

Beddingvormen in gekromde goot
met couette-stroming.

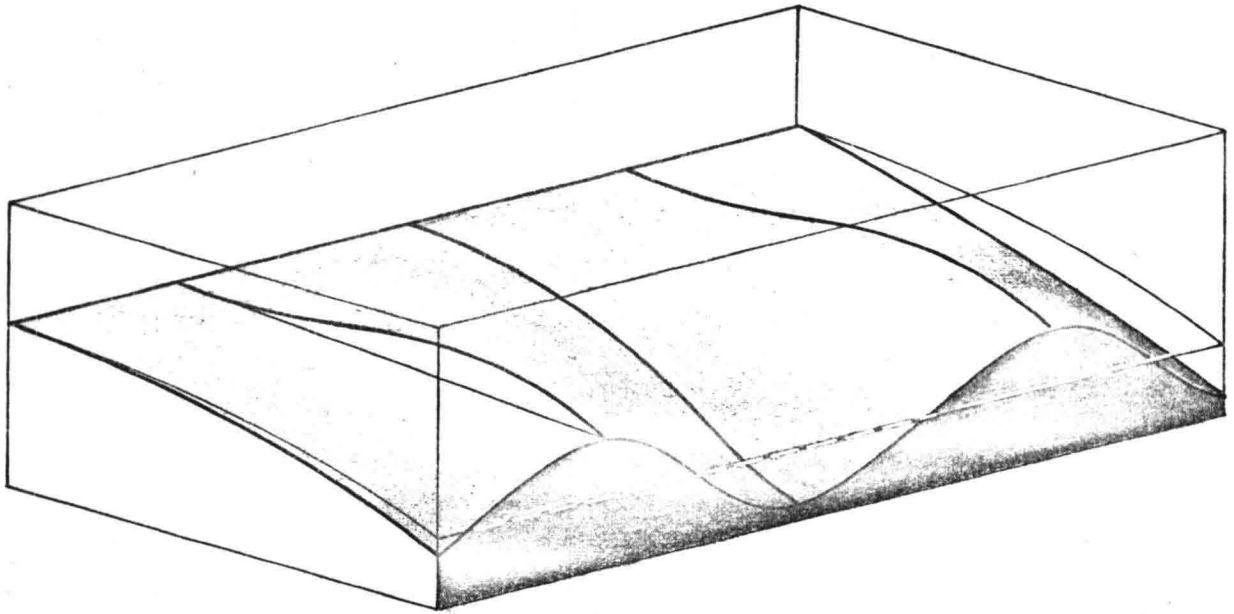
R/1981/12/D

J.M.Cornelisse

Vakgroep Vloeistofmechanika

Afdeling Civiele Techniek

T.H. Delft.



Beddingvormen
in een gekromde goot met
couette stroming.

Afstudeerverslag

Vakgroep Vloeistofmechanica

Docenten: prof.dr.ir. M. de Vries

prof.dr.ir. J.P.Th. Kalkwijk

Begeleider: dr.ir. H.J. de Vriend

J.M. Cornelisse
den Haag sept. '81

Bijlagen
en
Figuren.

Bijlagen.

- A. Afleiding snelheidsprofielen voor turbulente stroming.
- B. Hulpgrootheden voor gemiddelde bodemligging.
- C. Afleiding verstoringsvergelijkingen.
- D. Analytische oplossing.
- E. Vergelijkingen geschikt voor iteratie-programma's.
- F. Omzetting verstoringsvergelijkingen aan een vierde orde differentiaalvergelijking.
- G. Omzetting vierde-orde differentiaalvergelijking tot een stelsel van n differentie vergelijkingen
- H. Ontwerpeisen.
- I. Eindimensionaal energie-dichtheidsspectrum.
- J. Schuifspanningsmeting.
- K. Praktische uitvoering proefneming.

Bijlage A.

blz.

- A. Afleiding snelheidsprofielen voor turbulente stroming. A.-1
- A.1. Afleiding langssnelheidsprofiel V_x . A.-1
- A.2. Afleidng dwarssnelheidsprofiel V_r . A.-2

A. Afleiding snelheidsprofielen voor turbulente stroming.A.1. Afleiding langssnelheidsprofiel V_θ .

Aannemende dat een scalaire turbulentieviscositeit gebruikt mag worden geldt:

$$\frac{\tau_{\theta z}}{\rho} = \epsilon_{turb} \frac{\delta V_\theta}{\delta z} \quad ; \quad \frac{\tau_{rz}}{\rho} = \epsilon_{turb} \frac{\delta V_r}{\delta z} \quad (A.1)$$

Verder wordt uitgegaan van een verdeling van de turbulentieviscositeit volgens:

$$\epsilon_{turb} = \kappa U_* y \frac{z}{y} \left(1 - \frac{z}{y}\right) \quad (A.2)$$

Wordt nu de bewegingsvergelijking in langsrichting naar z geïntegreerd dan volgt daaruit:

$$\frac{\tau_{\theta z}}{\rho} = C_1 \quad (A.3)$$

zodat;

$$\frac{\tau_{\theta z}}{\rho} = C_1 = \epsilon_{turb} \frac{\delta V_\theta}{\delta z} = \kappa U_* \zeta (1 - \zeta) \frac{\delta V_\theta}{\delta \zeta} = U_*^2 \quad (A.4)$$

waarin $\zeta = z/y$. Wordt het laatste deel van bovenstaande vergelijking nu naar ζ geïntegreerd dan ontstaat:

$$V_\theta = 2,5 U_* \ln \left(\frac{\zeta}{1 - \zeta} \right) + C_2 \quad ; \quad \kappa = 0,4 \quad (A.5)$$

De randvoorwaarden waaraan V_θ moet voldoen zijn;

$$V_\theta \Big|_{z=y-\delta_t} = \omega_t \cdot r \quad ; \quad V_\theta \Big|_{z=\delta_b} = \omega_b \cdot r \quad (A.6)$$

Uit (A. 5) en (A. 6) volgt dan:

$$a \quad \omega_t \cdot r = 2.5 u_* \ln \left(\frac{1 - \frac{\delta_t}{y}}{\frac{\delta_t}{y}} \right) + C_2 \quad (A.7)$$

$$b \quad \omega_b \cdot r = 2.5 u_* \ln \left(\frac{\frac{\delta_b}{y}}{1 - \frac{\delta_b}{y}} \right) + C_2 \quad (A.8)$$

zodat:

$$u_* = 0.4 r (\omega_t - \omega_b) / \ln(y^2 / \delta_t \delta_b) \quad (A.9)$$

en;

$$C_2 = \frac{1}{2} (\omega_t + \omega_b) r - \frac{1}{2} r (\omega_t - \omega_b) \ln \left(\frac{\delta_b}{\delta_t} \right) / \ln \left(\frac{y^2}{\delta_t \delta_b} \right) \quad (A.10)$$

De oplossing voor V_θ wordt dan uiteindelijk:

$$V_\theta = \frac{1}{2} r (\omega_t + \omega_b) - \frac{1}{2} r (\omega_t - \omega_b) \left\{ \frac{\ln \left(\frac{\delta_b}{\delta_t} \right) - 2 \ln \left(\frac{\xi}{1 - \xi} \right)}{\ln \left(\frac{y^2}{\delta_t \delta_b} \right)} \right\} \quad (A.11)$$

A.2. Afleiding dwarsnelheidsprofiel V_r .

Invullen van de uitdrukking voor ε_{turb} (A.2) in de bewegingsvergelijking (2.2.) in dwarsrichting levert;

$$A \frac{\delta}{\delta \xi} \left\{ \xi (1 - \xi) \frac{\delta V_r}{\delta \xi} \right\} = \frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta r} - \frac{V_\theta^2}{r} \quad (A.12)$$

met

$$A = -K^2 (\omega_t - \omega_b) r / y / \ln \{ \lambda_t \lambda_b \} ; \lambda_t = \delta_t / y ; \lambda_b = \delta_b / y$$

(N.B. Daar de drukverdeling hydrostatisch is, is $\frac{\delta p}{\delta r} = \frac{\delta \bar{p}}{\delta r}$).

Na twee maal integreren naar z volgt hieruit:

$$V_r = -\frac{1}{A\rho} \frac{\delta\bar{p}}{\delta r} \ln(1-\xi) - \frac{1}{A} \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{V_\theta^2}{r} d\xi + C_1 \ln\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right) + C_2 \quad (\text{A.13})$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn:

$$V_r \Big|_{\xi=\lambda_b} = 0 \quad ; \quad V_r \Big|_{\xi=1-\lambda_t} = 0 \quad (\text{A.14})$$

Daarnaast moet de dwarssnelheid gemiddeld over de diepte gelijk zijn aan nul. Dus:

$$\bar{V}_r = 0 \quad (\text{A.15})$$

Uit de randvoorwaarden (A.14) volgt:

$$C_1 = \frac{1}{\ln(\lambda_t \lambda_b)} \left[-\frac{1}{A\rho} \frac{\delta\bar{p}}{\delta r} \ln \lambda_t - \frac{1}{A} \int_{\lambda_b}^{1-\lambda_t} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{V_\theta^2}{r} d\xi \right] \quad (\text{A.16})$$

$$C_2 = -C_1 \ln \lambda_b \quad (\text{A.17})$$

zodat:

$$V_r = -\frac{1}{A\rho} \frac{\delta\bar{p}}{\delta r} \left[\ln(1-\xi) + \frac{\ln \lambda_t}{\ln(\lambda_t \lambda_b)} \left(\ln\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right) - \ln \lambda_b \right) \right] + \frac{1}{A} \left[F + \frac{1}{\ln(\lambda_t \lambda_b)} \left(\ln\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right) - \ln \lambda_b \right) F_t \right] \quad (\text{A.18})$$

waarin:

$$F = \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{V_\theta^2}{r} d\xi$$

en:

$$F_t = \int_{\lambda_b}^{1-\lambda_t} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{V_\theta^2}{r} d\xi$$

Voorwaarden (A.15) kunnen nu worden gebruikt om het dwarsverhang op te lossen:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta r} = \left[\bar{F} - \frac{\ln \lambda_b}{\ln(\lambda_t \lambda_b)} F_t \right] \left/ \left[1 + \frac{\ln \lambda_t \ln \lambda_b}{\ln(\lambda_t \lambda_b)} \right] \right. \quad (\text{A.19})$$

waarin;

$$\bar{F} = \int_{\lambda_b}^{1-\lambda_t} F d\xi$$

Gesubstitueerd in (A.18) geeft dit:

$$\begin{aligned} V_r = & -\frac{1}{A} \left[F + \left\{ \frac{\ln \lambda_b \ln \lambda_t}{B \ln(\lambda_t \lambda_b)} F_t + \frac{\ln \lambda_t}{B} \bar{F} \right\} \ln \xi + \right. \\ & + \left\{ -\frac{(\ln(\lambda_b \lambda_t) + \ln \lambda_b \ln \lambda_t + \ln^2 \lambda_b)}{B \ln(\lambda_t \lambda_b)} F_t + \frac{\ln \lambda_b}{B} \bar{F} \right\} \ln(1-\xi) + \\ & \left. + \left\{ -\frac{\ln \lambda_b}{B} F_t - \frac{\ln \lambda_b \ln \lambda_t}{B} \bar{F} \right\} \right] \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

waarin;

$$B = \ln(\lambda_b \lambda_t) + \ln \lambda_b \ln \lambda_t \quad (\text{A.21})$$

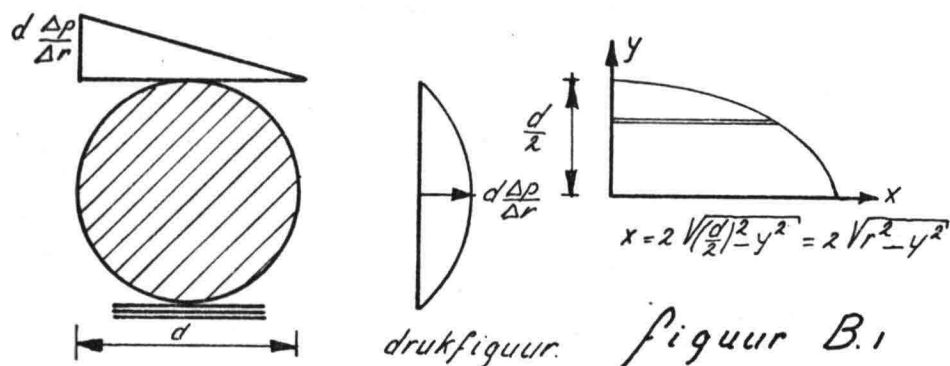
Bijlage B.

blz.

- B. Hulpgrootheden voor gemiddelde bodemligging. B.-1
- B.1. Bepaling overdrachtscoefficient C. B.-1
- B.2. Bepaling gemiddelde langssnelheid V. B.-1

B. Hulpgrootheden voor gemiddelde bodemligging.B.1. Bepaling overdrachtscoëfficiënt C.

Deze coëfficiënt bepaald het horizontaal gerichte deel van $\frac{\delta p}{\delta r}$ werkzaam op een ronde korrel met diameter d . Hierbij wordt uitgegaan dat $\frac{\delta p}{\delta r}$ over afstand d . constant is.



De inhoud van het drukfiguur is gelijk aan;

$$C \frac{\Delta p}{\Delta r} = \int_0^{d/2} 2\pi y \left\{ 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2}}{\frac{d}{2}} \right\} dy \frac{\Delta p}{\Delta r} \quad (B.1)$$

na integratie hiervan wordt voor C gevonden:

$$C = \frac{1}{8} \pi d^3 \quad (B.2)$$

B.2. Bepaling gemiddelde langssnelheid V.

In paragraaf 2.1. vergelijking (2.10) wordt het verticale langs-snelheidsprofiel van V_e gevonden, als deze vergelijking (2.10) geïntegreerd wordt tussen de grenzen $\xi = \delta_b$ t/m $\xi = 1 - \delta_t$ dan vindt men voor V_e , (=V) waarbij termen die klein zijn verwaarloosd worden, dat;

$$V = \frac{1}{2} r (\omega_t + \omega_b) - r (\omega_t - \omega_b) \frac{\ln\left(\frac{\delta_b}{\delta_t}\right)}{\ln\left(\frac{y^2}{\delta_t \delta_b}\right)} \quad (B.3)$$

Bijlage C.

blz.

- | | | |
|------|--|------|
| C. | Afleidingen verstoringsvergelijkingen. | C.-1 |
| C.1. | Afleiding verstoringsvergelijking 'water'. | C.-1 |
| C.2. | Afleiding verstoringsvergelijking 'zand'. | C.-3 |
| C.3. | Coefficient C_s . | C.-5 |
| C.4. | Verstoringsvergelijkingen voor een rechte goot met couette-stroming. | C.-6 |
| C.5. | Verstoringsvergelijkingen voor een rechte goot met open waterloop. | C.-9 |

C. Afleiding verstoringsvergelijkingen.C.1. Afleiding verstoringsvergelijking 'water'.

Uitgangspunten hierbij zijn de vergelijkingen (2.78) t/m (2.83) zoals vermeld in paragraaf 2.2.5. Worden de verstoringen zoals omschreven in vergelijking (2.83) ingevoerd in vergelijkingen (2.78) en (2.79) dan ontstaat:

$$2 V_{0 \text{ exp}} + V_{ip} u_{0 \text{ exp}} = -g \frac{\delta \phi}{\delta \theta} - \frac{2 c_5 u_0 \tau \text{ exp}}{\rho \gamma_0} \quad (C.1)$$

$$-2 \frac{V u_{0 \text{ exp}}}{r} + \frac{V_{ip} V_{0 \text{ exp}}}{r} = -g \frac{\delta \phi}{\delta r} - \frac{c_4 \tau \eta_{0 \text{ exp}}}{\rho \gamma_0^2} - \frac{c_5 \tau V_{0 \text{ exp}}}{r \rho \gamma_0} \quad (C.2)$$

waarin: $\text{exp} = \text{exp } ip(\theta - \omega t)$

Wordt vergelijking (C.1) naar r en vergelijking (C.2) naar θ gedifferentieerd dan ontstaan vergelijkingen waar in beiden de drukterm op gelijke wijze voorkomt:

$$+ \frac{2 V_{0 \text{ exp}}}{r} + 2 V_{\text{exp}} \frac{\delta V_0}{\delta r} + \frac{V_{ip} u_{0 \text{ exp}}}{r} + V_{ip \text{ exp}} \frac{\delta u_0}{\delta r} = -g \frac{\delta^2 \phi}{\delta r \delta \theta} +$$

$$+ \frac{2 c_5 \tau u_{0 \text{ exp}}}{\rho \gamma_0^2} \frac{\delta \gamma_0}{\delta r} - \frac{2 c_5 \tau \text{ exp}}{\rho \gamma_0} \frac{\delta u_0}{\delta r} - \frac{4 c_5 \tau u_{0 \text{ exp}}}{r \rho \gamma_0} \quad (C.3)$$

$$- \frac{2 ip u_0 V_{\text{exp}}}{r} - \frac{V}{r} V_{0 \text{ exp}} \rho^2 = -g \frac{\delta^2 \phi}{\delta \theta \delta r} - \frac{c_4 \tau ip \eta_{0 \text{ exp}}}{\rho \gamma_0^2} - \frac{c_5 \tau ip V_{0 \text{ exp}}}{r \rho \gamma_0} \quad (C.4)$$

Wordt nu de drukterm geëlimineerd door de vergelijkingen van elkaar af te trekken en het zo gevonden resultaat door exp gedeeld, dan ontstaat een differentiaalvergelijking in u_0 , V_0 en η_0 :

$$u_0 \left\{ \frac{3 ip V}{r} + \frac{4 c_5 \tau}{r \rho \gamma_0} - \frac{2 c_5 \tau}{\rho \gamma_0^2} \frac{\delta \gamma_0}{\delta r} \right\} + \frac{\delta u_0}{\delta r} \left\{ V_{ip} + \frac{2 c_5 \tau}{\rho \gamma_0} \right\} +$$

$$V_0 \left\{ + \frac{2 V}{r} + \frac{\rho^2 V}{r} - \frac{c_5 \tau ip}{r \rho \gamma_0} \right\} + \frac{\delta V_0}{\delta r} \left\{ + 2 V \right\} +$$

$$\eta_0 \left\{ - \frac{C_4 \pi i p}{\rho y_0^2} \right\} = 0 \quad (C.5)$$

De verstoring u_0 kan in deze vergelijking geëlimineerd worden, door in de continuïteitsvergelijking voor water de verstoringvormen uit vergelijking (2.83) in te voeren en het resultaat door te delen. Splitst men nu u_0 uit deze vergelijking af, dan is;

$$u_0 = - \frac{V \eta_0}{y_0} + \frac{i V_0}{\rho} + \frac{i r}{\rho} \frac{\delta V_0}{\delta r} + \frac{i r V_0}{\rho y_0} \frac{\delta y_0}{\delta r} \quad (C.6)$$

door nu naar r te differentieren, vindt men dat;

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_0}{\delta r} = & - \frac{V \eta_0}{y_0 r} - \frac{V}{y_0} \frac{\delta \eta_0}{\delta r} + \frac{i}{\rho} \frac{\delta V_0}{\delta r} + \frac{i}{\rho} \frac{\delta V_0}{\delta r} + \frac{i r}{\rho} \frac{\delta^2 V_0}{\delta r^2} + \frac{i V_0}{\rho y_0} \frac{\delta y_0}{\delta r} \\ & + \frac{i r}{\rho y_0} \frac{\delta V_0}{\delta r} \frac{\delta y_0}{\delta r} - \frac{i r V_0}{\rho y_0^2} \left(\frac{\delta y_0}{\delta r} \right)^2 + \frac{i r V_0}{\rho y_0} \frac{\delta^2 y_0}{\delta r^2} + \frac{V \eta_0}{y_0^2} \frac{\delta y_0}{\delta r} \end{aligned} \quad (C.7)$$

Wordt nu de uitdrukking voor u_0 en $\frac{\delta u_0}{\delta r}$ zoals weergegeven in de vergelijkingen (C.6) en (C.7) in vergelijking (C.5), dan kan de vergelijking die dan ontstaat als volgt worden weergegeven:

$$\begin{aligned} V_0 (f_{1r} + i f_{1i}) + V_0' (f_{2r} + i f_{2i}) + V_0'' (f_{3r} + i f_{3i}) + \\ + \eta_0 (f_{4r} + i f_{4i}) + \eta_0' (f_{5r} + i f_{5i}) = 0 \end{aligned} \quad (C.8)$$

waarin;

$$f_{1r} = V \left\{ - \frac{1}{r} + \frac{\rho^2}{r} - \frac{4}{y_0} \frac{\delta y_0}{\delta r} + \frac{r}{y_0^2} \left(\frac{\delta y_0}{\delta r} \right)^2 - \frac{r}{y_0} \frac{\delta^2 y_0}{\delta r^2} \right\}$$

$$f_{1i} = \frac{\pi}{\rho y_0} \left\{ - \frac{C_5 \rho}{r} + \frac{4 C_5}{\rho r} + \frac{4 C_5}{\rho y_0} \frac{\delta y_0}{\delta r} - \frac{4 r C_5}{\rho y_0^2} \left(\frac{\delta y_0}{\delta r} \right)^2 + \frac{2 r C_5}{\rho y_0} \frac{\delta^2 y_0}{\delta r^2} \right\}$$

$$f_{2r} = V \left\{ - 3 - \frac{r}{y_0} \frac{\delta y_0}{\delta r} \right\}$$

$$f_{2i} = \frac{\tau}{\rho y_0} \left\{ + \frac{\theta c_s}{\rho} \right\}$$

$$f_{3r} = - V r$$

$$f_{3i} = \frac{\tau}{\rho y_0} \frac{2 c_s r}{\rho}$$

$$f_{4r} = \frac{c_s \tau V}{\rho y_0^2} \left\{ - \frac{6}{r} + \frac{4}{y_0} \frac{\delta y_0}{\delta r} \right\}$$

$$f_{4i} = - \frac{4 V p^2}{y_0 r} + \frac{V p^2}{y_0^2} \frac{\delta y_0}{\delta r} - \frac{c_4 \tau p}{\rho y_0^2}$$

$$f_{5r} = - \frac{2 c_s \tau V}{\rho y_0^2}$$

$$f_{5i} = - \frac{V p^2}{y_0}$$

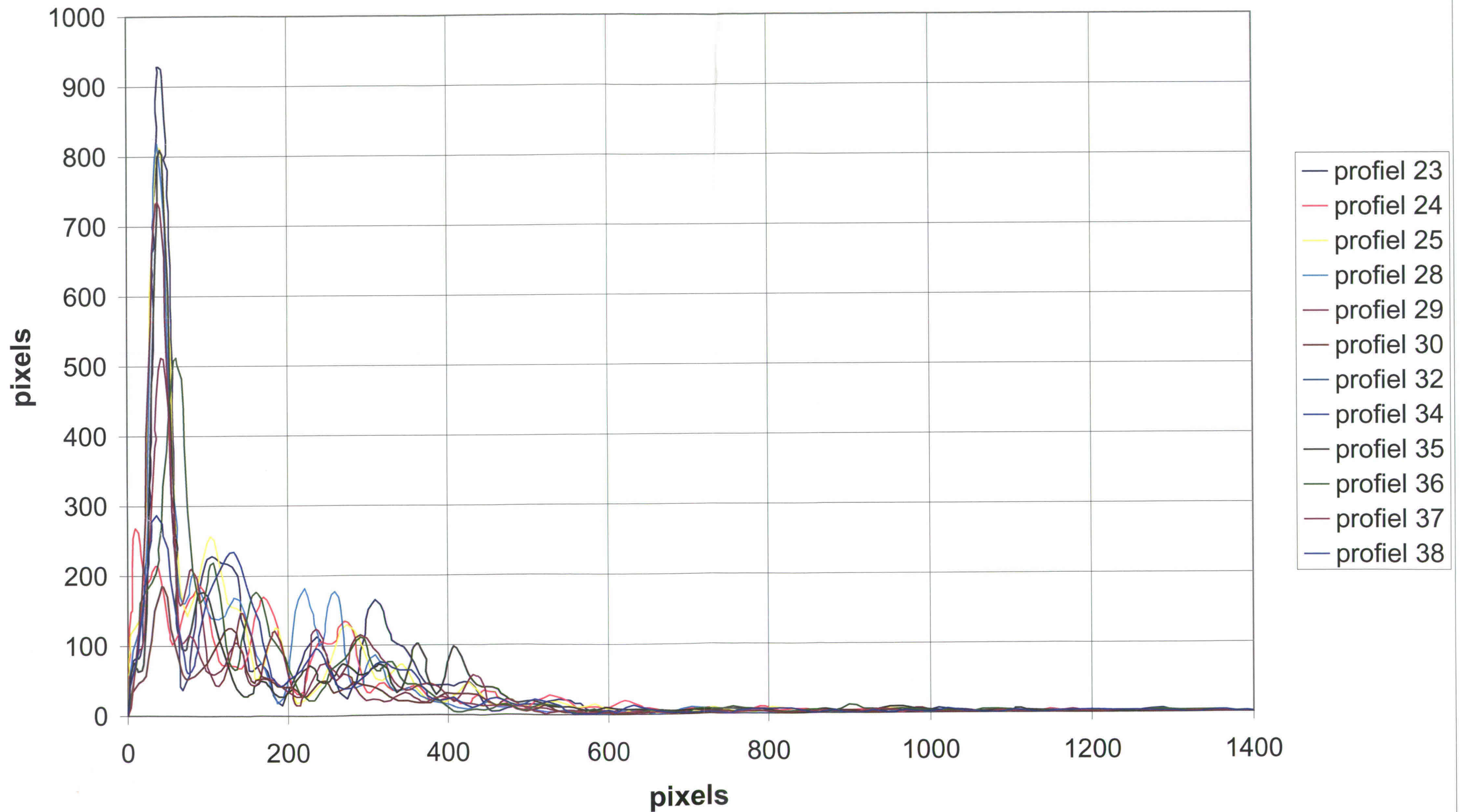
met $f_u = f_{ur} + i f_{ui}$ waarin r voor het reële deel en i voor het imaginaire deel staat.

C.2 Afleiding verstoringsvergelijking 'zand'.

Worden de verstoringen zoals omschreven in vergelijking (2.83), ingevuld in de continuïteitsvergelijking voor het water (2.80), dan ontstaat de volgende vergelijking:

$$y_0 y_0 + r y_0 \frac{\delta y_0}{\delta r} + r y_0 \frac{\delta y_0}{\delta r} + i p y_0 u_0 + i p V \eta_0 = 0 \quad (C.9)$$

e-dichtheidshoogte



Wordt dit ook gedaan voor de continuïteitsvergelijking van het zand, dan vindt men dat;

$$\begin{aligned} & a(2b+1) \left\{ c_6 v_0 + \frac{1}{\tan \phi} \frac{\delta \eta_0}{sr} \right\} + ar \frac{\delta}{sr} \left\{ c_6 v_0 + \frac{1}{\tan \phi} \frac{\delta \eta_0}{sr} \right\} + \\ & + \frac{i p u_0 a b 2 c_6}{V} + \frac{r/l_1 - e l i p \omega \eta_0}{\tau^b} = 0 \end{aligned} \quad (C.10)$$

Wordt u_0 in vergelijking (C.10) nu geëlimineerd door u_0 in vergelijking (C.9) af te splitsen en in vergelijking (C.10) in te voeren, dan ontstaat;

$$v_0 f_6 + v_0' f_7 + \eta_0 f_8 + \eta_0' f_9 + \eta_0'' f_{10} = 0 \quad (C.11)$$

waarin:

$$f_6 = \left\{ + c_6 - \frac{r 2 b c_6}{y_0} \frac{\delta y_0}{sr} \right\}$$

$$f_7 = \left\{ - 2 b r c_6 + r c_6 \right\}$$

$$f_8 = \left\{ - \frac{2 i p b c_6 V}{y_0} + \frac{r/l_1 - e l i p \omega}{a \tau^b} \right\}$$

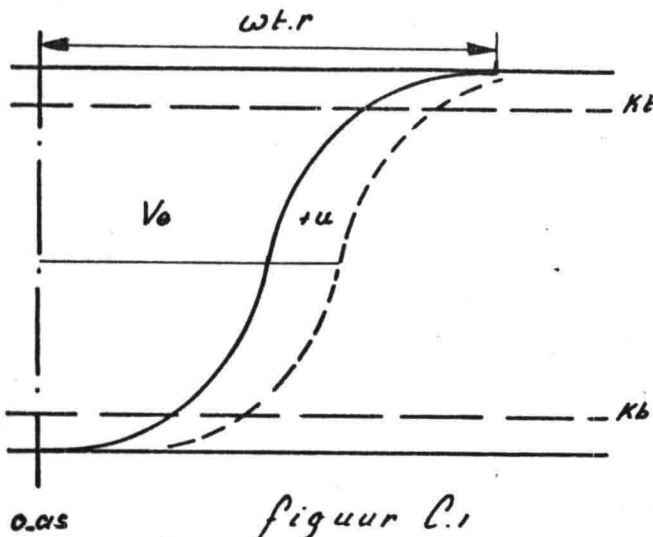
$$f_9 = \left\{ \frac{2 b + 1}{\tan \phi} \right\}$$

$$f_{10} = \left\{ \frac{r}{\tan \phi} \right\}$$

C.3. Coëfficiënt C_5

Zoals reeds in paragraaf 2.2.4. vermeld, is C_5 per definitie gelijk aan:

$$C_5 = \frac{r}{W}$$



waarin W een niet gedefinieerde langssnelheid dicht bij de bodem is. Wordt nu aan deze definitie nog toegevoegd dat deze snelheid W gelijk is aan de langssnelheid t.o.v. de bodem op een kenmerkende diepte Δy , dan is C_5 te schrijven als:

$$C_5 = \frac{r}{(V_0 - \omega_b \cdot r)_{z = \Delta y}}$$

waarin;

$$V_0 = \frac{1}{2} r (\omega_t + \omega_b) - \frac{1}{2} r (\omega_t - \omega_b) \left\{ \frac{\ln\left(\frac{\delta_b}{\delta_t}\right) - 2 \ln\left(\frac{5}{1-\xi}\right)}{\ln\left(\frac{y_0^2}{\delta_t \delta_b}\right)} \right\} \quad (C.12)$$

C_5 is nu bepaald op de kenmerkende diepte Δy na, omdat zowel het langssnelheidsprofiel V_0 als schuifspanningen gebaseerd zijn op de ruwheid K_t en K_b van respectievelijk topplaat en bodem, verondersteld wordt nu dat de kenmerkende diepte Δy overeenkomt met k_b . Hierdoor wordt C_5 :

$$C_5 = \frac{r}{V_0/k_b - \omega_b \cdot r} \quad (k_b = 30 \delta_b) \quad (C.13)$$

waarin;

$$V_0/k_b - \omega_b \cdot r \approx \frac{1}{2} r (\omega_t + 3 \omega_b) - \frac{1}{2} r (\omega_t - \omega_b) \left\{ \frac{\ln\left(\frac{1}{900 \delta_t \delta_b}\right)}{\ln\left(\frac{y_0^2}{\delta_t \delta_b}\right)} \right\}$$

C.4. Verstoringsvergelijkingen voor een rechte goot,
met couette-stroming.

Onder dezelfde aannamen en redeneringen als in paragraaf 2.2.2, ontstaan de uitgangsvergelijkingen voor een rechte goot met couette-stroming;

$$\bar{V}_x \frac{\delta \bar{V}_x}{\delta x} + \bar{V}_y \frac{\delta \bar{V}_x}{\delta y} = -\frac{\delta}{\delta x} (gh_*) + \frac{(\tau_{xt} - \tau_{xb})}{\rho h} \quad (C.14)$$

$$\bar{V}_x \frac{\delta \bar{V}_y}{\delta x} + \bar{V}_y \frac{\delta \bar{V}_y}{\delta y} = -\frac{\delta}{\delta y} (gh_*) + \frac{(\tau_{yt} - \tau_{yb})}{\rho h} \quad (C.15)$$

$$\frac{\delta}{\delta x} (\bar{V}_x h) + \frac{\delta}{\delta y} (\bar{V}_y h) = 0 \quad (C.16)$$

$$\frac{\delta}{\delta x} q_{x*} + \frac{\delta}{\delta y} q_{y*} - (1-e) \frac{\delta h}{\delta t} = 0 \quad (C.17)$$

(Met een in z-richting hydrostatische drukverdeling)

Worden in vergelijkingen (C.14) t/m (C.17) als verstoringen ingevoerd,

1 $\bar{V}_x = V + u$	6 $q_{sy} = c_1 q_s + \lambda$
2 $\bar{V}_y = 0 + v$	7 $\tau_{xt} = \tau_t + \epsilon$
3 $gh_* = g(h_{0*} + \phi)$	8 $\tau_{xb} = \tau_b + \mu$
4 $h = h_0 + \eta$	9 $\tau_{yt} = c_2 \tau_t + \alpha$
5 $q_{sx} = q_s + \sigma$	10 $\tau_{yb} = c_3 \tau_b + \rho$

(C.18)

(Opmerking: $c_2 \tau_t$ en $c_3 \tau_b$ zijn nul voor de evenwichtssituatie)

dan ontstaan als gelineariseerde vergelijkingen voor een rechte goot met couette-stroming op overeenkomstige wijze als in paragraaf 2.2.,

$$+ V \frac{\delta u}{\delta x} = -\frac{\delta}{\delta x} g \phi - \frac{(\tau_t - \tau_b) \eta}{\rho h_0^2} + \frac{(\epsilon - \mu)}{\rho h_0} \quad (C.19)$$

$$+V \frac{\delta V}{\delta x} = -\frac{\delta}{\delta y} g\phi + \frac{(x-\phi)}{\rho h_0} \quad (C.20)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{V}{h_0} \frac{\delta \eta}{\delta x} = 0 \quad (C.21)$$

$$\frac{\delta \sigma}{\delta x} + \frac{\delta \lambda}{\delta y} - (1-e) \frac{\delta \eta}{\delta t} = 0 \quad (C.22)$$

waarin: $(\tau_t - \tau_b) = 0$ tengevolge van uniforme stroming.
en;

$$\frac{\delta h_0}{\delta x} = \frac{\delta h_0}{\delta y} = 0 \quad ; \quad \frac{\delta \tau}{\delta x} = \frac{\delta \tau}{\delta y} = 0$$

Worden nu in vergelijkingen (C14) en (C15) als verstoringsvormen ingevoerd;

$$\begin{aligned} u &= u_0(y) \exp(x - wt) \\ v &= v_0(y) \exp(x - wt) \\ \eta &= \eta_0(y) \exp(x - wt) \end{aligned} \quad (C.23)$$

waarin: $w = w_r + iw_i$ met w_r voortplantingssnelheid en w_i p groeisnelheid aangeeft en p het dimensieloos golfgetal, zoals door Parker (1976) omschreven, dan gaan (C 14) en C 15) over in de volgende vorm;

$$ip u_0 V \exp = -\frac{\delta}{\delta x} g\phi + \frac{(\epsilon - \mu) \exp}{\rho h_0} \quad (C.24)$$

$$ip v_0 V \exp = -\frac{\delta}{\delta y} g\phi + \frac{(x - \phi) \exp}{\rho h_0} \quad (C.25)$$

waarin: $\exp = \exp ip(x - wt)$

Worden nu de schuifspanningstermen zoals afgeleid in paragraaf 2.2.1. ingevoerd, en de zo ontstane vergelijkingen kruislings gedifferentieerd, dan ontstaan;

$$ip V \frac{\delta u_0}{\delta y} \exp = - \frac{\delta^2}{\delta y \delta x} g \phi - \frac{2c_s \tau}{\rho h_0} \frac{\delta u_0}{\delta y} \exp \quad (C.26)$$

$$-p^2 V_0 \exp = - \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} g \phi - \frac{c_s \tau ip V_0}{\rho h_0} \quad (C.27)$$

en daarna van elkaar afgetrokken, dan volgt daaruit:

$$\frac{\delta u_0}{\delta y} (ip V + \frac{2c_s \tau}{\rho h_0}) + V_0 (p^2 - \frac{c_s \tau ip}{\rho h_0}) = 0 \quad (C.28)$$

Als men nu de verstoringvormen (C.24) in vergelijking (C.17) invoert dan is daaruit u_0 te berekenen,

$$u_0 = -\frac{V}{h_0} \eta_0 + \frac{i}{\rho} \frac{\delta V_0}{\delta y}$$

door nu u_0 naar y te differentieren wordt gevonden dat:

$$\frac{\delta u_0}{\delta y} = -\frac{V}{h_0} \frac{\delta \eta_0}{\delta y} + \frac{i}{\rho} \frac{\delta^2 V_0}{\delta y^2} \quad (C.29)$$

Wordt nu (C.29) in (C.28) ingevoerd dan ontstaat daarmee de eerste verstoringvergelijking:

$$V_0 (p^2 - \frac{c_s \tau ip}{\rho h_0}) + \frac{\delta^2 V_0}{\delta y^2} (-V + \frac{2ic_s \tau}{\rho h_0}) + \frac{\delta \eta_0}{\delta y} (-\frac{ipV^2}{h_0} - \frac{2c_s \tau V}{\rho h_0^2}) = 0 \quad (C.30)$$

Uit paragraaf 2.2.4. volgt, dat;

$$\sigma = ab \tau^b 2uc_0$$

$$\lambda = a \tau^b (c_0 V + \frac{1}{\tan \phi} \frac{\delta \eta}{\delta y}) \quad (C.31)$$

Worden deze verstoringen op het transport ingevoerd in (C. 13), dan volgt daaruit dat;

$$ab\tau^b c_b 2ip u_0 + a\tau^b \frac{\delta}{\delta y} \left(c_b v_0 + \frac{1}{\tan\phi} \frac{\delta \eta_0}{\delta y} \right) - (1-eli) p w \eta_0 = 0 \quad (C.32)$$

wordt hierin u. geëlimineerd door (C.29) in te vullen, dan wordt als tweede verstoringvergelijking gevonden:

$$3c_b \frac{\delta v_0}{\delta y} + \eta_0 \left(-\frac{2c_b ip V}{h_0} - \frac{(1-eli) p w}{a\tau^b} \right) + \frac{1}{\tan\phi} \frac{\delta^2 \eta_0}{\delta y^2} \quad (C.33)$$

N.B. De constanten C_4, C_5, C_6 kunnen op gelijke wijze bepaald worden zoals in paragraaf 2.2.4. vermeld.

C.5 Verstoringvergelijkingen voor een rechte goot met open waterloop.

Als we weer uitgaan van de vergelijkingen zoals ze staan in paragraaf C.4 vergelijkingen (C.14) t/m (C.17), dan is de enige vergelijking die verandert tengevolge van de overgang van couette-stroming naar stroming in een open waterloop, de bewegingsvergelijking in x-richting (C.14). Deze afwijking ontstaat tengevolge van het ontbreken van τ_t , hierdoor wordt (C.14);

$$+V \frac{\delta u}{\delta x} = -\frac{\delta}{\delta x} g\phi + \frac{\tau_b \eta}{\rho h_0^2} + \frac{(-\mu)}{\rho h_0} \quad (C.34)$$

waarin de extra termen t.o.v. (C.14) zijn onderstreept.

Ook hier is weer verondersteld in overeenkomst met paragraaf 2.2.7, dat $Fr \ll 1$, waardoor variaties in de waterspiegel buiten beschouwing kunnen worden gelaten.

Wordt nu op overeenkomstige wijze als in de hiervoorgaande paragraaf C.4, de drukterm en $\frac{\delta u_0}{\delta y}$ geëlimineerd en de verstoringvormen ingevuld, dan wordt als tegenhanger van (C.30), als verstoringvergelijking gevonden.

$$V_0 \left(p^2 - \frac{c_5 \tau i p}{\rho h_0} \right) + \frac{\delta V_0}{\delta y^2} \left(-V + \frac{2 i c_5 \tau}{\rho \rho h_0} \right)$$

$$\frac{\delta \eta_0}{\delta y} \left(-\frac{i p V^2}{h_0} - \frac{2 c_5 \tau V}{\rho h_0^2} - \frac{\tau}{\rho h_0^2} \right) = 0 \quad (C.35)$$

waarin de extra termen t.o.v. (C.30) zijn onderstreept.

Omdat de continuïteitsvergelijkingen van het water en van het zand niet veranderen tengevolge van de overgang van couette-stroming naar stroming in een open waterloop, is de tweede verstoringsvergelijking gelijk aan (C.33).

N.B. De constanten C_4 , C_5 , C_6 , kunnen op overeenkomstige wijze zoals in paragraaf 2.2.4. omschreven wordt, worden bepaald.

Bijlage D.

blz.

- D. Analytische oplossing. D.-1
- D.1. Inleiding. D.-1
- D.2. Omwerking van bewegingsvergelijkingen, continuïteitsvergelijkingen en verstoringen, naar een stelsel differentiaalvergelijkingen van de eerste-orde. D.-1
- D.3. Vereenvoudiging van voorgaand model. D.-6

D. Analytische oplossing.D.1. Inleiding.

Naast de numerieke oplossing is ook geprobeerd, om voor een sterk vereenvoudigd model een analytische oplossing te vinden; dit om het numerieke model te kunnen testen.

De methode waaraan gedacht wordt komt in het kort op het volgende neer:

1. Maak van de gevonden differentiaalvergelijkingen en algebraïsche vergelijkingen een stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen in het kort weergegeven door $\underline{x}' = C \underline{x}$ (D.1)
2. Splits dit stelsel op in de vorm van: $\underline{x}' = A \underline{x} + B \underline{x}$ (D.2) waarin A een matrix is $\neq f(r)$ en B een matrix $= \bar{f}(r)$.
3. Zoek een algemene oplossing voor $\underline{x}' = A \underline{x}$ (D.3)
4. Gebruik deze oplossing om d.m.v. variatie van parameters, zie Boyce (1977). $\underline{x}' = A \underline{x} + B \underline{x}$ op te lossen (D.4)
5. Los de integratie-constante in de gevonden oplossing op d.m.v. de randvoorwaarden.

D.2. Omwerking van bewegingsvergelijkingen, continuïteitsvergelijkingen en verstoringen, naar een stelsel differentiaalvergelijkingen van de eerste-orde.

