Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Tijd omgekeerde S-expansies
(Time reversed S-expansions)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Irene Ravesloot

Delft, Nederland
Januari 2018

Copyright © 2018 door Irene Ravesloot. Alle rechten voorbehouden.

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"Tijd omgekeerde S-expansies"
(Engelse titel: "Time reversed S-expansions")

IRENE RAVESLOOT

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. C. Kraaikamp

Overige commissieleden

Dr. J.L.A. Dubbeldam

Drs. E.M. van Elderen

Januari, 2018

Delft

Contents

1 Reguliere kettingbreuken **6**

2 Eigenschappen van de Convergenten **7**
2.1 Recursieve formules voor de convergenten . . . 7
2.2 Limiet van de convergenten . . . 9
2.3 De kwaliteit van de benadering . . . 11
2.4 Eigenschappen van de kwaliteit . . . 13

3 Singulariseren **14**
3.1 De wiskunde achter singulariseren . . . 15
3.1.1 Voorbeeld singulariseren kettingbreuk . . . 15
3.2 Ontstaan van een singularisatie gebied . . . 16
3.3 Reguliere kettingbreuk omzetten naar Nearest Integer . . . 18
3.3.1 Eigenschappen benaderingen . . . 22

4 De α-expansies van Nakada en S-expansies **23**
4.1 De Nearest Integer kettingbreuk als α-expansie . . . 23
4.2 Algemeen α-expansies en S-expansies . . . 23

5 Terug in de tijd **24**
5.1 Algemene gebieden S . . . 27
5.2 Nearest Integer kettingbreuk . . . 30
5.3 Hurwitz' Singularisatie proces . . . 31
5.4 Maatbehoudende afbeeldingen . . . 32

6 Algemeen voor $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ **33**
6.1 Het geval $g < \alpha \leq 1$ . . . 33
6.2 Het geval $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq g$ . . . 35

7 Twee andere belangrijke voorbeelden **36**
7.1 Minkowski's Diagonal Expansion . . . 36
7.2 Bosma's Optimal Continued Fraction Expansion . . . 38

8 Conclusie **41**

Inleiding

Er zijn verschillende manieren om irrationele getallen te benaderen, één manier is met behulp van kettingbreuken. Kettingbreuken benaderen irrationele getallen met rationele getallen. Een kettingbreuk is een breuk in een breuk in een breuk enzovoorst. In het simpelste geval ziet het eruit als

$$d_0 + \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \ddots}}$$

Dit wordt afgekort met $x = [0; d_1, d_2, d_3, \dots]$. Op elk "tijdstip" in de kettingbreuk, dus hoe ver je in de kettingbreuk zit, is er een bepaald verleden (je kijkt achterom in de kettingbreuk) en een toekomst (je kijkt naar voren en ziet wat er nog allemaal in de kettingbreuk komt). In dit verslag gaan we kijken naar een tijd omgekeerde kettingbreuk. Dus wanneer de toekomst het verleden wordt en het verleden de toekomst.

In het eerste hoofdstuk en tweede hoofdstuk zullen we de eigenschappen van een kettingbreuk bespreken en dan in het bijzonder van de reguliere kettingbreuk. In hoofdstuk 3 bespreken we een methode, het singulariseren, waarmee we de ketingbreuk kunnen verkorten en waarmee bepaalde handige eigenschappen ontstaan. De zogenaamde α-expansies van Nakada en S-expansies komen aan bod in hoofdstuk 4. In hoofdstuk 5 gaan we kijken naar onze tijd omgekeerde kettingbreuk. In de laatste twee hoofdstukken laten we voorbeelden zien van deze nieuwe tijd omgekeerde kettingbreuken.

1 Reguliere kettingbreuken

De reguliere kettingbreuk van het reële getal x heeft de volgende vorm

$$d_0 + \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \ddots}}$$

waarbij $d_0 \in \mathbb{Z}$ zodat $x - d_0 \in [0, 1)$ en $d_1, d_2, \ldots$ positieve gehele getallen zijn. Vanaf nu nemen we aan dat $x \in [0, 1)$ en dus dat $d_0 = 0$. De d_i's worden de wijzergetallen genoemd van de kettingbreuk. De kettingbreuk hierboven wordt vaak ook afgekort tot de volgende notatie: $[d_0; d_1, d_2, \ldots]$.
Reële getallen kunnen geschreven worden als een kettingbreuk. Voor x een rationaal getal, dus een getal dat geschreven kan worden als een breuk van twee gehele getallen, bestaan er twee eindige reguliere kettinbreuken van dit getal. Voor x een irrationaal getal, dus niet te schrijven als breuk van twee gehele getallen, bestaat er een unieke oneindige reguliere kettingbreuk.
Je kunt een kettingbreuk van een getal x op een gegeven moment ook "afkappen" dan krijg je een benaderingsbreuk voor het getal x. Deze convergent, zoals we deze benaderingsbreuk noemen, krijg je wanneer je van een kettingbreuk alleen de eerste n termen neemt. Deze convergent wordt dan geschreven als:

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \ddots + \cfrac{1}{d_n}}} = [0; d_1, d_2, \ldots, d_n], \quad n \geq 1$$

De rij $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geq 1}$ wordt de rij van convergenten van de kettingbreuk genoemd. Wanneer $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dan convergeert de rij $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geq 1}$ (met n naar oneindig) naar het irrationele getal x. Elke benadering $\frac{p_n}{q_n}$ ligt dichterbij x dan de vorige benadering $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.
Het algoritme voor het berekenen van de kettingbreuk voor een (ir)rationaal getal $x \in [0, 1)$ is het volgende:

"Bereken $\frac{1}{x}$ en neem het gehele deel van $\frac{1}{x}$ als volgende getal d in je kettingbreuk. Zet $T(x) = \frac{1}{x} - d$ en begin opnieuw."

Voor het maken van deze reguliere kettingbreuk wordt er gebruik gemaakt van een operator functie. De reguliere kettingbreuk operator (of Gauss functie) $T : [0, 1) \to [0, 1)$ is gedefinieerd als:

$$T(x) := \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad x \neq 0, \quad T(0) = 0.$$

hier is $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ het gehele deel van $\frac{1}{x}$. Bovenstaande operator functie kan worden herschreven als:

$$T(x) = \frac{1}{x} - d_1,$$

Dit geeft het volgende:

$$\frac{1}{x} = T(x) + d_1,$$

Ook wel

$$x = \frac{1}{d_1 + T(x)}$$

In het algemeen krijgen we dan:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \frac{1}{x} - d_1 \Rightarrow x = \frac{1}{d_1 + T(x)} \\
T^2(x) &= T(T(x)) = \frac{1}{T(x)} - d_2 \Rightarrow x = \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + T^2(x)}}, \\
&\vdots \\
T^n(x) &= T(T^{n-1}(x)) \Rightarrow x = \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{d_3 + \ddots + \cfrac{1}{d_n + T^n(x)}}}}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Dus vinden we dat $T^n(x) = [0; d_{n+1}, d_{n+2}, d_{n+3}, \dots]$, en dat voor alle $n \geq 0$ geldt $T^n(x) \in [0,1)\backslash\mathbb{Q}$. Wanneer $x = [0; d_1, d_2, d_3, \dots]$, dan is:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= [0; d_2, d_3, d_4, \dots], \\
T^2(x) &= [0; d_3, d_4, d_5, \dots], \\
&\vdots \\
T^n(x) &= [0; d_{n+1}, d_{n+2}, d_{n+3}, \dots]
\end{aligned}
$$

2 Eigenschappen van de Convergenten

Er is in het eerste hoofdstuk al kort uitgelegd wat convergenten zijn. Convergenten krijg je wanneer je een eindige of oneindige kettingbreuk afbreekt, dan krijg je een rationaal getal die een benadering is voor de gehele kettingbreuk. In dit hoofdstuk worden er een paar belangrijke recursieve formules afgeleid voor de rijen $(p_n)_{n\geq 1}$ en $(q_n)_{n\geq 1}$ en we zien ook hoe we een getal x die wordt benaderd met de kettingbreuk kunnen uitdrukken in de termen van de convergent, namelijk p_n en q_n.

2.1 Recursieve formules voor de convergenten

Voor het bepalen van de recursieve formules worden de volgende matrices gedefinieerd:

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_2 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_n \end{bmatrix}
$$

Waarvoor geldt dat $\det(A_n) = 0 \cdot d_n - 1 \cdot 1 = -1$. Dus voor elke $n \geq 1$ geldt : $\det(A_n) = -1$. Definieer nu de volgende matrix:

$$
M_n = A_1 \cdot A_2 \cdots A_n
$$

met voor $n = 0$:

$$
M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Hierboven hebben we aangenomen dat $d_0 = 0$, wanneer $d_0 \neq 0$ dan is M_0 gelijk aan $\begin{bmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. We zullen verder gaan met de aanname dat $d_0 = 0$.
De matrix M_n blijft geheeltallig en omdat $det(A_n) = -1$ voor alle n ≥ 1 geldt er dat $\det(M_n) = (-1)^n$. Schrijf nu de matrix M_n als volgt:

$$
M_n = \begin{bmatrix} r_n & p_n \\ s_n & q_n \end{bmatrix}
$$

M_n kan ook geschreven worden als:

$$M_n = M_{n-1} \cdot A_n = \begin{bmatrix} r_{n-1} & p_{n-1} \\ s_{n-1} & q_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-1} \cdot d_n + r_{n-1} \\ q_{n-1} & q_{n-1} \cdot d_n + s_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-1} \cdot d_n + p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-1} \cdot d_n + q_{n-2} \end{bmatrix}$$

Die laatste stap is omdat na de tweede "=" teken eigenlijk de volgende vergelijking staat:

$$M_n = \begin{bmatrix} r_n & p_n \\ s_n & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-1} \cdot d_n + r_{n-1} \\ q_{n-1} & q_{n-1} \cdot d_n + s_{n-1} \end{bmatrix}$$

Daaruit volgen de volgende vergelijkingen:

$$r_n = p_{n-1} \Rightarrow r_{n-1} = p_{n-2}$$
$$s_n = q_{n-1} \Rightarrow s_{n-1} = q_{n-2}$$

Deze vergelijkingen zijn gebruikt om de laatste matrix te krijgen:

$$M_n = \begin{bmatrix} r_n & p_n \\ s_n & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-1} \cdot d_n + p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-1} \cdot d_n + q_{n-2} \end{bmatrix}$$

Om M_n toe te passen op 0 is de Möbius transformatie nodig. Hieronder staat kort uitgelegd wat dit precies is. Laat a, b, c en d in $\mathbb{Z}$ zodat de matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

inverteerbaar is. De Möbius transformatie is een afbeelding A: $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gedefinieerd als

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

Dus als de Möbius transformatie wordt toegepast met de matrix M_n met $x = 0$ dan:

$$M_n(0) = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}(0) = \frac{p_{n-1} \cdot 0 + p_n}{q_{n-1} \cdot 0 + q_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

Dit is precies de convergent voor x, want er geldt namelijk dat

$$\begin{aligned}
M_n(0) &= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n(0) \\
&= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot \left(\frac{0 \cdot 0 + 1}{1 \cdot 0 + d_n}\right) \\
&= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot \frac{1}{d_n} \\
&= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-2} \cdot \frac{0 \cdot \frac{1}{d_n} + 1}{1 \cdot \frac{1}{d_n} + d_{n-1}} \\
&= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-2} \cdot \frac{1}{d_{n-1} + \frac{1}{d_n}} \\
&= \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{d_3 + \ddots + \cfrac{1}{d_n}}}}
\end{aligned}$$

Al eerder is uitgerekend dat $\det(M_n) = (-1)^n$. De determinant van de matrix M_n is:

$$\det(M_n) = \det \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{bmatrix} = p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1}$$

Hieruit volgt dus dat:

$$\det(M_n) = p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1} = (-1)^n$$

Dus dan geldt dat de $\text{ggd}(p_n, q_k) = 1$.
Conclusie van dit verhaal is dat wanneer $[0; d_1, d_2, \dots]$ een eindige of oneindige kettingbreuk is dan bestaat er een rij $(p_n, q_n)_{n \geq 1}$ zodat:

$$M_n = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}$$

Waarbij de volgende recursieve relaties gelden voor $(p_n)_{n \geq 1}$ en $(q_n)_{n \geq 1}$:

$$\begin{cases} p_{-1} = 1; p_0 = 0; & p_n = d_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}, n \geq 1 \\ q_{-1} = 0, q_0 = 1; & q_n = d_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}, n \geq 1 \end{cases} \tag{2}$$

En waarbij geldt dat $\text{ggd}(p_n, q_n) = 1$. De beginwaarden volgen uit M_0. (In het algemeen is $p_0 = d_0$ voor $x \in \mathbb{R}$).

2.2 Limiet van de convergenten

In deze paragraaf laten we zien dat het volgende geldt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = x$$

Om dit te laten zien vervangen we de matrix A_n door de matrix A_n^*.

$$A_n^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_n + T^n(x) \end{bmatrix}$$

Dan kan met deze matrix weer een product matrix worden gedefinieerd:

$$M_n^* = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n^*$$

In de vorige paragraaf hebben we laten zien dat:

$$M_n = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}$$

Dit kan worden toegepast om de matrix M_n^* te berekenen:

$$\begin{aligned} M_n^* &= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n^* \\ &= M_{n-1} \cdot A_n^* \\ &= \begin{bmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_n + T^n(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} + d_n \cdot p_{n-1} + p_{n-1} \cdot T^n(x) \\ q_{n-1} & q_{n-2} + d_n \cdot q_{n-1} + q_{n-1} \cdot T^n(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n + p_{n-1} \cdot T^n(x) \\ q_{n-1} & q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

De laatste stap is vanwege (2). Net als in de vorige paragraaf kan M_n^* worden toegepast op nul.

$$\begin{aligned}
M_n^*(0) &= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n^*(0) \\
&= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot \left(\frac{0 \cdot 0 + 1}{1 \cdot 0 + d_n + T^n(x)} \right) \\
&= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot \frac{1}{d_n + T^n(x)} \\
&= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-2} \cdot \frac{0 \cdot \dfrac{1}{d_n + T^n} + 1}{1 \cdot \dfrac{1}{d_n + T^n(x)} + d_{n-1}} \\
&= A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-2} \cdot \frac{1}{d_{n-1} + \dfrac{1}{d_n + T^n(x)}} \\
&= \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{d_3 + \ddots + \cfrac{1}{d_n + T^n(x)}}}}
\end{aligned}$$

Hiervan is bij (1) al laten zien dat dit gelijk is aan x! Dus kunnen we concluderen dat $M_n^*(0) = x$. Er kan ook gelijk nul worden toegepast met de Möbius transformatie op de matrix die gevonden is in (3):

$$\begin{aligned}
M_n^*(0) &= \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_n + p_{n-1} \cdot T^n(x) \\ q_{n-1} & q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x) \end{bmatrix} (0) \\
&= \frac{p_{n-1} \cdot 0 + p_n + p_{n-1} \cdot T^n(x)}{q_{n-1} \cdot 0 + q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x)} \\
&= \frac{p_n + p_{n-1} \cdot T^n(x)}{q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x)}
\end{aligned} \tag{4}$$

Uit (4) kan worden gehaald dat:

$$\frac{p_n + p_{n-1} \cdot T^n(x)}{q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x)} = x$$

