

**BEWEGINGEN VAN KONSTRUKTIES IN GOLVEN**

**Kollegediktaat X2-MT1**

**Ir. J.M.J. Journée**

**Rapport 942-K**

**September 1992**

**Herzien: 05-04-1993.**

**Delft University of Technology**  
Ship Hydromechanics Laboratory  
Mekelweg 2  
2628 CD Delft  
The Netherlands  
Phone 015 - 78 68 82

## Inhoudsopgave

1. Inleiding
2. Definities van bewegingen
  - 2-1. Assenstelsels en bewegingscomponenten
  - 2-2. Symmetrische en keer-symmetrische bewegingen
  - 2-3. Bewegingsvergelijkingen van Euler
  - 2-4. Eigen massa en massatraagheidsmomenten
  - 2-5. Harmonische bewegingen
  - 2-6. Samenstellen van harmonische bewegingen
3. Bewegingen in vlak water
  - 3-1. Ongekoppelde bewegingen
  - 3-2. Gekoppelde bewegingen
  - 3-3. Hydrodynamische massa en demping
    - 3-3-1. Fysische achtergrond
    - 3-3-2. Experimentele bepaling
    - 3-3-3. Theoretische bepaling
    - 3-3-4. Enkele gegevens
  - 3-4. Schatting van eigen frequenties
4. Bewegingen in enkelvoudige golven
  - 4-1. Ongekoppelde bewegingen
  - 4-2. Gekoppelde bewegingen
  - 4-3. Dwarskrachten en buigende momenten
5. Bewegingen in onregelmatige golven
6. Bijzondere aspecten
  - 6-1. Laag frequente bewegingen en driftkrachten
  - 6-2. Dynamisch positioneren
  - 6-3. Berekeningen in het tijdsdomein

### Referenties:

- J. Gerritsma,  
College MT513, rapport 563-K,  
"Scheepsbewegingen en sturen in golven I".
- J.M.J. Journée,  
Delft Shiphidromechanics Laboratory, report 910,  
"Strip Theory Algorithms, Revised Report 1992".

## 1. Inleiding

Drijvende konstrukties spelen een belangrijke rol bij werkzaamheden buitengaats, zoals winning van olie en gas, pijpen leggen, transport ten behoeve van offshore werk (bevoorrading, vervoer van booreilanden en onderdelen daarvan).

De bewegingen en de belastingen, die ontstaan door de wisselende invloeden van zeegolven, stroom en wind, stellen een grens aan het aantal werkbare dagen. Men streeft naar een minimum aantal onwerkbaarbare dagen en dat bepaalt in vele opzichten de vormgeving van de offshore konstrukties, met name van het onderwater deel dat de opdrijvende kracht van de drijvende konstruktie moet leveren.

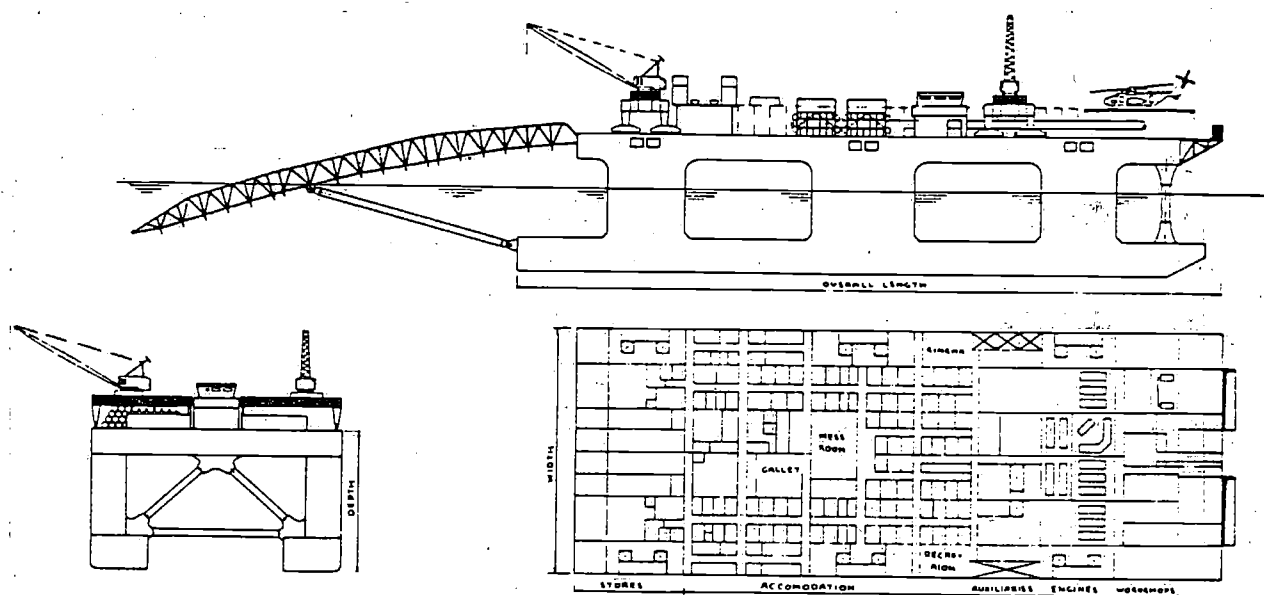
Voorbeelden van drijvende offshore konstrukties zijn booreilanden, boorschepen, pijpenleggers, drijvende opslaginstallaties, baggermolens, snijkopzuigers, deklust pontons, enz.

Een aantal voorbeelden van uitgevoerde konstrukties zijn gegeven in de figuren 1-A t/m 1-I. Niet alle voorbeelden hier zijn ontworpen om zo gering mogelijke bewegingen in golven te verkrijgen.

Bevoorradingsschepen, boorschepen en sommige kraanschepen zijn qua vorm niet wezenlijk verschillend van konventionele schepen zoals vrachtschepen, waarvan de zeeegangseigenschappen met voldoende nauwkeurigheid te berekenen zijn.

Tal van werkzaamheden op zee vereisen een stabiel werkplatform, zoals het boren in de zeebodem, het leggen van een pijpleiding of het vertikaal transport van grote lasten. Dit heeft geleid tot de konstruktie van zgn. semi-submersibles (diepdrijvers), die gekenmerkt worden door een relatief geringe responsie op zeegolven. Bij semi-submersibles is het volume van het onderwater-gedeelte relatief groot ten opzichte van het waterlijn-oppervlak. Men beoogt daarmee het vergroten van de eigen perioden van de vertikale bewegingen (dompen, stampen) om resonantie verschijnselen in zeegolven te vermijden. Meestal is nog een mechanische deiningkompensatie nodig in verband met de resterende beweging van het werkplatform.

Een voorbeeld daarvan is een boorplatform, omdat de boorpijp, die vast met de zeebodem is verbonden geen verticale beweging toelaat.



#### Hoofdafmetingen:

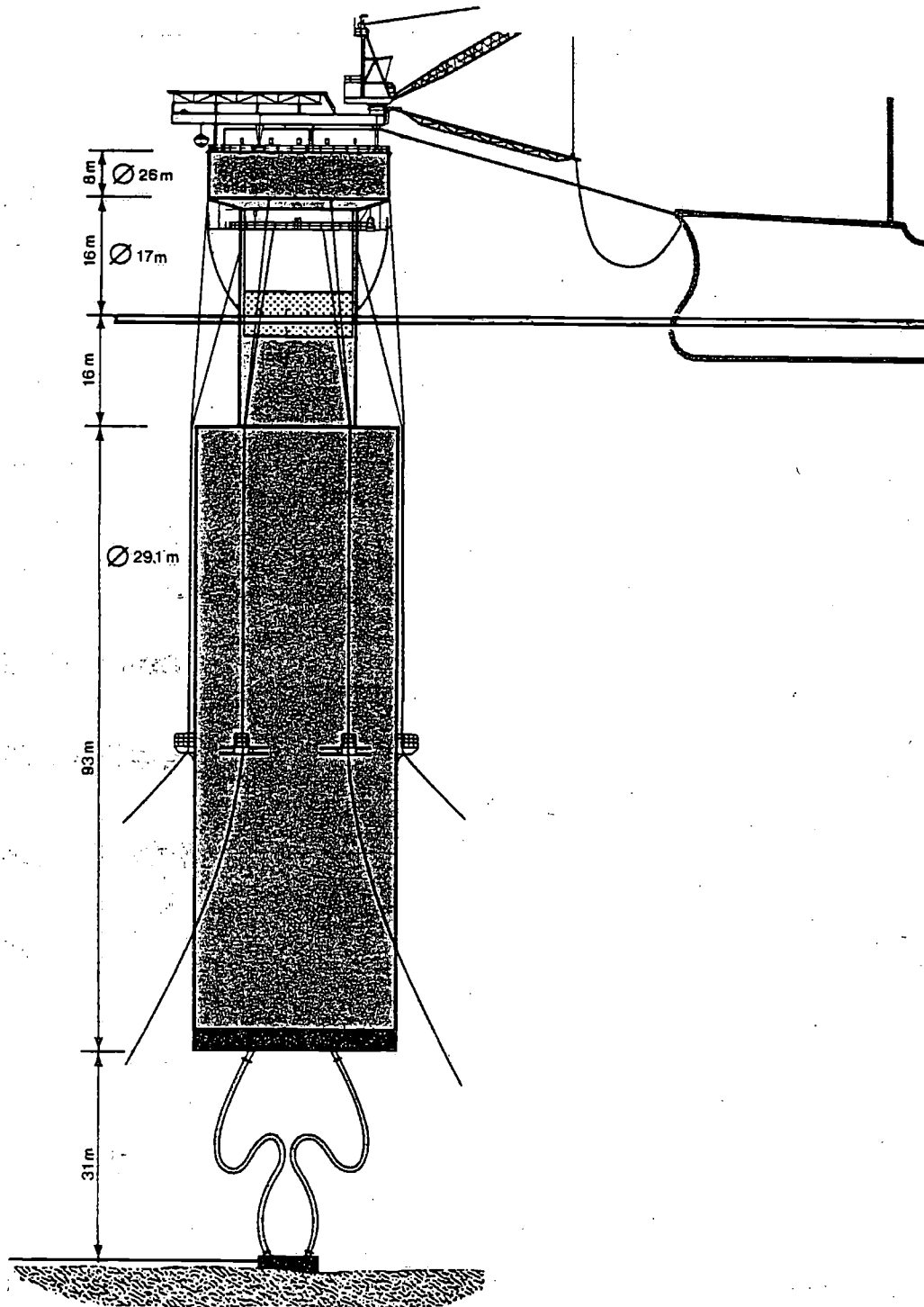
Lengte o.a., excl. stern ramp ...	: 167,50 m
Lengte o.a., incl. stern ramp ...	: 248,50 m
Grootste breedte .....	: 58,50 m
Hoogte van kiel tot werkdek .....	: 33,20 m
Sleepdiepgang .....	: 7,80 m
Werkdiepgang .....	: 20,00 m
Diepgang bij zware storm .....	: 13,00 m
Waterverplaatsing tijdens slepen	: 30.000 ton
Waterverplaatsing tijdens bedrijf	: 52.000 ton
Waterverplaatsing bij zware storm	: 44.250 ton

Referentie: Schip en Werf, No 12, 1977.

#### Ontwerpkriteria:

Max. golfhoogte . . .	: 4,5 m
Max. waterdiepte	: 360 m
Max. pijpdiameter	: 44 inch
Max. zeetoestand	: 100 jaar storm Noordzee
Toepassing .....	: wereldwijd

Figuur 1-A. Pijpenlegger "Viking Piper".



Drijvende opslag- en tankerlaadinstallatie:

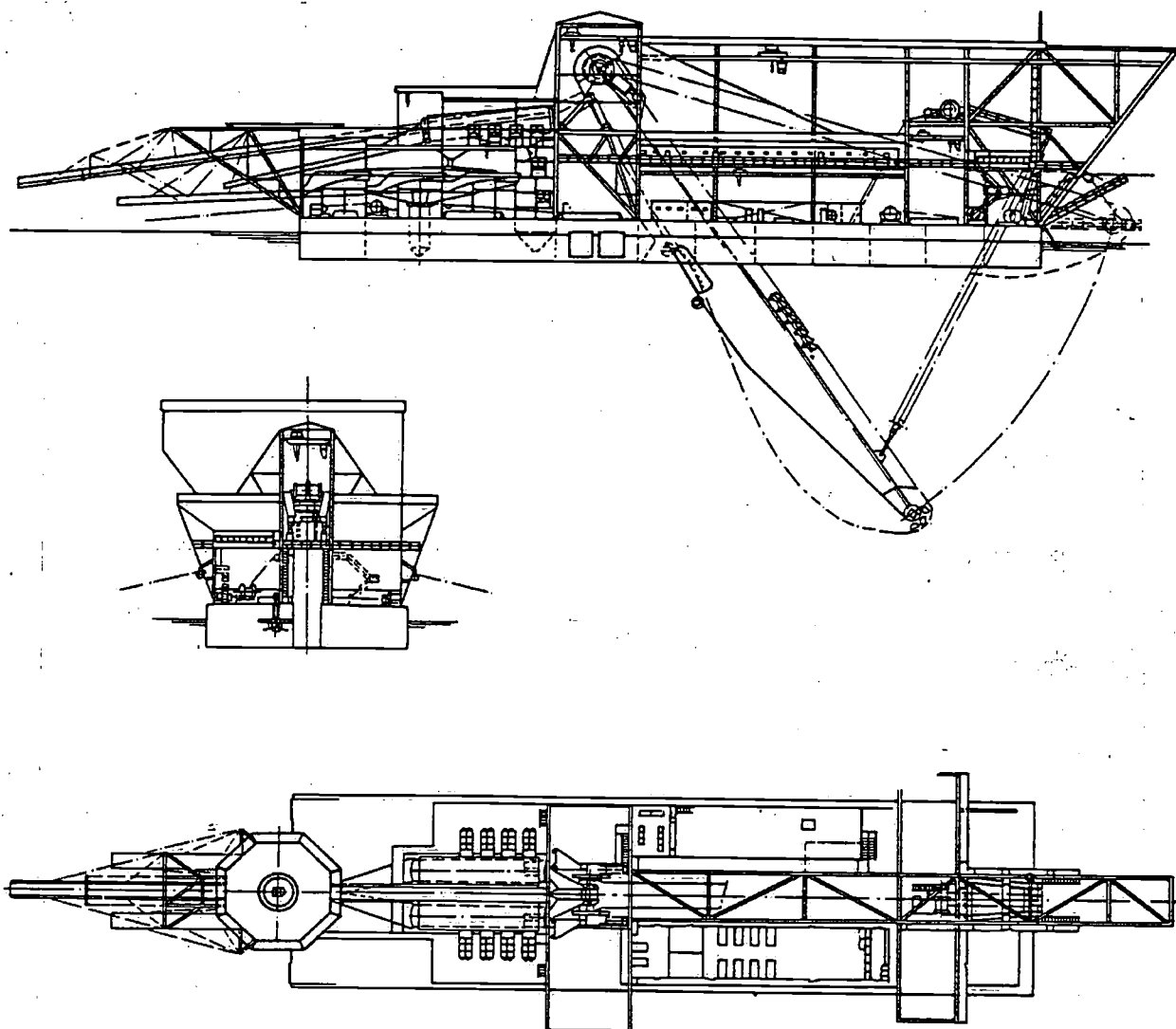
Opname capaciteit . . : 100.000 vaten/dag ( $\pm 16.000 \text{ m}^3$ )

Opslag capaciteit . . : 300.000 vaten/dag ( $\pm 48.000 \text{ m}^3$ )

Overslag capaciteit : 6.000  $\text{m}^3/\text{uur}$

Referentie: Ports and Dredging, IHC, No 93.

Figuur 1-B. "Spar"-boei.



Hoofdafmetingen ponton:

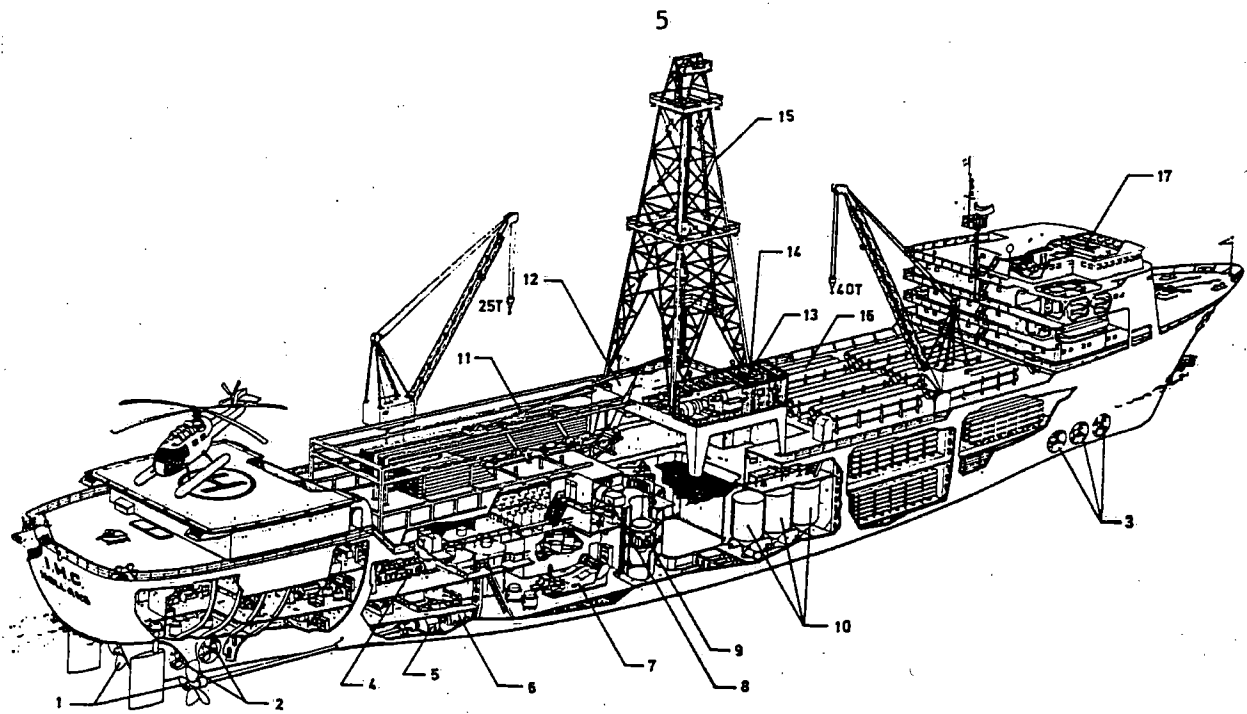
Lengte ..... : 110.00 m  
 Breedte .... : 30.00 m  
 Holte ..... : 6.50 m  
 Baggerdiepte : 45.00 m  
 Capaciteit . . : 1836 m<sup>3</sup>/uur

Noot:

In verband met werken in zeegang zijn de emmerladder en het ladder-heftakel in scharnierende armen opgehangen, zodat bewegingen t.o.v. het ponton mogelijk zijn.  
 (Passief systeem)

Referentie: Ports and Dredging, IHC, No 93.

Figuur 1-C. Tinbaggermolen.



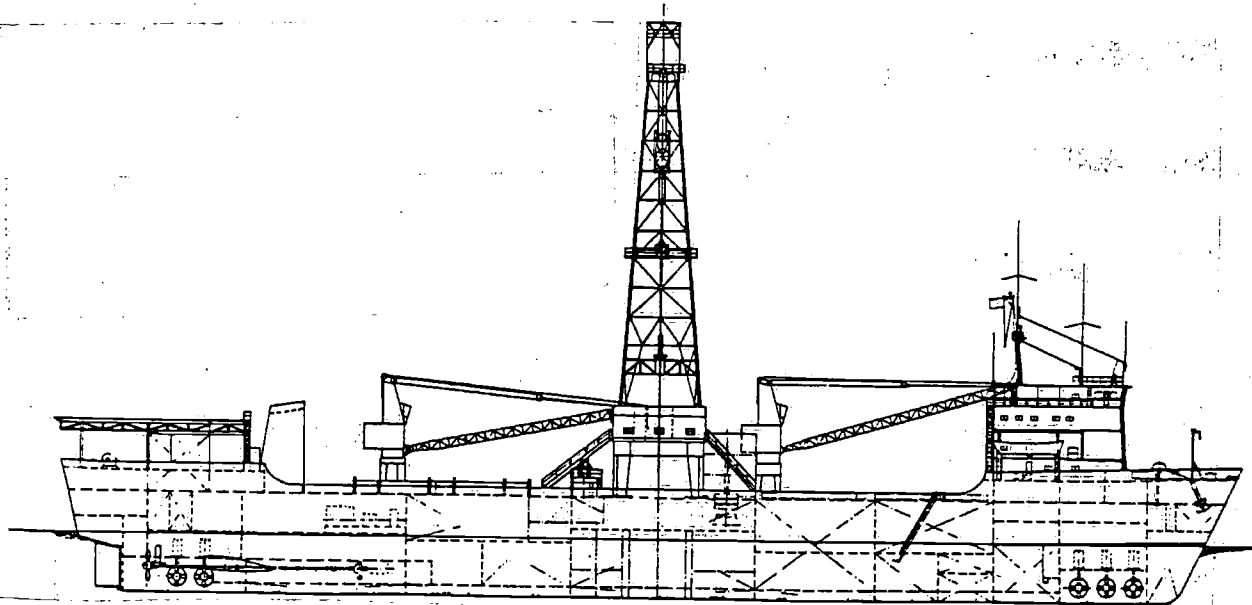
Sectional profile of 'Pélican'

- 1 Main propulsion cp propellers
- 2 Aft cp thrusters
- 3 Forward cp thrusters
- 4 Main generating sets
- 5 Propulsion reduction gear

- 6 Main motors
- 7 Mud pumps
- 8 Decompression chamber
- 9 Diving bell

- 10 Mud hoppers
- 11 Pipe handling system
- 12 Drilling platform
- 13 Mud processing plant

- 14 Drilling control centre
- 15 Drilling derrick
- 16 Pipe storage area
- 17 Control centre



Hoofdafmetingen:

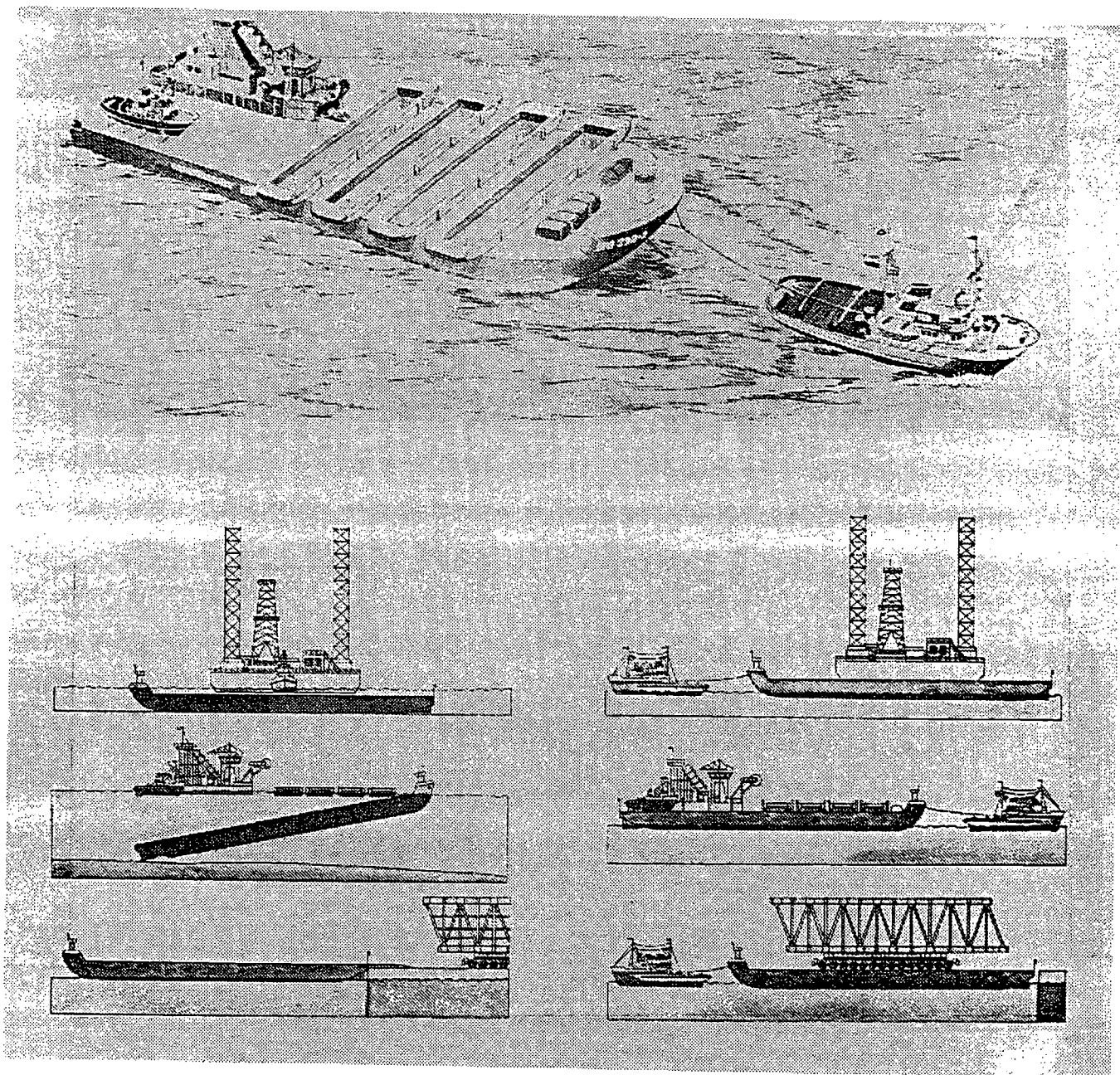
- Lengte over alles ..... : 149.00 m
- Lengte tussen de loodlijnen : 137.00 m
- Breedte ..... : 21.35 m
- Holte ..... : 12.50 m
- Diepgang ..... : 7.32 m
- WATERVERPLAATSING ..... : 15.000 t
- Maximum snelheid ..... : 14 kn

Ontwerpkriteria:

- Windstoten tot : 100 km/uur
- Max. helling . . . : 3 °
- Slingeren ..... : 10 ° in 10 s
- Stampen ..... : 4 ° in 10 s
- Dampen ..... : 12 ft in 8 s

Referentie: Shipping World & Shipping, October 1972.

Figuur 1-D. Boorschip "Pelican".



Hoofdafmetingen:

Lengte . : 103.00 m

Breedte : 30.00 m

Holte .. : 6.50 m

Diepgang : 5.15 m

Referentie:

Draagvermogen : 11000 ton

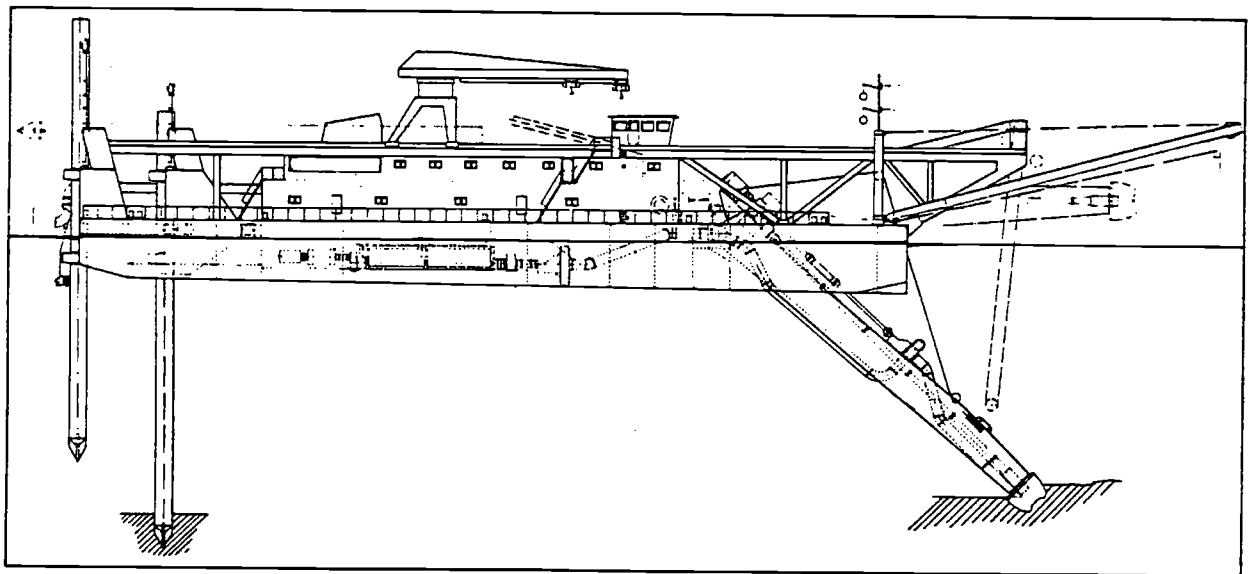
Netto dekoppervlak : 2800 m<sup>2</sup>

2 compressoren à 100 pk

voor afzinken en ankerlier

Figuur 1-E. Afzinkbaar deklasponton.



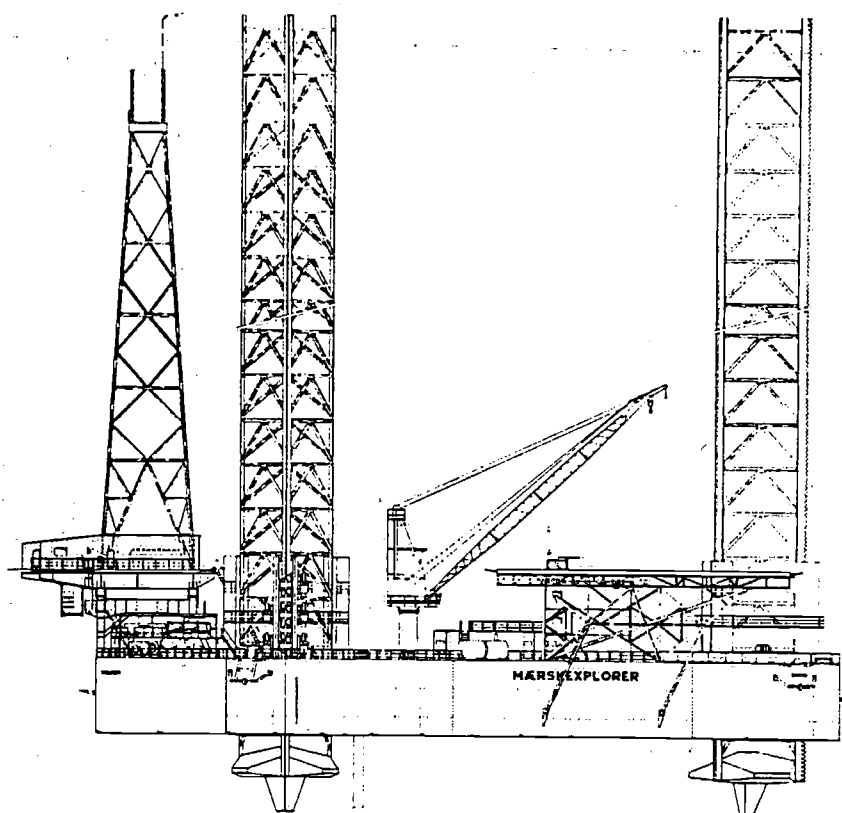


Hoofdafmetingen:

Lengte .....	: 67.00 m
Breedte .....	: 16.00 m
Holte .....	: 5.20 m
Baggerdiepte .....	: 22.00 m
Diameter zuigleiding :	800 mm
Diameter persleiding :	750 mm
Cutter vermogen .... :	1400 pk

Referentie: Ports and Dredging, IHC, No 90.

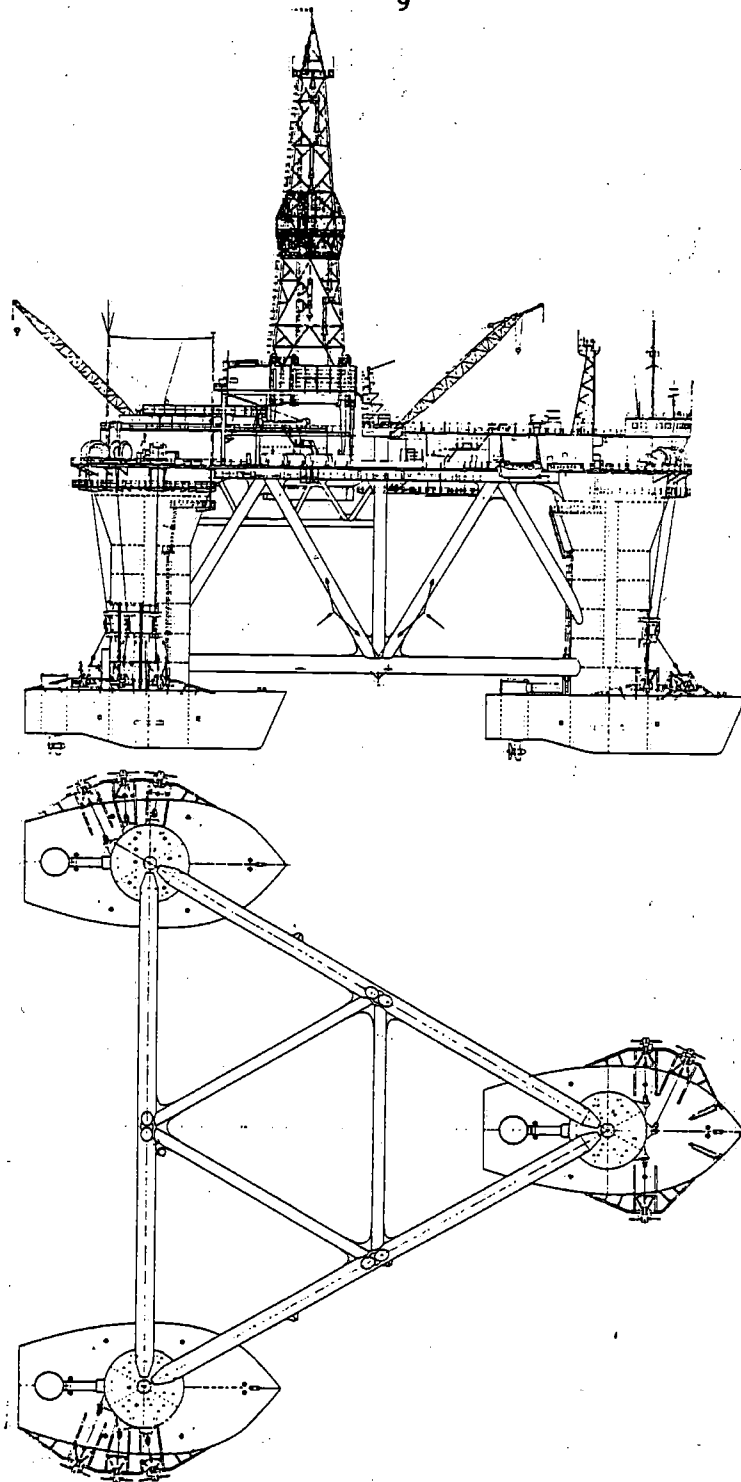
Figuur 1-F. Cutterzuiger.



<b>Hoofdafmetingen</b> 72,85 x 68,58, 7,62 m		<b>Palen en hefsysteem</b>	
<b>Ontwerpcndities</b>		Paal - 3 stuks, driehoekig, zijdelengte: 9,1 m	
Waterdiepte (incl. getijden)	62,5 m	Paallengte	104,5 m
Windsnelheid (1 min)	90 knopen	Paalvoet oppervlakte per stuk	90 m <sup>2</sup>
Golfhoogte	22 m	Hefstelsysteem: hydraulisch	
Golfperiode	16 sec	rack & pinion	
Oppervlakte stroom	1,5 knopen	Paalhefsnelheid	33,5 m/u
Penetratie	4,5 m	Ponton hefsnelheid	33,5 m/u
Airgap	16,76 m		
<b>Capaciteiten</b>		<b>Uitrusting</b>	
Drill water	5000 bbl	Drilling derrick max. trekkracht	± 600.000 kg
Drinkwater	1380 bbl	Drawworks Cont. Emsco C <sub>2</sub>	
Brandstof	3400 bbl	Mudpompen 2 x Cont. Emsco FA 1600	
Liquid mud	1400 bbl	Kranen: Bucyrus Erie	2 x - MK 35
Bulk mud/cement	221 m <sup>3</sup>	Dieselgeneratoren 4 x Caterpillar	D 399 - 1125 pk
Zakken	5000 stuks	Reddingsmiddelen	2 x Wittaker capsule, 28 pers. 6 x liferafts, 20 pers.
Drillpipe + collars	204.000 kg	<b>Diversen</b>	
Totaal payload	6000 kips	Accommodatie	54 pers.
Ballastwater	5400 m <sup>3</sup>	Boorpatroon	7,30 x 4,50 m
		Helideck voor S 61 N	diameter: 25 m

Referentie: Ports and Dredging, IHC, No 88.

Figuur 1-G. Hef-booreiland "Maersk Explorer".

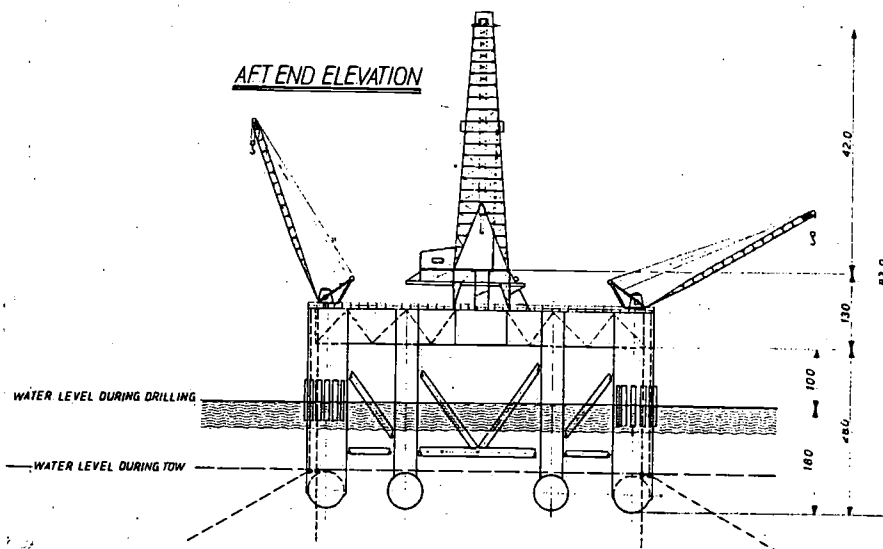
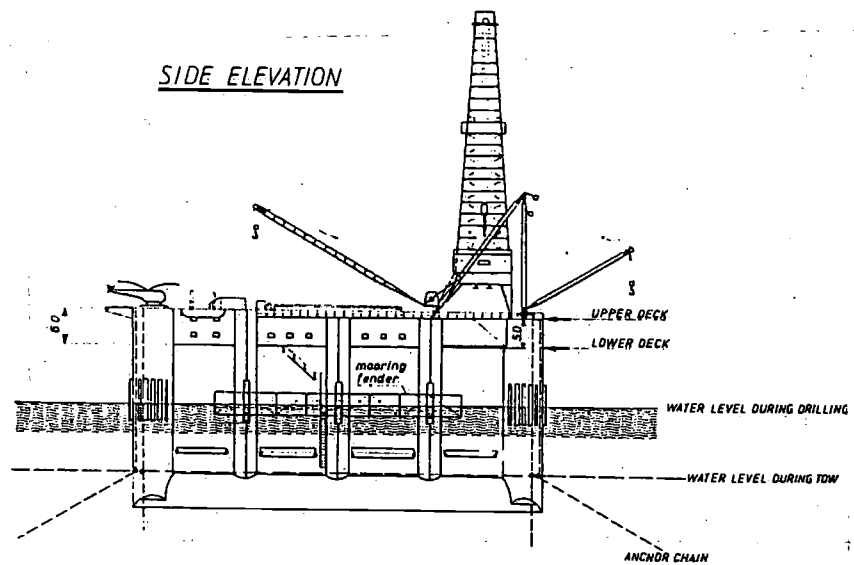


Hoofdafmetingen:

Afstand tussen zuilen :	80.500 m
Lengte over drijvers :	109.315 m
Breedte over drijvers :	100.294 m
Lengte over dek .....	94.155 m
Breedte over dek .....	104.940 m
Hoogte tot hoofddek :	44.500 m
Transport diepgang .. :	8.650 m
Werk diepgang .....	21 - 24 m

Referentie: Sonderdruck Hansa, Augustus 1975.

Figuur 1-H. Booreiland "Scarabeo 3".



**Hoofdafmetingen:**

Lengte ..... : 71.00 m

Breedte ..... : 61.00 m

Holte ..... : 34.00 m

Diepgang tijdens boren . : 18.00 m.

Diepgang tijdens vervoer : 8.00 m.

Referentie: WL Rapport M-688.

Figuur 1-I. Booreiland "Staflo Torpedo".

In horizontale richting worden drijvende offshore constructies op hun plaats gehouden door verankering (soms wel met 14 ankerkabels), of door een dynamisch positioneringssysteem, werkend met elektronisch gestuurde stuwkracht-eenheden, zie figuur 1-D. Dergelijke verankeringen en positionerings systemen kunnen zwaar belast worden door de gevolgen van zeegolven, stroom en wind. In het bijzonder blijken als gevolg van niet lineaire effecten lang periodieke bewegingen te ontstaan, die bepalend kunnen zijn voor de dimensionering van de ankersystemen.

Vervoer van groot materieel met behulp van deklaspontons, zie bijvoorbeeld figuur 1-E, over zee komt tegenwoordig vaak voor. De zee-gangseigenschappen van pontons kunnen zodanig zijn dat kalm weer voor het transport over zee afgewacht moet worden.

In verband met het verplaatsen van boorplatforms, pijpenleggers en kraanschepen naar een andere lokatie moet aandacht besteed worden aan de weerstandseigenschappen van het onderwaterdeel. Daarom zijn de zgn. "footings" van semi-submersibles soms min of meer stroomlijn vormig uitgevoerd en voorzien van eigen voortstuwers, zie figuur 1-H.

Over het algemeen is de transportsnelheid van offshore constructies gering en ligt de nadruk bij het ontwerp op het verkrijgen van zo gering mogelijke bewegingen in golven bij snelheid nul. Vaak zijn de verticale bewegingen daarbij de belangrijkste en is er iets meer tolerantie voor bewegingen in het horizontale vlak.

Ontwerp criteria zijn voor offshore constructies zeer belangrijk voor het bepalen van de onderwater vorm.

Voor een booreiland kunnen, als voorbeeld, de volgende ontwerpkriteria gelden:

- de bewegingen als gevolg van zee-gang, stroom en wind mogen bepaalde grenzen niet overschrijden
- de horizontale verplaatsing mag niet meer zijn dan 5 % van de waterdiepte in verband met de elastische eigenschappen van de boorpijp
- de verticale verplaatsing van het boorplatform mag niet groter zijn dan 3 meter, omdat de vaste verbinding van de boorpijp met de bodem enerzijds en de deïningskompensatie anderzijds een grotere verplaatsing niet toelaten.

Dergelijke eisen leiden tot grote eigen perioden van de oscillaties van de drijvende constructies, bijvoorbeeld 30 seconden of meer om resonantie verschijnselen in zee-gang te vermijden.

De veiligheid van het booreiland moet onder zeer zware weersomstandigheden gewaarborgd zijn. Er wordt gerekend met maximum golfhoogten bijvoorbeeld van 30 meter, waarbij het werkdek niet geraakt mag worden, en met gemiddelde windsnelheden van bijvoorbeeld 50 m/s, waarbij de maxima 20 % en de windstoten nog eens 20 % hoger liggen. De figuren 1-A, 1-B, 1-H en 1-I van uitgevoerde constructies tonen een grote verscheidenheid in vormgeving van het onderwatergedeelte, om aan dergelijke eisen te voldoen.

## 2. Definities van bewegingen

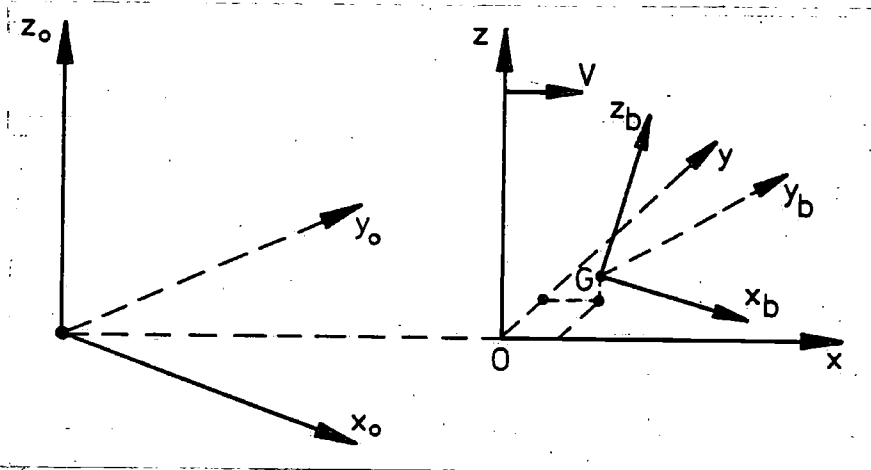
### 2-1. Assenstelsels en bewegingscomponenten

De bewegingen van een drijvende maritieme konstruktie in zeeegang kan men splitsen in drie onderling loodrechte translaties van het massa zwaartepunt en drie rotaties van de konstruktie om de translatieassen. In de meeste gevallen zullen deze bewegingscomponenten kleine amplituden hebben.

