Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Niet Lebesgue-meetbare verzamelingen

(Engelse titel: Non Lebesgue-measurable sets)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

BRYAN VERSENDAAL

Delft, Nederland
Juli 2018

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"Niet Lebesgue-meetbare verzamelingen"

(Engelse titel: "Non Lebesgue-measurable sets")

BRYAN VERSENDAAL

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. K.P. Hart

Overige commissieleden

Dr. J.L.A. Dubbeldam

Dr. J.G. Spandaw

Juli, 2018

Delft

Samenvatting

In dit verslag bekijken we de constructie van enkele niet-meetbare verzamelingen. We zullen ook zien waarom de verzamelingen niet meetbaar zijn. In het eerste hoofdstuk introduceren we het onderwerp en zien we welke verzamelingen we gaan bekijken, ook gaan we in op welke theorie we nodig hebben voordat we de verzamelingen kunnen gaan bekijken. Hoofdstuk 2 is geheel gewijd aan de maattheorie die we door het hele verslag gebruiken, hoewel we wel van een bepaalde voorkennis uitgaan zullen we toch belangrijke begrippen toelichten en verduidelijken. In het derde hoofstuk starten we met het bekijken van het keuzeaxioma en we zullen zien dat dit axioma aan de basis staat van veel van onze verzamelingen, daarna beginnen met de constructie van een eenvoudige niet-meetbare verzameling, de Vitali verzameling. Deze verzameling berust op de quotiëntgroep $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ en een welordering van $\mathbb{R}$. We zullen ook zien waarom deze niet-meetbaar is. Daarna zullen we stil staan bij een niet-meetbare functie, namelijk Sierpinski's functie, pas in hoofdstuk 4 zullen we zien wat er precies achter deze verzameling zit. De derde verzameling die we bekijken is Van Vleck's verzameling. De constructie is vrij ingewikkeld en kan heel verwarrend overkomen, maar uiteindelijk is de niet-meetbaarheid dan bijna een gegeven. Tot slot zien we een heel andere verzameling, namelijk de Bernstein verzameling. We zullen zien dat dit een hele andere constructie is dan de eerste drie verzamelingen en we zullen wat verzamelingenleer nodig hebben om de eindjes aan elkaar te knopen. We zullen alleen de hoognodige theorie bespreken en zullen bij enkele begrippen alleen intuïtieve duidelijkheid nodig hebben. De constructie is vrij eenvoudig als deze theorie eenmaal beschikbaar is en de niet-meetbaarheid volgt daarna vrij snel uit enkele lemma's. Nadat we de constructie van deze verzamelingen hebben bekeken, zullen we een laatste hoofdstuk wijden aan de hoeveelheid keuze die we precies nodig hebben gehad. Het is voor wiskundigen altijd de sport om met zo min mogelijk aannames de doelen te bereiken, dat geldt dus ook voor niet-meetbare verzamelingen. We zullen zien dat drie van de vier verzamelingen dezelfde soort keuze nodig hebben, namelijk een welordening van $\mathbb{R}$ en dat er één verzameling is die een zwakkere vorm van keuze gebruikt, namelijk het bestaan van een bepaald ultrafilter. We zullen dus ook zien dat geen van de verzamelingen de kracht van het keuzeaxioma nodig hebben. Tot slot zullen we nog een resultaat geven dat een zwakkere vorm van keuze gebruikt en zullen we ook een model presenteren die zorgt dat wel iedere verzameling van de reële lijn netjes meetbaar is, deze resultaten zullen niet uitgediept worden, alleen aangeboden.

Voorwoord

De scriptie die u nu gaat lezen is mijn Bachelor eindproject. Dit is een afsluitend project van de Bachelor Technische Wiskunde aan de TU Delft. In drie jaar tijd komt er onwijs veel wiskunde langs. Natuurlijk zijn er onderwerpen die je beter liggen dan andere. Dit eindproject is dus ook een mogelijkheid geweest om mij in één van deze onderwerpen te verdiepen. Mijn interesse werd getrokken door analyse, kansrekening en numerieke wiskunde. Uiteindelijk viel mijn oog dus op dit onderwerp, een literatuurstudie over niet-meetbare verzamelingen. Ik heb dit onderwerp gekozen, omdat ik aan mijzelf wilde bewijzen dat ik een pittig theoretisch onderwerp kan doorgronden en mij eigen kan maken. De moeilijkheid van dit onderwerp was het kunnen doorgronden van de artikelen, aangezien deze vaak al honderd jaar geleden gepubliceerd zijn en er dus vooral verwarring op het gebied van notatie ontstond. Dit zie ik wel vaker in de wiskunde, want vaak staat het in boeken te moeilijk geformuleerd om als beginnende lezer een idee te krijgen van de dingen die behandeld worden. Het is daarom dus ook mijn doel geweest om de stof te presenteren op een manier waarop een medestudent de stof kan begrijpen en er dus iets van op kan steken. Het is wel een heel theoretisch onderwerp en sommige constructies kunnen ingewikkeld zijn, maar ik heb alles zo duidelijk mogelijk proberen te houden. Ik vond het onwijs interessant om mij hierin te verdiepen en ik wil ook graag mijn begeleider Dr. K.P. Hart bedanken voor de hulp die hij mij geboden heeft en voor de vele artikelen die hij verzameld heeft. Aan het eind van de rit kan ik wel zeggen dat ik in mijn ogen een goede keuze heb gemaakt als het op het onderwerp aankomt en ik hoop dat u als lezer net zo veel plezier heeft als ik had met het schrijven van deze scriptie.

Inhoudsopgave

1
Introductie

In de wiskunde kom je niet uit onder het gebruik van verzamelingen. We willen altijd een getal aan de verzamelingen kunnen hangen om aan te geven hoe groot deze verzamelingen zijn. Helaas kunnen we dit niet altijd doen. Dit is heel vervelend, want dan kunnen we dus bij deze verzamelingen helemaal niets zeggen over de grootte. In eerste instantie is het bestaan van niet-meetbare verzamelingen heel vreemd en is het niet meteen duidelijk dat we aan verzamelingen geen getal kunnen hangen. We zullen zien dat zulke verzamelingen het bijproduct zijn van enkele aannames die in de wiskunde gemaakt zijn. Het is dus in de geschiedenis nooit het doel geweest om niet-meetbare verzamelingen te krijgen, maar de positieve punten van deze aannames wegen dus duidelijk af tegen de nadelen van het bestaan van niet-meetbare verzamelingen. We zullen in de constructie van de verzamelingen vaak een heel bekend axioma gebruiken en we zullen ook zien dat dit axioma, het keuzeaxioma, niet-meetbare verzamelingen impliceert. We zullen in het volgende hoofdstuk ingaan op de maattheorie, omdat we nu nog niet genoemd hebben wat meetbaar precies inhoudt, maar voordat we dit doen zullen we nog kort noemen welke verzamelingen we gaan bekijken.

1.1. Niet-meetbare verzamelingen

De bekendste stelling waarin men niet-meetbare verzamelingen tegenkomt, is de Banach-Tarski paradox. Hierin wordt een bol van straal 1 in een aantal niet-meetbare stukken geknipt. Daarna worden de stukken weer aan elkaar gelegd. Je kunt nu de stukken zo aan elkaar passen dat je twee bollen van straal 1 overhoudt. Wij zullen hier deze verzamelingen niet bespreken, maar we willen dit toch als voorbeeld noemen, zodat men ziet wat voor een gekke dingen er met niet-meetbare verzamelingen kunnen gebeuren. Wij zullen ons op andere verzamelingen richten. Eén van deze verzamelingen is de Vitali-verzameling. We zullen zien dat Vitali gebruikt maak van het keuzeaxioma om iets te bouwen dat niet meetbaar kan zijn. Daarna zullen we naar een functie van Sierpiński kijken. Ook zullen we nog stilstaan bij de verzameling van Edward van Vleck. We zullen zien dat elk van deze verzamelingen op de een of andere manier gebruik maakt van rationale getallen. Tot slot zullen we ook nog naar een heel andere constructie kijken, namelijk die van Bernstein. We zullen zien dat deze echt heel erg verschilt van de eerdere constructies. Hierbij zullen we ook enkele interessante referenties zetten naar artikelen die voor ons net te ver gaan, maar toch wel met het onderwerp te maken hebben en ook nog een nuttige waarde hebben.

Natuurlijk zullen we ons ook af aan vragen waar deze niet-meetbare verzamelingen vandaan komen. Het is natuurlijk altijd de vraag of er een situatie is waarin de wereld mooi is en we alles kunnen meten. In hoeverre is het keuzeaxioma nodig? Is dit de enige manier om niet-meetbare verzamelingen te construeren? Dit zijn vragen die we in het laatste hoofdstuk zullen behandelen en we zullen daarin ook een model zien waarin inderdaad de wereld heel mooi is en waarin wel alles mooi meetbaar is. We zullen in dit hoofdstuk ook nog een andere aanname zien waardoor niet-meetbare verzamelingen gemaakt kunnen worden, deze aanname heeft niets te maken met de aannames die we in de vier verzamelingen die wij gaan bekijken, maar verdient toch enige aandacht.

We zullen een redelijke hoeveelheid verzamelingenleer nodig hebben om alles goed te kunnen begrijpen. Natuurlijk zullen wij dit te zijner tijd allemaal netjes uitleggen en we zullen bewijzen van stellingen die ons doel voorbij gaan niet toevoegen. Vaak hebben we slechts een resultaat nodig en is de constructie van het bewijs voor ons niet interessant en zelfs eerder verwarrend. Het belangrijkste is dat we een goed idee krijgen van de constructie van enkele niet-meetbare verzamelingen en dat ook begrepen wordt waarom deze niet meetbaar zijn. Daarnaast willen we nog een beeld schetsen van enkele dingen die ook met dit onderwerp te maken hebben.

We zullen nu dus zoals eerder al vermeld naar de nodige maattheorie gaan kijken, waarbij we zo compact mogelijk proberen te blijven.

2

Maattheorie

We zullen gaan kijken naar niet-meetbare verzamelingen. Voordat we dit echter kunnen doen, moeten we wel een maat hebben en moeten we weten wanneer iets wél meetbaar is. In dit hoofdstuk zullen we dus wat nodige theorie presenteren en uitleggen. We zullen namelijk veelvuldig gebruik maken van de terminologie die hier geïntroduceerd gaat worden. We zullen eerst kijken naar de wensen van Lebesgue en wat hij van zijn maat eiste. In dit hoofdstuk zal alleen de benodigde theorie besproken worden, dit zal dus niet alle basisbegrippen van maatheorie behandelen.
Voor de theorie die we in deze sectie gaan bespreken hebben we het werk *Principles of real analysis, 3rd edition* van C.D. Aliprantis en O. Burkinshaw (zie [1]). De definities die we zullen behandelen zijn hierin terug te vinden. We zullen dus ook dezelfde notatie hanteren en zullen deze natuurlijk toelichten. Een maat wordt gebruikt om aan een verzameling een getal te kunnen hangen, om de 'grootte' weer te geven.

2.1. Lebesgue-maat

Lebesgue wilde de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ kunnen meten en dus een getal groter gelijk nul, de maat genoemd, aan verzamelingen hangen en wenste drie dingen:

1. Er bestaan verzamelingen met maat groter dan nul,
2. twee congruente verzamelingen hebben dezelfde maat,
3. de maat van de eindige vereniging of aftelbare vereniging van paarsgewijs disjuncte verzamelingen is gelijk aan de som van de afzonderlijke maten.

