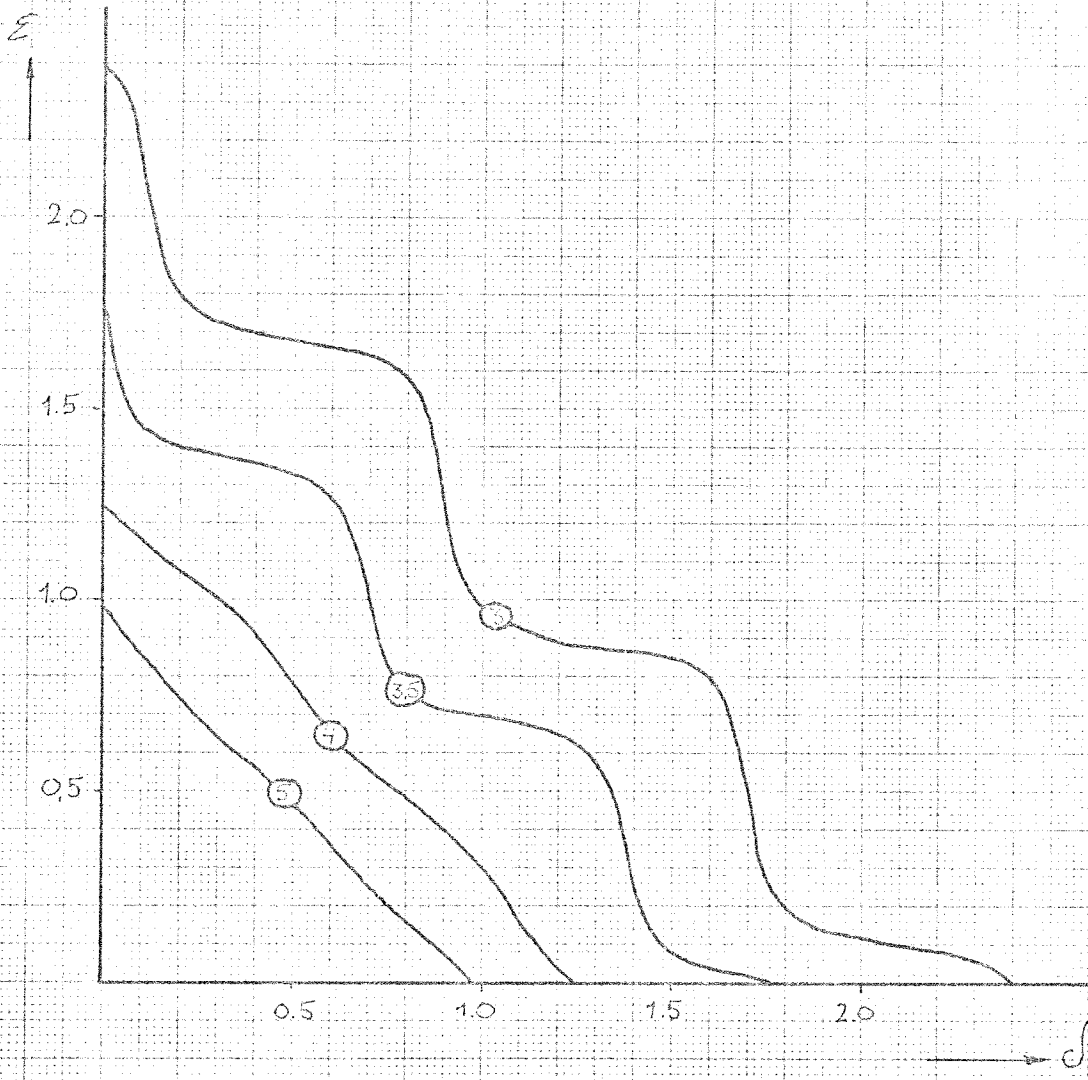


FIG. IV-1-C

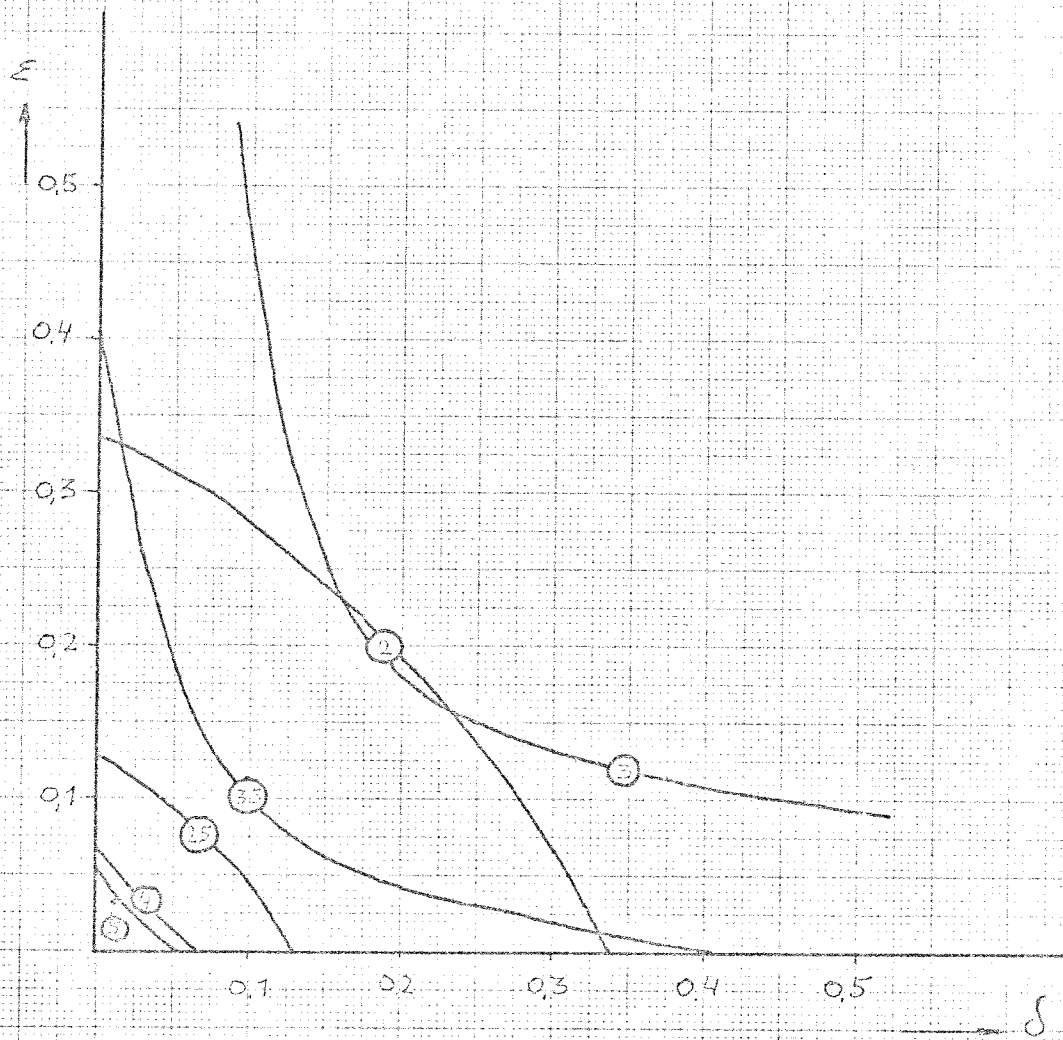
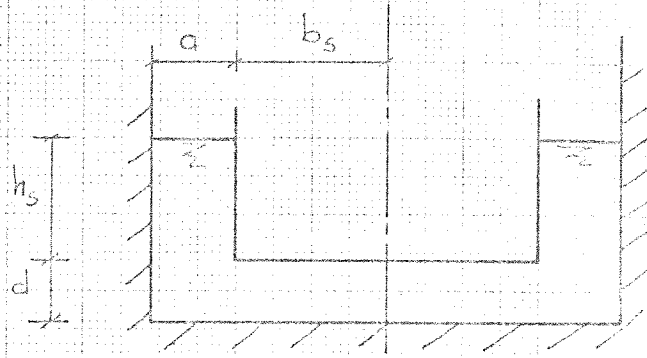


FIG. IV-1-D

$$\textcircled{V} \begin{cases} a/b_s = 5.5 \\ b_s/a = 1.8 \\ b_s/h_s = 1.25 \\ b_s/d = \textcircled{2.5} \end{cases}$$