In het hoofdstuk verstoringanalyse 2.2. worden de volgende gelineariseerde vergelijkingen afgeleid:

$$+ \frac{2vV}{r} + \frac{V}{r} \frac{\delta u}{\delta \theta} = - \frac{g}{r} \frac{\delta \phi}{\delta \theta} - \frac{(\tau_1 - \tau_b) \eta}{\rho y_0^2} + \frac{(\epsilon - \mu)}{\rho y_0} \quad (D.5)$$

$$- \frac{2uV}{r} + \frac{V}{r} \frac{\delta v}{\delta \theta} = -g \frac{\delta \phi}{\delta r} - \frac{(c_2 \tau_t - c_3 \tau_b) \eta}{\rho y_0^2} + \frac{(\alpha - \rho)}{\rho y_0} \quad (D.6)$$

$$v y_0 + r y_0 \frac{\delta v}{\delta r} + r v \frac{\delta y_0}{\delta r} + y_0 \frac{\delta u}{\delta \theta} + V \frac{\delta \eta}{\delta \theta} = 0 \quad (D.7)$$

$$\frac{\lambda}{r} + \frac{\delta \lambda}{\delta r} + \frac{1}{r} \frac{\delta \sigma}{\delta \theta} - (1 - e) \frac{\delta \eta}{\delta t} = 0 \quad (D.8)$$

Waarin de ingevoerde verstoringen als volgt omschreven worden:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(r) \exp ip(\theta - \omega t) \\
 v &= v_0(r) \exp ip(\theta - \omega t) \\
 \eta &= \eta_0(r) \exp ip(\theta - \omega t) \\
 \phi &= \phi_0(r) \exp ip(\theta - \omega t)
 \end{aligned}
 \tag{D.9}$$

Uit paragraaf 2.2.4. kunnen de volgende gegevens worden gehaald, waarmee het aantal onbekenden in de gelineariseerde vergelijkingen tot vier gereduceerd kunnen worden:

$$\tau_t - \tau_b = 0$$

$$\sigma = a b \tau^b 2 u c_6$$

$$\lambda = a \tau^b \left(c_6 v + \frac{1}{\tan \phi} \frac{\delta \eta}{\delta r} \right)$$

$$\tau = \int \left\{ 0.4 r (\omega_t - \omega_b) / \ln(\gamma_0^2 / \delta_t / \delta_b) \right\}^2$$

$$v = \int \left\{ \alpha (\omega_t + \omega_b) + \beta (\omega_t - \omega_b) \right\} r
 \tag{D.10}$$

(N.B. Voor vereenvoudiging van de schuifspanningstermen zie par. 2.2.4). Om het stelsel differentiaalvergelijkingen (D.5) t/m (D.8) om te kunnen werken tot een stelsel van vier eerste-orde differentiaalvergelijkingen, is het nodig dat ook de verstoringvormen van σ en λ omschreven worden;

$$\sigma = \sigma_0(r) \exp ip(\theta - \omega t)$$

$$\lambda = \lambda_0(r) \exp ip(\theta - \omega t)$$

Als men nu alle gegevens en verstoringen invoert en door $\exp ip(\theta - \omega t)$ deelt, ontstaan er vier differentiaalvergelijkingen van de eerste-orde en twee algebraïsche vergelijkingen;

$$2V_0 V + V i p u_0 = -g i p \phi_0 - \frac{2U_0 \tau c_5}{r y_0} \quad (D.11)$$

$$-\frac{2U_0 V}{r} + \frac{V}{r} i p V_0 = -g \frac{\delta \phi_0}{\delta r} - \frac{c_4 \tau \eta_0}{r y_0^2} - \frac{c_5 V_0 \tau}{r y_0} \quad (D.12)$$

$$V_0 y_0 + r y_0 \frac{\delta V_0}{\delta r} + r V_0 \frac{\delta y_0}{\delta r} + y_0 i p u_0 + V i p \eta_0 = 0 \quad (D.13)$$

$$\frac{\lambda_0}{r} + \frac{\delta \lambda_0}{\delta r} + \frac{i p}{r} \sigma_0 - (1-e) i p \omega \eta_0 = 0 \quad (D.14)$$

$$a b \tau^{2b} c_6 u_0 - \sigma_0 = 0 \quad (D.15)$$

$$a b \tau^b / (c_6 V_0 + \frac{1}{\tan \phi} \frac{\delta \eta_0}{\delta r}) - \lambda_0 = 0 \quad (D.16)$$

met als volgende randvoorwaarde:

$$V_0 /_{r=r_1} = V_0 /_{r=r_2} = \eta_0' /_{r=r_1} = \eta_0' /_{r=r_2} = 0 \quad (D.17)$$

Door nu (D.11) en (D.15) in de vier eerste-orde differentiaalvergelijkingen in te vullen, kunnen de verstoringen u_0 en σ_0 geëlimineerd worden, hierdoor gaat (D.11) t/m (D.17) over in:

$$\phi_0' = -\frac{c_4 \tau r^2 \eta_0}{g y_0^2} - \frac{c_5 V_0 \tau r}{g y_0} - \frac{2V y_0}{g (y_0 V r i p + 2c_5 \tau r^2)} (+g i p \phi_0 + 2V_0 V r) \quad (D.18)$$

$$V_0' = -\frac{V_0}{r} - \frac{V_0 \delta y_0}{y_0 \delta r} + \frac{y_0 i p}{r (y_0 V r i p + 2c_5 \tau r^2)} (+g i p \phi_0 + 2V_0 V r) - V r i p \eta_0 \quad (D.19)$$

$$\lambda_0' = -\frac{\lambda_0}{r} + \frac{i p a b (\tau r^2)^b c_6 y_0}{r (y_0 V r i p + 2c_5 \tau r^2)} (g i p \phi_0 + 2V_0 V r) + (1-e) i p \omega \eta_0 \quad (D.20)$$

$$\eta_0' = \frac{\tan \phi}{a b \tau^b r^{2b}} \lambda_0 - \tan \phi c_6 V_0 \quad (D.21)$$

Daar deze analytische oplossingsmethode gebruikt gaat worden voor het toetsen van één situatie wordt gesteld dat daarbij: $y_0 = c_7 r^n$
 Gevonden is nu een stelsel differentiaalvergelijkingen van de eerste-orde;

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} \phi_0' \\ \psi_0' \\ \lambda_0' \\ \eta_0' \end{bmatrix} = C \underline{x} = A \underline{x} + B \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \psi_0 \\ \lambda_0 \\ \eta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \psi_0 \\ \lambda_0 \\ \eta_0 \end{bmatrix}$$

$\neq f(r)$ $= f(r)$ (D.22)

waarin * aangeeft, dat deze plaats wordt bezet door een term afkomstig uit matrix C.

(N.B. in de term a(4.3) staat de eigenwaarde ω).

Aangenomen wordt dat $\underline{x} = \{ \exp q r \}$, een oplossing van het stelsel is. Wordt deze gestelde oplossing in het stelsel ingevoerd dan gaat dit over in de volgende vorm;

$$\begin{bmatrix} * - q & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & * - q & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & * - q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & * - q \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (D.23)$$

waarin * een mogelijk bezette plaats aangeeft van het op te lossen stelsel. De vier eigenwaarden q_1 t/m q_4 kunnen nu gevonden worden door de determinant van matrix A nul te stellen, en de wortels van de zo gevonden vergelijking op te lossen. De eigen-vectoren vindt men door de gevonden eigenwaarden een voor een in te vullen en de zo ontstane stelsels vergelijkingen op te lossen.

N.B. Omdat de matrix A zoals hierboven vermeld voor een groot deel uit nullen bestaat wordt volgens deze methode alleen de nul-oplossing gevonden.

Dit probleem kun je omzeilen door in A de open plaatsen op te vullen en deze opvulling af te trekken van matrix B. Als opvulling kan b.v. gebruik gemaakt worden van, de gemiddelde waarde van matrix B, of de gemiddelde waarde van matrix B bij $r=1$. De als laatst vermelde methode wordt toegepast, waardoor matrix A gevormd wordt door vergelijkingen (D.18) t/m (D.21), waar $r=1$ is ingevuld.

Wil je nu q daadwerkelijk kunnen bepalen dan is het praktisch noodzakelijk om over te gaan op getalgrötte van de gebruikte grootheden, daarbij wordt gebruik gemaakt van de volgende getalwaarden;

$$\begin{array}{lll}
 \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 & c_4 = 0 & V = 0.478 \text{ m/s} \\
 \omega t = 1.38 \text{ r/s} & c_5 = 4 & \tau = 0.692 \text{ kg/m}^3 \\
 \omega b = 0 & c_6 = 2 & y_0 = 0.06 \text{ m} \\
 e = 0 & c_7 = 0.03 & \tan \phi = 0.33 \\
 a = 0.05 & n = 8 & \\
 b = 3 & p = 5 & r = 1 \text{ m}
 \end{array} \quad (D.24)$$

Worden deze getalwaarden ingevuld in vergelijkingen (D.18) t/m (D.21), dan vindt men;

$$\begin{aligned}
 \phi_0' &= (-7.9 + 2.3 \cdot 10^{-6}i) v_0 + (-4.6 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-2}i) \phi_0 \\
 v_0' &= (-9 + 0.03i) v_0 + (-1.6 + 0.024i) \phi_0 + (-80i) \eta_0 \\
 \lambda_0' &= -\lambda_0 + (-7.9 \cdot 10^7 + 1.15 \cdot 10^6i) \phi_0 + (2.2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^6i) v_0 + 5i \omega \eta_0 \\
 \eta_0' &= (6.3 \cdot 10^{-9}) \lambda_0 + (-0.71) v_0
 \end{aligned} \quad (D.25)$$

Door nu vergelijking (D.25) in vergelijking (D.23) in te vullen, de determinant te berekenen en deze gelijk aan nul te stellen, dan ontstaat een vierde graads vergelijking in q (eigenwaarden);

$$\begin{aligned}
 q^4 + 10q^3 + 21.6q^2 + 0.16q + (-3.14 + 8.16 \cdot 10^{-10}\omega) \\
 - 57i q^2 - 44.1i q + i(-343 - 5.4 \cdot 10^{-8}\omega) = 0 \quad (D.26)
 \end{aligned}$$

waarin;

$$q = q_r + i q_i$$

$$\omega = \omega_r + i \omega_i$$

D.3. Vereenvoudigingen van voorgaand model.

Zoals uit paragraaf D.2. blijkt is het stelsel vergelijkingen (D.25) ondanks dat de r -afhankelijkheid is verwaarloosd nog steeds niet analytisch oplosbaar. Daarom wordt in deze paragraaf gekeken of het stelsel vergelijkingen (D.11) t/m (D.16) nog verder te vereenvoudigen is zonder dat aan de proces-omschrijving afbruik wordt gedaan. Als men zich beperkt tot smalle goten ($B \ll y$), dan is

$$V_0 \approx 0 \quad \text{en} \quad \frac{\delta \eta_0}{\delta r} \approx 0$$

hierdoor gaan de vergelijkingen (D.11) t/m (D.16) over in;

$$\frac{V}{r} ip u_0 = - \frac{g}{r} ip \phi_0 - \frac{2u\tau c_s}{r^2 y_0}$$

$$- \frac{2a_0 V}{r} = - \frac{g \delta \phi_0}{\delta r} - \frac{c_4 \tau \eta_0}{r y_0^2}$$

$$y_0 ip u_0 + V ip \eta_0 = 0$$

$$\frac{a ip \tau^2 c_4 u_0}{r} + (1 - e) \omega ip \eta_0 = 0 \quad (D.27)$$

De eigenwaarde ω kan nu gevonden worden door de laatste twee vergelijkingen samen te stellen, waaruit volgt dat,

$$\omega = \frac{a \tau^2 c_4 V}{(1 - e) r y_0}$$

hieruit volgt dat,

$$\omega_i = 0 \quad ; \quad \omega_r = \frac{a \tau^2 c_4 V}{(1 - e) r y_0} \quad (D.28)$$

,hetgeen inhoudt dat de verstoringen marginaal stabiel zijn en zich verplaatsen met een constante loopsnelheid ($\omega_r \cdot r$).

N.B. Uit bovenstaand volgt dat ω_i voor elke golfvorm en golflengte marginale stabiliteit aangeeft, hierdoor wordt het beslissingscriterium (de golf met $\omega_{i \max}$ is de golf die ontstaat) en tevens deze vereenvoudiging onbruikbaar.

Omdat voorgaande vereenvoudigingen geen bruikbare resultaten gaven, is tenslotte onderzocht in hoeverre vermindering van het aantal uitgangs-differentiaalvergelijkingen tot een bruikbare oplossing leidt. Hiertoe is gesteld dat $\phi'_0 = 0$, dit heeft tot gevolg dat één differentiaalvergelijking over gaat in een algebraïsche-vergelijking.

Stel we gaan uit van de vergelijkingen (D.18) t/m (D.21) en schrijven ze als;

$$\begin{aligned}\phi'_0 &= g_1 \eta_0 + g_2 v_0 + g_3 \phi_0 \\ v'_0 &= g_4 \eta_0 + g_5 v_0 + g_6 \phi_0 \\ \lambda'_0 &= g_7 \lambda_0 + g_8 \eta_0 + g_9 v_0 + g_{10} \phi_0 \\ \eta'_0 &= g_{11} \lambda_0 + g_{12} v_0\end{aligned}\tag{D.29}$$

waarin g_i t/m g_{12} functies van r zijn.

Daar gesteld is dat $\phi'_0 = 0$ gaat de eerste differentiaal-vergelijking van het stelsel (D.29) over in een algebraïsche-vergelijking.

Door uit deze algebraïsche-vergelijking ϕ_0 op te lossen en in de overige vergelijkingen van het stelsel (D.29) in te vullen, gaat (D.29) over naar drie eerste orde differentiaal-vergelijkingen

$$\begin{aligned}v'_0 &= \left(g_5 - \frac{g_2}{g_3} g_6\right) v_0 + \left(g_4 - \frac{g_1}{g_3} g_6\right) \eta_0 \\ \lambda'_0 &= \left(g_9 - \frac{g_2}{g_3} g_{10}\right) v_0 + g_7 \lambda_0 + \left(g_8 - \frac{g_1}{g_3} g_{10}\right) \eta_0 \\ \eta'_0 &= g_{12} v_0 + g_{11} \lambda_0\end{aligned}\tag{D.30}$$

Worden nu de waarden van alle grootheden, zoals vermeld in (D.24) in het stelsel (D.30) ingevuld, dan is het stelsel te schrijven als;

$$\underline{x}' = A \underline{x} = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (D.31)$$

waarin * een bezette plaats aangeeft.

Wordt nu op gelijke wijze als hiervoor gezocht naar de eigenwaarde van matrix A, dan vindt men de volgende derde graads-vergelijking,

$$-q^3 + (31 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^{10} i) q^2 + (-2,3 \cdot 10^{12} - 55 \cdot 10^{10} i - 3,5 i \omega) q + (-1,1 \cdot 10^4 + 113 i - 1,5 \cdot 10^3 \omega - 32,6 i \omega) = 0 \quad (D.33)$$

Voor het oplossen van derde graads-vergelijkingen bestaan analytische oplossings-methoden (zie b.v. Birkhoff (1977)), hiertoe wordt vergelijking (D.33) algemeen geschreven als,

$$q^3 + b q^2 + c q + d = 0 \quad (D.34)$$

wordt nu gesteld dat,

$$q = z - b/3 \quad (D.35)$$

en ingevoerd in (D.33) dan,

$$z^3 + (b^2/6 + c) z + (2b^3/27 - bc/3 + d) = 0 \quad (D.36)$$

hetgeen te herschrijven is als,

$$z^3 + \bar{p} z + \bar{q} = 0 \quad (D.37)$$

waarin;

$$\bar{p} = (b^2/6 + c) \quad ; \quad \bar{q} = (2b^3/27 - bc/3 + d)$$

Door toepassen van de transformatie van Vieta,

$$z = \underline{w} - \bar{p}/3/\underline{w} \quad (D.38)$$

wordt voor vergelijking (D.37) de volgende kwadratische vergelijking gevonden,

$$(\underline{w}^3 - \bar{p}^3/27/\underline{w}^3 + q) * \underline{w}^3 = 0 \quad (D.39)$$

met als oplossing,

$$\underline{w}^3 = -\bar{q}/2 \pm \sqrt{\bar{q}^2/4 + \bar{p}^2/27} \quad (D.40)$$

Voor de vergelijking (D.33) wordt dan voor p en q gevonden dat:

$$\bar{p} = -6.6 \cdot 10^{19} + 2.1 \cdot 10^{18}i + 3.5 \cdot i \omega \quad (D.41)$$

$$\bar{q} = +2.7 \cdot 10^{28} + 5.9 \cdot 10^{29}i - 2.3 \cdot 10^{10} \omega + 3.6 \cdot 10^8 i \omega \quad (D.42)$$

Wordt nu (D.41) en (D.42) in vergelijking (D.40) ingevuld, dan vindt men dat

$$\underline{w}^3 = (-1.35 \cdot 10^{28} - 2.95 \cdot 10^{29}i + 1.15 \cdot 10^{10} \omega - 1.8 \cdot 10^8 i \omega) \pm$$

$$\sqrt{-9.9 \cdot 10^{58} + 9 \cdot 10^{57}i - 1.9 \cdot 10^{38} \omega - 5.3 \cdot 10^{39}i \omega + 2.2 \cdot 10^{20} \omega^2 - 7 \cdot 10^{18}i \omega^2 - 1.6 i \omega^3} \quad (D.43)$$

Volgorde van oplossen is nu: 1 tweede machts wortel trekken
2 derde machts wortel trekken
3 terug transformeren.

N.B. Vanwege de complexe wijze waarop ω in bovenstaande wortels voorkomt, is van oplossing via deze methode afgezien.

Bijlage E.

blz.

E. Vergelijkingen geschikt voor iteratie-programma's E.-1

E. Vergelijkingen geschikt voor iteratie-programma's.

Zoals uit paragraaf 2.2. 'verstoring-vergelijkingen voor couette-stroming in een ronde goot' blijkt zijn de bewegings- en continuïteits-vergelijkingen om te werken tot twee differentiaal-vergelijkingen in η_0 en v_0 waarin alleen r als veranderlijke richting voorkomt. Door nu in deze vergelijkingen ((2.85) en (2.86)) f_* , η_0 en v_0 te schrijven als,

$$v_0 = v_{0r} + i v_{0i}$$

$$\eta_0 = \eta_{0r} + i \eta_{0i}$$

$$f_* = f_{*r} + i f_{*i}$$

ontstaan er twee reële- en twee imaginaire-vergelijkingen, welke op te lossen zijn als ware het vier reële-vergelijkingen.

N.B. Bovenstaande omwerking tot vier reële-vergelijkingen is noodzakelijk, omdat de gebruikte computer-taal geen complexe-getallen aan kan.

Voor de verstoring-vergelijking (2.85)

$$v_0 f_1 + v_0' f_2 + v_0'' f_3 + \eta_0 f_4 + \eta_0' f_5 = 0$$

ontstaat dan als reëel deel,

$$v_{0r} f_{1r} + v_{0r}' f_{2r} + v_{0r}'' f_{3r} + \eta_{0r} f_{4r} + \eta_{0r}' f_{5r} + \\ -v_{0i} f_{1i} - v_{0i}' f_{2i} - v_{0i}'' f_{3i} - \eta_{0i} f_{4i} - \eta_{0i}' f_{5i} = 0 \quad (E.1)$$

en als imaginair deel,

$$v_{0r} f_{1i} + v_{0r}' f_{2i} + v_{0r}'' f_{3i} + \eta_{0r} f_{4i} + \eta_{0r}' f_{5i} + \\ v_{0i} f_{1r} + v_{0i}' f_{2r} + v_{0i}'' f_{3r} + \eta_{0i} f_{4r} + \eta_{0i}' f_{5r} = 0 \quad (E.2)$$

Bovenstaande vergelijkingen (E.1) en (E.2) zijn te herschrijven ,als men de volgende operators definiëert

$$A(v) = f_{1r} v + f_{2r} v' + f_{3r} v''$$

$$B(v) = f_{1i} v + f_{2i} v' + f_{3i} v''$$

in de volgende vorm,

$$A(v_{or}) = B(v_{oi}) - (\eta_{or} f_{4r} + \eta_{or}' f_{5r} - \eta_{oi} f_{4i} - \eta_{oi}' f_{5i}) \quad (E.3)$$

$$A(v_{oi}) = -B(v_{or}) - (\eta_{or} f_{4i} + \eta_{or}' f_{5i} + \eta_{oi} f_{4r} + \eta_{oi}' f_{5r}) \quad (E.4)$$

met als randvoorwaarden,

$$v_{or} \Big|_{r=r_1} = v_{or} \Big|_{r=r_2} = v_{oi} \Big|_{r=r_1} = v_{oi} \Big|_{r=r_2} = 0$$

Schrijft men nu de vergelijkingen (E.3) en (E.4) als,

$$A(v_{or}) = B(v_{oi}) - (\eta_{or} f_{4r} + \eta_{or}' f_{5r} - \eta_{oi} f_{4i} - \eta_{oi}' f_{5i}) \quad (E.5)$$

$$A(v_{oi}) = -B(v_{or}) - (\eta_{or} f_{4i} + \eta_{or}' f_{5i} + \eta_{oi} f_{4r} + \eta_{oi}' f_{5r}) \quad (E.6)$$

waarin links de berekende waarden en rechts de oude waarden verkregen door een vorige iteratie staan, dan is dit stelsel geschikt om in een iteratie-programma te gebruiken.

Vergelijking (2.86) is te schrijven als,

$$v_0 f_6 + v_0' f_7 + \eta_0 f_8 + \eta_0' f_9 + \eta_0'' f_{10} = 0 \quad (E.7)$$

waarin,

$$v_0 = v_{or} + i v_{oi}$$

$$\omega = \omega_r + i \omega_i$$

$$\eta_0 = \eta_{or} + i \eta_{oi}$$

$$f_* = f_{*r} + i f_{*i}$$

met als functie omschrijving voor f_6 t/m f_{10} ,

$$f_6 = c_6 - \frac{r^2 b c_6}{y_0} \frac{\delta y_0}{\delta r}$$

$$f_7 = -2brc_6 + rc_6$$

$$f_8 = -\frac{2ipbc_6 V}{y_0} + \frac{r(1-e)ip\omega}{a\tau^b}$$

$$f_9 = \frac{2b+1}{\tan\phi}$$

$$f_{10} = \frac{r}{\tan\phi} \quad (E.8)$$

Door nu de termen waarin η' en η'' voorkomen samen te stellen tot,

$$\eta_0' f_9 + \eta_0'' f_{10} = \frac{(2b+1)\eta_0' + r\eta_0''}{\tan\phi} = \frac{1}{r^{2b}\tan\phi} \frac{d}{dr} (r^{2b+1}\eta_0') \quad (E.9)$$

gaat vergelijking (E.7) over in,

$$\frac{1}{r^{2b}\tan\phi} \frac{d}{dr} (r^{2b}\eta_0') = -v_0 f_6 - v_0' f_7 - \eta_0 f_8 \quad (E.10)$$

als nu in vergelijking (E.10) de complexe schrijfwijze van v_0 , η_0 , f_* en ω wordt ingevuld dan gaat (E.10) over in reëel deel,

$$\frac{1}{r^{2b}\tan\phi} \frac{d}{dr} (r^{2b}\eta_{0r}') = -v_{0r} f_{6r} - v_{0r}' f_{7r} - \eta_{0r} \frac{2pb c_6 V}{y_0} + (\eta_{0i} \omega_r + \eta_{0r} \omega_i) \frac{r(1-e)p}{a\tau^b} \quad (E.11)$$

en een imaginaire deel,

$$\frac{1}{r^{2b}\tan\phi} \frac{d}{dr} (r^{2b}\eta_{0i}') = -v_{0i} f_{6r} - v_{0i}' f_{7r} + \eta_{0r} \frac{2pb c_6 V}{y_0} - (\eta_{0r} \omega_r - \eta_{0i} \omega_i) \frac{r(1-e)p}{a\tau^b} \quad (E.12)$$

Herschreven met de volgende verkorte notaties,

$$A = \frac{1}{r^{2b} \tan \phi}$$

$$B = r^{2b+1}$$

$$C = (-v_{or} f'_{\delta r} - v_{or}' f_{\gamma r} - \eta_{oi} 2\rho b c_{\delta} V/y_0) / A$$

$$D = (-v_{oi} f'_{\delta r} - v_{oi}' f_{\gamma r} + \eta_{or} 2\rho b c_{\delta} V/y_0) / A$$

$$E = (\eta_{oi} r(1-e)p / (a\tau^b)) / A$$

$$F = (\eta_{or} r(1-e)p / (a\tau^b)) / A$$

kan vergelijking (E.11) en (E.12) geschreven worden,

$$\frac{d}{dr} (B \eta_{or}') = C + \omega_r E + \omega_i F \quad (E.13)$$

$$\frac{d}{dr} (B \eta_{oi}') = D - \omega_r F + \omega_i E \quad (E.14)$$

Om dit resultaat geschikt te maken voor een iteratie-programma worden in de grootheden C t/m F de oude waarden verkregen door een vorige iteratie geschreven en links de nieuw te berekenen waarden. Door middel van het invullen van de randvoorwaarden, kun-

$$\eta_{or}' \Big|_{r=r_1} = \eta_{or}' \Big|_{r=r_2} = \eta_{oi}' \Big|_{r=r_1} = \eta_{oi}' \Big|_{r=r_2} = 0 \quad (E.15)$$

nen de integratie-constanten, welke ontstaan door het integreren van vergelijkingen (E.13) en (E.14), worden opgelost en tevens

kunnen de eigenwaarden ω_i en ω_r worden opgelost door de twee restterende randvoorwaarden in de geïntegreerde vergelijkingen (E.13) en (E.14) in te vullen.

Voor een totaal overzicht van het toegepaste iteratie- proces zie stroomschema II.

N.B. In de hier voor gaande vergelijkingen komen de volgende notaties voor;

- i Voor oude reeds bekende waarden, verkregen door een voorgaande iteratie of als invoergegeven;

V_{orr} V_{oii} η_{orr} η_{oii}

- ii Voor nieuw te berekenen waarden;

V_{or} V_{oi} η_{oi} η_{or}

Bijlage F.

blz.

F. Omzetting verstoringsvergelijkingen naar een vierde-orde differentiaalvergelijking.

F.-1

F. Omzetting verstorings-vergelijkingen naar een vierde orde differentiaal-vergelijking.

Als uitgangspunt worden de vergelijkingen (2.85) en (2.86) genomen zoals afgeleidt in paragraaf 2.2.4.,

$$v_0 f_1 + v_0' f_2 + v_0'' f_3 + \eta_0 f_4 + \eta_0' f_5 = 0 \quad (F.1)$$

$$v_0 f_6 + v_0' f_7 + \eta_0 f_8 + \eta_0' f_9 + \eta_0'' f_{10} = 0 \quad (F.2)$$

met $f_* = f_{*r} + i f_{*i}$ waarin r voor het reële deel en i voor het imaginaire deel staat. opgemerkt dient te worden dat in deze afleiding f_8 vervangen wordt door f_{8a} en door $f_{8b} \cdot \omega$, dit om het mogelijk te maken de eigenwaarde ω af te splitsen.

$$f_{8a} = \frac{-2pbc_i V i}{y_0} \quad (F.3)$$

$$f_{8b} = \frac{+r(1-e)pi}{a \tau^b} \quad (F.4)$$

Hiertoe wordt uit vergelijking (F.2) v_0' als functie van v_0 , η_0 , η_0' en η_0'' bepaald,

$$v_0' = -v_0 f_6 / f_7 - \eta_0 (f_{8a} + \omega f_{8b}) / f_7 - \eta_0' f_9 / f_7 - \eta_0'' f_{10} / f_7 \quad (F.5)$$

wordt nu vergelijking (F.5) naar r gedifferentieerd en (F.5) in de zo gevonden vergelijking ingevoerd, dan vindt men,

$$\begin{aligned} v_0'' = & v_0 \left[- (f_6 / f_7)' + (f_6 / f_7)^2 \right] + \eta_0 \left[- (f_{8a} + \omega f_{8b}) / f_7 \right]' + \\ & (f_{8a} + \omega f_{8b}) / f_7 \left[f_6 / f_7 \right] + \eta_0' \left[- (f_{8a} + \omega f_{8b}) / f_7 - (f_9 / f_7)' + \right. \\ & \left. (f_9 f_6 / f_7^2) \right] + \eta_0'' \left[- (f_9 / f_7) - (f_{10} / f_7)' + (f_{10} f_6 / f_7^2) \right] + \\ & \eta_0''' \left[- f_{10} / f_7 \right] \end{aligned} \quad (F.6)$$

waarin;

$$T = -f_1 + f_2 f_6 / f_7 + f_3 (f_6 / f_7)' - f_3 f_6^2 / f_7^2$$

$$A = \{ f_4 - f_{20} \cdot f_2 / f_7 - f_3 (f_{20} / f_7)' + f_3 f_6 f_{20} / f_7^2 \} T$$

$$B = \{ -f_{20} f_2 / f_7 - f_3 (f_{20} / f_7)' + f_3 f_6 f_{20} / f_7^2 \} T$$

$$C = \{ f_5 - f_9 f_2 / f_7 - f_3 f_{20} / f_7 - f_3 (f_9 / f_7)' + f_3 f_6 f_9 / f_7^2 \} T$$

$$D = \{ -f_{20} f_3 / f_7 \} T$$

$$E = \{ -f_2 f_{10} / f_7 - f_3 f_9 / f_7 - f_3 (f_{10} / f_7)' + f_3 f_6 f_{10} / f_7^2 \} T$$

$$F = \{ -f_3 f_{10} / f_7 \} T$$

Opmerking: Vergelijking (F.8) waarin $v_0(\eta_0, \eta_0', \eta_0'', \eta_0''')$ kan direct gebruikt worden om de randvoorwaarden van $v_0|_{r=r_1}=0$ en $v_0|_{r=r_2}=0$ om te zetten tot randvoorwaarden geschikt voor de vierde orde differentiaal-vergelijking (F.10).

Wordt nu weer een verkorte schrijfwijze toegepast dan kan vergelijking (F.10) geschreven worden als,

$$\eta_0 (G + \omega I) + \eta_0' (J + \omega K) + \eta_0'' (L + \omega M) + \eta_0''' N + \eta_0'''' O = 0$$

(F.11)

waarin,

$$G = f_{20} + A f_6 + A' f_7$$

$$I = f_{20} + B f_6 + B' f_7$$

$$J = f_9 + C f_6 + A f_7 + C' f_7$$

$$K = D f_6 + B f_7 + D' f_7$$

$$L = f_{10} + E f_6 + C f_7 + E' f_7$$

$$M = + D f_7$$

$$N = F f_6 + E f_7 + E' f_7$$

$$O = F f_7$$

met de randvoorwaarden,

$$\eta_0' /_{r=r_1} = \eta_0' /_{r=r_2} = 0 \quad (F.12)$$

$$\eta_0 A + \eta_0 \omega B + \eta_0'' E + \eta_0''' F /_{r=r_1} = \eta_0 A + \eta_0 \omega B + \eta_0'' E + \eta_0''' F /_{r=r_2} = 0$$

(voor herkomst en toelichting zie vergelijking (2.99) en opmerking behorende bij vergelijking (F.8) vermeld onder vergelijking (F.10).)

Bijlage G.

blz.

- G. Omzetting vierde-orde differentiaalvergelijking tot een stelsel van differentie-vergelijkingen. G.-1
- G.1. Inleiding. G.-1
- G.2. Bepaling differentie-vergelijking voor rij 2 en (n-1) van matrices A en B. G.-4
- G.4. Bepaling differentie-vergelijking voor rij 3 tot en met (n-2) van matrices A en B. G.-7

G. Omzetting vierde orde differentiaal-vergelijking tot een stelsel van n differentie-vergelijkingen.

G.1. Inleiding.

In de I.M.S.L. bibliotheek bevinden zich procedures die de eigenwaarden en eigenvectoren kunnen bepalen van een stelsel vergelijkingen, van de gedaante $A\underline{x} = \lambda B\underline{x}$, hierin stellen A en B complexe matrice's, \underline{x} een vector en λ de gezochte eigenwaarden voor.

Om deze procedures te kunnen toe passen is het noodzakelijk, dat de vierde orde differentiaal-vergelijking (F.11) en de daarbij behorende randvoorwaarden (F.12) samengesteld en geschreven worden als n differentie-vergelijkingen.

Hiertoe wordt vergelijking (F.11) herschreven in,

$$\eta_0 \dot{G} + \eta_0' \dot{J} + \eta_0'' \dot{L} + \eta_0''' \dot{N} + \eta_0'''' \dot{O} = -\omega \{ \eta_0 I + \eta_0' K + \eta_0'' M \} \quad (G.1)$$

en de randvoorwaarden in,

$$\eta_0' /_{r=r_1} = \eta_0' /_{r=r_2} = 0$$

$$\{ \eta_0 A + \eta_0'' E + \eta_0'''' F = -\omega \eta_0 B \}_{r=r_1, r_2} \quad (G.2)$$

Deze vergelijking en randvoorwaarden dienen als uitgangspunt voor de in paragraaf G.2. t/m G.4. afgeleide differentie-vergelijkingen, welke op hun beurt geschreven worden in een vorm geschikt om in $A\underline{x} = \lambda B\underline{x}$ in te vullen.

N.B. In $A\underline{x} = \lambda B\underline{x}$ wordt \underline{x} door η , de matrice's A en B door de coëfficiënten G t/m O plus randvoorwaarden en de eigenwaarden λ door $-\omega$.

G.2. Bepaling differentie-vergelijkingen voor rij
l en n van matrice's A en B.

Rij l en n van de matrice's A en B worden gevormd door de randvoorwaarden (F.12) in differentie-vorm te schrijven en samen te stellen.

Hiertoe worden de roosterpunten η_2 , η_3 en η_4 in Taylor-reeksen ten opzichte van η_1 ontwikkeld tot,

$$\eta_2 = \eta_1 + \frac{\Delta^2}{2} \eta_1'' + \frac{\Delta^3}{6} \eta_1''' + \frac{\Delta^4}{24} \eta_1^{IV} \quad (G.3)$$

$$\eta_3 = 1* \quad 4* \quad 8* \quad 16* \quad (G.4)$$

$$\eta_4 = 1* \quad 9* \quad 27* \quad 81* \quad (G.5)$$

wordt nu vergelijkingen (G.3) t/m (G.5) in matrix vorm geschreven en uitgewerkt,

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \eta_2 - \eta_1 = q_1 \\ 4 & 8 & 16 & \eta_3 - \eta_1 = q_2 \\ 9 & 27 & 81 & \eta_4 - \eta_1 = q_3 \end{array} \xrightarrow{\text{uitwerking}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & q_1 \\ -12 & -8 & 0 & q_2 - 16q_1 \\ 0 & -6 & 0 & q_3 - 81q_1 - 6(q_2 - 16q_1) \end{array} \quad (G.6)$$

als oplossing voor η_1''' en η_1'' wordt dan gevonden,

$$\frac{\Delta^3}{6} \eta_1''' = -\frac{1}{6} q_3 + \frac{21}{6} q_1 + (q_2 - 16q_1) = -\frac{1}{6} q_3 + q_2 - \frac{15}{6} q_1 \quad (G.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2}{2} \eta_1'' &= -\frac{1}{12} \{ q_2 - 16q_1 + 8[-\frac{1}{6} q_3 + \frac{21}{6} q_1 + (q_2 - 16q_1)] \} = \\ &+ \frac{1}{9} q_3 - \frac{9}{12} q_2 + 3q_1 \quad (G.8) \end{aligned}$$

door nu voor $q_1 = \eta_2 - \eta_1$, voor $q_2 = \eta_3 - \eta_1$ en voor $q_3 = \eta_4 - \eta_1$ in te vullen kan η_1''' en η_1'' geschreven worden als,

$$\eta_1''' = \{-\eta_4 + 6\eta_3 - 15\eta_2 + 10\eta_1\} / \Delta^3 \quad (G.9)$$

$$\eta_1'' = \left\{ \frac{2}{9} \eta_4 - \frac{9}{6} \eta_3 + 6 \eta_2 - \frac{85}{18} \eta_1 \right\} / \Delta^2 \quad (G.10)$$

Worden nu de randvoorwaarden (F.12) te samen genomen, dan vindt men als differentiaal-vergelijking geldig voor rij 1 en n van matrice's A en B,

$$\eta_0''' F + \eta_0'' E + \eta_0 A = -\omega \eta_0 B \quad (G.11)$$

Door de vergelijkingen (G.9) en (G.10) in vergelijking (G.11) in te vullen, wordt voor rij 1 van matrice's A en B gevonden,

$$\begin{aligned} \eta_1 \left\{ + \frac{F_{10}}{\Delta^3} - \frac{E_{25}}{\Delta^2 18} + A \right\} + \\ \eta_2 \left\{ - \frac{F_{15}}{\Delta^3} + \frac{E_6}{\Delta^2} \right\} + \\ \eta_3 \left\{ + \frac{F_6}{\Delta^3} - \frac{E_9}{\Delta^2 6} \right\} + \\ \eta_4 \left\{ - \frac{F}{\Delta^3} + \frac{E_2}{\Delta^2 9} \right\} &= -\omega \eta_1 B \end{aligned} \quad (G.12)$$

en voor rij n,

$$\begin{aligned} \eta_n \left\{ - \quad - \quad + \right\} + \\ \eta_{n.1} \left\{ + \quad + \quad \right\} + \\ \eta_{n.2} \left\{ - \quad - \quad \right\} + \\ \eta_{n.3} \left\{ + \quad + \quad \right\} &= -\omega \eta_n B \end{aligned} \quad (G.13)$$

waarin alleen het verschil met vergelijking (G.12) is aangegeven.

G.3. Bepaling differentie-vergelijkingen voor rij 2 en (n-1) van matrice's A en B.

Rij 2 en (n-1) van de matrice's A en B worden gevormd door de vierde orde differentiaal-vergelijking (F.11) als differentie-vergelijking te schrijven, waarbij gebruik wordt gemaakt van een asymmetrisch differentie-molekuul.

Uitgangsvergelijking (F.11) is,

$$\eta_0 G + \eta_0' J + \eta_0'' L + \eta_0''' N + \eta_0'''' O = - \omega \{ \eta_0 I + \eta_0' K + \eta_0'' M \} \quad (G.14)$$

Hiertoe worden de roosterpunten η_1 , η_3 , η_4 en η_5 in Taylorreeksen ten opzichte van η_2 ontwikkeld tot,

$$\eta_1 = \eta_2 - \Delta \eta' + \frac{\Delta^2}{2} \eta'' - \frac{\Delta^3}{6} \eta''' + \frac{\Delta^4}{24} \eta''''$$

$$\eta_3 = \eta_2 + 1\eta + 1\eta + 1\eta + 1\eta$$

$$\eta_4 = \eta_2 + 2\eta + 4\eta + 8\eta + 16\eta$$

$$\eta_5 = \eta_2 + 3\eta + 9\eta + 27\eta + 81\eta \quad (G.15)$$

worden nu de vergelijkingen (G.15) in matrix vorm geschreven en uitgewerkt,

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 2 & \eta_3 + \eta_1 - 2\eta_2 = q_1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \eta_3 - \eta_1 = q_2 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & \eta_4 - \eta_2 = q_3 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & \eta_5 - \eta_2 = q_4 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{uitgewerkt}} \left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 2 & q_1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & q_3 - q_2 - 2q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & q_4 - \frac{3}{2}q_3 - \frac{9}{2}q_2 - 4(q_3 - q_2 - 2q_1) \end{array} \right|$$

als oplossing voor η_2' , η_2'' , η_2''' en η_2'''' wordt dan gevonden, (G.16)

$$24 \frac{\Delta^4}{24} \eta_2'''' = q_4 - 4q_3 + \frac{5}{2}q_2 + \frac{7}{2}q_1 \quad (G.17)$$

$$6 \frac{\Delta^3}{6} \eta_2''' = q_3 - q_2 - 2q_1 - \frac{1}{4}q_4 + 2q_3 - \frac{5}{4}q_2 - \frac{7}{4}q_1 = -\frac{1}{2}q_4 + 3q_3 - \frac{9}{4}q_2 - \frac{15}{4}q_1 \quad (G.18)$$

$$2 \frac{\Delta^2}{2} \eta_2'' = q_1 - \frac{1}{12} q_4 + \frac{1}{3} q_3 - \frac{5}{24} q_2 - \frac{7}{24} q_1 = -\frac{1}{12} q_4 + \frac{1}{3} q_3 - \frac{5}{24} q_2 + \frac{17}{24} q_1 \quad (\text{G.19})$$

$$2 \Delta \eta_2' = q_2 + \frac{1}{6} q_4 - q_3 + \frac{3}{4} q_2 + \frac{5}{4} q_1 = \frac{1}{6} q_4 - q_3 + \frac{7}{4} q_2 + \frac{5}{4} q_1 \quad (\text{G.20})$$

door nu voor $q_1 \rightarrow \eta_5 + \eta_2$, voor $q_2 \rightarrow \eta_5 - \eta_1$, voor $q_3 \rightarrow \eta_4 - \eta_2$ en voor $q_4 \rightarrow \eta_5 - \eta_2$ in te vullen, kan η_2' , η_2'' , η_2''' en η_2'''' geschreven worden als,

$$\eta_2'''' = \{ \eta_5 - 4\eta_4 + 6\eta_3 - 4\eta_2 + \eta_1 \} / \Delta^4 \quad (\text{G.21})$$

$$\eta_2''' = \{ -\eta_5 + 6\eta_4 - 12\eta_3 + 10\eta_2 - 3\eta_1 \} / 2\Delta^3 \quad (\text{G.22})$$

$$\eta_2'' = \{ -\eta_5 + 4\eta_4 + 6\eta_3 - 20\eta_2 + 11\eta_1 \} / 12\Delta^2 \quad (\text{G.23})$$

$$\eta_2' = \{ \eta_5 - 6\eta_4 + 18\eta_3 - 10\eta_2 - 3\eta_1 \} / 12\Delta \quad (\text{G.24})$$

Als men de gevonden afgeleide (G.21) t/m (G.24) in de uitgangs-vergelijking (G.14) invult, krijgt men als differentievergelijking welke rij 2 in matrice's A en B vormd,

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \left\{ -\frac{3J}{12\Delta} + \frac{11L}{12\Delta^2} - \frac{3N}{2\Delta^3} + \frac{0}{\Delta^4} \right\} \\ + \eta_2 \left\{ -\frac{10J}{12\Delta} - \frac{20L}{12\Delta^2} + \frac{10N}{2\Delta^3} - \frac{40}{\Delta^4} \right\} \\ + \eta_3 \left\{ +\frac{18J}{12\Delta} + \frac{6L}{12\Delta^2} - \frac{12N}{2\Delta^3} + \frac{60}{\Delta^4} \right\} \\ + \eta_4 \left\{ -\frac{6J}{12\Delta} + \frac{4L}{12\Delta^2} + \frac{6N}{2\Delta^3} - \frac{40}{\Delta^4} \right\} \\ + \eta_5 \left\{ +\frac{J}{12\Delta} - \frac{L}{12\Delta^2} - \frac{N}{2\Delta^3} + \frac{0}{\Delta^4} \right\} \end{bmatrix} = -\omega * \begin{bmatrix} \eta_1 \left\{ -\frac{3K}{12\Delta} + \frac{11M}{12\Delta^2} \right\} \\ + \eta_2 \left\{ -\frac{10K}{12\Delta} - \frac{20M}{12\Delta^2} \right\} \\ + \eta_3 \left\{ +\frac{18K}{12\Delta} + \frac{6M}{12\Delta^2} \right\} \\ + \eta_4 \left\{ -\frac{6K}{12\Delta} + \frac{4M}{12\Delta^2} \right\} \\ + \eta_5 \left\{ +\frac{K}{12\Delta} - \frac{M}{12\Delta^2} \right\} \end{bmatrix} \quad (\text{G.25})$$

en voor rij (n-1),

$$\begin{bmatrix}
 \eta_n \{ & + & + & + & + & \} \\
 +\eta_{n-1} \{ & + & - & - & - & \} \\
 +\eta_{n-2} \{ & - & + & + & + & \} \\
 +\eta_{n-3} \{ & + & + & - & - & \} \\
 +\eta_{n-4} \{ & - & - & + & + & \}
 \end{bmatrix} = -\omega * \begin{bmatrix}
 \eta_n \{ & + & + & \} \\
 +\eta_{n-1} \{ & + & - & \} \\
 +\eta_{n-2} \{ & - & + & \} \\
 +\eta_{n-3} \{ & + & + & \} \\
 +\eta_{n-4} \{ & - & - & \}
 \end{bmatrix}$$

(G.26)

waarin alleen het verschil met vergelijking (G.25) is aangegeven.

G.4. Bepaling differentie-vergelijkingen voor rij 3 tot en met (n-2) van matrice's A en B.

Rij 3 t/m (n-2) van de matrice's A en B worden gevormd door de vierde orde differentiaal-vergelijking (F.11) als differentie-vergelijking te schrijven, waarbij gebruik wordt gemaakt van een 5-punts symmetrisch differentie-molekuul.