Een eerste poging was de uitwendige Lebesque-maat, deze is als volgt gedefinieerd:

Definitie 2.1.1. Laat $A \subset \mathbb{R}$, dan is de uitwendige Lebesgue-maat van A gedefinieerd door

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum |I_i| : I_i \text{ zijn aftelbaar veel open intervallen en } A \subset \bigcup I_i\} \tag{2.1}$$

Hierbij is $|I_i|$ de lengte van het interval. We nemen dus het infimum over alle overdekkingen van A door open intervallen.

Een definitie van meetbare verzamelingen maakt gebruik van deze uitwendige maat. Vaak zullen wij deze uitwendige maat gebruiken om juist aan te tonen dat verzamelingen niet meetbaar kunnen zijn.

Definitie 2.1.2. Een verzameling A is meetbaar als voor alle $\epsilon > 0$ een gesloten verzameling F en een open verzameling G bestaan zodanig dat $F \subset A \subset G$ en $\lambda^*(G-F) < \epsilon$. Als A meetbaar is dan definiëren we $\lambda(A) = \lambda^*(A)$.

We definiëren ook wat een nulverzameling is.

Definitie 2.1.3. Een *nulverzameling* is een verzameling met uitwendige maat nul.

Om een idee te krijgen hoe de Lebesgue-maat werkt, zullen we de volgende stelling bekijken:

Stelling 2.1.1. *Laat $I \in \mathbb{R}$ een interval van de vorm $[a,b),(a,b],(a,b)$ of $[a,b]$ met $a < b$. Deze vormen van intervallen zijn meetbaar en de Lebesgue-maat van I is $\lambda(I) = |b-a|$.*

De Lebesgue-maat is dus een uitbreiding van de notie van lengte. We kunnen natuurlijk ook de maat van een vereniging van intervallen uitrekenen. We zullen hier enkele voorbeelden neerzetten om duidelijk idee te geven van de Lebesgue-maat. Merk op dat de Lebesgue-maat translatie invariant is.

Voorbeeld 2.1.1. *We zullen nu dus enkele voorbeelden bekijken:*

1. $\lambda([0,3]) = |3-0| = 3$.
2. $\lambda([3,6]) = |6-3| = 3$.
3. $\lambda((0,6] \cup [8,9) \cup [13,15)) = \lambda((0,6]) + \lambda([8,9)) + \lambda([13,15)) = |6-0| + |9-8| + |15-13| = 6+1+2 = 9$.

De Lebesgue-maat is dus een fijn gereedschap om mee te werken en is heel intuïtief. Natuurlijk hebben we hier alleen de Lebesgue-maat besproken voor $\mathbb{R}$. Deze theorie is gemakkelijk uit te breiden naar $\mathbb{R}^n$, maar dit zullen wij niet nodig hebben.

De volgende propositie zullen we niet bewijzen, het bewijs kan gevonden worden in [1]. We zullen de volgende dingen die we hier laten zien vooral gebruiken bij de laatste verzameling die we gaan bespreken, de Bernstein-verzameling.

Propositie 2.1.1.

1. *Als A meetbaar is, dan is A^c ook meetbaar.*
2. *Ieder interval en iedere nulverzameling is meetbaar.*
3. *Voor ieder disjuncte rij van meetbare verzamelingen A_i is de verzameling $A = \bigcup A_i$ meetbaar en geldt $\lambda(A) = \sum \lambda(A_i)$.*

We zullen twee nieuwe verzamelingen definiëren die we nodig gaan hebben om enkele dingen te bewijzen.

Definitie 2.1.4. Een F_σ verzameling is een aftelbare vereniging van gesloten verzamelingen en een G_σ verzameling is een aftelbare doorsnede van open verzamelingen.

Met deze definitie kunnen de volgende stelling bekijken.

Stelling 2.1.2. *Een verzameling A is meetbaar dan en slechts dan als we deze kunnen schrijven als een F_σ verzameling plus een nulverzameling of als een G_σ verzameling min een nulverzameling.*

We zullen het bewijs aanhouden, zoals uit het artikel van Cheng Hao(zie [5]).

Bewijs. A is meetbaar, dus voor iedere n bestaat er een gesloten verzameling F_n en een open verzameling G_n zodanig dat $F_n \subset A \subset G_n$ en $\lambda^*(G_n - F_n) < \frac{1}{n}$. Laat nu $F = \bigcup F_n$, $G = \bigcap G_n$, $N = A - F$ en $M = G - A$. Nu hebben we dat F een F_σ verzameling en G een G_σ verzameling is. We zien ook dat N en M nulverzamelingen zijn, want voor iedere n hebben we $N \cup M \subset G_n - F_n$ en $\lambda^*(N \cup M) < \lambda^*(G_n - F_n) < \frac{1}{n}$. Nu nog even omschrijven geeft ons $A = F \cup N = G - M$ en daarmee hebben we A in de gewenste vorm geschreven.
Stel nu dat A te schrijven is als een F_σ verzameling plus een nulverzameling of als een G_σ verzameling min een nulverzameling. We weten dat zowel $F_\sigma \cup N$ als $G_\sigma - M$ meetbaar zijn. Dus dan volgt dat ook A meetbaar is. □

We kunnen hieruit meteen een gevolg afleiden.

Gevolg 2.1.1. *Als A meetbaar is, dan is $\lambda(A) = \inf\{\lambda(G) : A \subset G, G \text{ open}\} = \sup\{\lambda(F) : F \subset A, F \text{ gesloten}\}$. In het bijzonder zien we als elke gesloten deelverzameling van A een nulverzameling is, dat ook A een nulverzameling is.*

We zien dat dit gevolg meteen volgt uit het bewijs van de vorige stelling.

3

Niet-meetbare verzamelingen

We gaan in dit hoofdstuk kijken naar de constructie van enkele niet-meetbare verzamelingen. Natuurlijk zullen wij na de constructie ook bespreken waarom de geconstrueerde verzameling niet meetbaar is, soms zullen we hier extra theorie voor moeten bespreken en bewijzen. We beginnen met de introductie van het keuzeaxioma. Dit axioma en vooral het gevolg zullen we, soms ongemerkt, bij bijna iedere constructie gebruiken. Het stelt namelijk, zoals de naam al zegt, ons in staat om een keuze te kunnen maken en door bepaalde keuzes kunnen we problematische verzamelingen construeren.

3.1. Keuzeaxioma

Het keuzeaxioma is het negende axioma van Zermelo-Fraenkel. In verzamelingenleer wordt verschil gemaakt tussen ZF en ZFC. Waarbij ZF de axioma's zijn zonder het keuze axioma en ZFC de axioma's met het keuze axioma. Het keuzeaxioma zegt het volgende:

Axioma 1. *Iedere familie van niet-lege verzamelingen heeft een keuzefunctie.*

In formele wiskunde betekent dit dus

$$\forall X[\emptyset \notin X \Rightarrow \exists f : X \to \bigcup X \quad \forall A \in X(f(A) \in A)] \tag{3.1}$$

Er is een belangrijke principe dat equivalent is aan dit axioma, namelijk het welordening principe Voordat we dit principe bekijken, zullen we eerst (wel)ordening introduceren.

Definitie 3.1.1. Een relatie $<$ op een verzameling A is een *partiële ordening* van A als

1. $a \not< a$ voor elke $a \in A$,
2. als $a < b$ en $b < c$, dan $a < c$.

$(A, <)$ heet een partieel geordende verzameling. Een partiële ordening $<$ van A is een *lineaire ordening* als ook geldt

3. $a < b$ of $a = b$ of $b < a$ voor alle $a, b \in A$.

Definitie 3.1.2. Een lineaire ordening $<$ van een verzameling A is een *welordening* als iedere niet-lege deelverzameling van A een kleinste element heeft.

We kunnen nu het principe bekijken.

Stelling 3.1.1. ***Welordeningsprincipe*** *Iedere verzameling heeft een welordening. (zie [6, Stelling 5.1]).*

Dit betekent dus dat we $\mathbb{R}$ ook kunnen welordenen. Als we de Bernstein verzameling behandelen, zullen we nog dieper in gaan op verzamelingenleer. We zullen er altijd vanuit gaan dat we een welordening voor $\mathbb{R}$ hebben en dat we dus altijd het keuzeaxioma kunnen gebruiken.

3.2. Vitali's verzameling

Dit is de eerste niet-meetbare verzameling die we gaan bekijken. We zullen eerst de constructie van de verzameling bespreken en daarna zullen we bekijken waarom de verzameling niet-meetbaar is.

3.2.1. Constructie

Informeel

We bekijken het interval $[0,1]$. We gaan deze zo opdelen dat we verzamelingen maken die niet-meetbaar zijn. Eerst zullen we heel kort een intuïtieve schets geven, voordat we de precieze wiskunde bekijken. We gaan de elementen van het interval onderverdelen in groepen . Twee elementen komen in dezelfde groep als ze een rationaal getal schelen. Daarna kiezen we uit elke groep één element en stoppen we die elementen samen in één verzameling en dit zal dan de Vitali verzameling worden. Het idee van de constructie is dus vrij simpel, maar heeft toch wel enkele subtiliteiten.

Formeel

We beginnen met het definiëren van een equivalentierelatie voor alle $x \in \mathbb{R}$ zodanig dat:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \tag{3.2}$$

Het is eenvoudig aan te tonen dat dit inderdaad een equivalentierelatie definieert en we zullen dat hier dus ook niet laten zien. Laat A_x de equivalentieklasse van het element x zijn. Dit betekent het volgende:

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\} \tag{3.3}$$

Merk op dat A_{x_i} en A_{x_j} disjunct zijn of geheel samenvallen. Sterker nog, de oplettende lezer zal zien dat de equivalentieklassen element zijn uit de additieve quotiëntgroep $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Deze groep bestaat, omdat $\mathbb{Q}$ een normale ondergroep is van $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ bestaat eigenlijk uit $\mathbb{Q}$ en disjuct verschoven kopieën van $\mathbb{Q}$, want elk element uit $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ is van de vorm $\mathbb{Q}+r$, met $r \in \mathbb{R}$. Ieder element van $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ doorsnijdt $[0,1]$ en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ partitioneert $\mathbb{R}$. We gebruiken nu het keuzeaxioma om uit elk element van $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \cap [0,1]$ een representant te kiezen. Deze representanten vormen samen de verzameling $V \subset [0,1]$. De verzameling V is de Vitali-verzameling.

We hebben de verzameling V gemaakt zodanig dat er voor elke $x \in \mathbb{R}$ een unieke $y \in V$ en $r \in \mathbb{Q}$ zijn zodanig dat $x = y + r$. Laat nu :

$$V_r = \{y + r : y \in V\} \tag{3.4}$$

voor alle $r \in \mathbb{Q}$.
Merk op dat we $\mathbb{R}$ nu dus opgedeeld hebben in aftelbaar veel disjuncte verzamelingen. Dus $\mathbb{R} = \bigcup\{V_r : r \in \mathbb{Q}\}$.

3.2.2. Niet-meetbaarheid

We gaan nu bekijken waarom de Vitaliverzameling niet-meetbaar is. Stel nu dat de Vitaliverzameling wel meetbaar is. We onderscheiden twee gevallen, namelijk $\lambda(V) = 0$ en $\lambda(V) > 0$. We bekijken eerst geval 1.

Laat $\lambda(V) = 0$.
We weten dat de Lebesgue-maat translatie invariant is, dus dan geldt:

$$\lambda(V) = \lambda(V_r) = 0$$

voor alle $r \in \mathbb{Q}$.

