

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
Afdeling der Weg- en Waterbouwkunde
Vloeistofmechanica

"ENKELE ASPECTEN VAN HET INSTABILITEITS-
VERSCHIJNSEL BIJ PERMANENT EENPARIGE
STROMINGEN EN DE DAARMEE VERBAND HOUDEN-
DE VORMING VAN ROLGOLVEN"

Deel A: Hoofdstuk I t/m. Hoofdstuk IV.

H.L. Fontijn
Jacoba van Beierenlaan 57
Delft.

1960

INHOUDSOPGAVE VAN DEEL A

HOOFDSTUK I:	INLEIDING.	I-1
	Figuren I-1 t/m. I-3.	I-7
HOOFDSTUK II:	DE AFLEIDING VAN DE BASISVERGELIJKINGEN.	II-1
II-a:	De continuïteitsvgl. voor de gemiddelde stroming in een open leiding.	II-2
II-b:	De vgl. voor de gemiddelde stroming in een open prismatische leiding.	II-3
	Figuren II-1 t/m. II-3.	II-12
II-A:	Appendix van Hoofdstuk II.	II.A-1
a:	Afleiding van de algemene gedaante van de wet van behoud van massa.	II.A-1
b:	Afleiding van de algemene gedaante van de wet van behoud van impuls.	II.A-2
c:	Afleiding van de algemene gedaante van de wet van behoud van energie.	II.A-3
HOOFDSTUK III:	VOORGAANDE STUDIES.	III-1
HOOFDSTUK IV:	HET (IN-)STABILITEITSCRITERIUM VOOR DE PERMANENT EENPARIGE STROMING IN EEN OPEN LEIDING.	IV-1
IV-A:	Inleiding.	IV-1
IV-B:	De (in-)stabiliteit van permanent eenparige stromingen.	IV-2
IV-B.a:	De basisvgl.	IV-2
IV-B.b:	Stromingsvoorwaarde voor het begin van instabiliteit.	IV-19
IV-B.b1:	Stromingsvoorwaarde voor het begin van instabiliteit in geval van laminaire stroming.	IV-29
IV-B.b2:	Stromingsvoorwaarde voor het begin van instabiliteit in geval van turbulente stroming.	IV-39
IV-C:	Factoren welke het instabiliteitscriterium beïnvloeden.	IV-51
IV-C.a:	De invloed van de weerstandswet.	IV-52
IV-C.b:	De invloed van de vorm van de doorsnede.	IV-54

IV-C.c: De invloed van de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verti- caal.	IV-59
IV-D: Grafische weergave en interpretatie van de resultaten.	IV-74
IV-E: Resumé en conclusies. Figuren IV-1 t/m. IV-6.	IV-100 IV-102
IV.A: Appendix van Hoofdstuk IV. Figuren IV.A-1 t/m. IV.A-3.	IV.A-1 IV.A-18

De geraadpleegde literatuur, waarnaar in de tekst verwezen wordt, is aangegeven d.m.v. een tussen haakjes geplaatst getal.

Voor een volledige lijst van de geraadpleegde literatuur: zie Deel B.

HOOFDSTUK I: Inleiding

Het doel van dit onderzoek is de bestudering van enkele eigenschappen van een stromingswijze, welke gewoonlijk wordt aangeduid met de naam "rolgolven".

De rolgolven behoren tot de grote familie van de z.g. zwaartekrachtgolven; alhoewel binnen deze groep de rolgolven geen plaats van overwegende betekenis innemen, zijn zij toch indirect belangrijk, omdat zij betrekking hebben op een verschijnsel in het randgebied van de normale stroming in open leidingen, en zodoende als controle zouden kunnen dienen voor de geldigheid van de benaderingsmethoden waarmede deze stromingen worden berekend.

Sinds de tijd van J. Boussinesq, die dit probleem het eerst aansneed, zonder zich hier overigens van bewust te zijn, zijn er vele onderzoekingen aan dit vraagstuk gewijd aan de hand van verschillende methoden en benaderingswijzen; het gevolg is dat de theorie geen eenheid meer vertoont en in omvang zeer is toegenomen, terwijl het logische verband en de praktische toepassing van de verschillende resultaten niet steeds geheel duidelijk is.

Rolgolven ontwikkelen zich op natuurlijke wijze uit een (turbulente) eenparige stroming in een (rechte) open leiding met constante steile helling, als deze leiding voldoende lengte bezit en voldoet aan zekere eisen t.a.v. bodem- en wandruwheid. In de beginfase van hun ontwikkeling verschijnen de rolgolven als golven met kleine amplitudo (van b.v. sinusoidale gedaante), waarna ze zich, als de leidinglengte voldoende groot is, gaan ontwikkelen tot z.g. "schokgolven" met grote amplitudo; onder "schok" wordt in principe verstaan elke discontinuïteit in het wateroppervlak: zo noemt men een bewegende discontinuïteit "bore" en een stationaire discontinuïteit "watersprong". De stroming wordt gekenmerkt door een reeks watersprongen welke zich uitstrekken over de breedte van de leiding (loodrecht op de voortbewegingsrichting dus) en zich stroomafwaarts voortplanten. Over deze "bores" of "schokken" verandert de waterdiepte abrupt, terwijl tussen de opeenvolgende bores de water-

diepte geleidelijk verandert, en de waterspiegel "glad" is. Men kan aan deze golven dus twee delen onderscheiden:

a: de z.g. kop, golftop of bore (ruw vooroverstortend water, dat ingesloten lucht kan bevatten), en

b: de staart of golfdal (het glad stromende gedeelte). Sommige grotere schokgolven nemen andere, kleinere, in zich op, met als gevolg dat de gecombineerde golf hoger is. Beginnen rolgolven zich eenmaal te ontwikkelen, dan neemt de maximale golfhoogte (gemeten t.o.v. de bodem) toe met de afgelegde afstand; begint de ene schokgolf de andere in zich op te nemen, dan neemt de golfperiode toe met de afgelegde afstand. Het uiteindelijk resultaat zal een periodiek permanent rolgolfpatroon zijn, dat (qua stromingswijze) gekenmerkt wordt door het feit dat typisch horizontale afmetingen (i.e. golflengten) groot zijn t.o.v. typisch verticale afmetingen (i.e. waterdiepten).

Op grond van het bovenstaande kan men dus onderscheid maken tussen:

a: natuurlijke rolgolven, en

b: periodieke permanente rolgolven.

Onder natuurlijke rolgolven verstaat men de rolgolven zoals deze zich ontwikkelen uit een eenparige (turbulente) stroming in een open leiding met voldoende grote helling, mits voldaan wordt aan zekere voorwaarden; zij kenmerken zich door twee groeivormen, te weten: natuurlijke groei (opslinging) en groei door het opnemen van andere golven. Is de leidinglengte voldoende groot dan zal dit uiteindelijk resulteren in een reeks periodieke permanente rolgolven, ook wel aangeduid als een periodieke permanente rolgolftrein.

Onder periodieke permanente rolgolven verstaat men elke golf-formatie, periodiek in afstand, welke ontstaat als een vloeistof (turbulent) in een hellende open leiding naar beneden stroomt, waarbij het golfprofiel zich stroomafwaarts beweegt als een progressieve golf met constante snelheid en zonder vervorming, en zodanig dat de werkelijke snelheden van de waterdeeltjes overal kleiner zijn dan de golfsnelheid.

De werkelijke watersnelheid U , beschouwd t.o.v. de gefixeerde leiding, zal in het topgebied B groter zijn dan in het gebied A, maar nergens zal de watersnelheid zo groot zijn als de golfsnelheid.

Wanneer de stroming wordt beschouwd t.o.v. een met de constante golfsnelheid meebewegend coördinatenstelsel ξ , dan zullen volgens waarnemingen van H.A. Thomas (1) de watersnelheden in het bovenstroomse gedeelte A van elke golf "supercritiek" en in het andere deel B (inclusief de golftop) "subcritiek" zijn. (De termen supercritiek en subcritiek hebben betrekking op watersnelheden welke resp. groter en kleiner zijn dan de z.g. critieke snelheid, welke voor een zeer brede, rechthoekige horizontale leiding b.v. gelijk is aan \sqrt{gH}) (zie fig. I-1 en fig. I-2).

Is bij eenparige stroming in een hellende leiding het wateroppervlak eenmaal gevoelig voor het ontstaan van instabiliteiten, dan vindt de opwekking van rolgolven, resulterend in een periodieke permanente rolgolftrein, niet spontaan plaats, maar is de aanwezigheid van een of andere aanvangspuls van een buiten het verschijnsel staande bron (b.v. windgolven aan de ingang van de leiding, een onregelmatigheid in leidingbodem of - wanden, vallende regendruppels) vereist. Deze puls behoeft slechts licht te zijn, maar het bestaan ervan bepaalt de tijdsafstand tussen de golftoppen in de leiding (zie H.A. Thomas (1)). Het ontstaan van periodieke permanente rolgolven vereist normaliter een veelal zeer grote leidinglengte; wordt echter bij experimenten aan het begin van de leiding via een of andere puls-generator regelmatig een verstoring aangebracht, dan ontstaat een dergelijk golfpatroon na een veel kleinere leidinglengte.

Over het algemeen zijn rolgolven een ongewenst verschijnsel, aangezien de maximale waterdiepte in een rolgolftrein groter is dan de normale of ongestoorde diepte, zodat een leiding, gedimensioneerd op afvoer bij normale diepte (i.e. eenparige of permanente afvoer) eventueel dezelfde afvoer met rolgolven, afhankelijk van de aangehouden veiligheidsnormen, niet meer zou kunnen verwerken, zonder dat het water over de boorden stroomt, waarbij dan nog de sterke wisselingen in druk komen.

V. Cornish (2) observeerde en beschreef als eerste op elegante wijze rolgolven in een lange open leiding met rechthoekige doorsnede (i.e. het leidingtype waarin rolgolven meestal worden waargenomen) te Merligen, die water aanvoert uit de bergen naar het Thunmeer in de Alpen. Hij publiceerde enkele interessante foto's van rolgolven en deed enkele grove metingen: hij merkte op dat de golffronten die zich in benedenstroomse

richting voortplantten hagenoeg verticaal waren en discontinuïteiten in het wateroppervlak vormden, welke zeer turbulent waren. Hij sprak het vermoeden uit dat rolgolven fundamenteel afhangen van de aanwezigheid van wrijvingseffecten, welke op de stroming werken. In een Appendix op het boek van V. Cornish merkt H. Jeffreys verder op: " Omdat de golven een typisch discontinu karakter hebben, vertonen zij waarschijnlijk enige theoretische gelijkenis met bores; er is echter een fundamenteel verschil, aangezien de beweging van elke stroming beheerst wordt door de wrijving, terwijl bores waarschijnlijk voorkomen ondanks wrijving".

Uit het bovenstaande en uit experimenten van o.a. H.A. Thomas (1) blijkt dat het fenomeen rolgolven fundamenteel afhangt van de weerstand, welke te danken is aan de wrijving langs leidingbodem en -wanden (en de resulterende turbulentie). Dit wordt nog bevestigd door H. Rouse (3), die kortweg opmerkt dat de vorming van rolgolven voorkomen kan worden door het creëren van voldoende weerstand door wrijving.

Opmerking:

In bovenstaande is de benaming rolgolven gekoppeld aan het begrip turbulentie. Ook in de literatuur worden rolgolven steeds genoemd in samenhang met turbulente stroming: de rolgolven worden beschouwd als een stromingswijze die voor kan komen in geval van turbulente stroming in een hellende open leiding.

Een analyse van de experimenten van L. Hopf (4), betreffende laminaire stromingstoestanden met geringe diepte, toont aan dat een laminaire stroming onder bepaalde voorwaarden golfverschijnselen kan gaan vertonen. Zoals zal blijken kan de stromingstoestand voor dit geval in eerste benadering weergegeven worden door hetzelfde instabiliteitscriterium als gebruikt wordt voor turbulente stroming, wat inhoudt dat de overgang naar de stromingstoestand met golven niet bepaald wordt door turbulente pulsatie.

Ook uit proefnemingen van P.G. Mayer (5) volgt dat in een hellende open leiding met laminaire stroming (onder bepaalde voorwaarden) golfverschijnselen ontstaan, die aangeduid kunnen worden met de benaming rolgolven. Qua vorm komen deze laminaire rolgolven overeen met de bovengenoemde turbulente rolgolven: zij worden gekenmerkt door een "staart" of (laminair stromend)

golfdal , en een kop of golf~~front~~ met sterke vorticititeit, (alle vorticititeit is hierin geconcentreerd).

Een en ander kan men zich kwalitatief als volgt voorstellen: wanneer in een leiding de watertoevoer wordt opengedraaid, en er wordt voldaan aan zekere voorwaarden, dan zal er een eenparige laminaire stroming ontstaan; deze kan bij verhoging van de afvoer op zeker moment instabiliteiten gaan vertonen (of gevoelig worden voor een opgelegde oppervlakteverstoring), waaruit zich bij voldoende grote leidinglengte laminaire rolgolven zullen gaan ontwikkelen met de bovenomschreven gedaante. Wordt de afvoer nog groter, dan zal het getal van Reynolds in de buurt van 500 komen en begint de overgang van laminaire naar turbulente stroming plaats te vinden. Deze verandering van regime (i.e. stromingsvoorwaarden) betekent dat de weerstand voor de stroming gaat veranderen (er gaat een andere wrijvingsformule gelden) en de laminaire rolgolven verdwijnen. Wordt de afvoer nog verder vergroot dan is de stroming op gegeven moment volledig turbulent en zullen er (onder zekere voorwaarden) turbulente rolgolven kunnen ontstaan.

P.G. Mayer geeft ook aan dat er in het overgangsgebied tussen laminaire en turbulente stroming geen rolgolven (i.e. de schrijver noemt alleen laminaire rolgolven "rollwaves") en "slugflows" gevormd kunnen worden, wat kennelijk wordt veroorzaakt door de verschillende stromingswijzen en derhalve andere wrijvingswetten; de door de auteur genoemde "slugflows" ontstaan volgens hem uit de instabiliteit welke de overgang van laminaire naar turbulente stroming veroorzaakt: zij schijnen echter veel meer overeen te komen met niet complete rolgolven voor een laag getal van Reynolds in turbulente stroming welke net van laminair naar volledig turbulent is overgegaan (misschien zijn "slugflows" te verklaren als een soort rolgolven welke ontstaan uit instabiliteiten van de stroming zelf bij een klein getal van Reynolds, zowel in turbulente stroming als bij rolgolven in laminaire stroming).

Omdat volgens bovenstaande in laminaire stroming ook golven kunnen ontstaan, zullen we in de hierna te geven beschouwingen ook de laminaire stroming opnemen, en het regelmatig golfpatroon dat ook in geval van laminaire stroming in een hellende open leiding uiteindelijk kan ontstaan, aanduiden met de benaming rolgolven; deze rolgolven in laminaire stroming zullen qua vorm

ongeveer gelijk zijn aan de rolgolven in turbulente stroming.

Als een mogelijk voorbeeld van dergelijke laminaire rolgolven zou men kunnen noemen de pulserende stroming die gedurende een hevige regenbui in het water dat als een dunne laag langs een dak met steile helling laminair naar beneden stroomt, ontstaat; de aanvangsimpuls voor de onregelmatige periodiciteit kan dan geweten worden aan de vallende regendruppels.

In ieder geval geldt dat rolgolven kunnen gaan verschijnen in het laminaire gebied.

Voor de diverse stadia in de ontwikkeling van rolgolven, zie fig. I-3.

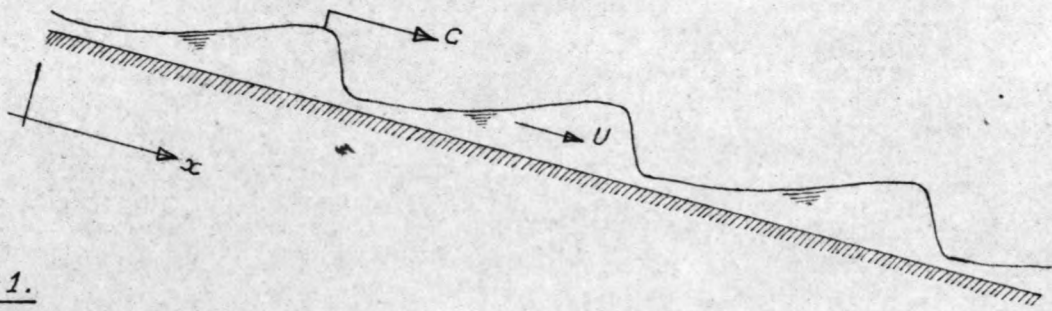


Fig. I-1.

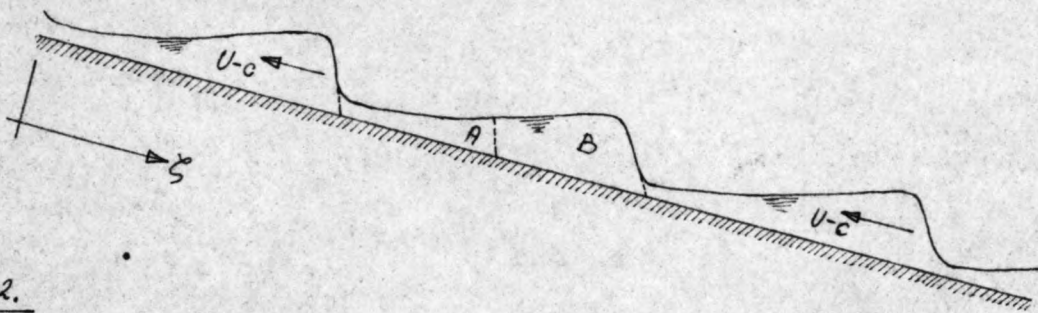


Fig. I-2.

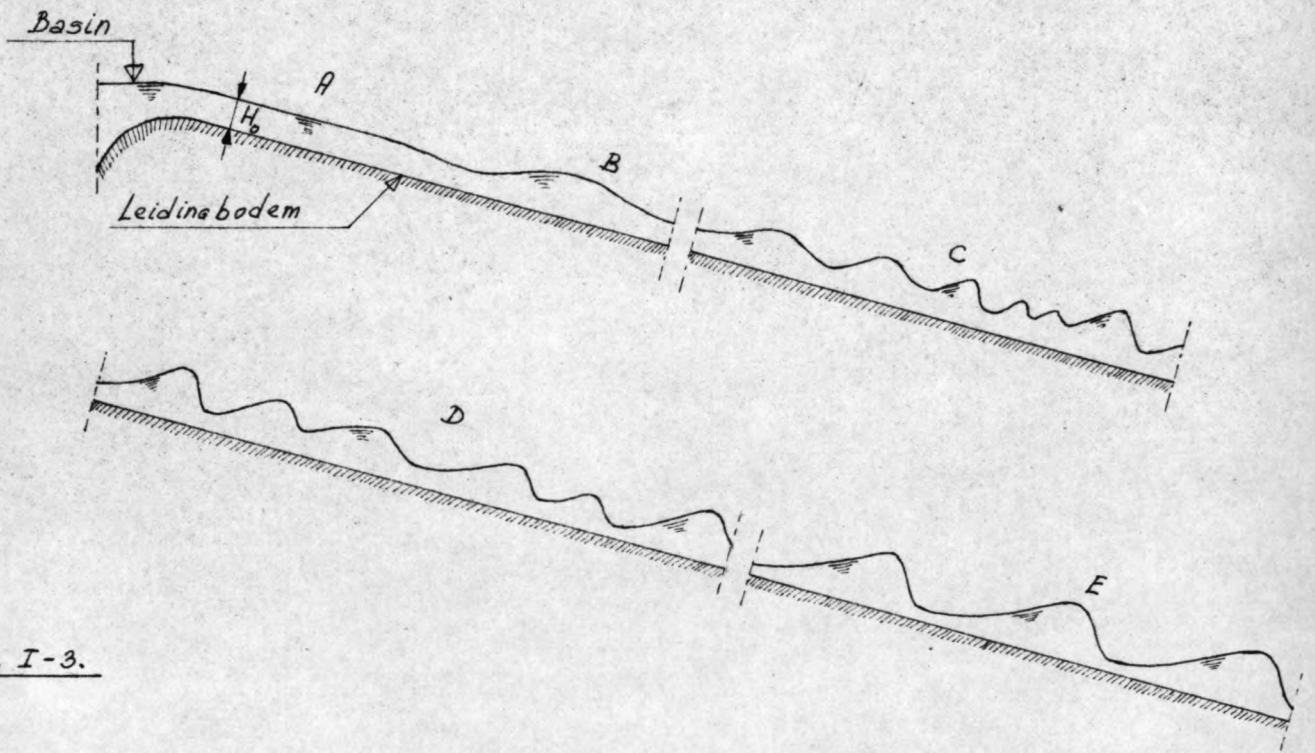


Fig. I-3.

Toelichting op de figuren bij Hoofdstuk I.

Fig.I-1: Golf en golfsnelheden.

Fig.I-2: Relatieve snelheid.

Fig.I-3: Ontwikkelingsfasen van rolgolven (globaal).

- A: Zuiver eenparige "gladde" stroming, gevoelig voor instabiliteiten.
- B: "Gladde" b.v. sinusoidale golf.
- C: De stroming in B breekt in een aantal golven met kleinere golflengten.
- D: De golffronten worden steiler, de achterzijden van de golven vlakken af; grotere golven halen kleinere in, nemen deze in zich op en gaan samen (groter) verder.
- E: Uiteindelijk permanent periodiek golfpatroon; de achterzijden van de golven zijn "glad", alle vorticititeit is in de golffronten geconcentreerd.

HOOFDSTUK II: De afleiding van de basisvergelijkingen

Bij de behandeling van het hier gestelde probleem -de (op-)slingering van een vloeistofoppervlak betreffende- is een zekere benadering, welke gebaseerd is op enkele aannamen (zodanig gedaan dat de gemiddelde stroomsnelheid, de waterdiepte en de vorm van de dwarsdoorsnede tot uitdrukking komen in de zogenaamde fundamentele vgl. voor de beweging van vloeistoffen in een open leiding), veel eenvoudiger voor de mathematische en fysische behandeling van de analyse van het vraagstuk, dan als uitgangspunt de oorspronkelijke vgl'n. van Navier-Stokes te nemen.

Waar het hier gaat om een stromingswijze, welke gekenmerkt wordt door typisch horizontale afmetingen (i.e. golf-lengten) die groot zijn t.o.v. typisch verticale afmetingen (i.e. waterdiepten) is het meestal voldoende om aan te nemen dat de verticale versnellingen van de vloeistof in de leiding met vrije waterspiegel te verwaarlozen zijn, m.a.w. er van uit te gaan dat de drukverdeling hydrostatisch is (dit impliceert tevens verwaarlozing van de kromming van het wateroppervlak).

De fundamentele vgl. voor turbulente stroming in een open prismatische leiding met willekeurige doorsnede is op schitterende wijze afgeleid door G.A. Keulegan en G.W. Patterson (6,7), die aannamen dat de drukverdeling hydrostatisch is, en alle kleine termen op deskundige wijze verwaarloosden; de door hen afgeleide vgl. bezit ook geldigheid voor het geval van laminaire stroming. De afleiding van de door bovengenoemde auteurs gegeven vgl. is echter nogal gecompliceerd en uitgebreid. Daarom zullen we er hier mee volstaan de impulsvgl. af te leiden uit een beschouwing van de impulsverandering door twee dwarsdoorsneden: deze afleiding is veel eenvoudiger en korter, en alleszins redelijk; bovendien komen de resultaten van deze benaderingswijze overeen met die van G.H. Keulegan en G.W. Patterson.

Als uitgangspunt nemen we aan: de vloeistof is onsamendrukbaar en de dichtheid, ρ , is constant (deze aanname wordt gerechtvaardigd door het feit dat de berging in het vrije oppervlak veel groter is dan de berging t.g.v. samendrukbaarheid); de visceuze spanningen (i.e. inwendige wrijving) worden verwaarloosd.

II-a: De continuïteitsvgl. voor de gemiddelde stroming in een open leiding.

We zullen een vgl. afleiden die van toepassing is op elke stroombuis, met een dwarsdoorsnede, welke zowel in plaats als tijd veranderlijk is.

Aangenomen wordt dat de buis niet op zichzelf aansluit; en aangezien deze een mathematische voorstelling is van een leiding met stromend water, gaan we uit van de schets in fig. II-1. De dwarsdoorsnede van de leiding, loodrecht op x, stellen we voor door $A = A(x, t)$, de gemiddelde waarde van de stroomsnelheid u over de dwarsdoorsnede door $U = U(x, t)$. De positieve x-richting is zo gekozen dat U positief is. De werkelijke richting van x is willekeurig, maar voor het gemak laten we deze ongeveer samenvallen met de richting van de leiding.

De hoeveelheid vloeistof welke het beschouwde vak Δx binnenstroomt gedurende het tijdsinterval Δt is

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} U(x_0, t) \cdot A(x_0, t) dt$$

terwijl de hoeveelheid vloeistof die in dezelfde tijd naar buiten stroomt

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} U(x_0 + \Delta x, t) \cdot A(x_0 + \Delta x, t) dt$$

is. Het vloeistofvolume in het vak Δx ten tijde t_0 is:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} A(x, t_0) dx$$

en ten tijde $t_0 + \Delta t$:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} A(x, t_0 + \Delta t) dx$$

De vloeistof is onsamendrukbaar, dus de netto hoeveelheid vloeistof, die het vak Δx uitstroomt, plus de volumevermeerdering binnen dit vak moet gelijk aan nul zijn:

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} [U(x_0 + \Delta x, t) \cdot A(x_0 + \Delta x, t) - U(x_0, t) \cdot A(x_0, t)] dt + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} [A(x, t_0 + \Delta t) - A(x, t_0)] dx = 0$$

Passen we hierop de stelling van het gemiddelde voor integralen toe, delen we vervolgens door $\Delta x \cdot \Delta t$ en laten we dan Δx en Δt tot nul naderen, dan krijgen we:

$$\frac{\partial}{\partial x} (VA) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad ,$$

welke vgl. ook geschreven kan worden als:

$$V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Bovenstaande vgl. is de continuïteitsvgl. voor de gemiddelde stroming in een open leiding. Aangezien er geen aannamen zijn gedaan betreffende de vorm van de leiding, geldt deze vgl. algemeen voor open leidingen.

II-b: De vgl. voor de gemiddelde stroming in een open prismatische leiding.

Beschouwen we een prismatische leiding en kiezen we als oorsprong van een rechtsdraaiend Cartesiaans coördinatenstelsel het laagste punt van zekere dwarsdoorsnede (zie fig. II-2). Kiezen we als x-as de lijn evenwijdig aan de leiding (de positieve richting in de stroomrichting), als y-as de horizontale lijn, en de z-as positief omhoog. De hellingshoek van de leiding, θ , is de hoek die de positieve x-as met de horizontaal in het x,z-vlak maakt, gemeten in de richting tegen de wijzers van de klok in, gezien in de richting waarin y toeneemt; m.a.w. een positieve leidinghelling is stroomafwaarts gericht.

De bewegingsvgn. voor een ideale vloeistof (i.e. onsamendrukbaarheid, visceuze spanningen verwaarloosd), toegepast op een volume elementje $dx dy dz$, de z.g. vgn. van Euler luiden:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z \end{aligned} \right\} ,$$

waarin de operator $\frac{d}{dt}$ in termen van de plaatselijke variaties

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

is. Hierin zijn:

u, v en w de snelheidscomponenten in de resp. x -, y - en z -richting, beschouwd als functies van x, y, z en t , p de druk, en ρ de dichtheid;

X, Y en Z de componenten in de resp. x -, y - en z -richting van de uitwendige, c.q. volumekrachten.

We gaan nu uit van het volgende: we nemen aan dat de tweede afgeleiden van de dwarsdoorsnede A en de gemiddelde stroomsnelheid U , benevens de producten en kwadraten van de eerste afgeleiden van U en/of A verwaarloosbaar klein zijn t.o.v. de eerste afgeleiden, en dat de overheersende snelheidscomponent die in de x -richting is. Een stroming waarvoor dit geldt noemt men geleidelijk veranderend of quasi-permanent. In het algemeen zal dit vereisen dat de helling van de leidingwanden niet te flauw is (b.v. niet flauwer dan 1:1), dat de helling van het golfprofiel klein is t.o.v. 1, en de kromming van het golfprofiel klein is t.o.v. $\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial x}$ of $\frac{1}{U^2} \frac{\partial U}{\partial t}$.

Als gevolg van deze beperkingen zijn $\frac{dv}{dt}$ en $\frac{dw}{dt}$ verwaarloosbaar klein t.o.v. $\frac{du}{dt}$; hetzelfde geldt voor v en w , maar dan t.o.v. u .

Op grond van deze aannamen worden de bewegingsvgn. voor de y - en z -richting, omdat $Y=0$ en $Z = -g \cos \theta$:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \text{en} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

De simultane oplossing van dit stelsel vgn. met de dynamische randvoorwaarde $p = p_a = 0$ voor $z=H$ is:

$$p = p_a + \rho g \cos \theta \cdot (H - z) ,$$

waarin $H = H(x, t)$, een functie van x en t alleen, de z -coördinaat van het vrije oppervlak is, en $p_a = 0$ de atmosferische druk. Volgens het bovenstaande is in quasi-permanente stroming

de druk overal hydrostatisch. Partiële differentiatie naar x van de laatste vgl. geeft:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \sin \theta \cdot \frac{\partial H}{\partial x}$$

I.p.v. de bewegingsvgl. voor de x -richting, zoals deze hierboven is gegeven, zullen we gebruik maken van de impulsvgl. voor de x -richting, toegepast op een macro-elementje (fungerend als controle volume), begrensd door twee dwarsdoorsneden met resp. x -coördinaten x en $x+dx$ (zie fig. II-3)

De impulsvgl. in de x -richting kan geschreven worden in de algemene gedaante:

$$\sum F_x = \frac{dM_x}{dt} = \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{dM_{x_0} - dM_{x_1}}{dt}$$

Hierin is:

$\sum F_x$ de som van de uitwendige krachten in de x -richting, werkend op het macro-elementje;

$\frac{\partial m_x}{\partial t}$ de mate van impulsverandering in de x -richting binnen het macro-elementje (i.e. controle volume);

$\frac{dM_{x_0} - dM_{x_1}}{dt}$ de mate van impulstransport in de x -richting

uit het macro-elementje door de begrenzende dwarsdoorsneden (het symbool m , resp. M staat hier voor impuls). Voor de afleiding van deze formule, zie de Appendix van dit hoofdstuk II.

Allereerst gaan we $\sum F_x$ bepalen; $\sum F_x$ is te schrijven als:

$$\sum F_x = F_{x-g} + F_{x-\Delta p} + F_{x-\tau}$$

De uitwendige kracht op het macro-elementje t.g.v. de zwaartekracht is:

$$F_{x-g} = \rho g A \sin \theta \cdot dx + \text{term} (\propto \frac{1}{2} B dx \frac{\partial H}{\partial x} dx \rho g \sin \theta),$$

waarin $B = b_2 + b_1$, als b_2 en $-b_1$ de y -coördinaten zijn van de twee punten op de natte omtrek met afstand H tot het x, y -vlak en g de gradient van het conservatieve homogene zwaartekrachtveld is.

Verwaarlozen we termen oneindig klein van de tweede en hogere orde, dan is:

$$F_{x-g} = \rho g A \sin \theta \cdot dx$$

De uitwendige kracht op het macro-elementje t.g.v. het drukverval over het interval dx is, aangezien de drukverdeling hydrostatisch is aangenomen:

$$\begin{aligned} F_{x-dp} &= -\rho g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) = \\ &= -\rho g A \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} dx - \rho g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} dx \frac{\partial A}{\partial x} dx \end{aligned}$$

Termen oneindig klein van de tweede en hogere orde worden weer verwaarloosd dus:

$$F_{x-dp} = -\rho g A \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} dx$$

De uitwendige kracht op het macro-elementje t.g.v. de wrijving wordt bepaald door de schuifspanning τ langs de bodem en wanden. Nemen we aan dat de schuifspanning aan het vrije oppervlak gelijk aan nul is, en definiëren we τ_0 als de gemiddelde schuifspanning van de vloeistof langs de leidingwanden en -bodem voor zekere dwarsdoorsnede als:

$$\tau_0 = \frac{1}{S} \int \tau \cdot ds$$

waarin S de natte omtrek voorstelt. Als we aannemen dat τ_0 de gemiddelde schuifspanning is in de doorsnede met coördinaat x , en $\tau_0 + d\tau_0$ de gemiddelde schuifspanning in de doorsnede, met coördinaat $x + dx$, dan mogen we voor de gemiddelde wrijvingskracht op het macro-elementje stellen:

$$F_{x-\tau} = -\frac{1}{2} \{ \tau_0 + (\tau_0 + d\tau_0) \} S dx = -\tau_0 S dx - \frac{1}{2} d\tau_0 S dx$$

Verwaarlozen we weer de termen oneindig klein van de tweede en hogere orde, dan is:

$$F_{x-\tau} = -\tau_0 S dx$$

N.B. We verwaarlozen de kromming van de stroomlijnen, en derhalve behoeft de invloed van de oppervlaktetenspanningen niet in rekening te worden gebracht. De oppervlaktetenspanningen moeten wel in beschouwing worden genomen voor het geval van laminaire

stroming in een zeer steile open leiding (met name) als het getal van Reynolds zeer hoog is.

We hebben nu gekregen voor ΣF_x :

$$\Sigma F_x = \rho g A \sin \theta \cdot dx - \rho g A \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} dx - \tau_0 \cdot S dx$$

Bepalen we vervolgens $\frac{dM_x}{dt}$.

De massa van een volume-elementje $dx dy dz$ binnen het als controle volume beschouwde macro-elementje is:

$$\rho dx dy dz ;$$

met $dA = dy dz$ wordt dit:

$$\rho dx dA$$

De impuls van dit volume elementje in de x-richting is dan:

$$\rho v dx dA$$

Breiden we dit nu uit tot het gehele macro-elementje, gebruikmakend van de aanname dat termen oneindig klein van de tweede en hogere orde te verwaarlozen zijn, dan krijgen we:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_A \rho v dx dA = \rho dx \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_A v dA$$

De hoeveelheid impuls in de x-richting, welke door een oppervlakte elementje $dy dz = dA$ van het controle volume naar buiten stroomt in een tijdsbestek dt is:

$$\rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 \cdot dA dt$$

De totale hoeveelheid impuls in de x-ri. welke per tijdseenheid door de oppervlakte van het controle volume naar buiten stroomt is:

$$\frac{dM_x}{dt} = \int_{A + \frac{\partial A}{\partial x} dA} \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 \cdot dA$$

Evenzo is de totale hoeveelheid impuls in de x-richting, welke per tijdseenheid door de oppervlakte van het controle volume naar binnen stroomt:

$$\frac{dM_x}{dt} = \int_A \rho v^2 dA$$

$\frac{dM_x}{dt}$ wordt nu:

$$\frac{dM_x}{dt} = \rho dx \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_A v dA + \rho \int_{A + \frac{\partial A}{\partial x} dA} \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 dA - \rho \int_A v^2 dA$$

De gemiddelde stroomsnelheid U in een dwarsdoorsnede wordt impliciet gedefiniëerd door:

$$UA = \int_A u \, dA$$

We zullen nu een coëfficiënt voor de verticale snelheidsverdeling, α , definiëren als de verhouding tussen het gemiddelde van de snelheid in het kwadraat en het kwadraat van de gemiddelde snelheid, beide gemiddelden genomen over de dwarsdoorsnede, dus:

$$\alpha U^2 A = \int_A u^2 \, dA$$

Deze coëfficiënt α werd het eerst geïntroduceerd door J. Boussinesq (8); aangenomen wordt dat α niet afhankelijk is van x en t . M.b.v. deze beide laatste betrekkingen wordt $\frac{dM_x}{dt}$:

$$\frac{dM_x}{dt} = \rho dx \frac{\partial(UA)}{\partial t} + \alpha \rho (U + \frac{\partial U}{\partial x} dx)^2 (A + \frac{\partial A}{\partial x} dx) - \alpha \rho U^2 A$$

Uitwerking hiervan geeft:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} = \rho dx \frac{\partial(UA)}{\partial t} + \alpha \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} dx + 2\alpha \rho UA \frac{\partial U}{\partial x} dx + \\ + 2\alpha \rho U \frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial A}{\partial x} dx + \alpha \rho (\frac{\partial U}{\partial x} dx)^2 (A + \frac{\partial A}{\partial x} dx) \end{aligned}$$

Termen oneindig klein van de tweede en hogere orde worden weer verwaarloosd, dus:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} = \rho dx \frac{\partial(UA)}{\partial t} + \alpha \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} dx + 2\alpha \rho UA \frac{\partial U}{\partial x} dx = \\ = \rho dx (A \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial t}) + \alpha \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} dx + 2\alpha \rho UA \frac{\partial U}{\partial x} dx \end{aligned}$$

De continuïteitsvergelijking luidt:

$$U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 ,$$

waaruit volgt:

$$U^2 \frac{\partial A}{\partial x} = -UA \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial A}{\partial t}$$

Substitutie hiervan in $\frac{dM_x}{dt}$ geeft:

$$\frac{dM_x}{dt} = \rho A dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \right\}$$

$\Sigma F_x = \frac{dM_x}{dt}$ geeft dan na deling door $\rho A dx$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_0 \cdot S}{\rho A}$$

Dit is de vergelijking voor de gemiddelde stroming in een prismatische leiding met vrije waterspiegel.

Resumerend hebben we dus als fundamentele basisvgn. gekregen:

$$\frac{\partial}{\partial x} (UA) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1^a)$$

of

$$U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1^b)$$

en

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_0}{\rho R} \quad (2)$$

waarin:

$U=U(x,t)$ is de gemiddelde stroomsnelheid in een dwarsdoorsnede;

$A=A(x,t)$ is de dwarsdoorsnede;

x is de x -coördinaat, positief gekozen in stroomafwaartse richting langs de leidingbodem;

t is de tijd;

$H=H(x,t)$ is de waterdiepte, gemeten vanaf het x,y -vlak;

$R=\frac{A}{S}$ is de hydraulische straal;

g is de versnelling van het zwaartekrachtveld;

θ is de hellingshoek van de leiding;

τ (i.p.v. τ_0) is de gemiddelde schuifspanning langs wanden en bodem in zekere doorsnede;

α is de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal, aangenomen als onafhankelijk van x en t .

De vgln.(1) geven de continuïteitsvoorwaarde voor de gemiddelde stroming in een open leiding.

De vgl.(2) is de hydraulische bewegingsvgl. (c.q. impulsvgl.) voor geleidelijk veranderende niet-permanente (i.e. quasi-permanente) stroming in een prismatische leiding met vrije waterspiegel.

N.B.I

In werkelijkheid zal bij de stroming van een vloeistof (zeker bij turbulente stroming) het momentane stromingspatroon over het algemeen niet rotatie-vrij zijn; we beschouwen hier alleen het geval dat de "gemiddelde" stroming (dus zeker onder verwaarlozing van de turbulentie componenten) rotatie-vrij is.

De watersnelheden, genoemd in voorgaande afleidingen, hebben betrekking op snelheden welke gemiddeld zijn over een voldoende groot tijdsinterval, zodat in geval van turbulentie, het fluctuerende deel van de snelheden gelijk aan nul is.

N.B.II

De vgln.(1) en (2) komen (behoudens de wrijvingsterm in vgl.(2)) qua vorm overeen met de vgln. voor de z.g. niet-lineaire ondiepwatertheorie, wat geenszins verwonderlijk is, omdat deze vgln. op de conventionele wijze, uitgaande van de Eulervgl. afgeleid kunnen worden onder dezelfde aannamen als in het bovenstaande zijn gedaan (i.e. de z -component van de versnelling der waterdeeltjes in een tweedimensionale rotatievrije stroming, heeft een verwaarloosbaar effect op de druk, d.w.z. de drukverdeling wordt hydrostatisch aangenomen). Deze theorie wordt zo genoemd omdat een stroming, waarvan de verticale afmetingen klein zijn t.o.v. de horizontale afmetingen, of waarvoor de stroomlijnen een slechts kleine kromming hebben, bij benadering een hydrostatische drukverdeling te zien geeft. Alhoewel de theorie ge-lineariseerd is, behoeven de echte verstoringen van de stroom niet noodzakelijkerwijs klein te zijn. Een betere afleiding van de ondiepwatervgl. (onder verwaarlozing van alle wrijvings-effecten) is gegeven door K.O. Friedrichs (9), die deze verkreeg als de hoogste approximatie in een perturbatiemethode, toegepast op de Eulervgl. Aannemende dat de perturbatiemethode convergeert

of asymptotisch is, volgt hieruit dat de ondiepwatervgl. voldoende nauwkeurig zullen zijn, indien het product van de maximale kromming van het vrije oppervlak en de diepte klein, of wat hetzelfde is, indien een typisch verticale afmeting van de stroming klein is t.o.v. een typisch horizontale afmeting. J.B. Keller (10), verkreeg later hogere approximaties, gebruik makend van de methode van K.O. Friedrichs, benevens, op dezelfde wijze, gegeneraliseerde ondiep-watervgl. voor driedimensionale stroming, wederom onder verwaarlozing van alle wrijvingseffecten. Zich baserend op resultaten van K.O. Friedrichs en J.B. Keller maakte R.F. Dressler (11) gebruik van een perturbatie methode om continue rolgolfoplossingen te verkrijgen, waarbij hij in de door hem toegepaste procedure de weerstandseffecten alleen in de hoogste approximatie beschouwde, doch deze verwaarloosde in het kleine gedeelte van de oplossing dat wordt bijgedragen door de hogere approximaties.

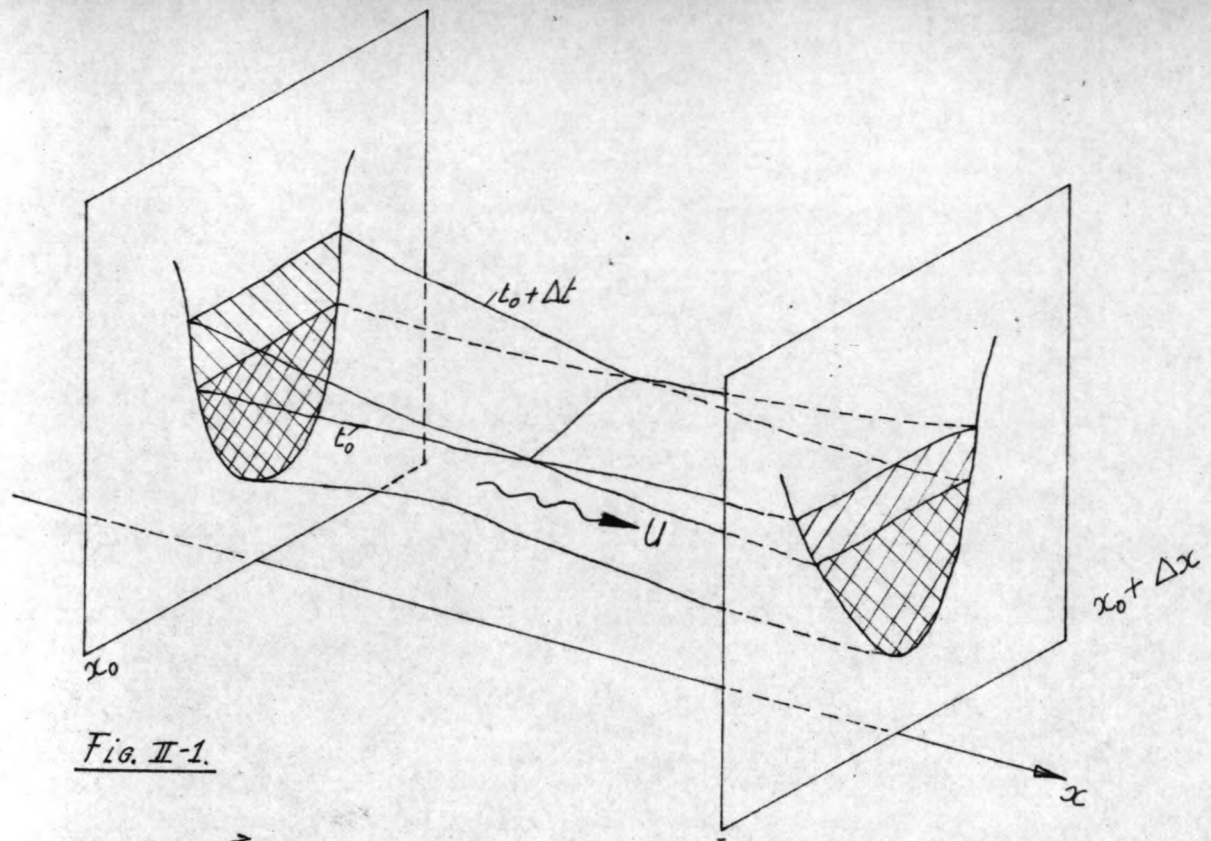


Fig. II-1.

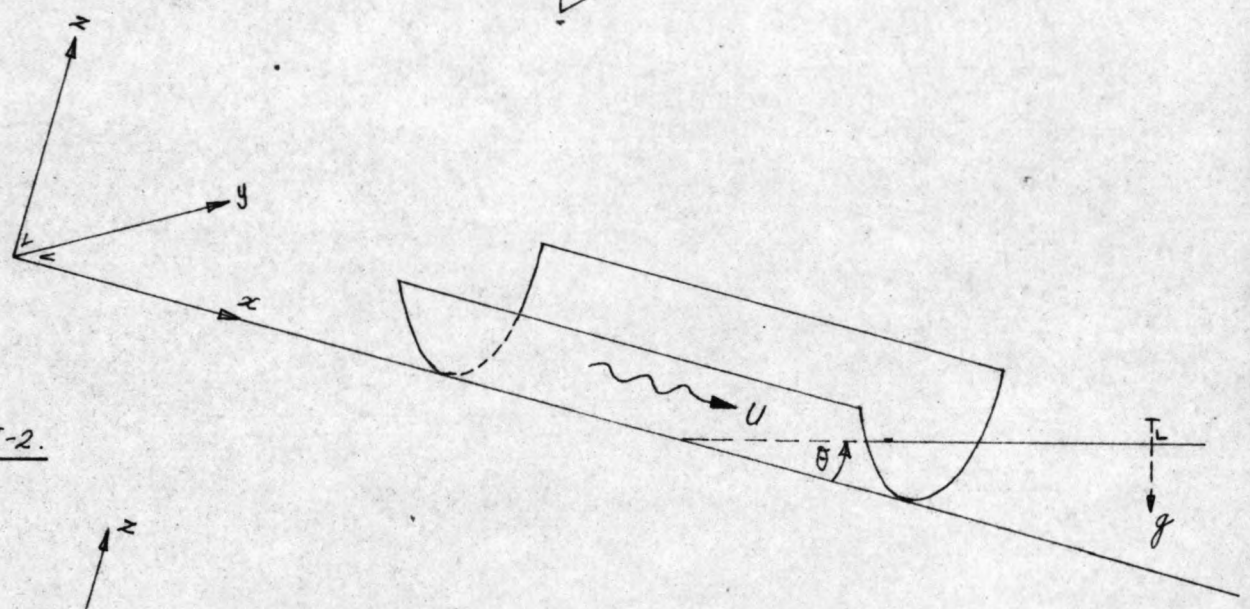


Fig. II-2.

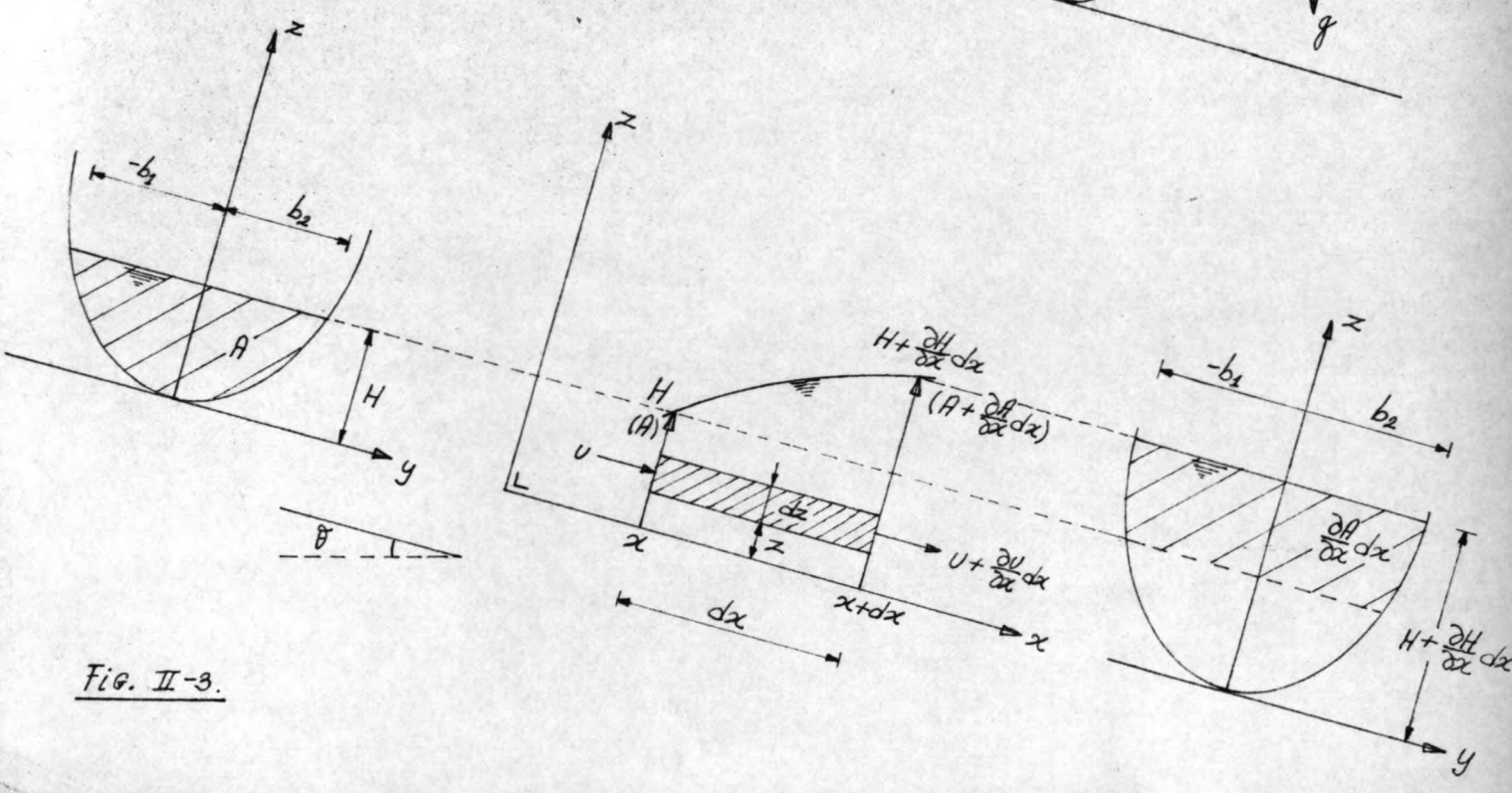


Fig. II-3.

Toelichting op de figuren bij Hoofdstuk II.

Fig.II-1: Oppervlaktevormen op twee verschillende tijdstippen in een open leiding.

Fig.II-2: Coördinatenstelsel in een prismatische leiding.

Fig.II-3: Schets van het macro-elementje dx , en de twee dwarsdoorsneden ter plaatse x en $x+dx$, gezien in stroomopwaartse richting, t.b.v. de bepaling van de impulsvgl. in de x -richting.

Hierin is:

$\frac{dM}{dt}$ de mate van opeenhoping van massa binnen het C.V.
 en $\frac{dm_o - dm_i}{dt}$ de netto hoeveelheid massa die het C.V. verlaat.

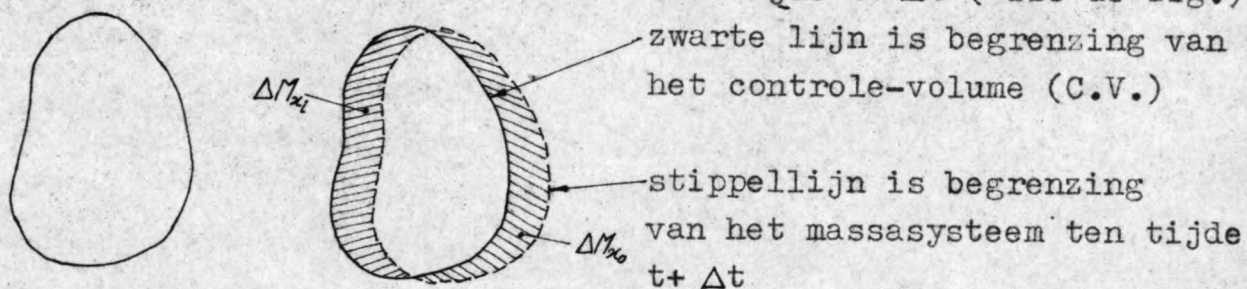
b: Afleiding van de algemene gedaante van de wet van behoud van impuls.

De tweede wet van Newton kan geschreven worden in de gedaante:

$$\sum F_x = \frac{d(\text{massa} \cdot V_x)}{dt},$$

waarin $\sum F_x$ de som van de uitwendige krachten in de x-richting, en $\frac{d(\text{massa} \cdot V_x)}{dt}$ de mate van impulsverandering in de x-richting is. Als symbool voor de impuls (massa $\cdot V$) zullen we kiezen M.

Een massasysteem neemt ten tijde t een zekere ruimte in, en beweegt naar een nieuwe ruimte ten tijde $t + \Delta t$ (zie de fig.)



M_{x_1} is de impuls in de x-richting van het massasysteem ten tijde t;
 M_{x_2} " " " " " " " " " " " " t + Δt ;
 M'_{x_1} is de impuls in de x-richting van de massa in het controle volume ten tijde t;

M'_{x_2} is de impuls in de x-richting van de massa in het controle volume ten tijde $t + \Delta t$.

ΔM_{x_0} is de impuls in de x-richting van de massa, welke het controle volume in een tijdsbestek Δt heeft verlaten.

ΔM_{x_i} is de impuls in de x-richting van de massa, welke het controle volume in een tijdsbestek Δt is binnengekomen.

De impuls in de x-richting van het massasysteem is gelijk aan de impuls van de massa in het controle volume ten tijde t, omdat het hier in beide gevallen dezelfde massa betreft:

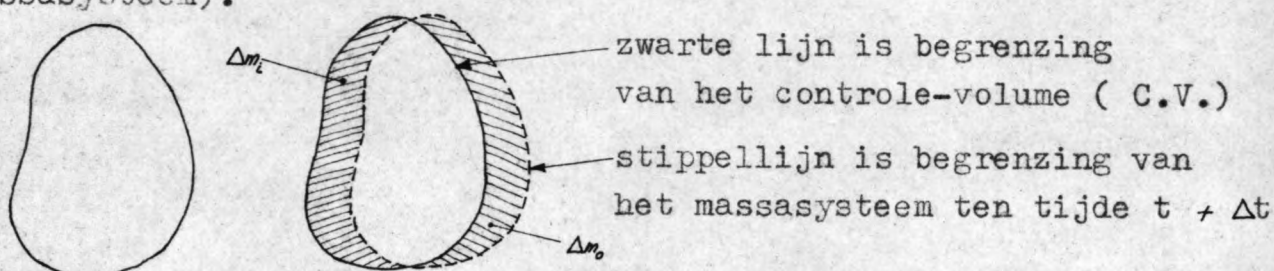
$$M_{x_1} = M'_{x_1}$$

Ten tijde $t + \Delta t$ is de impuls in de x-richting van het massasysteem gelijk aan de impuls in de x-richting van de massa in het controle volume, plus de impuls in de x-richting, van de massa die het controle volume heeft verlaten, minus de impuls

II.A: APPENDIX van Hoofdstuk II

a: Afleiding van de algemene gedaante van de wet van behoud van massa.

Het controle volume (C.V.) is gebonden aan de plaats. Ten tijde t is het C.V. volledig gevuld met massa (een z.g. massasysteem).



Aanname: de massa is een continuüm, het gehele C.V. is ten tijde t met massa gevuld. In een tijdsbestek Δt verdwijnt een gedeelte Δm_o van het massasysteem uit het C.V., en een gedeelte Δm_i komt erin (zie de fig.).

M_1 is de massa van het massasysteem ten tijde t .

M_2 " " " " " " " " " " $t + \Delta t$

M'_1 is de massa in het C.V. ten tijde t

M'_2 " " " " " C.V. " " " $t + \Delta t$

Per definitie is: $M_1 = M_2$ (geen vernietiging etc. van massa).

Ten tijde t is $M_1 = M'_1$ (het C.V. is geheel met de massa van het massasysteem gevuld).