Er worden drie rechtsdraaiende orthogonale assenstelsels gebruikt:

1. Een ruimtevast assenstelsel  $x_0, y_0, z_0$ , waarvan de oorsprong bijvoorbeeld in het ongestoorde wateroppervlak ligt. De positieve  $z_0$ -as is vertikaal naar boven gericht.
2. Een vast aan de konstruktie verbonden assenstelsel  $x_b, y_b, z_b$ , waarvan de oorsprong samenvalt met het massazwaartepunt van de konstruktie. Zo mogelijk zijn de assen van dit stelsel de hoofdtraagheidsassen van de konstruktie.
3. Een richtingsvast assenstelsel  $x, y, z$ , waarvan de as-richtingen in de stationaire toestand van de konstruktie gelijk zijn aan die van het stelsel  $x_b, y_b, z_b$ . Het zwaartepunt  $G$  ligt dan op de  $z$ -as. Als de konstruktie een voorwaartse snelheid bezit (slepen, varen) beweegt het  $x, y, z$ -assenstelsel met de gemiddelde snelheid  $V$  van de konstruktie in het  $x_0, y_0, z_0$ -assenstelsel.

Deze assenstelsels worden in de volgende figuur weergegeven.



Figuur 2-1-A. Assenstelsels.

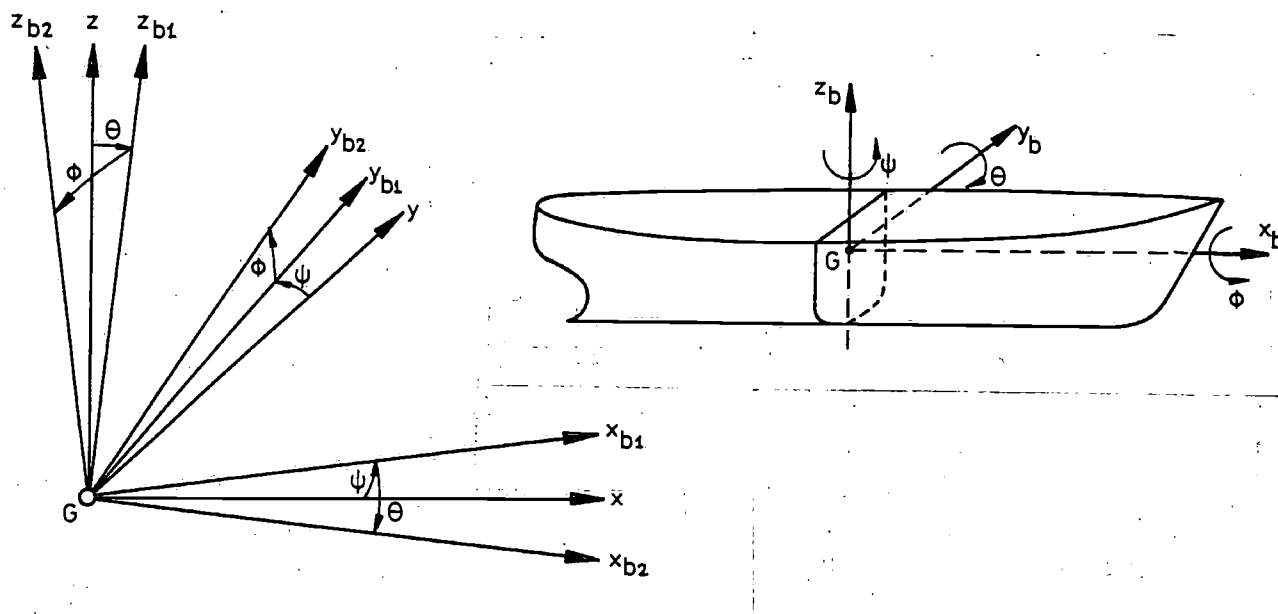
De translaties worden als volgt gedefinieerd:

- schrikken ("surge") : een horizontale oscillerende beweging in de  $x$ -richting.
- verzetten ("sway") : een horizontale oscillerende beweging in de  $y$ -richting.
- dompen ("heave") : een vertikale oscillerende beweging in de  $z$ -richting.

De stand van de konstruktie wordt eenduidig vastgelegd door een verdraaiing van de konstruktie in het  $x, y, z$ -stelsel:

- slingeren ("roll") : een oscillerende rotatie om de  $x_b$ -as.
- stampen ("pitch") : een oscillerende rotatie om de  $y_b$ -as.
- gieren ("yaw") : een oscillerende rotatie om de  $z_b$ -as.

Een en ander wordt verduidelijkt in de volgende figuur.



Figuur 2-1-B. Definitie rotaties.

De bewegingstoestand van de konstruktie wordt vastgelegd door de snelheidscomponenten  $u$ ,  $v$  en  $w$  en de hoeksnelheidscomponenten  $p$ ,  $q$  en  $r$ , respektievelijk in de richting van en om de  $x_b$ -,  $y_b$ - en  $z_b$ -as.

Voor kleine hoeken  $\varphi$  ("phi"),  $\theta$  ("teta") en  $\psi$  ("psi"), bijvoorbeeld kleiner dan 0.10 radiaal, is de transformatiematrix van de stelsels  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en  $x_b$ ,  $y_b$ ,  $z_b$  heel eenvoudig:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\varphi \\ -\theta & \varphi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

zodat de verplaatsing van een willekeurig punt  $x_b$ ,  $y_b$ ,  $z_b$  gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} x &= x_G + x_b - y_b \cdot \psi + z_b \cdot \theta \\ y &= y_G + x_b \cdot \psi + y_b - z_b \cdot \varphi \\ z &= z_G - x_b \cdot \theta + y_b \cdot \varphi + z_b \end{aligned}$$

waarin  $x_G$ ,  $y_G$ ,  $z_G$  de coördinaten van het massazwaartepunt ten opzichte van het  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -stelsel zijn.

Tevens geldt door deze linearisatie:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u & p &= \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= v & q &= \dot{\theta} \\ \dot{z} &= w & r &= \dot{\psi} \end{aligned}$$

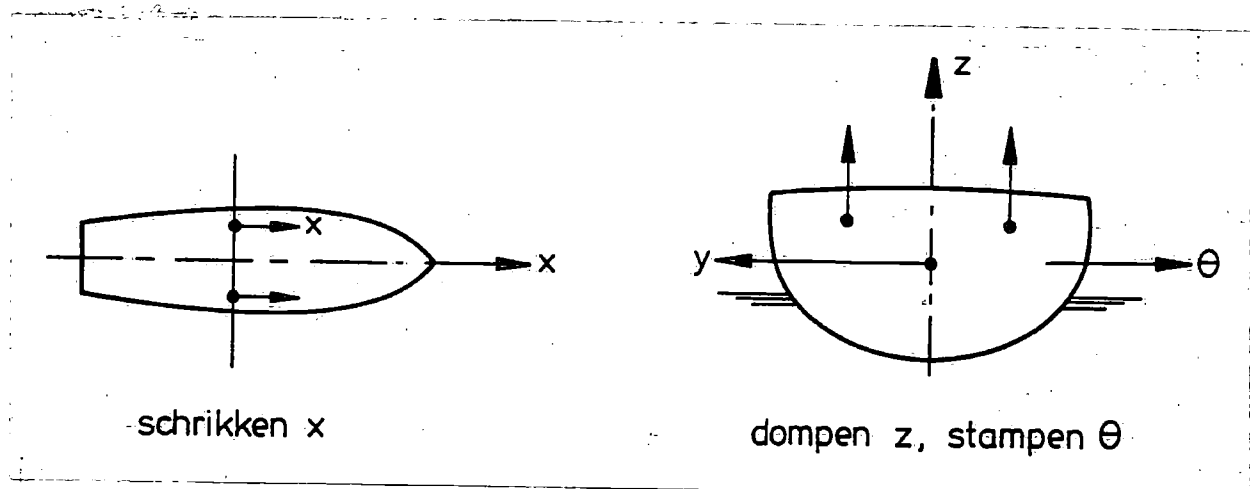
Blijkbaar is in dit geval te stellen dat de rotaties afzonderlijk, ongeacht hun volgorde, ten opzichte van de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -as uitgevoerd worden.

## 2-2. Symmetrische en keer-symmetrische bewegingen

De zes bewegingscomponenten van een drijvende constructie kunnen bij de aanwezigheid van een symmetrie vlak gerubriceerd worden in symmetrische en keer-symmetrische bewegingen. Bij symmetrische bewegingen is de beweging van de punten, die symmetrisch liggen ten opzichte van het symmetrievlak, gelijk. Bij keer-symmetrische bewegingen is dit niet het geval. Dit wordt voor het geval van een vrijdrijvend onverankerd schip nader toegelicht.

De symmetrische bewegingen van een schip zijn:

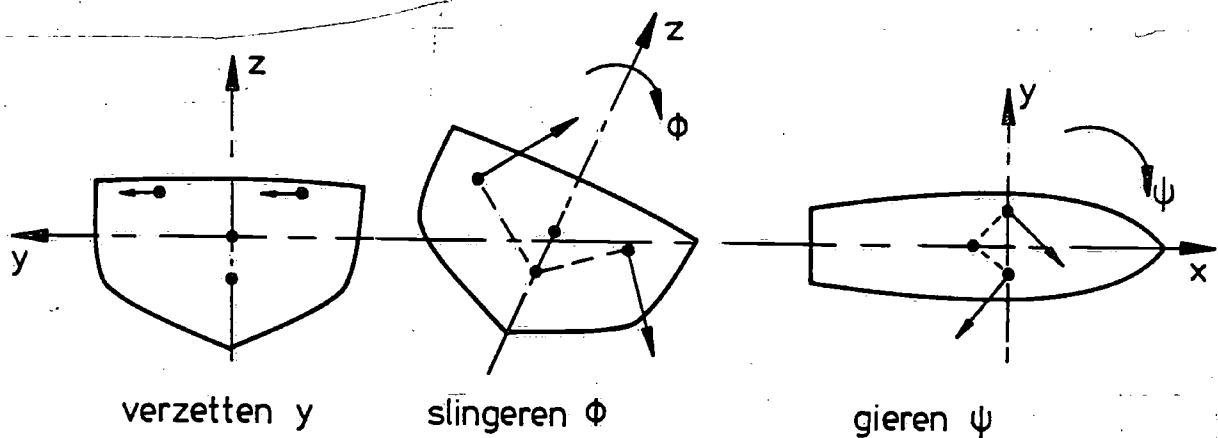
schikken	$x$
dómpen	$z$
stampen	$\theta$



Figuur 2-2-A. Symmetrische bewegingen.

De keer-symmetrische bewegingen van een schip zijn:

verzetten	$y$
slingeren	$\phi$
giëren	$\psi$



Figuur 2-2-B. Keer-symmetrische bewegingen.



In een gelineariseerde theorie, die vaak met succes toepasbaar is voor bewegingen van onverankerde schepen met relatief kleine bewegingsamplituden, zijn de zogenaamde bewegingsvergelijkingen per groep aan elkaar gekoppeld. Dus schrikken, dompen en stampen kunnen beschreven worden door een stel gekoppelde bewegingsvergelijkingen evenals verzetten, slingeren en gieren. Tussen deze twee groepen bestaat geen koppeling. Het stampen is bijvoorbeeld onafhankelijk van het verzetten en de twee andere keer-symmetrische bewegingen, maar is wel afhankelijk van het schrikken en het dompen.

Dus de scheepsbewegingen kunnen beschreven worden door twee sets van drie gekoppelde bewegingsvergelijkingen:

SCHRIKKEN	en	VERZETTEN
DOMPEN		SLINGEREN
STAMPEN		GIEREN

Met nadruk wordt erop gewezen dat deze beschouwing slechts geldt voor het gelineariseerde geval van de bewegingen van vrijdrijvende konstrukties.

In het geval van verankerde konstrukties, kunnen er door de verankering extra koppelingen optreden.

Als bijvoorbeeld een ponton aan bakboord-voor verankerd is, zal de stampbeweging via de verankering ook een verzetkracht en een slinger- en giermoment introduceren.

Hierdoor ontstaat er één set van zes gekoppelde bewegingsvergelijkingen:

SCHRIKKEN
VERZETTEN
DOMPEN
SLINGEREN
STAMPEN
GIEREN

## 2-3. Bewegingsvergelijkingen van Euler

Uitgegaan wordt van de vergelijkingen van Euler voor de beweging van een vast lichaam in de ruimte.

Voor de translaties geldt:

$$X = m \cdot (\dot{u} + q \cdot w - r \cdot v)$$

$$Y = m \cdot (\dot{v} + r \cdot u - p \cdot w)$$

$$Z = m \cdot (\dot{w} + p \cdot v - q \cdot u)$$

Voor de rotaties geldt:

$$K = I_{xx} \cdot \dot{p} - (+I_{yy} - I_{zz}) \cdot q \cdot r$$

$$M = I_{yy} \cdot \dot{q} - (+I_{zz} - I_{xx}) \cdot r \cdot p$$

$$N = I_{zz} \cdot \dot{r} - (+I_{xx} - I_{yy}) \cdot p \cdot q$$

Deze vergelijkingen gelden voor het aan het lichaam vast verbonden assenstelsel  $x_b, y_b, z_b$ , met:

$u, v$  en  $w$  = snelheid van G in de drie richtingen

$p, q$  en  $r$  = hoeksnelheid om de drie assen

$X, Y$  en  $Z$  = krachten in de drie richtingen

$K, M$  en  $N$  = momenten om de drie assen

Hierin is  $m$  de massa van het lichaam. De termen  $I_{xx}, I_{yy}$  en  $I_{zz}$  zijn de massatraagheidsmomenten ten opzichte van respectievelijk de  $x_b, y_b, z_b$  assen, die verondersteld worden samen te vallen met de drie hoofdtraagheidsassen van de drijvende konstruktie.

Voor kleine bewegingsamplituden geldt na linearisatie, waarbij de tweede orde termen (dus de producten van  $p, q, r, u, v$  en  $w$ ) verwaarloosd zijn:

$$m \cdot \ddot{x} = X$$

$$m \cdot \ddot{y} = Y$$

$$m \cdot \ddot{z} = Z$$

en:

$$I_{xx} \cdot \ddot{\phi} = K$$

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} = M$$

$$I_{zz} \cdot \ddot{\psi} = N$$

waarbij de versnellingen, krachten en momenten nu gedefinieerd kunnen worden in het richtingsvaste assenstelsel  $x, y, z$ .

De al of niet optredende koppelingen als gevolg van symmetrie en keer-symmetrie komen tot uiting in de rechterleden zoals later zal blijken.

## 2-4. Eigen massa en massatraagheidsmomenten

De massa van een drijvende konstruktie kan meestal op eenvoudige wijze bepaald worden. Deze is immers gelijk aan de massa van het verplaatste water:

$$m = \rho \cdot \nabla$$

waarin:

- $m$  : massa van de drijvende konstruktie  
 $\rho$  : soortelijke massa water, zoet water:  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$   
 zout water:  $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$   
 $\nabla$  : volume van het verplaatste water

De massatraagheidsmomenten om respektievelijk de x-as, de y-as en de z-as volgen uit:

$$I_{xx} = \int_m (y_b^2 + z_b^2) \cdot dm$$

$$I_{yy} = \int_m (x_b^2 + z_b^2) \cdot dm$$

$$I_{zz} = \int_m (x_b^2 + y_b^2) \cdot dm$$

waarin  $dm$  een oneindig klein massa-elementje voorstelt.

Deze uitdrukkingen kunnen benaderd worden door de som van een eindig aantal termen, bijvoorbeeld:

$$I_{xx} = \Sigma [m_i \cdot (y_{bi}^2 + z_{bi}^2)] + \Sigma [I_{xi}]$$

waarin:

- $m_i$  : massa-element  
 $I_{xi}$  : massatraagheidsmoment om het eigen zwaartepunt van  $m_i$

In het algemeen is de berekening van de massatraagheidsmomenten van een drijvende konstruktie een tijdrovende zaak.

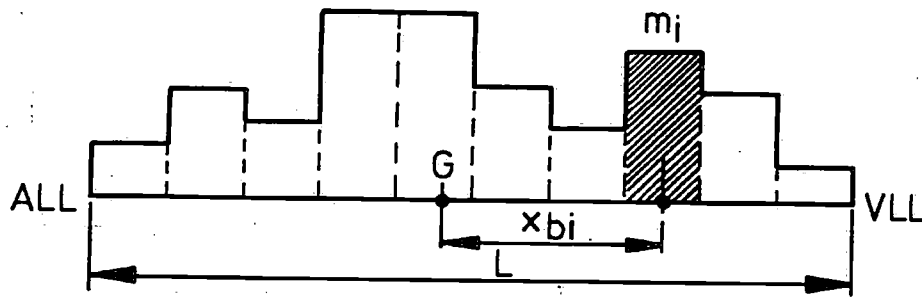
Voor slankere konstrukties met een grote lengte-hoogte en lengte-breedte verhouding zoals bijvoorbeeld schepen, lange pontons, e.d. kan met een redelijke benadering gesteld worden:

$$I_{yy} = I_{zz} = c \cdot \Sigma [m_i \cdot x_{bi}^2]$$

met:

$$c = 1.00 \text{ a } 1.02$$

Deze som is voor normale schepen met behulp van de zogenaamde gewichtskromme gemakkelijk te bepalen.



Figuur 2-4-A. Geschematiseerde voorstelling van de gewichtskromme van een schip.

Het is echter vrijwel onmogelijk om de waarde van  $I_{xx}$  voor dit soort konstrukties uit de gewichtsverdeling te berekenen.

Bij booreilanden en andere offshore konstrukties bestaat er in dit opzicht minder onderscheid tussen  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  en  $I_{zz}$ .

Soms wordt gebruik gemaakt van de massatraagheidsstraal. De definitie daarvan, bijvoorbeeld in verband met het massatraagheidsmoment om de y-as, luidt:

$$I_{yy} = k_{yy}^2 \cdot \rho \cdot \bar{V}$$

Hierin heeft  $k_{yy}$  de dimensie van een lengte en wordt vaak uitgedrukt in een karakteristieke lengte.

Voor konventionele schepen geldt bijvoorbeeld:

$$k_{xx} = \pm 0.40 \cdot B$$

$$k_{yy} = \pm 0.25 \cdot L$$

$$k_{zz} = \pm 0.25 \cdot L$$

waarin:

L = lengte schip

B = breedte schip

## 2-5. Harmonische bewegingen.

Vaak zijn de eerste harmonischen van de bewegingscomponenten van belang, omdat door superpositie van vele van die componenten, met elk een verschillende frequentie en een onderlinge fase verschuiving, een realistisch mathematisch model van de bewegingen van een drijvende konstruktie in de onregelmatige zeegang opgebouwd kan worden.

Een sinus- of cosinusvormige komponent van een beweging is geheel gedefinieerd door een amplitude, een frequentie en een fase verschuiving ten opzichte van een referentie.

Voor de zes bewegingscomponenten geldt dan:

$$\begin{aligned} x &= x_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{x\zeta}) && \text{schrikken} \\ y &= y_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{y\zeta}) && \text{verzetten} \\ z &= z_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{z\zeta}) && \text{dompen} \\ \varphi &= \varphi_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\varphi\zeta}) && \text{slingeren} \\ \theta &= \theta_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\theta\zeta}) && \text{stampen} \\ \psi &= \psi_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\psi\zeta}) && \text{gieren} \end{aligned}$$

Een amplitude wordt aangeduid met de index a en de cirkelfrequentie in radialen per seconde met  $\omega$ .

Een fase verschuiving wordt gerelateerd aan een referentiesignaal:

- de eerste index is de beschouwde bewegingskomponent
- de tweede index is de referentie.

In het geval van bewegingen in golven is de referentie veelal de vertikale beweging van het golfoppervlak  $\zeta$  ("zeta") ter plaatse van de oorsprong 0 bij afwezigheid van de drijvende konstruktie:

$$\zeta = \zeta_a \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

In het geval dat de konstruktie geen translatie-snelheid in het horizontale vlak heeft is de frequentie van de beweging  $\omega$  gelijk aan de golffrequentie. Inschakelverschijnselen worden geacht niet meer aanwezig te zijn.

Iedere harmonische bewegingskomponent kan in twee delen gesplitst worden:

- een deel dat in fase is met de golfbeweging
- een deel dat  $90^\circ$  uit fase is met de golfbeweging

Immers, voor bijvoorbeeld een harmonische slingerbeweging kan geschreven worden:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\varphi\zeta}) \\ &= [\varphi_a \cdot \cos(\epsilon_{\varphi\zeta})] \cdot \cos(\omega \cdot t) - [\varphi_a \cdot \sin(\epsilon_{\varphi\zeta})] \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ &= [\varphi_a \cdot \cos(\epsilon_{\varphi\zeta})] \cdot \cos(\omega \cdot t) + [\varphi_a \cdot \sin(\epsilon_{\varphi\zeta})] \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ) \end{aligned}$$

Soms heeft een complexe schrijfwijze voordelen.

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_a \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \epsilon_{\varphi\zeta})} \\ &= \varphi_a \cdot e^{i \cdot \epsilon_{\varphi\zeta}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \\ &= \varphi_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}\end{aligned}$$

Hierin is  $\bar{\varphi}_a$  de complexe amplitude van de slingerbeweging, die gesplitst kan worden in een reëel deel en een imaginair deel:

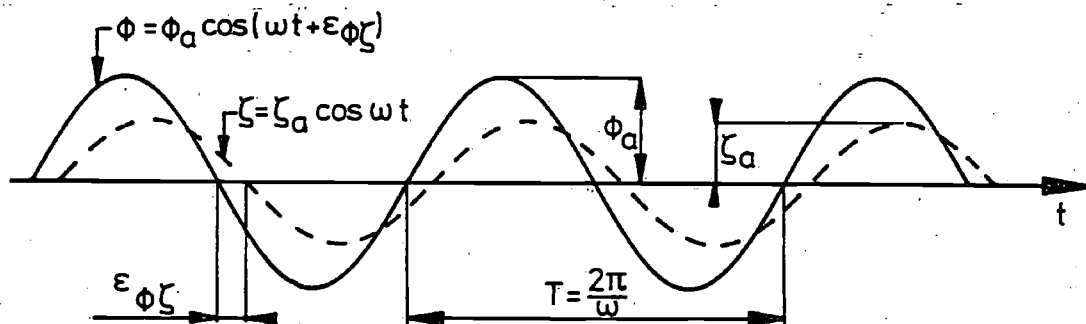
$$\bar{\varphi}_a = \varphi_a \cdot e^{i \cdot \epsilon_{\varphi\zeta}} = \varphi_r + i \cdot \varphi_i$$

waarin:

$$\varphi_r = \varphi_a \cdot \cos(\epsilon_{\varphi\zeta})$$

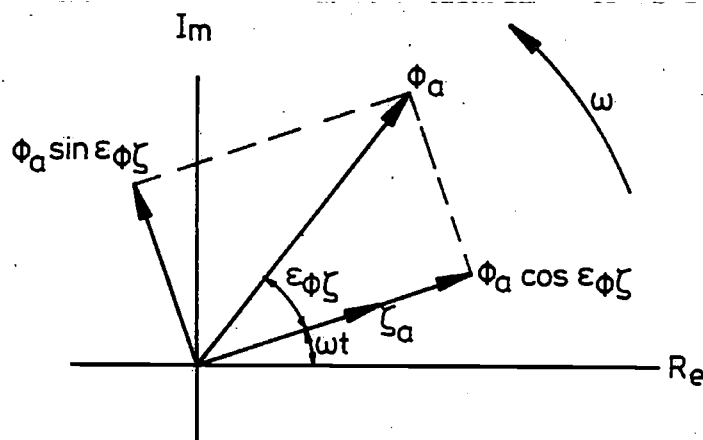
$$\varphi_i = \varphi_a \cdot \sin(\epsilon_{\varphi\zeta})$$

De volgende figuur toont het verloop van de slingerbeweging en de golf met de tijd.



Figuur 2-5-A. De verticale verplaatsing van de golf en de slingerbeweging als functie van de tijd.

In het vektordiagram in onderstaande figuur is een fase relatie tussen de slingerbeweging en de golf, met de in en uit fase delen weergegeven.



Figuur 2-5-B. Vektordiagram van de verticale verplaatsing van de golf en de resulterende slingerbeweging.

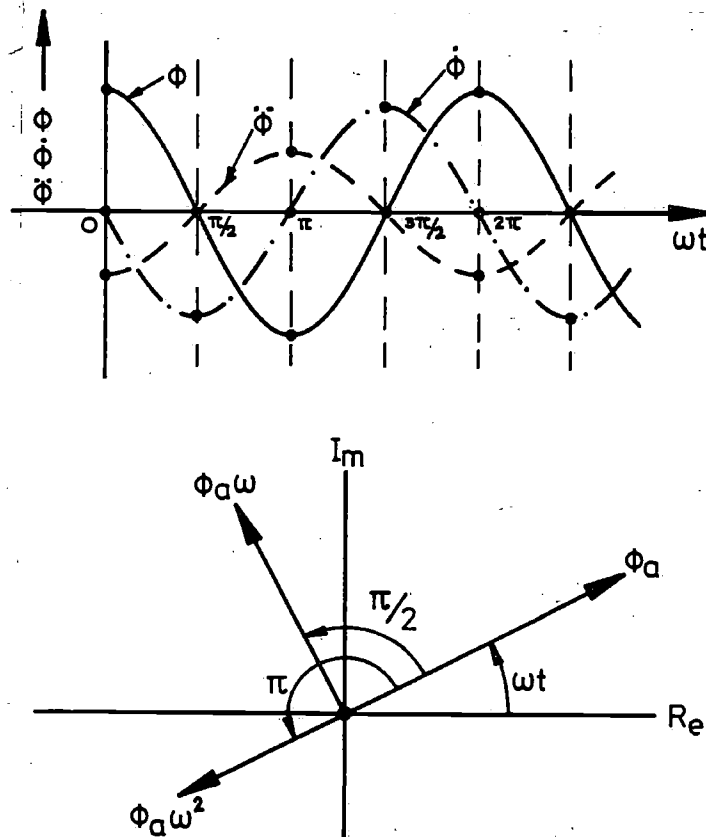
De snelheden en versnellingen van harmonische bewegingen kunnen op eenvoudige wijze door differentieren verkregen worden.

$$\varphi = \varphi_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\varphi})$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \epsilon_{\varphi}) \\ &= +\varphi_a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\varphi} + 90^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\varphi_a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \epsilon_{\varphi} + 90^\circ) \\ &= +\varphi_a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\varphi} + 180^\circ) \end{aligned}$$

Voor het geval dat  $\epsilon_{\varphi} = 0$  worden de onderlinge relaties tussen de bewegingen, de snelheden en de versnellingen van de slingerbeweging in de volgende figuur weergegeven.



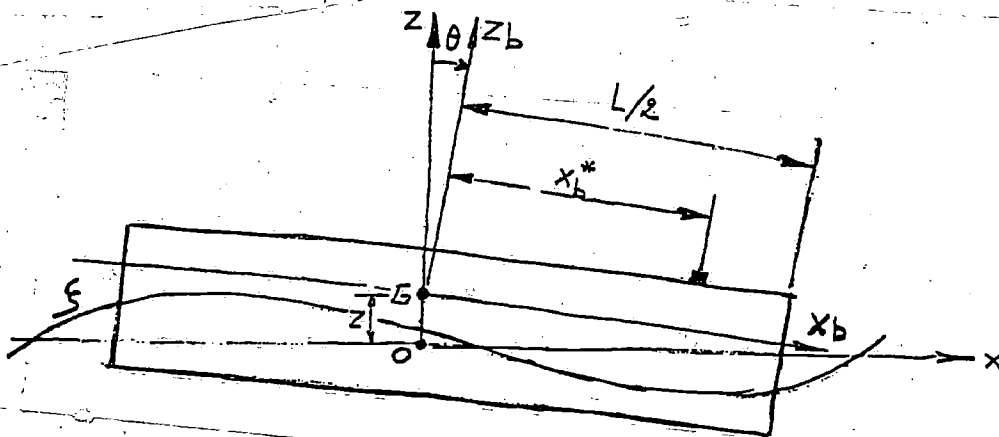
Figuur 2-5-C. Relaties tussen bewegingen, snelheden en versnellingen van het slingeren voor  $\epsilon_{\varphi} = 0$ .

## 2.6. Samenstellen van harmonische bewegingen.

De beweging in een ruimtevast assenstelsel van het zwaartepunt van een drijvende konstruktie bestaat uit de translaties schrikken, verzetten en gieren. Om dit zwaartepunt voert de konstruktie de rotaties slingeren, stampen en gieren uit.

Een enkelvoudige golf heeft in geval van een lineair systeem harmonische bewegingen van en rond het zwaartepunt van de konstruktie tot gevolg. Als deze zes harmonische bewegingen bekend zijn, kunnen in elk punt op de konstruktie de bewegingen gevonden worden door het vektorieel samenstellen van de bewegingskomponenten. Dit vektorieel samenstellen van bewegingskomponenten komt veel voor bij praktische toepassingen.

Als voorbeeld wordt hier een ponton in recht van voren inkomende enkelvoudige golven genomen. Er wordt verondersteld dat er alleen dompen en stampen optreedt.



Figuur 2-6-A. Ponton in recht van voren inkomende golven.

Ten opzichte van het  $x$ ,  $y$ ,  $z$  assenstelsel is de vergelijking van het golfoppervlak:

$$\zeta = \zeta_a \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t)$$

In het zwaartepunt van de konstruktie ( $x=0$ ) geldt:

$$\zeta = \zeta_a \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

De domp- en stampbewegingen worden gegeven door:

$$z = z_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{z\zeta})$$

$$\theta = \theta_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\theta\zeta})$$



### Vertikale absolute bewegingen.

Uit deze domp- en stampbewegingen kan bijvoorbeeld de verticale versnelling in een punt op een afstand  $x_b$  voor G berekend worden. De absolute verticale verplaatsing  $h$  ter plaatse van  $x_b$  volgt uit:

$$\begin{aligned} h &= z - x_b \cdot \theta \\ &= z_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{z\zeta}) - x_b \cdot \theta_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\theta\zeta}) \\ &= [ z_a \cdot \cos(\epsilon_{z\zeta}) - x_b \cdot \theta_a \cdot \cos(\epsilon_{\theta\zeta}) ] \cdot \cos(\omega \cdot t) + \\ &\quad - [ z_a \cdot \sin(\epsilon_{z\zeta}) - x_b \cdot \theta_a \cdot \sin(\epsilon_{\theta\zeta}) ] \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Deze harmonische beweging kan ook geschreven worden als:

$$\begin{aligned} h &= h_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{h\zeta}) \\ &= [ h_a \cdot \cos(\epsilon_{h\zeta}) ] \cdot \cos(\omega \cdot t) + \\ &\quad - [ h_a \cdot \sin(\epsilon_{h\zeta}) ] \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} h_a \cdot \cos(\epsilon_{h\zeta}) &= z_a \cdot \cos(\epsilon_{z\zeta}) - x_b \cdot \theta_a \cdot \cos(\epsilon_{\theta\zeta}) \\ h_a \cdot \sin(\epsilon_{h\zeta}) &= z_a \cdot \sin(\epsilon_{z\zeta}) - x_b \cdot \theta_a \cdot \sin(\epsilon_{\theta\zeta}) \end{aligned}$$

In de voorgaande twee uitdrukkingen zijn de rechterleden bekend. Uit het kwadrateren en optellen van deze twee rechterleden volgt de amplitude  $h_a$ . Uit het op elkaar delen van deze twee rechterleden volgt de fase verschuiving  $\epsilon_{h\zeta}$ .

De verticale snelheid volgt nu uit een differentiatie van de verplaatsing  $h$  naar de tijd:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -\omega \cdot h_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \epsilon_{h\zeta}) \\ &= +\omega \cdot h_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{h\zeta} + 90^\circ) \end{aligned}$$

De verticale versnelling volgt uit een dubbele differentiatie van de verplaatsing  $h$  naar de tijd:

$$\begin{aligned} \ddot{h} &= -\omega^2 \cdot h_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{h\zeta}) \\ &= +\omega^2 \cdot h_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{h\zeta} + 180^\circ) \end{aligned}$$

### Vertikale relatieve bewegingen.

Ook kan, bijvoorbeeld in verband met waterovername, de relatieve verticale beweging op iedere lokatie berekend worden.

De verticale verplaatsing van het golfoppervlak ter plaatse van  $x_b$  volgt uit:

$$\zeta_x = \zeta_a \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x_b)$$

De relatieve verticale verplaatsing  $s$  van het wateroppervlak ten opzichte van het schip ter plaatse van  $x_b$  volgt uit:

$$\begin{aligned} s &= \zeta_x - z + x_b \cdot \theta \\ &= \zeta_a \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x_b) - z_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{z\zeta}) + x_b \cdot \theta_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{\theta\zeta}) \\ &= [ \zeta_a \cdot \cos(k \cdot x_b) - z_a \cdot \cos(\epsilon_{z\zeta}) + x_b \cdot \theta_a \cdot \cos(\epsilon_{\theta\zeta}) ] \cdot \cos(\omega \cdot t) + \\ &\quad - [ \zeta_a \cdot \sin(k \cdot x_b) - z_a \cdot \sin(\epsilon_{z\zeta}) + x_b \cdot \theta_a \cdot \sin(\epsilon_{\theta\zeta}) ] \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Deze harmonische verticale relatieve beweging, kan ook geschreven worden als:

$$\begin{aligned} s &= s_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{s\zeta}) \\ &= [ s_a \cdot \cos(\epsilon_{s\zeta}) ] \cdot \cos(\omega \cdot t) + \\ &\quad - [ s_a \cdot \sin(\epsilon_{s\zeta}) ] \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} s_a \cdot \cos \epsilon_{s\zeta} &= \zeta_a \cdot \cos(k \cdot x_b) - z_a \cdot \cos(\epsilon_{z\zeta}) + x_b \cdot \theta_a \cdot \cos(\epsilon_{\theta\zeta}) \\ s_a \cdot \sin \epsilon_{s\zeta} &= \zeta_a \cdot \sin(k \cdot x_b) - z_a \cdot \sin(\epsilon_{z\zeta}) + x_b \cdot \theta_a \cdot \sin(\epsilon_{\theta\zeta}) \end{aligned}$$

Daar de rechterleden bekend zijn, zijn uit deze twee vergelijkingen de amplitude  $s_a$  en de fase verschuiving  $\epsilon_{s\zeta}$  van de verticale relatieve beweging ter plaatse van  $x_b$  te bepalen.

Opmerking: - In dit soort berekeningen wordt geen rekening gehouden met de verstoring van de golf door de aanwezigheid van het bewegende lichaam.

$$\text{- Daar } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ is dus: } k \cdot x_b = \frac{x_b}{\lambda} \cdot 2\pi$$

Voorbeeld.

Van een schip zijn bij voorwaartse snelheid nul de volgende gegevens beschikbaar:

$$\begin{array}{lll} \zeta_a &= & 1.50 \text{ m} & L &= & 100 \text{ m} & \lambda &= & 120 \text{ m} \\ z_a &= & 0.30 \text{ m} & \epsilon_{z\zeta} &= & 10^\circ \\ \theta_a &= & 1.80^\circ & \epsilon_{\theta\zeta} &= & 225^\circ \end{array}$$

Met toepassing van het voorgaande volgt hieruit voor de verticale relatieve beweging ter plaatse van  $x_b = L/2$ :

$$s_a = 2.74 \text{ m} \quad \epsilon_{s\zeta} = 189^\circ$$

### 3. Bewegingen in vlak water.

De notaties voor de diverse coëfficiënten van de bewegingsvergelijkingen in dit collegediktaat kunnen bij een eerste bestudering mogelijk aanleiding tot enige verwarring geven. De volgende tabel geeft, voor het schrikken, de hier soms door elkaar gebruikte notaties weer.

massa	demping	veer
$a_{xx}$	$b_{xx}$	$c_{xx}$
$\rho \cdot V + m_{xx}$	$N_{xx}$	
$m + a$	$b$	$c$

Voor de andere bewegingen worden soortgelijke notaties gebruikt.

#### 3-1 Ongekoppelde bewegingen.

De drie bewegingen in het horizontale vlak (schrikken, verzetten en gieren) worden gekenmerkt door het ontbreken van de "veerterm", als er geen verankering aanwezig is.

Bij de andere drie bewegingen (dompen, slingeren en stampen) zijn de veertermen wel aanwezig. Door de hydrostatische veertermen zal een drijvende constructie, als deze uit zijn evenwicht gebracht wordt, trachten het verstoorte evenwicht te herstellen.

#### Schrikken.

De schrikbeweging van een vrijdrijvende constructie in vlak water is in ongekoppelde vorm voor te stellen door de volgende bewegingsvergelijking:

$$a_{xx} \cdot \ddot{x} + b_{xx} \cdot \dot{x} + c_{xx} = 0$$

waarin:

$a_{xx}$  : de eigen massa van de constructie  
plus een hydrodynamische massa

$b_{xx}$  : de hydrodynamische demping

$c_{xx} =$  de hydrostatische veerterm = 0

Een hydrodynamisch deel van de term  $a_{xx} \cdot \ddot{x}$  en de gehele term  $b_{xx} \cdot \dot{x}$  worden veroorzaakt door de hydrodynamische reactie, die het gevolg is van de beweging van de constructie ten opzichte van het omringende water.

Als we veronderstellen dat het water wrijvingsloos en onsamendrukbbaar is, dan is er demping als gevolg van het opwekken van oppervlakte golven door de translaties van de konstruktie. Die golven transportereren energie met de groepssnelheid en die energie wordt onttrokken aan de bewegende konstruktie, zodat de beweging daarvan tenslotte geheel uitdempt. Deze zogenaamde golfdemping is lineair afhankelijk van  $\dot{x}$  bij kleine bewegingsamplituden.

In een reële vloeistof is ook viskositeit oorzaak van demping, doordat er wrijving, wervelvorming en loslatings verschijnselen optreden. In het algemeen is het viskeuze aandeel van de demping niet lineair. Daarop wordt later teruggekomen.

De reactie  $a_{xx} \ddot{x}$  is evenredig met de horizontale versnelling  $\ddot{x}$  van de beweging en het hydrodynamische deel hiervan ontstaat doordat aan de waterdeeltjes in de buurt van het lichaam een versnelling wordt gegeven. Dit deel dissipeert geen energie, zodat een eventuele oppervlakte verstoring zich moet manifesteren als een staand golfpatroon in de buurt van het lichaam.

De coëfficiënt  $a_{xx}$  heeft de dimensie van een massa, vandaar dat het hydrodynamische deel hiervan ook wel aangeduid wordt met de naam toegevoegde massa (Engels: "added mass"). Een betere naam is echter hydrodynamische massa.

In algemene vorm luidt de bewegingsvergelijking:

$$(m+a) \ddot{x} + b \dot{x} = 0$$

De oplossing van deze bewegingsvergelijking is bijvoorbeeld:

$$\dot{x} = C \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

waaruit volgt:

$$\ddot{x} = C \cdot e^{-b/(m+a) \cdot t}$$

Invullen van een beginvoorwaarde:

$$\dot{x} = \dot{x}_a \quad \text{voor: } t = 0$$

levert:

$$C = \dot{x}_a$$

Verzetten.

Het verzetten van een vrijdrijvende konstruktie in vlak water is in ongekoppelde vorm voor te stellen door de volgende vergelijking:

$$a_{yy} \ddot{y} + b_{yy} \dot{y} + c_{yy} y = 0$$

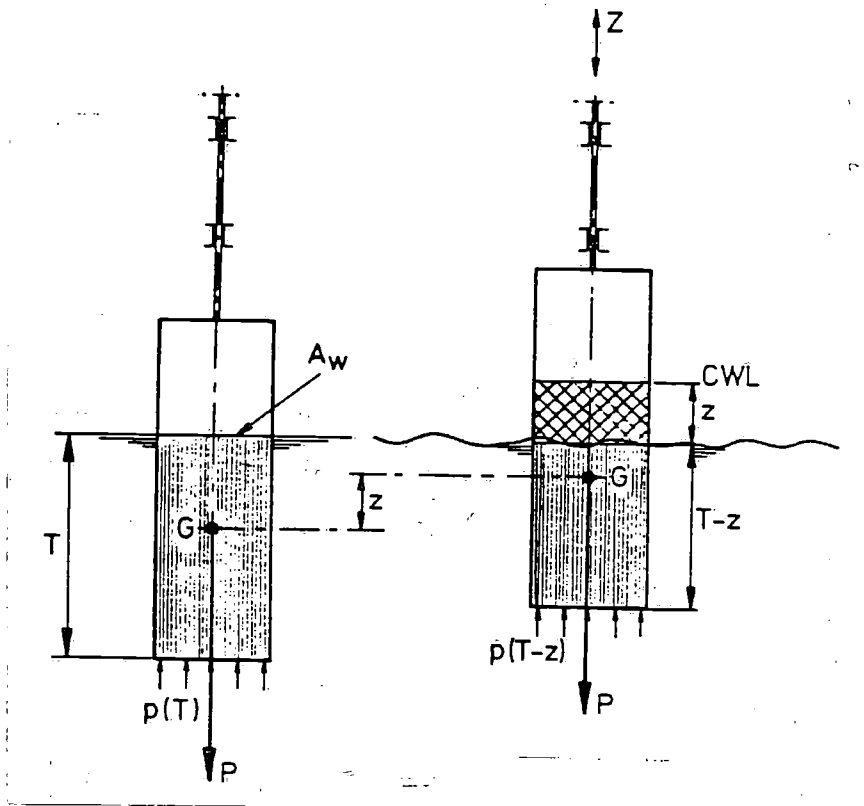
waarin:

$$c_{yy} = 0$$

De afleiding van de oplossing verloopt op dezelfde wijze als die gegeven bij het schrikken.

## Dampen.

We beschouwen een cilindervormige ton, drijvend in vlak water, die een verticale verplaatsing krijgt en daarna losgelaten wordt.



Figuur 3-1-A. Drijvende ton.

Op elk tijdstip geldt de tweede wet van Newton:

$$m \cdot \ddot{z} = Z$$

Hierin is  $Z$  de som van alle verticale krachten die op de ton werken:

$$\begin{aligned} Z &= -P + p \cdot A_w - b \cdot \dot{z} - a \cdot \ddot{z} \\ &= -P + \rho \cdot g \cdot (T-z) \cdot A_w - b \cdot \dot{z} - a \cdot \ddot{z} \end{aligned}$$

Omdat voor de neerwaartse massakracht  $P$  geldt:

$$P = \rho \cdot V = \rho \cdot g \cdot A_w \cdot T$$

vinden we:

$$(m+a) \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + c \cdot z = 0$$

Hierin is:

- |     |                            |  |
|-----|----------------------------|--|
| $m$ | $= \rho \cdot A_w \cdot T$ | de eigen massa van de ton zelf               |
| $a$ | $= \bar{m}_{zz}$           | de hydrodynamische massa                     |
| $b$ | $= N_{zz}$                 | de hydrodynamische demping                   |
| $c$ | $= \rho \cdot g \cdot A_w$ | de "veerconstante" van de verticale beweging |

Een veel gebruikte andere notatie is:

$$a_{zz} \cdot \ddot{z} + b_{zz} \cdot \dot{z} + c_{zz} \cdot z = 0$$

Door de bewegingsvergelijking te delen door  $(m+a)$  schrijven nu deze als volgt:

$$\ddot{z} + 2 \cdot \nu \cdot \dot{z} + \omega_0^2 \cdot z = 0$$

Hierin is:

$$2 \cdot \nu = \frac{b}{m+a} \quad \text{dempingscoëfficiënt (dimensievol)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m+a} \quad \text{ongedempte eigen frequentie}$$

De oplossing van de bewegingsvergelijking luidt:

$$z = C \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

waarin:

$$\alpha = -\nu \pm [\nu^2 - \omega_0^2]^{\frac{1}{2}}$$

De eigen frequentie van dit systeem is:

$$\omega_z = [\omega_0^2 - \nu^2]^{\frac{1}{2}}$$

waarmee:

$$\alpha = -\nu \pm i \cdot \omega_z$$

Dus:

$$z = e^{-\nu \cdot t} \cdot [C_1 \cdot \cos(\omega_z \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_z \cdot t)]$$

De konstanten  $C_1$  en  $C_2$  volgen uit de beginvoorwaarden, bijvoorbeeld:

$$t = 0 : \quad z = z_a$$

$$t = 0 : \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

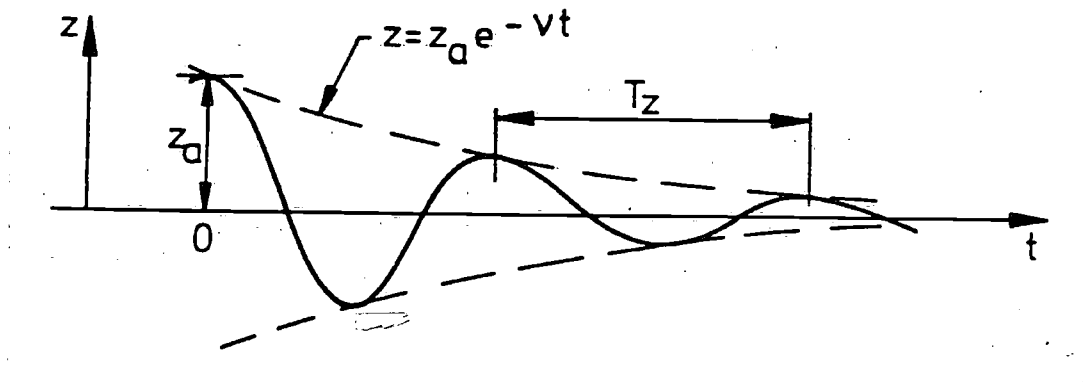
Hiermee wordt de oplossing van de bewegingsvergelijking van deze dempende ton:

$$z = z_a \cdot e^{-\nu \cdot t} \cdot \left[ \cos(\omega_z \cdot t) + \frac{\nu}{\omega_z} \cdot \sin(\omega_z \cdot t) \right]$$

De eigen periode  $T_z$  volgt uit:

$$T_z = \frac{2\pi}{\omega_z}$$

In de volgende figuur wordt de zogenaamde uitdempingskromme weer-gegeven.