Uitgangsvergelijking (F.11) is,

$$\eta_0 G + \eta_0' J + \eta_0'' L + \eta_0''' N + \eta_0'''' O = -\omega \{ \eta_0 I + \eta_0' K + \eta_0'' M \} \quad (G.27)$$

Hiertoe worden de roosterpunten η_{i-2} , η_{i-1} , η_{i+1} en η_{i+2} in Taylorreeksen ten opzichte van η_i ontwikkeld tot,

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \Delta \eta_i' + \frac{\Delta^2}{2} \eta_i'' + \frac{\Delta^3}{6} \eta_i''' + \frac{\Delta^4}{24} \eta_i''''$$

$$\eta_{i+2} = \eta_i + 2\Delta + 4\Delta^2 + 8\Delta^3 + 16\Delta^4$$

$$\eta_{i-1} = \eta_i - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \Delta^4$$

$$\eta_{i-2} = \eta_i - 2\Delta + 4\Delta^2 - 8\Delta^3 + 16\Delta^4 \quad (G.28)$$

worden nu de vergelijkingen (G.28) in matrix vorm geschreven en uitgewerkt,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \end{array} & \begin{array}{c} \eta_{i+1} - \eta_i = q_1 \\ \eta_{i+2} - \eta_i = q_2 \\ \eta_{i-1} - \eta_i = q_3 \\ \eta_{i-2} - \eta_i = q_4 \end{array} & \begin{array}{c} \text{uitgewerkt} \\ \rightarrow \end{array} & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 - 2q_1 \\ q_3 + q_1 - (q_2 - 2q_1) \\ q_4 + 2q_1 - 3(q_2 - 2q_1) + \\ -2(q_3 + q_1 - (q_2 - 2q_1)) \end{array} \end{array}$$

als oplossing voor η_i' , η_i'' , η_i''' en η_i'''' wordt dan gevonden, (G.29)

$$-12 \frac{\Delta^3}{6} \eta_i''' = q_4 - 2q_3 - q_2 + 2q_1$$

$$-12 \frac{\Delta^4}{24} \eta_i^{IV} = -\frac{1}{2} q_4 + 2q_3 - \frac{1}{2} q_2 + 2q_1$$

$$2 \frac{\Delta^2}{2} \eta_i'' = -\frac{2}{24} q_4 + \frac{16}{12} q_3 - \frac{2}{24} q_2 + \frac{16}{12} q_1$$

$$\Delta \eta_i' = +\frac{1}{12} q_4 - \frac{8}{12} q_3 - \frac{1}{12} q_2 + \frac{8}{12} q_1 \quad (G.30)$$

door nu voor $q_1 \rightarrow \eta_{i+1} - \eta_i$, voor $q_2 \rightarrow \eta_{i+2} - \eta_i$, voor $q_3 \rightarrow \eta_{i+1} - \eta_i$ en voor $q_4 \rightarrow \eta_{i+2} - \eta_i$ in te vullen, kan η_i' , η_i'' , η_i''' en η_i^{IV} geschreven worden als,

$$\eta_i^{IV} = \{ \eta_{i+2} - 4\eta_{i+1} + 6\eta_i - 4\eta_{i-1} + \eta_{i-2} \} / \Delta^4$$

$$\eta_i''' = \{ -\frac{1}{2} \eta_{i+2} + \eta_{i+1} - \eta_i + \frac{1}{2} \eta_{i-1} \} / \Delta^3$$

$$\eta_i'' = \{ -\frac{1}{12} \eta_{i+2} + \frac{4}{3} \eta_{i+1} - \frac{30}{12} \eta_i + \frac{4}{3} \eta_{i-1} - \frac{1}{12} \eta_{i-2} \} / \Delta^2$$

$$\eta_i' = \{ +\frac{1}{12} \eta_{i+2} - \frac{8}{12} \eta_{i+1} + \frac{8}{12} \eta_i - \frac{1}{12} \eta_{i-1} \} / \Delta \quad (G.31)$$

Als men de gevonden afgeleide (G.31) in de uitgangsvergelijking (G.27) invult, krijgt men als differentievergelijkingen voor rij 3 t/m (n-2) van matrix A en B,

$$\begin{bmatrix} \eta_{i+2} \left\{ -\frac{7}{12\Delta} - \frac{L}{12\Delta^2} + \frac{N}{2\Delta^3} + \frac{0}{\Delta^4} \right\} \\ + \eta_{i+1} \left\{ +\frac{8J}{12\Delta} + \frac{4L}{3\Delta^2} - \frac{N}{\Delta^3} - \frac{40}{\Delta^4} \right\} \\ + \eta_i \left\{ G - \frac{30L}{12\Delta^2} + \frac{60}{\Delta^4} \right\} \\ + \eta_{i-1} \left\{ -\frac{8J}{12\Delta} + \frac{4L}{3\Delta^2} + \frac{N}{\Delta^3} - \frac{40}{\Delta^4} \right\} \\ + \eta_{i-2} \left\{ +\frac{7}{12\Delta} - \frac{L}{12\Delta^2} - \frac{N}{2\Delta^3} + \frac{0}{\Delta^4} \right\} \end{bmatrix} = -\omega \begin{bmatrix} \eta_{i+2} \left\{ -\frac{K}{12\Delta} - \frac{M}{12\Delta^2} \right\} \\ + \eta_{i+1} \left\{ +\frac{8K}{12\Delta} + \frac{4M}{3\Delta^2} \right\} \\ + \eta_i \left\{ I - \frac{30M}{12\Delta^2} \right\} \\ + \eta_{i-1} \left\{ -\frac{8K}{12\Delta} + \frac{4M}{3\Delta^2} \right\} \\ + \eta_{i-2} \left\{ +\frac{K}{12\Delta} - \frac{M}{12\Delta^2} \right\} \end{bmatrix}$$

(G.32)

Bijlage H.

blz.

- H.1. Bepaling toerenbereik topplaat en bodem. H.-1
- H.2. Boven grens van $(\omega_t - \omega_b)$. H.-1
- H.3. Ondergrens van $(\omega_t - \omega_b)$. H.-2
- H.4. De verhouding ω_t / ω_b voor laminaire stroming. H.-4
- H.5. De verhouding ω_t / ω_b voor turbulente stroming. H.-7

H.1. Bepaling toerenbereik topplaat en bodem.

De absolute grootte van dit toerenbereik wordt bepaald door de eis, dat er sprake moet zijn van een goed ontwikkeld bodemtransport. Als men eist dat er bodemtransport moet zijn, worden de grenzen van $(\omega_t - \omega_b)$ alleen nog bepaald door de korreldiameter waarbij men bodemtransport wenst.

Bij de bepaling van deze grenzen moet men bedenken dat; verlaging van het toerenbereik technisch eenvoudiger is dan verhoging en dat berekeningen naar de grenzen waarbij bodemtransport optreed meer gezien moeten worden als bepaling van de orde van grootte, dan als exacte berekening.

Uitgaande van de veronderstelling dat het gezochte bodemtransport nagenoeg samenvalt met het begin van beweging, is het mogelijk het diagram van Shields (zie figuur V) te gebruiken voor de bepaling van de boven- en ondergrens van $(\omega_t - \omega_b)$.

De bovengrens volgt dan uit de maximale D_{50} , (dit is de grootste D_{50} waarmee men wenst te stromen, vermeerderd met een overwaarde) de ondergrens wordt bepaald door die D_{50} , die de kleinste $(\omega_t - \omega_b)$ oplevert.

H.2. Bovengrens van $(\omega_t - \omega_b)$.

Uit de afleiding van V_o en V_r voor turbulente couette-stroming (zie bijlage A) blijkt, dat

$$u_* = \{ 0.4 (\omega_t - \omega_b) r \} / \{ \ln 4^2 / 8t \delta b \} \quad (H.1)$$

Ervan uitgaande dat er sprake is van een turbulente grenslaag, wordt aangenomen dat

$$\delta t = \delta b \approx \frac{1}{30} D_{50}$$

en tevens gesteld dat,

$$y = 0.05 \text{ m} \quad ; \quad r = 1 \text{ m} \quad ; \quad D_{50} = 2 \text{ mm}$$

dan volgt hieruit dat,

$$U_* = 3 \cdot 10^{-2} (\omega_t - \omega_b) \quad (H.2)$$

De dimensieloze Shields parameters zijn dan,

$$Re_* = \frac{U_* D_{50}}{\nu} = 60 (\omega_t - \omega_b) \quad (H.3)$$

$$U_*^2 / \{ \Delta g D_{50} \} = 0.028 (\omega_t - \omega_b)^2 \quad (H.4)$$

Worden deze parameters ook bepaald via het Shields-diagram, dan is

$$Re_* \approx 70$$

$$U_*^2 / \{ \Delta g D_{50} \} \approx 0.04 \quad (H.5)$$

De maximale waarde van $(\omega_t - \omega_b)$ wordt dan gevonden door (H.4) en (H.5) te combineren,

$$(\omega_t - \omega_b)_{max.} = 1.1 \text{ rad/s}$$

Daarbij is er van uitgegaan, dat

- 1 $r=1m$; daar echter r gevariëerd kan worden tot minimaal $r=0,5m$ moet het gevonden maximale toerental met een factor 2 vermenigvuldigd worden.
- 2 de overmaat aan korreldiameter D_{50} reeds is ingevoerd; zodat verwacht kan worden dat er sprake is van een goed ontwikkeld bodemtransport.

H.3. Ondergrens van $(\omega_t - \omega_b)$.

De vereiste ondergrens van $(\omega_t - \omega_b)$ moet worden bepaald, omdat het toerental van de aandrijfmotor niet helemaal tot nul regelbaar is. Ook hier worden weer turbulente grenslagen aangenomen en wordt,

$$\delta_t = \delta_b \approx \frac{1}{30} D_{50} = \frac{1}{30} \cdot 0,1 \text{ mm}$$

hiermee wordt,

$$U_* = \left\{ 0.4 (\omega_t - \omega_b) r \right\} / \left\{ 2 \ln \left\{ 304 / D_{50} \right\} \right\} = 2.110^{-2} (\omega_t - \omega_b) \quad (H.6)$$

De dimensieloze Shields parameters zijn dan,

$$Re_x = U_* \cdot D_{50} / \nu = 2.1 (\omega_t - \omega_b)$$

$$U_*^2 / \{g \Delta D_{50}\} = 0.28 (\omega_t - \omega_b)^2$$

Worden deze parameters ook bepaald via het Shields-diagram, dan is

$$Re_x \approx 1.2$$

$$U_*^2 / \{g \Delta D_{50}\} \approx 0.09 \quad (H.7)$$

De minimale waarde van $(\omega_t - \omega_b)$ wordt dan gevonden door (H.6) en (H.7) te combineren, tot

$$(\omega_t - \omega_b)_{min} = 0.56 \text{ rad/s}$$

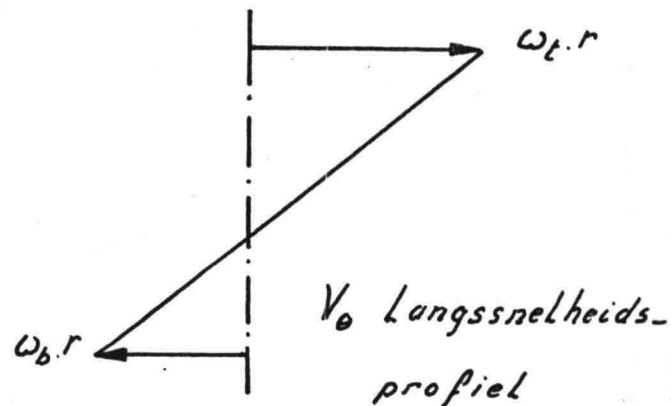
Opmerking: Deze ondergrens bleek niet van belang, aangezien de motor in staat bleek zo langzaam te draaien dat er sprake was van laminaire stroming.

H.4. De verhouding ω_t/ω_b voor laminaire stroming.

Omdat de vergelijkingen voor laminaire stroming veel eenvoudiger oplosbaar zijn dan die voor turbulente stroming, wordt ω_t/ω_b eerst bepaald voor laminaire stroming. Wordt hiertoe als uitgangspunt genomen, dat het langs-snelheidsprofiel gelijk is aan,

$$V_\theta = \omega_b \cdot r \left(1 - \frac{z}{y}\right) + \omega_t \cdot r \frac{z}{y}$$

(H.8)



figuur H.1

dan kan de tweede afgeleide van V_r gevonden worden door in de bewegings-vergelijking in r -richting;

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta r} = \frac{V_\theta^2}{r} + \nu \frac{\delta^2 V_r}{\delta z^2} \quad (H.9)$$

V_θ te elimineren, door vergelijking (H.8) in vergelijking (H.9) in te voeren, hetgeen leidt tot

$$\frac{\delta^2 V_r}{\delta \xi^2} = \frac{y^2}{\nu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta r} - \omega_b^2 (1-\xi)^2 - 2\omega_t \omega_b r (1-\xi)\xi - \omega_t^2 r \xi^2 \right\} \quad (H.10)$$

V_r wordt dan gevonden door vergelijking (H.10) twee maal naar ξ te integreren,

$$V_r = \frac{y^2}{\nu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta r} \frac{\xi^2}{2} - \omega_b^2 r \left(\frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2} \right) - 2\omega_t \omega_b r \left(\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^4}{12} \right) - \omega_t^2 r \frac{\xi^4}{12} \right\} + C_1 \xi + C_2 \quad (H.11)$$

worden de randvoorwaarden

$$V_r / \xi = 0 \quad : \quad V_r / \xi = 1 = 0 \quad (H.12)$$

, dan wordt voor de integratie constante C_1 en C_2 gevonden,

$$C_1 = -\frac{y^2}{\nu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta r} \frac{1}{2} - \omega_b^2 \frac{r}{4} - 2\omega_t \omega_b \frac{r}{12} - \omega_t^2 \frac{r}{12} \right\}$$

$$C_2 = 0$$

Door C_1 en C_2 in vergelijking (H.11) in te vullen, wordt voor V_r gevonden,

$$V_r = \frac{y^2}{\nu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta r} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi}{2} \right) - \omega_b^2 r \left(\frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi}{4} \right) \right. \\ \left. - 2\omega_t \omega_b r \left(\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi}{12} \right) - \omega_t^2 r \left(\frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi}{12} \right) \right\} \quad (H.13)$$

Gebruikt men nu het gegeven dat $\bar{V}_r = 0$, dan gaat vergelijking (H.13) over in

$$0 = \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta r} \left(\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{4} \right) - \omega_b^2 r \left(\frac{\xi^5}{60} - \frac{\xi^4}{12} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2} \right) \right. \\ \left. - 2\omega_t \omega_b r \left(\frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^5}{60} - \frac{\xi^2}{24} \right) - \omega_t^2 r \left(\frac{\xi^5}{60} - \frac{\xi^2}{24} \right) \right\} / \xi = 1$$

Voor de druk-gradient vindt men dan,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta \bar{p}}{\delta r} = 12 \left\{ -\omega_b^2 r \left(-\frac{1}{40} \right) - 2\omega_t \omega_b r \left(-\frac{1}{60} \right) - \omega_t^2 r \left(-\frac{1}{40} \right) \right\} \quad (H.14)$$

door de druk-gradient (H.14) in vergelijking (H.13) in te vullen, wordt als resultaat voor V_r gevonden,

$$V_r = \frac{y^2}{\nu} \left\{ -\omega_b^2 r \left(\frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi^3}{3} + \frac{7\xi^2}{20} - \frac{\xi}{10} \right) - 2\omega_t \omega_b r \left(-\frac{\xi^4}{12} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{10} + \frac{\xi}{60} \right) \right. \\ \left. - \omega_t^2 r \left(\frac{\xi^4}{12} - \frac{3\xi^2}{20} + \frac{\xi}{15} \right) \right\} \quad (H.15)$$

Bij het ontwerpen van het fysisch-model komt als ontwerp-eis naar voren, dat

$$\frac{\delta V_r}{\delta \xi} \Big|_{\xi=0} = 0$$

wordt hiertoe vergelijking (H.15) naar ξ gedifferentieerd, dan vindt men

$$\frac{\delta V_r}{\delta \xi} = \frac{4^2}{2} \left\{ -\omega_b^2 r \left(\frac{\xi^3}{3} - \xi^2 + \frac{7\xi}{10} - \frac{1}{10} \right) - 2\omega_t \omega_b r \left(-\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi}{5} + \frac{1}{60} \right) - \omega_t^2 r \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{3\xi}{10} + \frac{1}{15} \right) \right\} \quad (\text{H.16})$$

, wordt in vergelijking (H.17) de ontwerp-eis ingevoerd, dan vindt men als algebraïsche-vergelijking,

$$3\omega_b^2 - \omega_t \omega_b - 2\omega_t^2 = 0 \quad (\text{H.17})$$

met als oplossingen,

$$1 \quad \omega_t / \omega_b = -3/2$$

$$2 \quad \omega_t / \omega_b = 1 \quad (\text{H.18})$$

waarin de tweede een triviale oplossing is.

Wordt nu de eerste oplossing van (H.18) in vergelijking (H.15) ingevoerd, dan is

$$V_r = \frac{4^2}{2} \frac{\omega_b^2 r^2}{r} \frac{5}{108} \left\{ \xi^2 (\xi - 1) (-5\xi + 3) \right\} \quad (\text{H.19})$$

Wordt de eerste oplossing van (H.18) in vergelijking (H.8) ingevoerd, dan is

$$V_0 = \omega_b r - \frac{5}{2} \omega_b r \xi$$

Wordt dit genormeerd met $\omega_b \cdot r$, dan is

$$U_0 = \frac{V_0}{\omega_b \cdot r} = 1 - \frac{5}{2} \xi$$

H.5. De verhouding ω_t/ω_b voor turbulente stroming.

In bijlage A en paragraaf 2.1. zijn verticale snelheids-profielen van V_θ en V_r voor turbulente couette-stroming afgeleid, worden deze dimensieloos gemaakt, door met

$$2 / \{r(\omega_t - \omega_b)\}^2$$

te vermenigvuldigen en te stellen dat,

$$\alpha = \frac{(\omega_t + \omega_b)}{(\omega_t - \omega_b)} \quad (H.20)$$

dan wordt voor het langs-snelheids-profiel gevonden

$$U_\theta = \frac{V_\theta}{0.5r(\omega_t - \omega_b)} = \alpha + f(\zeta) \quad (H.21)$$

en voor het dwars-snelheids-profiel

$$U_r = \frac{V_r}{0.5r(\omega_t - \omega_b)} = \frac{\ln(\lambda_t \lambda_b)}{2K^2} \frac{4}{r} \left\{ \alpha^2 g_1(\zeta) + 2\alpha g_2(\zeta) + g_3(\zeta) \right\} \quad (H.22)$$

waarin g_1 , t/m g_3 functies van ζ zijn.

Opmerking; De functie g_1 moet identiek nul zijn,

dit is nodig omdat α^2 geen toevoeging aan U_r kan leveren, aangezien α alleen een evenwijdige verschuiving t.o.v. de verticale nul-as van U_θ ten gevolge heeft. Het gevolg hiervan is dat een deel van de druk-gradient evenwicht maakt met de term waarin α^2 , waardoor $g_1 = 0$ is.

Worden de volgende grootheden gedefinieerd,

$$B = \ln(\lambda_b \lambda_t) + \ln \lambda_b \ln \lambda_t$$

$$G = \int_{\lambda_b}^{\lambda_t} f(\zeta) d\zeta$$

$$H = \int_{\lambda_b}^{1-\lambda_t} \frac{d\zeta}{\zeta(1-\zeta)} \int_{\lambda_b}^{\zeta} f^2(\zeta) d\zeta$$

$$\bar{H} = \int_{\lambda_b}^{1-\lambda_t} d\xi \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \int_{\lambda_b}^{\xi} f^2(\xi) d\xi$$

$$H_{\xi} = \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \int_{\lambda_b}^{\xi} f^2(\xi) d\xi$$

$$K = \int_{\lambda_b}^{1-\lambda_t} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \int_{\lambda_b}^{\xi} f(\xi) d\xi$$

$$\bar{K} = \int_{\lambda_b}^{1-\lambda_t} d\xi \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \int_{\lambda_b}^{\xi} f(\xi) d\xi$$

$$K_{\xi} = \int_{\lambda_b}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)} \int_{\lambda_b}^{\xi} f(\xi) d\xi$$

dan volgt daaruit, dat

$$g_2(\xi) = K_{\xi} + \frac{\ln \xi}{B} \{ K + \ln \lambda_t \cdot \bar{K} \} +$$

$$\frac{\ln(1-\xi)}{B} \{ -(1 + \ln \lambda_b) K + \ln \lambda_b \cdot \bar{K} \} +$$

$$\frac{\ln \lambda_b}{B} \{ -K - \ln \lambda_t \cdot \bar{K} \} \quad (H.23)$$

Opmerking: De functie $g_3(\xi)$ wordt gevonden door in vergelijking (H.23) voor $K \Rightarrow H$, voor $\bar{K} \Rightarrow \bar{H}$ en voor $K_{\xi} \Rightarrow H_{\xi}$ te schrijven.

Bij het ontwerpen van het fysisch-model komt als ontwerp-eis naar voren, dat

$$\frac{\delta V_r}{\delta \xi} \Big|_{\xi=\lambda_b} = 0$$

hieruit volgt, dat

$$\xi(1-\xi) \left\{ 2 \frac{\delta g_2}{\delta \xi} + \frac{\delta g_3}{\delta \xi} \right\} = 0$$

Wordt dit uitgerekend voor het deel waarin g_2 voorkomt, dan vindt men

$$\xi(1-\xi) \frac{\delta g_2}{\delta \xi} = \xi + \frac{1-\xi}{B} \{ K + \ln \lambda_t \cdot \bar{K} \} +$$

$$-\frac{\xi}{B} \{ -(1 + \ln \lambda_b) K + \ln \lambda_b \cdot \bar{K} \} \quad (H.24)$$

Opmerking: De term waarin g_3 voorkomt wordt op gelijke wijze als hiervoor gevonden. Opgelet dient te worden dat ook de grootte G hierbij verandert (f in \bar{f}).

Worden de hiervoor staande resultaten samengesteld, dan vindt men voor

$$2 \alpha = - \frac{[\int H + \ln \lambda_t \cdot \bar{H}] - \lambda_b [\int - (1 + \ln \lambda_b) H + \ln \lambda_b \cdot \bar{H}]}{[\int K + \ln \lambda_t \cdot \bar{K}] - \lambda_b [\int - (1 + \ln \lambda_b) K + \ln \lambda_b \cdot \bar{K}]} \quad (H.25)$$

Wordt vergelijking (H.20) herschreven, tot

$$\omega_t / \omega_b = - (1 - \alpha) / (1 + \alpha) \quad (H.26)$$

dan kan door vergelijking (H.25) en (H.26) te combineren ω_t / ω_b gevonden worden.

Bijlage I.

blz.

- I. Eendimensionaal energie-dichtheidsspectrum
(frekwenties). I.-1

I. Eéndimensionaal energie-dichtheidsspectrum (frekwenties).

Stel dat het signaal $u_1(t)$ wordt geschreven in de vorm van een Fourier-integraal,

$$u_1(t) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} a(n) e^{-i2\pi nt} dn$$

waarin a_n de amplitude is van de golf met frekwentie n . Dan geldt;

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} u_1(t) e^{+i2\pi nt} dt$$

Omdat de meettijd τ eindig is, wordt dit benaderd door;

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) e^{+i2\pi nt} dt$$

In een ééndimensionaal stromingsveld is \bar{u}_1^2 evenredig met de hoeveelheid kinetische energie in de x ,-richting, gelijk aan de oppervlakte van het energiedichtheidsspectrum.

$$\bar{u}_1^2 = \int_0^{\infty} E_1(n) dn$$

waarin $E_1(n)$ het ééndimensionale energiedichtheidsspectrum is. Het geeft aan hoeveel energie er in de golven met frekwenties tussen n en $n+\Delta n$ zit.

We kunnen nu bewijzen, dat geldt

$$E_1(n) = \frac{4\pi^2 |a(n)|^2}{\tau}$$

ofwel $a(n) = C \sqrt{E_1(n)}$

waarin C een constante is. Analooq hiearaan kunnen we hiervoor de bodemconfiguratie schrijven.

Volgens deze methode kan dus de amplitude van een verstoring met een bepaalde frekwentie, zoals die in het fysisch model voorkomt, bepaald worden uit de opgemeten energiedichtheidsspectra.

Bijlage J.

blz.

J.	Schuifspanningsmeting.	J.-1
J.1.	Inleiding.	J.-1
J.2.	Meetprincipe schuifspanningsmeter.	J.-1
J.3.	IJking.	J.-2
J.4.	Dynamische ijking.	J.-3
J.5.	Berekening ijkfactor.	J.-4
J.6.	Onderzoek spleetvulling.	J.-5
J.7.	Omschrijving proef schuifspanningsmeter.	J.-5
J.8.	Schuifspanningsmeting over een lange periode met bewegende bodem.	J.-6
J.9.	Vermogenmeting aandrijfmotor.	J.-7

J. Schuifspanningsmeting.

J.1. Inleiding.

In de stabiliteitsanalyse worden zowel transport- als schuifspanningstermen, alsmede verstoringen daarop, omgewerkt naar de schuifspanning;

$$\tau = \rho \left(\frac{0.4r(\omega_t - \omega_b)}{\ln \left(\frac{y_0^2}{\delta_t \delta_b} \right)} \right)^2 \quad (J.1)$$

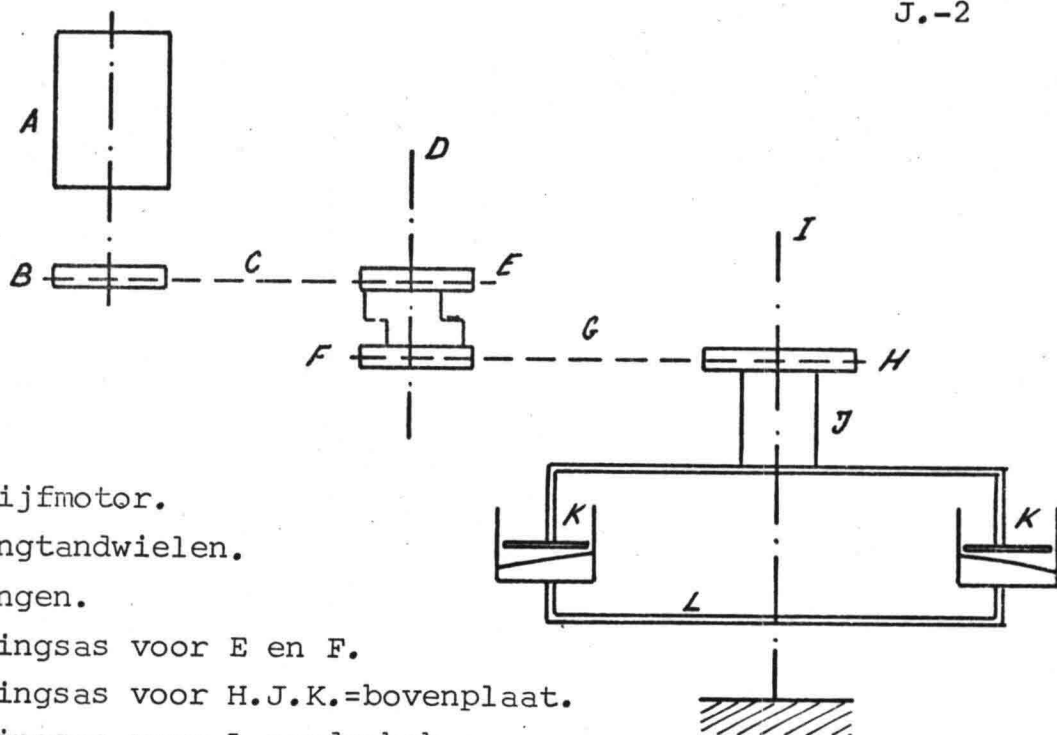
gebaseerd op een langsstromingsprofiel voor couette-stroming, opgesteld door onder andere Reichardt (zie bijlage A).

Als men stelt dat de totale schuifspanning is opgebouwd uit een deel dat veroorzaakt wordt door de korrels (τ_{korrel}) en een deel dat veroorzaakt wordt door de beddingvormen ($\tau_{\text{beddingvorm}}$) dan vertegenwoordigt vergelijking (J.1) alleen τ_{korrel} . Als τ_{totaal} benaderd wordt door (J.1) moet men dus een indruk hebben van de grootte van de fout die men maakt door de ruwheid t.g.v. beddingvormen 'niet' mee te nemen. Metingen van de totale schuifspanning in het model zouden hier wellicht inzicht in kunnen verschaffen. Verder zijn deze metingen van belang om inzicht te krijgen in:

- waarom ribbels, duinen en putten ontstaan,
- hoe ze zich ontwikkelen,
- hoe het daarmee gepaard gaande verloop van de schuifspanning in de tijd is.

J.2. Meetprincipe schuifspanningsmeter.

De aandrijfmotor A (zie schets), brengt via kettingtandwiel B en ketting C een toerental en koppel over op kettingtandwiel E. Kettingtandwielen E en F zijn vrijdraaiend op as D bevestigd en doorgekoppeld d.m.v. een veer. Deze veer wordt verder uitgerekt naarmate het over te brengen koppel toeneemt. Uitrekking van de veer houdt in dat het kettingtandwiel F een hoekverdraaiing t.o.v. kettingtandwiel E krijgt. Deze hoekverdraaiing wordt via een aantal armpjes, een potentiometer, sleepringen en een voeding (zie figuur VIII) meetbaar gemaakt als spanning, die d.m.v. een ijkfactor kan worden omgezet in een koppel.



- A aandrijfmotor.
 B.E.F.H. kettingtandwielen.
 C.G. kettingen.
 D. draaiingsas voor E en F.
 I. draaiingsas voor H.J.K.=bovenplaat.
 J. draaiingsas voor L.=onderbak.

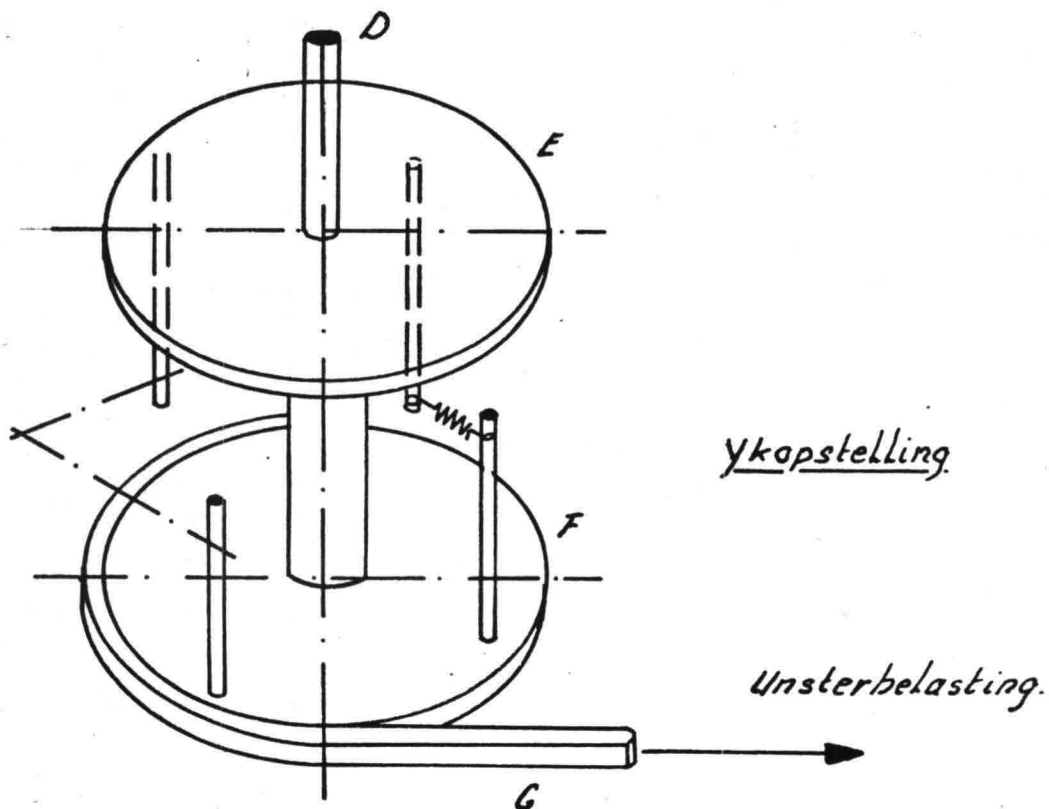
Het koppel dat men meet, bestaat uit een aantal componenten:

1. Koppel t.g.v. dynamische wrijving van de bovenplaat H.J.K. en de ketting G.
2. Koppel t.g.v. dynamische wrijving in de meter.
3. Koppel t.g.v. spanningsoverdracht tussen topplaat K en wanden L (sterk afhankelijk van spleetvulling).
4. Koppel t.g.v. de zijwanden van de onderbak.
5. Koppel t.g.v. de bodem van de onderbak.

In formulevorm weergegeven:

$$K_{\text{meet}} = K_{\text{dynam.}} + K_{\text{spleetv}} + K_{\text{wanden}} + K_{\text{bodem}}$$

J.3. IJking.



Omdat het niet eenvoudig mogelijk is de meter te ijken terwijl deze draait, is gekozen voor ijking als het geheel stilstaat. (statische ijking genoemd.)

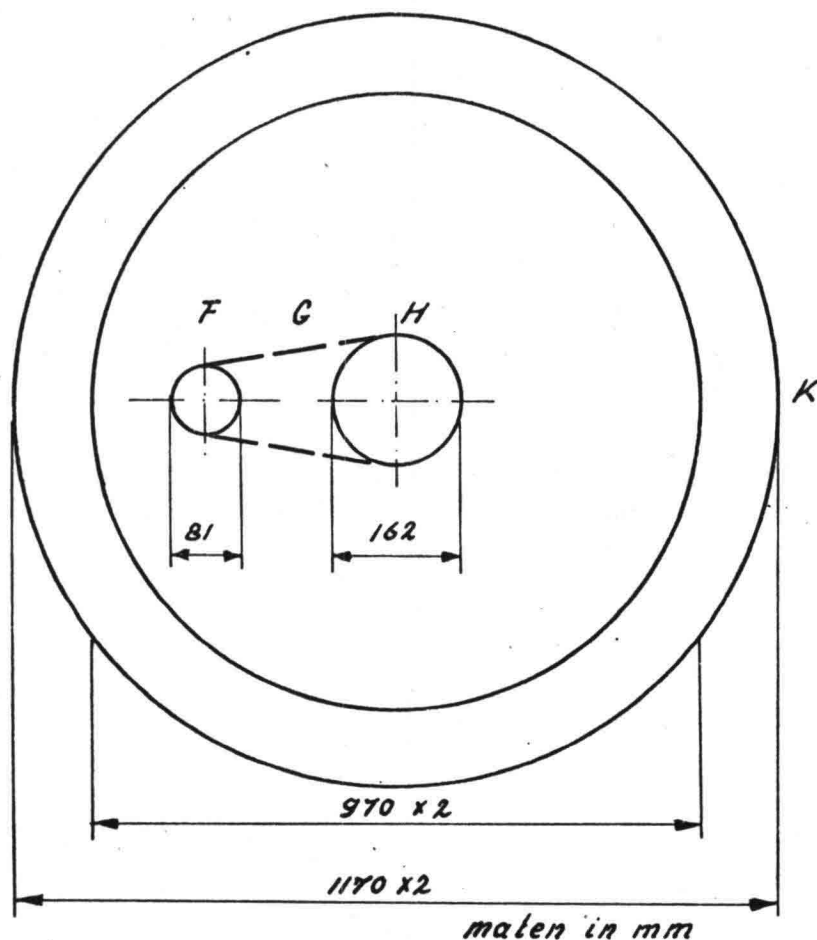
IJking gebeurt nu door ketting G los te maken van kettingwiel H en om kettingwiel F heen te leggen, (zie schets). Aan het losse eind wordt een unster bevestigd. Kettingtandwiel E wordt vastgezet door de aandrijfmotor te blokkeren. Als nu de unster belast wordt, dan hoort daarbij een hoekverdraaiing van F t.o.v. E, ofwel een bepaalde spanning van de spanningsdelen waarvan de bovengenoemde potentiometer, die dan ook een hoekverdraaiing heeft, een component is. Door dit voor een aantal unsterbelastingen te doen, ontstaat een ijklijn, waaruit een ijkfactor voor statische belasting te bepalen is. (zie figuur X). Verondersteld wordt nu dat de hoek van deze ijklijn met de basis in statische en dynamische omstandigheden gelijk zijn.

J.4. Dynamische ijking.

Deze ijking is nodig om te bepalen welk deel van het opgemeten koppel nodig is om de bovenplaat H.J.K. te laten draaien.

Deze ijking wordt uitgevoerd alvorens de proef gedaan wordt, (omdat de ijkwaarde van het toerental afhankelijk is), en gebeurt door het geheel van bovenplaat, meter en motor (A t/m K) vrij in de lucht te laten draaien. (waarbij aangenomen wordt dat lucht nagenoeg geen wrijving uitoefent op de bovenplaat.)

Het meetresultaat van de meter wordt via een schrijver geregistreerd, hieruit wordt het gemiddelde bepaald en vermenigvuldigd met de ijkfactor, waardoor $K_{\text{dynamisch}}$ wordt gevonden. Hetgeen een correctie is op het opgemeten koppel K_{meet} .

J.5. Berekening ijkfactor.

Uit de grafiek (figuur X), blijkt, dat variatie van de kettingkracht van 0.N tot 66.5N overeenkomt met een spanningsvariatie van -0.400V tot +0.400V. Op de schrijver komt dit spanningsverloop overeen met een registratieverloop van 34mm. De arm van het koppel dat ontstaat door de schuifspanningen werkzaam op de bovenplaat, is;

$$z = \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} r \cdot 2\pi r \, dr$$

waarin $r_1 = 0.97\text{m}$ en $r_2 = 1.17\text{m}$.

hieruit volgt dat $z = 1.073\text{m}$ en dat het oppervlak van de bovenplaat gelijk is aan; $\pi(r_2^2 - r_1^2) = 1.345\text{m}^2$

De ijkfactor die overeenkomt met 1mm schrijverregistratie, is dan in N/m ,

$$\text{ijkfactor} = \frac{66.5 \text{ N}}{34 \text{ mm}} \cdot \frac{162}{1170.2} \cdot \frac{1}{1.345 \text{ m}^2}$$

met als resultaat dat de ijkfactor = 0.1098N/m^2 / mm registratie verloop.

J.6. Onderzoek spleetvulling.

Tussen bovenplaat en wanden bevindt zich een spleet die minstens 4 mm water moet bevatten om geen lucht onder de bovenplaat te laten komen. Als gevolg van deze vulling van de spleet ontstaat er echter een extra koppel op de bovenplaat, waardoor de gemeten τ afwijkt van τ_{bodem} . Om nu deze afwijking af te schatten worden twee series metingen gedaan met een verschillende spleetvulling, onder overigens gelijke omstandigheden. (respectievelijk 8- en 16.mm) (zie figuur XXXIV voor de resultaten). Uit deze metingen blijkt dat bij een omwentelingstijd van de bovenplaat gelijk aan 6 seconden een spleetvulling van 16.mm en een aflezingsverschil op de schrijverregistratie optreed van 2. mm.

Wordt nu verondersteld dat het koppel afhankelijk is van het toerental van de bovenplaat ($2\pi/T$) in het kwadraat, dan is;

$$K_{spleetvulling} = S \frac{2}{16} \frac{36}{T^2} * ijkfactor = 4.5 \frac{S}{T^2} * ijkfactor$$

waarin,

S- de spleetvulhoogte en

T- de tijd nodig voor 1 omwenteling van de bovenplaat bij de desbetreffende proef is.

J.7. Omschrijving proef schuifspanningsmeter.

Bij het begin van elke proef wordt eerst het gewenste toerental en de gewenste diepte ingesteld. Na instelling wordt de bodem vlak afgestroken op de methode zoals omschreven in bijlage K, teneinde elke proef met een ongestoorde bodem te beginnen. Als bovenstaande voorbereidingen zijn uitgevoerd, wordt de schrijver geijkt met de koppelmeter d.m.v. de instelpotentiometer. (zie figuur VIII) Hiertoe wordt de spanning op -0.400V ingesteld, in de situatie, dat de veren van de koppelmeter netspanningsloos zijn. (is gelijk aan het nulpunt van de koppelmeter.)

Deze ingestelde situatie wordt op de schrijveruitvoer geregistreerd

Met de hand wordt nu de bovenplaat zodanig bewogen, dat de veren uitgerekt worden en de spanning verloopt via 0 naar +0.400V, ook dit wordt op de schrijver geregistreerd. Daar de ijkgrafiek loopt van +0.400V tot -0.400V, is nu de schrijverregistratie in mm. registratieverloop gekoppeld aan het schuifspanningsverloop in N/m^2 . De proef kan nu gestart worden. Als eerste wordt de schrijver aangezet, daarna de bovenplaat.

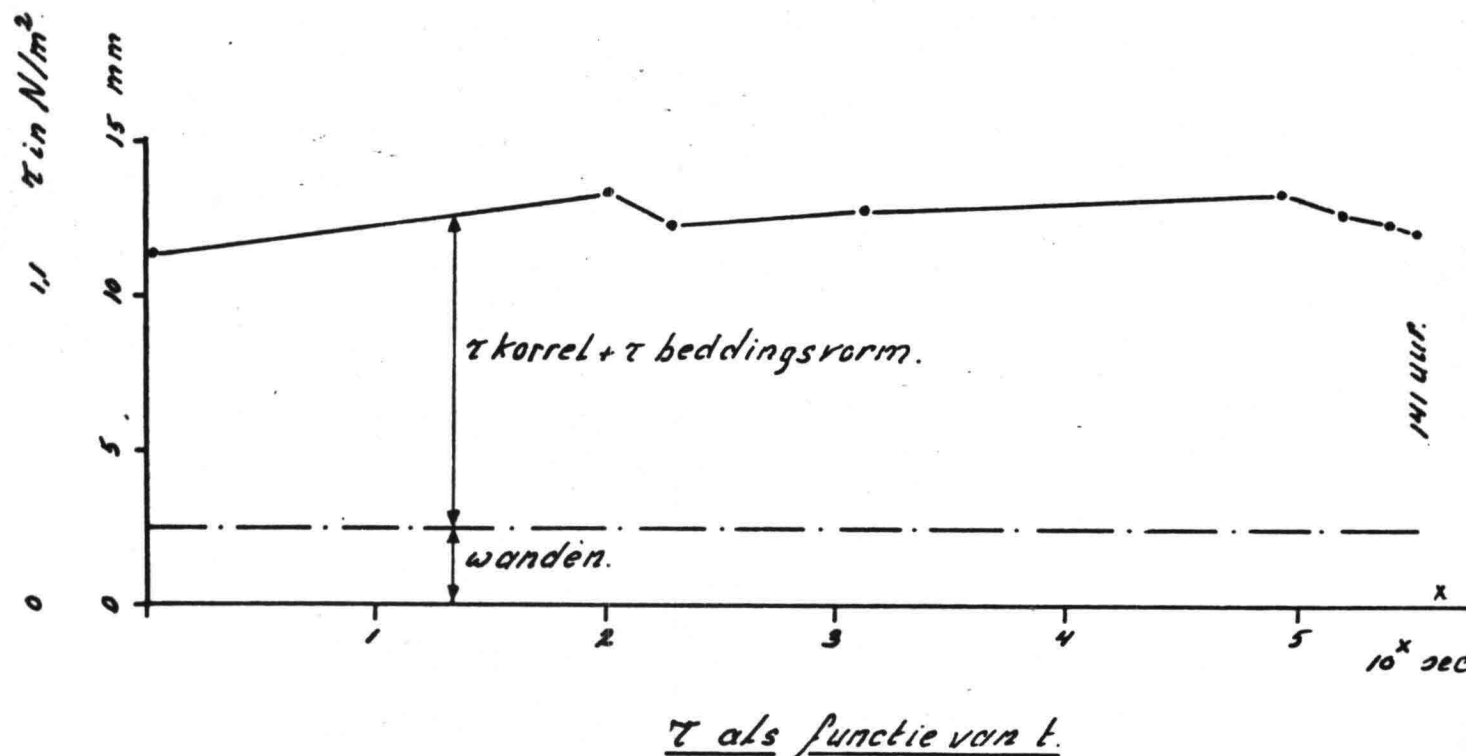
Tenslotte moet opgemerkt worden, dat registratie alleen heeft plaatsgevonden op kenmerkende momenten tijdens de proef, zoals:

- begin van beweging, vlakke bodem,
- het ontstaan van ribbels,
- het ontstaan van het bodemdwaarsverhang,
- de eindsituatie.