Ten tijde $t + \Delta t$ is:

$$M_2 = M'_2 - \Delta m_i + \Delta m_o$$

Substitutie van M_2 en M'_1 in de vgl. $M_1 = M_2$ geeft:

$$M'_1 = M'_2 - \Delta m_i + \Delta m_o \quad ;$$

delen door Δt geeft:

$$\frac{M'_2 - M'_1}{\Delta t} + \frac{\Delta m_o - \Delta m_i}{\Delta t} = 0$$

De limiet hiervan voor $\Delta t \rightarrow 0$ geeft:

$$0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{M'_2 - M'_1}{\Delta t} + \frac{\Delta m_o - \Delta m_i}{\Delta t} \right\}$$

waaruit volgt:

$$\frac{dM'}{dt} + \frac{dm_o - dm_i}{dt} = 0$$

in de x-richting van de massa die het controle-volume is binnengekomen, in een tijdsbestek Δt :

$$M_{x_2} = M'_{x_2} + \Delta M_{x_0} - \Delta M_{x_i}$$

De impulsverandering in de x-richting van het massasysteem is:

$$M_{x_2} - M_{x_1}$$

Vindt dit plaats in het tijdsinterval Δt , dan is de verandering ΔM_x :

$$\Delta M_x = M_{x_2} - M_{x_1}$$

Substitueren we de gevonden woorden voor M_{x_2} en M_{x_1} hierin, dan krijgen we:

$$\Delta M_x = M'_{x_2} - M'_{x_1} + \Delta M_{x_0} - \Delta M_{x_i}$$

Delen door Δt geeft:

$$\frac{\Delta M_x}{\Delta t} = \frac{\Delta(\text{massa} \cdot v)}{\Delta t} = \frac{M'_{x_2} - M'_{x_1}}{\Delta t} + \frac{\Delta M_{x_0} - \Delta M_{x_i}}{\Delta t}$$

De limiet van $\frac{\Delta M_x}{\Delta t}$ voor $\Delta t \rightarrow 0$ geeft:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_x}{\Delta t} = \frac{dM_x}{dt} = \frac{d(\text{massa} \cdot v)}{dt} = \frac{M'_{x_2} - M'_{x_1}}{dt} + \frac{dM_{x_0} - dM_{x_i}}{dt}$$

De meest algemene gedaante voor de impulsvgl. is dus (met

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = \frac{M'_{x_2} - M'_{x_1}}{dt}) :$$

$$\sum F_x = \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{dM_{x_0} - dM_{x_i}}{dt}$$

Hierin is: $\frac{\partial m_x}{\partial t}$ de mate van impulsoppeenhoping in de x-richting binnen het controle-volume;

$\frac{dM_{x_0} - dM_{x_i}}{dt}$ de mate waarin de impuls in de x-richting door het controle-oppervlak naar buiten stroomt.

c: Afleiding van de algemene gedaante van de wet van behoud van energie.

De eerste wet van de thermodynamica luidt:

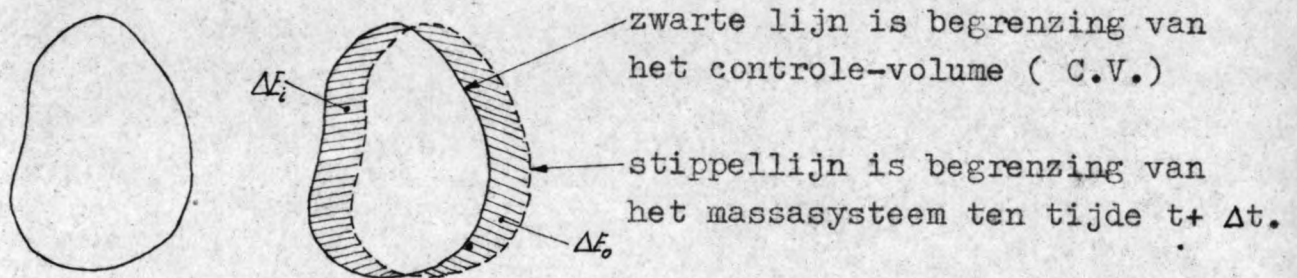
$$\Delta Q = \Delta E + \Delta W ;$$

hierin is Q de warmte welke aan het beschouwde systeem wordt

toegevoerd, W de arbeid verricht door het systeem en E de inwendige energie van het systeem.

E is een fysische eigenschap van het systeem en onafhankelijk van het proces dat toegepast wordt om tot zekere toestand te komen; ΔQ (toegevoegd of onttrokken aan het systeem) en ΔW (verricht door of uitgeoefend op het systeem) zijn geen eigenschappen van het systeem; de warmteterm en de arbeidsterm hangen af van het gevolgde proces en de eindtoestand van het systeem.

Een massasysteem neemt ten tijde t een zekere ruimte in en beweegt naar een nieuwe ruimte ten tijde $t + \Delta t$ (zie de fig.)



E_1 is de inwendige energie van het massasysteem ten tijde t
 E_2 " " " " " " " " " " $t + \Delta t$
 E'_1 is de inwendige energie van de massa in het C.V. ten tijde t
 E'_2 " " " " " " " " " " $t + \Delta t$

De verandering van de inwendige energie van het massasysteem is:

$$\Delta E = E_2 - E_1$$

Ten tijde t bezet het massasysteem het C.V. volledig, dus: $E_1 = E'_1$
 Ten tijde $t + \Delta t$ zal de inwendige energie van het massasysteem gelijk zijn aan de inwendige energie van de massa in het C.V. ten tijde $t + \Delta t$, plus het bedrag aan inwendige energie dat het C.V. in een tijdsbestek Δt heeft verlaten, minus het bedrag aan inwendige energie dat het C.V. in een tijdsbestek Δt is binnengestroomd:

$$E_2 = E'_2 + \Delta E_o - \Delta E_i ;$$

dus geldt ook:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E'_2 - E'_1 + \Delta E_o - \Delta E_i$$

M.b.v. de eerste hoofdwet geeft dit:

$$\Delta Q = E'_2 - E'_1 + \Delta E_o - \Delta E_i + \Delta W$$

Delen door Δt geeft:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{E'_2 - E'_1}{\Delta t} + \frac{\Delta E_o - \Delta E_i}{\Delta t} + \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

De limiet van $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ voor $\Delta t \rightarrow 0$ levert op:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \frac{E_2' - E_1'}{dt} + \frac{dE_0 - dE_i}{dt} + \frac{dW}{dt}.$$

Hierin is:

Q de energie die aan het beschouwde systeem wordt toegevoegd in de vorm van warmte etc.,

$\frac{E_2' - E_1'}{dt}$ de toename van de inwendige energie van de massa binnen het C.V.,

$\frac{dE_0 - dE_i}{dt}$ de netto inwendige energieflex door het controle oppervlak, en

W de arbeid overgedragen vanuit het controle-oppervlak.

HOOFDSTUK III: Voorgaande studies

In het navolgende zullen we in chronologische volgorde een beknopt overzicht geven van de voornaamste literatuur betreffende rolgolven.

Alvorens hiertoe over te gaan, zullen we eerst nog het volgende opmerken:

-In alle studies is τ (i.e. de gemiddelde schuifspanning langs bodem en wanden) ontwikkeld uit een beschouwing van de eenparige stroming, waarbij wordt uitgegaan van een schuifspanning die recht evenredig is met b.v. het kwadraat van de gemiddelde stroomsnelheid, en dus de gedaante heeft:

$$\tau = (\text{wrijvingsfactor}) \cdot U_0^2;$$

hierin duidt de index 0 op de eenparige stromingstoestand.

Er wordt dan aangenomen dat eenzelfde soort relatie ook geldig is voor niet-permanente geleidelijk veranderende (i.e. quasi-permanente) stroming (U_0 wordt dan vervangen door U). Voor eenparige stroming variëert de wrijvingsfactor, algemeen gesproken, met het getal van Reynolds en/of de relatieve bodem- en wandruwheid. In sommige studies nu is aangenomen dat de wrijvingsfactor niet verandert in de x-richting en gelijk is aan zijn waarde voor eenparige stroming, terwijl in andere studies een variabele wrijvingsfactor wordt aangenomen, met als uitgangspunt dezelfde afhankelijkheid van het Reynoldsgetal en/of de relatieve bodem- en wandruwheid als bij eenparige stroming-.

V. Cornish (2) was de pionier die als eerste rolgolven in hellende prismatische leidingen met vrije waterspiegel, gelegen in de Alpen, observeerde, deze op elegante wijze beschreef en enkele globale metingen hieraan verrichtte. Hij merkte op dat deze rolgolven ontstonden uit een instabiliteit van de eenparige stroming en dat het wrijvingsmechanisme een dominerende rol speelde.

In 1925 bestudeerde H. Jeffreys (12) het criterium voor de instabiliteit van de stroming in een open leiding met constante helling, als zijnde de beginvoorwaarde voor het ontstaan van rolgolven. Onder aanname dat de stroming volledig turbulent en de wrijvingsweerstand recht evenredig was met het kwadraat van de gemiddelde stroomsnelheid (i.e. $\tau = \text{constante} \cdot U^2$, m.a.w.

een wrijvingsformule van het Chezy-type met constante C -waarde), beschouwde hij, voor het geval van een zeer brede rechthoekige leiding met uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$) de toe- of afname in de tijd van de amplitud δ ener infinitesimale verstoring, aangebracht op het vloeistof oppervlak. Het instabiliteitscriterium, d.w.z. de voorwaarde voor het ontstaan van instabiele stroming, uitgedrukt in termen van de eenparige stromingstoestand, luidde dat de minimale waarde van het Froude-getal $F = U_0 \cdot (gH_0)^{-\frac{1}{2}}$ groter is dan 2. N.B. In het algemeen zij hier nog opgemerkt dat een instabiliteitscriterium natuurlijk ook uitgedrukt kan worden in grootheden de wrijvingsweerstand betreffende.

G.H. Keulegan en G.W. Patterson (13) bepaalden in 1940 het criterium voor instabiliteit van de eenparige stroming in een zeer brede rechthoekige leiding met uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$), uitgaande van een uitdrukking voor de voortplantingssnelheid van een volume-elementje van een positieve golf, volgens J. Boussinesq, en een geschikte formule voor de verandering van de leidingweerstand met de diepte. Zich basierend op wrijvingsformules van resp. het Manning-type (i.e. $\tau = \text{constante} \cdot U^2 \cdot H^{-\frac{1}{3}}$), en het Chezy-type (i.e. $\tau = \text{constante} \cdot U^2$) vonden zij als instabiliteitscriterium dat het Froude getal in het eerste geval groter dan 1,5, en in het tweede geval groter dan 2 moest zijn.

H.A. Thomas (1) refereerde in 1940 aan een reeks experimenten, uitgevoerd met behulp van een rechthoekige open leiding met verstelbare helling, voorzien van glazen zijwanden en een bodem in de vorm van een door een motor aangedreven band. Op deze wijze kon het water door de band omhoog gevoerd worden, en verschenen de lopende rolgolven als een stationair golfprofiel. Bij deze proefnemingen werd veel aandacht besteed aan de factoren, die de aanvankelijke vorming van de rolgolven veroorzaakten, zoals kleine verstoringen aan de toegang tot de leiding t.g.v. wind b.v. Hij nam waar dat dergelijke kleine verstoringen groeiden naarmate zij stroomafwaarts reisden en tenslotte een stabiele periodieke vorm aannamen. In zijn studie deed H.A. Thomas een eerste poging tot de analyse van het rolgolfpatroon, uitgaande van een brede rechthoekige leiding met uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$) en een weerstands-vgl. van het Chezy-type (i.e. $\tau = \text{constante} \cdot U^2$); hij beschouwde het gedrag van zijn bewegende band analogon in termen van de z.g. profielvgl. van Bresse en construeerde een

golfprofiel, gelijk aan de waargenomen rolgolven, door twee geleidelijk veranderende oppervlakteprofielen voor niet-permanente stroming samen te stellen. Tenslotte leidde hij nog de stromingsvoorwaarde af, noodzakelijk om het uiteindelijke rolgolfpatroon te doen ontstaan en te behouden, door een beschouwing van de hydraulische kenmerken ervan. Deze noodzakelijke voorwaarde, de weerstand betreffende, voor rolgolfvorming komt op een kleine factor na, te weten $\cos^2 \theta$, overeen met het instabiliteitscriterium voor eenparige stroming, zoals dit is afgeleid door H. Jeffreys (12).

In 1945 leidde V.V. Vedernikov (14,15) gebruik makend van zekere benaderingen van B. de Saint-Venant, een criterium af voor de stabiliteit van een eenparige stroming, door de vormverandering van een verstoring te beschouwen, als deze zich langs een stroom voortbeweegt. Alhoewel het door hem verkregen resultaat van toepassing is op elke eenparige stroming in een open leiding, met willekeurige dwarsdoorsnede en algemene weerstandswet, is het buitengewoon jammer dat we niets meer weten dan de uiteindelijke uitdrukking van het door hem verkregen resultaat.

In 1949 publiceerde R.F. Dressler (11) een studie waarin hij twee mogelijke oplossingen voor het rolgolfprobleem beschouwde, te weten a: discontinue oplossingen, en b: continue oplossingen, welke beide door hem gegeven werden voor het geval van een zeer brede rechthoekige leiding en een uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$).

a: Discontinue oplossingen. - Uitgaande van de ideeën van H.A. Thomas (1) construeerde R.F. Dressler discontinue periodieke oplossingen, door delen van een continue oplossing d.m.v. "schokken" of "bores" aan elkaar te schakelen. Hij ging uit van de niet-lineaire partiële differentiaalvgn. van de z.g. ondiepwatertheorie, waaraan een wrijvingsterm van het Chezy-type werd toegevoegd. Eerst toonde hij aan dat geen enkele continue oplossing periodiek is, en dat slechts een speciale continue oplossing in aanmerking komt voor het construeren van discontinue periodieke oplossingen. De profielvgl. van Bresse werd vervolgens afgeleid in een vorm die geschikt is voor stroming met lopende golven; daarna werden de schokvoorwaarden en de speciale continue oplossing bepaald, waarna takken hiervan aan elkaar werden geschakeld d.m.v. schokken.

Als er geen weerstand is, of als de weerstand een zekere critieke waarde overschrijdt, zo toonde hij aan, ontstaan er geen rolgolven; neemt de weerstand af dan worden de golven kleiner, en als de weerstand te groot wordt dan keren de golfprofielen van richting om en kunnen ze niet meer door schokken worden gekoppeld. Als critieke waarde vond hij dezelfde uitdrukking als het instabiliteitscriterium voor een eenparige stroming van H. Jeffreys (12). Hij bewees tevens dat de wrijvingskracht niet alleen moet variëren met de stroomsnelheid, maar ook zo moet werken dat zij afneemt als de waterdiepte kleiner wordt. Zijn analyse toonde aan dat de verhouding tussen golfhoogte en golflengte onafhankelijk is van de golfsnelheid. Voorts leidde hij af: expliciete uitdrukkingen voor waterdiepte en schokhoogte als functies van de golflengte, de statische afvoer als functie van de golfsnelheid, en asymptotische formules voor de golfsnelheid in termen van de gemiddelde afvoer. Tevens gaf hij aan dat er in geval van voorgeschreven waarden voor helling, weerstand en golfsnelheid een één-parameter familie van rolgolfoplossingen bestaat, terwijl de oplossing uniek is als ook de golflengte nog voorgeschreven is.

b: Discontinue oplossingen.- Uitgaande van een perturbatie methode voor de stroming langs een helling volgens K.O. Friedrichs (9) leidde R.F. Dressler hogere benaderingen af van de basisvgn., waarbij de weerstandseffecten alleen beschouwd werden in de laagste approximatie, en in hogere approximaties werden verwaarloosd. Na transformatie op een coördinatenstelsel dat meebeweegt met de lopende golven over de helling, blijkt, zo toonde hij aan, dat de enige oplossing die periodieke golven in de perturbatie oplevert, de constante "critieke" stroming is. De gezochte rolgolfoplossingen tenslotte werden door R.F. Dressler benaderd door continue z.g. "cnoidale" golven, i.e. hij verkreeg oplossingen uitgedrukt in elliptische cn-functies van Jacobi.

A. Craya (16) leidde in 1951 een criterium af voor de mogelijke vorming van rolgolven in een open prismatische leiding met een constante helling en een willekeurige dwarsdoorsnede, onder de aanname van een uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$). Uitgaande van de vgn. van B. de Saint Venant, gaf hij aan dat er twee benaderingsmethoden gevolgd kunnen worden.

De eerste methode behelsde een systematische (grafische) analyse van het quasi-permanente regime, zoals deze geïntroduceerd is door H.A.Thomas (1), terwijl A.Craya bij de tweede methode de stabiliteit, c.q. de toe- of afname in de tijd van een infinitesimale schokgolf beschouwde. Beide methodes analyserend en vergelijkend, vond hij in alle twee de gevallen hetzelfde algemene criterium voor de voorwaarde tot rolgolfvorming. Invoering tenslotte van een algemene machtsbetrekking voor de weerstand leverde als resultaat een relatie op die identiek is met het criterium voor de instabiliteit van een eenparige stroming, zoals dit uit een geheel andere stabiliteitsbeschouwing in 1945 gevonden werd door V.V. Vedernikov (15).

In een publicatie uit 1951 bepaalde R.F. Dressler (17) het criterium voor de instabiliteit van een eenparige stroming in een zeer brede rechthoekige leiding met uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$), uitgaande van een algemene machtsrelatie voor de weerstand (i.e. $Z = \text{constante} \cdot U^n \cdot H^{-m}$). Hij beschouwde, analoog aan wat H.Jeffreys (12) in 1925 deed, de toe- of afname in de tijd van een infinitesimale verstoring, aangebracht op het oppervlak. Op deze wijze kon hij hetzelfde criterium betreffende de weerstand verkrijgen als hij al in 1949 (11) voor rolgolfvorming afgeleid had. Hieraan refererende, toonde hij tevens aan, dat deze instabiliteit alleen kan ontstaan, wanneer de weerstandsterm recht evenredig is met een of andere macht van de stroomsnelheid en omgekeerd evenredig is met een of andere macht van de waterdiepte, c.q. hydraulische straal.

In 1951 publiceerde J.C. Schönfeld (18) een studie betreffende de vervorming, het evenwicht en de stabiliteit van lange golven voor het geval van een zeer brede leiding met uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$). Zich baserend op resultaten uit zijn thesis, dat elke lange golfbeweging beschreven kan worden als de samenstelling van twee z.g. karakteristieke golfcomponenten, beschouwde hij het evenwicht van lopende golven met een constant profiel (z.g. evenwichtsgolven), en beschreef hij hoe hieruit in een steile leiding een opeenvolging van evenwichtsgolven, gescheiden door watersprongen, kan worden verkregen (i.e. een onregelmatig rolgolfpatroon). Vervolgens ontwikkelde hij uit een beschouwing van lange golven tegen kleine verstoringen een stabiliteitscriterium voor eenparige stroming, uitgaande van een weerstandsformule van het

*de instabiliteit van

Chezy-type met variabele C-waarde; daarmee toonde hij kwantitatief aan hoe zich uit een min of meer regelmatige sinusoidale verstoring van een instabiele eenparige stroming een rolgolfpatroon kan ontwikkelen, hiermede bevestigend dat de instabiliteit van een eenparige stroming een noodzakelijke voorwaarde is voor rolgolfvorming. Tevens leidde hij nog een criterium af waardoor, volgens hem de rolgolfoplossing zoals die gegeven is door R.F.Dressler (11) periodiek en eenduidig bepaald wordt (m.a.w. een voldoende voorwaarde voor de vorming van een periodiek permanent rolgolfpatroon).

Samen met R.F.Dressler leidde T.v.Pohle (19) in 1953 op geheel analoge wijze als R.F.Dressler (17) in 1951 een criterium af voor de instabiliteit van een eenparige stroming, voor het geval van een zeer brede rechthoekige hellende leiding met uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$), uitgaande van een algemene machtsrelatie voor de weerstand (i.e. $\tau = \text{constante} \cdot U^n \cdot H^{-m}$) met een uiteraard identiek resultaat. Ook deze schrijvers vermeldden dat een instabiele eenparige stroming zal veranderen in een stromingswijze met rolgolven.

Van het werk van P.G. Mayer (5) uit 1959, waaraan reeds gerefereerd werd in Hoofdstuk I (zie p.I-4) zijn de gedane proefnemingen interessant, hoewel de weergave en de uitwerking hiervan, benevens de theoretische fundering, hier en daar wat zwak en onvolledig is.

Zoals uit het bovenstaande blijkt beperkt men zich in de meeste literatuur betreffende rolgolven (uitsluitend) tot een bepaling van de noodzakelijke voorwaarden voor rolgolfvorming. Het betreft dan altijd een onderzoek, via diverse benaderingsmethoden, naar de (in-) stabiliteit van een eenparige stroming in een prismatische open leiding met constante helling, waarbij er dan, al of niet refererende aan het werk van V. Cornish (2), van wordt uitgegaan of wordt aangetoond dat het gevonden (in-) stabiliteitscriterium tevens de beginvoorwaarde voor rolgolfvorming is. Dit is het geval in de publicaties van H.Jeffreys (12), G.H. Keulegan en G.W.Patterson (13), A.Craya (16), R.F.Dressler (17), J.C.Schönfeld (18) en R.F.Dressler en T.V.Pohle (19).

In enkele van deze studies, te weten (12) en (13) gaat men uit van zekere empirische weerstandsformules voor tweedimensionale stroming, welke slechts een beperkt toepassingsgebied hebben, terwijl in de studies (17) en (19) als uitgangspunt een machtsrelatie voor de weerstand is gekozen; in de studie genoemd onder (18) gaat men uit

van een wrijvingsformule van het Chezy-type met variabele C-coëfficiënt. Alleen in de studie (16) is een criterium afgeleid dat algemeen geldig is voor een willekeurige doorsnede en wrijvingsformule, en als zodanig overeenkomt met dat van V.V. Vedernikov (15). Alle criteria zijn afgeleid voor een zeer brede leiding (behalve die in de studies genoemd onder (16) en (15)) en uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$).

In de publicaties van H.A. Thomas (1), R.F. Dressler (11, 17) en A. Craya (16) wordt de voorwaarde afgeleid welke noodzakelijk is voor rolgolven om hun uiteindelijke vorm aan te nemen, uitgaande van de hydraulische eigenschappen van het definitieve (periodieke permanente) rolgolfpatroon dat ontstaat. In de studies (1) en (11) geschiedt dit voor het geval van een zeer brede hellende leiding met een wrijvingsterm van het Chezy-type met constante C-waarde, terwijl dit in de studie (16) plaatsvindt voor het geval van een willekeurige dwarsdoorsnede en weerstandsformule. Ook deze criteria zijn weer afgeleid voor het geval van een uniforme snelheidsverdeling (i.e. $\alpha = 1$).

Alleen in de publicaties genoemd onder (1) en (11) worden de vgl. voor het profiel van een periodiek permanent rolgolfpatroon afgeleid en besproken, met name in (11), waarbij de studie (1) fungeert als basis.

In de studie (18) wordt nog een voldoende voorwaarde afgeleid, welke nodig is om de rolgolfoplossing periodiek en eenduidig bepaald te maken.

Tenslotte zij nog opgemerkt dat het in de voornoemde literatuur nu opvallend is dat a: het rolgolfprobleem uitsluitend wordt gezien in samenhang met turbulentie, m.a.w. men gaat er van uit dat rolgolven alleen in turbulente stroming voorkomen (eigenlijk is dit geenszins verwonderlijk, omdat in de natuur laminaire stroming praktisch niet voorkomt; zie verder Hoofdstuk I p.I-5), en

b: de afgeleide criteria voor de instabiliteit van een eenparige stroming tot op zekere hoogte, in grote trekken overeenkomen, met de bepaalde voorwaarden, welke noodzakelijk zijn voor rolgolfvorming.

Opmerking.

Een complete en volledige theorie voor het beschrijven van zowel natuurlijke rolgolven als periodieke permanente rolgolven zal in staat moeten zijn om de frequentieverdeling van de geometrische

eigenschappen als functie van de afgelegde afstand te voorspellen, voor schokgolven met welke amplitudo dan ook. We doen hier echter de aanname van periodiciteit, d.w.z. we beschouwen alleen periodieke permanente rolgolven. Als gevolg van deze aanname, moet het voorbehoud gemaakt worden dat het heel goed mogelijk is, dat de theorie de z.g. natuurlijke rolgolven niet goed meer dekt.

In hetgeen nu volgt zullen we allereerst de afleiding geven van het criterium voor de instabiliteit van de permanente eenparige stroming in een open prismatische leiding met constante helling, voor de te onderscheiden gevallen van laminaire stroming en turbulente stroming. Dit criterium zal uitgedrukt worden als een critiek Froude getal dat afhankelijk is van de vorm der dwarsdoorsnede, de gehanteerde wet voor de wrijvingsweerstand, en de snelheids-verdeling in de verticaal. Is het Froudegetal voor de permanent eenparige stroming nu groter dan het critieke Froudegetal, dan is deze instabiel.

HOOFDSTUK IV: Het (in-)stabiliteitscriterium voor de
permanent eenparige stroming in een open
leiding

IV-A: Inleiding

Als het Froudegetal voor zekere permanent eenparige stromingswijze in een open leiding een bepaalde numerieke waarde overschrijdt, dan zal er een begin van instabiliteit ontstaan aan het vrije oppervlak, welke eventueel aanleiding kan geven tot de vorming van lopende (rol-)golven. De hier genoemde instabiliteit van het vrije oppervlak verschilt essentiëel van de instabiliteit welke leidt tot de overgang van laminaire stroming naar turbulente stroming, zoals deze bekend is uit turbulentietheorieën; zij vooronderstelt n.l. dat het hier om een aanduiding gaat betreffende de overgang van permanent eenparige stroming, met een vlak, glad oppervlak, naar een andere stromingswijze met rimpelingen of dwarse ribbels op het vloeistofoppervlak. Deze instabiele verstoringgolven groeien niet onbeperkt aan in de tijd: zij zullen bij voldoende grote leidinglengte uiteindelijk gereduceerd worden tot rolgolven met een bepaald periodiek golfpatroon, en een van de oorzaken worden voor het begin van luchtopneming.

T.a.v. het onderzoeken van de instabiliteit van permanent eenparige stromingen in open leidingen kan men twee benaderingsmethoden onderscheiden, te weten a: de methode waarbij de toe- of afname in de tijd van de energie van verstoorde golven in permanent eenparige stromingen wordt geanalyseerd, en

b: de methode waarbij het begin van de continue toe- of afname in de tijd van een infinitesimale verstoringsgolf op het vloeistofoppervlak wordt beschouwd.

We zullen hier nu een algemeen criterium afleiden voor het begin van instabiliteit van een permanent eenparige stroming met willekeurige doorsnede vorm en weerstandswet, uitgaande van de methode genoemd onder b. Als uitgangspunt nemen we de in Hoofdstuk II gedane aannamen en de daarop gefundeerde basisvergelijkingen (1) en (2) (zie p. II-9), waaruit dan de lineaire benadering

van de translatiegolf, met een infinitesimale amplitudo en verwaarlozing van de kromming van het vloeistofoppervlak, afgeleid kan worden: deze vormt dan tenslotte de basis voor de bestudering van het begin van instabiliteit van permanent eenparige stromingen in open leidingen.

IV-B: De (in-)stabiliteit van permanent eenparige stromingen.

IV-B.a: De basisvgl.

De fundamentele vgl. voor de beweging van vloeistoffen in open leidingen luiden, zoals we in Hoofdstuk II zagen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(UH) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{1^a}$$

of

$$U \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{1^b}$$

en

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial H}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{H} \frac{\partial H}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho R} \tag{2}$$

De vgl. (1) en (2) zijn resp. de continuïteitsvgl. en de bewegingsvgl. voor de gemiddelde stroming in een leiding met vrije waterspiegel. .

We zullen aannemen dat zowel de dwarsdoorsnede A, als de hydraulische straal R functies zijn van de waterdiepte; dit betekent dan dat de dwarsdoorsnede A een toenemende functie wordt van de diepte, en dat de schuifspanning τ voorgesteld kan worden als een functie van U en H.

Geven we de grootheden welke betrekking hebben op de permanent eenparige stroming aan d.m.v. een index 0, en noemen we de zeer kleine afwijkingen van stroomsnelheid en waterdiepte in de verstoorde beweging resp. u' en h' , dan kunnen U en H voorgesteld worden door:

en

$$\left. \begin{aligned} U(x,t) &= U_0 + u'(x,t) \\ H(x,t) &= H_0 + h'(x,t) \end{aligned} \right\}$$

Als in de verstoorde beweging U_0 en H_0 variëren met de kleine perturbaties u' en h' , dan zullen de dwarsdoorsnede A, de hydraulische straal R en de schuifspanning τ ook zeer kleine

afwijkingen vertonen en kunnen zij resp. voorgesteld worden door:

$$\left. \begin{aligned} A &= A(H) = A(H_0 + h') \\ R &= R(H) = R(H_0 + h') \\ \text{en} \quad \tau &= \tau(U, H) = \tau(U_0 + u', H_0 + h') \end{aligned} \right\}$$

Deze grootheden worden nu gesubstitueerd in vgl. (1^b) en vgl. (2), teneinde de vgl. te krijgen die de verstoorde (permanent eenparige) stroming weergeven.

-Eerst vindt substitutie in vgl. (1^b) plaats:

Ontwikkelen we $A = A(H)$ in een reeks volgens de formule van Taylor dan krijgen we:

$$A = A(H) = A(H_0 + h') = A(H_0) + \frac{h'}{1!} \left(\frac{dA}{dH} \right)_0 + \frac{h'^2}{2!} \left(\frac{d^2A}{dH^2} \right)_0 + \dots$$

We veronderstellen nu dat h' zo klein is dat alle termen in h' van de tweede macht en groter, verwaarloosbaar klein zijn, dus:

$$(h')^n \rightarrow 0 \quad \text{voor} \quad n \geq 2 ;$$

dan geldt:

$$A = A(H_0 + h') = A_0 + h' \left(\frac{dA}{dH} \right)_0 ,$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \left(\frac{dA}{dH} \right)_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \frac{\partial (U_0 + u')}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x} \end{aligned}$$

Op geheel analoge wijze als boven, is ook:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \left(\frac{dA}{dH} \right)_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial t}$$

Met behulp hiervan wordt vgl. (1^b):

$$(U_0 + u') \left(\frac{dA}{dH} \right)_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} + \left\{ A_0 + h' \left(\frac{dA}{dH} \right)_0 \right\} \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{dA}{dH} \right)_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial t} = 0 .$$

Deze vgl. wordt nu gelineariseerd door aan te nemen dat alle termen van de tweede en hogere macht in u' , h' en hun resp. afgeleiden, verwaarloosbaar klein zijn; d.w.z.:

$$u' \frac{\partial h'}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad h' \frac{\partial u'}{\partial x} \rightarrow 0,$$

waardoor we krijgen:

$$U_0 \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + R_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

-Vervolgens vindt substitutie in vgl. (2) plaats:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (U_0 + u') = \frac{\partial u'}{\partial t}$$

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R(H)} = \frac{U_0 + u'}{R(H_0 + h')} ;$$

ontwikkeling in een reeks van $A(H_0 + h')$ volgens de formule van Taylor, onder de bovengedane aanname dat $(h')^n \rightarrow 0$ voor $n \geq 2$, geeft:

$$\frac{U}{R} = \frac{U_0 + u'}{R_0 + h' \left(\frac{dR}{dH}\right)_0} = \frac{U_0 + u'}{R_0} \left\{ 1 + \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\}^{-1} ;$$

nu is:

$$\frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 < 1 ;$$

ontwikkeling van de tweede factor in termen van een convergente binomiaalreeks, levert op:

$$\begin{aligned} \frac{U_0 + u'}{R_0} \left\{ 1 + \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\}^{-1} &= \frac{U_0 + u'}{R_0} \left[1 - \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 + \left\{ \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\}^2 - \left\{ \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\}^3 + \dots \right] \\ &= \frac{U_0 + u'}{R_0} \left[1 - \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right] \end{aligned}$$

M.b.v. de aanname dat u' en h' beide zo klein zijn dat alle termen van de tweede en hogere orde in u' en h' verwaarloosbaar

klein zijn, d.w.z.:

$$(u')^m (h')^n \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad m \geq 1 \quad \text{en} \quad n \geq 1,$$

volgt uit het bovenstaande voor $\frac{U}{A}$:

$$\frac{U}{A} = \frac{U_0 + u'}{A_0} = \frac{U_0}{A_0} + \frac{u'}{A_0}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (H_0 + h') = \frac{\partial h'}{\partial x}$$

$$\frac{Z}{\rho R} = \frac{Z(U, H)}{\rho R(H)} = \frac{Z(U_0 + u', H_0 + h')}{\rho R(H_0 + h')}$$

Zowel teller als noemer worden nu ontwikkeld in een reeks, volgens de formule van Taylor:

$$\begin{aligned} Z(U_0 + u', H_0 + h') &= Z(U_0, H_0) + \frac{1}{1!} \left(u' \frac{\partial}{\partial U} + h' \frac{\partial}{\partial H} \right) \cdot Z(U_0, H_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(u' \frac{\partial}{\partial U} + h' \frac{\partial}{\partial H} \right)^2 \cdot Z(U_0, H_0) + \dots \end{aligned}$$

waarin de termen tussen haakjes van de symbolische operator

$$\left(u' \frac{\partial}{\partial U} + h' \frac{\partial}{\partial H} \right)^n$$

ontwikkeld worden volgens het binomium van Newton.

$$R(H_0 + h') = R(H_0) + \frac{h'}{1!} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 + \frac{h'^2}{2!} \left(\frac{d^2 R}{dH^2} \right)_0 + \dots$$

Als we nu ook nog aannemen dat u' zo klein is dat alle termen van de tweede en hogere macht in u' verwaarloosbaar klein zijn, d.w.z.:

$$(u')^m \rightarrow 0 \quad \text{voor} \quad m \geq 2,$$

dan krijgen we m.b.v. de reeds gedane aannamen t.a.v. $(h')^n$ en $(h)''$. $(u')^m$:

$$z(U_0 + u', H_0 + h') = z_0 + u' \left(\frac{\partial z}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial z}{\partial H} \right)_0$$

en

$$R(H_0 + h') = R_0 + h' \left(\frac{dR}{dH} \right)_0$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\rho R} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{z_0 + u' \left(\frac{\partial z}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial z}{\partial H} \right)_0}{R_0 + h' \left(\frac{dR}{dH} \right)_0} = \\ &= \frac{1}{\rho R_0} \left\{ z_0 + u' \left(\frac{\partial z}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial z}{\partial H} \right)_0 \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\}^{-1}; \end{aligned}$$

Nu is $\frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 < 1$;

ontwikkeling van de tweede factor in de termen van een convergente binomiaalreeks geeft:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho R_0} \left\{ z_0 + u' \left(\frac{\partial z}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial z}{\partial H} \right)_0 \right\} \left\{ 1 + \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\}^{-1} = \\ = \frac{1}{\rho R_0} \left\{ z_0 + u' \left(\frac{\partial z}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial z}{\partial H} \right)_0 \right\} \left[1 - \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 + \left\{ \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\}^2 - \left\{ \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\}^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

Uit de bovengedane aanname dat $(u')^m (h')^n \rightarrow 0$ als $m \geq 1$ en $n \geq 1$ volgt tenslotte:

$$\frac{z}{\rho R} = \frac{1}{\rho R_0} \left\{ z_0 + u' \left(\frac{\partial z}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial z}{\partial H} \right)_0 - z_0 \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\}$$

Met behulp hiervan wordt vgl.(2):

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \alpha (U_0 + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + (1 - \alpha) \left\{ \frac{U_0 + u'}{R_0} - \frac{U_0}{R_0} \cdot \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\} \cdot \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial t} =$$

$$= g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \tau_0 + u' \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 - \tau_0 \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\}$$

Ook nu weer wordt de vgl. gelineariseerd door aan te nemen dat alle termen van de tweede macht en hoger in u' , h' en hun resp. afgeleiden, verwaarloosbaar klein zijn; d.w.z.:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x} \rightarrow 0, \quad u' \frac{\partial h'}{\partial t} \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad h' \frac{\partial h'}{\partial t} \rightarrow 0,$$

waardoor we krijgen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \alpha U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dH}{dH} \right)_0 \frac{\partial h'}{\partial t} &= g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h'}{\partial x} + \\ &- \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \tau_0 + u' \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 - \tau_0 \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Uit vgl.(3) en vgl.(4) gaan we u' elimineren; hiertoe differentiëren we eerst vgl.(4) partiëel naar x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial t} + \alpha U_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + (1-\alpha) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dH}{dH} \right)_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} &= -g \cos \theta \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \\ &- \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \frac{\partial h'}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

Uit vgl. (3) volgt:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{R_0} \left(\frac{dH}{dH} \right)_0 \left\{ U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial t} \right\}$$

Partiële differentiatie naar resp. x en t geeft:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = -\frac{1}{R_0} \left(\frac{dH}{dH} \right)_0 \left\{ U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right\}$$

en

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \left\{ U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \right\}$$

Substitutie van de partiële afgeleiden van u' in bovenstaande vgl. levert op:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \left\{ U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \right\} - \alpha \frac{U_0}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \left\{ U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right\} + \\ & + (1-\alpha) \frac{U_0}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} = -g \cos \theta \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \\ & + \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \left\{ U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial t} \right\} - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\tau_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} \end{aligned}$$

Na rangschikking van de termen is dit te schrijven als:

$$\begin{aligned} & \left\{ g \cos \theta - \alpha \frac{U_0^2}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \right\} \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{2\alpha U_0}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + \\ & - \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \frac{U_0}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \right\} \frac{\partial h'}{\partial x} + \\ & - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (5^a)$$

Vgl.(5^a) is dus ontstaan door eliminatie van u' uit vgl.(3) en vgl.(4). Vervolgens zullen we h' gaan elimineren uit vgl. (3) en vgl.(4); daartoe differentiëren we vgl. (4) partiël naar x en vermenigvuldigen we alle termen met U_0 :

$$U_0 \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial t} + \alpha U_0^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + (1-\alpha) \frac{U_0^2}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dH_0} \right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} =$$

$$= -g \cos \vartheta \cdot U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{\tau_0 U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \frac{\partial h'}{\partial x};$$

differentiëren we vervolgens vgl.(4) partiëel naar t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + \alpha U_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + (1-\alpha) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} &= \\ = -g \cos \vartheta \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \frac{\partial h'}{\partial t} - \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \frac{\partial h'}{\partial t} \end{aligned}$$

Door optelling van deze twee vgln. krijgen we:

$$\begin{aligned} (1+\alpha) U_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + \alpha U_0^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + (1-\alpha) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \left\{ U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \right\} &= \\ = -g \cos \vartheta \left\{ U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right\} - \frac{U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} + \\ - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \left\{ U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial t} \right\} - \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \left\{ U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial t} \right\} \end{aligned}$$

Substitutie hierin van de in het voorgaande uit vgl.(3) afgeleide formules geeft dan:

$$\begin{aligned} (1+\alpha) U_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + \alpha U_0^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - (1-\alpha) U_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} &= \\ = + g \cos \vartheta \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{I_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x}$$

Na rangschikking van de termen is dit te schrijven als:

$$\left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} - \frac{2\alpha U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} +$$

$$- \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right) \left(\frac{dR}{dH_0} \right) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} +$$

$$- \frac{1}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} = 0 \quad (5^b)$$

We hebben dus nu gekregen twee vgl. met dezelfde gedaante, te weten:

$$\text{en} \quad \left. \begin{array}{l} \Pi h' = 0 \\ \Pi v' = 0 \end{array} \right\} \quad \Pi (h', v') = 0 \quad \begin{array}{l} (5^{a1}) \\ (5^{b1}) \end{array}$$

waarin Π de operatornotatie is voor:

$$\Pi = \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2\alpha U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} +$$

$$- \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right) \left(\frac{dR}{dH_0} \right) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \quad (5^{c1})$$

Vgl.(5) is de tweede orde lineaire partiële differentiaalvgl. (in h' resp. v') voor de translatiegolf met kleine amplitudo en verwaarlozing van de kromming van het vloeistofoppervlak. Deze vgl. zullen we nu gebruiken als basisvgl. voor het bepalen van de stromingsvoorwaarde voor het ontstaan van instabiliteit van permanent eenparige stromingen.

Opmerking I:

In bovenstaande vgl. (5) stellen de termen tussen haakjes met index 0 de afgeleiden voor van de grootheden geldend voor permanent eenparige stroming, naar resp. stroomsnelheid en diepte van dezelfde stromingswijze; we kunnen dus resp. schrijven:

$$\left(\frac{dH}{dH_0}\right) = \frac{dH_0}{dH_0} \quad , \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial U}\right)_0 = \frac{\partial \tau_0}{\partial U_0} \quad , \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial H}\right)_0 = \frac{\partial \tau_0}{\partial H_0} \quad \text{en} \quad \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 = \frac{dR_0}{dH_0}$$

Opmerking II.A:

Vgl. (5) is een tweede orde lineaire partiële differentiaalvgl.; het type wordt bepaald door het teken van de "discriminant" van de tweede orde termen welke luidt:

$$\left\{ -\frac{2\alpha U_0}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0}\right) \right\}^2 - 4 \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0}\right) \right\} \left\{ -\frac{1}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0}\right) \right\}$$

Dit is te herleiden tot:

$$\frac{4g \cos \vartheta}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0}\right) + 4\alpha(\alpha-1) \frac{U_0^2}{R_0^2} \left(\frac{dH}{dH_0}\right)^2$$

Voor de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal geldt altijd: $\alpha \geq 1$;

de dwarsdoorsnede A is een toenemende functie van H, dus:

$$\left(\frac{dH}{dH_0}\right) > 0 \quad ;$$

tevens is:

$$\cos \vartheta > 0 \quad ;$$

dus:

$$\frac{4g \cos \vartheta}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0}\right) + 4\alpha(\alpha-1) \frac{U_0^2}{R_0^2} \left(\frac{dH}{dH_0}\right) > 0 \quad ;$$

derhalve is de lineaire partiële differentiaalvgl. van de tweede orde, vgl.(5) van het hyperbolische type.

Dit betekent dat de absolute snelheid c van de verstoringsgolf bepaald kan worden m.b.v. de methode der karakteristieken.

De continuïteit en de beweging van de lange (verstoring-)golf worden beschreven door de vgln.(3) en (4):

$$A_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + U_0 \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} + \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \frac{\partial h'}{\partial t} = 0$$

$$\alpha U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial t} + g \cos \theta \frac{\partial h'}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \frac{\partial h'}{\partial t} = N$$

met:

$$N = g \sin \theta - \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \tau_0 + u' \left(\frac{\partial \tau}{\partial u_0} \right) + h' \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) - \tau_0 \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\}$$

De onafhankelijk variabelen hierin zijn de afstand x en de tijd t . Voor het integraaloppervlak moeten ook de volgende twee vgl'n. in deze twee onafhankelijk variabelen gelden:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} dx + \frac{\partial u'}{\partial t} dt = du'$$

$$\frac{\partial h'}{\partial x} dx + \frac{\partial h'}{\partial t} dt = dh'$$

In dit stelsel van vier vgl'n. zijn de onbekenden de partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}, \quad \frac{\partial u'}{\partial t}, \quad \frac{\partial h'}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial h'}{\partial t}$$

Elk van deze partiële afgeleiden kan eindige discontinuïteiten bezitten die voortgeplant worden langs twee stellen krommen, karakteristieken genaamd. Deze karakteristieken zijn te bepalen door de coëfficiënten-matrix van de matrixvgl.

$$\begin{bmatrix} A_0 & 0 & U_0 \left(\frac{dR}{dH_0} \right) & \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \\ \alpha U_0 & 1 & g \cos \theta & (1-\alpha) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x} \\ \frac{\partial u'}{\partial t} \\ \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial h'}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ du' \\ dh' \end{bmatrix}$$

gelijk aan nul te stellen. De richtingen van deze karakteristieken kunnen nu gevonden worden uit de onbepaalde vorm van het bovengenoemd stelsel van vier vgl'n. Voorwaarde voor deze onbepaaldheid is dat de determinant van de coëfficiënten uit de rechterleden van deze vgl'n. gelijk is aan nul; d.w.z.

$$\begin{vmatrix} R_0 & 0 & U_0 \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 & \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \\ \alpha U_0 & 1 & g \cos \theta & (1-\alpha) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{vmatrix} = 0$$

Ontwikkeling van deze determinant naar de vierde rij, en van de beide onderdeterminanten naar de derde rij, geeft:

$$\begin{aligned} (dx)^2 \cdot \left\{ - \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\} - dx dt \left\{ (1-\alpha) U_0 \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 - \alpha U_0 \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 - U_0 \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\} + \\ + \left\{ g R_0 \cos \theta - \alpha U_0^2 \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\} = 0 \end{aligned}$$

Na deling door $-(dt)^2 \cdot \left(\frac{dR}{dH}\right)_0$ krijgen we:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2\alpha U_0 \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left\{ \alpha U_0^2 - \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH}\right)_0} \right\} = 0$$

De twee karakteristieke richtingen zijn dan:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha U_0 \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH}\right)_0}}$$

Voor een verstoringsgolf met kleine amplitudo is:

$$\frac{dx}{dt} = c$$

dus:

$$c = \alpha U_0 \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH}\right)_0}} \quad (6^a)$$

Voeren we als Froudegetal voor de permanent eenparige beweging nu in:

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{gR_0 \cos \theta}} \quad (7)$$

met

$$R_0 = \frac{H_0}{S_0}$$

dan kan vgl. (6^a) ook geschreven worden als:

$$c = \alpha U_0 \pm U_0 \cdot \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{S_0}{T^2 \left(\frac{dH}{dH}\right)_0}} \quad (6^b)$$

Uit vgl. (6^{a,b}) kunnen we ook nog de verhouding bepalen tussen de gemiddelde stroomsnelheid en de golfsnelheid op de stilstaande vloeistof, door van linker- en rechterlid U_0 af te trekken, waaruit dan na enige herleiding volgt:

$$\frac{U_0}{c-U_0} = \left\{ (\alpha-1) \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{S_0}{T^2 \left(\frac{dH}{dH}\right)_0}} \right\}^{-1} \quad (6^c)$$

N.B.1:

De voortplantingssnelheid van de verstoringgolven is ook nog op een andere manier af te leiden, uitgaande van vgl. (5^a).

Als we aannemen dat de golfhoogte h' klein is t.o.v. de waterdiepte, dan mogen de laatste twee termen van vgl. (5^a) verwaarloosd worden, aangezien deze klein zijn t.o.v. de overige termen; vgl. (5^a) wordt dan:

$$\left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dH}{dH}\right)_0 \right\} \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{2\alpha U_0}{R_0} \left(\frac{dH}{dH}\right)_0 \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{dH}{dH}\right)_0 \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = 0$$

De algemene oplossing van deze vgl. heeft de gedaante:

$$h' = f(ax-bt) \quad ,$$

waarin de voortplantingssnelheid van de golf, c , voorgesteld wordt door:

$$c = \frac{b}{a}$$

Substitueren we $h' = f(ax-bt)$ nu in bovenstaande vgl., m.a.w. substitueren we:

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = a^2 \cdot f''(ax-bt), \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} = -ab \cdot f''(ax-bt) \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = b^2 \cdot f''(ax-bt) \quad ,$$

dan krijgen we na deling door $f''(ax-bt) \neq 0$:

$$\left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \right\} a^2 + \frac{2\alpha U_0}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot ab - \frac{1}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot b^2 = 0$$

Na deling door $-\frac{a^2}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right)$ volgt hieruit:

$$\left(\frac{b}{a} \right)^2 - 2\alpha U_0 \left(\frac{b}{a} \right) + \left\{ \alpha U_0^2 - \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0} \right)} \right\} = 0$$

Hieruit volgt dan als oplossing een vgl. voor $c = \frac{b}{a}$, welke identiek is met vgl. (6^a).

N.B.2:

Voor het geval van tweedimensionale stroming, d.w.z. als de breedte van de leiding zeer groot is t.o.v. de diepte, - is er in het navolgende sprake van een "zeer brede" leiding (i.e. een tweedimensionale stromingswijze), dan wordt in principe steeds een zeer brede "rechtthoekige" leiding bedoeld, geldt:

$$\begin{aligned} R_0 &\longrightarrow H_0 \\ \text{en} \quad \left(\frac{dH}{dH_0} \right) &\longrightarrow S_0, \end{aligned}$$

zoals eenvoudig is in te zien; is tevens de snelheidsverdeling in de verticaal uniform, d.w.z. is $\alpha=1$, dan gaan de vgln. (6^{a,b,c}) over in resp.:

$$\text{vgl. (6}^a) \quad \longrightarrow : \quad c = U_0 \pm \sqrt{g H_0 \cos \theta} \quad ;$$

$$\text{vgl. (6}^b) \quad \longrightarrow : \quad c = U_0 \left(1 \pm \frac{1}{F} \right) \quad ;$$

$$\text{vgl. (6}^c) \quad \longrightarrow : \quad \frac{U_0}{c - U_0} = \pm F \quad ,$$

wat ook geschreven kan worden als:

$$\frac{U_0}{c - U_0} = \frac{U_0}{\pm \sqrt{g H_0 \cos \theta}} \quad ;$$

hierin is:

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{g H_0 \cos \theta}}$$

Deze formules hebben een bekende gedaante, met name wanneer θ een zeer kleine hoek is.

Het +teken in vgl. (6^{a,b,c}) geldt voor een golf in stroomaf-

waartse richting, het -teken voor een golf in stroomopwaartse richting (in beide gevallen beschouwd t.o.v. de stroming met stroomsnelheid U_0). Wat dit inhoudt blijkt uit het nu volgende:

Voor het +teken geldt altijd dat $c > 0$, d.w.z. we hebben te maken met een golf die zich zowel t.o.v. stroming als vaste begrenzing in stroomafwaartse richting beweegt;

voor het -teken is:

$c > 0$, als:

$$\alpha U_0 > + \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{g h_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}}$$

oftewel:

$$U_0^2 > \frac{g h_0 \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dH}{dH_0}\right)}$$

d.w.z. we hebben te maken met een golf die zich t.o.v. de stroming in stroomopwaartse richting en t.o.v. de vaste begrenzing in stroomafwaartse richting beweegt,

en $c < 0$, als:

$$\alpha U_0 < + \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{g h_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}}$$

oftewel:

$$U_0^2 < \frac{g h_0 \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dH}{dH_0}\right)}$$

d.w.z. we hebben te maken met een golf die zich zowel t.o.v. stroming als vaste begrenzing in stroomopwaartse richting beweegt;

er is sprake van een overgangssituatie, als:

$$\alpha U_0 = \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{g h_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}}$$

oftewel:

$$U_0^2 = \frac{g h_0 \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dH}{dH_0}\right)}$$

d.w.z.: of $c=0$, (i.e. de golf heeft t.o.v. de vaste begrenzing de snelheid 0, en t.o.v. de stroming de snelheid

$$-\alpha \sqrt{\frac{g H_0 \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dA}{dH}\right)_0}} \quad)$$

of:

$$c = +2\alpha \sqrt{\frac{g H_0 \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dA}{dH}\right)_0}}$$

(i.e. de golf heeft t.o.v. de vaste begrenzing bovengenoemde snelheid, en t.o.v. de stroming de helft daarvan); of anders gezegd: een verstoring kan zich niet voortplanten tegen de stroming in als:

$$U_0^2 > \frac{g H_0 \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dA}{dH}\right)_0}$$

Opmerking II.B:

Wat stelt deze overgangssituatie nu voor?

Voor het geval van permanente stroming volgt uit vgl. (2) als bewegingsvgl. voor de gemiddelde stroming:

$$\alpha U \frac{dU}{dx} + g \cos \theta \frac{dH}{dx} = g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R}$$

dit is te schrijven als:

$$\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} + H \cos \theta \right) = \sin \theta - \frac{\tau}{\rho g R}$$

Als we de energiehogte in zekere doorsnede $A=A(H)$ nu voorstellen door E , dan is:

$$E = \frac{\alpha U^2}{2g} + H \cos \theta$$

Voor permanente stroming geldt in elke doorsnede:

$$Q=UA=\text{constant}, \quad \text{dus: } U = \frac{Q}{A}$$

Substitutie hiervan in de vgl. voor de energiehogte geeft:

$$E = \frac{\alpha Q^2}{2g A^3} + H \cos \theta$$

We kunnen ons nu afvragen voor welke waarde van A de energiehogte E een minimum bezit. Een noodzakelijke voorwaarde voor een extremum is dat:

$$\frac{dE}{dA} = 0$$

Nu is:

$$\frac{dE}{dA} = -\frac{\alpha Q^2}{gH^3} + \left(\frac{dH}{dA}\right) \cos \theta = \left(\frac{dH}{dA}\right)^{-1} \left\{ -\frac{\alpha Q^2}{gH^3} \left(\frac{dH}{dA}\right) + \cos \theta \right\},$$

waaruit voor $\frac{dE}{dA} = 0$ volgt:

$$H^3 \left(\frac{dH}{dA}\right)^{-1} = \frac{\alpha Q^2}{g \cos \theta}$$

$A=A(H)$ is een met H toenemende functie, dus $\left(\frac{dA}{dH}\right) > 0$; derhalve geldt voor:

$$H^3 \left(\frac{dH}{dA}\right)^{-1} > \frac{\alpha Q^2}{g \cos \theta}$$

dat $\frac{dE}{dA} > 0$, en voor:

$$H^3 \left(\frac{dH}{dA}\right)^{-1} < \frac{\alpha Q^2}{g \cos \theta}$$

dat $\frac{dE}{dA} < 0$; derhalve is de energiehogte minimaal als:

$$H^3 \left(\frac{dH}{dA}\right)^{-1} = \frac{\alpha Q^2}{g \cos \theta}$$

M.b.v. $Q=UA$ vinden we hieruit voor de snelheid in de doorsnede met de minimale energiehogte:

$$U^2 = \frac{gH \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dH}{dA}\right)},$$

i.e. de z.g. critieke snelheid welke gedefiniëerd is als de snelheid waarvoor de afvoer met een minimum aan energie plaatsvindt. In het geval van permanent eenparige stroming is er dus sprake van critieke stroming als:

$$U_{ocr}^2 = \frac{gH_0 \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dH}{dA}\right)_0}, \quad \text{oftewel} \quad U_{ocr} = + \sqrt{\frac{gH_0 \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dH}{dA}\right)_0}} \quad (8^b)$$

Het toegevoegde suffix cr geeft de grootheden betreffende de critieke stromingstoestand weer.

Resumerend kunnen we dus het volgende zeggen:

als $U_0 < U_{ocr}$ spreekt men van stromend water (subcritieke stromingstoestand);

als $U_0 > U_{ocr}$ spreekt men van schietend water (supercritieke stromingstoestand);

een golf die zich stroomopwaarts beweegt wordt progressief genoemd in een subcritieke stroming, en regressief in een super-

critieke stroming, omdat de golf, in absolute zin, in het eerste geval vorderingen maakt in stroomopwaartse richting, en door de stroming in stroomafwaartse richting wordt geduwd in het tweede geval.

IV-B.b: Stromingsvoorwaarde voor het begin van instabiliteit.

- Omdat vgl. (5) een lineaire partiële differentiaalvgl. van de tweede orde in twee variabelen van het hyperbolische type is, bestaat de mogelijkheid om deze te integreren m.b.v. Riemann's methode van de karakteristieken; teneinde echter de methode om het in dit Hoofdstuk IV gestelde doel te bereiken, niet nodeloos ingewikkeld te maken, zien we hiervan af.-

We zullen daarom in het hierna volgende de toe- of afname gaan beschouwen van een infinitesimale verstoringsgolf.

Elke kleine verstoring van de permanente stromingstoestand, welke eventueel in den beginne ontstaan zal, kan uitgedrukt worden als een combinatie van sinussen en cosinussen van veelvouden van x , of anders gezegd, als een combinatie van termen met de gedaante $e^{j\beta x}$, waarin β zuiver reëel is.