Figuur 3-1-B. Uitdempingskromme.

Uit het voorgaande volgt dat er geen periodieke oplossing van de bewegingsvergelijking bestaat als  $\nu \geq \omega_0$ .  
Als  $\nu = \omega_0$  spreekt men van de kritische demping.

In dat verband wordt een dimensieloze dempingsfactor  $\kappa$  als volgt gedefinieerd:

$$\kappa = \frac{\nu}{\omega_0} \quad \text{met: } 0 \leq \kappa \leq 1$$

Hiermee wordt de bewegingsvergelijking als volgt geschreven:

$$\ddot{z} + 2 \cdot \kappa \cdot \omega_0 \cdot \dot{z} + \omega_0^2 \cdot z = 0$$

Voor drijvende konstrukties is steeds  $\kappa \ll 1$ . Meestal is  $\kappa < 0.2$ . In dat geval verschilt de eigen frequentie  $\omega_z$  weinig van de ongedempte eigen frequentie  $\omega_0$ .

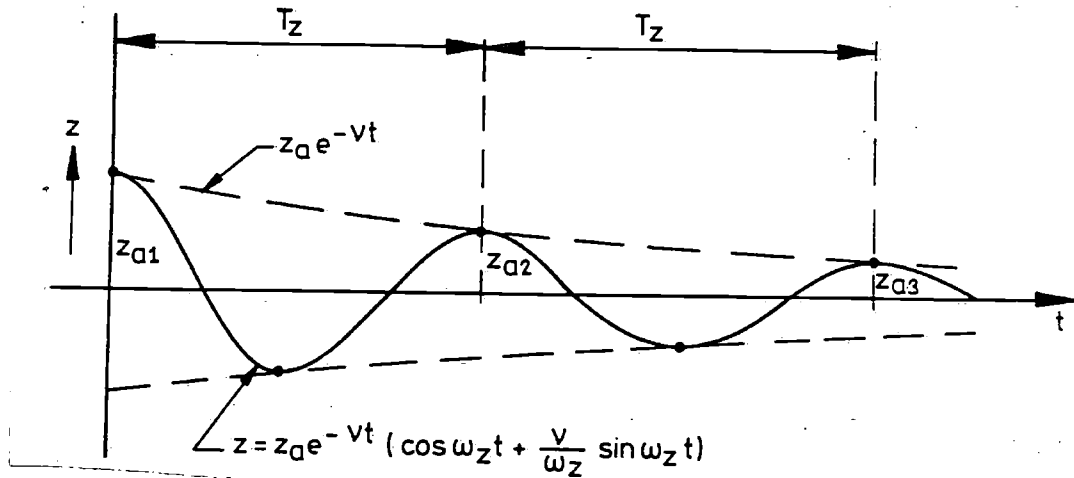
Immers:

$$\begin{aligned} \omega_z &= [\omega_0^2 - \nu^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \omega_0 \cdot [1 - \kappa^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \omega_0 \end{aligned}$$

Voor  $\kappa = 0.2$  is de fout slechts 2 %.

De eigen frequenties van drijvende konstrukties zijn van groot belang in verband met resonantie verschijnselen als gevolg van excitatie door golfkrachten.

De meting van de periode wordt bij voorkeur uitgevoerd met behulp van de op tijdbasis geregistreeerde uitdempingskromme. In het geval van een lineaire demping is de dempingscoëfficiënt dan gemakkelijk te bepalen met behulp van het logaritmisch decrement. Dit is de natuurlijke logaritme van het quotient van twee uitwijkingen uit de neutrale stand, die één periode van elkaar verwijderd zijn, zie de volgende figuur.



Figuur 3-1-C. Bepaling logaritmisch decrement.

Hieruit volgt voor het quotiënt van deze twee uitwijkingen:

$$\frac{z(t)}{z(t+T_Z)} = \frac{e^{-\nu \cdot t}}{e^{-\nu \cdot (t+T_Z)}} = e^{\nu \cdot T_Z}$$

De natuurlijke logaritme hiervan levert het logaritmisch decrement:

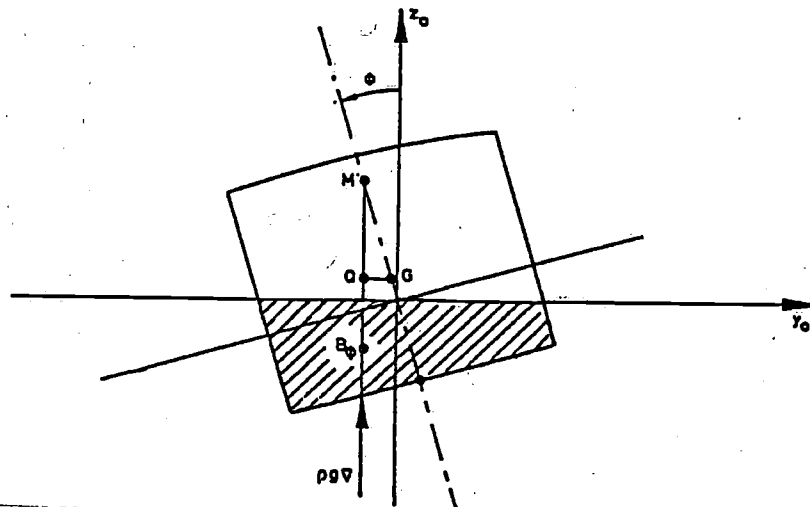
$$\ln \left[ \frac{z(t)}{z(t+T_Z)} \right] = \nu \cdot T_Z \approx \kappa \cdot \omega_Z \cdot T_Z = 2\pi \cdot \kappa$$

De dempingsfactor  $\kappa$  is dus op eenvoudige wijze uit het logaritmisch decrement te bepalen met:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left[ \frac{z(t)}{z(t+T_Z)} \right]$$

### Slingeren.

Als een ponton in vlak water een hellingshoek  $\phi$  gegeven wordt kan op analoge wijze als bij de dompende ton een bewegingsvergelijking opgesteld worden.



Figuur 3-1-D. Momentenevenwicht tijdens het slingeren.



Op elk tijdstip geldt de tweede wet van Newton:

$$\begin{aligned} I_{xx} \cdot \ddot{\varphi} &= \Sigma [\text{momenten}] \\ &= -\rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM \cdot \varphi - N_{\varphi\varphi} \cdot \dot{\varphi} - m_{\varphi\varphi} \cdot \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$(I_{xx} + m_{\varphi\varphi}) \cdot \ddot{\varphi} + N_{\varphi\varphi} \cdot \dot{\varphi} + \rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM \cdot \varphi = 0$$

Een veel gebruikte andere notatie is:

$$a_{\varphi\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + b_{\varphi\varphi} \cdot \dot{\varphi} + c_{\varphi\varphi} \cdot \varphi = 0$$

De bepaling van de oplossing en de eigen frequentie verloopt op dezelfde wijze als die gegeven voor het dompen.

Stampen.

Op analoge wijze als voor het slingeren geldt voor de ongekoppelde stampbeweging van een vrijdrijvende konstruktie in vlak water:

$$(I_{yy} + m_{\theta\theta}) \cdot \ddot{\theta} + N_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM_L \cdot \theta = 0$$

Een veel gebruikte andere notatie is:

$$a_{\theta\theta} \cdot \ddot{\theta} + b_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta} + c_{\theta\theta} \cdot \theta = 0$$

De bepaling van de oplossing en de eigen frequentie verloopt op dezelfde wijze als gegeven voor het dompen.

Gieren.

De ongekoppelde gierbeweging van een vrijdrijvende konstruktie in vlak water is voor te stellen door de volgende vergelijking:

$$a_{\psi\psi} \cdot \ddot{\psi} + b_{\psi\psi} \cdot \dot{\psi} + c_{\psi\psi} \cdot \psi = 0$$

waarin:

$$c_{\psi\psi} = 0$$

De afleiding van de oplossing verloopt op dezelfde wijze als die gegeven bij het schrikken.

### 3-2. Gekoppelde bewegingen.

Voor de gelineariseerde bewegingen van onverankerde vrijdrijvende konstrukties wordt hier nader op de koppelingen tussen de verschillende bewegingen ingegaan.

In veel gevallen kunnen de coëfficiënten van de bewegingsvergelijkingen van drijvende konstrukties gevonden worden door de konstruktie in elementen te verdelen en voor ieder element de bijdrage in de coëfficiënten te bepalen. Een sommatie levert dan de totale coëfficiënt op. Hierbij wordt aangenomen dat er geen interactie tussen de elementen onderling is.

Voor relatief lange slanke konstruktiedelen en ook voor gehele konstrukties zoals schepen en soms ook pontons, bakken, e.d. kunnen de coëfficiënten gevonden worden door elementen te kiezen met een oneindig kleine lengte: een doorsnede. Voor een aantal doorsneden worden de coëfficiënten per lengte-eenheid bepaald en een integratie over de lengte levert dan de totale coëfficiënt. Deze methode wordt aangeduid met de "strip theorie" en wordt in het hierna volgende voor een onverankerd schip toegelicht.

#### Koppeling tussen schrikken, dompen en stampen.

Deze symmetrische bewegingen zijn onderling gekoppeld.

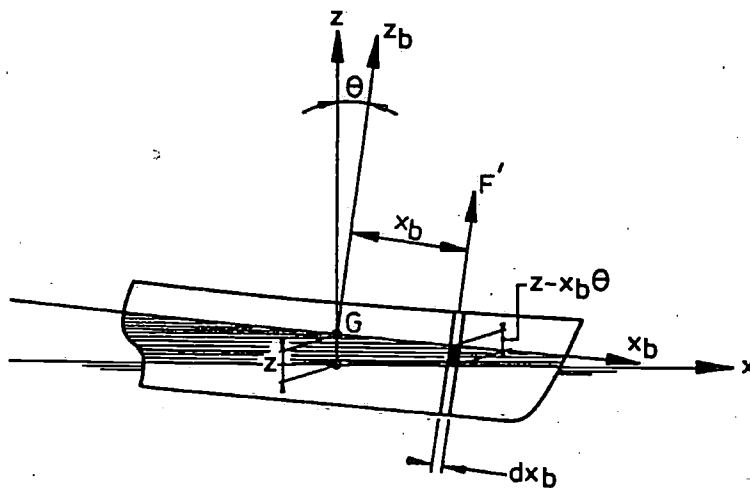
Bij schepen blijkt de schrikbeweging de beide andere bewegingscomponenten in vlak water nauwelijks te beïnvloeden, zodat in eerste instantie volstaan kan worden met alleen de koppeling tussen dompen en stampen. Dit geldt echter niet algemeen voor drijvende konstrukties.

Als voorbeeld wordt de koppeling tussen het dompen en stampen bij snelheid nul behandeld.

De stamphoek  $\theta$  wordt zo klein verondersteld dat linearisatie toegestaan is, dus  $\sin\theta \approx \theta$  en  $\cos\theta \approx 1$ .

De verplaatsing, verticale snelheid en versnelling van een schijf van het schip op afstand  $x_b$  van G is respectievelijk:

$$z - x_b \cdot \theta \quad \dot{z} - x_b \cdot \dot{\theta} \quad \ddot{z} - x_b \cdot \ddot{\theta}$$



Figuur 3-2-A. Koppeling tussen dompen en stampen.

Voor de bewegingen in verticale richting van een schip met lengte L geldt nu:

$$\rho \cdot \nabla \cdot \ddot{z} = \int_{-L/2}^{+L/2} F' \cdot dx_b - P + \rho \cdot g \cdot \nabla$$

waarin:

$$P = \rho \cdot g \cdot \nabla$$

en:

$$\begin{aligned} F' &= F_1' + F_2' + F_3' \\ F_1' &= -2 \cdot \rho \cdot g \cdot y_w \cdot (z - x_b \cdot \theta) \\ F_2' &= -N_{zz}' \cdot (z - x_b \cdot \theta) \\ F_3' &= -m_{zz}' \cdot (z - x_b \cdot \theta) \end{aligned}$$

Verondersteld is dat de waterlijnbreedte  $2 \cdot y_w$  over het beschouwde gebied konstant is.

We vinden nu:

$$\rho \cdot \nabla \cdot \ddot{z} = \int_{-L/2}^{+L/2} (F_1' + F_2' + F_3') \cdot dx_b$$

of:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \nabla \cdot \ddot{z} &= -2 \cdot \rho \cdot g \cdot z \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} y_w \cdot dx_b + 2 \cdot \rho \cdot g \cdot \theta \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} y_w \cdot x_b \cdot dx_b + \\ &\quad - z \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} N_{zz}' \cdot dx_b + \theta \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} N_{zz}' \cdot x_b \cdot dx_b + \\ &\quad - z \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} m_{zz}' \cdot dx_b + \theta \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} m_{zz}' \cdot x_b \cdot dx_b \end{aligned}$$

Het oppervlak van de lastlijn is:

$$2 \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} y_w \cdot dx_b = A_w$$

Het statisch moment van de lastlijn t.o.v. de y-as is:

$$2 \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} y_w \cdot x_b \cdot dx_b = S_w$$

De hydrodynamische massa in de z-richting is:

$$\int_{-L/2}^{+L/2} m_{zz}' \cdot dx_b = m_{zz}$$

De dempingscoëfficiënt van de dompbeweging is:

$$\int_{-L/2}^{+L/2} N_{zz}' \cdot dx_b = N_{zz}$$

De statische momenten van de verdelingen over de lengte van het schip van respectievelijk de hydrodynamische massa en de dempingscoëfficiënt zijn:

$$\int_{-L/2}^{+L/2} m_{zz}' \cdot x_b \cdot dx_b \quad \text{en} \quad \int_{-L/2}^{+L/2} N_{zz}' \cdot x_b \cdot dx_b$$

De bewegingsvergelijking kan als volgt geschreven worden:

$$(\rho \cdot \nabla + m_{zz}) \cdot \ddot{z} + N_{zz} \cdot \dot{z} + \rho \cdot g \cdot A_w \cdot z +$$

$$-\ddot{\theta} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} m_{zz}' \cdot x_b \cdot dx_b - \dot{\theta} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} N_{zz}' \cdot x_b \cdot dx_b - \rho \cdot g \cdot S_w \cdot \theta = 0$$

of korthedshalve:

$$a_{zz} \cdot \ddot{z} + b_{zz} \cdot \dot{z} + c_{zz} \cdot z + a_{z\theta} \cdot \ddot{\theta} + b_{z\theta} \cdot \dot{\theta} + c_{z\theta} \cdot \theta = 0$$

waarin de indices de beschouwde bewegingscomponenten aanduiden.

Blijkbaar zijn de laatste drie termen zogenaamde koppeltermen, die ontstaan door asymmetrie van de hydromechanische verticale krachten die op het schip werken. De tweede index geeft aan met welke beweging de koppeling bestaat.

Voor het stampen geldt een analoge afleiding. De momentenvergelijking luidt:

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} = - \int_{-L/2}^{+L/2} (F_1' + F_2' + F_3') \cdot x_b \cdot dx_b$$

waaruit volgt:

$$(I_{yy} + m_{\theta\theta}) \cdot \ddot{\theta} + N_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot g \cdot I_y \cdot \theta +$$

$$-\ddot{z} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} m_{zz}' \cdot x_b \cdot dx_b - \dot{z} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} N_{zz}' \cdot x_b \cdot dx_b - \rho \cdot g \cdot S_w \cdot z = 0$$

waarin:

$$I_y = 2 \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} y_w \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

$$m_{\theta\theta} = \int_{-L/2}^{+L/2} m_{zz}' \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

$$N_{\theta\theta} = \int_{-L/2}^{+L/2} N_{zz}' \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

of korthedshalve:

$$a_{\theta\theta} \cdot \ddot{\theta} + b_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta} + c_{\theta\theta} \cdot \theta + a_{\theta z} \cdot \ddot{z} + b_{\theta z} \cdot \dot{z} + c_{\theta z} \cdot z = 0$$

Uit het voorgaande volgt ook:

$$a_{z\theta} = a_{\theta z}$$

$$b_{z\theta} = b_{\theta z}$$

$$c_{z\theta} = c_{\theta z}$$

Deze symmetrie relaties volgen uit de geometrie van de romp van het schip (snelheid nul!). Bij voorwaartse snelheid zijn deze relaties in het algemeen niet geldig.

De gekoppelde bewegingsvergelijkingen:

$$a_{zz} \cdot \ddot{z} + b_{zz} \cdot \dot{z} + c_{zz} \cdot z + a_{z\theta} \cdot \ddot{\theta} + b_{z\theta} \cdot \dot{\theta} + c_{z\theta} \cdot \theta = 0$$

$$a_{\theta z} \cdot \ddot{z} + b_{\theta z} \cdot \dot{z} + c_{\theta z} \cdot z + a_{\theta\theta} \cdot \ddot{\theta} + b_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta} + c_{\theta\theta} \cdot \theta = 0$$

kunnen opgelost worden door te stellen:

$$z = z_1 \cdot e^{\sigma_1 \cdot t}$$

$$\theta = \theta_1 \cdot e^{\sigma_1 \cdot t}$$

zodat:

$$z_1 \cdot (a_{zz} \cdot \sigma^2 + b_{zz} \cdot \sigma + c_{zz}) + \theta_1 \cdot (a_{z\theta} \cdot \sigma^2 + b_{z\theta} \cdot \sigma + c_{z\theta}) = 0$$

$$z_1 \cdot (a_{\theta z} \cdot \sigma^2 + b_{\theta z} \cdot \sigma + c_{\theta z}) + \theta_1 \cdot (a_{\theta\theta} \cdot \sigma^2 + b_{\theta\theta} \cdot \sigma + c_{\theta\theta}) = 0$$

Deze homogene vergelijkingen in  $z_1$  en  $\theta_1$  hebben slechts dan een van (0,0) verschillende oplossing, als de determinant van het stelsel nul is, dus:

$$A_1 \cdot \sigma^4 + A_2 \cdot \sigma^3 + A_3 \cdot \sigma^2 + A_4 \cdot \sigma + A_5 = 0$$

waarin:

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_{zz} \cdot a_{\theta\theta} - a_{z\theta} \cdot a_{\theta z} \\
A_2 &= a_{zz} \cdot b_{\theta\theta} + a_{\theta\theta} \cdot b_{zz} - a_{z\theta} \cdot b_{\theta z} - a_{\theta z} \cdot b_{z\theta} \\
A_3 &= a_{zz} \cdot c_{\theta\theta} + b_{zz} \cdot b_{\theta\theta} + a_{\theta\theta} \cdot c_{zz} - a_{z\theta} \cdot c_{\theta z} - b_{z\theta} \cdot b_{\theta z} - c_{z\theta} \cdot a_{\theta z} \\
A_4 &= b_{zz} \cdot c_{\theta\theta} + c_{zz} \cdot b_{\theta\theta} - c_{z\theta} \cdot b_{\theta z} - c_{\theta z} \cdot b_{z\theta} \\
A_5 &= c_{zz} \cdot c_{\theta\theta} - c_{z\theta} \cdot c_{\theta z}
\end{aligned}$$

Over het algemeen zijn de geometrische koppelingseffekten gering en heeft de demping weinig invloed op de eigen perioden van de bewegingen.

Op grond daarvan kan dit vereenvoudigd worden tot:

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_{zz} \cdot a_{\theta\theta} \\
A_2 &= 0 \\
A_3 &= a_{zz} \cdot c_{\theta\theta} + c_{zz} \cdot a_{\theta\theta} \\
A_4 &= 0 \\
A_5 &= c_{zz} \cdot c_{\theta\theta} - c_{z\theta} \cdot c_{\theta z}
\end{aligned}$$

Met  $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$  vinden we dan:

$$\sigma^4 + \sigma^2 \cdot (\omega_{0\theta}^2 + \omega_{0z}^2) + \omega_{0z}^2 \cdot \omega_{0\theta}^2 = 0$$

waarbij de verwaarloosbaar kleine term  $\frac{c_{z\theta} \cdot c_{\theta z}}{a_{zz} \cdot a_{\theta\theta}}$  weggelaten is.

Uit het voorgaande volgt dan:

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,2} &= \pm i \cdot \omega_{0z} \\
\sigma_{3,4} &= \pm i \cdot \omega_{0\theta}
\end{aligned}$$

De oplossing van de vergelijking luidt tenslotte:

$$\begin{aligned}
z &= z_1 \cdot \cos(\omega_{0z} \cdot t) + z_2 \cdot \sin(\omega_{0z} \cdot t) + z_3 \cdot \cos(\omega_{0\theta} \cdot t) + z_4 \cdot \sin(\omega_{0\theta} \cdot t) \\
\theta &= \theta_1 \cdot \cos(\omega_{0\theta} \cdot t) + \theta_2 \cdot \sin(\omega_{0\theta} \cdot t) + \theta_3 \cdot \cos(\omega_{0z} \cdot t) + \theta_4 \cdot \sin(\omega_{0z} \cdot t)
\end{aligned}$$

Het dompen en stampen zijn dus elk samengesteld uit de superpositie van twee harmonische oscillaties.

De eigen frequentie van de ene is vrijwel gelijk aan die van het dompen en de eigen frequentie van de ander is vrijwel gelijk aan de frequentie van het zuiver stampen. De uitdrukking "vrijwel" wordt gebruikt in verband met de toegepaste verwaarlozingen.

Samenvattend resulteert het voorgaande dus in een ongekoppelde lineaire bewegingsvergelijking voor het schrikken en twee stelsels van lineaire bewegingsvergelijkingen, voor respectievelijk het dompen en het stampen:

$$\begin{aligned}
a_{xx} \cdot \ddot{x} + b_{xx} \cdot \dot{x} &= 0 \\
a_{zz} \cdot \ddot{z} + b_{zz} \cdot \dot{z} + c_{zz} \cdot z + a_{z\theta} \cdot \ddot{\theta} + b_{z\theta} \cdot \dot{\theta} + c_{z\theta} \cdot \theta &= 0 \\
a_{\theta z} \cdot \ddot{z} + b_{\theta z} \cdot \dot{z} + c_{\theta z} \cdot z + a_{\theta\theta} \cdot \ddot{\theta} + b_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta} + c_{\theta\theta} \cdot \theta &= 0
\end{aligned}$$

### Koppeling tussen schrikken, dompen en stampen.

Voor langwerpige konstrukties is de koppeling van het schrikken met het dompen meestal verwaarloosbaar. Soms is er echter wel een duidelijke koppeling van het schrikken met het stampen aanwezig. Een volgend stelsel van drie gekoppelde lineaire bewegingsvergelijkingen, voor respectievelijk het schrikken, het dompen en het stampen van een onverankerde konstruktie, laat dit zien:

$$\begin{array}{rcl}
 a_{xx} \ddot{x} + b_{xx} \dot{x} & & + a_{x\theta} \ddot{\theta} + b_{x\theta} \dot{\theta} = 0 \\
 a_{zz} \ddot{z} + b_{zz} \dot{z} + c_{zz} z & + a_{z\theta} \ddot{\theta} + b_{z\theta} \dot{\theta} + c_{z\theta} \theta & = 0 \\
 a_{\theta x} \ddot{\theta} + b_{\theta x} \dot{\theta} & + a_{\theta z} \ddot{z} + b_{\theta z} \dot{z} + c_{\theta z} z + a_{\theta\theta} \ddot{\theta} + b_{\theta\theta} \dot{\theta} + c_{\theta\theta} \theta & = 0
 \end{array}$$

### Koppeling tussen verzetten en slingeren.

Voor deze keer-symmetrische bewegingscomponenten geldt in principe dezelfde redenering als voor het dompen en het stampen. De koppeling met het gieren is veelal gering.

De verdeling van de hydrodynamische horizontale krachten is in het algemeen niet-symmetrisch ten opzichte van de oorsprong van het assenstelsel, zodat bij het verzetten slingermomenten ontstaan en bij het slingeren horizontale dwarskrachten ontstaan.

Voor onverankerde konstrukties vindt men soms voor het verzetten en het slingeren twee gekoppelde bewegingsvergelijkingen en voor het gieren een ongekoppelde vergelijking:

$$\begin{array}{rcl}
 a_{yy} \ddot{y} + b_{yy} \dot{y} & + a_{y\varphi} \ddot{\varphi} + b_{y\varphi} \dot{\varphi} & = 0 \\
 a_{\varphi y} \ddot{y} + b_{\varphi y} \dot{y} & + a_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi} + b_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} + c_{\varphi\varphi} \varphi & = 0 \\
 & & a_{\psi\psi} \ddot{\psi} + b_{\psi\psi} \dot{\psi} = 0
 \end{array}$$

### Koppeling tussen verzetten, slingeren en gieren

Soms is er bij onverankerde konstrukties echter ook een duidelijke koppeling tussen het gieren en het verzetten en het slingeren aanwezig, zoals het volgende stelsel van drie gekoppelde lineaire bewegingsvergelijkingen, voor respectievelijk het verzetten, het slingeren en het gieren, laat zien:

$$\begin{array}{rcl}
 a_{yy} \ddot{y} + b_{yy} \dot{y} & + a_{y\varphi} \ddot{\varphi} + b_{y\varphi} \dot{\varphi} & + a_{y\psi} \ddot{\psi} + b_{y\psi} \dot{\psi} = 0 \\
 a_{\varphi y} \ddot{y} + b_{\varphi y} \dot{y} & + a_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi} + b_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} + c_{\varphi\varphi} \varphi & + a_{\varphi\psi} \ddot{\psi} + b_{\varphi\psi} \dot{\psi} = 0 \\
 a_{\psi y} \ddot{y} + b_{\psi y} \dot{y} & + a_{\psi\varphi} \ddot{\varphi} + b_{\psi\varphi} \dot{\varphi} & + a_{\psi\psi} \ddot{\psi} + b_{\psi\psi} \dot{\psi} = 0
 \end{array}$$

Opmerking: De niet-vet gedrukte termen in de bewegingsvergelijkingen in dit hoofdstuk zijn dus de koppeltermen.

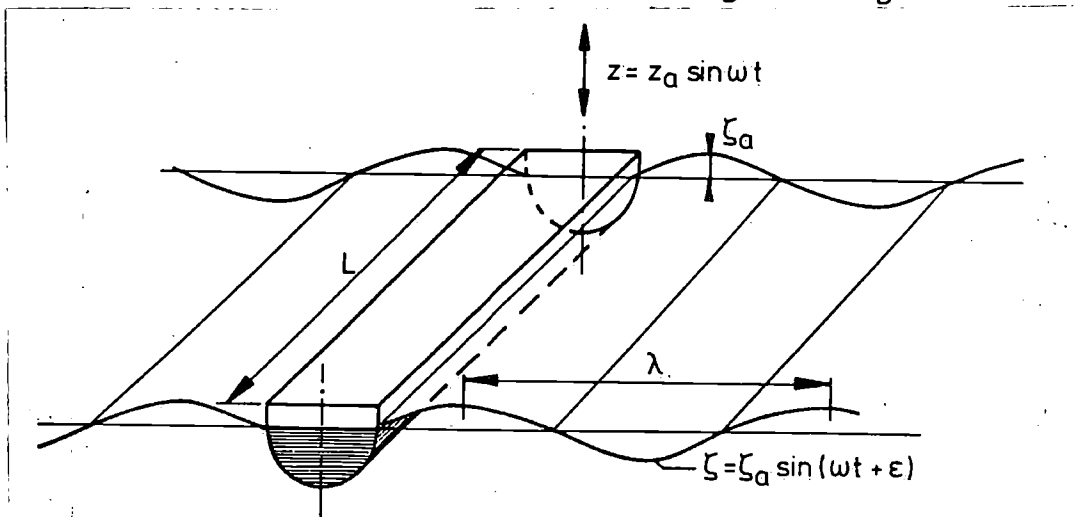
### 3-3. Hydrodynamische massa en demping.

#### 3-3-1. Fysische achtergrond.

Demping van de scheepsbewegingen ontstaat door het opwekken van oppervlakte golven, die energie van het bewegende schip wegvoeren (dissiperen), en door viskeuze invloeden (wrijving, wervels, loslaten van de stroming).

Golfdemping geeft aanleiding tot een lineaire dempingsterm, zoals het volgende voorbeeld aantoont. Daarbij wordt verondersteld dat de steilheid van de dempingsgolven klein is.

Beschouw een drijvende cylinder in vlak water die een harmonische verticale oscillatie uitvoert, zie de volgende figuur.



Figuur 3-3-1-A. Vertikaal oscillerende drijvende cylinder.

Voor de verticale beweging van de cylinder geldt:

$$(\rho \cdot V + m_{zz}) \cdot \ddot{z} + N_{zz} \cdot \dot{z} + \rho \cdot g \cdot A_w \cdot z = 0$$

De arbeid, verricht door de dempingskracht  $N_{zz} \cdot \dot{z}$ , is per tijdseenheid gelijk aan de energie die door de dempingsgolf per tijdseenheid wordt afgevoerd.

Dus de energie is:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T N_{zz} \cdot \dot{z} \cdot \dot{z} \cdot dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot \zeta_a^2 \cdot L \cdot \frac{C}{2}$$

Hierin is:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad : \text{de periode van de oscillatie}$$

$$\frac{C}{2} \quad : \text{de groepsnelheid van de golf}$$

$$\dot{z} \cdot dt = \frac{dz}{dt} \cdot dt = dz \quad : \text{de afgelegde weg in dt seconden}$$



Omdat:

$$\dot{z} = z_a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

is het linkerlid gelijk aan:

$$\frac{1}{2} \cdot N_{ZZ} \cdot z_a^2 \cdot \omega^2$$

Verder geldt:

$$c = \frac{g}{\omega}$$

dus:

$$\frac{1}{2} \cdot N_{ZZ} \cdot z_a^2 \cdot \omega^2 = \frac{\rho \cdot g^2 \cdot \zeta_a^2 \cdot L}{2 \cdot \omega}$$

Hieruit volgt:

$$N_{ZZ} = \frac{\rho \cdot g^2 \cdot \bar{A}_{ZZ}^2}{\omega^3}$$

waarin:

$$N_{ZZ} = N_{ZZ}/L = \text{de 2-dimensionale dempingscoëfficiënt}$$

$$\bar{A}_{ZZ} = \zeta_a/z_a = \text{de zogenaamde amplitude verhouding tussen de gegenereerde golf en de dombeweging}$$

Het is gemakkelijk in te zien dat alléén de snelheidsafhankelijke term  $N_{ZZ} \cdot \dot{z}$  energie dissipeert.

Immers:

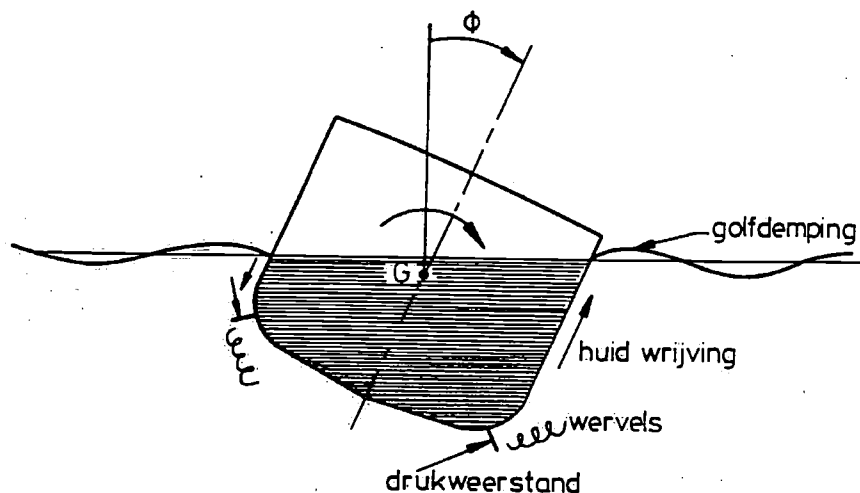
$$\frac{1}{T} \int_0^T (\rho \cdot \nabla + m_{ZZ}) \ddot{z} \cdot \dot{z} \cdot dt = \frac{-z_a^2 \cdot (\rho \cdot \nabla + m_{ZZ}) \cdot \omega^3}{T} \int_0^T \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T N_{ZZ} \cdot \dot{z} \cdot \dot{z} \cdot dt = \frac{+z_a^2 \cdot N_{ZZ} \cdot \omega^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega \cdot t) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot N_{ZZ} \cdot \omega^2 \cdot z_a^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho \cdot g \cdot A_w \cdot z \cdot \dot{z} \cdot dt = \frac{+z_a^2 \cdot \rho \cdot g \cdot A_w \cdot \omega}{T} \int_0^T \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot dt = 0$$

De invloed van de viskositeit op de demping wordt het duidelijkst geïllustreerd aan de slingerbeweging  $\varphi$ .

De viskeuze demping is te splitsen in demping door huidwrijving en demping die het gevolg is van loslatingsverschijnselen, waardoor wervels en drukweerstand optreden, zie de volgende figuur.

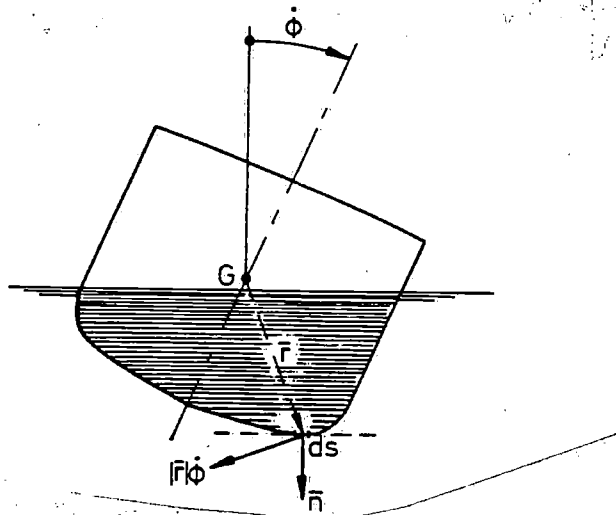


Figuur 3-3-1-B. Componenten van de demping.

De wrijving is ongeveer evenredig met het kwadraat van de tangentiële snelheid van het water ten opzichte van de scheepshuid:

$$V_{\tau} = |\bar{r}| \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\bar{r}, \bar{n})$$

Op een oppervlakte element  $ds$  werkt dus een wrijvingskracht die evenredig is met  $\dot{\phi} |\dot{\phi}|$ , zie de volgende figuur.



Figuur 3-3-1-C. Demping door wrijving.

Het totale niet lineaire dempingsmoment kan benaderd worden door:

$$N_{\phi\phi}^{(2)} \cdot \dot{\phi} |\dot{\phi}|$$

De absoluut strepen zijn nodig omdat de dempingskracht altijd tegengesteld gericht is aan de snelheid, die bij een oscillerende beweging steeds van teken wisselt.

Men kan de niet-lineaire demping lineariseren door als voorwaarde te stellen dat een equivalente lineaire dempingsterm  $N_e$  evenveel energie moet dissiperen als de niet lineaire term, dus:

$$\int_0^T N_e \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot dt = \int_0^T N_{\varphi\varphi}^{(2)} \cdot \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| \cdot \dot{\varphi} \cdot dt$$

Met:

$$\varphi = \varphi_a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\dot{\varphi} = \varphi_a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\cos^3(\omega \cdot t) = 3/4 \cdot \cos(\omega \cdot t) + 1/4 \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t)$$

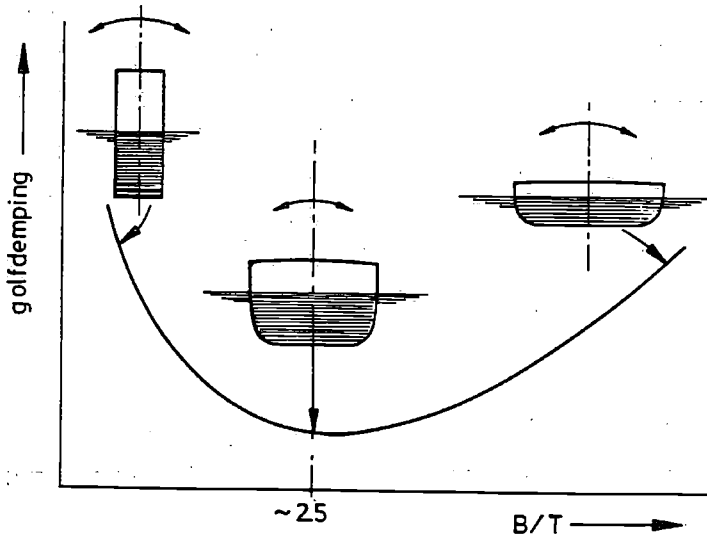
vinden we:

$$N_e = \frac{8}{3\pi} \cdot \varphi_a \cdot \omega \cdot N_{\varphi\varphi}^{(2)}$$

Opmerking: - De integratie kan over 1/4 periode uitgevoerd worden.  
 - Als gevolg van de niet-lineariteit is de equivalente dempingscoëfficiënt  $N_e$  afhankelijk van de slingeramplitude en de frequentie.

Bij het dompen en het stampen wordt de demping voor het grootste deel veroorzaakt door golfvorming. Het aandeel van viskeuze demping is in veel gevallen verwaarloosbaar klein als de waterdiepte voldoende groot is. Domp- en stampexperimenten met modellen op diep water zijn dan ook vrijwel niet gevoelig voor de schaal.

Bij slingeren is er wel een belangrijk viskeus dempingsaandeel, dat zich vooral manifesteert bij geringe golfdemping ( $B/T \approx 2.5$ ). De volgende figuur laat het verloop met  $B/T$  zien.



Figuur 3-3-1-D. Golfdemping bij slingeren.

Het schrikken, het verzetten en het gieren wordt gekenmerkt door het ontbreken van een "veer" term in de bewegingsvergelijkingen. Deze horizontale bewegingen bezitten dan ook geen eigen periode. De demping bij het verzetten en gieren wordt in hoofdzaak bepaald door golfvorming. Bij het schrikken is ook de invloed van de viskositeit, huidwrijving, van belang.

## 3-3-2. Experimentele bepaling.

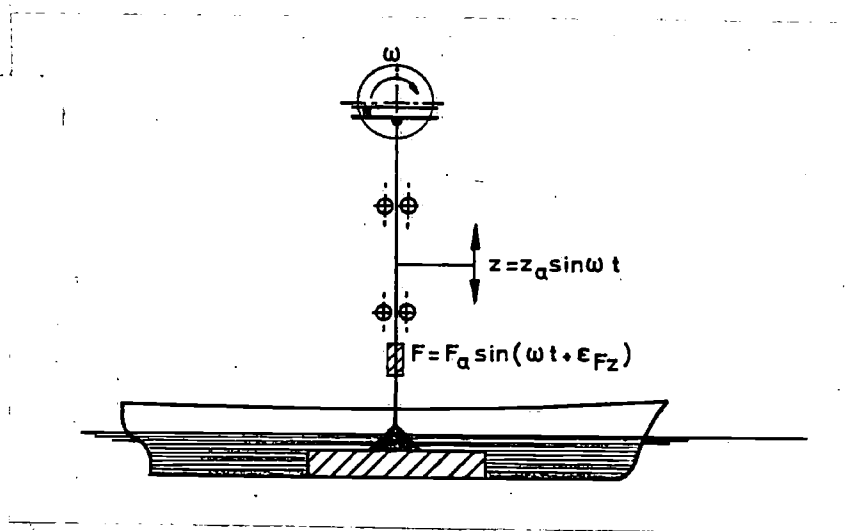
Met behulp van een eenvoudige uitslingerproef met een model kunnen de hydrodynamische massa en demping bepaald worden. Immers voor de zuivere dombeweging bijvoorbeeld geldt:

$$a = \frac{c}{\omega_0^2} - m$$

$$b = 2 \cdot \nu \cdot (m+a) \quad \text{met: } \nu = \omega_0 \cdot \kappa = \frac{1}{T_z} \ln \left[ \frac{z(t)}{z(t+T_z)} \right]$$

De bepaling van de demping en de hydrodynamische massa met behulp van uitslingerproeven heeft als nadeel dat deze grootheden bij één frequentie, bepaald worden. Bij de slingerbeweging kan de eigen frequentie nog iets gevarieerd worden ( $GM$ ,  $I_{xx}$ ) maar het frequentiegebied is dan toch nog zeer beperkt. Dit bezwaar wordt onderzocht door gebruik te maken van de zgn. oscillatietechniek, waarbij het model een gedwongen harmonische beweging opgelegd wordt. De daarvoor benodigde kracht wordt gemeten.

Voor het geval van de dombeweging is de gang van zaken als volgt.



Figuur 3-3-2-A. Schets van een meetopstelling van een gedwongen dombeweging proef.

De bewegingsvergelijking luidt in dit geval:

$$a \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + c \cdot z = F_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \epsilon_{Fz})$$

Met:

$$z = +z_a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\dot{z} = +z_a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\ddot{z} = -z_a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

vinden we:

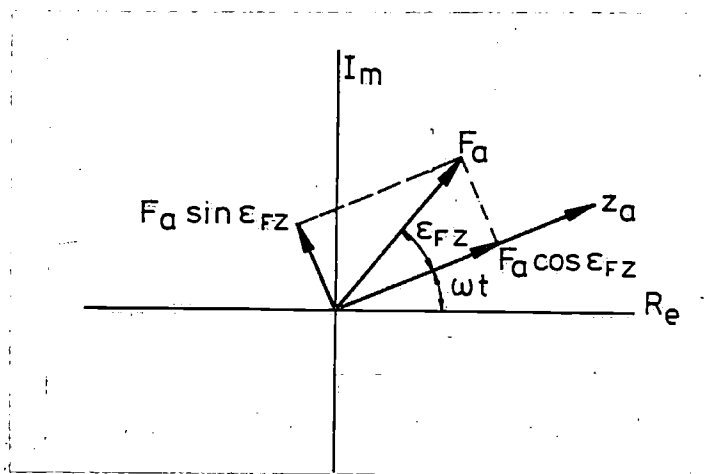
$$z_a \cdot (-a \cdot \omega^2 + c) \cdot \sin(\omega \cdot t) + z_a \cdot b \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) =$$

$$= F_a \cdot \cos(\epsilon_{FZ}) \cdot \sin(\omega \cdot t) + F_a \cdot \sin(\epsilon_{FZ}) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

waaruit volgt:

$$a = \rho \cdot \nabla + m_{ZZ} = \frac{c - \frac{F_a}{z_a} \cdot \cos(\epsilon_{FZ})}{\omega^2}$$

$$b = N_{ZZ} = \frac{\frac{F_a}{z_a} \cdot \sin(\epsilon_{FZ})}{\omega}$$



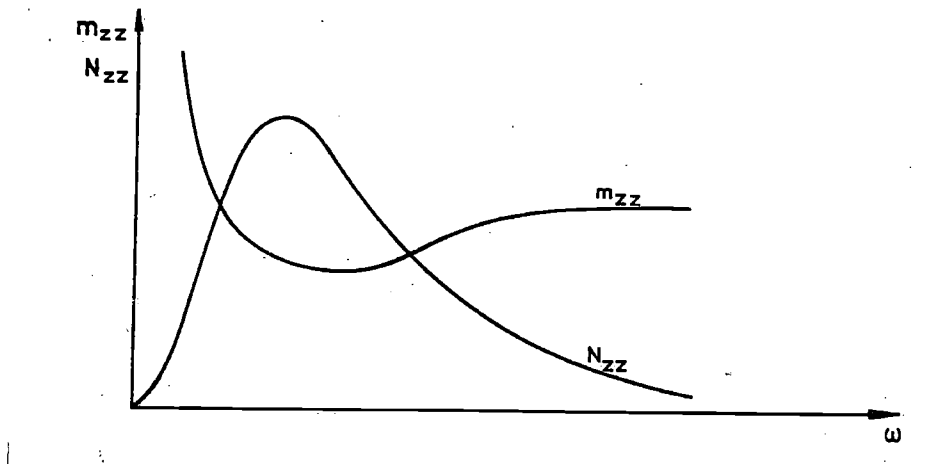
Figuur 3-3-2-B. Vektordiagram van de krachten bij een gedwongen damp-oscillatie proef.

Uit experimenten met scheepsmodellen en andere drijvende constructies blijkt dat de kracht amplitude  $F_a$  over een vrij groot frequentie gebied lineair met de bewegingsamplitude  $z_a$  varieert, vandaar de notatie  $F_a/z_a$ .

De frequentie afhankelijkheid is duidelijk aanwezig: dat is een gevolg van de golven die door de beweging opgewekt worden. Voor hoge en zeer lage frequenties is de golfvorming gering. De golf-demping is in dat geval klein.