Dit kan worden gebruikt om een afschatting te maken voor het verschil tussen x en de benadering $\frac{p_n}{q_n}$ van x:

$$\begin{aligned}
\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{p_n + p_{n-1} \cdot T^n(x)}{q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x)} - \frac{p_n}{q_n} \right| \\
&= \left| \frac{q_n \cdot p_n + q_n \cdot p_{n-1} \cdot T^n(x)}{q_n \cdot (q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x))} - \frac{p_n \cdot (q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x))}{q_n \cdot (q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x))} \right| \\
&= \left| \frac{q_n \cdot p_n + q_n \cdot p_{n-1} \cdot T^n(x) - p_n \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1} \cdot T^n(x)}{q_n \cdot (q_n + q_{n-1} \cdot T^n(x))} \right| \\
&= \frac{|p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1}| \cdot T^n(x)}{q_n^2 \cdot (1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot T^n(x))} \\
&= \left| (-1)^n \right| \cdot \frac{T^n(x)}{q_n^2 \cdot (1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot T^n(x))} \\
&= \frac{T^n(x)}{q_n^2 \cdot (1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot T^n(x))} \\
&< \frac{1}{q_n^2}
\end{aligned} \tag{5}$$

Merk op dat $T^n(x)$ altijd tussen nul en 1 blijft. Voor $n \geq 1$ geldt er dat $q_n > 0$ aangezien M_n product is van allemaal positieve matrices en zijn dus de getallen in de matrix M_n ook allemaal positief. Vanwege dit weten we dat het deel $1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot T^n(x)$ groter is dan 1. De rij $(q_n)_{n\geq 1}$ stijgt exponentieel en zijn allemaal gehele positieve getallen, dus als n naar oneindig gaat, gaat het verschil naar nul en dus is er aangetoond dat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

Met de informatie die we nu hebben kunnen we ook nog de volgende belangrijke berekening doen:

$$\begin{aligned}
\frac{q_{n-1}}{q_n} &= \frac{q_{n-1}}{d_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{q_{n-1}}{d_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} \cdot \frac{\frac{1}{q_{n-1}}}{\frac{1}{q_{n-1}}} \\
&= \frac{1}{d_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}} \\
&= \dots \\
&= \cfrac{1}{d_n + \cfrac{1}{d_{n-1} + \ddots + \cfrac{1}{d_1}}} \\
&= [0; d_n, d_{n-1}, \dots, d_1]
\end{aligned} \tag{6}$$

Dit resultaat zal gebruikt worden in de volgende paragraaf.

2.3 De kwaliteit van de benadering

Het is interessant om te kijken naar hoe goed een convergent $\frac{p_n}{q_n}$ een irrationaal x benadert. Om dit te onderzoeken wordt er gekeken naar het verschil tussen de convergent en het getal dat je wil benaderen, het irrationale getal x. Met behulp van bevindingen in de vorige paragraaf bij (5) kan dit verschil worden afgeschat op de volgende manier:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

De kwaliteit van de benadering van x met een convergent $\frac{p_n}{q_n}$ geven we aan met het volgende getal:

$$\theta_n = q_n^2 \cdot \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \tag{7}$$

De kwaliteit is goed als θ_n dicht bij nul zit. Het verschil tussen de benadering $\frac{p_n}{q_n}$ en x zelf moet zo klein mogelijk zijn dus dicht bij nul. En hoe groter n, hoe groter de q_n wordt, dus hoe kleiner het verschil tussen de benadering en het getal x moet zijn om nog dicht bij nul te zitten. De kwaliteit voor kettingbreuken ligt altijd tussen nul en 1. We kunnen nu een paar belangrijke termen definiëren. De toekomst t_n voor $n \geq 0$ van een getal $x = [0; d_1, d_2, d_3, \dots]$ wordt gedefinieerd als

$$t_n = [0; d_{n+1}, d_{n+2}, \dots]$$

en het verleden v_n van x voor $n \geq 1$ als

$$v_n = [0; d_n, d_{n-1}, \dots, d_1]$$

Zo representeert de toekomst alles wat er na d_n komt en het verleden alles wat daarvoor is geweest

inclusief d_n. Uit (6) kunnen we nu halen dat $\frac{q_{n-1}}{q_n}$ precies het verleden inhoudt op tijdstip n en $T^n(x)$ de toekomst representeerd op tijdstip n. Dus er volgt:

$$t_n = T^n(x) \qquad \text{en} \qquad v_n = \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

Daarmee zien we dat $(t_n, v_n) \in [0,1) \times [0,1]$ voor $n \geq 1$. De bovenstaande formule (7) voor de kwaliteit kan nu anders worden geschreven:

$$\theta_n = q_n^2 \cdot \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = q_n^2 \cdot \frac{T^n(x)}{q_n^2 \cdot \left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot T^n(x)\right)} = \frac{t_n}{1 + v_n \cdot t_n}$$

Er kan nu een functie worden geintroduceert zodat er beter naar de rij $(\theta_n)_{n\geq 1}$ gekeken kan worden. Deze functie $\mathcal{T}$ stuurt (t_n, v_n) naar (t_{n+1}, v_{n+1}). De functie $\mathcal{T} : \Omega_1 \to \Omega_1$ met $\Omega_1 := [0,1) \times [0,1]$ wordt gedefinieerd als volgt:

$$\mathcal{T}(x,y) = \left(T(x), \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + y}\right) = \left(\frac{1}{x} - d, \frac{1}{d+y}\right)$$

Er vallen de volgende dingen op:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x,0) &= \left(T(x), \frac{1}{d_1}\right), \\
\mathcal{T}^2(x,0) &= \left(T(T(x)), \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{d_1}}\right), \\
\mathcal{T}^3(x,0) &= \left(T^3(x), \cfrac{1}{d_3 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{d_1}}}\right), \\
&\vdots \\
\mathcal{T}^n(x,0) &= \left(T^n(x), \cfrac{1}{d_n + \ddots + \cfrac{1}{d_3 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{d_1}}}}\right) = (t_n, v_n)
\end{aligned}$$

Wanneer $y \neq 0$ dan "verdwijnt" de y steeds verder in de kettingbreuk, wanneer n naar oneindig gaat. De waarde van y wordt verwaarloosbaar klein:

$$\mathcal{T}^n(x,y) = \left(T^n(x), \cfrac{1}{d_n + \ddots + \cfrac{1}{d_3 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{d_1 + y}}}}\right)$$

Aangezien het interessant is om te kijken naar het verloop van de kwaliteit in tijd, is het handig om te kijken naar wat de kwaliteit was een tijdstip geleden namelijk tijdstip $n-1$ uitgedrukt in verleden en toekomst op tijdstip n. Dat het volgende geldt is logisch:

$$\theta_n = \frac{t_n}{1 + t_n v_n}, \quad \theta_{n-1} = \frac{t_{n-1}}{1 + t_{n-1} v_{n-1}}$$

Maar nu willen we graag het laatste uitdrukken in het verleden en de toekomst op tijdstip n. Daarom zullen t_{n-1} en v_{n-1} anders geschreven moeten worden. De functie $\mathcal{T}$ stuurt (t_{n-1}, v_{n-1}) naar (t_n, v_n) en dus kan er gezegd worden dat :

$$(t_n, v_n) = \mathcal{T}(t_{n-1}, v_{n-1})$$

En daaruit volgt weer dat:

$$(t_n, v_n) = \mathcal{T}(t_{n-1}, v_{n-1}) = \left(T(t_{n-1}), \frac{1}{\lfloor \frac{1}{t_{n-1}} \rfloor + v_{n-1}}\right) = \left(\frac{1}{t_{n-1}} - d_n, \frac{1}{d_n + v_{n-1}}\right)$$

Hieruit kunnen de benodigden vergelijkingen worden gehaald.

$$v_n = \frac{1}{d_n + v_{n-1}} \Rightarrow \frac{1}{v_n} = d_n + v_{n-1} \Rightarrow v_{n-1} = \frac{1}{v_n} - d_n$$

Verder hebben we ook dat:

$$t_n = \frac{1}{t_{n-1}} - d_n \Rightarrow \frac{1}{t_{n-1}} = d_n + t_n \Rightarrow t_{n-1} = \frac{1}{d_n + t_n}$$

Invullen geeft:

$$\begin{aligned}
\theta_{n-1} &= \frac{t_{n-1}}{1 + t_{n-1} \cdot v_{n-1}} \\
&= \frac{\frac{1}{d_n + t_n}}{1 + \left(\frac{1}{d_n + t_n}\right) \cdot \left(\frac{1}{v_n} - d_n\right)} \\
&= \frac{1}{d_n + t_n + \frac{1}{v_n} - d_n} \\
&= \frac{1}{t_n + \frac{1}{v_n}} \cdot \frac{v_n}{v_n} \\
&= \frac{v_n}{1 + v_n \cdot t_n}
\end{aligned}$$

Het is dus wel duidelijk dat de benaderings coefficient θ_n tussen nul en 1 ligt.

2.4 Eigenschappen van de kwaliteit

In de vorige paragraaf is er laten zien dat:

$$\theta_{n-1} = \frac{v_n}{1 + t_n \cdot v_n} \qquad \theta_n = \frac{t_n}{1 + t_n \cdot v_n}$$

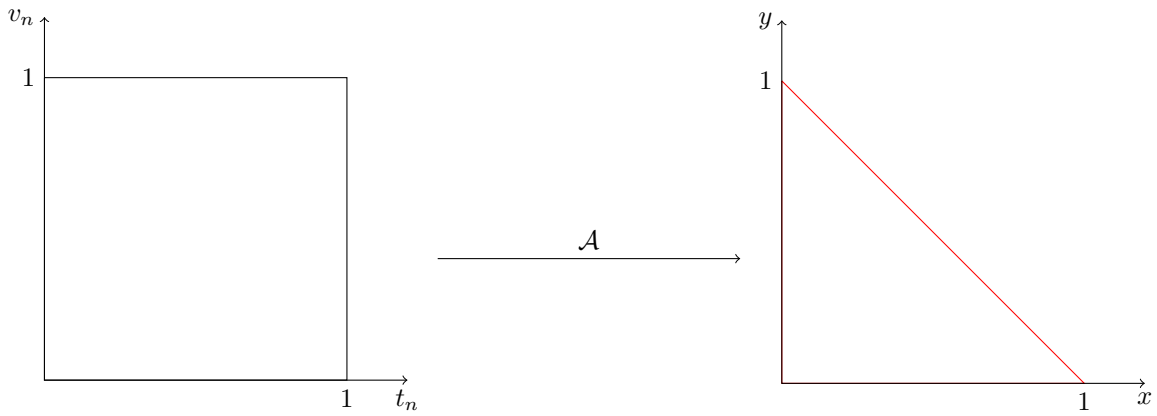
Dus dan is het logisch dat de volgende functie interessant is. Definieer de volgende functie $\mathcal{A} : \Omega \to \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{A}(t, v) := \left(\frac{v}{1 + t \cdot v}, \frac{t}{1 + t \cdot v}\right)$$

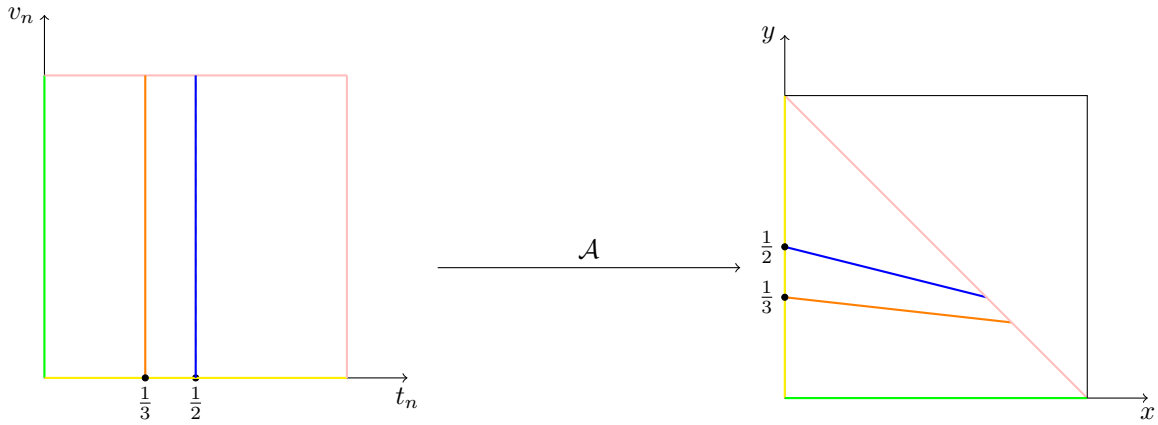
voor $(t, v) \in \Omega$. Dan zien we dat het volgende geldt:

$$\mathcal{A}(t_n, v_n) = \left(\frac{v_n}{1 + t_n \cdot v_n}, \frac{t_n}{1 + t_n \cdot v_n}\right) = (\theta_{n-1}, \theta_n)$$

Er kan worden laten zien dat $\mathcal{A}(\Omega)$ een driehoek is in $\mathbb{R}^2$ met hoekpunten (0,1), (1,0) en (0,0). Zoals hieronder is afgebeeld.



Zo kunnen er lijnen worden getekend in Ω, die allemaal in de driehoek liggen na toepassen van de functie $\mathcal{A}$. Hieronder wordt het voor een paar lijnen in het Ω-vlak laten zien.



Met deze kennis en dat $(\theta_{n-1}, \theta_n) = \mathcal{A}(t_n, v_n) \in \mathcal{A}(\Omega)$ volgt er het volgende resultaat van Vahlen [8]:

$$\min(\theta_{n-1}, \theta_n) < \tfrac{1}{2}$$

Omdat er geldt dat wanneer het punt in het driehoek zit, dan is de kleinste van de twee punten altijd kleiner dan een half. Het punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ behoort zelf niet tot het gebied van $\mathcal{A}(\Omega)$. Er zijn ook nog andere eigenschappen, maar die verder geen betekenis hebben voor de rest van het verslag, maar toch noemen we er nog één. Voor de reguliere kettingbreuken is er een stelling van Borel (1905) [1] en Hurwitz (1891) [4] die nog een eigenschap geeft van de kwaliteit van de benaderingen en dat is het volgende: Voor elk irrationaal getal x, en elke $n \geq 1$ geldt er dat:

$$\min\{\theta_{n-1}, \theta_n, \theta_{n+1}\} \leq \tfrac{1}{\sqrt{5}}.$$

Waarbij de constante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ de best mogelijke is.

3 Singulariseren

In kettingbreuken zijn er zoals al vaker is gezien in dit verslag, de wijzergetallen $d_1, d_2, d_3, \ldots$. Wat nu heel handig is, is dat een heleboel van deze wijzergetallen in een kettingbreuk gelijk aan 1 zijn. Zo heeft Paul Lévy laten zien dat voor bijna alle x ongeveer 41% van alle wijzergetallen gelijk is aan 1. Bij deze wijzergetallen die gelijk aan 1 zijn kan de kettingbreuk op die plek verkort worden waardoor er een nieuwe kettingbreuk ontstaat die veel sneller convergeert dan de oorspronkelijke reguliere kettingbreuk. Dit proces noemen we singulariseren. Ofwel in mooie woorden kan worden gezegd dat:

"Het proces van singulariseren bestaat uit een verzameling van kettingbreuken en een regel die bepaalt in een duidelijke manier hoe de paren van enen in de kettingbreuk worden gesingulariseerd."

