Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

De Hankeltransformatie via de Cherednik algebra
(The Hankel transform via the Cherednik algebra)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

M.G.C. Oostendorp

Delft, Nederland
Augustus 2016

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

De Hankeltransformatie via de Cherednik algebra
(The Hankel transform via the Cherednik algebra)

M.G.C. Oostendorp

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. W.G.M. Groenevelt

Overige commissieleden

Dr. J.L.A. Dubbeldam Dr. B. van den Dries

Augustus, 2016 Delft

Samenvatting

In deze Bachelorscriptie bestuderen we een integraaltransformatie welke een generalisatie is van de Fouriertransformatie, deze integraaltransformatie wordt de Hankeltransformatie genoemd. Allereerst bestuderen we de symmetrische variant waarna we overstappen op de niet-symmetrische Hankeltransformatie. We gaan de niet-symmetrische Hankeltransformatie beschrijven aan de hand van een algebra met behulp van representatietheorie wat ons in staat stelt om een Hankeltransformatie te definiëren op een eindig-dimensionale ruimte.

Inhoudsopgave

1 Inleiding **1**

2 De symmetrsiche Hankeltransformatie **3**
2.1 De $\mathcal{L}$-operator . . . 3
2.2 De symmetrische Hankeltransformatie . . . 5

3 De niet-symmetrische Hankeltransformatie **11**
3.1 Dunkl-operator . . . 11
3.1.1 Eigenfuncties van de Dunkl-operator . . . 14
3.2 Niet-symmetrische Hankeltransformatie . . . 15

4 Een algebraïsche interpretatie van de Hankeltransformatie **19**
4.1 Algebra en representatietheorie . . . 19
4.2 De Cherednik algebra . . . 20
4.3 Een oneindig-dimensionale representatie en de Hankeltransformatie . . . 22
4.3.1 Inversieformule en Plancherelformule . . . 24
4.4 Een eindig-dimensionale representatie en de Hankeltransformatie . . . 27
4.4.1 Afgebroken Besselfuncties . . . 30

5 Overzicht **33**

Hoofdstuk 1

Inleiding

In de analyse van differentiaalvergelijkingen wordt de Fouriertransformatie onder andere gebruikt om differentiaalvergelijkingen die een verplaatsing beschrijven om te schrijven naar een relatief eenvoudige vergelijking in het Fourierdomein. Dit komt doordat de Fouriertransformatie de $\frac{\partial}{\partial x}$-operator diagonaliseert, met andere woorden de $\frac{\partial}{\partial x}$-operator toepassen in het plaatsdomein komt overeen met het vermenigvuldigen met $-C\lambda$ in het Fourierdomein met $C \in \mathbb{C}$, dit volgt uit het feit dat de eerste afgeleide naar x van $e^{C\lambda x}$ geljik is aan $C\lambda e^{C\lambda x}$.
Indien we ons beperken tot de Fouriertransformatie op even functies, krijgen we de (Fourier)cosinustransformatie. Deze integraaltransformatie diagonaliseert de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$-operator, dit komt door het feit dat de tweede afgeleide naar x van $\cos(C\lambda x)$ gelijk is aan $-C^2\lambda^2\cos(C\lambda x)$. Merk op dat dit het kwadraat is van de differentiaal operator die hoort bij de Fouriertransformatie. De (Fourier)cosinustransformatie is een specifiek geval van de symmetrische Hankeltransformatie welke wordt gegeven door:

$$(\mathbb{F}_k f)(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} (\lambda x)^{-k+\frac{1}{2}} J_{k-\frac{1}{2}}(2i\lambda x) f(x) x^{2k} dx,$$

waarbij $J_\alpha(x)$ een Besselfunctie is van de eerste soort. We hebben gezien dat de (Fourier)cosinustransformatiede $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ diagonaliseert , terwijl de symmetrische Hankeltransformatie de tweede orde differentiaaloperator $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x}^2 + \frac{2k}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ diagonaliseert. Hiermee kunnen we al snel zien dat de (Fourier)cosinustransformatie een symmetrische Hankeltransformatie is bij $k = 0$. Ook uit het feit dat $J_{-\frac{1}{2}}(i2\lambda x) = \sqrt{\frac{1}{i\lambda x\pi}}\cos(2i\lambda x)$ [2,p.241], volgt dat de (Fourier)cosinustransformatie een speciaal geval is van de symmetrische Hankeltransformatie en wordt gegeven door:

$$(\mathbb{F}_0 f)(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{i\pi}}\int_0^{+\infty} \cos(2i\lambda x) f(x) dx.$$

Naast een symmetrische Hankeltransformatie is er ook de niet-symmetrische Hankeltransformatie, wat een algemenere variant is van de symmetrische Hankeltransformatie. De niet-symmetrische Hankeltransformatie diagonaliseert de Dunkl-operator $\mathcal{D}$ gegeven door: $\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1)$ waarbij s de reflectie-operator $(sf)(x) = f(-x)$ is. De Dunkl-operator is als het ware "de wortel" van de $\mathcal{L}$-operator, want als we ons beperken tot even functies dan geldt dat $\mathcal{D}^2 f(x) = \mathcal{L}f(x)$. De niet-symmetrische Hankeltransformatie gaan we bestuderen met behulp van een algebra en met representatietheorie. We zullen dit doen aan de hand van [3,pp. 1-25].

Hoofdstuk 2

De symmetrsiche Hankeltransformatie

In dit hoofdstuk beschouwen we de symmetrische eigenfuncties van de $\mathcal{L}$-operator, deze eigenfuncties zijn de integraalkern van de symmetrische Hankeltransformatie. Verder kijken we naar eigenschappen van de $\mathcal{L}$-operator en daarna definiëren we de symmetrische Hankeltransformatie en beschouwen we de symmetrische Hankelgetransformeerde van operatoren.

2.1 De $\mathcal{L}$-operator

Voordat we de symmetrische Hankeltransformatie definiëren, beschouwen we eerst de $\mathcal{L}$-operator en de eigenfuncties ervan onder zekere voorwaarden.

Definitie 2.1.1 ($\mathcal{L}$-operator). *Zij $k \in \mathbb{R}$, dan wordt de $\mathcal{L}$-operator gegeven door:*

$$\mathcal{L} = (\frac{\partial}{\partial x})^2 + \frac{2k}{x}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.1}$$

$\varphi_\lambda(x,k)$ is gedefinieerd als de unieke eigenfunctie van de differentiaalvergelijking:

$$\mathcal{L}\varphi_\lambda(x,k) = 4\lambda^2\varphi_\lambda(x,k), \tag{2.2}$$

$$\varphi_\lambda(x,k) = \varphi_\lambda(-x,k), \quad \varphi_\lambda(0,k) = 1, \quad k \neq -\frac{1}{2} - n, \ \ met\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{2.3}$$

De eigenfunctie $\varphi_\lambda(x,k)$ wordt gegeven door:

$$\varphi_\lambda(x,k) = \Gamma(k+\frac{1}{2})(\lambda x)^{-k+\frac{1}{2}} J_{k-\frac{1}{2}}(2i\lambda x), \tag{2.4}$$

waarbij $J_\alpha(x)$ een Besselfunctie is van de eerste soort.
De machtreeksontwikkeling van $\varphi_\lambda(x,k)$ wordt gegeven door:

$$\varphi_\lambda(x,k) = \Gamma(k+\frac{1}{2})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x\lambda)^{2m}}{m!\Gamma(k+\frac{1}{2}+m)}. \tag{2.5}$$

Door de machtreeksontwikkeling van $\varphi_\lambda(x,k)$ is de symmetrie tussen x en λ snel in te zien, ofwel: $\varphi_\lambda(x,k) = \varphi_x(\lambda,k)$.
Voor functies $f, g \in \mathscr{C}_2 := \mathrm{L}^2([0,\infty)) \cap C^2([0,\infty))$ met $g(x)$ een reëelwaardige functie heeft de $\mathcal{L}$-operator een mooie eigenschap met betrekking tot het $\mathbb{C}$-inwendigproduct
$\langle f,g\rangle = 2\int_0^\infty f(x)g(x)x^{2k}dx$. Deze eigenschap komt goed van pas om de symmetrische Hankelgetransformeerde van de $\mathcal{L}$-operator te bepalen.

Propositie 2.1.1. *Zij $f, g \in \mathscr{C}_2$ met $g(x)$ een reëelwaardige functie zodanig dat $\lim_{x\to\infty} f(x)g'(x) - f(0)g'(0) = 0$, dan gelden de volgende eigenschappen.*

(a) Zij $\mathcal{L}^\circ$ de Hermitisch-geadjungeerde van $\mathcal{L}$ ten opzichte van het $\mathbb{C}$-inwendigproduct $\langle f, g\rangle_0 = 2\int_0^\infty f(x)g(x)dx$. Dan geldt: $x^{-2k}\mathcal{L}^\circ x^{2k} = \mathcal{L}$.

(b) Definieer het $\mathbb{C}$-inproduct $\langle f, g\rangle = 2\int_0^\infty f(x)g(x)x^{2k}dx$, dan is $\mathcal{L}$ zelf-geadjungeerd ten op zichte van $\langle f, g\rangle$. Met andere woorden $\langle \mathcal{L}(f), g\rangle = \langle f, \mathcal{L}(g)\rangle$.

Om deze propositie te bewijzen, gebruiken we het volgende lemma.

Lemma 2.1.1. *(a) Zij $f, g \in \mathrm{L}^2([0,\infty))$ met $g(x)$ een reëelwaardige functie zodanig dat $xf, xg \in \mathrm{L}^2([0,\infty))$. Dan is de Hermitisch-geadjungeerde van de vermenigvuldig-met-x-operator met betrekking tot het $\mathbb{C}$-inwendigproduct $\langle f, g\rangle_0 = 2\int_0^\infty f(x)g(x)dx$, de vermenigvuldig-met-$x$-operator.*

(b) Zij $f, g \in \mathscr{C}_1 := \mathrm{L}^2([0,\infty)) \cap C^1([0,\infty))$ met $g(x)$ een reëelwaardige functie zodanig dat $\lim_{x\to\infty} f(x)g'(x) - f(0)g'(0) = 0$. Dan is de Hermitisch-geadjungeerde van de $\frac{\partial}{\partial x}$-operator met betrekking tot het $\mathbb{C}$-inwendigproduct $\langle f, g\rangle_0 = 2\int_0^\infty f(x)g(x)dx$, de $-\frac{\partial}{\partial x}$-operator.

Bewijs lemma 2.1.1. (a) Zij $f, g \in \mathrm{L}^2([0,\infty))$ willekeurig met $g(x)$ een reëelwaardige functie zodanig dat $xf, xg \in \mathrm{L}^2([0,\infty))$, dan

$$\langle xf(x), g(x)\rangle_0 = 2\int_0^\infty xf(x)g(x)dx = 2\int_0^\infty f(x)xg(x)dx = \langle f(x), xg(x)\rangle_0.$$

Dus geldt dat $x^\circ = x$ ten opzichte van $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$.

(b) Zij $f, g \in \mathscr{C}_1$ willekeurig met $g(x)$ een reëelwaardige functie zodanig dat $\lim_{x\to\infty} f(x)g'(x) - f(0)g'(0) = 0$, dan

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial}{\partial x}f(x), g(x)\rangle =& 2\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(f(x))g(x)dx = 2[f(x)\frac{\partial}{\partial x}(g(x))]_0^\infty - 2\int_0^\infty f(x)\frac{\partial}{\partial x}(g(x))dx = \\ & -2\int_0^\infty f(x)\frac{\partial}{\partial x}(g(x))dx = \langle f(x), \frac{\partial}{\partial x}(g(x))\rangle_0.\end{aligned}$$

Dus geldt dat $\frac{\partial}{\partial x}^\circ = -\frac{\partial}{\partial x}$. □

Nu we weten wat de Hermitisch-geadjungeerde van de vermenigvuldig-met-x-operator en $\frac{\partial}{\partial x}$-operator zijn, kunnen we eenvoudig deel (a) en deel (b) van propositie 2.1.1 bewijzen.

Bewijs propositie 2.1.1. Zij $f, g \in \mathscr{C}_2$ willekeurig met $g(x)$ een reëelwaardige functie zodat $\lim_{x\to\infty} f(x)g'(x) - f(0)g'(0) = 0$.

(a) Dan geldt met betrekking tot het $\mathbb{C}$-inwendigproduct $\langle f, g\rangle_0 = 2\int_0^\infty f(x)g(x)dx$ dat

$$\begin{aligned}&(x^{-2k}\mathcal{L}^\circ x^{2k}) \circ f(x) = (x^{-2k}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2k}{x}\frac{\partial}{\partial x})^\circ x^{2k}) \circ f(x) = \\ &(x^{-2k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}^\circ + \frac{\partial}{\partial x}^\circ \frac{2k}{x}^\circ x^{2k}) \circ f(x) = (x^{-2k}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{2k}{x}x^{2k}) \circ f(x) = \\ &x^{-2k}(x^{2k}f''(x) + 4kx^{2k-1}f'(x) + 4k^2f(x)x^{2k-2} - 2kf(x)x^{2k-2} - \\ &2kx^{2k-1}f'(x) - 4k^2f(x)x^{2k-2} + 2kf(x)x^{2k-2}) = f''(x) + \frac{2k}{x}f'(x) = \\ &(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2k}{x}\frac{\partial}{\partial x})f(x),\end{aligned}$$

waarbij $\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) = f'(x)$ en $(\frac{\partial}{\partial x})^2(f(x)) = f''(x)$. Dus geldt dat $x^{-2k}\mathcal{L}^\circ x^{2k} = \mathcal{L}$.

(b) Merk op dat $\langle f,g\rangle = \langle f, gx^{2k}\rangle_0$. Dan geldt met betrekking tot het $\mathbb{C}$-inwendigproduct $\langle f,g\rangle$=$2\int_0^\infty f(x)g(x)x^{2k}dx$ dat

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}(f),g\rangle =&2\int_0^\infty \mathcal{L}(f(x))g(x)x^{2k}dx = 2\int_0^\infty f(x)\mathcal{L}^\circ(g(x)x^{2k})dx = \\ &2\int_0^\infty f(x)\mathcal{L}^\circ(x^{2k}g(x))dx = 2\int_0^\infty f(x)x^{2k}\mathcal{L}x^{-2k}(x^{2k}g(x))dx = \\ &2\int_0^\infty f(x)\mathcal{L}(g(x))x^{2k}dx = \langle f,\mathcal{L}(g)\rangle.\end{aligned}$$

Dus is de $\mathcal{L}$-operator zelf-geadjungeerd met betrekking tot $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

Indien we de gedefinieerde Hermitisch-geadjungeerde van de tot op heden gedefinieerde operatoren in het vervolg van deze bachelorscriptie gebruiken, dan kiezen we de functies zodanig dat het bijbehorende inproduct goed gedefinieerd is.

2.2 De symmetrische Hankeltransformatie

Nu we weten hoe de symmetrische eigenfuncties van de $\mathcal{L}$-operator eruit zien, kunnen we de symmetrische Hankeltransformatie definiëren.

Definitie 2.2.1 (Symmetrische Hankeltransformatie)**.**
Zij $f(x)$ een continue reëelwaardige functie op $[0,\infty)$ zodanig dat $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{cx} = 0$ voor alle $c\in\mathbb{R}$, en zij $k\in\mathbb{R}$ zodanig dat $k\neq -\frac{1}{2}-n$ voor $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dan wordt de symmetrische Hankelgetransformeerde van $f(x)$ gegeven door:

$$(\mathbb{F}_k f)(\lambda) = \frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_0^{+\infty}\varphi_\lambda(x,k)f(x)x^{2k}dx. \tag{2.6}$$

We zullen de continue reëelwaardige functies op $[0,\infty)$ waarvoor de symmetrische Hankeltransformatie is gedefineerd noteren met $\mathscr{Q} := \{f\in \mathrm{C}([0,\infty)) : f(x)\,\text{reëelwaardig},$ $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{cx} = 0,\quad \forall c\in\mathbb{R}\}$. Merk op dat de symmetrische Hankeltransformatie voor alle $\lambda\in\mathbb{C}$ goedgedefinieerd vanwege het asymptotisch gedrag $\varphi_\lambda(x,k)\sim C(e^{2\lambda x}+e^{-2\lambda x})$ op $x=\infty$. In plaats van de symmetrische Hankelgetransformeerde van functies gaan we kijken naar de symmetrische Hankelgetransformeerde van operatoren, want als we later overgaan op de niet-symmetrische Hankeltransformatie dan gaan we deze beschrijven met behulp van een algebra en die definieert de niet-symmetrische Hankelgetransformatie aan de van hand operatoren. De symmetrische Hankelgetransformeerde van een operator wordt op de volgende manier gedefinieerd.