$$p = \frac{w l^2}{c_s}$$

$\frac{1}{2}$ GOLFLÄNGTE / l

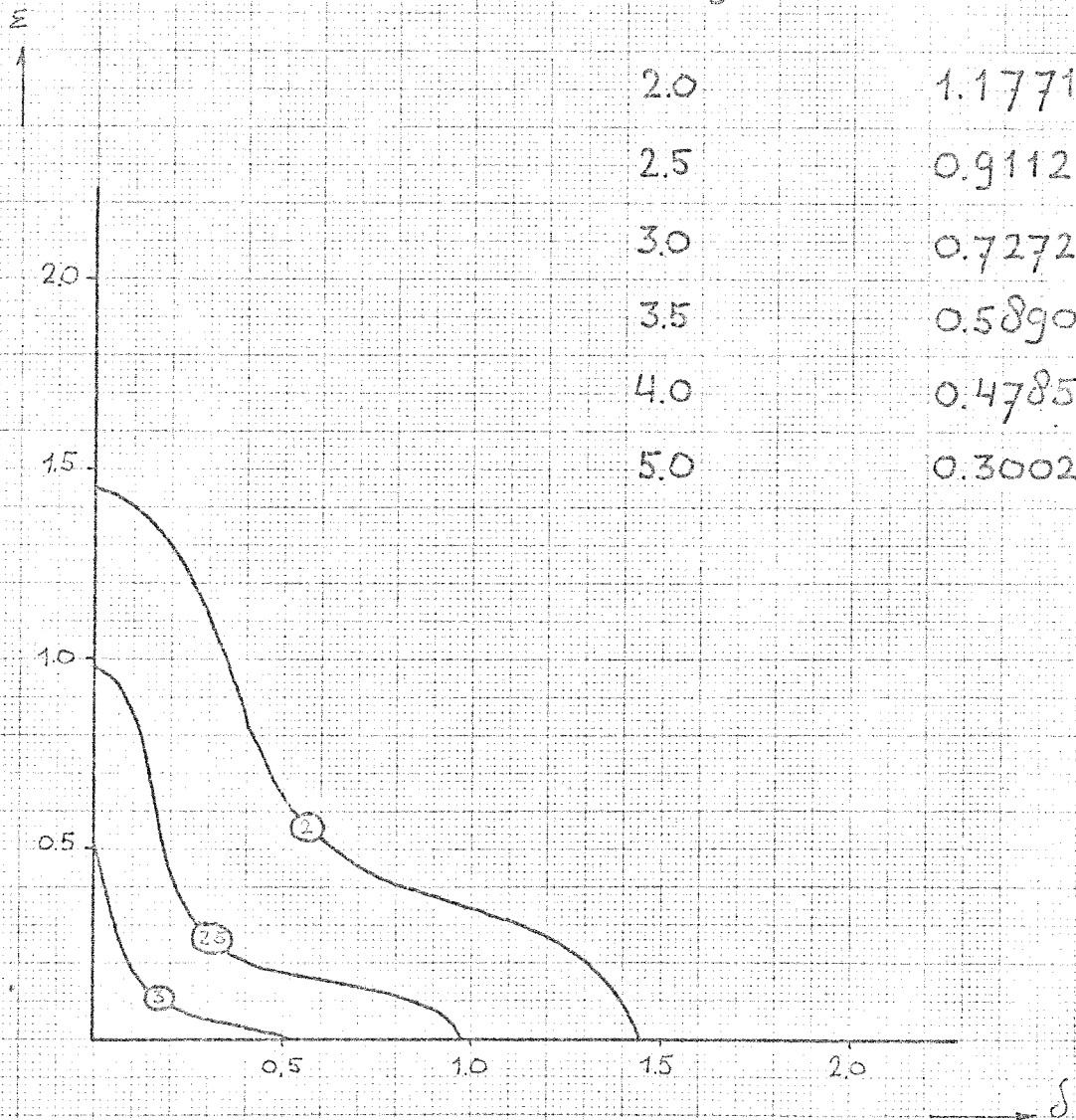


FIG. V-1-A

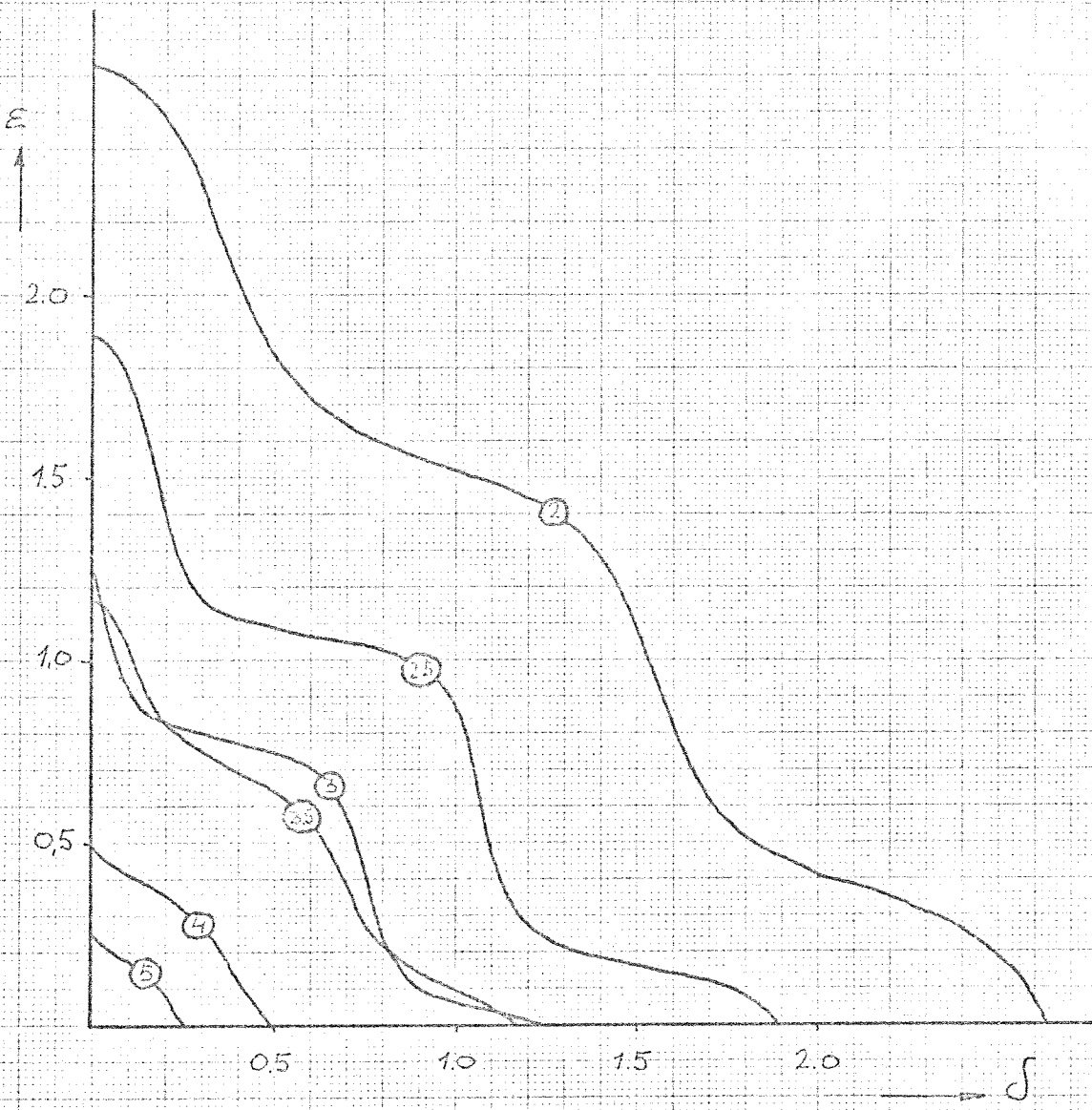


FIG. V-1-B

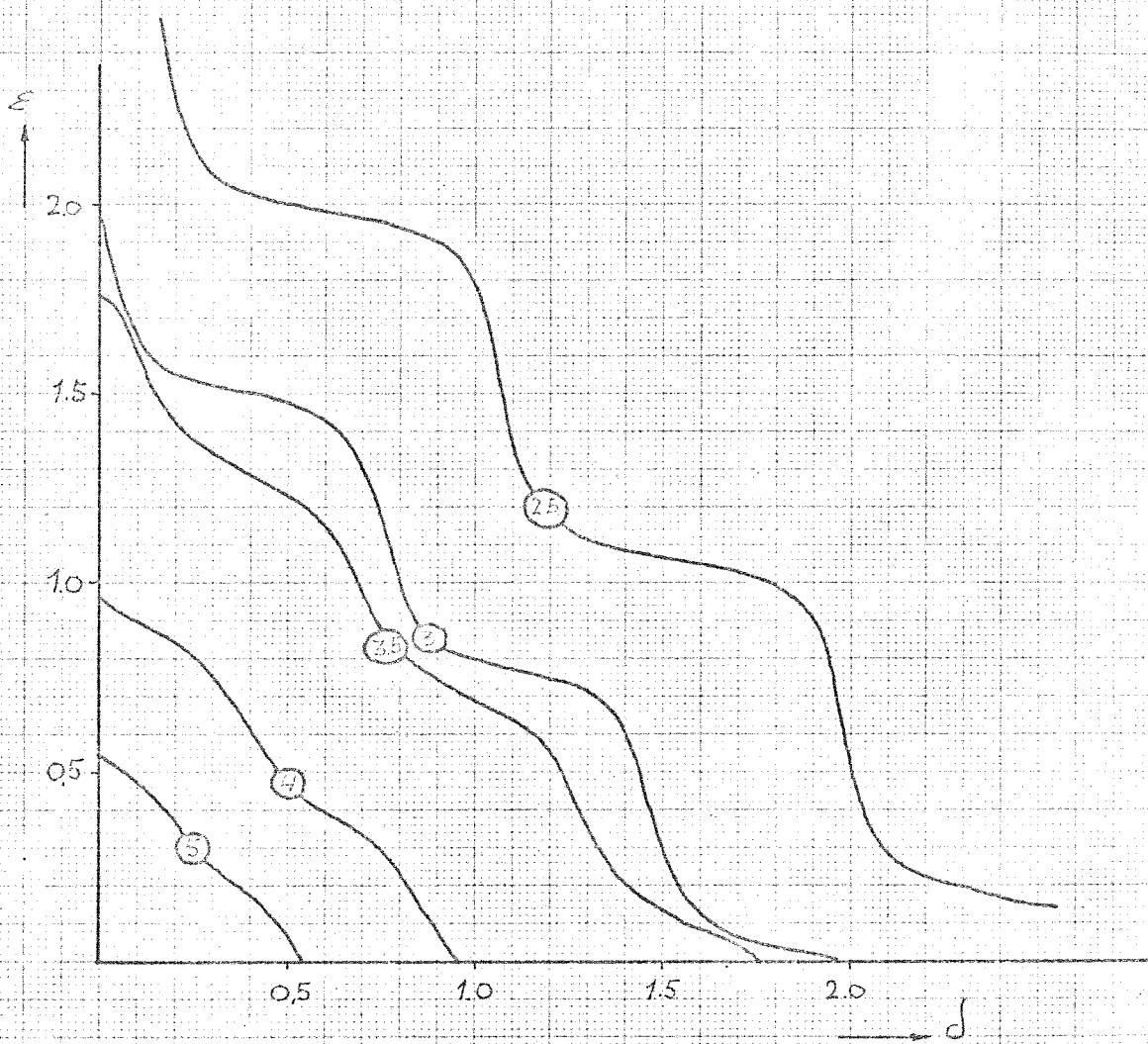


FIG. V-1-C

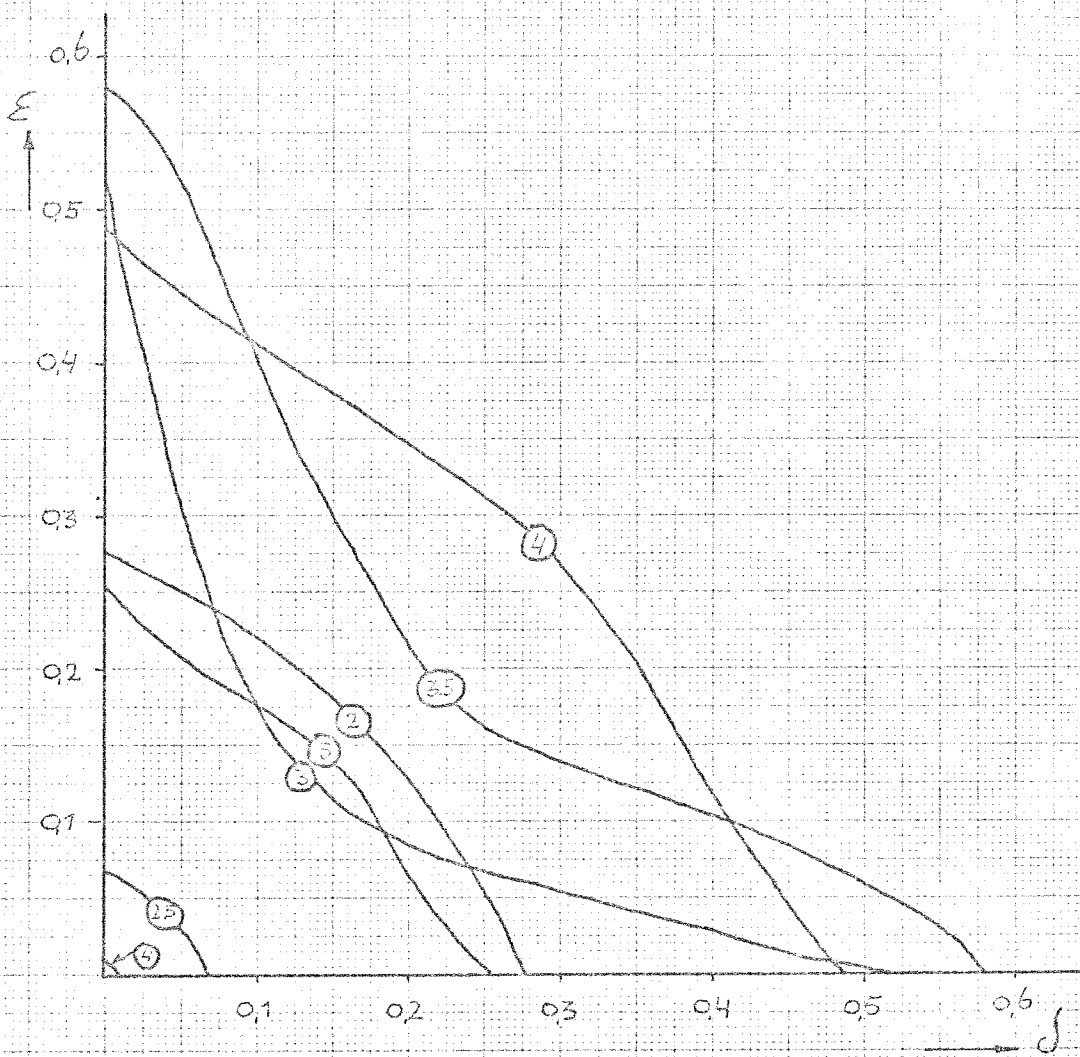