Er zijn verschillende algoritmes om de wijzergetallen gelijk aan 1 te singulariseren. Een voorbeeld hiervan is dat wanneer er een rij opeenvolgende enen in een kettingbreuk zit, dat je de 1ste, 3de, 5de etc singulariseert. Het is ook mogelijk om achteraan te beginnen bij de rij enen en dan zo naar voren te gaan en de 1ste, 3de, vijfde etc te singulariseren. Er zijn zo nog veel meer mogelijke manieren om enen te singulariseren. Waarvan een paar ook in dit verslag zullen worden genoemd.

3.1 De wiskunde achter singulariseren

Bij het singulariseren van wijzergetallen gelijk aan 1 verander je de kettingbreuk op die plek, waardoor de kettingbreuk korter wordt en de 1 die je singulariseert verdwijnt. De wiskunde achter de enen singulariseren, dus hoe de kettingbreuk verandert na het singulariseren, zal in deze paragraaf worden uitgelegd. Neem $A, B \in \mathbb{N}$ en $\zeta \in [0, 1)$ dan geldt er het volgende:

$$A + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{B + \zeta}} = A + 1 + \frac{-1}{B + 1 + \zeta}$$

Neem de kettingbreuk van een irrationaal getal x waarbij we kijken naar het wijzergetal $d_{n+1} = 1$:

$$[d_0; d_1, d_2, d_3, ..., d_n, 1, d_{n+1}, \dots] = d_0 + \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{d_3 + \ddots + \cfrac{1}{d_n + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{d_{n+2} + \ddots}}}}}}$$

Dan krijgen we na het singulariseren van $d_{n+1} = 1$ het volgende:

$$\cfrac{\ddots + 1}{d_n + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{d_{n+2} + \ddots}}} = \cfrac{\ddots + 1}{d_n + 1 + \cfrac{-1}{d_{n+2} + 1 + \ddots}}$$

Het kan natuurlijk ook zo zijn dat er meerdere enen achter elkaar zitten in de kettingbreuk, daarvan zien we een voorbeeld verderop. De rij convergenten van de nieuwe kettingbreuk (dus met gesingulariseerde enen) is een deelrij van de originele rij. Deze nieuwe rij van convergenten wordt hier gefinieerd als:

$$\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right)_{k \geq 1} = \left(\frac{r_k}{s_k}\right)_{k \geq 1}$$

Als de originele rij convergeert naar x, dan convergeert de nieuwe rij ook naar x. Belangrijk om te weten is dat deze nieuwe rij sneller convergeert naar x dan de reguliere convergenten.

3.1.1 Voorbeeld singulariseren kettingbreuk

Hier passen we de singulariseren methode toe op de manier van de Nearest Integer. Dit is de manier dat je van een rij enen de eerste, derde, vijfde etc singulariseert. Neem bijvoorbeeld het volgende begin van

een kettingbreuk:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\ddots}}}}}}$$

Waarbij de volgende convergenten horen:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{2},\quad \frac{p_2}{q_2}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=\frac{1}{3},\quad \frac{p_3}{q_3}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{2}{5},\quad \ldots$$

Dit kan ook veel makkelijker met de recurrente betrekkingen die eerder zijn gevonden in (2). Dan krijgen we de volgende reguliere convergenten: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{18}, \frac{9}{23}, \frac{34}{87}, \ldots$. We kunnen de enen singulariseren in de kettinbreuk op de manier van de nearest integer (1ste, derde, vijfde etc). Na het singulariseren van de eerste 1 in de kettingbreuk, ziet de kettingbreuk er als volgt uit:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{-1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\ddots}}}}}$$

Als we nu de overgebleven 1 ook singulariseren krijgen we:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{-1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{-1}{4+\ddots}}}}$$

Zoals je kunt zien is deze kettingbreuk een stuk korter dan de oorspronkelijke kettingbreuk. Met bijbehorende nieuwe convergenten:

$$\frac{r_1}{s_1}=\frac{1}{3},\quad \frac{r_2}{s_2}=\frac{2}{5},\quad \frac{r_3}{s_3}=\frac{9}{23},\quad \ldots$$

Deze rij convergeert veel sneller naar x dan de reguliere convergenten. Zo zien we dat de convergenten $\frac{1}{2}, \frac{7}{18}$ van de reguliere kettingbreuk niet meer in de rij van nieuwe convergenten zitten. Dus de nieuwe rij convergenten zijn een paar convergenten kwijtgeraakt, waardoor deze dus sneller convergeert.

3.2 Ontstaan van een singularisatie gebied

In de vorige paragraaf hebben we een voorbeeld gezien waarbij de ene in de kettingbreuk worden gesingulariseert op de manier van de nearest integer. Maar er zijn oneindig veel manieren/processen om enen te singulariseren in een kettingbreuk. Al deze singularisatie processen werken op de verzameling van de reguliere kettingbreuken. De verkregen kettingbreuken na het singulariseren van de enen in een reguliere kettingbreuk worden S-expansies genoemd. De S-expansie van een irrationeel getal x, die dus is

ontstaan uit de reguliere kettingbreuk van x, is de semi-reguliere kettingbreuk die naar x convergeert. Een semi-reguliere kettinbreuk heeft de volgende vorm:

$$b_0 + \cfrac{\epsilon_1}{b_1 + \cfrac{\epsilon_2}{b_2 + \cfrac{\epsilon_3}{b_3 + \ddots}}} = [b_0; \epsilon_1 : b_1, \epsilon_2 : b_2, \epsilon_3 : b_3, \dots]$$

waar $b_n \in \mathbb{N}$ en $\epsilon_n = \pm 1$ en $\epsilon_{n+1} + b_n \geq 1$ voor $n \geq 1$. Deze nieuwe kettingbreuken worden gemaakt aan de hand van de reguliere kettingbreuk, dus er moet een methode komen die ervoor zorgt dat de juiste enen in de reguliere kettingbreuk worden gesingulariseerd. Dit wordt gedaan door een gebied $S \in [0,1) \times [0,1]$ te definiëren. Nog even een stapje terug. Om dit goed te kunnen begrijpen wordt er nogmaals gekeken naar hoe de wijzergetallen nou precies ontstaan. Er was te zien in het eerste hoofdstuk dat er wordt gekeken naar de baan van x onder de functie T. Waarbij telkens $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ het nieuwe wijzergetal is. En dit gebeurt natuurlijk of oneindig vaak of eindig vaak als x een rationaal getal is. In het algemeen geldt dan dat als x tussen 1 en een half zit, dan is het wijzergetal 1, wanneer x tussen een half en een derde zit dan is het wijzergetal 2, tussen een derde en een vierde is het wijzergetal 3, enzovoorts. De wijzergetallen in een kettingbreuk zijn altijd groter of gelijk aan 1. Maar hoe kan dit proces in een tekening worden laten zien?
Er is al eerder laten zien dat :

$$t_n = [0; d_{n+1}, d_{n+2}, \dots], \qquad v_n = [0; d_n, ..., d_1]$$

Het punt (t_n, v_n) kan in een figuur worden afgebeeld. Hiervoor wordt er gekeken naar het eerste wijzergetal van t_n en v_n. Deze vertelt ons waar in het vlak het punt zit. In figuur ziet het er uit als in figuur (1), (komt uit proefschrift van Ionica Smeets [7])
Zo zitten in het grijze vlak alle punten (t_n, v_n) met $d_{n+1} = 2$. Wanneer t_n zich in het gebied rechts van

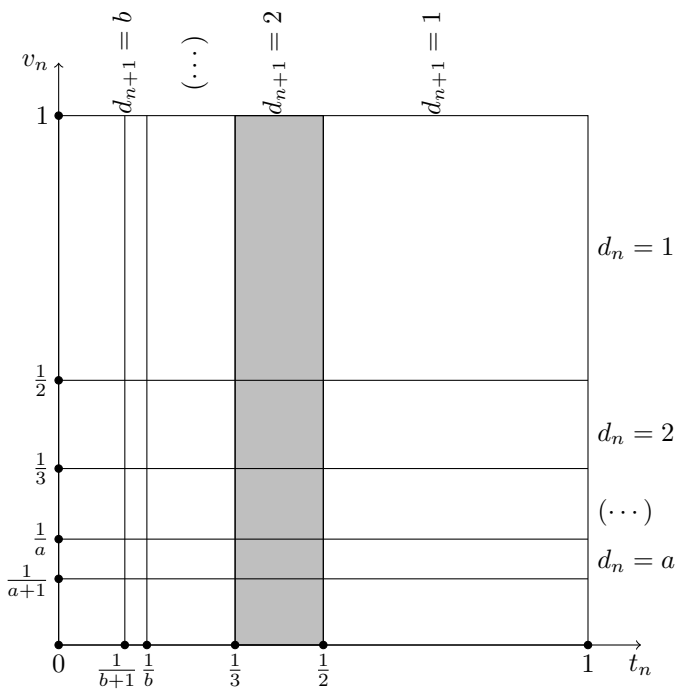


Figure 1: Natuurlijke uitbreiding voor reguliere kettingbreuken

$\frac{1}{2}$ zou bevinden dan betekent het dat $d_{n+1} = 1$.
Nu kan er een gebied S worden gedefinieerd, waarbij wanneer hier het punt (t_n, v_n) inkomt, het betekent dat d_{n+1} wordt gesingulariseerd. Er geldt dat:

$$d_{n+1} = 1 \text{ singulariseren} \iff (t_n, v_n) \in S$$

Er zijn een paar voorwaarden waar S aan moet voldoen:

1. $S \subset [\frac{1}{2}, 1) \times [0, 1]$;
2. $S \cap \mathcal{T}(S) = \emptyset$;
3. $S \in \mathcal{B}$ én $\mu(\delta S) = 0$.

Het beeld van S onder de reguliere kettingbreuk formule $\mathcal{T}$ mag niet overlappen met S zelf, want dat zou betekenen dat je opeenvolgende enen kan singulariseren en dat kan niet, aangezien het singulariseren van de eerste 1, de tweede 1 laat verdwijnen door er 1 bij op te tellen. Verder zegt nummer 3 dat de rand van S maat 0 heeft, deze eis is nodig om "pathalogische gevallen" te weren.

3.3 Reguliere kettingbreuk omzetten naar Nearest Integer

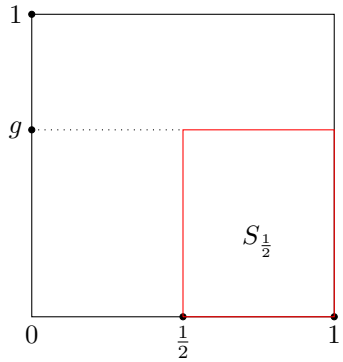
In deze paragraaf zullen we van een reguliere kettingbreuk een nieuwe kettingbreuk maken, de Nearest Integer kettingbreuk (NICF). Er is voor gekozen hier het proces van singulariseren te laten zien aan de hand van een voorbeeld, er zullen ook een paar algemene definities worden genoemd. Door het singulariseren zal er een semi-reguliere kettingbreuk onstaan. Al eerder is verteld dat een Nearest Integer kettingbreuk ontstaat door de volgende regel:

"Singulariseer in elke rij van m opeenvolgende RCF-wijzergetallen gelijk aan 1, waar m een natuurlijk getal groter dan of gelijk aan 1, de eerste, derde, vijfde enzovoorts wijzergetallen"

Om dit mogelijk te maken, is er een singularisatie gebied S nodig. Dit is in het geval van de nearest integer het gebied:

$$S_{\frac{1}{2}} := \left[\frac{1}{2}, 1\right) \times [0, g]$$

Of in een tekening:



Met g wordt de gulden snede bedoeld die als volgt is gedefinieerd:

$$g := \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$$

Waarbij geldt

$$G := g + 1, \quad \frac{1}{g} = G \quad \text{en} \quad g \cdot G = 1$$

Waarom is het gebied S zo gekozen? Stel dat we een irrationaal getal x hebben dat er als volgt uitziet:

$$x = [0; d_1, ..., d_n, 1, 1, 1, 1, ..., 1, d_{n+k}, ...]$$

Met $d_n, d_{n+k} \neq 1$ dan hebben we dus daartussenin een rij enen. Kijken we naar het punt (t_{n-1}, v_{n-1}) met :

$$t_{n-1} = [0; d_n, 1, 1, 1, 1, ..., 1, d_{n+k}, ...], \quad v_{n-1} = [0; d_{n-1}, ..., d_1]$$

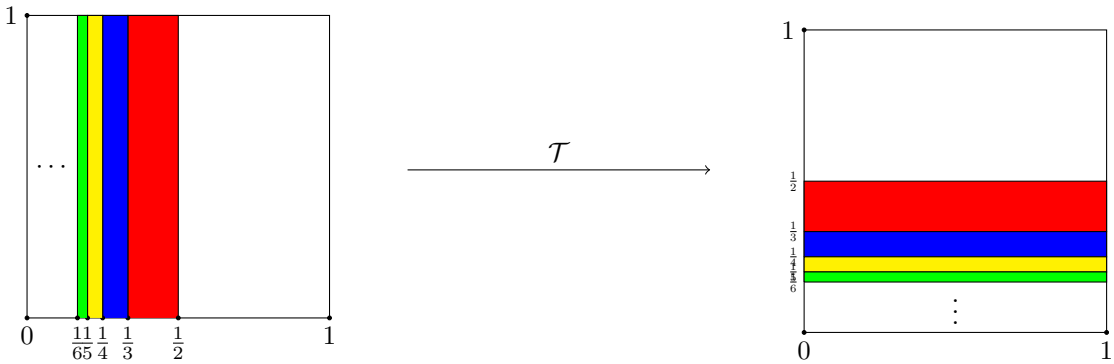
Dan weten we dat het punt aan de linkerkant van $\frac{1}{2}$ zit. Aangezien we weten dat $d_n \neq 1$ en we weten niet wat d_{n-1} is dus het kan zijn dat het in het linker bovenvlak zit (boven $\frac{1}{2}$) of onder de $\frac{1}{2}$. Waar zit dan het punt (t_n, v_n)? Dat kun je bepalen door de functie $\mathcal{T}$ toe te passen op het vorige punt:

$$\mathcal{T}(t_{n-1}, v_{n-1}) = (t_n, v_n)$$

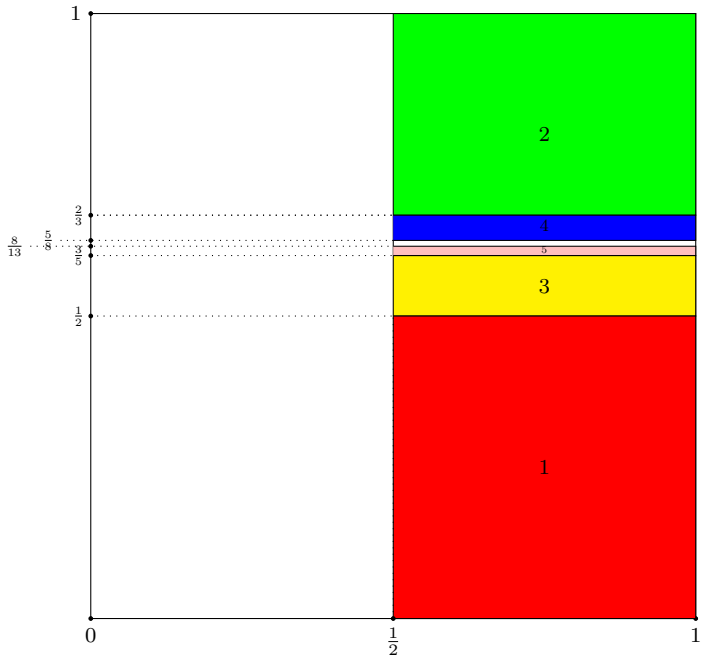
Met

$$t_n = [0; 1, 1, 1, ..], \quad v_n = [0; d_n, d_{n-1}, ..., d_1]$$

Dus het beeld onder $\mathcal{T}$ ligt rechtsonder in het vlak, aangezien we weten dat t_n tussen 1 en een $\frac{1}{2}$ zit en v_n een waarde heeft onder de $\frac{1}{2}$. Vóór een rij enen is er een wijzergetal dat niet gelijk is aan 1, dus dan zit je automatisch in het linkervlak ten opzichte van $\frac{1}{2}$. Hieronder is afgebeeld waar de verschillende vlakken links van $\frac{1}{2}$ heen worden gestuurd met de functie $\mathcal{T}$.