Definitie 2.2.2. *Zij A een operator dan wordt de symmetrische Hankelgetransformeerde van A gegeven door*

$$\mathbb{F}_k(A)\mathbb{F}_k(f) = \mathbb{F}_k(A(f))$$

voor $f\in\mathscr{Q}$ zodanig dat $A(f)\in\mathscr{Q}$.

Om straks de zogeheten master formule (stelling 2.2.1) te kunnen bewijzen is het volgende lemma van groot belang. In dit lemma laten we de symmetrische Hankelgetransformeerde van drie operatoren zien die een grote rol spelen in het bewijs van dan master formule.

Lemma 2.2.1. *Zij $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dan gelden de volgende uitspraken.*

(i) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}$ zodanig dat $\mathcal{L}^x(f(x)) \in \mathscr{Q}$, dan

$$(\mathbb{F}_k \mathcal{L}^x(f(x)))(\lambda) = 4\lambda^2(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda).$$

(ii) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}$ zodanig dat $4x^2 f(x) \in \mathscr{Q}$, dan

$$(\mathbb{F}_k 4x^2 f(x))(\lambda) = \mathcal{L}^\lambda(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda).$$

(iii) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}$ zodanig dat $4x\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) \in \mathscr{Q}$, dan

$$(\mathbb{F}_k 4x\frac{\partial}{\partial x}(f(x)))(\lambda) = (-4\lambda\frac{\partial}{\partial \lambda} - 4 - 8k)(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda).$$

Met het superscript geven we aan op welke variabele de operator werkt.

Bewijs. Merk op dat $(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), \varphi_\lambda(x,k)\rangle$.

(i) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}$ willekeurig zodanig dat $\mathcal{L}^x(f(x)) \in \mathscr{Q}$, dan in combinatie met propositie 2.1.1.b geldt dat

$$\begin{aligned}
(\mathbb{F}_k \mathcal{L}^x f(x))(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle \mathcal{L}^x(f(x)), \varphi_\lambda(x,k)\rangle \overset{*}{=} \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), \mathcal{L}^x\varphi_\lambda(x,k)\rangle \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), 4\lambda^2\varphi_\lambda(x,k)\rangle = \frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_0^{+\infty} 4\lambda^2\varphi_\lambda(x,k)f(x)x^{2k}dx \\
&= 4\lambda^2\frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_0^{+\infty}\varphi_\lambda(x,k)f(x)x^{2k}dx \\
&= 4\lambda^2(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda),
\end{aligned}$$

bij $*$ passen we propositie 2.1.1.b toe. Dus geldt dat $\mathbb{F}_k(\mathcal{L}^x(f(x)) = 4\lambda^2\mathbb{F}_k(f(x))$.

(ii) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}$ willekeurig zodanig dat $4x^2 f(x) \in \mathscr{Q}$, dan

$$\begin{aligned}
(\mathbb{F}_k 4x^2 f(x))(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle 4x^2 f(x), \varphi_\lambda(x,k)\rangle \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x); 4x^2\varphi_\lambda(x,k)\rangle = \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x); 4x^2\varphi_x(\lambda,k)\rangle.
\end{aligned}$$

Wegens de symmetrie in x en λ van $\varphi_\lambda(x,k)$ geldt dat $\mathcal{L}^\lambda\varphi_x(\lambda,k) = 4x^2\varphi_x(\lambda,k)$, dus vinden we dat:

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_k(4x^2 f(x)) &= \frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_0^{+\infty} 4x^2\varphi_x(\lambda,k)f(x)x^{2k}dx \\
&= \frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_0^{+\infty}\mathcal{L}^\lambda\varphi_x(\lambda,k)f(x)x^{2k}dx \\
&= \mathcal{L}^\lambda\left(\frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_0^{+\infty}\varphi_\lambda(x,k)f(x)x^{2k}dx\right) \\
&= \mathcal{L}^\lambda(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda).
\end{aligned}$$

Dus vinden we dat $(\mathbb{F}_k 4x^2 f(x)))(\lambda) = \mathcal{L}^\lambda(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda)$.

(iii) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}$ willekeurig zodanig dat $4x\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) \in \mathscr{Q}$ en definieer de commutator $[A, B]$ van operatoren A en B als: $[A, B] = AB - BA$, dan

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}^x, x^2] \circ f(x) &= \mathcal{L}^x x^2 \circ f(x) - x^2\mathcal{L}^x \circ f(x) = \mathcal{L}^x(x^2 f(x)) - x^2(f''(x) + \frac{2k}{x}f'(x)) \\ &= x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) + kxf'(x) + 4kf(x) - x^2 f''(x) - 2kxf'(x) \\ &= 4xf'(x) + 2f(x) + 4kf(x) = (4x\frac{\partial}{\partial x} + 2 + 4k) \circ f(x),\end{aligned}$$

waarbij $(\frac{\partial}{\partial x})^2(f(x)) = f''(x)$ en $\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) = f'(x)$. Passen we hierop aan beide kanten $\mathbb{F}_k$ toe, dan vinden we

$$\begin{aligned}[4\lambda^2, \frac{\mathcal{L}^\lambda}{4}] \circ (\mathbb{F}_k f(x))(\lambda) &= (\mathbb{F}_k[\mathcal{L}^x f(x), x^2 f(x)])(\lambda) = [(\mathbb{F}_k\mathcal{L}^x f(x))(\lambda), (\mathbb{F}_k x^2 f(x))(\lambda)] \\ &= (\mathbb{F}_k 4x\frac{\partial}{\partial x}f(x))(\lambda) + 2(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda) + 4k(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda).\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}(\mathbb{F}_k 4x\frac{\partial}{\partial x}f(x))(\lambda) &= [4\lambda^2; \frac{\mathcal{L}^\lambda}{4}] \circ (\mathbb{F}_k f(x))(\lambda) - 2(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda) - 4k(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda) \\ &= (-[\mathcal{L}^\lambda; \lambda^2] - 2 - 4k) \circ (\mathbb{F}_k f(x))(\lambda) \\ &= (-4\lambda\frac{\partial}{\partial \lambda} - 4 - 8k) \circ (\mathbb{F}_k f(x))(\lambda).\end{aligned}$$

Dus vinden we dat $(\mathbb{F}_k 4x\frac{\partial}{\partial x}f(x))(\lambda) = (-4\lambda\frac{\partial}{\partial \lambda} - 4 - 8k)(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda)$. □

Nu we de identiteiten van lemma 2.2.1 hebben, kunnen we gaan kijken naar de master formule. We definiëren hiervoor $\mathscr{Q}^r_\infty := \{f(x) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) : f(x)\,\text{reëelwaardig}, \lim_{x\to\infty} f(x)e^{cx} = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}\}$.

Stelling 2.2.1 (Master formule)**.** *Zij $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ met $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan gelden de volgende twee uitspraken.*

$$(i) \quad 2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)\varphi_\mu(x,k)e^{-x^2}x^{2k}dx = \Gamma(k+\frac{1}{2})e^{\lambda^2+\mu^2}\varphi_\lambda(\mu,k). \tag{2.7}$$

(ii) Definieer $exp(-\frac{\mathcal{L}^x}{4})$ als $\sum_{j=0}^\infty \frac{(-\mathcal{L}^x)^j}{4^j j!}$ voor $f \in \mathscr{Q}^R_\infty$ zodanig dat $exp(-\frac{\mathcal{L}^x}{4})f(x)$ convergent is en $exp(-\frac{\mathcal{L}^x}{4})f(x) \in \mathscr{Q}$, dan

$$2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)exp(-\frac{\mathcal{L}^x}{4})(f(x))e^{-x^2}x^{2k}dx = \Gamma(k+\frac{1}{2})e^{\lambda^2}f(\lambda). \tag{2.8}$$

Bewijs. Zij $k \in \mathbb{R}$ willekeurig zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(i) Merk allereerst op dat $\varphi_\mu(x,k)$ de unieke eigenfunctie is van $\mathcal{L}$ onder dezelfde voorwaarden als in definitie 2.1.1 bij eigenwaarde $4\mu^2$, ofwel $\mathcal{L}\varphi_\mu(x,k) = 4\mu^2\varphi_\mu(x,k)$. Merk ten tweede op dat:

$$2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)\varphi_\mu(x,k)e^{-x^2}x^{2k}dx = \Gamma(k+\frac{1}{2})\mathbb{F}_k(e^{-x^2}\varphi_\mu(x,k)).$$

Definieer de functies $\varphi_\mu(x,k)^-$ en $\varphi_\mu(x,k)^+$ als

$$\varphi_\mu(x,k)^- = e^{-x^2}\varphi_\mu(x,k), \quad \varphi_\mu(x,k)^+ = e^{x^2}\varphi_\mu(x,k).$$

Dit zijn de unieke eigenfuncties van respectievelijk

$$\mathcal{L}_- = e^{-x^2} \circ \mathcal{L} \circ e^{x^2}, \quad \mathcal{L}_+ = e^{x^2} \circ \mathcal{L} \circ e^{-x^2},$$

bij eigenwaarde $4\mu^2$ onder dezelfde voorwaarden als in definitie 2.1.1 met respectievelijk een factor e^{-x^2}, e^{x^2}, want $\mathcal{L}_-\varphi_\mu(x,k)^- = e^{-x^2}\mathcal{L}\varphi_\mu(x,k) = e^{-x^2}4\mu^2\varphi_\mu(x,k) = 4\mu^2\varphi_\mu(x,k)^-$ en $\mathcal{L}_+\varphi_\mu(x,k)^+ = e^{x^2}\mathcal{L}\varphi_\mu(x,k) = e^{x^2}4\mu^2\varphi_\mu(x,k) = 4\mu^2\varphi_\mu(x,k)^+$.
Zij $f \in \mathscr{Q}_2$ willekeurig, dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_-(f(x)) &= e^{-x^2} \circ \mathcal{L}(e^{x^2} f(x)) \\
&= e^{-x^2}e^{x^2}\left(f''(x) + 4xf'(x) + (4x^2+2)f(x) + \frac{2k}{x}f'(x) + 4kf(x)\right) \\
&= f''(x) + \frac{2k}{x}f'(x) + 4xf'(x) + (4x^2+4k+2)f(x) \\
&= (\mathcal{L} + 4x\frac{\partial}{\partial x} + 4x^2 + 4k + 2)f(x).
\end{aligned}$$

Maar ook

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+(f(x)) &= e^{x^2} \circ \mathcal{L}(e^{-x^2} f(x)) \\
&= e^{x^2}e^{-x^2}\left(f''(x) - 4xf'(x) + (4x^2-2)f(x) + \frac{2k}{x}f'(x) - 4kf(x)\right) \\
&= f''(x) + \frac{2k}{x}f'(x) - 4xf'(x) + (4x^2-4k-2)f(x) \\
&= (\mathcal{L} - 4x\frac{\partial}{\partial x} + 4x^2 - 4k - 2)f(x).
\end{aligned}$$

Gebruik makende van lemma 2.2.1 vinden we dat

$$\begin{aligned}
(\mathbb{F}_k\mathcal{L}_-f(x))(\lambda) &= (\mathbb{F}_k\mathcal{L}(f(x))(\lambda) + (\mathbb{F}_k 4x\frac{\partial}{\partial x}(f(x)))(\lambda) + (\mathbb{F}_k(x^2f(x))(\lambda) + (\mathbb{F}_k 4kf(x))(\lambda) \\
&\quad + (\mathbb{F}_k 2f(x))(\lambda) = (4\lambda^2 + \mathcal{L}^\lambda - 4\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - 4 - 8k + 2 + 4k)(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda) \\
&= \mathcal{L}_+^\lambda(\mathbb{F}_k f(x))(\lambda).
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $(\mathbb{F}_k\varphi_\mu(x,k)^-)(\lambda)$ ook een eigenfunctie is van $\mathcal{L}_+^\lambda$ bij eigenwaarde $4\mu^2$, want

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^\lambda(\mathbb{F}_k\varphi_\mu(x,k)^-)(\lambda) &= (\mathbb{F}_k\mathcal{L}_-^x)\mathbb{F}_k(\varphi_\mu(x,k)^-)(\lambda) = (\mathbb{F}_k\mathcal{L}_-^x\varphi_\mu(x,k)^-)(\lambda) \\
&= (\mathbb{F}_k 4\mu^2\varphi_\mu(x,k)^-)(\lambda) = 4\mu^2(\mathbb{F}_k\varphi_\mu(x,k)^-)(\lambda).
\end{aligned}$$

Aangezien $\varphi_\mu(x,k)^+$ de unieke eigenfunctie is van $\mathcal{L}^+$ vinden we dat $\mathbb{F}_k(\varphi_\mu(x,k)^-) = C(\mu)\varphi_\mu(\lambda,k)^+ = C^1(\mu)e^{\mu^2}\varphi_\mu(\lambda,k)^+$ voor constanten $C(\mu), C^1(\mu)$. Uit de symmetrie in λ en μ in zowel $2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)\varphi_\mu(x,k)e^{-x^2}x^{2k}dx$ als in $e^{\mu^2}\varphi_\mu(\lambda,k)^+ = e^{\mu^2+\lambda^2}\varphi_\mu(\lambda,k)$ volgt dat $C^1(\mu) = C$ voor een constante C. Vullen we nu $\lambda = \mu = 0$ in dan vinden we dat $C = 1$ en dus: $(\mathbb{F}_k\varphi_\mu(x,k)^-)(\lambda) = e^{\mu^2+\lambda^2}\varphi_\mu(\lambda,k)$ ofwel

$$2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)\varphi_\mu(x,k)e^{-x^2}x^{2k}dx = \Gamma(k+\frac{1}{2})e^{\lambda^2+\mu^2}\varphi_\lambda(\mu,k).$$

(ii) Als we in (i) e^{μ^2} naar links brengen dan vinden we dat

$$\begin{aligned}\Gamma(k+\frac{1}{2})e^{\lambda^2}\varphi_\lambda(\mu,k) &= 2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)e^{-\mu^2}\varphi_\mu(x,k)e^{-x^2}x^{2k}dx \\ &= 2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(\mu^2)^n}{n!}\varphi_\mu(x,k)e^{-x^2}x^{2k}dx \\ &= 2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n\mathcal{L}^n}{4^n n!}\varphi_\mu(x,k)e^{-x^2}x^{2k}dx \\ &= 2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)exp(-\frac{\mathcal{L}^x}{4})\varphi_\mu(x,k)e^{-x^2}x^{2k}dx.\end{aligned}$$

Als $\varphi_\mu(x,k)=f(x)$ is dit goedgedefinieerd, omdat $\mathbb{F}_k$ lineair is gaat het ook goed voor $f(x)=\sum_{j=0}^m a_j\varphi_\mu(x,k)$ voor $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Indien $f(x)=\sum_{j=0}^\infty a_j\varphi_\mu(x,k)$ convergent is, is dit ook goedgedefinieerd. Dus voor iedere functie $f(x)\in\mathscr{Q}_\infty^R$ indien $exp(-\frac{\mathcal{L}^x}{4})f(x)$ convergent is en $exp(-\frac{\mathcal{L}^x}{4})f(x)\in\mathscr{Q}$, geldt dat $2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x,k)exp(-\frac{\mathcal{L}^x}{4})(f(x))e^{-x^2}x^{2k}dx=\Gamma(k+\frac{1}{2})e^{\lambda^2}f(\lambda)$. $\square$

Hoofdstuk 3

De niet-symmetrische Hankeltransformatie

De manier waarop de symmetrische Hankeltransformatie is opgebouwd in hoofdstuk 2 kunnen we ook voor de niet-symmetrische Hankeltransformatie doen. Dit doen we door eerst de Dunkl-operator $\mathcal{D}$ te definiëren en de eigenfuncties te bepalen onder zekere voorwaarden, deze eigenfuncties vormen de integraalkern van de niet-symmetrische Hankeltransformatie. Indien we weten hoe de eigenfuncties eruit zien kunnen we op dezelfde manier als bij de symmetrische Hankeltransformatie de niet-symmetrische Hankeltransformatie definiëren. Dit gebeurt echter niet op $[0, \infty)$ maar op $\mathbb{R}$.
Bij de symmetrische Hankeltransformatie hebben we alleen maar naar het geval gekeken dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ met $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Voor de niet-symmetrische Hankeltransformatie gaan we ook kijken naar het geval $k = -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en zullen we zien dat we een Hankeltransformatie kunnen definiëren op een eindig-dimensionale ruimte.