Maar dan volgt, gebruikmakende van $\mathbb{R} = \bigcup\{V_r : r \in \mathbb{Q}\}$, het volgende:

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup\{V_r : r \in \mathbb{Q}\}) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \lambda(V_r) = 0$$

We maken gebruik van de σ-additiviteit van de maat, dit mogen we doen omdat de V_r disjunct zijn, maar de uitkomst kan niet mogelijk zijn aangezien $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$. Dus $\lambda(V) \neq 0$.

Stel nu dat $\lambda(V) > 0$. Om te zien dat dit ook niet kan, zullen wij naar de volgende verzameling kijken :

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} V_r$$

Aangezien we weten dat $V_r \subset [0,1]$, weten we ook dat $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} V_r$ bevat zit in het interval $[0,2]$. Er geldt dat $\lambda([0,2]) = 2$ en dus

$$\lambda([0,2]) \geq \lambda\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} V_r\right) = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} V_r = \infty.$$

We zien dat ook dit niet mogelijk is, dus concluderen we dat de Vitaliverzameling niet-meetbaar is. Vitali trok de consclusie dat de meetbaarheid van verzameling niet arm in arm kan gaan met het kunnen welordenen van $\mathbb{R}$. Als we alleen maar meetbare verzamelingen willen hebben, dan moeten we het keuzeaxioma niet toelaten. Het moge nu duidelijk zijn waarom dit axioma altijd tegenstanders en voorstanders blijft houden. De volgende verzameling die we gaan bekijken maakt ook gebruik van rationale verschuiving, maar heeft toch een andere constructie dan de Vitaliverzameling.

3.3. Sierpiński's functie

Sierpiński kwam met een functie die niet meetbaar was. Ook hij gebruikte op een bepaalde manier rationale getallen, maar voordat we de niet-meetbaarheid kunnen bekijken zullen we eerst de constructie van de functie en enkele definities moeten bekijken.

Definitie 3.3.1. $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathbb{R}$ is additief als $f(A\cup B) = f(A) + f(B)$ als $A \cap B = \emptyset$.

Definitie 3.3.2. $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathbb{R}$ is σ-additief als voor iedere aftelbare disjuncte vereniging van verzamelingen, noem deze $\bigcup A_i$, geldt dat $f(\bigcup A_i) = \sum f(A_i)$.

Een voorbeeld van een σ-additieve functie is de Lebesgue-maat op een deel van $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

3.3.1. Constructie

We bekijken de natuurlijke getallen. Men vroeg zich af of er een niet-negatieve additieve, maar niet σ-additieve functie bestond gedefinieerd op de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ die alleen de waarden 0 en 1 aanneemt. Sierpiński heeft laten zien dat als een dergelijke functie bestaat er ook een niet-meetbare functie is die alleen de waarden 0 en 1 aanneemt. Wij gaan nu de constructie van deze functie bekijken.

Laat f een additieve functie zijn,die gedefinieerd is op de machtsverzameling van $\mathbb{N}$, die alleen de waarden 0 en 1 aanneemt. De functie mag niet σ-additief zijn. Het bestaan van zo'n functie is aangetoond door Tarski (zie [12]).

We gaan eerst enkele eigenschappen van deze functie aantonen, omdat we deze nodig zullen hebben. We tonen als eerst aan dat

$$f(\{n\}) = 0 \quad \text{voor} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \ldots$$

waarbij $\{n\}$ een eenpuntsverzameling is.

Stel dat er een $p \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor geldt $f(\{p\}) \neq 0$, dan moet gelden dat $f(\{p\}) = 1$, want zo is de functie gedefinieerd. Laat $E \subset \mathbb{N}$ een verzameling zijn waar p in zit. Dan hebben we, gebruikmakende van de additiviteit, dat

$$f(E) = f(E - \{p\}) + f(\{p\}),$$

Dus dan hebben we dat $f(E) = 1$. Stel nu dat we een verzameling $E \subset \mathbb{N}$ hebben waar p niet in zit. We maken weer gebruik van de additiviteit van de functie en komen dan op het volgende uit:

$$f(E + \{p\}) = f(E) + f(\{p\})$$

en aangezien we hebben dat $f(\{p\}) = 1$ volgt hieruit dat $f(E) = 0$. We zien dus dat $f(E)$ gelijk aan 1 is als $p \in E$ en dat $f(E)$ gelijk is aan 0 als $p \notin E$. Maar dan hebben we duidelijk een functie die σ-additief is en dit is in tegenspraak met de aannames van de functie. Dit kunnen we snel zien, aangezien als we aftelbaar veel disjuncte verzamelingen hebben, in hoogstens één van deze verzamelingen het element p zit en krijgen we hooguit de waarde 1. Als in geen van de aftelbaar veel verzamelingen p zit, dan kunnen we deze verzamelingen verenigen en levert ons dit netjes de gevraagde 0 op. Dus geldt inderdaad dat

$$f(\{n\}) = 0 \quad \text{voor} \quad n = 1, 2, 3, ..., ...$$

en hebben we hiermee de eerste eigenschap aangetoond.

We bekijken nu $f(\mathbb{N})$. Stel dat geldt $f(\mathbb{N}) = 0$, dan geldt voor alle $E \subset \mathbb{N}$ dat $f(E) = 0$. Nu komen we weer op een tegenspraak uit, want als $f(E) = 0$ voor alle $E \subset \mathbb{N}$ dan is de functie weer σ-additief, dit is snel te zien uit het feit dat iedere verzameling 0 opleverd, dus we kunnen aftelbaar veel verzamelingen optellen en de uitkomst blijft 0. Dus moet wel gelden dat $f(\mathbb{N}) = 1$.

We kunnen nu de niet-meetbare functie definiëren. Deze functie zullen we ϕ noemen en is gedefinieerd op de reëele getallen. We kunnen ieder reëel getal uitdrukken als een binaire ontwikkeling, het binaire stelsel gebruikt als grondtal 2, waar ons decimaal stelsel als grondtal 10 gebruikt. Ieder getal is dus ook uit te drukken in een binair getal. Ook zullen we nog dyadische breuken gebruiken, waarbij dyadische breuken op de volgende manier zijn gedefinieerd:

Definitie 3.3.3. Een getal $q \in \mathbb{Q}$ heet dyadisch, als we deze kunnen schrijven als $\frac{m}{2^n}$, met $m, n \in \mathbb{N}$ en waarbij we de breuk niet verder kunnen vereenvoudigen.

Deze breuken zijn heel interessant, aangezien dit de enige breuken zijn die een eindige binaire ontwikkeling hebben. Sierpiński ontwikkelde dus ieder reëel getal als een binair getal, maar hij was echter alleen geïnteresseerd in de locatie van de 1'en en niet de 0'en.

Later zullen we wel overstappen een op gemakkelijkere notatie, maar dit was de ontwikkeling die Sierpiński bedacht had:

$$x = G(x) + \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_3}} + ... \tag{3.5}$$

Waarbij $G(x)$ het grootste gehele getal kleiner dan x voorstelt, dus bijvoorbeeld $G(\pi) = 3$. We weten dat een dergelijke oneindige ontwikkeling bestaat, omdat de dyadische breuken dicht liggen in $\mathbb{R}$. Later zullen we de notatie voor ons zelf vergemakkelijken. We definiëren ϕ nu als volgt:

$$\phi(x) = f(\{n_1, n_2, n_3, ...\}).$$

Wegens de dichtheid weten we ook dat de functie goed gedefinieerd is. Dit is dus de constructie die Sierpiński gebruikte om een functie te bouwen die niet meetbaar was. We zullen nu gaan kijken waarom de functie, die op deze manier geconstrueerd is, niet meetbaar is.

3.3.2. Niet-meetbaarheid

We weten dat de functie maar twee waarden aan kan nemen, namelijk 0 en 1. Dus stel nu dat de functie wel meetbaar zou zijn. Dat betekent dan dat de verzameling

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = 0\} \tag{3.6}$$

en ook de verzameling

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = 1\} \tag{3.7}$$

allebei meetbaar moeten zijn. Duidelijk mag zijn dat $S_0 \bigcup S_1 = \mathbb{R}$. Dus moet tenminste één van de verzamelingen wel een maat groter dan 0 hebben. We gaan naar een tegenspraak toewerken.
Laat $x \in \mathbb{R}$ een getal zijn dat een ontwikkeling heeft zoals we deze definiëerden in (3.5). Nu halen we de n_i uit $\mathbb{N}$, ofwel we bekijken de verzameling

$$\{m_1, m_2, m_3, ..\} = \mathbb{N} - \{n_1, n_2, n_3, ...\}$$

De rij m_i kan eindig of oneindig zijn. Sierpiński gebruikte de gevonden verzameling om een nieuw getal te maken, namelijk

$$y = -G(x) + \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \frac{1}{2^{m_3}} + \frac{1}{2^{m_4}} + \cdots$$

Nu zien we iets interessants als we x en y optellen. We krijgen het volgende:

$$x + y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Dus vinden we dat $y = 1 - x$.
Als y nu een oneindige ontwikkeling heeft, dan volgt $\phi(y) = f(\{m_1, m_2, m_3, ...\})$. We weten ook dat geldt dat $\phi(x) = f(\{n_1, n_2, n_3, ...\})$. We hebben ook laten zien dat $f(\mathbb{N}) = 1$ en tot slot weten we ook

$$\{n_1, n_2, n_3, ...\} \cup \{m_1, m_2, m_3, ...\} = \mathbb{N}.$$

We weten dat de functie f additief is, dus dan krijgen we het volgende:

$$1 = f(\mathbb{N}) = f(\{n_1, n_2, n_3, ...\}) + f(\{m_1, m_2, m_3, ...\}) = \phi(x) + \phi(y),$$

ofwel $\phi(y) = 1 - \phi(x)$.
Dus als $x \in \mathbb{R}$ en $1 - x$ geen eindige binaire ontwikkeling hebben dan geldt

$$\phi(1-x) = 1 - \phi(x).$$

We zien nu dus als $\phi(x) = 0$ dat $\phi(1-x) = 1$ en als $\phi(x) = 1$ dat dan natuurlijk $\phi(1-x) = 0$.
We moeten wel rekening houden met de punten die wel een eindige binaire ontwikkeling hebben. Om dit in te zien zullen we nu en iets gebruiksvriendelijkere notatie introduceren voor de reëele getallen, we zullen voor de decimale ontwikkeling een binaire ontwikkeling gebruiken. We zullen dit illustreren met een simpel voorbeeld.

Voorbeeld 3.3.1. *Laat $x = \frac{1}{4}$. Dan representeren we dit op de volgende manier met een oneindige ontwikkeling:* $\frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ... = 0.001111...$
Hierbij corresponderen de posities van de 1'en dus met de n_i uit (3.5), ofwel representeert het de ontwikkeling in binaire vorm.

We zullen deze notatie gebruiken om te laten zien dat we bij getallen met een eindige ontwikkeling problemen krijgen. We zullen dit eerst met een getallenvoorbeeld doen. Laat voor het gemak weer $x = \frac{1}{4}$. We kunnen ieder getal uitdrukken in een oneindige ontwikkeling, dus ook $\frac{1}{4}$, er geldt $\frac{1}{4} = 0.001111...$ en dus geldt er dat $\phi(\frac{1}{4}) = f(\{3,4,5,6,...\}) = 1$. We kijken nu naar $1 - x = \frac{3}{4}$. We kunnen dit als volgt opschrijven:

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 1.000.. - 0.0011111.... = 0.11 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Dus nu zien we $\phi(\frac{3}{4}) = f(\{1,2\}) = 0$. Dit is niet goed gedefinieerd, want de functie ϕ maakt gebruik van **oneindige** ontwikkelingen! We kunnen $\frac{3}{4}$ ook op een andere manier representeren, namelijk door $\frac{1}{4}$ te vervangen door zijn oneindige ontwikkeling, namelijk

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.10111111...$$

en dus hebben we dan $\phi(\frac{3}{4}) = f(\{1,3,4,5,..\}) = 1$. We hebben nu dus **niet** de eigenschap dat $\phi(1-x) = 1 - \phi(x)$. We zullen dus voorzichtig om moeten springen met de getallen die een eindige representatie hebben. Gelukkig voor ons zijn er maar aftelbaar veel punten met een eindige binaire representatie. Dit waren namelijk precies de dyadische breuken zelf, want dit zijn de getallen die een eindige binaire ontwikkeling hebben.