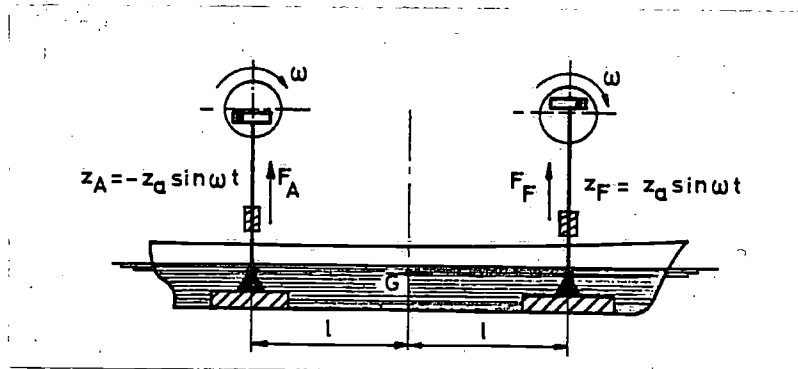
Voor hoge frequenties is de hydrodynamische massa konstant. Er is een te verwaarlozen oppervlakte verstoring, bijvoorbeeld scheeps-trillingen.

Voor lage frequenties neemt de hydrodynamische massa toe, na een minimum gepasseerd te zijn, zoals de volgende figuur laat zien.



Figuur 3-3-2-C. Hydrodynamische massa en dempingscoëfficiënt voor het dompen van een schip.

Voor de stampbeweging kan met een soortgelijke proef de demping en de massa bepaald worden.



Figuur 3-3-2-D. Meetopstelling van een gedwongen stamp-oscillatie proef.

De bewegingsvergelijking voor het stampen luidt:

$$a \cdot \ddot{\theta} + b \cdot \dot{\theta} + c \cdot \theta = M_{\theta a} \cdot \sin(\omega \cdot t + \epsilon_{M\theta})$$

met:

$$\theta = \frac{z_F - z_A}{2l} = \frac{z_a}{l} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \theta_a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$M_{\theta} = F_F \cdot l - F_A \cdot l = l \cdot [F_{Fa} \cdot \sin(\omega \cdot t + \epsilon_{F_F\theta}) - F_{Fa} \cdot \sin(\omega \cdot t + \epsilon_{F_A\theta})]$$

of:

$$M_{\theta} = M_{\theta a} \cdot \sin(\omega \cdot t + \epsilon_{M\theta})$$

Op dezelfde wijze als voor het dompen volgt nu:

$$a = I_{yy} + m_{\theta\theta} = \frac{c - \frac{M_{\theta a}}{\theta a} \cdot \cos(\epsilon_{M\theta})}{\omega^2}$$

$$b = N_{\theta\theta} = \frac{\frac{M_{\theta a}}{\theta a} \cdot \sin(\epsilon_{M\theta})}{\omega}$$

De gedaante van  $m_{\theta\theta}$  en  $N_{\theta\theta}$  als functie van de frequentie is ongeveer dezelfde als die voor de dompbeweging. De dimensieloze dempingsfactor voor dompen en voor stampen is maximaal ongeveer gelijk aan  $\kappa = 0.15$ .

Het slingeren kan op dezelfde manier behandeld worden. Ook kan gebruik gemaakt worden van een interne oscillator, een gyroscopische oscillator ontwikkeld door het Laboratorium voor Scheepshydronechanica.

De dempingscoëfficiënt voor het slingeren is niet alleen afhankelijk van de frequentie van de slingerbeweging, maar hangt ook sterk af van de voorwaartse snelheid van het schip (invloed kimkielen, roer e.d.). De maximale dempingsfactor is ruwweg een faktor drie kleiner dan die bij het dompen en stampen.

Opmerking: Een zuivere slingerbeweging kan met een interne oscillator niet opgewekt worden door de koppeling met andere bewegingskomponenten.

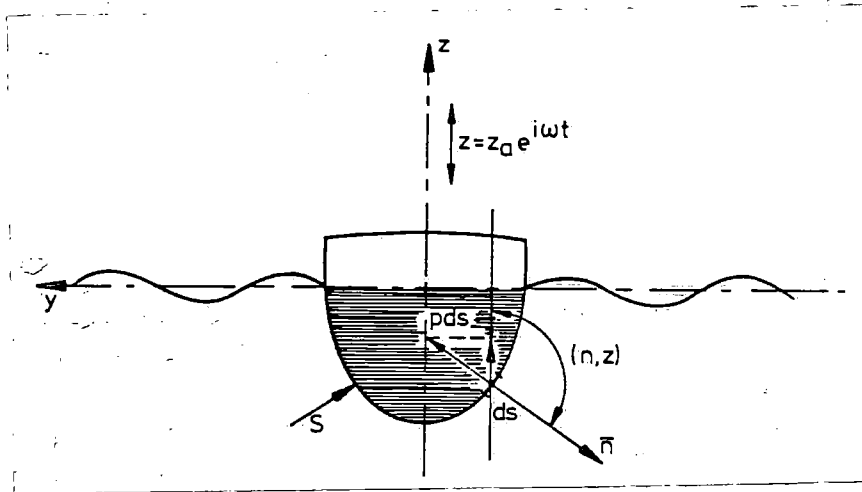
## 3-3-3.. Theoretische bepaling.

Met behulp van de potentiaal theorie kan men voor een ideale vloeistof (homogeen, wrijvingsloos, onsamendrukbaar) de hydrodynamische massa en de demping van een oscillerende drijvende cylinder berekenen.

Beschouw een cylinder die een gedwongen verticale harmonische beweging:

$$z = z_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

loodrecht op de as uitvoert, zie de volgende figuur.



Figuur 3-3-3-A. Vertikaal oscillerende drijvende cylinder.

De potentiaal voor dit geval kan de volgende vorm hebben:

$$\begin{aligned} \Phi(y, z, t) &= \dot{z}(t) \cdot \varphi(y, z) \\ &= i \cdot \omega \cdot z_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \varphi(y, z) \end{aligned}$$

De resulterende verticale kracht op de cylinder (per eenheid van lengte) is:

$$F_H' = - \int_S p \cdot \cos(n, z) \cdot ds$$

waarbij  $\bar{n}$  in de richting van de vloeistof positief gerekend wordt.

Nu is:

$$p = - \rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

als het hydrostatische deel ( $-\rho \cdot g \cdot z$ ) buiten beschouwing gelaten wordt.

Dus:

$$F_H' = \rho \cdot \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \cos(n, z) \cdot ds$$



Uit het voorgaande volgt:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(y, z, t) &= \ddot{z}(t) \cdot \varphi(y, z) \\ &= -\omega^2 \cdot z_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \varphi(y, z)\end{aligned}$$

zodat:

$$F_H' = -\rho \cdot \omega^2 \cdot z_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \int_S \varphi(y, z) \cdot \cos(n, z) \cdot ds$$

Ook kan men stellen:

$$\begin{aligned}F_H' &= -m_{zz}' \cdot \ddot{z} - N_{zz}' \cdot \dot{z} \\ &= (m_{zz}' \cdot \omega^2 - i \cdot N_{zz}' \cdot \omega) \cdot z_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}\end{aligned}$$

zodat:

$$\rho \cdot \int_S \varphi(y, z) \cdot \cos(n, z) \cdot ds = -m_{zz}' + \frac{i}{\omega} \cdot N_{zz}'$$

Het reële deel van de integraal is blijkbaar de hydrodynamische massa (met -teken) en het imaginaire deel is de dempingscoëfficiënt, gedeeld door de frequentie van de oscillerende beweging.

De berekening van  $\Phi$  steunt op de potentiaal theorie. De snelheidspotentiaal  $\Phi$  moet aan de volgende vier randvoorwaarden voldoen:

1. De vergelijking van Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Met  $\Phi = z \cdot \varphi(y, z)$  wordt dat:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

2. De randvoorwaarde aan het vrije vloeistofoppervlak:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{voor } z = 0$$

Met  $\Phi = z \cdot \varphi$  en  $\omega^2 = k \cdot g$  wordt dat:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - k \cdot \varphi = 0 \quad \text{voor } z = 0$$

3. De randvoorwaarde op de bodem:

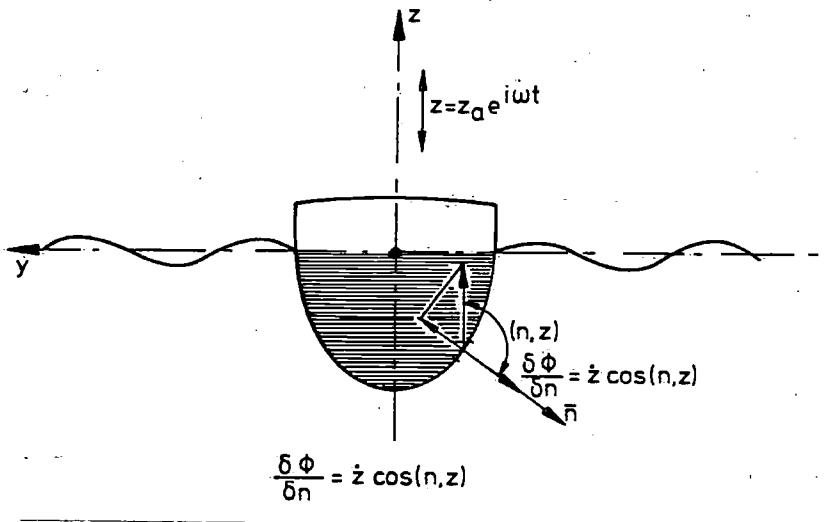
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{voor } z = -h$$

(voor grote waterdiepte:  $h = \infty$ )

4. De randvoorwaarde op het oppervlak van de cylinder:  
de normaal component van de snelheid van de cylinder als  
gevolg van de beweging moet gelijk zijn aan de normaal-  
component van de vloeistofsnelheid, dus:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{z} \cdot \cos(n, z) = \dot{z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

$$\text{Blijkbaar is: } \cos(n, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$



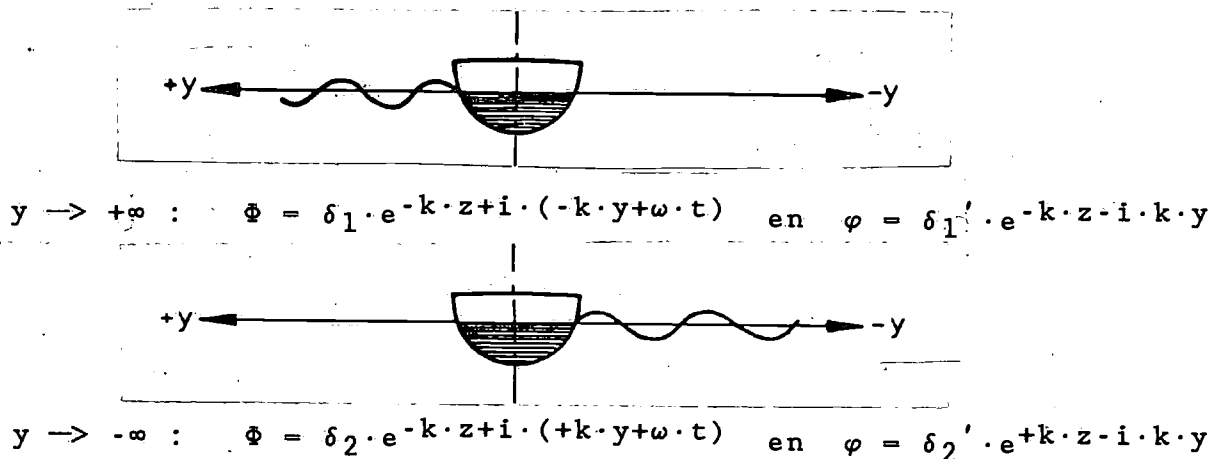
Figuur 3-3-3-B. Randvoorwaarden oscillerende cylinder.

Door de oscillerende cylinder wordt een golfbeweging veroorzaakt bestaande uit:

- een staand golfpatroon waarvan de amplituden sterk afnemen met de afstand tot de cylinder (multipolen)
- een lopend golfsysteem, dat energie dissipeert (bron/doublet).

Het eerste deel houdt verband met de hydrodynamische massa, het tweede deel houdt verband met de demping.

Voor het van de cylinder aflopende golfsysteem gelden de voorwaarden die in de volgende figuur zijn samengevat.



Figuur 3-3-3-C. Voorwaarden aflopende golfsystemen.

Voor dombewegingen moet de potentiaal symmetrisch zijn.  
Dus :

$$\varphi(+y, z) = \varphi(-y, z)$$

Voor een cirkelvormige doorsnede vond Ursell een analytische oplossing:

F Ursell.

On the Heaving Motion of a Circular Cylinder on the Surface of a Fluid.

Quart. Journal of Mechanics and Applied Math. 2, 1949,  
page 218 - 231.

De potentiaal  $\Phi$  is samengesteld uit een zgn. bronpotentiaal en een lineaire combinatie van multipool-potentiaalen, die allen voldoen aan de vergelijking van Laplace en de randvoorwaarden op het vrije oppervlak:

$$\Phi = C \cdot \text{Re} \left[ (\varphi_{\text{bron}} + \sum_{m=1}^{\infty} [\varphi_c \cdot \varphi_{2m}]) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \right]$$

of, in reële vorm:

$$\Phi = C \cdot \left[ (\varphi_c + \sum_{m=1}^{\infty} [p_{2m} \cdot \varphi_{2m}]) \cdot \cos(\omega \cdot t) \right. \\ \left. + (\varphi_s + \sum_{m=1}^{\infty} [q_{2m} \cdot \varphi_{2m}]) \cdot \sin(\omega \cdot t) \right]$$

met:

$$\varphi_c = \pi \cdot e^{-k \cdot r \cdot \cos \theta} \cdot \cos(k \cdot r \cdot \sin \theta)$$

$$\varphi_s = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta \cdot r \cdot \sin \theta}}{k^2 + \beta^2} \cdot [\beta \cdot \cos(\beta \cdot r \cdot \cos \theta) - k \cdot \sin(\beta \cdot r \cdot \cos \theta)] \cdot d\beta + \\ + \pi \cdot e^{-k \cdot r \cdot \cos \theta} \cdot \sin(k \cdot r \cdot \sin \theta)$$

en:

$$\varphi_{2m} = a^{2m} \cdot \left[ \frac{\cos(2 \cdot m \cdot \theta)}{r^{2m}} + \frac{k}{2m - 1} \cdot \frac{\cos[(2m - 1) \cdot \theta]}{r^{2m-1}} \right]$$

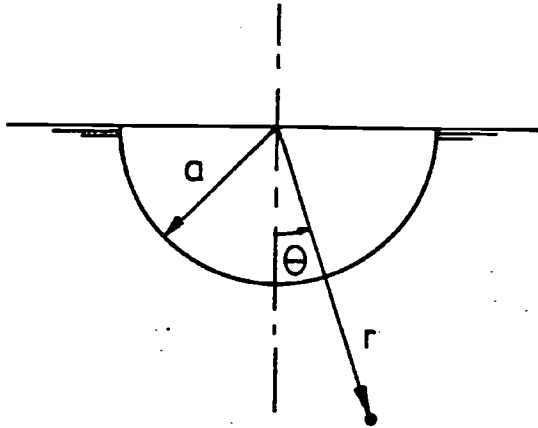
$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Hierin zijn  $r$  en  $\theta$  poolcoördinaten, waarvoor geldt:

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$z = r \cdot \cos \theta$$

$$a = \text{de straal van de cylinder}$$



Figuur 3-3-3-D. Definitie poolcoördinaten.

De coëfficiënten  $p_{2m}$  en  $q_{2m}$  van de multipool-potentialen worden zodanig bepaald dat aan de randvoorwaarde op het cylinderoppervlak wordt voldaan.

De methode van Ursell is uitgebreid en thans toepasbaar voor andere dan cirkelvormige doorsneden.

Daarbij wordt gebruik gemaakt van een conforme transformatie:

$$w_b = a \cdot \left[ \zeta_b + \sum_{n=0}^N [a_{2 \cdot n+1} \cdot \zeta_b^{-(2 \cdot n+1)}] \right]$$

waarin:

$w_b = y_b + j \cdot z_b$  : een punt van de beschouwde dwarsdoorsnede

$\zeta_b = \xi_b + j \cdot \eta_b$  : het overeenkomstige punt van de korresponderende cirkel in het referentievlak.

Als  $N=1$  dan volgt de zgn. "Lewis" transformatie:

$$w_b = a \cdot \left[ \zeta_b + a_1 \cdot \zeta_b^{-1} + a_3 \cdot \zeta_b^{-3} \right]$$

waarin  $a$  een schaalfactor is.

De Lewis transformatie is voor normale spantvormen van schepen vaak voldoende, maar men kan ook andere transformaties (bijv.  $N = 10$ ) toepassen om de spantvorm beter te benaderen. Vaak blijkt dat een zeer nauwkeurige benadering van de spantvorm weinig invloed heeft op de berekening van de hydrodynamische massa en demping van deze spantvorm. Door het Laboratorium voor Scheepshydronechanica is een rekenprogramma ontwikkeld waarmee de demping en de hydrodynamische massa van 2-dimensionale spantvormige dwarsdoorsneden als functie van de frequentie bepaald kunnen worden.

De berekende waarden komen zeer goed overeen met de uitkomsten van oscillatieproeven met cylinders en scheepsmodellen. Voorbeelden van berekende waarden voor de hydrodynamische massa en demping worden in het volgende hoofdstuk gegeven.

Analoge methoden worden gebruikt voor de verzet- en slingerbeweging.

In verband met de anti-symmetrie van deze bewegingen geldt dan:

$$\varphi(+y, z) = -\varphi(-y, z)$$

De randvoorwaarde op het oppervlak moet aangepast worden aan de beschouwde beweging, de bronpotentialiaal wordt vervangen door een dipool en de multipool-potentialen hebben ook een andere vorm dan in het geval van de dompbeweging.

Voor de details van deze methoden wordt verwezen naar:

B. de Jong.

Computation of the Hydrodynamic Coefficients of Oscillating Cylinders.

Report 174-A, Delft Shiphidromechanics Laboratory, 1969.

Voor de berekening van de hydrodynamische massa en demping van een scheepsvorm gebruikt met de striptheorie, dat wil zeggen de tweedimensionale waarden van de de hydrodynamische massa  $m'$  en de dempingscoëfficiënt  $N'$  worden over de lengte van het schip geïntegreerd, zonder rekening te houden met interactie effecten tussen de doorsneden.

Dan is:

$$m_{zz} = \int_{-L/2}^{+L/2} m_{zz}' \cdot dx_b$$

$$N_{zz} = \int_{-L/2}^{+L/2} N_{zz}' \cdot dx_b$$

Experimenten hebben de toepasbaarheid van deze methode voor pontons en schepen met  $L/B \geq 3$  bevestigd.

Ook voor de stampbeweging kan met voldoende nauwkeurigheid de striptheorie toegepast worden.

De verticale versnelling van een doorsnede op afstand  $x_b$  van de oorsprong is  $x_b \cdot \ddot{\theta}$ .

De daaruit resulterende lokale hydrodynamische massakracht is:

$$m_{zz}' \cdot x_b \cdot \ddot{\theta}$$

en het daarmee korresponderende moment:

$$m_{zz}' \cdot x_b^2 \cdot \ddot{\theta}$$

Voor de hydrodynamische massatraagheid en de demping vinden we dan:

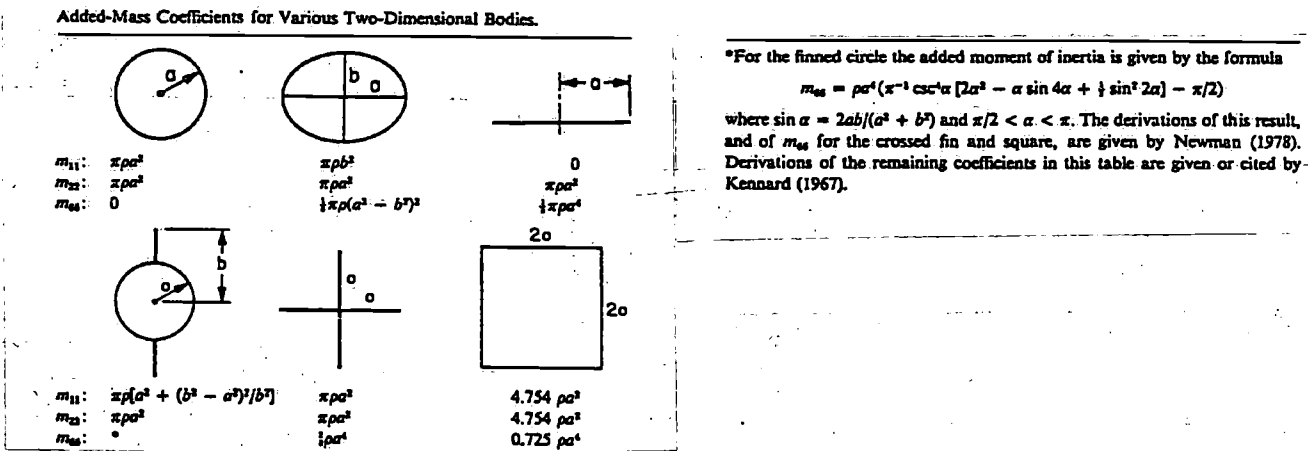
$$m_{\theta\theta} = \int_{-L/2}^{+L/2} m_{zz}' \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

$$N_{\theta\theta} = \int_{-L/2}^{+L/2} N_{zz}' \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

Analoge uitdrukkingen gelden voor de verzet- en de gierbeweging.

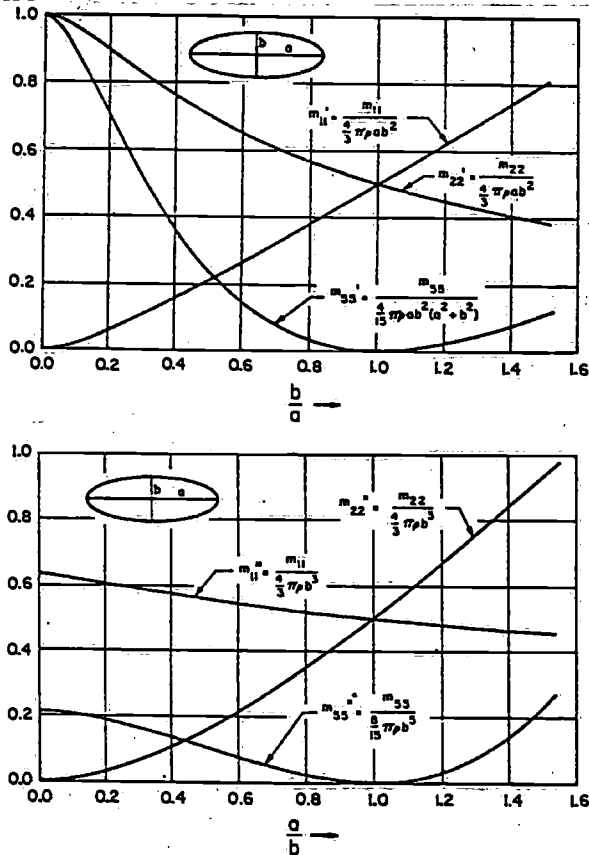
3-3-4. Enkele gegevens.

In de literatuur is zowel theoretische als experimenteel verkregen informatie te vinden over de hydrodynamische massa en demping. Onderstaande tabel geeft de hydrodynamische massa weer van verschillende ondergedompelde lichamen. Voor diep ondergedompelde lichamen is de hydrodynamische demping nul. Er ontstaan immers bij de oscillatie geen oppervlaktegolven.



Figuur 3-3-4-A. Hydrodynamische massa coëfficiënten van verschillende twee-dimensionale lichamen.

De volgende figuren geven de hydrodynamische massa weer van diep ondergedompelde omwentelingslichamen.



Added-mass coefficients for a spheroid, of length  $2a$  and maximum diameter  $2b$ . The added mass  $m_{11}$  corresponds to longitudinal acceleration,  $m_{22}$  to lateral acceleration in the equatorial plane, and  $m_{33}$  denotes the added moment of inertia, for rotation about an axis in the equatorial plane. In the upper figure, the coefficients are nondimensionalized with respect to the mass and moment of inertia of the displaced volume of the fluid, and in the lower figure with respect to the same quantities for a sphere of radius  $b$ .

Figuur 3-3-4-B. Hydrodynamische massa coëfficiënten van omwentelingslichamen.

Voor cylinders die het wateroppervlak doorsnijden en een verticale harmonische oscillatie uitvoeren zijn de hydrodynamische massa en demping berekend op de manier als hiervoor beschreven is, gebruik makend van de Lewis transformatie.

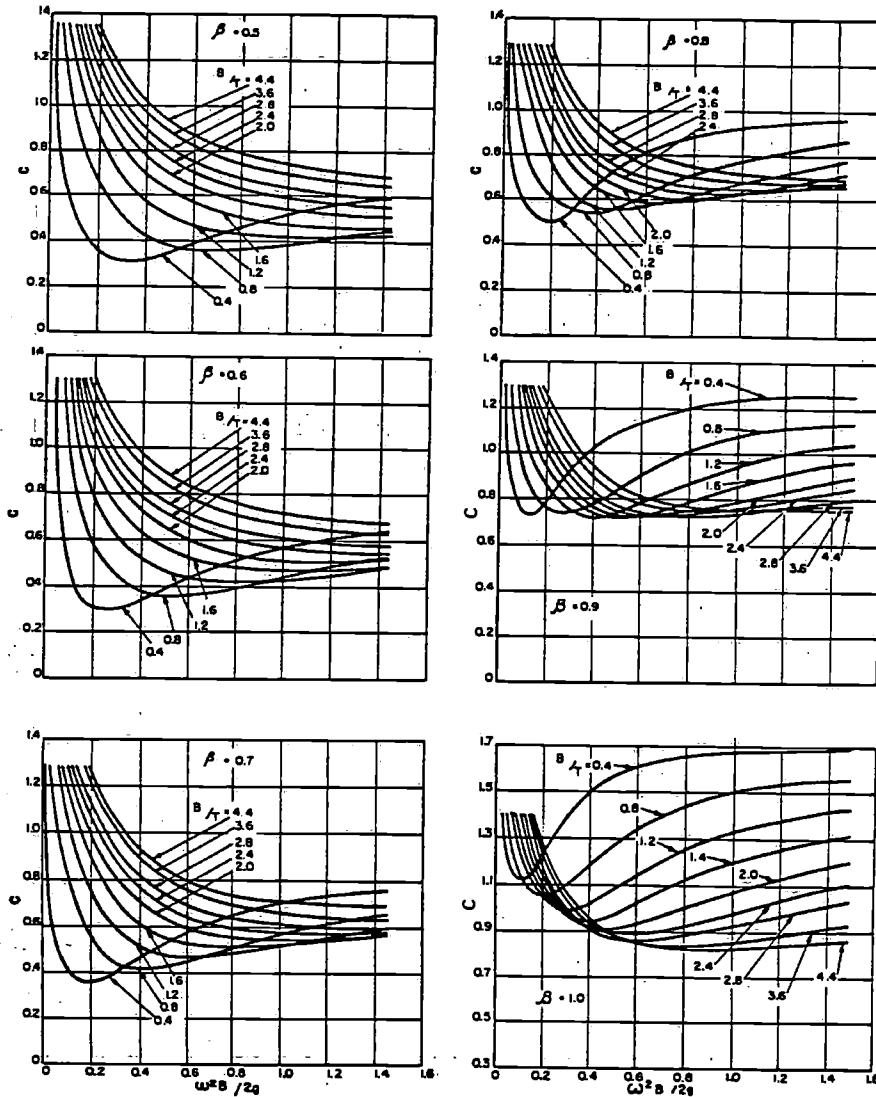
In de volgende figuur wordt de twee-dimensionale hydrodynamische massa per lengte-eenheid  $m'$ , in dimensieloze vorm:

$$C = \frac{m'}{\rho \cdot \pi \cdot B^2 / 8}$$

gegeven als functie van:

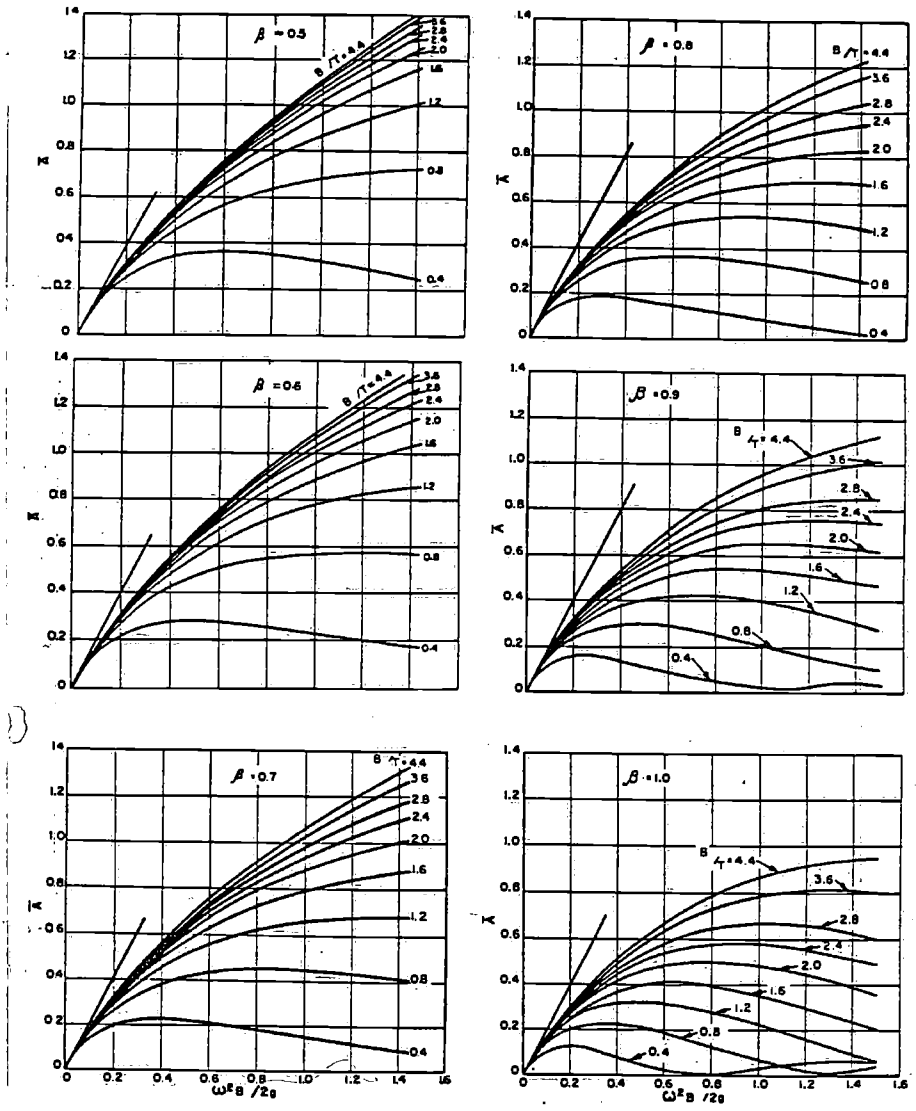
- $\omega^2 \cdot B / 2g$  : de dimensieloze frequentie
- $B/T$  : de breedte-diepgang verhouding
- $\beta = A_x / (B \cdot T)$  : de oppervlakte coëfficiënt

In de uitdrukking voor  $C$ , is de noemer de helft van de hydrodynamische massa van de cylinder met straal  $B/2$ , als die cylinder geen oppervlaktegolven veroorzaakt.



Figuur 3-3-4-C. Hydrodynamische massa coëfficiënten.

Eveneens afhankelijk van  $\omega^2 \cdot B/2g$ ,  $B/T$  en  $\beta$ , wordt hieronder de amplitudeverhouding  $A_{ZZ}$  van de dempingsgolf gegeven.



Figuur 3-3-4-D. Amplitude verhouding van de dempingsgolven.

De hydrodynamische dempingscoëfficiënt per lengte-eenheid  $N_{ZZ}$  volgt uit:

$$N_{ZZ} = \frac{\rho \cdot g^2 \cdot \bar{A}_{ZZ}^2}{\omega^3}$$

In principe is de bepaling van de coëfficiënten van drijvende offshore constructies in onregelmatige golven analoog aan de methoden voor schepen. Een kenmerkend verschil is echter de vorm, die als geheel niet als een "slender body" beschouwd kan worden. Ook zijn de toegepaste vormen van onderdelen vaak niet stroomlijn vormig. Lange cilindres worden opgedeeld in kleine moten. In de tweede plaats wordt, net als bij de strip theorie, aangenomen dat interacties tussen de diverse onderdelen verwaarloosd mogen worden, zodat de totale hydrodynamische kracht op de drijvende constructies gevonden wordt door de diverse bijdragen lineair te superponeren.



Bij het bepalen van de hydromechanische massa van kleine onderdelen kan men de oppervlakte effecten verwaarlozen, zodat de hydromechanische massa onafhankelijk van de frequentie gesteld kan worden. Met dergelijke aannamen zijn de bewegingen van semi-submersibles, met uitzondering van het gebied in de omgeving van resonantie, te bepalen. De demping van de verticale bewegingen van semi-submersibles is namelijk relatief gering, zodat de opslingering bij resonantie groot is. De potentiaal demping, veroorzaakt door oppervlakte golven is klein en is gerelateerd aan de golfkrachten, zie Hooft 1972.

De viskeuze demping kan bepaald worden door gebruik te maken van empirische weerstandcoëfficiënten voor cilindrs, bollen e.d., zoals die bijvoorbeeld door Hoerner 1965 zijn samengevat.

In dit verband wordt ook gewezen op de formule van Morison 1953:

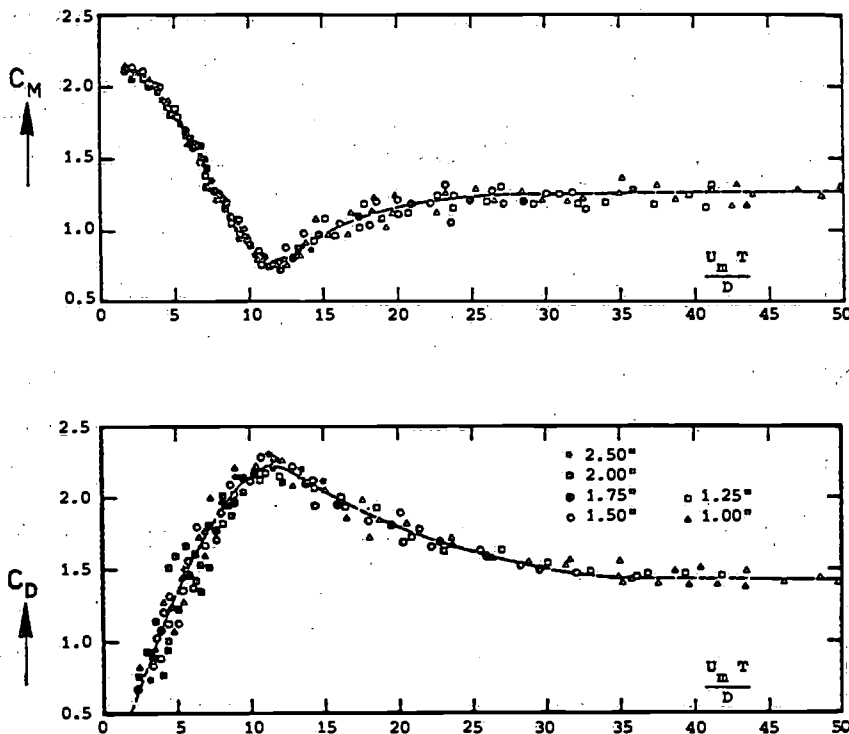
$$dF = \left( \frac{1}{2} \rho C_D U |U| + \frac{1}{2} \pi D^2 \rho C_M \frac{dU}{dt} \right) dL$$

waarin:

- $C_D$  - experimentele weerstandcoëfficiënt
- $C_M$  - experimentele hydrodynamische massacoëfficiënt
- $D$  - diameter cilinder
- $F$  - resulterende kracht
- $L$  - lengte cilinder
- $U$  - relatieve watersnelheid

Men past die formule ook toe voor oscillerende watersnelheden, waarbij  $C_D$  en  $C_M$  afhankelijk te stellen zijn van een periodeparameter  $U_m T/D$ , waarin  $T$  de oscillatieperiode voorstelt.

In de vgl. herkent men het snelheids- en versnellings afhankelijke deel van de hydrodynamische kracht. De eerste term van de formule is niet lineair. Door linearisatie kan deze term in een vorm gebracht worden die in het voorgaande is toegepast.



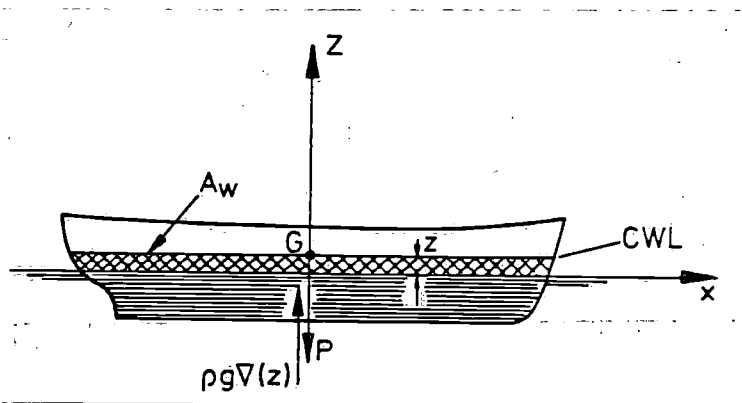
Figuur 3-3-4-E.  $C_M$  en  $C_D$  als functie van de periodeparameter.

## 3-4. Schatting van eigen frequenties.

In dit hoofdstuk wordt aangegeven hoe, met name voor langwerpige pontons en schepen, de eigen frequenties voor de domp-, stamp- en slingerbewegingen geschat kunnen worden.

## Dampen.

Veronderstel dat alle andere bewegingscomponenten uitgesloten zijn als het schip een verticale oscillerende beweging uitvoert, zoals in de volgende figuur is weergegeven.



Figuur 3-4-A. Zuiver dompen van een schip in vlak water.

Dan geldt:

$$\frac{P}{g} \ddot{z} = Z$$

waarin:

$P$  = neerwaartse massakracht (gewicht) van het schip

$Z$  = de som van alle verticale krachten die op het schip werken

$$Z = -P + \rho \cdot g \cdot V(z) - N_{zz} \cdot z - m_{zz} \cdot \ddot{z}$$

Het volume van het verplaatste water  $V(z)$  is variabel:

$$V(z) = V - A_w \cdot z$$

waarin  $V$  het volume van het verplaatste water in rust voorstelt.

Blijkbaar geldt ook:

$$P = \rho g V$$

Nu zijn  $m_{zz}$  en  $N_{zz}$  coëfficiënten van respectievelijk de hydrodynamische massa kracht en van de dempingskracht. Deze coëfficiënten zijn in principe afhankelijk van de frequentie van de beweging als gevolg van oppervlakte effecten (golfvorming).

Uit het voorgaande volgt nu:

$$\rho \cdot \nabla \cdot \ddot{z} = -P + \rho \cdot \nabla \cdot g - \rho \cdot g \cdot A_w \cdot z - N_{zz} \cdot \dot{z} - m_{zz} \cdot \ddot{z}$$

en:

$$(\rho \cdot \nabla + m_{zz}) \cdot \ddot{z} + N_{zz} \cdot \dot{z} + \rho \cdot g \cdot A_w \cdot z = 0$$

Hierbij zijn kleine bewegingsamplituden verondersteld, zodat  $A_w(z)$  konstant aangenomen mag worden. Dit is één van de linearisaties, die bij de behandeling van dit probleem toegepast worden.

De ongedempte eigen frequentie en periode volgen uit:

$$\omega_0 \cdot z = \left[ \frac{\rho \cdot g \cdot A_w}{\rho \cdot \nabla + m_{zz}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad T_{0z} = 2\pi \cdot \left[ \frac{\rho \cdot \nabla + m_{zz}}{\rho \cdot g \cdot A_w} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ook kan geschreven worden:

$$T_{0z} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{m_{zz}}{\rho \cdot \nabla} \right) \cdot T \cdot C_{VP} \right]^{\frac{1}{2}}$$

waarin:

$$C_{VP} = \frac{\nabla}{A_w \cdot T} = \text{de verticale prismatische coëfficiënt.}$$

Hieruit blijkt dat de domperiode toeneemt met de diepgang en de verticale prismatische coëfficiënt. Bij konventionele schepen is  $C_{VP} < 1$ , bij semi-submersibles is  $C_{VP} > 1$ .

Voor normale schepen geldt benaderend:

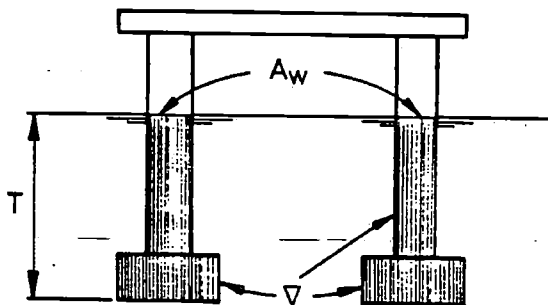
$$T_{0z} = C_1 \cdot \sqrt{T}$$

waarin:

$T$  = diepgang in meters

$C_1$  = 2.4 - 2.7,  
afhankelijk van de blokcoëfficiënt,  $\nabla / (L \cdot B \cdot T) = 0.6 - 0.8$ ,  
en van andere vorm coëfficiënten.

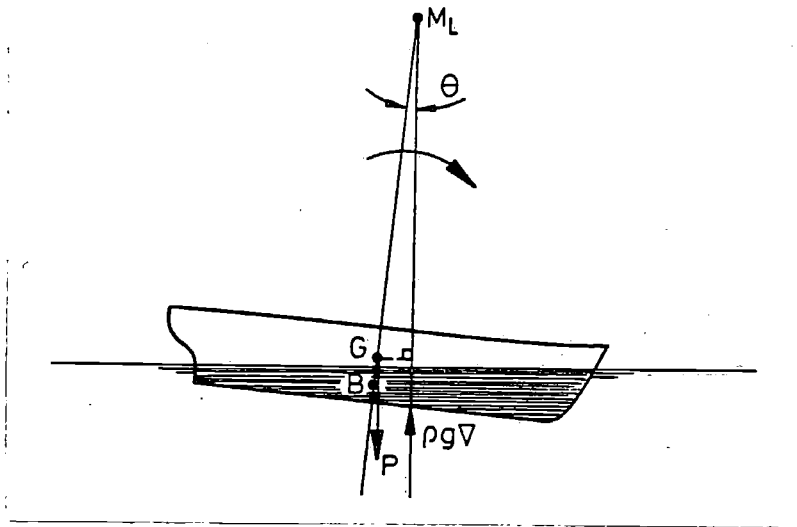
Bij semi-submersibles wordt door vormgeving van het onder water gedeelte beoogd om de eigen periode groot te maken teneinde resonantie verschijnselen in zeeegang te vermijden.



Figuur 3-4-B. Semi-submersible,  $C_{VP} = \frac{\nabla}{A_w \cdot T} > 1$ .

## Stampen.

Een analoge afleiding geldt voor de ongekoppelde stampbeweging.



Figuur 3-4-C. Zuiver stampen van een schip in vlak water.

Stampen is per definitie een oscillerende rotatie om een dwars-scheepse as door G.

Er geldt:

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} = M$$

waarin M de som van de werkende momenten op het schip voorstelt.

We vinden:

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} = -\rho \cdot g \cdot V \cdot GM_L \cdot \theta - N_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta} - m_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta}$$

of:

$$(I_{yy} + m_{\theta\theta}) \cdot \ddot{\theta} + N_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot g \cdot V \cdot GM_L \cdot \theta = 0$$

De eigen frequentie en de eigen periode volgen dan uit:

$$\omega_{0\theta} = \left[ \frac{\rho \cdot g \cdot V \cdot GM_L}{I_{yy} + m_{\theta\theta}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad T_{0\theta} = 2\pi \cdot \left[ \frac{I_{yy} + m_{\theta\theta}}{\rho \cdot g \cdot V \cdot GM_L} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Voor een ruwe schatting van de eigen stampperiode voor normale schepen, kan gesteld worden:

$$I_{yy} + m_{\theta\theta} = (0.32 \cdot L)^2 \cdot \rho \cdot V$$

waarbij verondersteld wordt dat  $k_{yy} = 0.25 \cdot L$

Het hydrodynamisch massa traagheidsmoment is daarbij ongeveer 2/3 van het eigen massatraagheidsmoment van het schip.

Als verder verondersteld wordt dat  $GM_L \approx L$ , dan geldt voor normale schepen:

$$T_{0\theta} \approx 0.64 \cdot \sqrt{L}$$

met L in meters.

Slingeren.