3.1 Dunkl-operator

Definitie 3.1.1 (Dunkl-operator)**.** *Zij $k \in \mathbb{R}$, dan wordt de Dunkl-operator $\mathcal{D}$ gegeven door*

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1), \tag{3.1}$$

waarbij s de reflectie-operator is gegeven door: $s \circ f(x) = (sf)(x) = sf(x) = f(-x)$.

Lemma 3.1.1. *Zij $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ zodanig dat $f(-x) = f(x)$, een even functie, dan geldt*

$$\mathcal{D}(f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x)).$$

Bewijs. Zij $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ willekeurig zodanig dat $f(-x) = f(x)$, dan

$$\mathcal{D}(f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x)) - \frac{k}{x}(sf(x) - f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x)) - \frac{k}{x}(f(-x) - f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x)). \qquad \square$$

Een link tussen de $\mathcal{L}$-operator (definitie 2.1.1) en de Dunkl-operator, is dat de Dunkl-operator "de wortel" is van de $\mathcal{L}$-operator mits we ons beperken tot even functies, ofwel $\mathcal{D}^2 f(x) = \mathcal{L}f(x)$ als $f(-x) = f(x)$.

Lemma 3.1.2. *Beschouw x als de vermenigvuldig-met-x-operator en s de reflectie-operator. Zij $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, dan gelden de volgende eigenschappen.*

$$(s \circ x)f(x) = (-x \circ s)f(x), \quad (s \circ \frac{\partial}{\partial x})f(x) = (-\frac{\partial}{\partial x} \circ s)f(x).$$

(a) Zij $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ zodanig dat $f(x) = f(-x)$(even functie), dan $\mathcal{D}^2 f(x) = \mathcal{L}f(x)$.

(b) Zij $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, dan $(s \circ \mathcal{D} \circ s)f(x) = -\mathcal{D}f(x)$.

(c) Zij $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, dan $[\mathcal{D}, x]f(x) = (1 + 2ks)f(x)$, waarbij $[A, B] = AB - BA$.

Bewijs. De eerste twee identiteiten volgen vrijwel meteen, want zij $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ willekeurig dan $(s \circ x)f(x) = -xf(-x) = (-x)sf(x) = (-x \circ s)f(x)$, maar ook $(s \circ \frac{\partial}{\partial x})f(x) = sf'(x) = f'(-x) = -\frac{\partial}{\partial x}f(-x) = (-\frac{\partial}{\partial x} \circ s)f(x)$, waarbij $\frac{\partial}{\partial x}f(x) = f'(x)$. Nu we deze twee identiteiten hebben kunnen we (a), (b) en (c) gaan bewijzen.

(a) Merk op dat de afgeleide van een even functie een oneven functie is, ofwel $-f'(x) = f'(-x)$. Zij $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ willekeurig zodanig dat $f(x) = f(-x)$(even functie), dan

$$\mathcal{D}^2 f(x) = \mathcal{D} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1)\right)(f(x)) = \mathcal{D} \circ \left(f'(x) - \frac{k}{x}(f(-x) - f(x))\right) \tag{3.2}$$

$$= \mathcal{D}(f'(x)) = (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1))(f'(x)) = f''(x) - \frac{k}{x}(f'(-x) - f'(x)) \tag{3.3}$$

$$= f''(x) + \frac{2k}{x}f'(x) = \left((\frac{\partial}{\partial x})^2 + \frac{2k}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) = \mathcal{L}(f(x)). \tag{3.4}$$

Dus vinden we dat voor $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ indien f een even functie dat $\mathcal{D}^2 f(x) = \mathcal{L}f(x)$.

(b) Merk op dat $(s^2 f)(x) = f(x)$. Zij $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ willekeurig, dan met behulp van de eerste twee identiteiten vinden we dat

$$(s \circ \mathcal{D} \circ s)f(x) = \left(s \circ (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1))\right) \circ sf(x) = \left(s \circ \frac{\partial}{\partial x} \circ s - s \circ \frac{k}{x}(s^2 - s)\right)f(x) \tag{3.5}$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{k}{x}(s - s^2)\right)f(x) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1)\right)f(x) = -\mathcal{D}f(x). \tag{3.6}$$

Dus voor $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ geldt dat $(s \circ \mathcal{D} \circ s)f(x) = -\mathcal{D}f(x)$.

(c) Zij $f(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ willekeurig dan

$$[\mathcal{D}, x]f(x) = (\mathcal{D}x - x\mathcal{D})f(x) \tag{3.7}$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x}(xf(x) - \frac{k}{x}(-xf(-x) - xf(x)) - x\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) + x\frac{k}{x}(f(-x) - f(x)) \tag{3.8}$$

$$= f(x) + xf'(x) + k(f(-x) + f(x)) - xf'(x) + k(f(-x) - f(x)) \tag{3.9}$$

$$= (1 + 2ks)f(x). \tag{3.10}$$

Dus voor $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ geldt $[\mathcal{D}, x]f(x) = (1 + 2ks)f(x)$. □

Nu we deze relaties hebben afgeleid voor de $\mathcal{D}$-operator, kunnen we net zoals voor de $\mathcal{L}$-operator gaan kijken naar de Hermitisch-geadjungeerde van de $\mathcal{D}$-operator met betrekking tot $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)|x|^{2k}dx$.

Propositie 3.1.1. *Voor $f, g \in \mathscr{C}_1$ en $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definieer $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)|x|^{2k}dx$, dan met betrekking tot $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gelden de volgende eigenschappen.*

(i) $|x|^{-2k}\mathcal{D}^{\circ}|x|^{2k}f(x) = -\mathcal{D}f(x)$.

(ii) $\langle \mathcal{D}(f(x)), g(x)\rangle = -\langle f(x), \mathcal{D}(g(x))\rangle$.

Bewijs. Zij $k \in \mathbb{R}$ willekeurig zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor een $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Merk op dat $x^{\circ} = x$ en dat $\frac{\partial}{\partial x}^{\circ} = -\frac{\partial}{\partial x}$ waarbij x de vermenigvuldig met x-operator is. Dan voor $f, g \in \mathscr{C}_1$ willekeurig geldt dat

$$\langle sf, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)g(x)|x|^{2k}dx = \int_{\infty}^{-\infty} f(t)g(-t)|t|^{2k}(-dt) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t)|t|^{2k}dt = \langle f, s(g)\rangle,$$

voor $t = -x$.

(i) Nu we weten hoe de geadjungeerde eruit zien kunnen we gaan kijken naar $|x|^{-2k}\mathcal{D}^{\circ}|x|^{2k}f(x)$. Voor $f \in \mathscr{C}_1$ geldt:

$$|x|^{-2k}\mathcal{D}^{\circ}|x|^{2k}f(x) = |x|^{-2k}(\frac{\partial}{\partial x}^{\circ} - (s-1)^{\circ}\frac{k}{x}^{\circ})|x|^{2k}f(x) = |x|^{-2k}(-\frac{\partial}{\partial x} - (s-1)\frac{k}{x})|x|^{2k}f(x).$$

Voor $x > 0$ geldt dat

$$\begin{aligned}
x^{-2k}\mathcal{D}^{\circ}x^{2k}f(x) &= x^{-2k}(-\frac{\partial}{\partial x} - (s-1)\frac{k}{x})x^{2k}f(x) \\
&= x^{-2k}(-x^{2k}(f'(x) + \frac{2k}{x}f(x) - \frac{k}{x}s(f(x)) + \frac{k}{x}f(x))) \\
&= -f'(x) + \frac{k}{x}(s-1)f(x) = -\mathcal{D}f(x).
\end{aligned}$$

Voor $x < 0$ vervangen we x door $-x$, dan geldt dat

$$\begin{aligned}
(-x)^{-2k}\mathcal{D}^{\circ}(-x)^{2k}f(-x) &= (-x)^{-2k}(-\frac{\partial}{\partial x} + (s-1)\frac{k}{x})(-x)^{2k}f(-x) \\
&= (-x)^{-2k}(-(-x)^{2k}(\frac{2k}{x}f(-x) - f'(-x) - \frac{k}{x}(s(f(-x)) - f(-x)) \\
&= -(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{k}{x}(s-1))f(-x) = -\mathcal{D}f(-x).
\end{aligned}$$

Dus vinden we dat $|x|^{-2k}\mathcal{D}^{\circ}|x|^{2k}f(x) = -\mathcal{D}f(x)$.

(ii) Nu we (i) hebben volgt (ii) vrijwel direct. Zij $f, g \in \mathscr{C}_1$ willekeurig dan

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{D}(f(x)), g(x)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}(f(x))g(x)|x|^{2k}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{D}^{\circ}(g(x)|x|^{2k})dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)|x|^{2k}|x|^{-2k}\mathcal{D}^{\circ}(g(x)|x|^{2k})dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) - \mathcal{D}(g(x))|x|^{2k}dx = -\langle f(x), \mathcal{D}(g(x))\rangle.
\end{aligned}$$

Dus vinden we dat $\langle \mathcal{D}(f(x)), g(x)\rangle = -\langle f(x), \mathcal{D}(g(x))\rangle$. $\square$

3.1.1 Eigenfuncties van de Dunkl-operator

Om de niet-symmetrische Hankeltransformatie te definiëren is het van belang om te weten hoe de integraalkern eruit ziet van deze integraaltransformatie. De integraalkern van de niet-symmetrische Hankeltransformatie zijn de eigenfuncties van de volgende differentiaalvergelijking. Zij $\lambda, k \in \mathbb{R}$ met $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan is $\psi_\lambda(x,k)$ de eigenfunctie van

$$\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k) = 2\lambda\psi_\lambda(x,k), \quad \psi_\lambda(0,k) = 1. \tag{3.11}$$

Het is een natuurlijke manier om de integraalkern van de niet-symmetrische Hankeltransformatie te definiëren als eigenfuncties van deze differentiaalvergelijking, want de integraalkern van de symmetrische Hankeltransformatie (2.6) zijn de eigenfuncties van de $\mathcal{L}$-operator, en indien we ons beperken tot even functies $f(x)$ dan geldt dat $\mathcal{D}^2 f(x) = \mathcal{L}f(x)$ (lemma 3.1.2.(a)).

Propositie 3.1.2. *Er bestaat een unieke oplossing $\psi_\lambda(x,k)$ van (3.11) welke analytisch is voor alle $x \in \mathbb{R}$. In het geval dat $\lambda \neq 0$, is $\psi_\lambda(x,k)$ symmetrisch in λ en x. Als $\lambda = 0$ dan $\psi_0(x,k) = C_1 + C_2 x|x|^{-2k-1}$ voor constanten $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.*

Bewijs. Zij $k \in \mathbb{R}$ willekeurig zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ met $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zij $\psi_\lambda(x,k)$ een oplossing van (3.11) en definieer

$$\psi_\lambda(x,k)^e = \frac{1}{2}(\psi_\lambda(x,k) + \psi_\lambda(-x,k)), \quad \psi_\lambda(x,k)^o = \frac{1}{2}(\psi_\lambda(x,k) - \psi_\lambda(-x,k)),$$

waarbij $\psi_\lambda(x,k)^e$ het even deel is van $\psi_\lambda(x,k)$ en $\psi_\lambda(x,k)^o$ het oneven deel is van $\psi_\lambda(x,k)$. Door middel van lemma 3.1.2.(b) vinden we dat

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k)^e &= \frac{1}{2}(\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k) + \mathcal{D}s\psi_\lambda(x,k)) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k) - s\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k)) && (3.12)\\
&= \frac{1}{2}(2\lambda\psi_\lambda(x,k) - 2\lambda s\psi_\lambda(x,k)) = 2\lambda\psi_\lambda(x,k)^o,\\
\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k)^o &= \frac{1}{2}(\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k) - \mathcal{D}s\psi_\lambda(x,k)) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k) + s\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k)) && (3.13)\\
&= \frac{1}{2}(2\lambda\psi_\lambda(x,k) + 2\lambda s\psi_\lambda(x,k)) = 2\lambda\psi_\lambda(x,k)^e.
\end{aligned}$$

Dus vinden we dat (3.11) equivalent is voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ met

$$\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k)^e = 2\lambda\psi_\lambda(x,k)^o, \quad \psi_\lambda(0,k)^e = 1, \tag{3.14}$$

$$\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k)^o = 2\lambda\psi_\lambda(x,k)^e, \quad \psi_\lambda(0,k)^o = 0. \tag{3.15}$$

Als we naar $\mathcal{D}^2\psi_\lambda(x,k)^e$ kijken zien we dat

$$\mathcal{D}^2\psi_\lambda(x,k)^e = \mathcal{D}(2\lambda\psi_\lambda(x,k)^o) = 2\lambda\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k)^o = 4\lambda^2\psi_\lambda(x,k)^e.$$

Omdat $\psi_\lambda(x,k)^e$ even is volgt uit lemma 3.1.2.(a) dat $\mathcal{L}\psi_\lambda(x,k)^e = 4\lambda^2\psi_\lambda(x,k)^e$ en aangezien ook geldt dat $\psi_\lambda(0,k)^e = 1$ volgt hieruit dat $\psi_\lambda(x,k)^e = \varphi_\lambda(x,k)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
Zij $\lambda \neq 0$ dan volgt uit (3.14) en lemma 3.1.1 dat

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda(x,k)^o &= \frac{1}{2\lambda}\mathcal{D}\psi_\lambda(x,k)^e = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_\lambda(x,k)^e - \frac{k}{x}(s-1)\psi_\lambda(x,k)^e\right) && (3.16)\\
&= \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\lambda(x,k)^e = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_\lambda(x,k).
\end{aligned}$$

Dus vinden we dat $\psi_\lambda(x,k) = \varphi_\lambda(x,k) + \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_\lambda(x,k))$. Aangezien $\varphi_\lambda(x,k)$ analystisch is voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $\psi_\lambda(x,k)$ ook analystisch voor alle $x \in \mathbb{R}$. Vanwege het feit dat $\varphi_\lambda(x,k)$ de unieke oplossing is van (2.1) is $\psi_\lambda(x,k)$ ook uniek bepaald. Vanwege de symmetrie in x en λ van $\varphi_\lambda(x,k)$ kunnen we $\varphi_\lambda(x,k)$ ook schrijven als $\varphi_\lambda(x,k) = f_k(x\lambda)$. Door de gevonden uitdrukking voor $\psi_\lambda(x,k)$ vinden we dat $\psi_\lambda(x,k) = f_k(x\lambda) + \frac{1}{2}f_k'(x\lambda) = g_k(x\lambda)$. Dus is $\varphi_\lambda(x,k)$ ook symmetrsich in x en λ.
Nu het geval $\lambda = 0$. Dan krijgen we de vergelijkingen

$$\mathcal{D}\psi_0(x,k)^e = 0, \quad \psi_0(0,k)^e = 1, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{D}\psi_0(x,k)^o = 0, \quad \psi_0(0,k)^o = 0. \tag{3.18}$$

Omdat $\psi_\lambda(x,k)^e$ even is, volgt uit lemma 3.1.1 dat

$$\mathcal{D}\psi_0(x,k)^e = \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0(x,k)^e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0(x,k)^e = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{C}.$$

Uit (3.18) en uit het feit dat $\varphi_\lambda(x,k)^o$ oneven is volgt dat

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\psi_0(x,k)^o &= \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0(x,k)^o) - \frac{k}{x}\Big(\psi_0(-x,k)^o - \psi_0(x,k)^o\Big)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\psi_0(x,k)^o) + \frac{2k}{x}\psi_0(x,k)^o = 0.\end{aligned}$$

Merk op dat dit een separabele differentiaal vergelijking is. Deze lossen we als volgt op

$$\begin{aligned}\frac{1}{\psi_0(x,k)^o}\frac{\partial}{\partial x}(\psi_0(x,k)^o) &= -\frac{2k}{x},\\ \frac{\partial}{\partial x}\ln|\psi_0(x,k)^o| &= -\frac{2k}{x},\\ \psi_0(x,k)^o &= C_2 x|x|^{-2k-1}, \quad C_2 \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Dus vinden we dat $\psi_0(x,k)^o = C_1 + C_2|x|^{-2k-1}$ voor constanen $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. $\square$

3.2 Niet-symmetrische Hankeltransformatie

Nu we weten hoe de eigenfuncties van (3.11) eruit zien en daarmee de integraalkern van de niet-symmetrische Hankeltransformatie, kunnen we de niet-symmetrische Hankeltransformatie definiëren.