FIG. V-1-D

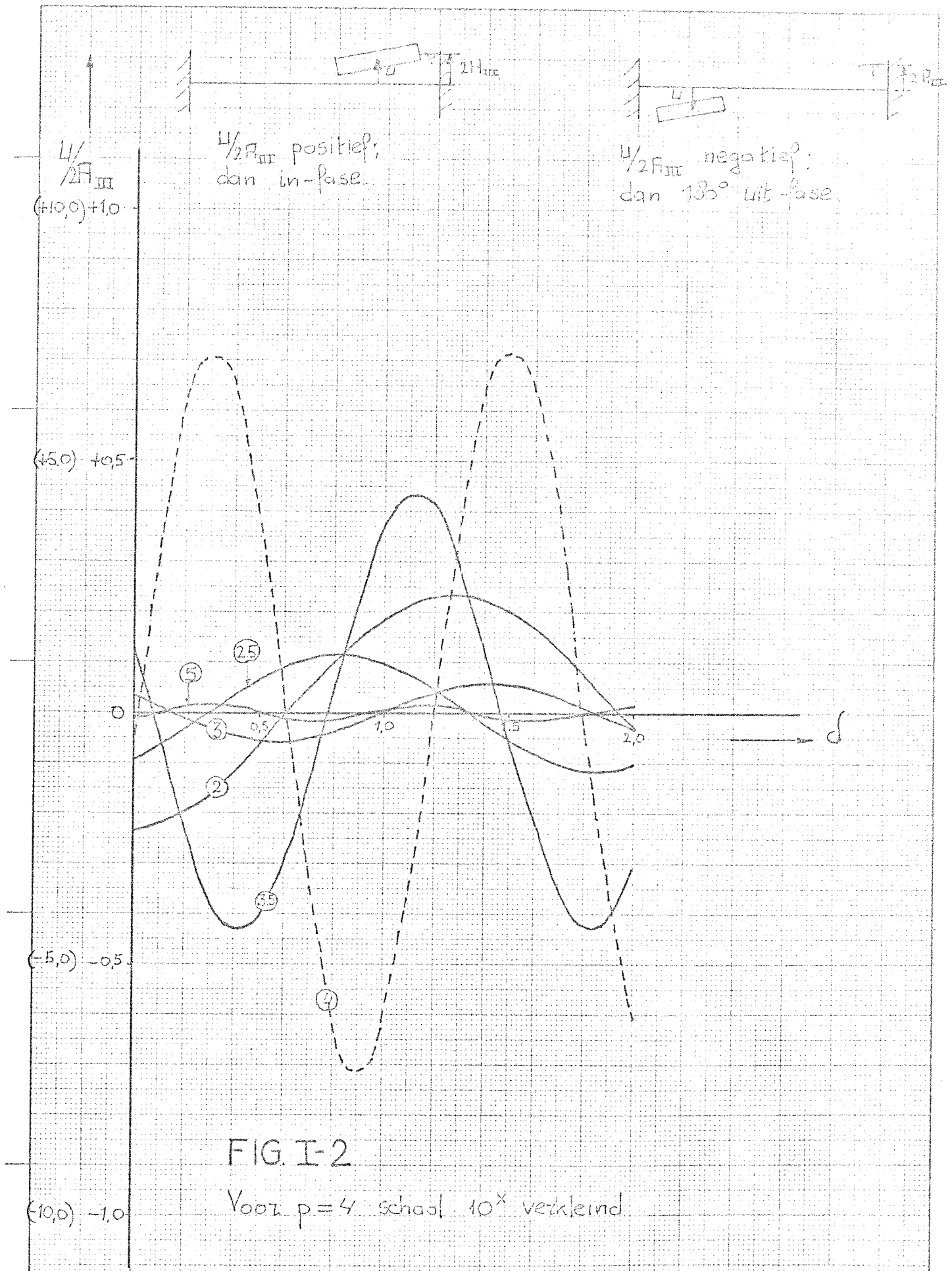


FIG. I-2

Voor $p=4$ schaal 10^x verkleind

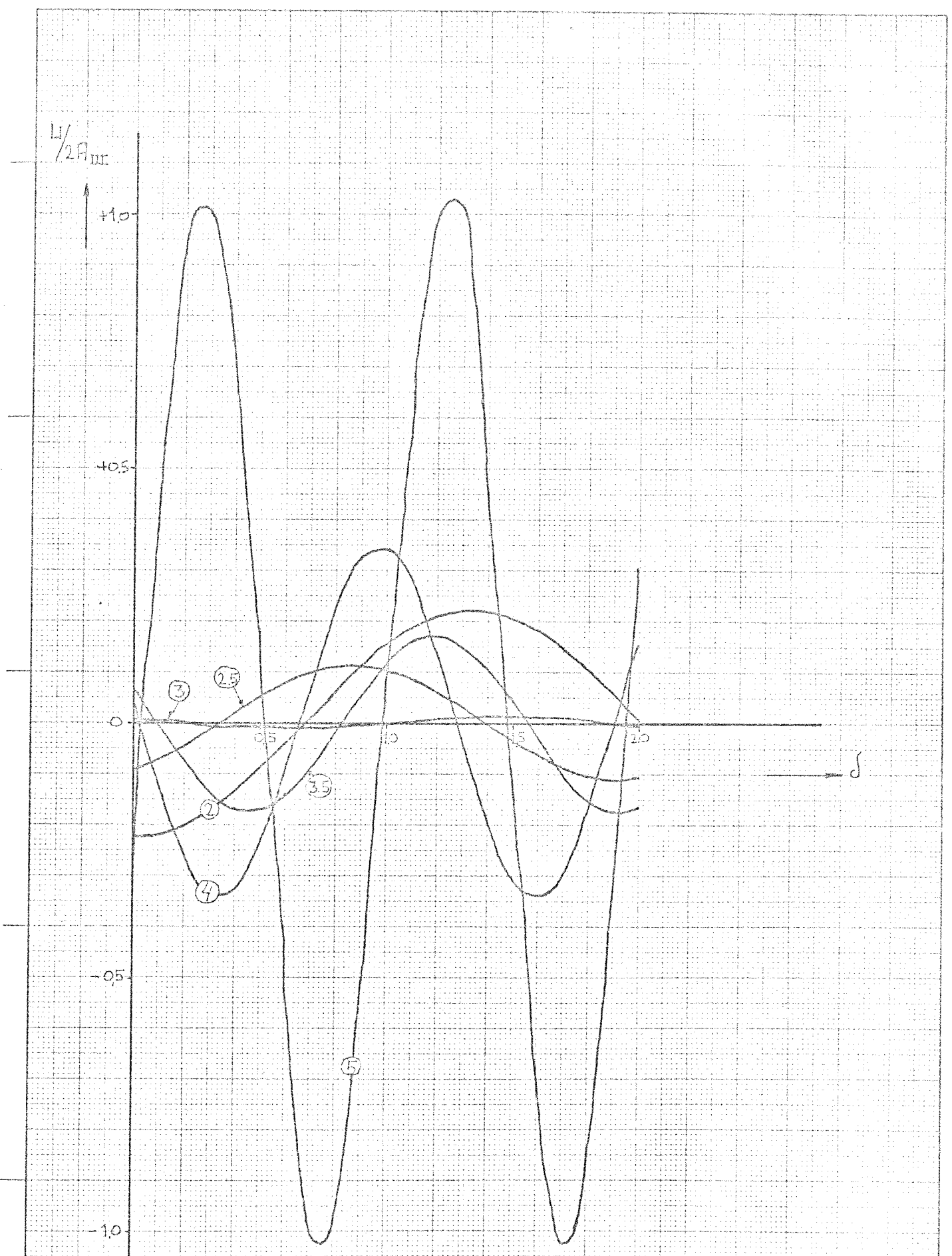


FIG. II-2

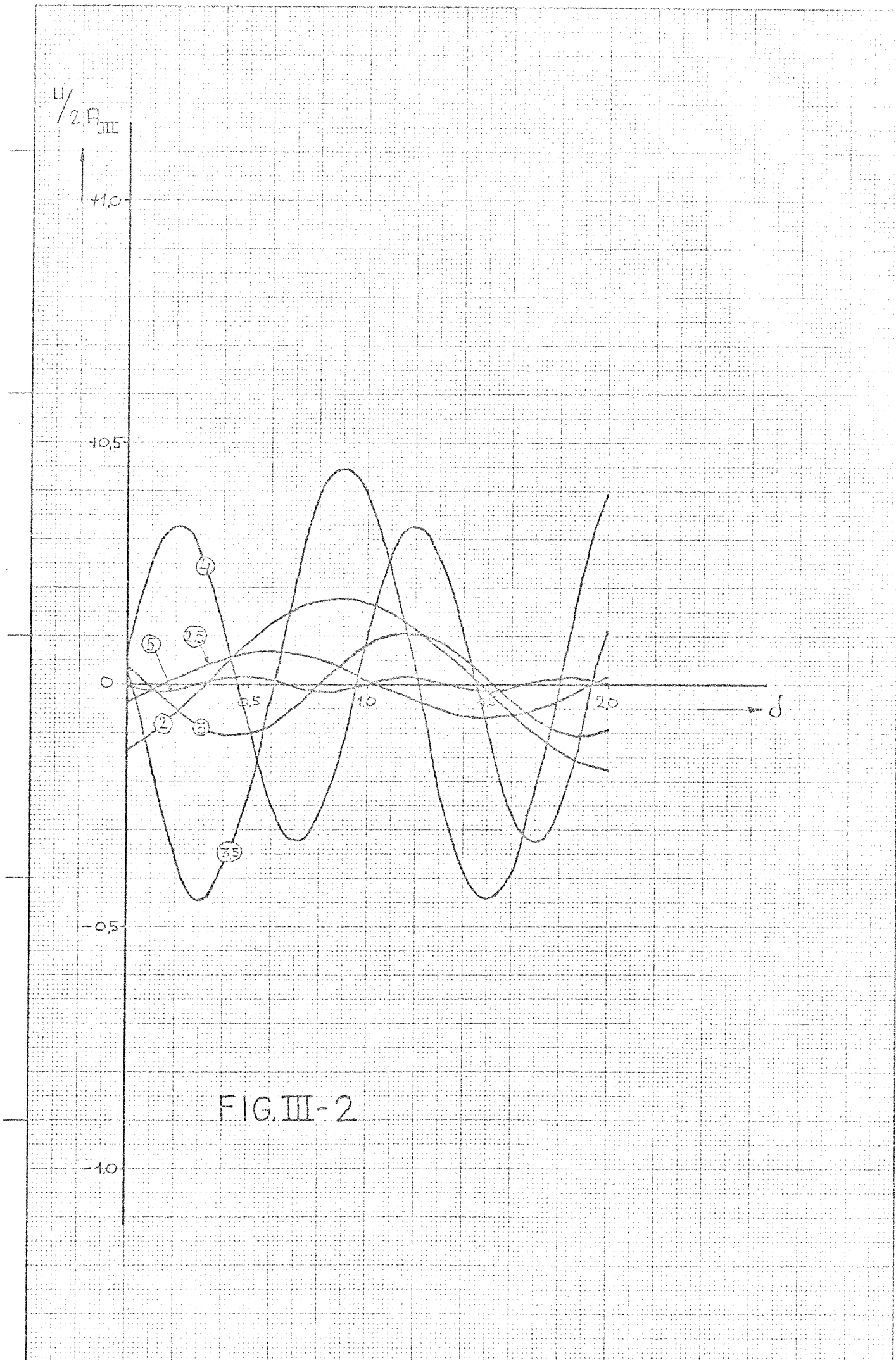


FIG. III-2

$$\frac{W}{2H_{III}}$$