Waar wordt (t_n, v_n) heen gestuurd onder de functie $\mathcal{T}$? Wanneer er een rij enen is, zit je telkens aan de rechterkant van een $\frac{1}{2}$. We hadden net bepaald dat (t_n, v_n) rechtsonder in het rode vlak (1) zit. Het verloop onder de functie $\mathcal{T}$ is hieronder afgebeeld:



De eerste 1 komt in het grote rode vlak rechtsonder, deze wordt gestuurd naar het groene vlak met een 2 erop (het gedeeldte van een 1/2 naar 1 op de x-as gaat naar het lijnstuk 0 tot 1 op hoogte 1 en het lijnstuk van 1/2 naar 1 op hoogte een 1/2 gaat naar lijnstuk 0 naar 1 op hoogte $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 2/3$). Vervolgens worden de punten in dit groene vlak weer gestuurd naar het gele vlak met 3 erop en dit gebied wordt vervolgens weer naar het blauwe vlak met een 4 erop gestuurd. Dit gaat de hele tijd zo door. De grenslijn ligt op het punt $y = g$. De hoogtes die je telkens krijgt zijn steeds de breuk van de Finonacci-getallen F_{n-1} en F_n en er geldt dat $\frac{F_{n-1}}{F_n} = [0 : 1, 1, \ldots, 1] \to g$. Daarom is het singularisatie gebied het gebied rechtsonder met grenslijn $y = g$. Op deze manier singulariseer je om en om de enen in de rij. Er rest nog de check of $\mathcal{T}(S) \cap S = \emptyset$. Voor $x \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ en $y \in \{0, g\}$ geldt er:

$$\mathcal{T}(x, y) = \left(\frac{1}{x} - 1, \frac{1}{1+y}\right)$$

Dan krijgen we het volgende gebied:

$$\mathcal{T}(S) = [0, 1] \times [g, 1]$$

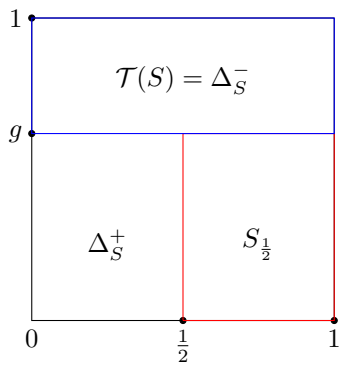
Dus nu weten we waar de hoekpunten van S onder de functie $\mathcal{T}$ heen worden gestuurd, namelijk de hoekpunten (1,1), (0,1), (1,g), (0,g). Dus als (t_n, v_n) in S dan weten we dat (t_{n+1}, v_{n+1}) in het gebied zit waarvan hierboven de hoekpunten zijn berekend. Dit gebied wordt in het algemeen gedefinieerd als:

$$\mathcal{T}(S) = \Delta_S^-$$

Waarbij in het algemeen geldt dat $\Delta_S^- \subset [0, 1) \times [\frac{1}{2}, 1]$. Dit gebied is disjunct van het singularisatiegebied S zelf (een van de voorwaarde). Het overige gebied wordt in het algemeen gedefinieerd als:

$$\Delta_S^+ := \Omega_1 \backslash (S \cup \Delta_S^-)$$

Dit kan in een figuur worden samengevat voor de nearest integer:



We merken ook het volgende op, dat als een bepaalde $d_n = 1$ wordt gesingulariseerd (dus deze S-convergent wordt "weggewerkt") dan is de reguliere convergent $\frac{p_n}{q_n}$ geen S-convergent. Door dit singulariseren ontstaat er, zoals eerder als is opgemerkt, een deelrij van $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\geq 1}$, namelijk $\left(\frac{r_n}{k_n}\right)_{k\geq 1}$. Aangezien deze rijen niet hetzelfde zijn, betekent het ook dat deze nieuwe rij een andere toekomst en verleden heeft. Vanaf nu zullen toekomst en verleden van $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geq 1}$ aangeven worden met kleine letters en van $(\frac{r_n}{k_n})_{k\geq 1}$ aangeven met hoofdletters. Waarbij de toekomst er zo uitzien voor de reguliere convergenten, met $n \geq 0$:

$$t_n = \cfrac{1}{d_{n+1} + \cfrac{1}{d_{n+2} + \ddots + \cfrac{1}{d_{n+m} + \ddots}}}$$

En de toekomst voor de S-convergenten zal er zo uitzien, met $k \geq 0$:

$$T_n = \cfrac{\epsilon_{k+1}}{a_{n+1} + \cfrac{\epsilon_{k+2}}{a_{n+2} + \ddots + \cfrac{\epsilon_{k+m}}{a_{n+m} + \ddots}}}$$

Het verleden van de reguliere en S-convergenten zien er zo uit:

$$v_n := \frac{q_{n-1}}{q_n} = \cfrac{1}{d_n + \cfrac{1}{d_{n-1} + \ddots + \cfrac{1}{d_1}}}$$

$$V_n := \frac{s_{k-1}}{s_k} = \cfrac{1}{a_k + \cfrac{\epsilon_k}{a_{k-1} + \ddots + \cfrac{\epsilon_2}{a_1}}}$$

Al eerder is gezien dat geldt:

$$x = \begin{cases} \dfrac{p_n + t_n p_{n-1}}{q_n + t_n q_{n-1}}, & n \geq 1 \\ \dfrac{r_k + T_k r_{k-1}}{s_k + T_k s_{k-1}}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{8}$$

In het algemeen kunnen we het volgende zeggen [5]:

$$(t_n, v_n) \in \Delta_S^+ \Leftrightarrow \exists k : \begin{cases} r_{k_1} = p_{n-1}, r_k = p_n \\ s_{k-1} = q_{n-1}, s_k = q_n \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} T_k = t_n \\ V_k = v_n \end{cases} \tag{10}$$

$$(t_n, v_n) \in \Delta_S^- \Leftrightarrow \exists k : \begin{cases} r_{k_1} = p_{n-2}, r_k = p_n \\ s_{k-1} = q_{n-2}, s_k = q_n \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} T_k = -t_n/(1 + t_n) \\ V_k = 1 - v_n \end{cases} \tag{12}$$

Om het gebied van de nearest integer te krijgen, moeten we de S "wegwerken", want hier zitten de enen in die we weg willen uit de kettingbreuk en dus ook niet zitten in de nearest integer kettingbreuk. Om de S als het ware weg te werken, moeten we een geïnduceerde transformatie invoeren: De transformatie $\mathcal{J} : \Omega_1 \backslash S \to \Omega_1 \backslash S$ is gedefinieerd als:

$$\mathcal{J}(x, y) := \begin{cases} \mathcal{T}(x, y), & \mathcal{T}(x, y) \notin S \\ \mathcal{T}^2(x, y), & \mathcal{T}(x, y) \in S \end{cases}$$

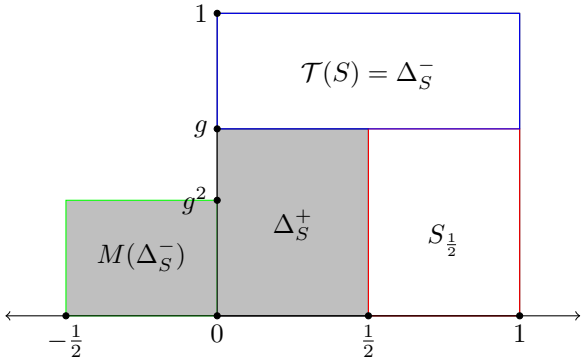
We zien aan deze functie dat als $\mathcal{T}(x, y) \notin S$ dan pas je gewoon $\mathcal{T}$ toe. En als het wel in S zit, dan passen we de functie nogmaals toe zodat je niet meer in S zit. Aan de hand van (12) is het logisch om de afbeelding $M : \Omega_1 \backslash S \to \mathbb{R}^2$, met $\Omega_1 = [0, 1) \times [0, 1]$ te definieren dooor:

$$M(t, v) := \begin{cases} (t, v), & (t, v) \in \Delta_S^+ \\ (\frac{-t}{1+t}, 1 - v), & (t, v) \in \Delta_S^- \end{cases}$$

Er is namelijk laten zien dat als een punt zich in Δ_S^+ bevindt, het verleden en de toekomst van de nieuwe rij hetzelfde zijn al van de oude. Maar als het punt zich bevindt in Δ_S^-, dan veranderen de toekomst en tijd bij de S-convergenten. Deze formule zet dus de punten van de reguliere kettingbreuk (het verleden en de toekomst op tijdstip n) om in de toekomst en verleden punten van de gesingulariseerde kettingbreuk. We passen deze functie M toe op ons gebied Δ_S^-, aangezien het gebied Δ_S^+ hetzelfde blijft. Dan krijgen we voor $x \in [0, 1)$ en $y \in [\frac{1}{2}, 1]$:

$$M(x, y) = \left(\frac{-x}{1+x}, 1 - y\right)$$

Voor de nearest integer vinden we dus het volgende grijze gebied:



De operator $\mathcal{T}_S : \Omega_S \to \Omega_S$, waarbij $\Omega_S = M(\Omega_1 \backslash S)$ is gedefinieerd door:

$$\mathcal{T}_S(t, v) := M\mathcal{J}M^{-1}(t, v), \quad (t, v) \in \Omega_s$$

Waarvoor geldt dat :

$$\mathcal{T}_S(t_k, v_k) = (t_{k+1}, v_{k+1})$$

Hiermee kun je dus het verloop in de tijd zien van de nieuw ontwikkelde rij van S-convergenten. Ofwel in ons specifieke geval van de nearest integer, hebben we:

$$\mathcal{T}_{\frac{1}{2}}(x, y) = M\mathcal{J}M^{-1}(x, y)$$

De eerste coördinaat van bovenstaande functie is de operator functie voor de nearest integer, dus de formule die automatisch de goede enen singulariseert en de nieuwe kettingbreuk geeft is:

$$T_{\frac{1}{2}}(x) = \left|\frac{1}{x}\right| - \left[\left|\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}\right]$$

De nearest integer kettingbreuk hoort bij de α-expansies, in dit geval $\alpha = \frac{1}{2}$. Hierover wordt meer verteld in het volgende hoofdstuk.

3.3.1 Eigenschappen benaderingen

Er is al laten zien dat elke semi-reguliere kettingbreuk expansie, zoals bijvoorbeeld de NICF, van een irrationaal getal x een rij $(r_k, s_k)_{k\geq 1}$ van stijgende goede rationele benaderingen geeft. Maar wat zijn nu de kenmerken van deze benaderingen? Er zijn twee manieren hoe je een rij van benaderingen kan beoordelen; met z'n snelheid en hoe dichtbij de benadering bij het irrationele getal x zit. Een snelle expansie van x is een expansie waarbij de groeisnelheid van de noemers van de convergenten maximaal is. *Dichtsbijzijnde expansies* zijn die waarbij geldt dat

$$\sup\{\theta_k\} : \theta_k = s_k|s_k x - r_k|$$

minimaal is. Dus de kleinste θ_k die groter of gelijk aan alle $\theta_k' s$ is die moet zo klein mogelijk zijn. Er zijn twee expansies die beide aan één van deze eigenschap voldoen. De expansie met de snelste

benaderingen dat is de expansie die uitgebreid is besproken namelijk de Nearest Integer. Deze heeft alleen geen dichtsbijzijnde benaderingen. De Minkowskis diagonaal kettingbreuk (DCF) heeft dichtsbijzijnde benaderingen, maar geeft niet de snelste benaderingen. De DCF behandelen we later in dit verslag nog. Bestaat er nu ook een expansie waarvoor voor elk irrationaal getal x de expansie de snelste en dichtsbijzijnde benaderingen heeft? Deze bestaat inderdaad en is namelijk de optimale kettingbreuk [2], ofwel de OCF en wordt later in dit verslag ook nog behandeld.

4 De α-expansies van Nakada en S-expansies

In dit hoofdstuk zullen we kijken naar α-expansies en S-expansies. Eerst zullen we kijken naar een specifieke α-expansie en daarna in het algemene geval.

4.1 De Nearest Integer kettingbreuk als α-expansie

In het vorige hoofdstuk zagen we de operator functie van NICF. Deze operator genereert een kettingbreuk, op dezelfde manier als de RCF operator functie, waarbij in dit geval er geen wijzergetallen zitten die gelijk aan 1 zijn.
Er is al gezien dat de reguliere kettingbreuk te verkrijgen is met de volgende operator:

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

waarbij $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ het gehele getal is van $\frac{1}{x}$. Bij de nearest integer hebben we een andere operator functie, zoals in de vorige paragraaf is bepaald, namelijk de functie $T_{\frac{1}{2}} : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ met

$$T_{\frac{1}{2}}(x) = \left| \frac{1}{x} \right| - \left\lfloor \left| \frac{1}{x} \right| + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Hier is $\lfloor |\frac{1}{x}| + \frac{1}{2} \rfloor$ de afronding naar het dichtsbijzijnde gehele getal, vandaar de naam "nearest integer", in plaats van de entier. De kettingbreuk die ontstaat door de operator functie van NICF is als volgt:

$$x = c_0 + \cfrac{\epsilon_1}{c_1 + \cfrac{\epsilon_2}{c_2 + \cfrac{\epsilon_3}{c_3 + \ddots}}}$$

Met $x - c_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en alle c's natuurlijke getallen en waarbij op dezelfde manier als in de reguliere vorm geldt dat:

$$c_n = \left\lfloor \left| \frac{1}{T_{\frac{1}{2}}^{n-1}} \right| + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

waarbij voor alle n geldt dat c_n minstens 2 is. Aangezien er geldt dat $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en dus ook voor alle n geldt er dat $T_{\frac{1}{2}}^{n-1} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, dus $\left| \frac{1}{T_{\frac{1}{2}}^{n-1}} \right|$ gedeelte is ≥ 2 en gelijk aan 2 als $T_{\frac{1}{2}}^{n-1} = 2$ waardoor er in totaal een waarde van 2.5 uitkomt en floor(2.5)=2. Voor alle andere waarde "x" is het groter dan 2. Ook geldt er nog:

$$\epsilon_n = \operatorname{sign}\left(T_{\frac{1}{2}}^{n-1}\right) = \begin{cases} 1, & T_{\frac{1}{2}}^{n-1} > 0 \\ -1, & T_{\frac{1}{2}}^{n-1} < 0 \end{cases}$$

4.2 Algemeen α-expansies en S-expansies

Nakada [6] introduceerde in 1981 een klasse van kettingbreuken gegenereerd door de afbeelding T_α.
Laat $0 \leq \alpha \leq 1$, de α-expansie operator $T_\alpha : [\alpha - 1, \alpha] \to [\alpha - 1, \alpha]$ is gedefinieerd door

$$T_\alpha(x) = \frac{\epsilon(x)}{x} - \left\lfloor \left| \frac{1}{x} \right| + 1 - \alpha \right\rfloor \quad \text{if } x \neq 0 \text{ en } T_\alpha(0) = 0$$

We hebben al eerder de gevallen $\alpha = 1$ gezien, namelijk de RCF-expansie, en het geval $\alpha = \frac{1}{2}$, de NICF-expansie. Voor elke $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ en voor elk irrationaal getal x geeft de α-expansie convergenten die een deelrij zijn van de RCF-convergenten. De α-expansies kunnen worden "gemaakt" vanuit de S-expansie zoals we hebben gezien bij de de nearest integer kettingbreuk. Voor de gevallen $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ kan dit worden gedaan met behulp van singulariseren. Voor $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ hebben we *inseties* nodig; een soort van inverse van singularisatie. Met inseties creëren we nieuwe convergenten, die slechtere benaderingseigenschappen hebben. We hebben de α-expansie operator voor $\alpha = \frac{1}{2}$ ontwikkeld, door het vinden van het singularisatie gebied S, en het singulariseren van de enen in de RCF-kettingbreuk. Aangezien we de α-expansies met α tussen $\frac{1}{2}$ en 1 kunnen ontwikkelen met S-expansies, zijn de α-expansies een deelverzameling van de S-expansies. De S-expansies klasse bevat de NICF-expansie, Hurwitz' singularisatie kettingbreuken, Minkowski's diagonaal kettingbreuken, de α-expansies en elk willekeurig meetbaar gebied die aan de voorwaarde voldoet van een singularisatiegbied.