Definitie 3.2.1 (Niet-symmetrische Hankeltransformatie)**.** *Zij $f(x)$ een oneindig vaak continu differentieerbare complexwaardige functie op $\mathbb{R}$ zodanig dat $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{cx} = 0$, voor alle $c \in \mathbb{R}$, dan wordt de niet-symmetrische Hankelgetransformeerde van $f(x)$ gegeven door*

$$(\mathcal{F}_k f)(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\lambda(x,k)f(x)|x|^{2k}dx. \tag{3.19}$$

We geven de verzameling van functies waar de niet-symmetrsiche Hankeltransformatie voor is gedefinieerd aan met $\mathscr{Q}_\infty := \{f(x) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) : f(x)\,\text{complexwaardig}, \lim_{x\to\infty} f(x)e^{cx} = 0,$ $\forall c \in \mathbb{R}\}$. Net zoals bij de symmetrische Hankeltransformatie bekijken we de niet-symmetrische Hankelgetransformeerde van operatoren. Deze worden op dezelfde manier gedefinieerd als in definitie 2.2.2. We zijn voornamelijk geïntresseerd in het gedrag van de niet-symmetrsiche Hankeltransformatie op de Dunkl-operator, de reflectie-operator en de vermenigvuldig-met-$2x$-operator, want de algebra die we gaan gebruiken om de niet-symmetrsiche Hankeltransformatie te beschrijven gebruikt deze operatoren.

Lemma 3.2.1. *Zij $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan gelden de volgende uitspraken.*

(a) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}_\infty$ zodanig dat $\mathcal{D}^x f(x) \in \mathscr{Q}_\infty$, dan

$$(\mathcal{F}_k \mathcal{D}^x(f(x)))(\lambda) = -2\lambda(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda).$$

(b) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}_\infty$ zodanig dat $2xf(x) \in \mathscr{Q}_\infty$, dan

$$(\mathcal{F}_k(2xf(x)))(\lambda) = \mathcal{D}^\lambda(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda).$$

(c) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}_\infty$, dan

$$(\mathcal{F}_k s^x f(x))(\lambda) = s^\lambda(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda).$$

Met het superscript geven we aan op welke variabele de operator werkt.

Bewijs. We definiëren het inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ net zoals in propositie 3.1.1.
Merk op dat $(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda)$ hetzelfde is als $\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), \psi_\lambda(x,k)\rangle$.
Zij $k \in \mathbb{R}$ willekeurig zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(a) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}_\infty$ willekeurig zodanig dat $\mathcal{D}^x f(x) \in \mathscr{Q}_\infty$ dan volgt uit propositie 3.1.1.(ii) dat

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_k \mathcal{D}^x(f(x)))(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle D^x f(x), \psi_\lambda(x,k)\rangle = -\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), \mathcal{D}^x \psi_\lambda(x,k)\rangle \\
&= -\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), 2\lambda\psi_\lambda(x,k)\rangle \\
&= -\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} 2\lambda\psi_\lambda(x,k)f(x)|x|^{2k}dx \\
&= \frac{-2\lambda}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda(x,k)f(x)|x|^{2k}dx = -2\lambda(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda).
\end{aligned}$$

(b) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}_\infty$ willekeurig zodanig dat $2xf(x) \in \mathscr{Q}_\infty$, dan volgt uit de symmetrie tussen x en λ van $\psi_\lambda(x,k)$ dat

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_k 2xf(x))(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle 2xf(x), \psi_\lambda(x,k)\rangle = \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), 2x\psi_\lambda(x,k)\rangle \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), \mathcal{D}^\lambda\psi_\lambda(x,k)\rangle \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}^\lambda\psi_\lambda(x,k)f(x)|x|^{2k}dx \\
&= D^\lambda\left(\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda(x,k)f(x)|x|^{2k}dx\right) = \mathcal{D}^\lambda(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda).
\end{aligned}$$

(c) Zij $f(x) \in \mathscr{Q}_\infty$ willekeurig dan volgt uit de symmetrie in x en λ van $\psi_\lambda(x,k)$, ofwel $\psi_\lambda(-x,k) = \psi_{-\lambda}(x,k)$, dat

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_k s^x f(x))(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle s^x f(x), \psi_\lambda(x,k)\rangle = \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), s^x\psi_\lambda(x,k)\rangle \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\langle f(x), s^\lambda\psi_\lambda(x,k)\rangle = s^\lambda\langle f(x), \psi_\lambda(x,k)\rangle = s^\lambda(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda).
\end{aligned}$$

□

Zoals voor de symmetrsiche Hankeltransformatie een master formule (stelling 2.2.1) hebben, hebben we ook een master formule voor de niet-symmetrische Hankeltransformatie.

Stelling 3.2.1 (Master formule niet-symmetrische Hankeltransformatie)**.** *Zij $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan gelden de volgende eigenschappen.*

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda(x,k)\psi_\mu(x,k)e^{-x^2}|x|^{2k}dx = \Gamma(k+\frac{1}{2})e^{\lambda^2+\mu^2}\psi_\mu(\lambda,k) \tag{3.20}$$

Definieer $exp(-\frac{\mathcal{D}^x}{4})$ als $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\mathcal{D}^x)^j}{4^j j!}$ voor $f \in \mathscr{Q}_\infty$ zodanig dat $exp(-\frac{\mathcal{D}^x}{4})f(x)$ convergent is en $exp(-\frac{\mathcal{D}^x}{4})f(x) \in \mathscr{Q}_\infty$, dan

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda(x,k)exp(-\frac{\mathcal{D}^2}{4})(f(x))e^{-x^2}|x|^{2k}dx = \Gamma(k+\frac{1}{2})e^{\lambda^2}f(\lambda). \tag{3.21}$$

Bewijs. Het bewijs gaat analoog aan dat van de masterformule van de symmetrische Hankeltranformatie.

(i) Merk op dat er aan de linkerkant niets anders staat dan $\Gamma(k+\frac{1}{2})(\mathcal{F}_k(e^{-x^2}\psi_\mu(x,k))(\lambda)$. Definieer de volgende functies met de bij behorende operatoren

$$\psi_\mu(x,k)^- = e^{-x^2}\psi_\mu(x,k), \quad \psi_\mu(x,k)^+ = e^{x^2}\psi_\mu(x,k),$$
$$\mathcal{D}_- = e^{-x^2}\circ\mathcal{D}\circ e^{x^2}, \quad \mathcal{D}_+ = d^{x^2}\circ\mathcal{D}\circ e^{-x^2}.$$

Dan is $\psi_\mu(x,k)^+$ een eigenfunctie van $\mathcal{D}_+$ bij eigenwaarde 2μ en $\psi_\mu(x,k)^-$ eigenfunctie van $\mathcal{D}_-$ bij eigenwaarde 2μ. Zij $f \in \mathscr{Q}_\infty$willekeurig, dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_-(f(x)) &= e^{-x^2}\circ\mathcal{D}(e^{x^2}f(x)) = e^{-x^2}\left(e^{x^2}(\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) + 2xf(x) - \frac{k}{x}(f(-x)-f(x))\right) \\
&= (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1) + 2x)f(x) = (\mathcal{D}+2x)f(x), \\
\mathcal{D}_+(f(x)) &= e^{x^2}\circ\mathcal{D}(e^{-x^2}f(x)) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}(\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) - 2xf(x) - \frac{k}{x}(s-1))\right) \\
&= (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1) - 2x)f(x) = (\mathcal{D}-2x)f(x).
\end{aligned}$$

Uit lemma 3.1.2 volgt dat

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_k(\mathcal{D}_-^x f(x)))(\lambda) &= (\mathcal{F}_k(\mathcal{D}^x f(x)))(\lambda) + (\mathcal{F}_k(2xf(x)))(\lambda) \\
&= -2\lambda(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda) + \mathcal{D}^\lambda(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda) \\
&= \mathcal{D}_+^\lambda(\mathcal{F}_k f(x))(\lambda).
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_+^\lambda(\mathcal{F}_k\psi_\mu(x,k)^-)(\lambda) &= \mathcal{F}_k(\mathcal{D}_-^x)(\mathcal{F}_k\psi_\mu(x,k)^-)(\lambda) = \mathcal{F}_k(\mathcal{D}_-^x\psi_\mu(x,k)^-)(\lambda) \\
&= 2\mu(\mathcal{F}_k\psi_\mu(x,k)^-)(\lambda),
\end{aligned}$$

ofwel $(\mathcal{F}_k\psi_\mu(x,k)^-)(\lambda)$ is een eigenfunctie van $\mathcal{D}_+^\lambda$ bij eigenwaarde 2μ. Dus geldt dat $(\mathcal{F}_k\psi_\mu(x,k)^-)(\lambda) = C_1(\mu)\psi_\mu(\lambda,k)^+ = C_2(\mu)e^{\mu^2}\psi_\mu(\lambda,k)^+ = C_2(\mu)e^{\mu^2+\lambda^2}\psi_\mu(\lambda,k)$ voor constanten $C_1(\mu), C_2(\mu)$. Uit de symmetrie tussen λ en μ van zowel de integraal als van $\psi_\mu(\lambda,k)$, volgt dat $C_2(\mu) = C$ voor een constante C. Vullen we $\lambda = \mu = 0$ in, dan vinden we $C = 1$ en dus $\Gamma(k+\frac{1}{2})(\mathcal{F}_k(\psi_\mu(x,k)e^{-x^2}))(\lambda) = \Gamma(k+\frac{1}{2})e^{\lambda^2+\mu^2}\psi_\mu(\lambda,k)$.

(ii) Volgt uit (i) op dezelfde manier als voor de symmetrische Hankeltransformatie mits $exp(-\frac{-\mathcal{D}^2}{4})f(x)$ bestaat. $\square$

Nu we weten hoe de niet-symmetrische Hankeltransformatie eruit ziet en hoe deze zich gedraagt met betrekking tot de $\mathcal{D}$-operator, de vermenigvuldig-met-x-operator en de reflectie-operator, wordt het tijd om de niet-symmetrische Hankeltransformatie te gaan bekijken vanuit een ander punt, namelijk van uit de algebra en de representatietheorie. De algebra die we nodig gaan hebben om de niet-symmetriche Hankeltransformatie te beschrijven definiëert zich aan de hand van de niet-symmetrische Hankelgetransformeerde van de Dunkl-operator, de vermenigvuldig-met-x-operator en de reflectie-operator. We zullen dan ook zien dat we een niet-symmetrsiche Hankeltransformatie kunnen definiëren op een eindig-dimensionale ruimte. Als we in het vervolg hebben over de Hankeltransformatie dan bedoelen we daarmee de niet-symmetrische Hankeltransformatie.

Hoofdstuk 4

Een algebraïsche interpretatie van de Hankeltransformatie

Voordat we naar de Hankeltransformatie gaan kijken vanuit de algebra en de representatietheorie, volgen er eerst een paar definities die we later nodig zullen hebben. Deze definitie komen allemaal uit [1].

4.1 Algebra en representatietheorie

Alvorens we kunnen praten over associatieve algebra's en representaties ervan moeten we deze eerst definiëren.

Definitie 4.1.1 (Associatieve algebra). *Een* ***associatieve algebra*** *over een lichaam F is een vectorruimte V over F samen met de bilineaire afbeelding*

$$\beta : A \times A \to A \tag{4.1}$$

$$(a, b) \mapsto ab. \tag{4.2}$$

zodanig dat $\beta(ab, c) = \beta(a, bc)$ voor $a, b, c \in A$.

Definitie 4.1.2 (Homomorfisme tussen algebra's). *Een* ***homomorfisme*** *$f : A \to B$ tussen twee algebra's A, B is een lineaire afbeelding zodat $f(xy) = f(x)f(y)$, voor alle $x, y \in A$ en $f(1) = 1$.*

Definitie 4.1.3 (Representatie). *Een* ***representatie*** *van een associatieve algebra A op V is een paar (ρ, V), waarbij V een vectorruimte is en ρ een homomorfisme:*

$$\rho : A \to \mathrm{End}(V). \tag{4.3}$$

$\mathrm{End}(V)$ *zijn alle homomorfisme van V naar V. De vectorruimte V wordt ook wel een (links) A-moduul genoemd. We zullen V soms een representatie van A noemen.*

Definitie 4.1.4 (Deelrepresentatie). *Zij (ρ, V) een representatie van een algebra A, en U een deelruimte van V. Als U invariant is onder ρ (dat wil zeggen gesloten onder alle operaties van ρ), dan is ρ beperkt tot $\mathrm{End}(U)$ een deelrepresentatie van (ρ, V).*

Definitie 4.1.5 (Irreducibele representatie). *Een representatie (ρ, V) heet* ***irreducibel*** *als $(\rho, \{0\})$ en (ρ, V) de enige deelrepresentaties zijn.*

Definitie 4.1.6 (Homomorfisme tussen representaties)**.** *Een* ***homomorfisme*** *tussen twee representaties* (ρ_1, V_1) *en* (ρ_2, V_2) *van een associatieve algebra* A*, is een lineaire afbeelding* $\phi : V_1 \to V_2$ *welke commuteert met de acties van* A*. Met andere woorden* $\phi(\rho_1(a)v) = \rho_2(a)\phi(v)$ *voor alle* $v \in V_1$ *en* $a \in A$*.*

We nemen in het vervolg aan dat we over het lichaam $F = \mathbb{C}$ werken.

4.2 De Cherednik algebra

Nu we de alle definities hebben gedefinieerd die we in het vervolg nodig hebben, kunnen we gaan kijken naar de zogeheten Cherednik algebra. Wat later de algebra zal zijn om de Hankeltransformatie mee te beschrijven.

Definitie 4.2.1 (Cherednik algebra)**.** *Zij* $k \in \mathbb{R}$*, dan is de* ***Cherednik algebra*** $\mathscr{H}$ *de associatieve algebra voortgebracht door* $\mathbb{d}, \mathbb{x}$ *en* $\mathbb{s}$ *met de volgende relaties*

$$\mathbb{s}\mathbb{x}\mathbb{s} = -\mathbb{x}, \quad \mathbb{s}\mathbb{d}\mathbb{s} = -\mathbb{d}, \quad [\mathbb{d}, \mathbb{x}] = 1 + 2k\mathbb{s},$$

waarbij $[A, B]$ *de commutator* $[A, B] = AB - BA$ *is.*

Om straks de link te leggen tussen de Hankeltransformatie en de Cherednik algebra gaan we kijken naar de polynoomrepresentatie van $\mathscr{H}$. We geven de ruimte van polynomen met complexe coëfficiënten aan met $\mathbb{C}[x]$.