Als we naar het interval $[0,1]$ kijken, zien we dat, op aftelbaar veel punten na, de verzamelingen (3.6) en (3.7) symmetrisch zijn rond het punt $\frac{1}{2}$. We gooien alleen de dyadische breuken uit het interval, dit zijn er inderdaad hoogstens aftelbaar veel. Dit verandert niets aan de maat van het interval, want een verzameling van aftelbaar veel punten heeft maat 0. Aangezien de verzamelingen symmetrisch zijn, moeten beide verzamelingen wel een positieve maat hebben, want als één van de verzamelingen maat 0 heeft, dan hebben ze allebei deze maat wegens symmetrie en dit is niet mogelijk omdat ze gezamelijk het hele interval bevatten en dus samen maat 1 moeten hebben.

Laat r nu een **eindige** binaire breukontwikkeling zijn. We bekijken nu $x+r$, waarbij x nog steeds een oneindige dyadische ontwikkeling heeft. Merk op dat x en $x+r$ maar eindig veel termen verschillen. We weten dat $f(A) = 0$ als A een eenpuntsverzameling is. Vanwege additiviteit is $f(A)$ dus ook 0 als A een verzameling is met eindig veel punten. Dus nu volgt dat $f(A) = f(B)$ als de verzamelingen A en B slechts eindig veel punten van elkaar verschillen. Door de manier waarop de functie ϕ is gedefinieerd geldt dus

$$\phi(x) = \phi(x+r)$$

We zien nu dat als we de elementen uit de verzamelingen (3.6) en (3.7) verschuiven over een afstand, die uit te drukken is als een eindige dyadische breukontwikkeling, we de verzamelingen op zichzelf afbeelden.
We gaan nu gebruik maken van het feit dat de dyadische breuken dicht liggen in $\mathbb{R}$. We kunnen nu namelijk de verzameling (3.6) nu over het hele interval $[0,1]$ schuiven, aangezien $\phi(x) = \phi(x+r)$. We gebruiken twee eigenschappen, namelijk:

1. voor alle $r < 1$ bestaat er een interval I zodanig dat geldt: $\lambda(S_0 \cap I) > r|I|$,

2. $\lambda(S_0 \cap I) = \lambda(S_0)|I|$.

We gebruiken intervallen met dyadische breuken als eindpunten, bijvoorbeeld $[0, \frac{1}{2}]$. Dus $\lambda(S_0) = 1$. Op dezelfde wijze vinden we dat $\lambda(S_1) = 1$. Dit resulteert echter in een tegenspraak, aangezien beide verzamelingen duidelijk disjunct zijn in het interval $[0,1]$ en dus nooit allebei de maat van het gehele interval kunnen hebben.
Hiermee hebben we dus laten zien dat de functie, geconstrueerd door Sierpiński, niet meetbaar is.

De volgende verzameling die we gaan bekijken is de verzameling geconstrueerd door Edward van Vleck. Ook hier zullen we de dyadische breuken terug zien en zullen we ook op een bepaalde manier gebruik maken van een rationale verschuiving.

3.4. Van Vleck verzameling

In 1908 construeerde Edward van Vleck, naar eigen zeggen, een vrij eenvoudige niet-meetbare verzameling. Deze werd verkregen door het eenheidinterval op te delen in twee, op elkaar af te beelden, verzamelingen met uitwendige maat 1. Hierbij moesten wel aftelbaar veel punten uit het eenheidsinterval verwijderd worden. De constructie kan wat verwarrend overkomen. Om het toch zo duidelijk mogelijk te maken zullen we eerst aantonen als we een bepaalde verzameling kunnen maken dat deze dan ook niet meetbaar is en daarna zullen we ook echt de verzamelingen construeren. Tot slot zullen we van die verzamelingen, door eerdere eigenschappen te controleren meteen zien dat deze niet meetbaar zijn.

3.4.1. Constructie voor niet-meetbaarheid

We zullen dezelfde notatie aanhouden als die van Van Vleck. Laat daartoe S een willekeurige deelverzameling van het eenheidsinterval zijn en laat C het complement zijn. We zullen hier altijd naar de uitwendige maat van de verzamelingen kijken, dus $\lambda^*(S)$ en $\lambda^*(C)$. Als we dus S overdekken met disjuncte intervallen, dan zullen de eindpunten van deze intervallen in C liggen. We zullen nu een extra conditie op de verzamelingen S en C leggen, dit zullen we, net als Van Vleck, het homogene karakter noemen. De eerste definitie die door Van Vleck gegeven werd was de volgende:

Definitie 3.4.1. Een verzameling $A \subset [0,1]$ heeft een homogeen karakter als voor ieder willekeurig deelinterval $[a,b]$ er een deelinterval $[c,d]$ met lengte willekeurig dicht bij die van $[a,b]$ bestaat, zodanig dat $A \cap [c,d]$ meetkundig gelijkvormig is met A. Dit betekent dat:

$$x \to c + (d-c)x$$

A op $A \cap [c,d]$ afbeeldt.

Dit was echter nog te streng en daarom gebruikte hij uiteindelijk een afgezwakte variant van de definitie.

Definitie 3.4.2. Een verzameling $A \subset [0,1]$ heeft een homogeen karakter als, gegeven een willekeurig deelinterval $[a,b]$, er een eindige vereniging van deelintervallen I_ν van $[a,b]$ bestaat, die hoogstens hun eindpunten gemeenschappelijk hebben met elkaar, met totale lengte willekeurig dichtbij $b-a$ zodanig dat A meetkundig gelijkvormig is met $I_\nu \cap A$ voor elke ν.

Deze definities zijn een hele mond vol, maar de eis die we hiermee op de verzamelingen leggen, zorgt ervoor dat we een niet-meetbare constructie kunnen leveren. Het komt er op neer dat we in elk willekeurig interval 'kleinere' versies van de verzameling terug kunnen vinden.

Met de restrictie die we nu opgelegd hebben, kunnen we laten zien dat S en C meetbaar zijn en dat één verzameling maat 0 heeft, of ze zijn beide niet-meetbaar en hebben uitwendige maat 1. Om dit te laten zien, moeten we drie gevallen onderscheiden. Stel daartoe eerst dat $\lambda^*(S) < 1$.

We overdekken S met een disjuncte familie van intervallen I_n zó dat $\sum |I_n| = 1 - \Sigma < 1$. De punten die niet in het inwendige van deze overdekking liggen, vormen een deelverzameling van C, deze noemen we C^1. Dan hebben we $\lambda(C^1) = \Sigma$. Nu gaan we de eerste overdekking bekijken.

Kies $\epsilon > 0$ willekeurig vast. Wegens het homogene karakter kunnen we nu in elk interval van de eerste overdekking een deelinterval, of eindige vereniging van deelintervallen, vinden met (totale) lengte dat minder dan ϵ verschilt, relatief ten opzichte van grotere intervalle, met de lengte van het interval zodanig dat de doorsnede met C meetkundig gelijkvormig is met C. Nu kunnen we in dit deelinterval, of in ieder interval van de eindige vereniging van deelintervallen, een verzameling van intervallen selecteren zodanig dat deze meetkundig gelijkvormig zijn met onze eerste overdekking van intervallen. Deze intervallen hebben hun eindpunten ook weer in C liggen. Als we nu in een deelinterval kijken waarin we een gelijkvormige verzameling van de eerste overdekking hebben gemaakt, dan zien we dat de punten die buiten het inwendige van deze "verkleinde"eerste overdekking liggen een deelverzameling C^* vormen die meetkundig gelijkvormig is aan C^1, maar wel disjunct is met C^1.
Als we nu ieder interval van de eerste overdekking van intervallen zo behandelen, dan krijgen we een tweede verzameling van intervallen, die elk binnen één van de intervallen uit de eerste overdekking liggen. De maat van deze verzameling is dan kleiner dan $(1-\epsilon)(1-\Sigma)^2$. Om dit te zien kijken we naar wat we precies geconstrueerd hebben. We startten met een eerste overdekking met totale lengte van $1-\Sigma$. Hierin legde we een vereniging van intervallen, waarvan de totale lengte minder dan ϵ verschilde van de lengte van de overdekking.

De maat van de verzameling wordt dan kleiner, deze wordt namelijk $(1-\epsilon)(1-\Sigma)$. Herinner dat we hierbij ϵ vast hebben gekozen. Tot slot leggen we de verkleinde versie van de eerste overdekking in ieder van de intervallen, wat ons dan de laatste $1-\Sigma$ term geeft . In ieder interval van de eerste overdekking hadden we een verzameling C^* die gelijkvormig was aan C^1, maar wel disjunct was met deze verzameling. Als we nu alle C^* verenigen krijgen we dus ook een verzameling C^2 disjunct aan C^1. We hebben dus

$$\lambda(\bigcup C^*) = \lambda(C^2) = (1-\epsilon)(1-\Sigma)\Sigma$$

Nu kunnen we dit blijven herhalen voor de tweede verzameling intervallen die gelijkvormig waren met de eerste overdekking. Dan krijgen we een verzameling C^3 enzovoort. Ieder van deze verzamelingen zijn disjunct en als we ze verenigen dan is de gezamelijke maat het volgende :

$$\lambda(C_\epsilon^{som}) = \Sigma + (1-\epsilon)(1-\Sigma)\Sigma + (1-\epsilon)^2(1-\Sigma)^2\Sigma + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\epsilon)^k(1-\Sigma)^k\Sigma = \frac{\Sigma}{\Sigma+\epsilon(1-\Sigma)}$$

Herinner dat we $\epsilon > 0$ willekeurig vast hadden gekozen. Dus als we nu ϵ naar 0 laten gaan, dan krijgen we

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Sigma}{\Sigma+\epsilon(1-\Sigma)} = 1$$

en dan zien we dat deelverzameling C_ϵ^{som} van C een maat van 1 heeft als $\epsilon \to 0$. We weten dat $\lambda(C) \geq \lambda(^{som}_{\epsilon})$ voor alle $\epsilon > 0$. Dus $\lambda(C) \geq 1$, maar aangezien $C \subset [0,1]$ volgt $\lambda(C) = 1$. Dus dan hebben we ook dat $\lambda(C^c) = \lambda(S) = 0$.

Stel nu $\lambda^*(C) < 1$. De stappen die we doen blijven precies hetzelfde als we hiernet besproken hebben, maar moeten S en C verwisselt worden. Wel moeten de eindpunten 0 en 1 bij S toegevoegd worden. Het gevolg hiervan is dat we in iedere iteratie dus ook de eindpunten die corresponderen met 0 en 1 toe moeten voegen aan S. Dit zijn gelukkig maar aftelbaar veel punten en veranderen dus niets aan de maat.