5 Terug in de tijd

In dit verslag zullen we bestuderen wat er gebeurt als we 'de tijd omdraaien'. We hebben al eerder gezien dat voor een kettingbreuk er op elk tijdstip een verleden en toekomst is. Stel we nemen de volgende reguliere kettingbreuk van de toekomst x, en het verleden y:

$$(x, y) = [\dots, d_{-2}, d_{-1}; d_1, d_2, \dots]$$

Waarbij $x = [0; d_1, d_2, \dots]$ en $y = [0; d_{-1}, d_{-2}, \dots]$. Hiervoor is er met behulp van het herhaald toepassen van de functie $\mathcal{T}$ gekeken naar het verloop in tijd. Maar wat we nu willen doen is precies de andere kant oplopen, dus terug in de tijd. Dan zal je eerst denken aan het nemen van de inverse van $\mathcal{T}$, maar dan zouden we alle delen, zoals het singularisatiegebied opnieuw moeten bepalen gegeven het oorspronkelijke singularisatiegebied S. Er geldt dat:

$$\mathcal{T}^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{x+d}, \frac{1}{y} - d\right)$$

Merk op dat hier de coordinaten van $\mathcal{T}^{-1}(x, y)$ het verleden en toekomst geven, maar dan is nu het verleden de x-coordinaat geworden en de toekomst de y-coordinaat (herinner dat bij $\mathcal{T}(x, y)$ het precies andersom is). Waarbij geldt dat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{-1}(t_n, v_n) &= \left(\frac{1}{t_n + \lfloor \frac{1}{v_n} \rfloor}, \frac{1}{v_n - \lfloor \frac{1}{v_n} \rfloor}\right) = \left(\frac{1}{t_n + d_n}, \frac{1}{v_n - d_n}\right) \\
&= \left(\cfrac{1}{d_n + \cfrac{1}{d_{n+1} + \cfrac{1}{d_{n+2} + \ddots}}}, \cfrac{1}{d_n + \cfrac{1}{d_{n-1} + \ddots + \cfrac{1}{d_n}}} - d_n\right) \\
&= \left(t_{n-1}, \cfrac{1}{d_{n-1} + \cfrac{1}{d_{n-2} + \ddots}}\right) = (t_{n-1}, v_{n-1})
\end{aligned}$$

Het teruglopen is veel moeilijker dan gewoon de kettingbreuk omdraaien. We kijken daarom hier verder naar de omegekeerde kettingbreuk en dan kunnen we gewoon weer $\mathcal{T}$ toepassen op het gespiegelde punt (dus gewoon weer vooruit in de kettingbreuk lopen). Om deze tijd omgekeerde kettingbreuk te krijgen, spiegel je de lijnen "$x = y$" voor $x \geq 0$ en "$x = -y$" voor $x < 0$. Als we dat doen bij (x, y) die we helemaal aan het begin van dit hoofdstuk hebben gedefinieerd, dan krijg je:

$$(y, x) = [\dots, d_2, d_1; d_{-1}, d_{-2}, \dots]$$

Dus loop je in (y, x) weer vooruit in de tijd, terwijl je van het oorspronkelijke geval precies achteruit gaat. De verkregen "-1" waarden boven in de breuken, zijn nu wel een anders, aangezien in de normale kettingbreuk staat er boven a_n een -1 en in de gespiegelde kettingbreuk staat er nu boven a_{n+2} een -1. Het mooie hieraan is wel dat we nu geen nieuwe functies hoeven te verzinnen. Nu kan weer precies dezelfde theorie worden gebruikt als in het vorige hoofdstuk. We spiegelen niet alleen onze kettingbreuk, maar we spiegelen ook onze gebieden S, Δ_S^-, Δ_S^+ en $M(\Delta_S^-)$. Deze gespiegelde gebieden zijn dan toepasbaar op onze tijd omgekeerde kettingbreuk: $(y, x) = [\ldots, d_2, d_1; d_{-1}, d_{-2}, \ldots]$. Onze gespiegelde gebieden geven we aan met een $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}(x, y) = \begin{cases} (y, x), & \text{als} \quad x, y \geq 0 \\ (-y, -x), & \text{als} \quad x < 0, y < 0 \end{cases}$$

We gaan laten zien dat het gespiegelde gebied van Δ_S^-, het singularisatiegebied van de tijd omgekeerde kettingbreuk wordt, deze zullen we aangeven met S_R. We laten ook zien dat $\mathcal{R}(S)$ het gebied Δ_R^- van de tijd omgekeerde kettingbreuk wordt. We krijgen ook het gebied $\mathcal{R}(M(\Delta_S^-)) = M(\Delta_R^-)$.
Het laatste zegt dat als we het gebied $M(\Delta_S^-)$, wat bestaat uit het verleden en de toekomst van de normale kettingbreuk, spiegelen dan wordt het verleden de nieuwe toekomst en de toekomst het nieuwe verleden. We hebben $\Omega_R = M(\Omega_S) = \Delta_R^+ \cup M(\Delta_R^-)$. We definieren de afbeelding $\mathcal{T}_R : \Omega_R \to \Omega_R$ door

$$\mathcal{T}_R(x, y) = R(\mathcal{T}_S^{-1}(R(x, y)))$$

We hebben de volgende resultaten:

Lemma 1. *Laat S een singularisatiegebied. Dan*

$$R(\Delta_S^+) \cap M^{-1}(R(M(\Delta_S^-))) = \emptyset$$

Proof. Stel $R(\Delta_S^+) \cap M^{-1}(R(M(\Delta_S^-))) \neq \emptyset$. Dan bestaat er dus een punt die in de doorsnede zit, neem $(t, v) \in \Omega_1$, zodat $(t, v) \in R(\Delta_S^+))$ en $M(t, v) \in R(M(\Delta_S^-))$. Dan met de definities van M en R geldt er dat:

$$\Big(-(1 - v), \frac{t}{1 + t} \Big) \in M(\Delta_S^-)$$

en daarom geldt er dat:

$$M^{-1}(v - 1, \frac{t}{1 + t}) = (\frac{1}{v} - 1, \frac{1}{1 + t}) \in \Delta_S^-$$

Dit implicieert dat $(v, t) \in S$. En we hebben aangenomen dat $(v, t) \in \Delta_S^+$, aangezien $(t, v) \in R(\Delta_S^+)$. We vinden dat

$$S \cap \Delta_S^+ \neq \emptyset$$

Maar dit kan niet, tegenspraak! Dus er moet gelden dat $R(\Delta_S^+) \cap M^{-1}(R(M(\Delta_S^-))) = \emptyset$. □

We hebben nu ook laten zien dat er geldt:

$$(t, v) \in M^{-1}(R(M(\Delta_S^-))) \quad \Leftrightarrow \quad (v, t) \in S$$

Dat wil zeggen:

$$R(S) = M^{-1}(R(M(\Delta_S^-)))$$

Lemma 2. *Laat S een singularisatiegebied zijn. Dan is $S_R \subset \Omega_1$ gedefinieerd door*

$$S_R = R(\Delta_S^-),$$

ook een singularisatiegebied.

Proof. Om te laten zien dat S_R ook een singularisatiegebied is, moeten we laten zien dat het gebied S_R voldoet aan de drie voorwaarden:

1. $S_R \subset [\frac{1}{2}, 1) \times [0, 1]$;

2. $S_R \cap \mathcal{T}(S_R) = \emptyset$;

3. $S_R \in \mathcal{B}$ en $\mu(\delta S_R) = 0$.

Voor elk singularisatiegebied S weten we dat

$$\Delta_S^- = \mathcal{T}(S) \subset [0,1) \times [\tfrac{1}{2}, 1],$$

wat impliceert dat

$$S_R = R(\Delta_S^-) \subset [\tfrac{1}{2}, 1) \times [0,1].$$

Aan de eerste voorwaarde wordt voldaan. De tweede voorwaarde $S_R \cap \mathcal{T}(S_R) = \emptyset$, kunnen we laten zien door een tegenspraak af te leiden. Neem aan dat $S_R \cap \mathcal{T}(S_R) \neq \emptyset$. Dan bestaat er dus een punt $(t,v) \in \Omega_1$ zodat $(t,v) \in \mathcal{T}(S_R) \cap S_R$. Aangezien $(t,v) \in S_R (= R(\Delta_S^-))$ weten we dat $(v,t) \in \Delta_S^-$. Ook weten we dat $\mathcal{T}^{-1}(t,v) \in S_R$. Dit geeft

$$\Big(\frac{1}{1+t}, \frac{1}{v} - 1\Big) \in S_R.$$

Dan met $S_R = R(\Delta_S^-)$ weten we dat

$$\Big(\frac{1}{v} - 1. \frac{1}{1+t}\Big) \in \Delta_S^-,$$

waaruit volgt dat $(v,t) \in S$. Dit is een tegenspraak, aangezien we al hadden dat $(v,t) \in \Delta_S^-$ en $S \cap \Delta_S^- = \emptyset$. Bij de laatste voorwaarde moeten we laten zien dat S_R meetbaar is en dat $\mu(\delta S_R) = 0$. Het is vanzelfsprekend dat S_R meetbaar is. Bij definitie hebben we $\mu(\delta S) = 0$ en dus ook $\mu(\delta S_R) = 0$. □

Definitie 1. *Laat S een singularisatiegebied zijn. Dan is de S-expansie met singularisatiegebied S_R de tijd omgekeerde kettingbreuk expansie van de S-expansie van S.*

Bij bovenstaand gedefinieerde singularisatiegebied S_R horen de volgende gebieden:

$$\Delta_R^- = R(S) \quad \text{en} \quad \Delta_R^+ = \Omega_1 \backslash (\Delta_R^- \cup S_R)$$

Onze nieuw gedefinieerde tijd omgekeerde S-expansie, met singularisatiegebied S_R, is gerelateerd aan de oorspronkelijke S-expansie S. In het lemma hieronder laten zien hoe deze precies aan elkaar gerelateerd zijn.

Lemma 3. *Laat S een singularisatiegebied zijn. Dan is*

$$\Delta_R^- = R(S) = M^{-1}(R(M(\Delta_S^-))).$$

Proof. We zagen net dat $R(S) = M^{-1}(R(M(\Delta_S^-)))$ volgt uit lemma 1. Nu rest ons nog te laten zien dat $\Delta_R^- = R(S)$. Het laatste kunnen we laten zien door een willekeurig punt (x,y) te nemen in Δ_R^-, dan weten we dat $(x,y) \in R(S)$ als $(y,x) \in S$.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \Delta_R^- &\Leftrightarrow \mathcal{T}^{-1}(x,y) \in S_R \\
&\Leftrightarrow \Big(\frac{1}{1+x}, \frac{1}{y} - 1\Big) \in S_R = R(\Delta_S^-) \\
&\Leftrightarrow \Big(\frac{1}{y} - 1, \frac{1}{1+x}\Big) \\
&\Leftrightarrow (y,x) = \mathcal{T}^{-1}\Big(\frac{1}{y} - 1, \frac{1}{1+x}\Big) \in S
\end{aligned}$$

We vinden dat $\Delta_R^- = R(S)$. □

Vanwege

$$\Delta_R^+ = \Omega_1 \backslash (\Delta_R^- \cup S_R)$$

en $R(\Omega_1) = \Omega_1$ vinden we dat

$$R(\Delta_S^+) = \Delta_R^+.$$

We hebben het volgende resultaat:

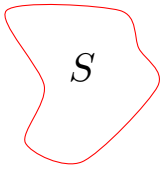
Stelling 1. *Laat S een singularisatiegebied zijn, dan is $S_R = R(\Delta_S^-)$ het singularisatiegebied van de tijd omgekeerde expansie. Dan hebben we dat $\bar{\mu}_1(S) = \bar{\mu}_1(S_R)$. Bovendien geldt er*

$$\Delta_R^+ = R(\Delta_S^+) \quad \textit{en} \quad \Delta_R^- = R(S) = M^{-1}(R(M(\Delta_S^-))).$$

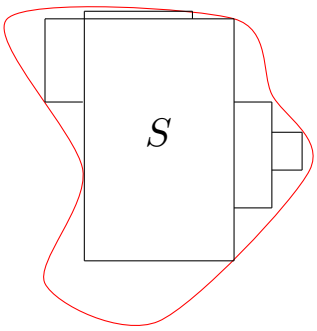
5.1 Algemene gebieden S

In de vorige paragraaf is de theorie behandeld van de tijd omgekeerde S-expansies. In dit hoofdstuk zullen we ongeveer hetzelfde doen alleen proberen we het hier te verduidelijken met behulp van figuren en een klein rechthoekje V als onderdeel van het singularisatiegebied S.

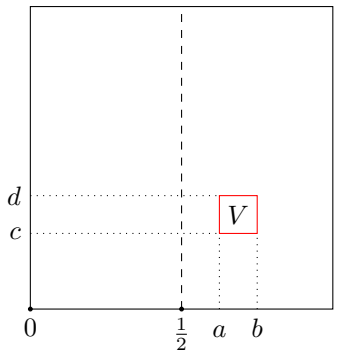
Hoe kunnen we voor alle singularisatiegebieden S de nieuwe methode illustreren? Neem het volgende willekeurige singularisatiegebied:



Elk willekeurig singularisatie gebied $S \subseteq [\frac{1}{2}, 1) \times [0, 1]$ kan worden onderverdeeld in de vereniging van eindig of aftelbaar oneindig veel kleine rechthoeken. Zoals hieronder gedeeltelijk schematisch is weergegeven:



Als we nu voor elk van die kleine rechthoeken kunnen laten zien dat deze de eigenschappen hebben die we aan het begin van dit hoofdstuk hebben geintroduceerd, dan gaat het dus "goed" voor elk willekeurig singularisatiegebied S. Om te laten zien dat voor elk singularisatiegebied S deze eigenschappen gelden, kan er dus gekeken worden naar een willekeurige rechthoek in het rechtervlak, die wordt V genoemd. Met het idee dat elk singularisatiegebied S geschreven kan worden als de vereniging van dergelijke rechthoeken V, met $V \subseteq S$.