Dan zal iedere term van dit laatste type oplossingen geven voor de vgl. (5) van de gedaante:

$$A e^{\gamma t + j\beta x}$$

waarin A en γ constanten zijn; A hangt volledig af van de beginvoorwaarden. Als we nu stellen dat

$$\gamma = r + js \quad \text{met } r \text{ en } s \text{ reëel,}$$

dan betekent dit dat we in feite de toe- of afname in de tijd gaan beschouwen van de groep lopende golfoplossingen met gedaante:

$$\frac{h'}{u'} = A e^{rt} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left\{ \beta \left(x + \frac{s}{\beta} t \right) \right\},$$

waarin $\frac{s}{\beta}$ de golfsnelheid is, en de golflengte evenredig is met $\frac{1}{\beta}$. Met $\gamma = r + js$ gaat dit over in:

$$\frac{h'}{u'} = A \exp[\gamma t + j\beta x] = A e^{rt + j\beta x} \quad (9)$$

Uit het bovenstaande volgt dat in geval het reële deel van γ ($\text{Re } \gamma = r$) nul of negatief is, de lopende golf zijn gedaante blijft behouden, resp. uitdempt, m.a.w. de permanente beweging is neutraal stabiel, resp. stabiel; is het reële deel van γ ($\text{Re } \gamma = r$) echter positief, dan zal elke aanvankelijke kleine verstoring

van bovenstaand type exponentiëel aangroeien in de tijd, totdat de amplitudo zo groot is geworden dat het kwadraat ervan niet langer verwaarloosd kan worden; de instabiliteit ontwikkelt zich voor alle golflengten in hetzelfde stadium, indien voldaan wordt aan de voorwaarde dat de golflengte groot is t.o.v. de waterdiepte, dus:

$$\left. \begin{aligned} r = \operatorname{Re} \gamma > 0: & \text{ instabiliteit} \\ r = \operatorname{Re} \gamma = 0: & \text{ neutrale stabiliteit} \\ r = \operatorname{Re} \gamma < 0: & \text{ stabiliteit} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Substitueren we vgl. (9) in vgl. (5), m.a.w. substitueren we:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= j\beta A e^{\gamma t + j\beta x} & , & \quad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma A e^{\gamma t + j\beta x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= -\beta^2 A e^{\gamma t + j\beta x} & , & \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = j\beta \gamma A e^{\gamma t + j\beta x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma^2 A e^{\gamma t + j\beta x} \end{aligned}$$

dan krijgen we na deling door $-A e^{\gamma t + j\beta x} \neq 0$ en rangschikking der termen de karakteristieke vgl.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0} \left(\frac{dA}{dH_0} \right) \gamma^2 + 2 \left\{ \frac{1}{2\rho R_0 R_0} \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial U_0} \right) \left(\frac{dA}{dH_0} \right) + j\beta \frac{\alpha U_0}{R_0} \left(\frac{dA}{dH_0} \right) \right\} \gamma + \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dA}{dH_0} \right) \right\} \beta^2 + \\ + \left\{ \frac{U_0}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{dA}{dH_0} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial U_0} \right) - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} j\beta = 0, \end{aligned}$$

welke het verband tussen γ en β aangeeft. Lossen we deze vierkantsvgl. in γ op, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \gamma = - \left\{ \frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial U_0} \right) + j\beta \alpha U_0 \right\} \pm \left[\left\{ \frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial U_0} \right) + j\beta \alpha U_0 \right\}^2 + \right. \\ \left. - \frac{R_0}{\left(\frac{dA}{dH_0} \right)} \beta^2 \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dA}{dH_0} \right) \right\} - \frac{R_0}{\left(\frac{dA}{dH_0} \right)} j\beta \left\{ \frac{U_0}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{dA}{dH_0} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial U_0} \right) - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11) \end{aligned}$$

Beschouwen we het complexe γ -vlak dan geldt volgens relatie (10) als eis voor stabiliteit dat beide wortels γ uit vgl. (11) in het linkerhalfvlak moeten liggen. Een overgangssituatie (i.e. een toestand van neutrale stabiliteit) wordt bereikt als de ene wortel γ op de imaginaire s-as, en de andere wortel γ in het linkerhalfvlak ligt. Dit nu is het geval indien de tweede machtswortel

$$\left[\left\{ \frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + j\beta \alpha U_0 \right\}^2 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \beta^2 \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} + \right. \\ \left. - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} j\beta \left\{ \frac{U_0}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

een reëel deel

$$+ \frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)$$

heeft; dan ligt immers de corresponderende vierkantswortel γ op de imaginaire s-as, en de andere vierkantswortel γ in het linker-halvlak.

De voorwaarde voor neutrale stabiliteit, i.e. de rechterwortel γ ligt op de imaginaire s-as, is dat:

$$\left[\left\{ \frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + j\beta \alpha U_0 \right\}^2 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \beta^2 \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} + \right. \\ \left. - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} j\beta \left\{ \frac{U_0}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + j\delta ,$$

waarin δ een reëel getal is. Van deze vgl. gaan we de reële en imaginaire delen aan elkaar gelijk stellen, waarna eliminatie van δ plaats vindt.

Kwadraten van het linker- en rechterlid en het samenvoegen van bij elkaar horende termen geeft:

$$j\beta \frac{\alpha U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \beta^2 \alpha^2 U_0^2 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \beta^2 \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} + \\ - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} j\beta \left\{ \frac{U_0}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} = j\delta \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \delta^2$$

Gelijkstellen van de reële en imaginaire delen levert resp. op:

$$-\beta^2 \alpha^2 U_0^2 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \beta^2 \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} = -\delta^2 ,$$

waaruit volgt na vermenigvuldiging met -1 :

$$+ \beta^2 \left\{ \alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH_0}\right)} \right\} = + \delta^2$$

en

$$\beta \frac{\alpha U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \pi}{\partial U_0}\right) - \frac{R_0}{\rho R_0} \beta \left\{ \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0}\right) \cdot \left(\frac{\partial \pi}{\partial U_0}\right) - \left(\frac{\partial \pi}{\partial H_0}\right) + \frac{Z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0}\right) \right\} = \delta \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \pi}{\partial U_0}\right),$$

aan de hand waarvan met $\rho R_0 \neq 0$ voor δ geschreven kan worden:

$$\delta = -\beta \left[(1-\alpha)U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0}\right) \cdot \left(\frac{\partial \pi}{\partial U_0}\right)} \left\{ \left(\frac{\partial \pi}{\partial H_0}\right) - \frac{Z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0}\right) \right\} \right]$$

Deze waarde van δ wordt gesubstitueerd in de vgl. voor de aan elkaar gelijkgestelde reële delen, terwijl meteen gedeeld wordt door $+\beta^2$:

$$\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH_0}\right)} = \left[(1-\alpha)U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0}\right) \cdot \left(\frac{\partial \pi}{\partial U_0}\right)} \left\{ \left(\frac{\partial \pi}{\partial H_0}\right) - \frac{Z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0}\right) \right\} \right]^2,$$

waaruit volgt:

$$\pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH_0}\right)}} = (1-\alpha)U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0}\right) \cdot \left(\frac{\partial \pi}{\partial U_0}\right)} \left\{ \left(\frac{\partial \pi}{\partial H_0}\right) - \frac{Z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0}\right) \right\}$$

N.B.

Deze werkwijze, i.e. eerst δ kwadrateren, $\rightarrow \delta^2$, dan dit kwadraat substitueren en vervolgens de wortel trekken, is gekozen om te voorkomen dat er wortels zonder betekenis worden geïntroduceerd.

Voor het linkerlid kan m.b.v. vgl. (6^a) geschreven worden:

$$\pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH_0}\right)}} = c - \alpha U_0$$

Substitutie van deze betrekking geeft dan tenslotte met

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial H_0}\right) = \left(\frac{\partial \pi}{\partial R_0}\right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0}\right) \quad \text{en} \quad \left(\frac{dR}{dH_0}\right) = \left(\frac{dR}{dR_0}\right) \cdot \left(\frac{dR_0}{dH_0}\right) :$$

$$c - U_0 = - \frac{R_0}{\left(\frac{\partial \pi}{\partial R_0}\right)} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \pi}{\partial R_0}\right) - \frac{Z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0}\right) \right\} \quad (12)$$

Deze vgl. geeft de voorwaarde voor neutrale stabiliteit weer;

nagegaan moet nu nog worden wanneer de stroming stabiel, resp. instabiel is, m.a.w. hoe de vierkantswortels γ gaan verschuiven (naar links of naar rechts) t.o.v. hun ligging voor neutrale stabiliteit als een van beide leden van bovenstaande vgl. groter op kleiner wordt. Stellen we daartoe:

$$\left[\left\{ \frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + j\beta \alpha U_0 \right\}^2 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH} \right)} \beta^2 \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right) \right\} - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH} \right)} j\beta \left\{ \frac{U_0}{\rho R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{dR}{dH} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + j\delta + \varepsilon ;$$

ε is een klein reëel positief getal.

We gaan van deze vgl. weer de reële en imaginaire delen aan elkaar gelijk stellen, en vervolgens δ elimineren.

Kwadraten van het linker- en rechterlid en het samenvoegen van bij elkaar horende termen geeft:

$$j\beta \frac{\alpha U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \beta^2 \alpha^2 U_0^2 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH} \right)} \beta^2 \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right) \right\} + \\ - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH} \right)} j\beta \left\{ \frac{U_0}{\rho R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{dR}{dH} \right) \right\} = \\ = -\delta^2 + \varepsilon^2 + j\delta \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + \frac{\varepsilon}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + 2j\delta \varepsilon$$

Gelijkstellen van reële en imaginaire delen levert resp. op:

$$-\beta^2 \alpha^2 U_0^2 - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH} \right)} \beta^2 \left\{ g \cos \vartheta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right) \right\} = -\delta^2 + \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) ,$$

waaruit volgt:

$$\beta^2 \left\{ \alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \vartheta}{\left(\frac{dR}{dH} \right)} \right\} = \delta^2 - \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) ;$$

en

$$\beta \frac{\alpha U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \frac{R_0}{\rho R_0 \left(\frac{dR}{dH} \right)} \beta \left\{ \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{I_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right) \right\} =$$

$$= \delta \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + 2 \delta \varepsilon ,$$

aan de hand waarvan met $\rho R_0 \neq 0$, $\left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 \cdot \left(\frac{dH}{dR} \right)_0$ en

$$\left(\frac{dR}{dH} \right)_0 = \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \cdot \left(\frac{dH}{dH} \right)_0$$

voor δ geschreven kan worden:

$$\delta = \frac{-\beta}{1 + \frac{2\varepsilon R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0}} \cdot \left[(1-\alpha) U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 - \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\} \right]$$

Deze waarde van δ wordt gesubstitueerd in de vgl. voor de aan elkaar gelijkgestelde reële delen, terwijl meteen gedeeld wordt door $+\beta^2$:

$$\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH} \right)_0} = \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0} \right\}^{-2} \cdot \left[(1-\alpha)U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 - \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\} \right]^2 +$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{\beta^2} - \frac{\varepsilon}{\rho \beta^2 R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0$$

Na enige herleiding is bovenstaande vgl. te schrijven als:

$$\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH} \right)_0} = \left[(1-\alpha)U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 - \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\} \right]^2 +$$

$$-\left\{ \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} + \frac{\varepsilon}{\rho \beta^2 R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0 \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0} \right\}^2 - \left\{ \frac{4\varepsilon R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0} + \frac{4\varepsilon^2 R_0^2}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0^2} \right\} \cdot \left\{ \alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH} \right)_0} \right\}$$

Stellen we nu:

$$\Delta_1 = \left\{ \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} + \frac{\varepsilon}{\rho \beta^2 R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0 \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0} \right\}^2 ,$$

dan is $\Delta_1 > 0$, aangezien $\varepsilon > 0$, β reëel en $\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0 > 0$ is (immers, τ is een met U toenemende functie, bij constant houden van H); stellen we tevens:

$$\Delta_2 = \left\{ \frac{4\varepsilon R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0} + \frac{4\varepsilon^2 R_0^2}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0^2} \right\} \cdot \left\{ \alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH} \right)_0} \right\} ,$$

dan is in het interval $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\Delta_2 > 0$, aangezien $\varepsilon > 0$,

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)_0 > 0 , \quad \alpha \geq 1 \quad \text{en} \quad \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 > 0$$

We krijgen dan:

$$\pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \delta}{\left(\frac{dR}{dH}\right)_0}} = \sqrt{\left[(1-\alpha)U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{\partial Z}{\partial H}\right)_0} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial H}\right)_0 - \frac{Z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\}\right]^2 - \Delta_1 - \Delta_2}$$

M.b.v. vgl. (6^a) gaat dit weer over in:

$$c - \alpha U_0 = \sqrt{\left[(1-\alpha)U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{\partial Z}{\partial H}\right)_0} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial H}\right)_0 - \frac{Z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\}\right]^2 - \Delta_1 - \Delta_2}$$

De vierkantswortels γ uit vgl.(11) gaan, indien voor de tweede machtswortel in vgl. (11) gesubstitueerd wordt

$$\frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)_0 + j\delta + \varepsilon$$

over in:

$$\gamma = -\left\{ \frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)_0 + j\beta\alpha U_0 \right\} \pm \left[\frac{1}{2\rho R_0} \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)_0 + j\delta + \varepsilon \right]$$

waaruit volgt:

$$\gamma_1 = -j(\beta\alpha U_0 - \delta) + \varepsilon$$

en

$$\gamma_2 = -j(\beta\alpha U_0 + \delta) - \left\{ \varepsilon + \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)_0 \right\}$$

Omdat δ reëel is betekent dit dat voor $\varepsilon > 0$, γ_1 in het rechterhalfvlak en γ_2 in het linkerhalfvlak ligt, terwijl er voor $\varepsilon=0$ sprake is van neutrale stabiliteit. Met behulp hiervan en de laatst afgeleide vgl. voor $c - \alpha U_0$, is dan makkelijk in te zien dat, indien het rechterlid van vgl.(12) groter dan wel kleiner wordt dan het linkerlid, de rechterwortel (i.e. γ_1) naar rechts resp. links beweegt. We kunnen dus zeggen:

$$-\frac{R_0}{\left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)_0} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial H}\right)_0 - \frac{Z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\} \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} c - U_0 \quad \begin{array}{l} : \text{instabiliteit} \\ : \text{neutrale stabiliteit} \\ : \text{stabiliteit} \end{array} \quad \begin{array}{l} (E^a) \\ (E^b) \\ (E^c) \end{array}$$

M.b.v. vgl.(6^c) is vgl.(12) ook nog te schrijven als:

$$-\frac{R_0}{\left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)_0} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial H}\right)_0 - \frac{Z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 \right\} \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \left\{ (\alpha-1) \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{S_0}{\gamma \left(\frac{dR}{dH}\right)_0}} \right\} U_0 \quad \begin{array}{l} : \text{instabiliteit} \\ : \text{neutr. stabiliteit} \\ : \text{stabiliteit} \end{array} \quad \begin{array}{l} (13^a) \\ (13^b) \\ (13^c) \end{array}$$

Vgl.(12^{a,b}) is de uitdrukking voor het criterium voor instabiliteit in geval van stroming in een open leiding, weergegeven in termen van de schuifspanning en de golfsnelheid; vgl.(13^{a,b}) is de uitdrukking voor het criterium voor instabiliteit in geval van stroming in een open leiding, weergegeven in termen van de

schuifspanning en het Froudegetal.

Opmerking

Het hierboven afgeleide instabiliteitscriterium kan ook nog op een andere manier verkregen worden, n.l. door na te gaan of er voor vgl.(5^a) oplossingen kunnen bestaan van de gedaante:

$$h' = H_0 e^{k(x-ct)} ;$$

hierin is c de voortplantingssnelheid van de verstoringsgolf en H_0 de waterdiepte in geval van permanent eenparige stroming; $e^{k(x-ct)}$ is te beschouwen als een opslingerfactor voor H_0 in geval de verstoringsgolf zich voortplant in plaats en/of tijd.

Als teken voor het instabiel worden van de permanent eenparige stroming, zullen we aannemen dat de exponent $k(x-ct)$, c.q. de coëfficiënt k onbepaald wordt.

Substitueren we bovenstaande gekozen oplossing in vgl.(5^a) m.a.w. substitueren we:

$$\frac{\partial h'}{\partial x} = k H_0 e^{k(x-ct)} \quad , \quad \frac{\partial h'}{\partial t} = -c k H_0 e^{k(x-ct)} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = k^2 H_0 e^{k(x-ct)} \quad , \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} = -c k^2 H_0 e^{k(x-ct)} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = c^2 k^2 H_0 e^{k(x-ct)}$$

dan krijgen we na deling door $H_0 e^{k(x-ct)} \neq 0$ en rangschikking der termen de vgl.:

$$k^2 \left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} + \frac{2\alpha U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot c - \frac{1}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot c^2 +$$

$$- k \left[\frac{1}{\rho R_0} \left\{ \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} - \frac{1}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot c \right] = 0$$

Hieruit volgt al direct:

$$k=0;$$

voor $k=0$, is:

$$h' = H_0,$$

i.e. deze triviale oplossing geeft de permanent eenparige stromingstoestand weer, en derhalve kunnen we zeggen dat de oplossing $k=0$ voldoet.

Voor de overblijvende k-waarde krijgen we dan:

$$k = \frac{\frac{1}{\rho R_0} \left\{ \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} - \frac{1}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot c}{\left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha U_0^2}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} + \frac{2\alpha U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot c - \frac{1}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot c^2}$$

Vermenigvuldigen we teller en noemer met $\frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)}$ dan is dit te schrijven als:

$$k = \frac{\frac{1}{\rho R_0} \cdot \frac{U_0 \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{z_0 R_0}{R_0} \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot c}{\left\{ \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} - \alpha U_0^2 \right\} + 2\alpha U_0 c - c^2}$$

M.b.v.

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial R_0} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \quad \text{en} \quad \left(\frac{dR}{dH_0} \right) = \left(\frac{dR}{dR_0} \right) \cdot \left(\frac{dR_0}{dH_0} \right)$$

gaat de teller over in:

$$U_0 \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - R_0 \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial R_0} \right) - \frac{z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot c$$

terwijl voor de noemer geschreven kan worden:

$$\left\{ \alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \right\} - (c - \alpha U_0)^2$$

zodat de vgl. voor k wordt:

$$k = \frac{\frac{1}{\rho R_0} \cdot \frac{U_0 \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - R_0 \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial R_0} \right) - \frac{z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot c}{\left\{ \alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \right\} - (c - \alpha U_0)^2}$$

Als eis voor het ontstaan van instabiliteit van de permanent eenparige stroming hebben we gesteld dat k onbepaald moet worden; k is een z.g. onbepaalde vorm als $k = \frac{0}{0}$, d.w.z. indien zowel teller als noemer van bovenstaande vgl. gelijk is aan nul.

Is k onbepaald dan kan de exponent $k(x-ct)$ van de voor h' gekozen oplossing alle mogelijke waarden hebben, wat inhoudt dat de oplossing $h' = H_0 e^{k(x-ct)}$ zelf onbepaald is. Of $h' = H_0 e^{k(x-ct)}$ toe- of af gaat nemen in plaats en/of tijd wordt bepaald door het teken van de teller van k , m.a.w. door de kant waarvoor deze tot nul nadert (i.e. van de boven- of de onderkant). Stellen we de teller gelijk aan nul:

$$U_0 \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - R_0 \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial R_0} \right) - \frac{z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dR_0} \right) \right\} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot c = 0 ,$$

dan volgt daaruit voor c :

$$c = U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial R_0} \right) - \frac{z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dR_0} \right) \right\}$$

Stellen we vervolgens de noemer gelijk aan nul:

$$\left\{ \alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dR_0} \right)} \right\} - (c - \alpha U_0)^2 = 0 ,$$

waaruit volgt:

$$c = \alpha U_0 \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dR_0} \right)}} ,$$

i.e. vgl.(6^a), de voortplantingssnelheid van de verstoringsgolf.

De verstoringsgolf gaat groeien met de plaats x en/of de tijd t , als k nadert tot positief oneindig (i.e. instabiele stroming), terwijl de verstoringsgolf uitdempt als k nadert tot negatief oneindig (i.e. stabiele stroming).

$k \rightarrow +\infty$ (i.e. instabiliteit) als in de vgl. voor k , en de noemer gelijk is aan nul, en de teller positief is, d.w.z.:

$$c < U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial R_0} \right) - \frac{z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dR_0} \right) \right\} ,$$

met c gegeven volgens vgl.(6^a);

$k \rightarrow -\infty$ (i.e. stabiliteit) als in de vgl. voor k , en de noemer gelijk is aan nul, en de teller negatief is, d.w.z.:

$$c > U_0 - \frac{R_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right)} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial R_0} \right) - \frac{z_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dR_0} \right) \right\} ,$$

met c weer gegeven volgens vgl.(6^a);

$k \rightarrow 0$ (i.e. het ontstaan van instabiliteit), als in de vgl. voor k , zowel teller als noemer gelijk is aan nul.

Uit het bovenstaande volgt dat we dus kunnen zeggen:

$$-\frac{A_0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0}\right)} \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial A_0}\right) - \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dA}\right)_0 \right\} \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \begin{array}{l} c - U_0 \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} : \text{instabiliteit,} \\ : \text{neutr. stabiliteit} \\ : \text{stabiliteit} \end{array}$$

waarin c gegeven wordt door de aan nul gelijkgestelde noemer van de vgl. voor k (i.e. vgl.(6^a)):

$$c = \alpha U_0 \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gA_0 \cos \theta}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0}}$$

Bovenstaand instabiliteitscriterium is geheel identiek met dat gegeven in vgl. (12^{a,b}), en kan m.b.v. vgl.(6) ook weer geschreven worden in de gedaante van vgl.(13^{a,b}).

Het criterium voor de instabiliteit van permanent eenparige stromingen in hellende leidingen met vrije waterspiegel, zoals dit hierboven gegeven is in vgl. (12) en vgl.(13) is in feite weinig bruikbaar voor de praktijk, omdat dit criterium een gegeneraliseerde gedaante heeft en uitgedrukt is in de kenmerkende eigenschappen van de leiding waarin de desbetreffende stroming plaatsvindt. Daarom zullen we in het hierna volgende het criterium om gaan werken in een meer bruikbare vorm, en wel voor de te onderscheiden gevallen van laminaire stroming en turbulente stroming.

Refererende aan hetgeen in het begin van Hoofdstuk III opgemerkt is t.a.v. de schuifspanning τ langs leidingwanden en bodem in de geraadpleegde en besproken literatuur, benevens de wijze waarop τ bij de afleiding van bovenstaand algemeen instabiliteitscriterium ontwikkeld is in termen van de permanent eenparige stromingstoestand, is het duidelijk dat nu eerst de algemene gedaante bepaald moet worden van τ_0 , i.e. de schuifspanning uitgedrukt in grootheden betreffende de permanent eenparige stromingstoestand.

IV-Bb1: Stromingsvoorwaarde voor het begin van instabiliteit in geval van laminaire stroming.

De Navier-Stokesvgn. voor de tweedimensionale beweging (i.e. de stroming in een prismatische leiding waarvoor de breedte

zeer groot is t.o.v. de diepte) van een onsamendrukbare visceuze vloeistof, voor resp. de x- en de z-richting, luiden (zie hiervoor b.v. (20)):

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + r \nabla^2 u \\ \text{en} \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + r \nabla^2 w \end{aligned} \right\}$$

waarin $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ de kinematische viscositeitscoëfficiënt, en ∇^2 de operator van Laplace is; voor de betekenis van de overige symbolen wordt verwezen naar Hoofdstuk II.

Voor de te beschouwen tweedimensionale permanent eenparige stromingstoestand (i.e. een zuivere parallelle stroming) is het zonder meer duidelijk dat bovenstaande vgl., waarin $X = +g \sin \theta$ en $Z = -g \cos \theta$ (zie Hoofdstuk II), overgaan in:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= +g \sin \theta + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0\right) + r \nabla^2 u \\ \text{en} \\ 0 &= -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

Oplossing van de laatste vgl. geeft m.b.v. de dynamische randvoorwaarde $p = p_a = \text{atmosferische druk} = 0$ voor $z = H_0$:

$$p = p_a + \rho g \cos \theta \cdot (H_0 - z),$$

waarin H_0 (onafhankelijk van x en t) de z -coördinaat van het vrije oppervlak is; uit deze vgl. volgt dat de drukverdeling hydrostatisch is en tevens dat $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

We hebben nu dus als bewegingsvgl. voor de laminaire, permanent eenparige stroming (in geval van een tweedimensionale situatie):

$$0 = g \sin \theta + r \nabla^2 u_0,$$

waarin u_0 alleen een functie van z is, oftewel $u_0 = u_0(z)$. Voor deze vgl. kunnen we nu schrijven:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{d^2 u_0}{dz^2} = -\frac{g \sin \theta}{r},$$

waaruit na integratie volgt:

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{du_0}{dz} = -\frac{g \sin \theta}{r} z + (\text{constante})_1.$$

Voor het beschouwde geval van laminaire stroming is de kinematische viscositeitscoëfficiënt gedefiniëerd als:

$$\nu = \frac{\tau(z)}{\rho \frac{\partial u}{\partial z}}, \quad \text{oftewel:} \quad \tau(z) = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial z}$$

Aan het vrije oppervlak geldt als randvoorwaarde dat de schuifspanning gelijk is aan nul, m.a.w.: indien $z=H_0$, is zowel $\tau(H_0)=0$ als $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{H_0}=0$, zodat bovenstaande integratieconstante wordt:

$$(\text{constante})_1 = \frac{\rho g \sin \theta}{r} H_0$$

Een en ander levert nu op:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dz} = \frac{\rho g \sin \theta}{r} (H_0 - z)$$

en

$$\tau(z) = \rho g \sin \theta (H_0 - z)$$

Uit de vgl. voor $\tau(z)$ volgt, dat voor de schuifspanning aan de bodem geldt:

$$\tau(0) = \tau_0 = \rho g H_0 \sin \theta$$

Integratie van bovenstaande vgl. voor $\frac{\partial u}{\partial z}$ geeft:

$$u_0 = \frac{\rho g \sin \theta}{r} \left(H_0 z - \frac{1}{2} z^2 \right) + (\text{constante})_2$$

Aan de bodem hebben we als randvoorwaarde dat de snelheid gelijk aan nul moet zijn, m.a.w. voor $z=0$, is $u_0=0$, waaruit direct volgt dat de tweede integratieconstante gelijk is aan nul.

Als formule voor u_0 , weergevend de snelheid als functie van de diepte, hebben we nu dus gekregen:

$$u_0 = \frac{\rho g \sin \theta}{r} \left(H_0 z - \frac{z^2}{2} \right)$$

M.b.v. de formule voor de schuifspanning langs de bodem,

$\tau_0 = \rho g H_0 \sin \theta$, is deze vgl. te schrijven als:

$$u_0 = \frac{\tau_0}{\rho r H_0} \left(H_0 z - \frac{z^2}{2} \right)$$

Aan de hand van deze relatie zullen we voor de beschouwde (tweedimensionale laminaire permanent eenparige) stromingstoestand

een formule afleiden voor de schuifspanning langs de bodem τ_0 , als functie van de gemiddelde stroomsnelheid en de waterdiepte, benevens de waarde bepalen voor de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal.

De gemiddelde stroomsnelheid U_0 is impliciet gedefiniëerd als:

$$U_0 H_0 = \int_0^{H_0} u_0 dz$$

M.b.v. de formule voor u_0 wordt dit:

$$U_0 H_0 = \int_0^{H_0} \frac{\tau_0}{\rho r H_0} (H_0 z - \frac{1}{2} z^2) dz$$

Integratie geeft:

$$U_0 H_0 = \frac{\tau_0}{\rho r H_0} \left[\frac{1}{2} H_0 z^2 - \frac{1}{6} z^3 \right]_0^{H_0},$$

waaruit volgt:

$$U_0^2 = \frac{\tau_0 H_0}{3 \rho r}, \quad \text{oftewel} \quad \tau_0 = \frac{3 \rho r U_0^2}{H_0}$$

De correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal is gedefiniëerd als:

$$\alpha U_0^2 H_0 = \int_0^{H_0} u_0^2 dz$$

M.b.v. de formule voor u_0 , en $\tau_0 = \frac{3 \rho r U_0^2}{H_0}$ wordt dit:

$$\alpha U_0^2 H_0 = \int_0^{H_0} \left\{ \frac{3 U_0}{H_0} (H_0 z - \frac{1}{2} z^2) \right\}^2 dz$$

Integratie geeft:

$$\alpha U_0^2 H_0 = \frac{9 U_0^2}{H_0^2} \left[\frac{1}{3} H_0^2 z^3 - \frac{1}{4} H_0 z^4 + \frac{1}{20} z^5 \right]_0^{H_0},$$

waaruit voor α volgt:

$$\alpha = 1,2$$

Beschouwen we dus de laminaire permanent eenparige stroming in een zeer brede * prismatische leiding (i.e. een tweedimensionale situatie) dan geldt voor de gemiddelde schuifspanning langs de bodem $\tau_0 = 3 \rho r U_0 (H_0)^{-1}$, en voor de correctiecoëfficiënt op de verticale snelheidsverdeling $\alpha = 1,2$. We doen nu de aanname dat deze relatie in geval van een driedimensionale situatie (i.e.

* open

de breedte van de leiding is niet meer zeer groot t.o.v. de diepte) hun geldigheid blijven behouden, als de dwarsdoorsnede geleidelijk veranderend is, met dien verstande dat H_0 vervangen wordt door de hydraulische straal R_0 (immers is de leiding zeer breed, dan nadert R_0 tot H_0);

dus: in geval van laminaire permanent eenparige stroming is de gemiddelde schuifspanning langs bodem en wanden:

$$\tau_0 = \frac{3\rho r U_0}{R_0} \quad (14)$$

en de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal:

$$\alpha = 1,2 \quad (15)$$

De vgl. (14) en (15) gaan we nu substitueren in het verkregen instabiliteitscriterium vgl. (12), resp. vgl. (13).

Uit vgl. (14) volgt:

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0}\right) = \frac{\partial \tau_0}{\partial U_0} = \frac{3\rho r}{R_0}$$

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial R_0}\right) = \frac{\partial \tau_0}{\partial R_0} = \frac{\partial \tau_0}{\partial R_0} \cdot \left(\frac{dR}{dR_0}\right) = -\frac{3\rho r U_0}{R_0^2} \cdot \left(\frac{dR}{dR_0}\right)$$

Aan de hand van deze relaties en vgl. (14) wordt vgl. (12^{a,b}):

$$-\frac{R_0}{\frac{3\rho r}{R_0}} \cdot \left\{ -\frac{3\rho r U_0}{R_0^2} \left(\frac{dR}{dR_0}\right) - \frac{3\rho r U_0}{R_0^2} \left(\frac{dR}{dR_0}\right) \right\} \geq c - U_0$$

waaruit m.b.v. $R_0 = \frac{R_0}{S_0}$ volgt:

$$S_0 \left(\frac{dR}{dR_0}\right) \cdot 2U_0 \geq c - U_0$$

Uit $R_0 = \frac{A_0}{S_0}$ is af te leiden:

$$dR_0 = \frac{S_0 \cdot dR_0 - R_0 \cdot dS_0}{S_0^2}, \quad \text{oftewel} \quad S_0 \frac{dR_0}{dR_0} = 1 - R_0 \frac{dS_0}{dR_0}$$

Stellen we nu in navolging van V.V. Vedernikov (15):

$$S_0 \frac{dR_0}{dR_0} = 1 - R_0 \left(\frac{dS}{dR}\right)_0 = M,$$

dan krijgen we tenslotte:

$$2U_0 M \geq c - U_0$$

M is te beschouwen als een vormfactor voor de doorsnede. Substitueren we vgl.(14) en de daaruit afgeleide betrekkingen (zie pag. IV-33) in vgl. (13^{a,b}), dan krijgen we:

$$2U_0 M \geq \left\{ (\alpha-1) \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{S_0}{F^2 \left(\frac{dH}{dH_0}\right)}} \right\} U_0$$

Na deling door $U_0 \neq 0$, levert dit op:

$$2M - (\alpha-1) \geq \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{S_0}{F^2 \left(\frac{dH}{dH_0}\right)}}$$

waaruit we na kwadrateren van linker- en rechterlid verkrijgen voor F^2 :

$$F^2 \geq \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)} \cdot \frac{1}{4M^2 - 4(\alpha-1)M - (\alpha-1)}$$

wat tenslotte met vgl. (15), i.e. $\alpha=1,2$ oplevert:

$$F^2 \geq \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)} \cdot \frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}$$

Dus: het criterium voor instabiliteit in geval van laminaire permanent eenparige stroming in een open leiding luidt:

$\frac{2MU_0}{c-U_0} >$	>	: instabiliteit	(16 ^a)
$\frac{2MU_0}{c-U_0} =$	=	: neutrale stabiliteit	(16 ^b)
$\frac{2MU_0}{c-U_0} <$	<	: stabiliteit	(16 ^c)

of uitgedrukt in het Froudegetal:

$F^2 >$	>	: instabiliteit	(17 ^a)
$F^2 =$	=	: neutrale stabiliteit	(17 ^b)
$F^2 <$	<	: stabiliteit.	(17 ^c)

Hierin is:

$$M = 1 - R_0 \left(\frac{dS}{dH}\right)$$

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{g R_0 \cos \theta}}$$

en c wordt gegeven door vgl. (6^a), waarin $\alpha=1,2$:

$$c = 1,2U_0 \pm \sqrt{0,24U_0^2 + \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}}$$

Uit vgl. (8^b) volgt dat bij een permanent eenparige stromings-toestand de overgang van subcritieke stroming (i.e. stromend water) naar supercritieke stroming (i.e. schietend water)

plaatsvindt als:

$$U_0 = U_{ocr} = + \sqrt{\frac{g h_0 \cos \theta}{\alpha \left(\frac{dh}{dh_0} \right)}}$$

Het =teken in de vgl. (16) en (17) geeft de overgang aan van een permanent eenparige stromingstoestand met gladde vlakke waterspiegel naar een stromingstoestand waarbij het wateroppervlak gekenmerkt wordt door dwarse ribbels en golfjes. Uit vgl. (17) volgt dat dit gebeurt bij een stroomsnelheid:

$$U_0^2 = g h_0 \cos \theta \cdot \frac{S_0}{\left(\frac{dh}{dh_0} \right)} \cdot \frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}$$

oftewel:

$$U_0 = + \sqrt{\frac{g h_0 \cos \theta}{\left(\frac{dh}{dh_0} \right)} \cdot \frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}}$$

deze snelheid is in feite ook een critieke snelheid. In verband hiermede zullen we de overgang tussen subcritieke en supercritieke stroming aanduiden met een toe te voegen suffix 1 en de overgang tussen stroming met een glad oppervlak en stroming met een oppervlak waarop golfjes voorkomen met een toe te voegen suffix 2. Dus in geval van laminaire stroming kunnen we onderscheiden:

$$U_{ocr1} = \sqrt{\frac{g h_0 \cos \theta}{\left(\frac{dh}{dh_0} \right)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1,2}}$$

i.e. de critieke stroomsnelheid, en:

$$\left. \begin{array}{l} U_0 < U_{ocr1} : \text{subcritieke stroming} \\ U_0 > U_{ocr1} : \text{supercritieke stroming} \end{array} \right\} ;$$

(zie voor deze indeling ook (21))

benevens:

$$U_{ocr2} = \sqrt{\frac{g h_0 \cos \theta}{\left(\frac{dh}{dh_0} \right)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}}$$

i.e. de "tweede" critieke stroomsnelheid, en:

$$\left. \begin{array}{l} U_0 < U_{ocr2} : \text{stabiele stroming} \\ U_0 > U_{ocr2} : \text{instabiele stroming} \end{array} \right\}$$

Beschouwen we de vormfactor M van de doorsnede:

$$M = 1 - R \frac{dS}{dH} = 1 - \frac{R}{S} \frac{dS}{dH} ,$$

dan zien we, dat ingeval de leiding een zeer grote breedte heeft t.o.v. de diepte, de toename van de natte omtrek S met de natte doorsnede A zeer klein is, d.w.z. $\frac{dS}{dA} \rightarrow 0$, en $R \rightarrow H$, oftewel er geldt $M=1$, en dat ingeval de leiding een zeer kleine breedte heeft t.o.v. de diepte de hydraulische straal R nadert tot $(\frac{dS}{dA})^{-1}$, d.w.z.: $\frac{R}{S} \cdot \frac{dS}{dA} \rightarrow 1$, oftewel er geldt $M=0$. M.a.w. de waarde van M , de vormfactor van de doorsnede, ligt tussen 0 en 1, oftewel:

$$0 < M \leq 1$$

De wortel

$$\sqrt{\frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}}$$

kan geschreven worden als:

$$\sqrt{\frac{1}{4(M - 0,1 + \sqrt{0,06})(M - 0,1 - \sqrt{0,06})}}$$

en heeft fysisch gezien alleen betekenis, indien

$$M > 0,1 + \sqrt{0,06} \quad \text{en} \quad M < 0,1 - \sqrt{0,06} ,$$

omdat anders de wortel complex wordt.

Dit betekent dat in het interval $0,1 + \sqrt{0,06} < M \leq 1$,

$$\sqrt{\frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}}$$

een monotoon dalende functie is, en dat

$$\sqrt{\frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}} = \sqrt{\frac{1}{1,2}} ,$$

indien $M = 0,7$. We kunnen nu dus zeggen:

$$\sqrt{\frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}} > \sqrt{\frac{1}{1,2}} , \quad \text{als} \quad 0,1 + \sqrt{0,06} < M < 0,7 ;$$

$$\sqrt{\frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}} = \sqrt{\frac{1}{1,2}} , \quad \text{als} \quad M = 0,7 ;$$

en

$$\sqrt{\frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}} < \sqrt{\frac{1}{1,2}}, \quad \text{als} \quad 0,7 < M \leq 1$$

M.a.w.: $U_{Ocr.1} < U_{Ocr.2}$, als $0,1 + \sqrt{0,06} < M < 0,7$;
 $U_{Ocr.1} = U_{Ocr.2}$, als $M = 0,7$;
 en $U_{Ocr.1} > U_{Ocr.2}$, als $0,7 < M \leq 1$.

Resumerend hebben we dus nu het volgende:

als $0 < M < 0,1 + \sqrt{0,06}$, is de laminaire, permanent eenparige stroming altijd stabiel;
 als $0,1 + \sqrt{0,06} < M < 0,7$ ontstaat de instabiliteit van de permanent eenparige stromingstoestand, als de laminaire stroming supercritiek is;
 als $0,7 < M \leq 1$, ontstaat de instabiliteit van de permanent eenparige stromingstoestand als de laminaire stroming subcritiek is;
 als $M = 0,7$, vindt het ontstaan van instabiliteit plaats als de laminaire stroming critiek is.

Opmerking:

Het is overigens nog de vraag of in het geval van laminaire, permanent eenparige stroming instabiliteiten zullen ontstaan indien de stroomsnelheden subcritiek zijn; het is waarschijnlijker dat de stroming instabiel zal worden bij stroomsnelheden in de buurt van de critieke stroomsnelheid.

Tot slot zullen we nu nog nagaan voor welke waarde van de hellingshoek θ de stroming critiek, resp. instabiel wordt.

Uit vgl. (2) volgt dat voor de permanent eenparige stroming algemeen geldt:

$$0 = g \sin \theta - \frac{\tau_0}{\rho R_0}$$

Substitutie hierin van de gemiddelde schuifspanning langs de bodem τ_0 , zoals deze gegeven is in vgl. (4) levert op:

$$0 = g \sin \theta - \frac{3R_0}{R_0^2}$$

Vervangen we U_0 nu door $U_{Ocr.1}$, zoals deze met $\alpha = 1,2$ gegeven is in vgl. (8^b), dan krijgen we:

$$g \sin \theta = \frac{3R_0}{R_0^2} \sqrt{\frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH}\right)_0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1,2}}$$

Kwadrateren van het linker- en het rechterlid, en rangschikken van de termen geeft dan:

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{15r^2}{2g} \cdot \frac{S_0}{R_0^3 \left(\frac{dR}{dH}\right)},$$

oftewel de hellingshoek θ waarbij de laminaire, permanent eenparige stromingstoestand van subcritiek, supercritiek wordt is:

$$(\text{tg } \theta \cdot \sin \theta)_{\text{cr.1}} = \frac{15r^2}{2g} \cdot \frac{S_0}{R_0^3 \left(\frac{dR}{dH}\right)} \quad (18)$$

Vervangen we in bovenstaande vgl. voor de permanent eenparige stroming:

$$0 = g \sin \theta - \frac{3rU_0}{R_0^2},$$

U_0 nu door de voor $U_{\text{ocr.2}}$ gegeven waarde, dan krijgen we:

$$g \sin \theta = \frac{3r}{R_0^2} \sqrt{\frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}}$$

Kwadrateren van linker- en rechterlid, en rangschikken van de termen geeft dan:

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{9r^2}{g} \cdot \frac{S_0}{R_0^3 \left(\frac{dR}{dH}\right)} \cdot \frac{1}{4M^2 - 0,8M - 0,2}$$

Oftewel de hellingshoek θ waarbij de laminaire permanent eenparige stroming instabiel wordt is:

$$(\text{tg } \theta \cdot \sin \theta)_{\text{cr.2}} = \frac{15r^2}{2g} \cdot \frac{S_0}{R_0^3 \left(\frac{dR}{dH}\right)} \cdot \frac{1}{5(4M^2 - 0,8M - 0,2)} \quad (19)$$

Op het interval $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ is $\text{tg } \theta \cdot \sin \theta$ een toenemende functie, waarbij de functiewaarde oploopt van nul tot plus oneindig.

Op dezelfde wijze als boven is ook hier aan te tonen dat op het interval $0 < M \leq 1$:

$$\frac{6}{5(4M^2 - 0,8M - 0,2)} > 1, \quad \text{als } 0,1 + \sqrt{0,06} < M < 0,7;$$

$$\frac{6}{5(4M^2 - 0,8M - 0,2)} = 1, \quad \text{als } M = 0,7;$$

en

$$\frac{6}{5(4M^2 - 98M - 92)} < 1, \quad \text{als } 0,7 < M \leq 1$$

Als $0 < M < 0,1 + \sqrt{0,06}$, is:

$$\frac{6}{5(4M^2 - 98M - 92)} < 0,$$

wat fysisch gezien niet mogelijk is, omdat op het interval $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ steeds $\text{tg} \theta \cdot \sin \theta > 0$.

M.a.w.:

$$\begin{aligned} (\text{tg} \theta \cdot \sin \theta)_{\text{cr.2}} &> (\text{tg} \theta \cdot \sin \theta)_{\text{cr.1}}, & \text{als } 0,1 + \sqrt{0,06} < M < 0,7; \\ (\text{tg} \theta \cdot \sin \theta)_{\text{cr.2}} &= (\text{tg} \theta \cdot \sin \theta)_{\text{cr.1}}, & \text{als } M = 0,7; \\ \text{en } (\text{tg} \theta \cdot \sin \theta)_{\text{cr.2}} &< (\text{tg} \theta \cdot \sin \theta)_{\text{cr.1}}, & \text{als } 0,7 < M \leq 1. \end{aligned}$$

IV-B.b2: Stromingsvoorwaarde voor het begin van instabiliteit in geval van turbulente stroming.

Uit vgl. (2) volgt dat voor de permanent eenparige stroming algemeen geldt:

$$0 = g \sin \theta - \frac{\tau}{\rho R},$$

waaruit we voor de schuifspanning langs leidingbodem en -wanden kunnen afleiden:

$$\tau_0 = \rho g R_0 \cdot \sin \theta,$$

welke formule geldig is voor zowel laminaire als turbulente eenparige stroming.

Voor turbulente stroming wordt de gemiddelde stroomsnelheid gewoonlijk uitgedrukt d.m.v. een of andere empirische weerstandswet, b.v. de formule van de Chezy of Manning, waarbij elke formule zijn specifieke toepassingsgebied heeft.

We zullen nu aannemen dat de stroming volledig turbulent is, en dat de weerstandseffecten t.g.v. de dynamische viscositeit van het water veel kleiner zijn dan de weerstandskracht (t.g.v. het impulstransport van de secundaire stroming) welke in ieder punt op de gemiddelde stroming wordt uitgeoefend, en derhalve verwaarloosd mogen worden. We kiezen als weerstandswet een formule van algemene gedaante, nagenoeg overeenkomend met die waarvan V.V. Vedernikov (15) en A. Craya (16) zijn uitgegaan, d.w.z. we stellen:

$$U_0^a = k \cdot R_0^{1+b} \sin^m \theta.$$

Hierin nemen we aan dat k , de z.g. wandruwheid, een constante is

met zekere dimensies, onafhankelijk van andere hydraulische groot-
heden. M.b.v. deze laatste formule kan voor de gemiddelde schuif-
spanning langs bodem en wanden $\tau_0 = \rho g R_0 \cdot \sin \theta$, na eliminatie van
 $\sin \theta$ geschreven worden:

$$\tau_0 = \rho g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot U_0^{\frac{a}{m}} \cdot R_0^{1 - \frac{1+b}{m}}$$

volgens deze formule oefenen de turbulente fluctuaties op de
hoofdstroom in ieder punt een weerstands-volumekracht uit van:

$$\frac{\tau_0}{\rho R_0} = g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot U_0^{\frac{a}{m}} \cdot R_0^{-\frac{1+b}{m}}$$

N.B.

Ter illustratie beschouwen we de formule van de Chezy,
welke gegeven wordt door:

$$U_0 = C \cdot \sqrt{R_0 \cdot \sin \theta};$$

hiervoor kan m.b.v. het bovenstaande geschreven worden:

$$\frac{\tau_0}{\rho R_0} = \frac{g U_0^2}{C^2 R_0} = g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot U_0^{\frac{a}{m}} \cdot R_0^{-\frac{1+b}{m}}$$

voor de wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy levert dit op:

$$C = (k)^{\frac{1}{2m}} \cdot U_0^{1 - \frac{a}{2m}} \cdot R_0^{\frac{1+b}{2m} - \frac{1}{2}}$$

wat m.b.v. $U_0^a = k R_0^{1+b} \sin^m \theta$ geschreven kan worden als:

$$C = (k)^{\frac{1}{2}} \cdot R_0^{\frac{2(b+1) - a}{2a}} \cdot (\sin \theta)^{\frac{2m - a}{2a}}$$

dus de wrijvingscoëfficiënt van de Chezy is geen constante, maar
een functie van de hydraulische straal, en derhalve van de diepte.

Wat de correctie-coëfficiënt α op de snelheidsverdeling
in de verticaal betreft zij opgemerkt, dat, indien voor de tur-
bulente stroming wordt uitgegaan van een logaritmische snelheids-
verdeling, α in ligt tussen 1,0 en 1,1.

Dus: in geval van turbulente permanent eenparige stroming is de
gemiddelde schuifspanning langs bodem en wanden gelijk aan:

$$\tau_0 = \rho g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot U_0^{\frac{a}{m}} \cdot R_0^{1 - \frac{1+b}{m}}$$

en de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de
verticaal:

$$1,0 \leq \alpha < 1,1$$

Vgl. (20) gaan we nu substitueren in het verkregen insta-
bilitateitscriterium vgl. (12), resp. vgl. (13).

Uit vgl. (20) volgt:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_0}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial U_0} = \frac{a}{m} \rho g \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m}} U_0^{\frac{a}{m}-1} R_0^{1-\frac{1+b}{m}}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_0}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial R_0} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial R_0} \left(\frac{dR}{dR_0}\right) = \left(1 - \frac{1+b}{m}\right) \rho g \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m}} U_0^{\frac{a}{m}} R_0^{-\frac{1+b}{m}} \left(\frac{dR}{dR_0}\right)$$

Aan de hand van deze relaties en vgl. (20) wordt vgl. (12^{a,b}):

$$-\frac{R_0}{\frac{a}{m} \rho g \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m}} U_0^{\frac{a}{m}-1} R_0^{1-\frac{1+b}{m}}} \left\{ \left(1 - \frac{1+b}{m}\right) \rho g \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m}} U_0^{\frac{a}{m}} R_0^{-\frac{1+b}{m}} \left(\frac{dR}{dR_0}\right) + \right. \\ \left. - \frac{\rho g \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m}} U_0^{\frac{a}{m}} R_0^{1-\frac{1+b}{m}}}{R_0} \left(\frac{dR}{dR_0}\right) \right\} \geq c - U_0,$$

waaruit m.b.v. $R_0 = \frac{A_0}{S}$ volgt:

$$U_0 \left(\frac{1+b}{a}\right) \cdot S_0 \left(\frac{dR}{dA}\right)_0 \geq c - U_0$$

Stellen we weer:

$$M = 1 - R_0 \left(\frac{dS}{dA}\right)_0 = S_0 \left(\frac{dR}{dA}\right)_0,$$

dan krijgen we:

$$U_0 \left(\frac{1+b}{a}\right) M \geq c - U_0$$

Substitueren we vgl. (20) en de daaruit afgeleide relaties (zie boven) in vgl. (13^{a,b}), dan levert dit op:

$$U_0 \left(\frac{1+b}{a}\right) M \geq \left\{ (\alpha-1) \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{S_0}{F^2 \left(\frac{dR}{dH}\right)_0}} \right\} U_0$$

Na deling door $U_0 \neq 0$, geeft dit:

$$\left(\frac{1+b}{a}\right) M - (\alpha-1) \geq \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{S_0}{F^2 \left(\frac{dR}{dH}\right)_0}}$$

Na kwadrateren van het linker- en rechterlid krijgen we tenslotte voor F^2 :

$$F^2 \geq \frac{S_0}{\left(\frac{dR}{dH}\right)_0} \cdot \frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a}\right) M - (\alpha-1)}$$

Dus: het criterium voor instabiliteit in geval van turbulente, permanent eenparige stroming in een open leiding luidt:

$$\frac{U_0(1+b)M}{a(c-U_0)} \begin{matrix} > \\ = 1 \\ < \end{matrix}$$

: instabiliteit (22^a)
 : neutr. stabiliteit (22^b)
 : stabiliteit (22^c)

of uitgedrukt in het Froudegetal:

$$F^2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)} \cdot \frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a}\right) M - (\alpha-1)}$$

: instabiliteit (23^a)
 : neutr. stabiliteit (23^b)
 : stabiliteit (23^c)

Hierin is wederom:

$$M = 1 - R_0 \left(\frac{dS}{dH}\right)_0$$

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{g R_0 \cos \theta}}$$

en c wordt gegeven door vgl. (6^a).

In het voorgaande (IV-B.b1) hebben we gezien dat voor een permanent eenparige stromingstoestand de overgang van subcritieke naar supercritieke stroming plaats vindt als:

$$U_0 = U_{ocr.1} = + \sqrt{\frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha}},$$

en dat voor het geval $U_0 < U_{ocr.1}$ de stroming subcritiek en voor het geval $U_0 > U_{ocr.1}$ de stroming supercritiek is.

Uit vgl. (23) volgt dat de stroming een begin van instabiliteit gaat vertonen als:

$$U_0 = U_{ocr.2} = \sqrt{\frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a}\right) M - (\alpha-1)}},$$

instabiel is als $U_0 > U_{ocr.2}$, en stabiel is als $U_0 < U_{ocr.2}$.

Dus in geval van turbulente, permanent eenparige stroming kunnen we onderscheiden:

$$U_{ocr.1} = \sqrt{\frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha}},$$

i.e. de critieke stroomsnelheid, en:

$$\left. \begin{array}{l} U_0 < U_{ocr.1} : \text{subcritieke stroming} \\ U_0 > U_{ocr.1} : \text{supercritieke stroming} \end{array} \right\}$$

(zie voor deze indeling ook (21))

benevens:

$$U_{ocr.2} = \sqrt{\frac{gH_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right)M - (\alpha-1)}}$$

i.e. de "tweede" critieke stroomsnelheid, en

$$U_0 < U_{ocr.2} : \text{stabiele stroming}$$

$$U_0 > U_{ocr.2} : \text{instabiele stroming}$$

We hebben gezien dat de waarde van de vormfactor M in ligt tussen 0 en 1, oftewel

$$0 < M \leq 1$$

De wortel

$$\sqrt{\frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right)M - (\alpha-1)}}$$

kan geschreven worden als:

$$\sqrt{\frac{1}{\left[M - \frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\}\right] \cdot \left[M - \frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) - \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\}\right]}}$$

en heeft fysisch gezien alleen betekenis, indien

$$M > \frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\} \quad \text{en} \quad M < \frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) - \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\}$$

omdat anders de wortel complex wordt;

immers $\alpha \geq 1$, en derhalve is $(\alpha-1) < \sqrt{\alpha(\alpha-1)}$.

Dit betekent dat in het interval

$$\frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\} < M \leq 1,$$

$$\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 M^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right)M - (\alpha-1)}}$$

een monotoon dalende functie is, en dat

$$\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 M^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right)M - (\alpha-1)}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}},$$

indien $M = \frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(2\alpha-1)}\}$;

nu is de kleinste waarde van α : $\alpha=1$, terwijl normaliter (temminste

bij de bekende wrijvingswetten) $a \geq 1+b$, zodat de kleinste waarde van M waarbij voornoemde wortels aan elkaar gelijk zijn, één is. We kunnen nu dus zeggen dat voor de normaliter voorkomende waarden van a en $(1+b)$ op het interval

$$\frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\} < M \leq 1$$

geldt:

$$\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 M^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right)M - (\alpha-1)}} > \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

M.a.w.:

$$U_{ocr.1} < U_{ocr.2}, \quad \text{als} \quad \frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\} < M \leq 1.$$

Resumerend hebben we nu dus het volgende, voor de normaliter voorkomende waarden van a en $(1+b)$:

$$\text{als } 0 < M < \frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\},$$

is de turbulente permanent eenparige stroming altijd stabiel;

$$\text{als } \frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\} < M \leq 1,$$

ontstaat de instabiliteit van de permanent eenparige stromings-toestand, als de turbulente stroming supercritiek is;

$$\text{mocht gelden dat } M=1 = \frac{a}{1+b} \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(2\alpha-1)}\}$$

(wat onwaarschijnlijk is), dan vindt het ontstaan van instabiliteit plaats als de turbulente stroming critiek is.

Tenslotte zullen we nog nagaan voor welke waarde van de hellingshoek ϑ , de stroming critiek, resp. instabiel wordt.

Uit vgl. (2) volgt dat voor de permanent eenparige stroming algemeen geldt:

$$0 = g \sin \vartheta - \frac{\tau_0}{\rho R_0}$$

Substitutie hierin van de gemiddelde schuifspanning langs de bodem τ_0 , zoals deze gegeven is in vgl. (20) levert op:

$$0 = g \sin \vartheta - g \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}} U_0^{\frac{2}{m}} R_0^{-\frac{1+b}{m}}$$

Vervangen we U_0 door $U_{ocr.1}$, zoals deze gegeven is in vgl. (8^b), dan krijgen we:

$$\sin \vartheta = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \left\{ \frac{g R_0 \cos \vartheta}{\alpha \left(\frac{dH}{dH_0}\right)} \right\}^{\frac{2}{2m}} R_0^{-\frac{1+b}{m}}$$

Verheffen tot de macht m , van linker- en rechterlid, en rangschikken van de termen geeft:

$$(\sin \theta)^m \cdot (\cos \theta)^{-\frac{a}{2}} = \frac{1}{k} \cdot g^{\frac{a}{2}} \left\{ \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0} \right)} \right\}^{\frac{a}{2}} \cdot R_0^{\frac{a}{2} - (1+b)} \cdot \alpha^{-\frac{a}{2}} ;$$

oftewel de hellingshoek θ waarbij de turbulente, permanent eenparige stromingstoestand van subcritiek, supercritiek wordt, is:

$$\left\{ (\cos \theta)^{\frac{a}{2}} \cdot (\sin \theta)^{m - \frac{a}{2}} \right\}_{scr.1} = \frac{1}{k} \cdot g^{\frac{a}{2}} \left\{ \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0} \right)} \right\}^{\frac{a}{2}} \cdot R_0^{\frac{a}{2} - (1+b)} \cdot \alpha^{-\frac{a}{2}} \quad (24)$$

Vervangen we in bovenstaande vgl. voor de permanent eenparige stroming:

$$0 = g \sin \theta - g \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot U_0^{\frac{a}{m}} \cdot R_0^{-\frac{1+b}{m}},$$

U_0 nu door de voor $U_{ocr.2}$ gegeven waarde, dan krijgen we:

$$\sin \theta = \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left\{ \frac{g R_0 \cos \theta}{\left(\frac{dH}{dH_0} \right)} \right\}^{\frac{a}{2m}} \cdot \left\{ \frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a} \right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a} \right) M - (\alpha-1)} \right\}^{\frac{a}{2m}} \cdot R_0^{-\frac{1+b}{m}}$$

Verheffen tot de macht m van linker- en rechterlid, en rangschikken van de termen geeft:

$$(\sin \theta)^m \cdot (\cos \theta)^{-\frac{a}{2}} = \frac{1}{k} \cdot g^{\frac{a}{2}} \left\{ \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0} \right)} \right\}^{\frac{a}{2}} \cdot R_0^{\frac{a}{2} - (1+b)} \cdot \left\{ M^2 \left(\frac{1+b}{a} \right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a} \right) M - (\alpha-1) \right\}^{-\frac{a}{2}} ;$$

oftewel de hellingshoek θ waarbij de turbulente, permanent eenparige stroming, instabiel wordt, is:

$$\left\{ (\cos \theta)^{\frac{a}{2}} \cdot (\sin \theta)^{m - \frac{a}{2}} \right\}_{scr.2} = \frac{1}{k} \cdot g^{\frac{a}{2}} \left\{ \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0} \right)} \right\}^{\frac{a}{2}} \cdot R_0^{\frac{a}{2} - (1+b)} \cdot \left\{ M^2 \left(\frac{1+b}{a} \right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a} \right) M - (\alpha-1) \right\}^{-\frac{a}{2}} \quad (25)$$

Als $(m - \frac{a}{2}) \geq 0$, wat gewoonlijk het geval is, geldt op het interval $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, dat $(\cos \theta)^{\frac{a}{2}} \cdot (\sin \theta)^{m - \frac{a}{2}}$ een toenemende functie is, waarbij de functiewaarde oploopt van nul tot plus oneindig.