Tot slot, stel dat $\lambda^*(S) = \lambda^*(C) = 1$, dan kunnen beide verzamelingen duidelijk niet meetbaar zijn, omdat de som van hun uitwendige maten groter is dan de maat van het eenheidsinterval. Nu hebben we dus laten zien dat òf beide verzamelingen zijn meetbaar en één van de verzamelingen heeft maat 0, òf beide verzamelingen zijn niet-meetbaar en de uitwendige maat van beide verzamelingen is gelijk aan de maat van het interval. Nu we dit besproken hebben, kunnen twee van zulke niet-meetbare verzamelingen construeren.

3.4.2. Constructie van de niet-meetbare verzamelingen

Van Vleck begon met het opdelen van het eenheidsinterval. Daarbij verdeelde hij het in de paren punten x en $y = 1-x$. Dit zijn elkaar spiegelbeelden ten opzichte van $\frac{1}{2}$. Wat we met het punt $\frac{1}{2}$ doen maakt niet uit, we kunnen hem bij S of C stoppen of gewoon weggooien. We stoppen nu willekeurig de punten van de paren (x, y) in S en C. De verzamelingen die we kunnen krijgen zijn bijvoorbeeld $S = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ en $C = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Deze verzamelingen kunnen we precies op elkaar afbeelden door te spiegelen in het midden van het interval. Als ze meetbaar zijn hebben ze nu dus dezelfde uitwendige maat, namelijk $\frac{1}{2}$. We willen twee niet-meetbare verzamelingen, dus om dit te voorkomen zorgen we dat S en C voldoen aan het homogene karakter, door iets minder willekeurig de punten te kiezen.

Als wij x aan S toevoegen, dan zullen we ook de punten uit de verzameling $\left\{x \pm \frac{m}{2^n}\right\}$ toevoegen aan S. Voor y doen we iets soortgelijks. Als we y aan C toevoegen, dan voegen we ook alle punten uit de verzameling $\left\{1-\left(x \pm \frac{m}{2^n}\right)\right\}$ toe aan C. Hierin zijn m en n willekeurige positieve gehele getallen. We willen dat deze twee verzamelingen helemaal disjunct zijn. We moeten ons dus afvragen wanneer deze verzamelingen gemeenschappelijk punten hebben. We bekijken daartoe de volgende vergelijking:

$$x \pm \frac{m_1}{2^{n_1}} = 1 - \left(x \pm \frac{m_2}{2^{n_2}}\right)$$

We zullen hier de uitkomst van het plus-geval laten zien, want het min-geval zal op precies dezelfde manier gaan. We lossen de vergelijking op voor x.

$$x = \frac{2^{n_1+n_2} - 2^{n_2}\dot{m}_1 - 2^{n_1}\dot{m}_2}{2^{n_1+n_2+1}}$$

Aangezien geldt dat $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ kunnen we x herschrijven tot

$$x = \frac{m'}{2^{n'}}$$

met $m', n' \in \mathbb{Z}$.
De verzamelingen zijn dus niet disjunct als x zelf van de vorm $\frac{m}{2^n}$ is. Deze punten kunnen we verwaarlozen, aangezien het er maar aftelbaar veel zijn. Echter, Van Vleck stopte deze punten in een aparte verzameling K, maar dit is niet heel interessant. Gelukkig geldt $\lambda(K) = 0$ en verandert dit dus niets aan $\lambda^*(S)$ en $\lambda^*(C)$.

Laten we nu bekijken welke eigenschappen de verzamelingen S en C al hebben. Als we het eenheidsinterval in 2^n gelijke stukken indelen, zien we snel congruentie van verzamelingen. We zien namelijk dat $S \cap \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ congruent is met $S \cap \left[\frac{k+1}{2^n}, \frac{k+2}{2^n}\right]$. Om dit in te zien, hoeven we slechts te kijken naar hoe we de punten toewijzen, want als we x aan S toewijzen, wijzen we ook de punten uit $\{x \pm \frac{m}{2^n}\}$ toe aan S, dit is iedere keer een verschuiving van $\frac{1}{2^n}$ van het element x. Nu moeten we nog de gelijkvormigheid met het eenheidsinterval vast zien te stellen. We gaan gebruik maken van de eigenschap die we zojuist hebben gezien. Het eenheidsinterval wordt in 2^n intervallen opgedeeld van lengte $\frac{1}{2^n}$. Dus de intervallen zullen de vorm hebben van $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$. Nu moeten we dus een afbeelding hebben die $[0,1]$ afbeelt op $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$. Men kan snel inzien dat

$$x \mapsto \frac{x}{2^n} + \frac{k}{2^n} \tag{3.8}$$

een afbeelding geeft van $[0,1]$ naar $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$. Nu willen wij het homogene karakter garanderen voor onze verzamelingen S en C. We zien dat de afbeelding een element pakt en deze met een factor $\frac{1}{2^n}$ schaalt en dan verschuift over een afstand $\frac{k}{2^n}$. S bevat al de verschuivingen van de elementen, want als we x in S stopte, dan stopte we ook alle punten uit de verzameling $\{x \pm \frac{m}{2^n}\}$ in S. We missen nu alleen nog de geschaalde punten. Dus als we x in S stoppen, moeten we nu ook de punten $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \frac{x}{16}, \ldots$ in S stoppen. Door ook deze punten aan S toe te wijzen zullen we het homogene karakter veilig stellen, omdat we de geschaalde x'en nodig zullen hebben. Er kan echter nog een probleem ontstaan met de wijze waarop we nu de punten toe gaan wijzen. Namelijk als we x aan S toewijzen, dan wijzen we ook alle punten uit $\left\{\frac{x}{2^{\pm p}} \pm \frac{k}{2^n}\right\}$ toe aan S en wijzen we dus $1-x$ en alle punten uit $\left\{1 - (\frac{x}{2^{\pm p}} \pm \frac{k}{2^n})\right\}$ aan C toe, waarbij $k, n, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Met deze toewijzing kan het gebeuren dat S en C niet disjunct zullen zijn. Men kan heel snel zien dat deze verzamelingen niet disjunct zijn als geldt dat $x \in \mathbb{Q}$, dit gaat op dezelfde manier zoals wij eerder hebben laten zien. Als $x \notin \mathbb{Q}$ dan zijn de verzamelingen wel disjunct en hebben we geen probleem met overlap van de verzamelingen S en C. We zullen dus ook alle rationale getallen aan de kant schuiven. Dit verandert nog steeds niets aan de maat, omdat $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

Nu we dit werk allemaal hebben verzet hebben, zien we dat S en $S \cap \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ gelijkvormig zijn, pas namelijk afbeelding van (3.8) toe op S, dan wordt deze verzameling afgebeeld op $S \cap \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, met dank aan de toevoeging van de geschaalde x'en. Hierdoor stellen we dus vast dat we nu inderdaad het homogene karakter hebben voor S en C, aangezien dat de dyadische breuken dicht liggen in $\mathbb{R}$, kunnen we dus willekeurig dicht bij ieder deelinterval komen te liggen en hebben we dus altijd de gewenste gelijkvormigheid.

We zien dus als we alle rationale getallen verwijderen het eenheidsinterval opgedeeld kan worden in paren van verzamelingen. Deze verzamelingen zijn duidelijk aftelbaar, omdat we een rationale verschuiving toepassen en we hebben maar aftelbaar veel rationale getallen. De paren zien er dus als volgt uit:

$$\left\{\frac{x}{2^{\pm p}} \pm \frac{k}{2^n}\right\}, \qquad \left\{1 - \left(\frac{x}{2^{\pm p}} \pm \frac{k}{2^n}\right)\right\} \quad k, n, p = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{3.9}$$

en worden dus respectievelijk aan S en C toegevoegd. Hierbij wordt natuurlijk een keuze gemaakt en we gebruiken bij de toewijzing dus ook het keuzeaxioma. Nu rest nog de niet-meetbaarheid.

We hebben het homogene karakter, dus zijn we klaar. We hebben namelijk nog steeds twee symmetrische verzamelingen gemaakt en dus hebben ze dezelfde uitwendige maat. We hebben eerder laten zien dat als de verzamelingen dezelfde uitwendige maat en het homogene karakter hebben, dan is hun uitwendige maat gelijk aan die van het hele interval en nog belangrijker dan zijn de verzamelingen niet meetbaar. We hebben bij het construeren van deze verzamelingen wel weer het keuzeaxioma gebruikt. Echter vroeg Van Vleck zich ook af of het mogelijk was om de homogene verzamelingen te maken zonder het keuzeaxioma te maken. Dit wilde hij bereiken door te kijken naar iets wat hij de uiterste vorm van een binair decimaal getal noemde.

De uiterste vorm van een binair decimaal getal is niets anders dan het getal zonder een eindig aantal eerste elementen, we zullen deze methode alleen niet bespreken aangezien we dat hierboven al gedaan hebben, alleen drukten we daar de getallen niet uit in hun binaire ontwikkeling. Dit verandert echter niets aan de redenatie aangezien we over een eindige ontwikkeling schuiven. We krijgen dan dus een equivalentierelatie, waarbij x en y in relatie staan als ze maar een eindige dyadische ontwikkeling schelen. Dit hebben wij ook gezien bij Sierpiński's functie. Helaas voor Van Vleck is het hem niet gelukt om te bewijzen dat we niet-meetbare verzamelingen konden construeren zonder gebruik te maken van willekeurige keuze. Het zou hem ook nooit gelukt zijn (Zie [8]), omdat we zonder keuze geen niet-meetbare verzamelingen kunnen maken. Een interessante vraag is wel in hoeverre je keuze nodig hebt. We zullen in een later gedeelte nog kort bespreken hoe sterk de keuze moet zijn voordat je niet-meetbare verzamelingen krijgt. Het keuzeaxioma is namelijk de sterkste keuze die je hebt, maar zeker niet de enige.

De vierde verzameling die we zullen bekijken is de Bernsteinverzameling. Hiervoor zullen we toch wat extra kennis van de verzamelingenleer nodig hebben. We zullen dit proberen te beperken tot het hoognodige en zullen waar mogelijk zorgen voor een intuïtief duidelijke uitleg zodat we ons doel niet voorbij schieten. De focus moet namelijk op de niet-meetbaarheid en de constructie van de niet-meetbare verzamelingen blijven liggen.

3.5. Bernsteinverzameling

Een Bernsteinverzameling is een hele interessante verzameling en we zullen hier dus naar meer dingen dan alleen de constructie en niet-meetbaarheid kijken. Echter zullen we ons natuurlijk eerst wel focussen op de constructie van de Bernstein verzameling en daarna zal de niet-meetbaarheid heel snel volgen. Voordat we met de constructie beginnen zullen we wel eerst wat theorie moeten aanstippen die we nodig gaan hebben.

3.5.1. Nodige theorie en constructie

Aangezien we over open en gesloten verzamelingen gaan spreken, zullen wij hier eerst de gebruikte definities vermelden en daarna zullen we definiëren wat een Bernsteinverzameling is en deze wordt heel verrassend aangeduid met B.

Definitie 3.5.1. Een verzameling $A \subset \mathbb{R}$ is open als voor alle $x \in A$ er een $r > 0$ bestaat zodanig dat voor het open interval rond x geldt dat $(x-r, x+r) \ \subset \ A$.

Voor sommigen kan de definitie van gesloten als een verrassing komen.

Definitie 3.5.2. Een verzameling $A \subset \mathbb{R}$ is gesloten als A^c open is.

We kunnen nu de Bernsteinverzameling definiëren, wij zullen ons aan de definitie en notatie van C. Hao houden (zie [5]).

Definitie 3.5.3. Een verzameling $B \subset \mathbb{R}$ heet een Bernsteinverzameling als B en B^c beide iedere overaftelbare gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}$ doorsnijden.

Laat $\mathscr{F}$ de familie van alle overaftelbare gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn, dan ziet de definite van een Bernsteinverzameling er wiskundig als volgt uit. Deze is identiek aan de eerder gegeven definitie.