Stelling 4.2.1. *Definieer de afbeelding* $\rho : \mathscr{H} \to \mathrm{End}(\mathbb{C}[x])$ *op de generatoren van* $\mathscr{H}$ *door:*

$$\begin{aligned}
&\rho(\mathbb{x})q(x) = xq(x), && \textit{vermenigvuldiging met } x;\\
&\rho(\mathbb{s})q(x) = (sq)(x) = q(-x), && \textit{reflectie in } x;\\
&\rho(\mathbb{d})q(x) = \mathcal{D}q(x), && \textit{Dunkl-operator},
\end{aligned}$$

voor $q(x) \in \mathbb{C}[x]$*. Dan is* ρ *een representatie van* $\mathscr{H}$ *op* $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x])$*.*

Bewijs. We moeten nagaan of de relaties van $\mathscr{H}$ gelden onder ρ. Zij $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ willekeurig dan

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbb{s}\mathbb{x}\mathbb{s})q(x) &= \rho(\mathbb{s})\rho(\mathbb{x})\rho(s)q(x) = (sxs)q(x) \\
&= (-x)q(x) = \rho(-\mathbb{x})q(x), && \text{Lemma 3.1.2;}\\
\rho(s\mathbb{d}\mathbb{s})q(x) &= \rho(\mathbb{s})\rho(\mathbb{d})\rho(\mathbb{s})q(x) = (s\mathcal{D}s)q(x) \\
&= (-\mathcal{D})q(x) = \rho(-\mathbb{d})q(x), && \text{Lemma 3.1.2.(b);}\\
\rho([\mathbb{d}, \mathbb{x}])q(x) &= [\rho(\mathbb{d}), \rho(\mathbb{x})]q(x) = [\mathcal{D}, x]q(x) \\
&= (1 + 2ks)q(x) = \rho(1 + 2k\mathbb{s})q(x), && \text{Lemma 3.1.2.(b),}
\end{aligned}$$

waarbij $\frac{\partial}{\partial x}(q(x)) = q'(x)$. De drie gedefinieerde relaties in $\mathscr{H}$ gelden ook onder ρ, dus $(\rho, \mathbb{C}[x])$ is een representatie van $\mathscr{H}$. □

Nu we de representatie $(\rho, \mathbb{C}[x])$ van $\mathscr{H}$ hebben, gaan we kijken of de deze irreducibel is. We zullen zien dat voor bepaalde waarden voor k de representatie irreducibel is en voor bepaalde waarden voor k de representatie reducibel is. Voor de waarden voor k zodanig dat de representatie reducibel is, zullen we een eindig-dimensionale deelrepresentatie vinden. Om deze waarden van k te bepalen is het belangrijk om te weten wat de eigenfuncties van de Dunkl-opertor in $\mathbb{C}[x]$ zijn met de bijbehorende eigenwaarden.

Lemma 4.2.1. *De Dunkl-operator $\mathcal{D}$ beperkt tot $\mathbb{C}[x]$ heeft maar één eigenwaarde, namelijk $\lambda = 0$. Voor $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, heeft $\mathcal{D}$ een unieke eigenfunctie in $\mathbb{C}[x]$, namelijk de constante functie 1. Wanneer $k = -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zijn de eigenfuncties van de vorm $C_1 + C_2 x^{2n+1}$ met $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.*

Bewijs. Zij $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ een eigenfunctie van $\mathcal{D}$, omdat $\mathcal{D}$ de graad van ieder polynoom verlaagt met één geldt dat $\mathcal{D}^{m+1}p(x) = 0$ waarbij $m = \deg(p(x))$. Dus geldt dat de eigenwaarden van $\mathcal{D}$ in $\mathbb{C}[x]$ nul zijn. Schrijf nu $p(x) = p^e(x) + p^o(x)$ waarbij $p^e(x)$ het even deel is van $p(x)$ en $p^o(x)$ het oneven deel is van $p(x)$. Dan volgt uit lemma 3.1.1 dat

$$\mathcal{D}p(x) = \frac{\partial}{\partial x}p^e(x) + (\frac{\partial}{\partial x}p^o(x) + \frac{2k}{x}p^o(x)) = 0.$$

Dit geldt als $\frac{\partial}{\partial x}p^e(x) = 0$ en $\frac{\partial}{\partial x}p^o(x) + \frac{2k}{x}p^o(x) = 0$, hieruit volgt dat $p^e(x) = C_1$ met $C_1 \in \mathbb{C}$. Schrijf voor $p^o(x) = \sum_{l=0}^{m} a_l x^{2l+1}$ met $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a_l \in \mathbb{C}$. Dan vinden we dat

$$\frac{\partial}{\partial x}p^o(x) + \frac{2k}{x}p^o(x) = \sum_{l=0}^{m} a_l(2l + 1 + 2k)x^{2l} = 0.$$

Dit geldt alleen als $a_l(2l + 1 + 2k) = 0$. In het geval dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dan is $a_l = 0$ voor alle $0 \leq l \leq 2m + 1$, en dus is $p(x) = C_1$. In het geval dat $k = -\frac{1}{2} - n$ voor een $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $n \leq 2m + 1$, vinden we wanneer $l = n$ dat $a_n = C_2$ met $C_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Dus vinden we dat $p^0(x) = C_2$, ofwel $p(x) = C_1 + C_2 x^{2n+1}$. $\square$

Nu weten we dat voor $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k = -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ er geldt dat $p(x) = C_1 + C_2 x^{2n+1}$ een eigenfunctie van $\mathcal{D}$ is bij eigenwaarde nul, kunnen we laten zien dat voor deze k de polynoomrepresentatie reducibel is. We kunnen hierdoor een eindig-dimensionale deelrepresentatie vinden.

Stelling 4.2.2. *(a). De representatie $(\rho, \mathbb{C}[x])$ is irreducibel als $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*
(b). Als $k = -\frac{1}{2} - n$ voor een $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan is $(\rho, (x^{2n+1}))$ een deelrepresentatie van $(\rho, \mathbb{C}[x])$, waarbij $(x^{2n+1} = x^{2n+1}\mathbb{C}[x]$.

Bewijs. (a). Zij $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ willekeurig. Zij $\{0\} \neq V \subset \mathbb{C}[x]$ een deelruimte van $\mathbb{C}[x]$ zodanig dat (ρ, V) een deelrepresentatie is van $(\rho, \mathbb{C}[x])$. Zij $q(x) \in V$ willekeurig met $\deg(q(x)) = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan geldt dat $\rho(\mathbb{d}^m)q(x) = \mathcal{D}^m(q(x)) = C \in V$ met $C \in \mathbb{C}$. Dit komt doordat de Dunkl-operator de graad van $q(x)$ met één verlaagt. Dus vinden we dat de constanten $C \in \mathbb{C}$ in V zitten. Aangezien (ρ, V) een deelrepresentatie is van $(\rho, \mathbb{C}[x])$ geldt dat $\rho(\mathbb{x}^l)C = x^l C \in V$ voor alle $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dus $V = \mathbb{C}[x]$.
(b). Zij $k = -\frac{1}{2} - n$ voor een vaste $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dan weten we van lemma 4.2.1 dat $\mathcal{D}(C_1 + C_2 x^{2n+1}) = 0$, daaruit volgt dat $\mathcal{D}x^{2n+1} = 0$. Merk op dat (x^{2n+1}) de polynomen van graad $2n + 1$ en hoger zijn. Zij $q(x) \in (x^{2n+1})$ willekeurig, dan $\rho(\mathbb{x}^m)q(x) = x^m q(x) \in (x^{2n+1})$ voor alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $\rho(\mathbb{s})q(x) = sq(x) = q(-x) \in (x^{2n+1})$. Verder weten we dat de Dunkl-operator graad verlagend werkt op de polynomen en dat $\mathcal{D}x^{2n+1} = 0$. Dus voor monomen $x^r \in (x^{2n+1})$ werkt $\mathcal{D}^m$ op x^r als

$$\mathcal{D}^m x^r = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad 2n + 1 \leq r \leq m, \\ \mathcal{D}^m x^r & \text{als} \quad r > m. \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $\rho(\mathbb{d}^m)q(x) = \mathcal{D}^m(q(x)) \in (x^{2n+1})$. Nu we weten dat (x^{2n+1}) gesloten is onder machten van $\mathbb{d}, \mathbb{x}$ en $\mathbb{s}$ volgen de drie relaties van $\mathscr{H}$ hier direct uit. Dus is $(\rho, (x^{2n+1}))$ een deelrepresentatie van $(\rho, \mathbb{C}[x])$. $\square$

Dus voor $k = -\frac{1}{2} - n$ voor een $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is $\mathbb{C}[x]$ niet irreducibel en kunnen we een deelrepresentatie van $\mathbb{C}[x]$ vinden. Als we de Hankeltransformatie over een eindig-dimensionale vectorruimte willen beschouwen, kijken we naar de deelrepresentatie (ρ, V_{2n+1}) van $(\rho, \mathbb{C}[x])$ waarbij $V_{2n+1} = \mathbb{C}[x]/(x^{2n+1})$. We zullen later laten zien dat dit een irreducibele deelrepresentatie van $(\rho, \mathbb{C}[x])$ is.

4.3 Een oneindig-dimensionale representatie en de Hankeltransformatie

Voor nu gaan we eerst kijken naar het oneindig-dimensionale geval. Dit gebeurt voor $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, want dan is $(\rho, \mathbb{C}[x])$ een irreducibele representatie voor $\mathscr{H}$. Merk op dat voor polynomen de Hankeltransformatie niet gedefinieerd is. Dus gaan we in plaats van naar de representatie $(\rho, \mathbb{C}[x])$ van $\mathscr{H}$ kijken naar de $\mathbb{C}[x]$ vermenigvuldigd met een Gaussiaan. Aan de hand van deze vectorruimte kunnen we laten zien dat de Hankeltransformatie een isomorfisme tussen twee oneindig-dimensionale vectorruimten.

Definitie 4.3.1 (Gaussiaan). *Een homomorfisme $\gamma : V \to W$ tussen twee $\mathscr{H}$-modulen V en W heet een* ***Gaussiaan*** *als $\gamma\mathscr{H} = \tau(\mathscr{H})\gamma$, waarbij voor $\alpha \in \mathbb{R}$ het volgende bijectieve homomorfisme (automorfisme) τ van $\mathscr{H}$ gedefinieerd wordt op de operatoren als*

$$\tau(\mathbb{d}) = \mathbb{d} - \alpha\mathbb{x}, \quad \tau(\mathbb{x}) = \mathbb{x}, \quad \tau(\mathbb{s}) = \mathbb{s}.$$

We kunnen aan de hand van de gedefinieerde identiteiten op de generatoren van $\mathscr{H}$ het automorfisme τ uitbreiden tot een automorfisme op $\mathscr{H}$ door de drie relaties van $\mathscr{H}$ na te gaan.

$$\begin{aligned}
\tau(\mathbb{s})\tau(\mathbb{d})\tau(\mathbb{s}) &= \mathbb{s}(\mathbb{d} + \alpha\mathbb{x})\mathbb{s} = \mathbb{s}\mathbb{d}\mathbb{s} + \alpha\mathbb{s}\mathbb{x}\mathbb{s} = -\mathbb{d} - \alpha\mathbb{x} = -\tau(\mathbb{d}) = \tau(-\mathbb{d}).\\
\tau(\mathbb{s})\tau(\mathbb{x})\tau(\mathbb{s}) &= \mathbb{s}\mathbb{x}\mathbb{s} = -\mathbb{x} = \tau(-\mathbb{x}).\\
[\tau(\mathbb{d}), \tau(\mathbb{x})] &= [\mathbb{d} - 2\mathbb{x}, \mathbb{x}] = [\mathbb{d}, \mathbb{x}] - \alpha[\mathbb{x}, \mathbb{x}] = [\mathbb{d}, \mathbb{x}] = 1 + 2k\mathbb{s} = \tau(1 + \alpha k\mathbb{s}).
\end{aligned}$$

Propositie 4.3.1. *$(\rho, \mathbb{C}[x]e^{-x^2})$ en $(\rho, \mathbb{C}[x]e^{x^2})$ zijn representatie van $\mathscr{H}$.*

Bewijs. Het is duidelijk dat $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ en $\mathbb{C}[x]e^{x^2}$ gesloten zijn onder vermenigvuldigen met machten van x en onder het toepassen van de reflectie-operator. We laten eerst zien dat $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ gesloten is onder het nemen van machten van $\mathcal{D}$. Zij $p(x) \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ willekeurig dan is $p(x)$ te schrijven als $p(x) = q(x)e^{-x^2}$ voor $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}p(x) &= \frac{\partial}{\partial x}(p(x)) - \frac{k}{x}(p(-x) - p(x)) = e^{-x^2}(\frac{\partial}{\partial x}q(x) - 2xq(x) - \frac{k}{x}(q(-x) - q(x)))\\
&= e^{-x^2}(\mathcal{D}(q(x)) - 2xq(x)) \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Aangezien $\mathcal{D}$ graad verlagend werkt op de polynomen en dus $\mathcal{D}^m(\mathbb{C}[x]) \subset \mathbb{C}[x]$. Dus bestaat er een $h(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ zodat $\mathcal{D}(q(x)) = h(x)$, $2xq(x) = g(x)$. Dus kunnen we schrijven dat

$$\mathcal{D}p(x) = e^{-x^2}(h(x) - g(x)).$$

Dit kunnen we blijven herhalen voor alle machten van $\mathcal{D}$, dus is $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ gesloten onder het nemen van machten van $\mathcal{D}$. Op dezelfde manier is $\mathbb{C}[x]e^{x^2}$ gesloten onder het nemen van machten van $\mathcal{D}$. Nu we weten dat $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ en $\mathbb{C}[x]e^{x^2}$ gesloten zijn onder de voorbrengers van $\mathscr{H}$, volgt uit lemma 3.1.2, want $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}, \mathbb{C}[x]e^{x^2} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$, dat de 3 relaties van $\mathscr{H}$ ook gelden. $\square$

Lemma 4.3.1. *De representaties $(\rho, \mathbb{C}[x]e^{x^2})$ en $(\rho, \mathbb{C}[x]e^{-x^2})$ van $\mathscr{H}$ zijn irreducibel.*

Bewijs. Zij $0 \neq V \subset \mathbb{C}[x]e^{x^2}$ een deelruimte van $\mathbb{C}[x]e^{x^2}$ zodanig dat (ρ, V) een deelrepresentatie is van $(\rho, \mathbb{C}[x]e^{x^2})$. Zij $p(x) \in V$ willekeurig en schrijf $p(x) = q(x)e^{x^2}$ met $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, dan geldt dat $\rho(\mathbb{x}^m)p(x) = x^m p(x) \in V$ voor alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, want (ρ, V) is een deelrepresentatie van $(\rho, \mathbb{C}[x]e^{x^2})$. Verder geldt dat $\rho(\mathbb{d})(p(x)) - 2xp(x) = \mathcal{D}(p(x)) - 2xp(x) = e^{x^2}(\mathcal{D}(q(x)) + 2xq(x) - 2xq(x) = e^{x^2}\mathcal{D}(q(x))$. We weten dat $\mathcal{D}$ graad verlagend werk op $q(x)$, dus als we dit een aantal keer herhalen dan vinden we dat $Ce^{x^2} \in V$ voor een $C \in \mathbb{C}$. Dus geldt dat $Ce^{x^2} \in V$, dus $V = \mathbb{C}[x]e^{x^2}$, ofwel $(\rho, \mathbb{C}[x]e^{x^2})$ is irreducibel. Het bewijs voor de irreducibiliteit van $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ gaat hier analoog aan alleen geldt dan: $\mathcal{D}(p(x)) + 2xp(x) = e^{-x^2}(\mathcal{D}(q(x)) - 2xq(x) + 2xq(x) = e^{-x^2}\mathcal{D}(q(x))$. □