Naar analogie met het stampen geldt:

$$(k_{xx}^2 \cdot \rho \cdot \nabla + m_{\varphi\varphi}) \cdot \ddot{\varphi} + N_{\varphi\varphi} \cdot \dot{\varphi} + \rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM \cdot \varphi = 0$$

waaruit:

$$\omega_{0\varphi} = \left[ \frac{\rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM}{k_{xx}^2 \cdot \rho \cdot \nabla + m_{\varphi\varphi}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad T_{0\varphi} = 2\pi \cdot \left[ \frac{k_{xx}^2 \cdot \rho \cdot \nabla + m_{\varphi\varphi}}{\rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Het is niet mogelijk om aan de hand van de gewichtsverdeling van het schip de dwarstraagheidsstraal  $k_{xx}$  te bepalen. Men werkt daarom met de schijnbare dwarstraagheidsstraal  $k_{\varphi\varphi}$ , die als volgt gedefinieerd is:

$$k_{\varphi\varphi}^2 \cdot \rho \cdot \nabla = k_{xx}^2 \cdot \rho \cdot \nabla + m_{\varphi\varphi}$$

Met  $g$  in  $\text{m/s}^2$  en  $GM$  in meters kan  $T_{0\varphi}$  hiermee als volgt geschreven worden:-

$$T_{0\varphi} = 2\pi \cdot \left[ \frac{k_{\varphi\varphi}^2 \cdot \rho \cdot \nabla}{\rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM} \right] \approx \frac{2 \cdot k_{\varphi\varphi}}{[GM]^{\frac{1}{2}}}$$

Voor "orde grootte" benaderingen van  $k_{\varphi\varphi}$  kan gesteld worden:

$$\text{schepen} \dots : k_{\varphi\varphi}/B \approx 0.35 - 0.45$$

$$\text{pontons} \dots : k_{\varphi\varphi}/B \approx 0.45 - 0.55$$

$$\text{zeiljachten} : k_{\varphi\varphi}/B \approx 0.55 - 0.65$$

Voor schepen wordt  $T_{0\varphi}$  hiermee ongeveer:

$$T_{0\varphi} \approx \frac{0.8 \cdot B}{[GM]^{\frac{1}{2}}}$$

met  $B$  en  $GM$  in meters.

#### 4. Bewegingen in enkelvoudige golven.

In het voorgaande zijn de bewegingen beschouwd waarbij het lichaam uit zijn evenwichtsstand gebracht werd en daarna vrij kon bewegen zonder dat er een exciterende kracht of moment aanwezig was.

In dit hoofdstuk werken er exciterende krachten of momenten op de konstruktie, die veroorzaakt worden door enkelvoudige (harmonische) golven.

Evenals in het voorgaande worden de ongekoppelde en de gekoppelde bewegingen afzonderlijk beschouwd.

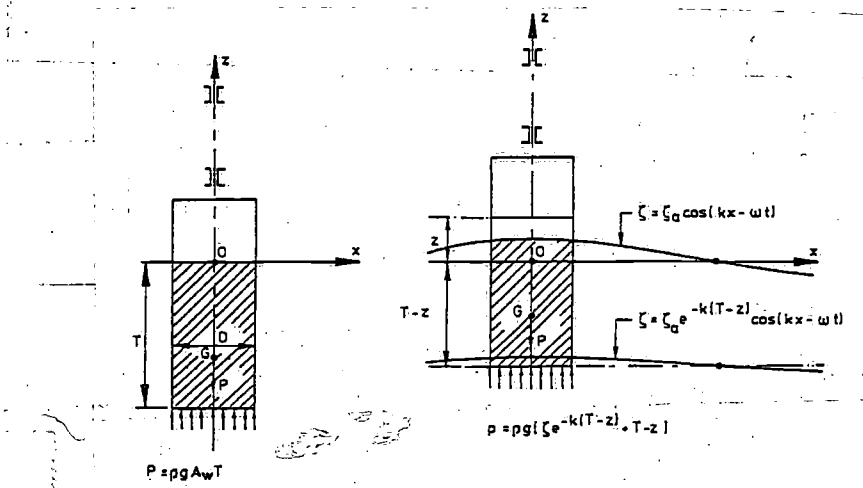
##### 4-1. Ongekoppelde bewegingen.

Deze bewegingen worden hier toegelicht aan de hand van twee gevallen: een dompende ton en een slingerend ponton.

##### Dompênde ton.

Als inleiding tot de behandeling van de bewegingen van schepen en andere maritieme konstrukties in zeevang wordt hier de vertikale bewegingen van een cilindervormige ton in enkelvoudige golven behandeld.

De ton kan alleen vertikale bewegingen uitvoeren, bijvoorbeeld door een wrijvingsloze vertikale geleiding aan te nemen zoals in de volgende figuur is weergegeven.



Figuur 4-1-A. Vertikale beweging van een cilindrische ton in een enkelvoudige golf.

Op elk moment geldt:

$$m \cdot \ddot{z} = Z$$

waarin:

$$m = \rho \cdot A_w \cdot T = \text{de massa van de cilinder}$$

$$Z = \text{de som van de vertikale krachten op de cilinder}$$

De kracht  $Z$  bestaat uit het gewicht van de cylinder  $P$  en de som van de hydromechanische krachten  $F$ , die ontstaan doordat de cylinder een relatieve verticale beweging ten opzichte van het omringende water uitvoert.

We stellen:

$$Z = F_1 + F_2 + F_3 - P$$

waarin:

$$P = \rho \cdot g \cdot A_w \cdot T$$

De kracht  $F_1$  ontstaat door de golfdruk op de onderkant van de cylinder.

De druk daar ter plaatse ( $x=0$ ) is:

$$p = \rho \cdot g \cdot (\zeta \cdot e^{-k \cdot (T-z)} + T - z)$$

Als:  $z \ll T$  dan geldt benaderend:

$$p = \rho \cdot g \cdot (\zeta \cdot e^{-k \cdot T} + T - z)$$

of:

$$p = \rho \cdot g \cdot (\zeta^* + T - z)$$

Dus:

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot A_w \cdot (\zeta^* + T - z)$$

De krachten  $F_2$  en  $F_3$  zijn hydrodynamische krachten die respectievelijk evenredig zijn met de relatieve snelheid en de relatieve versnelling van de cylinder ten opzichte van het omringende water.

Als eerste orde benadering kan gesteld worden:

$$F_2 = -b \cdot (\dot{z} - \dot{\zeta}_T)$$

$$F_3 = -a \cdot (\ddot{z} - \ddot{\zeta}_T)$$

Hierin is  $\zeta_T$  het "golfprofiel" of het vlak van gelijke druk op een diepte  $(T - z)$ .

Met eenzelfde benadering als voor de druk  $p$  geldt:

$$\zeta_T = \zeta_a \cdot e^{-k \cdot T} \cdot \cos(\omega \cdot t) = \zeta_a^* \cdot \cos(\omega \cdot t) = \zeta^*$$

dus:

$$F_2 = -b \cdot (\dot{z} - \dot{\zeta}^*)$$

$$F_3 = -a \cdot (\ddot{z} - \ddot{\zeta}^*)$$

Hiermee vinden we:

$$m \cdot \ddot{z} = \rho \cdot g \cdot A_w \cdot (\zeta^* + T - z) - b \cdot (\dot{z} - \dot{\zeta}^*) - a \cdot (\ddot{z} - \ddot{\zeta}^*) - P$$

Met  $P = \rho \cdot g \cdot A_w \cdot T$  en  $c = \rho \cdot g \cdot A_w$

volgt:

$$(m+a) \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + c \cdot z = a \cdot \zeta^* + b \cdot \dot{\zeta}^* + c \cdot \zeta^*$$

Het linkerlid van deze vergelijking komt overeen met die in hoofdstuk 3-1-1 en geeft de verticale krachten bij een dompbeweging in vlak water.

Het rechterlid is de hydromechanische reactie als de cylinder vastgehouden wordt in enkelvoudige golven. Daarbij is de laatste term  $c \cdot \zeta^*$  op te vatten als een quasi hydrostatische kracht, de zgn. **Froude-Krylov** kracht.

De beide andere termen zijn in feite hydrodynamische correctie termen die de verstoring van de inkomende golf door de oscillerende cylinder in rekening brengen.

In principe vindt men al deze elementen bij de bepaling van de bewegingsvergelijkingen van drijvende constructies in zeevang.

Met:

$$\zeta^* = +\zeta_a^* \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\dot{\zeta}^* = -\zeta_a^* \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\ddot{\zeta}^* = -\zeta_a^* \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

schrijven we het rechterlid RL van de bewegingsvergelijking als volgt:

$$RL = \zeta_a^* \cdot e^{-k \cdot T} \cdot [(c - a \cdot \omega^2) \cdot \cos(\omega \cdot t) - b \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)]$$

of:

$$RL = F_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{F\zeta})$$

waarin:

$$F_a = \zeta_a^* \cdot e^{-k \cdot T} \cdot [(c - a \cdot \omega^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\epsilon_{F\zeta} = \tan^{-1} \left[ \frac{b \cdot \omega}{c - a \cdot \omega^2} \right]$$

De zgn. opwekkende kracht is blijkbaar lineair afhankelijk van de golfhoogte, en wordt kleiner naarmate de diepgang groter wordt ten opzichte van de golflengte:

$$k \cdot T = \frac{T}{\lambda} \cdot 2\pi$$

De bewegingsvergelijking wordt nu:

$$(m+a) \cdot \ddot{z} + b \cdot \dot{z} + c \cdot z = \bar{F}_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

met:

$$\bar{F}_a = F_a \cdot e^{i \cdot \epsilon_{F\zeta}}$$



De oplossing daarvan volgt door te stellen:

$$z = \bar{z}_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

waarin:

$$\bar{z}_a = z_a \cdot e^{i \cdot \epsilon_{zF}}$$

Dit levert:

$$\bar{z}_a = \frac{\bar{F}_a \cdot [c - (a+m) \cdot \omega^2 - i \cdot b \cdot \omega]}{[c - (a+m) \cdot \omega^2]^2 + b^2 \cdot \omega^2}$$

waaruit de amplitude  $z_a$  en de fase  $\epsilon_{zF}$  (t.o.v. de kracht  $F$ ) volgen:

$$z_a = \frac{F_a}{([c - (a+m) \cdot \omega^2]^2 + b^2 \cdot \omega^2)^{1/2}}$$

$$\epsilon_{zF} = \tan^{-1} \left[ \frac{-b \cdot \omega}{c - (m+a) \cdot \omega^2} \right]$$

In combinatie met het rechterlid RL vinden we tenslotte de amplitude en fase karakteristieken van de verticale beweging van de ton:

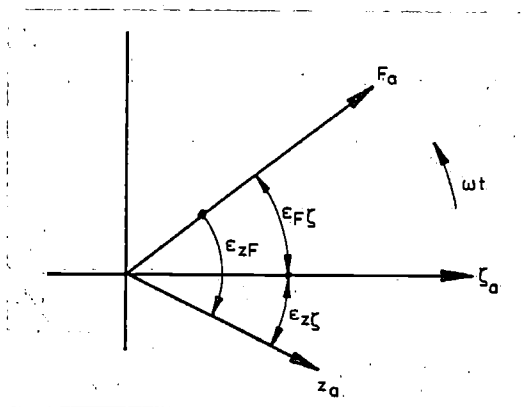
$$\frac{z_a}{\zeta_a} = e^{-k \cdot T} \cdot \left[ \frac{(c - a \cdot \omega^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2}{[c + (m+a) \cdot \omega^2]^2 + b^2 \cdot \omega^2} \right]^{1/2}$$

$$\epsilon_{z\zeta} = \epsilon_{zF} + \epsilon_{F\zeta}$$

Voor een enkelvoudige golf  $\zeta = \zeta_a \cdot \cos(\omega \cdot t)$  is dus de verticale beweging van de cylinder:

$$z = z_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{F\zeta} + \epsilon_F)$$

met een vektordiagram zoals hieronder weergegeven.



Figuur 4-1-B. Vektor diagram voor de verticale beweging van een ton in enkelvoudige golven.

waarbij geldt:

$$\epsilon_{zF} + \epsilon_{F\zeta} = \epsilon_{z\zeta} = \tan^{-1} \left[ \frac{-b \cdot \omega}{c - (m+a) \cdot \omega^2} \right] + \tan^{-1} \left[ \frac{b \cdot \omega}{c - a \cdot \omega^2} \right]$$

of:

$$\epsilon_{z\zeta} = \tan^{-1} \left[ \frac{-b \cdot m \cdot \omega^3}{(c - a \cdot \omega^2) \cdot [c - (m+a) \cdot \omega^2] + b^2 \cdot \omega^2} \right]$$

De amplitude karakteristiek  $z_a/\zeta_a$  en de fase karakteristiek  $\epsilon_{z\zeta}$ , zoals hiervoor bepaald, bepalen tezamen de zogenaamde frequentie karakteristiek van de dombeweging van de ton.

De amplitude karakteristiek van een cilindrische ton, diameter 0.197 m en diepgang 0.40 m, is als functie van de resonantiefactor  $\omega/\omega_{0z}$  in een figuur hieronder gegeven, voor een aantal waarden van de dempingsfactor  $\kappa$ . Daarbij is  $a = 0.18$  m aangenomen, welke waarde door middel van een oscillatieproef werd vastgesteld.

Daarna wordt de fase karakteristiek gegeven in vergelijking met de fase karakteristiek van een massa-veer-systeem met  $\kappa = 0.1$ .

De splitsing van de amplitude karakteristiek in de factoren

$$e^{-k \cdot T}$$

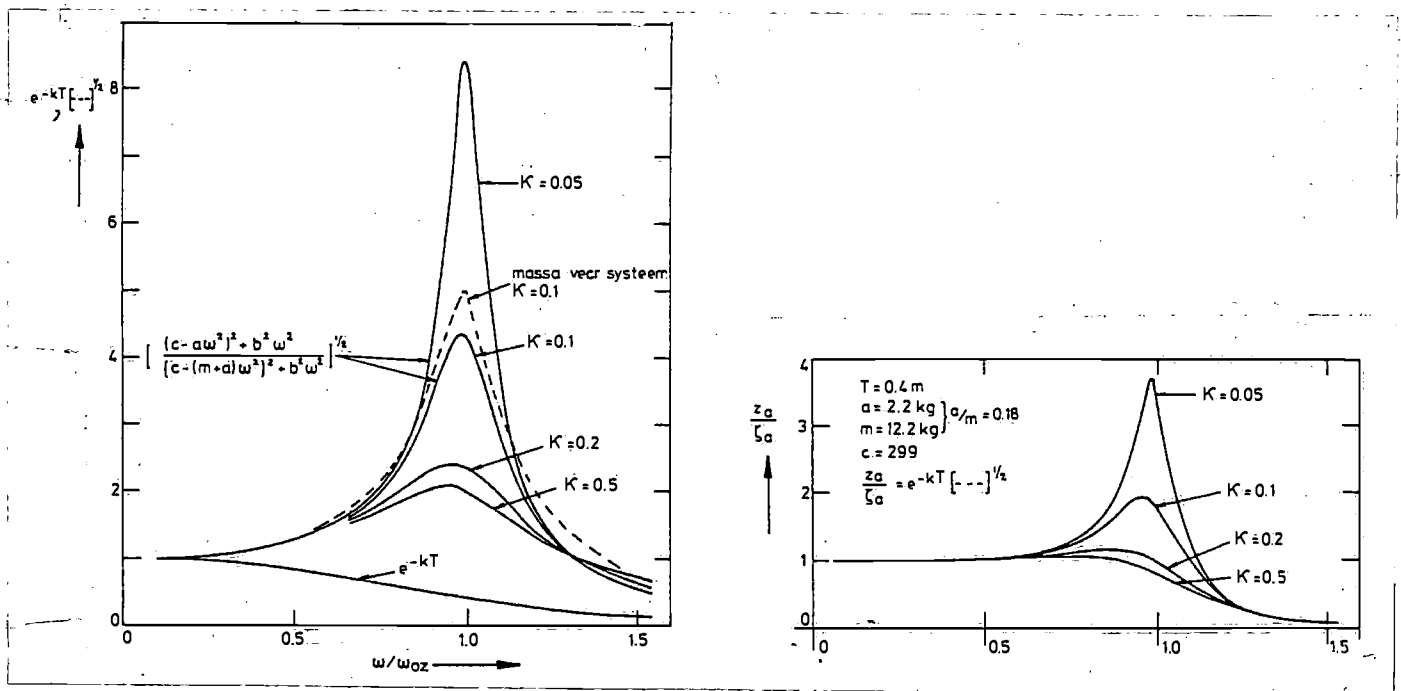
en

$$\left[ \frac{(c - a \cdot \omega^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2}{[c - (m+a) \cdot \omega^2]^2 + b^2 \cdot \omega^2} \right]$$

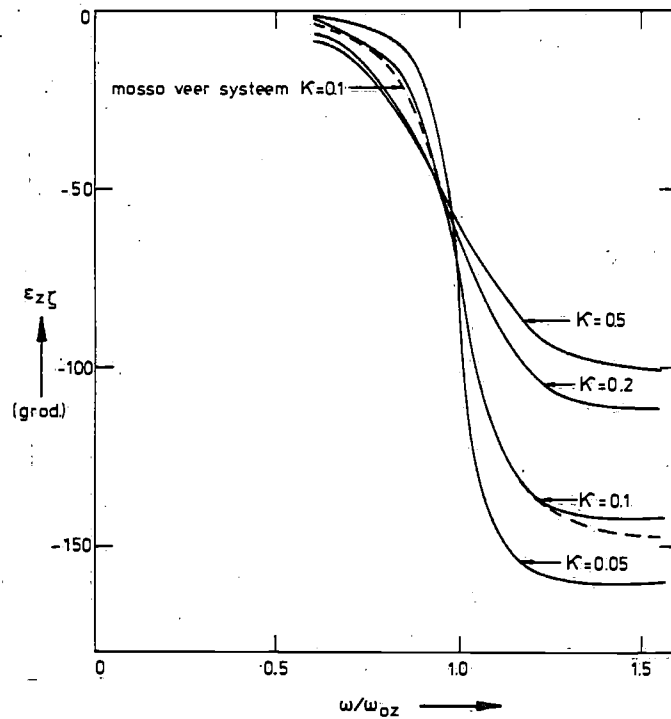
geeft aan wat de invloed is van de orbitaalbeweging van de waterdeeltjes ("Smith effect") en de dynamische vergrotingsfaktor van een massaveersysteem ( $a=0$ ) in de figuur voor  $\kappa = 0.1$ .

De overeenkomst is hier groot.

Het "Smith effect" is bij lage frequenties, waarbij de golflengte groot is t.o.v. de diepgang van de ton, te verwaarlozen.



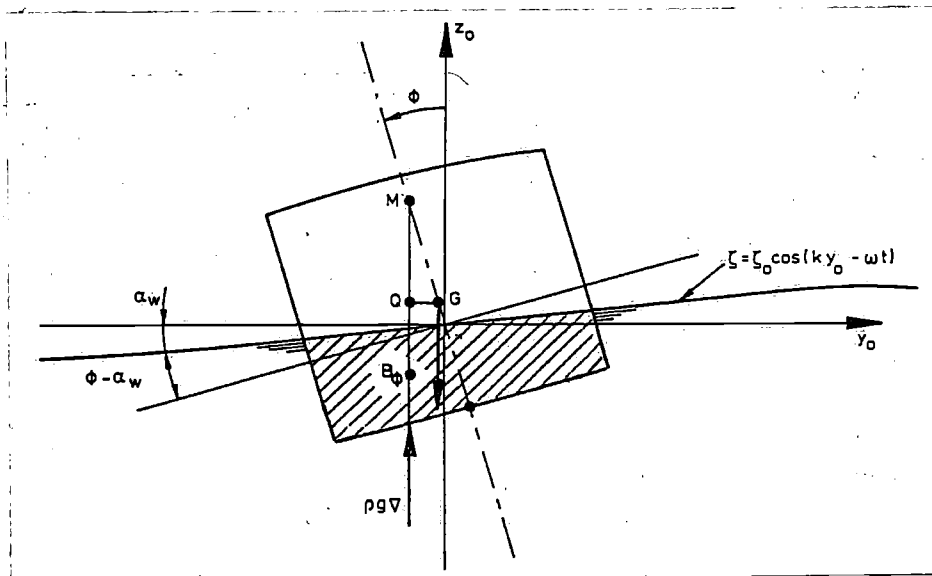
Figuur 4-1-C. Amplitude karakteristiek voor het slingeren.



Figuur 4-1-D. Fase karakteristiek voor het slingeren.

### Slingerend ponton.

Een vereenvoudigde berekening van de slingerbeweging van een ponton in dwarsscheepse golven wordt gegeven, waarbij de koppeling met het verzetten en het gieren verwaarloosd wordt. Er wordt hier verondersteld dat de breedte klein is ten opzichte van de golflengte, zie de volgende figuur.



Figuur 4-1-E. Slingeren in dwarsscheepse golven.

Het golfoppervlak wordt voorgesteld door:

$$\zeta = \zeta_a \cdot \cos(k \cdot y_0 - \omega \cdot t)$$

Aan het oppervlak heerst een konstante atmosferische druk  $p_0$ . Op een diepte  $z_0 = -T^*$  onder het wateroppervlak is het oppervlak van konstante druk gegeven door:

$$\zeta = \zeta_a \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \cos(k \cdot y_0 - \omega \cdot t)$$

De amplitude van dit oppervlak van gelijke druk is kleiner dan aan het wateroppervlak als gevolg van de exponentieele afname van de orbitaalbewegingen van de waterdeeltjes. Het schip reageert ten aanzien van de slingerbeweging als het ware op een effectieve golfhelling als resultaat van de integratie van de drukkkrachten op de scheepshuid onder water.

Neem nu aan dat het resultaat van die integratie een effectieve golfhelling geeft die hoort bij  $z_0 = -T^*$ , waarbij  $T^*$  bijvoorbeeld als fractie van een diepgang van het schip uitgedrukt kan worden.

Voor  $y_0 = 0$  is de effectieve golfhelling:

$$\alpha_w = \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial y_0} \right]_{y_0 = 0} = k \cdot \zeta_a \cdot e^{-k T^*} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Deze golfhelling wordt gebruikt om de bewegingsvergelijking van het slingeren op te stellen, waarbij verondersteld wordt dat de maximale effectieve golfhelling zo klein is dat de opdrijvende kracht in de golf vertikaal is.

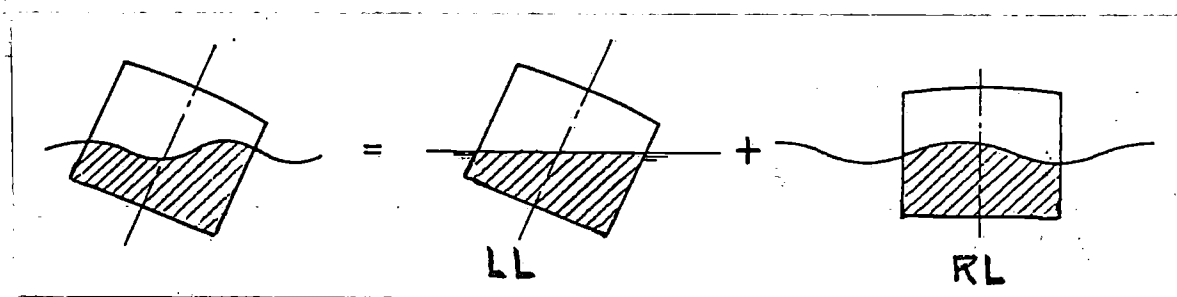
Er geldt:

$$I_{xx} \cdot \ddot{\varphi} = -\rho \cdot g \cdot GM \cdot \nabla \cdot (\varphi - \alpha_w) - N_{\varphi\varphi} \cdot (\dot{\varphi} - \dot{\alpha}_w) - m_{\varphi\varphi} \cdot (\ddot{\varphi} - \ddot{\alpha}_w)$$

of:

$$(I_{xx} + m_{\varphi\varphi}) \ddot{\varphi} + N_{\varphi\varphi} \cdot \dot{\varphi} + \rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM \cdot \varphi = m_{\varphi\varphi} \cdot \ddot{\alpha}_w + N_{\varphi\varphi} \cdot \dot{\alpha}_w + \rho \cdot g \cdot GM \cdot \alpha_w$$

Het rechterlid RL en het linkerlid LL van de bewegingsvergelijking van het slingeren beschrijving gezamenlijk het slingeren in golven.



Figuur 4-1-F. Het principe van de bewegingsvergelijkingen.

Het linkerlid van deze vergelijking is gelijk aan de bewegingsvergelijking van het schip in vlak water. Het rechterlid geeft het zogenaamde "opwekkende" moment, dat evenredig is met de effectieve golfhelling  $\alpha_w$  en zijn afgeleiden. Dit is een gevolg van de linearisatie van de bewegingsvergelijking.

Nu is:

$$\begin{aligned}\alpha_w &= +k \cdot \zeta_a \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \dot{\alpha}_w &= +k \cdot \zeta_a \cdot \omega \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \ddot{\alpha}_w &= -k \cdot \zeta_a \cdot \omega^2 \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \sin(\omega \cdot t)\end{aligned}$$

Het rechterlid RL van de bewegingsvergelijking kan hiermee als volgt geschreven worden:

$$RL = \zeta_a \cdot k \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot [(\rho \cdot g \cdot GM - m_{\varphi\varphi} \cdot \omega^2) \cdot \sin(\omega \cdot t) + N_{\varphi\varphi} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)]$$

of:

$$RL = F_{\varphi a} \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{F\alpha}) = F_{\varphi a} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

waarin:

$$F_{\varphi a} = \bar{F}_{\varphi a} \cdot e^{i \cdot \epsilon_{F\alpha}}$$

$$F_{\varphi a} = \zeta_a \cdot k \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot [(\rho \cdot g \cdot GM - m_{\varphi\varphi} \cdot \omega^2)^2 + N_{\varphi\varphi}^2 \cdot \omega^2]^{1/2}$$

$$\epsilon_{F\alpha} = \tan^{-1} \left[ \frac{m_{\varphi\varphi} \cdot \omega^2 - \rho \cdot g \cdot GM}{N_{\varphi\varphi}} \right]$$

Opmerking: De fase hoek is hier gedefinieerd t.o.v. de golfhelling en niet t.o.v. de verticale verplaatsing van het golfoppervlak.

De oplossing van de bewegingsvergelijking voor het geval dat het inschakelverschijnsel is verdwenen verloopt als volgt:

$$(a+m) \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + c \cdot \varphi = \bar{F}_{\varphi a} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

waarin:

$$a = m_{\varphi\varphi}$$

$$m = I_{xx}$$

$$b = N_{\varphi\varphi}$$

$$c = \rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM$$

De indices  $\varphi\varphi$  bij de coëfficiënten a, m, b en c zijn hier kortheidshalve weggelaten.

Stel de oplossing:

$$\varphi = \bar{\varphi}_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad \text{met: } \bar{\varphi}_a = \varphi_a \cdot e^{i \cdot \epsilon_{\Phi F}}$$

Substitutie in de voorgaande bewegingsvergelijking levert:

$$\bar{\varphi}_a = \frac{\bar{F}_a}{-(a+m) \cdot \omega^2 + i \cdot b \cdot \omega + c}$$

of:

$$\bar{\varphi}_a = \frac{\bar{F}_a \cdot [c - (a+m) \cdot \omega^2 - i \cdot b \cdot \omega]}{[c - (a+m) \cdot \omega^2]^2 + b^2 \cdot \omega^2}$$

Hieruit volgt:

$$\varphi_a = \frac{F_a}{[(c - (a+m) \cdot \omega^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$

en

$$\epsilon_{\varphi F} = \tan^{-1} \left[ \frac{-b \cdot \omega}{c - (a+m) \cdot \omega^2} \right]$$

Daarmee vinden we tenslotte:

$$\frac{\varphi_a}{\alpha_{\bar{w}a}} = e^{-k \cdot T^*} \cdot \left[ \frac{(c - a \cdot \omega^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2}{[c - (a+m) \cdot \omega^2]^2 + b^2 \cdot \omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

en:

$$\epsilon_{\varphi \alpha} = \epsilon_{F\alpha} + \epsilon_{\varphi F} = \tan^{-1} \left[ \frac{c - a \cdot \omega^2}{-b \cdot \omega} \right] + \tan^{-1} \left[ \frac{-b \cdot \omega}{c - (a+m) \cdot \omega^2} \right]$$

$$\epsilon_{\varphi \alpha} = \tan^{-1} \left[ \frac{(c - a \cdot \omega^2) \cdot [c - (a+m) \cdot \omega^2] + b^2 \cdot \omega^2}{b \cdot m \cdot \omega^3} \right]$$

- Opmerking: - Deze laatste twee vergelijkingen zijn geheel analoog aan die van de dompende ton. Echter, de fase hoek  $\epsilon_{\varphi \alpha}$  is  $90^\circ$  groter dan bij de dompbeweging. Dit is te verklaren uit het feit dat de golfhelling als referentie gebruikt is (sinus) om de fase hoek van de slingerbeweging te definiëren (cosinus).
- Ga zelf na wat de waarde is van  $\epsilon_{F\zeta}$  en  $\epsilon_{F\alpha}$  indien de hydrodynamische korrektie termen in de bewegingsvergelijking nul zijn.

De frequentie karakteristiek van het slingeren van het ponton heeft eenzelfde gedaante als die van de verticale beweging van de ton. Voor het slingeren geldt:

$$a/\bar{m} \approx 0.05$$

$$\kappa \approx 0.05 - 0.10$$

**Voorbeeld.**

Een supply schip vaart in dwarsscheepse regelmatige golven, waarvan de periode gelijk is aan de eigen slingerperiode (resonantie). Gevraagd wordt om met de volgende gegevens de slingeramplitude te berekenen.

$\nabla$	=	2890 m <sup>3</sup>
L	=	84.50 m
B	=	14.43 m
T	=	4.75 m
GM	=	1.05 m
$\kappa_{\varphi\varphi}$	=	0.075
$k_{\varphi\varphi}$	=	0.38 B
$m_{\varphi\varphi}/I_{xx}$	=	0.18
golfhoogte	=	4.00 m

**Slingerperiode.**

$$T_{\varphi} \approx 2\pi \cdot \left[ \frac{k_{\varphi\varphi} \cdot 2 \cdot \rho \cdot \nabla}{\rho g \nabla GM} \right]^{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \frac{k_{\varphi\varphi}}{[g \cdot GM]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.38 \cdot 14.39}{[9.81 \cdot 1.05]^{\frac{1}{2}}} = 10.7 \text{ sec.}$$

Resonantie als  $T_{\varphi} = T_{\text{golf}}$ , dus als:

$$\left[ \frac{2\pi \cdot \lambda}{g} \right] = 10.7 \quad \text{dus: } \lambda = 179 \text{ m}$$

$$\text{Hierbij is } k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.035 \quad \text{en} \quad \omega = \frac{2\pi}{T_{\varphi}} = 0.585 \text{ rad/s}$$

**Smith effect.**

Neem:  $T^* = 40\%$  van de diepgang

$$e^{-k \cdot T^*} = e^{-0.035 \cdot 0.4 \cdot 4.75} = 0.94$$

**Maximum golfhelling:**

$$\alpha_{wa} = k \cdot \zeta_a = 0.035 \cdot 4 / 2 = 0.07 \text{ rad} \approx 4^\circ$$

Dynamische vergrotingsfaktor.

$$f = \left[ \frac{(c - a \cdot \omega^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2}{[c - (a+m) \cdot \omega^2]^2 + b^2 \cdot \omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Omdat:  $\omega^2 = \frac{c}{a+m}$  is bij resonantie:

$$f = \frac{[(c - a \cdot \omega^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2]^{\frac{1}{2}}}{b \cdot \omega}$$

Nu is:

$$\begin{aligned} c &= \rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM = 1030 \cdot 9.81 \cdot 2890 \cdot 1.05 = \\ &= 30.7 \cdot 10^6 \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+m &= (0.38 \cdot 14.43)^2 \cdot 1030 \cdot 2890 = \\ &= 89.5 \cdot 10^6 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{a+m}{a} = 1.00 + \frac{m}{a} = 1.00 + 5.56 = 6.56$$

$$a = 13.6 \cdot 10^6 \text{ kgm}^2$$

$$\begin{aligned} b &= 2 \cdot k_{\varphi\varphi} \cdot [c(m+a)]^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \cdot 0.075 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{89.5 \cdot 30.7} = \\ &= 7.9 \cdot 10^6 \text{ Nms} \end{aligned}$$

Dus:

$$f = \frac{[(30.7 - 13.6 \cdot 0.585^2)^2 + 7.9^2 \cdot 0.585^2]^{\frac{1}{2}}}{7.9 \cdot 0.585} = 5.7$$

Dit levert de gevraagde slingeramplitude:

$$\varphi_a = \alpha_{wa} \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot f = 4 \cdot 0.94 \cdot 5.72 = 21.5^\circ$$

Opgave: Gegeven is  $\lambda = 100 \text{ m}$  en  $\zeta_a = 1.50 \text{ m}$ .  
Bereken  $\varphi_a$ .

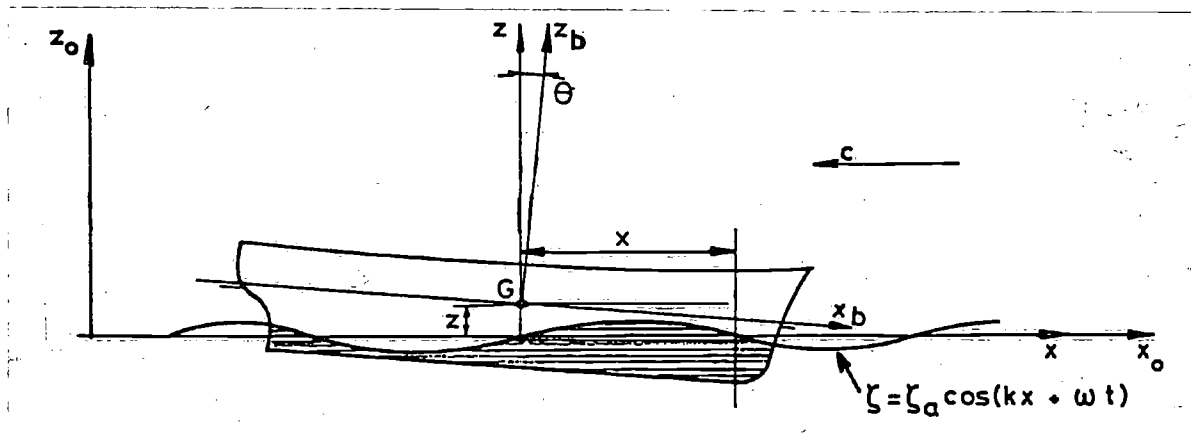


#### 4-2. Gekoppelde bewegingen.

##### Schrikken, dompen en stampen.

In het vorige hoofdstuk werden gekoppelde bewegingsvergelijkingen in vlak water gegeven. Nu wordt de golfbelasting toegevoegd, het rechterlid van de bewegingsvergelijkingen is nu dus ongelijk aan nul.

In het algemeen is er bij drijvende lichamen met  $L/B \geq 3$  slechts een lichte koppeling tussen de schrikbeweging en het stampen aanwezig. In het hierna volgende wordt deze koppeling verwaarloosd en wordt alleen de koppeling tussen het dompen en het stampen behandeld voor snelheid nul.



Figuur 4-2-A. Dompen en stampen in koggolven.

Voor  $\bar{x}=0$ , dus in G, is de vergelijking van het golfoppervlak:

$$\zeta = \zeta_a \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

De damp- en stampbeweging worden ten aanzien van hun fase ten opzichte van deze definitie van het golfoppervlak bepaald. Ook wordt overgegaan op het lichaamsvaste assenstelsel ( $G-x_b, y_b, z_b$ ), waarbij geldt:

$$x \approx x_b$$

en:

$$\zeta = \zeta_a \cdot \cos(k \cdot x_b + \omega \cdot t)$$

Beschouw een schijf ter plaatse van  $x_b$  met een dikte  $dx_b$ . De druk in een punt  $(x_b, z_b)$  wordt gegeven door:

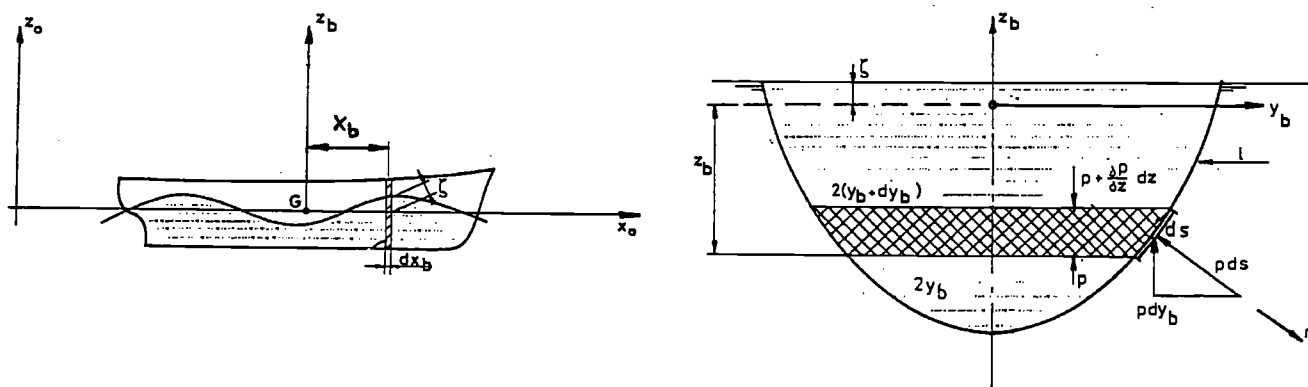
$$p = \rho \cdot g \cdot \zeta_a \cdot e^{k \cdot z_b} \cdot \cos(k \cdot x_b + \omega \cdot t) - \rho \cdot g \cdot z_b$$

ofwel:

$$p = \rho \cdot g \cdot (\zeta \cdot e^{k \cdot z_b} - z_b)$$

waarbij aangenomen wordt dat de verplaatsing van het schip door het dompen en het stampen ten opzichte van zijn evenwichtstand als zeer klein te beschouwen is.

De kracht op een doorsnede door de druk  $p$  wordt als volgt berekend.



Figuur 4-2-B. Krachten op een schiff.

Bij deze behandeling wordt aangenomen dat de striptheorie geldig is, dat wil zeggen de hydromechanische krachten op dwarsdoorsneden van het schip kunnen over de lengte van het schip geïntegreerd worden, zonder dat daarbij onderlinge interacties van de krachten op die dwarsdoorsneden in rekening gebracht worden.

$$F_1' = - \int_l p \cdot ds \cdot \cos(n, z_b)$$

Volgens Gauss kan deze contour integraal omgezet worden in een oppervlakte integraal:

$$F_1' = - \int_A \frac{\partial p}{\partial z_b} \cdot dA$$

Pro memori:

$$\begin{aligned} F_1' &= \int_A \left[ -2 \cdot (y_b + dy_b) \cdot \left[ p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right] + 2y_b \cdot p + 2 \cdot p \cdot dy_b \right] \\ &= - \int_A 2 \cdot y_b \cdot \frac{\partial p}{\partial z_b} \cdot dz_b = - \int_A \frac{\partial p}{\partial z_b} \cdot dA \end{aligned}$$

Met:

$$\frac{\partial p}{\partial z_b} = \rho \cdot g \cdot k \cdot \zeta \cdot e^{k \cdot z_b} - \rho \cdot g$$

vinden we:

$$F_1' = -2 \cdot \int_{-T}^{+\zeta} [\rho \cdot g \cdot k \cdot \zeta \cdot e^{k \cdot z_b} - \rho \cdot g] \cdot y_b \cdot dz_b$$

Deze integraal is in twee delen te splitsen, namelijk:

$$\int_{-T}^{+\zeta} \dots dx_b = \int_{-T}^0 \dots dx_b + \int_0^{\zeta} \dots dx_b$$

waarbij te bedenken is dat  $\zeta$  en  $k$  kleine getallen zijn, zodat de term "k maal integraal van 0 tot  $\zeta$ " ten opzichte van de andere integralen te verwaarlozen is.

Dan is:

$$F_1' = -2 \cdot \rho \cdot g \cdot k \cdot \zeta \cdot \int_{-T}^0 y_b \cdot e^{k \cdot z_b} \cdot dz_b + 2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_{-T}^0 \dot{y}_b \cdot dz_b + 2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_0^{\zeta} \dot{y}_b \cdot dz_b$$

of:

$$F_1' = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot y_w \cdot \zeta \cdot \left[ 1 + \frac{-k}{y_w} \cdot \int_{-T}^0 y_b \cdot e^{k \cdot z_b} \cdot dz_b \right] + \rho \cdot g \cdot A_x$$

Hierbij is aangenomen dat  $y_b$  in het bereik  $z_b=0$  tot  $z_b=\zeta$  een konstante waarde  $y_w$  heeft (Scribanti schip).

Het gedeelte tussen haken kan opgevat worden als een reductiefactor die verband houdt met de orbitaal beweging van de waterdeeltjes, het zogenaamde "Smith effect".

Als we schrijven:

$$F_1' = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot y_w \cdot \zeta^* + \rho \cdot g \cdot A_x$$

en:

$$\zeta^* = \zeta \cdot e^{-k \cdot T^*}$$

dan is:

$$T^* = \frac{-1}{k} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{-k}{y_w} \cdot \int_{-T}^0 y_b \cdot e^{k \cdot z_b} \cdot dz_b \right]$$

$T^*$  is op te vatten als een effectieve diepgang van de beschouwde dwarsdoorsnede.

Ook kan men het resultaat samenvatten door een effectieve golfhoogte  $\zeta^*$  in de berekening op te nemen. Er wordt op gewezen dat deze grootheden slechts ingevoerd zijn om schrijfwerk te besparen.

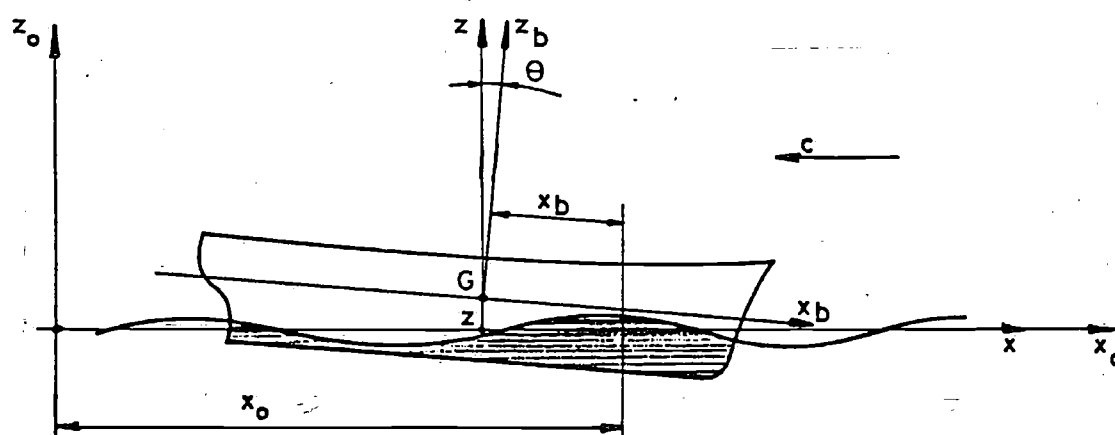
In verband met de berekening van de hydrodynamische krachten op een dwarsdoorsnede van het schip zijn de grootheden  $\dot{\zeta}^*$  en  $\ddot{\zeta}^*$  van belang.

Er geldt:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}^* &= \frac{d}{dt} [\zeta \cdot e^{-k \cdot T^*}] \\ &= -\zeta_a \cdot \omega \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \sin(k \cdot x_b + \omega \cdot t)\end{aligned}$$

$$\ddot{\zeta}^* = -\zeta_a \cdot \omega^2 \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \cos(k \cdot x_b + \omega \cdot t)$$

Voor de berekening van de hydromechanische krachten op een schijf van het schip zullen we in hoofdzaak de methode **Korvin Kroukovsky** volgen (SNAME 1957). Met voorwaartse snelheid is deze methode theoretisch enigszins aanvechtbaar, doch leidt ook dan tot praktisch zeer bruikbare resultaten.



Figuur 4-2-C. Berekening van de opwekkende krachten en momenten.

De doorsnede van het schip die zich in het vlak  $x_0$  bevindt heeft een verticale relatieve snelheid  $v_z$  ten opzichte van de golf. De relatieve verplaatsing daar ter plaatse bedraagt:

$$s_z = z - x_b \cdot \theta - \zeta^*$$

waarin  $\zeta^*$  zoals hiervoor gedefinieerd.

Dan is:

$$v_z = \frac{d}{dt} [z - x_b \cdot \theta - \zeta^*] = \dot{z} - x_b \cdot \dot{\theta} - \dot{\zeta}^*$$

en:

$$\dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} - x_b \cdot \ddot{\theta} - \ddot{\zeta}^*$$

Volgens Korvin Kroukovsky is de hydromechanische kracht op de doorsnede:

$$F' = - \frac{d}{dt} (m' \cdot v_z) - N' \cdot v_z - 2 \cdot \rho \cdot g \cdot y_w \cdot s_z$$

De eerste term in deze uitdrukking is een resultaat van de zogenaamde "slender body" theorie. De tweede term is een demping als gevolg van oppervlakte golven en de derde term is de hydrostatische reactie als gevolg van de verticale verplaatsing ten opzichte van het water.

$m'$  en  $N'$  zijn respectievelijk de twee-dimensionale waarden van de hydrodynamische massa en de dempingscoëfficiënt van de beschouwde dwarsdoorsnede.

Nu is:

$$\frac{dm'}{dt} = \frac{dm'}{dx_b} \cdot \frac{dx_b}{dt} = \frac{dm'}{dx_b} \cdot -V = 0$$

want de voorwaartse snelheid  $V$  is nul.