Definitie 3.5.4. Een verzameling $B \subset \mathbb{R}$ heet een Bernsteinverzameling als geldt

1. $\forall F \in \mathscr{F} \quad B \cap F \neq \emptyset$.
2. $\forall F \in \mathscr{F} \quad B^c \cap F \neq \emptyset$.

Voordat we het bestaan van Bernsteinverzamelingen aan kunnen tonen, zullen we eers wat theorie nodig hebben. Ten eerste zullen we kijken naar de kardinaliteit van verzamelingen. We zullen niet de precieze definitie geven, maar zullen uitleggen waarvoor we het gebruiken. Kardinaliteit wordt gebruikt om de "grootte"van verzamelingen te kunnen vergelijken.

Wij zullen alleen de kardinaliteit van $\mathbb{R}$ nodig hebben. Gelukkig heeft George Cantor voor ons al uitgezocht wat de kardinaliteit van $\mathbb{R}$ is. Vaak wordt in werken ook gesproken over de kardinaliteit van het continuüm. In 1874 bewees hij dat er meer reëele getallen waren dan natuurlijke getallen.

De kardinaliteit van $\mathbb{N}$ noemde hij $\aleph_0$ en er is later bewezen dat de kardinaliteit van $\mathbb{R}$ gelijk is aan $2^{\aleph_0}$, vaker genoteerd als $\mathfrak{c}$.

De volgende stelling (Cantor-Bernstein) zullen we niet bewijzen, maar zullen we wel enkele keren gebruiken. Een bewijs is te vinden in Jech (zie [6, Stelling 3.2]).

Stelling 3.5.1. *Als $|A| \leq |B|$ en $|B| \leq |A|$, dan geldt $|A| = |B|$, waarbij $|A|$ de kardinaliteit van de verzameling A is.*

Wat we nu moeten laten zien is dat de familie van overaftelbare gesloten verzamelingen kardinaliteit $\mathfrak{c}$ heeft.

Stelling 3.5.2. *De familie $\mathscr{F}$ van alle overaftelbare gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ heeft kardinaliteit van het continuüm.*

Bewijs. We weten dat de verzameling van open intervallen met rationale eindpunten aftelbaar is, noem deze $\mathscr{I}$. Ook weten we dat iedere open deelverzameling van $\mathbb{R}$ een aftelbare vereniging is van zulke intervallen. We kunnen hoogstens $|\mathscr{P}(\mathscr{I})|$ open verzamelingen maken met de intervallen uit $\mathscr{I}$, waarbij $\mathscr{P}(\mathscr{I})$ de machtsverzameling is van $\mathscr{I}$. Maar dan zien we dat we hoogstens $\mathfrak{c}$ open deelverzamelingen hebben, want we weten dat de kardinaliteit van $\mathscr{I}$ gelijk is aan de kardinaliteit van $\mathbb{N}$. Dus dan weten we dat $|\mathscr{P}(\mathscr{I})| \leq \mathfrak{c}$. We weten nu dus ook dat er hoogstens zoveel gesloten deelverzamelingen bestaan, aangezien deze het complement van de open verzamelingen zijn. Aan de andere kant weten we dat er ten minste $\mathfrak{c}$ overaftelbare gesloten verzamelingen bestaan, want we hebben namelijk zoveel gesloten intervallen. Dus concluderen wij dat er net zoveel overaftelbare gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ bestaan als dat $\mathbb{R}$ 'groot' is. □

We zullen ook perfecte verzamelingen nodig hebben om enkele dingen te kunnen bewijzen.

Definitie 3.5.5. Een niet-lege gesloten verzameling P heet *perfect* als deze geen geïsoleerde punten bevat.

We zullen deze perfecte verzamelingen gebruiken om aan te tonen dat iedere overaftelbare gesloten verzameling kardinaliteit van het continuüm heeft. Daarvoor hebben we de volgende twee stellingen nodig.

Stelling 3.5.3. *Iedere perfecte verzameling bevat een deelverzameling met de kardinaliteit van het continuüm.*

Om dit te kunnen bewijzen, zullen wij eerst terug gaan naar een bekende verzameling, namelijk de Cantor-verzameling. We zullen namelijk de constructie van deze verzameling gebruiken om de vorige stelling te kunnen bewijzen. De constructie van de Cantor-verzameling gaat als volgt:

We beginnen met het interval $[0,1]$, dit wordt onze eerste verzameling C_0. We gaan nu telkens uit het interval middelste derde deel verwijderen. Dus $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Dit zetten we oneindig lang door, dus dan is de $n$de verzameling

$$C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right),$$

waarbij $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ de Cantor verzameling is. We zien dat de maat van C_n gelijk is aan $(\frac{2}{3})^n$. Ofwel we zien dat de Cantor-verzameling een nulverzameling is. De Cantor-verzameling is ook een overaftelbare verzameling, deze heeft zelfs kardinaliteit van het continuüm. We zullen hier niet een precies bewijs neerzetten, maar zullen wel een schets geven. Bekijk de elementen uit de Cantor-verzameling en representeer ze als hun ternaire ontwikkeling, waar je bij binair alleen 0 en 1 gebruikt, gebruik je bij ternair 0,1 en 2 ofwel we werken dan base 3. Met inductie is dan snel aan te tonen dat de ontwikkeling van de elementen alleen uit 0 en 2 bestaan. Vervang nu alle 2'en door 1'en we hebben dan de verzameling $\{0,1\}^{\aleph_0}$ en deze heeft kardinaliteit van het continuüm.

Dat deze verzameling inderdaad elementen bevat is bewezen door Cantor, het blijkt zelfs dat er maar één element in C zit.

Stelling 3.5.4. *Laat $(A_n)_{n\geq 1}$ een rij niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn die voldoen aan:*

1. $\forall n \geq 1 : A_{n+1} \subset A_n$
2. $\forall n \geq 1 : A_n$ *is gesloten*
3. $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$

waarbij $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$. *Dan geldt:* $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ *is niet-leeg en bestaat uit één element.*

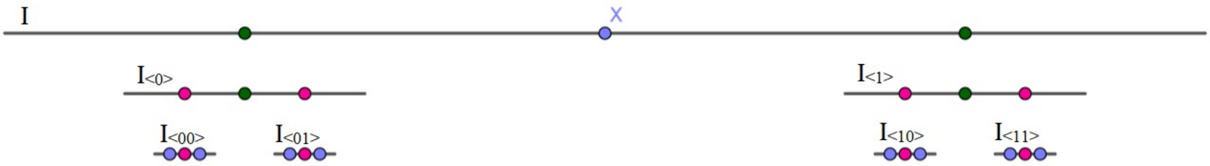
Bewijs. Kies voor elke $n \geq 1$ een $x_n \in A_n$. We tonen aan dat $(x_n)_{n\geq 1}$ een Cauchy-rij is in $\mathbb{R}$. Laat $\epsilon > 0$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d(A_n) \leq \epsilon$. Aangezien voor alle $m,n \leq N$ geldt dat $x_n, x_m \in A_n$ moet gelden dat voor alle $m,n \geq N$ $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$. Dus volgt inderdaad dat $(x_n)_{n\geq 1}$ een Cauchy-rij is. Uit de volledigheid van $\mathbb{R}$ volgt nu dat er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $x_n \to x$. We tonen aan dat $x \in \bigcap_{n\geq 1} A_n$. Laat $n \geq 1$, dan geldt voor alle $m \geq n$ dat $x_m \in A_n$. Dus met $m \to \infty$ volgt uit de geslotenheid van A_n dat $x = \lim_{m\to\infty} x_m \in A_n$. Dus $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ is niet-leeg. Nu rest nog te bewijzen dat er maar één element in zit. Laat $x, y \in \bigcap_{n\geq 1} A_n$. Dan geldt $d(x,y) \leq d(A_n) \to 0$. Dus $d(x,y) = 0$ en dus volgt dat $x = y$. □

Cantor heeft heel veel werk voor ons verzet en we gaan zijn constructie gebruiken om stelling (3.5.3) te bewijzen. Natuurlijk zijn wij niet de eerste die deze stelling gaat bewijzen, maar het bewijs gegeven in het boek van Jech ([6, Stelling 4.5]) is vrij ingewikkeld en daarom zullen we het proberen te verduidelijken met een afbeelding.

Bewijs. We willen een injectieve functie f vinden van $\{0,1\}^{\aleph_0}$ naar P. P is een perfecte verzameling, dus we kunnen daarin elke keer punten kiezen om intervallen omheen te leggen en dan kunnen we in dat interval weer twee punten vinden waar we dan weer intervallen over kunnen leggen en zo gan we door. Dit gaan we recursief doen. Laat S de verzameling van alle eindige rij rijtjes van nullen en enen zijn. Door recursie over de lengte van $s \in S$ kunnen we gesloten intervallen I_s vinden zodanig dat voor elke n en alle $s \in S$ van lengte n we de volgende eigenschappen hebben.

1. $I_s \cap P$ is perfect,
2. $\text{diam}(I_s) \leq \frac{1}{n}$,
3. $I_{s^\wedge 0}, I_{s^\wedge 1} \subset I_s$ en $I_{s^\wedge 0} \cap I_{s^\wedge 1} = \emptyset$.

We zullen dit nu veel duidelijker proberen te maken met de volgende afbeelding:



Figuur 3.1: Hier zien we de eerste 3 iteraties van het proces om de disjuncte intervallen te maken.

We doen eigenlijk steeds drie dingen:

1. We zorgen dat $I_s \cap P$ perfect is.
2. We kiezen $x_{s^\wedge 0}, x_{s^\wedge 1} \in I_s \cap P$.
3. We zorgen dat $I_{s^\wedge 0} \cap I_{s^\wedge 1} = \emptyset$.

We laten dus de steeds kleiner wordende intervallen corresponderen met rijtjes van nullen en enen. Ook zien we een soortgelijke structuur als die bij de Cantorverzameling terugkeren. Voor iedere $a \in \{0,1\}^{\aleph_0}$ geldt dat de verzameling $P \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{a \upharpoonright n}$ precies één element heeft, zie stelling (3.5.4). Laat nu f(a) dit element van P zijn. Dit definieert een injectie van $\{0,1\}^{\aleph_0}$ naar P. Dus $|P| \geq |\{0,1\}^{\aleph_0}| = \mathfrak{c}$. Duidelijk mag ook zijn dat $|P| \leq \mathfrak{c}$, aangezien $P \subset \mathbb{R}$. Dus dan hebben we $|P| = \mathfrak{c}$. □

Stelling 3.5.5. *Elke overaftelbare gesloten verzameling F is te schrijven als een vereniging van een aftelbare verzameling A en een perfecte verzameling P, dus $F = A \cup P$.*

Bewijs. Laat F een overaftelbare gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn. We definiëren de volgende familie van verzamelingen:

$$\mathcal{O} = \{(p,q) : p < q; p,q \in \mathbb{Q}, (p,q) \cap F \text{ is aftelbaar}\}$$

Deze familie bevat aftelbaar veel elementen, die we gaan laten doorsnijden met F. Dus laat $A = \bigcup \mathcal{O} \cap F$ zijn. Merk op dat A een aftelbare verzameling is. We bekijken nu $P = F - A$ en tonen aan dat deze verzameling perfect is. We moeten dus aantonen dat P gesloten is en dat deze geen geïsoleerde punten bevat. We kunnen de heel snel zien dat de verzameling gesloten is. We laten zien dat het complement open is.

$$R - (F - A) = R - (F - (\bigcup \mathcal{O} \cap F)) = F^c \cup (\bigcup \mathcal{O} \cap F) = (F^c \cup (\bigcup \mathcal{O})) \cap (F^c \cup F) = F^c \cup (\bigcup \mathcal{O}).$$

Zowel F^c als $\bigcup \mathcal{O}$ zijn open en dus is $F - A$ gesloten. Dat $F - A$ geen geïsoleerde punten bevat volgt eigenlijk direct uit de definitie van A, aangezien A alle punten uit F heeft gesneden waar een interval omheen kan liggen met maar aftelbaar veel punten. Dus voor ieder punt x uit $F - A$ geldt nu dat voor iedere $r > 0$ het interval $(x - r, x + r)$ overaftelbaar veel punten uit $F - A$ bevat, dus geen enkel element uit deze verzameling is een geïsoleerd punt. Dus nu kunnen we concluderen dat P perfect is en hebben we laten zien dat F te schrijven is als een vereniging van een (hoogstens) aftelbare verzameling en een perfecte verzameling. □

Hieruit kunnen we meteen een gevolg afleiden.