+1.0

+0.5

0

-0.5

-1.0

0.5 1.0 1.5 2.0

δ

3

5

25

7

4

35

FIG. IV-2

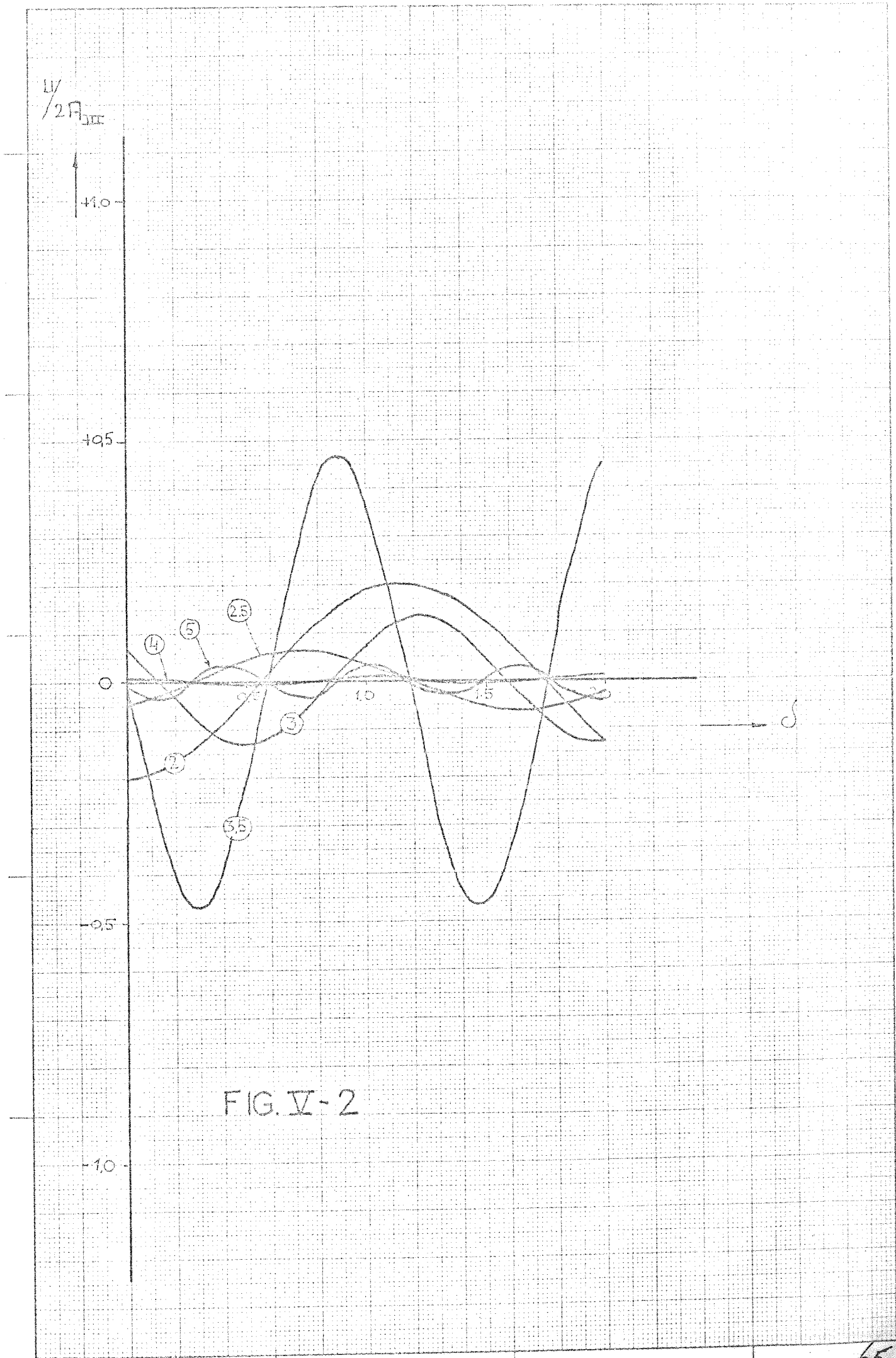
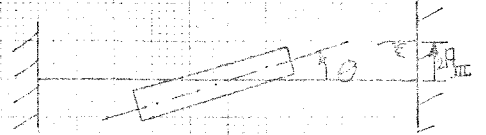
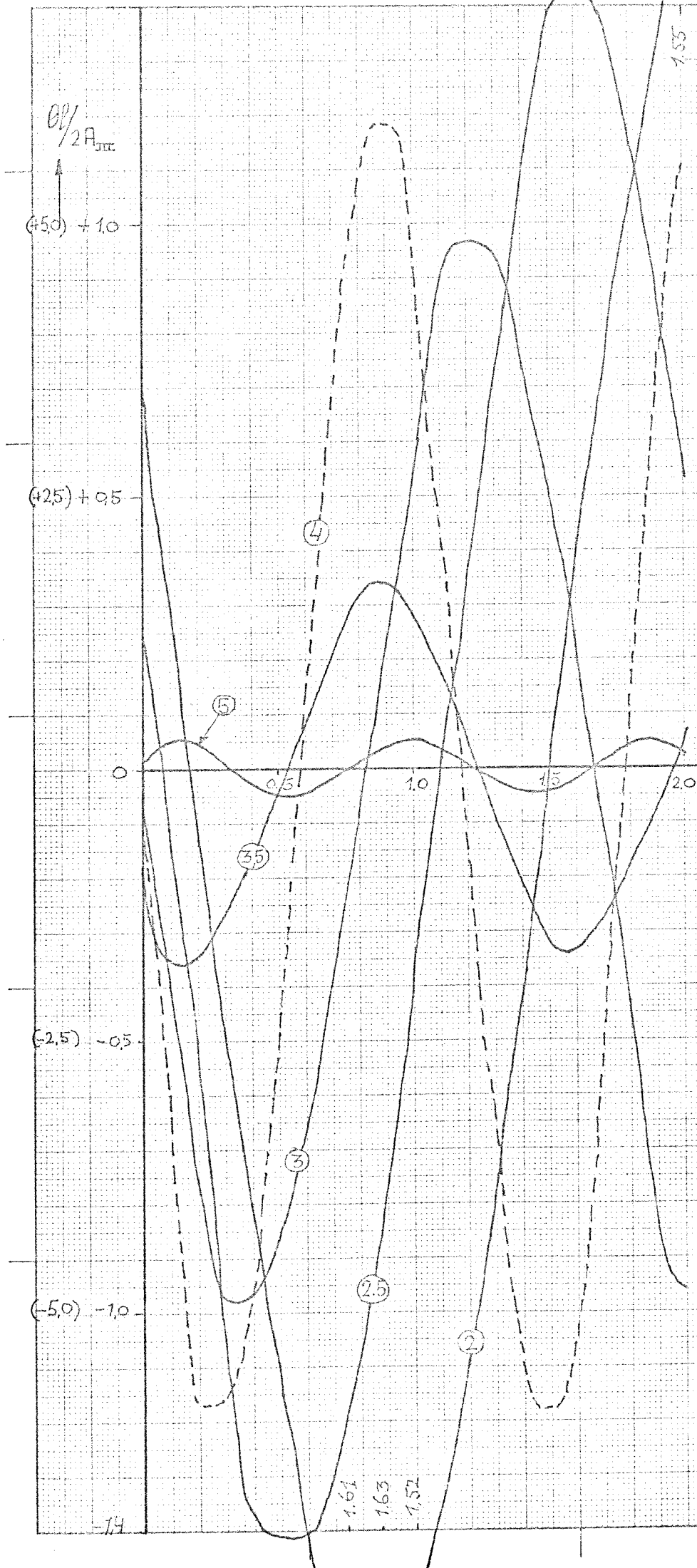
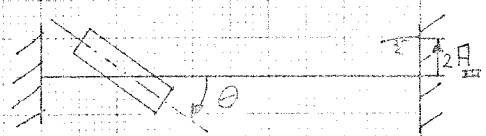