Dus:

$$F' = -m' \cdot \ddot{v}_z - N' \cdot v_z - 2 \cdot \rho \cdot g \cdot y_w \cdot s_z$$

De bewegingsvergelijkingen voor dompen en stampen zijn nu:

$$\rho \cdot V \cdot \ddot{z} = + \int_L (F_1' + F_2' + F_3') \cdot dx_b$$

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} = - \int_L (F_1' + F_2' + F_3') \cdot x_b \cdot dx_b$$

waarin:

$$F_1' = -2 \cdot \rho \cdot g \cdot y_w \cdot (z - x_b \cdot \theta - \zeta^*)$$

$$F_2' = -N' \cdot (\dot{z} - x_b \cdot \dot{\theta} - \dot{\zeta}^*)$$

$$F_3' = -m' \cdot (\ddot{z} - x_b \cdot \ddot{\theta} - \ddot{\zeta}^*)$$

en:

$$\begin{aligned} \zeta^* &= +\zeta \cdot e^{-k \cdot T^*} \\ &= +\zeta_a \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \cos(k \cdot x_b + \omega \cdot t) \end{aligned}$$

$$\dot{\zeta}^* = -\zeta_a \cdot \omega \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \sin(k \cdot x_b + \omega \cdot t)$$

$$\ddot{\zeta}^* = -\zeta_a \cdot \omega^2 \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \cos(k \cdot x_b + \omega \cdot t)$$

Integratie van  $F'$  over de lengte van het schip leidt tot de volgende gekoppelde bewegingsvergelijkingen voor dompen en stampen:

$$a_{zz} \cdot \ddot{z} + b_{zz} \cdot \dot{z} + c_{zz} \cdot z + a_{z\theta} \cdot \ddot{\theta} + b_{z\theta} \cdot \dot{\theta} + c_{z\theta} \cdot \theta = F_{za} \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{F\zeta})$$

$$a_{\theta z} \cdot \ddot{z} + b_{\theta z} \cdot \dot{z} + c_{\theta z} \cdot z + a_{\theta\theta} \cdot \ddot{\theta} + b_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta} + c_{\theta\theta} \cdot \theta = M_{\theta a} \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{M\zeta})$$

waarin:

$$a_{zz} = +\rho \cdot \nabla + \int_L m' \cdot dx_b$$

$$a_{\theta z} = - \int_L m' \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$b_{zz} = + \int_L N' \cdot dx_b$$

$$b_{\theta z} = - \int_L N' \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$c_{zz} = +2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_L y_w \cdot dx_b$$

$$c_{\theta z} = -2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_L y_w \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$a_{z\theta} = - \int_L m' \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$a_{\theta\theta} = +I_{yy} + \int_L m' \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

$$b_{z\theta} = - \int_L N' \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$b_{\theta\theta} = + \int_L N' \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

$$c_{z\theta} = -2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_L y_w \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$c_{\theta\theta} = +2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_L y_w \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

en:

$$\begin{aligned} F_{za} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\epsilon_{F\zeta}) \\ \sin(\epsilon_{F\zeta}) \end{bmatrix} &= +2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_L y_w \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \begin{bmatrix} \cos(k \cdot x_b) \\ \sin(k \cdot x_b) \end{bmatrix} \cdot dx_b + \\ &- \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \omega \cdot \int_L N' \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \begin{bmatrix} \sin(k \cdot x_b) \\ \cos(k \cdot x_b) \end{bmatrix} \cdot dx_b + \\ &- \omega^2 \cdot \int_L m' \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \begin{bmatrix} \cos(k \cdot x_b) \\ \sin(k \cdot x_b) \end{bmatrix} \cdot dx_b \end{aligned}$$

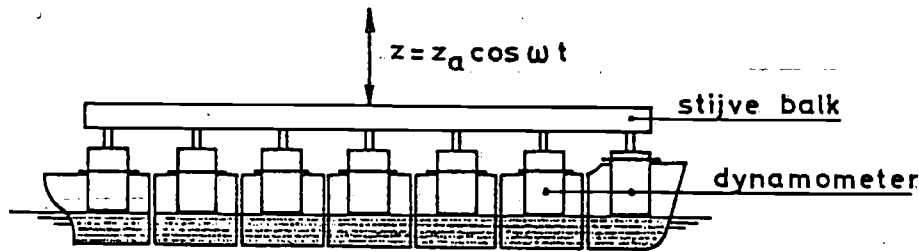
$$\begin{aligned} M_{\theta a} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\epsilon_{M\zeta}) \\ \sin(\epsilon_{M\zeta}) \end{bmatrix} &= -2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_L y_w \cdot x_b \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \begin{bmatrix} \cos(k \cdot x_b) \\ \sin(k \cdot x_b) \end{bmatrix} \cdot dx_b + \\ &+ \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \omega \cdot \int_L N' \cdot x_b \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \begin{bmatrix} \sin(k \cdot x_b) \\ \cos(k \cdot x_b) \end{bmatrix} \cdot dx_b + \\ &+ \omega^2 \cdot \int_L m' \cdot x_b \cdot e^{-k \cdot T^*} \cdot \begin{bmatrix} \cos(k \cdot x_b) \\ \sin(k \cdot x_b) \end{bmatrix} \cdot dx_b \end{aligned}$$

Opmerking: Deze vergelijkingen gelden voor van voren inkomende golven en zonder voorwaartse snelheid van de konstruktie.

In de vergelijkingen zijn de coëfficiënten van de bewegingsvergelijkingen berekend door integratie van de twee-dimensionale waarden.

Met behulp van een uit zeven delen bestaand model zijn de verdelingen van de hydrodynamische krachten over de lengte van het model gemeten en vergeleken met berekende waarden. Het model werd daartoe met een aantal amplituden en frequenties geoscilleerd in vlak water.

De meetopstelling voor de verticale oscillaties is geschetst in de volgende figuur.



Figuur 4-2-D. Meetopstelling voor het bepalen van de verdeling van hydrodynamische krachten.

In de literatuur zijn de gemeten verdelingen van  $m_{zz}'$  en  $N_{zz}'$  over de lengte vergeleken met de overeenkomstige berekende waarden. De overeenstemming is redelijk goed.

De oplossing van de gekoppelde bewegingsvergelijkingen verloopt als volgt.

De vergelijkingen worden als volgt geschreven:

$$\begin{aligned} a_{zz} \ddot{z} + b_{zz} \dot{z} + c_{zz} z + a_{z\theta} \ddot{\theta} + b_{z\theta} \dot{\theta} + c_{z\theta} \theta &= \bar{F}_{za} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \\ a_{\theta z} \ddot{z} + b_{\theta z} \dot{z} + c_{\theta z} z + a_{\theta\theta} \ddot{\theta} + b_{\theta\theta} \dot{\theta} + c_{\theta\theta} \theta &= \bar{M}_{\theta a} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \end{aligned}$$

waarin:

$$\bar{F}_a = F_a \cdot e^{i \cdot \epsilon_{F\zeta}} \quad \text{en} \quad \bar{M}_a = M_a \cdot e^{i \cdot \epsilon_{M\zeta}}$$

Als oplossing wordt gesteld:

$$\begin{aligned} \theta &= \bar{\theta}_a \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \epsilon_{\theta\zeta})} = \bar{\theta}_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \\ z &= \bar{z}_a \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \epsilon_{z\zeta})} = \bar{z}_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \end{aligned}$$

waarin:

$$\bar{\theta}_a = \theta_a \cdot e^{i \cdot \epsilon_{\theta\zeta}} \quad \text{en} \quad \bar{z}_a = z_a \cdot e^{i \cdot \epsilon_{z\zeta}}$$

Substitutie van deze particuliere oplossing geeft:

$$\begin{aligned} \bar{z}_a \cdot (-\omega^2 \cdot a_{zz} + i \cdot b_{zz} \cdot \omega + c_{zz}) + \bar{\theta}_a \cdot (-\omega^2 \cdot a_{z\theta} + i \cdot b_{z\theta} \cdot \omega + c_{z\theta}) &= \bar{F}_a \\ \bar{z}_a \cdot (-\omega^2 \cdot a_{\theta z} + i \cdot b_{\theta z} \cdot \omega + c_{\theta z}) + \bar{\theta}_a \cdot (-\omega^2 \cdot a_{\theta\theta} + i \cdot b_{\theta\theta} \cdot \omega + c_{\theta\theta}) &= \bar{M}_a \end{aligned}$$

of:

$$\begin{aligned} \bar{P} \cdot z_a + \bar{Q} \cdot \theta_a &= \bar{F}_a \\ \bar{R} \cdot z_a + \bar{S} \cdot \theta_a &= \bar{M}_a \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\bar{z}_a = \frac{\begin{vmatrix} \bar{F}_a & Q \\ \bar{M}_a & S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}} = \frac{\bar{F}_a \cdot S - \bar{M}_a \cdot Q}{P \cdot S - Q \cdot R} = z_a \cdot \cos(\epsilon_{z\zeta}) + i \cdot z_a \cdot \sin(\epsilon_{z\zeta})$$

en

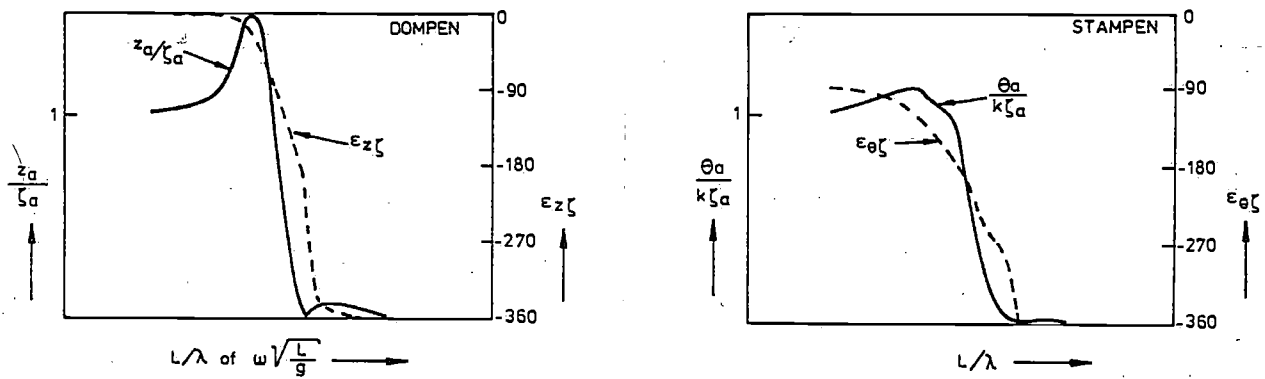
$$\bar{\theta}_a = \frac{\begin{vmatrix} P & \bar{F}_a \\ R & \bar{M}_a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}} = \frac{\bar{M}_a \cdot P - \bar{F}_a \cdot R}{P \cdot S - Q \cdot R} = \theta_a \cdot \cos(\epsilon_{\theta\zeta}) + i \cdot \theta_a \cdot \sin(\epsilon_{\theta\zeta})$$

Door de reële delen en de imaginaire delen links en rechts aan elkaar gelijk te stellen vindt men de amplituden en de fase hoeken van de damp- en stampbewegingen.

De resultaten van een dergelijke berekening worden vaak in dimensieloze vorm gegeven. Daarbij wordt de dampamplitude  $z_a$  gedeeld door de golfamplitude  $\zeta_a$  en de stampamplitude door de amplitude van de golfhelling  $k \cdot \zeta_a$ , zie de hierna volgende figuur. Een dergelijke presentatie is toegepast, gezien de lineaire benadering die in de berekening is toegepast.

De amplitude en fase karakteristieken kunnen op basis van  $\lambda/L$ ,  $L/\lambda$ ,  $\sqrt{L/\lambda}$  of  $\omega \cdot \sqrt{L/g}$  uitgezet worden.

Bij zeer lage golf frequenties in diep water, dus bij zeer lange golven, wordt de dampamplitude gelijk aan de golfamplitude en de stampamplitude wordt gelijk aan de amplitude van de golfhelling, de dimensieloze bewegingsamplituden gaan dus naar 1.0.



Figuur 4-2-E. Frequentie karakteristieken voor dampen en stampen.



Opmerking: - Voor een schip dat ten opzichte van het grootspant symmetrisch is, geldt voor zeer lage frequenties:

$$F_{za} = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot \zeta_a \cdot \int_L y_w \cdot dx_b = \rho \cdot g \cdot \zeta_a \cdot A_w$$

$$M_{\theta a} = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot k \cdot \zeta_a \cdot \int_L y_w \cdot x_b^2 \cdot dx_b = \rho \cdot g \cdot \zeta_a \cdot k \cdot I_y$$

hetgeen af te leiden is uit het voorgaande.

- Voor de domp- en stampbeweging geldt niet dat maximale responsie optreedt bij resonantie. Dat is een gevolg van het feit dat de opwekkende kracht en het opwekkend moment ook sterk van de frequentie afhankelijk zijn.

### **Slingeren, gieren en verzetten.**

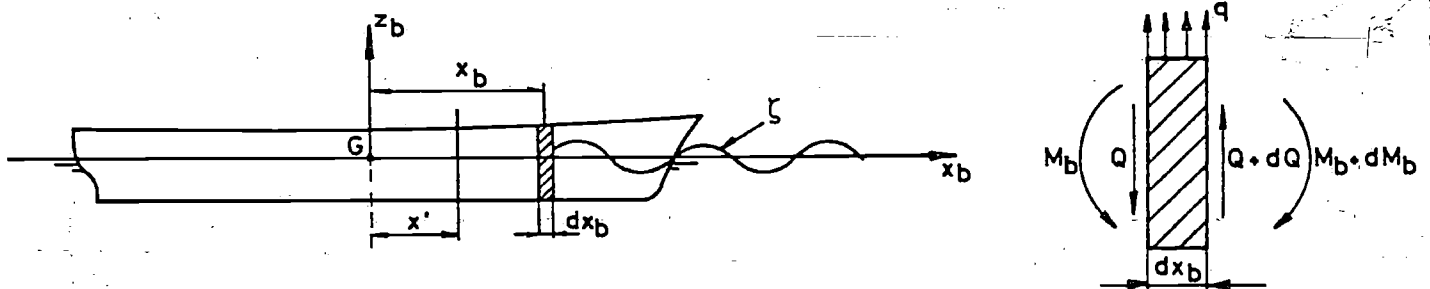
In hoofdstuk 3 werden de gekoppelde bewegingsvergelijking in vlak water gegeven waarbij het rechterlid nul is. Op analoge wijze als hiervoor beschreven kan voor het verzetten, slingeren en gieren het rechterlid toegevoegd worden.

### 4-3. Dwarskrachten en buigende momenten.

Als gevolg van de bewegingen van een konstruktie in zeegang ontstaan traagheidskrachten en hydromechanische krachten, die de konstruktie belasten.

In van voren inkomende enkelvoudige golven kunnen, voor langwerpige konstrukties zoals schepen, de dwarskrachten en de buigende momenten die op een willekeurige doorsnede werken, als volgt berekend worden.

Beschouw nu het evenwicht van een schijf van het schip met lengte  $dx_b$ , zie de volgende figuur.



Figuur 4-3-A. Dwarskracht en buigend moment op een dwarsdoorsnede van het schip.

De tekenafspraken is als volgt: de belasting  $q$  in  $z$ -richting en het opbuigend (hogging) moment worden positief gerekend.

Er geldt:

$$q \cdot dx_b = -dQ$$

$$Q \cdot dx_b = dM_b$$

Met deze betrekkingen vindt men door integratie de dwarskracht  $Q$  en het buigend moment  $M_b$  als de belasting  $q$  bekend is.

De verticale belasting  $q$  per eenheid van lengte wordt veroorzaakt door de traagheidskrachten, de hydromechanische krachten en het gewicht van de schijf.

Voor de "losgemaakte" schijf geldt namelijk:

$$\frac{w'}{g} \cdot (\ddot{z} - x_b \cdot \ddot{\theta}) \cdot dx_b = (F' + \rho \cdot g \cdot A_x - w') \cdot dx_b + dQ$$

of:

$$q(x_b) = -\frac{w'}{g} \cdot (\ddot{z} - x_b \cdot \ddot{\theta}) + F' + \rho \cdot g \cdot A_x - w'$$

Er moet nu gelden:

$$\int_L q(x_b) \cdot dx_b = 0$$

want:

$$\rho \cdot g \cdot \int_L A_x \cdot dx_b = \int_L w' \cdot dx_b = \rho \cdot g \cdot \nabla$$

$$\int_L w' \cdot x_b \cdot dx_b = 0 \quad (\text{Oorsprong assenstelsel ligt in G})$$

Verder volgt uit het evenwicht van de verticale krachten voor het gehele schip:

$$\ddot{z} \cdot \int_L \frac{w'}{g} \cdot dx_b = \int_L F' \cdot dx_b \quad \text{zodat inderdaad} \quad \int_L q(x_b) \cdot dx_b = 0$$

In de vergelijking voor de "losgemaakte" schijf veroorzaken de laatste twee termen ( $\rho \cdot g \cdot A_x - w'$ ) het zogenaamde vlakwater buigend moment, omdat er per doorsnede géén evenwicht is tussen de op-drijvende kracht en het gewicht.

De rest van de termen van het rechterlid van de vergelijking leveren het zogenaamde golfbuigend moment.

De dwarskracht  $Q$  in een doorsnede  $x'$  volgt uit:

$$Q(x') = - \int_{x'}^{+L/2} q(x_b) \cdot dx_b$$

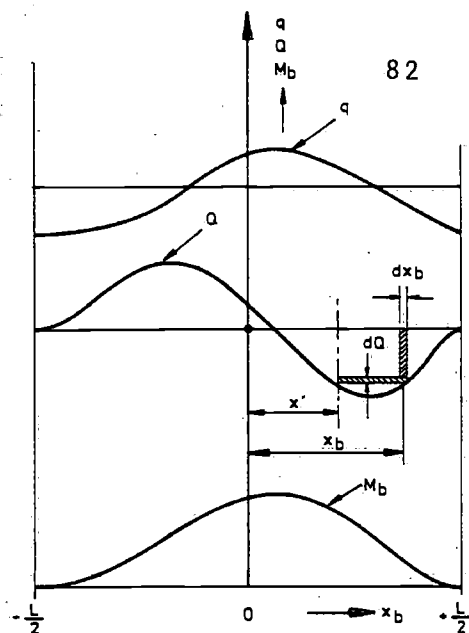
Het buigend moment  $M_b$  in  $x'$  is:

$$M_b(x') = \int_{x'}^{+L/2} Q(x_b) \cdot dx_b$$

Deze laatste integraal is nog als volgt te schrijven:

$$M_b(x') = \int_{x'}^{+L/2} dQ \cdot (x_b - x') = - \int_{x'}^{+L/2} q(x_b) \cdot (x_b - x') \cdot dx_b$$

Zie de volgende figuur.



Figuur 4-3-B. Belasting, dwarskracht en buigend moment.

De golfdwarskracht en het golfbuigende moment volgen dan uit:

$$Q(x') = \int_{x'}^{\text{voor}} \left[ \frac{w'}{g} \cdot (\ddot{z} - x_b \cdot \ddot{\theta}) - F' \right] \cdot dx_b$$

$$M_b(x') = \int_{x'}^{\text{voor}} \left[ \frac{w'}{g} \cdot (\ddot{z} - x_b \cdot \ddot{\theta}) - F' \right] \cdot (x_b - x') \cdot dx_b$$

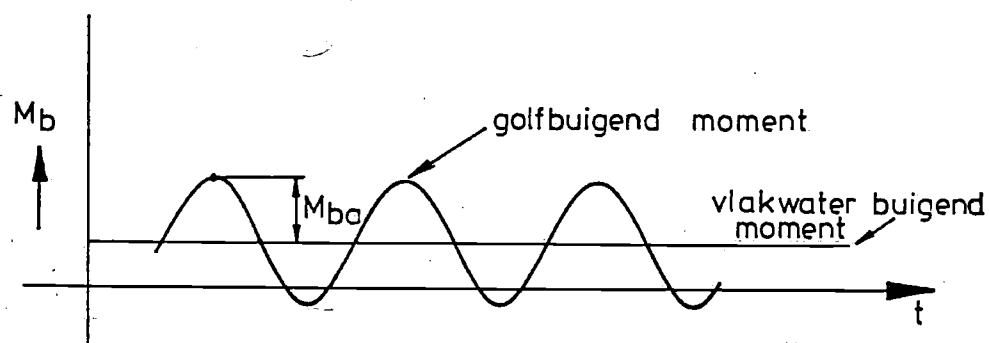
$Q$  en  $M_b$  kunnen dus berekend worden als de gewichtsverdeling  $w'$ , de frequentie karakteristieken van de beschouwde beweging ( $z$  en  $\theta$ ) alsmede de verdelingen van de hydromechanische krachten over de lengte van het schip ( $F'$ ) bekend zijn.

Gezien de veronderstelde lineariteit van het probleem zijn  $Q$  en  $M_b$  harmonische functies, waarvan de amplitude lineair afhangt van de golfamplitude (golfhoogte).

Men kan schrijven:

$$Q(x') = Q_a \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \epsilon_{Q\zeta})} = \bar{Q}_a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$M_b(x') = M_{ba} \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \epsilon_{M_b\zeta})} = \bar{M}_{ba} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$



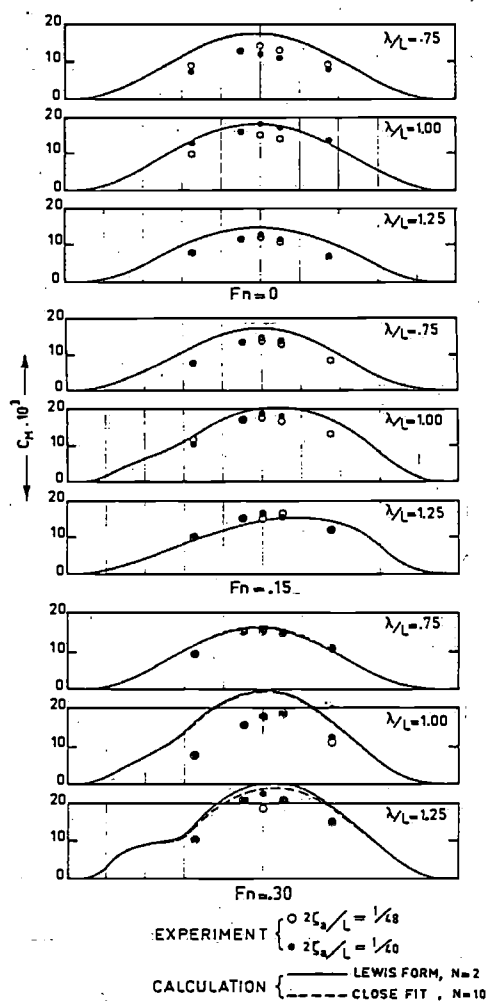
Figuur 4-3-C. Golfbuigend moment.

In zuiver langsscheepse golven zijn de fase hoeken  $\epsilon_{Q\zeta}$  en  $\epsilon_{Mb\zeta}$  op zich zelf niet belangrijk.

In het geval van schuin inkomende golven treden combinaties van belastingen op, zoals horizontale en verticale buigende momenten en torsie.

In verband met de superpositie van de belastingen zijn de fase hoeken dan wel belangrijk.

De toepasbaarheid van de methode is getoetst met modelproeven, waarbij buigende momenten op drie plaatsen, verdeeld over de lengte van de romp, gemeten werden in enkelvoudige golven. De vergelijking van de experimentele waarden en de gemeten waarden is gegeven in de volgende figuur.



Figuur 4-3-D. Vergelijking van berekende en gemeten golf-buigende momenten.

## 5. Bewegingen in onregelmatige golven.

Bewegingen in onregelmatige golven kunnen met het superpositie beginsel berekend worden als de frequentie karakteristieken van de drijvende maritieme konstruktie en het spektrum van de golven bekend zijn. Het beschouwde systeem moet dan wel met goede benadering als lineair beschouwd kunnen worden.

De zeegang wordt opgebouwd gedacht uit zeer veel enkelvoudige golfkomponenten (in de limiet: een oneindig aantal), elk met hun eigen amplitude, frequentie en voortplantingsrichting. De fase van de samenstellende componenten is willekeurig verdeeld.

De verdeling van de energie per oppervlakte eenheid als functie van de golffrequentie en de voortplantingsrichting wordt gegeven door het golfspektrum. Eenvoudigheidshalve beperken we ons hier tot een zgn. één-dimensionaal spektrum, waarbij de voortplantingsrichting van elk van de golfkomponenten dezelfde is (de golfkammen zijn dan evenwijdige rechte lijnen).

De beweging van een drijvende konstruktie in een onregelmatige zee wordt nu bepaald door de responsies van het schip op elk van de samenstellende enkelvoudige golfkomponenten lineair te superponeren.

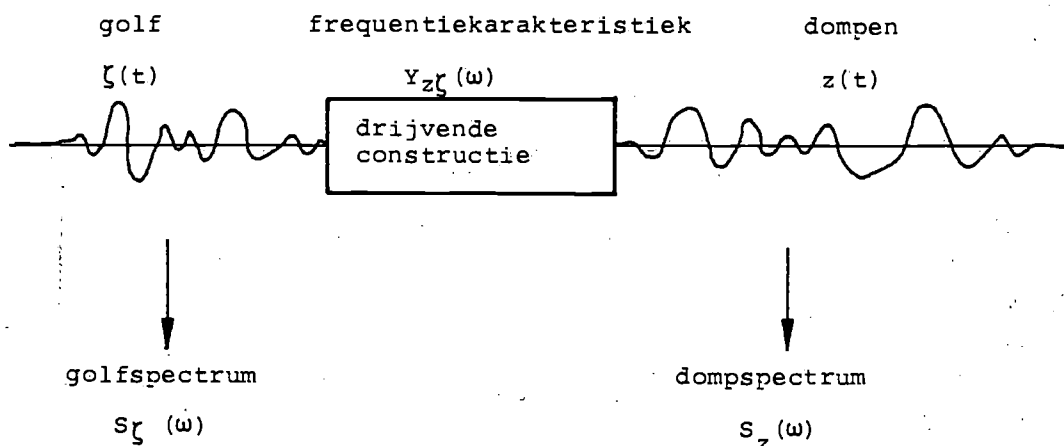
Als voorbeeld beschouwen we de vertikale beweging (het dompen) van een drijvende konstruktie waarvan de gemiddelde horizontale snelheid nul is.

De frequentie karakteristiek

$$Y_{z\zeta}(\omega) = \frac{z_a}{\zeta_a}(\omega) \cdot e^{i \cdot \epsilon_{z\zeta}(\omega)}$$

is door een berekening of met behulp van een modelproef bepaald en het golfspektrum  $S_{\zeta}(\omega)$  wordt bekend verondersteld.

In de volgende figuur wordt de probleemstelling schematisch voorgesteld.



Figuur 5-A. Probleemstelling van de bewegingen in onregelmatige golven.

De responsie  $z$  van de konstruktie op een enkelvoudige golfkomponent:

$$\zeta = \zeta_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon) = \zeta_a \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \epsilon)}$$

is nu:

$$z = \zeta \cdot Y_{z\zeta} = \zeta_a \cdot e^{i(\omega \cdot t + \epsilon)} \cdot \frac{z_a}{\zeta_a} \cdot e^{i \cdot \epsilon_{z\zeta}}$$

of, anders geschreven:

$$z = |Y_{z\zeta}(\omega)| \cdot \zeta_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon + \epsilon_{z\zeta})$$

Hierin is  $\epsilon$  een "random" fase hoek.

Door superpositie van alle responsies op de enkelvoudige samenstellende golfkomponenten vindt men tenslotte:

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ |Y_{z\zeta}(\omega)| \cdot \zeta_a \cdot \cos(\omega \cdot t + \epsilon + \epsilon_{z\zeta}) \right]$$

In analogie met de definitie van het golfspektrum is nu de spectrale dichtheid van de dompbeweging als volgt te formuleren:

$$S_z(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{2} \cdot |Y_{z\zeta}(\omega)|^2 \cdot \zeta_a^2(\omega)$$

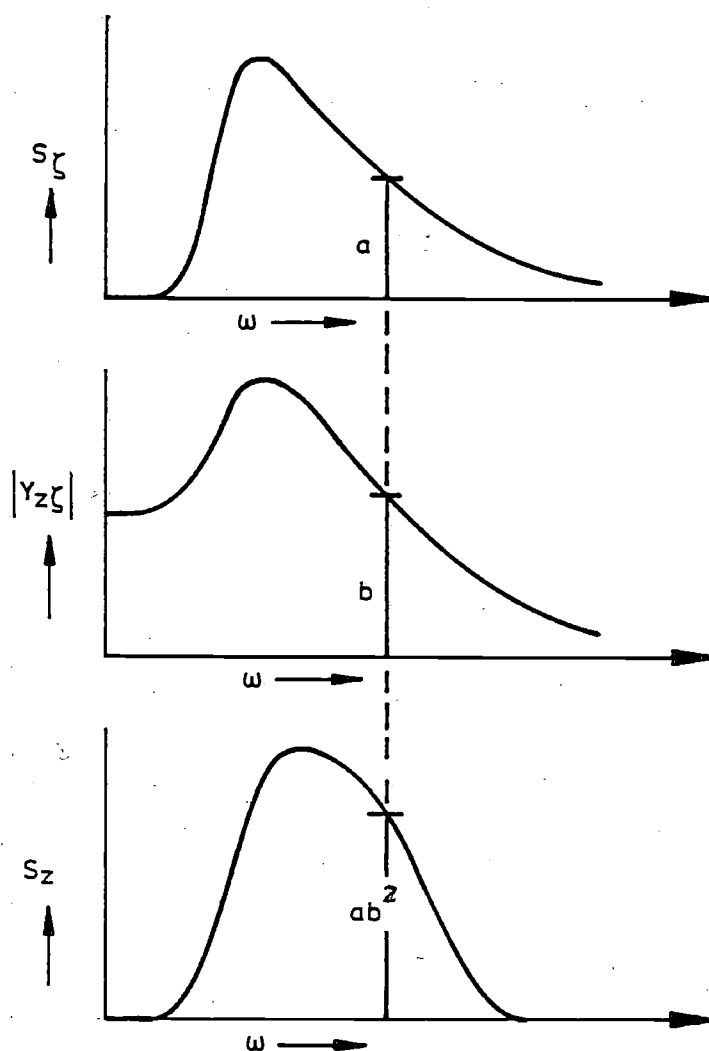
Nu was:

$$S_\zeta(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{2} \cdot \zeta_a^2(\omega)$$

De input-output (golven-dampen) relatie van de drijvende konstruktie in onregelmatige golven is dan:

$$S_z(\omega) = |Y_{z\zeta}(\omega)|^2 \cdot S_\zeta(\omega)$$

Deze belangrijke relatie wordt schematisch weergegeven in de volgende figuur.



Figuur 5-B. Input-output relatie van bewegingen in onregelmatige golven.

Uit het dompspektrum kan de verticale beweging in het tijdsdomein afgeleid worden:

$$z(t) = \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot t + \epsilon_{z\zeta}) \cdot [2 \cdot S_z(\omega) \cdot d\omega]^{\frac{1}{2}}$$

waarin ook hier geldt:

$$P [ 0 \leq \epsilon \leq 2\pi\alpha ] = \alpha$$

Voor de andere bewegingscomponenten, zoals stampen, verzetten, gelden uitdrukkingen die analoog zijn aan deze uitdrukkingen, dit uiteraard voorzover deze bewegingen lineair zijn. Hiermee kan men één van drie grootheden bepalen als de twee andere gegeven zijn.

In verband met de beoordeling van de bewegingen van een schip of van een andere drijvende konstruktie in zegang is de kans dat een bepaalde bewegingsamplitude wordt overschreden van belang.



De verdelingsdichtheid van de maxima en minima wordt bij een niet te breed spectrum (en de meeste spektra kunnen in ons geval als zodanig beschouwd worden) gegeven door de formule van Rayleigh:

$$p(x) = \frac{x}{m_{0x}} \cdot \exp\left[\frac{-x^2}{2 \cdot m_{0x}}\right]$$

waarin:

$$m_{0x} = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cdot d\omega \quad (\text{oppervlakte spectrum})$$

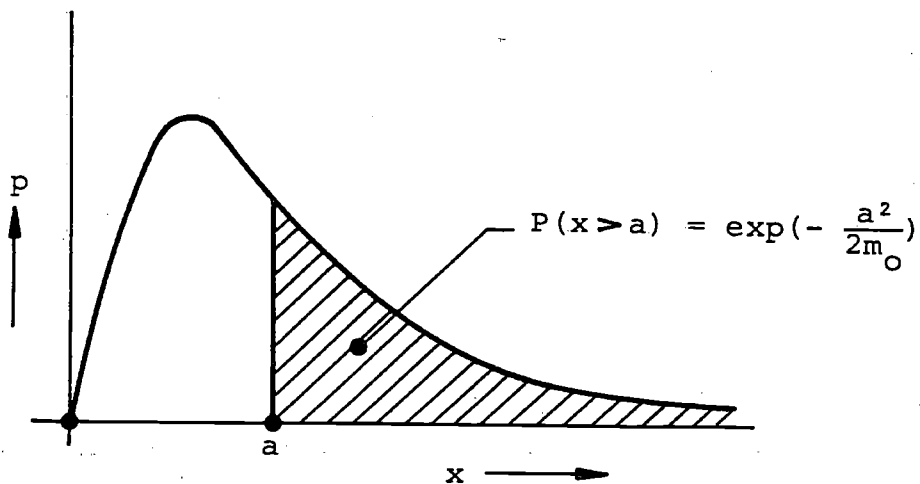
De kans P dat x de waarde a overschrijdt is nu:

$$P[x > a] = \int_a^{\infty} \frac{x}{m_{0x}} \cdot \exp\left[\frac{-x^2}{2 \cdot m_{0x}}\right] \cdot dx$$

of:

$$P[x > a] = \exp\left[\frac{-a^2}{2 \cdot m_{0x}}\right]$$

Een en ander wordt in de figuur hieronder weergegeven.



Figuur 5-C. Kansdichtheidsfunctie volgens Rayleigh.

De kans  $P$  dat bijvoorbeeld de stampamplitude  $\theta_a$  een waarde  $a$  overschrijdt, wordt gegeven door:

$$P[\theta_a > a] = \exp\left[\frac{-a^2}{2 \cdot m_{0\theta}}\right]$$

waarin:

$$m_{0\theta} = \int_0^{\infty} S_{\theta}(\omega) \cdot d\omega$$

Uit de verdelingsdichtheid kan de gemiddelde waarde van het hoogste 1/3 deel, of van het hoogste 1/10 deel van de amplituden berekend worden.

Men vindt bijvoorbeeld voor de stampamplituden in een onregelmatige zee:

$$\bar{\theta}_{a1/3} \approx 2.00 \cdot [m_{0\theta}]^{1/2}$$

$$\bar{\theta}_{a1/10} \approx 2.55 \cdot [m_{0\theta}]^{1/2}$$

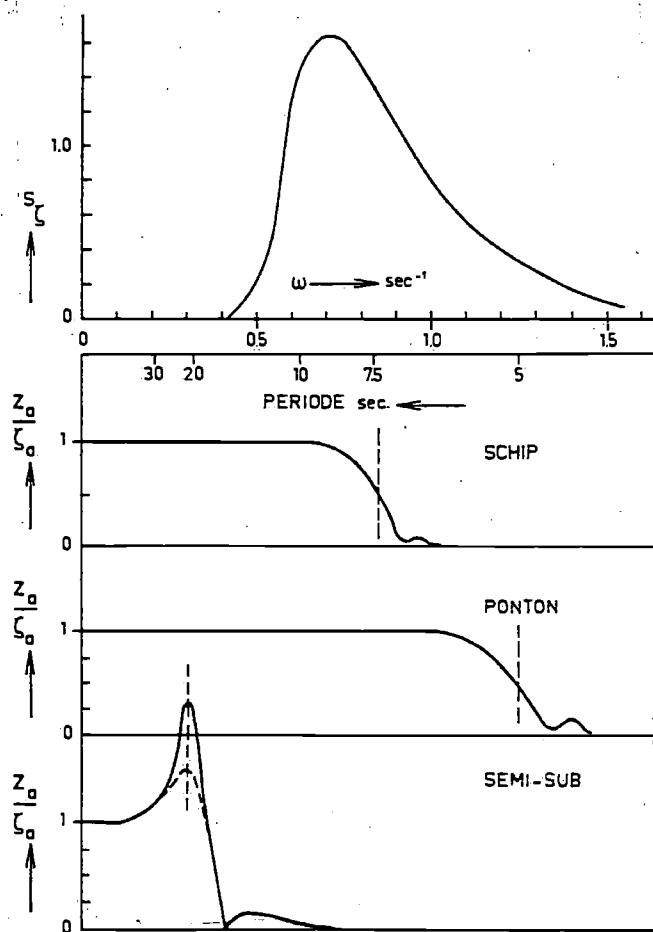
De gemiddelde waarde van het hoogste 1/3 deel wordt wel de significante amplitude genoemd. In verband met zeegolven en bewegingsamplituden is dit een in de praktijk veel gebruikt begrip.

De kans dat de significante waarde wordt overschreden volgt uit:

$$P[x > \bar{x}_{a1/3}] = \exp\left[\frac{-4 \cdot m_{0x}}{2 \cdot m_{0x}}\right] = e^{-2} \approx \frac{1}{7}$$

Voor de andere bewegingen gelden analoge betrekkingen, mits het beschouwde spektrum "smal" is. Indien dus het oppervlak van dat spektrum bekend is, dan is de kans dat een bepaalde amplitude wordt overschreden gemakkelijk te berekenen. Experimenten met modellen en ware grootte proeven hebben de bruikbaarheid van dergelijke berekeningen aangetoond.

De onderlinge situering van het golfspektrum en de amplitude karakteristiek in het frequentiegebied is bepalend voor de responsie. Dit is geïllustreerd in de volgende figuur waar de amplitude karakteristieken van een semi-submersible, een schip en een ponton met eigen perioden van respectievelijk 25, 8 en 6 seconden zijn weergegeven. De gemiddelde horizontale snelheid wordt in alle drie gevallen gelijk aan nul gesteld.



Figuur 5-D. Frequentie karakteristieken voor een schip, een ponton en een semi-submersible.

Het schip en het ponton hebben amplitude karakteristieken die zich over een zeer groot deel van de golffrequenties uitstrekken. Ondanks de geringe vergrotingsfactor als gevolg van de relatief grote demping van beide vaartuigen kunnen de significante verticale bewegingen daardoor aanzienlijk zijn. De semi-submersible daarentegen heeft door de grote eigen periode een amplitude karakteristiek, die zich voor een groot deel bevindt in een frequentiegebied waar slechts geringe golfenergie aanwezig is. Ondanks de geringe demping is de significante verticale beweging van de semi submersible daardoor klein.

In voorgaande figuur zijn voor de semi submersible twee amplitude karakteristieken weergegeven, corresponderend met dempingswaarden die een factor twee verschillen. Het is duidelijk dat vergroting van de demping weinig invloed heeft op de significante waarde van de verticale verplaatsing in zeevang, als gevolg van de zogenaamde eerste orde golfkrachten.

Om de beweging van het ponton en van het schip te beoordelen moet bedacht worden dat iedere uitbreiding van de frequentiekarakteristiek naar hogere frequenties nadelig kan zijn. Immers versnellingen zijn evenredig met  $\omega^2$ , zodat een verkleining van de eigen periode van grote drijvende konstrukties niet zinvol is.

Soms kan, voor het berekenen van de frequentie karakteristieken van drijvende offshore constructies de constructie in karakteristieke onderdelen gesplitst worden, zoals cylinders, bollen, rechthoekige vormen e.d. (Hooft).

In principe is de bepaling van de bewegingen in golven analoog aan de methoden voor schepen. Een kenmerkend verschil is echter de vorm, die als geheel niet als een "slender body" beschouwd kan worden. Ook zijn de toegepaste vormen van onderdelen vaak niet "stroomlijn vormig".

De golfkrachten op de onderdelen kunnen op vrij eenvoudige wijze berekend worden als de afmetingen ervan bekend zijn. Er wordt wel verondersteld dat de afmetingen van elk van de beschouwde stukken klein is ten opzichte van de beschouwde golflengte, dat wil zeggen kleiner dan  $\lambda/5$ .

Lange cylinders worden opgedeeld in kleine moten. In de tweede plaats wordt aangenomen dat interacties tussen de diverse onderdelen verwaarloosd mogen worden, zodat de totale hydrodynamische kracht op de drijvende constructies gevonden wordt door de diverse bijdragen lineair te superponeren.

Zoals hiervoor beschreven, worden de hydrodynamische krachten van een drijvende constructie gesplitst in:

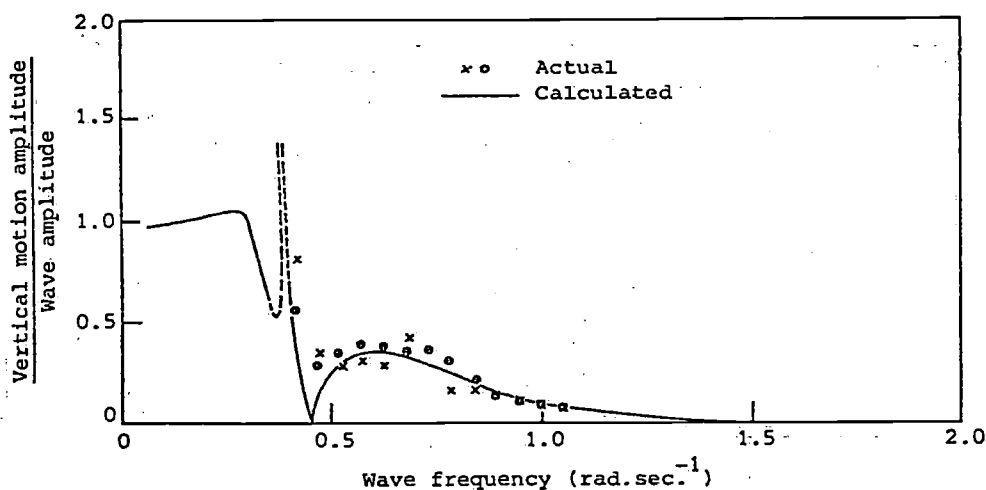
	massakrachten	( $a \cdot \ddot{z}$ )
A. Reactiekrachten	dempingskrachten	( $b \cdot \dot{z}$ )
	veerkrachten	( $c \cdot z$ )
	massakrachten	( $a \cdot \ddot{\zeta}^*$ )
B. Excitatiekrachten	dempingskrachten	( $b \cdot \dot{\zeta}^*$ )
	Froude-Krylov krachten	( $c \cdot \zeta^*$ )

Tussen haakjes zijn de overeenkomstige termen van een rechte cirkel cylinder (hoofdstuk 4) ter herkenning aangegeven.

De dempingskracht  $b \cdot \dot{\zeta}^*$  in de excitatie, kan bij semi-submersibles over het algemeen verwaarloosd worden.

De bereikte nauwkeurigheid in vergelijking met modelproef resultaten is goed te noemen, ondanks de sterk vereenvoudigde aannamen.

De volgende figuur geeft een vergelijking van een berekende en een op ware grootte gemeten amplitude karakteristiek van het Staflo boorplatform.



Figuur 5-E. Dompamplitude karakteristiek van het Staflo boorplatform.

Om de bewegingsamplituden klein te houden kan men de voorwaarde stellen dat de golfexcitatie minimaal is bij de eigen frequentie van de drijvende konstruktie.

Uit hoofdstuk 4 volgt voor een cilinder:

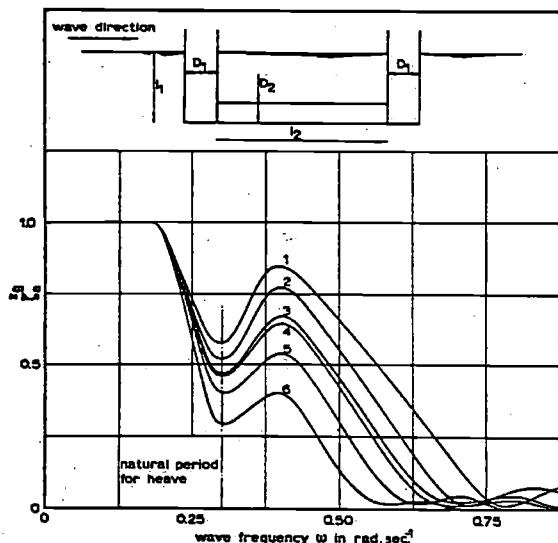
$$F_a = \zeta_a \cdot e^{-kT} \cdot [(c - a \cdot \omega^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2]^{-1/2}$$

Voor een samengestelde konstruktie geldt een analoge uitdrukking.

De eigen frequentie volgt uit:

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a+m}$$

Door geschikte vormgeving kan men de c, a en m van samengestelde konstrukties beïnvloeden en daarmee de amplitude karakteristiek. Hooft (1972) heeft met behulp van de genoemde voorwaarde de onderlinge verhoudingen van samenstellende delen van semi submersibles volgens volgend figuur geanalyseerd.