Er wordt dus aangenomen dat:

$$\mathcal{T}(V) \cap V = \emptyset$$

Verder geldt er dat:

$$V = [a, b] \times [c, d] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right) \times [0, 1]$$

Met de volgende voorwaarden:

$$\frac{1}{2} \leq a < b \leq 1, \quad 0 \leq c < d \leq 1$$

Van deze rechthoek V kan er bepaald worden waar deze heen gaat onder de functie $\mathcal{T}$: (er wordt weer gekeken naar de hoekpunten van V en waar deze heen worden gestuurd). Voor $x \in [a, b]$ en $y \in [c, d]$ geldt er dat:

$$\mathcal{T}(x, y) = \left(\frac{1}{x} - 1, \frac{1}{1+y}\right)$$

Dus $\mathcal{T}(V)$ is de rechthoek met hoekpunten A, B, C, D waarbij:

$$A = \left(\frac{1}{a} - 1, \frac{1}{1+c}\right), \quad B = \left(\frac{1}{a} - 1, \frac{1}{1+d}\right), \quad C = \left(\frac{1}{b} - 1, \frac{1}{1+c}\right), \quad D = \left(\frac{1}{b} - 1, \frac{1}{1+d}\right)$$

Ofwel:

$$\mathcal{T}(V) = \left[\frac{1-b}{b}, \frac{1-a}{a}\right] \times \left[\frac{1}{1+d}, \frac{1}{1+c}\right]$$

Aangezien $a < b$ geldt er dat:

$$\frac{1-a}{a} > \frac{1-b}{b}$$

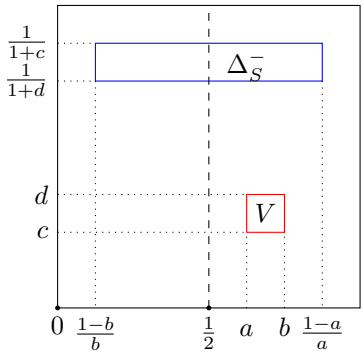
Immers, met $a < b$ geldt er:

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \iff \frac{1}{a} - 1 > \frac{1}{b} - 1 \iff \frac{1-a}{a} > \frac{1-b}{b}$$

Verder geldt er vanwege $c < d$ dat:

$$\frac{1}{d+1} < \frac{1}{c+1}$$

Hiermee kan het figuur hierboven worden aangevuld met het berekende gebied $\mathcal{T}(V)$.



Waar gaat $\mathcal{T}(V)$ heen met de functie M uit (3.3) ?

$$M\left(\frac{1-b}{b}, \frac{1}{1+d}\right) = \left(b - 1, \frac{d}{1+d}\right).$$

Net zo geldt er:

$$M\left(\frac{1-a}{a}, \frac{1}{1+d}\right) = \left(a - 1, \frac{d}{1+d}\right),$$

$$M\left(\frac{1-b}{b}, \frac{1}{1+c}\right) = \left(b - 1, \frac{c}{1+c}\right),$$

$$M\left(\frac{1-a}{b}, \frac{1}{1+d}\right) = \left(a - 1, \frac{c}{1+c}\right)$$

Ook wel:

$$M\left(\Delta_S^-\right) = \left[a-1, b-1\right] \times \left[\frac{c}{c+1}, \frac{d}{d+1}\right]$$

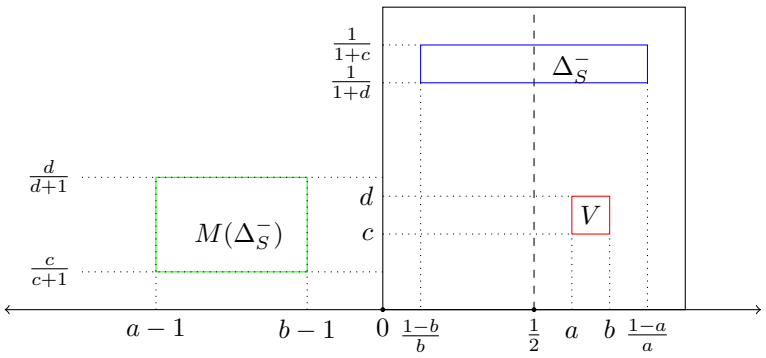
Er geldt dat:

$$\frac{d}{d+1} > \frac{c}{c+1}$$

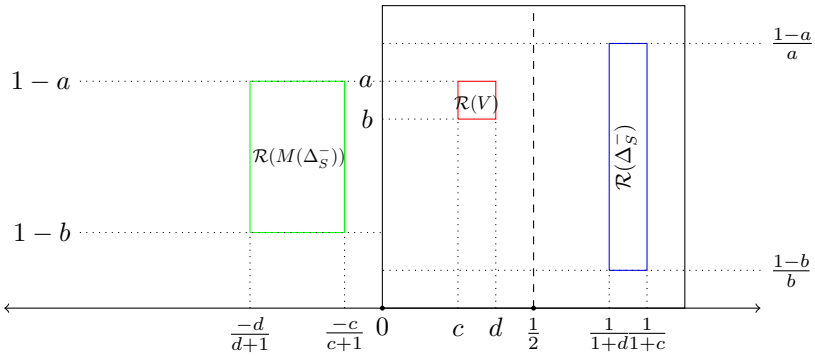
want:

$$\frac{1}{d+1} < \frac{1}{c+1} \iff \frac{-1}{c+1} < \frac{-1}{d+1} \iff$$
$$1 - \frac{1}{c+1} < 1 - \frac{1}{d+1} \iff \frac{c+1-1}{c+1} < \frac{d+1-1}{d+1} \iff$$
$$\frac{c}{c+1} < \frac{d}{d+1}$$

Dit geeft het volgende figuur:



We spiegelen in $y = x$ voor $x \geq 0$ en in $y = -x$ voor $x < 0$. Dan vinden we het volgende figuur:



We weten dat het gespiegelde gebied van $M(\Delta_S^-)$ (dat is $\mathcal{R}(M(\Delta_S^-))$ het gebied $M(\Delta_R^-)$ is. Dus om het gebied Δ_R^- te vinden moeten we de functie M^{-1} toepassen op dit gebied en dan zou er het gebied Δ_R^- uitkomen. Merk op dat de inverse van M precies hetzelfde functie voorschrift heeft als M:

$$M^{-1} = M$$

Het singularisatiegebied V kun je dan weer krijgen door op het gevonden gebied Δ_R^- de functie $\mathcal{T}^{-1}$ toe te passen aangezien per definitie voor een singularisatiegebied S geldt dat:

$$\mathcal{T}(S) = \Delta_S^-$$

Dit kan worden gedaan aangezien de natuurlijke expansie een bijectieve functie is.
Toepassen van M^{-1} op het gebied $\mathcal{R}(M(\Delta_S^-)) = M(\Delta_R^-)$ om te laten zien dat $\mathcal{R}(V)$ inderdaad het gebied

Δ_R^- is voor de tijd omgekeerde kettingbreuk. We zien dat:

$$M^{-1}\left(\frac{-d}{d+1}, 1-b\right) = \left(\frac{\frac{d}{d+1}}{1+\frac{-d}{d+1}}, 1-1+b\right) = \big(d, b\big),$$

$$M^{-1}\left(\frac{-c}{c+1}, 1-a\right) = \left(\frac{\frac{c}{c+1}}{1+\frac{-c}{c+1}}, 1-1+a\right) = \big(c, a\big)$$

In het algemeen:

$$M^{-1}\big(\mathcal{R}(M(\Delta_S^-)\big) = \big[c, d\big] \times \big[b, a\big]$$

Dus er geldt inderdaad dat:

$$M^{-1}(\mathcal{R}(M(\Delta_S^-)) = \mathcal{R}(V)$$

Nu willen we ook nog laten zien dat er geldt dat:

$$\mathcal{R}(\Delta_S^-) = V_R$$

Ofwel het gespiegelde gebied van Δ_S^- is gelijk aan het rechthoekje V_R. We weten door voorgaande wat het gebied Δ_R^- is. Nu kunnen we V_R heel makkelijk vinden:

$$\mathcal{T}^{-1}(\Delta_R^-) = V_R$$

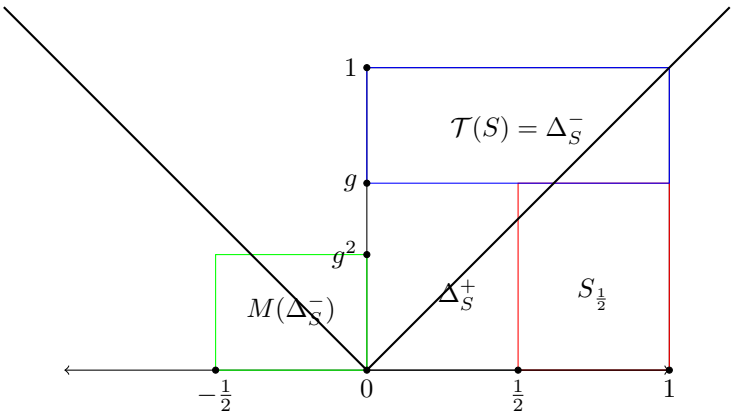
Dit kan worden gedaan, omdat al eerder is laten zien dat de natuurlijke expansie een bijectieve functie is. Toegepast op onze Δ_R^- krijgen we inderdaad het gebied $\mathcal{R}(\Delta_S^-)$. Ofwel

$$\mathcal{R}(\Delta_S^-) = V_R$$

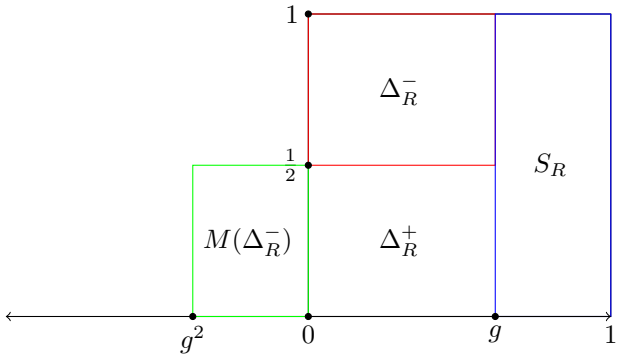
We hebben nu laten zien dat het voor een kleine rechthoek V de aannames gelden. Een willekeurig singularisatiegebied S kan worden opgebouwd uit aftelbaar oneindig of eindig veel rechthoeken zoals V. Hiermee hebben we de theorie uit het begin van dit hoofdstuk geillustreerd met behulp van figuren.

5.2 Nearest Integer kettingbreuk

Aangezien in het vorige hoofdstuk uitgebreid is in gegaan op de Nearest Integer kettingbreuk, zal er in dit hoofdstuk verder naar worden gekeken en passen we onze "nieuwe methode" hierop toe. In het vorige hoofdstuk waren onderstaande gebieden uitgerekend voor de nearest integer singularisatie. De spiegellijnen voor het creëren van de tijd omgekeerde kettingbreuk gebieden zijn hieronder ook al toegevoegd:



Spiegelen, in $y = x$ voor $x \geq 0$ en in $y = -x$ voor $x < 0$, geeft het volgende figuur::



Zo vinden we het singularisatiegebied S_R en de andere bijbehorende gebieden voor de nieuwe tijd omgekeerde kettingbreuk.

5.3 Hurwitz' Singularisatie proces

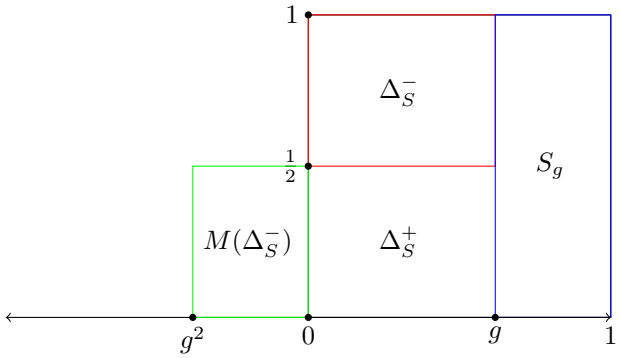
In deze paragraaf noemen we een ander singularisatie proces, namelijk de Hurwitz'singularisatie. Dit is een α-expansie waarbij $\alpha = g$, met de volgende operator:

$$T_g(x) = \frac{\epsilon(x)}{x} - \left\lfloor \left| \frac{1}{x} \right| + 1 - g \right\rfloor$$

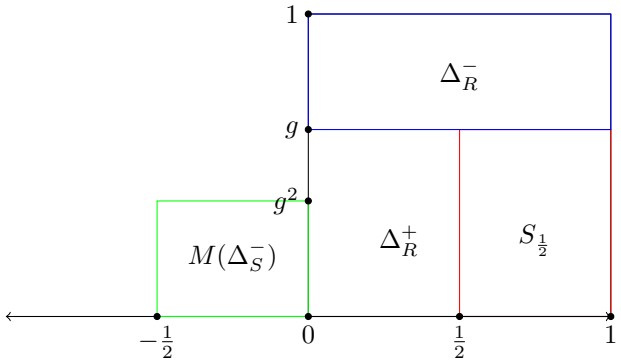
Deze manier van enen singulariseren is dat je bij rijen enen van achter begint met singulariseren en dan telkens eentje overslaat. Als het aantal enen in je kettingbreuk oneven is dan is deze manier precies hetzelfde als de nearest integer. Wanner er een even aantal even enen is dan zie je dat het wel degelijk een andere aanpak is van enen verwijderen. We zien dat oneven rijen van enen beginnen tussen g en 1 op de x-as waardoor er net zoals de nearest integer gesingulariseerd wordt. Terwijl wanneer de rij enen even is dan begint het tussen $\frac{1}{2}$ en g op de x-as. In dat geval singulariseerd de NICF wel de eerste 1, maar Hurwitz singulariseerd dit dan net niet, want je zit net niet in het singularisatiegebied. We hebben voor het Hurwitz'singularisatie proces het volgende singularisatie gebied:

$$S_g = [g, 1] \times [0, 1]$$

De gebieden van het Hurwitz'singularisatie proces zien er als volgt uit:



Nu als $y = x$ voor $x \geq 0$ en $y = -x$ voor $x < 0$ geeft het volgende figuur:



Er valt hier op dat het spiegelbeeld van de gebieden bij $\alpha = g$ precies de gebieden zijn van $\alpha = \frac{1}{2}$ en vice versa. Dus bij deze α waarden hebben we dan ook een α-expansie na het spiegelen. Dit is ook niet zo vreemd, omdat we ook het singularisatie algoritme "gespiegeld" hebben (hiermee bedoelen we dat we precies de andere enen singulariseren in de kettingbreuk).