Op dezelfde wijze als boven is ook hier aan te tonen dat op het interval $0 < M \leq 1$:

$$\left\{ M^2 \left(\frac{1+b}{a} \right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a} \right) M - (\alpha-1) \right\}^{-\frac{a}{2}} > \alpha^{-\frac{a}{2}},$$

als

$$\frac{a}{1+b} \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)} \right\} < M \leq 1;$$

en

$$\left\{ M^2 \left(\frac{1+b}{a} \right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a} \right) M - (\alpha-1) \right\}^{-\frac{a}{2}} = \alpha^{-\frac{a}{2}},$$

als

$$M = 1 = \frac{a}{1+b} \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(2\alpha-1)} \right\}.$$

Als

$$0 < M < \frac{a}{1+b} \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)} \right\}$$

is

$$\left\{ M^2 \left(\frac{1+b}{a} \right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a} \right) M - (\alpha-1) \right\}^{-\frac{a}{2}} < 0,$$

wat fysisch gezien niet mogelijk is, omdat op het interval $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; steeds $(\tan \theta)^{\frac{a}{2}} \cdot (\sin \theta)^{m-\frac{a}{2}} > 0$.

M.a.w.:

$$\left\{ (\tan \theta)^{\frac{a}{2}} \cdot (\sin \theta)^{m-\frac{a}{2}} \right\}_{cr.1} < \left\{ (\tan \theta)^{\frac{a}{2}} \cdot (\sin \theta)^{m-\frac{a}{2}} \right\}_{cr.2},$$

als

$$\frac{a}{1+b} \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)} \right\} < M \leq 1;$$

en

$$\left\{ (\tan \theta)^{\frac{a}{2}} \cdot (\sin \theta)^{m-\frac{a}{2}} \right\}_{cr.1} = \left\{ (\tan \theta)^{\frac{a}{2}} \cdot (\sin \theta)^{m-\frac{a}{2}} \right\}_{cr.2},$$

als

$$M = 1 = \frac{a}{1+b} \left\{ (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(2\alpha-1)} \right\},$$

wat normaal gesproken, onwaarschijnlijk is.

Opmerking I

De vgl. (22) en (23) geven in feite de algemene criteria weer voor het begin van instabiliteit van permanent eenparige stromingen in open leidingen; alhoewel deze criteria eigenlijk afgeleid zijn uitgaande van turbulente stroming, kunnen zij ook gebruikt worden voor laminaire stroming, mits voor $a=1$, $b=1$ en $\alpha=1,2$ wordt gekozen: dan verkrijgen we n.l. vgl. (16) resp. vgl. (17).

Deze waarden van a en b zijn als volgt te bepalen:

Uit vgl. (2) volgt dat voor de permanent eenparige stroming geldt:

$$0 = g \sin \theta - \frac{z_0}{\rho \kappa_0} \quad ;$$

substitutie hierin van z_0 , zoals deze in vgl. (14) gegeven is, levert op:

$$U_0 = \frac{g}{\kappa} R_0^2 \sin \theta \quad ;$$

vergelijken we deze relatie met de vgl. waarvan we bij turbulente stroming zijn uitgegaan (zie p. IV-39):

$$U_0^a = k \cdot R_0^{1+b} \cdot \sin^m \theta,$$

dan volgt daaruit direct dat:

$$a=1, \quad b=1, \quad m=1 \quad \text{en} \quad k = \frac{g}{\kappa} \quad ;$$

dus: vgl. (22) en vgl. (23) zijn beide geschikt voor elke willekeurige vorm van dwarsdoorsnede en elke willekeurige weerstandswet.

Vgl. (22) is het instabiliteitscriterium zoals dit door V.V. Vederkinov (15) in 1945 afgeleid is, onder de voorwaarde dat dit criterium alleen gebruikt kan worden als men van tevoren weet dat de stroming permanent eenparig is; anders n.l. dan de critieke snelheid $U_{cr,1}$ die alleen afhangt van de doorsnede A , is bij niet eenparige stroming de "tweede" critieke snelheid $U_{cr,2}$ bovendien nog afhankelijk van $\frac{\partial h}{\partial x}$ en $\frac{\partial U}{\partial x}$.

Vgl. (23) is het instabiliteitscriterium, uitgedrukt in het Froudegetal en de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal.

Opmerking II

In het bovenstaande hebben we gezien, dat de weerstandswet met algemene gedaante

$$U_0^a = k R_0^{1+b} \sin^m \theta$$

geldig is voor zowel laminaire stroming als turbulente stroming, mits voor de exponenten a , $1+b$ en m , en de constante k de juiste waarden worden gekozen.

Het is nu interessant om het gedrag van het instabiliteitscriterium na te gaan, indien: 1° a ongelijk is aan nul en $1+b$ nadert tot nul, en 2° a nadert tot nul en $1+b$ ongelijk is aan nul.

1° : $a \neq 0$, $(1+b) \rightarrow 0$.

Dit geval impliceert dat, indien de weerstandswet de vorm

$$U_0^a = k \cdot \sin^m \theta$$

aanneemt: de gemiddelde snelheid onafhankelijk is van de hydraulische straal (c.q. de diepte);

de gemiddelde schuifspanning langs bodem en wanden (zoals deze afgeleid is op p. IV-40) de gedaante

$$\tau_0 = \rho g \cdot \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot U_0^{\frac{a}{m}} \cdot R_0$$

krijgt, dus evenredig is met de hydraulische straal;

en de wrijvingsterm $\frac{\tau_0}{\rho R_0}$ in vgl. (2)

$$\frac{\tau_0}{\rho R_0} = g \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot U_0^{\frac{a}{m}}$$

wordt, dus onafhankelijk is van de hydraulische straal (c.q. de diepte).

Opmerkend dat de vgl. (22) en (23) identiek zijn -vgl. (23) is uit vgl. (22) af te leiden door substitutie van $(c-U_0)$ volgens vgl. (6^c)-

gaan we in vgl. (23) nu substitueren $1+b=0$, oftewel $b=-1$, en $a \neq 0$, waaruit volgt:

$$F^2 \left(\begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} \right) \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)} \cdot \frac{1}{-(\alpha-1)}$$

Omdat steeds geldt $\alpha \geq 1$, houdt bovenstaande vgl. in, dat er geen enkele reële wortel voor het Froudegetal F bestaat, indien $(1+b) \rightarrow 0$ en $a \neq 0$. Hieruit kunnen we de conclusie trekken dat elke stroming, die beheerst wordt door een weerstandswet van bovenstaand type (i.e. de weerstand variëert alleen met de gemiddelde stroomsnelheid, en is onafhankelijk van de hydraulische straal) altijd stabiel moet zijn. Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit is onafhankelijk van de leidinghelling, hoe groot deze ook is: zij heeft geen invloed op de stabiliteit.

2° : $a \rightarrow 0$, $1+b \neq 0$.

Dit geval impliceert dat de weerstandswet de gedaante

$$1 = k \cdot R_0^{1+b} \cdot \sin^m \theta$$

aanneemt. Substitutie van $a=0$ en $(1+b) \neq 0$ in vgl. (23) levert op:

$$F^2(\leq) 0,$$

waaruit we zouden concluderen dat de stroming nu steeds instabiel is, omdat alleen positieve en reële waarden van F zin hebben. Beschouwen we echter het instabiliteitscriterium zoals dit gedefiniëerd is in vgl. (10), en de voor de wortels γ_1 en γ_2 afgeleide relaties (p.IV-25), dan zien we dat voor $\epsilon \downarrow 0$ beide wortels γ tot de imaginaire s-as naderen, indien $a \rightarrow 0$, omdat dan immers $(\frac{\partial F}{\partial s})_0 = 0$; m.a.w. er is sprake van (neutrale) stabiliteit, aangezien $\text{Re} \gamma = 0$. Derhalve reduceert vgl. (23) voor het beschouwde geval $a \rightarrow 0$ en $(1+b) \neq 0$ tot de enige mogelijkheid:

$$F^2 = 0$$

Alhoewel dit laatste geval niet overeenstemt met enige werkelijk voorkomende stromingswijze, geeft de beschouwing van beide bovenstaande grensgevallen aanleiding tot de volgende conclusies:

- Indien de weerstandseffecten recht evenredig zijn met zekere macht van de snelheid, en omgekeerd evenredig met zekere macht van de hydraulische straal (c.q. diepte), is er altijd een hellingshoek waarvoor de permanent eenparige stroming instabiel wordt;
- Instabiliteit kan niet ontstaan, indien de weerstand alleen afhangt van variaties in de snelheid, of alleen afhangt van variaties in de hydraulische straal: de gelijktijdige werking van beide effecten is vereist.

Opmerking III

De algemene uitdrukking voor het instabiliteitscriterium, vgl. (22) c.q. vgl. (23) kan ook op een eenvoudiger, zij het minder exacte wijze, worden afgeleid.

Stel dat een golf in een hellende open leiding een niet-permanente stromingstoestand weergeeft, waarvoor geldt dat de zwaartekracht volledig evenwicht maakt met de traagheids-, druk- en wrijvingskrachten; de niet-permanente stromingstoestand kan dan beschreven worden m.b.v. de als vgl. (2) afgeleide impulsvgl. De voortplantingssnelheid van een dergelijke golf is weer aan te duiden met het symbool c , waarbij c gegeven wordt door vgl. (6^a):

$$c = \alpha U_0 \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)U_0^2 + \frac{gR_0 \cos \theta}{\left(\frac{dR}{dH}\right)_0}}$$

Beschouwen we vervolgens een uniforme vloedgolf, gedefiniëerd als een niet permanente stromingstoestand waarvoor geldt dat de zwaartekracht volledig evenwicht maakt met de traagheids-, druk- en wrijvingskrachten (b.v. een monoclinisch rijzende vloedgolf).

Indien de amplitudo van deze geleidelijke verstoring van de permanent eenparige stromingstoestand zeer klein is, dan plant de golf zich voort in stroomafwaartse richting met een snelheid:

$$c = \left(\frac{dQ}{dA} \right)_0,$$

i.e. de z.g. wet van Seddon; de index 0 duidt op de oorspronkelijk permanent eenparige stroming. -Voor de afleiding van deze vgl. in bovenstaande gedaante, zie b.v. (22) en (16); in een iets andere vorm is deze vgl. ook afgeleid door J.C. Schönfeld, uit een beschouwing de continuïteit betreffende (23), door M.J. Lighthill en G.B. Whitham (24), en door H.A. Thomas (25). - We hebben dus:

$$c = \left(\frac{dQ}{dA} \right)_0;$$

tevens geldt voor de permanent eenparige stroming:

$$Q_0 = (UA)_0,$$

waaruit volgt:

$$\left(\frac{dQ}{dA} \right)_0 = U_0 + A_0 \left(\frac{dU}{dA} \right)_0$$

Onderstellen we weer dat als algemene weerstandswet geldt (zie p. IV-39):

$$U_0^a = k R_0^{1+b} \sin^m \theta,$$

wat ook te schrijven is als:

$$U_0 = k^{\frac{1}{a}} R_0^{\frac{1+b}{a}} \sin^{\frac{m}{a}} \theta,$$

dan volgt daaruit:

$$\left(\frac{dU}{dR} \right)_0 = \frac{1+b}{a} k^{\frac{1}{a}} R_0^{\frac{1+b}{a}-1} \left(\frac{dR}{d\theta} \right)_0 \sin^{\frac{m}{a}} \theta,$$

wat met $U_0 = k^{\frac{1}{a}} R_0^{\frac{1+b}{a}} \sin^{\frac{m}{a}} \theta$ oplevert:

$$\left(\frac{dU}{dR} \right)_0 = U_0 \left\{ \frac{1+b}{a} R_0^{-1} \left(\frac{dR}{d\theta} \right)_0 \right\}.$$

Voor $\left(\frac{dQ}{dA} \right)_0$ krijgen we dan:

$$\left(\frac{dQ}{dA} \right)_0 = U_0 \left\{ 1 + \frac{1+b}{a} \cdot \frac{R_0}{R_0} \cdot \left(\frac{dR}{d\theta} \right)_0 \right\}.$$

Met

$$R_0 = \frac{R_0}{S_0} \quad \text{en} \quad \frac{R_0}{R_0} \left(\frac{dR}{d\theta} \right)_0 = 1 - R_0 \left(\frac{dS}{d\theta} \right)_0 = M,$$

de vormfactor van de doorsnede, (zie p. IV-33) volgt hieruit:

$$\left(\frac{dQ}{dA} \right)_0 = U_0 \left\{ 1 + \frac{1+b}{a} M \right\}$$

Wat het stabiliteitscriterium voor de eenparige stroming in een leiding betreft, dit wordt gewoonlijk uitgedrukt als de ondergrens van een zeker critiek Froudegetal. De critieke waarde

van F komt overeen met een periodieke verstoring die "neutraal" is, i.e. de amplitudo van een golf trein zal noch toe-, noch afnemen in de tijd. Hieruit volgt dat de neutrale verstoring niet meer energie uit de hoofdstroom ontvangt dan er aan wrijving gedissipeerd kan worden. Dus: de neutrale verstoring moet het karakter hebben van een eenparige vloedgolf, aangezien de vorm behouden wordt gedurende de werking van zwaartekracht en wrijving langs de bodem. Aangezien echter de golf moet reizen met de snelheid van een "leidinggolf", krijgen we:

$$c = U_0 \left\{ 1 + \frac{1+b}{a} M \right\},$$

waaruit volgt:

$$\frac{U_0(1+b)M}{a(c-U_0)} = 1;$$

deze vgl., identiek met vgl. (22), is m.b.v. vgl. (6^c) om te werken tot:

$$F^2 = \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)} \cdot \frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right)M - (\alpha-1)},$$

welke vgl. identiek is met vgl. (23).

Als het Froudegetal nu groter is dan de hierboven gegeven critieke waarde, ontvangt de verstoring meer energie, dan gedissipeerd kan worden door de schuifkracht langs de bodem, wat de formatie van golfjes en golven verklaart. M.a.w. we hebben de instabiliteitscriteria vgl. (22) en vgl. (23) afgeleid, op een andere eenvoudiger wijze.

IV-C: Factoren welke het instabiliteitscriterium beïnvloeden.

In het voorgaande hebben we gezien dat ter bepaling van de (in-)stabiliteit van een permanent eenparige stroming gebruik kan worden gemaakt van vgl. (22) of vgl. (23). Deze relaties gelden zowel voor laminaire stroming als voor turbulente stroming, mits voor de grootheden a , b en α de juiste waarden worden gekozen. Drukken we het (in-)stabiliteitscriterium uit d.m.v. het Froudegetal F , d.w.z. maken we gebruik van vgl. (23) om na te gaan of de permanent eenparige stroming instabiel, dan wel stabiel is:

$$F^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)} \cdot \frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right)M - (\alpha-1)},$$

dan zien we, dat het (in-)stabiliteitscriterium, in de meest

algemene zin, beïnvloed wordt door drie parameters, te weten:

- a: de weerstandswet, i.e. de grootheid $\frac{1+b}{a}$
- b: de vorm van de doorsnede, i.e. de grootheden $S_0, \left(\frac{dA}{dH}\right)_0$ en M .
- c: de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal, i.e. α .

Alvorens over te gaan tot een bespreking van deze drie parameters, zullen we nog een tweetal opmerkingen maken:

-Voor laminaire stroming in een hellende leiding met geleidelijk veranderende dwarsdoorsnede is het instabiliteitscriterium een functie van slechts één parameter, te weten de vorm van de doorsnede, omdat de weerstandswet en de correctiecoëfficiënt op de verticale snelheidsverdeling theoretisch vastliggen.

-Indien in vgl. (23) de factor

$$M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a}\right) M - (\alpha-1) = 0,$$

oftewel

$$M \left(\frac{1+b}{a}\right) = (\alpha-1) \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)},$$

nadert F^2 tot plus oneindig:

$$F^2 \left(\frac{\geq}{\leq}\right) \rightarrow +\infty;$$

het is duidelijk dat voor dit geval de permanent eenparige stroming steeds stabiel is.

IV-C.a: De invloed van de weerstandswet.

De waarden van a en b voor de resp. weerstandswetten kunnen bepaald worden.

In het voorgaande (zie p. IV-47) hebben we reeds gezien dat, uitgaande van een wrijvingswet met algemene gedaante

$$U_0^a = k R_0^{1+b} \sin^m \theta$$

in geval van laminaire permanent eenparige stroming geldt:

$$a=1, b=1, m=1 \text{ en } k = \frac{2}{3V},$$

terwijl we voor de correctiecoëfficiënt α op de verticale snelheidsverdeling vonden (vgl. (15)):

$$\alpha = 1, 2;$$

met behulp van deze relaties wordt het algemene (in-)stabiliteitscriterium vgl. (23) in geval van laminaire stroming:

$$F^2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{S_0}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0} \cdot \frac{1}{4M^2 - 2\alpha M - \alpha^2},$$

i.e. vgl. (17)

Van de verschillende wrijvingswetten welke voor turbulente permanent eenparige stroming bekend zijn, zullen we beschouwen de formule van de Chezy:

$$U_0 = C \sqrt{R_0} \sin \theta = CR_0^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \theta,$$

en de formule van Manning:

$$U_0 = \frac{1}{n} R_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{R_0} \sin \theta = \frac{1}{n} R_0^{\frac{5}{6}} \sin^{\frac{1}{2}} \theta;$$

hierin is C de wrijvingscoëfficiënt van de Chezy, en n de wrijvingscoëfficiënt van Manning.

De formule van de Chezy kan geschreven worden als:

$$U_0^2 = C^2 R_0 \sin \theta;$$

vergelijken we deze relatie met de algemene weerstandswet

$$U_0^a = k R_0^{1+b} \sin^m \theta,$$

welke ook te schrijven is als:

$$U_0^2 = k^{\frac{2}{a}} R_0^{\frac{2(1+b)}{a}} (\sin \theta)^{\frac{2m}{a}} = \left\{ k^{\frac{2}{a}} R_0^{\frac{2(1+b)-a}{a}} (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{a}} \right\} R_0 \sin \theta,$$

dan volgt daaruit dat (in geval van constante C-waarde):

$$a=2, b=0 \text{ en } m=1$$

en voor de coëfficiënt van de Chezy (zie ook p.IV-40) dat:

$$C = k^{\frac{1}{2}} R_0^{\frac{2(1+b)-a}{2a}} (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{2a}}$$

Met behulp van deze relaties wordt het algemene (in-)stabiliteitscriterium vgl. (23) in geval van een turbulente stroming welke beheerst wordt door een wrijvingswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt:

$$F^2 \geq \frac{S_0}{\frac{dH}{dH_0}} \cdot \frac{4}{M^2 - 4(\alpha-1)M - 4(\alpha-1)} \quad (26^a)$$

De formule van Manning kan geschreven worden als:

$$U_0^2 = \frac{1}{n^2} R_0^{\frac{4}{3}} \sin \theta;$$

vergelijken we deze relatie weer met de algemene weerstandswet

$$U_0^a = k R_0^{1+b} \sin^m \theta,$$

welke ook te schrijven is als:

$$U_0^2 = k^{\frac{2}{a}} R_0^{\frac{2(1+b)}{a}} (\sin \theta)^{\frac{2m}{a}} = \left\{ k^{\frac{2}{a}} R_0^{\frac{6(1+b)-4a}{3a}} (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{a}} \right\} R_0^{\frac{4}{3}} \sin \theta,$$

dan volgt daaruit direct dat (in geval van constante n-waarde!):

$$a=2, b=\frac{1}{3} \text{ en } m=1$$

en voor de coëfficiënt van Manning dat:

$$n = k^{-\frac{1}{2}} R_0^{\frac{2a-3(1+b)}{3a}} (\sin \theta)^{\frac{a-2m}{3a}}$$

M.b.v. deze relaties wordt het algemene (in-)stabiliteitscriterium

vgl. (23) in geval van een turbulente stroming welke beheerst wordt door een wrijvingswet van het Manning-type met constante wrijvingscoëfficiënt:

$$F^2 \gtrless \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dL}\right)} \cdot \frac{g}{4M^2 - 12(\alpha-1)M - g(\alpha-1)} \quad (26^b)$$

Uit het bovenstaande volgt dat de coëfficiënten van de Chezy en Manning in feite geen constanten zijn, maar functies van de diepte.

Substitueren we in bovenstaande vgl. nu zekere numerieke waarden voor de vorm van de doorsnede en de correctiecoëfficiënt α , dan is het mogelijk, zoals we in het navolgende zullen aantonen om de resultaten verkregen door verschillende van de in Hoofdstuk III aangehaalde auteurs af te leiden.

Het gedrag van het instabiliteitscriterium voor de twee grensgevallen $a \neq 0$ en $(1+b) \rightarrow 0$, resp. $a \rightarrow 0$, en $(1+b) \neq 0$ hebben we alreeds beschouwd (zie Opmerking II, p. IV-47).

IV-C.b: De invloed van de vorm van de doorsnede.

Als de stroming tweedimensionaal is, d.w.z. als de breedte van de leiding zeer groot is t.o.v. de diepte, heeft de vorm van de doorsnede geen invloed op het (in-)stabiliteitscriterium. Is daarentegen de stroming driedimensionaal, d.w.z. is de breedte van de leiding niet meer zeer groot t.o.v. de diepte, dan heeft de vorm van de doorsnede wel invloed op het (in-)stabiliteitscriterium.

Omwille van de eenvoud zullen we er van uitgaan dat de permanent eenparige stroming plaatsvindt in een leiding met trapeziumvormige doorsnede, zoals aangegeven in fig. IV-1, omdat deze doorsnedevorm gemakkelijk aansluit bij de meest voorkomende doorsnedevormen, te weten rechthoekige, driehoekige en trapeziumvormige.

Uit fig. IV-1 volgt: voor de dwarsdoorsnede A_0 :

$$A_0 = BH_0 + H_0^2 \operatorname{tg} \varphi ;$$

voor de natte omtrek S_0 :

$$S_0 = B + \frac{2H_0}{\cos \varphi} ;$$

en voor de hydraulische straal R_0 :

$$R_0 = \frac{A_0}{S_0} = \frac{BH_0 + H_0^2 \operatorname{tg} \varphi}{B + \frac{2H_0}{\cos \varphi}} = \frac{H_0 (\cos \varphi + \frac{H_0}{B} \sin \varphi)}{\cos \varphi + 2 \frac{H_0}{B}} ;$$

tevens volgt dan uit het bovenstaande:

$$\left(\frac{dS}{dH}\right)_0 = \frac{dS_0}{dH_0} = \frac{2}{\cos\varphi}, \quad \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 = \frac{dR_0}{dH_0} = B + 2H_0 \tan\varphi,$$

met behulp waarvan de vormfactor voor de dwarsdoorsnede M (zie p. IV-33) wordt:

$$\begin{aligned} M &= S_0 \cdot \left(\frac{dR}{dH}\right)_0 = 1 - R_0 \cdot \left(\frac{dS}{dH}\right)_0 = 1 - R_0 \left(\frac{dS}{dH}\right)_0 \cdot \left(\frac{dH}{dH}\right)^{-1} = \\ &= 1 - \frac{BH_0 + H_0^2 \tan\varphi}{B + \frac{2H_0}{\cos\varphi}} \cdot \frac{2}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{B + 2H_0 \tan\varphi}, \end{aligned}$$

oftewel:

$$M = \frac{B^2 \cos\varphi + 2BH_0 \sin\varphi + 2H_0^2 \tan\varphi}{(B \cos\varphi + 2H_0)(B + 2H_0 \tan\varphi)} = \frac{\cos\varphi + 2\frac{H_0}{B} \sin\varphi + 2\frac{H_0^2}{B^2} \tan\varphi}{(\cos\varphi + 2\frac{H_0}{B})(1 + 2\frac{H_0}{B} \tan\varphi)}$$

Substitueren we nu S_0 , $\left(\frac{dA}{dH}\right)_0$ en M in vgl. (23) dan krijgen we uiteindelijk als algemeen instabiliteitscriterium:

$$F^2 \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} \frac{\cos\varphi + 2\frac{H_0}{B}}{\cos\varphi + 2\frac{H_0}{B} \sin\varphi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 M^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right)M - (\alpha-1)}, \quad (27)$$

waarin M gegeven wordt door bovenstaande vgl.

In geval van een rechthoekige leiding nadert φ tot 0, waaruit voor de vormfactor M volgt:

$$M_r = \frac{1}{1 + 2\frac{H_0}{B}},$$

zodat vgl. (27) wordt:

$$F^2 \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} \frac{1}{M_r} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 M_r^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right)M_r - (\alpha-1)} \quad (27)$$

Het suffix r dat aan M is toegevoegd staat voor "rechthoekig".

In geval van een driehoekige leiding nadert B tot 0, waaruit voor de vormfactor M volgt:

$$M_d = \frac{1}{2},$$

zodat vgl. (27) overgaat in:

$$F^2 \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \frac{4}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 4(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) - 4(\alpha-1)} \quad (27)$$

Het suffix d dat aan M is toegevoegd staat voor "driehoekig".

Beschouwen we nu het geval van tweedimensionale stroming, d.w.z. de breedte van de leiding is zeer groot t.o.v. de diepte, m.a.w. $\frac{H_0}{B} \rightarrow 0$, of ook $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, dan is het duidelijk dat voor de vormfactor M en de hydraulische straal R_0 geldt:

$$M=1, R_0=H_0,$$

zodat vgl. (27) overgaat in:

$$F^2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) - (\alpha-1)} \quad (28)$$

Opmerking

Vgl. (28) is niet af te leiden uit vgl. (27^b) door θ te laten naderen tot $\frac{\pi}{2}$ omdat vgl. (27^b) gebaseerd is op een in principe driehoekig profiel met $B=0$, zodat men in dit geval eigenlijk niet kan spreken van een "zeer brede" leiding (zie ook N.B. 2, p.IV-15).

Aan de hand van vgl. (28) wordt het criterium voor de instabiliteit van een laminaire permanent eenparige stroming in een zeer brede leiding -immers $a=1, b=1$ (zie p.IV-47) en $\alpha=1,2$ (vgl. (15))-

$$F^2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \frac{1}{3}, \quad \text{oftewel} \quad U_0 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \sqrt{\frac{gH_0 \cos \theta}{3}}$$

M.b.v. vgl. (28) zijn de in de literatuur (zie Hoofdstuk III) gevonden criteria voor de (in-)stabiliteit van een turbulente permanent eenparige stroming af te leiden. Alle auteurs namen aan dat de snelheidsverdeling in de verticaal uniform is, d.w.z. $\alpha=1$, zodat vgl. (28) nog verder gereduceerd kan worden, en wel tot:

$$F^2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2} \quad (28^a)$$

Gaan we uit van een weerstandswet van het Chezy-type met constante C-waarde, waarvoor dus geldt: $a=2$ en $b=0$, dan gaat vgl. (28^a) over in:

$$U_0 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 2\sqrt{gH_0 \cdot \cos \theta}$$

Als θ zo klein is dat $\cos \theta \approx 1$, stemt dit resultaat overeen met dat van H. Jeffreys (12) en G.H. Keulegan en G.W. Patterson (13) Uitgaande van een weerstandswet van het Chezy-type, vonden ook M.J. Lighthill en G.B. Whitham (24) voor dit geval: $F=2$. Uit vgl. (25) volgt dat voor de leidinghelling waarbij de stroming in-stabiel wordt geldt:

$$(y\theta)_{cr,2} = \frac{4g}{k}$$

wat overeenstemt met het resultaat van H. Jeffreys (12), en G.H. Keulegan en G.W. Patterson (13) (indien θ weer klein is).

Gaan we uit van een weerstandswet van het Manning-type, met constante n-waarde, waarvoor dus geldt: $a=2$ en $b=\frac{1}{3}$, dan gaat vgl. (28^a) over in:

$$U_0 \geq \frac{3}{2} \sqrt{gH_0 \cos \theta}$$

Als θ zo klein is dat $\cos \theta \approx 1$ stemt dit resultaat overeen met dat van G.H. Keulegan en G.W. Patterson (13).

Uit vgl. (25) volgt dat voor de leidinghelling waarbij de stroming instabiel wordt geldt:

$$(y\theta)_{cr,2} = \frac{g}{k} \cdot \frac{g}{k} \cdot H_0^{-\frac{1}{3}}$$

wat voor kleine θ in overeenstemming gebracht kan worden met het resultaat van G.H. Keulegan en G.W. Patterson (13).

Vgl. (28^a) kan voor het algemene geval geschreven worden als:

$$U_0 \geq \frac{a}{1+b} \sqrt{gH_0 \cos \theta}$$

wat overeenstemt met de resultaten van R.F. Dressler (17) en R.F. Dressler en T. v. Pohle (19).

We kunnen ons nu nog af gaan vragen hoe groot de exponent b is, indien we uitgaan van een weerstandswet van het Chezy-type met variabele C-waarde. Voor de wrijvingscoëfficiënt van de Chezy hebben we al afgeleid (zie p.IV-40):

$$C = k^{\frac{1}{a}} \cdot R_0^{\frac{2(b+1)-a}{2a}} \cdot (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{2a}}$$

waaruit blijkt dat C een functie van de hydraulische straal, c.q. de diepte is. Bepalen we nu de totale differentiaal van bovenstaande vgl.:

$$dC = \frac{2(b+1)-a}{2a} \cdot k^{\frac{1}{a}} \cdot R_0^{\frac{2(b+1)-a}{2a}-1} \cdot (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{2a}} dR_0 ;$$

dit is te schrijven als:

$$dC = \frac{2(b+1)-a}{2a} \left\{ k^{\frac{1}{a}} \cdot R_0^{\frac{2(b+1)-a}{2a}} \cdot (\sin \theta)^{\frac{2m-a}{2a}} \right\} R_0^{-1} dR_0 ,$$

wat m.b.v. de vgl. voor C overgaat in:

$$dC = \frac{2(b+1)-a}{2a} \cdot C \cdot R_0^{-1} dR_0 ,$$

oftewel:

$$\frac{2(b+1)-a}{2a} = \frac{R_0}{C} \cdot \frac{dC}{dR_0}$$

De weerstandswet van de Chezy is van het kwadratische type, dus $a=2$; als tevens nog de breedte van de leiding zeer groot is t.o.v. de diepte, dan gaat bovenstaande vgl. over in:

$$b = \frac{2H_0}{C} \cdot \frac{dC}{dH_0}$$

Substitutie hiervan en van $a=2$ in vgl. (28^a) geeft na omwerking tenslotte:

$$U_0 \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} \frac{2\sqrt{gH_0} \cos \theta}{1 + \frac{2H_0}{C} \cdot \frac{dC}{dH_0}}$$

Als θ zo klein is dat $\cos \theta \approx 1$ stemt dit resultaat overeen met dat van J.C. Schönfeld (18).

Opmerking:

Ter completering zullen we ook nog nagaan hoe groot de exponent b is, indien we uitgaan van een weerstandswet van het Manning-type met variabele n -waarde. Voor de wrijvingscoëfficiënt van Manning hebben we al afgeleid (zie p. IV-53):

$$n = k^{\frac{1}{a}} \cdot R_0^{\frac{2a-3(1+b)}{3a}} \cdot (\sin \theta)^{\frac{a-2m}{3a}}$$

waaruit blijkt dat n een functie van de hydraulische straal, c.q. de diepte is. Bepalen we de totale differentiaal van bovenstaande vgl.:

$$dn = \frac{2a-3(1+b)}{3a} \cdot k^{-\frac{1}{a}} \cdot R_0^{\frac{2a-3(1+b)}{3a}-1} \cdot (\sin \theta)^{\frac{a-2m}{3a}} \cdot dR_0 ;$$

dit is te schrijven als:

$$dn = \frac{2a-3(1+b)}{3a} \left\{ k^{-\frac{1}{a}} \cdot R_0^{\frac{2a-3(1+b)}{3a}} \cdot (\sin \theta)^{\frac{a-2m}{3a}} \right\} \cdot R_0^{-1} dR_0 ,$$

wat m.b.v. de vgl. voor n overgaat in:

$$dn = \frac{2a-3(1+b)}{3a} \cdot n R_0^{-1} dR_0 ,$$

oftewel:

$$\frac{2a-3(1+b)}{3a} = \frac{R_0}{n} \cdot \frac{dn}{dR_0}$$

De weerstandswet van Manning is van het kwadratische type, dus $a=2$; als tevens nog de breedte van de leiding zeer groot is t.o.v. de diepte, dan gaat bovenstaande vgl. tenslotte over in:

$$b = \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{H_0}{n} \cdot \frac{dn}{dH_0}$$

Ten overvloede zij nog opgemerkt dat het instabiliteitscriterium in de gedaante van vgl. (22), overeenstemt met die welke door V.V. Vedernikov (15) en A. Craya (16) op geheel andere wijze zijn afgeleid.

IV-C.c: De invloed van de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal.

Afgezien van de waarde van de correctiecoëfficiënt α voor laminaire permanent eenparige stroming welke in het voorgaande (zie p.IV-32) al is afgeleid en volgens vgl. (15) (onder zekere voorwaarden) voor driedimensionale stroming gelijk is aan: $\alpha=1,2$, is in alle bekende literatuur betreffende de (in-)stabiliteit van een turbulente permanent eenparige stroming, uitgegaan van een uniforme snelheidsverdeling, d.w.z. $\alpha=1$. Het is echter duidelijk dat voor turbulente stroming α niet gelijk is aan 1, doch een bepaalde numerieke waarde heeft, welke ongeveer gelijk is aan 1.

We zullen nu ter oriëntatie een formule voor α afleiden in geval van turbulente stroming, teneinde een indruk te krijgen van de grootte.

Beschouwen we een tweedimensionale turbulente stromingswijze b.v. de permanent eenparige stroming in een zeer brede open leiding, dan is volgens Th. von Kármán (26) de snelheidsverdeling in de omgeving van de vaste begrenzing:

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0};$$

hierin is u_* de z.g. "schuifsneldheid" gedefiniëerd als $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ en τ_0 de schuifspanning in de vloeistof direct aan de vaste begrenzing; κ is een universele constante, karakteriserend voor de turbulentie; z_0 is een integratieconstante gedefiniëerd als de coördinaat waarvoor $u=0$ (immers aan de vaste begrenzing $z=0$, is $u=0$ en $\ln z \rightarrow -\infty$, wat onmogelijk is). Bovenstaande formule is ten hoogste voor $z \geq z_0$ geldig; z_0 is een kleine grootheid,

welke bepaald wordt door de oppervlakte geaardheid van de begrenzing, m.a.w. door de vraag of men kan spreken van een zogeheten hydraulisch gladde (Th. von Kármán geeft voor dit geval als experimentele waarde voor de dikte van de laminaire grenslaag $\delta = 11,6 \frac{r}{u_*}$, waaruit voor z_0 volgt: $z_0 = \frac{\delta}{104}$) of een hydraulisch ruwe (in geval van een uniforme zandruwheid geeft J. Nikuradse (27) voor z_0 de waarde $z_0 = \frac{1}{30}k$, waarin k de diameter van de zandkorrels is) wand.

De afleiding van deze vgl. is gedaan voor kleine waarden van z . Naar aanleiding van deze formule merkt G.H. Keulegan (28) op dat de ondervinding aantoonde dat bovenstaande formule voor u voldoende nauwkeurig is, ook voor grote waarden van z , zelfs indien $z=H$ (i.e. de oppervlakte, waar $\tau=0$), en dat het gemiddelde resultaat over de dwarsdoorsnede van secundaire stromingseffecten en het vrije oppervlak te verwaarlozen is.

We zullen nu eerst een vgl. afleiden voor de gemiddelde stroomsnelheid U ; deze is impliciet gedefinieerd door:

afvoer per eenheid van breedte $=UH = \int_H^0 u dz$,
 waarin de integratiegrenzen 0 en H zijn; dit levert echter moeilijkheden op (we krijgen n.l. $\ln 0$), waarom we zullen integreren van z_0 tot H, onder de aanname dat de afvoer over de hoogte z_0 zeer klein is, t.o.v. de totale afvoer, en derhalve te verwaarlozen.

We krijgen nu:

$$UH = \int_{z_0}^H \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} dz ;$$

dit is te schrijven als:

$$UH = \frac{u_*}{k} \int_{z_0}^H (\ln z - \ln z_0) dz ,$$

waaruit m.b.v. partiële integratie volgt:

$$UH = \frac{u_*}{k} \left[z \ln z \Big|_{z_0}^H - \int_{z_0}^H dz - z \ln z_0 \Big|_{z_0}^H \right]$$

Uitwerking hiervan geeft:

$$UH = \frac{u_*}{k} \left[H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 \right) + z_0 \right] ,$$

oftewel:

$$\left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 \right) = \frac{k}{u_*} \left(U - \frac{z_0}{H} \cdot \frac{u_*}{k} \right)$$

De correctiecoëfficiënt α op de verticale snelheidsverdeling is gedefiniëerd als:

$$\alpha U^2 H = \int_H U^2 dz$$

Onder dezelfde aannamen als boven, nemen we als integratiegrenzen, z_0 en H ; we krijgen dan:

$$\alpha U^2 H = \int_{z_0}^H \frac{u_*^2}{\kappa^2} \cdot \ln^2 \frac{z}{z_0} dz$$

Dit is te schrijven als:

$$\alpha U^2 H = \frac{u_*^2}{\kappa^2} \int_{z_0}^H (\ln^2 z - 2 \ln z_0 \cdot \ln z + \ln^2 z_0) dz$$

Partiële integratie van $\int \ln^2 z dz$ levert op:

$$\begin{aligned} \int \ln^2 z dz &= \ln z \int \ln z dz - \int \frac{1}{2} (\int \ln z dz) dz = z \ln z (\ln z - 1) - \int (\ln z - 1) dz = \\ &= z \ln z (\ln z - 1) - z (\ln z - 1) + z + \text{constante} = z (\ln z - 1)^2 + z + \text{constante}; \end{aligned}$$

$\alpha U^2 H$ wordt dan:

$$\alpha U^2 H = \frac{u_*^2}{\kappa^2} \left\{ z (\ln z - 1)^2 + z - 2 \ln z_0 (z \ln z - z) + z \ln^2 z_0 \right\}_{z_0}^H,$$

waaruit volgt:

$$\alpha U^2 H = \frac{u_*^2}{\kappa^2} \left\{ z (\ln \frac{z}{z_0} - 1)^2 + z \right\}_{z_0}^H$$

Uitgewerkt geeft dit:

$$\alpha U^2 H = \frac{u_*^2}{\kappa^2} \left\{ H (\ln \frac{H}{z_0} - 1)^2 + H - 2z_0 \right\}$$

Substitutie hierin van de reeds verkregen vgl.:

$$\ln \frac{H}{z_0} - 1 = \frac{\kappa}{u_*} \left(U - \frac{z}{H} \cdot \frac{u_*}{\kappa} \right)$$

geeft, na deling door H , tenslotte:

$$\alpha U^2 = \left(U^2 + \frac{u_*^2}{\kappa^2} \right) + \frac{u_*^2}{\kappa^2} \left(\frac{z_0}{H} - 1 \right)^2 - \left(\frac{z_0}{H} + \frac{u_*}{\kappa} \right)^2 + \left(\frac{z_0}{H} \right)^2$$

Onderstellen we nu dat z_0 zo klein is dat $\frac{z_0}{H} \approx 0$, dan krijgen we voor α :

$$\alpha = 1 + \frac{u_*^2}{\kappa^2 U^2};$$

met $u_* = \sqrt{\frac{z_0}{\rho}}$ wordt dit:

$$\alpha = 1 + \frac{z_0}{\kappa^2 \rho U^2}$$

Substitueren we hierin voor κ , de parameter van Th. v. Kármán (zie (28)):

$$\kappa = 0,4,$$

en voegen we een index 0 toe om de permanent eenparige stroming aan te duiden, dan vinden we dus voor α :

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{z_0}{\rho U_0^2} \quad ; \quad (21)$$

deze vgl. geeft een indruk van α in turbulente permanent eenparige stroming.

Opmerking I:

Voor stroming in een leiding waarvan de breedte niet meer zeer groot is t.o.v. de diepte, is de schuifspanning niet uniform langs wanden en bodem verdeeld en geldt bovenstaande vgl. voor de snelheidsverdeling en de correctiecoëfficiënt α in feite niet meer; voor een bespreking hiervan zie (28). We zullen hier aannemen dat de effecten hiervan verwaarloosd mogen worden. In Hoofdstuk II, p.II-8, is α , de "correctiecoëfficiënt" op de snelheidsverdeling in de verticaal, aangenomen als zijnde niet afhankelijk van x en t . Uit de afleiding van vgl. (21) blijkt dat α , ingeval van permanent eenparige stroming, een functie is van z_0 en U_0 , m.a.w. voor niet-permanente stroming zou wellicht uitgedrukt kunnen worden als een functie van de gemiddelde stroomsnelheid $U=U(x,t)$ en de waterdiepte $H=H(x,t)$, oftewel als een functie van x en t . De bovenstaande aanname dat α constant is, is dus enigszins dubieus. De correctiecoëfficiënt α is echter (zij het als constante) ingevoerd omdat het niet geheel duidelijk is hoe α als variabele aangenomen zou moeten worden, en om nog enigermate de invloed van de snelheidsverdeling op het ontstaan van instabiliteit na te kunnen gaan.

Opmerking II:

In bovenstaande Opmerking I wordt het vermoeden uitgesproken dat α geen constante grootheid, maar een variabele is, en wel een functie van x en t . In het hiernavolgende zullen we, uitgaande van zekere aannamen, trachten na te gaan in hoeverre de basisvgn. (1) en (2), welke de gemiddelde stroming in een prismatische leiding met vrije waterspiegel weergeven, veranderen; terwijl we tevens zullen trachten na te gaan in hoeverre de hieruit gelineariseerde vgn. (3) en (4), welke de verstoorde(permanent eenparige) stroming weergeven, en de tweede orde lineaire partiële differentiaalvgl. (5) in h' resp. u' voor de translatiegolf met kleine amplitudo en verwaarlozing van* het vloeistofoppervlak, zich wijzigen.

In Hoofdstuk II p.II-5, hebben we afgeleid dat voor de im-
* de kromming van

pulsvgl. in de x-richting, toegepast op een macro-elementje begrensd door twee dwarsdoorsneden met resp. x-coördinaten x en x+dx, geschreven kan worden:

$$\sum F_x = \frac{dM_x}{dt}$$

hierin is $\sum F_x$ de som van de uitwendige krachten in de x-richting, werkend op het macro-elementje (zie Hoofdstuk II, p. II-7):

$$\sum F_x = \rho g A \sin \theta dx - \rho g A \cos \theta \cdot \frac{\partial H}{\partial x} dx - \tau_0 S dx,$$

en $\frac{dM_x}{dt}$ de mate van impulsverandering in de x-richting (zie Hoofdstuk II, p. II-7):

$$\frac{dM_x}{dt} = \rho dx \frac{\partial}{\partial t} \int_0^A u dA + \rho \int_0^A (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)^2 dA - \rho \int_0^A u^2 dA$$

We zullen nu onderstellen dat de in te voeren "coëfficiënt" α een functie is van de gemiddelde stroomsnelheid U en de waterdiepte H, immers zowel de dwarsdoorsnede A als de hydraulische straal R zijn aangenomen als functies van H (zie p. IV-2); dus $\alpha = \alpha(U, H)$; aangezien zowel $U = U(x, t)$ als $H = H(x, t)$ functies van x en t zijn, is ook α een functie van x en t.

Op geheel analoge wijze als in Hoofdstuk II, p. II-8, kan nu voor $\frac{dM_x}{dt}$ geschreven worden:

$$\frac{dM_x}{dt} = \rho dx \cdot \frac{\partial(UA)}{\partial t} + \alpha_1 \rho (U + \frac{\partial U}{\partial x} dx)^2 (A + \frac{\partial A}{\partial x} dx) - \alpha \rho U^2 A,$$

waarin:

$$\alpha = \alpha(U, H)$$

en

$$\alpha_1 = \alpha(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx, H + \frac{\partial H}{\partial x} dx).$$

Uitwerking hiervan en verwaarlozing van de termen, welke oneindig klein zijn van de tweede en hogere orde, levert op:

$$\frac{dM_x}{dt} = \rho dx \cdot \frac{\partial(UA)}{\partial t} + (\alpha_1 - \alpha) \rho U^2 A + \alpha_1 \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} dx + 2\alpha_1 \rho U A \frac{\partial U}{\partial x} dx.$$

Ontwikkelen we α_1 , nu in een reeks, volgens de formule van Taylor:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx, H + \frac{\partial H}{\partial x} dx) &= \alpha(U, H) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial H}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial H} \right) \alpha(U, H) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial H}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial H} \right)^2 \alpha(U, H) + \dots, \end{aligned}$$

waarin de termen tussen haakjes van de symbolische operator

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial H}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial H} \right)^n$$

ontwikkeld worden volgens het binomium van Newton.

Onder verwaarlozing weer van alle termen, die oneindig klein zijn van de tweede en hogere orde, gaat de vgl. voor α_2 , over in:

$$\alpha_2 = \alpha(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx, H + \frac{\partial H}{\partial x} dx) = \alpha(U, H) + \frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial U} + \frac{\partial H}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial H}$$

Substitutie hiervan in de voor $\frac{dM_x}{dt}$ verkregen vgl. levert op:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} = & \rho dx \cdot \frac{\partial(UA)}{\partial t} + \rho U^2 A \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial H}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial H} \right) + \alpha \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} dx + \\ & + \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} dx \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial H}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial H} \right) + 2\alpha \rho U A \frac{\partial U}{\partial x} dx + \\ & + 2\rho U A \frac{\partial U}{\partial x} dx \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial H}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial H} \right), \end{aligned}$$

wat na verwaarlozing van de termen, die oneindig klein zijn van de tweede en hogere orde, geeft:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} = & \rho dx \cdot \frac{\partial(UA)}{\partial t} + \rho U^2 A \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial H}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial}{\partial H} \right) + \alpha \rho U^2 \frac{\partial A}{\partial x} dx + \\ & + 2\alpha \rho U A \frac{\partial U}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

M.b.v. de continuïteitsvgl. (1) welke uiteraard ongewijzigd blijft, gaat deze laatste betrekking op geheel analoge wijze als in Hoofdstuk II, p.II-9 over in:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} = & \rho A dx \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \right\} + \\ & + \rho A dx \left\{ U^2 \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial U} + U^2 \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial H} \right\}. \end{aligned}$$

$\Sigma F_x = \frac{dM_x}{dt}$ geeft dan na deling door $\rho A dx$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{H} \frac{\partial H}{\partial t} + U^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial U} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial H} \right) = \\ = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_0 S}{\rho A} \end{aligned}$$

We hebben gesteld dat $\alpha = \alpha(U, H)$; $U = U(x, t)$ en $H = H(x, t)$, dus is $\alpha = \alpha(x, t)$; hieruit volgt dat we voor $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ kunnen schrijven:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x}$$

Substitutie hiervan in bovenstaande impulsvgl. geeft:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{H} \frac{\partial H}{\partial t} + U^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_0 S}{\rho A}$$

Dit is de vgl. voor de gemiddelde stroming in een prismatische leiding met vrije waterspiegel, in geval de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal beschouwd wordt als een variabele.

Resumerend hebben we nu dus als fundamentele basisvgl. gekregen:

$$\frac{\partial}{\partial x} (UH) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1^a)$$

of

$$U \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1^b)$$

en

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U}{H} \frac{\partial H}{\partial t} + U^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho R} \quad (2^a)$$

N.B. Vgl. (2^a) is sneller af te leiden, door i.p.v.

$$\alpha = \alpha \left(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx, H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right)$$

direct in te voeren:

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

Stellen we vgl. (2^a) nu tegenover vgl. (2), dan merken we het volgende op: qua vorm komt vgl. (2^a) overeen met vgl. (2), behalve dan dat in het linkerlid van vgl. (2^a) een extra term, $U^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$, voorkomt, terwijl tevens in vgl. (2) α een constante is,

en in vgl. (2^a) een variabele; de extra term $U^2 \frac{\partial x}{\partial x}$ in vgl. (2^a) geeft, indien de gedane aannamen betreffende α juist (zouden) zijn, de invloed weer van de variabele "correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaleal".

Op geheel analoge wijze als op pp. IV-1, IV-7, zullen we nu nagaan hoe de gedaanten van de uit de vgl. (1) en (2^a) af te leiden gelineariseerde vgl., welke de verstoorde (permanent eenparige) stroming weergeven, worden.

Hiertoe stellen we weer (zie p. IV-2):

$$U(x,t) = U_0 + u'(x,t) \quad \text{en} \quad H(x,t) = H_0 + h'(x,t).$$

Substitutie hiervan in de continuïteitsvgl. (1), uitgaande van de aanname dat alle termen van de tweede en hogere macht in u' , h' en hun resp. afgeleiden verwaarloosbaar klein zijn, levert weer op (zie p. IV-4):

$$U_0 \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} + U_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Bij substitutie van bovenstaande relaties voor $U(x,t)$ en $H(x,t)$ in vgl. (2^a) hebben we afgeleid onder dezelfde aanname t.a.v. de grootte van u' en h' als boven, dat de navolgende termen en/of factoren worden:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial t}, \quad U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = U_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x},$$

$$\frac{U}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{U_0}{H_0} \cdot \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h'}{\partial x},$$

$$\frac{\tau}{\rho R} = \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \tau_0 + u' \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + h' \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) - \tau_0 \cdot \frac{h'}{R_0} \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\}$$

Met behulp hiervan wordt vgl. (2^a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \alpha U_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{U_0}{H_0} \cdot \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial t} + U_0^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial x} &= g \sin \theta - g \cos \theta \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} + \\ &- \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \tau_0 + u' \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + h' \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) - \tau_0 \cdot \frac{h'}{R_0} \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\}. \end{aligned}$$

$\alpha = \alpha(U, H)$ wordt:

$$\alpha = \alpha(U, H) = \alpha(U_0 + u', H_0 + h');$$

ontwikkeling hiervan in een reeks, volgens de formule van Taylor geeft:

$$\begin{aligned} \alpha(U_0 + u', H_0 + h') &= \alpha(U_0, H_0) + \frac{1}{1!} \left(u' \frac{\partial}{\partial U} + h' \frac{\partial}{\partial H} \right) \cdot \alpha(U_0, H_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(u' \frac{\partial}{\partial U} + h' \frac{\partial}{\partial H} \right)^2 \alpha(U_0, H_0) + \dots \end{aligned}$$

waarin de termen tussen haakjes van de symbolische operator

$$\left(u' \frac{\partial}{\partial U} + h' \frac{\partial}{\partial H} \right)^n$$

ontwikkeld worden volgens het binomium van Newton.

Partiële differentiatie van α naar x levert op:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 + \frac{\partial h'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0 + \frac{2}{2!} \left\{ u' \frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial U^2} \right)_0 + h' \frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial U \partial H} \right)_0 + \right. \\ &+ \left. u' \frac{\partial h'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial U \partial H} \right)_0 + h' \frac{\partial h'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial H^2} \right)_0 \right\} + \dots \end{aligned}$$

Verwaarlozen we de termen in u' , h' en hun resp. afgeleiden van de tweede macht en hoger, onder de aanname dat deze zeer klein zijn, dan krijgen we:

$$\alpha = \alpha_0 + u' \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0$$

en

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 + \frac{\partial h'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0$$

$\alpha U \frac{\partial U}{\partial x}$ wordt dan:

$$\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} = \left\{ \alpha_0 + u' \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0 \right\} \cdot U_0 \frac{\partial U}{\partial x}$$

$(1 - \alpha) \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t}$ levert op:

$$(1 - \alpha) \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = \left\{ 1 - \alpha_0 - u' \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 - h' \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0 \right\} \cdot \frac{U_0}{A_0} \left(\frac{\partial A}{\partial H} \right)_0 \frac{\partial h'}{\partial t}$$

en $U^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ gaat over in:

$$U^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = (U_0 + U')^2 \left\{ \frac{\partial U'}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 + \frac{\partial h'}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0 \right\}$$

M.b.v. de reeds gedane aannamen t.a.v. de grootte van u' en h' , krijgen we dan:

$$\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha_0 U_0 \frac{\partial U'}{\partial x},$$

$$(1-\alpha) \frac{U}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = (1-\alpha_0) \cdot \frac{U_0}{H_0} \cdot \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x},$$

en

$$U^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = U_0^2 \left\{ \frac{\partial U'}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 + \frac{\partial h'}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0 \right\}$$

Substitutie hiervan in vgl. (2^a) levert tenslotte op:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U'}{\partial x} + \alpha_0 U_0 \cdot \frac{\partial U'}{\partial x} + (1-\alpha_0) \cdot \frac{U_0}{H_0} \cdot \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} + U_0^2 \left\{ \frac{\partial U'}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 + \frac{\partial h'}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0 \right\} = \\ = g \sin \theta - g \cos \theta \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \tau_0 + U' \left(\frac{\partial \tau}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 - \tau_0 \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\} \end{aligned} \quad (4^{a1})$$

Deze vgl. kan ook nog geschreven worden als:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U'}{\partial x} + \left\{ \alpha_0 U_0 + U_0^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 \right\} \cdot \frac{\partial U'}{\partial x} + (1-\alpha_0) \cdot \frac{U_0}{H_0} \cdot \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} = g \sin \theta + \\ - \left\{ g \cos \theta + U_0^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0 \right\} \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \tau_0 + U' \left(\frac{\partial \tau}{\partial U} \right)_0 + h' \left(\frac{\partial \tau}{\partial H} \right)_0 - \tau_0 \frac{h'}{R_0} \left(\frac{dR}{dH} \right)_0 \right\} \end{aligned} \quad (4^{a2})$$

De vgl. (3) en (4^a) geven de verstoorde (permanent eenparige) stroming in een prismatische leiding met vrije waterspiegel weer, in geval de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal beschouwd wordt als een variabele.

Stellen we vgl. (4^{a1}) nu tegenover vgl. (4), dan merken we het volgende op: qua vorm komt vgl. (4^{a1}) overeen met vgl. (4), behalve dan dat in het linkerlid van vgl. (4^{a1}) een extra term, $U_0^2 \left\{ \frac{\partial U'}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} \right)_0 + \frac{\partial h'}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H} \right)_0 \right\}$, voorkomt terwijl in beide vgl. α een constante is; alleen in vgl. (4) is α een constante zonder meer, en

in vgl. (4^{a1}) is $\alpha = \alpha_0$ duidelijk betrokken op de permanent eenparige stromingstoestand. We kunnen nu zeggen dat de extra term

$$U_0^2 \left\{ \frac{\partial U'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) + \frac{\partial h'}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) \right\}$$

in vgl. (4^{a1}), indien de gedane aannamen betreffende α juist (zouden) zijn, de invloed weergeeft van de "variabele correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal".

Op geheel analoge wijze als op pp. IV-4, IV-7, zullen we tenslotte nog nagaan hoe de gedaante wordt van de tweede orde lineaire partiële differentiaalvgl. voor de translatiegolf met kleine amplitudo en verwaarlozing van de kromming van het vloeistofoppervlak, indien de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal geen constante maar een variabele is, althans als zodanig wordt beschouwd.