J.8. Schuifspanningsmeting over een lange periode met een bewegende bodem.

Om na te gaan hoe het verloop van τ_{bodem} in de tijd is, wordt een proef uitgevoerd bij $\bar{y}_0 = 0.06m$, $\omega_t = 0.58 \text{ rad/s}$ en $\omega_b = 0 \text{ rad/s}$ met een vrij bewegende bodem, waarbij de bodem bestond uit zand met de zeeffkromme zoals weergegeven in figuur XXVI, met een proefduur van 141 uur.

Proefresultaten zie schets:



Proefduur in seconden t.o.v. beginproef.		τ_{meting} in.		Opmerkingen.
t	log(t)	mm.	N/m	
0	-	11.3	1.243	vlakgestreken bodem met stilliggende korrels.
100	2	13.3	1.463	bewegende korrels met korte hoge ribbels in de buitenbocht over 1/4 van de breedte.
200	2.3	12.3	1.353	langere en lagere ribbels in de buitenbocht over 1/3 van de breedte.
1.4 10	3.15	12.8	1.408	ribbels over 2/3 van de breedte.
8.0 10	4.91	13.3	1.463	ribbels over de volle breedte.
1.6 10	5.21	12.6	1.386	beginvorming dwarsverhang.
2.6 10	5.41	12.3	1.353	ribbels worden langer en lager.
3.3 10	5.42	12.0	1.320	volledig dwarsverhang aanwezig.

J.9. Vermogenmeting aandrijfmotor.

Voordat de koppelmeter, zoals omschreven in bijlage paragraaf J.2. is ontwikkeld, is eerst geprobeerd τ te meten door het vermogen dat de aandrijfmotor opneemt te registreren. Na inbouw van een daartoe geschikte meter bleek echter, dat ongeveer 99% van het geleverde vermogen werd omgezet in warmte. Hetgeen werd opgenomen door de aangebouwde tandwielkast van de aandrijfmotor. Uit het feit dat het vermogen nodig om de plaat te laten draaien klein was t.o.v. het vermogen nodig om de tandwielkast te laten draaien, moest geconcludeerd worden dat registratie van schuifspanningen volgens deze methode niet haalbaar was. Dit probleem heeft uiteindelijk in voornoemde koppelmeter een oplossing gevonden.

Bijlage K.

blz.

- K. Praktische uitvoering proefneming. K.-1
- K.1. Het opereren met het model bij beweeglijke bodem. K.-1
- K.2. Stopzetten van de bak. K.-1
- K.3. Vlakstrijken. K.-2

K. Praktische uitvoering proefneming.

K.1. Het opereren met het model bij beweeglijke bodem.

Alvorens met een proef gestart kan worden, moet men vaststellen met welke toerentallen de boven- en onderplaat moeten gaan draaien. Nadat deze toerentallen zijn ingesteld, wordt de bodem zo goed mogelijk vlak en horizontaal afgestreken. (zie paragraaf K.3), om er voor te zorgen dat elke proef onder dezelfde omstandigheden begint. Bij het starten wordt eerst de bovenplaat aangezet en pas na enige tijd ook de onderplaat. Zoniet, dan zou onnodig materiaal naar de buitenbocht worden verplaatst, tengevolge van de te grote centrifugaal kracht die de korrels op dat moment zouden ondervinden. Tijdens het draaien van een proef wordt regelmatig water bijgevoegd, om de verdamping te compenseren. Hierbij moet erop gelet worden, dat niet verder dan tot de maximale spleetvulling wordt bijgevuld, aangezien anders water met een grote dwarssnelheid langs de bovenkant van de bovenplaat gaat stromen.

Stopzetten van de bak gebeurt door eerst de bovenplaat stil te zetten en daarna pas de onderbak, aangezien het enige tijd duurt voordat de invloed van de bovenplaat verdwenen is. Door de onderbak iets langer te laten draaien dempt de snelheid die ontstond t.g.v. het draaien van de bovenplaat sneller uit, waardoor de bodem sneller tot 'rust' komt.

Als alles stilstaat, kan het luikje uit de bovenplaat genomen worden en kan met het vastleggen van de bodem d.m.v. de provo begonnen worden.

K.2. Stopzetten van de bak.

Tijdens het ontwerpen van het model kwam naar voren, dat als na enige tijd draaien met een bepaalde ω_t en ω_b , een evenwichtsbodem verkregen was, dat het stopzetten van het model aan het eind van een proef aanleiding zou kunnen geven tot verrassingen. Om de bodem bij het stilzetten zo weinig mogelijk te beïnvloeden, is het nodig de watersnelheden bij de bodem zo snel mogelijk aan de bodemsnelheid aan te passen.

Om dit te bereiken, is het mogelijk gemaakt de draairichting van de bovenplaat om te keren.

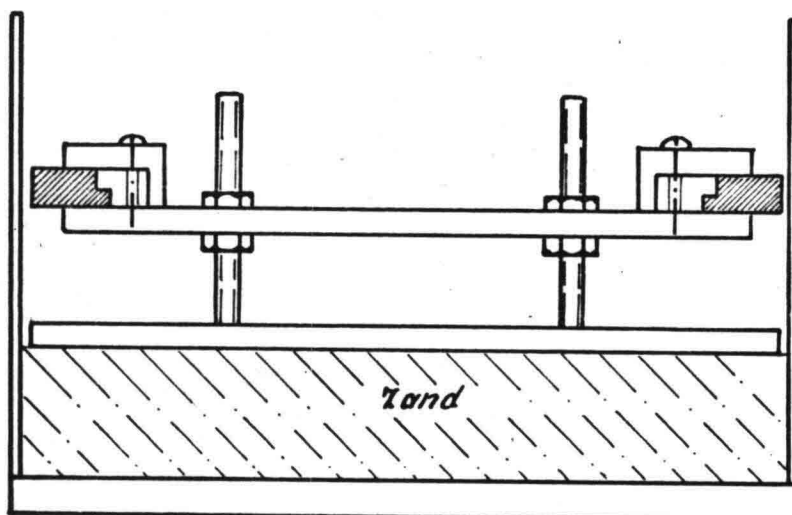
Tijdens de proeven bleek echter, dat, zelfs als plotseling alles werd stilgezet, dit een geringe invloed op de bodem heeft.

Als men verder bedenkt dat de interesse uitgaat naar lange golven, waar veel te transporteren materiaal in zit, is er nauwelijks sprake van enige kans op verstoring t.g.v. een foutieve procedure van stilzetten.

Bij het stilzetten wordt echter toch de procedure aangehouden zoals in paragraaf K.1. vermeld, eerst de bovenplaat en daarna de onderplaat, dit wordt gedaan omdat ook de ribbels bij de metingen worden geregistreerd. (er wordt echter geen onderzoek naar de ribbels gedaan).

K.3 Vlakstrijken.

Om elke proef onder gelijke omstandigheden te laten beginnen wordt aan het begin van elke proef de bodem vlakgestreken.




Bodemgladstrijker.

Hiermee worden 2 dingen bereikt:

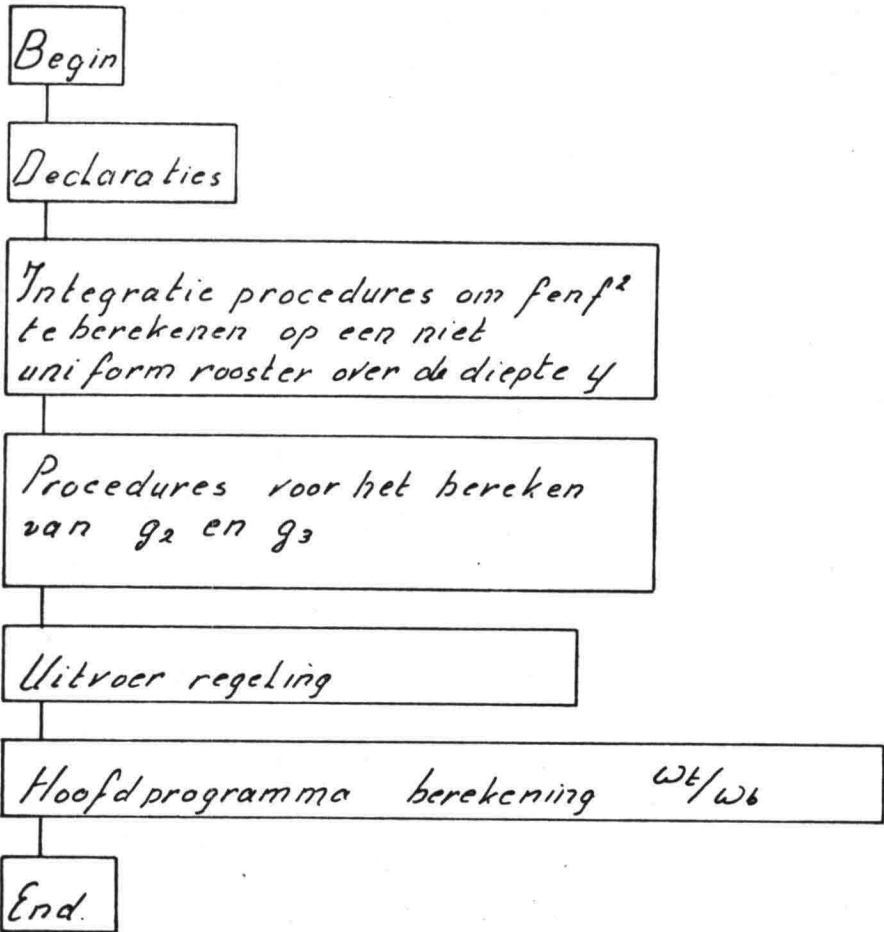
- 1 Doordat de beginsituatie eender is, kan men zich idee vormen van het groeistadium waarin de dominante golf zich bevindt, op het moment dat de bodem wordt opgemeten. Denk hierbij b.v. aan proef 31. daar bleek dat na ongeveer 10 dagen, gedurende 1 dag, een andere dominante golf aanwezig was. Zou daarom de bodem niet vlakgestreken worden, dan bestaat de kans dat de golf die 1 dag aanwezig is wordt opgemeten, en als dominant wordt beschouwd.
- 2 Tengevolge van het vlakstrijken wordt een bodem verkregen, die overal vlak en horizontaal is, met een nauwkeurigheid van 1 mm. Een bijkomstig voordeel hierbij is, dat op eenvoudige wijze de gemiddelde waterdiepte kan worden ingesteld. (denk hierbij aan de herhaalbaarheid van proeven.)

Het vlakstrijken gebeurt door een aan de bovenplaat te bevestigen verstelbaar plankje. (zie schets.) Na bevestiging en afstelling wordt de onderbak met een zeer lage snelheid onder het plankje doorgedraaid, met als resultaat een vlakke en horizontale bodem.



Figuren.

Stroomschema I



Begin

Stroomschema II

Invoer gegevens

$$\eta_0 = \eta_{orr} + i \eta_{oii} \quad p = 1 \quad Vorr$$

Berekening "constanten"

Berekening V_{oi} d.m.v. Runge Kutta

$$A(V) = f_{1r} V + f_{2r} V' + f_{3r} V''$$

$$B(V) = f_{1i} V + f_{2i} V' + f_{3i} V''$$

$$A(V_{oi}) = -B(V_{orr}) - (f_{1r} \eta_{orr} + f_{1i} \eta_{oii})$$

$$V_{oi}|_{r=r_i} = V_{oi}|_{r=r_{i+1}} = 0$$

Aanpassing
 V_{orr}

Berekening V_{or} d.m.v. Runge Kutta

$$A(V_{or}) = B(V_{oii}) - (f_{1r} \eta_{orr} + f_{1i} \eta_{oii})$$

$$V_{or}|_{r=r_i} = V_{or}|_{r=r_{i+1}} = 0$$

Foutcontrole V_{orr}

Berekening $\omega_i \omega_r \eta_{oi} \eta_{or}$

$$\frac{d}{dr} B \eta_{oi}' = D - \omega_r F + \omega_i E$$

$$\frac{d}{dr} B \eta_{or}' = C + \omega_r E + \omega_i F$$

$$\eta_{oi}'|_{r=r_i} = \eta_{oi}'|_{r=r_{i+1}} = \eta_{or}'|_{r=r_i} = \eta_{or}'|_{r=r_{i+1}} = 0$$

Aanpassing
 η_{oii}

Foutcontrole η_{oii}

Foutcontrole η_{orr}

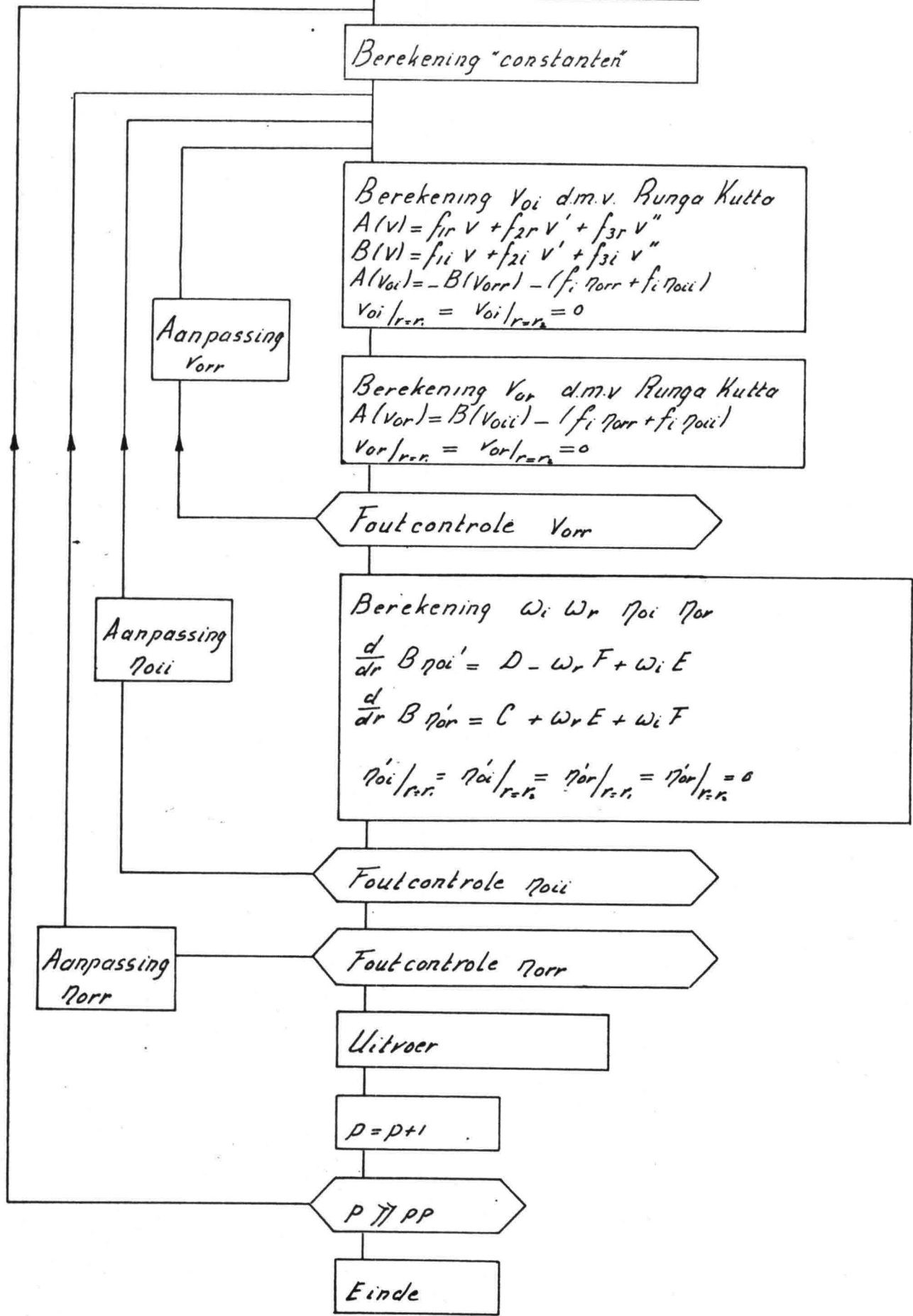
Aanpassing
 η_{orr}

Uitvoer

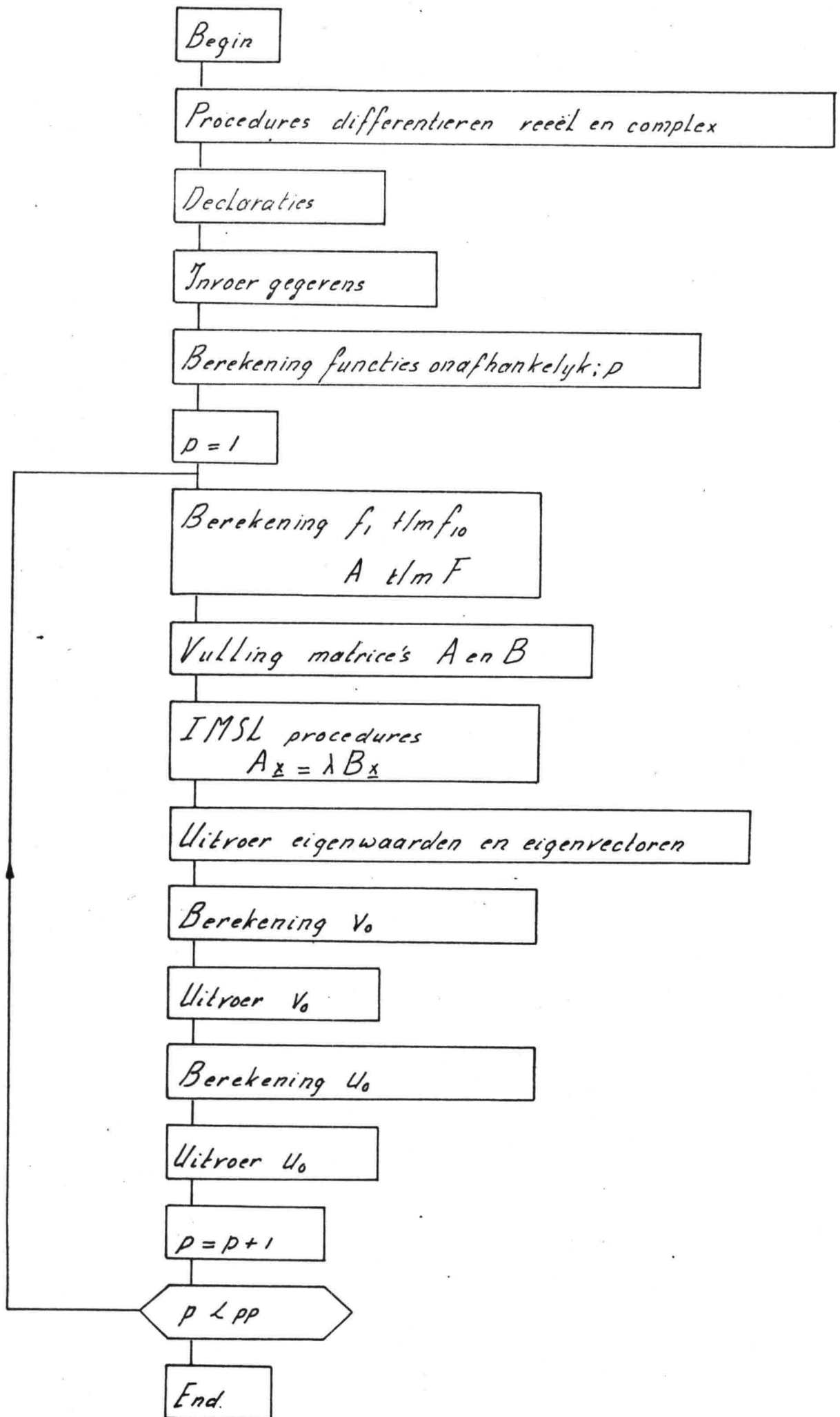
$$p = p + 1$$

$p \gg p_p$

Einde



Stroomschema III



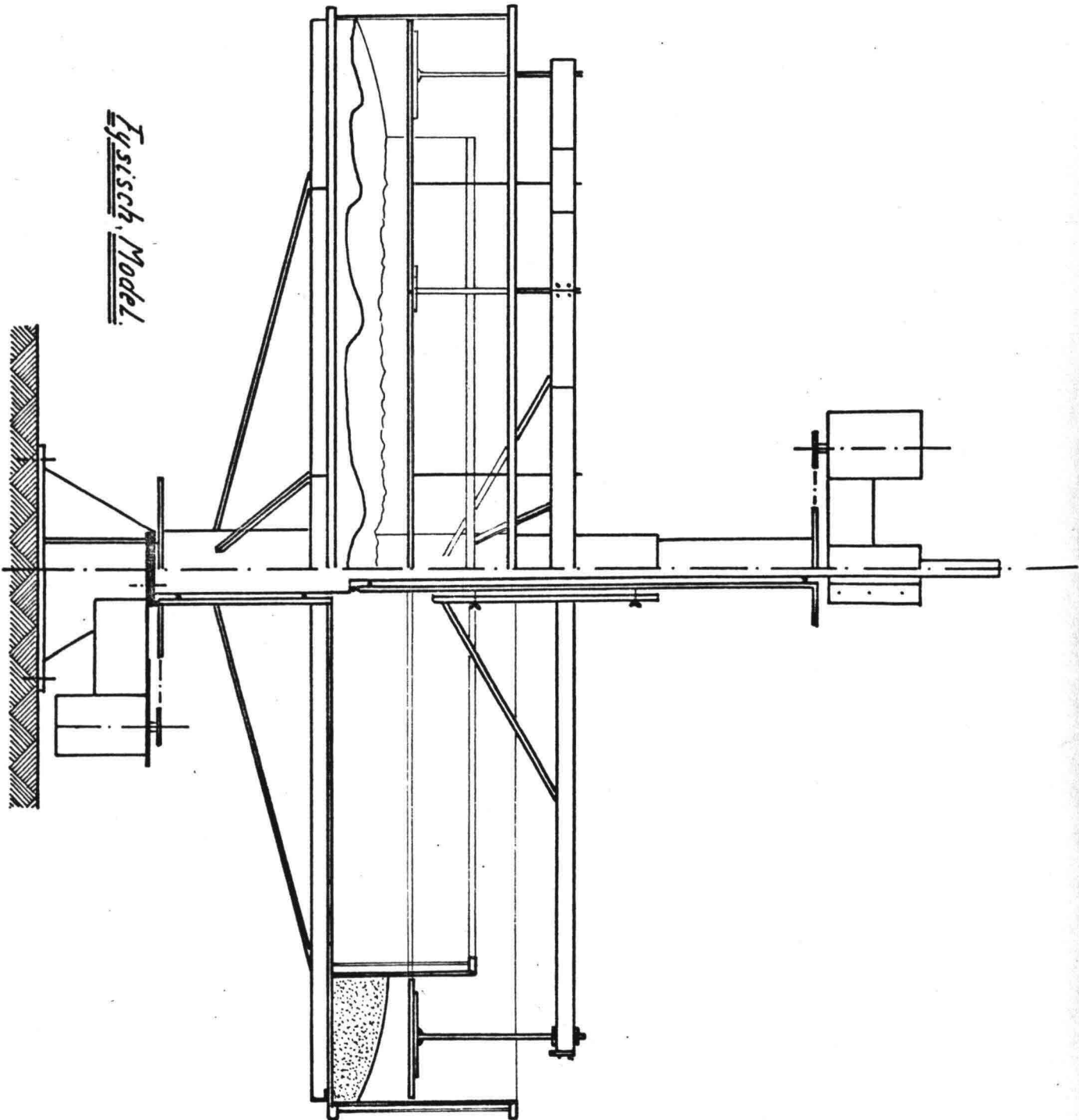
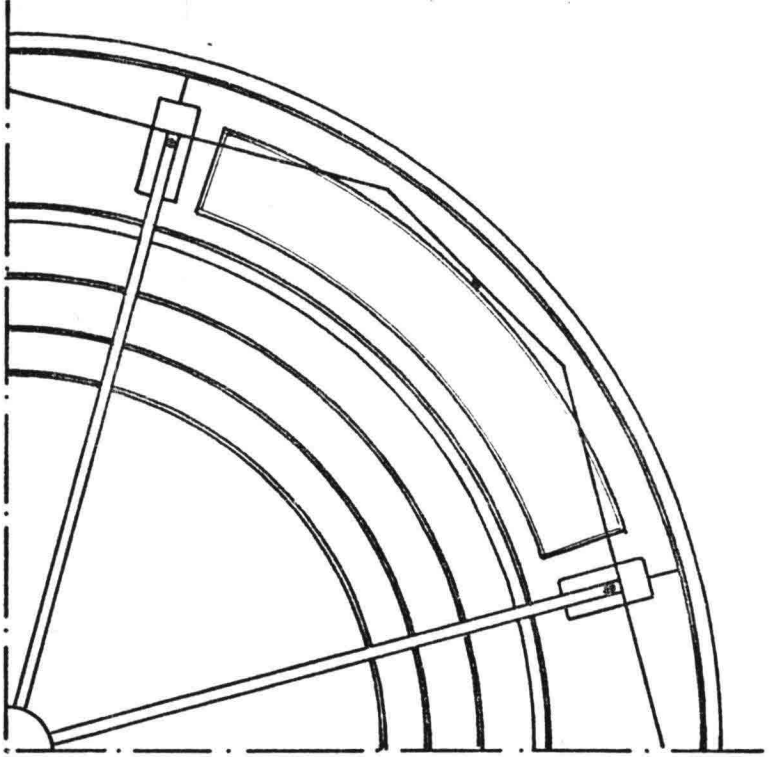
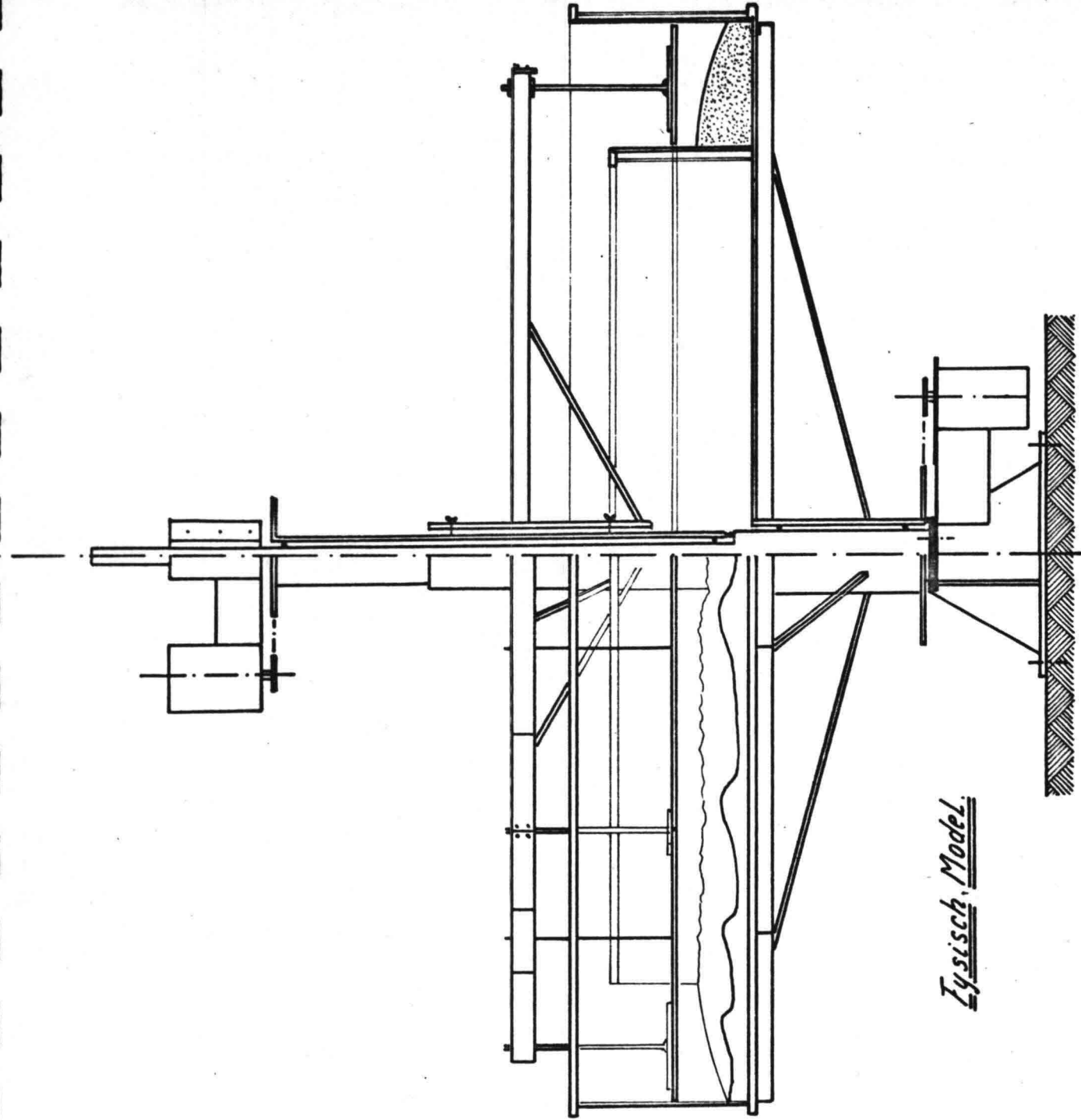
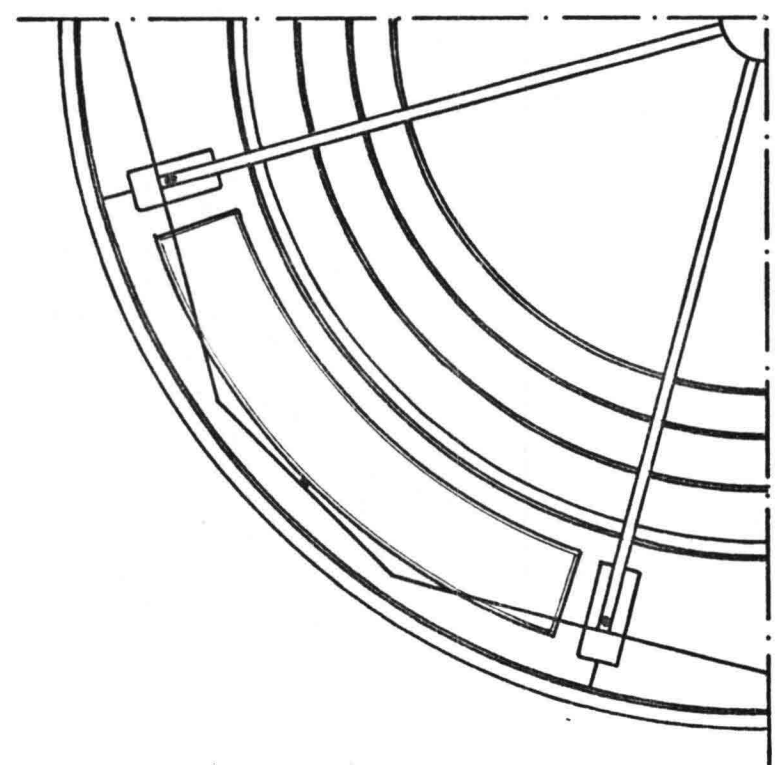


Fig 1

Fig 1



Zyisch, Model.



Genormeerd Langs- en Dwaarsnelheidsprofiel voor Ct. 49; Ch. 49.

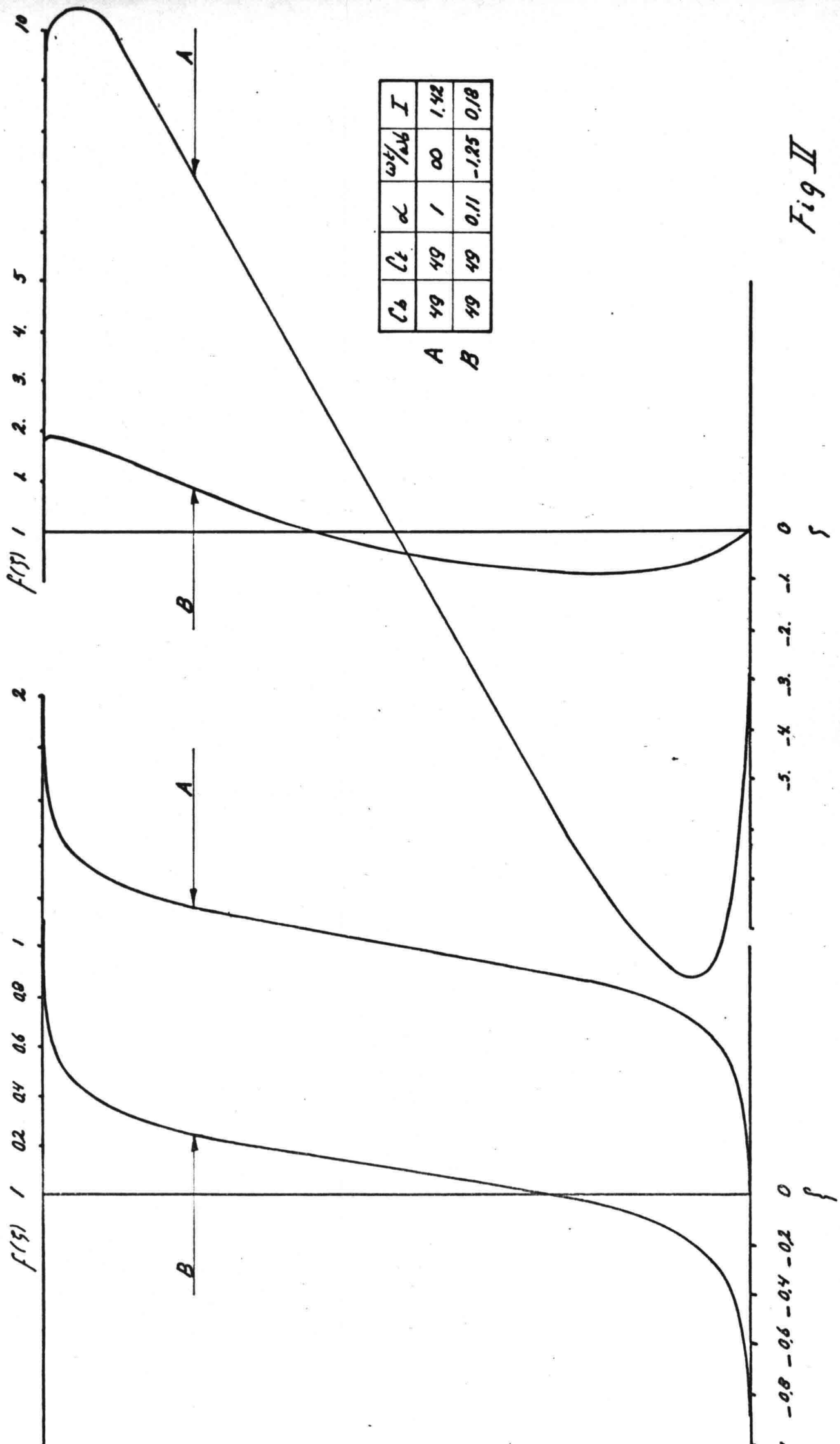
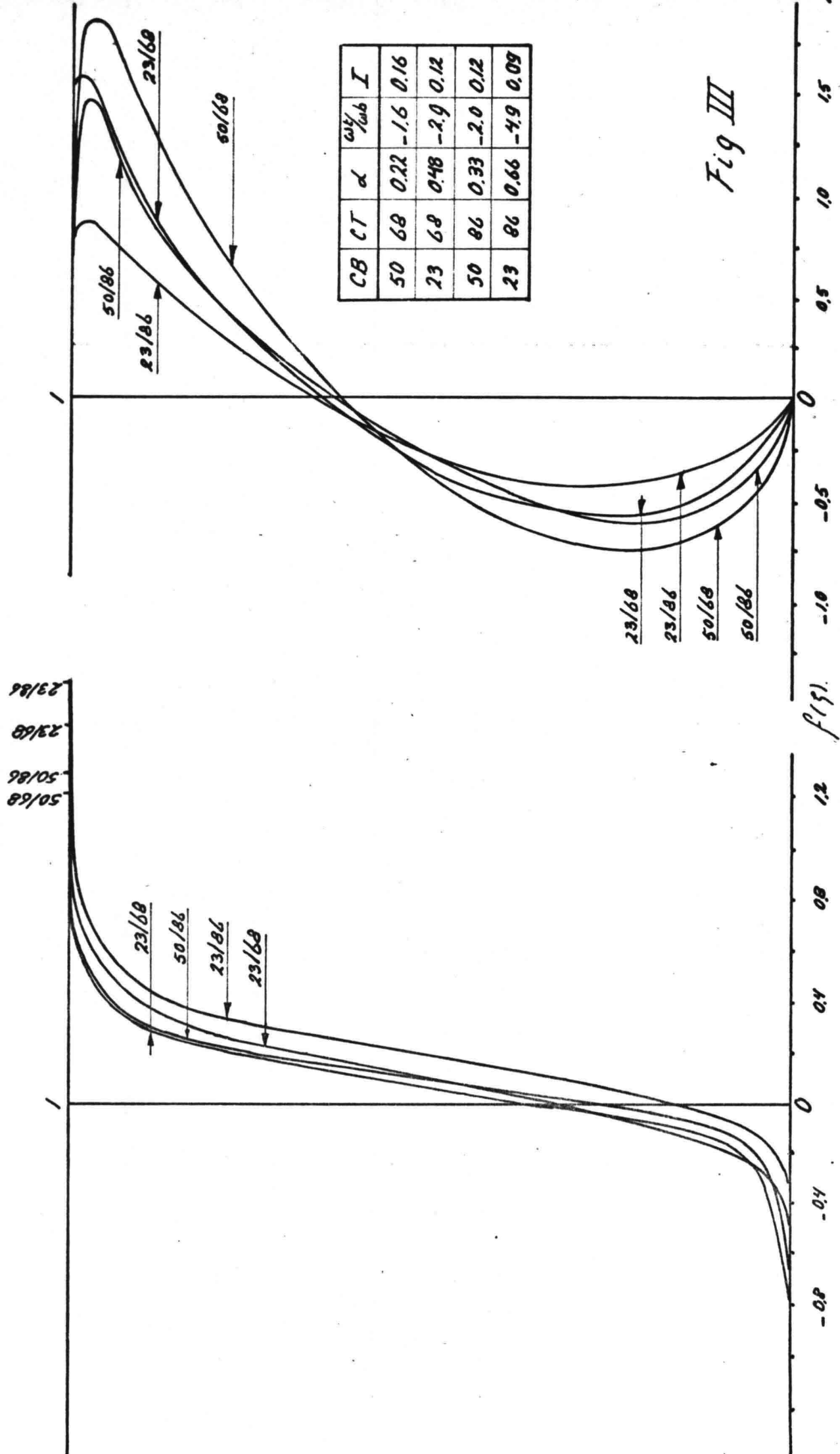


Fig II

Genormeerd langs- en Dwarsnelheidsprofiel voor Lt. 68:86 en Cb = 23:50.