5.4 Maatbehoudende afbeeldingen

Om bovenstaande stellingen te ondersteunen, moet er nog worden laten zien dat de afbeeldingen maatbehoudend zijn. Een maatbehoudende afbeelding bewaart de maten van de verzamelingen. De definitie voor maatbehoudendheid is als volgt: Voor een kansruimte $(X, \mathcal{F}, \mu)$ geldt er dat een meetbare afbeelding $T : X \to X$ maatbehoudend is met betrekking tot de maat μ als $\mu(T^-(A)) = \mu(A)$ voor alle $A \in \mathcal{F}$. In ons geval nemen we als meetbare afbeelding de kettingbreuk afbeelding:

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad x \neq 0$$

Gauss vond in 1800 een invariante maat voor onze meetbare afbeelding T. Want de welbekende Lebesque maat λ is niet maatbehoudend voor T. Dus daarom is in de kansruimte $(X, \mathcal{F}, \mu)$, de maat μ de Gauss maat. Waarbij μ gedefinieerd is op $[0, 1)$ met dichtheid:

$$\rho_1(x) = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{1+x}$$

Dat wil ook wel zeggen dat voor A een meetbare deelverzameling van [0,1]:

$$\mu(A) = \int_A \rho(x)dx$$

Onze afbeelding T is ergodisch, dat betekent dat voor elke μ-meetbare verzameling A met $T^{-1}(A) = A$ geldt dat $\mu(A) = 1$ of $\mu(A) = 0$. Dus de verzameling X kan niet als 2 of meerdere lossen stukken worden beschouwd. Onze afbeelding T is ergodisch en daarom kunnen we de ergodenstelling van Birkhoff gebruiken. Dit was in het 1-dimensionele geval. Nu kijken we naar het 2-dimensionele geval. Dan hebben we de kansruimte $(\mathcal{L}, \tilde{\mu}, \mathcal{T})$, die ook ergodisch is. Hierbij hebben we de volgende dichtheid voor de maat $\tilde{\mu}$ op Ω_1:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{(1+xy)^2}$$

Waar

$$\tilde{\mu}(A) = \frac{1}{\log 2} \int \int_A \frac{1}{(1+xy)^2} dxdy, \quad \text{voor} \quad A \in \mathcal{L}$$

Wanneer we in ons geval de x en y omwisselen, maakt het niks uit voor de dichtheid van de maat. Dus al onze afbeeldingen en spiegelingen zijn maatbehoudend. Zo is ook onze afbeelding M maatbehoudend (in andere woorden $\mu(M^{-1}(A)) = \mu(A)$), dit kan met een berekening worden laten zien.

6 Algemeen voor $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$

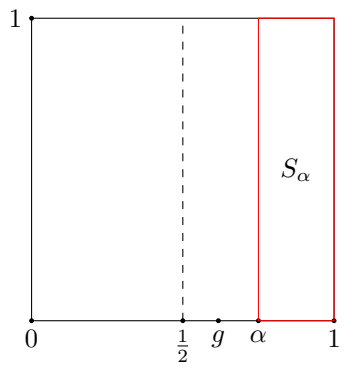
In paragraaf (3.3) hebben we gezien wat het singularisatie gebied is voor de Nearest Integer kettingbreuk en is in hoofdstuk 5 deze kettingbreuk omgekeerd in tijd en is er gekeken welke singularisatiegebieden hierbij horen. Hierbij was onze $\alpha = \frac{1}{2}$. Nu zijn er nog veel meer singularisatie gebieden, voor verschillende waarde van α. Met een ander singularisatie gebied zijn er automatisch ook andere gebieden Δ_S^- en Δ_S^+. In dit hoofdstuk zal er gekeken worden hoe deze gebieden in elkaar zitten voor verschillende gekozen $\alpha's \geq \frac{1}{2}$. Daarna wordt de methode toegepast om "terug in de tijd" te gaan bij deze kettingbreuken, net zoals gedaan is bij $\alpha = \frac{1}{2}$ en $\alpha = g$. We zullen laten zien dat ook hier de eigenschappen gelden die zijn bewezen in (5).

6.1 Het geval $g < \alpha \leq 1$

Voor α tussen g en 1 is het singularisatie gebied:

$$S_\alpha = [\alpha, 1] \times [0, 1]$$

Hieronder in een fuguur weergegeven:



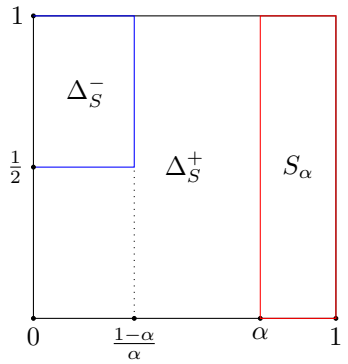
Het gebied S_α wordt onder de functie $\mathcal{T}$ gestuurd naar:

$$\mathcal{T}(S_\alpha) = \left[0, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Dan is dus:

$$\Delta_S^- = \left[0, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right], \qquad \Delta_S^+ = S \backslash \Delta_S^-$$

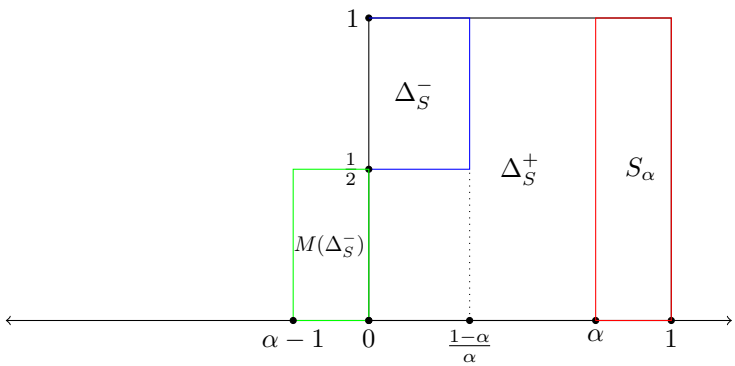
Het figuur ziet er dan als volgt uit:



Waarbij $M(\Delta_S^-)$:

$$M(\Delta_S^-) = \left[\alpha - 1, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Dus we krijgen het volgende figuur:



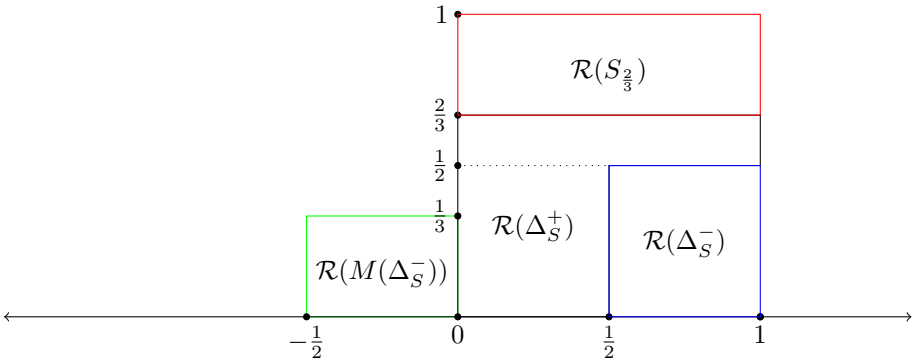
Er geldt dat

$$g < \alpha \leq 1 \Rightarrow g - 1 < \alpha - 1 \leq 0$$

Nu kan er een onderscheid worden gemaakt met waarden voor $\alpha's$, er is namelijk een grens geval:

$$\alpha = 2/3$$

Want als $\alpha = 2/3$, dan geldt er namelijk dat $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2}$ en dan snijdt de $x = y$ lijn precies in het hoekpunt van Δ_S^-. We kijken hier alleen naar dit grensgeval. We spiegelen in $y = x$ voor $x \geq 0$ en in $y = -x$ voor $x < 0$, dan vinden we het volgende figuur:



Toepassen van M^{-1} geeft:

$$M^{-1}(\mathcal{R}(M(\Delta_S^-))) = \mathcal{R}(S_{\frac{2}{3}}) = \Delta_R^-$$

Dan weten we ook dat:

$$\mathcal{T}^{-1}(\Delta_R^-) = \mathcal{R}(\Delta_S^-) = S_R$$

Voor het grensgeval $\alpha = \frac{2}{3}$ hebben we dus laten zien dat het inderdaad geldt. Dan zijn er ook nog de andere α-waarden in $[g, 1]$. We kunnen ons bijvoorbeeld afvragen voor welke α er geldt dat:

$$0 \leq \frac{1-\alpha}{\alpha} \leq \frac{1}{2}$$

Met een simpele berekening is er te vinden dat dit geldt voor $\alpha \in [2/3, 1]$. Verder heb je de uiterste gevallen namelijk het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ en deze is al laten zien hierboven. Voor het geval $\alpha = 1$ is er geen singularisatie gebied en dus ook geen Δ_S^- gebied. Dit is het geval van de reguliere kettingbreuk. Verder is er ook nog het geval voor $\alpha \in (g, \frac{2}{3})$, maar gaat op gelijke wijze en wordt daarom niet nog verder toegelicht. (Het enige verschil ten opzichte van hiervoor is dat hoekpunt van Δ_S^- nu onder de $x = y$-lijn zit).

6.2 Het geval $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq g$

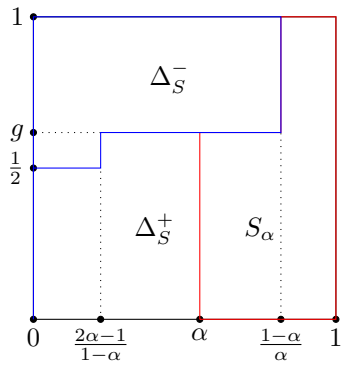
In dit geval is het singularisatiegebied als volgt gedefinieerd:

$$S_\alpha = [\alpha, g) \times [0, g) \cup \left[g, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right] \times [0, g] \cup \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right] \times [0, 1]$$

Met daarbij:

$$\Delta_S^- = \left[0, \frac{2\alpha - 1}{1-\alpha}\right) \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[\frac{1\alpha - 1}{1-\alpha}, g\right] \times \left[g, 1\right] \cup \left(g, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right] \times \left(g, 1\right]$$

In het algemeen ziet het figuur er dan zo uit:



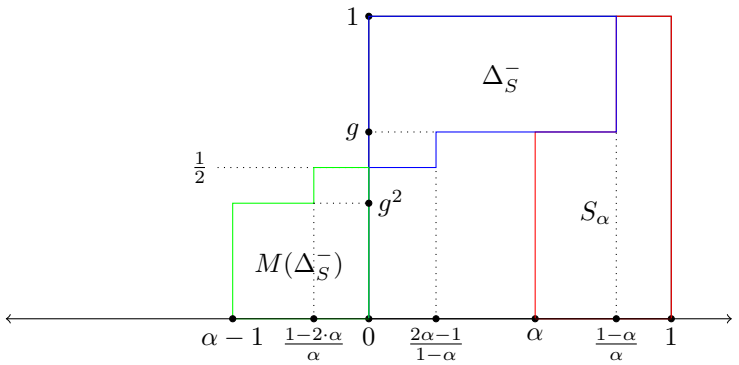
Tussen welke waarden zit $\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}$?

$$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{1 - \frac{1}{2}} = 0,$$
$$\alpha = g \Rightarrow \frac{2 \cdot g - 1}{1 - g} = \frac{2 \cdot g - 1}{g^2} = g,$$

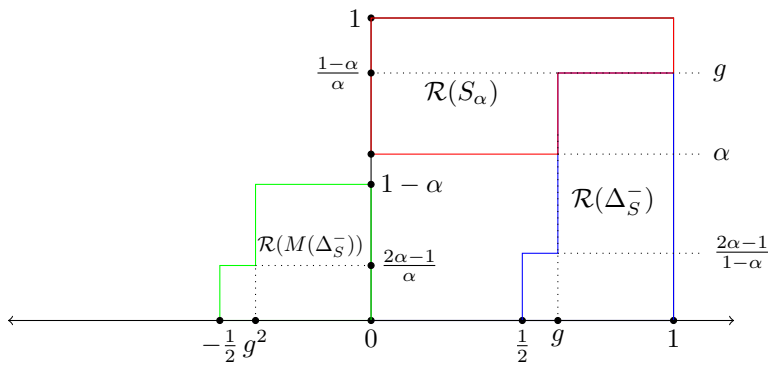
Dus $\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}$ zit tussen 0 en g. Het gebied $M(\Delta_S^-)$ is:

$$M(\Delta_S^-) = \left[\alpha - 1, g - 1\right] \times \left[0, 1 - g\right) \cup \left[g - 1, \frac{1-2\alpha}{\alpha}\right] \times \left[0, 1 - g\right] \cup \left(\frac{1-2\alpha}{\alpha}, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Dit geeft ons het volgende figuur



Weer spiegelen in $y = x$ voor $x \geq 0$ en in $y = -x$ voor $x < 0$ geeft het volgende figuur:



Voor het vinden van het gebied Δ_R^-, passen we M^{-1} toe op het gebied $\mathcal{R}(M(\Delta_S^-)) = M(\Delta_R^-)$. Dit geeft ons inderdaad het gebied $\mathcal{R}(S_\alpha)$. Dus hier geldt inderdaad:

$$\mathcal{S}_\alpha = \Delta_R^-$$

Nu toepassen van $\mathcal{T}^{-1}$ op ons net gevonden gebied Δ_R^- voor het vinden van het singularisatiegebied S_R, dan vinden we:

$$S_R = \mathcal{R}(\Delta_S^-)$$

Hier hebben we dus precies gevonden wat we al dachten.

7 Twee andere belangrijke voorbeelden

In dit hoofdstuk worden er twee voorbeelden behandeld waarbij het singularisatie proces wordt gedaan aan de hand van de kwaliteit van de convergenten. In het eerste voorbeeld singulariseer je die enen die een θ groter dan een half hebben en in het tweede voorbeeld singulariseer je in een rij van enen die 1 waarvan de θ het grootste is.