Uit vgl. (3) en vgl. (4^{a1}) gaan we u' elimineren; hiertoe differentiëren we eerst vgl. (4^{a1}) partiël naar x :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial t} + \alpha_0 U_0 \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + (1 - \alpha_0) \cdot \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + U_0^2 \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right\} = \\ & = -g \cos \vartheta \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{\tau_0}{R_0} \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

Substitutie hierin van de uit vgl. (3) te bepalen partiële afgeleiden van u' (zie p. IV-7) geeft:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \left\{ U_0 \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \right\} - \alpha_0 \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \left\{ U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right\} + \\ & + (1 - \alpha_0) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - \frac{U_0^2}{R_0} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \left\{ U_0 \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right\} + U_0^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = \\ & = -g \cos \vartheta \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \left\{ U_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial t} \right\} + \\ & - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\tau_0}{\rho R_0^2} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} \end{aligned}$$

Na rangschikking van de termen is dit te schrijven als:

$$\begin{aligned}
& \left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha_0 U_0^2}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \right\} \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_0 U_0}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + \\
& - \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0 R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial t} + \\
& + \left\{ U_0^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) - \frac{U_0^3}{R_0} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \right\} \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{U_0^2}{R_0} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} = 0 \quad (5^\alpha)
\end{aligned}$$

Elimineren we vervolgens h' uit vgl. (3) en vgl. (4^a); daartoe differentiëren we vgl. (4^a) partiëel naar x en vermenigvuldigen we alle termen met U_0 :

$$\begin{aligned}
& U_0 \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + \alpha_0 U_0^2 \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + (1 - \alpha_0) \frac{U_0^2}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + U_0^3 \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \right\} = \\
& = -g \cos \theta \cdot U_0 \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - \frac{U_0}{\rho R_0} \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} \right\};
\end{aligned}$$

differentiëren we vervolgens vgl. (4^a) partiëel naar t :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + \alpha_0 U_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + (1 - \alpha_0) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + U_0^2 \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} \right\} = \\
& = -g \cos \theta \cdot \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \frac{\partial v'}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) + \frac{\partial h'}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) - \frac{\tau_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial h'}{\partial t} \right\}
\end{aligned}$$

Door optelling van deze twee vgl'n. krijgen we:

$$\begin{aligned}
& (1 + \alpha_0) U_0 \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + \alpha_0 U_0^2 \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + (1 - \alpha_0) \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{dH}{dH_0} \right) \left\{ U_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} \right\} + \\
& + U_0^3 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + U_0^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + U_0^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) \left\{ U_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= -g \cos \theta \left\{ U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right\} - \frac{U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} +$$

$$- \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \cdot \left\{ U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial t} \right\} + \frac{\tau_0}{R_0} \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \left\{ U_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial t} \right\}.$$

Substitutie hierin van de uit vgl. (3) afgeleide formules (zie p.IV-7 en p. IV-8) geeft dan:

$$(1 + \alpha_0) U_0 \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + \alpha_0 U_0^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - (1 - \alpha_0) U_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x \partial t} + U_0^3 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} +$$

$$+ U_0^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} - \frac{U_0^2 R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = + g \cos \theta \cdot \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} +$$

$$- \frac{U_0}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) \cdot \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\tau_0}{\rho R_0^2} \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{R_0}{\left(\frac{dR}{dH_0} \right)} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x}$$

Na rangschikking van de termen is dit te schrijven als:

$$\left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha_0 U_0^2}{R_0} \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_0 U_0}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} +$$

$$- \frac{1}{\rho R_0} \left\{ \frac{U_0}{R_0} \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial H_0} \right) + \frac{\tau_0}{R_0} \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{1}{\rho R_0 R_0} \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} +$$

$$+ \left\{ U_0^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) - \frac{U_0^3}{R_0} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \right\} \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} - \frac{U_0^2}{R_0} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dR}{dH_0} \right) \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} = 0 \quad (5^{\beta})$$

We hebben nu gekregen twee vgl'n. met dezelfde gedaante, te weten:

$$\text{en} \quad \left. \begin{aligned} \Pi h' + P h' &= 0 \\ \Pi v' + P v' &= 0 \end{aligned} \right\} (\Pi + P) \begin{pmatrix} h' \\ v' \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} (5^{\alpha 1}) \\ (5^{\beta 1}) \end{matrix}$$

waarin Π de operatormotatie is volgens vgl. (5^{c1}), en P de operatormotatie is voor:

$$P = \left\{ U_0^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial H_0} \right) - \frac{U_0^3}{\rho_0} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dH_0}{dH} \right) \right\} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{U_0^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial U_0} \right) \cdot \left(\frac{dH_0}{dH} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \quad (5^d)$$

Vgl. (5^{a,b}), is de tweede orde lineaire partiële differentiaalvgl. (in h' resp. u') voor de translatiegolf met kleine amplitudo en verwaarlozing van de kromming van het vloeistofoppervlak, indien de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal beschouwd wordt als een variabele.

Stellen we vgl. (5^{a,b}) nu tegenover vgl. (5) dan merken we weer het volgende op: qua vorm komt vgl. (5^{a,b}) overeen met vgl. (5), behalve dan dat in het linkerlid van vgl. (5^{a,b}) een extra term, $P(u')$ gegeven door vgl. (5^d) voorkomt, terwijl in beide vgl'n. α een constante is; alleen in vgl. (5) is α weer een constante zonder meer, en in vgl. (5^{a,b}) is $\alpha = \alpha_0$ duidelijk betrokken op de permanent eenparige stromingstoestand. We kunnen nu zeggen dat de extra term $P(u')$ in vgl. (5^{a,b}), indien de gedane aannamen betreffende α juist (zouden) zijn de invloed weergeeft van de "variabele correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal".

De vgl. (5^{a,b}) is nu, analoog aan gedaan is op p.IV-10 e.v. te gebruiken als basisvgl. voor het bepalen van de stromingsvoorwaarden voor het ontstaan van instabiliteit van permanent eenparige stromingen (voor het geval dat de correctiecoëfficiënt α op bovenstaande wijze beschouwd wordt als een variabele).

Resumerend kunnen we nu het volgende zeggen:

Hierboven is aangegeven in hoeverre de basisvgl'n. -welke als uitgangspunt genomen zijn voor de bepaling van de stromingsvoorwaarde voor het ontstaan van instabiliteit van permanent eenparige stromingen-, veranderen, indien we aannemen dat de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal, een variabele is.

Desondanks is uitgegaan van de fundamentele basisvgl'n. (1) en (2) met constante correctiecoëfficiënt α .

Het is n.l. geenszins zeker of de in het bovenstaande gegeven benaderingsmethode juist is, met name wat betreft de aanname en verdere behandeling van de als variabele beschouwde correctiecoëfficiënt: het is over het algemeen niet duidelijk hoe α eenduidig als veranderlijke functie aangenomen zou moeten worden. Bovendien zijn ook G.H. Keulegan en G.W. Patterson (7) bij hun

geheel andere afleiding van de fundamentele vgl. voor (turbulente) stroming in een open prismatische leiding met willekeurige dwarsdoorsnede, uitgegaan van een constante correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal.

Aangezien het dus niet duidelijk is hoe de functie α variëert in geval van niet-permanente geleidelijk veranderende stroming, is, mede omdat deze overeenstemmen met die van G.W. Patterson en G.H. Keulegan (7) uitgegaan van de fundamentele basisvgl. (1) en (2) met constante correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal; m.a.w. de invloed van een (eventueel) veranderlijke correctiecoëfficiënt, -in ons geval uiteindelijk weergegeven door de extra term $P(\frac{h'}{h})$ in de basisvgl. $(5^{\alpha/\beta})$ - is verwaarloosd, en de in de verdere beschouwing meegenomen constante correctiecoëfficiënt $\alpha (= \alpha_0)$ is de waarde welke geldt in geval van permanent eenparige stroming (dit om nog enigermate een indruk te krijgen van de invloed van de correctiecoëfficiënt op het ontstaan van instabiliteit bij permanent eenparige stroming).

De in deze Opmerking II aangegeven benaderingswijze van het instabiliteitsprobleem in geval van variabele α , is meer gegeven ter verduidelijking en om enige indruk te geven welke invloed een variabele correctiecoëfficiënt eventueel zou kunnen hebben, dan om als werkelijk uitgangspunt te dienen.

Vgl. (21) voor α is m.b.v. de formule van de Chezy:

$$U_0 = C \sqrt{R_0 \sin \theta}$$

om te werken tot een handzamer uitdrukking. Elimineren we uit de algemene vgl. voor de schuifspanning langs bodem en wanden:

$\tau_0 = \rho g R_0 \sin \theta$ (zie p.IV-39) en de formule van de Chezy, $R_0 \sin \theta$, dan vinden we voor τ_0 (zie ook p.IV-40)

$$\tau_0 = \rho g \cdot \frac{U_0^2}{C^2},$$

met behulp waarvan we voor α krijgen:

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{U_0^2}{C^2}$$

(21^b)

We moeten nu echter wel blijven beseffen dat C, zoals we zagen op p.IV-40 een functie van de diepte is.

Ook als we uitgaan van de formule van Manning:

$$U_0 = n^{-1} R_0^{2/3} \sqrt{R_0 \sin \theta}$$

is bovenstaande vgl. voor α om te werken tot een handzamer uitdrukking. Elimineren we uit de algemene vgl. voor de schuifspanning langs bodem en wanden: $\tau_0 = \rho g R_0 \sin \theta$ (zie p.IV-39) en de formule van Manning, $R_0 \sin \theta$, dan vinden we voor τ_0 :

$$\tau_0 = \rho g \frac{U_0^2 \cdot n^2}{R_0^{1/3}}$$

met behulp waarvan we voor α krijgen:

$$\alpha = 1 + 6,25 \frac{gn^2}{R_0^3}$$

Voeren we nu in het getal van Reynolds, Re , gedefinieerd als:

$$Re = \frac{UR_0}{\nu}$$

en elimineren we U_0 uit de formule van Manning en het Reynolds-getal Re , dan vinden we tenslotte na enig rekenwerk:

$$R_0^{\frac{1}{3}} = \sqrt[5]{\frac{nr R_0}{(\sin \theta)^{\frac{1}{3}}}}$$

met behulp waarvan de vlg. voor α overgaat in:

$$\alpha = 1 + 6,25 \frac{gn^2}{\sqrt[5]{\frac{nr R_0}{(\sin \theta)^{\frac{1}{3}}}}}$$

(21^c)

Ook nu moeten we weer blijven beseffen, dat n , zoals we zagen op p.IV-54, een functie van de diepte is.

Om een indruk te krijgen van de numerieke waarde van α zullen we uitgaan van vgl. (21^b). Onderstellen we nu dat bodem- en wandruwheid en waterdiepte zodanig zijn dat C b.v. gelijk is aan 25, 50, 75 en 100 $[m^{\frac{1}{2}} sec^{-1}]$, d.w.z. een (bij gelijkblijvende diepte) resp. afnemende bodem- en wandruwheid, dan worden de resp. waarden voor α achtereenvolgens:

$$\alpha = 1,09 \text{ à } 1,10, \quad \alpha = 1,02, \quad \alpha = 1,01 \text{ en } \alpha = 1,01 \text{ à } 1,00.$$

Gewoonlijk neemt men aan dat α voor normale gevallen inligt tussen 1,02 en 1,05.

Om bovenvermelde redenen is de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal opgenomen in de beschouwing van het (in-)stabiliteitscriterium.

IV-D: Grafische weergave en interpretatie van de resultaten.

Uitgaande van de hierboven gegeven bespreking der factoren welke het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van permanent eenparige stromingen in open leidingen beïnvloeden, zullen we thans nagaan hoe dit instabiliteitscriterium zich gedraagt.

IV-D.a Het is interessant om allereerst het ontstaan van instabiliteit bij laminaire stroming te stellen tegenover het ontstaan van instabiliteit bij turbulente stroming, omdat deze twee stromingswijzen beheerst worden door fundamenteel verschillende "weerstandswetten". Teneinde dit te verwezenlijken zullen we er gemakshalve van uitgaan dat de stroming tweedimensionaal is, d.w.z. de stroming vindt plaats in een zeer brede rechthoekige leiding (de vormfactor M is gelijk aan 1).

In geval van tweedimensionale laminaire stroming, geldt

dat voor neutrale stabiliteit voldaan moet worden aan (zie p.IV-56):

$$U_0 \begin{matrix} (>) \\ \equiv \\ (<) \end{matrix} \sqrt{\frac{1}{3} g H_0 \cos \theta}$$

wat te schrijven is als:

$$\frac{3U_0^2}{gH_0(\cos\theta)_{cr.2}} = 1$$

Uit vgl. (2) volgt dat voor permanent eenparige stroming algemeen geldt:

$$0 = g \sin \theta - \frac{\tau_0}{\rho R_0} ;$$

substitutie hierin van vgl. (14): $\tau_0 = \frac{3\rho v U_0}{R_0}$, met $R_0 = H_0$, geeft:

$$U_0 = \frac{H_0 g \sin \theta}{3v}$$

Substitutie van deze waarde voor U_0 in de bovenstaande voorwaarde voor neutrale stabiliteit, levert op:

$$\frac{U_0 H_0}{v} (\cos \theta)_{cr.2} = 1$$

Voeren we vervolgens nog het getal van Reynolds in, voor dit geval gedefiniëerd als:

$$Re = \frac{U_0 H_0}{v}$$

dan gaat deze laatste vgl. over in:

$$Re \cdot (\cos \theta)_{cr.2} = 1 \quad (29^a)$$

In geval van tweedimensionale turbulente stroming geldt dat, uitgaande van de weerstandswet van de Chezy met constante wrijvingscoëfficiënt (i.e. in de algemene weerstandswet is: $a=2$, $b=0$ en $m=1$), voor neutrale stabiliteit (volgens vgl. (26^a) met $M=1$) voldaan moet worden aan:

$$F^2 \begin{matrix} (>) \\ \equiv \\ (<) \end{matrix} \frac{4}{9-8\alpha}$$

wat ook te schrijven is als:

$$U_0^2 = g H_0 (\cos \theta)_{cr.2} \cdot \frac{4}{9-8\alpha} :$$

Uit vgl. (25) volgt voor de z.g. "tweede" critieke helling, na substitutie van $a=2$, $b=0$ en $m=1$, i.e. de weerstandswet van de Chezy met constante wrijvingscoëfficiënt:

$$(\operatorname{tg} \theta)_{cr,2} = \frac{g}{k} \cdot \frac{4}{9-8\alpha}$$

Definiëren we het Reynoldsgetal weer als $Re = \frac{U_0 H_0}{\nu}$, dan zien we dat $(\operatorname{tg} \theta)_{cr,2}$ onafhankelijk is van Re . Volgens hetgeen vermeld op p. IV-53, is voor $a=2$, $b=0$ en $m=1$ de wrijvingscoëfficiënt C van de Chezy een constante grootte:

$$C = (k)^{\frac{1}{2}},$$

oftewel

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{C^2}, \quad C \text{ in } [\text{m}^{\frac{1}{2}} \text{sec}^{-1}]$$

Derhalve krijgen we voor $(\operatorname{tg} \theta)_{cr,2}$:

$$(\operatorname{tg} \theta)_{cr,2} = \frac{g}{C^2} \cdot \frac{4}{9-8\alpha}, \quad (29^b)$$

waarin α gegeven wordt door vgl. (21^b):

$$\alpha = 1 + 6,25 \frac{g}{C^2}$$

In geval van tweedimensionale turbulente stroming geldt dat uitgaande van de weerstandswet van Manning met constante wrijvingscoëfficiënt (i.e. in de algemene weerstandswet is $a=2$, $b=\frac{1}{3}$ en $m=1$) voor neutrale stabiliteit (volgens vgl. (26^b) met $M=1$) voldaan moet worden aan:

$$F^2 \frac{(\frac{g}{k})}{(25-21\alpha)}$$

wat te schrijven is als:

$$U_0^2 = g H_0 (\cos \theta)_{cr,2} \cdot \frac{9}{25-21\alpha}$$

Uit vgl. (25) volgt voor de z.g. "tweede" critieke helling, na substitutie van $a=2$, $b=\frac{1}{3}$ en $m=1$, (i.e. de weerstandswet van Manning met constante wrijvingscoëfficiënt):

$$(\operatorname{tg} \theta)_{cr,2} = \frac{g}{k} \cdot H_0^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{9}{25-21\alpha},$$

wat geschreven kan worden als:

$$H_0^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (\operatorname{tg} \theta)_{cr,2}^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{9}{25-21\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Voeren we nu weer het getal van Reynolds in, gedefiniëerd als $Re = \frac{U_0 H_0}{\nu}$, dan kan dit m.b.v. de voorwaarde voor neutrale stabiliteit geschreven worden als:

$$\sqrt{Re} = (g \cos \theta)_{cr,2}^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{9}{25-21\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot H_0^{\frac{2}{3}},$$

welke vgl. na substitutie van de voor $H_0^{\frac{2}{3}}$ verkregen vgl. overgaat in:

$$Re = (tg \theta)_{cr.2}^{-\frac{2}{3}} \cdot g^{\frac{5}{3}} (V \cos \theta)_{cr.2} \cdot \left(\frac{g}{25-21\alpha}\right)^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Volgens hetgeen vermeld op p.IV-53, is voor $a=2$, $b=\frac{1}{3}$ en $m=1$ de wrijvingscoëfficiënt n van Manning een constante grootheid:

$$\text{oftewel } \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{2}{3}} = n^2, \quad n \text{ in } [m^{-\frac{1}{3}} \text{ sec}]$$

We krijgen nu dus:

$$Re \left\{ (tg \theta)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{V \cos \theta} \right\}_{cr.2} = \frac{g^{\frac{5}{3}}}{V} (V \cos \theta)_{cr.2} \cdot \left(\frac{g}{25-21\alpha}\right)^{\frac{5}{3}} \cdot n^2, \quad (29^c)$$

waarin α gegeven wordt door vgl. (21^c):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{g n^2}{\sqrt{\frac{5 n^2 Re}{(\sin \theta)^{\frac{2}{3}}}}}$$

Vergelijken van de weerstandswetten, voor permanent eenparige stroming, van de Chezy:

$$U_0 = C H_0^{\frac{2}{3}} (\sin \theta)^{\frac{1}{2}},$$

en van Manning:

$$U_0 = n^{-1} H_0^{\frac{2}{3}} (\sin \theta)^{\frac{1}{2}},$$

levert op:

$$C_{\text{Chezy}} = \frac{H_0^{\frac{1}{3}}}{n_{\text{Manning}}}$$

Als we voor n nu b.v. kiezen: $n=0,03$, $n=0,02$ en $n=0,01$ $[m^{-\frac{1}{3}} \text{ sec}]$ dan behoort daarbij voor zekere H_0 resp.:

$$C=30, C=45, \text{ en } C=90 \quad [m^{\frac{2}{3}} \text{ sec}^{-1}]$$

Voor de versnelling van het homogene zwaartekrachtsveld geldt: $g=9,81$ $[m \text{ sec}^{-2}]$, terwijl we voor ν , de kinematische viscositeitscoëfficiënt van water, de waarde bij 20° C nemen, te weten $\nu=1,00 \cdot 10^{-6}$ $[m^2 \text{ sec}^{-1}]$

Voor de vgln. (29^a) (29^b) en (29^c) is nu Re uit te zetten versus $(tg \theta)_{cr.2}$; dit is gebeurd op papier met een dubbellogaritmische schaalverdeling, waardoor de te beschouwen intervallen groter kunnen zijn en het verband tussen beide grootheden gekarakteriseerd wordt door een rechte, of althans flauw gekromde lijn.

In fig. IV-2.a is uitgaande van vgl. (29^a) $(tg \theta)_{cr.2}$ versus Re uitgezet, terwijl hetzelfde is gedaan uitgaande van vgl. (29^b), maar dan met de (constant veronderstelde) wrijvingscoëfficiënt C als parameter; voor C zijn gekozen de resp. waarden 30, 45 en 90 $[m^{\frac{2}{3}} \text{ sec}^{-1}]$ (zie boven).

In fig. IV-2.b is uitgaande van vgl. (29^a) $(\text{tg}\theta)_{cr,2}$ versus Re uitgezet, terwijl ook voor vgl. (29^a) $(\text{tg}\theta)_{cr,2}$ uitgezet is versus Re , met de (constant veronderstelde) wrijvingscoëfficiënt n als parameter; voor n zijn gekozen de resp. waarden $1 \cdot 10^{-2}$ en $2 \cdot 10^{-2}$ en $3 \cdot 10^{-2}$ [$\text{m}^{-1} \cdot \text{sec}$] (zie boven).

I.v.m. de gecompliceerdheid van vgl. (29^c) is voor het uitzetten van de drie onderscheiden lijnen welke de neutrale stabiliteit weergeven als volgt te werk gegaan: eerst is, uitgaande van vgl. (29^c) $(\text{tg}\theta)_{cr,2}$ versus Re uitgezet met n en α als parameters, waarbij voor n gekozen zijn de resp. waarden $1 \cdot 10^{-2}$, $2 \cdot 10^{-2}$ en $3 \cdot 10^{-2}$, terwijl voor α als meest representatieve waarden genomen zijn $102 \cdot 10^{-2}$, $105 \cdot 10^{-2}$ en $110 \cdot 10^{-2}$; door combinatie van deze waarden voor n en α ontstaan er negen evenwijdige rechte lijnen; vervolgens is uitgaande van vgl. (21^c) het verband tussen Re en $(\text{tg}\theta)_{cr,2}$ uitgezet voor dezelfde combinaties van n en α , waardoor wederom negen evenwijdige rechte lijnen ontstaan; op deze manier verkrijgt men negen snijpunten van lijnen met overeenkomstige waarden voor n en α . Van ieder der drie gezochte lijnen (met n als parameter) zijn dan drie punten bekend.

Zowel in fig. IV-2a als in fig. IV-2.b kan men nu twee gebieden van stabiele en instabiele stroming onderscheiden, te weten één voor laminaire, en één voor turbulente stroming. Normaliter wordt aangenomen dat de overgang van laminaire naar turbulente stroming plaatsvindt voor Reynoldsgetallen van 500 tot 1500; in dit overgangsgebied zijn de vgl'n. (29^a) , (29^b) en (29^c) niet meer geldig, omdat de weerstandswet die de stroming dan beheerst niet eenduidig vastligt. Fig. IV-2.b geeft een duidelijker indruk van het gedrag van het instabiliteitscriterium voor turbulente stroming dan fig. IV-2.a, omdat in vgl. (29^b) $(\text{tg}\theta)_{cr,2}$ onafhankelijk is van Re , terwijl in vgl. (29^c) $(\text{tg}\theta)_{cr,2}$ wel afhankelijk is van Re ; dit is te wijten aan het feit dat de (constante) wrijvingscoëfficiënt van Manning n (t.o.v. de (constante) wrijvingscoëfficiënt van de Chezy C), wel afhankelijk is van H_0 , en C niet. Onderstellen we b.v. om een indruk te krijgen (zie fig. IV-2.b), dat voor de leidinghelling geldt $\text{tg}\theta = 1,00 \cdot 10^{-2}$. Indien in de leiding nu water wordt toegelaten dan zal de laminaire stroming die eerst ontstaat, stabiel blijven totdat het getal van Reynolds gelijk aan 100 is geworden. Vervolgens zullen bij toenemende afvoer (i.e. toenemende Re) instabiliteiten, d.w.z. golfverschijnselen ontstaan waaruit zich, zoals reeds in Hoofdstuk I, p. I-5 is aangegeven onder bepaalde voorwaarden rolgolven kunnen ontwikke-

len. Als bij toenemende afvoer het getal van Reynolds nadert tot 500, begint de overgang van laminaire naar turbulente stroming plaats te vinden. Deze verandering van regime (i.e. stromingsvoorwaarden) houdt in dat de weerstand voor de stroming gaat veranderen (er gaan andere wrijvingsformules gelden) en de laminaire (rol-)golven verdwijnen. Dit hoeft niet te betekenen dat het vloeistofoppervlak in het overgangsgebied volkomen vlak en egaal is: wellicht zullen er incidentele onregelmatigheden van een verward patroon op voorkomen, welke echter niet vallen onder de categorie van bovengenoemde golfverschijnselen. Wordt de afvoer nog verder vergroot dan zal de stroming op gegeven moment volledig turbulent worden (i.e. Re komt in de buurt van de 1500). De turbulente stroming blijft dan stabiel totdat voor b.v. een wrijvingscoëfficiënt van $n=0,01$ [$m^{-1}sec$] bij $Re \approx 10.000$ de turbulente stroming neutraal stabiel wordt. Neemt de afvoer nog meer toe, dan zullen golfverschijnselen (i.e. instabiliteiten) ontstaan, waaruit zich weer onder bepaalde omstandigheden rolgolven kunnen ontwikkelen. Als de afvoer nog groter wordt, d.w.z. neemt Re nog verder toe, dan is het mogelijk dat ook bij grotere waarden van n instabiliteiten zullen ontstaan. Hieruit blijkt dat het type weerstandswet (en de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal), een belangrijke rol spelen bij het criterium voor het ontstaan van instabiliteiten.

In het bovenstaande zijn we, t.a.v. het ontstaan van instabiliteiten bij turbulente stroming, uitgegaan van de resp. weerstandswetten van de Chezy en Manning, waarvoor in beide gevallen de wrijvingscoëfficiënten constant verondersteld werden. Er is reeds opgemerkt dat in werkelijkheid noch de wrijvingscoëfficiënt van de Chezy (zie p. IV-40), noch die van Manning (zie p. IV-54) een constante is: in beide gevallen kunnen ze beschouwd worden als functies van de waterdiepte. Om voorgaande opmerking nu recht te doen wedervaren, is het interessant om na te gaan hoe het instabiliteitscriterium zich gedraagt in geval de wrijvingscoëfficiënt niet als constante wordt aangenomen. Daartoe zullen we uitgaan van de weerstandswet van het Chezy-type:

$$U_0^2 = C^2 R_0 \sin \theta,$$

met een wrijvingscoëfficiënt C volgens White-Colebrook, omdat deze combinatie van weerstandswet en wrijvingscoëfficiënt, theoretisch gezien het best gefundeerd is.

Uit vgl. (28) volgt dat, ingeval van tweedimensionale stroming, voor neutrale stabiliteit voldaan moet worden aan:

$$F^2 \frac{(\gt)}{(\lt)} = \frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) - (\alpha-1)}$$

Teneinde met deze vgl. te kunnen werken, is het nodig om eerst te bepalen, hoe groot de exponenten van de algemene weerstandsformule (zie p.IV-39), a en b, zijn. Uitgaande van een weerstandswet van het Chezy-type met variabele wrijvingscoëfficiënt C gelden voor a en b in geval van tweedimensionale stroming (zoals reeds is afgeleid op p.IV-58) resp.:

$$a=2 \quad \text{en} \quad b = \frac{2H_0}{C} \cdot \frac{dC}{dH_0}$$

Met behulp hiervan kan vgl. (28) geschreven worden als:

$$F^2 = \frac{4}{(1+b)^2 - 4(\alpha-1)(1+b) - 4(\alpha-1)}$$

oftewel:

$$U_0^2 = \frac{4gH_0 \cdot (\cos\theta)_{cr.2}}{(1+b)^2 - 4(\alpha-1)(1+b) - 4(\alpha-1)}$$

waarin:

$$b = \frac{2H_0}{C} \cdot \frac{dC}{dH_0}$$

en α gegeven wordt door vgl. (21^b):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{g}{k^2}$$

Uit vgl. (25) volgt voor de z.g. "tweede" critieke helling, ingeval van tweedimensionale stroming:

$$\left\{ (g\theta)_{cr.2}^{\frac{1}{2}} \cdot (\sin\theta)^{m-\frac{3}{2}} \right\}_{cr.2} = \frac{1}{k} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot H_0^{\frac{3}{2}-(1+b)} \cdot \left\{ \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) - (\alpha-1) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Verheffen we linker- en rechterlid tot de macht $\frac{1}{a}$, en rangschikken we de factoren, dan krijgen we:

$$(g\theta)_{cr.2}^{\frac{1}{a}} \cdot \left\{ k^{\frac{1}{a}} \cdot H_0^{\frac{2(b+1)-a}{2a}} \cdot (\sin\theta)_{cr.2}^{\frac{2m-a}{2a}} \right\} = g^{\frac{1}{a}} \cdot \left\{ \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) - (\alpha-1) \right\}^{-\frac{1}{a}}$$

Volgens p. IV-40 geldt voor de wrijvingscoëfficiënt van de Chezy, C:

$$C = k^{\frac{1}{a}} \cdot H_0^{\frac{2(b+1)-a}{2a}} \cdot (\sin\theta)^{\frac{2m-a}{2a}}$$

Substitutie hiervan in bovenstaande vgl., onder toevoeging van het suffix $cr.2$ aan $\sin\theta$, geeft:

$$C \cdot (y\theta)_{cr.2}^{\frac{1}{2}} = g^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \left(\frac{1+b}{a} \right)^2 - 2(\alpha-1) \cdot \left(\frac{1+b}{a} \right) - (\alpha-1) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Kwadrateren van linker- en rechterlid levert met $a=2$ tenslotte op:

$$(y\theta)_{cr.2} = \frac{4g}{C^2} \cdot \frac{1}{(1+b)^2 - 4(\alpha-1)(1+b) - 4(\alpha-1)}$$

Zoals verwacht kon worden, is deze vgl. identiek met die, welke hierboven afgeleid is uit vgl. (28): immers voor U_0^2 kan geschreven worden: $U_0^2 = C^2 R_0 (\sin\theta)_{cr.2}$.

Dus: in geval van tweedimensionale turbulente stroming, geldt dat uitgaande van de weerstandswet van de Chezy met variabele wrijvingscoëfficiënt, voor neutrale stabiliteit voldaan moet worden aan:

$$(y\theta)_{cr.2} = \frac{4g}{C^2} \cdot \frac{1}{(1+b)^2 - 4(\alpha-1)(1+b) - 4(\alpha-1)} \quad (29^{d1})$$

waarin:

$$b = \frac{2H_0}{C} \cdot \frac{dC}{dH_0},$$

en α gegeven wordt door vgl. (21^b):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{g}{v_*^2}$$

Voor de wrijvingscoëfficiënt van de Chezy C gaan we uit van de formule van White-Colebrook, deze luidt:

$$C = \frac{\sqrt{g}}{K} \cdot \ln \frac{6R_0}{a_k + \frac{\delta}{g}}$$

voor zover de symbolen nog niet eerder zijn verklaard (zie pp. IV-59, en IV-60) is hierin:

a_k de helft van de dikte van bodem- en wandruwheid, i.e. een constante;

$\delta = \frac{46 \cdot v}{v_*}$, de dikte van de laminaire grenslaag;

$u_* = \sqrt{g R_0 \sin\theta}$, de z.g. schuifsneldheid.

Voor de wrijvingscoëfficiënt C kan in geval van tweedimensionale permanent eenparige stroming (i.e. $R_0 \rightarrow H_0$) nu geschreven worden:

$$C = \frac{\sqrt{g}}{K} \cdot \ln \frac{6H_0}{a_k + \frac{46v}{7\sqrt{gH_0 \sin\theta}}}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dC}{dH_0} = \frac{\sqrt{g}}{k} \cdot \frac{a_2 + \frac{11,6r}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}}}{\frac{6H_0}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}}} \cdot \left\{ \frac{6(a_2 + \frac{11,6r}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}}) - \frac{6H_0 \cdot \frac{11,6r}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}} (-\frac{1}{2}) g \sin \theta}{gH_0 \sin \theta \sqrt{VgH_0 \sin \theta}}}{(a_2 + \frac{11,6r}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}})^2} \right\}$$

Bovenstaande uitdrukking is na enige herleiding te schrijven als:

$$\frac{dC}{dH_0} = \frac{\sqrt{g}}{k} \cdot \frac{1}{H_0} \cdot \frac{a_2 + \frac{3}{2} \frac{11,6r}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}}}{a_2 + \frac{11,6r}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}}}$$

Substitutie van C en $\frac{dC}{dH_0}$ in de voor b afgeleide relatie $b = \frac{2H_0}{C} \cdot \frac{dC}{dH_0}$ geeft:

$$b = \frac{2}{\ln \frac{6H_0}{a_2 + \frac{11,6r}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}}}} \cdot \frac{a_2 + \frac{3}{2} \frac{11,6r}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}}}{a_2 + \frac{11,6r}{\sqrt{VgH_0 \sin \theta}}}$$

M.b.v. de formule van de Chezy: $U_0 = C \sqrt{H_0 \sin \theta}$ is de wrijvingscoëfficiënt C volgens White-Colebrook te schrijven als:

$$C = \frac{\sqrt{g}}{k} \cdot \ln \frac{b}{\frac{a_2}{H_0} + \frac{11,6}{\sqrt{Vg}} \cdot \frac{C \cdot r}{U_0 H_0}}$$

Voeren we het getal van Reynolds Re in, gedefiniëerd als $Re = \frac{U_0 H_0}{\nu}$ dan is de wrijvingscoëfficiënt C uit te drukken als een functie van H_0 en Re:

$$C = \frac{\sqrt{g}}{k} \cdot \ln \frac{b}{\frac{a_2}{H_0} + \frac{11,6}{\sqrt{Vg}} \cdot \frac{C}{Re}}$$

Op dezelfde wijze kan b, de exponent van de algemene weerstandsformule, uitgedrukt worden als een functie van H_0 en Re:

$$b = \frac{2}{\ln \frac{6}{\frac{a_k}{H_0} + \frac{11,6}{\sqrt{g}} \cdot \frac{C}{Re}}} \cdot \frac{\frac{a_k}{H_0} + \frac{3}{2} \cdot \frac{11,6}{\sqrt{g}} \cdot \frac{C}{Re}}{\frac{a_k}{H_0} + \frac{11,6}{\sqrt{g}} \cdot \frac{C}{Re}}$$

In geval we te maken hebben met een hydraulisch gladde bodem, d.w.z. geldt dat $a_k \ll \frac{\delta}{7}$, oftewel $a_k \ll \frac{11,6r}{\sqrt{g} H_0 \sin \theta}$, dan is zowel de wrijvingscoëfficiënt C volgens White-Colebrook, als de exponent b uit de algemene weerstandsformule uit te drukken als een functie van het getal van Reynolds alleen; we krijgen dan:

$$C = \frac{\sqrt{g}}{k} \cdot \ln \frac{6}{\frac{11,6}{\sqrt{g}} \cdot \frac{C}{Re}}$$

en:

$$b = \frac{3}{\ln \frac{6}{\frac{11,6}{\sqrt{g}} \cdot \frac{C}{Re}}} \quad \text{oftewel:} \quad b = \frac{3 \frac{\sqrt{g}}{k}}{C}$$

Dus: in geval van tweedimensionale turbulente stroming, geldt dat uitgaande van de weerstandswet van de Chezy met variabele wrijvingscoëfficiënt in geval van een hydraulisch gladde bodem, voor neutrale stabiliteit voldaan moet worden aan:

$$(\operatorname{tg} \theta)_{cr,2} = \frac{4g}{C^2} \cdot \frac{1}{(1+b)^2 - 4(\alpha-1)(1+b) - 4(\alpha-1)} \quad (29^d)$$

waarin:

$$C = \frac{\sqrt{g}}{k} \cdot \ln \frac{6}{\frac{11,6}{\sqrt{g}} \cdot \frac{C}{Re}},$$

$$b = \frac{3 \frac{\sqrt{g}}{k}}{C},$$

en α gegeven wordt door vgl. (21^b):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{g}{C^2}$$

Evenals geschiedt is voor de vgln. (29^a), (29^b)*, is ook voor vgl. (29^d) het verband tussen Re en $(\operatorname{tg} \theta)_{cr,2}$ uit te zetten op
* en (29^c)

IV-78

dubbellogaritmisch papier. In fig. IV-2.c is uitgaande van vgl. (29^a) $(\text{tg } \theta)_{cr,2}$ versus Re uitgezet, terwijl hetzelfde is gedaan uitgaande van vgl. (29^d). Zoals in het voorgaande, is ook hier aangenomen dat voor een Reynoldsgetal kleiner dan 500 de stroming zuiver laminair en voor een Reynoldsgetal groter dan 1500 de stroming volledig turbulent is; indien het getal van Reynolds in ligt tussen 500 en 1500, verkeert de stroming in een overgangsfase van laminaire naar turbulente stroming. Onderstellen we wederom dat voor de leidinghelling geldt: $\text{tg } \theta = 1,00 \cdot 10^{-2}$ - dit evenals op p. IV-78 om een indruk te krijgen-, dan zien we dat ingeval van een hydraulisch gladde leiding de stroming in het turbulente gebied (i.e. $\text{Re} > 1500$) altijd instabiel is. (zie fig. IV-2.c) Alhoewel fig. IV-2.c dus alleen van toepassing is op een hydraulisch gladde leiding, heeft deze fig. op de figuren IV-2.a en IV-2.b voor, dat het verband tussen $(\text{tg } \theta)_{cr,2}$ en Re aangeduid kan worden door één lijn, welke voor een leiding met hydraulisch gladde bodem algemeen geldt, terwijl in de figuren IV-2.a en IV-2.b de relatie tussen Re en $(\text{tg } \theta)_{cr,2}$ noodzakelijkerwijs weergegeven moet worden door meerdere lijnen, waarvan elke afhankelijk is van zekere constante parameter, te weten de wrijvingscoëfficiënt C, resp. n. Omdat de wrijvingscoëfficiënt, zoals we zagen, een variabele grootheid, met name een functie van de waterdiepte H_0 en/of het Reynoldsgetal Re is, behoeft het verder geen betoog dat fig. IV-2.c in principe correcter is dan de figuren IV-2.a en IV-2.b ondanks het feit dat fig. IV-2.c alleen geldt voor een hydraulisch gladde bodem en in de figuren IV-2.a en IV-2.b ook leidingen met een hydraulische ruwe bodem beschouwd kunnen worden.

IV-D.b Teneinde het criterium voor het ontstaan van instabiliteit uit te drukken in termen van de toegepaste weerstandswet (weergegeven door de dimensieloze parameter $\frac{1+b}{a}$ en de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal, zullen we er gemakshalve weer van uitgaan dat de stroming tweedimensionaal is, d.w.z. de stroming vindt plaats in een zeer brede rechthoekige leiding.

Uit vgl. (28) volgt dat in geval van tweedimensionale stroming voor neutrale stabiliteit voldaan moet worden aan:

$$F^2 \begin{matrix} (>) \\ (<) \end{matrix} \frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) - (\alpha-1)} \quad (28)$$

Indien $(\frac{1+b}{a})^2 - 2(\alpha-1)(\frac{1+b}{a}) - (\alpha-1) < 0$, is er geen enkele reële wortel voor het Froudegetal F waaruit we de conclusie kunnen trekken dat de stroming dan altijd stabiel is (zie ook p. IV-48) Bovenstaande, ongelijkheid is ook te schrijven als:

$$\frac{1+b}{a} < (\alpha-1) \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)}$$

Normaliter is $1 \leq \alpha \leq 1,2$ en $\frac{1+b}{a} \geq 0$, zodat uit het bovenstaande volgt dat de stroming steeds stabiel is indien:

$$\frac{1+b}{a} < (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}$$

Als:

$$\frac{1+b}{a} = (\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)},$$

is $F = \infty$ (zie p. IV-52)

In fig. IV-3.a is nu, uitgaande van vgl. (28), $\frac{1+b}{a}$ uitgezet versus α , met het Froudegetal F als parameter (hiervoor zijn min of meer voor de hand liggende waarden gekozen); terwijl in fig. IV-3.b het Froudegetal F uitgezet is versus α met $\frac{1+b}{a}$ als parameter. Voor $\frac{1+b}{a}$ zijn waarden gekozen in het interval $0 \leq \frac{1+b}{a} \leq 2$, ten einde zowel laminaire als turbulente stroming te kunnen beschouwen. Ten overvloede zij nog opgemerkt dat voor tweedimensionale laminaire stroming $\alpha = 1,2$ (zie p. IV-32), $\frac{1+b}{a} = 2$ (zie p. IV-47) en $F^2 \begin{matrix} (>) \\ (<) \end{matrix} \frac{1}{3}$ (zie p. IV-56); terwijl voor tweedimensionale turbulente stroming geldt, dat, uitgaande van de weerstandswet van de Chezy met constante wrijvingscoëfficiënt (d.w.z. $\frac{1+b}{a} = \frac{1}{2}$) vgl. (26^a) na substitutie van $M=1$ en $\frac{1+b}{a} = \frac{1}{2}$, in geval van neutrale stabiliteit overgaat in:

$$F^2 \begin{matrix} (>) \\ (<) \end{matrix} \frac{4}{9-8\alpha}$$

en dat uitgaande van de weerstandswet van Manning met constante wrijvingscoëfficiënt (d.w.z. $\frac{1+b}{a} = \frac{2}{3}$), vgl. (26^b) na substitutie van $M=1$ en $\frac{1+b}{a} = \frac{2}{3}$, in geval van neutrale stabiliteit overgaat in:

$$F^2 \begin{matrix} (>) \\ (<) \end{matrix} \frac{9}{25-21\alpha}$$

Uit fig. IV-3.a en fig. IV-3.b volgt dat er geen instabiliteiten zullen ontstaan, indien de term $\frac{1+b}{a}$, welke de weerstandswet karakteriseert (zeer) klein of negatief is. Als we bedenken dat in het geval van laminaire stroming $a=1$, $b=1$ en dus $\frac{1+b}{a} = 2$ (zie p. IV-47) en dat in geval van turbulente stroming normaliter $a=2$, en $b \leq 1$, dus $\frac{1+b}{a} \leq 1$ (althans voor de bekende weerstandswetten), dan volgt hieruit dat in het overgangsgebied van laminaire naar turbulente stroming de waarde van de term $\frac{1+b}{a}$ moet

veranderen, althans een andere waarde zal bezitten dan voor laminaire of turbulente stroming geldt. De waarschijnlijkheid is niet groot dat deze verandering van de term $\frac{1+b}{a}$ louter en alleen zal bestaan uit een geleidelijke afname van b, (dus ook van $1+b$), gepaard gaande met een geleidelijke toename van a, indien het getal van Reynolds groter wordt, totdat $\frac{1+b}{a}$ de waarde heeft bereikt welke behoort bij een volledig turbulente stroming; het is n.l. geenszins onvoorstelbaar dat de waarde van de term $\frac{1+b}{a}$ in het overgangsgebied van laminaire naar turbulente stroming (zeer) klein of zelfs negatief is, waardoor -mocht dit zo zijn- dan tevens het verschijnsel verklaard zou zijn (o.a. aangetoond door P.G. Mayer (5), zie ook Hoofdstuk I, p.I-5) dat met name in genoemd overgangsgebied geen instabiliteiten, c.q. golfverschijnselen van het type, bedoeld in het voorgaande, zullen ontstaan.

Opmerking

Het vermoeden dat in het overgangsgebied van laminaire naar turbulente stroming de waarde van de term $\frac{1+b}{a}$ (zeer) klein of zelfs negatief is, schijnt bevestigd te worden door de experimenten van L.G. Straub (20). Deze berekende uit de meetgegevens (i.e. waterdiepte, afvoer en leidinghelling) van een groot aantal gevallen van permanent eenparige stroming in een nauwe rechthoekige leiding, uitgaande van de weerstandsformules van de Chezy en Manning, de daarbij behorende wrijvingscoëfficiënt C, resp. n. Vervolgens zette hij voor een bepaalde leidinghelling de aldus verkregen C- en n-waarden uit als functie van de waterdiepte H, in één C (resp. n), H-diagram; in ditzelfde diagram werd ook het verband uitgezet tussen het getal van Reynolds $Re = \frac{UR}{\nu}$ en de waterdiepte H. De op deze manier uit de meetgegevens berekende en uitgezette, overeenkomstige punten, werden verbonden door vloeiende lijnen. Voor andere leidinghellingen kan men op analoge wijze bovenbedoelde lijnen tekenen: deze zullen dezelfde algemene vorm hebben. Bij de metingen zowel als bij de berekening werd er vanuitgegaan dat voornoemde, in feite typisch turbulente, weerstandsformules van de Chezy en Manning ook geldig zijn in het laminaire stromingsgebied en het overgangsgebied van laminaire naar turbulente stroming; dit laatste gebied wordt volgens L.G. Straub bepaald door waarden voor het Reynoldsgetal van ca. 640 en 1500. Tevens blijkt uit zijn resultaten dat de wrijvingscoëfficiënten

van de Chezy C, en van Manning n afhankelijk zijn van het Reynolds-getal. Uit het aldus door hem verkregen verband tussen C en H blijkt dat bij toenemende waterdiepte, de C-waarde in het laminaire stromingsgebied zeer snel toeneemt, tot aan het punt waarvoor de eerste turbulentieverschijnselen optreden; dan "breekt" de curve met een scherpe kromming en gaat de C-waarde afnemen tot in het turbulente stromingsgebied, alwaar wederom een zwakke toename volgt.

Uit het door hem verkregen verband tussen n en H blijkt dat de n,H-kromme bij benadering de inverse vorm is van de C,H-kromme, wat niet verwonderlijk is, gezien de aard van de beide formules: bij toenemende waterdiepte H neemt n in het laminaire stromingsgebied sterk af tot aan het punt waarvoor de eerste turbulentieverschijnselen optreden; daar "breekt" de curve dan met een scherpe kromming en gaat de n-waarde toenemen tot in het turbulente stromingsgebied, alwaar wederom een zwakke afname volgt. Globaal vertonen beide krommen, i.e. de C,H-kromme zowel als de n,H-kromme de volgende tendens:

Voor de C,H-kromme neemt de C-waarde in het overgangsggebied van laminaire naar turbulente stroming duidelijk af als H toeneemt, d.w.z. $\frac{dC}{dH} < 0$, en in het volledig turbulente stromingsgebied neemt de C-waarde zwak toe;

Voor de n,H-kromme neemt de n-waarde in het overgangsggebied van laminaire naar turbulente stroming duidelijk toe als H toeneemt, d.w.z. $\frac{dn}{dH} > 0$, en in het volledig turbulente stromingsgebied neemt de n-waarde zwak af.

Beschouwen we nu de voor de exponent b in de algemene weerstandsformule afgeleide relaties, uitgaande van de weerstandswetten van de Chezy en Manning, d.w.z. is b (zie p.IV-58):

$$b = -\frac{2R}{C} \cdot \frac{dC}{dR}$$

resp. (zie p. IV-59):

$$b = \frac{1}{3} - \frac{2R}{n} \cdot \frac{dn}{dR}$$

en bedenken we dat de hydraulische straal R een met de waterdiepte H toenemende functie is, dan houdt een en ander in, dat voor het overgangsggebied van laminaire naar turbulente stroming de b-waarde op grond van de weerstandswet van de Chezy negatief is, en de b-waarde op grond van de weerstandswet van Manning klein, resp. eveneens negatief is, waardoor het dus inderdaad mogelijk is, dat in het overgangsggebied van laminaire naar turbulente stroming de grootheid $\frac{1+b}{a}$ (karakteristiek voor de toegepaste weerstandswet)

klein resp. negatief wordt of is.

Ook uit fig. IV-3.a en fig. IV-3.b blijkt weer dat het type weerstandswet en de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal een belangrijke rol spelen, t.a.v. het criterium voor het ontstaan van instabiliteit.

In aansluiting op het voorgaande waar we het instabiliteitscriterium meer beschouwd hebben in algemene zin, door n.l. eerst het ontstaan van instabiliteit bij laminaire stroming te stellen tegenover het ontstaan van instabiliteit bij turbulente stroming (zie Hoofdstuk IV-D.a) en vervolgens het instabiliteitscriterium uit te drukken in termen van de toegepaste weerstandswet en de correctiecoëfficiënt α (zie Hoofdstuk IV-D.b)-waarbij er gemakshalve werd uitgegaan dat de stroming tweedimensionaal was-, zullen we thans overgaan tot de afzonderlijke behandeling van het criterium voor het ontstaan van instabiliteit bij resp. laminaire stroming (zie Hoofdstuk IV-D.c) en turbulente stroming (zie Hoofdstuk IV-D.d). We zullen in beide gevallen het instabiliteitscriterium beschouwen voor een leiding met een rechthoekige, en een leiding met een driehoekige doorsnede.

IV-D.c: Bij de bespreking van de factoren welke het instabiliteitscriterium beïnvloeden is al opgemerkt (zie p.IV-52) dat bij laminaire stroming in een hellende leiding met geleidelijk veranderende dwarsdoorsnede het instabiliteitscriterium een functie is van slechts één parameter, te weten de vorm van de doorsnede; immers de weerstandswet en de correctiecoëfficiënt op de verticale snelheidsverdeling liggen theoretisch vast. Zoals hierboven aangeduid, zullen we het instabiliteitscriterium beschouwen voor twee leidingtypen, te weten een leiding met een rechthoekige en een leiding met een driehoekige dwarsdoorsnede.

IV-D.c1: In geval van laminaire stroming in een rechthoekige leiding volgt uit vgl. (27^a) na substitutie van $\frac{1+b}{a} = 2$ (zie p.IV-47) en $\alpha = 1,2$ (vgl. (15)), dat voor neutrale stabiliteit voldaan moet worden aan:

$$F^2 \begin{matrix} (>) \\ (<) \end{matrix} \frac{1}{M_r} \cdot \frac{1}{4M_r^2 - 0,8M_r - 0,2} \quad (30^a)$$

waarin

$$M_r = \frac{1}{1 + 2 \frac{H_0}{B}}$$

* van

Indien

$$4M_r^2 - 0,8M_r - 0,2 < 0,$$

is er geen enkele reële wortel voor het Froudegetal F , waaruit we de conclusie kunnen trekken dat de laminaire stroming dan altijd stabiel is; dus de laminaire stroming is altijd stabiel als (zie ook p.IV-37):

$$M_r < 0,1 + \sqrt{0,06}, \text{ oftewel } M_r < 0,345,$$

waaruit voor

$$\frac{H_0}{B} \text{ volgt:}$$

$$\frac{H_0}{B} > 0,949$$

Uitgaande van vgl. (30^a) is het Froudegetal F nu uit te zetten versus $\frac{H}{B}$, de verhouding tussen waterdiepte en bodembreedte, wat gedaan is in fig. IV-4.a.

IV-D.c2: In geval van laminaire stroming in een driehoekige leiding volgt uit vgl. (27^b), na substitutie van $\frac{1+b}{a} = 2$ (zie p.IV-47) en $\alpha = 1,2$ (vgl. (15)) dat voor neutrale stabiliteit voldaan moet worden aan:

$$F^2 \gtrless \frac{2,5}{\sin \varphi} \quad (30^b)$$

met (zie ook p.IV-37):

$$M_d = \frac{1}{2} > 0,1 + \sqrt{0,06}$$

Voor φ geldt volgens fig. IV-1 (zie ook p.IV-54):

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

In fig. IV-4.b is aan de hand van vgl. (30^b) het Froudegetal F uitgezet versus φ , i.e. de helft van de hoek tussen de twee zijwanden.

Uit fig. IV-4.a en fig. IV-4.b waar hetzelfde instabiliteitscriterium is weergegeven, volgt dat het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een rechthoekige leiding niet zonder meer vergeleken kan worden met het ontstaan van instabiliteit in een driehoekige leiding. Tevens blijkt uit fig. IV-4.a dat met het nauwer worden van de rechthoekige leiding, de stroming stabielere wordt, en uit fig. IV-4.b dat in een driehoekige leiding de kans op het ontstaan van instabiliteit kleiner is dan in een rechthoekige leiding.

IV-D.d: In tegenstelling tot het criterium voor het ontstaan van instabiliteit bij laminaire stroming, dat een functie is van slechts één parameter, te weten de vorm van de doorsnede, is het instabiliteitscriterium voor turbulente stroming -zoals we gezien hebben in Hoofdstuk IV-C -afhankelijk van drie factoren,

en wel: de weerstandswet (c.q. de grootheid $\frac{1+b}{a}$), de vorm van de dwarsdoorsnede, en de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal (i.e. α). Ook hier zullen we weer het instabiliteitscriterium beschouwen in twee leidingtypen: een leiding met een rechthoekige en een leiding met een driehoekige dwarsdoorsnede. Wat de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal (α) betreft, zij opgemerkt dat hiervoor gemakshalve slechts vier waarden beschouwd zullen worden te weten: $100 \cdot 10^{-2}$, $102 \cdot 10^{-2}$, $105 \cdot 10^{-2}$ en $110 \cdot 10^{-2}$, als zijnde de meest representatieve (het gaat n.l. om een indruk van het gedrag van het instabiliteitscriterium onder invloed van drie bovengenoemde factoren).

IV-D.d1: In geval van turbulente stroming in een rechthoekige leiding moet volgens vgl. (27^a) voor neutrale stabiliteit voldaan worden aan:

$$F^2 \left(\frac{1}{M_r} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 M_r^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) M_r - (\alpha-1)} \right) \quad (27^a)$$

met

$$M_r = \frac{1}{1 + 2 \frac{H_0}{B}}$$

Indien

$$\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 M_r^2 - 2(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) M_r - (\alpha-1) < 0$$

is er geen reële wortel voor het Froudegetal F , waaruit we de conclusie kunnen trekken dat de stroming dan altijd stabiel is, (het geval $M_r < 0$ heeft fysisch gezien geen betekenis); dus de stroming is altijd stabiel, als (zie ook p.IV-44):

$$0 \leq M_r < \frac{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}}{\left(\frac{1+b}{a}\right)};$$

omdat geldt dat altijd

$$\frac{H_0}{B} \geq 0,$$

betekent dit dat de stroming altijd stabiel is indien

$$\frac{H_0}{B} > \frac{\frac{1+b}{a} - \{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\}}{2\{(\alpha-1) + \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\}}$$

Uitgaande van vgl. (27^a) is het nu mogelijk om het Froudegetal F uit te zetten versus $\frac{1+b}{a}$ (welke grootheid karakteristiek is voor de toegepaste weerstandswet) met als parameter $\frac{H_0}{B}$; i.e. de verhouding tussen waterdiepte en bodembreedte: dit is gedaan in de figuren IV-5.a1, *IV-5.a3 en IV-5.a4 voor de resp. waarden van
* IV-5.a2,

$\alpha: 100 \cdot 10^{-2}$, $102 \cdot 10^{-2}$, $105 \cdot 10^{-2}$ en $110 \cdot 10^{-2}$; uitgaande van vgl. (27^a) is het tevens mogelijk om het Froudegetal F uit te zetten versus $\frac{H_0}{B}$, met als parameter $\frac{1+b}{a}$: dit is gedaan in de figuren IV-5.b1, IV-5.b2, IV-5.b3 en IV-5.b4, eveneens voor de zojuist genoemde waarden van α .

Bij de figuren IV-5 zij nog opgemerkt dat normaliter voor de bekende weerstandswetten, t.a.v. de term $\frac{1+b}{a}$ (welke karakteristiek is voor de toegepaste weerstandswet) geldt:

$$0 \leq \frac{1+b}{a} \leq 1 \quad ,$$

waarom alleen waarden van $\frac{1+b}{a}$ in bovenstaand interval zijn beschouwd; wat de verhouding tussen waterdiepte en bodembreedte, $\frac{H_0}{B}$, betreft, alleen waarden in het interval

$$0 \leq \frac{H_0}{B} \leq 1$$

zijn beschouwd, d.w.z. alle dwarsdoorsnede-vormen tussen oneindig breed (tweedimensionale stroming) en vierkant in.

Voorts vermelden we bij de figuren IV-5 nog dat uitgaande van de weerstandswet van de Chezy met constante wrijvingscoëfficiënt, in de algemene weerstandswet $a=2$, $b=0$ en $m=1$ is (dus dan geldt $\frac{1+b}{a} = 0,5$), en dat uitgaande van de weerstandswet van Manning met constante wrijvingscoëfficiënt, in de algemene weerstandswet $a=2$, $b=\frac{1}{3}$ en $m=1$ (dus dan geldt $\frac{1+b}{a} = \frac{2}{3}$) (zie ook p.IV-53)

Uit de figuren IV-5, volgt dat hoe nauwer de rechthoekige leiding is, des te stabielier de stroming wordt. Tevens blijkt uit de voornoemde figuren dat in geval de stroming in een rechthoekige leiding beheerst wordt door een "weerstandswet van hogere orde", d.w.z. is voor deze weerstandswet de term $\frac{1+b}{a}$ groter, deze sneller instabiël wordt. Refererend aan de figuren IV-3.a en IV-3.b tonen de figuren IV-5 tevens nog aan dat de stroming stabielier wordt naarmate de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal, α , toeneemt.