Gevolg 3.5.1. *Iedere gesloten verzameling is aftelbaar of heeft kardinaliteit van het continuüm.*

We kunnen nu het bestaan van een Bernsteinverzameling verifiëren. Dit doen we door de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 3.5.6. *Er bestaat een Bernsteinverzameling.*

Het bewijs zal de constructie zijn van een Bernsteinverzameling en na deze constructie zullen we kijken naar de meetbaarheid.

Bewijs. Door de welordeningsstelling zijn we in staat iedere verzameling van een welordening te voorzien, zo ook $\mathscr{F}$. Dit zullen we nodig hebben om de nodige verzameling te bouwen. Zij $\lhd$ een welordening van $\mathbb{R}$ en zij $\prec$ een welordening van $\mathscr{F}$ met de volgende eigenschap:

$$|\{G : G \prec F\}| < |\mathscr{F}| \quad \text{voor alle F}$$

Dus we zien dat de Kardinaliteit van de verzameling altijd **strikt** kleiner is dan de kardinaliteit van $\mathscr{F}$. We pakken de eerste verzameling F uit $\mathscr{F}$. Dit kunnen we doen, omdat we deze welgeordend hebben. Uit de eerste verzameling pakken we de eerste twee elementen, x_F en y_F. Uit de tweede verzameling G pakken we nu de eerste twee elementen, x_G en y_G die ongelijk zijn aan de elementen x_F en y_F. Dit blijven we doen voor alle elementen van $\mathscr{F}$. Dus als we voor alle $G \prec F$ de punten x_G en y_G hebben gedefinieerd, dan laten we dus x_F en y_F de eerste twee elementen uit $F - \{x_G, y_G : G \prec F\}$ zijn. We moeten ons wel afvragen of we iedere keer deze elementen kunnen kiezen. Om in te zien dat we inderdaad elke keer twee elementen uit de verzamelingen kunnen kiezen kijken we naar de eigenschap van onze welordering. We zien dat het aantal verzamelingen dat voor de verzameling F zit strikt minder is dan de kardinaliteit van het continüum, dus het aantal elementen dat we uit de verzamelingen halen is ook strikt minder dan de kardinaliteit van het continüum en dus ook strikt minder dan $|F|$, zie (3.5.1). Dus we kunnen inderdaad weer twee elementen uit F kiezen. Dus de x_F en y_F zijn goed gedefinieerd. Laat nu $B := \{x_F : F \in \mathscr{F}\}$ zijn. Nu moeten we nog controleren of B inderdaad een Bernsteinverzameling is. Laten we eerst $B \cap F$ bekijken. We zien meteen dat deze verzameling niet leeg is voor alle $F \in \mathscr{F}$ vanwege de definitie van onze verzameling B. Nu moeten we alleen nog controleren dat $B^c \cap F$ niet leeg is. Er geldt dat $y_F \in B^c$, maar wegens onze keuze van elementen geldt ook dat $y_F \in F$, dus kunnen we concluderen dat $B^c \cap F$ niet leeg is voor alle $F \in \mathscr{F}$. Dus nu doorsnijden B en B^c iedere overaftelbare gesloten verzameling. Dit is precies de definitie van een Bernsteinverzameling en dus concluderen we dat de geconstrueerde verzameling B een Bernsteinverzameling is. □

We zullen nu aantonen dat iedere Bernsteinverzameling niet-meetbaar is. Dit zullen we doen door een hele simpele stelling te bewijzen.

Stelling 3.5.7. *Elke meetbare deelverzameling van B of B^c is een nulverzameling, waarbij B een Bernsteinverzameling is.*

Bewijs. Laat A een meetbare deelverzameling van B zijn. Aangezien iedere overaftelbare gesloten verzameling ook B^c snijdt, moet elke gesloten deelverzameling F van A aftelbaar zijn, hierbij bedoelen we gesloten in $\mathbb{R}$. Maar dan geldt $\lambda(F) = 0$. Uit gevolg (2.1.1) volgt dan dat $\lambda(A) = 0$. □

Nu volgt heel snel dat Bernsteinverzamelingen niet meetbaar kunnen zijn. Stel namelijk dat B wel meetbaar is, dan moet ook gelden dat B^c meetbar is. We hebben alleen net aangetoond dat zowel B als B^c, als ze meetbaar zijn, nulverzamelingen zijn. Dit leidt tot een tegenspraak, aangezien $\mathbb{R} = B \cup B^c$. Dit zou betekenen dat we $\mathbb{R}$ kunnen schrijven als een vereniging van twee nulverzamelingen, wat natuurlijk onmogelijk is.

We hebben nu gezien dat de Bernsteinverzameling op een hele andere manier tot stand komt dan de drie verzamelingen die we hiervoor hebben behandeld. Hiermee zien we dus dat we op heel veel manieren niet-meetbare verzamelingen kunnen construeren. De oplettende lezer zal ook wel gezien hebben dat we in het construeren van een Bernsteinverzameling veel verder hadden kunnen gaan. In deze constructie kozen wij bij iedere stap steeds twee elementen. Natuurlijk hadden we hier veel meer elementen kunnen kiezen alleen ligt de focus in de project echt op het construeren van niet-meetbare verzamelingen. Voor ons was het dus voldoende om iedere keer twee elementen te kiezen, want zoals we hebben gezien hebben we daardoor een niet-meetbare verzameling gemaakt. Echter kan de Bernsteinverzameling ook nog allemaal andere eigenschappen mee gegeven worden en dit rust op de keuze die je maakt. Zo kan je een Bernstein verzameling maken die ook allemaal algebraïsche eigenschappen heeft. Dan raden wij ook aan om artikel uit [7] te lezen, aangezien deze dieper op zulke eigenschappen in gaat.

4

Hoeveelheid keuze

We startten hoofdstuk drie met het bespreken van het keuzeaxioma en het equivalente welordeningsprincipe. We hebben gezien dat we bij elke constructie van een niet-meetbare verzameling keuze hebben gebruikt, maar nu rest de vraag nog in hoeverre we keuze nodig hebben. In dit korte hoofdstuk zullen we kijken in hoeverre we dus echt keuze nodig hebben. We zullen modellen uit de verzamelingenleer bekijken, maar zullen nergens bewijzen van geven. Natuurlijk zullen we altijd refereren naar waar de precieze uitleg te vinden is. Het doel van dit hoofdstuk is alleen om een idee te geven in hoeverre keuze echt nodig is, niet om alles in de puntjes precies uit te werken.

4.1. De geconstrueerde verzamelingen

We gaan eerst de verzamelingen bekijken die we geconstrueerd hebben en we gaan ons de elke keer afvragen hoeveel keuze we nodig hebben gehad om de verzameling te kunnen construeren. We zullen ze niet in chronologische orde doorlopen, maar juist in orde van sterke keuze naar zwakkere keuze. We zullen dus wat herhaling zien uit de eerder besproken verzamelingen, maar nu zal de focus liggen op welke keuze we gebruikt hebben. Later zullen we ook nog naar voldoende eisen voor niet-meetbaarheid kijken die we niet tegen zijn gekomen in de eerder geconstrueerde verzamelingen.

4.1.1. Vitali's verzameling

We startte met het keuzeaxioma en we zagen dat dit axioma equivalent was met het welordeningsprincipe. Dus dit betekent dat als we het keuzeaxioma hebben we **iedere** verzameling kunnen welordenen. We zagen bij de constructie van de Vitali verzameling dat we alleen maar een welordening van $\mathbb{R}$ nodig hadden. Dus we zien al dat het keuzeaxioma eigenlijk veel te sterk is. Dit maakt natuurlijk niets uit, maar het blijft altijd een sport onder wiskundigen om te zoeken naar het minimaal nodige om een bepaald doel te bereiken, hier dus het maken van een niet-meetbare verzameling. We kunnen dus al een niet-meetbare verzameling maken als we alleen zeggen dat we $\mathbb{R}$ kunnen welordenenen. Dit is dus al een stuk zwakker dan zeggen dat we iedere verzameling kunnen welordenen. Zoals we al eerder hadden genoemd, werd dit ook opgemerkt door Giuseppe Vitali. We hebben de mogelijkheid voor keuze dus al een heel stuk beperkt, door alleen naar $\mathbb{R}$ te kijken. Het is logsich dat we niet meer nodig hebben, aangezien we ieder van de verzamelingen in $\mathbb{R}$ geconstrueerd hebben en dus we ook hoogstens een welordening van $\mathbb{R}$ nodig hadden.

4.1.2. Bernsteinverzameling

We hebben gezien dat de Bernstein verzameling een heel andere constructie had dan de eerder verzamelingen de we gemaakt hadden, maar als we kijken naar welk soort keuze we gemaakt hebben, zien we dat we ook een welordening van $\mathbb{R}$ gebruikt hebben, zodat we onze gesloten overaftelbare verzamelingen konden welordenen en daardoor precies de goede elementen konden kiezen om de Bernstein verzameling te construeren. Het maakte wel veel concreter gebruik van de welordening, het was in ieder geval veel duidelijker dat we de welordening nodig hadden dan bij de Vitali-verzameling. Ook hier zien we dat we niet het volledige keuzeaxioma nodig hadden, maar dus weer alleen de welordening van $\mathbb{R}$. We zullen bij éen van de volgende verzameling nog een zwakkere vorm van keuze zien.

4.1.3. De verzameling van Van Vleck

Van Vleck hoopte, zoals te lezen was in zijn artikel, dat de verzamelingen die hij maakte ook te construeren waren zonder keuze te gebruiken. We hebben gezien dat later is aangetoond dat dit niet mogelijk is en we hebben dus altijd keuze nodig. Van Vleck maakte uit paren punten steeds expliciet een keuze in welke hij in verzameling S stopte en welke hij in verzameling C stopte. Om die keuze te kunnen maken hebben we dus een keuzefunctie nodig. Het keuzeaxioma verteld ons dat we zo'n keuzefunctie hebben. Echter het keuzeaxioma zegt dat we deze functie voor iedere verzameling hebben. Van Vleck had echter alleen maar keuze nodig voor paren deelverzameling van $\mathbb{R}$. Dus ook Van Vleck, net als Vitali en Bernstein, had alleen maar de welordening van $\mathbb{R}$ nodig, want dan kon hij die keuze voor paren deelverzameling van $\mathbb{R}$ maken. Dus we zien nu dat voor de eerste drie verzamelingen hier we genoeg hadden aan de welordening van $\mathbb{R}$. W zullen bij Sierpiński's functie zien dat we voor de constructie van die niet-meetbare verzameling een zwakkere vorm van keuze hebben gebruikt. De vraag is dan natuurlijk nog of dit de zwakste vorm is.