7.1 Minkowski's Diagonal Expansion

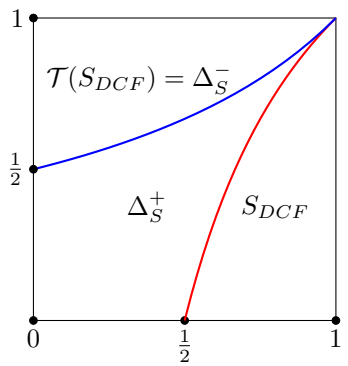
In dit voorbeeld blijven de reguliere convergenten bestaan waarvoor geldt dat $\theta_n < \frac{1}{2}$. Het singularisatie gebied is:

$$S_{DCF} = \left\{(T,V) \in \Omega \quad ; \quad T/(1+TV) > \frac{1}{2}\right\}$$

Dus het gebied S_{DCF} is precies het gebied waarvoor geldt dat $\theta_n > \frac{1}{2}$. Dit volgt uit het resultaat van Vahlen die we hebben gezien in paragraaf (2.4).
Wat is de functie van de kromme die het singularisatie gebied scheidt?

$$\frac{x}{1+x\cdot y} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{2\cdot x}{1+x\cdot y} = 1 \quad \Rightarrow 2\cdot x = 1 + x\cdot y$$
$$\Rightarrow 2\cdot x - 1 = x\cdot y \quad \Rightarrow y = \frac{2\cdot x - 1}{x}\left(x = \frac{1}{2-y}\right)$$

De kromme zelf doet niet mee aangezien daar de θ precies gelijk aan een $\frac{1}{2}$ is. Hieronder zijn de gebieden in een figuur afgebeeld:



Want toepassen van $\mathcal{T}$ op het gebied S_{DCF} levert op:

$$\mathcal{T}\Big(S_{DCF}\Big) = \left(T(x), \frac{1}{1+y}\right) = \left(\frac{1}{x} - 1, \frac{1}{1+y}\right) = \left(\frac{1}{x} - 1, \frac{1}{1+\frac{2\cdot x-1}{x}}\right) = \left(\frac{1}{x} - 1, \frac{x}{x+2\cdot x-1}\right)$$

Neem $a := \dfrac{1}{x} - 1$, dan:

$$= \left(a, \frac{1}{2-a}\right)$$

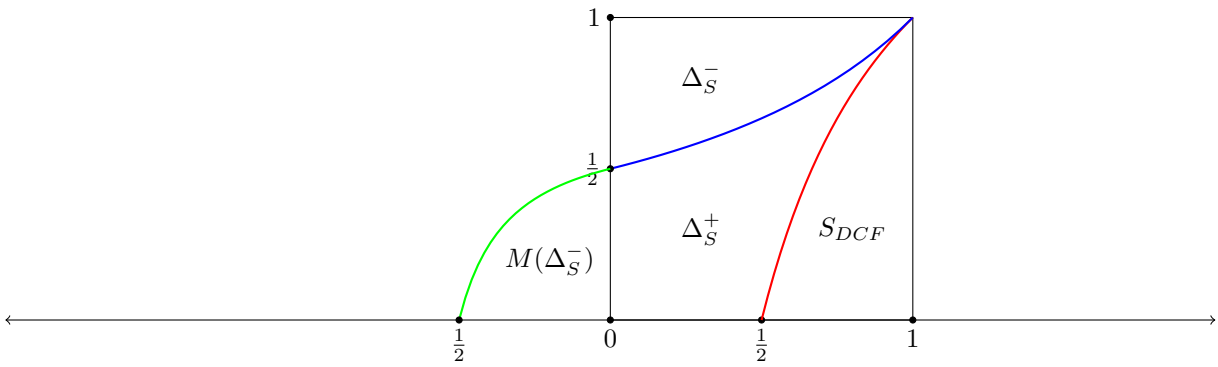
Met hierbij $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, maar $a \in [0, 1]$. Ook hier doet de kromme zelf niet mee met het gebied. Nu nog het gebied $M(\mathcal{T}(S_{DCF}))$ uitrekenen:

$$M\big(\Delta_S^-\big) = \left(\frac{-((\frac{1}{x}) - 1)}{(\frac{1}{x} - 1) + 1}, 1 - \frac{x}{x+2\cdot x-1}\right) = \left(x - 1, \frac{2\cdot x-1}{x+2\cdot x-1}\right)$$

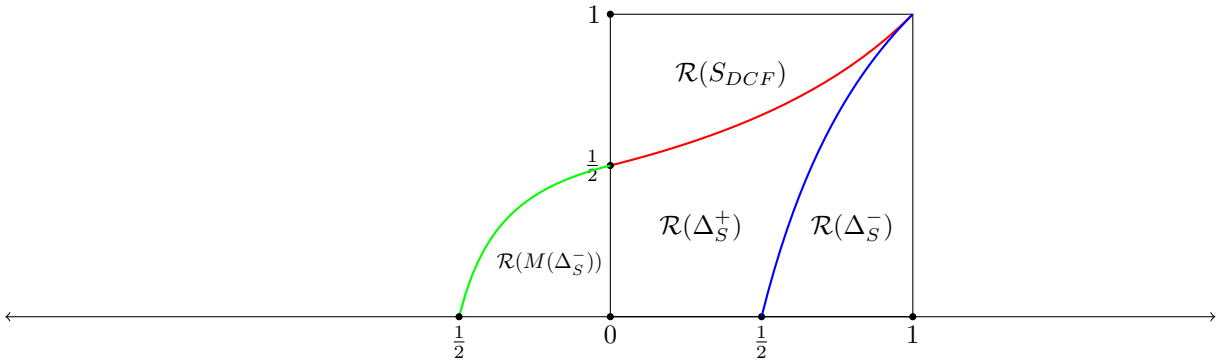
Neem $c := x - 1$, dan

$$= \left(c, 1 - \frac{1}{2+\frac{c}{c+1}}\right)$$

Met weer $x \in \big[\frac{1}{2}, 1\big]$ en $c \in \big[-\frac{1}{2}, 0\big]$. We krijgen de volgende gebieden voor Minkowski's Diagonal Expansion:



Spiegelen in de lijnen, ofwel $y = x$ als $x \geq 0$ en $y = -x$ als $x < 0$. Geeft het volgende:



We passen M^{-1} toe op $\mathcal{R}(M(\Delta_S^-)) = (x, \frac{2\cdot x+1}{3\cdot x+2})$, om Δ_R^- te vinden. Aangezien $M^{-1} = M$ hebben we:

$$\begin{aligned} M^{-1}\big(\mathcal{R}(M(\Delta_S^-))\big) &= \left(\frac{-x}{x+1}, 1 - \frac{2\cdot x+1}{3\cdot x+2}\right) \\ &= \left(g, \frac{1}{2-g}\right) \end{aligned}$$

In de laatste stap is

$$g = \frac{-x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{-g}{1+g}$$

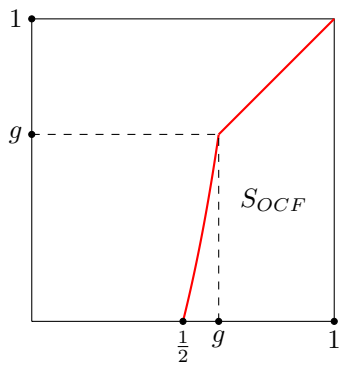
genomen. Dit resultaat invullen in $1 - \frac{2\cdot x+1}{3\cdot x+2}$ geeft $\frac{1}{2-g}$. Er is dus te zien dat hier inderdaad het gebied S_{DCF} uitkomt!

7.2 Bosma's Optimal Continued Fraction Expansion

Al eerder is de OCF, zo wordt Bosma's optimale kettingbreuk afgekort, ter sprake gekomen in dit verslag. Het is een semi-reguliere kettingbreuk die zowel de snelste en dichtsbijzijnde benaderingen heeft [2]. Het OCF-algoritme berekent de OCF(x) zonder daarbij RCF(x) eerst uit te rekenen. Je singulariseert in een rij van 3 opeenvolgende enen telkens die 1 die de grootste θ doet verdwijnen. Het singularisatie gebied is gedefinieerd als:

$$S_{OCF} = \Big\{(T,V) \in \Omega \quad ; \quad V < T \quad \& \quad V < (2T-1)/(1-T)\Big\}$$

Zie hieronder het bijbehorende figuur:



Het gebied Δ_S^- berekenen, waarbij we eerst kijken naar de hoekpunten:

$$\mathcal{T}(g,g) = \left(\frac{1}{g} - 1, \frac{1}{1+g}\right) = (g,g), \quad \mathcal{T}\Big(\frac{1}{2}, 0\Big) = \Big(2-1, \frac{1}{1}\Big) = (1,1)$$

$$\mathcal{T}(1,0) = (0,1), \quad \mathcal{T}(1,1) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Nu kijken we naar de kromme die van het punt $(\frac{1}{2}, 0)$ naar (g, g) gaat:

$$y = \frac{2 \cdot x - 1}{1 - x}$$

$\mathcal{T}$ stuurt deze kromme naar :

$$\mathcal{T}\Big(x, \frac{2 \cdot x - 1}{1 - x}\Big) = \Big(T(x), \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot x - 1}{1 - x}}\Big) = \Big(\frac{1}{x} - 1, \frac{1}{x} - 1\Big) = (a, a)$$

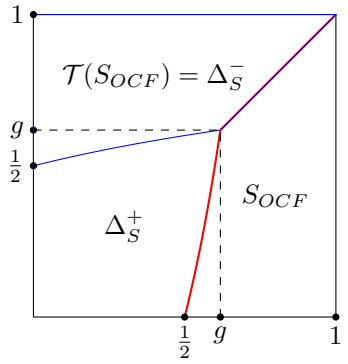
De lijn tussen de punten (g, g) en $(1, 1)$ wordt onder de functie $\mathcal{T}$ gestuurd naar:

$$\mathcal{T}\Big(x, x\Big) = \Big(T(x), \frac{1}{1 + x}\Big) = \Big(\frac{1}{x} - 1, \frac{1}{1 + x}\Big)$$

Wanneer nu $a = \frac{1}{x} - 1$ dan krijgen we

$$= \left(a, \frac{1}{1 + \frac{1}{a + 1}}\right)$$

Dit geeft het volgende figuur:



Berekenen van gebied $M(\mathcal{T}(S_{OCF}))$: De kromme van (g,g) en (1,1) wordt gestuurd naar:

$$M\Big(\frac{1}{x} - 1, \frac{1}{x} - 1\Big) = \Big(\frac{-((\frac{1}{x}) - 1)}{(\frac{1}{x} - 1) + 1}, 1 - \frac{1}{x} + 1\Big) = \Big(x - 1, \frac{1}{x}\Big)$$

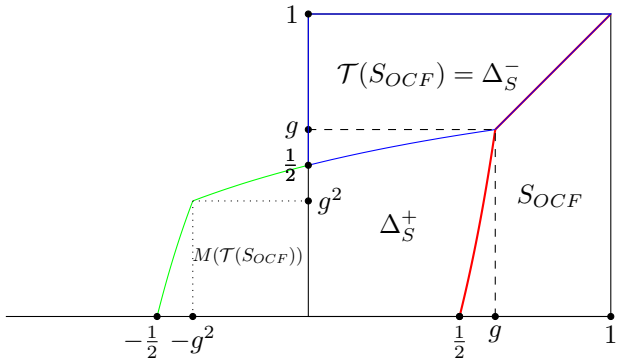
De kromme van $(0, \frac{1}{2})$ naar (g, g) gaat naar:

$$M\Big(\frac{1}{x} - 1, \frac{1}{1 + x}\Big) = \Big(x - 1, 1 - \frac{1}{1 + x}\Big)$$

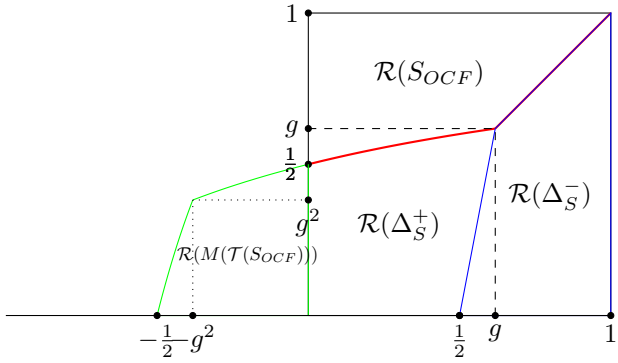
Met hoekpunten:

$$M(0, \frac{1}{2}) = (0, \frac{1}{2}), \quad M(g, g) = (\frac{-g}{g + 1}, 1 - g) = (-g^2, g^2)$$
$$M(1, 1) = (\frac{-1}{1 + 1}, 1 - 1) = (-\frac{1}{2}, 0), \quad M(0, 1) = (0, 0)$$

We hebben:



Spiegelen in de lijnen $x = y$ als $x \geq 0$ en $y = -x$ als $x < 0$ geeft het volgende:



Nu toepassen van M^{-1} op het gebied $\mathcal{R}(M(\mathcal{T}(S_{OCF})))$ zou ons het gebied moeten geven van $\mathcal{R}(S_{OCF})$. Eerst de curves:

$$M^{-1}\Big(x, \frac{2x+1}{x+1}\Big) = \Big(\frac{-x}{1+x}, 1 - \frac{2x+1}{x+1}\Big) = \Big(\frac{-x}{1+x}, \frac{-x}{1+x}\Big)$$

De andere kromme geeft:

$$M^{-1}\Big(x, \frac{x+1}{x+2}\Big) = \Big(\frac{-x}{1+x}, 1 - \frac{x+1}{x+2}\Big) = \Big(\frac{-x}{1+x}, \frac{1}{2+x}\Big)$$

Neem c=$\frac{-x}{1+x}$, dan:

$$M^{-1}\Big(x, \frac{x+1}{x+2}\Big) = \Big(c, \frac{c+1}{c+2}\Big)$$

Het toepassen van M^{-1} op de hoekpunten geeft de coordinaten $(1,1), (0,1), (0, \frac{1}{2})$ en (g,g). Dit is inderdaad weer precies het spiegelbeeld van S_{OCF}!
Voor de OCF is de twee-dimensionale kettingbreuk afbeelding bekend en ziet er als volgt uit [3] :

$$\mathcal{W}(t,v) := \Big(\Big|\frac{1}{t}\Big| - \beta(t,v), \frac{1}{\beta(t,v) + \mathrm{sign}(t)v}\Big)$$

Waarbij

$$\beta(t,v) := \left\lfloor \Big|\frac{1}{t}\Big| + \frac{\left\lfloor \left|\frac{1}{t}\right| \right\rfloor + \mathrm{sign}(t)v}{2\Big(\left\lfloor \left|\frac{1}{t}\right| \right\rfloor + \mathrm{sign}(t)v\Big) + 1} \right\rfloor$$

8 Conclusie

In dit verslag hebben we gekeken naar de reguliere kettingbreuken. Met deze reguliere kettingbreuken kun je irrationele getallen benaderen, dit doe je door de kettingbreuk op een bepaalde plek af te kappen. Daarmee krijg je de zogenaamde convergenten, waarvan we ook de kwaliteit kunnen bepalen, dus hoe goed de convergent het irrationele getal benadert. Ook de S-expansies zijn geintroduceert, waarbij we specifiek hebben gekeken naar de Nearest Integer. Vervolgens hebben we gekeken naar het onderwerp van dit verslag, namelijk de tijd omgekeerde S-expansies met de gebieden S_R, Δ_R^+, Δ_R^- en $M(\Delta_R^-)$. Deze tijd omgekeerde S-expansie krijg je door middel van een spiegeling operator namelijk $\mathcal{R}$. De gebieden die horen bij de tijd omgekeerde S-expansie hebben we bepaald ten opzichte van de normale S-expansie gebieden (S, Δ_S^+, Δ_S^- en $M(\Delta_S^-)$) :

$$S_R = \mathcal{R}(\Delta_S^-), \quad \Delta_R^- = \mathcal{R}(S), \quad \Delta_R^+ = \mathcal{R}(\Delta_S^+).$$

Waarbij $\mu_1(S) = \mu_1(S_R)$. De tijd omgekeerde S-expansies zijn ook weer S-expansies. In het speicale geval van $\alpha = \frac{1}{2}$ en $\alpha = g$ hebben we dat de tijd omgekeerde S-expansies ook weer α-expansies zijn. Het is namelijk zo dat de tijd omgekeerde S-expansie van $\alpha = \frac{1}{2}$ de α-expansie met $\alpha = g$ is en vice versa.

References

[1] Borel. "Contribution l'etude des fonctions méromorphes.". *Annales Scientifiques De L'ecole Normale Suprieure*, 18:211, 1901.

[2] Wieb Bosma. Optimal continued fractions. volume 90, pages 353–379. Elsevier, 1987.

[3] Wieb Bosma and Cor Kraaikamp. "Metrical theory for optimal continued fractions". *Journal of Number Theory*, 34(3):251 – 270, 1990.

[4] A A. Hurwitz. Über die angenherte darstellung der zahlen durch rationale bruche.". *Mathematische Annalen*, 44(2-3).

[5] Cor Kraaikamp. A new class of continued fraction expansions. *Acta Arithmetica*, 57(1):1–39, 1991.

[6] Hitoshi NAKADA. *Tokyo J. of Math.*, (2):399–426, 12.

[7] Ionica Smeets. *On continued fraction algorithms.* PhD thesis, Mathematical Institute, Faculty of Science, Leiden University, 2010.

[8] K Th Vahlen. Über Näherungswerte und Kettenbrüche. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 115:221–233, 1895.