IV-D.d2: In geval van turbulente stroming in een driehoekige leiding moet volgens vgl. (27^b) voor neutrale stabiliteit voldaan worden aan:

$$F^2 \begin{matrix} (>) \\ \text{---} \\ (<) \end{matrix} \frac{1}{\text{simp}} \cdot \frac{4}{\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 4(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) - 4(\alpha-1)} \quad (27^b)$$

met

$$M_d = \frac{1}{2}$$

Indien

$$\left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 4(\alpha-1)\left(\frac{1+b}{a}\right) - 4(\alpha-1) < 0,$$

is er geen enkele reële wortel voor het Froudegetal F , waaruit we de conclusie kunnen trekken dat de stroming dan altijd stabiel is (het geval $\sin \phi < 0$ heeft fysisch gezien geen betekenis, aangezien voor ϕ geldt: $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$); dus de stroming is altijd stabiel als (zie ook p.IV-44):

$$\frac{1+b}{a} < 2(\alpha-1) + 2\sqrt{\alpha(\alpha-1)}.$$

Uitgaande van vgl. (27^b) is het nu mogelijk om het Froudegetal F uit te zetten versus $\frac{1+b}{a}$ (welke grootte karakteristiek is voor de toegepaste weerstandswet) met als parameter ϕ , i.e. de helft van de hoek tussen de twee zijwanden: dit is gedaan in de figuren IV-6.a1, IV-6.a2, IV-6.a3 en IV-6.a4, voor de resp. waarden van α : $100 \cdot 10^{-2}$, $102 \cdot 10^{-2}$, $105 \cdot 10^{-2}$ en $110 \cdot 10^{-2}$; uitgaande van vgl. (27^b) is het tevens mogelijk om het Froudegetal F uit te zetten versus de hoek ϕ , met als parameter $\frac{1+b}{a}$: dit is gedaan in de figuren IV-6.b1, IV-6.b2, IV-6.b3 en IV-6.b4, eveneens voor de zojuist genoemde waarden van α .

Bij de figuren van IV-6 zij weer opgemerkt dat normaliter, voor de bekende weerstandswetten, t.a.v. de term $\frac{1+b}{a}$ (welke karakteristiek is voor de toegepaste weerstandswet) geldt:

$$0 \leq \frac{1+b}{a} \leq 1,$$

waarom alleen waarden van $\frac{1+b}{a}$ in bovenstaand interval zijn beschouwd; wat de helft van de hoek tussen de twee zijwanden, ϕ , betreft, deze ligt tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$:

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Voorts vermelden we nog dat voor een weerstandswet van het Chezytype met constante wrijvingscoëfficiënt geldt:

$\frac{1+b}{a} = 0,5$, en voor een weerstandswet van het Manningtype met constante wrijvingscoëfficiënt: $\frac{1+b}{a} = \frac{2}{3}$ (zie p. IV-53).

Vergelijken we de figuren IV-5 met de figuren IV-6, dan blijkt dat, waar het de weergave van hetzelfde instabiliteitscriterium betreft, het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een rechthoekige leiding niet zonder meer vergeleken kan worden met het ontstaan van instabiliteit in een driehoekige leiding; tevens is uit de figuren IV-5 en de figuren IV-6 de conclusie te trekken dat in een driehoekige leiding de kans op het ontstaan van instabiliteit kleiner is dan in een rechthoekige leiding. Uit de figuren IV-6 volgt dat hoe nauwer de driehoekige leiding is, des te stabielere de stroming wordt. Tevens

blijkt uit voornoemde figuren dat in geval de stroming in een driehoekige leiding beheerst wordt door een "weerstandswet van hogere orde", d.w.z. is voor deze weerstandswet de term $\frac{1+b}{a}$ groter, deze sneller instabiel wordt. Refererend aan de figuren IV-3.a en IV-3.b, tonen de figuren IV-6 tevens nog aan dat de stroming stabiel wordt naarmate de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal toeneemt: is met name $\alpha=1,05$, dan is de permanent eenparige stroming welke beheerst wordt door de weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt, altijd stabiel, terwijl voor $\alpha=1,10$ de permanent eenparige stroming welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type of van het Manningtype (beide met constante wrijvingscoëfficiënt), altijd stabiel is.

We zullen tot slot nog enige opmerkingen maken betreffende enkele in het bovenstaande uitgesproken conclusies.

Opmerking I

We hebben gezien dat bij het nauwer worden van de leidingdoorsnede, de kans op het optreden van instabiliteit van de permanent eenparige stroming afneemt, oftewel de permanent eenparige stroming wordt stabiel. Dit verschijnsel is als volgt verklaarbaar: indien de dwarsdoorsnede van de leiding nauwer wordt, neemt de invloed van de zijwanden (wandeffecten) op de stroming toe; deze groter wordende invloed van de zijwanden komt neer op een relatieve toename van de totale wrijving op de vloeistof in de dwarsdoorsnede, welke relatief grotere wrijving a.h.w. afremmend en belemmerend op de stroming werkt. Zo ondervindt een driedimensionale stroming t.a.v. een tweedimensionale stroming nog eens een extra wrijvingsinvloed van de zijwanden, en zal derhalve stabiel zijn. Naast de kwalitatieve verklaring van bovengenoemd verschijnsel, is ook nog een kwantitatieve mogelijk. Daartoe gaan we uit van het instabiliteitscriterium voor de permanent eenparige stroming in zijn meest algemene gedaante, vgl. (23)

$$F^2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)} \cdot \frac{1}{M^2 \left(\frac{1+b}{a}\right)^2 - 2(\alpha-1) \left(\frac{1+b}{a}\right) M - (\alpha-1)}, \quad (23)$$

wat ook geschreven kan worden als:

$$F^2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)} \cdot \frac{1}{\left\{M \left(\frac{1+b}{a}\right) - (\alpha-1)\right\}^2 - \alpha(\alpha-1)};$$

gemakshalve veronderstellen we weer dat de permanent eenparige stroming plaatsvindt in een leiding met trapeziumvormige doorsnede (zie fig. IV-1) waardoor we dan krijgen (zie pp. IV-54, 55):

$$R_0 = \frac{H_0 (\cos\phi + \frac{H_0}{B} \sin\phi)}{\cos\phi + 2 \frac{H_0}{B}}; \quad \frac{S_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)} = \frac{B + 2 \frac{H_0}{\cos\phi}}{B + 2 H_0 \tan\phi} = \frac{\cos\phi + 2 \frac{H_0}{B}}{\cos\phi + 2 \frac{H_0}{B} \sin\phi}$$

en

$$M = \frac{\cos\phi + 2 \frac{H_0}{B} \sin\phi + 2 \frac{H_0^2}{B^2} \tan\phi}{(\cos\phi + 2 \frac{H_0}{B}) (1 + 2 \frac{H_0}{B} \tan\phi)} = \frac{\cos\phi + 2 \frac{H_0}{B} \sin\phi + 2 \frac{H_0^2}{B^2} \tan\phi}{\cos\phi + 2 \frac{H_0}{B} \sin\phi + 2 (\frac{H_0}{B} + 2 \frac{H_0^2}{B^2} \tan\phi)}$$

Kiezen we voor de hoek ϕ (in het interval $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$) een bepaalde constante waarde, en laten we bij gelijkblijvende waterdiepte H_0 de bodembreedte B aangroeien, dan is de verhouding waterdiepte-bodembreedte, $\frac{H_0}{B}$, een afnemende functie met limietwaarde 0 voor $B \rightarrow \infty$. Het is nu niet moeilijk om het volgende in te zien: neemt de bodembreedte B toe, dus de verhouding $\frac{H_0}{B}$ af, dan geldt: de hydraulische straal R_0 neemt toe, met limietwaarde $R_0 = H_0$ als $B \rightarrow \infty$,

de verhouding $\frac{S_0}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0}$ neemt af, met limietwaarde $\frac{S_0}{\left(\frac{dA}{dH}\right)_0} = 1$ als $B \rightarrow \infty$,

en de vormfactor M neemt toe, met limietwaarde $M=1$ als $B \rightarrow \infty$.

Een en ander houdt in dat de grootste waarde van

$\left\{ M \left(\frac{1+b}{a} \right) - (\alpha-1) \right\}^2 - \alpha(\alpha-1)$ gelijk is aan 1, aangezien normaliter $0 \leq \frac{1+b}{a} \leq 1$ en $\alpha \geq 1$.

Indien we nu veronderstellen dat bij groter wordende bodembreedte B , dus afnemende verhouding $\frac{H_0}{B}$, de grootheden $\frac{1+b}{a}$ (representatief voor de gebruikte weerstandswet) en de correctiecoëfficiënt α constant blijven -wat in feite neerkomt op gebruik van een weerstandswet met constante wrijvingscoëfficiënt- dan is het duidelijk dat in bovenstaande ongelijkheid het rechterlid kleiner wordt; gaan we er tevens vanuit dat het Froudegetal F gelijk blijft of groter wordt, wat het geval is als we b.v. de weerstandswet van de Chezy, resp. Manning met constante wrijvingscoëfficiënt gebruiken, dan is het ook duidelijk dat in bovenstaande ongelijkheid het rechterlid gelijk blijft, resp. groter wordt: m.a.w. de permanent eenparige stroming wordt minder stabiel.

In feite ligt de zaak anders, omdat de wrijvingscoëfficiënt geen constante is, zodat met het breder worden van de leiding bij gelijkblijvende waterdiepte, het Froudegetal F niet gelijk blijft en ook de grootheden $\frac{1+b}{a}$ en α veranderen. Om dit in te zien zullen we uitgaan van de weerstandswet van de Chezy:

$$U_0^2 = C^2 R_0 \sin \theta,$$

met variabele wrijvingscoëfficiënt C volgens White-Colebrook (zie p.IV-81):

$$C = \frac{\sqrt{g}}{k} \ln \frac{6R_0}{a_k + \frac{4.6V}{\sqrt{VgR_0 \sin \theta}}},$$

aangezien deze combinatie van weerstandswet en wrijvingscoëfficiënt, theoretisch gezien, het best gefundeerd is. Voor dit geval geldt voor de exponenten a en b uit de algemene weerstandswet (zie p. IV-58):

$$a=2 \quad \text{en} \quad b = \frac{2R_0}{C} \cdot \frac{dC}{dR_0},$$

terwijl α gegeven wordt door vgl. (21^b):

$$\alpha = 1 + 6,25 \cdot \frac{g}{V^3}$$

M.b.v. $U_0^2 = C^2 R_0 \sin \theta$ kan voor het kwadraat van het Froudegetal $F = U_0 (gR_0 \cos \theta)^{-1/2}$ geschreven worden:

$$F^2 = \frac{C^2}{g} \cdot \text{tg} \theta$$

Vgl. (23) is aan de hand hiervan nu te schrijven als:

$$C^2 \cdot \frac{\text{tg} \theta}{g} \geq \frac{S_0}{\left(\frac{dR}{dH_0}\right)} \cdot \frac{1}{\left\{M\left(\frac{1+b}{a}\right) - (\alpha-1)\right\}^2 - \alpha(\alpha-1)}$$

We zullen er vanuit gaan dat de hellingshoek van de leiding, θ , gelijk blijft. Indien de bodembreedte B , bij gelijkblijvende waterdiepte H_0 , groter wordt, dan neemt de hydraulische straal R_0 , zo hebben we gezien, toe. Een grotere hydraulische straal heeft bij gelijkblijvende mate van bodem- en wandruwheid (i.e. a_k) een toename van de wrijvingscoëfficiënt C volgens White-Colebrook tot gevolg, welke echter klein is t.o.v. de toename van R_0 , omdat deze logaritmisches geschiedt. Op dezelfde wijze als op pp. IV-81,82 is voor $b = \frac{2R_0}{C} \cdot \frac{dC}{dR_0}$ af te leiden:

$$b = \frac{2}{\ln \frac{6R_0}{a_k + \frac{4.6V}{\sqrt{VgR_0 \sin \theta}}}} \cdot \frac{a_k + \frac{3}{2} \cdot \frac{4.6V}{\sqrt{VgR_0 \sin \theta}}}{a_k + \frac{4.6V}{\sqrt{VgR_0 \sin \theta}}},$$

wat m.b.v. de formule voor C volgens White-Colebrook, na enige herleiding, te schrijven is als:

$$b = 2 \frac{\sqrt{g}}{K} \cdot \frac{1}{C} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{116r}{f R_0 \sqrt{g R_0} \sin \theta} \cdot e^{\frac{K}{19} C} \right\},$$

terwijl dit weer m.b.v. dezelfde formule voor C om te werken is tot:

$$b = 2 \frac{\sqrt{g}}{K} \cdot \frac{1}{C} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{a}{R_0} \cdot e^{\frac{K}{19} C} \right\}.$$

Het is, onder bovengedane aannamen, nu niet moeilijk in te zien dat b kleiner wordt als de hydraulische straal R_0 (dus ook de bodembreedte B) toeneemt; echter, de gedaante van de formule voor b is zodanig dat de afname van b zeer klein zal zijn t.o.v. de toename van R_0 (dit is snel in te zien als men aanneemt dat de leiding of hydraulisch glad, of hydraulisch ruw is, of door enige numerieke waarden in te voeren). Een ander houdt in dat de grootte $\frac{1+b}{a}$, zij het zeer gering, kleiner wordt als R_0 aangroeit. Neemt R_0 , en dus ook C, toe, dan wordt volgens vgl. (21^b) α kleiner.

Het is duidelijk dat de toename, resp. afname van de grootte R_0 , $\frac{S_0}{\frac{dH}{dx}}$ en M met het aangroeien van de bodembreedte B, in dezelfde orde van grootte ligt, welke in ieder geval groter is dan de afname van b, zodat we kunnen stellen dat de term $M\left(\frac{1+b}{a}\right)$ met het aangroeien van B, dus ook van R_0 , uiteindelijk toeneemt.

In bovenstaande uit vgl. (23) afgeleide ongelijkheid hebben we nu het volgende: wordt bij gelijkblijvende waterdiepte H_0 , de bodembreedte B groter, dan: neemt de wrijvingscoëfficiënt C toe, dus het linkerlid wordt groter; neemt de grootte $\frac{S_0}{\frac{dH}{dx}}$ af, de grootte $M\left(\frac{1+b}{a}\right)$ toe, en de correctiecoëfficiënt α af, dus het rechterlid wordt kleiner.

M.a.w. als de bodembreedte B, bij gelijkblijvende waterdiepte H_0 , groter wordt, dus als de leiding wijder wordt, neemt de kans op het optreden van instabiliteit van de permanent eenparige stroming toe.

Opmerking II

Schrijven we vgl. (23) weer in dezelfde gedaante als op p. IV-93 en onderstellen we dat de hoek ϕ , de waterdiepte H_0 en de bodembreedte B constant blijven, dan houdt dit in dat de groot-

heid $\frac{S}{\Delta H}$ en de vormfactor M niet veranderen. Het is dan gemakkelijk om in te zien dat bij gelijkblijvend Froudegetal F en grootheid $\frac{1+b}{a}$ de kans op stabiliteit groter wordt als de correctiecoëfficiënt α toeneemt, en dat bij gelijkblijvend Froudegetal F en correctiecoëfficiënt α de kans op instabiliteit groter wordt als de grootheid $\frac{1+b}{a}$ toeneemt. In feite is de zaak weer gecompliceerder, omdat bovengenoemde grootheden F, $\frac{1+b}{a}$ en α niet onafhankelijk van elkaar veranderen. Om dit in te zien gaan we weer uit van de m.b.v. de weerstandswet van de Chezy uit vgl. (23) afgeleide ongelijkheid (zie p.IV-95). In fig. IV-1 nemen we weer de hoek φ , de waterdiepte H_0 en de bodembreedte B constant, zodat de hydraulische straal R_0 , de grootheid $\frac{S}{\Delta H}$ en de vormfactor M niet veranderen. We zullen nu nagaan wat er gebeurt als de mate van bodem- en wandruwheid (i.e. a_k) verandert. Als we veronderstellen dat a_k groter wordt, dan neemt de wrijvingscoëfficiënt C volgens de formule van White-Colebrook af, zij het t.o.v. de toename van a_k in geringe mate i.v.m. de logaritmische gedaante van de formule voor C. Als C afneemt, dan wordt de correctiecoëfficiënt α volgens vgl. (21^b) groter; ook deze toename is niet zeer groot, omdat de verandering van C klein is. Beschouwen we de voor b afgeleide formules (zie p.IV-95) dan zien we dat, met het toenemen van a_k , hierin de factor:

$$\frac{\ln \frac{2}{6R_0}}{a_k + \frac{11,6r}{\sqrt{gR_0 \sin \theta}}} = \frac{2 \frac{\sqrt{r}}{k}}{C}$$

groter wordt en de factor:

$$\frac{a_k + \frac{3}{2} \cdot \frac{11,6r}{\sqrt{gR_0 \sin \theta}}}{a_k + \frac{11,6r}{\sqrt{gR_0 \sin \theta}}} = 1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{11,6r}{\sqrt{gR_0 \sin \theta}}}{a_k + \frac{11,6r}{\sqrt{gR_0 \sin \theta}}}$$

kleiner wordt; echter, de afname van de tweede factor is kleiner dan de toename van de eerste factor, zodat we dus kunnen zeggen dat b uiteindelijk toeneemt als a_k groter wordt (dit is snel in te zien, als men aanneemt dat de leiding hydraulisch ruw is, of als men enige numerieke waarden invoert); een en ander houdt

in dat dan ook $\frac{1+b}{a}$ groter wordt.

In bovenstaande uit vgl. (23) afgeleide ongelijkheid hebben we nu het volgende: wordt bij gelijkblijvende waterdiepte H_0 en bodembreedte B de mate van wand- en bodemruwheid (i.e. a_k) groter, dan: neemt de wrijvingscoëfficiënt C af, dus het linkerlid wordt kleiner; blijven de verhouding $\frac{s_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}$ en de vormfactor M gelijk, neemt de grootheid $\frac{1+b}{a}$ toe, en neemt de correctiecoëfficiënt α toe, zodat het nu geheel afhangt van de waarde van de vormfactor M of het rechterlid groter, dan wel kleiner wordt; immers bij toenemende a_k -waarde maakt de correctiecoëfficiënt α het rechterlid groter en de grootheid $\frac{1+b}{a}$ doet het tegenovergestelde, m.a.w. voor kleine M -waarde zal het rechterlid groter, en voor grote M -waarde, kleiner worden; overigens is de nu van M afhankelijke toe- of afname van het rechterlid zeer gering t.o.v. de afname van het rechterlid (dit is snel in te zien door enige numerieke waarden in te voeren); we kunnen nu dus zeggen dat het linkerlid kleiner wordt t.o.v. het rechterlid.

M.a.w. als de bodem- en wandruwheid bij gelijkblijvende waterdiepte H_0 en de bodembreedte B , groter wordt, neemt de kans op het ontstaan van instabiliteit van de permanent eenparige stroming af.

Opmerking III

Veronderstellen we tot slot nog dat in fig. IV-1 de hoek ϕ en de verhouding waterdiepte-bodembreedte, $\frac{H_0}{B}$, gelijkblijven, en dat de waterdiepte H_0 groter wordt, dan houdt dit in dat de hydraulische straal R_0 toeneemt, en de verhouding $\frac{s_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}$ en de vormfactor M gelijkblijven. Indien de bodem- en wandruwheid, a_k , niet verandert, betekent toename van de hydraulische straal R_0 dat, analoog aan het voorgaande, de wrijvingscoëfficiënt volgens de formule van White-Colebrook groter wordt, de correctiecoëfficiënt α en de grootheid $\frac{1+b}{a}$ kleiner worden. In bovenstaande uit vgl. (23) afgeleide ongelijkheid hebben we nu het volgende: neemt bij gelijkblijvende verhouding $\frac{H_0}{B}$ de waterdiepte H_0 toe, dan neemt de wrijvingscoëfficiënt C toe, dus het linkerlid wordt groter;

blijven de verhouding $\frac{s_0}{\left(\frac{dH}{dH_0}\right)}$ en de vormfactor M gelijk, neemt de grootheid $\frac{1+b}{a}$ af, en neemt de correctiecoëfficiënt α af, zodat het wellicht ook nu weer van de vormfactor M afhangt, of het rechterlid groter dan wel kleiner wordt. Voor deze situatie is een soortgelijke beschouwing op te zetten als boven.

Uit het bovenstaande volgt, dat ingeval van tweedimensionale stroming (i.e. de leidingbreedte is zeer groot t.o.v. de waterdiepte), de kans op het ontstaan van instabiliteit het grootst is; hoe nauwer de leiding is, des te moeilijker zal de vorming van instabiliteiten tot stand komen.

Tevens blijkt uit het voorgaande dat afzonderlijke toename van de term $\frac{1+b}{a}$, welke representatief is voor de toegepaste weerstandswet, de kans op instabiliteit groter maakt, terwijl afzonderlijke toename van de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal daarentegen, de kans op instabiliteit kleiner maakt. Afzonderlijke variaties van de term $\frac{1+b}{a}$ en de correctiecoëfficiënt α komen echter niet voor, aangezien deze beide grootheden a.h.w. gecorreleerd zijn, en wel d.m.v. de geometrische vorm van de dwarsdoorsnede van de leiding, en de voor de permanent eenparige stroming gebruikte weerstandswet. In bovenstaande opmerkingen hebben we b.v. de gevallen beschouwd dat α en $\frac{1+b}{a}$ beide toenemen, resp. beide afnemen, zodat deze twee grootheden in feite dus met tegengesteld effect werken: het ligt dan verder helemaal aan de grootte van deze variaties t.o.v. elkaar, en de geometrie resp. verandering van de geometrie van de dwarsdoorsnede, hoe het instabiliteitscriterium zich gaat gedragen indien er wijzigingen ontstaan of aangebracht worden in de permanent eenparige stromingstoestand. Daarnaast is het b.v. voorstelbaar dat -uitgaande van de weerstandswet van de Chezy, met variabele wrijvingscoëfficiënt C volgens de formule van White-colebrook- de mate van bodem- en wandruwheid a_k en de hydraulische straal R_0 beide zodanig toe- of afnemen, dat de wrijvingscoëfficiënt C , en dus de correctiecoëfficiënt α gelijk blijft; de term $\frac{1+b}{a}$, benevens de geometrie van de doorsnede, c.q. de verhouding $\frac{S}{\frac{dH}{H_0}}$ en de vormfactor M , veranderen dan wel; ook nu hangt het weer van deze veranderingen af, hoe het instabiliteitscriterium zich zal gaan gedragen.

Gaan we dus uit van zekere weerstandswet met bekende variabele wrijvingscoëfficiënt, dan geldt dat er in feite, d.m.v. de geometrie van de doorsnede (bekend als functie van H_0) en het type weerstandswet (inclusief de wrijvingscoëfficiënt, ook bekend als functie van H_0), een correlatie bestaat tussen de term $\frac{1+b}{a}$, welke representatief is voor de gebruikte weerstandswet en de correctiecoëfficiënt α ; gaan we uit van een weerstandswet met constante wrijvingscoëfficiënt, dan bestaat deze correlatie even-

eens, alleen met dien verstande dat de term $\frac{1+b}{a}$ dan geen functie is van H_0 , maar een constante grootheid.

Zoals uit bovenstaande blijkt, is het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van de permanent eenparige stroming in een hellende open leiding afhankelijk van vier grootheden, te weten het Froudegetal F , de term voor de weerstandswet $\frac{1+b}{a}$, de vorm van de dwarsdoorsnede, en de correctiecoëfficiënt α op de snelheidsverdeling in de verticaal (zie ook Hoofdstuk IV-C), welke echter niet onafhankelijk van elkaar zijn, maar op de een of andere manier met elkaar verband houden: liggen n.l. de leidinghelling θ en de geometrie van de dwarsdoorsnede (i.e. de hoek ϕ en de bodembreedte B) vast, dan kan men na keuze van de te gebruiken weerstandsformule (bij bekendheid tenminste met de "mate van bodem- en wandruwheid") het Froudegetal F , de verhouding $\frac{S_0}{\frac{S_0}{\theta}}$, de vormfactor M , de grootheid $\frac{1+b}{a}$ en de correctiecoëfficiënt α uitdrukken als functie van de waterdiepte H_0 , m.a.w. het gedrag van het instabiliteitscriterium is dan eenduidig bepaald als functie van de waterdiepte H_0 . Kiest men dus, bij bekende leidinghelling en bodem- en wandruwheid, van bovenstaande vier grootheden er drie, b.v. de vorm van de dwarsdoorsnede, de te gebruiken weerstandswet, c.q. de vorm $\frac{1+b}{a}$ en het Froudegetal F , dan ligt daarmee in feite de waterdiepte H_0 , en dus ook de correctiecoëfficiënt α , vast, waardoor het instabiliteitscriterium dan eenduidig bepaald is als een functie van de (bekende) laatste grootheid. Dit verklaart tevens de reden waarom de figuren IV-5 en IV-6 getekend zijn als functies van de hierboven genoemde niet van elkaar onafhankelijke vier parameters, n.l. om onafhankelijk te zijn van het te gebruiken type weerstandswet (inclusief wrijvingscoëfficiënt), en het instabiliteitscriterium niet behoeven uit te drukken in andere (b.v. wand- en bodemruwheid, etc.) dan bovengenoemde grootheden. De manier waarop men deze figuren kan gebruiken (om b.v. voor de permanent eenparige stroming na te gaan of en in hoeverre deze gevoelig is voor het ontstaan van instabiliteit, dan wel stabiel is), spreekt nu voor zichzelf.

IV-E: Resumé en conclusies

In dit hoofdstuk is het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van de permanent eenparige stroming in een hellende open leiding met willekeurige dwarsdoorsnede afgeleid, door de toe- of afname in de tijd te beschouwen van een infinitesimale verstoringsgolf welke gesuperponeerd is op het vloeistof-

oppervlak van de oorspronkelijke stroming. De mathematische analyse van het probleem toont aan dat het via deze methode afgeleide instabiliteitscriterium -gebaseerd op de impulsvgl. onder verwaarlozing van de kromming van het vloeistofoppervlak-, overeenkomt met de door V.V. Vedernikov afgeleide uitdrukking voor het criterium betreffende de instabiliteit van het vrije oppervlak van de permanent eenparige stroming ener zuivere vloeistof, uitgaande van zekere aannamen van de St. Venant.

Beschouwen we de kenmerkende eigenschappen van de leiding, dan kunnen de resultaten als volgt samengevat worden:

- 1° Een permanent eenparige stroming welke beheerst wordt door een weerstandswet van hogere orde, zal de tendens vertonen eerder instabiel te worden dan een permanent eenparige stroming welke beheerst wordt door een weerstandswet van lagere orde.
- 2° In geval van tweedimensionale stroming, d.w.z. de leiding is zeer breed t.o.v. de waterdiepte, is de kans op het ontstaan van instabiliteit het grootst; hoe nauwer de leiding is, des te moeilijker zal de vorming van instabiliteiten worden. In een leiding met driehoekige doorsnede is de kans op het ontstaan van instabiliteit van de stroming geringer dan in een leiding met rechthoekige doorsnede.
- 3° Toename van de correctiecoëfficiënt op de snelheidsverdeling in de verticaal doet de kans op het ontstaan van instabiliteit afnemen.

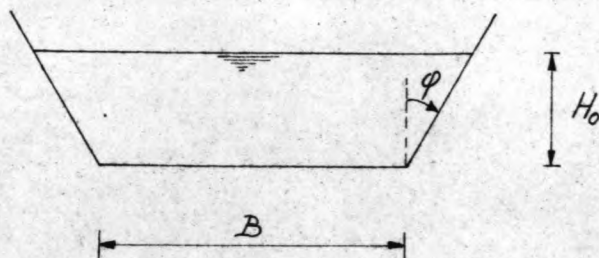


Fig. IV-1.

Toelichting op de figuren bij Hoofdstuk IV

Fig. IV-4: Dwarsdoorsnede van een trapeziumvormig profiel.

Fig. IV-2.a: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een zeer brede rechthoekige leiding (uitgaande van de weerstandswet van de Chezy, met constante wrijvingscoëfficiënt).

Fig. IV-2.b: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een zeer brede rechthoekige leiding (uitgaande van de weerstandswet van Manning, met constante wrijvingscoëfficiënt).

Fig. IV-2.c: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een zeer brede rechthoekige leiding (uitgaande van de weerstandswet van de Chezy, met een wrijvingscoëfficiënt volgens White-Colebrook voor hydraulisch gladde wanden).

Fig. IV-3.a: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een zeer brede rechthoekige leiding, uitgedrukt in termen van de weerstandswet $\frac{1+b}{a}$ en de correctiecoëfficiënt op de verticale snelheidsverdeling (α), met het Froudegetal F als parameter.

Fig. IV-3.b: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een zeer brede rechthoekige leiding, uitgedrukt in het Froudegetal F en de correctiecoëfficiënt op de verticale snelheidsverdeling (α), met de term voor de weerstandswet $\frac{1+b}{a}$ als parameter.

Fig.IV-4.a: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een laminaire permanent eenparige stroming in een rechthoekige leiding, uitgedrukt in het Froudegetal F en de verhouding tussen waterdiepte en bodembreedte ($\frac{H_0}{B}$).

Fig.IV-4.b: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een laminaire permanent eenparige stroming in een driehoekige leiding, uitgedrukt in het Froudegetal F en de halve hoek tussen de begrenzen-
de wanden (ϕ).

Fig.IV-5.a1

t/m a4: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een rechthoekige leiding, uitgedrukt in het Froudegetal F en de term voor de weerstandswet $\frac{1+b}{a}$, met de verhouding tussen waterdiepte en bodembreedte $\frac{H_0}{B}$ als parameter, ingeval de correctiecoëfficiënt α op de verticale snelheidsverdeling resp. gelijk is aan 1,00 (-1-), 1,02 (-2-), 1,05(-3-) en 1,10(-4-)

Fig.IV-5.b1

t/m b4: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een rechthoekige leiding, uitgedrukt in het Froudegetal F en de verhouding tussen waterdiepte en bodembreedte $\frac{H_0}{B}$, met de term voor de weerstandswet $\frac{1+b}{a}$ als parameter, ingeval de correctiecoëfficiënt α op de verticale snelheidsverdeling resp. gelijk is aan 1,00(-1-), 1,02(-2-), 1,05(-3-) en 1,10(-4-).

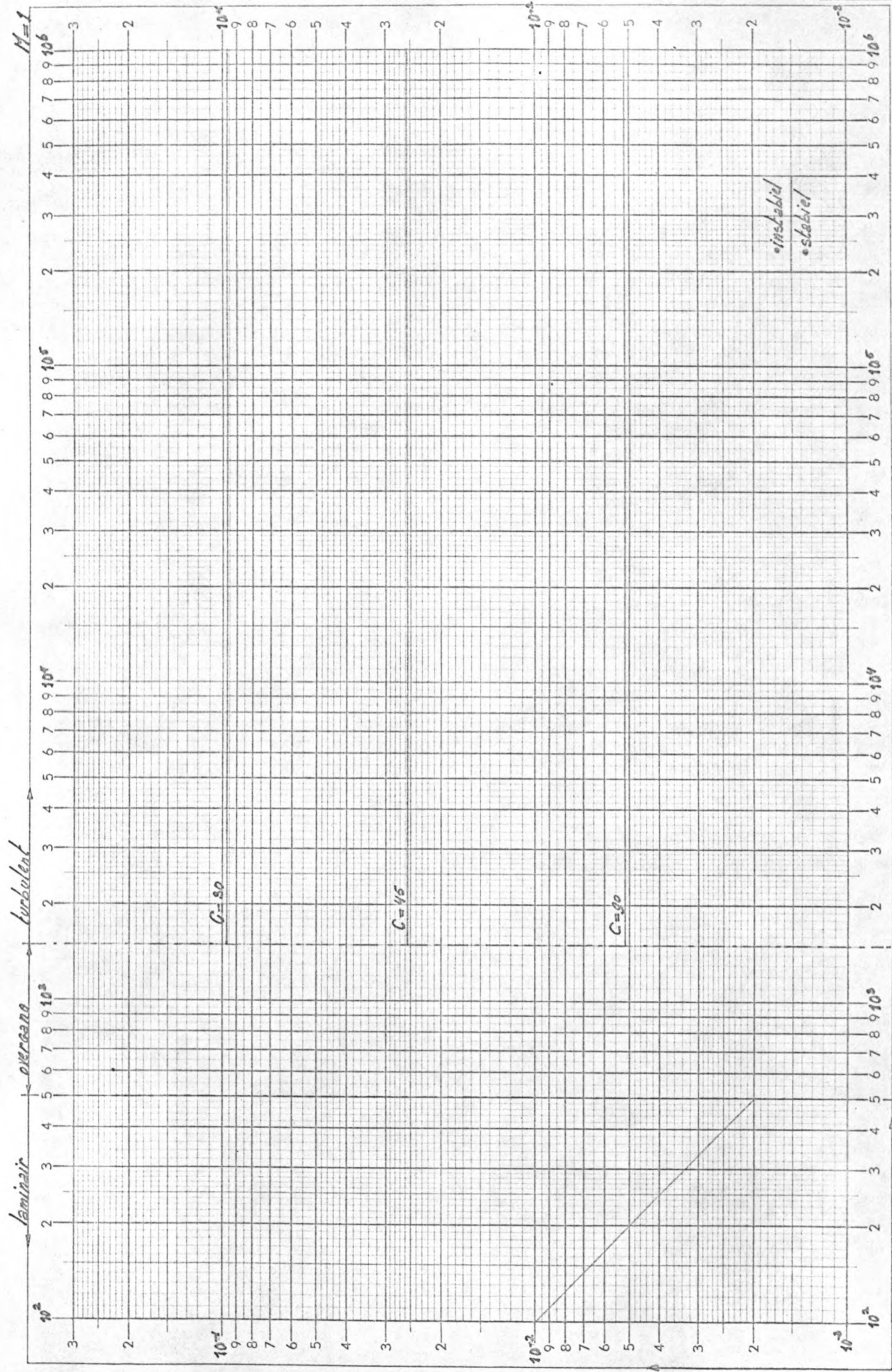
Fig.IV-6.a1

t/m a4: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een driehoekige leiding, uitgedrukt in het Froudegetal F en de term voor de weerstandswet $\frac{1+b}{a}$, met de helft van de hoek tussen de twee zijwanden ϕ als parameter, ingeval de correctiecoëfficiënt α op de verticale snelheidsverdeling resp. gelijk is aan 1,00(-1-), 1,02 (-2-), 1,05(-3) en 1,10(-4-).

Fig.IV-6.b1

t/m b4: Het criterium voor het ontstaan van instabiliteit van een permanent eenparige stroming in een driehoekige leiding, uitgedrukt in het Froudegetal F en de helft van de hoek tussen de twee zijwanden ϕ , met

de term voor de weerstandswet $\frac{1+b}{a}$, als parameter, ingeval de correctiecoëfficiënt α op de verticale snelheidsverdeling resp. gelijk is aan 1,00(-1-), 1,02 (-2-), 1,05(-3-) en 1,10(-4-).

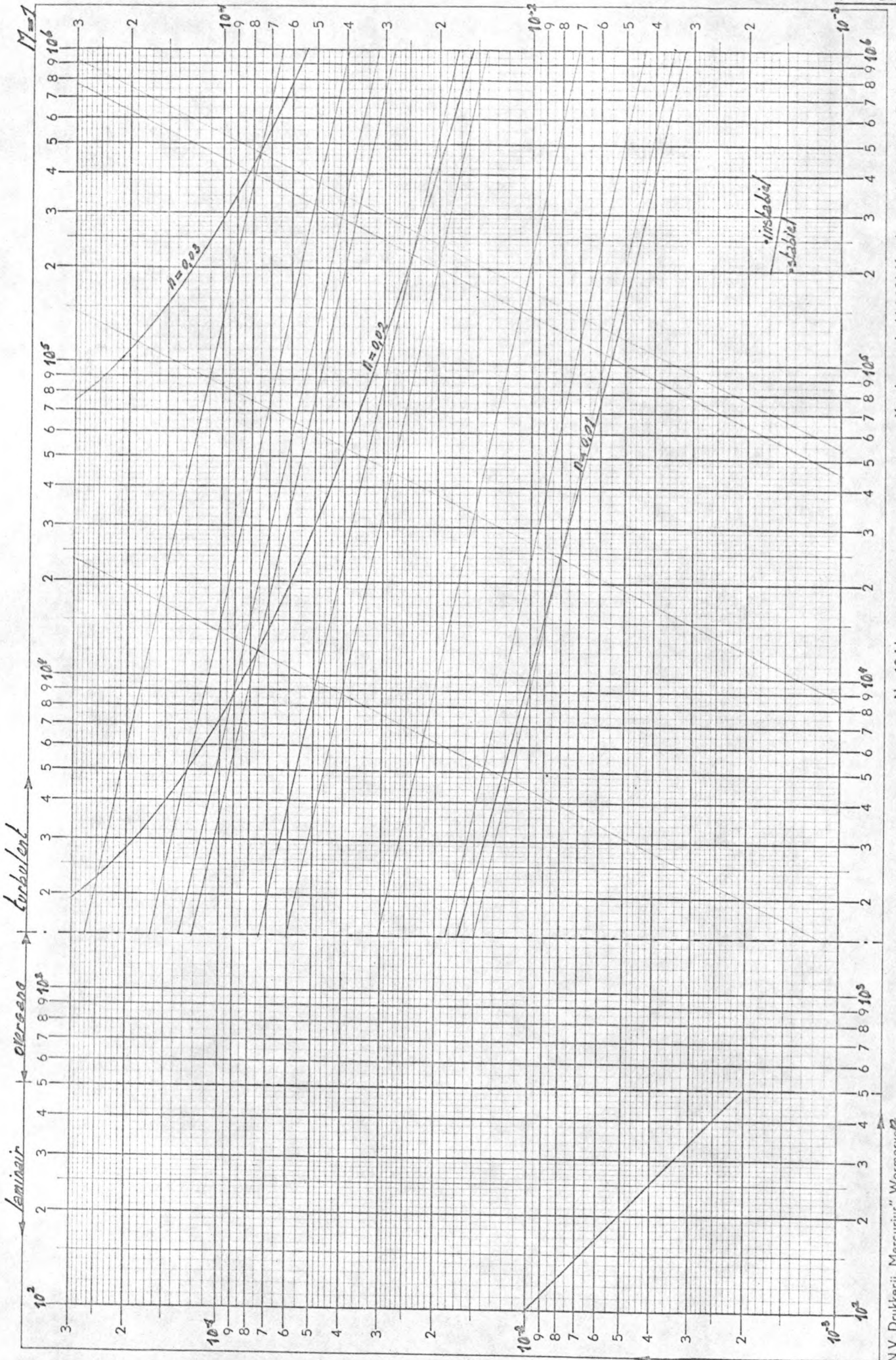


X-as log. verdeeld $1 \cdot 10^4$ Y-as log. verdeeld 1-300 Eenheid 62,5 mm.

No. 19 H

N.V. Drukkerij „Mercurius“ Wormerveer

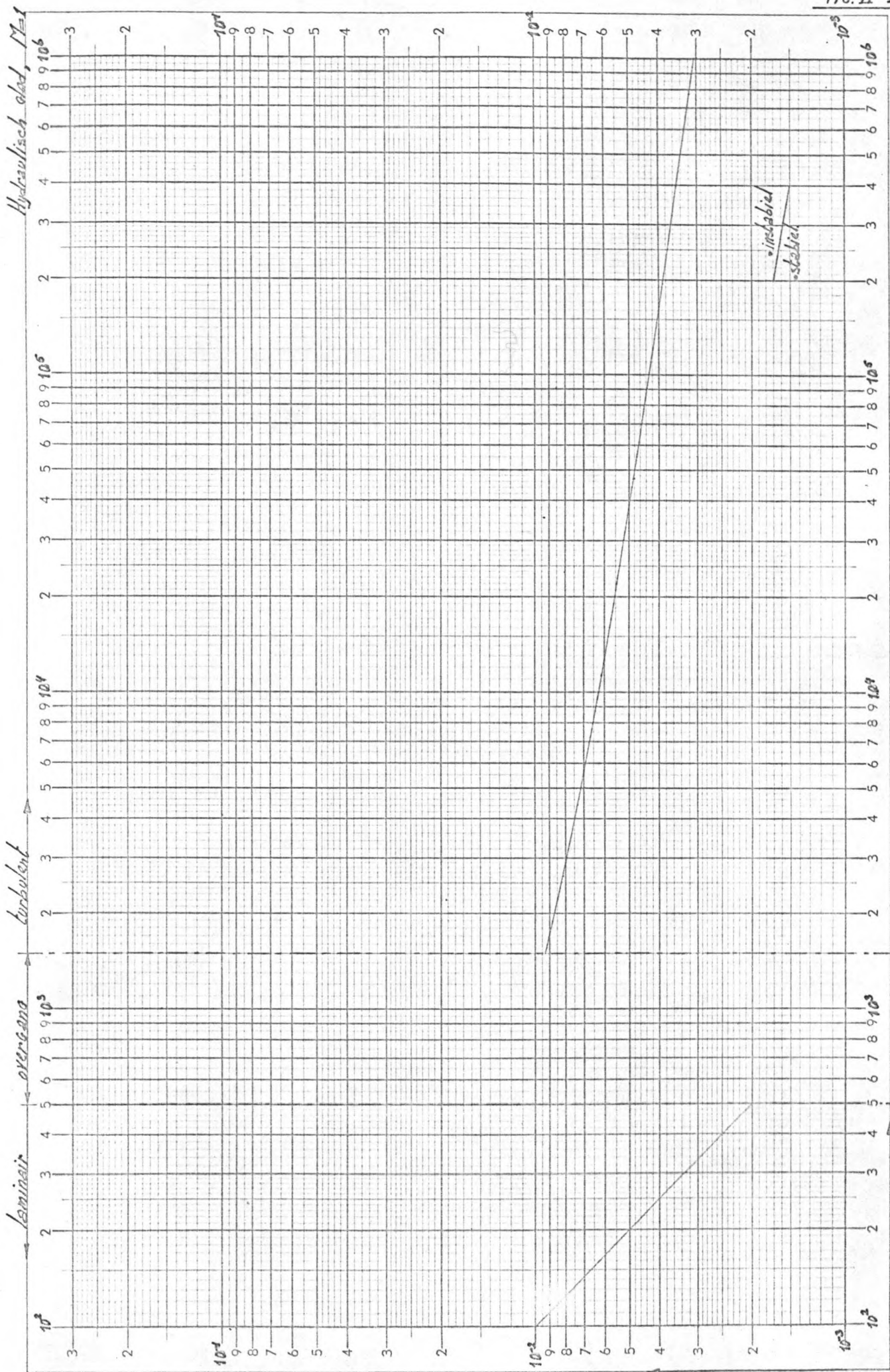
16/10/20



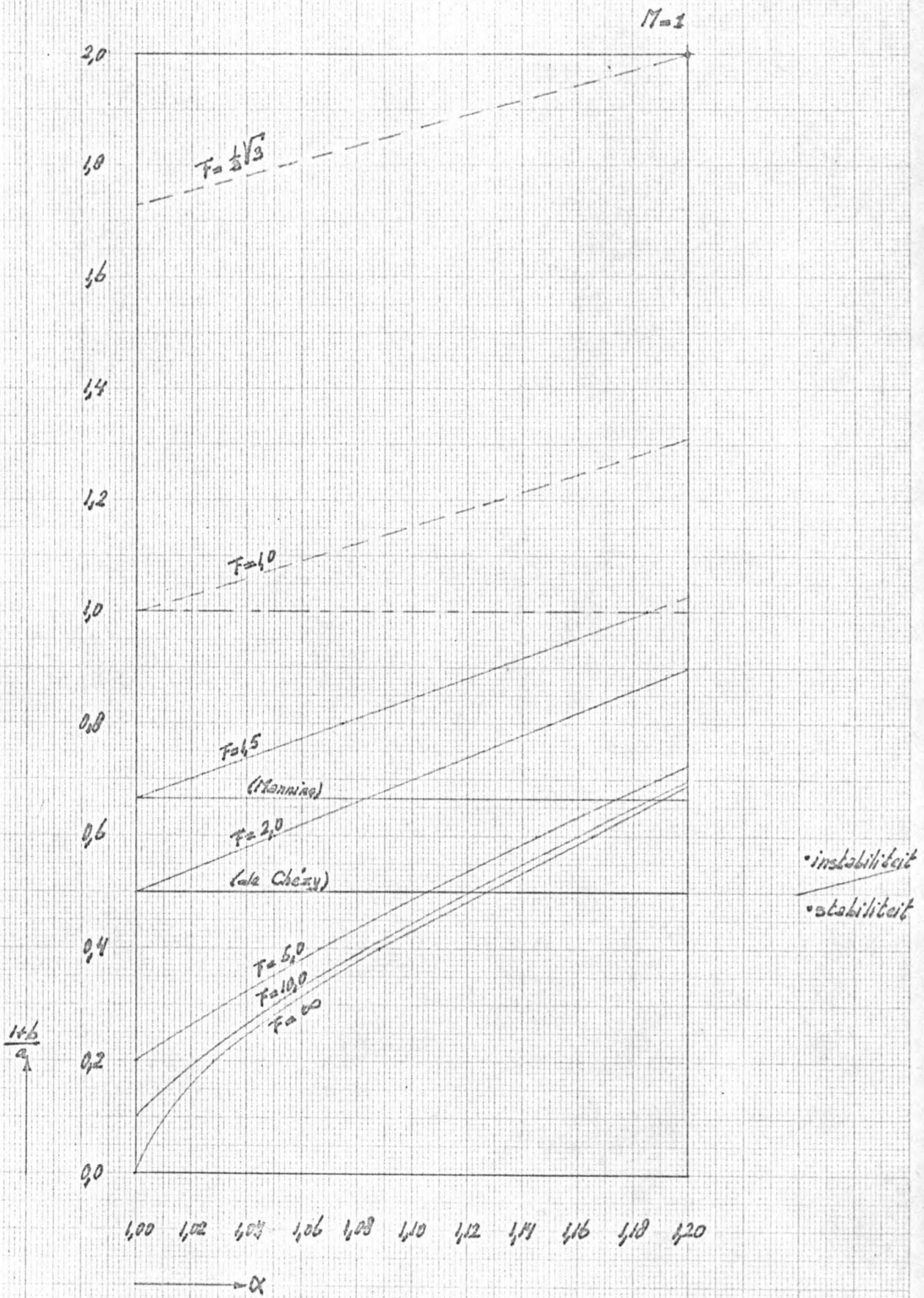
No 19 H

N.V. Drukkerij „Mercurius“ Wormerveer

X-as log. verdeeld 1.10³ Y-as log. verdeeld 1.300 Eenheid 62,5 mm



X-as log. verdeeld 1-10⁴ Y-as log. verdeeld 1-300 Eenheid 62,5 mm
 No 19 H
 N.V. Drukkerij „Mercurius“ Warmerveld