CB	CT	α	$\frac{w_{\max}}{w_b}$	I
50	68	0.22	-1.6	0.16
23	68	0.48	-2.9	0.12
50	86	0.33	-2.0	0.12
23	86	0.66	-4.9	0.09

Fig III

20/68
20/86
23/68
23/86

Programma Resultaten $N=51$

Verstoringen

$P=3$

Δ

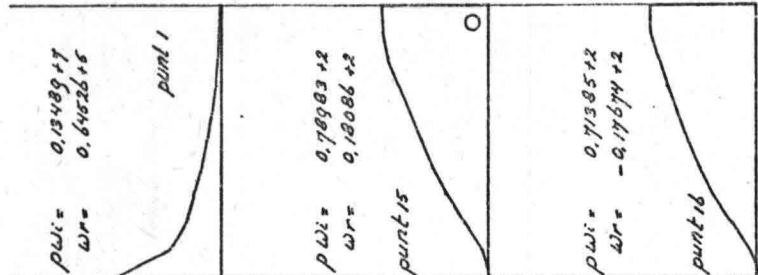
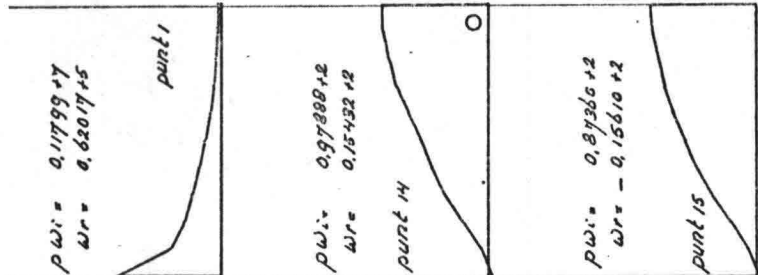
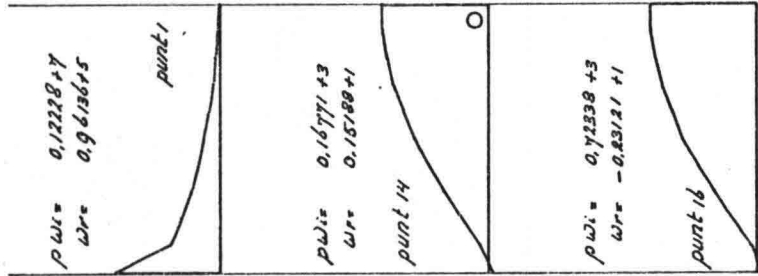
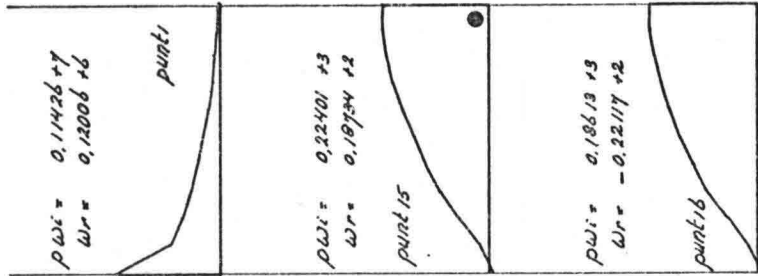
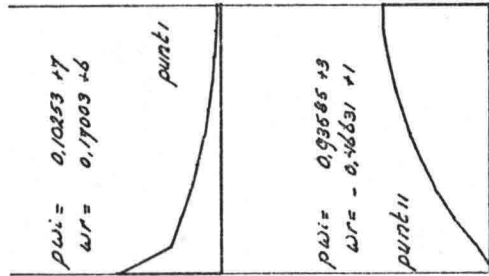
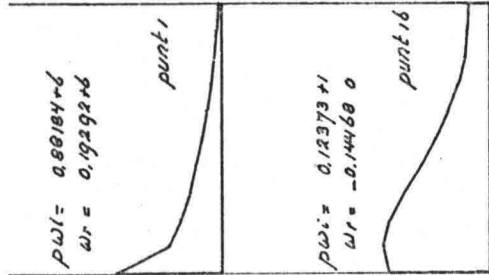
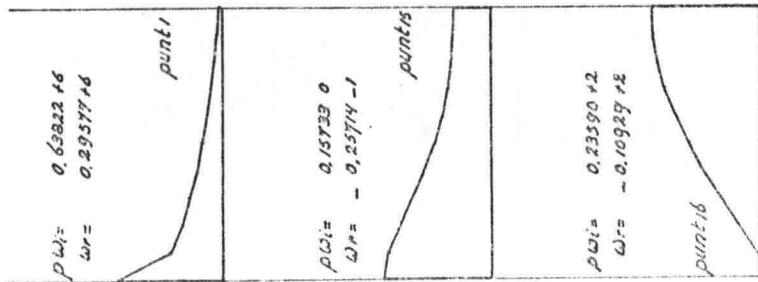
Σ

Δ

Δ

Δ

Δ

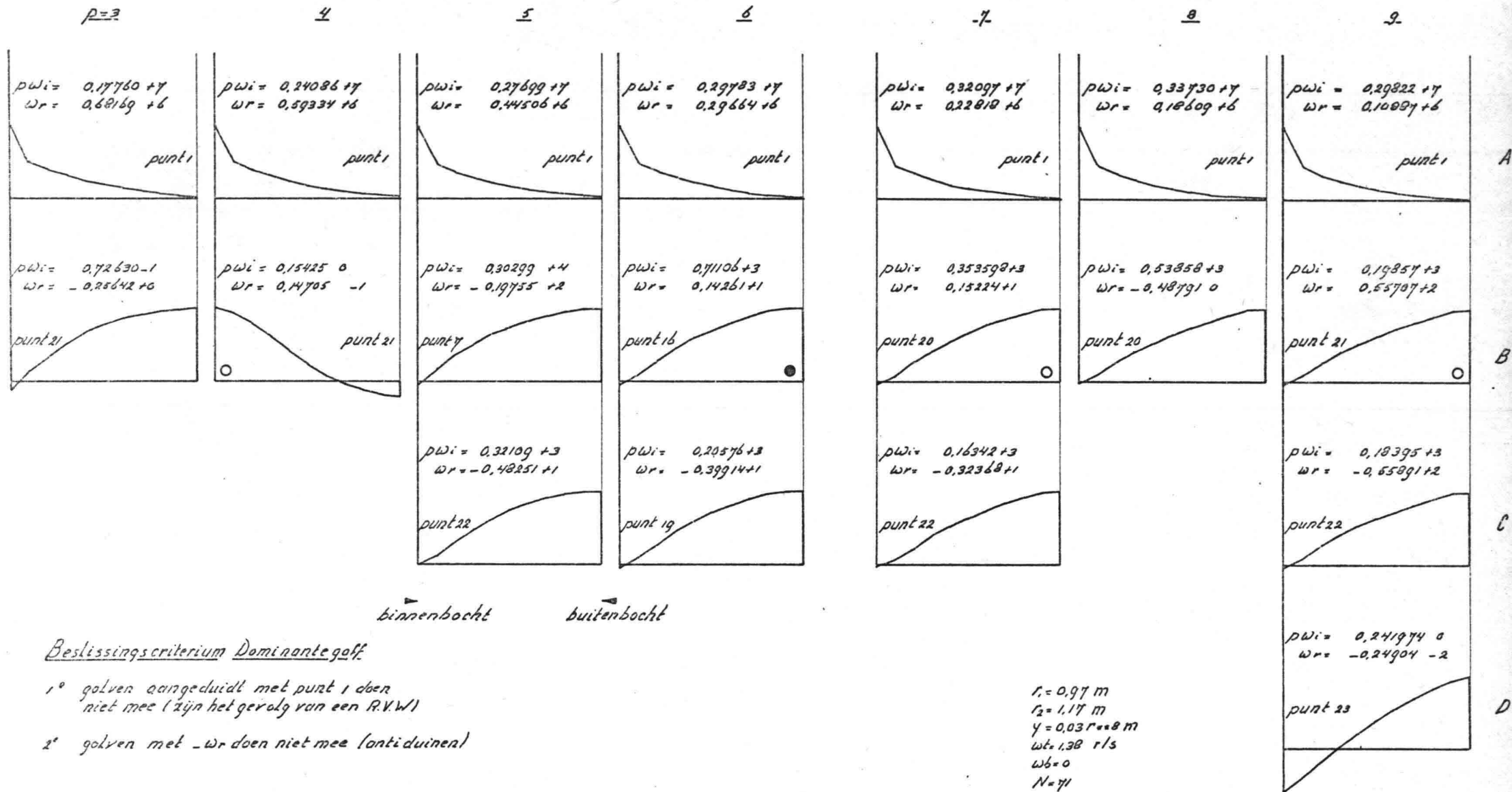


binnenbocht buitenbocht

$r_1 = 0.97 \text{ m}$
 $r_2 = 1.17 \text{ m}$
 $y = 0.03 \text{ m}$
 $wk = 1.38 \text{ r/s}$
 $wb = 0$
 $N = 51$

Programma Resultaten N=71

Verstorings



binnenbocht

buitenbocht

Beslissingscriterium Dominante golf

- 1° golven aangeduidt met punt 1 doen niet mee (zijn het gevolg van een R.V.W)
- 2° golven met $-\omega_r$ doen niet mee (antidunnen)

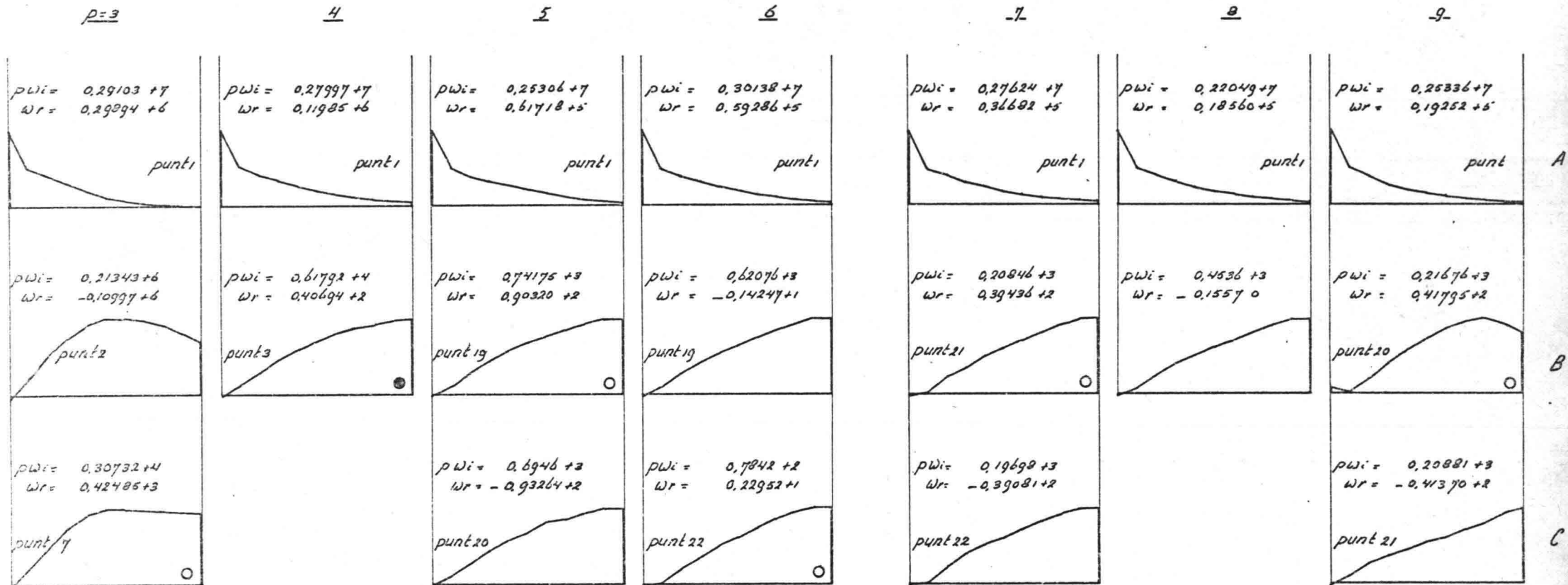
$r_1 = 0,97 \text{ m}$
 $r_2 = 1,17 \text{ m}$
 $\gamma = 0,03 r_1 + 8 \text{ m}$
 $\omega_b = 0$
 $N = 71$

Golven met \circ hebben een positieve ω_i en ω_r
 Golf met \bullet de grootste met positieve ω_i en ω_r

Fig IV B

Programma Resultaten N=71

Verstoringen.



binnenbocht

buitenbocht

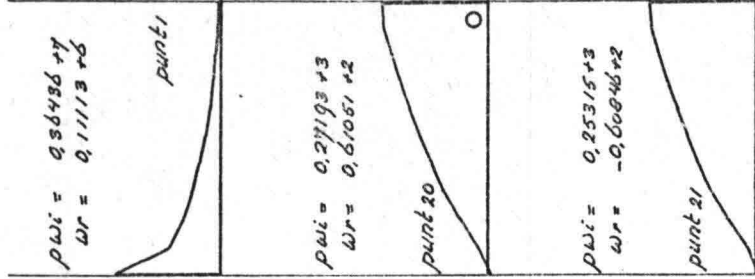
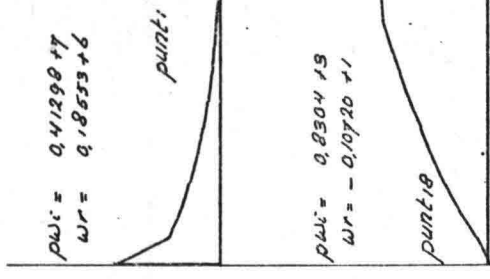
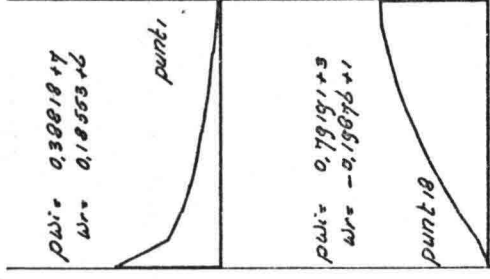
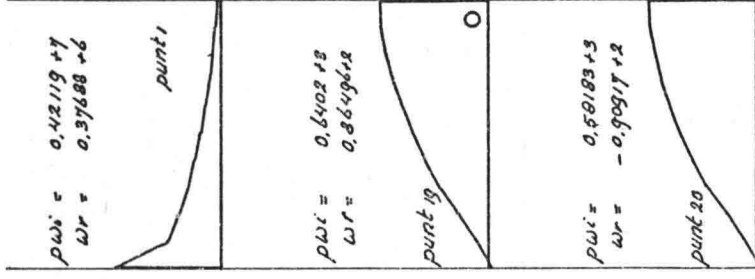
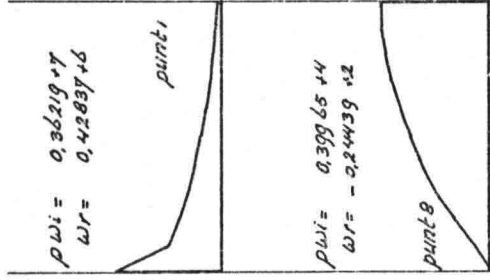
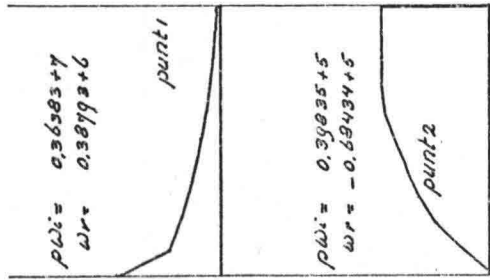
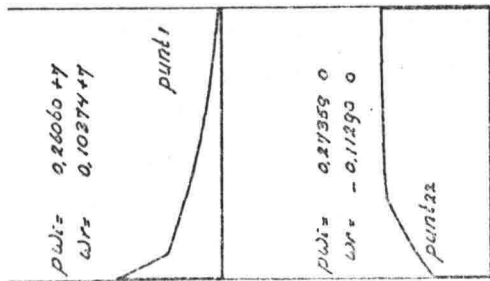
$r_1 = 0,97m$
 $r_2 = 1,17m$
 $y = 0,030 r^4 + 0,020 m$
 $\omega = 1,38 r/s$
 $\omega_b = 0$
 $N = 71$

Fig IV C

Programma Resultaten N=71

Verstoringen

4 5 6 7 8 9



binnenbocht buitenbocht

$r = 0,97 \ m$
 $G = 1,17 \ m$
 $y = 0,020 \ r = 28 + 0,003 \ m$
 $w_i = 1,38 \ r/s$
 $w_b = 0,06 \ r/s$
 $N = 71$

Verstoringen

4
Overflow.

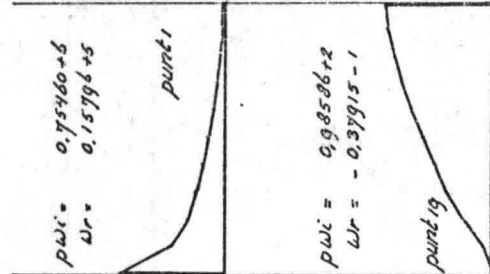
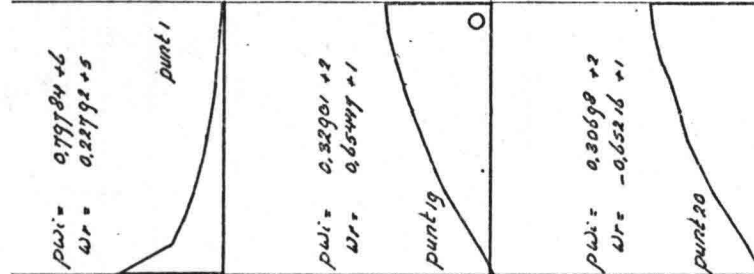
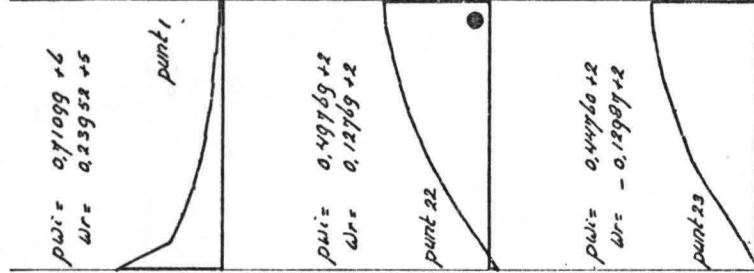
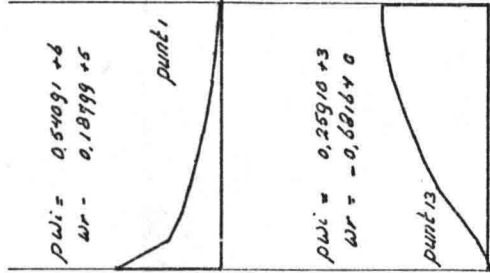
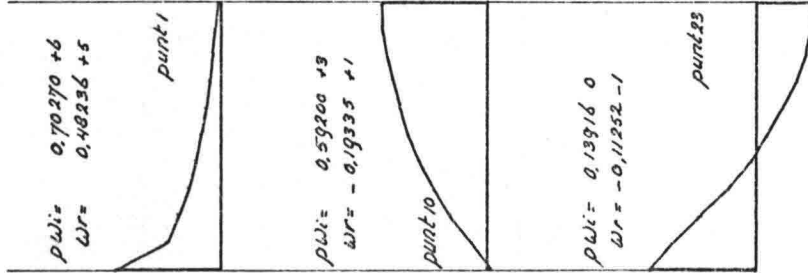
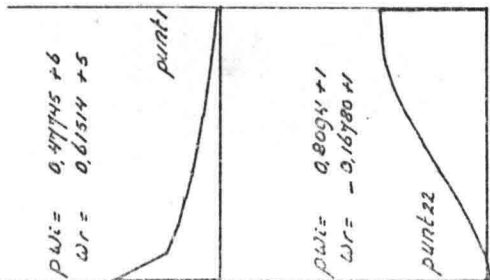
5

6

7

8

9



binnenbocht buitenbocht

$r_1 = 0,9717$
 $r_2 = 1,1777$
 $y = 0,0287488 + 0,00377$
 $w_r = 1,0577$
 $N = 14$
 $N = 14$

Programma Resultaten $N=71$

Verstoringen.

$P=3$

4

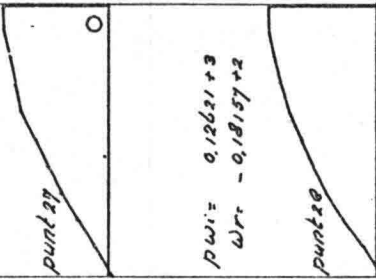
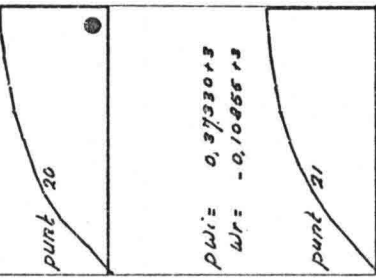
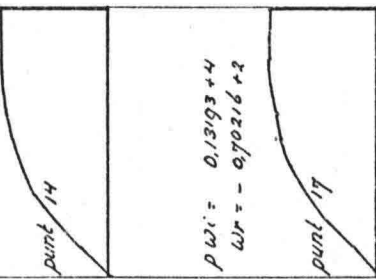
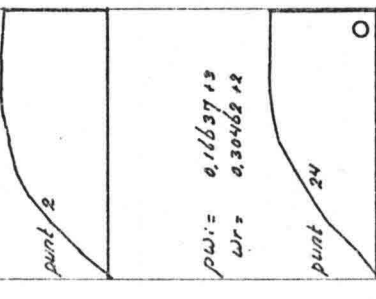
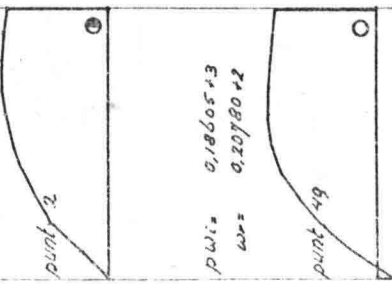
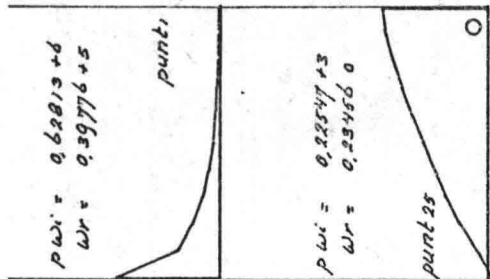
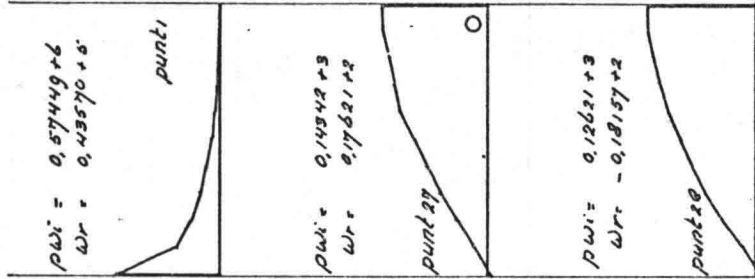
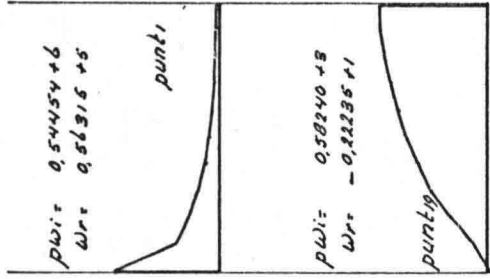
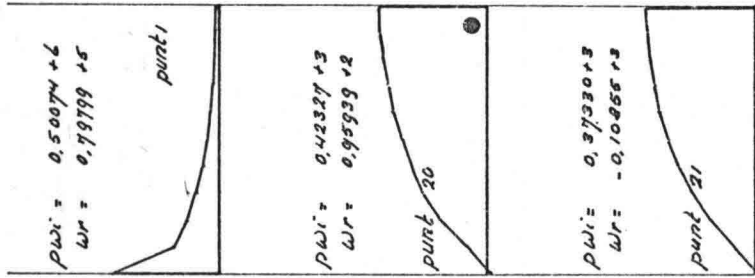
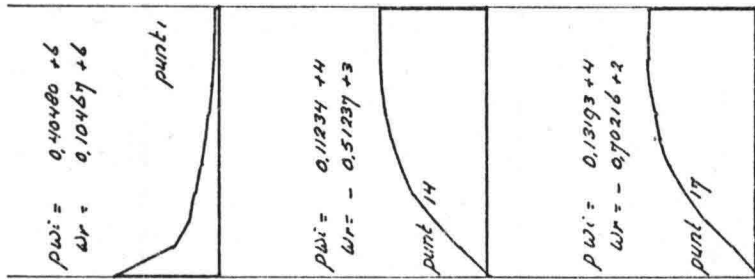
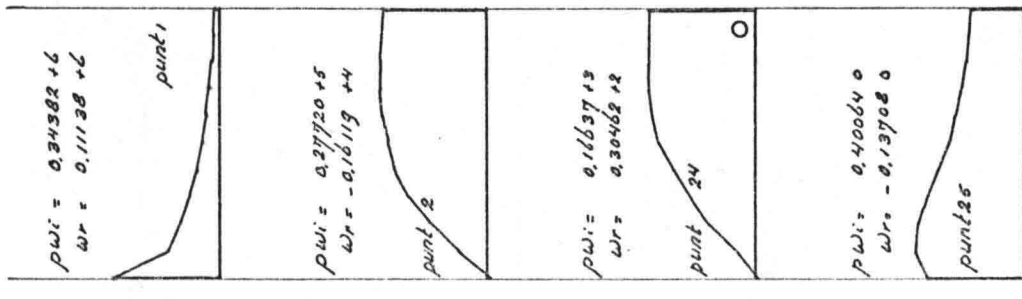
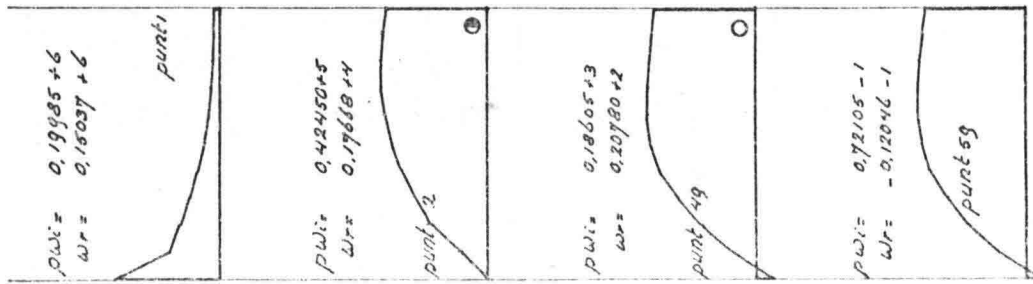
5

6

7

8

9



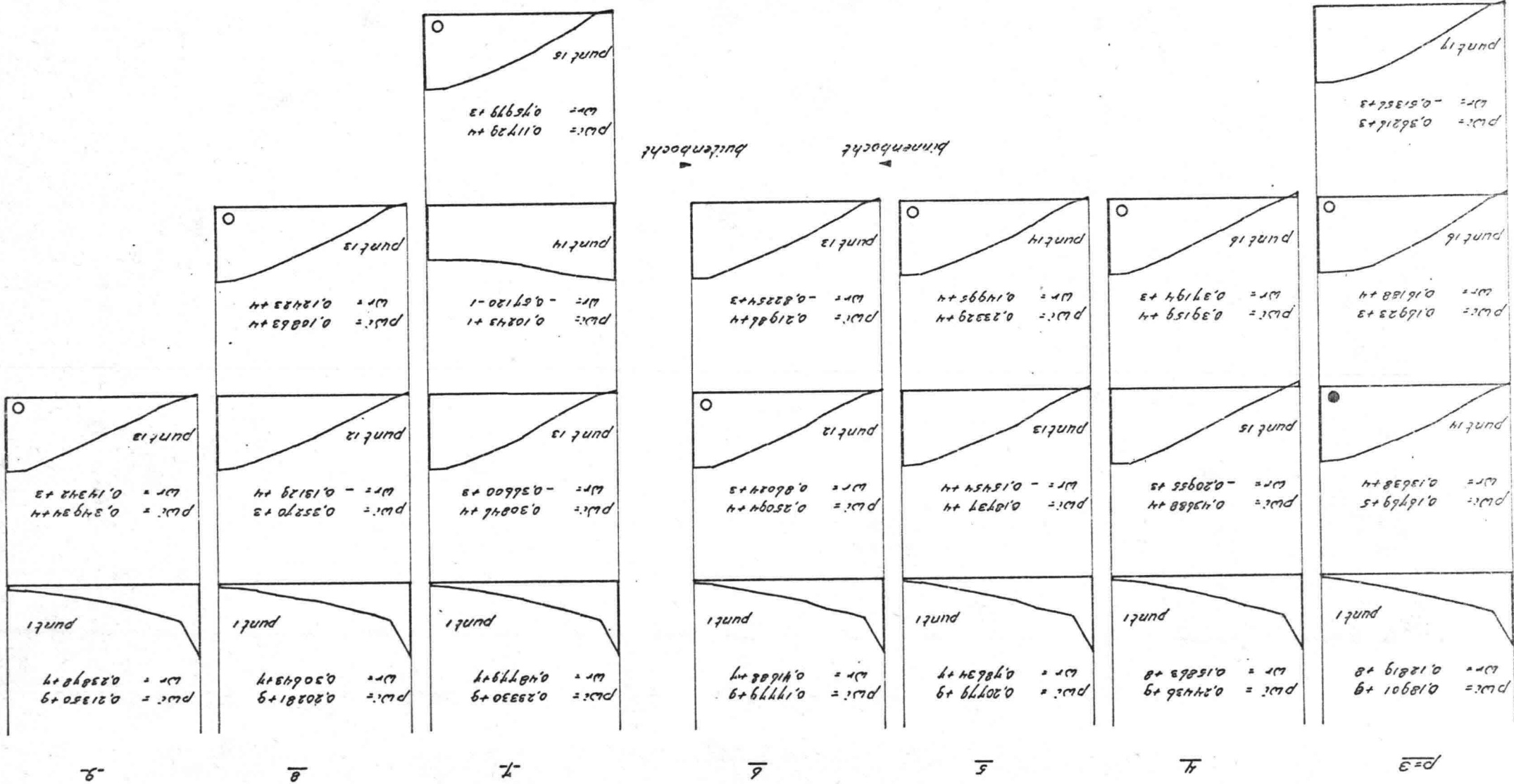
binnenbocht buitenbocht

$r = 0.92 m$
 $r_2 = 1.22 m$
 $y = 0.030 r_2 + 0.8 m$
 $wr = 1.38 \frac{1}{2}$
 $wb = 0$
 $N = 71$

Fig IV F

Programma Resultaten N=71

Verstorjngen

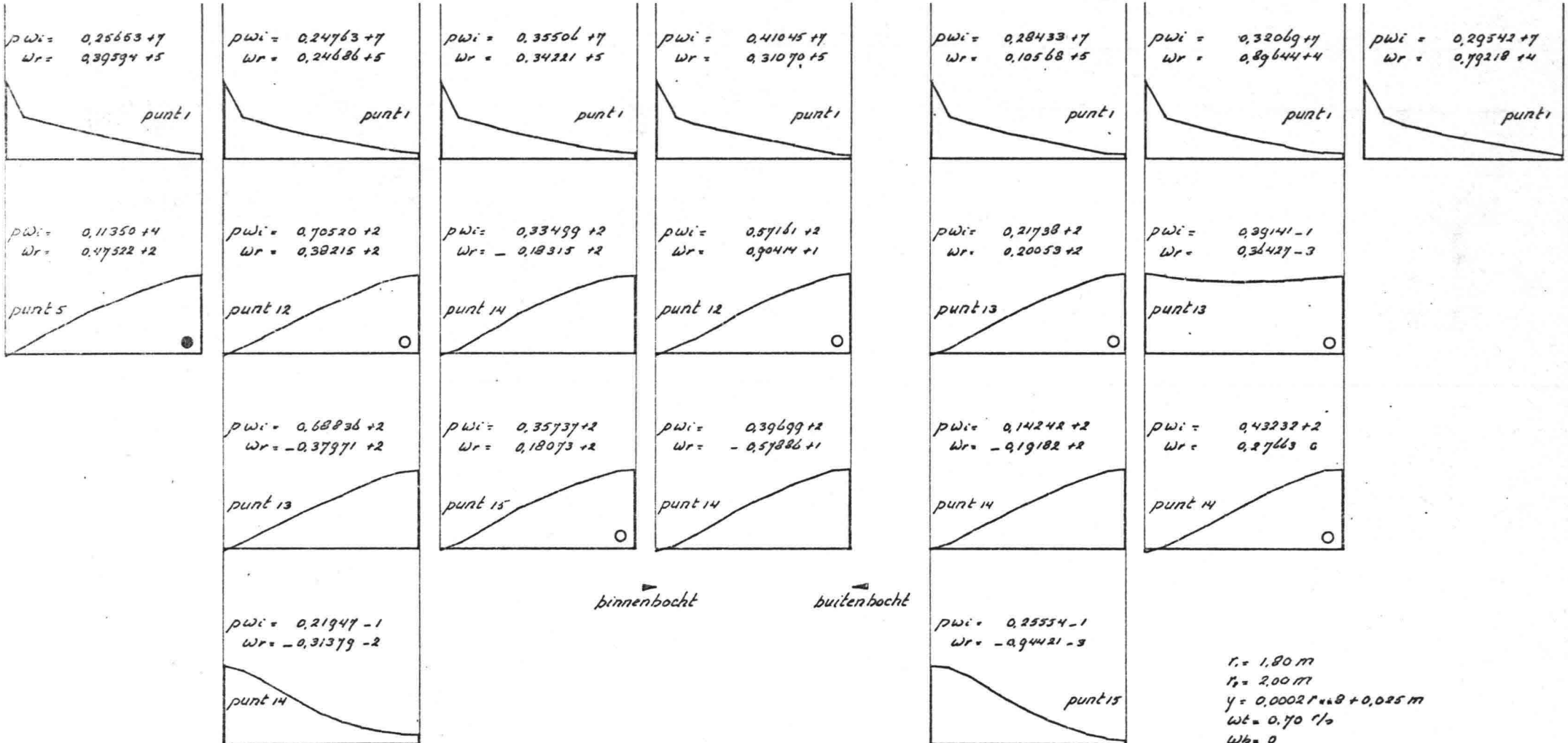


$r_1 = 1.80 \text{ m}$
 $r_2 = 2.00 \text{ m}$
 $r_3 = 1.20 \text{ m}$
 $W_b = 0$
 $y = 0.0002 r + 0.8 + 0.025 m$

Programma Resultaten N=71

Verstoringen.

3 4 5 6 -7- 8 9



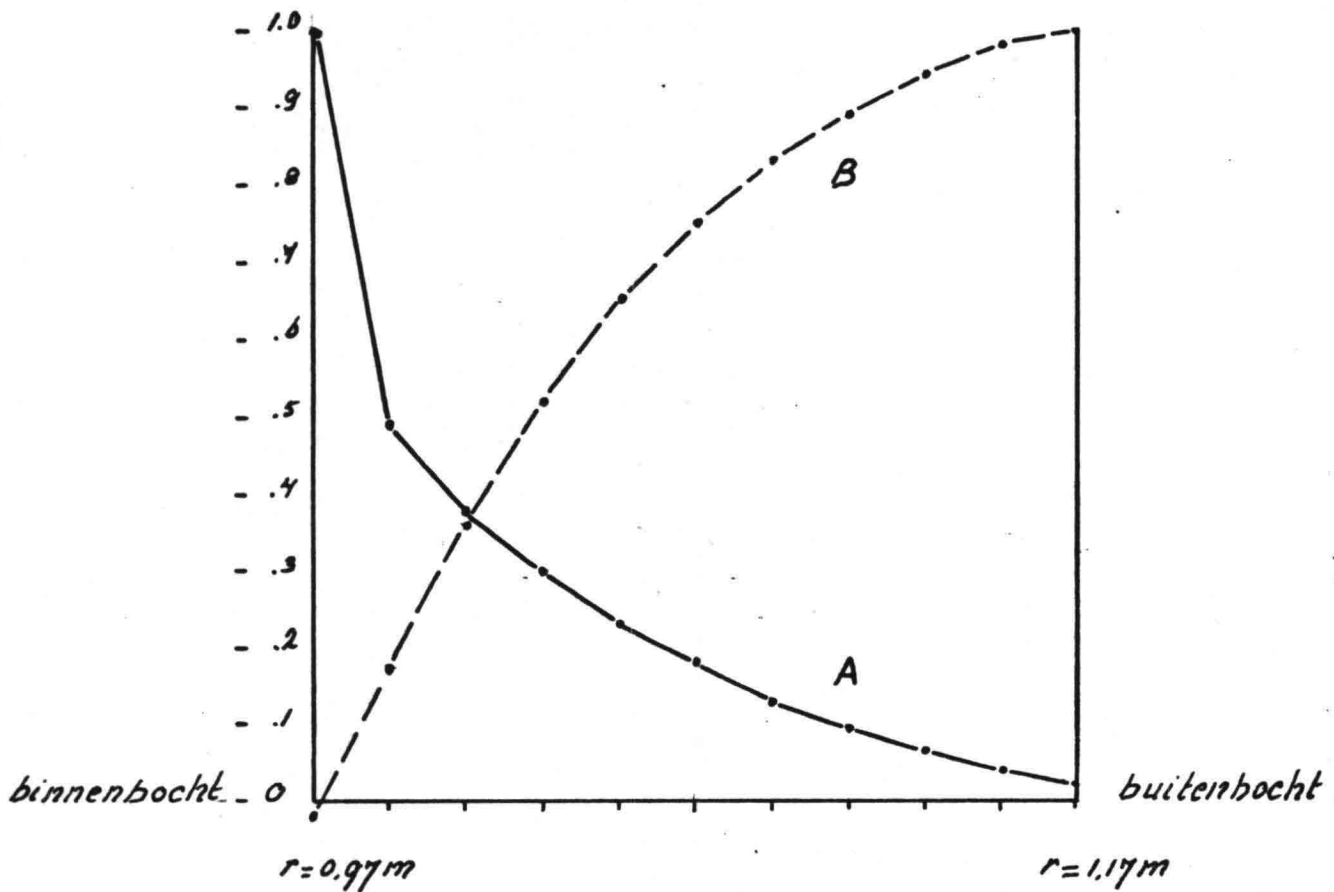
binnenbocht buitenbocht

$r_1 = 1,80 \text{ m}$
 $r_2 = 2,00 \text{ m}$
 $y = 0,0002 r_{1+2}^2 + 0,025 \text{ m}$
 $w_t = 0,70 \text{ ‰}$
 $w_b = 0$
 $N = 71$

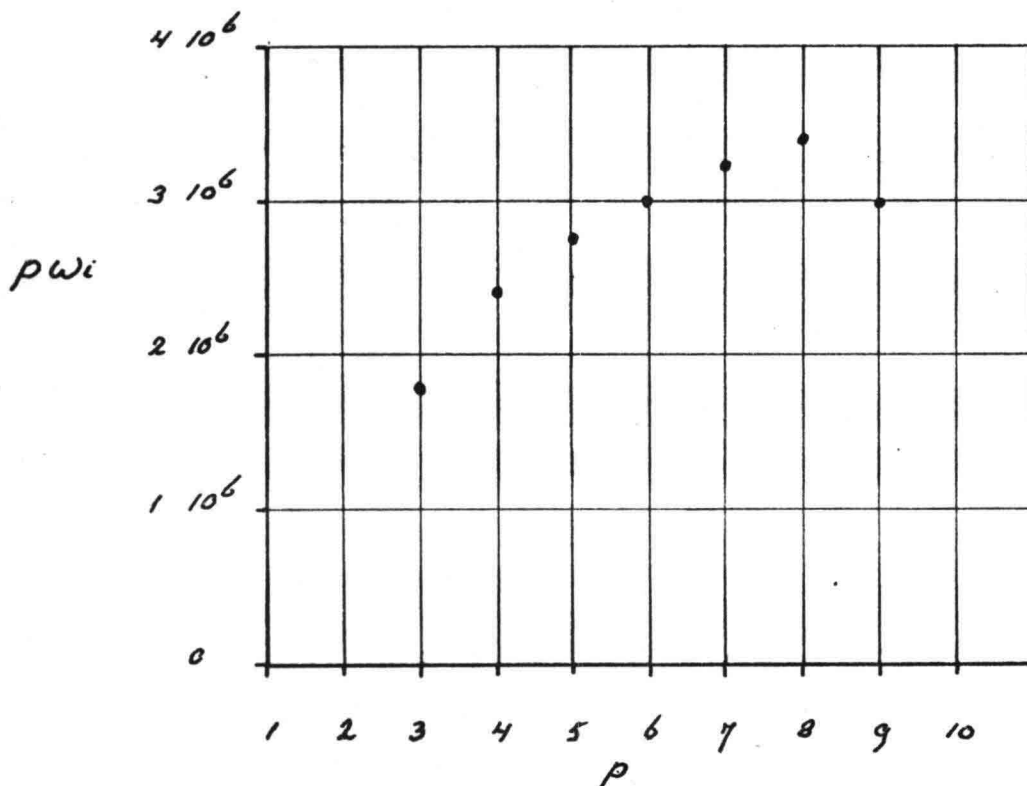
Fig IV H

Resultaat Programma

Eigenwaarden



Golfrorm $p=6$



Groefaktor Golfrorm A

Fig IV I

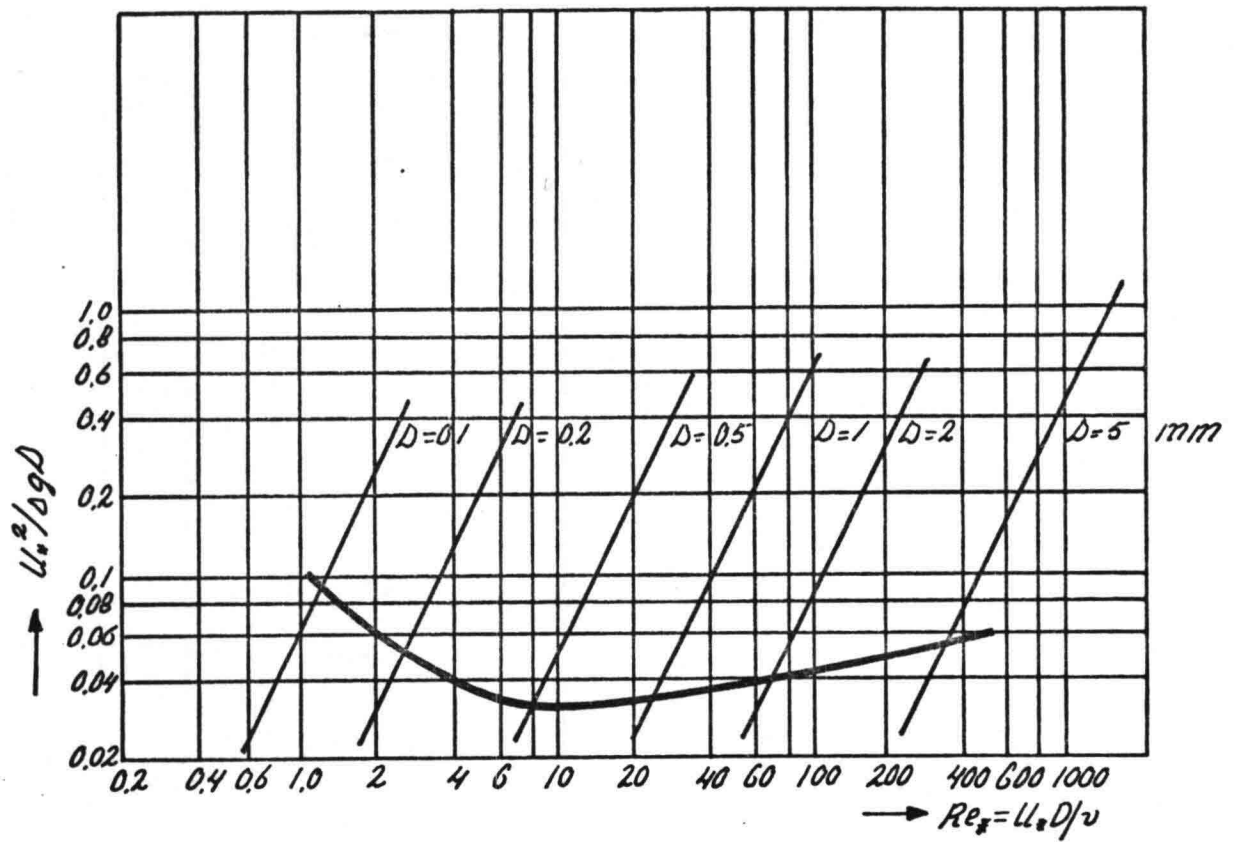


Diagram von Shields (Jansen, 1980).