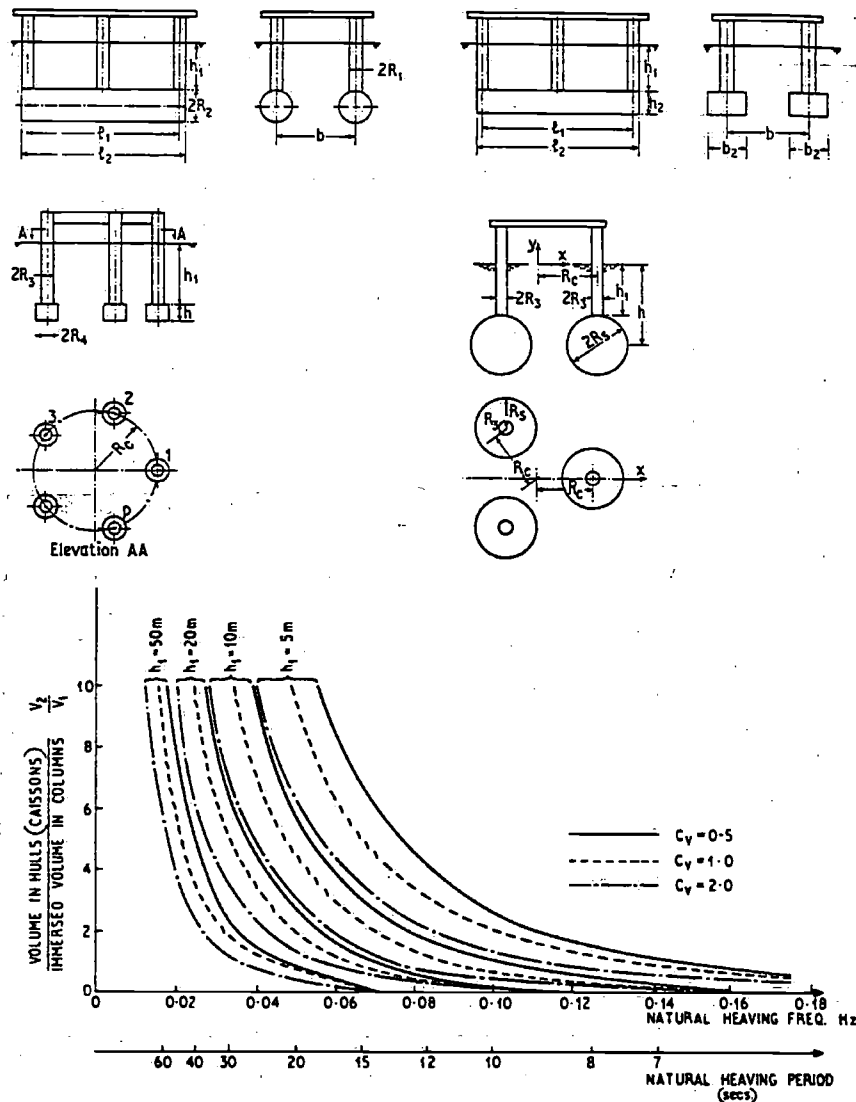
Platform	Dimensions (in m)			
	D <sub>1</sub>	l <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	l <sub>2</sub>
1	11.11	16.52	10.06	111.1
2	11.11	20.71	8.91	133.5
3	11.11	25.82	8.02	155.8
4	25.00	31.61	17.33	150.0
5	25.00	38.12	15.30	175.0
6	25.00	55.06	11.62	225.0

Figuur 5-F. Bewegings-optimalisatie van semi-submersibles.

De berekeningen van Hooft stemmen goed overeen met de resultaten van modelproeven, zodat de methode geschikt is voor optimalisatie doeleinden. De verschillen in verticale beweging door vormvariatie, zoals geïllustreerd in deze figuur zijn zeer groot.

Voor het bereiken van de vereiste zeer grote eigen dompperioden van semi- submersibles is het nodig een groot onderwater volume te combineren met een relatief kleine doorsnijding met het wateroppervlak.

Het effect daarvan is aangegeven in de volgende figuur, waar de eigen damp periode voor een aantal typische semi-submersible configuraties zijn samengevat (Oo en Miller, 1977).



Figuur 5-G. Het effect van de verdeling van het onderwater volume op de eigen periode van het dompen.

De hierbij gebruikte coëfficiënten  $C_v$  zijn hydrodynamische massa-coëfficiënten voor bollen ( $C_v = 0.5$ ) cilindervormige doorsneden ( $C_v = 1.0$ ) en rechthoekige elementen ( $C_v = 1.2 - 4.0$ ). De coëfficiënt  $C_v$  is de verhouding van de hydrodynamische massa en de massa van het verplaatste water. Ook hier blijkt dat de ontwerper door keuze van de vorm de dynamische eigenschappen aanzienlijk kan beïnvloeden.

## 6. Bijzondere aspecten.

### 6-1. Laag frequente bewegingen en driftkrachten.

De registraties van de horizontale bewegingen van een verankerde drijvende constructie, bijvoorbeeld een booreiland, tonen aan dat de responsies bestaan uit:

1. een gemiddelde verplaatsing als gevolg van krachten die gemiddeld ongelijk aan nul zijn.  
Die krachten worden veroorzaakt door stroom, wind en bestaan daarnaast uit z.g. driftkrachten.  
Driftkrachten worden veroorzaakt door niet lineaire (2e orde) golf effecten.  
De 1e orde golfkrachten hebben een harmonisch oscillerend karakter en zijn gemiddeld nul.
2. een oscillerend gedeelte waarvan de frequenties liggen in een frequentie gebied, waar het beschouwde golfspektrum een significante energie inhoud heeft.  
De oscillaties worden veroorzaakt door de zogenaamde 1e orde golfkrachten, zoals in het voorgaande is behandeld.
3. een oscillerend gedeelte, gekenmerkt door veel lagere frequenties dan die van de heersende zeegang.  
Deze bewegingen worden veroorzaakt door niet lineaire elementen in de golfkrachten en/of in de verankering.

De krachten door stroom en wind en de driftkrachten veroorzaken een nieuwe evenwichtsstand van de verankerde drijvende constructie die met behulp van de grootte van de krachten en de elasticiteit van de verankering bepaald kan worden.

Overigens wordt opgemerkt dat wind en stroomkrachten ook met de tijd kunnen variëren, als gevolg van fluktuaties in de windsterkte en in het getij. In hoofdzaak zijn dat laagfrequente fluktuaties.

De veerkracht van de verandering, in combinatie met de schijnbare massa van de drijvende constructies is bepalend voor de eigen periode van de horizontale oscillaties. Over het algemeen is de eigen periode van de horizontale beweging zeer groot en is de demping van de beweging relatief klein. Bij resonantie kunnen dus grote bewegingsamplitude ontstaan, zoals ook in de praktijk is gebleken. Dat stelt hoge eisen aan een verankeringsysteem: een groot deel van de belasting van de verankering ontstaat door de laagfrequente bewegingen.

### Niet-lineaire golfkrachten.

Laag frequente excitatie wordt wel verklaard door bepaalde niet-lineaire effecten. In de eerste plaats volgt daarom een beschouwing over het gevolg van niet lineaire (zogenaamde 2e orde) golfkrachten. De bewegingsvergelijking van de horizontale bewegingen van een verankerde drijvende konstruktie wordt voorgesteld door:

$$(m + a_x) \cdot \ddot{x} + b_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = f_1 \cdot \zeta + f_2 \cdot \zeta^2$$

waarin:

- $a_x$  - de hydrodynamische massa in x-richting
- $b_x$  - de dempingscoëfficiënt voor de beschouwde horizontale beweging
- $c_x$  - de veerconstante van de verankering
- $f_1 \cdot \zeta$  - het lineaire gedeelte van de golfexcitatie
- $f_2 \cdot \zeta^2$  - het 2e orde deel van de golfexcitatie

Als voorbeeld beschouwen we een excitatie, veroorzaakt door de twee enkelvoudige golfcomponenten:

$$\zeta(t) = \zeta_{a1} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \epsilon_1) + \zeta_{a2} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \epsilon_2)$$

Voor  $\zeta^2(t)$  is dan te schrijven:

$$\begin{aligned} \zeta^2(t) = & \frac{1}{2} \cdot (\zeta_{a1}^2 + \zeta_{a2}^2) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^2 \zeta_{ai} \cdot \cos(2 \cdot (\omega_i \cdot t + \epsilon_i)) + \\ & + \zeta_{a1} \cdot \zeta_{a2} \cdot \cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot t + (\epsilon_1 + \epsilon_2)) + \\ & + \zeta_{a1} \cdot \zeta_{a2} \cdot \cos((\omega_2 - \omega_1) \cdot t + (\epsilon_2 - \epsilon_1)) \end{aligned}$$

Nu is de bewegingsvergelijking lineair zodat lineaire superpositie toegepast mag worden. De invloed van de term  $f_2 \zeta^2$  mag dus apart beschouwd worden en in het bijzonder is het laagfrequente deel,  $F_{\Delta\omega}$ , van die term van belang:

$$F_{\Delta\omega} = f_2 \cdot \zeta_{a1} \cdot \zeta_{a2} \cdot \cos(\Delta\omega \cdot t + \Delta\epsilon),$$

waarin:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad \text{en} \quad \Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$$

De amplitude van de horizontale beweging, behorend bij de frequentie  $\Delta\omega$  is in analogie met het voorgaande:

$$x_a = \frac{f_2 \cdot \zeta_{a1} \cdot \zeta_{a2}}{[ (c_x - (a_x + m) \cdot (\Delta\omega)^2)^2 + b_x^2 \cdot (\Delta\omega)^2 ]^{1/2}}$$

of

$$x_a = \frac{f_2 \cdot \zeta_{a1} \cdot \zeta_{a2} / (m + a_x)}{\left[ (\omega_{0x}^2 - (\Delta\omega)^2)^2 + \left( \frac{b_x \cdot \Delta\omega}{m + a_x} \right)^2 \right]^{1/2}}$$



Als de verschil frequentie  $\Delta\omega$  gelijk is aan de eigen frequentie  $\omega_{0x}$  dan treedt resonantie op, waarbij de grootte van de bewegingsamplitude bepaald wordt door de geringe demping en de grootte van de excitatie.

Geringe niet-lineariteiten in de golfexcitatie kunnen ontstaan als gevolg van de vorm van de konstruktie, door niet lineaire demping en door niet lineaire hydrodynamische massa als gevolg van de geometrie van de konstruktie.

In ons voorbeeld is de keuze van  $\omega_1$  en  $\omega_2$  bepalend voor de grootte van  $\Delta\omega$  en daarmee voor het feit of die verschil frequentie al of niet gelijk is aan de eigen frequentie  $\omega_{0x}$ .

In het meer algemene geval ontstaat de golfexcitatie door een onregelmatige golf met spektrum  $S_{\zeta}(\omega)$ .

De samenstellende componenten kunnen in een reeks van combinaties laag frequente 2e orde golfkrachten geven. Er ontstaat als het ware een laag frequent 2e orde golfspektrum, waarbij excitatie in de eigen frequentie kan voorkomen.

De niet lineaire excitatie kan blijkbaar optreden bij een systeem dat overigens strikt lineaire eigenschappen kan bezitten.

### Niet-lineaire veer karakteristieken.

Een andere werking van de laag frequente oscillaties wordt gegeven door uit te gaan van een niet-lineaire veer karakteristiek van de verankering.

Stel dat niet-lineaire bewegingsvergelijking met harmonische excitatie voor dat geval luidt:

$$(m + a_x) \cdot \ddot{x} + c_1 \cdot \dot{x} + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 = X_a \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

De dempingsterm is ter vereenvoudiging weggelaten.

Het blijkt dat in zo'n geval subharmonische oplossingen bestaan met frequenties:

$$\frac{\omega}{2} \quad \text{en} \quad \frac{\omega}{3}$$

Indien de golfexcitatie bestaat uit twee componenten met frequenties  $\omega_1$  en  $\omega_2$  dan bevat de oplossing termen met o.a. de frequenties:

$$(\omega_1 - \omega_2), (\omega_1 - 2 \cdot \omega_2) \text{ en } (2 \cdot \omega_1 - \omega_2)$$

Het blijkt dus dat zowel niet lineariteiten in de excitatie, als niet lineariteiten in het systeem zelf aanleiding kunnen geven tot laag frequente oscillaties van drijvende konstrukties.

### Weerstandskrachten.

De weerstandskrachten werkend op de drijvende konstruktie in een stroom kunnen slechts bepaald worden door gebruik te maken van empirische gegevens, bijvoorbeeld verkregen met behulp van model-experimenten van onderdelen van de konstruktie of van de gehele konstruktie.

De meetresultaten worden voor semi-submersibles vaak gegeven in de vorm van weerstandscoefficienten, waarbij als goede benadering geldt dat de weerstand evenredig is met het kwadraat van de snelheid. Dat is een gevolg van de meestal niet stroomlijn vormige vorm van het onder water schip waarbij op min of meer gefixeerde plaatsen van de konstruktie de stroming loslaat. Dat geldt niet voor scheepsvormen waarbij het verband tussen snelheid en weer-

stand, vooral bij hogere snelheden zeer gekompliceerd is. Uit modelproeven in windtunnels is ook gebleken dat de wind weerstand van drijvende konstrukties vaak evenredig is met het kwadraat van de windsnelheid. De wind weerstand kan aanzienlijk zijn bij ontwerpcondities, waarbij windsnelheden van 50 - 70 m/s beschouwd worden.

Naast de stroom- en windkrachten werken er op drijvende konstrukties in zeeegang driftkrachten veroorzaakt door de bewegingen van de konstruktie ten opzichte van het water, waarbij niet lineaire krachten optreden. Ook moet gerekend worden met de massa transport snelheid van de golven.

De weerstand die onderdelen van een drijvende konstruktie ondervinden, is evenredig met het kwadraat van de relatieve snelheid, omdat in hoofdzaak met viskeuze krachten gerekend moet worden. De relatieve oscillerende snelheid ontstaat door de bewegingen van de konstruktie in de ruimte en door de orbitaal snelheid van de golven. Voor het geval van een enkelvoudige golf is de amplitude van de relatieve snelheid evenredig met de golfamplituden en door het harmonische karakter van de beweging bevat het kwadraat van de snelheid (evenals de resulterende kracht X) een konstant gedeelte dat driftkracht genoemd wordt.

Immers:

$$\begin{aligned} X &= c_1 \cdot V_r^2 \\ &= c_2 \cdot \zeta_a^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot \zeta_a^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot \zeta_a^2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \end{aligned}$$

Bij deze berekeningen kunnen de weerstandscoefficienten volgens Keulegan en Carpenter of Sarpkaya gebruikt worden. Die coefficienten gelden voor gladde platen en cilinders met een harmonische snelheid ten opzichte van het omringende water. Ruwheid door aangroeiing kan een aanzienlijke vergroting van de weerstandskrachten ten gevolge hebben.

Voor het geval van stroom en golven bestaat de relatieve water snelheid uit een konstant deel en een harmonisch variërend deel dat ontstaat door de beweging van de drijvende konstruktie in golven.

Men gebruikt in dat geval het gemiddeld kwadraat van de relatieve snelheid, maar het is wel de vraag of de genoemde weerstandscoefficienten dan toepasbaar zijn.

#### Driftsnelheid van Stokes.

De massa transport snelheid van golven is evenredig met het kwadraat van de golfhoogte. Deze transport snelheid is af te leiden uit een 2e orde golftheorie. De zogenaamde driftsnelheid van Stokes is in die theorie een konstante horizontale snelheid van de waterdeeltjes:

$$V_d = \omega \cdot k \cdot \zeta_a^2 \cdot e^{-2 \cdot k \cdot z_0}$$

Deze snelheid kan per onderdeel van het onderwater gedeelte opgeteld worden bij de stroomsnelheid als gevolg van het getij, voor de bepaling van de hydrodynamische krachten.

**Niet-lineaire potentiaal golfdrukken.**

Er is ook een driftkracht af te leiden uit de niet lineaire potentiaal golfdruk, die evenredig is met het kwadraat van de golfamplituden. De krachten die uit deze 2e orde golfdruk zijn af te leiden zijn voor semi-submersibles klein ten opzichte van de viskeuze krachten. Dat is voor schepen en pontons niet het geval. Langzaam variërende golfamplituden ontstaan als twee enkelvoudige golven met gering frequentie verschil gesuperponeerd worden. In zo'n geval zal de driftkracht, die evenredig is met het kwadraat van de golfamplitude, langzaam variëren en ook op deze wijze tot resonantie aanleiding kunnen geven.

Als gevolg van de vele onzekere factoren bij het berekenen van laag frequente bewegingen van drijvende konstrukties in zeegang en van de driftkrachten gebruikt men vaak modelexperimenten om gegevens voor het ontwerp van een verankeringsysteem te verkrijgen.

## 6-2. Dynamisch positioneren.

Booreilanden en andere drijvende offshore konstrukties moeten zo goed mogelijk in horizontale richting gefixeerd worden om op de juiste wijze te kunnen functioneren. Dat gebeurt met een verankeringsysteem, of met een dynamisch positioneringssysteem waarvan het ontwerpen pas mogelijk is als de krachten die op het gehele systeem werken, bekend zijn.

Stroom, wind en driftkrachten zijn belangrijk in verband met het dynamisch positioneren van drijvende konstrukties. Zo'n systeem, maakt gebruik van stuwkracht eenheden die krachten in horizontale richting op de konstruktie kunnen uitoefenen, om daarmee een gegeven positie binnen een bepaalde tolerantie te kunnen handhaven. De dimensionering van de stuwkracht eenheden hangt af van de krachten die door stroom, wind en golven worden uitgeoefend. De grootte van de door de stuwkracht eenheden momentaan te produceren krachten, worden door een regelsysteem bepaald afhankelijk van de verplaatsing, de verplaatsingssnelheid en versnelling ten opzichte van de verlangde positie.

Ook kunnen daarbij gegevens omtrent windsnelheid en stroom gebruikt worden. De verlangde informatie wordt verkregen door een meetstelsel, dat de grootte en richting van de afwijkingen ten opzichte van de verlangde positie bepaalt. Ook wordt de grootte van wind en stroom gemeten. In verband met het oscillerende karakter van een deel van de versturende krachten moeten de dynamische karakteristieken van de stuwkracht eenheden bekend zijn om het regelsysteem te kunnen ontwerpen.

Dit soort regelsystemen kan met regeltechnische methoden geoptimaliseerd worden. Voor het ontwerp van boorschepen heeft men uitvoerige studies naar het regelsysteem van de dynamische positionering uitgevoerd met behulp van analoge simulaties op een rekenautomaat (Wahab).

### 6-3. Berekeningen in het tijdsdomein.

#### Calculations in the time domain.

The non-linear behaviour of floating structures can be described by Cummins equations, which have to be solved in the time domain. These Cummins equations require hydromechanical coefficients, retardation functions and wave load series as an input, together with geometrical data of the ship and operational data. The coordinate systems, used here, are defined in the figure below.

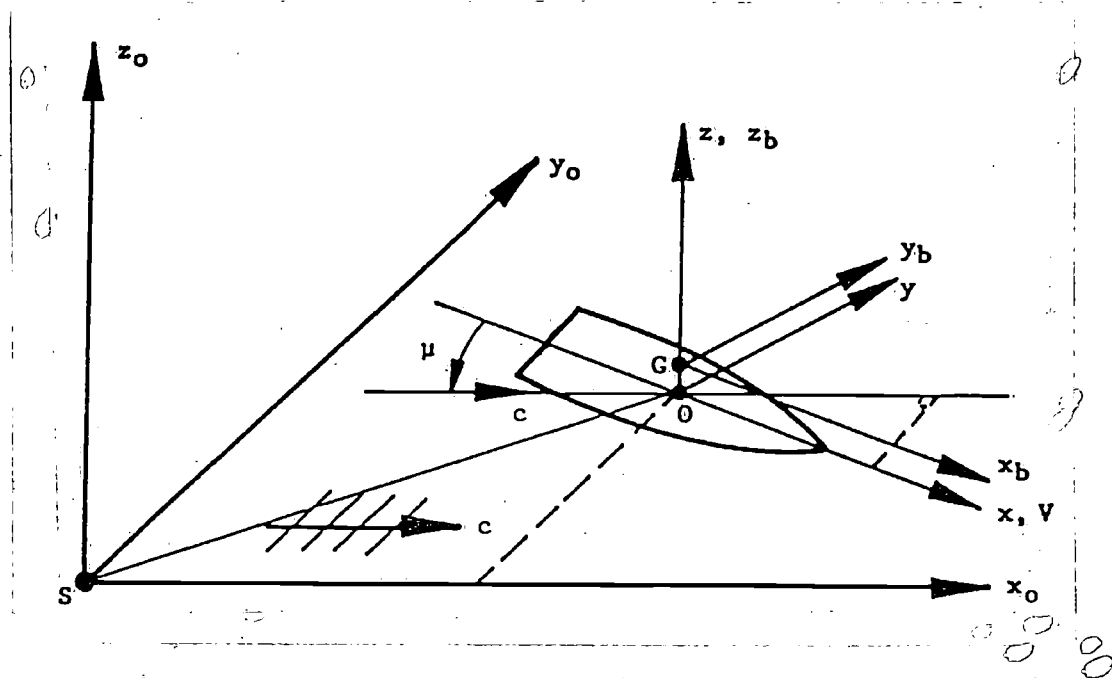


Figure 6-3-A. Coordinate System and Definitions

Three right-handed coordinate systems are defined:

G- $(x_b, y_b, z_b)$ : connected to the ship,  
 with G at the ship's centre of gravity,  
 $x_b$  in the ship's centre line,  
 $y_b$  in the ship's port side direction and  
 $z_b$  in the upward direction

S- $(x_0, y_0, z_0)$ : fixed in space,  
 with S in the still water surface,  
 $x_0$  in the ship's forward direction at  $t=0$ ,  
 $y_0$  in the ship's port side direction at  $t=0$  and  
 $z_0$  in the ship's upward direction at  $t=0$   
 The axes  $x_0$  and  $y_0$  are lying in the still water surface.

O- $(x, y, z)$  or  
 O- $(x_1, x_2, x_3)$ : moving with the ship's displacement,  
 with O above or under the average position of the  
 ship's centre of gravity G,  
 $x$  or  $x_1$  parallel to still water surface  
 $y$  or  $x_2$  parallel to still water surface  
 $z$  or  $x_3$  in the upward direction  
 The angular motions of the body about the body  
 axes are denoted by:  
 $\varphi, \theta$  and  $\psi$  or  $x_4, x_5$  and  $x_6$

### Frequency Domain Calculations

Based on Newton's second law of dynamics, the equations of motion of a floating object in a seaway are given by:

$$\sum_{j=1}^6 M_{i,j} \ddot{x}_j = F_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, 6$$

in which:

$M_{i,j}$  : 6x6 matrix of solid mass and inertia of the body  
 $\ddot{x}_j$  : acceleration of the body in direction j  
 $F_i$  : sum of forces or moments acting in direction i

When defining a linear system with simple harmonic wave exciting forces and moments, defined by:

$$F_{wai}(\omega, t) = F_{wai}(\omega) \cdot \cos[\omega t + \epsilon_i(\omega)]$$

then the resulting simple harmonic motions are:

$$x_j(\omega, t) = x_{aj}(\omega) \cdot \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}_j(\omega, t) = -\omega \cdot x_{aj}(\omega) \cdot \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x}_j(\omega, t) = -\omega^2 \cdot x_{aj}(\omega) \cdot \cos(\omega t)$$

The hydromechanic forces and moments  $F_i$ , acting on the free floating object in waves, consist of:

- linear hydrodynamic reaction forces and moments expressed in terms with the hydrodynamic mass and damping coefficients:

$$-a_{i,j}(\omega) \cdot \ddot{x}_j(\omega, t) - b_{i,j}(\omega) \cdot \dot{x}_j(\omega, t)$$

- linear hydrostatic restoring forces and moments expressed in a term with a spring coefficient:

$$-c_{i,j} \cdot x_j(\omega, t)$$

With this, the linear equations of motion become:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 [M_{i,j} \cdot \ddot{x}_j(\omega, t)] &= \\ &= \sum_{j=1}^6 [-a_{i,j}(\omega) \cdot \ddot{x}_j(\omega, t) - b_{i,j}(\omega) \cdot \dot{x}_j(\omega, t) - c_{i,j} \cdot x_j(\omega, t)] + \\ &+ F_{wai}(\omega) \cdot \cos[\omega t + \epsilon_i(\omega)] \end{aligned}$$

for  $i = 1, 2, \dots, 6$

So:

$$\sum_{j=1}^6 \left[ [M_{i,j} + a_{i,j}(\omega)] \cdot \ddot{x}_j(\omega, t) + b_{i,j}(\omega) \cdot \dot{x}_j(\omega, t) + c_{i,j} \cdot x_j(\omega, t) \right] =$$

$$= F_{wai}(\omega) \cdot \cos[\omega t + \epsilon_i(\omega)]$$

for  $i = 1, 2, \dots, 6$

The hydrodynamic coefficients  $a_{i,j}(\omega)$  and  $b_{i,j}(\omega)$  and the wave load components  $F_{wai}(\omega)$  and  $\epsilon_i(\omega)$  can be calculated with the available two- or three-dimensional techniques.

So for this the results of strip theory programs, like for instance the program SEAWAY, can be used. According to the strip theory, the total hydromechanic coefficients and wave loads of the ship can be found easily by integrating the cross sectional values over the ship length.

The strip theory is a slender body theory, so one should expect less accurate predictions for ships with low length to breadth ratios. However, experiments have shown that the strip theory appears to be remarkably effective for predicting the motions of ships with length to breadth ratios down to about 3.0 or sometimes even lower.

The strip theory is based upon the potential flow theory. This holds that viscous effects are neglected, which can deliver serious problems when predicting roll motions at resonance frequencies. In practice, viscous roll damping effects can be accounted for by experimental results or by empirical formulas.

The strip theory is based upon linearity. This means that the ship motions are supposed to be small, relative to the cross sectional dimensions of the ship. Only hydrodynamic effects of the hull below the still water level are accounted for. So when parts of the ship go out of or into the water or when green water is shipped, inaccuracies can be expected. Also, the strip theory does not distinguish between alternative above water hullforms.

Nevertheless these limitations for zero forward speed, generally the strip theory appears to be a successful and practical theory for the calculation of the wave induced motions of a ship.

For the determination of the two-dimensional potential coefficients for sway, heave and roll motions of not fully submerged ship-like cross sections, these cross sections can be mapped conformally to the unit circle by the so-called Two-Parameter Lewis Transformation. Also the N-Parameter Close-Fit Conformal Mapping Method has been included here.

The advantage of conformal mapping is that the velocity potential of the fluid around an arbitrary shape of a cross section in a complex plane can be derived from the more convenient circular cross section in another complex plane. In this manner hydrodynamic problems can be solved directly with the coefficients of the mapping function, as reported by Tasai.

~~The advantage of making use of the Two-Parameter Lewis Conformal Mapping Method is that the frequency-depending potential coefficients are a function of the breadth, the draught and the area of the cross section, only.~~

Another method is the Frank Method, also suitable for fully submerged cross sections. This method determines the velocity potential of a floating or a submerged oscillating cylinder of infinite length by the integral equation method utilising the Green's function, which represents a pulsating source below the free surface.

To avoid so-called "irregular frequencies" in the operational frequency range of not fully submerged cross sections, each Frank section will be closed automatically at the free surface with a few extra points. This results into a shift of these irregular frequencies towards a higher frequency region.

The two-dimensional pitch and yaw coefficients follow from the heave and sway moments, respectively.

Finally, a method based on work published by Kaplan and Jacobs and a longitudinal strip method has been used for the determination of the two-dimensional potential coefficients for the surge motion.

At the following pages, the hydromechanic coefficients and the wave loads for zero forward speed are given as they can be derived from the two-dimensional values, defined in a coordinate system with the origin 0 in the waterline.

The symbols, used here, are:

$M_{i,j}$	solid mass and inertia coefficients of the body
$m_{i,j}'(\omega)$	sectional hydrodynamic mass coefficient
$n_{i,j}'(\omega)$	sectional hydrodynamic damping coefficient
$F_{wi}'(\omega)$	sectional wave exciting force or moment
$FK_i'(\omega)$	sectional Froude-Krilov force or moment
$\dot{V}_{wi}^*(\omega)$	equivalent sectional orbital acceleration
$V_{wi}^*(\omega)$	equivalent sectional orbital velocity
$y_w'$	sectional half breadth of waterline
$x_b$	longitudinal distance of cross section to centre of gravity, positive forwards
OG	vertical distance of waterline to centre of gravity, positive upwards
BG	vertical distance of centre of buoyancy to centre of gravity, positive upwards
$V$	volume of displacement
$k_{xx}$	radius of gyration in air for roll
$k_{yy}$	radius of gyration in air for pitch
$k_{zz}$	radius of gyration in air for yaw
$\rho$	density of water
$g$	acceleration of gravity



The solid mass and the potential mass coefficients are given by:

$$M_{1,1} = M = \rho \cdot \nabla$$

$$a_{1,1} = \int_L m_{1,1}' \cdot dx_b$$

$$M_{1,3} = 0$$

$$a_{1,3} = 0$$

$$M_{1,5} = 0$$

$$a_{1,5} = -BG \cdot a_{1,1}$$

$$M_{2,2} = M = \rho \cdot \nabla$$

$$a_{2,2} = \int_L m_{2,2}' \cdot dx_b$$

$$M_{2,4} = 0$$

$$a_{2,4} = \int_L m_{2,4}' \cdot dx_b + OG \cdot a_{2,2}$$

$$M_{2,6} = 0$$

$$a_{2,6} = \int_L m_{2,2}' \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$M_{3,3} = M = \rho \cdot \nabla$$

$$a_{3,3} = \int_L m_{3,3}' \cdot dx_b$$

$$M_{3,5} = 0$$

$$a_{3,5} = - \int_L m_{3,3}' \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$M_{4,4} = I_{xx} = k_{xx}^2 \cdot \rho \cdot \nabla$$

$$a_{4,4} = \int_L m_{4,4}' \cdot dx_b + OG \cdot \int_L m_{4,2}' \cdot dx_b + OG \cdot a_{2,4}$$

$$M_{4,6} = 0$$

$$a_{4,6} = \int_L m_{4,2}'' \cdot x_b \cdot dx_b + OG \cdot a_{2,6}$$

$$M_{5,5} = I_{yy} = k_{yy}^2 \cdot \rho \cdot \nabla$$

$$a_{5,5} = \int_L m_{3,3}' \cdot x_b^2 \cdot dx_b - BG \cdot a_{1,5}$$

$$M_{6,6} = I_{zz} = k_{zz}^2 \cdot \rho \cdot \nabla$$

$$a_{6,6} = \int_L m_{2,2}' \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

$$M_{j,i} = M_{i,j}$$

$$a_{j,i} = a_{i,j}$$

The remaining mass coefficients are zero.

The potential damping and the spring coefficients are given by:

$$b_{1,1} = \int_L n_{1,1}' \cdot dx_b$$

$$c_{1,1} = 0$$

$$b_{1,3} = 0$$

$$c_{1,3} = 0$$

$$b_{1,5} = -BG \cdot b_{1,1}$$

$$c_{1,5} = 0$$

$$b_{2,2} = \int_L n_{2,2}' \cdot dx_b$$

$$c_{2,2} = 0$$

$$b_{2,4} = \int_L n_{2,4}' \cdot dx_b + 0G \cdot b_{2,2}$$

$$c_{2,4} = 0$$

$$b_{2,6} = \int_L n_{2,2}' \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$c_{2,6} = 0$$

$$b_{3,3} = \int_L n_{3,3}' \cdot dx_b$$

$$c_{3,3} = \int_L y_w' \cdot dx_b$$

$$b_{3,5} = - \int_L n_{3,3}' \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$c_{3,5} = -2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_L y_w'' \cdot x_b \cdot dx_b$$

$$b_{4,4} = \int_L n_{4,4}' \cdot dx_b + 0G \cdot \int_L n_{4,2}' \cdot dx_b + 0G \cdot b_{2,4}$$

$$c_{4,4} = \rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GM$$

$$b_{4,6} = \int_L n_{4,2}' \cdot x_b \cdot dx_b + 0G \cdot b_{2,6}$$

$$c_{4,6} = 0$$

$$b_{5,5} = \int_L n_{3,3}' \cdot x_b^2 \cdot dx_b - BG \cdot b_{1,5}$$

$$c_{5,5} = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_L y_w' \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

$$b_{6,6} = \int_L n_{2,2}' \cdot x_b^2 \cdot dx_b$$

$$c_{6,6} = 0$$

$$b_{j,i} = b_{i,j}$$

$$c_{j,i} = c_{i,j}$$

The remaining damping and spring coefficients are zero.

The wave loads are given by:

$$F_{w1} = \int_L F_{w1}' \cdot dx_b$$

$$\text{with: } F_{w1}' = +m_{11}' \cdot \dot{V}_{w1}^* + n_{11}' \cdot V_{w1}^* + FK_1'$$

$$F_{w2} = \int_L F_{w2}' \cdot dx_b$$

$$\text{with: } F_{w2}' = +m_{22}' \cdot \dot{V}_{w2}^* + n_{22}' \cdot V_{w2}^* \\ + m_{24}' \cdot \dot{V}_{w4}^* + n_{24}' \cdot V_{w4}^* + FK_2'$$

$$F_{w3} = \int_L F_{w3}' \cdot dx_b$$

$$\text{with: } F_{w3}' = +m_{33}' \cdot \dot{V}_{w3}^* + n_{33}' \cdot V_{w3}^* + FK_3'$$

$$F_{w4} = \int_L F_{w4}' \cdot dx_b$$

$$\text{with: } F_{w4}' = +m_{42}' \cdot \dot{V}_{w2}^* + n_{42}' \cdot V_{w2}^* + FK_4' + OG \cdot F_{w2}'$$

$$F_{w5} = \int_L F_{w5}' \cdot dx_b$$

$$\text{with: } F_{w5}' = -F_{w1}' \cdot BG - F_{w3}' \cdot x_b$$

$$F_{w6} = \int_L F_{w6}' \cdot dx_b$$

$$\text{with: } F_{w6}' = F_{w2}' \cdot x_b$$

These formulations of the hydrodynamic exciting and reaction forces and moments can only be used in the frequency domain, since  $a_{i,j}$  and  $b_{i,j}$  both depend on the frequency of motion  $\omega$  only and the exciting wave loads have a linear relation with the wave amplitude. In irregular waves the response of the body can be determined by using the superposition principle, so using linear response amplitude operators between motion and wave amplitudes.

In the following figures an example has been given of the hydrodynamic potential mass and damping and the wave loads for roll in the frequency domain.

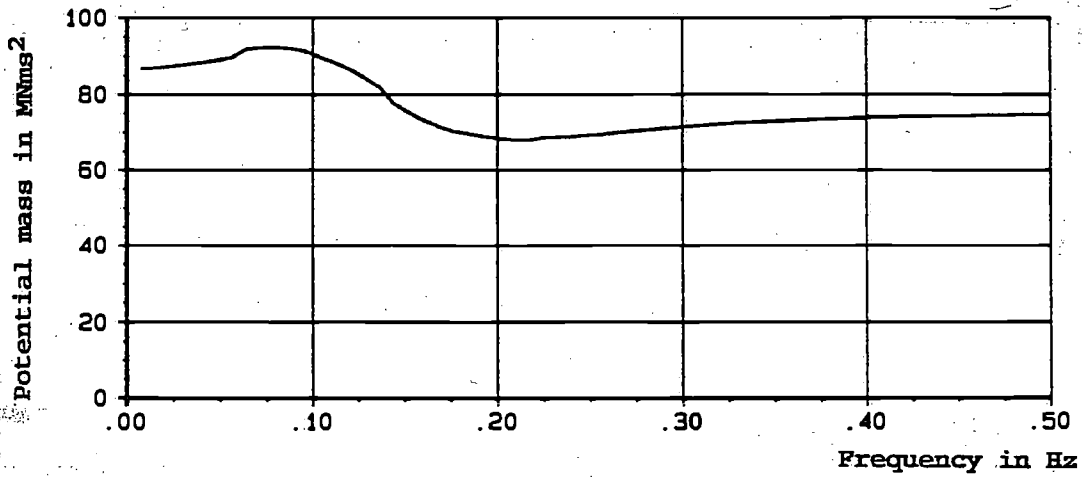


Figure 6-3-B. Hydrodynamic Potential Mass for Roll

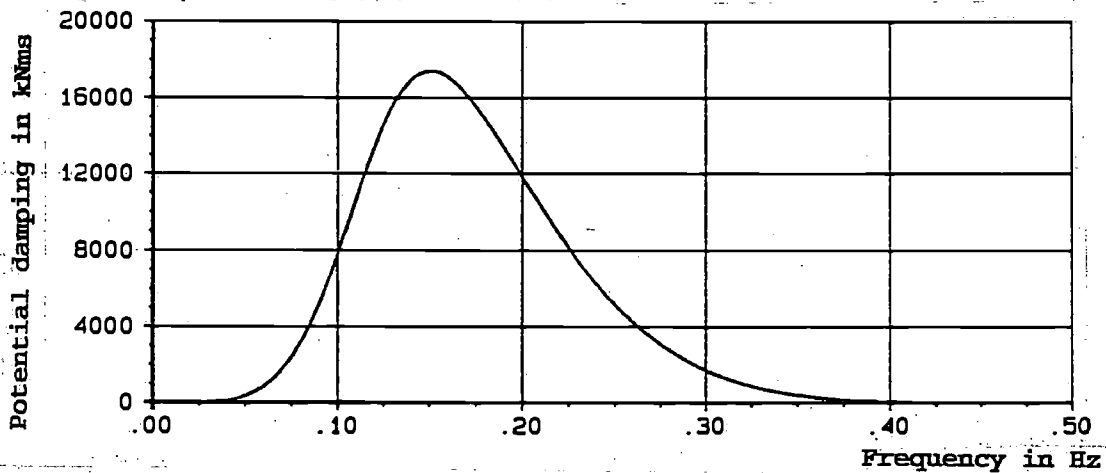


Figure 6-3-C. Hydrodynamic Potential Damping for Roll

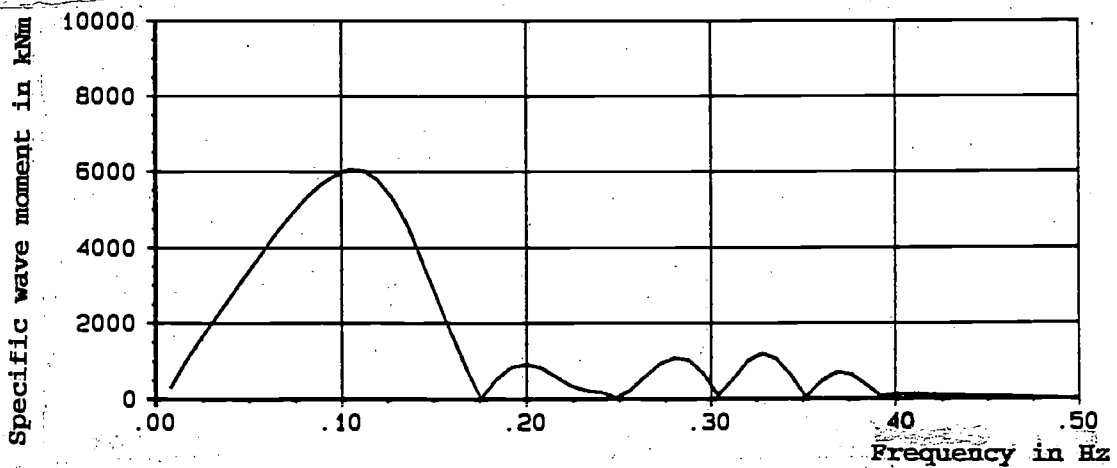


Figure 6-3-D. Transfer Function of Roll Wave Moment

### Time Domain Calculations

As a result of the formulation in the frequency domain, any system influencing the behaviour of the floating body should have a linear relation with the displacement, the velocity and the acceleration of the body. However, in a lot of cases there are several complications which perish this linear assumption, for instance the non-linear viscous damping, forces and moments due to currents, wind, anchoring, etc.

To include these non-linear effects in the vessel behaviour, it is necessary to formulate the equations of motion in the time domain, which relates instantaneous values of forces, moments and motions. For the description of the hydromechanic reaction forces and moments, due to time varying ship motions, use has been made of the classic formulation given by Cummins. Also reference is given here to Ogilvie.

### Cummins Equations

The floating object is considered to be a linear system with the translational and rotational velocities as input and the reaction forces and moments of the surrounding water as output.

The object is supposed to be at rest at time  $t=t_0$ . Then during a short time  $\Delta t$  an impulsive displacement  $\Delta x$ , with a constant velocity  $V$ , is given to the object.

So:

$$\Delta x = V \cdot \Delta t$$

During this impulsive displacement, the waterparticles will start to move. When assuming that the fluid is rotation-free, a velocity potential  $\Phi$ , linear proportional to  $V$ , can be defined:

$$\Phi = V \cdot \Psi \quad \text{for: } t_0 < t < t_0 + \Delta t$$

in which  $\Psi$  is the normalised velocity potential.

After this impulsive displacement  $\Delta x$ , the waterparticles are still moving. Because the system is assumed to be linear, the motions of the fluid, described by the velocity potential  $\Phi$ , are proportional to the impulsive displacement  $\Delta x$ .

So:

$$\Phi = \chi \cdot \Delta x \quad \text{for: } t > t_0 + \Delta t$$

In here  $\chi$  is a normalised velocity potential.

The impulsive displacement  $\Delta x$  during the period  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  does not influence the motions of the fluid during this period only, but also further on in time.

This holds that the motions during the period  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  are influenced also by the motions before this period.

When the object performs an arbitrarily in time varying motion, this motion can be considered as a succession of small impulsive displacements.

Then the resulting total velocity potential  $\Phi(t)$  during the period  $(t_n, t_n + \Delta t)$  becomes:

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^6 \left[ V_{j,n} \cdot \Psi_j + \sum_{k=1}^n \left[ \chi_j(t_{n-k}, t_{n-k} + \Delta t) \cdot V_{j,k} \cdot \Delta t \right] \right]$$

In here:

$n$  = number of timesteps

$t_n$  =  $t_0 + n \cdot \Delta t$

$t_{n-k}$  =  $t_0 + (n-k) \cdot \Delta t$

$V_{j,n}$  =  $j$ -th velocity component during period  $(t_n, t_n + \Delta t)$

$V_{j,k}$  =  $j$ -th velocity component during period  $(t_{n-k}, t_{n-k} + \Delta t)$

$\Psi_j$  = normalised velocity potential caused by a displacement in direction  $j$  during period  $(t_n, t_n + \Delta t)$

$\chi_j$  = normalised velocity potential caused by a displacement in direction  $j$  during period  $(t_{n-k}, t_{n-k} + \Delta t)$

Letting  $\Delta t$  go to zero, yields:

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^6 \left[ \dot{x}_j(t) \cdot \Psi_j + \int_{-\infty}^t \chi_j(t-\tau) \cdot \dot{x}_j(\tau) \cdot d\tau \right]$$

in which:

$\dot{x}_j(t)$  =  $j$ -th velocity component at time  $t$ .

The pressure in the fluid follows from the linearised equation of Bernouilli:

$$p = -\rho \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

An integration of these pressures over the wetted surface  $S$  of the floating object delivers the expression for the hydrodynamic reaction forces and moments  $F_i$ .

With  $n_i$  is the generalised directional cosine,  $F_i$  becomes:

$$\begin{aligned} F_i &= - \int_S p \cdot n_i \cdot dS \\ &= \sum_{j=1}^6 \left[ \left[ \rho \cdot \int_S \Psi_j \cdot n_i \cdot dS \right] \cdot \ddot{x}_j + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^t \left[ \rho \cdot \int_S \frac{\partial \chi_j(t-\tau)}{\partial t} \cdot n_i \cdot dS \right] \cdot \dot{x}_j(\tau) \cdot d\tau \right] \end{aligned}$$

When defining:

$$A_{i,j} = \rho \cdot \int_S \Psi_j \cdot n_i \cdot dS$$

$$B_{i,j}(t) = \rho \cdot \int_S \int \frac{\partial \chi_j(t-\tau)}{\partial t} \cdot n_i \cdot dS$$

the hydrodynamic forces and moments become:

$$F_i = \sum_{j=1}^6 \left[ A_{i,j} \cdot \ddot{x}_j(t) + \int_{-\infty}^t B_{i,j}(t-\tau) \cdot \dot{x}_j(\tau) \cdot d\tau \right]$$

for  $i = 1, \dots, 6$

Together with the linear restoring spring terms " $C_{i,j} \cdot x_j$ " and the linear external loads " $X_i(t)$ ", Newton's second law of dynamics delivers the linear equations of motions in the time domain:

$$\sum_{j=1}^6 \left[ (M_{i,j} + A_{i,j}) \cdot \ddot{x}_j(t) + \int_{-\infty}^t B_{i,j}(t-\tau) \cdot \dot{x}_j(\tau) \cdot d\tau + C_{i,j} \cdot x_j(t) \right] = X_i(t)$$

for  $i = 1, \dots, 6$

in which:

$\ddot{x}_j(t)$  = translational or rotational acceleration in direction  $j$   
at time  $t$

$\dot{x}_j(t)$  = translational or rotational velocity in direction  $j$   
at time  $t$

$x_j(t)$  = translational or rotational displacement in direction  $j$   
at time  $t$

$M_{i,j}$  = solid mass or inertia coefficient

$A_{i,j}$  = hydrodynamic mass coefficient

$B_{i,j}$  = retardation function

$C_{i,j}$  = spring coefficient

$X_i(t)$  = external load in direction  $i$  at time  $t$

When replacing in the damping part " $\tau$ " by " $t-\tau$ " and changing the integration boundaries, this part can be written in a more convenient form:

$$\sum_{j=1}^6 \left[ (M_{i,j} + A_{i,j}) \cdot \ddot{x}_j(t) + \int_0^{\infty} B_{i,j}(\tau) \cdot \dot{x}_j(t-\tau) \cdot d\tau + C_{i,j} \cdot x_j(t) \right] = X_i(t)$$

for  $i = 1, \dots, 6$

Referring to the basic work on this subject by Cummins, these equations of motions are called the "Cummins Equations".