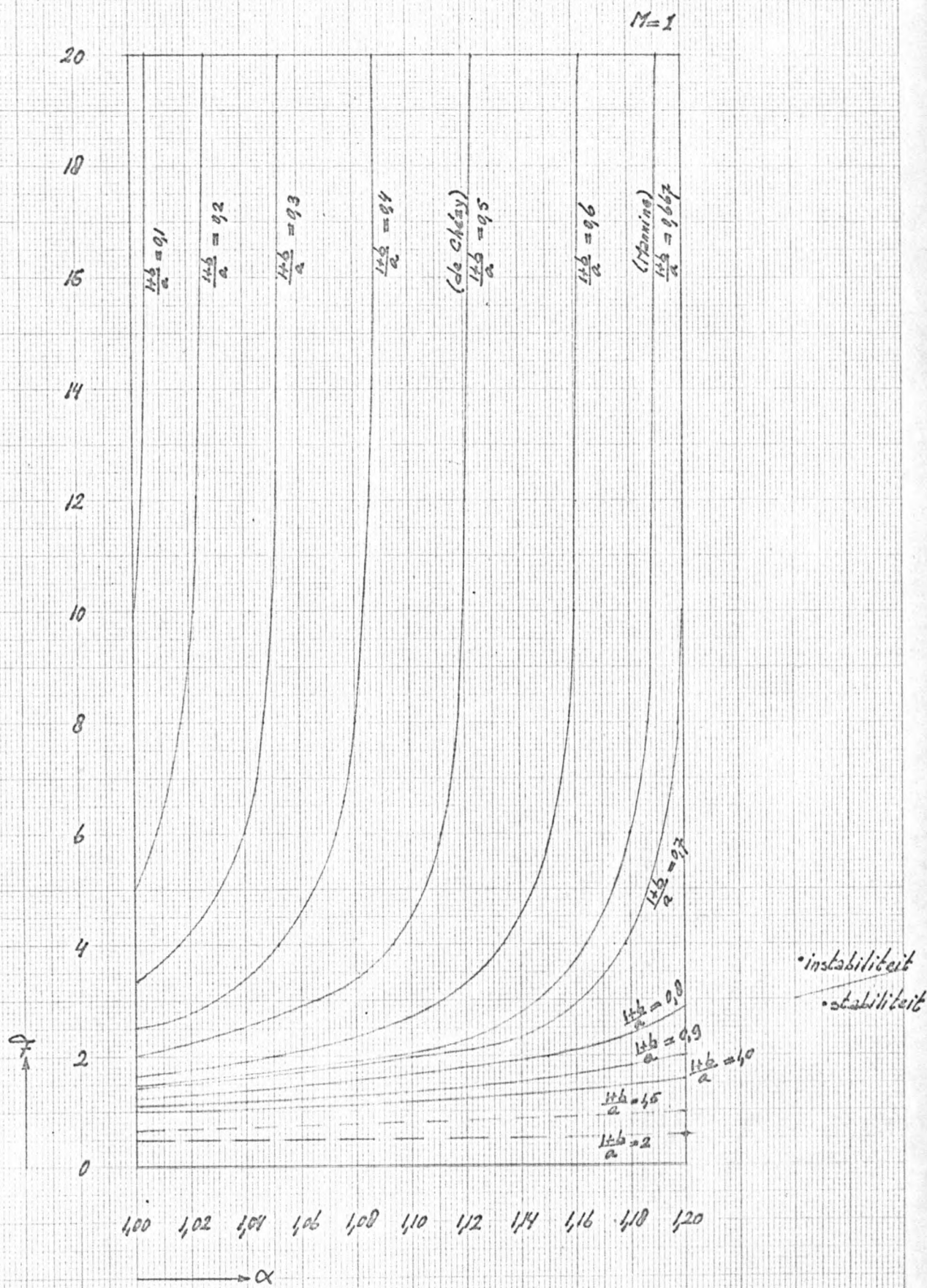


Fig. IV-4.b

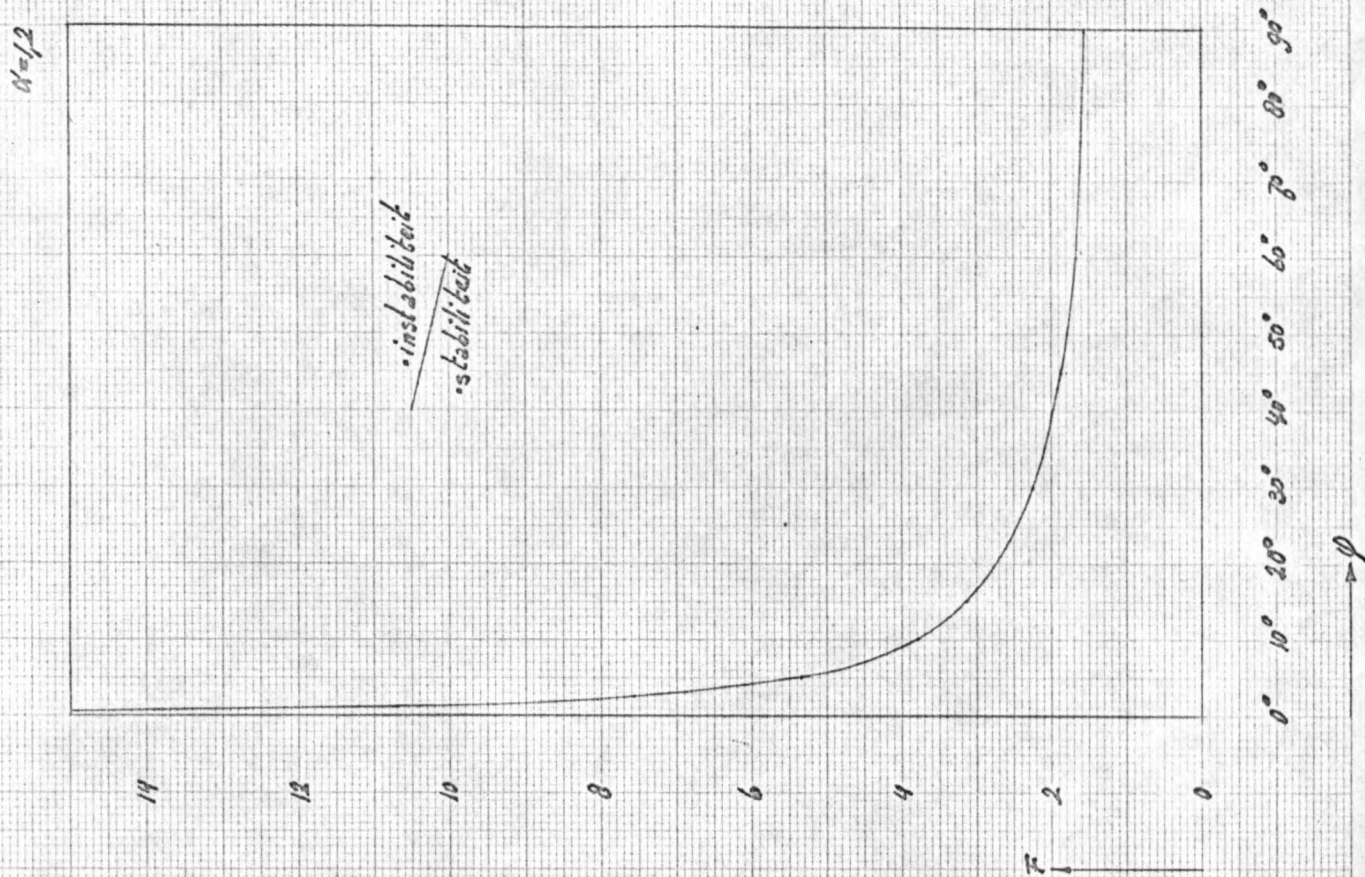


Fig. IV-4.a

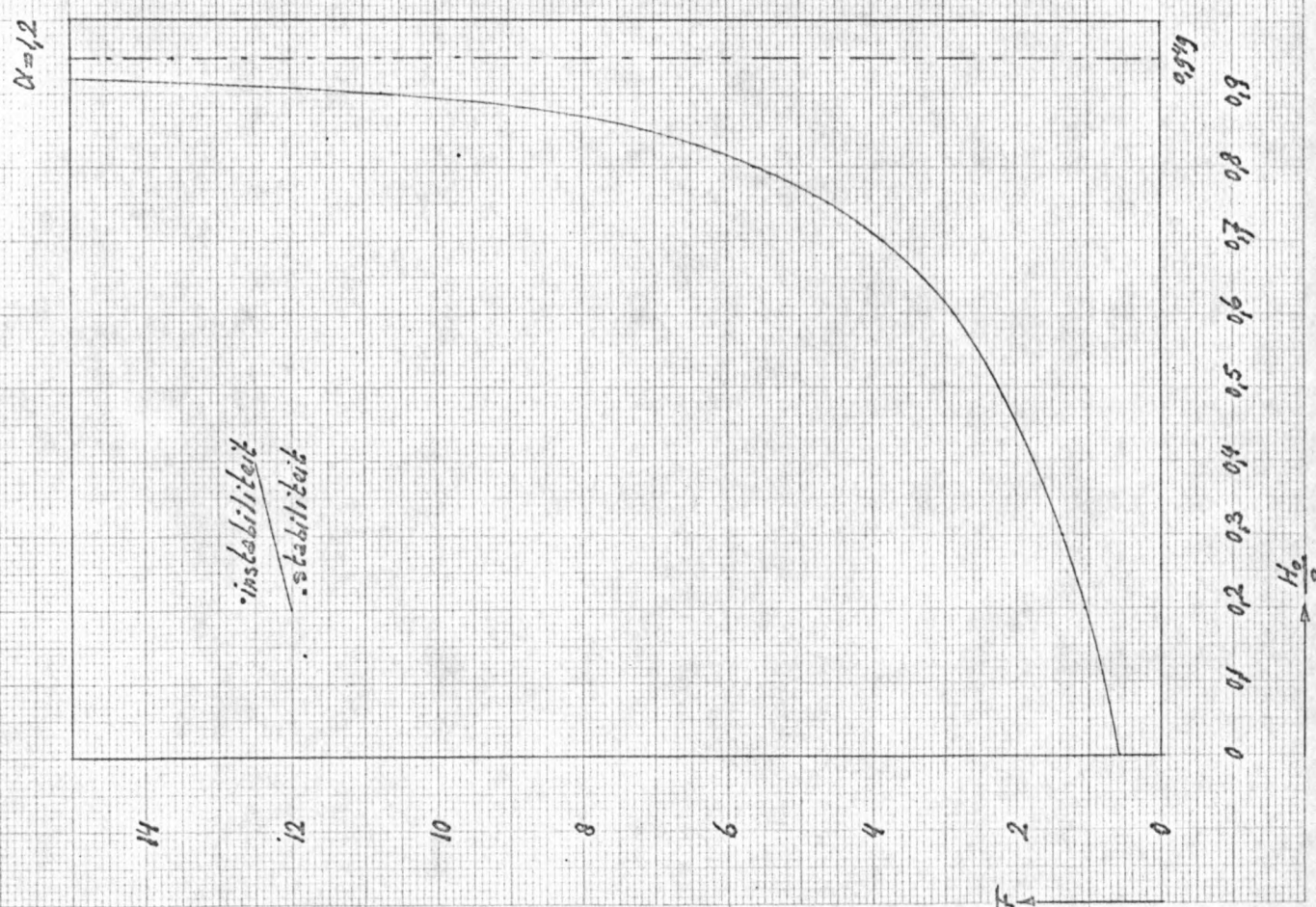


Fig. IV-5.b1

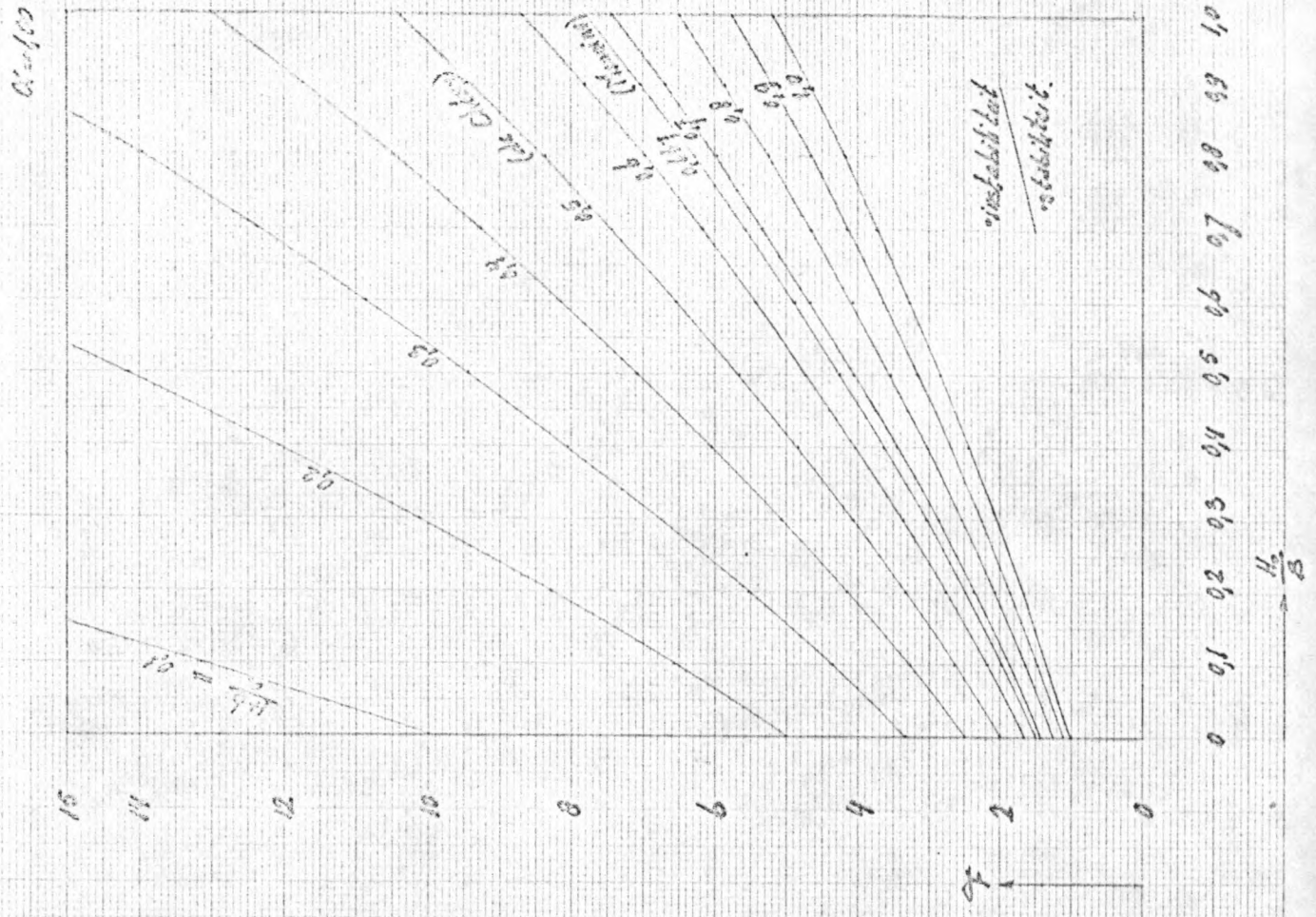


Fig. IV-5.a1

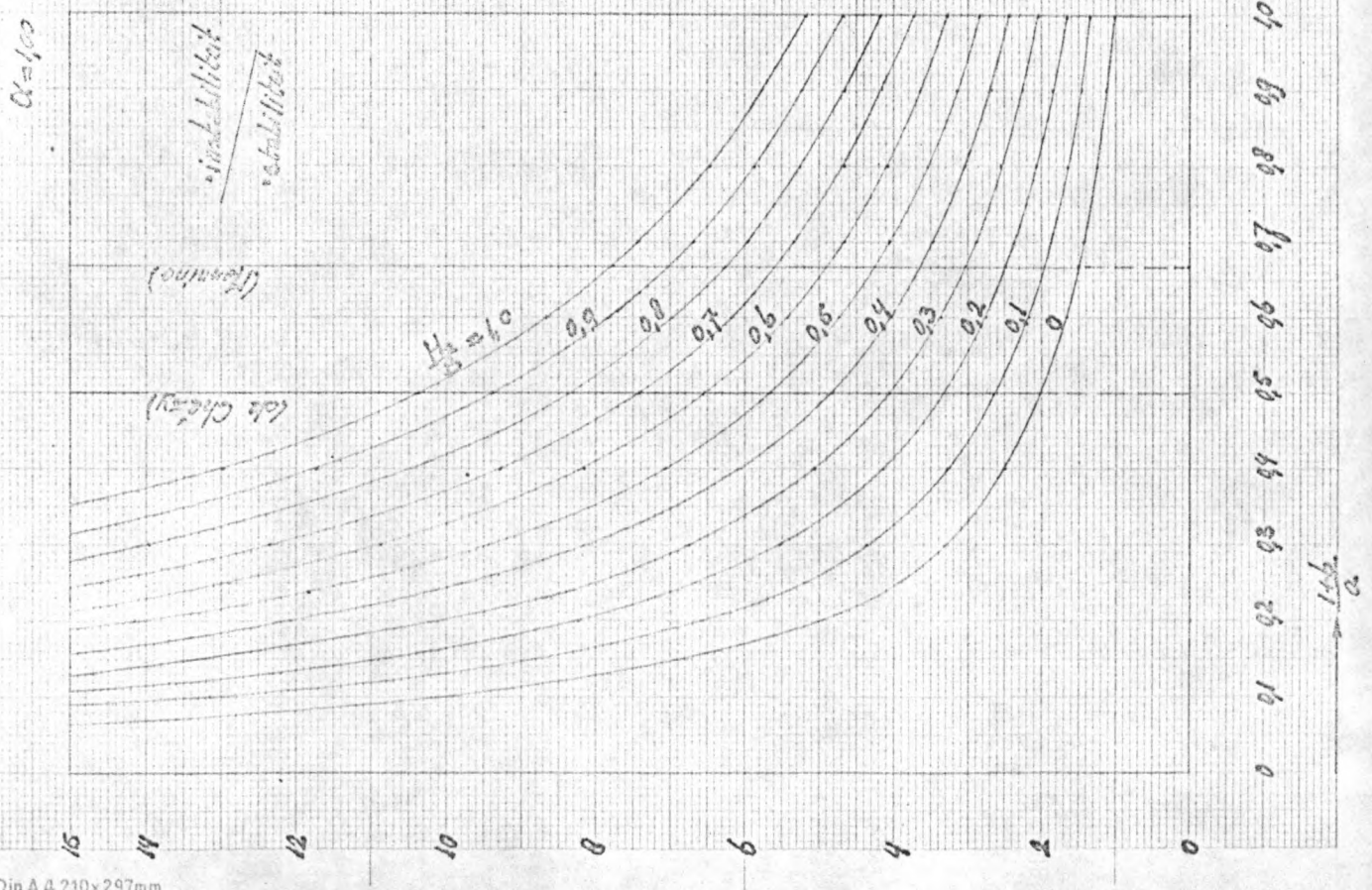


Fig. IV-5.62

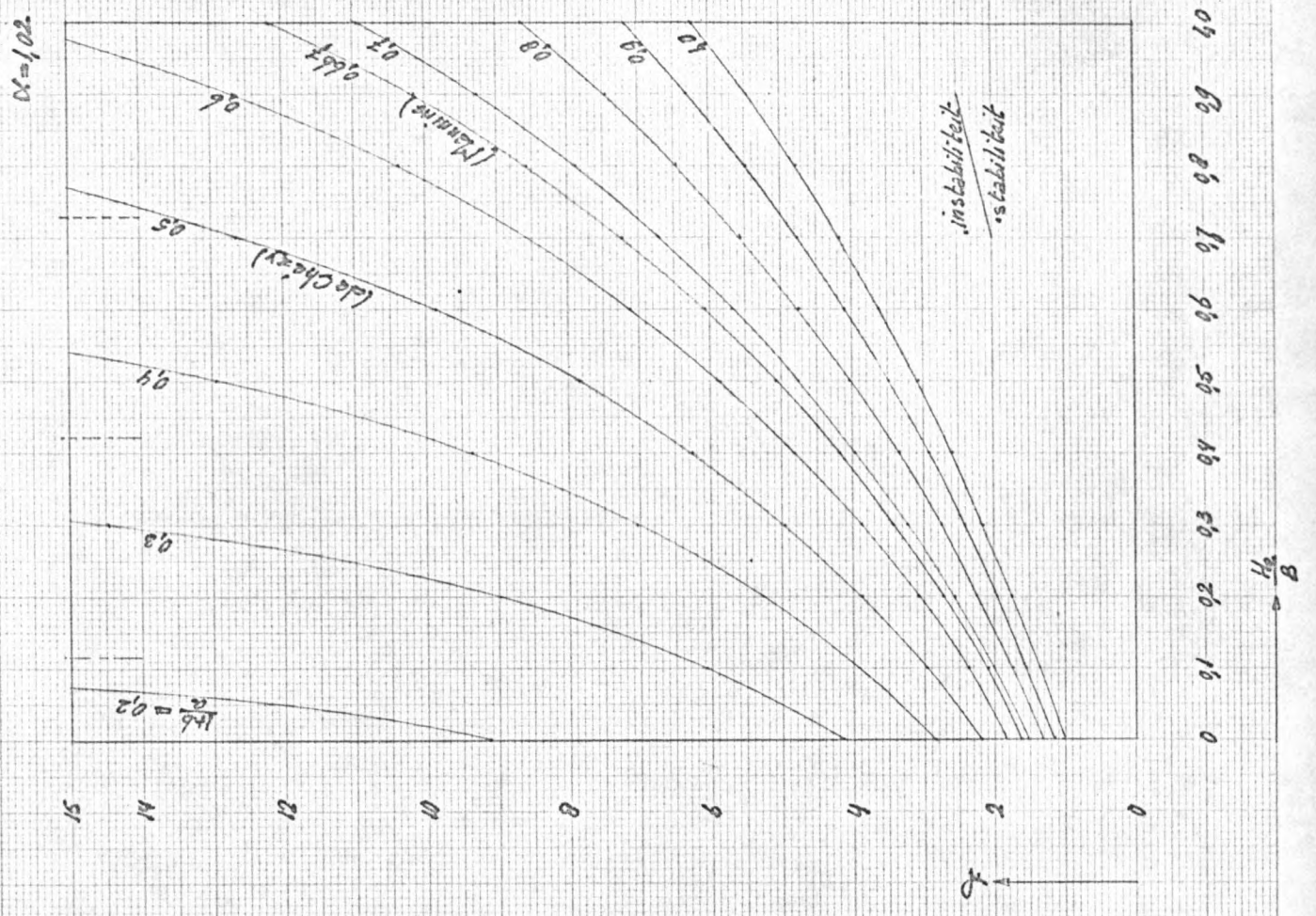


Fig. IV-5.a2

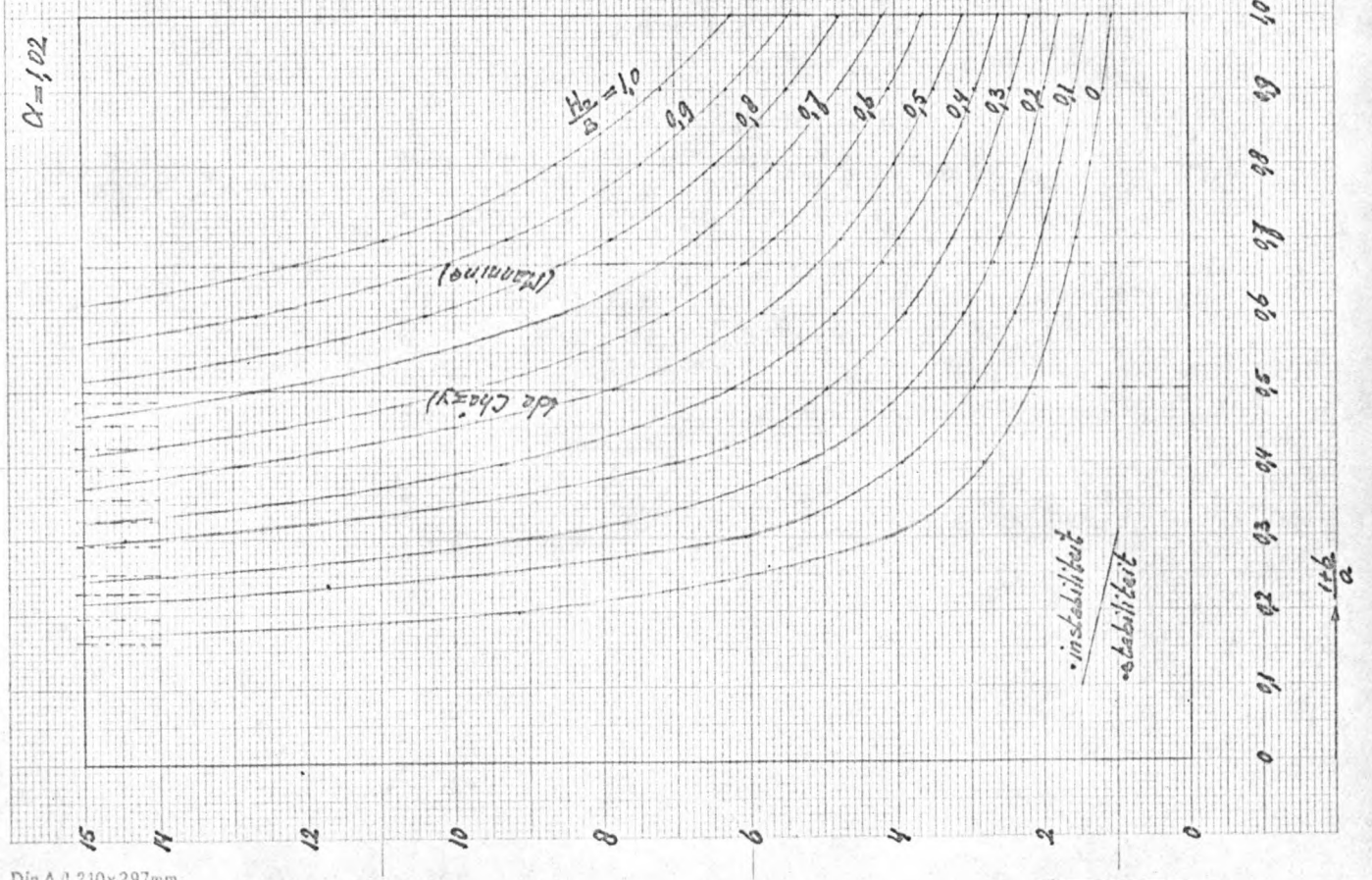


Fig. IV-5.b3

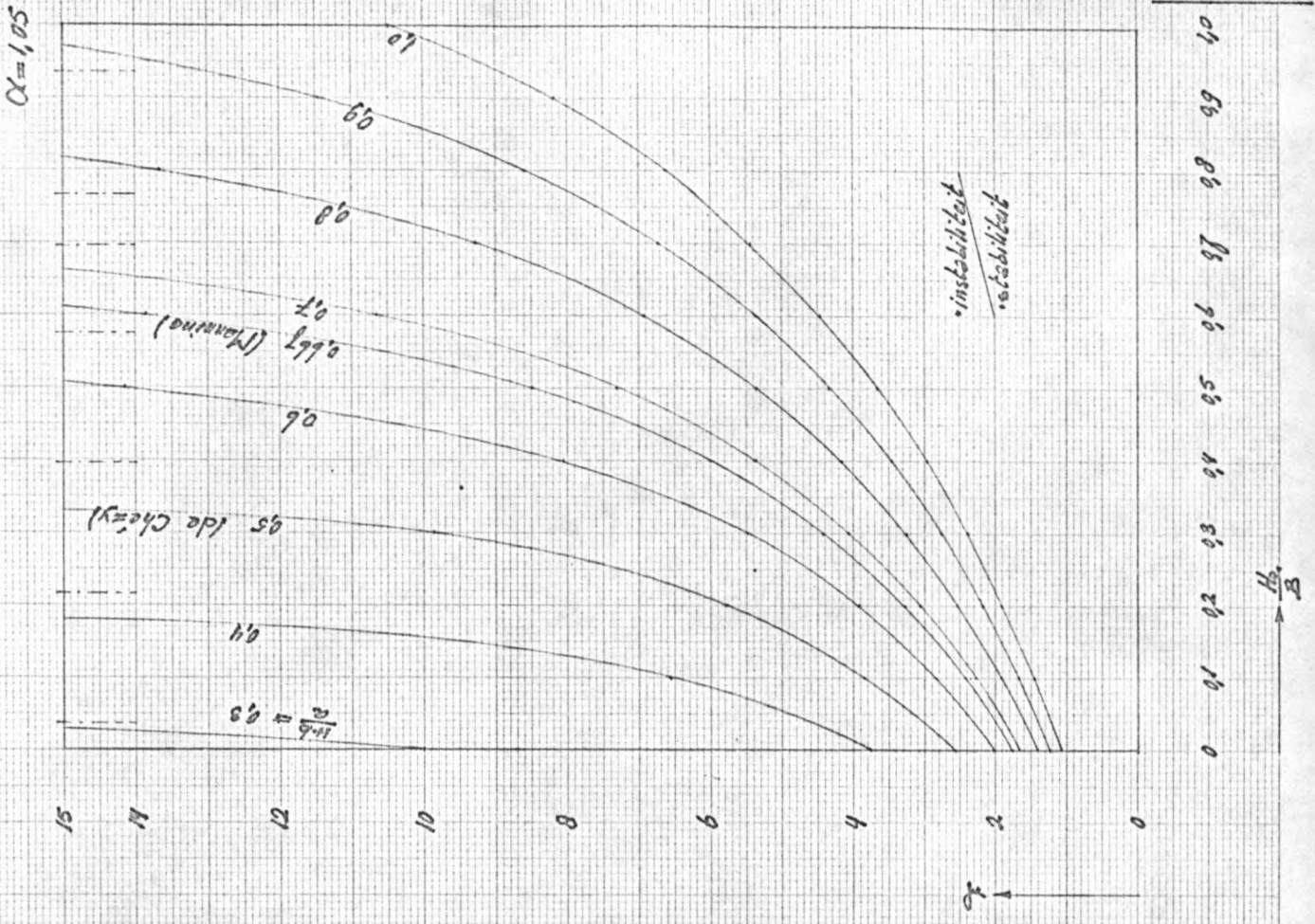


Fig. IV-5.a3

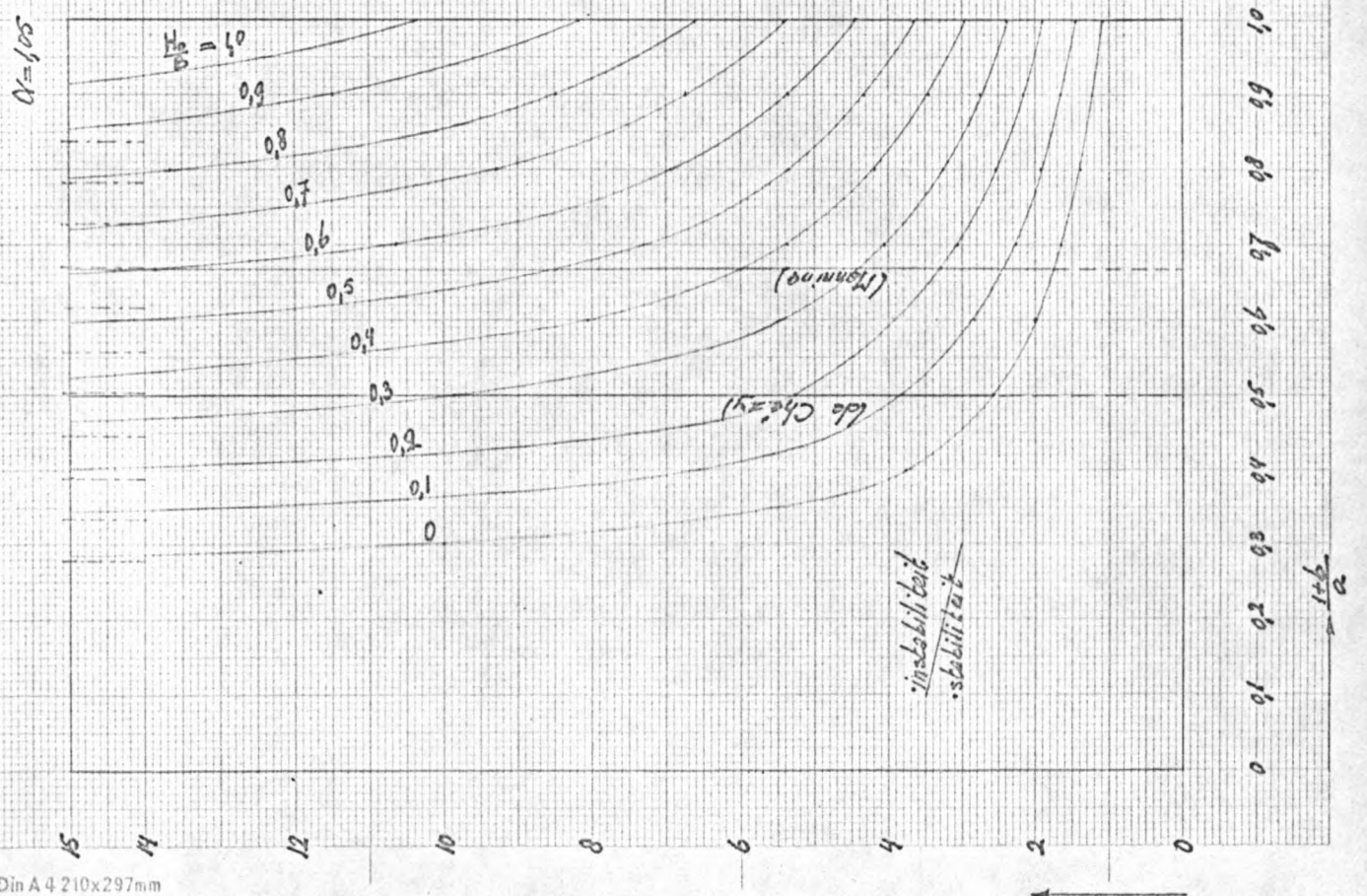


Fig. IV-5.64

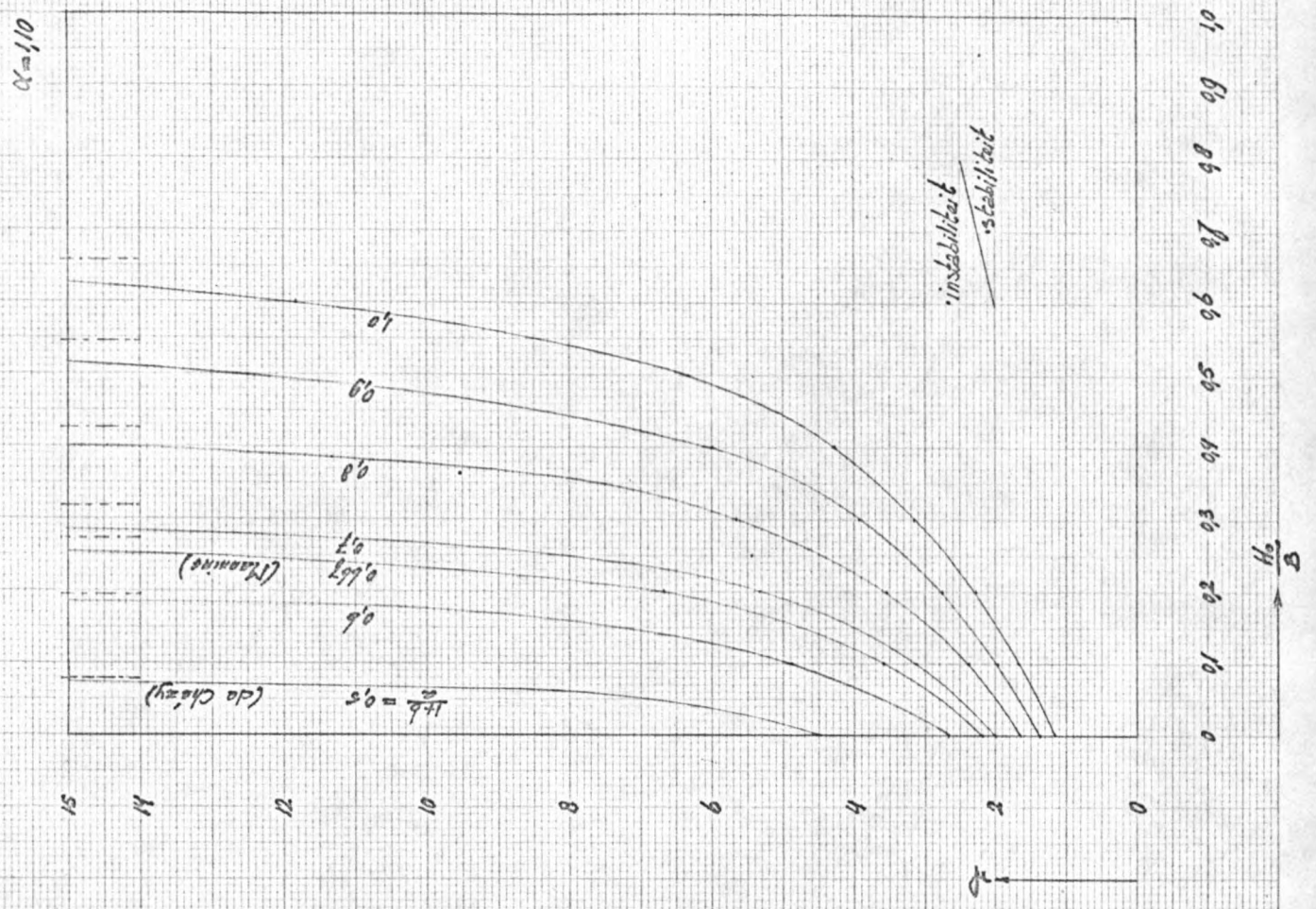


Fig. IV-5.24

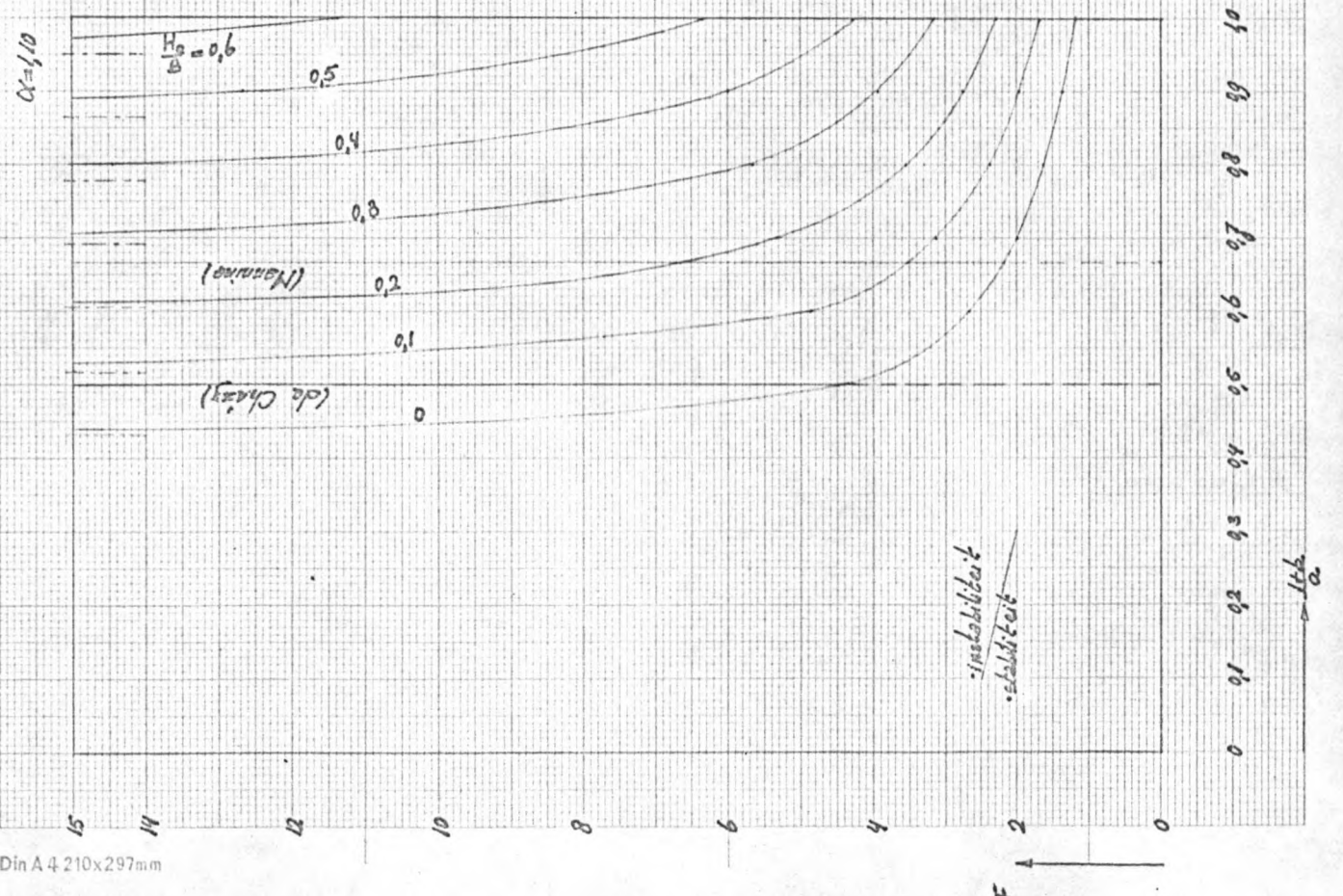


Fig. IV-6.b1

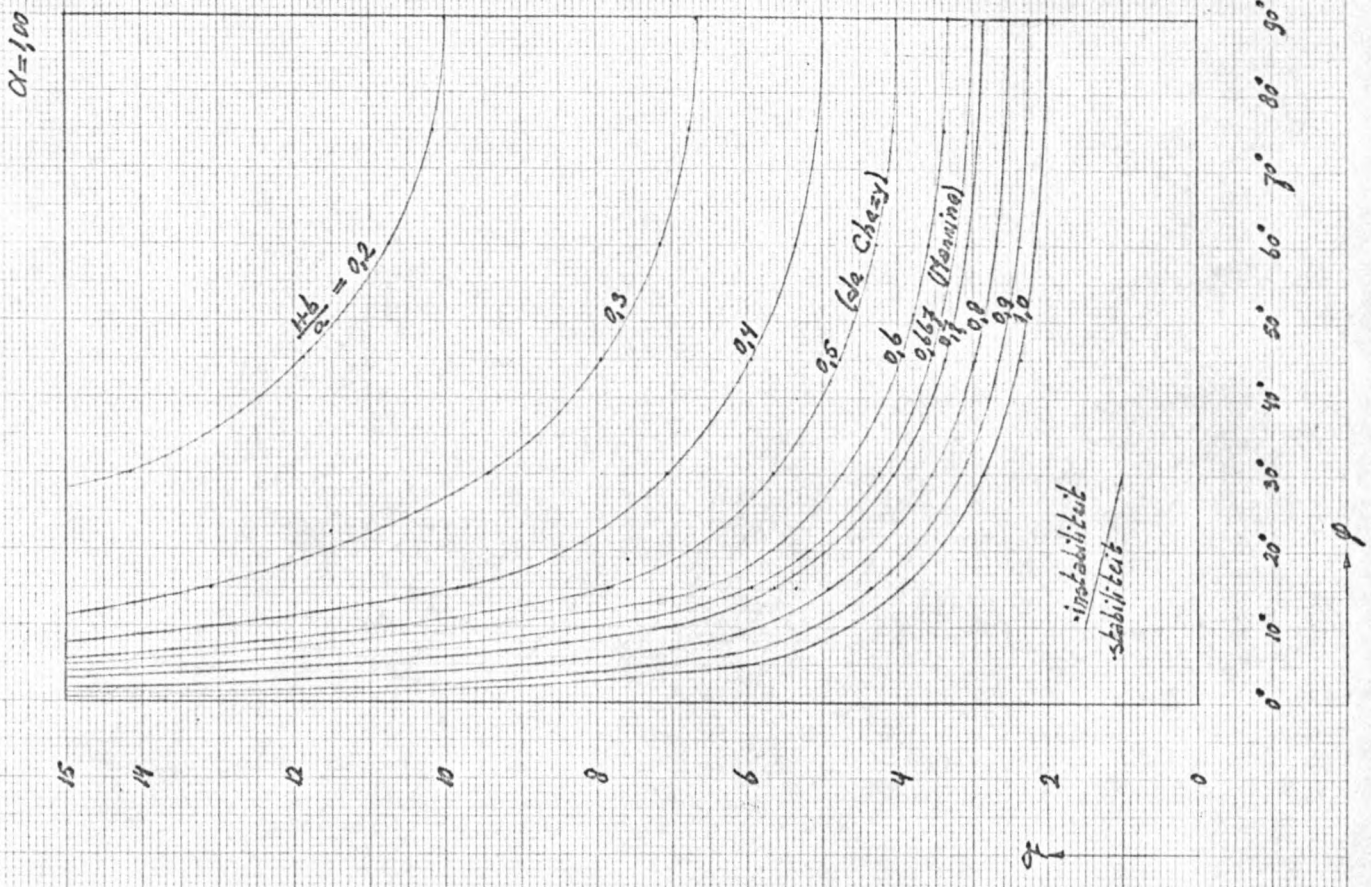


Fig. IV-6.a1

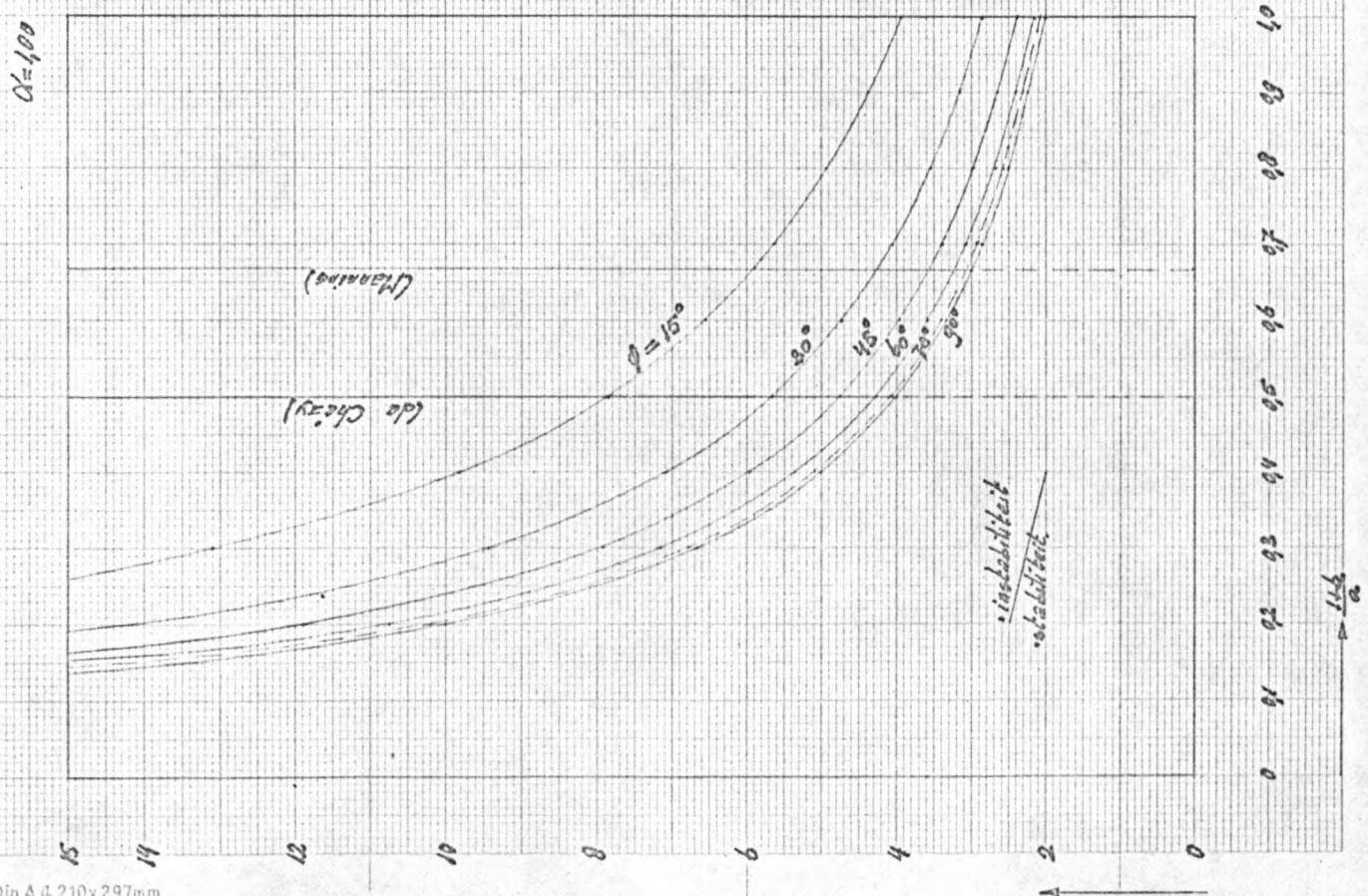


Fig. IV-6.b2

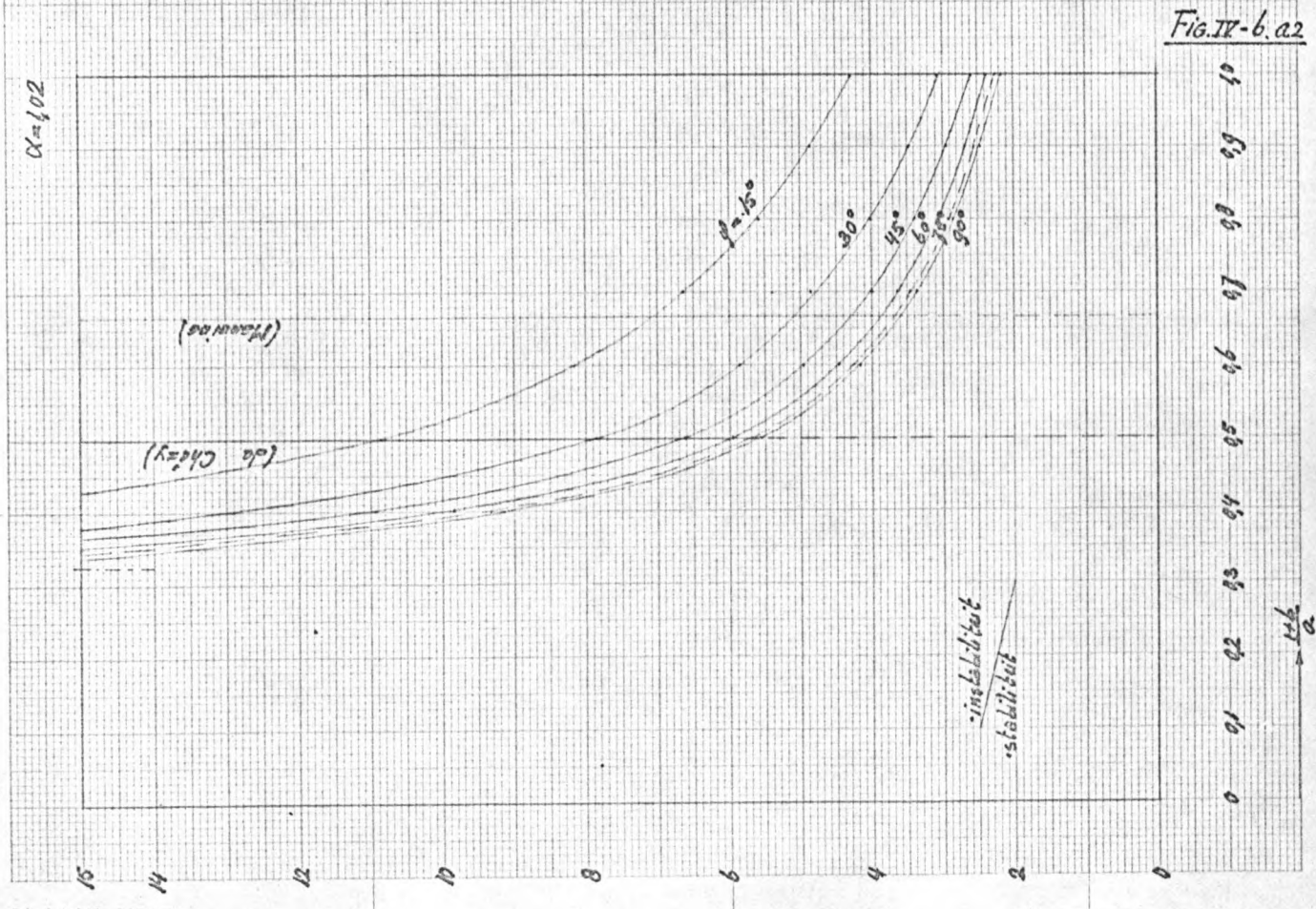
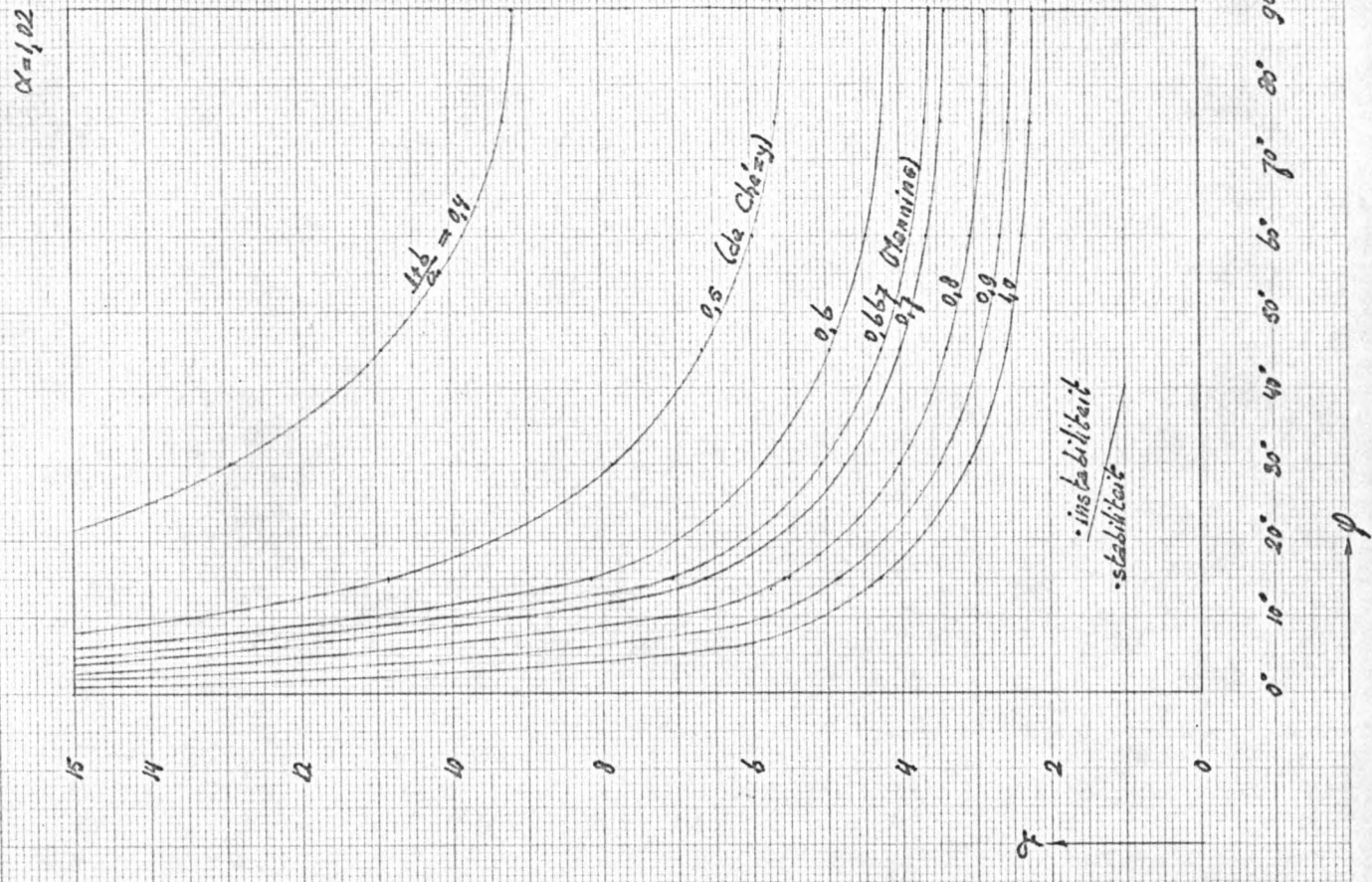


Fig. IV-6.a2

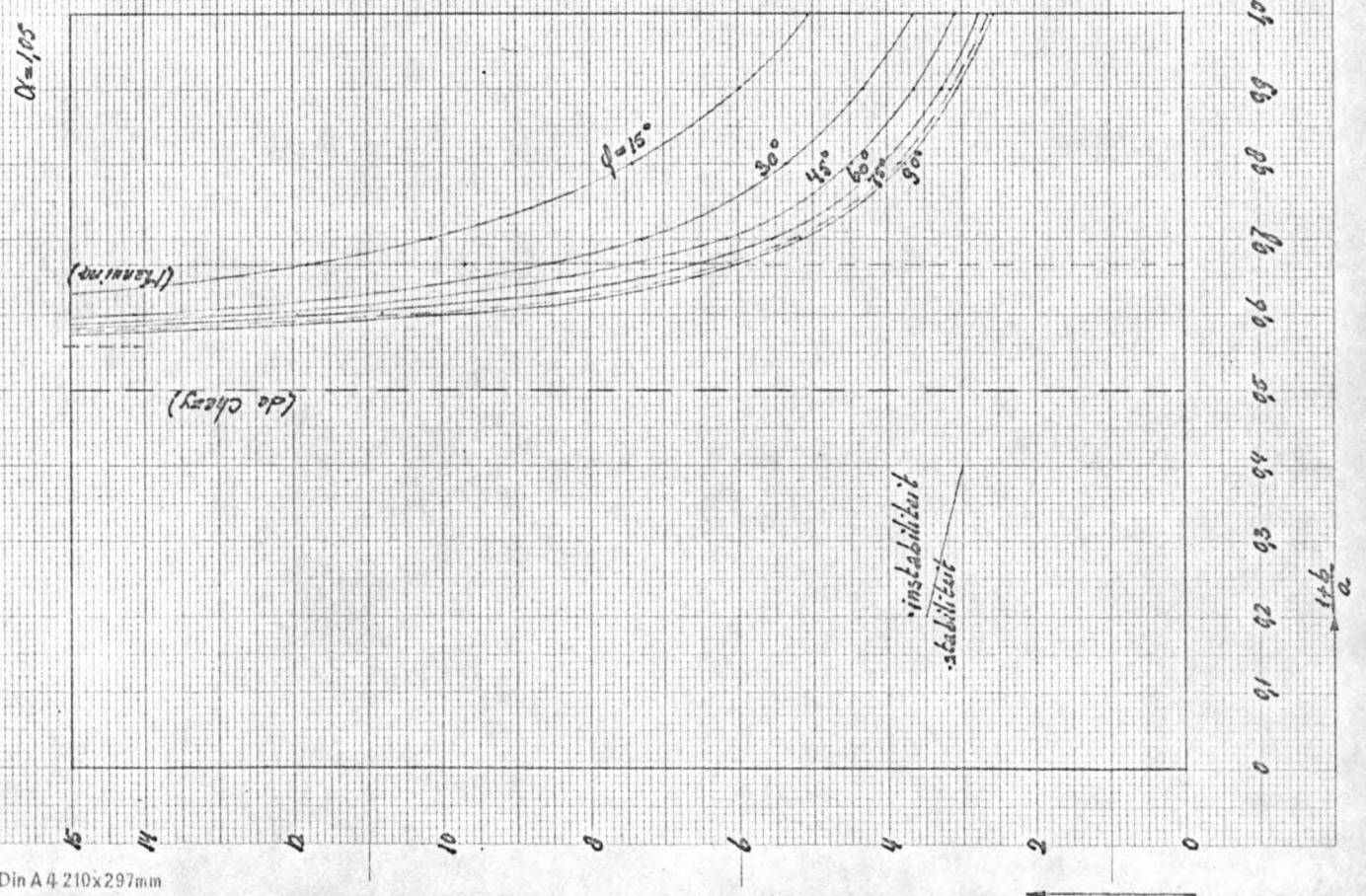
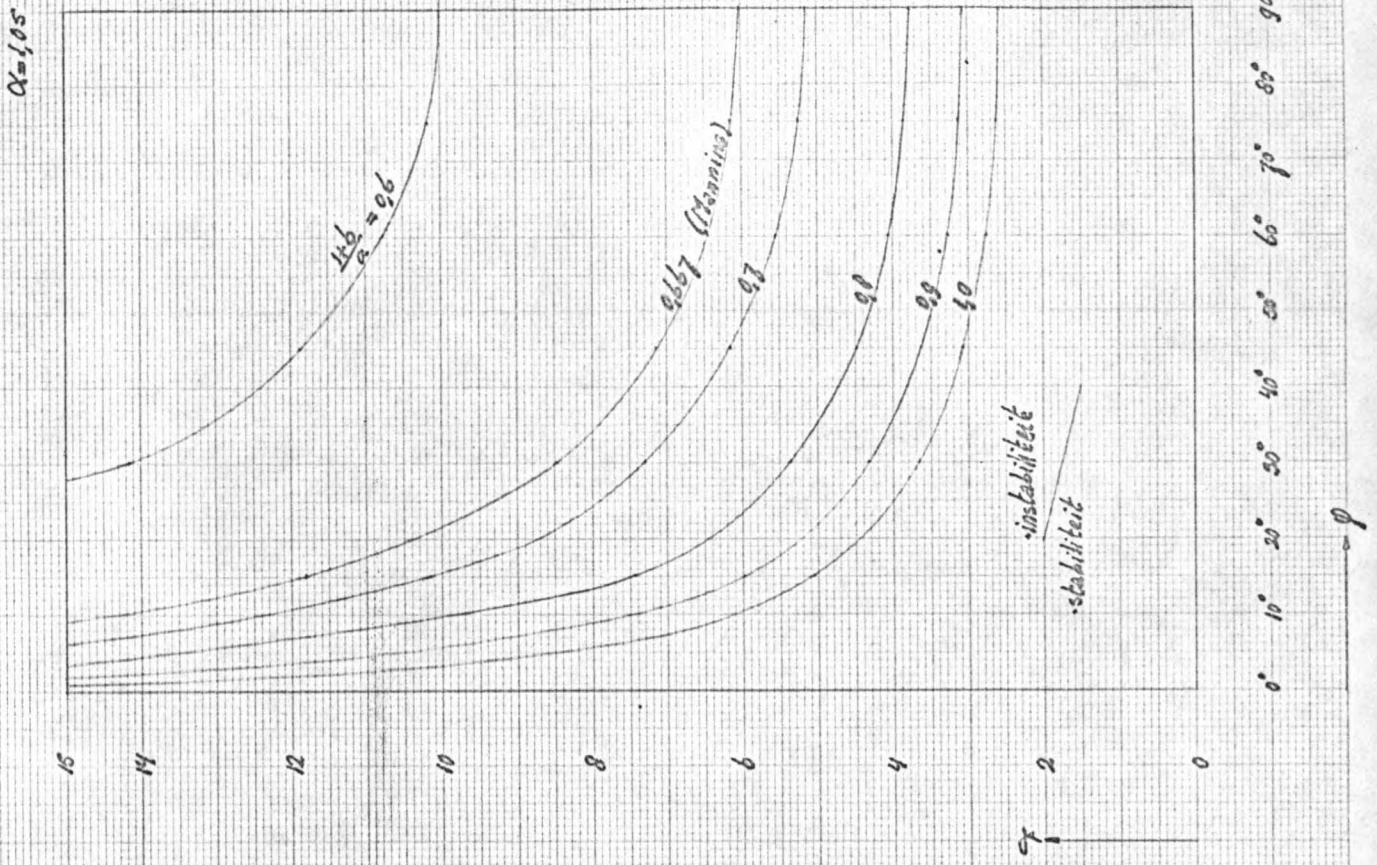


Fig. IV-6.64

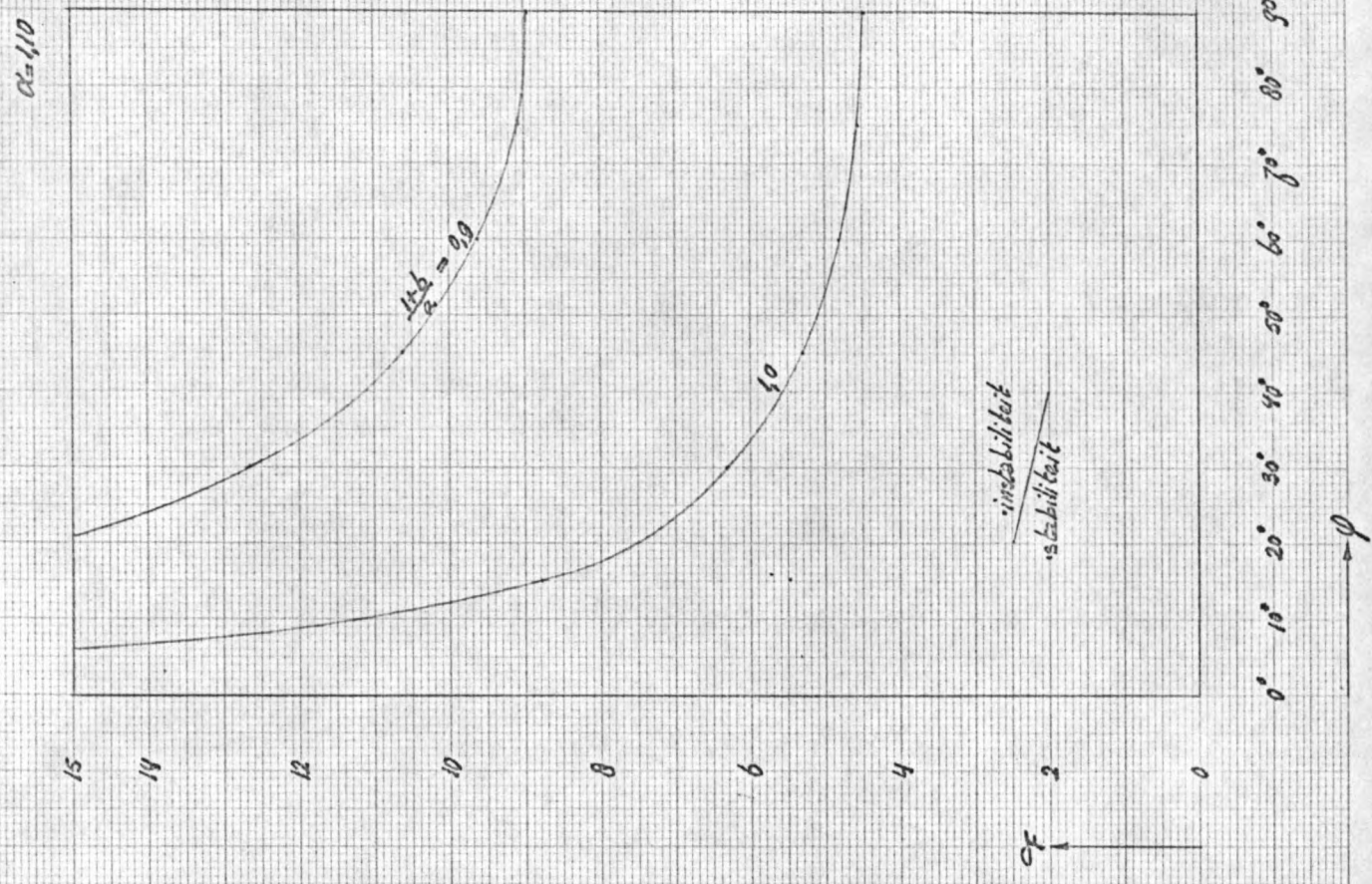
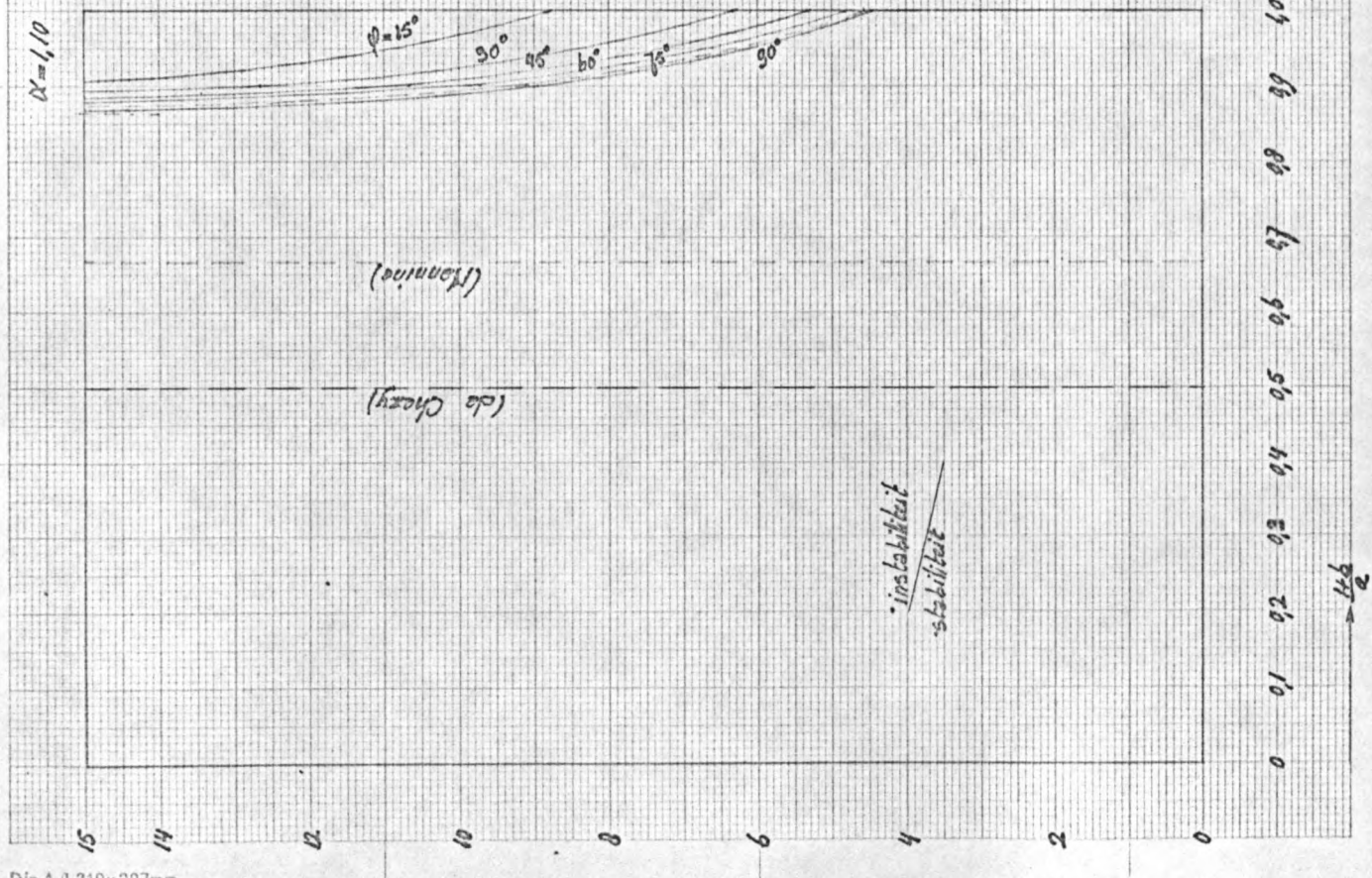


Fig. IV-6.64



IV.A: Appendix van Hoofdstuk IV

Als we ons twee hellende vlakken met gelijke hellingshoek θ voorstellen, welke elkaar snijden volgens een horizontale lijn, dan zal bij regenval langs beide vlakken water naar beneden gaan stromen (als voorbeeld voor deze situatie kunnen we noemen een zadeldak: de daknok fungeert dan als "waterscheiding").