Fig V

Snelheidsprofielen Laminaire Strooming

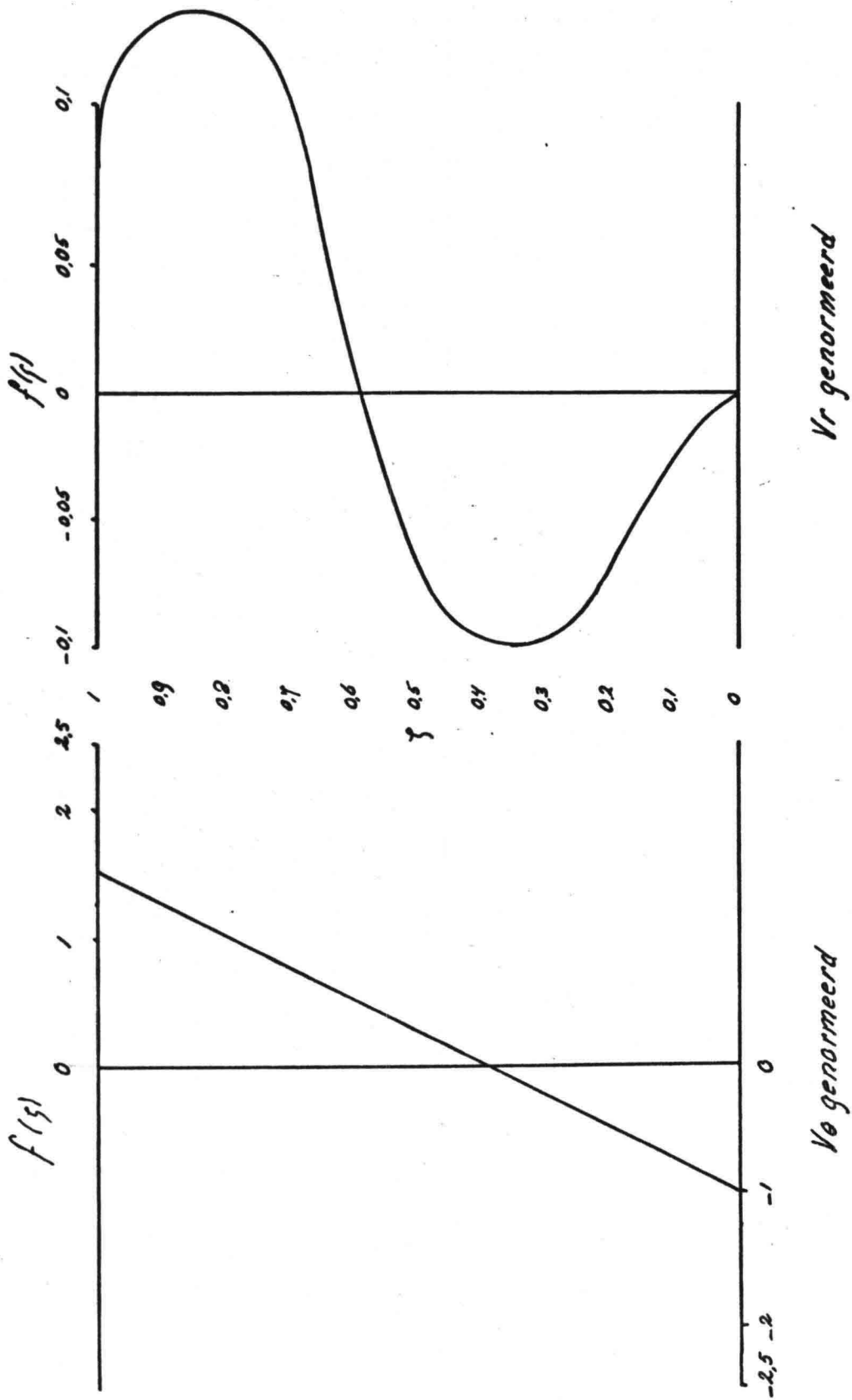


Fig VII

TOERENTIALE VERHOUDING

Intensiteit V_f

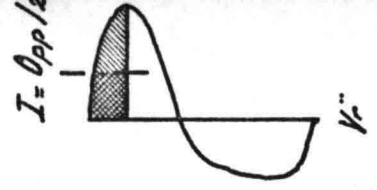
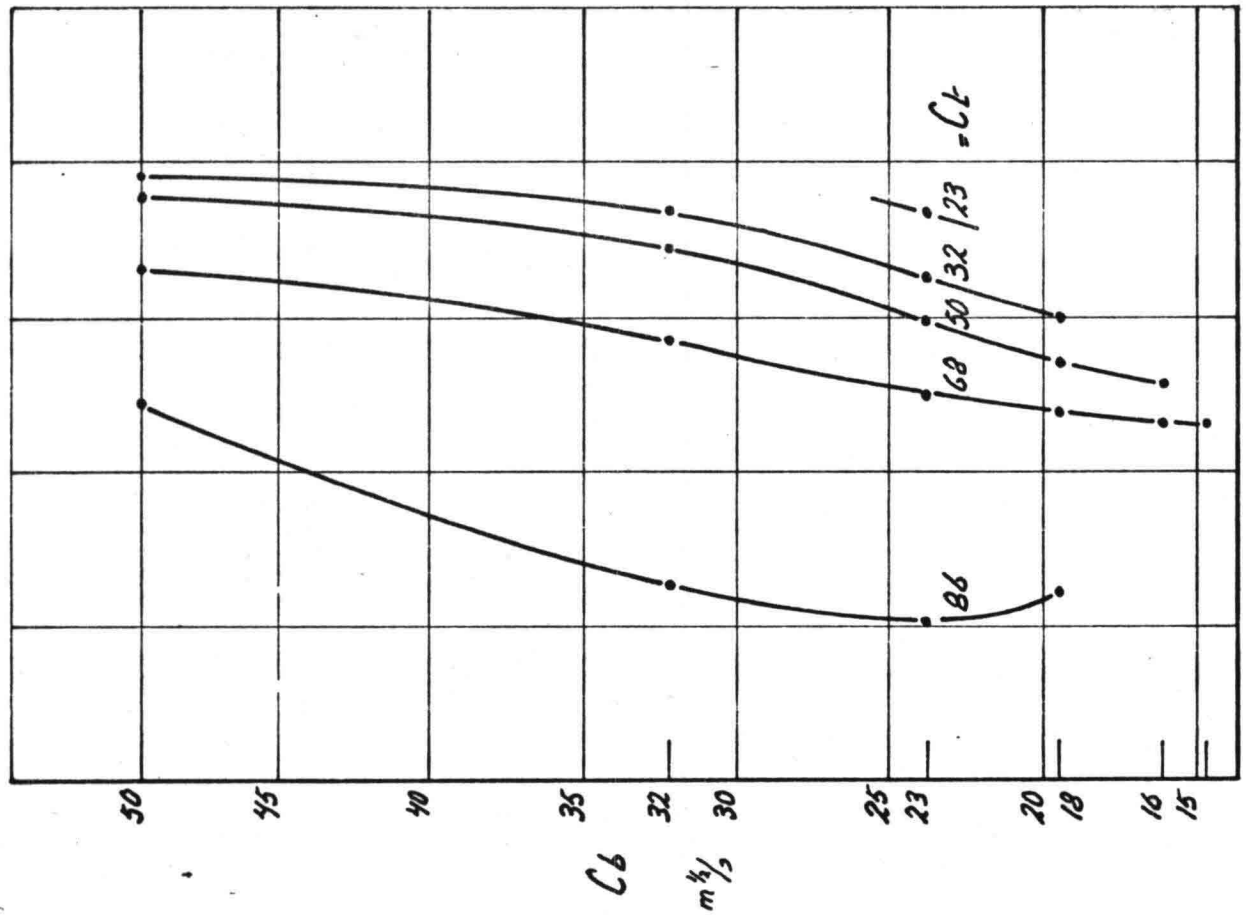
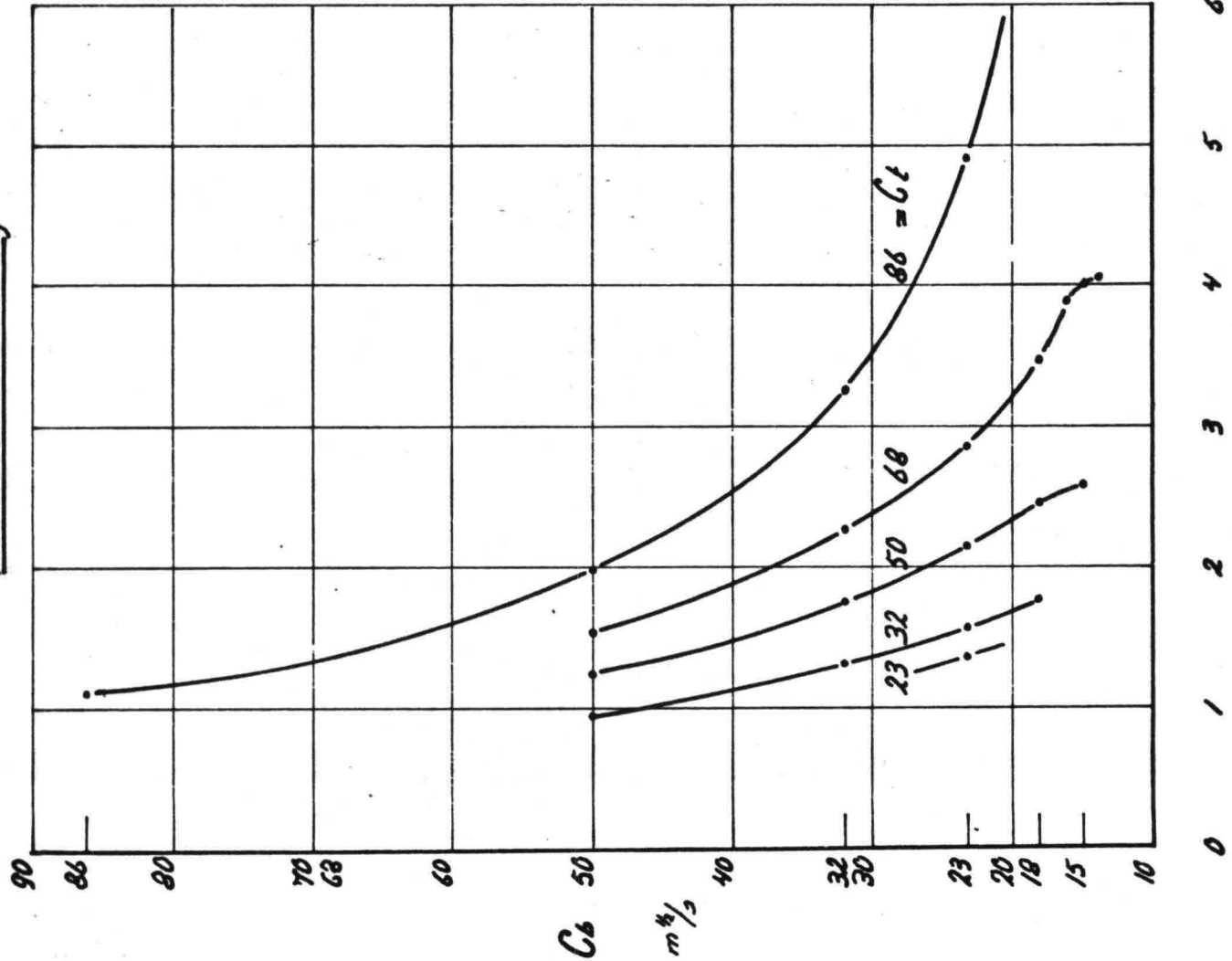


Fig VIII

Intensiteit

opm: situatie $\omega b = 0$ Ct. $\omega b = 49$ resultaat

Schuifspanningsmeter

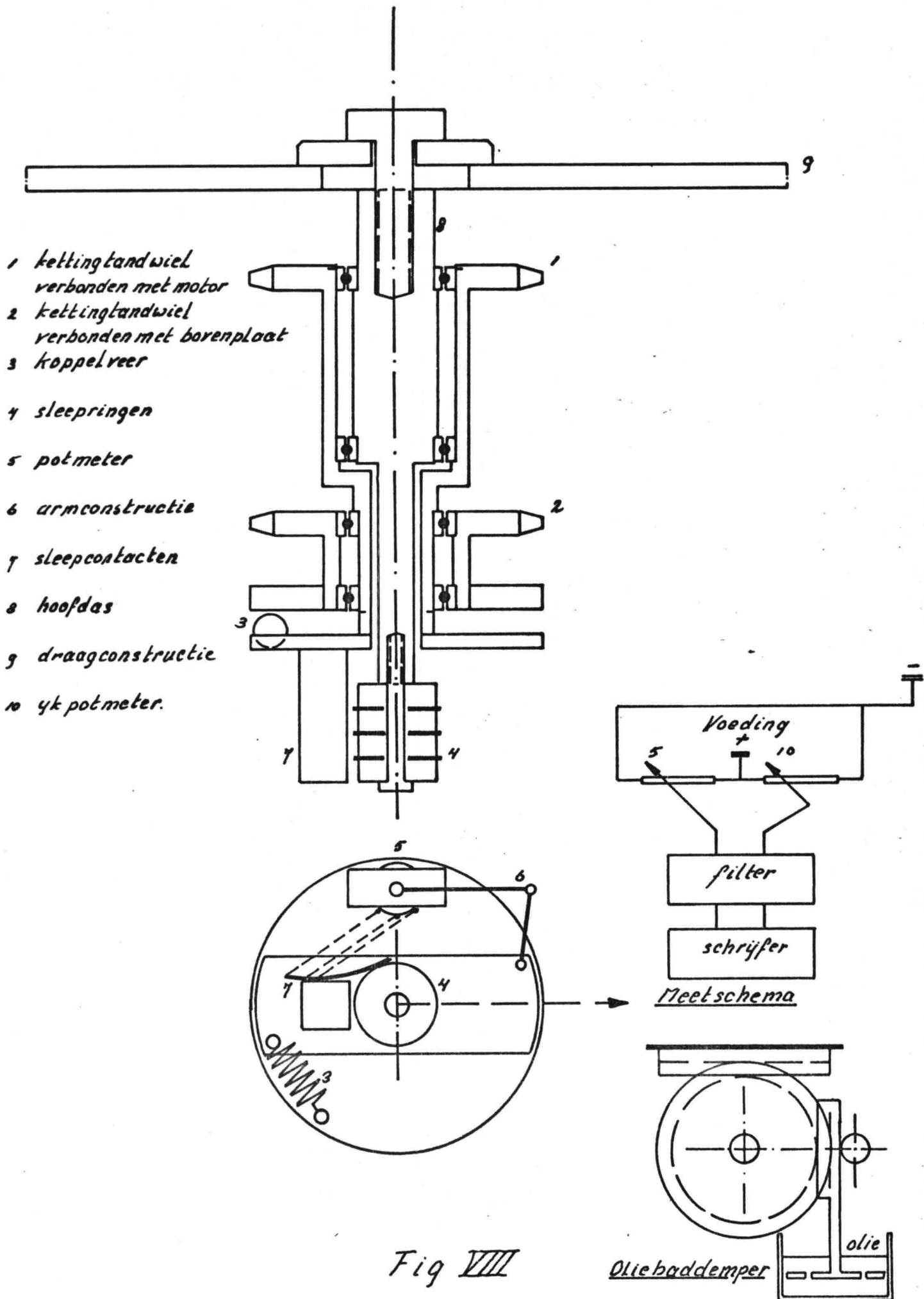
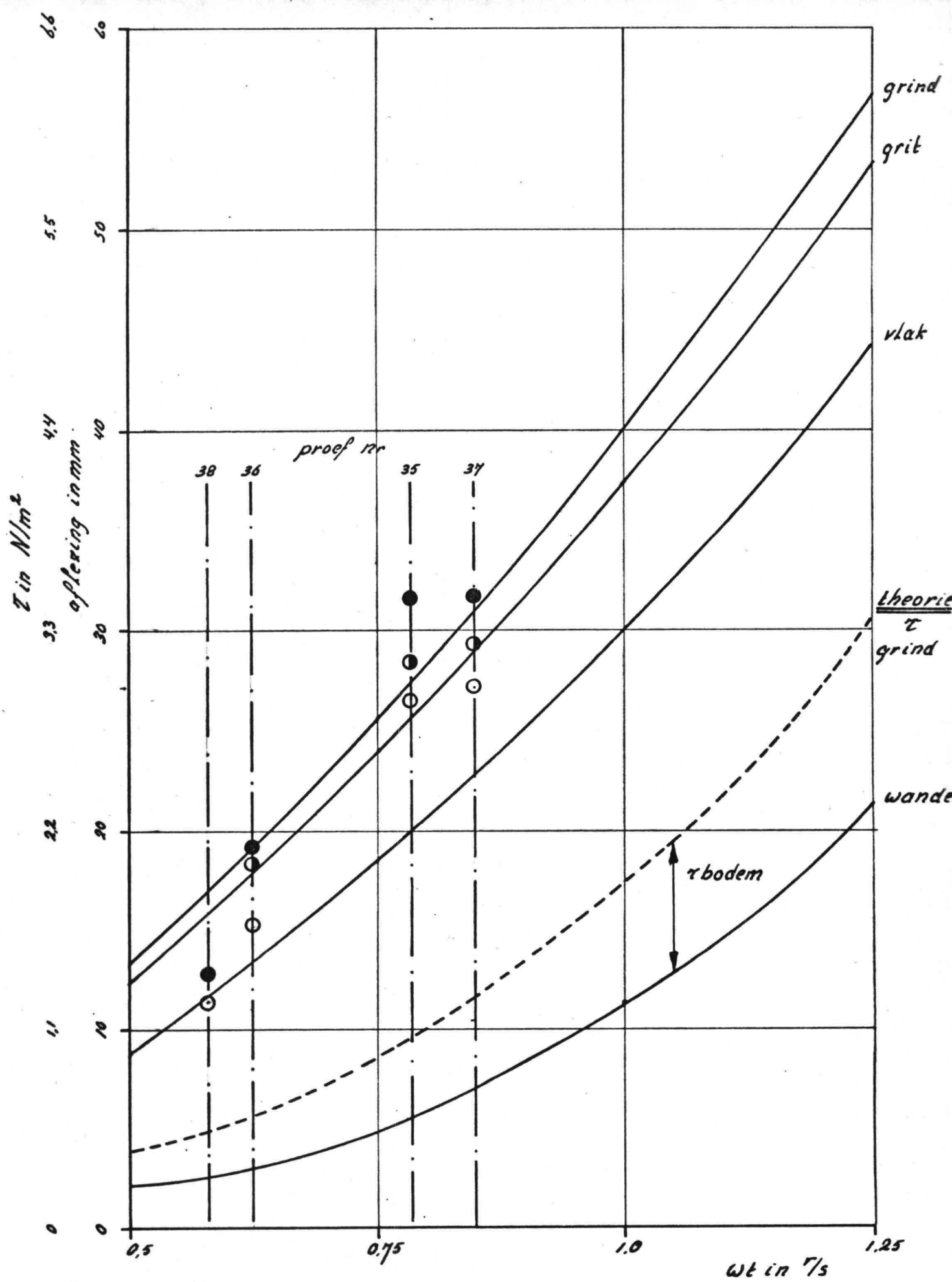


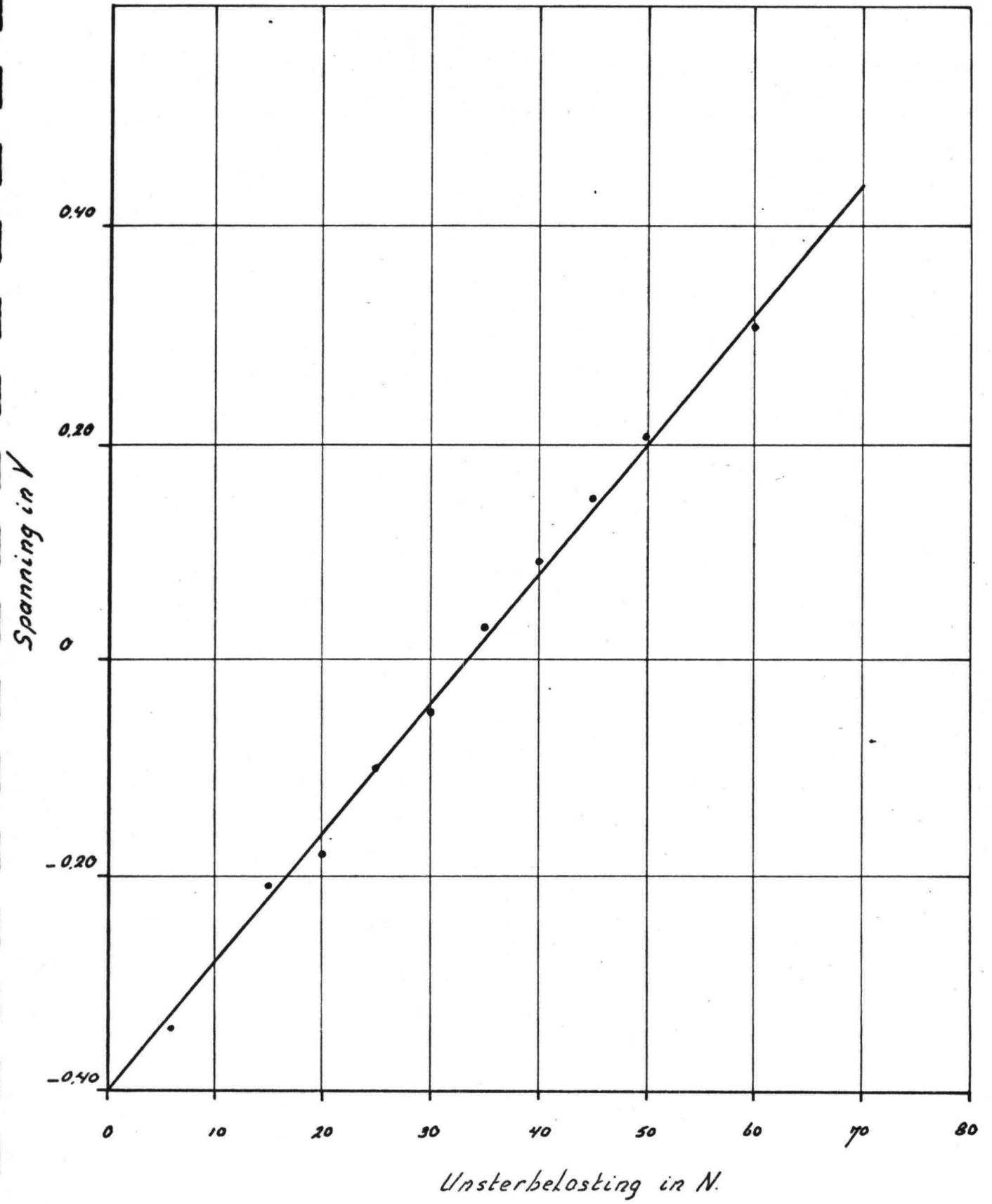
Fig VIII



- Bewegende bodem
- begin
- bodem met ribbels
- eind

Samenvatting τ .

Fig IX



Ykgrafick.

Fig X



gefilterd signaal
proef 34 raai 0
dominant = 1.48 m

$N = 5 \cdot 0 \cdot 6$



proef 3 raai 0 ongefilterd

dominant = 1.90 m

$N = 4$

Passingsprobleem.

Vergelyk Zaaglandfunctie
met Bodemconfiguratie.

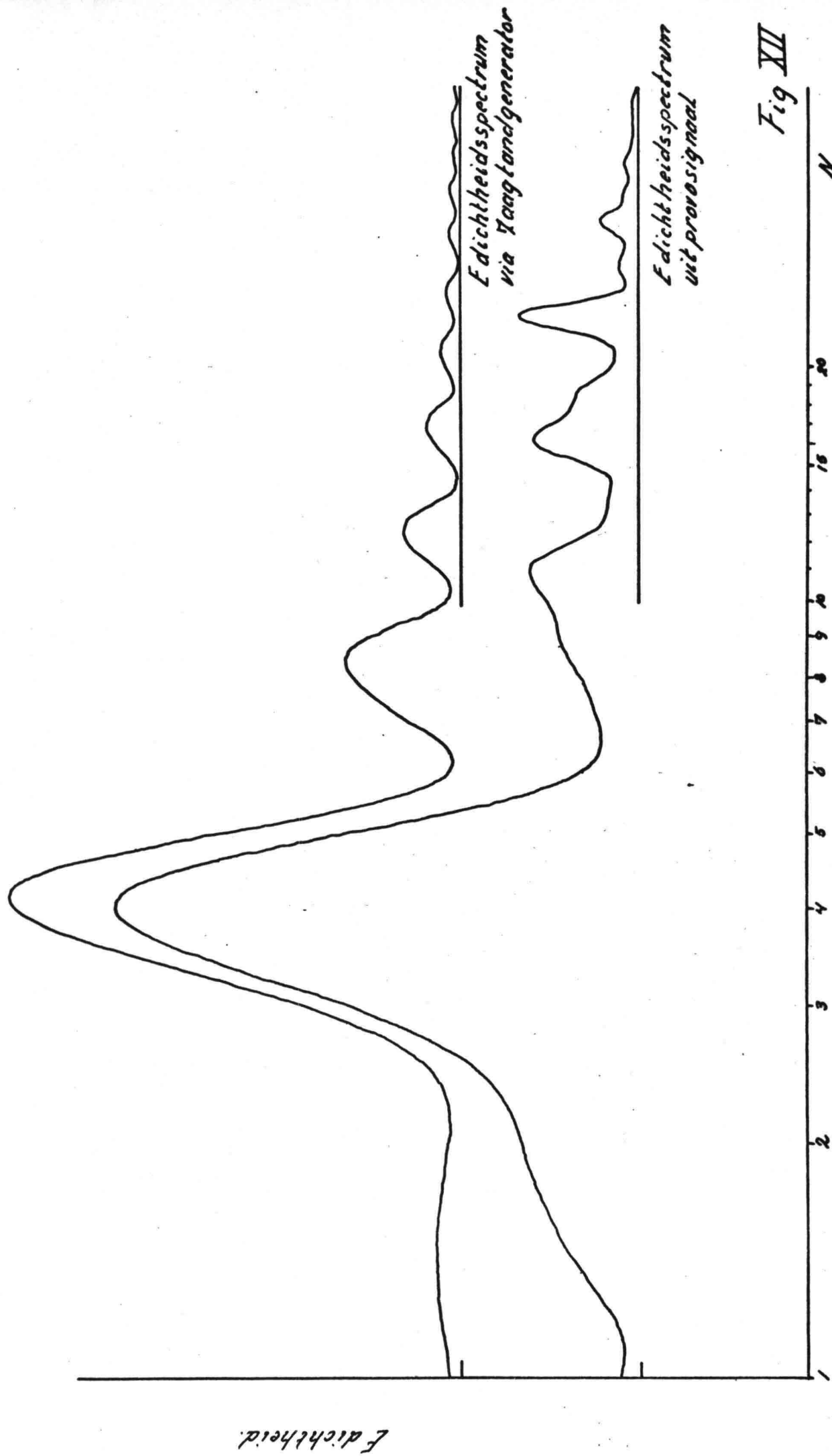


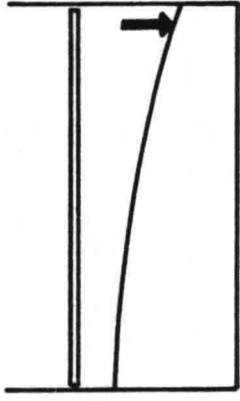
Fig VII

E dichtheid

$37.5 \cdot 10^{-4}$

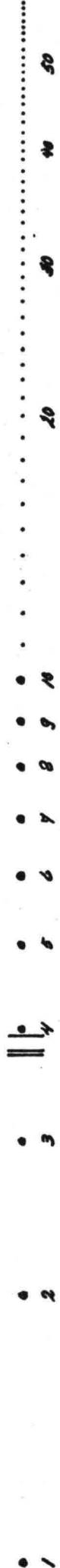
$25 \cdot 10^{-4}$

$12.5 \cdot 10^{-4}$

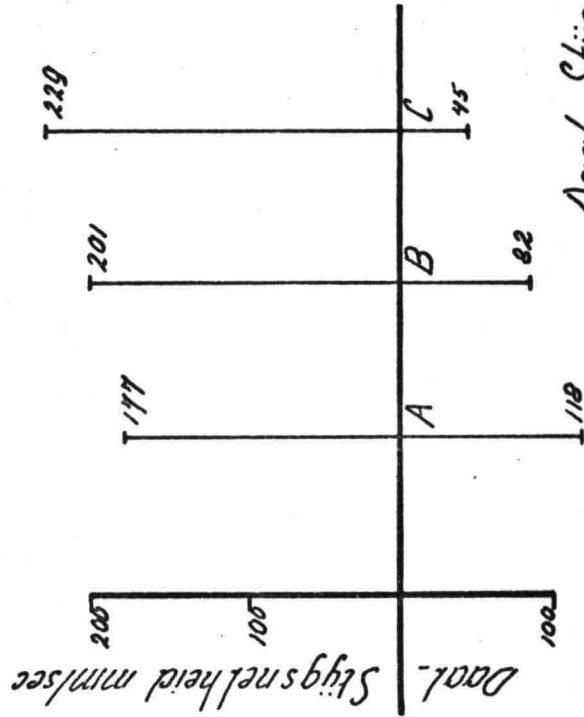


Meetsituatie

meetpunt 10mm 1/2 wand

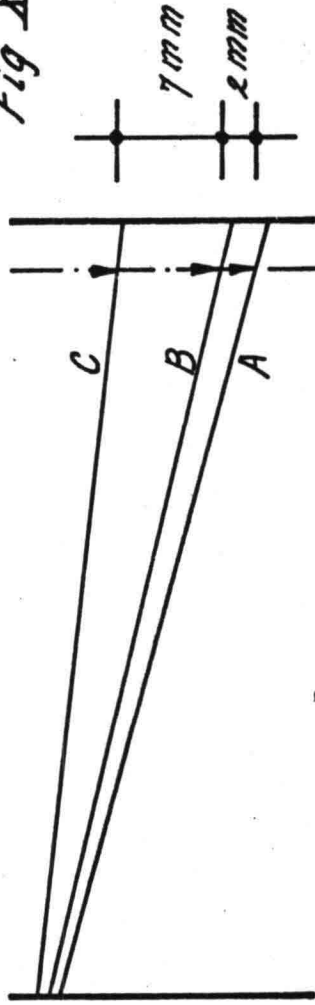


Spectra



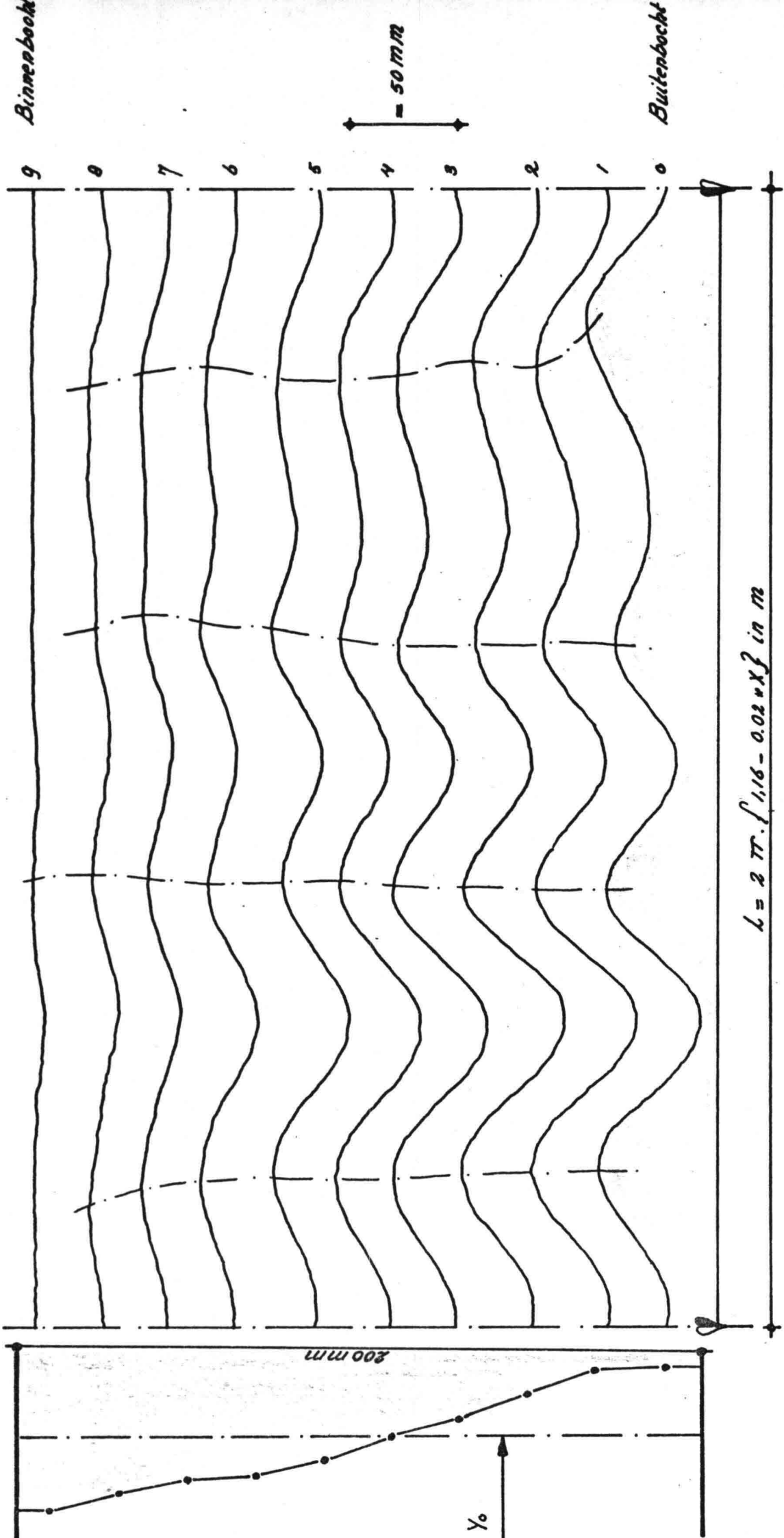
Daal. Stijgsnelheid

Fig XIII



Gemiddelde Bodem in een punt

← stroomrichting.



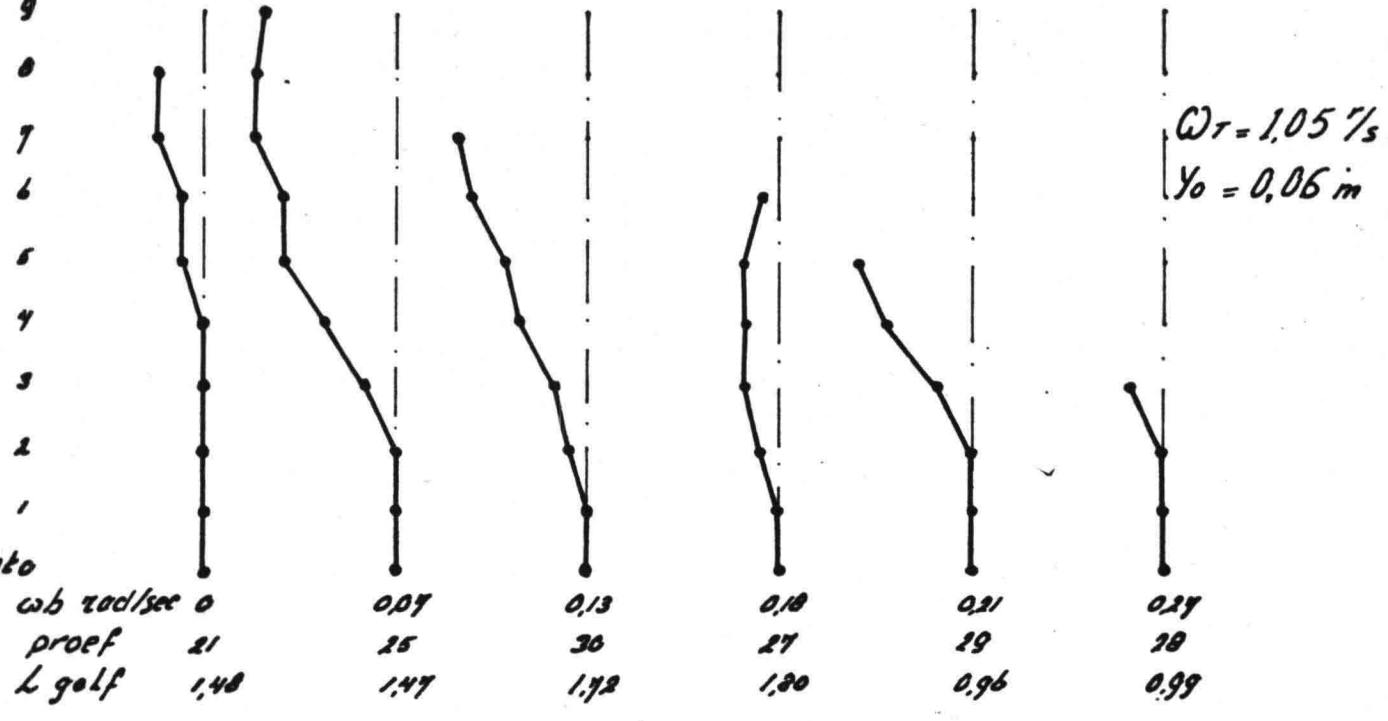
$$L = 2\pi \cdot f_{1,16} - 0.02 \cdot x \cdot \beta \text{ in m}$$

Fase en Amplitude als functie van r
inclusief gemiddelde totale goot

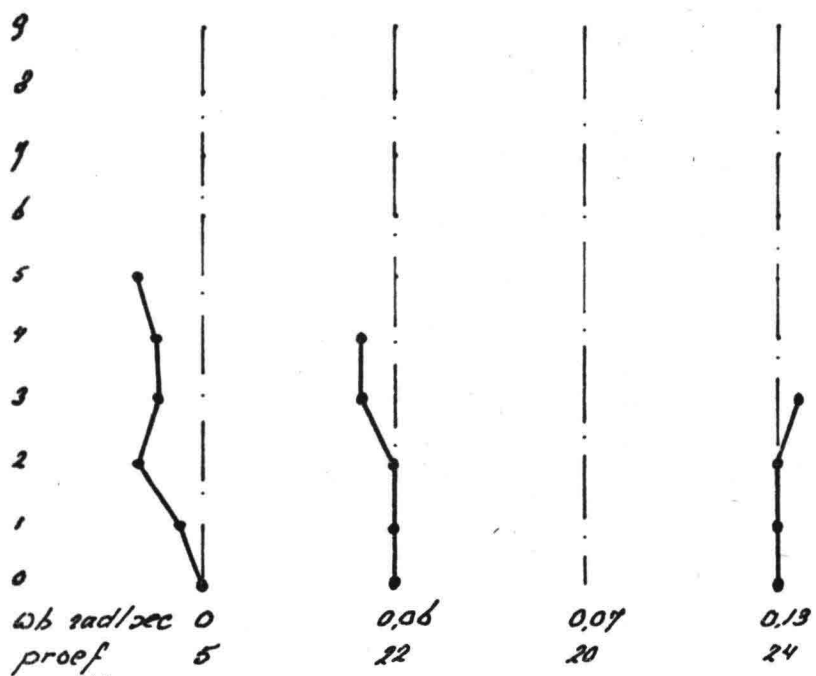
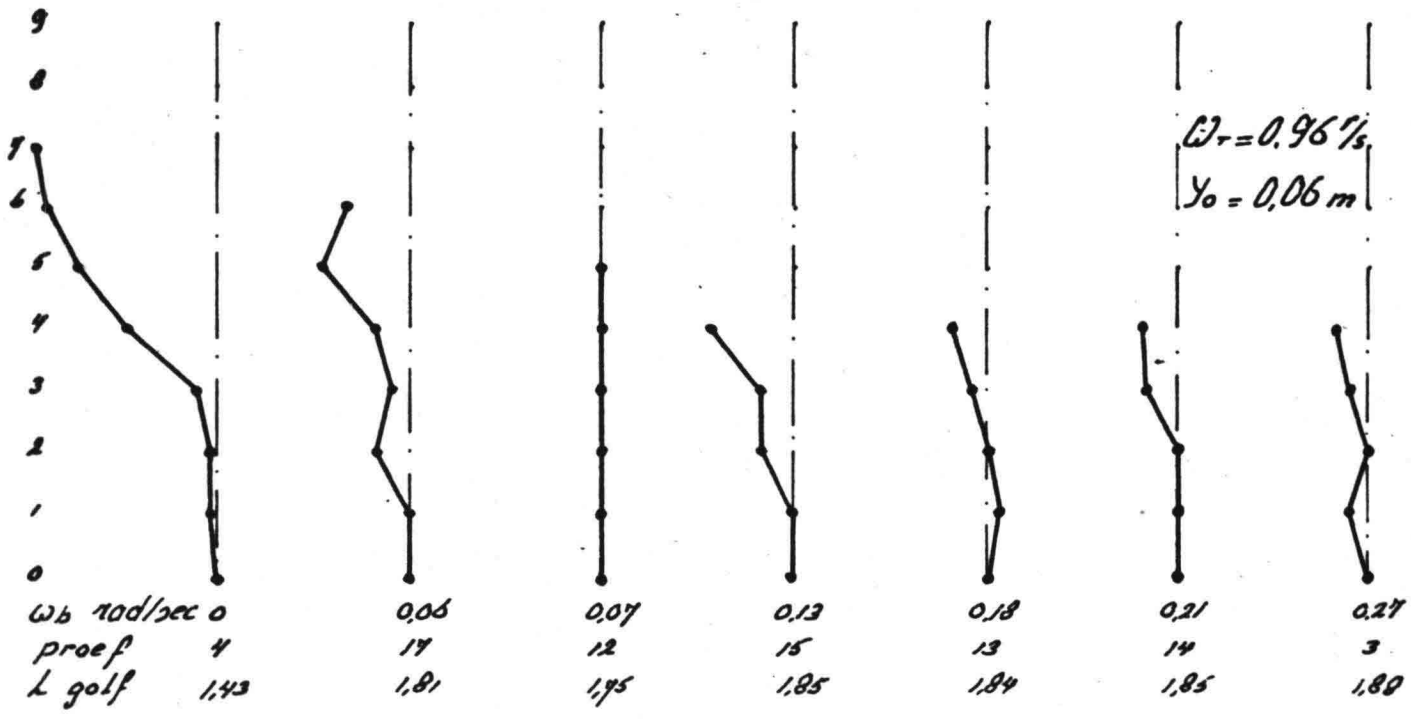
Gemiddelde over
concentrische
cirkels

Fig: XIV

binnenbocht
raai nr: 9



buitenbocht



$\Omega_r = 0.79 \%$
 $Y_0 = 0.06 \text{ m}$

Faseverschuiving
t.o.v. een straal door
top golf %d buitenwand
stroomrichting →

schaal 0.4 0.2 0 0.2 0.4 rad
achterlopend voorlopend

Fig XV

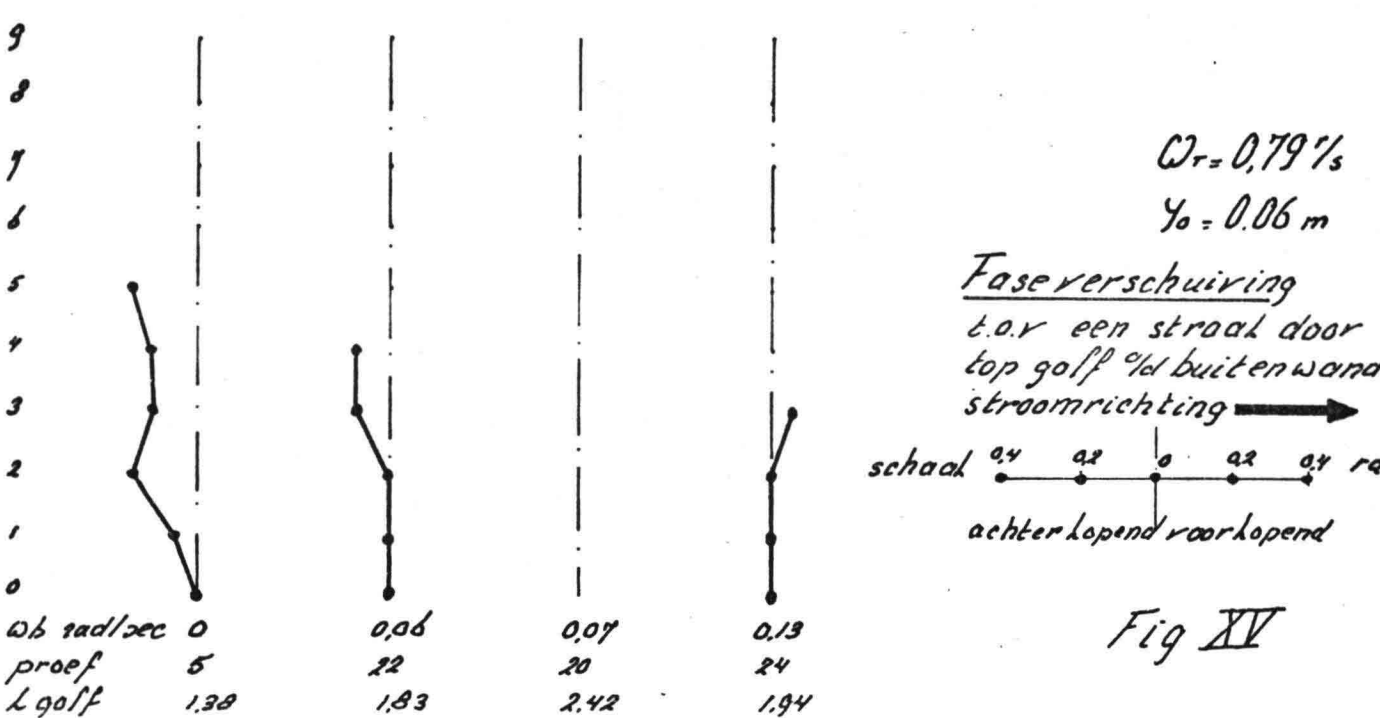
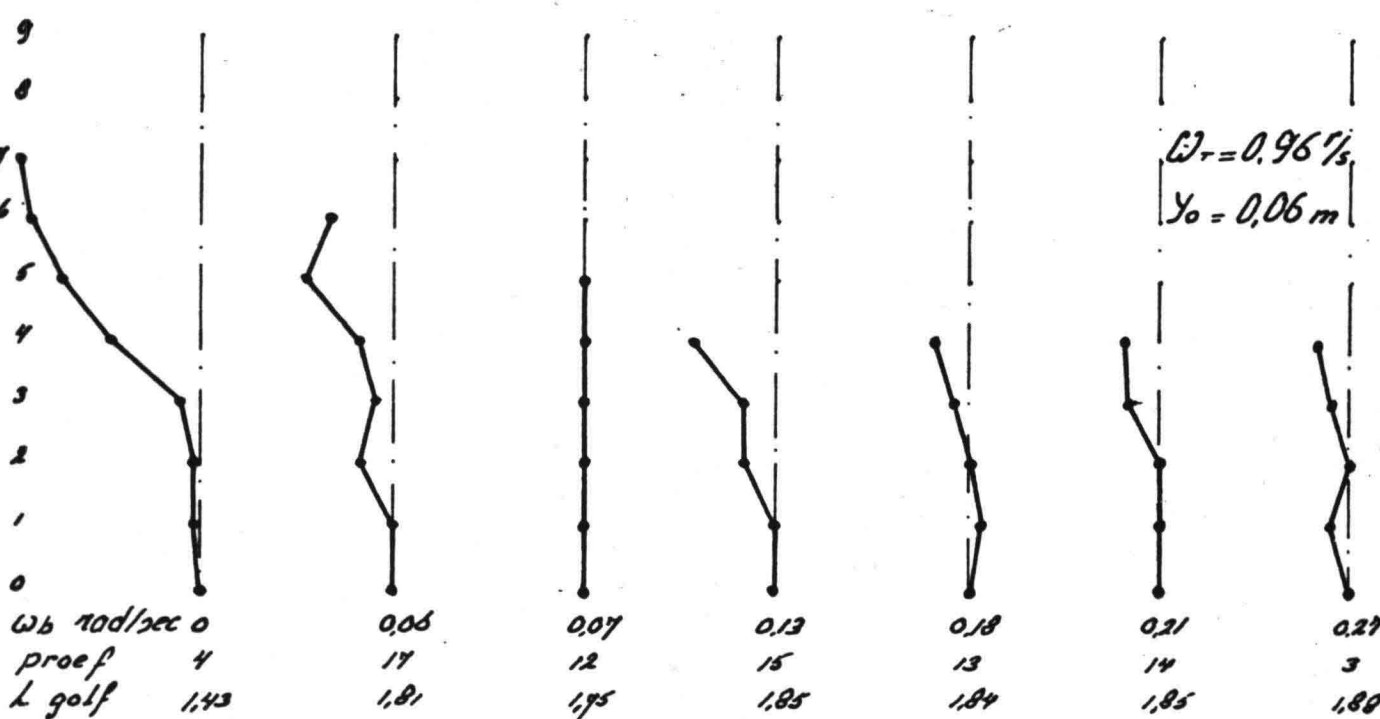
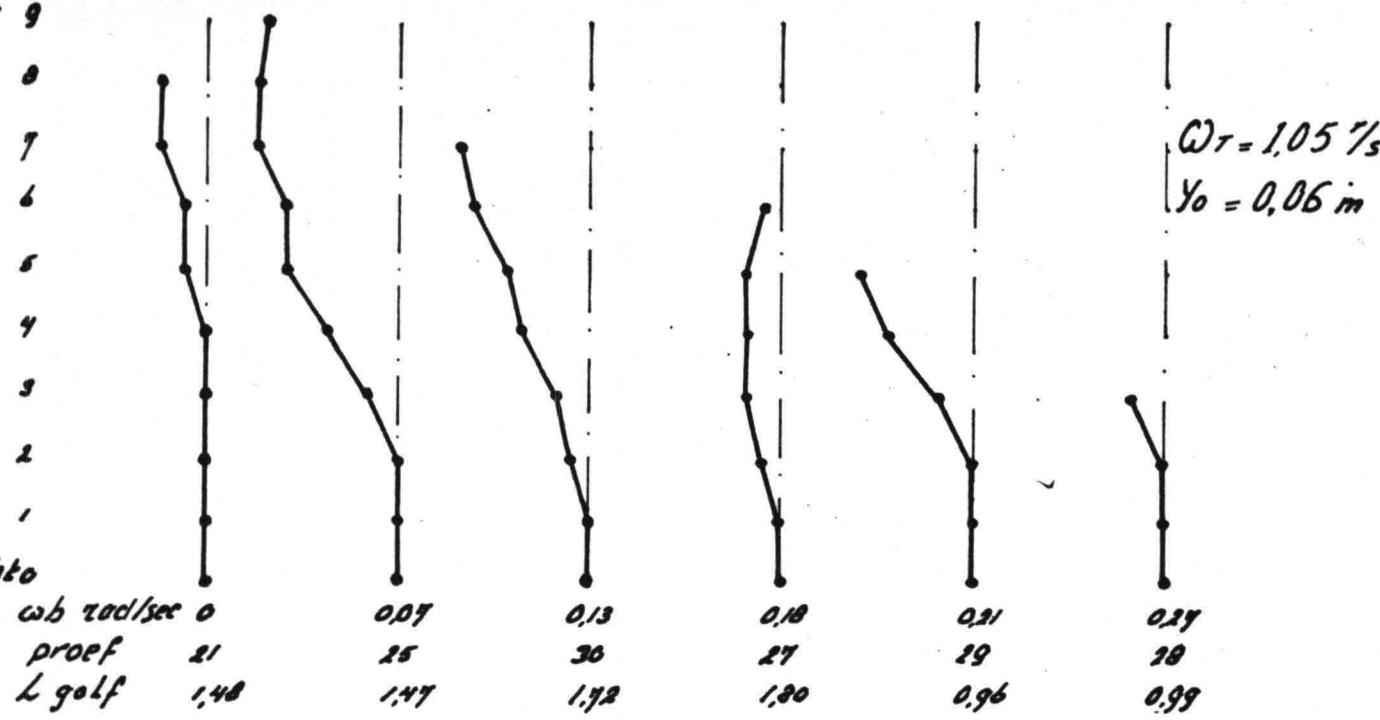


Fig XV

binnenbocht

raai nr:

9
8
7
6
5
4
3
2
1

buitenbocht

ω_t rad/sec
proef
 L_{golf}

0.79
5
1.28

0.90
4
1.43

1.05
21
1.48

$\omega_b = 0$

$Y_0 = 0.06$ m

foutgebied

9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

Y_0 in m
proef
 L_{golf}

0.04
32
-

0.06
4
1.43

0.08
33
1.44

$\omega_t = 0.90$ %

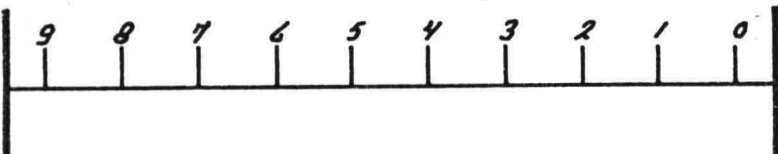
$\omega_b = 0$

Fig XVI

SITUATIE.