### Hydromechanic Coefficients

The linear restoring spring terms  $C_{3,3}$ ,  $C_{3,5}$ ,  $C_{4,4}$ ,  $C_{5,3}$  and  $C_{5,5}$  can be determined easily from the underwater geometry and the centre of gravity of the floating object. Generally, the other  $C_{i,j}$ -values are zero.

To determine  $A_{i,j}$  and  $B_{i,j}$ , the velocity potentials  $\Psi_j$  and  $\chi_j$  have to be found, which is very complex.

A much more easy method to determine  $A_{i,j}$  and  $B_{i,j}$  can be obtained by making use of the hydrodynamic mass and damping data found by existing two- or three-dimensional potential theory based computer programs in the frequency domain.

Relative simple relations can be found between  $A_{i,j}$  and  $B_{i,j}$  and the calculated data of the hydrodynamic mass and damping in the frequency domain.

The floating object is supposed to carry out an harmonic oscillation with an amplitude 1 in the direction  $j$ :

$$x_j = 1 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

A substitution in the Cummins equations delivers:

$$-\omega^2 \cdot (M_{i,j} + A_{i,j}) \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot \int_0^{\infty} B_{i,j}(\tau) \cdot \sin(\omega t - \omega \tau) \cdot d\tau + C_{i,j} \cdot \cos(\omega t) = X_i(t) \quad \text{for } i = 1, \dots, 6$$

This results into:

$$-\omega^2 \cdot \left[ M_{i,j} + A_{i,j} - \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} B_{i,j}(\tau) \cdot \sin(\omega \tau) \cdot d\tau \right] \cdot \cos(\omega t) +$$

$$-\omega \cdot \left[ \int_0^{\infty} B_{i,j}(\tau) \cdot \cos(\omega \tau) \cdot d\tau \right] \cdot \sin(\omega t) + \left[ C_{i,j} \right] \cdot \cos(\omega t) = X_i(t) \quad \text{for } i = 1, \dots, 6$$

In the classic frequency domain description these equations of motions are presented by:

$$-\omega^2 \cdot \left[ M_{i,j} + a_{i,j}(\omega) \right] \cdot \cos(\omega t) +$$

$$-\omega \cdot \left[ b_{i,j}(\omega) \right] \cdot \sin(\omega t) + \left[ c_{i,j} \right] \cdot \cos(\omega t) = X_i(t) \quad \text{for } i = 1, \dots, 6$$

In here:

$a_{i,j}(\omega)$  = frequency-dependent hydrodynamic mass coefficient

$b_{i,j}(\omega)$  = frequency-dependent hydrodynamic damping coefficient

$c_{i,j}$  = restoring spring term coefficient



When comparing the time domain and the frequency domain equations, both with linear terms as published by Ogilvie, it is found:

$$a_{i,j}(\omega) = A_{i,j} - \frac{1}{\omega} \cdot \int_0^{\infty} B_{i,j}(\tau) \cdot \sin(\omega\tau) \cdot d\tau$$

$$b_{i,j}(\omega) = \int_0^{\infty} B_{i,j}(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\tau$$

$$c_{i,j} = C_{i,j}$$

After a Fourier re-transformation, the damping term delivers the retardation function:

$$B_{i,j}(\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} b_{i,j}(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega$$

Then the mass term follows from:

$$A_{i,j} = a_{i,j}(\omega) + \frac{1}{\omega} \cdot \int_0^{\infty} B_{i,j}(\tau) \cdot \sin(\omega\tau) \cdot d\tau$$

This expression is valid for any value of  $\omega$ , so also for  $\omega=\infty$ , which delivers:

$$A_{i,j} = a_{i,j}(\omega=\infty)$$

### Addition of Non-Linearities

So far, these equations of motions are linear. But non-linear contributions can be added now to  $X_i(t)$  easily.

For instance, non-linear viscous roll damping contributions can be added to  $X_4$ :

$$\Delta X_4 = -b_{44,a}^{(2)} \cdot \|\dot{\varphi}\| \cdot \dot{\varphi}$$

Also it is possible to include non-linear spring terms, by considering it as an external load and shifting its contribution to the right hand side of the equations of motions, for instance:

$$C_{4,4} = 0$$

$$\Delta X_4 = -\rho \cdot g \cdot \nabla \cdot GN_{\varphi}(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$$

in which  $GN_{\varphi}(\varphi)$  is the transverse metacentric height at arbitrarily heeling angles.

### Some Numerical Recipes

Many computer programs fail when calculating  $b_{i,j}$  at too high a frequency. This holds that, when determining  $B_{i,j}$ , the numerical calculations can be carried out in a limited frequency range  $0 \leq \omega \leq \Omega$  only.

So, a truncation error  $\Delta B_{i,j}$  will be introduced:

$$\Delta B_{i,j}(\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\Omega}^{\infty} b_{i,j}(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega$$

For the uncoupled damping coefficients, so when  $i=j$ , this truncation error can be estimated.

The relation between the damping coefficient  $b_{i,i}(\omega)$  and the amplitude ratio of the radiated waves and the oscillatory motion  $\alpha_{i,i}(\omega)$  is given by:

$$b_{i,i}(\omega) = \frac{\rho \cdot g^2}{\omega^3} \cdot \alpha_{i,i}^2(\omega)$$

From this an approximation can be found for the tail of the damping curve:

$$b_{i,i}(\omega) = \frac{\beta_{i,i}}{\omega^3}$$

The value of  $\beta_{i,i}$  follows from the calculated damping value at the highest frequency used,  $\omega = \Omega$ . This holds that it is supposed here that  $\alpha_{i,i}(\omega)$  is constant for  $\omega \geq \Omega$ .

Then the truncation error becomes:

$$\Delta B_{i,i}(\tau) = \frac{\beta_{i,i} \cdot \tau^2}{\pi} \cdot \left[ \frac{\cos(\Omega\tau)}{(\Omega\tau)^2} - \frac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega\tau} + \gamma + \ln(\Omega\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (\Omega\tau)^{2n}}{2n \cdot (2n)!} \right]$$

in which:

$$\gamma = 0.577215\dots$$

(Euler constant)

Studies carried out in the past, have showed that in case of a sufficient high value of  $\Omega$  the contribution of  $\Delta B_{i,i}$  into  $B_{i,i}$  is often small. The potential damping calculations were based on numerical routines as used in computer program SEAWAY. In this program special attention has been paid to the potential calculations at very high frequencies. For normal merchant ships 5 radians per second, which can be reached by the routines in SEAWAY, is a fairly good value for the maximum frequency  $\Omega$ .

So the retardation function is approximated by the numerical solution of the integral:

$$B_{i,j}(\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\Omega} b_{i,j}(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega$$

The damping curve has to be calculated at  $N_{\omega}$  constant frequency-intervals  $\Delta\omega$ , so:  $N_{\omega} \cdot \Delta\omega = \Omega$ . When calculating here the retardation functions it is assumed that at each frequency-interval the damping curve is linear increasing or decreasing.

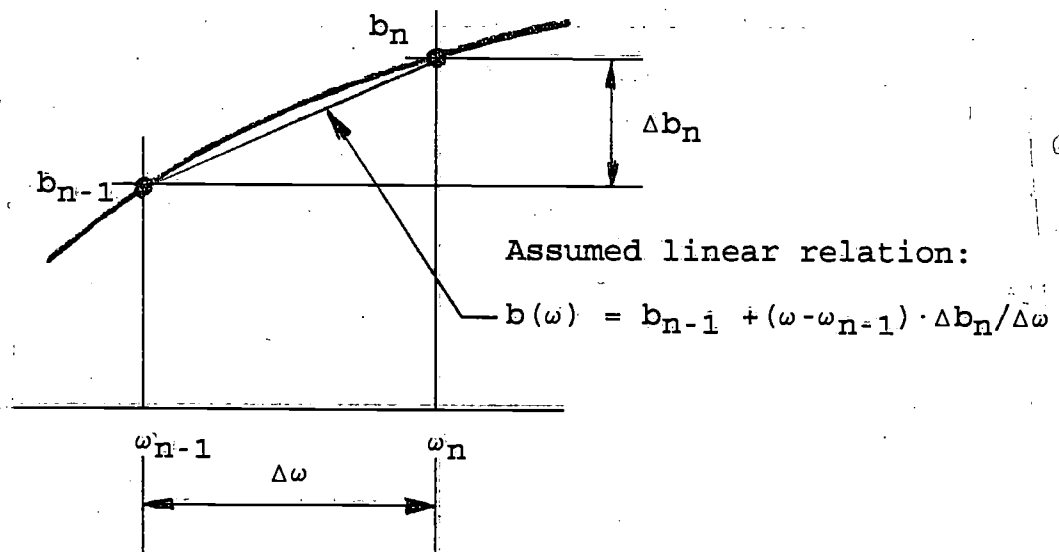


Figure 6-3-E. Integration of the Damping Curve

Now the contribution of this interval into  $B_{i,j}$  can be calculated analytically. This holds that, because of a large  $\omega$  or a large  $\tau$ , the influence of a strongly fluctuating  $\cos(\omega\tau)$  at this interval will be taken into account.

Then the numerical integration is given by:

$$B_{i,j}(\tau) = \frac{2}{\pi \cdot \tau^2} \cdot \sum_{n=1}^{N_{\omega}} \left[ \frac{\Delta b_n}{\Delta \omega} \cdot [\cos(\omega_n \cdot \tau) - \cos(\omega_{n-1} \cdot \tau)] \right] + \frac{2}{\pi \cdot \tau} \cdot b_{N_{\omega}} \cdot \sin(\omega_{N_{\omega}} \cdot \tau)$$

in which:

$$\Delta \omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \Delta \omega$$

$$\Delta b_n = b_n - b_{n-1}$$

For  $\tau=0$ , the value of the retardation function can be derived simply from the integral of the damping:

$$B_{i,j}(\tau=0) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\Omega} b_{i,j}(\omega) \cdot d\omega$$

Because the potential damping is zero for  $\omega=0$ , the expression for the damping term leads for  $\omega=0$ , so  $\cos(\omega \cdot \tau)=1$ , into the following requirement for the retardation functions:

$$\int_0^{\infty} B_{i,j}(\tau) \cdot d\tau = 0$$

In the equations of motions, the retardation function multiplied with the velocity should be integrated over an infinite time:

$$\int_0^{\infty} B_{i,j}(\tau) \cdot \dot{x}_j(t-\tau) \cdot d\tau$$

However, after a certain time  $\tau=\Gamma_{i,j}$  the fluctuating values of the integral have reached already a very small value.

A useful limit-value for the corresponding integration time can be found with:

$$\Gamma_{i,j} \approx 2 \cdot \left[ \frac{\sum_{n=1}^N \omega |\Delta b_n|}{\pi \cdot \Delta \omega \cdot \epsilon \cdot B_{i,j}(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{with: } \epsilon = 0.010$$

So the Cummins equations, which are still linear here, are given by:

$$\sum_{j=1}^6 \left[ (M_{i,j} + A_{i,j}) \cdot \ddot{x}_j(t) + \int_0^{\Gamma_{i,j}} B_{i,j}(\tau) \cdot \dot{x}_j(t-\tau) \cdot d\tau + C_{i,j} \cdot x_j(t) \right] = X_i(t) \quad \text{for } i = 1, \dots, 6$$

The numerical integrations can be carried out with the trapezoid rule or with Simpson's rule, with a time step  $\Delta\tau$ . Because of a relative small time step  $\Delta\tau$  required to solve the equations of motions numerically, generally the trapezoid rule is sufficient accurate.

The hydrodynamic mass coefficient follows from:

$$A_{i,j} = a_{i,j}(\omega=\infty)$$

When this mass coefficient is not available for an infinite frequency, it can be calculated from a mass coefficient at a certain frequency and the retardation function:

$$A_{i,j} = a_{i,j}(\Omega) + \frac{1}{\Omega} \cdot \int_0^{\Gamma_{i,j}} B_{i,j}(\tau) \cdot \sin(\Omega\tau) \cdot d\tau$$

With:

$$N_\tau \cdot \Delta\tau = \Gamma_{i,j}$$

the numerical solution of this integral can be found in an analog way as for the retardation functions:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Gamma_{i,j}} B_{i,j}(\tau) \cdot \sin(\Omega\tau) \cdot d\tau &= \\ &= \frac{1}{\Omega^2} \cdot \sum_{n=1}^{N_\tau} \left[ \frac{\Delta B_n}{\Delta\tau} \cdot \left[ \sin[\Omega \cdot n \cdot \Delta\tau] - \sin[\Omega \cdot (n-1) \cdot \Delta\tau] \right] \right] + \\ &+ \frac{1}{\Omega} \left[ B_{i,j}(\tau=0) - B_{i,j}(\tau=\tau_{N_\tau}) \cdot \cos[\Omega \cdot N_\tau \cdot \Delta\tau] \right] \end{aligned}$$

in which:

$$\Delta B_n = B_{i,j}(n) - B_{i,j}(n-1)$$

Analog to this, the numerical solution of the frequency-dependent damping is:

$$\begin{aligned} b_{i,j}(\Omega) &= \int_0^{\Gamma_{i,j}} B_{i,j}(\tau) \cdot \cos(\Omega\tau) \cdot d\tau = \\ &= \frac{1}{\Omega^2} \cdot \sum_{n=1}^{N_\tau} \left[ \frac{\Delta B_n}{\Delta\tau} \cdot \left[ \cos[\Omega \cdot n \cdot \Delta\tau] - \cos[\Omega \cdot (n-1) \cdot \Delta\tau] \right] \right] + \\ &+ \frac{1}{\Omega} \cdot B_{i,j}(\tau=\tau_{N_\tau}) \cdot \sin[\Omega \cdot N_\tau \cdot \Delta\tau] \end{aligned}$$

In the following figure an example has been given of the retardation function for roll motions.

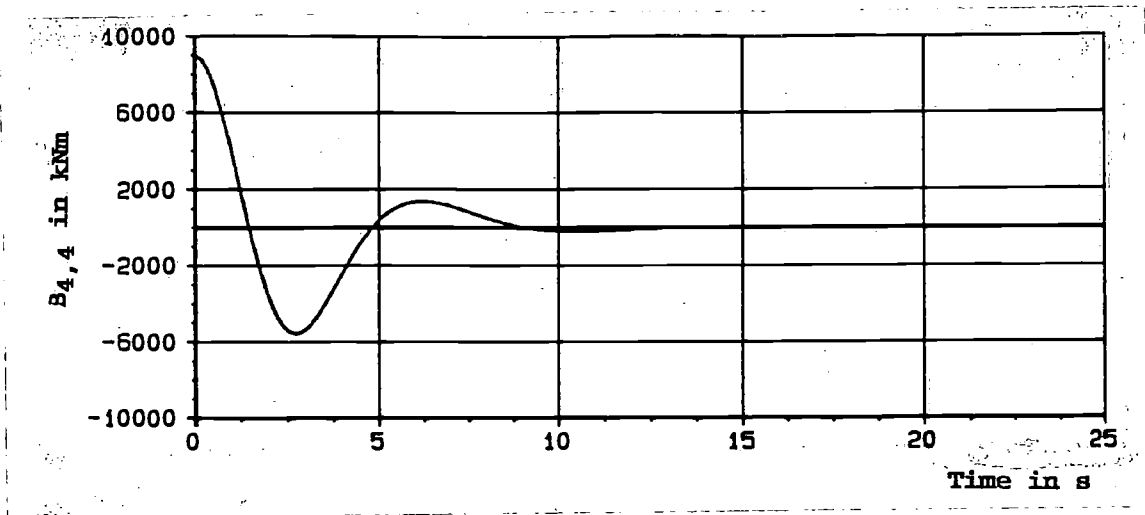


Figure 6-3-F. Retardation function for Roll

The path of the ship in the  $x_0, y_0, z_0$  system of axes can be derived by integrating the velocities of the ship's centre of gravity:

$$\dot{x}_0 = \dot{x} \cdot \cos\psi - \dot{y} \cdot \sin\psi$$

$$\dot{y}_0 = \dot{x} \cdot \sin\psi + \dot{y} \cdot \cos\psi$$

$$\dot{z}_0 = \dot{z}$$

$$\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}$$

$$\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}$$

$$\dot{\psi}_0 = \dot{\psi}$$

The Euler equations of motion are written in the  $x, y, z$  system of axes:

$$M \cdot (\ddot{x} - \dot{y} \cdot \dot{\psi} + \dot{z} \cdot \dot{\theta}) = X_h + X_w + X_{ext}$$

$$M \cdot (\ddot{y} + \dot{x} \cdot \dot{\psi} - \dot{z} \cdot \dot{\varphi}) = Y_h + Y_w + Y_{ext}$$

$$M \cdot (\ddot{z} - \dot{x} \cdot \dot{\theta} + \dot{y} \cdot \dot{\varphi}) = Z_h + Z_w + Z_{ext}$$

$$I_{xx} \cdot \ddot{\varphi} - (I_{yy} - I_{zz}) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\psi} = K_h + K_w + K_{ext}$$

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} - (I_{zz} - I_{xx}) \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} = M_h + M_w + M_{ext}$$

$$I_{zz} \cdot \ddot{\psi} - (I_{xx} - I_{yy}) \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\theta} = N_h + N_w + N_{ext}$$

with in the right hand sides:

subscript h: linear hydromechanic loads

subscript w: linear wave loads

subscript ext: non-linear hydromechanic loads and (non-)linear external loads, caused by wind, currents, anchor lines, cutter, etc.

With the hydromechanic loads as defined before, the equations of motion are defined as given below.

Surge motion:

$$M \cdot \ddot{x} + M \cdot (-\dot{y} \cdot \dot{\psi} + \dot{z} \cdot \dot{\theta}) + A_{11} \cdot \ddot{x} + B_{11} \cdot \dot{x} + C_{11} \cdot x \\ + A_{13} \cdot \ddot{z} + B_{13} \cdot \dot{z} + C_{13} \cdot z + A_{15} \cdot \ddot{\theta} + B_{15} \cdot \dot{\theta} + C_{15} \cdot \theta = X_w + X_{ext}$$

Sway motion:

$$M \cdot \ddot{y} + M \cdot (+\dot{x} \cdot \dot{\psi} - \dot{z} \cdot \dot{\phi}) + A_{22} \cdot \ddot{y} + B_{22} \cdot \dot{y} + C_{22} \cdot y \\ + A_{24} \cdot \ddot{\phi} + B_{24} \cdot \dot{\phi} + C_{24} \cdot \phi + A_{26} \cdot \ddot{\psi} + B_{26} \cdot \dot{\psi} + C_{26} \cdot \psi = Y_w + Y_{ext}$$

Heave motion:

$$M \cdot \ddot{z} + M \cdot (-\dot{x} \cdot \dot{\theta} + \dot{y} \cdot \dot{\phi}) + A_{31} \cdot \ddot{x} + B_{31} \cdot \dot{x} + C_{31} \cdot x \\ + A_{33} \cdot \ddot{z} + B_{33} \cdot \dot{z} + C_{33} \cdot z + A_{35} \cdot \ddot{\theta} + B_{35} \cdot \dot{\theta} + C_{35} \cdot \theta = Z_w + Z_{ext}$$

Roll motion:

$$I_{xx} \cdot \ddot{\phi} - (I_{yy} - I_{zz}) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\psi} + A_{42} \cdot \ddot{y} + B_{42} \cdot \dot{y} + C_{42} \cdot y \\ + A_{44} \cdot \ddot{\phi} + B_{44} \cdot \dot{\phi} + C_{44} \cdot \phi + A_{46} \cdot \ddot{\psi} + B_{46} \cdot \dot{\psi} + C_{46} \cdot \psi = K_w + K_{ext}$$

Pitch motion:

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} - (I_{zz} - I_{xx}) \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} + A_{51} \cdot \ddot{x} + B_{51} \cdot \dot{x} + C_{51} \cdot x \\ + A_{53} \cdot \ddot{z} + B_{53} \cdot \dot{z} + C_{53} \cdot z + A_{55} \cdot \ddot{\theta} + B_{55} \cdot \dot{\theta} + C_{55} \cdot \theta = M_w + M_{ext}$$

Yaw motion:

$$I_{zz} \cdot \ddot{\psi} - (I_{xx} - I_{yy}) \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} + A_{62} \cdot \ddot{y} + B_{62} \cdot \dot{y} + C_{62} \cdot y \\ + A_{64} \cdot \ddot{\phi} + B_{64} \cdot \dot{\phi} + C_{64} \cdot \phi + A_{66} \cdot \ddot{\psi} + B_{66} \cdot \dot{\psi} + C_{66} \cdot \psi = N_w + N_{ext}$$

Some of the coefficients in these six equations of motion are zero. After omitting these coefficients and ordering the terms, the equations for the accelerations are as follows.

Surge motion:

$$\begin{aligned} (M+A_{11}) \cdot \ddot{x} + A_{15} \cdot \ddot{\theta} &= +X_w + X_{\text{ext}} \\ &- B_{11} \cdot \dot{x} - B_{15} \cdot \dot{\theta} \\ &+ M \cdot (+\dot{y} \cdot \dot{\psi} - \dot{z} \cdot \dot{\theta}) \end{aligned}$$

Sway motion:

$$\begin{aligned} (M+A_{22}) \cdot \ddot{y} + A_{24} \cdot \ddot{\varphi} + A_{26} \cdot \ddot{\psi} &= +Y_w + Y_{\text{ext}} \\ &- B_{22} \cdot \dot{y} - B_{24} \cdot \dot{\varphi} - B_{26} \cdot \dot{\psi} \\ &+ M \cdot (-\dot{x} \cdot \dot{\psi} + \dot{z} \cdot \dot{\varphi}) \end{aligned}$$

Heave motion:

$$\begin{aligned} (M+A_{33}) \cdot \ddot{z} + A_{35} \cdot \ddot{\theta} &= +Z_w + Z_{\text{ext}} \\ &- B_{33} \cdot \dot{z} - C_{33} \cdot \dot{z} - B_{35} \cdot \dot{\theta} - C_{35} \cdot \dot{\theta} \\ &+ M \cdot (+\dot{x} \cdot \dot{\theta} - \dot{y} \cdot \dot{\varphi}) \end{aligned}$$

Roll motion:

$$\begin{aligned} (I_{xx}+A_{44}) \cdot \ddot{\varphi} + A_{42} \cdot \ddot{y} + A_{46} \cdot \ddot{\psi} &= +K_w + K_{\text{ext}} \\ &- B_{42} \cdot \dot{y} - B_{44} \cdot \dot{\varphi} - B_{24} \cdot \dot{\psi} - C_{44} \cdot \dot{\varphi} \\ &+ (I_{yy} - I_{zz}) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\psi} \end{aligned}$$

Pitch motion:

$$\begin{aligned} (I_{yy}+A_{55}) \cdot \ddot{\theta} + A_{51} \cdot \ddot{x} + A_{53} \cdot \ddot{z} &= +M_w + M_{\text{ext}} \\ &- B_{51} \cdot \dot{x} - B_{53} \cdot \dot{z} - C_{53} \cdot \dot{z} - B_{55} \cdot \dot{\theta} - C_{55} \cdot \dot{\theta} \\ &+ (I_{zz} - I_{xx}) \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \end{aligned}$$

Yaw motion:

$$\begin{aligned} (I_{zz}+A_{66}) \cdot \ddot{\psi} + A_{62} \cdot \ddot{y} + A_{64} \cdot \ddot{\varphi} &= +N_w + N_{\text{ext}} \\ &- B_{62} \cdot \dot{y} - B_{64} \cdot \dot{\varphi} - B_{66} \cdot \dot{\psi} \\ &+ (I_{xx} - I_{yy}) \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\theta} \end{aligned}$$

With known coefficients and right hand sides of these equations, the six accelerations can be determined by a numerical method, for instance the Runge-Kutta method.



### Viscous Damping

The non-linear viscous sway and yaw damping can be approximated by:

$$b_{22v}^{(2)} \cdot |\dot{y}| \cdot \dot{y} \quad \text{with: } b_{22v}^{(2)} = 1/2 \cdot \rho \cdot L \cdot T \cdot C_d$$

$$b_{66v}^{(2)} \cdot |\dot{\psi}| \cdot \dot{\psi} \quad \text{with: } b_{66v}^{(2)} = 1/6 \cdot \rho \cdot L^3 \cdot T \cdot C_d$$

with:

$$C_d \approx 1.50$$

The total (non-)linear roll damping term in the left hand side of the equation of motion for roll can be expressed as:

$$[b_{44} + b_{44a}^{(1)}] \cdot \dot{\varphi} + b_{44a}^{(2)} \cdot |\dot{\varphi}| \cdot \dot{\varphi}$$

with:

- $b_{44}$  = linear potential roll damping coefficient
- $b_{44a}^{(1)}$  = linear(ised) additional roll damping coefficient
- $b_{44a}^{(2)}$  = non-linear additional roll damping coefficient

The linear potential roll damping coefficient  $b_{44}$  can be determined as described before.

For time domain calculations a linear as well as a non-linear roll damping coefficient can be used.

However, for frequency domain calculations an equivalent linear roll damping coefficient has to be estimated. This linearised roll damping coefficient can be found by requiring that an equivalent linear damping dissipates an equal amount of energy as the non-linear damping, so:

$$b_{44a}^{(1)} \cdot \int_0^T \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot dt = b_{44a}^{(2)} \cdot \int_0^T |\dot{\varphi}| \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot dt$$

Then the equivalent linear additional roll damping coefficient  $b_{44a}^{(1)}$  becomes:

$$b_{44a}^{(1)} = \frac{8}{3 \cdot \pi} \cdot \varphi_a \cdot \omega \cdot b_{44a}^{(2)}$$

The additional roll damping coefficients  $b_{44a}^{(1)}$  and  $b_{44a}^{(2)}$  are mainly caused by viscous effects.

Until now it is not possible to determine these additional coefficients in a pure theoretical way. They have to be estimated by free rolling model experiments or by a semi-empirical method, based on theory and a large number of model experiments with systematic varied ship forms.

The linear(ised) and the non-linear equations of pure roll motions, used to analyse free rolling model experiments, are presented here. Also, for zero forward ship speed, the algorithms of the empirical method of Ikeda, Himeno and Tanaka are given.

**Experimental Roll Damping Data**

In case of pure free rolling in still water, the linear equation of the roll motion about the centre of gravity G is given by:

$$(I_{xx} + a_{44}) \cdot \ddot{\varphi} + (b_{44} + b_{44a}) \cdot \dot{\varphi} + c_{44} \cdot \varphi = 0$$

with:

$a_{44}$  = potential mass coefficient

$b_{44}$  = potential damping coefficient

$b_{44a}$  = linear(ised) additional damping coefficient

$c_{44}$  = restoring term coefficient =  $\rho \cdot g \cdot V \cdot GM$

This equation can be rewritten as:

$$\ddot{\varphi} + 2\nu \cdot \dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$$

in which:

$$2\nu = \frac{b_{44} + b_{44a}}{I_{xx} + a_{44}} = \text{quotient of damping and moment of inertia}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c_{44}}{I_{xx} + a_{44}} = \text{undamped natural roll frequency squared}$$

When defining a non-dimensional roll damping by:

$$\kappa = \frac{\nu}{\omega_0}$$

the equation of motion can be rewritten as:

$$\ddot{\varphi} + 2\kappa\omega_0 \cdot \dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$$

Then, the logarithmic decrement of roll is:

$$\begin{aligned} \nu \cdot T_\varphi &= \kappa \cdot \omega_0 \cdot T_\varphi \\ &= \log_e \left[ \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T_\varphi)} \right] \end{aligned}$$

Because of the relation:

$$\omega_{\varphi}^2 = \omega_0^2 - \nu^2$$

and the assumption:

$$\nu^2 \ll \omega_0^2$$

it can be written:

$$\omega_{\varphi} \approx \omega_0$$

This leads to:

$$\omega_0 \cdot T_{\varphi} \approx \omega_{\varphi} \cdot T_{\varphi} \approx 2 \cdot \pi$$

So the non-dimensional total roll damping is given by:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \log_e \left[ \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T_{\varphi})} \right] \\ &= (b_{44} + b_{44a}) \cdot \frac{\omega_0}{2 \cdot c_{44}} \end{aligned}$$

The non-potential part of the total roll damping coefficient follows from the average value of  $\kappa$  by:

$$b_{44a} = \kappa \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0} - b_{44}$$

These  $\kappa$ -values can easily be found when results of free rolling experiments with a model in still water are available.

Often the results of these free rolling tests are presented by:

$$\frac{\Delta \bar{\varphi}_a}{\bar{\varphi}_a} \text{ as a function of } \bar{\varphi}_a$$

with:

$$\bar{\varphi}_a = \left| \frac{\varphi_a(i) + \varphi_a(i+1)}{2} \right| = \text{absolute value of the average of two successive positive or negative maximum roll angles}$$

and:

$$\Delta \bar{\varphi}_a = \left| \varphi_a(i) - \varphi_a(i+1) \right| = \text{absolute value of the difference of two successive positive or negative maximum roll angles}$$

Then the total non-dimensional roll damping coefficient at the natural frequency becomes:

$$\kappa = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \log_e \left[ \frac{2 + \frac{\Delta \bar{\varphi}_a}{\bar{\varphi}_a}}{2 - \frac{\Delta \bar{\varphi}_a}{\bar{\varphi}_a}} \right]$$

These experiments deliver no information on the relation with the frequency of oscillation. So it has to be decided to keep the additional coefficient  $b_{44a}$  or the total coefficient  $b_{44} + b_{44a}$  constant.

The successively found values for  $\kappa$ , plotted on base of the average roll amplitude, will often have a non-linear behaviour as illustrated in the next figure.

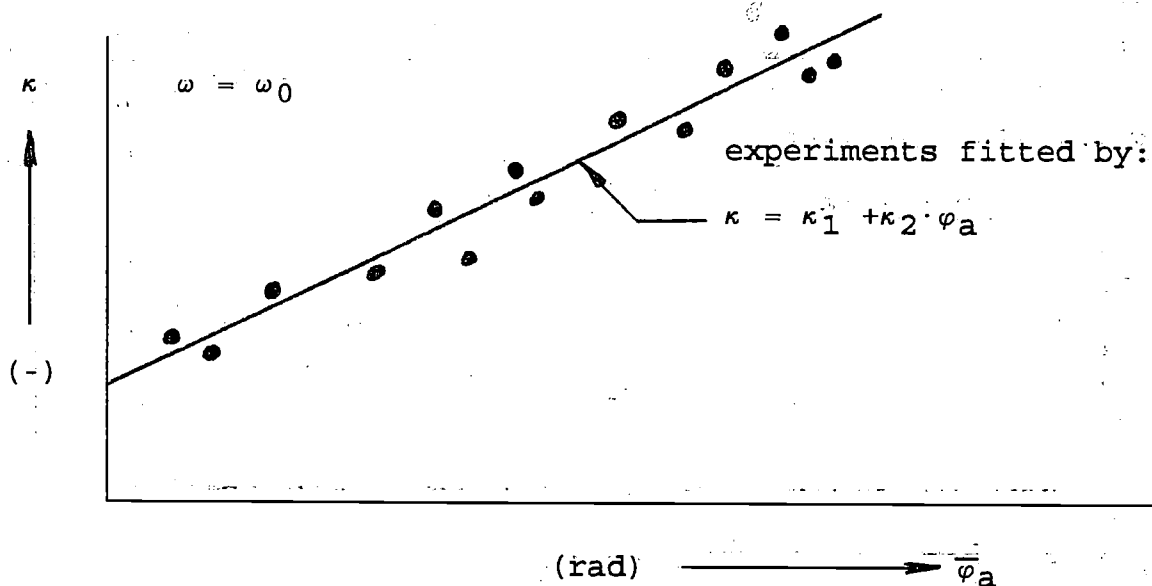


Figure 6-3-G. Non-Dimensional Roll Damping Coefficients Determined by Free-Rolling Experiments

For a behaviour like this, it will be found:

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 \cdot \varphi_a$$

This holds that during frequency domain calculations, the damping term is depending on the solution for the roll amplitude.

For rectangular barges ( $L \times B \times T$ ), with center of gravity in the waterline, it is found by Journée:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0.0013 \cdot (B/T)^2 \\ \kappa_2 &= 0.500 \end{aligned}$$

Then the total damping term becomes:

$$\kappa \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0} \cdot \dot{\varphi} = \kappa_1 \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0} \cdot \dot{\varphi} + \kappa_2 \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0} \cdot \varphi_a \cdot \dot{\varphi}$$

The linear additional roll damping coefficient becomes:

$$b_{44a}^{(1)} = \kappa_1 \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0} - b_{44}$$

But for the non-linear additional roll damping coefficient, a quasi-quadratic damping coefficient is found:

$$b_{44a}^{(2)} = \kappa_2 \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0} \cdot \frac{\varphi_a}{|\dot{\varphi}|}$$

Because of this roll damping "coefficient" includes  $|\dot{\varphi}(w,t)|$  in the denominator, it varies strongly with the time.

An equivalent non-linear damping term can be found by requiring that the equivalent quadratic damping term dissipates an equal amount of energy as the quasi-quadratic damping term, so:

$$b_{44a}^{(2)} \cdot \int_0^T |\dot{\varphi}| \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot dt = \kappa_2 \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0} \cdot \varphi_a \cdot \int_0^T \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot dt$$

Then the equivalent quadratic additional roll damping coefficient  $b_{44a}^{(2)}$  becomes:

$$b_{44a}^{(2)} = \kappa_2 \cdot \frac{3 \cdot \pi}{8} \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0^2}$$

With this, the damping term based on experimental  $\kappa$ -values, as given in figure 6-3-G, becomes:

$$\begin{aligned} [b_{44} + b_{44a}^{(1)}] \cdot \dot{\varphi} + b_{44a}^{(2)} \cdot |\dot{\varphi}| \cdot \dot{\varphi} &= \\ &= \kappa_1 \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0} \cdot \dot{\varphi} + \kappa_2 \cdot \frac{3 \cdot \pi}{8} \cdot \frac{2 \cdot c_{44}}{\omega_0^2} \cdot |\dot{\varphi}| \cdot \dot{\varphi} \end{aligned}$$

So far in the equations of motion, pure roll motions with one degree of freedom are observed. Coupling effects between the roll motion and the other motions are not taken into account. This can be done in an iterative way.

Experimental or empirical values of  $\kappa_1$  and  $\kappa_2$  deliver starting values for  $b_{44a}^{(1)}$  and  $b_{44a}^{(2)}$ . With these coefficients, a free rolling experiment with all degrees of freedom can be simulated in the time domain. An analyse of this simulated roll motion, as being a linear pure roll motion with one degree of freedom, delivers new values for  $b_{44a}^{(1)}$  and  $b_{44a}^{(2)}$ . This procedure has to be repeated until a suitable convergence has been reached.

An inclusion of the natural frequency  $\omega_0$  in this iterative procedure delivers also a reliable value for the estimated solid mass moment of inertia  $I_{xx}$ .

### Empirical Roll Damping Data

Because of the additional part of the roll damping is significantly influenced by the viscosity of the fluid, it is not possible to calculate the total roll damping in a pure theoretical way. Besides this, experiments showed also a non-linear (about quadratic) behaviour of the additional parts of the roll damping.

As mentioned before, the total non-linear roll damping term in the left hand side of the equation of motion for roll can be expressed as:

$$[b_{44} + b_{44a}^{(1)}] \cdot \dot{\varphi} + b_{44a}^{(2)} \cdot |\dot{\varphi}| \cdot \dot{\varphi}$$

For the estimation of the additional parts of the roll damping, use has been made of work published by Ikeda, Himeno and Tanaka. Their empiric method is called here the "Ikeda Method".

At zero forward speed, this Ikeda method estimates the following components of the additional roll damping coefficient of a ship:

$$\begin{aligned} b_{44a}^{(1)} &= 0 \\ b_{44a}^{(2)} &= b_{44f}^{(2)} + b_{44e}^{(2)} + b_{44k}^{(2)} \end{aligned}$$

with:

- $b_{44f}^{(2)}$  : non-linear friction damping
- $b_{44e}^{(2)}$  : non-linear eddy damping
- $b_{44k}^{(2)}$  : non-linear bilge keel damping

Ikeda, Himeno and Tanaka claim fairly good agreements between their prediction method and experimental results.

They conclude that the method can be used safely for ordinary ship forms. But for unusual ship forms, very full ship forms and ships with a large breadth to draught ratio the method should not be always sufficiently accurate.

Even a few cross sections with a large breadth to draught ratio can result in an extremely large eddy making component of the roll damping. So, always judge the components of the damping.

### Comparitive Simulations

To check the calculation routines for the time domain, as used in in the time domain program SEAWAY-T and its pre-processing program SEAWAY-D, comparisons have been made with the results of the frequency domain program SEAWAY for a number of ship types.

An example of the results of these validations is given here for the S-175 containership design in deep water, with dimensions as tabled below.

Length between perp., $L_{pp}$	175.000 m
Breadth, $B$	25.400 m
Midship draught, $T_m$	9.500 m
Trim by stern, $t$	0.000 m
Block coefficient, $C_B$	0.572
Metacentric height, $GM$	0.980 m
Longitudinal CoB, $L_{cb}/L_{pp}$	-1.420 %
Radius of inertia, $k_{xx}/B$	0.328
Radius of inertia, $k_{yy}/L_{pp}$	0.240
Radius of inertia, $k_{zz}/L_{pp}$	0.240
Height of bilge keels, $h_k$	0.450 m
Length of bilge keels, $L_k$	43.750 m

The body plan of this container ship design is given in the figure below.

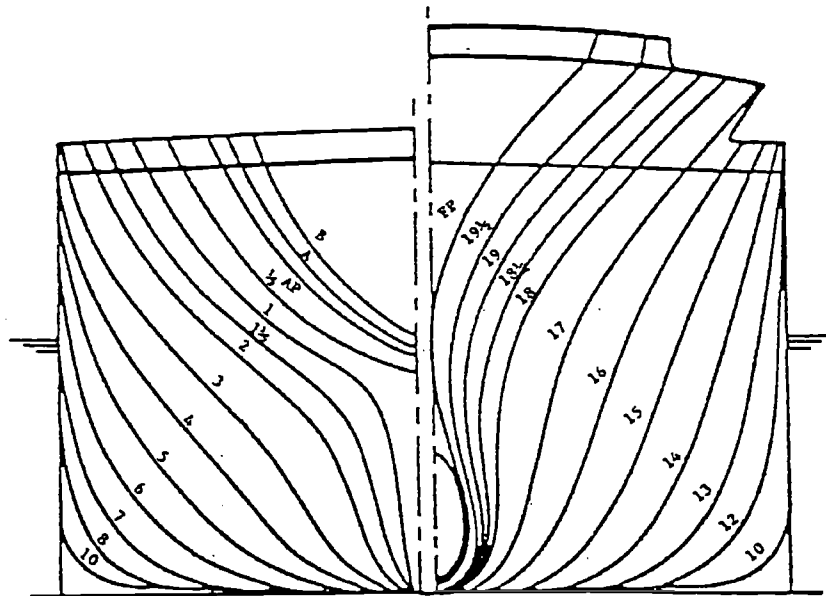


Figure 6-3-H. Body Plan of S-175 Container Ship Design

This S-175 containership design had been subject of several computer and experimental studies, coordinated by the Shipbuilding Research Association of Japan and the Seakeeping Committee of the International Towing Tank Conference.

Wave freq. (rad/s)	Motions calculated by SEAWAY and SEAWAY-T respectively						PROGRAM
	$x_a$ (m)	$y_a$ (m)	$z_a$ (m)	$\varphi_a$ (deg)	$\theta_a$ (deg)	$\psi_a$ (deg)	
0.2	0.843	0.485	0.992	0.173	0.204	0.088	SEAWAY
	0.82	0.48	0.99	0.18	0.20	0.08	SEAWAY-T
0.3	0.795	0.451	0.956	1.128	0.456	0.195	SEAWAY
	0.78	0.45	0.95	1.13	0.46	0.20	SEAWAY-T
0.4	0.700	0.397	0.860	1.692	0.772	0.282	SEAWAY
	0.69	0.40	0.86	1.71	0.77	0.28	SEAWAY-T
0.5	0.546	0.293	0.671	0.998	1.071	0.357	SEAWAY
	0.54	0.30	0.67	1.01	1.07	0.35	SEAWAY-T
0.6	0.344	0.161	0.385	0.837	1.191	0.338	SEAWAY
	0.34	0.16	0.38	0.85	1.20	0.34	SEAWAY-T
0.7	0.140	0.056	0.173	0.558	0.937	0.211	SEAWAY
	0.14	0.06	0.17	0.56	0.94	0.21	SEAWAY-T
0.8	0.005	0.057	0.395	0.150	0.309	0.039	SEAWAY
	0.00	0.06	0.40	0.15	0.31	0.04	SEAWAY-T
0.9	0.038	0.035	0.385	0.376	0.392	0.069	SEAWAY
	0.04	0.04	0.39	0.38	0.39	0.07	SEAWAY-T
1.0	0.016	0.014	0.101	0.408	0.299	0.046	SEAWAY
	0.02	0.01	0.10	0.41	0.30	0.05	SEAWAY-T
1.1	0.009	0.010	0.027	0.137	0.031	0.017	SEAWAY
	0.01	0.01	0.03	0.14	0.03	0.02	SEAWAY-T
1.2	0.005	0.005	0.002	0.064	0.052	0.014	SEAWAY
	0.01	0.01	0.00	0.06	0.05	0.01	SEAWAY-T
1.3	0.004	0.002	0.010	0.031	0.023	0.010	SEAWAY
	0.00	0.00	0.01	0.03	0.02	0.01	SEAWAY-T
1.4	0.004	0.002	0.005	0.030	0.015	0.003	SEAWAY
	0.00	0.00	0.00	0.03	0.02	0.00	SEAWAY-T
1.5	0.002	0.001	0.003	0.016	0.016	0.003	SEAWAY
	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.00	SEAWAY-T

Table 6-3-I. Comparison of Calculated Motions in the Frequency Domain (SEAWAY) and in the Time Domain (SEAWAY-T) of the S-175 Container Ship Design in Regular Bow Waves ( $\mu=150^\circ$ ) with an Amplitude of 1.0 Meter at Zero Forward Ship Speed.



For this ship, the motions have been calculated in the frequency domain and in the time domain at zero forward ship speed.

Additional data, used during the time domain simulations, are:

- maximum frequency of damping curves  $\Omega = 5.00$  rad/s
- frequency interval  $\Delta\omega = 0.05$  rad/s
- maximum time in retardation functions  $\Gamma_{i,j} = 50.00$  s
- time interval  $\Delta t = 0.25$  s

The potential coefficients and the frequency characteristics of the wave loads at zero forward speed, calculated by program SEAWAY-D, have been input in program SEAWAY-T and the calculations have been carried out for a regular wave amplitude of 1.0 meter.

Extra attention has been paid here to the roll motions. In both calculations, the viscous roll damping has been estimated with the Ikeda method. In the frequency domain, the results are linearised for this wave amplitude of 1.0 meter. Because of the relatively small roll damping at zero forward speed, in the natural frequency region the initial conditions of the wave loads will occur unstable roll motions in the time domain. Then, a long simulation time is required to obtain stable motions.

The agreements between the amplitudes and the phase lags of the six basic motions, calculated both in the frequency domain and in the time domain, are remarkably good. Some comparative results of the six motion amplitudes of the S-175 containership design are given in table 6-3-I.

Comparisons for a rectangular barge (100 x 20 x 4 meter), with a well (25 x 14 meter) fore and aft, are given in the table below for the natural roll frequency region. The experimental roll damping data are input here.

Wave freq. (rad/s)	Motions calculated by SEAWAY and SEAWAY-T respectively						PROGRAM
	$x_a$ (m)	$y_a$ (m)	$z_a$ (m)	$\varphi_a$ (deg)	$\theta_a$ (deg)	$\psi_a$ (deg)	
0.3	0.818	0.451	0.980	0.501	0.449	0.223	SEAWAY
	0.81	0.45	0.97	0.50	0.45	0.22	SEAWAY-T
0.4	0.767	0.451	0.937	1.644	0.774	0.375	SEAWAY
	0.76	0.45	0.93	1.65	0.77	0.38	SEAWAY-T
0.5	0.679	0.415	0.846	0.665	1.131	0.530	SEAWAY
	0.67	0.42	0.84	0.67	1.13	0.53	SEAWAY-T

Table 6-3-II. Comparison of Calculated Motions in the Frequency Domain (SEAWAY) and in the Time Domain (SEAWAY-T) of a Rectangular Barge with a Well Fore and Aft in Regular Bow Waves ( $\mu=150^\circ$ ) with an Amplitude of 1.0 Meter at Zero Forward Ship Speed.

Based on these and a lot of other comparisons between the time domain and the frequency domain approaches for linear systems, it may be concluded that the programs SEAWAY-D/SEAWAY-T have an equal accuracy as the frequency domain predictions of these linear motions by the parent program SEAWAY.