Lemma 4.3.2. *Het homomorfisme $\gamma_1 : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]e^{x^2}$ gegeven voor $p(x) \mapsto p(x)e^{x^2}$ is een Gaussiaan.*

Bewijs. Neem $\alpha = 2$ in definitie 4.3.1. Het is voldoende om te laten zien dat het goed gaat voor de voortbrengers en de drie relaties van $\mathscr{H}$. Zij $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ willekeurig dan:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\rho(\mathbb{d})(p(x))) &= \gamma_1(\mathcal{D}(p(x))) = e^{x^2}\mathcal{D}(p(x)) = \mathcal{D}p(x)e^{x^2} - 2xp(x)e^{x^2} \\
&= (\mathcal{D} - 2x)p(x)e^{x^2} = \rho(\tau(\mathbb{d}))\gamma_1(p(x)). \\
\gamma_1(\rho(\mathbb{x})p(x)) &= \gamma_1(xp(x)) = e^{x^2}xp(x) = xe^{x^2}p(x) = \rho(\tau(\mathbb{x}))\gamma_1(p(x)). \\
\gamma_1(\rho(\mathbb{s})p(x)) &= \gamma_1(sp(x)) = e^{x^2}sp(x) = s(e^{x^2}p(x)) = \rho(\tau(\mathbb{s}))\gamma_1(p(x)). \\
\gamma_1(\rho(\mathbb{s}\mathbb{d}\mathbb{s})p(x)) &= \gamma_1((s\mathcal{D}s)p(x)) = \gamma_1(-\mathcal{D})p(x) = e^{x^2}(-\mathcal{D}p(x)) \\
&= 2xp(x)e^{x2} - \mathcal{D}p(x)e^{x^2} = -(\mathcal{D} - 2x)p(x)e^{x^2} \\
&= \rho(\tau(-\mathbb{d}))\gamma_1 p(x) = \rho(\tau(\mathbb{s}\mathbb{d}\mathbb{s}))\gamma_1 p(x). \\
\gamma_1(\rho(\mathbb{s}\mathbb{x}\mathbb{s})p(x)) &= \gamma_1\rho(-x)p(x) = \gamma_1(-xp(x)) = e^{x^2}(-xp(x)) \\
&= -xe^{x^2}p(x) = \rho(\tau(-x))\gamma_1 p(x) = \rho(\tau(\mathbb{s}\mathbb{x}\mathbb{s}))\gamma_1 p(x). \\
\gamma_1(\rho[\mathbb{d}, \mathbb{x}])p(x) &= \gamma_1(\rho(1 + 2k\mathbb{s}))p(x) = e^{x^2}(1 + 2ks)p(x) = (1 + 2ks)e^{x^2}p(x) \\
&= \rho(\tau(1 + 2k\mathbb{s}))\gamma_1 p(x) = \gamma(\tau([\mathbb{d}, \mathbb{x}]))\gamma_1 p(x).
\end{aligned}$$

Dus γ_1 is een Gaussiaan. □

Lemma 4.3.3. *Het homomorfisme $\gamma_2 : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ gegeven voor $p(x) \mapsto p(x)e^{-x^2}$ is een Gaussiaan.*

Bewijs. Het bewijs is analoog aan het bewijs van 4.3.2 maar dan voor $\alpha = -2$. □

Als we nu kijken naar de polynomen uit $\mathbb{C}[x]$ vermenigvuldigd met de Gaussiaan e^{-x^2}, dan kunnen we de Hankeltransformatie nemen van functies uit $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$, want $\mathbb{C}[x]e^{-x^2} \subset \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ en $\lim_{x\to\infty} q(x)e^{cx} = 0$ voor alle $c \in \mathbb{R}$ voor alle $q(x) \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ vanwege e^{-x^2}.
Als we lemma 3.2.1 volgen dan is de Hankeltransformatie gedefinieerd op de operatoren niets anders dan het volgende automorfisme $\sigma : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ gedefinieerd op de generatoren als

$$\sigma(s) = s, \quad \sigma(\mathbb{d}) = -2\mathbb{x}, \quad \sigma(2\mathbb{x}) = \mathbb{d}.$$

We kunnen σ makkelijk uitbreiden tot een automorfisme op heel $\mathscr{H}$, hiermee ligt het nu voor de hand om de Hankeltransformatie te definiëren als een homomorfisme tussen twee $\mathscr{H}$-modulen die σ op $\mathscr{H}$ induceren, bijvoorbeeld de Hankelgetransformeerde van $\mathcal{D}f(x)$, is het zelfde als $-2x$ maal de Hankelgetransformeerde van $f(x)$, deze relatie komt precies over een met σ maar dan op $\mathscr{H}$.

Definitie 4.3.2 (Algebraïsche Hankeltransformatie)**.** *Ieder homomorfisme $\mathcal{F} : V \to W$ tussen twee $\mathscr{H}$-modulen V en W die σ induceert op $\mathscr{H}$ noemen we een algebraïsche Hankeltransformatie.*

Aan de hand van deze definitie kunnen we de Hankeltransformatie ook definiëren als $\mathbf{F} = e^{\mathbb{x}^2} e^{\frac{\mathbb{d}^2}{4}} e^{\mathbb{x}^2}$ met de volgende identiteiten

$$\mathbf{F}\mathbb{s} = \mathbb{s}\mathbf{F}, \quad \mathbf{F}\mathbb{d} = -2\mathbb{x}\mathbf{F}, \quad \mathbf{F}(2\mathbb{x}) = \mathbb{d}\mathbf{F}. \tag{4.4}$$

Hieruit volgt dat $\mathbf{F}$ een Hankeltransformatie is volgens definitie 4.3.2 mits goedgedefinieerd.

Stelling 4.3.1. *De Hankeltransformatie $\mathcal{F}_k$ gedefinieerd in definitie 3.2.1 is een homomorfisme $\mathcal{F}_k : \mathbb{C}[x]e^{-x^2} \to \mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$ die σ induceert op $\mathscr{H}$.*

Bewijs. We laten zien dat $\mathcal{F}_k$ gedefinieerd in definitie 3.2.1 een homomorfisme is tussen $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ en $\mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$. Zij $p(x) \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ willekeurig en schrijf $p(x) = q(x)e^{-x^2}$ voor een $q(x) \in \mathbb{C}[x]$. Dan volgt uit stelling 3.2.1.(ii) dat $(\mathcal{F}_k(q(x)e^{-x^2}))(\lambda) = e^{\lambda^2} exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$, want voor $q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ met $\deg(q(\lambda)) = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \mathcal{D}^{2j}}{4^j j!} q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$. Dit komt doordat voor alle j zodanig dat $2j > m$ geldt dat $\frac{(-1)^j \mathcal{D}^{2j}}{4^j j!} p(\lambda) = 0$, want $\mathcal{D}^{2j} p(\lambda) = 0$. En $\mathbb{C}[\lambda]$ is een $\mathscr{H}$-moduul dus gesloten onder machten van $\mathcal{D}$. De lineariteit van $\mathcal{F}_k$ spreekt voorzich. Dus $\mathcal{F}_k$ is een homomorfisme van $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ naar $\mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$. Uit lemma 3.1.2 volgt dat σ geinduceerd wordt door $\mathcal{F}_k$. □

4.3.1 Inversieformule en Plancherelformule

Zoals voor vele integraaltransformaties is er voor de Hankeltransformatie ook een inversieformule en Plancherelformule. We hebben gezien dat $\mathcal{F}_k$ een homomorfisme is van $\mathbb{C}[x]e^{-x^2} \to \mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$.

Stelling 4.3.2. *Zij $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ met $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ wordt de inverse $\mathcal{F}_k^{-1}$ gegeven door:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k^{-1} &: \mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2} \to \mathbb{C}[x]e^{-x^2}, \\ p(\lambda)e^{\lambda^2} &\mapsto \frac{1}{i\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_{-i\infty}^{i\infty} \psi_x(-\lambda, k)p(\lambda)e^{\lambda^2}|\lambda|^{2k} d\lambda \\ &= e^{-x^2} exp(-\frac{(\mathcal{D}^x)^2}{4})(p(x)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dit is goedgedefinieerd want $\lim_{\lambda \to i\infty} p(\lambda)e^{\lambda^2} e^{c\lambda} = 0$ voor alle $c \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Zij $p(x) \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ willekeurig en schrijf $p(x) = q(ix)e^{-x^2}$ voor een $q(ix) \in \mathbb{C}[x]$. Dan geldt:

$$\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda(x,k)q(ix)e^{-x^2} dx = (\mathcal{F}_k q(ix)e^{-x^2})(\lambda) = e^{\lambda^2} exp(\frac{(\mathcal{D}^\lambda)^2}{4})(q(i\lambda)). \tag{4.6}$$

Definieer de operator $If(x) = f(ix)$, dan geldt: $(\mathcal{D} \circ I)f(x) = (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1))f(ix) = if'(ix) - \frac{k}{x}(f(-ix) - f(ix))$. Maar ook $(iI \circ \mathcal{D})f(x) = iI \circ (f'(x) - \frac{k}{x}(f(-x) - f(x))) = if'(ix) - \frac{k}{x}(f(-ix) - f(ix))$. Dus kunnen we concluderen dat $(\mathcal{D} \circ I)f(x) = (iI \circ \mathcal{D})(f(x))$. Daaruit volgt:

$$\frac{(\mathcal{D}^\lambda)^2}{4} q(i\lambda) = \left(\frac{-(\mathcal{D}^\mu)^2}{4} q(\mu) \right)|_{\mu = i\lambda}.$$

Als we nu in (4.6) λ vervangen door $i\lambda$ en $\psi_{i\lambda}(x,k) = \psi_\lambda(ix,k)$ gebruiken, vinden we:

$$\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda(ix,k)q(ix)e^{-x^2}dx = e^{-\lambda^2}exp(\frac{-(\mathcal{D}^\lambda)^2}{4})(q(-\lambda)). \tag{4.7}$$

Passen we nu een coordinaten transformatie toe $z = ix$, dan vinden we

$$\frac{1}{i\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-i\infty}^{i\infty} \psi_\lambda(z,k)q(z)e^{z^2}dz = e^{-\lambda^2}exp(\frac{-(\mathcal{D}^\lambda)^2}{4})(q(-\lambda)). \tag{4.8}$$

Vervangen we λ door $-\lambda$ en z door x, dan vinden we:

$$\frac{1}{i\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-i\infty}^{i\infty} \psi_\lambda(-x,k)q(x)e^{x^2}dx = e^{-\lambda^2}exp(\frac{-(\mathcal{D}^\lambda)^2}{4})(q(\lambda)). \tag{4.9}$$

Wisselen we nu λ en x om, dan vinden we:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_k^{-1}(q(\lambda)e^{\lambda^2}))(x) &= \frac{1}{i\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-i\infty}^{i\infty} \psi_x(-\lambda,k)p(\lambda)e^{\lambda^2}|\lambda|^{2k}d\lambda \qquad (4.10)\\ &= e^{-x^2}exp(-\frac{(\mathcal{D}^x)^2}{4})(p(x)).\end{aligned}$$

□

Nu we weten hoe de $\mathcal{F}_k^{-1}$ eruit ziet kunnen we nagaan dat dit de inverse in van $\mathcal{F}_k$.

Stelling 4.3.3 (Inversieformule). *$\mathcal{F}_k^{-1}$ en $\mathcal{F}_k$ zijn elkaars inverse. Met andere woorden $\mathcal{F}_k^{-1} \circ \mathcal{F}_k =$ **id** in $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ en $\mathcal{F}_k \circ \mathcal{F}_k^{-1} =$ **id** in $\mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$.*

Bewijs. Zij $p(x) \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ willekeurig en schrijf $p(x) = q(x)e^{-x^2}$ voor een $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, dan

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_k^{-1} \circ \mathcal{F}_k)(q(x)e^{-x^2}) &= \mathcal{F}_k^{-1} \circ (e^{\lambda^2}exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})q(\lambda)) = e^{-x^2}exp(\frac{-\mathcal{D}^2}{4})exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})q(x) \qquad (4.11)\\ &= e^{-x^2}p(x).\end{aligned}$$

Zij $p(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$ willekeurig en schijf $p(\lambda) = q(\lambda)e^{\lambda^2}$ voor een $q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, dan

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_k \circ \mathcal{F}_k^{-1})q(\lambda)e^{\lambda^2} &= \mathcal{F}_k \circ (e^{-x^2}exp(\frac{-\mathcal{D}^2}{4})q(x)) = e^{\lambda^2}exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})exp(\frac{-\mathcal{D}^2}{4})q(\lambda) \qquad (4.12)\\ &= e^{\lambda^2}q(\lambda).\end{aligned}$$

Dus $\mathcal{F}_k^{-1}$ en $\mathcal{F}_k$ zijn elkaars inverse. □

Voordat we de Plancherelformule geven en bewijzen, definiëren we eerst een inproduct op representaties van $\mathscr{H}$.

Definitie 4.3.3 (Pseudo-unitair). *We noemen een representatie (ρ, V) van $\mathscr{H}$ **pseudo-unitair** als er een niet-gedegenereerde $\mathbb{C}$-bilineaire paring (u,w) bestaat zodanig dat $(Hu,w) = (u,H^*w)$ voor $H \in \mathscr{H}$, waarbij*

$$\mathbb{d}^* = -\mathbb{d}, \quad \mathbb{s}^* = \mathbb{s}, \quad \mathbb{x}^* = \mathbb{x}. \tag{4.13}$$

We kunnen dit uitbreiden als anti-involutie op $\mathscr{H}$. Met anti-involutie bedoelen we $(AB)^* = B^*A^*$. De gedefinieerde relaties in (4.13) zorgen ervoor dat de relaties van de Cherednik algebra ook gelden met de $*$-structuur, want

$$\begin{aligned}&\mathbb{s}^*\mathbb{d}^*\mathbb{s}^* = \mathbb{s}(-\mathbb{d})\mathbb{s} = \mathbb{d} = -\mathbb{d}^*\\ &\mathbb{s}^*\mathbb{x}^*\mathbb{s}^* = \mathbb{s}\mathbb{x}\mathbb{s} = -\mathbb{x} = -\mathbb{x}^*\\ &[\mathbb{x}^*, \mathbb{d}^*] = [\mathbb{x}, -\mathbb{d}] = [\mathbb{d}, \mathbb{x}] = 1 + 2k\mathbb{s} = 1 + 2k\mathbb{s}^* = [\mathbb{d}, \mathbb{x}]^*\end{aligned}$$

Stelling 4.3.4. *Zij $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan zijn*

$$\langle f, g\rangle_{re} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)|x|^{2k}dx, \quad \langle f, g\rangle_{im} = \frac{1}{i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f(\lambda)g(-\lambda)|\lambda|^{2k}d\lambda \tag{4.14}$$

niet-gedegenereerde $\mathbb{C}$-bilineaire paring respectievelijk in $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ en $\mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$.