BINNENBOCHT

BUITENBOCHT



Faseverschuiving

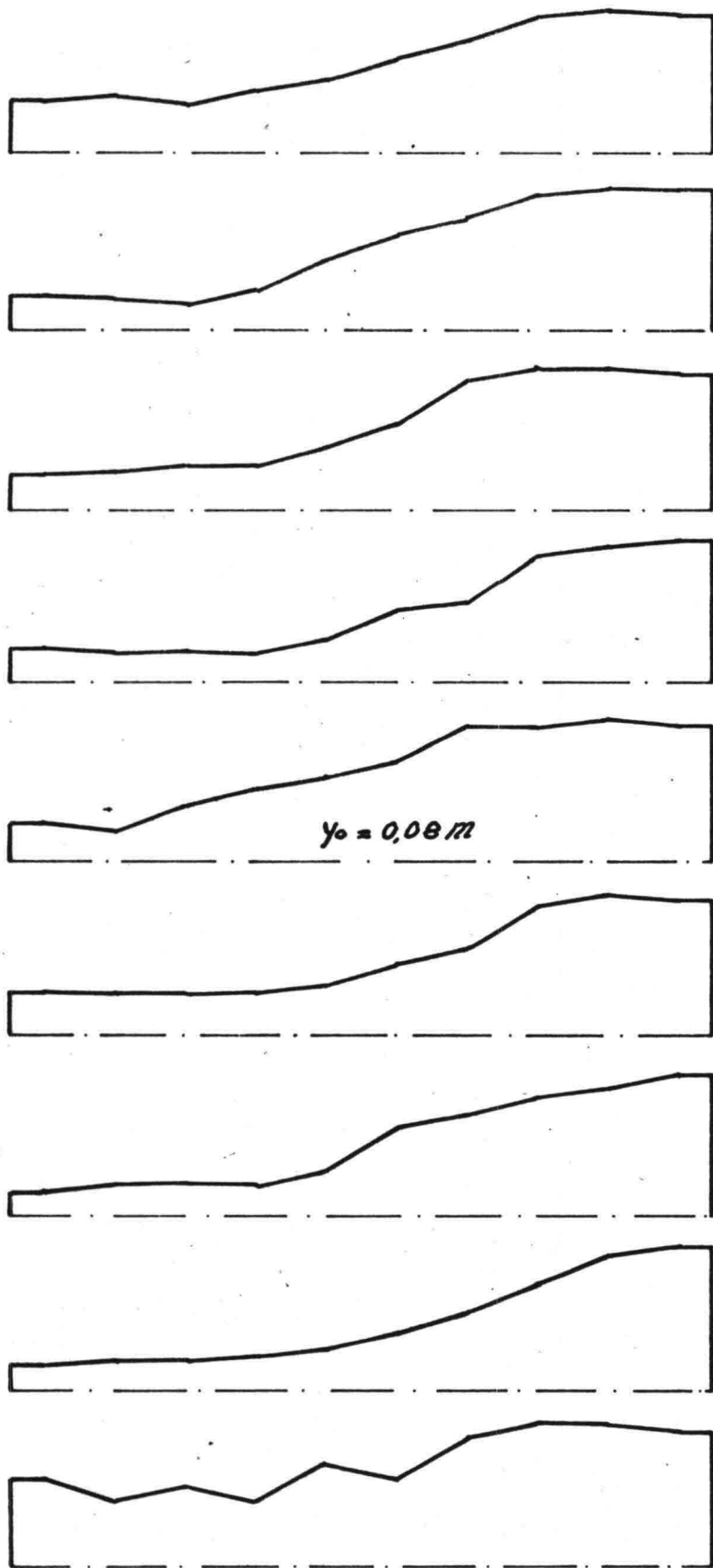
l.o.v straal door topgolf
%d buitenwand
stroomrichting →

schaal 0,4 0,2 0 0,2 0,4 rad
achterlopend voorlopend

Genormeerde Verstorings Amplitude.

mm:

proef wt % w_b % Dymn lgolf



21	1.05	0	52	1.48
25	1.05	0.07	44	1.47
31	0.90	0	49	1.40
4	0.90	0	50	1.43
33	0.90	0	53	1.43
5	0.79	0	44	1.38
29	1.05	0.21	26	0.96
28	1.05	0.27	16	0.99
20	0.79	0.07	43	2.42

binnenbocht 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 buitenbocht.

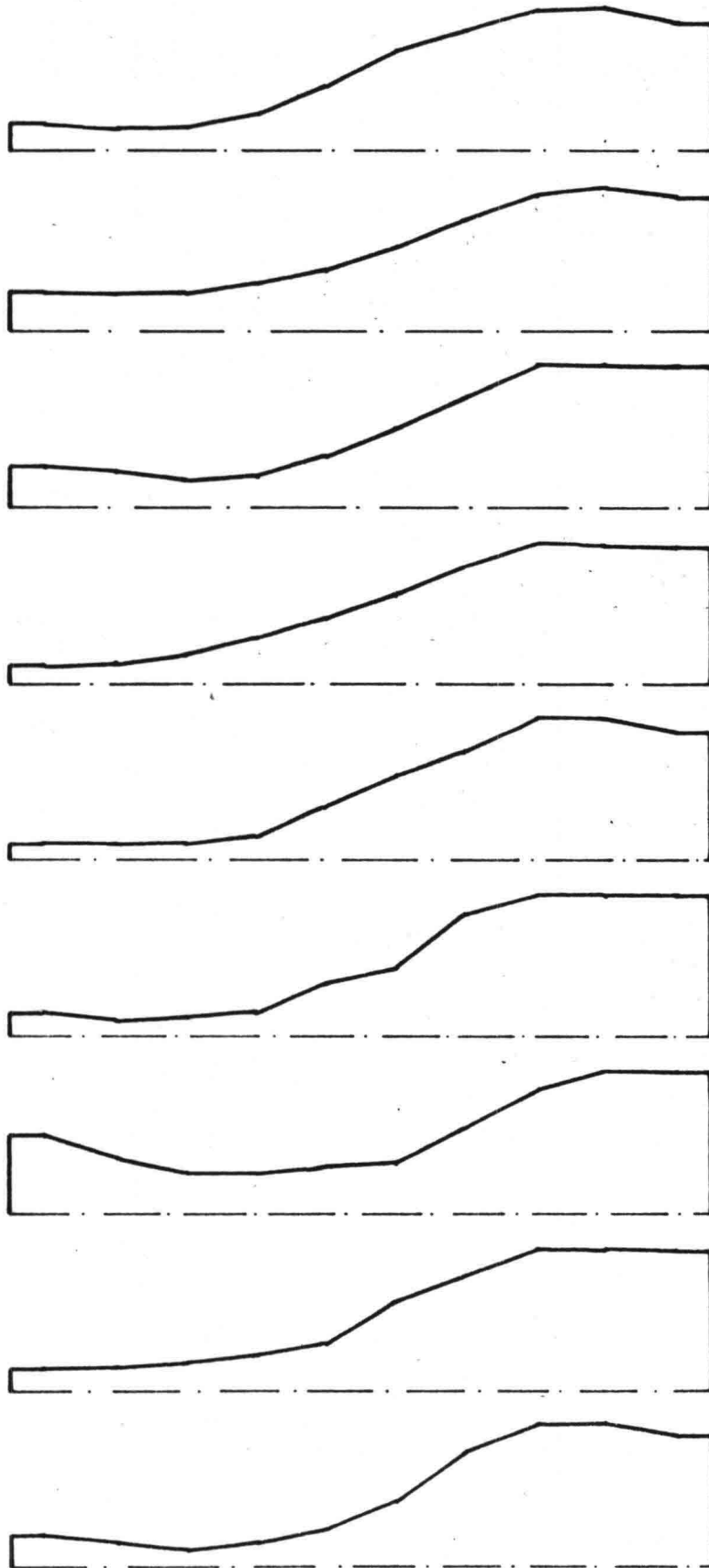
Fig XVII

indien niet vermeld $y_0 = 0.06 m$

Genormeerde Verstorings Amplitude.

norm: |

proef wt % w₆ % Dy ma. L golf



27 1.05 0.18 31 1.80

17 0.90 0.06 42 1.81

12 0.90 0.07 40 1.75

15 0.90 0.13 39 1.85

13 0.90 0.18 29 1.84

14 0.90 0.21 23 1.85

3 0.90 0.27 15 1.88

19 0.79 0.06 42 1.64

24 0.79 0.13 20 1.94

9 binnenbocht 8 7 6 5 4 3 2 1 0 buitenbocht.

Fig XVIII

indien niet vermeld $y_0 = 0.06 m.$

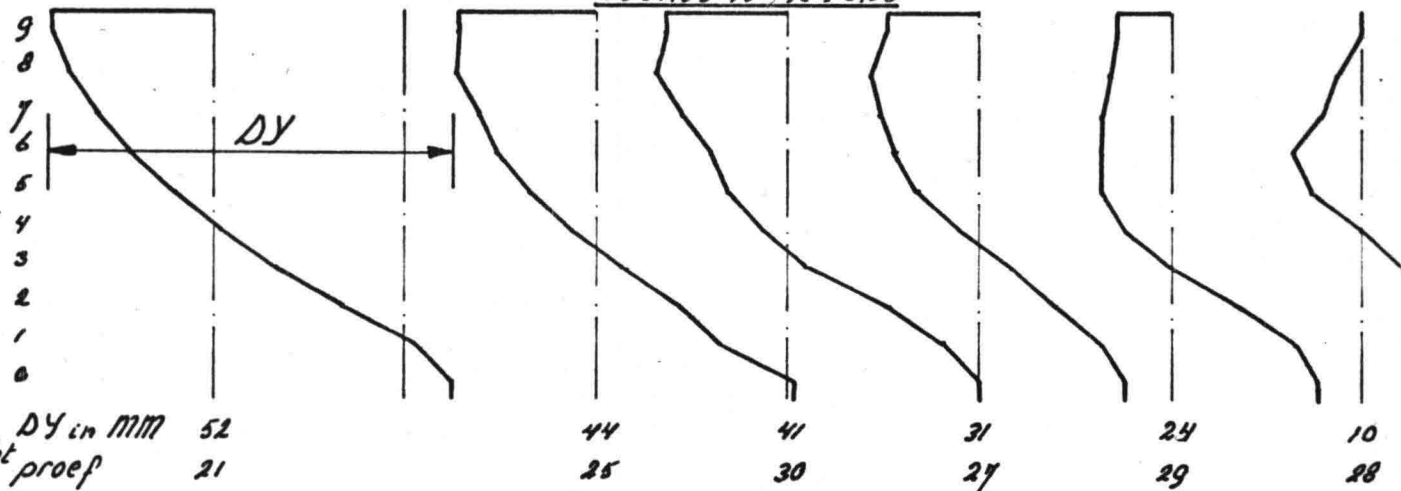
binnenbocht

GEMIDDELDE BODEM h-schaal 1:1 v-schaal 1:4

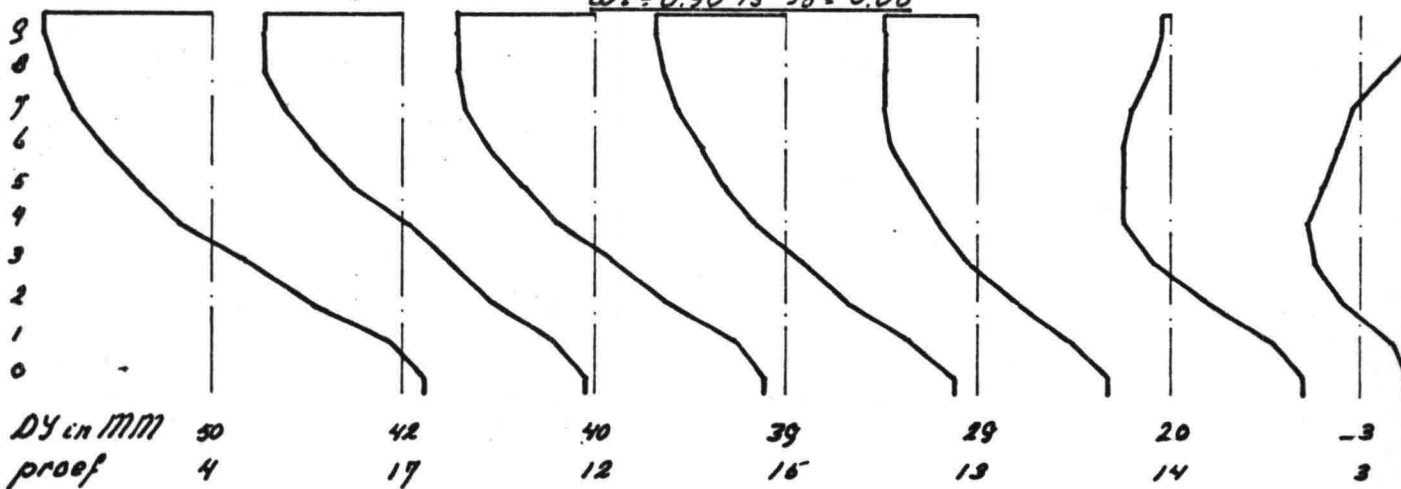
Fig XIX

proef nr

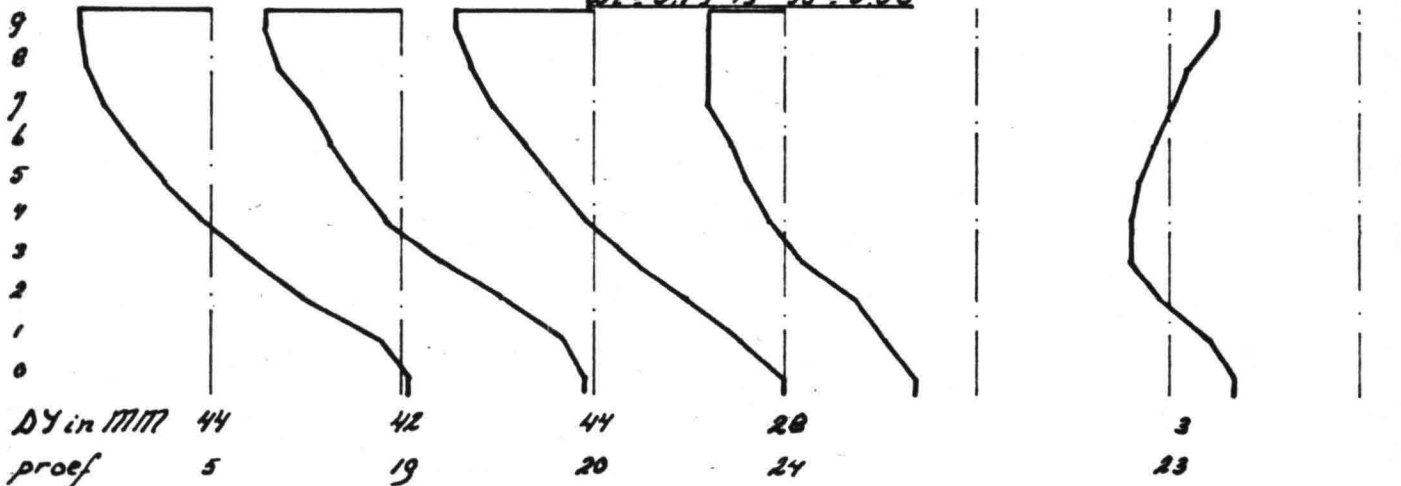
$\omega_t = 1.05\%$ $\gamma_0 = 0.06$



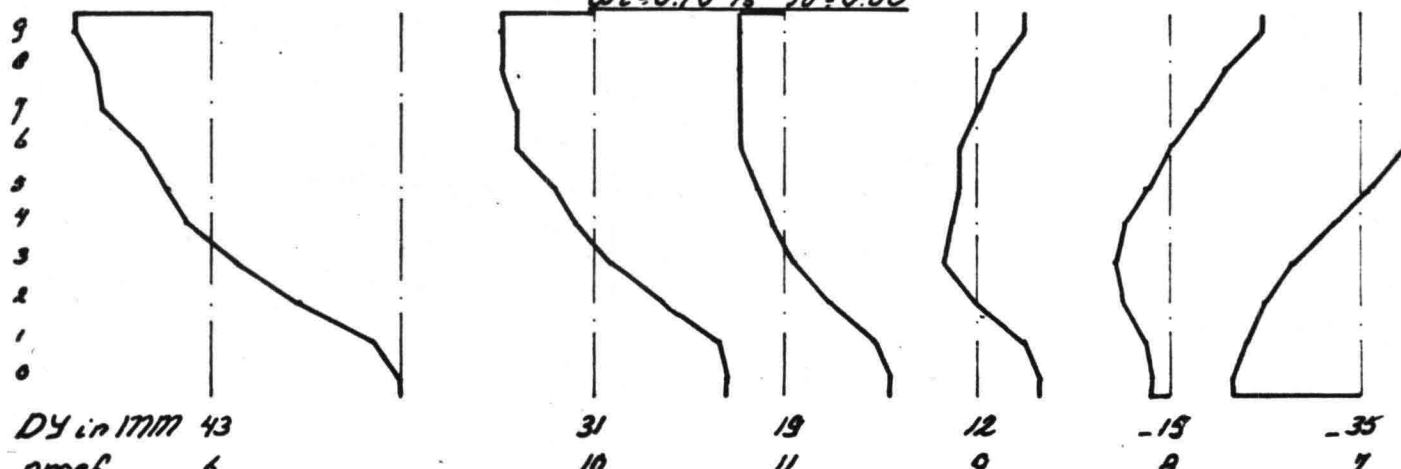
$\omega_t = 0.90\%$ $\gamma_0 = 0.06$



$\omega_t = 0.79\%$ $\gamma_0 = 0.06$



$\omega_t = 0.70\%$ $\gamma_0 = 0.06$



raai nr

9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

$\omega_t = 1.05\%$ $\gamma_0 = 0.06$

buitenbocht

DY in MM	52	44	41	31	24	10
proef	21	25	30	27	29	28



$\omega_t = 0.90\%$ $\gamma_0 = 0.06$



DY in MM	50	42	40	39	29	20	-3
proef	4	17	12	16	13	14	3

$\omega_t = 0.79\%$ $\gamma_0 = 0.06$

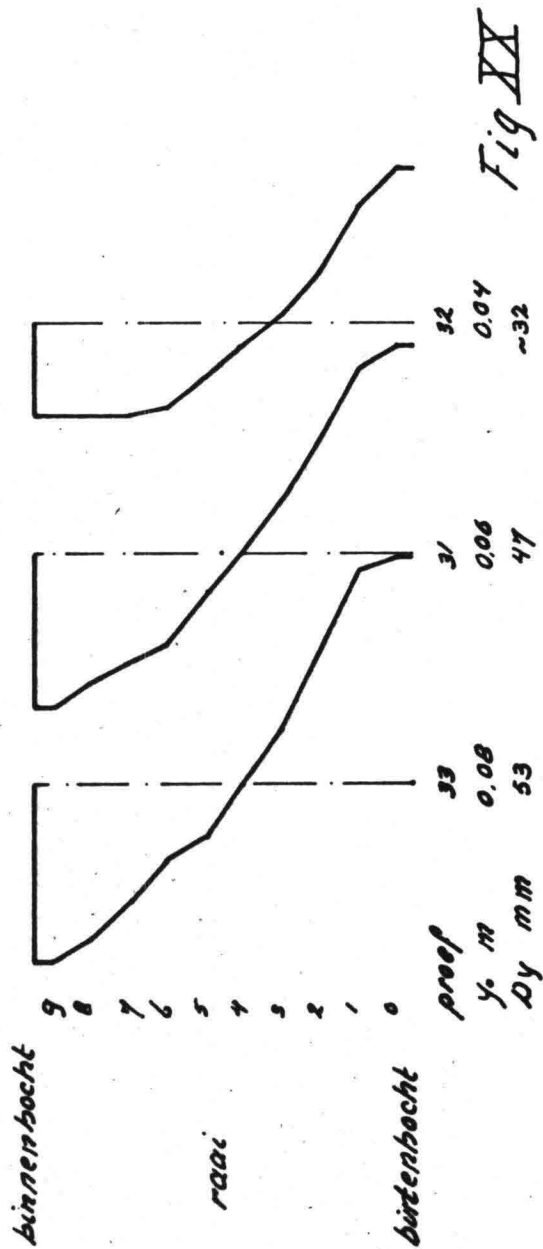


DY in MM	44	42	44	28	3
proef	5	19	20	24	23

$\omega_t = 0.70\%$ $\gamma_0 = 0.06$



DY in MM	43	31	19	12	-15	-35	
proef	6	10	11	9	8	7	
ω_b	0	0.06	0.07	0.13	0.12	0.21	0.27



Gemiddelde als y varieert wt = 0.90

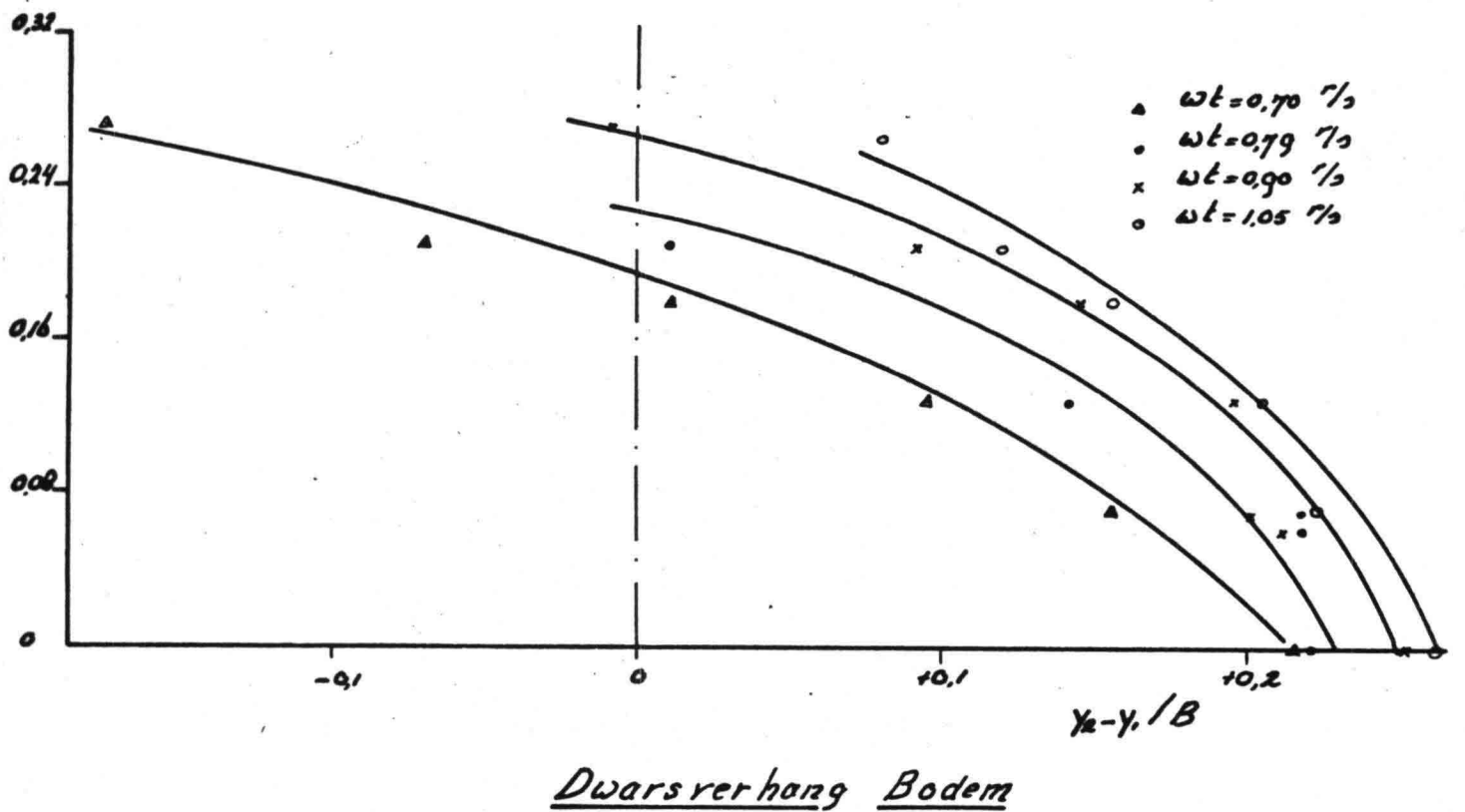
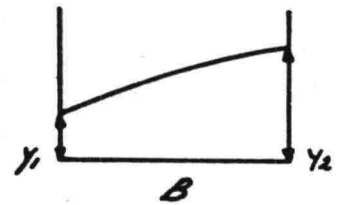
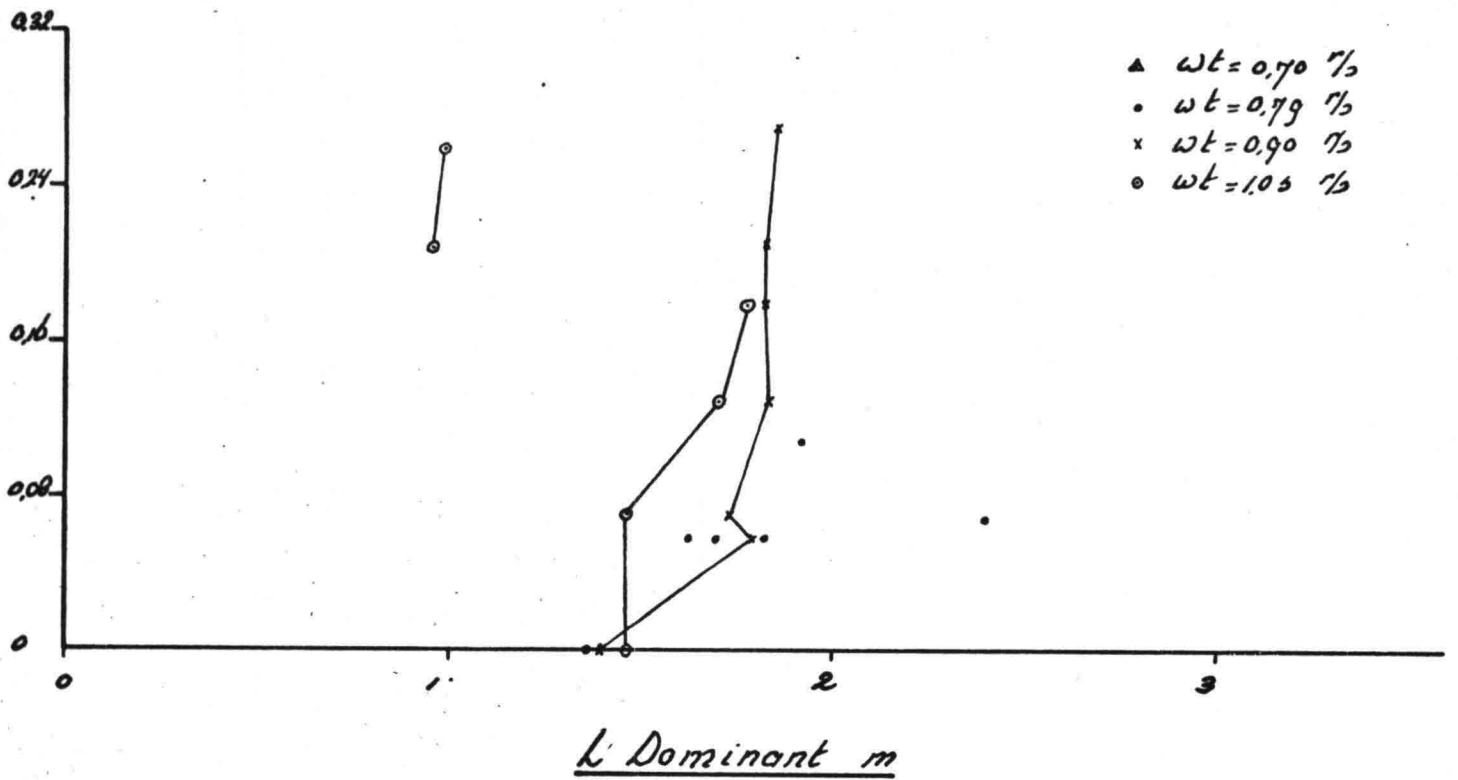
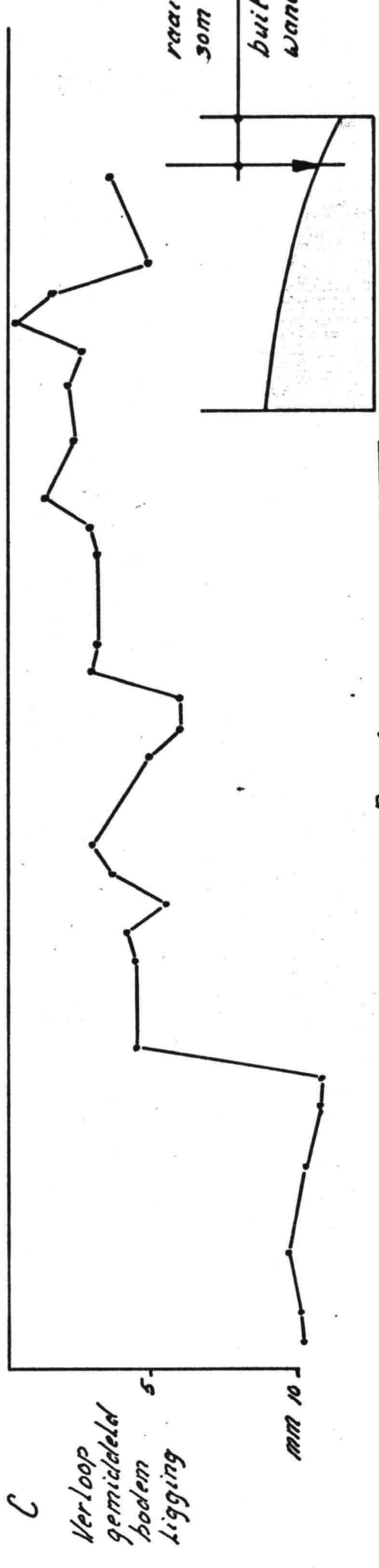
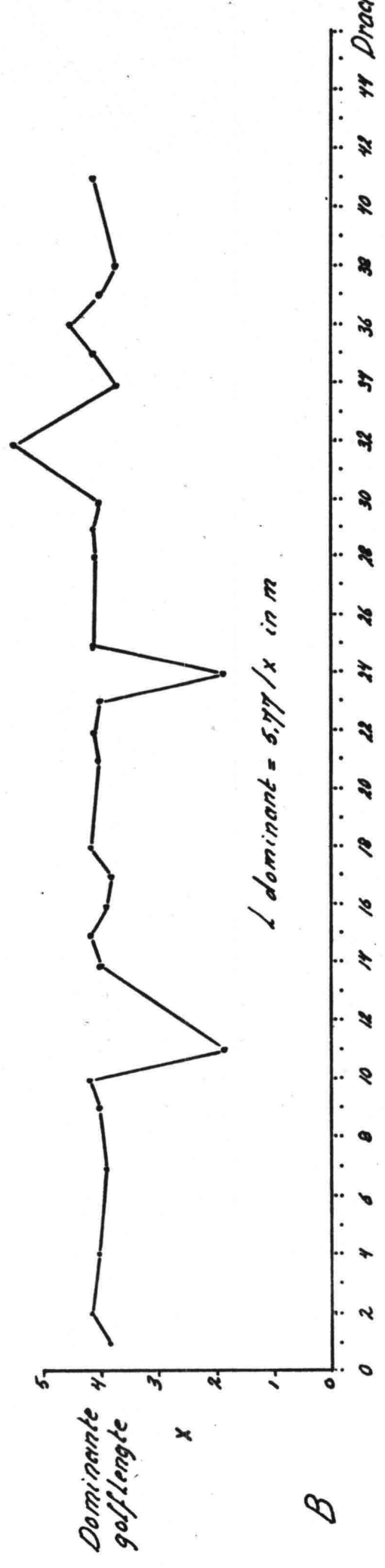
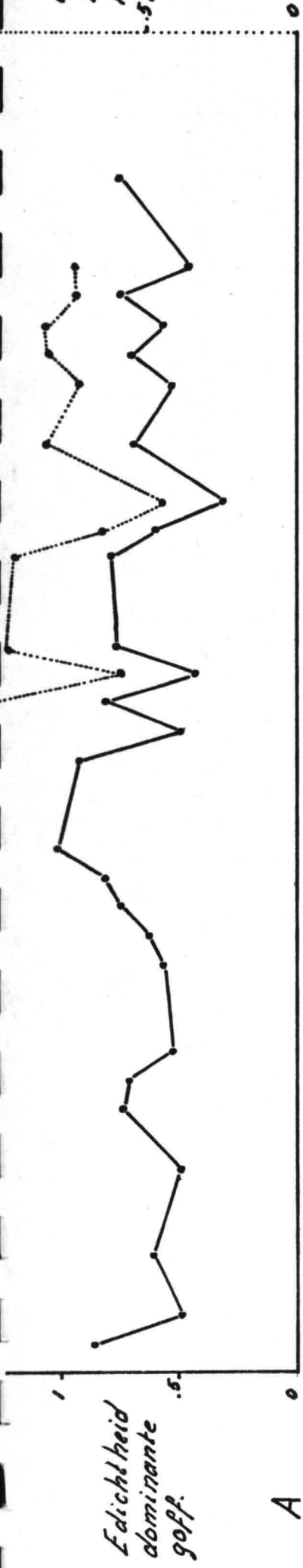