4.1.4. Sierpiński's functie

De constructie van de niet-meetbare functie van Sierpiński heeft het minste keuze nodig gehad van alle verzamelingen die wij bekeken hebben. Hoewel Sierpiński zelf de volgende terminologie nog niet tot zijn beschikking had, heeft hij eigenlijk gebruik gemaakt van iets dat ultrafilters heet. Hij heeft dus eigenlijk laten zien dat als hij een bepaalde ultrafilter heeft, hij een niet-meetbare verzameling kan construeren. We zullen dus hier even kort noemen wat filters en ultrafilters zijn. Deze definities zijn terug te vinden in Jech ([6, Hoofdstuk 7].

Definitie 4.1.1. Een filter op een niet-lege verzameling S is een familie $\mathscr{F}$ van deelverzamelingen van S zodanig dat

1. $S \in \mathscr{F}$ en $\emptyset \notin \mathscr{F}$,
2. als $X \in \mathscr{F}$ en $Y \in \mathscr{F}$, dan $X \cap Y \in \mathscr{F}$,
3. Als $X, Y \subset S, X \in \mathscr{F}$ en $X \subset Y$ dan $Y \in \mathscr{F}$.

Definitie 4.1.2. Een filter $\mathscr{U}$ op een verzameling S is een ultrafilter als voor alle $X \subset S$ of $X \in \mathscr{U}$ of $S - X \in \mathscr{U}$.

Een ultrafilter $\mathscr{U}$ is vrij als $\bigcap \mathscr{U} = \emptyset$. Het volgende geldt, alleen dit zullen wij niet bewijzen:

Propositie 4.1.1. *Een ultrafilter is vrij dan en slechts dan als het geen eindig element bevat.*

Wat Siepiński eigenlijk laat zien is dat als er een functie bestaat op $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ die alleen de waarde 0 en 1 aanneemt er een niet-meetbare functie op $\mathbb{R}$ bestaat die alleen de waarde 0 en 1 aanneemt. Merk op dat een functie $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \mapsto \{0,1\}$, die eindig additief en niet aftelbaar additief is, een vrij ultrafilter op $\mathbb{N}$ definieert, namelijk

$$\mathscr{U}_f = \{U \subset \mathbb{N} : f(U) = 1\}$$

en andersom definieert een vrije ultrafilter $\mathscr{U}$ op $\mathbb{N}$ en functie $f_{\mathscr{U}}$ door $f_{\mathscr{U}}(U) = 1$ desda $U \in \mathscr{U}$. We zullen dit niet aantonen, omdat dit ons doel voorbij gaat, wel wilden we laten zien wat voor een ultrafilter er precies gebruikt is. Zoals we hadden gezien was deze kennis ook niet nodig om de constructie en niet-meetbaarheid te begrijpen. Dus eigenlijk heeft Sierpiński dus laten zien als er een vrije ultrafilter op $\mathbb{N}$ bestaat, dan bestaat er ook een niet-meetbare functie op $\mathbb{R}$ die de waarde 0 en 1 aanneemt. Dus als we slechts het bestaan van dit ultrafilter aannemen zijn we al in staat om een niet-meetbare functie te construeren. Dit is zwakker dan het kunnen welordenen van $\mathbb{R}$, want dat hebben we hier nu helemaal niet nodig gehad. We hebben hier gebruik gemaakt het ultrafilterlemma. Het ultrafilterlemma zegt het volgende:

Lemma 4.1.1. *Elke filter op S zit bevat in een ultrafilter op S.*

Dit lemma geeft ons nu dat vrije ultrafilters, vaak ook terug te vinden als non-principal ultrafilters, bestaan. Weer willen we duidelijk maken dat wij dit niet laten zien,maar alleen de kennis aan willen bieden om zo over de kracht van de keuze te kunnen praten. Dit lemma is zwakker dan het keuzeaxioma.

We hebben nu dus gezien dat we het keuzeaxioma nog een heel stuk kunnen verzwakken om ons doel te bereiken. De vraag is natuurlijk hoe ver je kunt gaan totdat je in een situatie terecht komt waar iedere verzameling Lebesgue-meetbaar is. We zullen nu nog een kort stuk wijden aan enkele andere verschijnsels die het construeren van niet-meetbare verzamelingen mogelijk maakt.

4.2. Nog meer keuze

Natuurlijk is er naast de keuze die we in onze verzamelingen heben gemaakt nog meer keuze die het bestaan van niet-meetbare verzamelingen garanderen. De vraag is altijd of deze zwakker of sterker zijn dan de keuze die we eerder behandeld hebben. We zullen hier dus nog enkele dingen bespreken die ook tot niet-meetbare verzamelingen leiden en welk model voor meetbare verzamelingen zorgt. We zullen niet diep in gaan op de technische aspecten, maar zullen alleen het bestaan ervan noemen en discussiëren hoe 'sterk' de keuze is die we maken.

4.2.1. Hahn-Banach stelling en model van Solovay

De Hahn-Banach stelling is een stelling uit de functionaalanalyse en we gaan hier nu geen pagina's wijden aan de theorie van de functionaalanalyse. Wel willen we aangeven dat er iets zwakkers is dan het ultrafilterlemma en dat is namelijk deze Hahn-Banach stelling. Deze stelling garandeert ook het bestaan van niet-meetbare verzamelingen. We hebben de volgende gefinitie nodig om de stelling te kunnen presenteren:

Definitie 4.2.1. Een sublineaire functie is een functie $p : V \mapsto \mathbb{R}$ op een vectorruimte V over een geordend lichaam $\mathbf{F}$ die voldoet aan

1. $p(\gamma x) = \gamma p(x)$ voor iedere positieve $\gamma \in \mathbb{R}$ en ieder $x \in V$,
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ voor iedere $x, y \in V$.

Voor de geïnteresseerde zegt de stelling het volgende:

Stelling 4.2.1. *Laat E een vectorruimte over de reële getallen zijn, laat S een deelruimte van E zijn en laat $p : E \mapsto \mathbb{R}$ een sublineaire functie zijn. Laat $f : S \mapsto \mathbb{R}$ een lineaire functionaal op S zijn, zodanig dat geldt dat $f(x) \leq p(x)$ voor alle x in S. Dan bestaat er een lineaire uitbreiding $\bar{f} : E \mapsto \mathbb{R}$ van f zodanig dat $f(x) = \bar{f}(x)$ voor alle $x \in S$ en $\bar{f}(x) \leq p(x)$ voor alle $x \in E$.*

De constructie van de verzameling en de niet-meetbaarheid zullen we hier niet bespreken. De hele constructie en bespreking is wel te vinden in [4]. Het belangrijskte wat we hier uit willen halen is dat hier ook in staat dat deze stelling een zwakkere aanname is dan het ultrafilterlemma. Het bewijs hiervoor is terug te vinden in [9]. Dus we hebben hier weer te maken met een zwakkere vorm van keuze dan dat we bij de functie van Sierpinski hadden.

We hebben nu heel veel manieren gezien waarop niet-meetbare verzamelingen geconstrueerd kunnen worden en we hebben ook gezien dat er verschillende vormen van keuze zijn die tot deze constructies leiden, waarvan de een sterker is dan de ander.

Om de moed toch hopelijk niet in de schoenen te laten zakken willen wij eindigen met een referentie naar een model dat er voor zorgt dat wel iedere verzameling van de reële lijn Lebesgue-meetbaar is. Wel willen wij waarschuwen dat men wel een flinke kennis over verzamelingenleer nodig heeft om deze constructie te begrijpen. Het model dat alleen meetbare verzamelingen kent is het Solovay model. Dit model is gemaakt door Robert M. Solovay in 1970. De constructie is terug te vinden in [11] of [6, Stelling 26.14]. In dit artikel laat Solovay zelfs zien dat als we alleen de axioma's van Zermelo-Frankel aannemen zonder het keuzeaxioma we niet het bestaan van niet-meetbare verzamelingen aan kunnen tonen. Het is zelfs zo dat als we ZF samen met het axioma van afhankelijke keuze(terug te vinden in Jech ([6, Hoofdstuk 5])) nemen we het bestaan van niet-meetbare verzamelingen niet aan kunnen tonen.

Het axioma van afhankelijke keuze is wel heel belangrijk voor de analyse, aangezien we met dit axioma het meeste van de Reële Analyse op kunnen bouwen. Het werd geïntroduceerd in een artikel van Paul Bernays, waarin onderzocht werd welk verzamelingtheoretische axioma's nodig waren om analyse te kunnen ontwikkelen. Als u precies wilt weten hoe dit in elkaar steekt, adviseren wij om het artikel te lezen (zie [2]). Wij zullen hier echter geen extra tijd aan besteden.

Solovay laat dus zien dat er zeker een vorm van keuze is die te zwak is om niet-meetbare verzamelingen te realiseren. Dus als we dit model zouden hanteren hoeven we ons niet meer zorgen te maken over de problemen die niet-meetbare verzamelingen met zich meebrengen en zijn de verzamelingen altijd netjes meetbaar, maar zolang we genoeg keuze toelaten zullen we altijd uit moeten kijken voor verzamelingen die zomaar het meetbare feestje kunnen verstoren.

Bibliografie

[1] Aliprantis, C. D., & Burkinshaw, O. (z.d.). Principles of real analysis (3e ed.). San-Diego, United States of America: Academic Press.

[2] Bernays, P. (1942). A system of axiomatic set theory. Part III. Infinity and enumerability. Analysis. The journal of symbolic logic, 7(2), 65-89. doi:10.2307/2266303

[3] Bernstein, F. (1908). Zur theorie der trigonometrischen Reihe. Leipz. Ber. 60, 325-338.

[4] Foreman, M., & Wehrung, F. (1991). The Hahn-Banach theorem implies the existence of a non-Lebesgue measurable set. Fundamenta Mathematicae, 138, 13-19. doi:10.4064/fm-138-1-13-19

[5] Hao, C. (2003). The nonmeasurability of Bernstein sets and related topics (arXiv:0809.0540v1). Geraadpleegd van https://pdfs.semanticscholar.org/7e45/c5330bb11e70bcd469838b1865329f383059.pdf

[6] Jech, T. (2002). Set theory (3e ed.). Londen, Engeland: Springer.

[7] Kysiak, M. (z.d.). Bernstein sets with algebraic properties. Geraadpleegd van https://www.mimuw.edu.pl/ mkysiak/files/papers/bernstein.pdf

[8] Novikoff, A., & Barone, J. (1977). The borel law of normal numbers, the borel zero-one law, and the work of Van Vleck. Historia Mathematica, 4(1), 43-65. doi:10.1016/0315-0860(77)90036-2

[9] Pincus D. (1974) The strength of the Hahn-Banach theorem. In: Hurd A., Loeb P. (eds) Victoria Symposium on Nonstandard Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol 369. Springer, Berlin, Heidelberg

[10] Sierpiński, W. (1938). Fonctions additives non complèment additives et fonctions non mesurables. Fundamenta Mathematicae, 30, 96-99.

[11] Solovay, R. M. (1970). A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. The annals of mathematics, 92(1), 1-56. doi:10.2307/1970696

[12] Tarsky, A. (1970). Une contribution à la théory de la mesure. Fundamenta mathematicae, 15, 42-50. doi:10.4064/fm-15-1-42-50

[13] Van Vleck, E. B. (1908). On non-measurable sets of points, with an example. Transactions of the American Mathematical Society, 9(2), 237-244.

[14] Vitali, G. (1984). Opere sull'analisi reale e complessa. Cremona, Italië: Edizioni Cremonese.