FIG. V-2



$\theta/2\pi_{TTT}$ positief,
dan in-fase.



$\theta/2\pi_{TTT}$ negatief,
dan 180° uit-fase.

FIG. I-3

$\nu_{02} p = 4$
schaal 5^x verkleind

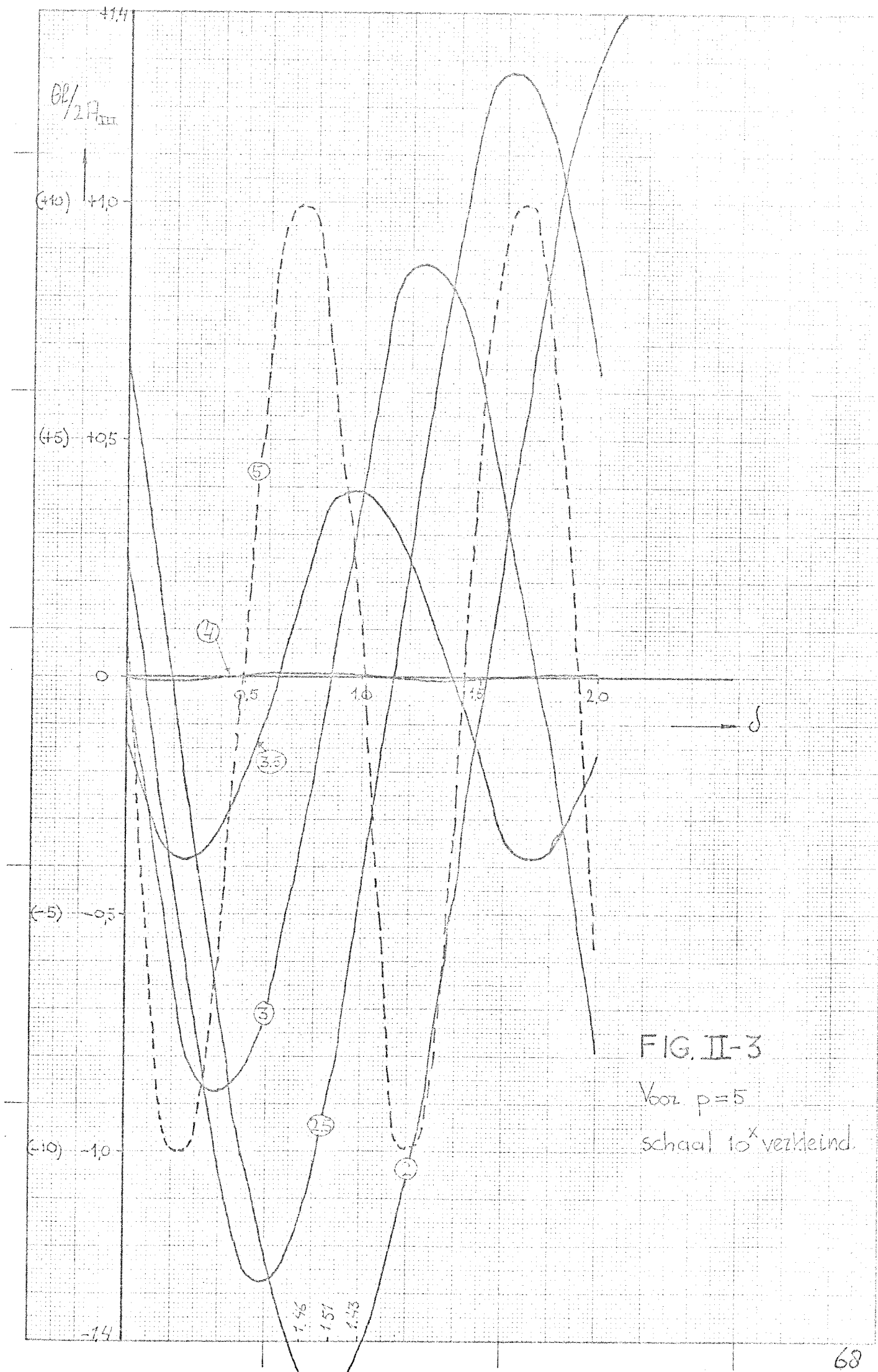


FIG. II-3

Voor $p=5$
 schaal 10^x verkleind.