Bewijs. Zij $k \in \mathbb{R}$ willekeurig zodat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ met $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Defineer de volgende verzamelingen

$$B^r = \{f \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2} : \langle f, g\rangle_{re} = 0, \quad \forall g \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}\},$$
$$B^i = \{f \in \mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2} : \langle f, g\rangle_{im} = 0, \quad \forall g \in \mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}\}.$$

Dan is B^r een deelmoduul van $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$. Zij $p(x) \in B^r$ willekeurig en $g(x) \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$, dan geldt

$$\langle x^m p(x), g(x)\rangle_{re} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m p(x)g(x)|x|^{2k}dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)x^m g(x)|x|^{2k}dx = \langle p(x), x^m g(x)\rangle_{re} = 0,$$

voor alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dus geldt dat $x^m p(x) \in B^r$. Verder geldt er ook dat

$$\langle \mathcal{D}^m p(x), g(x)\rangle_{re} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}^m p(x)g(x)|x|^{2k}dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)|x|^{2k}dx = 0,$$

voor alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, want er bestaat een $q(x) \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ zodanig dat $\mathcal{D}^m p(x)g(x) = g(x)q(x)$. Dus $\mathcal{D}^m p(x) \in B^r$. Er geldt ook dat $sp(x) \in B^r$, want

$$\langle sp(x), g(x)\rangle_{re} = \int_{-\infty}^{\infty} (sp)(x)g(x)|x|^{2k}dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)|x|^{2k}dx = 0,$$

omdat er een $q(x) \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ bestaat zodanig dat $(sp)(x)g(x) = p(x)q(x)$. Dus is B^r een deelmoduul van $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$. Het laten zien dat B^i een deelmoduul is van $\mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$ gaat op dezelfde manier. Uit lemma 4.3.1 volgt dat $\mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ en $\mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$ irreducibel zijn, dit gebruiken we om te laten zien dat $B^r = \{0\}$ en $B^i = \{0\}$. Dit volgt uit het feit dat $B^r \neq \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$, want

$$\langle e^{-x^2}, e^{-x^2}\rangle_{re} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-x^2}|x|^{2k}dx = (\sqrt{2})^{-2k-1}\Gamma(k + \frac{1}{2}) \neq 0,$$

dus $e^{-x^2} \notin \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ en dus $B^r \neq \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$, ofwel $B^r = \{0\}$. Dus in $\langle\cdot,\cdot\rangle_{re}$ niet-gedegenereerd. Op dezelfde manier zien we dat $B^i \neq \mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$, want

$$\langle e^{\lambda^2}, e^{\lambda^2}\rangle_{im} = \frac{1}{i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda^2}e^{\lambda^2}|\lambda|^{2k}d\lambda = (\sqrt{2})^{-2k-1}\Gamma(k + \frac{1}{2}) \neq 0.$$

Dus $e^{\lambda^2} \notin B^i$ en dus $B^i \neq \mathbb{C}[\lambda]e^{\lambda^2}$, ofwel $B^i = \{0\}$. Dus is $\langle\cdot,\cdot\rangle_{im}$ niet-gedegenereerd. □

Stelling 4.3.5 (Plancherelformule)**.** *Voor alle* $f, g \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ *geldt* $\langle f, g\rangle_{re} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{im}$, *waarbij* $\hat{f} = (\mathcal{F}_k f)(\lambda)$, $\hat{g} = (\mathcal{F}_k g)(\lambda)$.

Bewijs. Zij $f, g \in \mathbb{C}[x]e^{-x^2}$ willekeurig en schrijf $\hat{g}(\lambda) = p(\lambda)e^{\lambda^2}$, $f(x) = q(x)e^{-x^2}$ voor een $p(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $q(x) \in \mathbb{C}[x]$. Uit stelling 4.3.3 volgt dat $g = \mathcal{F}_k^{-1}\hat{g}$, dan

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathcal{F}_k^{-1}\hat{g}\rangle_{re} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{i\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-i\infty}^{i\infty}\psi_x(-\lambda,k)\hat{g}(\lambda)|\lambda|^{2k}d\lambda|x|^{2k}dx \\
&= \frac{1}{i\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty} f(x)\psi_x(-\lambda,k)p(\lambda)e^{\lambda^2}|\lambda|^{2k}d\lambda|x|^{2k}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(x)e^{-x^2}\psi_x(-i\lambda,k)p(i\lambda)e^{-\lambda^2}|\lambda|^{2k}d\lambda|x|^{2k}dx.
\end{aligned}$$

Hier kunnen we Fubini toepassen, want beide integralen convergeren, en dus

$$\langle f, \mathcal{F}_k^{-1}\hat{g}\rangle_{re} = \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(x)e^{-x^2}\psi_x(-i\lambda,k)p(i\lambda)e^{-\lambda^2}|x|^{2k}dx|\lambda|^{2k}d\lambda,$$

vervangen λ door it dan vinden we dat

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathcal{F}_k^{-1}\hat{g}\rangle_{re} &= \frac{1}{i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_x(t,k)p(-t)e^{t^2}|x|^{2k}dx|t|^{2k}dt \\
&= \frac{1}{i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_t(x,k)p(-t)e^{t^2}|x|^{2k}dx|t|^{2k}dt \\
&= \frac{1}{i}\int_{-i\infty}^{i\infty}(\mathcal{F}_k f)(t)\hat{g}(-t)|t|^{2k}dt = \langle \mathcal{F}_k f, \hat{g}\rangle_{im}.
\end{aligned}$$

We hebben nu dat $\langle f, \mathcal{F}_k^{-1}\hat{g}\rangle_{re} = \langle \mathcal{F}_k f, \hat{g}\rangle_{im}$. Schrijf nu voor $\hat{g} = \mathcal{F}_k g$, dan vinden we dat $\langle f, \mathcal{F}_k^{-1}\hat{g}\rangle_{re} = \langle f, \mathcal{F}_k^{-1}\mathcal{F}_k g\rangle_{re} = \langle f, g\rangle_{re} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{im}$. □

Wat we in het oneindig-dimensionale geval hebben gedaan kunnen we ook voor het eindig-dimensionale geval doen, maar dan kunnen we niet met de paringen $\langle .,.\rangle_{re}$ en $\langle .,.\rangle_{im}$ werken. Dus definiëren we een nieuwe paring voor het eindig-dimensionale geval en daarmee moeten we ook de Hankeltransformatie opnieuw definiëren. We gaan dan ook voor deze nieuwe Hankeltransformatie een inversieformule en een Plancherelformule afleiden.

4.4 Een eindig-dimensionale representatie en de Hankeltransformatie

We hebben in het oneindig-dimensionale geval alleen gekeken naar het geval dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor een $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, omdat dan de representaties irreducibel waren en we dus geen zinnige deelrepresentatie konden maken. Uit stelling 4.2.2.(b) volgt dat als $k = -\frac{1}{2} - n$ voor een $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan is $(\rho, (x^{2n+1}))$ een deelrepresentatie van $(\rho, \mathbb{C}[x])$. Dus kunnen we gaan kijken naar $V_{2n+1} = \mathbb{C}[x]/(x^{2n+1})$ een eindig-dimensionale irreducibele representatie van $\mathscr{H}$. We kunnen de vectorruimte V_{2n+1} identificeren met alle polynomen met complexe coëfficiënten van graad kleiner of gelijk aan $2n$. In het vervolg beschouwen we dat k van de vorm $k = -\frac{1}{2} - n$ voor een $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is.

Lemma 4.4.1. *Definieer de afbeelding $\rho : \mathscr{H} \to \mathrm{End}(V_{2n+1})$ op de generatoren van $\mathscr{H}$ door:*

$$\begin{aligned} \rho(\mathbb{x})q(x) &= xq(x), && \textit{vermenigvuldigen met } x; \\ \rho(\mathbb{s})q(x) &= sq(x), && \textit{reflectie-operator toepassen}; \\ \rho(\mathbb{d})q(x) &= \mathcal{D}q(x), && \textit{Dunkl-operator toepassen}, \end{aligned}$$

voor $q(x) \in V_{2n+1}$. Dan is ρ een representatie van $\mathscr{H}$ op $\mathrm{End}(V_{2n+1})$.

Bewijs. Merk op dat x^{2n+1} een eigenfunctie is van $\mathcal{D}$ bij eigenwaarde $\lambda = 0$. Zij $p(x) \in V_{2n+1}$ willekeurig en schrijf $p(x) = q(x) + x^{2n+1}h(x)$ voor $q(x), h(x) \in \mathbb{C}[x]$, dan

$$\rho(\mathbb{x}^m)p(x) = x^m p(x) = x^m(q(x) + x^{2n+1}h(x) = x^m q(x) + x^{2n+1+m}h(x) = s(x) + x^{2n+1}t(x),$$

voor $s(x), t(x) \in \mathbb{C}[x]$ voor alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dus $x^m p(x) \in V_{2n+1}$. Maar ook $\rho(\mathbb{s})p(x) = sp(x) = p(-x) \in V_{2n+1}$. Voor monomen $x^r \in \mathbb{C}[x]$ met $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, geldt

$$\mathcal{D}^m(x^{2n+1}x^r) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad 2n + r + 1 < m, \\ \mathcal{D}^m(x^{2n+1}x^r) & \text{als} \quad 2n + r + 1 \geq m, \end{cases}$$

voor een $C \in \mathbb{C}$. Dus vinden we dat

$$\rho(\mathbb{d}^m)p(x) = \mathcal{D}^m p(x) = \mathcal{D}^m(q(x) + x^{2n+1}h(x) = r(x) + x^{2n+1}y(x),$$

voor $r(x), y(x) \in \mathbb{C}[x]$ en voor alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dus $\mathcal{D}^m p(x) \in V_{2n+1}$. De gedefinieerde relaties van $\mathscr{H}$ volgen direct. Dus (ρ, V_{2n+1}) is een representatie van $\mathscr{H}$. □

Definitie 4.4.1 (Paring)**.** *Voor $f, g \in V_{2n+1}$ definiëren we de paring (f, g) als*

$$(f, g) = \mathrm{Res}(f(x)g(x)x^{-2n-1}), \quad \mathrm{Res}(\sum_{m=-j}^{i} a_m x^m) = a_{-1}, \tag{4.15}$$

met $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Propositie 4.4.1. *De paring (4.15) is niet-gedegenereerd op V_{2n+1}.*

Bewijs. Zij $f \in V_{2n+1}$ willekeurig en schrijf $f(x) = \sum_{m=0}^{l} a_m x^m$ met $a_l \neq 0$ voor $0 \leq l \leq 2n$, dan

$$(f(x), x^{2n-l}) = a_l \neq 0.$$

Dus $(f, g) = 0$ voor alle $g \in V_{2n+1}$ als $f = 0$. Dus is de paring van (4.15) niet-gedegenereerd op V_{2n+1}. □

Voor $f, g \in \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ definiëren we de paring $(f, g)_0 := \mathrm{Res}(fg)$, waarbij $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ de Laurentpolynomen zijn. We geven de geadjungeerde van een operator A met betrekking tot $(\cdot, \cdot)_0$ aan met A°.

Propositie 4.4.2. *Zij $(\cdot, \cdot)_0$ de paring op $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$, dan geldt met betrekking tot deze paring dat*

$$s^\circ = -s, \quad x^\circ = x, \quad \frac{\partial}{\partial x}^\circ = \frac{\partial}{\partial x}, \quad x^{2k}\mathcal{D}^\circ x^{-2k} = -\mathcal{D}. \tag{4.16}$$

Bewijs. Zij $f, g \in \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ willekeurig, dan

$$(xf, g)_0 = \mathrm{Res}(xfg) = \mathrm{Res}(fxg) = (f, xg)_0.$$

Verder geldt er dat

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(\frac{\partial}{\partial x}(f,g)) &= \mathrm{Res}(\frac{\partial}{\partial x}(f)g + f\frac{\partial}{\partial x}(g)) \\ &= \mathrm{Res}(\frac{\partial}{\partial x}(f)g) + \mathrm{Res}(f\frac{\partial}{\partial x}(g)) = 0,\end{aligned}$$

daaruit volgt dat

$$(\frac{\partial}{\partial x}(f), g)_0 = (f, -\frac{\partial}{\partial x}(g))_0.$$

Verder vinden we dat

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(s(f(x)g(x))) &= -\mathrm{Res}(fg), \quad \Rightarrow \\ \mathrm{Res}(s(s(f(x))g(x))) &= \mathrm{Res}(f(x)sg(x)) = -\mathrm{Res}(s(f(x))g(x)), \quad \Rightarrow \\ (sf, g)_0 &= -(f, sg)_0.\end{aligned}$$

Nu kunnen we kijken naar $x^{2k}\mathcal{D}^\circ x^{-2k}$.

$$\begin{aligned}x^{2k}\mathcal{D}^\circ x^{-2k}f(x) &= x^{2k}(-\frac{\partial}{\partial x} + (s+1)\frac{k}{x})x^{-2k}f(x) \\ &= x^{2k}\left(x^{-2k}(-f'(x) - \frac{2k}{x}f(x) + \frac{k}{x}f(x) - \frac{k}{x}sf(x))\right) \\ &= -\mathcal{D}f(x).\end{aligned}$$

□

Nu we dit weten kunnen we gaan kijken of de paring van (4.15) hetzelfde doet met de operatoren als de Hankeltransformatie in lemma 3.2.1, en of deze paring pseudo-unitair is.

Lemma 4.4.2. *De representatie V_{2n+1} van $\mathscr{H}$ met de paring $(\cdot,\cdot)$ is pseudo-unitair.*

Bewijs. Zij $f, g \in V_{2n+1}$ willekeurig dan

$$\begin{aligned}(\rho(\mathbb{x})f, g) = (xf, g) &= \mathrm{Res}(xf(x)g(x)x^{-2n-1}) = \mathrm{Res}(f(x)xg(x)x^{-2n-1}) \\ &= (f, xg) = (f, \rho(\mathbb{x})g); \\ (\rho(\mathbb{s})f, g) = (sf, g) &= \mathrm{Res}(s(f(x))g(x)x^{-2n-1}) = -\mathrm{Res}(f(x)s(g(x))s(x^{-2n-1})) \\ &= \mathrm{Res}(f(x)s(g(x))x^{-2n-1}) = (f, sg) = (f, \rho(\mathbb{s}), g); \\ (\rho(\mathbb{d})f, g) = (\mathcal{D}f, g) &= \mathrm{Res}(\mathcal{D}f(x)g(x)x^{-2n-1}) = -\mathrm{Res}(f(x)\mathcal{D}(g(x))x^{-2n-1}) \\ &= -(f, \mathcal{D}(g)) = -(f, \rho(\mathbb{d})g).\end{aligned}$$

De drie relaties van $\mathscr{H}$ volgen hier direct uit. Dus is de representatie V_{2n+1} van $\mathscr{H}$ met paring $(\cdot,\cdot)$ pseudo-unitair. □

Nu we een paring hebben kunnen we gaan kijken naar een Hankeltransformatie op V_{2n+1}. De eerder gedefinieerde Gaussianen bestaan niet in V_{2n+1}, maar we kunnen ze wel introduceren als machtreeks $e^{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m!} \in \mathbb{C}[[x]]$ en $e^{-x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!} \in \mathbb{C}[[x]]$, waarbij $\mathbb{C}[[x]]$ de machtreeksen met complexe coëfficiënten zijn. Door vermenigvuldiging met deze Gaussianen blijven we niet in de polynoomruimte, maar omdat voor alle $f(x) \in V_{2n+1}$ geldt $x^m f(x) = 0$ voor $m \geq 2n+1$ kunnen we de Gaussianen definiëren als

$$e^{x^2} = \sum_{m=0}^{2n} \frac{x^{2m}}{m!}, \quad e^{-x^2} = \sum_{m=0}^{2n} \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!}.$$

4.4.1 Afgebroken Besselfuncties

Om een Hankeltransformatie te definiëren op V_{2n+1} gaan we eerst kijken naar de al eerder gedefinieerde algebraïsche Hankeltransformatie. Merk op dat voor een $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ er geldt dat $\mathcal{D}^m p(x) = 0$ voor $p(x) \in V_{2n+1}$. Hierdoor kunnen we algebraïsche Hankeltransformatie $\mathbf{F} = e^{x^2} exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})e^{x^2}$ op V_{2n+1} definiëren door e^{x^2} te schrijven als $\sum_{m=0}^{2n} \frac{x^{2m}}{m!}$ en $exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})$ te schrijven als $\sum_{m=0}^{2n} \frac{\mathcal{D}^{2m}}{4^m m!}$. Dit geeft ons de volgende algebraïsche Hankeltransformatie op V_{2n+1}^x