Onder bepaalde aannamen is het nu mogelijk om voor dit geval de plaats te bepalen waar eventuele instabiliteiten (c.q. golfverschijnselen) zullen ontstaan; de vallende regendruppels zijn te beschouwen als storingsbron (zie Hoofdstuk I, p.I-3).

We nemen een assenstelsel aan identiek met dat in Hoofdstuk II; de oorsprong kiezen we ter plaatse van de "waterscheiding" en de x-as laten we samenvallen met de grootste helling van het vlak.

Als de regen nu loodrecht invalt met een intensiteit van $q_1 \left[\frac{m^3}{m^2 \cdot s} \right]$, de infiltratiecapaciteit gelijk is aan $q_2 \left[\frac{m^3}{m^2 \cdot s} \right]$, en we uitgaan van de veronderstelling dat:

$$(q_1 - q_2) \cdot \cos \theta = \text{constant} = q,$$

waarbij we aantekenen dat de infiltratiecapaciteit betrokken is op dezelfde eenheid van oppervlakte als de regenval-intensiteit, dan is eenvoudig in te zien (zie Hoofdstuk II, pp.II-2,3) dat de continuïteitsvgl. (1^a) overgaat in:

$$\frac{\partial}{\partial x} (VA) + \frac{\partial A}{\partial t} = q \cdot b_{\text{opp.}} \quad ; \quad (a)$$

$b_{\text{opp.}}$ is de breedte van de "leiding" ter plaatse van het wateroppervlak.

De impulsvgl. luidt (zie Hoofdstuk II, p.II-5):

$$\sum F_x = \frac{dM_x}{dt} \quad ;$$

hierin is $\sum F_x$:

$$\sum F_x = \rho A dx \left\{ g \sin \theta - g \cos \theta \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau S}{\rho A} \right\},$$

en $\frac{dM_x}{dt}$, onder aanname dat er t.g.v. de regenval geen impulsverandering in de x-richting ontstaat (zie Hoofdstuk II, p.II-8):

$$\frac{dM_x}{dt} = \rho A dx \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial t} (UH) + \frac{\alpha U^2}{A} \frac{\partial H}{\partial x} + 2\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} \right\}$$

$\Sigma F_x = \frac{dM_x}{dt}$ geeft dan na deling door $\rho A dx$:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial t} (UH) + \frac{\alpha U^2}{A} \frac{\partial H}{\partial x} + 2\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho H} \quad (b)$$

Gemakshalve zullen we nu aannemen dat de stroming tweedimensionaal is, d.w.z. de stroming vindt plaats in een zeer brede rechthoekige "leiding"; de vgl. (a) en (b) gaan dan resp. over in:

$$\frac{\partial}{\partial x} (UH) + \frac{\partial H}{\partial t} = g \quad (a')$$

$$\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial t} (UH) + \frac{\alpha U^2}{H} \frac{\partial H}{\partial x} + 2\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho H} \quad (b')$$

In deze vgl. zijn zowel U als H functies van x en t. Aangezien de instabiliteiten verschijnen in het gebied waar de stroming nog permanent is, kunnen we voor de vgl. (a') en (b') in geval van permanentie schrijven:

$$\frac{d}{dx} \cdot (UH) = g \quad (a'')$$

$$\frac{\alpha U^2}{H} \frac{dH}{dx} + 2\alpha U \frac{dU}{dx} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{dH}{dx} - \frac{\tau}{\rho H} \quad (b'')$$

Integratie van vgl. (a'') levert direct op:

$$UH = gx, \quad \text{oftewel: } U = \frac{gx}{H} \quad (a''')$$

M.b.v. deze relatie is U uit vgl. (b'') te elimineren; het linkerlid gaat over in:

$$\text{linkerlid} = \frac{\alpha g^2 x^2}{H^3} \frac{dH}{dx} + 2\alpha \frac{gx}{H} \left(\frac{g}{H} - \frac{gx}{H^2} \frac{dH}{dx} \right),$$

dus vgl. (b'') wordt:

$$\frac{2\alpha g^2 x}{H^2} - \frac{\alpha g^2 x^2}{H^3} \frac{dH}{dx} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{dH}{dx} - \frac{\tau}{\rho H},$$

oftewel na rangschikken der termen:

$$\left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha g^2 x^2}{H^3} \right\} \frac{dH}{dx} = g \sin \theta - \frac{2\alpha g^2 x}{H^2} - \frac{\tau}{\rho H} \quad (c')$$

Volgens Hoofdstuk IV, p.IV-40, is ingeval van tweedimensionale stroming de wrijvingsterm gelijk aan (uiteraard is nu de index

o weggelaten):

$$\frac{z}{\rho H} = g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot U^{\frac{a}{m}} \cdot H^{-\frac{1+b}{m}}$$

Eliminatie hieruit van U m.b.v. vgl. (a''') geeft:

$$\frac{z}{\rho H} = g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot (qx)^{\frac{a}{m}} \cdot H^{-\frac{a}{m} - \frac{1+b}{m}},$$

met behulp van welke relatie vgl. (c') wordt:

$$\left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha q^2 x^2}{H^3} \right\} \cdot \frac{dH}{dx} = g \sin \theta - \frac{2\alpha q^2 x}{H^2} - g \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot g^{\frac{a}{m}} \cdot x^{\frac{a}{m}} \cdot H^{-\frac{a+b+1}{m}} \quad (c'')$$

Te rekenen vanaf de "waterscheiding" zal allereerst een laminaire stroming ontstaan, voor grotere x vervolgens een overgangsgebied van laminaire naar turbulente stroming, en als x groot genoeg is, tenslotte een volledig turbulente stroming. A- Allereerst zullen we nagaan voor welke x in het laminaire stromingsgebied instabiliteiten ontstaan.

Voor laminaire stroming is: $a=1$, $b=1$, $m=1$, $k=\frac{g}{3V}$ (zie Hoofdstuk IV, p.IV-47) en $\alpha=1,2$ (vgl. (15)); met behulp hiervan wordt vgl. (c''):

$$\left\{ g \cos \theta - \frac{6}{5} \cdot \frac{q^2 x^2}{H^3} \right\} \cdot \frac{dH}{dx} = g \sin \theta - \frac{12}{5} \cdot \frac{q^2 x}{H^2} - \frac{3q^2 x}{H^3} \quad (d')$$

Vgl. (d'), de differentiaalvgl. voor het oppervlak van de vrije waterspiegel in geval van laminaire stroming, is gemakkelijk om te werken tot:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{f_1(x, H)}{f_2(x, H)}, \quad (e)$$

waarin:

$$f_1(x, H) = gH^3 \sin \theta - \frac{12}{5} \cdot q^2 x H - 3q^2 x^2 \quad (e')$$

en

$$f_2(x, H) = gH^3 \cos \theta - \frac{6}{5} q^2 x^2 \quad (e'')$$

A.1- Analytische oplossing van de gewone eerste orde differentiaalvgl. (d') is niet mogelijk; aangezien numerieke benadering van de oplossing altijd mogelijk is indien er randvoorwaarden gegeven zijn, zullen we hier aangeven hoe de gang van zaken is in geval van numerieke oplossing. Als oplossingsmethode is gekozen de methode der isoklinen, zoals deze behandeld is in (30).

Voor zekere (parametrische) waarden van θ en q zijn in een H, x -diagram z.g. isoklinen te tekenen, d.w.z. lijnen waarvoor $\frac{dH}{dx}$ (i.e. de tangens van de raaklijn aan de integraalkromme in

zeker punt constant is. Omdat vgl. (d') in feite een profiel-
 vgl. is voor het vrije oppervlak, geeft de kromme $f_1(x,H)=0$
 de normale stroming aan, oftewel $f_1(x,H)=0$ is de meetkundige
 plaats van de punten in het H,x -diagram waarvoor $\frac{dH}{dx}=0$; en
 geeft de kromme $f_2(x,H)=0$ de overgang aan van schietend naar
 stromend water, oftewel $f_2(x,H)=0$ is de meetkundige plaats van
 de punten in het H,x -diagram waarvoor $\frac{dH}{dx}=\infty$. Zoals na enig reken-
 werk blijkt, snijden de krommen $f_1(x,H)=0$ en $f_2(x,H)=0$ elkaar
 in de oorsprong en een zeker punt $P(x_p > 0, H_p > 0)$. In deze
 snijpunten is $\frac{dH}{dx}$ een z.g. onbepaalde vorm, in dit geval $\frac{0}{0}$.
 Behalve de isoklinen $f_1(x,H)=0$ en $f_2(x,H)=0$ zijn er nog iso-
 klinen te tekenen voor waarden van $\frac{dH}{dx}$ in het interval $0 < \frac{dH}{dx} < \infty$,
 welke isoklinen alle door de oorsprong en het punt P gaan.
 De waarde van $\frac{dH}{dx}$ in het punt P kan bepaald worden m.b.v. de
 regel van de l'Hôpital:

$$\left(\frac{dH}{dx}\right)_P = \lim_P \frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_2}{dx}}$$

Zoals eenvoudig is in te zien zal de gezochte integraalkromme
 (i.e. het profiel van het wateroppervlak) ook door de oorsprong
 en het punt P gaan.

De kromme voor het wateroppervlak kan nu stap voor stap
 verkregen worden, door vanuit het snijpunt P naar de normale
 stroomzijde van het bovenstroomse gedeelte, en de schietend
 water-zijde van het benedenstroomse gedeelte te werken (zie fig.
 IV.A-1). De gekozen stapgrootte en het aantal getekende isokli-
 nen zijn bepalend voor de nauwkeurigheid van het wateroppervlak-
 te-profiel.

Uit vgl. (a'') en de voorwaarde voor het ontstaan van insta-
 biliteit in geval van laminaire stroming in een zeer brede lei-
 ding (waarvoor b.v. gebruikt kan worden $F^2 = \frac{1}{3}$, zie Hoofdstuk IV.
 p.IV-56) kan de gemiddelde stroomsnelheid U geëlimineerd worden,
 waardoor een vgl. ontstaat in x en H ; dit verband tussen x en H
 kan weer getekend worden in het x,H -diagram; het snijpunt van
 deze kromme met de lijn die het wateroppervlakprofiel weergeeft,
 levert dan de afstand x en de waterdiepte H op, waarvoor de insta-
 biliteit ontstaat.

A.2- I.v.m. de bewerkelijkheid van de hierboven aangegeven metho-
 de zullen we dit procédé niet volgen, doch, onder voorbehoud, een
 aanname doen (het gaat hier immers om een indruk van het ver-
 schijnsel):

stel dat de gezochte integraalkromme, welke het wateroppervlakte-profiel weergeeft, met voldoende grote nauwkeurigheid voorgesteld kan worden door:

$$f_1(x, H) = gH^3 \sin \theta - \frac{12}{5} q^2 x H - 3q \sqrt{x} = 0, \quad (e')$$

m.a.w. we nemen aan dat de stroming normaal (i.e. permanent "eenparig") is. Het is nu zonder meer duidelijk dat deze aanname voor (zeer) kleine x niet meer opgaat, omdat dan zeker de stroming niet normaal is.

Als voorwaarde voor het ontstaan van instabiliteit kunnen we dan gebruiken (zie Hoofdstuk IV, p.IV-56):

$$F^2 \begin{matrix} (>) \\ (<) \end{matrix} \frac{1}{3}, \quad \text{oftewel } U^2 = \frac{gH \cos \theta}{3}$$

De index 0 is weer weggelaten.

M.b.v. vgl. (a'''): $UH=qx$ is hieruit U te elimineren:

$$\frac{q^2 x^2}{H^2} = \frac{gH \cos \theta}{3}$$

wat voor H oplevert:

$$H = \sqrt[3]{\frac{3q^2 x^2}{g \cos \theta}}$$

Substitutie hiervan in de vgl. $f_1(x, H)=0$ geeft dan:

$$3q^2 x^2 \sqrt[3]{\frac{3q^2 x^2}{g \cos \theta}} - \frac{12}{5} q^2 x \sqrt[3]{\frac{3q^2 x^2}{g \cos \theta}} - 3q \sqrt{x} = 0$$

De wortel $x=0$ van deze vgl. heeft fysisch gezien geen betekenis; na deling door $3qx$, verheffen tot de derde macht van linker- en rechterlid, en rangschikken der termen krijgen we:

$$125 g \cos \theta (qx \operatorname{tg} \theta - r)^3 = 192 x^2 q^5$$

Uit deze vgl. is de critieke waarde voor x , x_c , op te lossen. Uitgaande van bekende waarden voor de regenval-intensiteit q , de infiltratiecapaciteit q_2 en de hellingshoek θ , is de grootheid q te bepalen. Om een indruk te krijgen, zullen we aannemen dat q inligt tussen $q=10^{-5}$ [m.sec.⁻¹] en $q=10^{-7}$ [m.sec.⁻¹]. Op grond van deze aanname zullen we onderstellen dat in bovenstaande vgl. het rechterlid $192x^2 q^5$ verwaarloosbaar klein is t.o.v. het linkerlid; deze vgl. wordt dan:

$$125 g \cos \theta (qx \operatorname{tg} \theta - r)^3 = 0,$$

oftewel:

$$\frac{qx}{r} \operatorname{tg} \theta = 1$$

Vgl. (a''') luidt: $UH=qx$.

Voeren we nu in het getal van Reynolds, Re , gedefiniëerd als:

$$Re = \frac{UH}{\nu}$$

dan is met behulp hiervan vgl. (a''') te schrijven als:

$$Re = \frac{qX}{\nu};$$

Substitutie hiervan in de voor x verkregen vgl. levert dan op:

$$Re \cdot \operatorname{tg} \theta = 1$$

Zoals op grond van de gedane aannamen ook te verwachten is, stemt dit resultaat overeen met vgl. (29^a).

Dus: voor de plaats waar instabiliteiten voor het eerst ontstaan in de beschouwde situatie, geldt:

$$x_{cr} = \frac{\nu}{q \operatorname{tg} \theta}$$

of

$$\left. \begin{aligned} Re \cdot \operatorname{tg} \theta &= 1 \\ Re &= \frac{UH}{\nu} = \frac{q \cdot x_{cr}}{\nu} \end{aligned} \right\}$$

Als we onderstellen dat de overgang van laminaire naar turbulente stroming begint op te treden als $Re=500$, dan betekent dit voor x:

$$x_{lam \rightarrow turb.} = \frac{Re_{=500} \cdot \nu}{q}$$

M.b.v. het bovenstaande volgt hieruit dat er in het laminaire stromingsgebied instabiliteiten ontstaan als:

$$x_{cr} < x_{lam \rightarrow turb.}, \quad \text{oftewel} \quad \frac{\nu}{q \operatorname{tg} \theta} < \frac{Re_{=500} \cdot \nu}{q}$$

waaruit volgt dat tenminste moet gelden:

$$\operatorname{tg} \theta > 0,002$$

Dat voor $Re=500$ geldt $\operatorname{tg} \theta = 2 \cdot 10^{-3}$, klopt weer met de voorwaarde voor neutrale stabiliteit vgl. (29^a), wat geenszins verwondering behoeft te wekken, gezien de gedane aannamen.

Als we aannemen dat de stroming volledig turbulent is voor $Re=1500$, dan betekent dit voor x:

$$x_{vull. turb.} = \frac{Re_{=1500} \cdot \nu}{q}$$

Nemen we voor ν de waarde bij 20°C.: $\nu = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^2 \cdot \text{sec.}^{-1}]$, en onderstellen we weer dat q inligt tussen $10^{-5} \text{ [m} \cdot \text{sec.}^{-1}]$ en $10^{-7} \text{ [m} \cdot \text{sec.}^{-1}]$, dan houdt dit in dat:

$$x_{lam \rightarrow turb.} = \frac{Re_{=500} \cdot \nu}{q} \quad \text{in ligt tussen: } 50 \text{ [m]} \text{ en } 5000 \text{ [m]}$$

en dat:

$$x_{\text{crit. inst.}} = \frac{Re=1500 \cdot V}{g} \quad \text{in ligt tussen: } 150 \text{ [m]} \text{ en } 15000 \text{ [m]}$$

N.B.

Nogmaals zij opgemerkt dat bovenstaande bepaling van de critieke x-waarde voor het optreden van instabiliteiten, alleen geldigheid bezit onder het voorbehoud dat de kromme $f_1(x,H)=0$ met voldoende nauwkeurigheid de gezochte integraalkromme voor vgl. (d') (i.e. de profielvgl. voor het wateroppervlak) benadert.

A.3- We hebben nu de critieke x-waarde voor het ontstaan van instabiliteiten in de gegeven situatie bepaald, echter onder de aanname dat de voor vgl. (d') gezochte integraalkromme met voldoende grote nauwkeurigheid benaderd wordt door de kromme $f_1(x,H)=0$, i.e. vgl. (e').

Het is natuurlijk mogelijk om na te gaan hoe groot de bij deze benadering gemaakte fout is, door m.b.v. de hierboven geschetste methode der isoklinen de integraalkromme voor vgl. (d') te bepalen. Om redenen van bewerkelijkheid (zoals reeds gezegd is), zien we hiervan af.

Daarnaast kunnen we ook nog trachten te bepalen hoe het verloop van de leidinghelling (als functie van x) moet zijn om de onder A.2 aangegeven benaderingsmethode nauwkeurig te doen zijn, m.a.w. we kunnen de leidinghellingfunctie zo trachten te bepalen, dat in de gewone eerste orde differentiaalvgl. van het type (e), vgl. (e') inderdaad (behoudens misschien zeer kleine waarden van x) de oplossing is. Dit laatste zullen we nu doen, teneinde te kunnen zeggen dat de in A.2 gehanteerde benaderingsmethode in ieder geval geldig is voor één bepaalde vorm van de leidinghelling.

Voor de beschouwde tweedimensionale stromingstoestand gaan we daartoe, anders dan in Hoofdstuk II, uit van een rechthoekig z,x-assenkruis met horizontale x-as; de oorsprong kiezen we ter plaatse van de "waterscheiding" (zie fig. IV.A-2).

Stel dat de bodem gegeven is door de functie $-r(x)$, en dat de verticale afstand van de x-as tot het wateroppervlak aangeduid wordt door $\eta = \eta(x,t)$. De gemiddelde stroomsnelheidscomponent in de x-richting noemen we weer $U = U(x,t)$. Dan is $H(x,t) = \eta(x,t) + r(x) > 0$ de verticale hoogte van het wateroppervlak boven de leidingbodem.

Op een macro-elementje, begrensd door twee verticale vlakken met resp. x-coördinaten x en x+dx zullen we dan weer de impuls-

vgl. in de x-richting (zie Hoofdstuk II, p.II-5)

$$\sum F_x = \frac{dM}{dt} x$$

toepassen. Indien we veronderstellen dat de stroming geleidelijk veranderend, oftewel quasi-permanent is, m.a.w. is de kromming van het vloeistofoppervlak verwaarloosbaar klein (zie Hoofdstuk II, p.II-4) dan geldt voor de drukverdeling, dat deze hydrostatisch is:

$$p = \rho g(\eta - H) + p_a,$$

wat na partiële differentiatie naar x oplevert:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Allereerst gaan we $\sum F_x$ bepalen; $\sum F_x$ is weer te schrijven als:

$$\sum F_x = F_{x-y} + F_{x-\Delta p} + F_{x-z}$$

De uitwendige kracht op het macro-elementje t.g.v. de zwaartekracht is:

$$F_{x-y} = 0$$

De uitwendige kracht op het macro-elementje t.g.v. het drukverval over het interval dx is, aangezien de drukverdeling hydrostatisch is aangenomen:

$$F_{x-\Delta p} = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} (\eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + r) = -\rho g (\eta + r) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$$

Termen oneindig klein van de tweede en hogere orde worden verwaarloosd; met $H = \eta + r$ krijgen we dan:

$$F_{x-\Delta p} = -\rho g H \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$$

De uitwendige kracht op het macro-elementje t.g.v. de wrijving langs de bodem, kan op geheel analoge wijze bepaald worden als in Hoofdstuk II, p.II-6, en wordt dan:

$$F_{x-z} = -\tau_x dx$$

Aan τ is nu een suffix x toegevoegd om aan te duiden, dat dit de schuifspanningscomponent in de x-richting is.

We hebben nu gekregen voor $\sum F_x$:

$$\sum F_x = -\rho g H \frac{\partial \eta}{\partial x} dx - \tau_x dx$$

Uit $H(x, t) = \eta(x, t) + r(x)$ volgt:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{dr}{dx}$$

Met behulp hiervan wordt $\sum F_x$:

$$\leq F_x = -\rho g H \frac{\partial H}{\partial x} dx + \rho g H \frac{dr}{dx} - \tau_x dx$$

Aan de hand van de hierboven gedane aannamen is het voor deze situatie niet moeilijk in te zien dat de afleiding van de vorm voor de totale hoeveelheid impulsverandering in de x-richting, $\frac{dM_x}{dt}$, analoog verloopt en de uiteindelijke formule hetzelfde blijft als op p.IV.A-2:

$$\frac{dM_x}{dt} = \rho H dx \cdot \left\{ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial t} (UH) + \frac{\alpha U^2}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + 2\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} \right\}$$

$\leq F_x = \frac{dM_x}{dt}$ geeft dan na deling door $\rho H dx$:

$$\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (UH) + \frac{\alpha U^2}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + 2\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{dr}{dx} - \frac{\tau_x}{\rho H}$$

Om dezelfde redenen, waarom de vorm voor $\frac{dM_x}{dt}$ gelijk blijft verandert ook de continuïteitsvgl. niet; deze is identiek met vgl. (a').

We hebben nu dus:

$$\frac{\partial}{\partial x} (UH) + \frac{\partial H}{\partial t} = g \tag{a'}$$

$$\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (UH) + \frac{\alpha U^2}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + 2\alpha U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{dr}{dx} - \frac{\tau_x}{\rho H} \tag{f'}$$

In deze vgl'n. zijn zowel U als H functies van x en t. Aangezien de instabiliteiten verschijnen in het gebied waar de stroming nog permanent is, kunnen we voor de vgl'n. (a') en (f') in geval van permanentie schrijven:

$$\frac{d}{dx} (UH) = g \tag{a''}$$

$$\frac{\alpha U^2}{H} \cdot \frac{dH}{dx} + 2\alpha U \cdot \frac{dU}{dx} = g \frac{dr}{dx} - g \frac{dH}{dx} - \frac{\tau_x}{\rho H} \tag{f''}$$

Integratie van vgl. (a'') levert weer direct op:

$$UH = gx, \quad \text{oftewel } U = \frac{gx}{H} \tag{a''}$$

Met behulp van deze relatie is U uit vgl. (f'') te elimineren, waardoor deze overgaat in:

$$\frac{2\alpha g^2 x}{H^2} - \frac{\alpha g^2 x^2}{H^3} \cdot \frac{dH}{dx} = g \frac{dr}{dx} - g \frac{dH}{dx} - \frac{\tau_x}{\rho H}$$

oftewel, na rangschikking der termen:

$$\left\{ g - \frac{\alpha q^2 x^2}{H^3} \right\} \cdot \frac{dH}{dx} = g \frac{dr}{dx} - \frac{2\alpha q^2 x}{H^2} - \frac{\tau_x}{\rho H} \quad (g')$$

Volgens Hoofdstuk IV, p. IV-40 is ingeval van tweedimensionale stroming de wrijvingsterm gelijk aan:

$$\frac{\tau_x}{\rho H} = g \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot U^{\frac{a}{m}} \cdot H^{-\frac{1+b}{m}}$$

Eliminatie hieruit van U m.b.v. vgl. (a''') en substitutie in vgl. (g') geeft:

$$\left\{ g - \frac{\alpha q^2 x^2}{H^3} \right\} \cdot \frac{dH}{dx} = g \frac{dr}{dx} - \frac{2\alpha q^2 x}{H^2} - g \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot g^{\frac{a}{m}} \cdot x^{\frac{a}{m}} \cdot H^{-\frac{a+b+1}{m}} \quad (g'')$$

Voor laminaire stroming is: $a=1$, $b=1$, $m=1$, $k = \frac{8r}{\tau}$ (zie Hoofdstuk IV, p. IV-47) en $\alpha=1,2$ (vgl. (15)); met behulp hiervan wordt vgl. (g''):

$$\left\{ g - \frac{6}{5} \cdot \frac{q^2 x^2}{H^3} \right\} \cdot \frac{dH}{dx} = g \frac{dr}{dx} - \frac{12}{5} \cdot \frac{q^2 x}{H^2} - \frac{3grx}{H^3} \quad (h')$$

N.B.

Indien, zoals ook zonder meer is in te zien, in vgl. (d') $\cos \theta$ vervangen wordt door 1, en $\sin \theta$ door $\frac{dr}{dx}$ dan krijgen we vgl. (h'). Vgl. (h'), de differentiaalvgl. voor het oppervlak van de vrije waterspiegel in geval van laminaire stroming, is gemakkelijk om te werken tot:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{f_1(x, H)}{f_2(x, H)} \quad (i)$$

waarin:

$$f_1(x, H) = gH^3 \cdot \frac{dr}{dx} - \frac{12}{5} \cdot q^2 x H - 3q\sqrt{x} \quad (i')$$

en

$$f_2(x, H) = gH^3 - \frac{6}{5} \cdot q^2 x^2 \quad (i'')$$

Indien $f_2(x, H) = 0$ de oplossing van de gewone eerste orde differentiaalvgl. (i) is, m.a.w. komt $f_2(x, H) = 0$ overeen met de gezochte integraalkromme voor het vloeistofoppervlak, dan houdt dit in dat $\frac{dH}{dx}$ voor elke x-waarde gelijk is aan nul, en derhalve dat de "waterdiepte" H constant is. Uit de in deel A.1 gegeven bespreking van de oplossing ener gewone eerste orde differentiaalvgl. van het type (i) m.b.v. de methode der isoklinen, blijkt zonder meer dat $\frac{dH}{dx}$ alleen voor iedere x-waarde (bij constant H) gelijk aan nul kan zijn, als in het daargenoemde H,x-diagram

de "kromme" $f_1(x, H) = 0$ een rechte lijn is evenwijdig met de x -as. Wordt hieraan voldaan, dan snijden de rechte $f_1(x, H) = 0$ en de kromme $f_2(x, H) = 0$ elkaar alleen nog in het punt $P(x_p > 0, H_p > 0)$. In het punt P , en ook voor $x=0$, is $\frac{dH}{dx}$ dan weer een z.g. onbepaalde vorm, waarvan de waarden m.b.v. de regel van de l'Hôpital te bepalen zijn.

De vgl. $f_1(x, H) = 0$ wordt in het H, x -diagram voorgesteld door een rechte lijn evenwijdig met de x -as, als de term $\frac{dr}{dx}$ in deze vgl. de gedaante:

$$\frac{dr}{dx} = \text{constante} \cdot x$$

heeft. Dit houdt in dat de functie $r(x)$ een kwadratische parabool moet zijn, met de top in de oorsprong van het assenkruis, aangezien we aangenomen hebben dat de oorsprong op de "waterscheiding" ligt. Indien we stellen dat voor $x=+l$ geldt $z=-f$, dan wordt de vgl. voor deze parabool (zie fig. IV.A-3):

$$z = -\frac{f}{l^2} x^2 = -r(x),$$

waaruit volgt

$$\frac{dr}{dx} = +\frac{2f}{l^2} x$$

Vgl. (1'), $f_1(x, H) = 0$ wordt dan:

$$f_1(x, H) = +\frac{2f}{l^2} gH^3 x - \frac{12}{5} q^2 Hx - 3qVx = 0,$$

wat te schrijven is als:

$$x \left(\frac{2f}{l^2} gH^3 - \frac{12}{5} q^2 H - 3qV \right) = 0$$

Hieraan wordt voldaan door:

$$x=0 \text{ en } \frac{2f}{l^2} gH^3 - \frac{12}{5} q^2 H - 3qV = 0$$

Nu is inderdaad H constant en onafhankelijk van x , m.a.w. we hebben voor elke x -waarde, dezelfde H -waarde; dit manifesteert zich in het H, x -diagram als een rechte lijn evenwijdig met de x -as, door het punt $x=0$ en $H=\text{constant}$ volgens:

$$\frac{2f}{l^2} gH^3 - \frac{12}{5} q^2 H - 3qV = 0$$

Het is nu ook niet moeilijk om in te zien dat in het punt P :

$$\left(\frac{dH}{dx} \right)_P = \lim_P \frac{\frac{dH}{dx}}{\frac{dx}{dx}}$$

gelijk is aan nul.

We kunnen nu het volgende zeggen: als de bodem van de leiding een parabolisch verloop heeft volgens de kromme:

$$z = -\frac{f}{l^2} x^2,$$

waarin f en l zekere constanten zijn, dan is de in deel A.2 gevolgde benaderingsmethode van de integraalkromme voor het vloeistofoppervlak in ieder geval exact geldig. De enige restrictie

bestaat dan hierin dat de oplossing niet geldig is als $x=0$ of zeer klein is: n.l. voor $x=0$ is (noodzakelijkerwijs) $H=0$, omdat de afvoer ter plaatse nog, mathematisch gezien, gelijk is aan nul; er is dus een geringe lengte x nodig, te rekenen vanaf de "waterscheiding" om de constante waterdiepte, gegeven door:

$$\frac{2f}{l}H^3 - \frac{12}{5}q^2H - 3qv = 0$$

te bereiken; omdat deze constante waarde voor H , behalve door q ook nog bepaald wordt door f en l , wordt ook deze vereiste lengte bepaald door q , f en l . (Wat eveneens pleit voor de geringe grootte van deze vereiste x -lengte is het volgende: als de stationaire toestand zich eenmaal heeft ingesteld, dan kan men zich voorstellen dat ook ter plaatse $x=0$ voornoemde constante waterdiepte aanwezig is, en gehandhaafd blijft door de regenval). Dus: indien de leidingbodem een parabolisch verloop heeft is de in deel A.2 gevolgde benaderingsmethode van de gewone eerste orde differentiaalvgl. voor het vloeistofoppervlak geen benadering meer, maar exact geldig; als f klein en l groot is, benadert de parabolisch hellende leidingbodem een leidingbodem met constante hellingshoek θ (de afwijking van de werkelijke integraalkromme voor het vloeistofoppervlak, welke ontstaat indien de benaderingsmethode in deel A.2 aangehouden wordt, zal daarom vermoedelijk niet al te groot zijn).

Opmerking

De aanname op p.IV.A-1 van deze Appendix IV.A, dat de regenval geen impulsverandering in de x -richting geeft, verdient nog enige toelichting. In deze Opmerking nu, zullen we pogen na te gaan of deze aanname inderdaad gerechtvaardigd en redelijk is.

De regenval-intensiteit hebben we q_1 [m.sec.⁻¹] genoemd; gemakshalve zullen we de infiltratiecapaciteit q_2 [m.sec.⁻¹] gelijk aan nul stellen.

Beschouwen we een macro-elementje (fungerend als controle volume), begrensd door twee doorsneden met resp. x -coördinaten x en $x+dx$

(zie Hoofdstuk II, fig. II-3), dan neemt in een tijdsbestek dt in geval van tweedimensionale stroming het volume van dit macro-elementje per eenheid van leidingbreedte (i.e. 1 [m]) toe met:

$$1 \cdot q_1 \cos \theta dx dt \text{ [m}^3\text{]} .$$

We zullen nu de volgende aannamen doen:

de valsnelheid van alle regendruppels is eenparig en evengroot: W [m.sec.⁻¹];

het volume van alle regendruppels is J [m^3];
 het aantal regendruppels per 1 [m^3] van de ruimte is $1 \cdot N^3$; bij
 regelmatige rangschikking is iedere regendruppel "gelegen" op
 het snijpunt van drie denkbeeldige, onderling loodrechte lijnen;
 de kortste afstand tussen de druppels is dan:

$$\frac{1}{N-1} [m]$$

Het totale aantal regendruppels dat in een tijdsbestek dt het
 horizontale oppervlak $1 \cdot \cos \theta dx$ [m^2] nu passeert is dan:

$$\frac{W}{1} \cdot N^2 \cdot 1 \cdot \cos \theta \cdot dx \cdot dt;$$

dit betekent dat in een tijdsbestek dt het volume van het be-
 schouwde macro-elementje per eenheid van leidingbreedte toeneemt
 met:

$$\frac{W}{1} \cdot N^2 \cdot 1 \cdot \cos \theta dx dt \quad J \quad [m^3]$$

Dus moet gelden:

$$1 \cdot q_1 \cos \theta dx dt = \frac{W}{1} \cdot N^2 \cdot 1 \cdot \cos \theta dx dt \cdot J.$$

Nu was gesteld:

$$(q_1 - q_2) \cos \theta = q = \text{constant},$$

waarin:

$$q_2 = 0; \text{ dus:}$$

$$q_1 \cos \theta = q,$$

waaruit volgt, na substitutie hiervan in het bovenstaande en
 deling van linker- en rechterlid door $1 \cdot dx \cdot dt$:

$$q = \frac{W}{1} \cdot N^2 \cos \theta J,$$

welke relatie het verband aangeeft tussen de regenval-intensiteit
 en de valsnelheid, het volume en de rangschikking van de regen-
 druppels.

We zullen nu veronderstellen dat hetzelfde aantal regendruppels
 dat in een tijdsbestek dt het horizontale oppervlak $1 \cdot \cos \theta dx$ [m^2]
 passeert, ook op het wateroppervlak terecht komt, d.w.z. een
 aantal van:

$$\frac{W}{1} \cdot N^2 \cdot 1 \cdot \cos \theta dx dt$$

Eén regendruppel levert een bijdrage aan de impuls in de x-richting van:

$$\rho \cdot J \cdot W \sin \theta \quad [kg \cdot m \cdot sec^{-1}]$$

De toename van de impuls in de x-richting, van het beschouwde
 macro-elementje in het tijdsbestek dt , t.g.v. de regenval is dan:

$$\frac{W}{N-1} \cdot N^2 \cdot 1 \cos \theta dx \cdot dt \cdot \rho J W \sin \theta \text{ [kg.m.sec.}^{-1}\text{]}$$

De hoeveelheid impuls in de x-richting, welke t.g.v. de regenval per tijdseenheid door de oppervlakte van het als controle-volume beschouwde macro-elementje naar binnen stroomt, is:

$$\left(\frac{dM_x}{dt}\right)_q = \frac{W}{N-1} \cdot N^2 \cdot 1 \cos \theta dx \rho J W \sin \theta \text{ [kg.m.sec.}^{-2}\text{]}$$

Dit betekent dat de totale mate van impulsverandering in de x-richting, in geval van tweedimensionale stroming wordt:

$$\frac{dM_x}{dt} = \rho \cdot 1 \cdot H \cdot dx \left\{ \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (UH) + \frac{\alpha U^2}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + 2\alpha U \frac{\partial U}{\partial x} \right\} - \left(\frac{dM_x}{dt}\right)_q$$

Na deling door $\rho \cdot 1 \cdot H \cdot dx$ houdt dit in dat het linkerlid van vgl. (b') vermeerderd moet worden met de term:

$$-\frac{W}{N-1} \cdot N^2 \cdot \cos \theta J \cdot W \cdot \sin \theta \cdot \frac{1}{H} \text{ [m.sec.}^{-2}\text{]}$$

Substitutie hierin van:

$$J = \frac{W}{N-1} \cdot N^2 \cdot \cos \theta J$$

geeft:

$$-\frac{q \cdot W \sin \theta}{H} \text{ [m.sec.}^{-2}\text{]}$$

Een en ander houdt in dat ingeval de impulsverandering in de x-richting t.g.v. de regenval in rekening wordt gebracht, aan het rechterlid van vgl. (d') toegevoegd moet worden de term:

$$+\frac{q W \sin \theta}{H} \text{ [m.sec.}^{-2}\text{]}$$

en aan het rechterlid van vgl. (e') de term:

$$+ q \cdot W \cdot \sin \theta \cdot H^2 \text{ [m.}^4 \text{ sec.}^{-2}\text{]}$$

Stel nu dat het volume van een regendruppel gelijk is aan:

$J = 2 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^3\text{]} \text{ à } 4 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^3\text{]}$; bij bolvormige druppels komt dit neer op een diameter van resp. $3,36 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$ en $4,24 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$.

Voor q hadden we al gekozen: $q = 10^{-5} \text{ [m.sec.}^{-1}\text{]} \text{ à } 10^{-7} \text{ [m.sec.}^{-1}\text{]}$.

Als $N=11$ is, d.w.z. de onderlinge afstand van de waterdruppels is $0,1 \text{ [m]}$, dan is onder de gedane aannamen de maximale valsnelheid W :

$$W = \frac{0,414}{\cos \theta} \text{ [m.sec.}^{-1}\text{]} \text{ à } \frac{0,207}{\cos \theta} \text{ [m.sec.}^{-1}\text{]}$$

Als $N=6$ is, de onderlinge afstand van de waterdruppels is $0,2 \text{ [m]}$, dan is onder de gedane aannamen de maximale valsnelheid W :

$$W = \frac{2,78}{\cos \theta} \text{ [m.sec.}^{-1}\text{]} \text{ à } \frac{1,39}{\cos \theta} \text{ [m.sec.}^{-1}\text{]}$$

Als we nu bedenken dat voor de beschouwde situatie zelfs bij zware regenval, in het laminaire stromingsgebied de waterdiepte H tenhoogste oploopt tot enkele centimeters (i.e. exceptioneel), veeleer echter gelijk is aan enkele millimeters, dan is het niet moeilijk om in te zien (en na te gaan) dat de impulsverandering in de x -richting t.g.v. de regenval verwaarloosd mag worden, tenzij misschien x (en derhalve ook H) zeer klein en/of de hellingshoek θ zeer groot is; bepalen we b.v., op grond van de in deel A.2 van deze Appendix IV.A gedane aannamen, de critieke lengte x_c , door als oplossing voor de gezochte integraalkromme vgl. (e') te nemen, en hiervoor het verband tussen x en H in een H, x -diagram uit te zetten, eerst met en dan zonder de invloed van de term $+qW\sin\theta H^2$, voor diverse parametrische waarden van q en θ , dan zal de gemaakte fout (t.g.v. de verwaarlozing van de impulsbijdrage in de x -richting door de regenval) niet groot blijken te zijn, zodat voornoemde aanname alleszins redelijk en gerechtvaardigd geacht mag worden, temeer daar het hier slechts de bedoeling is een indruk te geven van het verschijnsel en de eventueel te volgen werkwijze.

B- Vervolgens zullen we nagaan of ook voor het turbulente stromingsgebied de x te bepalen is, waarvoor instabiliteiten ontstaan.

Voor turbulente stroming is, uitgaande van de weerstandswet van de Chezy met constante wrijvingscoëfficiënt: $a=2$, $b=0$, $m=1$ (zie Hoofdstuk IV, p.IV-53) en $k=C^2$ (zie Hoofdstuk IV, p.IV-76); met behulp hiervan wordt vgl. (c''):

$$\left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha q^2 x^2}{H^3} \right\} \frac{dH}{dx} = g \sin \theta - \frac{2\alpha q^2 x}{H^2} - \frac{q}{C^2} \cdot \frac{q^2 x^2}{H^3} \quad (d'')$$

Voor turbulente stroming is, uitgaande van de weerstandswet van Manning met constante wrijvingscoëfficiënt: $a=2$, $b=\frac{1}{3}$, $m=1$ (zie Hoofdstuk IV, p.IV-53) en $k=n^{-2}$ (zie Hoofdstuk IV, p.IV-77); met behulp hiervan wordt vgl. (c'''):

$$\left\{ g \cos \theta - \frac{\alpha q^2 x^2}{H^3} \right\} \frac{dH}{dx} = g \sin \theta - \frac{2\alpha q^2 x}{H^2} - g n^2 \cdot \frac{q^2 x^2}{H^3} \quad (d''')$$

T.a.v. α geldt in geval van turbulente stroming: $1,0 \leq \alpha \leq 1,1$ (vgl. (21^a)), oftewel: $\alpha = 1 + 6,25 \frac{z}{\rho v^2}$ (vgl. (21)) (zie Hoofdstuk IV, pp.IV-62,73):

Wat de profielvgn. voor het wateroppervlak in geval van turbu-

lente stroming, vgl. (d'') en vgl. (d'''), betreft, zij opgemerkt dat deze op analoge wijze als gedaan is voor laminaire stroming, numeriek berekend kunnen worden, m.b.v. de methode der isoklinen, uitgaande van zekere (parametrische) waarden voor θ, α, q en C resp. n . Gezien de gebruikte weerstandswetten bezit het aldus berekende oppervlakteprofiel alleen daar geldigheid, waar de stroming volledig turbulent is, dus vanaf het punt met x -coördinaat $x=x_{\text{voll.turb.}}$; wat betreft de voor oplossing noodzakelijke randvoorwaarden, moet men ook het gedeelte van het oppervlakteprofiel tussen $x=0$ en $x=x_{\text{voll.turb.}}$ in de berekening opnemen. De vraag is dan echter of het aldus bepaalde oppervlakteprofiel voor turbulente stroming, gezien de "voorgeschiedenis" (i.e. laminaire stroming, overgangsgebied van laminaire naar turbulente stroming) nog correct is, of liever gezegd "aansluit". I.v.m. de bewerkelijkheid van de hier aangegeven methode en de daarbij optredende "aansluitingsproblemen" zullen we dit procédé niet volgen.

Vgl. (d''), de differentiaalvgl. voor het oppervlak van de vrije waterspiegel in geval van turbulente stroming, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Chezy-type met constante wrijvingscoëfficiënt, is gemakkelijk om te werken tot:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{f_1(x, H)}{f_2(x, H)}, \quad (j)$$

waarin:

$$f_1(x, H) = gH^3 \sin \theta - 2\alpha q^2 xH - \frac{1}{C} q^2 x^2 \quad (j')$$

en

$$f_2(x, H) = gH^3 \cos \theta - \alpha q^2 x^2 \quad (j'')$$

Vgl. (d'''), de differentiaalvgl. voor het oppervlak van de vrije waterspiegel in geval van turbulente stroming, welke beheerst wordt door een weerstandswet van het Manning-type met constante wrijvingscoëfficiënt, is gemakkelijk om te werken tot:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{f_1(x, H)}{f_2(x, H)}, \quad (k)$$

waarin:

$$f_1(x, H) = gH^3 \sin \theta - 2\alpha q^2 xH - gn \frac{q^2 x^2}{H^{\frac{2}{3}}} \quad (k')$$

en

$$f_2(x, H) = gH^3 \cos \theta - \alpha q^2 x^2 \quad (k'')$$

De hierboven, in deel A.2 onder voorbehoud gevolgde benaderingsmethode van de integraalkromme voor het vloeistofoppervlak in geval van laminaire stroming, is naderhand gerechtvaardigd door het verloop van de leidinghelling als functie van x te

bepalen, waarvoor deze "benaderingsmethode" exact geldig is. In geval van turbulente stroming zou uitgaande van vgl. (j), resp. vgl. (k) een dergelijke benaderende oplossingsmethode gevolgd kunnen worden, met achteraf weer de bepaling van het verloop van de leidinghelling als functie van x , waarvoor deze "benaderingsmethode" exacte geldigheid bezit.

Afgezien nog van het feit dat we dan weer stuiten op de reeds genoemde aansluitingsproblemen i.v.m. de "voorgeschiedenis" van de stroming (i.e. laminaire stroming, overgang van laminaire naar turbulente stroming), komt hierbij nog dat, te oordelen naar de gedaante van de vorm voor $f_1(x,H)=0$, te weten vgl. (j') resp. vgl. (k'), het verloop van de leidinghelling als functie van x dan beslist geen kwadratische parabool meer is met de top t.p.v. de "waterscheiding" (dit is eenvoudig in te zien als we uitgaande van een assenstelsel volgens fig.IV.A-2, in vgl. (j) resp. vgl. (k), naar analogie van hetgeen geschiedt is in deel A.3, $\sin\beta$ vervangen door $\frac{dr}{dx}$ en $\cos\beta$ door 1), maar een gecompliceerder kromme van hogere orde. Overigens is het voor zekere in de praktijk voorkomende situatie niet goed voorstelbaar dat in aansluiting op een parabolisch gekromd vlak nog een vlak volgt met ingewikkelder kromming. Hierbij komt nog dat uitgaande van de op p.IV.A-6 gedane aannamen, de stroming pas turbulent is voor (zeer) grote x .

Om bovenvermelde redenen, laten we de bepaling van de critieke x -waarde waarvoor instabiliteiten optreden, in geval van turbulente stroming voor wat zij is, en gaan we niet verder op deze problematiek in, aangezien deze ons te ver zou voeren; de opzet was namelijk om een indruk van het verschijnsel te geven.

C- Resumé.

In het voorgaande hebben we gezien dat het, ingeval van regenval op een hellend vlak, onder zekere aannamen, mogelijk is om t.o.v. de "waterscheiding" de plaats te bepalen waar instabiliteiten (c.q. golfverschijnselen) zullen ontstaan. Deze critieke lengte is, uitgaande van een onder voorbehoud gedane aanname betreffende de oplossing van de differentiaalvgl., welke het profiel van het vrije wateroppervlak weergeeft, bepaald voor het laminaire stromingsgebied (deel A.2); achteraf is nagegaan hoe het verloop van de leidingbodem moet zijn om deze "benaderingsmethode" exact geldig te doen zijn (deel A.3).

Om redenen welke in het bovenstaande vermeld zijn, is de critieke lengte voor het ontstaan van instabiliteiten in geval van turbulente stroming niet bepaald (deel B).

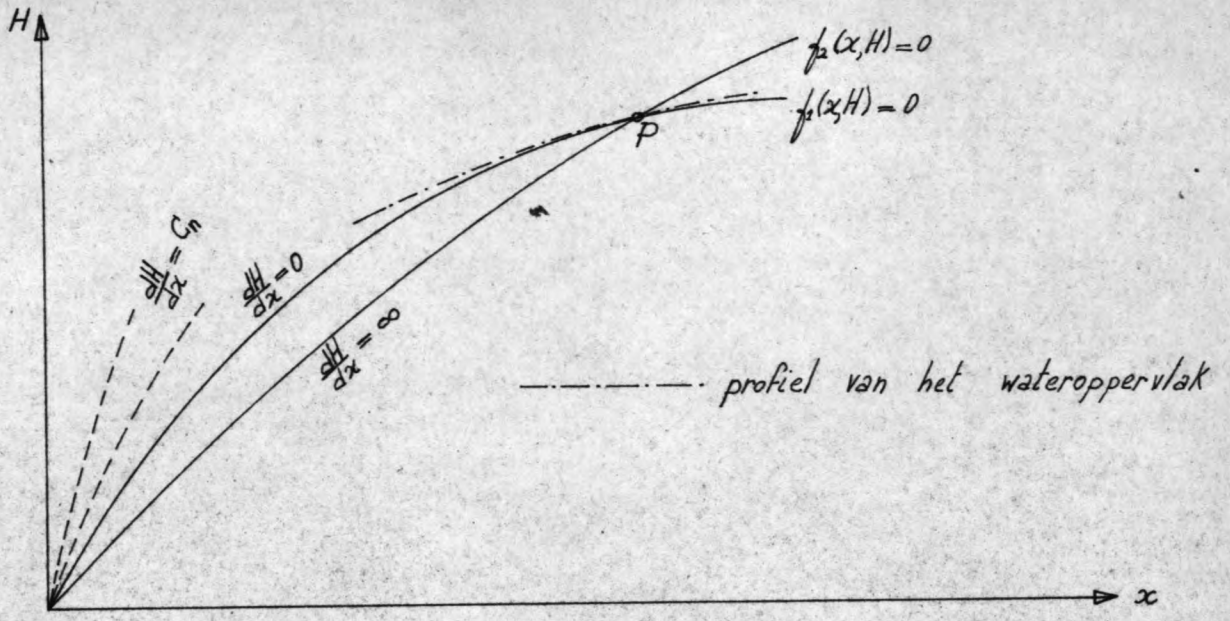


Fig. IV.A-1.

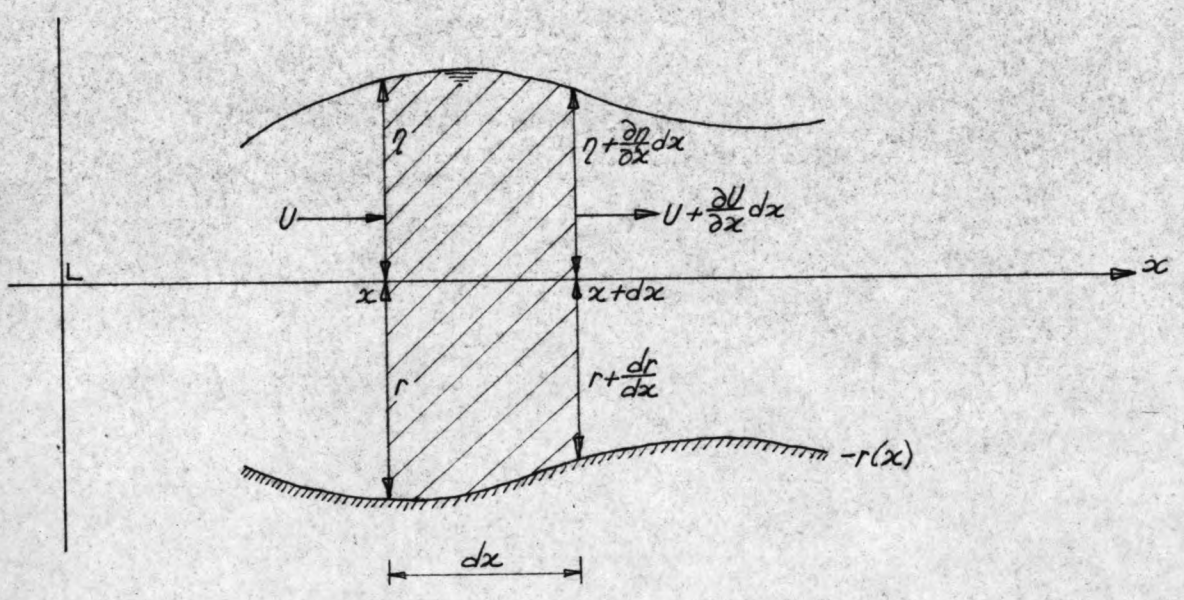


Fig. IV.A-2.

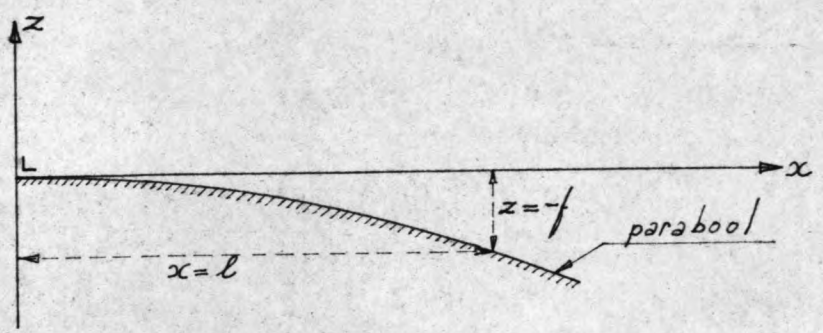


Fig. IV.A-3.

Toelichting op de figuren bij de Appendix (IV.A) van Hoofdstuk IV.

Fig. IV.A-1: Schetsmatige weergave van de krommen $f_1(x,H) = 0$ en $f_2(x,H) = 0$, enkele isoklinen (C_n) en het profiel van het wateroppervlak, voor zekere waarden van θ en q .

Fig. IV.A-2: Schets van het macro-elementje dx , t.b.v. de bepaling van de impulsvgl. in de x -richting.

Fig. IV.A-3: Het verloop van de leidinghelling als functie van x .