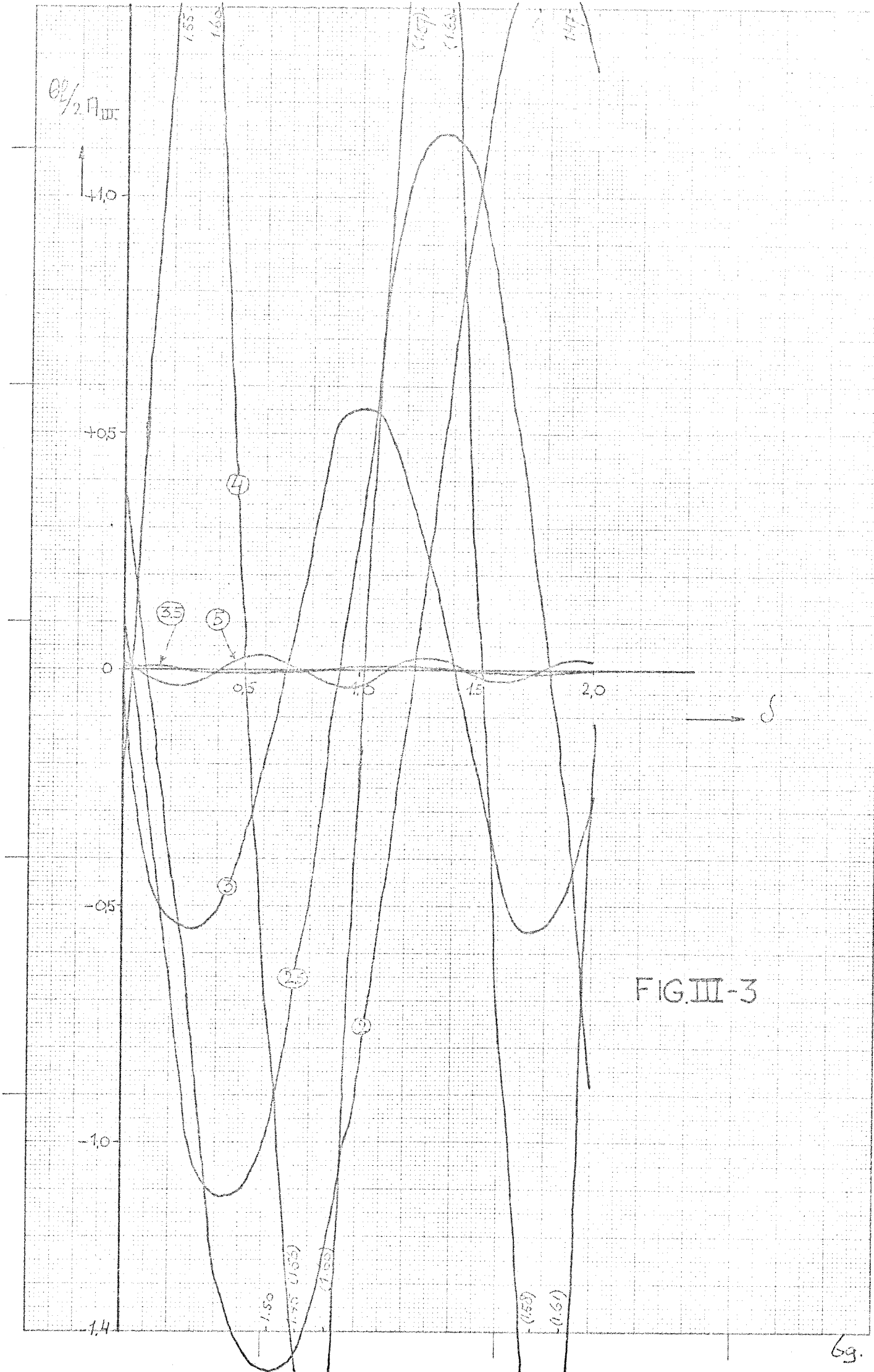


FIG. III-3

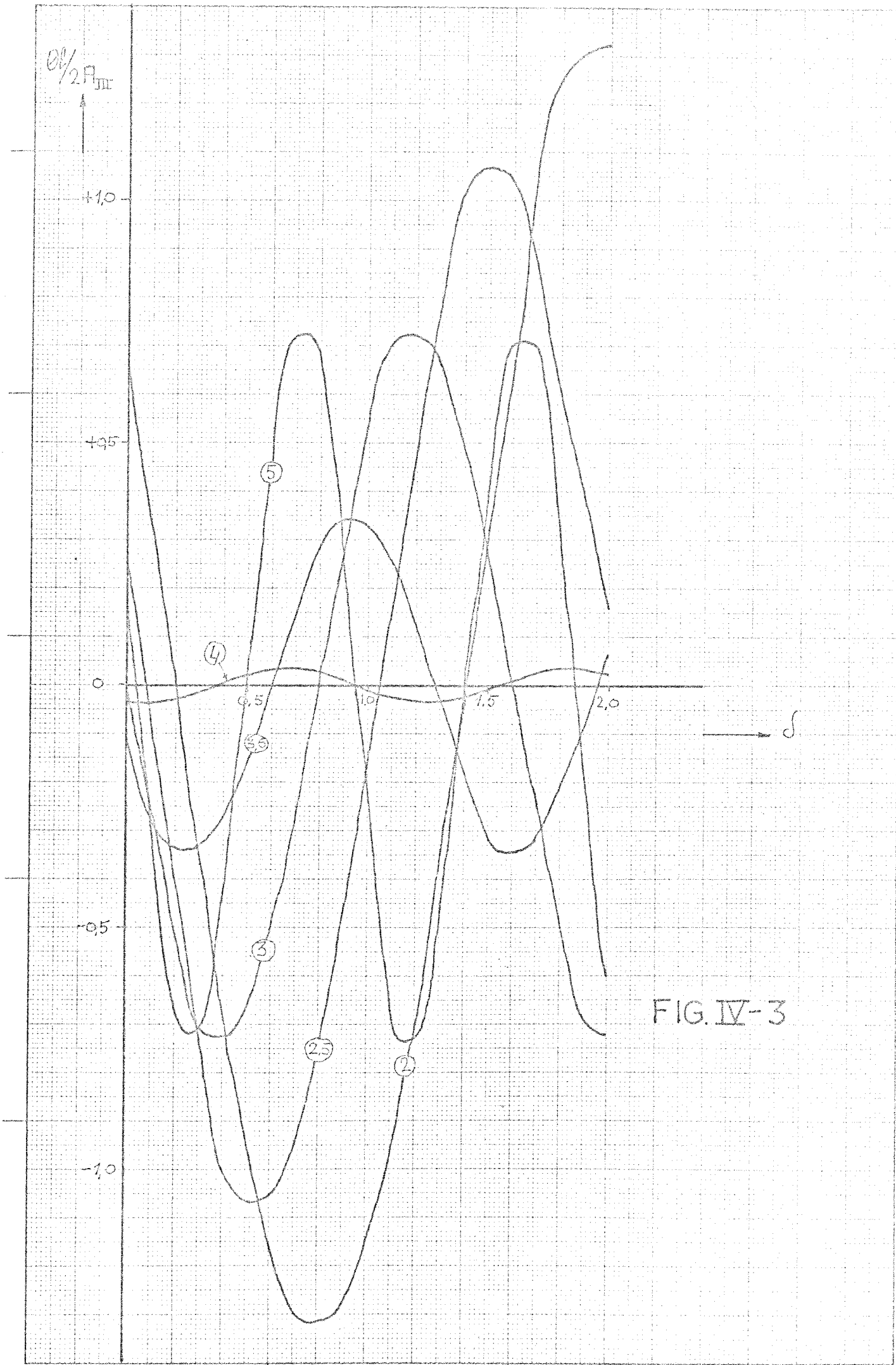


FIG. IV-3

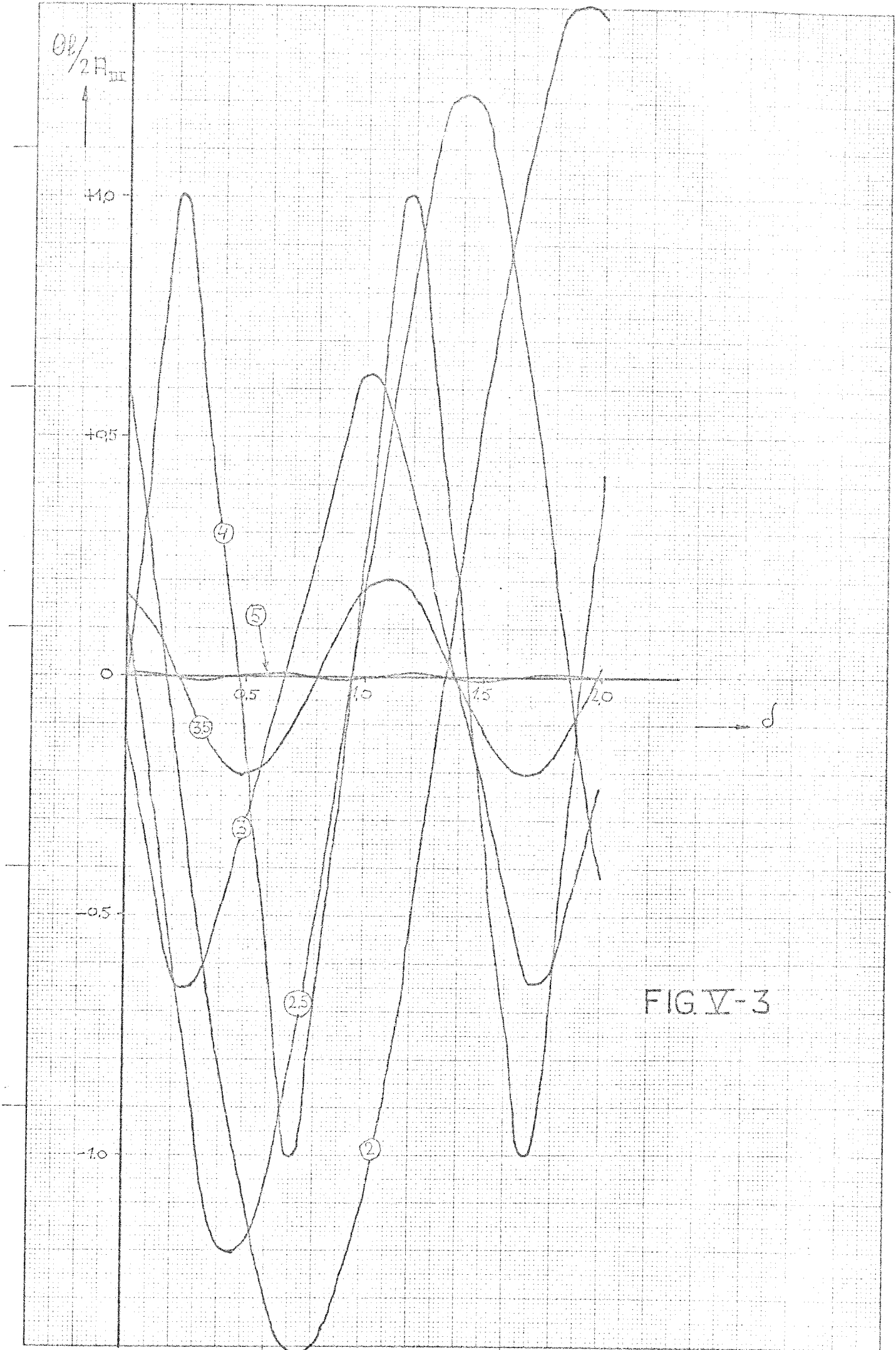


FIG V-3