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : V_{2n+1}^x &\to V_{2n+1}^\lambda, \\ x^m &\mapsto \left(e^{\lambda^2} exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})e^{\lambda^2}\right)\lambda^m, \end{aligned} \tag{4.17}$$

waarbij $\left(e^{\lambda^2} exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})e^{\lambda^2}\right)\lambda^m = \left(\left(\sum_{m=0}^{2n} \frac{\lambda^{2m}}{m!}\right)\left(\sum_{m=0}^{2n} \frac{\mathcal{D}^{2m}}{4^m m!}\right)\left(\sum_{m=0}^{2n} \frac{\lambda^{2m}}{m!}\right)\right)\lambda^m$. Omdat de Dunkl-operator maar één eigenwaarde heeft in V_{2n+1} namelijk $\lambda = 0$, kunnen we de tot op heden gedefinieerde $\psi_\lambda(x,k)$ niet gebruiken, in plaats daarvan definiëren we $\psi_\lambda(x,k)$ (afgebroken ψ-functie) als kern van de algebraïsche Hankeltransformatie $\mathbf{F}$. Merk op dat voor de paring van lemma 4.4.2 de identiteiten van een Hankeltransformatie geldt. Dus ligt het voor de hand om $(\mathbf{F}f(x))(\lambda)$ te definiëren als $(\mathbf{F}f(x))(\lambda) = \mathrm{Res}(f(x)\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda)$. Hieruit leiden we af dat

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\psi_\lambda(x,n) &= 2\lambda\psi_\lambda(x,n) \mod(x^{2n+1}, \lambda^{2n+1}), \\ \psi_\lambda(x,n) &= \psi_x(\lambda,n), \quad \psi_\lambda(s(x),n) = \psi_{s(\lambda)}(x,n), \end{aligned}$$

we werken hier modulo x^{2n+1} en λ^{2n+1} omdat we anders niet afbeelden in V_{2n+1}. Doordat we $\psi_\lambda(x,n)$ gedefinieerd hebben als de kern van $\mathbf{F} = e^{\lambda^2} exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})e^{\lambda^2}$, kunnen we $\psi_\lambda(x,n)$ schrijven als $\psi_\lambda(x,n) = \sum_{l=0}^{2n} c_{l,l}(\lambda x)^l = \sum_{l=0}^{2n} x^{2n-l}\mathbf{F}(x^l)$. Nu we $\psi_\lambda(x,n)$ op deze manier hebben geschreven, kunnen we $\psi_\lambda(x,n)$ makkelijk bepalen. Dit doen we als volgt

$$\mathbf{F}(e^{-x^2}) = e^{\lambda^2} exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})e^{-\lambda^2}e^{\lambda^2} = e^{\lambda^2} exp(\frac{\mathcal{D}^2}{4})(1) = e^{\lambda^2}, \Rightarrow \tag{4.18}$$

$$\mathbf{F}(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}) = 1 + \frac{\lambda^2}{1!} + \ldots + \frac{\lambda^{2n}}{n!}. \tag{4.19}$$

De $\mathbf{F}$ getransformeerde van 1 is proportioneel aan λ^{2n}, want $\mathbf{F}(1) = \mathrm{Res}(1\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1}) = c_{2n,2n}\lambda^{2n}$. Op dezelfde manier vinden we dat $\mathbf{F}(x^l) = c\lambda^{2n-l}$, voor $c \in \mathbb{C}$, $0 \leq l \leq 2n$. Dus uit (4.19) volgt dat

$$\mathbf{F}(x^m) = (-1)^m \frac{m!}{(n-m)!}\lambda^{2n-2m}. \tag{4.20}$$

Dit resulteert in

$$\mathbf{F}(x^{2m+1}) = (-1)^m \frac{m!}{(n-m-1)!}\lambda^{2n-2m-1}. \tag{4.21}$$

Dus we vinden dat

$$\psi_\lambda(x,n) = \sum_{m=0}^{n} x^{2n-2m}\mathbf{F}(x^{2m}) + \sum_{m=0}^{n-1} x^{2n-2m-1}\mathbf{F}(x^{2m+1}) \tag{4.22}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} x^{2n-2m}(-1)^m \frac{m!}{(n-m)!}\lambda^{2n-2m} + \sum_{m=0}^{n-1} x^{2n-2m-1}(-1)^m \frac{m!}{(n-m-1)!}\lambda^{2n-2m-1}. \tag{4.23}$$

Stelling 4.4.1 (Hankeltransformatie). *De afbeelding*

$$\mathbf{F} : V^x_{2n+1} \to V^\lambda_{2n+1} \tag{4.24}$$

gegeven door $f(x) \mapsto \mathrm{Res}(f(x)\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda)$ *is een algebraïsche Hankeltransformatie.*

Bewijs. Merk op dat $\mathbf{F}$ een homomorfisme is tussen $\mathscr{H}$-modulen. Om aan definitie 4.3.2 te voldoen moeten we alleen controleren of $\mathbf{F}$ het automorfisme σ induceert.
Zij $f(x) \in V_{2n+1}$ willekeurig, dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\sigma(2\mathbb{x})f(x))(\lambda) &= \mathrm{Res}(2xf(x)\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda) = \mathrm{Res}(f(x)2x\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda)\\
&= \mathrm{Res}(f(x)\mathcal{D}^\lambda\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda) = \mathcal{D}^\lambda\mathrm{Res}(f(x)\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda)\\
&= \sigma(\mathbb{d})\mathbf{F}(p(x))(\lambda),\\
\mathbf{F}(\sigma(\mathbb{s})f(x))(\lambda) &= \mathrm{Res}(s(f(x))\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda) = \mathrm{Res}(f(x)s(\psi_\lambda(x,n))x^{-2n-1})(\lambda)\\
&= \mathrm{Res}(f(x)s^\lambda\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda) = s^\lambda\mathrm{Res}(f(x)\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda)\\
&= \sigma(\mathbb{s})\mathbf{F}(p(x))(\lambda),\\
\mathbf{F}(\sigma(\mathbb{d})f(x)) &= \mathrm{Res}(\mathcal{D}f(x)\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda) = -\mathrm{Res}(f(x)\mathcal{D}\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda)\\
&= -\mathrm{Res}(f(x)2\lambda\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda) = -2\lambda\mathrm{Res}(f(x)\psi_\lambda(x,n)x^{-2n-1})(\lambda)\\
&= \sigma(-2\mathbb{x})\mathbf{F}(f(x))(\lambda).
\end{aligned}$$

Ofwel $\mathcal{F}$ induceert σ. Dus is $\mathcal{F}$ een Hankeltransformatie. □

Hier hoort ook een inverse bij.

Stelling 4.4.2 (Inverse Hankeltransformatie). *De afbeelding*

$$\mathbf{F}^{-1} : V^\lambda_{2n+1} \to V^x_{2n+1} \tag{4.25}$$

gegeven door $f(\lambda) \mapsto \mathrm{Res}(f(\lambda)\psi_x(-\lambda,n)\lambda^{-2n-1})$, *is de inverse Hankeltransformatie.*

Merk op dat $\mathbf{F}^{-1}(f) = \mathbf{F}(f)$ voor even f en $\mathbf{F}^{-1}(f) = -\mathbf{F}(f)$ voor oneven f.

Bewijs. Merk op dat V_{2n+1} niets anders is dan de polynomen van graad kleiner of gelijk aan $2n$. Een basis hiervoor is $\{1, x, x^2, \ldots, x^{2n}\}$. Het is voldoende om te laten zien dat $\mathbf{F}^{-1}$ de tweezijdige inverse is van $\mathbf{F}$ op de basis elementen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{F}(x^{2m}) &= \mathbf{F}^{-1}\left((-1)^m\frac{m!}{(n-m)!}\lambda^{2n-2m}\right) \qquad (4.26)\\
&= (-1)^m\frac{m!}{(n-m)!}(-1)^{n-m}\frac{(n-m)!}{m!}x^{2m}\\
&= (-1)^n x^{2m};\\
\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{F}(x^{2m+1}) &= \mathbf{F}^{-1}\left((-1)^m\frac{m!}{(n-m-1)!}\lambda^{2n-2m-1}\right) \qquad (4.27)\\
&= (-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!}(-1)^{n-m}\frac{m!}{(n-m-1)!}x^{2m+1}\\
&= (-1)^n x^{2m+1}.
\end{aligned}$$

Op dezelfde manier vinden we dat $\mathbf{F}\circ\mathbf{F}^{-1} = (-1)^n\mathbf{id}$. En dus is $\mathbf{F}^{-1}$ de tweezijdige inverse van $\mathbf{F}$ op vermenigvuldiging met $(-1)^n$ na. □

Stelling 4.4.3 (Plancherelformule)**.** *Definieer*

$$\begin{aligned} \langle f,g\rangle_+ &= \mathrm{Res}(f(x)g(x)x^{-2-1}), \quad f,g\in V^x_{2n+1};\\ \langle f,g\rangle_- &= \mathrm{Res}(f(-\lambda)g(\lambda)\lambda^{-2-1}), \quad f,g\in V^\lambda_{2n+1}. \end{aligned}$$

Zij $f,g\in V^x_{2n+1}$ *zodanig dat* $\mathbf{F}(f)(\lambda)=\hat{f}(\lambda)$, $\mathbf{F}(g)(\lambda)=\hat{g}(\lambda)$, *dan geldt* $\langle f,g\rangle_+=(-1)^n\langle\hat{f},\hat{g}\rangle_-$.

Bewijs. Zij $f,g\in V^x_{2n+1}$ willekeurig en schrijf $f(x)=\sum_{l=0}^{2n}a_lx^l$, $g(x)=\sum_{l=0}^{2n}b_lx^l$ met $b_l,a_l\in\mathbb{C}$, dan

$$\langle f,g\rangle_+=\mathrm{Res}\left(\sum_{l=0}^{2n}a_lx^l\sum_{l=0}^{2n}b_lx^lx^{-2n-1}\right)=\sum_{l=0}^{2n}a_lb_{2n-l}.$$

Schrijf voor $\mathbf{F}(f)(\lambda)=\hat{f}(\lambda)=\sum_{l=0}^{2n}c_l\lambda^l$, $\mathbf{F}(g)(\lambda)=\hat{g}(\lambda)=\sum_{l=0}^{2n}d_l\lambda^l$. met $c_l,d_l\in\mathbb{C}$, dan

$$\langle\hat{f},\hat{g}\rangle_-=\mathrm{Res}\left(\sum_{l=0}^{2n}(-1)^lc_l\lambda^l\sum_{l=0}^{2n}d_l\lambda^l\lambda^{-2n-1}\right)=\sum_{l=0}^{2n}(-1)^lc_ld_{2n-l}.$$

Dan met behulp van vergelijkingen (4.20) en (4.21) vinden we dat

$$\begin{aligned} c_{2m}d_{2n-2m} &= (-1)^m a_{2m}\frac{m!}{(n-m)!}(-1)^{n-m}b_{2n-2m}\frac{(n-m)!}{m!}=(-1)^na_{2m}b_{2n-2m};\\ c_{2m+1}d_{2n-2m-1} &= (-1)^m a_{2m+1}\frac{m!}{(n-m-1)!}(-1)^{n-m-1}b_{2n-2m-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\\ &= (-1)^na_{2m+1}b_{2n-2m-1}. \end{aligned}$$

Dus geldt dat $(-1)^{l+n}a_lb_{2n-l}=c_ld_{2n-l}$, hieruit volgt dat $\langle f,g\rangle_+=(-1)^n\langle\hat{f},\hat{g}\rangle_-$. $\square$

Hoofdstuk 5

Overzicht

In deze bachelorscriptie hebben we de één-dimensionale Hankeltransformatie bestudeerd. Dit hebben we gedaan door eerst naar de symmetrische Hankeltransformatie te kijken. Dit is een integraaltransformatie gedefinieerd als

$$(\mathbb{F}_k f)(\lambda) = \frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_0^{+\infty} \varphi_\lambda(x,k) f(x) x^{2k} dx, \tag{5.1}$$

voor $f \in C([0;\infty))$ zodanig dat $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{cx} = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}$. Hierbij is k een parameter die voldoet aan $k \in \mathbb{R}$ zodanig dat $k \neq -\frac{1}{2} - n$ voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. De integraalkern $\varphi_\lambda(x,k)$ is een Besselfunctie van de eerste soort, waarbij de machtreeks gegeven wordt door

$$\varphi_\lambda(x,k) = \Gamma(k+\frac{1}{2}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^{2m}}{m!\Gamma(k+\frac{1}{2}+m)}.$$

In paragraaf 2.1 hebben we gekeken hoe de symmetrische Hankeltransformatie zich gedraagt met betrekking tot de $\mathcal{L}$-operator gegeven door $\mathcal{L} = (\frac{\partial}{\partial x})^2 + \frac{2k}{x}\frac{\partial}{\partial x}$.

Nadat we de theorie over de symmetrische Hankeltransformatie behandelt hadden, zijn we gaan kijken naar de Dunkl-operator $\mathcal{D}$, gegeven door

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{k}{x}(s-1), \quad k \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

waarbij s de reflectie-operator is gedefinieerd door $(sf)(x) = f(-x)$. Nadat we de eigenfuncties $\psi_\lambda(x,k)$ van $\mathcal{D}$ bepaald hadden onder zekere voorwaarden, zijn we naar de niet-symmetrische Hankeltransformatie gaan kijken. Deze integraaltransformatie wordt gegeven door

$$(\mathcal{F}_k f)(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda(x,k) f(x) |x|^{2k}, \tag{5.3}$$

waarbij $\psi_\lambda(x,k)$ de integraalkern is. De niet-symmetrische Hankeltransformatie is gedefinieerd voor functies $f(x)$ waarvoor geldt $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ zodanig dat $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{cx} = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}$. Hierbij is de parameter k dezelfde parameter als bij de symmetrische Hankeltransformatie en voldoet aan dezelfde voorwaarden. Verder hebben we naar het gedrag van de niet-symmetrsiche Hankeltransformatie gekeken met betrekking tot bepaalde operatoren, waaronder de Dunkl-operator. Dit hebben we ook voor de symmetrische Hankeltransformatie gedaan, maar dan in plaats van de Dunkl-operator hebben we naar de $\mathcal{L}$-operator gekeken.

Wanneer we dit voorwerk hadden gedaan, zijn we de niet-symmetrische Hankelstransformatie gaan beschrijven met een algebra. Dit hebben we gedaan door naar het gedrag van de Cherednik algebra $\mathscr{H}$ te gaan kijken, gegeven door $\mathscr{H} = \langle \mathbb{d}, \mathbb{x}, \mathbb{s} | \quad \mathbb{s}\mathbb{x}\mathbb{s} = -\mathbb{x} \quad \mathbb{s}\mathbb{d}\mathbb{s} = -\mathbb{d} \quad [\mathbb{d}, \mathbb{x}] = 1 + 2k\mathbb{s} \rangle$, op de polynomen met coëfficiënten in de complexe getallen. Dit noemen we ook wel een polynoomrepresentatie van $\mathscr{H}$. Aan de hand van de Cherednik algebra hebben we de niet-symmetrische Hankeltransformatie ook abstract gedefinieerd tussen twee representaties van $\mathscr{H}$. Verder hebben we een Plancherel formule en een inversie formule afgeleid tussen twee specifieke oneindig-dimensionale representaties van $\mathscr{H}$. Hetzelfdehebben we gedaan voor eindig-dimensionale representaties van $\mathscr{H}$.

Bibliografie

[1] Etingof, P., Golberg, O., Hensel, S., Liu, T., Schwendner, A., Vaintrob, D., & Yudovina, E. (2011). Introduction to representation theory. Geraadpleegd van http://math.mit.edu/ etingof/replect.pdf

[2] Andrews, L. C. (1998). Special functions of mathematics for engineers (2e ed.). Bellingham, Washington: SPIE.

[3] Cherednik, I., Markov, Y., Howe, R., en Lusztig, G. (2002). Iwahori-Hecke Algebras and their Representation Theory. Berlin, Heidelberg, Duitsland: Springer-Verlag.