Fig XXI

Opp. onda
Edicht-
heidsspe-
heidsspe-
-strum



38 Draaitijd in Dagen.

37

36

35

34

32

30

29

28

25

24

23

Proef 31

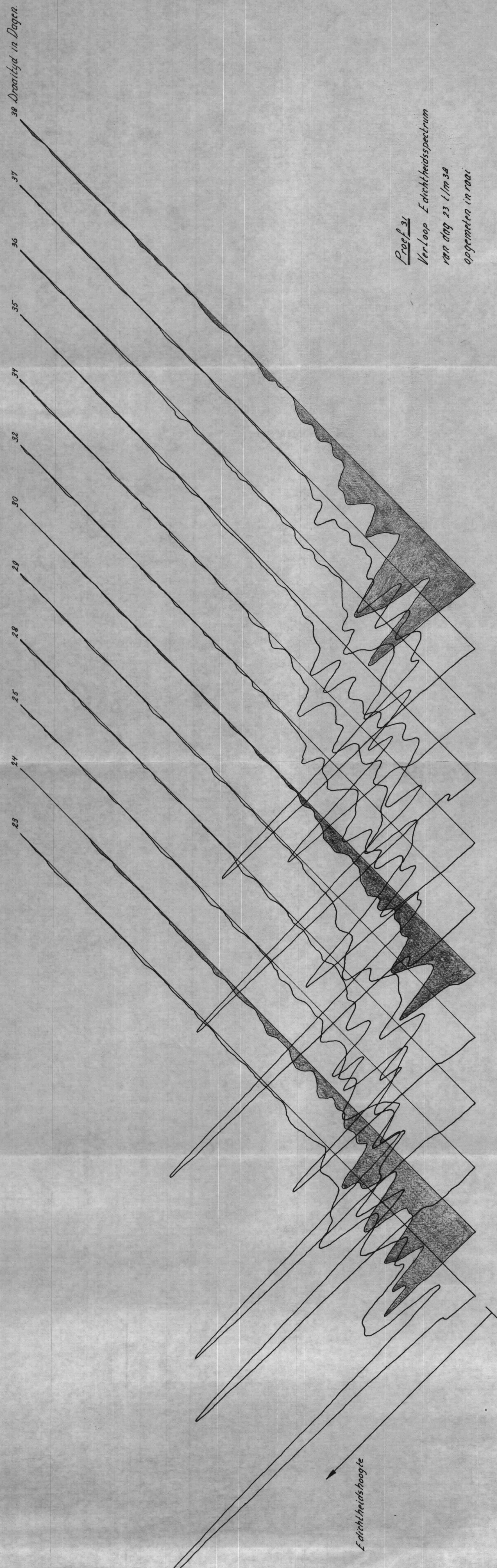
Verloop Edichtheidspectrum

van dag 23 t/m 38

opgemeten in raai

Fig XXIII

Edichtheidshoogte



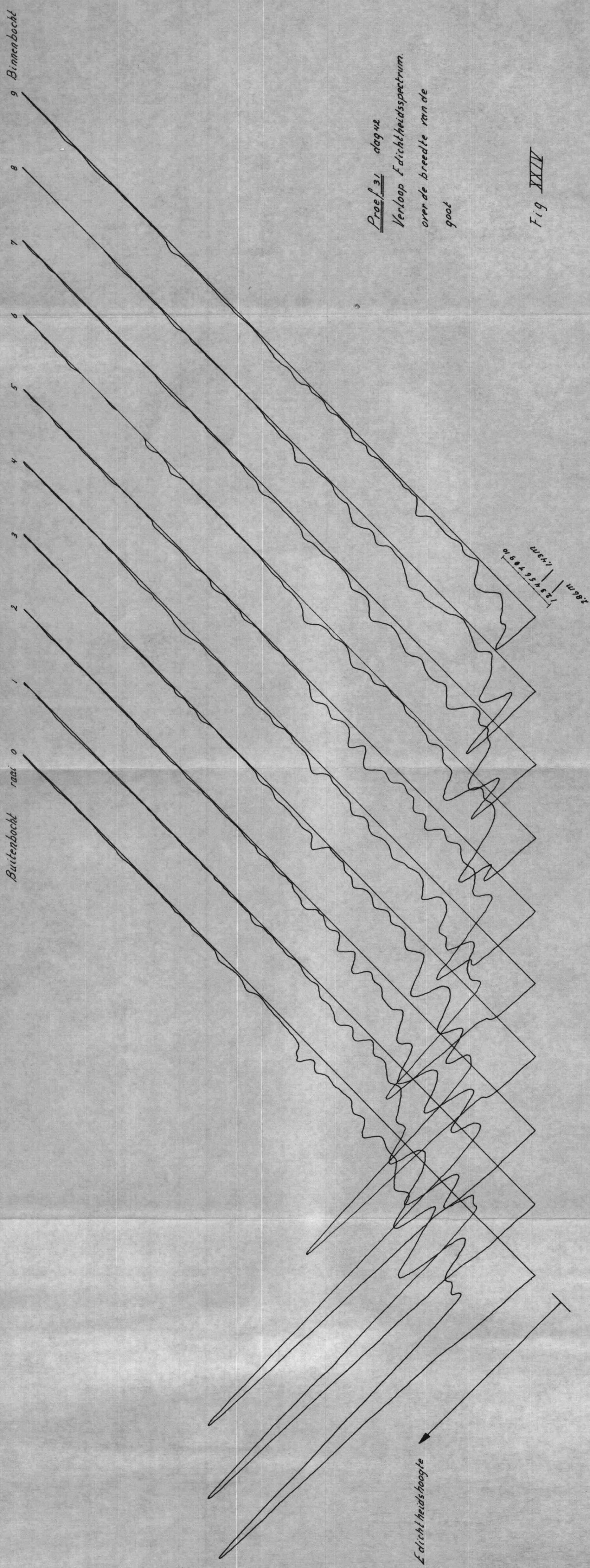
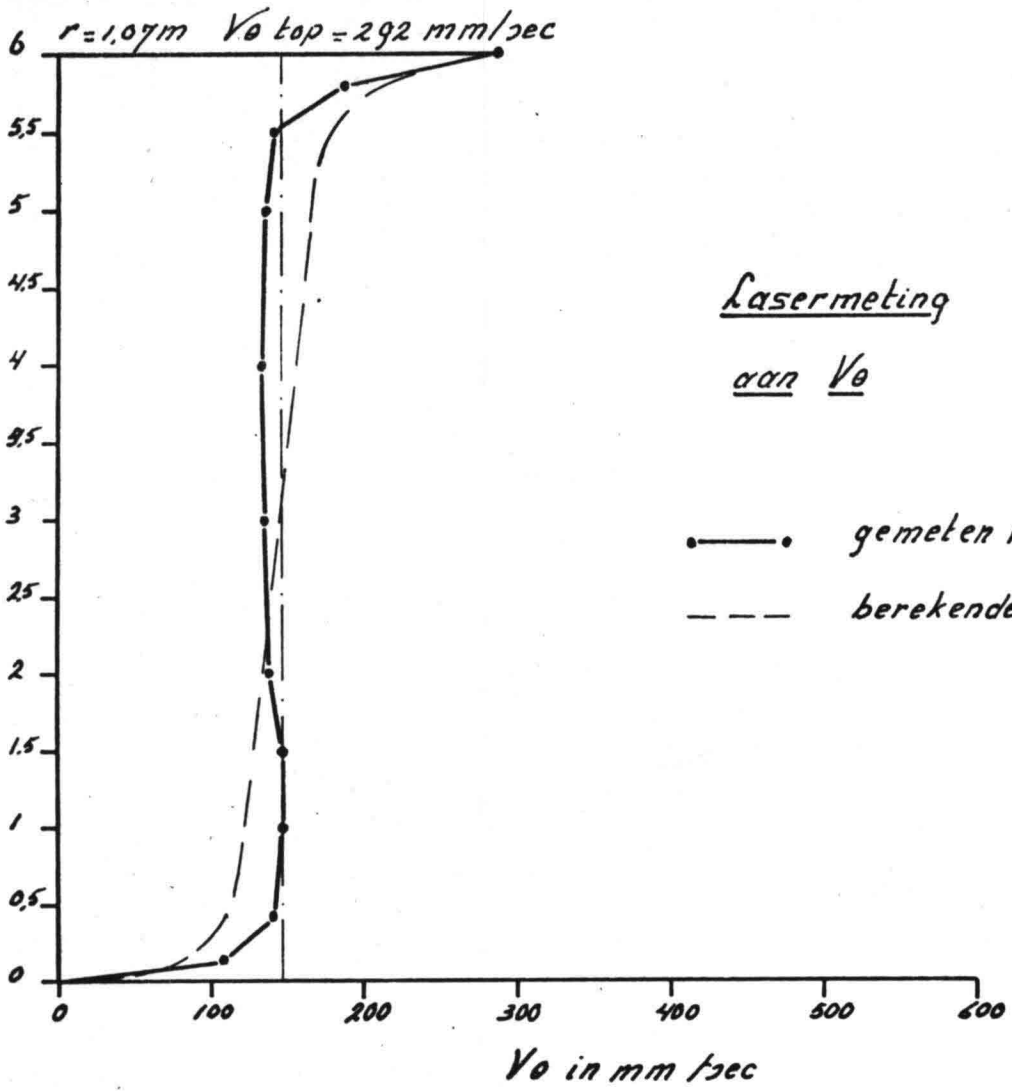
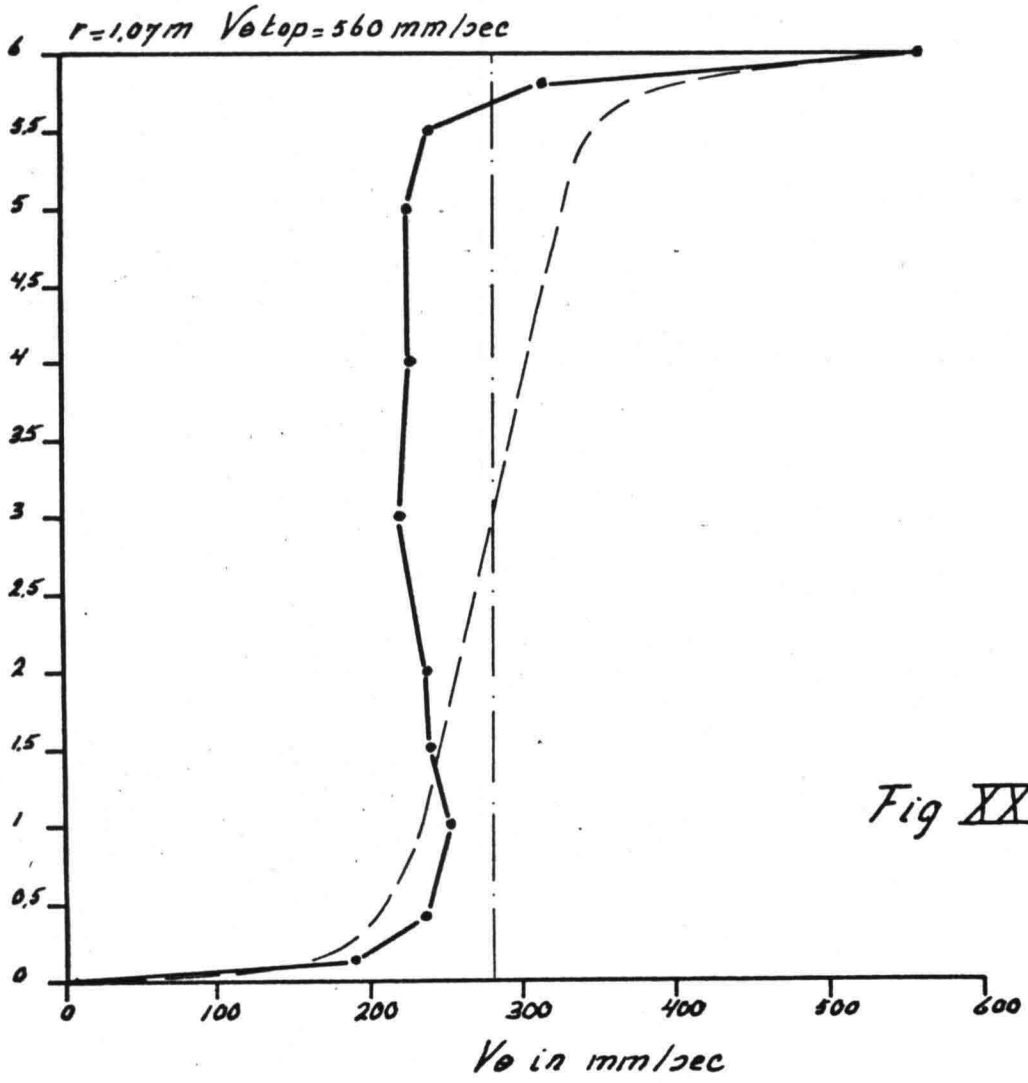


Fig XXIV

afstand vanaf de bodem in cm



afstand vanaf de bodem in cm



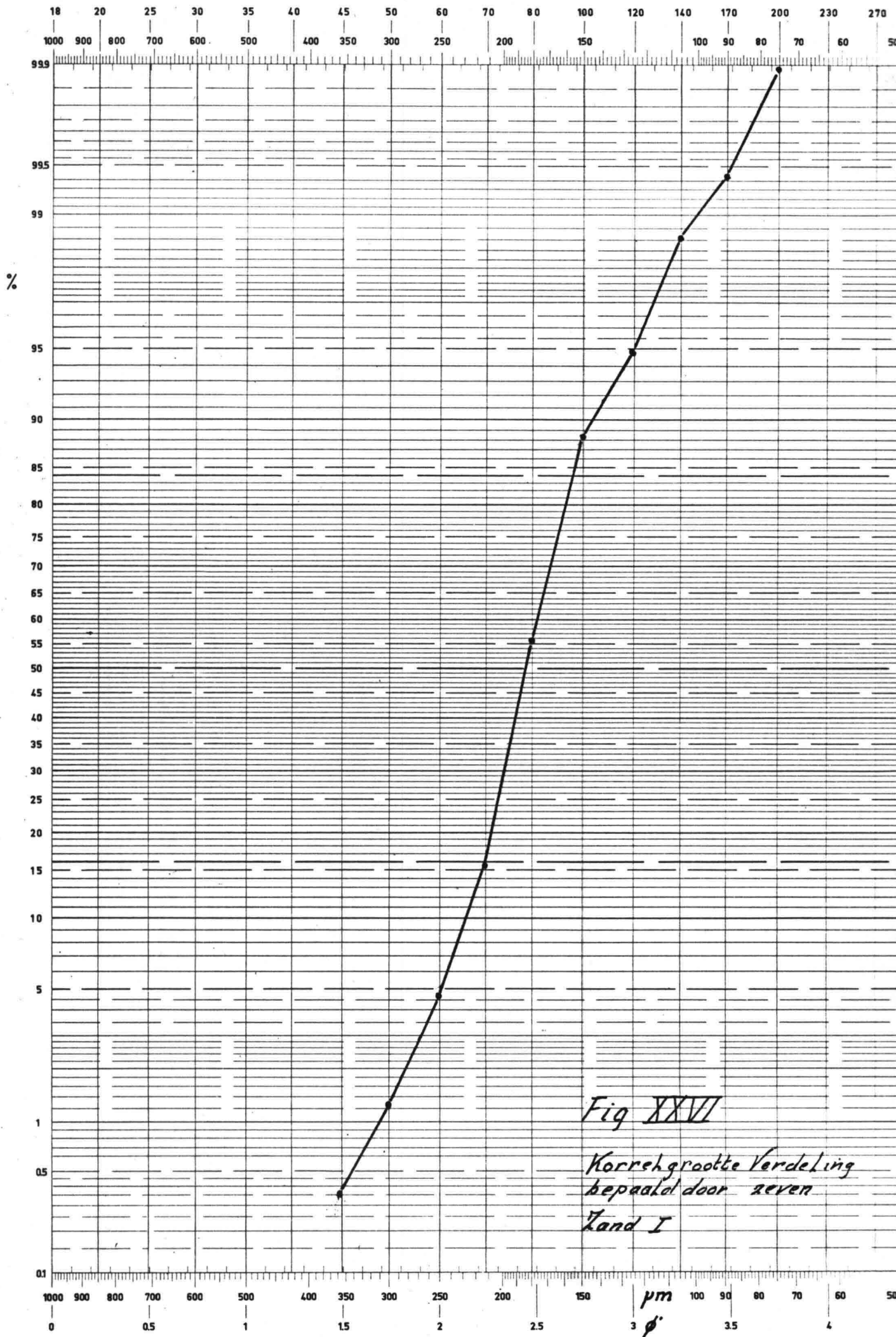


Fig XXVI

*Korrelgrootte Verdeling
bepaald door zeven*

Zand I

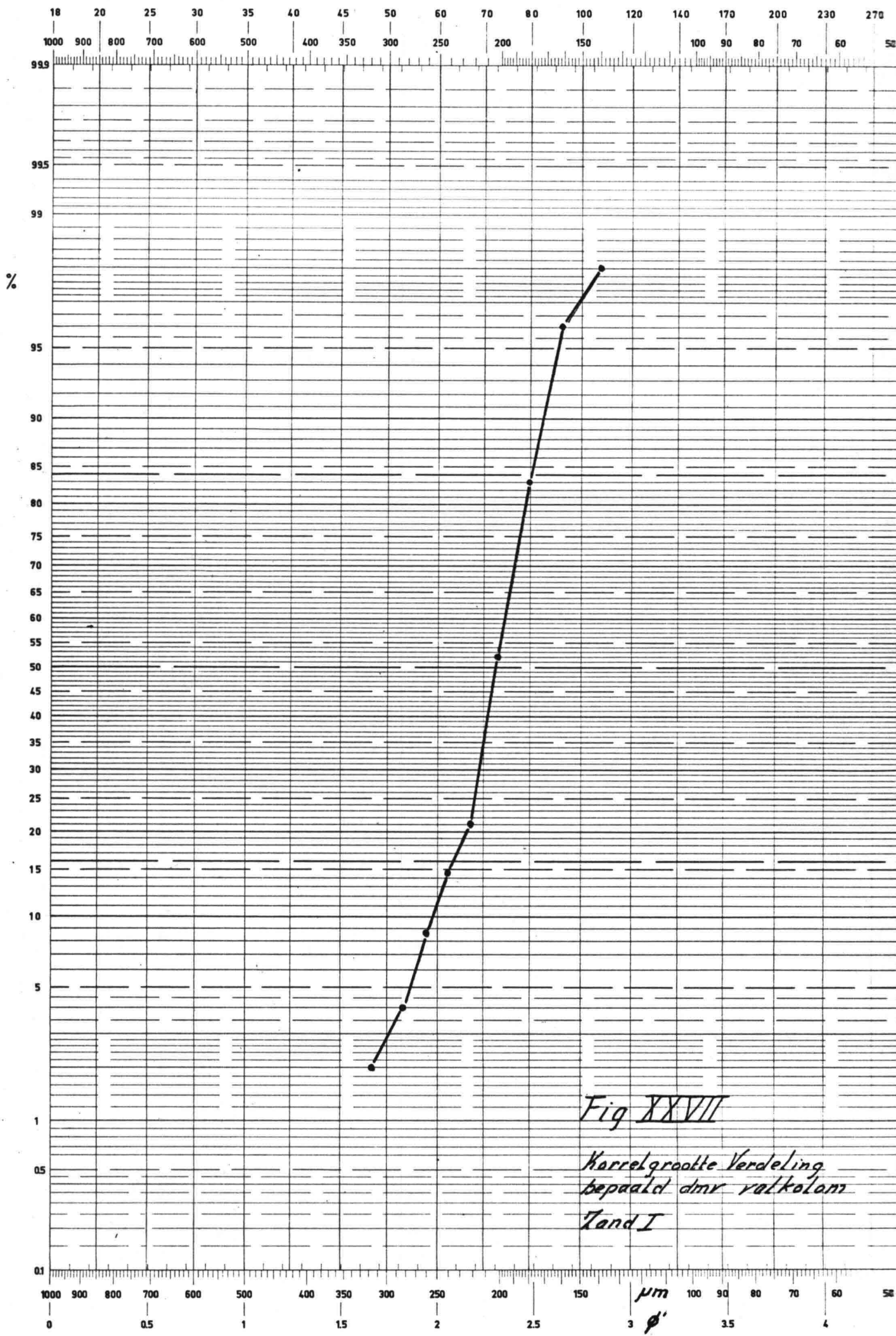
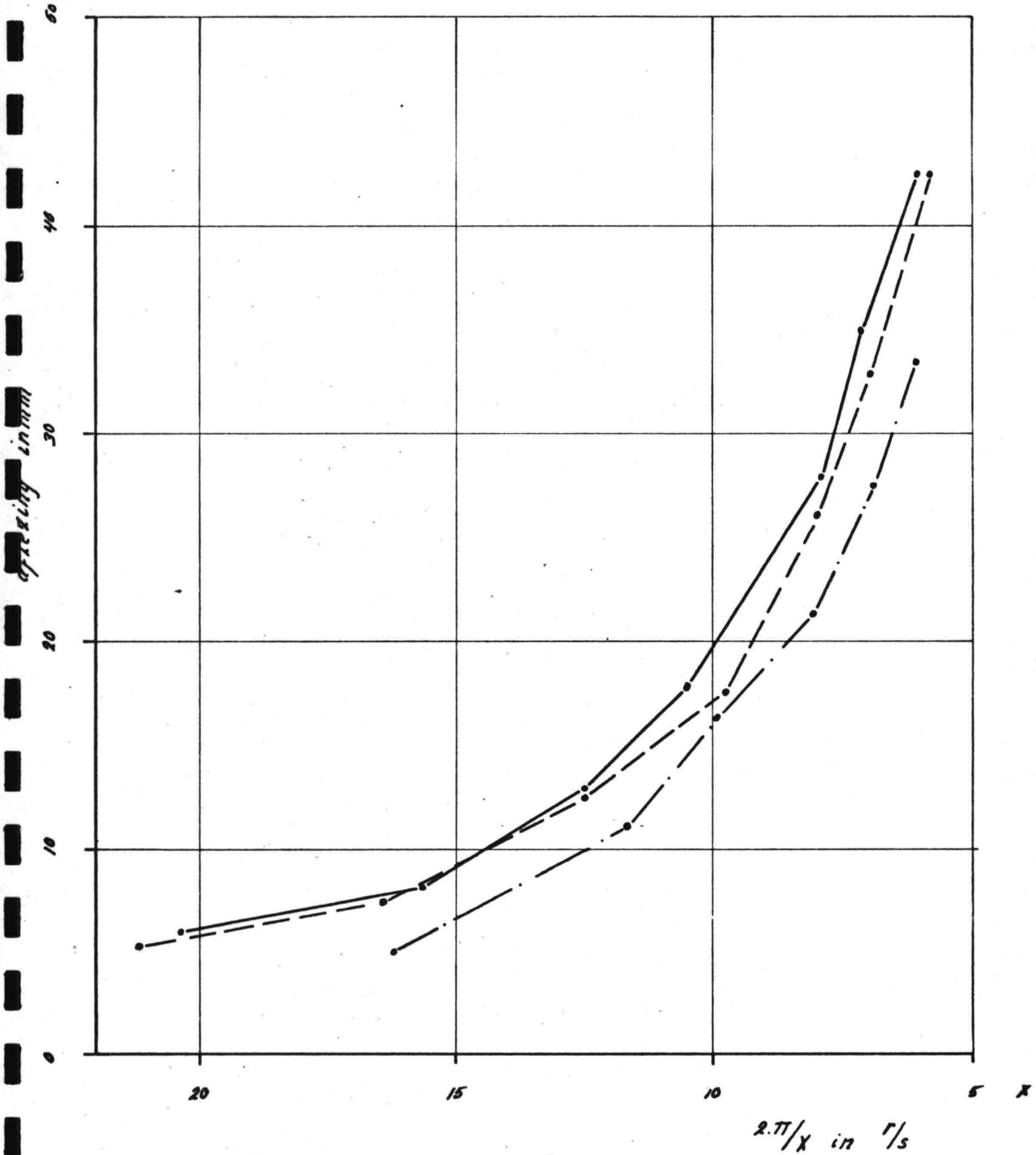


Fig XXVII

*Korrelgrootte Verdeling
bepaald dnr valkolom*

Tand I



Meetwaarden

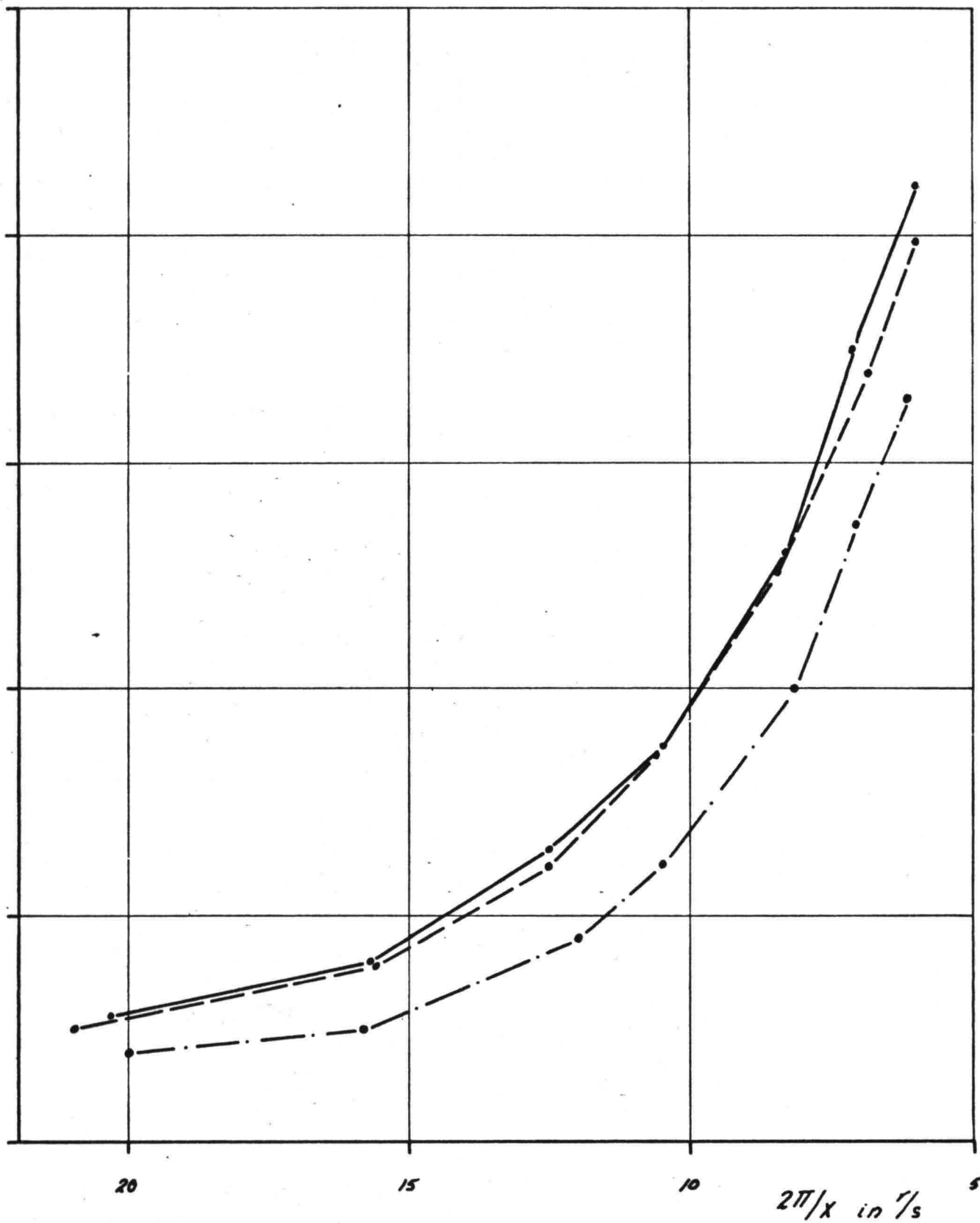
τ by $\gamma_0 = 7.5cm$

—	grind	$\gamma_0 = 7.5cm$	spleetvulling 4 mm
- -	grit	7.5	8
- . -	vlak	7.8	12

Fig XXVIII

aflezing in mm

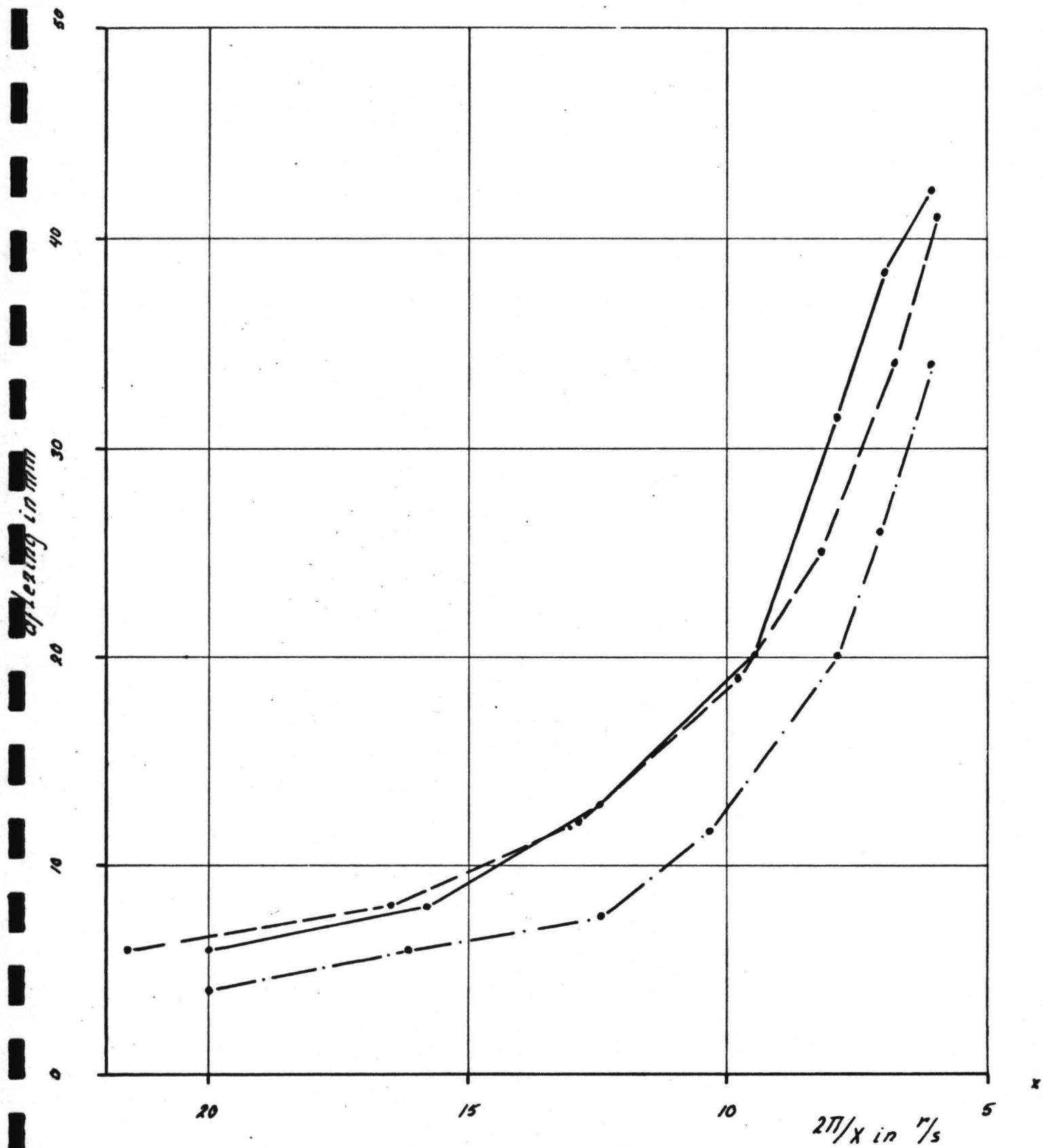
50
40
30
20
10
0



Meetwaarden
 τ bij 6,5cm

—	grind	$\gamma_0 = 6.5$ cm spleetvulling	8 mm
- -	grit	6.8	13
- · -	vlak	6.4	13

Fig XXIX

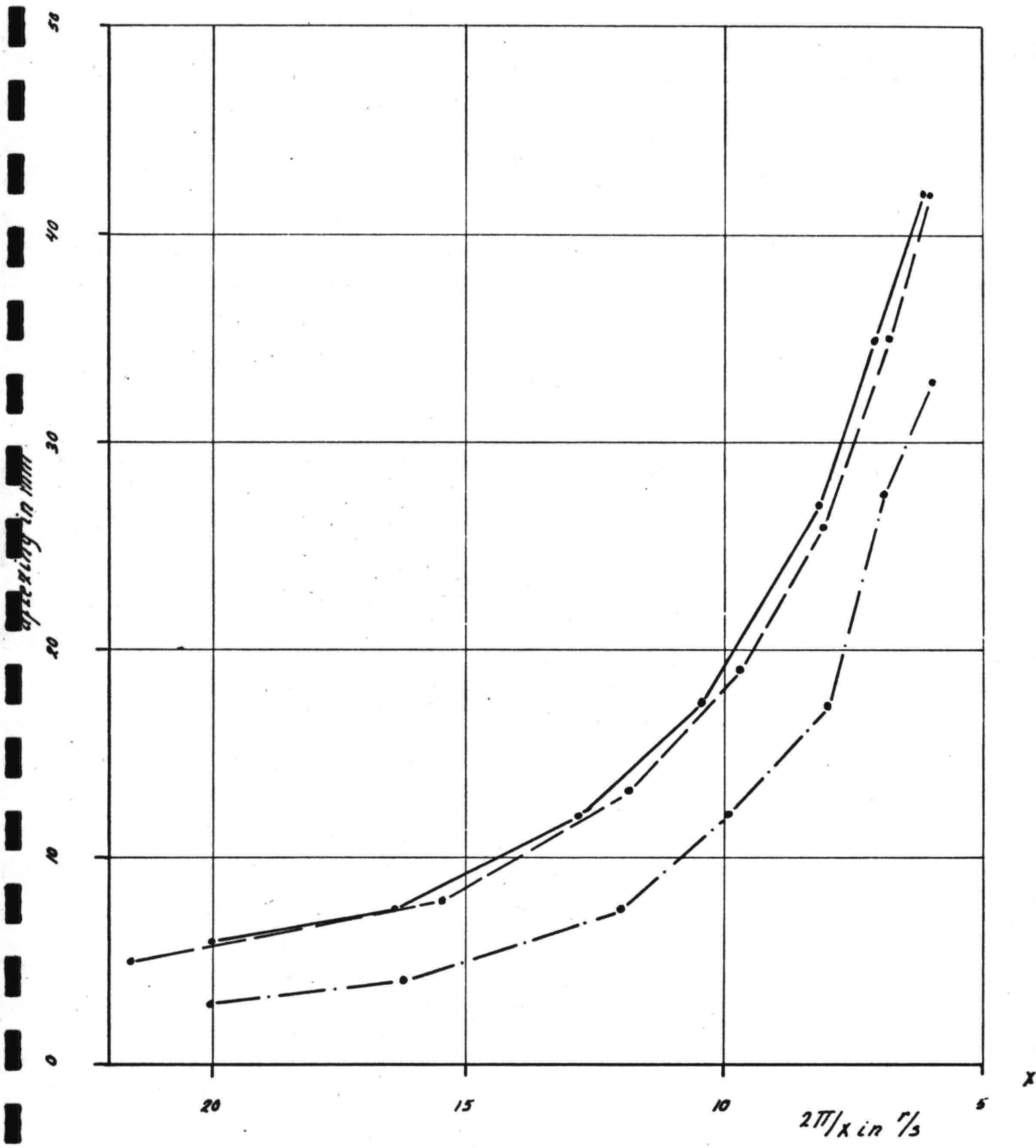


— grind $y_0 = 5.5$ cm spleetruiling 6 mm
 - - - grit 5.3 7
 - · - vlak 5.5 8

Meetwaarden

τ bij $y_0 = 5.5$ cm

Fig XXX



Meetwaarden

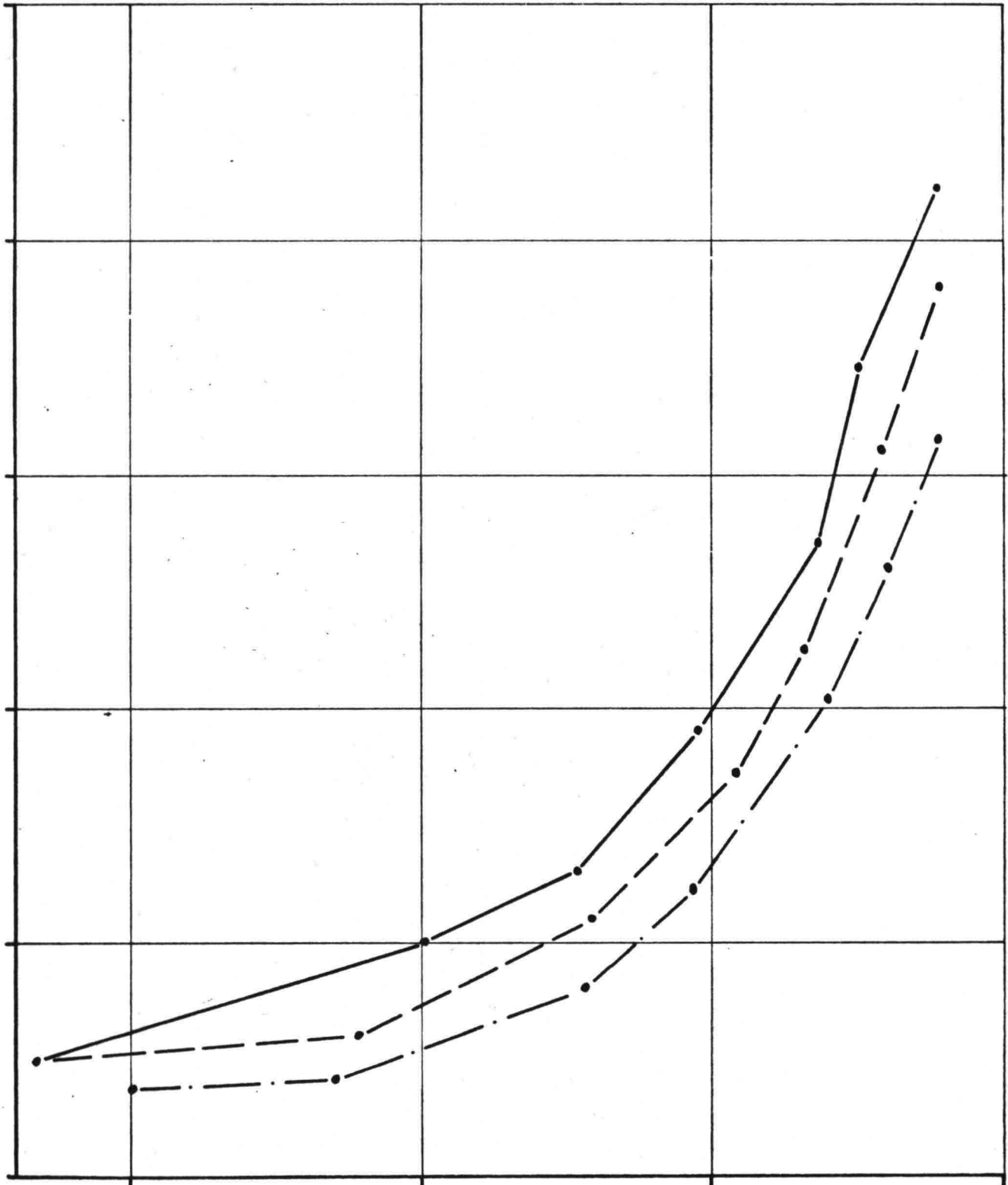
τ bij $y_0 = 4.5 \text{ cm}$

—	grind	$y_0 = 4.5 \text{ cm}$	spleetvulling	6 mm
- - -	grit	4.5		13
- · - ·	vlak	4.5		0

Fig XXXI

aflesing in mm

50
40
30
20
10
0



Meetwaarden

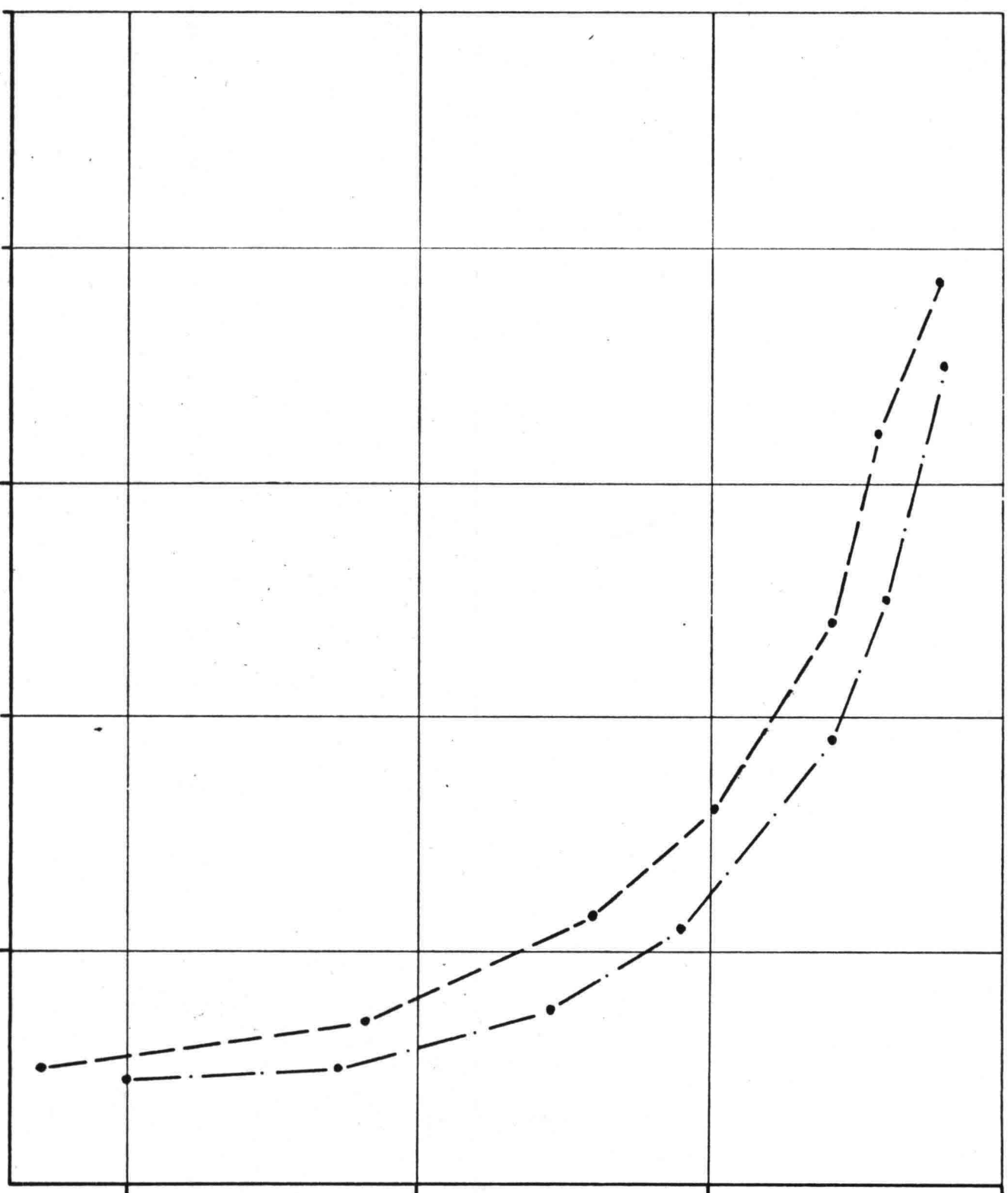
τ by $y_0 = 3.5$ cm

—	grind	$y_0 = 3.5$ cm	spleetvulling	6 mm
- -	grit	3.5		8 mm
- · -	vlak	3.5		15 mm

Fig XXXVII

afleiding in mm

50
40
30
20
10
0



20

15

10

$2\pi/x$ in $1/s$

5

- grind
- - - grit $y_0 = 2.4\text{cm}$ spleetvulling 10 mm
- · - vlak 2.7 B

Meetwaarden

T bij $y_0 = 2.5\text{cm}$

Fig XXXIII

aflezing in mm

60

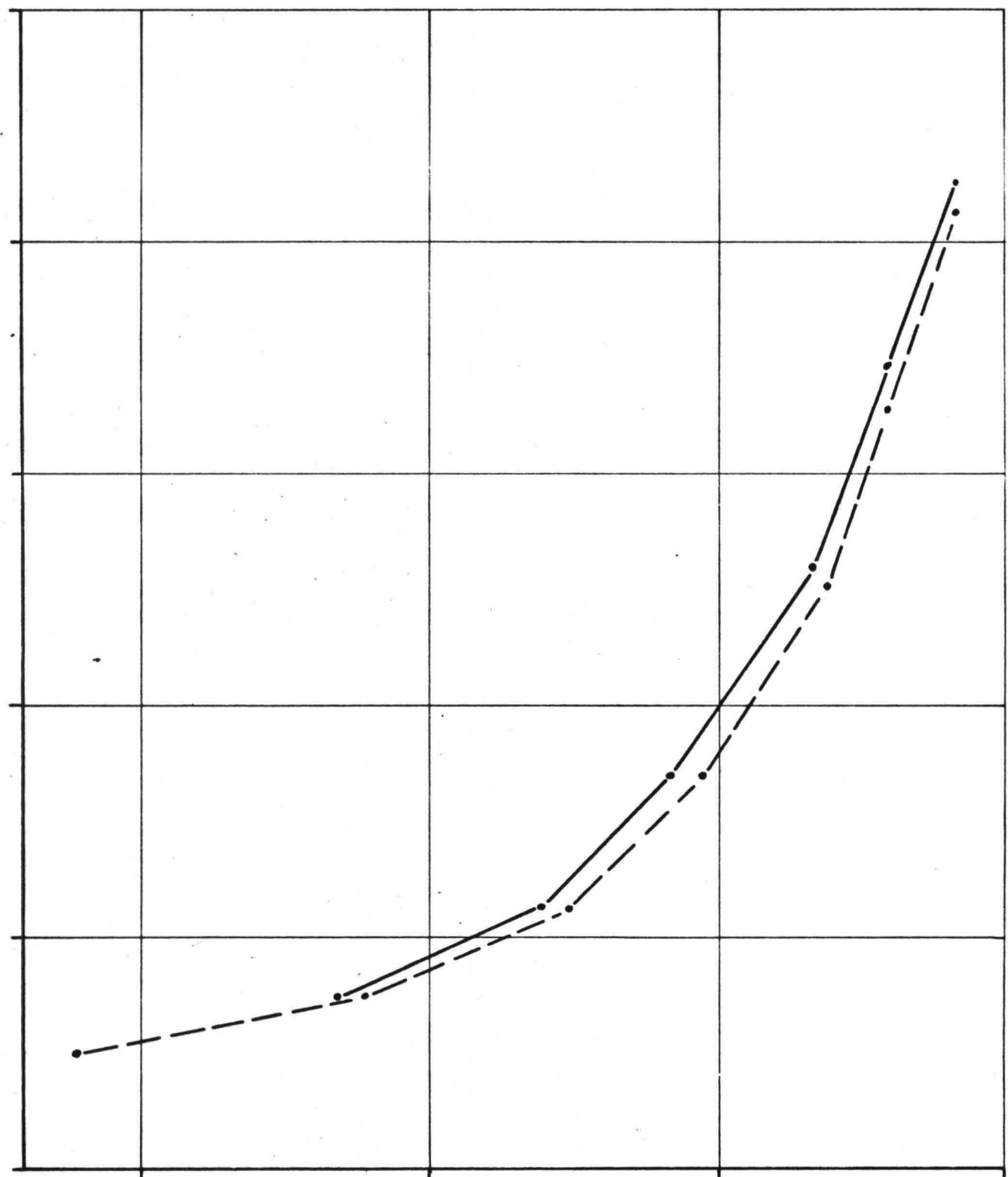
40

30

20

10

0



20

15

10

5

$2\pi/x$ in $1/s$

— vlak $y_0 = 7.5$ cm spleetruiling 16 mm

--- vlak 7.5 B

Onderzoek

Spleetruiling

Fig XXXIV