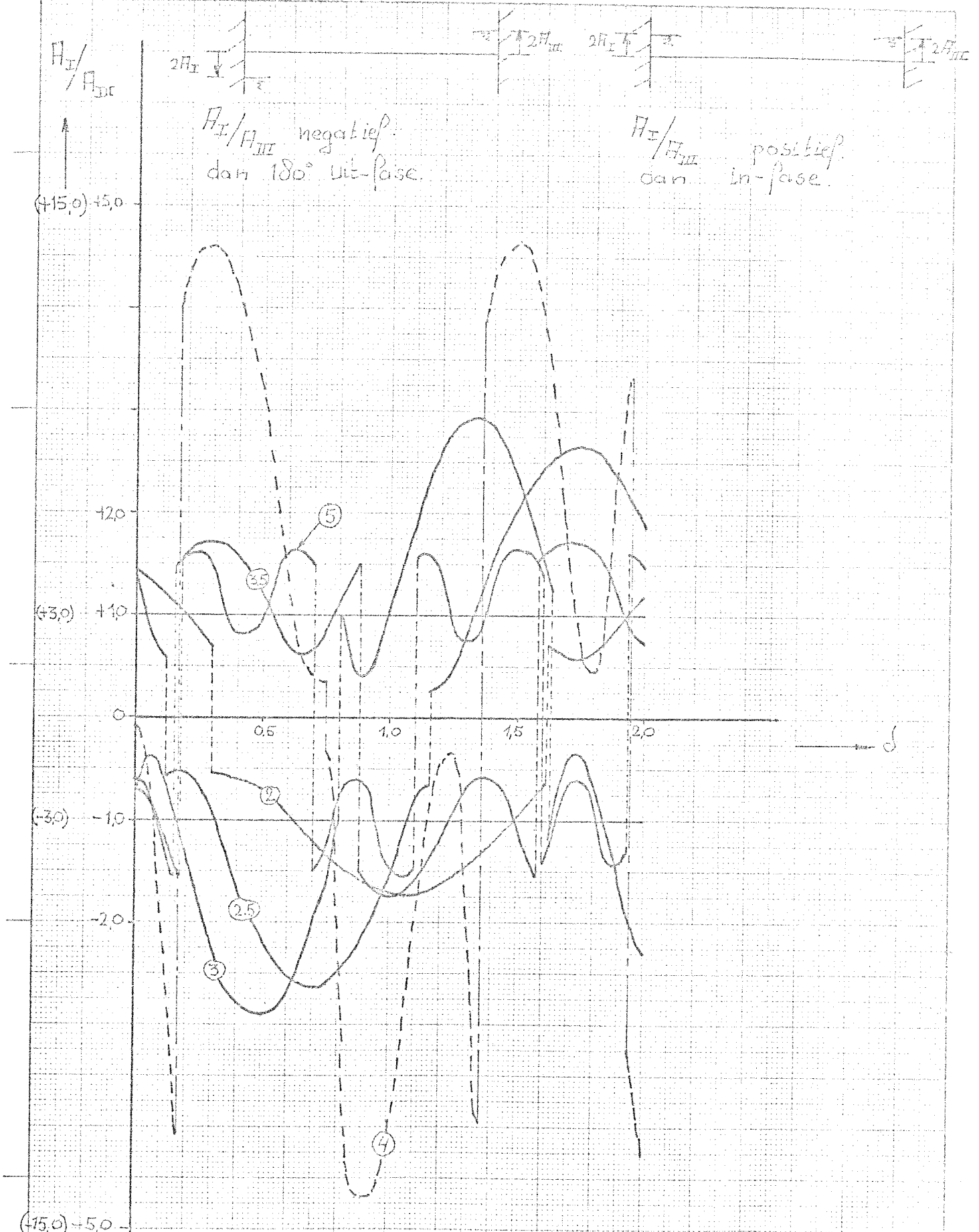


FIG. I-4

Voor $p=4$ school 3^x verkleind

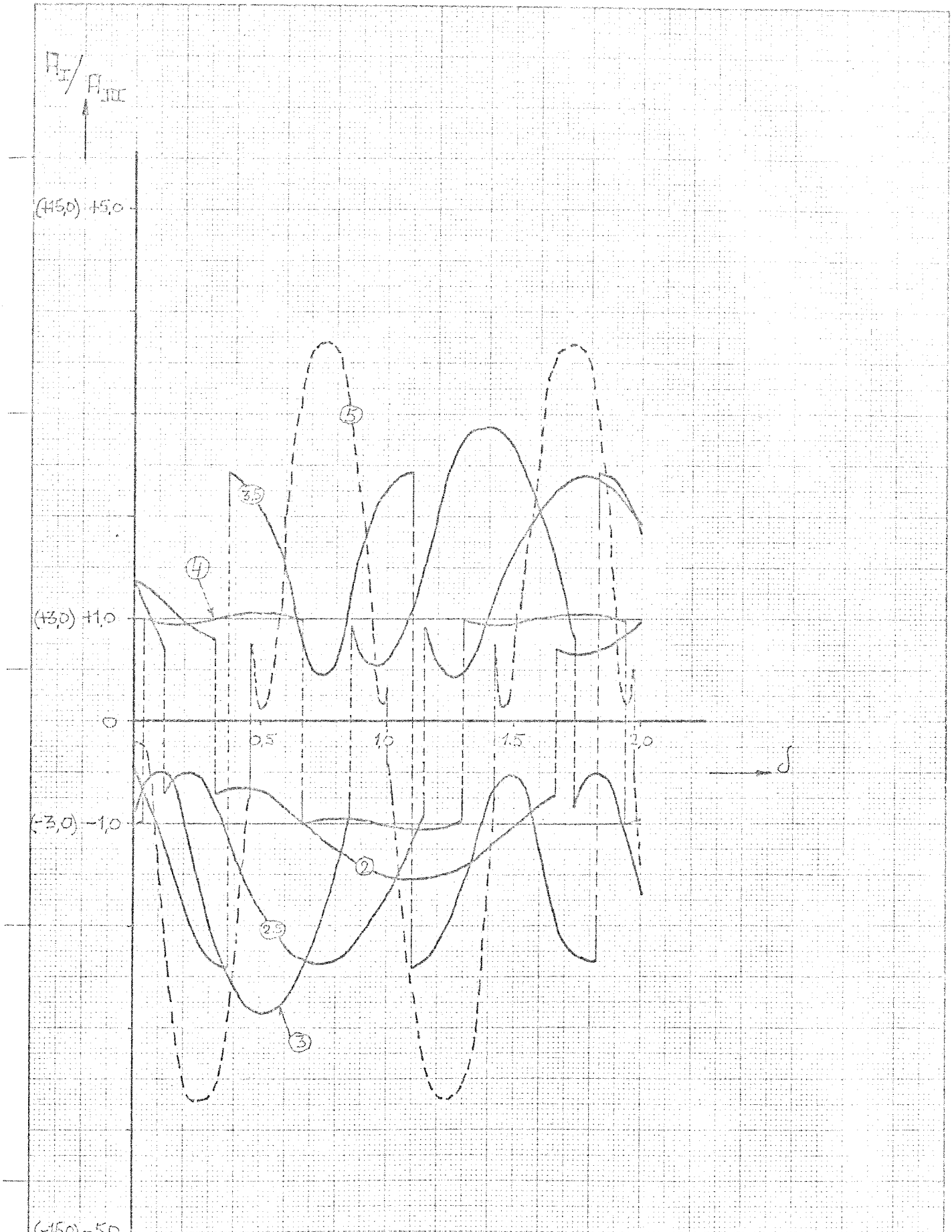
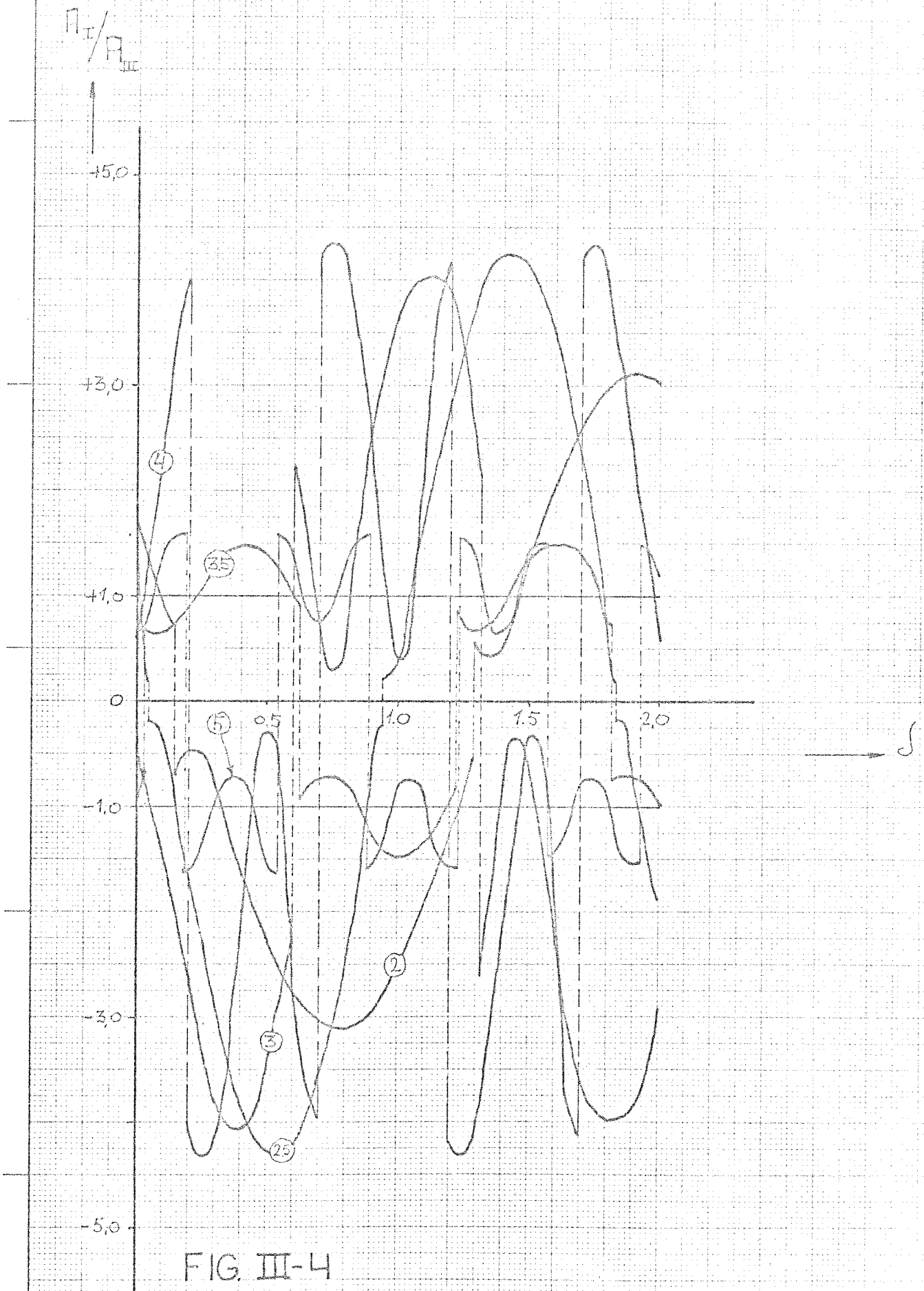


FIG. II-4

Voor $p=5$ schaal 3^x verkleind



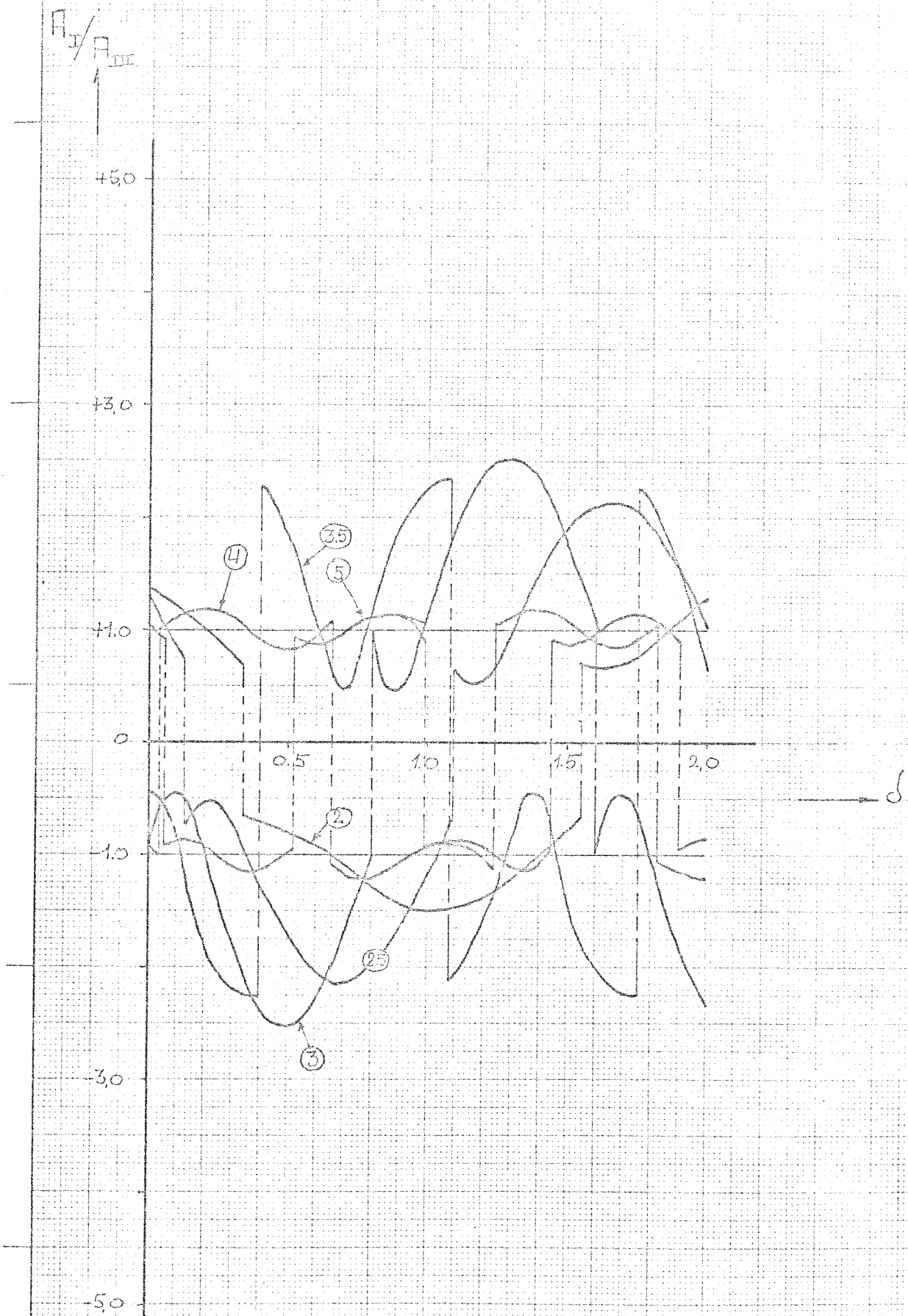


FIG. IV-4

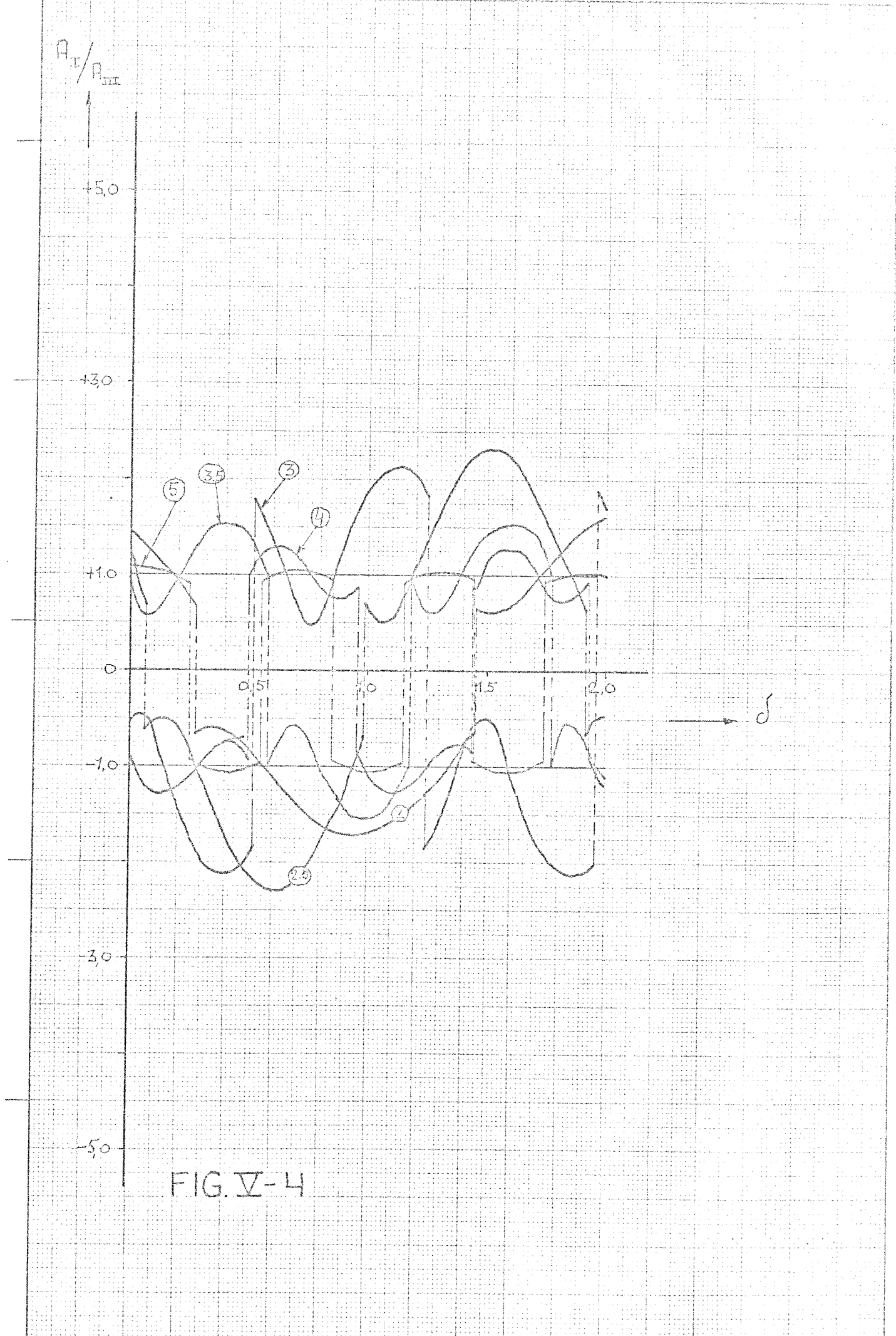


FIG. V-4